

DM

Um Estudo Sobre Curvas, Superfícies e Suas Parametrizações

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Esmeralda Pereira de Faria

MESTRADO EM MATEMÁTICA



UNIVERSIDADE da MADEIRA

A Nossa Universidade

www.uma.pt

janeiro | 2017

Um Estudo Sobre Curvas, Superfícies e Suas Parametrizações

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Esmeralda Pereira de Faria

MESTRADO EM MATEMÁTICA

ORIENTADOR

Luís Elias Ribeiro Rodrigues

Um Estudo Sobre Curvas, Superfícies e Suas Parametrizações

Esmeralda Pereira de Faria

Janeiro 2017

Agradecimentos

Agradeço a Deus,

Ao orientador, Professor Doutor Luís Elias Ribeiro Rodrigues, agradeço a sua ajuda, conselhos e apoio constante com o seu conhecimento, e permanente disponibilidade. Obrigada pelos seus ensinamentos e pela oportunidade em mostrar-me o ramo da Matemática. Esta aprendizagem tem sido gratificante no sentido em que permitiu-me adquirir novos conhecimentos, complementando-se à minha licenciatura de Economia.

Ao Tony Ascensão pelo seu carinho e persistência incrível de acreditar sempre em mim. A tua motivação impulsionou-me a fazer mais e melhor. Obrigada pelo apoio nos dias mais difíceis, crucial para restaurar a minha fé e coragem.

À Sara Freitas pela sua amizade, paciência e apoio, bem como sempre mostrou-me o melhor de tudo.

À minha mãe Manuela Gouveia, e à Senhora Felicidade Abreu pela constante paciência e carinho que sempre demonstraram.

Ao meu pai Arnaldo Faria, por me ter ensinado a ser quem sou, pela sua exigência.

Aos meus irmãos, Isabel pelo magníficos conselhos e apoio que proporcionaste nesta etapa, e Rui António por fazeres-me sempre rir e alegrares os meus dias.

À Tatiana Temtem pela sua amizade, e perseverança.

À Maribel Santos pela sua amizade, esperança e garra com que me propiciaste.

Ao Pepito pela companhia e alegria. Ao Coqui pela forma como me desafia sempre.

Aos professores e colegas.

Às senhoras bibliotecárias de Ribeira Brava.

Por último, gostaria de agradecer a todos os que contribuíram direta ou indiretamente ao longo desta caminhada.

Resumo

Este trabalho foi desenvolvido com o intuito de estudar as propriedades locais de curvas e superfícies no plano e espaço euclidianos, expressando-as parametricamente. Procurou-se descrever a forma da curva através da curvatura e da torção. Seguidamente, foram analisados vários métodos de obter novas curvas através de uma curva inicial, nomeadamente a evoluta, involuta, pedal, cissóide e conchóide. No que respeita a uma superfície, a sua forma é descrita através das curvaturas gaussiana e média. Adicionalmente, sobre as curvas contidas em superfícies, a sua forma é descrita através das curvaturas normal, geodésica e principal. As geodésicas são abordadas como sendo curvas contidas numa superfície, apurando a menor distância entre dois pontos na superfície. Saliente-se ainda que, devido à dificuldade e escassez de visualização de tais parametrizações na literatura, pretendeu-se ao longo do trabalho exemplificar graficamente cada caso.

Palavras-chave: Curvas, Curvatura, Equações de Frenet, Geodésica, Geometria Diferencial, Superfícies.

Abstract

This work was developed with the aim to study the local properties of curves and surfaces, in the euclidean space, through their parametrizations. We described the shape of a curve through its curvature and torsion. Next, we analysed several methods of obtaining new curves from an original curve, namely the evolute, involute, pedal, cissoid and conchoid of a curve. Concerning surfaces, its shape is described by Gaussian and mean curvatures. Additionally, concerning curves contained in surfaces, its shape is described through normal, geodesic and principal curvatures. Geodesics are approached as curves contained in a surface, minimizing the distance between two points on the surface. It should also be pointed out that due to the difficulty and scarcity of visualization of such parametrizations in the literature, it was intended throughout this work to exemplify each case graphically.

Key-words: Curves, Curvature, Differential Geometry, Frenet Equations, Geodesic, Surfaces.

Índice

Lista de Figuras	xi
Introdução	1
1 Curvas	3
1.1 Curvas regulares	6
1.1.1 Reparametrização	9
1.1.2 Comprimento de arco	12
1.1.3 Reparametrização pelo Comprimento de Arco	14
1.2 Curvatura e Torção	19
1.2.1 Curvatura	19
1.2.2 Equações de Frenet em Curvas Planas e a Curvatura com Sinal	23
1.2.3 Equações de Frenet em Curvas Espaciais e a Torção	28
1.2.4 Componentes Tangencial e Normal do Vetor Aceleração	36
2 Obtenção de Novas Curvas a Partir de Outras Curvas	39
2.1 Evoluta	39
2.1.1 Curvas Planas	39
2.1.2 Curvas Espaciais	43
2.2 Involuta	47
2.3 Pedal	51
2.4 Conchóide	53
2.5 Cissóide	55
2.5.1 Cissóide de uma reta	56
3 Superfícies	59
3.1 Superfície Parametrizada Regular	59
3.1.1 Superfície de Revolução	60
3.1.2 Superfície como Gráfico de uma Função de Duas Variáveis	62
3.1.3 Superfície Regrada	64
3.1.4 Mudança de Parâmetros	64
3.1.5 Plano Tangente e Vetor Normal	65
3.2 Primeira Forma Fundamental	67
3.2.1 Comprimento de uma Curva da Superfície	70
3.2.2 Área de Regiões em Superfície	70
3.2.3 Isometria entre Superfícies	71
3.3 Segunda Forma Fundamental	74
3.3.1 Curvaturas Normal e Geodésica da Curva da Superfície	76

3.3.2	Curvaturas Principais	80
3.3.3	Curvaturas Gaussiana e Média	82
4	Geodésicas	85
4.1	Equações Geodésicas	88
4.2	Curvas Geodésicas da Superfície de Revolução	95
	Conclusão	99
	Bibliografia	101
	Apêndice	103
	Apêndice A	104
	Apêndice B	107

Lista de Figuras

1.1	Curva Catenária	4
1.2	Curva com vértice	5
1.3	Curva com auto-interseção	5
1.4	Curva Hélice	6
1.5	Curva Viviani	6
1.6	Curva Circunferência	7
1.7	Curva com cúspide	7
1.8	Curva Tratriz	8
1.9	Curva Ciclóide	9
1.10	Curva Cúbica	11
1.11	Curva Lemniscata de Gerono	12
1.12	Curva Espiral Logarítmica	13
1.13	Reparametrização da Circunferência com $R = \{2; 0.5\}$	16
1.14	Reparametrização da Hélice com $R = \{2, 0.5\}$, respetivamente.	17
1.15	Curva Parábola	18
1.16	Curva Cúbica “Retorcida”	19
1.17	Taxa de variação do vetor tangente unitário.	20
1.18	Ângulo da curvatura com sinal.	24
1.19	Curvatura com sinal positiva e negativa, respetivamente.	24
1.20	Curvatura com sinal da Circunferência	26
1.21	Triedro de Frenet da Hélice	32
1.22	Curvatura e Torção da curva Vivviani	36
1.23	Componentes de aceleração sobre a Parábola	37
2.1	Círculo Osculador	40
2.2	Evoluta da Elipse	41
2.3	Evoluta da Ciclóide	42
2.4	Evoluta da Espiral Logarítmica	43
2.5	Evoluta de uma curva espacial.	43
2.6	Uma evoluta da Hélice	46
2.7	Centros de curvatura da Hélice	47
2.8	Involuta de uma curva regular	48
2.9	Involuta da Circunferência com $r = 2$	49
2.10	Involuta da Espiral Logarítmica	50
2.11	Uma involuta da Hélice	50
2.12	Curva Pedal	51
2.13	Curva Pedal da Circunferência	53

2.14	Curva Conchóide	53
2.15	Conchóide da Circunferência	55
2.16	Cissóide	55
2.17	Cissóide de uma reta	58
2.18	Cissóide de Diócles	58
3.1	Esfera	61
3.2	Cone Duplo	62
3.3	Hiperbolóide de uma Folha	62
3.4	Parabolóide	63
3.5	Helicóide	64
3.6	Plano tangente ao Parabolóide	66
3.7	Parabolóide Hiperbólico	69
3.8	Isometria do Cone com o Setor Circular	73
3.9	Catenóide	74
3.10	Curvaturas Normal e Geodésica.	77
3.11	Cilindro	81
3.12	Toro	84
4.1	Pré-geodésica do Parabolóide	88
4.2	Pré-geodésica da Esfera	93
4.3	Pré-geodésica da Helicóide	94
4.4	Geodésicas de uma superfície de revolução	97

Introdução

A Geometria Diferencial estuda a geometria com recurso ao cálculo. A sua origem provém da união do cálculo com a geometria, no qual é uma ciência aplicada, principalmente em questões originadas da cartografia. Posteriormente passou a ter utilidade em astronomia e engenharia.

Nesta dissertação vamos estudar as propriedades geométricas das curvas e superfícies contidas no Espaço Euclidiano, recorrendo às técnicas de cálculo diferencial e integral.

No gráfico de uma função é habitual considerar uma variável dependente e outra independente, isto é, $y = f(x)$ ou $x = h(y)$. No entanto, existem curvas em forma de oito ou espiral à volta de um ponto, podendo ser por vezes difícil ou impossível de descrevê-las através do gráfico de uma função. Uma forma de expressá-las é usar as curvas paramétricas, passando a definir as coordenadas de x e y em função da variável t , designada de parâmetro.

Nas superfícies também acontece o mesmo, por exemplo se queremos descrever a forma de um jarro, vemos que não conseguimos representá-la através de um gráfico de função de duas variáveis, isto é, $f(x, y)$. Então, uma ferramenta que permite descrevê-la é usar as superfícies paramétricas em função de dois parâmetros u e v .

As curvas e as superfícies serão exploradas e representadas graficamente com recurso ao Geogebra, um *software* livre de matemática dinâmica criado por Markus Hohenwarter, contendo geometria, álgebra e cálculo. Semelhantemente à maioria das representações gráficas, estes gráficos são construídos pelo pacotes TikZ e PGFplots inseridos no sistema de tipografia LaTeX.

No primeiro capítulo será analisada a geometria local das curvas no plano e no espaço euclidiano, ou seja, será estudado o seu comportamento na vizinhança de um ponto. Adicionalmente serão descritos os conceitos de curva parametrizada, reparametrização pelo comprimento de arco, e o principal foco desta secção, as Equações de Frenet, no qual serão abordadas a curvatura e a torção.

No segundo capítulo serão ilustrados vários métodos para adquirir novas curvas através de uma curva inicial, como a evoluta, a involuta, a conchóide e a cissóide.

No terceiro capítulo é estudada a geometria local da superfície, nomeadamente o seu comportamento na vizinhança de um ponto, no qual serão abordadas as propriedades geométricas referentes à primeira e à segunda forma fundamental. Na primeira forma fundamental são referidos o comprimento da curva contida na superfície, a área de regiões e a isometria entre as superfícies. Enquanto que, na segunda forma fundamental são referidas a curvatura normal, geodésica, principais, gaussiana e média.

Finalmente, no quarto capítulo são abordadas as curvas geodésicas e pré-geodésicas, as equações geodésicas e as geodésicas da superfície de revolução. Salienta-se ainda que, em cada capítulo pretendeu-se exemplificar os conceitos referidos em cada caso.

Capítulo 1

Curvas

Uma curva é considerada como um lugar geométrico, ou seja, um conjunto de pontos que partilham uma determinada propriedade, quer estejam no plano ou no espaço. Uma curva também poderá ser considerada como um percurso percorrido por uma partícula em movimento, cujas coordenadas deverão ser função de um parâmetro que representa, geralmente, o tempo.

A segunda definição é a mais adequada, a qual, permite usar de forma mais rápida, as técnicas de cálculo diferencial e integral, para a descrição do comportamento geométrico da curva.

Definição 1.1 (Curva parametrizada) Chamamos curva parametrizada a uma função contínua,

$$\begin{aligned}\gamma : I &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)),\end{aligned}$$

onde $I \subseteq \mathbb{R}$ é um intervalo, as funções reais $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ são denominadas por funções coordenadas, e a variável t designada por parâmetro de γ . À função γ chamamos parametrização.

Observação 1.2 Uma curva γ é contínua num ponto $t_0 \in I$, se e só se, todas as funções coordenadas $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ são contínuas em t_0 .

Definição 1.3 (Traço de uma curva parametrizada) Dada uma curva parametrizada $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$. O conjunto imagem $Im(\gamma) = \{\gamma(t) \in \mathbb{R}^n : t \in I\}$ é chamado traço de γ .

Definição 1.4 (Curva parametrizada fechada) Uma curva parametrizada γ é fechada, se γ é definida num intervalo fechado $I = [a, b]$, em que $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Definição 1.5 (Curva parametrizada simples) Uma curva parametrizada γ é simples, se γ for injetiva em I , isto é, se $t_1 \neq t_2 \Rightarrow f(t_1) \neq f(t_2)$, $\exists t_1, t_2 \in I$, excepto se o intervalo I for fechado $[a, b]$, o qual admite-se $f(a) = f(b)$. Quando não é simples, dizemos que γ tem auto-interseção.

Definição 1.6 (Curva parametrizada diferenciável) Uma curva parametrizada $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é diferenciável em $t \in I$ se, e só se, as funções coordenadas $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ são diferenciáveis em t .

Definição 1.7 (Vetor tangente) Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva parametrizada diferenciável. O vetor tangente de γ em $t \in I$ é definido por

$$\begin{aligned} \gamma' : I &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto (f_1'(t), f_2'(t), \dots, f_n'(t)). \end{aligned}$$

A velocidade escalar de γ em $t \in I$ é a norma do vetor tangente $\gamma'(t)$ e tem-se

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{(f_1'(t))^2 + (f_2'(t))^2 + \dots + (f_n'(t))^2}.$$

Definição 1.8 (Vetor aceleração) O vetor aceleração de γ em $t \in I$ é a primeira derivada do vetor tangente de γ e tem-se

$$\begin{aligned} \gamma'' : I &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto (f_1''(t), f_2''(t), \dots, f_n''(t)). \end{aligned}$$

Exemplo 1.9 A catenária ¹ definida por

$$\begin{aligned} \gamma :]-2, 2[&\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (t, \cosh(t)) \end{aligned}$$

é uma curva parametrizada diferenciável e simples, como apresenta a Figura 1.1.

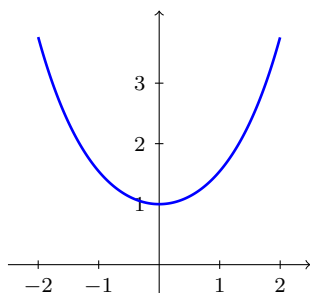


Figura 1.1: Curva Catenária

Exemplo 1.10 A curva com vértice definida por

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (t, |t|) \end{aligned}$$

é uma curva parametrizada simples não diferenciável, dado que a segunda coordenada de γ não é diferenciável em $t = 0$, como apresenta a Figura 1.2. Porém, a curva parametrizada é diferenciável, se em qualquer intervalo I excluirmos $t = 0$.

¹A catenária (palavra originária do latim *catena*, que significa corrente) descreve a forma de um cabo flexível com densidade uniforme, pendurado entre dois pontos. Galileu foi o primeiro a investigá-la e confundiu-a com uma parábola [5], [8], [24].

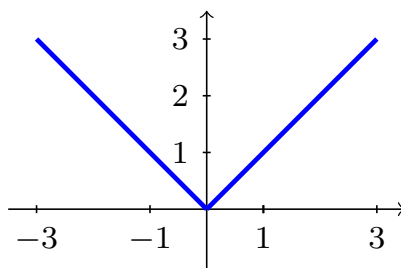


Figura 1.2: Curva com vértice

Exemplo 1.11 A curva com auto-interseção definida por

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (t^3 - 4t, t^2 - 4) \end{aligned}$$

é uma curva parametrizada diferenciável. No entanto, não é considerada fechada nem simples, dado que $\gamma(-2) = \gamma(2) = (0, 0)$ é um ponto de auto-interseção, como apresenta a Figura 1.3.

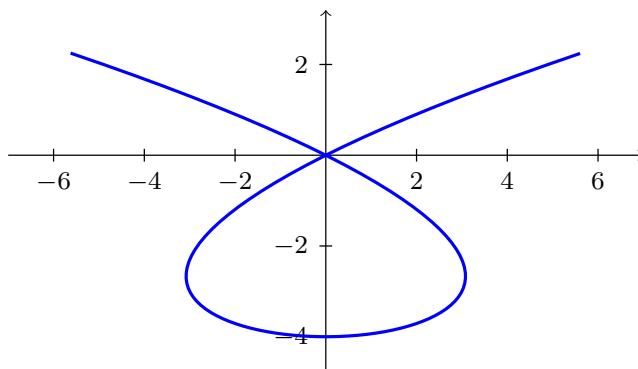


Figura 1.3: Curva com auto-interseção

Exemplo 1.12 A hélice circular com $a, b \neq 0$ definida por

$$\begin{aligned} \gamma :]0, 4\pi[&\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto (a \cos(2\pi t), a \sin(2\pi t), bt) \end{aligned}$$

é uma curva parametrizada diferenciável e simples. Facilmente se mostra que esta curva está contida no cilindro de equação $x^2 + y^2 = a^2$. Na Figura 1.4, representamos esta curva assim como o respetivo cilindro, com $a = b = 1$. À medida que o parâmetro t aumenta, o ponto $\gamma(t)$ da hélice descreve um movimento de rotação em torno do eixo Oz e, ao mesmo tempo, a curva sobe b unidades, no qual $|a|$ e $|b|$ são chamados de raio e passo da hélice circular, respetivamente.

Verifica-se que a projeção ortogonal do traço de γ sobre o plano $z = 0$ é uma circunferência.

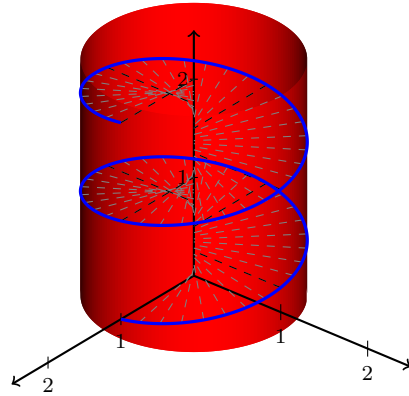


Figura 1.4: Curva Hélice

Exemplo 1.13 A curva Viviani definida por

$$\begin{aligned} \gamma :]0, 2\pi[&\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto (\sin(t) \cos(t), \sin^2(t), \cos(t)), \end{aligned}$$

é obtida através de interseção da esfera com equação $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, e do cilindro com equação $x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = (\frac{1}{2})^2$. A curva parametrizada é diferenciável e não simples, dado que $f(\frac{\pi}{2}) = f(\frac{3\pi}{2}) = (0, 1, 0)$ é um ponto de auto-interseção, como apresenta a Figura 1.5.

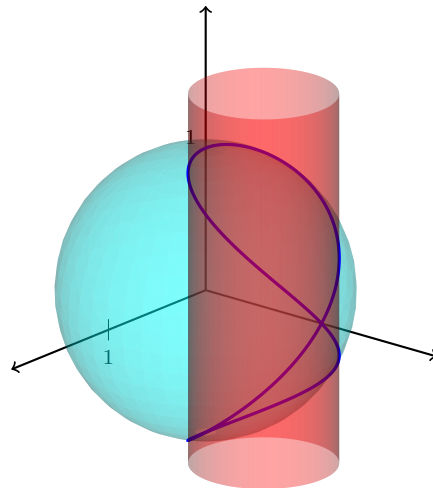


Figura 1.5: Curva Viviani

1.1 Curvas regulares

Pretende-se que uma curva parametrizada $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ possua uma reta tangente em $\gamma(t)$, para todo $t \in I$. Como a existência de diferenciabilidade não é condição suficiente para garantir um vetor tangente não nulo, é introduzida uma condição adicional.

Definição 1.14 (Curva Regular) Uma curva parametrizada diferenciável $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é regular, se $\gamma'(t) \neq \vec{0}$, ou, se $\|\gamma'(t)\| \neq 0, \forall t \in I$, onde as funções $f_1'(t), f_2'(t), \dots, f_n'(t)$ são contínuas, isto é, $\gamma(t)$ é de classe C^1 .

Definição 1.15 (Reta Tangente) Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva parametrizada regular. A reta tangente a γ em $t_0 \in I$ é a reta que passa por $\gamma(t_0)$ na direção de $\gamma'(t_0)$, isto é,

$$r(\lambda) = \gamma(t_0) + \lambda\gamma'(t_0), \lambda \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 1.16 A circunferência unitária centrada na origem definida por

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (\cos(t), \sin(t)), \end{aligned}$$

onde o parâmetro t representa o ângulo que $\gamma(t)$ faz com o eixo Ox . Verifica-se que é uma curva parametrizada diferenciável simples e regular para $\forall t \in I$, pois temos $\gamma'(t) = (-\sin(t), \cos(t)) \neq (0, 0)$, como apresenta a Figura 1.6.

Escolhendo uma reta tangente que passa no ponto $\gamma\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ na direção de $\gamma'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, então temos $r(\lambda) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\lambda, \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\lambda\right), \lambda \in]-1.5, 1.5[$.

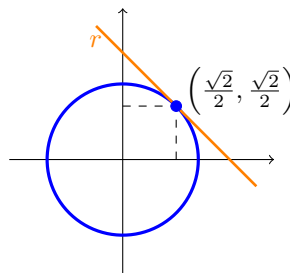


Figura 1.6: Curva Circunferência

Exemplo 1.17 A curva com cúspide definida por

$$\begin{aligned} \gamma :]-2, 2[&\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (t^3, t^2) \end{aligned}$$

é uma curva parametrizada diferenciável e simples, como apresenta a Figura 1.7.

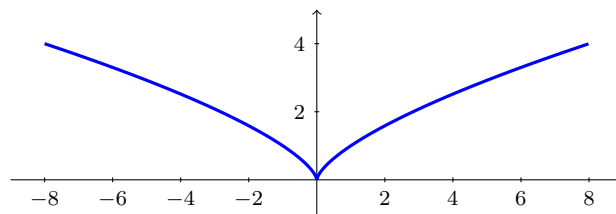


Figura 1.7: Curva com cúspide

Veamos se ela é regular. O vetor tangente e a velocidade escalar de γ são obtidos por $\gamma'(t) = (3t^2, 2t)$ e $\|\gamma'(t)\| = |t|\sqrt{9t^2 + 4}$, logo em $t = 0$ verifica-se $\gamma'(0) = (0, 0)$ e $\|\gamma'(0)\| = 0$. Portanto, a curva não é regular para $\forall t \in I$.

Exemplo 1.18 A tratriz ² definida por

$$\begin{aligned} \gamma :]-\pi, \pi[&\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (a \sin(t), a \ln(\tan(t/2)) + a \cos(t)) \end{aligned}$$

é uma curva parametrizada diferenciável e simples, como apresenta a Figura 1.8 com $a = 1$.

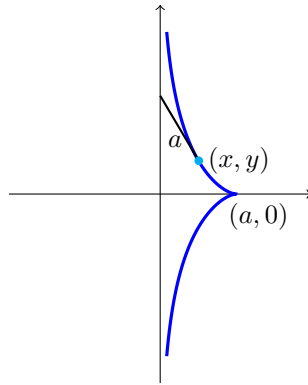


Figura 1.8: Curva Tratriz

Vejamos se ela é regular. Derivando-a, obtendo

$$\gamma'(t) = \left(a \cos(t), a \left(-\sin(t) + \frac{(1/2) \sec^2(t/2)}{\tan(t/2)} \right) \right),$$

conclui-se que a tratriz não é regular para $\forall t \in I$, dado que $\gamma'(\frac{\pi}{2}) = (0, 0)$.

No entanto, quando a primeira derivada de alguns pontos é nula (representando os vértices), é designada como curva regular por partes.

Definição 1.19 (Curva regular por partes) *Uma curva parametrizada $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ com $\gamma'(t) \neq 0$, excepto para um número finito de parâmetros, $t_1, t_2, \dots, t_n \in I$, é chamada regular por partes. Estes pontos com $\gamma'(t) = 0$ são chamados pontos singulares da curva.*

²Tratriz descreve a trajetória do ponto $(a, 0)$ arrastado por outro ponto que se move ao longo do eixo Oy . Tendo como propriedade que o comprimento de qualquer segmento tangente à curva desde o ponto de tangência até à assíntota vertical $x = 0$, seja constante e igual a a . Em 1662, Huygens foi o primeiro a estudar e nomear, sendo posteriormente estudada por Jean Bernoulli, Liouville, e Beltrami [5], [24].

Exemplo 1.20 A cicloide ³ definida por

$$\begin{aligned} \gamma : \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \right[&\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (R(t - \sin(t)), R(1 - \cos(t))), \end{aligned}$$

a qual descreve a trajetória de um ponto fixo A da circunferência com raio $R > 0$. Consoante o parâmetro t aumenta, a circunferência rola, sem deslizar, ao longo do eixo Ox , como apresenta a Figura 1.9 com $R = 1$.

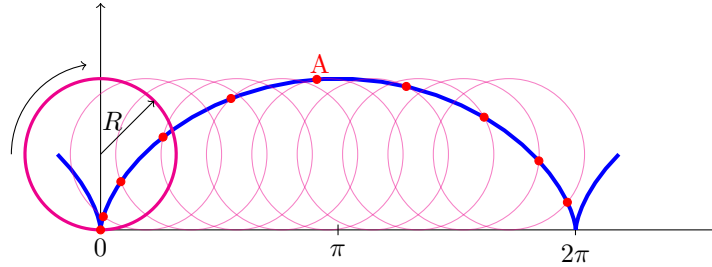


Figura 1.9: Curva Cicloide

Verifica-se que é uma curva parametrizada diferenciável e simples. Vejamos se ela é regular. Quando $R = 1$ temos que

$$\gamma'(t) = (1 - \cos(t), \sin(t)),$$

por conseguinte, se existir $\gamma'(t) = (0, 0)$, obtemos os pontos singulares através do sistema de equações:

$$\gamma'(t) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \cos(t) = 0 \\ \sin(t) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Portanto, a curva é regular por partes, pois quando $t = 2k\pi$ temos dois pontos singulares $\gamma(0)$ e $\gamma(2\pi)$.

Nas secções seguintes, de forma a abreviar a curva parametrizada diferenciável regular, consideremos uma curva regular.

1.1.1 Reparametrização

Diferentes parametrizações podem representar o mesmo traço de uma curva.

Definição 1.21 (Reparametrização) *Sejam I e J intervalos de \mathbb{R} , $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva regular e $\alpha : J \rightarrow I$ um difeomorfismo de classe C^1 . Então, a função composta*

$$\begin{aligned} \Gamma : J &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto (\gamma \circ \alpha)(t) = \gamma(\alpha(t)) \end{aligned}$$

³ Cicloide foi estudada e batizada por Galileu, em 1599, no qual tentou determinar a sua área. No entanto, foram Torricelli, Fermat e Descartes que conseguiram determiná-la, e Roverbal e Well que descobriram o seu comprimento de arco. Cristian Huygens provou que ao inverter o arco da cicloide temos uma propriedade tautócrona. Em 1696, Jean Bernoulli descobriu que o arco invertido da respetiva curva tem como propriedade braquistócrona [8].

é uma curva regular com o mesmo traço de γ , e é chamada a reparametrização de γ por α . A função α é denominada como mudança de parâmetro. Neste caso, dizemos que as duas curvas regulares γ e Γ são equivalentes.

Para definir esta relação de equivalência, primeiramente é necessário entender esta equivalência como relação reflexiva, simétrica e transitiva.

Proposição 1.22 *A relação R acima definida é uma relação de equivalência no conjunto das curvas regulares em \mathbb{R}^n .*

Demonstração: Para mostrar que R é uma relação de equivalência, basta verificar que R tem as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva.

Sejam $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\delta : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\Gamma \rightarrow \mathbb{R}^n$ curvas regulares:

1. Reflexiva: $\gamma R \gamma$.

Se considerar a função $\alpha : I \rightarrow I$ como sendo a identidade, logo $\gamma = \delta \circ \alpha$;

2. Simétrica: $\gamma R \delta \Rightarrow \delta R \gamma$.

Se $\gamma R \delta$, então existe um difeomorfismo $\alpha : J \rightarrow I$, $t \mapsto \alpha(t)$, tal que $\gamma = \delta \circ \alpha$; considerando o difeomorfismo $\alpha^{-1} : I \rightarrow J$, $s \mapsto \alpha^{-1}(s)$, temos $\delta = \delta \circ \alpha \circ \alpha^{-1} = \gamma \circ \alpha^{-1}$, logo $\delta R \gamma$;

3. Transitiva: $\gamma R \delta \wedge \delta R \Gamma \Rightarrow \gamma R \Gamma$.

Então existe um difeomorfismo $\alpha : J \rightarrow I$, $t \mapsto \alpha(t)$, tal que $\gamma = \delta \circ \alpha$; E, se δ é equivalente a Γ , então existe um difeomorfismo $\theta : J \rightarrow H$, $s \mapsto \theta(s)$, temos $\delta = \Gamma \circ \theta$;

Para mostrar que γ é equivalente a Γ , consideremos o difeomorfismo $\varphi = \theta \circ \alpha : I \rightarrow H$, $t \mapsto \varphi(t)$, temos $\gamma = \delta \circ \alpha = (\Gamma \circ \theta) \circ \alpha = \Gamma \circ (\theta \circ \alpha) = \Gamma \circ \varphi$. Logo $\gamma R \Gamma$.

□

Definição 1.23 *Uma curva regular em \mathbb{R}^n é uma classe de equivalência de parametrizações regulares.*

Deste modo, a função α é injetiva para $\forall t \in J$, sendo então estritamente monótona. Portanto, quando a função α é estritamente crescente, isto é, $\alpha'(t) > 0$, $\forall t \in J$, diz-nos que γ e Γ têm a mesma orientação, ou seja, α preserva a orientação.

Contudo, se a função α é estritamente decrescente, isto é, $\alpha'(t) < 0$, $\forall t \in I$, diz-nos que γ e Γ não têm a mesma orientação, ou seja, α inverte a orientação.

Observa-se que a orientação é uma propriedade da parametrização, e não do traço da curva.

Exemplo 1.24 Sejam as parametrizações $\gamma_1 : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma_2 : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $\gamma_3 : [0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definidas por

$$\gamma_1(t) = (\cos(t), \sin(t)), \quad \gamma_2(t) = (\cos(2t), \sin(2t)), \quad \gamma_3(t) = (\cos(t), \sin(t)).$$

Estas três curvas apresentam o mesmo traço, sendo a circunferência unitária centrada na origem, como apresenta a Figura 1.6. Reparametrizando a curva $\gamma_1(t)$ por $\alpha(t) = 2t$, obtemos

$$\Gamma(t) = \gamma_1(\alpha(t)) = \gamma_1(2t) = (\cos(2t), \sin(2t)) = \gamma_2(t), \quad t \in [0, \pi].$$

Como a função α é um difeomorfismo, as curvas γ_1 e γ_2 são equivalentes, dado que $\alpha'(t) = 2 \neq 0$. Salienta-se ainda que as três parametrizações são fechadas, e que apenas as curvas γ_1 e γ_2 são simples, enquanto que a curva γ_3 não é simples, pelo facto de percorrer duas vezes sobre o traço da curva.

A velocidade com que se percorre o traço da curva γ_2 representa o dobro da velocidade de γ_1 . Por outro lado, as curvas γ_1 e γ_3 não são equivalentes, apesar de ambas terem o mesmo traço. No qual γ_1 é curva simples, e γ_3 não é.

Exemplo 1.25 A curva cúbica definida por

$$\begin{aligned} \gamma :]-1, 1[&\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (t, \sqrt[3]{t}) \end{aligned}$$

é uma curva parametrizada simples não diferenciável, dado que a derivada da segunda função coordenada no parâmetro $t = 0$ é

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{t} - 0}{t - 0} = \lim_{t \rightarrow 0} \sqrt[3]{\frac{1}{t^2}} = +\infty.$$

Apesar das funções coordenadas serem contínuas para $\forall t \in I$. Note-se que o traço desta curva possui uma reta tangente vertical no ponto $(0, 0)$, como apresenta a Figura 1.10.

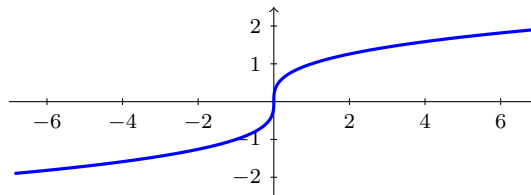


Figura 1.10: Curva Cúbica

Também é possível representar o traço da cúbica por outra curva parametrizada, escolhendo uma curva dada por $\gamma_1 = (t^3, t)$, $t \in]-1, 1[$. Neste caso, a curva é uma parametrização diferenciável e regular para $\forall t \in I$, pois $\gamma_1'(t) = (3t^2, 1) \neq 0$. Contudo, as parametrizações γ e γ_1 não podem ser equivalentes, dado que γ não é regular e γ_1 é regular. Constatamos que γ_1 é uma reparametrização de γ por $\alpha(t) = t^3$, pois

$$\gamma_1(t) = \gamma(\alpha(t)) = \gamma(t^3) = (t^3, t), \quad t \in]-1, 1[.$$

A função α é contínua, bijetiva e a sua inversa é contínua, ou seja, é um homeomorfismo. No entanto, esta função não é um difeomorfismo em $t = 0$ porque a sua inversa não é diferenciável em $t = 0$.

Exemplo 1.26 Seja a lemniscata de Geronno definida por

$$\begin{aligned} \gamma : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \left(\cos(t), \frac{1}{2} \sin(2t)\right) \end{aligned}$$

é uma curva parametrizada diferenciável, cujo traço tem a forma de um oito, como apresenta a Figura 1.11. Esta parametrização possui auto-interseção na origem quando $t = \pm \frac{\pi}{2}$.

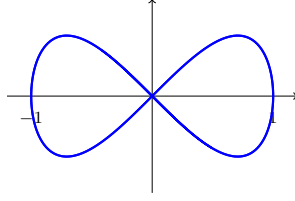


Figura 1.11: Curva Lemniscata de Geronno

Determinemos uma curva parametrizada γ_1 que seja equivalente à γ . Consideremos um difeomorfismo $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ de classe C^1 dado por $\alpha(t) = \frac{3\pi}{2} - t$. A reparametrização da curva γ por α dá-nos

$$\begin{aligned}\gamma_1(t) &= \gamma(\alpha(t)) = \gamma\left(\frac{3\pi}{2} - t\right) = \left(\cos\left(\frac{3\pi}{2} - t\right), \frac{1}{2} \sin\left(2\left(\frac{3\pi}{2} - t\right)\right)\right) \\ &= \left(-\sin t, \frac{1}{2} \sin(2t)\right), t \in [0, 2\pi].\end{aligned}$$

Portanto, as duas curvas γ e γ_1 são parametrizações regulares equivalentes, mas não mantêm a orientação, pois $\alpha'(t) = -1 < 0$.

1.1.2 Comprimento de arco

Definição 1.27 (Comprimento de arco) *Seja $L : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o comprimento de arco de uma curva regular $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 definido como o integral da velocidade escalar de γ com $[a, b] = I$, tem-se que*

$$L = \int_a^b \|\gamma'(\sigma)\| d\sigma.$$

Definição 1.28 (Função comprimento de arco) *Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva parametrizada regular de classe C^1 . A função de comprimento de arco de γ é a distância percorrida a partir de t_0 até t , onde $t, t_0 \in I$. Então, a função $s : I \rightarrow \mathbb{R}$ é definido por*

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\gamma'(\sigma)\| d\sigma.$$

Proposição 1.29 *O comprimento de uma curva não depende da parametrização.*

Demonstração: Ver Rodney Biezuner [2], página 7. □

Da proposição acima constata-se que o comprimento de arco é o mesmo quando é efetuada uma mudança de parâmetro.

Definição 1.30 (Curva parametrizada pelo comprimento de arco) *Diz-se que uma curva regular γ está parametrizada pelo comprimento de arco se, para todo $t \in I$ temos $\|\gamma'(t)\| = 1$, ou seja, para cada $t_0, t_1 \in I$, $t_0 < t_1$, o comprimento de arco de γ desde t_0 até t_1 é dado por*

$$\int_{t_0}^{t_1} \|\gamma'(\sigma)\| d\sigma = t_1 - t_0.$$

Exemplo 1.31 A espiral logarítmica ⁴ com $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ definida por

$$\begin{aligned} \gamma :]0, 4\pi[&\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (ae^{bt} \cos(t), ae^{bt} \sin(t)) \end{aligned}$$

é uma curva parametrizada diferenciável e simples, como apresenta a Figura 1.12 com $a = 5$ e $b = 0.2$.

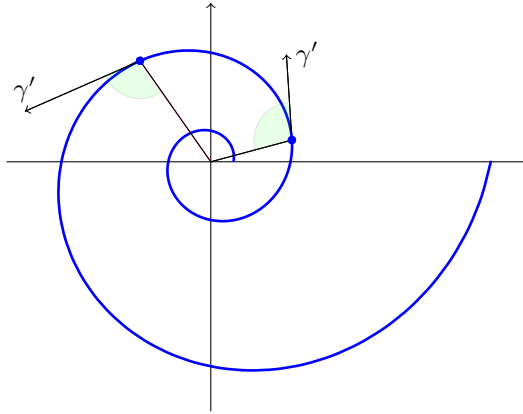


Figura 1.12: Curva Espiral Logarítmica

Vejamos se ela está parametrizada pelo comprimento de arco. Temos

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= (ae^{bt}(b \cos(t) - \sin(t)), ae^{bt}(b \sin(t) + \cos(t))), \\ \|\gamma'(t)\| &= \sqrt{(ae^{bt}(b \cos(t) - \sin(t)))^2 + (ae^{bt}(b \sin(t) + \cos(t)))^2} \\ &= |ae^{bt}| \sqrt{b^2 \cos^2(t) - 2b \cos(t) \sin(t) + \sin^2(t) + b^2 \sin^2(t) + 2b \cos(t) \sin(t) + \cos^2(t)} \\ &= |a|e^{bt} \sqrt{b^2 + 1} \neq 0, \\ L &= \int_0^{4\pi} |a|e^{b\sigma} \sqrt{b^2 + 1} d\sigma = \frac{|a|\sqrt{b^2 + 1}}{b} \int_0^{4\pi} be^{b\sigma} d\sigma = \frac{|a|\sqrt{b^2 + 1}}{b} (e^{b4\pi} - 1). \end{aligned}$$

Portanto, a espiral logarítmica é uma curva regular não parametrizada pelo comprimento de arco para $\forall t \in]0, 4\pi[$.

Exemplo 1.32 Verificar se a ciclóide (Exemplo 1.20) está parametrizada pelo comprimento de arco. Tendo

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= (1 - \cos(t), \sin(t)), \\ \|\gamma'(t)\| &= \sqrt{(1 - \cos(t))^2 + (\sin(t))^2} = \sqrt{2(1 - \cos(t))} \neq 1, \end{aligned}$$

constatamos que a curva não está parametrizada pelo comprimento de arco.

⁴A espiral logarítmica foi descoberta e estudada por René Descartes, em 1638, no qual observou que a curva tem a propriedade que o vetor tangente $\gamma'(t)$ faça um ângulo constante com a reta que passa no ponto $\gamma(t)$ e no ponto de origem $O = (0, 0)$. Posteriormente, Jacob Bernoulli descobriu que a curva tem propriedade de auto-similaridade, ou seja, a forma da espiral não muda quando a escala é alterada [5], [6], [8].

O comprimento de arco de γ a partir de $t = 0$ até $t = 2\pi$ é dado por

$$L = \int_0^{2\pi} \|\gamma'(\sigma)\| d\sigma = \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos(\sigma))} d\sigma$$

Como $\sin^2\left(\frac{\sigma}{2}\right) = \frac{1 - \cos(\sigma)}{2}$, obtemos

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2(2\sin^2(\sigma/2))} d\sigma = \int_0^{2\pi} 2\sin(\sigma/2) d\sigma = 2[-2\cos(\sigma/2)]_0^{2\pi} = 8.$$

Neste trabalho, designamos o produto interno entre os vetores $u, v \in \mathbb{R}^n$ por $\langle u, v \rangle$.

Lema 1.33 *Se $f, g :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^n$ são diferenciáveis e satisfazem $\langle f(t), g(t) \rangle = c, \forall t \in]a, b[$, então $\langle f'(t), g(t) \rangle = -\langle f(t), g'(t) \rangle$. Além disso, $\|f(t)\| = c$ se, e só se, $\langle f'(t), f(t) \rangle = 0, \forall t \in]a, b[$.*

Demonstração: Uma função é constante se, e só se, a sua derivada é nula em $]a, b[$. Derivando a igualdade $\langle f(t), g(t) \rangle = c$, então obtemos

$$\langle f(t), g(t) \rangle' = c' \Leftrightarrow \langle f'(t), g(t) \rangle + \langle f(t), g'(t) \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle f'(t), g(t) \rangle = -\langle f(t), g'(t) \rangle.$$

Particularmente, $\|f(t)\|^2 = \langle f(t), f(t) \rangle = c$ se, e só se, $\langle f'(t), f(t) \rangle = 0, \forall t \in]a, b[$. \square

1.1.3 Reparametrização pelo Comprimento de Arco

Quando uma curva regular não está parametrizada pelo comprimento de arco, é possível constatar que a velocidade escalar de γ não é constante em t .

Para obter uma velocidade constante e unitária em t , aplica-se uma reparametrização pelo comprimento de arco.

Definição 1.34 *Sejam $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva regular, $s : I \rightarrow J$ a função de comprimento de arco e $J, I \subset \mathbb{R}$ os intervalos. Como a função $s(t)$ é bijetiva de classe C^1 , então existe a função inversa $s^{-1} = \alpha : J \rightarrow I$ de $s(t)$. A reparametrização de γ por α é dado por*

$$\begin{aligned} \Gamma : J &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ s &\mapsto (\gamma \circ \alpha)(s). \end{aligned}$$

Por outro lado, se γ for uma reparametrização de Γ por $\alpha^{-1} = s(t)$, o traço de γ mantém-se o mesmo, dado que α é bijetiva.

Teorema 1.35 *Se $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma curva regular, então γ pode ser reparametrizada pelo comprimento de arco.*

Demonstração: Sejam γ uma curva regular e $s(t) : I \rightarrow J$ uma função de comprimento de arco de γ a partir de t_0 dada por $s(t) = \int_{t_0}^t \|\gamma'(\sigma)\| d\sigma$ com $J = s(I)$. No teorema fundamental de cálculo, a função $s(t)$ satisfaz

$$s'(t) = \|\gamma'(t)\| > 0.$$

Deste modo, $s(t)$ é uma função injetiva, diferenciável e estritamente crescente. Consequentemente, $t \mapsto s(t) = s$ tem função inversa $s \mapsto t(s) = t$, denotando $t(s)$ por $\alpha(s)$. Seguidamente, o teorema da derivada da função inversa implica

$$\alpha'(s) = \alpha'(s(t)) = \frac{1}{s'(t)} = \frac{1}{s'(\alpha(s))} = \frac{1}{\|\gamma'(\alpha(s))\|}.$$

Assim, $\Gamma : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma reparametrização de γ pelo comprimento de arco, ou seja, $\Gamma(s) = \gamma(\alpha(s))$. Seguindo a regra da cadeia que $\Gamma'(s) = \gamma'(\alpha(s))\alpha'(s)$, no qual

$$\begin{aligned} \|\Gamma'(s)\| &= \|\gamma'(\alpha(s)) \alpha'(s)\| \\ &= \left\| \gamma'(\alpha(s)) \frac{1}{s'(\alpha(s))} \right\| = \frac{1}{s'(\alpha(s))} \|\gamma'(\alpha(s))\| \\ &= \frac{1}{\|\gamma'(\alpha(s))\|} \|\gamma'(\alpha(s))\| = 1. \end{aligned}$$

Portanto, Γ está parametrizada pelo comprimento de arco. □

Assim sendo, esta parametrização indica-nos que o tempo decorrido ao longo da curva é igual à distância percorrida.

Observação 1.36 *Note que a reparametrização de uma curva não é única, pois no comprimento de arco vai depender da escolha do ponto inicial t_0 e da sua orientação.*

Exemplo 1.37 A circunferência centrada em (a, b) com raio $R > 0$ definida por

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (a + R \cos(t), b + R \sin(t)) \end{aligned}$$

é uma curva não está parametrizada pelo comprimento de arco se, e só se, $R \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, visto que

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= (-R \sin(t), R \cos(t)), \\ \|\gamma'(t)\| &= \sqrt{R^2 \sin^2(t) + R^2 \cos^2(t)} = R. \end{aligned}$$

Seguidamente, temos

$$\begin{aligned} s(t) &= R \int_0^t 1 \, d\sigma = Rt, \\ L &= s(2\pi) = R \times 2\pi = 2\pi R. \end{aligned}$$

Logo, a função inversa $\alpha(s) : [0, 2\pi R] \rightarrow [0, 2\pi]$ é dada por $\alpha(s) = \frac{s}{R}$. Assim, a reparametrização de γ por α é dada por

$$\begin{aligned} \Gamma = (\gamma \circ \alpha) : [0, 2\pi R] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ s &\mapsto \left(a + R \cos \frac{s}{R}, b + R \sin \frac{s}{R} \right). \end{aligned}$$

Observamos que a curva Γ representa o mesmo traço da curva γ , e que ambas têm a mesma orientação, dado que $\alpha'(s)$ é estritamente crescente.

A diferença que encontramos entre as duas curvas é a velocidade escalar. Verificamos que $\|\gamma'(t)\| < \|\Gamma'(s)\|$, se $R < 1$.

Contrariamente, se $R > 1$, obtemos $\|\gamma'(t)\| > \|\Gamma'(s)\|$, conforme ilustra o vetor tangente de γ e de Γ em $t = \frac{5\pi}{6}$ na Figura 1.13.

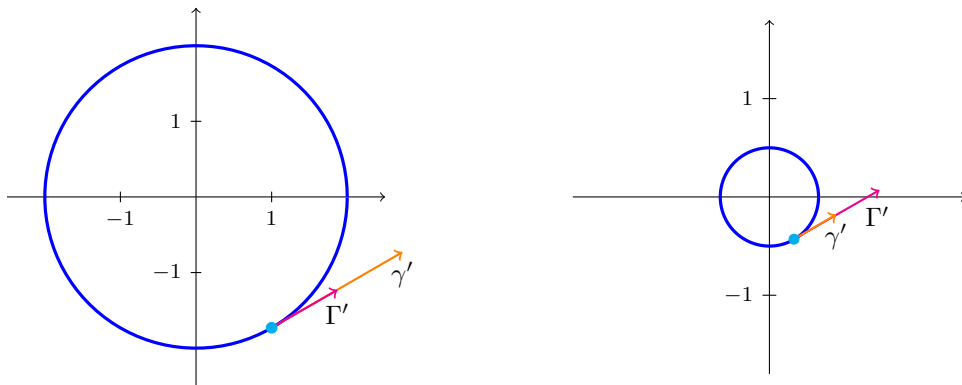


Figura 1.13: Reparametrização da Circunferência com $R = \{2; 0.5\}$

Exemplo 1.38 Determinemos uma reparametrização da cicloide (Exemplo 1.32) dada por $\gamma(t) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t))$, $t \in [0, 2\pi]$. Temos

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{2(1 - \cos(\sigma))} d\sigma.$$

Simplificando-a por $\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 1 - 2\sin^2(\alpha)$, obtemos

$$= \int_0^t \sqrt{2 \left(1 - \left(1 - 2\sin^2\left(\frac{\sigma}{2}\right) \right) \right)} d\sigma = 4 \left(1 - \cos\left(\frac{t}{2}\right) \right).$$

A função inversa $\alpha : [0, 8] \rightarrow [0, 2\pi]$ é parametrizada por $\alpha(s) = 2 \arccos\left(1 - \frac{s}{4}\right)$. Assim, a reparametrização de γ por α é

$$\begin{aligned} \Gamma &= (\gamma \circ \alpha) : [0, 8] \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ s &\mapsto \left(2 \arccos\left(1 - \frac{s}{4}\right) - \sin\left(2 \arccos\left(1 - \frac{s}{4}\right)\right), 2 - 2\left(1 - \frac{s}{4}\right)^2 \right). \end{aligned}$$

Portanto, a curva Γ apresenta o mesmo traço de γ , e ambas têm a mesma orientação, visto que γ é estritamente crescente.

Exemplo 1.39 A catenária (Exemplo 1.9) dada por $\gamma(t) = (t, \cosh(t))$ é regular para $\forall t \in [-2, 2]$, pois $\gamma'(t) = (1, \sinh(t)) \neq (0, 0)$. Além disso, temos

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{1 + \sinh^2(\sigma)} d\sigma = \sinh(t).$$

Assim, a reparametrização de γ por $\alpha(s) = \operatorname{arcsinh}(s)$ é dada por

$$\begin{aligned} \Gamma &= (\gamma \circ \alpha) : [\sinh(-2), \sinh(2)] \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ s &\mapsto (\operatorname{arcsinh}(s), \cosh(\operatorname{arcsinh}(s))). \end{aligned}$$

Exemplo 1.40 Seja a hélice dada por $\gamma(t) = (R \cos(t), R \sin(t), bt)$, $t \in [0, 3\pi]$ com $R > 0$ e $b \neq 0$. Temos

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= (-R \sin(t), R \cos(t), b), \\ \|\gamma'(t)\| &= \sqrt{(-R \sin(t))^2 + (R \cos(t))^2 + b^2} = \sqrt{R^2 + b^2},\end{aligned}$$

verifica-se que é uma curva regular não parametrizada pelo comprimento de arco, se $R^2 + b^2 \neq 1$. Seguidamente, obtemos

$$\begin{aligned}s(t) &= \int_0^t \sqrt{R^2 + b^2} \, d\sigma = \left[\sqrt{R^2 + b^2} \sigma \right]_0^t = \sqrt{R^2 + b^2} t, \\ L &= s(3\pi) = \sqrt{R^2 + b^2} 3\pi.\end{aligned}$$

Logo, a função inversa $\alpha : [0, \sqrt{R^2 + b^2} 3\pi] \rightarrow [0, 3\pi]$ é dada por $\alpha(s) = \frac{s}{\sqrt{R^2 + b^2}}$.

Assim, a reparametrização de γ por α é dada por

$$\begin{aligned}\Gamma : [0, \sqrt{R^2 + b^2} 3\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ s &\mapsto \left(R \cos\left(\frac{s}{\sqrt{R^2 + b^2}}\right), R \sin\left(\frac{s}{\sqrt{R^2 + b^2}}\right), b \frac{s}{\sqrt{R^2 + b^2}} \right).\end{aligned}$$

Portanto, a curva Γ tem o mesmo traço da curva γ , e ambas têm a mesma orientação, dado que $\alpha'(s)$ é estritamente crescente. A velocidade escalar não é igual nas duas parametrizações.

Verifica-se que quando $R < 1$, obtemos $\|\gamma'(t)\| < \|\Gamma'(s)\|$. Contrariamente, se $R > 1$, obtemos $\|\gamma'(t)\| > \|\Gamma'(s)\|$, conforme ilustra o vetor tangente de γ e de Γ em $t = \frac{\pi}{6}$ na Figura 1.14.

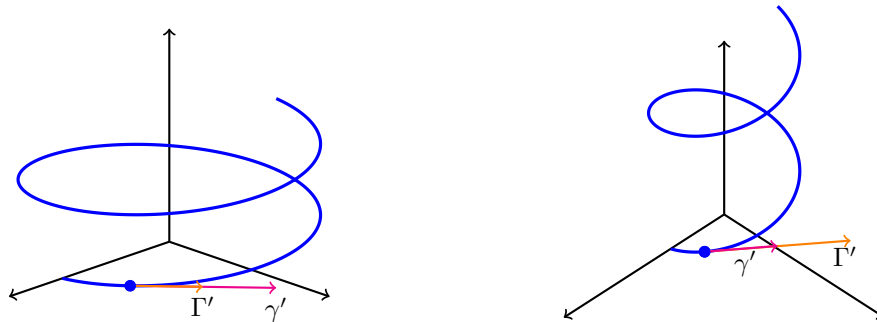


Figura 1.14: Reparametrização da Hélice com $R = \{2, 0.5\}$, respetivamente.

Contudo, existem curvas que não permitem determinar o comprimento de arco devido a dois motivos: o primeiro é a norma da derivada poder não ter uma primitiva imediata, ou seja, a sua primitiva não ter uma expressão algébrica (*e.g.* cúbica “retorcida”); e, o segundo é a inversa da função de comprimento de arco poder não ser uma função elementar (*e.g.* parábola).

Exemplo 1.41 A parábola definida por

$$\begin{aligned}\gamma :]-2, 2[&\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (t, t^2)\end{aligned}$$

é uma curva simples regular não parametrizada pelo comprimento de arco para $\forall t \in I$, visto que

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= (1, 2t), \\ \|\gamma'(t)\| &= \sqrt{1 + 4t^2} \neq 0,\end{aligned}$$

como apresenta a Figura 1.15.

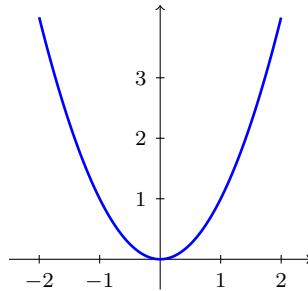


Figura 1.15: Curva Parábola

Seguidamente, a função de comprimento de arco de γ a partir de $t = 0$ dá-nos

$$\begin{aligned}s(t) &= \int_0^t \sqrt{1 + 4\sigma^2} \, d\sigma = \int_0^t \frac{1 + 4\sigma^2}{\sqrt{1 + 4\sigma^2}} \, d\sigma \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t \frac{2}{\sqrt{1 + (2\sigma)^2}} \, d\sigma + \frac{1}{2} \int_0^t 8\sigma^2(1 + 4\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} \, d\sigma \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{arcsinh}(2\sigma) + \frac{1}{2} \int_0^t 8\sigma^2(1 + 4\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} \, d\sigma\end{aligned}\tag{1.1}$$

Em $\int_0^t 8\sigma^2(1 + 4\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} \, d\sigma$ aplicamos uma integração por partes, e considerando

$$\begin{aligned}u &= \int 8\sigma(1 + 4\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} \, d\sigma = 2\sqrt{1 + 4\sigma^2} & u' &= 8\sigma(1 + 4\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} \\ v &= \sigma & v' &= 1\end{aligned}$$

Substituindo em (1.1),

$$= \frac{1}{2} \operatorname{arcsinh}(2\sigma) + \frac{1}{2} \sigma 2\sqrt{1 + 4\sigma^2} - \frac{1}{2} \int_0^t 2\sqrt{1 + 4\sigma^2} \, d\sigma$$

e, resolvendo a igualdade,

$$\begin{aligned}\int_0^t \sqrt{1 + 4\sigma^2} \, d\sigma &= \frac{1}{2} \operatorname{arcsinh}(2\sigma) + \sigma\sqrt{1 + 4\sigma^2} - \int_0^t \sqrt{1 + 4\sigma^2} \, d\sigma \\ \Leftrightarrow \int_0^t \sqrt{1 + 4\sigma^2} \, d\sigma &= \frac{1}{4} \ln(2\sigma + \sqrt{1 + 4\sigma^2}) + \frac{\sigma}{2} \sqrt{1 + 4\sigma^2}\end{aligned}$$

obtemos a função de comprimento de arco, dada por

$$s(t) = \frac{1}{4} \ln(2t + \sqrt{1 + 4t^2}) + \frac{t}{2} \sqrt{1 + 4t^2}$$

Deste modo, é possível que a inversa de $s(t)$ não possa exprimir através de funções elementares.

Exemplo 1.42 A curva cúbica “retorcida” definida por

$$\begin{aligned} \gamma :]-\infty, +\infty[&\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto (t, t^2, t^3) \end{aligned}$$

é uma curva parametrizada diferenciável e simples, como apresenta a Figura 1.16.

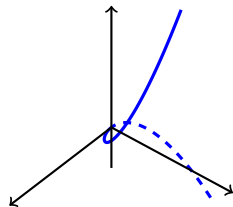


Figura 1.16: Curva Cúbica “Retorcida”

Como $\gamma'(t) = (1, 2t, 3t^2)$, obtemos $s(t) = \int_0^t \sqrt{1 + 4\sigma^2 + 9\sigma^4} d\sigma$. Portanto, a curva é regular e não parametrizada pelo comprimento de arco para $\forall t \in I$, dado que $\|\gamma'(t)\| \neq 0$.

Entretanto, poderá não ser possível determinar a função de comprimento de arco, dado que não há primitiva imediata.

1.2 Curvatura e Torção

Um dos maiores desafios da geometria é determinar as quantidades geométricas que permitem distinguir uma curva de outra curva. Uma forma de descrever a curva é através de duas funções escalares em cada ponto, sendo uma a curvatura e a outra a torção.

A curvatura mede o quanto é que uma curva se afasta de estar contida numa reta, enquanto que a torção mede o quanto é que uma curva se afasta de estar contida num plano.

1.2.1 Curvatura

A curvatura de uma curva de classe C^3 é uma função escalar, no qual define-se primeiramente um vetor tangente unitário, cujo sentido depende da orientação da curva.

Definição 1.43 (Vetor tangente unitário) *Seja $T : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ um vetor tangente unitário em $t \in I$ com $\|\gamma'(t)\| \neq 0$ definido por*

$$T(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}.$$

Sabendo que o traço da curva pode ser descrito por várias parametrizações, então interessa-nos aquela que está parametrizada pelo comprimento de arco, visto ser mais fácil de analisar a sua forma.

Por exemplo, uma reta parametrizada por $\gamma(t) = t^3(a, b)$ temos $\gamma'(t) = 3t^2(a, b)$, logo $\|\gamma'(t)\| = 3t^2\sqrt{a^2 + b^2}$ não é constante, contudo não altera a direção do vetor tangente. A solução deste problema passa pela reparametrização pelo comprimento de arco, de modo a obter uma velocidade escalar constante e unitária, sendo que a direção do vetor não altera.

Assim serão estudadas as curvas parametrizadas pelo comprimento de arco, tal que $T(s) = \gamma'(s)$ para cada $s \in I$.

Definição 1.44 *Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco de classe C^3 . A função curvatura $k : I \rightarrow \mathbb{R}$ de γ em $s \in I$ é dada por*

$$k(s) = \|T'(s)\| = \|\gamma''(s)\|, \quad (1.2)$$

cujo vetor curvatura de γ em $s \in I$ é dado por

$$\vec{\mathcal{K}}(s) = T'(s) = \gamma''(s).$$

A curvatura será interpretada geometricamente. Dada $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco de classe C^2 , seja P um ponto fixo com parâmetro s e Q um ponto com parâmetro $s+h$ em torno de P , onde $P, Q \in \gamma$; $s, s+h \in I$ e, $\|h\|$ é o comprimento de arco entre P e Q . Seja θ o ângulo formado entre os vetores tangentes $T(s)$ e $T(s+h)$ de γ em P e Q , respetivamente.

Aplicando uma translação do vetor $T(s)$ até ao ponto Q , adquirimos, conseqüentemente, um triângulo isósceles com dois lados de comprimento igual a um, cujos lados correspondem aos vetores tangentes $T(s)$ e $T(s+h)$, conforme vemos na figura 1.17.

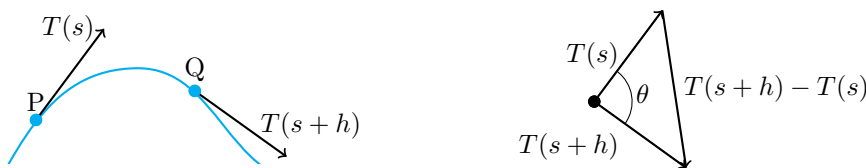


Figura 1.17: Taxa de variação do vetor tangente unitário.

Então, para cada $s \in I$, a taxa de variação da direção do vetor tangente corresponde à curvatura de γ em $s \in I$.

Proposição 1.45 *A curvatura de uma curva em $Q \in \gamma$ é o limite da razão $\frac{\theta}{\|h\|}$ quando h tende para zero.*

Demonstração: Seja θ o ângulo formado por $T(s)$ e $T(s+h)$. Então

$$\|h\| = \|T(s+h) - T(s)\| = 2 \sin \frac{1}{2}\theta,$$

e, conseqüentemente, $\frac{\theta}{\|h\|} = \frac{\theta}{2 \sin \frac{1}{2}\theta} \frac{2 \sin \frac{1}{2}\theta}{\|h\|} = \frac{\frac{1}{2}\theta}{\sin \frac{1}{2}\theta} \frac{\|T(s+h) - T(s)\|}{\|h\|}$. Segue que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}\theta}{\sin \frac{1}{2}\theta} = 1 \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|T(s+h) - T(s)\|}{\|h\|} = \|T'(s)\| = \|\gamma''(s)\|.$$

Portanto,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\theta}{\|h\|} = 1 \|\gamma''(s)\| = k(s).$$

□

Por outro lado, quando uma curva regular não está parametrizada pelo comprimento de arco, a velocidade escalar do vetor tangente não é unitária.

Proposição 1.46 *Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva regular parametrizada por um parâmetro arbitrário t . O vetor curvatura $\vec{\mathcal{K}} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ de γ em $t \in I$ é dado por*

$$\vec{\mathcal{K}}(t) = \frac{\|\gamma'(t)\|^2 \gamma''(t) - \langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle \gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|^4}.$$

Demonstração: Considerando $\Gamma(s) = (\gamma \circ \alpha)(s) : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma reparametrização de γ pelo comprimento de arco e $s : J \rightarrow I$ uma função de comprimento de arco. Dado que a função $s(t)$ é injetiva, existe a função inversa $\alpha(s) = t : J \rightarrow I$, tal que $\alpha'(s) \neq 0, \forall s \in J$. Deste modo, no teorema fundamental de cálculo temos

$$s'(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t \|\gamma'(\sigma)\| d\sigma = \|\gamma'(t)\|.$$

Pelo teorema da derivada de uma função inversa, se a função $s = s(t)$ admite função inversa $t = \alpha(s)$, então

$$\alpha'(s) = \frac{1}{s'(t)} = \frac{1}{s'(\alpha(s))} = \frac{1}{\|\gamma'(\alpha(s))\|} = \frac{1}{\|(\gamma' \circ \alpha)(s)\|}.$$

Aplicando a regra da cadeia sobre Γ em s , obtemos

$$\Gamma'(s) = (\gamma' \circ \alpha)(s) \frac{1}{\|(\gamma' \circ \alpha)(s)\|}.$$

Portanto, a definição 1.44 dá-nos

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{K}}(s) &= \Gamma''(s) = \left((\gamma' \circ \alpha)(s) \frac{1}{\|(\gamma' \circ \alpha)(s)\|} \right)' \\ &= \frac{(\gamma' \circ \alpha)'(s)}{\|(\gamma' \circ \alpha)(s)\|} + (\gamma' \circ \alpha)(s) \left(-\frac{\|(\gamma' \circ \alpha)(s)\|'}{\|(\gamma' \circ \alpha)(s)\|^2} \right) \end{aligned}$$

Como $\|(\gamma' \circ \alpha)(s)\|' = \frac{\langle (\gamma' \circ \alpha)'(s), (\gamma' \circ \alpha)(s) \rangle}{\|(\gamma' \circ \alpha)(s)\|}$, e substituindo na expressão acima, temos

$$\begin{aligned}
&= \frac{\gamma''(\alpha(s))\alpha'(s)}{\|(\gamma' \circ \alpha)(s)\|} - (\gamma' \circ \alpha)(s) \frac{\langle (\gamma' \circ \alpha)'(s), (\gamma' \circ \alpha)(s) \rangle}{\|(\gamma' \circ \alpha)(s)\|^3} \\
&= \frac{\gamma''(\alpha(s))}{\|(\gamma' \circ \alpha)(s)\|} \frac{1}{\|(\gamma' \circ \alpha)(s)\|} - (\gamma' \circ \alpha)(s) \frac{\langle \gamma''(\alpha(s))\alpha'(s), (\gamma' \circ \alpha)(s) \rangle}{\|(\gamma' \circ \alpha)(s)\|^3} \\
&= \frac{\gamma''(\alpha(s))}{\|(\gamma' \circ \alpha)(s)\|^2} - (\gamma' \circ \alpha)(s)\alpha'(s) \frac{\langle \gamma''(\alpha(s)), (\gamma' \circ \alpha)(s) \rangle}{\|(\gamma' \circ \alpha)(s)\|^3} \\
&= \frac{\|\gamma'(\alpha(s))\|^2 \gamma''(\alpha(s)) - \langle \gamma''(\alpha(s)), \gamma'(\alpha(s)) \rangle \gamma'(\alpha(s))}{\|(\gamma'(\alpha(s)))\|^4} \\
&= \frac{\|\gamma'(t)\|^2 \gamma''(t) - \langle \gamma''(t), \gamma'(t) \rangle \gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|^4}.
\end{aligned}$$

□

Partindo da proposição acima, obtemos a função curvatura de uma curva regular não parametrizada pelo comprimento de arco, através da seguinte proposição.

Proposição 1.47 *Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva regular parametrizada por um parâmetro arbitrário t . Então a função curvatura $k : I \rightarrow \mathbb{R}$, que é o módulo do vetor curvatura $\vec{\mathcal{K}}(t)$, é dada por*

$$k(t) = \|\vec{\mathcal{K}}(t)\| = \frac{\sqrt{\|\gamma''(t)\|^2 \|\gamma'(t)\|^2 - \langle \gamma''(t), \gamma'(t) \rangle^2}}{\|\gamma'(t)\|^3}, t \in I. \quad (1.3)$$

Demonstração: Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva regular parametrizada por um parâmetro arbitrário t . Partindo da proposição 1.46 obtemos a curvatura

$$\begin{aligned}
k(t) &= \|\vec{\mathcal{K}}(t)\| = \left\| \frac{\|\gamma'(t)\|^2 \gamma''(t) - \langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle \gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|^4} \right\| \\
&= \frac{\sqrt{\|\gamma''(t)\|^2 \|\gamma'(t)\|^2 - 2\langle \gamma''(t), \gamma'(t) \rangle \|\gamma'(t)\|^2 + \|\gamma'(t)\|^2 \langle \gamma''(t), \gamma''(t) \rangle}}{\|\gamma'(t)\|^4} \\
&= \frac{\sqrt{\|\gamma''(t)\|^2 \|\gamma'(t)\|^4 - 2\langle \gamma''(t), \gamma'(t) \rangle^2 \|\gamma'(t)\|^2 + \langle \gamma''(t), \gamma'(t) \rangle^2 \|\gamma'(t)\|^2}}{\|\gamma'(t)\|^4} \\
&= \frac{\sqrt{\|\gamma''(t)\|^2 \|\gamma'(t)\|^4 - \langle \gamma''(t), \gamma'(t) \rangle^2 \|\gamma'(t)\|^2}}{\|\gamma'(t)\|^4} \\
&= \frac{\sqrt{\|\gamma''(t)\|^2 \|\gamma'(t)\|^2 - \langle \gamma''(t), \gamma'(t) \rangle^2}}{\|\gamma'(t)\|^3}.
\end{aligned}$$

□

Observa-se que o vetor curvatura não depende da orientação de γ , pois considerando $\Gamma(s) = \gamma(\alpha(s))$ como uma reparametrização de γ por $\alpha(s) = \pm s + \text{constante}$, temos que

$$\begin{aligned}\Gamma'(s) &= \gamma'(\alpha(s))\alpha'(s) = \pm\gamma'(\alpha(s)), \\ \Gamma''(s) &= (\pm\gamma'(\alpha(s)))' = \pm(\gamma''(\alpha(s))\alpha'(s)) = (\pm 1)^2\gamma''(\alpha(s)) = \gamma''(\alpha(s)).\end{aligned}$$

1.2.2 Equações de Frenet em Curvas Planas e a Curvatura com Sinal

Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco de classe C^2 dada por

$$\gamma(s) = (f_1(s), f_2(s)), s \in I.$$

Para cada $s \in I$ temos um vetor tangente unitário de γ em s dado por

$$T(s) = (f_1'(s), f_2'(s)),$$

e um vetor normal unitário ortogonal ao vetor $T(s)$ dado por

$$N(s) = (-f_2'(s), f_1'(s)).$$

A reta normal a γ em $s_0 \in I$ é a reta que passa por $\gamma(s_0)$ na direção de $N(s_0)$, isto é,

$$n(\lambda) = \gamma(s_0) + \lambda N(s_0), \lambda \in \mathbb{R}.$$

Cada $s \in I$ é associada a uma base ortonormada $\{T(s), N(s)\}$ com orientação positiva, sendo designada como o Referencial de Frenet de γ em s .

Como $T(s)$ e $N(s)$ são funções diferenciáveis de classe C^1 , então para cada $s \in I$ é possível escrever os vetores $T'(s)$ e $N'(s)$ como combinações lineares de $T(s)$ e $N(s)$. Assim sendo, ao longo da curva podemos medir o quanto varia o diedro de Frenet, cujas derivadas dos respectivos vetores permitem calcular as equações de Frenet.

Dado que $\|T(s)\| = 1$, temos $T'(s)$ perpendicular a $T(s)$, como consta no Lema 1.33. Deste modo, $T'(s)$ é proporcional a $N(s)$.

Definição 1.48 *Este factor de proporcionalidade, denotado por $k_{\pm}(s)$, é chamado curvatura com sinal de γ em s , e tem-se*

$$T'(s) = k_{\pm}(s)N(s).$$

Na definição acima temos a curvatura com sinal dada por

$$k_{\pm}(s) = \langle T'(s), N(s) \rangle. \quad (1.4)$$

Seguidamente, será interpretada geometricamente a curvatura com sinal. Dado Q e P dois pontos fixos de γ , e em cada s temos o vetor tangente unitário $T(s) = (\cos \theta(s), \sin \theta(s))$ e uma semi-reta w paralela ao eixo $0x$; e θ o ângulo que o vetor tangente $T(s)$ faz com w . Derivando $T(s)$, obtemos

$$T'(s) = \left(-\frac{d\theta}{ds} \sin \theta(s), \frac{d\theta}{ds} \cos \theta(s) \right) = \frac{d\theta}{ds} (-\sin \theta(s), \cos \theta(s)) = k_{\pm}(s)N(s).$$

Portanto, a curvatura com sinal mede a variação do ângulo θ entre dois vetores tangentes $T(s)$ e $T(s+h)$, respetivamente.

Na Figura 1.18 observa-se que o ângulo θ em Q é maior do que em P , logo no ponto Q apresenta uma maior curvatura com sinal.

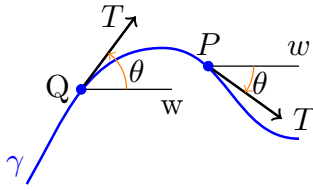


Figura 1.18: Ângulo da curvatura com sinal.

Definição 1.49 Seja $\{T(s), N(s)\}$ uma base ortonormada de \mathbb{R}^2 . Para cada $s_0 \in I$, a curvatura com sinal diz que:

1. Se $k_{\pm}(s_0) > 0$, então $N(s_0)$ tem o mesmo sentido de $T'(s_0)$, isto é, a curva está se curvando para a esquerda;
2. Se $k_{\pm}(s_0) < 0$, então $T'(s_0)$ tem sentido oposto de $N(s_0)$, isto é, a curva está se curvando para a direita.

Observa-se que a curvatura com sinal depende da orientação de γ , conforme vemos na Figura 1.19.

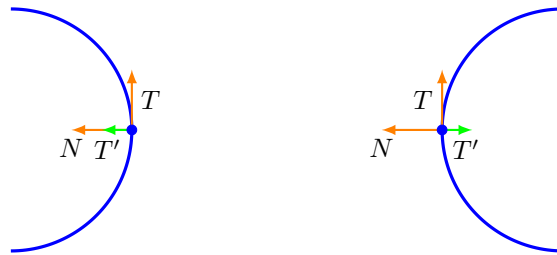


Figura 1.19: Curvatura com sinal positiva e negativa, respetivamente.

Analogamente, como $\|N(s)\| = 1$, implica que $N'(s)$ é perpendicular a $N(s)$, como consta no Lema 1.33. Então, $N'(s)$ tem a mesma direção do vetor $T(s)$.

Proposição 1.50 O vetor $N' : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é proporcional a $T(s)$ e temos

$$N'(s) = -k_{\pm}(s)T(s), s \in I.$$

Demonstração: Dada $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular. Para cada $s \in I$ considera-se

$$\begin{aligned} T(s) &= (T_1(s), T_2(s)), \\ N(s) &= (-T_2(s), T_1(s)). \end{aligned}$$

Segue que $T'(s) = (T'_1(s), T'_2(s)) = (k_{\pm}(s)(-T_2(s)), k_{\pm}(s)T_1(s))$. Portanto, a primeira derivada do vetor $N(s)$ dá-nos

$$\begin{aligned} N'(s) &= (-T'_2(s), T'_1(s)) \\ &= (-k_{\pm}(s)T_1(s), -k_{\pm}(s)T_2(s)) \\ &= -k_{\pm}(s)T(s). \end{aligned}$$

□

Resumidamente, estas derivadas são representadas pela seguinte definição:

Definição 1.51 (Equações de Frenet em \mathbb{R}^2) Se $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco, então para cada $s \in I$ temos as equações de Frenet de γ dadas por

$$T'(s) = k_{\pm}(s)N(s), \quad (1.5)$$

$$N'(s) = -k_{\pm}(s)T(s). \quad (1.6)$$

Exemplo 1.52 A reta definida por

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ s &\mapsto (as + 1, bs + 1) \end{aligned}$$

é uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco, onde $a^2 + b^2 = 1$. Como $T(s) = (a, b)$, logo $T'(s) = (0, 0)$. Portanto, a curvatura com sinal é nula para $\forall s \in I$.

Exemplo 1.53 Determinemos a curvatura com sinal da circunferência (Exemplo 1.37) parametrizada pelo comprimento de arco por $\Gamma(s) = \left(a + R \cos \frac{s}{R}, b + R \sin \frac{s}{R}\right)$, $s \in]0, 2\pi R[$, centrada em (a, b) e raio $R \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, temos

$$\begin{aligned} T(s) &= \left(-\sin \frac{s}{R}, \cos \frac{s}{R}\right), \\ N(s) &= \left(-\cos \frac{s}{R}, -\sin \frac{s}{R}\right), \\ T'(s) &= \left(-\frac{1}{R} \cos \frac{s}{R}, -\frac{1}{R} \sin \frac{s}{R}\right) = \underbrace{\frac{1}{R}}_{k_{\pm}(s)} \underbrace{\left(-\cos \left(\frac{s}{R}\right), -\sin \left(\frac{s}{R}\right)\right)}_{N(s)}, \\ N'(s) &= \left(\frac{1}{R} \sin \frac{s}{R}, -\frac{1}{R} \cos \frac{s}{R}\right) = -\underbrace{\frac{1}{R}}_{k_{\pm}(s)} \underbrace{\left(-\sin \frac{s}{R}, \cos \frac{s}{R}\right)}_{T(s)}, \\ k_{\pm}(s) &= \langle T'(s), N(s) \rangle = \frac{1}{R}. \end{aligned}$$

Portanto, a curvatura com sinal de γ é constante e positiva para $\forall s \in]0, 2\pi[$. Contudo, este valor obtido é igual à curvatura $k(s) = \|T'(s)\| = \frac{1}{R}$ em (1.2).

Observa-se que a curvatura com sinal é inversamente proporcional ao raio R , dado que se $R > 1$, $k_{\pm}(s)$ diminui, e se $R < 1$, $k_{\pm}(s)$ aumenta. Porém, quando o raio é infinito, a curvatura com sinal é nula, cujo traço descreve uma reta.

Contrariamente, quando a curva γ é parametrizada por $\left(a + R \sin \frac{s}{R}, b + R \cos \frac{s}{R}\right)$, $s \in]0, 2\pi[$, a curvatura com sinal obtida é negativa, isto é, $k_{\pm}(s) = -\frac{1}{R}$. Porém, este valor não é igual à curvatura em (1.2).

A Figura 1.20 ilustra duas parametrizações de γ centradas na origem, e com $R = 2$ temos $k_{\pm}(s) = 0.5$; e $R = 0.5$ temos $k_{\pm}(s) = 2$, respetivamente.

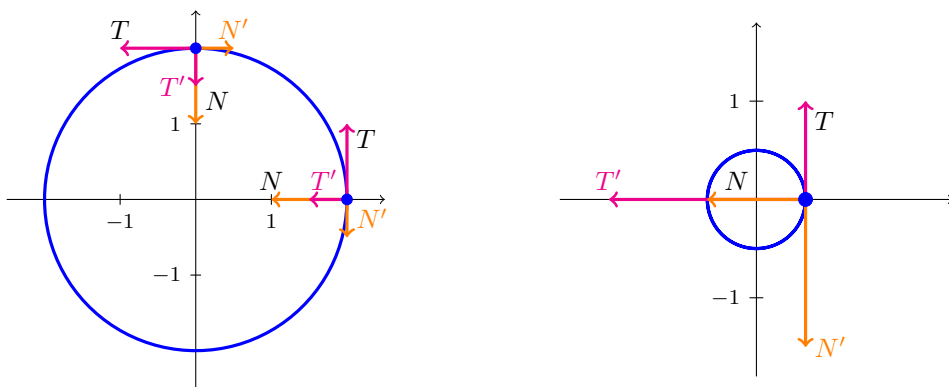


Figura 1.20: Curvatura com sinal da Circunferência

Exemplo 1.54 A reparametrização da espiral logarítmica (Exemplo 1.31) pelo comprimento de arco com $a = b = 1$ é dada por

$$\Gamma(s) = \left(\frac{s + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \cos \left(\ln \left(\frac{s + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right) \right), \frac{s + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \sin \left(\ln \left(\frac{s + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right) \right) \right), s \in]0, \sqrt{2}(e^{4\pi} - 1)[.$$

Determinemos a sua curvatura com sinal. Temos

$$\begin{aligned} \Gamma'(s) &= \left(\frac{-\sin(\ln \frac{s+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}) + \cos(\ln \frac{s+\sqrt{2}}{\sqrt{2}})}{\sqrt{2}}, \frac{\sin(\ln \frac{s+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}) + \cos(\ln \frac{s+\sqrt{2}}{\sqrt{2}})}{\sqrt{2}} \right), \\ \Gamma''(s) &= \left(\frac{-\sin(\ln \frac{s+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}) - \cos(\ln \frac{s+\sqrt{2}}{\sqrt{2}})}{\sqrt{2}x + 2}, \frac{-\sin(\ln \frac{s+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}) + \cos(\ln \frac{s+\sqrt{2}}{\sqrt{2}})}{\sqrt{2}x + 2} \right), \\ k_{\pm}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}e^t}. \end{aligned}$$

Portanto, a curvatura com sinal não é constante para $\forall s \in I$. Além disso, os respectivos vetores tornam-se ortogonais mutuamente.

No entanto, é possível determinar a curvatura de uma curva regular não parametrizada pelo comprimento de arco, dado que é observado que algumas curvas são de difícil determinação da função de comprimento de arco, e da função inversa do comprimento de arco.

Proposição 1.55 Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular parametrizada por um parâmetro arbitrário t dada por $\gamma(t) = (f_1(t), f_2(t))$. Então em $t \in I$ temos o vetor tangente $T(t)$, o vetor normal $N(t)$ e a curvatura com sinal $k_{\pm}(t)$ dados por

$$T(t) = \frac{(f_1'(t), f_2'(t))}{\sqrt{(f_1'(t))^2 + (f_2'(t))^2}}, \quad (1.7)$$

$$N(t) = \frac{(-f_2'(t), f_1'(t))}{\sqrt{(f_1'(t))^2 + (f_2'(t))^2}}, \quad (1.8)$$

$$k_{\pm}(t) = \frac{f_2''(t)f_1'(t) - f_1''(t)f_2'(t)}{((f_1'(t))^2 + (f_2'(t))^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (1.9)$$

Demonstração: Seja $\Gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma reparametrização de γ pelo comprimento de arco definida por $\Gamma(s(t)) = \gamma(t) = (f_1(t), f_2(t))$. Pela definição da curvatura, temos

$$k_{\pm}(t) = k_{\pm}(s(t)) = \left\langle \frac{d\Gamma}{ds}(s(t)), N(s(t)) \right\rangle = \left\langle \frac{d^2\Gamma}{ds^2}(s(t)), N(s(t)) \right\rangle,$$

então, pela regra da cadeia temos

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma}{ds}s'(t) &= \gamma'(t) = (f_1'(t), f_2'(t)), \\ \frac{d^2\Gamma}{ds^2}(s'(t))^2 + \frac{d\Gamma}{ds}s''(t) &= \gamma''(t) = (f_1''(t), f_2''(t)). \end{aligned}$$

Como $s'(t) > 0$ é uma função injetiva, então $s'(t) = \|\gamma'(t)\|$. Derivando-o novamente,

$$s''(t) = \frac{\langle \gamma''(t), \gamma'(t) \rangle + \langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle}{2\sqrt{\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle}} = \frac{\langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle}{\|\gamma'(t)\|}.$$

De modo que

$$T(s(t)) = \frac{d\Gamma}{ds}(s(t)) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} = \frac{(f_1'(t), f_2'(t))}{\sqrt{(f_1'(t))^2 + (f_2'(t))^2}},$$

e

$$\begin{aligned} \frac{d^2\Gamma}{ds^2}(s(t)) &= \frac{d^2\Gamma}{ds^2}(s(t)) = \frac{1}{(s'(t))^2} [\gamma''(t) - \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} s''(t)] \\ &= \frac{\|\gamma'(t)\|^2 \gamma''(t) - \langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle \gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|^4}. \end{aligned}$$

Pela definição do vetor normal, temos

$$N(s(t)) = \frac{(-f_2'(t), f_1'(t))}{\sqrt{(f_1'(t))^2 + (f_2'(t))^2}}.$$

Portanto, usando a equação (1.4) obtemos a curvatura com sinal

$$\begin{aligned} k_{\pm}(t) &= \left\langle \frac{\|\gamma'(t)\|^2 \gamma''(t) - \langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle \gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|^4}, \frac{(-f_2'(t), f_1'(t))}{\sqrt{(f_1'(t))^2 + (f_2'(t))^2}} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{(f_1''(t), f_2''(t))}{\|\gamma'(t)\|^2}, \frac{(-f_2'(t), f_1'(t))}{\sqrt{(f_1'(t))^2 + (f_2'(t))^2}} \right\rangle \\ &= \frac{f_2''(t)f_1'(t) - f_1''(t)f_2'(t)}{((f_1'(t))^2 + (f_2'(t))^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

□

Exemplo 1.56 Determinemos a curvatura com sinal da circunferência (Exemplo 1.37) dada por $\gamma(t) = (a + R \cos(t), b + R \sin(t))$, $t \in]0, 2\pi[$. Temos

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= (-R \sin(t), R \cos(t)), \\ \gamma''(t) &= (-R \cos(t), -R \sin(t)), \\ k_{\pm}(t) &= \frac{1}{R}.\end{aligned}$$

Portanto, a curvatura com sinal é uma função constante e positiva para todo $t \in]0, 2\pi[$. Além disso, os respectivos vetores são ortogonais mutuamente.

Exemplo 1.57 Determinemos a curvatura com sinal da espiral logarítmica (Exemplo 1.31) parametrizada por $\gamma(t) = (ae^{bt} \cos(t), ae^{bt} \sin(t))$, $t \in]0, 4\pi[$. Temos

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= (ae^{bt}(b \cos(t) - \sin(t)), ae^{bt}(b \sin(t) + \cos(t))), \\ \gamma''(t) &= (ae^{bt}(b^2 \cos(t) - 2b \sin(t) - \cos(t)), ae^{bt}(b^2 \sin(t) + 2b \cos(t) - \sin(t))), \\ k_{\pm}(t) &= \frac{1}{ae^{bt}\sqrt{b^2 + 1}}.\end{aligned}$$

Constatamos que a curvatura com sinal é não nula para todo $t \in]0, 4\pi[$. Além disso, $k_{\pm}(t)$ é negativa, se $a, b > 0$ ou $a, b < 0$; e positiva, se $a > 0 \wedge b < 0$ ou $a < 0 \wedge b > 0$.

Exemplo 1.58 Determinemos a curvatura com sinal da cicloide parametrizada por $\gamma(t) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t))$, $t \in]0, 2\pi[$. Temos

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= (1 - \cos(t), \sin(t)), \\ \gamma''(t) &= (\sin(t), \cos(t)), \\ k_{\pm}(t) &= \frac{\cos(t) - 1}{(2(1 - \cos(t)))^{\frac{3}{2}}}.\end{aligned}$$

Portanto, a curvatura com sinal é negativa e não constante para $\forall t \in]0, 2\pi[$. No ponto $\gamma(\pi) = (\pi, 1)$ atinge curvatura com sinal máxima. Além disso, a curvatura com sinal pode ser determinada, quando a curva está parametrizada pelo comprimento de arco.

1.2.3 Equações de Frenet em Curvas Espaciais e a Torção

Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco de classe C^3 dada por

$$\gamma(s) = (f_1(s), f_2(s), f_3(s)), s \in I.$$

Seja $T : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é um vetor tangente unitário de γ em s dado por

$$T(s) = (f_1'(s), f_2'(s), f_3'(s)), s \in I.$$

Uma vez que $\|T(s)\| = 1$, então $T'(s)$ é ortogonal a $T(s)$, como consta no Lema 1.33. Porém, na definição 1.44 temos $k(s) > 0$, implicando que $\vec{K}(s) = \gamma''(s) \neq 0$, logo podemos definir um vetor unitário paralelo a $T'(s)$.

Definição 1.59 *Seja $N : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ um vetor normal unitário de γ em $s \in I$ ortonormal a $T(s)$ com $k(s) > 0$ definido por*

$$N(s) = \frac{T'(s)}{\|T'(s)\|} = \frac{\gamma''(s)}{k(s)}.$$

Se $k(s) = 0, \forall s \in I$, então o vetor normal unitário não é definido, cujo traço da curva é uma reta, sendo introduzida a seguinte proposição:

Proposição 1.60 *Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco. Então, $\alpha(I)$ é um segmento de reta se, e só se, $k(s) = 0, \forall s \in I$.*

Demonstração: Ver em Ketj Teneblat [22], página 62. □

A reta normal a γ em $s_0 \in I$ é a reta que passa no ponto $\gamma(s_0)$ na direção de $N(s_0)$ dada por

$$n(\lambda) = \gamma(s_0) + \lambda N(s_0), \lambda \in \mathbb{R}.$$

Para cada $s \in I$ há um plano que contem os vetores tangente e normal, visto que são linearmente independentes.

Definição 1.61 (Plano Osculador) *Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco. O plano osculador de γ em $s \in I$ é um plano que passa em $\gamma(s)$ e é paralelo aos vetores tangente $T(s)$ e normal $N(s)$.*

Ao longo da curva γ considera-se dois planos osculadores π_1 e π_2 não paralelos que passam nos pontos $\gamma(s)$ e $\gamma(s+h)$ com $s, s+h \in I$, e θ o ângulo formado entre os respectivos planos osculadores, respetivamente.

A direção do plano osculador varia ao longo da curva γ , uma vez que a direção do vetor tangente também varia. Esta variação corresponde à variação do ângulo θ , e a direção a um vetor perpendicular ao plano osculador.

Definição 1.62 (Vetor Binormal) *Seja $B : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ um vetor binormal unitário de γ em $s \in I$ dado por*

$$B(s) = T(s) \wedge N(s).$$

Onde \wedge representa o produto externo.

Desta forma, θ pode ser visto como o ângulo formado pelos dois vetores binormais $B(s)$ e $B(s+h)$, $s+h \in I$, cuja a primeira derivada de B mede a variação do ângulo θ formado entre o plano osculador com os planos osculadores vizinhos em s .

Em cada $s \in I$ é associada uma base ortonormada $\{T(s), N(s), B(s)\}$ com orientação positiva, sendo designada como o triedro de Frenet de γ em s , isto é,

$$T(s) = N(s) \wedge B(s), \quad N(s) = B(s) \wedge T(s), \quad B(s) = T(s) \wedge N(s).$$

Como $T(s)$, $N(s)$ e $B(s)$ são funções diferenciáveis de classe C^1 , para cada $s \in I$ é possível escrever os vetores $T'(s)$, $N'(s)$ e $B'(s)$ como combinações lineares de $T(s)$, $N(s)$ e $B(s)$.

Assim sendo, ao longo da curva podemos medir o quanto varia o triedro de Frenet, cujas derivadas dos respectivos vetores permitem calcular as equações de Frenet.

Uma vez que $\|T(s)\| = 1$, implica que $T'(s)$ é ortogonal a $T(s)$, como consta no Lema 1.33. Então temos

$$T'(s) = k(s)N(s).$$

Por último, como $\|B(s)\| = 1$, temos $B'(s)$ ortogonal a $B(s)$, como consta no Lema 1.33. Por conseguinte, usando a regra de derivação do produto externo sobre $B(s) = T(s) \wedge N(s)$, obtemos

$$\begin{aligned} B'(s) &= T'(s) \wedge N(s) + T(s) \wedge N'(s) \\ &= k(s)N(s) \wedge N(s) + T(s) \wedge N'(s) \\ &= T(s) \wedge N'(s). \end{aligned}$$

Logo, $B'(s)$ é paralelo a $N(s)$, ou seja, é perpendicular aos vetores tangente e binormal.

Definição 1.63 (Torção) *Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco com $k(s) > 0$, $\forall s \in I$. O número real $\tau(s)$ definido por*

$$B'(s) = -\tau(s)N(s) \tag{1.10}$$

é denominado por torção de γ em s .

Na definição acima temos a torção dada por

$$\tau(s) = -\langle B'(s), N(s) \rangle. \tag{1.11}$$

Por fim, como $N(s)$ é unitário e perpendicular aos vetores $B(s)$ e $T(s)$, temos $N(s) = B(s) \wedge T(s)$. Derivando-o, obtemos

$$\begin{aligned} N'(s) &= B(s) \wedge T'(s) + B'(s) \wedge T(s) \\ &= [B(s) \wedge k(s)N(s)] + [-\tau(s)N(s) \wedge T(s)] \\ &= k(s)[B(s) \wedge N(s)] - \tau(s)[N(s) \wedge T(s)] \\ &= -k(s)[N(s) \wedge B(s)] + \tau(s)[T(s) \wedge N(s)] \\ &= -k(s)T(s) + \tau(s)B(s). \end{aligned}$$

Resumidamente, estas derivadas são representadas pela seguinte definição:

Definição 1.64 (Equações de Frenet em \mathbb{R}^3) *Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco, tal que $k(s) > 0$, $\forall s \in I$. Então, para cada $s \in I$ temos as equações de Frenet de γ definidas por*

$$\begin{aligned} T'(s) &= k(s)N(s), \\ N'(s) &= -k(s)T(s) + \tau(s)B(s), \\ B'(s) &= -\tau(s)N(s). \end{aligned}$$

Estas equações poderão ainda ser representadas de outra forma, nomeadamente na forma de equação matricial, tendo uma matriz 3×3 anti-simétrica, isto é,

$$\begin{bmatrix} T'(s) & N'(s) & B'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T(s) & N(s) & B(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -k(s) & 0 \\ k(s) & 0 & -\tau(s) \\ 0 & \tau(s) & 0 \end{bmatrix}.$$

Observa-se que o sinal da torção não depende do sentido de N nem da orientação da curva em s .

Assumindo uma mudança do sentido de N , temos $\bar{N} = -N$, então

$$\bar{B} = T \wedge \bar{N} = T \wedge (-N) = -B$$

. Substituindo em (1.11), obtemos

$$\bar{\tau}(s) = -\langle \bar{B}'(s), \bar{N}(s) \rangle = -\langle -B'(s), -N(s) \rangle = -\langle B'(s), N(s) \rangle = \tau(s).$$

Seguidamente, considerando uma mudança de orientação por $s = -\bar{s} + c$, no qual c é uma constante, e $-\bar{s}$ muda a orientação percorrida ao longo da curva, temos

$$\begin{aligned} \bar{T} &= -T, \\ \bar{B} &= \bar{T} \wedge N = -(T \wedge N) = -B, \\ \frac{d\bar{B}}{d\bar{s}} &= \frac{d\bar{B}}{ds} \frac{ds}{d\bar{s}} = -\frac{dB}{ds}(-1) = \frac{dB}{ds}, \\ \bar{\tau} &= -\left\langle \frac{d\bar{B}}{d\bar{s}}, N \right\rangle = -\left\langle \frac{dB}{ds}, N \right\rangle = \tau. \end{aligned}$$

Observa-se ainda que a torção pode ser positiva, negativa ou nula.

Exemplo 1.65 Determinemos as equações de Frenet e a torção da hélice (Exemplo 1.40) dada por $\gamma(s) = \left(R \cos \frac{s}{\sqrt{R^2 + b^2}}, R \sin \frac{s}{\sqrt{R^2 + b^2}}, b \frac{s}{\sqrt{R^2 + b^2}} \right)$, $s \in]0, \sqrt{R^2 + b^2} 3\pi[$, temos

$$\begin{aligned} T(s) &= \frac{1}{\sqrt{R^2 + b^2}} \left(-R \sin \frac{s}{\sqrt{R^2 + b^2}}, R \cos \frac{s}{\sqrt{R^2 + b^2}}, b \right), \\ N(s) &= \left(-\cos \frac{s}{\sqrt{R^2 + b^2}}, -\sin \frac{s}{\sqrt{R^2 + b^2}}, 0 \right), \\ B(s) &= \frac{1}{\sqrt{R^2 + b^2}} \left(b \sin \frac{s}{\sqrt{R^2 + b^2}}, -b \cos \frac{s}{\sqrt{R^2 + b^2}}, R \right), \\ N'(s) &= \frac{1}{\sqrt{R^2 + b^2}} \left(\sin \frac{s}{\sqrt{R^2 + b^2}}, -\cos \frac{s}{\sqrt{R^2 + b^2}}, 0 \right), \\ T'(s) &= \underbrace{\frac{R}{R^2 + b^2}}_{k(s)} \underbrace{\left(-\cos \frac{s}{\sqrt{R^2 + b^2}}, -\sin \frac{s}{\sqrt{R^2 + b^2}}, 0 \right)}_{N(s)}, \\ B'(s) &= -\underbrace{\frac{b}{R^2 + b^2}}_{\tau(s)} \underbrace{\left(-\cos \frac{s}{\sqrt{R^2 + b^2}}, -\sin \frac{s}{\sqrt{R^2 + b^2}}, 0 \right)}_{N(s)}. \end{aligned}$$

Logo, a curvatura é uma função constante e positiva em s , sendo que através da equação (1.2) temos

$$k(s) = \frac{R}{R^2 + b^2}.$$

No que concerne à torção, é verificado que esta apresenta ser constante e negativa se $b > 0$; ou, positiva se $b < 0$ para $\forall s \in I$, sendo que através da equação (1.11) temos

$$\tau(s) = \frac{b}{R^2 + b^2}.$$

Na Figura 1.21 ilustramos o triedro de Frenet nos pontos $\gamma(2.1\pi)$ e $\gamma(\frac{7\pi}{30})$ com $R = 1$ e $b = 0.08$.

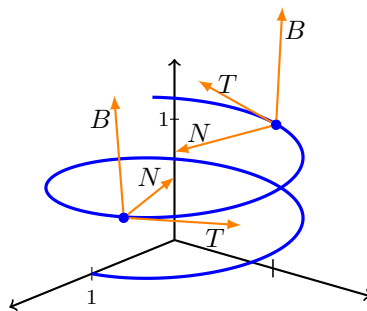


Figura 1.21: Triedro de Frenet da Hélice

Note-se que ao considerar uma circunferência dada por $\gamma(s) = (\cos(s), \sin(s), 0)$, e uma hélice por $\gamma(s) = (0.5 \cos(s), 0.5 \sin(s), 0.5s)$, apesar destas curvas apresentarem a mesma curvatura (igual a um), observou-se que a sua forma é completamente diferente. Isto ocorre devido ao facto da circunferência estar contida no plano $z = 0$, e à tendência da hélice a afastar-se desse plano. Salienta-se ainda que não é possível a transformação de uma curva em outra através da translação ou rotação.

Recorrendo à torção para verificar se a curva está contida num plano, observa-se que a torção da hélice é igual a um, enquanto que na circunferência, esta é nula, dado que $B(s) = (0, 0, 1)$, logo $B'(s) = (0, 0, 0)$ implica $\tau(s) = 0$.

Entretanto, determinemos a torção sobre curvas regulares que não estejam necessariamente parametrizadas pelo comprimento de arco, através da seguinte proposição:

Proposição 1.66 *Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular parametrizada por um parâmetro arbitrário t , dada por $\gamma(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$. Então em $t \in I$ temos a curvatura $k(t)$ e a torção $\tau(t)$ dadas por*

$$k(t) = \frac{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3}, \quad \tau(t) = \frac{\langle \gamma'(t) \wedge \gamma''(t), \gamma'''(t) \rangle}{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|^2}.$$

Demonstração: Seja $\Gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma reparametrização de γ pelo comprimento de arco, ou seja, $\Gamma(s(t)) = \gamma(t)$. Primeiramente pretende-se determinar a curvatura e posteriormente a torção.

Através da definição 1.44, a curvatura é dada por

$$k(t) = k(s(t)) = \|\Gamma''(s(t))\|.$$

Usando a regra da cadeia, obtemos

$$\frac{d\Gamma}{ds}s'(t) = \gamma'(t), \quad (1.12)$$

$$\frac{d^2\Gamma}{ds^2}(s'(t))^2 + \frac{d\Gamma}{ds}s''(t) = \gamma''(t). \quad (1.13)$$

Como $s'(t) > 0$ é uma função injetiva, então $s'(t) = \|\gamma'(t)\|$. Derivando-o novamente,

$$\begin{aligned} s''(t) &= \frac{\langle \gamma''(t), \gamma'(t) \rangle + \langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle}{2\sqrt{\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle}} \\ &= \frac{\langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle}{\|\gamma'(t)\|}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \gamma'(t) \wedge \gamma''(t) &= \left[\frac{d\Gamma}{ds}s'(t) \right] \wedge \left[\frac{d^2\Gamma}{ds^2}(s'(t))^2 + \frac{d\Gamma}{ds}s''(t) \right] \\ &= \left[\frac{d\Gamma}{ds}\|\gamma'(t)\| \right] \wedge \left[\frac{d^2\Gamma}{ds^2}\|\gamma'(t)\|^2 + \frac{d\Gamma}{ds} \frac{\langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle}{\|\gamma'(t)\|} \right] \\ &= \frac{d\Gamma}{ds}\|\gamma'(t)\| \wedge \frac{d^2\Gamma}{ds^2}\|\gamma'(t)\|^2 + \frac{d\Gamma}{ds}\|\gamma'(t)\| \wedge \frac{d\Gamma}{ds} \frac{\langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle}{\|\gamma'(t)\|} \\ &= \|\gamma'(t)\|^3 \left[\frac{d\Gamma}{ds} \wedge \frac{d^2\Gamma}{ds^2} \right] + \|\gamma'(t)\| \langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle \left[\frac{d\Gamma}{ds} \wedge \frac{d\Gamma}{ds} \right] \\ &= \|\gamma'(t)\|^3 \left[\frac{d\Gamma}{ds} \wedge \frac{d^2\Gamma}{ds^2} \right]. \end{aligned}$$

Através de (1.12) e (1.13), temos que

$$\frac{\Gamma}{ds}(s(t)) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}, \quad (1.14)$$

$$\frac{d^2\Gamma}{ds^2}(s(t)) = \frac{\gamma''(t)\|\gamma'(t)\|^2 - \gamma'(t)\langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle}{\|\gamma'(t)\|^4}, \quad (1.15)$$

obtendo

$$\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\| = \|\gamma'(t)\|^3 \left\| \frac{d\Gamma^2}{ds^2} \right\|.$$

Como consta na proposição 1.33, $\|\Gamma'(s)\| = 1$, temos $\langle \Gamma'(s), \Gamma''(s) \rangle = 0$. Portanto, a curvatura de γ em t é dada por

$$k(t) = k(s(t)) = \left\| \frac{d\Gamma^2}{ds^2} \right\| = \frac{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3}. \quad (1.16)$$

Por fim, para determinar a expressão da torção, recorre-se à equação (1.11) definida por

$$\tau(t) = \tau(s(t)) = -\langle B'(s(t)), N(s(t)) \rangle .$$

Como os vetores normal e binormal são dados por

$$\begin{aligned} N(t) &= N(s(t)) = \frac{1}{k(s)} T'(s) = \frac{1}{k(s(t))} \frac{d^2\Gamma}{ds^2}(s(t)), \\ B(t) &= B(s(t)) = T(s) \wedge N(s) = \frac{d\Gamma}{ds}(s(t)) \wedge N(s(t)), \end{aligned}$$

usando (1.14), (1.15) e (1.16), e substituindo nas duas expressões acima, temos

$$\begin{aligned} N(s(t)) &= \frac{\|\gamma'(t)\|^3}{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|} \frac{\gamma''(t)\|\gamma'(t)\|^2 - \gamma'(t)\langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle}{\|\gamma'(t)\|^4} \\ &= \frac{\gamma''(t)\|\gamma'(t)\|^2 - \gamma'(t)\langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle}{\|\gamma'(t)\| \|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}, \\ B(s(t)) &= \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|} \wedge \frac{\gamma''\|\gamma'\|^2 - \gamma'\langle \gamma', \gamma'' \rangle}{\|\gamma'\| \|\gamma' \wedge \gamma''\|} \\ &= \frac{\|\gamma'\|^2[\gamma' \wedge \gamma''] - \|\gamma'' \wedge \gamma'\|[\gamma' \wedge \gamma']}{\|\gamma'\|^2 \|\gamma' \wedge \gamma''\|} \\ &= \frac{\gamma' \wedge \gamma''}{\|\gamma' \wedge \gamma''\|}. \end{aligned}$$

Derivando a última igualdade em relação a t , temos

$$B'(s(t))s'(t) = \frac{d}{dt} \frac{\gamma' \wedge \gamma''}{\|\gamma' \wedge \gamma''\|},$$

de modo que

$$B'(s(t)) = \frac{1}{\|\gamma'\|} \frac{d}{dt} \frac{\gamma' \wedge \gamma''}{\|\gamma' \wedge \gamma''\|}.$$

Como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[\gamma' \wedge \gamma''] &= \gamma'' \wedge \gamma'' + \gamma' \wedge \gamma''' = \gamma' \wedge \gamma''', \\ \frac{d}{dt} \frac{1}{\|\gamma' \wedge \gamma''\|} &= -\frac{\langle \gamma' \wedge \gamma'', \gamma' \wedge \gamma''' \rangle}{\|\gamma' \wedge \gamma''\|^3}, \end{aligned}$$

substituindo em $B'(s(t))$ obtemos

$$B'(s(t)) = \frac{1}{\|\gamma'\|} \left[\frac{\gamma' \wedge \gamma'''}{\|\gamma' \wedge \gamma''\|} - \frac{\langle \gamma' \wedge \gamma'', \gamma' \wedge \gamma''' \rangle [\gamma' \wedge \gamma'']}{\|\gamma' \wedge \gamma''\|^3} \right].$$

Portanto, a torção de γ em t é dada por

$$\begin{aligned} \tau(t) &= -\langle B'(s(t)), N(s(t)) \rangle \\ &= -\frac{1}{\|\gamma'\|} \left\langle \frac{\gamma' \wedge \gamma'''}{\|\gamma' \wedge \gamma''\|} - \frac{\langle \gamma' \wedge \gamma'', \gamma' \wedge \gamma''' \rangle [\gamma' \wedge \gamma'']}{\|\gamma' \wedge \gamma''\|^3}, \frac{\gamma''\|\gamma'\|^2 - \gamma'\langle \gamma', \gamma'' \rangle}{\|\gamma'\| \|\gamma' \wedge \gamma''\|} \right\rangle \\ &= -\frac{1}{\|\gamma'\|} \left\langle \frac{\gamma' \wedge \gamma'''}{\|\gamma' \wedge \gamma''\|}, \frac{\gamma''\|\gamma'\|^2}{\|\gamma'\| \|\gamma' \wedge \gamma''\|} \right\rangle \\ &= \frac{\langle \gamma'(t) \wedge \gamma''(t), \gamma'''(t) \rangle}{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|^2}. \end{aligned}$$

□

Exemplo 1.67 Determinemos a curvatura e a torção da hélice (Exemplo 1.40) dada por $\gamma(t) = (R \cos(t), R \sin(t), bt)$, $t \in]0, 3\pi[$. Temos

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= (-R \sin(t), R \cos(t), b), \\ \|\gamma'(t)\| &= \sqrt{R^2 + b^2}, \\ \gamma''(t) &= (-R \cos(t), -R \sin(t), 0), \\ \gamma'''(t) &= (R \sin(t), -R \cos(t), 0),\end{aligned}$$

segue que

$$k_{\pm}(t) = \frac{R}{R^2 + b^2}, \quad \tau(t) = \frac{b}{R^2 + b^2},$$

obtivemos as mesmas expressões que foram determinadas no exemplo 1.65. Portanto, a curvatura e torção são funções constantes para $\forall t \in I$. Além disso, os vetores γ' e γ'' são ortogonais mutuamente.

Exemplo 1.68 Determinemos a curvatura e a torção da Viviani (Exemplo 1.13) parametrizada por $\gamma(t) = (\sin(t) \cos(t), \sin^2(t), \cos(t))$, $t \in]0, 2\pi[$. Temos

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= (2 \cos^2(t) - 1, 2 \cos(t) \sin(t), -\sin(t)), \\ \|\gamma'(t)\| &= \sqrt{1 + \sin^2(t)} \neq 0, \\ \gamma''(t) &= (-4 \sin(t) \cos(t), 2(2 \cos^2(t) - 1), -\cos(t)), \\ \gamma'''(t) &= (8 \sin^2(t) - 4, -8 \sin(t) \cos(t), \sin(t)).\end{aligned}$$

Verifica-se que é regular e não parametrizada pelo comprimento de arco para $\forall t \in I$. Porém, não é possível reparametrizá-la porque $\|\gamma'(t)\|$ não tem uma primitiva imediata. Temos

$$k(t) = \frac{\sqrt{5 + 3 \sin^2(t)}}{(1 + \sin^2(t))^{\frac{3}{2}}}, \quad \tau(t) = \frac{-6 \sin(t)}{5 + 3 \sin^2(t)},$$

portanto, a curvatura é uma função positiva e periódica para $\forall t \in I$, sendo que nos pontos $\gamma(0)$, $\gamma(\pi)$ e $\gamma(2\pi)$ atingem máxima curvatura, enquanto que nos pontos $\gamma\left(\frac{\pi}{2}\right)$ e $\gamma\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ atingem mínima curvatura.

Adicionalmente, a torção é uma função periódica para $\forall t \in I$, no qual atinge um valor máximo em $t = \frac{3\pi}{2}$, e mínimo em $t = \frac{\pi}{2}$, conforme podemos constatar através da Figura 1.22.

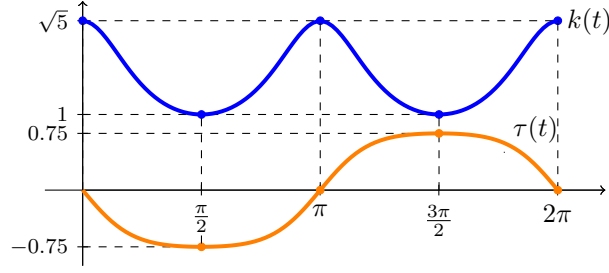


Figura 1.22: Curvatura e Torção da curva Viviani

1.2.4 Componentes Tangencial e Normal do Vetor Aceleração

Quando uma partícula descreve a trajetória de uma curva, a sua aceleração é composta por duas componentes, estando relacionadas com as equações de Frenet.

Consideremos $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva regular parametrizada por um parâmetro arbitrário t . O vetor de aceleração é a derivada do vetor tangente $\gamma'(t)$, isto é,

$$a(t) = \gamma''(t), \quad t \in I,$$

no qual é constituído por duas componentes, a aceleração tangencial a_T e a aceleração normal a_N :

$$a(t) = a_T(t) + a_N(t).$$

O vetor $\gamma'(t)$ é paralelo a $T(t)$, dado que a primeira derivada de $\gamma(t) = \beta(s(t))$ apresenta a seguinte expressão

$$\gamma'(t) = \beta'(s(t))s'(t) = T_\beta(s(t))\|\gamma'(t)\| = \mathbf{v}(t)T(t),$$

onde $\beta(s(t))$ é uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco, e $\mathbf{v}(t) = \|\gamma'(t)\| = s'(t)$. Aplicando a regra da cadeia obtemos

$$a(t) = \gamma''(t) = \mathbf{v}'(t)T(t) + \mathbf{v}(t)T'(t) = \underbrace{\mathbf{v}'(t)T(t)}_{a_T(t)} + \underbrace{\mathbf{v}^2(t)k(t)N(t)}_{a_N(t)},$$

dado que nas equações de Frenet temos $T'(t) = (T \circ s)'(t) = s'(t)T'(s(t)) = \mathbf{v}(t)k(t)N(t)$.

Observa-se que γ'' é descrito como uma combinação linear dos vetores $T(t)$ e $N(t)$, e não depende do vetor binormal, uma vez que o vetor aceleração está contido no plano osculador.

A componente aceleração tangencial a_T corresponde à projeção de $\gamma''(t)$ na direção de $\gamma'(t)$:

$$a_T(t) = \text{proj}_{\gamma'(t)}\gamma''(t) = \frac{\langle \gamma''(t), \gamma'(t) \rangle \gamma'(t)}{\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle},$$

e a componente de aceleração normal a_N à diferença entre os vetores $a(t)$ e $a_T(t)$:

$$\begin{aligned} a_N(t) &= a(t) - a_T(t) = \gamma''(t) - \frac{\langle \gamma''(t), \gamma'(t) \rangle \gamma'(t)}{\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle} \\ &= \frac{\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle \gamma''(t) - \langle \gamma''(t), \gamma'(t) \rangle \gamma'(t)}{\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle}. \end{aligned}$$

Portanto, a componente tangencial mede a taxa de variação da velocidade escalar de γ' , enquanto que a componente normal mede a taxa de variação da direção de γ' .

Exemplo 1.69 Na parábola $\gamma(t) = (t, t^2)$, $t \in]-2, 2[$ observamos que existe aceleração normal e tangencial. Deste modo, considerando que a velocidade escalar de γ' não é constante para $\forall t \in I$, dado que

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= (1, 2t), \\ \gamma''(t) &= (0, 2), \\ \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle &= 1 + 4t^2, \\ \|\gamma'(t)\| &= \sqrt{1 + 4t^2}.\end{aligned}$$

As equações da aceleração tangencial e normal, respetivamente, são dadas por

$$a_T(t) = \frac{4t}{1 + 4t^2}(1, 2t), \quad a_N(t) = \frac{1}{1 + 4t^2}(-4t, 2),$$

logo, o vetor aceleração de γ é dado por

$$a(t) = a_T(t) + a_N(t) = \frac{2}{1 + 4t^2}(0, 1 + 4t^2) = (0, 2),$$

como podemos verificar através das componentes de aceleração que passam no ponto $P = (1, 1)$, conforme a Figura 1.23.

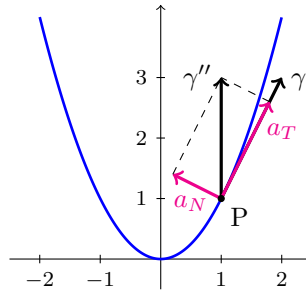


Figura 1.23: Componentes de aceleração sobre a Parábola

Por outro lado, uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco não tem aceleração tangencial a_T , uma vez que a velocidade escalar do vetor tangente é constante, traduzindo-se num vetor de aceleração normal paralelo ao vetor normal unitário.

Capítulo 2

Obtenção de Novas Curvas a Partir de Outras Curvas

Neste capítulo serão definidos vários métodos para construir novas curvas a partir de uma curva original, como a construção da evoluta e involuta de uma curva plana ou espacial estudadas por Huygens; a pedal, estudada por Maclaurin; a conchóide descoberta por Nicomedes e com o propósito de resolver dois problemas, como a duplicação do cubo e a Trissecação de ângulo; e a cissóide descoberta por Diócles, com o objetivo de resolver a duplicação do cubo.

2.1 Evoluta

2.1.1 Curvas Planas

Dada $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco com $k_{\pm}(s) \neq 0, \forall s \in I$.

Em cada $s \in I$, existem muitas circunferências tangentes, à curva no ponto $\gamma(s)$. No caso de a curvatura com sinal ser não nula, o círculo osculador é o círculo tangente, que tem a mesma curvatura que a curva γ , no ponto $\gamma(s)$.

Definição 2.1 (Círculo Osculador) *Seja $\gamma(s) : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco s , tal que $k_{\pm}(s) \neq 0, \forall s \in I$. A quantidade $\rho(s) = \frac{1}{k_{\pm}(s)}$ é o raio de curvatura de γ em s , logo o círculo de raio $\rho(s)$ e centro*

$$C(s) = \gamma(s) + \frac{1}{k_{\pm}(s)}N(s)$$

é chamado de círculo osculador, cujo centro $C(s)$ é denominado por centro de curvatura.

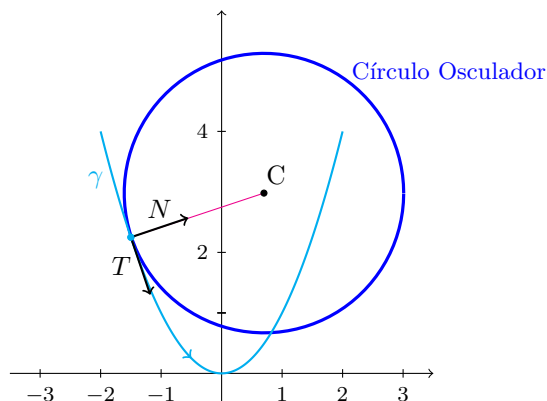


Figura 2.1: Círculo Osculador

O conjunto de todos os centros de curvatura descrevem uma nova curva, designada por evoluta.

Definição 2.2 (Evoluta de uma curva plana) *Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular. A evoluta de γ é uma curva $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por*

$$\beta(t) = \gamma(t) + \frac{1}{k_{\pm}(t)}N(t), t \in I.$$

Proposição 2.3 *Sejam $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada regular de classe C^3 e $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ a evoluta de γ . Então as retas tangentes a β são ortogonais a γ .*

Demonstração: Seja γ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco, e $T(s)$ e $N(s)$ os vetores tangente e normal no ponto $\gamma(s)$, respetivamente, de modo a que $\{T(s), N(s)\}$ seja uma base ortonormada positiva em \mathbb{R}^2 . A evoluta de γ é parametrizada por

$$\beta(s) = \gamma(s) + \frac{1}{k_{\pm\gamma}(s)}N(s).$$

No qual,

$$\begin{aligned} \beta'(s) &= \gamma'(s) + \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{k_{\pm\gamma}(s)} \right) N(s) + \frac{1}{k_{\pm\gamma}(s)} \frac{d}{ds} (N(s)) \\ &= T_{\gamma}(s) + \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{k_{\pm\gamma}(s)} \right) N(s) + \frac{1}{k_{\pm\gamma}(s)} (-k_{\pm\gamma}(s) T_{\gamma}(s)) \\ &= \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{k_{\pm\gamma}(s)} \right) N(s). \end{aligned}$$

Portanto, o vetor tangente a β e o vetor normal N de γ são colineares. □

Exemplo 2.4 A elipse centrada na origem com semieixos $a, b > 0$ definida por

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (a \cos(t), b \sin(t)). \end{aligned}$$

Verifica-se que a curva é regular e não parametrizada pelo comprimento de arco, dado que $\gamma'(t) = (-a \sin(t), b \cos(t)) \neq (0, 0)$, logo $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t)} \neq 1$. Temos

$$\begin{aligned}\gamma''(t) &= (-a \cos(t), -b \sin(t)), \\ N(t) &= \frac{(-b \cos(t), -a \sin(t))}{\sqrt{(a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t))}}, \\ k_{\pm}(t) &= \frac{(-b \sin(t))(-a \sin(t)) - (-a \cos(t))b \cos(t)}{(-a \sin(t))^2 + (b \cos(t))^2} = \frac{ab}{(a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t))} \neq 0.\end{aligned}$$

Então a evoluta da elipse é dada por

$$\begin{aligned}\beta(t) &= (a \cos(t), b \sin(t)) + \frac{(a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t))^{\frac{3}{2}}}{ab\sqrt{(a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t))}}(-b \cos(t), -a \sin(t)) \\ &= \left(\frac{(a^2 - b^2) \cos^3(t)}{a}, \frac{(b^2 - a^2) \sin^3(t)}{b} \right), t \in [0, 2\pi].\end{aligned}$$

O traço da evoluta descreve uma curva similar à da astróide, como apresenta a Figura 2.2 com $a = 2$ e $b = 1$. A evoluta é uma curva regular por partes com quatro pontos singulares em $t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$ e $\frac{3\pi}{2}$. De facto, tendo em conta que

$$\beta'(t) = \left(-3 \frac{(a^2 - b^2) \cos^2(t) \sin(t)}{a}, 3 \frac{(b^2 - a^2) \sin^2(t) \cos(t)}{b} \right)$$

e igualando a zero, obtemos os pontos singulares através do seguinte sistema de equações

$$\beta'(t) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-3(a^2 - b^2) \cos^2(t) \sin(t)}{a} = 0 \\ \frac{3(b^2 - a^2) \sin^2(t) \cos(t)}{b} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}.$$

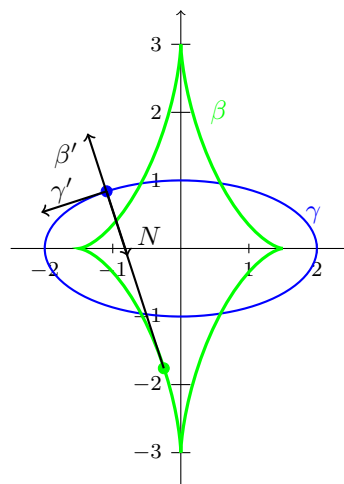


Figura 2.2: Evoluta da Elipse

Por fim, a parametrização de γ é uma circunferência se $a = b$. A evoluta desta curva coincide com o centro de circunferência, cujo traço é um ponto.

Exemplo 2.5 Determinemos a evoluta da cicloide (Exemplo 1.58) parametrizada por $\gamma(t) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t))$, $t \in]0, 4\pi[$. Recorrendo à Proposição 1.55, obtemos

$$N(t) = \frac{(-\sin(t), 1 - \cos(t))}{\sqrt{2(1 - \cos(t))}},$$

$$k_{\pm}(t) = \frac{\cos(t) - 1}{\sqrt{(2(1 - \cos(t)))^3}} \neq 0.$$

Assim, a evoluta da cicloide é dada por

$$\begin{aligned} \beta(t) &= (t - \sin(t), 1 - \cos(t)) + \frac{1}{\frac{\cos(t) - 1}{\sqrt{(2(1 - \cos(t)))^3}}} \frac{(-\sin(t), 1 - \cos(t))}{\sqrt{2(1 - \cos(t))}} \\ &= (t + \sin(t), \cos(t) - 1), t \in]0, 4\pi[. \end{aligned}$$

A qual descreve o mesmo traço, como apresenta a Figura 2.3. Verifica-se que é isométrica à curva inicial através de uma translação de -2 no eixo Oy e $-\pi$ no eixo Ox , visto que

$$\begin{aligned} \gamma(t + \pi) - (\pi, 2) &= (t + \pi - \sin(t + \pi) - \pi, 1 - \cos(t + \pi) - 2) \\ &= (t + \sin(t), \cos(t) - 1). \end{aligned}$$

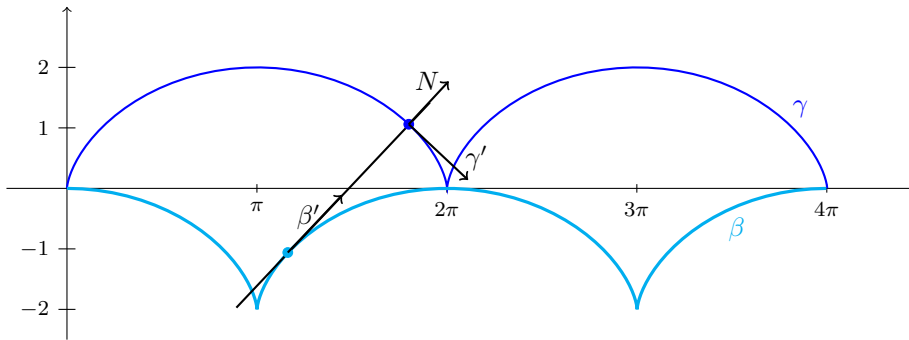


Figura 2.3: Evoluta da Cicloide

Generalizando a parametrização da cicloide por $\gamma(t) = (Rt - R \sin(t), R - R \cos(t))$ com $R > 0$, logo a evoluta de γ é dada por $\beta(t) = (Rt + R \sin(t), R \cos(t) - R)$, $\forall t \in I$.

Exemplo 2.6 Determinemos a evoluta da espiral logarítmica (Exemplo 1.57) parametrizada por $\gamma(t) = (ae^{bt} \cos(t), ae^{bt} \sin(t))$, $t \in]0, 4\pi[$. Recorrendo à proposição 1.55, obtemos

$$N(t) = \frac{(-\cos(t) - b \sin(t), b \cos(t) - \sin(t))}{\sqrt{b^2 + 1}},$$

$$k_{\pm}(t) = \frac{1}{ae^{bt} \sqrt{b^2 + 1}}.$$

Assim, a evoluta de γ é dada por

$$\begin{aligned} \beta(t) &= (ae^{bt} \cos(t), ae^{bt} \sin(t)) + \frac{1}{\frac{1}{ae^{bt} \sqrt{b^2 + 1}}} \frac{(-\cos(t) - b \sin(t), b \cos(t) - \sin(t))}{\sqrt{b^2 + 1}} \\ &= (-abe^{bt} \sin(t), abe^{bt} \cos(t)), t \in]0, 4\pi[. \end{aligned}$$

A evoluta de γ obtém-se através da curva inicial com uma rotação de 90 graus e uma homotetia de b , representada na forma de equação matricial

$$\beta = b \begin{bmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}) & -\sin(\frac{\pi}{2}) \\ \sin(\frac{\pi}{2}) & \cos(\frac{\pi}{2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ae^{bt} \cos(t) \\ ae^{bt} \sin(t) \end{bmatrix},$$

de acordo com a evoluta de γ com $a = 5$ e $b = 0.15$ na Figura 2.4.

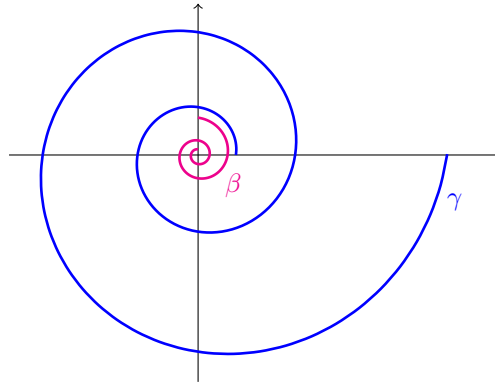


Figura 2.4: Evoluta da Espiral Logarítmica

2.1.2 Curvas Espaciais

Dada $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco com $k(s) \neq 0, \forall s \in I$. Uma curva espacial contém infinitas retas perpendiculares em s , contidas num plano gerado pelos vetores normal e binormal unitários, sendo, conseqüentemente, obtidas por uma combinação linear dos vetores normal e binormal.

Definição 2.7 (Evoluta de uma curva espacial) *Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular, de classe C^3 , parametrizada pelo comprimento de arco e com curvatura $k(s) \neq 0, \forall s \in I$. Uma evoluta de γ é uma curva $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, tal que, para $\forall s \in I$, a reta tangente em $\beta(s)$ é ortogonal a γ em s .*

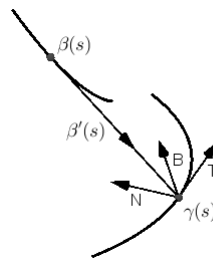


Figura 2.5: Evoluta de uma curva espacial.

Proposição 2.8 *Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco. Uma evoluta de γ é uma curva $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por*

$$\beta(s) = \gamma(s) + \frac{1}{k(s)}N(s) + \frac{1}{k(s)} \cot \left(\int \tau(s) ds + C \right) B(s), s \in I.$$

Demonstração: Consideremos $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco, tal que $k(s) \neq 0, \forall s \in I$, e $\{T, N, B\}$ o triedro de Frenet de γ em s . A evoluta β de γ é obtida quando a reta tangente a β intersesta ortogonalmente no ponto $\gamma(s)$, obtendo a seguinte expressão

$$\begin{aligned}\beta(s) &= \gamma(s) + a(s)T(s) + b(s)N(s) + c(s)B(s) \\ &= \gamma(s) + b(s)N(s) + c(s)B(s),\end{aligned}\tag{2.1}$$

no qual o segmento de reta $\beta(s) - \gamma(s)$ é ortogonal ao vetor tangente $T(s)$, sendo portanto uma combinação linear dos vetores normal e binormal em s , logo $a(s) = 0$.

Para determinar as funções $b(s)$ e $c(s)$, derivamos a equação (2.1) e recorrendo às equações de Frenet, temos

$$\begin{aligned}\beta'(s) &= \gamma'(s) + b'(s)N(s) + b(s)N'(s) + c'(s)B(s) + c(s)B'(s) \\ &= T + b'N + b(-kT + \tau B) + c'B + c(-\tau N) \\ &= (1 - bk)T + (b' - c\tau)N + (b\tau + c')B,\end{aligned}\tag{2.2}$$

no qual assume-se $\beta'(s)$ paralelo a $\beta(s) - \gamma(s) = bN + cB$, obtendo

$$\begin{aligned}\langle \beta'(s), T(s) \rangle &= 0 \\ \Leftrightarrow \langle (1 - bk)T + (b' - c\tau)N + (b\tau + c')B, T(s) \rangle &= 0 \\ \Leftrightarrow (1 - bk)\langle T, T \rangle + (b' - c\tau)\langle N, T \rangle + (b\tau + c')\langle B, T \rangle &= 0 \\ \Leftrightarrow 1 - bk &= 0 \\ \Leftrightarrow b &= \frac{1}{k},\end{aligned}$$

onde b é o raio do círculo osculador. Seguidamente, substituindo em (2.2), obtemos

$$\begin{aligned}\beta'(s) &= \left(1 - \frac{1}{k}\right)T + (b' - c\tau)N + (b\tau + c')B \\ &= (b' - c\tau)N + (b\tau + c')B.\end{aligned}$$

O segmento $\beta(s) - \gamma(s)$ é paralelo a $\beta'(s)$, então são linearmente dependentes, ou seja,

$$\begin{vmatrix} b & c \\ (b' - c\tau) & (b\tau + c') \end{vmatrix} = b(b\tau + c') - c(b' - c\tau) = 0 \Leftrightarrow c(b' - c\tau) = b(b\tau + c'),$$

e resolvendo em ordem a τ , obtemos

$$\tau = \frac{cb' - bc'}{b^2 + c^2} = -\frac{cb' - bc'}{1 + \left(\frac{c}{b}\right)^2} = \frac{d}{ds} \left(\operatorname{arccot} \left(\frac{c}{b} \right) \right),$$

integrando a igualdade acima, temos

$$\int \tau(s) ds + C = \operatorname{arccot} \left(\frac{c}{b} \right),$$

resolvendo em ordem a c , temos

$$c = b \cot \left(\int \tau(s) ds + C \right).$$

Portanto, cada constante C tem uma evoluta de γ em s dada por

$$\beta(s) = \gamma(s) + \frac{1}{k(s)}N(s) + \frac{1}{k(s)} \cot \left(\int \tau(s) ds + C \right) B(s), s \in I.$$

□

Observação 2.9 Se a curva é plana, então $\tau = 0$ e $C = \frac{\pi}{2}$. Deste modo, temos

$$\beta(s) = \gamma(s) + \frac{1}{k(s)}N(s), \quad (2.3)$$

logo coincide com a equação obtida nas curvas planas, indicando que cada curva plana tem uma evoluta. Por outro lado, existe uma família infinita de evolutas nas curvas espaciais, com $\tau \neq 0$ porque dependem da constante C .

Exemplo 2.10 Determinemos as evolutas da hélice (Exemplo 1.65) parametrizada por $\gamma(s) = \left(R \cos \frac{s}{\sqrt{R^2 + b^2}}, R \sin \frac{s}{\sqrt{R^2 + b^2}}, b \frac{s}{\sqrt{R^2 + b^2}} \right)$, $s \in]0, 2\pi[$ com $R \neq 0$ e $b \neq 0$. Então, para cada C temos a evoluta de γ dada por

$$\begin{aligned} \beta(s) &= \left(R \cos \frac{s}{\sqrt{R^2 + b^2}}, R \sin \frac{s}{\sqrt{R^2 + b^2}}, b \frac{s}{\sqrt{R^2 + b^2}} \right) \\ &+ \frac{1}{|R|} \frac{1}{|R|} \left(-\cos \frac{s}{\sqrt{R^2 + b^2}}, -\sin \frac{s}{\sqrt{R^2 + b^2}}, 0 \right) \\ &\quad \frac{1}{R^2 + b^2} \\ &+ \frac{1}{|R|} \cot \left(\frac{b}{R^2 + b^2} s + C \right) \frac{1}{\sqrt{R^2 + b^2}} \left(b \sin \frac{s}{\sqrt{R^2 + b^2}}, -b \cos \frac{s}{\sqrt{R^2 + b^2}}, R \right) \\ &= \left(-\frac{b^2}{R} \cos \frac{s}{\sqrt{R^2 + b^2}} + \cot \left(\frac{b}{R^2 + b^2} s + C \right) \frac{b\sqrt{R^2 + b^2}}{R} \sin \frac{s}{\sqrt{R^2 + b^2}}, \right. \\ &\quad \left. -\frac{b^2}{R} \sin \frac{s}{\sqrt{R^2 + b^2}} - \cot \left(\frac{b}{R^2 + b^2} s + C \right) \frac{b\sqrt{R^2 + b^2}}{R} \cos \frac{s}{\sqrt{R^2 + b^2}}, \right. \\ &\quad \left. b \frac{s}{\sqrt{R^2 + b^2}} + \cot \left(\frac{b}{R^2 + b^2} s + C \right) \sqrt{R^2 + b^2} \right). \end{aligned}$$

Quando $C = 0$, $R = 1$ e $b = 0.5$, obtemos uma evoluta de γ com cúspide, conforme a Figura 2.6.

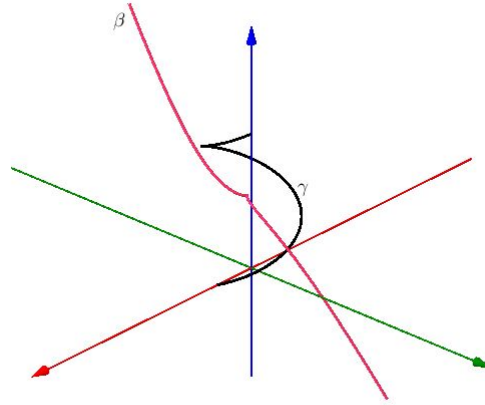


Figura 2.6: Uma evoluta da Hélice

Porém, ao ignorar a terceira parcela da equação da evoluta, obtemos os centros de curvatura que descrevem o mesmo traço da hélice, isto é,

$$\beta_1(s) = \left(-\frac{b^2}{R} \cos \frac{s}{\sqrt{R^2 + b^2}}, -\frac{b^2}{R} \sin \frac{s}{\sqrt{R^2 + b^2}}, b \frac{s}{\sqrt{R^2 + b^2}} \right).$$

Resumindo, os centros de curvatura de γ são representados através da seguinte equação matricial

$$\beta_1(s) = \begin{bmatrix} -\frac{b^2}{R^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{b^2}{R^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \cos \frac{s}{\sqrt{R^2 + b^2}} \\ R \sin \frac{s}{\sqrt{R^2 + b^2}} \\ b \frac{s}{\sqrt{R^2 + b^2}} \end{bmatrix}.$$

Contudo, os centros de curvatura de γ não são evolutas, devido ao vetor normal de γ ser perpendicular ao vetor tangente de β . A Figura 2.7 apresenta três exemplos de centros de curvatura da hélice:

- se $R = b$, temos uma transformação linear através de uma rotação de γ por um ângulo π em torno do eixo Oz ;
- se $R > b$, temos uma transformação linear através de uma homotetia de redução;
- se $b > R$, temos uma transformação linear através de uma homotetia de ampliação.

Note-se que ao aplicar novamente o mesmo procedimento, o conjunto dos centros de curvatura de β_1 representa a curva inicial, isto é,

$$\begin{aligned} \delta(s) &= \left(-\frac{b^2}{-\frac{b^2}{R^2}} \cos \frac{s}{\sqrt{R^2 + b^2}}, -\frac{b^2}{-\frac{b^2}{R^2}} \sin \frac{s}{\sqrt{R^2 + b^2}}, b \frac{s}{\sqrt{R^2 + b^2}} \right) \\ &= \left(R \cos \frac{s}{\sqrt{R^2 + b^2}}, R \sin \frac{s}{\sqrt{R^2 + b^2}}, b \frac{s}{\sqrt{R^2 + b^2}} \right) = \gamma(s). \end{aligned}$$

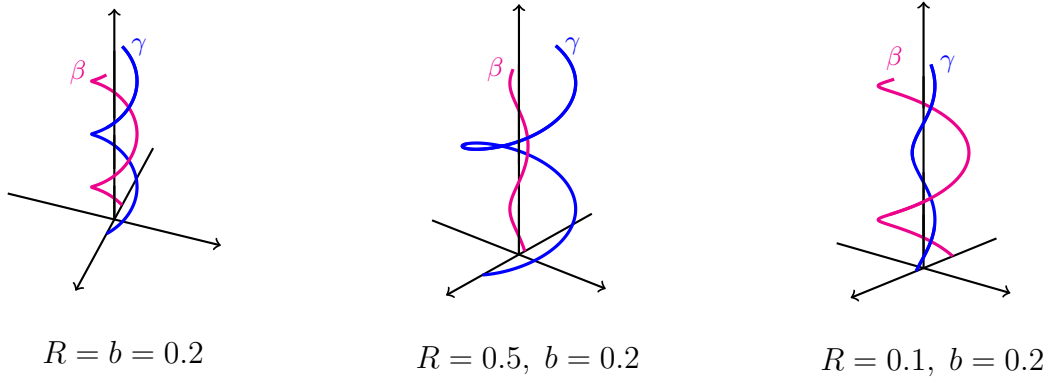


Figura 2.7: Centros de curvatura da Hélice

Contudo, de acordo com Alfred Gray et al. [5], a evoluta de uma curva espacial também poderá ser considerada como “o lugar geométrico dos centros de curvatura esférica”.

Definição 2.11 *Seja $\gamma :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva espacial regular, tal que $k(t_0) \neq 0$ e $\tau(t_0) \neq 0, \forall t_0 \in]a, b[\subset I$. Então a esfera osculadora em $\gamma(t_0)$ é uma esfera com raio*

$$\rho(t_0) = \sqrt{\frac{1}{k^2(t_0)} + \frac{k'(t_0)^2}{\tau(t_0)^2 k(t_0)^4}}$$

e centro

$$\beta(t_0) = \gamma(t_0) + \frac{1}{k(t_0)}N(t_0) - \frac{k'(t_0)}{\|\gamma'(t_0)\|k^2(t_0)\tau(t_0)}B(t_0).$$

Definição 2.12 *Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular espacial. A evoluta de γ é uma curva parametrizada por*

$$\beta(t) = \gamma(t) + \frac{1}{k(t)}N(t) - \frac{k'(t)}{\|\gamma'(t)\|k^2(t)\tau(t)}B(t).$$

No exemplo acima, segundo a definição de Alfred Gray et al. [5], o conjunto dos centros de curvatura em relação a hélice é a evoluta, no qual, esta é única.

2.2 Involuta

Definição 2.13 *Seja $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva parametrizada regular de classe C^3 com $n = \{2, 3\}$. Uma involuta de β é uma curva $\delta : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, tal que, para todo $s \in I$, a reta tangente em $\delta(s)$ é ortogonal à reta tangente a β em s .*

Dada $\beta :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco s com $n = 2, 3, a < c < b$, e um ponto $\delta(s)$ pertencente à involuta δ , cuja reta tangente de $\beta(s)$ intersesta ortogonalmente $\delta(s)$, então o segmento $\delta(s) - \beta(s)$ é proporcional a $T(s) = \beta'(s)$, como apresenta a Figura 2.8.

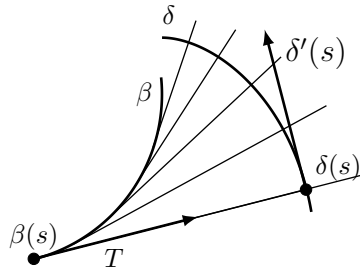


Figura 2.8: Involuta de uma curva regular

Expressando a involuta de β por $\delta(s) = \beta(s) + \lambda(s)T(s)$, segue que o seu vetor tangente

$$\begin{aligned}\delta'(s) &= \beta'(s) + \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)T'(s) \\ &= \beta'(s) + \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)k(s)N(s)\end{aligned}$$

tem de ser ortogonal a $\beta'(s)$, isto é,

$$\begin{aligned}\langle \beta'(s), \delta'(s) \rangle &= \langle \beta'(s), \beta'(s) + \lambda'(s)T(s) + \lambda k(s)N(s) \rangle \\ &= \langle \beta'(s), \beta'(s) \rangle + \langle \beta'(s), \lambda'(s)T(s) \rangle + \langle \beta'(s), \lambda k(s)N(s) \rangle \\ &= 1 + \lambda'(s)\langle \beta'(s), T(s) \rangle + \lambda'(s)k(s)\langle \beta'(s), N(s) \rangle = 1 + \lambda'(s) = 0 \\ \Leftrightarrow \lambda'(s) &= -1.\end{aligned}$$

Integrando a igualdade acima, temos

$$\int_c^s \lambda'(\sigma) d\sigma = \int_c^s -1 d\sigma \Leftrightarrow \lambda(s) = -s + c, \quad c = \text{constante}.$$

Portanto, para cada c temos a involuta de β dada por

$$\delta(s) = \beta(s) + (c - s)\beta'(s),$$

de modo a que exista uma família infinita de involutas, considerando que a involuta de β depende de c .

Quando uma curva regular não está parametrizada pelo comprimento de arco, a sua involuta resulta na seguinte proposição:

Proposição 2.14 *Sejam $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva regular parametrizada por um parâmetro arbitrário t com $n = \{2, 3\}$, e c uma constante real arbitrária. A involuta de β em $t \in I$ a partir de c é uma curva $\delta : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por*

$$\delta(t) = \beta(t) + (c - s(t))T(t).$$

Exemplo 2.15 Determinemos a involuta da circunferência parametrizada por $\beta(t) = (r \cos(t), r \sin(t))$, $t \in]0, 2\pi[$. Temos

$$\begin{aligned}\beta'(t) &= (-r \sin(t), r \cos(t)), & \|\beta'(t)\| &= r, \\ s(t) &= \int_0^t r d\sigma = rt, \\ T(t) &= \frac{(-r \sin(t), r \cos(t))}{r} = (-\sin(t), \cos(t)).\end{aligned}$$

Portanto, a involuta de β é dada por

$$\begin{aligned}\delta(t) &= (r \cos(t), r \sin(t)) + (c - rt)(-\sin(t), \cos(t)) \\ &= (r \cos(t) - (c - rt) \sin(t), r \sin(t) + (c - rt) \cos(t)), \quad \forall t \in \left]0 + \frac{c}{r}, 2\pi + \frac{c}{r} \right[.\end{aligned}$$

Para cada c obtemos uma involuta que se parece com a espiral de Arquimedes, conforme a Figura 2.9.

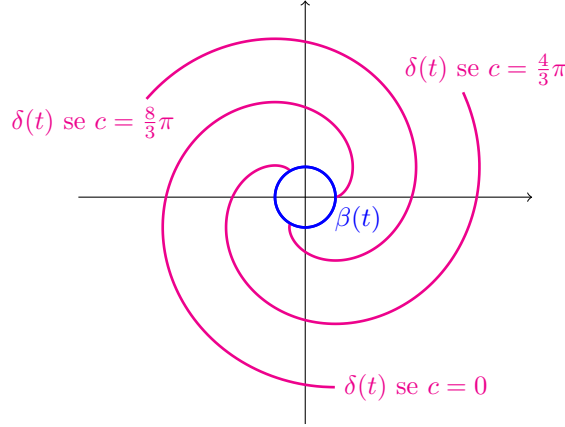


Figura 2.9: Involuta da Circunferência com $r = 2$

Exemplo 2.16 Determinemos a involuta da espiral logarítmica parametrizada por $\beta(t) = (-abe^{bt} \sin(t), abe^{bt} \cos(t))$, $t \in [0, 2\pi]$, esta foi obtida no Exemplo 2.6. Temos

$$\begin{aligned}\beta'(t) &= (abe^{bt}(-b \sin(t) - \cos(t)), abe^{bt}(b \cos(t) - \sin(t))), \\ \|\beta'(t)\| &= abe^{bt} \sqrt{b^2 + 1}, \\ T(t) &= \frac{(-b \sin(t) - \cos(t), b \cos(t) - \sin(t))}{\sqrt{b^2 + 1}}, \\ s(t) &= \int_0^t abe^{b\sigma} \sqrt{b^2 + 1} d\sigma = a\sqrt{b^2 + 1} \int_0^t be^{b\sigma} d\sigma = a\sqrt{b^2 + 1}[e^{bt} - 1].\end{aligned}$$

Portanto, a involuta δ de β é dada por

$$\delta(t) = \beta(t) + (c - a\sqrt{b^2 + 1}(e^{bt} - 1)) \frac{(-b \sin(t) - \cos(t), b \cos(t) - \sin(t))}{\sqrt{b^2 + 1}}, t \in I,$$

cujos traços descrevem uma espiral logarítmica. Quando $c = -a\sqrt{b^2 + 1}$, obtemos a parametrização original exposta no exemplo 1.31. Escolhendo $a = 5$ e $b = 0.15$, obtemos duas involutas com $c = \{-2, -5\sqrt{0.15^2 + 1}\}$, de acordo com a Figura 2.10.

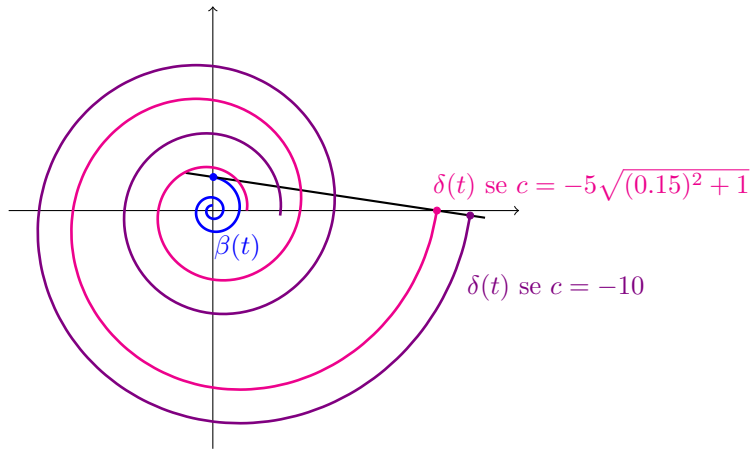


Figura 2.10: Involuta da Espiral Logarítmica

Exemplo 2.17 Determinemos a involuta da hélice parametrizada por $\beta(t) = (R \cos(t), R \sin(t), bt)$, $t \in]0, 2\pi[$ e $R \neq 0$. Temos

$$\begin{aligned} \beta'(t) &= (-R \sin(t), R \cos(t), b), \\ \|\beta'(t)\| &= \sqrt{R^2 + b^2}, \\ T(t) &= \frac{(-R \sin(t), R \cos(t), b)}{\sqrt{R^2 + b^2}}, \\ s(t) &= \sqrt{R^2 + b^2}t. \end{aligned}$$

Portanto, a involuta de δ é dada por

$$\delta(t) = (R \cos(t), R \sin(t), bt) + (c - \sqrt{R^2 + b^2}t) \frac{(-R \sin(t), R \cos(t), b)}{\sqrt{R^2 + b^2}}.$$

Para cada c obtemos uma curva planar que coincide com a involuta da circunferência, sendo obtida no Exemplo 2.15, conforme a Figura 2.11 com $R = 1$, $b = 0.1$ e $c = 0$.

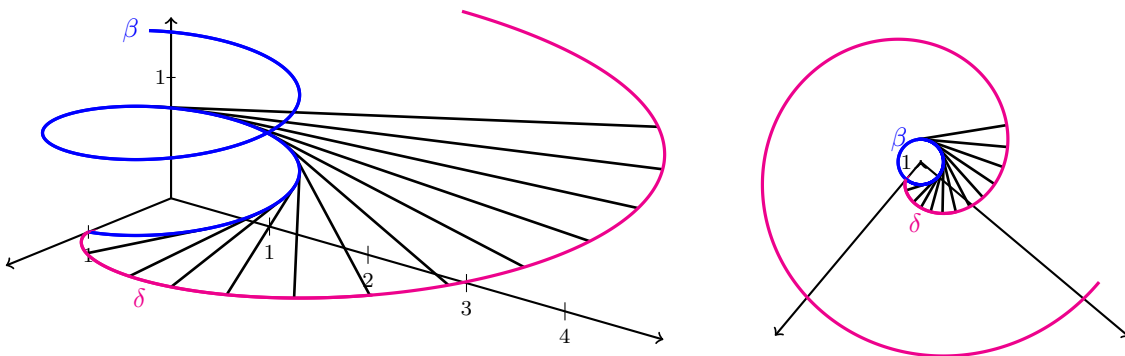


Figura 2.11: Uma involuta da Hélice

Por conseguinte, quando $c = 0$, a evoluta de δ é uma circunferência, logo não coincide com a curva inicial.

Nas curvas planas observa-se que β é a evoluta de δ , logo δ é a involuta de β , sendo que a curva δ é a própria curva γ ; bem como, as involutas de γ são paralelas entre si. Por outro lado o mesmo não ocorre no espaço, dado que gera uma família de involutas, no qual cada involuta gera uma família de evolutas, que pode ou não adquirir a curva original.

2.3 Pedal

Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva plana, $n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma reta que contém um ponto fixo $P \in \mathbb{R}^2$ e $r : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma reta tangente no ponto $\gamma(t)$.

Definição 2.18 *Se a reta r intersesta ortogonalmente n , obtemos um ponto comum, denominado por pé da perpendicular e denotado por $\beta(t)$. O lugar geométrico dos pés das perpendiculares, quando $\gamma(t)$ move sobre γ , é designada por curva pedal de γ com o respectivo ponto P .*

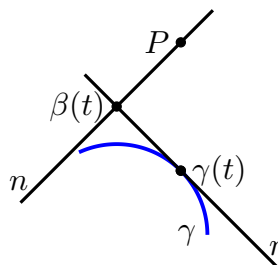


Figura 2.12: Curva Pedal

Proposição 2.19 *As equações paramétricas da curva pedal de γ com o respectivo ponto fixo $P = (a, b)$ são dadas por*

$$\begin{cases} x = x(t_0) + \frac{\langle P - \gamma(t_0), \gamma'(t_0) \rangle}{\|\gamma'(t_0)\|^2} x'(t_0) \\ y = y(t_0) + \frac{\langle P - \gamma(t_0), \gamma'(t_0) \rangle}{\|\gamma'(t_0)\|^2} y'(t_0) \end{cases}$$

Demonstração: Dada $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ uma curva parametrizada regular e $t_0 \in I$. A equação da reta tangente a γ no ponto $\gamma(t_0)$ é

$$r(\lambda) = (x(t_0), y(t_0)) + \lambda(x'(t_0), y'(t_0)), \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (2.4)$$

A equação da reta n que passa no ponto $P = (a, b)$ e ortogonal a r , é dada por

$$n(\mu) = (a, b) + \mu(-y'(t_0), x'(t_0)), \quad \mu \in \mathbb{R}. \quad (2.5)$$

Para encontrar o ponto comum $\beta(t)$, obtido através da intersecção da reta r com a reta n , e igualando as equações 2.4 e 2.5, temos o seguinte sistema de equações lineares nas variáveis λ e μ por

$$\begin{cases} x(t_0) + \lambda x'(t_0) = a - \mu y'(t_0) \\ y(t_0) + \lambda y'(t_0) = b + \mu x'(t_0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'(t_0)\lambda + y'(t_0)\mu = a - x(t_0) \\ y'(t_0)\lambda - x'(t_0)\mu = b - y(t_0) \end{cases}$$

Segue que o sistema é possível e determinado, pois $\begin{vmatrix} x'(t_0) & y'(t_0) \\ y'(t_0) & -x'(t_0) \end{vmatrix} \neq 0$. Logo, usando a regra de Cramer temos

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\begin{vmatrix} a - x(t_0) & y'(t_0) \\ b - y(t_0) & -x'(t_0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x'(t_0) & y'(t_0) \\ y'(t_0) & -x'(t_0) \end{vmatrix}} = \frac{(a - x(t_0))x'(t_0) + (b - y(t_0))y'(t_0)}{x'(t_0)^2 + (y'(t_0))^2} \\ &= \frac{\langle (a - x(t_0), b - y(t_0)), (x'(t_0), y'(t_0)) \rangle}{\|\gamma'(t_0)\|^2} = \frac{\langle ((a, b) - (x(t_0), y(t_0))), \gamma'(t_0) \rangle}{\|\gamma'(t_0)\|^2} \\ &= \frac{\langle P - \gamma(t_0), \gamma'(t_0) \rangle}{\|\gamma'(t_0)\|^2}. \end{aligned}$$

Substituindo em (2.4), obtemos o ponto $\beta(t_0) = (x, y)$ por

$$\begin{cases} x = x(t_0) + \frac{\langle P - \gamma(t_0), \gamma'(t_0) \rangle}{\|\gamma'(t_0)\|^2} x'(t_0) \\ y = y(t_0) + \frac{\langle P - \gamma(t_0), \gamma'(t_0) \rangle}{\|\gamma'(t_0)\|^2} y'(t_0) \end{cases}$$

□

Observação 2.20 *Constata-se que a equação paramétrica da proposição anterior é uma projeção ortogonal do vetor $P - \gamma(t_0)$ na direção de $\gamma'(t_0)$, deste modo é parametrizada por*

$$\beta(t) = \gamma(t_0) + \frac{\langle (P - \gamma(t_0)), \gamma'(t_0) \rangle}{\|\gamma'(t_0)\|^2} \gamma'(t_0).$$

Exemplo 2.21 Determinemos a curva pedal da circunferência parametrizada por $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$, $t \in]0, 2\pi[$. Como $P = (a, b)$ e $\gamma'(t) = (-\sin(t), \cos(t))$, então a curva pedal de γ é dada por

$$\begin{aligned} \beta(t) &= (\cos(t), \sin(t)) + \frac{\langle P - (\cos(t), \sin(t)), (-\sin(t), \cos(t)) \rangle}{(-\sin(t))^2 + \cos(t)^2} (-\sin(t), \cos(t)) \\ &= (\cos(t) - (-a \sin(t) + b \cos(t)) \sin(t), \sin(t) + (-a \sin(t) + b \cos(t)) \cos(t)). \end{aligned}$$

Escolhendo $P_1 = (0, 1)$, que coincide com o traço de γ , obtemos a curva pedal de γ parametrizada por

$$\beta_1(t) = (\cos(t)(1 - \sin(t)), \sin(t) + \cos^2(t)),$$

que representa uma cardióide. Por outro lado, considerando $P_2 = (0, 2)$, que não pertence a γ , obtemos a curva pedal de γ parametrizada por

$$\beta_2(t) = (\cos(t)(1 - 2 \sin(t)), \sin(t) + 2 \cos^2(t)),$$

que representa uma Trissectriz, como apresenta a Figura 2.13.

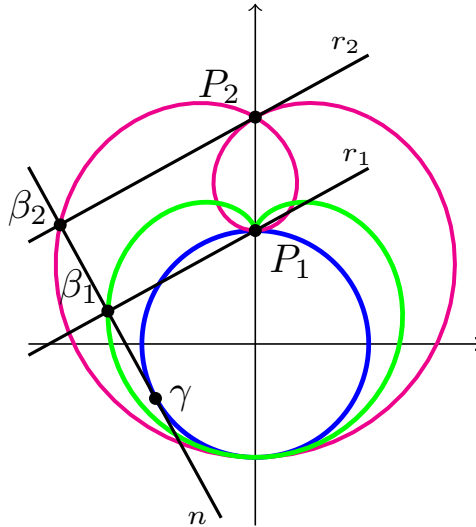


Figura 2.13: Curva Pedal da Circunferência

2.4 Conchóide

Definição 2.22 Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva plana, $A \in \mathbb{R}^2$ um ponto fixo, e $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma reta passando por A e por um ponto qualquer P pertencente a γ . O lugar geométrico descrito pelos pontos Q_1 e Q_2 pertencentes a r , tal que

$$\|Q_1P\| = \|Q_2P\| = c, \quad c = \text{constante positiva},$$

é designada por conchóide de γ com respectivo ponto A .

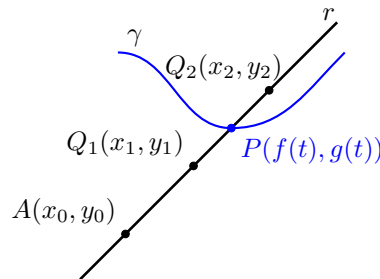


Figura 2.14: Curva Conchóide

Proposição 2.23 As equações paramétricas da conchóide de γ com o respectivo ponto $A = (x_0, y_0)$ são dadas por

$$\begin{cases} x = f(t) \pm \frac{c(f(t) - x_0)}{\sqrt{(f(t) - x_0)^2 + (g(t) - y_0)^2}} \\ y = g(t) \pm \frac{c(g(t) - y_0)}{\sqrt{(f(t) - x_0)^2 + (g(t) - y_0)^2}} \end{cases}$$

Demonstração: Seja a equação de uma reta r , que passa no ponto $A(x_0, y_0)$, dada por $y - y_0 = m(x - x_0)$, e o seu declive que passa nos dois pontos $P(f(t), g(t))$ e $A(x_0, y_0)$

dado

$$m = \frac{g(t) - y_0}{f(t) - x_0}.$$

Se $Q(x, y)$ representa os pontos Q_1 ou Q_2 , então o ponto $Q(x, y)$ pertence à reta r , isto é,

$$y - g(t) = m(x - f(t)). \quad (2.6)$$

Segue que como $\|QP\|^2 = (x - f(t))^2 + (y - g(t))^2 = c^2$, e usando a equação (2.6), obtemos

$$\begin{aligned} (x - f(t))^2 + (m(x - f(t)))^2 &= (x - f(t))^2 + m^2(x - f(t))^2 = (x - f(t))^2(1 + m^2) = c^2 \\ \Leftrightarrow (x - f(t))^2 &= \frac{c^2}{1 + m^2} \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\Leftrightarrow x = f(t) \pm \frac{c}{\sqrt{1 + m^2}}. \quad (2.8)$$

Como $m = \frac{g(t) - y_0}{f(t) - x_0}$ e $y - g(t) = m(x - f(t)) \Leftrightarrow m = \frac{y - g(t)}{x - f(t)}$, implica que

$$\frac{g(t) - y_0}{f(t) - x_0} = \frac{y - g(t)}{x - f(t)}.$$

Substituindo em (2.7), temos

$$(x - f(t))^2 = \frac{c^2}{1 + m^2} \Leftrightarrow 1 + m^2 = \frac{c^2}{(x - f(t))^2} = \frac{c^2}{(f(t) - x_0)^2}.$$

Consequentemente, substituindo em (2.8),

$$\begin{aligned} x &= f(t) \pm \frac{c}{\sqrt{1 + m^2}} \\ &= f(t) \pm \frac{c}{\sqrt{\frac{c^2}{(f(t) - x_0)^2}}} = f(t) \pm \frac{c}{\sqrt{\frac{(x - f(t))^2 + (y - g(t))^2}{(f(t) - x_0)^2}}}. \end{aligned}$$

Logo, a primeira coordenada da conchóide é dada por

$$x = f(t) \pm \frac{c(f(t) - x_0)}{\sqrt{(f(t) - x_0)^2 + (g(t) - y_0)^2}}.$$

Adicionalmente, aplicamos o mesmo procedimento para y . □

Exemplo 2.24 Determinemos a conchóide da circunferência parametrizada por $\gamma(t) = (R \cos(t), R \sin(t))$, $t \in]0, 2\pi[$ com $R > 0$. Portanto, dado um ponto fixo $A = (x_0, y_0)$ obtemos a conchóide de γ por

$$\begin{cases} x = R \cos(t) \pm \frac{c(R \cos(t) - x_0)}{\sqrt{(R \cos(t) - x_0)^2 + (R \sin(t) - y_0)^2}} \\ y = R \sin(t) \pm \frac{c(R \sin(t) - y_0)}{\sqrt{(R \cos(t) - x_0)^2 + (R \sin(t) - y_0)^2}} \end{cases}$$

Quando $A = (0, \pm b)$ ou $A = (\pm a, 0)$ e $c = a = b = r$, obtemos a trissectriz. Porém, as duas curvas obtidas são descontínuas e não fechadas.

Por outro lado, se A está dentro ou fora da circunferência, a conchóide de γ é uma limaçon, de acordo com as três conchóides de γ com $R = 1$ ilustradas na Figura 2.15.

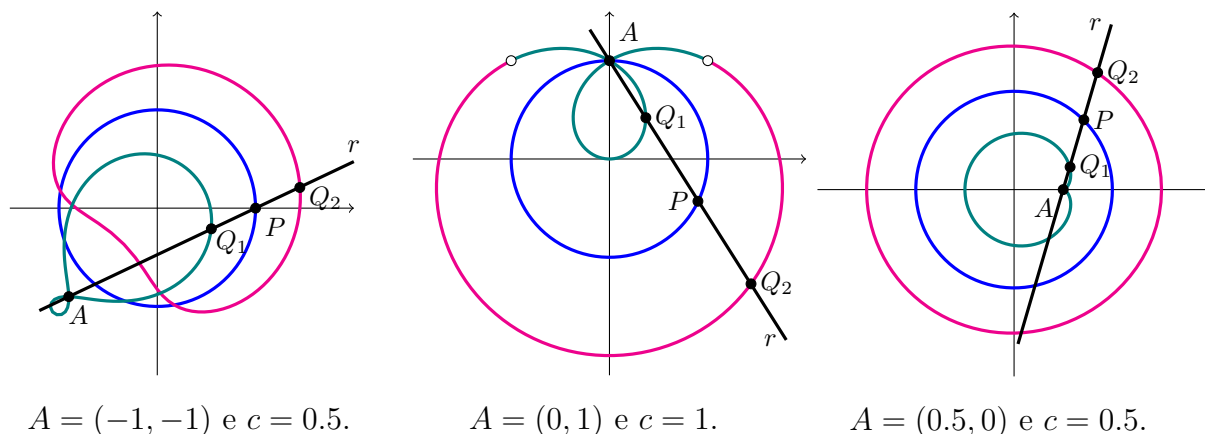


Figura 2.15: Conchóide da Circunferência

2.5 Cissóide

Definição 2.25 *Sejam C_1 e C_2 duas curvas planas, $A \in \mathbb{R}^2$ um ponto fixo e $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma reta passando por A e dois pontos Q_1 e Q_2 pertencentes às curvas C_1 e C_2 , respetivamente. O lugar geométrico dos pontos $P \in r$, tais que*

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AQ_2} - \overrightarrow{AQ_1} = \overrightarrow{Q_1Q_2}$$

é designada por cissóide de C_1 e C_2 com o respetivo ponto A .

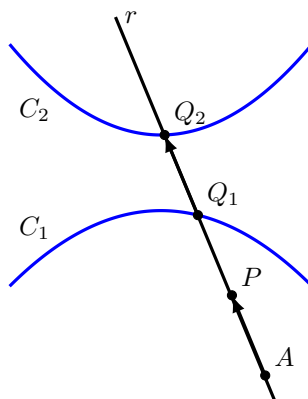


Figura 2.16: Cissóide

Proposição 2.26 *As equações paramétricas da Cissóide de C_1 e C_2 com o respetivo ponto $A = (x_0, y_0)$ são dadas por*

$$\begin{cases} x = x_0 + f_2(\sigma(t_1)) - f_1(t_1) \\ y = y_0 + g_2(\sigma(t_1)) - g_1(t_1) \end{cases}, t_1 \in I. \quad (2.9)$$

Demonstração: Consideremos C_1 e C_2 duas curvas parametrizadas por $C_1(t_1) = (f_1(t_1), g_1(t_1))$, $t_1 \in I \subset \mathbb{R}$ e $C_2(t_2) = (f_2(t_2), g_2(t_2))$, $t_2 \in J \subset \mathbb{R}$; e $A = (x_0, y_0)$ um ponto fixo.

A reta r passando nos pontos $A = (x_0, y_0)$ e $Q_1 = (f_1(t_1), g_1(t_1)) \in C_1$ tem um vetor diretor $(x_0 - f_1(t_1), y_0 - g_1(t_1))$, de modo obter equações paramétricas em termos do parâmetro λ dadas por

$$\begin{cases} x = \lambda(x_0 - f_1(t_1)) + f_1(t_1) \\ y = \lambda(y_0 - g_1(t_1)) + g_1(t_1) \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R} \quad (2.10)$$

Considerando que a reta r intersecta C_2 , obtemos o ponto $Q_2 = (f_2(t_2), g_2(t_2))$, no qual é determinado através do seguinte sistema de equações lineares

$$\begin{cases} \lambda(x_0 - f_1(t_1)) + f_1(t_1) = f_2(t_2) \\ \lambda(y_0 - g_1(t_1)) + g_1(t_1) = g_2(t_2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{f_2(t_2) - f_1(t_1)}{(x_0 - f_1(t_1))} \\ \lambda = \frac{g_2(t_2) - g_1(t_1)}{(y_0 - g_1(t_1))} \end{cases} \Rightarrow \frac{f_2(t_2) - f_1(t_1)}{(x_0 - f_1(t_1))} = \frac{g_2(t_2) - g_1(t_1)}{(y_0 - g_1(t_1))}.$$

Denotemos $\Delta x = f_1(t_1) - x_0$ e $\Delta y = g_1(t_1) - y_0$, obtemos

$$\frac{f_2(t_2) - f_1(t_1)}{-\Delta x} = \frac{g_2(t_2) - g_1(t_1)}{-\Delta y} \Rightarrow -f_2(t_2) \Delta y + f_1(t_1) \Delta y = -g_2(t_2) \Delta x + g_1(t_1) \Delta x$$

$$\Rightarrow g_2(t_2) \Delta x - f_2(t_2) \Delta y = g_1(t_1) \Delta x - f_1(t_1) \Delta y.$$

Suponhamos que a solução da equação acima é $t_2 = \sigma(t_1)$, e que o ponto Q_2 tem como expressão $(f_2(\sigma(t_1)), g_2(\sigma(t_1)))$. Portanto, a cissóide de C_1 e C_2 com o respectivo ponto A é dada por

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} &= \overrightarrow{Q_1Q_2} \Rightarrow P - A = Q_2 - Q_1 \\ &\Rightarrow (x, y) - (x_0, y_0) = (f_2(\sigma(t_1)), g_2(\sigma(t_1))) - (f_1(t_1), g_1(t_1)) \\ &\Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + f_2(\sigma(t_1)) - f_1(t_1) \\ y = y_0 + g_2(\sigma(t_1)) - g_1(t_1) \end{cases}, t_1 \in I. \end{aligned}$$

□

2.5.1 Cissóide de uma reta

Proposição 2.27 *Seja $C_1 : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada por $C_1(t_1) = (f_1(t_1), g_1(t_1))$, $t_1 \in I$, $C_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma reta cartesiana dada por $ax + by + c = 0$. A reta $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ passa no ponto fixo A e não é paralela a C_2 . As equações paramétricas da cissóide de C_1 e de C_2 com o respectivo ponto $A = (x_0, y_0)$ são dadas por*

$$\begin{cases} x = \frac{b \Delta y(x_0 - \Delta x) - \Delta x(a \Delta x + by_0 + c)}{a \Delta x + b \Delta y} \\ y = \frac{a \Delta x(y_0 - \Delta y) - \Delta y(b \Delta y + ax_0 + c)}{a \Delta x + b \Delta y} \end{cases}, t_1 \in I \quad (2.11)$$

onde $\Delta x = f_1(t_1) - x_0$ e $\Delta y = g_1(t_1) - y_0$, desde que $(a \Delta x + b \Delta y) \neq 0$.

Demonstração: Considere $C_1 : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ parametrizada por $C_1(t) = (f_1(t), g_1(t))$ com $t_1 \in I \subset \mathbb{R}$, C_2 uma reta dada pela equação $ax + by + c = 0$ e $A = (x_0, y_0)$ um ponto fixo. A equação da reta r que passa em $A = (x_0, y_0)$ e $P_1 = (f_1(t_1), g_1(t_1))$ é dada por

$$(y - y_0)(f_1(t_1) - x_0) = (x - x_0)(g_1(t_1) - y_0) \Rightarrow (y - y_0) \Delta x = (x - x_0) \Delta y.$$

Como da interseção da reta r com a curva C_2 se obtêm um ponto comum $Q_2 = (x_2, y_2)$, então determinando-o através do seguinte sistema de equações

$$\begin{aligned} & \begin{cases} ax_2 + by_2 + c = 0 \\ (g_1(t_1) - y_0)x_2 - (f_1(t_1) - x_0)y_2 + y_0f_1(t_1) - x_0g_1(t_1) = 0 \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} ax_2 + by_2 + c = 0 \\ \Delta y x_2 - \Delta x y_2 + y_0f_1(t_1) - x_0g_1(t_1) = 0 \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} ax_2 + by_2 = -c \\ \Delta y x_2 - \Delta x y_2 = -y_0f_1(t_1) + x_0g_1(t_1) \end{cases}, \end{aligned}$$

verifica-se que o sistema de equações é possível e determinado, pois $\begin{vmatrix} a & b \\ \Delta y & -\Delta x \end{vmatrix} \neq 0$.

Consequentemente através da regra de Cramer, obtemos

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{\begin{vmatrix} -c & b \\ -y_0f_1(t_1) + x_0g_1(t_1) & -\Delta x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ \Delta y & -\Delta x \end{vmatrix}} = \frac{c \Delta x - x_0bg_1(t_1) + y_0bf_1(t_1)}{-(a \Delta x + b \Delta y)} \\ &= \frac{c \Delta x - x_0b(\Delta y + y_0) + y_0b(\Delta x + x_0)}{-(a \Delta x + b \Delta y)} = \frac{-c \Delta x + x_0b \Delta y - y_0b \Delta x}{a \Delta x + b \Delta y}, \\ y_2 &= \frac{\begin{vmatrix} a & -c \\ \Delta y & -y_0f_1(t_1) + x_0g_1(t_1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ \Delta y & -\Delta x \end{vmatrix}} = \frac{c \Delta y - x_0a \Delta y + y_0a \Delta x}{a \Delta x + b \Delta y}. \end{aligned}$$

Assim, temos

$$\begin{cases} x_2 = \frac{-c \Delta x + x_0b \Delta y - y_0b \Delta x}{a \Delta x + b \Delta y} \\ y_2 = \frac{c \Delta y - x_0a \Delta y + y_0a \Delta x}{a \Delta x + b \Delta y} \end{cases} \quad (2.12)$$

De acordo com a proposição (2.9) que assume $(x_2, y_2) = (f_2(\sigma(t_1)), g_2(\sigma(t_1)))$, e substituindo (2.12) em (2.9), obtemos:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x = x_0 + \frac{(-c \Delta x + x_0b \Delta y - y_0b \Delta x)}{a \Delta x + b \Delta y} - f_1(t_1) \\ y = y_0 + \frac{c \Delta y - x_0a \Delta y + y_0a \Delta x}{a \Delta x + b \Delta y} - g_1(t_1) \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} x = \frac{b \Delta y(x_0 - \Delta x) - \Delta x(a \Delta x + by_0 + c)}{a \Delta x + b \Delta y} \\ y = \frac{a \Delta x(y_0 - \Delta y) - \Delta y(b \Delta y + ax_0 + c)}{a \Delta x + b \Delta y} \end{cases} \end{aligned}$$

Portanto, a expressão acima representa as equações paramétricas da cissóide de C_1 e C_2 com o respectivo ponto A . \square

Exemplo 2.28 Determinemos a cissóide da circunferência e da reta dadas por $C_1(t) = (R \cos t, R \sin t), t \in]0, 2\pi[$ com $R > 0$ e $ax + by + c = 0$, respectivamente. Assim, a cissóide de C_1 e C_2 em relação a $A = (x_0, y_0)$ é dada por

$$\begin{cases} x = \frac{b(R \sin t - y_0)(x_0 - R \cos t) - (R \cos t - x_0)(a(R \cos t - x_0) + by_0 + c)}{a(R \cos t - x_0) + b(R \sin t - y_0)} \\ y = \frac{a(R \cos t - x_0)(2y_0 - R \sin t) - (R \sin t - y_0)(b(R \sin t - x_0) + ax_0 + c)}{a(R \cos t - x_0) + b(R \sin t - y_0)} \end{cases}$$

Se escolhermos $A = (0, 3)$, $R = 1$, $a = 0$, $b = 1$, e $c = -2$, então temos

$$\begin{cases} x = -\cos t - \frac{\cos t}{\sin t - 3} \\ y = 5 - \sin t \end{cases}$$

Por outro lado, se a reta C_2 for tangente a qualquer ponto da circunferência C_1 , e A pertencente a C_1 e diametralmente oposto ao ponto de tangência, então a cissóide de C_1 e C_2 é chamada de cissóide de Diócles. Se $A = (-1, 0)$, $R = 1$, $a = 1$, $b = 0$, e $c = -1$, obtemos

$$\begin{cases} x = -\cos t \\ y = \frac{\sin t(1 - \cos t)}{(\cos t + 1)} \end{cases} .$$

Estas parametrizações encontram-se descritas nas Figuras 2.17 e 2.18.

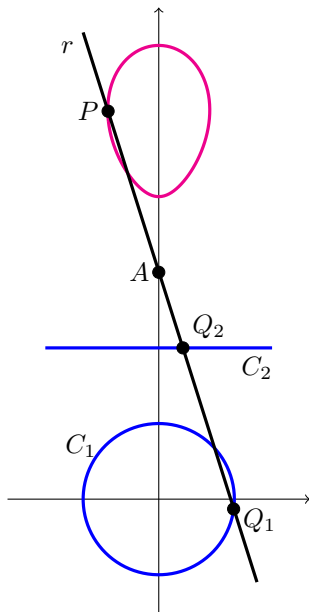


Figura 2.17: Cissóide de uma reta

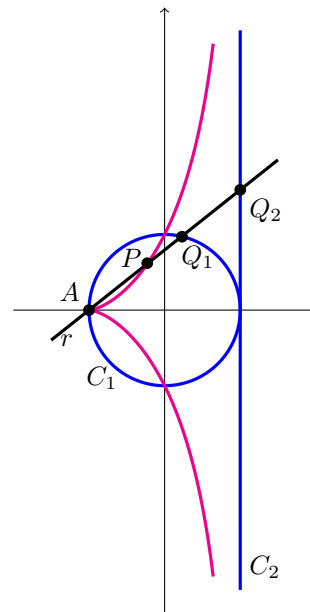


Figura 2.18: Cissóide de Diócles

Capítulo 3

Superfícies

3.1 Superfície Parametrizada Regular

Uma superfície pode ser vista como uma aplicação que transforma um aberto de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R}^3 .

Queremos que seja diferenciável, de modo a existir um plano tangente para cada ponto da superfície. Esta não contém vértices nem arestas, contudo admite auto-interseções.

Definição 3.1 *Uma superfície parametrizada diferenciável é uma aplicação diferenciável*

$$\begin{aligned}\Phi : U \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (\Phi_1(u, v), \Phi_2(u, v), \Phi_3(u, v))\end{aligned}$$

de um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ em \mathbb{R}^3 . O conjunto $\Phi(U) \subset \mathbb{R}^3$ é chamado o traço de Φ . Se o diferencial $d\Phi_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetivo para todo $q = (u, v) \in U$, então Φ é regular. Dizemos que $q \in U$ é um ponto singular de Φ , se $d\Phi_q$ não é injetivo.

Note-se que Φ é diferenciável de classe C^k , se as funções Φ_i são diferenciáveis de classe C^k . A condição de regularidade equivale a que cada ponto $q = (u, v) \in U$ exista uma matriz jacobiana

$$J_\Phi(q) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_1(q)}{\partial u} & \frac{\partial \Phi_1(q)}{\partial v} \\ \frac{\partial \Phi_2(q)}{\partial u} & \frac{\partial \Phi_2(q)}{\partial v} \\ \frac{\partial \Phi_3(q)}{\partial u} & \frac{\partial \Phi_3(q)}{\partial v} \end{bmatrix}$$

com característica 2. Ou seja, os vetores Φ_u e Φ_v são linearmente independentes se, e só se, para cada $(u, v) \in U$, o produto externo verificar

$$\frac{\partial \Phi(u, v)}{\partial u} \wedge \frac{\partial \Phi(u, v)}{\partial v} \neq (0, 0, 0).$$

Definição 3.2 Sejam $\Phi(u, v) : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada diferenciável e $(u_0, v_0) \in U$ um ponto fixo. Então

$$\begin{aligned} u &\rightarrow \Phi(u, v_0) = (\Phi_1(u, v_0), \Phi_2(u, v_0), \Phi_3(u, v_0)) \\ v &\rightarrow \Phi(u_0, v) = (\Phi_1(u_0, v), \Phi_2(u_0, v), \Phi_3(u_0, v)) \end{aligned}$$

são chamadas as curvas coordenadas de Φ em $(u_0, v_0) \in U$, cujos vetores

$$\begin{aligned} \Phi_u(u, v_0) &= \frac{\partial \Phi(u, v_0)}{\partial u} = \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial u}, \frac{\partial \Phi_2}{\partial u}, \frac{\partial \Phi_3}{\partial u} \right), \\ \Phi_v(u_0, v) &= \frac{\partial \Phi(u_0, v)}{\partial v} = \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial v}, \frac{\partial \Phi_2}{\partial v}, \frac{\partial \Phi_3}{\partial v} \right), \end{aligned}$$

são tangentes às curvas coordenadas, respectivamente. As variáveis u e v representam os parâmetros de Φ , e $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3 : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ as funções componentes de Φ .

Designaremos uma superfície parametrizada diferenciável regular apenas por superfície regular.

3.1.1 Superfície de Revolução

Aquando de uma rotação de uma curva plana em torno de um eixo é gerada uma superfície, é definida como:

Definição 3.3 (Superfície de Revolução) Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular parametrizada por $\gamma(u) = (f(u), 0, g(u)), u \in I$. Uma superfície gerada pela rotação de uma curva γ em torno do eixo Oz é chamada uma superfície de revolução. Então, $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é parametrizada por

$$\Phi(u, v) = (f(u) \cos(v), f(u) \sin(v), g(u)), \quad u \in I, \quad 0 < v < 2\pi.$$

As curvas coordenadas $v \equiv \text{constante}$ e $u \equiv \text{constante}$ são denominadas por meridianos e paralelos, respectivamente.

Observa-se que a curva γ contida no plano xOz é chamada de geratriz, sendo que a função $f(u)$ não intersesta o eixo Oz quando satisfaz $f(u) \neq 0$.

Os meridianos representam uma cópia de γ através da rotação de γ por um ângulo v em torno do eixo Oz , enquanto que os paralelos descrevem os círculos.

Apesar de Oz ter sido escolhido para o eixo de rotação, os eixos Ox e Oy também seriam válidos.

Exemplo 3.4 A esfera centrada na origem com raio $R > 0$, definida pela equação cartesiana

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2,$$

é uma superfície de revolução gerada pela rotação da semi-circunferência $\gamma(u) = (R \cos u, 0, R \sin u), u \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ em torno do eixo Oz , como apresenta a Figura 3.1. Logo temos

$$\begin{aligned} \Phi : \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\times]0, 2\pi[&\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (R \cos u \cos v, R \cos u \sin v, R \sin u). \end{aligned}$$

Verifica-se que é regular, dado que os vetores tangentes

$$\Phi_u(u, v) = (-R \sin u \cos v, -R \sin u \sin v, R \cos u), \quad (3.1)$$

$$\Phi_v(u, v) = (-R \cos u \sin v, R \cos u \cos v, 0), \quad (3.2)$$

são linearmente independentes para todo $(u, v) \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\times]0, 2\pi[$:

$$\Phi_u(u, v) \wedge \Phi_v(u, v) = R^2(-\cos^2 u \cos v, \cos^2 u \sin v, -\cos u \sin u) \neq (0, 0, 0).$$

Os pólos norte $(0, 0, R)$ e sul $(0, 0, -R)$ não pertencem ao subconjunto aberto, dado que a sua inclusão tornaria a parametrização não regular, isto é, como

$$\|\Phi_u(u, v) \wedge \Phi_v(u, v)\|^2 = R^4(\cos^4 u + \sin^2 u \cos^2 u) = R^4 \cos^2 u,$$

segue que o quadrado da norma do produto externo é zero, se

$$\|\Phi_u(u, v) \wedge \Phi_v(u, v)\|^2 = R^4 \cos^2 u = 0 \Leftrightarrow u = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

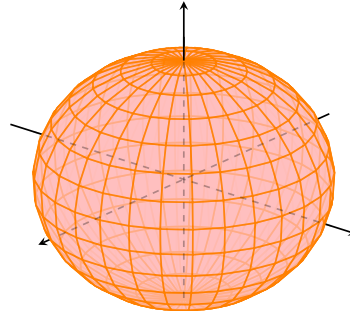


Figura 3.1: Esfera

Exemplo 3.5 O cone duplo, definido pela equação cartesiana

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0,$$

é uma superfície de revolução gerada pela rotação da reta $\gamma(u) = (u, 0, u)$, $u \in]-1, 1[$ em torno do eixo Oz , conforme se observar na Figura 3.2. Logo temos

$$\begin{aligned} \Phi :]-1, 1[\times]0, 2\pi[&\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (u \cos v, u \sin v, u). \end{aligned}$$

Verifica-se que não é regular para $\forall (u, v) \in U$, dado que

$$\begin{aligned} \Phi_u(u, v) &= (\cos v, \sin v, 1), \\ \Phi_v(u, v) &= (-u \sin v, u \cos v, 0), \\ \Phi_u(u, v) \wedge \Phi_v(u, v) &= (-u \cos v, -u \sin v, u), \end{aligned}$$

logo, no vértice do cone obtemos $\Phi_u(0, 0) \wedge \Phi_v(0, 0) = (0, 0, 0)$. Bem como, no que respeita à norma do produto externo temos

$$\|\Phi_u(u, v) \wedge \Phi_v(u, v)\|^2 = 2u^2,$$

e segue que o quadrado da norma é zero, se

$$\|\Phi_u(u, v) \wedge \Phi_v(u, v)\|^2 = 2u^2 = 0 \Leftrightarrow u = 0.$$

Contudo, a superfície torna-se regular ao remover o vértice, sendo necessário duas superfícies de revolução que representem o cone superior e inferior.

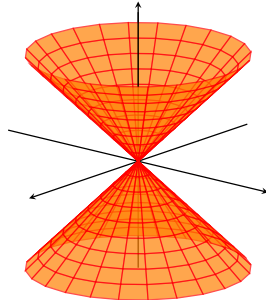


Figura 3.2: Cone Duplo

Exemplo 3.6 O hiperbolóide de uma folha, definido pela equação cartesiana

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

é uma superfície de revolução gerada pela rotação da hipérbole $\gamma(u) = (\cosh u, 0, \sinh u)$, $u \in]-1, 1[$ em torno do eixo Oz , como apresenta a Figura 3.3. Logo temos

$$\begin{aligned} \Phi :]-1, 1[\times]0, 2\pi[&\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, \sinh u). \end{aligned}$$

Verifica-se que é regular para $\forall (u, v) \in U$, dado que

$$\begin{aligned} \Phi_u(u, v) &= (-\sinh u \cos v, -\sinh u \sin v, \cosh u), \\ \Phi_v(u, v) &= (-\cosh u \sin v, \cosh u \cos v, 0), \\ \Phi_u(u, v) \wedge \Phi_v(u, v) &= (-\cosh^2 u \cos v, \cosh^2 u \sin v, -\cosh u \sinh u) \neq (0, 0, 0). \end{aligned}$$

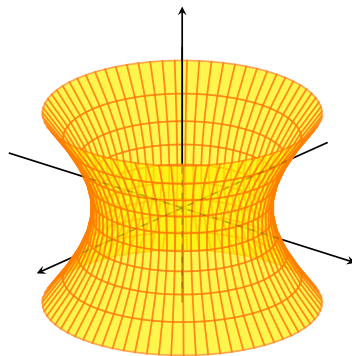


Figura 3.3: Hiperbolóide de uma Folha

3.1.2 Superfície como Gráfico de uma Função de Duas Variáveis

Proposição 3.7 (Superfície como gráfico de uma função de duas variáveis) *Seja $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função regular de classe C^k e $U \subset \mathbb{R}^2$ um subconjunto aberto. O subconjunto do gráfico de Φ em \mathbb{R}^3 dado por*

$$G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in U, z = f(x, y)\}$$

corresponde a uma superfície regular como gráfico de uma função de duas variáveis parametrizada por

$$\begin{aligned}\Phi : U \subseteq \mathbb{R}^2 &\rightarrow G_f \\ (u, v) &\mapsto (u, v, f(u, v)).\end{aligned}$$

Nestas superfícies designaremos as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial u}$ e $\frac{\partial f}{\partial v}$ por f_u e f_v , respetivamente.

Demonstração: A superfície como gráfico de uma função de duas variáveis é regular de classe C^k , dado que os vetores tangentes

$$\Phi_u(u, v) = (1, 0, f_u(u, v)), \quad \Phi_v(u, v) = (0, 1, f_v(u, v)),$$

são linearmente independentes para $\forall (u, v) \in U$:

$$\Phi_u(u, v) \wedge \Phi_v(u, v) = (-f_u(u, v), -f_v(u, v), 1) \neq (0, 0, 0).$$

□

Exemplo 3.8 O parabolóide definido pela equação cartesiana

$$x^2 + y^2 = z,$$

representado na Figura 3.4, é o gráfico de uma função de duas variáveis, $f(x, y) = x^2 + y^2$, admite a parametrização $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$\Phi(x, y) = (u, v, u^2 + v^2).$$

É uma parametrização regular, dado que os vetores $\Phi_u(u, v) = (1, 0, 2u)$ e $\Phi_v(u, v) = (0, 1, 2v)$ são linearmente independentes, para $\forall (u, v) \in U$:

$$\Phi_u(u, v) \wedge \Phi_v(u, v) = (-2u, -2v, 1) \neq (0, 0, 0).$$

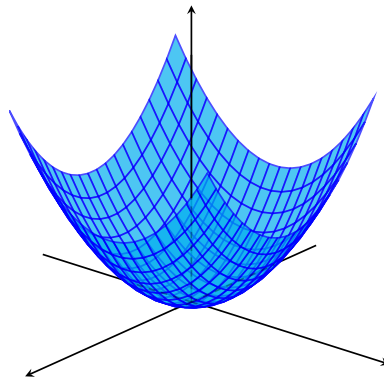


Figura 3.4: Parabolóide

3.1.3 Superfície Regrada

Uma superfície gerada por uma união de retas é denominada por superfície regrada.

Definição 3.9 (Superfície Regrada) *Seja $\Phi : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada por*

$$\Phi(u, v) = \gamma(u) + v\delta(u)$$

é denominada por superfície regrada, no qual $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma curva parametrizada regular, designada por diretriz de Φ , e $\delta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é um vetor diretor não nulo que passa em $\gamma(u)$, $u \in I$. Adicionalmente salienta-se que as geratrizes são representadas pelas retas $u \rightarrow \gamma(u) + v\delta(u)$.

Exemplo 3.10 A helicóide, uma superfície regrada obtida através de retas paralelas ao plano xOy . Logo temos

$$\begin{aligned} \Phi :]0, 2\pi[\times]0, r[&\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (v \cos u, v \sin u, \lambda u), \end{aligned}$$

no qual $\gamma(u) = (0, 0, \lambda u)$ descreve o eixo Oz e $\delta(u) = (R \cos u, R \sin u, 0)$ as circunferências com $R = 1$, como apresenta a Figura 3.5. Verifica-se que é regular, dado que os vetores tangentes $\Phi_u(u, v) = (-v \sin u, v \cos u, \lambda)$ e $\Phi_v(u, v) = (\cos u, \sin u, 0)$ são linearmente independentes para $\forall (u, v) \in U$:

$$\Phi_u(u, v) \wedge \Phi_v(u, v) = (-\lambda \sin u, \lambda \cos u, -v) \neq (0, 0, 0).$$

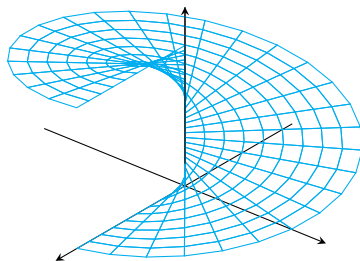


Figura 3.5: Helicóide

Além disso, o cone duplo também é uma superfície regrada.

3.1.4 Mudança de Parâmetros

O traço de uma curva pode ser descrita através de diferentes parametrizações. Da mesma forma, uma superfície parametrizada regular poderá obter várias superfícies parametrizadas com o mesmo traço.

Proposição 3.11 (mudança de parâmetros) *Seja $\Phi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular. Se $h : \bar{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow U$ é uma aplicação diferenciável, o $\det(Jh(q)) \neq 0$ para $\forall q \in \bar{U}$ e $h(\bar{U}) = U$, então $\bar{\Phi} = \Phi \circ h$ é uma superfície parametrizada regular que tem o mesmo traço de Φ , sendo denominada por uma reparametrização de Φ por h , e a função h por uma mudança de parâmetros.*

Demonstração: Ver Ketiv Teneblat [22], página 125. □

Exemplo 3.12 Consideremos uma helicóide parametrizada por

$$\bar{\Phi}(\bar{u}, \bar{v}) = ((1 + \bar{v}) \cos \bar{u}, (1 + \bar{v}) \sin \bar{u}, \lambda \bar{u}), (u, v) \in \bar{U} =]0, 2\pi[\times]0 - 1, r - 1[$$

como superfície regrada gerada pela diretriz $\gamma(\bar{u}) = (\cos \bar{u}, \sin \bar{u}, \lambda \bar{u})$ com a geratriz $\delta(\bar{u}) = (\cos \bar{u}, \sin \bar{u}, 0)$.

Constata-se que $\bar{\Phi}$ e Φ (ver Exemplo 3.10) apresentam o mesmo traço da helicóide, visto que $\bar{\Phi}$ é uma reparametrização de Φ por h . Logo determinando $h : \bar{U} \rightarrow U$ parametrizada por $h(\bar{u}, \bar{v}) = (h_1(\bar{u}, \bar{v}), h_2(\bar{u}, \bar{v}))$, obtemos

$$\bar{\Phi}(\bar{u}, \bar{v}) = \Phi(h(\bar{u}, \bar{v})) = \Phi((h_1(\bar{u}, \bar{v}), h_2(\bar{u}, \bar{v}))) \Leftrightarrow \begin{cases} (1 + \bar{v}) \cos \bar{u} = h_2(\bar{u}, \bar{v}) \cos h_1(\bar{u}, \bar{v}) \\ (1 + \bar{v}) \sin \bar{u} = h_2(\bar{u}, \bar{v}) \sin h_1(\bar{u}, \bar{v}) \\ \lambda \bar{u} = \lambda h_1(\bar{u}, \bar{v}) \end{cases} .$$

Assim, a função $h(\bar{u}, \bar{v}) = (\bar{u}, 1 + \bar{v})$ é diferenciável e sobrejetiva, bem como

$$\det(Jh(q)) = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1 \neq 0, \forall q \in \bar{U}.$$

3.1.5 Plano Tangente e Vetor Normal

Nas curvas regulares observa-se que os vetores tangentes, em cada ponto, formam um espaço vetorial de dimensão 1, enquanto que numa superfície os vetores tangentes, num ponto, formam um espaço vetorial de dimensão 2. Esse plano é formado pelas retas tangentes às curvas contidas na superfície, sendo então necessário defini-las.

Definição 3.13 *Seja $\Phi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular. Se*

$$\begin{aligned} \beta : I \subset \mathbb{R} &\rightarrow U \subset \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (u(t), v(t)) \end{aligned}$$

é uma curva regular, então

$$\gamma(t) = (\Phi \circ \beta)(t) = \Phi(u(t), v(t))$$

é designada por curva da superfície.

Note-se que se β é uma curva regular e Φ é uma parametrização regular, então a curva $\gamma(t)$ é uma curva regular contida na superfície.

Definição 3.14 (Vetor Tangente) *Seja $\Phi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular. Dizemos que $w \in \mathbb{R}^3$ é um vetor tangente a Φ em $(u_0, v_0) \in U$, se existe uma curva parametrizada regular da superfície $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, tal que para algum $t_0 \in I$ temos $\gamma(t_0) = \Phi(u_0, v_0)$ e $\gamma'(t_0) = w$.*

Definição 3.15 (Plano Tangente) *Seja $\Phi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular. O plano tangente a Φ em (u_0, v_0) é o conjunto de todos os vetores tangentes a Φ em (u_0, v_0) , denotado por $T_q\Phi$, onde $q = (u_0, v_0) \in U$.*

Observação 3.16 Note que os conceitos de vetor tangente e plano tangente são definidos em um ponto (u_0, v_0) do domínio de Φ e não no ponto $p = \Phi(u_0, v_0)$, dado que a superfície parametrizada pode ter auto-interseção.

Os vetores Φ_u e Φ_v tangentes às curvas coordenadas de Φ são linearmente independentes e paralelos ao plano tangente em (u_0, v_0) .

Proposição 3.17 Seja $\Phi(u, v)$ uma superfície parametrizada regular e $q = (u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$. Então, $T_q\Phi$ é o conjunto dos vetores obtidos como combinação linear de $\Phi_u(u_0, v_0)$ e $\Phi_v(u_0, v_0)$.

Demonstração: Ver Ketj Teneblat [22], página 133. □

Conseqüentemente, verificamos que o plano tangente (afim) em $q = (u_0, v_0) \in U$ é um plano contido em \mathbb{R}^3 parametrizado por

$$\{\chi \in \mathbb{R}^3 : \chi = \Phi(q) + \lambda_1\Phi_u(q) + \lambda_2\Phi_v(q), \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Exemplo 3.18 Determinemos o plano tangente do parabolóide (Exemplo 3.8) parametrizado por $\Phi(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$ que passa no ponto $\Phi(0, 1) = (0, 1, 1)$. Tendo que $\Phi_u(u, v) = (1, 0, 2u)_{(0,1)} = (1, 0, 0)$ e $\Phi_v(u, v) = (0, 1, 2v)_{(0,1)} = (0, 1, 2)$, logo o plano tangente em $q = (0, 1)$ é dado por

$$\begin{aligned} & \{\chi \in \mathbb{R}^3 : \chi = (0, 1, 1) + \lambda_1(1, 0, 0) + \lambda_2(0, 1, 2), \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\chi \in \mathbb{R}^3 : \chi = (\lambda_1, 1 + \lambda_2, 1 + 2\lambda_2), \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

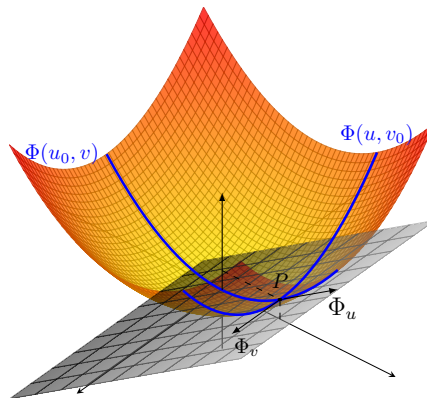


Figura 3.6: Plano tangente ao Parabolóide

Para cada $q = (u, v)$, existem dois vetores (simétricos) unitários ortogonais ao plano tangente $T_q\Phi$. Escolhemos para vetor normal o vetor N unitário tal que (Φ_u, Φ_v, N) forma uma base positiva.

Definição 3.19 (Vetor Normal Unitário) Seja $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular e $q = (u, v) \in U$. Então $N : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definido por

$$N(q) = \frac{\Phi_u(q) \wedge \Phi_v(q)}{\|\Phi_u(q) \wedge \Phi_v(q)\|}$$

é designado como o vetor normal unitário a Φ em q .

Note-se que $N : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ é uma aplicação diferenciável, no qual a sua imagem está contida numa esfera unitária centrada na origem, sendo designada como aplicação normal de Gauss.

Se $\bar{\Phi} = \Phi \circ h$ é uma reparametrização de Φ por h , então o plano tangente a $\bar{\Phi}$ em \bar{q} é igual ao plano tangente a Φ em $h(\bar{q})$, além disso, $\bar{N}(\bar{q}) = \pm N(h(\bar{q}))$, onde \bar{N} e N são vetores normais unitários a $\bar{\Phi}$ e Φ em \bar{q} e $h(\bar{q})$, respetivamente.

O sinal de N é positivo (resp. negativo), se o determinante da matriz jacobiana de h é positivo (resp. negativo). Visto que, se $\bar{\Phi}(\bar{u}, \bar{v}) = \Phi(h(\bar{u}, \bar{v}))$, denotando por $(u, v) = h(\bar{u}, \bar{v})$ e $\bar{q} = (\bar{u}, \bar{v})$, temos

$$\begin{aligned}\bar{\Phi}_{\bar{u}}(\bar{q}) &= \Phi_u(h(\bar{q})) \frac{\partial u}{\partial \bar{u}}(\bar{q}) + \Phi_v(h(\bar{q})) \frac{\partial v}{\partial \bar{u}}(\bar{q}) \\ \bar{\Phi}_{\bar{v}}(\bar{q}) &= \Phi_u(h(\bar{q})) \frac{\partial u}{\partial \bar{v}}(\bar{q}) + \Phi_v(h(\bar{q})) \frac{\partial v}{\partial \bar{v}}(\bar{q})\end{aligned}$$

Portanto, como o determinante da matriz jacobiana de h não se anula, temos que $\{\bar{\Phi}_{\bar{u}}(\bar{q}), \bar{\Phi}_{\bar{v}}(\bar{q})\}$ e $\{\Phi_u(h(\bar{q})), \Phi_v(h(\bar{q}))\}$ são bases do mesmo plano de \mathbb{R}^3 . De modo que,

$$(\bar{\Phi}_{\bar{u}} \wedge \bar{\Phi}_{\bar{v}})(\bar{q}) = (\Phi_u \wedge \Phi_v)(h(\bar{q})) \det J(h).$$

Logo, $\bar{N}(\bar{q}) = N(h(\bar{q}))$ se $\det J(h) > 0$, e $\bar{N}(\bar{q}) = -N(h(\bar{q}))$ se $\det J(h) < 0$.

3.2 Primeira Forma Fundamental

Nesta secção será exposto o conceito da primeira forma fundamental, de modo analisar as propriedades geométricas referentes ao comprimento da curva numa superfície, ou seja, a distância entre dois pontos da superfície, a área de regiões da superfície, e as isometrias, ou seja, a distância entre dois pontos contidos em duas superfícies é a mesma.

Definição 3.20 (Primeira Forma Fundamental) *Sejam $\Phi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular e $q \in U$. A forma quadrática I_q definida por*

$$\begin{aligned}I_q : T_q \Phi &\rightarrow \mathbb{R} \\ w &\mapsto I_q(w) = \langle w, w \rangle = \|w\|^2\end{aligned}$$

é chamada de primeira forma fundamental de Φ em q .

Note-se que a primeira forma fundamental é o produto interno usual de \mathbb{R}^3 restrito aos vetores tangentes de Φ , concretamente, é necessário referir o espaço ambiente \mathbb{R}^3 no qual a superfície se encontra situada.

Determinemos uma expressão para a primeira forma quadrática em termos da base $\{\Phi_u, \Phi_v\}$.

Consideremos $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular parametrizada por $\gamma(t) = \Phi(u(t), v(t))$, $q = (u(t_0), v(t_0)) \in U$, e o vetor $w \in T_q \Phi$ dado por

$$w = \gamma'(t_0) = a\Phi_u(q) + b\Phi_v(q), \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Deste modo, a forma quadrática I_q tem como expressão

$$\begin{aligned} I_q(w) &= \langle a\Phi_u(q) + b\Phi_v(q), a\Phi_u(q) + b\Phi_v(q) \rangle \\ &= \langle \Phi_u(q), \Phi_u(q) \rangle a^2 + 2\langle \Phi_v(q), \Phi_u(q) \rangle ab + \langle \Phi_v(q), \Phi_v(q) \rangle b^2, \end{aligned}$$

segue que as funções reais diferenciáveis $E, F, G : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ são denotadas por

$$E(q) = \langle \Phi_u(q), \Phi_u(q) \rangle, \quad F(q) = \langle \Phi_u(q), \Phi_v(q) \rangle, \quad G(q) = \langle \Phi_v(q), \Phi_v(q) \rangle,$$

e designadas por coeficientes da primeira forma fundamental. Assim, omitindo o parâmetro q , obtemos

$$I_q(w) = Ea^2 + 2Fab + Gb^2 = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix},$$

no qual $\mathcal{F}_I = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}$ é a matriz da forma quadrática $I_q(w)$.

Observa-se que se $\bar{\Phi} = \Phi \circ h$ é uma reparametrização de Φ por h , no qual, para $\forall \bar{q} = (\bar{u}, \bar{v})$, os planos tangentes $T_{h(\bar{q})}\bar{\Phi}$ e $T_q\Phi$ coincidem. Portanto, se w pertence a este plano, então $\bar{I}_{\bar{q}}(w) = I_q(w) = \|w\|^2$, onde \bar{I} e I representam as primeiras formas quadráticas de $\bar{\Phi}$ e Φ , respetivamente. Deste modo, a primeira forma quadrática não se altera perante uma mudança de parâmetros.

Proposição 3.21 *Os coeficientes da primeira forma fundamental satisfazem as seguintes propriedades:*

$$\det \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} = EG - F^2 = \|\Phi_u \wedge \Phi_v\|^2 > 0, \text{ e } E, G > 0.$$

Demonstração: Da álgebra linear temos o produto interno entre dois produtos externos dado por $\langle (a \wedge b), (c \wedge d) \rangle = \langle a, c \rangle \langle b, d \rangle - \langle a, d \rangle \langle b, c \rangle$, a, b, c e $d \in \mathbb{R}^3$. Aplicando em

$$\det \mathcal{F}_I = EG - F^2 = \|\Phi_u\|^2 \|\Phi_v\|^2 - \langle \Phi_u, \Phi_v \rangle^2 = \langle (\Phi_u \wedge \Phi_v), (\Phi_u \wedge \Phi_v) \rangle = \|\Phi_u \wedge \Phi_v\|^2 > 0.$$

Adicionalmente, temos $E = \langle \Phi_u, \Phi_u \rangle = \|\Phi_u\|^2 > 0$ e $G = \langle \Phi_v, \Phi_v \rangle = \|\Phi_v\|^2 > 0$. \square

Exemplo 3.22 Considere uma superfície como gráfico de uma função de duas variáveis parametrizada por $\Phi(u, v) = (u, v, f(u, v))$. Dado os vetores $\Phi_u(u, v) = (1, 0, f_u(u, v))$ e $\Phi_v(u, v) = (0, 1, f_v(u, v))$ obtemos

$$E(u, v) = 1 + f_u^2(u, v), \quad F(u, v) = f_u(u, v)f_v(u, v), \quad G(u, v) = 1 + f_v^2(u, v).$$

Logo, a matriz e o determinante de \mathcal{F}_I é dada por

$$\mathcal{F}_I = \begin{bmatrix} 1 + f_u^2(u, v) & f_u(u, v)f_v(u, v) \\ f_u(u, v)f_v(u, v) & 1 + f_v^2(u, v) \end{bmatrix}, \quad |\mathcal{F}_I| = 1 + (f_v(u, v))^2 + (f_u(u, v))^2.$$

Exemplo 3.23 O parabolóide hiperbólico, definido pela equação cartesiana

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}, \quad a, b > 0,$$

é uma superfície como gráfico de uma função de duas variáveis dada por

$$\begin{aligned} \Phi :]-1, 1[\times]-1, 1[&\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto \left(u, v, \frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2} \right), \end{aligned}$$

conforme apresenta a Figura 3.7. Dado os vetores $\Phi_u(u, v) = \left(1, 0, \frac{2u}{a^2} \right)$ e $\Phi_v(u, v) = \left(0, 1, -\frac{2v}{b^2} \right)$, obtemos

$$E(u, v) = 1 + \frac{4u^2}{a^4}, \quad F(u, v) = \frac{4uv}{a^2b^2} \quad e \quad G(u, v) = 1 + \frac{4v^2}{b^4}.$$

Portanto, a matriz e o determinante de \mathcal{F}_I dá-nos

$$\mathcal{F}_I = \begin{bmatrix} 1 + \frac{4u^2}{a^4} & \frac{4uv}{a^2b^2} \\ \frac{4uv}{a^2b^2} & 1 + \frac{4v^2}{b^4} \end{bmatrix}, \quad |\mathcal{F}_I| = 1 + \frac{4u^2}{a^4} + \frac{4v^2}{b^4},$$

no qual Φ_u e Φ_v são vetores unitários e ortogonais em $\Phi(0, 0) = (0, 0, 0)$.

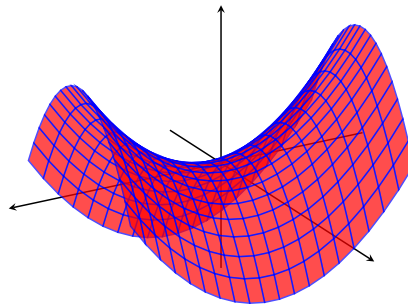


Figura 3.7: Parabolóide Hiperbólico

Exemplo 3.24 Considere uma superfície de revolução parametrizada por $\Phi(u, v) = (f(u) \cos(v), f(u) \sin(v), g(u))$, $(u, v) \in I \times]0, 2\pi[$. Dado que

$\Phi_u(u, v) = (f_u(u) \cos(v), f_u(u) \sin(v), g_u(u))$ e $\Phi_v(u, v) = (-f(u) \sin(v), f(u) \cos(v), 0)$, obtemos $E(u, v) = f_u^2(u) + g_u^2(u)$, $F(u, v) = 0$ e $G(u, v) = f^2(u)$.

Portanto, a matriz e o determinante de \mathcal{F}_I dá-nos

$$\mathcal{F}_I = \begin{bmatrix} f_u^2(u) + g_u^2(u) & 0 \\ 0 & f^2(u) \end{bmatrix}, \quad |\mathcal{F}_I| = f^2(u)(f_u^2(u) + g_u^2(u)).$$

Exemplo 3.25 O cilindro, definido pela equação cartesiana

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

é uma superfície de revolução gerada pela rotação de uma reta $\gamma(t) = (R, 0, t)$ em torno do eixo Oz , com raio $R > 0$ e $a \in \mathbb{R}$, conforme a Figura 3.11 (ilustrada posteriormente no exemplo 3.48). Então, temos

$$\begin{aligned} \Phi :]0, 2\pi[\times]-a, a[&\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (R \cos u, R \sin u, v). \end{aligned}$$

Dado que $\Phi_u(u, v) = (-R \sin u, R \cos u, 0)$ e $\Phi_v(u, v) = (0, 0, 1)$, logo obtemos

$$E(u, v) = R^2, \quad F(u, v) = 0, \quad G(u, v) = 1.$$

Portanto, a matriz e o determinante de \mathcal{F}_I são dados por

$$\mathcal{F}_I = \begin{bmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad |\mathcal{F}_I| = R^2.$$

Para $R = 1$ temos que os vetores Φ_u e Φ_v são unitários e ortogonais em cada (u, v) .

3.2.1 Comprimento de uma Curva da Superfície

Dada $\gamma(t) = \Phi(u(t), v(t)) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular da superfície, e $(u(t), v(t)) = q \in U$. Então pela regra da cadeia sobre $\gamma(t)$, obtemos

$$\gamma'(t) = u'(t)\Phi_u(u(t), v(t)) + v'(t)\Phi_v(u(t), v(t)).$$

Segue que a velocidade escalar de γ' é dada por

$$\begin{aligned} \|\gamma'(t)\| &= \sqrt{\langle u'(t)\Phi_u(q) + v'(t)\Phi_v(q), u'(t)\Phi_u(q) + v'(t)\Phi_v(q) \rangle} \\ &= (u'(t)^2 \langle \Phi_u(q), \Phi_u(q) \rangle + 2u'(t)v'(t) \langle \Phi_u(q), \Phi_v(q) \rangle + v'(t)^2 \langle \Phi_v(q), \Phi_v(q) \rangle)^{\frac{1}{2}} \\ &= (u'(t)^2 E + 2u'(t)v'(t)F + v'(t)^2 G)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Assim, o comprimento de γ a partir de t_0 até t é dado por

$$s(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{u'(\sigma)^2 E + 2u'(\sigma)v'(\sigma)F + v'(\sigma)^2 G} \, d\sigma = \int_{t_0}^t \sqrt{I_q(\gamma'(\sigma))} \, d\sigma.$$

Observa-se que $s(t)$ depende do vetor tangente de γ , de modo que, é necessário conhecer a curva $(u(t), v(t))$ em \mathbb{R}^2 , e os coeficientes da primeira forma fundamental.

3.2.2 Área de Regiões em Superfície

Será definido a área de uma região contida numa superfície, recorrendo à primeira forma fundamental.

O domínio de um plano é considerado uma região D como um subconjunto de \mathbb{R}^2 fechado e limitado, cujo interior é homeomorfo a uma bola aberta de \mathbb{R}^2 e cuja fronteira é uma curva regular por partes homeomorfa a um círculo.

Se $\Phi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma superfície parametrizada regular e $D \subset U$ é uma região de \mathbb{R}^2 , então $\Phi(D)$ é uma região da superfície Φ .

Definição 3.26 Seja $\Phi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular e $D \subset U$ uma região de \mathbb{R}^2 , tal que a aplicação Φ é injetiva, sendo restrita ao interior de D . A área da região $\Phi(D)$ é dada por

$$A(\Phi(D)) = \int \int_D \sqrt{EG - F^2} du dv = \int \int_D \|\Phi_u \times \Phi_v\| du dv,$$

onde E , F e G são os coeficientes da primeira forma quadrática de Φ .

Observação 3.27 Note que dado um ponto fixo $(u_0, v_0) \in D$, a área do paralelogramo é obtida através da norma do produto externo entre os vetores $\Phi_u(u_0, v_0)$ e $\Phi_v(u_0, v_0)$.

De modo que esta é aproximadamente igual à área de uma região em $\Phi(\bar{D})$, no qual $\bar{D} \subset D$ é um retângulo com vértice em (u_0, v_0) e cujos lados são paralelos aos eixos coordenados u e v .

Proposição 3.28 A área de uma região não depende da parametrização escolhida.

Demonstração: Ver Ketj Teneblat [22], página 153. □

3.2.3 Isometria entre Superfícies

Considerando uma superfície regular parametrizada $\Phi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, tal que a aplicação Φ é injetiva, sendo designada por superfície simples. Uma curva contida em diferentes superfícies parametrizadas preserva o seu comprimento se as superfícies forem injetivas.

Definição 3.29 (Isometria) Sejam $\Phi(u, v)$ e $\bar{\Phi}(u, v)$ duas superfícies parametrizadas simples, e $(u, v) \in U \subset \mathbb{R}^2$. Dizemos que Φ e $\bar{\Phi}$ são superfícies parametrizadas isométricas se, para todo $(u, v) \in U$, os coeficientes da primeira forma quadrática de Φ e $\bar{\Phi}$ coincidem, isto é,

$$E(u, v) = \bar{E}(u, v), \quad F(u, v) = \bar{F}(u, v) \quad \text{e} \quad G(u, v) = \bar{G}(u, v).$$

Note-se que as duas parametrizações têm o mesmo domínio U , logo existe uma correspondência bijetiva.

Se $\Phi(U) = S$ e $\bar{\Phi}(U) = \bar{S}$ são injetivas, então existem as funções inversas $\Phi^{-1} : S \rightarrow U$ e $\bar{\Phi}^{-1} : \bar{S} \rightarrow U$, respetivamente. Portanto, a aplicação $X : S \rightarrow \bar{S}$, dada por $X = \bar{\Phi} \circ \Phi^{-1}$, é bijetiva, e a sua inversa é obtida por $X^{-1} = \Phi \circ \bar{\Phi}^{-1}$.

Nesta definição designamos por isometria a aplicação X (ou X^{-1}), dado que a distância entre os dois pontos correspondentes aos traços das superfícies é preservada.

Exemplo 3.30 Consideremos o plano e o cilindro parametrizados por $\Phi(u, v) = (u, v, 0)$ e $\bar{\Phi}(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$ com o mesmo domínio $(u, v) \in]0, 2\pi[\times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$, respetivamente, no qual no cilindro não é incluída uma geratriz. Para cada (u, v) temos

$$\begin{aligned} \Phi_u(u, v) &= (1, 0, 0), & \Phi_v(u, v) &= (0, 1, 0), \\ \bar{\Phi}_u(u, v) &= (-\sin u, \cos u, 0), & \bar{\Phi}_v(u, v) &= (0, 0, 1), \end{aligned}$$

logo, obtemos $E = \bar{E} = 1$, $F = \bar{F} = 0$ e $G = \bar{G} = 1$. Portanto, as superfícies são isométricas. A matriz \mathcal{F}_I corresponde à identidade, isto é,

$$\mathcal{F}_{\bar{I}} = \mathcal{F}_I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Além disso, a sua isometria $X : \Phi(U) \rightarrow \bar{\Phi}(U)$ é dada por $X = \bar{\Phi} \circ \Phi^{-1} = (\cos u, \sin u, v)$, sendo $\Phi^{-1}(u, v, 0) = (u, v)$. Desta forma, podemos então enrolar o plano até que este adquira a forma de um cilindro, ou seja, os segmentos horizontais e as retas verticais do plano tornam-se os paralelos e meridianos do cilindro, respetivamente.

Além disso, o comprimento da curva nas duas superfícies é o mesmo, dado que $s(t) = \bar{s}(t) = \int_0^{2\pi} \sqrt{u'(\sigma)^2 + v'(\sigma)^2} d\sigma$. Considerando uma reta e uma circunferência dadas por $\gamma(t) = (t, t, 0) \subset \Phi$ e $\bar{\gamma}(t) = (\cos t, \sin t, t) \subset \bar{\Phi}$, respetivamente, e derivando-as, obtemos $\gamma'(t) = (1, 1, 0)$ e $\bar{\gamma}'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$, logo

$$s(t) = \bar{s}(t) = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} d\sigma = 4\pi.$$

Ademais, considerando as duas regiões D , D^* dadas por $D = D^* = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u \leq 2\pi, -1 \leq v \leq 1\}$, temos que a área do plano e do cilindro é a mesma, dado que

$$A(\Phi(D)) = A(\bar{\Phi}^*(D^*)) = \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} 1 du dv = 4\pi.$$

Exemplo 3.31 O cone, menos um meridiano, definido por

$$\begin{aligned} \Phi :]0, 2\pi \sin \theta[\times]0, r[&\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (v \sin \theta \cos u, v \sin \theta \sin u, v \cos \theta), \end{aligned}$$

é uma superfície de revolução obtida por rotação de $\gamma(v) = (v \sin \theta, 0, v \cos \theta)$ em torno do eixo Oz , no qual $v \in]0, 2\pi \sin \theta[$, $r \in \mathbb{R}^+$ é o raio da base do cone, e $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ é o ângulo formado entre $\gamma(v)$ e Oz . Para cada (u, v) temos $\Phi_u(u, v) = (-v \sin \theta \sin u, v \sin \theta \cos u, 0)$ e $\Phi_v(u, v) = (\sin \theta \cos u, \sin \theta \sin u, \cos \theta)$, logo obtemos

$$\mathcal{F}_I = \begin{bmatrix} v^2 \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vejamos se o cone é isométrico ao setor circular. Por outras palavras, pretendemos desenrolar o cone até obter a forma de um setor circular. Neste caso, o setor circular é dado por

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi} :]0, 2\pi \sin \theta[\times]0, r[&\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\tilde{u}, \tilde{v}) &\mapsto (\tilde{v} \cos \tilde{u}, \tilde{v} \sin \tilde{u}, 0). \end{aligned}$$

Verificamos que estas parametrizações não são isométricas, dado que $\tilde{\Phi}_{\tilde{u}}(\tilde{u}, \tilde{v}) = (-\tilde{v} \sin \tilde{u}, \tilde{v} \cos \tilde{u}, 0)$ e $\tilde{\Phi}_{\tilde{v}}(\tilde{u}, \tilde{v}) = (\cos \tilde{u}, \sin \tilde{u}, 0)$, obtemos

$$\mathcal{F}_{I^*} = \begin{bmatrix} \tilde{v}^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \neq \mathcal{F}_I.$$

Deste modo, reparametrizando $\tilde{\Phi}$ por $h(\tilde{u}, \tilde{v}) = (v, u \sin \theta)$, obtemos

$$\begin{aligned} \bar{\Phi} :]0, 2\pi \sin \theta[\times]0, r[&\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (v \cos(u \sin \theta), v \sin(u \sin \theta), 0). \end{aligned}$$

Assim, Φ e $\bar{\Phi}$ são isométricas, dado que

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_u(u, v) &= (-v \sin \theta \sin(u \sin \theta), v \sin \theta \cos(u \sin \theta), 0), \\ \bar{\Phi}_v(u, v) &= (\cos(u \sin \theta), \sin(u \sin \theta), 0), \\ \bar{\mathcal{F}}_I &= \mathcal{F}_I = \begin{bmatrix} v^2 \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

como ilustra a Figura 3.8 com $\theta = \frac{\pi}{6}$ e $r = 5$.

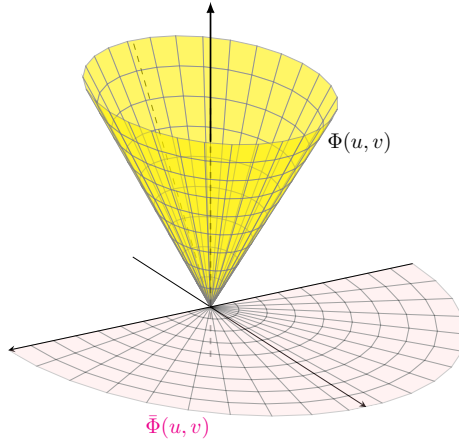


Figura 3.8: Isometria do Cone com o Setor Circular

Exemplo 3.32 A catenóide, menos um meridiano, dada por

$$\begin{aligned} \Phi :]0, 2\pi[\times]-1, 1[&\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (a \cosh v \cos u, a \cosh v \sin u, av) \end{aligned}$$

é uma superfície de revolução gerada pela catenária $\gamma(v) = (a \cosh v, 0, av)$, $v \in]-1, 1[$, onde $a \in \mathbb{R}$, como apresenta na Figura 3.9 com $a = 1$. Para cada (u, v) temos $\Phi_u(u, v) = (-a \cosh v \sin u, a \cosh v \cos u, 0)$ e $\Phi_v(u, v) = (a \sinh v \cos u, a \sinh v \sin u, a)$, obtemos

$$E = a^2 \cosh^2 v, \quad F = 0 \quad \text{e} \quad G = a^2(1 + \sinh^2 v) = a^2 \cosh^2 v.$$

Vejamos se a catenóide é isométrica à helicóide, no qual consideremos a helicóide parametrizada por $\tilde{\Phi}(\tilde{u}, \tilde{v}) = (\tilde{v} \cos \tilde{u}, \tilde{v} \sin \tilde{u}, a\tilde{u})$, $(\tilde{u}, \tilde{v}) \in]0, 2\pi[\times]-1, 1[$. Os coeficientes da primeira forma fundamental da helicóide não coincidem com os coeficientes de Φ , dado que

$$\tilde{E}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \tilde{v}^2 + a^2, \quad \tilde{F}(\tilde{u}, \tilde{v}) = 0, \quad \text{e} \quad \tilde{G}(\tilde{u}, \tilde{v}) = 1.$$

Deste modo, reparametrizando $\tilde{\Phi}$ por $h(\tilde{u}, \tilde{v}) = (u, a \sinh v)$, dá-nos

$$\bar{\Phi}(u, v) = (a \sinh v \cos u, a \sinh v \sin u, au).$$

Portanto, Φ e $\bar{\Phi}$ são isométricas, dado que $\bar{\Phi}_u(u, v) = (-a \sinh v \sin u, a \sinh v \cos u, a)$ e $\bar{\Phi}_v(u, v) = (a \cosh v \cos u, a \cosh v \sin u, 0)$, obtemos

$$\bar{E} = E = a^2 \cosh^2 v, \quad \bar{F} = F = 0, \quad \bar{G} = G = a^2 \cosh^2 v.$$

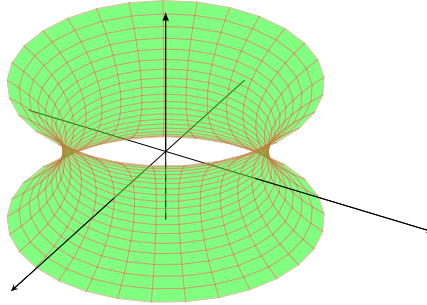


Figura 3.9: Catenóide

3.3 Segunda Forma Fundamental

Nesta secção será definida a segunda forma quadrática, no qual está relacionada com a curvatura de curvas contidas numa superfície.

Definição 3.33 *Sejam $\Phi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular, $q = (u_0, v_0) \in U$ e N o vetor normal unitário de Φ . Se $\gamma(t) = \Phi(u(t), v(t))$ é uma curva diferenciável da superfície, tal que $(u(t_0), v(t_0)) = q$ e $\gamma'(t_0) = w \in T_q\Phi$. Então, a forma quadrática II_q definida por*

$$\begin{aligned} II_q : T_q\Phi &\rightarrow \mathbb{R} \\ w &\mapsto II_q(w) = \langle \gamma''(t_0), N(q) \rangle \end{aligned}$$

é designada por segunda forma fundamental de Φ em q .

Mostramos em seguida, que a segunda forma fundamental está bem definida e determinamos a sua expressão em termos da base $\{\Phi_u, \Phi_v\}$.

Consideremos $\gamma(t) = \Phi(u(t), v(t))$ uma curva regular parametrizada de Φ e $(u(t_0), v(t_0)) = (u_0, v_0) = q \in U$. Derivando-a, obtemos

$$\gamma'(t) = w = u'(t)\Phi_u(q) + v'(t)\Phi_v(q) = a\Phi_u(q) + b\Phi_v(q).$$

Derivando-a novamente,

$$\begin{aligned} \gamma''(t) &= (\Phi_{uu}(q)u'(t) + \Phi_{uv}(q)v'(t))u'(t) + \Phi_u(q)u''(t) + (\Phi_{vu}(q)u'(t) + \\ &\quad \Phi_{vv}(q)v'(t))v'(t) + \Phi_v(q)v''(t) \\ &= \Phi_{uu}(q)u'(t)^2 + 2\Phi_{uv}(q)u'(t)v'(t) + \Phi_{vv}(q)v'(t)^2 + \Phi_u(q)u''(t) + \Phi_v(q)v''(t) \\ &= \Phi_{uu}(q)a^2 + 2\Phi_{uv}(q)ab + \Phi_{vv}(q)b^2 + \Phi_u(q)a' + \Phi_v(q)b'. \end{aligned}$$

Então, a expressão da forma quadrática II_q é dada por

$$\begin{aligned} II_q(w) &= \langle \gamma''(t), N(q) \rangle \\ &= \langle \Phi_{uu}(q), N(q) \rangle a^2 + 2\langle \Phi_{uv}(q), N(q) \rangle ab + \langle \Phi_{vv}(q), N(q) \rangle b^2, \end{aligned}$$

e segue que as funções reais diferenciáveis $\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ denotadas por

$$\mathcal{L}(q) = \langle \Phi_{uu}(q), N(q) \rangle, \quad \mathcal{M}(q) = \langle \Phi_{uv}(q), N(q) \rangle, \quad \mathcal{N}(q) = \langle \Phi_{vv}(q), N(q) \rangle,$$

são designadas como os coeficientes da segunda forma fundamental. Assim, omitindo q , obtemos

$$II_q(w) = \mathcal{L}a^2 + 2\mathcal{M}ab + \mathcal{N}b^2 = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ \mathcal{M} & \mathcal{N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix},$$

no qual $\mathcal{F}_{II} = \begin{bmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ \mathcal{M} & \mathcal{N} \end{bmatrix}$ é a matriz da forma quadrática $II_q(w)$.

Exemplo 3.34 Determinemos a matriz da segunda forma fundamental da superfície como gráfico de uma função de duas variáveis (Exemplo 3.22). Em cada (u, v) temos

$$\begin{aligned} \Phi_{uu}(u, v) &= (0, 0, f_{uu}), \\ \Phi_{uv}(u, v) &= (0, 0, f_{uv}), \\ \Phi_{vv}(u, v) &= (0, 0, f_{vv}), \\ \Phi_u(u, v) \wedge \Phi_v(u, v) &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & f_u \\ 0 & 1 & f_v \end{vmatrix} = (-f_u, -f_v, 1), \\ \|\Phi_u(u, v) \wedge \Phi_v(u, v)\| &= \sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2} = \sqrt{|\mathcal{F}_{\mathcal{I}}|}, \\ N(u, v) &= \frac{(-f_u, -f_v, 1)}{\sqrt{|\mathcal{F}_{\mathcal{I}}|}}. \end{aligned}$$

Logo, a matriz da segunda forma fundamental de Φ é dada por

$$\mathcal{F}_{II} = \frac{1}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} \begin{bmatrix} f_{uu} & f_{uv} \\ f_{uv} & f_{vv} \end{bmatrix}.$$

Exemplo 3.35 Determinemos a matriz da segunda forma fundamental da superfície de revolução (Exemplo 3.24). Em cada (u, v) temos

$$\begin{aligned} \Phi_{uu}(u, v) &= (f_{uu}(u) \cos(v), f_{uu}(u) \sin(v), g_{uu}(u)), \\ \Phi_{uv}(u, v) &= (-f_u(u) \sin(v), f_u(u) \cos(v), 0), \\ \Phi_{vv}(u, v) &= (-f(u) \cos(v), -f(u) \sin(v), 0), \\ \Phi_u(u, v) \wedge \Phi_v(u, v) &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ f_u(u) \cos(v) & f_u(u) \sin(v) & g_u(u) \\ -f(u) \sin(v) & f(u) \cos(v) & 0 \end{vmatrix} \\ &= (-f(u)g_u(u) \cos(v), -f(u)g_u(u) \sin(v), f(u)f_u(u)), \end{aligned}$$

$$\|\Phi_u(u, v) \wedge \Phi_v(u, v)\| = f(u)\sqrt{(g_u^2(u) + f_u^2(u))},$$

$$N(u, v) = \frac{(-g_u(u) \cos(v), -g_u(u) \sin(v), f_u(u))}{\sqrt{(g_u^2(u) + f_u^2(u))}}.$$

Logo, a matriz da segunda forma fundamental da superfície de revolução é dada por

$$\mathcal{F}_{II} = \frac{1}{\sqrt{(g_u^2(u) + f_u^2(u))}} \begin{bmatrix} f_u(u)g_{uu}(u) - g_u(u)f_{uu}(u) & 0 \\ 0 & f(u)g_u(u) \end{bmatrix}.$$

3.3.1 Curvaturas Normal e Geodésica da Curva da Superfície

Dada $\Phi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular, $\gamma(t) = \Phi(u(t), v(t)) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva da superfície e $q = (u(t), v(t)) \in U$.

Em cada ponto $\gamma(t)$ existe um vetor tangente unitário T de γ , um vetor normal unitário N da superfície, e um vetor paralelo ao plano tangente $T_q\Phi$ e perpendicular aos vetores T e N , sendo denotado por $N \wedge T$, de modo obtermos uma base ortonormada $\{N, T, N \wedge T\}$ ao longo da curva γ .

O vetor de aceleração de uma curva regular não parametrizada pelo comprimento de arco γ é escrita como uma combinação linear da base ortonormada $\{N, T, N \wedge T\}$:

$$\gamma''(t) = AT + B(N \wedge T) + CN. \quad (3.4)$$

Os coeficientes A, B pertencem à componente tangencial, e C à componente normal da superfície:

$$A = \langle \gamma'', T \rangle, \quad B = \langle \gamma'', N \wedge T \rangle, \quad C = \langle \gamma'', N \rangle.$$

Definição 3.36 *Seja $\Phi(u, v) : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular, e $q = (u(t), v(t)) \in U$. A curvatura normal e a curvatura geodésica em q , respetivamente, é uma aplicação $k_n, k_g : T_q\Phi \setminus 0 \rightarrow \mathbb{R}$ que, para cada vetor tangente $w = \gamma'(t) = a\Phi_u + b\Phi_v \neq 0 \in T_q\Phi$, associa:*

$$k_n(w) = \frac{II_q(w)}{I_q(w)} = \frac{\langle \gamma'', N \rangle}{\|\gamma'\|^2}, \quad k_g(w) = \frac{\langle \gamma'', (N \wedge T) \rangle}{\|\gamma'\|^2}. \quad (3.5)$$

O vetor curvatura normal é a projeção do vetor curvatura de γ na direção do vetor normal da superfície, e o vetor curvatura geodésica é a projeção ortogonal do vetor curvatura de γ na direção do vetor $N \wedge T$, isto é,

$$\vec{k}_n = \langle \vec{\mathcal{K}}_\gamma, N \rangle N, \quad \vec{k}_g = \langle \vec{\mathcal{K}}_\gamma, N \wedge T \rangle N \wedge T.$$

Determinando os produtos internos dos coeficientes A, B e C , obtemos

1. Para $A = \langle \gamma'', T \rangle$, dado que considerando $\mathbf{v}(t) = \|\gamma'(t)\| \Leftrightarrow \mathbf{v}^2 = \langle \gamma', \gamma' \rangle$, e derivando a igualdade, obtemos $2\mathbf{v}\mathbf{v}' = 2\langle \gamma'', \gamma' \rangle \Leftrightarrow \mathbf{v}\mathbf{v}' = \langle \gamma'', \mathbf{v}T \rangle \Leftrightarrow \mathbf{v}' = \langle \gamma'', T \rangle = A$;

2. Para $B = \langle \gamma'', N \wedge T \rangle = \langle N, \gamma'' \wedge T \rangle = \left\langle N, \gamma'' \wedge \frac{\gamma'}{\mathbf{v}} \right\rangle = \frac{1}{\mathbf{v}} \|N\| \|\gamma'' \wedge \gamma'\| \cos \psi \quad (*)$

O ângulo ψ é formado entre N e $\gamma'' \wedge \gamma'$, sendo que na proposição 1.66 obtemos

$$k = \frac{\|\gamma'' \wedge \gamma'\|}{\|\gamma'(t)\|^3} \Leftrightarrow \|\gamma'' \wedge \gamma'\| = k\mathbf{v}^3,$$

e substituindo em $(*)$, temos $B = \mathbf{v}^2 k \cos \psi$, logo $B = k_g \mathbf{v}^2$, onde $k \cos \psi$ corresponde a quantidade da curvatura geodésica;

3. Para $C = \langle \gamma'', N \rangle$, observamos que $k_n = \frac{\langle \gamma'', N \rangle}{\|\gamma'(t)\|^2} \Leftrightarrow k_n \mathbf{v}^2 = \langle \gamma'', N \rangle = C$.

Portanto, a expressão da equação (3.4) é dada por

$$\gamma'' = \mathbf{v}'T + k_g \mathbf{v}^2(N \wedge T) + k_n \mathbf{v}^2 N. \quad (3.6)$$

No entanto, quando γ é uma curva parametrizada pelo comprimento de arco, temos γ' perpendicular a γ'' , logo o coeficiente A é nulo, obtendo

$$\gamma'' = k_g(N \wedge T) + k_n N = \langle \gamma'', (N \wedge T) \rangle (N \wedge T) + \langle \gamma'', N \rangle N,$$

no qual a curvatura $k = \|\gamma''\|$ de γ dá-nos $\|\gamma''\|^2 = k_n^2 + k_g^2 \Leftrightarrow k^2 = k_n^2 + k_g^2$.

Geometricamente interpretemos as curvaturas normal e geodésica em relação a uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco. Se N_γ é o vetor normal unitário de γ , então $T' = \gamma'' = kN_\gamma$, e temos

$$k_n = \langle \gamma'', N \rangle = \langle kN_\gamma, N \rangle = k \cos \theta, \quad k_g = \pm k \sin \theta,$$

onde θ é o ângulo formado por N_γ e N , como apresenta a Figura 3.10.

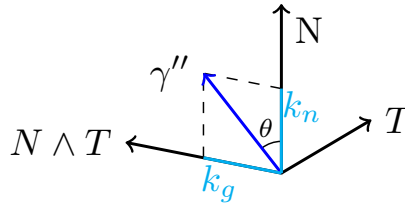


Figura 3.10: Curvaturas Normal e Geodésica.

Este resultado continua a ser válido para uma curva regular não parametrizada pelo comprimento de arco, ao efetuar uma reparametrização de γ pelo comprimento de arco, dado que ao considerar uma mudança de parâmetro de t por $\pm t + c$, onde c é uma constante, obtemos $k_n \mapsto k_n$ e $k_g \mapsto \pm k_g$.

Proposição 3.37 Se $\gamma(t) = \Phi(u(t), v(t))$ é uma curva parametrizada pelo comprimento de arco de Φ em $q = (u(t), v(t)) \in U$, então a curvatura normal k_n é dada por

$$k_n(w) = \mathcal{L}u'(t)^2 + 2\mathcal{M}u'(t)v'(t) + \mathcal{N}v'(t)^2.$$

Demonstração: Consideremos $\delta : I \rightarrow U \subset \mathbb{R}^2$ dada por $\delta(t) = (u(t), v(t))$, então $\gamma(t) = \Phi(u(t), v(t)) : I \rightarrow \Phi(U) \subset \mathbb{R}^3$. Usando a regra da cadeia, obtemos

$$\gamma'(t) = \Phi_u u'(t) + \Phi_v v'(t).$$

Derivando novamente, vem

$$\gamma''(t) = \Phi_{uu}u'(t)^2 + 2\Phi_{uv}u'(t)v'(t) + \Phi_{vv}v'(t)^2 + \Phi_u u''(t) + \Phi_v v''(t). \quad (3.7)$$

Assim, temos

$$k_n(w) = \langle \gamma''(t), N \rangle = \mathcal{L}u'(t)^2 + 2\mathcal{M}u'(t)v'(t) + \mathcal{N}v'(t)^2.$$

Portanto, para a curvatura normal é obtida a mesma expressão da segunda forma fundamental. Além disso, o produto interno tem como propriedade de bilinearidade, bem como $\Phi_u \perp N$ e $\Phi_v \perp N$. \square

Daquilo resulta que quando duas curvas parametrizadas pelo comprimento de arco passam no mesmo ponto da superfície e ambas possuem o mesmo vetor tangente, então terão a mesma curvatura normal, no qual traduz a seguinte proposição:

Proposição 3.38 (Teorema de Meusnier) *Seja P um ponto da superfície Φ , v um vetor tangente unitário de Φ em P . Seja Π_Θ um plano que passa em P paralelo a v , e forma um ângulo Θ com o plano tangente. Suponhamos que Π_Θ intersesta Φ numa curva γ_Θ com curvatura k_Θ . Então, a curvatura normal dada por $k_n = k_\Theta \sin \Theta$ é independente do ângulo Θ .*

Demonstração: Consideraremos que γ_Θ é uma curva parametrizada pelo comprimento de arco obtida pela interseção de Π_Θ . Segue que em P temos $\gamma'_\Theta = \pm v$, então γ''_Θ é perpendicular a v e paralelo a Π_Θ . Assim, substituindo θ por $\frac{\pi}{2} - \Theta$, obtemos

$$k_n = k_\Theta \cos\left(\frac{\pi}{2} - \Theta\right) = k_\Theta \sin \Theta.$$

Portanto, k_n depende de P e v , mas não de Θ . \square

Assim, a curvatura normal depende da direção do vetor tangente à superfície, contudo não depende da parametrização da curva.

Salienta-se ainda que se $\bar{\Phi} = \Phi \circ h$ é uma reparametrização de Φ por h , então a segunda forma quadrática e a curvatura normal de $\bar{\Phi}$ em \bar{q} e de Φ em $h(\bar{q})$ mudam ou não de sinal, se $\bar{N}(\bar{q}) = -N(h(\bar{q}))$ ou $\bar{N}(\bar{q}) = N(h(\bar{q}))$, respetivamente.

Definição 3.39 (Secção Normal) *Seja $\gamma(t) = \Phi(u(t), v(t)) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco da superfície Φ . Uma curva γ de Φ é chamada secção normal de Φ , se γ é a interseção de Φ com o plano Π , que é perpendicular ao plano tangente $T_q\Phi$ em todo o ponto de γ .*

Observação 3.40 *Nesta definição observa-se que os vetores γ' e N da superfície estão contidos no plano Π , no qual N_γ e N são paralelos, isto é, $N_\gamma = \pm N$, então temos $k_n = \pm k \cos(0) = \pm k$ e $k_g = (\pm)^2 k \sin(0^\circ) = 0$, se $k > 0$. Contrariamente, se $k = 0$, temos $k_n = k_g = 0$.*

Exemplo 3.41 *Seja um plano que passa no ponto $P = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ paralelo aos vetores linearmente independentes $a = (a_1, a_2, a_3)$ e $b = (b_1, b_2, b_3)$. Parametrizando-o por*

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (x_0 + a_1u + b_1v, y_0 + a_2u + b_2v, z_0 + a_3u + b_3v), \end{aligned}$$

temos $\Phi_u(u, v) = (a_1, a_2, a_3)$ e $\Phi_v(u, v) = (b_1, b_2, b_3)$. Como $E = 1$, $F = 0$ e $G = 1$, estes vetores são unitários e ortogonais. Seguidamente, obtemos

$$\begin{aligned} \Phi_{uu}(u, v) &= \Phi_{uv}(u, v) = \Phi_{vv}(u, v) = (0, 0, 0), \\ N(u, v) &= (a_2b_3 - b_2a_3, a_3b_1 - b_3a_1, a_1b_2 - b_1a_2). \end{aligned}$$

Verifica-se que a segunda forma fundamental e a curvatura normal são nulas, dado que $\mathcal{L} = \mathcal{M} = \mathcal{N} = 0 \Rightarrow k_n = 0$. Assim sendo, as secções normais são retas.

Exemplo 3.42 Determinemos a matriz \mathcal{F}_{II} e a curvatura normal da esfera (Exemplo 3.4) dada por $\Phi(u, v) = (R \cos u \cos v, R \cos u \sin v, R \sin u)$, $(u, v) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\times]0, 2\pi[$. Temos

$$E(u, v) = R^2, \quad F(u, v) = 0, \quad G(u, v) = R^2 \cos^2 u.$$

Então, a matriz e o determinante de $\mathcal{F}_{\mathcal{I}}$ são dados por

$$\mathcal{F}_{\mathcal{I}} = \begin{bmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \cos^2 u \end{bmatrix}, \quad |\mathcal{F}_{\mathcal{I}}| = R^4 \cos^2 u.$$

Verifica-se que estes vetores são ortogonais e não unitários, se $R \neq 1$ e $\cos^2 u \neq 1$. Seguidamente, o vetor normal unitário e as segundas derivadas parciais são dados por

$$\begin{aligned} \Phi_u(u, v) \wedge \Phi_v(u, v) &= (-R^2 \cos^2 u \cos v, -R^2 \cos^2 u \sin v, -R^2 \sin u \cos u), \\ \|\Phi_u(u, v) \wedge \Phi_v(u, v)\| &= R^2 \cos u, \\ N(u, v) &= (-\cos u \cos v, -\cos u \sin v, -\sin u), \\ \Phi_{uu}(u, v) &= (-R \cos u \cos v, -R \cos u \sin v, -\sin u), \\ \Phi_{uv}(u, v) &= (R \sin u \sin v, -R \sin u \cos v, 0), \\ \Phi_{vv}(u, v) &= (-R \cos u \cos v, -R \cos u \sin v, 0). \end{aligned}$$

Assim, a matriz da segunda forma fundamental e a curvatura normal são

$$\mathcal{F}_{II} = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & R \cos^2 u \end{bmatrix}, \quad k_n(w) = \frac{Ru'(t)^2 + R \cos^2 u v'(t)^2}{R^2 u'(t)^2 + R^2 \cos^2 u v'(t)^2} = \frac{1}{R}.$$

Portanto, a curvatura normal é constante para $\forall(u, v) \in U$. Quanto maior for o raio, menor será a curvatura normal. Quando $k_n(w) = 1$, temos que $\gamma(t)$ é uma curva parametrizada pelo comprimento de arco, neste caso é uma secção normal.

Exemplo 3.43 Determinemos a curvatura normal do parabolóide (Exemplo 3.8) parametrizado por $\Phi(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$. Temos

$$\begin{aligned} E &= 1 + 4u^2, & F &= 4uv, & G &= 1 + 4v^2, \\ \Phi_{uu}(u, v) &= \Phi_{vv}(u, v) = (0, 0, 2), & \Phi_{uv}(u, v) &= (0, 0, 0), \\ N(u, v) &= \frac{(-2u, -2v, 1)}{\sqrt{4(u^2 + v^2) + 1}}. \end{aligned}$$

Assim, a matriz da segunda forma fundamental e a curvatura normal são

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{II} &= \frac{2}{\sqrt{4(u^2 + v^2) + 1}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ k_n(w) &= -\frac{2(u'(t)^2 + v'(t)^2)}{\sqrt{4(u^2 + v^2) + 1}((1 + 4u^2)u'(t)^2 + 2(4uv)u'(t)v'(t) + (1 + 4v^2)v'(t)^2)}. \end{aligned}$$

Portanto, a curvatura normal não é constante para $\forall(u, v) \in U$.

3.3.2 Curvaturas Principais

Quando a curvatura normal em $q \in U$ adquire dois valores máximo e mínimo, que correspondem a k_1 e k_2 , são designados por curvaturas principais. A seguinte definição descreve como determinar as curvaturas principais.

Definição 3.44 (Curvaturas Principais) *As curvaturas principais k de Φ em $(u, v) \in U$ são as raízes da equação*

$$\det(\mathcal{F}_{II} - k\mathcal{F}_{I}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \mathcal{L} - kE & \mathcal{M} - kF \\ \mathcal{M} - kF & \mathcal{N} - kG \end{vmatrix} = 0. \quad (3.8)$$

Após as curvaturas principais serem determinadas, são calculados os vetores próprios associados às curvaturas principais.

Definição 3.45 *Se o vetor tangente $T = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ satisfaz $(\mathcal{F}_{II} - k\mathcal{F}_{I})T = 0$, então $\gamma' = a\Phi_u + b\Phi_v$ é designado por vetor principal de Φ , no qual uma curvatura principal corresponde unicamente a um vetor principal.*

Proposição 3.46 *Sejam duas curvaturas principais k_1 e k_2 de $\Phi(u, v)$ em $(u, v) \in U$. Então,*

1. k_1 e k_2 são números reais;
2. Se $k_1 = k_2 = k$, temos que todo o vetor tangente é um vetor principal para todo $P \in \Phi(u, v)$. Então P é um ponto umbílico;
3. Se $k_1 \neq k_2$, temos que quaisquer dois vetores (não nulos) principais γ'_1 e γ'_2 correspondentes a k_1 e k_2 , respetivamente, são perpendiculares.

Demonstração: Ver Andrew N. Pressley [16], página 133. □

Exemplo 3.47 Determinemos as curvaturas principais da esfera (Exemplo 3.42). Temos

$$\begin{vmatrix} R - R^2k & 0 \\ 0 & R \cos^2 u - kR^2 \cos^2 u \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow R^2 \cos^2 u (R^2 k^2 - 2Rk + 1) = 0 \Leftrightarrow k = \frac{1}{R}.$$

Portanto, a curvatura é constante em todo o ponto da superfície, logo qualquer vetor tangente de γ é o vetor principal.

Exemplo 3.48 Determinemos a curvatura normal e as curvaturas principais do cilindro (Exemplo 3.25). Temos

$$\begin{aligned} \Phi_{uu}(u, v) &= (-R \cos u, -R \sin u, 0), \\ \Phi_{uv}(u, v) &= \Phi_{vv}(u, v) = (0, 0, 0), \\ \Phi_u(u, v) \wedge \Phi_v(u, v) &= (R \cos u, R \sin u, 0), \\ \|\Phi_u(u, v) \wedge \Phi_v(u, v)\| &= R, \\ N(u, v) &= (\cos u, \sin u, 0). \end{aligned}$$

Assim, a matriz da segunda forma fundamental e a curvatura normal de Φ são dadas por

$$\mathcal{F}_{II} = \begin{bmatrix} -R & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad k_n(t) = -\frac{Ru'(t)^2}{R^2u'(t)^2 + v'(t)^2}.$$

Verifica-se que a curvatura normal não é constante para $\forall(u, v) \in U$. Se w for tangente a uma reta vertical, e supondo $\gamma(t) = \Phi(\pi, t)$, logo $k_n(w) = 0$ é a curvatura normal mínima. Enquanto que se w for tangente a uma circunferência, e supondo $\gamma(t) = \Phi(t, 0)$, logo $k_n = -\frac{1}{R}$ é a curvatura normal máxima. Seguidamente, obtemos as curvaturas principais por

$$\begin{vmatrix} -R - R^2k & 0 \\ 0 & 0 - k \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -k(-R - R^2k) = 0 \Leftrightarrow k = 0 \vee k = -\frac{1}{R}.$$

Deste modo, os vetores principais são ortogonais mutuamente. Calculando os vetores principais $\gamma'_i = a_i\Phi_u + b_i\Phi_v$, $i = 1, 2$ correspondentes a $k_i, i = 1, 2$, obtemos

- Para $k_1 = 0$ temos $\begin{bmatrix} -R & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ b_1 \in \mathbb{R} \end{cases}$,

Então $T = \begin{bmatrix} 0 \\ b_1 \end{bmatrix} = b_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \gamma'_1(t) = 0\Phi_u + 1\Phi_v = (0, 0, 1)$;

- Para $k_2 = -\frac{1}{R}$ temos $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a_2 \in \mathbb{R} \\ b_2 = 0 \end{cases}$,

Então $T = \begin{bmatrix} a_2 \\ 0 \end{bmatrix} = a_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \gamma'_2(t) = (-R \sin t, R \cos t, 0)$.

No qual os vetores principais correspondem à duas curvas parametrizadas pelo comprimento de arco em Φ , por exemplo: $\gamma_1(t) = (\sin(t), \cos(t), 1)$ e $\gamma_2(t) = (a, b, t)$, $a, b \in \mathbb{R}$. Conforme a Figura 3.11.

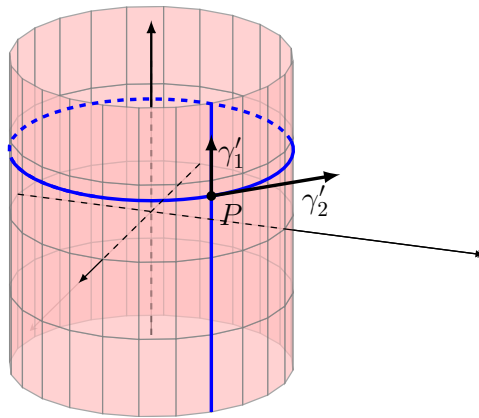


Figura 3.11: Cilindro

3.3.3 Curvaturas Gaussiana e Média

Nesta secção serão definidas duas medidas de curvatura da superfície com base nas curvaturas principais.

Definição 3.49 *Sejam k_1, k_2 as curvaturas principais de Φ em $q = (u, v) \in U$. O produto das curvaturas principais é designada por curvatura gaussiana de Φ em q , tendo*

$$\mathcal{G} = k_1 k_2.$$

A média das curvaturas principais é chamada de curvatura média de Φ em q , tendo

$$H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2).$$

Dizemos que Φ é uma superfície mínima, se $H = 0$.

Observa-se que quando se efetua uma mudança de parâmetros, a curvatura gaussiana mantém-se, enquanto que a curvatura média é alterada.

Dado que $\bar{\Phi} = \Phi \circ h$ uma reparametrização de Φ por h , $\bar{\mathcal{G}}, \bar{H}, \bar{k}_n$ (resp. \mathcal{G}, H, k_n) a curvatura gaussiana, a curvatura média e a curvatura normal de $\bar{\Phi}$ em \bar{q} (resp. Φ em $h(\bar{q})$).

No qual o sinal de $\bar{k}_n = \pm k_n$ é positivo se $\det J(h) > 0$, e negativo se $\det J(h) < 0$. Logo, as curvaturas principais de $\bar{\Phi}$ em \bar{q} e de Φ em $h(\bar{q})$ mudam ou não de sinal, portanto temos $\bar{H} = \pm H(h(\bar{q}))$ e $\bar{\mathcal{G}} = \mathcal{G}(h(\bar{q}))$.

Seguidamente, serão expressadas as curvaturas gaussiana, média e principais através dos coeficientes da primeira e segunda forma fundamental.

Proposição 3.50 *Seja $\Phi(u, v)$ uma superfície parametrizada regular, E, F, G e $\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}$ os coeficientes da primeira e segunda forma fundamental, respetivamente. Então temos*

1. $\mathcal{G} = \frac{\mathcal{L}\mathcal{N} - \mathcal{M}^2}{EG - F^2},$
2. $H = \frac{\mathcal{L}G - 2\mathcal{M}F + \mathcal{N}E}{2(EG - F^2)},$
3. *As curvaturas principais são $H \pm \sqrt{H^2 - \mathcal{G}}$.*

Demonstração: Se um número real k é a curvatura principal em $q \in U$, recorrendo à definição 3.44, temos que as curvaturas principais são raízes de

$$\begin{vmatrix} \mathcal{L} - kE & \mathcal{M} - kF \\ \mathcal{M} - kF & \mathcal{N} - kG \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (EG - F^2)k^2 - (\mathcal{L}G - 2\mathcal{M}F + \mathcal{N}E)k + \mathcal{L}\mathcal{N} - \mathcal{M}^2 = 0.$$

Esta equação tem forma quadrática, isto é, $ak^2 + bk + c = 0$. Consideremos a soma e o produto das raízes dadas por $-b/a$ e c/a , respetivamente. Então,

$$\mathcal{G} = \frac{\mathcal{L}\mathcal{N} - \mathcal{M}^2}{EG - F^2}, \quad H = \frac{1}{2} \frac{\mathcal{L}G - 2\mathcal{M}F + \mathcal{N}E}{EG - F^2},$$

no qual k_1 e k_2 são raízes de $k^2 + 2Hk + \mathcal{G} = 0 \Rightarrow k = H \pm \sqrt{H^2 - \mathcal{G}}$. □

Através da definição anterior, é possível classificar os pontos de uma superfície da seguinte forma:

Definição 3.51 Seja $\Phi(u, v) : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular. Dizemos que $q = (u, v) \in U$ é um ponto

1. planar, se $\mathcal{G}(q) = H(q) = 0$;
2. parabólico, se $\mathcal{G}(q) = 0$ e $H(q) \neq 0$;
3. elíptico, se $\mathcal{G}(q) > 0$;
4. hiperbólico, se $\mathcal{G}(q) < 0$.

Exemplo 3.52 O toro dado por

$$\begin{aligned} \Phi :]0, 2\pi[\times]0, 2\pi[&\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto \Phi(u, v) = ((a + r \cos u) \cos v, (a + r \cos u) \sin v, r \sin u), \end{aligned}$$

é uma superfície de revolução, sendo gerada pela rotação de um círculo $\gamma(u) = (a + r \cos u, 0, r \sin u)$ centrado em $(a, 0, 0)$ com $0 < r < a$, em torno do eixo Oz , conforme a Figura 3.12 para $r = 3$ e $a = 12$. Temos

$$\begin{aligned} \Phi_u(u, v) &= (-r \sin u \cos v, -r \sin u \sin v, r \cos u), \\ \Phi_v(u, v) &= (a + r \cos u)(-\sin v, \cos v, 0), \\ \Phi_{uu}(u, v) &= (-r \cos u \cos v, -r \cos u \sin v, -r \sin u), \\ \Phi_{uv}(u, v) &= (r \sin u \sin v, -r \sin u \cos v, 0), \\ \Phi_{vv}(u, v) &= (a + r \cos u)(-\cos v, -\sin v, 0), \\ \Phi_u(u, v) \wedge \Phi_v(u, v) &= -r(a + r \cos u)(\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u) \neq (0, 0, 0), \\ \|\Phi_u(u, v) \wedge \Phi_v(u, v)\| &= -r(a + r \cos u), \\ N(u, v) &= (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u). \end{aligned}$$

Verifica-se que é regular para todo $(u, v) \in U$. As matrizes da primeira e segunda forma fundamental são obtidas por

$$\mathcal{F}_I = \begin{bmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & R(a + r \cos u)^2 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{F}_{II} = \begin{bmatrix} -r & 0 \\ 0 & R - (a + r \cos u) \cos u \end{bmatrix}.$$

Segue que

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= \frac{\cos u}{r(a + r \cos u)}, & H &= \frac{-a - 2r \cos u}{2r(a + r \cos u)}, \\ k_1 &= -\frac{\cos u}{(a + r \cos u)}, & k_2 &= -\frac{1}{r}, \end{aligned}$$

Portanto, $\Phi(u, v)$ tem pontos parabólicos, se $u = \left\{ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\}$, que descrevem as circunferências contidas no plano xy ; elípticos, se $\frac{3\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$; e hiperbólicos, se $\frac{\pi}{2} < u < \frac{3\pi}{2}$.

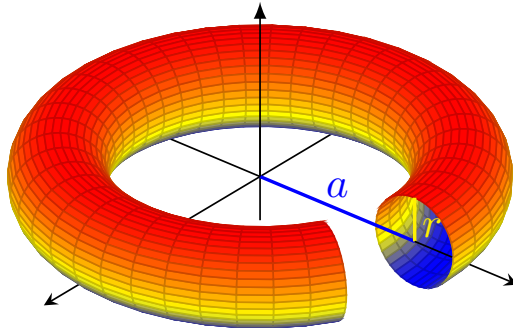


Figura 3.12: Toro

Por outro lado, a esfera tem uma curvatura gaussiana constante com pontos elípticos, dado que no exemplo 3.47 obtemos $\mathcal{G} = \frac{1}{R^2}$; o cilindro com pontos parabólicos, dado que no exemplo 3.48 obtemos $\mathcal{G} = 0$ e $H = -\frac{1}{2R}$; e, a helicóide e a catenóide são superfícies mínimas, dado que $H = 0$.

Capítulo 4

Geodésicas

Dado dois pontos fixos de uma superfície, uma curva que tenha comprimento mínimo em relação a qualquer outra curva, e que passa nos respectivos pontos, é designada por geodésica.

Definição 4.1 (Geodésica) *Seja $\Phi(u, v)$ uma superfície parametrizada regular. Uma curva regular $\gamma(t) = \Phi(u(t), v(t))$ é uma geodésica da superfície se, para $\forall t \in I$, $\gamma''(t)$ é zero ou é perpendicular à superfície no ponto $\gamma(t)$, ou seja, paralelo ao vetor normal unitário N da superfície ao longo da curva γ .*

Proposição 4.2 *Se γ é uma geodésica, então $\|\gamma'(t)\|$ é constante.*

Demonstração: Consequência imediata do o Lema 1.33. □

Definição 4.3 (Pré-geodésica) *Uma curva γ de Φ é chamada pré-geodésica, se existe uma reparametrização $\Gamma = \gamma \circ \alpha$ de γ , tal que Γ é uma geodésica.*

Proposição 4.4 *Seja γ uma curva parametrizada regular da superfície Φ . Então as seguintes condições são equivalentes:*

1. γ é uma pré-geodésica;
2. $\gamma''(t)$ escreve-se como combinação linear de $\gamma'(t)$ e de $N(t)$;
3. γ tem curvatura geodésica nula.

Demonstração:

- 1) \Rightarrow 2): Hipótese: A curva $\Gamma = \gamma \circ \alpha$ é uma geodésica, no qual $\alpha : J \rightarrow I$ é uma mudança de parâmetro com $t = \alpha(s)$. Derivando Γ até à segunda ordem, obtemos

$$\begin{aligned}(\gamma \circ \alpha)'(s) &= \gamma'(\alpha(s))\alpha'(s) = \frac{d\gamma}{dt} \frac{dt}{ds} \\ \Rightarrow (\gamma \circ \alpha)''(s) &= \frac{d^2(\gamma \circ \alpha)}{ds^2} = \frac{d}{ds} \left(\frac{d\gamma}{dt} \frac{dt}{ds} \right) = \frac{d^2\gamma}{dt^2} \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 + \frac{d\gamma}{dt} \frac{d^2t}{ds^2}. \quad (4.1)\end{aligned}$$

Então existe $\lambda \in \mathbb{R}$, tal que

$$\begin{aligned} (\gamma \circ \alpha)''(s) &= \lambda(s)N(s) \\ \Leftrightarrow \frac{d^2\gamma}{dt^2} \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{d\gamma}{dt} \frac{d^2t}{ds^2} &= \lambda(s)N(s). \end{aligned}$$

De modo que

$$\frac{d^2\gamma}{dt^2} = \frac{1}{\left(\frac{dt}{ds}\right)^2} \left(\lambda(s)N(s) - \frac{d\gamma}{dt} \frac{d^2t}{ds^2} \right) = -\frac{d^2t}{ds^2} \frac{1}{\left(\frac{dt}{ds}\right)^2} \gamma'(t) + \frac{1}{\left(\frac{dt}{ds}\right)^2} \lambda(s)N(s).$$

- 2) \Rightarrow 3) Hipótese: Para todo $t \in I$, existem $\delta(t), \nu(t) : I \rightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$\gamma''(t) = \delta(t)\gamma'(t) + \nu(t)N(t) \perp N(t) \wedge T(t),$$

logo $k_g = \langle \gamma''(t), (N(t) \wedge T(t)) \rangle = 0$.

- 3) \Rightarrow 1) Hipótese:

Se $k_g = 0 \Leftrightarrow \langle \gamma''(t), (N(t) \wedge T(t)) \rangle = 0$, e $\gamma''(t) = AT + B(N \wedge T) + CN$, então $k_g = 0 \Rightarrow B = 0$, logo

$$\gamma''(t) = A(t)T(t) + C(t)N(t).$$

Como $\gamma \circ \alpha$ é uma reparametrização pelo comprimento de arco, então através do teorema (1.35) obtemos $\|(\gamma \circ \alpha)'(s)\| = 1$, logo $\langle (\gamma \circ \alpha)'(s), (\gamma \circ \alpha)''(s) \rangle = 0$. Portanto,

$$(\gamma \circ \alpha)''(s) = C_1(s)N(s),$$

logo, γ é uma pré-geodésica. □

Exemplo 4.5 Considere-se várias parametrizações de $\gamma :]0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^3$ contidas no cilindro (Exemplo 3.48):

1. Uma reta $\gamma(t) = \Phi(0, t) = (R, 0, t)$ é uma geodésica, dado que $\gamma'(t) = (0, 0, 1)$, logo $\|\gamma'(t)\| = 1$. Contudo, esta pode ser não paralela a N . Derivando-a novamente, obtemos $\gamma''(t) = (0, 0, 0)$, comprovando que $\gamma(t)$ é uma geodésica;
2. Uma circunferência $\gamma(t) = \Phi(t, 2) = (R \cos t, R \sin t, 2)$ é uma geodésica, dado que $\gamma'(t) = (-R \sin t, R \cos t, 0)$, logo $\|\gamma'(t)\| = R$, e $\gamma''(t) = (-R \cos t, -R \sin t, 0)$ é não nulo. Vejamos então se γ'' é paralela a N . Verifica-se que

$$\gamma''(t) = -1(\cos(u), \sin(u), 0) = -1N$$

é uma combinação linear de N , com sentido oposto, portanto γ'' e N são paralelos, comprovando que $\gamma(t)$ é uma geodésica;

3. Uma hélice $\gamma(t) = \Phi(t, t) = (R \cos t, R \sin t, t)$ é uma geodésica, dado que $\gamma'(t) = (-R \sin t, R \cos t, 1)$, logo verifica-se que $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{R^2 + 1}$, e $\gamma''(t) = (-R \cos t, -R \sin t, 0) = -1N$;

4. Uma elipse $\gamma(t) = \Phi(t, b \sin t) = (R \cos t, R \sin t, b \sin t)$ não é uma geodésica, dado que

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= (-R \sin t, R \cos t, b \cos t) \Rightarrow \|\gamma'(t)\| = \sqrt{R^2 + b^2 \cos^2 t} \neq c, \\ \gamma''(t) &= (-R \cos t, -R \sin t, -b \sin t).\end{aligned}$$

Verifica-se que $\|\gamma'(t)\|$ é não constante e γ'' é não paralelo a N .

Consequentemente, verifiquemos se γ é uma pré-geodésica ao aplicar uma reparametrização de γ . Contudo, não é possível determinar a inversa do comprimento de arco, devido ao facto de não ser possível expressar explicitamente a sua inversa, tal que

$$s(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{R^2 + b^2 \sin^2 t} \, d\sigma$$

Outra forma de comprovar uma pré-geodésica é verificar se $k_g = 0$. Temos

$$\begin{aligned}N(t) &= (\cos t, \sin t, 0), \\ T(t) &= \frac{(-R \sin t, R \cos t, b \cos t)}{\sqrt{R^2 + b^2 \cos^2 t}}, \\ N(t) \wedge T(t) &= \frac{1}{\sqrt{R^2 + b^2 \cos^2 t}} (b \sin t \cos t, -b \cos^2 t, -R), \\ k_g(w) &= \frac{bR \sin t}{(R^2 + b^2 \cos^2 t)^{\frac{3}{2}}} \neq 0,\end{aligned}$$

portanto, γ não é uma pré-geodésica.

Exemplo 4.6 Considera-se uma parábola $\gamma(t) = \Phi(t, t) = (t, t, 2t^2)$ contida no parabolóide $\Phi(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$ (referido no Exemplo 3.8). Derivando γ , temos

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= (1, 1, 4t), \\ \|\gamma'(t)\| &= \sqrt{2}\sqrt{1 + 8t^2} \neq c, \\ \gamma''(t) &= (0, 0, 4).\end{aligned}$$

Verifica-se que $\|\gamma'(t)\|$ não é constante, e γ'' é não paralelo a N , logo γ não é uma geodésica.

Porém, ao verificar se γ é uma pré-geodésica, constata-se que não é possível reparametrizá-la, devido ao facto de não ser possível determinar a inversa do comprimento de arco. Consequentemente, torna-se necessário verificar se $k_g(w) = 0$. Temos

$$\begin{aligned}N(t) &= \frac{(-2t, -2t, 1)}{\sqrt{1 + 8t^2}}, \\ T(t) &= \frac{(1, 1, 4t)}{\sqrt{2}\sqrt{1 + 8t^2}}, \\ N(t) \wedge T(t) &= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \\ k_g(w) &= \frac{\langle \gamma''(t), N(t) \wedge T(t) \rangle}{\|\gamma'(t)\|^2} = 0.\end{aligned}$$

Portanto, γ é uma pré-geodésica em t , conforme a Figura 4.1 apresenta os vetores γ', γ'' e N nos pontos $t = 0$ e $t = 0, 8$.

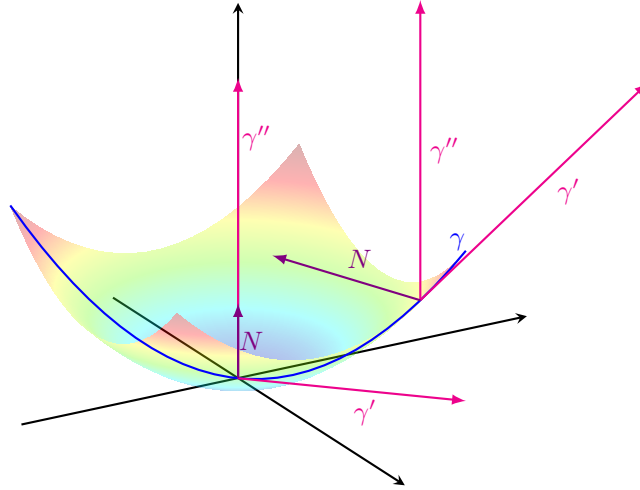


Figura 4.1: Pré-geodésica do Parabolóide

4.1 Equações Geodésicas

Outra forma de determinar as geodésicas de uma superfície é através das equações diferenciais. Considere-se uma superfície regular parametrizada $\Phi(u, v) : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(u, v) \in U$. Para cada (u, v) temos os vetores Φ_{uu} , Φ_{uv} e Φ_{vv} como uma combinação linear da base ortonormada $\{\Phi_u, \Phi_v, N\}$:

$$\begin{aligned}\Phi_{uu} &= \Gamma_{11}^1 \Phi_u + \Gamma_{11}^2 \Phi_v + EN, \\ \Phi_{uv} &= \Gamma_{12}^1 \Phi_u + \Gamma_{12}^2 \Phi_v + FN, \\ \Phi_{vv} &= \Gamma_{22}^1 \Phi_u + \Gamma_{22}^2 \Phi_v + GN.\end{aligned}\tag{4.2}$$

Os coeficientes Γ_{ij}^k são denominados por símbolos de Christoffel. Substituindo em (3.7), obtemos o vetor aceleração dado por

$$\begin{aligned}\gamma''(t) &= (\Gamma_{11}^1 \Phi_u + \Gamma_{11}^2 \Phi_v + EN)u'(t)^2 + 2(\Gamma_{12}^1 \Phi_u + \Gamma_{12}^2 \Phi_v \\ &\quad + FN)u'(t)v'(t) + (\Gamma_{22}^1 \Phi_u + \Gamma_{22}^2 \Phi_v + GN)v'(t)^2 + \Phi_u u''(t) + \Phi_v v''(t) \\ &= (u''(t) + \Gamma_{11}^1 u'(t)^2 + 2\Gamma_{12}^1 u'(t)v'(t) + \Gamma_{22}^1 v'(t)^2)\Phi_u \\ &\quad + (v''(t) + \Gamma_{11}^2 u'(t)^2 + 2\Gamma_{12}^2 u'(t)v'(t) + \Gamma_{22}^2 v'(t)^2)\Phi_v \\ &\quad + (Eu'(t)^2 + Fu'(t)v'(t) + Gv'(t)^2)N,\end{aligned}$$

sendo composto por duas componentes: a tangencial e a normal, respectivamente, por

$$\begin{aligned}a_T &= (u''(t) + \Gamma_{11}^1 u'(t)^2 + 2\Gamma_{12}^1 u'(t)v'(t) + \Gamma_{22}^1 v'(t)^2)\Phi_u \\ &\quad + (v''(t) + \Gamma_{11}^2 u'(t)^2 + 2\Gamma_{12}^2 u'(t)v'(t) + \Gamma_{22}^2 v'(t)^2)\Phi_v, \\ a_N &= (Eu'(t)^2 + Fu'(t)v'(t) + Gv'(t)^2)N.\end{aligned}$$

Proposição 4.7 *Os símbolos de Christoffel são obtidos através dos coeficientes da primeira forma fundamental:*

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^1 &= \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{11}^2 &= \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG - F^2)}, \\
\Gamma_{12}^1 &= \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{12}^2 &= \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)}, \\
\Gamma_{22}^1 &= \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG - F^2)}.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Demonstração: Através do produto interno das equações (4.2) com Φ_u e Φ_v , obtemos

$$\begin{aligned}
\langle \Phi_{uu}, \Phi_u \rangle &= \Gamma_{11}^1 \langle \Phi_u, \Phi_u \rangle + \Gamma_{11}^2 \langle \Phi_v, \Phi_u \rangle + E \langle N, \Phi_u \rangle = \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F, \\
\langle \Phi_{uu}, \Phi_v \rangle &= \Gamma_{11}^1 \langle \Phi_u, \Phi_v \rangle + \Gamma_{11}^2 \langle \Phi_v, \Phi_v \rangle + E \langle N, \Phi_v \rangle = \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G, \\
\langle \Phi_{uv}, \Phi_u \rangle &= \Gamma_{12}^1 \langle \Phi_u, \Phi_u \rangle + \Gamma_{12}^2 \langle \Phi_v, \Phi_u \rangle + F \langle N, \Phi_u \rangle = \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F, \\
\langle \Phi_{uv}, \Phi_v \rangle &= \Gamma_{12}^1 \langle \Phi_u, \Phi_v \rangle + \Gamma_{12}^2 \langle \Phi_v, \Phi_v \rangle + F \langle N, \Phi_v \rangle = \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G, \\
\langle \Phi_{vv}, \Phi_u \rangle &= \Gamma_{22}^1 \langle \Phi_u, \Phi_u \rangle + \Gamma_{22}^2 \langle \Phi_v, \Phi_u \rangle + \mathcal{N} \langle N, \Phi_u \rangle = \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F, \\
\langle \Phi_{vv}, \Phi_v \rangle &= \Gamma_{22}^1 \langle \Phi_u, \Phi_v \rangle + \Gamma_{22}^2 \langle \Phi_v, \Phi_v \rangle + \mathcal{N} \langle N, \Phi_v \rangle = \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G.
\end{aligned}$$

Seguidamente, derivando os coeficientes E, F, G em relação a u e v , obtemos

$$\begin{aligned}
E_u &= \langle \Phi_{uu}, \Phi_u \rangle + \langle \Phi_u, \Phi_{uu} \rangle = 2\langle \Phi_{uu}, \Phi_u \rangle \Rightarrow \langle \Phi_{uu}, \Phi_u \rangle = \frac{E_u}{2}, \\
E_v &= \langle \Phi_{uv}, \Phi_u \rangle + \langle \Phi_u, \Phi_{uv} \rangle = 2\langle \Phi_{uv}, \Phi_u \rangle \Rightarrow \langle \Phi_{uv}, \Phi_u \rangle = \frac{E_v}{2}, \\
G_u &= \langle \Phi_{vu}, \Phi_v \rangle + \langle \Phi_v, \Phi_{vu} \rangle = 2\langle \Phi_{vu}, \Phi_v \rangle \Rightarrow \langle \Phi_{vu}, \Phi_v \rangle = \frac{G_u}{2}, \\
G_v &= \langle \Phi_{vv}, \Phi_v \rangle + \langle \Phi_v, \Phi_{vv} \rangle = 2\langle \Phi_{vv}, \Phi_v \rangle \Rightarrow \langle \Phi_{vv}, \Phi_v \rangle = \frac{G_v}{2}, \\
F_u &= \langle \Phi_{uu}, \Phi_v \rangle + \langle \Phi_u, \Phi_{vu} \rangle = \langle \Phi_{vu}, \Phi_v \rangle + \frac{E_v}{2} \Rightarrow \langle \Phi_{uu}, \Phi_v \rangle = F_u - \frac{E_v}{2}, \\
F_v &= \langle \Phi_{uv}, \Phi_v \rangle + \langle \Phi_u, \Phi_{vv} \rangle = \frac{G_v}{2} + \langle \Phi_{vu}, \Phi_v \rangle \Rightarrow \langle \Phi_{vv}, \Phi_u \rangle = F_v - \frac{G_v}{2}.
\end{aligned}$$

Logo, adquirimos um sistema de equações lineares nas variáveis Γ_{11}^1 e Γ_{11}^2 por

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \frac{E_u}{2} \\ \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = F_u - \frac{E_v}{2} \end{cases}.$$

Este sistema é possível e determinado, pois $\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix} = EG - F^2 > 0$, então aplicamos a regra de Cramer, obtendo

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{E_u}{2} & F \\ F_u - \frac{E_v}{2} & G \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}} = \frac{\frac{E_u}{2}G - F\left(F_u - \frac{E_v}{2}\right)}{EG - F^2} = \frac{E_uG - FF_u - FE_v}{2(EG - F^2)},$$

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{\begin{vmatrix} E & \frac{E_u}{2} \\ F & F_u - \frac{E_v}{2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}} = \frac{E\left(F_u - \frac{E_v}{2}\right) - F\frac{E_u}{2}}{EG - F^2} = \frac{EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG - F^2)}.$$

Os restantes coeficientes são determinados da mesma forma. \square

Proposição 4.8 (Equações geodésicas) *Seja $\Phi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular. Se $\gamma(t) = \Phi(u(t), v(t))$ é uma curva de Φ em $(u(t), v(t)) \in U$, então γ é uma geodésica se, e só se, satisfaz o sistema de equações diferenciais não lineares*

$$\begin{cases} u'' + \Gamma_{11}^1(u')^2 + 2\Gamma_{12}^1u'v' + \Gamma_{22}^1(v')^2 = 0 \\ v'' + \Gamma_{11}^2(u')^2 + 2\Gamma_{12}^2u'v' + \Gamma_{22}^2(v')^2 = 0 \end{cases}. \quad (4.4)$$

Demonstração: Por definição, $\gamma(t)$ é uma geodésica se, e só se, para todo $t \in I$, $\gamma''(t)$ não tem componente tangencial à superfície, ou seja, os coeficientes de Φ_u e Φ_v têm de ser nulos. Derivando γ até segunda ordem, obtemos

$$\begin{aligned} \gamma' &= u'\Phi_u + v'\Phi_v, \\ \gamma'' &= (u'' + \Gamma_{11}^1u'^2 + 2\Gamma_{12}^1u'v' + \Gamma_{22}^1v'^2)\Phi_u \\ &\quad + (v'' + \Gamma_{11}^2u'^2 + 2\Gamma_{12}^2u'v' + \Gamma_{22}^2v'^2)\Phi_v \\ &\quad + (Eu'^2 + Fu'v' + Gv'^2)N. \end{aligned}$$

Portanto, γ é uma geodésica de Φ se, e só se, $u(t)$ e $v(t)$ satisfaz o sistema de equações (4.4). \square

O teorema da existência e unicidade de geodésicas afirma que para $\forall q \in U$ e para todo vetor não nulo $w \in T_q\Phi$, existe $\epsilon > 0$ e uma única geodésica $\gamma : -\epsilon, \epsilon \rightarrow \mathbb{R}^3$ da superfície Φ , tal que $(u(0), v(0)) = q$ e $\gamma'(t) = w$.

Exemplo 4.9 Determinemos as geodésicas da esfera (Exemplo 3.42) parametrizada por $\Phi(u, v) = (R \cos u \cos v, R \cos u \sin v, R \sin u)$. No Exemplo 3.42 calculou-se os coeficientes da primeira forma fundamental por

$$E = R^2, \quad F = 0, \quad G = R^2 \cos^2 u,$$

e, derivando-os em ordem a u e v , temos

$$E_u = 0, \quad F_u = 0, \quad G_u = -2R^2 \sin u \cos u, \quad E_v = 0, \quad F_v = 0, \quad G_v = 0.$$

Seguidamente, através das equações (4.3), obtemos os símbolos de Christoffel por

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= 0, & \Gamma_{11}^2 &= 0, \\ \Gamma_{12}^1 &= 0, & \Gamma_{12}^2 &= -\tan u, \\ \Gamma_{22}^1 &= \sin u \cos u, & \Gamma_{22}^2 &= 0,\end{aligned}$$

e conseqüentemente, o seguinte sistema de equações da geodésicas é dado por

$$\begin{cases} u'' + \sin u \cos u (v')^2 = 0 \\ v'' - 2 \tan u u' v' = 0 \end{cases}.$$

Sendo de difícil resolução, assumimos então que $\gamma(t) = \Phi(u(t), v(t))$ está parametrizada pelo comprimento de arco, tal que $\|\gamma(t)\|^2 = Eu'^2 + 2Gu'v' + Gv'^2 = 1$.

Neste sistema observamos que a segunda equação é de segunda ordem. Então aplicando o método de separação de variáveis, de forma a reduzir até à primeira ordem, obtemos

$$\begin{aligned}\int \frac{v''}{v'} dt &= \int 2 \tan u u' dt \\ \ln v' &= -2 \ln(\cos u) + c \\ v' &= \frac{d}{\cos^2(u)}, \quad \text{onde } d = e^c.\end{aligned}$$

Substituindo v' em $u'^2 + \cos^2 u \left(\frac{d}{\cos^2 u}\right)^2 = 1$, e resolvendo em ordem a u' , obtemos

$$u' = \pm \sqrt{1 - \frac{d^2}{\cos^2(u)}} = \pm \frac{\sqrt{\cos^2(u) - d^2}}{\cos(u)}.$$

Dividindo v' por u' , temos a seguinte equação de variáveis separáveis

$$\frac{dv}{du} = \frac{v'}{u'} = \frac{\pm d}{\cos(u) \sqrt{\cos^2(u) - d^2}}.$$

Integrando ambos os membros da igualdade acima, assumindo $d = \cos(\varphi)$, $-1 \leq d \leq 1$ e o sinal de d como positivo, obtemos

$$\begin{aligned}\int dv &= \int \frac{d}{\cos(u) \sqrt{\cos^2(u) - d^2}} du \\ v &= \int \frac{\cos(\varphi)}{\cos(u) \sqrt{\cos^2(u) - (\cos^2(\varphi))}} du \\ &= \int \frac{\cos(\varphi)}{\cos(u) \sqrt{\cos^2(u) \sin^2(\varphi) + \cos^2(u) \cos^2(\varphi) - (\cos^2(\varphi))}} du \\ &= \int \frac{\cos(\varphi)}{\sin(\varphi) \cos^2(u) \frac{\sqrt{\cos^2(u) \sin^2(\varphi) - \sin^2(u) \cos^2(\varphi)}}{\cos(u) \sin(\varphi)}} du = \int \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\tan(u)}{\tan(\varphi)}\right)^2}} du \\ &= \arcsin\left(\frac{\tan(u)}{\tan(\varphi)}\right) + c.\end{aligned}$$

Assim, $\gamma(u)$ é uma pré-geodésica dada por

$$\gamma(u) = (R \cos(u) \cos(\arcsin\left(\frac{\tan(u)}{\tan(\varphi)}\right) + c), R \cos(u) \sin(\arcsin\left(\frac{\tan(u)}{\tan(\varphi)}\right) + c), R \sin(u)),$$

no qual descreve as circunferências com raios máximos, conforme a Figura 4.2.

Outro modo de encontrar geodésicas da esfera é aplicando duas rotações de $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ com $R = 1$, que descreve o equador da circunferência, em torno dos eixos Ox e Oz , respetivamente. Assim sendo, é realizada primeiramente uma rotação de γ em torno do Ox :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t \\ \cos \varphi \sin t \\ \sin \varphi \sin t \end{bmatrix},$$

e novamente, uma rotação em torno do eixo Oz :

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos t \\ \cos \varphi \sin t \\ \sin \varphi \sin t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos t - \sin \theta \cos \varphi \sin t \\ \sin \theta \cos t + \cos \theta \cos \varphi \sin t \\ \sin \varphi \sin t \end{bmatrix}.$$

Seguidamente, igualando o resultado obtido com as funções componentes da esfera:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \cos \theta \cos t - \sin \theta \cos \varphi \sin t = \cos u \cos v \\ \sin \theta \cos t + \cos \theta \cos \varphi \sin t = \cos u \sin v \\ \sin \varphi \sin t = \sin u \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \sin \varphi \cos \theta \cos t - \sin \theta \cos \varphi \sin \varphi \sin t = \cos u \cos v \sin \varphi \\ \sin \varphi \sin \theta \cos t + \cos \theta \cos \varphi \sin \varphi \sin t = \cos u \sin v \sin \varphi \\ \sin \varphi \sin t = \sin u \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \sin \varphi \cos t = \frac{\cos u \cos v \sin \varphi + \sin \theta \cos \varphi \sin u}{\cos \theta} \\ \sin \varphi \cos t = \frac{\cos u \sin v \sin \varphi - \cos \theta \cos \varphi \sin u}{\sin \theta} \\ \sin \varphi \sin t = \sin u \end{cases}. \end{aligned}$$

Igualando a primeira e a segunda equação do sistema, obtemos

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\cos u \cos v \sin \varphi + \sin \theta \cos \varphi \sin u}{\cos u \sin v \sin \varphi - \cos \theta \cos \varphi \sin u}$$

$$\Leftrightarrow (\sin \theta \sin v \sin \varphi - \cos \theta \cos v \sin \varphi) \cos u = (\sin \theta \cos \theta \cos \varphi + \cos \theta \sin \theta \cos \varphi) \sin u$$

$$\Leftrightarrow \tan u = \frac{(\sin \theta \sin v \sin \varphi - \cos \theta \cos v \sin \varphi)}{(\sin \theta \cos \theta \cos \varphi + \cos \theta \sin \theta \cos \varphi)} \Leftrightarrow u = \arctan\left(\frac{\tan \varphi (-\cos(v + \theta))}{\sin(2\theta)}\right)$$

$$\Leftrightarrow v = \theta + \arccos\left(-\frac{\tan u \sin(2\theta)}{\tan \varphi}\right).$$

Portanto, a curva pré-geodésica em ordem a $v(u)$ é dada por

$$\begin{aligned} \gamma(v(u)) = & \left(\cos(u) \cos \left(\theta + \arccos \left(-\frac{\tan u \sin(2\theta)}{\tan \varphi} \right) \right), \right. \\ & \left. \cos(u) \sin \left(\theta + \arccos \left(-\frac{\tan u \sin(2\theta)}{\tan \varphi} \right) \right), \right. \\ & \left. \sin(u) \right), -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}, 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{aligned}$$

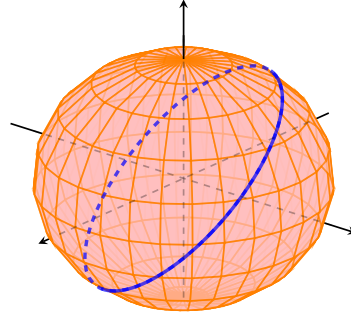


Figura 4.2: Pré-geodésica da Esfera

Exemplo 4.10 Determinemos as geodésicas da helicóide (Exemplo 3.10) parametrizada por $\Phi(u, v) = (v \cos u, v \sin u, \lambda u)$. Temos os coeficientes da primeira fórmula fundamental obtidos por

$$E = v^2 + \lambda, \quad F = 0, \quad G = 1.$$

Derivando-os em ordem a u e v , obtemos

$$E_u = F_u = G_u = F_v = G_v = 0 \quad \text{e} \quad E_v = 2v.$$

Seguidamente, através das equações (4.3), obtemos os símbolos de Christoffel por

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= 0, & \Gamma_{11}^2 &= -v, \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{v}{v^2 + \lambda}, & \Gamma_{12}^2 &= 0, \\ \Gamma_{22}^1 &= 0, & \Gamma_{22}^2 &= 0, \end{aligned}$$

Então, o sistema de equações da geodésicas é dado por

$$\begin{cases} u'' + \frac{2v}{v^2 + \lambda} u'v' = 0 \\ v'' - v(u')^2 = 0 \end{cases}.$$

Neste sistema observamos que a segunda equação é de segunda ordem, então aplicando o método de separação de variáveis, de forma a reduzir até à primeira ordem, obtemos

$$\int \frac{u''}{u'} dt = \int -\frac{2vv'}{v^2 + \lambda} dt \Rightarrow \ln u' = -\ln(v^2 + \lambda) + c_1 \Rightarrow u' = \frac{d}{v^2 + \lambda}.$$

Considere-se $\gamma(t) = \Phi(u(t), v(t))$ parametrizada pelo comprimento de arco. Substituindo por u' em

$$\|\gamma(t)\|^2 = E(u')^2 + 2Gu'v' + G(v')^2 = (v^2 + \lambda) \left(\frac{d}{v^2 + \lambda} \right)^2 + (v')^2 = 1.$$

e resolvendo em ordem a v' :

$$v' = \pm \sqrt{1 - \frac{d^2}{v^2 + \lambda}} = \pm \sqrt{\frac{1}{(\sqrt{v^2 + \lambda})^2} ((\sqrt{v^2 + \lambda})^2 - d^2)} = \pm \frac{\sqrt{(\sqrt{v^2 + \lambda})^2 - d^2}}{\sqrt{v^2 + \lambda}}.$$

Dividindo u' por v' obtemos a equação de variáveis separáveis

$$\frac{du}{dv} = \frac{u'}{v'} = \frac{\pm d}{\sqrt{v^2 + \lambda} \sqrt{(\sqrt{v^2 + \lambda})^2 - d^2}}.$$

Integrando ambos os membros da equação, assumindo $\lambda = d^2$ e o sinal positivo de d , obtemos

$$\begin{aligned} \int du &= d \int \frac{dv}{\sqrt{v^2 + \lambda} \sqrt{(\sqrt{v^2 + \lambda})^2 - d^2}} \\ u &= d \int \frac{dv}{\sqrt{v^2 + d^2} \sqrt{(\sqrt{v^2 + d^2})^2 - d^2}} = \int \frac{d}{\sqrt{v^2 + d^2} v} dv \\ &= \ln \left(\frac{v}{d(\sqrt{v^2 + d^2} + d)} \right) + c. \end{aligned}$$

Assim, a curva $\gamma \subset \Phi(u(v), v)$ parametrizada por

$$\gamma(v) = \left(v \cos \left(\ln \left(\frac{v}{d(\sqrt{v^2 + d^2} + d)} \right) + c \right), v \sin \left(\ln \left(\frac{v}{d(\sqrt{v^2 + d^2} + d)} \right) + c \right), \lambda \ln \left(\frac{v}{d(\sqrt{v^2 + d^2} + d)} \right) + c \right)$$

é uma pré-geodésica, conforme descrevemo-la na Figura 4.3 com $\lambda = 1$, $d = 1$ e $c = 0$.

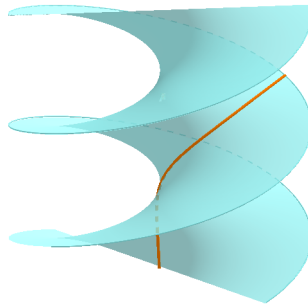


Figura 4.3: Pré-geodésica da Helicóide

Além disso, num ponto fixo $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ observamos que as curvas coordenadas são as retas e hélices. Por conseguinte, é verificado no sistema que todas as retas são geodésicas, enquanto que as hélices não são.

Se incluirmos o zero no domínio do parâmetro u , verifica-se que a reta vertical, dada por $\Phi(u, 0) = (0, 0, \lambda u)$, é também uma geodésica.

4.2 Curvas Geodésicas da Superfície de Revolução

No sistema de equações lineares serão estudadas as geodésicas contidas numa superfície de revolução. No exemplo 3.24 temos

$$E = f_u^2 + g_u^2, \quad F = 0, \quad G = f^2.$$

Derivando-os em ordem a u e v , obtemos

$$E_u = 2(f_u f_{uu} + g_u g_{uu}), \quad F_u = 0, \quad G_u = 2f f_u, \quad E_v = 0, \quad F_v = 0, \quad G_v = 0.$$

Seguidamente, os coeficientes de Cristoffel são dados por

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{f_u f_{uu} + g_u g_{uu}}{f_u^2 + g_u^2}, & \Gamma_{12}^1 &= 0, & \Gamma_{22}^1 &= -\frac{f f_u}{f_u^2 + g_u^2}, \\ \Gamma_{11}^2 &= 0, & \Gamma_{12}^2 &= \frac{f_u}{f}, & \Gamma_{22}^2 &= 0. \end{aligned}$$

Obtendo o seguinte sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} u'' + \frac{f_u f_{uu} + g_u g_{uu}}{(f_u)^2 + (g_u)^2} u'^2 - \frac{f f_u}{(f_u)^2 + (g_u)^2} (v')^2 = 0 \\ v'' + 2\frac{f_u}{f} u'v' = 0 \end{cases}. \quad (4.5)$$

Na proposição seguinte temos as geodésicas obtidas no sistema anterior.

Proposição 4.11 *Dada $\Phi(u, v) = (f(u) \cos(v), f(u) \sin(v), g(u))$ uma superfície de revolução, então*

- i. *todos os meridianos, que correspondem a $u = u(t)$ e $v \equiv \text{constante}$, são geodésicas;*
- ii. *os paralelos, que correspondem a $u \equiv \text{constante}$ e $v = v(t)$, são geodésicas quando $f_u(u) = 0$.*

Demonstração: Examinaremos as referidas geodésicas através do sistema de equações obtido em (4.5). Dado um ponto fixo $(u(t), v(t)) \in U$ temos:

Em **i.** supomos que $v \equiv \text{constante}$ e $u = u(t)$, então $v' = 0 \Rightarrow v'' = 0$. Substituindo em (4.5), obtemos

$$\begin{cases} u'' + \frac{f_u f_{uu} + g_u g_{uu}}{f_u^2 + g_u^2} u'^2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}.$$

Usando a equação (3.3), obtemos

$$\begin{aligned} \|\gamma'\| &= (Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2)^{\frac{1}{2}} = 1 \\ \Leftrightarrow (f_u^2 + g_u^2)u'^2 + f^2v'^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow (f_u^2 + g_u^2)u'^2 + f^2 \cdot 0 &= 1 \\ \Leftrightarrow u'^2 &= \frac{1}{(f_u^2 + g_u^2)}. \end{aligned}$$

Derivando ambos os membros da equação, obtemos

$$2u'u'' = -\frac{2(f_u f_{uu} + g_u g_{uu})}{(f_u^2 + g_u^2)^2} u' = -\frac{2(f_u f_{uu} + g_u g_{uu})}{f_u^2 + g_u^2} (u')^3.$$

Se $u' = 0$ e $v' = 0$, temos que a parametrização de γ é um ponto. Então, γ não descreve uma curva. Logo considerando $u' \neq 0$, obtemos

$$u'' = -\frac{f_u f_{uu} + g_u g_{uu}}{f_u^2 + g_u^2} (u')^2.$$

Portanto, ao substituir u'' na primeira equação do sistema, os meridianos parametrizados pelo comprimento de arco são geodésicas.

Em **ii.** supomos que $u \equiv \text{constante}$ e $v = v(t)$, então $u' = 0 \Rightarrow u'' = 0$. Substituindo em (4.5), obtemos

$$\begin{cases} \frac{f f_u}{f_u^2 + g_u^2} (v')^2 = 0 \\ v'' = 0 \end{cases}. \quad (4.6)$$

Verifica-se que v' é uma função constante, logo um paralelo é uma geodésica se $v' \neq 0$. Como $(f_u^2 + g_u^2) \neq 0$ e $f \neq 0$, portanto, na equação (4.6) temos $f_u = 0$. \square

No entanto, o paralelo da superfície de revolução é necessariamente uma geodésica, quando o paralelo, gerado pela rotação de um ponto pertencente a uma curva geratriz, tenha como condição que a reta tangente à geratriz seja paralela ao eixo Oz .

Exemplo 4.12 Determinemos os meridianos, e os paralelos que correspondem a geodésicas, da superfície de revolução dada por

$$\begin{aligned} \Phi :]0, 2\pi[\times]0, 2\pi[&\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto ((\sin u + b) \cos v, (\sin u + b) \sin v, u), \end{aligned}$$

que tem a forma de um jarro, e $b \neq 0 \in \mathbb{R}$, conforme a Figura 4.4 com $b = 2$. Dado $E = \cos u^2 + 1$, $F = 0$ e $G = (\sin u + b)^2$, e derivando-os em ordem a u e v , obtemos

$$E_u = 2 \cos u \sin u, \quad F_u = 0, \quad G_u = 2(\sin u + b) \cos u, \quad E_v = F_v = G_v = 0.$$

Seguidamente, os coeficientes de Cristoffel são dados por

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= -\frac{\cos u \sin u}{\cos^2 u + 1}, & \Gamma_{12}^1 &= 0, & \Gamma_{22}^1 &= -\frac{(\sin u + b) \cos u}{\cos^2 u + 1}, \\ \Gamma_{11}^2 &= 0, & \Gamma_{12}^2 &= \frac{\cos u}{(\sin u + b)}, & \Gamma_{22}^2 &= 0, \end{aligned}$$

obtendo o seguinte sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} u'' - \frac{\cos u \sin u}{\cos^2 u + 1} u'^2 - \frac{(\sin u + b) \cos u}{\cos^2 u + 1} (v')^2 = 0 \\ v'' + 2 \frac{\cos u}{(\sin u + b)} u' v' = 0 \end{cases}.$$

Observando que todos os meridianos são geodésicas, dado que como $v(t)$ é constante, então $v' = v'' = 0$, obtendo

$$\begin{cases} u'' - \frac{\cos u \sin u}{\cos^2 u + 1} u'^2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} .$$

Segue que $\|\gamma'(t)\| = 1 \Leftrightarrow u'^2 = \frac{1}{\cos^2 u + 1}$, e derivando a igualdade, obtemos

$$2u'u'' = -\frac{2 \cos u \sin u}{\cos^2 u + 1} (u')^3 \Leftrightarrow u'' = -\frac{\cos u \sin u}{\cos^2 u + 1} (u')^2,$$

e substituindo no sistema obtido, verifica-se que satisfaz o sistema. Os paralelos são geodésicas quando $f_u(u) = 0$, dado que $u(t)$ é constante, então $u' = u'' = 0$, obtendo

$$\begin{cases} \frac{(\sin u + b) \cos u}{\cos^2 u + 1} (v')^2 = 0 \\ v'' = 0 \end{cases} .$$

Como $f(u) \neq 0$, então obtemos apenas dois paralelos quando $f'(u) = \cos u = 0 \Leftrightarrow u = \frac{\pi}{2}$ ou $u = \frac{3\pi}{2}$.

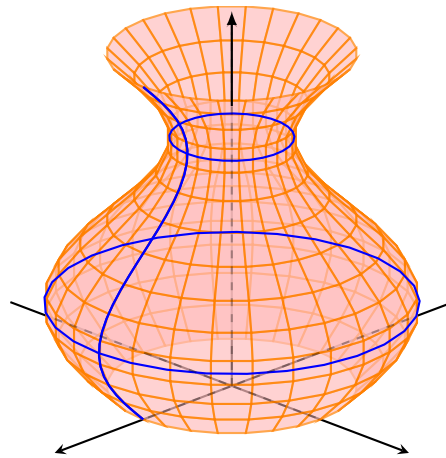


Figura 4.4: Geodésicas de uma superfície de revolução

Conclusão

Neste trabalho pretendeu-se analisar as curvas e superfícies, descrevendo e exemplificando os vários conceitos abordados ao longo deste estudo, de modo a fornecer ao estudante que esteja a iniciar-se na geometria diferencial uma melhor explicação e visualização da matéria.

No primeiro capítulo verificou-se que duas curvas regulares são equivalentes se em duas parametrizações com o mesmo traço for possível aplicar uma mudança de parâmetros, no qual esta terá de ser um difeomorfismo.

Contudo, para o caso de ambas não serem regulares, ao reparametrizar uma curva não diferenciável para obter uma curva regular, verificou-se que a mudança de parâmetros não é um difeomorfismo. Portanto, não existe equivalência.

Assim sendo, uma curva regular é uma classe de equivalências no qual várias parametrizações com o mesmo traço têm de ter as mesmas propriedades.

Através da teoria retira-se que é possível reparametrizar qualquer curva regular pelo comprimento de arco. Contudo, ao exercer este raciocínio na prática deparamo-nos com uma grande complexidade de cálculos para encontrar uma solução explícita, nomeadamente a função de comprimento de arco e a sua inversa.

Adicionalmente, a curvatura com sinal é uma propriedade não invariante dado que depende da orientação da curva. Neste caso, observa-se que os vetores tangente e aceleração são sempre ortogonais mutuamente.

Salienta-se ainda que, a definição geral da curvatura é uma propriedade geométrica invariante dado que esta não depende da orientação da curva.

Uma vez que a curvatura não caracteriza suficientemente a forma do traço da curva, e para distinguir se duas curvas estão contidas num mesmo plano, recorreu-se à torção, visto tratar-se de uma propriedade geométrica invariante, dado que não depende do sentido do vetor normal unitário nem da orientação da curva.

No que concerne aos vetores tangente e aceleração, verificou-se que estes não são ortogonais nem unitários aquando de uma parametrização da cicloide e espiral logarítmica. Contudo, estes tornam-se ortogonais e unitários quando reparametrizados pelo comprimento de arco. Para o caso particular da circunferência e da hélice, independentemente de haver uma reparametrização ou não pelo comprimento de arco, os seus respetivos vetores são sempre ortogonais mutuamente.

A vantagem da reparametrização da curva pelo comprimento de arco ocorre no facto dos vetores anteriormente mencionados tornarem-se unitários, traduzindo-se numa velocidade escalar constante do vetor tangente.

Tanto no plano como no espaço, a expressão de reparametrização da curva é mais extensa comparativamente ao caso em que esta não está reparametrizada pelo comprimento de arco. Além disso, a curvatura e a torção exigem um maior número de passos para a

sua determinação, quando não é reparametrizada pelo comprimento de arco.

Assim sendo, o melhor meio para analisar uma curva será optar pela não reparametrização, dado que nem sempre é fácil de reparametrizar uma curva pelo comprimento de arco.

No segundo capítulo pretendeu-se estudar vários métodos existentes para adquirir novas curvas a partir de uma curva inicial.

Numa curva plana observa-se que a evoluta é única e existe uma família infinita de involutas, no qual é possível obter uma involuta que represente a parametrização original. Por outro lado, uma curva espacial permite obter uma família de evolutas e involutas. Além disso, nos dois casos podemos ter evolutas não regulares.

No que respeita à curva pedal, é possível determinar uma parametrização para cada ponto fixo escolhido. A conchóide permite determinar duas curvas a partir de uma curva e de um ponto fixo.

Para determinar a cissóide de duas curvas, estas não poderão interseccionar-se nem ser paralelas à reta que contém o ponto fixo. Assim sendo, será mais prático determinar uma cissóide quando, pelo menos, uma das duas curvas seja dada por uma reta.

No terceiro capítulo são estudadas as propriedades geométricas da superfície através das duas formas fundamentais, tendo em conta que em ambas, primeira e segunda forma fundamental, tem propriedades invariantes perante a uma mudança de parâmetro.

A segunda forma fundamental não depende da parametrização da curva contida à superfície. A curvatura normal é invariante quando aplica-se uma mudança de parâmetro.

Adicionalmente, demonstrou-se que as curvaturas gaussianas e média poderão ser determinadas através das curvaturas principais, onde a curvatura gaussiana apresenta ser uma propriedade geométrica invariante e a curvatura média não é uma propriedade invariante.

Por último, no quarto capítulo, verifica-se que através de equações geodésicas é possível determinar geodésicas, de modo a que o vetor aceleração não possua componente tangencial.

Contudo, na prática, este método não é de fácil resolução dada a impossibilidade de obter uma solução explícita, sendo portanto preferível assumir o facto de uma geodésica estar parametrizada pelo comprimento de arco, e escolher uma constante.

Salienta-se ainda que, todos os meridianos são representados pelas geodésicas da superfície de revolução, enquanto que os paralelos ocorrem apenas quando a reta tangente à geratriz é paralela ao eixo de rotação.

No entanto, há outras geodésicas que não são possíveis de determinar analiticamente, sendo, contudo, necessário calcular tais soluções numéricas e gráficas através de *softwares*, tais como Maple [12] e Mathematica [5].

Bibliografia

- [1] ALENCAR, Hilário, SANTOS, Walcy, (2003) *Geometria diferencial das curvas planas*, IMPA.
- [2] BIEZUNER, Rodney Josué, (2015) *Notas de aula geometria diferencial*, UFMG.
- [3] DO CARMO, Manfredo Perdigao, (1976) *Differential geometry of curves and surfaces*, Englewood Cliffs: Prentice-hall.
- [4] DELGADO, Angel Montesdeoca, (2004) *Apuntes de geometría diferencial de curvas y superficies*.
- [5] GRAY, Alfred, ABBENA, Elsa, SALAMON, Simon, (2006) *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica*, CRC press.
- [6] LAWRENCE, J. Dennis, (1972) *A catalog of special plane curves*, Dover Publications Inc.
- [7] LIPSCHUTZ, Martin, (1969) *Schaum's Outline of Differential Geometry*, McGraw Hill Professional.
- [8] LOCKWOOD, Edward Harrington, (1961) *A book of curves*, Cambridge University Press.
- [9] MCCLEARY, John, (1997) *Geometry from a Differentiable Viewpoint*. Cambridge University Press.
- [10] MENDES, Luís Felipe Porto, CHAVES, Rosa Maria B, (2007) *Evolutas e Involutas de Curvas Espaciais*, USP.
- [11] MONTIEL, Sebastián, ROS, Antonio, BABBITT, D. G., (2005) *Curves and Surfaces*, volume 69 of Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, Providence, RI.
- [12] OPREA, John, (2007) *Differential geometry and its applications*, MAA.
- [13] PICADO, Jorge, (2006) *Apointamentos de Geometria Diferencial*.
- [14] O'NEILL, Barret, (1996) *Elementary Differential Geometry*, Academic press.
- [15] PISKOUNOV, N., (1982) *Cálculo Diferencial e Integral, vol. I*, Lopes da Silva Editora.

- [16] PRESSLEY, Andrew N., (2005) *Elementary Differential Geometry*, Springer Science Business Media.
- [17] RAUSSEN, Martin, (1999) *Elementary Differential Geometry: Curves and Surfaces*, Lecture Notes, World Wide Web.
- [18] REIS, Fabiano Elias, ALMEIDA, D. M., (2008) *Um Estudo introdutório sobre cissóides*, FAMAT em Revista (UFU) 11: 263-293.
- [19] RODRIGUEZ, Lucio, (1977) *Introdução a geometria diferencial*, IMPA.
- [20] SHIFRIN, Theodore, (2008) *Differential geometry: a first course in curves and surfaces*, University of Georgia, Preliminary Version.
- [21] SWOKOWSKI, E. W., FARIAS, A. A., (1995) *Cálculo Com Geometria Analítica*, 2ª edição, vol. 2, São Paulo: Makron.
- [22] TENENBLAT, Ketiv, (2008) *Introdução à geometria diferencial*, Blucher.
- [23] THOMAS, George B., (2003) *Cálculo*, 10ª Editora: Prentice-Hall.
- [24] YATES, Robert Carl, (1947) *A Handbook on Curves and their Properties*, JW Edwards.

Apêndice

No Apêndice são fornecidos alguns códigos utilizados na construção dos gráficos representados ao longo do trabalho, através dos pacotes TikZ e PGFplots inseridos no sistema de tipografia LaTeX.

Esta tipografia LaTeX apresenta-se como uma ferramenta capaz de produzir documentos técnicos e científicos, sobretudo das ciências exatas, interpretando os comandos inseridos e transformando-os em texto posteriormente.

Na estrutura do documento LaTeX deparamo-nos com o preâmbulo e o ambiente de texto. Através do comando

```
\documentclass[keyvals]{class}
```

o preâmbulo inicia o tipo de documento que pretendemos utilizar, no qual *keyvals* indicamos as opções na definição do tamanho da letra (10pt, 12pt, ...) e o tipo de papel (*a4*, *letter*), entre outros. Ainda, *class* permite escolher o tipo de documento, nomeadamente artigo, livro, tese, etc.

Para a elaboração deste trabalho foi escolhido o documento *standalone*, dado que este é apropriado para a pré-visualização de figuras, tendo como vantagens a criação de várias figuras e sua inserção no documento principal, sendo que o tempo de compilação do documento principal é reduzido.

Seguidamente, os pacotes TikZ, TikZ-3dplot e PGFplots são introduzidos através do comando

```
\usepackage{package}
```

no qual *package* diz-nos que pacotes queremos adicionar. Estes pacotes permitem a construção de gráficos. O pacote TikZ é uma ferramenta complexa, que serve para desenhar retas, curvas, retângulos, diagramas, grafos, etc., sendo utilizada para construir curvas planas.

Por outro lado, pacote TikZ-3dplot gera curvas espaciais, dado que o pacote TikZ anterior não é suficiente para produzir gráficos tridimensionais.

Por fim, o pacote PGFplots gera vários tipos de gráficos em 2D e 3D e é utilizado em conjunto com o TikZ.

Seguidamente, o ambiente de texto será iniciado por

```
\begin{document}  
texto  
\begin{tikzpicture}  
comandos  
\end{tikzpicture}  
\end{document}
```

de modo a escrever o texto dentro deste ambiente. Seguidamente, dentro deste ambiente é inserido outro ambiente, designado por *tikzpicture*, no qual serão colocados certos comandos que permitem desenhar uma figura. A construção dos gráficos foi baseada nas seguintes referências:

- FEUERSANGER, Christian, (2015) *Manual for Package PGFPLOTS*.
- HEIN, Jeff, (2012) *The tikz-3dplot Package*.
- TANTAU, Till, (2010) *The TikZ and pgf packages: Manual for version 2.10*.

Apêndice A

Este apêndice contém os comandos utilizados para gerar as curvas através dos pacotes TikZ e TikZ-3dplot, nos capítulos um e dois.

Código que gera a curva com auto-interseção exposta na Figura 1.3:

```

\documentclass{standalone}
\usepackage{tikz}
\begin{document}
\begin{tikzpicture}[scale=0.5 % scale: escala
]% desenhar o sistema de coordenadas cartesianas
\draw[>-] (-7,0) -- (7,0); % linha horizontal que representa o eixo Ox, e ->
insere a seta
\foreach \x in {-6,-4,-2,2,4,6} % escolher os numeros do eixo Ox que serao
inseridos na linha
\draw[shift={(\x,0)}] (0pt,4pt) -- (0pt,-4pt) node[below]{\footnotesize $\x$}; %
colocar as marcas sobre o eixo dos Ox e os numeros abaixo do eixo
\draw[>-] (0,-4.8) -- (0,3.2); % linha vertical que representa o eixo Oy
\foreach \y in {-4,-2,2}% escolher os numeros do eixo Oy
\draw[shift={(0,\y)}] (4pt,0pt) -- (-4pt,0pt) node[left]{\footnotesize $\y$};
% desenhar a curva parametrizada
\draw[line width=1.0pt,color=blue,samples=100,domain=-2.5:2.5]
plot({\x*\x*\x-4*\x},{\x*\x-4});
% opcoes do comando \draw:
%line width : espessura da linha;
%color: cor da linha;
%samples: quantidade de pontos usados para desenhar a curva;
%domain: o dominio dos valores de \x, note que o \x representa o parametro t.
\end{tikzpicture}
\end{document}

```

Código que gera a hélice exposta na Figura 1.4:

```

\documentclass[crop,tikz]{standalone}
\usepackage{tikz-3dplot}
\begin{document}
\tdplotsetmaincoords{60}{130} % grau de rotacao em torno dos eixo Ox e Oy,
    respetivamente.
\begin{tikzpicture}[scale=1.5, tdplot_main_coords]
% desenhar o cilindro
\foreach \t in {132,134,...,480} % intervalo do parametro \t
\pgfmathsetmacro\tinta{0.2+0.8*abs((cos(\t)+sin(\t))/sqrt(2))}
\definecolor{cordocilindro}{rgb}{\tinta,0,0}%definir a cor do cilindro
\fill [ opacity=1, color=cordocilindro]
({cos(\t)},{sin(\t)},-0.2,2.2) --({cos(\t)},{sin(\t)},2.2) --
({cos(\t+4)},{sin(\t+4)},2.2) --({cos(\t+4)},{sin(\t+4)},-0.2) -- cycle;
% desenhar o sistema cartesiano tridimensional
\draw[thick,->] (0,0,0) -- (2.5,0,0)node[anchor=north west]{}; % eixo Ox
\foreach \x in {1,2}
\draw[shift={(\x,0)},color=black] (0pt,1.5pt) -- (0pt,-1.5pt) node[below] {\
    footnotesize $\x$};
\draw[thick,->] (0,0,0) -- (0,2.5,0) node[anchor=north west]{}; % eixo Oy
\foreach \y in {1,2}
\draw[shift={(0,\y)},color=black] (0pt,2pt) -- (0pt,-2pt) node[below] {\
    footnotesize $\y$};
\draw[thick,->] (0,0,0) -- (0,0,2.5) node[anchor=south]{}; %eixo Oz
\foreach \z in {1,2}
\draw[shift={(0,0,\z)},color=black] (-1pt,0pt) -- (1pt,0pt) node[left] {\
    footnotesize $\z$};
% desenhar as linhas tracejadas com cor cinzenta
\foreach \t in {11.25,22.5,...,720}
\draw[dashed,color=gray] ({cos(\t)},{sin(\t)},{\t/360})--(0,0,{\t/360});
% desenhar as linhas tracejadas, onde dashed: tracejado
\draw[dashed] (1,0,2)--(0,0,2);
\draw[dashed] (-1,0,1.5)--(0,0,1.5);
\draw[dashed] (1,0,1)--(0,0,1);
\draw[dashed] (-1,0,0.5)--(0,0,0.5);
\draw[dashed] (0,1,0.25)--(0,0,0.25);
\draw[dashed] (0,1,1.25)--(0,0,1.25);
\draw[dashed] (0,-1,1.75)--(0,0,1.75);
\draw[dashed] (0,-1,0.75)--(0,0,0.75);
%desenhar a helice parametrizada
\draw[line width=1.2pt,color=blue,samples=400,domain=0:720] plot({cos(\x)},{
    sin(\x)},{\x/360});
\end{tikzpicture}
\end{document}

```

Código que gera a cicloide exposta na Figura 1.9:

```
\documentclass{standalone}
\usepackage{tikz}
\begin{document}
\begin{tikzpicture}
% sistema cartesiano
\draw[->] (0,0) -- (2.6*pi,0); % eixo Ox
\draw[shift={(6.28,0)},color=black] (0pt,2pt) -- (0pt,-2pt) node[below] {
    $2\pi$};
\draw[->] (0,0) -- (0,3); % eixo Oy
% desenhar a cicloide
\draw[line width=1.5pt,color=blue,samples=50,domain=-0.5*pi:2.5*pi] plot ({\
    x - sin(\x r)},{1 - cos(\x r)});
% sequencia de circulos
\draw[line width=1.2pt,color=magenta,samples=100,domain=0:6.28] plot({sin(\x
    r)},{1-cos(\x r)});
\foreach \t in {0,0.6,...,6}
{
\draw[color=magenta,opacity=0.5] (\t,1) circle(1) ;
\draw[fill=red,color=red] ({\t-sin(\t r)},{1-cos(\t r)}) circle(1.5pt);
}
% ponto A
\node [above, red] at (2.9,1.95) {A};% node: no serve para colocar texto nas
    figuras
% ponto origem
\node [below] at (0,0) {0};
% ponto pi
\draw[shift={(3.14,0)},color=black] (0pt,2pt) -- (0pt,-2pt) node[below] {$\
    pi$};
% raio
\node [above, black] at (0.3071,1.2) {r};
\draw[->,black] (0,1) -- (0.7071,1.7071);
% arco
\draw[->,black] (-1.18,1) arc (180:100:1.2);
\end{tikzpicture}
\end{document}
```

Apêndice B

Este apêndice contém os comandos utilizados para gerar as superfícies através do pacote PGFplots, nos capítulos três e quatro.

Código que gera a helicóide exposta na Figura 3.5:

```
\documentclass{standalone}
\usepackage{pgfplots}
\begin{document}
\begin{tikzpicture}
% o seguinte ambiente permite inserir os eixos, depois sera inserido o
% comando \addplot, no qual gera a figura pretendida dentro deste
% ambiente
\begin{axis}[ % definir as opcoes pretendidas relativo aos eixos
axis lines=middle, % os eixos serao exibidos no centro
xmax=1.2,ymax=1,zmax=0.8, % definir os intervalos dos eixos Ox, Oy e Oz
ticks=none, % nao inserir os numeros nos respetivos eixos
view={130}{45} % rotacao dos eixos Ox e Oz, repetivamente.
]
% desenhar a helicóide
\addplot3[mesh, % grafico 3D de malha
color = cyan, % cor da superficie
variable = \u, % parametro x designar por \u
variable y = \v, % parametro y designar por \v
domain=0:6.28, % definir o dominio de \u
y domain=0:1,% definir o dominio de \v
samples=30, % numero de pontos no intervalo dos \u
samples y =10, % numero de pontos no intervalo dos \v
z buffer = sort ]
({v*cos(deg(u))},{v*sin(deg(u))},{0.1*u});
% linha que passa no eixo Oz
\draw (axis cs: 0,0,0.1) -- node [pos=0.9, xshift=0.5em]{}(axis cs:
0,0,0.8);
\end{axis}
\end{tikzpicture}
\end{document}
```

Código que gera o cone e o setor circular expostos na Figura 3.8:

```
\documentclass[crop]{standalone}
\usepackage{pgfplots}
\pgfplotsset{compat=1.11} %garantir compatibilidade com versoes antigas do
% pacote pgfplots
\begin{document}
\begin{tikzpicture}
\begin{axis}[width=\textwidth,xmax=5,ymax=5,zmax=6,
axis lines=center,ticks=none,view={150}{30}];
% desenhar o cone
\addplot3[ surf, % grafico 3D de superficie
```

```

color=yellow,faceted color=gray,opacity = 0.6, % faceted color: define a cor
da malha, opacity: opacidade
samples = 30, samples y=10,
variable = \u, variable y = \v,
domain = 0:360, y domain = 0:5, z buffer = sort]
({v*0.5*cos(u)}, {v*0.5*sin(u)}, {v*sqrt(3)/2});
\node at ({5*1/2*cos(120)},{5*1/2*sin(120)+1},{5*sqrt(3)/2}){\Phi(u,v)};
% desenhar o setor circular
\addplot3[ surf,color=pink, faceted color=black, opacity = 0.2,
samples = 20, samples y= 10,
variable = \u, variable y = \v,
domain = 0: 360, y domain = 0:5, z buffer = sort]
({v*cos (u * 0.5), {v *sin (u * 0.5)}, {0});
\node [below,magenta] at ({5*cos(45), {5 *sin(45)}, {0}) {\bar{\Phi}(u,v)};
% desenhar duas retas no eixo Oz:
\draw [thick,-latex] (axis cs: 0,0,3.3) -- node [pos=0.9, xshift=0.5em]{(axis
cs: 0,0,6.1)};% reta
\draw [thick,dashed, opacity=0.3] (axis cs: 0,0,-1) -- node [pos=0.9, xshift
=0.5em]{(axis cs: 0,0,4)};% reta tracejada
\end{axis}
\end{tikzpicture}
\end{document}

```

Código que gera o toro exposto na Figura 3.12:

```

\documentclass{standalone}
\usepackage{pgfplots}
\pgfplotsset{compat=1.11}
\begin{document}
\begin{tikzpicture}
\begin{axis}[axis equal image, axis lines=middle, ticks=none,
xmax=20, ymax=20, zmax=7, view={130}{30}]
% desenhar o toro
\addplot3[surf, samples=40,
variable = \u, variable y = \v,
domain=0:360, y domain=90:420, z buffer=sort]
({(12 + 3 * cos(u)) * cos(v)}, {(12 + 3 * cos(u)) * sin(v)}, {3 * sin(u)});
% desenhar o raio
\draw [thick, blue] (axis cs: 0,0,0) -- node [yshift=0.5em]{$a$} (axis cs:
0,12,0);
\draw [thick, yellow] (axis cs: 0,12,0) -- node [right,pos=0.3, xshift=-0.2
em]{$r$}(axis cs: 0,12,3);
\draw [] (axis cs: 0,12,0) -- node [pos=0.9, xshift=0.5em]{(axis cs:
0,14.9,0);
% desenhar uma linha reta no eixo zz
\draw [-latex] (axis cs: 0,0,0) -- node [pos=0.9, xshift=0.5em]{(axis cs:
0,0,12);
\end{axis}
\end{tikzpicture}
\end{document}

```

Código que gera a pré-geodésica contida no parabolóide exposta na Figura 4.1:

```

\documentclass[crop]{standalone}
\usepackage{pgfplots}
\pgfplotsset{compat=1.11}
\begin{document}
\begin{tikzpicture}
\begin{axis}[thick, width=\textwidth,
xmin=-1.5, xmax=2, ymin=-1.5, ymax=2, zmax=5,
axis lines=center, ticks=none, view={60}{30}];
% desenhar o parabolóide
\addplot3[surf, colormap/bluered, shader=interp,
opacity=0.3, fill opacity=0.3,
samples=20, variable = \u, variable y = \v,
domain=-1:1, y domain=-1:1]
({u},{v},{u^2+v^2});
% desenhar a pre-geodesica contida no parabolóide
\addplot3[blue, variable = \t, samples=30, samples y=0, domain=-1:1]
({t},{t},{2*t*t});
\node [right,blue] at (0.9,1,1.8) {$\gamma$};
% vetor tangente
\draw [-latex,magenta] (axis cs: {0},{0},{0}) -- node [below, pos=0.5,
xshift=0.5em]{}(axis cs: {1},{1},{0});
\node [below,magenta] at (1,1,0) {$\gamma'$};
% vetor aceleracao
\draw [-latex,magenta] (axis cs: {0},{0},{0}) -- node [pos=0.5, xshift=0.5em
]{}(axis cs: {0},{0},{4});
\node [left,magenta] at (0,0,4) {$\gamma''$};
% vetor normal unitario
\draw [-latex,orange] (axis cs: {0},{0},{0}) -- node [left, pos=0.5, xshift
=0.5em]{}(axis cs: {0},{0},{1});
\node [left,orange] at (0,0,1) {$N$};
\end{axis}
\end{tikzpicture}
\end{document}

```