

DM

Introdução à Teoria Espectral de Grafos

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

José Vitor Oliveira de Jesus

MESTRADO EM MATEMÁTICA



UNIVERSIDADE da MADEIRA

A Nossa Universidade

www.uma.pt

fevereiro | 2018

Introdução à Teoria Espectral de Grafos

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

José Vitor Oliveira de Jesus

MESTRADO EM MATEMÁTICA

ORIENTAÇÃO

Maria Teresa Alves Homem de Gouveia

Maribel Gomes Gonçalves Gordon

Júri:

Doutora Ana Maria Cortesão Pais Figueira da Silva Abreu

– Professora Auxiliar da Universidade da Madeira

Doutor Paulo Sérgio Abreu Freitas

– Professor Auxiliar da Universidade da Madeira

Doutora Maria Teresa Alves Homem de Gouveia

– Professora Auxiliar da Universidade da Madeira

Agradecimentos

Gostaria de aproveitar este espaço para agradecer a todos aqueles que me ajudaram a tornar isto possível. O primeiro reconhecimento vai para as minhas orientadoras, a Professora Dr^a Maria Teresa Alves Homem de Gouveia e a Professora Dr^a Maribel Gomes Gonçalves Gordon por todo o apoio e profissionalismo dado ao longo deste percurso, pela orientação, disponibilidade e paciência para comigo, estou-lhes eternamente grato.

Quero agradecer aos meus Pais, duas riquezas inestimáveis na minha vida. Pela alegria de viver, por ser quem sou, e por tudo o que superei na vida, agradeço a eles. Também agradeço aos meus irmãos por tornarem todos os meus dias agradáveis, por lutarmos, sofrermos e crescermos juntos. Obrigado do fundo do meu coração.

A todos vocês, meus grandes amigos, por estarem ao meu lado em todos os momentos, sejam quais forem as circunstâncias, pela amizade verdadeira e pelas aventuras que vivenciámos, um muito obrigado.

Agradeço a todos os professores que fizeram parte do meu percurso académico, pelo ensino e pelo conhecimento que transmitiram-me.

Aos meus restantes familiares agradeço-lhes por todo o carinho e por todos os momentos que partilhámos juntos.

Resumo

O objetivo principal desta dissertação é fazer uma introdução à teoria espectral de grafos. Abordaremos algumas propriedades dos grafos, nomeadamente o polinómio característico, os valores e vetores próprios de matrizes associadas aos grafos. Nesta dissertação iremos dar mais relevância à matriz de adjacência e à matriz laplaciana, fazendo uma análise de alguns tipos específicos de grafos e dos respetivos espectros. Iremos estudar o conceito de energia de um grafo e de medidas de centralidade associadas aos grafos e aos seus conceitos inerentes.

Serão apresentadas duas aplicações no decorrer da dissertação, uma referente à Química e ao carbono quaternário, com o objetivo de descobrir se o carbono quaternário existe ou não na molécula em estudo e, outra referente às medidas de centralidade em que será feito a análise do jogo de futebol “Portugal vs França” a contar para a final do Europeu de 2016, com o intuito de descobrir as performances dos jogadores.

Palavras-chave: energia de um grafo, espectro de um grafo, grafo, matriz de adjacência, matriz laplaciana, medidas de centralidade.

Abstract

The main purpose of this dissertation is to make an introduction to the spectral graph theory. We will study some properties of graphs, namely the characteristic polynomial, the eigenvalues and the eigenvectors specific to matrices associated with graphs. In this dissertation, we will give more importance to the adjacency matrix and to the Laplacian matrix and we will do an analysis of some specific types of graphs and their respective spectra. We will study the energy of a graph and the measures of centrality associated to graphs and their inherent concepts.

Two practical applications will be presented throughout the dissertation, one related to chemistry and quaternary carbon, in order to find out whether or not the quaternary carbon exists in the molecule under study, and another one related to the centrality measures in which the analysis of the football match “Portugal versus France”, that defined the European Champion of 2016 will be done, with the objective of sorting out the performances of the players on the field.

Key-words: adjacency matrix, centrality measures, energy of a graph, graph, laplacian matrix, spectrum of a graph.

Índice

Lista de Figuras	xi
Lista de Notações	xiii
1 Introdução	1
2 Teoria dos grafos	3
2.1 Introdução	3
2.2 Alguns conceitos básicos	3
2.3 Tipos de grafos	10
3 Álgebra linear	15
3.1 Introdução	15
3.2 Alguns conceitos básicos	15
3.2.1 Matrizes	16
3.2.2 Determinantes	20
3.2.3 Valores e vetores próprios	22
3.2.4 Polinómio Característico	23
4 Representação matricial de um grafo	27
4.1 Introdução	27
4.2 Matriz de adjacência	27
4.3 Matriz de incidência	31
4.4 Matriz laplaciana	32
4.4.1 Conceitos básicos	33
5 Espectro de um grafo	39
5.1 Introdução	39
5.2 Espectro de um grafo	39
5.3 Espectro de alguns tipos de grafos	41

5.3.1	Casos particulares que relacionam a matriz de adjacência com a teoria espectral de grafos	41
5.3.2	Casos particulares que relacionam a matriz laplaciana com a teoria espectral de grafos.	50
5.4	Isomorfismo de grafos	56
5.5	Energia de um grafo	57
5.5.1	Energia adjacente de um grafo	57
5.5.2	Energia laplaciana de um grafo	58
5.5.3	Aplicação da energia à Química	58
5.6	Árvores	60
5.6.1	Espectro de árvores	65
6	Medidas de Centralidade	71
6.1	Introdução	71
6.2	Medidas de centralidade básicas	72
6.2.1	Centralidade de grau	72
6.2.2	Centralidade de Proximidade	75
6.2.3	Centralidade de intermediação	77
6.3	Medidas de centralidade espectrais	79
6.3.1	Centralidade de vetor próprio	79
6.3.2	Centralidade de um vértice via conectividade algébrica (medida de contribuição para $\alpha(G)$)	80
6.4	Algumas medidas de centralidade utilizadas em grafos ponderados	82
6.5	Aplicação	83
6.5.1	Medidas de Centralidade aplicadas à final do Europeu de 2016	85
7	Conclusões	91
	Anexos	93
A	Centralidade de proximidade	95
B	Centralidade de intermediação	101
	Bibliografia	117

Lista de Figuras

2.1	Grafo simples G	4
2.2	Grafo W	5
2.3	Multigrafo G	5
2.4	Grafo caminho aberto P_3 e grafo caminho fechado P_4	6
2.5	Grafo F conexo e grafo H desconexo	7
2.6	Grafos G e H isomorfos	8
2.7	Grafo G e o seu complementar \bar{G}	8
2.8	Grafo D_1 não planar e grafo D_2 planar.	8
2.9	Grafo G e o seu dual G'	9
2.10	Grafo G e um subgrafo gerador de G denotado por H	9
2.11	Grafo G não direcionado e grafo H direcionado	9
2.12	União do grafo G_1 com o grafo G_2	10
2.13	Grafos completos K_n	11
2.14	Grafos regulares X_n	11
2.15	Grafos cíclicos C_n	11
2.16	Grafos roda W_n	12
2.17	Grafos Nulos N_n	12
2.18	Grafo G bipartido com $U = \{1, 2, 3\}$ e $W = \{4, 5, 6, 7\}$ e grafo $K_{2,3}$ bipartido completo com $U = \{1, 2\}$ e $W = \{3, 4, 5\}$	13
2.19	Árvore G	13
2.20	Grafo G e as suas árvores geradas G_1, G_2 e G_3	14
2.21	Grafo G ponderado	14
4.1	Grafo simples W	28
4.2	Pseudografo G	28
4.3	Grafo H	32
4.4	Grafo P	33
5.1	Grafo simples M	40

5.2	Grafo G regular com $r = 3$	44
5.3	Grafo G regular de grau 3	51
5.4	Grafo completo K_5	54
5.5	Grafo bipartido completo $K_{2,3}$	55
5.6	Grafo caminho P_4	55
5.7	Grafos coespectrais e não isomorfos	56
5.8	Grafo molecular G	59
5.9	Árvore organizada para a aplicação do algoritmo	65
5.10	Passo 1 e passo 2 da aplicação do algoritmo	66
5.11	Passo 3 e passo 4 da aplicação do algoritmo	66
5.12	Passo 5 da aplicação do algoritmo	67
5.13	Cálculo do polinómio característico laplaciano - Passo 1	67
5.14	Passo 1 e passo 2 da aplicação do algoritmo quando $\alpha = 0$	68
5.15	Passo 3 e passo 4 da aplicação do algoritmo quando $\alpha = 0$	69
5.16	Cálculo do número de valores próprios maiores que 3, após aplicação do algoritmo	69
6.1	Importância do vértice v_k no grafo	71
6.2	Grafos G e W não direcionados	72
6.3	Grafo G direcionado	74
6.4	Os vértices v_3 e v_5 são os mais centrais do grafo G segundo a centralidade de proximidade	76
6.5	O vértice v_4 é o mais central do grafo G	78
6.6	Grafo G cujo vértice mais central segundo a centralidade de vetor próprio é v_4	79
6.7	Grafo G onde v_3 é o vértice mais central segundo a centralidade via conetividade algébrica	81
6.8	Mapa de jogo das jogadas mais perigosas de Portugal	85
6.9	Mapa de jogo das jogadas mais perigosas de Portugal após a exclusão do vértice 7	86

Lista de Notações

$G = (V, E)$	grafo G que tem o conjunto de vértices V e o conjunto de arestas E
$V(G)$	conjunto dos vértices do grafo G
$E(G)$	conjunto das arestas do grafo G
$ V $	número de vértices do grafo
$ E $	número de arestas
$deg(v_i)$ ou $d(v_i)$	grau do vértice i
$l(G)$	grafo linha
\bar{G}	grafo complementar de G
K_n	grafo completo
C_n	grafo cíclico
W_n	grafo roda
N_n	grafo nulo
P_n	grafo caminho
$G \cong H$	G isomorfo a H
G'	grafo dual
$K_{m,n}$	grafo bipartido completo
$tr(A)$	traço da matriz quadrada A
A^T	matriz transposta de A
A^{-1}	matriz inversa de A
$det(A)$	determinante da matriz A
I	matriz identidade
D	matriz com entradas $D_{ii} = deg(v_i)$
J	matriz cujas entradas são todas iguais a 1
$\mathbf{1}$	vetor cujas entradas são todas iguais a 1
$\varepsilon(v)$	excentricidade de um vértice v
$r(G)$	raio do grafo G
$diam(G)$	diâmetro do grafo G

$ind(G)$	índice do grafo G
$\rho(G)$	raio espectral de G
$adj(M)$	adjunto de M
$\alpha(G)$	conectividade algébrica de G
$car(I)$	Característica de I
θ	valor próprio da matriz de adjacência
$P_G(\theta)$	polinómio característico do grafo G
$m_a(\theta)$	multiplicidade algébrica do valor próprio θ
$m_g(\theta)$	multiplicidade geométrica do valor próprio θ
A_G ou $A(G)$	matriz de adjacência do grafo G
I_G ou $I(G)$	matriz de incidência do grafo G
L_G ou $L(G)$	matriz laplaciana do grafo G
μ	valor próprio da matriz laplaciana
Q_G ou $Q(G)$	matriz laplaciana sem sinal
q	valor próprio da matriz laplaciana sem sinal
$spect(G)$	espectro do grafo G
$E_A(G)$	energia adjacente do grafo G
$E_L(G)$	energia laplaciana do grafo G
$\tau(G)$	número de árvores geradoras do grafo G
$dist(v_j, v_k)$	número de arestas do caminho mais curto possível que une v_j a v_k
$g_{i,j}$	número de geodésicas entre v_i e v_j
$b_{ij}(v_k)$	intermediação parcial de v_k com respeito à ligação de v_i com v_j
d_k	centralidade de grau de v_k
$c_C(v_k)$	centralidade de proximidade de v_k
$c_B(v_k)$	centralidade de intermediação de v_k
$c_{eig}(v_k)$	centralidade de vetor próprio de v_k
$c_a(v_k)$	centralidade de conectividade algébrica de v_k
$P(G)$	matriz dos pesos do grafo G

Capítulo 1

Introdução

A teoria dos grafos é um ramo da Matemática que trabalha com estruturas denominadas de grafos. A literatura afirma que a teoria dos grafos começou a ser estudada em 1736 pelo matemático Leonhard Euler quando resolveu o problema das sete pontes de Königsberg. Um grafo G pode ser representado graficamente, onde os vértices são geralmente representados por pontos e as arestas por ligações entre esses pontos. Também é possível representar um grafo na forma matricial, existindo propriedades de matrizes associadas a cada grafo. Neste trabalho vamos abordar três matrizes diferentes que podem representar um grafo, são elas: a matriz de adjacência, a matriz de incidência e a matriz de Laplace. É de realçar que as matrizes de adjacência e de Laplace, além de representarem grafos, são muito utilizadas no estudo da teoria espectral de grafos.

A teoria espectral de grafos teve o seu grande desenvolvimento após a tese de Doutorado de Cvetković [17], em 1971, e relaciona propriedades algébricas do espectro de certas matrizes associadas a um determinado grafo e as propriedades estruturais nele presentes. O espectro de uma matriz é o conjunto de valores próprios dessa matriz. Neste trabalho vamos focar-nos no espectro da matriz de adjacência e no espectro da matriz laplaciana, ou seja, no fundo o objetivo é relacionar propriedades entre o grafo e o seu espectro. Como exemplo, temos o segundo menor valor próprio de uma matriz laplaciana que desempenha um papel relevante na teoria espectral, pois esse valor próprio é chamado de conectividade algébrica e sempre que esse valor for positivo então o grafo será conexo.

A energia de um grafo foi estudada pela primeira vez por Ivan Gutman [38] em 1978 e é a soma dos valores absolutos dos valores próprios do grafo em estudo. Nesta dissertação faremos uma breve abordagem sobre a energia adjacente e

a energia laplaciana de um grafo e apresentaremos uma aplicação onde, uma árvore química é um grafo molecular que representa a constituição de um isômero de alcanos, com o intuito de descobrir se existe ou não carbono quaternário na molécula em estudo.

A centralidade é um conceito muito utilizado em teoria dos grafos e na análise de redes e, foi introduzido por Bavelas [3] em 1948. É definida como uma medida que avalia a importância de um vértice num grafo e, para tal, são analisados vários aspectos, entre os quais o de conseguir comunicar diretamente com muitos outros vértices, o de estar próximo de muitos outros vértices e o de existirem muitos pares de vértices que precisam de i (ou conseguem usar i) como intermediário nas suas comunicações.

Existem várias medidas de centralidade. Neste trabalho vamos estudar as medidas mais básicas (centralidade de grau, centralidade de proximidade e centralidade de intermediação) e as medidas baseadas na teoria espectral (centralidade de vetor próprio e centralidade via conectividade algébrica). Com base nestas medidas iremos mostrar como a teoria dos grafos e a análise de redes podem ser usadas para uma análise de informação estatística de equipas de Futebol, nomeadamente da seleção Portuguesa e medir a performance dessa equipa e dos jogadores que a compõem.

O presente trabalho tem como objetivo, estudar as propriedades dos grafos de modo a poder utilizar essas propriedades na teoria espectral e depois dar uso da mesma nas medidas de centralidade.

Em virtude do que foi mencionado, esta dissertação conta com sete capítulos, cinco destinados ao desenvolvimento da dissertação, um destinado à introdução e outro direcionado à conclusão. O capítulo dois aborda a teoria dos grafos e aponta os seus conceitos básicos. Já no capítulo três é feita uma breve introdução à álgebra linear que virá a ser importante no decorrer da dissertação. O capítulo quatro é destinado ao estudo das matrizes de adjacência, incidência e de Laplace. Dentro do capítulo cinco é estudado o espectro de alguns tipos de grafos e a energia de um grafo. Por fim, no capítulo seis é feita uma análise de como as medidas de centralidade se relacionam com os grafos e é apresentada uma aplicação.

Capítulo 2

Teoria dos grafos

2.1 Introdução

A teoria dos grafos estabelece a relação entre um objeto e um determinado conjunto. Neste capítulo apresenta-se a terminologia básica, utilizada na teoria dos grafos, com exemplos elucidativos assim como teoremas, proposições e algumas observações que julgamos indispensáveis à compreensão do texto. Ao leitor interessado recomendamos as referências [9], [12], [14], [18], [27], [37] e [41] de onde nos baseamos para desenvolver este capítulo.

2.2 Alguns conceitos básicos

Os conceitos de grafo, multigrafo, grafos isomorfos e grafo dual são noções básicas para a introdução à teoria espectral de um grafo.

Definição 2.1 *Um grafo G é uma estrutura composta por dois tipos de objetos: $V(G)$ ou V que representa um conjunto finito de elementos chamados vértices (ou nodos) e por $E(G)$ ou E que designa o conjunto dos pares de vértices chamados de arestas. Denotamos por $G = (V, E)$ o grafo que tem o conjunto de vértices V e o conjunto de arestas E . O número n de vértices do conjunto V é chamado ordem do grafo G .*

Seja G um grafo qualquer, denotamos por $|V|$ o número de vértices do grafo G , e por $|E|$ o número de arestas.

Definição 2.2 *Um grafo é simples se não existir mais do que uma aresta a unir dois quaisquer vértices, nem existirem loops, isto é, arestas da forma xx , tal que, $u = \{x, x\}$.*

Os vértices de um grafo são habitualmente representados por pontos e as arestas por ligações entre esses pontos, conforme exibido na Figura 2.1.

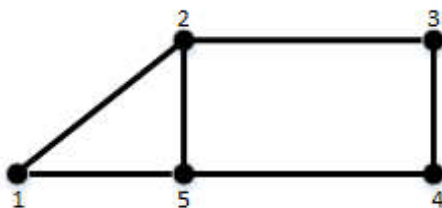


Figura 2.1: Grafo simples G

Definição 2.3 Num grafo G dizemos que x e y são vértices adjacentes se existir uma aresta u que os une, ou seja, $u = \{x, y\}$, (ou $u = xy$, ou apenas xy). O grau de um vértice x é o número de arestas incidentes em x e representa-se por $\deg(x)$.

Definição 2.4 Para cada grafo G , associamos uma sequência de números que corresponde à lista dos graus dos vértices por ordem decrescente. Esta sequência é chamada de grau sequência de G .

Teorema 2.5 Num grafo G a soma do grau dos vértices é igual ao dobro do número de arestas, ou seja,

$$\sum_{i=1}^n \deg(v_i) = 2|E|.$$

Proposição 2.6 Dado um grafo G , a soma do grau de todos os seus vértices é um número par. Temos ainda que o número de vértices de G com grau ímpar é um número par.

Definição 2.7 Dizemos que um grafo G é um multigrafo, quando um par de vértices forma mais do que uma aresta, isto é, quando existem pelo menos duas arestas que têm os mesmos nodos. Num multigrafo $G = (V, E)$, E representa um multiconjunto de pares não ordenados de vértices. A multiplicidade de uma aresta $u = \{x, y\}$ é o número de vezes que ela ocorre em E .

Exemplo 2.8 Seja W o grafo representado na Figura 2.2.

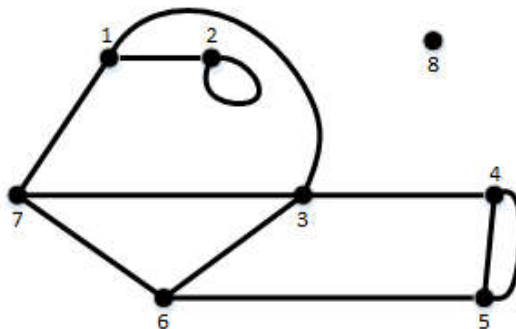


Figura 2.2: Grafo W

Podemos ver que:

1. $\deg(1) = 3, \deg(2) = 3, \deg(3) = 4, \deg(4) = 3, \deg(5) = 3, \deg(6) = 3, \deg(7) = 3, \deg(8) = 0$;
2. O grau sequência de W é $(4, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 0)$;
3. $\sum_{x=1}^8 \deg(x) = 2|E| = 2 \times 11 = 22$;
4. Existem 6 vértices de grau ímpar;

Observação 2.9 Alguns autores consideram que nos multigrafos são permitidos loops, transformando um vértice adjacente em si próprio. Outros autores, por sua vez, dão o nome de pseudografo aos grafos que possuem loops.

Exemplo 2.10 Seja G o grafo representado na Figura 2.3, constituído por 6 vértices e 7 arestas.

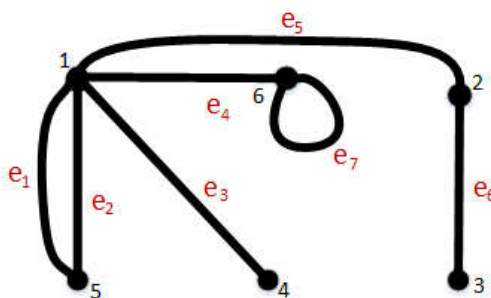


Figura 2.3: Multigrafo G

Podemos afirmar que:

1. Este grafo é designado por $G = (V, E)$, onde $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, ou seja $|V| = 6$ e $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$, isto é $|E| = 7$;
2. Uma vez que o grafo tem 6 vértices podemos concluir que o grafo é de ordem 6;
3. O vértice 1 e o vértice 2 estão ligados através da aresta e_5 , portanto é certo dizer que o vértice 1 é adjacente ao vértice 2.
4. Os vértices 1 e 5 estão ligados através de duas arestas, e_1 e e_2 ; desta forma consideramos que os vértices 1 e 5 são adjacentes e estão ligados por arestas múltiplas, ou seja, o grafo G é um multigrafo.
5. O vértice 6 liga-se a si próprio, através da aresta e_7 ; assim, designamos a aresta e_7 de loop.

Definição 2.11 Um caminho designa-se por P_n e é uma sequência de vértices e arestas do grafo, tal que, os vértices e as arestas são adjacentes. Se o caminho for aberto então trata-se de um grafo simples com $|V| = |E| + 1$ em que $n \geq 2$ é o número de vértices. Se os vértices inicial e final de um caminho coincidirem temos um caminho fechado. O comprimento de um caminho é o número de arestas que o compõem.

Na Figura 2.4 temos dois grafos caminhos (P_3 e P_4).

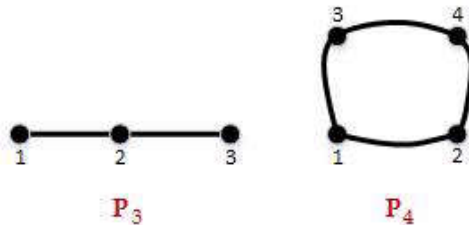


Figura 2.4: Grafo caminho aberto P_3 e grafo caminho fechado P_4

Podemos observar que P_3 tem comprimento 2 e P_4 tem comprimento 4.

Definição 2.12 Um grafo diz-se conexo se existir sempre um caminho que une dois quaisquer vértices. Caso contrário, diz-se que o grafo é não conexo (ou desconexo).

Exemplo 2.13 Consideremos o grafo da Figura 2.5:

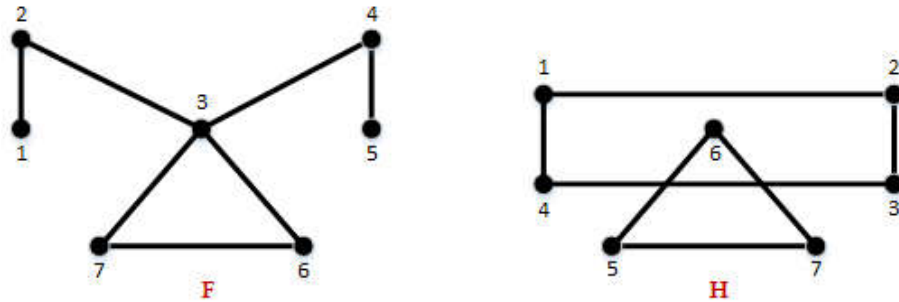


Figura 2.5: Grafo F conexo e grafo H desconexo

Podemos observar que no grafo F temos um caminho possível para quaisquer dois vértices, no entanto, o mesmo não acontece com o grafo H , pois não existe, por exemplo, um caminho que una o vértice 1 ao vértice 5.

Observação 2.14 Se o grafo for orientado, ao caminho chamamos caminho orientado ou caminho direto.

Definição 2.15 Um ciclo é um caminho fechado.

Definição 2.16 Dizemos que dois grafos G e H são isomorfos e denotamos por $G \cong H$ se existir um isomorfismo entre o conjunto dos vértices de G e H , isto é, se existir uma correspondência bijetiva entre G e H , tal que preserva a adjacência dos vértices.

Na Figura 2.6 temos um exemplo de dois grafos isomorfos G e H , onde o isomorfismo é dado pela seguinte bijeção:

$$\begin{array}{cccccccc}
 G : & 14 & 13 & 25 & 24 & 31 & 35 & 41 & 42 \\
 & & & & \Downarrow & & & & \\
 H : & cb & cd & ae & ab & dc & de & bc & ba
 \end{array}$$

Existe portanto uma correspondência entre os grafos G e H

$$\begin{array}{cccccc}
 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
 & & \Downarrow & & \\
 c & a & d & b & e
 \end{array}$$

ou seja, os grafos G e H são isomorfos.

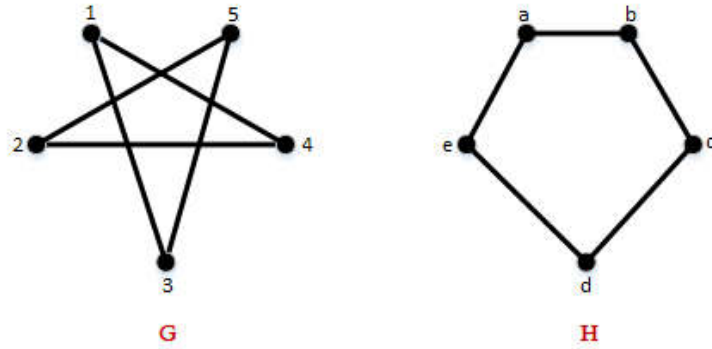


Figura 2.6: Grafos G e H isomorfos

Definição 2.17 *Seja G um grafo simples, o seu complementar designa-se por \bar{G} e contém todas as ligações que não estão em G .*

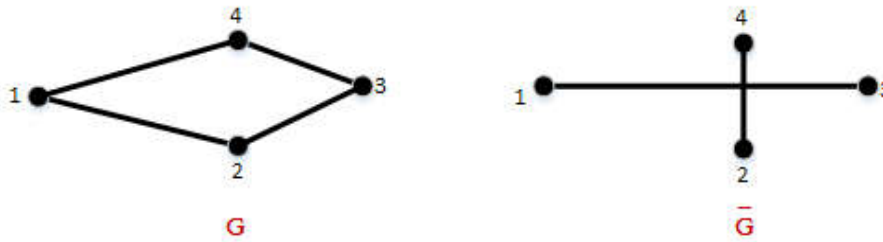


Figura 2.7: Grafo G e o seu complementar \bar{G}

Definição 2.18 *Um grafo planar é um grafo onde existe pelo menos uma representação gráfica no plano sem o cruzamento de arestas.*

Segue-se um exemplo de um grafo não planar e de um grafo planar.

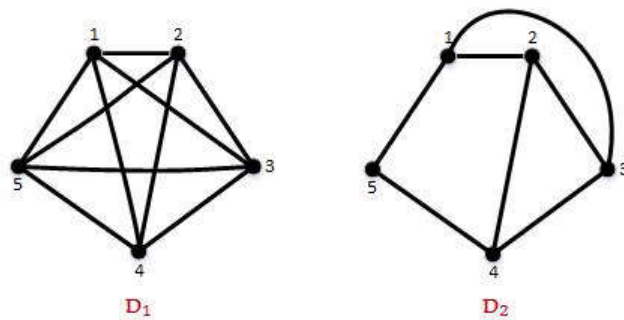


Figura 2.8: Grafo D_1 não planar e grafo D_2 planar.

Definição 2.19 Dado um grafo planar G , o seu dual denotado por G' é obtido ao inserir um vértice em cada superfície de G e uma aresta para cada duas superfícies adjacentes em G .

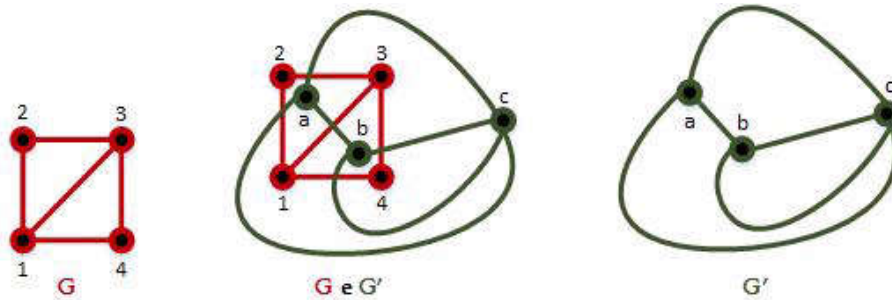


Figura 2.9: Grafo G e o seu dual G'

Definição 2.20 H diz-se um subgrafo de G se $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$. Se $V(H) = V(G)$ então H é um subgrafo gerador de G .

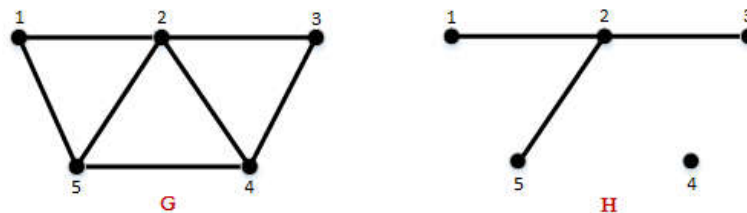


Figura 2.10: Grafo G e um subgrafo gerador de G denotado por H

Definição 2.21 Um grafo direcionado ou orientado é um grafo onde é definido um sentido nas arestas. Um grafo não direcionado é um grafo em que não existem restrições quanto à direção a tomar.

Graficamente, esses grafos poderão ter o seguinte aspeto:

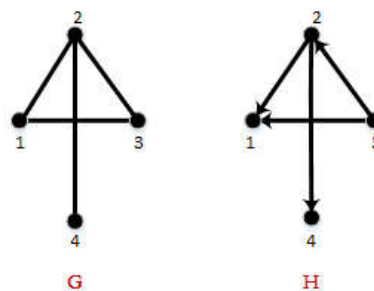


Figura 2.11: Grafo G não direcionado e grafo H direcionado

Definição 2.22 Dados dois grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$, a sua união é o grafo $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$.

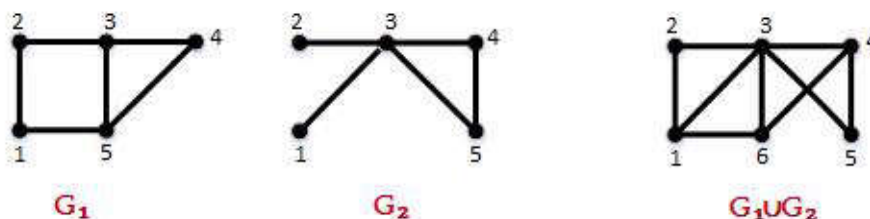


Figura 2.12: União do grafo G_1 com o grafo G_2

Definição 2.23 A excentricidade de um vértice v , designa-se por $\varepsilon(v)$ e é a maior distância¹ entre v e todos os outros vértices.

Definição 2.24 O raio de um grafo G é a excentricidade mínima dos vértices de G e designa-se por $r(G)$, ou seja, $r(G) = \min \varepsilon(v)$.

Definição 2.25 O diâmetro de um grafo G é a excentricidade máxima dos vértices de G e designa-se por $\text{diam}(G)$, ou seja, $\text{diam}(G) = \max \varepsilon(v)$. Quando G é um grafo desconexo escrevemos $\text{diam}(G) = \infty$.

Após a introdução de algumas noções básicas de grafos apresentamos em seguida vários tipos de grafos.

2.3 Tipos de grafos

- **Grafo completo:** é um grafo simples de ordem n , onde cada par de vértices distintos forma uma aresta e cada vértice é adjacente a todos os outros vértices. Um grafo completo de ordem n tem $\frac{n(n-1)}{2}$ arestas e é designado por K_n .

¹A distância entre dois vértices é o comprimento do caminho mais curto entre esses dois vértices.

Seguem-se alguns exemplos de grafos completos:

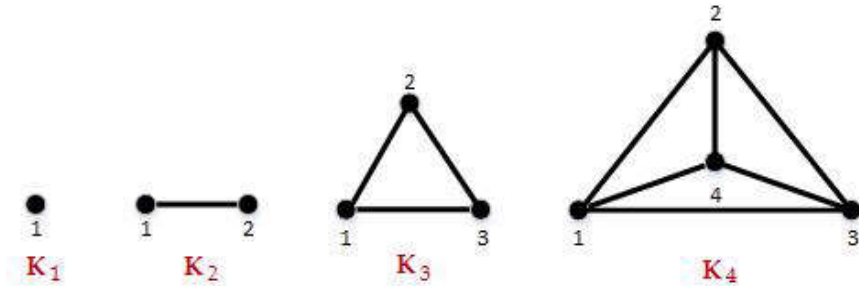


Figura 2.13: Grafos completos K_n

- **Grafo regular de grau r ou r -regular:** é um grafo em que os seus vértices têm o mesmo grau r .

Na Figura 2.14 seguem-se alguns exemplos de grafos regulares.

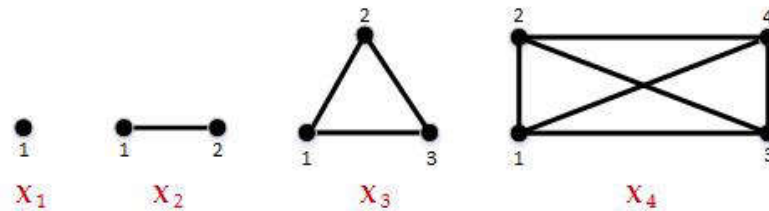


Figura 2.14: Grafos regulares X_n

- **Grafo cíclico:** é um grafo simples onde o número de vértices é igual ao número de arestas e os vértices tem todos grau 2, ou seja cada vértice tem exatamente duas arestas incidentes nele, designaremos por C_n o grafo cíclico com n vértices, onde $n \geq 3$.

Na Figura 2.15 temos vários exemplos de grafos cíclicos.

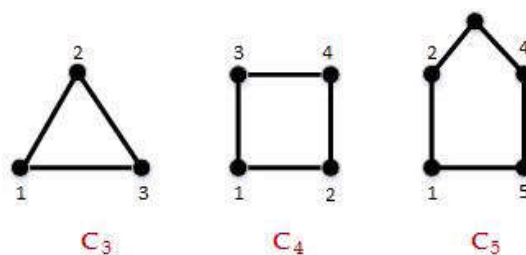


Figura 2.15: Grafos cíclicos C_n

- **Grafos roda:** são obtidos através dos grafos cíclicos adicionando mais um vértice, designado por vértice centro, e ligando-o a todos os outros vértices do grafo. Tais grafos designam-se por W_n , onde n é o número de vértices, com $n \geq 4$. Temos ainda que W_n tem $2(n - 1)$ arestas, o vértice centro tem grau $n - 1$ e os restantes vértices têm grau 3.

Seguem-se dois exemplos de grafos roda, W_4 com 4 vértices e W_5 com 5 vértices.

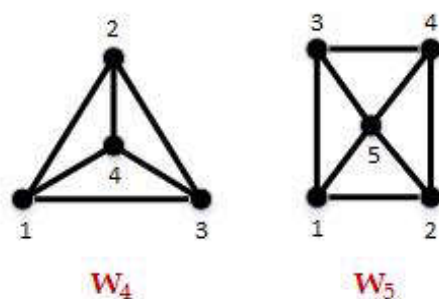


Figura 2.16: Grafos roda W_n

- **Grafo nulo:** é um grafo sem arestas e designa-se por N_n , em que n representa o número de vértices.

Seguem-se exemplos de grafos nulos:

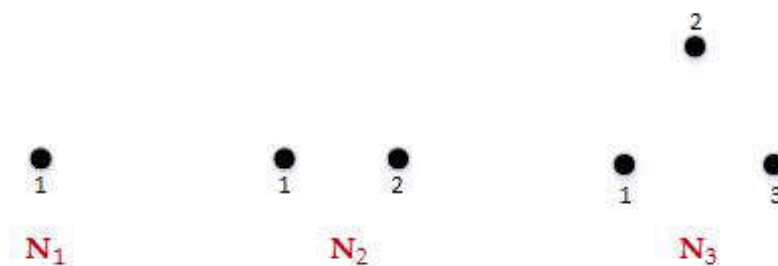


Figura 2.17: Grafos Nulos N_n

- **Grafo bipartido G :** é um grafo cujo conjunto dos vértices V pode ser separado em dois subconjuntos U e W , tal que cada aresta de G tem um vértice em U e outro em W .

Num grafo bipartido não existem loops nem arestas múltiplas.

- **Grafo bipartido completo:** é um grafo onde cada vértice de um subconjunto está ligado a todos os vértices do outro subconjunto. Um grafo bipartido completo que contenha m vértices num subconjunto e n vértices no outro subconjunto é designado por $K_{m,n}$.

Em seguida apresentamos um exemplo de um grafo bipartido e de um grafo bipartido completo, respetivamente.

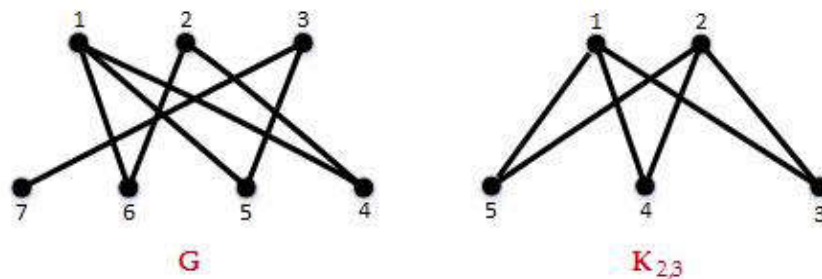


Figura 2.18: Grafo G bipartido com $U = \{1, 2, 3\}$ e $W = \{4, 5, 6, 7\}$ e grafo $K_{2,3}$ bipartido completo com $U = \{1, 2\}$ e $W = \{3, 4, 5\}$

- **Árvore:** é um grafo conexo que não possui ciclos. A uma coleção de árvores chamamos floresta.

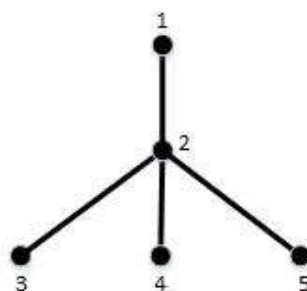


Figura 2.19: Árvore G

Observação 2.26 *Um grafo G conexo com n vértices é uma árvore, se e só se, tiver $n - 1$ arestas.*

Definição 2.27 *Seja G um grafo conexo. Designa-se por árvore gerada (ou árvore suporte) todo o subgrafo de G que é uma árvore e que contém todos os vértices de G .*

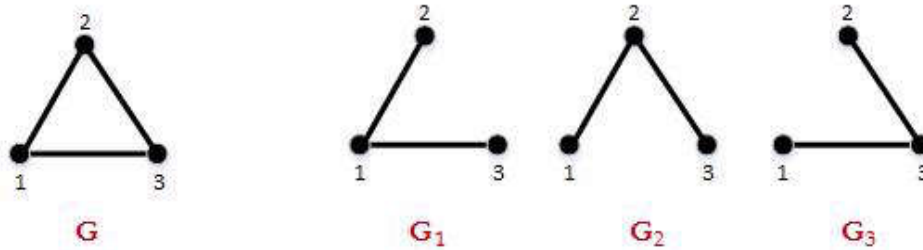


Figura 2.20: Grafo G e as suas árvores geradas G_1, G_2 e G_3

Definição 2.28 Um grafo ponderado ou pesado é um grafo que atribui a cada aresta um número, designado habitualmente por peso.

Definição 2.29 Seja G um grafo conexo e ponderado com n vértices. Chamamos matriz dos pesos do grafo G à matriz, de ordem n , $P(G)$, cujas entradas são definidas por:

$$P_{ij} = \begin{cases} w_{ij}, & \text{se } \{v_i, v_j\} \in E \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases},$$

onde w_{ij} ($i, j = 1, \dots, n$) é o peso da aresta que une o vértice i ao vértice j .

Observação 2.30 A matriz referida na definição 2.26 é sempre uma matriz simétrica.

Exemplo 2.31 Seja G o grafo da Figura 2.21:

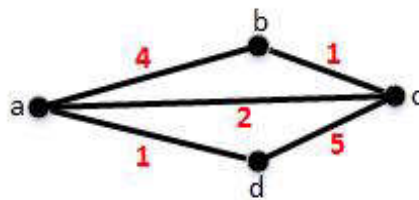


Figura 2.21: Grafo G ponderado

então, a matriz dos pesos $P(G)$ é:

$$P(G) = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Capítulo 3

Álgebra linear

3.1 Introdução

Neste capítulo serão apresentadas algumas noções básicas de álgebra linear, nomeadamente as definições de matriz, determinante de uma matriz, valores próprios, vetores próprios e polinómio característico. Os conceitos deste capítulo podem ser encontrados em [5], [28], [30], [35] e [46].

3.2 Alguns conceitos básicos

A matriz A é uma tabela de $m \times n$ números/símbolos dispostos em m linhas e n colunas, como ilustrado em (3.1). Dizemos que a_{ij} é a entrada ou o elemento presente na linha i e na coluna j da matriz A .

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Uma matriz diagonal consiste numa matriz em que os elementos que estão fora da diagonal principal são iguais a zero. Uma matriz que só possui uma linha é denominada matriz linha, e uma matriz que só possui uma coluna é denominada matriz coluna. Um exemplo de cada uma destas matrizes pode ser visto, respetivamente, nas matrizes B , C e D seguintes. As matrizes linha e as

matrizes coluna são chamadas de vetores.

$$B = \begin{bmatrix} 34 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 23 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 11 & 6 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 55 \\ 3 \\ 7 \\ 21 \end{bmatrix}$$

3.2.1 Matrizes

Igualdade de matrizes

Duas matrizes A e B são iguais quando ambas têm o mesmo número de linhas e o mesmo número de colunas e exatamente as mesmas entradas, isto é, $A = (a_{ij})$ é igual a $B = (b_{ij})$ se, e só se, tanto A como B são matrizes $m \times n$ onde $a_{ij} = b_{ij}$ para cada entrada de escalares nas duas matrizes.

$$A = B \text{ se, e só se, } a_{ij} = b_{ij}, \forall i = 1, 2, \dots, m; \text{ e } j = 1, 2, \dots, n$$

Adição de matrizes

Duas matrizes $m \times n$, podem ser adicionadas de uma forma natural para formar uma nova matriz. Assim, se $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ são duas matrizes $m \times n$, a soma de $A + B$ é uma matriz cujas entradas da linha i e da coluna j são a soma das entradas que estão nestas posições em A e em B , ou seja,

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})$$

Exemplo 3.1 *Considere as matrizes*

$$A = \begin{bmatrix} -9 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -7 \\ -2 & 5 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 1 & 5 & 2 \\ 5 & 0 & -8 \end{bmatrix}$$

Uma vez que A e B são ambas matrizes 3×3 então a soma dessas matrizes existe e é a seguinte:

$$A + B = \begin{bmatrix} -9 + 3 & 1 + 4 & 5 - 6 \\ 2 + 1 & 3 + 5 & -7 + 2 \\ -2 + 5 & 5 + 0 & 4 - 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 5 & -1 \\ 3 & 8 & -5 \\ 3 & 5 & -4 \end{bmatrix}$$

Observação 3.2 *A adição de matrizes só pode ser usada quando o número de linhas e de colunas é o mesmo para todas as matrizes.*

Produto de matrizes

Sejam A e B duas matrizes

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nk} \end{bmatrix}$$

onde A é uma matriz $m \times n$ e B é uma matriz $n \times k$. Então o produto da matriz A com a matriz B resulta na matriz $m \times k$

$$AB = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2k} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mk} \end{bmatrix}$$

A entrada c_{ij} na linha i , coluna j deste produto de matrizes é a soma do produto correspondente às entradas da linha i da matriz A com a coluna j da matriz B . Assim,

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$$

Exemplo 3.3 Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -7 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ então,

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 1 + 3 \times 4 & 2 \times 4 + 3 \times 5 \\ 1 \times 1 + (-7) \times 4 & 1 \times 4 + (-7) \times 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 15 & 23 \\ 27 & 31 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Multiplicação por um escalar

A multiplicação de uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ por um escalar (um número) λ é obtida multiplicando-se cada elemento de A pelo escalar λ , ou seja, $\lambda A = \lambda(a_{ij})$.

Exemplo 3.4 Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ -8 & 3 \end{bmatrix}$ e o escalar $\lambda = -2$. Assim,

$$\lambda A = -2A = \begin{bmatrix} -2 \times 6 & -2 \times 1 \\ -2 \times (-8) & -2 \times 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & -2 \\ 16 & -6 \end{bmatrix}$$

Matriz quadrada

Uma matriz é dita quadrada se tem o mesmo número de linhas e colunas, ou seja, quando podemos dizer que m tem a mesma quantidade de elementos que n . Numa matriz quadrada A de ordem n , a diagonal principal é formada pelos elementos $a_{i,j}$ tais que $i = j$, para $1 \leq i \leq n$. No exemplo abaixo, a diagonal principal da matriz quadrada A é formada pelos seguintes elementos: 1, 1 e 4.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Matriz identidade

Uma matriz quadrada de ordem n é denominada matriz identidade, I_n ou (I) , quando os elementos da sua diagonal principal são iguais a 1 e os demais iguais a 0. O traço de uma matriz identidade é igual a sua ordem, ou seja, $tr(I_n) = n$.

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Observação 3.5 Chamamos de traço de uma matriz quadrada de A , denotado por $tr(A)$, à soma dos elementos da sua diagonal principal.

Matriz transposta

Seja A uma matriz $m \times n$, trocando as linhas de A pelas colunas de A obtemos a chamada matriz transposta de A . Por exemplo, a transposta da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

é

$$A^T = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ -3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Observe que as linhas da matriz A^T são precisamente as colunas da matriz A .

Matriz inversa

Uma matriz quadrada A é dita invertível quando existe outra matriz denotada por A^{-1} , tal que

$$A \times A^{-1} = I = A^{-1} \times A,$$

onde I é a matriz identidade.

Exemplo 3.6 Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ e seja $A^{-1} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}$, então

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2k_{11} + 3k_{21} & 2k_{12} + 3k_{22} \\ k_{11} + 5k_{21} & k_{12} + 5k_{22} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

A igualdade das matrizes anteriores pode ser representada pelo seguinte sistema linear:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2k_{11} + 3k_{21} = 1 \\ 2k_{12} + 3k_{22} = 0 \\ k_{11} + 5k_{21} = 0 \\ k_{12} + 5k_{22} = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \dots \\ \dots \\ k_{11} = -5k_{21} \\ k_{12} = 1 - 5k_{22} \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -10k_{21} + 3k_{21} = 1 \\ 2 - 10k_{22} + 3k_{22} = 0 \\ \dots \\ \dots \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} k_{21} = -\frac{1}{7} \\ k_{22} = \frac{2}{7} \\ k_{11} = \frac{5}{7} \\ k_{12} = -\frac{3}{7} \end{cases}. \end{aligned}$$

Como $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5}{7} & -\frac{3}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{7} & -\frac{3}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ temos que a inversa de A é

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{7} & -\frac{3}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix}.$$

Matriz diagonalizável

Uma matriz quadrada A é dita diagonalizável se existir uma matriz invertível P tal que $P^{-1}AP$ é uma matriz diagonal. Dizemos que P diagonaliza A .

3.2.2 Determinantes

Um determinante é uma função matricial que associa a cada matriz quadrada um escalar. Esta função permite saber se a matriz tem ou não inversa, pois as que não têm são precisamente aquelas cujo determinante é igual a 0. O determinante de uma matriz A representa-se por $\det(A)$ (ou $|A|$).

Determinante de uma matriz de ordem 1

O determinante de uma matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} \end{bmatrix}$ de primeira ordem, é o próprio número que origina a matriz, ou seja, $\det(A) = a_{11}$.

Determinante de uma matriz de ordem 2

O determinante de uma matriz de ordem 2 é a diferença entre o produto dos termos da diagonal principal e o produto dos termos da diagonal secundária. Temos então que,

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Por exemplo, o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ é dado por $2 \times (-1) - 4 \times 5 = -22$.

Determinante de uma matriz de ordem 3

O determinante de uma matriz de terceira ordem pode ser calculado utilizando a regra de Sarrus, que resulta do seguinte cálculo:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{22}a_{31}).$$

Por exemplo, o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ é

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = (1 + (-3) + 16) - (2 + 6 + (-4)) = 10.$$

Determinante de uma matriz de ordem maior ou igual a 4

Teorema 3.7 (Laplace) *O determinante de uma matriz de ordem superior a 3 é calculado pelo teorema de Laplace, que ilustra o seguinte:*

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} \times a_{ij} \times \det(A_{-i-j})$$

ou

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \times a_{ij} \times \det(A_{-i-j}),$$

onde n diz respeito ao número de linhas da matriz, i é a posição em relação às linhas enquanto que j é a posição em relação às colunas e o $\det(A_{-i-j})$ é o determinante da matriz A após ser removida a linha i e a coluna j .

Observação 3.8 *O somatório anterior, ou depende das colunas em relação a uma linha i escolhida, ou depende das linhas em relação a uma coluna j escolhida, portanto, devemos selecionar a linha ou a coluna com maior quantidade de zeros de forma a facilitar os cálculos.*

Por exemplo, para o determinante da matriz A ,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

de ordem 4, escolhendo a coluna 3, pois é a coluna com mais zeros, temos:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{i=1}^4 (-1)^{i+3} \times a_{i3} \times \det(A_{-i-3}) = \\ &= 0 \times (-1)^{1+3} \times \det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} + 2 \times (-1)^{2+3} \times \det \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \\ & 1 \times (-1)^{3+3} \times \det \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} + 0 \times (-1)^{4+3} \times \det \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Uma vez aplicada a regra de Sarrus no cálculo de cada um desses determinantes, facilmente chegamos à conclusão de que $\det(A) = -37$.

Observação 3.9 *Recorde-se que um polinómio de grau n é uma função da forma*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

onde os coeficientes a_0, a_1, \dots, a_n são números reais, aos quais chamamos coeficientes do polinómio. O grau de uma função polinomial corresponde ao valor do maior expoente da variável do polinómio.

A raiz (ou zero) de um polinómio é um número, tal que, atribuído à variável da função polinomial, faz com que a função se anule. Deste modo, se r é uma raiz do polinómio $P(x)$, então $P(r) = 0$. Um polinómio de grau n com $a_n \neq 0$ terá sempre n raízes (reais ou complexas), existindo a possibilidade de repetição de uma mesma raiz.

3.2.3 Valores e vetores próprios

Definição 3.10 *Seja B uma matriz quadrada de ordem n , um vector não nulo \vec{x} designa-se por vector próprio de B se existe um escalar $\theta \in \mathbb{K}$ tal que $B(\vec{x}) = \theta\vec{x}$. Diz-se que \vec{x} é um vector próprio de B associado ao valor próprio θ . Ao conjunto dos valores próprios de B designamos por espectro de B .*

Exemplo 3.11 *Considere a matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$.*

1. *Mostre que $x = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}^T$ não é vector próprio de B .*
2. *Mostre que $y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ é vector próprio de B .*

Resolução:

$$1. Bx = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \neq \theta x$$

x não é vector próprio de B porque não existe nenhum escalar θ , tal que $Bx = \theta x$.

$$2. By = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2y$$

y é o vector próprio associado ao valor próprio 2.

Definição 3.12 Uma matriz quadrada M é semidefinida positiva se a forma quadrática associada $x^T M x \geq 0$, para todo o vetor x não nulo.

Proposição 3.13 Se M é uma matriz semidefinida positiva então M pode ser escrita da forma $B \times B^T$.

Proposição 3.14 Dada uma matriz semidefinida positiva então, todos os valores próprios dessa matriz são não negativos.

3.2.4 Polinómio Característico

Recorde-se que o polinómio característico de uma matriz A de ordem n é o polinómio:

$$P_A(\theta) = \det(\theta I - A)$$

onde I é a matriz identidade e θ são os valores próprios da matriz A , que correspondem às raízes do polinómio.

Definição 3.15 Seja θ_i um valor próprio de A , a multiplicidade algébrica de θ_i ($m_a(\theta_i)$), é a multiplicidade de θ_i como raiz do polinómio característico $P_A(\theta) = \det(\theta I - A)$.

Definição 3.16 Seja θ um valor próprio da matriz A . Chama-se subespaço próprio de θ ao conjunto U_θ formado pela matriz nula e por todos os vetores próprios associados ao valor próprio θ . Assim, o subespaço próprio de um valor próprio θ é constituído pela solução geral do sistema

$$(A - \theta I_n)X = 0.$$

Definição 3.17 Seja θ_i um valor próprio de A , a multiplicidade geométrica de θ_i ($m_g(\theta_i)$), é a dimensão do respetivo subespaço próprio.

A multiplicidade geométrica de θ_i é sempre menor ou igual à multiplicidade algébrica de θ_i .

Definição 3.18 Os menores principais de uma matriz A de dimensão $n \times n$ são os determinantes das submatrizes

$$\begin{bmatrix} a_{11} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \dots, A$$

Teorema 3.19 (Cayley-Hamilton) - Se A é uma matriz quadrada de ordem n e $P(\theta) = \det((\theta I - A))$ é o polinómio característico de A , então $P(A) = 0$.

Teorema 3.20 (Perron-Frobenius). Se A é uma matriz quadrada e $A > 0$, então

- (i) $\theta(A) > 0$;
- (ii) $\theta(A)$ é valor próprio de A ;
- (iii) Existe um vetor x tal que $Ax = \theta(A)x$, para $x > 0$;
- (iv) $\theta(A)$ é um valor próprio algebricamente (e, dessa forma, geometricamente) simples;
- (v) $|\lambda| < \theta(A)$ para todo o valor próprio de A , tal que $\lambda \neq \theta(A)$, ou seja, $\theta(A)$ é o único valor próprio de maior módulo;
- (vi) $[\theta(A)^{-1}A]^m \rightarrow H$ quando $m \rightarrow \infty$, onde $H = xy^T$, $A(x) = \theta(A)x$, $A^T y = \theta(A)y$, para $x > 0$, $y > 0$ e $x^T y = 1$.

A demonstração deste teorema pode ser vista em [46].

Definição 3.21 Se M é uma matriz quadrada, denotamos por $M(i, j)$ a matriz obtida pela eliminação da linha i e da coluna j de M . Definimos cofator (i, j) de M como o valor

$$(-1)^{i+j} \det M(i, j).$$

À matriz transposta dos cofatores de M chamamos de matriz adjunta de M e é denotada por $adj(M)$, ou seja, a entrada (i, j) da $adj(M)$ é o cofator (j, i) de M .

Propriedades da matriz adjunta:

As seguintes propriedades são válidas para todas as matrizes $K_{n \times n}$.

1. $adj(I) = I$, onde I é a matriz identidade;
2. $adj(0) = 0$, em que 0 é a matriz nula;
3. $adj(AB) = adj(B) \times adj(A)$;
4. $adj(A^T) = adj(A)^T$;

5. $A \times adj(A) = adj(A) \times A = det(A) \times I$;
6. $adj(\lambda A) = \lambda^{n-1}adj(A)$ em que $\lambda \in \mathbb{R}$;
7. $det(adj(A)) = (det(A))^{n-1}$;
8. $adj(adj(A)) = (det(A))^{n-2}A$, para o caso particular de A ser 2×2 resulta em $adj(adj(A)) = A$.

Com os conceitos introduzidos apresentaremos, no capítulo seguinte, a representação matricial associada a um grafo.

Capítulo 4

Representação matricial de um grafo

4.1 Introdução

A representação matricial de um grafo é uma alternativa muito sugestiva, quer pela sua componente visual quer pela componente algébrica. Três dessas representações, a matriz de adjacência, a matriz de incidência e a matriz laplaciana serão apresentadas e exemplificadas neste capítulo. As referências bibliográficas aconselhadas para o leitor seguir este capítulo são [2], [5] [13], [15], [35], [37] e [42].

4.2 Matriz de adjacência

Uma matriz de adjacência é uma das várias formas de representação de um grafo. Nesta secção vamos abordar a matriz de adjacência e estudar algumas das suas propriedades.

Definição 4.1 *Seja $G = (V, E)$ um grafo simples e não direcionado com um conjunto de vértices $V = \{v_1, \dots, v_n\}$. A matriz de adjacência, A_G , associada é uma matriz simétrica e quadrada $n \times n$, tal que*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } v_i \text{ e } v_j \text{ são adjacentes} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} .$$

Exemplo 4.2 Seja W o grafo da Figura 4.1.

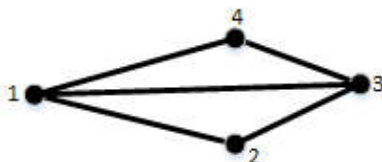


Figura 4.1: Grafo simples W

A sua matriz de adjacência é

$$A_W = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Definição 4.3 A matriz de adjacência de um multigrafo $G = (V, E)$, onde $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ é a matriz cujas entradas são definidas por:

$$a_{ij} = \begin{cases} \text{o número de arestas entre } v_i \text{ e } v_j, \text{ se } v_i \neq v_j \\ \text{o número de loops em } v_i, \text{ se } v_i = v_j \end{cases}$$

Exemplo 4.4 Consideremos o grafo G na Figura 4.2.

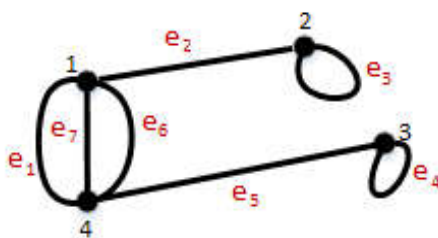


Figura 4.2: Pseudografo G

A sua matriz de adjacência é

$$A_G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Proposição 4.5 *Dado um grafo G simples, a soma dos elementos de cada linha da sua matriz de adjacência é igual ao grau do vértice correspondente.*

Proposição 4.6 *Se A_G é uma matriz simétrica, então as raízes do seu polinómio característico são reais.*

Definição 4.7 *O polinómio característico de um grafo G está associado à matriz de adjacência desse mesmo grafo, e define-se por $P_G(\theta) = \det(\theta I - A_G)$*

Exemplo 4.8 *Considerando o grafo e a matriz de adjacência da Figura 4.2 temos,*

$$\theta I - A_G = \begin{bmatrix} \theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \theta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta & -1 & 0 & -3 \\ -1 & \theta - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta - 1 & -1 \\ -3 & 0 & -1 & \theta \end{bmatrix}.$$

Pelo teorema de expansão de Laplace (3.7) para determinantes, temos

$$\begin{aligned} \det(\theta I - A_G) &= (\theta - 1) \times C_{33} + (-1) \times C_{43} \\ &= (\theta - 1) \times (-1)^{3+3} \times \begin{bmatrix} \theta & -1 & -3 \\ -1 & \theta - 1 & 0 \\ -3 & 0 & \theta \end{bmatrix} + \\ &\quad (-1) \times (-1)^{4+3} \times \begin{bmatrix} \theta & -1 & -3 \\ -1 & \theta - 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e, utilizando a regra de Sarrus para calcular o determinante de matrizes quadradas de ordem 3, obtemos:

$$\begin{aligned} &= (\theta - 1) \times (\theta^3 - \theta^2 - 10\theta + 9) - \theta^2 + \theta + 1 \\ &= \theta^4 - 2\theta^3 - 10\theta^2 + 20\theta - 8. \end{aligned}$$

Assim, o polinómio característico do pseudografo G é:

$$P_G(\theta) = \theta^4 - 2\theta^3 - 10\theta^2 + 20\theta - 8.$$

Proposição 4.9 *Sejam G um grafo simples com n vértices e m arestas e*

$$P_G(\theta) = \theta^n + a_1\theta^{n-1} + a_2\theta^{n-2} + \dots + a_{n-1}\theta + a_n$$

o seu polinómio característico então, os coeficientes de $P_G(\theta)$ satisfazem as seguintes condições:

- (i) $a_1 = 0$;
- (ii) $a_2 = -m$;
- (iii) $a_3 = -2t$, onde t corresponde ao número de triângulos presentes em G ;
- (iv) $a_n = (-1)^n \times \det(A_G)$.

Demonstração: Com base na álgebra linear, sabemos que o polinómio característico pode ser calculado utilizando menores principais, portanto $(-1)^i a_i$ é igual à soma dos menores principais de A_G com i linhas e i colunas. Um menor principal da matriz de adjacência (A_G) com i linhas e i colunas é o determinante de qualquer submatriz principal de A_G retirando $n - i$ linhas e as respectivas $n - i$ colunas. Assim,

- (i) Uma vez que a diagonal da matriz de adjacência de um grafo sem loops é formada por zeros, então todos os menores principais com uma linha e uma coluna são zero. Portanto, $a_1 = 0$.
- (ii) Qualquer menor principal de A_G com duas linhas e duas colunas que tenha entradas não nulas, é escrito na forma $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ onde o seu determinante é -1 . Como cada menor principal é igual a -1 , e existe um menor principal para cada par de vértices adjacentes, então temos que

$$(-1)^2 a_2 = (-1) \times |E| = -1 \times m$$

Logo $a_2 = -m$, onde m corresponde ao número de arestas do grafo G .

- (iii) As seis possibilidades de menores principais com 3 linhas e 3 colunas são

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \text{ e } \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Destes seis, apenas o primeiro tem determinante não nulo, cujo valor é 2, e representa 3 vértices adjacentes entre si, ou seja, um triângulo. Como o determinante dessa submatriz é 2, temos que $(-1)^3 a_3 = 2 \times t$, ou seja, $a_3 = -2t$, onde t é o número de triângulos.

- (iv) Como o menor principal com n linhas e n colunas coincide com a matriz de adjacência A_G , logo $(-1)^n a_n = \det(A_G)$, isto é, $a_n = (-1)^n \times \det(A_G)$.

■

Proposição 4.10 *Se G é a união de dois grafos disjuntos G_1 e G_2 , então*

$$P_G(\theta) = P_{G_1}(\theta) \times P_{G_2}(\theta).$$

Em particular, se G_1, G_2, \dots, G_n são as componentes conexas (qualquer subgrafo conexo maximal do grafo em estudo) de um grafo G então

$$P_G(\theta) = P_{G_1}(\theta) \times P_{G_2}(\theta) \times \dots \times P_{G_n}(\theta).$$

Demonstração: Seja A_{G_i} a matriz de adjacência de um grafo G_i ($i = 1, 2$). Então a matriz de adjacência associada ao grafo $G = G_1 \cup G_2$ é

$$A_G = \begin{bmatrix} A_{G_1} & 0_{n_1 \times n_2} \\ 0_{n_2 \times n_1} & A_{G_2} \end{bmatrix},$$

onde n_i é o número de vértices do grafo G_i . Uma vez que não existem arestas entre os vértices de G_1 e de G_2 , então a diagonal secundária da matriz A_G é constituída por entradas nulas.

Assim, $\det(A_G) = \det(A_{G_1}) \times \det(A_{G_2})$. Consequentemente o polinómio característico do grafo G é

$$\begin{aligned} P_G(\theta) &= \det(\theta I_{n_1+n_2} - A_G) \\ &= \det(\theta I_{n_1} - A_{G_1}) \times \det(\theta I_{n_2} - A_{G_2}) \\ &= P_{G_1}(\theta) \times P_{G_2}(\theta). \end{aligned}$$

■

4.3 Matriz de incidência

Como já referimos, outra das possíveis representações matriciais de um grafo é a matriz de incidência, que apresentaremos nesta secção. A matriz de incidência de um grafo descreve as relações de incidência das arestas nos vértices de um grafo. A sua importância teórica surge nalgumas propriedades relacionadas com resultados referentes à matriz Laplaciana que estudaremos na secção seguinte.

Definição 4.11 A matriz de incidência de um grafo $G = (V, E)$ é a matriz I_G (ou $I(G)$) cujas linhas e colunas são indexadas por uma ordem de $V(G)$ e $E(G)$ respectivamente, tal que:

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } v_i \text{ não é vértice terminal da aresta } e_j; \\ 1, & \text{se } v_i \text{ é vértice terminal da aresta } e_j; \\ 2, & \text{se } e_j \text{ é um loop.} \end{cases}.$$

Exemplo 4.12 Considerando o grafo H na Figura 4.3.

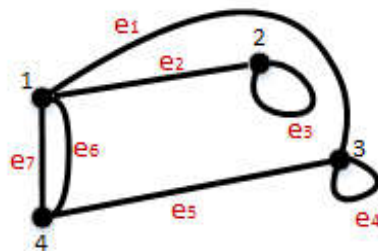


Figura 4.3: Grafo H

A sua matriz de incidência é

$$I_G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Proposição 4.13 A soma dos elementos de cada linha de uma matriz de incidência é igual ao grau do vértice correspondente.

Proposição 4.14 A soma dos elementos de cada coluna de uma matriz de incidência é igual a 2.

4.4 Matriz laplaciana

Nesta secção introduzimos o conceito de matriz laplaciana de um grafo. Trata-se de uma matriz não negativa, simétrica e semidefinida positiva.

4.4.1 Conceitos básicos

Apresentaremos alguns conceitos básicos relativos à matriz laplaciana.

Definição 4.15 *Seja G um grafo com n vértices. Sejam D a matriz diagonal cujas entradas $D_{ii} = \deg(v_i)$, A_G a matriz de adjacência de G . Definimos a matriz laplaciana de G como sendo:*

$$L_G = D - A_G = \begin{cases} \deg(v_i), & \text{se } i = j \\ -1, & \text{se } i \neq j \text{ e } v_i \text{ é adjacente a } v_j \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} .$$

Exemplo 4.16 *Seja P o grafo da Figura 4.4.*

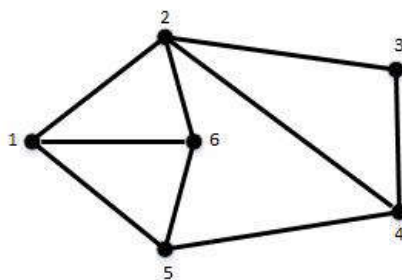


Figura 4.4: Grafo P

Então, a sua matriz laplaciana é

$$L_P = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} .$$

Proposição 4.17 *Dado um grafo G simples, a soma dos elementos de cada linha da sua matriz laplaciana é igual a zero.*

Definição 4.18 *Seja G um grafo e L_G a respectiva matriz laplaciana, então o seu polinómio característico é definido como*

$$P_{L_G}(\mu) = \det(\mu I - L_G).$$

Proposição 4.19 *A matriz laplaciana L_G de um grafo G pode ser escrita como o produto de uma matriz pela sua transposta. Logo, L_G é uma matriz semidefinida positiva.*

Demonstração: Sejam n o número de vértices e $e(G)$ o número de arestas de um grafo G . Seja I_G a matriz de incidência com respeito a uma ordenação dada, e seja I_G^T a sua transposta. Definimos esta matriz de incidência I_G de ordem $n \times e(G)$, como:

$$b_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{se } e_j \text{ é incidente a } v_i \text{ e } v_k \text{ e } i < k \\ -1, & \text{se } e_j \text{ é incidente a } v_i \text{ e } v_k \text{ e } i > k \\ 0, & \text{caso } e_j \text{ não seja incidente a } v_i \end{cases} .$$

Seja F a matriz resultante do produto $I_G \times I_G^T$ formada por elementos que são obtidos através do produto interno entre as linhas i e j da matriz I_G . A linha i da matriz I_G possui exatamente $d(v_i)$ elementos não nulos.

Na matriz resultante F , caso $i = j$ então $f_{i,i} = d(v_i)$, pois o número 1 é somado $d(v_i)$ vezes. No caso de $i \neq j$ então ao fazermos o produto interno teremos duas situações possíveis: ou v_i e v_j são adjacentes e neste caso $f_{i,j} = -1$, ou v_i e v_j não são adjacentes e nesse caso $f_{i,j} = 0$. Sendo assim a matriz $I_G \times I_G^T$ é igual a matriz laplaciana do grafo G , L_G .

Assim, como a matriz L_G pode ser escrita como o produto de uma matriz pela sua transposta então, L_G é uma matriz semidefinida positiva e portanto possui todos os valores próprios reais e não negativos. ■

Lema 4.20 *Dado um grafo G com n vértices e seja I_G a matriz de incidência com respeito a uma orientação dada. Então a característica $\text{car}(I_G)$ da matriz I_G é $n - \psi$, onde ψ é o número de componentes conexas de G .*

Demonstração: Sejam G_1, \dots, G_ψ as componentes conexas do grafo G , cada G_i com n_i vértices. Então I_G tem uma decomposição em blocos de modo que, para cada i , $1 \leq i \leq \psi$, $I_G^{(i)}$ é a matriz de incidência (com respeito à orientação fixada) da i -ésima componente conexa de G . Assim,

$$I_G = \begin{bmatrix} I_G^{(1)} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I_G^{(2)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & I_G^{(w-1)} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & I_G^{(w)} \end{bmatrix} .$$

Para cada i , $1 \leq i \leq \psi$, como a soma dos elementos de cada coluna de $I_G^{(i)}$ é nula, a característica desta matriz é, no máximo, $n_i - 1$, e portanto, $\text{car}(I_G) \leq n - \psi$. Para concluirmos que $\text{car}(I_G) = n - \psi$, basta então mostrar que $\text{car}(I_G^{(i)}) = n_i - 1$ para cada i , $1 \leq i \leq \psi$. ■

Lema 4.21 *Seja L_G a matriz laplaciana de um grafo G com n vértices, então $\text{car}(L_G)$ é $n - \psi$, onde ψ é o número de componentes conexas de G .*

Demonstração: Com base no Lema 4.21 e na Proposição 4.19 temos que a característica de L é igual à característica da matriz de incidência I_G , isto é, como $L = I_G I_G^T$, então $\text{car}(L) = \text{car}(I_G)$. ■

Lema 4.22 *Sejam A e B duas matrizes tais que $A = B \times B^T$, então a característica de A é igual à característica de B^T .*

Demonstração: Usando as propriedades das matrizes, em que

$$\begin{aligned} \text{car}(M) &= \text{car}(M^T) \\ \text{car}(M) &= \text{car}(M \times M^T) \end{aligned}$$

temos,

$$\text{car}(A) = \text{car}(B \times B^T) = \text{car}(B) = \text{car}(B^T).$$

■

Proposição 4.23 *Dado um grafo G , sejam $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n$ os valores próprios da matriz laplaciana L_G , então*

1. $\mu_n = 0$;
2. G é conexo, se e só se, $\mu_{n-1} > 0$;
3. A multiplicidade algébrica do valor próprio 0 é igual ao número de componentes conexas de G .

Demonstração: 1. Podemos observar pela Proposição 4.17 que para cada linha da matriz laplaciana temos uma entrada que corresponde ao grau do vértice representado por essa linha e temos nessa mesma linha a mesma quantidade de entradas com valor -1 , cuja soma é igual a zero. Ou seja, tendo em conta um vetor próprio associado $\mathbf{1} = [1, 1, \dots, 1]^T$ temos, $L \cdot \mathbf{1} = 0 = 0 \cdot \mathbf{1}$. Assim, o número zero é valor próprio e, como visto na Proposição 3.14 todos os valores

próprios da matriz laplaciana são não negativos, pelo que todos eles serão maiores ou iguais a zero. Logo, $u_n = 0$.

2. Supondo que G é conexo, seja I_G a matriz de incidência e seja z um vetor tal que $I_G^T z = 0$. Como cada linha de I_G^T tem apenas duas entradas não nulas, 1 e -1 , é necessário que $z_i = z_j$ nas respetivas posições, uma vez que elas decorrem devido ao facto de v_i e v_j serem adjacentes. Como o grafo G é conexo então $z = z_1 \mathbf{1}$, ou seja, a dimensão do espaço nulo de I_G^T é 1.

Sabemos através do Lema 4.21 que a característica de I_G^T é $n - 1$. Portanto, uma vez que o Lema 4.22 diz que a característica de L_G é igual à característica de I_G^T temos que a nulidade de L_G é 1. Por fim concluímos que como só há um valor próprio zero, então os restantes são positivos.

3. No caso do grafo G ser não conexo, temos que aplicar o resultado para cada uma das componentes conexas de G . Cada uma dessas componentes terá um valor próprio zero. Assim, G possui a união desses valores próprios, ou seja, o espectro de G possui tantos zeros quanto o número de componentes conexas.

■

Observação 4.24 *Vimos na Proposição 4.23 que um grafo é conexo se, e somente se, μ_{n-1} é positivo. Este valor é denominado por conectividade algébrica e denota-se por $\alpha(G)$.*

Proposição 4.25 *Seja G um grafo com n vértices e m arestas e sejam*

$$\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_n$$

os seus valores próprios laplacianos, então

$$\sum_{i=1}^n \mu_i = 2m = \text{tr}(L).$$

Demonstração: Sabemos que a soma das raízes do polinómio característico é igual ao traço da matriz, sendo que cada uma das m arestas do grafo será contada duas vezes na soma dos graus, uma para cada vértice ao qual a aresta incide, ou seja,

$$\sum_{i=1}^n d(v_i) = 2m = \sum_{i=1}^n \mu_i.$$

■

Como $\sum_{i=1}^n d(v_i) = \sum_{i=1}^n \mu_i$ então daqui concluímos que a média dos valores próprios laplacianos é igual a média dos graus dos vértices ($\bar{d} = \frac{2m}{n}$).

Caso G seja uma árvore conexa, então

$$\sum_{i=1}^n \mu_i = 2(n-1).$$

Capítulo 5

Espectro de um grafo

5.1 Introdução

A teoria espectral de grafos estuda as propriedades de um grafo através das suas representações matriciais e dos seus respetivos espectros, ou seja, relaciona propriedades algébricas do espectro de certas matrizes associadas a um grafo e as propriedades estruturais desse grafo. Para o desenvolvimento deste capítulo utilizamos as seguintes obras [1], [12], [16]-[26], [34], [39], [47], [51] e [53].

5.2 Espectro de um grafo

Os vários conceitos apresentados nesta secção referem-se a grafos simples e finitos.

Definição 5.1 *Seja G um grafo, o espectro de G , denotado por $\text{spect}(G)$, é o multiconjunto¹ das raízes do polinómio característico, isto é, os valores próprios da matriz de adjacência A_G tendo em conta as suas respectivas multiplicidades.*

O polinómio característico de um grafo é único, conseqüentemente o espectro de um grafo é também único. Habitualmente, representamos o espectro por ordem decrescente, isto é, $\theta_1 \geq \theta_2 \geq \dots \geq \theta_n$ numa matriz linha. O espectro também pode ser representado na forma matricial de duas linhas, onde na primeira linha ficam os valores próprios e na segunda linha ficam as suas respetivas multiplicidades algébricas, ou seja,

¹Multiconjunto é uma generalização de um conjunto que permite repetições de elementos.

$$\text{spect}(G) = \begin{bmatrix} \theta_1 & \dots & \theta_n \\ m_a(\theta_1) & \dots & m_a(\theta_n) \end{bmatrix}.$$

Definição 5.2 Dado um grafo G , o raio espectral denotado por $\rho(G)$ é um número real não negativo, tal que $\rho(G) = \max_{1 \leq i \leq n} |\theta_i|$, onde θ_i diz respeito aos valores próprios de G .

Observação 5.3 O maior valor próprio do espectro do grafo G também pode ser designado por índice de G e representado por $\text{ind}(G)$.

Exemplo 5.4 Consideremos o grafo M da Figura 5.1.

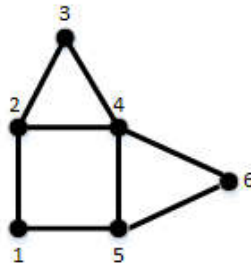


Figura 5.1: Grafo simples M

A sua matriz de adjacência é

$$A_M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e, o seu polinómio característico é

$$P_M(\theta) = \theta^6 - 8\theta^4 - 4\theta^3 + 11\theta^2 + 4\theta - 4.$$

Assim, calculando as raízes do polinómio temos o espectro do grafo M :

$$\text{spect}(A_M) = \begin{bmatrix} 2.81 & 1.0 & 0.53 & -1 & -1.34 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto, temos que $\text{ind}(M) = 2.81$.

Definição 5.5 Dado um grafo G , o espectro da matriz laplaciana L_G , denotado por $\text{spect}(L_G)$, é a matriz-linha cujos elementos são todos os valores próprios de L_G . Assim, se $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n$ são os valores próprios de L_G , então

$$\text{spect}(L_G) = (\mu_1, \dots, \mu_n).$$

Exemplo 5.6 Consideremos o grafo da Figura 4.4. Temos que:

$$P_{L_P}(\mu) = \det(\mu I - L_P)$$

$$\begin{aligned} &= \det \left(\begin{bmatrix} \mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \right) \\ &= \det \begin{bmatrix} \mu - 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & \mu - 4 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \mu - 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \mu - 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \mu - 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & \mu - 3 \end{bmatrix} \\ &= \mu^6 - 18\mu^5 + 125\mu^4 - 416\mu^3 + 656\mu^2 - 384\mu. \end{aligned}$$

Assim, calculando as raízes desse polinómio obtemos o espectro de L_P ,

$$\text{spect}(L_P) = \begin{bmatrix} 5.5616 & 4 & 3 & 1.4384 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

5.3 Espectro de alguns tipos de grafos

Apresentaremos alguns casos particulares que relacionam a matriz de adjacência e a matriz de Laplace com a teoria espectral de grafos.

5.3.1 Casos particulares que relacionam a matriz de adjacência com a teoria espectral de grafos

Proposição 5.7 Seja G um grafo regular de grau r , então:

- (i) r é um valor próprio de G ;
- (ii) G é um grafo conexo se, e somente se, r tem multiplicidade 1;
- (iii) para todos os valores próprios θ de G temos que $|\theta| \leq r$.

Demonstração: (i) Seja $\mathbf{1}$ o vetor coluna $\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}^T$ com n linhas. Como G é um grafo regular de grau r então a soma das entradas de cada linha da matriz de adjacência A_G é r , ou seja,

$$A_G \times \mathbf{1} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1,j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{n,j} \end{bmatrix} \times \mathbf{1} = \begin{bmatrix} r \\ \vdots \\ r \end{bmatrix} \times \mathbf{1} = r \times \mathbf{1}.$$

Daqui se conclui que r é um valor próprio de G .

(ii) Seja $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{bmatrix}^T$ um vetor próprio associado ao valor próprio r de G ($A\mathbf{y} = r\mathbf{y}$) e seja y_s uma entrada de \mathbf{y} com valor absoluto máximo, isto é, $|y_s| \geq |y_i|$ para todo i . Temos que $A(y_s) = \sum y_s$, onde o somatório é considerado sobre os r vértices v_i que são adjacentes a v_s . Assim, $\sum y_i = ry_s$. Daí resulta que para cada k , tal que, v_k é adjacente a v_s ,

$$|y_s| + (r - 1)|y_s| = \left| \sum y_i \right| \leq \sum |y_i| \leq |y_k| + (r - 1)|y_s|.$$

Logo, $|y_s| \leq |y_k|$ e, como y_s é uma entrada de \mathbf{y} com valor absoluto máximo, então $y_s = y_k$ para todos os r vértices. Supondo que o grafo G é conexo, então todos os vértices estão ligados uns aos outros por algum caminho, logo percorrendo esse caminho, concluimos que todos os $|y_i|$ são iguais a $|y_s|$. Então \mathbf{y} é múltiplo de $\mathbf{1}$ e o espaço próprio associado ao valor próprio r tem dimensão 1.

Suponhamos agora que r possui multiplicidade 1. Se G é desconexo, tomemos G_1, G_2, \dots, G_m as componentes conexas de G . Como cada uma dessas componentes é um grafo conexo regular de grau r então, r é valor próprio de multiplicidade 1 para cada G_i . Mas como vimos anteriormente, $P_G(\theta) = P_{G_1}(\theta) \times P_{G_2}(\theta) \times \dots \times P_{G_m}(\theta)$. Segue que r é valor próprio de G com multiplicidade m , contrariando a hipótese. Logo, G é conexo.

(iii) Seja \mathbf{x} um vetor não nulo de G associado a um valor próprio θ de G e seja x_s uma entrada de \mathbf{x} com valor absoluto máximo. Como em (ii), temos $\sum x_i = \theta x_s$ e $|\theta| |x_s| = \left| \sum x_i \right| \leq r |x_s|$, logo, $|\theta| \leq r$ para qualquer valor próprio θ de G . ■

Proposição 5.8 *Se G é um grafo conexo então o número de valores próprios distintos existentes na matriz de adjacência A_G é no mínimo $\text{diam}(G) + 1$.*

Demonstração: Sejam $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ os valores próprios distintos que existem em G . Sabemos que a matriz de adjacência de um grafo simples é uma matriz simétrica e real, portanto o seu polinómio terá no mínimo grau n , isto é

$$(A - \theta_1 I)(A - \theta_2 I) \dots (A - \theta_n I) = 0.$$

Com isto concluímos que A^n é uma combinação linear de $I, A, A^2, \dots, A^{n-1}$. Suponhamos agora que $n \leq \text{diam}(G)$ e tomemos u e v dois vértices de G tais que $d(u, v) = n$. Assim, $(A^i)_{uv} = 0$ para todo i com $0 \leq i \leq n-1$ e $(A^n)_{uv} > 0$, o que é uma contradição. Temos então que $n \geq \text{diam}(G) + 1$. ■

Definição 5.9 *Seja A_G a matriz de adjacência de um grafo G , então a matriz de adjacência do seu complementar \bar{G} pode ser expressa por*

$$A_{\bar{G}} = J - I - A_G,$$

onde J é a matriz quadrada de ordem n cujas entradas são todas iguais a 1 e I é a matriz identidade de ordem n .

Proposição 5.10 *Seja G um grafo regular de grau r com n vértices e valores próprios $\theta_1 \geq \dots \geq \theta_n$, então os valores próprios do seu complementar \bar{G} são:*

$$n - r - 1, -1 - \theta_n, -1 - \theta_{n-1}, \dots, -1 - \theta_2,$$

respetivamente, e associados aos correspondentes vetores próprios de G .

Demonstração: Seja $\{1, u_2, u_3, \dots, u_n\}$ uma base ortogonal de vetores próprios de A_G associados aos valores próprios $r, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_n$ respetivamente. Sabemos que em grafos regulares de grau r a soma das entradas de cada linha da sua matriz de adjacência é r . Assim, como $A_G \mathbf{1} = r \mathbf{1}$ temos,

$$A_{\bar{G}} \mathbf{1} = (J - I - A_G) \times \mathbf{1} = (n - r - 1) \times \mathbf{1}$$

e portanto, $\mathbf{1}$ é um vetor próprio associado ao valor próprio $n - r - 1$ de \bar{G} . Temos ainda que para cada i , $2 \leq i \leq n$

$$A_{\bar{G}} \times u_i = (J - I - A_G) \times u_i = -u_i - \theta_i \times u_i = (-1 - \theta_i) \times u_i,$$

de onde se conclui que u_i é um vetor próprio associado ao valor próprio $-1 - \theta_i$ de \bar{G} . ■

Observação 5.11 Como os vetores $\mathbf{1}$ e u_i são ortogonais ($\langle \mathbf{1}, u_i \rangle = 0$) então, a parcela $J \times u_i$ tem resultado nulo.

Exemplo 5.12 Consideremos o seguinte grafo regular de grau 3,

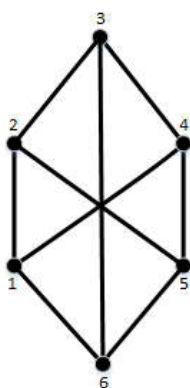


Figura 5.2: Grafo G regular com $r = 3$

A sua matriz de adjacência A_G é

$$A_G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

com $P_G(\theta) = \theta^6 - 9\theta^4$ e valores próprios $\begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 & \theta_5 & \theta_6 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$.

Usando a Proposição 5.10 obtemos os seguintes valores próprios do complementar de G :

$$\begin{bmatrix} \bar{\theta}_1 & \bar{\theta}_2 & \bar{\theta}_3 & \bar{\theta}_4 & \bar{\theta}_5 & \bar{\theta}_6 \\ n-r-1 & -1-\theta_n & -1-\theta_{n-1} & -1-\theta_{n-2} & -1-\theta_{n-3} & -1-\theta_{n-4} \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} \bar{\theta}_1 & \bar{\theta}_2 & \bar{\theta}_3 & \bar{\theta}_4 & \bar{\theta}_5 & \bar{\theta}_6 \\ 2 & 2 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Recorrendo à matriz de adjacência do complementar do grafo G , que é dada por $A_{\bar{G}} = J - I - A_G$, então

$$\begin{aligned} \bar{A}_G &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Concluimos que o polinómio característico do complementar \bar{G} é

$$P_{\bar{G}}(\theta) = \theta^6 - 6\theta^4 - 4\theta^3 + 9\theta^2 + 12\theta + 4$$

e, os valores próprios são

$$\begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 & \theta_5 & \theta_6 \\ 2 & 2 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix},$$

como tínhamos verificado utilizando a Proposição 5.10.

Proposição 5.13 *Sejam G um grafo simples, $p_{ij}(h)$ o número de caminhos, de comprimento h , entre os vértices v_i e v_j do grafo G , A_G^h a matriz de adjacência do grafo G associada aos caminhos de comprimento h e a_{ij}^h as suas entradas, então, $a_{ij}^h = p_{ij}(h)$.*

Demonstração: Para $h = 0$, admitimos que $A_G^0 = I$, ou seja,

$$a_{ij}^0 = p_{ij}(0) = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j \\ 1, & \text{se } i = j \end{cases}.$$

Para $h = 1$, é fácil concluir que como os caminhos de comprimento um entre v_i e v_j são as arestas, então a existência delas é indicada pela entrada a_{ij} da matriz de adjacência A_G , por definição.

Agora supondo por indução que o resultado se verifica para $h = k$, com $k \geq 1$, vamos considerar $A_G^{k+1} = A_G^k A_G$. Então para qualquer que seja $i, j \in V(G)$, temos que

$$a_{ij}^{k+1} = \sum_{r=1}^n a_{ir}^k a_{rj} = \sum_{r=1}^n p_{ir}(k) a_{rj} = p_{ij}(k+1).$$

■

Corolário 5.14 *Sejam $\theta_1 \geq \theta_2 \geq \dots \geq \theta_n$ os valores próprios da matriz de adjacência A_G com n vértices e m arestas, e seja T_h o número de caminhos de comprimento h em G , então:*

(i) *A soma dos valores próprios é igual a zero, ou seja, $\sum_{i=1}^n \theta_i = 0$;*

(ii) $T_h = \text{tr}(A_G^h) = \sum_{i=1}^n \theta_i^h$;

(iii) *A soma dos quadrados dos valores próprios é duas vezes o número de arestas, ou seja, $T_2 = \text{tr}(A_G^2) = 2m$;*

(iv) *Se G é um grafo regular de grau r então $T_2 = \sum_{i=1}^n \theta_i^2 = rn = 2m$;*

(v) *A soma dos cubos dos valores próprios é seis vezes o número de triângulos, ou seja $T_3 = \text{tr}(A_G^3) = 6t$;*

Exemplo 5.15 *Usando a Figura 5.2 vamos mostrar que as propriedades do Corolário 5.14 são verdadeiras para $h = 2$.*

Temos que,

$$A_G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e, os seus valores próprios são

$$\begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 & \theta_5 & \theta_6 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$(i) \sum_{i=1}^6 \theta_i = 3 + (-3) = 0;$$

$$(ii) \text{ Temos que } A_G^2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \text{ pelo que:}$$

$$\text{tr}(A^2) = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 18 \text{ e } \sum_{i=1}^6 \theta_i^2 = 3^2 + (-3)^2 = 18,$$

$$\text{verificando as igualdades } T_h = \text{tr}(A^h) = \sum_{i=1}^n \theta_i^h;$$

(iii) O grafo da Figura 5.2 tem 9 arestas pelo que $2m = 2 \times 9 = 18 = T_2$;

(iv) Sabemos que o grafo da Figura 5.2 é regular de grau 3 e tem 6 vértices, assim $rn = 3 \times 6 = 18 = T_2$;

(v) Como $T_3 = \sum_{i=1}^6 \theta_i^3 = 3^3 + (-3)^3 = 0$, então para a igualdade $T_3 = 6t$ ser verdadeira o t terá que ser zero, assim concluímos que não existem triângulos no grafo da Figura 5.2.

Proposição 5.16 Um grafo G possui um único valor próprio se, e somente se, G é totalmente desconexo, ou seja, se G é um grafo sem arestas.

Demonstração: Seja G um grafo composto por n vértices. Supondo que G possui um único valor próprio θ , então ele tem multiplicidade n . Pelo Corolário 5.14 temos que,

$$0 = \sum_{i=1}^n \theta_i = n\theta,$$

ou seja, $\theta = 0$. Uma vez que a matriz de adjacência respeita a condição $A_G v = 0$ para qualquer vetor v , então A_G só poderá ser uma matriz nula (com todas as entradas iguais a zero). Assim $a_{ij} = 0$ para qualquer $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Portanto, não há arestas no grafo G . Assim, G é um grafo totalmente desconexo em que a sua matriz de adjacência é uma matriz nula e todos os seus valores próprios são zero. ■

Definição 5.17 A matriz de adjacência de um grafo bipartido tem a forma $A = \begin{bmatrix} 0 & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix}$. Segue que o espectro de um grafo bipartido é simétrico se $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$

é um vetor próprio com valor próprio θ , e $\begin{bmatrix} u \\ -v \end{bmatrix}$ é um vetor próprio com valor próprio $-\theta$. (O oposto também é válido).

Proposição 5.18 Seja G um grafo bipartido, então θ é valor próprio de G se, e somente se, $-\theta$ é também valor próprio de G , ambos com a mesma multiplicidade.

Demonstração: Seja G um grafo bipartido, cujo conjunto de vértices é dividido em 2 subconjuntos disjuntos V_1 e V_2 , com $|V_1| = k_1$ e $|V_2| = k_2$. Sabemos que a matriz de adjacência de um grafo bipartido tem a forma $A_G = \begin{bmatrix} 0 & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix}$, onde B é a matriz $k_1 \times k_2$ e os zeros representam matrizes com entradas iguais a zero. De facto, tomemos um vetor próprio $y = \begin{bmatrix} y_1 \dots y_{k_1} & x_1 \dots x_{k_2} \end{bmatrix}^T$ de A_G associado ao valor próprio θ de G . Como $(A_G(y))^T = \theta y^T$ então,

$$\begin{bmatrix} \theta y_1 \dots \theta y_{k_1} & \theta x_1 \dots \theta x_{k_2} \end{bmatrix} = A_G(y) = \begin{bmatrix} B \times \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{k_2} \end{bmatrix} & B^T \times \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{k_1} \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

Vamos agora mostrar que, $-\theta$ é valor próprio de G , exibindo um dos seus vetores próprios associados, isto é, $\bar{y} = \begin{bmatrix} y_1 \dots y_{k_1} & -x_1 \dots -x_{k_2} \end{bmatrix}^T$

$$\begin{aligned} (A_G(\bar{y}))^T &= \begin{bmatrix} B \times \begin{bmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_{k_2} \end{bmatrix} & B^T \times \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{k_1} \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\theta y_1 \dots -\theta y_{k_1} & \theta x_1 \dots \theta x_{k_2} \end{bmatrix} \\ &= -\theta \begin{bmatrix} y_1 \dots y_{k_1} & -x_1 \dots -x_{k_2} \end{bmatrix} = (-\theta) \bar{y}^T, \end{aligned}$$

ou seja, $-\theta$ também é valor próprio de G .

Além disso, para cada vetor próprio $y = \begin{bmatrix} y_1 \dots y_{k_1} & x_1 \dots x_{k_2} \end{bmatrix}$ com algum $x_i \neq 0$, obtemos um vetor próprio $\bar{y} = \begin{bmatrix} y_1 \dots y_{k_1} & -x_1 \dots -x_{k_2} \end{bmatrix}$ linearmente independente garantindo a mesma multiplicidade dos valores próprios θ e $-\theta$. Se existirem vetores próprios da forma $y = \begin{bmatrix} y_1 \dots y_{k_1} & x_1 \dots x_{k_2} \end{bmatrix}$ com $x_i = 0$ para todo i , estes devem ser vetores próprios associados ao valor próprio zero. ■

Proposição 5.19 *Seja K_n um grafo completo com n vértices, então a sua matriz de adjacência é $A_{K_n} = J - I$ e os seus valores próprios são $(n - 1)$ com multiplicidade 1 e (-1) com multiplicidade $n - 1$, ou seja,*

$$\text{spect}(A_{K_n}) = \begin{bmatrix} n - 1 & -1 \\ 1 & n - 1 \end{bmatrix}.$$

Demonstração: Denotando o polinómio característico da matriz de adjacência A_{K_n} por

$$P_{A_{K_n}}(\theta) = \det(\theta I - A_{K_n}),$$

temos que:

$$P_{A_{K_n}}(\theta) = \det(\theta I - (J - I)) = \det \left(\begin{bmatrix} \theta & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \theta & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & \theta \end{bmatrix} \right).$$

Logo, é claro que -1 pertence ao espectro de A_{K_n} . Por outro lado, vem que $A_{K_n} \widehat{b} = (n - 1)\widehat{b}$, onde \widehat{b} denota o vetor de componentes unitárias, pelo que $n - 1$ pertence ao espectro de A_{K_n} . Com facilidade se conclui que os $n - 1$ vetores, $\widehat{b}_1 - \widehat{b}_2, \widehat{b}_1 - \widehat{b}_3, \dots, \widehat{b}_1 - \widehat{b}_n$, são vetores próprios de A_{K_n} associados ao valor próprio -1 , pelo que podemos concluir que o subespaço invariante associado ao valor próprio -1 tem dimensão $n - 1$ e, conseqüentemente, este valor próprio tem multiplicidade $n - 1$. Assim, podemos concluir que o grafo K_n tem apenas dois valores próprios distintos, $n - 1$ com multiplicidade 1 e -1 com multiplicidade $n - 1$. ■

Proposição 5.20 *O espectro de um grafo bipartido completo $K_{m,n}$ é $\{\theta, 0, 0, \dots, 0, -\theta\}$, onde $\theta = \sqrt{mn}$.*

Demonstração: Seja G um grafo bipartido completo, cujo conjunto de vértices é dividido em 2 subconjuntos, V_1 com m vértices e V_2 com n vértices, ($m + n = t$, onde t corresponde ao número total de vértices no grafo) obtendo assim, uma matriz de adjacência da forma

$$A_G = \begin{bmatrix} 0 & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix}$$

e, como todos os vértices de V_1 são adjacentes a todos os vértices de V_2 , então B é uma matriz de ordem $m \times n$ com 1 em todas as entradas.

Tomando $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ o i -ésimo vetor canónico, temos que $e_1 - e_i$ para $2 \leq i \leq m$ é vetor próprio de A , associado ao valor próprio 0. E $e_{m+1} - e_i$ para $m+2 \leq i \leq t$ também é vetor próprio associado ao valor próprio 0. Assim, temos que 0 é valor próprio com multiplicidade $t - 2$.

Temos portanto, dois valores próprios a serem encontrados, e sabemos que eles satisfazem a propriedade da sua soma ser zero, isto é, são da forma θ e $-\theta$. Existem dois caminhos possíveis: $\theta = 0$ ou $\theta \neq 0$. Se $\theta = 0$ isso implicaria que o grafo fosse um grafo sem arestas (com t vértices isolados) o que não é o caso, logo resta que $\theta \neq 0$.

Assim, seja $v = (v_1, \dots, v_t)$, onde $Av = \theta v$ e $\theta > 0$ obtemos um sistema de t equações e $t + 1$ variáveis

$$\begin{cases} \theta v_i = \sum_{j=m+1}^n v_j, & \text{para } 1 \leq i \leq m \\ \theta v_i = \sum_{j=1}^m v_j, & \text{para } m+1 \leq i \leq t \end{cases}.$$

Daqui teremos que $v = (1, \dots, 1, \frac{m}{\theta}, \dots, \frac{m}{\theta})$. E quando compararmos com a equação $Av = \theta v$, encontramos $\theta = \frac{mn}{\theta}$ o que nos dá o resultado $\theta = \sqrt{mn}$. ■

Proposição 5.21 *Seja P_n um grafo caminho aberto não direcionado com n vértices. Então o seu espectro é constituído por $2\cos(\frac{\pi j}{n+1})$, para $j = 1, \dots, n$.*

5.3.2 Casos particulares que relacionam a matriz laplaciana com a teoria espectral de grafos.

Proposição 5.22 *Seja G um grafo regular de grau r com valores próprios adjacentes $\theta_1 \geq \theta_2 \geq \dots \geq \theta_n$ e valores próprios laplacianos $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n$. Temos que*

$$\mu_i = r - \theta_{n-i+1}, \text{ para } i = 1, \dots, n.$$

Demonstração: Vimos inicialmente neste capítulo que a matriz $L_G = D - A_G$, mas, uma vez que o grafo G é um grafo regular de grau r , então pode-se escrever a matriz laplaciana como $L_G = rI - A_G$. Consequentemente, todos os vetores próprios de A_G com valor próprio θ_i são vetores próprios de L_G com valores próprios $r - \theta_{n-i+1}$. ■

Exemplo 5.23 Consideremos o grafo regular G de grau 3 da Figura 5.3.

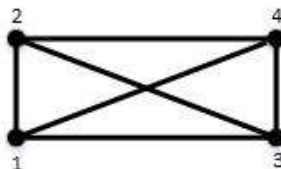


Figura 5.3: Grafo G regular de grau 3

Vamos calcular os valores próprios laplacianos de G usando a Proposição 5.22 e a matriz laplaciana deste grafo..

Por um lado temos que a matriz de adjacência do grafo G é

$$A_G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

o seu polinómio característico é

$$P_{A_G}(\theta) = \theta^4 - 6\theta^2 - 8\theta - 3$$

e, os seus valores próprios são

$$\begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 \\ 3 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Assim, pela Proposição 5.22, temos $\mu_i = r - \theta_{n-i+1}$, ou seja, os valores próprios laplacianos são

$$\begin{aligned} \mu_1 &= r - \theta_4 \Leftrightarrow \mu_1 = 3 + 1 \Leftrightarrow \mu_1 = 4 \\ \mu_2 &= r - \theta_3 \Leftrightarrow \mu_2 = 3 + 1 \Leftrightarrow \mu_2 = 4 \\ \mu_3 &= r - \theta_2 \Leftrightarrow \mu_3 = 3 + 1 \Leftrightarrow \mu_3 = 4 \\ \mu_4 &= r - \theta_1 \Leftrightarrow \mu_4 = 3 - 3 \Leftrightarrow \mu_4 = 0. \end{aligned}$$

Por outro lado, analisando a matriz laplaciana do grafo G da Figura 5.3, temos

$$L_G = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

O seu polinómio característico é $P_{L_G}(\mu) = \mu^4 - 12\mu^3 + 48\mu^2 - 64\mu$ e os valores próprios são $\begin{bmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 \\ 4 & 4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$.

Definição 5.24 Seja L_G a matriz laplaciana de um grafo G , então a matriz de Laplace do seu complementar \bar{G} é definida por

$$L_{\bar{G}} = nI - J - L_G,$$

onde J é a matriz quadrada de ordem n cujas entradas são todas iguais a 1 e I é a matriz identidade de ordem n .

Proposição 5.25 Seja G um grafo com n vértices e v um vetor próprio de L_G com valores próprios μ_i diferentes de 0, então v é vetor próprio de $L_{\bar{G}}$ com valores próprios $n - \mu_{n-i}$.

Demonstração: Começemos por observar que $L_G + L_{\bar{G}} = nI - J$ e $Jv = 0$, onde v é um vetor ortogonal ao vetor próprio $\mathbf{1}$. Assim,

$$nv = (nI - J)v = L_G v + L_{\bar{G}} v = \mu v + L_{\bar{G}} v. \quad (5.1)$$

Portanto, $L_{\bar{G}} v = (n - \mu)v$. ■

Exemplo 5.26 Seja L_G a matriz laplaciana seguinte

$$L_G = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Tem-se que:

. polinómio característico de L_G : $\mu^5 - 12\mu^4 + 51\mu^3 - 90\mu^2 + 55\mu$

. valores próprios de L_G : $\begin{bmatrix} 4.618 & 3.618 & 2.382 & 1.382 & 0 \end{bmatrix}$

Como $L_{\bar{G}} = nI - J - L_G$, então

$$\begin{aligned}
 L_{\bar{G}} &= 5 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Assim:

- **polinómio característico de $L_{\bar{G}}$:** $\mu^5 - 8\mu^4 + 21\mu^3 - 20\mu^2 + 5\mu$
- **valores próprios de $L_{\bar{G}}$:** $[3.618 \quad 2.618 \quad 1.382 \quad 0.382 \quad 0]$

Usando a Proposição 5.22, podemos confirmar os valores próprios de $L_{\bar{G}}$.
Com efeito,

$$\begin{bmatrix} n - \mu_{n-1} & \cdots & n - \mu_2 & n - \mu_1 & 0 \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 5 - 1.382 & 5 - 2.382 & 5 - 3.618 & 5 - 4.618 & 0 \end{bmatrix} = \\
 & \quad = \begin{bmatrix} 3.618 & 2.618 & 1.382 & 0.382 & 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Proposição 5.27 *Seja K_n um grafo completo com n vértices, então a sua matriz laplaciana é $L_{K_n} = nI - J$ e o seu espectro é $0^1, n^{n-1}$.*

Demonstração: Começemos por observar que a matriz $L_{K_n} = nI - J$. Assim, a equação (5.1) pode ser reescrita como

$$nv = (nI - J)v = L_{K_n}v$$

Portanto, os valores próprios da matriz L_{K_n} são n , com multiplicidade $n - 1$, e 0 , com multiplicidade 1. ■

Exemplo 5.28 Seja K_5 o grafo completo da Figura 5.4.

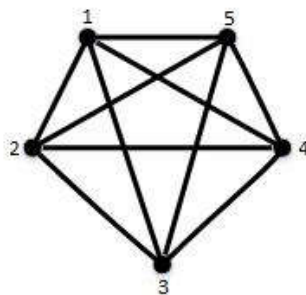


Figura 5.4: Grafo completo K_5

Como $L = nI - J$, então

$$\begin{aligned}
 L &= 5 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

O polinómio característico da matriz laplaciana anterior é

$$\mu^5 - 20\mu^4 + 150\mu^3 - 500\mu^2 + 625\mu$$

e os seus valores próprios são $\begin{bmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 & \mu_5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 0 \end{bmatrix}$.

Atendendo à Proposição 5.27 podemos ainda escrever os valores próprios de L_{K_5} como:

$$\text{spect}(L_{K_5}) = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Proposição 5.29 O espectro associado à matriz laplaciana do grafo bipartido completo $K_{m,n}$ é

$$\text{spect}(L_{K_{m,n}}) = \begin{bmatrix} m+n & n & m & 0 \\ 1 & m-1 & n-1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 5.30 Seja $K_{2,3}$ o grafo bipartido da Figura 5.5.

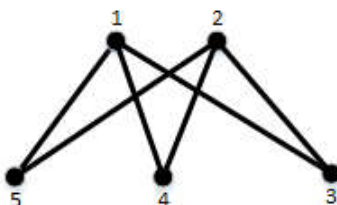


Figura 5.5: Grafo bipartido completo $K_{2,3}$

Temos que a matriz laplaciana de $K_{2,3}$ é:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Conseqüentemente, o seu polinómio característico é:

$$\mu^5 - 12\mu^4 + 51\mu^3 - 92\mu^2 + 60\mu$$

e os valores próprios são $\begin{bmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 & \mu_5 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, ou seja, o espectro associado à matriz laplaciana deste grafo bipartido completo pode ser escrito, como citado na Proposição 5.29.

Proposição 5.31 Seja P_n um grafo caminho aberto não direcionado com n vértices, o espectro é $2 - 2\cos(\frac{\pi j}{n})$, para $j = 0, \dots, n - 1$.

Exemplo 5.32 Calculemos o espectro associado à matriz laplaciana do grafo P_4 da Figura 5.6.



Figura 5.6: Grafo caminho P_4

A matriz laplaciana do grafo P_4 é

$$L_{P_4} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tem-se que:

. **polinómio característico de L_{P_4} :** $\mu^4 - 6\mu^3 + 10\mu^2 - 4\mu$

. **valores próprios de L_{P_4} :** $\left[2 + \sqrt[3]{2} \quad 2 \quad 2 - \sqrt[3]{2} \quad 0 \right]$

Assim, o espectro associado à matriz laplaciana do grafo P_4 é

$$\text{spect}(L_{P_4}) = \begin{bmatrix} 2 + \sqrt[3]{2} & 2 & 2 - \sqrt[3]{2} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e verifica a Proposição 5.31.

5.4 Isomorfismo de grafos

Nesta secção relacionaremos o conceito de isomorfismo de grafos com a teoria espectral.

Definição 5.33 Dizemos que G_1 e G_2 são grafos coespectrais quando têm os mesmos valores próprios com as mesmas multiplicidades, isto é, quando $\text{spect}(G_1) = \text{spect}(G_2)$.

Definição 5.34 Dizemos que um grafo G é caracterizado pelo seu espectro se todos os grafos coespectrais a G são isomorfos a G .

Proposição 5.35 Se dois grafos são isomorfos, então têm o mesmo espectro.

Observação 5.36 O recíproco da Proposição 5.35 não é verdadeiro, como se ilustra em seguida.

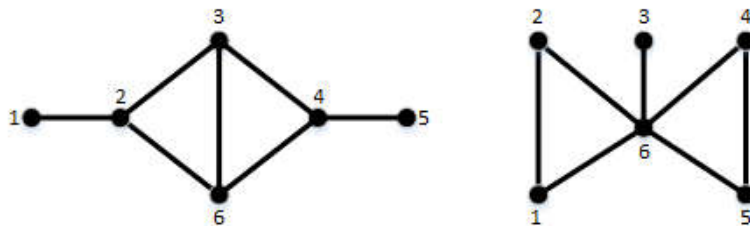


Figura 5.7: Grafos coespectrais e não isomorfos

Os grafos da Figura 5.7 são coespectrais, visto que o polinómio característico de ambos é dado por:

$$P(\theta) = \theta^6 - 7\theta^4 - 4\theta^3 + 7\theta^2 + 4\theta - 1.$$

O espectro destes grafos é

$$\text{spect} = \left[2.7093 \quad 0.1939 \quad 1 \quad -1 \quad -1 \quad -1.9032 \right].$$

A partir do polinómio característico, podemos deduzir que ambos os grafos da Figura 5.7 possuem sete arestas e dois triângulos, porém eles não são isomorfos, uma vez que o grau máximo do grafo da esquerda é igual a 3, enquanto que o grau máximo do grafo da direita é igual a 5. Assim, estes grafos não são caracterizados pelo seu espectro, porque embora possuam o mesmo espectro não são isomorfos.

5.5 Energia de um grafo

Em 1978 Gutman [38] introduziu o conceito de energia de um grafo, como sendo a soma dos valores absolutos dos seus valores próprios. Este conceito é utilizado, por exemplo, em Química para aproximar a energia total de eletrões de moléculas.

Os conceitos desta secção podem ser encontrados em [38], [40] e [48].

5.5.1 Energia adjacente de um grafo

Definição 5.37 *Dado um grafo G , com n vértices, definimos energia de G como sendo*

$$E_A(G) = \sum_{i=1}^n |\theta_i|,$$

onde $\theta_1 \geq \theta_2 \geq \dots \geq \theta_n$ são valores próprios da matriz de adjacência de G .

Exemplo 5.38 *Como no grafo nulo com n vértices os seus n valores próprios são nulos, então a sua energia é também igual a zero.*

Exemplo 5.39 *O grafo completo com n vértices, K_n , é o grafo complementar do grafo nulo, que é 0-regular. Logo, pela Proposição 5.19, os valores próprios de K_n são $n - 1$ com multiplicidade 1 e -1 com multiplicidade $n - 1$. Assim, a energia de K_n é:*

$$E_A(K_n) = |n - 1| + (n - 1) \times |-1| = 2(n - 1) = 2n - 2.$$

Para determinarmos com exatidão a energia de um grafo é necessário conhecer todos os seus valores próprios, ou seja, necessitamos encontrar todas as raízes do polinómio característico do grafo em estudo, o que por vezes não é tarefa fácil. Geralmente, fazem-se estimativas para o valor da energia de um grafo, como se enuncia nas duas proposições seguintes.

Proposição 5.40 *Seja G um grafo com n vértices e m arestas, então*

$$E_A(G) \leq \sqrt{2mn}.$$

Proposição 5.41 *Seja G um grafo com m arestas, então*

$$2\sqrt{m} \leq E_A(G) \leq 2m.$$

5.5.2 Energia laplaciana de um grafo

Definição 5.42 *Sejam G um grafo com n vértices, μ_1, \dots, μ_n os valores próprios da matriz laplaciana de G e \bar{d} a média dos valores próprios, definimos a energia laplaciana de G , denotada por $E_L(G)$, como*

$$E_L(G) = \sum_{i=1}^n |\mu_i - \bar{d}|.$$

5.5.3 Aplicação da energia à Química

Nesta subsecção fazemos um breve estudo sobre como a teoria espectral de grafos se pode relacionar com a Química e a Biologia.

Uma árvore é um grafo acíclico conetado. Uma árvore química é uma árvore com grau máximo menor ou igual a 4, ou seja, trata-se de um grafo molecular que representa isómeros¹ de alcanos². Se n é o número de vértices, então, cada árvore química representa um isómero de C_nH_{2n+2} .

Denotamos Δ como o grau máximo de um vértice do grafo em análise. Para grafos moleculares Δ é igual a 2, 3 ou 4. Quando $\Delta = 1$ trata-se do mais simples hidrocarboneto saturado chamado de etano. Se um grafo molecular é constituído apenas pelos isómeros de cadeia linear de alcano, isto é, sem ramificações, então, $\Delta = 2$. Se $\Delta = 3$ temos que a molécula possui apenas carbonos terciários e, por fim, $\Delta = 4$ indica a presença de pelo menos um carbono quaternário.

¹Isómeros são moléculas de substâncias orgânicas que apresentam a mesma fórmula molecular, mas possuem propriedades e características estruturais diferentes.

²Alcanos são hidrocarbonetos formados apenas por ligações simples entre os seus carbonos.

Assim, conseguimos concluir que Δ (parâmetro que indica a presença ou a ausência de átomos de carbono quaternário) é o principal descritor da estrutura das moléculas, afetando o valor do maior valor próprio laplaciano de um alceno.

Um dos autores presentes em [39] relaciona o grau máximo e o maior valor próprio laplaciano através da seguinte desigualdade:

$$\Delta + 1 < \mu_1 < \Delta + 1 + 2\sqrt{\Delta - 1}.$$

Assim, conhecendo o valor de μ_1 podemos detectar a presença de carbono quaternário.

Exemplo 5.43 *Seja G o grafo molecular presente na Figura 5.8.*

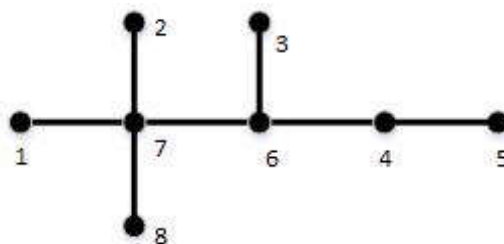


Figura 5.8: Grafo molecular G

A sua matriz adjacente é $A_G =$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

consequentemente a matriz laplaciana é

$$L_G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Assim, o polinómio característico é

$$\begin{aligned}
P_{LG} &= \det \left(\begin{bmatrix} \mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \right) \\
&= \det \begin{bmatrix} \mu - 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mu - 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mu - 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu - 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \mu - 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \mu - 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \mu - 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \mu - 1 \end{bmatrix} \\
&= \mu^8 - 14\mu^7 + 74\mu^6 - 190\mu^5 + 256\mu^4 - 182\mu^3 + 63\mu^2 - 8\mu
\end{aligned}$$

Temos que, os valores próprios laplacianos do grafo G são

$$[5.2819 \quad 3.5857 \quad 2.1694 \quad 1 \quad 1 \quad 0.67420 \quad 0.2888 \quad 0],$$

e o índice laplaciano é $\mu_1 = 5.2819$. Como $\mu_1 > 5$ então existe carbono quaternário no grafo molecular G .

5.6 Árvores

Na presente secção são apresentadas algumas propriedades dos grafos árvore, o número de árvores geradoras de um grafo e o seu espectro. A bibliografia aconselhada ao leitor para esta secção poderá ser encontrada em [11], [43] e [44].

Teorema 5.44 (*Matriz-árvore*) - O número de árvores geradoras de um grafo é dado por qualquer cofator da sua matriz laplaciana, isto é,

$$adj(L) = \tau(G) \times J,$$

onde $\text{adj}(L)$ é a matriz adjunta de L , $\tau(G)$ é o número de árvores geradoras de G e J é uma matriz com todas as entradas iguais a 1.

Demonstração: Se G não é conexo então $\tau(G) = 0$. Suponhamos que G é conexo e seja I_G a matriz de incidência de G , e para cada conjunto U com $n - 1$ arestas de G , seja $I_G(U)$ a matriz $n \times (n - 1)$ que consiste nas colunas de I_G indexadas por U . Para cada vértice i , seja $I_{G_i}(U)$ a matriz obtida por $I_G(U)$ eliminando uma linha i , e seja I_{G_i} a matriz obtida por I_G eliminando a linha i . A entrada ii da $\text{adj}(L)$ é $\det(I_{G_i}, I_{G_i}^T)$, e expandindo este determinante pela fórmula de Cauchy-Binet¹ obtemos

$$\det(I_{G_i}, I_{G_i}^T) = \sum_U \det(I_{G_i}(U)) \det(I_{G_i}(U)^T).$$

Já mostramos que para um conjunto U fixo de $n - 1$ arestas, $\det I_{G_i}(U) = \pm 1$ se as arestas de U determinarem uma árvore geradora de G , e $\det I_{G_i}(U) = 0$ caso contrário.

Suponhamos primeiro que U não determina uma árvore geradora de G . Então algum subconjunto de U , digamos C , forma um ciclo em G . Sem perda de generalidade podemos assumir que todas as arestas de C são orientadas para criar um ciclo direto. Então a soma das colunas correspondentes de $I_{G_i}(U)$ são zero, logo $\det I_{G_i}(U) = 0$. Por outro lado, se U determinar uma árvore geradora em G , então existe uma matriz incidente $I_G(U)$, ou seja, $\det I_{G_i}(U) = \pm 1$. Segue que a soma de números não nulos é $\tau(G)$, e que cada parte dessa soma é igual a 1. Consequentemente todas as entradas da diagonal de $\text{adj}(L)$ são iguais a $\tau(G)$. Já vimos que todas as entradas de $\text{adj}(L)$ são iguais, e assim provamos o teorema. ■

Corolário 5.45 *O número de árvores geradoras de um grafo completo K_n é n^{n-2} .*

Demonstração: Sabemos que o laplaciano de K_n é $L(K_n) = nI - J$, ou seja,

$$L = \begin{bmatrix} n-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & n-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & n-1 \end{bmatrix}.$$

¹A fórmula de Cauchy-Binet exprime o determinante de AB como $\det(AB) = \sum_S \det(A(S)) \det(B(S))$, onde S descreve os diferentes subconjuntos.

Calculando o cofator de ordem 1×1 de L , obtemos

$$\begin{aligned} \Delta_{11} &= (-1)^2 \det \begin{bmatrix} n-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & n-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & n-1 \end{bmatrix} \\ &= \det \begin{bmatrix} n-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & n-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & n-1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Somando as linhas $2, 3, \dots, n-1$ à primeira linha, obtemos o seguinte

$$= \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & n-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & n-1 \end{bmatrix}$$

Por fim, somando a primeira linha a todas as outras, obtemos

$$= \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{bmatrix} = n^{n-2},$$

que se trata de uma matriz triangular superior, onde o determinante é exatamente n^{n-2} . Assim, $\tau(G) = n^{n-2}$ e portanto $\text{adj}(L(Kn)) = n^{n-2}J$. ■

Corolário 5.46 *O número de árvores geradoras de um grafo cíclico C_n é n .*

Demonstração: Sabemos que o laplaciano de C_n é

$$L(C_n) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Calculamos agora o cofator de ordem 1×1 do seu laplaciano.

$$\begin{aligned} \Delta_{11} &= (-1)^2 \det \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \det \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Somando as linhas $2, 3, \dots, n-1$ à primeira linha, obtemos a seguinte matriz

$$= \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Somando a primeira linha à segunda linha obtemos

$$= \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Repetindo este processo $n - 2$ vezes chegamos à matriz triangular superior seguinte,

$$= \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & n-3 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & n-4 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{bmatrix}.$$

cujo determinante é exatamente n . Assim, $\tau(G) = n$. ■

Corolário 5.47 *Dado um grafo G , o número de árvores geradoras de G é dado por*

$$\tau(G) = n^{-2} \det(J + L).$$

Demonstração: É fácil verificar que $nJ = J^2$ e que $LJ = JL = 0$. A seguinte sequência de igualdades prova o resultado:

$$\begin{aligned} (nI - J)(J + L) &= nJ + nL - J^2 - JL \\ &= nL \\ \text{adj}[(nI - J)(J + L)] &= \text{adj}(nL) \\ \text{adj}(J + L)\text{adj}(nI - J) &= \text{adj}(nL) \\ \text{adj}(J + L)n^{n-2}J &= n^{n-1}\text{adj}(L) \\ \text{adj}(J + L)J &= n\tau(G)J \\ (J + L)\text{adj}(J + L)J &= (J + L)n\tau(G)J \\ \det(J + L)J &= n\tau(G)J^2 \\ \det(J + L)J &= n^2\tau(G)J \\ \tau(G) &= n^{-2}\det(J + L) \end{aligned}$$

■

5.6.1 Espectro de árvores

Nesta subsecção iremos apresentar dois algoritmos para o cálculo do polinómio característico, sem a necessidade de recorrer à matriz de adjacência ou à matriz laplaciana.

O cálculo do polinómio característico adjacente de uma árvore pode ser feito com base num algoritmo apresentado por Jacobs, Machado e Trevisan em [43]. Este algoritmo é baseado na condensação da matriz $\theta I - A$. Dada uma árvore G começa-se por escolher um vértice como raiz, seguidamente, os vértices que são adjacentes a este são designados de filhos, os vértices adjacentes a estes filhos serão filhos dos filhos e, assim sucessivamente. A todos os vértices da árvore atribuiremos o valor x .

O valor final de cada vértice, $a(v_i)$, é calculado começando nas folhas e seguindo em direção à raiz, isto é:

$$a(v_i) = x - \sum_{v \in F_i} \frac{1}{a(v)}, \quad (5.2)$$

onde F_i é o conjunto dos filhos que compõem o vértice v_i e $a(v)$ é o valor final dos vértices que são filhos de $a(v_i)$. No caso das folhas $a(v_i) = x$, uma vez que não possuem filhos.

Exemplo 5.48 *Consideremos a árvore da Figura 5.9, que já se encontra organizada para aplicação do algoritmo atrás descrito.*

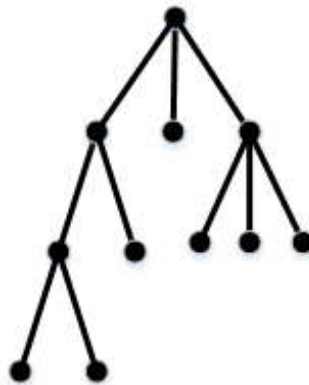


Figura 5.9: Árvore organizada para a aplicação do algoritmo

Após calcular todos os valores de $a(v_i)$ (conforme os passos 1 a 5 ilustrados nas Figuras 5.10 a 5.12), obteremos a matriz $\theta I - A$ triangularizada, com entradas $a(v_i)$ nas diagonais.

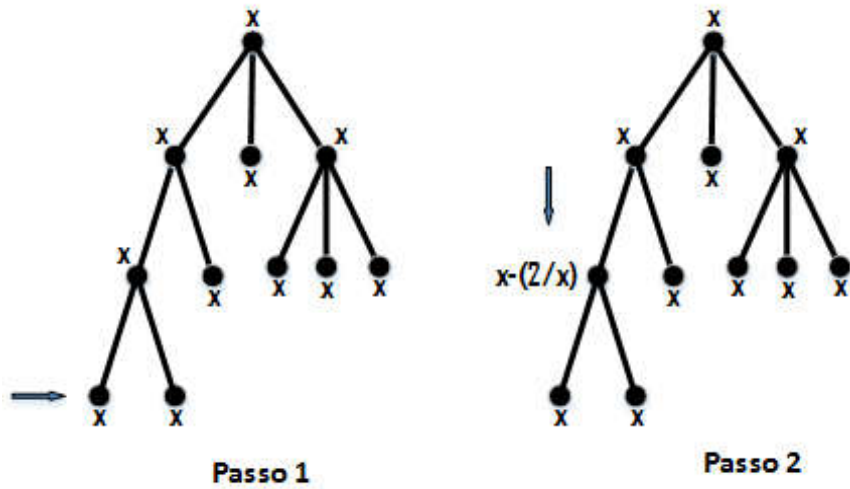


Figura 5.10: Passo 1 e passo 2 da aplicação do algoritmo

O primeiro passo é atribuir a todos os vértices da árvore o valor x , em seguida, para os restantes passos é necessário utilizar a fórmula (5.2), ou seja, para o passo dois teríamos

$$a(v_i) = x - \sum_{v \in F_i} \frac{1}{a(v)} = x - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x} \right) = x - \frac{2}{x}.$$

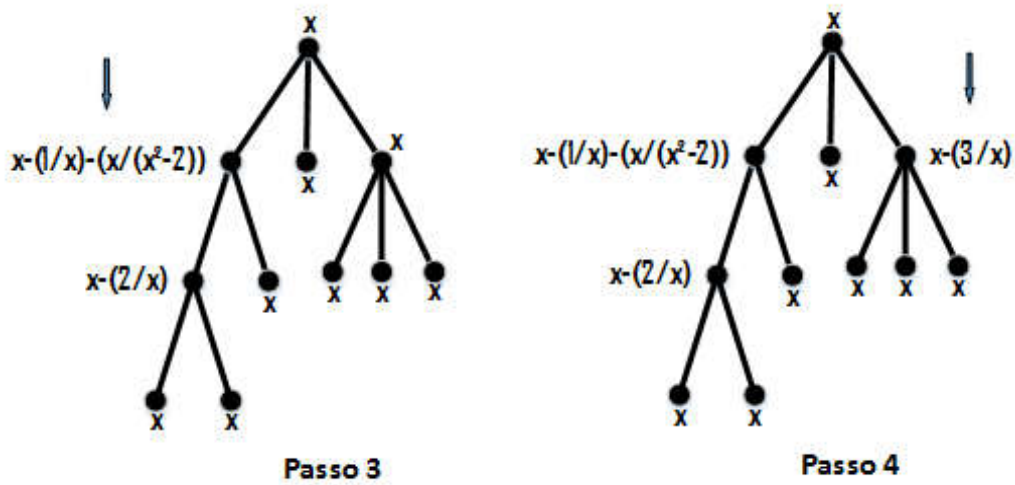


Figura 5.11: Passo 3 e passo 4 da aplicação do algoritmo

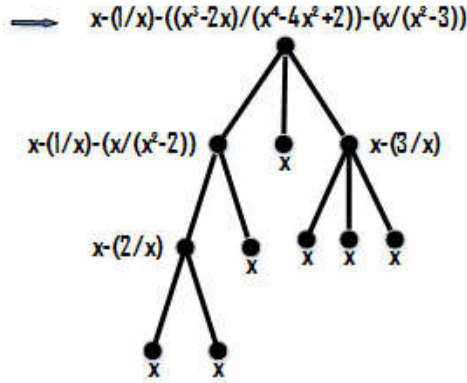


Figura 5.12: Passo 5 da aplicação do algoritmo

Em seguida, multiplicamos todos os valores de $a(v_i)$ (o que equivale a calcular o determinante), obtendo finalmente o polinómio característico

$$x^{11} - x^{10} - 9x^9 + 7x^8 + 23x^7 - 14x^6 - 14x^5 + 6x^4.$$

O mesmo algoritmo pode ser utilizado para o cálculo do polinómio característico laplaciano, sofrendo apenas uma pequena modificação no valor inicial. Sabemos que na matriz de adjacência, os termos da diagonal principal são zero, enquanto que na matriz laplaciana os termos da diagonal principal correspondem ao grau do vértice. Assim, atribuímos o valor $x - d(v_i)$ como valor inicial de cada vértice e aplicamos:

$$a(v_i) = x - d(v_i) - \sum_{v \in F_i} \frac{1}{a(v)}.$$

Exemplo 5.49 Calculemos o polinómio característico laplaciano da árvore da Figura 5.9.

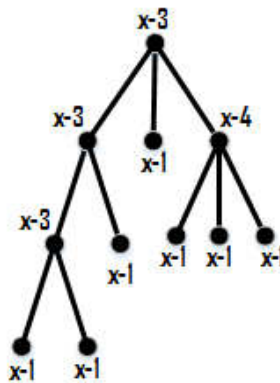


Figura 5.13: Cálculo do polinómio característico laplaciano - Passo 1

Aplicando o algoritmo anterior, e efectuando o produto de todos os $a(v_i)$ encontramos o polinómio

$$(x - 1)^3(x^8 - 17x^7 + 111x^6 - 349x^5 + 543x^4 - 391x^3 + 119x^2 - 11x).$$

Jacobs, Machado e Trevisan [43] apresentam um algoritmo semelhante ao anterior, em que é demonstrado o seguinte resultado para a matriz de adjacência de árvores: Começemos por organizar a árvore da mesma maneira àquela feita para a aplicação do algoritmo anterior. Seguidamente, atribui-se o valor $-\alpha$ a todos os vértices, onde α é um número real. O algoritmo inicia-se nas folhas até chegar à raiz.

Para calcular o valor de $a(v_i)$ de cada vértice temos de considerar o conjunto F_i de filhos de v_i , para as quais já se deve ter calculado o valor de $a(v)$.

- . Se $F_i = \emptyset$ então $a(v_i) = a(v_i)$;
- . Se $0 \notin \{a(v) : v \in F_i\}$ então $a(v_i) = a(v_i) - \sum_{v \in F_i} \frac{1}{a(v)}$;
- . Se $0 \in \{a(v) : v \in F_i\}$ então elegemos algum v_k de F_i tal que $a(v_k) = 0$, suprimimos a aresta entre v_i e o vértice que não é seu filho (assim, cortamos a relação entre v_i e o seu pai) e fazemos a substituição

$$a(v_i) = -\frac{1}{2}; \quad a(v_k) = 2.$$

Teorema 5.50 *Após aplicar o algoritmo para $-\alpha$, o número de $a(v)$ negativos, positivos e iguais a zero é igual ao número de valores próprios que são maiores, menores e iguais a α , respetivamente.*

Utilizando a Figura 5.9 aplique-se o algoritmo anterior para $\alpha = 0$.

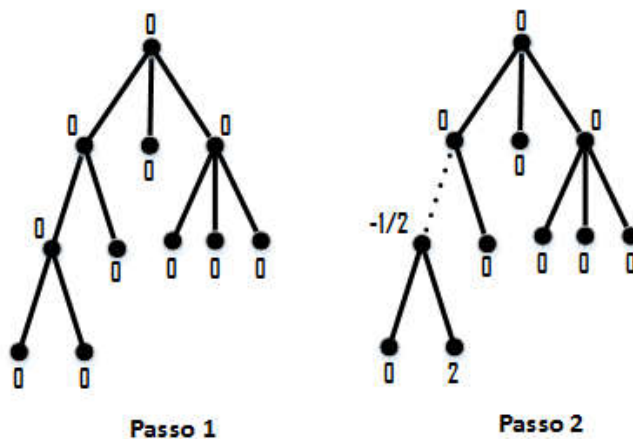


Figura 5.14: Passo 1 e passo 2 da aplicação do algoritmo quando $\alpha = 0$

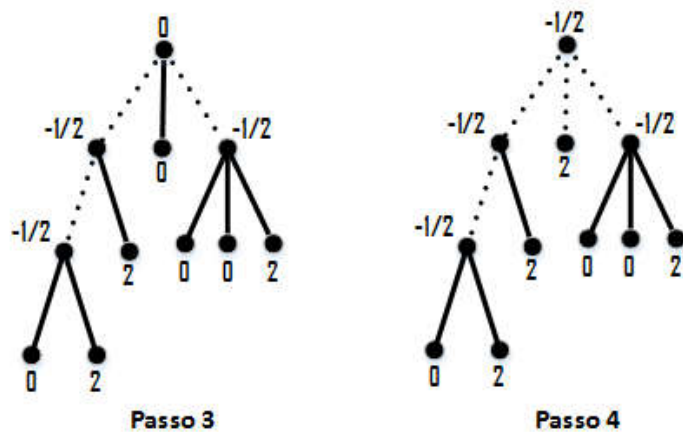


Figura 5.15: Passo 3 e passo 4 da aplicação do algoritmo quando $\alpha = 0$

Uma vez que do algoritmo anterior resultaram quatro valores positivos, quatro valores negativos e três valores nulos, então concluímos que existem exatamente quatro valores próprios positivos, quatro valores próprios negativos e três valores próprios iguais a 0.

Como no polinómio característico laplaciano usamos a matriz $\mu I - L$ com entradas na diagonal principal iguais a $x - d(v_i)$ então, para obtermos a distribuição dos valores próprios laplacianos em torno de α executamos o algoritmo com valor inicial $d(v_i) - \alpha$, como podemos ver no Exemplo 5.51.

Exemplo 5.51 *Pretendemos agora encontrar o número de valores próprios laplacianos maiores do que 3. Assim, vamos aplicar o algoritmo para o valor inicial de $d(v_i) - 3$.*

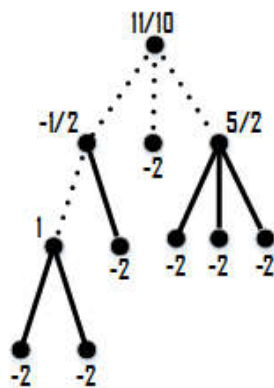


Figura 5.16: Cálculo do número de valores próprios maiores que 3, após aplicação do algoritmo

Depois de aplicar o algoritmo obtemos os valores de $a(v_i)$ dispostos na Figura 5.16 e, como resultaram três valores positivos então concluímos que há exatamente três valores próprios maiores do que 3.

Capítulo 6

Medidas de Centralidade

6.1 Introdução

Em 1948, Bavelas [3] introduziu a ideia de centralidade aplicada ao sistema de comunicação humana. Geralmente, as medidas de centralidade são utilizadas em análises de rede, onde o objetivo passa por saber o quanto uma pessoa é influente dentro de uma rede social ou, o quanto é importante uma sala dentro de um edifício, etc.. Podemos também aplicar as medidas de centralidade na teoria dos grafos, determinando para tal qual a importância que um vértice tem num determinado grafo.

Tomemos como exemplo o grafo da Figura 6.1. O vértice v_k é o de menor grau em todo o grafo, no entanto conseguimos observar que v_k tem um papel fundamental na estrutura. Ora v_k está em média mais próximo de qualquer outro vértice, ou seja, ele exibe maior proximidade. Além disso, para arranjarmos um caminho capaz de ligar os vértices da esquerda com os vértices da direita (ou vice-versa) temos obrigatoriamente que passar por v_k , servindo este como um ponto de intermediação entre dois outros vértices.

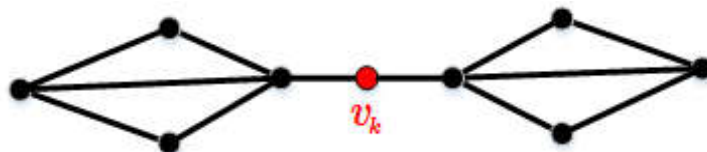


Figura 6.1: Importância do vértice v_k no grafo

Assim, essas três características (grau, proximidade e intermediação) são consideradas por Freeman [32] como medidas básicas de centralidade e serão

apresentadas nas próximas secções. Temos ainda as medidas de centralidade espectrais (centralidade de vetor próprio e centralidade via conectividade algébrica) onde são utilizadas as propriedades dos vetores próprios e dos valores próprios das matrizes associadas ao grafo em análise. Por fim, restam as medidas de centralidade para grafos ponderados onde se avalia não só as ligações entre os pares de vértices como também a sua intensidade. Ao leitor interessado recomendamos as referências [3], [4], [6]-[8], [10], [31]-[33], [36], [49], [50], [52] de onde nos baseamos para desenvolver este capítulo.

6.2 Medidas de centralidade básicas

6.2.1 Centralidade de grau

Imaginemos a rede social "facebook", um dos fatores mais importantes, ou que nos chama logo à atenção é a quantidade de amigos que um utilizador possui. Neste caso, a centralidade de grau indica-nos a intensidade do poder que uma pessoa tem na rede, isto é, quanto maior o número de ligações (amigos), maior será o poder dessa pessoa na rede. Por outras palavras, quanto maior o grau de um vértice, maior será a sua centralidade de grau. Esta medida foi utilizada por Shaw [52] em 1964.

Definição 6.1 *Sejam G um grafo não direcionado com n vértices e v_k um vértice de G . Define-se a centralidade de grau de v_k , denotada por d_k , como sendo o número de arestas incidentes em v_k , ou seja,*

$$d_k = \sum_{j=1}^n a_{kj},$$

onde a_{kj} são os elementos da matriz de adjacência A_G .

Como exemplo, consideremos o grafo G e o grafo W da Figura 6.2.

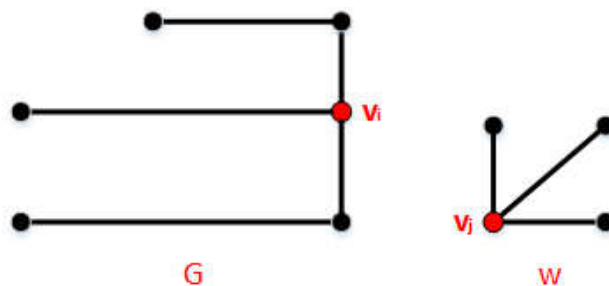


Figura 6.2: Grafos G e W não direcionados

O grafo G tem 6 vértices e o seu vértice v_i tem grau igual a 3, ou seja, $d_i = 3$. Já o grafo W tem 4 vértices e o seu vértice v_j tem grau igual a 3, ou seja, $d_j = 3$. Assim, os vértices v_i e v_j têm a mesma centralidade de grau, no entanto enquanto v_i domina metade do sistema de comunicação (3 ligações em 5 possíveis), o vértice v_j domina a totalidade (3 ligações em 3 possíveis) da rede. Isto leva-nos à seguinte definição:

Definição 6.2 *Sejam G um grafo não direcionado com n vértices e v_k um vértice de G , então a centralidade relativa de grau de v_k é dada por:*

$$c_D(v_k) = \frac{d_k}{n-1}.$$

Observação 6.3 *Para grafos simples o valor de d_k nunca será superior a $n-1$ e portanto $0 \leq c_D(v_k) \leq 1$. No caso de existirem loops ou arestas múltiplas então poderá existir algum vértice com grau superior a $n-1$ e, como consequência, o valor de $c_D(v_k)$ não estará limitado entre 0 e 1.*

Definição 6.4 *Seja $G = (V, E)$ um grafo simples e direcionado com um conjunto de vértices $V = \{v_1, \dots, v_n\}$. A matriz de adjacência, A_G , associada a G é uma matriz quadrada $n \times n$, tal que*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se existir uma aresta orientada de } i \text{ para } j \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Definição 6.5 *Seja G um grafo direcionado. A centralidade de grau de entrada, que tem em consideração quantas ligações passam por um determinado vértice, é definida como:*

$$d_k^{in} = \sum_{j=1}^n a_{jk},$$

onde d_k^{in} corresponde ao grau de entrada de v_k , ou seja, corresponde ao número de arestas que estão direcionadas para v_k e $\sum_{j=1}^n a_{jk}$ corresponde à soma dos elementos da linha k da matriz A_G e representam o grau de entrada do vértice v_k .

A medida relativa de grau de entrada pode ser calculada como

$$c_D^{in}(v_k) = \frac{d_k^{in}}{n-1}.$$

Definição 6.6 Sejam G um grafo direcionado. A centralidade de grau de saída, que tem em conta quantas ligações tem um vértice com outros vértices, é definida como:

$$d_k^{out} = \sum_{j=1}^n a_{kj},$$

onde d_k^{out} corresponde ao grau de saída de v_k , ou seja, corresponde ao número de arestas que saem de v_k e $\sum_{j=1}^n a_{kj}$ corresponde à soma dos elementos da coluna k da matriz A_G e representam o grau de saída do vértice v_k .

A medida relativa de grau de saída por ser calculada como

$$c_D^{out}(v_k) = \frac{d_k^{out}}{n-1}.$$

Exemplo 6.7 Consideremos o grafo G da Figura 6.3.

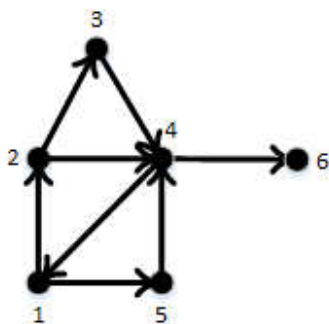


Figura 6.3: Grafo G direcionado

Temos que a matriz de adjacência do grafo G é definida como

$$A_G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, a centralidade de grau de entrada e de grau de saída dos vértices do grafo G são:

$$d_1^{in} = 1; \quad d_2^{in} = 1; \quad d_3^{in} = 1; \quad d_4^{in} = 3; \quad d_5^{in} = 1; \quad d_6^{in} = 1,$$

$$d_1^{out} = 2; \quad d_2^{out} = 2; \quad d_3^{out} = 1; \quad d_4^{out} = 2; \quad d_5^{out} = 1; \quad d_6^{out} = 0,$$

onde concluímos que o vértice v_4 é o mais central segundo a centralidade de grau de entrada e os vértices v_1 , v_2 e v_4 são os mais centrais segundo a centralidade de grau de saída.

6.2.2 Centralidade de Proximidade

É uma medida de centralidade que foi desenvolvida por Bavelas [3], Beauchamp [4], Robert Moxley e Nancy Moxley [49] e Sabidussi [50] e tem como objetivo avaliar o quanto um determinado vértice está distante dos demais. Assim, quanto menor for a distância média de um vértice para com os outros, maior será o valor da centralidade de proximidade. A importância destes vértices numa rede nasce devido à sua influência, uma vez que as informações presentes nos mesmos atingem os restantes vértices da rede num tempo menor para uns do que para outros. Por outras palavras, mede a velocidade de transmissão, sabendo quanto tempo foi necessário para a informação ir de um determinado vértice para os restantes, sequencialmente.

Definição 6.8 *Sejam v_j e v_k dois vértices de um grafo G então, a menor distância entre v_j e v_k , denotada por $dist(v_j, v_k)$, é o número de arestas do caminho mais curto possível que une v_j a v_k .*

Definição 6.9 *Seja G um grafo conexo e não direcionado com n vértices e seja v_k um vértice de G , então a centralidade de proximidade de v_k é dada por:*

$$c_C(v_k) = \frac{1}{\sum_{j=1}^n dist(v_j, v_k)}.$$

Num grafo conexo com n vértices sabemos que v_k pode estar no mínimo a uma distância igual a 1 de um vértice v_j (acontece quando v_j é um vértice adjacente de v_k) e, no máximo estar ligado a $n - 1$ outros vértices. Assim, o maior valor para a centralidade de proximidade de um vértice v_k é $c_C(v_k) = \frac{1}{n-1}$, pois o menor valor possível para $\sum_{j=1}^n dist(v_j, v_k) = n - 1$.

Definição 6.10 *Seja G um grafo conexo não direcionado com n vértices e seja v_k um vértice de G , então a centralidade relativa de proximidade de v_k é dada*

por:

$$c'_C(v_k) = \frac{n-1}{\sum_{j=1}^n \text{dist}(v_j, v_k)} = (n-1) \times c_C(v_k).$$

Exemplo 6.11 Consideremos o grafo G da Figura 6.4,

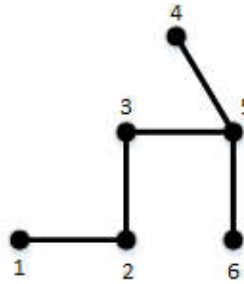


Figura 6.4: Os vértices v_3 e v_5 são os mais centrais do grafo G segundo a centralidade de proximidade

Com o objetivo de calcular a medida de centralidade de proximidade, vamos determinar as distâncias entre v_1 e os restantes vértices.

$$\begin{aligned} \text{dist}(v_2, v_1) &= 1; & \text{dist}(v_3, v_1) &= 2; & \text{dist}(v_4, v_1) &= 4; & \text{dist}(v_5, v_1) &= 3; \\ & & \text{dist}(v_6, v_1) &= 4. \end{aligned}$$

Assim, a centralidade de proximidade do vértice v_1 é dada por:

$$c_C(v_1) = \frac{1}{\sum_{j=1}^n \text{dist}(v_j, v_1)} = \frac{1}{1+2+4+3+4} = \frac{1}{14}.$$

Do mesmo modo podemos determinar a medida de centralidade de proximidade para os restantes vértices de G . Ora,

$$c_C(v_2) = \frac{1}{10}; \quad c_C(v_3) = \frac{1}{8}; \quad c_C(v_4) = \frac{1}{12}; \quad c_C(v_5) = \frac{1}{8}; \quad c_C(v_6) = \frac{1}{12}$$

De acordo com a medida de centralidade de proximidade os vértices v_3 e v_5 são os mais centrais e possuem o mesmo nível de importância na rede.

Observação 6.12 A extensão desta medida para grafos direcionados é feita considerando apenas distâncias sobre caminhos direcionados.

6.2.3 Centralidade de intermediação

A centralidade de intermediação foi proposta por Freeman [32] e está relacionada com o número de vezes que um vértice precisa de outro vértice (cuja centralidade é medida) com o objetivo de alcançar um terceiro vértice. Essencialmente mede o papel de intermediário num grafo e dá uma ideia do volume de tráfego/informação que flui entre quaisquer dois vértices através do intermediário.

O intermediário tem a capacidade de quebrar e evitar contactos e isolar vértices, ou seja, tem o potencial para controlar o fluxo de informações entre os pares de vértices da rede.

Definição 6.13 *Uma geodésica é a menor distância que une dois pontos. Num grafo uma geodésica é o caminho mais curto entre dois quaisquer vértices.*

Definição 6.14 *Seja G um grafo conexo com n vértices e sejam v_i , v_j e v_k vértices de G , tal que $i \neq j$, $i \neq k$ e $j \neq k$. A intermediação parcial de v_k com respeito à ligação de v_i com v_j é dada por:*

$$b_{ij}(v_k) = \begin{cases} 0, & \text{se não existir caminho entre } v_i \text{ e } v_j \\ \frac{g_{ij}(v_k)}{g_{ij}}, & \text{caso contrário} \end{cases},$$

onde g_{ij} denota o número de geodésicas entre v_i e v_j (ou seja, é o número total de caminhos mais curtos entre os vértices i e j) e $g_{ij}(v_k)$ denota o número de geodésicas entre os vértices v_i e v_j que passam pelo vértice v_k .

A centralidade de intermediação de v_k é definida pela soma de todas as intermediações parciais de v_k em G . Assim, temos:

$$c_B(v_k) = \sum_{\substack{1 \leq i < j \leq n \\ i, j \neq k}} b_{ij}(v_k).$$

Definição 6.15 *Seja G um grafo conexo com n vértices e seja v_k um vértice de G , então a centralidade relativa de intermediação de v_k é dada por:*

$$c_B(v_k) = \frac{2c_B(v_k)}{n^2 - 3n + 2}.$$

Exemplo 6.16 Consideremos o grafo G da Figura 6.5.

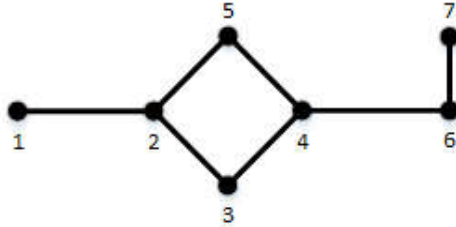


Figura 6.5: O vértice v_4 é o mais central do grafo G

As geodésicas entre v_i e v_j , com v_i e $v_j \in V$, $i < j$ e $i, j = 1, 2, 3, 5, 6, 7$, bem como aquelas que passam por v_4 são:

$$g_{12} = 1 \quad \text{e} \quad g_{12}(v_4) = 0; \quad g_{13} = 1 \quad \text{e} \quad g_{13}(v_4) = 0; \quad g_{15} = 1 \quad \text{e} \quad g_{15}(v_4) = 0; \\ g_{16} = 2 \quad \text{e} \quad g_{16}(v_4) = 2; \quad g_{17} = 2 \quad \text{e} \quad g_{17}(v_4) = 2;$$

$$g_{23} = 1 \quad \text{e} \quad g_{23}(v_4) = 0; \quad g_{25} = 1 \quad \text{e} \quad g_{25}(v_4) = 0; \quad g_{26} = 2 \quad \text{e} \quad g_{26}(v_4) = 2; \\ g_{27} = 2 \quad \text{e} \quad g_{27}(v_4) = 2;$$

$$g_{35} = 2 \quad \text{e} \quad g_{35}(v_4) = 1; \quad g_{36} = 1 \quad \text{e} \quad g_{36}(v_4) = 1; \quad g_{37} = 1 \quad \text{e} \quad g_{37}(v_4) = 1; \\ g_{56} = 1 \quad \text{e} \quad g_{56}(v_4) = 1; \quad g_{57} = 1 \quad \text{e} \quad g_{57}(v_4) = 1; \\ g_{67} = 1 \quad \text{e} \quad g_{67}(v_4) = 0.$$

Assim, a medida de centralidade de intermediação para o vértice v_4 é:

$$c_B(v_4) = \sum_{\substack{1 \leq i < j \leq n \\ i, j \neq 4}} b_{ij}(v_4) \\ = \frac{0}{1} + \frac{0}{1} + \frac{0}{1} + \frac{2}{2} + \frac{2}{2} + \frac{0}{1} + \frac{0}{1} + \frac{2}{2} + \frac{2}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{0}{1} \\ = \frac{17}{2}.$$

Usando o mesmo raciocínio para os restantes vértices, temos:

$$c_B(v_1) = 0; \quad c_B(v_2) = \frac{11}{2}; \quad c_B(v_3) = \frac{6}{2}; \quad c_B(v_5) = \frac{6}{2}; \quad c_B(v_6) = \frac{8}{2}; \quad c_B(v_7) = 0.$$

Logo, a centralidade de intermediação indica que o vértice v_4 é o vértice mais central da rede, porque $c_B(v_4) > c_B(v_j)$, $\forall j \neq 4$

6.3 Medidas de centralidade espectrais

Nesta secção iremos abordar duas medidas de centralidade. Na medida de centralidade do vetor próprio utilizamos o conceito de valor próprio e vetor próprio da matriz de adjacência do grafo em análise. Já na centralidade via conectividade algébrica utilizamos as propriedades da matriz laplaciana.

6.3.1 Centralidade de vetor próprio

A centralidade de vetor próprio é uma medida proposta por Bonacich [7] em 1987 que corresponde à relevância de um vértice em função da relação com os seus vizinhos. Esta medida estende o conceito de centralidade de grau, isto é, agora é importante para a rede não só um vértice possuir muitas ligações com outros vértices, como também ter ligações com vértices que têm muitas ligações. Imaginemos, por exemplo, uma rede em que se analisa a propagação de uma doença, se uma pessoa tem a possibilidade de apanhar uma doença através dos seus vizinhos, e se esses vizinhos têm uma elevada probabilidade em apanhar doenças, então a possibilidade da primeira pessoa apanhar uma doença é também elevada.

Definição 6.17 *Seja G um grafo conexo com n vértices e seja v_k um vértice de G , então a centralidade de vetor próprio de v_k é dada por:*

$$c_{eig}(v_k) = x_k,$$

onde x_k é a k -ésima coordenada do vetor próprio positivo unitário x associado ao índice do grafo, isto é,

$$x_k = \frac{1}{\text{ind}(G)} \sum_{j=1}^n a_{kj} x_j, \quad k = 1, \dots, n,$$

onde a_{kj} são as entradas da matriz de adjacência A_G e x_j são as coordenadas do vetor próprio associado ao índice do grafo.

Exemplo 6.18 *Consideremos a Figura 6.6.*

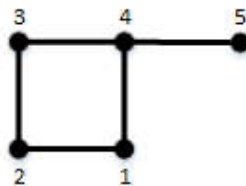


Figura 6.6: Grafo G cujo vértice mais central segundo a centralidade de vetor próprio é v_4

O polinómio característico do grafo G e o seu espectro são, respetivamente

$$P_\theta(G) = \theta^5 - 5\theta^3 + 2\theta$$

e,

$$\text{spect}(G) = \begin{bmatrix} 2.1358 & 0.662 & 0 & -0.662 & -2.1358 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

O vetor próprio associado ao valor próprio 2.1358 é:

$$x = \begin{bmatrix} 1.7808 & 1.6676 & 1.7808 & 2.1358 & 1 \end{bmatrix}.$$

Contudo, precisamos normalizar o vetor próprio e portanto,

$$\|x\| = \sqrt{(1.7808)^2 + (1.6676)^2 + (1.7808)^2 + (2.1358)^2 + (1)^2} = 3.8321.$$

Assim, o vetor próprio positivo e de norma 1 associado ao índice do grafo $\text{ind}(G) = 2.1358$ é:

$$\begin{aligned} x &= \begin{bmatrix} \frac{1.7808}{3.8321} & \frac{1.6676}{3.8321} & \frac{1.7808}{3.8321} & \frac{2.1358}{3.8321} & \frac{1}{3.8321} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.46471 & 0.43517 & 0.46471 & 0.55734 & 0.26095 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e, portanto as centralidades de vetor próprio dos respetivos vértices de G são:

$$\begin{aligned} c_{\text{eig}}(v_1) &= 0.46471; & c_{\text{eig}}(v_2) &= 0.43517; & c_{\text{eig}}(v_3) &= 0.46471; \\ c_{\text{eig}}(v_4) &= 0.55734; & c_{\text{eig}}(v_5) &= 0.26095. \end{aligned}$$

6.3.2 Centralidade de um vértice via conectividade algébrica (medida de contribuição para $\alpha(G)$)

A medida de centralidade via conectividade algébrica é utilizada para medir a importância de um vértice em relação à vulnerabilidade que ele oferece à rede caso tenha de ser dela retirado. Por outras palavras, deteta possíveis falhas que possam vir a comprometer a rede.

Definição 6.19 *Seja G um grafo conexo e seja v_k um vértice de G , seja ainda $\alpha(G)$ a conectividade algébrica do grafo G , então $G \setminus v_k$ é o subgrafo induzido de G após retirado o vértice v_k e $\alpha(G \setminus v_k)$ é a conectividade algébrica de $G \setminus v_k$. Assim, a centralidade do vértice v_k via conectividade algébrica é definida por:*

$$c_a(v_k) = \alpha(G) - \alpha(G \setminus v_k).$$

Observação 6.20 A centralidade via conectividade algébrica pode assumir valores negativos, estes indicam que v_k e as suas arestas incidentes diminuem a conectividade algébrica de G . Se os valores forem positivos então o vértice v_k e as suas arestas incidentes servem para aumentar a conectividade algébrica. Já no caso dos valores serem nulos isso significa que o vértice v_k e as suas arestas incidentes não têm qualquer efeito na conectividade algébrica de G .

Exemplo 6.21 Seja G o grafo da Figura 6.7.

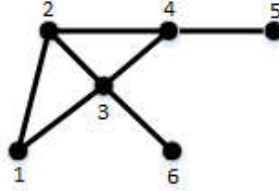


Figura 6.7: Grafo G onde v_3 é o vértice mais central segundo a centralidade via conectividade algébrica

O polinómio característico da matriz laplaciana de G é

$$P_{L_G}(\mu) = \mu^6 - 14\mu^5 + 71\mu^4 - 158\mu^3 + 149\mu^2 - 48\mu,$$

cujas raízes formam o espectro de G :

$$\text{spect}(G) = \begin{bmatrix} 5.115 & 4.303 & 2.746 & 1.139 & 0.697 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Assim, a conectividade algébrica do grafo G é $\alpha(G) = 0.697$.

Se pretendermos descobrir a centralidade via conectividade algébrica de v_1 , então retiramos o vértice v_1 do grafo G de forma a obtermos o subgrafo induzido $G \setminus v_1$ cujo espectro é:

$$\text{spect}(G) = \begin{bmatrix} 4.303 & 3.618 & 1.382 & 0.697 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

A conectividade algébrica de $G \setminus v_1$ é $\alpha(G \setminus v_1) = 0.697$. Assim, $c_a(v_1) = \alpha(G) - \alpha(G \setminus v_1) = 0.697 - 0.697 = 0$ é a centralidade via conectividade algébrica do vértice v_1 .

Analogamente, podemos encontrar a centralidade dos restantes vértices. Temos portanto:

$$c_a(v_2) = 0.178; \quad c_a(v_3) = 0.697; \quad c_a(v_4) = 0.697; \quad c_a(v_5) = -0.303; \\ c_a(v_6) = -0.133.$$

Como podemos observar e tendo em consideração a medida de centralidade via conectividade algébrica os vértices v_3 e v_4 são os mais centrais e indispensáveis para manter o grafo conexo. Da mesma forma esta medida indica-nos que os vértices v_5 e v_6 exigem uma maior vigilância (porque têm as centralidades mais baixas) e podem vir a comprometer a rede.

6.4 Algumas medidas de centralidade utilizadas em grafos ponderados

Nesta secção veremos que as medidas de centralidade de grau, de proximidade e de vetor próprio podem ser estendidas para grafos ponderados. Nesta medida é utilizada uma matriz cujas entradas correspondem aos valores de cada aresta, denominada de matriz dos pesos.

Definição 6.22 *Seja G um grafo conexo ponderado e seja v_k um vértice qualquer, então a centralidade de grau de v_k é dada pela soma dos pesos das arestas incidentes a v_k .*

$$d_k = \sum_{j=1}^n w_{kj},$$

onde w_{kj} corresponde às entradas da matriz dos pesos do grafo G .

Definição 6.23 *Seja G um grafo conexo ponderado e seja v_k um vértice qualquer, então a centralidade de proximidade de v_k pode ser definida como o inverso da soma dos pesos das arestas referentes à geodésica que liga pares de vértices.*

$$c_C(v_k) = \frac{1}{\sum_{j=1}^n \text{dist}(v_j, v_k)}.$$

Definição 6.24 *Seja G um grafo conexo ponderado com n vértices e seja v_k um vértice de G , então a centralidade de vetor próprio de v_k é dada por:*

$$c_{\text{eig}}(v_k) = x_k,$$

onde x_k é a k -ésima coordenada do vetor próprio positivo unitário x associado ao índice do grafo, isto é

$$x_k = \frac{1}{\text{ind}(G)} \sum_{j=1}^n w_{kj} x_j, \quad k = 1, \dots, n,$$

onde w_{kj} são as entradas da matriz de pesos do grafo G e x_j são as coordenadas do vetor próprio associado ao índice do grafo.

6.5 Aplicação

A análise de redes sociais, tem sido aplicada à análise do desempenho individual e coletivo no futebol. A maioria dos estudos têm analisado as redes de interação entre os jogadores através do passe, entendendo os jogadores como os vértices dessa rede (Duch [29]).

O objetivo deste estudo foi o de investigar a influência individual dos jogadores da seleção portuguesa na criação de redes de circulação da bola que vão desde a recuperação de bola até à finalização.

Para a realização deste estudo utilizamos as jogadas mais perigosas (aquelas que terminaram em remate) da seleção de Portugal no jogo para a final do Europeu de 2016, onde Portugal sagrou-se campeão europeu ao vencer por 1-0 a seleção francesa, após o prolongamento.

Todas as jogadas têm início após a recuperação de bola por parte da seleção portuguesa e terminam após a finalização da jogada através de um remate.

Os jogadores serão sempre identificados com o seu nome seguido do seu número da camisola. O número da camisola terá um papel fundamental, pois irá corresponder ao número do vértice que representa o jogador no grafo.

Dados relativos ao jogo

Onze inicial de Portugal:

Rui Patrício (1)	Cédric Soares (21)	Renato Sanchez (16)
Pepe (3)	William de Carvalho (14)	Nani (17)
José Fonte (4)	João Mário (10)	Cristiano Ronaldo (7)
Raphael Guerreiro (5)	Adrien Silva (23)	

Substituições:

	Saídas	Entradas
minuto 25':	Cristiano Ronaldo (7)	Ricardo Quaresma (20)
minuto 66':	Adrien Silva (23)	João Moutinho (8)
minuto 78':	Renato Sanchez (16)	Éder (11)

Jogadas perigosas (terminadas em remate) por parte da equipa portuguesa:

minuto 4’: Pepe (3) - Rui Patrício (1) - José Fonte (4) - Adrien Silva (23) - Cédric Soares (21) - Nani (17) - remate (R).

minuto 23’: Adrien (23) - remate (R).

minuto 27’: Raphael Guerreiro (5) - Renato Sanchez (16) - William Carvalho (14) - Cédric Soares (21) - Ricardo Quaresma (20) - William Carvalho (14) - Adrien Silva (23) - Renato Sanchez (16) - Raphael Guerreiro (5) - Renato Sanchez (16) - William Carvalho (14) - Ricardo Quaresma (20) - Cédric Soares (21) - João Mário (10) - remate (R).

minuto 38’: Raphael Guerreiro (5) - remate (R).

minuto 39’: João Mário (10) - José Fonte (4) - remate (R).

minuto 80’: João Mário (10) - João Moutinho (8) - Nani (17) - remate (R).

minuto 80’: Ricardo Quaresma (20) - remate (R).

minuto 81’: João Moutinho (8) - Cédric Soares (21) - Pepe (3) - José Fonte (4) - Raphael Guerreiro (5) - João Mário (10) - Ricardo Quaresma (20) - Rui Patrício (1) - William Carvalho (14) - José Fonte (4) - Raphael Guerreiro (5) - João Mário (10) - José Fonte (4) - William Carvalho (14) - Cédric Soares (21) - Nani (17) - João Moutinho (8) - João Mário (10) - João Moutinho (8) - Nani (17) - remate (R).

minuto 95’: Ricardo Quaresma (20) - Pepe (3) - remate (R).

minuto 103’: Ricardo Quaresma (20) - Éder (11) - remate (R).

minuto 108’: Raphael Guerreiro (5) - remate (R).

minuto 109’: João Moutinho (8) - William Carvalho (14) - Ricardo Quaresma (20) - João Moutinho (8) - Éder (11) - remate (R).

Para a construção da Figura 6.8 foi necessário assistir ao vídeo do jogo de futebol da final do Europeu de 2016 inúmeras vezes, de modo, a conseguir apontar o percurso da bola nas jogadas mais perigosas do encontro. A figura representa um grafo não direcionado com 15 vértices, onde os vértices vermelhos correspondem ao 11 inicial de Portugal, os vértices azuis são os jogadores que entraram na partida no decorrer do jogo, o vértice amarelo representa o remate (R), ou seja, todos os jogadores que remataram durante o jogo tiveram ligação com este vértice. Os números identificam o número do vértice (corresponde ao número da camisola do jogador) e as arestas representam a ligação entre 2 jogadores, isto é, se, por exemplo, existe uma aresta entre Pepe (3) e José Fonte (4), então significa que o Pepe (3) passou a bola para o José Fonte (4) pelo menos uma vez no jogo, ou vice-versa.

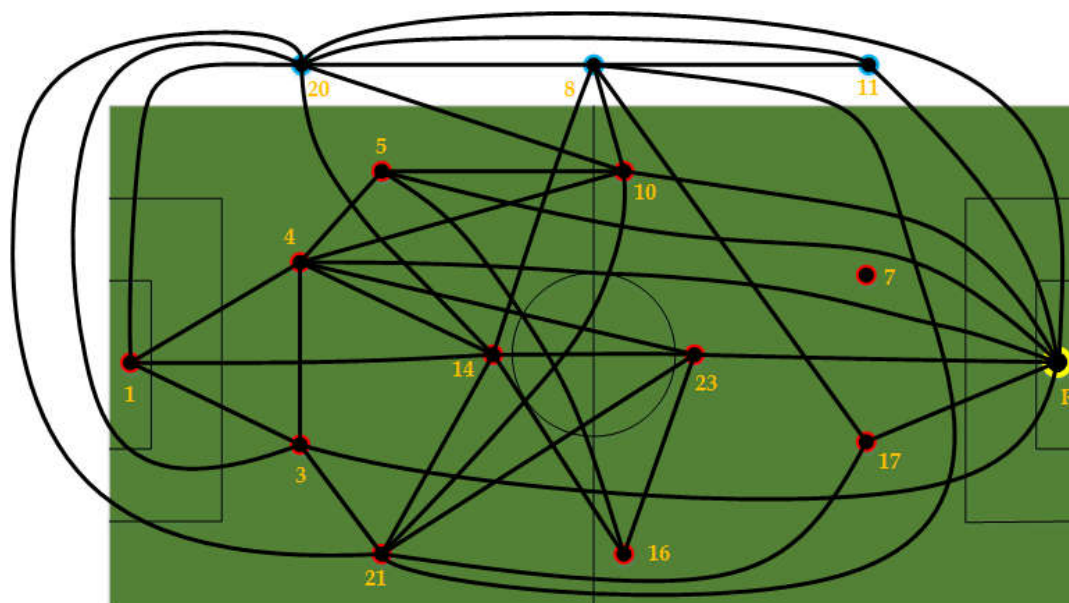


Figura 6.8: Mapa de jogo das jogadas mais perigosas de Portugal

6.5.1 Medidas de Centralidade aplicadas à final do Europeu de 2016

Para calcular as medidas de centralidade presentes nesta subsecção e, uma vez que o Cristiano Ronaldo (7) não fez, neste jogo, nenhuma jogada dita perigosa, pois, por se ter lesionado, foi substituído logo no início, então não

será considerado um vértice. Esta decisão prende-se com o facto de que para calcularmos as medidas de centralidade de um grafo é necessário que este seja conexo. Usamos então os 10 jogadores iniciais, os 3 jogadores que entraram no decorrer do jogo e o vértice remate (R).

Ficamos assim com o seguinte grafo G conexo, ponderado e não direcionado com 14 vértices:

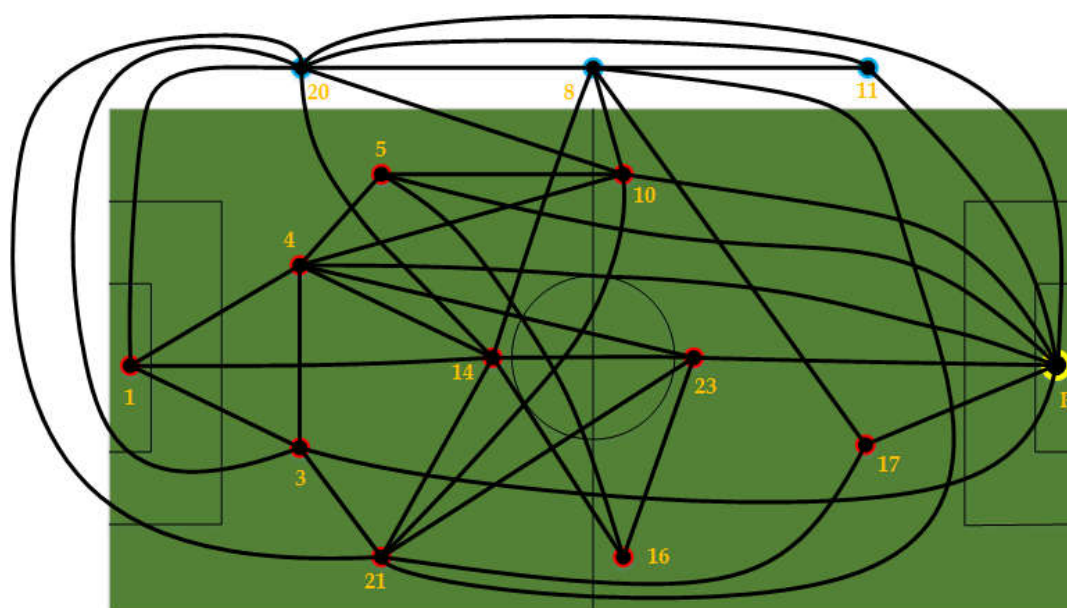


Figura 6.9: Mapa de jogo das jogadas mais perigosas de Portugal após a exclusão do vértice 7

Centralidade de grau

Para calcular a centralidade de grau utilizamos um grafo ponderado, uma vez que existem ligações que se repetem entre jogadores, dando assim peso às arestas/ligações. A frequência destas ligações podem ser consultadas nas jogadas mais perigosas do encontro, analisando quantas vezes um jogador teve ligação com outro.

A seguinte matriz dos pesos representa o grafo G da Figura 6.9. Acrescentamos à esquerda e em cima, respetivamente, uma matriz coluna e uma matriz linha auxiliares, que representam o número da camisola de cada jogador (número do vértice), identificando assim, a que vértice corresponde determinada linha/coluna da matriz dos pesos. A ordem dos vértices nestas matrizes coluna e linha foi feita tendo em conta a posição do jogador, o jogador 1 é guarda

redes, o 3 é defesa central, o 4 é defesa central, o 5 é lateral esquerdo, e assim sucessivamente.

$$P_G = \begin{matrix} & \begin{matrix} [1 & 3 & 4 & 5 & 21 & 14 & 10 & 23 & 16 & 17 & 20 & 8 & 11 & R] \end{matrix} \\ \begin{matrix} [1 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 21 \\ 14 \\ 10 \\ 23 \\ 16 \\ 17 \\ 20 \\ 8 \\ 11 \\ R] \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Assim, os resultados obtidos para a medida de centralidade de grau são:

$$\begin{matrix} d_1 = 4 & d_3 = 5 & d_4 = 10 & d_5 = 9 & d_{21} = 10 & d_{14} = 12 & d_{10} = 10 \\ d_{23} = 5 & d_{16} = 6 & d_{17} = 8 & d_{20} = 11 & d_8 = 10 & d_{11} = 4 & d_R = 12 \end{matrix} .$$

Através da medida de centralidade de grau constatamos que o jogador William Carvalho (14) foi o jogador que mais ligações teve com outros jogadores da sua equipa, executando o passe por 12 vezes no que diz respeito às jogadas perigosas. Podemos ainda destacar os três médios Ricardo Quaresma (20), João Moutinho (8) e João Mário (10), o lateral Cédric Soares (21) e o central José Fonte (4) pela alta centralidade.

Centralidade de proximidade

Para calcularmos a centralidade de proximidade utilizamos os 10 jogadores iniciais mais os 3 que entraram no decorrer do jogo e o vértice remate (R), pois consideramos que era importante saber qual o caminho mais curto para a bola sair de um determinado jogador e chegar à finalização.

Na tabela seguinte os vértices são identificados por J_i (jogador i) e apresentamos apenas os resultados finais das medidas de centralidade de proximidade dos jogadores (os cálculos podem ser consultados no Anexo A).

Jogador	J_1	J_3	J_4	J_5	J_{21}	J_{14}	J_{10}	J_{23}	J_{16}	J_{17}	J_{20}	J_8	J_{11}	R
$c_C(J_i)$	$\frac{1}{23}$	$\frac{1}{22}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{19}$	$\frac{1}{19}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{23}$	$\frac{1}{26}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{18}$

Assim, observamos que Ricardo Quaresma (20) é o jogador que, em média, fez a bola chegar aos colegas de equipa, mais rapidamente, pois a sua medida de centralidade de proximidade foi de aproximadamente 0,056. Com uma boa centralidade de proximidade temos ainda William Carvalho (14) e Cédric Soares (21) ambos com 0,053.

Centralidade via conectividade algébrica

Para calcularmos a centralidade via conectividade algébrica precisamos saber qual o valor da conectividade algébrica do grafo G . Assim, utilizando uma matriz linha e uma matriz coluna que representam o número da camisola de cada jogador (número do vértice), temos:

$$L_G = D - A_G$$

$$= \begin{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 & 21 & 14 & 10 & 23 & 16 & 17 & 20 & 8 & 11 & R \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 21 \\ 14 \\ 10 \\ 23 \\ 16 \\ 17 \\ 20 \\ 8 \\ 11 \\ R \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 7 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 7 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 7 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 5 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 8 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 6 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 8 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

O seu polinómio característico é:

$$\begin{aligned} & \mu^{14} - 76\mu^{13} + 2622\mu^{12} - 54332\mu^{11} + 753885\mu^{10} - 7391086\mu^9 + 52632428\mu^8 - \\ & 275412308\mu^7 + 1058136156\mu^6 - 2945608126\mu^5 + 5770231472\mu^4 - \\ & 7526268460\mu^3 + 5853795788\mu^2 - 2048828936\mu \end{aligned}$$

e os seus valores próprios são:

$$\begin{array}{ccccccccc} 9.9753 & 9.5961 & 8.3488 & 7.9522 & 7.4747 & 6.8172 & 5.3310 & & \\ 5.001 & 4.4751 & 3.5521 & 2.8378 & 2.6638 & 1.9748 & 0. & & \end{array}$$

Como a conectividade algébrica é o segundo menor valor próprio do espectro de um grafo, então a conectividade algébrica de G é 1,9748, ou seja, $\alpha(G) = 1,9748$.

Após remover um vértice do grafo G à vez e fazendo os cálculos como anteriormente, obtemos os seguintes resultados:

$$\begin{array}{ll} \alpha(G \setminus v_1) = 1,9749; & \alpha(G \setminus v_3) = 1,9833; \\ \alpha(G \setminus v_4) = 2,0307; & \alpha(G \setminus v_5) = 2,2048; \\ \alpha(G \setminus v_{21}) = 2,0323; & \alpha(G \setminus v_{14}) = 2,0353; \\ \alpha(G \setminus v_{10}) = 1,9773; & \alpha(G \setminus v_{23}) = 2,1579; \\ \alpha(G \setminus v_{16}) = 2,4680; & \alpha(G \setminus v_{17}) = 2,1233; \\ \alpha(G \setminus v_{20}) = 2,0911; & \alpha(G \setminus v_8) = 2,2298; \\ \alpha(G \setminus v_{11}) = 2,1635; & \alpha(G \setminus v_R) = 2,0018. \end{array}$$

Como $c_a(v_i) = \alpha(G) - \alpha(G \setminus v_i)$, então

$$\begin{array}{cccc} c_a(v_1) = -0,0001 & c_a(v_3) = -0,0085 & c_a(v_4) = -0,0559 & c_a(v_5) = -0,23 \\ c_a(v_{21}) = -0,0575 & c_a(v_{14}) = -0,0605 & c_a(v_{10}) = -0,0025 & c_a(v_R) = -0,027 \\ c_a(v_{23}) = -0,1831 & c_a(v_{16}) = -0,4932 & c_a(v_{17}) = -0,1485 & \\ c_a(v_{20}) = -0,1163 & c_a(v_8) = -0,255 & c_a(v_{11}) = -0,1887 & \end{array}$$

Esta medida de centralidade só nos deu valores negativos e isso explica-se pelo facto do grafo possuir muitos caminhos possíveis para se deslocar de um vértice x para um vértice y , fazendo com que ele nunca se torne desconexo. Assim, concluímos que esta centralidade não nos dá resultados objetivos.

Centralidade de intermediação

Para calcularmos esta centralidade temos que averiguar quantos caminhos mais curtos existem entre um determinado jogador e outro, fazendo com que a bola passe por um terceiro elemento. Nesta medida excluimos o vértice remate, uma vez que ele nunca será intermediário entre dois jogadores.

Os resultados finais são apresentados em (6.1). Os cálculos intermédios necessários para as medidas de centralidade de intermediação de cada vértice (jogador) podem ser consultados no Anexo B.

Com base nesta centralidade concluimos que o jogador mais influente ao longo do jogo foi o médio William Carvalho (14), pois a sua centralidade de intermediação foi a mais elevada, isto é, foi de 10,638. Outros jogadores que também tiveram uma boa performance foram Cédric Soares (21), Ricardo Quaresma (20) e João Moutinho (8) com uma centralidade de 9,052, de 8,876 e de 8,15, respetivamente. Conseguimos observar que a posição ocupada em campo pelos jogadores afeta o seu nível de influência na equipa, pois os médios têm tendência a apresentar níveis de influência superiores quando comparados com outras posições.

$$\begin{array}{cccccc} J_1 & J_3 & J_4 & J_5 & J_{21} & J_{14} & J_{10} \\ 0,810 & 1,367 & 6,262 & 1,476 & 9,052 & 10,638 & 6,667 \\ \\ J_{23} & J_{16} & J_{17} & J_8 & J_{20} & J_{11} & \\ 1,869 & 1,000 & 0,000 & 8,15 & 8,876 & 0,000 & \end{array} \quad (6.1)$$

Capítulo 7

Conclusões

A teoria espectral de grafos codifica um grafo ou uma rede numa matriz, depois calcula os valores próprios (para formar o espectro) dessa matriz. Esses valores próprios podem ser usados e calculados com eficiência e precisão para deduzir informações importantes sobre o grafo ou sobre a rede.

O desenvolvimento do presente estudo possibilitou uma análise de como os grafos e a teoria espectral podem ser utilizados para medir a centralidade de um vértice e, deste modo, obter dados mais consistentes sobre determinados comportamentos e situações que ocorrem dentro de uma rede. Vimos que para saber a importância de um vértice ou de um indivíduo numa rede em função do seu número de vizinhos, então a medida de centralidade mais adequada é a de grau. Se, no entanto, pretendemos estudar a distância ou o tempo que leva uma informação a espalhar-se pela rede, ou seja, saber a proximidade entre um determinado vértice e todos os outros, a medida mais apropriada seria a de centralidade de proximidade. Se o objetivo é controlar a comunicação de um vértice sobre outros vértices, então a centralidade de intermediação é a mais apropriada, pois, o vértice mais central tem o poder de impedir, permitir, facilitar ou dificultar a comunicação. A medida de centralidade de vetor próprio é a mais adequada no estudo da importância de um vértice na relação deste com vértices que tenham um grau de vértice elevado, isto é, muitas ligações. Se pretendemos estudar a vulnerabilidade de um vértice numa rede, a medida via conectividade algébrica é a mais indicada. Por fim, se a rede em estudo analisar o peso ou a intensidade da ligação entre os vértices, então as medidas de centralidade aplicáveis em grafos pesados são as mais apropriadas.

Assim, constatamos que, de um modo geral, não existe a melhor medida de centralidade, existe sim, dependendo do contexto e da situação, medidas mais

adequadas. Compreender a estrutura de uma rede e descobrir os vértices mais influentes é um desafio estimulante.

Ao aplicarmos as medidas atrás referidas, para explorar a relevância dos vértices na rede composta pelos 13 jogadores da seleção portuguesa de futebol, que intervieram nas jogadas mais perigosas, na final do Europeu de Futebol de 2016, concluimos que a medida de intermediação foi a que produziu resultados mais interessantes, pois o jogador que possui a bola é o jogador que controla a continuação da comunicação. Podemos destacar o jogador William Carvalho (14) pela excelente exibição, e por, com base no nosso estudo ter sido o jogador mais importante do plantel Português.

Para trabalhos futuros propomos estudar a teoria espectral de grafos e as medidas de centralidade utilizando grafos direcionados, estudar o algoritmo *PageRank*, que analisa a relevância de um site, tendo em atenção o número e a qualidade de *links* que direcionam para esse site e, por fim, analisar a propagação de um vírus, onde é aconselhada a utilização da medida de centralidade de vetor próprio.

Anexos

Anexo A

Centralidade de proximidade

Para calcularmos a centralidade de proximidade utilizamos os 10 jogadores iniciais mais os 3 que entraram no decorrer do jogo e o vértice remate (R), pois consideramos que era importante saber qual o caminho mais curto para a bola sair de um determinado jogador e chegar à zona de finalização.

$$\begin{aligned} dist(3,1) &= 1; & dist(4,1) &= 1; & dist(5,1) &= 2; & dist(21,1) &= 2; \\ dist(14,1) &= 1; & dist(10,1) &= 2; & dist(23,1) &= 2; & dist(16,1) &= 2; \\ dist(17,1) &= 3; & dist(20,1) &= 1; & dist(8,1) &= 2; & dist(11,1) &= 2; \\ dist(R,1) &= 2; \end{aligned}$$

onde $dist(x,y)$ representa o menor número de arestas necessário para a bola ir do jogador x para o jogador y , ou vice versa.

$$c_C(J_1) = \frac{1}{1+1+2+2+1+2+2+2+3+1+2+2+2} = \frac{1}{23}$$

$$\begin{aligned} dist(1,3) &= 1; & dist(4,3) &= 1; & dist(5,3) &= 2; & dist(21,3) &= 1; \\ dist(14,3) &= 2; & dist(10,3) &= 2; & dist(23,3) &= 2; & dist(16,3) &= 3; \\ dist(17,3) &= 2; & dist(20,3) &= 1; & dist(8,3) &= 2; & dist(11,3) &= 2; \\ dist(R,3) &= 1; \end{aligned}$$

$$c_C(J_3) = \frac{1}{1+1+2+1+2+2+2+3+2+1+2+2+1} = \frac{1}{22}$$

$$\begin{aligned}
dist(1, 4) &= 1; & dist(3, 4) &= 1; & dist(5, 4) &= 1; & dist(21, 4) &= 2; \\
dist(14, 4) &= 1; & dist(10, 4) &= 1; & dist(23, 4) &= 1; & dist(16, 4) &= 2; \\
dist(17, 4) &= 3; & dist(20, 4) &= 2; & dist(8, 4) &= 2; & dist(11, 4) &= 3; \\
dist(R, 4) &= 1;
\end{aligned}$$

$$c_C(J_4) = \frac{1}{1+1+1+2+1+1+1+2+3+2+2+3+1} = \frac{1}{21}$$

$$\begin{aligned}
dist(1, 5) &= 2; & dist(3, 5) &= 2; & dist(4, 5) &= 1; & dist(21, 5) &= 2; \\
dist(14, 5) &= 2; & dist(10, 5) &= 1; & dist(23, 5) &= 2; & dist(16, 5) &= 1; \\
dist(17, 5) &= 3; & dist(20, 5) &= 2; & dist(8, 5) &= 2; & dist(11, 5) &= 3; \\
dist(R, 5) &= 1;
\end{aligned}$$

$$c_C(J_5) = \frac{1}{2+2+1+2+2+1+2+1+3+2+2+3+1} = \frac{1}{24}$$

$$\begin{aligned}
dist(1, 21) &= 2; & dist(3, 21) &= 1; & dist(4, 21) &= 2; & dist(5, 21) &= 2; \\
dist(14, 21) &= 1; & dist(10, 21) &= 1; & dist(23, 21) &= 1; & dist(16, 21) &= 2; \\
dist(17, 21) &= 1; & dist(20, 21) &= 1; & dist(8, 21) &= 1; & dist(11, 21) &= 2; \\
dist(R, 21) &= 2;
\end{aligned}$$

$$c_C(J_{21}) = \frac{1}{2+1+2+2+1+1+1+2+1+1+1+2+2} = \frac{1}{19}$$

$$\begin{aligned}
dist(1, 14) &= 1; & dist(3, 14) &= 2; & dist(4, 14) &= 1; & dist(5, 14) &= 2; \\
dist(21, 14) &= 1; & dist(10, 14) &= 2; & dist(23, 14) &= 1; & dist(16, 14) &= 1; \\
dist(17, 14) &= 2; & dist(20, 14) &= 1; & dist(8, 14) &= 1; & dist(11, 14) &= 2; \\
dist(R, 14) &= 2;
\end{aligned}$$

$$c_C(J_{14}) = \frac{1}{1+2+1+2+1+2+1+1+1+2+1+1+2+2} = \frac{1}{19}$$

$$\begin{aligned} \text{dist}(1, 10) &= 2; & \text{dist}(3, 10) &= 2; & \text{dist}(4, 10) &= 1; & \text{dist}(5, 10) &= 1; \\ \text{dist}(21, 10) &= 1; & \text{dist}(14, 10) &= 2; & \text{dist}(23, 10) &= 2; & \text{dist}(16, 10) &= 2; \\ \text{dist}(17, 10) &= 2; & \text{dist}(20, 10) &= 1; & \text{dist}(8, 10) &= 1; & \text{dist}(11, 10) &= 2; \\ \text{dist}(R, 10) &= 1; \end{aligned}$$

$$c_C(J_{10}) = \frac{1}{2+2+1+1+1+2+2+2+2+1+1+2+1} = \frac{1}{20}$$

$$\begin{aligned} \text{dist}(1, 23) &= 2; & \text{dist}(3, 23) &= 2; & \text{dist}(4, 23) &= 1; & \text{dist}(5, 23) &= 2; \\ \text{dist}(21, 23) &= 1; & \text{dist}(14, 23) &= 2; & \text{dist}(10, 23) &= 1; & \text{dist}(16, 23) &= 1; \\ \text{dist}(17, 23) &= 3; & \text{dist}(20, 23) &= 2; & \text{dist}(8, 23) &= 2; & \text{dist}(11, 23) &= 3; \\ \text{dist}(R, 23) &= 1; \end{aligned}$$

$$c_C(J_{23}) = \frac{1}{2+2+1+2+1+2+1+1+3+2+2+3+1} = \frac{1}{23}$$

$$\begin{aligned} \text{dist}(1, 16) &= 2; & \text{dist}(3, 16) &= 3; & \text{dist}(4, 16) &= 2; & \text{dist}(5, 16) &= 1; \\ \text{dist}(21, 16) &= 2; & \text{dist}(14, 16) &= 1; & \text{dist}(10, 16) &= 2; & \text{dist}(23, 16) &= 1; \\ \text{dist}(17, 16) &= 3; & \text{dist}(20, 16) &= 2; & \text{dist}(8, 16) &= 2; & \text{dist}(11, 16) &= 3; \\ \text{dist}(R, 16) &= 2; \end{aligned}$$

$$c_C(J_{16}) = \frac{1}{2+3+2+1+2+1+2+1+3+2+2+3+2} = \frac{1}{26}$$

$$\begin{aligned} \text{dist}(1, 17) &= 3; & \text{dist}(3, 17) &= 2; & \text{dist}(4, 17) &= 3; & \text{dist}(5, 17) &= 3; \\ \text{dist}(21, 17) &= 1; & \text{dist}(14, 17) &= 2; & \text{dist}(10, 17) &= 2; & \text{dist}(23, 17) &= 3; \\ \text{dist}(16, 17) &= 3; & \text{dist}(20, 17) &= 2; & \text{dist}(8, 17) &= 1; & \text{dist}(11, 17) &= 2; \\ \text{dist}(R, 17) &= 1; \end{aligned}$$

$$c_C(J_{17}) = \frac{1}{3 + 2 + 3 + 3 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 2 + 1 + 2 + 1} = \frac{1}{28}$$

$$\begin{aligned} \text{dist}(1, 20) &= 1; & \text{dist}(3, 20) &= 1; & \text{dist}(4, 20) &= 2; & \text{dist}(5, 20) &= 2; \\ \text{dist}(21, 20) &= 1; & \text{dist}(14, 20) &= 1; & \text{dist}(10, 20) &= 1; & \text{dist}(23, 20) &= 2; \\ \text{dist}(16, 20) &= 2; & \text{dist}(17, 20) &= 2; & \text{dist}(8, 20) &= 1; & \text{dist}(11, 20) &= 1; \\ \text{dist}(R, 20) &= 1; \end{aligned}$$

$$c_C(J_{20}) = \frac{1}{1 + 1 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1} = \frac{1}{18}$$

$$\begin{aligned} \text{dist}(1, 8) &= 2; & \text{dist}(3, 8) &= 2; & \text{dist}(4, 8) &= 2; & \text{dist}(5, 8) &= 2; \\ \text{dist}(21, 8) &= 1; & \text{dist}(14, 8) &= 1; & \text{dist}(10, 8) &= 1; & \text{dist}(23, 8) &= 2; \\ \text{dist}(16, 8) &= 2; & \text{dist}(17, 8) &= 1; & \text{dist}(20, 8) &= 1; & \text{dist}(11, 8) &= 1; \\ \text{dist}(R, 8) &= 2; \end{aligned}$$

$$c_C(J_8) = \frac{1}{2 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 2} = \frac{1}{20}$$

$$\begin{aligned} \text{dist}(1, 11) &= 2; & \text{dist}(3, 11) &= 2; & \text{dist}(4, 11) &= 3; & \text{dist}(5, 11) &= 3; \\ \text{dist}(21, 11) &= 2; & \text{dist}(14, 11) &= 2; & \text{dist}(10, 11) &= 2; & \text{dist}(23, 11) &= 3; \\ \text{dist}(16, 11) &= 3; & \text{dist}(17, 11) &= 2; & \text{dist}(20, 11) &= 1; & \text{dist}(8, 11) &= 1; \\ \text{dist}(R, 11) &= 1; \end{aligned}$$

$$c_C(J_{11}) = \frac{1}{2 + 2 + 3 + 3 + 2 + 2 + 2 + 3 + 3 + 2 + 1 + 1 + 1} = \frac{1}{27}$$

$$\begin{aligned} \text{dist}(1, R) &= 2; & \text{dist}(3, R) &= 1; & \text{dist}(4, R) &= 1; & \text{dist}(5, R) &= 1; \\ \text{dist}(21, R) &= 2; & \text{dist}(14, R) &= 2; & \text{dist}(10, R) &= 1; & \text{dist}(23, R) &= 1; \\ \text{dist}(16, R) &= 2; & \text{dist}(17, R) &= 1; & \text{dist}(20, R) &= 1; & \text{dist}(8, R) &= 2; \\ \text{dist}(11, R) &= 1; \end{aligned}$$

$$c_C(V_R) = \frac{1}{2+1+1+1+2+2+1+1+2+1+1+2+1} = \frac{1}{18}$$

Anexo B

Centralidade de intermediação

Para calcularmos esta centralidade temos que averiguar quantos caminhos mais curtos existem entre um determinado jogador e outro, fazendo com que a bola passe por um terceiro elemento.

Geodésicas entre v_i e v_j , $i < j$ que passam pelo J_1 :

$$\begin{array}{ll} g_{3,4} = 0 & g_{3,4}(J_1) = 0 \\ g_{3,5} = 1 & g_{3,5}(J_1) = 0 \\ g_{3,21} = 1 & g_{3,21}(J_1) = 0 \\ g_{3,14} = 4 & g_{3,14}(J_1) = 1 \\ g_{3,10} = 3 & g_{3,10}(J_1) = 0 \\ g_{3,23} = 2 & g_{3,23}(J_1) = 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} g_{3,16} = 7 & g_{3,16}(J_1) = 1 \\ g_{3,17} = 1 & g_{3,17}(J_1) = 0 \\ g_{3,20} = 1 & g_{3,20}(J_1) = 0 \\ g_{3,8} = 2 & g_{3,8}(J_1) = 0 \\ g_{3,11} = 1 & g_{3,11}(J_1) = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} g_{4,5} = 1 & g_{4,5}(J_1) = 0 \\ g_{4,21} = 4 & g_{4,21}(J_1) = 0 \\ g_{4,14} = 1 & g_{4,14}(J_1) = 0 \\ g_{4,10} = 1 & g_{4,10}(J_1) = 0 \\ g_{4,23} = 1 & g_{4,23}(J_1) = 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} g_{4,16} = 3 & g_{4,16}(J_1) = 0 \\ g_{4,17} = 6 & g_{4,17}(J_1) = 0 \\ g_{4,20} = 4 & g_{4,20}(J_1) = 1 \\ g_{4,8} = 2 & g_{4,8}(J_1) = 0 \\ g_{4,11} = 6 & g_{4,11}(J_1) = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} g_{5,8} = 1 & g_{5,8}(J_1) = 0 \\ g_{5,10} = 1 & g_{5,10}(J_1) = 0 \\ g_{5,11} = 2 & g_{5,11}(J_1) = 0 \\ g_{5,14} = 2 & g_{5,14}(J_1) = 0 \\ g_{5,16} = 1 & g_{5,16}(J_1) = 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} g_{5,17} = 1 & g_{5,17}(J_1) = 0 \\ g_{5,20} = 1 & g_{5,20}(J_1) = 0 \\ g_{5,21} = 1 & g_{5,21}(J_1) = 0 \\ g_{5,23} = 2 & g_{5,23}(J_1) = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
g_{8,10} = 1 & g_{8,10}(J_1) = 0 \\
g_{8,11} = 1 & g_{8,11}(J_1) = 0 \\
g_{8,14} = 1 & g_{8,14}(J_1) = 0 \\
g_{8,16} = 1 & g_{8,16}(J_1) = 0 \\
g_{10,11} = 2 & g_{10,11}(J_1) = 0 \\
g_{10,14} = 4 & g_{10,14}(J_1) = 0 \\
g_{10,16} = 1 & g_{10,16}(J_1) = 0 \\
g_{10,17} = 2 & g_{10,17}(J_1) = 0 \\
g_{11,14} = 2 & g_{11,14}(J_1) = 0 \\
g_{11,16} = 2 & g_{11,16}(J_1) = 0 \\
g_{11,17} = 1 & g_{11,17}(J_1) = 0 \\
g_{14,16} = 1 & g_{14,16}(J_1) = 0 \\
g_{14,17} = 2 & g_{14,17}(J_1) = 0 \\
g_{14,20} = 1 & g_{14,20}(J_1) = 0 \\
g_{16,17} = 3 & g_{16,17}(J_1) = 0 \\
g_{16,20} = 1 & g_{16,20}(J_1) = 0 \\
g_{17,20} = 2 & g_{17,20}(J_1) = 0 \\
g_{17,21} = 1 & g_{17,21}(J_1) = 0 \\
g_{20,21} = 1 & g_{20,21}(J_1) = 0 \\
g_{8,17} = 1 & g_{8,17}(J_1) = 0 \\
g_{8,20} = 1 & g_{8,20}(J_1) = 0 \\
g_{8,21} = 1 & g_{8,21}(J_1) = 0 \\
g_{8,23} = 2 & g_{8,23}(J_1) = 0 \\
g_{10,20} = 1 & g_{10,20}(J_1) = 0 \\
g_{10,21} = 1 & g_{10,21}(J_1) = 0 \\
g_{10,23} = 2 & g_{10,23}(J_1) = 0 \\
g_{11,20} = 1 & g_{11,20}(J_1) = 0 \\
g_{11,21} = 2 & g_{11,21}(J_1) = 0 \\
g_{11,23} = 4 & g_{11,23}(J_1) = 0 \\
g_{14,21} = 1 & g_{14,21}(J_1) = 0 \\
g_{14,23} = 1 & g_{14,23}(J_1) = 0 \\
g_{16,21} = 2 & g_{16,21}(J_1) = 0 \\
g_{16,23} = 1 & g_{16,23}(J_1) = 0 \\
g_{17,23} = 1 & g_{17,23}(J_1) = 0 \\
g_{20,23} = 2 & g_{20,23}(J_1) = 0 \\
g_{21,23} = 1 & g_{21,23}(J_1) = 0
\end{array}$$

Assim, a medida de centralidade de intermediação para o jogador 1 é:

$$c_B(J_1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{17}{21}$$

Geodésicas entre v_i e v_j , $i < j$ que passam pelo J_3 :

$$\begin{array}{ll}
g_{1,4} = 1 & g_{1,4}(J_3) = 0 \\
g_{1,5} = 1 & g_{1,5}(J_3) = 0 \\
g_{1,8} = 2 & g_{1,8}(J_3) = 0 \\
g_{1,10} = 2 & g_{1,10}(J_3) = 0 \\
g_{1,11} = 1 & g_{1,11}(J_3) = 0 \\
g_{1,14} = 1 & g_{1,14}(J_3) = 0 \\
g_{1,16} = 1 & g_{1,16}(J_3) = 0 \\
g_{1,17} = 5 & g_{1,17}(J_3) = 1 \\
g_{1,20} = 1 & g_{1,20}(J_3) = 0 \\
g_{1,21} = 3 & g_{1,21}(J_3) = 1 \\
g_{1,23} = 2 & g_{1,23}(J_3) = 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
g_{4,5} = 1 & g_{4,5}(J_3) = 0 \\
g_{4,8} = 2 & g_{4,8}(J_3) = 0 \\
g_{4,10} = 1 & g_{4,10}(J_3) = 0 \\
g_{4,11} = 6 & g_{4,11}(J_3) = 1 \\
g_{4,14} = 1 & g_{4,14}(J_3) = 0 \\
g_{5,8} = 1 & g_{5,8}(J_3) = 0 \\
g_{5,10} = 1 & g_{5,10}(J_3) = 0 \\
g_{5,11} = 2 & g_{5,11}(J_3) = 0 \\
g_{5,14} = 2 & g_{5,14}(J_3) = 0 \\
g_{5,16} = 1 & g_{5,16}(J_3) = 0 \\
g_{8,10} = 1 & g_{8,10}(J_3) = 0 \\
g_{8,11} = 1 & g_{8,11}(J_3) = 0 \\
g_{8,14} = 1 & g_{8,14}(J_3) = 0 \\
g_{8,16} = 1 & g_{8,16}(J_3) = 0 \\
g_{10,11} = 2 & g_{10,11}(J_3) = 0 \\
g_{10,14} = 4 & g_{10,14}(J_3) = 0 \\
g_{10,16} = 1 & g_{10,16}(J_3) = 0 \\
g_{10,17} = 2 & g_{10,17}(J_3) = 0 \\
g_{11,14} = 2 & g_{11,14}(J_3) = 0 \\
g_{11,16} = 2 & g_{11,16}(J_3) = 0 \\
g_{11,17} = 1 & g_{11,17}(J_3) = 0 \\
g_{14,16} = 1 & g_{14,16}(J_3) = 0 \\
g_{14,17} = 2 & g_{14,17}(J_3) = 0 \\
g_{14,20} = 1 & g_{14,20}(J_3) = 0 \\
g_{16,17} = 3 & g_{16,17}(J_3) = 0 \\
g_{16,20} = 1 & g_{16,20}(J_3) = 0 \\
g_{17,20} = 2 & g_{17,20}(J_3) = 0 \\
g_{17,21} = 1 & g_{17,21}(J_3) = 0 \\
g_{20,21} = 1 & g_{20,21}(J_3) = 0 \\
g_{4,16} = 3 & g_{4,16}(J_3) = 0 \\
g_{4,17} = 6 & g_{4,17}(J_3) = 1 \\
g_{4,20} = 4 & g_{4,20}(J_3) = 1 \\
g_{4,21} = 4 & g_{4,21}(J_3) = 1 \\
g_{4,23} = 1 & g_{4,23}(J_3) = 0 \\
g_{5,17} = 1 & g_{5,17}(J_3) = 0 \\
g_{5,20} = 1 & g_{5,20}(J_3) = 0 \\
g_{5,21} = 1 & g_{5,21}(J_3) = 0 \\
g_{5,23} = 2 & g_{5,23}(J_3) = 0 \\
g_{8,17} = 1 & g_{8,17}(J_3) = 0 \\
g_{8,20} = 1 & g_{8,20}(J_3) = 0 \\
g_{8,21} = 1 & g_{8,21}(J_3) = 0 \\
g_{8,23} = 2 & g_{8,23}(J_3) = 0 \\
g_{10,20} = 1 & g_{10,20}(J_3) = 0 \\
g_{10,21} = 1 & g_{10,21}(J_3) = 0 \\
g_{10,23} = 2 & g_{10,23}(J_3) = 0 \\
g_{11,20} = 1 & g_{11,20}(J_3) = 0 \\
g_{11,21} = 2 & g_{11,21}(J_3) = 0 \\
g_{11,23} = 4 & g_{11,23}(J_3) = 0 \\
g_{14,21} = 1 & g_{14,21}(J_3) = 0 \\
g_{14,23} = 1 & g_{14,23}(J_3) = 0 \\
g_{16,21} = 2 & g_{16,21}(J_3) = 0 \\
g_{16,23} = 1 & g_{16,23}(J_3) = 0 \\
g_{17,23} = 1 & g_{17,23}(J_3) = 0 \\
g_{20,23} = 2 & g_{20,23}(J_3) = 0 \\
g_{21,23} = 1 & g_{21,23}(J_3) = 0
\end{array}$$

Assim, a medida de centralidade de intermediação para o jogador 3 é:

$$c_B(J_3) = \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{41}{30}$$

Geodésicas entre v_i e v_j , $i < j$ que passam pelo J_4 :

$$\begin{array}{ll}
g_{1,3} = 1 & g_{1,3}(J_4) = 0 \\
g_{1,5} = 1 & g_{1,5}(J_4) = 1 \\
g_{1,8} = 2 & g_{1,8}(J_4) = 0 \\
g_{1,10} = 2 & g_{1,10}(J_4) = 1 \\
g_{1,11} = 1 & g_{1,11}(J_4) = 0 \\
g_{1,14} = 1 & g_{1,14}(J_4) = 0 \\
\\
g_{3,5} = 1 & g_{3,5}(J_4) = 1 \\
g_{3,8} = 2 & g_{3,8}(J_4) = 0 \\
g_{3,10} = 3 & g_{3,10}(J_4) = 1 \\
g_{3,11} = 1 & g_{3,11}(J_4) = 0 \\
g_{3,14} = 4 & g_{3,14}(J_4) = 1 \\
\\
g_{5,8} = 1 & g_{5,8}(J_4) = 0 \\
g_{5,10} = 1 & g_{5,10}(J_4) = 0 \\
g_{5,11} = 2 & g_{5,11}(J_4) = 0 \\
g_{5,14} = 2 & g_{5,14}(J_4) = 1 \\
g_{5,16} = 1 & g_{5,16}(J_4) = 0 \\
\\
g_{8,10} = 1 & g_{8,10}(J_4) = 0 \\
g_{8,11} = 1 & g_{8,11}(J_4) = 0 \\
g_{8,14} = 1 & g_{8,14}(J_4) = 0 \\
g_{8,16} = 1 & g_{8,16}(J_4) = 0 \\
\\
g_{10,11} = 2 & g_{10,11}(J_4) = 0 \\
g_{10,14} = 4 & g_{10,14}(J_4) = 1 \\
g_{10,16} = 1 & g_{10,16}(J_4) = 0 \\
g_{10,17} = 2 & g_{10,17}(J_4) = 0 \\
\\
g_{11,14} = 2 & g_{11,14}(J_4) = 0 \\
g_{11,16} = 2 & g_{11,16}(J_4) = 0 \\
g_{11,17} = 1 & g_{11,17}(J_4) = 0 \\
\\
g_{14,16} = 1 & g_{14,16}(J_4) = 0 \\
g_{14,17} = 2 & g_{14,17}(J_4) = 0 \\
g_{14,20} = 1 & g_{14,20}(J_4) = 0 \\
\\
g_{16,17} = 3 & g_{16,17}(J_4) = 0 \\
g_{16,20} = 1 & g_{16,20}(J_4) = 0 \\
\\
g_{1,16} = 1 & g_{1,16}(J_4) = 0 \\
g_{1,17} = 5 & g_{1,17}(J_4) = 0 \\
g_{1,20} = 1 & g_{1,20}(J_4) = 0 \\
g_{1,21} = 3 & g_{1,21}(J_4) = 0 \\
g_{1,23} = 2 & g_{1,23}(J_4) = 1 \\
\\
g_{3,16} = 7 & g_{3,16}(J_4) = 3 \\
g_{3,17} = 1 & g_{3,17}(J_4) = 0 \\
g_{3,20} = 1 & g_{3,20}(J_4) = 0 \\
g_{3,21} = 1 & g_{3,21}(J_4) = 0 \\
g_{3,23} = 2 & g_{3,23}(J_4) = 1 \\
\\
g_{5,17} = 1 & g_{5,17}(J_4) = 0 \\
g_{5,20} = 1 & g_{5,20}(J_4) = 0 \\
g_{5,21} = 1 & g_{5,21}(J_4) = 0 \\
g_{5,23} = 2 & g_{5,23}(J_4) = 1 \\
\\
g_{8,17} = 1 & g_{8,17}(J_4) = 0 \\
g_{8,20} = 1 & g_{8,20}(J_4) = 0 \\
g_{8,21} = 1 & g_{8,21}(J_4) = 0 \\
g_{8,23} = 2 & g_{8,23}(J_4) = 0 \\
\\
g_{10,20} = 1 & g_{10,20}(J_4) = 0 \\
g_{10,21} = 1 & g_{10,21}(J_4) = 0 \\
g_{10,23} = 2 & g_{10,23}(J_4) = 1 \\
\\
g_{11,20} = 1 & g_{11,20}(J_4) = 0 \\
g_{11,21} = 2 & g_{11,21}(J_4) = 0 \\
g_{11,23} = 4 & g_{11,23}(J_4) = 0 \\
\\
g_{14,21} = 1 & g_{14,21}(J_4) = 0 \\
g_{14,23} = 1 & g_{14,23}(J_4) = 0 \\
\\
g_{16,21} = 2 & g_{16,21}(J_4) = 0 \\
g_{16,23} = 1 & g_{16,23}(J_4) = 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
g_{17,20} = 2 & g_{17,20}(J_4) = 0 & g_{17,23} = 1 & g_{17,23}(J_4) = 0 \\
g_{17,21} = 1 & g_{17,21}(J_4) = 0 & & \\
g_{20,21} = 1 & g_{20,21}(J_4) = 0 & g_{20,23} = 2 & g_{20,23}(J_4) = 0 \\
g_{21,23} = 1 & g_{21,23}(J_4) = 0 & &
\end{array}$$

Assim, a medida de centralidade de intermediação para o jogador 4 é:

$$c_B(J_4) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{3}{7} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{263}{42}$$

Geodésicas entre v_i e v_j , $i < j$ que passam pelo J_5 :

$$\begin{array}{llll}
g_{1,3} = 1 & g_{1,3}(J_5) = 0 & g_{1,16} = 1 & g_{1,16}(J_5) = 0 \\
g_{1,4} = 1 & g_{1,4}(J_5) = 0 & g_{1,17} = 5 & g_{1,17}(J_5) = 0 \\
g_{1,8} = 2 & g_{1,8}(J_5) = 0 & g_{1,20} = 1 & g_{1,20}(J_5) = 0 \\
g_{1,10} = 2 & g_{1,10}(J_5) = 0 & g_{1,21} = 3 & g_{1,21}(J_5) = 0 \\
g_{1,11} = 1 & g_{1,11}(J_5) = 0 & g_{1,23} = 2 & g_{1,23}(J_5) = 0 \\
g_{1,14} = 1 & g_{1,14}(J_5) = 0 & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
g_{3,4} = 1 & g_{3,4}(J_5) = 0 & g_{3,16} = 7 & g_{3,16}(J_5) = 1 \\
g_{3,8} = 2 & g_{3,8}(J_5) = 0 & g_{3,17} = 1 & g_{3,17}(J_5) = 0 \\
g_{3,10} = 3 & g_{3,10}(J_5) = 0 & g_{3,20} = 1 & g_{3,20}(J_5) = 0 \\
g_{3,11} = 1 & g_{3,11}(J_5) = 0 & g_{3,21} = 1 & g_{3,21}(J_5) = 0 \\
g_{3,14} = 4 & g_{3,14}(J_5) = 0 & g_{3,23} = 2 & g_{3,23}(J_5) = 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
g_{4,8} = 2 & g_{4,8}(J_5) = 0 & g_{4,17} = 6 & g_{4,17}(J_5) = 0 \\
g_{4,10} = 1 & g_{4,10}(J_5) = 0 & g_{4,20} = 4 & g_{4,20}(J_5) = 0 \\
g_{4,11} = 6 & g_{4,11}(J_5) = 0 & g_{4,21} = 4 & g_{4,21}(J_5) = 0 \\
g_{4,14} = 1 & g_{4,14}(J_5) = 0 & g_{4,23} = 1 & g_{4,23}(J_5) = 0 \\
g_{4,16} = 3 & g_{4,16}(J_5) = 1 & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
g_{8,10} = 1 & g_{8,10}(J_5) = 0 & g_{8,17} = 1 & g_{8,17}(J_5) = 0 \\
g_{8,11} = 1 & g_{8,11}(J_5) = 0 & g_{8,20} = 1 & g_{8,20}(J_5) = 0 \\
g_{8,14} = 1 & g_{8,14}(J_5) = 0 & g_{8,21} = 1 & g_{8,21}(J_5) = 0 \\
g_{8,16} = 1 & g_{8,16}(J_5) = 0 & g_{8,23} = 2 & g_{8,23}(J_5) = 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
g_{10,11} = 2 & g_{10,11}(J_5) = 0 & g_{10,20} = 1 & g_{10,20}(J_5) = 0 \\
g_{10,14} = 4 & g_{10,14}(J_5) = 0 & g_{10,21} = 1 & g_{10,21}(J_5) = 0 \\
g_{10,16} = 1 & g_{10,16}(J_5) = 1 & g_{10,23} = 2 & g_{10,23}(J_5) = 0 \\
g_{10,17} = 2 & g_{10,17}(J_5) = 0 & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
g_{11,14} = 2 & g_{11,14}(J_5) = 0 & g_{11,20} = 1 & g_{11,20}(J_5) = 0 \\
g_{11,16} = 2 & g_{11,16}(J_5) = 0 & g_{11,21} = 2 & g_{11,21}(J_5) = 0 \\
g_{11,17} = 1 & g_{11,17}(J_5) = 0 & g_{11,23} = 4 & g_{11,23}(J_5) = 0 \\
\\
g_{14,16} = 1 & g_{14,16}(J_5) = 0 & g_{14,21} = 1 & g_{14,21}(J_5) = 0 \\
g_{14,17} = 2 & g_{14,17}(J_5) = 0 & g_{14,23} = 1 & g_{14,23}(J_5) = 0 \\
g_{14,20} = 1 & g_{14,20}(J_5) = 0 & & \\
\\
g_{16,17} = 3 & g_{16,17}(J_5) = 0 & g_{16,21} = 2 & g_{16,21}(J_5) = 0 \\
g_{16,20} = 1 & g_{16,20}(J_5) = 0 & g_{16,23} = 1 & g_{16,23}(J_5) = 0 \\
\\
g_{17,20} = 2 & g_{17,20}(J_5) = 0 & g_{17,23} = 1 & g_{17,23}(J_5) = 0 \\
g_{17,21} = 1 & g_{17,21}(J_5) = 0 & & \\
\\
g_{20,21} = 1 & g_{20,21}(J_5) = 0 & g_{20,23} = 2 & g_{20,23}(J_5) = 0 \\
\\
& & g_{21,23} = 1 & g_{21,23}(J_5) = 0
\end{array}$$

Assim, a medida de centralidade de intermediação para o jogador 5 é:

$$c_B(J_5) = \frac{1}{7} + \frac{1}{3} + 1 = \frac{31}{21}$$

Geodésicas entre v_i e v_j , $i < j$ que passam pelo J_8 :

$$\begin{array}{llll}
g_{1,3} = 1 & g_{1,3}(J_8) = 0 & g_{1,16} = 1 & g_{1,16}(J_8) = 0 \\
g_{1,4} = 1 & g_{1,4}(J_8) = 0 & g_{1,17} = 5 & g_{1,17}(J_8) = 2 \\
g_{1,5} = 1 & g_{1,5}(J_8) = 0 & g_{1,20} = 1 & g_{1,20}(J_8) = 0 \\
g_{1,10} = 2 & g_{1,10}(J_8) = 0 & g_{1,21} = 3 & g_{1,21}(J_8) = 0 \\
g_{1,11} = 1 & g_{1,11}(J_8) = 0 & g_{1,23} = 2 & g_{1,23}(J_8) = 0 \\
g_{1,14} = 1 & g_{1,14}(J_8) = 0 & & \\
\\
g_{3,4} = 1 & g_{3,4}(J_8) = 0 & g_{3,16} = 7 & g_{3,16}(J_8) = 0 \\
g_{3,5} = 1 & g_{3,5}(J_8) = 0 & g_{3,17} = 1 & g_{3,17}(J_8) = 0 \\
g_{3,10} = 3 & g_{3,10}(J_8) = 0 & g_{3,20} = 1 & g_{3,20}(J_8) = 0 \\
g_{3,11} = 1 & g_{3,11}(J_8) = 0 & g_{3,21} = 1 & g_{3,21}(J_8) = 0 \\
g_{3,14} = 4 & g_{3,14}(J_8) = 0 & g_{3,23} = 2 & g_{3,23}(J_8) = 0 \\
\\
g_{4,5} = 1 & g_{4,5}(J_8) = 0 & g_{4,17} = 6 & g_{4,17}(J_8) = 2 \\
g_{4,10} = 1 & g_{4,10}(J_8) = 0 & g_{4,20} = 4 & g_{4,20}(J_8) = 0 \\
g_{4,11} = 6 & g_{4,11}(J_8) = 2 & g_{4,21} = 4 & g_{4,21}(J_8) = 0 \\
g_{4,14} = 1 & g_{4,14}(J_8) = 0 & g_{4,23} = 1 & g_{4,23}(J_8) = 0 \\
g_{4,16} = 3 & g_{4,16}(J_8) = 0 & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
g_{5,10} = 1 & g_{5,10}(J_8) = 0 \\
g_{5,11} = 2 & g_{5,11}(J_8) = 1 \\
g_{5,14} = 2 & g_{5,14}(J_8) = 0 \\
g_{5,16} = 1 & g_{5,16}(J_8) = 0 \\
g_{10,11} = 2 & g_{10,11}(J_8) = 1 \\
g_{10,14} = 4 & g_{10,14}(J_8) = 1 \\
g_{10,16} = 1 & g_{10,16}(J_8) = 0 \\
g_{10,17} = 2 & g_{10,17}(J_8) = 1 \\
g_{11,14} = 2 & g_{11,14}(J_8) = 1 \\
g_{11,16} = 2 & g_{11,16}(J_8) = 1 \\
g_{11,17} = 1 & g_{11,17}(J_8) = 1 \\
g_{14,16} = 1 & g_{14,16}(J_8) = 0 \\
g_{14,17} = 2 & g_{14,17}(J_8) = 1 \\
g_{14,20} = 1 & g_{14,20}(J_8) = 0 \\
g_{16,17} = 3 & g_{16,17}(J_8) = 1 \\
g_{16,20} = 1 & g_{16,20}(J_8) = 0 \\
g_{17,20} = 2 & g_{17,20}(J_8) = 1 \\
g_{17,21} = 1 & g_{17,21}(J_8) = 0 \\
g_{20,21} = 1 & g_{20,21}(J_8) = 0 \\
g_{5,17} = 1 & g_{5,17}(J_8) = 1 \\
g_{5,20} = 1 & g_{5,20}(J_8) = 0 \\
g_{5,21} = 1 & g_{5,21}(J_8) = 0 \\
g_{5,23} = 2 & g_{5,23}(J_8) = 0 \\
g_{10,20} = 1 & g_{10,20}(J_8) = 0 \\
g_{10,21} = 1 & g_{10,21}(J_8) = 0 \\
g_{10,23} = 2 & g_{10,23}(J_8) = 0 \\
g_{11,20} = 1 & g_{11,20}(J_8) = 0 \\
g_{11,21} = 2 & g_{11,21}(J_8) = 1 \\
g_{11,23} = 4 & g_{11,23}(J_8) = 2 \\
g_{14,21} = 1 & g_{14,21}(J_8) = 0 \\
g_{14,23} = 1 & g_{14,23}(J_8) = 0 \\
g_{16,21} = 2 & g_{16,21}(J_8) = 0 \\
g_{16,23} = 1 & g_{16,23}(J_8) = 0 \\
g_{17,23} = 1 & g_{17,23}(J_8) = 0 \\
g_{20,23} = 2 & g_{20,23}(J_8) = 0 \\
g_{21,23} = 1 & g_{21,23}(J_8) = 0
\end{array}$$

Assim, a medida de centralidade de intermediação para o jogador 8 é:

$$c_B(J_8) = \frac{2}{5} + \frac{2}{6} + \frac{2}{6} + \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} +$$

$$\frac{2}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{163}{20}$$

Geodésicas entre v_i e v_j , $i < j$ que passam pelo J_{10} :

$$\begin{array}{ll}
g_{1,3} = 1 & g_{1,3}(J_{10}) = 0 \\
g_{1,4} = 1 & g_{1,4}(J_{10}) = 0 \\
g_{1,5} = 1 & g_{1,5}(J_{10}) = 0 \\
g_{1,8} = 2 & g_{1,8}(J_{10}) = 0 \\
g_{1,11} = 1 & g_{1,11}(J_{10}) = 0 \\
g_{1,14} = 1 & g_{1,14}(J_{10}) = 0 \\
g_{1,16} = 1 & g_{1,16}(J_{10}) = 0 \\
g_{1,17} = 5 & g_{1,17}(J_{10}) = 0 \\
g_{1,20} = 1 & g_{1,20}(J_{10}) = 0 \\
g_{1,21} = 3 & g_{1,21}(J_{10}) = 0 \\
g_{1,23} = 2 & g_{1,23}(J_{10}) = 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
g_{3,4} = 1 & g_{3,4}(J_{10}) = 0 \\
g_{3,5} = 1 & g_{3,5}(J_{10}) = 0 \\
g_{3,8} = 2 & g_{3,8}(J_{10}) = 0 \\
g_{3,11} = 1 & g_{3,11}(J_{10}) = 0 \\
g_{3,14} = 4 & g_{3,14}(J_{10}) = 0 \\
\\
g_{4,5} = 1 & g_{4,5}(J_{10}) = 0 \\
g_{4,8} = 2 & g_{4,8}(J_{10}) = 1 \\
g_{4,11} = 6 & g_{4,11}(J_{10}) = 2 \\
g_{4,14} = 1 & g_{4,14}(J_{10}) = 0 \\
g_{4,16} = 3 & g_{4,16}(J_{10}) = 0 \\
\\
g_{5,8} = 1 & g_{5,8}(J_{10}) = 1 \\
g_{5,11} = 2 & g_{5,11}(J_{10}) = 2 \\
g_{5,14} = 2 & g_{5,14}(J_{10}) = 0 \\
g_{5,16} = 1 & g_{5,16}(J_{10}) = 0 \\
\\
g_{8,11} = 1 & g_{8,11}(J_{10}) = 0 \\
g_{8,14} = 1 & g_{8,14}(J_{10}) = 0 \\
g_{8,16} = 1 & g_{8,16}(J_{10}) = 0 \\
g_{8,17} = 1 & g_{8,17}(J_{10}) = 0 \\
\\
g_{11,14} = 2 & g_{11,14}(J_{10}) = 0 \\
g_{11,16} = 2 & g_{11,16}(J_{10}) = 0 \\
g_{11,17} = 1 & g_{11,17}(J_{10}) = 0 \\
\\
g_{14,16} = 1 & g_{14,16}(J_{10}) = 0 \\
g_{14,17} = 2 & g_{14,17}(J_{10}) = 0 \\
g_{14,20} = 1 & g_{14,20}(J_{10}) = 0 \\
\\
g_{16,17} = 3 & g_{16,17}(J_{10}) = 0 \\
g_{16,20} = 1 & g_{16,20}(J_{10}) = 0 \\
\\
g_{17,20} = 2 & g_{17,20}(J_{10}) = 0 \\
g_{17,21} = 1 & g_{17,21}(J_{10}) = 0 \\
\\
g_{20,21} = 1 & g_{20,21}(J_{10}) = 0 \\
\\
g_{21,23} = 1 & g_{21,23}(J_{10}) = 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
g_{3,16} = 7 & g_{3,16}(J_{10}) = 0 \\
g_{3,17} = 1 & g_{3,17}(J_{10}) = 0 \\
g_{3,20} = 1 & g_{3,20}(J_{10}) = 0 \\
g_{3,21} = 1 & g_{3,21}(J_{10}) = 0 \\
g_{3,23} = 2 & g_{3,23}(J_{10}) = 0 \\
\\
g_{4,17} = 6 & g_{4,17}(J_{10}) = 2 \\
g_{4,20} = 4 & g_{4,20}(J_{10}) = 1 \\
g_{4,21} = 4 & g_{4,21}(J_{10}) = 1 \\
g_{4,23} = 1 & g_{4,23}(J_{10}) = 0 \\
\\
g_{5,17} = 1 & g_{5,17}(J_{10}) = 1 \\
g_{5,20} = 1 & g_{5,20}(J_{10}) = 1 \\
g_{5,21} = 1 & g_{5,21}(J_{10}) = 1 \\
g_{5,23} = 2 & g_{5,23}(J_{10}) = 0 \\
\\
g_{8,20} = 1 & g_{8,20}(J_{10}) = 0 \\
g_{8,21} = 1 & g_{8,21}(J_{10}) = 0 \\
g_{8,23} = 2 & g_{8,23}(J_{10}) = 0 \\
\\
g_{11,20} = 1 & g_{11,20}(J_{10}) = 0 \\
g_{11,21} = 2 & g_{11,21}(J_{10}) = 0 \\
g_{11,23} = 4 & g_{11,23}(J_{10}) = 0 \\
\\
g_{14,21} = 1 & g_{14,21}(J_{10}) = 0 \\
g_{14,23} = 1 & g_{14,23}(J_{10}) = 0 \\
\\
g_{16,21} = 2 & g_{16,21}(J_{10}) = 0 \\
g_{16,23} = 1 & g_{16,23}(J_{10}) = 0 \\
\\
g_{17,23} = 1 & g_{17,23}(J_{10}) = 0 \\
\\
g_{20,23} = 2 & g_{20,23}(J_{10}) = 0
\end{array}$$

Assim, a medida de centralidade de intermediação para o jogador 10 é:

$$c_B(J_{10}) = \frac{1}{2} + \frac{2}{6} + \frac{2}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = \frac{20}{3}$$

Geodésicas entre v_i e v_j , $i < j$ que passam pelo J_{11} :

$$\begin{array}{llll}
g_{1,3} = 1 & g_{1,3}(J_{11}) = 0 & g_{1,16} = 1 & g_{1,16}(J_{11}) = 0 \\
g_{1,4} = 1 & g_{1,4}(J_{11}) = 0 & g_{1,17} = 5 & g_{1,17}(J_{11}) = 0 \\
g_{1,5} = 1 & g_{1,5}(J_{11}) = 0 & g_{1,20} = 1 & g_{1,20}(J_{11}) = 0 \\
g_{1,8} = 2 & g_{1,8}(J_{11}) = 0 & g_{1,21} = 3 & g_{1,21}(J_{11}) = 0 \\
g_{1,10} = 2 & g_{1,10}(J_{11}) = 0 & g_{1,23} = 2 & g_{1,23}(J_{11}) = 0 \\
g_{1,14} = 1 & g_{1,14}(J_{11}) = 0 & & \\
\\
g_{3,4} = 1 & g_{3,4}(J_{11}) = 0 & g_{3,16} = 7 & g_{3,16}(J_{11}) = 0 \\
g_{3,5} = 1 & g_{3,5}(J_{11}) = 0 & g_{3,17} = 1 & g_{3,17}(J_{11}) = 0 \\
g_{3,8} = 2 & g_{3,8}(J_{11}) = 0 & g_{3,20} = 1 & g_{3,20}(J_{11}) = 0 \\
g_{3,10} = 3 & g_{3,10}(J_{11}) = 0 & g_{3,21} = 1 & g_{3,21}(J_{11}) = 0 \\
g_{3,14} = 4 & g_{3,14}(J_{11}) = 0 & g_{3,23} = 2 & g_{3,23}(J_{11}) = 0 \\
\\
g_{4,5} = 1 & g_{4,5}(J_{11}) = 0 & g_{4,17} = 6 & g_{4,17}(J_{11}) = 0 \\
g_{4,8} = 2 & g_{4,8}(J_{11}) = 0 & g_{4,20} = 4 & g_{4,20}(J_{11}) = 0 \\
g_{4,10} = 1 & g_{4,10}(J_{11}) = 0 & g_{4,21} = 4 & g_{4,21}(J_{11}) = 0 \\
g_{4,14} = 1 & g_{4,14}(J_{11}) = 0 & g_{4,23} = 1 & g_{4,23}(J_{11}) = 0 \\
g_{4,16} = 3 & g_{4,16}(J_{11}) = 0 & & \\
\\
g_{5,8} = 1 & g_{5,8}(J_{11}) = 0 & g_{5,17} = 1 & g_{5,17}(J_{11}) = 0 \\
g_{5,10} = 1 & g_{5,10}(J_{11}) = 0 & g_{5,20} = 1 & g_{5,20}(J_{11}) = 0 \\
g_{5,14} = 2 & g_{5,14}(J_{11}) = 0 & g_{5,21} = 1 & g_{5,21}(J_{11}) = 0 \\
g_{5,16} = 1 & g_{5,16}(J_{11}) = 0 & g_{5,23} = 2 & g_{5,23}(J_{11}) = 0 \\
\\
g_{8,10} = 1 & g_{8,10}(J_{11}) = 0 & g_{8,20} = 1 & g_{8,20}(J_{11}) = 0 \\
g_{8,14} = 1 & g_{8,14}(J_{11}) = 0 & g_{8,21} = 1 & g_{8,21}(J_{11}) = 0 \\
g_{8,16} = 1 & g_{8,16}(J_{11}) = 0 & g_{8,23} = 2 & g_{8,23}(J_{11}) = 0 \\
g_{8,17} = 1 & g_{8,17}(J_{11}) = 0 & & \\
\\
g_{10,14} = 4 & g_{10,14}(J_{11}) = 0 & g_{10,20} = 1 & g_{10,20}(J_{11}) = 0 \\
g_{10,16} = 1 & g_{10,16}(J_{11}) = 0 & g_{10,21} = 1 & g_{10,21}(J_{11}) = 0 \\
g_{10,17} = 2 & g_{10,17}(J_{11}) = 0 & g_{10,23} = 2 & g_{10,23}(J_{11}) = 0 \\
\\
g_{14,16} = 1 & g_{14,16}(J_{11}) = 0 & g_{14,21} = 1 & g_{14,21}(J_{11}) = 0 \\
g_{14,17} = 2 & g_{14,17}(J_{11}) = 0 & g_{14,23} = 1 & g_{14,23}(J_{11}) = 0 \\
g_{14,20} = 1 & g_{14,20}(J_{11}) = 0 & & \\
\\
g_{16,17} = 3 & g_{16,17}(J_{11}) = 0 & g_{16,21} = 2 & g_{16,21}(J_{11}) = 0 \\
g_{16,20} = 1 & g_{16,20}(J_{11}) = 0 & g_{16,23} = 1 & g_{16,23}(J_{11}) = 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
g_{17,20} = 2 & g_{17,20}(J_{11}) = 0 & g_{17,23} = 1 & g_{17,23}(J_{11}) = 0 \\
g_{17,21} = 1 & g_{17,21}(J_{11}) = 0 & & \\
g_{20,21} = 1 & g_{20,21}(J_{11}) = 0 & g_{20,23} = 2 & g_{20,23}(J_{11}) = 0 \\
g_{21,23} = 1 & g_{21,23}(J_{11}) = 0 & &
\end{array}$$

Assim, a medida de centralidade de intermediação para o jogador 11 é:

$$c_B(J_{11}) = 0$$

Geodésicas entre v_i e v_j , $i < j$ que passam pelo J_{14} :

$$\begin{array}{llll}
g_{1,3} = 1 & g_{1,3}(J_{14}) = 0 & g_{1,16} = 1 & g_{1,16}(J_{14}) = 1 \\
g_{1,4} = 1 & g_{1,4}(J_{14}) = 0 & g_{1,17} = 5 & g_{1,17}(J_{14}) = 2 \\
g_{1,5} = 1 & g_{1,5}(J_{14}) = 0 & g_{1,20} = 1 & g_{1,20}(J_{14}) = 0 \\
g_{1,8} = 2 & g_{1,8}(J_{14}) = 1 & g_{1,21} = 3 & g_{1,21}(J_{14}) = 1 \\
g_{1,10} = 2 & g_{1,10}(J_{14}) = 0 & g_{1,23} = 2 & g_{1,23}(J_{14}) = 1 \\
g_{1,11} = 1 & g_{1,11}(J_{14}) = 0 & & \\
g_{3,4} = 1 & g_{3,4}(J_{14}) = 0 & g_{3,16} = 7 & g_{3,16}(J_{14}) = 4 \\
g_{3,5} = 1 & g_{3,5}(J_{14}) = 0 & g_{3,17} = 1 & g_{3,17}(J_{14}) = 0 \\
g_{3,8} = 2 & g_{3,8}(J_{14}) = 0 & g_{3,20} = 1 & g_{3,20}(J_{14}) = 0 \\
g_{3,10} = 3 & g_{3,10}(J_{14}) = 0 & g_{3,21} = 1 & g_{3,21}(J_{14}) = 0 \\
g_{3,11} = 1 & g_{3,11}(J_{14}) = 0 & g_{3,23} = 2 & g_{3,23}(J_{14}) = 0 \\
g_{4,5} = 1 & g_{4,5}(J_{14}) = 0 & g_{4,17} = 6 & g_{4,17}(J_{14}) = 2 \\
g_{4,8} = 2 & g_{4,8}(J_{14}) = 1 & g_{4,20} = 4 & g_{4,20}(J_{14}) = 1 \\
g_{4,10} = 1 & g_{4,10}(J_{14}) = 0 & g_{4,21} = 4 & g_{4,21}(J_{14}) = 1 \\
g_{4,11} = 6 & g_{4,11}(J_{14}) = 2 & g_{4,23} = 1 & g_{4,23}(J_{14}) = 0 \\
g_{4,16} = 3 & g_{4,16}(J_{14}) = 1 & & \\
g_{5,8} = 1 & g_{5,8}(J_{14}) = 0 & g_{5,17} = 1 & g_{5,17}(J_{14}) = 0 \\
g_{5,10} = 1 & g_{5,10}(J_{14}) = 0 & g_{5,20} = 1 & g_{5,20}(J_{14}) = 0 \\
g_{5,11} = 2 & g_{5,11}(J_{14}) = 0 & g_{5,21} = 1 & g_{5,21}(J_{14}) = 0 \\
g_{5,16} = 1 & g_{5,16}(J_{14}) = 0 & g_{5,23} = 2 & g_{5,23}(J_{14}) = 0 \\
g_{8,10} = 1 & g_{8,10}(J_{14}) = 0 & g_{8,20} = 1 & g_{8,20}(J_{14}) = 0 \\
g_{8,11} = 1 & g_{8,11}(J_{14}) = 0 & g_{8,21} = 1 & g_{8,21}(J_{14}) = 0 \\
g_{8,16} = 1 & g_{8,16}(J_{14}) = 1 & g_{8,23} = 2 & g_{8,23}(J_{14}) = 1 \\
g_{8,17} = 1 & g_{8,17}(J_{14}) = 0 & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
g_{10,11} = 2 & g_{10,11}(J_{14}) = 0 & g_{10,20} = 1 & g_{10,20}(J_{14}) = 0 \\
g_{10,16} = 1 & g_{10,16}(J_{14}) = 0 & g_{10,21} = 1 & g_{10,21}(J_{14}) = 0 \\
g_{10,17} = 2 & g_{10,17}(J_{14}) = 0 & g_{10,23} = 2 & g_{10,23}(J_{14}) = 0 \\
\\
g_{11,16} = 2 & g_{11,16}(J_{14}) = 2 & g_{11,21} = 2 & g_{11,21}(J_{14}) = 0 \\
g_{11,17} = 1 & g_{11,17}(J_{14}) = 0 & g_{11,23} = 4 & g_{11,23}(J_{14}) = 2 \\
g_{11,20} = 1 & g_{11,20}(J_{14}) = 0 & & \\
\\
g_{16,17} = 3 & g_{16,17}(J_{14}) = 1 & g_{16,21} = 2 & g_{16,21}(J_{14}) = 1 \\
g_{16,20} = 1 & g_{16,20}(J_{14}) = 1 & g_{16,23} = 1 & g_{16,23}(J_{14}) = 0 \\
\\
g_{17,20} = 2 & g_{17,20}(J_{14}) = 0 & g_{17,23} = 1 & g_{17,23}(J_{14}) = 0 \\
g_{17,21} = 1 & g_{17,21}(J_{14}) = 0 & & \\
\\
g_{20,21} = 1 & g_{20,21}(J_{14}) = 0 & g_{20,23} = 2 & g_{20,23}(J_{14}) = 1 \\
\\
& & g_{21,23} = 1 & g_{21,23}(J_{14}) = 0
\end{array}$$

Assim, a medida de centralidade de intermediação para o jogador 14 é:

$$\begin{aligned}
c_B(J_{14}) &= \frac{1}{2} + 1 + \frac{2}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{4}{7} + \frac{1}{2} + \frac{2}{6} + \frac{1}{3} + \frac{2}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \\
& 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \frac{2}{4} + \frac{1}{3} + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1117}{105}
\end{aligned}$$

Geodésicas entre v_i e v_j , $i < j$ que passam pelo J_{16} :

$$\begin{array}{llll}
g_{1,3} = 1 & g_{1,3}(J_{16}) = 0 & g_{1,14} = 1 & g_{1,14}(J_{16}) = 0 \\
g_{1,4} = 1 & g_{1,4}(J_{16}) = 0 & g_{1,17} = 5 & g_{1,17}(J_{16}) = 0 \\
g_{1,5} = 1 & g_{1,5}(J_{16}) = 0 & g_{1,20} = 1 & g_{1,20}(J_{16}) = 0 \\
g_{1,8} = 2 & g_{1,8}(J_{16}) = 0 & g_{1,21} = 3 & g_{1,21}(J_{16}) = 0 \\
g_{1,10} = 2 & g_{1,10}(J_{16}) = 0 & g_{1,23} = 2 & g_{1,23}(J_{16}) = 0 \\
g_{1,11} = 1 & g_{1,11}(J_{16}) = 0 & & \\
\\
g_{3,4} = 1 & g_{3,4}(J_{16}) = 0 & g_{3,14} = 4 & g_{3,14}(J_{16}) = 0 \\
g_{3,5} = 1 & g_{3,5}(J_{16}) = 0 & g_{3,17} = 1 & g_{3,17}(J_{16}) = 0 \\
g_{3,8} = 2 & g_{3,8}(J_{16}) = 0 & g_{3,20} = 1 & g_{3,20}(J_{16}) = 0 \\
g_{3,10} = 3 & g_{3,10}(J_{16}) = 0 & g_{3,21} = 1 & g_{3,21}(J_{16}) = 0 \\
g_{3,11} = 1 & g_{3,11}(J_{16}) = 0 & g_{3,23} = 2 & g_{3,23}(J_{16}) = 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
g_{4,5} = 1 & g_{4,5}(J_{16}) = 0 & g_{4,17} = 6 & g_{4,17}(J_{16}) = 0 \\
g_{4,8} = 2 & g_{4,8}(J_{16}) = 0 & g_{4,20} = 4 & g_{4,20}(J_{16}) = 0 \\
g_{4,10} = 1 & g_{4,10}(J_{16}) = 0 & g_{4,21} = 4 & g_{4,21}(J_{16}) = 0 \\
g_{4,11} = 6 & g_{4,11}(J_{16}) = 0 & g_{4,23} = 1 & g_{4,23}(J_{16}) = 0 \\
g_{4,14} = 1 & g_{4,14}(J_{16}) = 0 & & \\
g_{5,8} = 1 & g_{5,8}(J_{16}) = 0 & g_{5,17} = 1 & g_{5,17}(J_{16}) = 0 \\
g_{5,10} = 1 & g_{5,10}(J_{16}) = 0 & g_{5,20} = 1 & g_{5,20}(J_{16}) = 0 \\
g_{5,11} = 2 & g_{5,11}(J_{16}) = 0 & g_{5,21} = 1 & g_{5,21}(J_{16}) = 0 \\
g_{5,14} = 2 & g_{5,14}(J_{16}) = 1 & g_{5,23} = 2 & g_{5,23}(J_{16}) = 1 \\
g_{8,10} = 1 & g_{8,10}(J_{16}) = 0 & g_{8,20} = 1 & g_{8,20}(J_{16}) = 0 \\
g_{8,11} = 1 & g_{8,11}(J_{16}) = 0 & g_{8,21} = 1 & g_{8,21}(J_{16}) = 0 \\
g_{8,14} = 1 & g_{8,14}(J_{16}) = 0 & g_{8,23} = 2 & g_{8,23}(J_{16}) = 0 \\
g_{8,17} = 1 & g_{8,17}(J_{16}) = 0 & & \\
g_{10,11} = 2 & g_{10,11}(J_{16}) = 0 & g_{10,20} = 1 & g_{10,20}(J_{16}) = 0 \\
g_{10,14} = 4 & g_{10,14}(J_{16}) = 0 & g_{10,21} = 1 & g_{10,21}(J_{16}) = 0 \\
g_{10,17} = 2 & g_{10,17}(J_{16}) = 0 & g_{10,23} = 2 & g_{10,23}(J_{16}) = 0 \\
g_{11,14} = 2 & g_{11,14}(J_{16}) = 0 & g_{11,21} = 2 & g_{11,21}(J_{16}) = 0 \\
g_{11,17} = 1 & g_{11,17}(J_{16}) = 0 & g_{11,23} = 4 & g_{11,23}(J_{16}) = 0 \\
g_{11,20} = 1 & g_{11,20}(J_{16}) = 0 & & \\
g_{14,17} = 2 & g_{14,17}(J_{16}) = 0 & g_{14,21} = 1 & g_{14,21}(J_{16}) = 0 \\
g_{14,20} = 1 & g_{14,20}(J_{16}) = 0 & g_{14,23} = 1 & g_{14,23}(J_{16}) = 0 \\
g_{17,20} = 2 & g_{17,20}(J_{16}) = 0 & g_{17,23} = 1 & g_{17,23}(J_{16}) = 0 \\
g_{17,21} = 1 & g_{17,21}(J_{16}) = 0 & & \\
g_{20,21} = 1 & g_{20,21}(J_{16}) = 0 & g_{20,23} = 2 & g_{20,23}(J_{16}) = 0 \\
& & g_{21,23} = 1 & g_{21,23}(J_{16}) = 0
\end{array}$$

Assim, a medida de centralidade de intermediação para o jogador 16 é:

$$c_B(J_{16}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Geodésicas entre v_i e v_j , $i < j$ que passam pelo J_{17} :

$$\begin{array}{llll}
g_{1,3} = 1 & g_{1,3}(J_{17}) = 0 & g_{1,14} = 1 & g_{1,14}(J_{17}) = 0 \\
g_{1,4} = 1 & g_{1,4}(J_{17}) = 0 & g_{1,16} = 1 & g_{1,16}(J_{17}) = 0 \\
g_{1,5} = 1 & g_{1,5}(J_{17}) = 0 & g_{1,20} = 1 & g_{1,20}(J_{17}) = 0 \\
g_{1,8} = 2 & g_{1,8}(J_{17}) = 0 & g_{1,21} = 3 & g_{1,21}(J_{17}) = 0 \\
g_{1,10} = 2 & g_{1,10}(J_{17}) = 0 & g_{1,23} = 2 & g_{1,23}(J_{17}) = 0 \\
g_{1,11} = 1 & g_{1,11}(J_{17}) = 0 & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
g_{3,4} = 1 & g_{3,4}(J_{17}) = 0 \\
g_{3,5} = 1 & g_{3,5}(J_{17}) = 0 \\
g_{3,8} = 2 & g_{3,8}(J_{17}) = 0 \\
g_{3,10} = 3 & g_{3,10}(J_{17}) = 0 \\
g_{3,11} = 1 & g_{3,11}(J_{17}) = 0 \\
\\
g_{4,5} = 1 & g_{4,5}(J_{17}) = 0 \\
g_{4,8} = 2 & g_{4,8}(J_{17}) = 0 \\
g_{4,10} = 1 & g_{4,10}(J_{17}) = 0 \\
g_{4,11} = 6 & g_{4,11}(J_{17}) = 0 \\
g_{4,14} = 1 & g_{4,14}(J_{17}) = 0 \\
\\
g_{5,8} = 1 & g_{5,8}(J_{17}) = 0 \\
g_{5,10} = 1 & g_{5,10}(J_{17}) = 0 \\
g_{5,11} = 2 & g_{5,11}(J_{17}) = 0 \\
g_{5,14} = 2 & g_{5,14}(J_{17}) = 0 \\
\\
g_{8,10} = 1 & g_{8,10}(J_{17}) = 0 \\
g_{8,11} = 1 & g_{8,11}(J_{17}) = 0 \\
g_{8,14} = 1 & g_{8,14}(J_{17}) = 0 \\
g_{8,16} = 1 & g_{8,16}(J_{17}) = 0 \\
\\
g_{10,11} = 2 & g_{10,11}(J_{17}) = 0 \\
g_{10,14} = 4 & g_{10,14}(J_{17}) = 0 \\
g_{10,16} = 1 & g_{10,16}(J_{17}) = 0 \\
\\
g_{11,14} = 2 & g_{11,14}(J_{17}) = 0 \\
g_{11,16} = 2 & g_{11,16}(J_{17}) = 0 \\
g_{11,20} = 1 & g_{11,20}(J_{17}) = 0 \\
\\
g_{14,16} = 1 & g_{14,16}(J_{17}) = 0 \\
g_{14,20} = 1 & g_{14,20}(J_{17}) = 0 \\
\\
g_{16,20} = 1 & g_{16,20}(J_{17}) = 0 \\
g_{16,21} = 2 & g_{16,21}(J_{17}) = 0 \\
\\
g_{20,21} = 1 & g_{20,21}(J_{17}) = 0 \\
\\
g_{3,14} = 4 & g_{3,14}(J_{17}) = 0 \\
g_{3,16} = 7 & g_{3,16}(J_{17}) = 0 \\
g_{3,20} = 1 & g_{3,20}(J_{17}) = 0 \\
g_{3,21} = 1 & g_{3,21}(J_{17}) = 0 \\
g_{3,23} = 2 & g_{3,23}(J_{17}) = 0 \\
\\
g_{4,16} = 3 & g_{4,16}(J_{17}) = 0 \\
g_{4,20} = 4 & g_{4,20}(J_{17}) = 0 \\
g_{4,21} = 4 & g_{4,21}(J_{17}) = 0 \\
g_{4,23} = 1 & g_{4,23}(J_{17}) = 0 \\
\\
g_{5,16} = 1 & g_{5,16}(J_{17}) = 0 \\
g_{5,20} = 1 & g_{5,20}(J_{17}) = 0 \\
g_{5,21} = 1 & g_{5,21}(J_{17}) = 0 \\
g_{5,23} = 2 & g_{5,23}(J_{17}) = 0 \\
\\
g_{8,20} = 1 & g_{8,20}(J_{17}) = 0 \\
g_{8,21} = 1 & g_{8,21}(J_{17}) = 0 \\
g_{8,23} = 2 & g_{8,23}(J_{17}) = 0 \\
\\
g_{10,20} = 1 & g_{10,20}(J_{17}) = 0 \\
g_{10,21} = 1 & g_{10,21}(J_{17}) = 0 \\
g_{10,23} = 2 & g_{10,23}(J_{17}) = 0 \\
\\
g_{11,21} = 2 & g_{11,21}(J_{17}) = 0 \\
g_{11,23} = 4 & g_{11,23}(J_{17}) = 0 \\
\\
g_{14,21} = 1 & g_{14,21}(J_{17}) = 0 \\
g_{14,23} = 1 & g_{14,23}(J_{17}) = 0 \\
\\
g_{16,23} = 1 & g_{16,23}(J_{17}) = 0 \\
\\
g_{20,23} = 2 & g_{20,23}(J_{17}) = 0 \\
\\
g_{21,23} = 1 & g_{21,23}(J_{17}) = 0
\end{array}$$

Assim, a medida de centralidade de intermediação para o jogador 17 é:

$$c_B(J_{17}) = 0$$

Geodésicas entre v_i e v_j , $i < j$ que passam pelo J_{20} :

$$\begin{array}{ll}
g_{1,3} = 1 & g_{1,3}(J_{20}) = 0 \\
g_{1,4} = 1 & g_{1,4}(J_{20}) = 0 \\
g_{1,5} = 1 & g_{1,5}(J_{20}) = 0 \\
g_{1,8} = 2 & g_{1,8}(J_{20}) = 1 \\
g_{1,10} = 2 & g_{1,10}(J_{20}) = 1 \\
g_{1,11} = 1 & g_{1,11}(J_{20}) = 1 \\
\\
g_{3,4} = 1 & g_{3,4}(J_{20}) = 0 \\
g_{3,5} = 1 & g_{3,5}(J_{20}) = 0 \\
g_{3,8} = 2 & g_{3,8}(J_{20}) = 1 \\
g_{3,10} = 3 & g_{3,10}(J_{20}) = 1 \\
g_{3,11} = 1 & g_{3,11}(J_{20}) = 1 \\
\\
g_{4,5} = 1 & g_{4,5}(J_{20}) = 0 \\
g_{4,8} = 2 & g_{4,8}(J_{20}) = 0 \\
g_{4,10} = 1 & g_{4,10}(J_{20}) = 0 \\
g_{4,11} = 6 & g_{4,11}(J_{20}) = 4 \\
g_{4,14} = 1 & g_{4,14}(J_{20}) = 0 \\
\\
g_{5,8} = 1 & g_{5,8}(J_{20}) = 0 \\
g_{5,10} = 1 & g_{5,10}(J_{20}) = 0 \\
g_{5,11} = 2 & g_{5,11}(J_{20}) = 1 \\
g_{5,14} = 2 & g_{5,14}(J_{20}) = 0 \\
\\
g_{8,10} = 1 & g_{8,10}(J_{20}) = 0 \\
g_{8,11} = 1 & g_{8,11}(J_{20}) = 0 \\
g_{8,14} = 1 & g_{8,14}(J_{20}) = 0 \\
g_{8,16} = 1 & g_{8,16}(J_{20}) = 0 \\
\\
g_{10,11} = 2 & g_{10,11}(J_{20}) = 1 \\
g_{10,14} = 4 & g_{10,14}(J_{20}) = 1 \\
g_{10,16} = 1 & g_{10,16}(J_{20}) = 0 \\
\\
g_{11,14} = 2 & g_{11,14}(J_{20}) = 1 \\
g_{11,16} = 2 & g_{11,16}(J_{20}) = 1 \\
g_{11,17} = 1 & g_{11,17}(J_{20}) = 0 \\
\\
g_{14,16} = 1 & g_{14,16}(J_{20}) = 0 \\
g_{14,17} = 2 & g_{14,17}(J_{20}) = 0 \\
\\
g_{1,14} = 1 & g_{1,14}(J_{20}) = 0 \\
g_{1,16} = 1 & g_{1,16}(J_{20}) = 0 \\
g_{1,17} = 5 & g_{1,17}(J_{20}) = 2 \\
g_{1,21} = 3 & g_{1,21}(J_{20}) = 1 \\
g_{1,23} = 2 & g_{1,23}(J_{20}) = 0 \\
\\
g_{3,14} = 4 & g_{3,14}(J_{20}) = 1 \\
g_{3,16} = 7 & g_{3,16}(J_{20}) = 1 \\
g_{3,17} = 1 & g_{3,17}(J_{20}) = 0 \\
g_{3,21} = 1 & g_{3,21}(J_{20}) = 0 \\
g_{3,23} = 2 & g_{3,23}(J_{20}) = 0 \\
\\
g_{4,16} = 3 & g_{4,16}(J_{20}) = 0 \\
g_{4,17} = 6 & g_{4,17}(J_{20}) = 0 \\
g_{4,21} = 4 & g_{4,21}(J_{20}) = 0 \\
g_{4,23} = 1 & g_{4,23}(J_{20}) = 0 \\
\\
g_{5,16} = 1 & g_{5,16}(J_{20}) = 0 \\
g_{5,17} = 1 & g_{5,17}(J_{20}) = 0 \\
g_{5,21} = 1 & g_{5,21}(J_{20}) = 0 \\
g_{5,23} = 2 & g_{5,23}(J_{20}) = 0 \\
\\
g_{8,17} = 1 & g_{8,17}(J_{20}) = 0 \\
g_{8,21} = 1 & g_{8,21}(J_{20}) = 0 \\
g_{8,23} = 2 & g_{8,23}(J_{20}) = 0 \\
\\
g_{10,17} = 2 & g_{10,17}(J_{20}) = 0 \\
g_{10,21} = 1 & g_{10,21}(J_{20}) = 0 \\
g_{10,23} = 2 & g_{10,23}(J_{20}) = 0 \\
\\
g_{11,21} = 2 & g_{11,21}(J_{20}) = 1 \\
g_{11,23} = 4 & g_{11,23}(J_{20}) = 2 \\
\\
g_{14,21} = 1 & g_{14,21}(J_{20}) = 0 \\
g_{14,23} = 1 & g_{14,23}(J_{20}) = 0
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
g_{16,17} = 3 \quad g_{16,17}(J_{20}) = 0 & & g_{16,23} = 1 \quad g_{16,23}(J_{20}) = 0 \\
g_{16,21} = 2 \quad g_{16,21}(J_{20}) = 0 & & \\
g_{17,21} = 1 \quad g_{17,21}(J_{20}) = 0 & & g_{17,23} = 1 \quad g_{17,23}(J_{20}) = 0 \\
& & g_{21,23} = 1 \quad g_{21,23}(J_{20}) = 0
\end{aligned}$$

Assim, a medida de centralidade de intermediação para o jogador 20 é:

$$\begin{aligned}
c_B(J_{20}) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 + \frac{2}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \\
&\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} = \frac{932}{105}
\end{aligned}$$

Geodésicas entre v_i e v_j , $i < j$ que passam pelo J_{21} :

$$\begin{aligned}
g_{1,3} = 1 \quad g_{1,3}(J_{21}) = 0 & & g_{1,14} = 1 \quad g_{1,14}(J_{21}) = 0 \\
g_{1,4} = 1 \quad g_{1,4}(J_{21}) = 0 & & g_{1,16} = 1 \quad g_{1,16}(J_{21}) = 0 \\
g_{1,5} = 1 \quad g_{1,5}(J_{21}) = 0 & & g_{1,17} = 5 \quad g_{1,17}(J_{21}) = 3 \\
g_{1,8} = 2 \quad g_{1,8}(J_{21}) = 0 & & g_{1,20} = 1 \quad g_{1,20}(J_{21}) = 0 \\
g_{1,10} = 2 \quad g_{1,10}(J_{21}) = 0 & & g_{1,23} = 2 \quad g_{1,23}(J_{21}) = 0 \\
g_{1,11} = 1 \quad g_{1,11}(J_{21}) = 0 & & \\
\\
g_{3,4} = 1 \quad g_{3,4}(J_{21}) = 0 & & g_{3,14} = 4 \quad g_{3,14}(J_{21}) = 1 \\
g_{3,5} = 1 \quad g_{3,5}(J_{21}) = 0 & & g_{3,16} = 7 \quad g_{3,16}(J_{21}) = 2 \\
g_{3,8} = 2 \quad g_{3,8}(J_{21}) = 1 & & g_{3,17} = 1 \quad g_{3,17}(J_{21}) = 1 \\
g_{3,10} = 3 \quad g_{3,10}(J_{21}) = 1 & & g_{3,20} = 1 \quad g_{3,20}(J_{21}) = 0 \\
g_{3,11} = 1 \quad g_{3,11}(J_{21}) = 0 & & g_{3,23} = 2 \quad g_{3,23}(J_{21}) = 1 \\
\\
g_{4,5} = 1 \quad g_{4,5}(J_{21}) = 0 & & g_{4,16} = 3 \quad g_{4,16}(J_{21}) = 0 \\
g_{4,8} = 2 \quad g_{4,8}(J_{21}) = 0 & & g_{4,17} = 6 \quad g_{4,17}(J_{21}) = 4 \\
g_{4,10} = 1 \quad g_{4,10}(J_{21}) = 0 & & g_{4,20} = 4 \quad g_{4,20}(J_{21}) = 0 \\
g_{4,11} = 6 \quad g_{4,11}(J_{21}) = 0 & & g_{4,23} = 1 \quad g_{4,23}(J_{21}) = 0 \\
g_{4,14} = 1 \quad g_{4,14}(J_{21}) = 0 & & \\
\\
g_{5,8} = 1 \quad g_{5,8}(J_{21}) = 0 & & g_{5,16} = 1 \quad g_{5,16}(J_{21}) = 0 \\
g_{5,10} = 1 \quad g_{5,10}(J_{21}) = 0 & & g_{5,17} = 1 \quad g_{5,17}(J_{21}) = 0 \\
g_{5,11} = 2 \quad g_{5,11}(J_{21}) = 0 & & g_{5,20} = 1 \quad g_{5,20}(J_{21}) = 0 \\
g_{5,14} = 2 \quad g_{5,14}(J_{21}) = 0 & & g_{5,23} = 2 \quad g_{5,23}(J_{21}) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll}
g_{8,10} = 1 & g_{8,10}(J_{21}) = 0 \\
g_{8,11} = 1 & g_{8,11}(J_{21}) = 0 \\
g_{8,14} = 1 & g_{8,14}(J_{21}) = 0 \\
g_{8,16} = 1 & g_{8,16}(J_{21}) = 0 \\
g_{10,11} = 2 & g_{10,11}(J_{21}) = 0 \\
g_{10,14} = 4 & g_{10,14}(J_{21}) = 1 \\
g_{10,16} = 1 & g_{10,16}(J_{21}) = 0 \\
g_{11,14} = 2 & g_{11,14}(J_{21}) = 0 \\
g_{11,16} = 2 & g_{11,16}(J_{21}) = 0 \\
g_{11,17} = 1 & g_{11,17}(J_{21}) = 0 \\
g_{14,16} = 1 & g_{14,16}(J_{21}) = 0 \\
g_{14,17} = 2 & g_{14,17}(J_{21}) = 1 \\
g_{16,17} = 3 & g_{16,17}(J_{21}) = 2 \\
g_{16,20} = 1 & g_{16,20}(J_{21}) = 0 \\
g_{17,20} = 2 & g_{17,20}(J_{21}) = 1 \\
g_{8,17} = 1 & g_{8,17}(J_{21}) = 0 \\
g_{8,20} = 1 & g_{8,20}(J_{21}) = 0 \\
g_{8,23} = 2 & g_{8,23}(J_{21}) = 1 \\
g_{10,17} = 2 & g_{10,17}(J_{21}) = 0 \\
g_{10,20} = 1 & g_{10,20}(J_{21}) = 0 \\
g_{10,23} = 2 & g_{10,23}(J_{21}) = 1 \\
g_{11,20} = 1 & g_{11,20}(J_{21}) = 0 \\
g_{11,23} = 4 & g_{11,23}(J_{21}) = 2 \\
g_{14,20} = 1 & g_{14,20}(J_{21}) = 0 \\
g_{14,23} = 1 & g_{14,23}(J_{21}) = 0 \\
g_{16,23} = 1 & g_{16,23}(J_{21}) = 0 \\
g_{17,23} = 1 & g_{17,23}(J_{21}) = 1 \\
g_{20,23} = 2 & g_{20,23}(J_{21}) = 1
\end{array}$$

Assim, a medida de centralidade de intermediação para o jogador 21 é:

$$\begin{aligned}
c_B(J_{21}) &= \frac{3}{5} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{2}{7} + 1 + \frac{1}{2} + \frac{4}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \\
&\quad \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} = \frac{1901}{210}
\end{aligned}$$

Geodésicas entre v_i e v_j , $i < j$ que passam pelo J_{23} :

$$\begin{array}{ll}
g_{1,3} = 1 & g_{1,3}(J_{23}) = 0 \\
g_{1,4} = 1 & g_{1,4}(J_{23}) = 0 \\
g_{1,5} = 1 & g_{1,5}(J_{23}) = 0 \\
g_{1,8} = 2 & g_{1,8}(J_{23}) = 0 \\
g_{1,10} = 2 & g_{1,10}(J_{23}) = 0 \\
g_{1,11} = 1 & g_{1,11}(J_{23}) = 0 \\
g_{1,14} = 1 & g_{1,14}(J_{23}) = 0 \\
g_{1,16} = 1 & g_{1,16}(J_{23}) = 0 \\
g_{1,17} = 5 & g_{1,17}(J_{23}) = 0 \\
g_{1,20} = 1 & g_{1,20}(J_{23}) = 0 \\
g_{1,21} = 3 & g_{1,21}(J_{23}) = 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
g_{3,4} = 1 & g_{3,4}(J_{23}) = 0 \\
g_{3,5} = 1 & g_{3,5}(J_{23}) = 0 \\
g_{3,8} = 2 & g_{3,8}(J_{23}) = 0 \\
g_{3,10} = 3 & g_{3,10}(J_{23}) = 0 \\
g_{3,11} = 1 & g_{3,11}(J_{23}) = 0 \\
g_{4,5} = 1 & g_{4,5}(J_{23}) = 0 \\
g_{4,8} = 2 & g_{4,8}(J_{23}) = 0 \\
g_{4,10} = 1 & g_{4,10}(J_{23}) = 0 \\
g_{4,11} = 6 & g_{4,11}(J_{23}) = 0 \\
g_{4,14} = 1 & g_{4,14}(J_{23}) = 0 \\
g_{5,8} = 1 & g_{5,8}(J_{23}) = 0 \\
g_{5,10} = 1 & g_{5,10}(J_{23}) = 0 \\
g_{5,11} = 2 & g_{5,11}(J_{23}) = 0 \\
g_{5,14} = 2 & g_{5,14}(J_{23}) = 0 \\
g_{8,10} = 1 & g_{8,10}(J_{23}) = 0 \\
g_{8,11} = 1 & g_{8,11}(J_{23}) = 0 \\
g_{8,14} = 1 & g_{8,14}(J_{23}) = 0 \\
g_{8,16} = 1 & g_{8,16}(J_{23}) = 0 \\
g_{10,11} = 2 & g_{10,11}(J_{23}) = 0 \\
g_{10,14} = 4 & g_{10,14}(J_{23}) = 0 \\
g_{10,16} = 1 & g_{10,16}(J_{23}) = 0 \\
g_{11,14} = 2 & g_{11,14}(J_{23}) = 0 \\
g_{11,16} = 2 & g_{11,16}(J_{23}) = 0 \\
g_{11,17} = 1 & g_{11,17}(J_{23}) = 0 \\
g_{14,16} = 1 & g_{14,16}(J_{23}) = 0 \\
g_{14,17} = 2 & g_{14,17}(J_{23}) = 0 \\
g_{16,17} = 3 & g_{16,17}(J_{23}) = 1 \\
g_{16,20} = 1 & g_{16,20}(J_{23}) = 0 \\
g_{17,20} = 2 & g_{17,20}(J_{23}) = 0 \\
g_{3,14} = 4 & g_{3,14}(J_{23}) = 0 \\
g_{3,16} = 7 & g_{3,16}(J_{23}) = 2 \\
g_{3,17} = 1 & g_{3,17}(J_{23}) = 0 \\
g_{3,20} = 1 & g_{3,20}(J_{23}) = 0 \\
g_{3,21} = 1 & g_{3,21}(J_{23}) = 0 \\
g_{4,16} = 3 & g_{4,16}(J_{23}) = 1 \\
g_{4,17} = 6 & g_{4,17}(J_{23}) = 1 \\
g_{4,20} = 4 & g_{4,20}(J_{23}) = 0 \\
g_{4,21} = 4 & g_{4,21}(J_{23}) = 1 \\
g_{5,16} = 1 & g_{5,16}(J_{23}) = 0 \\
g_{5,17} = 1 & g_{5,17}(J_{23}) = 0 \\
g_{5,20} = 1 & g_{5,20}(J_{23}) = 0 \\
g_{5,21} = 1 & g_{5,21}(J_{23}) = 0 \\
g_{8,17} = 1 & g_{8,17}(J_{23}) = 0 \\
g_{8,20} = 1 & g_{8,20}(J_{23}) = 0 \\
g_{8,21} = 1 & g_{8,21}(J_{23}) = 0 \\
g_{10,17} = 2 & g_{10,17}(J_{23}) = 0 \\
g_{10,20} = 1 & g_{10,20}(J_{23}) = 0 \\
g_{10,21} = 1 & g_{10,21}(J_{23}) = 0 \\
g_{11,20} = 1 & g_{11,20}(J_{23}) = 0 \\
g_{11,21} = 2 & g_{11,21}(J_{23}) = 0 \\
g_{14,20} = 1 & g_{14,20}(J_{23}) = 0 \\
g_{14,21} = 1 & g_{14,21}(J_{23}) = 0 \\
g_{16,21} = 2 & g_{16,21}(J_{23}) = 1 \\
g_{17,21} = 1 & g_{17,21}(J_{23}) = 0 \\
g_{20,21} = 1 & g_{20,21}(J_{23}) = 0
\end{array}$$

Assim, a medida de centralidade de intermediação para o jogador 23 é:

$$c_B(J_{23}) = \frac{2}{7} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{157}{84}$$

Bibliografia

- [1] Abreu, N., Del-Vecchio, R., Trevisan, V., Vinagre, C. (2014). *Teoria espectral de grafos - Uma introdução, III Colóquio de Matemática da Região Sul*. Universidade Federal de Santa Catarina.
- [2] Andrade, E., Sampaio, R. e Silva, G. (2007). *Notas em matemática aplicada*. Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional.
- [3] Bavelas, A. (1948). A mathematical model for small group structures. *Human Organization* 7, 16–30.
- [4] Beauchamp, M. A. (1965). An improved index of centrality. *Behavioral Science*, v. 10, 161-163.
- [5] Biggs, N. (1993). *Algebraic Graph Theory*. Great Britain, Cambridge University Press, 2a. ed.
- [6] Bonacich, P. (1972). Factoring and weighting approaches to status scores and clique identification. *Journal of Mathematical Sociology* 2, 113–120.
- [7] Bonacich, P. (1987). Power and centrality: a family of measures. *American Journal of Sociology* 92, 1170–1182.
- [8] Bonacich, P. (2007). Some unique properties of eigenvector centrality. *Social Networks*, v. 29, 555-564.
- [9] Bollobás, B. (1979). *Graph Theory: An Introductory Course*. Springer-Verlag,
- [10] Borgatti, S. P. (2007). Centrality and network flow. *Social Networks*, v. 27, 55–71.
- [11] Braga, R.O. (2015). *Localização de autovalores de árvores e de grafos unicyclicos*. Tese de Doutorado em Matemática Aplicada. Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

- [12] Brouwer, A. e Haemers, W. (2011). *Spectra of graphs*. Springer.
- [13] Bıyıkoglu, T., Leydold, J. e Stadler P. F. (2006). *Laplacian eigenvectors of graphs*. Springer Berlin Heidelberg New York.
- [14] Cardoso, D. M. (2005). *Teoria dos grafos e aplicações*. Tese de Mestrado. Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro.
- [15] Carvalho, A. C. (2012). *Um survey sobre o índice da matriz laplaciana sem sinal de um grafo*. Tese de Mestrado. Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca.
- [16] Chung, F.R.K. (1994). *Spectral graph theory*. CBMS, Conference Board of the Mathematical Sciences, Regional Conference Series in Mathematics, 92, AMS.
- [17] Cvetkovic, D. (1971). Graphs and their spectra. *Publ. Elektrotehn, Fak., Ser. Mat. Fiz., Univ. Beograd, 354*, 1-50.
- [18] Cvetkovic, D., Doob, M. e Sachs, H. (1980). *Spectra of graphs - theory and application*. Pure and Applied Mathematics, Academic Press, New York.
- [19] Cvetkovic, D., Doob, M. e Simic, S. (1980). Some results on generalized line graphs. *Comptes Rendus Math. Rep. Acad. Sci. Canada 2*, 147-150.
- [20] Cvetkovic, D., Doob, M. e Simic, S. (1981). Generalized line graphs. *Journal of Graph Theory 5*, 385-399.
- [21] Cvetkovic, D., Doob, M., Gutman, I. e Torgasev A. (1988). *Recent Results in the Theory of Graph Spectra*. North-Holland (Amsterdam).
- [22] Cvetkovic, D., Doob, M. e Sachs, H. (1995). *Spectra of Graphs*, 3rd edition, Johann Ambrosius Barth Verlag (Heidelberg).
- [23] Cvetkovic, D., Rowlinson, P. e Simić, K. (2009). *An Introduction to the Theory of Graph Spectra*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [24] Cvetkovic, D. e Simic, S. (2009). Towards a spectral theory of graphs based on the signless Laplacian, I. *Publ. Inst. Math.(Beograd) 85 (99)*, 19-33.
- [25] Cvetkovic, D. e Simic, S. (2010). Towards a spectral theory of graphs based on the signless Laplacian, II. *Linear Algebra Appl. 432*, 2257-2272.

- [26] Cvetkovic, D. e Simic, S. (2010). Towards a spectral theory of graphs based on the signless Laplacian, III. *Appl. Anal. Discrete Math.* 4, 156-166.
- [27] Diestel, R. (1997). *Graph Theory*. Graduate Texts in Mathematics, Springer, 173.
- [28] Donadelli, J. (2007). *Métodos da Álgebra Linear em Teoria de Grafos*. Relatório Técnico 002, Departamento de Informática, UFPR.
- [29] Duch, J., Waitzman, J. e Amaral, A. (2010). Quantifying the Performance of Individual Players in a Team Activity. *PLoS ONE* 5(6): e10937.
- [30] Fiedler, M. (1973). Algebraic Connectivity of Graphs. *Czechoslovak Mathematical Journal* 23, 298-305.
- [31] Freeman, L. C. (1977). A set of measures of centrality based on betweenness. *Sociometry* 40, 35-41.
- [32] Freeman, L. C. (1978/79). Centrality in social networks: conceptual clarifications. *Socialnetworks* 1, 215-239.
- [33] Freitas, L.Q. (2010). *Medidas de centralidade em grafos*. Tese de Mestrado em Engenharia de Produção. Universidade Federal do Rio de Janeiro.
- [34] Fritscher, E. (2011). *Propriedades espectrais de um grafo*. Tese de Mestrado em Matemática aplicada. Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
- [35] Godsil, C. e Royle, G. (2001). *Algebraic Graph Theory*. Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag.
- [36] Gomez, D., Gonzalez-Araguena, E., Manuel, C., Owen, G., Del Pozo, M., e Tejada, J. (2003). Centrality and power in social networks: A game theoretic approach. *Mathematical Social Science* 46, 27-54.
- [37] Gouveia, M. T. (2014/2015). *Apontamentos das aulas de "Combinatória-Fundamentos e Aplicações"*. Universidade da Madeira.
- [38] Gutman, I. (1978). The energy of a graph. *Ber. Math. Statist. Sect. Forschungszentrum Graz.*, 103, 1-22.
- [39] Gutman, I. e Vidović, D. e Stevanović, D. (2002). Chemical applications of the Laplacian spectrum. VI. On the largest Laplacian eigenvalue of alkanes. *J. Serb. Chem. Soc.*, 67, 407-413.

- [40] Gutman, I. e Zhou, B. (2006). Laplacian energy of a graph. *Linear Algebra Appl.*, 414, 29-37.
- [41] Harary, F. (1969). *Graph Theory*. Addison Wesley.
- [42] Horn, A.R. e Johnson, C.R. (1985). *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [43] Jacobs, D. P., Machado, C. M. S., e Trevisan, V. (2005). An $O(n^2)$ algorithm for the characteristic polynomial of a tree. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing* 54, 213-221.
- [44] Jacobs, D. P., e Trevisan, V. (2011). Locating the eigenvalues of trees. *Linear Algebra and its Applications* 434, 81-88.
- [45] Kirkland, S. (2010). Algebraic connectivity for vertex-deleted subgraphs, and a notion of vertex centrality. *Discrete Mathematics* 310, 911-921.
- [46] Meyer, C. D. (2001). *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*. Package Edition, Society for Industrial & Applied Mathematics, University City Science Center, Philadelphia.
- [47] Mohar, B. (1991). The Laplacian Spectrum of Graphs. *Graph Theory, Combinatorics, and Applications* 2, 871-898.
- [48] Morales, M.A. (2014). *Energia dos grafos*. Tese de Mestrado em Matemática e Aplicações. Universidade de Aveiro.
- [49] Moxley, R. L. e Moxley, N. F. (1974). Determining point-centrality in uncontrived social networks. *Sociometry*, v. 37, 120-133.
- [50] Sabidussi, G. (1966). The centrality index of a graph. *Psychometrika*, v. 31, 581-603.
- [51] Santos, P.L. (2010). *Teoria espectral de grafos aplicada ao problema de isomorfismo de grafos*. Tese de Mestrado em Informática. Universidade Federal do Espírito Santo.
- [52] Shaw, M. E. (1964). Communication networks. *Advances in Experimental Social Psychology* 1, 111-147.
- [53] Van, Dam, E. R. e Haemers, W. (2003). Which graphs are determined by their spectrum?, *Linear Algebra and its Applications* 373, 241-272.