

DM

## Triângulo DNG

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Petra Sofia Nunes Silva**

MESTRADO EM MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E APLICAÇÕES



UNIVERSIDADE da MADEIRA

*A Nossa Universidade*

[www.uma.pt](http://www.uma.pt)

fevereiro | 2021



# Triângulo DNG

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Petra Sofia Nunes Silva**

MESTRADO EM MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E APLICAÇÕES

ORIENTAÇÃO

Maria Teresa Alves Homem de Gouveia



# Agradecimentos

Em primeiro lugar quero agradecer a todos os Professores, mas de um modo muito especial à minha orientadora, a Professora Dr<sup>a</sup> Teresa Gouveia, por ter sido incansável com todo o seu apoio e disponibilidade indispensáveis na realização desta dissertação.

Aos meus colegas de Mestrado, em especial à Laura Berenguer, pela amizade desde o primeiro ano da Licenciatura.

À minha tia e madrinha, Ana Nunes, por ser um exemplo e uma segunda mãe para mim, sempre presente e sempre com o conselho mais acertado.

Aos meus avós maternos, América e Eleutério Nunes, pela incrível educação e valores que sempre transmitiram, pelo carinho, por sempre demonstrarem o orgulho que têm em mim e por todo o apoio que me deram nas minhas escolhas académicas.

À Ana Luísa, pela paciência que sempre teve comigo, pelo apoio que sempre me deu, por me dizer sempre tudo o que preciso de ouvir, por ser a minha bengala e pela amizade incondicional que me dá todos os dias.

Aos meus amigos de sempre, principalmente à Ssica por ter sempre os melhores conselhos e os melhores ensinamentos, por me fazer dar gargalhadas como ninguém e por ser também a minha bengala.

À Carlota, ao Adão, ao Nikolaj e restante grupo por todas as semanas, por umas horas, me fazerem esquecer o trabalho e simplesmente rir e me divertir com todos vocês, e por todos os abraços de apoio que me deram no momento certo.

Ao meu Júlio, por ser o meu companheiro em tudo, por ser sempre a minha força, por me fazer ver o lado positivo da vida, por me fazer aproveitar cada segundo, por ser o meu porto seguro e por me ensinar a estar grata por tudo.

E por fim, o meu maior agradecimento vai para a minha melhor amiga, a mulher que me deu tudo, a minha mãe, Dulce Nunes. A minha mãe sempre me disse que eu podia ser quem quisesse ou fazer o que quisesse desde que nunca procrastinasse e desse sempre o melhor de mim. Encheu a nossa casa com amor, alegria, livros e músicas e nunca poupou nos abraços, nas loucuras e nas gargalhadas. Ensinou-me tudo sobre a liberdade e a independência, enquanto me mostrava que não há melhor lugar no mundo que o abraço de uma mãe. Devo-lhe tudo o que tenho, e espero um dia ser como ela. Obrigada, Mãe, és o meu modelo em tudo.



# Resumo

Com o estudo da teoria dos grafos e da teoria dos designs surgiu o principal objetivo desta dissertação, nomeadamente, a construção do triângulo DNG, ou seja, a construção de ligações entre a teoria dos designs combinatórios, a teoria dos números e a teoria dos grafos.

Nesta dissertação, em primeiro lugar, fez-se uma introdução teórica com alguns exemplos, de cada uma das teorias pertencentes ao triângulo DNG e, de seguida, demonstrou-se como estas poderiam estar ligadas, aplicando-as em diversos problemas.

Dentro do grupo dos designs, foi dada a devida relevância aos BIBDs (*Balanced Incomplete Block Designs*), em que conseguimos calcular a matriz de Hadamard para alguns BIBDs não simétricos.

Em relação à teoria dos números, mantivemos o nosso foco nos números eulerianos, por percebermos que existia uma relação entre estes e os BIBDs.

Na teoria dos grafos, para além dos grafos completos, importantíssimos na relação da teoria dos grafos com a teoria dos designs, demos importância ao polinómio de Tutte e a sua relação com os grafos bipartidos.

As aplicações do triângulo DNG em situações recorrentes da nossa vida servem para provar que a matemática está interligada e sempre presente, mesmo que por vezes a sua importância não seja visível para todos.

**Palavras-chave:** Grafo, Design, Número Euleriano, Polinómio de Tutte, Matriz de Hadamard.



# Abstract

With the study of the graph theory and the design theory, the main objective of this dissertation emerged, namely, on the construction of the DNG triangle, that is, the construction of connections between the theory of combinatorial designs, the theory of numbers and the theory of graphs.

In this dissertation, in first place, a theoretical introduction was made with some examples, of each of the theories belonging to the DNG triangle, and then, it was demonstrated how they could be linked, applying them in several problems.

Within the design group, due importance was given to BIBDs (*Balanced Incomplete Block Designs*), in which we were able to calculate the Hadamard matrix for some non-symmetric BIBDs.

Regarding number theory, we kept our focus on Eulerian numbers, as we realized that there was a relationship between them and the BIBDs.

In graph theory, in addition to the complete graphs, that are very important in the relation between graph theory and design theory, we gave importance to Tutte's polynomial and its relation to bipartite graphs.

The applications of the DNG triangle in recurring situations of our lives proves that mathematics is interconnected and always present, even though its importance is not visible to everyone.

**Keywords:** Graph, Design, Eulerian Number, Tutte Polynomial, Hadamard Matrix.



# Índice

Lista de Figuras	xi
Lista de Tabelas	xiii
Lista de Notações	xvii
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Designs</b>	<b>3</b>
2.1 Alguns conceitos básicos . . . . .	4
2.2 Matriz de Incidência e Matriz Complementar . . . . .	6
2.3 Matriz de Hadamard . . . . .	8
2.3.1 Matriz de Hadamard para BIBDs não simétricos . . . . .	10
<b>3 Números</b>	<b>19</b>
3.1 Números pares e ímpares . . . . .	19
3.2 Números primos . . . . .	19
3.3 Combinações de conjuntos . . . . .	19
3.4 Congruência . . . . .	20
3.5 Relação de recorrência . . . . .	20
3.6 Números eulerianos . . . . .	22
<b>4 Grafos</b>	<b>27</b>
4.1 Alguns conceitos básicos . . . . .	28
4.2 Grafos especiais . . . . .	31
4.2.1 Grafo Euleriano . . . . .	34
4.2.2 Grafo Hamiltoniano . . . . .	34
4.2.3 Grafo Planar . . . . .	35
4.3 Matriz de Incidência . . . . .	37
4.4 Matriz de Adjacência . . . . .	37
4.5 <i>Matching</i> Perfeito . . . . .	38
4.6 Árvore Geradora . . . . .	39
4.6.1 Teorema da árvore-matriz . . . . .	40
4.7 Número Cromático . . . . .	41
4.7.1 Polinómio Cromático . . . . .	42
4.7.2 Coloração de alguns grafos especiais . . . . .	44
4.8 Digrafos . . . . .	45

4.9	Polinómio de Tutte . . . . .	47
4.9.1	Polinómio de Tutte em grafos bipartidos . . . . .	48
<b>5</b>	<b>Triângulo DNG</b>	<b>57</b>
5.1	Grafos completos e BIBDs . . . . .	57
5.1.1	Grafo Conexo, Euleriano, Hamiltoniano e Planar . . . . .	60
5.1.2	Matrizes de incidência e de adjacência . . . . .	62
5.1.3	Bloco Complementar . . . . .	63
5.1.4	<i>Matching</i> Perfeito . . . . .	63
5.1.5	Árvore Geradora . . . . .	64
5.1.6	Digrafos . . . . .	65
5.2	Grafos especiais e BIBDs . . . . .	66
5.3	Multigrafos e BIBDs . . . . .	66
5.4	Grafos completos e BIBDs simétricos . . . . .	67
5.5	Números Eulerianos e BIBDs . . . . .	68
5.6	Polinómio de Tutte e BIBDs . . . . .	71
<b>6</b>	<b>Aplicações</b>	<b>77</b>
6.1	Problema do Carteiro Chinês . . . . .	77
6.2	Ciências da Computação . . . . .	80
6.3	Relações entre as Pessoas . . . . .	82
<b>7</b>	<b>Conclusão</b>	<b>85</b>
<b>A</b>	<b>Álgebra linear</b>	<b>89</b>
A.1	Matrizes . . . . .	89
A.1.1	Matriz quadrada . . . . .	89
A.1.2	Matriz diagonal . . . . .	89
A.1.3	Matriz identidade . . . . .	90
A.1.4	Matriz transposta . . . . .	90
A.1.5	Soma de matrizes . . . . .	90
A.1.6	Multiplicação de matrizes . . . . .	91
A.2	Determinantes . . . . .	92
A.2.1	Matriz de dimensão $2 \times 2$ . . . . .	92
A.2.2	Matriz de dimensão $3 \times 3$ . . . . .	93
	<b>Anexos</b>	<b>93</b>
<b>A</b>	<b>Matriz de Hadamard do (11,22,10,5,4)-BIBD</b>	<b>95</b>
<b>B</b>	<b>Problema do Caixeiro-viajante</b>	<b>99</b>
<b>C</b>	<b>Coloração de Mapas</b>	<b>103</b>
<b>D</b>	<b>Aplicação nas Ciências</b>	<b>105</b>
D.1	Os Grafos na Biologia . . . . .	105
D.2	Os Grafos na Química . . . . .	106

E Aplicação na resolução de crimes

107



# Lista de Figuras

2.1	Matriz de incidência do $(5, 10, 4, 2, 1)$ -BIBD . . . . .	6
2.2	Grafo criado a partir do $(5, 10, 4, 2, 1)$ -BIBD . . . . .	7
2.3	Matriz complementar do $(5, 10, 4, 2, 1)$ -BIBD . . . . .	7
2.4	Matriz de incidência do $(7, 7, 3, 3, 1)$ -BIBD . . . . .	9
2.5	Matriz de incidência do $(5, 10, 4, 2, 1)$ -BIBD . . . . .	13
2.6	Matriz de incidência do $(7, 14, 6, 3, 2)$ -BIBD . . . . .	15
2.7	Matriz de incidência do $(9, 18, 8, 4, 3)$ -BIBD . . . . .	17
4.1	As sete pontes de <i>Königsberg</i> . . . . .	27
4.2	Grafo criado por Euler para as sete pontes de <i>Königsberg</i> . . . . .	27
4.3	Da esquerda para a direita, grafo simples, multigrafo e pseudografo .	28
4.4	Um caminho simples do grafo $G$ . . . . .	29
4.5	Um caminho fechado do grafo $G$ . . . . .	29
4.6	Um passeio do grafo $G$ . . . . .	29
4.7	Um percurso do grafo $G$ . . . . .	30
4.8	Um circuito do grafo $G$ . . . . .	30
4.9	Um ciclo do grafo $G$ . . . . .	30
4.10	Grafo $G$ . . . . .	31
4.11	Grafos completos . . . . .	31
4.12	Grafos cíclicos . . . . .	32
4.13	Grafos roda . . . . .	32
4.14	Grafos nulos . . . . .	32
4.15	Grafos caminho . . . . .	32
4.16	Grafo bipartido . . . . .	33
4.17	Grafo bipartido com vértices de cores diferentes . . . . .	33
4.18	Grafo bipartido completo . . . . .	33
4.19	Grafo conexo e grafo desconexo . . . . .	34
4.20	Um grafo de Euler e de Hamilton . . . . .	35
4.21	Representação do grafo $K_4$ na forma planar . . . . .	35
4.22	Grafo $G$ conexo e planar . . . . .	36
4.23	Grafo $G$ . . . . .	37
4.24	Matriz de incidência do grafo $G$ . . . . .	37
4.25	Grafo $G$ . . . . .	38
4.26	Matriz de adjacência do grafo $G$ . . . . .	38
4.27	Grafo $G$ com <i>matching</i> perfeito . . . . .	39
4.28	Grafo completo $K_6$ . . . . .	39
4.29	Exemplos de árvores geradoras do grafo completo $K_6$ . . . . .	40

4.30	Grafo $G$ com quatro vértices . . . . .	40
4.31	Matriz de adjacência do grafo $G$ . . . . .	40
4.32	Matriz $S$ do grafo $G$ . . . . .	40
4.33	Grafo 4-colorável . . . . .	41
4.34	Eliminação e contração da aresta 23 do grafo $G$ . . . . .	42
4.35	Grafo $G$ . . . . .	42
4.36	Cálculo do polinómio cromático do grafo $G$ . . . . .	43
4.37	Polinómio cromático do grafo $G$ . . . . .	44
4.38	Grafo $k$ -crítico . . . . .	44
4.39	Digrafo $D$ com seis vértices . . . . .	46
4.40	Matriz de incidência do digrafo $D$ com seis vértices . . . . .	46
4.41	Polinómio de Tutte do grafo completo $K_3$ . . . . .	47
4.42	Triângulo de Tutte de grafos bipartidos . . . . .	55
5.1	Grafo completo $K_3$ . . . . .	58
5.2	Grafo completo $K_4$ . . . . .	58
5.3	Grafo completo $K_5$ . . . . .	58
5.4	Grafo completo $K_6$ . . . . .	59
5.5	Grafo $K_3$ . . . . .	61
5.6	Grafo $K_4$ . . . . .	61
5.7	Matriz de incidência dos grafos $K_n$ . . . . .	62
5.8	Matriz de adjacência dos grafos $K_n$ . . . . .	62
5.9	<i>Matching</i> perfeito do grafo $K_4$ . . . . .	63
5.10	<i>Matching</i> perfeito do grafo $K_5$ . . . . .	63
5.11	Grafo completo $K_4$ . . . . .	64
5.12	Matriz de adjacência do grafo completo $K_4$ . . . . .	64
5.13	Matriz $S$ do grafo completo $K_4$ . . . . .	64
5.14	Digrafo de um $(4, 6, 3, 2, 1)$ -BIBD . . . . .	65
5.15	Multigrafo do $(4, 12, 6, 2, 2)$ -BIBD . . . . .	67
5.16	Multigrafo do $(4, 18, 9, 2, 3)$ -BIBD . . . . .	67
5.17	Grafo do BIBD simétrico $(3, 3, 2, 2, 1)$ . . . . .	68
6.1	Digrafo sem ciclo de Hamilton . . . . .	78
6.2	Digrafo Euleriano e Hamiltoniano . . . . .	78
6.3	Digrafo associado ao $(6, 15, 5, 2, 1)$ -BIBD . . . . .	79
6.4	Digrafo adaptado a Euleriano . . . . .	80
6.5	Grafo que relaciona os diferentes <i>sites</i> . . . . .	81
6.6	Parte da árvore genealógica da família Bernoulli, fonte: Picado [PG08] . . . . .	82
6.7	Grafo das relações de parentesco da família Bernoulli . . . . .	82
A.1	Matriz de incidência do design $(11,22,10,5,4)$ . . . . .	96
B.1	Grafo que demonstra os diferentes trajetos que o caixeiro-viajante poderia escolher no concelho do Funchal . . . . .	100
B.2	Ciclo de Hamilton com menor custo dos diferentes trajetos que o caixeiro-viajante poderia escolher no concelho do Funchal . . . . .	101
C.1	Mapa da Ilha da Madeira representado na forma de grafo . . . . .	103

---

C.2	Coloração do grafo que representa o mapa da Ilha da Madeira . . . .	103
D.1	Exemplo de uma cadeia alimentar . . . . .	105
D.2	Exemplo de uma rede alimentar . . . . .	105
D.3	Grafo representativo da molécula da água . . . . .	106
D.4	Grafo representativo da molécula da cafeína . . . . .	106
E.1	Digrafo que representa os testemunhos dos suspeitos . . . . .	107



# Lista de Tabelas

2.1	Exemplo de uma solução do problema de Kirkman . . . . .	3
2.2	Valores de $k$ e $\lambda$ quando $v$ é um número primo . . . . .	9
4.1	Grau de entrada e de saída de cada um dos vértices . . . . .	46
5.1	BIBDs correspondentes aos grafos completos . . . . .	59
5.2	Graus de entrada e de saída de cada um dos vértices . . . . .	65
5.3	Graus de entrada e de saída de cada um dos vértices de um digrafo completo . . . . .	66
5.4	BIBD resultante de $E(n, 1)$ . . . . .	69
5.5	BIBD resultante de $E(n, 2)$ . . . . .	69
5.6	BIBD resultante de $E(n, 3)$ . . . . .	70
5.7	Ligação entre o polinómio de Tutte de grafos bipartidos completos e os BIBDs . . . . .	76
6.1	Graus de entrada e de saída de cada um dos vértices do digrafo sem ciclo de Hamilton . . . . .	78
6.2	Graus de entrada e de saída de cada um dos vértices do digrafo Euleriano e Hamiltoniano . . . . .	78
6.3	Graus de entrada e de saída de cada vértice do digrafo associado ao $(6, 15, 5, 2, 1)$ -BIBD . . . . .	79
6.4	Graus de entrada e de saída do digrafo adaptado a Euleriano . . . . .	80
B.1	Ciclos de Hamilton no concelho do Funchal . . . . .	100
E.1	Graus de entrada de cada um dos vértices . . . . .	107



# Lista de Notações

BIBD	Balanced Incomplete Block Design
$X$	conjunto finito com $v$ elementos
$A$	coleção de $b$ subconjuntos de $X$
$v$ ou $ X $	número de elementos de $X$
$b$ ou $ A $	número de subconjuntos de $A$
$r$	número de vezes que um elemento se repete nos subconjuntos de $A$
$k$	número de elementos de cada subconjunto (ou bloco) de $A$
$\lambda$	número de vezes que cada par ocorre nos blocos de $A$
$\mathbb{N}$	conjunto dos números naturais
$\binom{n}{k} = C(n, k)$	número de $k$ -combinações de um conjunto com $n$ elementos
$M_{v \times b}$	matriz de incidência de um BIBD
$m_{ij}$	entradas da matriz $M_{v \times b}$
$\bar{A}$	coleção dos blocos complementares de um BIBD
$H$	matriz de Hadamard
$H^T$	matriz transposta de $H$
$H_n$	matriz de Hadamard de ordem $n$
$I_n$	matriz identidade de ordem $n$
$MI_{v \times 2v}$	matriz de incidência para um BIBD não simétrico
$\mathbb{Z}$	conjunto dos números inteiros
$E(n, k) = E_{n,k} = \langle \binom{n}{k} \rangle$	números eulerianos
$P$	permutação de $\{1, 2, 3, \dots, n\}$
$V(G)$	conjunto de vértices do grafo $G$

---

$E(G)$	conjunto de arestas do grafo $G$
$G = (V, E)$	grafo $G$ que contém o conjunto de vértices $V$ e o conjunto de arestas $E$
$ V $	número de vértices de um grafo
$ E $	número de arestas de um grafo
$deg(v_i)$	grau de um vértice $i$
$K_n$	grafo completo
$C_n$	grafo cíclico
$W_n$	grafo roda
$N_n$	grafo nulo
$P_n$	grafo caminho
$K_{n,m}$	grafo bipartido completo
$f_i$	face de um grafo planar
$ f_i $	número de faces de um grafo
$deg(f_i)$	grau da face $i$
$I_G$	matriz de incidência do grafo $G$
$A_G$	matriz de adjacência do grafo $G$
$M$	<i>matching</i>
$T$	árvore
$T(G)$	número de árvores geradoras do grafo $G$
$r(K_n)$	número de árvores de $K_n$
$S$	matriz diagonal que contém o número de graus de cada vértice
$Q$	matriz resultante da diferença entre as matrizes $S$ e $A_G$
$P_G(K)$	polinômio cromático
$\chi(G)$	número cromático do grafo $G$
$G - e$	eliminação da aresta $e$ do grafo $G$
$G/e$	contração da aresta $e$ do grafo $G$
$D$	digrafo ou grafo orientado

---

$deg_E(v_i)$	grau de entrada do vértice $i$ num digrafo
$deg_S(v_i)$	grau de saída do vértice $i$ num digrafo
$t$	cauda de um arco
$h$	cabeça de um arco
$I_D$	matriz de incidência de um digrafo $D$
$T_G(x, y) = T(G; x, y)$	polinómio de Tutte do grafo $G$
$T_{n,k}$	elementos do triângulo de Tutte
$\det A$	determinante da matriz $A$



# Capítulo 1

## Introdução

Esta dissertação, intitulada Triângulo DNG, surgiu no âmbito do Mestrado em Matemática, Estatística e Aplicações da Universidade da Madeira.

O principal objetivo desta dissertação é a construção de ligações entre a teoria dos designs combinatórios, a teoria dos números e a teoria dos grafos. Este ciclo, criado através dessas ligações, denomina-se triângulo DNG, em que DNG representa a letra inicial de cada uma das componentes dos vértices do triângulo.

A teoria dos grafos despertou-nos interesse devido ao seu crescimento exponencial no século XX e às imensas e diferentes aplicações que esta tem no nosso mundo. Cada vez mais, com o avanço das tecnologias e das redes de transportes, percebe-se a importância da teoria dos grafos ao constatarmos que esta está presente em tudo o que nos rodeia.

A teoria dos designs, sendo um tema que na matemática só começou a ser verdadeiramente estudado no século XX, ainda tem muitos problemas em aberto. Anteriormente, segundo Stinson [Sti07], nos séculos XVIII e XIX, a teoria do design era utilizada na matemática recreativa, nomeadamente, na resolução de quebra-cabeças. Os estudos mais recentes, especialmente sobre os BIBDs (*Balanced Incomplete Block Designs*), incentivaram o nosso interesse em relacioná-los com os grafos, pois achámos interessante estudar como é que um grafo ficaria organizado num conjunto finito, em que os seus elementos estariam em subconjuntos, satisfazendo as propriedades de um BIBD.

A teoria dos números, ao contrário das anteriores, segundo Brualdi [Bur11], teve a sua origem na Grécia Antiga, em que a palavra número significava somente número inteiro positivo.

Esta dissertação está organizada da forma que se segue.

No Capítulo 2, aborda-se a teoria dos designs, narrando um pouco da sua história e apresentando alguns conceitos básicos. Para além destes conceitos, também se explica o que é a matriz de Hadamard e consegue-se provar que existe aplicabilidade desta matriz, não só para os BIBDs simétricos, mas também para alguns BIBDs não simétricos.

No Capítulo 3, apresenta-se uma breve introdução à teoria dos números com maior ênfase nos números eulerianos, já que estes são um ponto fulcral do triângulo DNG.

No Capítulo 4, são introduzidos todos os conceitos necessários da teoria dos

grafos para esta dissertação. Além de conceitos gerais sobre a teoria dos grafos, o tema mais destacado é o do polinómio de Tutte.

No Capítulo 5, explica-se o que efetivamente é o triângulo DNG, que relaciona os grafos completos, os números eulerianos e o polinómio de Tutte com os BIBDs.

No Capítulo 6, demonstra-se a aplicabilidade do triângulo DNG em situações do nosso quotidiano.

No Capítulo 7, finalmente, encontram-se algumas conclusões e perspetivas de futuras investigações.

# Capítulo 2

## Designs

A teoria do design combinatório tem origem na teoria da estatística experimental, na matemática recreativa e na geometria. Esta teoria relaciona determinados padrões com a construção de conjuntos finitos e tem o seu foco na organização de elementos de um conjunto finito em subconjuntos, de modo que determinadas propriedades sejam satisfeitas. Os principais problemas são, em geral, os de existência, numeração e classificação, propriedades estruturais e aplicações. São várias as aplicações da teoria do design, nomeadamente na programação e na criptografia.

### Exemplo 2.0.1. Problema de Kirkman

Originalmente, a teoria do design foi criada para fins recreativos para solucionar o problema de Kirkman, 1850. O problema de Kirkman consistiu em organizar quinze alunos em cinco grupos de três para que, numa visita de estudo de sete dias, cada par de alunos passeasse uma única vez. A Tabela 2.1 representa uma possível solução para este problema.

Tabela 2.1: Exemplo de uma solução do problema de Kirkman

Domingo	Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta	Sábado
1 2 3	1 4 5	1 6 7	1 8 9	1 10 11	1 12 13	1 14 15
4 8 12	2 8 10	2 9 11	2 12 15	2 13 14	2 4 6	2 5 7
5 10 14	3 13 15	3 12 14	3 5 6	3 4 7	3 9 10	3 8 11
6 11 13	6 9 14	4 10 15	4 11 14	5 9 12	5 11 15	4 9 13
7 9 15	7 11 12	5 8 13	7 10 13	6 8 15	7 8 14	6 10 12

Uma das principais noções da teoria do design, a noção de equilíbrio entre pares, tem a sua origem na teoria da estatística experimental. A exigência de um certo tipo de padrão leva-nos à noção de um dos tipos mais comuns de designs combinatórios, o *Balanced Incomplete Block Design*, usualmente designado por BIBD, introduzido em 1936 por Yates, sendo que mais tarde, no final da década de 30, Bose e Fisher contribuíram para o estudo de BIBDs, estudando a sua estrutura e a sua construção. Desde então, ainda não foi construído um algoritmo geral para determinar a existência destes designs, embora já tenham sido introduzidos vários métodos de

construção de BIBDs para parâmetros específicos. No entanto, existem muitas perguntas em aberto e que permanecem sem solução desde 1936.

### Exemplo 2.0.2. Problema de Yates

Em 1936, Yates quis criar um conjunto de blocos, com as seguintes condições:

1.  $k$ , o número de unidades experimentais por bloco, é fixo;
2.  $k < v$ , ou seja, o número de unidades experimentais por bloco é menor que o número de tratamentos;
3. dois tratamentos ocorrem juntos em cada bloco com a mesma frequência, ou seja, se os tratamentos  $f$  e  $g$  ocorrem juntos em dois blocos, então os tratamentos  $h$  e  $i$  também ocorrem juntos em dois blocos.

Desta forma, Yates considerou que existiam seis tratamentos e cada bloco era constituído por três desses tratamentos.

$$X = \{f, g, h, i, j, l\}$$

$$A = \left\{ \begin{array}{l} \{f, g, h\}, \{f, g, i\}, \{f, h, j\}, \{f, i, l\}, \{f, j, l\}, \{g, h, l\}, \{g, i, j\}, \\ \{g, j, l\}, \{h, i, j\}, \{h, i, l\} \end{array} \right\}$$

## 2.1 Alguns conceitos básicos

**Definição 2.1.1.** Um design (ou design combinatório ou bloco design) é um par  $(X, A)$ , tal que  $X$  é um conjunto finito e  $A$  é uma coleção não vazia de subconjuntos de  $X$ .

Usualmente, aos elementos de  $X$  chamamos pontos e aos subconjuntos de  $A$ , blocos.

Uma das classes mais importantes de designs são os BIBDs (ver Definição 2.1.2).

**Definição 2.1.2.** Um *Balanced Incomplete Block Design* (BIBD) com parâmetros naturais  $(v, b, r, k, \lambda)$ , onde  $2 \leq k < v$ , é um par  $(X, A)$  em que  $X$  é um conjunto finito de  $v$  elementos chamados pontos,  $A$  é a coleção de  $b$  subconjuntos estritos de  $X$ , com cardinal  $k$ , cada um chamado de bloco. Cada ponto ocorre em exatamente  $r$  blocos e cada par de pontos distintos ocorre em exatamente  $\lambda$  blocos.

Assim, conhecendo estes conceitos, é fácil identificar os parâmetros de um  $(v, b, r, k, \lambda)$ -BIBD, no problema de Kirkman:

$$|X| = v = 15, \text{ pois são quinze alunos;}$$

$|A| = b = 35$ , pois são cinco grupos de alunos por cada um dos sete dias, ou seja, trinta e cinco subconjuntos;

$r = 7$ , pois cada elemento repete-se sete vezes nos subconjuntos;

$k = 3$ , pois cada subconjunto é constituído por três elementos;

$\lambda = 1$ , pois cada par de elementos surge apenas uma única vez.

Por sua vez, para o problema de Yates os parâmetros  $(v, b, r, k, \lambda)$  do BIBD são  $(6, 10, 5, 3, 2)$ –BIBD, pois existem dez blocos em que cada par de tratamentos ocorre duas vezes e cada tratamento ocorre cinco vezes.

**Definição 2.1.3.** Diz-se que um BIBD é simétrico quando  $v = b$  (ou equivalentemente  $r = k$ ).

**Definição 2.1.4.** Um BIBD é considerado simples se não tiver blocos repetidos, e completo se for simples e tiver  $\binom{v}{k}^1$  blocos.

**Teorema 2.1.1.** *Se um BIBD existe, então os seus parâmetros satisfazem as seguintes equações:*

$$vr = bk \tag{2.1}$$

$$\lambda(v - 1) = r(k - 1) \tag{2.2}$$

**Observação 2.1.1.** *Atendendo ao Teorema 2.1.1, podemos concluir que os cinco parâmetros de um BIBD não são independentes, pois  $b$  e  $r$  podem-se obter de forma única a partir dos parâmetros  $v$ ,  $k$  e  $\lambda$ . Por este motivo, escrevemos muitas vezes  $(v, k, \lambda)$  – BIBD para denotar  $(v, b, r, k, \lambda)$  – BIBD.*

**Exemplo 2.1.1.** Considerando o BIBD  $(7, 3, 1)$ , determinemos os valores dos parâmetros  $b$  e  $r$ :

$$\lambda(v - 1) = r(k - 1) \Leftrightarrow 1(7 - 1) = r(3 - 1) \Leftrightarrow 6 = 2r \Leftrightarrow r = 3$$

$$vr = bk \Leftrightarrow 7r = 3b \Leftrightarrow \frac{7 \times 3}{3} = b \Leftrightarrow b = 7$$

**Teorema 2.1.2** (Inequação de Fisher). *Se um  $(v, k, \lambda)$  – BIBD existe com*

$$2 \leq k < v, \tag{2.3}$$

*então*

$$v \leq b \tag{2.4}$$

---

<sup>1</sup>Número de  $k$ –combinações de um conjunto, constituído por  $v$  elementos.

**Corolário 2.1.2.1.** *Se um BIBD existe então  $\lambda(v-1) \equiv 0 \pmod{(k-1)^2}$  e  $\lambda v(v-1) \equiv 0 \pmod{k(k-1)}$ , ou seja, quando  $\frac{\lambda(v-1)}{k-1} \in \mathbb{N}$  e  $\frac{\lambda v(v-1)}{k(k-1)} \in \mathbb{N}$ .*

**Observação 2.1.2.** *Note-se que,  $(21, 6, 1)$  – BIBD não existe porque  $b = 14 < 21 = v$ . No entanto, satisfaz as condições do Corolário 2.1.2.1.*

**Exemplo 2.1.2.** Vamos calcular o valor mínimo de  $\lambda$ , considerando o  $(9, 3, \lambda)$ –BIBD.

$$\frac{\lambda(v-1)}{k-1} \in \mathbb{N} \rightarrow \frac{8}{2}\lambda \in \mathbb{N} \rightarrow \frac{4}{1}\lambda \in \mathbb{N} \rightarrow \lambda = 1$$

$$\frac{\lambda v(v-1)}{k(k-1)} \in \mathbb{N} \rightarrow \frac{72}{6}\lambda \in \mathbb{N} \rightarrow \frac{12}{1}\lambda \in \mathbb{N} \rightarrow \lambda = 1$$

$$\lambda(v-1) = r(k-1) \Leftrightarrow 1(9-1) = r(3-1) \Leftrightarrow 8 = 2r \Leftrightarrow r = 4$$

$$vr = bk \Leftrightarrow 9r = 3b \Leftrightarrow \frac{9 \times 4}{3} = b \Leftrightarrow b = 12$$

Assim, o  $(9, 3, \lambda)$ –BIBD, para o menor valor de  $\lambda$ , será o  $(9, 12, 4, 3, 1)$ –BIBD.

## 2.2 Matriz de Incidência e Matriz Complementar

**Definição 2.2.1.** A matriz de incidência de um BIBD  $(X, A)$  é designada por  $M_{v \times b}$  e as suas entradas  $m_{ij}$  são determinadas por:  $m_{ij} = \begin{cases} 0, & x_i \notin A_j \\ 1, & x_i \in A_j \end{cases}$ , em que  $1 \leq i \leq v$ ,  $1 \leq j \leq b$ ,  $x_i \in X$ , e  $A_j \in A$ .

Na matriz de incidência o número 1 ocorre  $r$  vezes em cada linha e  $k$  vezes em cada coluna. Além disso, em duas linhas distintas ambas têm 1 em  $\lambda$  colunas.

**Exemplo 2.2.1.** Considerando um  $(5, 10, 4, 2, 1)$ –BIBD com

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5\} \text{ e} \\ A = \{12, 13, 14, 15, 23, 24, 25, 34, 35, 45\}.$$
<sup>3</sup>

A sua matriz de incidência será:

$$M_{5 \times 10} = \begin{matrix} & \mathbf{12} & \mathbf{13} & \mathbf{14} & \mathbf{15} & \mathbf{23} & \mathbf{24} & \mathbf{25} & \mathbf{34} & \mathbf{35} & \mathbf{45} \\ \mathbf{1} & \left[ \begin{array}{cccccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \end{matrix}$$

Figura 2.1: Matriz de incidência do  $(5, 10, 4, 2, 1)$ –BIBD

<sup>2</sup> $a \equiv b \pmod{k}$  significa que a diferença entre  $a$  e  $b$  é divisível por  $k$  (ver Capítulo 3).

<sup>3</sup>Para simplificar a notação, usualmente, escrevemos os blocos de  $A$  (isto é, os subconjuntos de  $X$ ) são as chavetas e sem vírgulas.

em que cada linha corresponde aos elementos do conjunto  $X$  e cada coluna corresponde aos blocos (elementos de  $A$ ).

Analisando a matriz de incidência, é possível ver que o número 1 aparece quatro vezes em cada linha ( $r = 4$ ) e duas vezes em cada coluna ( $k = 2$ ). Em duas linhas distintas, ambas têm o número 1 somente numa coluna ( $\lambda = 1$ ). Através da matriz de incidência é possível construir o seguinte grafo<sup>4</sup> (Figura 2.2):

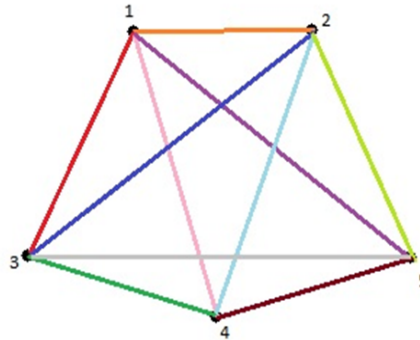


Figura 2.2: Grafo criado a partir do  $(5, 10, 4, 2, 1)$ -BIBD

**Definição 2.2.2.** Seja  $(X, A)$  um design. Ao design  $(X, \bar{A})$  chamamos design complementar, onde  $\bar{A} = \{\bar{A}_j \subsetneq X : \bar{A}_j = X \setminus A_j \text{ e } A_j \in A\}$ .

**Teorema 2.2.1.** Quando  $k \leq v - 2$  num  $(v, b, r, k, \lambda)$ -BIBD, o design complementar associado é da forma  $(v, b, b - r, v - k, b - 2r + \lambda)$ -BIBD.

**Definição 2.2.3.** À matriz de incidência de um BIBD complementar chamamos matriz de incidência complementar (ou simplesmente matriz complementar).

**Exemplo 2.2.2.** Considerando um  $(5, 10, 4, 2, 1)$ -BIBD com

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5\} \text{ e}$$

$$A = \{12, 13, 14, 15, 23, 24, 25, 34, 35, 45\},$$

vem que,  $\bar{A} = \{345, 245, 235, 234, 145, 135, 134, 125, 124, 123\}$ . Então, o BIBD complementar será:  $(5, 10, 6, 3, 3)$ .

A sua matriz complementar é:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccccccccc}
 345 & 245 & 235 & 234 & 145 & 135 & 134 & 125 & 124 & 123 \\
 \mathbf{1} & \left[ \begin{array}{cccccccccc}
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0
 \end{array} \right] \\
 \mathbf{2} \\
 \mathbf{3} \\
 \mathbf{4} \\
 \mathbf{5}
 \end{array}
 \end{array}$$

Figura 2.3: Matriz complementar do  $(5, 10, 4, 2, 1)$ -BIBD

<sup>4</sup>A definição de grafo será abordada no Capítulo 4.

## 2.3 Matriz de Hadamard

Em 1893, o matemático francês Jacques Hadamard apresentou uma matriz com características especiais, mais tarde conhecida, como matriz de Hadamard.

Esta matriz tem várias aplicações, em particular nos BIBDs.

**Definição 2.3.1.** A matriz de Hadamard,  $H$ , é uma matriz quadrada de ordem  $n$  cujas entradas são  $\pm 1$ , tal que  $HH^T = nI_n$ .

**Teorema 2.3.1.** Quando  $m > 1$  existe uma matriz de Hadamard, de ordem  $4m$ , se e só se, existir um  $(4m - 1, 2m - 1, m - 1)$  - BIBD (que é simétrico).

**Corolário 2.3.1.1.** Existe uma matriz de Hadamard de ordem  $4m$  (com  $m > 1$ ) se  $4m - 1$  for um número primo.

Sabendo que

$$v = 4m - 1 \Leftrightarrow 4m = v + 1 \Leftrightarrow m = \frac{v + 1}{4}$$

é possível calcular  $k$  e  $\lambda$  em função a  $v$ :

$$k = 2m - 1 \Leftrightarrow k = \frac{v + 1}{2} - 1 \Leftrightarrow k = \frac{v - 1}{2}$$

$$\lambda = m - 1 \Leftrightarrow \lambda = \frac{v + 1}{4} - 1 \Leftrightarrow \lambda = \frac{v - 3}{4}$$

Assim, sabendo que  $v$  é um número primo, é fácil identificar para que valores de  $v$  a construção da matriz de Hadamard é possível.

Para os primeiros dezoito números primos, é possível construir uma matriz de Hadamard quando  $v = 7, 11, 19, 23, 31, 43, 47$ , ou  $59$ , como podemos observar na tabela seguinte:

Tabela 2.2: Valores de  $k$  e  $\lambda$  quando  $v$  é um número primo

$v$	$k$	$\lambda$
2	0,5	-0,25
3	1	0
5	2	0,5
7	3	1
11	5	2
13	6	2,5
17	8	3,5
19	9	4
23	11	5
29	14	6,5
31	15	7
37	18	8,5
41	20	9,5
43	21	10
47	23	11
53	26	12,5
59	29	14
61	30	14,5
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

**Observação 2.3.1.** Como sabemos a matriz de Hadamard,  $H$ , é de ordem  $n$  e uma vez que a matriz de incidência de um BIBD simétrico ( $v = b$ ) é de ordem  $v$ , a matriz  $H$  é de ordem  $v + 1$  ( $n = v + 1$ ), isto é,  $HH^T = nI_n = (v + 1)I_{v+1}$ .

Assim, como  $n = v + 1$ , as primeiras matrizes de Hadamard, associadas a BIBDs simétricos, são as matrizes  $H_8$ ,  $H_{12}$ ,  $H_{20}$ ,  $H_{24}$ ,  $H_{32}$ ,  $H_{44}$ ,  $H_{48}$  e  $H_{60}$ .

**Exemplo 2.3.1.** Considerando um  $(7, 7, 3, 3, 1)$ -BIBD, em que

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \text{ e}$$

$$A = \{123, 145, 167, 246, 257, 347, 356\}$$

a sua matriz de incidência é a seguinte:

$$M_{v \times v} = M_{7 \times 7} = \begin{array}{c} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \\ \mathbf{5} \\ \mathbf{6} \\ \mathbf{7} \end{array} \begin{array}{c} \mathbf{123} \quad \mathbf{145} \quad \mathbf{167} \quad \mathbf{246} \quad \mathbf{257} \quad \mathbf{347} \quad \mathbf{356} \\ \left[ \begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \end{array}$$

Figura 2.4: Matriz de incidência do  $(7, 7, 3, 3, 1)$ -BIBD

Para tornar a matriz de incidência em matriz de Hadamard, é necessário acrescentar uma linha e uma coluna com as entradas todas iguais a 1, e substituir o número 0 por  $-1$ .

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Ao multiplicar a matriz de Hadamard pela sua transposta, verifica-se que o resultado dessa multiplicação é a matriz identidade vezes  $n$  (neste caso  $n = 8$ ).

$$\begin{aligned} H_8 H_8^T &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} = 8 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 8I_8 \end{aligned}$$

### 2.3.1 Matriz de Hadamard para BIBDs não simétricos

Como existe matriz de Hadamard para BIBDs simétricos, decidimos investigar se seria possível construir uma matriz de Hadamard para os BIBDs não simétricos. Após alguns recuos e avanços e partindo de alguns pressupostos, conseguimos construir uma matriz para um determinado tipo de BIBDs não simétricos.

Em primeiro lugar, considera-se que  $b = 2v$ , para garantir que quando se divide a matriz de incidência de um BIBD não simétrico por dois, esta divisão irá originar duas matrizes de dimensão  $n \times n$ , em que já é possível em cada uma delas implementar as regras da matriz de Hadamard para BIBDs simétricos.

Para calcular os restantes parâmetros, considera-se que

$$vr = bk \Leftrightarrow vr = 2vk \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}r$$

$$\lambda(v-1) = r(k-1) \Leftrightarrow \lambda(v-1) = r\left(\frac{1}{2}r-1\right) \Leftrightarrow \lambda(v-1) = \frac{1}{2}r^2 - r.$$

Assim,  $r$  terá de ser um número par para que  $k$  seja um número natural, e

$$\lambda = \frac{\frac{1}{2}r^2 - r}{v-1} \in \mathbb{N},$$

ou seja, para  $\lambda$  ser um número inteiro positivo, considerando que  $r$  é um número par e a expressão  $\frac{1}{2}r^2 - r$  origina um número par, conclui-se que  $v-1$  é um número par, isto é,  $v$  é um número ímpar.

Desta forma, a matriz de Hadamard, criada a partir destes BIBDs não simétricos, será uma matriz  ${}_{1,2}H_{v+1}$  tal que

$${}_{1}H_{v+1}({}_{1}H_{v+1}^T) + {}_{2}H_{v+1}({}_{2}H_{v+1}^T) = 2(v+1)I_{v+1}$$

Para chegarmos à expressão da matriz de Hadamard, para BIBDs não simétricos, utilizamos a seguinte construção tendo por base as propriedades quer dos BIBDs quer das matrizes. Supondo que  $v$  é ímpar e maior que 3 e ainda que  $r$  é par e maior que 2, o BIBD tem a forma

$$(v, b, r, k, \lambda) \rightarrow \left( v, 2v, r, \frac{r}{2}, \frac{\frac{r^2}{2} - r}{v-1} \right) \quad (2.5)$$

A sua matriz de incidência é do tipo:

$$MI_{v \times 2v} = \begin{bmatrix} i_{1,1} & i_{1,2} & \cdots & i_{1,2v} \\ i_{2,1} & i_{2,2} & \cdots & i_{2,2v} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ i_{v,1} & i_{v,2} & \cdots & i_{v,2v} \end{bmatrix}_{v \times 2v}$$

$$\text{com} \begin{cases} i_{v,1} + i_{v,2} + \dots + i_{v,2v} = r & \rightarrow \text{cada linha tem } r \text{ 1's e } 2v - r \text{ 0's} \\ i_{1,2v} + i_{2,2v} + \dots + i_{v,2v} = k = \frac{r}{2} & \rightarrow \text{cada coluna tem } \frac{r}{2} \text{ 1's e } v - \frac{r}{2} \text{ 0's} \end{cases}$$

De seguida, organiza-se a matriz de incidência  $MI_{v \times 2v}$  em duas matrizes:

$$\begin{bmatrix} i_{1,1} & i_{1,2} & \cdots & i_{1,v} \\ i_{2,1} & i_{2,2} & \cdots & i_{2,v} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ i_{v,1} & i_{v,2} & \cdots & i_{v,v} \end{bmatrix}_{v \times v} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} i_{1,v+1} & i_{1,v+2} & \cdots & i_{1,2v} \\ i_{2,v+1} & i_{2,v+2} & \cdots & i_{2,2v} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ i_{v,v+1} & i_{v,v+2} & \cdots & i_{v,2v} \end{bmatrix}_{v \times v}$$

Acrescenta-se uma linha e uma coluna com entradas todas iguais a 1 e substitui-se todas as entradas de zeros por  $-1$ .

$${}_1H_{v+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & i_{1,1} & i_{1,2} & \cdots & i_{1,v} \\ 1 & i_{2,1} & i_{2,2} & \cdots & i_{2,v} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & i_{v,1} & i_{v,2} & \cdots & i_{v,v} \end{bmatrix}_{(v+1) \times (v+1)} \quad \text{e} \quad {}_2H_{v+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & i_{1,v+1} & i_{1,v+2} & \cdots & i_{1,2v} \\ 1 & i_{2,v+1} & i_{2,v+2} & \cdots & i_{2,2v} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & i_{v,v+1} & i_{v,v+2} & \cdots & i_{v,2v} \end{bmatrix}_{(v+1) \times (v+1)}$$

Desta forma, a soma de cada coluna é igual a zero com exceção da primeira coluna.

$1 + i_{1,v} + i_{2,v} + \dots + i_{v,v} = 0$ , tem  $v - \frac{r}{2}$  termos iguais a  $-1$  e  $\frac{r}{2} + 1$  termos iguais a 1.

Posteriormente, calcula-se o produto entre cada uma das matrizes anteriores com a sua matriz transposta, e soma-se as duas matrizes resultantes.

$$\begin{aligned} {}_1H_{v+1}({}_1H_{v+1}^T) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & i_{1,1} & i_{1,2} & \cdots & i_{1,v} \\ 1 & i_{2,1} & i_{2,2} & \cdots & i_{2,v} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & i_{v,1} & i_{v,2} & \cdots & i_{v,v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & i_{1,1} & i_{2,1} & \cdots & i_{v,1} \\ 1 & i_{1,2} & i_{2,2} & \cdots & i_{v,2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & i_{1,v} & i_{2,v} & \cdots & i_{v,v} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} v+1 & h_{1,2} & \cdots & h_{1,v+1} \\ h_{2,1} & v+1 & \cdots & h_{2,v+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{v+1,1} & h_{v+1,2} & \cdots & v+1 \end{bmatrix}_{(v+1) \times (v+1)} \\ &\rightarrow \begin{cases} \text{diagonal} \rightarrow v+1 \\ h_{1,2} + h_{1,3} + \dots + h_{1,v+1} = 0 \\ \vdots \\ h_{v+1,1} + h_{v+1,2} + \dots + h_{v+1,v} = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 {}_2H_{v+1}({}_2H_{v+1}^T) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & i_{1,v+1} & i_{1,v+2} & \cdots & i_{1,2v} \\ 1 & i_{2,v+1} & i_{2,v+2} & \cdots & i_{2,2v} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & i_{v,v+1} & i_{v,v+2} & \cdots & i_{v,2v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & i_{1,v+1} & i_{2,v+1} & \cdots & i_{v,v+1} \\ 1 & i_{1,v+2} & i_{2,v+2} & \cdots & i_{v,v+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & i_{1,2v} & i_{2,2v} & \cdots & i_{2v,2v} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} v+1 & j_{1,2} & \cdots & j_{1,v+1} \\ j_{2,1} & v+1 & \cdots & j_{2,v+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ j_{v+1,1} & j_{v+1,2} & \cdots & v+1 \end{bmatrix}_{(v+1) \times (v+1)} \\
 &\rightarrow \begin{cases} \text{diagonal} \rightarrow v+1 \\ j_{1,2} + j_{1,3} + \cdots + j_{1,v+1} = 0 \\ \vdots \\ j_{v+1,1} + j_{v+1,2} + \cdots + j_{v+1,v} = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

$${}_1H_{v+1}({}_1H_{v+1}^T) + {}_2H_{v+1}({}_2H_{v+1}^T) = \begin{bmatrix} 2(v+1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2(v+1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2(v+1) \end{bmatrix} = 2(v+1)I_{v+1}$$

**Exemplo 2.3.2.** Para (5, 10, 4, 2, 1)–BIBD:

$$\begin{aligned}
 X &= \{1, 2, 3, 4, 5\} \text{ e} \\
 A &= \{12, 13, 14, 15, 23, 24, 25, 34, 35, 45\}.
 \end{aligned}$$

A sua matriz de incidência é a seguinte:

$$\begin{array}{c}
 \mathbf{1} \\
 \mathbf{2} \\
 \mathbf{3} \\
 \mathbf{4} \\
 \mathbf{5}
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 \mathbf{12} & \mathbf{13} & \mathbf{14} & \mathbf{15} & \mathbf{23} & \mathbf{24} & \mathbf{25} & \mathbf{34} & \mathbf{35} & \mathbf{45} \\
 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1
 \end{bmatrix}$$

Figura 2.5: Matriz de incidência do (5, 10, 4, 2, 1)–BIBD

Para construir a matriz de Hadamard, separa-se a matriz de incidência em duas partes iguais, em que metade dos blocos fica na primeira matriz e a outra metade na segunda. Em cada uma das matrizes, acrescenta-se uma linha e uma coluna com as entradas todas iguais a 1, e substitui-se o número 0 por  $-1$ .

$${}_1H_6 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } {}_2H_6 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

De seguida, multiplica-se cada uma das duas matrizes pela sua matriz transposta e soma-se as duas matrizes resultantes.

$${}_1H_6({}_1H_6^T) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 4 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 4 & 6 & -2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 6 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 6 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$${}_2H_6({}_2H_6^T) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & -4 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ -4 & 6 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 6 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 6 & -2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

$${}_1H_6({}_1H_6^T) + {}_2H_6({}_2H_6^T) = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{bmatrix} = 12I_6$$

Para  $(7, 14, 6, 3, 2)$ -BIBD:

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

e

$$A = \{123, 125, 136, 145, 147, 167, 234, 246, 257, 267, 347, 356, 357, 456\}$$

A sua matriz de incidência é a seguinte:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccccccccccccccc}
 & 123 & 125 & 136 & 145 & 147 & 167 & 234 & 246 & 257 & 267 & 347 & 356 & 357 & 456 \\
 \begin{array}{l}
 \mathbf{1} \\
 \mathbf{2} \\
 \mathbf{3} \\
 \mathbf{4} \\
 \mathbf{5} \\
 \mathbf{6} \\
 \mathbf{7}
 \end{array}
 \end{array}
 \left[ \begin{array}{cccccccccccccccc}
 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

Figura 2.6: Matriz de incidência do  $(7, 14, 6, 3, 2)$ -BIBD

Assim, seguindo o procedimento anteriormente descrito, a matriz de Hadamard é a seguinte:

$${}_1H_8 = \begin{bmatrix}
 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\
 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\
 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\
 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\
 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\
 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\
 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1
 \end{bmatrix}$$

e

$${}_2H_8 = \begin{bmatrix}
 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\
 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\
 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\
 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\
 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1
 \end{bmatrix}$$

$${}_1H_8({}_1H_8^T) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 6 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 6 & 8 & -2 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 8 & 4 & 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 4 & 8 & 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 8 & 2 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & -2 & 2 & 8 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 2 & -2 & 0 & 8 & 4 \\ -2 & 0 & -2 & -2 & 2 & 0 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

$${}_2H_8({}_2H_8^T) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & -6 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ -6 & 8 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & -4 & 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & 8 & 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 8 & -2 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -2 & 2 & -2 & 8 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & -2 & 2 & 0 & 8 & -4 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & -2 & 0 & -4 & 8 \end{bmatrix}$$

$${}_1H_8({}_1H_8^T) + {}_2H_8({}_2H_8^T) = \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \end{bmatrix} = 16I_8$$

Para  $(9, 18, 8, 4, 3)$ -BIBD:

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

e

$$A = \left\{ \begin{array}{l} 1245, 1268, 1279, 1345, 1369, 1378, 1467, 1589, 2356, 2357, 2389, 2468, 2479, \\ 3469, 3478, 4589, 5678, 5679 \end{array} \right\}$$

A sua matriz de incidência é a seguinte:

	1245	1268	1279	1345	1369	1378	1467	1589	2356	2357	2389	2468	2479	3469	3478	4589	5678	5679
1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
3	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0
4	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0
5	1	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1
6	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	1
7	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1
8	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	1	0
9	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	1

Figura 2.7: Matriz de incidência do  $(9, 18, 8, 4, 3)$ -BIBD

Assim, seguindo o procedimento anteriormente descrito, a matriz de Hadamard é a seguinte:

$${}_1H_{10} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{aligned}
{}_2H_{10} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\
{}_1H_{10}({}_1H_{10}^T) + {}_2H_{10}({}_2H_{10}^T) &= \begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 20 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 20 \end{bmatrix} = 20I_{10}
\end{aligned}$$

Com o aumento de  $v$ , torna-se quase impossível colocar todos os cálculos numa página, como podemos observar no Anexo A.

# Capítulo 3

## Números

A teoria dos números é um dos ramos da matemática que trabalha essencialmente nas propriedades dos números em geral. Em particular, temos o estudo dos números naturais, cujo conjunto é representado por  $\mathbb{N}$ , também denominados de números inteiros positivos.

Além deste conjunto, também são estudados os números inteiros, cujo conjunto é representado por  $\mathbb{Z}$ , ou seja, além dos números inteiros positivos, este conjunto também contém os números inteiros menores ou iguais a zero. Considera-se que  $a$  é divisível por  $b$  quando ambos são diferentes de zero e  $\frac{a}{b} \in \mathbb{Z}$ .

### 3.1 Números pares e ímpares

**Definição 3.1.1.** Considera-se que  $n$  é um número par quando  $n = 2k$ , sendo  $k$  um número inteiro qualquer. Diz-se que  $n$  é um número ímpar quando  $n = 2k + 1$ , sendo  $k$  um número inteiro qualquer.

### 3.2 Números primos

**Definição 3.2.1.** Um número primo é um número inteiro, maior ou igual a dois, que só é divisível por si mesmo e por 1.

Os primeiros dezoito números primos são: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, ...

### 3.3 Combinações de conjuntos

**Definição 3.3.1.** Sejam  $k, n \in \mathbb{N}_0$ , tal que  $n \geq k$ . O número de  $k$ -combinações, de um conjunto, constituído por  $n$  elementos, representa-se por  $\binom{n}{k}$  e é calculado da forma seguinte:

$$C(n, k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (3.1)$$

As combinações verificam as seguintes propriedades:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

$$\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0}$$

$$\binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

### 3.4 Congruência

**Definição 3.4.1.** Seja  $n$  é um número natural maior ou igual a dois. Dois números inteiros  $a$  e  $b$  são congruentes em relação a  $n$  quando  $n$  mede a diferença entre  $a$  e  $b$ , ou seja, quando a diferença entre  $a$  e  $b$  é divisível por  $n$ , ou ainda quando

$$\frac{a-b}{n} \in \mathbb{Z} \quad (3.2)$$

Quando tal acontece diz-se que " $a$  é congruente a  $b$  módulo  $n$ " e escreve-se

$$a \equiv b \pmod{n} \quad (3.3)$$

### 3.5 Relação de recorrência

**Definição 3.5.1.** Dada uma sequência de números reais  $a_0, a_1, \dots, a_n$ , a sua relação de recorrência é uma equação que nos permite relacionar o termo  $a_n$  com os seus precedentes, sabendo que  $a_i < a_n$ , para  $i < n$ .

**Observação 3.5.1.** A relação de recorrência pode ser linear ou não linear, homogênea ou não homogênea, de ordem  $k$ , onde  $k$  é a diferença entre o maior e o menor índice dos termos da sequência, ou seja, a sequência expressa-se da forma  $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_{n-k}$ .

Uma relação de recorrência linear, homogênea de ordem  $k$  e com coeficientes constantes representa-se da seguinte forma

$$C_n a_n + C_{n-1} a_{n-1} + \dots + C_{n-k} a_{n-k} = 0, \quad n \geq k \quad (3.4)$$

Substituindo  $a_n$  por  $\lambda^n$ , chega-se à equação característica associada à equação (3.4)

$$C_n \lambda^n + C_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + C_{n-k} \lambda^{n-k} = 0 \quad (3.5)$$

**Exemplo 3.5.1.** Resolução de uma relação de recorrência linear, homogênea de ordem 1.  $\left. \begin{array}{l} a_0 = 1 \\ a_n = 2a_{n-1} \end{array} \right\}$

Solução homogênea:

$$a_n = 2a_{n-1} \Leftrightarrow a_n - 2a_{n-1} = 0$$

$$\downarrow a_n = \lambda^n$$

Equação característica:

$$\Leftrightarrow \lambda^n - 2\lambda^{n-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^{n-1}(\lambda - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^{n-1} = 0^1 \vee \lambda = 2 \text{ (raiz real simples)}$$

Assim, a solução geral é da seguinte forma:

$$a_n = C2^n, \text{ onde } C \in \mathbb{R}$$

Como  $a_0 = 1$  (condição inicial), então:

$$a_0 = 1 \Leftrightarrow C2^0 = 1 \Leftrightarrow C = 1$$

Por conseguinte, a solução da relação de recorrência é

$$a_n = 2^n$$

**Exemplo 3.5.2.** Resolução de uma relação de recorrência linear, não homogênea, completa de ordem 1.  $\left. \begin{array}{l} a_1 = 2 \\ a_n = a_{n-1} + n \end{array} \right\}$

Equação homogênea associada:

$$a_n - a_{n-1} = 0$$

$$\downarrow a_n = \lambda^n$$

Equação característica:

$$\Leftrightarrow \lambda^n - \lambda^{n-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^{n-1}(\lambda - 1) = 0$$

---

<sup>1</sup> $\lambda^{n-1} = 0 \Rightarrow a_{n-1} = 0 \Rightarrow a_n = 0$  que é uma solução trivial, costuma-se excluir porque obtém-se da solução geral para  $C = 0 \in \mathbb{R}$ .

$\Leftrightarrow \lambda = 1$  (raiz real simples)

Assim, a solução geral da equação homogênea associada é

$$a_{n_h} = a_h = C1^n = C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Solução particular:

$$a_{n_p} = a_p = An^2 + Bn$$

$$\downarrow a_n - a_{n-1} = n$$

$$\Leftrightarrow An^2 + Bn - (A(n-1)^2 + B(n-1)) = n$$

$$\Leftrightarrow An^2 + Bn - An^2 + 2An - A - Bn + B = n$$

$$\Leftrightarrow 2An - A + B = n$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2A = 1 \\ -A + B = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Assim,

$$a_p = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$

Sabemos que a solução geral da relação de recorrência é dada por  $a_n = a_h + a_p$ , então

$$a_n = C + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$

Como  $a_1 = 2$  (condição inicial), então

$$a_1 = 2 \Leftrightarrow C + \frac{1}{2} \times 1^2 + \frac{1}{2} \times 1 = 2 \Leftrightarrow C = 1, \text{ ou seja, a solução solicitada é}$$

$$a_n = 1 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n, \quad n \geq 1$$

### 3.6 Números eulerianos

Os números eulerianos, calculados em 1755 por Leonhard Euler, representam-se por  $E(n, k)$  ou  $E_{n,k}$  ou ainda  $\langle n \rangle_k$  e permitem calcular o número de permutações de  $n$  elementos, onde  $n \in \mathbb{N}$ , ou seja, do conjunto  $\{1, 2, \dots, n\}$ , com precisamente  $k$  ascendentes, onde  $k \in \mathbb{N}_0$  (ver Definição 3.6.1).

**Definição 3.6.1.** Considerando que uma permutação de  $\{1, 2, \dots, n\}$  é representada por  $P = (p_1, p_2, p_3, \dots, p_i, \dots, p_n)$ , onde  $1 \leq i \leq n$ , então para qualquer índice  $i$  em que:

- $1 \leq i < n$ , um ascendente da permutação  $P$  ocorre quando  $p_i < p_{i+1}$ ;
- $1 \leq i < n$ , um descendente da permutação  $P$  ocorre quando  $p_i > p_{i+1}$ ;
- $1 \leq i \leq n$ , um excedente da permutação  $P$  ocorre quando  $p_i > i$ ;
- $1 \leq i \leq n$ , um excedente fraco da permutação  $P$  ocorre quando  $p_i \geq i$ .

**Observação 3.6.1.** Os números eulerianos  $E(n, k)$  também permitem calcular o número de permutações com  $k$  descendentes,  $k$  excedentes ou ainda  $k + 1$  excedentes fracos.

**Exemplo 3.6.1.** Consideremos a permutação  $P = (3, 4, 1, 5, 2)$ , em que  $p_1 = 3$ ,  $p_2 = 4$ ,  $p_3 = 1$ ,  $p_4 = 5$  e  $p_5 = 2$ .

Para identificar os ascendentes da permutação  $P$ , em que  $1 \leq i < 5$ , tem-se:

$$\left. \begin{array}{l} i = 1 \quad p_1 < p_2 \quad \Leftrightarrow \quad 3 < 4 \quad \text{V} \\ i = 2 \quad p_2 < p_3 \quad \Leftrightarrow \quad 4 < 1 \quad \text{F} \\ i = 3 \quad p_3 < p_4 \quad \Leftrightarrow \quad 1 < 5 \quad \text{V} \\ i = 4 \quad p_4 < p_5 \quad \Leftrightarrow \quad 5 < 2 \quad \text{F} \end{array} \right\} \text{logo, existem ascendentes da permutação P} \\ \text{em } i = 1 \text{ e } i = 3$$

Para identificar os descendentes de permutação  $P$ , em que  $1 \leq i < 5$ :

$$\left. \begin{array}{l} i = 1 \quad p_1 > p_2 \quad \Leftrightarrow \quad 3 > 4 \quad \text{F} \\ i = 2 \quad p_2 > p_3 \quad \Leftrightarrow \quad 4 > 1 \quad \text{V} \\ i = 3 \quad p_3 > p_4 \quad \Leftrightarrow \quad 1 > 5 \quad \text{F} \\ i = 4 \quad p_4 > p_5 \quad \Leftrightarrow \quad 5 > 2 \quad \text{V} \end{array} \right\} \text{conclui-se que existem descendentes} \\ \text{da permutação P em } i = 2 \text{ e } i = 4$$

Para identificar os excedentes de permutação  $P$ , em que  $1 \leq i \leq 5$ :

$$\left. \begin{array}{l} i = 1 \quad p_1 > 1 \quad \Leftrightarrow \quad 3 > 1 \quad \text{V} \\ i = 2 \quad p_2 > 2 \quad \Leftrightarrow \quad 4 > 2 \quad \text{V} \\ i = 3 \quad p_3 > 3 \quad \Leftrightarrow \quad 1 > 3 \quad \text{F} \\ i = 4 \quad p_4 > 4 \quad \Leftrightarrow \quad 5 > 4 \quad \text{V} \\ i = 5 \quad p_5 > 5 \quad \Leftrightarrow \quad 2 > 5 \quad \text{F} \end{array} \right\} \text{então, existem excedentes da permutação P} \\ \text{em } i = 1, i = 2 \text{ e } i = 4$$

Para identificar os excedentes fracos de permutação  $P$ , em que  $1 \leq i \leq 5$ :

$$\left. \begin{array}{l} i = 1 \quad p_1 \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad 3 \geq 1 \quad \text{V} \\ i = 2 \quad p_2 \geq 2 \quad \Leftrightarrow \quad 4 \geq 2 \quad \text{V} \\ i = 3 \quad p_3 \geq 3 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \geq 3 \quad \text{F} \\ i = 4 \quad p_4 \geq 4 \quad \Leftrightarrow \quad 5 \geq 4 \quad \text{V} \\ i = 5 \quad p_5 \geq 5 \quad \Leftrightarrow \quad 2 \geq 5 \quad \text{F} \end{array} \right\} \text{ou seja, existem excedentes fracos} \\ \text{da permutação P em } i = 1, i = 2 \text{ e } i = 4$$



$$\begin{aligned}
E_{5,3} = E(5,3) &= \left\langle \begin{matrix} 5 \\ 3 \end{matrix} \right\rangle = \sum_{j=0}^3 (-1)^j \binom{5+1}{j} (3+1-j)^5 \\
&= (-1)^0 \binom{6}{0} (4-0)^5 + (-1)^1 \binom{6}{1} (4-1)^5 + \\
&\quad (-1)^2 \binom{6}{2} (4-2)^5 + (-1)^3 \binom{6}{3} (4-3)^5 \\
&= 1 \times 1 \times 4^5 - 6 \times 3^5 + 15 \times 2^5 - 20 \times 1^5 \\
&= 1024 - 1458 + 480 - 20 \\
&= 26
\end{aligned}$$

Conclui-se que existem 26 permutações do conjunto  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  com três ascendentes, que são as seguintes:

$$\begin{array}{l}
(1, 2, 3, 5, 4) \\
(1, 2, 4, 3, 5) \\
(1, 2, 4, 5, 3) \\
(1, 2, 5, 3, 4) \\
(1, 3, 2, 4, 5) \\
(1, 3, 4, 5, 2) \\
(1, 3, 5, 2, 4) \\
(1, 4, 2, 3, 5) \\
(1, 4, 5, 2, 3) \\
(1, 5, 2, 3, 4)
\end{array}
\begin{array}{l}
(2, 1, 3, 4, 5) \\
(2, 3, 1, 4, 5) \\
(2, 3, 4, 1, 5) \\
(2, 3, 4, 5, 1) \\
(2, 3, 5, 1, 4) \\
(2, 4, 1, 3, 5) \\
(2, 4, 5, 1, 3) \\
(2, 5, 1, 3, 4)
\end{array}
\begin{array}{l}
(3, 1, 2, 4, 5) \\
(3, 4, 1, 2, 5) \\
(3, 4, 5, 1, 2) \\
(3, 5, 1, 2, 4)
\end{array}
\begin{array}{l}
(4, 1, 2, 3, 5) \\
(4, 5, 1, 2, 3) \\
(4, 5, 2, 1, 3)
\end{array}
\begin{array}{l}
(5, 1, 2, 3, 4)
\end{array}$$

**Exemplo 3.6.3.** Utilizando as propriedades anteriores, calculemos o número de permutações do conjunto  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  com dois excedentes.

$$\begin{aligned}
E(5,2) &= \left\langle \begin{matrix} 5 \\ 2 \end{matrix} \right\rangle \\
&= 3 \left\langle \begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix} \right\rangle + 3 \left\langle \begin{matrix} 4 \\ 1 \end{matrix} \right\rangle \\
&= 3 \left( \underbrace{3 \left\langle \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \right\rangle}_1 + 2 \left\langle \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix} \right\rangle \right) + 3 \left( 2 \left\langle \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix} \right\rangle + \underbrace{3 \left\langle \begin{matrix} 3 \\ 0 \end{matrix} \right\rangle}_1 \right) \\
&= 18 + 12 \left\langle \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix} \right\rangle \\
&= 18 + 12 \left( \underbrace{2 \left\langle \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right\rangle}_1 + \underbrace{2 \left\langle \begin{matrix} 2 \\ 0 \end{matrix} \right\rangle}_1 \right) \\
&= 66
\end{aligned}$$



# Capítulo 4

## Grafos

O início da teoria dos grafos tem como importante referência a publicação em 1736, do trabalho do matemático Euler sobre as pontes de *Königsberg*. Em *Königsberg* existia o rio Preguel com sete pontes que faziam a ligação entre duas ilhas e as margens do rio, tal como está exemplificado na Figura 4.1.

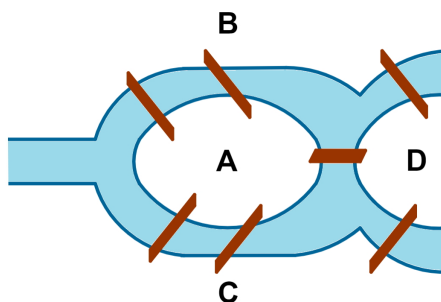


Figura 4.1: As sete pontes de *Königsberg*

Era prática corrente para cada habitante da cidade, tentar encontrar um trajeto que percorresse todas as pontes uma única vez e que regressasse ao ponto de partida. As tentativas foram muitas e todas sem sucesso. Foi então que decidiram colocar o problema a Euler.

Euler, através da construção de um grafo, baseado nas sete pontes de *Königsberg*, provou que era impossível criar um caminho que atravessasse cada uma das sete pontes uma única vez, como se ilustra na figura seguinte.

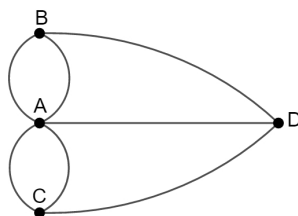


Figura 4.2: Grafo criado por Euler para as sete pontes de *Königsberg*

Atualmente, a teoria dos grafos é utilizada em muitas situações, como por exemplo, para ordenar as hiperligações num motor de busca, para encontrar o caminho mais curto para um determinado destino através do GPS, em redes de transportes.

## 4.1 Alguns conceitos básicos

As notações e terminologias que iremos aplicar são as que a nosso ver são as mais utilizadas. Sendo a teoria dos grafos relativamente recente, as notações e terminologias presentes na literatura não são únicas.

**Definição 4.1.1.** Um grafo  $G=(V,E)$  é uma estrutura matemática composta por dois conjuntos finitos e não vazios  $V(G)$  e  $E(G)$ . Os elementos de  $V$  são denominados de vértices e os elementos de  $E$  são denominados de arestas. Denota-se por  $|V|$  o número de vértices do grafo  $G$  e por  $|E|$  o número de arestas do grafo  $G$ .

O número  $n$  de vértices do conjunto  $V$ , isto é,  $|V| = n$  é chamado de ordem do grafo  $G$ .

**Observação 4.1.1.** A notação  $deg(v_i)$  representa o grau de cada um dos vértices do grafo, ou seja, o número de arestas incidentes em cada vértice. A soma de todos os graus dos vértices do grafo  $G$  é igual ao dobro do número de arestas

$$\sum_{i=1}^n deg(v_i) = 2|E| \quad (4.1)$$

Como utilizaremos números ou letras maiúsculas ou minúsculas para representar um vértice, então para representar uma aresta formada pelos vértices  $a$  e  $b$ , usaremos a forma  $ab$ .

**Definição 4.1.2.** Uma aresta considera-se simples quando está associada a um único par de vértices e considera-se múltipla quando está associada duas ou mais vezes ao mesmo par de vértices. Um grafo que possua só arestas simples é um grafo simples, enquanto que um grafo que possua pelo menos uma aresta múltipla é um multigrafo.

**Observação 4.1.2.** Além destes dois tipos de grafos ainda existem os pseudografos que ocorrem quando um grafo tem um ou mais loops, ou seja, pelo menos uma das arestas tem vértices terminais que coincidem.

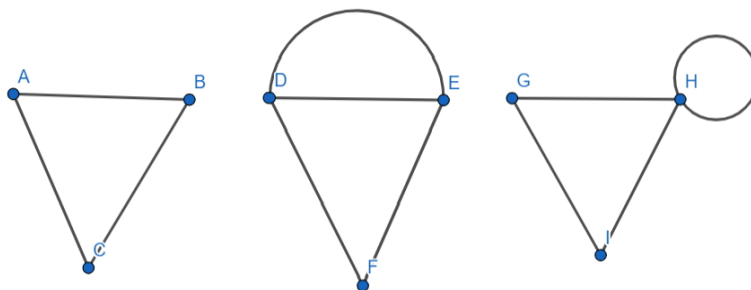


Figura 4.3: Da esquerda para a direita, grafo simples, multigrafo e pseudografo

**Definição 4.1.3.** Num grafo  $G = (V, E)$ , definimos caminho como uma sequência de vértices ligados entre si.

**Definição 4.1.4.** Se um caminho de um grafo não repete vértices nem arestas dizemos que é um caminho simples.

No grafo  $G$ , um exemplo de um caminho simples seria d-e-g-f.

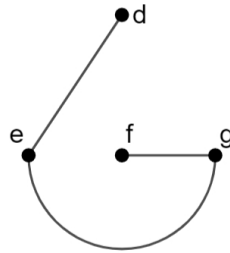


Figura 4.4: Um caminho simples do grafo  $G$

**Definição 4.1.5.** Um caminho aberto define-se como um caminho que começa num vértice e termina em outro. Quando um caminho começa e termina no mesmo vértice diz-se que é um caminho fechado.

No grafo  $G$  (Figura 4.5), um exemplo de um caminho fechado seria d-e-g-f-d e de um caminho aberto seria d-e-g.

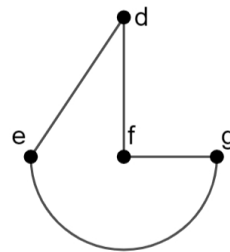


Figura 4.5: Um caminho fechado do grafo  $G$

**Definição 4.1.6.** Quando um caminho pode repetir as arestas e os vértices diz-se que é um passeio.

No grafo  $G$  (Figura 4.6), um exemplo de um passeio seria b-c-d-b-c-a-d.

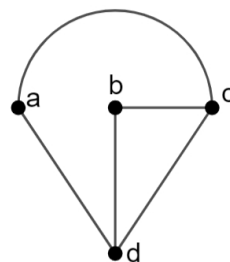


Figura 4.6: Um passeio do grafo  $G$

**Definição 4.1.7.** Um caminho que repita os vértices mas não as arestas, chama-se percurso.

No grafo  $G$  (Figura 4.7), um exemplo de um percurso seria  $e-g-d-f-e-d-c-b-d-a-c$ .

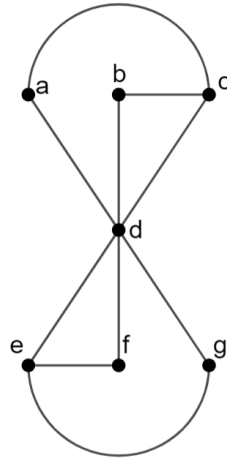


Figura 4.7: Um percurso do grafo  $G$

**Definição 4.1.8.** Um percurso que comece e termine no mesmo vértice, chama-se circuito.

No grafo  $G$  (Figura 4.8), um exemplo de um circuito seria  $e-g-d-f-e$ .

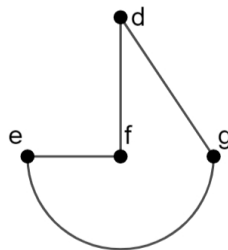


Figura 4.8: Um circuito do grafo  $G$

**Definição 4.1.9.** Quando um caminho fechado não repete nem as arestas nem os vértices (exceto os terminais), diz-se que é um ciclo.

No grafo  $G$  (ver Figura 4.9), um exemplo de um ciclo seria  $a-c-b-d-a$ .

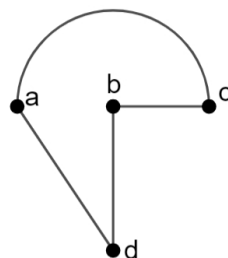


Figura 4.9: Um ciclo do grafo  $G$

**Exemplo 4.1.1.** Considerando o seguinte grafo  $G$ , é possível identificar um caminho simples, um caminho fechado, um percurso, um passeio, um circuito e um ciclo (tendo em conta as Figuras 4.4 a 4.9).

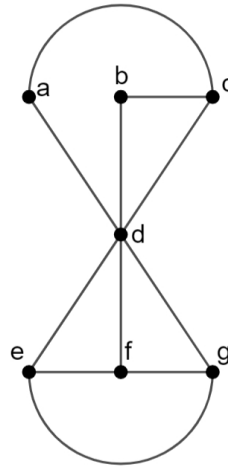


Figura 4.10: Grafo  $G$

## 4.2 Grafos especiais

Existem grafos com características específicas que permitem que os associemos em grupos. Apresentaremos apenas alguns grafos que direta ou indiretamente estão relacionados com este trabalho.

### Grafo completo

**Definição 4.2.1.** Um grafo completo, representado por  $K_n$ , ocorre quando um grafo de ordem  $n$  tem todos os pares de vértices distintos ligados exclusivamente por uma aresta (vértices adjacentes). Estes grafos de ordem  $n$  têm  $\frac{n(n-1)}{2}$  arestas e também são considerados como grafos regulares, pois todos os vértices têm grau  $n - 1$ . A Figura 4.11 apresenta alguns exemplos.

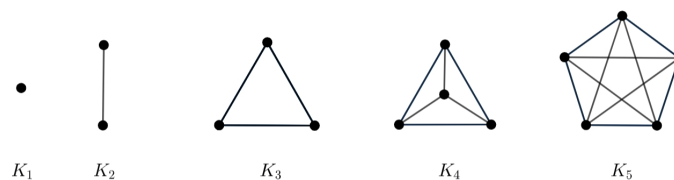


Figura 4.11: Grafos completos

### Grafo cíclico

**Definição 4.2.2.** Um grafo cíclico,  $C_n$ , onde  $n \geq 3$  representa o número de vértices, é um grafo simples em que o número de vértices é igual ao número de arestas ( $|V| = |E|$ ) e onde cada vértice tem grau 2 (ver Figura 4.12).

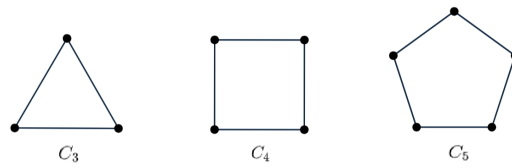


Figura 4.12: Grafos cíclicos

## Grafo roda

**Definição 4.2.3.** Um grafo roda,  $W_n$ , onde  $n \geq 4$  representa o número de vértices e  $2(n - 1)$  representa o número de arestas, é obtido quando um vértice é adicionado a um grafo cíclico e conectado aos restantes vértices (ver Figura 4.13).

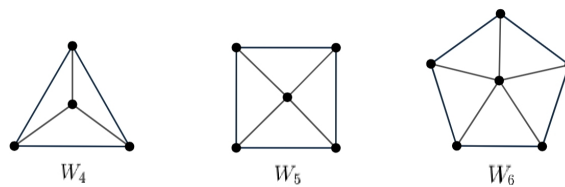


Figura 4.13: Grafos roda

## Grafo nulo

**Definição 4.2.4.** Um grafo nulo,  $N_n$ , onde  $n$  representa o número de vértices, é um grafo que não tem arestas (ver Figura 4.14).



Figura 4.14: Grafos nulos

## Grafo caminho

**Definição 4.2.5.** Um grafo caminho,  $P_n$ , com  $n \geq 2$ , é um grafo simples onde  $|V| = |E| + 1$  (exemplos na Figura 4.15).



Figura 4.15: Grafos caminho

## Grafo bipartido

**Definição 4.2.6.** Um grafo bipartido ocorre quando os vértices se podem separar em dois subconjuntos  $V_1$  e  $V_2$ , de forma a que  $V = V_1 \cup V_2$ , ou seja, as arestas têm um vértice em  $V_1$  e outro em  $V_2$ , mas nunca no mesmo subconjunto (Figura 4.16).

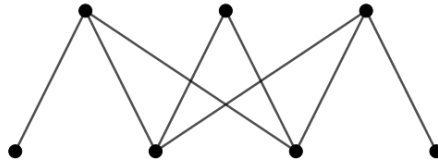


Figura 4.16: Grafo bipartido

**Observação 4.2.1.** Outra forma de verificar que as arestas não ligam vértices do mesmo subconjunto é colorir os vértices do subconjunto  $V_1$  de branco e os vértices do subconjunto  $V_2$  de preto. Assim verifica-se que as arestas não ligam vértices da mesma cor (Figura 4.17).

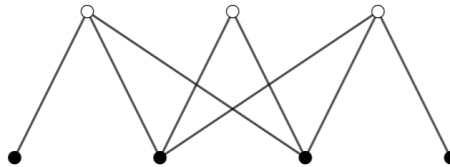


Figura 4.17: Grafo bipartido com vértices de cores diferentes

## Grafo bipartido completo

**Definição 4.2.7.** Um grafo bipartido é considerado completo quando todos os vértices do subconjunto  $V_1$  estão ligados a todos os vértices do subconjunto  $V_2$ . Se considerarmos que o número de vértices do subconjunto  $V_1$  é  $n$  e do subconjunto  $V_2$  é  $m$ , então o número total de vértices do grafo bipartido completo será de  $n + m$  e o número total de arestas será de  $n \times m$ . Um grafo bipartido completo será denotado por  $K_{n,m}$ .

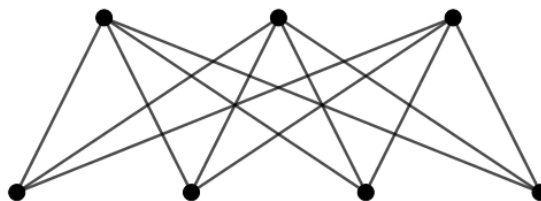


Figura 4.18: Grafo bipartido completo

## Grafo Conexo

**Definição 4.2.8.** Um grafo diz-se conexo se existir um caminho que una dois quaisquer vértices. Caso contrário, diz-se desconexo.

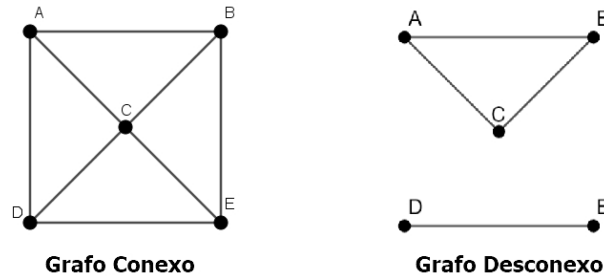


Figura 4.19: Grafo conexo e grafo desconexo

### 4.2.1 Grafo Euleriano

**Definição 4.2.9.** Um circuito de Euler ocorre quando um caminho fechado percorre todas as arestas de um grafo, sem as repetir. Quando um grafo tem um circuito de Euler denomina-se por grafo de Euler ou grafo Euleriano.

No grafo da Figura 4.20, o circuito de Euler é a-e-b-a-f-b-c-f-g-d-c-a.

**Teorema 4.2.1.** Um grafo conexo é Euleriano se, e só se, todos os seus vértices têm grau par.

### 4.2.2 Grafo Hamiltoniano

Em 1857, o matemático Hamilton apresentou um problema e a respetiva solução. O problema, designado por *viagem à volta do mundo*, consistia em percorrer todos os vértices de um dodecaedro em que cada vértice correspondia a uma cidade (Londres, Paris, Roma, etc). A finalidade era percorrer todas as cidades uma única vez e regressar à cidade da partida, sendo que só era possível ir de uma cidade a outra se existisse uma aresta entre os respetivos vértices. Este problema originou o ciclo de Hamilton.

**Definição 4.2.10.** Um ciclo de Hamilton ocorre quando um caminho percorre todos os vértices de um grafo, onde só os vértices terminais podem se repetir. Quando um grafo tem um ciclo de Hamilton denomina-se por grafo de Hamilton ou grafo Hamiltoniano.

No grafo da Figura 4.20, o ciclo de Hamilton é a-c-d-g-f-b-e-a.

**Exemplo 4.2.1.** O seguinte grafo é de Euler e de Hamilton.

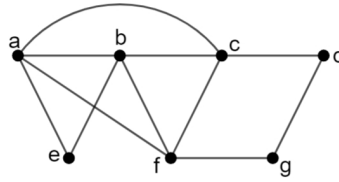


Figura 4.20: Um grafo de Euler e de Hamilton

Verificar a existência de um ciclo de Hamilton não é fácil. Existem teoremas com condições que permitem identificar a existência de um tal ciclo.

**Teorema 4.2.2** (Teorema de Dirac<sup>1</sup> - 1951). *Quando um grafo  $G$  simples tem um número de vértices superior ou igual a três ( $n \geq 3$ ) e o grau de cada um desses vértices é maior ou igual ao número de vértices a dividir por dois ( $\deg(v) \geq \frac{n}{2}$ ), então  $G$  é um grafo Hamiltoniano.*

**Teorema 4.2.3** (Teorema de Ore<sup>2</sup> - 1960). *Quando um grafo  $G$  simples tem um número de vértices superior ou igual a três ( $n \geq 3$ ) e a soma dos graus de dois vértices não adjacentes é maior ou igual ao número de vértices ( $\deg(v) + \deg(u) \geq n$ ), então  $G$  é um grafo Hamiltoniano.*

### 4.2.3 Grafo Planar

**Definição 4.2.11.** Quando um grafo pode ser representado sem que as suas arestas se cruzem, denomina-se de grafo planar (ver Figura 4.21).

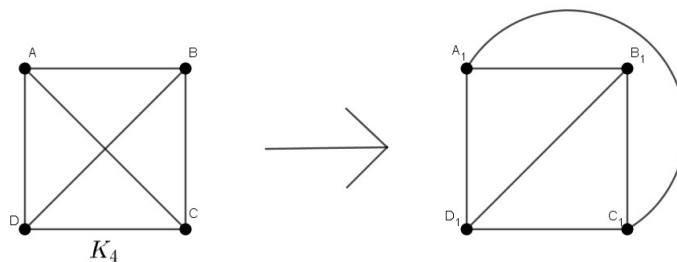


Figura 4.21: Representação do grafo  $K_4$  na forma planar

**Definição 4.2.12.** Quando um grafo é planar, o seu desenho divide o plano em faces. A face de um grafo planar representa-se por  $f_i$ . Ao número de arestas que cada face contém chamamos grau da face e representa-se por  $\deg(f_i)$ . Temos que a soma do grau de cada uma das faces é igual ao dobro do número de arestas

$$\sum_{i=1}^m \deg(f_i) = 2|E| \quad (4.2)$$

<sup>1</sup>Paul Adrien Maurice Dirac, 1902-1984, físico britânico

<sup>2</sup>Oystein Ore, 1899-1968, matemático norueguês

Através da fórmula de Euler (4.3), é possível relacionar num grafo planar o número de vértices, de arestas e de faces.

**Teorema 4.2.4** (Fórmula de Euler). *Quando um grafo é conexo e planar o seu número de vértices menos o seu número de arestas mais o seu número de faces é igual a dois, ou seja,*

$$|V| - |E| + |f| = 2 \quad (4.3)$$

**Corolário 4.2.4.1.** *Quando um grafo é simples, conexo, planar e o seu número de vértices é superior a dois ( $|V| > 2$ ), então o seu número de arestas tem de ser menor ou igual ao triplo do número de vértices menos seis*

$$|E| \leq 3|V| - 6 \quad (4.4)$$

**Exemplo 4.2.2.** Utilizando o grafo planar da Figura 4.21 verifica-se que:

$$|V| = 4$$

$$|E| = 6$$

$$|E| \leq 3|V| - 6 \iff 6 \leq 3 \times 4 - 6 \iff 6 \leq 12 - 6 \iff 6 \leq 6$$

**Corolário 4.2.4.2.** *Quando um grafo é bipartido, conexo e planar o seu número de arestas tem de ser menor ou igual ao dobro do número de vértices menos quatro*

$$|E| \leq 2|V| - 4 \quad (4.5)$$

**Exemplo 4.2.3.** Se considerarmos um grafo G conexo e planar em que

$$\sum_{i=1}^7 \deg(f_i) = 22$$

é possível calcular o número de vértices e de arestas e ainda construir o grafo G (ver Figura 4.22). Assim, neste exemplo, sabe-se que o grafo é constituído por sete faces e por onze arestas.

$$\sum_{i=1}^7 \deg(f_i) = 22 \iff \sum_{i=1}^7 \deg(f_i) = 2|E| \iff 22 = 2|E| \iff |E| = 11$$

Através da fórmula de Euler, descobre-se que o número de vértices é igual a seis, porque

$$|V| - |E| + |f| = 2 \iff |V| - 11 + 7 = 2 \iff |V| = 6$$

Com estas características, o grafo G pode ser representado da seguinte forma:

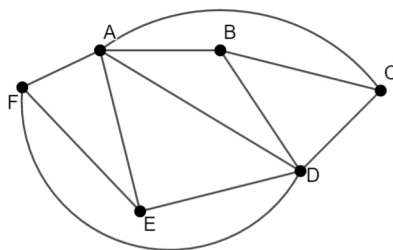


Figura 4.22: Grafo G conexo e planar

### Grafo Poliédrico

**Definição 4.2.13.** Um grafo planar, simples e conexo é poliédrico se o grau de todos os seus vértices e de todas as suas faces for maior ou igual a três ( $\deg(v_i) \geq 3$  e  $\deg(f_i) \geq 3$ ).

Observe-se que o grafo G da Figura 4.22 é um grafo poliédrico.

## 4.3 Matriz de Incidência

**Definição 4.3.1.** A matriz de incidência,  $I_G$ , de um grafo G é uma matriz em que as linhas representam os vértices, as colunas representam as arestas e os elementos da matriz  $I_G = (a_{ij})$  são definidos por:

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{quando } v_i \text{ não é vértice terminal em } e_j \\ 1, & \text{quando } v_i \text{ é vértice terminal em } e_j \\ 2, & \text{quando } v_i \text{ é vértice terminal numa aresta } e_j \text{ em loop} \end{cases}$$

**Proposição 4.3.1.** A soma dos elementos de cada linha de  $I_G$  é igual ao grau do vértice correspondente e a soma dos elementos de cada coluna de  $I_G$  é igual a 2.

**Exemplo 4.3.1.** Considerando o grafo G da Figura 4.23

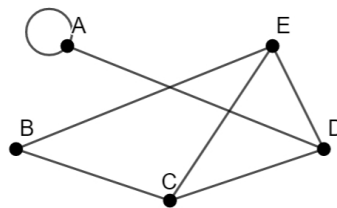


Figura 4.23: Grafo G

a sua matriz de incidência será a seguinte:

	AA	AD	BC	BE	CD	CE	DE
A	2	1	0	0	0	0	0
B	0	0	1	1	0	0	0
C	0	0	1	0	1	1	0
D	0	1	0	0	1	0	1
E	0	0	0	1	0	1	1

Figura 4.24: Matriz de incidência do grafo G

## 4.4 Matriz de Adjacência

**Definição 4.4.1.** A matriz de adjacência,  $A_G$ , de um grafo G é uma matriz em que tanto as linhas como as colunas representam os vértices, ou seja, a matriz  $A_G$  é uma

matriz quadrada de ordem  $n$ . Os elementos da matriz  $A_G = (a_{ij})$  determinam-se da seguinte forma:

- se os vértices  $v_i$  e  $v_j$  não estão ligados por uma aresta,  $a_{ij} = 0$
- se  $i \neq j$ ,  $a_{ij}$  é igual ao número de arestas entre  $v_i$  e  $v_j$
- se  $i = j$ ,  $a_{ij}$  corresponde ao número de *loops* em  $v_i$

**Exemplo 4.4.1.** Considerando o grafo  $G$  (ver Figura 4.25).

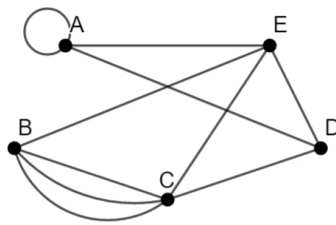


Figura 4.25: Grafo  $G$

A sua matriz de adjacência será a seguinte:

$$A_G = \begin{array}{c} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \\ \mathbf{C} \\ \mathbf{D} \\ \mathbf{E} \end{array} \begin{array}{ccccc} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} & \mathbf{D} & \mathbf{E} \\ \left[ \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \end{array}$$

Figura 4.26: Matriz de adjacência do grafo  $G$

## 4.5 *Matching* Perfeito

**Definição 4.5.1.** Um *matching* é um subconjunto de arestas em que estas não são adjacentes, ou seja, não têm os mesmos vértices terminais. Considera-se que um *matching*,  $M$ , é perfeito quando todos os vértices estão presentes em apenas uma das arestas.

O número de arestas de  $M$  é igual a metade do número de vértices do grafo

$$|M| = \frac{|V|}{2} \quad (4.6)$$

Então, só existe *matching* perfeito quando o número de vértices do grafo é par.

**Exemplo 4.5.1.** Considerando o grafo  $G$  (Figura 4.27), verifica-se que existe *matching* perfeito, pois  $M$  satura todos os vértices.

$$M = \{12, 34, 56, 78\}$$

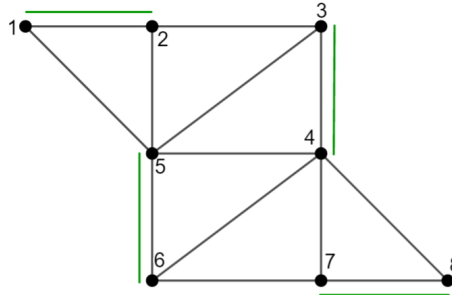


Figura 4.27: Grafo  $G$  com *matching* perfeito

## 4.6 Árvore Geradora

**Definição 4.6.1.** Um grafo simples, conexo e sem ciclos denomina-se por árvore e representa-se por  $T$ . Uma árvore de um grafo  $G$  denomina-se de árvore geradora se for um subgrafo que contém todos os vértices do grafo  $G$ .

**Teorema 4.6.1** (Teorema de Cayley<sup>3</sup>). *O número de árvores geradoras de um grafo completo de ordem  $n$  é igual a  $r(K_n) = n^{n-2}$ .*

**Exemplo 4.6.1.** Considerando um grafo completo  $K_6$ , pelo Teorema de Cayley sabe-se que o número de árvores deste grafo é 1296.

$$r(K_6) = 6^{6-2} = 6^4 = 1296$$

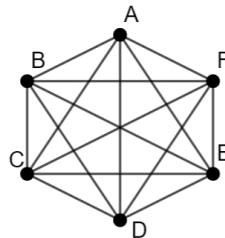


Figura 4.28: Grafo completo  $K_6$

Das 1296 árvores geradoras do grafo completo  $K_6$ , a Figura 4.29 representa alguns exemplos.

<sup>3</sup>Arthur Cayley, 1821-1895, matemático inglês.

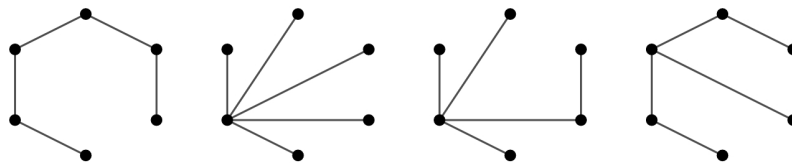


Figura 4.29: Exemplos de árvores geradoras do grafo completo  $K_6$

#### 4.6.1 Teorema da árvore-matriz

**Teorema 4.6.2** (Teorema da árvore-matriz). *Seja  $G = (V, E)$  um grafo sem loops, com  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ . Sejam  $A_G$  a matriz adjacência de  $G$ ,  $S$  a matriz diagonal com  $S_{ii} = \deg(v_i)$  e  $Q = S - A_G$ . Então, para qualquer  $1 \leq i \leq n$ , o determinante da matriz que se obtém de  $Q$  ao retirar a  $i$ -ésima linha e coluna, é igual ao número de árvores geradoras do grafo  $G$ . Este número será denotado por  $T(G)$ .*

**Observação 4.6.1.** *Quando o grafo  $G$  for completo,  $G = K_n$ , é usual utilizar a notação  $r(K_n)$  ao invés de  $T(K_n)$  para designar o número de árvores geradoras de  $K_n$ .*

**Exemplo 4.6.2.** Considerando o grafo  $G$  da Figura 4.30 com quatro vértices,

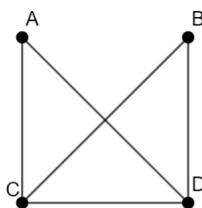


Figura 4.30: Grafo  $G$  com quatro vértices

a matriz de adjacência é a seguinte:

$$A_G = \begin{matrix} & \begin{matrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \\ \mathbf{C} \\ \mathbf{D} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Figura 4.31: Matriz de adjacência do grafo  $G$

A matriz  $S$  é a seguinte:

$$S = \begin{matrix} & \begin{matrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \\ \mathbf{C} \\ \mathbf{D} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Figura 4.32: Matriz  $S$  do grafo  $G$

Assim, subtraindo a matriz  $A_G$  à matriz  $S$ , calcula-se a seguinte matriz  $Q$ :

$$Q = S - A_G = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Se considerarmos  $i = 4$ , então a quarta linha e a quarta coluna serão retiradas, e o determinante da matriz resultante é

$$T(G) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 8$$

Conclui-se que o grafo  $G$  tem oito árvores geradoras.

## 4.7 Número Cromático

Em 1912 Birkhoff<sup>4</sup> desenvolveu o polinômio cromático (ver Definição 4.7.1) apenas para grafos planares, como ferramenta para tentar provar o famoso teorema das quatro cores<sup>5</sup>. A generalização para quaisquer grafos surgiu em 1932 com os matemáticos Whitney<sup>6</sup> e Tutte<sup>7</sup>.

**Definição 4.7.1.** O polinômio cromático,  $P_G(k)$ , de um grafo  $G$  é uma função que determina o número de colorações de  $G$ , ou seja, o número de possibilidades de colorir os vértices de  $G$ , com  $k$  diferentes cores.

**Definição 4.7.2.** Um grafo é  $k$ -colorável quando os vértices são coloridos por  $k$  cores, de modo a que vértices adjacentes tenham cores distintas.

**Definição 4.7.3.** O número cromático de um grafo  $G$  sem *loops*,  $\chi(G)$ , é o menor inteiro positivo  $k$  de cores utilizado para o grafo  $G$  ser  $k$ -colorável.

**Exemplo 4.7.1.** Cálculo de  $\chi(G)$ .

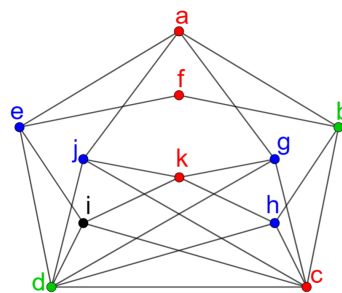


Figura 4.33: Grafo 4-colorável

<sup>4</sup>George David Birkhoff, 1884-1944, matemático americano.

<sup>5</sup>Teorema (das 4 cores): Seja um mapa plano, dividido em regiões, quatro cores são suficientes para colori-lo de forma a que regiões vizinhas não partilhem a mesma cor (demonstrado por Appel e Haken em 1976).

<sup>6</sup>Hassler Whitney, 1907-1989, matemático americano

<sup>7</sup>William Thomas Tutte, 1917-2002, matemático britânico

Assim,

$\chi(G) = 4$  porque aos vértices a, c, f, k corresponde a cor vermelha, aos vértices b, d corresponde a cor verde, aos vértices e, g, h, j corresponde a cor azul e ao vértice i a cor preta.

### 4.7.1 Polinómio Cromático

Enquanto que para alguns grafos com número reduzido de vértices e de arestas é simples identificar o seu número cromático, para outros mais complexos, o contrário acontece. Nestes casos, uma das possibilidades para obter o polinómio cromático  $P_G(k)$  é utilizar o Teorema 4.7.1.

**Definição 4.7.4.** Dado um grafo  $G$  e uma aresta  $uv \in E(G)$ , a contração de  $uv$  que se representa por  $G/uv$  corresponde a substituir os vértices  $u$  e  $v$  por um único vértice que se denota  $u,v$  eliminando a aresta  $uv$ . A eliminação da aresta  $uv$  que se representa por  $G - uv$  corresponde a suprimir a aresta  $uv$  (ver Figura 4.34).

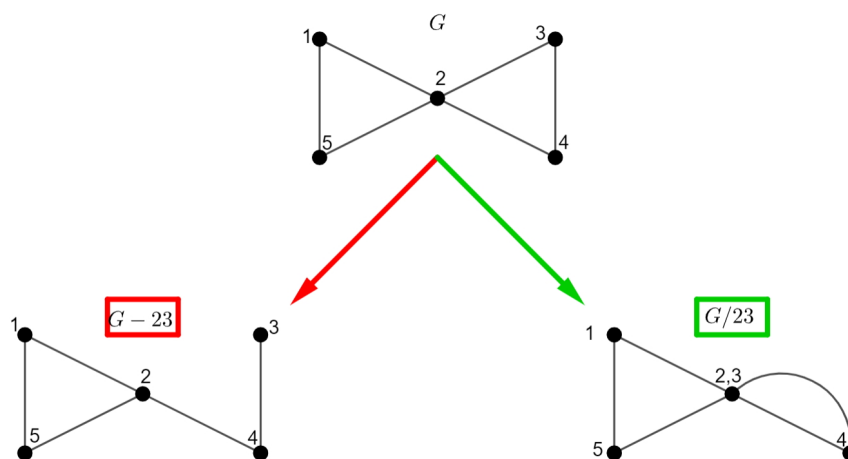


Figura 4.34: Eliminação e contração da aresta 23 do grafo  $G$

**Teorema 4.7.1.** *Sejam  $G$  um grafo simples e planar e  $e$  uma aresta qualquer de  $G$ . Então:  $P_G(k) = P_{G-e}(k) - P_{G/e}(k)$  com  $G - e$  (eliminação da aresta  $e$ ),  $G/e$  (contração da aresta  $e$ ).*

**Exemplo 4.7.2.** Calculemos o polinómio cromático associado ao grafo  $G$  (Figura 4.35):

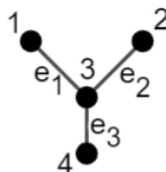


Figura 4.35: Grafo  $G$

$$\begin{aligned}
 P_G(k) &= \underbrace{P_{G-e_1}(k)}_A - \underbrace{P_{G/e_1}(k)}_B \\
 &= \underbrace{P_{A-e_2}(k)}_C - \underbrace{P_{A/e_2}(k)}_D - \underbrace{P_{B-e_2}(k)}_E + \underbrace{P_{B/e_2}(k)}_F \\
 &= \underbrace{P_{C-e_3}(k)}_G - \underbrace{P_{C/e_3}(k)}_H - \underbrace{P_{D-e_3}(k)}_I + \underbrace{P_{D/e_3}(k)}_J - \underbrace{P_{E-e_3}(k)}_L + \underbrace{P_{E/e_3}(k)}_M + \underbrace{P_{F-e_3}(k)}_N - \underbrace{P_{F/e_3}(k)}_O \\
 &= N_4 - N_3 - N_3 + N_2 - N_3 + N_2 + N_2 - N_1 \\
 &= \underbrace{N_4}_{k^4} - 3 \underbrace{N_3}_{k^3} - \underbrace{N_2}_{k^2} - \underbrace{N_1}_k \\
 &= k^4 - 3k^3 + 3k^2 - k
 \end{aligned}$$

Figura 4.36: Cálculo do polinómio cromático do grafo G

$$P_G(K) = k^4 - 3k^3 + 3k^2 - k$$

$k = 1 \rightarrow P_G(1) = 0$  (impossível colorir os vértices de G com apenas 1 cor)

$$k = 2 \rightarrow P_G(2) = 2^4 - 3 \times 2^3 + 3 \times 2^2 - 2 = 2 \rightarrow \chi(G) = 2$$

Desta forma, utilizando o polinómio cromático, conclui-se que existem duas possibilidades de colorir o grafo G, com duas cores (valor que torna  $P_G(k) \neq 0$ ), porque para  $k = 1$  existe zero formas de colorir os vértices de G. Para  $k = 2$  é o menor inteiro positivo que satisfaz  $P_G(k) > 0$ , sendo por isso o número cromático do grafo G, isto é,  $\chi(G) = 2$ .

O cálculo do polinómio cromático também pode ser apresentado utilizando um diagrama (Figura 4.37).

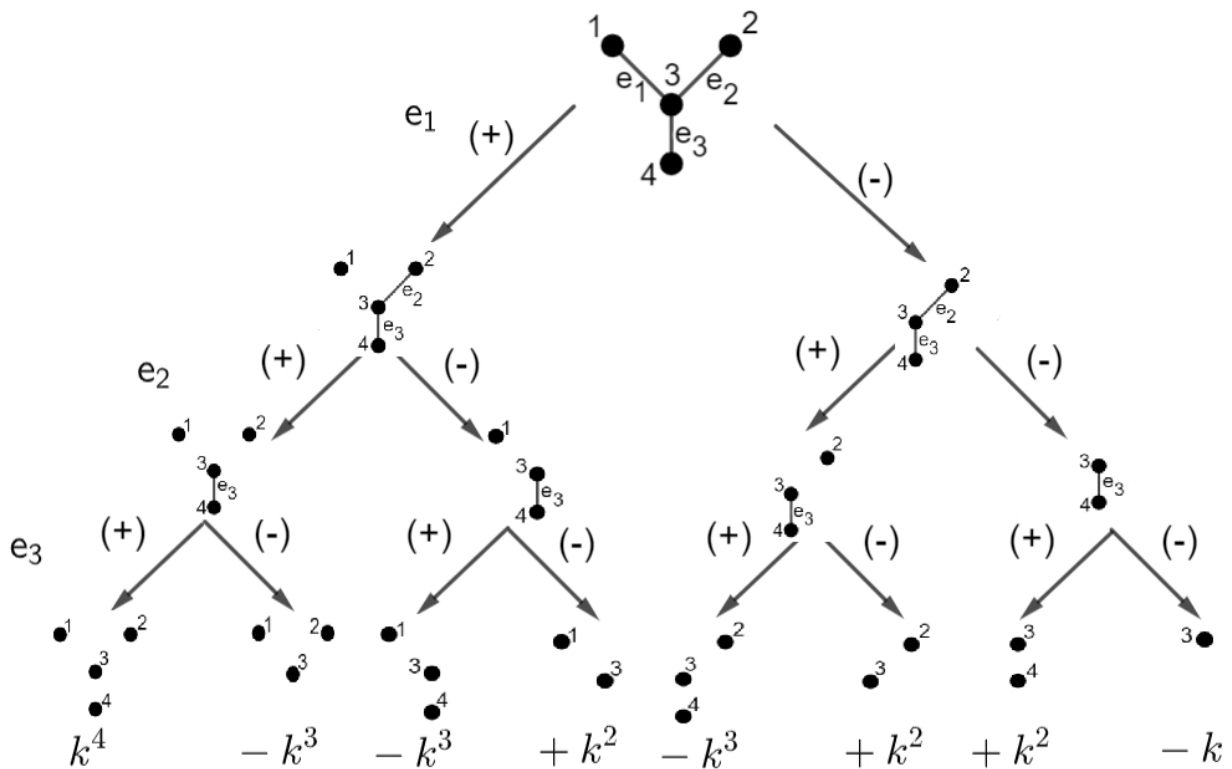


Figura 4.37: Polinómio cromático do grafo  $G$

$$P_G(k) = k^4 - 3k^3 + 3k^2 - k$$

### 4.7.2 Coloração de alguns grafos especiais

#### Grafo $k$ -crítico

**Definição 4.7.5.** Um grafo  $G$  é  $k$ -crítico se  $\chi(G) = k$  e  $\chi(G - v) < k$  para cada vértice  $v$  de  $G$ .

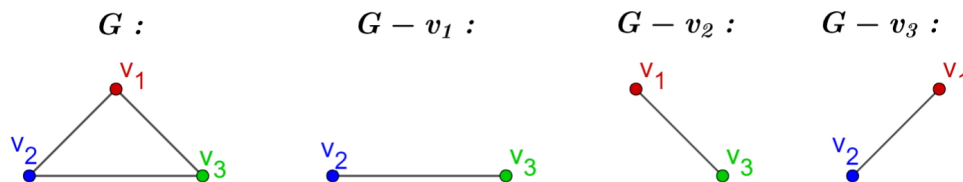


Figura 4.38: Grafo  $k$ -crítico

O grafo  $G$  da Figura 4.38 é 3-crítico pois  $\chi(G) = 3$  e  $\chi(G - v_1) = 2 = \chi(G - v_2) = \chi(G - v_3) < 3 = k$

### Grafos completos

No caso dos grafos completos, o seu número cromático é sempre igual ao seu número de vértices, isto é,

$$\chi(K_n) = n \quad (4.7)$$

### Grafos cíclicos

No caso dos grafos cíclicos, o seu número cromático é igual a dois se o seu número de vértices for par, ou igual a três se o seu número de vértices for ímpar, isto é,

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 2 & \text{se } n \text{ for par} \\ 3 & \text{se } n \text{ for ímpar} \end{cases} \quad (4.8)$$

### Grafos roda

No caso dos grafos roda, o seu número cromático é igual a três se o seu número de vértices for ímpar, ou igual a quatro se o seu número de vértices for par, ou seja,

$$\chi(W_n) = \begin{cases} 3 & \text{se } n \text{ for ímpar} \\ 4 & \text{se } n \text{ for par} \end{cases} \quad (4.9)$$

## 4.8 Digrafos

**Definição 4.8.1.** Um digrafo  $D$  é um grafo orientado, ou seja, é constituído por vértices e arestas direcionadas, designadas por arcos. Quando um arco é  $ab$  significa que está direcionado de  $a$  para  $b$ , em que  $a$  é a cauda ( $t$ ) do arco e  $b$  é a cabeça ( $h$ ).

Para cada vértice de um digrafo definem-se o grau de entrada e o grau de saída. O grau de entrada ( $deg_E(v)$ ) é o número de arcos direcionados para o vértice e o grau de saída ( $deg_S(v)$ ) é o número de arcos direcionados para fora do vértice em questão, ou seja, o número de arcos que saem do vértice.

Considera-se que se trata de um digrafo simples quando não tem arcos múltiplos nem *loops*. É *loop*-digrafo quando tem *loops* e multidigrafo quando tem arcos múltiplos.

A matriz de incidência dos digrafos é construída de forma semelhante à dos grafos. Contudo, quando o vértice é extremidade final do arco coloca-se o número 1 na matriz e, quando o vértice é extremidade inicial do arco coloca-se o número  $-1$  na matriz.

A matriz de adjacência dos digrafos, por outro lado, é construída exatamente da mesma forma que nos grafos. O mesmo também acontece na coloração dos vértices. Nos digrafos, o número cromático é calculado da mesma forma que nos grafos.

Considera-se um digrafo fortemente conexo quando para cada par de vértices  $u$ ,  $v$  existe um caminho orientado de  $u$  para  $v$ . Para verificar se existe um circuito direto de Euler nos digrafos segue-se a mesma lógica utilizada nos grafos, tendo em

atenção a direção dos arcos. No caso do ciclo de Hamilton utiliza-se a adaptação dos teoremas de Dirac e de Ore aos digrafos (ver Teoremas 4.8.1 e 4.8.2).

**Teorema 4.8.1** (Teorema de Dirac (para digrafos)). *Seja  $D$  um digrafo fortemente conexo com  $n$  vértices. Se  $deg_S(v) \geq \frac{n}{2}$  e  $deg_E(v) \geq \frac{n}{2}$  para todo o  $v$  de  $D$ , então  $D$  é hamiltoniano.*

**Teorema 4.8.2** (Teorema de Ore (para digrafos)). *Seja  $D$  um digrafo simples com  $n$  vértices. Se  $deg_S(u) + deg_E(v) \geq n$  para todo o par de vértices não adjacentes  $u$  e  $v$  de  $D$ , então  $D$  é hamiltoniano.*

**Exemplo 4.8.1.** Considera-se o digrafo  $D$  com seis vértices e onze arcos:

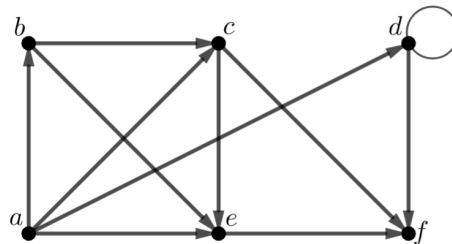


Figura 4.39: Digrafo  $D$  com seis vértices

Através da representação do digrafo  $D$  (Figura 4.39) é possível construir uma tabela (ver Tabela 4.1) indicando o grau de entrada e de saída de cada um dos vértices.

Tabela 4.1: Grau de entrada e de saída de cada um dos vértices

Vértices	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$
Grau de entrada	0	1	2	1+1 ( <i>loop</i> ) = 2	3	3
Grau de saída	4	2	2	1+1 ( <i>loop</i> ) = 2	1	0

Considerando a tabela anterior, verifica-se que não existe circuito direto de Euler, pois existem vértices em que o seu grau de entrada é diferente do seu grau de saída. Também não existe ciclo de Hamilton, porque, por exemplo, o vértice  $a$  só tem graus de saída e o vértice  $f$  só tem graus de entrada.

A matriz de incidência deste digrafo é representada da seguinte forma:

$$I_D = \begin{matrix} & \mathbf{ab} & \mathbf{ac} & \mathbf{ad} & \mathbf{ae} & \mathbf{bc} & \mathbf{be} & \mathbf{ce} & \mathbf{cf} & \mathbf{dd} & \mathbf{df} & \mathbf{ef} \\ \mathbf{a} & \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{b} & \\ \mathbf{c} & \\ \mathbf{d} & \\ \mathbf{e} & \\ \mathbf{f} & \end{matrix}$$

Figura 4.40: Matriz de incidência do digrafo  $D$  com seis vértices

## 4.9 Polinómio de Tutte

Em 1948, William Tutte, na sua tese de doutoramento, criou uma generalização a  $\mathbb{R}^2$  do polinómio cromático de um grafo que, anos mais tarde, serviu de base para muitos estudos por parte de outros matemáticos, tais como, Vaughan Jones e Renfrey Potts. Atualmente, o polinómio de Tutte é, principalmente, utilizado em ciências da computação.

**Definição 4.9.1.** O polinómio de Tutte depende de duas variáveis,  $x$  e  $y$ , é definido a partir de um grafo  $G$  não direcionado e representa-se por  $T_G(x, y)$  ou  $T(G; x, y)$ .

O polinómio de Tutte, de um grafo composto por mais que uma aresta, é calculado da seguinte forma:

$$T_G(x, y) = \begin{cases} xT_{G-e} , & \text{se a aresta } e \text{ for uma ponte}^8 \\ yT_{G/e} , & \text{se a aresta } e \text{ for um loop} \\ 1 , & \text{se } E(G) = \emptyset \\ T_{G-e} + T_{G/e} , & \text{caso contrário} \end{cases}$$

**Observação 4.9.1.** Utiliza-se este polinómio para se obter, por exemplo, informação sobre as diferentes ligações de um grafo  $G$ .

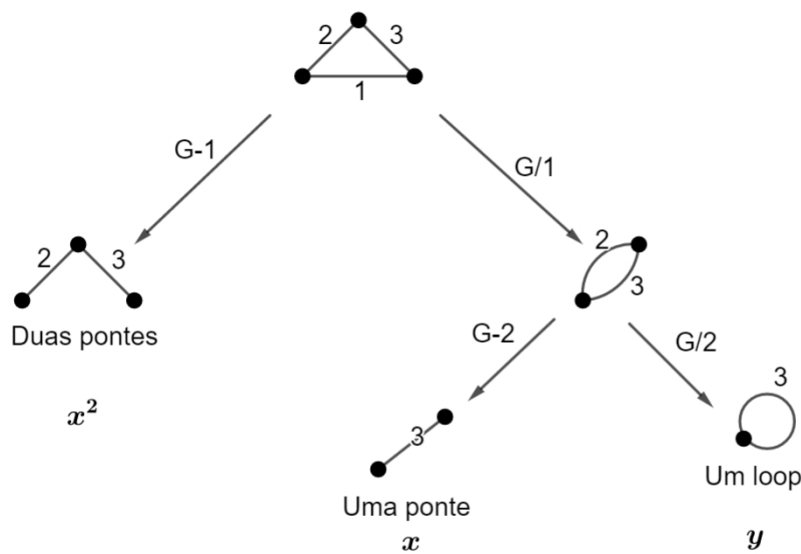


Figura 4.41: Polinómio de Tutte do grafo completo  $K_3$

Assim, o polinómio de Tutte para o grafo completo de três vértices (ver Figura 4.41) é

$$T_{k_3}(x, y) = T(k_3; x, y) = x^2 + x + y \tag{4.10}$$

<sup>8</sup>

**Definição 4.9.2.** Seja  $G$  conexo. Designa-se por ponte uma aresta que, ao ser eliminada, faz com que  $G$  deixe de ser conexo.

### 4.9.1 Polinómio de Tutte em grafos bipartidos

O polinómio de Tutte para grafos bipartidos completos  $K_{n,2}$  é definido por:

$$T_n(x, y) = x^2(x+1)^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} (x+y)^i (x+1)^{n-1-i}, \quad n \geq 1 \quad (4.11)$$

Ao trabalharmos com a equação (4.11), descobrimos uma nova expressão para  $T_n(x, y)$ :

$$T_n(x, y) = \begin{cases} \binom{n}{0}x^{n+1} + \left(\binom{n}{1} - 1\right)x^n + \binom{n}{2}x^{n-1} + \dots + \binom{n}{n}x \\ + \binom{n}{2}x^{n-2} \sum_{i=1}^1 y^i + \binom{n}{3}x^{n-3} \sum_{i=1}^2 y^i + \binom{n}{4}x^{n-4} \sum_{i=1}^3 y^i + \dots + \binom{n}{n-1}x \sum_{i=1}^{n-2} y^i \\ + \sum_{i=1}^{n-1} y^i \end{cases} \quad (4.12)$$

Vamos provar que as duas fórmulas para  $T_n(x, y)$  são equivalentes para  $n \geq 1$ , utilizando o método de Indução Matemática em  $n$ :

$$\begin{aligned} & x^2(x+1)^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} (x+y)^i (x+1)^{n-1-i} = \\ & = \begin{cases} \binom{n}{0}x^{n+1} + \left(\binom{n}{1} - 1\right)x^n + \binom{n}{2}x^{n-1} + \dots + \binom{n}{n}x \\ + \binom{n}{2}x^{n-2} \sum_{i=1}^1 y^i + \binom{n}{3}x^{n-3} \sum_{i=1}^2 y^i + \binom{n}{4}x^{n-4} \sum_{i=1}^3 y^i + \dots + \binom{n}{n-1}x \sum_{i=1}^{n-2} y^i \\ + \sum_{i=1}^{n-1} y^i \end{cases} \end{aligned}$$

Indução Matemática em  $n$ :

$$n = 1, \quad x^2(x+1)^0 = \binom{1}{0}x^2 + \left(\binom{1}{1} - 1\right)x^1 \Leftrightarrow x^2 = x^2$$

Hipótese de Indução

$$\begin{aligned} & x^2(x+1)^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} (x+y)^i (x+1)^{n-1-i} = \binom{n}{0}x^{n+1} + \left(\binom{n}{1} - 1\right)x^n + \binom{n}{2}x^{n-1} + \\ & \dots + \binom{n}{n}x + \binom{n}{2}x^{n-2} \sum_{i=1}^1 y^i + \binom{n}{3}x^{n-3} \sum_{i=1}^2 y^i + \binom{n}{4}x^{n-4} \sum_{i=1}^3 y^i + \\ & \dots + \binom{n}{n-1}x \sum_{i=1}^{n-2} y^i + \sum_{i=1}^{n-1} y^i \end{aligned}$$

Tese de Indução

$$\begin{aligned}
 x^2(x+1)^n + \sum_{i=1}^n (x+y)^i (x+1)^{n-i} &= \binom{n+1}{0} x^{n+2} + \left( \binom{n+1}{1} - 1 \right) x^{n+1} + \\
 \binom{n+1}{2} x^n + \dots + \binom{n+1}{n+1} x + \binom{n+1}{2} x^{n-1} \sum_{i=1}^1 y^i + \binom{n+1}{3} x^{n-2} \sum_{i=1}^2 y^i + \\
 \dots + \binom{n+1}{n} x \sum_{i=1}^{n-1} y^i + \sum_{i=1}^n y^i
 \end{aligned}$$

Demonstração

$$\begin{aligned}
 x^2(x+1)^n + \sum_{i=1}^n (x+y)^i (x+1)^{n-i} &= x^2 \underbrace{(x+1)^n}_{(x+1)^{n-1}(x+1)} + \sum_{i=1}^{n-1} (x+y)^i (x+1)^{n-i} + \\
 \sum_{i=n}^n (x+y)^i (x+1)^{n-i} \\
 &= x^2(x+1)^{n-1}(x+1) + \sum_{i=1}^{n-1} (x+y)^i \underbrace{(x+1)^{n-i}}_{(x+1)^{n-1-i}(x+1)} + \underbrace{(x+y)^n}_{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}} \\
 &= x^2(x+1)^{n-1}(x+1) + (x+1) \sum_{i=1}^{n-1} (x+y)^i (x+1)^{n-1-i} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \\
 &= (x+1) \left( \underbrace{x^2(x+1)^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} (x+y)^i (x+1)^{n-1-i}}_{\text{Hipótese de Indução}} \right) + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \\
 &= (x+1) \left( \begin{aligned} &\binom{n}{0} x^{n+1} + \left( \binom{n}{1} - 1 \right) x^n + \binom{n}{2} x^{n-1} + \dots + \binom{n}{n} x + \binom{n}{2} x^{n-2} \sum_{i=1}^1 y^i + \\ &\binom{n}{3} x^{n-3} \sum_{i=1}^2 y^i + \dots + \binom{n}{n-1} x \sum_{i=1}^{n-2} y^i + \sum_{i=1}^{n-1} y^i \end{aligned} \right) + \\
 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \underbrace{\binom{n}{0}}_{\binom{n+1}{0}} x^{n+2} + \left( \binom{n}{1} - 1 \right) x^{n+1} + \binom{n}{2} x^n + \dots + \binom{n}{n} x^2 + \binom{n}{2} x^{n-1} \sum_{i=1}^1 y^i + \\
&\binom{n}{3} x^{n-2} \sum_{i=1}^2 y^i + \dots + \binom{n}{n-1} x^2 \sum_{i=1}^{n-2} y^i + x \sum_{i=1}^{n-1} y^i + \binom{n}{0} x^{n+1} + \\
&\left( \binom{n}{1} - 1 \right) x^n + \binom{n}{2} x^{n-1} + \dots + \underbrace{\binom{n}{n}}_{\binom{n+1}{n+1}} x + \binom{n}{2} x^{n-2} \sum_{i=1}^1 y^i + \binom{n}{3} x^{n-3} \sum_{i=1}^2 y^i + \\
&\dots + \binom{n}{n-1} x \sum_{i=1}^{n-2} y^i + \sum_{i=1}^{n-1} y^i + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \\
&= \binom{n+1}{0} x^{n+2} + \underbrace{\binom{n}{1}}_* x^{n+1} - \underbrace{x^{n+1}}_* + \underbrace{\binom{n}{2}}_{**} x^n + \dots + \underbrace{\binom{n}{n}}_{\binom{n+1}{n+1}} x^2 + \binom{n}{2} x^{n-1} \sum_{i=1}^1 y^i + \\
&\binom{n}{3} x^{n-2} \sum_{i=1}^2 y^i + \dots + \binom{n}{n-1} x^2 \sum_{i=1}^{n-2} y^i + x \sum_{i=1}^{n-1} y^i + \underbrace{\binom{n}{0}}_* x^{n+1} + \underbrace{\binom{n}{1}}_{**} x^n - x^n + \\
&\binom{n}{2} x^{n-1} + \dots + \binom{n+1}{n+1} x + \binom{n}{2} x^{n-2} \sum_{i=1}^1 y^i + \binom{n}{3} x^{n-3} \sum_{i=1}^2 y^i + \\
&\dots + \binom{n}{n-1} x \sum_{i=1}^{n-2} y^i + \sum_{i=1}^{n-1} y^i + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \\
&= \binom{n+1}{0} x^{n+2} + \left( \underbrace{\binom{n}{1} + \binom{n}{0}}_* - 1 \right) x^{n+1} + \left( \underbrace{\binom{n}{2} + \binom{n}{1}}_{**} \right) x^n + \\
&\dots + \binom{n+1}{n+1} x^2 + \binom{n}{2} x^{n-1} y + \binom{n}{3} x^{n-2} (y + y^2) + \\
&\dots + \binom{n}{n-1} x^2 \sum_{i=1}^{n-2} y^i + x \sum_{i=1}^{n-1} y^i - x^n + \binom{n}{2} x^{n-1} + \\
&\dots + \binom{n+1}{n+1} x + \binom{n}{2} x^{n-2} \sum_{i=1}^1 y^i + \binom{n}{3} x^{n-3} \sum_{i=1}^2 y^i + \\
&\dots + \binom{n}{n-1} x \sum_{i=1}^{n-2} y^i + \sum_{i=1}^{n-1} y^i + \binom{n}{0} y^n + \binom{n}{1} x y^{n-1} + \binom{n}{2} x^2 y^{n-2} + \dots + \binom{n}{n} x^n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \binom{n+1}{0} x^{n+2} + \left( \binom{n+1}{1} - 1 \right) x^{n+1} + \binom{n+1}{2} x^n + \dots + \binom{n+1}{n+1} x + \\
&\quad \binom{n+1}{2} x^{n-1} \sum_{i=1}^1 y^i + \binom{n+1}{3} x^{n-2} \sum_{i=1}^2 y^i + \dots + \binom{n+1}{n} x \sum_{i=1}^{n-1} y^i + \sum_{i=1}^n y^i
\end{aligned}$$

□

A partir da demonstração, constata-se a igualdade das expressões seguintes:

$$\begin{aligned}
T_n(x, y) &= x^2(x+1)^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} (x+y)^i (x+1)^{n-1-i} \\
T_n(x, y) &= \begin{cases} \binom{n}{0} x^{n+1} + \left( \binom{n}{1} - 1 \right) x^n + \binom{n}{2} x^{n-1} + \dots + \binom{n}{n} x \\ + \binom{n}{2} x^{n-2} \sum_{i=1}^1 y^i + \binom{n}{3} x^{n-3} \sum_{i=1}^2 y^i + \binom{n}{4} x^{n-4} \sum_{i=1}^3 y^i + \dots + \binom{n}{n-1} x \sum_{i=1}^{n-2} y^i \\ + \sum_{i=1}^{n-1} y^i \end{cases}
\end{aligned}$$

Estas fórmulas levaram-nos à construção de um novo triângulo, que passamos a descrever. Calculamos os polinómios de Tutte  $T_n(x, y)$  de grafos bipartidos completos, com  $2 \leq n \leq 9$ , e organizamos em três níveis, ou seja, em primeiro lugar os termos em  $x$ , em segundo lugar os termos em  $xy$  e por fim, os termos em  $y$ .

**Exemplo 4.9.1.** Vamos exemplificar as duas fórmulas, nos casos em que  $n = 3$  e  $n = 4$ .

Para  $n = 3$ :

$$\begin{aligned}
&x^2(x+1)^2 + \sum_{i=1}^2 (x+y)^i (x+1)^{2-i} = \binom{3}{0} x^4 + \left( \binom{3}{1} - 1 \right) x^3 + \binom{3}{2} x^2 + \\
&\quad \binom{3}{3} x + \binom{3}{2} x \underbrace{\sum_{i=1}^1 y^i}_y + \underbrace{\sum_{i=1}^2 y^i}_{y+y^2} \\
&= \underbrace{\binom{3}{0}}_1 x^4 + \left( \underbrace{\binom{3}{1}}_3 - 1 \right) x^3 + \underbrace{\binom{3}{2}}_3 x^2 + \underbrace{\binom{3}{3}}_1 x + \underbrace{\binom{3}{2}}_3 xy + y + y^2 \\
&= x^4 + 2x^3 + 3x^2 + x + 3xy + y + y^2
\end{aligned}$$

Para  $n = 4$ :

$$x^2(x+1)^3 + \sum_{i=1}^3 (x+y)^i (x+1)^{3-i} = \binom{4}{0} x^5 + \left( \binom{4}{1} - 1 \right) x^4 + \binom{4}{2} x^3 +$$

$$\binom{4}{3} x^2 + \binom{4}{4} x + \underbrace{\binom{4}{2} x^2 \sum_{i=1}^1 y^i}_y + \underbrace{\binom{4}{3} x \sum_{i=1}^2 y^i}_{y+y^2} + \underbrace{\sum_{i=1}^3 y^i}_{y+y^2+y^3}$$

Por seu lado, temos

$$x^2(x+1)^3 + \sum_{i=1}^3 (x+y)^i (x+1)^{3-i} = x^2 \underbrace{(x+1)^3}_{(x+1)^2(x+1)} + \sum_{i=1}^2 (x+y)^i (x+1)^{3-i} +$$

$$\sum_{i=3}^3 (x+y)^i (x+1)^{3-i}$$

$$= x^2(x+1)^2(x+1) + \sum_{i=1}^2 (x+y)^i \underbrace{(x+1)^{3-i}}_{(x+1)^{2-i}(x+1)} + \underbrace{(x+y)^3}_{\sum_{k=0}^3 \binom{3}{k} x^k y^{3-k}}$$

$$= x^2(x+1)^2(x+1) + (x+1) \sum_{i=1}^2 (x+y)^i (x+1)^{2-i} + \sum_{k=0}^3 \binom{3}{k} x^k y^{3-k}$$

$$= (x+1) \left( x^2(x+1)^2 + \sum_{i=1}^2 (x+y)^i (x+1)^{2-i} \right) + \sum_{k=0}^3 \binom{3}{k} x^k y^{3-k}$$

$$\stackrel{*}{=} (x+1) \left( \binom{3}{0} x^4 + \left( \binom{3}{1} - 1 \right) x^3 + \binom{3}{2} x^2 + \binom{3}{3} x + \binom{3}{2} x \sum_{i=1}^1 y^i + \sum_{i=1}^2 y^i \right) +$$

$$\sum_{k=0}^3 \binom{3}{k} x^k y^{3-k}$$

$$= \underbrace{\binom{3}{0} x^5}_{\binom{4}{0}} + \left( \binom{3}{1} - 1 \right) x^4 + \binom{3}{2} x^3 + \binom{3}{3} x^2 + \binom{3}{2} x^2 \sum_{i=1}^1 y^i + x \sum_{i=1}^2 y^i + \binom{3}{0} x^4 +$$

$$\left( \binom{3}{1} - 1 \right) x^3 + \binom{3}{2} x^2 + \binom{3}{3} x + \underbrace{\binom{3}{2} x \sum_{i=1}^1 y^i}_y + \underbrace{\sum_{i=1}^2 y^i}_{y+y^2} + \underbrace{\sum_{k=0}^3 \binom{3}{k} x^k y^{3-k}}_{\binom{3}{0} y^3 + \binom{3}{1} x y^2 + \binom{3}{2} x^2 y + \binom{3}{3} x^3}$$

$$\begin{aligned}
&= \binom{4}{0} x^5 + \underbrace{\binom{3}{1} x^4}_{*} - \underbrace{x^4}_{*} + \underbrace{\binom{3}{2} x^3}_{**} + \underbrace{\binom{3}{3} x^2}_{***} + \underbrace{\binom{3}{2} x^2 y}_{3} + xy + xy^2 + \underbrace{\binom{3}{0} x^4}_{*} + \\
&\quad \underbrace{\binom{3}{1} x^3}_{**} - x^3 + \underbrace{\binom{3}{2} x^2}_{***} + \underbrace{\binom{3}{3} x}_{\binom{4}{4}} + \underbrace{\binom{3}{2} xy}_{3} + y + y^2 + \binom{3}{0} y^3 + \underbrace{\binom{3}{1} xy^2}_{3} + \\
&\quad \underbrace{\binom{3}{2} x^2 y}_{3} + \underbrace{\binom{3}{3} x^3}_{1} \\
&= \binom{4}{0} x^5 + \left( \underbrace{\binom{3}{1} + \binom{3}{0}}_{\binom{4}{1}} - 1 \right) x^4 + \left( \underbrace{\binom{3}{2} + \binom{3}{1}}_{\binom{4}{2}} \right) x^3 + \left( \underbrace{\binom{3}{3} + \binom{3}{2}}_{\binom{4}{3}} \right) x^2 + \\
&\quad \binom{4}{4} x + 6x^2 y + 4xy^2 + 4xy + y + y^2 + y^3 \\
&= \binom{4}{0} x^5 + \left( \underbrace{\binom{4}{1}}_{4} - 1 \right) x^4 + \underbrace{\binom{4}{2}}_{6} x^3 + \underbrace{\binom{4}{3}}_{4} x^2 + \underbrace{\binom{4}{4}}_{1} x + 6x^2 y + 4xy^2 + 4xy + \\
&\quad y + y^2 + y^3 \\
&= x^5 + 3x^4 + 6x^3 + 4x^2 + x + 6x^2 y + 4xy^2 + 4xy + y + y^2 + y^3
\end{aligned}$$

Os polinómios de Tutte para grafos bipartidos completos, com  $n \in \mathbb{N}$  e  $2 \leq n \leq 9$  são dados por:

$$\begin{aligned}
T_2(x, y) &= x^2(x+1)^1 + \sum_{i=1}^1 (x+y)^i (x+1)^{1-i} = \begin{cases} x^3 + x^2 + x \\ y \end{cases} \\
T_3(x, y) &= x^2(x+1)^2 + \sum_{i=1}^2 (x+y)^i (x+1)^{2-i} = \begin{cases} x^4 + 2x^3 + 3x^2 + x \\ 3xy \\ y^2 + y \end{cases} \\
T_4(x, y) &= x^2(x+1)^3 + \sum_{i=1}^3 (x+y)^i (x+1)^{3-i} = \begin{cases} x^5 + 3x^4 + 6x^3 + 4x^2 + x \\ 6x^2 y + 4xy^2 + 4xy \\ y^3 + y^2 + y \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_5(x, y) &= x^2(x+1)^4 + \sum_{i=1}^4 (x+y)^i(x+1)^{4-i} = \begin{cases} x^6 + 4x^5 + 10x^4 + 10x^3 + 5x^2 + x \\ 10x^3y + 10x^2y^2 + 10x^2y + 5xy^3 \\ + 5xy^2 + 5xy \\ y^4 + y^3 + y^2 + y \end{cases} \\
T_6(x, y) &= x^2(x+1)^5 + \sum_{i=1}^5 (x+y)^i(x+1)^{5-i} = \begin{cases} x^7 + 5x^6 + 15x^5 + 20x^4 + 15x^3 \\ + 6x^2 + x \\ 15x^4y + 20x^3y^2 + 20x^3y \\ + 15x^2y^3 + 15x^2y^2 + 15x^2y \\ + 6xy^4 + 6xy^3 + 6xy^2 + 6xy \\ y^5 + y^4 + y^3 + y^2 + y \end{cases} \\
T_7(x, y) &= x^2(x+1)^6 + \sum_{i=1}^6 (x+y)^i(x+1)^{6-i} = \begin{cases} x^8 + 6x^7 + 21x^6 + 35x^5 + 35x^4 \\ + 21x^3 + 7x^2 + x \\ 21x^5y + 35x^4y^2 + 35x^4y + 35x^3y^3 \\ + 35x^3y^2 + 35x^3y + 21x^2y^4 \\ + 21x^2y^3 + 21x^2y^2 + 21x^2y + 6xy^4 \\ + 6xy^4 + 6xy^3 + 6xy^2 + 6xy \\ y^6 + y^5 + y^4 + y^3 + y^2 + y \end{cases} \\
T_8(x, y) &= x^2(x+1)^7 + \sum_{i=1}^7 (x+y)^i(x+1)^{7-i} = \begin{cases} x^9 + 7x^8 + 28x^7 + 56x^6 + 70x^5 \\ + 56x^4 + 28x^3 + 8x^2 + x \\ 28x^6y + 56x^5y^2 + 56x^5y + 70x^4y^3 \\ + 70x^4y^2 + 70x^4y + 56x^3y^4 + 56x^3y^3 \\ + 56x^3y^2 + 56x^3y + 28x^2y^5 + 28x^2y^4 \\ + 28x^2y^3 + 28x^2y^2 + 28x^2y + 8xy^6 \\ + 8xy^5 + 8xy^4 + 8xy^3 + 8xy^2 + 8xy \\ y^7 + y^6 + y^5 + y^4 + y^3 + y^2 + y \end{cases} \\
T_9(x, y) &= x^2(x+1)^8 + \sum_{i=1}^8 (x+y)^i(x+1)^{8-i} = \begin{cases} x^{10} + 8x^9 + 36x^8 + 84x^7 + 126x^6 \\ + 126x^5 + 84x^4 + 36x^3 + 9x^2 + x \\ 36x^7y + 84x^6y^2 + 84x^6y + 126x^5y^3 \\ + 126x^5y^2 + 126x^5y + 126x^4y^4 \\ + 126x^4y^3 + 126x^4y^2 + 126x^4y \\ + 84x^3y^5 + 84x^3y^4 + 84x^3y^3 + 84x^3y^2 \\ + 84x^3y + 36x^2y^6 + 36x^2y^5 + 36x^2y^4 \\ + 36x^2y^3 + 36x^2y^2 + 36x^2y + 9xy^7 \\ + 9xy^6 + 9xy^5 + 9xy^4 + 9xy^3 + 9xy^2 \\ + 9xy \\ y^8 + y^7 + y^6 + y^5 + y^4 + y^3 + y^2 + y \end{cases}
\end{aligned}$$



**Exemplo 4.9.2.** Para  $T_{9,5}$

$$\begin{aligned}
T_{9,5} &= T_{8,4} + T_{8,5} \\
&= T_{7,3} + T_{4,7} + T_{7,4} + T_{7,5} \\
&= T_{7,3} + 2T_{7,4} + T_{7,5} \\
&= T_{6,2} + T_{6,3} + 2(T_{6,3} + T_{6,4}) + T_{6,4} + T_{6,5} \\
&= T_{6,2} + 3T_{6,3} + 3T_{6,4} + T_{6,5} \\
&= T_{5,1} + T_{5,2} + 1 + 3(T_{5,2} + T_{5,3}) + 3(T_{5,3} + T_{5,4}) + T_{5,4} + T_{5,5} \\
&= T_{5,1} + 4T_{5,2} + 6T_{5,3} + 4T_{5,4} + \underbrace{T_{5,5}}_1 + 1 \\
&= T_{4,1} + 1 + 4(T_{4,1} + T_{4,2} + 1) + 6(T_{4,2} + T_{4,3}) + 4(T_{4,3} + \underbrace{T_{4,4}}_1) + 2 \\
&= 5T_{4,1} + 10T_{4,2} + 10T_{4,3} + 11 \\
&= 5(T_{3,1} + 1) + 10(T_{3,1} + T_{3,2} + 1) + 10(T_{3,2} + \underbrace{T_{3,3}}_1) + 11 \\
&= 15T_{3,1} + 20T_{3,2} + 46 \\
&= 15(\underbrace{T_{2,1}}_1 + 1) + 20(\underbrace{T_{2,1}}_1 + \underbrace{T_{2,2}}_1 + 1) + 46 \\
&= 30 + 60 + 36 \\
&= 126
\end{aligned}$$

A parte do triângulo de Tutte, que colorimos a verde,

$$T_{n,k} = T_{n-1,k-1} + T_{n-1,k}, \quad n > k, \quad n \geq 4, \quad k \geq 3$$

coincide com o triângulo de Pascal, isto é,

$$\begin{aligned}
T_{n,k} &= T_{n-1,k-1} + T_{n-1,k} \\
&= \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}
\end{aligned}$$

Verificamos ainda que os termos dos quadrados azuis, para  $n \geq 4$ , são iguais à soma de três parcelas, amarelo + laranja + azul,

$$\begin{aligned}
T_{n,2} &= \underbrace{T_{n-1,0}}_{\text{amarelo}} + \underbrace{T_{n-1,1}}_{\text{laranja}} + \underbrace{T_{n-1,2}}_{\text{azul}} \\
&= 1 + T_{n-1,1} + T_{n-1,2}, \quad n \geq 4
\end{aligned}$$

e percebemos que o triângulo de Tutte completo é semelhante ao triângulo de Pascal.

# Capítulo 5

## Triângulo DNG

O triângulo DNG representa a relação entre as três estruturas deste trabalho: os Designs, os Números e os Grafos. Desta forma, o triângulo DNG é a utilização de um determinado tipo de números para estabelecer pontes de ligação entre os designs e os grafos, ou entre os grafos e os designs. Após algumas tentativas, umas não foram completamente bem sucedidas (ver Anexos B, C, D e E). Este trabalho passou a focar-se mais nos números Eulerianos (Secção 3.6), nos grafos completos (Definição 4.2.1), nos grafos bipartidos (Subsecção 4.2) e no polinómio de Tutte (Secção 4.9).

### 5.1 Grafos completos e BIBDs

Para estabelecer a ligação entre um grafo completo  $K_n = (V, E)$ , com  $n \geq 3$ , e um  $(v, b, r, k, \lambda)$ -BIBD é necessário, em primeiro lugar, considerar que:

$|X| = |V| = n = v \rightarrow$  número de vértices, ou seja, o conjunto  $X$  corresponde aos vértices do grafo;

$|A| = |E| = \frac{n(n-1)}{2} = b \rightarrow$  número de arestas, ou seja, o conjunto  $A$  indica as arestas do grafo;

$\text{deg}(v_i) = n - 1 = r \rightarrow$  grau de cada vértice;

$k = 2$  pois cada aresta liga somente dois vértices. Assim, segundo a inequação de Fisher (equação (2.3)),  $n > 2$ , pois  $2 \leq k < v \Leftrightarrow 2 < v$ ;

$\lambda = 1$  pois cada par de vértices está ligado somente por uma aresta.

Para qualquer grafo completo  $K_n = (V, E)$  (Definição 4.2.1), com  $n \geq 3$ , o seu  $(v, b, r, k, \lambda)$ -BIBD correspondente é da forma

$$K_n \rightarrow \left( n, \frac{n(n-1)}{2}, n-1, 2, 1 \right) - \text{BIBD} \quad (5.1)$$

Para garantir a existência de um BIBD temos que  $vr = bk$  (equação (2.1)) e que

$\lambda(v - 1) = r(k - 1)$  (equação (2.2)), então

$$r = \frac{\lambda(v - 1)}{k - 1} = \frac{1(n - 1)}{1} = n - 1 \quad (5.2)$$

$$b = \frac{vr}{k} = \frac{n(n - 1)}{2} \quad (5.3)$$

Analisemos os seguintes grafos completos  $K_n$ , com  $n \geq 3$  (Figuras 5.1 a 5.4), e os seus BIBDs correspondentes.

Quando  $n = 3$  (Figura 5.1), existem três vértices ( $v = 3$ ), três arestas ( $b = 3$ ), o grau de cada vértice é dois ( $r = 2$ ), cada uma das arestas liga somente dois vértices ( $k = 2$ ) e cada par de vértices é ligado somente por uma aresta ( $\lambda = 1$ ).

$$(v, b, r, k, \lambda) = (3, 3, 2, 2, 1)$$

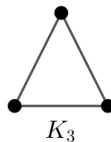


Figura 5.1: Grafo completo  $K_3$

Se  $n = 4$  (ver Figura 5.2), existem quatro vértices ( $v = 4$ ), seis arestas ( $b = 6$ ), o grau de cada vértice é três ( $r = 3$ ), cada uma das arestas liga somente dois vértices ( $k = 2$ ) e cada par de vértices é ligado somente por uma aresta ( $\lambda = 1$ ).

$$(v, b, r, k, \lambda) = (4, 6, 3, 2, 1)$$

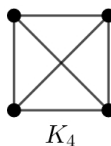


Figura 5.2: Grafo completo  $K_4$

Para  $n = 5$  (Figura 5.3), existem cinco vértices ( $v = 5$ ), dez arestas ( $b = 10$ ), o grau de cada vértice é quatro ( $r = 4$ ), cada uma das arestas liga somente dois vértices ( $k = 2$ ) e cada par de vértices é ligado somente por uma aresta ( $\lambda = 1$ ).

$$(v, b, r, k, \lambda) = (5, 10, 4, 2, 1)$$

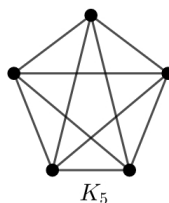


Figura 5.3: Grafo completo  $K_5$

No caso de  $n = 6$  (ver Figura 5.4), existem seis vértices ( $v = 6$ ), quinze arestas ( $b = 15$ ), o grau de cada vértice é cinco ( $r = 5$ ), cada uma das arestas liga somente dois vértices ( $k = 2$ ) e cada par de vértices é ligado somente por uma aresta ( $\lambda = 1$ ).

$$(v, b, r, k, \lambda) = (6, 15, 5, 2, 1)$$

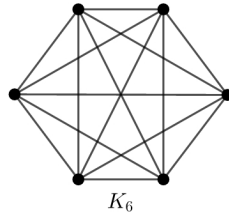


Figura 5.4: Grafo completo  $K_6$

Resumindo:

Tabela 5.1: BIBDs correspondentes aos grafos completos

$n$	$K_n$		$v$	$b$	$r$	$k$	$\lambda$
3	$K_3$	$\rightarrow$	3	3	2	2	1
4	$K_4$	$\rightarrow$	4	6	3	2	1
5	$K_5$	$\rightarrow$	5	10	4	2	1
6	$K_6$	$\rightarrow$	6	15	5	2	1
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n$	$K_n$	$\rightarrow$	$n$	$\frac{n(n-1)}{2}$	$n-1$	2	1

Considerando a sequência dos valores de  $b$ ,

$$\begin{aligned} b_3 &= 3 \\ b_4 &= 6 = b_3 + 3 \\ b_5 &= 10 = b_4 + 4 \\ b_6 &= 15 = b_5 + 5 \\ &\vdots \end{aligned}$$

obtemos a seguinte relação de recorrência:

$$\left| \begin{array}{l} b_3 = 3 \\ b_n = b_{n-1} + n - 1, \quad n > 3 \end{array} \right. \rightarrow b_n = \frac{n(n-1)}{2}, \quad n \geq 3$$

Iremos provar esta relação de recorrência utilizando o princípio de Indução Matemática (versão forte):

$$\left| \begin{array}{l} b_3 = 3 \\ \underbrace{b_n = b_{n-1} + n - 1}_{(1)}, n > 3 \end{array} \right. \rightarrow \underbrace{b_n = \frac{n(n-1)}{2}}_{(2)}, n \geq 3$$

Hipótese de Indução: Verifica-se para  $b_3$  e  $b_4$  e ... e  $b_n$

Tese de Indução: Provar que:  $b_{n+1} = \frac{(n+1)n}{2}$

*Demonstração*

$$\begin{aligned} b_{n+1} &\stackrel{(1)}{=} b_n + n \\ &\stackrel{(2)}{=} \frac{n(n-1)}{2} + n \\ &= \frac{n(n-1) + 2n}{2} \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \\ \therefore b_n &= \frac{n(n-1)}{2}, n \geq 3 \end{aligned}$$

□

Em todos os exemplos verifica-se a seguinte relação entre os grafos completos  $K_n$  e os BIBDs

$$K_n \rightarrow \left( n, \frac{n(n-1)}{2}, n-1, 2, 1 \right)$$

### 5.1.1 Grafo Conexo, Euleriano, Hamiltoniano e Planar

Os grafos  $K_n$  são conexos, pois todos os seus vértices estão ligados entre si por um caminho (ver Definição 4.2.8). No entanto, estes grafos só são Eulerianos quando o grau de todos os seus vértices é par (ver Teorema 4.2.1). Como o grau de cada vértice nestes grafos é  $(n-1)$ , então os grafos  $K_n$  Eulerianos são aqueles em que o número de vértices é ímpar, ou seja, quando o elemento  $v$  do BIBD é um número ímpar.

Para verificar se os grafos  $K_n$  são Hamiltonianos (Subsecção 4.2.2) podemos utilizar o Teorema de Dirac (ver Teorema 4.2.2) ou o de Ore (ver Teorema 4.2.3).

Através do Teorema de Dirac, para  $n \geq 3$ , verifica-se que:

$$\deg(v) \geq \frac{n}{2} \Leftrightarrow n-1 \geq \frac{n}{2} \Leftrightarrow 2n-2 \geq n \Leftrightarrow n \geq 2$$

Através do Teorema de Ore, para  $n \geq 3$ , verifica-se que:

$$\deg(v) + \deg(u) \geq n \Leftrightarrow (n-1) + (n-1) \geq n \Leftrightarrow 2n-2 \geq n \Leftrightarrow n \geq 2$$

Em ambos os teoremas verifica-se que os grafos  $K_n$  são Hamiltonianos quando  $n \geq 3$  e para qualquer  $i$ ,  $\deg(v_i) = n - 1$ , com  $v_i \in V$  e  $K_n = (V, E)$ .

Como os grafos  $K_n$  são simples e conexos, a inequação  $|E| \leq 3|V| - 6$  (ver (4.4)) pode ser utilizada para verificar se o grafo é ou não planar (Corolário 4.2.4.1).

$$\begin{aligned} |E| \leq 3|V| - 6 &\Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2} \leq 3n - 6 \Leftrightarrow n(n-1) \leq 6n - 12 \Leftrightarrow n^2 - 7n + 12 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow n \leq 4 \wedge n \geq 3 \Leftrightarrow 3 \leq n \leq 4 \end{aligned}$$

Como  $3 \leq n \leq 4$  e  $n \in \mathbb{N}$ , então os grafos  $K_n$  são planares para  $n = 3$  e  $n = 4$ .

Desta forma, sabendo que os grafos  $K_3$  e  $K_4$  são conexos e planares, usando a fórmula de Euler (4.3), é possível calcular o número de faces destes grafos e por (4.2) pode-se calcular a soma do grau de cada uma das faces.

**Exemplo 5.1.1.** Para  $K_3$ :

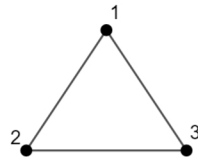


Figura 5.5: Grafo  $K_3$

Analisando o grafo da Figura 5.5, sabe-se que  $|V| = 3$  e  $|E| = 3$ , ou seja,

$$|V| - |E| + |f| = 2 \Leftrightarrow 3 - 3 + |f| = 2 \Leftrightarrow |f| = 2, \text{ donde, temos duas faces: } f_1 \text{ e } f_2.$$

Desta forma, sabendo que  $\deg(f_1) = \deg(f_2)$  (Definição 4.2.12), os graus de cada uma das faces são os seguintes

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \deg(f_i) &= 2|E| \Leftrightarrow \sum_{i=1}^2 \deg(f_i) = 2 \times 3 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^2 \deg(f_i) = 6 \\ &\Leftrightarrow \deg(f_1) = \deg(f_2) = 3 \end{aligned}$$

Como os graus das duas faces do grafo  $K_3$  são maiores ou iguais a três e o grau dos vértices é menor do que três então, pela Definição 4.2.13, considera-se que o grafo  $K_3$  não é poliédrico.

Para  $K_4$ :

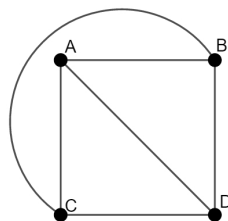


Figura 5.6: Grafo  $K_4$

Analisando o grafo da Figura 5.6, sabe-se que  $|V| = 4$  e  $|E| = 6$ , ou seja,

$$|V| - |E| + |f| = 2 \Leftrightarrow 4 - 6 + |f| = 2 \Leftrightarrow -2 + |f| = 2 \Leftrightarrow |f| = 4, \text{ logo,}$$

o grafo  $K_4$  tem 4 faces:  $f_1, f_2, f_3$  e  $f_4$ .

Desta forma, sabendo que  $\deg(f_1) = \deg(f_2) = \deg(f_3) = \deg(f_4)$  (Definição 4.2.12), os graus de cada uma das faces são os seguintes:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \deg(f_i) &= 2|E| \Leftrightarrow \sum_{i=1}^4 \deg(f_i) = 2 \times 6 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^4 \deg(f_i) = 12 \\ \Leftrightarrow \deg(f_1) + \deg(f_2) + \deg(f_3) + \deg(f_4) &= 12 \Leftrightarrow 4\deg(f_1) = 12 \\ \Leftrightarrow \deg(f_1) = \deg(f_2) = \deg(f_3) = \deg(f_4) &= 3 \end{aligned}$$

Como os graus das quatro faces do grafo  $K_4$  são maiores ou iguais a três e o grau de todos os vértices é igual a três então, pela Definição 4.2.13, o grafo  $K_4$  é poliédrico.

### 5.1.2 Matrizes de incidência e de adjacência

Na matriz de incidência (Secção 4.3) dos grafos  $K_n$  a soma de cada linha é igual a  $n - 1$ , pois este é o grau de todos os vértices. Como o elemento  $k = 2$  (cada aresta liga só dois vértices), então a soma de cada coluna da matriz de incidência dos grafos  $K_n$  é igual a dois.

$$I_{K_n} = \begin{matrix} & \mathbf{12} & \mathbf{13} & \dots & \mathbf{1n} & \mathbf{23} & \dots & \mathbf{2n} & \dots & \mathbf{(n-1)n} \\ \mathbf{1} & \left[ \begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{n-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \\ \mathbf{n} & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 1 & \dots & 1 \end{array} \right. \end{matrix}$$

Figura 5.7: Matriz de incidência dos grafos  $K_n$

Na matriz de adjacência (Secção 4.4), como todos os vértices estão ligados entre si e não existem *loops*, a diagonal da matriz de adjacência dos grafos  $K_n$  é igual a zero e os restantes elementos iguais a um.

$$A_{K_n} = \begin{matrix} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \dots & \mathbf{n} \\ \mathbf{1} & \left[ \begin{array}{cccc} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{n} & 1 & 1 & \dots & 0 \end{array} \right. \end{matrix}$$

Figura 5.8: Matriz de adjacência dos grafos  $K_n$

### 5.1.3 Bloco Complementar

Sabendo que o bloco complementar de um  $(v, b, r, k, \lambda)$ -BIBD, com  $k \leq v - 2$ , é da forma  $(v, b, b - r, v - k, b - 2r + \lambda)$ -BIBD (ver Teorema 2.2.1), então o bloco complementar de um  $(n, \frac{n(n-1)}{2}, n - 1, 2, 1)$ -BIBD de um grafo  $K_n$  é da forma

$$\left(n, \frac{n(n-1)}{2}, \frac{n(n-1)}{2} - (n-1), n-2, \frac{n(n-1)}{2} - 2(n-1) + 1\right)\text{-BIBD} \quad (5.4)$$

Assim:

$$\left(n, \frac{n(n-1)}{2}, n-1, 2, 1\right) \rightarrow \left(n, \frac{n(n-1)}{2}, \frac{(n-2)(n-1)}{2}, n-2, \frac{(n-4)(n-1)+2}{2}\right)$$

Como o bloco complementar só existe se  $k \leq v - 2$  e dado que  $k = 2$  vem  $2 \leq n - 2 \Leftrightarrow n \geq 4$ , ou seja, apenas os grafos  $K_n$  com  $n \geq 4$  poderão ter blocos complementares. Por outro lado, tendo em conta (5.4), só poderá ser  $n = 4$ .

Conclui-se então que só o grafo completo  $K_4$  é que tem associado um BIBD complementar.

### 5.1.4 Matching Perfeito

Nos grafos  $K_n$ , com  $n \geq 4$ , existe *matching* perfeito  $M$  (Secção 4.5) quando o número de vértices é par, pois  $|M| = \frac{n}{2}$ .

**Exemplo 5.1.2.** Considerando os grafos  $K_4$  e  $K_5$ , temos que:

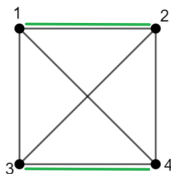


Figura 5.9: *Matching* perfeito do grafo  $K_4$

Para  $K_4$  existe um *matching* perfeito  $M$  (ver Figura 5.9), pois  $M$  satura todos os vértices uma vez que  $M = \{12, 34\}$ .

No exemplo da Figura 5.10 confirmamos que em  $K_5$  não existe *matching* perfeito (note-se que  $n = 5 = |V|$  é ímpar).

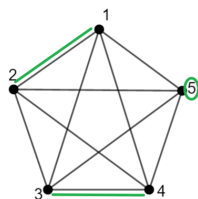


Figura 5.10: *Matching* perfeito do grafo  $K_5$

### 5.1.5 Árvore Geradora

Através do Teorema de Cayley (ver Teorema 4.6.1) sabe-se que o número de árvores geradoras de um grafo  $K_n$ , com  $n \geq 3$  é igual a  $r(K_n) = n^{n-2}$ .

O Teorema de Cayley pode ser obtido através do Teorema 4.6.2 da árvore-matriz, da forma que se segue.

Consideremos o caso particular de  $n = 4$ , ou seja,  $K_4$  (ver Figura 5.11):

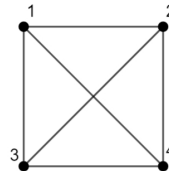


Figura 5.11: Grafo completo  $K_4$

A matriz de adjacência é a seguinte:

$$A_{K_4} = \begin{matrix} & \begin{matrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Figura 5.12: Matriz de adjacência do grafo completo  $K_4$

A matriz  $S$  é a seguinte:

$$S = \begin{matrix} & \begin{matrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \end{matrix} \stackrel{3=n-1}{=} \begin{matrix} & \begin{matrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \end{matrix} & \begin{bmatrix} (n-1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (n-1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (n-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (n-1) \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Figura 5.13: Matriz  $S$  do grafo completo  $K_4$

Assim, subtraindo a matriz  $A_{K_4}$  à matriz  $S$ , calcula-se a seguinte matriz  $Q$ :

$$Q = S - A_{K_4} = \begin{bmatrix} (n-1) & -1 & -1 & -1 \\ -1 & (n-1) & -1 & -1 \\ -1 & -1 & (n-1) & -1 \\ -1 & -1 & -1 & (n-1) \end{bmatrix}$$

Se considerarmos  $i = 4$ , então serão retiradas a quarta linha e a quarta coluna, para depois ser calculado o determinante da matriz resultante.

$$\begin{aligned}
T(K_4) &= \begin{vmatrix} (n-1) & -1 & -1 \\ -1 & (n-1) & -1 \\ -1 & -1 & (n-1) \end{vmatrix} = (n-1) \begin{vmatrix} (n-1) & -1 \\ -1 & (n-1) \end{vmatrix} \\
&+ 1 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & (n-1) \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} -1 & (n-1) \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = n^3 - 3n^2 = n^2(n-3)
\end{aligned}$$

Como  $n = 4$ , então  $2 = n - 2$  e  $3 = n - 1$ , logo

$n^2(n-3) = n^{n-2}(n - (n-1)) = n^{n-2}(n - n + 1) = n^{n-2} = r(K_n)$ , tal como indica o Teorema de Cayley.

### 5.1.6 Digrafos

Nesta secção vamos considerar os digrafos completos, logo o correspondente BIBD será  $(n, \frac{n(n-1)}{2}, n-1, 2, 1)$ , onde  $r$  é a soma dos graus de entrada e saída.

Sabendo que um digrafo é um grafo orientado (ver Definição 4.8) e considerando a orientação das setas do menor número para o maior, então para o  $(4, 6, 3, 2, 1)$ -BIBD, o correspondente digrafo é representado como podemos ver na Figura 5.14.

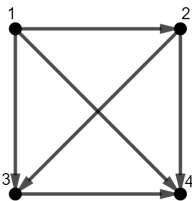


Figura 5.14: Digrafo de um  $(4, 6, 3, 2, 1)$ -BIBD

Ao analisar este digrafo percebe-se que um dos vértices só tem saídas e outro vértice só tem entradas (ver Tabela 5.2).

Tabela 5.2: Graus de entrada e de saída de cada um dos vértices

Vértices	1	2	3	4
Grau de entrada	0	1	2	3
Grau de saída	3	2	1	0

Assim, é possível concluir que, para o  $(n, \frac{n(n-1)}{2}, n-1, 2, 1)$ -BIBD, os graus de entrada e de saída dos vértices são da forma indicada na Tabela 5.3:

Tabela 5.3: Graus de entrada e de saída de cada um dos vértices de um digrafo completo

Vértices	1	2	...	n
Grau de entrada	$n - n = 0$	$n - (n - 1) = 1$	...	$n - 1$
Grau de saída	$n - 1$	$n - 2$	...	$n - n = 0$

## 5.2 Grafos especiais e BIBDs

Num grafo caminho, cíclico ou roda existe um BIBD correspondente apenas nos seguintes casos:

Para o grafo caminho  $P_2$  (ver Definição 4.2.5), o BIBD correspondente será igual ao BIBD do grafo completo  $K_2$ , ou seja,  $P_2 \rightarrow (2, 1, 1, 2, 1)$ .

Para o grafo cíclico  $C_3$  (ver Definição 4.2.2), o BIBD correspondente será igual ao BIBD do grafo completo  $K_3$ , ou seja,  $C_3 \rightarrow (3, 3, 3, 2, 1)$ .

Para o grafo roda  $W_4$  (ver Definição 4.2.3), o BIBD correspondente será igual ao BIBD do grafo completo  $K_4$ , ou seja,  $W_4 \rightarrow (4, 6, 3, 2, 1)$ .

## 5.3 Multigrafos e BIBDs

A construção de um multigrafo completo a partir de um BIBD faz-se de forma análoga à exposta no início deste Capítulo, para os grafos completos  $K_n$ . No entanto, como se trata de um multigrafo completo, os pares de vértices podem estar ligados por duas ou mais arestas (ver Definição 4.1.2), o que significa que o parâmetro  $\lambda$  do BIBD pode ser qualquer número natural maior do que um. Note-se que  $k = 2$  porque cada aresta liga somente dois vértices.

Sabemos que se um  $(v, b, r, k, \lambda)$ -BIBD existe, então  $vr = bk$  (equação (2.1)) e  $\lambda(v - 1) = r(k - 1)$  (equação (2.2)).

Temos:

$$r = \frac{\lambda(v - 1)}{k - 1} = \frac{\lambda(n - 1)}{1} = \lambda(n - 1), \text{ logo}$$

$$b = \frac{vr}{k} = \frac{n\lambda(n - 1)}{2}$$

Obtém-se  $(n, \frac{n\lambda(n-1)}{2}, \lambda(n - 1), 2, \lambda)$ -BIBD.

Se cada par de vértices estiver ligado por duas arestas, ou seja,  $\lambda = 2$ , então

$$(n, n(n - 1), 2(n - 1), 2, 2) - \text{BIBD} \quad (5.5)$$

**Exemplo 5.3.1.** Para  $v = 4 = n$  e  $\lambda = 2$  obtemos o seguinte multigrafo (ver Figura 5.15).

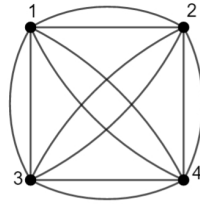


Figura 5.15: Multigrafo do  $(4, 12, 6, 2, 2)$ -BIBD

No caso de  $v = 4 = n$  e de  $\lambda = 3$ , o multigrafo que se obtém é:

$$\left( n, \frac{3n(n-1)}{2}, 3(n-1), 2, 3 \right) - \text{BIBD}$$

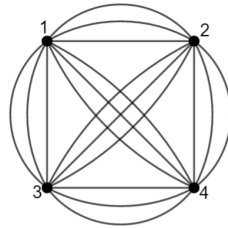


Figura 5.16: Multigrafo do  $(4, 18, 9, 2, 3)$ -BIBD

## 5.4 Grafos completos e BIBDs simétricos

Para um BIBD ser simétrico, é necessário que  $v = b$  (ou  $r = k$ ) (ver Definição 2.1.3). Sabendo que para ser possível a construção de um grafo completo a partir de um BIBD, este terá de ser da forma  $\left( n, \frac{n\lambda(n-1)}{2}, \lambda(n-1), 2, \lambda \right)$ , então:

$$v = b \quad \text{ou} \quad r = k$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{n\lambda(n-1)}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2n = n\lambda(n-1)$$

$$\Leftrightarrow 2 = \lambda(n-1)$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{2}{n-1}$$

Tem-se  $\lambda = \frac{2}{n-1}$  e  $\lambda \in \mathbb{N}$ , então  $n = 2 \vee n = 3$ . Como  $v > 2 \Rightarrow v = 3 = n$ .

$$\lambda = \frac{2}{3-1} = 1$$

$$b = \frac{3 \times 1(3-1)}{2} = 3 = v$$

$$r = 1(3-1) = 2 = k$$

Assim, um BIBD simétrico de um grafo, com  $n = 3$ , é da forma  $(3, 3, 2, 2, 1)$ , ou seja, é o mesmo BIBD associado ao grafo completo  $K_3$  (Figura 5.17).

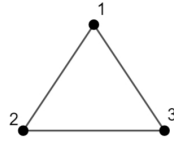


Figura 5.17: Grafo do BIBD simétrico  $(3, 3, 2, 2, 1)$

## 5.5 Números Eulerianos e BIBDs

Tal como foi visto anteriormente, na fórmula (3.6),

$$E(n, k) = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{n+1}{j} (k+1-j)^n, \quad n > k, \quad n \in \mathbb{N}, \quad k \in \mathbb{N}_0$$

Utilizaremos  $k = \lambda$ ; esta escolha prende-se com a ligação entre  $E(n, \lambda)$  e os BIBDs, que iremos abordar.

$$E(n, \lambda) = \sum_{j=0}^{\lambda} (-1)^j \binom{n+1}{j} (\lambda+1-j)^n$$

Para  $\lambda = 1$ :

$$\begin{aligned} E(n, 1) &= \sum_{j=0}^1 (-1)^j \binom{n+1}{j} (1+1-j)^n \\ &= (-1)^0 \binom{n+1}{0} (2-0)^n + (-1)^1 \binom{n+1}{1} (2-1)^n \\ &= \underbrace{\binom{n+1}{0}}_1 2^n - \underbrace{\binom{n+1}{1}}_{n+1} 1^n \\ &= 2^n - (n+1) \end{aligned}$$

Assim

$$E(n, 1) = 2^n - (n+1) \rightarrow \left( n, \frac{n^2-n}{2}, n-1, 2, 1 \right) - \text{BIBD} \quad (5.6)$$

Para cada  $n$  o BIBD resultante de  $E(n, 1)$  (ver Tabela 5.4) é o mesmo BIBD resultante dos grafos completos  $K_n$  (ver expressão (5.1)). A Figura 5.2 é do grafo completo particular  $K_4$ .

Tabela 5.4: BIBD resultante de  $E(n, 1)$ 

$E(n, \lambda)$	$v$	$b$	$r$	$k$	$\lambda$	$K_n$
$E(3, 1) = 4$	3	3	2	2	1	$K_3$
$E(4, 1) = 11$	4	6	3	2	1	$K_4$
$E(5, 1) = 26$	5	10	4	2	1	$K_5$
$E(6, 1) = 57$	6	15	5	2	1	$K_6$
$E(7, 1) = 120$	7	21	6	2	1	$K_7$
$E(8, 1) = 247$	8	28	7	2	1	$K_8$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$E(n, 1) = 2^n - (n + 1)$	$n$	$\frac{n^2 - n}{2}$	$n - 1$	2	1	$K_n, n \geq 3$

Para  $\lambda = 2$ :

$$\begin{aligned}
 E(n, 2) &= \sum_{j=0}^2 (-1)^j \binom{n+1}{j} (2+1-j)^n \\
 &= (-1)^0 \binom{n+1}{0} (3-0)^n + (-1)^1 \binom{n+1}{1} (3-1)^n + (-1)^2 \binom{n+1}{2} (3-2)^n \\
 &= \binom{n+1}{0} 3^n - \binom{n+1}{1} 2^n + \binom{n+1}{2} 1^n \\
 &= 3^n - (n+1)2^n + \frac{(n+1)n}{2} \\
 &= 3^n - 2^n(n+1) + \frac{n^2+n}{2}
 \end{aligned}$$

Assim

$$E(n, 2) = 3^n - (n+1)2^n + \frac{(n+1)n}{2} \rightarrow (n, n(n-1), 2(n-1), 2, 2) - \text{BIBD} \quad (5.7)$$

Para cada  $n$ , este BIBD, resultante de  $E(n, 2)$  (ver Tabela 5.5), é o mesmo BIBD resultante do grafo completo com arestas duplas, exemplificado na Figura 5.15, para  $n = 4$ , através da expressão (5.5).

Tabela 5.5: BIBD resultante de  $E(n, 2)$ 

$E(n, \lambda)$	$v$	$b$	$r$	$k$	$\lambda$	$K_n$
$E(3, 2) = 11$	3	6	4	2	2	$2K_3$
$E(4, 2) = 11$	4	12	6	2	2	$2K_4$
$E(5, 2) = 66$	5	20	8	2	2	$2K_5$
$E(6, 2) = 302$	6	30	10	2	2	$2K_6$
$E(7, 2) = 1191$	7	42	12	2	2	$2K_7$
$E(8, 2) = 4293$	8	56	14	2	2	$2K_8$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$E(n, 2) = 3^n - 2^n(n+1) + \frac{n^2+n}{2}$	$n$	$n^2 - n$	$2(n-1)$	2	2	$2K_n, n \geq 3$

Para  $\lambda = 3$ :

$$\begin{aligned}
 E(n, 3) &= \sum_{j=0}^3 (-1)^j \binom{n+1}{j} (3+1-j)^n \\
 &= (-1)^0 \binom{n+1}{0} (4-0)^n + (-1)^1 \binom{n+1}{1} (4-1)^n + (-1)^2 \binom{n+1}{2} (4-2)^n + \\
 &\quad (-1)^3 \binom{n+1}{3} (4-3)^n \\
 &= \binom{n+1}{0} 4^n - \binom{n+1}{1} 3^n + \binom{n+1}{2} 2^n - \binom{n+1}{3} 1^n \\
 &= 4^n - 3^n(n+1) + 2^n \binom{n+1}{2} - \binom{n+1}{3} \\
 &= 4^n - 3^n(n+1) + 2^n \frac{n^2+n}{2} - \frac{n^3-n}{6}
 \end{aligned}$$

Assim

$$E(n, 3) = \frac{1}{6}n + 2^{2n} + \frac{1}{2}2^n n - 3^n n + \frac{1}{2}2^n n^2 - 3^n - \frac{1}{6}n^3 \rightarrow \left( n, \frac{3n(n-1)}{2}, 3(n-1), 2, 3 \right) \quad (5.8)$$

Tabela 5.6: BIBD resultante de  $E(n, 3)$

$E(n, \lambda)$	$v$	$b$	$r$	$k$	$\lambda$	$K_n$
$E(4, 3) = 1$	4	18	9	2	3	$3K_4$
$E(5, 3) = 26$	5	30	12	2	3	$3K_5$
$E(6, 3) = 302$	6	45	15	2	3	$3K_6$
$E(7, 3) = 2416$	7	63	18	2	3	$3K_7$
$E(8, 3) = 15619$	8	84	21	2	3	$3K_8$
$E(9, 3) = 88234$	9	108	24	2	3	$3K_9$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$E(n, 3) = 4^n - 3^n(n+1) + 2^n \frac{n^2+n}{2} - \frac{n^3-n}{6}$	$n$	$\frac{3n(n-1)}{2}$	$3(n-1)$	2	3	$3K_n, n \geq 3$

Resumindo:

$$E(n, 1) \rightarrow \left( n, \frac{n(n-1)}{2}, n-1, 2, 1 \right) - \text{BIBD}$$

$$E(n, 2) \rightarrow \left( n, \frac{2n(n-1)}{2}, 2(n-1), 2, 2 \right) - \text{BIBD}$$

$$E(n, 3) \rightarrow \left( n, \frac{3n(n-1)}{2}, 3(n-1), 2, 3 \right) - \text{BIBD}$$

$$E(n, 4) \rightarrow \left( n, \frac{4n(n-1)}{2}, 4(n-1), 2, 4 \right) - \text{BIBD}$$

$$\begin{aligned}
& \vdots \\
E(n, \lambda) & \rightarrow \left( n, \frac{\lambda n(n-1)}{2}, \lambda(n-1), 2, \lambda \right), \quad n \geq 3 \text{ e } \lambda < n \quad (5.9) \\
r & = \frac{\lambda(v-1)}{k-1} = \frac{\lambda(n-1)}{1} = \lambda(n-1) \\
b & = \frac{vr}{k} = \frac{n\lambda(n-1)}{2}
\end{aligned}$$

Comprovar que  $\frac{\lambda n(n-1)}{2}$  é sempre um número natural, é equivalente a provar que:

$$\frac{\lambda n^2 - \lambda n}{2} \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq 3 \forall \lambda < n \Leftrightarrow \lambda n^2 - \lambda n \text{ é múltiplo de } 2, \quad \forall n \geq 3 \forall \lambda < n$$

$$\forall n \geq 3, \forall \lambda < n, \exists t \in \mathbb{N} : \lambda n^2 - \lambda n = 2t$$

Vamos fazer a demonstração recorrendo ao método de Indução Matemática:

$$\text{Para } n = 3 : \lambda 3^2 - \lambda 3 = 2t \Leftrightarrow 6\lambda = 2t \Leftrightarrow t = 3\lambda \in \mathbb{N}$$

$$\text{Hipótese de Indução: } \exists t \in \mathbb{N} : \lambda n^2 - \lambda n = 2t$$

$$\text{Tese de Indução: } \exists s \in \mathbb{N} : \lambda(n+1)^2 - \lambda(n+1) = 2s$$

*Demonstração*

$$\begin{aligned}
\lambda(n+1)^2 - \lambda(n+1) & = \lambda n^2 + 2\lambda n + \lambda - \lambda n - \lambda \\
& = \underbrace{\lambda n^2 - \lambda n}_{H.I.} + 2\lambda n \\
& = 2t + 2\lambda n \\
& = \underbrace{2(t + \lambda n)}_{\in \mathbb{N}}, \text{ pois } t, \lambda, n \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

basta considerar  $s = t + \lambda n \in \mathbb{N}$  e teremos o pretendido

$$\therefore \exists t \in \mathbb{N} : \lambda n^2 - \lambda n = 2t$$

□

## 5.6 Polinómio de Tutte e BIBDs

Para estabelecer uma ligação entre o polinómio de Tutte de grafos bipartidos completos (equação (4.11)), com  $n \geq 3$ , e os BIBDs, vamos considerar que o número de parcelas em  $x$  no polinómio de Tutte é equivalente ao valor  $v$  no BIBD, que o número de parcelas em  $xy$  no polinómio de Tutte é equivalente ao valor  $\lambda$  no BIBD e que o número de parcelas em  $y$  no polinómio de Tutte é equivalente ao valor  $k$  no BIBD.

De seguida, a partir dos valores de  $v$ ,  $\lambda$  e  $k$ , calculámos os valores de  $b$  e  $r$  através das equações (2.1) e (2.2).

Para chegarmos à fórmula exata de como passar de um polinómio de Tutte de grafos bipartidos completos, com  $n \geq 3$ , para um BIBD foi necessário descobrir os BIBDs para os primeiros polinómios de Tutte de grafos bipartidos, com  $n \geq 3$ , e descobrir a relação entre eles:

$$T_n(x, y) = \begin{cases} v = n + 1 = \text{número de parcelas em } x \\ k = n - 1 = \text{número de parcelas em } y \\ \lambda = \frac{(n-1)(n-2)}{2} = \text{número de parcelas em } xy \end{cases},$$

**Exemplo 5.6.1.** Considera-se os polinómios de Tutte de grafos bipartidos, em que  $3 \leq n \leq 6$ .

$$\text{Para } n = 3 \rightarrow T_3(x, y) = \begin{cases} x^4 + 2x^3 + 3x^2 + x \\ 3xy \\ y^2 + y \end{cases},$$

$$\text{temos } \begin{cases} \text{quatro termos em } x, \text{ ou seja, } v = 4 \\ \text{um termo em } xy, \text{ ou seja, } \lambda = 1 \\ \text{dois termos em } y, \text{ ou seja, } k = 2 \end{cases}$$

Assim,

$$\lambda(v - 1) = r(k - 1) \Leftrightarrow 1(4 - 1) = r(2 - 1) \Leftrightarrow r = 3$$

$$vr = bk \Leftrightarrow 4r = 2b \Leftrightarrow \frac{4 \times 3}{2} = b \Leftrightarrow b = 6$$

$$\text{Para } n = 4 \rightarrow T_4(x, y) = \begin{cases} x^5 + 3x^4 + 6x^3 + 4x^2 + x \\ 6x^2y + 4xy^2 + 4xy \\ y^3 + y^2 + y \end{cases},$$

$$\text{temos } \begin{cases} \text{cinco termos em } x, \text{ ou seja, } v = 5 \\ \text{três termos em } xy, \text{ ou seja, } \lambda = 3 \\ \text{três termos em } y, \text{ ou seja, } k = 3 \end{cases}$$

Assim,

$$\lambda(v - 1) = r(k - 1) \Leftrightarrow 3(5 - 1) = r(3 - 1) \Leftrightarrow \frac{3 \times 4}{2} = r \Leftrightarrow r = 6$$

$$vr = bk \Leftrightarrow 5r = 3b \Leftrightarrow \frac{5 \times 6}{3} = b \Leftrightarrow b = 10$$

$$\text{Para } n = 5 \rightarrow T_5(x, y) = \begin{cases} x^6 + 4x^5 + 10x^4 + 10x^3 + 5x^2 + x \\ 10x^3y + 10x^2y^2 + 10x^2y + 5xy^3 + 5xy^2 + 5xy \\ y^4 + y^3 + y^2 + y \end{cases},$$

$$\text{temos } \begin{cases} \text{seis termos em } x, \text{ ou seja, } v = 6 \\ \text{seis termos em } xy, \text{ ou seja, } \lambda = 6 \\ \text{quatro termos em } y, \text{ ou seja, } k = 4 \end{cases}$$

Assim,

$$\lambda(v-1) = r(k-1) \Leftrightarrow 6(6-1) = r(4-1) \Leftrightarrow \frac{6 \times 5}{3} = r \Leftrightarrow r = 10$$

$$vr = bk \Leftrightarrow 6r = 4b \Leftrightarrow \frac{6 \times 10}{4} = b \Leftrightarrow b = 15$$

$$\text{Para } n = 6 \rightarrow T_6(x, y) = \begin{cases} x^7 + 5x^6 + 15x^5 + 20x^4 + 15x^3 + 6x^2 + x \\ 15x^4y + 20x^3y^2 + 20x^3y + 15x^2y^3 + 15x^2y^2 + \\ 15x^2y + 6xy^4 + 6xy^3 + 6xy^2 + 6xy \\ y^5 + y^4 + y^3 + y^2 + y \end{cases},$$

$$\text{temos } \begin{cases} \text{sete termos em } x, \text{ ou seja, } v = 7 \\ \text{dez termos em } xy, \text{ ou seja, } \lambda = 10 \\ \text{cinco termos em } y, \text{ ou seja, } k = 5 \end{cases}$$

Assim,

$$\lambda(v-1) = r(k-1) \Leftrightarrow 10(7-1) = r(5-1) \Leftrightarrow \frac{10 \times 6}{4} = r \Leftrightarrow r = 15$$

$$vr = bk \Leftrightarrow 7r = 5b \Leftrightarrow \frac{7 \times 15}{5} = b \Leftrightarrow b = 21$$

Vamos agora tentar obter uma fórmula recursiva para os valores de  $v$ ,  $k$ , e  $\lambda$ .

Considerando a sequência de  $\lambda$ , em que:

$$\begin{aligned} a_3 &= 1 \\ a_4 &= 3 = a_3 + 2 \\ a_5 &= 6 = a_4 + 3 \\ a_6 &= 10 = a_5 + 4 \\ &\vdots \\ a_n &= a_{n-1} + n - 2, \quad n \geq 4 \end{aligned}$$

obtemos a relação de recorrência completa não homogênea com coeficientes constantes:

$$\begin{cases} a_3 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + n - 2, \quad n \geq 4 \end{cases}$$

Ao aplicarmos um dos métodos para resolver uma relação de recorrência não homogênea com coeficientes constantes (Exemplo 3.5.2) temos:

Equação homogênea associada:

$$a_n - a_{n-1} = 0$$

$$\downarrow a_n = \lambda^n$$

Equação característica:

$$\Leftrightarrow \lambda^n - \lambda^{n-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^{n-1}(\lambda - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 1$$

Assim,

$$a_h = C1^n = C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Solução particular:

$$a_p = An^2 + Bn$$

$$\downarrow a_n - a_{n-1} = n - 2$$

$$\Leftrightarrow An^2 + Bn - (A(n-1)^2 + B(n-1)) = n - 2$$

$$\Leftrightarrow An^2 + Bn - An^2 + 2An - A - Bn + B = n - 2$$

$$\Leftrightarrow 2An - A + B = n - 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2A = 1 \\ -A + B = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Assim,

$$a_p = \frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n$$

Como  $a_3 = 1$  (condição inicial), e

$$a_n = a_h + a_p \Leftrightarrow a_n = C + \frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n$$

Então,

$$a_3 = 1 \Leftrightarrow C + \frac{1}{2} \times 3^2 - \frac{3}{2} \times 3 = 1 \Leftrightarrow C = 1$$

$$a_n = 1 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n = \frac{n^2 - 3n + 2}{2} = \frac{(n-2)(n-1)}{2}$$

Podemos provar isto, utilizando o princípio de Indução Matemática (versão forte):

$$\left| \begin{array}{l} a_3 = 1 \\ \underbrace{a_n = a_{n-1} + n - 2}_{(1)}, n \geq 4 \rightarrow \underbrace{a_n = \frac{(n-2)(n-1)}{2}}_{(2)}, n \geq 3 \end{array} \right.$$

Hipótese de Indução: Verifica-se para  $a_3$  e  $a_4$  e ... e  $a_n$

Tese de Indução: Provar que  $a_{n+1} = \frac{(n-1)n}{2}$

*Demonstração*

$$\begin{aligned} a_{n+1} &\stackrel{(1)}{=} a_n + n - 1 \\ &\stackrel{(2)}{=} \frac{(n-2)(n-1)}{2} + n - 1 \\ &= \frac{(n-2)(n-1) + 2(n-1)}{2} \\ &= \frac{(n-1)n}{2} \\ \therefore \lambda &= \frac{(n-2)(n-1)}{2}, n \geq 3 \end{aligned}$$

□

Em resumo,

Tabela 5.7: Ligação entre o polinómio de Tutte de grafos bipartidos completos e os BIBDs

	termos em $x$	$b = \frac{vr}{k}$	$r = \frac{\lambda(v-1)}{k-1}$	termos em $y$	termos em $xy$
	$v$	$b$	$r$	$k$	$\lambda$
$T_3$	4	6	3	2	1
$T_4$	5	10	6	3	3
$T_5$	6	15	10	4	6
$T_6$	7	21	15	5	10
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$T_n$	$n + 1$			$n - 1$	$\frac{(n-2)(n-1)}{2}$

Desta forma, podemos calcular os valores de  $b$  e de  $r$

$$\begin{aligned} \lambda(v-1) = r(k-1) &\Leftrightarrow \frac{(n-1)(n-2)(n+1-1)}{2} = r(n-1-1) \\ &\Leftrightarrow \frac{n(n-1)(n-2)}{2} = r(n-2) \Leftrightarrow r = \frac{n(n-1)}{2} \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$vr = bk \Leftrightarrow \frac{(n+1)n(n-1)}{2} = b(n-1) \Leftrightarrow b = \frac{(n+1)n}{2} \quad (5.11)$$

Assim, para cada polinómio de Tutte  $T_n(x, y)$  de um grafo bipartido completo  $K_{n,2}$ , com  $n \geq 3$ , o  $(v, b, r, k, \lambda)$ -BIBD correspondente é da forma

$$T_n(x, y) \rightarrow \left( n + 1, \frac{n(n+1)}{2}, \frac{n(n-1)}{2}, n - 1, \frac{(n-1)(n-2)}{2} \right) \quad (5.12)$$

# Capítulo 6

## Aplicações

### 6.1 Problema do Carteiro Chinês

O problema do carteiro chinês consiste em determinar o percurso que um carteiro faz numa determinada zona da cidade, em que começa e acaba no mesmo ponto, passando uma única vez em cada uma das ruas. Para se construir um digrafo, a partir do mapa dessa zona, considera-se que os arcos representam as ruas e os vértices representam os cruzamentos. Assim, para que este percurso seja possível, é necessário que o digrafo construído, a partir dessa zona da cidade, seja Euleriano.

Para relacionarmos os digrafos com os BIBDs, para este problema específico, supusemos que:

- O digrafo em questão tem de ser completo, para existir um BIBD que seja da forma

$$(v, b, r, k, \lambda) \rightarrow \left( n, \frac{n(n-1)}{2}, n-1, 2, 1 \right)$$

tal como foi visto na expressão (5.1).

- Para existir um BIBD associado, o parâmetro  $r$  (que indica o grau de cada vértice num grafo) no caso dos digrafos o seu valor será igual à soma dos graus de entrada e de saída de cada um dos vértices, ou seja,

$$r = \text{deg}_E v_i + \text{deg}_S v_i$$

- Para existir um circuito direto de Euler, temos que ter  $r$  par, o que implica que

$$\text{deg}_E v_i = \text{deg}_S v_i$$

logo  $n = r + 1$  é um número ímpar. Assim, concluímos que existe circuito direto de Euler somente quando  $n$  é um número ímpar.

- A existência de um ciclo de Hamilton depende da orientação dos arcos do digrafo, ou seja, do número de graus de entrada e de saída de cada um dos vértices.

- Se, por exemplo, um vértice do digrafo só tiver graus de entrada, e outro vértice só tiver graus de saída, então nesse digrafo não existe circuito direto de Euler, nem ciclo de Hamilton.

A Figura 6.1 representa um exemplo de um digrafo completo, com número par de vértices, em que não existe ciclo de Hamilton. Isto acontece porque um dos vértices só tem graus de entrada e outro só tem graus de saída (ver Tabela 6.1).

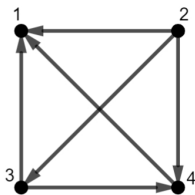


Figura 6.1: Digrafo sem ciclo de Hamilton

Tabela 6.1: Graus de entrada e de saída de cada um dos vértices do digrafo sem ciclo de Hamilton

Vértices	1	2	3	4
Grau de entrada	3	0	1	2
Grau de saída	0	3	2	1

Desta forma, um digrafo possível para retratar o problema do carteiro chinês, seria o seguinte:

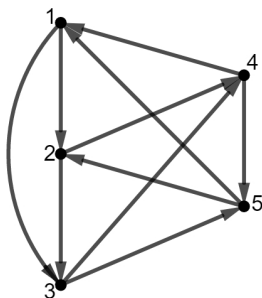


Figura 6.2: Digrafo Euleriano e Hamiltoniano

Tabela 6.2: Graus de entrada e de saída de cada um dos vértices do digrafo Euleriano e Hamiltoniano

Vértices	1	2	3	4	5
Grau de entrada	2	2	2	2	2
Grau de saída	2	2	2	2	2
$r = deg_E v_i + deg_S v_i$	4	4	4	4	4

Assim, analisando o digrafo da Figura 6.2, conclui-se que um exemplo do circuito orientado de Euler, na zona de distribuição, é o circuito  $1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 1 - 3 - 5 - 2 - 4 - 1$  e um exemplo de ciclo orientado de Hamilton é  $1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 1$ .

O BIBD associado a este digrafo é da forma  $(5, 10, 4, 2, 1)$ .

Após estudarmos este exemplo e apesar de já sabermos que se  $v$  é par não existe circuito orientado de Euler, achámos interessante investigar o que teríamos de acrescentar ao digrafo para que fosse euleriano.

Ao escolhermos, por exemplo, um  $(6, 15, 5, 2, 1)$ -BIBD, é possível construir um digrafo através deste BIBD, pois já sabemos que:

$v = 6 \rightarrow$  existem seis rotundas ou cruzamentos.

$b = 15 \rightarrow$  existem quinze estradas com sentidos únicos.

$r = 5 \rightarrow$  não é possível construir um circuito direto de Euler, pois  $r$  é um número ímpar.

Assim, o digrafo construído a partir do  $(6, 15, 5, 2, 1)$ -BIBD, poderia ser como se ilustra na Figura 6.3:

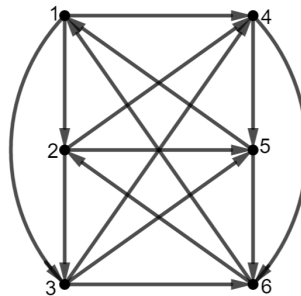


Figura 6.3: Digrafo associado ao  $(6, 15, 5, 2, 1)$ -BIBD

Tabela 6.3: Graus de entrada e de saída de cada vértice do digrafo associado ao  $(6, 15, 5, 2, 1)$ -BIBD

Vértices	1	2	3	4	5	6
Grau de entrada	2	2	2	3	3	3
Grau de saída	3	3	3	2	2	2
$r = deg_E v_i + deg_S v_i$	5	5	5	5	5	5

Apesar do circuito direto de Euler não ser possível neste digrafo, o ciclo de Hamilton já o é, ou seja, existe um caminho que passa por todos os cruzamentos uma única vez, voltando ao ponto de partida (ver Definição 4.2.10) e pode ser o seguinte:  $1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 1$ .

Desta forma, para o circuito direto de Euler ser possível neste digrafo, é necessário que os graus de entrada e de saída de cada um dos vértices sejam iguais e também que a sua soma seja um número par. Assim, e analisando os graus de entrada e de saída de cada um dos vértices (ver Tabela 6.3), reparámos que, para tornar o digrafo euleriano bastaria acrescentar os arcos 41, 52 e 63 e passaríamos a ter um multidigrafo. Desta forma, o digrafo teria um circuito direto de Euler, mas deixava de estar associado a um BIBD, pois o número de arcos aumentaria para dezoito e deixaria de ser quinze e o valor de  $\lambda$  não seria fixo.

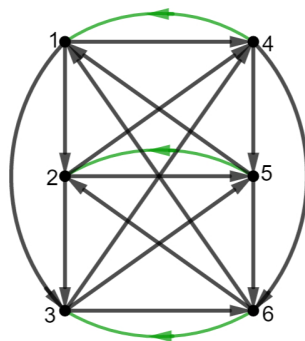


Figura 6.4: Digrafo adaptado a Euleriano

Tabela 6.4: Graus de entrada e de saída do digrafo adaptado a Euleriano

Vértices	1	2	3	4	5	6
Grau de entrada	3	3	3	3	3	3
Grau de saída	3	3	3	3	3	3
$r = deg_E v_i + deg_S v_i$	6	6	6	6	6	6

## 6.2 Ciências da Computação

Atualmente, devido ao avanço da internet e dos aparelhos eletrônicos, como os *smartphones* e os *tablets*, as ligações entre os diferentes servidores são visíveis para todos os utilizadores.

É perceptível que quando pesquisamos um determinado produto num motor de busca, como o *Google*, depois dessa pesquisa irá aparecer publicidade a esse produto quando navegamos noutros *sites*. Por conseguinte, existe uma ligação evidente entre o motor de busca em que pesquisamos o produto e outro *site* em que este produto seja publicitado.

**Exemplo 6.2.1.** Imaginemos um utilizador que pretende comprar uma máquina de lavar roupa. Para comparar os preços e as diferentes características, pesquisa no *Google* por máquinas de lavar roupa e analisa as que são sugeridas.

Após esta pesquisa ao utilizar a rede social *Facebook*, nota que apareceu uma publicação patrocinada de uma máquina de lavar roupa. Posteriormente, na rede social *Instagram* o mesmo acontece. As várias publicações patrocinadas são de

*sites* diferentes, relacionados com a venda de eletrodomésticos, como, por exemplo, Rádio Popular, Worten e Conforama. Além de todas as publicações patrocinadas serem de máquinas de lavar roupa, são todas com os preços mais competitivos de cada loja, dentro do orçamento que o utilizador tinha pesquisado.

É perceptível a existência de uma ligação óbvia entre todos estes *sites*, ou seja, é possível construir um grafo que represente estas ligações entre os diferentes *sites*, como o da Figura 6.5:

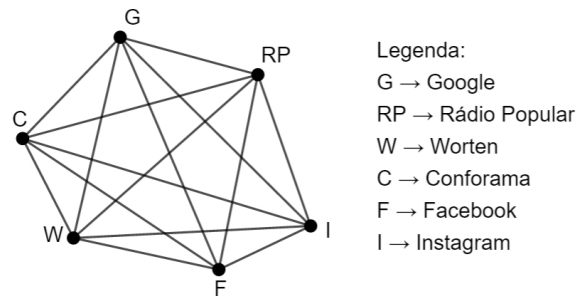


Figura 6.5: Grafo que relaciona os diferentes *sites*

Este grafo (Figura 6.5), que representa as ligações entre os diferentes *sites*, é um grafo completo, pois todos os *sites* estão ligados entre si. Desta forma, é possível construir um BIBD através deste grafo. Através da expressão (5.1), sabe-se que o BIBD associado a este grafo completo é o  $(6, 15, 5, 2, 1)$ -BIBD.

Se não tivéssemos construído o grafo completo, poderíamos do mesmo modo identificar o BIBD associado a este exemplo, pois com os dados fornecidos é possível identificar que:

$v = 6 \rightarrow$  existem seis *sites*.

$b = 15 \rightarrow$  existem quinze ligações.

$r = 5 \rightarrow$  cada *site* está ligado aos restantes cinco.

Pela expressão (5.6), sabe-se que o BIBD resultante de  $E(n, 1)$  é o mesmo BIBD resultante do grafo completo  $K_n$ . Desta forma, calcula-se o número Euleriano do grafo que relaciona os diferentes sites (grafo  $K_6$ ).

$E(6, 1) = 2^6 - (6 + 1) = 64 - 7 = 57$ , existem 57 permutações com 6 elementos com precisamente 1 ascendente.

### 6.3 Relações entre as Pessoas

Através da teoria dos grafos é possível estabelecer relações entre as pessoas seja através de uma árvore genealógica, em que estão estabelecidas as relações familiares entre as pessoas e as várias gerações, seja através da organização hierárquica dentro de uma empresa, ou ainda através das relações existentes entre todos os habitantes de uma cidade.

**Exemplo 6.3.1.** Considerando a família Bernoulli:

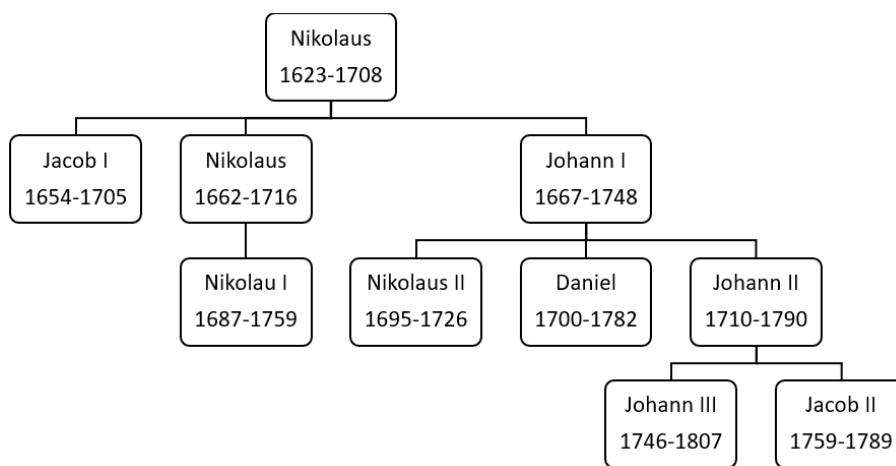


Figura 6.6: Parte da árvore genealógica da família Bernoulli, fonte: Picado [PG08]

As ligações dentro desta família, em grafo, podem ser representadas como se ilustra na Figura 6.7:

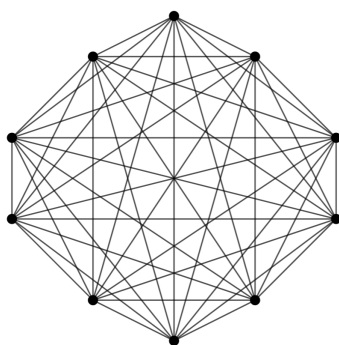


Figura 6.7: Grafo das relações de parentesco da família Bernoulli

Este grafo, que representa as diferentes relações de parentesco entre cada um dos elementos da família, é um grafo completo pois todos os elementos da família estão ligados entre si. Desta forma, é possível construir um BIBD através deste grafo. Através da expressão (5.1), sabe-se que o BIBD associado a este grafo completo é o  $(10, 45, 9, 2, 1)$ -BIBD.

Se não tivéssemos construído o grafo completo, poderíamos na mesma identificar o BIBD associado a este exemplo, pois com os dados fornecidos identificávamos que:

$v = 10 \rightarrow$  existem dez elementos da família Bernoulli.

$b = 45 \rightarrow$  existem 45 relações de parentesco.

$r = 9 \rightarrow$  cada elemento da família está relacionado com os restantes nove.

Pela expressão (5.6), sabe-se que o BIBD resultante de  $E(n, 1)$  é o mesmo BIBD resultante do grafo completo  $K_n$ . Desta forma, calcula-se o número Euleriano do grafo que relaciona os diferentes elementos da família Bernoulli (grafo  $K_{10}$ ).

$E(10, 1) = 2^{10} - (10 + 1) = 1024 - 11 = 1013$ , existem 1013 permutações com 10 elementos da família Bernoulli com 1 ascendente.



# Capítulo 7

## Conclusão

Esta dissertação, que teve como objetivo a construção de ligações entre a teoria dos designs combinatórios, a teoria dos números e a teoria dos grafos, não poderia ter sido realizada sem o auxílio teórico da bibliografia consultada.

Sabemos que, com os cálculos apresentados no Capítulo 5, existem diversas aplicações do triângulo DNG em tantas situações do nosso cotidiano, muitas das quais com certeza nem referimos no Capítulo 6. Desta forma, sentimos que esta dissertação poderá funcionar como um incentivo a futuras investigações no âmbito do triângulo DNG. A sequência de Prüfer, as árvores ótimas, o algoritmo de Dijkstra, o algoritmo de Welsh-Powell e o algoritmo de Floyd-Warshall são exemplos que podem ser utilizados em estudos futuros sobre o triângulo DNG.

No âmbito das aplicações do triângulo DNG, tal como referimos anteriormente, algumas foram bem sucedidas, mas outras não. Nos Anexos B, C, D e E encontram-se os resultados das tentativas das aplicações da teoria dos grafos no problema do caixeiro-viajante, na coloração de mapas, nas ciências como a biologia e a química e na resolução de crimes.

Foi de especial interesse reparar como tantos assuntos, diferentes entre si, da área da matemática se encontram interligados. De um conhecimento mais básico, a outro de nível mais avançado, todos foram necessários para a realização desta dissertação.

Tendo em conta que a minha formação foi em ciências sociais, mais especificamente em economia, foi interessante reparar como uma ciência exata pode ser a base de tudo o que nos rodeia.



# Bibliografia

- [Axe16] Maria Axenovich. *Lecture Notes Graph Theory*. 2016.
- [BC11] RA Bailey e Peter J Cameron. *Using graphs to find the best block designs*. arXiv preprint arXiv:1111.3768, 2011.
- [Bra15] Madeline Brandt. *The Tutte Polynomial*. TACO seminar, 2015.
- [Bru09] Richard A Brualdi. *Introductory combinatorics*. Pearson Education India, 2009.
- [Bur11] David M Burton. *Elementary number theory*. Tata McGraw-Hill Education, 2011.
- [BW05] Edward A Bender e S Gill Williamson. *Foundations of Combinatorics with Applications*. 2005.
- [Cla03] W Edwin Clark. *Elementary Number Theory*. South Florida University, 2003.
- [Di 66] Jane W Di Paola. *Block designs and graph theory*. Vol. 1. 1. Journal of Combinatorial Theory in Academic Press, 1966, pp. 132–148.
- [Ell18] Jo Ellis-Monaghan. *The Tutte Polynomial A Mathematical Catalyst*. Saint Michael’s College, 2018.
- [EM11] Joanna A Ellis-Monaghan e Criel Merino. *Graph polynomials and their applications I: The Tutte polynomial*. Springer, 2011, pp. 219–255.
- [GYA19] Jonathan L Gross, Jay Yellen e Mark Anderson. *Graph theory and its applications*. CRC press, 2019.
- [HHM08] John Michael Harris, Jeffrey L Hirst e Michael J Mossinghoff. *Combinatorics and graph theory*. Vol. 2. Springer, 2008.
- [HM20] Stephen Huggett e Iain Moffatt. *Types of embedded graphs and their Tutte polynomials*. Vol. 169. 2. Cambridge University Press, 2020, pp. 255–297.
- [Hol15] Derek Holton. *Graph theory – A guide for teachers (Years 11–12)*. 2015.
- [Hwa16] Michael Hwang. *Application of Balanced Incomplete Block Designs in Error Detection and Correction*. Out. de 2016. DOI: 10.4135/9781473941977.
- [Maq19] Gabriel Lima Maquengo. *Teoria dos Grafos e Aplicações: Redes Eléctricas e de Transportes Rodoviário*. Universidade de Évora, 2019.
- [Mar15] Nuno Martins. *Algebra Linear*. Instituto Superior Técnico, 2015.
- [Mes14] Mariusz Meszka. *Combinatorial Designs*. 2014 PhD Summer School in Discrete Mathematics, 2014, p. 35.

- [Nos13] Mohammad Noshad. *Applications of Balanced Incomplete Block Designs to Communication Systems*. University of Virginia, dez. de 2013.
- [Oli10] Teresa Oliveira. *BIB designs with repeated blocks: review and perspectives*. Zeinab Amin e Ali, S, Hadi, The American University in Cairo, 2010, pp. 82–96.
- [PB15] Alexander M Porter e Barry Balof. *The Tutte polynomial and applications*. Whitman College, 2015.
- [Per13] Sandra Maria Pereira dos Santos. *Aplicações da teoria dos grafos*. Universidade de Aveiro, 2013.
- [PG08] Jorge Picado e Armando Gonçalves. *Estruturas Discretas - Textos de apoio - Capítulo 3.2. Árvores*. Universidade de Coimbra - Departamento de Matemática, fev. de 2008.
- [Ros11] Kenneth H Rosen. *Elementary number theory*. Pearson Education, 2011.
- [Ros99] Kenneth H Rosen. *Handbook of discrete and combinatorial mathematics*. CRC press, 1999.
- [RS13] Awad Rashmi e Banerjee Shakti. *A review of literature relating to Balance Incomplete Block designs with Repeated Blocks*. Vol. 2320. Research Journal of Mathematical e Statistical Sciences \_ ISSN, 2013, p. 6047.
- [Sil+09] Paula Cecilia dos Santos Leitão Caetano Alves Silva et al. *Modelos de planos em blocos incompletos: revisão e perspectivas*. FCT-UNL, 2009.
- [Sil06] Joseph H Silverman. *A friendly introduction to number theory*. Vol. 10. Am Math Compet, 2006, p. 12.
- [SIT95] Kyoko Sekine, Hiroshi Imai e Seiichiro Tani. *Computing the Tutte polynomial of a graph of moderate size*. Springer, 1995, pp. 224–233.
- [Sti07] Douglas Stinson. *Combinatorial designs: constructions and analysis*. Springer Science & Business Media, 2007.
- [Van09] Paul Van Dooren. *Graph theory and applications*. Dublin. <https://perso.uclouvain.be/paul.vandooren/DublinCourse.pdf>, 2009, p. 110.
- [Wel99] Dominic Welsh. *The tutte polynomial*. Vol. 15. 3-4. Random Structures & Algorithms in Wiley Online Library, 1999, pp. 210–228.
- [Wil03] Robin Wilson. *The early history of block designs*. Vol. 9. Rend. Sem. Mat. Messina Ser. II, 2003, pp. 267–276.
- [XTH12] Tingyao Xiong, Hung-ping Tsao e Jonathan Hall. *General Eulerian Numbers and Eulerian Polynomials*. Vol. 2013. Journal of Mathematics, jul. de 2012. DOI: 10.1155/2013/629132.

# Apêndice A

## Álgebra linear

### A.1 Matrizes

Considerando uma matriz  $A$  de dimensão  $m \times n$ , ou seja com  $m$  linhas e  $n$  colunas, o elemento  $a_{ij}$  está situado na linha  $i$  e na coluna  $j$  da matriz  $A$ .

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

#### A.1.1 Matriz quadrada

**Definição A.1.1.** Uma matriz quadrada consiste numa matriz de dimensão  $n \times n$ , ou de ordem  $n$ , ou seja, uma matriz com igual número de linhas e de colunas, neste caso  $n$  linhas e  $n$  colunas.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

**Exemplo A.1.1.**  $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 & -5 \\ 7 & 2 & 6 & 3 \\ -4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & -6 & 5 & 4 \end{bmatrix}_{4 \times 4}$  é uma matriz quadrada de dimensão

$4 \times 4$ , ou de ordem 4.

#### A.1.2 Matriz diagonal

**Definição A.1.2.** Uma matriz diagonal é uma matriz quadrada em que todos os elementos fora da diagonal principal são iguais a zero.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

**Exemplo A.1.2.**  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$  é uma matriz diagonal de ordem 3.

### A.1.3 Matriz identidade

**Definição A.1.3.** Uma matriz identidade é uma matriz quadrada de ordem  $n$ , representa-se por  $I_n$ , e caracteriza-se por ter todos os elementos da diagonal principal iguais a um e os restantes iguais a zero.

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

**Exemplo A.1.3.**  $I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{4 \times 4}$  é a matriz identidade de ordem 4.

### A.1.4 Matriz transposta

**Definição A.1.4.** A matriz transposta de uma matriz  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  é da forma  $A^T = (a_{ji})_{n \times m}$ , ou seja, a matriz transposta obtém-se da matriz  $A$  trocando as linhas pelas colunas, isto é,

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}_{m \times n}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}_{n \times m}$$

**Exemplo A.1.4.**  $A^T = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 7 & 5 \\ -3 & 1 & 6 & -1 \end{bmatrix}_{2 \times 4}^T = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \\ 7 & 6 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}_{4 \times 2}$

### A.1.5 Soma de matrizes

Dois matrizes podem ser somadas quando são da mesma dimensão, isto é, as matrizes  $A$  e  $B$  podem ser somadas se  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  e  $B = (b_{ij})_{m \times n}$ . A soma destas

duas matrizes vai originar uma nova matriz  $C = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}$ .

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n} \end{aligned}$$

**Exemplo A.1.5.** Sabendo que:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 1 & 6 & 2 \\ -8 & 5 & 4 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ -3 & 5 & -1 \\ 4 & 7 & 2 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

então

$$A + B = \begin{bmatrix} 2+1 & 4+3 & -3+6 \\ 1-3 & 6+5 & 2-1 \\ -8+4 & 5+7 & 4+2 \end{bmatrix}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 3 \\ -2 & 11 & 1 \\ -4 & 12 & 6 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

## A.1.6 Multiplicação de matrizes

Dois matrizes podem ser multiplicadas quando o número de colunas da primeira matriz for igual ao número de linhas da segunda matriz, ou seja, as matrizes  $A$  e  $B$  podem ser multiplicadas se  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  e  $B = (b_{ij})_{n \times p}$ . A multiplicação destas duas matrizes vai originar a matriz  $C = AB$ .

$$C = (a_{i1}b_{1j} + \dots + a_{in}b_{nj})_{m \times p} = \left( \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} \right)_{m \times p}$$

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n} \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix}_{n \times p} \\
 &= \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n a_{1k}b_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^n a_{1k}b_{kj} & \cdots & \sum_{k=1}^n a_{1k}b_{kp} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} & \cdots & \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kp} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \sum_{k=1}^n a_{mk}b_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^n a_{mk}b_{kj} & \cdots & \sum_{k=1}^n a_{mk}b_{kp} \end{bmatrix}_{m \times p}
 \end{aligned}$$

**Exemplo A.1.6.** Considerando que:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 4 \\ 6 & -9 & -2 \\ 0 & 8 & -2 \\ 6 & -8 & -4 \\ 5 & 2 & 8 \end{bmatrix}_{5 \times 3} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 3 & 5 & -3 \\ -6 & -9 & 3 & -7 & 6 \\ -6 & 0 & 5 & -7 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 5}$$

então

$$AB = C = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 50 & -14 & 1 \\ 108 & 111 & -19 & 107 & -74 \\ -36 & -72 & 14 & -42 & 46 \\ 114 & 102 & -26 & 114 & -70 \\ -25 & 7 & 61 & -45 & 5 \end{bmatrix}_{5 \times 5}$$

## A.2 Determinantes

**Definição A.2.1.** Determinante é uma função matricial que associa a cada matriz quadrada um escalar, ou seja, é uma função que transforma uma matriz quadrada num número real. Representa-se por  $\det A$  o determinante de uma matriz  $A$ .

### A.2.1 Matriz de dimensão $2 \times 2$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

**Exemplo A.2.1.** Considerando que:

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$$

então

$$\det A = \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = -4 \times 4 - 1 \times 7 = -23$$

### A.2.2 Matriz de dimensão $3 \times 3$

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \end{aligned}$$

**Exemplo A.2.2.** Considerando que:

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -2 & 7 \\ -4 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

então

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 8 & -2 & 7 \\ -4 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} + 7 \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 8 \times 1 \times (-1) - 2 \times 0 \times 6 + 7 \times (-4) \times 3 - 7 \times 1 \times 6 + 2 \times (-4) \times (-1) - 8 \times 0 \times 3 \\ &= -92 - 34 = -126 \end{aligned}$$



## Anexo A

### Matriz de Hadamard do (11,22,10,5,4)-BIBD

Para (11, 22, 10, 5, 4)–BIBD:

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$$

$$A = \left\{ \begin{array}{l} 124510, 125911, 126811, 127810, 13456, 13579, 136811, 137810, 14679, \\ 1491011, 23458, 235711, 236910, 236910, 246711, 24789, 3471011, 348911, \\ 456810, 56810, 56789, 5671011, 5891011, 3469, 3478, 4589, 5678, 5679 \end{array} \right\}$$

e a sua matriz de incidência é a seguinte:







## Anexo B

# Problema do Caixeiro-viajante

O problema do caixeiro-viajante consiste em determinar o menor percurso que um caixeiro-viajante faz ao passar uma única vez em cada ponto do seu trajeto, sendo o ponto de partida igual ao ponto de chegada, ou seja, o percurso encontrado trata-se de um ciclo de Hamilton. Este problema é implementado em várias situações do quotidiano, não só para determinar a viagem com menor distância, como também para determinar a viagem com menor custo ou menor tempo de deslocação.

Para descobrir a solução para este problema, podem ser utilizados dois métodos.

O primeiro é o método do vizinho mais próximo, que consiste em deslocar-se sempre para a cidade mais próxima de onde se está. No entanto, pode não ser o mais correto e levar a um trajeto que não seja o de menor distância no total.

O segundo é o método exaustivo, que consiste em encontrar todos os ciclos de Hamilton, e assim escolher o de menor distância total. No entanto, torna-se impraticável este método para um grafo de ordem elevada com vários ciclos de Hamilton.

**Exemplo B.0.1.** Para exemplificar o problema do caixeiro-viajante será utilizado o método exaustivo.

Considerando a cidade do Funchal e as suas diferentes freguesias, será calculado o trajeto do caixeiro-viajante sabendo os valores (fictícios), em euros, de dar a volta à cidade, partindo da freguesia de Santa Maria Maior e regressando no final do trajeto à mesma.

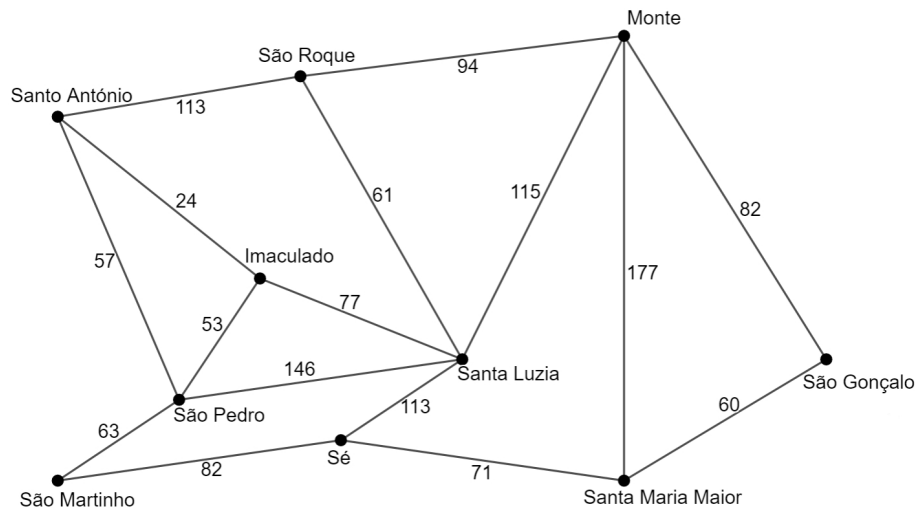


Figura B.1: Grafo que demonstra os diferentes trajetos que o caixeiro-viajante poderia escolher no concelho do Funchal

Analisando o grafo, percebe-se que existem três ciclos de Hamilton.

Tabela B.1: Ciclos de Hamilton no concelho do Funchal

Ciclos de Hamilton	Custo da viagem (em euros)
Santa Maria Maior → São Gonçalo → Monte → São Roque → → Santo António → Imaculado Coração de Maria → Santa Luzia → → São Pedro → São Martinho → Sé → Santa Maria Maior	812
Santa Maria Maior → São Gonçalo → Monte → São Roque → → Santa Luzia → Imaculado Coração de Maria → Santo António → → São Pedro → São Martinho → Sé → Santa Maria Maior	671
Santa Maria Maior → São Gonçalo → Monte → Santa Luzia → → São Roque → Santo António → Imaculado Coração de Maria → → São Pedro → São Martinho → Sé → Santa Maria Maior	724





# Anexo C

## Coloração de Mapas

O Teorema da coloração de mapas, demonstrado em 1976, comprova que é possível colorir um mapa com apenas quatro cores, considerando que duas regiões com fronteira comum têm cores distintas.

Para colorir os mapas, com o auxílio da teoria dos grafos, transforma-se um mapa num grafo, sabendo que os vértices correspondem às diferentes regiões, e as arestas simbolizam as fronteiras entre as regiões. Assim, para colorir os vértices do grafo, é utilizado, por exemplo, o número cromático (ver Secção 4.7).

**Exemplo C.0.1.** Para exemplificar a coloração dos mapas, considera-se o mapa da Ilha da Madeira, transformando-o no seguinte grafo.

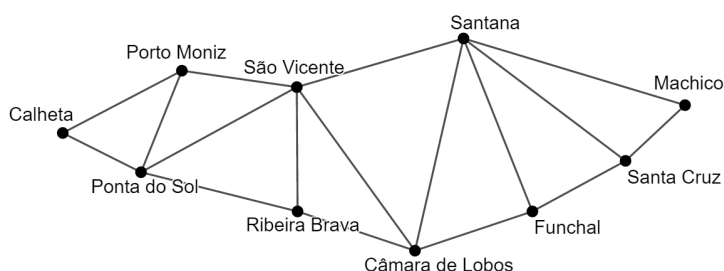


Figura C.1: Mapa da Ilha da Madeira representado na forma de grafo

Assim, utilizando o número cromático (ver Secção 4.7), obtém-se a seguinte coloração de vértices.

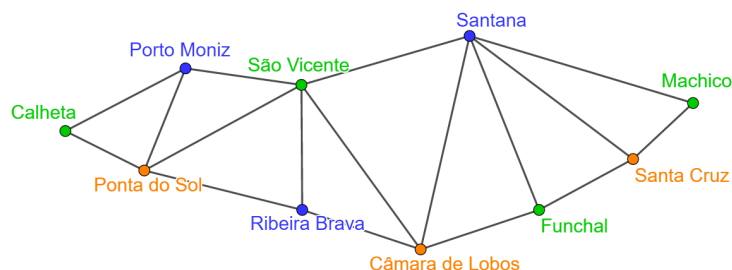


Figura C.2: Coloração do grafo que representa o mapa da Ilha da Madeira

Desta forma, conclui-se que o mapa da Ilha da Madeira pode ser colorido utilizando apenas três cores.



# Anexo D

## Aplicação nas Ciências

### D.1 Os Grafos na Biologia

Na área da biologia a teoria dos grafos é utilizada, por exemplo, na construção de cadeias e teias alimentares. Uma cadeia alimentar, utilizando a teoria dos grafos, seria, por exemplo, da seguinte forma:

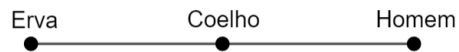


Figura D.1: Exemplo de uma cadeia alimentar

Por outro lado, a rede alimentar, que consiste num conjunto de várias cadeias alimentares interligadas, utilizando a teoria dos grafos, poderia ser representada da seguinte forma:

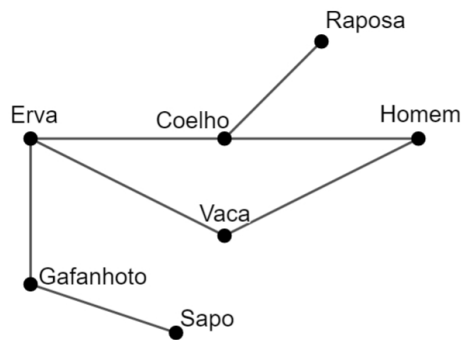


Figura D.2: Exemplo de uma rede alimentar

## D.2 Os Grafos na Química

Na área da química, um exemplo onde se utiliza a teoria dos grafos é na formação de moléculas, através da junção de átomos.

Os grafos podem representar moléculas simples, como a da água ( $H_2O$ ), que só tem três átomos (ver Figura D.3),

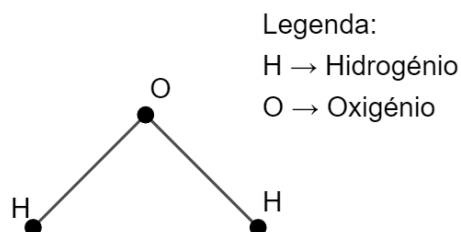


Figura D.3: Grafo representativo da molécula da água

como também podem ser utilizados para representar moléculas mais complexas, como a da cafeína ( $C_8H_{10}N_4O_2$ ), em que existem 24 átomos (Figura D.4).

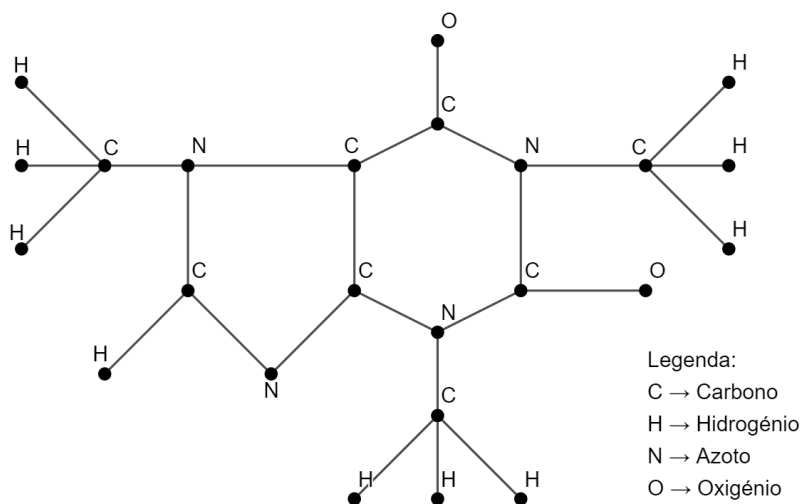


Figura D.4: Grafo representativo da molécula da cafeína

Desta forma, através da teoria dos grafos, fica simplificada a relação entre cada um dos átomos numa molécula.

# Anexo E

## Aplicação na resolução de crimes

**Exemplo E.0.1.** Considere-se um crime onde estão envolvidos quatro suspeitos. O suspeito  $a$  incrimina o suspeito  $c$ , o suspeito  $b$  diz que não é culpado, o suspeito  $c$  também diz que não é culpado e o suspeito  $d$  incrimina o suspeito  $a$ . Com estas informações, é possível construir um digrafo com quatro vértices em que a direção dos arcos corresponde a quem o suspeito incriminou.

Como os suspeitos  $b$  e  $c$  afirmam que não são culpados, considera-se que desta forma estão a ilibar-se e a culpar os restantes. Além do testemunho de cada suspeito, também sabe-se que apenas um deles está a dizer a verdade.

Assim, o digrafo que representa este exemplo tem a forma:

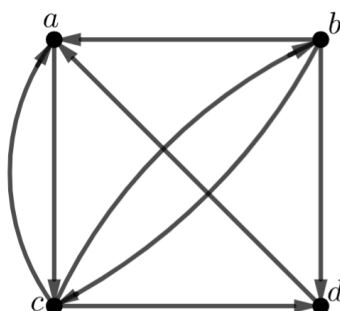


Figura E.1: Digrafo que representa os testemunhos dos suspeitos

A partir do digrafo sabe-se quais são os graus de entrada de cada um dos vértices (ver Tabela E.1):

Tabela E.1: Graus de entrada de cada um dos vértices

Vértices	$a$	$b$	$c$	$d$
Grau de entrada	3	1	2	2

Como apenas um dos suspeitos está a dizer a verdade, então o suspeito  $b$  é o culpado. Se três dos sujeitos estivessem a dizer a verdade o culpado seria o suspeito  $a$ , e se dois dos suspeitos estivessem a dizer a verdade então o culpado seria o sujeito  $c$  ou o sujeito  $d$ , ou seja, nem o sujeito  $a$  nem o sujeito  $b$  seriam culpados.