



**GRAFOS Coloração, Planaridade
e “Matching”**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Anthony Jimmy de Freitas
MESTRADO EM MATEMÁTICA



UNIVERSIDADE da MADEIRA

A Nossa Universidade
www.uma.pt

setembro | 2013

UMa

Gra

T/M UNA
51
FRE Gra
Ex-1

UNIVERSIDADE DA MADEIRA
SECTOR DE DOCUMENTAÇÃO
E ARQUIVO

73315

KOHA

GRAFOS Coloração, Planaridade e "Matching"

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Anthony Jimmy de Freitas

MESTRADO EM MATEMÁTICA

ORIENTAÇÃO

Maria Teresa Alves Homem de Gouveia

GRAFOS Coloração, Planaridade e “Matching”

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Anthony Jimmy de Freitas

MESTRADO EM MATEMÁTICA

JÚRI

Ana Maria Cortesão Pais Figueira da Silva Abreu

Paulo Sérgio Abreu Freitas

Maria Teresa Alves Homem de Gouveia

Agradecimentos

Gostaria de agradecer, em primeiro lugar, à pessoa que me vem dando todo o apoio incondicional, pela paciência e compreensão e pelo inesgotável amor que possui, a minha esposa Dulce Nóbrega.

Em segundo lugar, à minha família, pelo suporte e pelo amor incondicional que nos une.

Gostaria muito de agradecer à minha orientadora, a Professora Teresa Gouveia, pela dedicação, profissionalismo e paciência, pelo tempo que disponibilizou e pelos conselhos que me deu ao longo da realização deste trabalho.

Por fim, e não menos importante, gostaria de mostrar a minha gratidão a todos os professores da Universidade da Madeira, que passaram pela minha vida de estudante, e que me ajudaram a chegar até aqui.

Resumo

A matemática discreta é um dos ramos mais antigos da matemática. Nos tempos mais recentes sofreu grandes avanços em especial na teoria dos grafos, a qual tornou-se numa poderosa ferramenta de análise para entender e dar solução a vários tipos de problemas complexos.

O objectivo deste trabalho é contribuir para a obtenção de possíveis relações entre assuntos que à partida poderíamos pensar que são díspares (quando na realidade não o são), como coloração, planaridade e a existência de matching em grafos.

Esta dissertação é um trabalho de natureza reflexiva, sobre a teoria dos grafos onde a ideia principal passa por questionarmos e discutirmos alguns temas pertinentes, definições e teoremas relacionando sempre com a planaridade dos grafos.

Desenvolveremos um raciocínio e criaremos argumentos que fundamentem a existência de uma relação entre este tema e a coloração de grafos e a existência de matching em grafos, utilizando exemplos e estabelecendo relações de causa e consequência, deduzindo assim as respectivas conclusões.

Por vezes, os grafos não planares podem conter um aspeto visual um pouco complexo, devido aos vários cruzamentos entre as suas arestas, originando assim um certo desencorajamento em utilizá-los como ferramenta para a solução de vários problemas, quer sejam básicos do quotidiano, ou mais complexos das mais vastas áreas ligadas à investigação. Um dos propósitos deste trabalho passa por desmistificar esta ideia e provar que existem muitas definições, propriedades, teoremas e algoritmos que podem ser aplicados em qualquer tipo de grafos, independentemente da sua planaridade.

Palavras chave: grafo planar; coloração, polinómio cromático, árvores, matching, grafo Euleriano, grafo Hamiltoniano, grafo mágico.

Abstract

In recent times the discrete mathematics has undergone major advances especially in graph theory, which has become a powerful analytical tool to understand and provide solutions to various complex problems.

The aim of this work is to contribute to the achievement of possible relations between issues which initially might think that are dissimilar (when in reality they are not), such as coloring, planarity and the existence of matching in graphs.

This dissertation is a work based on a reflective nature on graph theory where the main idea involves questioning and discussing some relevant issues, definitions and theorems, related to the planarity of graphs.

We will develop reasoning and create arguments that support the existence of a relationship between this theme and graph coloring and the existence of matching in graphs, using examples and establishing relations of cause and effect, thus deducting the respective conclusions.

Sometimes the non-planar graphs may contain a complex aspect, due to the various intersections between their edges, providing a certain discouragement to use them as a tool for solving various problems, since the most basic daily ones, as well as the more complex associated with themes related with research topics. One of the main goals of this work involves demystifying this idea and prove that there are many definitions, properties, theorems and algorithms that can be used in any type of graph, independently of its planarity.

Keywords: planar graph, coloring, chromatic polynomial, tree, matching, Eulerian graph, Hamiltonian graph, magic graph.

Índice

1	Introdução	1
2	Conceitos básicos sobre grafos planares	3
2.1	Grafo planar	3
2.2	Faces de um grafo planar	8
2.3	Fórmula da Euler	11
2.4	Grafo poliédrico	14
2.5	Grafo dual geométrico	17
3	A planaridade e a coloração de grafos	21
3.1	Coloração de um grafo	21
3.2	Algoritmo de Welsh - Powell	23
3.3	Algoritmo de Marble – Matula – Isaacson	26
3.4	Grafos particulares, planares e não planares e os seus respetivos números cromáticos.	34
3.4.1	Grafo Estrela	34
3.4.2	Grafo Completo	35
3.4.3	Grafo Cíclico	36
3.4.4	Grafo Roda	37
3.5	Grafo crítico	38
3.6	Exemplo prático da coloração de vértices de um grafo	47
3.7	Coloração de arestas de um grafo	49
3.8	Coloração de mapas	54
3.9	Polinómios Cromáticos	56
3.10	Polinómio cromático de um grafo	62
3.10.1	Polinómio cromático de um grafo planar	69
3.10.2	Polinómio cromático de um grafo não planar	70
3.11	Árvores	72
3.12	Fórmula de Cayley	78
3.13	Árvore ótima	80
3.13.1	Algoritmo de Kruskal	81
4	A planaridade e a existência de matching num grafo	86
4.1	Grafos de Euler	89
4.2	Grafos de Hamilton	93
4.3	Grafos Mágicos	95

5 Conclusões	101
Bibliografia	102
Anexo A	104
Anexo B	118

Capítulo 1

Introdução

Em muitas áreas relacionadas com a investigação, tais como a computação, a química, a biologia e muitas outras, e mais recentemente, a inteligência artificial, existe a necessidade de, por exemplo, reconhecer objetos ou analisar cenários. Os grafos tornaram-se numa forma eficaz de representar objetos, onde normalmente os vértices representam regiões de uma imagem ou de um objeto e as arestas representam as relações existentes entre estas regiões.

Neste trabalho, pretendemos contextualizar a temática e apresentar, de forma muito superficial, as principais características da planaridade de grafos, tentando não a tornar maçadora com fórmulas matemáticas apresentando apenas aquelas que achamos necessárias.

Iremos abordar algumas noções básicas sobre a planaridade, onde destacaremos algumas das suas propriedades mais pertinentes através de alguns exemplos.

Vamos rever algumas definições e teoremas sobre a coloração de grafos, para depois abordarmos alguns conceitos relacionados com este tema, tais como o número cromático, o polinómio cromático e as árvores, averiguando a existência de alguma relação destes temas com a planaridade.

Iremos estudar as relações existentes entre a planaridade e a existência de matching em grafos, abordando alguns temas como os grafos de Euler, os grafos de Hamilton e os grafos mágicos.

Por fim, e como anexo deste trabalho (**Anexo A**), iremos rever alguns conceitos importantes sobre grafos, exemplificando algumas definições, com a finalidade de o leitor familiarizar-se com alguns termos utilizados nesta dissertação.

Os primeiros trabalhos relacionados com a teoria dos grafos surgiram no século XVIII. Neste período vários autores publicaram artigos, dos quais destacamos o problema descrito por Euler, publicado por volta de 1736, conhecido como “O problema das pontes de Königsberg”.

Este problema foi baseado em sete pontes que estabeleciam ligações entre as margens do rio Pregel e duas ilhas, na cidade de Königsberg. Esta cidade foi fundada em 1255, e foi a capital e o centro cultural e económico da Prússia, entre 1457 e 1945. Hoje encontra-se situada na parte do sul da Lituânia, no distrito russo de Kaliningrado, a nordeste da Polónia.

O problema das pontes de Königsberg consistia em provar que era possível passar

por todas as sete pontes sobre o rio, mas com a condição de atravessar cada ponte uma única vez.

A figura seguinte ilustra o problema das pontes de Königsberg, onde podemos observar as margens do rio, as duas ilhas e as sete pontes.

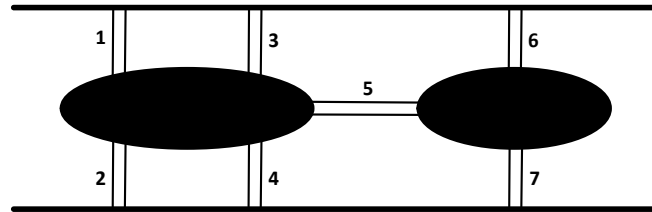


Figura 1.1 - Representação das sete pontes de Königsberg.

O matemático e físico suíço Leonhard Paul Euler (1707-1783), que viveu muitos anos na Rússia e na Alemanha, realizou descobertas importantes em campos variados nos cálculos e grafos. Euler conseguiu resolver o problema das pontes de Königsberg, provando que não era possível passar uma só vez em cada ponte e conseguir passar por todas, uma vez que o número de pontes era ímpar. Para que este problema tivesse uma resolução, o número de pontes incidentes em cada ilha teria de ser par, o que não era o caso. Esta solução de Euler, para além de resolver o problema das sete pontes de Königsberg, foi considerada o primeiro teorema de teoria dos grafos. Este problema ficou também conhecido como o “Problema do caminho Euleriano”.

A figura seguinte ilustra o problema das pontes de Königsberg, em termos de grafos, onde os vértices A e B representam, respetivamente as margens norte e sul do rio e os vértices X e Y, as duas ilhas. Quanto às arestas do grafo, estas representam as pontes sobre o rio.

G

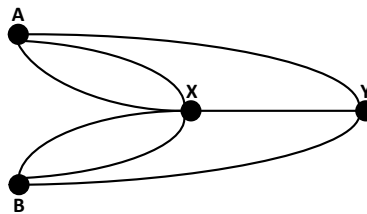


Figura 1.2 – Grafo G, ilustrando o problema das pontes de Königsberg.

Capítulo 2

Conceitos básicos sobre grafos planares

2.1 Grafo planar

A ideia de grafo planar está relacionada com uma representação de um conjunto de elementos dispostos sobre o plano.

Definição 1 Um grafo **planar** é um grafo que admite uma representação gráfica no plano, em que as suas arestas só se poderão encontrar nos vértices a que são incidentes, ou seja, um grafo é planar se existir uma representação gráfica no plano, sem cruzamento de arestas.

Seguem-se alguns exemplos que ilustram como classificar um grafo de planar ou de não planar.

Exemplo 2 Seja G o grafo representado na figura seguinte. Vamos classificar G , quanto à sua planaridade.

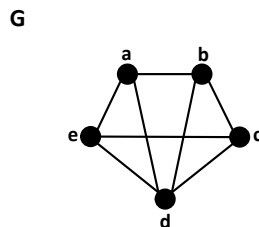


Figura 2.1 – Grafo G

Este grafo poderá ser classificado de grafo planar, se for possível representá-lo no plano, de tal forma que as suas arestas não se cruzem.

Na figura seguinte podemos verificar que, após modificarmos a posição de uma das suas arestas, G passou a ser um grafo planar.

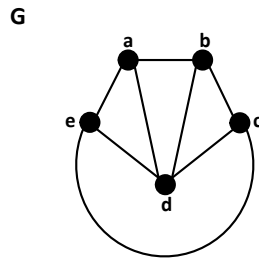


Figura 2.2 – Grafo planar
G

Neste caso, alteramos a posição da aresta que liga os vértices **e** e **c**. Como consequência, deixou de haver cruzamento entre as arestas do grafo **G**.

Exemplo 3 Consideremos o seguinte grafo **H**. Vamos verificar se **H** é ou não um grafo planar.

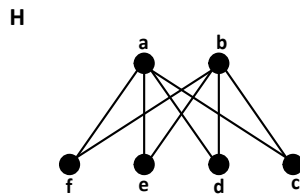


Figura 2.3 – Grafo H

Como podemos observar na figura 2.3, existem cruzamentos entre as arestas de **H**. Para que este grafo possa ser considerado um grafo planar, temos de conseguir representá-lo no plano, de forma que as suas arestas não se intercetem.

Após algumas alterações nas suas arestas, conseguimos também obter um grafo planar, como podemos observar na figura seguinte.

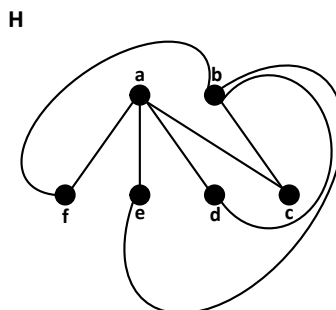


Figura 2.4 - Grafo planar H

Logo, **H** é um grafo planar.

Exemplo 4 *Seja W o grafo ilustrado na figura seguinte, constituído por seis vértices e nove arestas. Vamos estudar W , quanto à sua planaridade.*

W

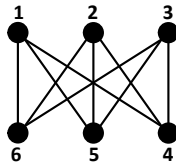


Figura 2.5 - Grafo W

Como podemos constatar, W possui várias arestas que se intercetam. Para ser considerado um grafo planar, temos de conseguir representá-lo no plano, de forma a eliminar as interceções entre as suas arestas, mas mantendo as ligações entre os respetivos vértices.

W

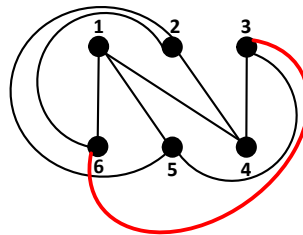


Figura 2.6 - Grafo não planar

W

Após termos modificado as arestas de W , esgotamos todas as alternativas de o tornar num grafo planar, pois “sobra” sempre uma aresta. A figura anterior ilustra que não é possível classificar W como um grafo planar, pois existe sempre uma interseção de arestas. Concluimos geometricamente que W é um grafo não planar.

Observação 5 *Os dois seguintes corolários podem ser considerados como as condições mais simples para provar que um grafo não é planar.*

Corolário 6 *Seja G um grafo simples, conexo e planar com e arestas e v vértices.*

Se $v > 2$ então temos a seguinte condição

$$e \leq 3v - 6.$$

Se esta condição não se verificar, então G é um grafo não planar.

Apresentamos de seguida um exemplo de como verificar se um dado grafo é ou não um grafo planar, aplicando este corolário.

Exemplo 7 *Seja K_5 o grafo representado na figura seguinte. K_5 é um grafo 4-regular, isto é, trata-se de um grafo completo em que todos os seus cinco vértices têm grau quatro. Vamos determinar se este grafo poderá alguma vez ser considerado um grafo planar.*

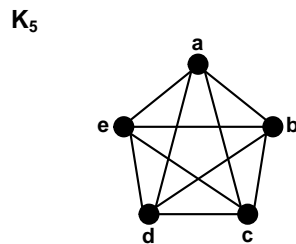


Figura 2.7 – Grafo K_5

Primeiro vamos demonstrá-lo geometricamente, para depois fazê-lo analiticamente, utilizando o corolário anterior. Podemos observar na figura seguinte, que por construção, K_5 é um grafo não planar, pois não é possível modificar as suas arestas de modo que nenhuma se intercete, ou seja, existe sempre uma aresta de K_5 que interceta as restantes.

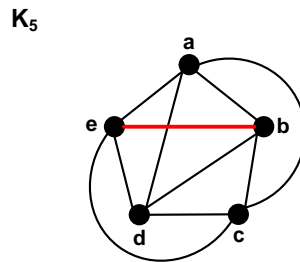


Figura 2.8 - O grafo completo K_5 é um grafo não planar.

Logo, K_5 é um grafo não planar.

Provemos agora analiticamente, de que K_5 é um grafo não planar, utilizando o corolário anterior. Como K_5 tem cinco vértices e dez arestas, então temos

$$v = 5 \quad e \quad e = 10$$

aplicando a condição do corolário anterior,

$$e \leq 3v - 6$$

verificamos que

$$10 \leq (3 \times 5) - 6 \iff 10 \leq 9.$$

Concluimos então que se trata de uma condição falsa, o que implica que o grafo K_5 não é planar, confirmando assim o resultado anterior.

O seguinte corolário também prova que um dado grafo nunca poderá ser considerado um grafo planar.

Corolário 8 *Seja $K_{r,s}$ um grafo conexo, planar e bipartido, então*

$$e \leq 2v - 4$$

onde as variáveis e e v são calculadas do seguinte modo

$$e = r \times s \quad e \quad v = r + s$$

Vamos exemplificar como aplicar este último corolário.

Exemplo 9 *Seja W o seguinte grafo não planar*

W

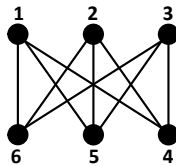


Figura 2.9 – Grafo não planar W

Vimos por construção, através da figura 2.6 que W não era planar. Vamos voltar a prová-lo analiticamente, mas desta vez utilizando o corolário anterior. O grafo W , para além de ser conexo e completo, é também bipartido, portanto é possível distribuímos os seus seis vértices em dois subconjuntos, com três elementos cada. Logo W é um grafo do tipo $K_{3,3}$.

Aplicando as condições do corolário 8 neste exemplo, temos que $r = 3$ e $s = 3$, então como $e = r \times s$ temos

$$e = 3 \times 3 = 9$$

e como $v = r + s$ então

$$v = 3 + 3 = 6$$

substituindo em $e \leq 2v - 4$ temos

$$\begin{aligned} 9 \leq (2 \times 6) - 4 &\iff 9 \leq 12 - 4 \\ &\iff 9 \leq 8 \end{aligned}$$

Concluimos que se trata de uma condição falsa, logo o grafo completo $K_{3,3}$ é um grafo não planar.

Vamos agora abordar algumas características e definições relacionadas com grafos planares, tais como as faces, o grau das faces e face regular de um grafo planar.

2.2 Faces de um grafo planar

Um grafo planar divide o plano em várias regiões distintas. Consideremos, por exemplo, o grafo completo K_4 da figura seguinte.

K_4

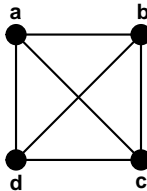


Figura 2.10 – Grafo completo K_4

Para transformarmos K_4 num grafo planar, basta modificarmos a posição de uma das suas arestas interiores, de tal modo que nenhuma se intercete. Neste caso alteramos a posição da aresta que liga os vértices a e c.

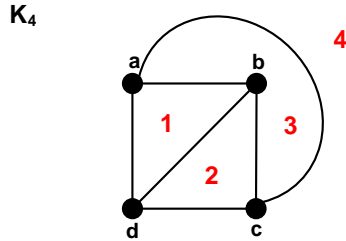


Figura 2.11 - O grafo K_4 tem quatro regiões distintas

Após isto, K_4 passou a ser um grafo planar com quatro regiões distintas, que tal como podemos verificar na figura anterior, encontram-se numeradas de um a quatro.

Definição 10 Se G é um grafo planar, então qualquer desenho de G divide o plano em regiões chamadas **faces**. Uma dessas faces é ilimitada e designamos por *face infinita*.

Definição 11 Se f é uma face de um grafo planar, então o **grau de uma face f** , designado por $deg(f)$, é o número de arestas que rodeia a face f .

Definição 12 Seja G um grafo planar em que todas as faces têm o mesmo grau r , então o grafo G é **face-regular** de grau r .

No exemplo seguinte, vamos demonstrar como calcular o grau de cada face, de um grafo planar.

Exemplo 13 Seja G o grafo planar representado na figura seguinte. Como podemos observar, G possui três faces, aqui identificadas por f_1 , f_2 e f_3 . Vamos determinar o grau de cada uma destas faces de G .

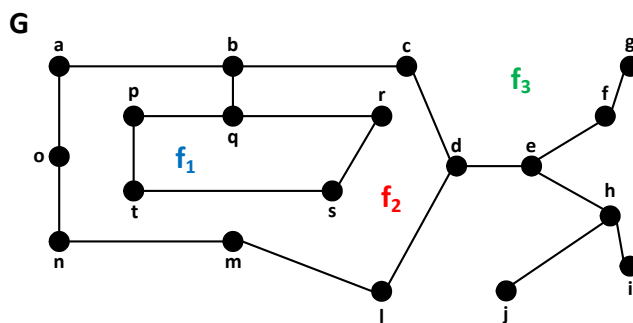


Figura 2.12 - Grafo planar G

Como podemos ver na figura 2.13, a face f_1 do grafo G está rodeada pelas arestas numeradas de um a cinco, logo o grau desta face f_1 tem um valor de cinco unidades, ou seja, $deg(f_1) = 5$.

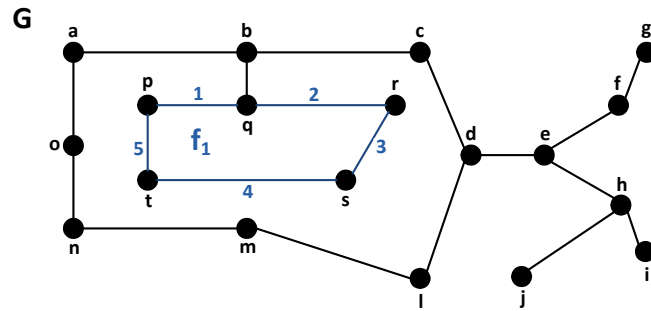


Figura 2.13 - A face f_1 do grafo G tem grau cinco

Na figura 2.14, está representada f_2 , a segunda face do grafo G , que se encontra rodeada pelas arestas numeradas de um a quinze. Logo o grau de f_2 é quinze, ou seja, $deg(f_2) = 15$.

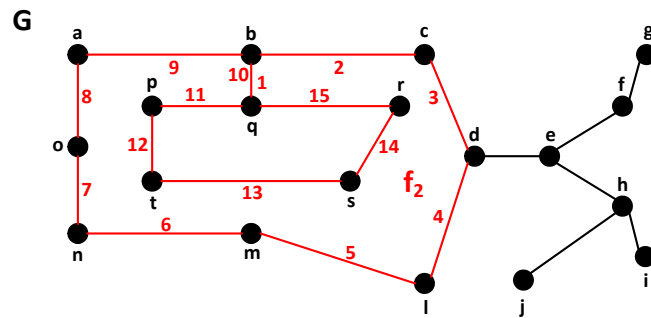


Figura 2.14 - A face f_2 do grafo G tem grau quinze

Sendo f_3 a face infinita do grafo planar G , rodeada pelas arestas numeradas de um a vinte, representadas na figura 2.15, então o grau desta face infinita f_3 será designada por $deg(f_3) = 20$.

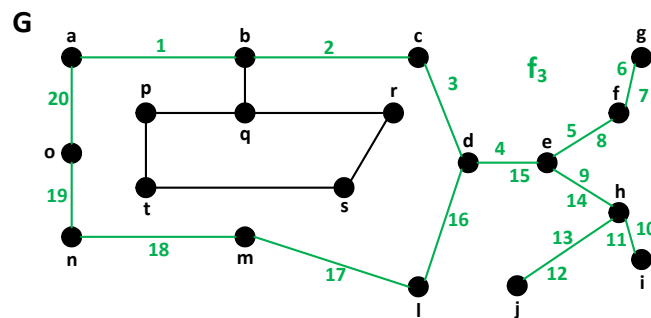


Figura 2.15 - A face infinita f_3 do grafo G tem grau 20

Vamos definir e exemplificar a Fórmula da Euler, que servirá de ferramenta para provar a relação entre alguns termos aqui já mencionados, tais como as faces, o grau das faces, os vértices e as arestas de um grafo planar.

2.3 Fórmula da Euler

Os graus das faces de um grafo planar e as suas arestas estão relacionadas entre si, pois a soma dos graus de todas as faces de um grafo planar é igual ao dobro do número das suas arestas. Esta relação está representada na seguinte expressão

$$\sum_{i=1}^n \deg(f_i) = 2e$$

No exemplo seguinte, iremos demonstrar a utilidade desta expressão.

Exemplo 14 Consideremos o grafo planar G , utilizado no exemplo 13. Vamos determinar o número de arestas de G , utilizando a expressão $\sum_{i=1}^n \deg(f_i) = 2e$.

No exemplo 13 calculamos o grau de cada uma das três faces de G , que estão representadas na figura seguinte por f_1 , f_2 e f_3

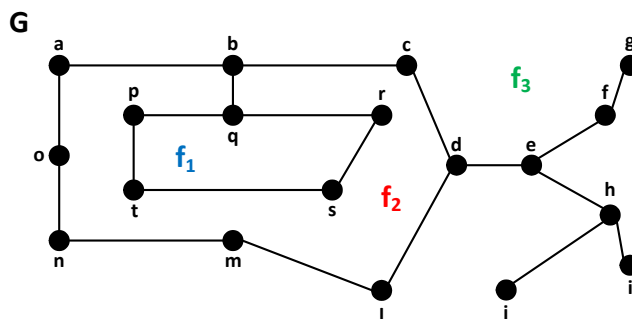


Figura 2.16 – Grafo planar G

onde $\deg(f_1) = 5$, $\deg(f_2) = 15$ e $\deg(f_3) = 20$.

Aplicando estes valores na expressão $\sum_{i=1}^n \deg(f_i) = 2e$ temos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \deg(f_i) &= \deg(f_1) + \deg(f_2) + \deg(f_3) \iff \sum_{i=1}^3 \deg(f_i) = 5 + 15 + 20 \\ &\iff \sum_{i=1}^3 \deg(f_i) = 40 \end{aligned}$$

e como

$$\sum_{i=1}^n \deg(f_i) = 2e$$

então

$$40 = 2e \iff e = 20$$

Concluimos que G tem vinte arestas, o que corresponde à figura 2.16.

Vamos definir mais uma correspondência, desta vez entre o número de vértices, arestas e faces de um grafo planar, através de uma fórmula, conhecida por *Fórmula de Euler*.

Definição 15 *Seja G um grafo planar e conexo e sejam e , v , e f o número de arestas, vértices e faces, respetivamente, do grafo G . Então, a **Fórmula de Euler** tem a seguinte forma*

$$v - e + f = 2.$$

Por outras palavras, se G é um grafo planar, então se somarmos o número dos seus vértices com o número das suas faces, e subtraírmos pelo número das suas arestas, o resultado só pode tomar um valor de duas unidades.

Nos próximos dois exemplos, iremos demonstrar a utilidade da Fórmula de Euler.

Exemplo 16 *Seja G um grafo planar e conexo, constituído por dez vértices, todos de grau três. Queremos determinar o número de regiões, ou faces, de G .*

Sendo G um grafo planar, podemos utilizar a expressão mencionada na introdução deste tema, para determinarmos o número de arestas de G . Como a soma dos graus de todas as faces de G é igual ao dobro do número de arestas, isto é, $\sum_{i=1}^n \deg(f_i) = 2e$ e como G tem dez vértices, todos de grau três, substituindo este valor no somatório anterior, temos

$$\sum_{i=1}^{10} \deg(f_i) = 10 \times 3 \iff \sum_{i=1}^{10} \deg(f_i) = 30$$

logo conseguimos determinar o número de arestas de G , pois

$$2e = 30 \iff e = 15.$$

Concluimos que G tem quinze arestas.

Portanto, estamos agora em condições de utilizar a Fórmula de Euler, pois para além de G ser um grafo planar e conexo, sabemos que tem dez vértices e quinze arestas. Podemos então substituir na Fórmula da Euler as respectivas variáveis já determinadas.

Como $e = 15$ e $v = 10$, substituindo estes valores na expressão $v - e + f = 2$ temos

$$10 - 15 + f = 2 \iff f = 7$$

Concluimos então que o grafo G tem sete faces.

Exemplo 17 *Seja H um grafo planar e conexo, regular de grau quatro, com dez faces. Vamos determinar o número de vértices de G .*

Como H é planar, sabemos que a soma dos graus de todas as suas faces será igual ao dobro do número das suas arestas, isto é $\sum_{i=1}^n \deg(fi) = 2e$, e como H é regular de grau quatro, então todos os seus vértices contêm quatro arestas, logo o grau de qualquer das suas faces será de quatro unidades, então o somatório anterior poderá ser escrita na seguinte forma

$$\sum_{i=1}^n 4 = 2e$$

então como $\sum_{i=1}^n 4 = n \times 4$ temos

$$4n = 2e \iff e = 2n.$$

Aplicando a fórmula de Euler, $v - e + f = 2$ e substituindo as respectivas variáveis pelos seguintes valores $v = n$, $e = 2n$ e $f = 10$ temos

$$\begin{aligned} n - 2n + 10 = 2 &\iff -n = -8 \\ &\iff n = 8. \end{aligned}$$

Como consideramos $v = n$ e como $n = 8$, então $v = 8$. Voltando a substituir as variáveis da Fórmula de Euler, $v - e + f = 2$, pelos respectivos valores, temos

$$8 - e + 10 = 2 \iff e = 16.$$

Portanto, chegamos à conclusão de que o grafo H tem dez faces, oito vértices e dezasseis arestas. Podemos representar H, graficamente

H

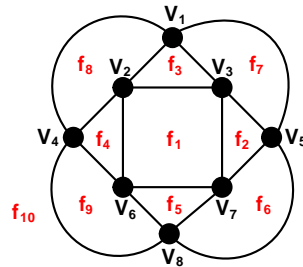


Figura 2.17 - Grafo planar H

Uma das características dos grafos planares, é o facto de alguns poderem ser considerados grafos poliédricos. Vamos de seguida definir e identificar este tipo de grafos.

2.4 Grafo poliédrico

Na teoria dos grafos, os grafos poliédricos podem ser associados a objetos geométricos, pois este tipo de grafos são constituídos pelos vértices e arestas de um poliedro convexo.

Definição 18 Um grafo G simples e conexo é **poliédrico** se $\deg(\mathbf{v}) \geq 3$ para todo o vértice \mathbf{v} de G e se $\deg(\mathbf{f}) \geq 3$ para toda a face \mathbf{f} de G .

Nos próximos três exemplos vamos mostrar como determinar, identificar e construir grafos poliédricos.

Exemplo 19 Seja G o seguinte grafo simples e conexo. Vamos determinar se G é um grafo poliédrico.

G

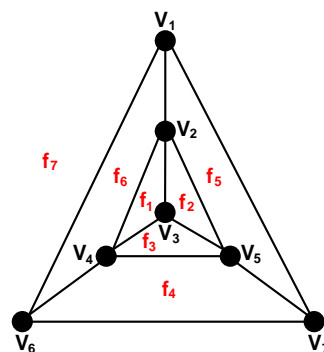


Figura 2.18 - Exemplo de um grafo poliédrico

Atendendo aos graus dos vértices do grafo G , representado na figura anterior, temos as seguintes igualdades

$$\deg(\mathbf{v}_1) = \deg(\mathbf{v}_3) = \deg(\mathbf{v}_6) = \deg(\mathbf{v}_5) = 3$$

$$\deg(\mathbf{v}_2) = \deg(\mathbf{v}_4) = \deg(\mathbf{v}_7) = 4$$

então $\deg(v) \geq 3$, e se tivermos em consideração o grau das faces de G , temos

$$\deg(\mathbf{f}_1) = \deg(\mathbf{f}_2) = \deg(\mathbf{f}_3) = \deg(\mathbf{f}_7) = 3$$

$$\deg(\mathbf{f}_4) = \deg(\mathbf{f}_5) = \deg(\mathbf{f}_6) = 4$$

logo $\deg(\mathbf{f}) \geq 3$.

Então, pela definição 18, como o grau de todos os vértices e de todas as faces é maior ou igual a três unidades, concluímos que o grafo G é um grafo poliédrico.

No exemplo seguinte, vamos exemplificar como construir um grafo planar, não poliédrico.

Exemplo 20 *Queremos construir um grafo planar G , não poliédrico, com a seguinte condição $\sum_{i=1}^4 \deg(\mathbf{f}_i) = 16$.*

Se tivermos em conta a expressão $\sum_{i=1}^4 \deg(\mathbf{f}_i) = 16$, verificamos que, $\mathbf{n} = 4$, ou seja, o limite superior do somatório é de quatro unidades, o que nos leva a concluir que o grafo G tem quatro faces. Se aplicarmos este valor ao somatório que nos diz que a soma dos graus de todas as faces de um grafo planar é igual ao dobro do número das suas arestas, isto é $\sum_{i=1}^n \deg(\mathbf{f}_i) = 2\mathbf{e}$, temos

$$\sum_{i=1}^4 \deg(\mathbf{f}_i) = 16$$

logo

$$2\mathbf{e} = 16 \iff \mathbf{e} = 8.$$

Portanto, G tem oito arestas. Substituindo as variáveis na Fórmula de Euler $v - e + f = 2$, pelos respectivos valores, temos

$$v - 8 + 4 = 2 \iff v = 6.$$

Concluimos que o grafo G tem quatro faces, oito arestas e seis vértices. Graficamente, o grafo G poderá ter o seguinte aspeto

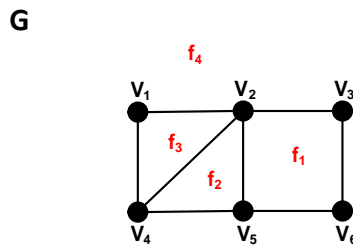


Figura 2.19 - Grafo planar não poliédrico

No próximo exemplo vamos mostrar como identificar um grafo poliédrico

Exemplo 21 Consideremos o grafo H , representado na figura seguinte. Queremos averiguar se H é ou não poliédrico.

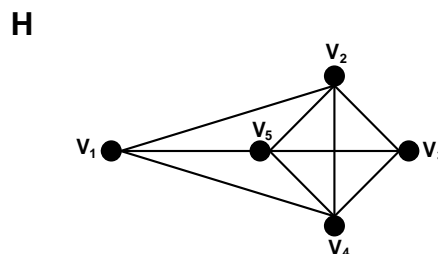


Figura 2.20 - Grafo H

Para determinarmos se o grafo H é poliédrico, temos de inicialmente fazer uma construção planar de H , para depois calcularmos o número das suas faces. Uma possível construção planar do grafo H , poderá ser o grafo representado na figura seguinte.

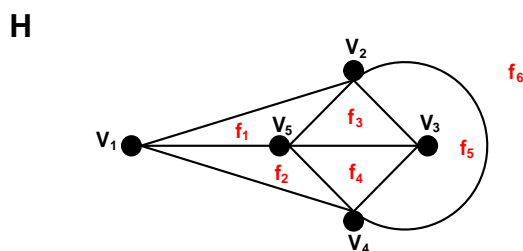


Figura 2.21 - Representação planar do grafo H

Nesta representação de H, temos um grafo planar com seis faces. Estamos agora em condições de podermos averiguar se o grafo H é poliédrico. Teremos de calcular o grau dos seus vértices e o grau das suas faces. Observando os vértices de H, verificamos que são todos de grau igual ou superior a três, isto é

$$\deg(\mathbf{v}_1) = \deg(\mathbf{v}_3) = 3 \text{ e } \deg(\mathbf{v}_2) = \deg(\mathbf{v}_4) = \deg(\mathbf{v}_5) = 4$$

logo $\deg(v) \geq 3$. Chegamos à mesma conclusão quanto ao grau das faces de H, pois

$$\deg(\mathbf{f}_1) = \deg(\mathbf{f}_2) = \deg(\mathbf{f}_3) = \deg(\mathbf{f}_4) = \deg(\mathbf{f}_5) = \deg(\mathbf{f}_6) = 3$$

então $\deg(f) \geq 3$.

Portanto, como o grau dos vértices e das faces de H são maiores ou iguais a três, concluímos então que o grafo H é poliédrico.

2.5 Grafo dual geométrico

Vamos definir o grafo dual geométrico, também conhecido por pseudografo. A construção deste tipo de grafos é semelhante ao processo muitas vezes utilizado na coloração de mapas, mais precisamente, quando associamos um mapa planar a um grafo, como veremos no capítulo seguinte.

Definição 22 *Dado um grafo planar G , o seu grafo dual geométrico, representado por G^* , é um grafo planar que pode ser construído colocando um vértice em cada uma das regiões (ou faces) de G (incluindo a face infinita), e unindo estes vértices por segmentos que intercetam, uma única vez, cada uma das arestas que unem duas regiões adjacentes. O resultado é um grafo planar, que também pode ser designado por pseudografo (grafo não simples que pode incluir loops e/ou arestas múltiplas).*

Apresentamos, nas figuras seguintes, dois exemplos de como construir um grafo dual geométrico (pseudografo), a partir dos seus respetivos grafos planares.

Exemplo 23 Seja G o grafo planar representado na figura seguinte. Vamos construir o seu respetivo grafo dual geométrico G^* .

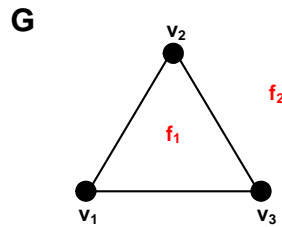


Figura 2.22 - Grafo planar G

Como podemos verificar na figura 2.22, G tem duas faces, designadas por f_1 e f_2 . O primeiro passo para construirmos o grafo dual geométrico de G , será colocarmos um vértice em cada região (ou face) de G , por exemplo v_A e v_B . O passo seguinte será identificar as arestas, que unem duas faces adjacentes de G .

Observando a figura 2.23, verificamos que cada uma das três arestas do grafo tem as duas faces de G em comum, logo unimos os respetivos vértices v_A e v_B através de três segmentos, que intercetam cada uma das arestas de G .

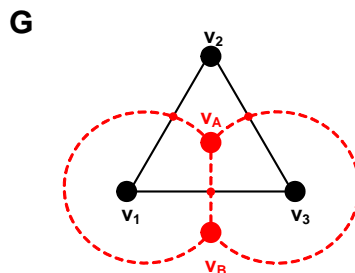


Figura 2.23 - Construção do grafo dual geométrico

O resultado final é o seguinte grafo planar G^* , designado por grafo dual geométrico, ou por pseudografo de G

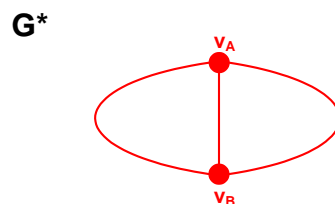


Figura 2.24 - Exemplo de um pseudografo G^*

Exemplo 24 A figura seguinte representa um grafo planar com três faces. Seja H esse grafo planar e f_1 , f_2 e f_3 as suas respectivas três regiões. Vamos representar o seu respetivo grafo dual geométrico H^* .

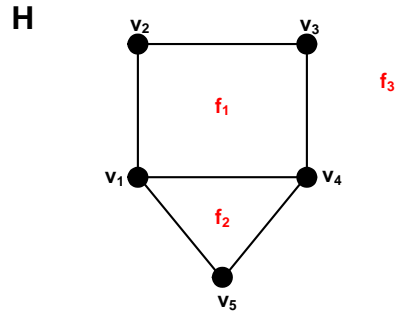


Figura 2.25 - Grafo planar H

Para obtermos uma construção do grafo dual H^* , basta repetir os passos descritos no exemplo 23, tal como podemos observar na figura seguinte. Criamos um vértice em cada das três faces de H , por exemplo v_A , v_B e v_C . Unimos estes vértices por segmentos que intercetam cada uma das respetivas arestas de H

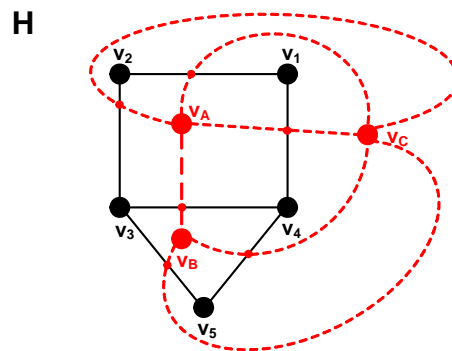


Figura 2.26 - Representação do grafo dual geométrico de H

obtendo assim o grafo dual geométrico H^* , ilustrado na figura seguinte.

H^*

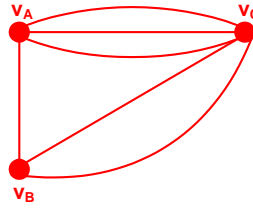


Figura 2.27 - Exemplo de um pseudografo H^*

Terminamos o primeiro capítulo, referente à definição e características de grafos planares. Estes conceitos que foram aqui abordados, de um modo muito sucinto, vão servir de base para os temas dos próximos capítulos.

Capítulo 3

A planaridade e a coloração de grafos

Vamos definir alguns conceitos relacionados com a coloração de grafos para depois os relacionarmos com a planaridade. O objetivo da coloração de um grafo é encontrar o número mínimo de cores diferentes, de modo que dois vértices adjacentes não possam ter a mesma cor. Podemos também substituir as cores por números.

3.1 Coloração de um grafo

A resolução de muitos problemas reais, relacionados com o nosso quotidiano, estão associados com o problema da coloração de grafos. Esta relação vem reforçar a importância deste tema.

Definição 25 *Seja G um grafo sem loops. Uma k -coloração de G é uma distribuição de k cores nos vértices de G de tal modo que vértices adjacentes têm cores distintas. Se o grafo G tem uma k -coloração, então G é k -colorável.*

Definição 26 *Seja G um grafo sem loops. O número cromático de G designa-se por $\chi(G)$ e é o menor número k para o qual o grafo G é k -colorável.*

Seguem-se dois exemplos de grafos k -coloráveis, onde o primeiro é um grafo planar enquanto que o segundo é não planar. O objetivo passa por descobrir se é possível determinar os seus respetivos números cromáticos.

Exemplo 27 *Seja G o seguinte grafo planar com oito vértices e treze arestas. Vamos determinar o número cromático de G .*

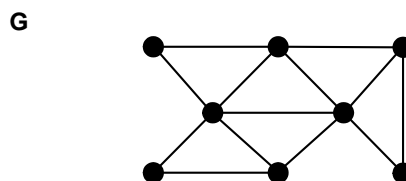


Figura 3.1 – Grafo planar G

Em primeiro lugar, colorimos os vértices de G , de modo que vértices adjacentes tenham cores distintas, para assim obtermos um grafo k -colorável. Como podemos observar na figura seguinte, o grafo G é um grafo 4-colorável, ou seja, um grafo com um número cromático $\chi(G)$ de quatro unidades.

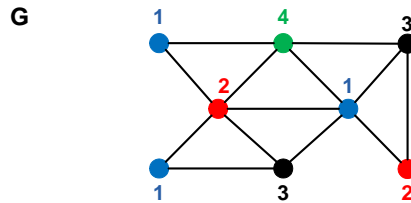


Figura 3.2 – Grafo G com $\chi(G) = 4$

No entanto, como podemos verificar na figura seguinte, ao distribuirmos as cores dos vértices de G de uma outra forma, obtemos um número cromático diferente, neste caso conseguimos reduzir $\chi(G)$ numa unidade.

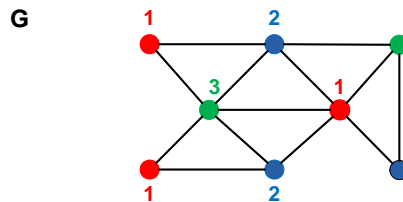


Figura 3.3 – Grafo G , com $\chi(G) = 3$

Logo, trata-se de um grafo 3-colorável, ou seja, um grafo com um número cromático $\chi(G)$ de três unidades, isto é, na segunda tentativa obtivemos um número cromático menor. Como sabemos que não conseguimos obter um número cromático menor que três? Para darmos resposta a esta questão existem algoritmos que veremos depois do próximo exemplo.

Exemplo 28 *Seja o seguinte grafo não planar H . Vamos ver se é possível calcular o seu respetivo número cromático.*

H

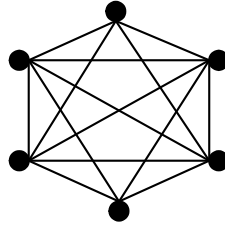


Figura 3.4 – Grafo não planar H

Ao colorirmos os vértices do grafo não planar H, de um modo que vértices adjacentes não tenham a mesma cor, verificamos que se trata de um grafo com um número cromático de cinco unidades, isto é, $\chi(H) = 5$. Podemos observar este facto na figura seguinte.

H

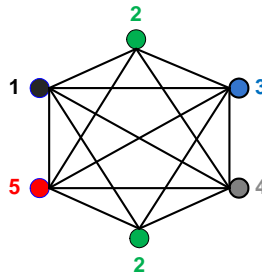


Figura 3.5 - Grafo H, 5-colorável

Logo podemos concluir que é possível determinar o número cromático de grafos, independentemente de serem grafos planares ou não planares.

Vamos introduzir e exemplificar dois algoritmos que vão permitir obter o número cromático de um dado grafo, algoritmo de Welsh - Powell e algoritmo de Marble - Matula - Isaacson.

3.2 Algoritmo de Welsh - Powell

Algoritmo 29 *Seja G um grafo.*

1. Ordenar os vértices de G por ordem decrescente relativamente ao grau.
2. Atribuir uma cor C_1 ao vértice de maior grau, por exemplo, v_i e atribuir essa cor C_1 aos vértices não adjacentes a v_i , por ordem sequencial (começar por selecionar o vértice não adjacente com maior grau).
3. Repetir o passo 2) e atribuir a segunda cor C_2 ao vértice de maior grau v_j na nova sequência e aos vértices não adjacentes a v_j .

4. Repetir o processo até todos os vértices terem sido coloridos.

Nos dois exemplos seguintes vamos analisar a possibilidade de aplicar este algoritmo, primeiro num grafo não planar e depois num grafo planar.

Exemplo 30 Utilizando o algoritmo de Welsh - Powell, vamos calcular o número cromático de um grafo não planar. Seja H o seguinte grafo não planar

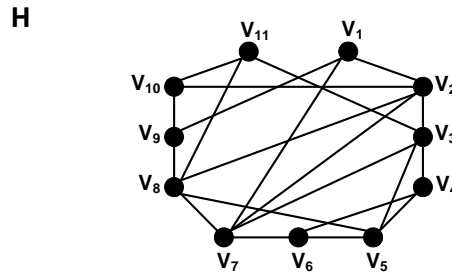


Figura 3.6 – Grafo planar H

Vamos determinar o número cromático de H . Para uma melhor visualização deste algoritmo, optamos por construir a seguinte tabela.

Vértice	Grau do vértice (deg)	Ordenação decrescente	Grau do vértice (deg)	Vértice não adjacente	Vértice selecionado	Vértice rejeitado	Cor do vértice
V_1	3	V_2	5	$V_4, V_5, V_6, V_9, V_{11}$	V_5, V_9, V_{11}	V_4, V_6	●
V_2	5	V_3	5	$V_1, V_6, V_8, V_9, V_{10}$	V_8, V_1, V_6, V_{10}	V_9	●
V_3	5	V_7	5	$V_4, V_5, V_9, V_{10}, V_{11}$	V_4	V_5, V_9, V_{10}, V_{11}	●
V_4	3	V_8	5	----	----	----	----
V_5	4	V_5	4	----	----	----	----
V_6	3	V_1	3	----	----	----	----
V_7	5	V_4	3	----	----	----	----
V_8	5	V_6	3	----	----	----	----
V_9	3	V_9	3	----	----	----	----
V_{10}	3	V_{10}	3	----	----	----	----
V_{11}	3	V_{11}	3	----	----	----	----

Observando a tabela anterior, podemos verificar que ordenamos os onze vértices do grafo não planar H , por ordem decrescente relativamente ao grau, para depois atribuímos uma cor ao vértice de maior grau, assim como aos respetivos vértices não adjacentes, por ordem sequencial, começando por seleccionar o vértice não adjacente com maior grau. Repetimos estes passos até colorirmos todos os vértices de H . Assim, atribuímos a cor vermelha aos vértices v_2, v_5, v_9 e v_{11} , a cor verde aos vértices v_1, v_3, v_6, v_8 e v_{10} , e para finalizar, atribuímos a cor azul aos vértices v_4 e v_7 .

Obtemos o grafo não planar H , com a seguinte coloração dos seus vértices.

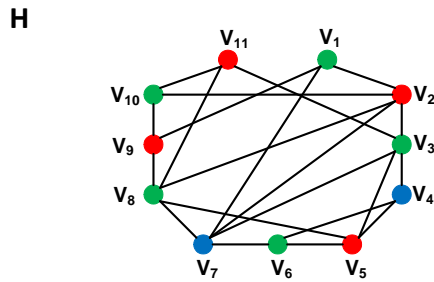


Figura 3.7 – Grafo H, com $\chi(H) = 3$

Após efetuarmos todos os passos do algoritmo de Welsh - Powell e de colorir todos os vértices do grafo não planar H, concluímos que este grafo tem um número cromático de valor três, isto é, $\chi(H) = 3$.

Logo, é possível calcular o número cromático de um grafo não planar através do algoritmo de Welsh - Powell.

Exemplo 31 Vamos calcular o número cromático de um grafo planar, utilizando de novo o algoritmo de Welsh-Powell. Seja G o seguinte grafo planar.

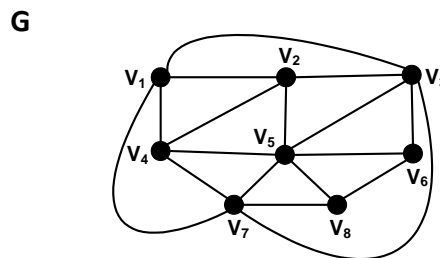


Figura 3.8 - Grafo planar G

Vamos determinar o número cromático de G. Ao utilizarmos este algoritmo, podemos optar, mais uma vez, por construir a tabela seguinte, para uma melhor visualização dos passos a efetuar.

Vértice	Grau do vértice (deg)	Ordenação decrescente	Grau do vértice (deg)	Vértice não adjacente	Vértice Selecionado	Vértice rejeitado	Cor do Vértice
v_1	4	v_5	6	v_1	v_1	----	●
v_2	4	v_3	5	v_4, v_8	v_4, v_8	----	●
v_3	5	v_7	5	v_2, v_6	v_2, v_6	----	●
v_4	4	v_1	4	----	----	----	----
v_5	6	v_2	4	----	----	----	----
v_6	3	v_4	4	----	----	----	----
v_7	5	v_6	3	----	----	----	----
v_8	3	v_8	3	----	----	----	----

Observando a tabela anterior, podemos verificar que após termos ordenado os oito vértices do grafo planar G , por ordem decrescente relativamente ao grau, atribuímos uma cor ao vértice de maior grau, assim como aos respectivos vértices não adjacentes, por ordem sequencial, começando por selecionar o vértice não adjacente com maior grau. Repetimos estes passos até colorirmos todos os vértices de G . Atribuímos a cor vermelha aos vértices v_5 e v_1 , a cor azul aos vértices v_3 , v_4 e v_8 , e por fim, atribuímos a cor verde aos vértices v_7 , v_2 e v_6 .

Obtemos o mesmo grafo planar G , com a seguinte coloração dos seus vértices

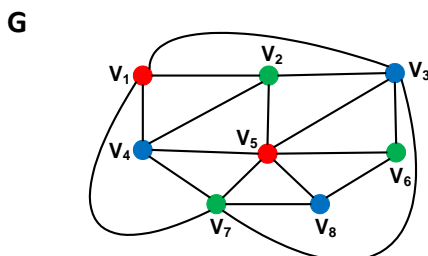


Figura 3.9 – Grafo G , com $\chi(G) = 3$

Após concluir todos os passos do algoritmo de Welsh - Powell e de os vértices do grafo planar estarem devidamente coloridos, neste caso com três cores diferentes, verificamos que G tem um número cromático de valor três, isto é, $\chi(G) = 3$.

Podemos concluir que é possível determinar o número cromático de um grafo planar, utilizando o algoritmo de Welsh - Powell.

3.3 Algoritmo de Marble – Matula – Isaacson

O algoritmo de Marble – Matula – Isaacson é idêntico ao algoritmo de Welsh - Powell, apenas diferem em dois aspetos. Neste caso, no primeiro passo, a ordenação dos vértices, relativamente ao grau, é feita por ordem crescente. No segundo e terceiro

passo, as respectivas cores são atribuídas aos vértices de menor grau. Vamos descrever este algoritmo, para depois analisar o seu comportamento, consoante a planaridade dos grafos onde é aplicado.

Algoritmo 32 *Seja G um grafo.*

1. Ordenar os vértices de G por ordem crescente relativamente ao grau.
2. Atribuir uma cor C_1 ao vértice de menor grau, por exemplo, v_i e atribuir essa cor C_1 aos vértices não adjacentes a v_i , por ordem sequencial (começar por seleccionar o vértice não adjacente com menor grau).
3. Repetir o passo **2)** e atribuir a segunda cor C_2 ao vértice de menor grau v_j na nova sequência e aos vértices não adjacentes a v_j .
4. Repetir o processo até todos os vértices terem sido coloridos.

Nos dois exemplos seguintes, vamos recorrer aos mesmos grafos utilizados nos dois exemplos anteriores, de modo a comparar os valores dos números cromáticos obtidos. Vamos analisar a aplicabilidade do algoritmo de Marble – Matula – Isaacson em grafos planares e em grafos não planares.

Exemplo 33 *Utilizando o algoritmo de Marble – Matula – Isaacson, vamos calcular o número cromático do seguinte grafo H , não planar.*

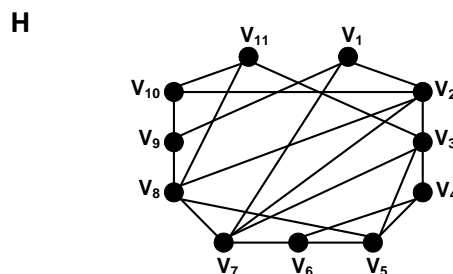


Figura 3.10 – Grafo planar H

Para uma melhor visualização dos passos do algoritmo a efetuar, podemos construir a tabela seguinte.

Vértice	Grau do vértice (deg)	Ordenação crescente	Grau do vértice (deg)	Vértice não adjacente	Vértice selecionado	Vértice rejeitado	Cor do vértice
v_1	3	v_1	3	$v_3, v_4, v_5, v_6, v_8, v_{10}, v_{11}$	v_4, v_8, v_{10}	v_3, v_5, v_6, v_{11}	●
v_2	5	v_4	3	----	----	----	----
v_3	5	v_6	3	$v_1, v_2, v_3, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}$	v_9, v_{11}, v_2	v_1, v_3, v_8, v_{10}	●
v_4	3	v_9	3	----	----	----	----
v_5	4	v_{10}	3	----	----	----	----
v_6	3	v_{11}	3	----	----	----	----
v_7	5	v_5	4	$v_1, v_2, v_7, v_9, v_{10}, v_{11}$	v_7	$v_1, v_2, v_9, v_{10}, v_{11}$	●
v_8	5	v_2	5	----	----	----	----
v_9	3	v_3	5	$v_1, v_6, v_8, v_9, v_{10}$	----	$v_1, v_6, v_8, v_9, v_{10}$	●
v_{10}	3	v_7	5	----	----	----	----
v_{11}	3	v_8	5	----	----	----	----

Na tabela anterior, ordenamos os onze vértices do grafo não planar H, por ordem crescente relativamente ao grau. Depois, atribuímos uma cor ao vértice de menor grau, assim como aos respetivos vértices não adjacentes, por ordem sequencial, começando por selecionar o vértice não adjacente com menor grau. Repetimos estes passos até colorirmos todos os vértices de H. Assim, atribuímos a cor azul aos vértices v_1, v_4, v_8 e v_{10} , a cor vermelha aos vértices v_6, v_9, v_{11} e v_2 , a cor verde aos vértices v_5 e v_7 e por fim, atribuímos a cor preta ao vértice v_3 .

Obtemos a seguinte coloração dos vértices de H

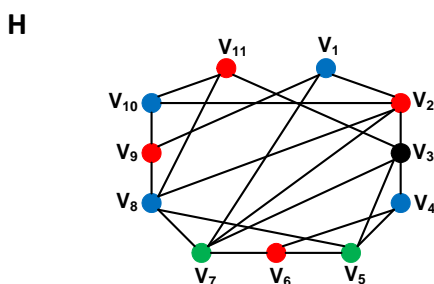


Figura 3.11 - Grafo H com $\chi(H) = 4$.

Após terminar todos os passos do algoritmo de Marble – Matula – Isaacson e de os vértices do grafo H estarem devidamente coloridos, neste caso com quatro cores diferentes, concluímos que H tem um número cromático de quatro unidades, isto é, $\chi(H) = 4$.

Logo, é possível determinar o número cromático de um grafo não planar, utilizando o algoritmo de Marble – Matula – Isaacson.

Exemplo 34 Seja G o seguinte grafo planar. Utilizando o algoritmo de Marble – Matula – Isaacson, vamos calcular o número cromático do grafo planar G .

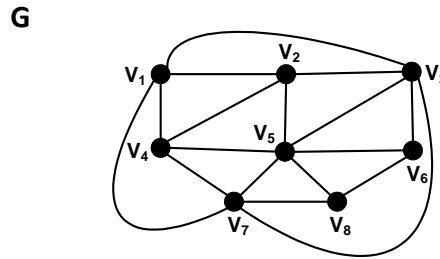


Figura 3.12 – Grafo planar G

Ao utilizarmos o algoritmo de Marble – Matula – Isaacson, para calcular o número cromático do grafo planar G , voltamos a optar por construir a seguinte tabela, para uma melhor visualização dos passos a efetuar.

Vértice	Grau do vértice (deg)	Ordenação crescente	Grau do vértice (deg)	Vértice não adjacente	Vértice selecionado	Vértice rejeitado	Cor do vértice
v_1	4	v_6	3	v_1, v_2, v_4, v_7	v_1	v_2, v_4, v_7	●
v_2	4	v_8	3	v_1, v_2, v_3, v_4	v_2	v_1, v_3, v_4	●
v_3	5	v_1	4	----	----	----	----
v_4	4	v_2	4	----	----	----	----
v_5	6	v_4	4	v_3, v_6, v_8	v_3	v_6, v_8	●
v_6	3	v_3	5	v_4, v_8	----	v_4, v_8	----
v_7	5	v_7	5	v_2, v_6	----	v_2, v_6	●
v_8	3	v_5	6	v_1	----	v_1	●

Nesta tabela, ordenamos os oito vértices do grafo planar G , por ordem crescente relativamente ao grau. Após isto, atribuímos uma cor ao vértice de menor grau, assim como aos respetivos vértices não adjacentes, por ordem sequencial, começando por selecionar o vértice não adjacente com menor grau. Repetimos estes passos até colorirmos todos os vértices de G . Assim, atribuímos a cor vermelha aos vértices v_6 e v_1 , a cor verde aos vértices v_8 e v_2 , a cor azul aos vértices v_4 e v_3 , a cor preta ao vértice v_7 , e para finalizar, atribuímos a cor roxa ao vértice v_5 .

Obtemos a seguinte coloração dos vértices de G

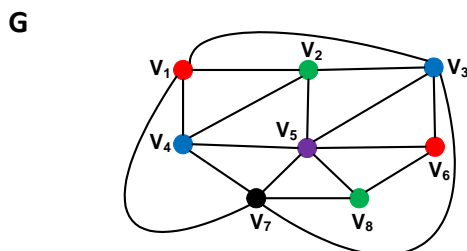


Figura 3.13 - Grafo G com $\chi(G) = 5$.

Após concluir todos os passos do algoritmo de Marble – Matula – Isaacson e de os vértices do grafo G estarem devidamente coloridos, neste caso com cinco cores diferentes, concluímos que G tem um número cromático de valor cinco, isto é, $\chi(G) = 5$.

Logo, é possível aplicar este algoritmo em grafos planares, de modo a obter o seu respetivo número cromático.

Após exemplificar a aplicação dos algoritmos de Welsh – Powell e de Marble – Matula – Isaacson, vimos que é possível calcular o número cromático de um grafo, através de qualquer um destes dois algoritmos, independentemente da planaridade do grafo. Vimos também que bastou alterar o método do cálculo do número cromático, para obtermos valores diferentes, tanto nos grafos planares como nos grafos não planares. Podemos então concluir que nem sempre estes dois algoritmos apresentam o menor número de cores, isto é, o menor número cromático. Logo nenhum destes dois algoritmos é perfeito, ao ponto de nos dar um número cromático ideal.

No entanto existem propostas de valores aproximados. Na definição e no teorema seguinte vamos apresentar uma dessas propostas.

Definição 35 *Seja G um grafo. O grau máximo de G é o maior número de arestas de qualquer um dos vértices deste grafo e representa-se por $\Delta(G)$.*

Exemplo 36 *Seja H o seguinte grafo. Vamos determinar o grau máximo de H.*

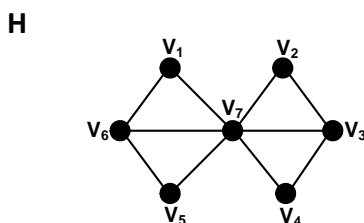


Figura 3.14 – Grafo H

Como podemos verificar, o vértice de H que contém mais arestas, é o v_7 . Este vértice possui seis arestas, logo o grau máximo de H é de seis unidades, ou seja $\Delta(H) = 6$.

Teorema 37 Se G é um grafo simples cujo grau máximo do grafo é representado por $\Delta(G)$, então o número cromático de G será menor ou igual a $\Delta(G) + 1$, isto é, $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$

Nos exemplos que se seguem, vamos testar se este teorema é aplicável a grafos planares e a grafos não planares.

Exemplo 38 Utilizando o teorema anterior, vamos determinar o número cromático do seguinte grafo G , não planar e simples, constituído por dez vértices e dezassete arestas.

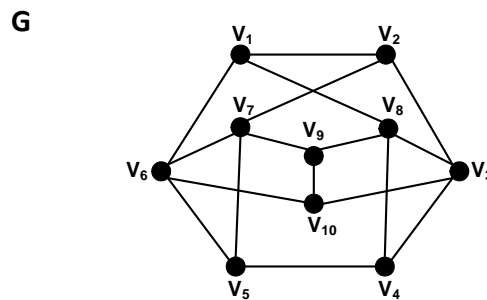


Figura 3.15 – Grafo G , não planar

Observando o grafo G , constatamos que os vértices v_3 , v_6 , v_7 e v_8 são os que contêm o maior número de arestas. Neste caso, possuem quatro arestas cada. Portanto o grau máximo de G é de quatro unidades, ou seja, $\Delta(G) = 4$. Logo, pelo teorema anterior, o número cromático deste grafo terá de ser inferior ou igual a cinco unidades, isto é,

$$\begin{aligned} \chi(G) \leq \Delta(G) + 1 &\iff \chi(G) \leq 4 + 1 \\ &\iff \chi(G) \leq 5. \end{aligned}$$

Para comprovar este resultado, vamos novamente utilizar o algoritmo de Powell – Welsh, para determinar o número cromático do mesmo grafo não planar G , representado na figura anterior.

Vértice	Grau do vértice (deg)	Ordenação decrescente	Grau do vértice (deg)	Vértice não adjacente	Vértice selecionado	Vértice rejeitado	Cor do vértice
v_1	3	v_3	4	v_1, v_5, v_6, v_7, v_9	v_6, v_9	v_1, v_5, v_7	●
v_2	3	v_6	4	----	----	----	----
v_3	4	v_7	4	$v_1, v_3, v_4, v_8, v_{10}$	v_8, v_{10}	v_1, v_3, v_4	●
v_4	3	v_8	4	----	----	----	----
v_5	3	v_1	3	$v_3, v_4, v_5, v_7, v_9, v_{10}$	v_4	$v_3, v_5, v_7, v_9, v_{10}$	●
v_6	4	v_2	3	v_5	v_5	----	●
v_7	4	v_4	3	----	----	----	----
v_8	4	v_5	3	----	----	----	----
v_9	3	v_9	3	----	----	----	----
v_{10}	3	v_{10}	3	----	----	----	----

Observando a tabela, podemos verificar que após termos ordenado os dez vértices do grafo não planar G por ordem decrescente, relativamente ao grau, atribuímos uma cor ao vértice de maior grau, assim como aos respetivos vértices não adjacentes, por ordem sequencial, começando por selecionar o vértice não adjacente com maior grau. Repetimos estes passos até colorirmos todos os vértices de G . Portanto, atribuímos a cor vermelha aos vértices v_3 , v_6 e v_9 , a cor verde aos vértices v_7 , v_8 e v_{10} , a cor azul aos vértices v_1 e v_4 e para finalizar, atribuímos a cor preta aos vértices v_2 e v_5 .

Após efetuarmos todos os passos do algoritmo de Welsh - Powell e de colorir todos os vértices do grafo G , concluímos que este grafo tem um número cromático de quatro unidades, isto é, $\chi(G) = 4$, tal como podemos observar na figura seguinte.

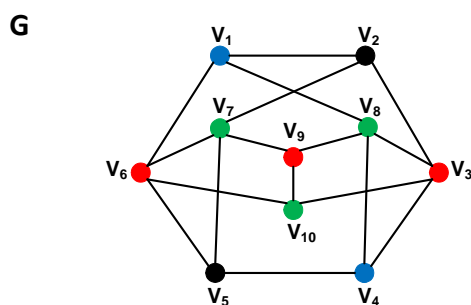


Figura 3.16 – Grafo não planar G

Este resultado já era de esperar, pois pelo teorema anterior, o número cromático de G teria de ser menor ou igual a cinco unidades.

Logo este resultado vem confirmar que este último teorema, relativo ao grau máximo de um grafo, pode ser aplicado em grafos não planares.

O próximo exemplo tem como finalidade verificar se podemos aplicar este último teorema num grafo planar.

Exemplo 39 *Seja H o seguinte grafo planar e simples. Vamos determinar o número cromático de H , baseando-nos no teorema anterior.*

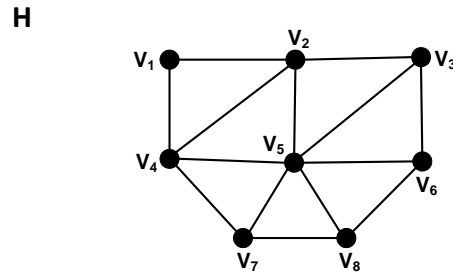


Figura 3.17 – Grafo planar H

Ao visualizar a figura anterior, constatamos que de todos os vértices de H , o vértice v_6 é o que possui o maior número de arestas, neste caso, tem seis arestas, ou seja, o grau máximo de H é de seis unidades, isto é, $\Delta(G) = 6$. Então, pelo teorema anterior, o número cromático deste grafo terá de ser igual ou inferior a sete, isto é

$$\begin{aligned} \chi(H) \leq \Delta(H) + 1 &\iff \chi(H) \leq 6 + 1 \\ &\iff \chi(H) \leq 7. \end{aligned}$$

Voltamos a utilizar o algoritmo de Powell – Welsh para determinar o número cromático do mesmo grafo planar H , representado na figura 3.17. Para uma melhor visualização dos passos deste algoritmo, vamos construir a tabela seguinte.

Vértice	Grau do vértice (deg)	Ordenação decrescente	Grau do vértice (deg)	Vértice não adjacente	Vértice Selecionado	Vértice rejeitado	Cor do Vértice
v_1	2	v_5	6	v_1	v_1	---	●
v_2	4	v_2	4	v_6, v_7, v_8	v_6, v_7	v_8	●
v_3	3	v_4	4	v_3, v_8	v_3, v_8	---	●
v_4	4	v_3	3	---	---	---	---
v_5	6	v_6	3	---	---	---	---
v_6	3	v_7	3	---	---	---	---
v_7	3	v_8	3	---	---	---	---
v_8	3	v_1	2	---	---	---	---

Ao observarmos a tabela anterior, verificamos que após termos ordenado os oito vértices do grafo planar H , por ordem decrescente relativamente ao grau, atribuímos uma cor ao vértice de maior grau, assim como aos respetivos vértices não adjacentes, por ordem sequencial, começando por selecionar o vértice não adjacente com maior grau. Repetimos estes passos até colorirmos todos os vértices de G . Portanto, atribuímos a cor vermelha aos vértices v_5 e v_1 , a cor azul aos vértices v_2 , v_6 e v_7 , e por fim atribuímos a cor verde aos vértices v_4 , v_3 e v_8 .

Após terminar todos os passos do algoritmo de Welsh – Powell, obtemos a seguinte coloração dos vértices do grafo planar H , com três cores diferentes.

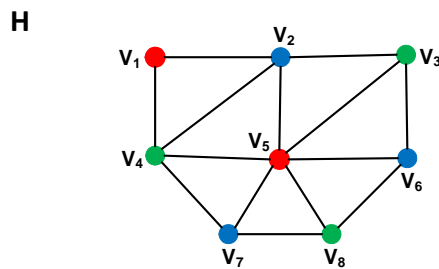


Figura 3.18 – Grafo H , com $\chi(H) = 3$

Verificamos que H tem um número cromático de três unidades, isto é, $\chi(H) = 3$. Este resultado era previsível, pois pelo teorema anterior, o número cromático esperado teria de ser menor ou igual a sete unidades.

Podemos concluir que este último teorema, relativamente ao grau máximo e ao número cromático de um grafo, é aplicável a grafos planares e a grafos não planares.

3.4 Grafos particulares, planares e não planares e os seus respetivos números cromáticos.

Vamos exemplificar grafos (particulares) simples, planares e não planares, associando-lhes o seu respetivo número cromático. São os casos dos grafos estrela, grafos completos, grafos cíclicos e dos grafos roda.

3.4.1 Grafo Estrela

Os grafos do tipo S_n são os grafos estrela. Este tipo de grafo tem sempre o mesmo número cromático, de duas unidades, ou seja, $\chi(S_n) = 2$.

Exemplo 40 Como podemos observar nas duas figuras seguintes, os grafos S_4 e S_6 têm um número cromático de duas unidades, isto é, $\chi(S_4) = \chi(S_6) = 2$.

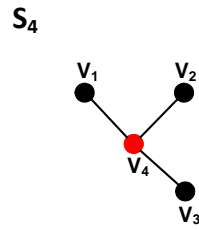


Figura 3.19 –
Grafo estrela
 S_4 .

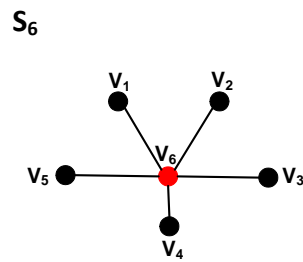


Figura 3.20 – Grafo
estrela S_6 .

3.4.2 Grafo Completo

Os grafos completo K_n , têm um número cromático igual ao número de vértices do respectivo grafo, isto é $\chi(K_n) = n$.

Exemplo 41 Podemos observar que, nas duas figuras seguintes, o número cromático de K_3 é de três unidades e o de K_5 é de cinco unidades, isto é, $\chi(K_3) = 3$ e $\chi(K_5) = 5$.

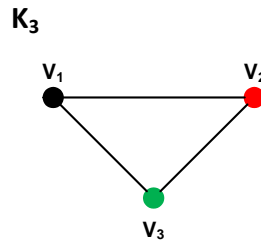


Figura 3.21 –
Grafo completo
 K_3

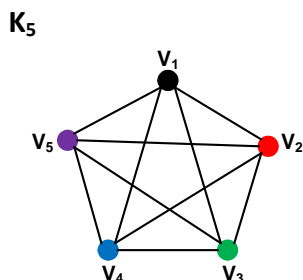


Figura 3.22 – Grafo completo K_5

3.4.3 Grafo Cíclico

Quanto aos grafos cíclico C_n , o seus números cromáticos dependem da paridade dos seus respectivos vértices, isto é, se o número de vértices do grafo for par, o número cromático será de duas unidades, caso o número de vértices seja ímpar, então o número cromático será de três unidades, isto é, $\chi(C_n) = 3$ se n é ímpar, ou $\chi(C_n) = 2$ se n é par.

Exemplo 42 Para exemplificar este facto, nas figuras seguintes estão representados os grafos cíclico C_3 , C_4 , C_5 e C_6 .

Como C_3 e C_5 têm um número ímpar de vértices, então o número cromático correspondente é de três unidades, isto é, $\chi(C_3) = \chi(C_5) = 3$

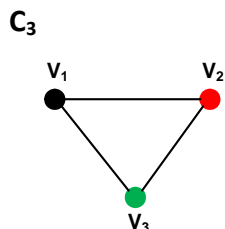


Figura 3.23 – Grafo cíclico C_3

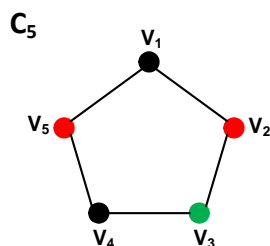


Figura 3.24 – Grafo cíclico C_5

Quanto aos grafos C_2 e C_4 , tal como podemos observar nas duas figuras seguintes, estes têm um número cromático de duas unidades, pois têm um número par de vértices, ou seja, $\chi(C_4) = \chi(C_6) = 2$

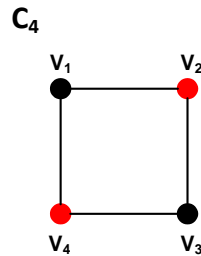


Figura 3.25 –
Grafo cíclico
 C_4

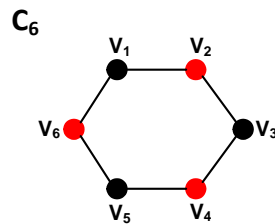


Figura 3.26 – Grafo
cíclico C_6

3.4.4 Grafo Roda

Por fim, o número cromático dos grafos roda, têm um comportamento semelhante ao dos grafos cíclicos, pois vão também depender da paridade dos vértices do respetivo grafo. Neste caso, se o número de vértices do grafo for par ou ímpar, o número cromático terá o valor de quatro ou três unidades, respetivamente, ou seja, $\chi(W_n) = 3$ se n é ímpar, ou $\chi(W_n) = 4$ se n é par.

Exemplo 43 *Vamos utilizar os grafos roda W_4 , W_5 e W_6 para exemplificar estes factos.*

Como podemos observar na *Figura 3.27* e na *Figura 3.28*, os grafos roda W_4 e W_6 têm um número par de vértices, logo o número cromático correspondente será de quatro unidades, isto é, $\chi(W_4) = \chi(W_6) = 4$.

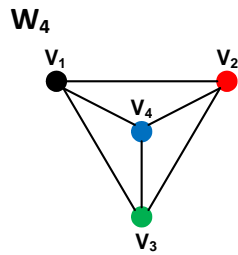


Figura 3.27 – Grafo roda W_4

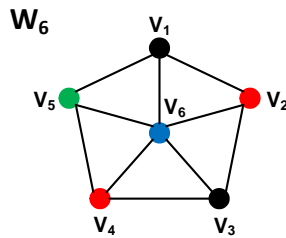


Figura 3.28 – Grafo roda W_6

Quanto ao grafo W_5 , este possui um número ímpar de vértices, logo terá um número cromático de três unidades, ou seja, $\chi(W_5) = 3$.

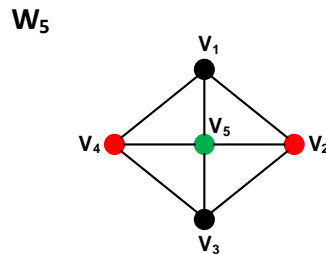


Figura 3.29 – Grafo roda W_5

Vamos definir um outro termo importante, envolvendo ainda o número cromático de um grafo. Trata-se de verificar se um grafo é crítico ou k -crítico.

3.5 Grafo crítico

Definição 44 *Seja G um grafo e V o conjunto de todos os seus respectivos vértices. Um grafo G é **crítico** ou **k -crítico** se $\chi(G) = k$ e $\chi(G - V) < k$, para cada um dos vértices de V do grafo G .*

Podemos resumir esta última definição, relativamente ao processo de averiguar se um determinado grafo G é crítico, através dos seguintes quatro passos

1. Calculamos o valor do número cromático $\chi(G)$ do grafo em questão, representado na definição por \mathbf{k} .
2. Retiramos um vértice, do grafo e voltamos a calcular o número cromático $\chi(G - V)$.
3. Comparamos este valor com \mathbf{k} , calculado no primeiro passo. Se $\chi(G - V) \leq \mathbf{k}$, passamos para o passo seguinte, caso contrário o processo termina neste passo e concluímos que o grafo em questão não é crítico.
4. Repomos o vértice que retiramos anteriormente e voltamos a retirar um outro vértice. Voltamos a calcular o número cromático $\chi(G - V)$. Repetimos o terceiro passo o número de vezes equivalente ao número de vértices existentes no grafo. Se já não houver mais vértices a retirar, então concluímos que o grafo é crítico.

Os próximos exemplos consistem em verificar se é possível classificar grafos planares e não planares como grafos críticos, utilizando o processo descrito anteriormente.

Exemplo 45 *Seja H o seguinte grafo planar. Vamos verificar se H é crítico.*

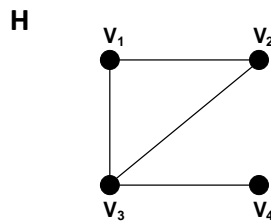


Figura 3.30– Grafo H

O primeiro passo consiste em determinar o número cromático do grafo planar H . Como podemos comprovar na figura seguinte, o número cromático de H é de três unidades, isto é, $\chi(H) = 3$

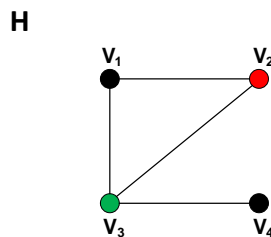


Figura 3.31 – Grafo H, com $\chi(H) = 3$

O segundo passo deste processo determina que devemos retirar um vértice qualquer de H . Vamos retirar o primeiro vértice, obtendo assim o grafo $H - v_1$ da figura seguinte. Calculamos o valor do número cromático $\chi(H - v_1)$, que tal como podemos observar na mesma figura, será de duas unidades, ou seja, $\chi(H - v_1) = 2$.

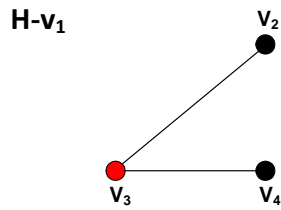


Figura 3.32 – Grafo
 $H - \mathbf{v}_1$ com
 $\chi(H - \mathbf{v}_1) = 2$

Seguimos para o terceiro passo, onde comparamos o valor calculado anteriormente com o número cromático inicial de H . Como $\chi(H - 1) = 2$ e $\chi(H) = 3$, então $\chi(H - \mathbf{v}_1) < \chi(H)$, logo podemos passar para o quarto passo.

Neste passo repomos o vértice que retiramos anteriormente e vamos subtraír o segundo vértice de H , obtendo o grafo $H - \mathbf{v}_2$. Ao aplicarmos este passo, tal como podemos verificar na figura seguinte, calculamos o número cromático $\chi(H - \mathbf{v}_2)$, que é de duas unidades, isto é, $\chi(H - \mathbf{v}_2) = 2$.

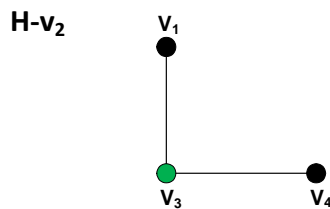


Figura 3.33 – Grafo
 $H - \mathbf{v}_2$, com
 $\chi(H - \mathbf{v}_2) = 2$.

Como $\chi(H - \mathbf{v}_2) = 2$ e $\chi(H) = 3$ então $\chi(H - \mathbf{v}_2) < \chi(H)$. Voltamos a repor o vértice que retiramos anteriormente e subtraímos o terceiro vértice de H , obtendo assim o grafo $H - \mathbf{v}_3$ da figura seguinte.

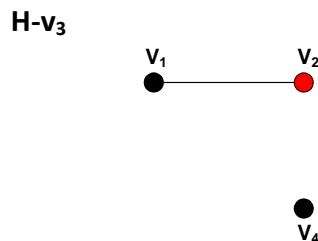


Figura 3.34 – Grafo
 $H - \mathbf{v}_3$, com
 $\chi(H - \mathbf{v}_3) = 2$

Voltando a comparar os número cromáticos do grafo, temos que $\chi(H - \mathbf{v}_3) = 2$ e $\chi(H) = 3$, logo $\chi(H - \mathbf{v}_3) < \chi(H)$ então repomos o terceiro vértice de H , subtraímos o quarto e calculamos o respectivo número cromático $\chi(H - \mathbf{v}_4)$.

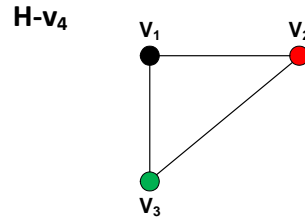


Figura 3.35 – Grafo
 $H - \mathbf{v}_4$, com
 $\chi(H - \mathbf{v}_4) = 3$

A figura anterior mostra-nos que o número cromático $\chi(H - \mathbf{v}_4)$ é de três unidades. Temos que $\chi(H - \mathbf{v}_4) = 3$ e $\chi(H) = 3$, então $\chi(H - \mathbf{v}_4) = \chi(H)$. Logo, este processo termina aqui e podemos concluir que o grafo planar H não é crítico.

Exemplo 46 *Seja X o seguinte grafo planar. Vamos verificar se X é crítico, utilizando o processo relativo à última definição.*

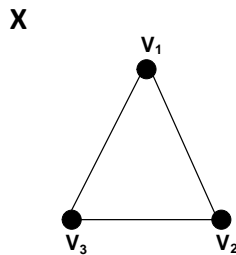


Figura 3.36 – Grafo
 planar X

No primeiro passo calculamos o número cromático do grafo planar X , que tal como podemos comprovar na figura seguinte, é de três unidades, isto é, $\chi(X) = 3$

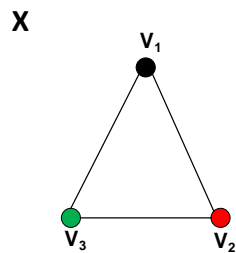


Figura 3.37 – Grafo
 planar X , com $\chi(X) = 3$

O segundo passo consiste em retirar o primeiro vértice e calcular o número cromático $\chi(X - \mathbf{v}_1)$. Neste caso $\chi(X - \mathbf{v}_1) = 2$, tal como podemos observar na ilustração seguinte

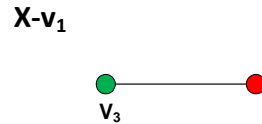


Figura 3.38 –
Grafo $X - \mathbf{v}_1$, com
 $\chi(X - \mathbf{v}_1) = 2$

No terceiro passo comparamos estes valores. Tal como podemos observar na figura anterior, $\chi(X - \mathbf{v}_1) = 2$ e como $\chi(X) = 3$ então $\chi(X - \mathbf{v}_1) < \chi(X)$ e passamos para o quarto passo deste processo. Repomos o primeiro vértice de X , retiramos o segundo, e obtemos assim o grafo $X - \mathbf{v}_2$, representado na figura seguinte. Calculamos o número cromático $\chi(X - \mathbf{v}_2)$ que, tal como podemos verificar, é de duas unidades.

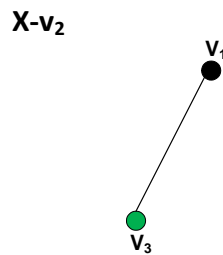


Figura 3.39 -
Grafo $X - \mathbf{v}_2$,
com
 $\chi(X - \mathbf{v}_2) = 2$

Como $\chi(X - \mathbf{v}_2) = 2$ e $\chi(X) = 3$ então $\chi(X - \mathbf{v}_2) < \chi(X)$ o que implica que voltamos a repor o segundo vértice e retiramos o terceiro e último vértice de X . O resultando é o grafo $X - \mathbf{v}_3$, que tal como podemos verificar na figura seguinte, tem um número cromático $\chi(X - \mathbf{v}_3)$ de duas unidades, isto é, $\chi(X - \mathbf{v}_3) = 2$.

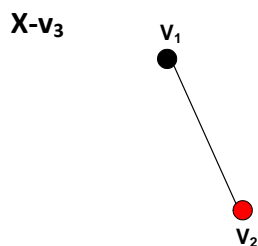


Figura 3.40 -
Grafo $X - \mathbf{v}_3$,
com
 $\chi(X - \mathbf{v}_3) = 2$

Como $\chi(X - \mathbf{v}_3) = 2$ e $\chi(X) = 3$ então $\chi(X - \mathbf{v}_3) < \chi(X)$. Como não existem mais vértices a retirar, concluímos que o grafo planar X é um grafo crítico.

Exemplo 47 *Seja G o seguinte grafo não planar. Vamos verificar se G é crítico, utilizando os quatro passos descritos na última definição.*

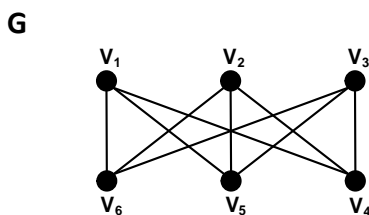


Figura 3.41 – Grafo não planar G

O número cromático de G é de duas unidades, isto é, $\chi(G) = 2$, tal como podemos ver na figura 3.42

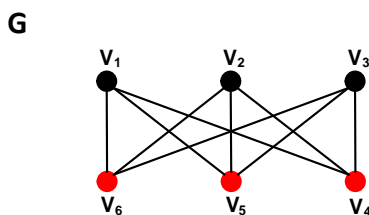


Figura 3.42 – Grafo G , com
 $\chi(G) = 2$

Vamos retirar o primeiro vértice de G , obtendo assim o grafo $G - \mathbf{v}_1$ da figura 3.43. Calculamos o número cromático $\chi(G - \mathbf{v}_1)$ para depois comparar com o valor de $\chi(G)$. Como podemos observar na referida figura, o respetivo número cromático de $G - \mathbf{v}_1$ é de duas unidades, isto é, $\chi(G - \mathbf{v}_1) = 2$.

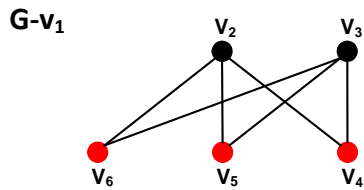


Figura 3.43 – Grafo $G - v_1$, com $\chi(G - v_1) = 2$

Como $\chi(G - v_1) = 2$ e $\chi(G) = 2$ verificamos que os dois números cromáticos têm o mesmo valor, isto é, $\chi(G - v_1) = \chi(G)$. O processo termina aqui, e concluímos que o grafo não planar G não é crítico.

Exemplo 48 Seja Y o seguinte grafo não planar. Vamos verificar se Y é crítico, utilizando a última definição.

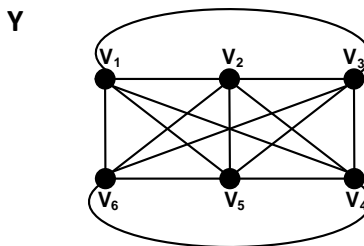


Figura 3.44 - Grafo não planar Y

Como podemos comprovar na figura 3.45, o número cromático de Y é de seis unidades, isto é, $\chi(Y) = 6$

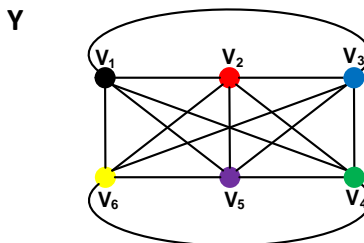


Figura 3.45 – Grafo Y , com $\chi(Y) = 6$

Retiramos o primeiro vértice de Y , obtendo assim o grafo $Y - v_1$. Calculamos o número cromático $\chi(Y - v_1)$, que tal como podemos comprovar na figura 3.46, é de cinco unidades, ou seja, $\chi(Y - v_1) = 5$.

Y-v₁

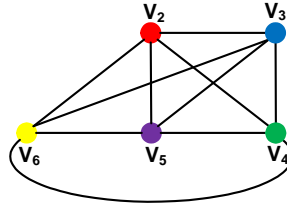


Figura 3.46 – Grafo $Y - \mathbf{v}_1$,
com $\chi(Y - \mathbf{v}_1) = 5$

Como $\chi(Y - \mathbf{v}_1) = 5$ e $\chi(Y) = 6$ então $\chi(Y - \mathbf{v}_1) < \chi(Y)$, logo podemos repôr o primeiro vértice de Y , retiramos o segundo e como consequência, obtemos o grafo $Y - \mathbf{v}_2$. Calculamos o número cromático $\chi(Y - \mathbf{v}_2)$ que, tal como podemos verificar na figura seguinte, é de cinco unidades.

Y-v₂

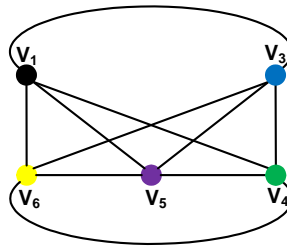


Figura 3.47 - Grafo $Y - \mathbf{v}_2$,
com $\chi(Y - \mathbf{v}_2) = 5$

Como $\chi(Y - \mathbf{v}_2) = 5$ e $\chi(Y) = 6$ então $\chi(Y - \mathbf{v}_2) < \chi(Y)$, logo repomos o segundo vértice de Y e retiramos o terceiro. Como podemos verificar na figura 3.48, obtemos o grafo $Y - \mathbf{v}_3$ com um número cromático $\chi(Y - \mathbf{v}_3)$ de cinco unidades.

Y-v₃

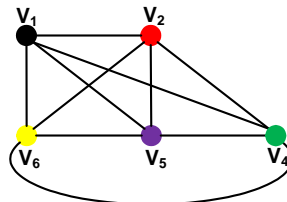


Figura 3.48 - Grafo $Y - \mathbf{v}_3$,
com $\chi(Y - \mathbf{v}_3) = 5$

Comparando os valores calculados anteriormente, temos que $\chi(Y - \mathbf{v}_3) = 5$ e $\chi(Y) = 6$, logo $\chi(Y - \mathbf{v}_3) < \chi(Y)$, então repomos o vértice que retiramos anteriormente e subtraímos o quarto vértice de Y . A figura 3.49 ilustra o grafo $Y - \mathbf{v}_4$, resultante desta última ação.

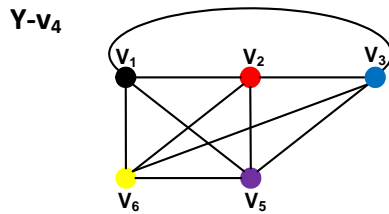


Figura 3.49 - Grafo $Y - v_4$,
com $\chi(Y - v_4) = 5$

Verificamos que o valor do número cromático $\chi(Y - v_4)$ é de cinco unidades. Como este valor continua a ser menor que o número cromático de Y , então o processo continua. Voltamos a repor o quarto vértice de Y e retiramos o quinto. Com o auxílio da figura 3.50, verificamos que o valor do respetivo número cromático $\chi(Y - v_5)$ é de cinco unidades.

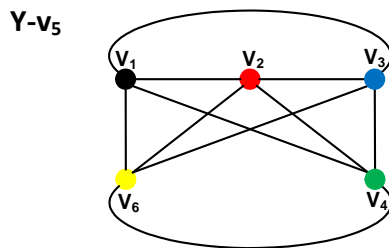


Figura 3.50 - Grafo $Y - v_5$,
com $\chi(Y - v_5) = 5$

Como o valor de $\chi(Y - v_5)$ continua a ser menor que $\chi(Y)$, voltamos a repor o quinto vértice de Y , e retiramos o sexto e último vértice. Obtemos o grafo $Y - v_6$, representado na figura 3.51, com um número cromático de cinco unidades.

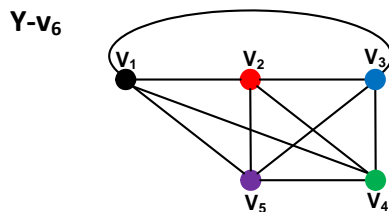


Figura 3.51 - Grafo $Y - v_6$,
com $\chi(Y - v_6) = 5$

Como $\chi(Y - v_6) = 5$ e $\chi(Y) = 6$ então $\chi(Y - v_6) < \chi(Y)$. Por este facto voltamos a repor o sexto vértice de Y e como não existem mais vértices a retirar, chegamos à conclusão que o grafo não planar Y é um grafo crítico.

Concluimos então que podemos aplicar esta última definição, referente a determinar se um grafo é ou não crítico, a grafos planares e a grafos não panares.

De seguida vamos exemplificar um problema do quotidiano que nos mostra a utilidade da coloração de vértices de um grafo e o seu respetivo número cromático.

3.6 Exemplo prático da coloração de vértices de um grafo

Exemplo 49 *Suponhamos que numa dada universidade, num curso de matemática, será necessário realizar exames de, por exemplo, sete cadeiras. Vamos também supor que existe um determinado número de alunos, deste curso, com algumas cadeiras em comum, mas nem todos frequentam todas as sete cadeiras em simultâneo. Se quisermos saber qual o número mínimo de dias para a realização dos exames de todas as sete cadeiras, sem haver sobreposição, de tal modo que todos os alunos os possam realizar, poderemos recorrer à coloração de grafos e ao seu respetivo número cromático para resolver esta questão.*

Para simplificar a esquematização deste problema, podemos associar cada uma das sete cadeiras, do referido curso de matemática, a um número natural, de um modo aleatório. Fizemos então a seguinte associação:

1 - Análise Matemática; 2 - Álgebra Linear; 3 - Topologia; 4 - Geometria; 5 - Estatística; 6 - História da Matemática; 7 - Análise Complexa.

A tabela seguinte representa a distribuição das cadeiras do curso de matemática que os alunos têm em comum.

	1	2	3	4	5	6	7
1		X	X	X			X
2	X		X	X			X
3	X	X		X		X	X
4	X	X	X		X	X	
5				X		X	X
6			X	X	X		X
7	X	X	X		X	X	

A tabela anterior, por ser simétrica em relação à sua diagonal, pode ser interpretada através das suas linhas ou através das suas colunas. Por exemplo, na primeira linha, ou na primeira coluna, verificamos que existem alunos com quatro cadeiras em comum. A interpretação das restantes linhas ou colunas, é feita de um modo análogo.

Vamos representar os dados da tabela anterior através de um grafo, onde cada vértice representa uma das sete cadeiras do curso de matemática e as arestas correspondem às cadeiras que os alunos têm em comum.

Obtemos o seguinte grafo não planar H , com sete vértices, representando as cadeiras que os alunos têm em comum.

H

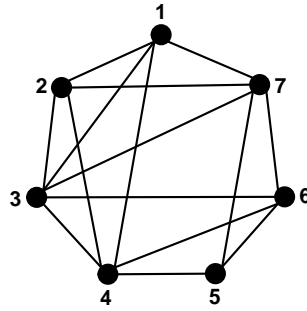


Figura 3.52 – Grafo não planar H

Colorindo os vértices do grafo G, com o menor número de cores possíveis, de modo que dois vértices adjacentes não tenham a mesma cor, obtemos o seguinte grafo.

H

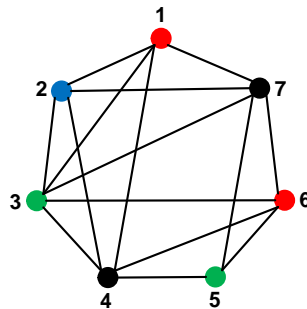


Figura 3.53 – Grafo H, com $\chi(H) = 4$

Ao observar o grafo não planar da figura 3.53, verificamos que os seus respectivos vértices estão coloridos com quatro cores diferentes, logo, o número cromático de H é quatro. Os vértices coloridos com a mesma cor, significam que os exames das cadeiras associadas a estes vértices podem ser realizados no mesmo dia, em simultâneo, sem que haja qualquer aluno prejudicado.

Como $\chi(H) = 4$, concluímos que a universidade poderá realizar todos os exames, referentes às sete cadeiras do curso de matemática, sem haver sobreposição de alunos, num número mínimo de quatro dias.

Por exemplo, independentemente do número de alunos inscritos no curso, uma das alternativas do horário dos exames poderia ser:

- 1º Dia – Análise Matemática e História da Matemática
- 2º Dia – Álgebra Linear
- 3º Dia – Topologia e Estatística
- 4º Dia – Geometria e Análise Complexa

3.7 Coloração de arestas de um grafo

Vamos começar por definir o termo k -coloração de arestas de um grafo, para depois explorar o conceito de número cromático de arestas.

Definição 50 *Seja G um grafo não nulo. Uma k -coloração de arestas de G é uma distribuição de k cores nas arestas deste grafo, de tal modo que, arestas adjacentes têm cores distintas. O menor número de k cores é chamado **número cromático de arestas** e representa-se por $\chi^1(G)$ ou por $\chi_1(G)$.*

Para uma melhor perceção dos conceitos definidos anteriormente, vamos exemplificar.

Exemplo 51 *Seja G o seguinte grafo não nulo. Vamos determinar $\chi^1(G)$, isto é, o seu número cromático de arestas.*

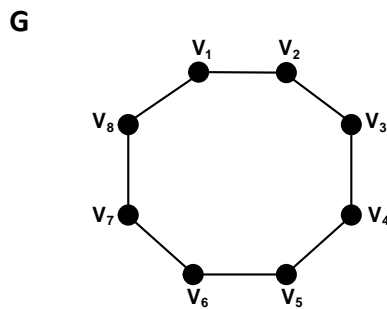


Figura 3.54 – Grafo G , não nulo.

O objetivo será colorir as arestas de G com o menor número possível de cores, de tal modo que arestas adjacentes tenham cores distintas. Então um dos resultados possíveis será o seguinte grafo

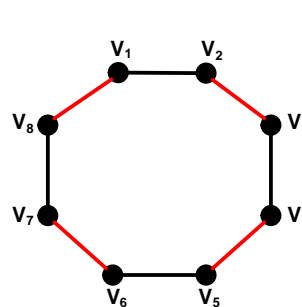


Figura 3.55 Coloração das arestas de G

Como podemos observar na figura 3.55, o número cromático de arestas de G é de duas unidades, ou seja, $\chi^1(G) = 2$.

Nos dois exemplos que se seguem vamos determinar o número cromático de arestas de um grafo. No primeiro exemplo vamos utilizar um grafo planar, e no segundo, um grafo não planar, de modo a verificarmos se a planaridade de um grafo interfere no cálculo deste número.

Exemplo 52 *Vamos calcular o número cromático de arestas do seguinte grafo planar H .*

H

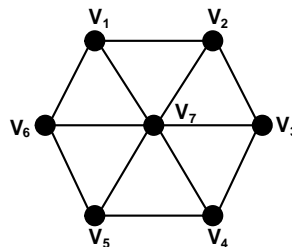


Figura 3.56 – Grafo planar H

Como queremos colorir todas as arestas de H , com o menor número possível de cores, de tal modo que arestas adjacentes têm de ter cores distintas, então um dos resultados possíveis será grafo representado na figura 3.57.

H

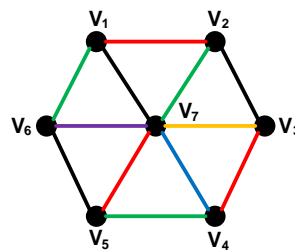


Figura 3.57 – Coloração das arestas do grafo planar H

Neste caso, o número cromático de arestas de H é composto por seis unidades, ou seja, $\chi^1(H) = 6$.

Exemplo 53 *Seja G o seguinte grafo não planar. Vamos ver se é possível calcular o número cromático de arestas de G .*

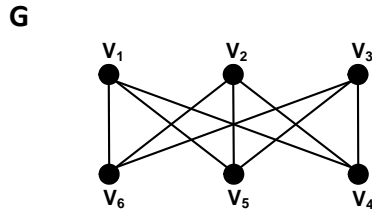


Figura 3.58 – Grafo não planar G

Ao colorirmos todas as arestas de G com o menor número possível de cores, de tal modo que arestas adjacentes têm de ter cores distintas, podemos obter várias possibilidades. Uma delas pode ser o grafo representado na figura 3.59.

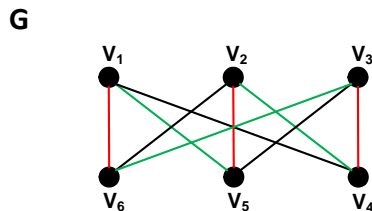


Figura 3.59 – Coloração das arestas do grafo não planar G

Como podemos observar, o número cromático das arestas do grafo não planar G é de três unidades. Logo $\chi^1(G) = 3$.

Pelos resultados dos dois exemplos anteriores, podemos concluir que é possível calcular o número cromático de arestas de um grafo, independentemente da planaridade deste.

Os próximos dois teoremas relacionam o número cromático de arestas de um grafo com o seu respetivo grau máximo. Vamos mostrar esta relação, entre o grau máximo de um grafo e o número cromático de arestas, através de alguns exemplos, tentando averiguar a existência de alguma incompatibilidade na aplicação destes teoremas em grafos planares e em grafos não planares.

Teorema 54 *Dado um grafo simples G, verificam-se as seguintes desigualdades: $\Delta(G) \leq \chi^1(G) \leq \Delta(G) + 1$*

Nos próximos exemplos vamos representar os mesmos grafos utilizados anteriormente, pois os seus números cromáticos de arestas já foram calculados.

Exemplo 55 *Seja H o grafo planar simples, utilizado no Exemplo 53. Vamos utilizar a mesma coloração de arestas, de modo a relacionar o grau máximo de H com o seu respetivo número cromático de arestas.*

H

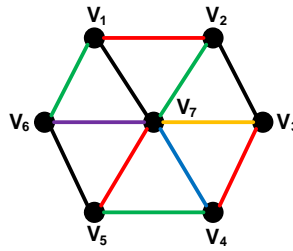


Figura 3.60 – Coloração das arestas do grafo H

Como podemos verificar, o maior número de arestas existentes num vértice de H, isto é, o grau máximo de H, é de seis unidades, logo $\Delta(H) = 6$. O número cromático de arestas de H, é também de seis unidades, isto é, $\chi^1(H) = 6$. Então, o teorema anterior é verificado, pois as seguintes condições são verdadeiras

$$\Delta(H) \leq \chi^1(H) \leq \Delta(H) + 1 \iff 5 \leq 6 \leq 6$$

Logo este teorema aplica-se a grafos planares simples.

Exemplo 56 *Seja H o seguinte grafo não planar simples, utilizado no Exemplo 54. Vamos relacionar o grau máximo de H com o seu respectivo número cromático de arestas, utilizando a mesma coloração.*

G

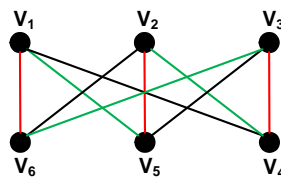


Figura 3.61- Coloração das arestas do grafo G.

Observando a figura 3.61, verificamos que o maior número de arestas existentes num vértice de G, isto é, o grau máximo de G, é de três unidades, logo $\Delta(G) = 3$. O número cromático de arestas de G, é também de três unidades, isto é, $\chi^1(G) = 3$. Então, o teorema anterior é verificado, pois as condições seguintes são verdadeiras

$$\Delta(G) \leq \chi^1(G) \leq \Delta(G) + 1 \iff 3 \leq 3 \leq 4$$

Logo, este teorema também aplica-se a grafos não planares simples.

Pelo que observamos nos dois últimos exemplos, podemos concluir que não existe incompatibilidades entre este último teorema e a planaridade de grafos.

Teorema 57 *Se G é um grafo bipartido, então o número cromático de arestas de G é igual ao grau máximo do respectivo grafo, isto é, $\chi^1(G) = \Delta(G)$.*

Vamos aplicar o teorema anterior, utilizando dois tipos de grafos bipartidos, um planar e o outro não planar.

Exemplo 58 *Seja F o seguinte grafo planar e bipartido. Vamos comparar o número cromático de arestas de F com o seu grau máximo.*

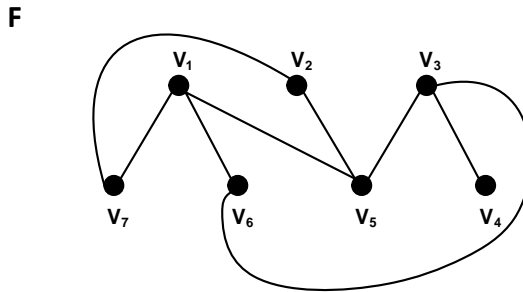


Figura 3.62 – Grafo F, planar e bipartido

Se colorirmos as arestas de F, com o menor número de cores possíveis, de tal modo que, arestas adjacentes tenham cores distintas, o grafo pode tomar o seguinte aspeto.

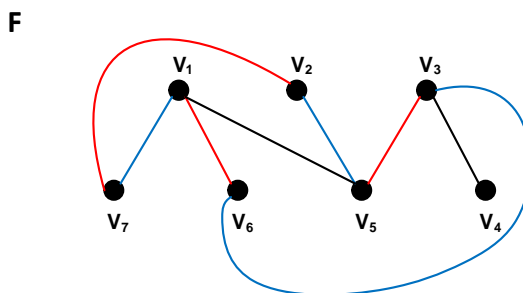


Figura 3.63 – Coloração das arestas de F

Podemos então observar que o número cromático das arestas deste grafo planar e bipartido é de três unidades e que o grau máximo de F também é de três unidades. Podemos então concluir que $\chi^1(F) = \Delta(F)$.

Este resultado vem mostrar que o teorema 57 pode ser aplicado em grafos bipartidos planares.

Exemplo 59 *Seja G o seguinte grafo não planar e bipartido. Vamos comparar o número cromático de arestas de G com o seu grau máximo.*

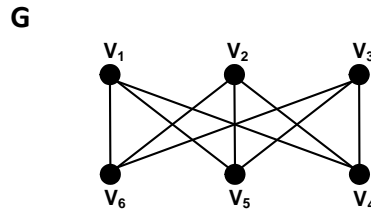


Figura 3.64– Grafo bipartido G

Ora, colorindo as arestas de G , com o menor número de cores possíveis, de tal modo que, arestas adjacentes tenham cores distintas, o grafo pode tomar o aspeto da figura 3.65

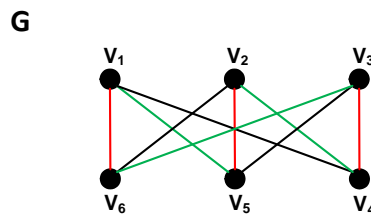


Figura 3.65 – Coloração das arestas do grafo bipartido G

Podemos observar que o número cromático das arestas do grafo é de três unidades e que o grau máximo de G também é de três unidades, logo $\chi^1(G) = \Delta(G)$.

Podemos então concluir que o teorema anterior também aplica-se a grafos bipartidos não planares.

Vamos introduzir um tema relacionado com a coloração de mapas e definir o teorema das quatro cores.

3.8 Coloração de mapas

A coloração de mapas, consiste em determinar o número mínimo de cores necessárias para colorir um mapa, de modo que regiões vizinhas têm de ter cores diferentes.

Observação 60 *As regiões que só se tocam num ponto não são consideradas vizinhas. Para que duas ou mais regiões possam ter esta nomeação, têm de ter, pelo menos, uma fronteira em comum.*

O teorema seguinte, intitulado teorema das quatro cores, foi demonstrado em 1976, por dois matemáticos, o americano *Kenneth Appel* e o alemão *Wolfgang Haken*. Utilizaram um computador e demoraram aproximadamente, mil e duzentas horas para realizar esta demonstração.

Teorema 61 (Teorema das quatro cores) *Dado um mapa planar, quatro cores são suficientes para o colorir, de forma a que regiões vizinhas não partilham a mesma cor.*

Exemplo 62 *Vamos calcular o número mínimo de cores necessárias para colorir o seguinte mapa, de modo que as regiões vizinhas tenham cores diferentes.*

Vamos considerar o seguinte mapa planar, constituído por nove regiões.

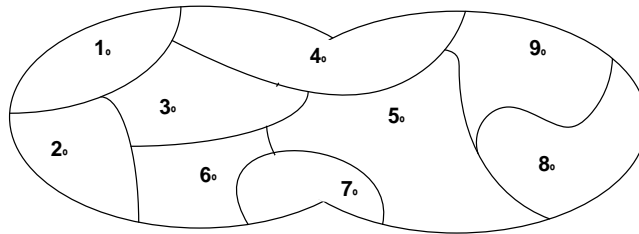


Figura 3.66 – Mapa planar com nove regiões distintas

Um dos processos que podemos utilizar para colorir este mapa, de modo a aplicarmos o teorema das quatro cores, poderá ser representá-lo em forma de um grafo planar, onde cada vértice corresponde a uma das nove regiões do mapa e onde as arestas correspondem às fronteiras em comum entre as respetivas regiões. Por exemplo, esse grafo planar poderá ser o grafo G representado na figura 3.67.

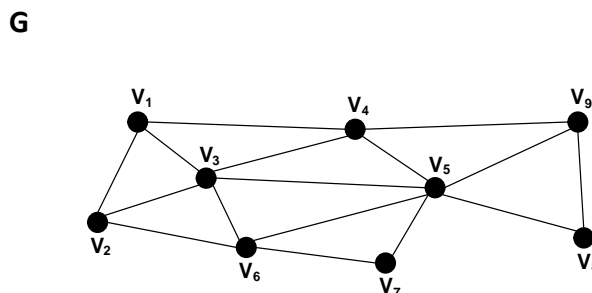


Figura 3.67 – Grafo planar G , com nove vértices e dezasseis arestas.

O problema da coloração consiste em colorir os vértices do grafo planar G com o menor número de cores possíveis, de modo que dois vértices adjacentes não tenham a mesma cor. Obtemos o seguinte grafo com um número cromático de quatro unidades.

G

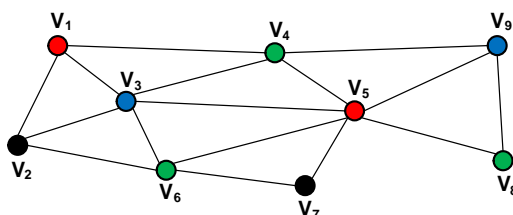


Figura 3.68 – Coloração dos vértices do grafo G, com $\chi(G) = 4$.

Através deste último grafo, vamos colorir o mapa correspondente, respeitando as respectivas cores dos vértices de G, de forma a confirmar o teorema das quatro cores

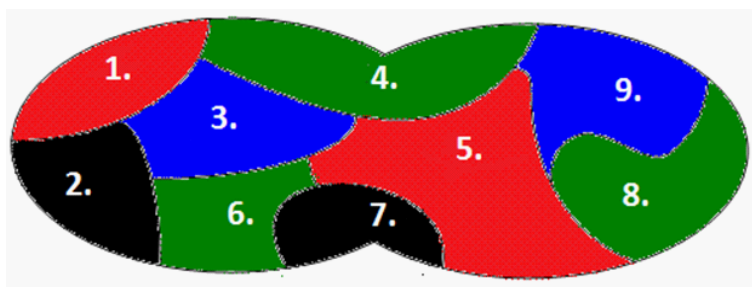


Figura 3.69 - Coloração do mapa com apenas quatro cores.

Concluimos que de facto são necessárias somente quatro cores diferentes, para colorir este mapa planar, de modo que regiões vizinhas não partilhem a mesma cor.

Este teorema não pode ser utilizado em mapas não planares ou em grafos não planares, pois o processo utilizado na coloração de mapas, faz com que ao associarmos um grafo a um mapa, este será sempre um grafo planar.

3.9 Polinómios Cromáticos

O tema referente aos polinómios cromáticos foi desenvolvido pelo matemático americano *George David Birkhoff*, por volta do ano de 1912. Trata-se de um método que permite contar o número das diferentes colorações de um grafo.

Definição 63 *O polinómio cromático de um grafo G, representado por $P_G(k)$, é uma função que determina o número de coloração de G, ou seja, o número de possibilidades de colorir um grafo G, com k cores diferentes.*

A função $P_G(K)$, referente ao número de possibilidades de colorir um grafo G, com k cores diferentes, vai depender do tipo de grafo que estamos a colorir.

Nos exemplos seguintes, vamos começar por determinar os polinómios cromáticos de dois tipos de grafos que já conhecemos, os grafos N_n , ou seja, grafos sem arestas e com n vértices e pelos grafos completos K_n , para depois passarmos para casos mais gerais. Para determinarmos a função referente ao polinómio cromático dos grafos do tipo N_n , vamos alternar progressivamente o número de cores, ou seja o valor de \mathbf{k} , para depois analisarmos o comportamento da função.

No exemplo seguinte vamos utilizar o grafo N_4 para representar os grafos do tipo N_n .

Exemplo 64 *Seja N_4 o grafo com quatro vértices e sem arestas, representado na figura seguinte. Vamos determinar o número de possibilidades que existem para colorir N_4 com \mathbf{k} cores distintas, ou seja, vamos calcular o polinómio cromático $P_{N_4}(\mathbf{k})$.*

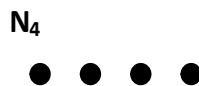


Figura 3.70 –
Grafo N_4

Se utilizarmos somente uma cor, isto é, se $\mathbf{k} = 1$, então o resultado da coloração terá o seguinte aspeto

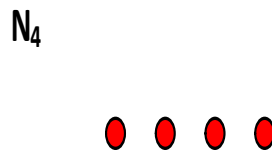


Figura 3.71 – Grafo
 N_4 , com $P_{N_4}(1) = 1$

Só existe uma possibilidade de colorir o grafo N_4 . Logo temos que $P_{N_4}(1) = 1$

Se $\mathbf{k} = 2$, isto é, se utilizarmos duas cores para colorir os vértices de N_4 então, tal como podemos comprovar na figura 3.72, vamos ter dezasseis possibilidades de colorir este grafo.

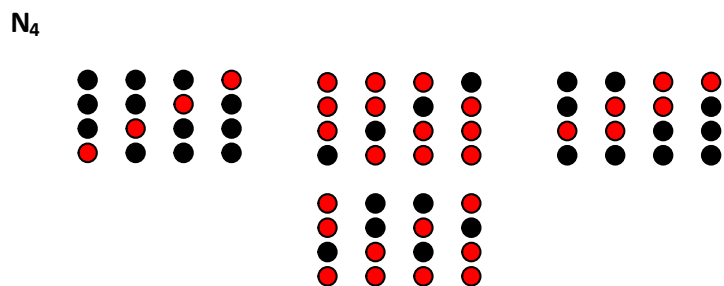


Figura 3.72 – Representação da coloração de N_4 com duas cores.

Logo, o número de possibilidades de colorir N_4 com duas cores será

$$P_{N_4}(2) = 16$$

Se $k = 3$ então, tal como podemos observar na figura 3.73, vamos ter oitenta e uma possibilidades para colorir os vértices de N_4 .

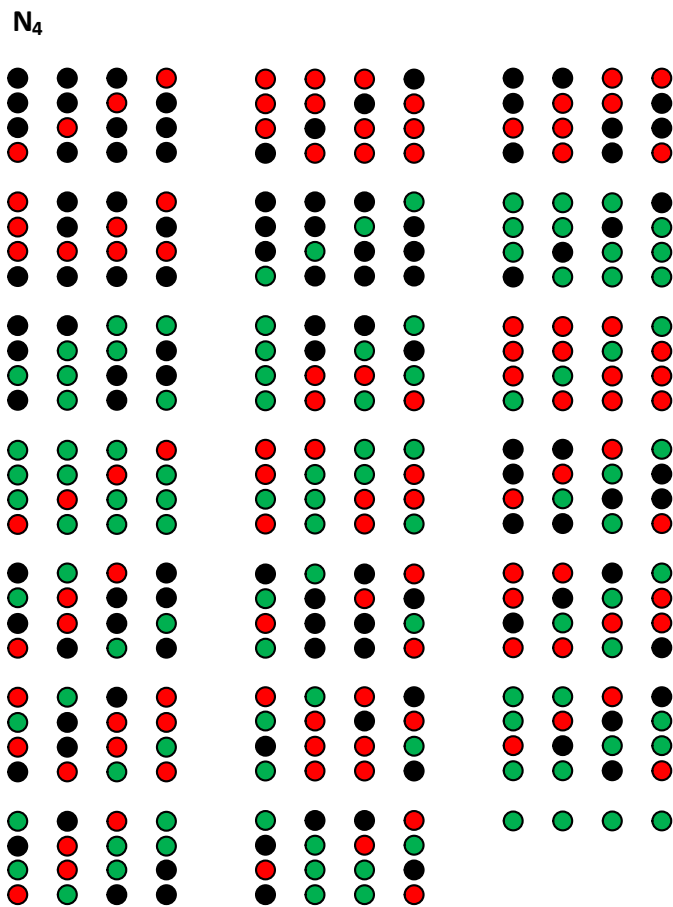


Figura 3.73 – Coloração de N_4 com três cores

Logo, o número de possibilidades que existem para colorir N_4 com três cores distintas será

$$P_{N_4}(3) = 81.$$

Observando os resultados obtidos até aqui, verificamos que os valores dos polinômios cromáticos vão variando conforme o número de cores utilizados, para colorir os vértices de N_4 . Vimos então que:

- Se $\mathbf{k} = 1$ então $P_{N_4}(1) = 1 = 1^4$
- Se $\mathbf{k} = 2$ então $P_{N_4}(2) = 16 = 2^4$
- Se $\mathbf{k} = 3$ então $P_{N_4}(3) = 81 = 3^4$

Logo, seguindo esta lógica, temos que, se $\mathbf{k} = \mathbf{n}$ então $P_{N_4}(\mathbf{n}) = \mathbf{n}^4$.

Podemos então concluir que se pretendemos colorir um grafo do tipo N_n , com \mathbf{k} cores diferentes, então a função referente ao polinômio cromático de N_n terá a seguinte forma

$$P_{N_n}(\mathbf{k}) = \mathbf{k}^n.$$

Passamos agora a estudar o comportamento do polinômio cromático dos grafos completos, representados por K_n . No próximo exemplo vamos utilizar K_4 , um grafo completo com quatro vértices e seis arestas, para representar os grafos completos e assim calcular o seu respectivo polinômio cromático.

Exemplo 65 *Seja K_4 o seguinte grafo completo. Vamos calcular quantas possibilidades existem para colorir os vértices de K_4 .*

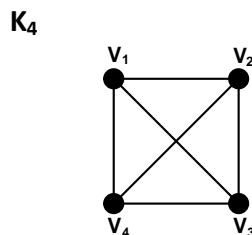


Figura 3.74 – Grafo completo K_4

Para determinarmos a respetiva função referente ao polinómio cromático $P_{K_n}(\mathbf{k})$, vamos variar o valor de \mathbf{k} e comparar os resultados obtidos. Começamos por estudar o comportamento do grafo, calculando o número de possibilidades que existem para colorir K_4 com quatro cores, ou seja, $\mathbf{k} = 4$.

Como podemos observar na figura 3.75, existem quatro possibilidades de colorir o primeiro vértice, pois podemos escolher uma das quatro cores a atribuir a v_1 . Ao escolhermos uma cor, passamos para o vértice seguinte e o número de opções, referentes ao número de cores disponíveis, fica reduzido a três unidades. Repetimos os passos anteriores até colorirmos o último vértice.

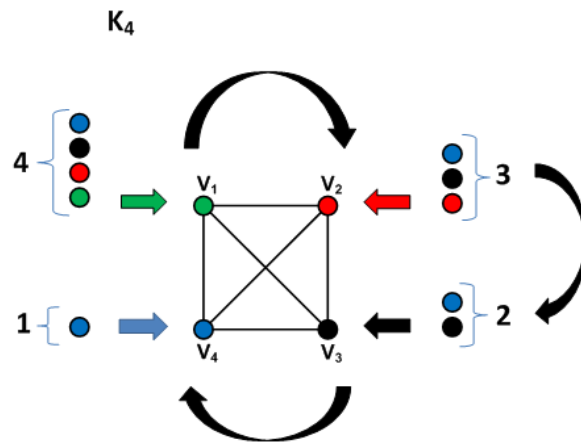


Figura 3.75 – Coloração dos vértices de K_4 com quatro cores.

Logo, o número de possibilidades que existem para colorir K_4 , com quatro cores, pode ser calculado da seguinte forma

$$P_{K_4}(4) = 4 \times 3 \times 2 \times 1 \iff P_{K_4}(4) = 24$$

Portanto, existem vinte e quatro possibilidades de colorir K_4 com quatro cores.

Se aumentarmos em uma unidade o número de cores a colorir os vértices de grafo K_4 , isto é, se $\mathbf{k} = 5$, o processo para determinarmos o respetivo valor do polinómio cromático $P_{K_4}(5)$, será o mesmo utilizado anteriormente. Após termos colorido o primeiro vértice com uma das cinco cores disponíveis, eliminamos esta cor das opções que nos restam e passamos para o vértice seguinte, repetindo os mesmos passos, até colorirmos o último vértice.

A figura 3.76 ilustra os passos utilizados para determinarmos o valor do respetivo polinómio cromático.

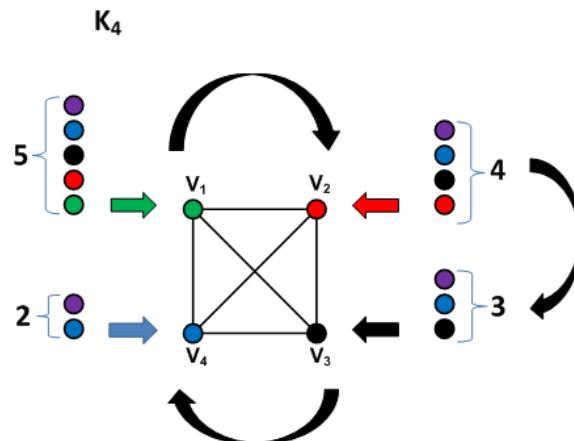


Figura 3.76 – Coloração dos vértices de K_4 com cinco cores.

Então, o número de possibilidades que existem para colorir K_4 , com cinco cores, pode ser calculada seguinte forma

$$P_{K_4}(5) = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \iff P_{K_4}(5) = 120$$

Portanto, existem cento e vinte possibilidades de colorir K_4 com cinco cores.

Logo, para $k = 6$, seguindo o mesmo critério, podemos calcular o polinómio cromático da seguinte maneira

$$P_{K_4}(6) = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \iff P_{K_4}(6) = 360$$

Vamos agora ver o que acontece se o número de cores, disponíveis para colorir um grafo completo K_4 , for inferior ao número de vértices do grafo, isto é, quando $k < 4$.

Se usarmos, como exemplo, apenas três cores, e utilizando o mesmo processo anterior para colorir o grafo K_4 , o número de possibilidades que existem são

$$P_{K_4}(3) = 3 \times 2 \times 1 \times 0 \iff P_{K_4}(3) = 0$$

Logo se $k < 4$ temos $P_{K_4}(k) = 0$. Constatamos que se o valor de k for inferior a quatro, ou seja, inferior ao número de vértices de K_4 , então o polinómio cromático terá valor nulo.

Resumindo os resultados obtidos até aqui, temos:

- Se $k = 3$ então $P_{K_4}(3) = 0 = 3 \times 2 \times 1 \times 0$

- Se $\mathbf{k} = 4$ então $P_{K_4}(4) = 24 = 4 \times 3 \times 2 \times 1$
- Se $\mathbf{k} = 5$ então $P_{K_4}(5) = 120 = 5 \times 4 \times 3 \times 2$
- Se $\mathbf{k} = 6$ então $P_{K_4}(6) = 360 = 6 \times 5 \times 4 \times 3$

Podemos então afirmar que, se pretendermos colorir um grafo completo K_4 , com \mathbf{k} cores diferentes, o valor do seu polinómio cromático $P_{K_4}(\mathbf{k})$ vai depender do valor de \mathbf{k} e que se o número de cores disponíveis for inferior ao número de vértices do grafo completo a colorir, então o polinómio cromático terá valor nulo.

No caso geral, podemos concluir que se pretendermos colorir um grafo do tipo K_n , com \mathbf{k} cores diferentes, então a função referente ao respetivo polinómio cromático terá a seguinte forma

- Se $\mathbf{k} < \mathbf{n}$ então $P_{K_n}(\mathbf{k}) = 0$
- Se $\mathbf{k} \geq \mathbf{n}$ então $P_{K_n}(\mathbf{k}) = \mathbf{k} \times (\mathbf{k} - 1) \times (\mathbf{k} - 2) \times \dots \times (\mathbf{k} - (\mathbf{n} - 1)) \iff P_{K_n}(\mathbf{k}) = \mathbf{k} \times (\mathbf{k} - 1) \times (\mathbf{k} - 2) \times \dots \times (\mathbf{k} - \mathbf{n} + 1)$

Vimos, até agora, como calcular o polinómio cromático de alguns grafos já conhecidos. Mas se G for um grafo qualquer, não será muito fácil obter o respetivo valor do polinómio cromático, utilizando este último processo. Os próximos dois teoremas vêm nos ajudar a contornar este tipo de situações.

Teorema 66 *Sejam G um grafo simples e e uma qualquer aresta de G . Então, sendo \mathbf{k} o número de cores disponíveis para colorir todos os vértices de G , o polinómio cromático será calculado, através das seguintes operações $P_G(k) = P_{G-e}(k) - P_{G/e}(k)$.*

Observação 67 *A expressão $P_{G-e}(k)$ significa que retiramos uma aresta e do grafo G e $P_{G/e}(k)$ significa que contraímos uma aresta e de G . A ordem pela qual retiramos ou contraímos as respetivas arestas não é muito relevante.*

Observação 68 *Ao utilizarmos a expressão do teorema anterior, com o fim de determinar o polinómio cromático de um grafo, se este tiver loops (ou laçarotes), que são arestas cujas extremidades são o mesmo vértice, ao contraír esta referida aresta, temos de ter em conta que estamos perante dois vértices sobrepostos.*

Teorema 69 *Seja G um grafo de ordem n . Então as seguintes condições são verificadas:*

- 1) $P_G(\mathbf{k})$ é um polinómio em \mathbf{k} de grau \mathbf{n} .
- 2) O termo constante de $P_G(\mathbf{k})$ é zero.
- 3) Os coeficientes de $P_G(\mathbf{k})$ alteram-se nos sinais.
- 4) O valor absoluto do coeficiente $\mathbf{k}^{\mathbf{n}-1}$ é o número de arestas de G .
- 5) O coeficiente do termo $\mathbf{k}^{\mathbf{n}}$ é um.
- 6) O valor do grau \mathbf{n} do polinómio corresponde ao número de vértices de G .

Vamos abordar dois métodos para calcular o polinómio cromático de um determinado grafo, utilizando a expressão $P_G(\mathbf{k}) = P_{G-e}(\mathbf{k}) - P_{G/e}(\mathbf{k})$, onde e é uma aresta qualquer de G e \mathbf{k} o número de cores disponíveis para colorir todos os vértices de G .

3.10 Polinómio cromático de um grafo

Para o cálculo do polinómio cromático de um grafo, utilizamos um método que consiste em retirar e contrair arestas do respetivo grafo, de um modo sistemático, utilizando a expressão do polinómio cromático $P_G(\mathbf{k}) = P_{G-e}(\mathbf{k}) - P_{G/e}(\mathbf{k})$. Dado um certo grafo G , o primeiro passo passa por aplicarmos esta expressão em G , retirando e contraindo a sua primeira aresta. Por conseguinte, o grafo G será dividido em dois novos grafos. Voltamos a aplicar a expressão $P_G(\mathbf{k}) = P_{G-e}(\mathbf{k}) - P_{G/e}(\mathbf{k})$ a cada um dos dois novos grafos, tendo em atenção aos sinais de cada termo do polinómio cromático e como consequência desta segunda iteração, os dois grafos anteriores serão subdivididos em quatro novos grafos. Repetimos este processo as vezes necessárias até obtermos grafos do tipo N_n , isto é, grafos sem arestas. Após isto, o número cromático deste tipo de grafos, é calculado da forma $P_{N_n}(\mathbf{k}) = \mathbf{k}^n$.

Tendo como objetivo simplificar os cálculos, fazemos alterações ao método anterior, isto é, efetuarmos uma separação entre dois tipos de grafos, os que são originados após retirarmos uma aresta e os que são originados após contrairmos essa mesma aresta. O primeiro passo deste método consiste em criar dois grupos de sinais simétricos, onde colocaremos os novos grafos, originados após cada iteração. No segundo passo, retiramos uma primeira aresta do grafo original e desenhamos o grafo resultante na região correspondente ao sinal positivo. No terceiro passo, contrairmos esta mesma aresta e colocamos o novo grafo na região de sinal negativo. A partir deste passo, sempre que retiramos uma aresta, colocamos este novo grafo no mesmo grupo do grafo que o originou e sempre que contrairmos uma aresta, colocamos este novo grafo no grupo de sinal contrário. Repetimos estes passos sucessivamente, até termos somente grafos do tipo N_n , isto é, grafos sem arestas. Finalmente aplicamos a função $P_{N_n}(\mathbf{k}) = \mathbf{k}^n$, referente ao polinómio cromático dos grafos do tipo N_n .

Para proporcionar uma melhor compreensão, vamos calcular o polinómio cromático de um grafo, utilizando os dois processos, baseando-nos nos resultados dos dois últimos teoremas.

Exemplo 70 *Vamos calcular $P_{P_4}(\mathbf{k})$, ou seja, o polinómio cromático do grafo caminho P_4 , representado na figura 3.77, constituído por quatro vértices e três arestas, utilizando o primeiro processo.*

P_4

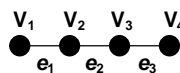


Figura 3.77 – Grafo P_4

Vamos então utilizar o primeiro processo, para determinarmos o polinómio cromático $P_{P_4}(\mathbf{k})$.

1º Passo Aplicando a expressão $P_G(\mathbf{k}) = P_{G-e}(\mathbf{k}) - P_{G/e}(\mathbf{k})$ ao grafo P_4 , vamos ter o seguinte polinómio cromático

$$P_{P_4}(\mathbf{k}) = [P_{P_4-e_1}(\mathbf{k})] - [P_{P_4/e_1}(\mathbf{k})]$$

onde:

- $P_{P_4-e_1}(\mathbf{k})$ significa que eliminamos a primeira aresta do grafo P_4 , originando num novo grafo, ao qual chamaremos de grafo A.
- $P_{P_4/e_1}(\mathbf{k})$ significa que contraímos essa mesma aresta, e como consequência, teremos um outro grafo, ao qual chamaremos de grafo B.

Cada termo do polinómio cromático dará então origem aos seguintes grafos A e B, representados na figura seguinte

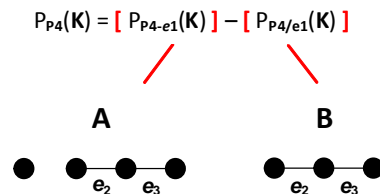


Figura 3.78 – Grafos A e B

2º Passo) Vamos repetir o processo utilizado no primeiro passo, tendo em atenção os sinais dos respetivos termos do polinómio cromático. Aplicando a expressão $P_G(\mathbf{k}) = P_{G-e}(\mathbf{k}) - P_{G/e}(\mathbf{k})$ aos grafos A e B, obtidos no passo anterior, vamos ter o seguinte polinómio

$$P_{P_4}(\mathbf{k}) = [P_{A-e_2}(\mathbf{k}) - P_{A/e_2}(\mathbf{k})] - [P_{B-e_2}(\mathbf{k}) - P_{B/e_2}(\mathbf{k})] \iff$$

$$P_{P_4}(\mathbf{k}) = P_{A-e_2}(\mathbf{k}) - P_{A/e_2}(\mathbf{k}) - P_{B-e_2}(\mathbf{k}) + P_{B/e_2}(\mathbf{k})$$

onde

- $P_{A-e_2}(\mathbf{k})$ significa que eliminamos a aresta e_2 do grafo A, originando num novo grafo, ao qual chamaremos de grafo C.
- $P_{A/e_2}(\mathbf{k})$ significa que contraímos essa mesma aresta e_2 , e como consequência, teremos um outro grafo, ao qual chamaremos de grafo D.
- $P_{B-e_2}(\mathbf{k})$ significa que eliminamos a aresta e_2 do grafo B, originando num novo grafo, ao qual chamaremos de grafo E.

- $P_{B/e_2}(\mathbf{k})$ significa contraímos essa mesma aresta e_2 , dando origem um outro grafo, ao qual chamaremos de grafo F.

Ao retirar e contraír uma aresta dos grafos A e B, passamos a ter os seguintes quatro novos grafos C, D, E e F

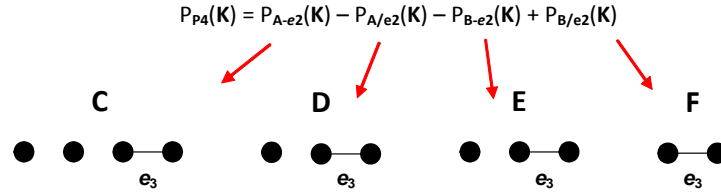


Figura 3.79 - Grafos C, D, E e F

3º Passo) Vamos repetir o processo utilizado anteriormente, aplicando os mesmos passos nos grafos C, D, E e F.

$$P_{P_4}(\mathbf{k}) = [P_{C-e_3}(\mathbf{k}) - P_{C/e_3}(\mathbf{k})] - [P_{D-e_3}(\mathbf{k}) - P_{D/e_3}(\mathbf{k})] - [P_{E-e_3}(\mathbf{k}) - P_{E/e_3}(\mathbf{k})] + [P_{F-e_3}(\mathbf{k}) - P_{F/e_3}(\mathbf{k})] \iff$$

$$P_{P_4}(\mathbf{k}) = P_{C-e_3}(\mathbf{k}) - P_{C/e_3}(\mathbf{k}) - [P_{D-e_3}(\mathbf{k}) + P_{D/e_3}(\mathbf{k}) - P_{E-e_3}(\mathbf{k}) + P_{E/e_3}(\mathbf{k}) + P_{F-e_3}(\mathbf{k}) - P_{F/e_3}(\mathbf{k})]$$

Passamos agora a ter oito grafos, todos do tipo N_n , ou seja, grafos sem arestas.

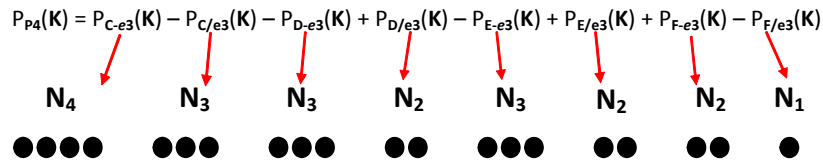


Figura 3.80 - Grafos do tipo N_n .

Após o este resultado, podemos concluir que

$$P_{P_4}(\mathbf{k}) = N_4 - N_3 - N_3 + N_2 - N_3 + N_2 + N_2 - N_1 \iff P_{P_4}(\mathbf{k}) = N_4 - 3N_3 + 3N_2 - N_1$$

Aplicando a função $P_{N_n}(k) = k_n$, referente ao polinómio cromático dos grafos do tipo N_n , passamos a ter a seguinte expressão final

$$P_{P_4}(\mathbf{k}) = \mathbf{k}^4 - 3\mathbf{k}^3 + 3\mathbf{k}^2 - \mathbf{k}$$

Este polinómio cromático representa as possibilidades de colorir o grafo P_4 , com \mathbf{k} cores.

Pelas condições descritas no último teorema, podemos interpretar o polinómio cromático $P_{P_4}(\mathbf{k}) = \mathbf{k}^4 - 3\mathbf{k}^3 + 3\mathbf{k}^2 - \mathbf{k}$ de várias maneiras, retirando várias informações relevantes acerca do grafo P_4 . Por exemplo, como o grau do polinómio é quatro e o valor absoluto do coeficiente \mathbf{k}^{n-1} é três, então P_4 tem quatro vértices e três arestas, respetivamente.

Vamos calcular o polinómio cromático do mesmo grafo P_4 , utilizando a versão simplificada.

Exemplo 71 *Vamos calcular $P_{P_4}(\mathbf{k})$, ou seja, o polinómio cromático do grafo caminho P_4 , representado na figura seguinte, constituído por quatro vértices e três arestas, utilizando o segundo processo.*

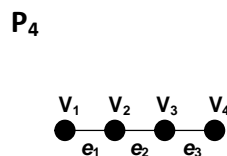


Figura 3.81 – Grafo P_4 .

Começamos por criar dois grupos de sinais simétricos. Do lado esquerdo colocaremos os grafos cujos respetivos termos do polinómio cromático são positivos e do lado direito os que têm sinal negativo.

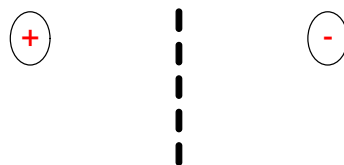


Figura 3.82 – Exemplo dos dois grupos de sinais simétricos

Vamos então exemplificar os passos, ao aplicar a expressão $P_{P_4}(\mathbf{k}) = P_{P_4-1}(\mathbf{k}) - P_{P_4/1}(\mathbf{k})$ ao grafo P_4 .

1º Passo) Retiramos a primeira aresta de P_4 e desenhamos este novo grafo no grupo do lado esquerdo, referente aos termos da função com sinal positivo.

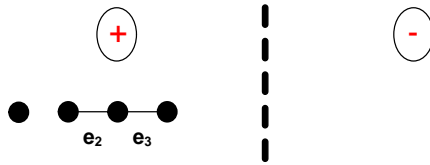


Figura 3.83 – Eliminação da primeira aresta de P_4 .

2º Passo) Contraímos a primeira aresta de P_4 e desenhamos o novo grafo, no grupo do lado direito, referente aos termos da função com sinal negativo. Ao efetuar este passo, resolvemos colorir de azul este novo grafo, assim como todos aqueles que serão originados a partir deste, com o objetivo de nos fornecer uma orientação clara da posição onde são colocados cada um destes grafos, ao longo de cada passo que vamos realizar.

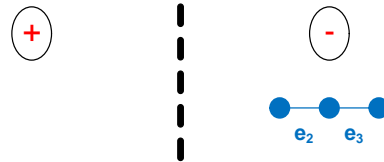


Figura 3.84 – Contração da primeira aresta de P_4 .

3º Passo) A partir deste passo, sempre que retiramos uma aresta do respetivo grafo, colocamos o novo grafo no mesmo grupo do grafo que o originou e sempre que contraímos uma aresta colocamos o novo grafo no grupo de sinal contrário. Este processo, de eliminar e contraír arestas, termina quando todos os grafos forem do tipo N_n . Os grafos resultantes ficarão com o aspeto ilustrado na figura 3.85.

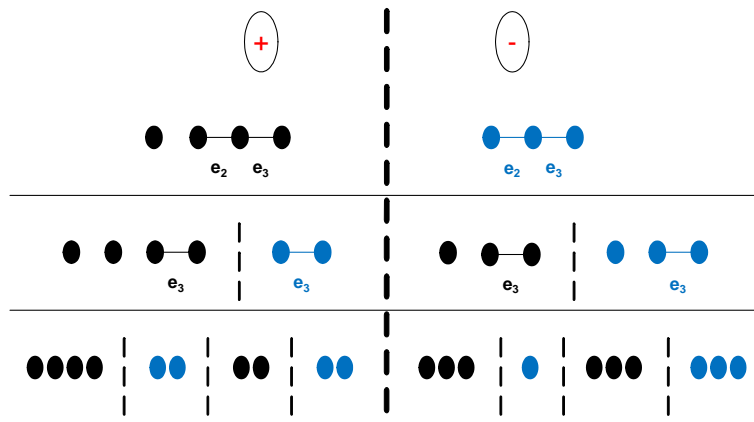


Figura 3.85 – Aspeto dos grafos após retirarmos e contraírmos todas as arestas de P_4 .

Passamos agora a ter oito grafos, todos do tipo N_n , ou seja, grafos sem arestas, separados em dois grupos de sinais simétricos, tal como podemos observar na figura 3.86.

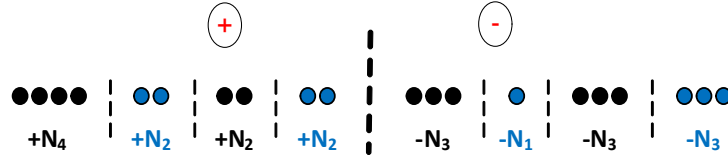


Figura 3.86 – Grafos do tipo N_n

Logo, sendo \mathbf{k} o número de cores a colorir os vértices do grafo P_4 , temos o seguinte polinómio cromático

$$P_{P_4}(\mathbf{k}) = N_4 + N_2 + N_2 + N_2 - N_3 - N_1 - N_3 - N_3 \iff P_{P_4}(\mathbf{k}) = N_4 - 3N_3 + 3N_2 - N_1$$

Aplicando a função $P_{N_n}(\mathbf{k}) = \mathbf{k}^n$, referente ao polinómio cromático dos grafos do tipo N_n , passamos a ter a seguinte expressão final

$$P_{P_4}(\mathbf{k}) = \mathbf{k}^4 - 3\mathbf{k}^3 + 3\mathbf{k}^2 - \mathbf{k}.$$

Podemos concluir que este polinómio cromático, que representa as possibilidades de colorir o grafo P_4 com \mathbf{k} cores, é o mesmo polinómio que determinamos através do primeiro método.

Quanto ao valor de $P_{P_4}(\mathbf{k})$, este vai depender \mathbf{k} , ou seja, do número de cores a utilizar para colorir P_4 . Tal como podemos ver no exemplo seguinte, o cálculo do valor do polinómio cromático de P_4 torna-se mais simples, pois basta atribuir valores a \mathbf{k} .

Exemplo 72 Sendo \mathbf{k} o número de cores a colorir os vértices do grafo P_4 , vamos calcular as diferentes possibilidades de colorir este grafo.

Sendo $P_{P_4}(\mathbf{k}) = \mathbf{k}^4 - 3\mathbf{k}^3 + 3\mathbf{k}^2 - \mathbf{k}$ o polinómio cromático do grafo P_4 , bastará atribuímos valores a \mathbf{k} .

- Se $\mathbf{k} = 1$, então $P_{P_4}(1) = 1^4 - 3 \times 1^3 + 3 \times 1^2 - 1 = 1 - 3 + 3 - 1 = 0$

Haveria zero possibilidades de colorir P_4 .

- Se $\mathbf{k} = 2$, então $P_{P_4}(2) = 2^4 - 3 \times 2^3 + 3 \times 2^2 - 2 = 16 - 24 + 12 - 2 = 2$

Haveria duas possibilidades de colorir o grafo.

- Se $\mathbf{k} = 3$, então $P_{P_4}(3) = 3^4 - 3 \times 3^3 + 3 \times 3^2 - 3 = 74 - 74 + 27 - 3 = 24$

Logo haveria vinte e quatro possibilidades de colorir P_4 .

Depois desta exemplificação, vamos averiguar se é possível encontrar a função referente ao polinómio cromático de grafos planares e de grafos não panares, utilizando este último método.

3.10.1 Polinómio cromático de um grafo planar

Exemplo 73 *Seja G o seguinte grafo planar. Vamos ver se é possível determinar o polinómio cromático de G .*

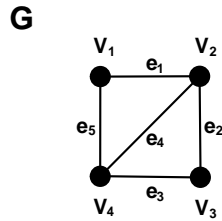


Figura 3.87 – Grafo planar G

Ao aplicarmos o processo referente ao segundo método e utilizando os dois teoremas anteriores, de modo a encontrarmos o polinómio cromático do grafo planar G , os grafos resultantes ficarão com o seguinte aspeto

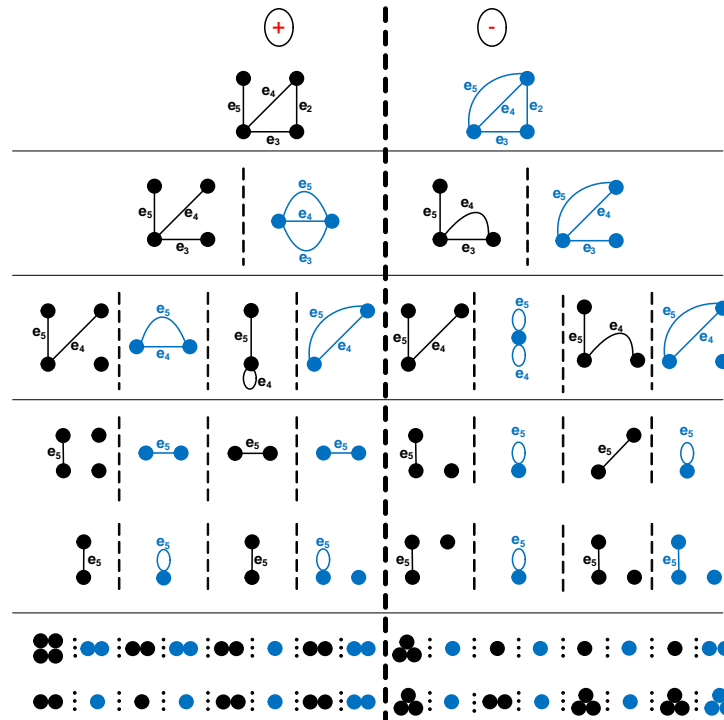


Figura 3.88 – Cálculo do polinómio cromático do grafo planar G

Como podemos observar na figura 3.89, após o último passo, passamos a ter trinta e dois grafos, todos do tipo N_n , separados em dois grupos de sinais simétricos.

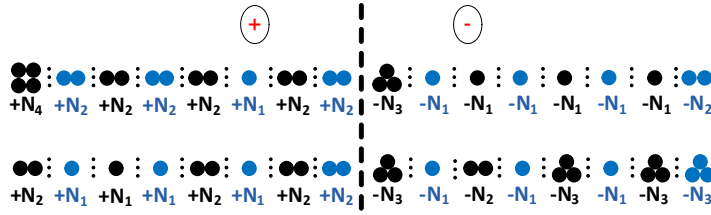


Figura 3.89 – Grafos do tipo N_n .

Logo, sendo k o número de cores a colorir os vértices do grafo planar G , temos o seguinte polinómio cromático:

$$P_G(\mathbf{k}) = N_4 + N_2 + N_2 + N_2 + N_2 + N_1 + N_2 + N_2 + N_2 + N_1 + N_1 + N_1 + N_2 + N_1 + N_2 + N_2 - N_3 - N_1 - N_1 - N_1 - N_1 - N_1$$

$$P_G(\mathbf{k}) = N_4 + 10N_2 + 5N_1 - 5N_3 - 2N_2 - 9N_1 \iff P_G(\mathbf{k}) = N_4 - 5N_3 + 8N_2 - 4N_1.$$

Aplicando a função $P_{N_n}(\mathbf{k}) = \mathbf{k}^n$, referente ao polinómio cromático dos grafos do tipo N_n , passamos a ter a seguinte expressão final

$$P_G(\mathbf{k}) = \mathbf{k}^4 - 5\mathbf{k}^3 + 8\mathbf{k}^2 - 4\mathbf{k}.$$

Como podemos observar, as condições descritas no último teorema são verificadas. O grau do polinómio $P_G(\mathbf{k})$ é quatro e o valor absoluto do coeficiente \mathbf{k}^{n-1} é cinco, o que nos indica que o grafo planar G tem quatro vértices e cinco arestas, respetivamente. O valor do coeficiente do termo \mathbf{k}^n é um e o termo constante do polinómio é zero. Além disso os coeficientes alteram-se nos sinais.

Podemos concluir que é possível calcular o polinómio cromático de um grafo planar.

Vamos ver se, utilizando o mesmo processo, é possível determinar esta função, referente às possibilidades de colorir um grafo com \mathbf{k} cores, sendo este grafo não planar.

3.10.2 Polinómio cromático de um grafo não planar

Exemplo 74 *Seja H o seguinte grafo não planar. Vamos ver se é possível determinar o polinómio cromático de H .*

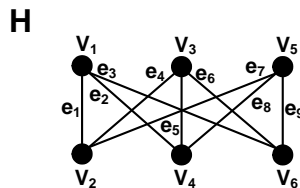


Figura 3.90 - Grafo não planar H

Pelo facto do grafo não planar H ser constituído por muitas arestas, optamos por colori-las de modo a evitar qualquer tipo de confusão, tal como podemos observar na figura 3.91.

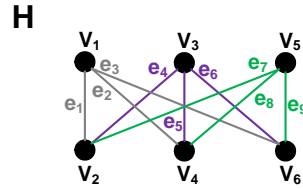


Figura 3.91 – Grafo não planar H

Ao aplicarmos o segundo método, no cálculo do polinómio cromático deste grafo não planar, obtivemos em todas as iterações, mil e vinte e dois grafos. Por esta razão, remetemos para anexo a resolução gráfica deste exercício.

Tal como podemos verificar no *Anexo B*, após o último passo deste processo, obtivemos quinhentos e doze grafos, todos do tipo N_n , separados em dois grupos de sinais simétricos. Atribuindo os respetivos sinais a cada grafo N_n , e somando os termos do polinómio, obtemos o seguinte resultado, onde \mathbf{k} é o número de cores a colorir os vértices do grafo não planar H.

$$P_H(\mathbf{k}) = N_6 + 36N_4 + 9N_3 + 123N_2 + 87N_1 - 9N_5 - 84N_3 - 45N_2 - 118N_1 \iff$$

$$P_H(\mathbf{k}) = N_6 - 9N_5 + 36N_4 - 75N_3 + 78N_2 - 31N_1$$

Aplicando a função $P_{N_n}(\mathbf{k}) = \mathbf{k}^n$, referente ao polinómio cromático dos grafos do tipo N_n , passamos a ter a seguinte expressão final

$$P_H(\mathbf{k}) = \mathbf{k}^6 - 9\mathbf{k}^5 + 36\mathbf{k}^4 - 75\mathbf{k}^3 + 78\mathbf{k}^2 - 31\mathbf{k}$$

Ao interpretarmos este polinómio cromático, e ao relacionarmos com o seu respetivo grafo não planar H, podemos afirmar que as condições descritas no último teorema são verificadas. Como podemos observar, o grau do polinómio $P_H(\mathbf{k})$ é seis e o valor absoluto do coeficiente \mathbf{k}^{n-1} é nove, o que nos indica que H tem seis vértices e nove arestas, respetivamente. O termo constante do polinómio é zero e os coeficientes alteram-se nos sinais, sendo um o valor do coeficiente do termo \mathbf{k}^n .

Podemos concluir que independentemente do valor que atribuirmos a \mathbf{k} , é possível calcular o polinómio cromático de grafos não planares.

Como conseguimos determinar o polinómio cromático de dois grafos, um planar e outro não planar, podemos também concluir que a planaridade não tem influência na obtenção deste polinómio.

Se quisermos calcular o número de possibilidades de colorir o grafo não planar H com \mathbf{n} cores, basta substituímos, no seu respetivo polinómio cromático, a variável \mathbf{k} por \mathbf{n} .

Exemplo 75 Vamos calcular o número de possibilidades de colorir o grafo não planar H com quatro e com cinco cores.

- Se $k = 4$ em $P_H(k) = k^6 - 9k^5 + 36k^4 - 75k^3 + 78k^2 - 31k$, teremos

$$P_H(4) = 4^6 - 9 \times 4^5 + 36 \times 4^4 - 75 \times 4^3 + 78 \times 4^2 - 31 \times 4 \iff$$

$$P_H(4) = 4096 - 9216 + 9216 - 4800 + 1248 - 124 \iff P_H(4) = 420$$

Portanto, existem quatrocentos e vinte possibilidades de colorir H com quatro cores.

- Se $k = 5$ em $P_H(k) = k^6 - 9k^5 + 36k^4 - 75k^3 + 78k^2 - 31k$, teremos

$$P_H(5) = 5^6 - 9 \times 5^5 + 36 \times 5^4 - 75 \times 5^3 + 78 \times 5^2 - 31 \times 5 \iff$$

$$P_H(5) = 15625 - 28125 + 22500 - 9375 + 1875 - 155 \iff P_H(5) = 2345$$

Logo, existem dois mil trezentos e quarenta e cinco possibilidades de colorir H com cinco cores.

3.11 Árvores

Uma **árvore** é um grafo conexo sem ciclos, isto é, se G é uma árvore, então G é um grafo em que existe exactamente um único caminho entre quaisquer dois dos seus vértices. Os primeiros estudos efectuados sobre árvores foram realizados em 1857, pelo matemático britânico Arthur Cayley.

Vamos analisar algumas características das árvores e relacioná-las com grafos planares e grafos não planares.

Observação 76 *Um grafo nem sempre é uma árvore, mas toda a árvore é um grafo, bipartido e planar.*

Definição 77 *Uma árvore possui folhas e ramos, que são respectivamente os seus vértices e as suas arestas.*

Vamos representar na próxima figura, exemplos de duas árvores, T_1 e T_2

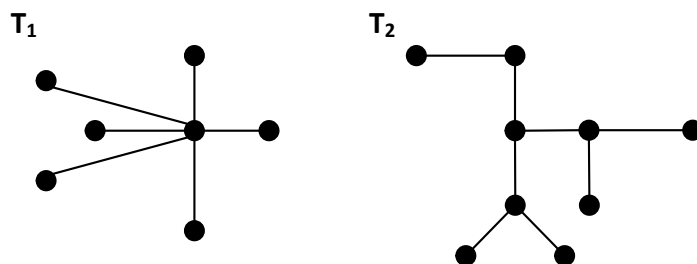


Figura 3.92 – Árvores T_1 e T_2 .

Como podemos verificar na figura 3.92, T_1 e T_2 são duas árvores com estruturas diferentes. Enquanto que T_1 tem sete folhas e seis ramos, a árvore T_2 possui nove folhas e oito ramos.

Definição 78 Uma *floresta* é uma coleção de mais do que uma árvore.

Definição 79 A *ordem de uma árvore* corresponde ao número de folhas que esta possui, ou seja, corresponde ao número de vértices do respectivo grafo.

O exemplo 80 tem como objetivo, mostrar que duas árvores com a mesma ordem não são necessariamente iguais.

Exemplo 80 Vamos construir algumas árvores, alterando o valor das suas ordens.

Na figura seguinte, T_1 e T_2 representam duas árvores diferentes, embora sejam ambas de ordem três.

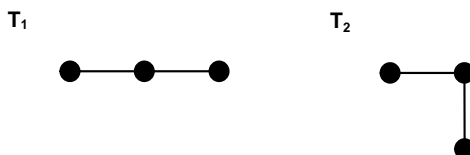


Figura 3.93 – Árvores de ordem três

As próximas três árvores são distintas, mas todas de ordem quatro.

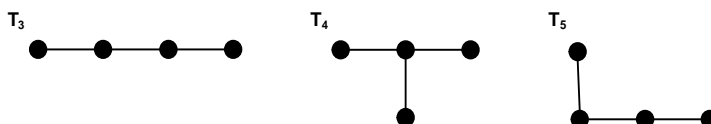


Figura 3.94 – As árvores T_3 , T_4 e T_5 são de ordem quatro

Na figura seguinte estão representadas seis árvores diferentes, todas de ordem cinco.

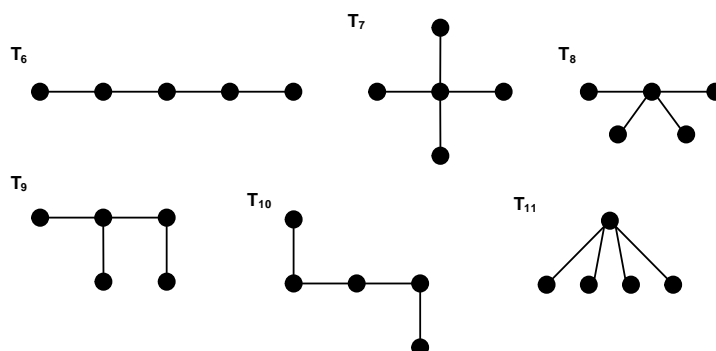


Figura 3.95 – Árvores de ordem cinco

Os teoremas 81 e 82 são importantes, pois permitem-nos identificar uma árvore, e extraír alguma das suas características, de um modo mais fluído.

Teorema 81 *Um grafo conexo G com n vértices é uma árvore se e só se tiver $n - 1$ arestas.*

Teorema 82 *Se $G = (V, E)$ é um grafo simples com n vértices, então as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. O grafo G é uma árvore.
2. G não contém ciclos e tem $n - 1$ arestas.
3. G é conexo e tem $n - 1$ arestas.
4. G é conexo e cada aresta é uma ponte.
5. Quaisquer dois vértices de G estão ligados por um único caminho.
6. G não contém ciclos, mas acrescentando uma aresta obtém-se um ciclo.

Nos exemplos 83 e 84, vamos mostrar que é possível identificar e construir árvores a partir de grafos planares e de grafos não planares.

Exemplo 83 *Seja G o seguinte grafo planar, constituído por seis vértices e nove arestas. A partir de G , vamos identificar e construir várias árvores, independentemente do valor da sua ordem.*

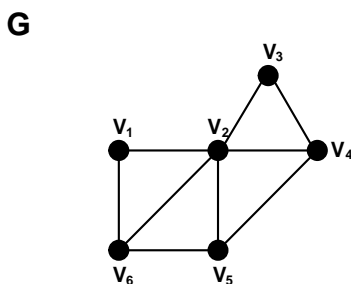


Figura 3.96 – Grafo G

O objetivo passa por construir diferentes tipos de grafos, que contenham um único caminho entre quaisquer dois vértices de G . A figura 3.94 representa quatro árvores distintas, construídas a partir do grafo planar G .

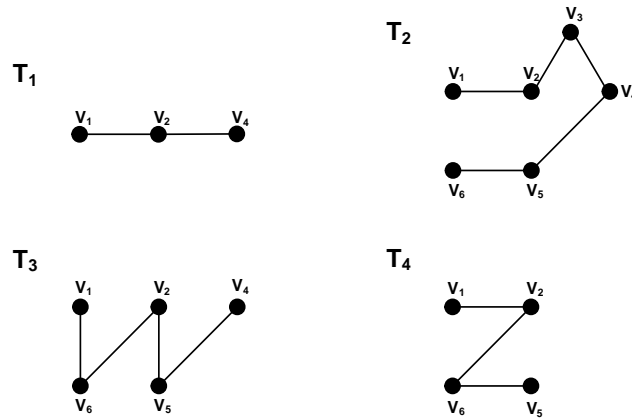


Figura 3.97 – Árvores construídas a partir do grafo planar G .

Logo é possível construir árvores de ordens diferentes, a partir de um grafo planar.

Exemplo 84 *Seja H o seguinte grafo não planar, constituído por seis vértices e nove arestas. Vamos verificar se é possível identificar e construir árvores distintas, a partir de H , independentemente do valor das suas ordens.*

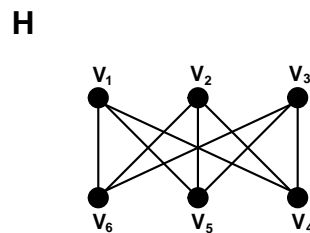


Figura 3.98 – Grafo não planar H

Tal como podemos verificar na figura 3.99, identificamos e construímos seis tipos de grafos, que contêm um único caminho entre dois quaisquer vértices de H .

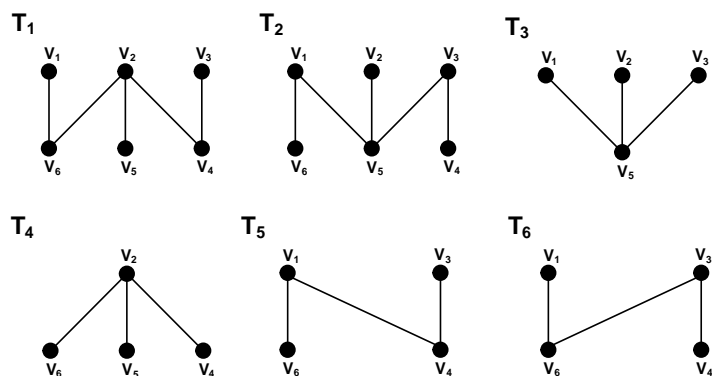


Figura 3.99 – Árvores construídas a partir de H

Logo concluímos que é possível construir árvores, de ordens distintas, a partir de um grafo não planar.

Definição 85 Dado um grafo conexo G , designa-se por **árvore gerada** (ou *árvore suporte*, ou *árvore abrangente*) a todo o subgrafo de G que seja uma árvore e que contenha todos os seus vértices.

Nos exemplos 86 e 87, vamos verificar se é possível construir árvores geradas, a partir de qualquer grafo, independentemente da sua planaridade.

Exemplo 86 Seja H o grafo planar seguinte, constituído por cinco vértices e sete arestas.

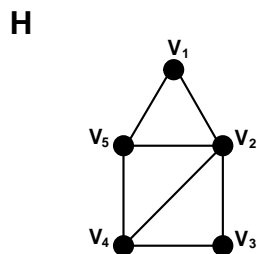


Figura 3.100 – Grafo H

A partir de H, vamos construir alguns tipos de árvores geradas.

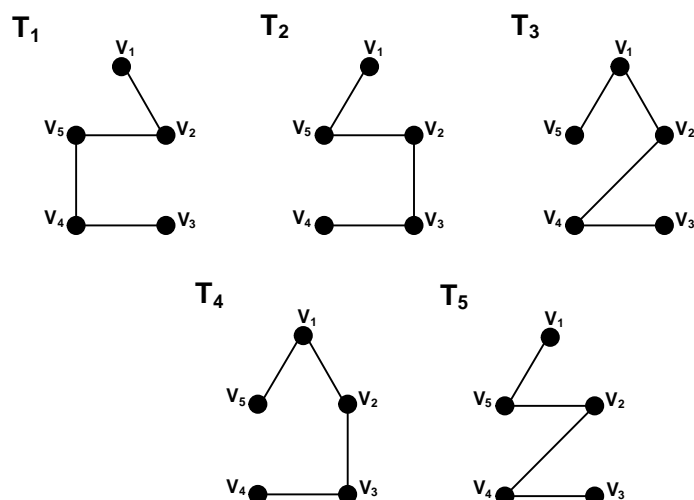


Figura 3.101 – As árvores T_1, T_2, T_3, T_4 e T_5 são árvores geradas a partir de G

Observando a figura 3.101, verificamos que as árvores representadas são constituídas pelos cinco vértices do grafo planar H . Logo é possível construir árvores geradas a partir de um grafo planar.

Vamos agora ver se tal é possível em grafos não planares.

Exemplo 87 *Seja G o grafo não planar, representado na figura seguinte.*

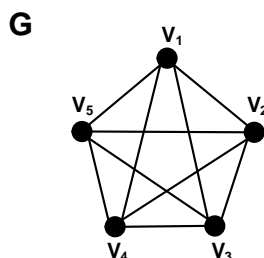


Figura 3.102– Grafo G , não planar.

A partir de G , vamos ver se é possível construir alguns tipos de árvores geradas.

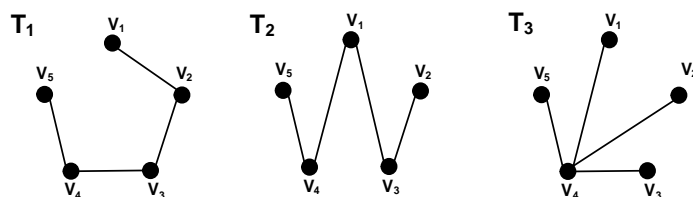


Figura 3.103 – Árvores geradas T_1, T_2 e T_3

Como podemos observar na figura 3.103, T_1 , T_2 e T_3 são árvores geradas a partir do grafo não planar H , pois são constituídas pelos seus cinco vértices.

Logo podemos concluir que é possível criar árvores geradas, a partir de um grafo não planar.

O tema seguinte refere-se à fórmula de Cayley que relaciona o número de vértices de um grafo completo com o número de árvores geradas a partir deste.

3.12 Fórmula de Cayley

Esta fórmula diz-nos que o número de árvores geradas a partir de um grafo completo K_n é dado por n^{n-2} , onde n representa o número de vértices de K_n .

Vamos de seguida apresentar alguns exemplos referentes à aplicação da Fórmula de Cayley. Primeiro vamos ver que é possível definir árvores geradas a partir de um dado grafo planar, para depois averiguar se o mesmo é possível a partir de um dado grafo não planar.

Exemplo 88 *Seja K_3 o seguinte grafo planar e completo. Vamos determinar, geometricamente, o maior número possível de árvores geradas, a partir deste grafo.*

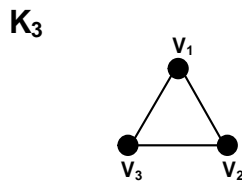


Figura 3.104 – Grafo completo K_3

Como podemos verificar na figura 3.105, os grafos T_1 , T_2 e T_3 são as únicas árvores geradas a partir de K_3 .

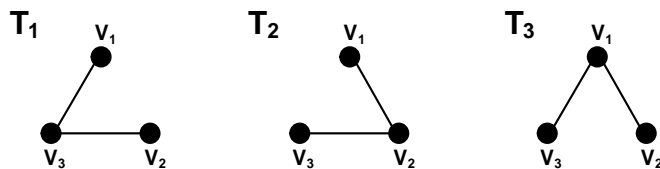


Figura 3.105 – Árvores geradas a partir de K_3

Logo o grafo completo K_3 tem apenas três casos possíveis, no que diz respeito a árvores geradas. Vamos aplicar a fórmula de Cayley ao grafo K_3 de modo a confirmar este resultado. Esta fórmula diz-nos que o número de árvores geradas, a partir de um grafo completo, com n vértices, é nos dado pela fórmula n^{n-2} .

Neste caso, como K_3 é um grafo completo, constituído por três vértices, temos que $n = 3$, logo, ao aplicarmos a fórmula de Cayley, obtemos

$$\mathbf{n}^{n-2} = 3^{3-2} = 3$$

Logo o resultado confirma-se, pois só será possível construir três árvores geradas a partir de K_3 .

Exemplo 89 *Vamos determinar o maior número possível de árvores geradas, a partir do grafo planar K_4 , ilustrado na figura seguinte.*

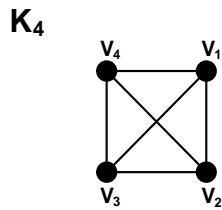


Figura 3.106 – Grafo planar e completo

Tal como podemos observar na figura 3.107, foi possível construir geometricamente dezasseis casos possíveis de árvores geradas, a partir do grafo completo K_4 .

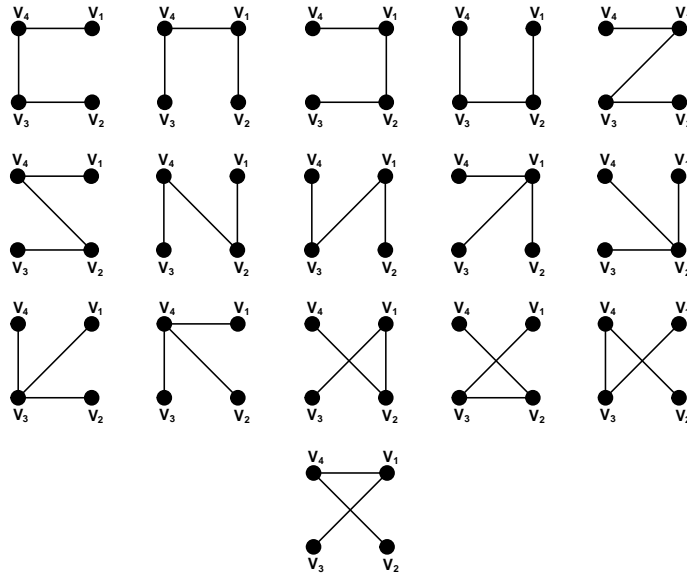


Figura 3.107 – Todas as possíveis árvores geradas a partir de K_4 .

Aplicando de novo a fórmula de Cayley, ao grafo completo K_4 , temos $\mathbf{n} = 4$, logo

$$\mathbf{n}^{n-2} = 4^{4-2} = 4^2 = 16$$

Portanto o resultado confirma-se, pois será possível construir, no máximo, dezasseis árvores geradas, a partir de K_4 .

Exemplo 90 *Seja K_5 o grafo completo, não planar, representado na figura seguinte. Vamos determinar o seu número máximo de árvores geradas.*

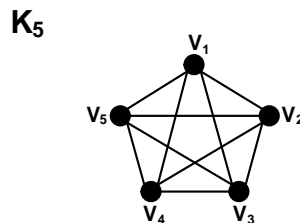


Figura 3.108 – Grafo completo, não planar

Ao interpretarmos a fórmula de Cayley, concluímos que o número máximo de árvores geradas é calculado a partir do número de vértices, de um dado grafo completo. Como um grafo completo do tipo K_n é planar se e só se $n \leq 4$, então o grafo K_5 , para além de ser completo, é também um grafo não planar. Logo, por K_5 ser completo, podemos utilizar a fórmula de Cayley para calcular o número de árvores geradas. Como este grafo tem cinco vértices, temos $n = 5$. Portanto, substituindo o valor da variável n na fórmula n^{n-2} , temos

$$5^{5-2} = 5^3 = 125$$

logo é possível criar cento e vinte e cinco árvores geradas, a partir de K_5 .

Com base nos resultados obtidos nos exemplos anteriores, concluímos que também é possível determinar e construir árvores geradas, a partir de grafos completos, independentemente da sua planaridade.

Vamos agora abordar alguns conceitos de termos, que nos vão servir de ferramenta, para nos auxiliar a determinar uma árvore gerada mínima ou árvore ótima, a partir de um dado grafo.

3.13 Árvore ótima

Definição 91 *Um **grafo pesado** é um grafo G , que em cada aresta e está associado um número real $W(e)$ chamado **peso** (ou comprimento) de e . Se H é um subgrafo de um grafo pesado G , então o peso $W(H)$ de H é a soma dos pesos: $W(e_1) + W(e_2) + \dots + W(e_k)$ onde $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ é o conjunto das arestas de H .*

Vamos descrever e exemplificar um algoritmo, que nos vai permitir encontrar uma árvore que tenha o menor peso possível, ou seja, vamos determinar uma árvore ótima, a partir de um dado grafo. Trata-se do Algoritmo de Kruskal.

3.13.1 Algoritmo de Kruskal

Para aplicarmos este algoritmo a um dado grafo G , escolhemos uma das suas arestas, de tal modo que o seu peso seja o menor possível e que não seja um loop. Após este primeiro passo, voltamos a escolher uma outra aresta, utilizando o mesmo critério. Repetimos este processo, de modo que as arestas escolhidas não formem ciclos. Se G tiver n vértices, então o processo termina depois de escolhermos $n - 1$ arestas.

Como exemplo, vamos utilizar um grafo planar e outro não planar, de modo a averiguar se a determinação das árvores ótimas dependem da planaridade do respetivo grafo.

Exemplo 92 *Vamos utilizar o algoritmo de Kruskal para determinar a árvore ótima do grafo planar G , representado na figura 3.109.*

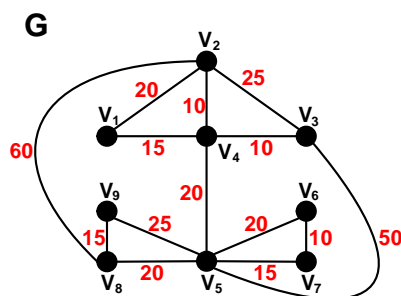


Figura 3.109 – Grafo planar G

Vamos escolher uma aresta de G , tal que o seu peso seja o menor possível e que não seja um loop. Neste caso temos três casos possíveis, pois G possui três arestas com o peso mínimo de dez unidades. Escolhemos uma destas arestas e repetimos este processo, de modo que as arestas escolhidas não formem ciclos, nem sejam um loop.

Como o grafo planar G é constituído por nove vértices, o processo termina depois de escolhermos oito das suas arestas. Para simplificar este processo, vamos definir, por exemplo, a aresta que liga o primeiro vértice ao segundo, por (v_1, v_2) .

Na tabela seguinte, representamos os passos referentes ao algoritmo de Kruskal, que passa por ordenar, por ordem crescente, os pesos das arestas de G , para depois escolhermos as respetivas arestas, de modo que estas não formem ciclos.

Número de arestas escolhidas	Peso das arestas	Ação
1	$W(V_2, V_4)=10$	Escolhemos esta aresta.
2	$W(V_3, V_4)=10$	Escolhemos esta aresta.
3	$W(V_6, V_7)=10$	Escolhemos esta aresta.
4	$W(V_1, V_4)=15$	Escolhemos esta aresta.
5	$W(V_5, V_7)=15$	Escolhemos esta aresta.
6	$W(V_8, V_9)=15$	Escolhemos esta aresta.
----	$W(V_1, V_2)=20$	Não escolhemos, forma um ciclo.
7	$W(V_4, V_5)=20$	Escolhemos esta aresta.
----	$W(V_5, V_6)=20$	Não escolhemos, forma um ciclo.
8	$W(V_5, V_8)=20$	Escolhemos esta aresta.

Ao selecionarmos a oitava aresta do grafo planar G , o processo termina. Podemos verificar na figura 3.110, as oito arestas de G que foram escolhidas e os seus respectivos pesos.

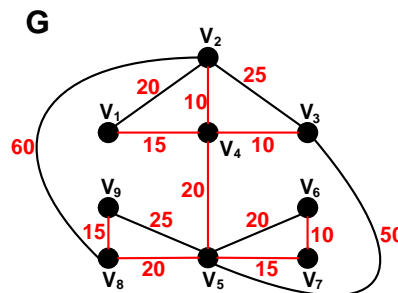


Figura 3.110 – Grafo planar G

Para calcularmos o peso da árvore ótima, somamos os pesos das arestas escolhidas.

$$W(T) = 10 + 10 + 10 + 15 + 15 + 15 + 20 + 20 \iff W(T) = 115$$

Temos então a seguinte árvore ótima, constituída por nove vértices e oito arestas, com um peso de cento e quinze unidades.

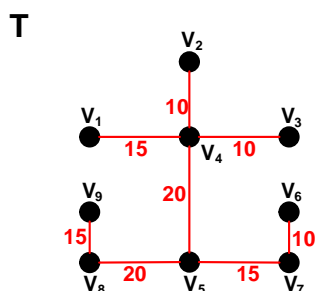


Figura 3.111 – Árvore ótima de G

Concluimos que é possível obter uma árvore ótima a partir do grafo planar G.

Exemplo 93 Vamos utilizar o algoritmo de Kruskal para determinar a árvore ótima do grafo não planar H, representado na figura seguinte.

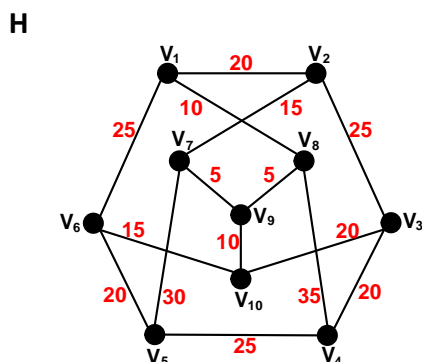


Figura 3.112 – Grafo H, não planar

Vamos escolher uma aresta de H, tal que o seu peso seja o menor possível e que não seja um loop. Neste caso temos dois casos possíveis, pois H possui duas arestas com o peso mínimo de cinco unidades. Escolhemos uma destas arestas e repetimos este processo, de modo que as arestas escolhidas não formem ciclos, nem sejam um loop.

Como o grafo não planar H é constituído por dez vértices, o processo termina depois de escolhermos nove das suas arestas.

Vamos utilizar o mesmo processo do exemplo anterior. Na tabela seguinte, representamos os passos referentes ao algoritmo de Kruskal, que passa por ordenar por ordem crescente os pesos das arestas de H, para depois escolhermos as respetivas arestas.

Número de arestas escolhidas	Peso das arestas	Ação
1	$W(V_7, V_9)=5$	Escolhemos esta aresta.
2	$W(V_8, V_9)=5$	Escolhemos esta aresta.
3	$W(V_1, V_8)=10$	Escolhemos esta aresta.
4	$W(V_9, V_{10})=10$	Escolhemos esta aresta.
5	$W(V_6, V_{10})=15$	Escolhemos esta aresta.
6	$W(V_2, V_7)=15$	Escolhemos esta aresta.
7	$W(V_3, V_{10})=20$	Escolhemos esta aresta.
8	$W(V_3, V_4)=20$	Escolhemos esta aresta.
9	$W(V_5, V_6)=20$	Escolhemos esta aresta.

Como o grafo não planar H tem dez vértices, ao escolhermos a nona aresta, o processo termina. Podemos verificar na figura 3.113, as oito arestas de H que foram selecionadas, assim como os seus respetivos pesos.

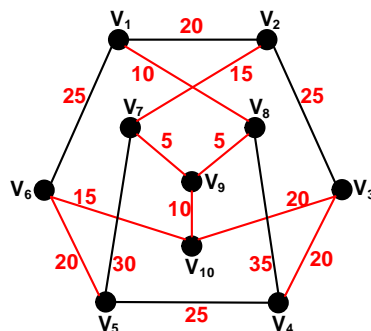


Figura 3.113 - Grafo não planar H

Para calcularmos o peso da árvore ótima, somamos os pesos das arestas escolhidas.

$$W(T) = 5 + 5 + 10 + 10 + 15 + 15 + 20 + 20 + 20 \iff W(T) = 120$$

Temos então a seguinte árvore ótima, constituída por dez vértices e nove arestas, com um peso de cento e vinte unidades.

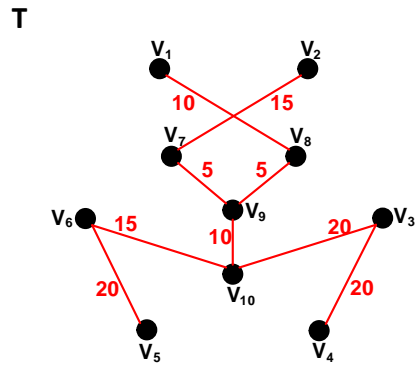


Figura 3.114 – Árvore ótima de H

Concluimos que é possível obter uma árvore ótima a partir do grafo não planar H.

Logo é possível aplicar o algoritmo de Kruskal, para determinar uma árvore ótima, independentemente da planaridade dos respectivos grafos.

Capítulo 4

A planaridade e a existência de matching num grafo

Em muitas áreas relacionadas com a investigação, os grafos tornaram-se numa forma eficaz de representar objetos, onde normalmente os vértices representam regiões de uma imagem ou de um objeto e as arestas representam as relações existentes entre estas regiões. É também neste contexto que o matching vem demonstrar ser uma ferramenta importante em resolver problemas, como por exemplo na visão computacional.

Definição 94 Um *matching* num grafo G é o conjunto de arestas independentes, isto é, um conjunto de arestas no qual nenhum par partilha o mesmo vértice.

Definição 95 Dado um *matching* M , num grafo G , os vértices que pertencem às arestas de M dizem-se *saturados* por M , ou M -saturados. Se um *matching* M satura todos os vértices de G , então M é um *matching perfeito*. Um *matching perfeito* num grafo G é um *matching* que tem o maior cardinal possível.

Nos próximos quatro exemplos, vamos verificar se é possível determinar a existência de um matching e de um matching perfeito em dois tipos de grafos, um planar e um outro não planar. O objetivo será provar que a existência de um matching e de um matching perfeito num grafo, não depende da sua planaridade.

Exemplo 96 Consideremos o grafo planar G , representado na figura 4.1. Vamos determinar se existe algum tipo de matching neste grafo.

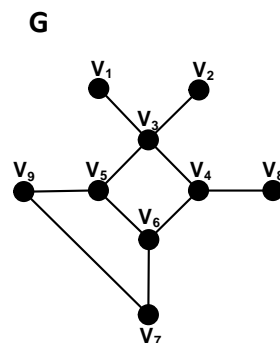


Figura 4.1 – Grafo planar G

O objetivo é selecionar um conjunto de arestas de G , no qual nenhum par partilha o mesmo vértice. Como podemos observar na figura 4.2, os vértices do grafo planar G não estão todos saturados, pois falta saturar o vértice V_2 .

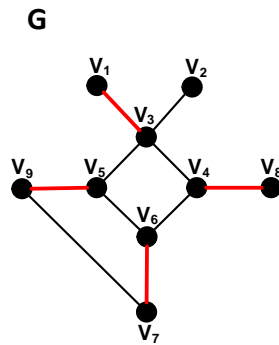


Figura 4.2 – Grafo planar G

Concluimos que não existe um matching perfeito no grafo planar G , embora exista um matching “normal”.

Este matching pode ser representado pelo conjunto $M = \{v_1v_3, v_4v_8, v_5v_9, v_6v_7\}$.

Exemplo 97 Seja H o grafo planar, representado na figura 4.3. Vamos verificar se existe algum tipo de matching neste grafo.

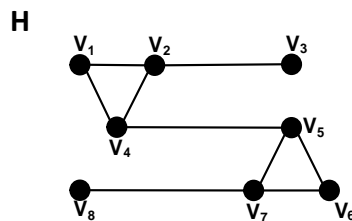


Figura 4.3 – Grafo planar H

Selecionamos as arestas de H , de modo que nenhuma partilhe o mesmo vértice.

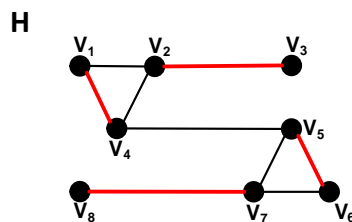


Figura 4.4 – Grafo planar H

Como podemos observar na figura anterior, os vértices do grafo planar H estão todos saturados. Logo estamos em presença de um matching perfeito. Podemos representar este matching perfeito pelo conjunto $M = \{v_1v_4, v_2v_3, v_5v_6, v_7v_8\}$.

Exemplo 98 Consideremos o grafo não planar E , representado na figura 4.5. Vamos determinar se existe algum tipo de matching neste grafo.

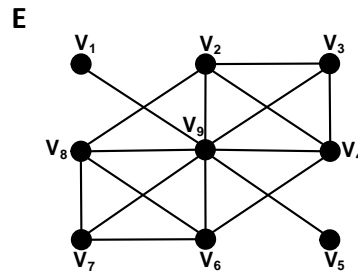


Figura 4.5 – Grafo E , não planar

Depois de seleccionar um conjunto de arestas de E , no qual nenhum par partilha o mesmo vértice, podemos observar na figura 4.6 que, os vértices do grafo não planar E não estão todos saturados, pois falta saturar o vértice v_1 .

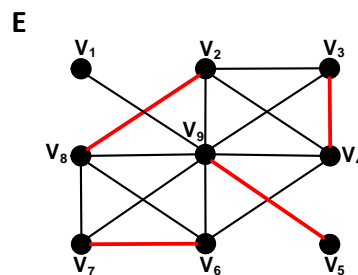


Figura 4.6 - Grafo E , não planar.

Logo, não existe um matching perfeito no grafo não planar E , embora exista um matching “normal”. Podemos representar este matching pelo conjunto $M = \{v_2v_8, v_3v_4, v_5v_9, v_6v_7\}$.

Exemplo 99 Seja F o seguinte grafo não planar. Vamos verificar se existe algum tipo de matching em F .

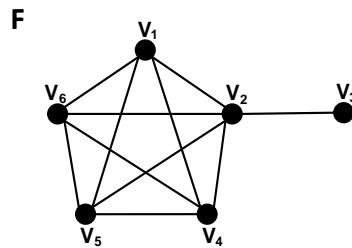


Figura 4.7 – Grafo não planar
F

Podemos observar na figura 4.8 que os vértices do grafo não planar F estão todos saturados. Logo estamos em presença de um matching perfeito.

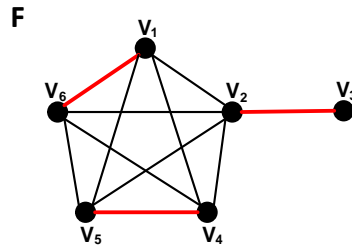


Figura 4.8 – Grafo não planar
F

Podemos representar este matching perfeito através do conjunto $M = \{v_1v_6, v_2v_3, v_4v_5\}$.

Logo, pelos exemplos anteriores, podemos concluir que a existência de um matching ou de um matching perfeito, vai depender da quantidade de arestas e de vértices que possui e não da sua planaridade.

4.1 Grafos de Euler

Vamos definir o grafo de Euler, assim como alguns conceitos importantes relacionados com este tema, para depois verificarmos se a planaridade pode influenciar a construção deste tipo de grafos.

Definição 100 Num grafo G , um **caminho** é uma sequência de vértices e arestas de um grafo, tal que os vértices e as arestas são adjacentes.

Exemplo 101 Seja H o grafo representado na figura 4.9. Vamos determinar um caminho em H .

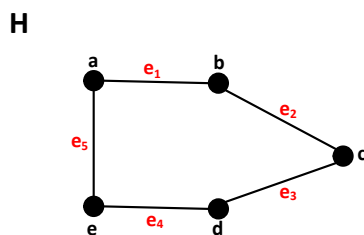


Figura 4.9 – Grafo H

Um caminho em H, é uma sequência de vértices e arestas de H, tal que os seus vértices e as suas arestas sejam adjacentes. Esta sequência poderá ser representada de várias maneiras, por exemplo, pelos conjuntos $W = (ae_1be_2ce_3de_4ee_5)$ ou $W = \langle ae_1, be_2, ce_3, de_4, ee_5 \rangle$ ou $W = \langle a, b, c, d, e \rangle$ ou $W = \langle e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 \rangle$, que representam um único caminho em H.

Definição 102 Se num grafo G existir um caminho em que os vértices iniciais e finais são diferentes, dizemos que o caminho é **aberto**, caso contrário é um caminho **fechado**. O **comprimento** de um caminho é o número de arestas que o compõe.

Definição 103 Um grafo é **conexo** se, para todos os pares de vértices X, Y existir um caminho de X para Y , ou um caminho de Y para X .

Exemplo 104 Vamos considerar o grafo G , representado na figura 4.10.

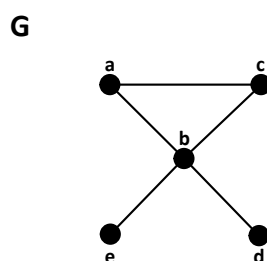


Figura 4.10 – Grafo G

O grafo G é conexo, pois é possível estabelecer um caminho entre qualquer dos seus vértices.

Exemplo 105 Seja H o grafo representado na figura 4.11. Vamos verificar se H é conexo.

H

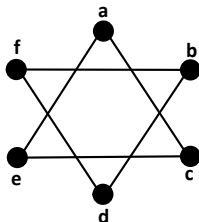


Figura 4.11 – Grafo H

O grafo H não é conexo, pois não existe um caminho entre todos os seus vértices.

Definição 106 Num grafo, um **circuito** é um caminho que não tem arestas repetidas.

Definição 107 Um **ciclo** é um caminho fechado que não tem vértices repetidos.

Definição 108 Um circuito fechado que contenha todas as arestas, sem repetições, é designado por **circuito de Euler**.

Exemplo 109 Seja H o grafo representado na figura 4.12. Vamos determinar um circuito de Euler.

H

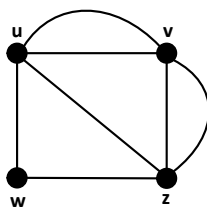


Figura 4.12 – Grafo H

Se optarmos pelo caminho fechado, sem repetições de arestas, representado pelos vértices **wzuvzvuw** de H, acabamos por obter um circuito de Euler.

Definição 110 Um circuito aberto que contenha todas as arestas do grafo (sem repetições) denominamos por **Percurso de Euler**.

Exemplo 111 Seja G o grafo representado na figura 4.13.

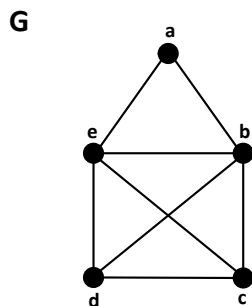


Figura 4.13 – Grafo G

Se escolhermos o caminho aberto, sem repetir nenhuma aresta de G, representado pelos vértices **dcebaedbc**, obtemos um percurso de Euler.

Observação 112 *Um grafo pode não conter qualquer tipo de percurso ou circuito de Euler.*

Exemplo 113 *Seja F o grafo representado na figura 4.14.*

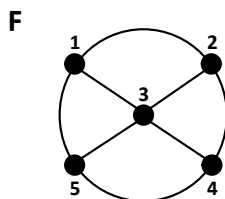


Figura 4.14 – Grafo F

Este grafo não contém nenhum percurso de Euler, nem nenhum circuito de Euler, pois não é possível determinar um caminho em F, aberto ou fechado, que contenha todas as arestas, sem as repetir.

Definição 114 *Um grafo que contenha um circuito de Euler é designado por grafo de Euler ou por **grafo Euleriano**.*

Teorema 115 *Um grafo conexo G é um grafo de Euler se e só se o grau de todos os vértices for par. Um grafo conexo G tem um percurso de Euler se e só se apenas o vértice inicial e o vértice final forem de grau ímpar.*

Vamos verificar se é possível obtermos um grafo de Euler a partir de grafos planares e a partir de grafos não planares.

Exemplo 116 *Consideremos o grafo planar E representado na figura seguinte. Vamos verificar se E é um grafo Euleriano.*

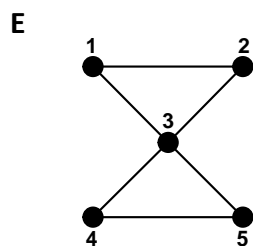


Figura 4.15 – Grafo planar E

O objetivo é encontrar um circuito de Euler em E, ou seja, um caminho fechado que contenha todas as arestas, sem as repetir. Se escolhermos o caminho constituído pelos vértices **5312345**, temos um circuito de Euler.

Logo o grafo planar E é um grafo Euleriano.

Exemplo 117 *Seja F o seguinte grafo não planar, representado na figura 4.16. Vamos verificar se é possível classificar F de grafo euerliano.*

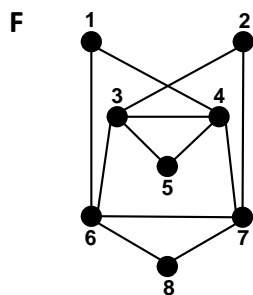


Figura 4.16 – Grafo não planar F

Para que F possa ser um grafo de Euler, temos de encontrar um caminho fechado em F que contenha todas as arestas, sem as repetir. Se escolhermos o caminho constituído pelos vértices **1687635472341**, temos um circuito de Euler.

Logo o grafo não planar F é um grafo Euleriano.

Conclusão 118 *Pelos exemplos anteriores, verificamos que a possibilidade de obter um grafo euerliano não depende da planaridade do respetivo grafo.*

4.2 Grafos de Hamilton

Vamos definir o grafo de Hamilton, assim como algumas das suas características, para depois verificarmos se a planaridade pode influenciar este tipo de grafos.

Definição 119 Um ciclo de um grafo que contenha todos os vértices, sem repetições, com exceção dos vértices finais, chama-se **Ciclo Hamiltoniano**

Definição 120 Um grafo que contenha um ciclo hamiltoniano chama-se **Grafo de Hamilton** ou **Grafo Hamiltoniano**.

Exemplo 121 Seja G o seguinte grafo planar G , constituído por nove vértices.

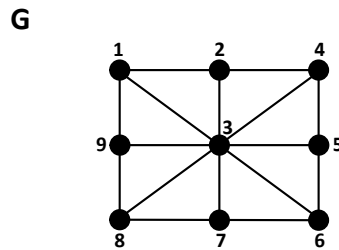


Figura 4.17 – Grafo planar G

O caminho definido pelos vértices **8376542198** de G , representa um ciclo Hamiltoniano, pois trata-se de um ciclo que contém todos os vértices de G , sem repetições, com exceção do vértice final. Logo G é um grafo Hamiltoniano.

Exemplo 122 Seja H o grafo não planar, representado na figura 4.18.

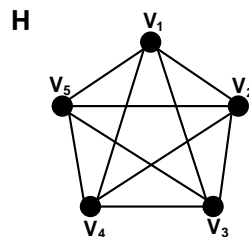


Figura 4.18 – Grafo não planar H

O caminho definido pelos vértices **$v_1v_2v_3v_4v_5$** de H , representa um ciclo Hamiltoniano, pois trata-se de um ciclo que contém todos os vértices de H , sem repetir nenhum, com exceção do vértice final. Logo o grafo não planar H é um grafo Hamiltoniano.

Conclusão 123 Como podemos verificar, pelos exemplos anteriores, é possível classificar um grafo planar e um grafo não planar de grafo hamiltoniano.

4.3 Grafos Mágicos

Vamos definir alguns conceitos e analisar algumas características, relacionadas com certos tipos de grafos, tais como o grafo mágico, grafo aresta-mágica, grafo vértice-mágico e o grafo total-mágico. O objetivo será verificarmos se a planaridade tem algum tipo de influência na construção de grafos deste tipo.

Pelo facto do tema relacionado com grafos mágicos ser relativamente recente, encontramos algumas definições diferentes, dentro do mesmo contexto, por isso tentamos manter uma linha de raciocínio o mais coerente possível.

Observação 124 *Todos os grafos aqui mencionados não possuem vértices isolados, arestas múltiplas nem loops.*

Definição 125 *Seja G um grafo cujas arestas ou vértices estão rotulados por número inteiros positivos. A esses valores damos o nome de **pesos**.*

Definição 126 *Um grafo é denominado por **grafo mágico** se a soma dos pesos, associados a todas as arestas incidentes num vértice qualquer do grafo, ou associados a todos os vértices que intercetam arestas em linha recta, tiver como resultado um valor constante, independentemente do vértice ou da aresta que escolhermos.*

Vamos verificar se é possível construir este tipo de grafo, a partir de um grafo planar e de um grafo não planar. Em cada exemplo que se segue, vamos primeiro atribuir pesos às arestas para depois atribuí-los aos vértices.

Exemplo 127 *Seja G o grafo planar representado na figura 4.19, constituído por cinco vértices e sete arestas. Vamos provar que se trata de um grafo mágico.*

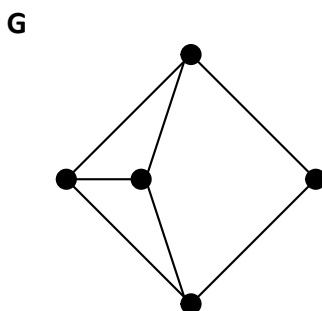


Figura 4.19 – Grafo planar G

Neste exemplo, a ideia passa por atribuir pesos às arestas de G , de tal forma que a soma de todas as arestas incidentes num vértice qualquer, seja constante. Na figura 4.20 observamos que tal é possível.

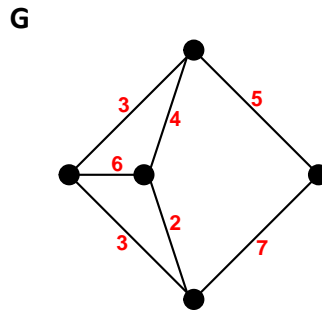


Figura 4.20 - Grafo planar G

Se somarmos os pesos de todas as arestas, incidentes em qualquer vértice de G, o valor é sempre doze unidades. Logo G é um grafo mágico.

Exemplo 128 *Seja E o grafo planar representado na figura 4.21, constituído por dez vértices e quinze arestas. Vamos verificar que se trata de um grafo mágico.*

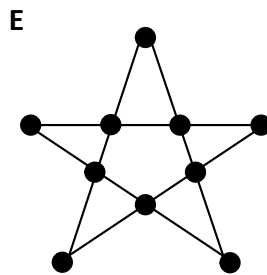


Figura 4.21 – Grafo planar E

Neste caso, o objetivo será atribuir pesos aos vértices do grafo planar E, de modo que a soma dos pesos de todos os vértices, que intercetam as arestas de E em linha reta, tenha sempre o mesmo valor.

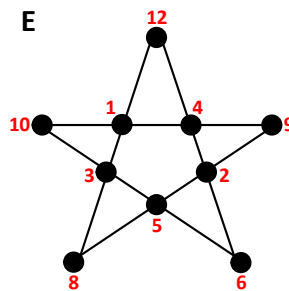


Figura 4.22 – Grafo planar E

Observando a figura 4.22, verificamos que a soma dos pesos dos vértices, que interceptam qualquer aresta em linha reta, é sempre um valor constante de vinte e quatro unidades. Portanto o grafo planar E é um grafo mágico.

Exemplo 129 *Seja H o seguinte grafo não planar, constituído por seis vértices e nove arestas. Vamos demonstrar que H é um grafo mágico.*

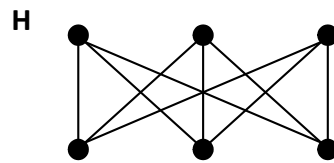


Figura 4.23 – Grafo não planar H

Neste exemplo, vamos atribuir pesos às arestas do grafo não planar H, de tal forma que a soma de todas as arestas incidentes num vértice qualquer, seja constante. Podemos observar na figura 4.24 que esta soma é possível.

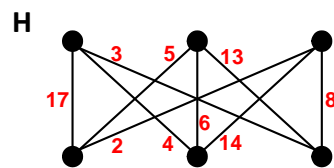


Figura 4.24 – Grafo não planar H

Se somarmos os pesos de todas as arestas, incidentes em qualquer vértice do grafo não planar H, o valor é sempre constante, isto é, a soma dá sempre vinte e quatro unidades. Logo o grafo não planar H é um grafo mágico.

Exemplo 130 *Seja H o mesmo grafo não planar utilizado no exemplo anterior. Vamos provar que H é um grafo mágico, atribuindo valores aos seus respetivos vértices.*

Observando a figura 4.25, verificamos que a soma dos pesos dos vértices, que interceptam qualquer aresta em linha reta, é sempre um valor constante de sete unidades.

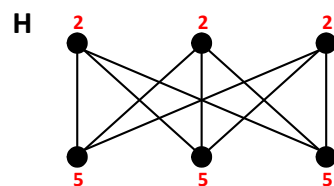


Figura 4.25 – Grafo não planar H

Portanto o grafo não planar H é um grafo mágico.

Conclusão 131 *Concluimos que é possível obtermos grafos mágicos a partir de grafos planares e de grafos não planares. Logo a planaridade não tem influência na construção deste tipo de grafos.*

Vamos de seguida definir três tipos de grafos mágicos, o grafo aresta-mágica, o grafo vértice-mágico e o grafo total-mágico.

Definição 132 *Um grafo G é denominado por **grafo aresta-mágica** se a soma dos pesos associados a dois vértices adjacentes com o peso da aresta que os une, for um valor constante. A este valor constante chamamos **constante mágica**.*

Vamos exemplificar este tipo de grafos, relacionando-os com a planaridade.

Exemplo 133 *O seguinte grafo planar G é um grafo aresta-mágica, pois a soma dos pesos associados a qualquer dois dos seus vértices adjacentes, com o peso da aresta que os une, é um valor constante.*

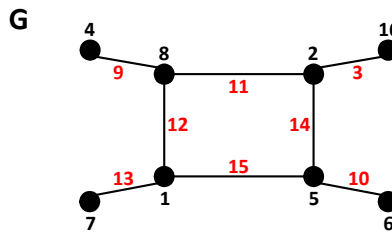


Figura 4.26 – Grafo aresta-mágica, G

Neste caso, o valor da constante mágica de G é de vinte e uma unidades.

Exemplo 134 *O seguinte grafo não planar H é um grafo aresta-mágica, pois a soma dos pesos associados a qualquer das suas arestas com o peso dos vértices das suas respectivas extremidades, é um valor constante.*

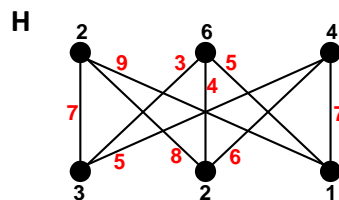


Figura 4.27 – Grafo aresta-mágica

O valor da constante mágica de H é de doze unidades.

Conclusão 135 *Concluimos que é possível construir um grafo aresta-mágica, independentemente da sua planaridade.*

Definição 136 *Um grafo G é denominado por **grafo vértice-mágico** se a soma dos pesos associados a todas as arestas incidentes num vértice, com o peso do respetivo vértice, for um valor constante. A este valor constante chamamos **soma mágica**.*

Vamos construir este tipo de grafos, para depois relacioná-los com a planaridade.

Exemplo 137 *O seguinte grafo planar H , representado na figura seguinte, é um grafo vértice-mágico, pois a soma dos pesos associados a todas as arestas incidentes num vértice, com o peso do respetivo vértice, é um valor constante.*

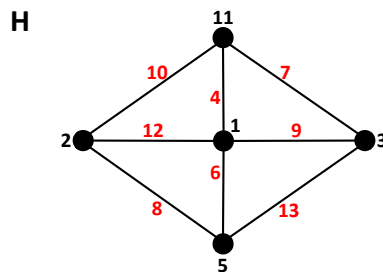


Figura 4.28 – Grafo vértice-mágico, H

Neste caso, a soma mágica de H é de trinta e duas unidades.

Exemplo 138 *O seguinte grafo não planar F é um grafo vértice-mágico, pois a soma dos pesos associados a todas as arestas incidentes num vértice, com o peso do respetivo vértice, é um valor constante*

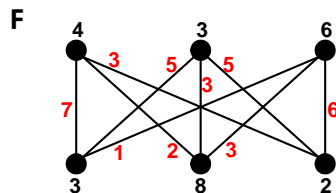


Figura 4.29 – Grafo Vértice-mágico

Neste caso, a soma mágica de F é de dezasseis unidades.

Conclusão 139 *Concluimos que é possível construir um grafo vértice-mágico, independentemente da sua planaridade.*

A próxima definição é uma das mais rigorosas, dentro do contexto dos grafos mágicos. Por esta razão, ainda não são conhecidos muito grafos deste tipo.

Definição 140 *Um grafo tem a denominação de **grafo total-mágico** se for em simultâneo um grafo aresta-mágica e vértice-mágico.*

Vamos verificar se este tipo de grafo depende da planaridade.

Exemplo 141 *Os quatro gráficos planares representados na figura 4.30, são exemplos de grafos mágico-total, pois são em simultâneo grafos aresta-mágica e vértice-mágico.*

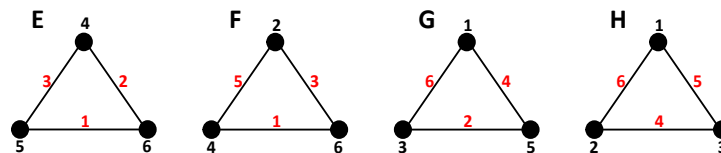


Figura 4.30 – Grafo mágico-total

Sejam \mathbf{k} a soma mágica e \mathbf{h} a constante mágica dos seus grafos respetivos grafos, observando a figura anterior, concluímos que:

- Grafo (E): $\mathbf{h} = 9$ e $\mathbf{k} = 12$;
- Grafo (F): $\mathbf{h} = 10$ e $\mathbf{k} = 11$;
- Grafo (G): $\mathbf{h} = 11$ e $\mathbf{k} = 10$;
- Grafo (H): $\mathbf{h} = 12$ e $\mathbf{k} = 9$;

Capítulo 5

Conclusões

Este trabalho teve como objetivo, dar uma visão global sobre a planaridade de grafos e analisar as consequências e influência da sua existência, ou da sua inexistência, em temas como a coloração de grafos e a existência de matching em grafos.

É evidente que este assunto abrange muitos outros conceitos que não foram aqui citados. Tivemos o cuidado de abordar o tema de um modo sucinto, apresentando em anexo mais alguma informação de modo a torná-lo claro, usando conceitos básicos para facilitar a compreensão por parte do leitor, de qualquer área profissional.

Atualmente, devido à evolução da tecnologia, ao fácil acesso a todo o tipo de ferramentas virtuais e à velocidade com que partilhamos enormes fluxos de textos científicos, a nível global, é de salientar que estamos a trabalhar numa teoria relativamente recente, que poderá originar alguns termos e conceitos diferentes, dentro do mesmo contexto, provocando alguma confusão e dificuldade na organização e na gerência desta informação. No entanto o interesse e a motivação que a Teoria dos Grafos nos despertam, serviram de impulso para reforçar e clarificar o conteúdo dos temas aqui mencionados e contornar todo o tipo de obstáculos com vista a realizarmos este trabalho.

Foi possível verificar neste trabalho que, dentro dos temas que destacamos, tais como a coloração de um grafo, o número cromático, grafo crítico, o polinómio cromático, as árvores, árvores ótimas, a existência de matching num grafo, os grafos mágicos, entre outros, foi possível aplicar as mesmas definições e propriedades, os mesmos teoremas e algoritmos, tanto nos grafos planares como nos grafos não planares. E por mais complexo que a aparência de um grafo não planar possa ter, muitas vezes é possível utilizá-lo como ferramenta para a resolução de vários tipos de problemas, desde os mais simples do dia a dia, como os mais complexos que estão relacionados com as mais vastas áreas, ligadas com a investigação.

O sucesso da Teoria dos Grafos está relacionado com a sua versatilidade, no que diz respeito às suas aplicações, quer sejam visuais ou analíticas. Este assunto, apesar de ser complexo e de haver muita investigação ainda a ser feita nesta área, não deixa de ser algo fascinante e este fascínio aumenta, à medida que temos mais conhecimentos sobre o assunto.

Bibliografia

- [1] Aigner, Martin, 1997, *Combinatorial Theory*, Springer

- [2] Comtet, Louis, 2001, *Advanced Combinatorics*, Springer

- [3] Merris, Russel, 2003 *Combinatorics*, John Wiley & Sons, Inc

- [4] Harris, John; Hirst, M. Jeffrey L.; Mossinghoff, Michael J., 2005, *Combinatorics and Graph Theory*, Springer

- [5] Colbour, Charles J.; RA, Mathon; Rosa, Alexandre, 1987, *Combinatorial Design Theory*, Holanda do Norte

- [6] Netto, Paulo Oswaldo Boaventura, 1996, *Grafos Teoria, Modelos, Algoritmos*, Edgard Blucher Ltda

- [7] Simis, Aron, 1991, *Combinatória Algébrica*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada

- [8] Jäger, Gerold; Kolonko, Michael, 2012, *Totally Magic Graphs, A Complete Search On Small Graphs*, Institut für Angewandte Stochastik und Operations

Anexo A

Alguns conceitos básicos sobre grafos

Neste anexo iremos abordar alguns conceitos básicos e alguns teoremas sobre grafos, recorrendo a alguns exemplos e ilustrações, com a finalidade de proporcionar uma melhor compreensão dos temas abordados neste trabalho.

Definição 142 Um **grafo** é uma estrutura composta por dois tipos de objectos. Um conjunto finito $V = \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \dots$ de elementos chamados **vértices** (ou nodos) e um conjunto $E = \mathbf{x}, \mathbf{y}, \dots$ de pares de vértices distintos chamadas **arestas** (ou arcos). Designamos o grafo que tem o conjunto de vértices V e o conjunto de arestas E por: $G = (V, E)$.

Um grafo $G = (V, E)$ é por definição, uma entidade matemática abstracta. Mas podemos representar esta entidade geométrica através de um diagrama no plano. Ligamos dois pontos distintos, utilizando uma curva simples, e estes determinam uma aresta.

Exemplo 143 O segmento que liga os vértices **a** e **b** do grafo G , representado na figura A.1, é uma aresta.



Figura A.1 - Exemplo de uma aresta.

Num grafo, cada vértice pode representar um código de letras, números ou palavras e cada aresta pode representar uma grandeza numérica.

Exemplo 144 Podemos verificar que o seguinte grafo G possui quatro vértices e três arestas.

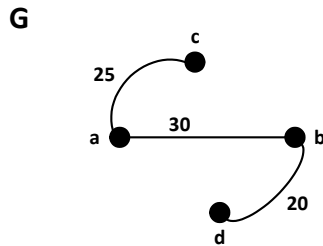


Figura A.2 - Exemplo de um grafo.

Definição 145 Seja $V = a, b, c, \dots$ o conjunto dos vértices (ou nodos) de um grafo G . A **ordem do grafo** G , corresponde ao número n de vértices do conjunto V .

Definição 146 Os vértices que são unidos pela mesma aresta são denominadas por **vértices adjacentes**, ou seja, são as extremidades de uma aresta.

Observação 147 Se u é uma aresta de um grafo G , que une um vértice x a um outro vértice y , dizemos que x e y são vértices adjacentes. Podemos representar esta aresta por $u = x, y = y, x$.

Na figura A.3, o grafo G possui duas arestas adjacentes x e y , pois são unidas pela mesma aresta u .

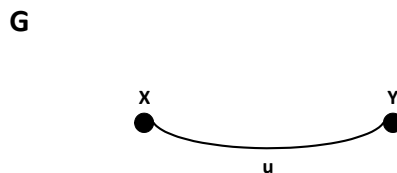


Figura A.3 - Os vértices X e Y são adjacentes.

Definição 148 Um **vértice isolado** não é adjacente a nenhum outro vértice, ou seja, não possui nenhuma aresta a ligá-lo a outro vértice.

Exemplo 149 No seguinte gráfico G , verificamos que z é um vértice isolado.

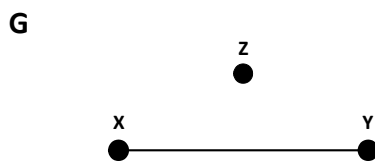


Figura A.4 - O vértice Z é um vértice isolado.

Definição 150 Se alterarmos a definição de grafo e permitirmos que um par de vértices forme mais do que uma aresta, então o resultado é uma estrutura chamada **multigrafo**, ou seja, é um grafo que possui, pelo menos, um par de vértices unidos por mais do que uma aresta. Representamos um multigrafo por $G = (V, E)$ onde V é o conjunto dos vértices, e o conjunto das arestas E é um multiconjunto.

Exemplo 151 A figura seguinte ilustra um exemplo de um grafo, onde os vértices **a** e **d** possuem arestas paralelas. Logo trata-se de um multigrafo.

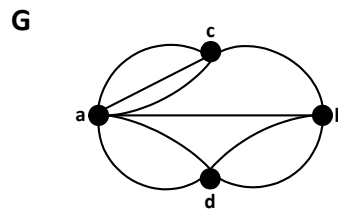


Figura A.5 - Exemplo de um multigrafo.

Definição 152 Sejam $G = (V, E)$ um multigrafo e $u = \{x, y\}$ uma aresta de G . A **multiplicidade** de u é o número de vezes $m\{x, y\}$ que esta aresta ocorre no multiconjunto E .

Definição 153 Num grafo podem existir **loops** (ou laçarotes), que são arestas da forma $\{x, x\}$ que transforma um vértice adjacente a si próprio, ou seja, é uma aresta cujas extremidades são o mesmo vértice.

Exemplo 154 A figura A.6 ilustra um grafo com três loops num dos seus vértices.

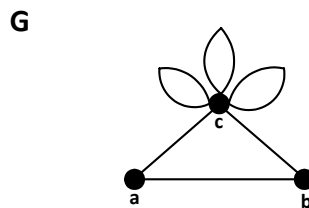


Figura A.6 - O vértice C tem três loops.

Definição 155 Um grafo que não contenha loops nem arestas múltiplas ou arestas paralelas, denominamos por **grafo Simples**.

Definição 156 Um grafo de ordem n é completo se cada par de vértices distintos forma uma única aresta e cada vértice é adjacente a todos os outros. Representamos um grafo completo por K_n .

Exemplo 157 Na figura seguinte, podemos verificar que o grafo H não é completo, pois existem duas arestas "paralelas" entre os vértices a e b , e para além disso, as arestas a e c não são adjacentes.

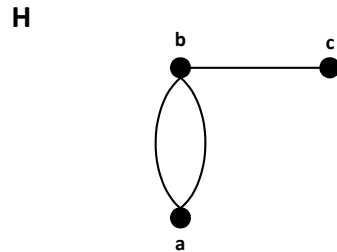


Figura A.7 - O grafo H não é completo

Os grafos representados na figura A.8 são exemplos de grafos completos, pois não contêm arestas paralelas e todos os vértices são adjacentes.

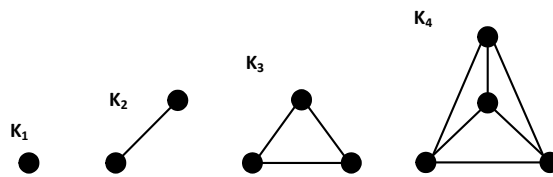


Figura A.8 - Os grafos K_1 , K_2 , K_3 e K_4 são grafos completos.

Observação 158 Um grafo completo K_n , de ordem n , tem $\frac{n \times (n-1)}{2}$ arestas.

Exemplo 159 Vamos considerar o grafo completo K_4 , de ordem quatro, representado na imagem seguinte.

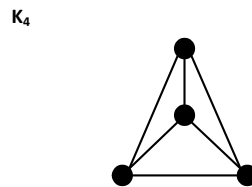


Figura A.9 - Grafo completo K_4

Então, pela expressão anterior, o número de arestas de K_4 pode ser calculado pela expressão $\frac{4(4-1)}{2}$, logo K_4 possui 6 arestas.

Definição 160 Um grafo é **planar** se a sua representação no plano não tiver arestas que se interceptem.

Exemplo 161 Seja G o grafo representado na figura A.10.

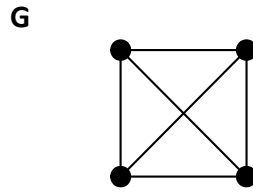


Figura A.10 -
Grafo G

Este grafo poderá ser classificado de grafo planar, se for possível representá-lo no plano, de tal forma que as suas arestas não se interceptem. Na figura A.11 verificamos que tal é possível, pois modificarmos a posição de uma das arestas que se cruzam.

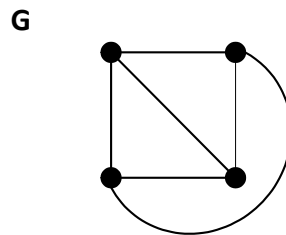


Figura A.11 - Grafo
planar G

Definição 162 O **grau de um vértice x** de um grafo G , é o número $deg(x)$ de arestas incidentes em x , ou seja, é o número de arestas que chegam a cada vértice.

Exemplo 163 Consideremos o seguinte grafo G com quatro vértices.

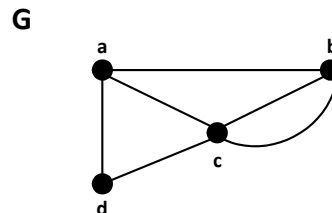


Figura A.12 - Grafo G

Os vértices **a** e **b** têm grau 3, o vértice **c** tem grau 4 e o vértice **d** tem grau 2, ou seja, $deg(a) = deg(b) = 3$, $deg(c) = 4$ e $deg(d) = 2$.

Definição 164 O grau de um vértice \mathbf{x} de um grafo que contenha loops, é o número $deg(\mathbf{x})$ de arestas incidentes em \mathbf{x} . Neste caso temos de ter em conta de que, para cada loop existente no vértice \mathbf{x} , este conta como duas arestas.

Exemplo 165 Na figura A.13 ilustramos o grafo H que contém dois vértices com loops.

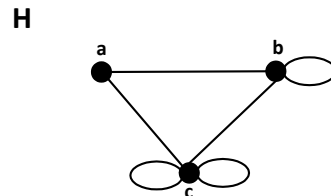


Figura A.13 - Grafo H
com três loops

Se calcularmos o grau de cada vértice, temos de ter em conta de que o grau de cada loop "conta" a dobrar, ou seja, $deg(\mathbf{a}) = 2$, $deg(\mathbf{b}) = 4$ e $deg(\mathbf{c}) = 6$.

Definição 166 Se associarmos a um dado grafo, uma lista constituída pelos graus dos seus vértices, por ordem não crescente, podemos criar uma sequência de números referente ao grau de cada um dos seus vértices. Se representarmos o grau de cada vértice, de um dado grafo, por \mathbf{d}_i , com $i = 0, 1, 2, \dots, \mathbf{n}$, chamamos à sequência $(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \dots, \mathbf{d}_n)$, com $\mathbf{d}_1 \geq \mathbf{d}_2 \geq \dots \geq \mathbf{d}_n \geq 0$, de **grau-sequência** do grafo.

Exemplo 167 Vamos considerar o grafo G representado na figura A.14.

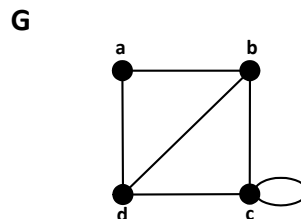


Figura A.14 - Grafo G

O grafo G é constituído por quatro vértices, onde $deg(\mathbf{a}) = 2$, $deg(\mathbf{b}) = 3$, $deg(\mathbf{c}) = 4$ e $deg(\mathbf{d}) = 3$. Logo podemos associar o seguinte grau-sequência a G : $(4, 3, 3, 2)$

Teorema 168 Sejam G um grafo e V o conjunto dos vértices de G . A soma do grau de todos os vértices de G , é um número par e é igual ao dobro do número de arestas existentes em G . Logo, a soma do grau-sequência de G , pode ser reduzida à seguinte expressão

$$\sum_{i=1}^n deg(\mathbf{v}_i) = 2e$$

onde e representa o número de arestas de G .

Exemplo 169 Seja G o grafo da figura A.15.

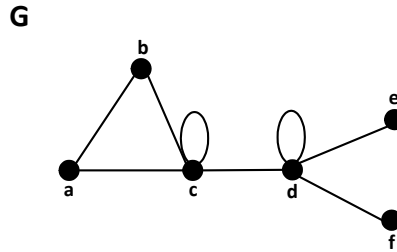


Figura A.15 - Grafo G ,
constituído por seis vértices.

Analisando o grafo G , verificamos que o grau dos seus vértices têm os seguintes valores

$$\deg(\mathbf{a}) = 2, \deg(\mathbf{b}) = 2, \deg(\mathbf{c}) = 5, \deg(\mathbf{d}) = 5, \deg(\mathbf{e}) = 1, \deg(\mathbf{f}) = 1.$$

Se utilizarmos a expressão do teorema anterior, temos

$$\sum_{i=1}^n \deg(\mathbf{v}_i) = 2\mathbf{e} \iff 2 + 2 + 5 + 5 + 1 + 1 = 16.$$

Verificamos que a soma do grau de todos os vértices de G é realmente um número par. Vamos averiguar se este valor corresponde ao dobro do número de arestas de G . Aplicando este resultado ao somatório anterior, temos

$$16 = 2\mathbf{e} \iff \mathbf{e} = 8$$

logo concluímos que G tem oito arestas.

Definição 170 Uma **sequência gráfica** é uma sequência de números inteiros não negativos à qual corresponde um grau-sequência de um grafo. Esta sequência gráfica diz respeito apenas a grafos simples, isto é, a grafos sem arestas múltiplas e sem loops.

Definição 171 Um grafo é **regular** se todos os seus vértices tiverem o mesmo grau. Dizemos que um grafo é regular de grau r quando todos os vértices do grafo têm grau r .

Exemplo 172 O grafo completo K_4 , representado na figura A.16, é um grafo regular de grau três.

K_4

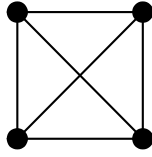


Figura A.16 - Grafo completo K_4

Definição 173 Denominamos um grafo simples de grau dois por **grafo cíclico** e designamos este tipo de grafo por C_n , com $n \geq 3$, onde n representa o número dos seus vértices, ou seja, os grafos cíclicos C_n são grafos regulares de grau dois, com pelo menos três vértices.

Exemplo 174 O grafo C_4 ilustrado na figura A.17, representa um grafo cíclico.

C_4

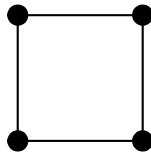


Figura A.17 - Grafo Cíclico C_4

Definição 175 Conseguimos obter um **grafo roda** a partir dos gráficos cíclicos. Basta adicionarmos um vértice no centro de um grafo cíclico e ligarmos este vértice a todos os outros. Geralmente, designamos um grafo roda, com n vértices, por W_n .

Exemplo 176 Na figura A.18, temos um exemplo de um grafo roda com cinco vértices, designado por W_5 .

W_5

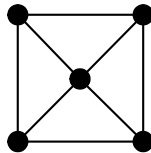


Figura A.18 - Grafo Roda W_5

Observação 177 Um grafo roda W_n possui n vértices e $2(n - 1)$ arestas, com $n \geq 4$. O vértice do centro tem grau $n - 1$ e os restantes grau três.

Definição 178 Um **grafo nulo** é um grafo sem arestas e designa-se por N_n , em que n representa o número de vértices.

Exemplo 179 Na figura A.19 encontram-se representados quatro grafos nulos.

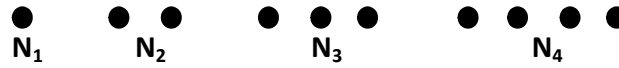


Figura A.19 - Exemplos de grafos nulos

Definição 180 Um **grafo caminho** é um grafo simples, geralmente representado por P_n , onde n é o número de vértices. Tal como podemos verificar na figura A.20, este tipo de grafo possui $n - 1$ arestas.

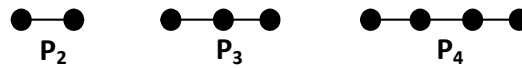


Figura A.20 - Exemplos de grafos caminho

Podemos também concluir que, sendo V o número de vértices e E o número de arestas de um grafo caminho, então a seguinte condição $|V| = |E| + 1$ é sempre verificada.

Definição 181 Um **grafo bipartido** G é um grafo cujo conjunto dos vértices $V(G)$ pode ser separado em dois subconjuntos U e W tal que cada aresta de G tem um vértice em U e outro em W .

Exemplo 182 Vamos considerar o grafo G representado na figura A.21.

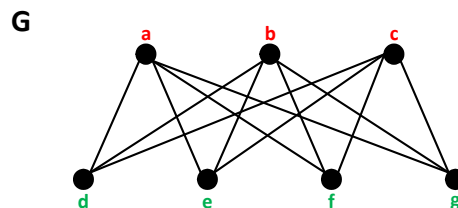


Figura A.21 - Grafo G , Bipartido

Seja $V(G)$ o conjunto dos vértices de G , então $V(G) = \mathbf{a, b, c, d, e, f, g}$. O conjunto $V(G)$ pode ser separado em dois subconjuntos, por exemplo U e W , onde $U = \mathbf{a, b, c}$ e $W = \mathbf{d, e, f, g}$. Como cada aresta de G tem um vértice em U e outro em W , então G é um grafo bipartido.

Observação 183 Num grafo bipartido não existem loops.

Definição 184 Um *grafo bipartido completo* é um grafo bipartido em que cada vértice de um subconjunto está ligado a todos os vértices de outro subconjunto.

Observação 185 Um grafo bipartido completo que tenha m vértices num subconjunto e n vértices no outro subconjunto, é designado por $K_{m,n}$.

Observação 186 Sendo $K_{m,n}$ um grafo bipartido completo, podemos determinar o número de vértices e de arestas do grafo, efectuando as duas seguintes operações:

- O número de vértices de $K_{m,n}$ é determinado por $m + n$
- O número de arestas de $K_{m,n}$ é determinado por $m \times n$

Exemplo 187 Seja $K_{3,4}$ o seguinte grafo bipartido.

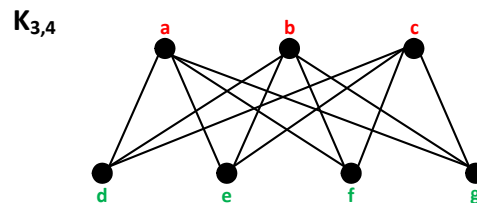


Figura A.22 - Grafo Bipartido $K_{3,4}$

Para determinar o número de arestas de $K_{3,4}$ basta multiplicarmos os dígitos três e quatro, enquanto que o número de vértices é calculado somando os mesmos números. Concluimos então que $K_{3,4}$ possui doze arestas e sete vértices.

Definição 188 Se num dado grafo, ao retirarmos um certo vértice, tivermos como consequência um aumento do número de componentes, então chamamos ao vértice removido de *vértice corte*.

Exemplo 189 Seja H o grafo ilustrado na próxima figura.

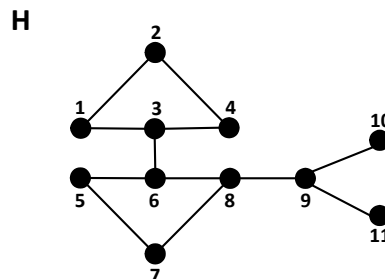


Figura A.23 - Grafo H

Vamos remover um vértice de H , por exemplo o vértice número oito. Após esta ação, obtemos um novo grafo, definido por $H - \{8\}$, representado na figura A.24.

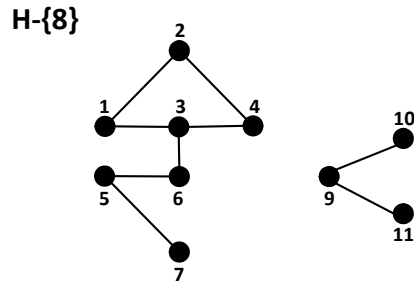


Figura A.24 - Grafo $H - \{8\}$.

Como o número de componentes de H aumentou, neste caso, de um para dois, chamamos ao vértice número oito de **Vértice Corte**.

Definição 190 *Se num dado grafo, ao retirarmos uma certa aresta, e como consequência obtivermos um novo grafo em que o número de componentes aumenta, então chamamos à aresta removida de **ponte**.*

Exemplo 191 *Vamos considerar o mesmo grafo H utilizado no exemplo anterior.*

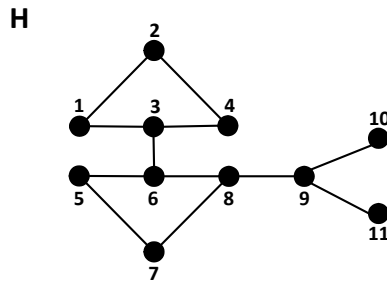


Figura A.25 - Grafo H

Vamos remover uma aresta de H , por exemplo a aresta que liga o vértice oito ao vértice nove. Como consequência, obtemos um não grafo, representado na figura A.26, por $H - \{8, 9\}$.

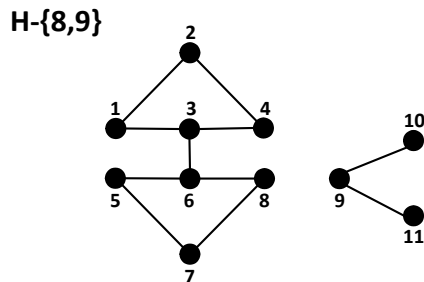


Figura A.26 - Grafo $H - \{8, 9\}$

Ao retirarmos a referida aresta, o número de componentes aumentou, logo chamamos a esta aresta de Ponte.

Definição 192 *Sejam G um grafo, a e b dois vértices quaisquer de G . Se contraírmos estes dois vértices, então a e b vão se sobrepôr, transformando-se num só vértice, ao qual podemos denominar por vértice ab , originando um novo grafo.*

Observação 193 *No caso de os vértices a e b serem adjacentes, então a aresta que os une desaparece do grafo, caso contrário, as arestas mantêm-se, ligando os mesmos vértices.*

Exemplo 194 *Seja G o seguinte grafo, constituído por seis vértices e sete arestas.*

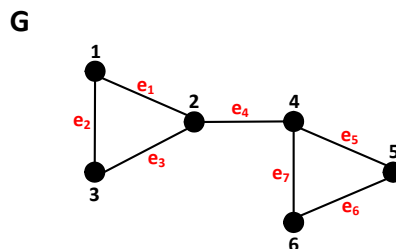


Figura A.27 - Grafo G

Vamos contraír os vértices três e quatro do grafo G. Podemos representar esta ação por $G/_{34}$. Como consequência desta contração, os vértices três e quatro vão se sobrepôr, formando assim um único vértice. Como não se tratam de vértices adjacentes, então nenhuma aresta de G desaparece. Obtemos então o grafo $G/_{34}$, representado na figura A.28.

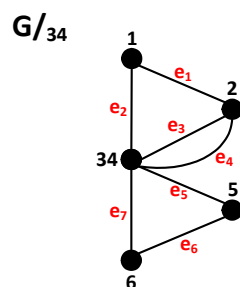


Figura A.28 - Grafo $G/_{34}$

Vamos utilizar de novo o grafo G para contraírmos outros dois vértices, por exemplo, os vértices dois e quatro. Ao contraírmos estes dois vértices, ambos vão se sobrepôr, e por serem dois vértices adjacentes, a aresta que os une desaparece. Podemos observar este facto no grafo $G/_{24}$, representado na figura A.29.

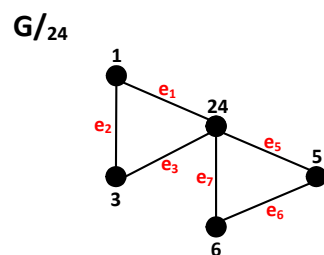


Figura A.29 - Grafo
 $G/_{24}$

Podemos observar que a aresta e_4 do grafo G , desapareceu.

Com este exemplo, terminamos este capítulo. Esperamos que esta pequena revisão sobre alguns conceitos básicos de grafos proporcione uma melhor compreensão nos temas abordados neste trabalho.

Anexo B

Neste anexo apresentamos os grafos relativos à resolução do problema descrito no *Exemplo 74*, do segundo capítulo. Estas imagens são referentes ao segunda versão na determinação do polinómio cromático, do grafo não planar H, representado na *Figura B.1*. Ilustramos nas figuras seguintes os grafos que são originados após cada iteração deste método.

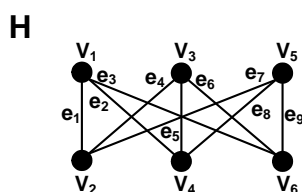


Figura B.1 - Grafo não planar H

Pelo facto do grafo ser constituído por muitas arestas, optamos por colorir-las de modo a evitar qualquer tipo de confusão, tal como podemos observar na figura B.2.

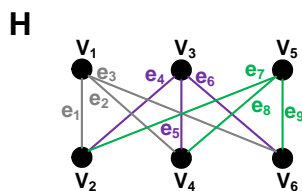


Figura B.2 – Grafo não planar H

Os primeiros passos resumem-se a retirar uma aresta de H para depois contrair esta mesma aresta. Representamos estes passos na ilustração seguinte.

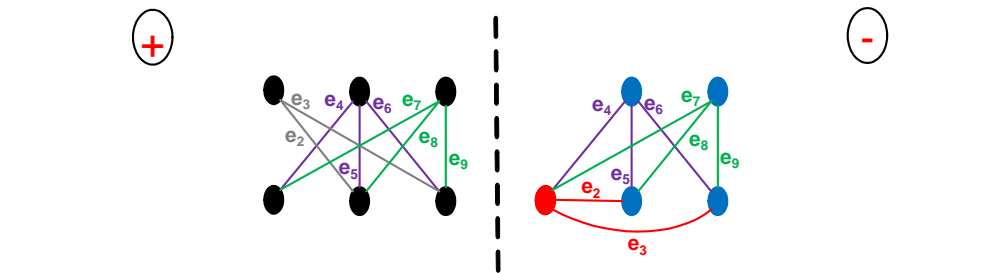


Figura B.3 - Representação da primeira iteração, deste segundo método

Como podemos verificar, ao contraírmos a primeira aresta, resolvemos colorir de azul os vértices deste novo grafo, assim como todos aqueles grafos que serão originados a partir deste, com o objetivo de nos fornecer uma orientação clara da posição onde serão colocados, ao longo de cada passo. Com o mesmo intuito, decidimos colorir de cor vermelha os vértices e as arestas que vão sofrer deslocações, referentes às respetivas contrações de arestas.

Apresentamos de seguida sessenta grafos, resultantes das quatro seguintes iterações, do segundo método relativo à determinação do polinómio cromático do grafo não planar H

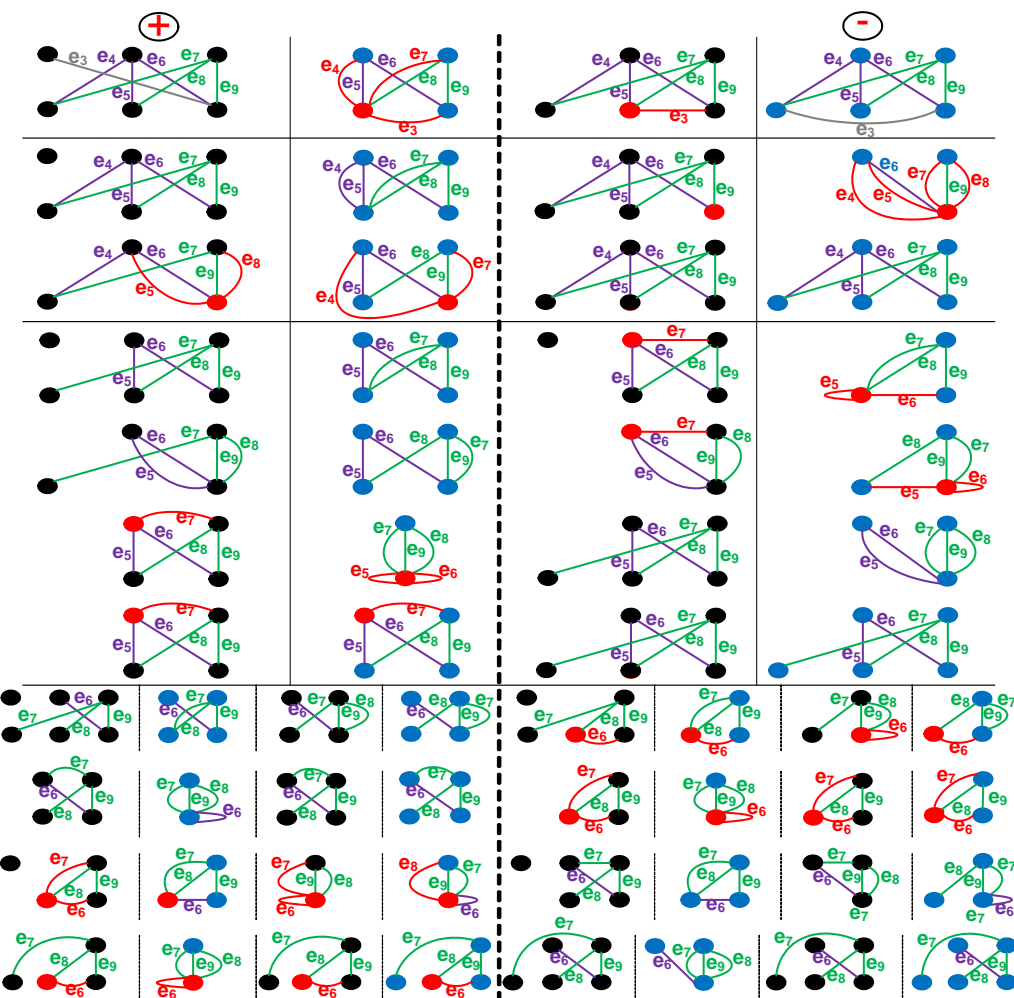


Figura B.4 - Representação referente às quatro seguintes iterações

A sexta iteração deste processo é constituído por sessenta e quatro grafos e terá o seguinte aspeto

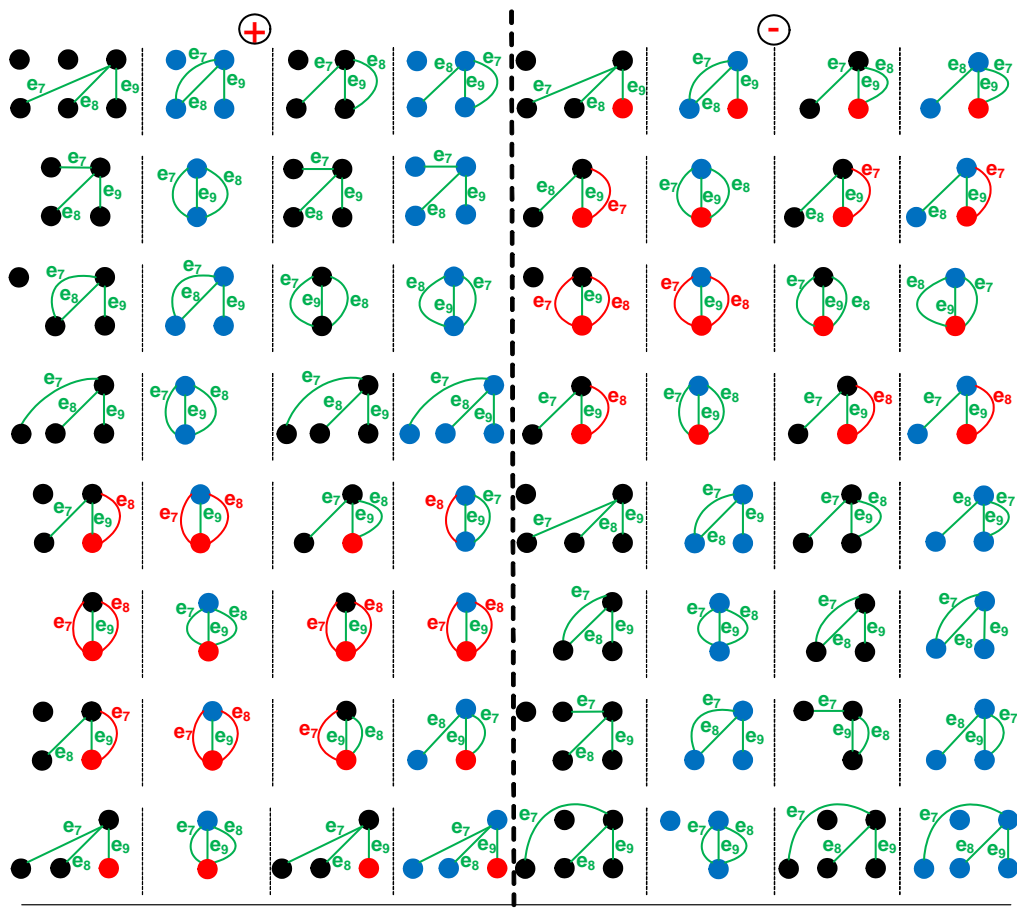


Figura B.5 - Ilustração referente à sexta iteração

Na figura B.6 encontram-se representados cento e vinte e oito grafos, referentes à sétima iteração deste processo

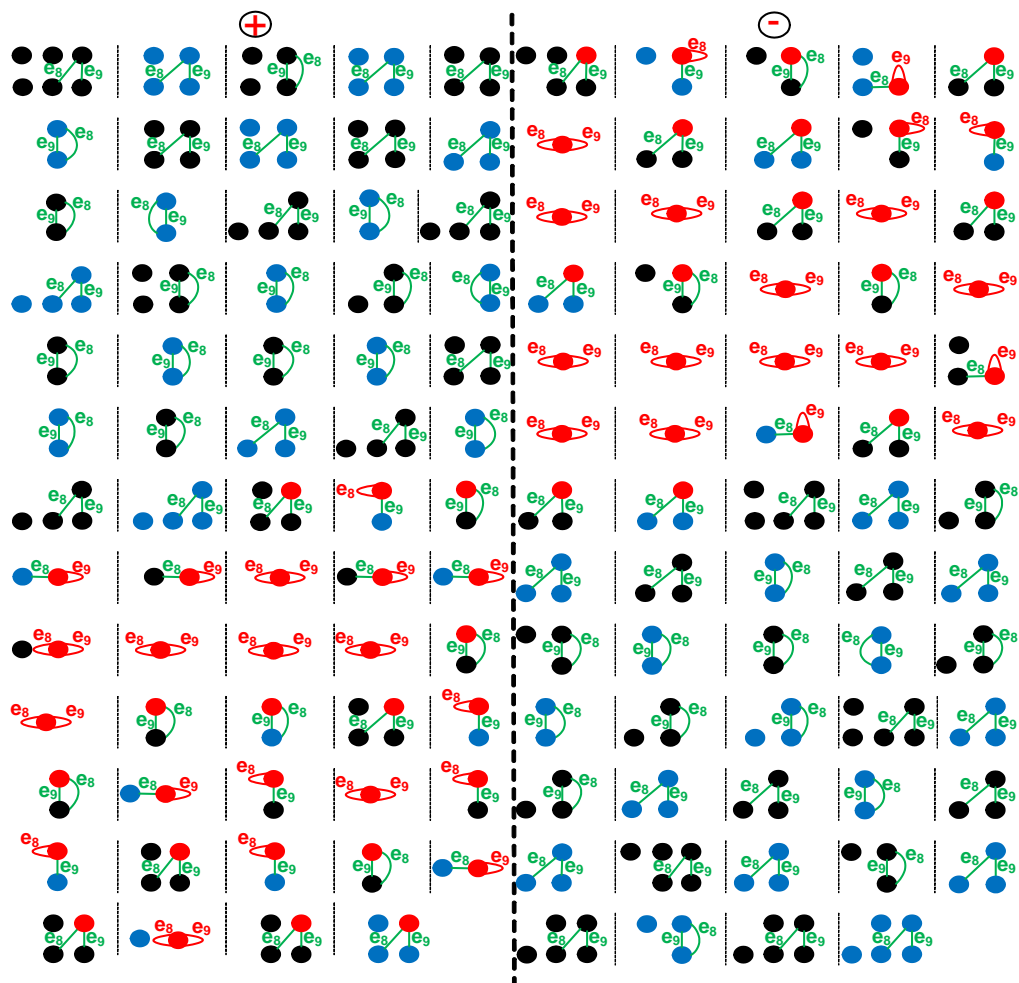


Figura B.6 - Grafos referentes à sétima iteração

A figura B.7 ilustra duzentos e cinquenta e seis grafos, originados pela oitava iteração deste processo.

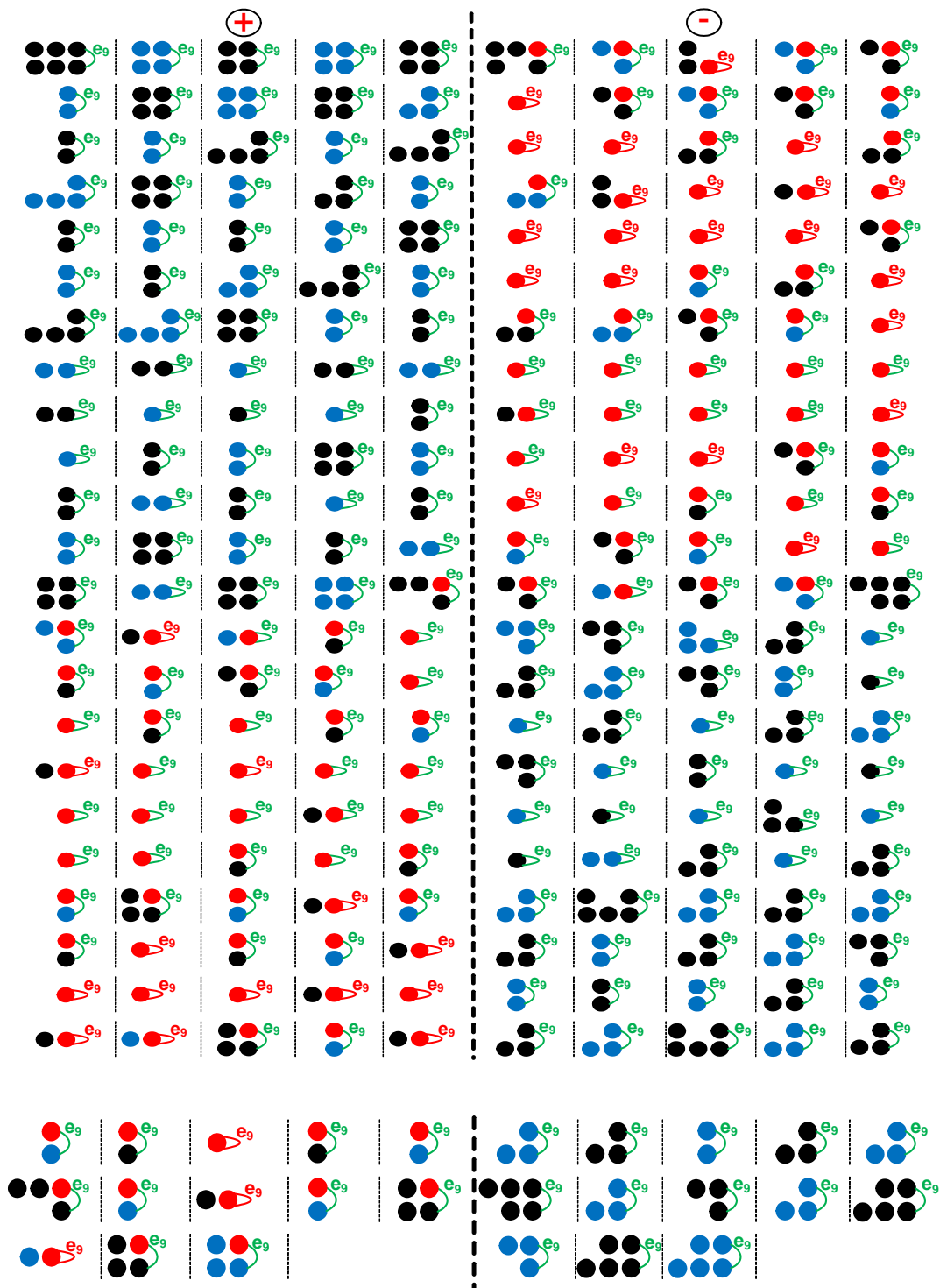


Figura B.7 - Grafos referentes à oitava iteração relativo ao segundo método

A nona e última iteração está representada na figura B.8 e contém quinhentos e doze grafos, do tipo N_n .

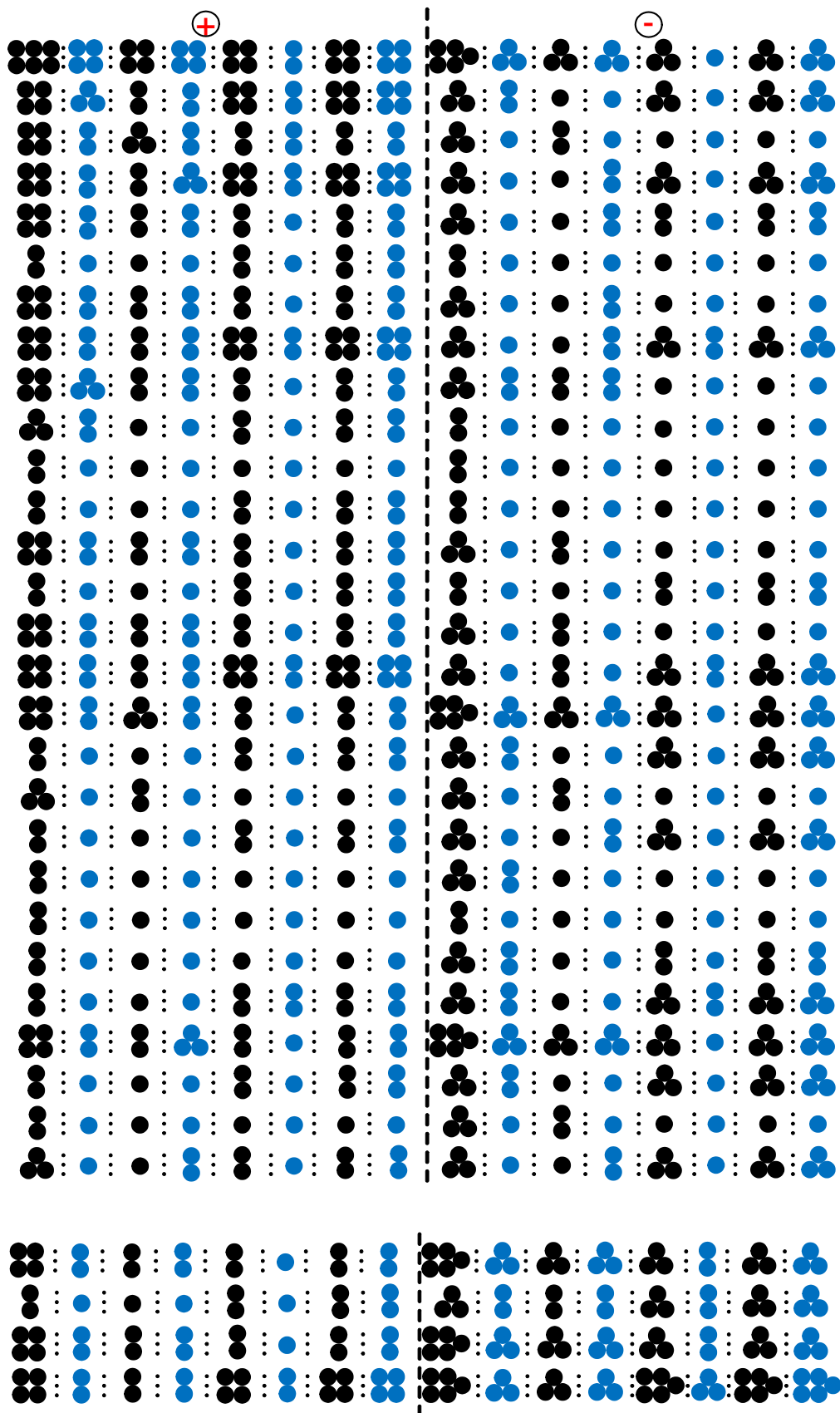


Figura B.8 - Representação da última iteração do segundo método

Após ilustrarmos estes mil e vinte e dois grafos, concluímos as representações gráficas, relativos à resolução do problema descrito no exemplo 74.