

A Nossa
Universidade

Colégio dos Jesuítas
Rua dos Ferreiros - 9000-082, Funchal

Tel: +351 291 209400
Fax: +351 291 209410
Email: gabinetedareitoria@uma.pt

DM

Aprender Geometria no 7º Ano de Escolaridade
Diferenciação de Estratégias na Sala de Aula
Paula Cristina da Silva Neto



Aprender Geometria no 7º Ano de Escolaridade
Diferenciação de Estratégias na Sala de Aula

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Paula Cristina da Silva Neto

MESTRADO EM ENSINO DA MATEMÁTICA NO 3º CICLO DO
ENSINO BÁSICO E SECUNDÁRIO


UNIVERSIDADE da MADEIRA
A Nossa Universidade
www.uma.pt

setembro | 2013

DIMENSÕES: 45 X 29,7 cm

PAPEL: COUCHÊ MATE 350 GRAMAS

IMPRESSÃO: 4 CORES (CMYK)

ACABAMENTO: LAMINAÇÃO MATE

NOTA*

Caso a lombada tenha um tamanho inferior a 2 cm de largura, o logótipo institucional da Uma terá de rodar 90º, para que não perca a sua legibilidade/identidade.

Caso a lombada tenha menos de 1,5 cm até 0,7 cm de largura o layout da mesma passa a ser aquele que consta no lado direito da folha.



Aprender Geometria no 7º Ano de Escolaridade
Diferenciação de Estratégias na Sala de Aula

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Paula Cristina da Silva Neto

MESTRADO EM ENSINO DA MATEMÁTICA NO 3º CICLO DO
ENSINO BÁSICO E SECUNDÁRIO

ORIENTAÇÃO

Elsa Maria dos Santos Fernandes

RESUMO

O trabalho aqui apresentado visa dar a conhecer aos leitores como os alunos aprendem Geometria a nível do 7.º ano de escolaridade (3.º Ciclo do Ensino Básico).

O que me motivou à escolha deste tema foi compreender o que sentem os alunos quando se deparam com situações problemáticas que envolvem conhecimentos geométricos e como são capazes de as resolver. Por esta razão predispus-me a realizar uma investigação cujo propósito foi compreender como os alunos aprendem Geometria quando frequentam o 7.º ano de escolaridade.

Para poder efetuar o estudo, desenvolver o problema proposto e orientar o trabalho de investigação, considerei três questões fundamentais:

1. Como é que a utilização de materiais manipuláveis contribui para a aprendizagem de conceitos e propriedades geométricas?
2. Como é que o uso de *software* Geométrico contribui para a construção do pensamento geométrico dos alunos?
3. Como é que a utilização de materiais manipuláveis e de *software* Geométrico contribuem para o desenvolvimento do raciocínio e da comunicação matemática?

O estudo foi desenvolvido, ao longo dos segundo e terceiro períodos, do corrente ano letivo, numa turma de 7.º ano de escolaridade de uma escola básica dos 2.º e 3.º ciclos do Concelho de Câmara de Lobos, Ilha da Madeira.

Os dados recolhidos foram resultado da aplicação de atividades que envolvem materiais manipuláveis e o programa de Geometria Dinâmica: *GeoGebra*.

Neste trabalho investigativo, utilizei o método qualitativo onde a recolha de dados foi baseada na observação direta dos alunos em contexto sala de aula (com recurso aos meios audiovisuais) e na entrega de resoluções das atividades propostas (em formato de papel e formato digital). A análise dos dados foi realizada de acordo com as questões previamente formuladas. As conclusões refletem o papel essencial do professor como principal mediador de todo o processo de ensino e aprendizagem do aluno, assim como, a importância da diversificação de estratégias na sala de aula de Matemática.

Palavras-chave: Geometria, ensino, aprendizagem, materiais manipuláveis, Geometria dinâmica, *GeoGebra*.

ABSTRACT

The purpose of the study presented on this report is to disclose to the readers how students learn Geometry at the 7th level of schooling in Portugal (3rd basic educational cycle).

When choosing this study theme, I was motivated to understand what students feel when running into problematic situations involving geometric knowledge and how they are able to solve them. For this reason I was willing to conduct an investigation whose purpose was to be aware of how students learn geometry when attending the 7th schooling level.

To carry out this study, in order to develop the proposed theme and to guide the research work, three key issues were considered:

1. How does the use of manipulable materials contributes to the learning of geometrical concepts and properties?
2. How does the use of Geometric *software* contributes to the construction of geometric thinking of students?
3. How does the use of manipulable materials and Geometric *software* contributes to the development of reasoning and mathematical communication?

This study was developed over the second and third periods of the current school year, in a class of the 7th level, in a school for the 2nd and 3rd basic educational cycles in the Municipality of Câmara de Lobos, Madeira Island.

The collected data was the result of an application of different activities which involved manipulable materials and a Dynamic Geometry software: *GeoGebra*.

On this investigation, a qualitative method was used for the collection of data based on the direct observation of the students in the classroom (assisted with audiovisual means) and in the delivering of resolutions for the proposed activities (in paper and digital format).

The data analysis was carried out according to the previously formulated questions. The conclusions reflect the teacher's essential role as the main mediator throughout the process of teaching and learning, as well as the importance of the diversification of strategies in the mathematics' classroom.

Keywords: geometry, teaching, learning, manipulable materials, dynamic geometry, *GeoGebra*.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço aos Mestres de Luz que sempre me acompanharam, inspiraram e incondicionalmente, com todo o Seu amor, ajudaram-me a realizar todo este trabalho.

À professora doutora Elsa Fernandes pela sua disponibilidade em aceitar orientar todo este trabalho e pelo seu apoio nas diversas fases de revisão deste projeto.

À Ana Isabel Freitas pelas suas maravilhosas terapias que foram fundamentais para conseguir relaxar e concentrar-me nas fases mais stressantes e de maior ansiedade.

À Tina Nunes por ser incansável nos momentos mais difíceis, pela sua paciência, ajuda e pelos seus maravilhosos conselhos no decorrer de todo este processo.

À Lígia pela sua amizade, apoio, carinho e pela companhia nas caminhadas nos momentos de “arejar” e renovar energias.

Aos meus alunos pela colaboração e interajuda, pelo empenho nas tarefas propostas, pelo esforço e dedicação na superação das suas dificuldades.

Aos membros da Comissão Provisória da Escola Básica dos 2.º e 3.º Ciclos do Curral das Freiras, pelo apoio na resolução de questões burocráticas principalmente na questão de utilização de meios audiovisuais de gravação na sala de aula.

Aos meus pais pela compreensão e aceitação pelas constantes e prolongadas ausências durante este ano letivo.

A toda a minha restante família pelo carinho, compreensão e apoio nos bons momentos e nos momentos menos bons, na força que me transmitiram que foram fundamentais na luta pela conclusão deste projeto.

ÍNDICE

RESUMO	i
ABSTRACT.....	ii
AGRADECIMENTOS	iii
ÍNDICE.....	iv
ÍNDICE DE FIGURAS	vi
1. INTRODUÇÃO	1
1.1. Motivação e objetivo do estudo	3
1.2. Problema em estudo.....	4
1.3. Metodologia	5
2. ENQUADRAMENTO TEÓRICO.....	7
2.1. Aprender e ensinar Geometria	7
2.1.1. A Geometria e a Matemática	7
2.1.2. A Geometria e o programa de Matemática.....	10
2.1.3. O papel do professor no ensino e aprendizagem da Geometria	13
2.2. Materiais manipuláveis	15
2.3. Utilização do computador na sala de aula de Matemática.....	18
2.3.1. O ensino da Matemática e o computador	18
2.3.2. Geometria dinâmica.....	20
2.3.3. O <i>software GeoGebra</i>	22
2.4. Diversificação de estratégias.....	25
3. METODOLOGIA	29
3.1. Natureza do estudo.....	29
3.2. Caracterização da turma.....	30
3.3. Recolha de dados	32
3.3.1. Seleção das propostas de trabalho	32
3.3.2. Planificação das tarefas	34
3.4. Análise de dados	38
4. ANÁLISE DE DADOS.....	39

4.1.	Os Materiais Manipuláveis	39
4.2.	O <i>software</i> de geometria dinâmica: <i>GeoGebra</i>	56
5.	CONCLUSÕES.....	72
5.1.	Os materiais manipuláveis e a aprendizagem de conceitos e propriedades geométricas	72
5.2.	O <i>software</i> geométrico e a construção do pensamento geométrico dos alunos	73
5.3.	Os materiais manipuláveis e o <i>software</i> geométrico no desenvolvimento do raciocínio e da comunicação matemática	75
5.4.	Reflexão Final.....	77
6.	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	78
7.	ANEXOS.....	82
	Anexo 1 - Ficha de trabalho sobre Ângulos Internos e Externos de um Triângulo.....	82
	Anexo 2 – Critérios de Congruência de Triângulos – Projeto CEM (PowerPoint).....	86
	Anexo 3 - Ficha de trabalho sobre Propriedades dos Quadriláteros	87
	Anexo 4 - Ficha de trabalho sobre Propriedades do Paralelogramo	88
	Anexo 5 - Ficha de trabalho sobre Polígonos Semelhantes.....	90
	Anexo 6 - Ficha de trabalho sobre Critérios de Semelhança de Triângulos.....	93
	Anexo 7 - Ficha de trabalho sobre aplicação dos critérios de semelhança de triângulos	95
	Anexo 8 - Pedido de autorização para utilização de material audiovisual na sala de aula, ao Presidente da Comissão Provisória da Escola.....	97
	Anexo 9 - Pedido de autorização para utilização de material audiovisual na sala de aula, ao Diretor Regional de Educação	98
	Anexo 10 - Autorização para utilização de material audiovisual na sala de aula, pelo Diretor Regional de Educação	99
	Anexo 11 - Pedido de autorização para utilização de material audiovisual na sala de aula, aos Encarregados de Educação	100

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1: Janela Gráfica do <i>GeoGebra</i>	23
Figura 2: Barra de Ferramentas do <i>GeoGebra</i>	23
Figura 3: Janela de Ferramentas da Barra de Ferramentas do <i>GeoGebra</i>	24
Figura 4: Campo de Entrada do <i>GeoGebra</i>	24
Figura 5: Construção de triângulos utilizando materiais manipuláveis	40
Figura 6: Exemplos da conjectura da soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo.....	42
Figura 7: Construção dos triângulos coloridos.....	43
Figura 8: Resolução da Ficha de Trabalho n.º 9 pelas alunas C, AM, CI e M.....	49
Figura 9: Utilização do Quadrante para determinar a altura da escola	51
Figura 10: Utilização do espelho para determinar a altura da escola.....	51
Figura 11: Cálculo da altura da escola utilizando o Quadrante (Lado Norte).....	53
Figura 12: Cálculo da altura da escola utilizando o Quadrante (Lado Oeste).....	53
Figura 13: Cálculo da altura da escola utilizando o Espelho, pelo Grupo I.....	54
Figura 14: Cálculo da altura da escola utilizando o Espelho, pelo Grupo II	54
Figura 15: Cálculo da altura da escola utilizando a noção de proporção.....	55
Figura 16: Resolução das alíneas 1.1 a 1.4 da Ficha de Trabalho n.º2 pelo Grupo I.....	57
Figura 17: Resposta à última questão da situação 1 da Ficha de Trabalho n.º2 pelo Grupo II	58

Figura 18: Ficheiro “ <i>ângulos_externos.ggb</i> ”	59
Figura 19: Ficheiro “ <i>polígonos.ggb</i> ”	61
Figura 20: Resolução da questão 3 da Ficha de Trabalho n.º 3 pelo Grupo I.....	62
Figura 21: Resolução da questão 3 da Ficha de Trabalho n.º 3 pelo Grupo II.....	62
Figura 22: Resolução da questão 6 da Ficha de Trabalho n.º3	63
Figura 23: Ficheiro <i>Paralelogramo.ggb</i>	64
Figura 24: Resolução da questão 1 da Situação 1 da Ficha de Trabalho n.º4 pelo Grupo III	65
Figura 25: Resolução da Questão 1 da Situação 1 da Ficha de Trabalho n.º 4 pelo Grupo IV	66
Figura 26: Resolução da Questão 1 da Situação 1 da Ficha de Trabalho n.º 4 pelo Grupo I	66
Figura 27: Resolução da Parte I da Ficha de Trabalho n.º 8 pelos Grupos I e III.....	69

«“Mede o que é mensurável e torna mensurável aquilo que não o é”, disse Galileu – porque a matemática é a linguagem do Universo».

(in Contributos da matemática para trabalhos de projecto, 8º ano, 2003, p.31)

1. INTRODUÇÃO

A escola tem um papel fundamental na formação dos jovens e inerentemente os professores são as “peças” fundamentais para “moldar” e educar crianças e jovens da forma mais completa possível de modo a construir um futuro melhor e conseqüentemente um Mundo melhor. As crianças e os jovens de hoje, serão os Homens de amanhã, Homens esses com papéis de índole fundamental na sociedade e na construção de políticas de sobrevivência o mais sensatas e coerentes possíveis, onde a dignidade e o respeito pela vida serão privilegiados e estimados (ou pelo menos deverão ser).

Galileu considerava que a Matemática era a linguagem do Universo, isto é, tudo se movia e baseava em torno de conceitos matemáticos. E aquilo que eventualmente pudesse, para muitos, ser explicado sem a utilização da matemática cairia por terra pois ser-lhes ia pedido para repensar as suas hipóteses e deduções de modo a perceber que por detrás de uma bela justificação está sempre uma explicação matemática.

Para a realização deste trabalho, escolhi como tema principal “Geometria”. Dentro deste tema decidi elaborar um estudo sobre a forma como os alunos aprendem geometria, assim sendo, este trabalho tem como título “*Aprender Geometria no 7.º Ano de Escolaridade: Diferenciação de Estratégias na Sala de Aula*”. A escolha deste tema advém da necessidade de perceber porque é que os alunos apresentam tantas dificuldades aquando da lecionação de temas geométricos que remontam a raciocínios mais abstratos, porque se apegam ao pensamento concreto dificultando a abstração, necessidade essa que sempre tive interesse em explorar. Foi com este ponto de partida que formulei o meu tema de trabalho aqui apresentado na esperança de compreender como é que os alunos aprendem Geometria. Foi com este propósito que desenvolvi pesquisas, investigações e

implementei atividades exploratórias cuja resolução enveredasse para a utilização dos diferentes instrumentos e assim pudesse analisar qual a forma mais adequada de promover o sucesso na aprendizagem dos conteúdos relativamente aos tópicos “Triângulos e Quadriláteros” e “Semelhança” a nível do 7.º ano de escolaridade do terceiro ciclo do ensino básico. Complementei, sempre que possível, as atividades propostas com as atividades sugeridas pelas formadoras do projeto de formação Construindo o Êxito em Matemática (projeto CEM), no qual participo enriquecendo a minha prática pedagógica e profissional.

Mais concretamente, o meu estudo incidiu sobre três aspetos fundamentais que são: a influência da utilização de materiais manipuláveis no processo de ensino e aprendizagem de conceitos e propriedades geométricas; a contribuição do uso de *software* Geométrico para a construção do pensamento geométrico dos alunos e a importância da aprendizagem da Geometria no desenvolvimento do raciocínio e da comunicação matemática. Parti do princípio que se desmistificasse os obstáculos inerentes a esta situação, poderia transmutar ideias pré-concebidas que levam muitos alunos a agirem de forma incorreta com a matemática considerando-a uma disciplina maçadora e inatingível que promove o insucesso estudantil.

Este estudo foi desenvolvido em várias fases. A primeira fase foi baseada em pesquisas bibliográficas, a partir das quais orientei o meu pensamento relativamente ao ensino e à aprendizagem da Geometria. A segunda fase foi dedicada ao tipo de estudo a realizar e à caracterização descritiva da turma com a qual iria trabalhar. Posto isto, foi o momento de me concentrar nas “colheitas” realizadas e definir o problema de investigação, planificando as propostas de trabalho que seriam implementadas na sala de aula.

A fase seguinte do meu estudo resume-se ao trabalho dos alunos. Nesta fase recolhi os dados para, nas fases posteriores proceder à análise e poder tirar conclusões.

1.1. Motivação e objetivo do estudo

Fazendo parte integrante da profissão “ser professor”, escolhi complementar a minha formação fazendo parte de um grupo do 2.º Ciclo de Cursos Superiores – Mestrado – na área do ensino da Matemática. Assim sendo, elaboro este trabalho que tem como tema “Aprender Geometria no 7.º Ano de Escolaridade: Diferenciação de Estratégias na Sala de Aula” e como principais objetivos: compreender como os alunos aprendem geometria neste nível de ensino e verificar a capacidade que os alunos têm de, perante uma situação geométrica, desenvolver raciocínios válidos e tirar conclusões plausíveis.

A Geometria é sem dúvida uma ciência. Esta ciência desde sempre fez parte integrante da minha vida e despertou em mim uma certa curiosidade e gosto pelas áreas de estudo que a envolvem, nomeadamente a Matemática. A Geometria é responsável por desenvolver capacidades de carácter intuitivo apelando à imaginação e à visualização, mesmo que subtil, das transformações que são possíveis encontrar nos objetos que nos rodeiam.

A escolha deste tema surgiu da necessidade que sinto em querer compreender o que sentem os alunos quando se deparam com situações problemáticas que envolvem conhecimentos geométricos e perceber como são capazes de as resolver.

Analisar as dificuldades dos alunos neste tópico programático, os conhecimentos adquiridos no dia a dia e em níveis anteriores, a forma como os aplicam e relacionam nas propostas apresentadas, a importância da matemática na construção de um futuro melhor para as novas crianças do século XXI, constituem a minha base de trabalho.

Motivar os alunos para uma aprendizagem mais significativa da matemática e “libertá-los” da ideia que a disciplina de matemática não é para todos. Transmitir-lhes confiança na aprendizagem mostrando-lhes a utilidade e aplicabilidade da matemática nas diversas situações da vida corrente é o meu principal propósito.

1.2. Problema em estudo

O problema em estudo nesta investigação é compreender como os alunos aprendem Geometria quando frequentam o 7.º ano de escolaridade.

Este problema foi dissecado em três questões:

1. Como é que a utilização de materiais manipuláveis contribui para a aprendizagem de conceitos e propriedades geométricas?
2. Como é que o uso de *software* Geométrico contribui para a construção do pensamento geométrico dos alunos?
3. Como é que a utilização de materiais manipuláveis e de *software* Geométrico contribuem para o desenvolvimento do raciocínio e da comunicação matemática?

Os temas matemáticos escolhidos para pensar sobre esta questão de investigação foram “Triângulos e Quadriláteros” e “Semelhança” que fazem parte do programa de matemática do ensino básico para o 7.º ano de escolaridade.

1.3. Metodologia

A metodologia utilizada nesta investigação foi baseada no método de investigação qualitativa em educação.

Para Bogdan e Biklen (1991) este método de investigação é um método “que agrupa diversas estratégias de investigação que partilham determinadas características. Os dados recolhidos são designados por *qualitativos*, o que significa ricos em pormenores descritivos relativamente a pessoas, locais e conversas.” (p.16).

Relativamente à forma de abordar este tipo de investigação, estes mesmos autores, acrescentam ainda que “as causas exteriores são consideradas de importância secundária. Recolhem normalmente os dados em função de um contacto aprofundado com os indivíduos, nos seus contextos ecológicos naturais.” (p.16). O investigador deverá centrar a sua pesquisa no que realmente interessa para o estudo em causa mantendo sempre a “plateia” no seu ambiente natural, pois por vezes, ao mudar de ambiente os resultados obtidos divergem dos resultados esperados.

Neste trabalho, utilizo este tipo de metodologia aplicando as estratégias de observação participante e a entrevista em profundidade, pois incluo-me no “mundo das pessoas” na qual incide o meu estudo (os meus alunos na sala de aula de matemática) e elaborei um registo escrito e sistemático de tudo aquilo que ouvi e observei (recorrendo aos meios audiovisuais, tais como, máquina fotográfica e gravador de som).

Bogdan e Biklen (1991), ao referirem-se a um estudo efetuado por um investigador sobre como pensam e como é que desenvolvem os seus quadros de referência um grupo de professores, diretores e estudantes, defendem que o objetivo do investigador é o de

compreender com detalhe o assunto e isso implica que este “passe, frequentemente, um tempo considerável com os sujeitos no seu ambiente natural, elaborando questões abertas” (p.17). Neste âmbito, o meu objetivo principal é o de compreender como os alunos aprendem Geometria e particularmente, os meus alunos da turma 2 do 7.º ano. Assim sendo, para além da metodologia que envolve a observação participante, utilizei também a entrevista em ambiente natural pois à medida que fui aplicando as atividades/ tarefas fui questionando cada aluno sobre a exploração individual de cada questão proposta e fui recolhendo os dados efetuando um registo das respostas.

2. ENQUADRAMENTO TEÓRICO

2.1. Aprender e ensinar Geometria

2.1.1. A Geometria e a Matemática

A geometria é importante há milhares de anos e, como tal, é um tema de elevada importância a ser trabalhado em todo o ensino básico. A Geometria não é uma disciplina puramente Matemática, pois à nossa volta, e de um modo especial no mundo natural, a Geometria está espalhada nas mais diversas configurações, desde as células dos favos de mel com a sua forma hexagonal até aos cristais nas suas mais variadas “formas poliédricas – o sal de mesa tem cristais cúbicos e o quartzo forma com frequência cristais em forma de um prisma de seis lados com extremidades em forma de pirâmide” (Vorderman, 2010, p. 72).

A Geometria é um domínio da matemática abstrata considerada como a grande ciência da matemática grega. Esta ciência foi desenvolvida desde muito cedo e surgiu da necessidade de demonstrar “proposições acerca de «qualquer» coisa ou sobre «alguma» coisa sem referência a coisas particulares determinadas”. (Whitehead, 1948, p.13).

Este mesmo autor defende que para se poder estudar Geometria é preciso seguir um método orientador. Método esse que deverá tornar-se um requisito indispensável ao pensamento científico de modo a estruturar o raciocínio matemático. (Whitehead, 1948, p.105).

Abrantes (1999), ao discursar sobre *Investigações em Geometria na Sala de Aula* (in *Ensino da Geometria ao virar do Milénio* de Veloso, E.; Fonseca H.; Ponte, J.P.; & Abrantes, P. (Org.), pp.153-167) afirma que, “fazendo apelo à intuição e à visualização e recorrendo, com naturalidade, à manipulação de materiais, a geometria torna-se, talvez mais do que qualquer outro domínio da Matemática, especialmente propícia a um ensino fortemente baseado na realização de descobertas.” Este autor continuou o seu discurso acrescentando que na geometria, por ser uma área da matemática, mais aberta, é possível desenvolver atividades de natureza exploratória e investigativa, sem recorrer à matemática “massuda” centrada na resolução de exercícios rotineiros e na execução de algoritmos.

No estudo da Geometria podemos considerar dois pontos de vista: o ponto de vista matemático e o ponto de vista educativo. Neste âmbito, e “[d]o ponto de vista matemático, é um dos campos mais férteis e aquele que melhor permite evidenciar a unidade do conhecimento matemático e as suas ligações com o mundo real.” (Lopes, A.; Bernardes, A.; Loureiro, C.; Varandas, J.; Oliveira, M. J.; Delgado, M. J.; Bastos R. e Graça, T., 1992, p.79). É neste campo, que a Geometria é vista como a ciência mais próxima da realidade que nos rodeia, onde a aplicação do seu estudo permite a concretização de factos reais. Estes mesmos autores consideram ainda que a Geometria, “do ponto de vista educativo, é um campo pleno de potencialidades de reconhecido valor”, uma vez que, neste campo, é fundamental reconhecer a importância do saber e compreender conceitos e propriedades geométricas que esclarecerão, aos alunos, os feitos reais que são nada mais nada menos que belas construções geométricas que têm por base conhecimentos em Geometria. É, ainda, neste campo, que a aprendizagem da Geometria permite ao aluno inteirar-se da aplicação da matemática na realidade que o rodeia e do quanto é importante e crucial para

a sua vivência diária a utilização da geometria na construção do seu conhecimento e crescimento pessoal e social.

Os autores referidos consideram a Geometria como uma ciência cujo potencial máximo é quase impossível explorar e refletir de uma forma minuciosa, daí restringirem-na a dois pontos de vista que consideraram essenciais. Nesta perspectiva, dão especial atenção às atividades de natureza geométrica que são propostas aos alunos, pois estas devem ser de tal forma abrangentes de modo a conciliar o desenvolvimento das “capacidades de organização, o sentido espacial e o raciocínio geométrico, proporcionando a aquisição de conhecimentos úteis de Geometria.” (Lopes, et al, 1992, p.79).

Estes mesmos autores preocupam-se com o tipo de Geometria que “entra” na sala de aula de Matemática pois consideram que “muitas das dificuldades que os alunos têm na aprendizagem da Geometria advêm da excessiva ênfase dada ao seu carácter dedutivo”. É necessário atender ao nível etário dos alunos e verificar se estes possuem uma capacidade de dedução e visualização do conhecimento geométrico adequado ao nível de ensino que estão inseridos. No entanto, estes autores defendem que devem ser desenvolvidas, nos alunos, as capacidades de organização e sentido espacial, assim como, o pensamento geométrico, pois estas são ferramentas muito úteis na aprendizagem da Geometria. Sendo este um trabalho bem feito por parte de todos os intervenientes no processo ensino e aprendizagem dos alunos, “é possível e desejável explorar as propriedades e relações geométricas sob perspectivas diversas, em vários momentos, e recorrendo a material manipulativo.” (Lopes, et al, 1992, p.79).

A geometria é de tal forma importante na formação dos jovens, tanto a nível académico, profissional ou mesmo pessoal, que estes autores defendem que é fundamental que haja mais Geometria nas aulas de Matemática.

2.1.2. A Geometria e o programa de Matemática

Geometria é uma área da Matemática com aplicações em diversas situações, desde o cálculo de áreas de terrenos, à arquitetura, à navegação e até mesmo à astronomia, no entanto, a nível do sétimo ano de escolaridade, o estudo da geometria, baseia-se na exploração dos triângulos e quadriláteros.

A disciplina de Matemática para qualquer nível de ensino tem por base um documento ministerial orientador, o Programa de Matemática para o Ensino Básico, do qual faz parte o estudo da Geometria. Lecionar em qualquer nível de ensino, implica cumprir um programa ministerial.

A nível do sétimo ano, e cumprindo o Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte, J. P.; Serrazina, L.; Guimarães, H.; Breda, A.; Guimarães, F.; Sousa, H.; Menezes, L.; Martins, M. E. e Oliveira, P. A., 2007, p.52) pretende-se que os alunos, experienciem e sejam capazes de, por exemplo, deduzir o valor da “soma dos ângulos internos e externos de um triângulo, determinar o valor da soma dos ângulos internos de um quadrilátero”. Que sejam capazes de, investigar e explicar matematicamente as propriedades encontradas

nos quadriláteros, assim como, desenvolvam a capacidade de construir triângulos e quadriláteros, a partir de condições dadas.

Cumprir o programa de Matemática significa planificar e agir de acordo com as finalidades e objetivos desse mesmo programa de forma a atingir sucesso em todo o processo de ensino aprendizagem da disciplina.

Uma das finalidades do ensino da Matemática, segundo o Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte, et al., 2007, p.3), é desenvolver o “interesse pela Matemática e em partilhar aspetos da sua experiência nesta ciência”. Assim sendo, trabalhar esta finalidade implica dar oportunidade ao aluno de expressar os seus conhecimentos prévios sobre os conceitos geométricos.

Um dos objetivos gerais do ensino da Matemática aponta para o facto de que “[o]s alunos devem conhecer factos e procedimentos básicos da Matemática e devem ser capazes de reconhecer as figuras geométricas básicas; efetuar medições e realizar construções geométricas com um grau de precisão adequado; usar instrumentos matemáticos tais como réguas, esquadros, compassos, transferidores, e também calculadoras e computadores” (Ponte, et al., 2007, p.4).

Para lecionar a disciplina de Matemática, particularmente o conteúdo referente à Geometria, o professor deve ter em atenção as orientações que constam no referido programa, quer a nível de metodologias, quer a nível de conteúdos, assim como, a nível de materiais a utilizar. Este documento ministerial refere que a aprendizagem da matemática inclui diversos recursos, nomeadamente materiais manipuláveis. Assim, “na Geometria é ainda essencial o uso de instrumentos como a régua, esquadro, compasso e transferidor”. (Ponte, et al., 2007, p.9).

Para tornar mais eficaz o estudo da Geometria, o processo deverá iniciar-se pela exploração das propriedades existentes nas figuras simples, como triângulos e quadriláteros, e na atenção dispensada nas diferentes correlações que poderão existir entre as diversas partes das figuras consideradas.

O referido programa aponta também para o facto de que “os alunos devem usar calculadoras e computadores na realização de cálculos complexos, na representação de informação e na representação de objetos geométricos. O seu uso é particularmente importante na resolução de problemas e na exploração de situações.” (Ponte, et al., 2007, p.9).

O Programa de Matemática do Ensino Básico aponta ainda para a importância do tempo disponibilizado aos alunos “[n]a resolução de problemas geométricos assim como, nas tarefas exploratórias e de investigação” (Ponte, et al., 2007, p.51), pois os mesmos, perante uma situação problemática, têm necessidade de “elaborar estratégias, formular conjecturas, descrever processos e justificá-los com rigor progressivo. Ao elaborarem justificações, produzindo pequenas cadeias dedutivas, familiarizam-se com o processo de demonstração e iniciam o raciocínio geométrico dedutivo.” (Ponte, et al., 2007, p.51).

Este documento apela à utilização de diversos recursos para promover o sucesso na aprendizagem da matemática. Devem ser utilizados nas salas de aula, recursos tecnológicos como o *software* de Geometria Dinâmica, assim como, materiais manipuláveis.

O *software* de Geometria Dinâmica deve ser utilizado “sobretudo na realização de tarefas exploratórias e de investigação. Os materiais manipuláveis (por exemplo, tangram, peças poligonais encaixáveis e sólidos de enchimento em acrílico) constituem recursos

cuja utilização complementa a abordagem dinâmica ao estudo da Geometria.” (Ponte, et al., 2007, p.51).

Os autores deste programa defendem ainda que “[t]anto os recursos computacionais como os modelos geométricos concretos permitem desenvolver a intuição geométrica, a capacidade de visualização e uma relação mais afectiva com a Matemática.” (Ponte, et al., 2007, p.51).

2.1.3. O papel do professor no ensino e aprendizagem da Geometria

O professor tem um papel fundamental no desenvolvimento da aprendizagem, da Geometria, na medida em que encoraja os alunos a raciocinar a partir de simples objetos do dia a dia, que são do conhecimento de todos. A forma como ensina os alunos a explicar os conhecimentos adquiridos e a aplicação desses conhecimentos para justificar e argumentar conjeturas. O apoio que fornece ao aluno quando este esforça-se por justificar as suas descobertas através de tentativa e erro ou de experimentação de vários casos. O método que utiliza para formular conjeturas e comprová-las, ou não, através de exemplos ou contraexemplos.

Os métodos de ensino da Matemática foram sofrendo atualizações ao longo dos tempos. Tradicionalmente a matemática era ensinada pelo método expositivo em que o aluno tinha um papel completamente passivo. No entanto, tornou-se necessário alterar esse

método e dar ao aluno a oportunidade de raciocinar, explorar e aprender por ele próprio. Pois “a par da intuição e da imaginação criadora, há que desenvolver ao máximo no espírito dos alunos o poder de análise e o sentido crítico.” (Silva, J.,1975, p.11).

O professor tem um papel fundamental em todo o processo de ensino e aprendizagem e particularmente no processo de ensino e aprendizagem da Geometria, na medida em que transmite confiança ao aluno. O professor deve combater no aluno o receio de errar que muitas vezes inibe-o de participar ativamente na aula e provoca bloqueios no desenvolvimento do raciocínio e da comunicação matemática.

Segundo José Sebastião e Silva (1975, p.11) “a melhor maneira de aprender é ensinar”, pois o aluno quando adquire conhecimentos, nomeadamente a nível de conteúdos do foro Geométrico, e explica-os ou a seus colegas de turma/sala ou em apresentações orais e/ou escritas de trabalhos propostos pelo professor, acaba por responsabilizar-se por esses mesmos temas e aprofundá-los de uma forma autodidata mais simples e esclarecedora até para ele próprio.

Ensinar e aprender Geometria desde cedo promove um bom suporte intuitivo a outras noções matemáticas, pois a Geometria é a ciência que desenvolve a capacidade de raciocinar de uma forma intuitiva na medida em que esta ciência está mais perto do mundo físico que rodeia o aluno do que outros campos da Matemática como, por exemplo, a Álgebra.

2.2. Materiais manipuláveis

Materiais manipuláveis são como o próprio nome indica, materiais que permitem ao aluno manipular, mexer, fazer e desfazer, montar e desmontar todo e qualquer facto numa perspetiva mais eficaz da aprendizagem. Os materiais manipuláveis são excelentes dinamizadores para o aluno construir o seu saber matemático.

Para Reys (1971), os materiais manipuláveis são “objectos ou coisas que o aluno é capaz de sentir, tocar, manipular e movimentar. Podem ser objectos reais que têm aplicação no dia-a-dia ou podem ser objectos que são usados para representar uma ideia” (Matos e Serrazina, 1996, p.193).

Estes mesmos autores ressaltam ainda que “os materiais manipuláveis apelam a vários sentidos e são caracterizados por um envolvimento físico dos alunos numa situação de aprendizagem activa.” (p.193).

Lorenzato (2006), refere que nos últimos séculos, muitos educadores defenderam “a importância do apoio visual e/ou do visual-tátil como facilitador para a aprendizagem”. Este mesmo autor afirma que, “por volta de 1650, Comenius escreveu que o ensino deveria dar-se do concreto ao abstrato, justificando que o conhecimento começa pelos sentidos e que só se aprende fazendo” (p.3). Lorenzato (2006) acrescenta que cerca de 30 anos mais tarde, Locke, confrontava-se com a “necessidade da experiência sensível para alcançar o conhecimento” (p.3). Cem anos mais tarde foi a vez de Rousseau defender a aprendizagem atendendo à “experiência direta sobre os objetos” (p.3). No início do século XIX, Pestalozzi e Froebel, continuando o pensamento de Comenius, “reconheceram que o ensino deveria começar pelo concreto”(p.3). Herbart, também na época de Pestalozzi e

Froebel, “defendeu que a aprendizagem começa pelo campo sensorial” (p.3). Por volta de 1900, já início do século XX, “Dewey confirmava o pensamento de Comenius, ressaltando a importância da experiência direta como fator básico para a construção do conhecimento, e Poincaré recomendava o uso de imagens vivas para clarear verdades matemáticas” (p.3). Mais tarde, Montessori apresentou “exemplos de materiais didáticos e atividades de ensino que valorizavam a aprendizagem através dos sentidos, especialmente do tátil, enquanto Piaget deixou claro que o conhecimento se dá pela ação refletida sobre o objeto” (p.4). Na Rússia, Vygotsky e nos Estados Unidos, Bruner, “concordaram que as experiências no mundo real constituem o caminho para a criança construir o seu raciocínio” (p.4). Nesta linha de pensadores e educadores é fundamental referir, segundo Lorenzato (2006), o excepcional matemático Arquimedes, pois este, desde cedo, percebeu a influência do ver e do fazer no processo de aprendizagem confirmando a importância das imagens e dos objetos no processo de construção de novos saberes. É nesta linha de pensamentos que reunimos condições para utilizar o antigo provérbio chinês que diz: “se ouço, esqueço; se vejo, lembro; se faço compreendo.” (Lorenzato, 2006, p.5).

A utilização de materiais manipuláveis pressupõe que o professor averigue os motivos que o levam a utilizá-los e de que forma poderão beneficiar a aprendizagem dos conteúdos programáticos.

Os materiais manipuláveis têm um importante papel no desenvolvimento cognitivo e afetivo dos alunos. Por outro lado, “o modo de utilizar o material escolhido depende fortemente da concepção do professor a respeito da matemática e da arte de ensinar” (Lorenzato, 2006, p.25).

Lorenzato (2006) considera que “a melhor das potencialidades do material didático é revelada no momento da construção do mesmo pelos próprios alunos, pois é durante este momento que surgem imprevistos e desafios, os quais conduzem os alunos a fazer conjeturas e a descobrir caminhos e soluções.” (p.28).

Segundo Deneca e Pires (2008), a utilização de materiais manipuláveis de forma adequada e não exagerada, “poderá favorecer, sem dúvida, o processo ensino aprendizagem,” pois este tipo de recurso material permite ao aluno o “desenvolvimento de um tipo especial de pensamento que lhe possibilita compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive.” (p.8).

Após a implementação de uma atividade com a utilização de materiais manipuláveis é crucial o momento da reflexão sobre a implementação da mesma. Essa reflexão deverá ser feita, tanto pelo professor, como pelo aluno. Pois é refletindo sobre o que aconteceu, averiguando o que correu bem ou menos bem, o que já está ótimo e o que poderá ainda ser melhorado, é que professores e alunos, tornam-se cada vez mais conscientes das suas práticas e conseqüentemente dos seus sucessos.

É refletindo sobre o desempenho nas atividades que o professor torna-se um pólo orientador e catalisador de todo o processo ensino aprendizagem e capaz de avaliar de uma forma mais justa, coerente e transparente. Desta forma o professor não só avalia o aproveitamento do aluno, como também avalia a sua própria prática pedagógica.

Para o aluno, a reflexão é igualmente fundamental, pois permitir-lhe-á também fazer uma autoavaliação das suas aprendizagens e conseqüentemente avaliar o grau de sucesso obtido.

2.3. Utilização do computador na sala de aula de Matemática

2.3.1. O ensino da Matemática e o computador

Segundo Fróes, citado por Lopes (2002),

“a tecnologia sempre afetou o homem: das primeiras ferramentas, por vezes consideradas como extensões do corpo, à máquina a vapor, que mudou hábitos e instituições, ao computador que trouxe novas e profundas mudanças sociais e culturais, a tecnologia nos ajuda, nos completa, nos amplia.... Facilitando nossas ações, nos transportando, ou mesmo nos substituindo em determinadas tarefas, os recursos tecnológicos ora nos fascinam, ora nos assustam...” (p.1).

A implementação das novas tecnologias da informação no ensino da Matemática surgiu na “década de 60, numa fase em que os computadores eram ainda muito raros, dispendiosos e complicados de operar.” (Ponte e Canavarro, 1997, p.95).

Nesta época, a utilização do computador na sala de aula foi motivo de várias discussões e até houve mesmo quem a considerasse desenquadrada dos novos objetivos do ensino da matemática. Assim sendo, só por volta dos anos 80, é que o computador ganhou maior visibilidade e aceitação numa sala de aula. A partir daí, o computador passou a ser visto como sinal de progresso e como tal, a sua integração na escola foi aceite de uma forma mais vantajosa. Experiências de utilização de computadores mostraram que a relação dos alunos com a matemática melhorou significativamente. Os alunos tiveram oportunidade de verificar abordagens diferentes aos conteúdos programáticos,

experimentando novas metodologias de trabalho, reequacionando o seu papel no processo de ensino e aprendizagem da Matemática. (Ponte e Canavarro, 1997, p.97).

As ferramentas baseadas em tecnologias de informação e comunicação, nomeadamente os computadores, desempenham um papel fundamental no processo educacional, na medida em que, cada vez mais, invadem a nossa sociedade com métodos inovadores e facilitadores da aprendizagem.

As novas tecnologias da informação têm proporcionado notáveis alterações ao ensino da Matemática. Cada vez mais é imprescindível a utilização do computador na sala de aula de matemática. Por vezes, torna-se difícil, quando a escola não possui recursos materiais necessários. Quando isso não acontece, e é possível lecionar conteúdos programáticos com a utilização do computador, a aula torna-se mais dinâmica e motivadora contribuindo assim para melhorar o interesse, a participação e o empenho/desempenho da maioria dos alunos.

Cada atividade proposta ao aluno para resolver com a utilização do computador deverá ser muito bem selecionada e preparada de forma a facilitar todo o processo de ensino aprendizagem do aluno.

Nestas atividades devemos ter em conta se o aluno já conhece ou não o programa informático a utilizar. Todo este processo poderá ser desenvolvido com recurso a fichas de trabalho que deverão ser acompanhadas de duas partes, a primeira parte com informação para dar a conhecer as ferramentas a utilizar e a segunda parte com atividades a experimentar e investigar.

A utilização do computador na sala de Matemática permitirá ao aluno reforçar e ampliar os conhecimentos relativos ao tema em estudo, assim como, desenvolverá as capacidades transversais de comunicação matemática e raciocínio matemático.

2.3.2. Geometria dinâmica

Geometria Dinâmica, como o próprio nome indica é um “método dinâmico e interativo para o ensino e aprendizagem de geometria e suas propriedades usando ambientes computacionais destinados a esse fim.” (Neri, I.,2012).

Na Matemática, a palavra “Dinâmica” significa “movimento e mudança”. Os programas de Geometria Dinâmica permitem ao aluno, construir e visualizar de várias formas de modo a facilitar a compreensão do comportamento geométrico dos elementos envolvidos. As construções realizadas com programas de Geometria Dinâmica não são estáticas, possibilitam ao aluno fazer animações movendo os pontos iniciais da construção, no entanto, as relações matemáticas existentes entre eles mantêm-se o que permitirá ao aluno, conjecturar e poder concluir.

Segundo Néri (2012), “os primeiros programas de computador usados para Geometria Dinâmica foram o Geometer’s Sketchpad (em 1989) e o Cabri Géomètre (em 1988). Esses programas agem como se fossem régua e compassos virtuais (eletrônicos)”. Este autor acrescenta ainda que, “hoje existem vários outros programas de Geometria Dinâmica, que se diferem por sua estrutura ou valor comercial, alguns desses programas são mais completos e vão além da geometria, podendo ser classificados como Matemática Dinâmica.”

Com *software* dinâmico, o aluno tem oportunidade de construir, manipular, deslocar, transformar imagens e/ou figuras geométricas e ainda tem a possibilidade de observar as características que se alteram e as que se mantêm. Este contexto educativo favorece uma abordagem mais dinâmica no estudo da geometria. Permite ao aluno

descobrir por si próprio muitas das propriedades geométricas que antes lhe foram ensinadas por métodos expositivos, ditos tradicionais.

Ponte e Canavarro (1997), defendem que:

[o] software dinâmico favorece claramente uma abordagem exploratória e investigativa da geometria, pois permite de uma maneira bastante simples a realização de experiências diversificadas, em que os alunos podem dar largas ao seu espírito criador e perseguir as suas hipóteses de trabalho, chegando eventualmente a conclusões inéditas. (p.161).

Ponte e Canavarro (1997) acrescentam ainda as potencialidades desenvolvidas com a utilização de computadores no estudo da geometria. Assim sendo, estes autores afirmam que a utilização de computadores “amplia o leque de representações dos objectos geométricos para uma melhor visualização e percepção das formas; oferece um ambiente de trabalho dinâmico, favorável à exploração e investigação por parte dos alunos”. A utilização de computadores com *software* dinâmico também “proporciona a realização de “confirmações experimentais” de determinadas propriedades e relações geométricas e favorece o estabelecimento de conexões entre a geometria e outros campos da Matemática (números, funções, sucessões, ...).” (Ponte & Canavarro, 1997, p.162).

2.3.3. O software GeoGebra

O *software GeoGebra* é um *software* gratuito de matemática dinâmica. Este *software*, foi criado em 2001 pelo Dr. Markus Hohenwarter da Universidade de Salzburg na Áustria. O *GeoGebra* foi concebido com o intuito de desenvolver o ensino e aprendizagem da matemática nos diferentes níveis de ensino, desde o ensino Básico até ao ensino Superior. Este programa informático “reúne recursos de geometria, álgebra, tabelas, gráficos, probabilidade, estatística e cálculos simbólicos em um único ambiente.” (Nascimento, 2012, p.128).

O *GeoGebra*, por um lado, “permite realizar construções tanto com pontos, vetores, segmentos, retas”,..., “por outro lado, equações e coordenadas também podem estar interligadas diretamente através deste *software*.” (Costa & Tenório, 2011, p.3).

A utilização do programa *GeoGebra* na sala de aula é vantajosa na medida em que este permite apresentar, ao mesmo tempo, várias representações de um mesmo objeto que interagem entre si. O *GeoGebra* é também uma excelente ferramenta para criar ilustrações profissionais que posteriormente podem ser utilizadas em outros programas da Microsoft, como por exemplo no Microsoft Word. Segundo Nascimento (2012), “escrito em JAVA e disponível em português, o *GeoGebra* é multiplataforma e, portanto, ele pode ser instalado em computadores com Windows, Linux ou Mac OS.” (p.128).

Ao abrir o programa *GeoGebra* visualizamos uma janela designada por janela gráfica do *GeoGebra*. A janela gráfica divide-se em barra de menus (comandos e símbolos), barra de ferramentas (ou barra de tarefas), uma janela de álgebra, área de trabalho (janela geométrica ou de visualização) e um campo de entrada de texto.

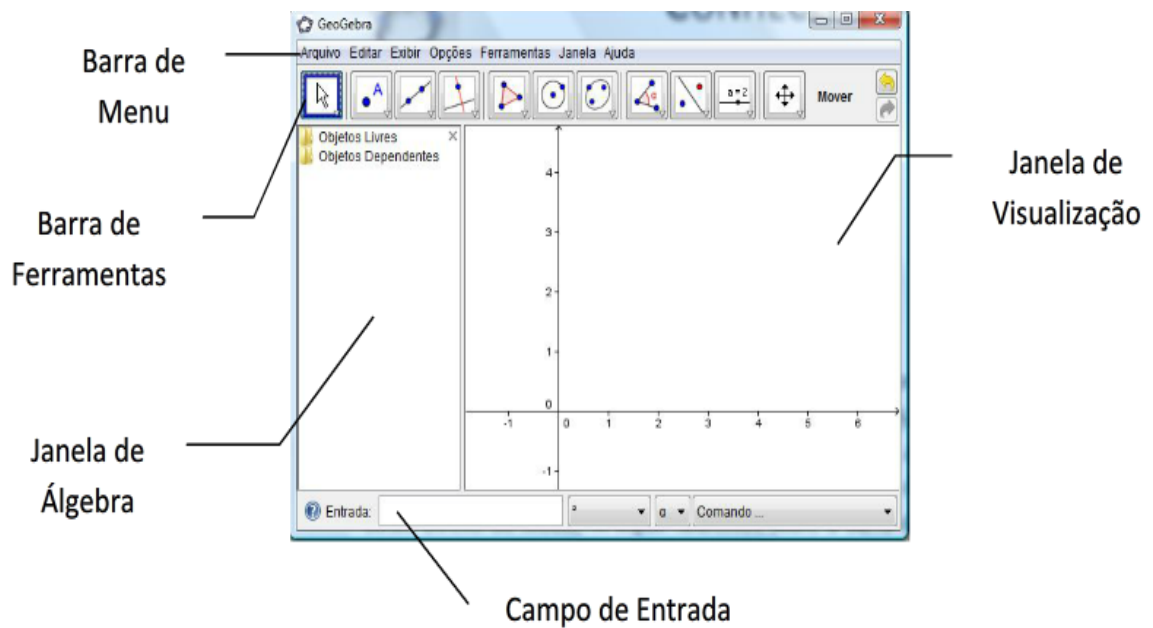


Figura 1: Janela Gráfica do *GeoGebra*

Na barra de ferramentas do *GeoGebra* podemos visualizar e aceder a onze janelas.



Figura 2: Barra de Ferramentas do *GeoGebra*

Segundo Nóbrega e Araújo (2010), “[c]ada Janela possui várias ferramentas. Para poder visualizar essas ferramentas, basta clicar na parte inferior do ícone.” (p.2). Clicando na parte inferior de cada ícone, o programa abrirá as opções referentes à janela escolhida. Por exemplo,

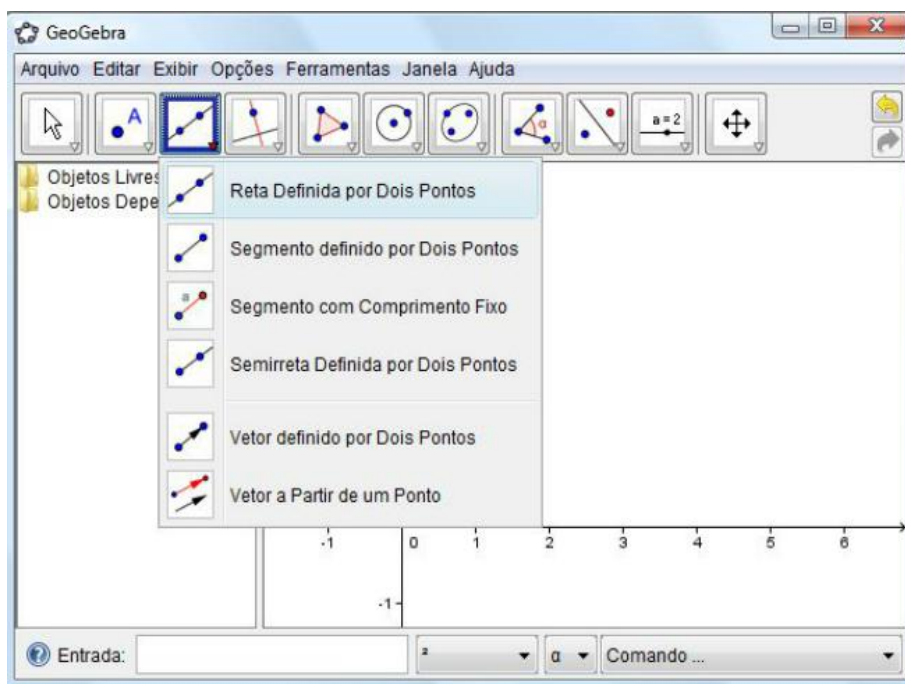


Figura 3: Janela de Ferramentas da Barra de Ferramentas do *GeoGebra*

É de salientar que cada ícone tem uma imagem e uma designação para o utilizador verificar o que a ferramenta faz.

Cada Janela da Barra de Ferramentas, é constituída por vários ícones e cada um deles com uma função.

Um outro campo também com grande importância na utilização do *software GeoGebra* é o campo da Entrada. Este campo aparece na parte inferior da janela do *GeoGebra*. O campo de entrada permite-nos operar com o *GeoGebra*, utilizando os comandos escritos. “Praticamente todas as ferramentas da Barra de Ferramentas podem ser acedidas utilizando comandos escritos.” (Nóbriga & Araújo, 2010, p.14).

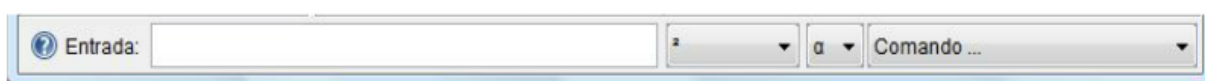


Figura 4: Campo de Entrada do *GeoGebra*

2.4. Diversificação de estratégias

A aprendizagem da Matemática é muito mais eficaz, quando o professor diversifica o mais possível as estratégias.

Essa diversificação passará por um processo que competirá ao professor utilizar estratégias de ensinar conteúdos matemáticos de uma forma, muitas vezes, divertida, fascinante para o aluno e até mesmo com atividades em que a matemática está “escondida”. Na maior parte das vezes, é utilizando este tipo de tarefas que os alunos absorvem e compreendem de forma positiva os conteúdos programáticos atingindo os objetivos propostos para o sucesso no processo ensino aprendizagem da Matemática.

É na diversificação de estratégias que o próprio professor torna-se capaz de fazer com que os alunos aumentem a consciência da importância desta disciplina, por vezes, “mal amada” por muitos alunos. É fazendo-os ver que a matemática é uma ciência, mas também é uma arte que tem como papel fundamental, não só “brincar” com os números, mas também descobrir padrões, harmonias e texturas que constituem relações entre as diversas áreas que compõem esta disciplina, como por exemplo, a geometria.

É passando a mensagem que todos são bons alunos a matemática, é fazendo-os acreditar que são capazes de ir mais além, que é importante sonhar e concretizar, que o professor consegue fazer com que um aluno que à partida já desistiu da disciplina, pois no início do ano letivo é capaz de dizer: “professor, não vale a pena, que comigo não dá, eu nunca tive positiva a matemática, também não vai ser agora”, mude as suas convicções e acredite nas suas capacidades de aprendizagem e seja capaz de “remar” até ao sucesso. Este é um tipo de aluno que desistiu antes mesmo de começar, é um aluno que “vive a morte antes de viver a vida”, no entanto, o professor não deve desistir perante um aluno deste tipo. O professor deve, porém, pegar neste tipo de alunos e criar desafios nas suas

práticas pedagógicas. Este é o tipo de aluno que existe na sala de aula para “espicaçar” o professor e fazê-lo ver que a diversificação é cada vez mais necessária e urgente, pois só assim, passado algum tempo, poderá com grande satisfação ouvir esses mesmos alunos a afirmar: “realmente o professor tem razão, afinal até sei matemática e consigo ter positiva”.

“O papel do professor é extremamente importante quando actua como modelo, mas não é menos importante nem menos difícil quando passa a actuar como orientador e desbloqueador de situações de impasse.” (Lopes, et al., 1992, p.20).

É muito importante que o professor possua um grau de sensibilidade e bom senso que o permita intervir corretamente e convenientemente, de forma a transmitir segurança aos alunos. É importante deixá-los à vontade para encontrar os “melhores caminhos” de resolução de tarefas propostas, mas é igualmente importante a intervenção do professor no momento de bloqueio, pois rápida e eficazmente facilitará a resolução com, por exemplo, uma pequena pista.

Segundo Lester, citado por Lopes, et al. (1992), na resolução de problemas, o professor deverá seguir um guia de atuação. Este guia de atuação revela uma série de indicações úteis na resolução de problemas, assim como, na resolução de qualquer tarefa. O guia, sugerido por Lester, contempla as ações do professor e quais as suas intenções na ação quer antes da resolução, durante a resolução e depois da resolução do problema.

Ao diversificar as estratégias, poderão também ser utilizadas atividades lúdico-pedagógicas, como por exemplo, os jogos, pois estes têm um impacto de importante relevo na educação matemática do aluno. Normalmente os alunos revelam atração por atividades lúdicas, é o aprender a “brincar” que os motiva e torna a aprendizagem gratificante para os intervenientes neste processo. Estas atividades “podem permitir uma abordagem mais informal e intuitiva de conceitos e ideias matemáticas consideradas, em determinado

momento demasiado abstractos; os jogos permitem que o ritmo de cada aluno seja respeitado mais naturalmente.” (Lopes, et al., 1992, p.23). Estes autores acrescentam ainda que “os jogos podem contribuir para que o aluno encare o erro de uma forma mais positiva e natural; os jogos permitem que os alunos sintam que podem ter sucesso; os jogos favorecem naturalmente a interação entre os alunos.” (Lopes, et al., 1992, p.23).

Em determinados conteúdos programáticos, aplicando atividades lúdicas, poderão ser desenvolvidas diversas capacidades no aluno desde o domínio afetivo ao cognitivo. A aplicação de, por exemplo, um jogo permite desenvolver a “autoconfiança, a autonomia, o espírito de equipa e de cooperação, a capacidade de comunicar e de ouvir os outros, de argumentar, de chegar a um consenso e de tomar decisões.” (Lopes, et al., 1992, p.23).

Segundo Deneca e Pires (2008), o professor ao preparar a sua aula, já a planifica de acordo com os recursos materiais que acredita serem os mais eficazes para atingir os seus objetivos. No entanto, é necessário ter consciência que por melhor que seja a aula, nem sempre se consegue atingir a todos da mesma forma e ao mesmo tempo, pois cada aluno é um aluno com funcionamentos e ritmos de aprendizagem individualizados. Por essa razão o professor, mesmo sem garantias de êxito total e absoluto, desdobra-se na elaboração de atividades diversificadas. É natural que, mesmo com atividades ditas corriqueiras, há sempre alunos que se esforçam e demonstram interesse em aprender e há aqueles que apesar do seu esforço não entendem os conteúdos revelando dificuldades de tal ordem preocupante para um professor. É por isso que o professor deve propor atividades com metodologias diferenciadas de forma a aumentar as possibilidades do aluno atingir os objetivos pretendidos e melhorar os seus resultados. É importante quando estas atividades são desenvolvidas e trabalhadas de modo que o aluno “construa e abstraia seus conceitos por meio de materiais manipuláveis que auxiliam a sua compreensão, contribuindo assim de forma significativa para a assimilação dos conteúdos, permitindo a eles a construção de

seu próprio conhecimento e por isso, devemos sempre lançar mão desse dispositivo.” (Deneca & Pires, 2008, p.20).

Ponte (2003) afirmou que a aprendizagem da Matemática deverá desenvolver-se em diversos momentos onde predominará “a exploração, a formalização e a integração das ideias matemáticas.” Afirma também que “o ensino-aprendizagem tem de envolver os alunos noutros tipos de experiências e situações, como a exploração, a investigação, a resolução de problemas, a realização de ensaios e projetos, a comunicação e a discussão.” (Ponte, 2003, p.41). De acordo com a diversidade de experiências em que devemos envolver os alunos é fundamental a diversificação de estratégias na resolução das atividades propostas indo ao encontro da principal meta a atingir: o sucesso na aprendizagem da Matemática.

Para cada investigação ou forma de resolver uma situação matemática, geométrica ou não, é importante refletir sobre a forma de a resolver e de como a resolver, pois é refletindo sobre o que é feito e de como foi feito que nasce verdadeiramente o aprender. Cada professor é um instrumento fundamental na aprendizagem e evolução dos seus alunos, é a peça principal de um grande puzzle na vida de cada estudante, então o professor deverá responsabilizar-se por desenvolver nos seus alunos a capacidade de pensar em termos matemáticos e de o tornar capaz de utilizar as ideias matemáticas para resolver situações em diversos contextos. O professor deve utilizar como estratégia essencial na exploração de conceitos, “a compreensão e *apropriação* crítica dos conceitos e ideias matemáticas.” (Ponte, 2003, p.52).

3. METODOLOGIA

3.1. Natureza do estudo

Como já referi anteriormente, o estudo aqui apresentado é de natureza qualitativa. O método qualitativo caracteriza-se por ser um método indutivo, holístico, naturalista, humanístico e descritivo (Carmo e Ferreira, 2008).

De forma a viabilizar a investigação, o investigador deverá prestar atenção ao processo que utiliza para desenvolver o seu trabalho. O processo utilizado deverá facilitar a compreensão e a seleção do que é fundamental para o estudo separando do que é «“impreciso”, dinâmico, não “quantificável”» (Garnica, 1997, p. 120). É certo que não podemos ignorar o que é quantificável, mas o quantificável ou mensurável deverá ser manuseado de forma a não manipularmos os resultados pretendidos dando ênfase à qualidade dos mesmos. Assim sendo, a pesquisa deverá ser orientada nesse sentido, uma vez que, pesquisar, para objetivamente concluir, é uma arte, isto é, “[p]esquisar é mostrar-se. Pesquisar é um exercício para compreendermos o mundo.” (Garnica, 1997, p.121).

Para garantir a eficácia de todo o processo de investigação, o investigador deve ser reflexivo e argumentativo diversificando os instrumentos, efetuando avaliações de carácter qualitativo conduzindo corretamente e conclusivamente o trabalho ao exepetável.

Com base, nas informações recolhidas sobre esta natureza de estudo, utilizei este método de investigação para verificar como os alunos seriam capazes de resolver as tarefas propostas e qual a melhor forma de vencer as dificuldades que eventualmente surgiam ao longo do processo.

Toda esta investigação centrou-se no processo de ensino e aprendizagem da Geometria de 7.º Ano e na diversificação de estratégias, na sala de aula, que promovem o sucesso dessa aprendizagem. Assim sendo, para esta investigação é útil a utilização do método qualitativo com carácter interpretativo, que é descritivo e indutivo, uma vez que o pretendido neste estudo é apurar como os alunos aprendem Geometria a nível de 7.º ano de escolaridade.

Este tipo de metodologia é o mais adequado para o estudo aqui apresentado pois no método qualitativo não é necessário comprovar hipóteses e/ou teorias tal como se pode verificar com a utilização de um método quantitativo. O método quantitativo é um método mais objetivo naturalmente associado a questões de carácter investigativo experimental. É mais orientado para a comprovação de dados, é considerado inferencial e hipotético-dedutivo (Carmo e Ferreira, 2008).

3.2. Caracterização da turma

O trabalho aqui apresentado teve como intervenientes principais os alunos da turma dois do sétimo ano de escolaridade da Escola Básica dos 2.º e 3.º Ciclos do Curral das Freiras, situada no Concelho de Câmara de Lobos, Ilha da Madeira.

A turma é constituída por 13 alunos com idades compreendidas entre os 12 e 15 anos.

Os alunos da referida turma caracterizam-se por ser alunos com fracos desempenhos cognitivos a nível geral. Têm poucas perspetivas de futuro, não são ambiciosos nem

competitivos. São alunos com comportamento bastante satisfatório, são assíduos e pontuais mas revelam grandes dificuldades de aprendizagem, não apenas na matemática como também nas restantes disciplinas que compõem o currículo deste nível de ensino. O nível socioeconómico destes alunos é baixo, a maioria das encarregadas de educação estão desempregadas ocupando-se das tarefas domésticas. Das treze encarregadas de educação, apenas uma completou o nono ano de escolaridade e uma completou o ensino secundário, a maioria possui apenas o primeiro ciclo e em alguns casos este está incompleto. Todos estes aspetos vivenciados pelos alunos, no seu quotidiano, faz com que os mesmos não tenham boas referências para aspirarem atingir a escolaridade até ao nível do ensino superior ou até mesmo o ensino secundário. No entanto, e ao longo de todo este ano letivo, empenhei-me em contrariar esta tendência e mostrar-lhes a realidade do mundo atual, a importância do saber e o impacto que terá na vida futura de cada um.

Uma das alunas da turma apresenta necessidades educativas especiais (por ter sido diagnosticado uma deficiência intelectual ligeira) e três são acompanhadas pelos Serviços de Orientação e Psicologia da escola (por apresentarem distúrbios emocionais).

Inicialmente a maioria dos alunos revelava poucos hábitos e métodos de trabalho mas ao longo do ano letivo, foram conquistando a prática de fazer e melhorar o saber fazer. Promovi atividades de trabalho em pequenos grupos/pares de modo a desenvolver a autonomia, o gosto pela disciplina, o interesse e o empenho nas tarefas propostas. No entanto, na resolução das atividades continuaram a ser pouco autónomos nomeadamente na resolução de questões que implicam justificação de raciocínios, estando constantemente a solicitar a ajuda da professora, quer fosse em atividades que envolvessem materiais manipuláveis ou atividades com a utilização de *software* geométrico.

3.3. Recolha de dados

A recolha de dados é a fase em que o investigador faz a “colheita” dos materiais em bruto do mundo em que se encontra a estudar e que serão a base da análise de todo o trabalho investigativo. (Bogdan e Biklen, 1991).

Neste trabalho investigativo, utilizei o método qualitativo onde a recolha de dados foi baseada na observação direta dos alunos em contexto sala de aula (com recurso aos meios audiovisuais: gravador de som e máquina fotográfica) e na recolha de resoluções das atividades propostas (em formato de papel e formato digital).

3.3.1. Seleção das propostas de trabalho

Para recolher os dados primeiramente foi necessário selecionar e preparar propostas de trabalho a utilizar na sala de aula. O professor como mediador de todo o processo ensino e aprendizagem é responsável por organizar toda a sua planificação de forma simples, clara e completa direcionando-a sempre para o sucesso dos alunos permitindo-lhes a construção do seu próprio saber e saber fazer.

Abrantes (1999) referindo – se às *Normas* do NCT (1991), considera que as atividades de natureza exploratória e investigativa e que envolvam a resolução de problemas têm um papel fundamental na reestruturação do pensamento matemático dos alunos pois “aprender Matemática é essencialmente *fazer* Matemática” (p. 153) enfatizando a importância de envolver os alunos na realização de atividades que os levem

a formular problemas, conjecturar (demonstrando as conjecturas) e a comunicar as suas descobertas.

Nesta perspetiva seleccionei e preparei atividades, de acordo com as propostas de trabalho da equipa de formação do Projeto Construindo o Êxito em Matemática (CEM), para aplicar na sala de aula de Matemática de uma turma de 7.º ano do 3.º Ciclo do Ensino Básico, relativamente aos tópicos que envolvem conceitos geométricos.

Com estas propostas de trabalho pretendia que os alunos aprendessem com a partilha de ideias e saberes, desenvolvessem a capacidade de raciocinar e comunicar matematicamente e tivessem uma atitude positiva perante a aprendizagem da disciplina.

As tarefas que propus aos meus alunos da turma 2 do 7.º ano evidenciavam os conteúdos programáticos referentes aos tópicos “Triângulos e Quadriláteros” e “Semelhança” integrados no Programa de Matemática para o Ensino Básico. No primeiro tópico, “Triângulos e Quadriláteros”, foram apresentadas aos alunos fichas de trabalho sobre ângulos internos e externos de um triângulo, propriedades de um quadrilátero e propriedades do paralelogramo (Anexos 1, 3 e 4). Sempre que oportuno, foram desenvolvidas atividades que envolviam a utilização de materiais manipuláveis. Essas atividades nem sempre foram realizadas com recurso a fichas de trabalho, pois algumas eram propostas do manual adotado na escola. Relativamente ao tópico “Semelhança”, foram propostas aos alunos fichas de trabalho sobre polígonos semelhantes, critérios de semelhança de triângulos e aplicação dos critérios de semelhança de triângulos (Anexos 5, 6 e 7). Neste tópico foram também selecionadas, para este estudo, atividades do manual tendo sido adaptadas, em alguns casos, nomeadamente as atividades relativas à construção de polígonos envolvendo o método da quadrícula.

3.3.2. Planificação das tarefas

Planificar é uma árdua tarefa e a de maior importância, é a que revela maior impacto na vida profissional de um professor. É a forma e/ou o método que o professor escolhe para elaborar e preparar as suas aulas que cativa a atenção dos alunos, desperta-lhes o interesse e move-lhes a curiosidade por aprender mais e melhor conduzindo-os ao sucesso na disciplina. Assim sendo, na planificação, o professor deverá preparar e elaborar as tarefas a propor em cada tópico programático adequando-as ao tipo de alunos aos quais irá as apresentar.

Ao planificar uma aula de Matemática, o professor deverá ter em atenção o que pretende ensinar, o como e o porquê ensinar e o que pretende que os alunos aprendam com determinado conteúdo. Para isso, segundo Serrazina (2012), o professor “utiliza as suas referências ou seja a sua concepção sobre o que é ensinar e aprender matemática, o seu conhecimento da matemática que ensina, designadamente, dos seus conteúdos, das trajetórias e modelos presentes nos livros que utiliza” (p.274). Para que a planificação seja eficaz e do cumprimento da mesma possa resultar o sucesso, é também fundamental que o professor tenha “conhecimento daquilo que os alunos sabem e da sua maneira de aprender nos diferentes domínios do currículo.” (Serrazina, 2012, p.274).

Ao planificar as tarefas a propor aos alunos, o meu propósito principal, foi fazer com que os alunos, através da manipulação de materiais e através da utilização de meios informáticos, desenvolvessem a noção de conceitos abstratos e de forma intuitiva, conseguissem compreender as noções geométricas que envolvem esses conteúdos matemáticos.

A primeira proposta de trabalho, considerada neste estudo referente ao tópico “Triângulos e Quadriláteros”, que foi apresentada aos alunos, foi sobre a desigualdade

triangular. Foi uma atividade do manual, em que para a resolver, incentivei os alunos a utilizar palhinhas.

Na segunda atividade, foi proposto aos alunos a conjectura da soma dos ângulos internos de um triângulo utilizando materiais manipuláveis. A terceira atividade proposta foi a mesma que a anterior mas desta vez, recorrendo ao computador e à utilização do programa de geometria dinâmica *GeoGebra* (ficha de trabalho n.º 2, conforme anexo n.º1).

Na quarta atividade foi utilizada uma proposta de trabalho da equipa do Projeto CEM sobre os critérios de congruência de triângulos utilizando triângulos de papel colorido. Esta proposta foi apresentada em PowerPoint conforme anexo n.º2.

Na quinta atividade foi também utilizada uma tarefa proposta pela equipa do Projeto CEM sobre Quadriláteros (ficha de trabalho n.º 3, conforme anexo n.º 3).

A sexta atividade refere-se ao estudo das propriedades do paralelogramo e ao estudo da área do paralelogramo utilizando o programa *GeoGebra*. Esta foi também uma atividade sugerida pela equipa do Projeto CEM (ficha de trabalho n.º 4, conforme anexo n.º 4).

A sétima atividade referia-se ao tópico “Semelhança”. Foi uma atividade sobre polígonos semelhantes (Parte I - condições que definem polígonos semelhantes) e a utilização do método da homotetia (Parte II - relações entre razão de semelhança, áreas e perímetros de triângulos semelhantes) utilizando o programa *GeoGebra* (ficha de trabalho n.º 8, conforme anexo n.º 5).

A oitava atividade foi sobre os critérios de semelhança de triângulos utilizando materiais manipuláveis (ficha de trabalho n.º 9, conforme anexo n.º 6).

A nona e última atividade considerada neste trabalho investigativo foi adaptada de uma proposta de trabalho do Projeto CEM, sobre a aplicação dos critérios de semelhança

de triângulos na determinação de comprimentos inacessíveis (ficha de trabalho n.º 10, conforme anexo n.º 7).

Em cada atividade, conduzi os alunos a serem humildes e cuidadosos no rumo e orientação que dão ao seu estudo de forma a atingirem os seus objetivos preparando-os para as diferentes circunstâncias da aprendizagem, tal como a tartaruga que lentamente e com humildade arrasta-se até à meta enquanto a lebre orgulhosa e convencida das suas capacidades, descansa à sombra da árvore, deixando-se vencer pela tartaruga. Por vezes, os alunos com capacidades de aprendizagem mais desenvolvidas convencem-se que são os melhores e estagnam o seu conhecimento enquanto outros, apesar das suas limitações, abrem-se ao conhecimento e à descoberta dos novos conceitos.

O professor para efetuar com rigor as suas planificações e atingir os seus objetivos deve estar atento e atualizado sobre os documentos ministeriais relativos ao nível de ensino em que se enquadram os seus alunos. Nesta âmbito, Serrazina (2012) afirma que:

o professor ao trabalhar na sua preparação do ensino da Matemática, deve:

- (i) ter presente o currículo de Matemática que tem de ensinar;
- (ii) identificar a matemática essencial e pertinente para trabalhar com os seus alunos naquele momento; e
- (iii) exigir rigor matemático, no quê e no como. Como consequência, o professor tem de selecionar/adaptar tarefas com critério, ter uma visão crítica sobre os recursos, nomeadamente os manuais escolares, pensar estratégias da aula tais como materiais a utilizar, mas também, por exemplo, formas de representação a promover, exigir rigor nessas representações, não esquecendo o nível etário dos alunos com quem está a trabalhar. (p. 273).

Deste modo, para planificar todas as aulas tive sempre o cuidado de consultar o Programa de Matemática para o Ensino Básico, assim como, as Metas de Aprendizagem para o 3.º Ciclo e as recentes Metas Curriculares, que embora, este ano letivo, não fossem de implementação obrigatória, contar-se-á com a sua implementação obrigatória no 7.º ano de escolaridade já a partir do próximo ano letivo (2013/2014).

Em cada planificação existe sempre um espaço aberto às observações após a aula. Neste campo e concluindo a lecionação da aula, o professor deverá refletir sobre o ensino da Matemática interrogando-se sobre as aprendizagens matemáticas realizadas, deve compreender que nem sempre as decisões escolhidas foram as melhores. Deve assumir responsabilidades e reconhecer as suas falhas comprometendo-se a efetuar alterações necessárias de modo a corrigi-las e superá-las adequando-as à aprendizagem dos alunos. (Serrazina, 2012).

Na planificação não pude descurar do que pretendia avaliar em cada tema apresentado aos alunos, assim sendo, em cada aula, foi feita uma avaliação qualitativa de todo o trabalho desenvolvido por cada discente. Essa avaliação contemplava a aprendizagem dos conteúdos (através da participação oral e escrita) e as atitudes e valores (através da observação do comportamento, do interesse, do empenho, ...). Nestes tópicos, a avaliação quantitativa, foi feita através de questões aula e de fichas de avaliação sumativa. Na avaliação final, foi tido em conta todo o trabalho desenvolvido por cada aluno em cada momento avaliativo (qualitativa e quantitativamente).

3.4. Análise de dados

A análise de dados consiste na organização de todo o material recolhido durante o processo de investigação de modo a que o investigador compreenda a importância de cada material recolhido e o impacto que manifestará na sua apresentação aos outros.

Bogdan e Biklen consideram que “[a] análise envolve o trabalho com os dados, a sua organização, divisão em unidades manipuláveis, síntese, procura de padrões, descoberta dos aspectos importantes e do que deve ser aprendido e a decisão sobre o que vai ser transmitido aos outros.” (Bogdan & Biklen, 1991, p.205).

A metodologia qualitativa tem como aspeto fundamental a triangulação dos dados, isto é, analisar os dados a partir de várias fontes. Forato (2009, citando Ericsson (1998)) afirma que:

[e]ssas fontes podem incluir material escrito pelos alunos, entrevistas com professores e/ou alunos, notas de campo, dados videogravados etc. Comparar notas de campo com dados videogravados e uma análise documental das produções escritas pelos alunos, por exemplo, contribui para aumentar a credibilidade dos dados e da análise. (p.63).

4. ANÁLISE DE DADOS

4.1. Os Materiais Manipuláveis

A utilização de materiais manipuláveis no processo de ensino e aprendizagem de conceitos e propriedades geométricas foi analisada aquando da utilização de algumas propostas de trabalho.

A primeira tarefa proposta aos alunos, cuja resolução permitiu a utilização de materiais manipuláveis, foi a atividade número 7 da página 64 da Parte 1 do manual adotado pela Escola (Matemática em Ação 7 da Raiz Editora). Nesta atividade era pedido aos alunos para averiguar e justificar em que caso é possível construir um triângulo conhecidos os comprimentos dos três lados. Com esta atividade pretendia que os alunos fossem capazes de escrever a Desigualdade Triangular, isto é, que é possível construir um triângulo, se o comprimento de qualquer lado é menor que a soma dos comprimentos dos outros dois lados. Os alunos ainda concluíram sobre entre que valores varia o comprimento do terceiro do lado do triângulo conhecendo o comprimento de dois lados, isto é, o comprimento do terceiro lado está compreendido entre a diferença e a soma dos comprimentos dos outros dois lados.

Os alunos trabalharam a pares e/ou em pequenos grupos de três elementos. Foi entregue a cada pequeno grupo seis palhinhas cujos comprimentos correspondiam às duas primeiras alíneas da atividade, isto é, para a alínea a) 6 cm, 10 cm e 8 cm e para a alínea b) 4,2 cm, 2,8 cm e 7 cm. Após a manipulação das palhinhas, imediatamente todos os alunos conseguiram verificar que na primeira alínea era possível construir o triângulo e na segunda alínea não. Para justificar e conseguir escrever de uma forma matematicamente

correta a Desigualdade Triangular é que foi mais difícil. Foi preciso a ajuda e orientação da professora.

A utilização dos materiais manipuláveis na resolução desta tarefa permitiu aos alunos experienciar diretamente com os objetos e desenvolver as suas capacidades de raciocínio hipotético dedutivo.

A figura seguinte mostra alguns momentos da realização desta tarefa.



Figura 5: Construção de triângulos utilizando materiais manipuláveis

A segunda proposta de trabalho analisada para esta investigação foi a atividade número 11 da página 67 da Parte 1 do manual adotado. Esta atividade refere-se à conjectura da soma dos ângulos internos de um triângulo utilizando materiais manipuláveis. Era pedido aos alunos para desenhar um triângulo e pintar os seus ângulos internos. Recortá-los e agrupá-los de modo a conjecturar o valor da soma das amplitudes desses ângulos.

Nesta tarefa os alunos trabalharam individualmente. Cada aluno desenhou livremente um triângulo, pintou com cores diferentes cada um dos ângulos internos desse triângulo, recortou e manipulou os ângulos recortados de modo a conjecturar o valor da soma dos ângulos internos do triângulo.

O seguinte excerto apresenta o diálogo desenvolvido, entre professora e alunos, no decorrer desta atividade.

Professora: “Agora que recortaram os ângulos internos do triângulo e os agruparam, o que podem concluir?”

Aluna A: “Professora, os ângulos do meu triângulo ficaram pequenos e não dá para unir, fica esquisito.”

Professora: “Mesmo que sejam pequenos os ângulos do teu triângulo, que tipo de ângulo acha que formam quando os coloca juntos?”

Os alunos T, R e V rapidamente responderam:

“Professora, os meus ângulos juntos dão quase um ângulo raso.”

A aluna L acrescentou:

“O meu também parece ser um ângulo de 180° .”

Ouvindo estas afirmações dos colegas, a aluna A, afirmou:

“Realmente parece um ângulo de 180° , mas para confirmar vou fazer um novo triângulo e recortar os ângulos internos um pouco maiores para verificar melhor.”

A aluna A, prontamente concluiu a conjectura sobre a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo.

Os alunos já traziam do 2.º Ciclo a noção de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é de 180° , no entanto, anteriormente não tiveram oportunidade de a confirmar nem a demonstrar.

Todos os alunos acharam esta atividade interessante e engraçada e a aluna LC afirmou:

“Professora, com atividades destas aprendemos melhor as matérias de matemática, assim é mais fácil.”

Com estas duas atividades verifiquei que a maioria dos alunos, até mesmo os que apresentam mais dificuldades de aprendizagem, conseguiu atingir os objetivos propostos e revelaram que foi fácil recordar e compreender o porquê destas afirmações sobre

conteúdos geométricos. Apesar de serem atividades de revisão de 2.º Ciclo, conteúdos que à partida já deveriam estar compreendidos, apercebi-me que as noções estavam na memória de alguns alunos (para outros estava mesmo esquecido), no entanto, a utilização dos materiais manipuláveis teve um impacto positivo na aprendizagem destes conteúdos por parte destes alunos.

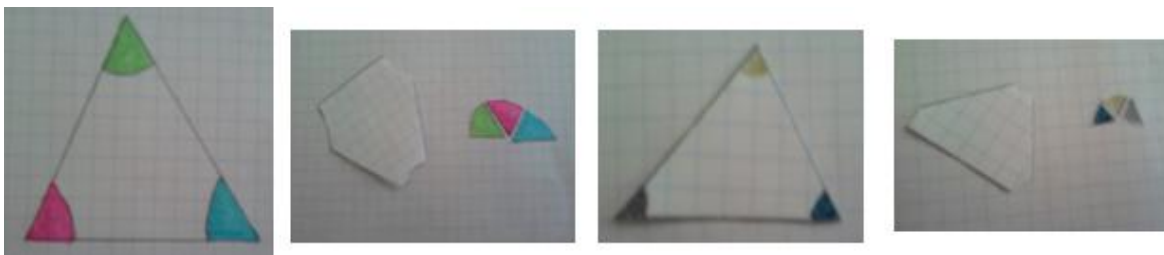


Figura 6: Exemplos da conjectura da soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo

Uma outra atividade que foi alvo de estudo e observação para este trabalho foi uma tarefa proposta pela equipa do Projeto Construindo o Êxito em Matemática (CEM) sobre os Critérios de Congruência de Triângulos. Nesta tarefa era pedido aos alunos para construir triângulos coloridos em que eram conhecidos alguns dos seus elementos. O triângulo azul era construído com base nos comprimentos dos seus três lados (9 cm, 15 cm e 18 cm). O triângulo vermelho era construído conhecendo as amplitudes dos seus três ângulos (90° , 60° e 30°). O triângulo verde era construído conhecendo o comprimento de dois dos seus lados e a amplitude do ângulo por eles formado (lados: 8 cm e 15 cm e ângulo 30°). O triângulo amarelo era construído sabendo que um dos lados tem de comprimento 10 cm e os ângulos adjacentes a esse lado têm de amplitude 30° e 60° .

Para a realização desta tarefa, foi projetado o PowerPoint elaborado pela equipa do Projeto CEM e os alunos foram construindo cada um dos triângulos coloridos de acordo com as indicações dadas. A figura seguinte ilustra os momentos de construção e manipulação dos triângulos coloridos.



Figura 7: Construção dos triângulos coloridos

Depois de construídos todos os triângulos de cor Azul, Vermelho, Amarelo e Verde, os alunos em pequenos grupos de dois ou três elementos cada, responderam às questões apresentadas no PowerPoint.

Na questão 1: *“Será que dois triângulos com os três lados congruentes são sempre congruentes?”*, os alunos após uns momentos de manipulação dos triângulos foram capazes de responder corretamente que todos os triângulos azuis são congruentes.

Em seguida apresento alguns excertos dos diálogos estabelecidos com os alunos acerca das respostas dadas à questão 1.

Professora: “Grupo I, será que dois triângulos com os três lados congruentes são sempre congruentes?”

Aluna M: “Sim, eu coloquei o meu triângulo azul em cima do triângulo azul da T e ficaram direitinhos, não ficou nem uma pontinha de fora.”

Professora: “Será que apenas dois triângulos sobrepostos são suficientes para concluir que dois triângulos que tenham todos os lados congruentes são sempre congruentes?”

Aluna D: “Não sei professora, mas aqui nós também fizemos isso (Grupo III – alunos D, T e LC) e coincidiram.”

Professora: “E os restantes grupos, como fizeram?”

Aluna N: “Também já fizemos isso e coincidem e se juntarmos os da turma toda, também devem de coincidir todos.” (Grupo IV – alunas N, CI e C).

Professora: “Muito bem. Então se os triângulos são congruentes estamos em condições de concluir e escrever o critério de congruência Lado, Lado, Lado.”

Concluída e esclarecida a questão 1, passámos à questão 2: “*Será que dois triângulos com os três ângulos congruentes são sempre congruentes?*”

Para os Grupos I, III, IV e V não houve dúvidas que quando os triângulos têm os três ângulos congruentes (que era o caso dos triângulos vermelhos) os triângulos não são congruentes. Acidentalmente as duas alunas do Grupo II (Alunas R e V) construíram o triângulo vermelho utilizando os mesmos comprimentos de medida para os lados correspondentes. Quando sobrepuseram os seus dois triângulos vermelhos, os triângulos coincidiam! Mas rapidamente e verificando com os exemplos dos outros grupos da turma, compreenderam que os triângulos construídos quando nos são dados apenas as amplitudes dos seus ângulos internos não é possível garantir a congruência dos triângulos. Para finalizar esta questão, alertei os alunos que não podemos falar em critério de congruência de triângulos Ângulo, Ângulo, Ângulo.

Os alunos resolveram sem dificuldade as questões 3 e 5. A questão 3: “*Dois lados de um triângulo e um ângulo formado por eles são congruentes aos elementos correspondentes de outro triângulo. Nestas condições os triângulos são sempre congruentes?*”. A questão 5: “*Dois ângulos de um triângulo que têm um lado comum são congruentes com os elementos correspondentes de outro triângulo. Nestas condições os triângulos são sempre congruentes?*”. A utilização de triângulos em papel colorido, a oportunidade que os alunos tiveram de manusear os mesmos, o facto de poderem encaixar e separar os triângulos, facilitou-lhes a aprendizagem dos critérios de congruência de triângulos Lado, Ângulo, Lado e Ângulo, Lado, Ângulo. Os materiais manipuláveis neste conteúdo programático tiveram um impacto muito positivo na comunicação matemática dos alunos, pois estes revelaram-se mais “soltos” e participativos e ainda seguros de si,

daquilo que estavam a afirmar, pois tinham em suas mãos algo que lhes permitia “provar” o que afirmavam. Por exemplo, relativamente à questão 3 o aluno T, convicto da sua resposta, afirmou:

Aluno T: “Professora, não há dúvida que os triângulos verdes são congruentes. Tal como fizemos com os azuis, estes também coincidem quando os sobrepomos. Se pensarmos que os fizemos com base no comprimento de um lado, depois construímos um ângulo de 30° e sobre ele o outro lado do triângulo. Então podemos dizer que dois triângulos também são congruentes quando têm dois lados congruentes e o ângulo por eles formado também congruente.”

Na questão 4: *“Dois lados de um triângulo e um ângulo não formado por eles são congruentes aos elementos correspondentes de outro triângulo. Nestas condições os triângulos são sempre congruentes?”* todos os alunos apresentaram dificuldades na sua resolução. Foi preciso a professora indicar que deveriam utilizar um triângulo azul e um triângulo verde. Facilmente sobrepuseram o triângulo verde ao azul e verificaram que não eram congruentes mas, mesmo assim, a maioria dos alunos teve dificuldade em escrever a resposta matematicamente correta que justificasse a não existência de um critério de congruência de triângulos Lado, Lado, Ângulo.

Esta tarefa foi fundamental na aprendizagem dos critérios de congruência de triângulos. O facto de construírem os triângulos com cores diferentes e os manipularem de forma a conseguirem “provar” o que queriam foi deveras importante para estes alunos. A utilização destes materiais permitiu aos alunos experienciar tratando os objetos como os principais instrumentos de ensino e fazendo com que estes os ajudassem a tornarem-se alunos capazes de produzir e desenvolver o seu próprio raciocínio e comunicação matemática.

Mais uma vez apurei que a diversificação de estratégias e de materiais é um fator importante nas aulas de matemática.

Os materiais manipuláveis foram novamente alvo de estudo neste trabalho investigativo no tópico “Semelhanças”, lecionado no mês de junho.

Neste tópico, a primeira proposta de trabalho com utilização de materiais foi sobre os critérios de semelhança de triângulos.

Esta proposta de trabalho foi apresentada aos alunos como a ficha de trabalho n.º 9. A exemplo da proposta de trabalho aplicada aos alunos aquando da leção dos critérios de congruência de triângulos, nesta atividade os alunos tiveram também de construir triângulos coloridos (com recurso à régua e ao transferidor) de modo a manipulá-los, responder às questões propostas e concluir quais as condições que satisfazem cada um dos critérios de semelhança de triângulos.

A situação 1 da referida ficha de trabalho indica um percurso para concluir o critério de semelhança de triângulos Ângulo, Ângulo (AA). É dado um triângulo ABC e pedido para construir um triângulo amarelo (RST) e um triângulo verde (EFG) não congruentes entre si nem com o triângulo ABC mas que mantenham as amplitudes dos seus ângulos internos. Com o uso dos triângulos amarelo e verde os alunos indicaram, sem grande dificuldade qual a relação existente entre os triângulos ABC, RST e EFG (questão 1.5.), afirmaram que os mesmos são semelhantes pois têm os ângulos correspondentes congruentes e os lados correspondentes diretamente proporcionais.

Seguidamente apresento um excerto de um episódio vivido em sala de aula sobre esta questão.

Professora: “Qual a amplitude do ângulo T no triângulo amarelo?”

Aluna A: “Temos de calcular: $(180^\circ - 102^\circ - 40^\circ)$ e ver quanto é que dá.”

Aluna D: “A mim deu 38° que é a mesma amplitude do ângulo C, do triângulo da ficha.”

Professora: “Certo. E que relação existe entre os comprimentos dos lados desses triângulos?”

Aluna C: “Eu medi tudo com a régua, como pede na questão 1.3. depois dividi cada comprimento do lado do triângulo amarelo pelo correspondente do triângulo ABC e deu sempre igual a 2,3 ou seja, estes comprimentos são proporcionais.”

Aluno T: “A mim deu sempre igual a 2, também são proporcionais.”

Professora: “E com o triângulo verde, acontece o mesmo?”

Aluna V: “Sim, os lados correspondentes também são diretamente proporcionais.”

Professora: “Já vimos que os triângulos têm dois ângulos congruentes e os comprimentos dos lados correspondentes diretamente proporcionais, então que relação existe entre os três triângulos considerados?” (referindo-se à questão 1.5.).

Alunas CI, D, M e R: “São semelhantes.” (responderam em coro).

Na situação 2, foi pedido aos alunos para construir um triângulo azul, com lados de comprimento 3 cm, 7 cm e 9 cm, um triângulo vermelho em que o comprimento dos seus lados é o dobro do comprimento dos lados do triângulo azul e um triângulo branco em que os seus lados medem metade do comprimento dos lados do triângulo azul. Pretendia que os alunos manipulando o triângulo vermelho, o azul e o branco, fossem capazes de escrever o critério de semelhança de triângulos Lado, Lado, Lado (LLL).

No decorrer desta tarefa, surgiram os seguintes diálogos:

Professora: “Utilizando um transferidor, qual a amplitude de cada um dos ângulos internos dos triângulos azul e vermelho?” (Referindo-se à questão 2.3.).

Aluna LC: “A mim deu nos dois triângulos um ângulo de 18° , um de 120° e outro de 42° .”

Aluna M: “Os meus ângulos têm também essas amplitudes”.

Professora: “E os vossos ângulos internos também têm estas amplitudes?”
(Olhando para os restantes alunos da turma).

Aluno T: “Sim professora, os triângulos vermelhos e azuis foram todos construídos com as mesmas medidas para os lados então os ângulos também tinham de ter as mesmas amplitudes.”

Professora: “Que relação existe entre estes dois triângulos?”

Aluna R: “São semelhantes”.

Professora: “Porquê?”

Aluna R: “Têm os ângulos correspondentes todos congruentes e os comprimentos dos lados são proporcionais porque construímos o vermelho a partir do azul ampliando, para o dobro, cada um dos seus lados.”

Professora: “E o triângulo branco será semelhante ao vermelho e ao azul?”

Aluna L: “Sim é. Os lados são proporcionais porque medem metade do comprimento de cada lado do triângulo azul e sobrepondo-o ao triângulo azul e ao vermelho verifiquei que os ângulos correspondentes têm a mesma amplitude.”

Professora: “Que condições são necessárias para que dois triângulos sejam semelhantes?”

Aluna C: “Neste caso, concluímos que se dois triângulos têm os três lados proporcionais são semelhantes. Na situação 1 tínhamos visto que, se dois triângulos têm dois ângulos congruentes também são semelhantes.”

Na situação 3, é dado um triângulo ABC em que dois dos seus lados têm de comprimento 5 cm e 6 cm e o ângulo por eles formado com 127° de amplitude. Foi pedido aos alunos para construir um triângulo rosa (dois dos seus lados têm de comprimento 2,5 cm e 3 cm e o ângulo por eles formado tem 127°) e um triângulo laranja (dois dos seus lados proporcionais ao triângulo ABC e o ângulo por eles formado também com 127°). Pretendia que com a ajuda do triângulo rosa e do triângulo laranja os alunos fossem capazes de escrever o critério de semelhança de triângulos Lado, Ângulo, Lado (LAL).

Os alunos tiveram um desempenho semelhante ao apresentado nas situações 1 e 2. Com a manipulação dos triângulos rosa e laranja foram capazes de afirmar, como era esperado, que se dois triângulos têm dois lados proporcionais e o ângulo por eles formado congruente então os triângulos são semelhantes.

Na figura seguinte apresento o trabalho de alguns alunos na resolução das questões propostas na ficha de trabalho n.º 9.

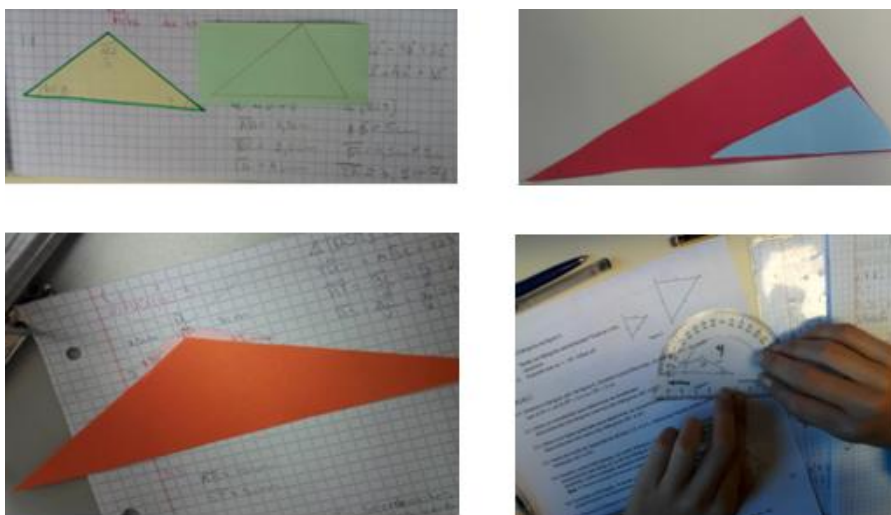


Figura 8: Resolução da Ficha de Trabalho n.º 9 pelas alunas C, AM, CI e M

Mais uma vez a utilização de objetos palpáveis permitiu aos alunos a visualização das propriedades existentes nos triângulos, a relação entre elas e facilitou-lhes a compreensão do conteúdo programático. A evolução da comunicação matemática foi

novamente verificada e a construção do pensamento geométrico dos alunos foi notado nos raciocínios que os mesmos fizeram nas respostas que foram dando às diferentes questões.

Para finalizar esta investigação foi também analisada uma proposta de trabalho sobre a aplicação dos critérios de semelhança de triângulos no cálculo de alturas inacessíveis. Esta proposta de trabalho foi adaptada das propostas de trabalho da equipa dinamizadora do Projeto CEM e foi dada aos alunos como a ficha de trabalho n.º 10.

Para a resolução desta proposta de trabalho, novamente os alunos reuniram-se em pequenos grupos de trabalho.

A ficha de trabalho n.º 10 é constituída por 5 situações. Para esta investigação apenas refiro a aprendizagem dos alunos relativamente à situação 5 pois é aquela que relaciona as situações anteriores e a utilização de materiais manipuláveis na aprendizagem dos conteúdos geométricos. Esta situação foi a que revelou maior destaque na aprendizagem dos alunos pois era pedido para calcular a altura da escola utilizando diferentes processos (fotografia, quadrante e espelho).

Após a construção do Quadrante, os alunos, munidos de todo o material necessário (quadrante, espelho, fita métrica, bloco de notas e lápis), dirigiram-se ao pátio da escola e efetuaram a recolha de dados. Atendendo a que a escola situa-se numa descida, tem alturas diferentes mediante o ponto em que o aluno se situa. Assim, foi pedido aos alunos que recolhessem dados em dois pontos estratégicos diferentes de modo a determinar, pelo menos, duas alturas da escola (correspondentes aos lados Norte e Oeste). Inicialmente tanto a utilização do Quadrante como a utilização do espelho, gerou alguma confusão de como os iriam utilizar e como poderiam encontrar a solução para o problema que tinham entre mãos.

A aluna C afirmou:

Aluna C: “Professora, como é que vou conseguir usar estes objetos para determinar a altura da escola?”

Professora: “Com a ajuda dos colegas de grupo, recolhem a amplitude do ângulo e medem a distância do observador à parede. Depois é só construir um triângulo semelhante, relacionar os elementos correspondentes, efetuar os cálculos necessários e concluir. Para o espelho têm de medir a distância do observador ao espelho e depois do espelho à parede.”

Nas figuras seguintes apresento a utilização do quadrante e do espelho na recolha de dados para determinar a altura da escola vista de dois pontos diferentes cujas alturas também são diferentes.



Figura 9: Utilização do Quadrante para determinar a altura da escola



Figura 10: Utilização do espelho para determinar a altura da escola

Regressando à sala de aula, os alunos utilizaram os dados recolhidos e realizaram os cálculos de modo a descobrir as duas alturas da escola. Durante a resolução da tarefa, surgiram algumas discussões sobre os resultados obtidos, conforme os excertos seguintes.

Aluna C: “Professora, agora tenho de construir dois triângulos semelhantes e usar a noção de proporção para descobrir qual a altura da escola.”

Professora: “Sim é isso. Cada grupo utiliza os seus dados.”

Aluna T: “A amplitude do ângulo para o nosso grupo foi de 56° e chegámos ao valor de 12,7 m para a altura da escola.” (Grupo IV).

Aluna V: “No nosso grupo a amplitude do ângulo é de 53° , a colega M estava a uma distância da parede de 7,5 m e para nós a escola tem 11,65 m de altura.” (Grupo III referindo-se ao lado Norte).

Professora: “Que resultados obtiveram vocês?” (Olhando para os restantes Grupos).

Aluno T: “Nós obtivemos 12,1 m”. (Grupo I).

Aluna CI: “E nós 12,5 m”.

Professora: “Agora cada grupo vai utilizar os outros processos (fotografia e espelho) para comparar os resultados e concluir qual a altura da escola.”

Estes alunos revelavam um fraco desempenho na forma de apresentar as resoluções das tarefas propostas. No entanto, nesta atividade surpreenderam-me na forma como (todos os grupos) esquematizaram e apresentaram as suas respostas, conforme se pode observar nas figuras seguintes. Assim sendo, nesta tarefa foi notória a melhoria evidenciada pela maioria dos alunos na comunicação matemática, quer escrita quer oral.

Uma vez mais a utilização de materiais manipuláveis revelou-se importante na aquisição de conteúdos matemáticos e na construção do pensamento geométrico dos alunos.

As figuras seguintes referem-se aos cálculos efetuados pelos alunos, nos diferentes processos, na determinação das duas alturas da escola (lado Norte e lado Oeste), de modo a observar a comunicação matemática dos alunos.

A figura ao lado mostra a resolução apresentada pelos alunos do Grupo IV referente ao lado mais baixo (lado Norte).

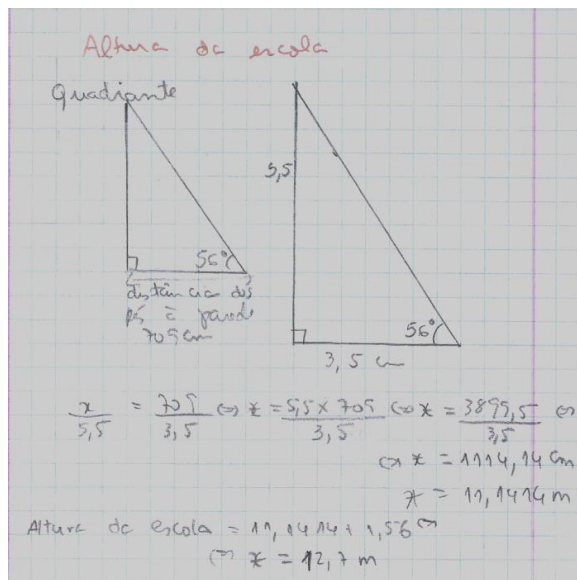


Figura 11: Cálculo da altura da escola utilizando o Quadrante (Lado Norte)

O Grupo I apresentou os seguintes cálculos referentes à altura da escola vista do lado Oeste (mais alto) utilizando os dados recolhidos com o quadrante.

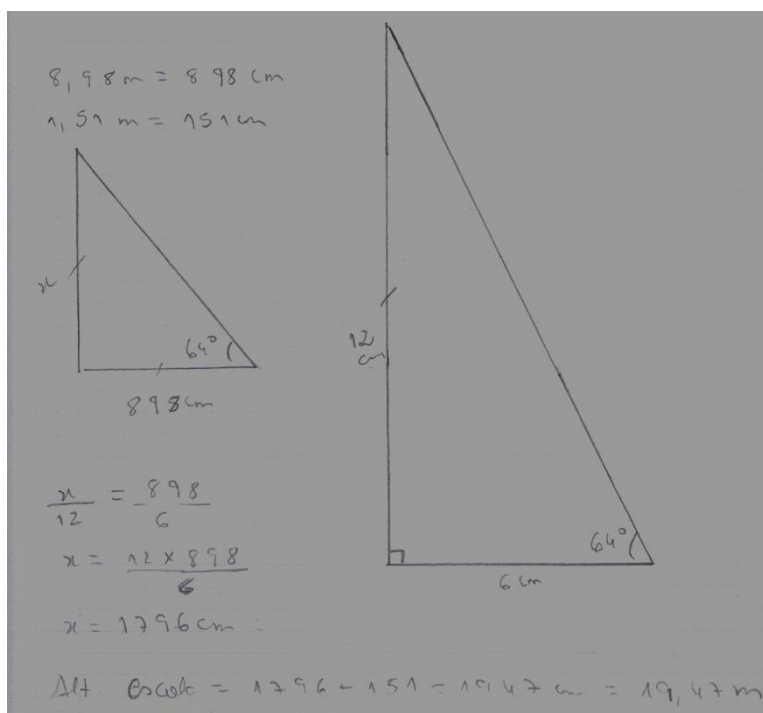


Figura 12: Cálculo da altura da escola utilizando o Quadrante (Lado Oeste)

Apresento apenas um exemplo dos cálculos efetuados pelos Grupos I e II na determinação da altura da escola utilizando o espelho na recolha dos dados.

O Grupo I apresentou o cálculo efetuado ao lado Norte (mais baixo) e o Grupo II apresentou o cálculo efetuado ao lado Oeste (mais alto).

As figuras seguintes mostram os referidos cálculos:

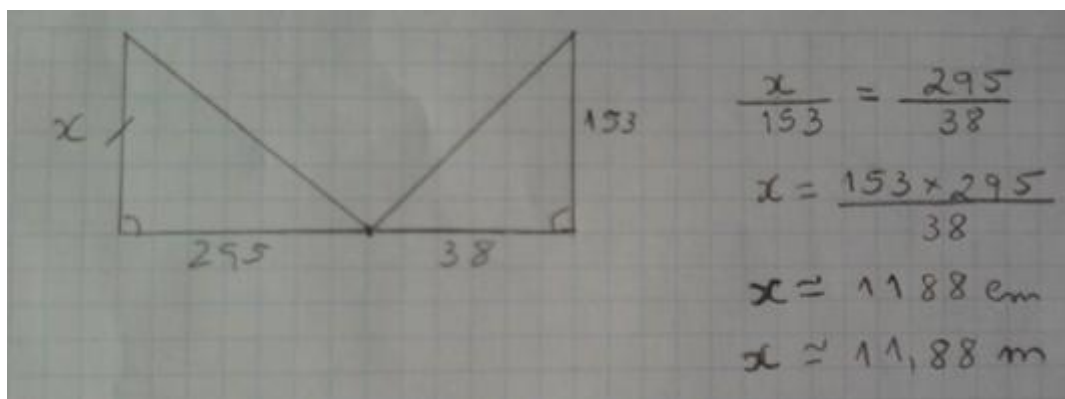


Figura 13: Cálculo da altura da escola utilizando o Espelho, pelo Grupo I

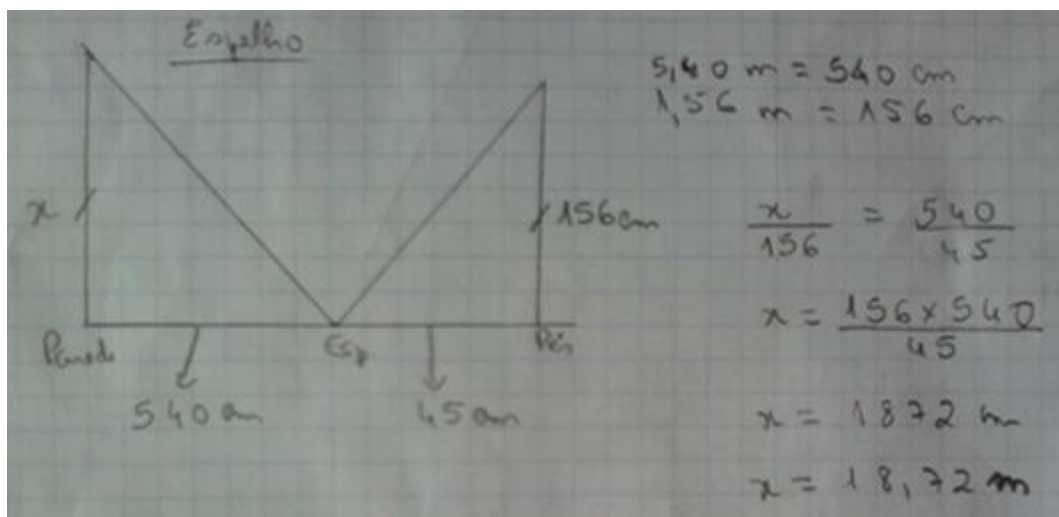


Figura 14: Cálculo da altura da escola utilizando o Espelho, pelo Grupo II

Na figura seguinte apresento os cálculos efetuados pelas alunas R, N e L do Grupo III utilizando as fotografias e a noção de proporção no cálculo de alturas inacessíveis.

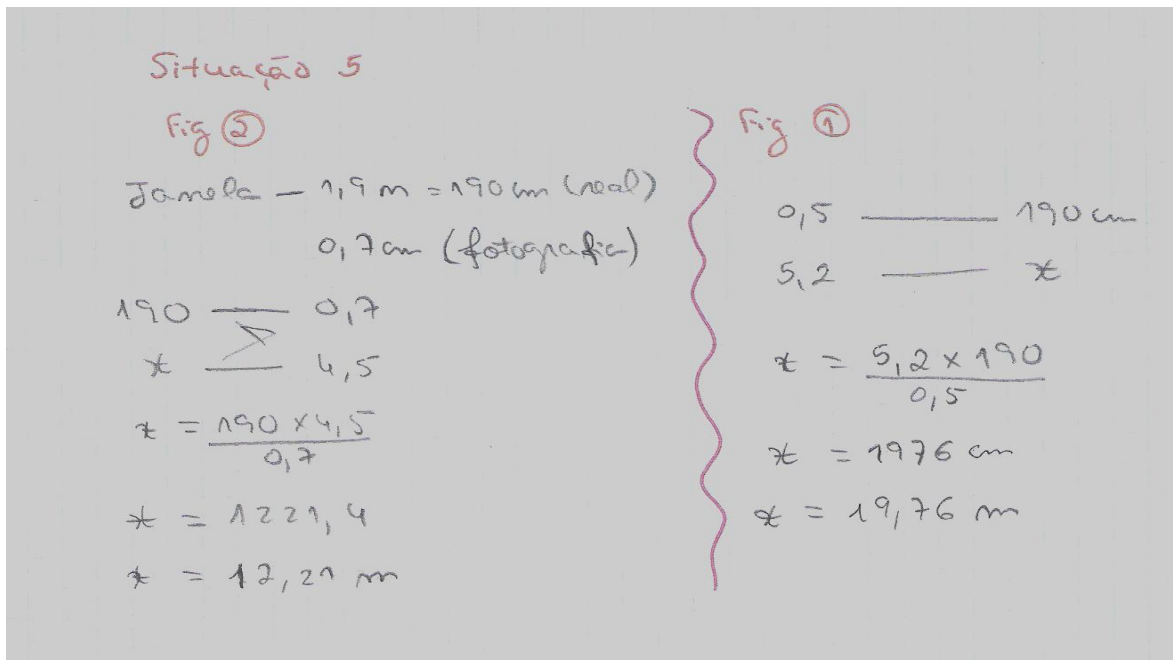


Figura 15: Cálculo da altura da escola utilizando a noção de proporção

Apesar de pequenas divergências, todos os alunos foram unânimes em concluir que a altura da escola, no lado mais baixo (lado Norte), é aproximadamente 12 metros e no lado mais alto (lado Oeste) é de aproximadamente 19 metros.

Ao concluir esta tarefa apresentaram grande satisfação pelo aprendizado e concluíram que independentemente do processo utilizado é possível determinar alturas quase impossíveis, para “pequenas cabecinhas”.

A utilização de materiais foi crucial na compreensão de como é possível determinar alturas inatingíveis e o facto de cada aluno ter construído o seu próprio Quadrante e de o utilizar na determinação de uma altura inacessível, despertou-os para a importância da utilização de materiais na aprendizagem da Matemática e da aplicação desses conhecimentos no dia a dia.

Este facto faz com que os alunos alarguem horizontes, tornem-se alunos mais autónomos, reflexivos, críticos, competentes e conscientes da realidade que os rodeia.

4.2. O software de geometria dinâmica: *GeoGebra*

A primeira proposta de trabalho selecionada para esta investigação com a utilização de *software* geométrico (*GeoGebra*) foi a demonstração de que a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180° .

Esta proposta de trabalho foi adaptada de uma atividade proposta pela equipa responsável pelo Projeto Construindo o Êxito em Matemática (CEM).

Esta foi a primeira vez que os alunos trabalharam com o programa de geometria dinâmica *GeoGebra*. Por este facto, antes de iniciar a resolução da ficha de trabalho, expliquei sucintamente o funcionamento do programa e durante uns minutos os alunos, em pequenos grupos de 3 e/ou 4 elementos, manipularam livremente o *GeoGebra*.

Seguidamente foi pedido aos alunos para seguir as orientações da ficha de trabalho n.º 2 e responder às questões.

As primeiras cinco alíneas da questão 1 da situação 3, apresentada na ficha de trabalho referiam-se à construção de um triângulo ABC qualquer, ao cálculo das amplitudes dos ângulos internos do triângulo, ao cálculo da soma dessas amplitudes e, após a manipulação do triângulo, conjecturar o valor dessa soma.

Na figura seguinte apresento um exemplo de resolução das quatro primeiras alíneas da questão 1 da situação 3 elaborada pelos alunos do Grupo I.

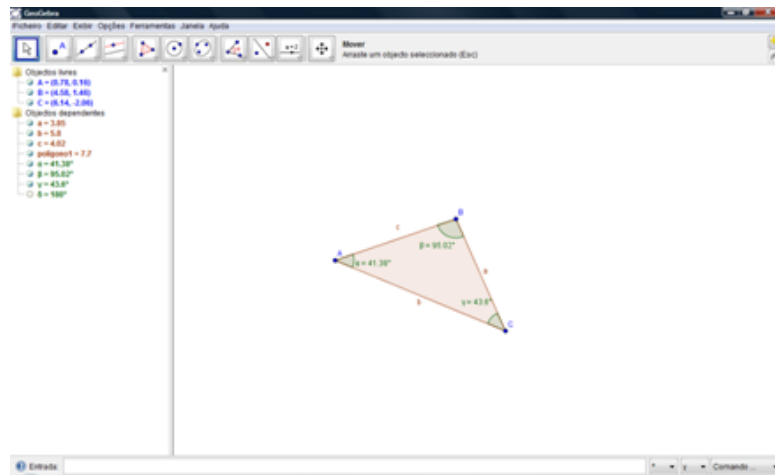


Figura 16: Resolução das alíneas 1.1 a 1.4 da Ficha de Trabalho n.º2 pelo Grupo I

Com o intuito de observar a construção do pensamento geométrico dos alunos através de utilização do *software GeoGebra*, foram estabelecidos os seguintes diálogos com os diferentes grupos de alunos.

Professora: “O que podem conjecturar, acerca do valor da soma das amplitudes dos ângulos internos num triângulo qualquer?” (Aproximando-se do Grupo I, formado por 4 elementos).

Aluna AC: “Então professora, já tínhamos visto quando recortamos o papel que era 180° , então agora com o computador também tem de ser 180° .”

Aluna N: “Sim, claro que dá 180° . E até dá para ver o δ aqui no lado.” (Apontando para o valor do δ na janela de Álgebra).

Professora: “Todos concordam?” (Olhando para os restantes dois elementos do Grupo I).

Aluna AM: “Sim professora, não há dúvidas.”

Aluno T: “Aqui ainda é mais fácil do que recortar o papel porque aqui não falha, dá exatamente os 180° .”

Os restantes três grupos responderam a estas questões de uma forma semelhante, o que me permite acreditar que a utilização de programas de Geometria dinâmica é uma mais-valia para a evolução do pensamento geométrico dos alunos.

Na última alínea da questão 1 da situação 3 desta ficha de trabalho, era pedido aos alunos para provar que a conjectura é válida.

Apesar de a questão estar subdividida em pequenos passos a seguir para concluir a demonstração, a maioria dos alunos revelou dificuldades em fundamentar a conjectura apresentada. Os alunos utilizaram praticamente sem dificuldade o *GeoGebra* e seguiram corretamente as orientações para o que era pedido, no entanto, para fundamentar a conjectura, isto é, passar para o papel e por palavras próprias o que tinham feito, apenas o Grupo II (formado por 3 elementos – alunas R, CI e C) escreveu uma resposta aceitável.

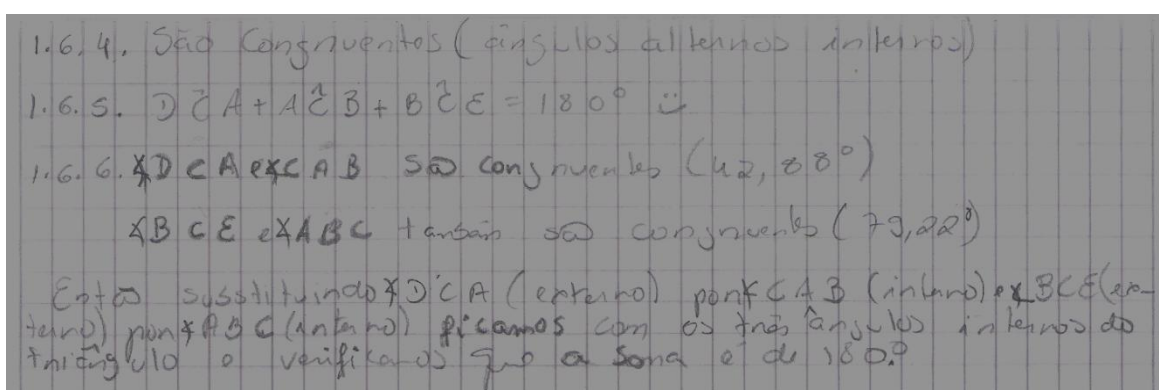


Figura 17: Resposta à última questão da situação 1 da Ficha de Trabalho n.º2 pelo Grupo II

A utilização do programa *GeoGebra* na resolução desta tarefa foi fundamental para consolidar o que os alunos tinham já verificado utilizando materiais manipuláveis. Se os materiais não foram suficientemente convincentes para alguns alunos, este programa de geometria dinâmica não lhes deixou dúvidas relativamente à soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo. O *GeoGebra* ajudou-os a ver com os seus próprios olhos que, independentemente do tipo de triângulo e de qual a amplitude dos seus ângulos

internos, a soma não se altera. Permitiu-lhes “mexer” com as próprias mãos e verificar que realmente assim é.

Nesta aula, o tempo foi escasso para concluir toda a ficha de trabalho, tendo ficado a situação 4 referente aos ângulos externos de um triângulo para a aula seguinte.

Os mesmos grupos de trabalho reuniram-se para resolver a situação 4 da ficha de trabalho n.º 2.

Cada grupo de alunos abriu o ficheiro “*ângulos_externos.ggb*” que estava no ambiente de trabalho de cada computador e iniciaram a resolução da situação proposta. Com a ajuda do referido ficheiro todos os alunos completaram a resolução pretendida. Novamente “empataram” na resolução da alínea referente à demonstração de

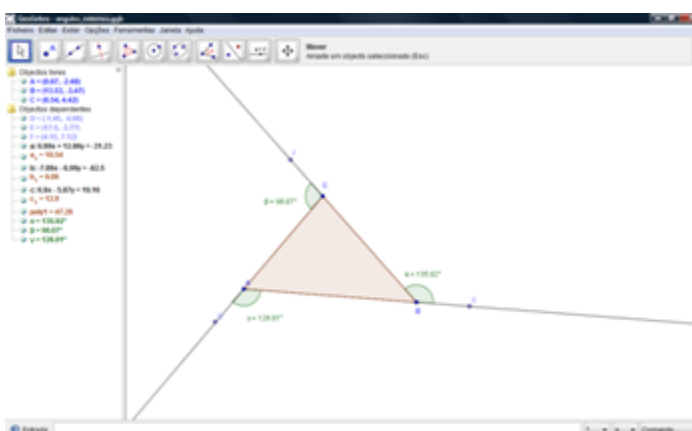


Figura 18: Ficheiro “*ângulos_externos.ggb*”

validação da conjectura: “A soma das amplitudes dos ângulos externos de um triângulo é de 360° .”

Nesta questão foi mesmo imprescindível a ajuda da professora para a eficaz resolução por parte de todos os alunos.

A maioria dos alunos mostrou-se à vontade para responder às questões que relacionam ângulos internos e externos de um triângulo. Rapidamente verificaram que a soma da amplitude do ângulo interno com a amplitude do ângulo externo adjacente é de 180° . No entanto, e porque a maioria dos alunos estava com “preguiça” de pensar, não averiguaram se existia mais alguma relação entre os ângulos internos e externos. Após

uma chamada de atenção, alguns alunos verificaram que a amplitude de um ângulo externo é igual à soma das amplitudes dos ângulos internos não adjacentes.

Ao manipular o triângulo presente no ficheiro dado, os alunos foram respondendo às questões conforme os excertos seguintes:

Professora: “Qual a relação entre os ângulos internos e externos de um triângulo?”

Aluna R: “O meu ângulo A interno mede $53,99^\circ$ e o externo neste vértice mede $126,01^\circ$ e os dois juntos formam um ângulo de 180° .”

Professora: “E o que acontece com os ângulos internos e externos nos outros dois vértices do triângulo?”

Aluna R: “Bem, olhando para a figura os ângulos são de 180° , isto é, em cada vértice um ângulo interno mais um externo dá um de 180° .”

Professora: “Será que entre ângulos internos e externos de um triângulo existe mais alguma relação?”

Aluna D: “Se a professora pergunta é porque há. Mas qual é que eu não sei.”

Aluna C: “Eu somei o interno B com o interno C e deu igual ao externo A.”

Professora: “Verifiquem se o que a colega acabou de dizer acontece com os outros vértices e expliquem-no utilizando corretamente os conceitos matemáticos.”

Aluna CI: “Portanto, se nós somarmos as amplitudes dos ângulos internos A e B, obtemos a amplitude do ângulo externo C.”

Aluno T: “Também podemos descobrir qual a amplitude de um ângulo interno se soubermos quando mede o interno a ele adjacente e o externo não adjacente a esses dois. Basta para isso subtrair a amplitude do ângulo interno à amplitude do externo.”

Aluna M: “A mim parecia que os ângulos internos tinham sempre amplitude inferior ao ângulo externo adjacente, mas ao “mexer” na figura vi que isso não é verdade.”

A utilização do *GeoGebra* nesta proposta de trabalho foi fundamental para que os alunos pudessem compreender relações geométricas entre ângulos internos e externos de um triângulo. Os alunos não tinham uma figura estática em papel, imóvel que não lhes permitisse “esticar” e “encolher” alterar rapidamente as amplitudes os ângulos e constatar que as “descobertas” por eles feitas mantinham-se intactas. Com a utilização do *GeoGebra*, os alunos tornam-se líderes do próprio conhecimento geométrico e desenvolvem de uma forma mais rápida e eficiente o raciocínio lógico e abstrato.

Uma outra atividade utilizada neste tópico programático foi também proposta pela equipa do Projeto CEM e refere-se às características e propriedades dos quadriláteros. Assim esta atividade foi dada aos alunos como a ficha de trabalho n.º 3.

Para responder a cada questão proposta na ficha de trabalho n.º 3 os alunos utilizaram o ficheiro “*polígonos.ggb*” que foi previamente gravado em cada um dos computadores. A utilização do *GeoGebra* na resolução desta atividade foi essencial para que os

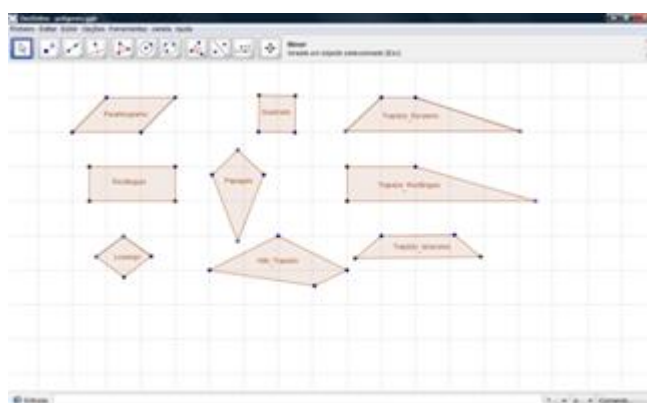


Figura 19: Ficheiro “*polígonos.ggb*”

alunos pudessem visualizar os diferentes quadriláteros, encontrar características comuns entre as diversas figuras e agrupá-las de acordo com as referidas características.

Nesta atividade os alunos trabalharam em pequenos grupos de 3 e/ou 4 elementos cada grupo com um computador.

Nas figuras 20 e 21 apresento exemplos de como poderiam ser agrupados os quadriláteros presentes no ficheiro dado, segundo os Grupos I e II.

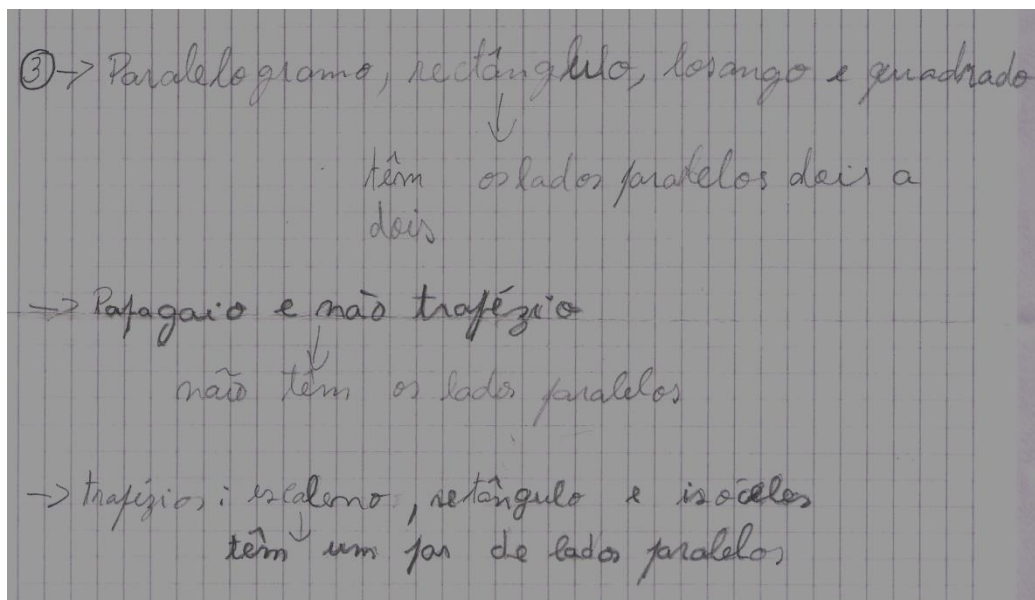


Figura 20: Resolução da questão 3 da Ficha de Trabalho n.º 3 pelo Grupo I

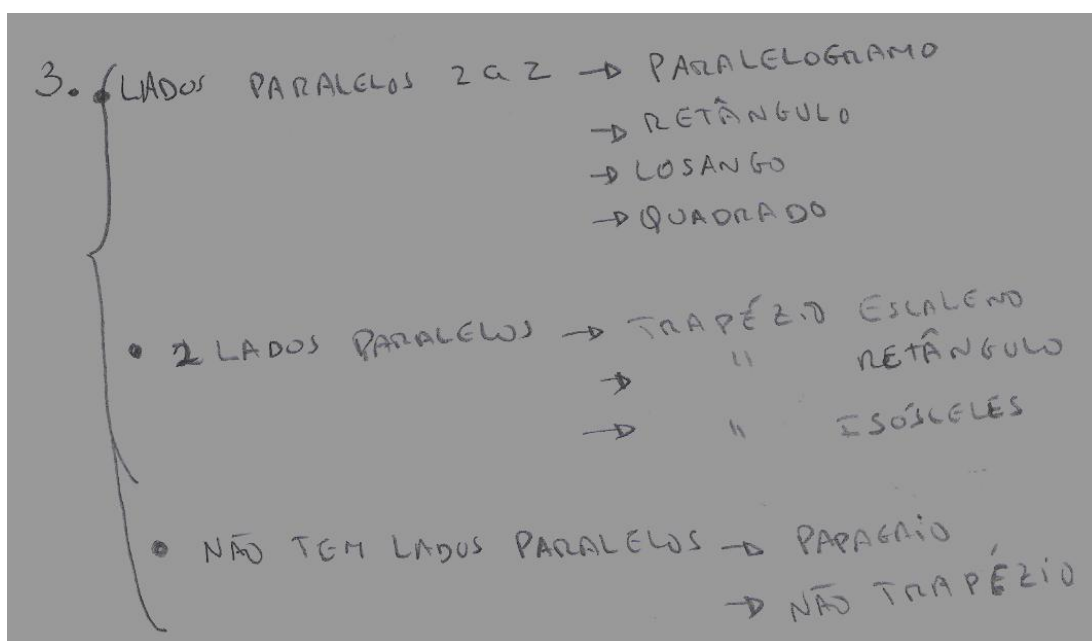
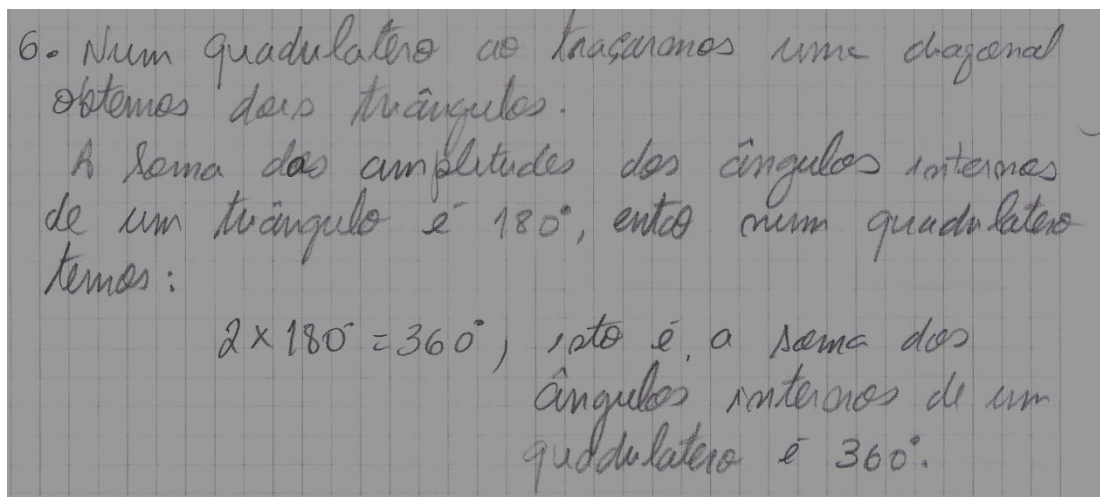


Figura 21: Resolução da questão 3 da Ficha de Trabalho n.º 3 pelo Grupo II

A última questão referente à demonstração da conjectura acerca da soma das amplitudes dos ângulos internos de um quadrilátero foi respondida de uma forma eficaz pois a maioria dos alunos seguiu a sugestão dada (traçar uma das diagonais do quadrilátero) e facilmente perceberam que se uma diagonal divide um quadrilátero em dois triângulos e já tinham demonstrado em aulas anteriores que a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é de 180° , então a soma das amplitudes dos ângulos internos de um quadrilátero é 360° ($2 \times 180^\circ = 360^\circ$). O Grupo III, depois de manipular o *GeoGebra*, respondeu da seguinte forma a esta questão da ficha de trabalho n.º 3:



6. Num quadrilátero se traçamos uma diagonal obtemos dois triângulos.
A soma das amplitudes dos ângulos interiores de um triângulo é 180° , então num quadrilátero temos:
 $2 \times 180^\circ = 360^\circ$, isto é, a soma dos ângulos interiores de um quadrilátero é 360° .

Figura 22: Resolução da questão 6 da Ficha de Trabalho n.º 3

A última atividade neste tópico programático que foi selecionada para ser analisada neste trabalho investigativo foi sobre as propriedades do paralelogramo. Esta foi uma atividade proposta pela equipa do Projeto CEM e foi aplicada aos alunos na forma de uma ficha de trabalho, a ficha de trabalho n.º 4.

Novamente os alunos trabalharam em pequenos grupos de 3 e/ou 4 elementos e cada grupo com apenas um computador.

O objetivo desta atividade prende-se com o facto de dar aos alunos a oportunidade de manipular objetos construídos no programa de Geometria dinâmica *GeoGebra* de modo a que compreendam e usem a fórmula da área do paralelogramo, assim como, formulem, testem e demonstrem conjecturas relacionadas com as propriedades do paralelogramo.

Assim sendo, nesta atividade foram apresentadas três situações de trabalho. A primeira situação (Situação 1) refere-se à área do paralelogramo. A Situação 2 relaciona a área do paralelogramo com a área de triângulos e na Situação 3 relaciona-se a área de quadriláteros.

Dando início à resolução da atividade proposta, cada grupo de trabalho, começou por abrir o ficheiro *Paralelogramo.ggb* que previamente tinha sido gravado no ambiente de trabalho de cada computador.

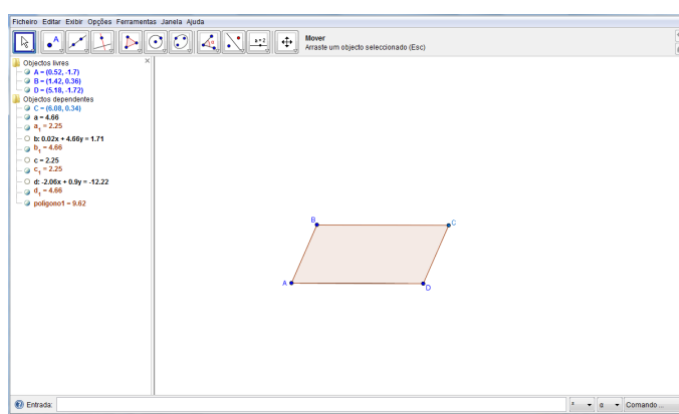


Figura 23: Ficheiro *Paralelogramo.ggb*

Cada grupo de trabalho seguiu as orientações dadas na ficha de trabalho e responderam às questões da Situação 1.

As alunas do Grupo III começaram por afirmar:

Aluna R: “Professora, nós achamos que era melhor construir também os triângulos ABE e DCF e depois clicar na opção e calcular a área de cada um.”

Professora: “E como relacionaram essas duas áreas?”

Aluna N: “Foi fácil, foi só olhar para o computador e ver que dá o mesmo valor nas áreas dos dois polígonos, deu 0,92 nos dois.”

Professora: “Sim, vocês utilizaram esse processo e verificaram de uma forma fácil que os dois triângulos têm a mesma área. E agora, como poderiam relacionar as áreas dos dois triângulos utilizando os conteúdos recentemente aprendidos sobre a congruência de triângulos?”

Aluna D: “E professora, isso já vai ser mais difícil.”

Aluna R: “Vamos ter de usar os critérios de semelhança de triângulos.”

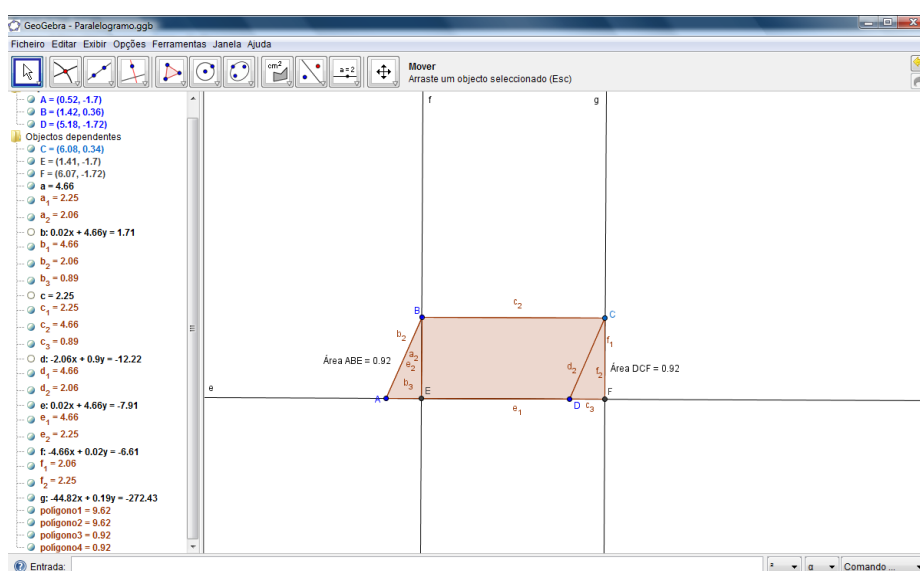


Figura 24: Resolução da questão 1 da Situação 1 da Ficha de Trabalho n.º4 pelo Grupo III

Seguidamente a aluna CI do Grupo IV afirmou:

Aluna CI: “Professora, nós aqui achamos que os triângulos são congruentes porque têm dois ângulos congruentes e um ângulo também congruente.”

Professora: Sim, está certo e como justificaram?”

Aluna CI: “Utilizando o critério de congruência de triângulos ALA.”

Professora: “Ok! Então têm de escrever matematicamente correto.”

Este grupo de alunos apresentou a seguinte resposta a esta questão:

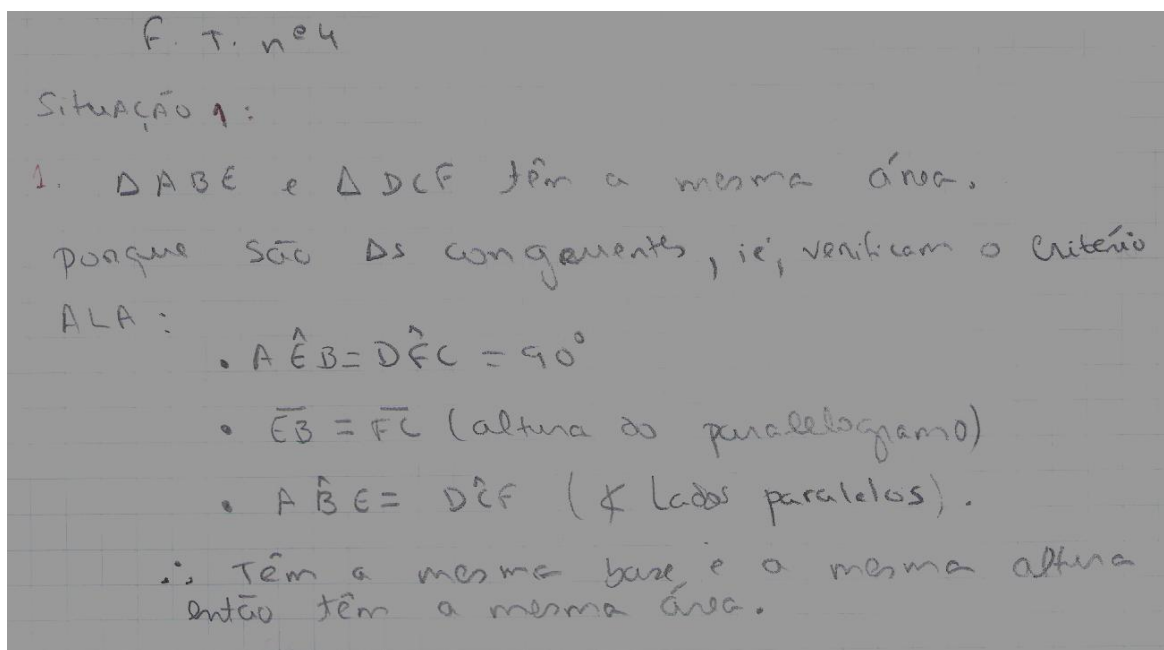


Figura 25: Resolução da Questão 1 da Situação 1 da Ficha de Trabalho n.º 4 pelo Grupo IV

O Grupo I, de uma forma mais simples, justificou corretamente:

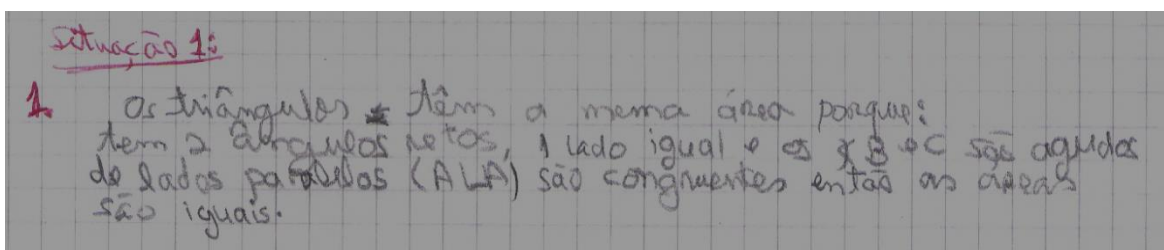


Figura 26: Resolução da Questão 1 da Situação 1 da Ficha de Trabalho n.º 4 pelo Grupo I

O Grupo II, inicialmente estava com dificuldade em utilizar o critério de congruência ALA, mas depois de ouvirem os comentários dos restantes grupos e da manipulação do *GeoGebra* conseguiram apresentar a sua resposta de uma forma aceitável.

Na questão 2 era pedido para relacionar, justificando, a área do paralelogramo com a área do retângulo. O Grupo I, rapidamente respondeu:

Aluna C: “Professora, esta é fácil, é quase como se cortássemos deste lado e colássemos neste (apontando para os dois triângulos – ABE e DCF) e assim ficava um retângulo.”

Aluna M: “E como a C disse, fica a área do paralelogramo igual à do retângulo”.

Aluna V: “Até podemos desenhar numa folha e recortar para confirmar.”

Professora: “Muito bem! E então qual será a expressão da área do paralelogramo?”

Aluno T: “Se é igual à do retângulo, então também é Base vezes Altura.”

Questionei os restantes alunos sobre esta questão e praticamente todos concordaram com a resposta do Grupo I pois observavam atentamente a figura no computador e não restava dúvidas nas afirmações dos colegas.

Na Situação 2 desta proposta de trabalho, em que os alunos tinham novamente que utilizar o mesmo ficheiro sem ter gravado as alterações efetuadas na resolução da Situação 1, a maioria dos alunos utilizou, sem dificuldade, as propriedades dos paralelogramos e justificou corretamente que a área do triângulo ABD é igual a metade da área do paralelogramo ABCD (para a questão 1) e que a área do triângulo ABE é igual a um quarto da área do paralelogramo ABCD (para a questão 2).

Na situação 3, como era pedido para criar uma conjectura e demonstrá-la, os alunos sentiram-se “perdidos”, pelo que, esta situação teve de ser resolvida em grande grupo com o apoio da professora. No entanto, à medida que fomos construindo a resposta a esta situação, a professora foi questionando os alunos e os mesmos foram manipulando a figura no *GeoGebra* de modo a esclarecer as dúvidas que foram surgindo.

Apesar das dificuldades que surgiram na resolução desta tarefa, mais uma vez, a utilização de um programa de geometria dinâmica concebeu um ambiente saudável à

superação das dificuldades pois auxiliou na visualização das construções de conceitos e ideias matemáticas.

A atividade seguinte que foi realizada com o recurso ao programa de Geometria dinâmica *GeoGebra* foi sobre Polígonos Semelhantes inserida no tópico “Semelhança” (lecionado no 3.º período letivo).

Neste âmbito, a atividade proposta aos alunos foi a ficha de trabalho n.º 8. Esta ficha de trabalho é composta por duas partes. Na Parte I era pedido aos alunos para manipular dois polígonos dados de modo a concluir quais as condições necessárias para afirmar que dois polígonos são semelhantes. Na Parte II era pedido para os alunos investigarem a relação entre a razão de semelhança e a ampliação/redução de um polígono utilizando o método da Homotetia e o programa *GeoGebra*. Nesta atividade os alunos trabalharam em pequenos grupos de 3 e/ou 4 elementos.

Cada grupo prontamente iniciou a resolução da ficha de trabalho, solicitando a ajuda da professora para esclarecer dúvidas pontuais nomeadamente nas funções do *GeoGebra* pois, apesar de na ficha estar todos os passos a seguir discriminados, a maioria dos alunos revela “apatia” em ler as instruções e como já não trabalhavam com este programa há algum tempo, estavam “esquecidos”. Depois de rapidamente fazer um “refresh” à memória, cada grupo de trabalho resolveu praticamente sem dificuldade toda a Parte I da ficha de trabalho.

A maioria dos alunos, após a utilização do programa *GeoGebra* para determinar a amplitude dos ângulos internos e a medida do comprimento de cada um dos lados dos polígonos, foi capaz de identificar que os polígonos são semelhantes porque têm ângulos correspondentes congruentes e lados correspondentes diretamente proporcionais.

Dialogando com os alunos, estes foram capazes de afirmar que saber que existe proporcionalidade entre os comprimentos dos lados correspondentes não é condição

suficiente para garantir a semelhança de dois polígonos, é preciso garantir a congruência entre os ângulos correspondentes.

Na figura seguinte podemos observar as respostas dadas pelos grupos I e III às questões da Parte I da ficha de trabalho n.º8 referentes às condições necessárias para afirmar que dois polígonos são semelhantes.

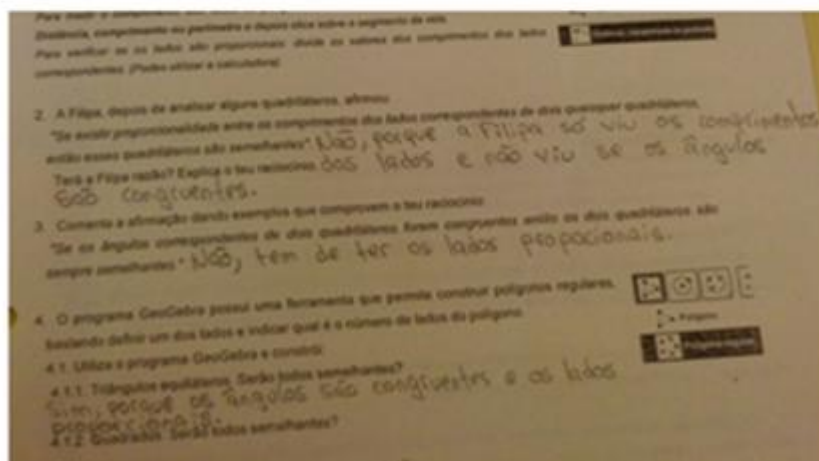
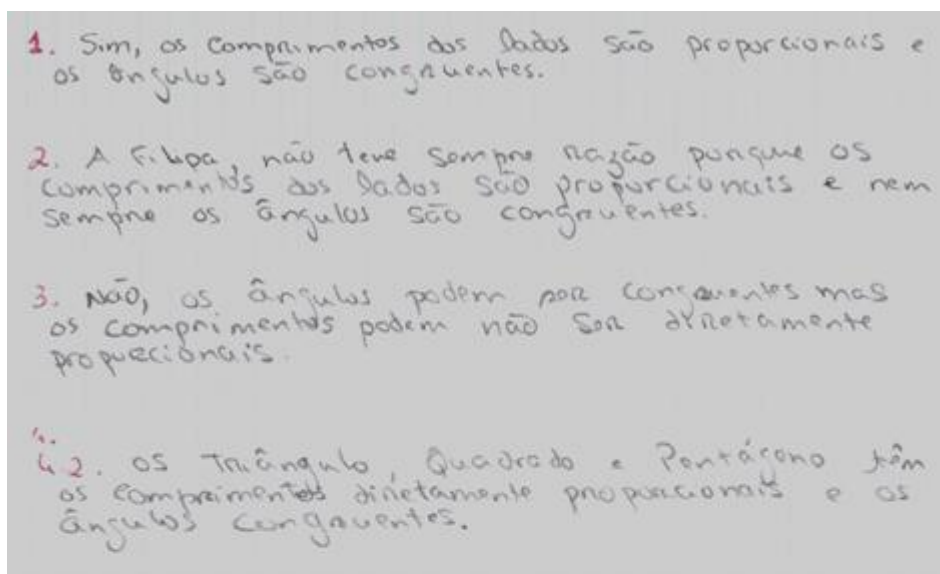


Figura 27: Resolução da Parte I da Ficha de Trabalho n.º 8 pelos Grupos I e III

Na resolução da Parte II desta ficha de trabalho foi solicitado aos alunos para utilizar o método da homotetia, mas desta vez, com recurso ao programa *GeoGebra*. Os alunos, em pequenos grupos, construíram o triângulo pedido, seguiram as orientações e ao

manipularem o seletor aperceberam-se que quando a razão de semelhança é inferior a 1 estamos perante uma redução, se for superior a 1 é uma ampliação e quando é igual a 1 as figuras são congruentes. Ao colocar no seletor $r = 3$, cada grupo de alunos determinou corretamente o comprimento dos segmentos de reta pedidos. Seguidamente foi pedido a dois grupos que utilizassem o programa *GeoGebra* para determinar as razões entre os segmentos de reta e foi pedido aos outros dois grupos que utilizassem a calculadora.

Nesta questão foram estabelecidos os seguintes diálogos:

Professora: “Grupo I, qual o comprimento do segmento de reta OA’?”

Aluna AC: “É 7,22.”

Professora: “E entre O e A?”

Aluna M: “É de 2,41.”

Professora: “Então, quanto é a razão entre esses dois segmentos de reta?”

Aluno T: “Nós fizemos, aqui no *GeoGebra*, $\text{Distância}[AO']/\text{Distância}[OA]$ e deu igual a 3.”

Seguidamente a professora questionou o Grupo II sobre os seus valores.

Professora: “Grupo II, qual o comprimento do segmento de reta OA’?”

Aluna LC: “É 9,33.”

Professora: “Muito bem. E agora entre O e A?”

Aluna C: “É 3,11.”

Professora: “E a razão entre esses dois segmentos de reta?”

Aluna AM: “Foi fácil, fizemos na calculadora $9.33 \div 3.11$ e também deu igual a 3.”

Os restantes dois grupos também confirmaram o resultado 3 na razão entre os comprimentos referidos. Seguidamente os alunos moveram o ponto O e verificaram que o

comprimento dos segmentos de reta alterava, no entanto, o quociente entre os dois segmentos mantinha-se igual a 3 (valor inicialmente colocado no seletor r que designa a razão de semelhança entre os dois polígonos).

Após a resolução desta questão a maioria dos alunos foi capaz de responder que a razão entre os segmentos de reta correspondentes é igual à razão de semelhança.

Depois das conclusões obtidas foi fácil para os alunos concluir que movendo o ponto O a razão entre os comprimentos dos lados correspondentes dos dois polígonos mantém-se igual à razão de semelhança (neste caso $r = 3$).

Para a resolução das restantes questões, os diálogos mantiveram-se e os alunos, com a ajuda do programa *GeoGebra*, concluíram o esperado para a razão entre os Perímetros de dois triângulos semelhantes e a razão entre as Áreas de dois triângulos semelhantes. Assim sendo, cada grupo de trabalho concluiu que dados dois triângulos semelhantes, a razão entre os respetivos perímetros é igual à razão de semelhança. E dados dois triângulos semelhantes, a razão entre as respetivas áreas é igual ao quadrado da razão de semelhança.

Sem dúvida que a utilização de *software* geométrico contribui positivamente para a motivação e interesse dos alunos, assim como, facilita a aprendizagem e compreensão de situações que envolvem conceitos geométricos principalmente quando se trata de provar o que foi conjecturado e proporciona ao aluno formas alternativas de pensar e agir.

Este programa de geometria dinâmica é um facilitador da aprendizagem na medida em que promove a interação entre o objeto matemático e o aluno e permite-lhe conjecturar, analisar, discutir, refletir e concluir. É também um excelente auxiliar nas demonstrações de propriedades geométricas que são de aprendizagem obrigatória neste nível de ensino.

5. CONCLUSÕES

Ao finalizar este trabalho de investigação chegou o momento de refletir sobre tudo o que foi feito e como foi feito. É a altura de ponderar o que correu bem e deve continuar e o que correu menos bem e deve ser ajustado e melhorado, confrontando o relatado na parte teórica desta investigação com a parte prática desenvolvida com os alunos na sala de aula de Matemática.

É este o momento de concluir sobre o impacto da utilização de materiais manipuláveis e de *software* de geometria dinâmica no processo de ensino e aprendizagem da Geometria. É também tempo de meditar sobre a contribuição destes instrumentos na construção do pensamento geométrico dos alunos e no desenvolvimento do raciocínio lógico-abstrato e da comunicação matemática.

5.1. Os materiais manipuláveis e a aprendizagem de conceitos e propriedades geométricas

Os materiais manipuláveis revelam um importante papel na aprendizagem de conceitos geométricos, pois estes permitem ao aluno construir, reconstruir, mexer e manipular, montar e desmontar construindo por si próprios o saber de forma pessoal e ativa, tal como refere, Lorenzato (2006), “a melhor das potencialidades do material didático é revelada no momento da construção do mesmo pelos próprios alunos” (p.28). Este facto pôde ser observado na atividade em que os alunos construíram triângulos coloridos para estudar e explorar os critérios de congruência de triângulos e os critérios de semelhança de triângulos. O facto de cada aluno ter construído os seus próprios triângulos

foi uma mais-valia para a aprendizagem e depois, poder sobrepô-los para tirar conclusões faz com que estes alunos, no futuro, relembrem sempre cada um destes critérios sem grande dificuldade de compreensão. É nesta linha de pensamentos que reúno condições para utilizar o antigo provérbio chinês que diz: “se ouço, esqueço; se vejo, lembro; se faço compreendo”.

O professor de Matemática deve ter consciência que não se deve descurar da utilização dos materiais manipuláveis, na sala de aula, pois estes continuam a marcar fortemente a sua presença na exploração e compreensão dos conteúdos principalmente na área da Geometria, pois é vendo, tocando e sentindo que a maioria dos alunos atinge elevados níveis de compreensão, comunicação e sucesso. Como refere Lorenzato (2006), a valorização do “visual e/ou do visual-tátil” é sem dúvida um facilitador da aprendizagem, justificando que “o conhecimento começa pelos sentidos e que só se aprende fazendo”.

5.2. O *software* geométrico e a construção do pensamento geométrico dos alunos

A utilização de *software* de geometria dinâmica, mais precisamente o *software GeoGebra*, contribuiu de forma positiva para a construção do pensamento geométrico dos alunos, primeiro porque estes tiveram oportunidade de expandir a noção da matemática para além do lápis, do papel, do quadro, do giz e da utilização da calculadora científica e também porque este programa de geometria dinâmica permite ao aluno, construir e

manipular os objetos construídos facilitando-lhe a compreensão do comportamento geométrico dos elementos envolvidos.

A utilização de computadores na sala de aula de Matemática contribuiu satisfatoriamente para o sucesso na disciplina pois, tal como referem, Ponte e Canavarro (1997), o *software* dinâmico também “proporciona a realização de “confirmações experimentais” de determinadas propriedades e relações geométricas” como foi observado na resolução da tarefa proposta sobre a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo. Os alunos já tinham conjecturado o resultado utilizando lápis e papel, mas com a utilização do *GeoGebra* tiveram oportunidade de provar a conjectura utilizando um instrumento mais fiável.

A evolução do pensamento geométrico dos alunos foi notória ao longo da realização das tarefas propostas.

A forma, como estes alunos responderam às questões das últimas propostas de trabalho, nomeadamente na tarefa sobre a relação existente entre a razão de semelhança e a ampliação/redução de um polígono, (ficha de trabalho n.º 8, Parte II, anexo n.º5), revelou um pensamento geométrico mais estruturado e seguro do que aquele que estes alunos, apresentavam, por exemplo, quando se depararam com uma das primeiras tarefas sobre a soma das amplitudes dos ângulos externos de um triângulo (situação 4 da ficha de trabalho n.º 2, anexo n.º1).

5.3. Os materiais manipuláveis e o *software* geométrico no desenvolvimento do raciocínio e da comunicação matemática

A utilização de materiais manipuláveis e de software de geometria dinâmica na aprendizagem da Geometria ajuda o aluno a raciocinar de forma simples e correta e contribui para uma melhoria da comunicação matemática.

Com a lecionação de conteúdos que envolvem Geometria, notei uma evolução a nível da comunicação matemática (quer oral, quer escrita) na maioria dos alunos da turma. Cujos indicadores são a forma como se tornaram mais participativos e autónomos na resolução das tarefas, como por exemplo, as respostas dadas sobre as condições necessárias para afirmar que dois polígonos são semelhantes aquando da resolução da ficha de trabalho n.º 8 (Anexo n.º 5).

Na maior parte das situações geométricas, o aluno reconhece e interpreta-as de forma correta, a principal dificuldade é, por vezes, a de passar para o papel e justificar utilizando linguagem matemática correta. Por exemplo, na utilização do *software GeoGebra* para a resolução da ficha de trabalho n.º 3 (Anexo n.º 3), a maioria dos alunos conseguiu compreender as características e propriedades geométricas presentes nos quadriláteros, pois a manipulação dos polígonos permitiu-lhes visualizar o pretendido, mas, descrever, esquematizar e explicar o porquê de cada um agrupar os quadriláteros de uma forma diferente, é que lhes provocou algum bloqueio na comunicação porque, nesta questão, em particular, existia mais de uma opção de resposta certa, o que gerou alguma confusão. No entanto, os alunos conseguiram, de certa forma, “comunicar oralmente e por escrito, recorrendo à linguagem natural e à linguagem matemática, interpretando, expressando

e discutindo resultados, processos e ideias matemáticos”, como está definido no Programa de Matemática para o Ensino Básico (Ponte, et al., 2007, p.62).

No decorrer do ano letivo foi também notória a evolução da maioria dos alunos a nível da forma de expressar os seus pensamentos e raciocínios relacionando a matemática com a realidade de forma a compreender a sua utilidade e aplicabilidade nas diversas situações do dia a dia. Pois, tal como refere José Sebastião e Silva (1975) “a par da intuição e da imaginação criadora, há que desenvolver ao máximo no espírito dos alunos o poder de análise e o sentido crítico.” Exemplo disso foi observada nas atividades de cálculo de distâncias inacessíveis como foi o caso da situação 5 da ficha de trabalho n.º10 (anexo n.º 7), que consistiu em determinar a altura da escola utilizando uma fita métrica, um quadrante construído pelos próprios alunos e uns simples cálculos matemáticos. Por ter sido uma atividade cuja recolha de dados foi realizada pelos próprios alunos e fora do ambiente sala de aula, despertou-lhes a curiosidade para outros aspetos da atualidade também interessantes de estudar e revelar. Como sejam, a altura de monumentos históricos, ou até mesmo a largura de rios.

Nessa atividade os alunos foram capazes de ultrapassar barreiras e passar adiante, tendo levado essa curiosidade para fora da escola, passando a mensagem aos pais/encarregados de educação que eram capazes de lhes dizer quanto mede a sua própria casa.

5.4. Reflexão Final

Para mim, a experiência da realização deste trabalho, foi muito gratificante. Tornou-me mais consciente e sensibilizada para a importância da diversificação de estratégias em sala de aula.

Estas novas crianças são sem dúvida seres que necessitam de uma atenção especial e de um tratamento distinto no processo de transmissão de conhecimentos.

Cada vez mais, noto que sou confrontada com uma realidade completamente diferente da que durante muito tempo fez parte da minha vida e do meu sucesso profissional. Hoje sei que sou diferente e após a realização desta investigação estou mais atenta e preparada para os sinais de alerta que os meus alunos transmitem quando a realidade em que vivem está desajustada da minha. Eu, como adulta e educadora tenho a responsabilidade de auxiliar em tudo o que precisam para que possam aprender de uma forma equilibrada e adequada à realidade atual.

De todos os materiais com os quais o professor pode diversificar as suas estratégias e a planificação das aulas, o mais importante é o aluno e a sua forma tão natural e genuína de aprender. Tal como refere o professor Miguel Guerra (2003),

o professor trabalha com os “materiais” mais excelsos e delicados que se possa imaginar: as mentes, os sentimentos, as atitudes, os valores, as expectativas das crianças e dos jovens. O banqueiro lida com números e cheques, o arquiteto trabalha com planos, o pedreiro com tijolos, o médico com o corpo das pessoas. Que outra profissão haverá tão bela e arriscada como a nossa? (pp.16-17).

O importante será fazer vir ao de cima, no aluno, a vontade pelo estudo, pois os estímulos e incentivos proporcionados pelo professor são imprescindíveis para que a aprendizagem aconteça.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bogdan, R. & Biklen, S. (1991). *Investigação Qualitativa em Educação*. [Trad. Maria João Alvarez, Sara Bahia dos Santos e Telmo Mourinho Baptista]. Porto: Porto Editora.

Carmo, H. & Ferreira, M. (2008). *Metodologia da Investigação. Guia para auto-aprendizagem*. (2.^a ed.). Lisboa: Universidade Aberta.

Guerra, M. (2003). *No coração da Escola – estórias sobre a educação*. Porto: ASA Editores, S.A.

Lopes, A.; Bernardes, A.; Loureiro, C.; Varandas, J.M.; Oliveira, M.J.; Delgado, M.J.; Bastos, R. e Graça, T. (1992). *Actividades Matemáticas na sala de aula*. (2.^aed.). Lisboa: Texto Editora, LDA.

Magro, F.; Fidalgo, F. e Louçano, P. (2010). *Pi 7, Volume 3*. Porto. Edições ASA II, S.A.

Matos, J. & Serrazina, M. (1996). *Didáctica da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.

Ministério da Educação. (2003). Seminários e Colóquios. “*O Ensino da Matemática: Situação e Perspectivas. (Actas de um Seminário realizado em 28 de Novembro de 2002)*”. Lisboa. Edição: Conselho Nacional de Educação.

Passos, I. C. & Correia, O. F. (2010). *Matemática em Acção 7. Matemática 7.º Ano do Ensino Básico*. Lisboa: Lisboa Editora.

Peres, M. J. (2003). *Contributos da Matemática para trabalhos de projecto*. Matemática 8º Ano. Porto: Porto Editora.

Ponte, J. & Canavarro, A. (1997). *Matemática e Novas Tecnologias*. Lisboa: Universidade Aberta.

Ponte, J.; Serrazina, L.; Guimarães, H.; Brenda, A.; Guimarães, F.; Sousa, H.; Menezes, L.; Martins, M. & Oliveira, P. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Ministério da Educação – DGIDC.

Silva, J. S. (1975). *Guia para a utilização do compêndio de Matemática*. (1º Volume). Lisboa: Edição GEP.

Vorderman, C. (2010). *Um guia visual para ajudar o seu filho a estudar*. (J. Raeiro, Trad.) Porto: Dorling Kindersley - Civilização Editores.

Whitehead, A. N. (1948). *Introdução à Matemática*. [Trad. Mário Silva]. Coimbra: Arménio Amado Editor. Coleção Stvdivm: Temas filosóficos, jurídicos e sociais.

Web Grafia

Abrantes, P. (1999). *Investigações em Geometria na Sala de Aula*. In: E. Veloso; H. Fonseca; J. P., Ponte; & P. Abrantes [Orgs]. *Ensino da Geometria ao virar do Milénio*, pp.153-167. Consultado a 17 outubro 2012. Disponível em http://www.rc.unesp.br/igce/demac/maltempi/cursos/curso3/Artigos/Artigos_arquivos/p_153-167.pdf

Costa, F. & Tenório, A. (2011). *Uso dos softwares geogebra e wxmaxima: Como recurso metodológico no ensino de matemática*. Consultado a 04 janeiro 2013. Disponível em <http://www.sbempa.mat.br/Boletim/Anais/secoes%5C0410.pdf>

Deneca, M. & Pires, M. (2008). *O Ensino da Matemática com auxílio de Materiais Manipuláveis*. Consultado a 07 janeiro 2013. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/625-4.pdf>

Forato, T. (2009). *A Natureza da Ciência como Saber Escolar: um Estudo de Caso a partir da História da Luz*. Vol 1. São Paulo. Consultado a 25 julho de 2013. Disponível em: <http://www.bv.fapesp.br/pt/dissertacoes-teses/8017/a-natureza-da-ciencia-como-saber-escolar-um-estudo-de-caso-a/>

Garnica, A. (1997). *Algumas notas sobre Pesquisa Qualitativa e Fenomenologia*. Em Departamento de Educação da Universidade Estadual Paulista. *Paradigmas de Interpretação da Realidade* (pp. 109 – 122). Botucatu, SP: UNESP. Consultado a 26 julho 2013. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/icse/v1n1/08.pdf>

Lopes, J. J. (2002). *A introdução da informática no ambiente escolar*. Consultado a 07 janeiro 2013. Disponível em: <http://www.clubedoprofessor.com.br/artigos/artigojunio.pdf>

Lorenzato, Sérgio Aparecido. *Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis*. In: Lorenzato, S. [org.], (2006). *O Laboratório de ensino de matemática na formação de professores*. Campinas, SP: Autores associados. Coleção formação de professores. Consultado a 04 janeiro 2013. Disponível em:

<http://books.google.es/books?id=tGwo9gQPKtUC&printsec=frontcover&hl=pt-PT#v=onepage&q&f=false>

Nascimento, E. (2012). *Avaliação do uso do software GeoGebra no ensino de geometria: reflexão da prática na escola*. Consultado a 08 janeiro 2013. Disponível em: <http://www.geogebra.org.uy/2012/actas/67.pdf>

Néri, I. (2012). *O que é Geometria Dinâmica?* Consultado a 07 janeiro 2013. Disponível em <http://www.geometriadinamica.com.br/>


Nóbriga, J. & Araújo, L. (2010). *Aprendendo Matemática com o GeoGebra*. Consultado a 08 janeiro 2013. Disponível em: <http://www.calameo.com/read/0003741242ae2fb8b879e>

Serrazina, M. L. (2012). *Conhecimento matemático para ensinar: papel da planificação e da reflexão na formação de professores*. Revista Eletrônica de Educação. São Carlos, SP: UFSCar, v. 6, n.º 1, pp. 266-283, maio. Consultado a 31 julho de 2013. Disponível em <http://www.reveduc.ufscar.br/index.php/reveduc/article/view/355/162>

Ventura, M. M. (2007). *O Estudo de Caso como Modalidade de Pesquisa*. Rev SOCERJ.; 20(5): pp. 383-386 setembro/outubro. Consultado a 25 julho 2013. Disponível em:
http://www.polo.unisc.br/portal/upload/com_arquivo/o_estudo_de_caso_como_modalidad_e_de_pesquisa.pdf

7. ANEXOS


Anexo 1 - Ficha de trabalho sobre Ângulos Internos e Externos de um Triângulo

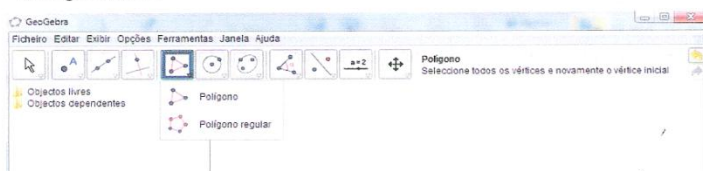
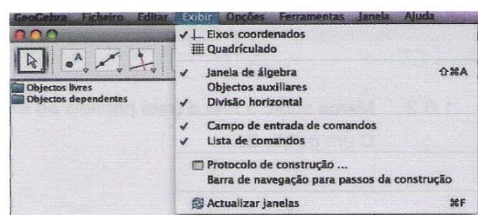
	ESCOLA BÁSICA DOS 2º E 3º CICLOS DO CURRAL DAS FREIRAS	Professora: <u>Cristina Neto</u>
	MATEMÁTICA NOME: _____	FICHA DE TRABALHO N.º 2 N.º: ____ Turma: ____ Data: ____/____/____

SITUAÇÃO 3: Ângulos Internos de um Triângulo¹


1. Constrói um triângulo [ABC] utilizando o programa de Geometria Dinâmica *GeoGebra*.

Nota: Ao iniciar o programa *GeoGebra* clica em *Exibir* na barra de títulos e selecciona, no menu, a opção **Eixos coordenados** para ocultar os eixos coordenados.

Para construir o triângulo [ABC], selecciona o modo  **Polígono** e clica sucessivamente nos pontos A, B, C e outra vez em A para construir o triângulo ABC.



- 1.1. Mede as amplitudes dos ângulos internos do triângulo ABC.


Nota: Para obteres a medida da amplitude dos ângulos internos do triângulo selecciona o modo  **Ângulo** na barra de ferramentas e clica sobre o triângulo.

- 1.2. Adiciona as medidas obtidas.

Escreve no campo de entrada $\alpha + \beta + \gamma$ e carrega em **Enter**.



- 1.3. Que valor obtiveste? (**Nota:** Esse valor corresponde ao δ na janela de Álgebra, no lado esquerdo da janela de visualização.)

- 1.4. Manipula a tua construção (Lembra-te de clicar no ícone **Mover** ). O que observas em relação à amplitude dos ângulos e à respectiva soma?


¹ Adaptado da Tarefa 1B – Ângulos internos de um triângulo incluída nos “Materiais de apoio ao professor com tarefas para o 3.º ciclo – 7.º ano” (Ponte, Matos & Branco, 2009), produzidos no âmbito da implementação do novo Programa de Matemática do Ensino Básico (ME-DGIDC, 2007).

1.5. Formula uma conjectura sobre o valor da **soma das amplitudes dos ângulos internos num triângulo qualquer**.

1.6. Prova que a tua conjectura é válida.


A fim de demonstrares a tua conjectura:

1.6.1. Traça a reta DE que passa pelo vértice C e é paralela ao lado AB.

Nota: Para construir a reta paralela ao lado **AB**, basta clicar no canto inferior direito do botão , e selecionar a opção **Recta paralela**. Clica sobre o lado **AB** do triângulo e sobre o vértice **C**, obténs uma reta, *d*, que contém o ponto **C** e é paralela ao lado **AB**.

1.6.2. Marca sobre a reta *d* (reta paralela ao lado AB) à esquerda do ponto C um **ponto D** e à direita do ponto C um **ponto E**.

1.6.3. Mede as amplitudes dos ângulos DCA e BCE.

Nota: Selecciona o modo  **Ângulo** na barra de ferramentas e clica sobre os pontos D, C, A e B, C, E, respectivamente.

1.6.4. Compara a medida das amplitudes dos ângulos CAB e DCA e dos ângulos CBA e BCE. Apresenta uma justificação para o que concluíste.

1.6.5. O que podes dizer sobre o valor da soma das amplitudes dos ângulos DCA, ACB e BCE?

$$\widehat{DCA} + \widehat{ACB} + \widehat{BCE} = \underline{\hspace{2cm}}$$

1.6.6. Atendendo às conclusões que chegaste nas duas alíneas anteriores fundamenta a conjectura que apresentaste.

SITUAÇÃO 4: Ângulos externos de um triângulo^{2 2}

1. Abre o ficheiro “ângulos externos.ggb” presente no ambiente de trabalho do computador. Os ângulos DAB, EBC e FCA são ângulos externos do triângulo ABC.
 - 1.1. Observando a construção define ângulo externo de um triângulo.
 - 1.2. Mede as amplitudes dos ângulos internos do triângulo.
 - 1.2.1. Qual a relação entre os ângulos internos e externos de um triângulo?
 - 1.2.2. Investiga relações entre os ângulos internos CBA, BAC e o ângulo externo ACF.
 - 1.2.3. As relações encontradas na alínea anterior são válidas para os outros vértices do triângulo?
 - 1.3. Adiciona as medidas das amplitudes dos ângulos externos do triângulo ABC. Que valor obtiveste?
 - 1.4. Manipula a tua construção e formula uma conjectura sobre o valor da soma dos ângulos externos num triângulo qualquer.
 - 1.5. Elabora uma demonstração que valide a tua conjectura tendo em conta:
 - A) a soma da amplitude dos ângulos FCB, EBA e CAD;
 - B) a soma dos ângulos internos do triângulo.

Bom Trabalho!
A Professora,

² Adaptado da Tarefa 2B – Ângulos externos de um triângulo incluída nos “Materiais de apoio ao professor com tarefas para o 3.º ciclo – 7.º ano” (Ponte, Matos & Branco, 2009), produzidos no âmbito da implementação do novo Programa de Matemática do Ensino Básico (ME-DGIDC, 2007).

Referências Bibliográficas:

Ponte, J.; Oliveira, P.; Candeias, N. (2009). *Triângulos e Quadriláteros: Materiais de apoio ao professor*

com tarefas para o 3.º ciclo – 7.º ano. Ministério da Educação-DGIDC.

Ponte, J.; Serrazina, L.; Guimarães, H.; Brenda, A.; Guimarães, F.; Sousa, H.; Menezes, L.; Martins, M.;

Oliveira, P. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Ministério da Educação – DGIDC

Professores das turmas piloto do 6.º ano de escolaridade Ano lectivo 2009/10. (2009).

Figuras no Plano

– *Proposta de sequência de tarefas para o 2.º Ciclo*. Lisboa: ME-DGIDC

Sítios:

http://area.dgicd.min-edu.pt/mat-no-sec/pdf/rodagigante_csaraiva.pdf

Consultado em 13 de Janeiro de 2011

Anexo 2 – Critérios de Congruência de Triângulos – Projeto CEM (PowerPoint)



CRITÉRIOS
DE
CONGRUÊNCIA
DE TRIÂNGULOS




Triângulo Azul:

Na folha de cartolina azul constrói e recorta um triângulo a partir do comprimento de três segmentos de recta. Utiliza para o comprimento dos lados do triângulo segmentos de recta cujas medidas são 9 cm, 15 cm e 18 cm.

2

Triângulo Vermelho:

Na folha de cartolina vermelha constrói e recorta um triângulo a partir da amplitude dos seus três ângulos. Considera para a tua construção os ângulos: $\hat{A} = 90^\circ$; $\hat{B} = 60^\circ$; $\hat{C} = 30^\circ$.



3


Triângulo Verde:

Na folha de cartolina verde constrói e recorta um triângulo a partir do comprimento de dois segmentos de recta e da amplitude do ângulo por eles formado. Utiliza para comprimento dos lados do triângulo segmentos de recta cujas medidas são 8 cm e 15 cm. O ângulo formado por esses lados tem de amplitude 30° .

4

Triângulo Amarelo:

Na folha de cartolina amarela constrói e recorta um triângulo a partir do comprimento de um segmento de recta de 10 cm e da amplitude de dois ângulos, um de 30° e outro de 60° , que têm esse segmento como lado comum.




5

Quando é que dois triângulos são congruentes?


6

1. Será que dois triângulos com os três lados congruentes são sempre congruentes?
2. Será que dois triângulos com os três ângulos congruentes são sempre congruentes?
3. Dois lados de um triângulo e um ângulo formado por eles são congruentes aos elementos correspondentes de outro triângulo. Nestas condições os triângulos são sempre congruentes?




7

4. Dois lados de um triângulo e um ângulo não formado por eles são congruentes aos elementos correspondentes de outro triângulo. Nestas condições os triângulos são sempre congruentes?
5. Dois ângulos de um triângulo que têm um lado comum são congruentes com os elementos correspondentes de outro triângulo. Nestas condições os triângulos são sempre congruentes?



8

Anexo 3 - Ficha de trabalho sobre Propriedades dos Quadriláteros

 MATEMÁTICA	ESCOLA BÁSICA DOS 2º E 3º CICLOS DO CURRAL DAS FREIRAS	Professora: <u>Cristina Neto</u>
FICHA DE TRABALHO N.º 3		
NOME: _____ N.º: ___ Turma: ___ Data: ___/___/___		

QUADRILÁTEROS

A professora da Mariana pediu à turma que observasse umas figuras geométricas no programa GeoGebra e sugeriu que as agrupassem tendo em atenção determinadas propriedades. Ajuda a Mariana.

1. Abre o ficheiro “*poligonos.ggb*” presente no ambiente de trabalho do computador. Observa as figuras e indica uma característica comum a todas elas. Como podemos denominá-las?
2. Analisa cada figura e preenche a tabela abaixo:

Quadriláteros	Paralelismo	Lados	Ângulos
Paralelogramo			
Retângulo			
Losango			
Quadrado			
Papagaio			
Não trapézio			
Trapézio escaleno			
Trapézio retângulo			
Trapézio isósceles			

3. Agrupa-os tendo em atenção as características comuns. Justifica a tua escolha.
4. Tenta elaborar um esquema de modo a organizares os quadriláteros de acordo com as suas características.
5. Escolhe um dos quadriláteros. Determina a soma das amplitudes dos seus ângulos internos. O que podes dizer acerca das somas das amplitudes dos ângulos internos de um quadrilátero.
6. Tenta demonstrar a conjectura que escreveste na alínea anterior. (**Sugestão:** Traça uma das diagonais do quadrilátero).

Bom trabalho!

A Professora,



Anexo 4 - Ficha de trabalho sobre Propriedades do Paralelogramo



ESCOLA BÁSICA DOS 2º E 3º CICLOS DO CURRAL DAS FREIRAS

MATEMÁTICA 7ºANO

FICHA DE TRABALHO N.º 4

Professora: Cristina Neto

NOME: _____ N.º: ____ Turma: ____ Data: ____/____/____

PROPRIEDADES DO PARALELOGRAMO

Situação 1

As seguintes orientações sugerem um caminho para deduzir a fórmula que permite calcular a área do paralelogramo.

- ✓ Abre o ficheiro “*Paralelogramo.ggb*” presente no ambiente de trabalho do computador. Na construção apresentada no ficheiro podes observar o paralelogramo **ABCD**.
- ✓ Constrói a reta AD.
- ✓ Constrói as perpendiculares a AD que passam por B e por C.
- ✓ Constrói o ponto E que corresponde à intersecção da reta AD com a sua perpendicular que passa pelo ponto B.
- ✓ Constrói o ponto F que corresponde à intersecção da reta AD com a sua perpendicular que passa pelo ponto C.
- ✓ Constrói o retângulo BEFC.

Com base na construção efetuada procura responder às seguintes questões:

1. Relaciona as áreas dos triângulos ABE e DCF. Justifica a tua resposta.
2. Relaciona a área do paralelogramo ABCD com a área do retângulo EBCF, tendo em conta a resposta à questão anterior. Justifica a tua resposta.
3. O segmento de reta AD é uma base do paralelogramo ABCD e [BE] é uma altura deste paralelogramo. Escreve uma fórmula que permita calcular a área do paralelogramo em função das medidas dos comprimentos da base e da altura.

Situação 2

As seguintes orientações sugerem um caminho para relacionar a área do paralelogramo com a de triângulos.

- ✓ Abre o ficheiro “*Paralelogramo.ggb*” presente no ambiente de trabalho do computador. Na construção apresentada no ficheiro podes observar o paralelogramo **ABCD**.
- ✓ Constrói o ponto E que corresponde ao ponto médio do segmento de reta AD.
- ✓ Constrói os triângulos ABD e ABE.

Com base na construção efetuada procura responder às seguintes questões justificando o teu raciocínio.

1. Relaciona a área do triângulo ABD com a área do paralelogramo ABCD.
2. Relaciona a área do triângulo ABE com a área do paralelogramo ABCD.

Situação 3

As seguintes orientações sugerem um caminho para relacionar a área de quadriláteros.

- ✓ Abre o ficheiro “*Paralelogramo.ggb*” presente no ambiente de trabalho do computador. Na construção apresentada no ficheiro podes observar o paralelogramo **ABCD**.
- ✓ Constrói o segmento de reta BD, correspondente a uma diagonal do paralelogramo.
- ✓ Cria um ponto E nessa diagonal.
- ✓ Pelo ponto E traça uma reta paralela ao segmento AD do paralelogramo.
- ✓ Cria o ponto F, intersecção da reta anteriormente construída com o segmento AB.
- ✓ Cria o ponto G, intersecção da reta anteriormente construída com o segmento CD.
- ✓ Pelo ponto E traça uma reta paralela ao segmento AB do paralelogramo.
- ✓ Cria o ponto H, intersecção da reta anteriormente construída com o segmento BC.
- ✓ Cria o ponto I, intersecção da reta anteriormente construída com o segmento AD.
- ✓ Cria os polígonos AIEF e HEGC.

Com base na construção efetuada cria uma conjectura quanto à área dos quadriláteros AIEF e HEGC. Demonstra a tua conjectura.

Referências Bibliográficas:

Ponte, J.; Oliveira, P.; Candeias, N. (2009). *Triângulos e Quadriláteros: Materiais de apoio ao professor, com tarefas para o 3.º ciclo – 7.º ano*. Ministério da Educação – DGIDC.

Ponte, J.; Serrazina, L.; Guimarães, H.; Brenda, A.; Guimarães, F.; Sousa, H.; Menezes, L.; Martins, M.; Oliveira, P. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Ministério da Educação –DGID


Bom trabalho!

A Professora,



Proposta de trabalho do Projeto CEM – Construindo o Êxito em Matemática 7º Ano 2010/2011

Anexo 5 - Ficha de trabalho sobre Polígonos Semelhantes

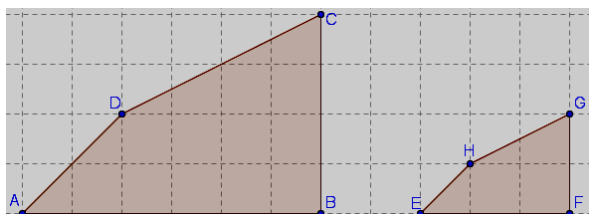
	ESCOLA BÁSICA DOS 2º E 3º CICLOS DO CURRAL DAS FREIRAS	
MATEMÁTICA 7º ANO	FICHA DE TRABALHO N.º 8	Professora: <u>Cristina Neto</u>
NOME: _____ N.º: ___ Turma: ___ Data: ___/___/___		

POLIGONOS SEMELHANTES

PARTE I

1. Na figura, estão representados dois polígonos, [ABCD] e [EFGH]. Utilizando o Programa de Geometria Dinâmica: *GeoGebra* constrói os dois polígonos da figura e verifica se são semelhantes.

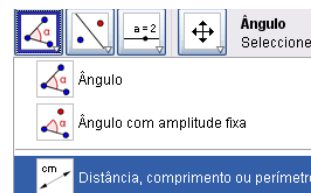
Notas: Para construir os polígonos no *GeoGebra*: na barra de ferramentas, seleciona a opção **Polígono** e na tela constrói os polígonos tal como mostra a figura.



Para medir os ângulos internos do polígono: seleciona a opção **Ângulo** e depois dá um clique sobre os polígonos.

Para medir o comprimento dos lados do polígono: na barra de ferramentas seleciona a opção **Distância, comprimento ou perímetro** e depois clica sobre o segmento de reta.

Para verificar se os lados são proporcionais: divide os valores dos comprimentos dos lados correspondentes. (Podes utilizar a calculadora).



2. A Filipa, depois de analisar alguns quadriláteros, afirmou:

"Se existir proporcionalidade entre os comprimentos dos lados correspondentes de dois quaisquer quadriláteros, então esses quadriláteros são semelhantes".

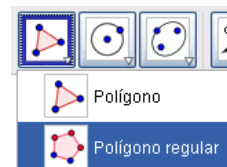
Terá a Filipa razão? Explica o teu raciocínio.

3. Comenta a afirmação dando exemplos que comprovem o teu raciocínio:

"Se os ângulos correspondentes de dois quadriláteros forem congruentes então os dois quadriláteros são sempre semelhantes."

4. O programa *GeoGebra* possui uma ferramenta que permite construir polígonos regulares, bastando definir um dos lados e indicar qual é o número de lados do polígono.

- 4.1. Utiliza o programa *GeoGebra* e constrói:



- 4.1.1. Triângulos equiláteros. Serão todos semelhantes?

- 4.1.2. Quadrados. Serão todos semelhantes?

4.1.3. Pentágonos regulares. Serão todos semelhantes?

4.2. O que podes concluir da realização da alínea anterior? Explica o teu raciocínio.

PARTE II


5. Utiliza o Programa de Geometria Dinâmica: *GeoGebra* e o **método da homotetia** para investigar a relação entre a razão de semelhança e a ampliação/redução de um polígono.

Notas: Selecciona a opção **Polígono** na barra de ferramentas e constrói um triângulo *ABC* qualquer.

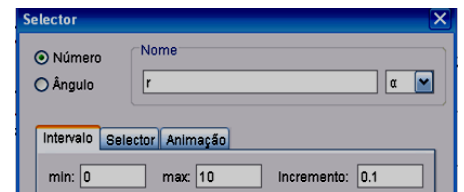
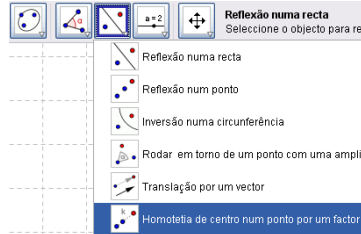
Marca um ponto no exterior do triângulo e renomeia-o para **O** (clica com o botão direito do rato sobre o ponto e escolhe **propriedades**).

Traça todas as semirretas que, tendo origem em **O**, passam pelos vértices do polígono, seleccionando a opção **Semirreta definida por dois pontos**.



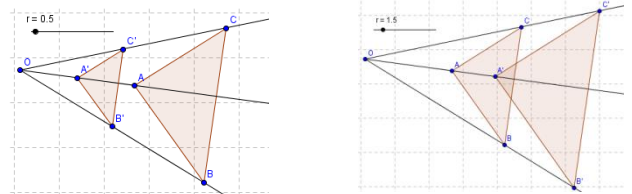
Selecciona a ferramenta  e dá um clique sobre a tela do *GeoGebra* para introduzir um seletor. Na caixa de diálogo que aparecerá coloca **r** no nome, **0** no mínimo e **10** no máximo

Selecciona na barra de ferramentas a opção **Homotetia de centro num ponto por um fator**, dá um clique sobre o **triângulo**, dá outro clique sobre o ponto **O** e na caixa de diálogo que aparecerá escreve **r**.



Movê o ponto do seletor.

5.1. Interpreta o que observas indicando para que valor de **r** a figura obtida é uma **redução**, uma **ampliação** ou **geometricamente igual**.



5.2. No seletor coloca $r = 3$.

5.2.1. Determina, no *GeoGebra*, os comprimentos dos segmentos de reta $[OA]$ e $[OA']$. Calcula a razão

$$\frac{OA'}{OA}$$

O que podes concluir?

Notas: Na barra de ferramentas, escolhe a opção **Distância, comprimento ou perímetro**.

Dá um clique sobre o ponto **O** e outro clique sobre o ponto **A** (determinas o comprimento de $[OA]$).

Repete o processo para determinar o comprimento do segmento de reta $[OA']$.

Para determinar a razão entre os valores dos comprimentos, na entrada introduz:

Entrada: **Distância[O,A']/Distância[O,A]**

e clica na tecla **Enter**. Na janela da **Álgebra** aparece o valor da razão.

5.2.2. Determina, no *GeoGebra*, os comprimentos dos segmentos de reta $[OB]$ e $[OB']$. Calcula a razão $\frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}$. Determina os comprimentos dos segmentos de reta $[OC]$ e $[OC']$. Calcula a razão $\frac{\overline{OC'}}{\overline{OC}}$. O que podes concluir?

5.3. Determina, no *GeoGebra*, o comprimento dos segmentos de reta $[AB]$ e $[A'B']$. Calcula a razão $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$. O que podes concluir? Move o ponto **O** e diz o que verificas.

5.4. Determina, no *GeoGebra*, o perímetro do triângulo $[ABC]$ e do triângulo $[A'B'C']$. Calcula a razão entre os valores obtidos. O que podes concluir?

Notas: Para determinar o perímetro basta ir à barra de ferramentas, escolher a opção **Distância, comprimento ou perímetro** e depois dar um clique no interior do triângulo.

5.5. Determina, no *GeoGebra*, a área do triângulo $[ABC]$ e do triângulo $[A'B'C']$. Calcula a razão entre os valores obtidos. O que podes concluir?

Notas: Para determinar a área, escolhe a opção **Área** e depois dar um clique no interior do triângulo.

Adaptado de: MAGRO, F.; FIDALGO, F. e LOUÇANO, P. (2010). *Pi 7 (Volume3)*. Edições ASA II, S.A. pp. 53 e 57

Bom trabalho!!!

A Professora,

Anexo 6 - Ficha de trabalho sobre Critérios de Semelhança de Triângulos



ESCOLA BÁSICA DOS 2º E 3º CICLOS DO CURRAL DAS FREIRAS

MATEMÁTICA 7º ANO

FICHA DE TRABALHO N.º 9

Professora: Cristina Neto

NOME: _____ N.º: ____ Turma: ____ Data: ____/____/____

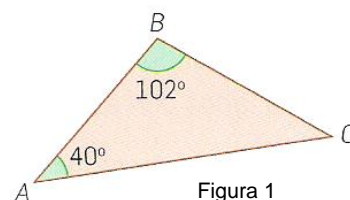
CRITÉRIOS DE SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

SITUAÇÃO 1

1.1. Numa folha amarela constrói um triângulo RST , não congruente com o triângulo ABC da figura 1, de modo que $\sphericalangle TRS \equiv \sphericalangle CAB$ e $\sphericalangle RST \equiv \sphericalangle ABC$.

1.2. Sem utilizares o transferidor, calcula, $\sphericalangle C$ e $\sphericalangle T$.

1.3. Utiliza uma régua graduada para determinar os comprimentos dos lados dos triângulos ABC e RST .



1.4. Tendo em conta as respostas às alíneas 1.2. e 1.3., indica a relação que existe entre os triângulos ABC e RST .

1.5. Constrói, numa folha verde, um triângulo EFG que não seja congruente nem com o triângulo RST , nem com o triângulo ABC , de modo que $\sphericalangle R \equiv \sphericalangle E$ e $\sphericalangle S \equiv \sphericalangle F$. Indica a relação que existe entre os triângulos considerados.

1.6. Completa a afirmação: "A tarefa realizada sugere a seguinte conclusão: se dois triângulos têm ângulos congruentes, então, _____".

1.7. Observa os triângulos representados na figura 2.

1.7.1. Os triângulos são semelhantes? Explica o teu raciocínio.

1.7.2. Supondo que $\overline{GH} = 3\text{ cm}$, $\overline{DE} = 6\text{ cm}$ e $\overline{GI} = 1\text{ cm}$, determina \overline{EF} .

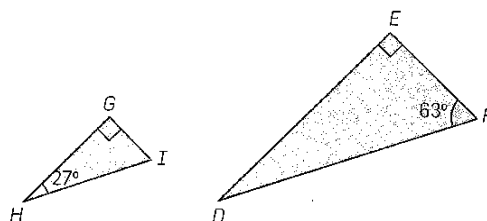


Figura 2

SITUAÇÃO 2

2.1. Numa folha azul constrói um triângulo ABC , a partir do comprimento de três segmentos de reta. Utiliza para o comprimento dos lados do triângulo segmentos de reta cujas medidas são: $\overline{AB} = 7\text{ cm}$, $\overline{BC} = 3\text{ cm}$ e $\overline{CA} = 9\text{ cm}$.

2.2. Numa folha vermelha, constrói um triângulo DEF cujos lados tenham o dobro do comprimento dos lados do triângulo ABC .

2.3. Utiliza um transferidor para determinar a amplitude de todos os ângulos internos dos triângulos ABC e DEF .

2.4. Indica, justificando, a relação que existe entre os triângulos ABC e DEF .

2.5. Constrói, numa folha branca, um outro triângulo, GHI , cujos lados tenham metade do comprimento dos lados do triângulo ABC , e indica, justificando, a relação existente entre esse novo triângulo e o triângulo ABC .

2.6. Completa a afirmação: “A tarefa realizada sugere a seguinte conclusão: Se dois triângulos têm os três lados proporcionais, então _____”.

2.7. Observa os triângulos da figura 3.

2.7.1. Serão os triângulos semelhantes? Explica o teu raciocínio.

2.7.2. Supondo que $\sphericalangle L = 30^\circ$, indica $\sphericalangle P$.

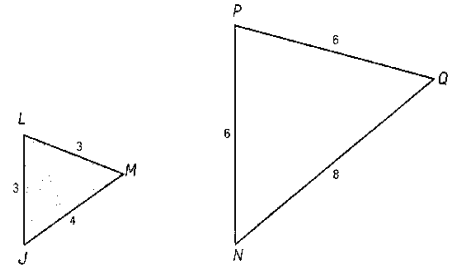


Figura 3

SITUAÇÃO 3

3.1. Observa o triângulo ABC da figura 4. Constrói numa folha rosa, um triângulo RST , de modo que $\sphericalangle TRS \equiv \sphericalangle ACB$, $\overline{RT} = 2,5 \text{ cm}$ e $\overline{RS} = 3 \text{ cm}$.

3.2. Utiliza um transferidor para determinar as amplitudes desconhecidas dos ângulos internos dos triângulos ABC e RST .

3.3. Utiliza uma régua graduada para determinar os comprimentos desconhecidos dos lados dos triângulos ABC e RST .

3.4. Tendo em conta as respostas às alíneas 3.2. e 3.3., indica que relação existe entre os triângulos ABC e RST .

3.5. Constrói, numa folha laranja, um outro triângulo, de modo que dois dos seus lados sejam proporcionais aos lados AC e AB do triângulo ABC e o ângulo por eles formado tenha 127° de amplitude. Indica a relação existente entre este novo triângulo e o triângulo ABC .

Nota: O triângulo construído não deve ser congruente nem com o triângulo ABC , nem com o triângulo RST .

3.6. Completa a afirmação: “A tarefa realizada sugere que se dois triângulos têm dois lados proporcionais e os ângulos por eles formados congruentes, então _____”.

3.7. Observa os triângulos da figura 5.

3.7.1. Serão os triângulos semelhantes? Explica o teu raciocínio.

3.7.2. Supondo que $\overline{AB} = 4 \text{ cm}$, determina $\overline{A'B'}$.

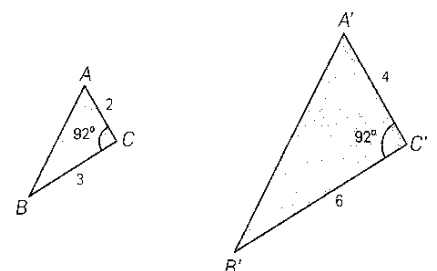


Figura 5


Referências bibliográficas

Tarefa adaptada de: Magro, F.; Fidalgo, F. e Louçano, P. (2010). *Pi 7, Volume 3*. Edições ASA II, S.A. pp. 54 – 56.

Bom trabalho!

A professora,

Anexo 7 - Ficha de trabalho sobre aplicação dos critérios de semelhança de triângulos

	ESCOLA BÁSICA DOS 2º E 3º CICLOS DO CURRAL DAS FREIRAS	
MATEMÁTICA 7º ANO	FICHA DE TRABALHO N.º 10	Professora: <u>Cristina Neto</u>
NOME: _____		N.º: ____ Turma: ____ Data: ____/____/____

Situação 1¹

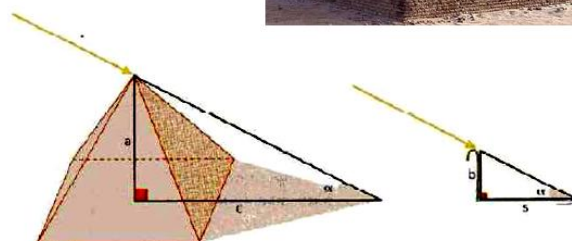
A visualização do filme “**Semelhanças**” (Apostol, CMAF) mostra uma visão generalista e aplicada a diversas situações de semelhança.

- Conta-se que Thales de Mileto se ofereceu para determinar a altura da pirâmide de Quéops, sem escalar o monumento. Segundo a lenda, a prova ter-se-á realizado na presença do Faraó Amasis. Thales espetou perpendicularmente ao chão a sua bengala e mediu as sombras da bengala e da pirâmide. Após alguns cálculos rápidos, Thales obteve a resposta desejada.



1.1. Em que se baseou o raciocínio de Thales?

1.2. Observa cuidadosamente as figuras, supõe que a aresta da base da pirâmide de Quéops tem $230m$ de comprimento, a sombra da pirâmide e da bengala são, respetivamente, $323m$ e $2,5m$ e que a bengala tem $80cm$ de comprimento. Qual a altura da pirâmide?



- Gigantes com cerca de 20 metros de altura aparecem em vários livros como “*O pé de feijão*”, “*As viagens de Gulliver*” e monstros enormes, como *King Kong* ou *Godzilla*, são vedetas em filmes de ficção científica.

Num trabalho publicado em 1917 o matemático D’Arcy Thompson tenta explicar que tais criaturas não podiam ter existido no nosso mundo.

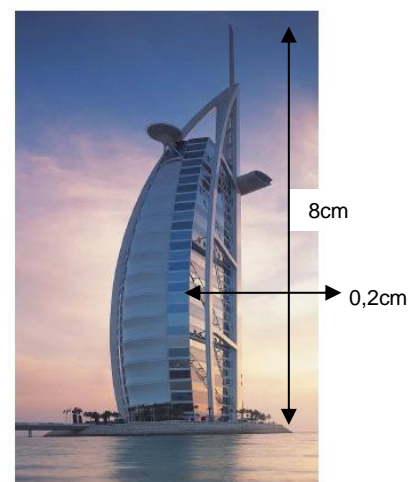
Analisa esta questão tendo por base o que observaste no filme

Situação 2¹

A fotografia seguinte é do fantástico hotel **Burj Al Arab**, no pequeno reino de Dubai, uma maravilha da arquitetura e da ousadia. **Burj Al Arab** é atualmente o 18.º arranha-céu mais alto do mundo e o hotel mais alto do mundo.

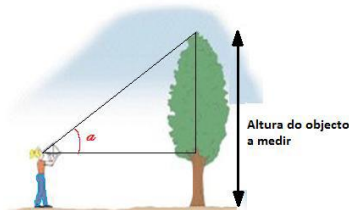
Utilizando a noção de proporção, calcula a altura real deste hotel a partir da fotografia, sabendo que na realidade a altura de cada uma das suas janelas de vidro tem aproximadamente 8 metros.

Fonte: <http://zcartosfrases.blogspot.com/2009/12/burj-ao-arab.html>



Situação 3¹

Um **Quadrante** é um instrumento que serve para medir ângulos ou a altura angular de um ponto, usado há mais de quinhentos anos por astrónomos e navegantes.



Constrói o teu quadrante...

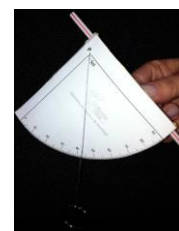
Com o quadrante é possível medir a altura de uma árvore, de uma casa, ou outro ponto elevado...

Com a ajuda do quadrante determina a altura da tua escola.

Explica o teu raciocínio.

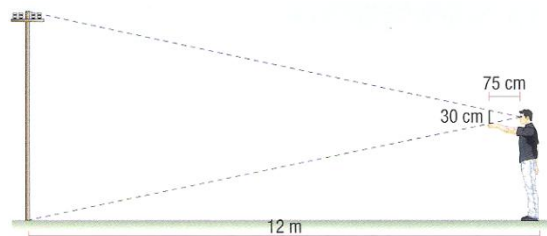
Explica o teu raciocínio.

Compara o resultado com o dos teus colegas.



Situação 4²

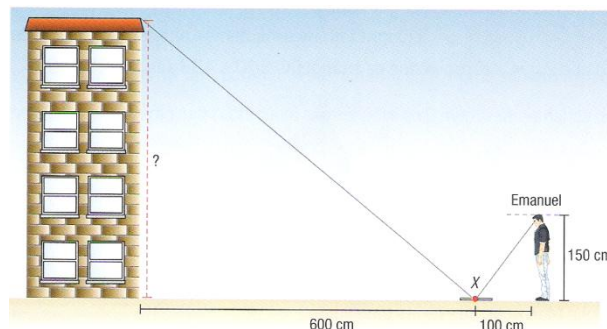
1. O Simplício, para descobrir a altura de um poste de eletricidade, utilizou uma régua de 30 cm que colocou em frente aos seus olhos. De seguida, deslocou-se para um local, a 12 m do poste, onde olhando por cima e por baixo da régua via, respetivamente, o cimo e a base do poste. Sabendo que a régua se encontra a 75 cm dos seus olhos, determina a altura do poste.



2. Para medir a altura de um edifício, o Emanuel colocou um espelho plano no chão, no ponto X. De seguida, colocou-se de tal modo que pudesse ver o topo do edifício refletido no espelho, tal como mostra a figura.

Sabe-se que, a altura até aos olhos do Emanuel é 150 cm; a distância do centro do espelho ao Emanuel é 100 cm e a distância do centro do espelho ao edifício é 600 cm.

Determina a altura do edifício. Explica o teu raciocínio.



Situação 5¹

Aplicando o processo utilizado na situação 2, determina a altura da escola, sabendo que cada janela tem, na realidade, 1,9 m de altura. Compara este processo com o utilizado nas situações 3 e 4.

Elabora um relatório onde contes pormenorizadamente como procedeste. Não te esqueças de fazer uma representação esquemática que te ajude a explicar as medições que fizeste e a altura que determinaste.



Bom trabalho!

A Professora,

¹Atividades adaptadas das propostas de trabalho para o 7º ano inseridas no projeto CEM .



²Atividade adaptada de Magro, F.; Fidalgo, F. e Louçano, P. (2010). *Pi 7 (Volume3)*. Edições ASA II, S.A. pp. 73 e 76.

Anexo 8 - Pedido de autorização para utilização de material audiovisual na sala de aula, ao Presidente da Comissão Provisória da Escola



Escola Básica do 2º e 3º do Curral das Freiras

Curral das Freiras, 17 de janeiro de 2013

Exmo. Sr. Presidente da Comissão Provisória

No âmbito do Mestrado em Ensino da Matemática no 3º ciclo do Ensino Básico e Secundário da Universidade da Madeira, a professora de Matemática da turma 2 do 7ºano, professora Cristina Neto, está a desenvolver um estudo sobre a utilização de materiais manipuláveis e a utilização do *software GeoGebra* como instrumentos mediadores de todo o processo ensino/aprendizagem da Matemática, nomeadamente nos tópicos “Triângulos e Quadriláteros” e “Semelhança”.

Um dos objetivos deste trabalho será permitir que o aluno faça uma reflexão sobre aquilo que se fala e aquilo que se escreve. Trabalhando desde modo a comunicação matemática, a defesa das suas ideias e respetivos raciocínios.

Esta investigação visa encontrar e aprofundar métodos que incentivem a aprendizagem de cada aluno, relativamente à disciplina de Matemática.

Para este efeito, é necessário observar e recolher dados sobre o trabalho dos alunos nas aulas de Matemática, especialmente preparadas neste sentido. A recolha de dados consistirá na observação e gravação em vídeo e áudio das aulas da referida turma.

Como tal, solicito a sua autorização para proceder à recolha de dados atrás descrita, comprometendo-me desde já a garantir o anonimato dos alunos e a confidencialidade dos dados obtidos, que apenas serão usados no âmbito da investigação.

Agradeço antecipadamente a sua atenção!

Com os melhores cumprimentos,

A docente de Matemática do 7º2

O Presidente da Comissão Provisória

(Paula Cristina da Silva Neto)

(Joaquim José Batalha de Sousa)

Anexo 9 - Pedido de autorização para utilização de material audiovisual na sala de aula, ao
Diretor Regional de Educação

Exmo. Sr. Diretor Regional de Educação

Assunto: Autorização para utilização de material audiovisual de gravação na sala de aula

Eu, Paula Cristina da Silva Neto, portadora do bilhete de identidade número [REDACTED], residente em [REDACTED] Funchal, professora de Matemática na Escola Básica dos 2.º e 3.º Ciclos do Curral das Freiras, venho por este meio solicitar a V.ª Ex.ª autorização para utilizar material audiovisual de gravação na sala de aula no âmbito do Mestrado em Ensino da Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e Secundário da Universidade da Madeira, no qual estou inscrita e a recolher dados para elaborar o trabalho de investigação final.

Com este trabalho pretendo desenvolver um estudo sobre a utilização de materiais manipuláveis e a utilização do *software GeoGebra* como instrumentos mediadores de todo o processo ensino/aprendizagem da Matemática, nomeadamente nos tópicos “Triângulos e Quadriláteros” e “Semelhança” ao nível do 7.º ano de escolaridade.

Um dos objetivos deste trabalho será permitir que o aluno faça uma reflexão sobre aquilo que se fala e aquilo que se escreve. Trabalhando, deste modo, a comunicação matemática, a defesa das suas ideias e respetivos raciocínios.

Esta investigação visa encontrar e aprofundar métodos que incentivem a aprendizagem de cada aluno, relativamente à disciplina de Matemática.

Para este efeito, é necessário observar e recolher dados sobre o trabalho dos alunos nas aulas de Matemática, especialmente preparadas neste sentido. A recolha de dados consistirá na observação e gravação em vídeo e áudio das aulas de Matemática da turma 2 do 7.º ano da referida escola.

Como tal, solicito a sua autorização para proceder à recolha de dados atrás descrita, comprometendo-me desde já a garantir o anonimato dos alunos e a confidencialidade dos dados obtidos, que apenas serão usados no âmbito da investigação.

Agradeço antecipadamente a sua atenção.

Funchal, 05 de fevereiro de 2013

Pede deferimento,

A docente,

(Paula Cristina da Silva Neto)

Anexo 10 - Autorização para utilização de material audiovisual na sala de aula, pelo
Diretor Regional de Educação



REGIÃO AUTÓNOMA DA MADEIRA
GOVERNO REGIONAL
SECRETARIA REGIONAL DA EDUCAÇÃO E RECURSOS HUMANOS
DIREÇÃO REGIONAL DE EDUCAÇÃO

000043

2013-03-11

junho

C/conhecimento:
- à EB 2e3 do Curral das Freiras

Exma Sra. Professora
Paula Cristina da Silva Neto

pcristinasneto@hotmail.com

Sua referência	Sua comunicação de	Nossa referência	Data
		552	2013-03-04

ASSUNTO: **Autorização para utilização de material audiovisual de gravação na sala de aula**

Na sequência da vossa solicitação, e por despacho do Ex.mo Senhor Diretor Regional de Educação, de 25-02-2013, informa-se Vossa Excelência de que, no âmbito do Mestrado em Ensino da Matemática no 3º Ciclo do Ensino Básico e Secundário, promovido pela Universidade da Madeira, está autorizado a utilizar material audiovisual de gravação na sala dos alunos da turma 2 do 7º ano da Escola Básica dos 2. e 3º Ciclos dos Curral das Freiras.

Mais se informa que, para efeitos da operacionalização dos citados instrumentos de trabalho, deverá obter a necessária anuência do órgão de gestão da escola e dos alunos ou dos seus encarregados de educação, no caso de serem menores de idade.

Com os melhores cumprimentos.

O Diretor de Serviços de Investigação,
Formação e Inovação Educacional

(Bernardo Lage Valério)

Nã resposta iniciar a «Nossa referência» Em cada oi:zo final, só ue «n assunto

BE/CT

**Anexo 11 - Pedido de autorização para utilização de material audiovisual na sala de aula,
aos Encarregados de Educação**

Exmo(a). Sr.(ª) Encarregado(a) de Educação

Eu, professora de Matemática do seu educando, _____, nº _____ da turma 2 do 7º ano, venho por este meio solicitar a sua autorização para gravar em áudio e/ou vídeo algumas sessões de trabalho de grupo do qual o seu educando faz parte.

Um dos objetivos deste trabalho será permitir que o aluno faça uma reflexão sobre aquilo que se fala e aquilo que se escreve. Trabalhando desde modo a comunicação matemática, a defesa das suas ideias e respetivos raciocínios. Comprometo-me a utilizar a gravação como complemento de avaliação/autoavaliação do próprio e para descrever as aprendizagens dos meus alunos num relatório final, parte integrante do meu Mestrado em ensino da Matemática.

Agradeço antecipadamente a sua atenção!

Com os melhores cumprimentos,

A professora,

A Encarregada de educação

- Autorizo
 Não autorizo
