

MARGARIDA MARIA COELHO RIBEIRO DE FARIA

**FLUIDO DE EULER BIDIMENSIONAL:  
CONSTRUÇÃO DE MEDIDAS ESTACIONÁRIAS E  
FLUXO ESTOCÁSTICO**

UNIVERSIDADE DA MADEIRA  
SERVIÇOS DE DOCUMENTAÇÃO

DISSERTAÇÃO PARA DOUTORAMENTO  
EM MATEMÁTICA

ÁREA DE MATEMÁTICA  
UNIVERSIDADE DO MINHO  
MARÇO - 1986

PUBLICAÇÃO SUBSIDIADA PELO  
INSTITUTO NACIONAL DE INVESTIGAÇÃO CIENTÍFICA

MARGARIDA MARIA COELHO RIBEIRO DE FARIA

SA  
FAR Flu  
T/D+c

FLUIDO DE EULER BIDIMENSIONAL:  
CONSTRUÇÃO DE MEDIDAS ESTACIONÁRIAS E FLUXO ESTOCASTICO.

UNIVERSIDADE DA MADEIRA  
SERVIÇOS DE DOCUMENTAÇÃO

DISSERTAÇÃO PARA DOUTORAMENTO  
EM MATEMÁTICA

ÁREA DE MATEMÁTICA  
UNIVERSIDADE DO MINHO  
MARÇO, 1986

PUBLICAÇÃO SUBSIDIADA PELO  
INSTITUTO NACIONAL DE INVESTIGAÇÃO CIENTÍFICA

## AGRADECIMENTOS

Apesar de ser impossível enumerar aqui todas as ajudas que tive para a realização deste trabalho, não quero deixar passar esta oportunidade sem agradecer em especial o Prof. Dr. SERGIO ALBEVERIO de quem recebi não só toda a orientação científica como ainda muito apoio moral e humano durante a minha permanência no estrangeiro.

Agradeço ainda os Prof. Dr. PH. BLANGHARD, R. HÖEGH-KROHN, R. LIMA e D. MERLINI pelas boas discussões tidas durante a realização do trabalho.

Foram para mim de grande importância o incentivo que me deram a Prof. Dra. RAQUEL VALENÇA e o Prof. Dr. FERNANDES DE CARVALHO desde que entrei ao serviço desta Universidade. À Prof. Dra. ESTELITA VAZ agradeço o ter aceitado ser minha orientadora na Universidade do Minho.

É com muito prazer que agradeço à D. LUÍSA PINTO o trabalho penoso de dactilografar um texto difícil (e nem sempre muito legível) com tanto cuidado e paciência.

Finalmente, agradeço ao Conselho Científico da Universidade do Minho e aos Centros de Investigação Z.I.F. (Bielefeld) e BiBoS (Bielefeld) o apoio financeiro.

A todos estou reconhecida e grata.

Neste trabalho considera-se a equação de Euler para um fluido incompressível num domínio limitado de  $\mathbb{R}^2$ . Apresentam-se resultados sobre as suas soluções. No espírito da dinâmica estatística de fluidos constroem-se medidas de tipo Gibbs, que se mostra serem soluções da equação de Hopf estacionária e invariantes para um fluxo limite de aproximações de tipo Galerkin.

O trabalho está dividido nos seguintes capítulos:

- I. INTRODUÇÃO
- II. SOLUÇÕES CLÁSSICAS E FRACAS DAS EQUAÇÕES DE EULER E NAVIER-STOKES
- III. HIDRODINÂMICA ESTATÍSTICA
  - III.1. INTRODUÇÃO
    2. HIDRODINÂMICA ESTATÍSTICA DO FLUIDO DE EULER BIDIMENSIONAL
      - 2.1. EQUAÇÃO CLÁSSICA DE EULER BIDIMENSIONAL E SUAS QUANTIDADES CONSERVADAS
      - 2.2. EQUAÇÃO CLÁSSICA DE EULER NUM QUADRADO COM CONDIÇÕES FRONTEIRA PERIÓDICAS E SUAS QUANTIDADES CONSERVADAS
      - 2.3. O OPERADOR DE LIOUVILLE DA EQUAÇÃO CLÁSSICA DE EULER
      - 2.4. MEDIDAS DE GIBBS, PARA A EQUAÇÃO DE EULER, DADA PARA A ENSTROFIA
      - 2.5. O OPERADOR DE LIOUVILLE ASSOCIADO À MEDIDA DE GIBBS
      - 2.6. INVARIÂNCIA INFINITÉSIMAL DA MEDIDA DE GIBBS
      - 2.7. A ENERGIA RENORMALIZADA
      - 2.8. MEDIDAS DE GIBBS PARA A EQUAÇÃO DE EULER DADAS PARA A ENSTROFIA E A ENERGIA RENORMALIZADA
      - 2.9. EXISTÊNCIA DE UM FLUXO EM  $L^2$ , RELATIVO À MEDIDA INVARIANTE ASSOCIADA COM A EQUAÇÃO DE EULER
      - 2.10. A EQUAÇÃO DE HOPF

## I. INTRODUÇÃO

Consideremos um fluido em movimento, numa região  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  de fronteira  $\partial\Omega$  de classe  $C^1$ , descrito por um campo de velocidades,  $u(x,t)$ ,  $x \in \Omega$  e  $t \in \mathbb{R}$ , e por quaisquer dois outros campos termodinâmicos tais como a densidade  $\rho(x,t)$ , a temperatura  $T(x,t)$  ou a pressão  $p(x,t)$ . O fluido é ainda descrito por valores que determinam as suas propriedades físicas tais como o coeficiente de viscosidade  $\mu$ , a viscosidade cinética  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ , o segundo coeficiente de viscosidade, o coeficiente de condutividade térmica, a condutividade termométrica, etc.

Algumas destas quantidades serão utilizadas no desenvolvimento da tese e a sua descrição será feita dentro do quadro euleriano, isto é, estudar-se-ão as suas variações ao longo do tempo  $t \in \mathbb{R}$  num ponto fixo  $x \in \Omega$  do espaço onde evoluir o fluido.

Outra possibilidade para a descrição dinâmica do fluido seria a lagrangiana, a qual consiste em considerar todas as quantidades como funções do tempo e de elementos materiais referidos à sua posição inicial. Estas funções deverão descrever a história dinâmica do elemento de fluido. Neste caso, considerar-se-ia por exemplo a velocidade  $u = u(x_0, t)$  em que  $x_0$  seria a posição do centro de massa do elemento material no tempo  $t=t_0$ . Este tipo de descrição conduz a uma análise de escrita elaborada, e embora útil em alguns casos, tem a desvantagem de não dar imediatamente uma distribuição espacial da velocidade em cada instante durante o movimento.

Para um maior detalhe sobre a obtenção das equações da hidrodinâmica ver por exemplo V. H. LAMB, "Hydrodynamics", 6<sup>th</sup> ed., Dover Publ., N.Y., (1932), ou G. K. BATCHELOR, "An introduction to Fluid Dynamics", Cambridge, The University Press, (1967), e aqui vou apenas dar um breve

resumo das equações da hidrodinâmica e algumas considerações que me serão mais necessárias para a compreensão e desenvolvimento da discussão.

Para deduzir a equação de movimento do fluido supõe-se a conservação da massa, isto é, se  $V$  é um volume arbitrário de  $\Omega$  e se  $V_t$  é o volume de  $V$  ao fim do tempo  $t$  por efeito do movimento, então

$$m(V) = \int_V \rho(x,0) dx = m(V_t) = \int_{V_t} \rho(x,t) dx$$

em que  $\rho(x,0)$  e  $\rho(x,t)$  são funções densidade no instante 0 e no instante  $t$ , respectivamente.

Supõe-se aqui, como sempre nesta introdução, que todos os integrais e diferenciais estão bem definidas. Por exemplo  $\rho(x,0) \in L^1(V, dx)$ .

Considerando um domínio isolado, a massa que atravessa um segmento (finito)  $dS$  da superfície que limita  $\Omega$ , durante uma unidade de tempo é igual à variação da massa no interior limitado por  $\partial\Omega$  ou seja

$$\int_{\partial\Omega} \rho(x,t) u(x,t) dS = - \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho(x,t) dx$$

Por aplicação da fórmula de Stokes, pode-se escrever o primeiro membro desta igualdade sob a forma de um integral de volume. Obtem-se a igualdade

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \rho(x,t) u(x,t) dx = - \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho(x,t) dx$$

donde

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho(x,t) u(x,t) \right) dx = 0$$

Sendo esta igualdade verdadeira para qualquer volume, conclui-se que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho(x,t) u(x,t) = 0$$

a que se chama equação de continuidade.

Introduzindo a hipótese de incompressibilidade, isto é,  $\rho = \text{const}$ , então esta equação reduz-se a

$$\operatorname{div} u(x,t) = 0$$

Supondo ainda que as forças internas do fluido são conservativas, isto é, que o sistema de forças verifica a igualdade forças totais = -grad (funções) + forças exteriores, e aplicando a equação fundamental da dinâmica (2ª lei de Newton) obtém-se que

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u = -\nabla p + F_e$$

em que  $(\cdot)$  exprime um produto escalar,  $(\nabla)_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ ,  $i=1, \dots, n$  é o operador divergência,  $F_e$  é a resultante das forças exteriores que possam agir sobre o elemento de fluido,  $p = p(x,t)$  é a pressão exercida pelo fluido no elemento de volume, e  $\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u = D_u$  é a derivada material ou convectiva de  $u$  que exprime a aceleração do elemento de volume, sendo  $\frac{\partial u}{\partial t}$  a contribuição devida à variação do tempo e  $(u \cdot \nabla) u$  a contribuição devida ao transporte do elemento de volume para uma posição diferente.

Se, além disso, impusermos que o fluido não atravessa a fronteira  $\partial \Omega$ , é necessário que  $u(x,t)$  seja tangente a  $\partial \Omega$  para todo o  $x \in \partial \Omega$ .

Daqui a seguinte

$$\text{Definição: } \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + (u \nabla) u = - \nabla p + F_e \text{ (em } \Omega) \\ \text{div } u = 0 \\ \text{condição inicial e condição fronteira} \end{array} \right. \quad (1)$$

é a equação de Euler que descreve o movimento de um fluido perfeito (viscosidade nula) e incompressível ( $\text{div } u = 0$ ).

A equação

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u = - \text{grad } p + F_e$$

quando aplicada a um movimento unidimensional, ao longo de um tubo, e integrada, dá a equação atribuída a Bernoulli. No caso em que  $\Omega$  é uma variedade Riemanniana orientada, a  $n$  dimensões, com fronteira regular  $\partial\Omega$  (por exemplo  $C^\infty$ ) a equação de Euler escreve-se sob a forma

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla_u u = - \nabla p + F_e \text{ (em } \Omega) \\ \text{div } u = 0 \\ u \text{ tangente a } \partial\Omega \\ \text{condição inicial} \end{array} \right.$$

em que  $\nabla_u u$  é a derivada covariante de  $u$ .

A sua coordenada em  $i$  é dada numa carta por

$$(\nabla_u u)^i = \sum_j u^j \frac{\partial u^i}{\partial x^j} + \sum_{j,k} \Gamma^i_{jk} u^j u^k$$

onde  $u^i$  é a componente de ordem  $i$  do vector  $u$ .

No caso euclidiano  $\Gamma_{jk}^i = 0$  e  $\nabla_u u = (u \cdot \nabla) u$  o que permite reencontrar a equação (1).

No caso de um fluido viscoso, o facto de haver energia dissipada durante o movimento, implica que as forças internas não podem ser consideradas como conservativas. Contudo, mantem-se a equação de continuidade.

Supondo sempre que o fluido é incompressível e na ausência de forças exteriores, obtem-se no caso viscoso a equação de movimento

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u = - \nabla p + \nu \nabla^2 u + F_e \text{ (em } \Omega \subset \mathbb{R}^n \text{)} \\ \operatorname{div} u = 0 \\ \text{condições iniciais e fronteira} \end{array} \right.$$

(para a qual  $\nu = \text{Const}/\rho$  é a viscosidade cinética).

Esta é a equação fundamental de movimento de um fluido viscoso incompressível e chama-se equação de Navier-Stokes.

#### NOTA HISTÓRICA E BIBLIOGRÁFICA

As primeiras equações diferenciais de movimento para um sistema de mais de dois pontos de massa foram obtidas quase ao mesmo tempo por Giovanni Bernoulli e d'Alembert em 1743.

D'Alembert foi ainda o primeiro a encontrar uma equação em derivadas parciais para reger o movimento de um sistema contínuo.

Um fluido perfeito é um caso particular de um sistema contínuo, e a sua equação de movimento foi publicada pela primeira vez por L. EULER, "Mémoires de l'Académie des Sciences", Berlin, em 1755.

Devido à falta de bases matemáticas existentes na altura, a

equação de Euler levantou vários problemas cuja discussão detalhada se encontra publicada em

Garret BIRKHOFF, "Hydrodynamics : a study in Logic, Fact and Similitude" , ed. Dover (1950).

A equação de movimento de um corpo contínuo foi publicada por volta de 1828 por Cauchy o qual pode construir a teoria graças à definição precisa de tensor de forças.

Para aprofundar estes argumentos, pode-se consultar o livro de C. TRUESDELL "Essays in the History of Mechanics" Springer Verlag, (1968) e para a dedução das equações de movimento de um corpo contínuo com um desenvolvimento interessante sob o ponto de vista físico, ver

L. SEDOV, Mécanique des Milieux Continus, Vol. I, ed. MIR, (1973).

Sobre a equação de Euler de fluidos ideais ver L. D. LANDAU e E. M. LIFSCHITZ, "Mécanique des fluides", ed. MIR, (1971).

A chamada equação de Navier-Stokes, foi introduzida e estudada pela primeira vez pelo engenheiro francês Claude Louis Marie Henri Navier (1785-1836).

A dedução foi baseada na construção de um modelo molecular para a estrutura interna do fluido, modelo este abandonado como errado.

Um pouco mais tarde, Sir George Gabriel Stokes (1819-1903), professor de Matemática na Universidade de Cambridge, apoiando-se em teorias sobre a fricção interna de fluidos em movimento, e no equilíbrio e movimento de corpos elásticos, obteve a mesma equação em 1845.

A dedução que se encontra em muitos manuais, por exemplo H. LAMB, "Hydrodynamics", ed. Cambridge University Press, 6ª ed. (1975) coincide essencialmente com a de Stokes.

Para a teoria da equação de Navier-Stokes contribuiu ainda Maxwell

J. C. MAXWELL, Proc. Lond. Math. Soc., 3, pag. 224, (1871)  
que mostrou a analogia desta equação com a equação de difusão.

## II - SOLUÇÕES CLÁSSICAS E FRACAS DAS EQUAÇÕES DE EULER E NAVIER-STOKES

A não linearidade das equações de movimento de um fluido torna muito difícil obter soluções numa forma analítica explícita.

Foi apenas com o desenvolvimento da análise funcional que se pode estudar o problema geral da existência e unicidade de soluções para estas duas equações.

No que se segue, serão dados alguns resultados sobre as soluções clássicas, fazendo a seguinte divisão ( $n$  sendo a dimensão do espaço):

1) - Soluções estacionárias das equações de Euler e de Navier-Stokes

1. a) para  $n = 2$

1. b) para  $n > 2$

2) - Soluções não-estacionárias da equação de Euler

2. a) para  $n = 2$

2. b) para  $n > 2$

3) - Soluções não-estacionárias da equação de Navier-Stokes

3. a) para  $n = 2$

3. b) para  $n > 2$

1. a) A existência de soluções  $u$  da equação de Navier-Stokes num domínio  $\Omega$  que pode ser infinito, com condições iniciais contínuas sobre  $\partial\Omega$  e tais que  $\int |\nabla u|^2 dx < \infty$ , foi estabelecida por Leray em [23] e [26].

Demonstrações diferentes dos resultados de Leray foram propostas por

Fujita [18] e Ladyzhenskaya [22, ch 5]. Em geral, as soluções no caso bidimensional não são únicas [22, pp XI] e não permitem um desenvolvimento assintótico no infinito em termos de funções elementares [10, pp. 228] .

A existência e unicidade de soluções estritas com um dado comportamento no infinito e condições iniciais "pequenas" foi provada por Finn e Smith em [12].

Sobre a estrutura do conjunto das soluções estacionárias da equação de Navier-Stokes pode-se consultar um trabalho de Foias e Prodi [14, pp. 24] onde se mostra que para um domínio  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , limitado e de bordo regular, o conjunto das soluções estacionárias é homeomorfo a um subconjunto compacto de  $\mathbb{R}^n$ .

Outros resultados sobre a unicidade, existência e conjunto de soluções da equação de Navier-Stokes foram obtidos nos artigos [16], [41] e [42] .

1. - b) Temam enunciou em [44] algumas propriedades do conjunto das soluções estacionárias da equação de Navier-Stokes para um fluido viscoso incompressível que se movimenta numa região  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ , sendo  $\Omega$  um aberto limitado.

Uma simplificação devida a Leray [23], [24] e [25] permite desdobrar a equação de Navier-Stokes em duas partes, facilitando o cálculo do conjunto das soluções. Resultados similares são apresentados por Temam no artigo [43] para o caso de soluções periódicas no tempo. Para outros resultados ver ainda [1], [9], [11], [17], [19] e [33].

2. - a) Um dos primeiros resultados de existência e unicidade global de soluções regulares da equação de Euler foi dado por Wolibner [63] na condição de que a componente interna da circulação do fluxo sobre o bordo seja nula.

Um resultado mais geral sobre a existência e unicidade de soluções não regulares foi proposto por Jodovich [46] estudando o caso limite de viscosidade nula da equação de Navier-Stokes.

Kato [20] serve-se do teorema de ponto fixo de Schauder para demonstrar a existência de uma solução global. Uma prova semelhante foi feita por MacGrath [30] e [31] para o caso de  $\Omega = \mathbb{R}^2$ .

Outras referências sobre a existência e unicidade de soluções  $C^\infty$  para um tempo qualquer e os abertos de  $\Omega$  ( $\Omega = \mathbb{R}^n$  ou um domínio limitado com bordo suficientemente regular ou o complementar desse domínio limitado) assim como resultados sobre existência de soluções em espaços de funções Hölderianas são [2], [22, pp 185-188], [32], [40] e [47].

Por exemplo, em [40], Temam prova a existência e unicidade de solução global para um intervalo de tempo arbitrário a 2 dimensões, e para um pequeno intervalo de tempo se a dimensão do espaço é maior ou igual a 3.

[4], [5] fornecem resultados sobre a analiticidade das soluções.

Outros resultados sobre a existência e unicidade de soluções são dados em [6], [29] e [37].

2.b) [7], [8], [15] e [21] são artigos sobre a existência e unicidade de soluções regulares para as equações de Euler de fluido perfeito incompressíveis num domínio limitado  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ .

Para  $d \geq 3$ , Temam [40] prova a existência, unicidade e regularidade de solução num domínio  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  ao fim de um certo tempo finito, dependente das condições iniciais.

Em [27] considera-se  $\text{rot } u(0)$  com suporte compacto e a continuidade de Hölder de  $\text{rot } u(t)$  é demonstrada para um tempo  $T^*$  tal que

$$\frac{\text{rot } u(T^*)}{\text{rot } u(0)} \ll 1 .$$

Em [8] demonstra-se também a persistência em  $[0, T^*]$  das soluções  $-C^\infty$  nas variáveis do espaço.

[15] e [40] dão uma outra expressão ao valor  $T^*$  (dependente de uma norma de Sobolev de  $u(0)$  e com  $T^* \rightarrow 0$  sempre que a energia de  $u(0) \rightarrow \infty$ ).

Estes resultados são ainda válidos para todas as dimensões.

Em [3] mostra-se que para um domínio  $\Omega$ , limitado ou não, se  $u(0)$  e  $\text{rot } u(0)$  são funções Hölder, então  $u(t)$  e  $\text{rot } u(t)$  também o são em  $[0, T^*]$ , em que  $T^*$  é independente da energia total. Este resultado permite concluir a persistência da regularidade  $-C^\infty$ .

A analiticidade em  $[0, T^*]$  é estudada por exemplo em [5].

Em [21] é dado um resultado sobre a existência local de solução no caso de  $\Omega = \mathbb{R}^3$ .  $T^*$  não depende da viscosidade cinética do fluido e a solução da equação de Navier-Stokes tende, quando  $\nu \rightarrow 0$ , para a solução da equação de Euler, pondo a hipótese de condições iniciais pertencentes a  $H^3(\mathbb{R}^3)$ .

No entanto, o desenvolvimento efectivo da regularidade da solução para  $t \geq T^*$  é um problema ainda em aberto.

3. a) O estudo do comportamento global de solução não estacionárias da equação de Navier-Stokes no caso de  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  foi começado por Leray [24] e, mais recentemente, feito nos trabalhos [22] e [34].

Ladyzhenskaya [22] e Lions-Prodi [28] são dois exemplos onde demonstrações sobre existência e unicidade de soluções fracas são apresentadas.

A existência de soluções estáveis periódicas é apresentada por exemplo por Prodi em [35] e de soluções quase-periódicas em [36].

Um resultado de existência e unicidade de solução fraca num domínio limitado  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  com bordo regular, assim como um estudo do compor-

tamento assintótico no tempo é feito por Foias e Prodi [14] (ver também [13]).

A regularidade global num domínio não limitado é obtida a partir da regularidade global das soluções da equação de Euler (por causa das propriedades regularizantes da difusão).

3. b) A existência de "soluções turbulentas" foi mostrada em 1934 por Leray [25] para condições iniciais de energia finita. Também demonstrou um teorema de regularidade para as soluções de energia inicial finita.

Se  $\Omega$  é um domínio aberto de  $\mathbb{R}^n$  e a condição inicial pertencente a  $H_0^1(\mathbb{R})$ , a existência de solução fraca (global) está provada por exemplo em [6] por Bardos; se a condição inicial é pequeno, esta solução é regular (analítica para  $t > 0$ ).

Se  $\Omega = \mathbb{R}^3$ , existe solução regular sobre  $[0, T^*) \times \mathbb{R}^3$ , em que  $T^*$  não depende da condição inicial. Além disso, a solução da equação de Navier-Stokes converge quando a viscosidade tende para zero, para a solução correspondente da equação de Euler. Ver os trabalhos de Leray [23] e de Kato [21].

A existência de soluções pertencentes a espaços de Hölder ou de Sololev foi demonstrada pela primeira vez por Lichtenstein em [27]. A regularidade- $C^\infty$  foi demonstrada para um domínio limitado ou para uma energia finita por Leray em [24] e também Bardos-Frisch em [3].

Para o caso  $n = 4$ , Scheffer mostrou em [39] a continuidade módulo um fechado, de medida de Hausdorff tridimensional finita, e para o caso  $n = 3$ , a continuidade módulo um fechado, de dimensão de Hausdorff  $\leq 2$ , no artigo [38]. Se  $n = 3$ , mostra ainda que se a solução da equação de Navier-Stokes tem singularidades, então a dimensão de Hausdorff do conjunto dos tempos singulares é  $< \frac{1}{2}$  e a dimensão de Hausdorff do suporte espacial das singularidades num tempo singular é  $\leq 1$ .

Leray mostra em [25] a existência global de soluções fracas.

A regularidade global para pequenas viscosidades cinéticas é um problema em aberto.

#### BIBLIOGRAFIA

- [1] C. J. AMICK, Steady Solutions of the Navier-Stokes equations in unbounded channels and pipes, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 4, 473-513 (1977).
- [2] C. BARDOS, Existence et unicité de la solution de l'équation d'Euler en dimension deux, J. Math. An. and Appl., 40, 769-790, (1972).
- [3] C. BARDOS, U. FRISCH, Finite time regularity for bounded and unbounded ideal incompressible fluids using Hölder estimations, in Turbulence and Navier-Stokes equation, R. Temam ed. (Orsay 1975), Lectures Notes in Mathematics, (Springer-Verlag) Vol. 565, 1-13. (1976).
- [4] C. BARDOS, S. BENACHOUR, M. ZEMER, Analyticité des solutions périodiques de l'équation d'Euler en 2-dimensions, Notes C. R. A. S., 282, 995-998, (1976).
- [5] C. BARDOS, S. BENACHOUR, Domaine d'analytê des solutions de l'équation d'Euler dans un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, Série IV, 4, 648 (1977).
- [6] C. BARDOS, Equations de Navier-Stokes et modêle de la turbulence, Préprint, St. Etienne (1978).
- [7] J. P. BOURGUIGNON, H. BRÉZIS, Remarks on the Euler équation, J. Funct. Anal., 15, 341-363, (1974).
- [8] D. EBIN, J. MARSDEN, Groups of diffeomorphism and the motion of an incompressible fluid, Ann. of Math., 92, 102-163, (1970).
- [9] R. FINN, On Steady-State solutions of the Navier-Stokes partial differential equations, Arch. Rational Mech. Anal., 3, 381-396, (1959).

- [10] R. FINN, On the steady-state solutions of the Navier-Stokes equations, III, Acta Math., 105, 197-244, (1961).
- [11] R. FINN, Stationary Solutions of the Navier-Stokes equations, Amer. Math. Soc. Proc. Symp. App. Math., 17 , 121-153, (1965).
- [12] R. FINN, D. R. SMITH, On the stationary solutions of the Navier-Stokes equations in 2 dimensions, arch. Rat. Mech., 25, 26-39, (1967).
- [13] C. FOIAS, Essais dans l'étude des solutions des équations de Navier-Stokes. L'unicité et la presque-périodicité des solutions "petites", Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 32 , 261-294 , (1962).
- [14] C. FOIAS, G. PRODI, Sur le comportement global des solutions non-stationnaires des équations de Navier-Stokes en dimension 2, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 39 , 1-34, (1967).
- [15] C. FOIAS, U. FRISCH, R. TEMAM, Existence de solutions  $C^\infty$  des équations d'Euler, C. R. Acad. Sc. Paris, 280A , 505-508 , (1975).
- [16] C. FOIAS, R. TEMAM , A generic property of the set of stationary solutions of Navier-Stokes equations, in Turbulence and Navier-Stokes equation R. Temam ed., (Orsay 1975) pp. 24-28, Lecture Notes in Mathematics, (Springer-Verlag), Vol. 565, (1976).
- [17] C. FOIAS, R. TEMAM, Structure of the set of stationary solutions of the Navier-Stokes equations, Com. Pure App. Math., 30 , 149-164, (1977).
- [18] H. FUJITA, On the existence and regularity of the steady-state solutions of the Navier-Stokes equations, J. Fac. Sci. Univ. of Tokyo, Sect. I, 9 , 59-102, (1961).
- [19] G. IOOSS, Direct bifurcation of a steady solution of the Navier-Stokes equations into an invariant torus, in Turbulence and Navier-Stokes equation, R. Temam ed., (Orsay 1975) pp. 69-84, Lectures Notes in Mathematics, (Springer-Verlag), Vol. 565, (1976).
- [20] T. KATO, On classical solutions of two dimensional non-stationary Euler equation, Arch. Rat. Mech. An., 25 , 188-220 , (1967).
- [21] T. KATO, Non stationary flows of viscous and ideal fluids in  $\mathbb{R}^3$ , J. Funct. Anal., 9 , 296-305 , (1972).

- [22] O. A. LADYZHENSKAYA, The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow, (Gordon & Breach, New York), (1<sup>ère</sup> ed. 1963 , 2<sup>e</sup> ed. 1969).
- [23] J. LERAY , Étude de diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes que pose l'hydrodynamique, J. Math. Pures App., Série 9, 12 , 1-82, (1933).
- [24] J. LERAY, Essay sur les mouvements plans d'un liquid visqueux que limitent des parois, J. Math. Pures et App., 13 , 331-418, (1934).
- [25] J. LERAY, Sur le mouvement d'un liquid visqueux emplissant l'espace, Acta Math., 63, 193-248, (1934).
- [26] J. LERAY, Les problèmes non linéaires, Enseignements Math., 35 , 139-151 , (1936).
- [27] L. LICHTENSTEIN, Über einige Existenzprobleme der Hydrodynamik homogener, unzusammendrückbarer, reibungsloser Flüssigkeiten und die Helmholtzschen Wirbelsätze , Math. Z. , 23, 89-158, (1925).
- [28] J. L. LIONS, G. PRODI, Un théorème d'existence et unicité dans les équations de Navier-Stokes en dimension 2, C. R. A. S., 250, 3519-3521, (1959).
- [29] J. L. LIONS, Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non-linéaires, Dunod, Paris, (1969), pp. 93.
- [30] F. J. MAC GRATH, Convergence of a non-stationary plane flow of a Navier-Stokes fluid to an ideal fluid flow, Thesis, Univ. California, (1966).
- [31] F. J. MACGRATH, Non stationary plane flow of viscous and ideal fluids, Arch. Rat. Mech. Anal., 22 , 329-348, (1968).
- [32] J. MARSDEN, D. EBIN, A. E. FISCHER, Diffeomorphism groups hydrodynamics and relativity, Proc. XII-th. biennial Semin., Can. Math. Congr. J. R. Vanstone Ed., Montreal, (1972).
- [33] G. H. MINEA, Remarques sur l'unicité de la solution stationnaire d'une équation de type Navier-Stokes, Revue Roum. Math. Pures et Appl., 21 , N° 8, 1071-1075, (1976).

- [34] G. PRODI, Résultats récents dans la théorie des équations de Navier-Stokes. Les équations aux dérivées partielles. Coll. C. N. R. S., Paris, 181-196, (1962).
- [35] G. PRODI, Qualche risultato riguardo alle equazioni di Navier-Stokes nel caso bidimensionale, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 30, 1-15, (1965).
- [36] G. PROUSE, Soluzioni quasi-periodiche dell'equazione differenziale di Navier-Stokes in 2-dimensioni, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 33, 186-212, (1963).
- [37] A. C. SCHEFFER, Existence theorem for the flow of an incompressible fluid in two dimensions, Trans. A. M. S., 42, 497-517, (1937).
- [38] V. SCHEFFER, Partial regularity of solutions to the Navier-Stokes equations, Pac. J. Math., 66, No 2, 535-552, (1976).
- [39] V. SCHEFFER, The Navier-Stokes equations in space dimension 4, Comm. Math., Phys., 61, 41-68, (1978).
- [40] R. TEMAM, Local existence of  $C^\infty$  solutions of the Euler equations of incompressible perfect fluids, Turbulence and Navier-Stokes equation R. Temam ed., (Orsay 1975), pp. 184-194, (Springer-Verlag) Lecture Notes in Mathematics, Volume 565, (1976).
- [41] R. TEMAM, On the Euler equation of incompressible perfect fluids, J. Funct. An., 20, 32-43, (1975).
- [42] R. TEMAM, Navier-Stokes equations; theory and numerical analysis, Amsterdam: North-Holland, Publ. Comps., (1977).
- [43] R. TEMAM, Une propriété générique de l'ensemble des solutions stationnaires ou périodiques des équations de Navier-Stokes, Actes du Colloque Franco-Japonais, Tokyo, Septembre 1976.
- [44] R. TEMAM, Generic properties of Navier-Stokes equations, in "Mathematical Problems in Theoretical Physics", Edts. G. F. Dell'Antonio, S. Doplicher, G. Jona-Lasinio, Lecture Notes in Physics, 80, Springer (Berlin) pp. 361-370, (1978).
- [45] W. WOLIBNER, Un théorème sur l'existence du mouvement plan d'un fluide parfait, homogène, incompressible, pendant un temps infiniment long, Math. Zeit., 37, 698-726, (1933).

- [46] V. I. YUDOVICH, Z. VICHISL, Non-stationary flows of ideal incompressible fluids, Zhur. Vych. Mat. i Mat. Fiz., 3, 1032-1066 , (1963).
- [47] V. I. YUDOVICH, Two-dimensional non stationary problem of the flow of an ideal incompressible fluid through a given region, Math. Sb. N. S., 64 , 562-588, (1964).

### III . HIDRODINÂMICA ESTATÍSTICA

#### III. 1. INTRODUÇÃO

A hidrodinâmica estatística é motivada pela complexidade de fenômenos associados ao fluxo "turbulento" de um líquido. Com efeito, a complexidade das trajetórias das partículas num fluxo assim como a instabilidade provocada pelas mudanças das condições iniciais e limite, levam a pensar que uma descrição estatística será apropriada.

Consideram-se conjuntos de fluxos em vez de fluxos individuais e espera-se que para uma boa escolha desses conjuntos, se obtenha uma insensibilidade aos detalhes das perturbações e comportamentos simples em média.

Neste sentido, a finalidade da hidrodinâmica é semelhante à finalidade da mecânica estatística ou da teoria cinética dos gases. A principal diferença reside no facto de que num fluido com viscosidade existe uma dissipação de energia, ao passo que na mecânica estatística mantém-se a energia.

Existe também uma relação entre as técnicas matemáticas da hidrodinâmica estatística e a teoria quântica de campos, relação baseada no facto geral de que os dois descrevem sistemas não lineares contínuos e semelhanças na construção de campos estatísticos (pelo menos para o caso de viscosidade nula).

Pode-se considerar O. Reynolds como um dos iniciadores da hidrodinâmica estatística com trabalhos apresentados em 1883 e 1894, introduzindo "perturbações turbulentas" à equação de Navier-Stokes e o famoso "número de Reynolds" .

Quando este número é maior que um certo valor crítico (dependente da qualidade do fluxo), nenhum fluxo estacionário é estável. O fluxo

não estacionário que aparece nestas condições pode ser estudado de uma maneira natural com ajuda da análise estatística.

Mais tarde, 1941, Kolmogoroff obteve previsões sobre a modificação do espectro da energia para o caso da turbulência generalizada, baseadas apenas em considerações dimensionais, de acordo com experiências realizadas a 3 dimensões, mas não aplicáveis a 2 dimensões.

As razões mais importantes responsáveis pela turbulência no movimento de fluidos parecem ser

- . a existência de termos não lineares nas equações de movimento;
- . a existência de termos de viscosidade de ordem superior aos termos não lineares; e
- . a tri-dimensionalidade do movimento.

Podem-se resumir as características de um movimento turbulento notando que há sempre

- . uma espécie de processo aleatório;
- . uma natureza difusa;
- . uma dissipação de energia cinética em calor; e
- . uma forte não linearidade

Com a teoria da turbulência pretende-se determinar as propriedades estatísticas do movimento, isto é, os valores médios da velocidade, as distribuições de probabilidades, etc.

Para além destes problemas de cálculo estatístico e apesar da quantidade de publicações feitas sobre a turbulência, este fenómeno ain-

da é pouco compreendido e há poucos resultados que nos explicam a sua natureza e características qualitativas.

A turbulência aparece nos fluxos em volta dos corpos rígidos, junto às paredes em que o fluido está contido, nos esvaziamentos e mesmo nos fluxos aparentemente estacionários.

A descrição completa de todos os aspectos assim como o desenvolvimento e interpretação de todos os trabalhos sobre esta matéria, seria demasiado longa. Tentarei apenas apresentar alguns problemas mais gerais que ajudaram o desenvolvimento desta Teoria.

Assim, poderá começar-se por referenciar os trabalhos de Taylor que em [1] introduziu a ideia de campo isotrópico e homogêneo. Para um tal campo, podem-se estabelecer equações que relacionam entre elas valores médios.

No caso de um campo solenoidal (divergência nula) ou potencial (rotacional nulo) estabelecimento de equações a partir dos tensores de correlação é devido a von Kármán e Howarth [2] .

O espectro (transformada de Fourier de funções de correlação) foi introduzido primeiro por Taylor [3] para o espectro de 1-dimensão. Heisenberg [4] introduziu o espectro a 3-dimensões e Kampé de Fériet [5] e Batchelor [6] utilizaram um "tensor espectro"  $\phi_{ij}$  obtido por transformada de Fourier da correlação dupla da velocidade.

A turbulência é um problema essencialmente estatístico do mesmo tipo que se encontra em mecânica estatística, pois é um problema de distribuição de energia para um número infinito de graus de liberdade.

Como na Teoria de Maxwell, este problema pode ser interpretado por considerações de similitude descritas por Heisenberg [4] .

As definições de espectro ou de função de correlação que dependem do tempo mas que não mudam de forma são chamadas "self-preserving". Von

Kármán e Lin em [7] e Stewart e Townsend em [8] discutem este problema em detalhe.

Corrsin [9] estudou o caso de flutuações de temperatura num campo turbulento isotrópico e homogêneo para um fluido incompressível.

O estudo de campos de pressão é importante para fazer a relação entre as funções de correlação de Euler e Lagrange e portanto para o problema da difusão da turbulência. Algumas referências sobre este problema são [10], [11] e [12].

A definição de isotropia local, importante para o desenvolvimento da turbulência, foi introduzida por Kolmogoroff [13], [14] e [15].

A hipótese de Kolmogoroff é a seguinte : para um número de Reynolds grande, a turbulência num domínio bastante pequeno de um movimento turbulento arbitrário tem uma isotropia local.

Kolmogoroff também apresentou duas hipóteses de similitude e estabeleceu uma lei : a lei de Kolmogoroff cuja interpretação mereceu muitas publicações pois esperava-se poder concluir daí alguma coisa sobre a regularidade global das soluções das equações de Euler e de Navier-Stokes. Exemplos de referências que estudam estes problemas são [16] e [17] e, no que respeita a regularidade [18] - [29].

Resultados ligados aos obtidos por Kolmogoroff foram dados por Onsager [30] e Batchelor [31] e [6].

Lin em [32] e [33] estuda a relação entre a viscosidade, a convecção e a instabilidade.

Uma outra forma de abordar os problemas da turbulência, fazendo uma descrição do campo de velocidades  $u(x,t)$  do fluxo turbulento usando funcionais características  $\phi[\theta(x,t)]$  da medida  $\mu_t$ , é descrita nos trabalhos [34] - [36]. A equação de Hopf é uma equação linear em derivadas funcionais associada a uma equação de evolução não linear. Ela des-

creve a evolução temporal dos campos estocásticos. A discussão matemática das soluções desta equação no caso estacionário foi feita recentemente para o caso bidimensional não viscoso [37] - [39]. Estes resultados mostram que existe uma possibilidade de construir em hidrodinâmica medidas correspondentes às de Gibbs que estão na base da mecânica estatística.

Estas medidas foram introduzidas originalmente em [40] e [41].

O estudo das propriedades ergódicas deste fluxo é um problema interessante e ainda em aberto.

A partir de resultados sobre o modelo de vortex apresentados em [3] e [42], obteve-se em [38] e [39] medidas invariantes do tipo de Poisson para o fluxo de Euler, com aplicações interessantes para o gaz de Coulomb clássico bidimensional e para a teoria de campos de Sinus-Gordon. Ver [46].

No entanto, as propriedades matemáticas sobre a interpolação de uma transição de fase ainda estão por estudar. Nos últimos anos, tem-se desenvolvido o estudo de "soluções clássicas caóticas" de equações não lineares tais como a equação de Navier-Stokes e, de uma maneira mais geral o estudo sobre a origem de fenômenos de turbulência com uma estrutura de quasi-periodicidade (Landau e Hopf) ou francamente estocástico.

Sob este novo aspecto, o problema particular das equações de Navier-Stokes foi estudado apenas indirectamente: ou por um estudo detalhado das equações truncadas (3 módulos, modelo de Lorentz) ou como um possível caso particular de teorias gerais sobre sistemas dinâmicos.

### III. 2. HIDRODINÂMICA ESTATÍSTICA DO FLUIDO DE EULER BIDIMENSIONAL.

#### III. 2. 1. EQUAÇÃO CLÁSSICA DE EULER BIDIMENSIONAL E SUAS QUANTIDADES CONSERVADAS.

LEMA: No caso bidimensional, ( $\Omega = \mathbb{R}^2$ ) a condição de incompressibilidade ( $\text{div } u = 0$ ,  $u$  regular) é localmente equivalente à existência de uma função escalar  $\varphi$  tal que

$$u = \nabla^{\perp} \varphi \quad \text{com} \quad \nabla^{\perp} \equiv \left( -\frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \equiv (-\partial_2, \partial_1) .$$

Prova: Seja  $u = (u_1, u_2)$ ,  $u_1(x_1, x_2)$ ,  $u_2(x_1, x_2)$ , e  $u$  regular.

Se  $u$  tem a forma  $\nabla^{\perp} \varphi$ , então

$$\text{div } u = \frac{\partial}{\partial x_1} \left( -\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right) = 0 .$$

Se  $\text{div } u = 0$ , vamos ver que se pode construir um escalar  $\varphi$  tal que  $u = \left( -\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right)$ , ou seja,  $u_1 = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}$  e  $u_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}$ .

Defina-se

$$\varphi = \int_{x_{02}}^{x_2} -u_1(x_1, y) dy + \int_{x_{01}}^{x_1} u_2(z, x_{02}) dz .$$

Então,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x_1, x_2) &= u_2(x_1, x_{0_2}) - \int_{x_{0_2}}^{x_2} \frac{\partial u_1}{\partial x_1}(x_1, y) dy = \\
&= u_2(x_1, x_{0_2}) + \int_{x_{0_2}}^{x_2} \frac{\partial u_2}{\partial y}(x_1, y) dy = \\
&= u_2(x_1, x_{0_2}) + u_2(x_1, x_2) - u_2(x_1, x_{0_2}) \\
&= u_2(x_1, x_2),
\end{aligned}$$

utilizando a igualdade  $\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0$ .

Além disso, □

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(x_1, x_2) = -u_1(x_1, x_2).$$

Introduzindo este escalar  $\varphi$  na equação de Euler clássica  $\partial_t u = -(u \cdot \nabla) u - \nabla p$  em que  $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$ , obtém-se que

$$\partial_t \nabla \varphi = -(\nabla \varphi \cdot \nabla) \nabla \varphi - \nabla p$$

na qual se pode eliminar o termo em  $p$  por aplicação do operador rotacional a ambos os membros da igualdade e atendendo a que  $\nabla \cdot \nabla = 0$ . Obtém-se

$$\partial_t \nabla \nabla \varphi = -\nabla [(\nabla \varphi \cdot \nabla) \nabla \varphi]$$

Sabendo que  $\nabla \cdot \nabla = \Delta$  é o operador Laplaciano em  $\mathbb{R}^2$ , vem que

$$\partial_t \Delta \varphi = - \nabla [(\nabla \varphi \cdot \nabla) \nabla \varphi]$$

ou ainda

$$\partial_t \Delta \varphi = - \nabla \varphi \cdot \nabla \Delta \varphi$$

$$\text{pois } (\nabla \Delta \varphi) \cdot (\nabla \varphi) = 0$$

Esta última equação ainda é equivalente a

$$\partial_t \Delta \varphi = \nabla \varphi \cdot \nabla \Delta \varphi \quad (1)$$

Seja  $\varphi$  uma solução clássica da equação (1) e seja  $u = \nabla \varphi$ .

$$\begin{aligned} \text{Então } \partial_t \nabla \varphi &= \nabla \partial_t \varphi \\ &= \partial_t \nabla \varphi \\ &= - \nabla [(u \cdot \nabla) u] \end{aligned}$$

isto é,  $f = \partial_t u + (u \cdot \nabla) u$  satisfaz a equação  $\nabla \cdot f = 0$ .

Obtem-se então o seguinte

Teorema:

$u$  é uma solução regular da equação de Euler em  $\mathbb{R}^2$  :

$\partial_t u = - (u \cdot \nabla) u - \nabla p$ ,  $\text{div } u = 0$ , sse  $u = \nabla \varphi$ ,  $u = (u_1, u_2) = (-\partial_2 \varphi, \partial_1 \varphi)$  em que  $\varphi$  é uma solução regular da equação  $\partial_t \Delta \varphi = \nabla \varphi \cdot \nabla \Delta \varphi$

NOTA

Se  $\Lambda$  é um domínio arbitrário bidimensional,  $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$ , com fronteira  $\partial\Lambda$  de classe  $C^1$  por bocados, a equação de Euler toma a forma

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u = - (u \cdot \nabla) u - f \\ \text{rot } f = 0 \\ \text{div } u = 0 \end{array} \right.$$

em que  $f = (f_1, f_2)$  é uma força e  $\text{rot } f \equiv -\partial_2 f_1 + \partial_1 f_2$

e também é possível utilizar a transformação  $u = \nabla^\perp \varphi$ , impondo que  $\varphi=0$  sobre  $\partial\Lambda$  sendo (1) a expressão da equação de Euler, para a qual  $\varphi$  é uma solução regular.

Considerando as soluções clássicas que são nulas no infinito, isto é,  $u$  e  $\varphi$  tendem rapidamente para zero, pode-se definir uma quantidade habitualmente chamada de "energia" e definida por

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \int u^2 \, dx = \\ &= \frac{1}{2} \int |\nabla^\perp \varphi|^2 \, dx = \\ &= \frac{1}{2} \int [(\partial_2 \varphi)^2 + (\partial_1 \varphi)^2] \, dx = \\ &= -\frac{1}{2} \int \varphi \Delta \varphi \, dx \end{aligned}$$

que se prova ser invariante, pois

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= -\frac{1}{2} \int \varphi \frac{\partial}{\partial t} \Delta \varphi \, dx - \frac{1}{2} \int \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Delta \varphi \, dx = \\ &= -\int \varphi \frac{\partial}{\partial t} \Delta \varphi \, dx = \\ &= -\int \varphi \nabla^\perp \varphi \nabla \Delta \varphi \, dx . \end{aligned}$$

Fazendo uma integração por partes, possível porque  $\varphi(x) \rightarrow 0$  quando  $|x| \rightarrow \infty$ , vem que

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \int \nabla \varphi \cdot \nabla^\perp \varphi \Delta \varphi \, dx = 0 \quad \text{pois} \quad \nabla \varphi \cdot \nabla^\perp \varphi = 0$$

Existem ainda outras quantidades invariantes para o fluxo de Euler, dependentes de  $\text{rot } u$  e definidas por

$$S_f = \int f(\text{rot } u) \, dx, \quad f \in C^2(\mathbb{R})$$

entre as quais

$$S = \frac{1}{2} \int (\text{rot } u)^2 \, dx = \frac{1}{2} \int (\Delta \varphi)^2 \, dx$$

a que se costuma chamar "enstrofia". Com efeito, utilizando (1),

$$\begin{aligned} \frac{dS_f}{dt} &= \int f'(\Delta\varphi) \cdot \nabla^\perp \varphi \cdot \nabla \Delta\varphi \, dx = \\ &= - \int f''(\Delta\varphi) \nabla^\perp \Delta\varphi \cdot \nabla \Delta\varphi \, dx, \end{aligned}$$

onde se realizou uma integração por partes. Atendendo a que  $\nabla^\perp \Delta\varphi \cdot \nabla \Delta\varphi = 0$ , obtem-se que

$$\frac{dS_f}{dt} = 0$$

e ainda que  $\frac{dS_f}{dt} = 0$ , pois  $\bar{e}$  é um caso particular em que se considera  $f$  uma função quadrática do rotacional da velocidade.

Temos assim o seguinte

TEOREMA:

Se  $u$  é uma solução regular da equação de Euler em  $\mathbb{R}^2$  e  $u = \nabla^\perp \varphi$ , as quantidades seguintes são conservadas (ou seja, são independentes do tempo):

$$\begin{aligned} \text{i) a energia } E &= \frac{1}{2} \int u^2 \, dx = \frac{1}{2} \int |\nabla^\perp \varphi|^2 \, dx \\ &= - \frac{1}{2} \int \varphi \Delta \varphi \, dx \end{aligned}$$

ii) a enstropia  $S = \frac{1}{2} \int (\text{rot } u)^2 dx = \frac{1}{2} \int (\Delta \varphi)^2 dx$

iii) as quantidades  $S_f = \int f(\Delta \varphi) dx$ ,  $f \in C^2(\mathbb{R})$

III. 2. 2. EQUAÇÃO CLÁSSICA DE EULER NUM QUADRADO COM CONDIÇÕES  
FRONTEIRA PERIÓDICAS E SUAS QUANTIDADES CONSERVADAS

Seja  $\Lambda = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ .

Estudemos as soluções regulares da equação de Euler em  $\Lambda$  :

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta \varphi = \nabla \varphi \cdot \nabla \Delta \varphi$$

com as condições periódicas seguintes:

$$\varphi(x_1, 0) = \varphi(x_1, 2\pi)$$

$$\varphi(0, x_2) = \varphi(2\pi, x_2)$$

para todos os tempos  $t$ , logo  $\varphi = \varphi(x, t)$ ,  $x = (x_1, x_2) \in \Lambda$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

Temos que

$$\int_{\partial\Lambda} u \, dl = 0$$

e que

$$\int_{\Lambda} \operatorname{rot} u \, dx = 0, \text{ isto é } \int_{\Lambda} \Delta \varphi \, dx = 0.$$

Como  $\varphi$  é regular, admite um desenvolvimento em série de Fourier:

$$\Delta \varphi(x, t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \eta_k(t) e^{ik \cdot x}$$

em que  $k \cdot x$  representa o produto escalar dos vectores  $k$  e  $x$ .

A condição  $\int_{\Lambda} \Delta \varphi \, dx = 0$  dá  $\eta_0(t) = 0$

Logo,

$$\Delta \varphi(x_1, t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}^2 \\ k \neq 0}} \eta_k(t) c^{ik \cdot x}$$

Se considerarmos o desenvolvimento de  $\varphi$ , obtem-se

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} w_k(t) c^{ik \cdot x}$$

e

$$\Delta \varphi(x_1, t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} (-k^2) w_k(t) c^{ik \cdot x} .$$

Assim,  $-k^2 w_k(t) = \eta_k(t)$ ,  $k \neq 0$ .

Podemos tomar  $w_0(t) = 0$ , porque não altera o valor de  $\Delta \varphi$  e assim não varia as equações de Euler. Esta condição é equivalente a  $\int_{\Lambda} \text{rot } u \, dx = 0$ .

Como a velocidade  $u = \nabla^{\perp} \varphi = \text{rot } \varphi$  é uma função real, deverá verificar-se a condição

$$\text{rot } \varphi = \overline{\text{rot } \varphi}$$

que se exprime em termos da série de Fourier por

$$w_k = \bar{w}_{-k}$$

A equação de Euler (I) toma então a forma

$$k^2 \frac{d}{dt} w_k = \frac{1}{2} \sum_{h+h'=k} (h^1 \cdot h') (h^2 - h'^2) w_h w_{h'}$$

em que  $h^\perp = (-h_2, h_1)$  e onde se fez intervir a anti-simetria em  $h$  e  $h'$  de  $h^\perp \cdot h' = h_1 h_2' - h_2 h_1'$ .

A energia  $E$  e a enstrofia  $S$  são dadas respectivamente por

$$E = \frac{1}{2} \sum_k k^2 |w_k|^2$$

e

$$S = \frac{1}{2} \sum_k k^4 |w_k|^2$$

que são finitas. Por exemplo se  $w_k \rightarrow 0$ ,  $|k| \rightarrow \infty$ , mais fortemente que todo o inverso polinomial.

Estas fórmulas podem ser provadas utilizando a definição de  $E$  e de  $S$  e o desenvolvimento de Fourier.

Assim, ficou demonstrado o seguinte

TEOREMA: Se  $u$  é uma solução regular da equação de Euler em  $\Lambda = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ , no sentido de que  $u = \nabla^\perp \varphi$  e  $\frac{\partial}{\partial t} \Delta \varphi = \nabla^\perp \varphi \cdot \nabla \Delta \varphi$ ,  $\varphi(x_1, 0, t) = \varphi(x_1, 2\pi, t)$ ,  $\varphi(0, x_2, t) = \varphi(2\pi, x_2, t)$  e  $\int_\Lambda \text{rot } u \, dx = 0$ , então

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}^2 \\ k \neq 0}} w_k(t) e^{ik \cdot x}$$

e os coeficientes  $w_k(t)$  são soluções da equação

$$k^2 \frac{d}{dt} w_k = \frac{1}{2} \sum_{h+h'=k} (h^\perp \cdot h') (h^2 - h'^2) w_h w_{h'}$$

em que  $h^\perp = (-h_2, h_1)$ .

A energia  $E$  é dada por,

$$E = \frac{1}{2} \sum_k k^2 |w_k|^2 ,$$

a enstrofia por,

$$S = \frac{1}{2} \sum_k k^4 |w_k|^2 ,$$

e estas quantidades são conservadas e finitas se  $\sum_k k^2 |w_k|^2 < \infty$  e  $\sum_k k^4 |w_k|^2 < \infty$  respectivamente.

III. 2. 3. O OPERADOR DE LIOUVILLE DA EQUAÇÃO CLÁSSICA DE EULER

Introduza-se o espaço  $\phi$  das sucessões

$\{ w_k \}$  tal que

$$\phi \equiv \{ w = \{ w_k \} \mid w_k = \bar{w}_{-k}, \quad k \in \mathbb{Z}^2, \quad k \neq 0 \}$$

com  $w_k : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  e definam-se as

funções  $B_k : D(B_k) \rightarrow \mathbb{C}$

$$w \rightarrow B_k(w) \equiv \frac{1}{2k^2} \sum_{h+h'=k} (h^\perp \cdot h') (h^2 - h'^2) w_h w_{h'}$$

em que  $D(B_k)$  é um domínio contido em  $\phi$  tal que  $B_k(w) < \infty, w \in D(B_k)$ , por exemplo, o conjunto das sucessões que convergem mais rapidamente para zero que todo o inverso polinomial quando  $|k| \rightarrow \infty$ .

Como  $h^\perp \cdot h' = h^\perp \cdot k$  (pois  $h+h'=k$ ) e

$h^2 - h'^2 = -k^2 + 2(h \cdot k)$ , pode-se exprimir  $B_k$  por

$$B_k(w) = \sum \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{k^2} (h^\perp \cdot k)(h \cdot k) - \frac{1}{2} (h^\perp \cdot k) \right) \right] w_h w_{k-h},$$

onde se eliminou  $h'$  fazendo  $h' = k - h$ .

Atendendo a que  $\frac{\partial B_k}{\partial w_k}(w) = 0$  (porque  $B_k$  não depende de  $w_k$ ), obtém-se que

$$\sum_k \frac{\partial B_k}{\partial w_k} = 0, \quad k \in \mathbb{Z}^2$$

Logo, o vector infinito  $B = \{ B_k, k \in \mathbb{Z}^2 \}$  tem divergencia nula. A partir da definição de  $B_k$ , pode-se reescrever a equação de Euler sob a forma

$$\frac{d}{dt} w_k = B_k(w) \quad k \in \mathbb{Z}^2, \quad k \neq 0.$$

Defina-se 
$$B \equiv \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k \neq 0}} B_k(w) \frac{\partial}{\partial w_k}$$

como operador.

Considere-se o espaço  $FC^1$  de todas as funções  $f$  definidas para  $\phi$  e tal que

$$f(w) = \tilde{f}(w_{k_1}, \dots, w_{k_n})$$

para alguns  $k_1, \dots, k_n, n \in \mathbb{N}$ ,  $f \in C_0^1$  como função das variáveis reais

Re  $w_{k_i}$ , Im  $w_{k_i}$ ,  $i=1, \dots, n$ .

$B$  é bem definido em  $FC^1$ , porque se  $f \in FC^1$ ,  $\sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k \neq 0}} B_k(w) \frac{\partial}{\partial w_k} f$  é

finito de termos diferentes de zero.

A  $B$  chama-se operador de Liouville da equação de Euler.

O facto de que  $\frac{\partial B_k}{\partial w_k} = 0$  dá

$$\operatorname{div} B \equiv \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k \neq 0}} \frac{\partial B_k}{\partial w_k} = 0.$$

Logo,  $B$  tem divergência nula.

III. 2. 4. MEDIDA DE GIBBS PARA A EQUAÇÃO DE EULER, DADA PARA A ENSTROFIA .

Seja  $H_S$  um espaço complexo de Hilbert de sucessões  $w = \{w_k\}_{k>0}$ , para o qual a forma sesquilinear

$$(w, \varepsilon)_{H_S} = \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k > 0, k \neq 0}} k^4 \overline{w_k} \varepsilon_k$$

define um produto escalar sobre  $H_S$  e onde a condição sobre o índice duplo  $k = (k_1, k_2) \geq 0$  se interpreta como  $k_1 \geq 0$  e  $k_2 \geq 0$ ,  $w = (w_k)$  e  $\varepsilon = (\varepsilon_k)$ .

Sendo  $\gamma > 0$ , notar-se-á  $H_{\gamma S}$  o mesmo espaço com o produto interno definido por

$$(w, \varepsilon)_{H_{\gamma S}} = \gamma (w, \varepsilon)_{H_S}$$

Seja  $d\mu_\gamma$  a distribuição normal standard associada ao espaço de Hilbert  $H_{\gamma S}$  e  $E_\gamma$  a esperança matemática associada a  $d\mu_\gamma$ .

Então,

$$\begin{aligned} E_\gamma \exp(i(w, w)_{H_{\gamma S}}) &= \exp\left(-\frac{1}{2} \gamma (w, w)_{H_S}\right), \quad \forall w \in H_S \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2} (w, w)_{H_{\gamma S}}\right) \end{aligned}$$

$\mu_\gamma$  interpreta-se como sendo uma medida de probabilidade sobre um espaço compacto,  $X_S$ , que contenha  $H_S$  como um conjunto denso de medida nula.

A construção explícita de um processo aleatório indexado por  $H_{\gamma S}$

poderã ser o seguinte:

Seja  $(X_S, \mu_\gamma)$  um espaço de medida dado por

$$(X_S, \mu_\gamma) = \prod_{\substack{k>0 \\ k \in \mathbb{Z}^2}} (\bar{\mathbb{C}}, \mu_\gamma^k)$$

em que  $\mathbb{C} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$   $\bar{\mathbb{C}}$  é o compactificado de  $\mathbb{C}$  e  $\mu_\gamma^k$  é uma medida de probabilidade sobre  $\mathbb{C}$  tal que

$$d\mu_\gamma(w) = \prod_{k \in \mathbb{Z}_+^2} d\mu_\gamma^k(w_k)$$

com  $\mathbb{Z}_+^2 = \{k \in \mathbb{Z}^2 \mid k > 0\}$ ,  $w = \{w_k\}_k$ ,  $w_k = x_k + iy_k$

e

$$d\mu_\gamma^k(w_k) = \left(\frac{2\pi}{\gamma k^4}\right)^{-1} \exp\left(-\frac{1}{2} \gamma k^4 |w_k|^2\right) dx_k dy_k.$$

Assim sendo,  $H_S$  é um subespaço de  $X_S$  (para a topologia produto de  $X_S$  que faz de  $X_S$  um compacto), mensurável e tal que  $\mu_\gamma(H_S) = 0$  e  $\mu_\gamma(X_S) = 1$ .

Com efeito,

$$\int_{H_S} d\mu_\gamma(w) = \int_{H_S} \prod_{k \in \mathbb{Z}_+^2} d\mu_\gamma^k(w_k) = \int_{H_S} \prod_{k \in \mathbb{Z}_+^2} \left(\frac{2\pi}{\gamma k^4}\right)^{-1} e^{-\frac{1}{2} \gamma k^4 |w_k|^2} dw_k.$$

Seja  $H_N = \{w \in H_S, \|w\|_{H_{\gamma S}} \leq N\}$ . Então  $H_N \subset H_{N+1}$  e  $H_S = \bigcup_N H_N$ , logo

$$\int_{H_S} d\mu_\gamma(w) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{H_N} d\mu_\gamma(w)$$

Fazendo  $z = \sqrt{\gamma} h^2 w_k$

$$\begin{aligned} \int_{H_N} \prod_k \left( \frac{2\pi}{\gamma k^4} \right)^{-1} e^{-\frac{1}{2} \gamma k^4 |w_k|^2} dw_k &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{H_N} \prod_k e^{-\frac{1}{2} |z_k|^2} d^2z \leq \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2} N^2} \end{aligned}$$

logo

$$\mu_\gamma(H_S) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{H_N} d\mu_\gamma(w) = 0$$

pois  $(w, w)_{H_S} < +\infty$ .

De acordo com [43], pag.64,  $\mu_\gamma(\chi_S) = 1$ .

De notar que para  $k \neq k'$ ,  $w_k$  e  $w_{k'}$  têm distribuições normais independentes. Cada uma delas  $\bar{e}$  de esperança nula,  $E_\gamma(w_k) = E_\gamma(w_{k'}) = 0$ , e a covariância  $\bar{e}$  nula,  $E_\gamma(w_k w_{k'}) = 0$  se  $k \neq k'$ .

Ainda pela invariância de  $\bar{w}_k$  e  $w_{k'}$ , se obtem que

$$E_\gamma(\bar{w}_k w_{k'}) = 0 \quad \text{se } k \neq k'$$

enquanto que

$$E_\gamma(\bar{w}_k w_k) = 2 \gamma^{-1} k^{-4}.$$

Os resultados obtidos podem ser formulados no seguinte .

TEOREMA : Seja  $H_{\gamma S}$  o espaço complexo de Hilbert de sucessões  $w=(w_k), k>0$ , com produto escalar  $(w, w') = \gamma \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}_+^2 \\ k > 0}} k^4 \bar{w}_k w'_k$  .

Seja  $\mu_\gamma$  a distribuição normal standard associada ao espaço  $H_{\gamma S}$  .  
Então  $\mu_\gamma$  pode ser realizada como a medida de Gauss

$$d\mu_\gamma(w) = \prod_{k \in \mathbb{Z}_+^2} \left( \frac{2\pi}{\gamma k^4} \right)^{-1} \exp\left(-\frac{1}{2} \gamma k^4 |w_k|^2\right) dR_{e w_k} dI_{m w_k}$$

para  $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_+^2}$ , com

$$E_\gamma(\bar{w}_k w_{k'}) = E_\gamma(w_k w_{k'}) = 2\gamma^{-1} k^4 \delta_{kk'}$$

e  $E_\gamma(w_k) = 0$  .

$\mu_\gamma$  é a "medida de Gibbs para a equação de Euler dada pela entropia", porque formalmente

$$d\mu_\gamma = N e^{-S(w)} \prod_{k \in \mathbb{Z}_+^2} dw_k ,$$

em que  $N$  é uma constante de normalização, e  $S$  a entropia.

### III. 2. 5. O OPERADOR DE LIOUVILLE ASSOCIADO À MEDIDA DE GIBBS.

Mostra-se que o operador  $B_k$  definido em III.2.3. é um elemento bem definido de  $L^2(\mu_\gamma)$ .

Seja

$$B_k^n(w) \equiv \sum_{h^2 \leq n} \left( \frac{1}{k^2} (h^\perp \cdot k)(h \cdot k) - \frac{1}{2} (h^\perp \cdot k) w_h w_{k-h} \right)$$

$B_k^n(w)$  é um conjunto de funções  $\mu_\gamma$ -mensuráveis sobre  $(\chi_S, \mu_\gamma)$ . Prova-se que convergem em  $L^2(\chi_S, d\mu_\gamma) \equiv L_2(d\mu_\gamma)$  para  $B_k(w)$  quando  $n$  tende para infinito, logo,  $B_k(w)$  é  $\mu_\gamma$ -mensurável e está contido em  $L_2(d\mu_\gamma)$ .

Com efeito,

$$\begin{aligned} E_\gamma(|B_k^n|^2) &= E_\gamma(\overline{B_k^n}, B_k^n) = \\ &= \sum_{\substack{h^2 \leq n \\ h'^2 \leq n}} \left( \frac{1}{k^2} (h^\perp \cdot k)(h \cdot k) - \frac{1}{2} (h^\perp \cdot k) \right) \left( \frac{1}{k^2} (h'^\perp \cdot k)(h' \cdot k) - \frac{1}{2} (h'^\perp \cdot k) \right) \\ &\quad \cdot E_\gamma(\overline{w}_h \overline{w}_{k-h} w_{h'} w_{k-h'}) \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} E_\gamma(\overline{w}_h \overline{w}_{k-h} w_{h'} w_{k-h'}) &= \\ &= 4\delta_{h,h'} \gamma^{-2} h^{-4} (k-h)^{-4} + 4\delta_{h,k-h'} \gamma^{-2} h^4 (k-h)^{-4} \end{aligned}$$

Logo

$$E_\gamma |B_k^n|^2 \leq 8 \sum_{\substack{h \neq 0 \\ h \neq k}} \frac{1}{k^4} (h^\perp \cdot k)^2 (h \cdot k)^2 \gamma^{-2} h^{-4} (k-h)^{-4}$$

ou seja,

$$E_{\gamma}(|B_k^n|^2) \leq 8 \gamma^{-2} \sum_{\substack{h \neq k \\ h^2 > n}} (k-h)^{-4}.$$

Do mesmo modo, se  $m < n$ , obtem-se que

$$E_{\gamma}(|B_k^n - B_k^m|^2) \leq 8 \gamma^{-2} \sum_{\substack{h \neq k \\ h^2 > m}} (k-h)^{-4}$$

Isto prova que  $B_k^n$  converge em  $L_2(d\mu_{\gamma})$  para  $B_k(w)$  quando  $n$  tende para infinito. Logo,  $B_k(w)$  é  $\mu_{\gamma}$ -mensurável e pertence a  $L_2(d\mu_{\gamma})$ .

Pode-se então formular o seguinte :

TEOREMA: Seja para  $k \in \mathbb{Z}_+^2$  e  $w \in \text{supp } \mu_{\gamma}$

$$B_k^n(w) \equiv \sum_{\substack{h^2 \leq n \\ h \in \mathbb{Z}_+^2}} \left[ \frac{1}{k^2} (h^{\perp} \cdot k)(h \cdot k) - \frac{1}{2} (h^{\perp} \cdot k) \right] w_h w_{k-h}.$$

Então,  $B_k^n \in L^2(\mu_{\gamma})$  e  $B_k^n$  converge em  $L^2(\mu_{\gamma})$  para um elemento  $B_k$  de  $L^2(\mu_{\gamma})$  quando  $n$  tende para infinito.  $\square$

Considere-se agora o campo vectorial

$$B = \sum_{k > 0} B_k(w) \frac{\partial}{\partial w_k}, \quad w \in \text{supp } \mu_{\gamma}.$$

$B$  está definido em  $FC^1$  e chama-se operador de Liouville associado à medida de Gibbs.

A definição de  $B$  pode ser estendida a um domínio maior. Seja  $P_m$  o fecho em  $L^2(\mu_{\gamma})$  dos polinômios em  $w_k$  de grau  $\leq m$  e seja  $P = \bigcup_m P_m$ . Para

todo  $p > 0$  temos que  $P \subset L^p(\mu_\gamma)$ . Além disso,  $B \in P_2$ . Logo, pode-se alargar o domínio de  $B$  ao domínio  $D(B) = P \cup FC^1$ .

Este resultado pode ser formulado no seguinte

TEOREMA: O operador de Liouville

$$B(w) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} 2 B_k(w) \frac{\partial}{\partial w_k}, \quad w \in \text{supp } \mu_\gamma$$

associado à medida de Gibbs  $\mu_\gamma$  é bem definido no domínio  $D(B) = P \cup FC^1$ , denso em  $L^2(\mu_\gamma)$ , onde  $P = \bigcup_m P_m$ ,  $P_m$  representa o fecho em  $L^2(\mu_\gamma)$  dos polinômios em  $w_k$  de grau  $\leq m$  e  $FC^1$  são as funções cilíndricas de base  $C_b^1$ .

## III. 2. 6. INVARIANCIA INFINITESIMAL DA MEDIDA DE GIBBS

Tendo  $B$  uma divergência nula (como se viu em III, 2. 3.) e sendo a enstrofia,  $S$ , um invariante para todas as soluções clássicas da equação de Euler, espera-se que a medida  $\mu_\gamma$  seja uma medida invariante para o "fluxo de Euler" induzido por  $w_k(0) \rightarrow w_k(t)$  em que  $w_k(t)$  é a solução da equação

$$\frac{d}{dt} w_k = B_k(w) \quad , \quad k \in \mathbb{Z}^2$$

com a condição inicial  $w_k(0)$  pertencente ao suporte de  $\mu_\gamma$ .

Formalmente, tem-se que

$$d\mu_\gamma(w) = \text{Const.} \cdot e^{-S(w)} \prod_{k>0} dw_k$$

onde  $S(w(t)) = S(w(0))$ ,  $w = (w_1, w_2, \dots)$  e

$$\frac{d}{dt} \prod_{k>0} dw_k = \left( \sum_k \frac{\partial}{\partial w_k} B_k \right) \prod_{k>0} dw_k = 0 \quad (\text{no sentido de que } \frac{d}{dt} \int f \prod_{k>0} dw_k = 0,$$

para todas as funções  $f \in FC^1$  independentes de  $t$ ).

Se  $\mu_\gamma$  for uma medida invariante, utilizando o método de Koopman-von Neumann, conclui-se que a transformação  $w(0) \rightarrow w(t)$  induz em  $L^2(\chi_S, d\mu_\gamma)$  um operador unitário fortemente contínuo,  $u_t$ , tal que

$$u_t f(w(0)) = f(w(t))$$

Seja  $H$  o gerador infinitesimal de  $u_t$ , de tal modo que  $u_t = \exp(itH)$ .

Então, para toda a função  $f \in FC^1$ , obtem-se por um lado que

$$\frac{d}{dt} f(w(t)) \Big|_{t=0} = i H f(w(0))$$

e por outro que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(w(t)) \Big|_{t=0} &= \sum_k \frac{\partial}{\partial w_k} f(w(0)) \frac{d}{dt} w_k(t) = \\ &= \sum_k \frac{\partial}{\partial w_k} f(w(0)) B_k(w(0)) = \\ &= B f(w(0)). \end{aligned}$$

Logo, deverá ser  $iH=B$  sobre  $FC^1$ . Ou seja, poderá considerar-se  $B$  como sendo a expressão infinitesimal do fluxo dado por  $u_t$  em  $L^2(d\mu_\gamma)$ .

Supondo  $\mu_\gamma$  invariante para a transformação  $w(0) \rightarrow w(t)$  dada pelas soluções  $w(t) = (w_k(t))$  de equação de Euler com a condição inicial  $w(0) \in \text{supp } \mu_\gamma$ , então em particular  $(f, u_t g) = (f, g)$  para todos os  $f, g \in L^2(d\mu_\gamma)$ , logo

$$\frac{d}{dt} (f, u_t g) \Big|_{t=0} = (f, iH_g) = 0 \quad \forall g \in FC^1$$

Então, fazendo  $f \equiv 1 \in L^2(d\mu_\gamma)$ ,  $g \in FC^1$ ,

$$\int B_g d\mu_\gamma = 0.$$

O problema de provar que efectivamente  $\mu_\gamma$  é invariante, é muito difícil. Esta discussão faz ver que é natural introduzir o conceito menos forte de "invariancia" infinitesimal".

Se  $\mu$  é uma medida de probabilidade, dizemos que  $\mu$  tem uma "invariancia infinitesimal" (relativamente à equação de Euler) se

$$\int B f d\mu = 0$$

para todas as funções  $f \in FC^1$ .

Também se pode exprimir esta propriedade utilizando o operador adjunto  $B^*$  de  $B$  em  $L^2(d\mu_\gamma)$ . O domínio de  $B^*$  é o conjunto das funções  $g \in L^2(d\mu_\gamma)$  para as quais existe  $h \in L^2(d\mu_\gamma)$  que verifica a igualdade

$$(g, B f)_{L^2} = (h, f)_{L^2} \quad \forall f \in D(B)$$

A equação

$$\int B f d\mu_\gamma = 0, \quad \forall f \in D(B) = FC^1$$

implica que  $\mathbb{1} \in D(B^*)$  e

$$(B^* \mathbb{1}, f) = (\mathbb{1}, Bf) = \int Bf d\mu_\gamma = 0, \quad \forall f \in FC^1.$$

Como  $FC^1$  é um conjunto denso em  $L^2(\mu_\gamma)$ , conclui-se que

$$B^* \mathbb{1} = 0$$

Vice-versa, se  $B^* \mathbb{1} = 0$ , então

$$(B^* \mathbb{1}, f) = 0 \quad e$$

$$\int B f \, d\mu_\gamma = (B^* \mathbb{1}, f) = 0 \quad , \quad \forall f \in D(B)$$

ou seja

$$\int B f \, d\mu_\gamma = 0 \quad \forall f \in D(B)$$

é equivalente a

$$B^* \mathbb{1} = 0.$$

Assim, fica demonstrado o

LEMA: A invariância infinitesimal de  $\mu_\gamma$ ,

$$\int B f \, d\mu_\gamma = 0 \quad \forall f \in FC^1, \quad \bar{e} \text{ é equivalente a } B^* \mathbb{1} = 0 \quad \text{em que}$$

$\mathbb{1}$  é a função identidade de  $L^2(d\mu_\gamma)$ .

Agora há que provar que  $\mu_\gamma$  tem a propriedade que  $B^* \mathbb{1} = 0$ .

Para isso, temos que calcular  $B^*$ , sendo necessário calcular primeiro  $(\frac{\partial}{\partial w_k})^*$ .

Seja  $A = \frac{\partial}{\partial w_k}$  e  $\bar{e}_k$  o vector unitário na direcção da coordenada  $k$ .

Se  $f, g \in FC^1$ , então

$$\begin{aligned}
 (f, Ag) &= \int \bar{f} \cdot \frac{\partial}{\partial w_k} g \, d\mu_\gamma = \\
 &= \frac{d}{dt} \int \bar{f}(w) g(w+te_k) \, d\mu_\gamma(w) \Big|_{t=0}
 \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} g(w+te_k) \Big|_{t=0} &= \frac{d}{dt} g(w_1, w_2, \dots, w_k + t, w_{k+1}, \dots) = \\
 &= \frac{\partial}{\partial w_k} g(w)
 \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variáveis

$$w = w' - t e_k, \quad \text{obtem-se}$$

$$(f, Ag) = \frac{d}{dt} \int \bar{f}(w' - t e_k) g(w') \, d\mu_\gamma(w' - t e_k) \Big|_{t=0}$$

em que

$$d\mu_\gamma(w' - t e_k) = \frac{d\mu_\gamma(w' - t e_k)}{d\mu_\gamma(w')} \, d\mu_\gamma(w')$$

ou seja

$$\frac{d\mu_\gamma(w' - t e_k)}{d\mu_\gamma(w')} = e^{-\frac{1}{2} \gamma k^4 t^2} e^{\gamma k^4 w' t e_k}$$

Obtem-se então que

$$\begin{aligned}
 (f, Ag) &= \frac{d}{dt} \int \overline{F(w' - te_k)} g(w') e^{-\frac{1}{2} \gamma k^4 t^2} e^{\gamma k^4 w' t e_k} d\mu_\gamma(w') \Big|_{t=0} \\
 &= \int - \frac{\partial \overline{F(w')}}{\partial w'_k} g(w') d\mu_\gamma(w') + \int \gamma k^4 w'_k \overline{F(w')} d\mu_\gamma(w')
 \end{aligned}$$

Pela definição de  $(\frac{\partial}{\partial w_k})^*$  vem que

$$\int \overline{F} \frac{\partial}{\partial w_k} g d\mu_\gamma = - \int (\frac{\partial}{\partial w_k})^* \overline{F} g d\mu_\gamma$$

Então, comparando estas duas últimas igualdades, conclui-se que

$$\left(\frac{\partial}{\partial w_k}\right)^* = - \frac{\partial}{\partial w_k} + \gamma k^4 w_k$$

Sendo  $g \in FC^1$  tal que  $g w_{-k} \in L^2(\mu_\gamma)$

considere-se

$$\begin{aligned}
 \sum_{|k| \leq n} (g, B_k(w) \frac{\partial f}{\partial w_k}) &= \sum_{|k| \leq n} ((\frac{\partial}{\partial w_k})^* \overline{B_k(w)} g, f) = \\
 &= - \sum_{|k| \leq n} (\frac{\partial}{\partial w_k} \overline{B_k(w)} g, f) + \sum_{|k| \leq n} (\gamma k^4 w_k \overline{B_k(w)} g, f)
 \end{aligned}$$

Logo, atendendo a que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{|k| \leq n} \gamma k^4 w_k \overline{B_k(w)} = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{|k| \leq n} (g, B_k(w) \frac{\partial f}{\partial w_k}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{|k| \leq n} (\frac{\partial}{\partial w_k} \overline{B_k(w)} g, f)$$

Mas como

$$\frac{\partial}{\partial w_k} \overline{B_k} g = \overline{B_k} \frac{\partial}{\partial w_k} g + (\frac{\partial}{\partial w_k} \overline{B_k}) g$$

e

$$\sum_k \frac{\partial}{\partial w_k} \overline{B_k} = 0 \quad ,$$

Obtem-se que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{|k| \leq n} (g, B_k \frac{\partial}{\partial w_k} f) = - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{|k| \leq n} (\overline{B_k} \frac{\partial}{\partial w_k} g, f)$$

e logo

$$(g, Bf) = -(Bg, f) \quad .$$

Este resultado pode-se entender, por continuidade, a todo  $g \in FC^1$ . Logo  $B^* \supset -B$ .

$$\text{Mas, } \mathbb{1} \in D(B) = FC^1 \text{ e } B \mathbb{1} = \sum B_k(w) \frac{\partial}{\partial w_k} \mathbb{1} = 0,$$

o que permite concluir que

$$B^* \mathbb{1} = B \mathbb{1} = 0$$

Pode-se então enunciar o seguinte

TEOREMA: A medida de Gibbs  $\mu_\gamma$ , associada à equação de Euler  $\bar{e}$  infinitesimal invariante, no sentido de que  $\int Bf d\mu_\gamma = 0$ ,  $\forall f \in FC^1$ , em que  $B$   $\bar{e}$  o operador de Liouville.

De modo equivalente,  $B^* \mathbb{1} = 0$ , em que  $B^*$   $\bar{e}$  o adjunto de  $B$  em  $L^2(d\mu_\gamma)$ .

Verifica-se a inclusão  $B^* \supset -B$ , isto  $\bar{e}$ ,  $A=iB$   $\bar{e}$  um operador simétrico em  $L^2(d\mu_\gamma)$ .

## III. 2. 7. A ENERGIA RENORMALIZADA

A energia para o fluxo clássico de Euler era definida como

$$E = \frac{1}{2} \sum_{k^2} k^2 |w_k|^2$$

Considere-se agora

$$E_n(w) = \frac{1}{2} \sum_{k^2 \leq n} k^2 |w_k|^2$$

$E_n(w)$  é uma sucessão positiva, crescente, de limite formal  $E$  quando  $n$  tende para infinito

Tem-se que

$$\begin{aligned} \int E_n(w) d\mu_\gamma(w) &= \frac{1}{2} \int \sum_{k^2 \leq n} k^2 |w_k|^2 d\mu_\gamma(w_k) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k^2 \leq n} k^2 \int |w_k|^2 d\mu_\gamma(w_k) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k^2 \leq n} k^2 E_\gamma(\bar{w}_k, w_k) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k^2 \leq n} k^2 (2\gamma^{-1} k^{-4}) = \\ &= \gamma^{-1} \sum_{k^2 \leq n} k^{-2} \end{aligned}$$

Logo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int E_n(w) d\mu_\gamma(w) = \infty.$$

Então, pelo teorema da convergência monótona temos que  $E = \sup E_n \notin L^1(d\mu_\gamma)$ .

Considere-se então a expressão

$$:E_n: = \frac{1}{2} \sum_{k^2 \leq n} \left( k^2 |w_k|^2 - \frac{1}{\gamma k^2} \right)$$

e calcule-se

$$\begin{aligned} \int (:E_n:)^2 d\mu_\gamma(w) &= \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k^2 \leq n} \int \left( k^2 |w_k|^2 - \frac{1}{\gamma k^2} \right)^2 d\mu_\gamma(w_k) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k^2 \leq n} \int \left( k^4 |w_k|^4 + \frac{1}{\gamma^2 k^4} - \frac{2|w_k|^2}{\gamma} \right) d\mu_\gamma(w_k) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k^2 \leq n} \left( k^4 \frac{8}{\gamma k^8} + \frac{1}{\gamma^2 k^4} - \frac{2}{\gamma} \cdot \frac{1}{\gamma k^4} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k^2 \leq n} 7\gamma^{-2} k^{-4} < \infty \end{aligned}$$

Então  $:E_n: \in L^2(d\mu_\gamma)$ .

Temos também que  $\int :E_n: d\mu_\gamma = 0$ .

Um cálculo análogo permite verificar que dado  $\varepsilon > 0$  existe  $N(\varepsilon)$  tal que

$$\int ( :E_n: - :E_m:)^2 d\mu_\gamma < \varepsilon$$

quando  $n, m > N(\varepsilon)$ .

Isto  , quando  $n$  tende para infinito,  $:E_n:$    uma sucessão de Cauchy em  $L^2(d\mu_\gamma)$  e converge para um elemento  $:E: \in L^2(d\mu_\gamma)$ .

De  $E_\gamma(:E_n:) = 0$  obtem-se que  $E_\gamma(:E:) = 0$ .

Pode-se escrever que

$$:E: = \frac{1}{2} \sum_k (k^2 |w_k|^2 - \frac{1}{\gamma k^2}) ,$$

no sentido da convergência em  $L^2(\mu_\gamma)$  e  $:E:$  chama-se a energia renormalizada.

Estes resultados podem ser formulados no seguinte

TEOREMA: A energia renormalizada associada   medida de Gibbs  $\mu_\gamma$  existe como um elemento  $E(w)$  de  $L^2(\mu_\gamma)$ .

$$:E: = s\text{-lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sum_{|k| \leq n} (k^2 |w_k|^2 - \frac{1}{\gamma k^2}),$$

em que  $s\text{-lim}$  significa limite forte em  $L^2(\mu_\gamma)$ .

$:E:$  tem  $\mu_\gamma$ -medida zero,  $E_\gamma(:E:) = 0$ .

A energia  $E(w)$  definida como o  $\sup E_n(w)$     $\mu_\gamma$ -quase-seguramente igual a  $+\infty$ .

III. 2. 8. MEDIDAS DE GIBBS PARA A EQUAÇÃO DE EULER DADAS  
PARA A ENSTROFIA E A ENERGIA RENORMALIZADA

Considerando agora a função

$$:E:(w) = \frac{1}{2} \sum_k (k^2 |w_k|^2 - \frac{1}{\gamma k^2})$$

$:E:(w)$  é uma função quadrática do campo aleatório  $w = \{w_k\}$ ,

$w \in (\mathcal{X}_S, \mu_\gamma)$  e

$$\int e^{-\beta :E:(w)} d\mu_\gamma(w) = \int e^{-\frac{\beta}{2} \sum_k (k^2 |w_k|^2 - \frac{1}{\gamma k^2})} d\mu_\gamma(w)$$

em que

$$d\mu_\gamma(w) = \prod_{k \in \mathbb{Z}_+^2} d\mu_\gamma^k(w_k)$$

$$d\mu_\gamma^k(w_k) = \left(\frac{2\pi}{\gamma k^4}\right)^{-1} e^{-\frac{1}{2} \gamma k^4 |w_k|^2} dw_k$$

Como  $\int e^{-\beta :E:(w)} d\mu_\gamma(w) < \infty$  se  $\beta \geq 0$  então,

para  $\beta \geq 0$  e  $\gamma > 0$

$$e^{-\beta :E:} \in L^1(d\mu_\gamma),$$

$$e \quad d\mu_{\beta, \gamma} = \left(\int e^{-\beta :E:} d\mu_\gamma\right)^{-1} e^{-\beta :E:} d\mu_\gamma$$

$\bar{\mu}$  é uma medida de probabilidade absolutamente contínua em relação  $\mu_\gamma$ .

Seja  $\mu_{\beta,\gamma}$  a medida de Gibbs dada para a entropia e a energia.

Formalmente,  $\mu_{\beta,\gamma}$  tem densidade  $e^{-\beta E} e^{-\gamma S}$  a "medida de Lebesgue"  $\prod_{\substack{k \in \mathbb{Z}^2 \\ k \neq 0}} dw_k$ .

Inversamente, também  $\mu_\gamma$  é absolutamente contínua em relação a  $\mu_{\beta,\gamma}$  logo,

$\mu_{\beta,\gamma}$  e  $\mu_\gamma$  são equivalentes.

Se  $\gamma \neq \gamma'$ ,  $\mu_{\beta,\gamma}$  e  $\mu_{\beta',\gamma'}$  são medidas disjuntas, sendo medidas normais com covariâncias proporcionais a  $\gamma^{-1}$  e  $\gamma'^{-1}$  respectivamente, com  $\gamma \neq \gamma'$ .

Prova-se que a medida de Gibbs  $\mu_{\beta,\gamma}$  é um invariante infinitesimal para o fluxo de Euler, no sentido de que

$$\int B f d\mu_{\beta,\gamma} = 0.$$

É preciso mostrar que

$$\int B f e^{-\beta:E} d\mu_\gamma = 0$$

ou seja que  $(e^{-\beta:E} \mathbb{1}, Bf) = 0$  para todo  $f \in FC^1$ .

Isto equivale ainda a provar que

$$B^* e^{-\beta:E} = 0$$

Mas  $B^* \supset -B$  e

$$B e^{-\beta: E_n} = \sum_k B_k \frac{\partial}{\partial w_k} e^{-\frac{\beta}{2} \sum_{j^2 \leq n} (j^2 |w_j|^2 - \frac{1}{\gamma j^2})} = 0$$

pois  $\sum_{k^2 \leq n} B_k k^2 \bar{w}_k = 0$ .

Então também  $B^* e^{-\beta: E} = 0$ .

Atendendo a que  $(e^{-\beta: E} : \mathbb{1}, Bf)$  é o limite de  $(e^{-\beta: E_n} : \mathbb{1}, Bf) = 0$  quando  $n$  tende para infinito, conclui-se que

$$B^* e^{-\beta: E} = 0.$$

Temos assim o

TEOREMA: Para todos  $\beta \geq 0$  e  $\gamma > 0$ ,

$$\mu_{\beta, \gamma} = \frac{e^{-\beta: E} d\mu_\gamma}{\int e^{-\beta: E} d\mu_\gamma}$$

são medidas de probabilidade, absolutamente contínuas relativamente a  $\mu_\gamma$ .

$$\mu_{\beta, \gamma} \perp \mu_{\beta', \gamma'} \quad \text{para } \gamma \neq \gamma'.$$

$\mu_{\beta, \gamma}$  são infinitesimal invariantes, no sentido de que  $\int B f d\mu_{\beta, \gamma} = 0$ ,  $\forall f \in FC^1 UP$ .

Além disso,  $B^* e^{-\beta: E} = 0$ .

### III. 2. 9. EXISTENCIA DE UM FLUXO EM $L^2$ , RELATIVO À MEDIDA INVARIANTE ASSOCIADA COM A EQUAÇÃO DE EULER

Tendo construído a medida de tipo Gibbs  $\mu_{\beta, \gamma}$  como foi feito no capítulo anterior é natural perguntar agora se será possível associar um fluxo estocástico ligado à equação de Euler isto é uma aplicação definida no  $\text{supp } \mu_{\beta, \gamma}$  e com valores no mesmo domínio para o qual  $\mu_{\beta, \gamma}$  seja invariante.

Formalmente

$$d\mu_{\beta, \gamma} = Z^{-1} e^{B:E(u) - \gamma S(u)} \prod_{x \in \Lambda} d(\text{rot } u)$$

que deveria ser invariante pois é construída com auxílio dos invariantes  $E$  e  $S$  para o fluxo clássico da equação de Euler. Mas este argumento formal põe de parte o facto de que a energia não normalizada é infinita para quase todo  $u$  com respeito à medida  $\mu_{\beta, \gamma}$ , isto é, os teoremas de existencia de solução com base em condições iniciais de energia finita não são aplicáveis neste caso para a construção do fluxo.

O operador de Liouville  $B$  é um candidato natural para gerador de um fluxo estocástico pois, de acordo com o resultado do último capítulo, a medida de Gibbs  $\mu_{\beta, \gamma}$  é infinitesimal invariante no sentido aí especificado.

Em particular, pode-se perguntar se se pode passar desta invariância infinitesimal à invariância de  $\mu_{\beta, \gamma}$ , ou seja se  $iB$  admite uma extensão auto-adjunta tal que o grupo unitário associado  $U_t$  é tal que

$$(U_t f)(u) = f(\phi_t(u))$$

para quase todo o  $u$  e em que  $\phi_t$  é uma aplicação no  $\text{supp } \mu_{\beta, \gamma}$  que preserva a medida.

Para este programa de construção pode-se pelo menos realizar a primeira parte, quer dizer pode-se estabelecer a existência de uma extensão auto-adjunta de  $iB$  do seguinte modo:

Defina-se para  $f \in L^2(\mu_{\beta, \gamma})$

$$J f(w) = \overline{f(\overline{w})}$$

em que  $(\overline{w})_k \equiv \overline{w}_{-k}$  e  $w = (w_k)$ .

Então  $J^2 = \mathbb{1}$ . Como  $J$  é antilinear, então  $J$  é uma conjugação em  $L^2(d\mu_{\beta, \gamma})$ .

Consideremos agora o operador de Liouville  $B$  e o operador  $A = iB$ .

$A$  é simétrico (III, 2, 5) e além disso,  $JA = AJ$ , logo  $A$  é real com respeito a  $J$ .

Então, por um teorema de von-Neumann (ver por exemplo [44] pag.143),  $A$  admite pelo menos uma extensão auto-adjunta  $\tilde{A}$  para a qual

$$J \tilde{A} = \tilde{A} J.$$

Utilizando  $\hat{B} \equiv -i \tilde{A}$ , pode-se gerar um grupo unitário,  $e^{t\hat{B}}$ , que é fortemente contínuo em  $L^2(d\mu_{\beta, \gamma})$ .

Assim temos o

TEOREMA: O operador de Liouville  $B$  é tal que tem uma extensão  $\hat{B}$  para a qual  $\hat{B}^* = -\hat{B}$  em  $L^2(\mu_{\beta, \gamma})$ ,  $\tilde{A} \equiv i \hat{B}$  é um operador auto-adjunto em  $L^2(\mu_{\beta, \gamma})$  e  $e^{t\hat{B}}$  é um operador unitário fortemente contínuo também em  $L^2(\mu_{\beta, \gamma})$ .

Falta ver agora que este grupo unitário  $\bar{e}$  é induzido por um grupo de aplicações  $\mu_{\beta, \gamma}$ -mensuráveis  $\phi_t: u \rightarrow u_t$  ou seja por um fluxo .

Um resultado deste tipo pode ser obtido para uma equação de Euler truncada. Especificamente, omitem-se na equação de Euler

$$\partial_t w_k = B_k(w) = \frac{1}{ek^2} \sum_{h+h'=k} (h^\perp \cdot h') (h^2 - h'^2) w_h w_{h'}$$

todos os modos de energia maior que N ou seja considere-se

$$B_k^N(w) \equiv \frac{1}{2k^2} \sum_{\substack{h^2 < N \\ h+h'=k}} (h^\perp \cdot h') (h^2 - h'^2) w_h w_{h'}$$

e introduza-se uma aplicação sobre  $FC^1$  definida por

$$(\tilde{B}^N f)(u) = \sum_k B_k^N(w) \frac{\partial f}{\partial w_k}(u)$$

$B_k^N$  converge para  $B_k$  em  $L^2(\mu_{\beta, \gamma})$  quando N tende para infinito de analogia com o que foi demonstrado em III, 2, 5.

Assim como  $\tilde{B}^N f$  tende para  $\tilde{B}f$  quando N tende para infinito, em que f é uma função cilíndrica arbitrária, pois a soma que define  $\tilde{B}^N$  tem um número finito de termos.

Note-se por  $w^N$  as soluções da equação de Euler truncada, isto é de

$$\partial_t w_k^N = B_k^N(w^N)$$

e para  $k^2 > N$  fixa-se

$$w_k^N(t) = w_k(o)$$

Como  $B_k^N(w^N)$  é dado por uma combinação linear finita de produtos de  $w_h^N$ ,  $w_h^N$ , de coeficientes finitos, pode-se invocar teoremas de existência para sistemas de equações diferenciais ordinárias para estabelecer a existência global de soluções do problema com condições iniciais.

Defina-se  $\phi_t^N$  tal que  $\phi_t^N(w^N(0)) \equiv w^N(t)$

em que  $\phi^N$  é o fluxo da equação de Euler truncada, ou seja  $\phi_t^N$  é um grupo de transformações que deixa invariante  $\mu_{\beta, \gamma}$ .

Defina-se um operador

$U_t^N$  em  $L^2(\mu_{\beta, \gamma})$  por

$$(U_t^N f)(w) = f(\phi_t^N(w))$$

com  $w \in \text{supp } \mu_{\beta, \gamma}$ ,  $f \in FC^1UP$  e estendido por continuidade a todo o  $f$  pertencente a  $L^2(\mu_{\beta, \gamma})$ .

É fácil ver que  $U_t^N$  é um grupo unitário, gerado por  $\tilde{B}^N$  e tal que para todo o elemento  $f \in FC^1UP$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (U_t^N f)(w) &= (\tilde{B}^N f)(\phi_t^N(w)) = \\ &= \sum_{k^2 < N} \tilde{B}_k^N \frac{\partial}{\partial w_k^N(t)} f(\phi_t^N(w)). \end{aligned}$$

Considere-se uma família  $F$  de funções  $f$  em  $FC^1$  da forma

$$f(w) = e^{i\alpha w_k}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

A álgebra destas funções é densa, em  $FC^1$  para a norma do supremo, e em  $L^2(\mu_{\beta,\gamma})$ .

Por um lado, se  $g \in L^2(\mu_{\beta,\gamma})$

$$|(g, f \circ \phi_t^N)| \leq \|g\|_2 \|f \circ \phi_t^N\|_2 = \|g\|_2$$

onde se usou a invariância de  $\mu_{\beta,\gamma}$  para o fluxo  $\phi_t^N$ .

Por outro lado, para todo  $t' > t$

$$\begin{aligned} U_{t',f}^N - U_t^N f &= e^{i\alpha w_k^N(t')} - e^{i\alpha w_k^N(t)} = \\ &= \int_t^{t'} \frac{d}{ds} e^{i\alpha w_k^N(s)} ds = \\ &= \int_t^{t'} (\tilde{B}^N f) (\phi_s^N(w)) ds \end{aligned}$$

logo

$$\|U_{t',f}^N - U_t^N f\|_2 \leq \int_t^{t'} \|(\tilde{B}^N f) (\phi_s^N(\cdot))\|_2 ds$$

onde

$$(\tilde{B}^N f) (\phi_s^N(w)) = i\alpha B_k^N(w^N(s)) e^{i\alpha w_k^N(s)}.$$

Então a norma desta expressão é evidentemente

$$\|\tilde{B}^N f \circ \phi_s^N\|_2 = |\alpha| \|B_k^N \circ \phi_t^N\|_2$$

em que se pode omitir a aplicação  $\phi_t^N$  no lado direito desta expressão pela invariância da medida, obtendo-se

$$\|\tilde{B}f \circ \phi_s^N\|_2 = |\alpha| \|B_n^N\|_2 .$$

Pelo que foi dito, o lado direito desta expressão converge em  $L_2(\mu_{\beta,\gamma})$  para  $\|B_k\|_2$  e portanto em particular  $\|\tilde{B}_n^N f \circ \phi_s^N\|_2 \leq c_k |\alpha|$  com  $c_k$  independente de  $s$  e  $N$ .

Ou seja, pode-se agora escrever

$$\|U_{t'}^N f - U_t^N f\|_2 \leq (t' - t) |\alpha| c_k$$

e

$$\left\| \frac{\partial}{\partial t} e^{i\alpha w^N(t)} \right\|_2 \leq |\alpha| c_k .$$

Isto implica que a família  $\{f \circ \phi_t^N, f \in F\}$  de aplicações em  $L^2(\mu_{\beta,\gamma})$  equicontínuas uniformemente limitadas (por 1).

Logo  $\{(g, f \circ \phi_t^N), f \in F, g \in L^2(\mu_{\beta,\gamma})\}$  é uma família de aplicações de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{C}$  equicontínuas uniformemente limitadas (por  $\|g\|_2$ ).

Nestas condições se  $N \rightarrow \infty$ , existe uma subsequência  $(g, f \circ \phi_t^N)$  que tende para  $(g, \tilde{f}(t))$  para todo  $t \in Q$  (compacidade fraca).

Então, pode-se aplicar o teorema de Ascoli-Arzelà à família  $\{(g, f \circ \phi_t^N), f \in F, g \in L^2(\mu_{\beta,\gamma})\}$  para  $t \in [a,b]$  e  $-\infty < a < b < +\infty$ , que se pode considerar como uma sequência indexada por  $N$  para a qual existe uma subsequência, cujo índice ainda se pode escrever como sendo  $N$ , e tal que  $(g, f \circ \phi_t^N)$  converge uniformemente para  $(g, \tilde{f}(t))$  para todo  $t \in [a,b]$  e  $g \in L_2(\mu_{\beta,\gamma})$ .

Então, pode-se concluir, de acordo com os últimos resultados obtidos que

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} (g, \tilde{f}(t)) \right| \leq |\alpha| c_k \|g\|_2$$

e atendendo a que

$$U_0^N f - U_S^N f = \int_0^S (\tilde{B}^N f) \phi_{S'}^N(w) ds'$$

vem que

$$(g, U_S^N f) = (g, f) + (g, \int_0^S (\tilde{B}^N f) (\phi_{S'}^N(\cdot)) ds').$$

Quando  $N \rightarrow +\infty$ , obtém-se

$$\tilde{f}(s) = f + \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^S (\tilde{B}^N f) (\phi_{S'}^N(\cdot)) ds'.$$

Por construção,

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (g, e^{i\alpha w_k^N(t)}) \Big|_{\alpha=0} = i(g, w_k^N(t))$$

Utilizando argumentos semelhantes, conclui-se que  $(g, w_k^N(t))$  converge em subsequências para  $(g, w_k(t))$  para algum  $w_k(t) \in L^2(\mu_{\beta, \gamma})$  e que  $(g, e^{i\alpha w_k^N(t)})$  quando  $N \rightarrow \infty$  é uniforme em  $\alpha$  (pois  $|(g, e^{i\alpha w_k^N(t)} - e^{i\beta w_k^N(t)})| \leq$

$$\leq \|g\|_2 \|w_k^N(t)\|_2 |\beta - \alpha|$$

$$\leq \|g\|_2 \|w_k^N(0)\|_2 |\beta - \alpha|$$

e  $(g, e^{i\alpha w_k^N(t)})$  é uma família uniformemente limitada).

Então

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial \alpha} (g, e^{i\alpha w_k^N(t)}) \Big|_{\alpha=0} &= i(g, w_k(t)) \\ &= \frac{\partial}{\partial \alpha} (g, \tilde{f}(t)) \Big|_{\alpha=0}. \end{aligned}$$

Obtem-se então o seguinte

TEOREMA

Seja  $B_k^N$  a aproximação de Galerkin de  $B_k$

O fluxo  $\phi_t^N$  associada à aproximação de Galerkin da equação de Euler deixa invariante a medida de Gibbs  $\mu_{\beta, \gamma}$ . Em  $L^2(\mu_{\beta, \gamma})$ , existe um grupo unitário  $U_t^N$  com  $U_t^N f = f \circ \phi_t^N$  para todo  $f \in FC^1$  UP cujo gerador é uma extensão de  $i\tilde{B}^N$ .

$B_k^N$  converge para  $B_k$  em  $L^2(\mu_{\beta, \gamma})$  quando  $N \rightarrow \infty$ .

Existe uma subsequência de  $N$  tal que para  $f = e^{i\alpha w_k} f \circ \phi_t^N$  converge fracamente em  $L^2(\mu_{\beta, \gamma})$ , uniformemente para todo  $t$  pertencente a cada compacto de  $\mathbb{R}$ , para  $\tilde{f}(t) \in L^2(\mu_{\beta, \gamma})$ .

Além disso,

$$\frac{\partial}{\partial t} (g, \tilde{f}(t)) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial t} (g, f \circ \phi_t^N) \text{ para todo } g \in L^2(d\mu_{\beta, \gamma}). \tilde{f}(t) \text{ é}$$

solução da equação de Euler, no sentido de que

$$f(t) = f(1) + \lim_{N \rightarrow \infty} \text{fraco} \int_0^t (\tilde{B}^N f)(\phi_s^N(\cdot)) ds .$$

Seja  $U_t$ ,  $t \in \mathbb{R}$  uma aplicação tal que

$$U_t \tilde{f}(s) = \tilde{f}(s+t)$$

Então  $U_t$  é um grupo abeliano a um parametro de transformações

$e^{t\tilde{B}}$ ,  $t \in \mathbb{R}$  é um grupo de contracções em  $L^2(\mu_{\beta, \gamma})$ .

As aplicações definidas por

$$\Phi_t(w_k(s)) \equiv w_k(s+t)$$

formam um grupo fracamente contínuo e diferenciável de  $\mathbb{R}$  em  $L^2(\mu_{\beta, \gamma})$ .

Por construção  $(U_t, \Phi_t)$  é o limite do fluxo de Euler truncado  $(U_t^N, \Phi_t^N)$ . Contudo não se provou que  $U_t f = f \circ \Phi_t$ , e em particular que  $U_t$  é unitário e  $\mu_{\beta, \gamma}$  é invariante sob acção  $\Phi_t$ , como é o caso para  $(U_t^N, \Phi_t^N)$ .

Em particular, a condição de que  $i\tilde{B}$  seja essencialmente auto-adjunto implicaria que  $U_t = e^{At}$ , com  $A$  fecho de  $i\tilde{B}$ , seria o único grupo unitário limite de  $U_t^N$  para o qual  $e^{At} f = f \circ \Phi_t$  com  $\mu_{\beta, \gamma}$  e  $\nu$  invariantes para  $\Phi_t$ .

Como foi dito anteriormente, a essencial auto-adjunção de  $i\tilde{B}$  ainda não está decidida.

NOTA: No caso de se ter um sistema clássico de um número infinito de partículas a uma dimensão, pode-se provar que  $A$  é um operador essencialmente auto adjunto [45] .

Mas, para todos os outros sistemas clássicos, este problema está ainda em aberto.

### III. 2. 10. A EQUAÇÃO DE HOPF

Em [34] Hopf estabelece uma equação que permite passar da dinâmica não linear caracterizada pela equação de Navier-Stokes a uma dinâmica estatística linear de um campo de velocidades.

Seja  $\Lambda$  uma região aberta de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\partial\Lambda$  a sua fronteira,  $u=u(x,t)$  um campo de velocidades definido em  $\bar{\Lambda} \times \mathbb{R}$

$$\phi(v) = \int e^{i(v \cdot u)} d\mu_x(u)$$

o valor médio da exponencial  $e^{i(v \cdot u)}$   
com  $v=v(x) \in C^\infty(\Lambda, \mathbb{R}^n)$  e

$$(v \cdot u) = \int_{\Lambda} v \cdot u \, dx .$$

$\phi(v,t)$  chama-se funcional característica da medida  $\mu$  para uma dada distribuição do campo aleatório  $u$  no tempo  $t$  e, derivando em ordem a  $t$  vem que

$$\partial_t \phi(v,t) = i \int (v \cdot \partial_t u) e^{i(v \cdot u)} d\mu(u) .$$

Considere-se agora a funcional característica da medida de Gibbs  $\mu_{\beta,\gamma}$  definida no espaço de velocidade  $u$  tal que  $\text{div } u=0$

$$\phi_{\beta,\gamma}(v) = \int e^{i(v \cdot u)} d\mu_{\beta,\gamma}$$

dependente de  $t$  pois  $u = u(x, t)$ . Para estudar esta dependência do tempo, usa-se o resultado obtido em III, 2, 6,

$$B f(u) = \frac{d}{dt} f(u)$$

para  $f \in D(B) \supset FC^1$ .

Sendo  $f = e^{i(v \cdot u)} \in FC^1$ , obtem-se que

$$\partial_t \Phi_{\beta, \gamma}(v) = \int B e^{i(v \cdot u)} d\mu_{\beta, \gamma} = 0$$

pois  $\int B f d\mu_{\beta, \gamma} = 0$  (obtido em III, 2, 8.)

Por outro lado

$$\frac{d}{dt} f(u) = \int \frac{\delta f}{\delta u} \partial_t u d\chi$$

na qual se pode inserir o valor de  $\partial_t u$  dado pela equação de Euler, obtendo-se

$$\frac{d}{dt} f(u) = \int \frac{\delta f}{\delta u} (-(u \cdot \nabla) u - \nabla P) d\chi.$$

Sendo  $f = e^{i(v \cdot u)}$  e utilizando o formalismo das derivadas funcionais obtem-se que  $\Phi_{\beta, \gamma}$  obedece à equação

$$\partial_t \Phi_{\beta, \gamma}(u) = i \sum_k \int dx v_k(x) \left\{ \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\delta^2}{\delta v_j(x) \delta v_k(x)} - i \frac{\partial}{\partial x_k} P \right\} \Phi$$

$P$  representa a pressão.

$$\text{Para } p = -\Delta^{-1} \nabla(u \cdot \nabla)u$$

toma a forma de um operador linear

$$P = \Delta^{-1} \sum_{i,j} \frac{\delta^2}{\delta v_j(x) \delta v_j(x)}$$

A esta chama-se equação de Hopf ligada à equação de Euler e mostrou-se que

### TEOREMA

As medidas  $\mu_{\beta, \gamma}$  são soluções da equação de Hopf estacionária, no sentido de que as suas funcionais características  $\Phi_{\beta, \gamma}(v)$  são soluções que satisfazem a equação

$$i \sum_k \int dx v_k(x) \left\{ \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\delta^2}{\delta v_j(x) \delta v_k(x)} - i \frac{\partial}{\partial x_k} P \right\} \Phi = 0$$

Para o caso de um domínio quadrado  $\Lambda$  com condições limite periódicas Boldrighini e Frigio construíram outras medidas invariantes de tipo Poisson que também produzem soluções de equações de Hopf estacionária [38].

BIBLIOGRAFIA

- [1] G.I. TAYLOR, Statistical Theory of Turbulence, I-IV, Proc. Roy. Soc., A 151, N<sup>o</sup> 874, p. 421-478, (1935).
- [2] T. VON KÄRMÄN, L. HOWARTH, On the Statistical Theory of isotropic turbulence, Proc. Roy. Soc., A 164, N<sup>o</sup> 917, p.192-215, (1938).
- [3] G. I. TAYLOR, The Spectrum of Turbulence, Proc. Roy. Soc., A 164, p.476 , (1938).
- [4] W. HEISENBERG; Zur statistischen theorie der turbulenz, Z. f. Phys., 124 , p.628-657, (1948).
- [5] KAMPÉ DE FÉRIET, Le tenscur spectral de la turbulence homogène non-isotrope dans un fluide incompressible, C. R. Acad. Scie. Paris, 227 , p.760 , (1948).
- [6] G. K. BATCHELOR, the role of big eddies in homogeneous turbulence, Proc. Roy. Soc. (London), A 195, N<sup>o</sup> 1043, p.513-532, (1949).
- [7] T. VON KÄRMÄN, C. C. LIN, On the statistical theory of isotropic turbulence, Adv. Appl. Mech., 2 , p.1-19 (Academic Press, New York), (1951).
- [8] R. W. STEWARD, A. A. TOWNSEND, Similarity and self-preservation in isotropic turbulence, Phil. Trans. Roy. Soc., A 243, N<sup>o</sup> 867, p.359-386, (1951).
- [9] A. CORRSIN, The decay of isotropic temperature fluctuations in an isotropic turbulence, J. Aeronaut. Sci., 18, N<sup>o</sup> 6, p.417-423,(1951)
- [10] G. K. BATCHELOR, Pressure fluctuation in isotropic turbulence, Procd. Cambridge Phil. Soc., 47, N<sup>o</sup> 2, p.359-374, (1951).
- [11] D. C. COLUS, The diffusion process in turbulent flow, Aust. Council Sci. Ind. Res., Div. Aero., Repport A55, (1948).
- [12] M. S. UBEROI, S. CORRSIN, Diffusion of heat from a line source in isotropic turbulence, Nat. Adv. Com. Aeronaut., Repport N<sup>o</sup> 2710, (1952).
- [13] A. N. KOLMOGOROFF, The local structure of turbulence in incompressible fluids for very large Reynolds numbers, C. R. Acad. Sci., U.R.S.S., 30 , p.301-305, (1941).

- [14] A. N. KOLMOGOROFF, On degeneration of isotropic turbulence in an incompressible viscous fluid, C. R. Acad. Sci., U.R.S.S., 31, p.538-540, (1941).
- [15] A. N. KOLMOGOROFF, Dissipation of energy in locally isotropic turbulence, C. R. Acad. Sci., U.R.S.S., 32, p.16-18, (1941).
- [16] R. H. KRAICHMAN, Initial-range transfer in two- and three-dimensional turbulence, J. Fluid Mech., 47, No 3, p.525-536, (1971).
- [17] R. H. KRAICHMAN, J. Fluid. Mech., 64, p.737, (1974).
- [18] W. WOLIBNER, Math. Z., 37, p.727-738, (1933).
- [19] E. HÖLDER, Math. Z., 37, p.698-726, (1933).
- [20] A. C. SCHAEFFER, Transl. Amer. Math. Soc., 42, p.497-513, (1937).
- [21] J. C. W. ROGERS, Existence and uniqueness theorems for inviscid incompressible flow, M. I. T. Ph. D. Thesis, (1968).
- [22] T. KATO, Nonstationary flows of Viscous and ideal fluids in  $\mathbb{R}^3$ , J. Funct. Anal., 9, 296-305, (1972).
- [23] J. P. BOURGUINON, H. BRÉZIS, Remarks on the Euler equation, J. Funct. Anal., 15, p.341-363, (1974).
- [24] C. BARDOS, U. FRISCH, Finite time regularity for bounded and unbounded ideal incompressible fluids using Hölder estimates, in turbulence and Navier-Stokes Equation; R. Temam ed (Orsay 1975), Lecture Notes in Math. (Springer-Verlag), 565, p.1-13, (1976).
- [25] R. TEMAM, On the Euler equations of incompressible perfect fluids, J. Funct. Anal., 20, 32-43, (1975).
- [26] C. FOIAS, U. FRISCH, R. TEMAM, Existence de solutions  $C^\infty$  des équations d'Euler, C.R. Hebd. Séan. Acad. Sci. Paris, A 280, p.505-508, (1975).
- [27] R. TEMAM, Local existence of  $C^\infty$  solutions of the Euler equations of incompressible fluids, in Turbulence and Navier-Stokes Equations, R. TEMAM ed. (Orsay 1975), Lecture Notes in Math. (Springer-Verlag) 565, p.184-194, (1976).
- [28] J. C. LIONS, Quelques méthodes de résolution des problèmes aux

- limites non-linéaires (Dunod-Gauthier-Villars, Paris), (1969).
- [29] O. A. LADYZHENSKAYA, The mathematical theory of viscous incompressible flow (Gordon & Breach, New York), 2<sup>a</sup> ed., (1969).
- [30] L. ONSAGER, the distribution of energy in turbulence (Abstract), Phys. Rev., 68, N<sup>o</sup> 11-12, p.286, (1945).
- [31] G. K. BATCHELER, Kolmogoroff's theory of locally isotropic turbulence, Proc. Camb. Phil. Soc., 43, p.533-559, (1947).
- [32] C. C. LIN, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 30, p.316-324, (1944).
- [33] C.C. LIN, On the stability of two-dimensional parallel flow, Quarterly App. Math., 3, Part I: General theory, p.117-142; Part II : Stability in an inviscid fluid, p.218-234; Part III : Stability in an viscous fluid, p. 277-301, (1945).
- [34] E. HOPF, Statistical Hydrodynamics and functional calculus, J. Rat. Mech. An., 1, N<sup>o</sup> 1, 87-123, (1952).
- [35] E. HOPF, E. W. TITT, On certain special solutions of the  $\phi$  - equation of statistical hydrodynamics, J. Rat. Mech. Analysis, 2, N<sup>o</sup> 3, p.587-592, (1953).
- [36] E. HOPF, Remarks on the functional-analytical approach to turbulence, Proceedings Symposia Appl. Math., Amer. Math. Soc., 13, p.157-163, (1962)
- [37] C. BOLDRIGHINI, S. FRIGIO, Equilibrium states for the two-dimensional incompressible Euler fluid, Att. Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, XXVII, p. 106-125, (1978).
- [38] C. BOLDRIGHINI, S. FRIGIO, Equilibrium States for a plane incompressible perfect fluid, Comm. Math. Phys., 72, p.55-76, (1980).
- [39] S. ALBERVERIO, M. R. FARIA, R. HØEGH-KROHN, Stationary measures for the periodic Euler flow in twodimensions, J. Stat. Phys., 20, p.585-595, (1979)
- [40] L. ONSAGER, Statistical hydrodynamics, Nuovo Cimento, Supplement 6, N<sup>o</sup>2, p. 279-287, (1949).
- [41] T. D. LEE, On some statistical properties of hydrodynamical 10, p.69-74. (1952).

- [42] H. M. GLAZ, Two attempts at modelling two dimensional turbulence, in Turbulence Seminar, Berkeley 1976/77, Lecture Notes in Maths., 15, (Springer, Berlin), pp. 135-155, (1977).
- [43] T. HIDA, Stationary Stochastic Processes, Princeton University Press, (1970).
- [44] M. REED, B. SIMON, Methods of Modern Mathematical Physics, Vol. I : Functional Analysis, Academic Press, New York (1975).
- [45] C. MARCHIORO, A. PELLEGRINOTTI, M. PULVIRENTI, Self-Adjointness of the Liouville Operator for Infinite Classical Systems, Commun. Math. Phys., 58, 113-129, (1978).
- [46] S. ALBEVERIO, R. HOEGH-KROHN, D. MERLINI, "Some Remarks on Euler Flows, Associated Generalized Random Fields and Coulomb Systems" "Infinite Dimensional Analysis and stochastic processes" S. Albeverio ed., Pitman-London pp. 216-244, (1985) .
- [47] S. CAPRINO, S. De GREGORIO, "On the statistical solutions of the two-dimensional periodic Euler equation, Roma Preprint (1984), Math. Methods in the Appl. Sciences (to appear).

ERRATA

Pag.	Linha	Onde se lê	Deve ler-se
22	15	...sobre a interpolação de	... sobre a interpretação de
26	15	$= \frac{1}{2} \int  \nabla^\perp \varphi ^2 dx =$	$= \frac{1}{2} \int  \nabla^\perp \varphi ^2 dx =$
28	7	e ainda que $\frac{dS_f}{dt} = 0$	e ainda que $\frac{dS}{dt} = 0,$
30	15	$\Delta \varphi(x,t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \eta_k(t) e^{ik \cdot x}$	$\Delta \varphi(x,t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \eta_k(t) e^{ik \cdot x}$
31	3 e 7	$\Delta \varphi(x_1, t) = \dots$	$\Delta \varphi(x, t) = \dots$
	17	A equação de Euler (I)...	A equação de Euler ...
	18	$k^2 \frac{d}{dt} w_k = \frac{1}{2} \sum_{h+h'=k} (h^\perp \cdot h') \dots$	$k^2 \frac{d}{dt} w_k = \frac{1}{2} \sum_{h+h'=k} (h^\perp \cdot h') \dots$
34	5	$\dots \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{C} \dots$	$\dots \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{C} \dots$
	6	$\dots D(B_k) \rightarrow \mathbb{C}$	$\dots D(B_k) \rightarrow \mathbb{C}$
	13	$B_k(w) = \sum_k [\dots$	$B_k(w) = \sum_k [\dots$
35	5	$f(w) = \tilde{f}(w_{k_1}, \dots, w_{k_n})$	$f(w) = \tilde{f}(w_{k_1}, \dots, w_{k_n})$
	7	$\text{Re } w_{k_i}, \text{Im } w_{k_i}, i=1, \dots, n.$	$\text{Re } w_{k_i}, \text{Im } w_{k_i}, i=1, \dots, n.$
37	4	em que $\mathbb{C} = \mathbb{C} \cup \{w\} \dots$	em que $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \dots$
39	6	$\dots d\text{Re } w_k \text{ d } \text{Im } w_k$	$\dots d\text{Re } w_k \text{ d } \text{Im } w_k$
40	5	$\dots - \frac{1}{2} (h^\perp \cdot k) w_h w_{k-h}$	$\dots - \frac{1}{2} (h^\perp \cdot k) w_h w_{k-h}$
	15	$\dots h(k-h)^{-4}$	$\dots h^{-4}(k-h)^{-4}$
	17	$E_\gamma ( B_k^n ^2) \leq \dots$	$E_\gamma ( B_k^n ^2) \leq \dots$
43	10	$\dots \prod_{k>0} dw_k$	$\dots \prod_{k>0} dw_k$
	12	(o simbolo) $\Pi$	$\Pi$
Capítulo III	Seccão 2.6	(operador) $u_t$	$u_t$
44	15	$\int B_g d\mu_\gamma = 0$	$\int B_g d\mu_\gamma = 0.$
47	12	$\frac{d\mu_\gamma(w' - te_k)}{d\mu_\gamma(w')} = \dots$	$\frac{d\mu_\gamma(w' - te_k)}{d\mu_\gamma(w')} = \dots$
49	10	... pode-se entender, ...	... pode-se estender, ...
51	3	$E = \frac{1}{2} \sum_k k^2  w_k ^2$	$E = \frac{1}{2} \sum_k k^2  w_k ^2$

Pag.	Linha	Onde se lê	Deve ler-se
55	3	... $\bar{\alpha}$ "medida de Lebesgue"...	... em relação à "medida de Lebesgue".
57	6	... no $\text{sup } \mu_{\beta, \gamma}$ ...	... no $\text{supp } \nu_{\beta, \gamma}$ ...
59	5	... = $\frac{1}{ek^2}$ ...	... = $\frac{1}{2k^2}$ ...
	19	... = $w_k(o)$	... = $w_k(0)$
62	9	...que a família $\{f \circ \phi_t^N, f \in F\}$ de...	...que $\{f \circ \phi_t^N, f \in F\}$ é uma família de...
68	7	... $d\mu_\chi(u)$	... $d\mu(u)$
69	1	... $u = u(\chi, t)$ ...	... $u = u(x, t)$ ...
	9 e 12	... $dx$	... $dx$