



Universidade da Madeira



DEPARTAMENTO DE
Matemática

51
PER ext
+C
T/A

Estudo de funções com o Mathematica

Maria da Graça Gouveia da Costa Pereira

UNIVERSIDADE DA MADEIRA
SERVIÇOS DE DOCUMENTAÇÃO

*Dissertação para a obtenção do grau de
Mestre em Matemática para o Ensino*

*Funchal – Madeira
Novembro de 2001*

Estudo de funções com o
Mathematica

Maria da Graça Gouveia da Costa Pereira

À memória do meu pai

Resumo

O presente trabalho compreende duas partes: Manual do *Mathematica* para o Professor do Ensino Secundário e Estudo de Funções com o *Mathematica*.

A primeira parte foi elaborada conjuntamente com a colega Ana Isabel Xavier Correia e nela tentámos dar a conhecer um pouco o sistema *Mathematica*, a sua génese, os primeiros passos quando trabalhamos com o programa e o procedimento para a instalação deste programa num computador. Nos segundo e terceiro capítulos vimos como utilizar o *Mathematica* como calculadora e ainda como tirar partido do cálculo simbólico que este efectua. No quarto capítulo fizemos uma abordagem ao modo como obter objectos gráficos e às opções que estão disponíveis sobre estes. Por fim, no quinto capítulo, vimos como definir funções neste programa.

Na segunda parte foi feito um estudo das funções abordadas na disciplina de Matemática do actual Sistema de Ensino Secundário Português, utilizando o sistema *Mathematica*. Assim sendo, estudámos as funções afim, quadrática, módulo, polinomial, racional fraccionária, irracional, trigonométricas, exponencial e logarítmica, tendo realizado antes da análise destas três últimas um estudo sobre a derivada de uma função. Sempre que oportuno introduzimos exemplos de vários manuais do Ensino Secundário para os quais achámos que o *Mathematica* poderia auxiliar a sua resolução.

A linguagem utilizada no decurso do trabalho é muito simples, pelo que a intenção inicial de o mesmo se dirigir a Professores de Matemática do Ensino Secundário poderá ser alargada a alunos do ensino secundário.

Palavras chave: Ensino Secundário, Sistema *Mathematica*, Cálculo, Estudo de Funções, Visualização Gráfica e Animação.

Summary

The present project comprises of two parts: *Mathematica* Handbook for High School Teacher's and a Study of functions with the *Mathematica*.

The first part was developed with cooperation of the colleague Ana Isabel Xavier Correia. Together we attempted to explain a bit about the *Mathematica* system, its genesis, the first steps when using the program and the procedures for the installation of this program into a computer. In the second and third section we explain how to use *Mathematica* as a calculator and also how to take advantage of the symbolic calculation that the system effects. In the fourth section we mentioned how to obtain graphic pictures and other options available. Finally in the fifth section we dealt with how to define the functions in this program.

In the second part a study was made about the functions on the subject of Mathematics currently being taught in the Portuguese High School Curriculum using *Mathematica*. Thus being we studied the functions linear, quadratic, module, polynomial, rational, irrational, trigonometrics, exponential and logarithmic, having realised before the analysis of these last three functions a study the derivative of a function.

Whenever considered relevant we introduced examples of several High School Handbooks on which we thought that *Mathematica* could help on its resolution.

The language used during this work is very simple, though which the initial intention of being addressed to High School Mathematic Teacher's can be also extend to High School Student's.

Key words: High School, *Mathematica* System, Calculus, Functions Study, Graphics Visualization and Animation.

Índice

Introdução.....	1
Agradecimentos.....	3

Parte 1 - Manual do *Mathematica* para o Professor do Secundário

1 - Algumas informações sobre o <i>Mathematica</i>	5
1.1 Resenha histórica do <i>Mathematica</i>	5
1.2 Inicializando o programa.....	6
1.3 As várias classes de objectos existentes no <i>Mathematica</i>	7
Apêndice: Instalação do programa <i>Mathematica</i>	8
2 - Cálculo numérico.....	10
2.1 Operações básicas.....	10
2.2 Potenciação e radiciação.....	11
2.3 Utilização de funções/ funções predefinidas.....	11
2.4 Logaritmos e exponenciais.....	13
2.5 Trigonometria.....	14
2.6 Números complexos.....	17
2.7 Probabilidades e combinatória.....	18
2.8 Outras funções úteis existentes no <i>Mathematica</i>	19
2.9 Listas.....	22
2.10 Atribuição de nomes a objectos.....	26
3 - Cálculo simbólico.....	28
3.1 Polinómios.....	29
3.2 Equações.....	32
3.3 Sistemas de equações.....	34
3.4 Nomes de mensagens.....	35
3.5 Variáveis em sistemas de equações.....	36
3.6 Soluções aproximadas.....	36
3.7 Limites.....	37
3.8 Derivadas.....	39
3.9 Soma de alguns termos de uma sucessão.....	40
4 - Gráficos.....	42
4.1 Como construir.....	42
4.1.1 Gráficos a duas dimensões.....	42
4.1.2 Gráficos a três dimensões.....	44
4.1.3 Gráficos de listas.....	45
4.2 Operações sobre objectos gráficos.....	48
4.3 Algumas opções.....	55
4.4 Animação de gráficos.....	64

5 – Funções.....	67
5.1 Definição de funções.....	67
5.1.1 Definição de funções por abstracção funcional.....	67
5.1.2 Definição de funções por atribuição paramétrica.....	69
5.2 Regras de reescrita locais.....	72
5.3 Funções definidas por ramos.....	73
5.4 Composição de funções.....	75

Parte 2 – Estudo de funções com o *Mathematica*

1 – Conhecimentos básicos.....	76
1.1 Note bem.....	76
1.2 Quadro resumo de funções predefinidas.....	77
2 – Estudo de funções.....	78
2.1 Função afim.....	78
2.1.1 Declive de uma recta.....	79
2.1.2 Ordenada na origem.....	82
2.1.3 Zeros de uma função afim.....	83
2.1.4 Tabela de valores.....	83
2.1.5 Alguns exemplos.....	85
2.2 Função quadrática.....	88
2.2.1 O sentido da concavidade.....	89
2.2.2 Vértice de uma parábola.....	90
2.2.3 Zeros de uma função quadrática.....	92
2.2.4 Eixo de simetria.....	93
2.2.5 Em síntese.....	93
2.2.6 Alguns exemplos.....	95
2.3 Função módulo.....	99
2.3.1 Gráficos de $ f(x) $ e $f(x)$	102
2.3.1.1 Gráfico do módulo da variável dependente - $ f(x) $	102
2.3.1.2 Gráfico do módulo da variável independente - $f(x)$	103
2.3.2 Equações com módulos.....	104
2.3.3 Alguns exemplos.....	105
2.4 Função polinomial.....	107
2.4.1 Operações com funções polinomiais.....	109
2.4.1.1 Adição e subtracção de funções polinomiais.....	109
2.4.1.2 Multiplicação e factorização de funções polinomiais.....	109
2.4.1.3 Divisão de funções polinomiais.....	110
2.4.2 Valor numérico de uma função polinomial.....	111
2.4.3 Teorema do resto.....	111
2.4.4 Zeros de uma função polinomial.....	112
2.4.5 Alguns exemplos.....	114

2.5	Função racional.....	123
2.5.1	Exemplo de uma função racional fraccionária.....	124
2.5.2	Funções do tipo $f(x)=\frac{k}{x}$, $k \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$	126
2.5.3	Funções racionais fraccionárias e translações.....	128
2.5.3.1	Funções do tipo $f(x)=\frac{1}{x-c}$, $c \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}\setminus\{c\}$	128
2.5.3.2	Funções do tipo $f(x)=\frac{1}{x} + d$, $d \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$	131
2.5.3.3	Funções do tipo $f(x)=\frac{a}{x-c} + d$, $a, c, d \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}\setminus\{c\}$	133
2.5.4	Zeros de uma função racional fraccionária.....	136
2.5.5	Alguns exemplos.....	136
2.6	Função irracional.....	143
2.6.1	Exemplo de uma função irracional.....	143
2.6.2	Funções irracionais cujo índice do radical é um número par.....	146
2.6.3	Funções irracionais cujo índice do radical é um número ímpar.....	147
2.6.4	Translações de gráficos de funções irracionais.....	149
2.6.5	Equações irracionais.....	150
2.6.6	Alguns exemplos.....	150
3	- Derivada de um função.....	156
3.1	Taxa de variação média e instantânea.....	156
3.2	Derivada de uma função.....	162
3.3	Derivada de algumas funções já conhecidas.....	164
3.4	Alguns exemplos.....	165
4	- Estudo de funções – continuação.....	169
4.1	Funções trigonométricas.....	169
4.1.1	Funções disponíveis no <i>Mathematica</i> relacionadas com as funções trigonométricas.....	172
4.1.2	Alguns exemplos.....	173
4.2	Função exponencial.....	178
4.2.1	Um exemplo concreto de uma função exponencial.....	179
4.2.2	Alguns exemplos.....	180
4.3	Função logarítmica.....	183
4.3.1	Alguns exemplos.....	187
5	- Comentário final.....	190
6	- Referências bibliográficas.....	191
7	- Anexo.....	193

Introdução

O presente trabalho foi elaborado como Dissertação do Mestrado em Matemática para o Ensino, ministrado pela Universidade da Madeira.

O tema proposto pelo orientador, Prof. Doutor José Carmo, compreendia duas partes:

- Primeira parte - elaboração de um Manual do *Mathematica* para o Professor do Ensino Secundário.

- Segunda parte - aplicação do *Mathematica* a algum ou alguns dos conteúdos programáticos do actual programa da disciplina de Matemática do Sistema de Ensino Português.

Este tema veio de encontro às nossas preferências, uma vez que no primeiro ano do Mestrado contactámos com o sistema e achámo-lo muito aliciante e para além disso poderia ser útil aos professores de Matemática para ensinar alguns conteúdos programáticos, mesmo sem recorrer a grandes pormenores da programação que é possível realizar com este programa.

A primeira parte deste trabalho foi elaborada conjuntamente com a colega Ana Isabel Xavier Correia e nela tentámos dar a conhecer um pouco o sistema *Mathematica*, a sua génese, os primeiros passos quando trabalhamos com o programa e o procedimento para a instalação deste programa num computador. Nos segundo e terceiro capítulos vimos como utilizar o *Mathematica* como calculadora e ainda como tirar partido do cálculo simbólico que este efectua. No quarto capítulo fizemos uma abordagem ao modo como obter objectos gráficos e às opções que estão disponíveis sobre estes. Por fim, no quinto capítulo, vimos como definir funções neste programa.

Saliente-se que, nesta primeira parte optámos por deixar as etiquetas *In*(entrada de dados) e *Out*(resultados produzidos pelo *Mathematica*), uma vez que estamos a partir do princípio que o leitor nunca esteve em contacto com este programa e o aparecimento destas etiquetas inicialmente poderá ajudar o leitor a situar-se no trabalho, diferenciando melhor as entradas e saídas do *Mathematica* dos nossos comentários. Com este mesmo intuito escurecemos as entradas e as saídas.

A segunda parte, realizada individualmente, aborda o estudo de funções. Assim sendo, foram estudadas as funções afim, quadrática, módulo, polinomial, racional fraccionária, irracional, trigonométricas, exponencial e logarítmica, tendo realizado antes da análise destas últimas três funções um estudo sobre a derivada de uma função.

Sempre que oportuno foram introduzidos exemplos de vários manuais do ensino secundário. Muitos outros exemplos poderiam ser tratados neste trabalho, mas o mesmo tornar-se-ia maçador e repetitivo. Por vezes tornava-se pertinente alterar ligeiramente alguns enunciados, estes casos foram assinalados os exemplos com '.

De forma complementar e a finalizar será colocada uma listagem das referências bibliográficas que serviram de suporte a este estudo e uma tabela onde se encontram as páginas dos livros de onde foram extraídos os exemplos que apresentados ao longo do trabalho.

O presente trabalho poderá ser uma boa valia para os professores e/ou para os estudantes do ensino secundário.

Poderão as vozes mais críticas das novas tecnologias insurgirem-se contra a aplicação deste sistema na sala de aula, uma vez que os alunos não poderão utilizar esta ferramenta nos Exames Nacionais de 12º ano. A este propósito diga-se que nos Exames Nacionais não é permitido consultar qualquer bibliografia, realizar trabalho de grupo, consultar *Internet* entre outras coisas, mas não é por isso que deixamos de o fazer nas aulas, para além de que há quinze anos atrás não se fazia ideia de que seria permitido utilizar calculadoras nos Exames Nacionais. Será que daqui por dez anos (para nem falar noutros quinze, porque actualmente a velocidade de crescimento das novas tecnologias é muito maior) já não teremos alunos que dentro do estojo trazem um computador?

O facto de precisarmos de um computador e do sistema *Mathematica* também não representa um grande problema, uma vez que actualmente a grande maioria das escolas dispõe de um Laboratório de Matemática onde estão disponíveis computadores e existem preços especiais do sistema *Mathematica* para instituições de ensino. Para além disto, a grande maioria dos nossos alunos já tem acesso a um computador e acrescenta-se que os mesmos muitas vezes trabalham melhor com eles que nós professores.

Agradecimentos

Antes de apresentar à consideração e julgamento o presente trabalho com vista à obtenção do grau de Mestre em Matemática para o Ensino permitam-me que apresente com leal e sincero reconhecimento os meus agradecimentos, ressaltando possíveis omissões, pelas quais endereço um pedido de desculpas.

Ao meu orientador Prof. Doutor José Carmo e ao meu co-orientador Prof. Doutor Miguel Dionísio agradeço pela forma dedicada, atenta e muito encorajadora com que seguiram sempre de perto este trabalho e pelas trocas de impressões que o melhoraram e enriqueceram.

Ao Departamento de Matemática da UMa, em geral, pelas mais diversas formas de apoio, e em particular à Prof. Doutora Sandra Mendonça, ao Dr. Leonel Nóbrega, à Dr^a. Elsa Carvalho, ao Mestre Elias Rodrigues e ao Prof. Doutor Nuno Nunes pela resolução dos inúmeros problemas relacionados com o computador, um muito obrigada.

Agradeço à Secretaria Regional da Educação e à Escola Básica dos 2º e 3º ciclos do Estreito de Câmara de Lobos por terem viabilizado a minha equiparação a bolseiro, sem a qual eu teria de abdicar de algumas coisas na minha vida, para poder realizar este mestrado. Ainda relacionado com a minha equiparação gostaria de agradecer ao Dr. Vasco Júnior por ter tratado da burocracia relacionada com a mesma de uma forma tão rápida.

A todos os colegas do mestrado agradeço a forma que sempre me apoiaram, a todas as nossas conversas e trocas de impressões que permitiram melhorar este trabalho. À Ana Isabel Xavier Correia um agradecimento muito especial por "me aturar" durante este ano.

As minhas amigas Fátima Ribeiro e Rosalina Moniz um muito obrigado pelo encorajamento, atenção e compreensão demonstrados nas minhas "ausências".

A minha família, de um modo muito especial à minha mãe e à minha irmã um grande obrigada por todo o apoio prestado, não só a mim mas também à Diana, pela atenção e confiança que desde sempre demonstraram na minha pessoa.

E, finalmente, um agradecimento muito, muito especial ao meu marido e à nossa filha Diana. Este trabalho é também deles, uma vez que sem o seu apoio eu nunca o teria conseguido realizar.

Obrigada por todo o apoio, estímulo, paciência, sacrifício e compreensão manifestados.

Parte 1

Manual do *Mathematica*
para o Professor do
Ensino Secundário

1 - Algumas informações sobre o *Mathematica*

Começaremos por falar um pouco sobre a história deste programa, de como instalá-lo e de alguns procedimentos básicos a ter em linha de conta, quando trabalhamos com ele.

1.1 Resenha histórica do *Mathematica*

O programa *Mathematica* foi criado por Stephen Wolfram, nascido em Londres no ano de 1959.

Wolfram começou a desenvolver o programa em 1986 e a primeira versão - *Mathematica 1.0* - surgiu a 23 de Junho de 1988, conjuntamente com o manual "*Mathematica - a System for doing Mathematica by Computer*".

Por esta altura o jornal New York Times escreveu "*The importance of the program cannot be overlooked*" e o Business Week posicionou o *Mathematica* entre os dez melhores produtos do ano.

A versão 2.0 do *Mathematica* surgiu em 1991, em 1996 Wolfram apresentou a versão 3.0 e actualmente já existe a versão 4.1, na qual desenvolveremos o nosso trabalho.

O *Mathematica* foi inicialmente usado em Física, Engenharia e Matemática, mas rapidamente se alargou a outras áreas como a Biologia, Modelação, Finanças, Óptica, Advocacia, Sistemas Mecânicos, Engenharia Eléctrica, Astronomia, entre outras, existindo mesmo artistas, compositores, entre outros, que o utilizam. Saliente-se ainda, a título de curiosidade, que o *Mathematica* é utilizado pelas cinquenta companhias mais ricas do mundo e nos quinze maiores departamentos governamentais dos Estados Unidos.

Obviamente, este programa é usado na Educação, existindo centenas de cursos, a nível universitário, baseados neste. Na nossa universidade (UMa), por exemplo, o *Mathematica* é utilizado para introduzir os estudantes na problemática da programação, atendendo (entre outras coisas) à facilidade com que suporta vários paradigmas de programação.

O número de utilizadores deste programa estimava-se em um milhão em 1996, sendo que estes estão espalhados por todo o mundo e é usado por pessoas de todas as idades.

Actualmente existem cerca de quatrocentos livros relacionados com este programa.

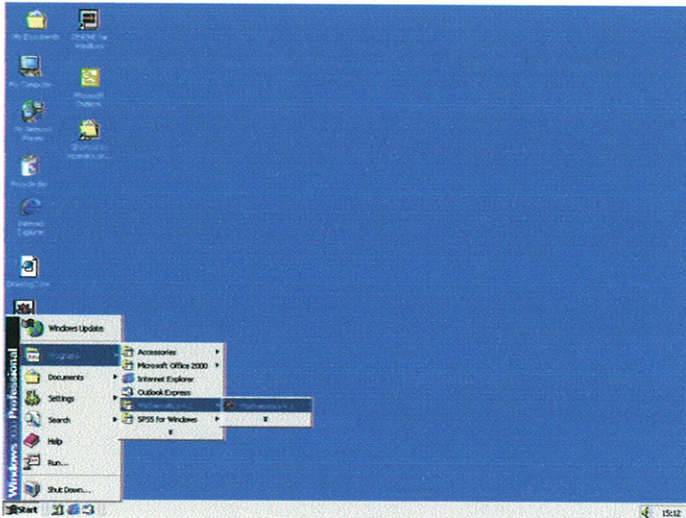
O *Mathematica* faz parte de um grupo de sistemas semelhantes entre si, dos quais se destacam MATLAB, DERIVE e Mathcad.

1.2 Inicializando o Mathematica

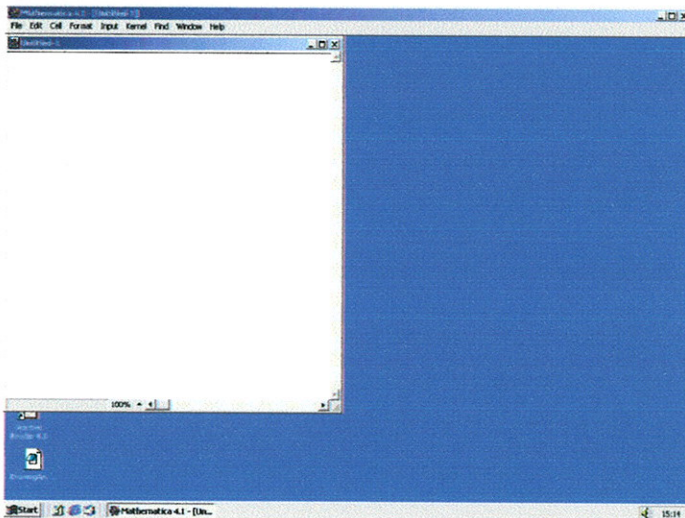
O sistema *Mathematica* tem duas componentes: o *Notebook* e o *Kernel*. O *Notebook* é semelhante a um editor de texto e permite, entre outras facilidades escrever e editar texto e expressões, visualizar e gravar resultados.

Quando invocamos o *Mathematica*, apenas o *Notebook* fica activo. Para avaliar expressões, é preciso que o *Kernel* também o esteja, pois é este que efectivamente processa e avalia as expressões. No entanto, o *Kernel* é lançado automaticamente pelo sistema apenas no instante da primeira avaliação, ficando activo permanentemente (apesar de podermos desactivá-lo). O *Kernel* comunica com o *Notebook* através de um processo denominado *MathLink*.

Uma vez instalado o *Mathematica* (ver no fim desta secção), estamos em condições de começar a trabalhar no mesmo. Cliquem Iniciar (*Start*), seleccionem Programas (*Programs*) e dentro destes o *Mathematica 4.1*.



Aparecer-vos-á no ecrã o seguinte:



Experimentem escrever, por exemplo, $3 + 5$. Para que o programa realize este cálculo terá de carregar **Shift** e **Return** em simultâneo ou **Enter** do teclado numérico.

```
In[1]:= 3 + 5
```

```
Out[1]= 8
```

```
]]
```

A expressão que introduzimos aparece a Negrito (*Bold*), legendada de *In[1]* e o resultado da avaliação da expressão aparece a Claro (*Plain*) e legendado de *Out[1]* - tudo isto acontece automaticamente ao mandarmos avaliar a expressão $3+5$.

Reparamos ainda, que no lado direito do ecrã aparecem vários parênteses rectos - o maior representa uma célula constituída por outras duas que representam a entrada e a saída. Saliente-se que a primeira avaliação demora alguns segundos a realizar-se, porque é por esta ocasião que o Kernel é activado.

1.3 As várias classes de objectos no Mathematica

Podemos agrupar os vários tipos de dados existentes no *Mathematica* de acordo com a sua utilização e estrutura do seguinte modo:

- tipos numéricos;
- tipo *Symbol*;
- tipo *String*;
- tipo lista (*List*).

Em relação aos tipos numéricos estes podem ser: inteiros (*Integer*), racionais (*Rational*), reais (*Real*) e complexos (*Complex*). Por defeito, para valores numéricos, este programa trabalha no conjunto dos números complexos.

O tipo *Symbol* consiste em nomes (sequências de letras e números começando por uma letra), alguns dos quais representam constantes e funções predefinidas (palavras inglesas e começadas por um carácter maiúsculo), podendo os outros nomes serem usados como variáveis.

Como exemplos de constantes podemos falar no π , número de Neper, número imaginário, infinito, entre outras, que neste programa representam-se, respectivamente por Pi ou π , E ou e , I ou i , Infinity ou ∞ .

As variáveis e as funções predefinidas serão abordadas mais à frente ao longo deste manual.

Os elementos do tipo *String* são sequências de caracteres entre aspas. Estes elementos podem ser vistos como mensagens.

O tipo lista é uma das construções mais utilizadas em programação. Em *Mathematica*, para representar informação "complexa" utilizam-se, em geral, as listas. As listas são muito fáceis de tratar e são muito ricas, pois estão disponíveis sobre elas muitas funções predefinidas. Estudaremos em mais pormenor as listas na secção 2.9.

Apêndice: Instalação do programa Mathematica

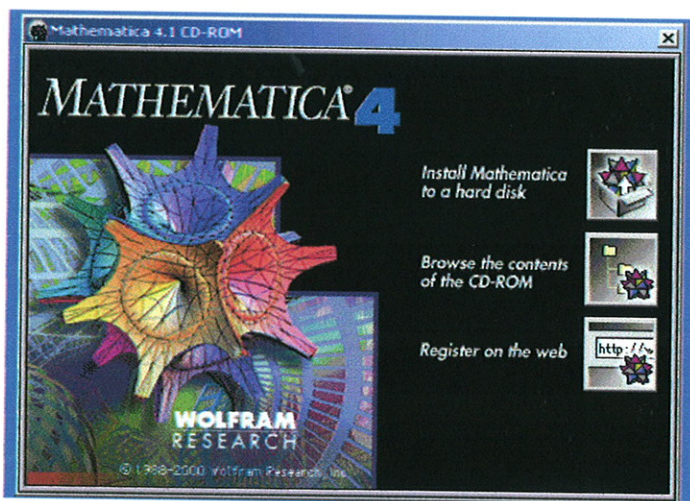
A página oficial do *Mathematica* é <http://www.wolfram.com>.

Para que o *Mathematica* corra confortavelmente precisamos de cerca de 16 MB de RAM e cerca de 123 MB de espaço no disco rígido.

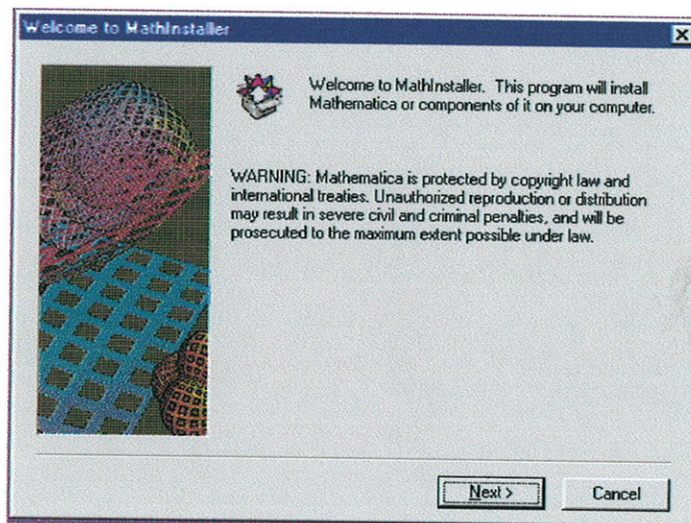
Este programa pode ser instalado nas plataformas: Window, Macintosh, DOS, UNIX, entre outras.

Para instalar o programa no vosso computador sigam os seguintes passos:

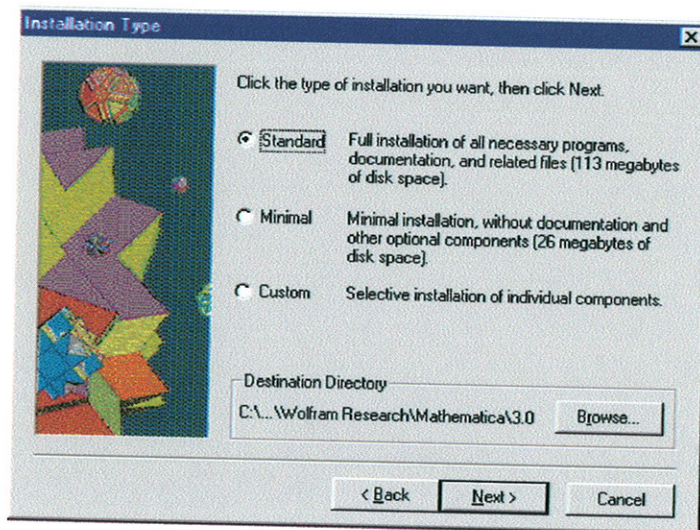
1 - Introduzam o CD e no vosso ecrã aparecerá :



2 - Cliquem no ícon "*Install Mathematica to a hard disk*" que fará aparecer no ecrã:



3 - Aqui é necessário introduzir a password (deverão contactar o serviço de clientes da Wolfram Research, utilizando o endereço que se encontra na página anterior). Depois de preencher cliquem Next e aparecerá:



4 - Seleccionem a forma pela qual querem instalar o programa.

Standard - instala o programa completo.

Minimal - instala apenas as pastas necessárias para correr o *Mathematica*.

Custom - o utilizador pode escolher o que pretende instalar.

Em geral, a opção mais utilizada é a opção *Standard*.

Depois de fazerem a vossa opção cliquem *Next* para continuar.

5 - Aparecerá no vosso ecrã um resumo das opções que fizeram. Se estiverem correctas, cliquem Next, caso contrário Back e coloquem-nas correctamente.

O programa de instalação dir-vos-á quando a mesma estiver concluída.

Para verificar se está tudo bem, sugerimos que experimentem executar 3+5.

2 - Cálculo numérico

O *Mathematica* pode ser utilizado como uma calculadora, visto que dispõe de uma enorme quantidade de constantes, operações e funções predefinidas.

2.1 Operações básicas

Depois de abrir o *Mathematica* e dar uma entrada (*Input*) qualquer, o programa avalia a entrada e dá o resultado da avaliação (*Output*).

Vejamos um exemplo:

Após escrever **1** **+** **2** **Enter** (do teclado numérico) ou **Shift** em simultâneo com **Return** no ecrã aparecerá:

```
In[1]:= 1 + 2
```

```
Out[1]= 3
```

Em relação às restantes operações matemáticas elementares (subtração, multiplicação e divisão) o procedimento é o mesmo, notando que, a multiplicação pode ser denotada pelo ***** ou, simplesmente, por um espaço.

Obviamente, este programa reconhece as regras de precedência das operações e quando necessitamos de as ultrapassar usamos os parênteses curvos.

Exemplificando:

```
In[2]:= (3 + 4) * 2
```

```
Out[2]= 14
```

2.2 Potenciação e radiciação

Para calcular o valor de uma potência o procedimento é semelhante ao utilizado nas calculadoras científicas - usando o símbolo $^$.

```
In[3]:= 2^3
```

```
Out[3]= 8
```

A mesma operação permite-nos calcular raízes.

```
In[4]:= 9^(1/2)
```

```
Out[4]= 3
```

2.3 Utilização de funções / funções predefinidas

O *Mathematica* possui um vasto número de funções predefinidas. Para utilizá-las temos de ter em conta dois aspectos muito importantes:

1º - Os argumentos das funções (predefinidas ou não) são colocados dentro de parênteses rectos e separados por vírgulas (no caso da função ter mais de um argumento). Os parênteses curvos são usados para agrupar termos. A utilização destes dois tipos de parênteses traz vantagens. Por exemplo, ao escrevermos $f(1+x)$ ficamos com dúvida se nos referimos a $f \times (1+x)$ ou à imagem de $1+x$ por meio de f . Neste programa tal não acontece.

2º - As funções predefinidas são escritas com o primeiro carácter maiúsculo e os seguintes minúsculos, exceptuando os casos em que a função predefinida é constituída por duas palavras juntas, neste caso a primeira letra de cada palavra é maiúscula.

Um exemplo de uma função predefinida é a função **Sqrt**, que permite calcular raízes quadradas.

```
In[5]:= Sqrt[16]
```

```
Out[5]= 4
```

```
In[6]:= Sqrt[17]
```

```
Out[6]=  $\sqrt{17}$ 
```

Aqui, deparamo-nos com o problema que é o facto do *Mathematica*, por defeito, trabalhar com valores exactos. Sempre que precisamos de um valor aproximado de um número teremos de recorrer à função *N*, que por ser uma função temos de a colocar, seguida do(s) argumento(s), entre parênteses rectos. No caso de serem dois ou mais argumentos devem figurar separados por vírgulas.

```
In[7]:= N[Sqrt[17]]
```

```
Out[7]= 4.12311
```

Note-se que a saída foi um número com seis algarismos significativos. Esta é a precisão com que o programa trabalha por defeito.

No caso de desejarmos outra precisão utilizamos a função predefinida - *SetPrecision* - colocando como segundo argumento o número de algarismos significativos com que pretendemos o resultado.

```
In[8]:= SetPrecision[Sqrt[17], 50]
```

```
Out[8]= 4.1231056256176605498214098559740770251471992253736
```


```
In[9]:= SetPrecision[Sqrt[17], 3]
```

```
Out[9]= 4.12
```

Na secção 2.5 veremos outro modo de calcular potências e raízes de qualquer ordem.

2.4 Logaritmos e exponenciais

Após a pequeníssima abordagem que fizemos deste programa já estão à espera que o mesmo calcule logaritmos. A vossa dúvida certamente será: Como?

Podemos obter informação sobre qualquer função disponível recorrendo a  seguido da função que queremos conhecer. Se pretendermos uma informação mais detalhada podemos usar dois pontos de interrogação. Existe ainda o menu *Help*, que poderá aceder directamente se carregar em *More*.

```
In[10]:= ? Log
```

```
Log[z] gives the natural logarithm of z (logarithm to
base e). Log[b, z] gives the logarithm to base b. More...
```

```
In[11]:= Log[10, 10]
```

```
Out[11]= 1
```

Com este programa podemos levar os nossos alunos a conjecturar propriedades.

No exemplo anterior, um aluno mais atento e/ou mais desconfiado talvez pusesse a questão: Será que logaritmo de um número na base desse número é sempre um?

Esse mesmo aluno poderia fazer muito rapidamente mais alguns exemplos que apoiariam a sua conjectura. Mais do que isso, poderia mesmo calcular $\log_a a$, dado que, como veremos mais adiante, o *Mathematica* executa cálculos simbólicos.

```
In[12]:= Log[a, a]
```

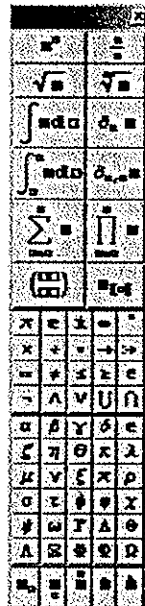
```
Out[12]= 1
```

Para calcular o valor de uma exponencial de base e temos de ter cuidado, porque o número de Neper é representado por **E** maiúsculo (ou então por um carácter especial - e - que veremos na secção seguinte onde encontrá-lo).

```
In[13]:= E
```

```
Out[13]= e
```

Ao proceder de acordo com esta segunda opção, no lado direito do ecrã aparecerá a caixa seguinte com muitas outras entradas possíveis.



Obviamente, reparámos que usando a caixa anterior podemos facilmente calcular raízes e potências de qualquer ordem.

Se quisermos trabalhar em graus podemos usar o símbolo $^{\circ}$ (que se encontra na caixa que vimos acima) ou então escrevemos a palavra *Degree*.

```
In[17]:= Tan[45 °]
```

```
Out[17]= 1
```

```
In[18]:= Tan[60 Degree]
```

```
Out[18]=  $\sqrt{3}$ 
```

Com este programa podemos obter os valores das razões trigonométricas para qualquer ângulo.

```
In[17]:= Tan[45 °]
```

```
Out[17]= 1
```

```
In[18]:= Tan[60 Degree]
```

```
Out[18]=  $\sqrt{3}$ 
```

Com este programa podemos obter os valores das razões trigonométricas para qualquer ângulo.

```
In[19]:= Sin[Pi / 12]
```

```
Out[19]=  $\frac{-1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ 
```

```
In[20]:= Cos[7 Pi / 5]
```

```
Out[20]=  $\frac{1}{4} (1 - \sqrt{5})$ 
```

ArcSin, ArcCos, ArcTan e ArcCot são as funções inversas de Sin, Cos, Tan e Cot.

```
In[21]:= Cot[ $\pi$  / 2]
```

```
Out[21]= 0
```

```
In[22]:= ArcCot[0]
```

```
Out[22]=  $\frac{\pi}{2}$ 
```

2.6 Números complexos

Nesta secção abordaremos os seguintes conceitos: parte real, parte imaginária, conjugado, valor absoluto e argumento de um número complexo, e ainda ilustraremos como operar com estes na sua forma algébrica.

Notamos que o número $i = \sqrt{-1}$ neste programa é representado por **I** (ou *i* - obtido na opção *BasicInput* do submenu *Palettes* do menu *File*).

- * $x + yI$ representa o complexo $x + yi$, que denotaremos no que se segue por z .
- * $\text{Re}[z]$ representa a parte real de z .
- * $\text{Im}[z]$ representa a parte imaginária de z .
- * $\text{Conjugate}[z]$ dá o valor do conjugado do número z .
- * $\text{Abs}[z]$ dá o valor absoluto do número z .
- * $\text{Arg}[z]$ dá o argumento do complexo z .

Exemplos:

```
In[23]:= Re[2 + 3 I]
```

```
Out[23]= 2
```

```
In[24]:= Im[4/3 +  $\sqrt{5}$  I]
```

```
Out[24]=  $\sqrt{5}$ 
```

```
In[25]:= Conjugate[2 + 3 I]
```

```
Out[25]= 2 - 3 i
```

In[26]:= **Abs[5 + 6 / 7 I]**

Out[26]= $\frac{\sqrt{1261}}{7}$

In[27]:= **Arg[1 - I]**

Out[27]= $-\frac{\pi}{4}$

As operações com números complexos (na forma algébrica) fazem-se de acordo com o descrito nas operações básicas deste capítulo. Exemplificando:

In[28]:= **(2 + 3 I) * (5 + 2 I) + 3 / (2 + I) ^ 5 + I ^ 532 - I ^ 327**

Out[28]= $\frac{15511}{3125} + \frac{62377 i}{3125}$

2.7 Probabilidades e combinatória

Abordaremos apenas os conceitos de factorial e binomial, apesar deste programa disponibilizar muitas mais funções relacionadas com este tema nos pacotes de estatística.

Podemos calcular o factorial de um número usando a função predefinida **Factorial** ou o símbolo $!$.

In[29]:= **Factorial[12]**

Out[29]= 479001600

```
In[30]:= 259!
```

```
Out[30]= 1473152254167757398122114609847881490492137212426575753919731083646404413
513615205186648399336703759197605147445882311578205130517019086176961440
581284557548520693453999320326525181778007768018792627711376739736039356
793369279127920212291008471043259669188123887284738201554495507147543141
041667216818160283981964348016425770100550102108994310144938119260829577
178241238771884818602234069283212362966906462806113121386596690574333619
888149366932137574400000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000
```

O número anterior evidencia bem o poder do *Mathematica*.

Se pretendermos calcular de quantas maneiras diferentes podemos escolher n objectos de um grupo de m objectos, isto é, calcular $C(m,n)$, usamos a função **Binomial**.

```
In[31]:= Binomial[6, 2]
```

```
Out[31]= 15
```

2.8 Outras funções úteis existentes no *Mathematica*

Aqui mostraremos algumas funções (das muitas existentes neste programa) que poderão ser úteis a qualquer professor de Matemática.

* **Abs[x]** dá o valor absoluto do número x .

```
In[32]:= Abs[-2]
```

```
Out[32]= 2
```

* **Round[x]** dá o arredondamento do número x para a unidade mais próxima.

```
In[33]:= Round[2.43]
```

```
Out[33]= 2
```

```
In[34]:= Round[-10.7]
```

```
Out[34]= -11
```

* **Divisors[x]** dá a lista dos inteiros que dividem x .

```
In[35]:= Divisors[180]
```

```
Out[35]= {1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 30, 36, 45, 60, 90, 180}
```

Aqui a saída foi uma lista. Na secção seguinte falaremos em pormenor das listas.

* **FactorInteger[x]** dá a lista dos factores primos de x com os respectivos expoentes.

```
In[36]:= FactorInteger[120]
```

```
Out[36]= {{2, 3}, {3, 1}, {5, 1}}
```

* **LCM** (Least Common Multiple) e **GCD** (Greatest Common Divisor) dão o mínimo múltiplo comum e o máximo divisor comum entre dois ou mais números, respectivamente.

```
In[37]:= LCM[10, 12, 20]
```

```
Out[37]= 60
```

```
In[38]:= GCD[49, 50]
```

```
Out[38]= 1
```

* **Rationalize** é uma função que permite escrever um número em fracção. Por definição, um número irracional não pode ser escrito sob a forma de fracção de inteiros. Contudo, se desejarmos uma aproximação deste número na forma de fracção, colocamos como segundo argumento o valor do erro com que desejamos tal aproximação.

```
In[39]:= Rationalize[2.04]
```

```
Out[39]=  $\frac{51}{25}$ 
```

```
In[40]:= Rationalize[ $\sqrt{2}$ , 0.0001]
```

```
Out[40]=  $\frac{99}{70}$ 
```

* A função **PrimeQ** permite ver se um número é primo ou não. Esta função é uma das muitas funções booleanas que existem no *Mathematica* que, quando aplicadas a um argumento, dão True ou False como resultado.

```
In[41]:= PrimeQ[101]
```

```
Out[41]= True
```

```
In[42]:= PrimeQ[603]
```

```
Out[42]= False
```

2.9 Listas

Uma das estruturas fundamentais existente no *Mathematica* é a lista. Os elementos de uma lista podem ser números, símbolos, sequência de caracteres (*strings*), objectos gráficos, funções, listas ou eventualmente uma combinação destes.

Na secção anterior já vimos alguns exemplos de funções cujo *Output* é dado da forma de lista ou de lista de listas.

As listas no *Mathematica* são representadas por sequências de elementos separados por vírgulas dentro de chavetas.

```
In[43]:= {1, a, "Isto é lindo!", Binomial[a + 2, a]}
```

```
Out[43]= {1, a, Isto é lindo!,  $\frac{1}{2} (1 + a) (2 + a)$ }
```

Uma das aplicações com mais interesse, para nós, das listas neste programa é a capacidade das mesmas construir tabelas de valores.

Para tal, podemos recorrer, por exemplo, à função **Table**. Vejamos um exemplo de como construir uma lista de quadrados dos dez primeiros números:

```
In[44]:= Table[k^2, {k, 1, 10}]
```

```
Out[44]= {1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100}
```

* O primeiro argumento é a expressão que gera cada elemento da lista.

* O segundo argumento é o conjunto dos valores que a variável deve tomar, neste caso k percorre os números de um a dez, de um em um.

Podemos alterar o "salto" acrescentando um quarto elemento ao segundo argumento.

```
In[45]:= Table[k^2, {k, 1, 10, 1/2}]
```

```
Out[45]= {1,  $\frac{9}{4}$ , 4,  $\frac{25}{4}$ , 9,  $\frac{49}{4}$ , 16,  $\frac{81}{4}$ , 25,
 $\frac{121}{4}$ , 36,  $\frac{169}{4}$ , 49,  $\frac{225}{4}$ , 64,  $\frac{289}{4}$ , 81,  $\frac{361}{4}$ , 100}
```

Neste exemplo, o incremento é $\frac{1}{2}$, isto significa que, o k vai de 1 até 10, de $\frac{1}{2}$ em $\frac{1}{2}$. O primeiro elemento é 1^2 , o segundo elemento é $(1+\frac{1}{2})^2$, e assim sucessivamente.

Também é possível construir uma lista de listas, usando a função Table.

```
In[46]:= Table[i + j, {i, 1, 10}, {j, 10, 20}]
```

```
Out[46]= {{11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21},
{12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22},
{13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23},
{14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24},
{15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25},
{16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26},
{17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27},
{18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28},
{19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29},
{20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30}}
```

Por curiosidade, uma matriz pode ser representada por uma lista de listas.

Se quisermos podemos apresentar esta lista de listas na forma de uma tabela usando a função **TableForm**, notando que a primeira linha da tabela corresponde à primeira lista e assim sucessivamente.

```
In[47]:= TableForm[%]
```

```
Out[47]//TableForm=
```

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Podemos construir o triângulo de Pascal usando estas funções.

```
In[48]:= TableForm[Table[Binomial[n, k], {n, 0, 8}, {k, 0, n}]]
```

```
Out[48]//TableForm=
```

1									
1	1								
1	2	1							
1	3	3	1						
1	4	6	4	1					
1	5	10	10	5	1				
1	6	15	20	15	6	1			
1	7	21	35	35	21	7	1		
1	8	28	56	70	56	28	8	1	

Podemos ainda construir tabelas usando as funções **Array** e **Range**.

`Array[f,n]` gera uma lista de comprimento n , com os elementos $f[i]$ (onde i varia de um até n).

```
In[49]:= Array[f, 3]
```

```
Out[49]= {f[1], f[2], f[3]}
```

```
In[50]:= Array[Sqrt, 7]
```

```
Out[50]= {1,  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$ , 2,  $\sqrt{5}$ ,  $\sqrt{6}$ ,  $\sqrt{7}$ }
```

A função Range permite gerar mais facilmente algumas listas:

- * Range[n] gera a lista {1,2,.....,n}.
- * Range[m,n] gera a lista {m, m+1, ..., n-1, n}.
- * Range[m,n,s] gera a lista {m, m+s,m+2s,}.

```
In[51]:= Range[12]
```

```
Out[51]= {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}
```

```
In[52]:= Range[5, 12]
```

```
Out[52]= {5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}
```

```
In[53]:= Range[5, 12, 0.9]
```

```
Out[53]= {5, 5.9, 6.8, 7.7, 8.6, 9.5, 10.4, 11.3}
```

O *Mathematica* disponibiliza algumas funções que permitem extrair elementos de uma lista - *Part, First, Last, Extract, Drop, Take, Rest, Select, Cases*, entre outras, bem como algumas funções que permitem operar sobre listas - *Append, Prepend, Insert, Delete, DeleteCases, ReplacePart, Join, Union, Intersection, Complement, Sort, Reverse, RotateLeft, RotateRight*, entre outras.

Se o leitor quiser saber mais detalhes sobre estas funções poderá consultar a referência "Introdução à programação em *Mathematica*" de José Carmo, Amílcar Sernadas e Cristina Sernadas, Miguel Dionísio e Carlos Caleiro, nas páginas 60 a 67.

2.10 Atribuição de nomes a objectos

Por vezes, quando estamos a resolver um exercício longo é conveniente guardar resultados parciais. Para tal, podemos atribuir aos resultados parciais nomes (ou de outra forma, guardar tais resultados em variáveis).

Imagine-se que num dado problema temos de trabalhar várias vezes com o número $(-\log_2 3)/5$, então seria oportuno atribuir um nome a este número. Vejamos então como fazê-lo:

```
In[54]:= k = (-Log[2, 3]) / 5
```

```
Out[54]=  $-\frac{\text{Log}[3]}{5 \text{Log}[2]}$ 
```

O *Mathematica* escreve no *Output* o valor do último cálculo efectuado. Se não quisermos que ele apareça colocamos um ponto e vírgula (;) a seguir à expressão.

```
In[55]:= k = (-Log[2, 3]) / 5;
```

Se precisarmos de operar com o número anterior basta invocar *k*.

```
In[56]:= ? k
```

```
Global`k
```

```
k =  $-\frac{\text{Log}[3]}{5 \text{Log}[2]}$ 
```

Se precisarmos, por exemplo, do quadrado do número basta fazer:

```
In[57]:= k^2
```

```
Out[57]=  $\frac{\text{Log}[3]^2}{25 \text{Log}[2]^2}$ 
```

Saliente-se que a partir daqui k designará permanentemente aquele valor, a menos que comece uma nova sessão no *Mathematica* ou que remova o valor do nome k , usando a função **Clear** aplicada a k (ou que passe a guardar outro valor em k , através de uma nova atribuição).

Esquecer-se das definições que fizemos anteriormente é um erro frequente quando trabalhamos com este programa, portanto deverão apagar as definições assim que terminem o exercício para o qual as criaram.

As variáveis que definimos podem ter qualquer nome - podem ser constituídas por uma letra ou por um conjunto de letras ou ainda por letras e números, mas atenção que o primeiro carácter da variável tem de ser sempre uma letra. Por exemplo, $a2$ representa uma variável, mas $2a$ representa o produto de 2 por a .

Como sabemos, as funções predefinidas neste programa começam sempre por uma letra maiúscula, portanto para evitar conflitos deverão iniciar as vossas variáveis com letra minúscula.

Veremos ao longo deste trabalho que também se podem atribuir nomes a listas, gráficos, funções, etc..

3 - Cálculo simbólico

O *Mathematica* executa cálculos simbólicos tão bem como realiza cálculos numéricos.

In[58]:= $4x - 7x/5 + 3x$

Out[58]= $\frac{28x}{5}$

Nota sobre convenções:

Salientamos que apesar de xy , por convenção designar produto de x por y , este programa não reconhece xy como tal.

xy representa um nome como qualquer sequência de letras e números, que comece por uma letra.

Se precisamos de referir-nos ao produto de x por y teremos de escrever $x*y$ ou $x y$ (x espaço y).

In[59]:= $3xy + 4x*y$

Out[59]= $7xy$

In[60]:= $3xy + 4x*y$

Out[60]= $3xy + 4xy$

3.1 Polinómios

O *Mathematica* simplifica e ordena automaticamente expressões algébricas.

```
In[61]:= x^3 + 5 x^2 - 7 + 6 x^3 + 4
```

```
Out[61]= -3 + 5 x^2 + 7 x^3
```

Este programa permite operar com polinómios.

```
In[62]:= (x^3 + 2 x - 5) + (x^2 - 4 x + 4)
```

```
Out[62]= -1 - 2 x + x^2 + x^3
```

```
In[63]:= (x^3 + 2 x - 5) - (x^2 - 4 x + 4)
```

```
Out[63]= -9 + 6 x - x^2 + x^3
```

```
In[64]:= (x^3 + 2 x - 5) * (x^2 - 4 x + 4)
```

```
Out[64]= (4 - 4 x + x^2) (-5 + 2 x + x^3)
```

Neste último exemplo, o programa não "efectuou" a multiplicação dos polinómios porque o mesmo apresenta os resultados da forma mais simples possível. Para que se realize a multiplicação teremos de recorrer à função **Expand**. O mesmo acontece com a potenciação de polinómios.

```
In[65]:= Expand[%]
```

```
Out[65]= -20 + 28 x - 13 x^2 + 6 x^3 - 4 x^4 + x^5
```

In[66]:- $(5x^2 + (5/7)x - 9)^4$

Out[66]= $\left(-9 + \frac{5x}{7} + 5x^2\right)^4$

In[67]:- **Expand[%]**

Out[67]= $6561 - \frac{14580x}{7} - \frac{702270x^2}{49} + \frac{1186200x^3}{343} +$
 $\frac{28511275x^4}{2401} - \frac{659000x^5}{343} - \frac{216750x^6}{49} + \frac{2500x^7}{7} + 625x^8$

A função **Factor** permite factorizar polinómios.

In[68]:- **Factor[-15x + 5x^2 + 7x^3 + x^4 + 2x^5]**

Out[68]= $(-1 + x)x(3 + 2x)(5 + x^2)$

O *Mathematica* dispõe das funções **PolynomialQuotient** e **PolynomialRemainder** que nos dão, respectivamente, o quociente e o resto da divisão entre dois polinómios. Estas funções são invocadas com três parâmetros - **PolynomialQuotient**[p,q,x] ou **PolynomialRemainder**[p,q,x] onde *p* e *q* são, respectivamente, os polinómios dividendo e divisor e *x* é a variável em ordem à qual pretendemos a divisão.

In[69]:- **PolynomialQuotient**[x^3 + 1, x - 1, x]

Out[69]= $1 + x + x^2$

In[70]:- **PolynomialRemainder**[x^3 + 1, x - 1, x]

Out[70]= 2

Este resultado significa que $(x - 1)(x^2 + x + 1) + 2 = x^3 + 1$, que pode ser verificado recorrendo à função **Expand**.

In[71]:= **Expand**[(1+x+x^2)(x-1)+2]

Out[71]= 1+x³

Para simplificarmos expressões em que o dividendo e/ou o divisor são polinómios teremos de usar a função **Simplify**.

Existem ainda duas funções que nesta subsecção poderão ser úteis:

- **Apart** - separa as expressões em termos com denominadores simples.
- **Together** - põe todos os termos com o mesmo denominador.

In[72]:= (x-1)*(x^3+4)/((2x+7)*(x^2-2x+1))

Out[72]=
$$\frac{(-1+x)(4+x^3)}{(7+2x)(1-2x+x^2)}$$

In[73]:= **Simplify**[#]

Out[73]=
$$\frac{4+x^3}{-7+5x+2x^2}$$

In[74]:= **Apart**[#]

Out[74]=
$$-\frac{5}{4} + \frac{5}{9(-1+x)} + \frac{x}{2} + \frac{311}{36(7+2x)}$$

In[75]:= **Together**[#]

Out[75]=
$$\frac{4+x^3}{(-1+x)(7+2x)}$$

3.2 Equações

A resolução de equações obtém-se recorrendo à função **Solve**, notando que:

* o sinal de igualdade no *Mathematica* é `==` (por exemplo, $x^2-1==0$ representa uma equação neste programa);

* os argumentos desta função são dois:

1º a equação que pretendemos resolver;

2º a variável em ordem à qual queremos resolver a equação.

* o resultado é uma lista de listas, cujos elementos representam as soluções como se ilustra de seguida.

```
In[76]:= Solve[x^3 - 5 x^2 + 6 x == 0, x]
```

```
Out[76]= {{x -> 0}, {x -> 2}, {x -> 3}}
```

```
In[77]:= Solve[x^2 - 2 x + 3 == 0, x]
```

```
Out[77]= {{x -> 1 - i Sqrt[2]}, {x -> 1 + i Sqrt[2]}}
```

```
In[78]:= Solve[Log[x] == 1, x]
```

```
Out[78]= {{x -> e}}
```

Como já devem ter reparado o *Mathematica* trabalha no conjunto dos números complexos - no conjunto dos números reais esta penúltima equação é impossível.

O programa realiza cálculos simbólicos e se introduzirmos uma equação genérica de 2º grau, teremos como resposta a fórmula resolvente. Por curiosidade, veremos também a fórmula resolvente para uma equação de 3º grau. O leitor mais interessado poderá ver a fórmula resolvente para uma equação de 4º grau.

In[79]:= `Solve[a x^2 + b x + c == 0, x]`

Out[79]= $\left\{ \left\{ x \rightarrow \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right\}, \left\{ x \rightarrow \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right\} \right\}$

In[80]:= `Solve[a x^3 + b x^2 + c x + d == 0, x]`

Out[80]= $\left\{ \left\{ x \rightarrow -\frac{b}{3a} - \frac{2^{1/3} (-b^2 + 3ac)}{3a \left(-2b^3 + 9abc - 27a^2d + \sqrt{4(-b^2 + 3ac)^3 + (-2b^3 + 9abc - 27a^2d)^2} \right)^{1/3} + \frac{(-2b^3 + 9abc - 27a^2d + \sqrt{4(-b^2 + 3ac)^3 + (-2b^3 + 9abc - 27a^2d)^2})^{1/3}}{3 \cdot 2^{1/3} a} \right\}, \left\{ x \rightarrow -\frac{b}{3a} + \frac{((1 + i\sqrt{3})(-b^2 + 3ac)) / \left(3 \cdot 2^{2/3} a \left(-2b^3 + 9abc - 27a^2d + \sqrt{4(-b^2 + 3ac)^3 + (-2b^3 + 9abc - 27a^2d)^2} \right)^{1/3} \right) - \frac{1}{6 \cdot 2^{1/3} a} \left((1 - i\sqrt{3}) \left(-2b^3 + 9abc - 27a^2d + \sqrt{4(-b^2 + 3ac)^3 + (-2b^3 + 9abc - 27a^2d)^2} \right)^{1/3} \right)}{\left(-2b^3 + 9abc - 27a^2d + \sqrt{4(-b^2 + 3ac)^3 + (-2b^3 + 9abc - 27a^2d)^2} \right)^{1/3}} \right\}, \left\{ x \rightarrow -\frac{b}{3a} + \frac{((1 - i\sqrt{3})(-b^2 + 3ac)) / \left(3 \cdot 2^{2/3} a \left(-2b^3 + 9abc - 27a^2d + \sqrt{4(-b^2 + 3ac)^3 + (-2b^3 + 9abc - 27a^2d)^2} \right)^{1/3} \right) - \frac{1}{6 \cdot 2^{1/3} a} \left((1 + i\sqrt{3}) \left(-2b^3 + 9abc - 27a^2d + \sqrt{4(-b^2 + 3ac)^3 + (-2b^3 + 9abc - 27a^2d)^2} \right)^{1/3} \right)}{\left(-2b^3 + 9abc - 27a^2d + \sqrt{4(-b^2 + 3ac)^3 + (-2b^3 + 9abc - 27a^2d)^2} \right)^{1/3}} \right\} \right\}$

No exemplo seguinte não são exibidas todas as soluções da equação, visto que o método utilizado pelo *Mathematica* para a resolução de equações utiliza funções inversas, que no caso das funções periódicas, impossibilita a determinação de todas as soluções de uma equação. Como é sabido, no exemplo seguinte, além da solução indicada existem uma infinidades de outras ($k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$).

In[81]:= `Solve[Sin[x] == 0, x]`

Solve::ifun : Inverse functions are being used by Solve, so some solutions may not be found.

Out[81]= $\{\{x \rightarrow 0\}\}$

3.3 Sistemas de equações

Podemos resolver sistemas recorrendo também à função `Solve`, como se pode ver nos exemplos seguintes. Note-se que, um sistema de equações é representado por uma lista de equações.

```
In[82]:= Solve[{x+y+z == 5, 2x-y+2z == 1, x+2y-z == 3}, {x, y, z}]
```

```
Out[82]= {{x -> -1/2, y -> 3, z -> 5/2}}
```

O próximo sistema é impossível.

```
In[83]:= Solve[{2x+3y-z == 1, 2x+3y-z == 3, 4x+6y-2z == 2}, {x, y, z}]
```

```
Out[83]= {}
```

O próximo exemplo é um sistema possível e indeterminado.

```
In[84]:= Solve[{2x-3y+z == 1, 4x-6y+2z == 2, -6x+9y-3z == -3}, {x, y, z}]
```

Solve::svars :

Equations may not give solutions for all "solve" variables.

```
Out[84]= {{x -> 1/2 + 3y/2 - z/2}}
```

3.4 Nomes de mensagens

Se algo corre mal durante uma avaliação, o programa alerta-nos com uma ou várias mensagens, como já tivemos oportunidade de mostrar na resolução da equação $\text{sen}x=0$ e na resolução do último sistema.

Cada mensagem tem um nome e se quisermos omitir a mensagem escrevemos `Off[nome da mensagem]`.

Vamos exemplificar com a mensagem que obtivemos na secção anterior.

```
In[85]:= Off[Solve::svars]
Solve[{2 x - 3 y + z == 1, 4 x - 6 y + 2 z == 2, -6 x + 9 y - 3 z == -3}, {x, y, z}]
```

```
Out[86]= {{x -> 1/2 + 3 y/2 - z/2}}
```

Se desejarmos que a mensagem apareça novamente escrevemos `On[nome da mensagem]`.

```
In[87]:= On[Solve::svars]
Solve[{2 x - 3 y + z == 1, 4 x - 6 y + 2 z == 2, -6 x + 9 y - 3 z == -3}, {x, y, z}]
```

Solve::svars :

Equations may not give solutions for all "solve" variables.

```
Out[88]= {{x -> 1/2 + 3 y/2 - z/2}}
```

3.5 Variáveis em sistemas de equações

Este programa permite resolver um sistema em ordem a algumas variáveis e eliminar uma variável do sistema.

```
In[89]:= Solve[{a x + y == 0, 2 x + (1 - a) y == 1}, {x, y}]
```

```
Out[89]= {{x -> -\frac{1}{-2 + a - a^2}, y -> -\frac{a}{2 - a + a^2}}}
```

```
In[90]:= Eliminate[{a x + y == 0, 2 x + (1 - a) y == 1}, y]
```

```
Out[90]= (2 - a + a^2) x == 1
```

3.6 Soluções aproximadas

O *Mathematica* dispõe da função **FindRoot**, que procura soluções numéricas para uma equação, próximas de um dado valor.

De seguida serão apresentados dois exemplos, no primeiro o *Mathematica* procura solução da equação $\sin(x^2)=0$ próxima de $x=2$ e no segundo exemplo procura solução da mesma equação, mas próximo de $x=3$.

```
In[91]:= FindRoot[Sin[x^2] == 0, {x, 2}]
```

```
Out[91]= {x -> 1.77245}
```

```
In[92]:= FindRoot[Sin[x^2] == 0, {x, 3}]
```

```
Out[92]= {x -> 3.06998}
```

3.7 Limites

A função do *Mathematica* que executa o cálculo de limites é **Limit**.

```
In[93]:= ?Limit
```

```
Limit[expr, x->x0] finds the
  limiting value of expr when x approaches x0. More...
```

Refira-se que para escrever \rightarrow terão de carregar no símbolo "-" seguido do símbolo ">", do teclado numérico, ou usar o símbolo \rightarrow que se encontra no *BasicInput* do submenu *Palettes* do menu *File*. Como já referimos para escrever o símbolo de infinito dispõem também de dois processos: escrever *Infinity* ou usar o símbolo ∞ que se encontra no *BasicInput* do submenu *Palettes* do menu *File*.

```
In[94]:= Limit[Sin[x] / x, x -> 0]
```

```
Out[94]= 1
```

```
In[95]:= Limit[ $\frac{x+2}{x^2-4}$ , x -> -2]
```

```
Out[95]=  $-\frac{1}{4}$ 
```

```
In[96]:= Limit[ $\frac{E^x - 1}{3x}$ , x -> Infinity]
```

```
Out[96]=  $\infty$ 
```

In[97]:= Limit[$\sqrt{a^2 + 2} - a$, $a \rightarrow \infty$]

Out[97]= 0

In[98]:= Limit[$\left(\frac{7n+3}{7n}\right)^{\frac{7n}{4}}$, $n \rightarrow \infty$]

Out[98]= $e^{3/4}$

In[99]:= Limit[$\sqrt{x-2}$, $x \rightarrow 1$]

Out[99]= i

Aqui, o professor tem de estar atento, porque como já referimos, este programa trabalha no conjunto dos números complexos e o cálculo de limites, no ensino secundário, faz-se no conjunto dos números reais.

Repare-se que, no último exemplo, em \mathbb{R} nem faz sentido pedir este limite, atendendo a que um não é ponto de acumulação do domínio da função $f(x)=\sqrt{x-2}$ (limite segundo Heine).

Na determinação dos limites à esquerda e à direita de um número k , utiliza-se a convenção de considerar positivo o sentido do eixo dos xx . Assim, se nos aproximarmos de k à esquerda, o sentido é $+1$. Caso contrário é -1 .

In[100]:= Limit[$\frac{1}{x}$, $x \rightarrow 0$, Direction $\rightarrow -1$]

Out[100]= ∞

In[101]:= Limit[$\frac{1}{x}$, $x \rightarrow 0$, Direction $\rightarrow 1$]

Out[101]= $-\infty$

3.8 Derivadas

Para calcularmos a derivada de uma expressão podemos usar a função **D** seguida da expressão e da variável em ordem à qual pretendemos derivar.

Se precisarmos de derivadas de ordem superior a um colocamos dentro de chavetas a variável e a ordem à qual pretendemos a derivada.

```
In[102]:= D[x^2, x]
```

```
Out[102]= 2 x
```

```
In[103]:= D[x^3, {x, 2}]
```

```
Out[103]= 6 x
```

```
In[104]:= D[ $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ , x]
```

```
Out[104]=  $\frac{\frac{1}{1-x} + \frac{1+x}{(1-x)^2}}{2 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}$ 
```

```
In[105]:= D[2x2-5, x]
```

```
Out[105]= 2-4+x2 x Log[2]
```

3.9 Soma de alguns termos de uma sucessão

O *Mathematica* dispõe de uma função - **Sum** - que executa a soma de alguns dos termos de uma sucessão qualquer (independentemente de ser uma progressão aritmética ou geométrica).

```
In[106]:= Sum[3 n + 2, {n, 6}]
```

```
Out[106]= 75
```

Neste último exemplo temos a soma dos seis primeiros termos de uma progressão aritmética, com n a começar em um. Se pretendemos a soma desde o décimo termo até ao vigésimo termo (inclusive), dentro das chavetas colocamos os valores correspondentes.

```
In[107]:= Sum[2^n, {n, 10, 20}]
```

```
Out[107]= 2096128
```

```
In[108]:= Sum[ $\frac{n+1}{n}$ , {n, 2, 8}]
```

```
Out[108]=  $\frac{2441}{280}$ 
```

Se pretendemos somar apenas os termos pares, ímpares ou termos de três em três, etc., dentro das chavetas colocamos ainda o número que queremos para o incremento.

```
In[109]:= Sum[2 z - 1, {z, 1, 100, 2}]
```

```
Out[109]= 4950
```

O *Mathematica* disponibiliza as fórmulas da soma das progressões aritméticas e geométricas, como se pode ver a seguir:

In[110]:= `Sum[k, {k, 1, n}]`

Out[110]= $\frac{1}{2} n (1 + n)$

In[111]:= `Sum[a^k, {k, 1, n}]`

Out[111]= $\frac{a (-1 + a^n)}{-1 + a}$

Poderíamos usar em vez da função `Sum` o símbolo de somatório, que se encontra nas Palettes - $\sum_{\square=\square}^{\square} \square$. Salientamos que pode utilizar a tecla `tab` (tecla dos parágrafos) para passar de um "quadrado" para outro.

In[112]:= $\sum_{n=10}^{20} 2^n$

Out[112]= 2096128

4 - Gráficos

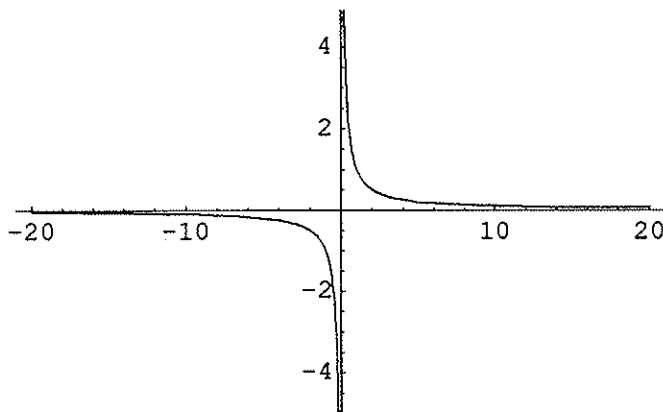
4.1 Como construir

4.1.1 Gráficos a duas dimensões

Para visualizarmos o gráfico de uma função, de uma variável, escrevemos **Plot**, seguido da expressão analítica da função e de uma lista que contenha a variável e os respectivos valores reais mínimo e máximo, separados por vírgulas.

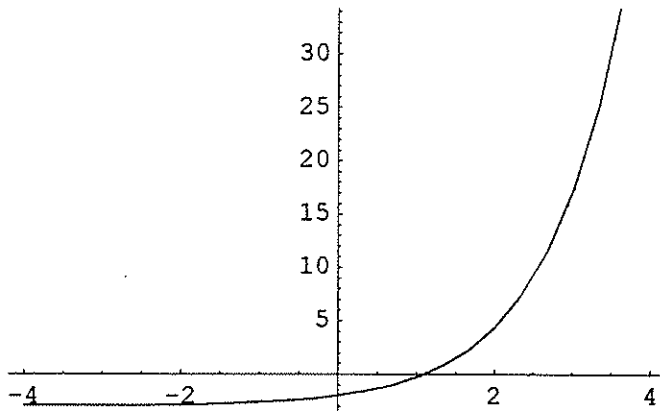
Tomemos como exemplos:

```
In[113]:= Plot[1/x, {x, -20, 20}]
```



```
Out[113]= - Graphics -
```

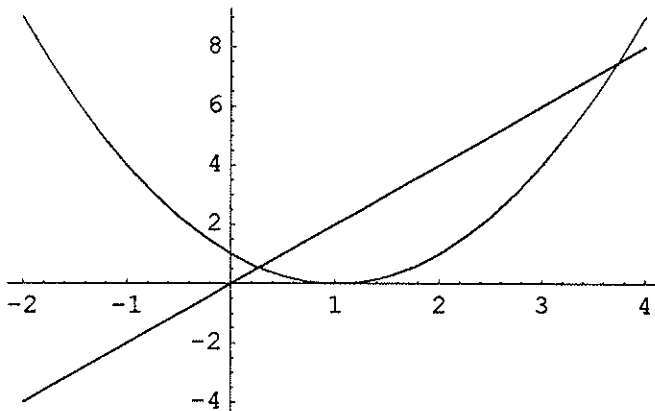
```
In[114]:= Plot[E^x-3, {x, -4, 4}]
```



```
Out[114]= - Graphics -
```

No caso de precisarmos do gráfico de duas ou mais funções, colocamos como primeiro argumento uma lista onde figuram as expressões das funções que queremos representar e em seguida outra lista contendo a variável e os seus valores mínimo e máximo.

```
In[115]:= Plot[{(x-1)^2, 2x}, {x, -2, 4}]
```



```
Out[115]= - Graphics -
```

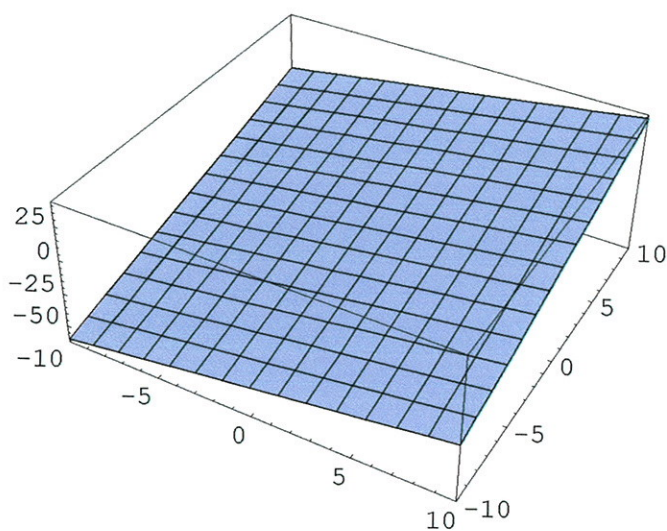
4.1.2 Gráficos a três dimensões

Por curiosidade, vamos ilustrar a possibilidade de fazer gráficos a três dimensões.

A função **Plot3D** executa o gráfico de uma função de duas variáveis. A invocação desta função é semelhante à função **Plot**, temos apenas de acrescentar a variação da segunda variável.

Começemos por um gráfico simples de uma superfície de equação $z=2x+3y-10$.

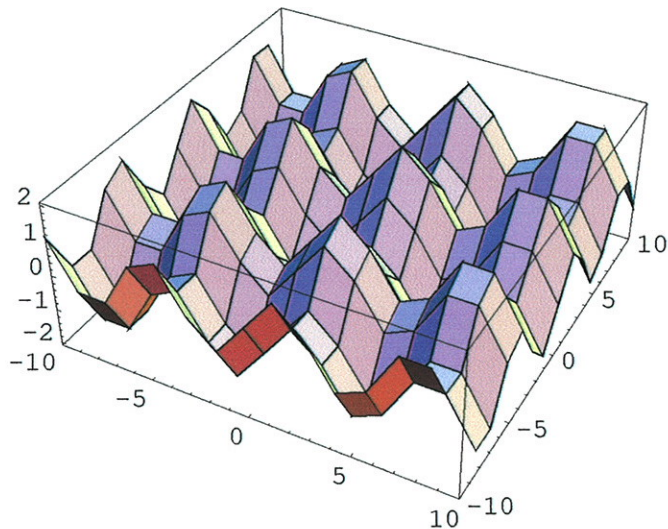
```
In[116]:= Plot3D[2 x + 3 y - 10, {x, -10, 10}, {y, -10, 10}]
```



```
Out[116]= - SurfaceGraphics -
```

De seguida apresentamos, a título ilustrativo, uma superfície mais "engraçada", definida pela expressão $\sin x + \sin y$.

```
In[117]:= Plot3D[Sin[x] + Sin[y], {x, -10, 10}, {y, -10, 10}]
```

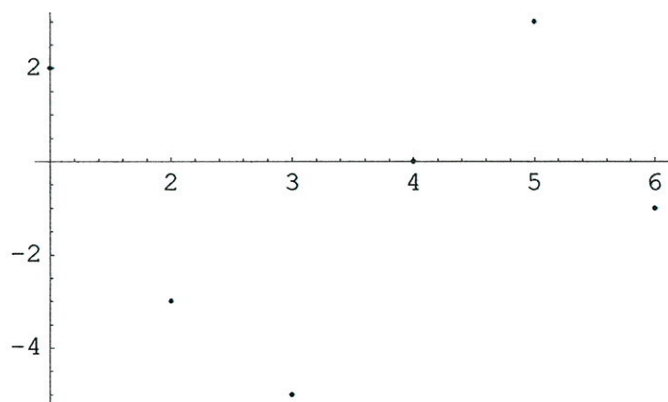


```
Out[117]= - SurfaceGraphics -
```

4.1.3 Gráficos de listas

A função **ListPlot** permite construir gráficos de listas. `ListPlot[{ y_1, y_2, \dots, y_n }]` faz o gráfico desta lista de valores fazendo corresponder a $x=1$ o valor de y_1 , a $x=2$ o valor de y_2 , e assim sucessivamente. Notamos que, por defeito esta função coloca o eixo vertical em $x=1$ e a posição em que é colocado o eixo horizontal depende dos valores da lista e, nomeadamente, de serem todos positivos ou negativos, ou não.

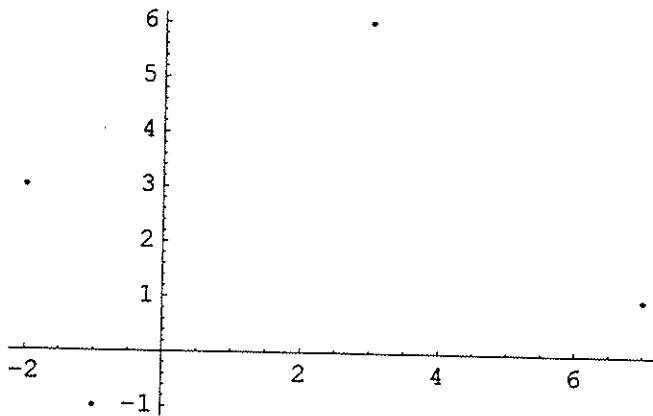
```
In[118]:= ListPlot[{2, -3, -5, 0, 3, -1}]
```



```
Out[118]= - Graphics -
```

Se quisermos fazer corresponder à ordenada y_1 outro valor de abscissa que não seja $x=1$, à ordenada y_2 outro valor diferente de $x=2, \dots$, podemos fazer `ListPlot[{{x1, y1}, {x2, y2}, ...}]`.

```
In[119]:= ListPlot[{{-2, 3}, {3, 6}, {-1, -1}, {7, 1}}]
```

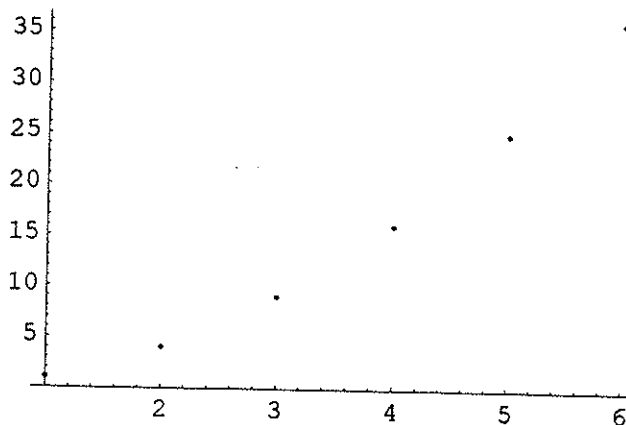


```
Out[119]= - Graphics -
```

Representando pontos como listas de dois valores (as suas coordenadas cartesianas), podemos, assim, obter um gráfico de listas de pontos.

Podemos ainda construir gráficos de tabelas específicas - este comando poderá ser útil no estudo das sucessões.

```
In[120]:= ListPlot[Table[i^2, {i, 1, 6}]]
```

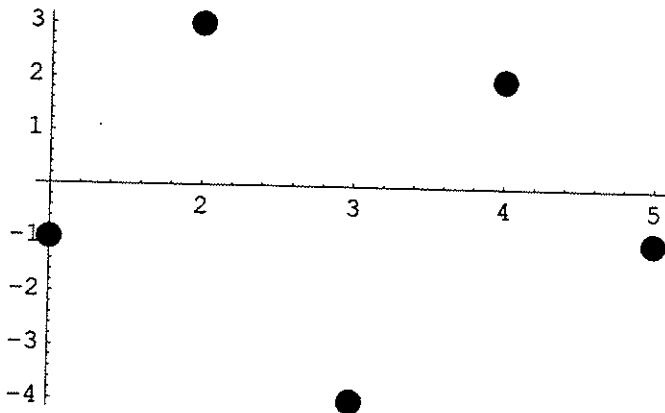


```
Out[120]= - Graphics -
```

Na secção 4.3 falaremos das opções relacionadas com os gráficos, no entanto, achamos oportuno referir duas opções muito úteis para os gráficos de listas - a opção `PlotStyle` e a opção `PlotJoined`.

Se quisermos aumentar o círculo de visualização usamos a opção `PlotStyle` com o valor `PointSize` aplicado a um número que pode variar entre 0 e 1.

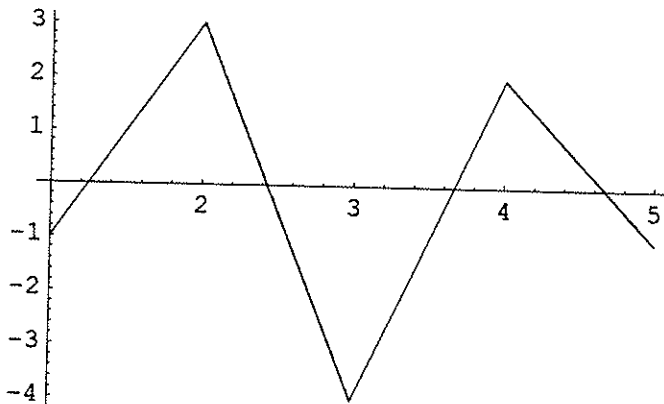
```
In[121]:= ListPlot[{-1, 3, -4, 2, -1}, PlotStyle -> PointSize[0.04]]
```



```
Out[121]= - Graphics -
```

A opção `PlotJoined` quando toma o valor `True`, une os pontos da lista.

```
In[122]:= ListPlot[{-1, 3, -4, 2, -1}, PlotJoined -> True]
```



```
Out[122]= - Graphics -
```

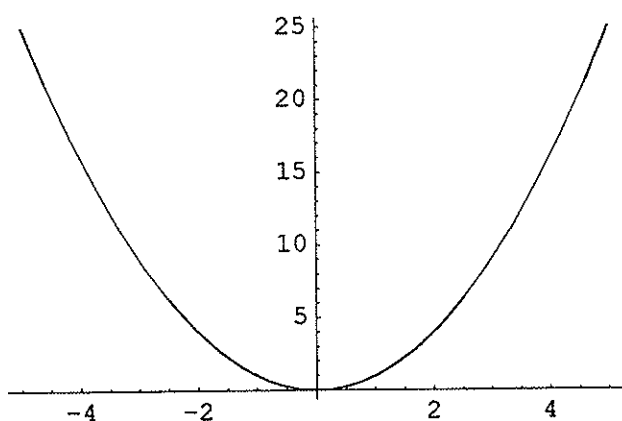
4.2 Operações sobre objectos gráficos

Nesta secção abordaremos as funções `Show` e `GraphicsArray`.

Como já vimos, a função `Plot` constrói e mostra um objecto gráfico. Por outro lado, como observamos na secção 2.10 podemos atribuir nomes ("guardar em variáveis") a qualquer objecto, e portanto, também, a objectos gráficos. Desse modo, podemos mais tarde aceder a esses gráficos pelo nome dado (sem necessidade de os construir de novo) e aplicar-lhes funções que o *Mathematica* disponibiliza para trabalhar com gráficos.

Tal será ilustrado a seguir:

```
In[123]:= g1 = Plot[x^2, {x, -5, 5}]
```



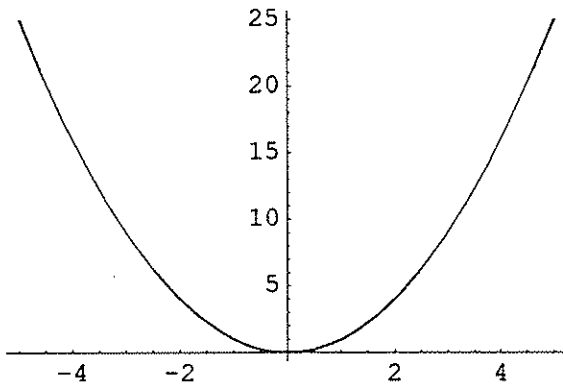
```
Out[123]= - Graphics -
```

O *Mathematica* disponibiliza a função `Show`, que permite mostrar um objecto gráfico já construído anteriormente ou até mesmo juntar no mesmo referencial vários objectos gráficos já construídos (eventualmente com alguma opção alterada como veremos na secção seguinte).

```
In[124]:= ? Show
```

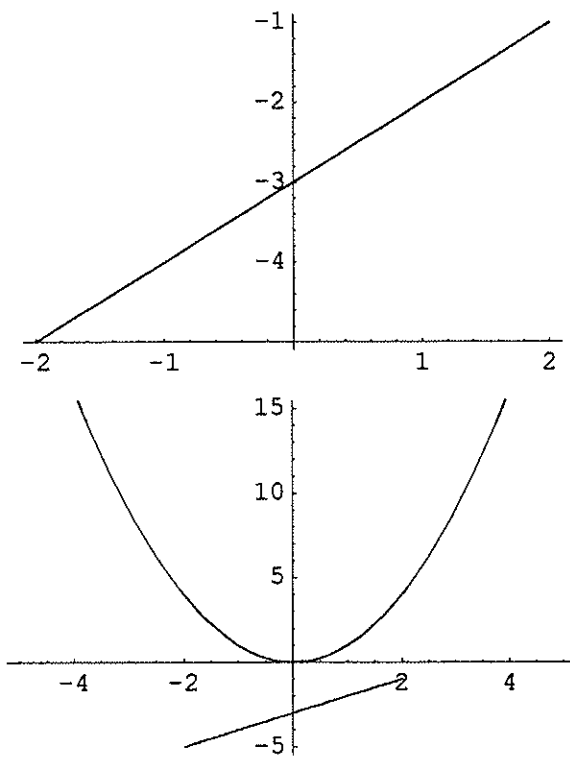
```
Show[graphics, options] displays two- and three-  
dimensional graphics, using the options specified.  
Show[g1, g2, ... ] shows several plots combined. More...
```

```
In[125]:= Show[g1]
```



```
Out[125]= - Graphics -
```

```
In[126]:= Show[g1, Plot[x-3, {x, -2, 2}]]
```

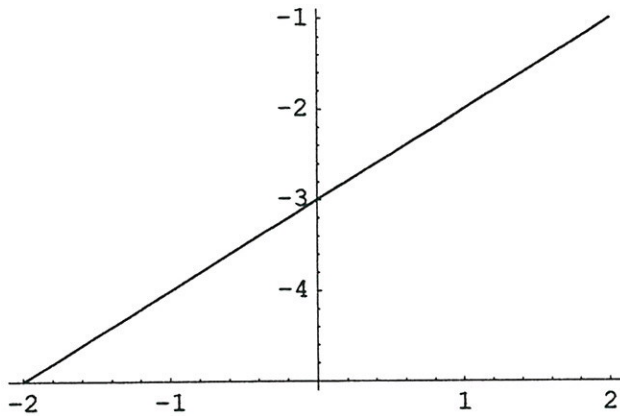


```
Out[126]= - Graphics -
```

Neste último exemplo, o primeiro objecto gráfico construído refere-se ao Plot que se encontra dentro da função Show, (porque como já referimos o Plot para além de construir mostra o objecto gráfico). O segundo objecto gráfico, corresponde à combinação do gráfico de g1 com o gráfico de $y=x-3$, decorrendo da aplicação da função Show.

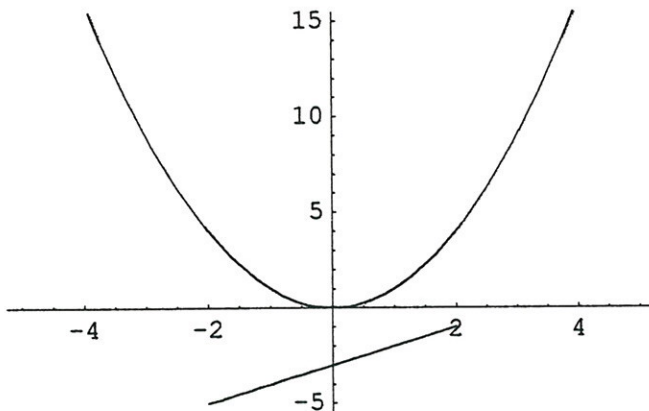
O que acabámos de dizer pode facilmente ser comprovado, guardando o gráfico de $y=x-3$ numa variável g2, e depois aplicando Show[g1,g2].

```
In[127]:= g2 = Plot[x - 3, {x, -2, 2}]
```



```
Out[127]= - Graphics -
```

```
In[128]:= Show[g1, g2]
```



```
Out[128]= - Graphics -
```

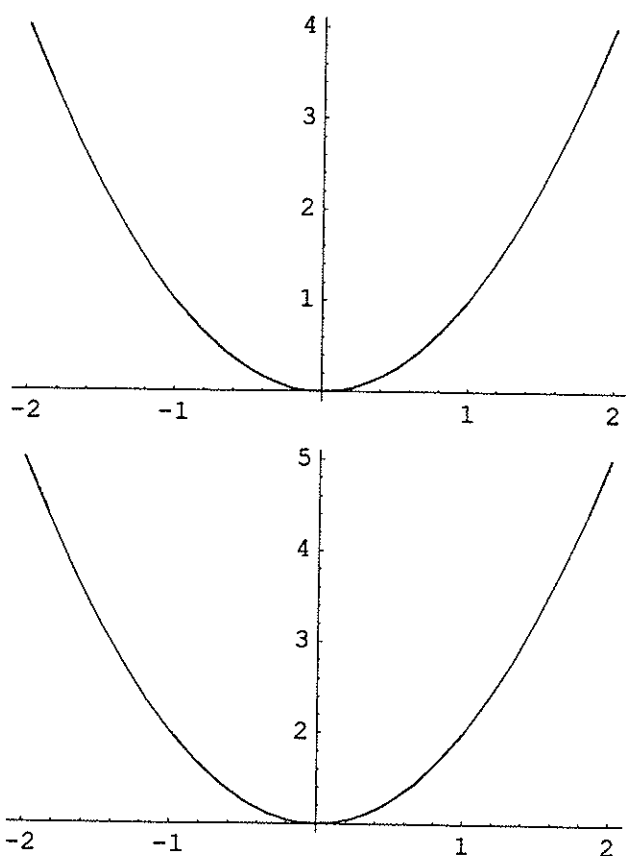
Repara-se que neste exemplo se conseguiu combinar o gráfico de duas funções, em que os gráficos a visualizar incidiam sobre diferentes intervalos (o gráfico de x^2 sobre $[-5,5]$ e o de $x-3$ sobre $[-2,2]$). A combinação destes gráficos não poderia, portanto, ser feita recorrendo ao "Plot simultâneo" das duas funções.

A função `GraphicsArray` constrói (sem mostrar) um objecto gráfico constituído por um conjunto de objectos gráficos. Vejamos como funciona:

```
In[129]:= ? GraphicsArray
```

```
GraphicsArray[{g1, g2, ...}] represents a row of
graphics objects. GraphicsArray[{{g11, g12, ... }, ...}]
represents a two-dimensional array of graphics objects. More...
```

```
In[130]:= GraphicsArray[{{Plot[x^2, {x, -2, 2}], {Plot[x^2+1, {x, -2, 2}]}}]
```



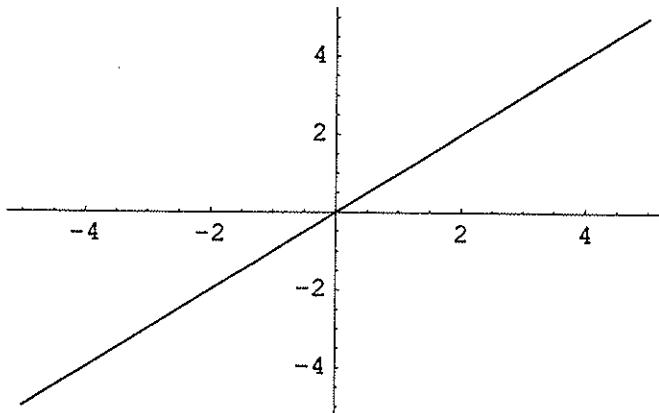
```
Out[130]= - GraphicsArray -
```

Os dois gráficos que obtivemos nada têm haver com a função `GraphicsArray`, advêm dos `Plot`'s que se encontram dentro do argumento desta função. Se desejarmos ver a linha ou a matriz de gráficos teremos de lhe aplicar a função `Show` (invocando directamente `Show[GraphicsArray[...]]` ou aplicando `Show` a um nome que tenha sido previamente atribuído ao `GraphicsArray[...]`).

Se pretendermos ver todos os gráficos em linha o argumento da função `GraphicsArray` deverá ser uma lista de objectos gráficos. No caso de desejarmos uma matriz o argumento da referida função deverá ser uma lista de listas, onde a primeira lista será a primeira linha da matriz, a segunda lista será a segunda linha da matriz e assim sucessivamente.

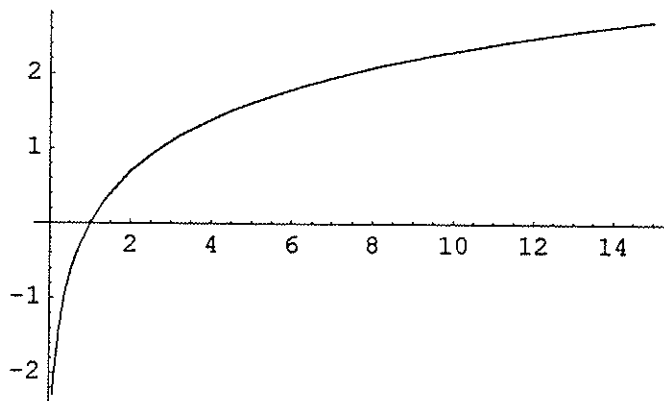
Ilustremos o que se acabou de dizer, começando por atribuir nomes a alguns objectos gráficos, com vista a depois lhes aplicarmos estas funções.

```
In[131]:= g3 = Plot[x, {x, -5, 5}]
```



```
Out[131]= - Graphics -
```

```
In[132]:= g4 = Plot[Log[x], {x, 0.1, 15}]
```



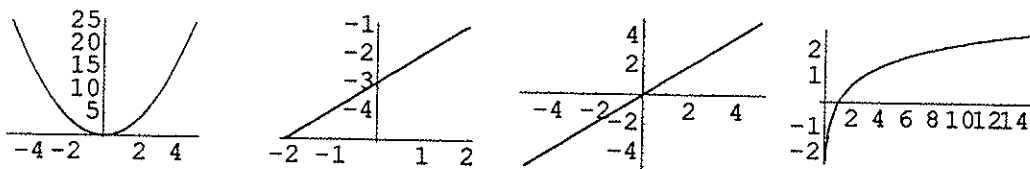
```
Out[132]= - Graphics -
```

```
In[133]:= GraphicsArray[{g1, g2, g3, g4}]
```

```
Out[133]= - GraphicsArray -
```

Como tínhamos referido, a função `GraphicsArray` apenas constrói o objecto gráfico. Para visualizá-lo é preciso usar a função `Show`.

```
In[134]:= Show[GraphicsArray[{g1, g2, g3, g4}]]
```



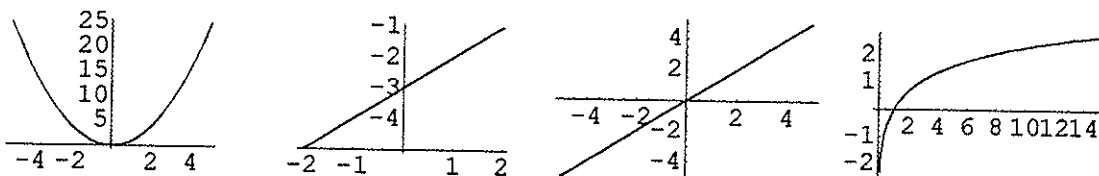
```
Out[134]= - GraphicsArray -
```

Ou, de outro modo:

```
In[135]:= w = GraphicsArray[{g1, g2, g3, g4}]
```

```
Out[135]= - GraphicsArray -
```

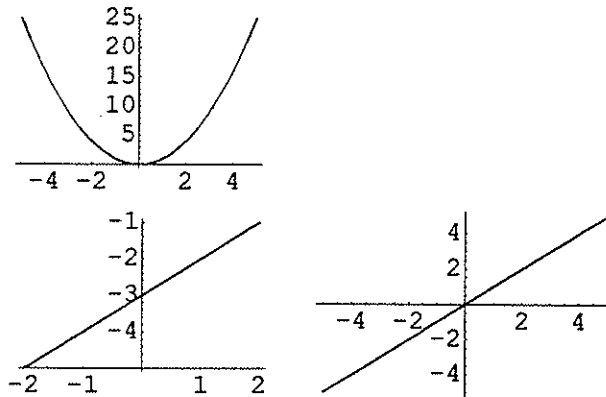
```
In[136]:= Show[w]
```



```
Out[136]= - GraphicsArray -
```

Veamos um novo exemplo em que, agora, a função `GraphicsArray` é aplicada a uma lista de listas de gráficos.

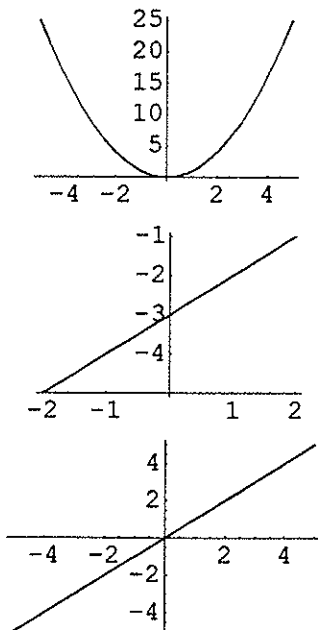
```
In[137]:= Show[GraphicsArray[{{g1}, {g2, g3}}]]
```



```
Out[137]= - GraphicsArray -
```

Naturalmente, no caso de pretendermos os gráficos em coluna, podemos "usar o truque" de aplicar o `GraphicsArray` a uma lista de listas onde cada uma destas contém apenas um objecto gráfico:

```
In[138]:= Show[GraphicsArray[{{g1}, {g2}, {g3}}]]
```



```
Out[138]= - GraphicsArray -
```

4.3 Algumas opções

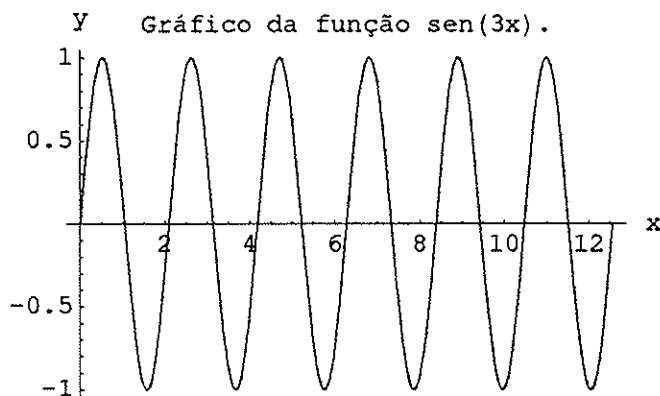
Relativamente à representação gráfica de funções de uma variável no *Mathematica*, convém salientar algumas opções úteis, que devem figurar seguidas de uma seta (- >) que poderão ser usadas individualmente ou em conjunto:

- **AxisLabel** - coloca legendas nos eixos coordenados.

As legendas devem ser colocadas entre aspas, inseridas numa lista.

- **PlotLabel** - coloca legenda no gráfico.

```
In[139]:= Plot[Sin[3 x], {x, 0, 4 Pi}, AxesLabel -> {"x", "y"},  
PlotLabel -> "Gráfico da função sen(3x)."]
```

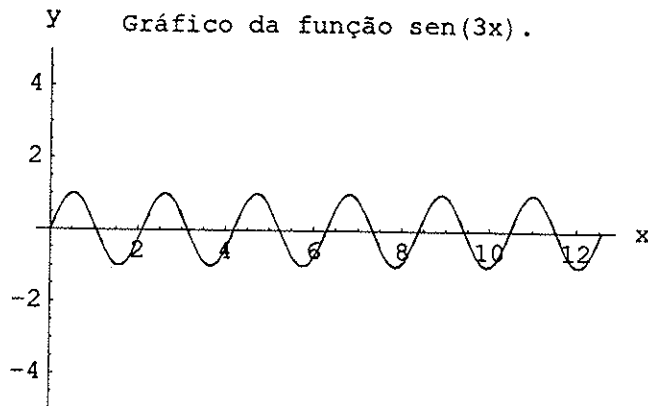


```
Out[139]= - Graphics -
```

Como já devem ter observado, por defeito, o *Mathematica* não coloca legendas no gráfico nem nos eixos coordenados.

- **PlotRange** - dá os limites para o eixo dos yy. Por defeito, o *Mathematica* "escolhe" a escala para o eixo dos yy que considera mais apropriada.

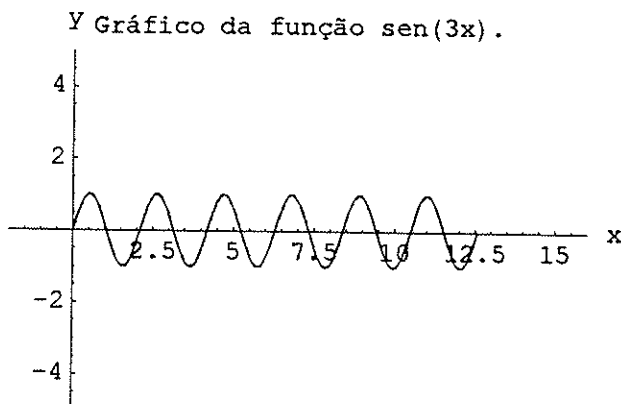
```
In[140]:= Show[%, PlotRange -> {-5, 5}]
```



```
Out[140]= - Graphics -
```

A opção `PlotRange` também pode ser utilizada para dar limites ao eixo dos xx . Neste caso, esta opção é representada por uma lista de listas onde a primeira refere-se aos limites do eixo dos xx e a segunda aos limites do eixo dos yy .

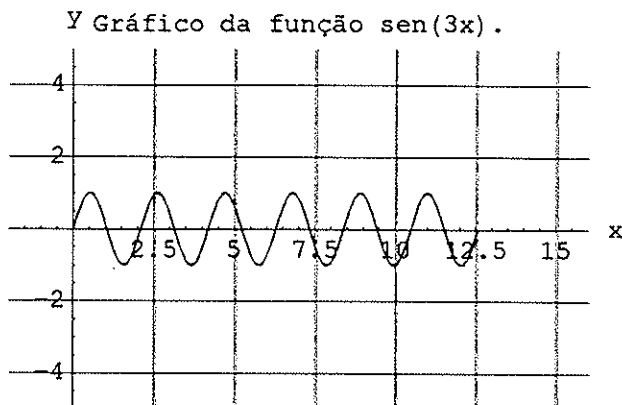
```
In[141]:= Show[%%, PlotRange -> {{-2, 16}, {-5, 5}}]
```



```
Out[141]= - Graphics -
```

- **GridLines** - coloca uma grelha sob o gráfico. Obviamente, por defeito, o *Mathematica* não coloca nenhuma grelha.

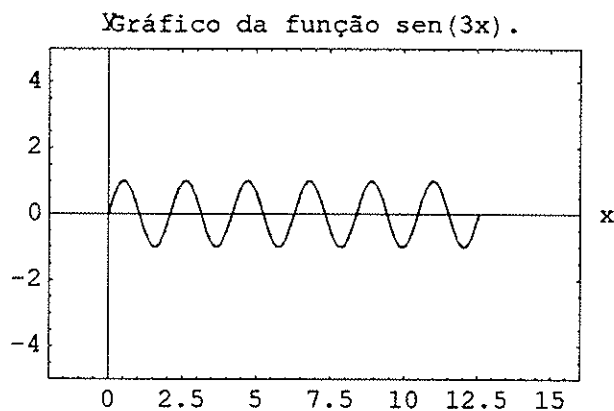
```
In[142]:= Show[%, GridLines -> Automatic]
```



```
Out[142]= - Graphics -
```

- **Frame** - coloca o gráfico dentro de um retângulo e põe a graduação dos eixos fora do mesmo.

```
In[143]:= Show[%%, Frame -> True]
```



```
Out[143]= - Graphics -
```

A opção **DisplayFunction** com o valor **Identity** não mostra o objecto gráfico construído pela função **Plot**.

```
In[144]:= Plot[1/x, {x, -20, 20}, DisplayFunction -> Identity]
```

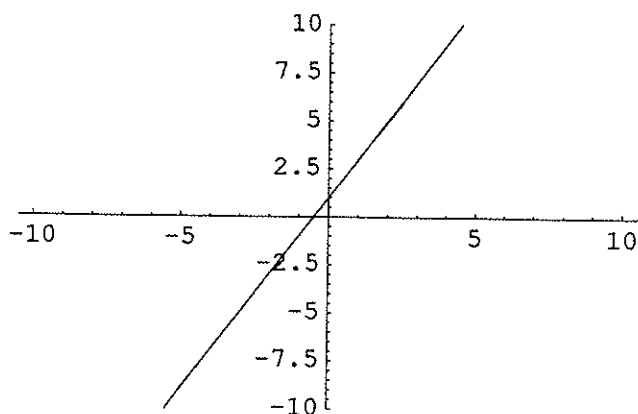
```
Out[144]= - Graphics -
```

- **AspectRatio** - dá a razão entre a "altura" e a "largura" do gráfico.

Por defeito esta razão é o inverso do número de ouro. Considera-se que o número de ouro é a razão entre a largura e o altura do rectângulo mais agradável à nossa vista.

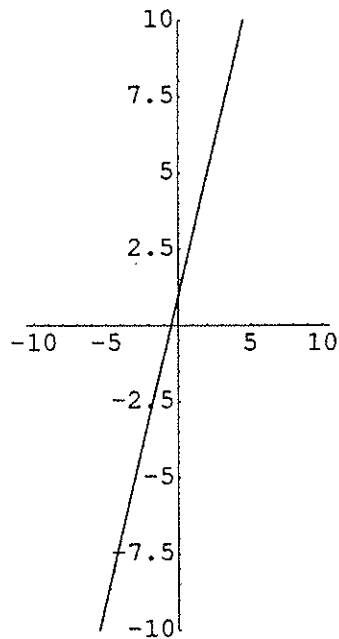
Se colocarmos a opção **AspectRatio** com o valor dois obtemos um gráfico em que a "altura" é o dobro da "largura".

```
In[145]:= Plot[2 x + 1, {x, -10, 10}, PlotRange -> {-10, 10}]
```



```
Out[145]= - Graphics -
```

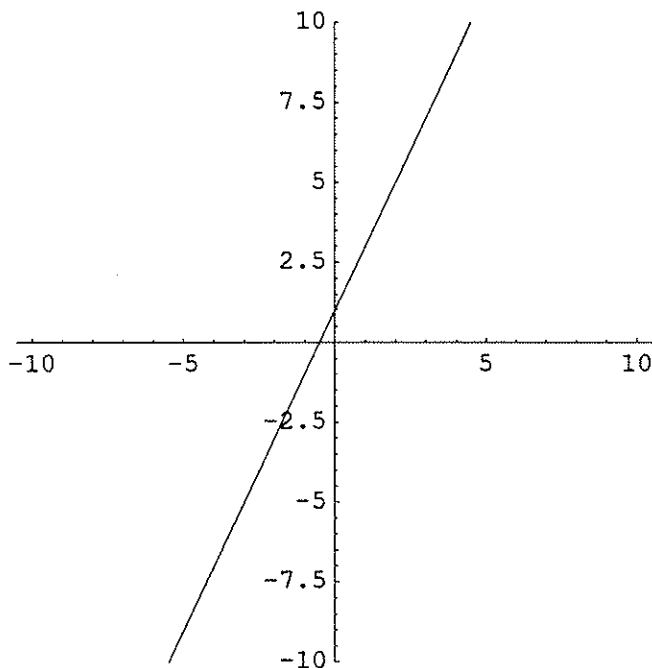
```
In[146]:= Plot[2 x + 1, {x, -10, 10}, PlotRange -> {-10, 10}, AspectRatio -> 2]
```



```
Out[146]= - Graphics -
```

Se precisarmos de um referencial com a mesma unidade de medida e com valores inferiores e superiores iguais nos eixos xx e yy usamos conjuntamente as opções `PlotRange` e `AspectRatio`, sendo que esta última tem de tomar valor 1.

```
In(147):= Plot[2 x + 1, {x, -10, 10}, PlotRange -> {-10, 10}, AspectRatio -> 1]
```



```
Out(147)= - Graphics -
```

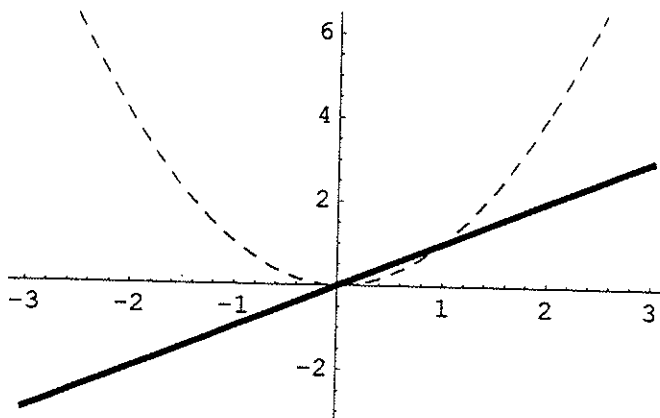
A opção **PlotStyle**, por defeito, dá o gráfico numa linha contínua normal a preto.

No caso de desejarmos uma função a tracejado, usamos esta opção com o valor **Dashing** aplicado da forma **Dashing[{r}]**, onde r é um número entre zero e um - quanto maior for r maior o espaço entre o tracejado.

O valor **Thickness**, que é aplicado da mesma forma que o **Dashing**, permite variar a espessura da linha do gráfico.

Note-se que, quando temos no mesmo referencial vários gráficos podemos atribuir à opção **PlotStyle** vários valores correspondentes a cada um dos gráficos, colocando-os dentro de chavetas e separados por vírgulas.

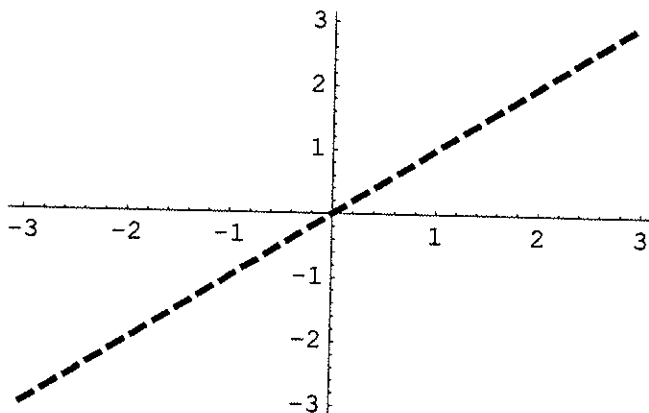
```
In[148]:= Plot[{x, x^2}, {x, -3, 3}, PlotStyle -> {Thickness[0.01], Dashing[{0.02}]}
```



```
Out[148]= - Graphics -
```

Com o exemplo seguinte vemos que podemos usar diferentes valores de uma opção em simultâneo para uma mesma função.

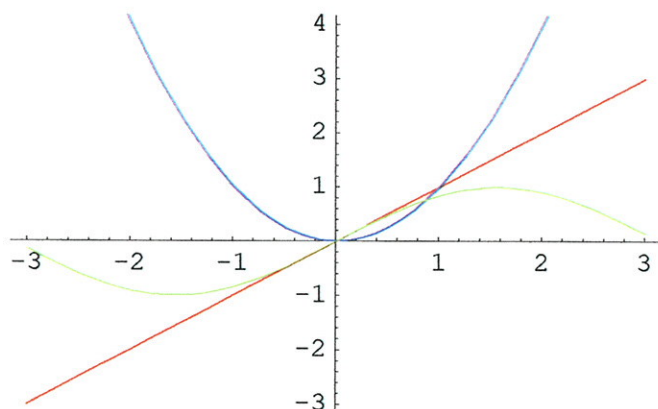
```
In[149]:= Plot[x, {x, -3, 3}, PlotStyle -> {Thickness[0.01], Dashing[{0.02}]}
```



```
Out[149]= - Graphics -
```

A opção `PlotStyle` permite ainda dar cor aos gráficos. Para tal, esta opção deverá ser invocada do seguinte modo: `RGBColor[r,g,b]` onde r , g e b são números entre zero e um. `RGBColor[1,0,0]` representa a cor vermelha, `RGBColor[0,1,0]` representa a cor verde e `RGBColor[0,0,1]` representa a cor azul. No caso de desejarmos outras cores variamos estes parâmetros.

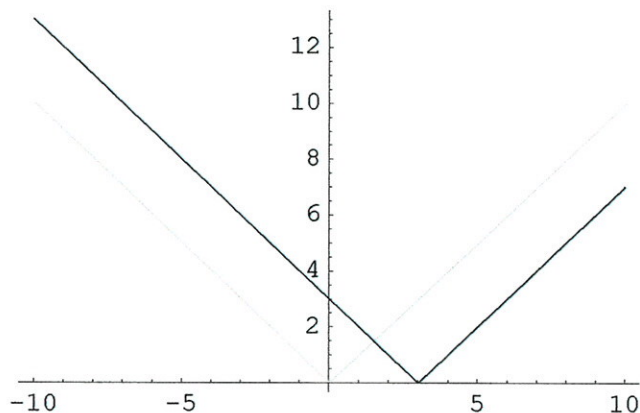
```
In[150]:= Plot[{x, x^2, Sin[x]}, {x, -3, 3},  
PlotStyle -> {RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[0, 0, 1], RGBColor[0.7, 0.9, 0.3]}
```



```
Out[150]= - Graphics -
```

No caso de não dispormos de impressora a cores podemos atribuir aos gráficos vários níveis de cinzento, colocando como valor da opção `PlotStyle` o `GrayLevel` aplicado a um número que varia entre zero e um, notando que zero corresponde à cor preta e um corresponde à cor branca.

```
In[151]:= Plot[{Abs[x], Abs[x - 3]}, {x, -10, 10},  
PlotStyle -> {GrayLevel[.7], GrayLevel[.1]}]
```



```
Out[151]= - Graphics -
```

A função **Options** aplicada a **Plot** dá o conjunto de todas as opções que o *Mathematica* disponibiliza para os gráficos e os valores que as mesmas tomam por defeito.

```
In[152]:= Options[Plot]
```

```
Out[152]= {AspectRatio ->  $\frac{1}{\text{GoldenRatio}}$ , Axes -> Automatic, AxesLabel -> None,
  AxesOrigin -> Automatic, AxesStyle -> Automatic, Background -> Automatic,
  ColorOutput -> Automatic, Compiled -> True, DefaultColor -> Automatic,
  Epilog -> {}, Frame -> False, FrameLabel -> None, FrameStyle -> Automatic,
  FrameTicks -> Automatic, GridLines -> None, ImageSize -> Automatic,
  MaxBend -> 10., PlotDivision -> 30., PlotLabel -> None, PlotPoints -> 25,
  PlotRange -> Automatic, PlotRegion -> Automatic, PlotStyle -> Automatic,
  Prolog -> {}, RotateLabel -> True, Ticks -> Automatic,
  DefaultFont -> $DefaultFont, DisplayFunction -> $DisplayFunction,
  FormatType -> $FormatType, TextStyle -> $TextStyle}
```

No caso de pretendermos conhecer qual o valor por defeito de uma opção qualquer colocamos **Options[Plot,opção]**.

```
In[153]:= Options[Plot, AspectRatio]
```

```
Out[153]= {AspectRatio ->  $\frac{1}{\text{GoldenRatio}}$ }
```

Em relação às opções para os gráficos a três dimensões não achamos necessário abordá-las, visto que no ensino secundário não abordamos funções de duas variáveis. Os colegas mais curiosos poderão consultar a função **Options**.

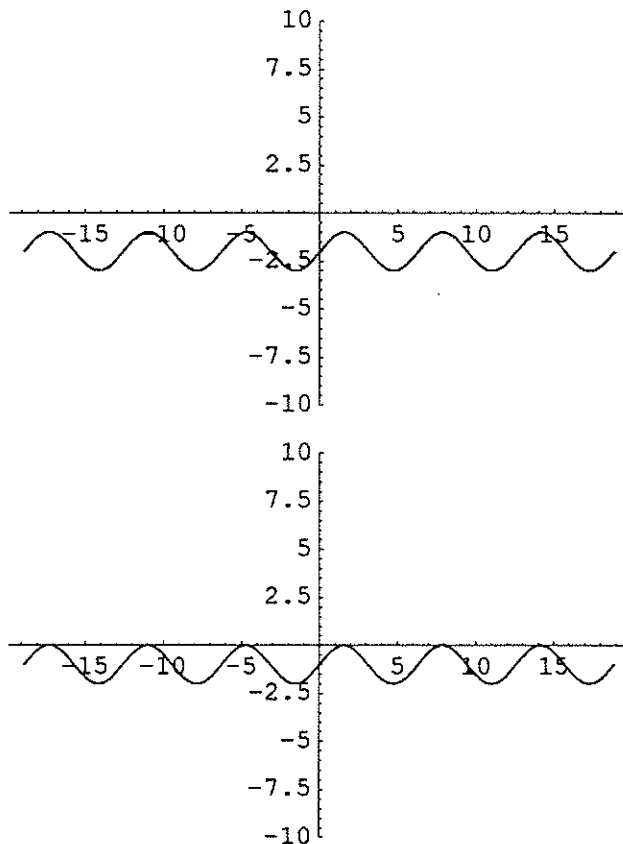
4.4 Animação de gráficos

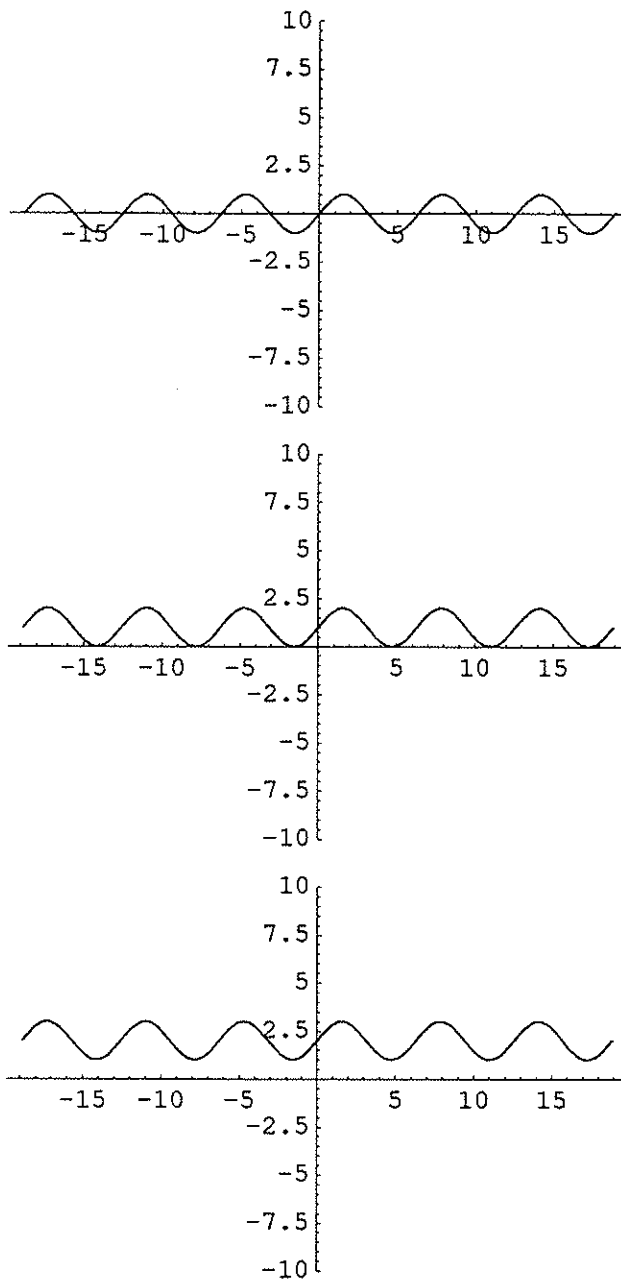
Neste programa existem funções que fazem um "filme" com um conjunto de gráficos. Tentando explicar de outro modo, estas funções - **Animate** e **Table** - executam o comando gráfico **Plot** para um conjunto de valores e animam a sequência de gráficos resultante.

Para utilizarmos estas funções colocamos dentro de parênteses rectos a função **Plot** seguida de uma lista que contém o parâmetro que queremos animar e os respectivos valores mínimo e máximo. Vejamos um exemplo, com a função **Table**, de uma translação vertical da função seno onde colocamos a opção **PlotRange** (para fixarmos o eixo dos yy) e aconselhamos a maximizar o seu ecrã para poder visualizar melhor as translações.

Para obter uma animação dos objectos gráficos resultantes cliquem duas vezes em um deles.

```
In[154]:= Table[Plot[Sin[x] + k, {x, -6 Pi, 6 Pi}, PlotRange -> {-10, 10}], {k, -2, 2}]
```

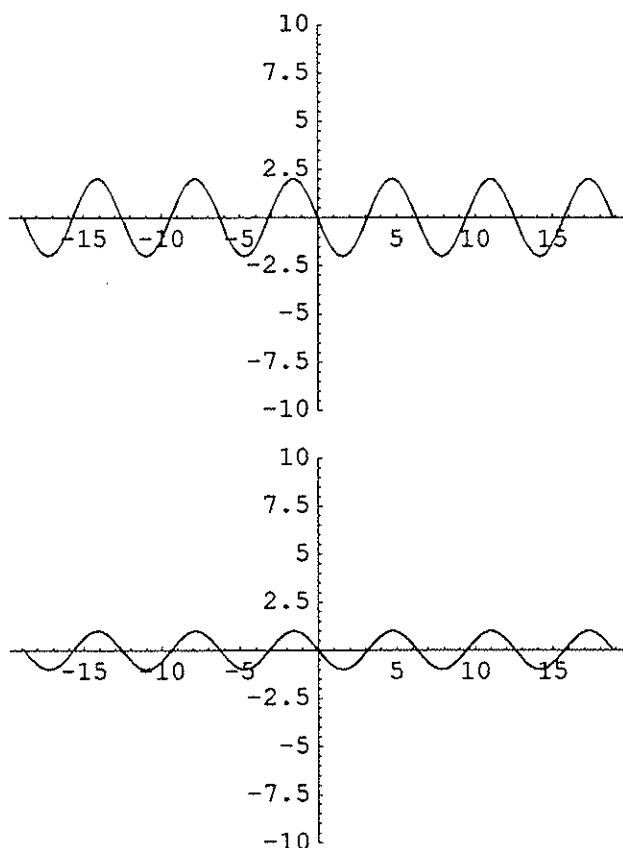




```
Out[154]= {- Graphics -, - Graphics -, - Graphics -, - Graphics -, - Graphics -}
```

Veamos outro exemplo de animação colocando agora o parâmetro k a multiplicar pela função seno:

```
In[155]:= Table[Plot[k Sin[x], {x, -6 Pi, 6 Pi}, PlotRange -> {-10, 10}], {k, -2, -1}]
```



```
Out[155]= {- Graphics -, - Graphics -}
```

Com a função `Table` conseguimos controlar o número de gráficos que serão animados uma vez que, para todos os efeitos, estamos a gerar uma lista de gráficos.

O mesmo já não acontece com a função `Animate` que, em média, gera vinte e quatro gráficos. O modo de invocar esta função é o mesmo que para a função `Table`.

Como curiosidade sugerimos que experimentem animar as funções:

- $\sin(ax)$;
- $\sin(x+a)$;
- $\sin(x+a)+a$.

Obviamente, as funções `Animate` e `Table` são muito úteis ao professor de Matemática do ensino secundário, pois para além da abordagem das funções trigonométricas, podemos ainda estudar as funções afins, quadráticas, módulo, racionais e irracionais, logarítmicas e exponenciais.

5 - Funções

5.1 Definição de funções

Como já vimos, o *Mathematica* dispõe de um vasto número de funções predefinidas, de que são exemplos: Sin, Cos, Tan, Log, N, Sqrt, Abs, Plot, etc..

No entanto, há sempre qualquer coisa que pretendemos fazer e que poderá não estar disponível. Torna-se assim fundamental que aprendamos a definir as nossas próprias funções.

Existem essencialmente duas maneiras de definir funções neste programa: por abstracção funcional e por atribuição paramétrica diferida.

5.1.1 Definição de funções por abstracção funcional

Consideremos a função $f(x)=\sqrt{x}+1$. Podemos defini-la, no *Mathematica*, por abstracção funcional do seguinte modo:

```
In[156]:= Function[x, Sqrt[x] + 1]
```

```
Out[156]= Function[x, Sqrt[x] + 1]
```

Para definir funções por abstracção funcional recorre-se, no *Mathematica*, à construção `Function[x, expressão]`, onde `x` é uma variável (ou lista de variáveis - para o caso em que a função tem mais de uma variável) e a expressão é a regra de cálculo do resultado da função. (Existe uma outra notação possível para a definição de funções por abstracção funcional, que no entanto não abordaremos aqui.)

`Function[x, Sqrt[x] + 1]` denota a função anónima (sem nome) que a cada `x` faz corresponder $\sqrt{x}+1$. Assim, podemos aplicar esta construção a um valor concreto.

```
In[157]:= Function[x,  $\sqrt{x} + 1$ ][4]
```

```
Out[157]= 3
```

Naturalmente, em geral queremos dar nomes às funções que definimos. De acordo com o que vimos na secção 2.10 tal pode ser efectuado, no *Mathematica*, recorrendo ao sinal de = (note-se que = denota a chamada atribuição imediata e := denota a chamada atribuição diferida, por razões que não discutiremos aqui). Por exemplo, se quisermos chamar de f à função anterior escreveremos (a "definição"):

```
In[158]:= f = Function[x,  $\sqrt{x} + 1$ ]
```

```
Out[158]= Function[x,  $\sqrt{x} + 1$ ]
```

A partir daqui podemos avaliar a imagem de qualquer objecto sem ter de repetir a definição da função.

```
In[159]:= f[4]
```

```
Out[159]= 3
```

Se questionarem ?f obtém-se a informação de qual o "objecto" (no caso uma função) associada a f pela "definição" (atribuição) anterior.

```
In[160]:= ?f
```

```
Global`f
```

```
f = Function[x,  $\sqrt{x} + 1$ ]
```

Para apagar uma definição usa-se a função predefinida **Clear** aplicada ao nome da definição que queremos apagar. Após `Clear[f]`, `f` já não guarda a função indicada como se pode comprovar:

```
In[161]:= Clear[f]
```

```
In[162]:= ?f
```

```
Global`f
```

5.1.2 Definição de funções por atribuição paramétrica

Vejam agora como definir funções por atribuição paramétrica (diferida), com o exemplo da função $g(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$.

```
In[163]:= g[x_] := x^3 - 5x^2 + 6x
```

Aqui para definirmos a função necessitamos de colocar um "underscore" `_` depois da variável (apenas do lado esquerdo) e usar `:=` antes da expressão da função.

O "underscore" funciona como um molde universal e o `x`, antes dele, como uma etiqueta. A ideia é que quando mandarmos avaliar, por exemplo, `g[2]` o *Mathematica* vai ver se `g[2]` se "ajusta" ao lado esquerdo de alguma regra definida.

Como qualquer coisa se ajusta ao molde universal, `g[2]` ajusta-se a `g[x_]` pelo que `g[2]` é reescrito (substituído) pelo lado direito da regra, isto é, por $x^3 - 5x^2 + 6x$, com `x` designando o valor que se ajustou ao molde etiquetado por `x` (isto é 2). Obtém-se assim:

```
In[164]:= g[2]
```

```
Out[164]= 0
```

Uma discussão mais pormenorizada deste assunto sai fora do âmbito deste trabalho. Se estiverem interessados consultem a referência dada.

Notamos que com este modo de definir uma função, a mesma já fica com um "nome" e que ao avaliarmos não há qualquer Output.

No caso da definição por abstracção funcional, se quisermos atribuir um "nome" à função, colocamo-o, como vimos, antes da palavra Function, seguido do sinal de =, notando que o nome deverá ser iniciado por caracteres minúsculos para que não haja qualquer confusão com as constantes e as funções predefinidas neste programa.

Depois de termos as funções definidas podemos calcular imagens de um objecto qualquer, construir gráficos, calcular limites, derivadas etc., como com qualquer função predefinida.

Exemplificando:

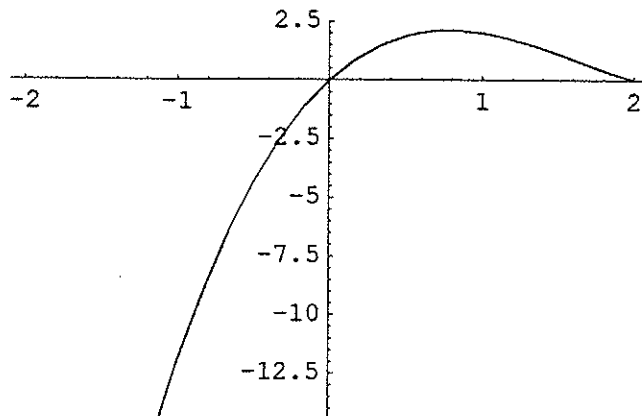
```
In[165]:= g[-√2]
```

```
Out[165]= -10 - 8√2
```

```
In[166]:= g[a + 2]
```

```
Out[166]= 6(2 + a) - 5(2 + a)2 + (2 + a)3
```

```
In[167]:= Plot[g[x], {x, -2, 2}]
```



```
Out[167]= - Graphics -
```

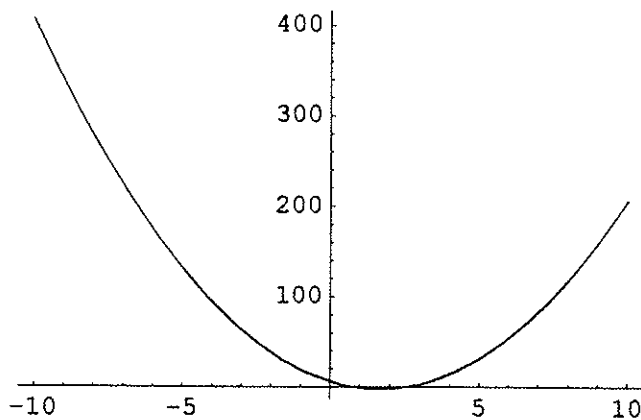
```
In[168]:= Limit[g[x], x -> 3]
```

```
Out[168]= 0
```

```
In[169]:= D[g[x], x]
```

```
Out[169]= 6 - 10 x + 3 x2
```

```
In[170]:= Plot[g'[x], {x, -10, 10}]
```



```
Out[170]= - Graphics -
```

Daqui em diante, passaremos a definir as funções por atribuição paramétrica, por acharmos que é a mais adequada para o ensino secundário, uma vez que é mais parecida com a forma como se definem funções nestes níveis de ensino.

5.2 Regras de reescrita locais

Como vimos, uma atribuição cria uma regra global de reescrita que o *Mathematica* aplicará para a avaliação de expressões, sempre que puder. No entanto, por vezes estamos interessados em simplificar, transformar ou reescrever expressões sem contudo pretendemos que a regra de reescrita tenha efeitos globais. Isto é, queremos efectuar uma reescrita localizada a uma certa expressão.

Exemplificando, suponha-se que após calcular a expressão da derivada de $\sin x$, em ordem a x , por recurso à função predefinida *D* pretendemos substituir na expressão daí resultante x por π , isto é, pretendemos obter o valor de $\cos(\pi)$. Para esse efeito precisamos de um mecanismo que permita efectuar a alteração de x por π , indicando a expressão onde tal alteração é desejada, e sem que surta efeitos em eventuais expressões que venham a ser introduzidas posteriormente, onde x ocorra. Tal pode ser feito, como se ilustra a seguir, utilizando $/x \rightarrow \pi$.

```
In[171]:= Clear[x]  
          D[Sin[x], x]
```

```
Out[172]= Cos[x]
```

```
In[173]:= % /. x -> pi
```

```
Out[173]= -1
```

Resultado análogo seria obtido se escrevêssemos directamente $D[\text{Sin}[x],x]/x \rightarrow \pi$. Note-se que como podemos obter a função derivada de uma função f , escrevendo f' , o resultado anterior poderia ser obtido, mais simplesmente, escrevendo directamente $\text{Sin}'[\pi]$.

```
In[174]:= D[Sin[x], x] /. x -> Pi
```

```
Out[174]= -1
```

Comprovemos que as avaliações anteriores não produziram qualquer associação a x do valor de π .

```
In[175]:= ?x
```

```
Global`x
```

5.3 Funções definidas por ramos

Para definirmos funções por ramos precisamos de utilizar a expressão condicional `If`, que tem a forma `If[condição, expressão1, expressão2]`.

Considerando a função h definida por:

$$h(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \geq 0 \\ -x - 1 & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad \text{a sua definição por atribuição paramétrica é dada por:}$$

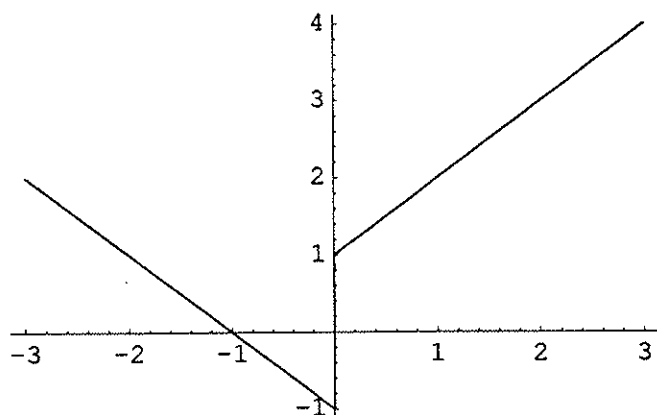
```
In[176]:= h[x_] := If[x >= 0, x + 1, -x - 1]
```

O valor de uma expressão condicional é o valor da expressão1 no caso da condição ser verdadeira e é o valor da expressão2, no caso contrário. Para esta função f temos que quando $x \geq 0$, a função toma o valor $x+1$, no caso contrário ($x < 0$) toma o valor $-x-1$. Nas funções definidas por ramos também podemos avaliar objectos, construir gráficos, etc..

```
In[177]:= h[2]
```

```
Out[177]= 3
```

```
In[178]:= Plot[h[x], {x, -3, 3}]
```



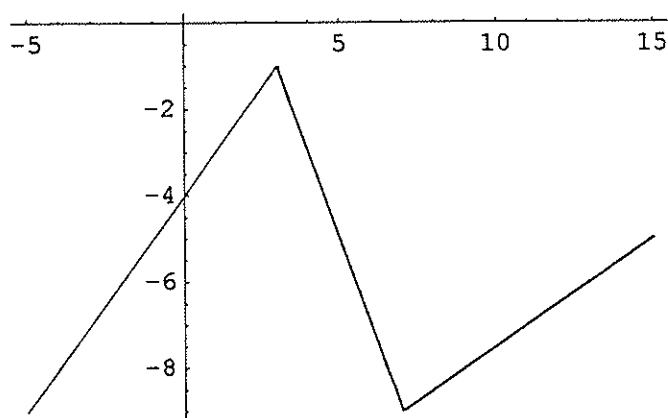
```
Out[178]= - Graphics -
```

No caso de termos funções com mais ramos vamos iterando vários If's. Vejamos como exemplo a função $g(x)$ definida por:

$$g(x) = \begin{cases} x - 4 & \text{se } x < 3 \\ -2x + 5 & \text{se } 3 \leq x \leq 7 \\ \frac{1}{2}x - \frac{25}{2} & \text{se } x > 7 \end{cases}$$

```
In[179]:= g[x_] := If[x < 3, x - 4, If[3 <= x <= 7, -2x + 5, 1/2 x - 25/2]]
```

```
In[180]:= Plot[g[x], {x, -5, 15}]
```



```
Out[180]= - Graphics -
```

5.4 Composição de funções

O *Mathematica* facilmente calcula $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ fazendo `f[g[x]]` ou usando a função predefinida `Composition`. Exemplificando:

```
In[181]:= Clear[f, g]
          f[x_] := x + 1
          g[x_] := 2 x
          h[x_] := x^2 + 5
```

Note-se que é importante começar por introduzir `Clear[f,g]`. Caso contrário, as anteriores definições de `f` e `g`, introduzidas na mesma sessão do *Mathematica* em que nos encontramos, continuariam activas, juntamente com a nova definição, com resultados que não seriam os desejados.

```
In[185]:= f[g[x]]
```

```
Out[185]= 1 + 2 x
```

```
In[186]:= Composition[f, g][x]
```

```
Out[186]= 1 + 2 x
```

```
In[187]:= Composition[f, g, h][a - 2]
```

```
Out[187]= 1 + 2 (5 + (-2 + a)^2)
```

No caso de precisarmos de aplicar a composta de uma função a ela própria várias vezes podemos usar a função `Nest`. Esta função é invocada com três argumentos - `Nest[f,x,n]`, onde `f` é a função que queremos compor em ordem à variável `x` `n` vezes.

Parte 2

Estudo de funções
com o
Mathematica

1- Conhecimentos básicos

Antes de iniciarmos propriamente este trabalho sobre funções no *Mathematica*, achamos conveniente referir alguns pormenores sobre o funcionamento do programa *Mathematica*. Para mais informações poderão consultar o *Manual do Mathematica para o Professor do Ensino Secundário* (primeira parte deste trabalho) ou algumas das referências bibliográficas que apresentamos no fim deste trabalho.

1.1 Note bem:

Quando trabalhamos com o *Mathematica* deveremos ter sempre presente que:

- * Os argumentos das funções têm de estar entre parênteses rectos e separados por vírgulas.
- * Os nomes das funções predefinidas têm a sua primeira letra escrita com um carácter maiúsculo e, no caso do nome da função predefinida ser constituída por duas palavras, cada uma delas começa com letra maiúscula.
- * A multiplicação pode ser representada pelo *, pelo sinal \times (que se encontra nas Palettes) ou ainda por um espaço. Relativamente a esta última representação da multiplicação gostaríamos de notar que a mesma conduz muitas vezes a erros, sobretudo quando trabalhamos com o produto de duas ou mais variáveis.
- * A igualdade é denotada com ==, sendo o sinal de = utilizado para dar nomes a quaisquer objectos (guardar em variáveis).
- * Para avaliar qualquer expressão temos de carregar as teclas *Shift* e *Return* (ou *Enter* do teclado numérico).
- * Quando numa mesma sessão do *Mathematica* definimos uma função por atribuição paramétrica devemos primeiro aplicar a função *Clear* ao nome da função com que pretendemos trabalhar, para evitar problemas decorrentes de esse nome já ter sido usado para outro fim.
- * Se necessitarmos de escrever um número fraccionário (não inteiro) na forma decimal, temos de separar a parte inteira da parte decimal com um ponto (notação anglo-saxónica) e não com uma vírgula, como tradicionalmente fazemos. Exemplificando, se precisarmos de escrever vinte e cinco décimas em vez de 2,5 escrevemos 2.5.
- * Para nos referirmos ao último resultado avaliado pelo *Mathematica* utilizamos o símbolo %.

1.2 Quadro resumo de funções predefinidas

No quadro seguinte apresentamos algumas das funções predefinidas no *Mathematica*, que mais utilizaremos neste trabalho, e indicamos o modo como as mesmas funcionam neste programa.

Tópico	Exemplo	Comando
Construção de sequências/ listas	Construir a sequência (1, 2, 3)	{1, 2, 3}
Construção de gráficos	Desenhar o gráfico de $1 + 4x$ no intervalo [-10, 10]	Plot[1 + 4 x, {x, -10, 10}]
Definição de funções	Definir $f(x) = 1 + 4x$	f[x_] := 1 + 4 x
Resolução de equações	Resolver a equação $x^3 - 5x^2 + 6x = 0$	Solve[x^3 - 5 x^2 + 6 x == 0] ou Solve[x^3 - 5 x^2 + 6 x == 0, x] ou Solve[x^3 - 5 x^2 + 6 x == 0, {x}]
Resolução de sistemas	Resolver o sistema $\begin{cases} 2x - y = 7 \\ 4x + 2y = 2 \end{cases}$	Solve[{2 x - y == 7, 4 x + 2 y == 2}] ou Solve[{2 x - y == 7, 4 x + 2 y == 2}, {x, y}]
Cálculo de limites	Calcular $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x$	Limit[e^x, x -> -∞] ou Limit[E^x, x -> -Infinity]
Cálculo de limites laterais	Calcular $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2+1}{x-2}$	Limit[$\frac{x^2+1}{x-2}$, x -> 2, Direction -> -1]
Cálculo de derivadas	Calcular $(x \cdot \sin x)'$	D[x Sin[x], x] ou D_x (x Sin[x])
Construção de tabelas	Construir uma tabela de valores de x^2 com x a variar de 0 a 10, de 1 em 1	Table[x^2, {x, 0, 10}]
Construção de gráficos de pontos	Construir um gráfico com os pontos (1, 2), (-3, 5) e (0, 1)	ListPlot[{{1, 2}, {-3, 5}, {0, 1}}]
Aproximação de um valor	Aproximar $\sqrt{2}$	N[$\sqrt{2}$] Por defeito, a aproximação faz-se com seis algarismos significativos
Aproximação de um valor com determinada precisão	Aproximar $\sqrt{2}$, com trinta algarismos significativos	N[$\sqrt{2}$, 30]

2 - Estudo de funções

O *Mathematica* tem uma larga aplicação no estudo de funções. Para além de fazer o esboço do gráfico de uma função, este programa permite ampliar uma parte de um gráfico, sobrepor vários gráficos, animar um conjunto de gráficos, explorar valores numéricos de uma função, etc.

Vamos ao longo deste trabalho ver como poderemos tirar partido deste programa para estudar as funções do tipo: afim, quadrática, módulo, polinomial, racional, irracional, trigonométrica, exponencial e logarítmica - funções estas que são abordadas ao longo dos três anos que compõem o actual ensino secundário português, na disciplina de matemática.

Para além das funções referidas anteriormente veremos algumas formas de utilizar o *Mathematica* no estudo da derivada de uma função.

2.1 Função afim

Chama-se **função afim** a toda a função cujo gráfico é uma linha recta. Genericamente, dizemos que são funções do tipo $f(x)=mx+b$ (m e $b \in \mathbb{R}$), onde m representa o declive da recta e b a ordenada na origem.

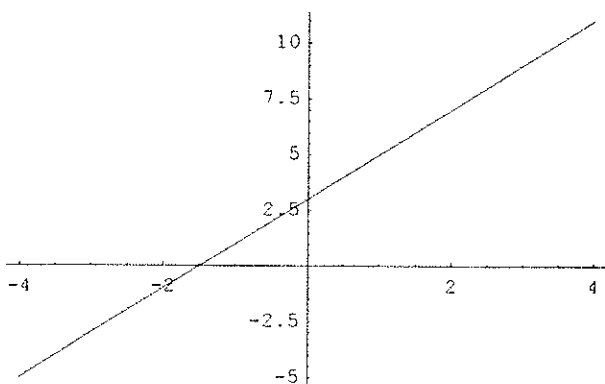
Se $m=0$, então, $f(x)=b$ e f diz-se uma função constante.

Se $b=0$, então, $f(x)=mx$ e f diz-se uma função linear.

Vejamos um exemplo:

```
f[x_] := 2 x + 3
```

```
Plot[f[x], {x, -4, 4}]
```



- Graphics -

2.1.1 Declive de uma recta

Com o *Mathematica* podemos mostrar, de uma maneira muito simples, a influência que os parâmetros m e b têm sobre o traçado gráfico de uma recta. Começemos pelo parâmetro que dá o declive e façamos uma lista das funções $f(x)=mx+1$, com m a variar de -2 a 2 e com incremento de uma unidade (aqui utilizaremos este valor para o incremento pela simples razão de "economizar papel", mas sugerimos que quando experimentarem utilizem valores menores, por exemplo uma décima (0,1), para que possam visualizar melhor a relação existente entre m e o traçado da recta). Mais precisamente, geramos uma lista de gráficos dessas funções (com x a variar de -10 a 10), através da função `Table`.

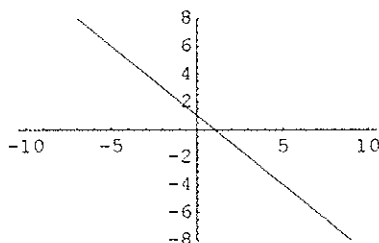
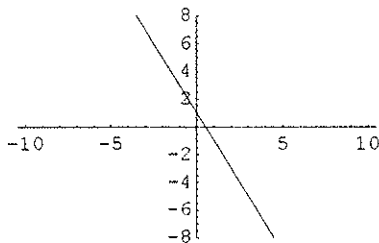
Notas:

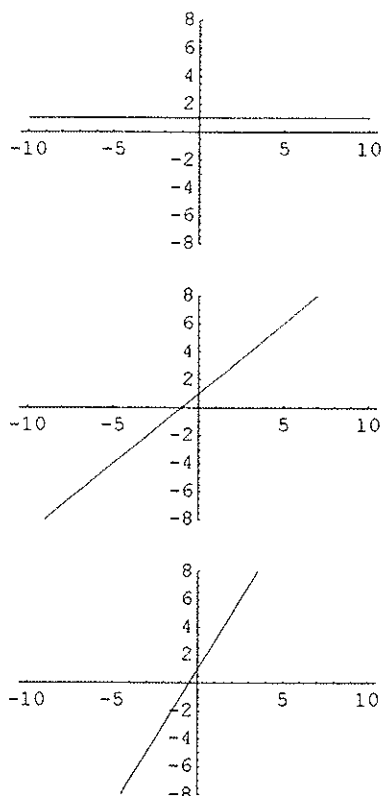
1 - Usaremos a opção `PlotRange` para fixar os limites mínimo e máximo para o eixo dos yy , com vista a podermos visualizar melhor a influência do parâmetro m - poderão obter mais informação sobre esta e outras opções nas páginas 54 a 62, do *Manual do Mathematica para o Professor do Ensino Secundário*.

2 - Para obter uma animação dos gráficos da lista bastará seleccionar um deles e clicar duas vezes.

3 - Os gráficos a seguir representados foram reduzidos.

```
Table[Plot[m x + 1, {x, -10, 10}, PlotRange -> {-8, 8}], {m, -2, 2}]
```





{ - Graphics -, - Graphics -, - Graphics -, - Graphics -, - Graphics - }

O primeiro gráfico corresponde ao gráfico da função definida algebricamente por $mx+1$ com $m=-2$, o segundo com $m=-1$, ..., sendo o último com $m=2$.

Podemos então concluir que:

- quando m é negativo a função é decrescente;
- quando m é zero a função é constante;
- quando m é positivo a função é crescente.

Poderíamos ainda fazer variar m dentro de valores negativos e dentro de valores positivos para podermos concluir que quanto maior for o valor de m mais inclinada é a recta.

Para além do grande número de funções predefinidas existentes no *Mathematica* podemos construir outras funções. Logo a seguir veremos como com uma simples construção o programa calcula a inclinação de uma recta, em graus.

Notamos que:

- O declive de uma recta pode ser obtido pelo quociente entre a diferença das ordenadas e a diferença das abcissas de dois pontos quaisquer de uma recta, em particular pode ser obtido com os pontos $(0, f(0))$ e $(1, f(1))$, e neste caso, $\text{declive} = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} = f(1)-f(0)$.

- Utilizaremos regras de reescrita locais para definir o declive da recta. Para mais informação sobre as mesmas consulte o *Manual do Mathematica para o Professor do Ensino Secundário* nas páginas 71 e 72.

- A inclinação de uma recta é o ângulo positivo que a recta define com o semi-eixo positivo do eixo das abcissas e o declive de uma recta é igual ao valor da tangente da inclinação.

- Definiremos em primeiro lugar uma função declive, que como o próprio nome indica dá o declive de uma recta, em seguida definiremos duas funções - inclinação0 e inclinação. A primeira calcula um valor aproximado do ângulo e a segunda foi definida para os casos em que o ângulo tem amplitude negativa somar 180 graus, uma vez que, por definição, a inclinação de uma recta é positiva.

```

Clear[declive, inclinação0, inclinação]
declive[r_] := (r /. x -> 1) - (r /. x -> 0)

declive[-54]
0

declive[- 1/2 x + 1]
- 1/2

inclinação0[r_] := N[ArcTan[declive[r]] 180 / Pi]
inclinação[r_] :=
  If[inclinação0[r] < 0, (inclinação0[r] + 180) " graus" , inclinação0[r] " graus"]

inclinação[3]
0. graus

inclinação[x + 3]
45. graus

inclinação[-20 x + 3]
92.8624 graus

inclinação0[-20 x + 3]
-87.1376

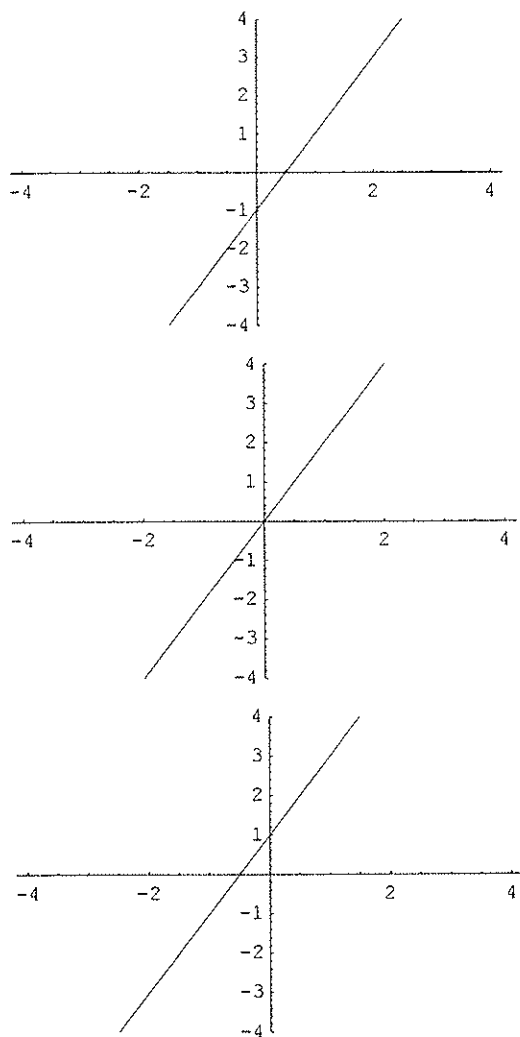
```

Saliente-se que, o argumento desta função é a expressão do segundo membro da equação reduzida de uma recta ($mx+b$).

2.1.2 Ordenada na origem

Para analisarmos o efeito do parâmetro b sobre o traçado da recta podemos proceder de modo análogo ao que fizemos para estudar o efeito do valor de m : vamos construir uma lista de gráficos das funções $2x+b$, com b a variar de -1 a 1, de uma em uma unidade.

```
Table[Plot[2 x + b, {x, -4, 4}, PlotRange -> {-4, 4}], {b, -1, 1}]
```



```
{- Graphics -, - Graphics -, - Graphics -}
```

O primeiro gráfico corresponde a $b=-1$, o segundo a $b=0$ e o terceiro a $b=1$.

Aqui, muito facilmente concluímos que o valor de b corresponde à ordenada do ponto de intersecção com o eixo dos yy e podemos ainda reparar que estas recta são paralelas, facto que advém de terem o mesmo declive.

Vale a pena animar a lista de gráficos anteriores.

2.1.3 Zeros de uma função afim

Como para qualquer função, os zeros de uma função afim obtêm-se resolvendo a equação resultante de igualar a expressão que define a função a zero.

Vejamos os zeros da função que definimos logo no início da secção 2.1 $\rightarrow f(x)=2x+3$.

```
Solve[f[x] = 0]
```

```
{{x -> -3/2}}
```

A saída aparece como uma lista de listas, correspondendo a cada uma das soluções possíveis (neste caso só existe uma solução).

Aproveitando o facto do *Mathematica* executar cálculos simbólicos podemos calcular o zero de qualquer função afim (não horizontal). Neste caso, como segundo argumento da função `Solve` temos de acrescentar a variável em ordem à qual pretendemos que o programa resolva a equação e atenção porque entre a e x temos de deixar um espaço ou então colocar o sinal de \times .

```
g[x_] := a x + b
Solve[g[x] = 0, x]
```

```
{{x -> -b/a}}
```

No caso de termos uma função afim constante (diferente de zero) e pedirmos para calcular os zeros desta função o que obtemos é um conjunto vazio, isto porque não existem soluções como era de esperar.

```
h[x] := 2
Solve[h[x] = 0]
```

```
{}
```

2.1.4 Tabela de valores

Se pretendermos vários pontos de uma recta podemos construir uma tabela de valores de x e respectivas imagens - $f(x)$. Exemplificaremos com a função $f(x)=2x+3$, que utilizámos na secção 2.1 para exemplificar as funções que estamos a estudar.

```
Table[{x, f[x]}, {x, -2, 2}]
{{-2, -1}, {-1, 1}, {0, 3}, {1, 5}, {2, 7}}
```

Utilizando a função `TableForm` aplicada à tabela anterior obtemos a tabela de outra forma.

```
TableForm[%]
-2      -1
-1      1
0       3
1       5
2       7
```

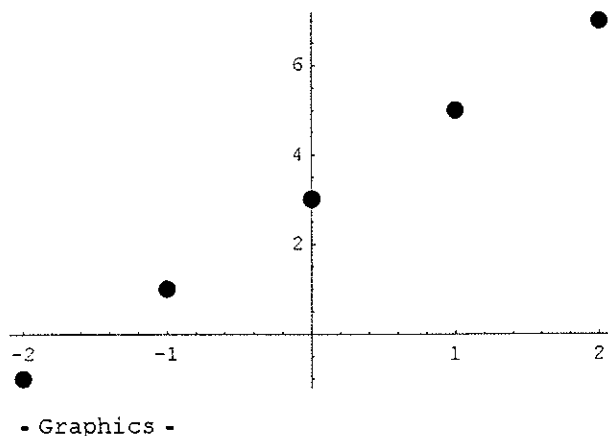
Saliente-se que se pretendermos a imagem de um determinado objecto podemos fazer:

```
f[1/2]
```

```
4
```

Poderemos ainda representar os pontos que temos na tabela representada usando a função ListPlot.

```
ListPlot[%%, PlotStyle -> PointSize[.03]]
```



A opção PlotStyle está descrita no *Manual do Mathematica para o Professor do Ensino Secundário* nas páginas 59 a 61 e serve para definir a dimensão do círculo que representa os pontos.

2.1.5 Alguns exemplos

De seguida serão apresentados três exemplos extraídos de manuais do 10º ano (os dois primeiros) e do 11º ano (o último).

Nos dois primeiros exemplos abordaremos situações quotidianas que podem ser modeladas utilizando funções afins. O último exemplo é um exemplo em que se pode aplicar directamente o programa inclinação construído na secção 2.1.1.

■ Exemplo 1: Conversão da temperaturas - graus Celsius e graus Fahrenheit

A fórmula $F = \frac{9}{5}C + 32$ permite converter graus Celsius em graus Fahrenheit, onde $C \rightarrow$ graus Celsius e $F \rightarrow$ Graus Fahrenheit.

Utilize a fórmula para completar a tabela seguinte:

C	5	10	15
F			

e em seguida construa o gráfico que a tabela sugere.

Recorrendo ao *Mathematica* podemos muito facilmente resolver este exercício. Vamos começar por definir a função em causa e depois construir a tabela e o gráfico pretendidos.

Saliente-se que a tabela tem valores C de 5 a 15 com incremento de 5 unidades.

```
F[G_] := 9 C / 5 + 32
TableForm[Table[{C, F[C]}, {C, 5, 15, 5}]]
5      41
10     50
15     59
```

A tabela não tem a forma dada no enunciado do problema, se quisermos podemos utilizar uma opção da função `TableForm - TableDirections` com os valores `{Row, Column}`. Esta opção utilizada deste modo fará com que os valores de C fiquem na primeira linha.

```
TableForm[%, TableDirections -> {Row, Column}]
5   10  15
41  50  59
```

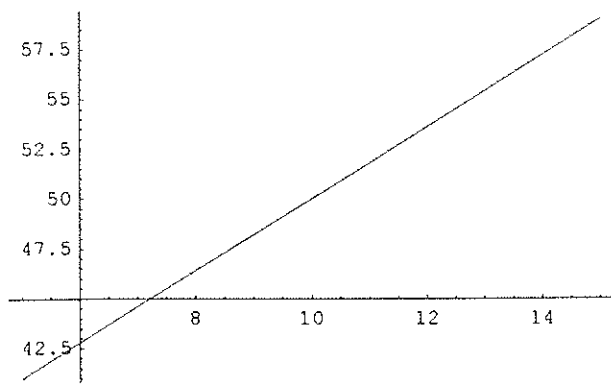
Para construir o gráfico que a tabela sugere vamos utilizar a função `ListPlot`, com a opção `PlotStyle` tomando o valor `PointSize[0,02]`, para que vejam melhor os pontos.

```
ListPlot[%%, PlotStyle -> PointSize[0.02]]
```

```
- Graphics -
```

Obtivemos, como era de esperar, um gráfico com três pontos. Vamos seguidamente, unir estes pontos com a opção `PlotJoined` tomando o valor `True`.

```
ListPlot[%%, PlotJoined -> True]
```



- Graphics -

■ Exemplo 2: Qual dos carros alugar ?

Um jovem estudante de férias chega a uma gare do caminho de ferro de uma vila portuguesa e precisa de utilizar um carro de aluguer para se deslocar a uma aldeia situada no cimo da serra, a 40 Km da estação.

Foi de imediato abordado por um rapazinho que, muito solícito, lhe perguntou qual dos dois carros de aluguer ali estacionados queria ele utilizar. Perante a surpresa do estudante, explicou:

"- Cá, só há esses dois carros, mas levam preços diferentes. O Sr. Mota leva 500\$00 pelo transporte da bagagem e 80\$00 por quilómetro; o Sr. Passos cobra 120\$00 por quilómetro, mas não leva nada pelo transporte da bagagem.

Sabe? As pessoas da aldeia "Ver-o-Rio", que fica a 8 Km daqui, só querem ir no carro do Sr. Passos e os de "Beira-Serra", que fica a pouco mais de 12 Km da estação, dizem que tanto se lhes dá..."

Depois de pensar um pouco, o nosso turista decidiu ir no carro do Sr. Mota, pois precisava poupar dinheiro...

Questões:

Parece-lhe uma escolha acertada? E os habitantes das duas aldeias referidas, sabem ou não gerir as suas despesa de transporte?

Designe por x a extensão do percurso (em Km) e por $f(x)$ e $g(x)$ o custo das viagens (em escudos) com o Sr. Mota e com o Sr. Passos, respectivamente. Construa, num referencial ortogonal, os gráficos das duas funções no intervalo $]0, 50]$ (em Km).

Nota:

Aqui, admitimos que o preço varia continuamente com a distância percorrida, ao contrário do que se passa numa viagem de táxi, em que o preço é fornecido pelo taxímetro em função do número (inteiro) de impulsos.

Resolução:

Algebricamente as funções que dão o custo das viagens com o Sr. Mota o Sr. Passos são, respectivamente, $f(x)=80x+500$ e $g(x)=120x$. Tratam-se de duas funções afins de domínio \mathbb{R}^+ .

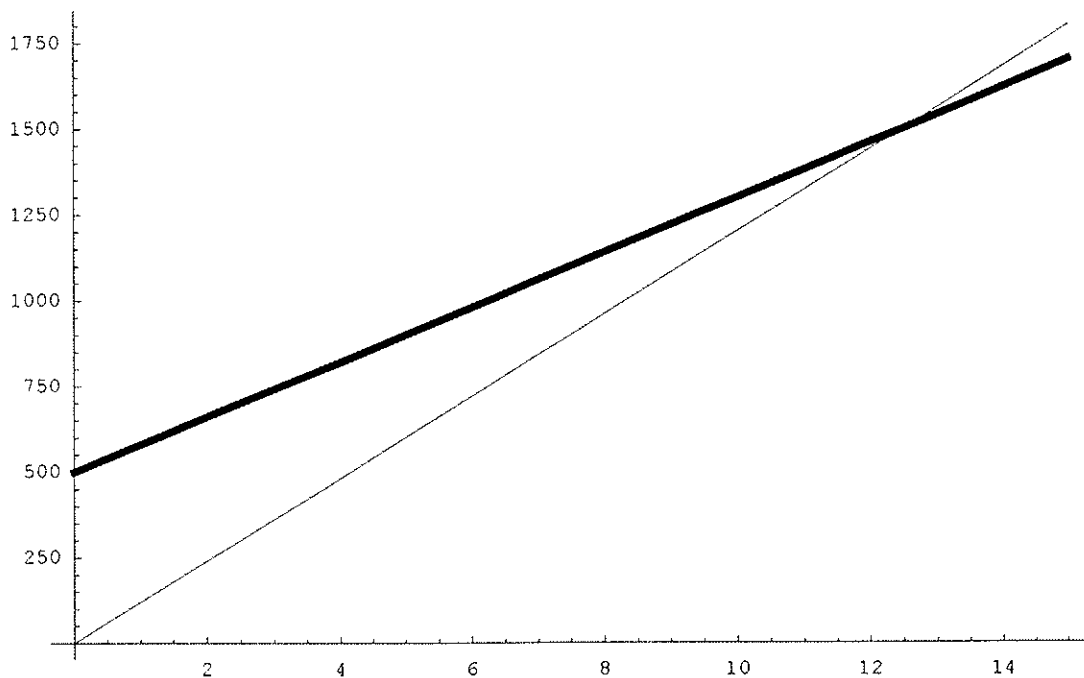
Para podermos responder às questões formuladas vamos construir uma tabela com os valores das funções $f(x)$ e $g(x)$, e seguidamente, construir o gráfico de ambas.

```
Clear[f, g]
f[x_] := 80 x + 500
g[x_] := 120 x
TableForm[Table[{x, f[x], g[x]}, {x, 1, 15}]]
```

1	580	120
2	660	240
3	740	360
4	820	480
5	900	600
6	980	720
7	1060	840
8	1140	960
9	1220	1080
10	1300	1200
11	1380	1320
12	1460	1440
13	1540	1560
14	1620	1680
15	1700	1800

```
Plot[{f[x], g[x]}, {x, 0, 15},
PlotStyle -> {Thickness[0.008], Thickness[0]}, PlotLabel -> "Custo da viagem
com o Sr. Mota (a carregado) e custo da viagem com Sr. Passos"]
```

Custo da viagem com o Sr. Mota (a carregado) e custo da viagem com Sr. Passos



- Graphics -

Para determinarmos o valor de x para o qual as duas funções tomam o mesmo valor podemos resolver a equação $f(x)=g(x)$.

$$\text{solve}[f[x] = g[x]]$$

$$\left\{ \left\{ x \rightarrow \frac{25}{2} \right\} \right\}$$

Pela análise da tabela e/ou gráfico facilmente concluímos que a opção feita pelo jovem turista foi correcta, como correcta é, também, a escolha feita pelos habitantes das duas aldeias referidas, uma vez que até 12,5 Km, o gráfico da função definida por $f(x)=80x+500$ está "acima" do gráfico da função definida por $g(x)=120x$. A partir daquele valor de x verifica-se ao contrário. Daí se pode concluir que qualquer percurso mais longo que 12,5 Km ficará mais barato com o Sr. Mota e que qualquer percurso com distância inferior a 12,5 Km ficará mais barata com o Sr. Passos.

■ Exemplo 3:

Determine a inclinação das rectas:

$$a) y = -2x + 1$$

$$b) y = \sqrt{3}x - 4$$

Para responder a esta questão bastará invocar a função inclinação construída na secção 2.1.1 aplicada às equações reduzidas das rectas.

$$\text{inclinação}[-2x + 1]$$

$$116.565 \text{ graus}$$

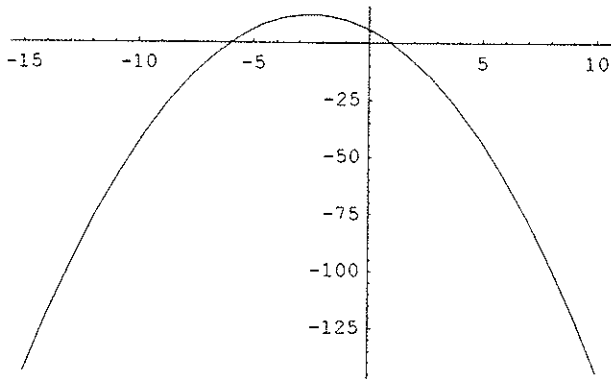
$$\text{inclinação}[\sqrt{3}x - 4]$$

$$60. \text{ graus}$$

2.2 Função quadrática

Chama-se **função quadrática** a toda a função do tipo $f(x)=ax^2+bx+c$ com a , b e c números reais e $a \neq 0$. O gráfico destas funções é uma parábola. Vejamos um exemplo, em que temos o cuidado de apagar qualquer definição associada a f .

```
Clear[f]
f[x_] := -x2 - 5 x + 6
Plot[f[x], {x, -15, 10}]
```

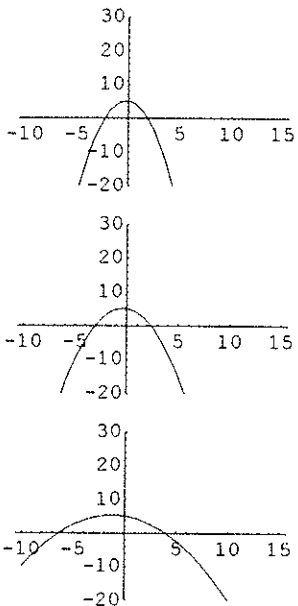


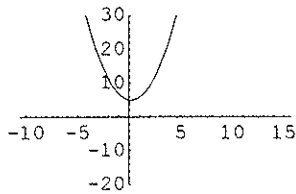
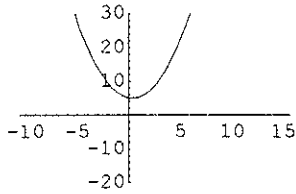
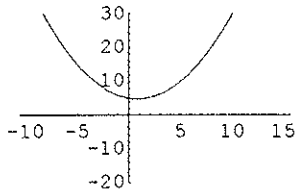
- Graphics -

2.2.1 O sentido da concavidade

O parâmetro a é responsável pela forma da parábola (concavidade voltada para cima / voltada para baixo e abertura da mesma). Vamos analisar através de alguns gráficos esta influência, construindo uma lista de gráficos das funções $ax^2 - 0,5x + 5$ com a a variar de -1,2 a 1,3 e com incremento de meia unidade. Esta lista poderá depois ser animada.

```
Table[Plot[a x2 - 0.5 x + 5, {x, -10, 15}, PlotRange -> {-20, 30}], {a, -1.2, 1.3, 0.5}]
```





{ - Graphics -, - Graphics -, - Graphics -, - Graphics -, - Graphics -, - Graphics - }

O primeiro gráfico corresponde a $a=-1,2$ e o último a $a=1,2$.

Observamos que:

- Quando $a < 0$ a concavidade da parábola fica voltada para baixo e que quanto maior for o valor de a mais "aberta" é a parábola.
- Quando $a > 0$ a concavidade da parábola fica voltada para cima e quanto maior for o valor de a mais "fechada" fica a parábola.

Nota:

O facto de termos colocado a variação do parâmetro a daquela forma - $\{a, -1,2, 1,3, 0,5\}$ - foi para que a não tomasse o valor zero, pois nestas circunstâncias não teríamos uma parábola mas sim uma recta.

2.2.2 Vértice de uma parábola

Um outro elemento que caracteriza as funções quadráticas é o vértice da parábola. Existem várias maneiras de determinar este elemento. De seguida abordaremos uma delas.

Toda a função do tipo $f(x)=ax^2 + bx + c$ se pode escrever da forma $f(x)=a(x-h)^2+k$, com $h=-\frac{b}{2a}$ e $k=-\frac{b^2-4ac}{4a}$ como facilmente se demonstra:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= ax^2 + bx + c \\
 &= a \left(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} \right) \\
 &= a \left(x^2 + \frac{bx}{a} + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} \right) \\
 &= a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \\
 &= a \left(x - \left(-\frac{b}{2a} \right) \right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}
 \end{aligned}$$

Atendendo a que o gráfico de $f(x)=a(x-h)^2+k$ é uma parábola que sofre duas translações: uma horizontal de h unidades para a direita e uma vertical k unidades para cima em relação ao gráfico de $g(x)=ax^2$ (com $h>0$ e $k>0$) cujo vértice está sobre a origem do referencial, podemos então concluir que as coordenadas do vértice da parábola que representa a função f são dadas por $(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a})$.

De seguida será construída uma função que faz o cálculo do vértice de uma parábola, no *Mathematica*.

```
Clear[a, b, c, abcissavértice, ordenadavértice, vértice]
c[p_] := p /. x -> 0
b[p_] := ((p /. x -> 1) - (p /. x -> -1)) / 2
a[p_] := (p /. x -> 1) - b[p] - c[p]
abcissavértice[p_] := -b[p] / (2 a[p]);
ordenadavértice[p_] := -(b[p]^2 - 4 a[p] c[p]) / (4 a[p]);
vértice[p_] := {abcissavértice[p], ordenadavértice[p]}

a[-2 x^2 - 12 x]
-2

b[-2 x^2 - 10]
0

c[-2 x^2 - 12 x - 3]
-3

vértice[x^2 + 8]
{0, 8}
```

Poderemos calcular o vértice da função quadrática definida logo no início da secção 2.2, que por essa ocasião chamámos $f(x)$.

```
vértice[f[x]]
{-5/2, 49/4}
```

Existem outros processos para determinar o vértice de uma parábola. Um deles consiste em determinar o máximo (no caso da respectiva parábola ter a concavidade voltada para baixo) ou o mínimo (no caso da parábola ter a concavidade voltada para cima) da função quadrática - mais à frente quando estudarmos a derivada de uma função abordaremos novamente este assunto.

2.2.3 Zeros de uma função quadrática

Como já referimos para determinar os zeros de qualquer função basta aplicar a função predefinida `Solve` à expressão algébrica que define a função depois de igualada a zero.

Vejamos os zeros da função quadrática $f(x)$ que definimos no início da secção.

```
Solve[f[x] == 0]
{{x -> -6}, {x -> 1}}
```

Este programa permite-nos calcular a forma genérica dos zeros de uma função quadrática:

```
Solve[a x^2 + b x + c == 0, x]
{{x ->  $\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4 a c}}{2 a}$ }, {x ->  $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4 a c}}{2 a}$ }}
```

Pela análise da forma geral dos zeros de uma função quadrática podemos concluir que o número de zeros reais da função depende do valor da expressão que está dentro da raiz ($b^2 - 4ac$), denominada binómio discriminante e que se representa por Δ .

Se $\Delta < 0$ a função não tem zeros reais, isto é, não corta o eixo dos xx .

Se $\Delta = 0$ a função tem um zero real duplo, isto é, é tangente ao eixo dos xx .

Se $\Delta > 0$ a função tem dois zeros reais e distintos, isto é, intersecta o eixo dos xx em dois pontos.

De seguida ilustramos um pequeno programa que quando aplicado à **expressão geral de uma função quadrática** dá-nos o número de zeros da mesma.

```
númerodezeros[p_] := If[(b[p])^2 - 4 a[p] c[p] < 0,
  "A função não tem zeros reais ", If[(b[p])^2 - 4 a[p] c[p] == 0,
    "A função tem um zero real duplo ", "A função tem dois zeros reais "]]

númerodezeros[2 x^2 + 4 x + 2]
A função tem um zero real duplo

númerodezeros[-x^2 - 5 x + 6]
A função tem dois zeros reais

númerodezeros[3 x^2 + 5 x + 66]
A função não tem zeros reais
```

Como já referimos no *Manual do Mathematica para o Professor do Ensino Secundário*, este programa por defeito trabalha no conjunto dos números complexos, daí que quando pedimos os zeros de uma função quadrática que não tenha zeros reais o programa dá como resposta as raízes complexas da função, como se pode comprovar no exemplo seguinte.

```
Solve[3 x^2 + 5 x + 10 = 0]
```

```
{{x -> 1/6 (-5 - i sqrt(95))}, {x -> 1/6 (-5 + i sqrt(95))}}
```

2.2.4 Eixo de simetria

Dizemos que uma recta é um eixo de simetria de uma figura se, ao dobrarmos a figura por essa recta, as duas partes resultantes da divisão coincidirem.

As funções quadráticas, atendendo à sua representação gráfica têm como eixo de simetria a recta de equação $x = -\frac{b}{2a}$ (x =abscissa do vértice).

2.2.5 Em síntese

De seguida, ilustraremos um programa que quando aplicado a uma função quadrática dá as suas principais características: quantos e quais os zeros, vértice e eixo de simetria e ainda uma representação gráfica.

```
Clear[Característicasdafunçãoquadrática]
Característicasdafunçãoquadrática[p_] :=
{Print["          Características da função quadrática y= ", p];
  If[(b[p])^2 - 4 a[p] c[p] < 0,
    Print["", númerodezeros[p] ],
    Print["", númerodezeros[p] , Flatten[Solve[p = 0]]]
  ];
Print["O seu vértice tem as coordenadas: ",
  vértice[p]];
Print["O seu eixo de simetria é a recta de equação: x= ",
  xx = -b[p] / (2 a[p])];
Print["O seu gráfico é:"]
Plot[p, {x, -20, 20}]}
```

Exemplificaremos com as funções quadráticas definidas pelas expressões $-x^2-5x+6$, $x^2-10x+25$ e x^2+1 .

Características da função quadrática $[-x^2 - 5x + 6]$

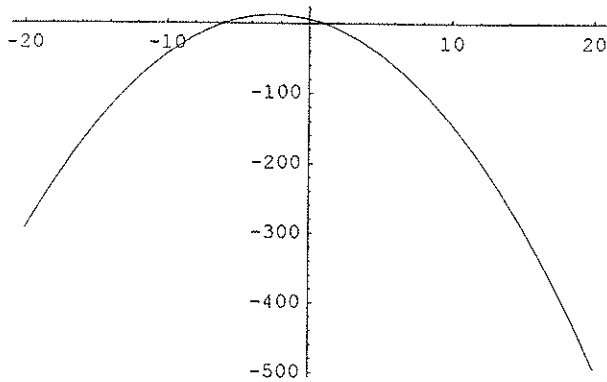
Características da função quadrática $y = 6 - 5x - x^2$

A função tem dois zeros reais $(x \rightarrow -6, x \rightarrow 1)$

O seu vértice tem as coordenadas: $\left\{-\frac{5}{2}, \frac{49}{4}\right\}$

O seu eixo de simetria é a recta de equação: $x = -\frac{5}{2}$

O seu gráfico é:



{Null (- Graphics -)}

Características da função quadrática $[x^2 - 10x + 25]$

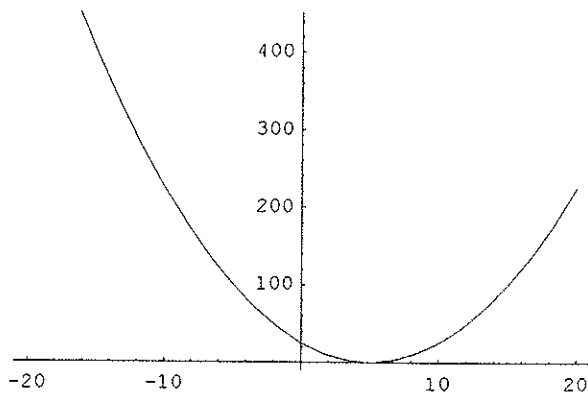
Características da função quadrática $y = 25 - 10x + x^2$

A função tem um zero real duplo $(x \rightarrow 5, x \rightarrow 5)$

O seu vértice tem as coordenadas: $(5, 0)$

O seu eixo de simetria é a recta de equação: $x = 5$

O seu gráfico é:



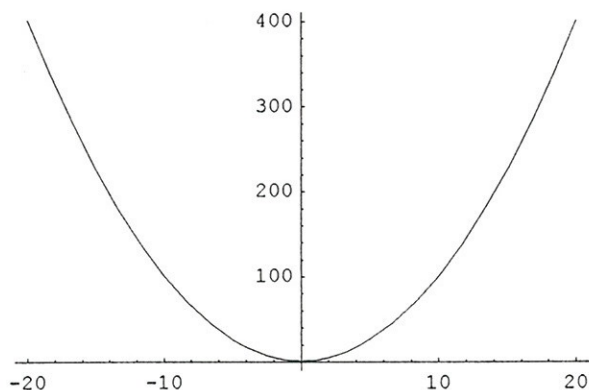
{Null (- Graphics -)}

Características da função quadrática $[x^2 + 1]$ Características da função quadrática $y = 1 + x^2$

A função não tem zeros reais

O seu vértice tem as coordenadas: $(0, 1)$ O seu eixo de simetria é a recta de equação: $x = 0$

O seu gráfico é:



{Null (- Graphics -)}

Notas:

1 - A função Flatten permite "aplanar" uma lista de listas, isto é, retira as chavetas que se encontram dentro da lista principal, daí termos usado esta função aplicada à função Solve, no programa anterior, com vista a eliminarmos as chavetas de cada solução da equação (que por defeito a função Solve dá).

2 - Quando pretendemos escrever alguma mensagem juntamente com uma computação, podemos utilizar a função predefinida Print, colocando como argumento a mensagem que queremos dentro de aspas. Para mais informação sobre esta função poderá consultar a referência bibliográfica número 9, na página 59.

2.2.6 Alguns exemplos

De seguida apresentamos dois exercícios extraídos de manuais do 10º ano de escolaridade relacionados com o estudo de funções quadráticas.

■ Exemplo 4':

Do alto de uma falésia com 40 m de altura relativamente ao nível médio das águas do mar, lança-se uma pedra verticalmente, de baixo para cima, com uma velocidade inicial de 35 m/s.

Sabe-se da Física, que quando a altura h (em metros) a que se encontra do solo t segundos após o lançamento ($t \geq 0$) é dada pela expressão:

$$h(t) = 35t - 5t^2$$

- b) Determina a altura a que se encontra a pedra ao fim de 3 e de 7,5 segundos e explique os valores encontrados.
- c) Ao fim de quantos segundos passa novamente ao nível do solo?
- d) Recorra a uma calculadora para elaborar um quadro de valores e determinar a altura máxima que a pedra atinge.
- e) Qual é o intervalo de tempo durante o qual a pedra sobe?
- f) Ao fim de quanto tempo é que a pedra cai ao mar?

Nota:

Este exercício começa pela alínea b), porque a alínea a) do mesmo não tem interesse no âmbito deste trabalho.

Alínea b):

Vamos definir a função no *Mathematica*:

```
Clear[h]
h[t_] := 35 t - 5 t^2

h[3]
60

h[7.5]
-18.75
```

Ao fim de 3 segundos a pedra encontra-se 60 metros acima do solo e ao fim de 7,5 segundos a pedra encontra-se 18,75 metros abaixo do local de lançamento .

Alínea c):

A pedra encontra-se do novo ao nível do solo quando a altura for novamente nula, isto é, quando $h(t)=0$, no programa onde estamos a trabalhar basta fazermos:

```
Solve[h[t] == 0]
{{t -> 0}, {t -> 7}}
```

Ou seja, ao fim de 7 segundos, a pedra volta a passar ao nível do solo (o tempo $t=0$ segundos corresponde ao instante em que foi lançada a pedra).

Alinea d):

Vamos construir uma tabela de valores da função em questão com o tempo a variar de 0 a 15 segundos.

```
TableForm[Table[{t, h[t]}, {t, 0, 15}]]
```

0	0
1	30
2	50
3	60
4	60
5	50
6	30
7	0
8	-40
9	-90
10	-150
11	-220
12	-300
13	-390
14	-490
15	-600

Verificamos que, no intervalo de tempo compreendido entre os 3 e 4 segundos, a bola está a 60 metros do ponto de lançamento.

Ora, uma vez que a bola não fica parada no ar, estudaremos o comportamento da função no referido intervalo, mas agora com o incremento de 0,1.

```
TableForm[Table[{t, h[t]}, {t, 3, 4, 0.1}]]
```

3	60
3.1	60.45
3.2	60.8
3.3	61.05
3.4	61.2
3.5	61.25
3.6	61.2
3.7	61.05
3.8	60.8
3.9	60.45
4.	60.

A observação das tabelas permite concluir, atendendo à simetria dos valores em relação a 3,5, que este número é um maximizante da função e que, portanto, a maior altura que a pedra pode atingir é 61,25 metros.

Alinea e):

Atendendo aos resultados anteriores, concluímos que a pedra sobe no intervalo]0;3,5[.

Alínea f):

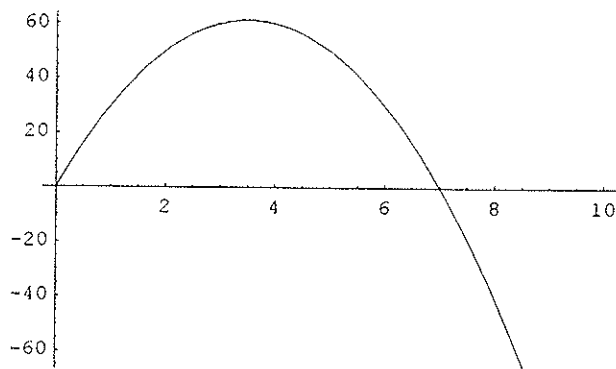
A pedra atinge o mar quando $h(t)=-40$, isto é, quando $35t-5t^2=-40$, vamos então resolver esta equação:

```
Solve[35 t - 5 t^2 == -40]
{{t -> -1}, {t -> 8}}
```

-1 não é solução da equação no contexto deste problema ($t \geq 0$), logo a pedra cai ao mar 8 segundos após o seu lançamento.

Apesar de não ter sido solicitado vamos construir o gráfico da função h , aproveitando assim, para confirmar alguns dos valores anteriores.

```
Plot[h[x], {x, 0, 10}]
```



- Graphics -

Poderíamos também aproveitar o programa *Característicasdeumafunçãoquadrática* que construímos na secção anterior para verificar os resultados.

```
Característicasdafunçãoquadrática[h[x]]
```

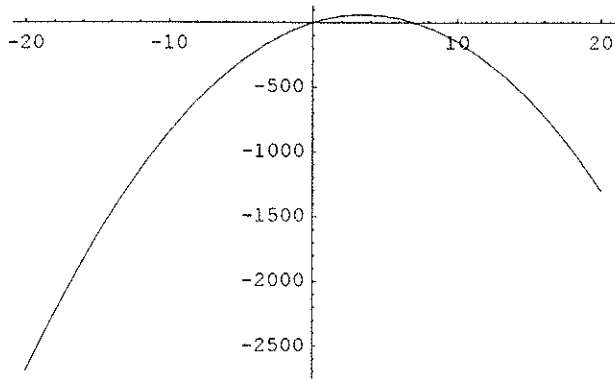
```
Características da função quadrática  $y = 35x - 5x^2$ 
```

```
A função tem dois zeros reais {x -> 0, x -> 7}
```

```
O seu vértice tem as coordenadas: {7/2, 245/4}
```

```
O seu eixo de simetria é a recta de equação:  $x = 7/2$ 
```

```
O seu gráfico é:
```



{Null (- Graphics -)}

■ Exemplo 5: O clube

Um clube de futebol da aldeia, fundado em 1970, tem uma "massa" associativa estimada pela função

$$M(t) = t^2 + 22t + 240$$

onde $M(t)$ é o número de sócios do clube no tempo t , e t o tempo, em anos, desde 1970.

Faça uma previsão para o ano 2000 no que respeita ao número de sócios do clube.

Usando o *Mathematica*, para responder a esta questão bastará definir a função $M(t)$ e depois aplicar M a 30, visto que o ano inicial foi 1970.

```
Clear[M]
M[t_] := t^2 + 22 t + 240

M[30]

1800
```

É de esperar que no ano 2000 o clube tenha 1800 sócios.

2.3 Função módulo

O módulo ou valor absoluto de um número x representa-se por $|x|$ e é definido do seguinte modo:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

No *Mathematica*, o módulo ou valor absoluto representa-se pela função predefinida `Abs`. Usando esta função podemos comprovar a definição anterior avaliando, por exemplo, módulo de 2 e módulo de -2.

```
Abs [2]
```

```
2
```

```
Abs [-2]
```

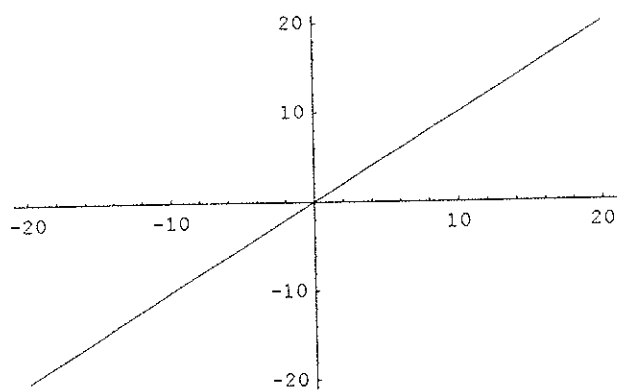
```
2
```

A função, real de variável real, $f: x \rightarrow y = |x|$ é chamada a **função módulo** ou valor absoluto.

Como será o gráfico da função f ?

Como acima referimos o módulo de um número positivo ou nulo é o próprio número. Começemos por traçar o gráfico da função $g(x)=x$.

```
Plot[x, {x, -20, 20}]
```



```
- Graphics -
```

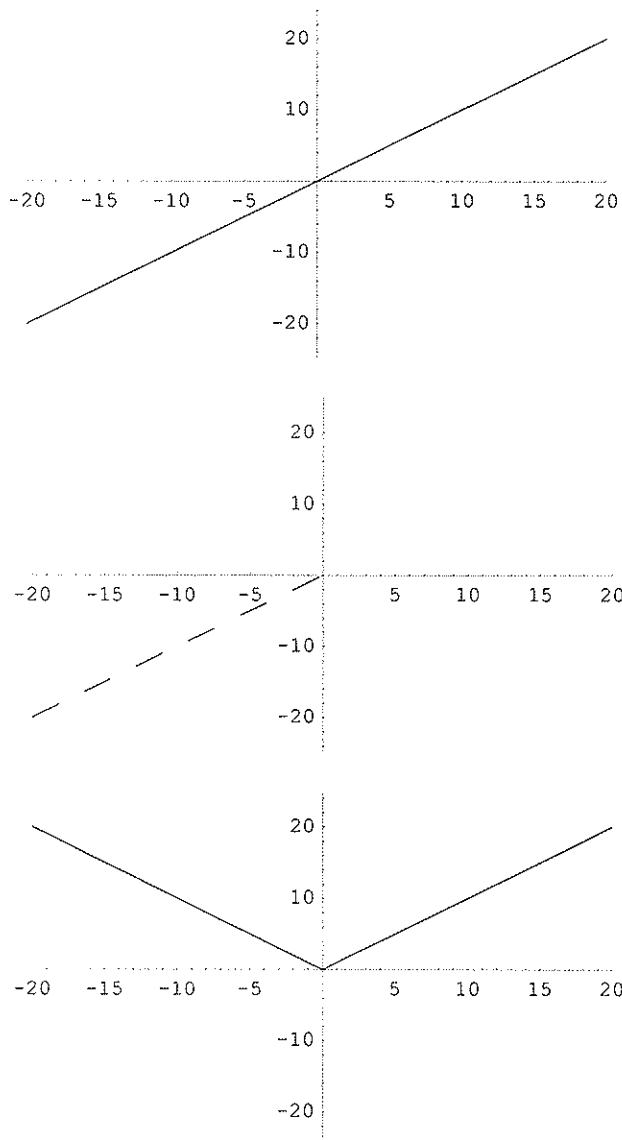
Como as duas funções f e g são definidas pela mesma expressão quando $x \geq 0$, o gráfico de f coincide com o gráfico de g para valores não negativos de x .

Para valores negativos de x , o gráfico de f é simétrico do gráfico de g em relação ao eixo das abcissas.

De seguida construiremos uma tabela com três gráficos, sendo o primeiro o gráfico da função $g(x)=x$, no intervalo $[-20,20]$, o segundo o gráfico de $g(x)$ a tracejado, mas apenas para valores negativos - $[-20,0[$ e por fim o gráfico da função módulo de x , no intervalo $[-20,20]$.

Lembramos que animando este conjunto de objectos gráficos podemos visualizar melhor a construção pretendida.

```
Table[{Plot[x, {x, -20, 20}, PlotRange -> {{-20, 20}, {-25, 25}}],
Plot[x, {x, -20, 0}, PlotRange -> {{-20, 20}, {-25, 25}}, PlotStyle -> Dashing[{0.05}]
Plot[Abs[x], {x, -20, 20}, PlotRange -> {{-20, 20}, {-25, 25}}]}
```



```
{- Graphics -, (- Graphics -) (- Graphics -)}
```

Animando estes gráficos vemos que de facto o gráfico de $|x|$ é o gráfico de $g(x)=x$ para valores não negativos e é o simétrico de $g(x)=x$, relativamente ao eixo dos xx , para valores negativos de x .

Em cada gráfico tivemos o cuidado de fixar os valores mínimo e máximo para cada um dos eixos de modo a que se possa visualizar melhor o pretendido.

Uma função com módulo(s) pode ser definida algebricamente através de uma função por ramos. Consequentemente, no *Mathematica*, podemos definir as funções deste tipo usando a técnica descrita nas páginas 72 e 73 do *Manual do Mathematica para o Professor do Ensino Secundário*.

2.3.1 Gráficos de funções $|f(x)|$ e $f(|x|)$

2.3.1.1 Gráfico do módulo da variável dependente - $|f(x)|$

Consideremos duas funções: $g(x)=4x+5$ e $h(x)=x^2-3x-4$ (a primeira é uma função afim e a segunda uma função quadrática) e vamos defini-las no *Mathematica*.

```
Clear[g, h]
g[x_] := 4 x + 5
h[x_] := x^2 - 3 x - 4
```

De seguida chamaremos de:

- a* ao gráfico da função *g*;
- b* ao gráfico da função *h*;
- c* ao gráfico da função módulo de *g* e
- d* ao gráfico da função módulo de *h*.

Mais tarde podemos visualizar estes quatro gráficos na forma de uma matriz, utilizando para tal a função `Show` e `GraphicsArray` (que estão descritas nas páginas 47 a 53 do *Manual do Mathematica para o Professor do Ensino Secundário*).

```
Clear[a, b, c, d]
a = Plot[g[x], {x, -10, 10},
  PlotRange -> {{-10, 10}, {-40, 40}}, DisplayFunction -> Identity]
- Graphics -

b = Plot[h[x], {x, -6, 6}, PlotRange -> {{-6, 6}, {-10, 20}}, DisplayFunction -> Identity]
- Graphics -

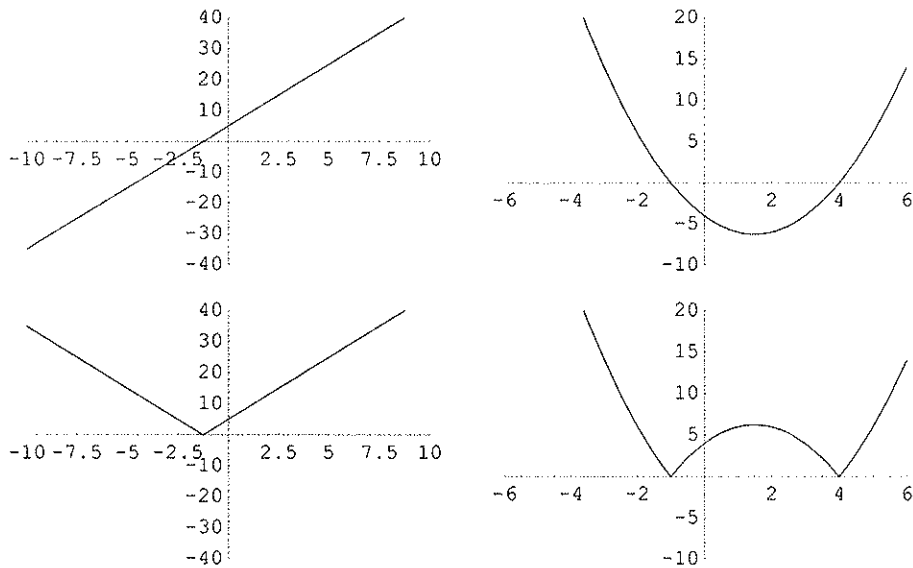
c = Plot[Abs[g[x]], {x, -10, 10},
  PlotRange -> {{-10, 10}, {-40, 40}}, DisplayFunction -> Identity]
- Graphics -

d = Plot[Abs[h[x]], {x, -6, 6},
  PlotRange -> {{-6, 6}, {-10, 20}}, DisplayFunction -> Identity]
- Graphics -
```

Nota:

Utilizámos a opção `DisplayFunction` com o valor `Identity` em cada `Plot` para que os gráficos não fossem mostrados individualmente, uma vez que isso não tem interesse aqui.

```
Show[GraphicsArray[{{a, b}, {c, d}}]]
```



```
- GraphicsArray -
```

Pela análise dos gráficos anteriores vemos que o gráfico do módulo da variável dependente de uma função obtém-se a partir do gráfico da função mantendo os pontos de ordenada positiva ou nula e transformando os pontos de ordenada negativa por uma simetria em relação ao eixo dos xx .

Em geral, o gráfico do módulo da variável dependente está "acima" ou "sobre" o eixo dos xx , isto é, é sempre não negativo, como vimos com os exemplos anteriores.

2.3.1.2 Gráfico do módulo da variável independente - $f(|x|)$

Para fazermos o estudo deste tipo de gráficos vamos utilizar um procedimento semelhante ao anterior, chamando agora de s o gráfico da função $g(|x|)=4|x|+5$ e t o gráfico da função $h(|x|)=|x|^2-3|x|-4$

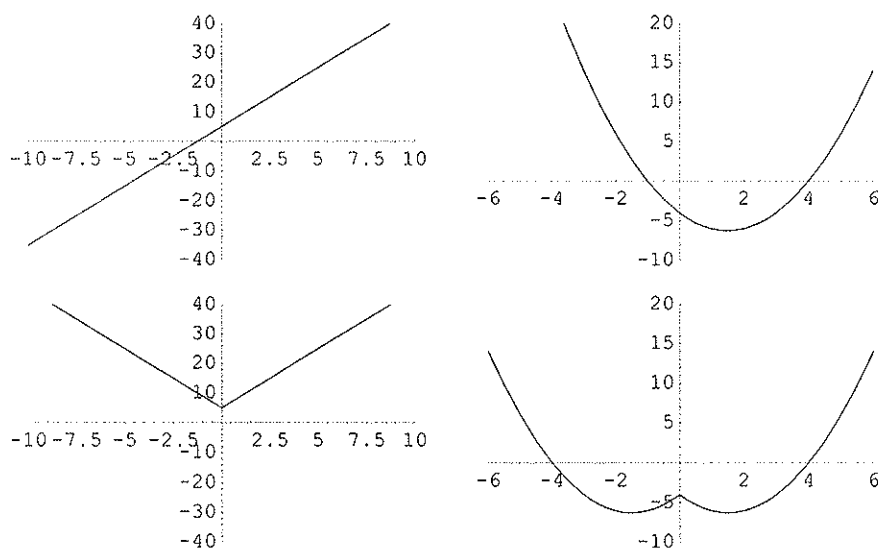
```
Clear[s, t]
s = Plot[g[Abs[x]], {x, -10, 10},
  PlotRange -> {{-10, 10}, {-40, 40}}, DisplayFunction -> Identity]
```

```
- Graphics -
```

```
t = Plot[h[Abs[x]], {x, -6, 6},
  PlotRange -> {{-6, 6}, {-10, 20}}, DisplayFunction -> Identity]
```

```
- Graphics -
```

```
Show[GraphicsArray[{{a, b}, {s, t}}]]
```



```
- GraphicsArray -
```

O gráfico da função módulo da variável independente obtém-se do gráfico da própria função, mantendo os pontos de abcissa positiva ou nula e transformando os pontos de abcissa negativa de modo a que pontos de abcissas simétricas sejam simétricos em relação ao eixo dos yy .

Saliente-se que, para qualquer função $f(x)$ a correspondente função $f(|x|)$ é sempre uma função par, uma vez que, atendendo ao que se acabou de dizer, o seu gráfico é simétrico em relação ao eixo dos yy .

Relembramos que uma função $f(x)$ é par se $\forall x \in D_f$, $f(x)=f(-x)$, onde D_f representa o domínio da função f .

2.3.2 Equações com módulos

Como seria de esperar, este programa permite resolver equações onde figurem um ou mais módulos, recorrendo à função `Solve`.

De seguida ilustramos com um exemplo onde figuram dois módulos.

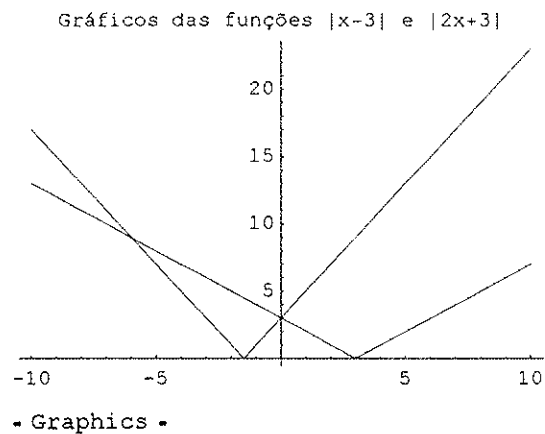
```
Solve[Abs[x - 3] == Abs[2 x + 3]]
```

```
Solve::ifun : Inverse functions are being used by Solve, so some solutions may not be found.
```

```
{{x -> -6}, {x -> 0}}
```

Para podermos verificar se temos ou não todas as soluções da equação, vamos representar no mesmo referencial as funções definidas por cada membro da equação.

```
Plot[{Abs[x - 3], Abs[2 x + 3]}, {x, -10, 10},
PlotLabel -> "Gráficos das funções |x-3| e |2x+3|"]
```



Pela análise dos gráficos anteriores verificamos que as soluções da equação $|x-3|=|2x+3|$ são, de facto, $x=-6 \vee x=0$.

2.3.3 Alguns exemplos

Apresentamos de seguida alguns exemplos retirados de manuais do 10º de escolaridade - ano em que se abordam as funções com módulos.

■ Exemplo 6:

Calcule:

a) $|2-7|-|-2+7|$

b) $|1,3-5,2| - 2|-0,5+1|$

Para resolver este exercício com o programa *Mathematica* necessitamos de recorrer à função Abs.

Alínea a):

```
Abs[2 - 7] - Abs[-2 + 7]
```

0

Alínea b):

```
Abs[1.3 - 5.2] - 2 Abs[-0.5 + 1]
```

2.9

■ Exemplo 7:

Represente, usando a calculadora gráfica, cada uma das seguintes funções:

a) $f_4(x) = -2 + |x + 4|$

b) $f_5(x) = 2|x|$

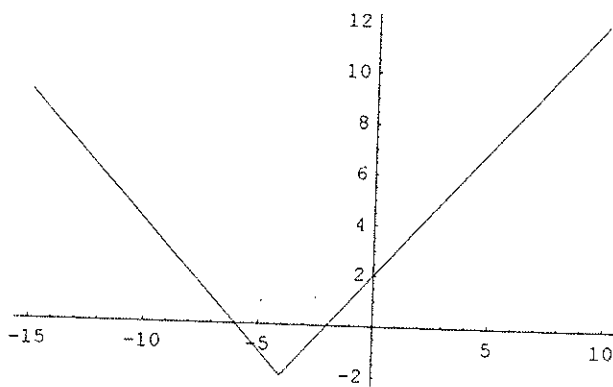
Notas:

1 - Aqui, neste exercício, o *Mathematica* pode substituir a calculadora gráfica utilizando a função que constrói gráficos - Plot.

2 - Este exercício tinha mais quatro funções para representar graficamente. No entanto, achamos que estas que escolhemos são suficientes para elucidar o pretendido.

Alínea a):

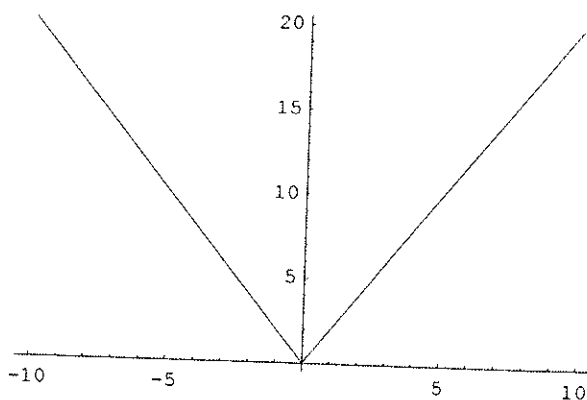
```
Plot[-2 + Abs[x + 4], {x, -15, 10}]
```



- Graphics -

Alínea b):

```
Plot[2 Abs[x], {x, -10, 10}]
```



- Graphics -

■ Exemplo 8:

Considere as funções reais de variável real definidas por:

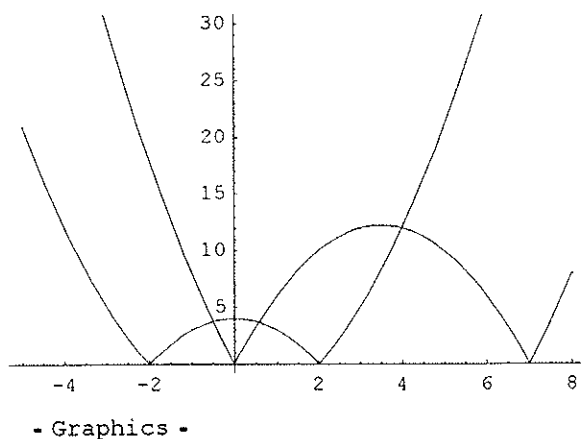
$$f(x) = |x^2 - 7x| \text{ e } g(x) = |x^2 - 4|$$

a) Represente geometricamente, no mesmo referencial, as funções dadas.

b) Resolva a condição $|x^2 - 7x| = |x^2 - 4|$ e confirme, através dos gráficos desenhados na alínea anterior, as soluções obtidas.

Alínea a):

```
Clear[f, g]
f[x_] := Abs[x^2 - 7 x]
g[x_] := Abs[x^2 - 4]
Plot[{f[x], g[x]}, {x, -5, 8}]
```



Alínea b):

```
Solve[f[x] == g[x]]
```

Solve::ifun : Inverse functions are being used by Solve, so some solutions may not be found.

```
{{x -> -1/2}, {x -> 4/7}, {x -> 4}}
```

Através dos gráficos concluímos que de facto a equação tem apenas as três soluções indicadas.

2.4 Função polinomial

Chama-se **função polinomial** a toda a função do tipo:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$

em que $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ são números reais e $n \in \mathbb{N}_0$.

Chama-se **polinómio** de grau n na variável x a toda a expressão do tipo $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ (ou equivalentemente, $\sum_{i=0}^n a_i x^{n-i}$) em que as constantes $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ e n estão nas condições referidas anteriormente e além disso $a_0 \neq 0$.

$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ são os coeficientes do polinómio, n é o seu grau e o coeficiente a_n diz-se o termo independente.

O *Mathematica* disponibiliza a função booleana `PolynomialQ` que permite ver se uma dada expressão representa um polinómio ou não. A invocação desta função pode ser feita aplicando-a à expressão que define o polinómio quando na expressão figura apenas uma letra. No caso de figurar mais do que uma letra no polinómio teremos de colocar como segundo argumento da função qual das letras queremos que seja a variável do polinómio.

```
PolynomialQ[4 x^3 + 5 x]
```

```
True
```

```
PolynomialQ[ $\sqrt[3]{x}$ ]
```

```
False
```

```
PolynomialQ[x/y, x]
```

```
True
```

```
PolynomialQ[x/y, y]
```

```
False
```

A função `Coefficient` permite-nos obter o(s) coeficiente(s) de determinada(s) potência(s) no polinómio. Se desejarmos um coeficiente colocamos como argumentos da função `Coefficient` o polinómio e a potência da qual queremos o coeficiente, no caso de pretendermos mais de um coeficiente colocamos as potências dos coeficientes desejados dentro de chavetas.

O termo independente do polinómio é obtido da forma `Coefficient[polinómio, variável, 0]`.

Exemplificando consideremos o polinómio $r(x) = 10x^5 - \frac{x^3}{2} + \sqrt{2}x^2 + 5x - 9$.

```
r[x_] := 10 x^5 - x^3 / 2 +  $\sqrt{2}$  x^2 + 5 x - 9
```

```
Coefficient[r[x], x]
```

```
5
```

```
Coefficient[r[x], {x^5, x^4, x^2}]
```

```
{10, 0,  $\sqrt{2}$ }
```

```
Coefficient[r[x], x, 0]
```

```
-9
```

Existem ainda a função `CoefficientList` que dá todos os coeficientes de um polinómio, começando pelo coeficiente do termo independente, seguindo-se o coeficiente do termo de primeiro grau e assim sucessivamente.

```
CoefficientList[r[x], x]
```

```
{-9, 5,  $\sqrt{2}$ ,  $-\frac{1}{2}$ , 0, 10}
```

2.4.1 Operações com funções polinomiais

Nas subsecções seguintes veremos como adicionar, subtrair, multiplicar, factorizar e dividir funções polinomiais.

2.4.1.1 Adição e subtracção de funções polinomiais

Para adicionar duas ou mais funções polinomiais aplicam-se as propriedades comutativa e associativa da adição e reduzem-se os termos semelhantes, na subtracção adiciona-se ao aditivo o simétrico do subtractivo.

O *Mathematica* conhece estas regras e faz estas operações automaticamente, como se pode observar nos exemplos seguintes:

```
Clear[A, B]
A[x_] := 60 - 104 x + 67 x^2 - 19 x^3 + 2 x^4
B[x_] := 96 - 200 x + 116 x^2 - 20 x^3
A[x] + B[x]
156 - 304 x + 183 x^2 - 39 x^3 + 2 x^4

A[x] - B[x]
-36 + 96 x - 49 x^2 + x^3 + 2 x^4
```

2.4.1.2 Multiplicação e factorização de funções polinomiais

Para calcular o produto de duas (ou mais) funções polinomiais aplica-se a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição algébrica e, em seguida, adicionam-se os termos semelhantes.

O *Mathematica* para efectuar o produto de duas (ou mais) funções polinomiais precisa que utilizemos a função predefinida `Expand`. Esta última função aplica a propriedade distributiva e em seguida reduz os termos semelhantes, apresentando o polinómio resultante ordenado segundo potências crescentes da variável do mesmo.

Se mandarmos avaliar $A(x)*B(x)$ obtemos como Output uma expressão constituída por dois factores - as expressões que definem as funções polinomiais $A(x)$ e $B(x)$, como veremos de seguida.

```
A[x] * B[x]
```

```
(96 - 200 x + 116 x^2 - 20 x^3) (60 - 104 x + 67 x^2 - 19 x^3 + 2 x^4)
```

```
Expand[A[x] * B[x]]
```

```
5760 - 21984 x + 34192 x^2 - 28488 x^3 + 13844 x^4 - 3944 x^5 + 612 x^6 - 40 x^7
```

Uma outra função disponibilizada pelo *Mathematica*, com muita utilidade nas funções polinomiais é a função `Factor` que permite factorizar um polinómio (quando é possível).

```
Factor[%]
```

```
-4 (-3 + x)^2 (-2 + x)^3 (-5 + 2 x) (-4 + 5 x)
```

Ainda relacionada com a função `Factor` existem outras duas funções que poderão ser úteis - a função `FactorList` e a função `FactorTerms`.

A primeira dá uma lista de listas, onde cada lista é constituída por um dos factores e respectivo expoente.

A função `FactorTerms` põe em evidência apenas factores numéricos, caso existam.

```
FactorList[%]
```

```
{{-4, 1}, {-3 + x, 2}, {-2 + x, 3}, {-5 + 2 x, 1}, {-4 + 5 x, 1}}
```

```
FactorTerms[%]
```

```
-4 (-1440 + 5496 x - 8548 x^2 + 7122 x^3 - 3461 x^4 + 986 x^5 - 153 x^6 + 10 x^7)
```

2.4.1.3 Divisão de funções polinomiais

Para obter o quociente e o resto de uma divisão entre duas funções polinomiais dispomos das funções `PolynomialQuotient` e `PolynomialRemainder`, respectivamente.

Estas funções são invocadas do seguinte modo: `PolynomialQuotient` (ou `PolynomialRemainder`)[dividendo(x), d(x),x], onde dividendo(x) é a função polinomial dividendo, d(x) é a função divisor e x a variável das referidas funções.

De seguida exemplificaremos o que dissemos com as funções dividendo(x) = $x^4 - 3x^2 + x - 3$ e d(x)=x-2.

```
Clear[dividendo, d]
```

```
dividendo[x_] := x^4 - 3 x^2 + x - 3
```

```
d[x_] := x - 2
```

```
PolynomialQuotient[dividendo[x], d[x], x]
```

```
3 + x + 2 x^2 + x^3
```

```
PolynomialRemainder[dividendo[x], d[x], x]
```

```
3
```

Facilmente se comprova os resultados obtidos anteriormente, aplicando a identidade fundamental da divisão (dividendo=divisor×quociente+resto).

```
Expand[d[x] * (3 + x + 2 x^2 + x^3) + 3]
-3 + x - 3 x^2 + x^4
```

2.4.2 Valor numérico de uma função polinomial

Chama-se valor numérico de uma função polinomial $P(x)$, para $x=\alpha$, ao número que se obtém concretizando x por α .

Utilizando a função polinomial dividendo(x) da subsecção anterior vamos ver o seu valor numérico para $x=2$.

```
dividendo[2]
3
```

Como se verificou, o valor numérico deste polinómio para $x=2$ é 3, que representa exactamente o resto da divisão da função polinomial dividendo(x) por $x-2$. Este resultado não apareceu por acaso e conduz-nos ao Teorema do resto.

2.4.3 Teorema do resto

De seguida enunciaremos e demonstraremos o Teorema referido anteriormente.

O resto de uma divisão por uma função polinomial $P(x)$ por uma função polinomial $Q(x)=x-\alpha$ é o valor numérico da função polinomial $P(x)$ para $x=\alpha$.

Demonstração:

Seja $P(x)$ uma função polinomial e $Q(x)$ e R , respectivamente, a função quociente e o resto da divisão de $P(x)$ por $x-\alpha$.

Tem-se por definição de divisão inteira:

$$P(x)=(x-\alpha).Q(x)+R$$

Substituindo x por α , vem:

$$P(\alpha)=(\alpha-\alpha).Q(\alpha)+R, \text{ que é equivalente a}$$

$$P(\alpha)=0.Q(\alpha)+R$$

Logo,

$$P(\alpha)=R$$

Este Teorema é muito utilizado para averiguar se uma função polinomial é divisível ou não por uma função polinomial de grau um sem termos de efectuar a divisão, como veremos no exemplo 14.

2.4.4 Zeros de uma função polinomial

Um número α é zero ou raiz de uma função polinomial se o valor numérico de $P(x)$ para $x=\alpha$ é zero, isto é se $P(\alpha)=0$.

Exemplificando, no *Mathematica*, consideremos a função polinomial $P(x)=x^5 - 2x - 1$ e vamos averiguar se -1 e 0 são raízes desta equação.

```
Clear[P]
P[x_] := x^5 - 2 x - 1
P[-1]

0

P[0]

-1
```

Logo, -1 é zero da função polinomial $P(x)$ e 0 não é zero de $P(x)$.

Poderíamos calcular os zeros de $P(x)$ do mesmo modo que fizemos com as funções afim, quadrática e módulo - utilizando a função *Solve*.

```
Solve[P[x] = 0]
```

$$\left\{ \{x \rightarrow -1\}, \left\{ x \rightarrow \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \sqrt{-\frac{5}{12} - \frac{14}{3} \left(\frac{2}{65 + 3\sqrt{1689}} \right)^{1/3} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} (65 + 3\sqrt{1689}) \right)^{1/3}} \right. \right.$$

$$\left. \frac{1}{2} \sqrt{\left(-\frac{5}{6} + \frac{14}{3} \left(\frac{2}{65 + 3\sqrt{1689}} \right)^{1/3} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} (65 + 3\sqrt{1689}) \right)^{1/3} \right.} \right.$$

$$\left. \left. \frac{5}{4 \sqrt{-\frac{5}{12} - \frac{14}{3} \left(\frac{2}{65 + 3\sqrt{1689}} \right)^{1/3} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} (65 + 3\sqrt{1689}) \right)^{1/3}}} \right\} \right\},$$

$$\left\{ x \rightarrow \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \sqrt{-\frac{5}{12} - \frac{14}{3} \left(\frac{2}{65 + 3\sqrt{1689}} \right)^{1/3} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} (65 + 3\sqrt{1689}) \right)^{1/3}} \right. +$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{\left(-\frac{5}{6} + \frac{14}{3} \left(\frac{2}{65+3\sqrt{1689}} \right)^{1/3} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} (65+3\sqrt{1689}) \right)^{1/3} - \frac{5}{4 \sqrt{-\frac{5}{12} - \frac{14}{3} \left(\frac{2}{65+3\sqrt{1689}} \right)^{1/3} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} (65+3\sqrt{1689}) \right)^{1/3}}} \right)},$$

$$\left\{ x \rightarrow \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \sqrt{-\frac{5}{12} - \frac{14}{3} \left(\frac{2}{65+3\sqrt{1689}} \right)^{1/3} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} (65+3\sqrt{1689}) \right)^{1/3} - \frac{1}{2} \sqrt{\left(-\frac{5}{6} + \frac{14}{3} \left(\frac{2}{65+3\sqrt{1689}} \right)^{1/3} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} (65+3\sqrt{1689}) \right)^{1/3} + \frac{5}{4 \sqrt{-\frac{5}{12} - \frac{14}{3} \left(\frac{2}{65+3\sqrt{1689}} \right)^{1/3} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} (65+3\sqrt{1689}) \right)^{1/3}}} \right)},$$

$$\left\{ x \rightarrow \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \sqrt{-\frac{5}{12} - \frac{14}{3} \left(\frac{2}{65+3\sqrt{1689}} \right)^{1/3} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} (65+3\sqrt{1689}) \right)^{1/3} + \frac{1}{2} \sqrt{\left(-\frac{5}{6} + \frac{14}{3} \left(\frac{2}{65+3\sqrt{1689}} \right)^{1/3} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} (65+3\sqrt{1689}) \right)^{1/3} + \frac{5}{4 \sqrt{-\frac{5}{12} - \frac{14}{3} \left(\frac{2}{65+3\sqrt{1689}} \right)^{1/3} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} (65+3\sqrt{1689}) \right)^{1/3}}} \right)} \right\}$$

Aproveitamos este exemplo para notar o poder de cálculo que este programa tem e para lembrar que podemos utilizar a função N para obter valores aproximados das soluções anteriores.

N[*]

```
{{x → -1.}, {x → 0.114071 - 1.21675 i},
{x → 0.114071 + 1.21675 i}, {x → -0.51879}, {x → 1.29065}}
```

2.4.5 Alguns exemplos

Nos manuais do 10º ano de escolaridade encontramos muitos exemplos de exercícios relacionados com as funções polinomiais que poderão ser resolvidos com o auxílio do *Mathematica*. Escolhemos alguns e tentámos analisá-los.

Estes exemplos não são tão relacionados com o quotidiano como os das secções 2.1 e 2.2.

■ Exemplo 9:

Das seguintes funções indique as que são polinomiais:

$$a) f(x) = x^2 - 3x + \frac{1}{2}$$

$$b) g(x) = x^2 + \frac{1}{2} - \frac{2}{x}$$

$$c) h(x) = \frac{x+1}{3}$$

$$d) i(x) = \frac{x-1}{x}$$

```
Clear[f, g, h, i]
f[x_] := x^2 - 3 x + 1 / 2
g[x_] := x^2 + 1 / 2 - 2 / x
h[x_] := (x + 1) / 3
i[x_] := (x - 1) / x

PolynomialQ[f[x]]

True

PolynomialQ[g[x]]

False

PolynomialQ[h[x]]

True

PolynomialQ[i[x]]

False
```

Poderíamos resolver esta questão de uma só vez utilizando a função `Map`. Esta nova função ao receber uma função e uma lista, retorna a lista formada pelo resultado de aplicar a função argumento a cada um dos elementos da lista argumento.

Assim, aplicando a função `Map` com a função `PolynomialQ` às funções dadas obteremos uma lista com as respostas `True` e `False`.

```
Map[PolynomialQ, {f[x], g[x], h[x], i[x]}]

{True, False, True, False}
```

■ Exemplo 10':

Escreva cada uma das expressões com a forma de um polinómio reduzido e ordenado:

$$e) \left(-\frac{1}{2}x - 2\right)^2 - 3\left(-\frac{1}{2}x + 2\right)^2$$

$$i) \left[-\frac{x-1}{2} - (x-1)^2\right]^2$$

$$l) \left(-\frac{1}{2}x + 1\right)^3$$

Alínea e):

$$\left(-\frac{1}{2}x - 2\right)^2 - 3\left(-\frac{1}{2}x + 2\right)^2$$

$$\left(-2 - \frac{x}{2}\right)^2 - 3\left(2 - \frac{x}{2}\right)^2$$

O *Mathematica* apresenta o resultado desta forma porque temos de usar a função `Expand` para que as multiplicações sejam efectuadas.

`Expand[%]`

$$-8 + 8x - \frac{x^2}{2}$$

Alínea i):

`Expand[(- (x - 1) / 2 - (x - 1) ^ 2) ^ 2]`

$$\frac{1}{4} - \frac{3x}{2} + \frac{13x^2}{4} - 3x^3 + x^4$$

Alínea l):

`Expand[(- x / 2 + 1) ^ 3]`

$$1 - \frac{3x}{2} + \frac{3x^2}{4} - \frac{x^3}{8}$$

Nota:

Este exercício tinha mais alíneas, mas achámos que não se justificava apresentar onze alíneas do mesmo género - escolhemos as três que achámos mais representativas.

■ Exemplo 11:

São dados os polinómios: $A(x) = -x - 1$ e $B(x) = \frac{1}{2}x - 3$. Calcule:

a) $A - 2B$

b) $A^2 - B^2$

c) $(2A - B)^2$

```

Clear[A, B]
A[x_] := -x - 1
B[x_] := x / 2 - 3

```

Alínea a):

```

Expand[A[x] - 2 B[x]]
5 - 2 x

```

Alínea b):

```

Expand[A[x]^2 - B[x]^2]
-8 + 5 x +  $\frac{3 x^2}{4}$ 

```

Alínea c):

```

Expand[(2 A[x] - B[x])^2]
1 - 5 x +  $\frac{25 x^2}{4}$ 

```

Nota:

Achamos oportuno notar que neste exemplo, tal como noutros, os autores dos manuais cometem alguns abusos de linguagem.

No âmbito deste capítulo é frequente chamarem as funções polinomiais por polinómios, como é o caso deste exemplo.

Repare-se que este exemplo poderia ser abordado neste programa de outra forma - atribuindo nomes directamente às expressões que definem as funções polinomiais $A(x)$ e $B(x)$ (em vez de dar nomes às funções polinomiais).

```

Clear[expA, expB]
expA = -x - 1;
expB = x / 2 - 3;
Expand[expA - 2 expB]
5 - 2 x

Expand[expA^2 - expB^2]
-8 + 5 x +  $\frac{3 x^2}{4}$ 

Expand[(2 expA - expB)^2]
1 - 5 x +  $\frac{25 x^2}{4}$ 

```

■ Exemplo 12:

Decomponha num produto de factores cada uma das seguintes expressões:

$$e) (3x-2)^2 - 9\left(2x + \frac{1}{2}\right)^2$$

$$f) \left(1 - \frac{1}{2}x\right)^2 - 3\left(1 - \frac{1}{4}x^2\right)$$

Nota:

Para resolver este tipo de exercício com o *Mathematica* basta aplicar a função `Factor` às expressões anteriores. Usaremos a função `Map` para não fazermos a mesma coisa duas vezes.

```
Map[Factor, {(3 x - 2)^2 - 9 (2 x + 1 / 2)^2, (1 - x / 2)^2 - 3 (1 - x^2 / 4)}]
{- 1/4 (7 + 6 x) (-1 + 18 x), (-2 + x) (1 + x)}
```

O resultado aparece como forma de lista, sendo o primeiro elemento da lista, a factorização do primeiro polinómio que escrevemos e o segundo elemento da lista a factorização do segundo.

■ Exemplo 13':

Efectue a operação indicada e escreva a relação: $\frac{D}{d} = Q + \frac{R}{d}$

$$b) (x^4 - 8) : (x + 2)$$

$$g) (x^5 - 2x^3 + 3x + 1) : \left(\frac{x^2}{2} - 2x + \frac{1}{2}\right)$$

Notas:

1 - Este exercício tinha mais alíneas, voltámos a escolher as que achámos mais interessantes.

2 - Para resolver este exercício usaremos as funções `PolynomialQuotient` e `PolynomialRemainder` e em seguida escreveremos a relação pretendida.

Alínea b):

```
PolynomialQuotient[x^4 - 8, x + 2, x]
```

```
- 8 + 4 x - 2 x^2 + x^3
```

```
PolynomialRemainder[x^4 - 8, x + 2, x]
```

```
8
```

Logo, $\frac{x^4-8}{x+2} = -8+4x-2x^2+x^3 + \frac{8}{x+2}$

Alínea g):

```
PolynomialQuotient[x^5 - 2 x^3 + 3 x + 1, x^2 / 2 - 2 x + 1 / 2, x]
```

```
96 + 26 x + 8 x^2 + 2 x^3
```

```
PolynomialRemainder[x^5 - 2 x^3 + 3 x + 1, x^2 / 2 - 2 x + 1 / 2, x]
```

```
-47 + 182 x
```

Logo, $\frac{x^5 - 2x^3 + 3x + 1}{\frac{x^2}{2} - 2x + \frac{1}{2}} = 96 + 26x + 8x^2 + 2x^3 + \frac{-47 + 182x}{\frac{x^2}{2} - 2x + \frac{1}{2}}$

■ Exemplo 14:

Considere o polinómio $A(x) = x^3 + 2x^2 - \frac{1}{2}x - 1$.

Sem efectuar a divisão averigue se o polinómio $A(x)$ é divisível por:

a) $x-1$

b) $x+2$

Vamos definir $A(x)$ e em seguida aplicando o Teorema do resto calcularemos $A(1)$ e $A(-2)$.

Alínea a):

```
Clear[A]
```

```
A[x_] := x^3 + 2 x^2 - x / 2 - 1
```

```
A[1]
```

```
 $\frac{3}{2}$ 
```

Como $A(1) \neq 0$, $A(x)$ não é divisível por $x-1$.

Alínea b):

```
A[-2]
```

```
0
```

Como $A(-2) = 0$, $A(x)$ é divisível por $x+2$.

■ Exemplo 15:

Considere o polinómio

$$P(x) = 2x^3 + kx^2 + (1-k)x - 3$$

a) Determine o valor de k , de modo a que $P(x)$ seja divisível por $x+1$.

b) No polinómio, substitua k pelo valor que encontrou na alínea anterior e, em seguida, decompõe $P(x)$ num produto de factores lineares.

(Exames oficiais)

Alínea a):

Para respondermos a esta questão vamos definir o polinómio $P(x)$ e em seguida aplicando o Teorema do resto resolver a equação $P(-1)=0$.

```
Clear[P]
P[x_] := 2 x^3 + k x^2 + (1 - k) x - 3
Solve[P[-1] == 0]
{{k -> 3}}
```

Alínea b):

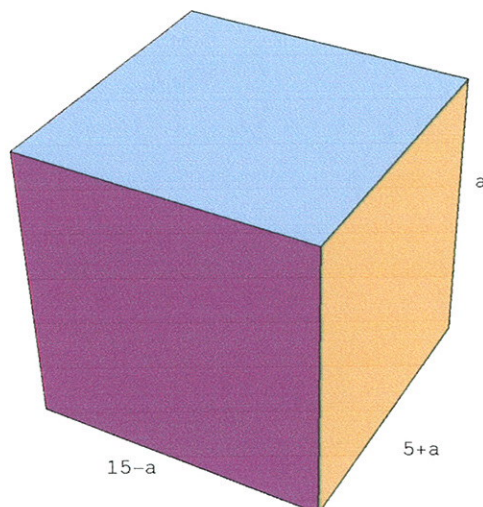
Atribuindo a k o valor 3 iremos factorizar $P(x)$ daí resultante.

```
k = 3;
Factor[P[x]]
(-1 + x) (1 + x) (3 + 2 x)
```

■ Exemplo 16:

A figura seguinte representa uma caixa em forma de paralelepípedo, cujas dimensões, em centímetros, estão expressas na figura.

```
Show[Graphics3D[{Cuboid[{4, 4, 4}], Text["15-a", {4.4, 3.9, 4}],
Text["a", {5, 5.2, 4.5}], Text["5+a", {5.2, 4.3, 4.1}]}], Boxed -> False]]
```



- Graphics3D -

- a) Prove que o volume da caixa é dado por $V(a) = -a^3 + 10a^2 + 75a$.
- b) Construa um quadro de valores e represente a função no intervalo $[0, 15]$.
- c) Recorrendo ao gráfico, determine um valor de a , aproximado às décimas, para o qual o volume é máximo, e indique o valor desse volume.

Nota:

Com o *Mathematica* é possível representar sólidos geométricos e escrever sobre estes. Usaremos de seguida algumas funções que estão descritas em pormenor no trabalho *Geometria no Mathematica*, de Ana Isabel Xavier Correia, na subsecção 6.4 para reproduzir a caixa do exemplo em questão.

Alínea a):

O volume de um paralelepípedo obtém-se multiplicando as suas três dimensões (comprimento, largura e altura). No *Mathematica* usaremos a função `Expand` aplicada ao produto das referidas dimensões e assim obteremos a função volume pretendida.

```
Expand[a (15 - a) (5 + a)]
```

```
75 a + 10 a^2 - a^3
```

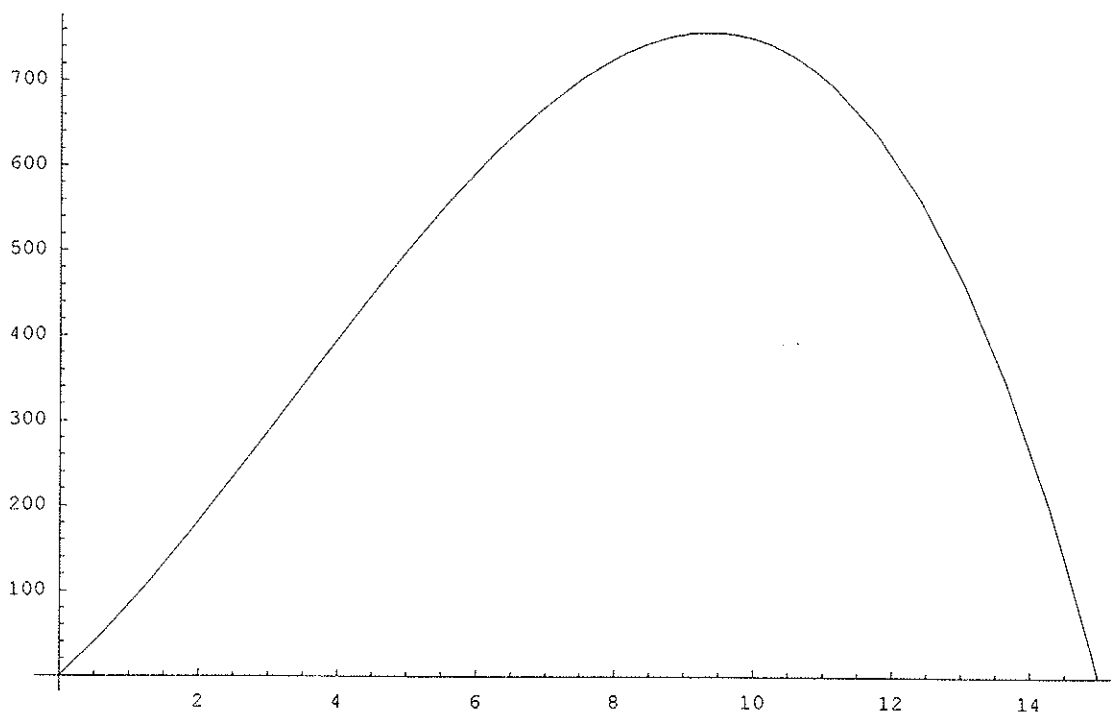
Alínea b):

Em primeiro lugar vamos definir $V(a)$ no programa onde estamos a trabalhar. De seguida construiremos a tabela e o gráfico.

```
V[a_] := 75 a + 10 a^2 - a^3  
TableForm[Table[{a, V[a]}, {a, 0, 15}]]
```

0	0
1	84
2	182
3	288
4	396
5	500
6	594
7	672
8	728
9	756
10	750
11	704
12	612
13	468
14	266
15	0

```
Plot[V[a], {a, 0, 15}]
```



- Graphics -

Alínea c):

Os autores ao proporem esta alínea estão certamente a querer que se utilize a função Trace das calculadoras gráficas. Ora, o *Mathematica* não dispõe tal função e para respondermos à questão,

construiremos uma tabela de valores com a a variar entre 9 e 10 - pois pela análise do gráfico vemos que o máximo pretendido encontra-se neste intervalo e com incremento de uma décima para podermos responder com a precisão pretendida no enunciado.

```
Table[{a, V[a]}, {a, 9, 10, .1}]
{{9, 756}, {9.1, 757.029}, {9.2, 757.712},
 {9.3, 758.043}, {9.4, 758.016}, {9.5, 757.625}, {9.6, 756.864},
 {9.7, 755.727}, {9.8, 754.208}, {9.9, 752.301}, {10., 750.}}
```

Pela observação da tabela anterior verificamos que para $a=9,3$ obtemos o volume máximo de $758,043 \text{ cm}^3$.

Mais à frente quando estudarmos as derivadas veremos outra forma de responder a esta questão.

■ Exemplo 17:

Considere a função polinomial

$$f: x \rightarrow 5x^3 - \frac{7}{2}x^2 + \frac{1}{4}$$

- Verifique que $\frac{1}{2}$ é raiz de f .
- Para todo o x real tem-se que $f(x)=g(x)(x-\frac{1}{2})$. Encontre $g(x)$.
- Resolva a equação $f(x)=0$.

Para respondermos às questões formuladas vamos, em primeiro lugar, definir a função $f(x)$.

```
Clear[f]
f[x_] := 5 x^3 - 7 x^2 / 2 + 1 / 4
```

Alinea a):

Utilizando o teorema do resto bastará invocar $f(\frac{1}{2})$.

```
f[1/2]
0
```

Como $f(\frac{1}{2})=0$, podemos concluir que $\frac{1}{2}$ é raiz da função $f(x)$.

Alinea b):

Utilizando a função PolynomialQuotient podemos obter $g(x)$.

```
PolynomialQuotient[f[x], x - 1/2, x]
- 1/2 - x + 5 x^2
```

$$\text{Logo, } g(x) = -\frac{1}{2}x + 5x^2$$

Alínea c):

Aqui poderemos proceder de dois modos: ou calculamos os zeros de $g(x)$ e juntamos a esta lista a raiz $\frac{1}{2}$ que já conhecemos pela alínea a) ou então calculamos os zeros de $f(x)$.

Como não temos $g(x)$ definida aplicaremos a função Solve à expressão que define $g(x)$ igualada a zero.

$$\text{solve}[-1/2 - x + 5x^2 = 0]$$

$$\left\{ \left\{ x \rightarrow \frac{1}{10} (1 - \sqrt{11}) \right\}, \left\{ x \rightarrow \frac{1}{10} (1 + \sqrt{11}) \right\} \right\}$$

Os zeros de $f(x)$ são: $\frac{1}{2}$ e $\frac{1 \pm \sqrt{11}}{10}$.

De outro modo podemos fazer:

$$\text{solve}[f[x] = 0]$$

$$\left\{ \left\{ x \rightarrow \frac{1}{2} \right\}, \left\{ x \rightarrow \frac{1}{10} (1 - \sqrt{11}) \right\}, \left\{ x \rightarrow \frac{1}{10} (1 + \sqrt{11}) \right\} \right\}$$

2.5 Função racional fraccionária

Chama-se **função racional fraccionária** a toda a função que é definida por um quociente de dois polinómios, ou seja:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m} \end{aligned}$$

onde: $a_i \in \mathbb{R}, i=0, \dots, n; b_j \in \mathbb{R}, j=0, \dots, m;$

$m \geq 1, D_f = \{x \in \mathbb{R}: b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m \neq 0\}$, onde D_f representa o domínio da função f .

Nota:

O grau do polinómio do denominador tem de ser maior ou igual a um, pois no caso de ter grau zero teremos uma função racional inteira, que é o mesmo que dizer uma função polinomial.

Vamos estudar essencialmente as funções racionais fraccionárias do tipo:

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}; a, b, d \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ e } x \neq -\frac{d}{c},$$

chamadas funções homográficas.

2.5.1 Exemplo de uma função racional fraccionária

Vamos começar por uma situação real que conduzirá a uma função racional fraccionária.

As janelas de forma rectangular de um edifício de escritórios devem ter 1 m^2 de área. Como variar a altura da janela com o tamanho da base da mesma?

Se representarmos a base por x e a altura de cada janela y , podemos escrever $x \cdot y = 1$, ou equivalentemente $y = \frac{1}{x}$.

Temos uma função racional fraccionária cujo domínio é \mathbb{R}^+ , pois dada a natureza do assunto $x, y > 0$.

Podemos construir uma tabela de valores $(x, 1/x)$ para ficarmos a conhecer a variação da altura com a base da janela. Usaremos potências de 10 para obtermos números pequenos e grandes.

```
TableForm[Table[{N[10^n], N[1/10^n]}, {n, -3, 3}]]
```

0.001	1000.
0.01	100.
0.1	10.
1.	1.
10.	0.1
100.	0.01
1000.	0.001

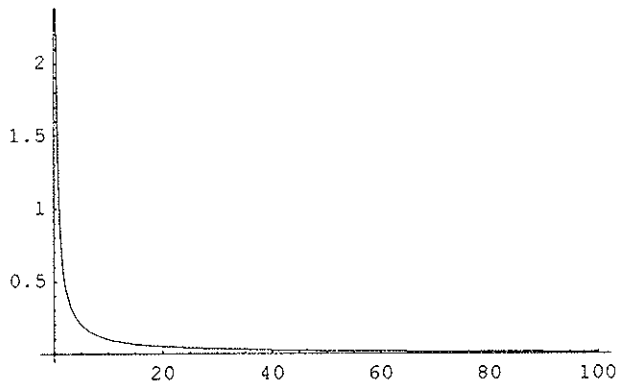
Daqui conclui-se:

- quando x toma valores "muito" próximos de zero, y toma valores "muito" grandes (positivos).
- quando y toma valores "muito" grandes, x toma valores "muito" próximos de zero.
- a altura y da janela diminui quando a base x aumenta, y é decrescente com x .

A altura da janela é função da base x da mesma, o que nos permite considerar uma função f , tal que $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R}^+$.

De seguida construiremos o gráfico correspondente à situação anterior.

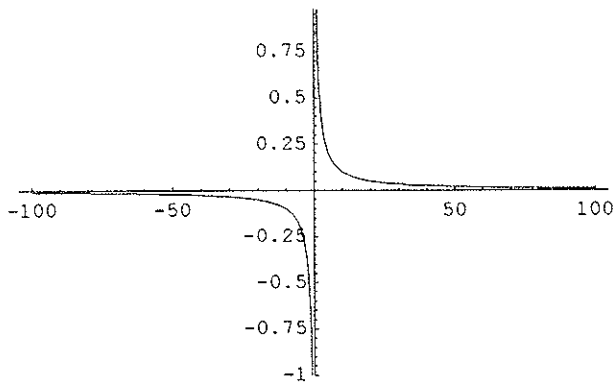
```
Plot[1/x, {x, 0, 100}]
```



- Graphics -

A função f é uma restrição da função real de variável real, definida algebricamente por $\frac{1}{x}$.
Vejam os seus gráficos:

```
Plot[1/x, {x, -100, 100}]
```



- Graphics -

O gráfico da função chama-se **hiperbóle** e cada curva do gráfico é um ramo da hiperbóle.

O gráfico da função aproxima-se muito das rectas $x=0$ e $y=0$ (ou eixos coordenados), por isso dizemos que:

$\rightarrow x=0$ é assíntota vertical ao gráfico da função, pois o limite de $\frac{1}{x}$ é infinito quando x tende para zero e escrevemos:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

ou apenas $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{1}{x} = \pm\infty$

$\rightarrow y=0$ é assíntota horizontal ao gráfico da função definida algebricamente por $\frac{1}{x}$, pois o limite é zero quando x tende para infinito e escrevemos:

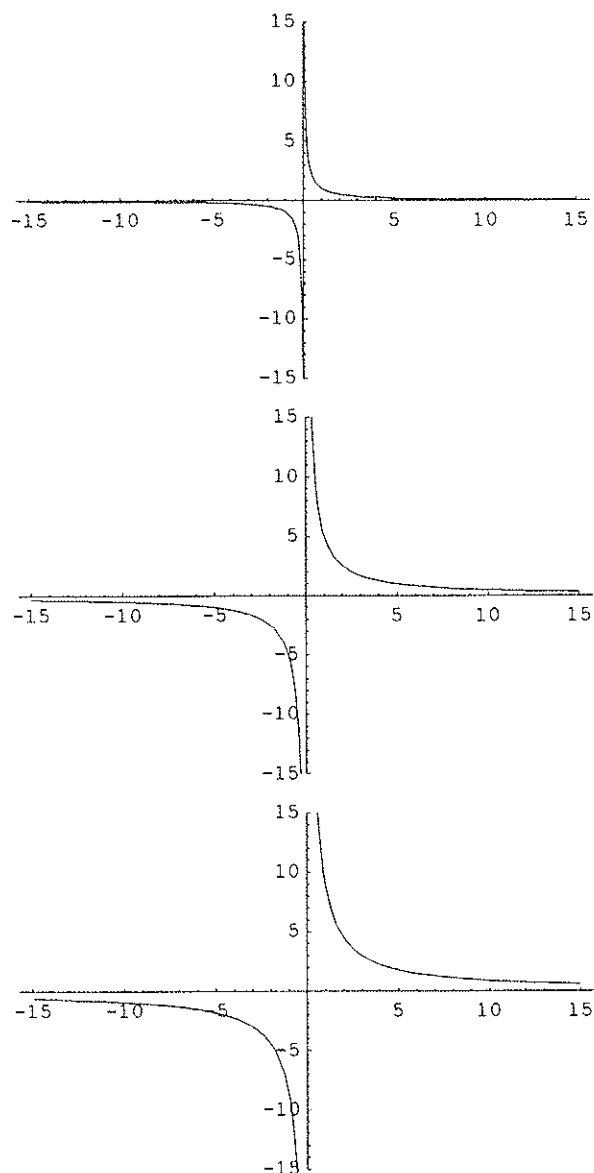
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0^+ \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0^-$$

ou apenas $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0^\pm$

2.5.2 Funções do tipo $f(x) = \frac{k}{x}$, k e $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Consideremos as funções reais de variável real do tipo $f(x) = \frac{k}{x}$, com $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Vejamos qual é a relação existente entre o parâmetro k e o gráfico das funções. Começemos por construir uma tabela de gráficos das funções $f(x) = \frac{k}{x}$, com $k > 0$, que poderá ser animada.

```
Table[Plot[k/x, {x, -15, 15}, PlotRange -> {-15, 15}], {k, 1, 10, 4}]
```

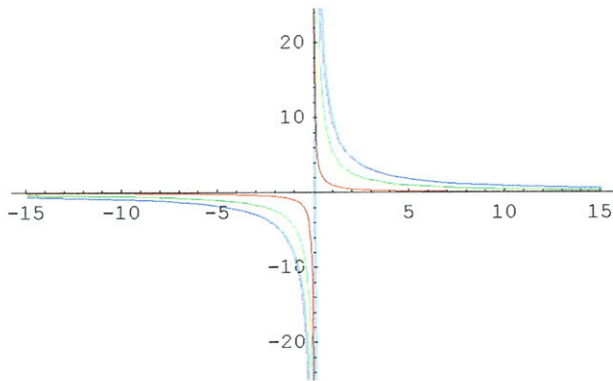


```
{- Graphics -, - Graphics -, - Graphics -}
```

Pela análise dos gráficos obtidos verificamos que quanto maior for o valor de k mais afastado fica o gráfico dos eixos coordenados.

De seguida representamos no mesmo referencial as três funções representadas anteriormente, para que se possa verificar de outro modo o que acabamos de dizer.

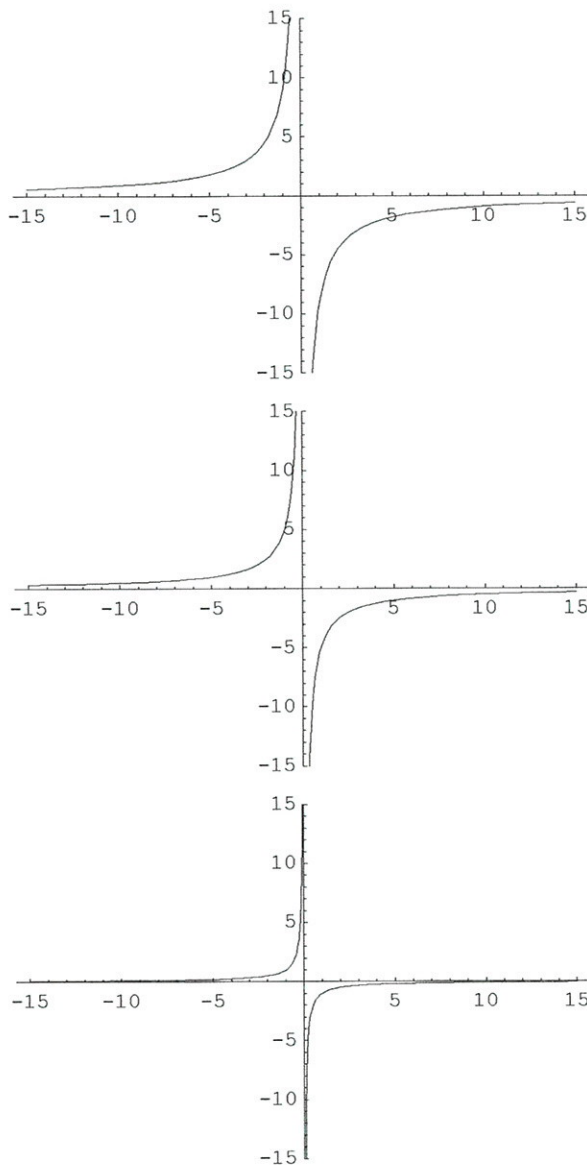
```
Plot[{1/x, 5/x, 9/x}, {x, -15, 15},
PlotStyle -> {RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[0, 1, 0], RGBColor[0, 0, 1]}]
```



- Graphics -

Vejamos o que acontece com $k < 0$:

```
Table[Plot[k/x, {x, -15, 15}, PlotRange -> {-15, 15}], {k, -9, -1, 4}]
```



```
{- Graphics -, - Graphics -, - Graphics -}
```

Verificamos que a hipérbola ocupa agora os segundo e quarto quadrantes e que à medida que o valor de k aumenta a hipérbola fica mais próxima dos eixos coordenados.

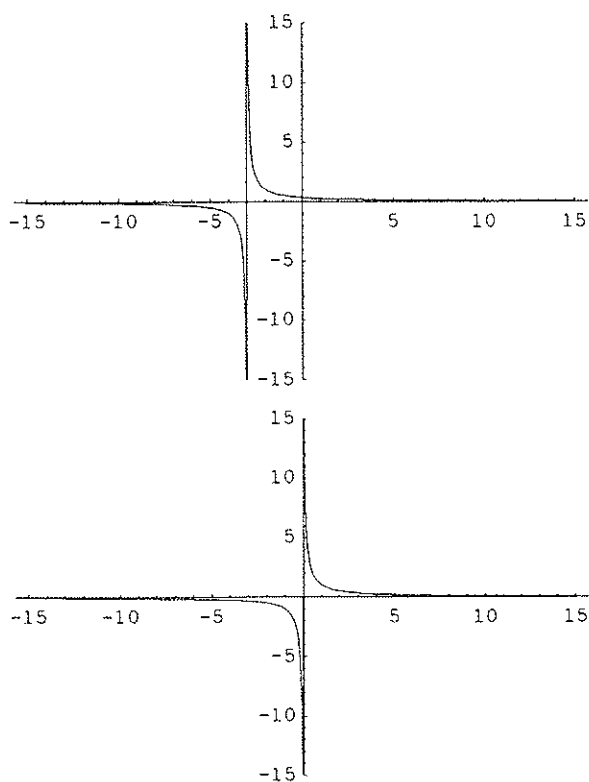
2.5.3 Funções racionais fraccionárias e translações

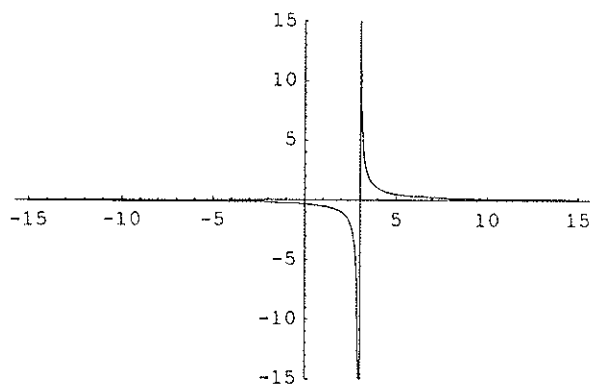
A partir do gráfico da função $f(x) = \frac{k}{x}$, $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, podemos obter por translações, vertical ou horizontal ou de ambas, os gráficos de muitas outras funções. Vamos exemplificar:

2.5.3.1 Funções do tipo $f(x) = \frac{1}{x-c}$, $c \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{c\}$

Para estudarmos o comportamento deste tipo de funções construiremos uma tabela com algumas funções deste tipo.

```
Table[Plot[1/(x - c), {x, -15, 15}, PlotRange -> {-15, 15}], {c, -3, 3, 3}]
```





{ - Graphics -, - Graphics -, - Graphics - }

Antes de concluirmos sobre o efeito do parâmetro c no gráfico das funções anteriores gostaríamos de chamar atenção para alguns aspectos:

- Aqui exemplificamos com três gráficos apenas, por uma questão de "economia de papel", mas aconselhamos que quando experimentarem utilizem outras variações (maiores) para o valor de c e não se esqueçam de animar a sequência de gráficos que vão obter, clicando duas vezes em um deles.

- O *Mathematica*, para além de construir a hipérbola representa a assíntota vertical por uma recta a cheio, facto este que pode induzir em algum tipo de erro.

Voltando então, aos gráficos das funções $f(x) = \frac{1}{x-c}$, $c \in \mathbb{R}$, verificamos que o gráfico de $\frac{1}{x+3}$ obtém-se do gráfico de $\frac{1}{x}$ por uma translação horizontal, associada ao vector de coordenadas $(-3,0)$ e o gráfico de $\frac{1}{x-3}$ obtém-se do gráfico de $\frac{1}{x}$ por uma translação horizontal, associada ao vector $(3,0)$.

Em virtude desta transformação, os comportamentos das três funções são análogos para grandes valores de x , em valor absoluto; por isso, $y=0$ é assíntota horizontal do gráfico de cada uma das três funções.

```
Limit[1 / (x - 3), x -> Infinity]
```

0

```
Limit[1 / (x - 3), x -> -Infinity]
```

0

O mesmo já não acontece com a assíntota vertical. Investiguemos agora o que se passa na vizinhança do ponto de abcissa 3 (por exemplo para a função definida por $\frac{1}{x-3}$).

Na primeira tabela veremos o que se passa à direita de 3 e na segunda o que se passa à esquerda de 3.

```

Clear[x]
x[n_] := N[3 + 10^(-n)]
TableForm[Table[{x[n], 1/(x[n] - 3)}, {n, 1, 5}]]

```

3.1	10.
3.01	100.
3.001	1000.
3.0001	10000.
3.00001	100000.

```

Clear[x]
x[n_] := N[3 - 10^(-n)]
TableForm[Table[{x[n], 1/(x[n] - 3)}, {n, 1, 5}]]

```

2.9	-10.
2.99	-100.
2.999	-1000.
2.9999	-10000.
2.99999	-100000.

Conforme se pode conjecturar a partir das tabelas, a função definida pela expressão $\frac{1}{x-3}$ tende para $+\infty$ quando x se aproxima de 3, por valores superiores a 3 e tende para $-\infty$ quando x se aproxima de 3, por valores inferiores a 3. Assim, concluímos que a recta de equação $x=3$ é a assíntota vertical do gráfico da função referida. Esta conjectura pode-se verificar, no *Mathematica*, usando a função predefinida `Limit`, para calcular os limites.

```

Limit[1/(x - 3), x -> 3, Direction -> 1]

```

$-\infty$

```

Limit[1/(x - 3), x -> 3, Direction -> -1]

```

∞

```

Limit[1/(x - 3), x -> Infinity]

```

0

```

Limit[1/(x - 3), x -> -Infinity]

```

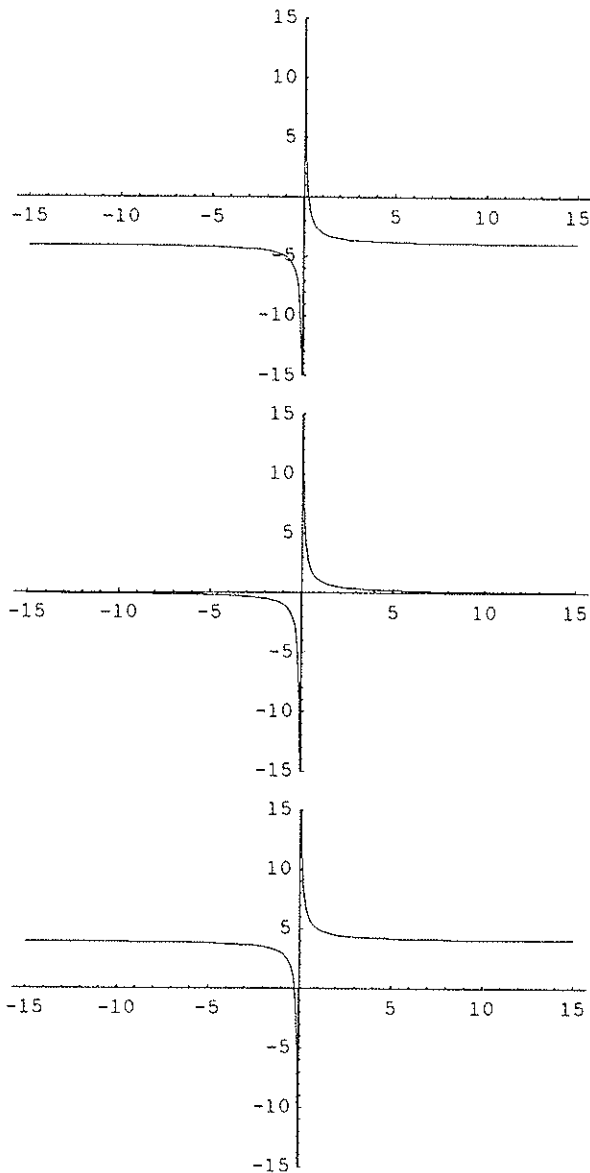
0

Analogamente, veríamos que o se passa com a função definida algebricamente por $\frac{1}{x+3}$ é semelhante ao que vimos para o caso da função definida por $\frac{1}{x-3}$.

2.5.3.2 Funções do tipo $f(x) = \frac{1}{x} + d$, $d \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

À semelhança daquilo que fizemos anteriormente vamos construir uma tabela com os gráficos de algumas funções deste tipo.

```
Table[Plot[1/x + d, {x, -15, 15}, PlotRange -> {-15, 15}], {d, -4, 4, 4}]
```



```
{- Graphics -, - Graphics -, - Graphics -}
```

Analisando os gráficos que obtivemos, concluímos que o gráfico de $\frac{1}{x} + 4$ obtém-se do gráfico de $\frac{1}{x}$ por uma translação vertical, associada ao vector de coordenadas $(0, 4)$; então, é de prever que a recta $x=0$ seja, também, assíntota vertical de $\frac{1}{x} + 4$ e que $y=4$ seja assíntota horizontal de $\frac{1}{x} + 4$.

O gráfico de $\frac{1}{x} - 4$ obtém-se do gráfico de $\frac{1}{x}$ por uma translação vertical, associada ao vector

de coordenadas $(0, -4)$; então, é de prever que a recta de equação $x=0$ seja, também, assíntota vertical de $\frac{1}{x} - 4$ e que $y=-4$ é assíntota horizontal de $\frac{1}{x} - 4$.

A recta $x=0$ é assíntota vertical dos gráficos das três funções, pois estas funções têm domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e comportamento análogo na vizinhança de zero, isto é:

```
Limit[1/x - 4, x -> 0, Direction -> 1]
```

$-\infty$

```
Limit[1/x, x -> 0, Direction -> 1]
```

$-\infty$

```
Limit[1/x + 4, x -> 0, Direction -> 1]
```

$-\infty$

```
Limit[1/x - 4, x -> 0, Direction -> -1]
```

∞

```
Limit[1/x, x -> 0, Direction -> -1]
```

∞

```
Limit[1/x + 4, x -> 0, Direction -> -1]
```

∞

Vejam agora o que se passa relativamente à assíntota horizontal, estudando numericamente, o comportamento de $\frac{1}{x} + 4$ e de $\frac{1}{x} - 4$ para grandes valores de x .

```
Clear[x]
x[n_] := N[10^n]
TableForm[Table[{x[n], 1/x[n] + 4, 1/x[n] - 4}, {n, 1, 5}]]
10.          4.1          -3.9
100.         4.01         -3.99
1000.        4.001        -3.999
10000.       4.0001       -3.9999
100000.      4.00001      -3.99999
```

De facto, observando o quadro de valores e os gráficos somos levados a concluir que as funções definidas pelas expressões $\frac{1}{x} + 4$ e $\frac{1}{x} - 4$ tendem para 4 e -4, respectivamente, quando x tende para $+\infty$.

Para valores "pequenos" de x temos que:

```
Clear[x]
x[n_] := N[-10^n]
TableForm[Table[{x[n], 1/x[n] + 4, 1/x[n] - 4}, {n, 1, 5}]]
-10.         3.9          -4.1
-100.        3.99         -4.01
-1000.       3.999        -4.001
-10000.      3.9999       -4.0001
-100000.     3.99999      -4.00001
```

Verificamos que as funções definidas pelas expressões $\frac{1}{x} + 4$ e $\frac{1}{x} - 4$ tendem para 4 e -4, respectivamente, quando x tende para $-\infty$.

Podemos então concluir que $x=4$ e $x=-4$ são assíntotas horizontais das funções definidas pelas expressões $\frac{1}{x} + 4$ e $\frac{1}{x} - 4$, respectivamente.

Comprovemos o que acabámos de dizer calculando os limites quando x tende para $+\infty$ e $-\infty$.

```
Limit[1 / x + 4, x -> +∞]
```

```
4
```

```
Limit[1 / x + 4, x -> -∞]
```

```
4
```

```
Limit[1 / x - 4, x -> +∞]
```

```
-4
```

```
Limit[1 / x - 4, x -> -∞]
```

```
-4
```

2.5.3.3 Funções do tipo $f(x) = \frac{a}{x-c} + d$, $a, c, d \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R} \setminus \{c\}$

Do estudo feito nas duas secções anteriores podemos concluir, globalmente, que as funções do tipo $y = \frac{a}{x-c} + d$ são representadas por uma curva chamada hipérbola, com as duas assíntotas, uma vertical e outra horizontal, que se podem obter do gráfico de $y = \frac{a}{x}$ por sucessivas transformações geométricas.

Estudaremos, para exemplificar, a função $f(x) = \frac{3x-4}{x-1}$.

A função anterior poderá tomar outro aspecto se efectuarmos a divisão dos dois polinómios em questão.

```
PolynomialQuotient[3 x - 4, x - 1, x]
```

```
3
```

```
PolynomialRemainder[3 x - 4, x - 1, x]
```

```
-1
```

Pela identidade fundamental da divisão podemos escrever $3x-4=(x-1)\times 3-1$ e dividindo ambos os membros por $x-1$ (uma vez que $x\neq 1$), obtemos:

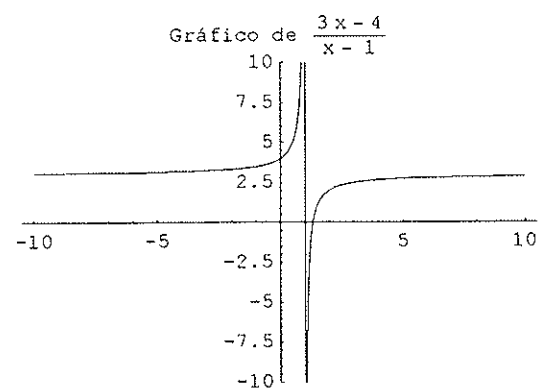
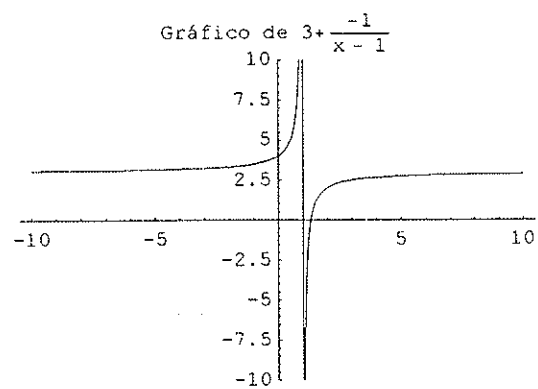
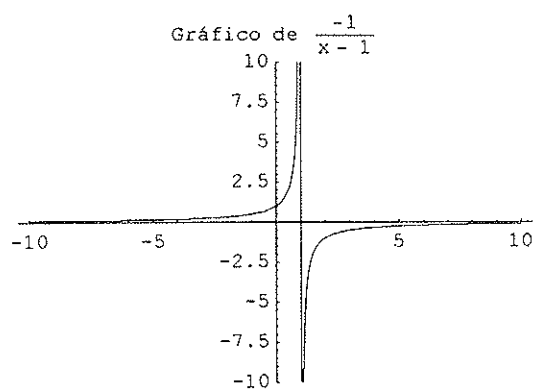
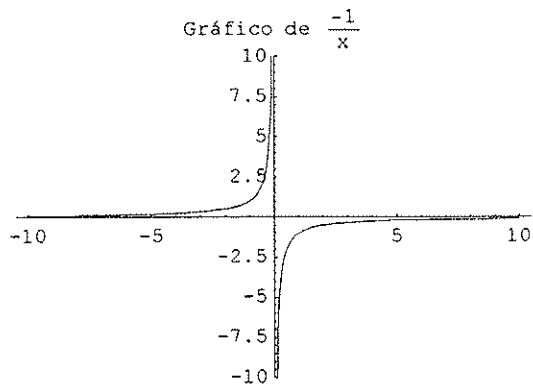
$$f(x)=3+\frac{-1}{x-1}$$

O gráfico desta função poderá ser obtido a partir do gráfico de $\frac{-1}{x}$ por meio de uma translação horizontal, associada ao vector $(1,0)$ e por uma translação vertical, associada ao vector $(0,3)$ como se pode observar a seguir.

```
Clear[f1, f2, f3, f4]
f1 = Plot[-1/x, {x, -10, 10}, PlotRange -> {-10, 10},
  DisplayFunction -> Identity, PlotLabel -> "Gráfico de  $\frac{-1}{x}$ "]
f2 = Plot[-1/(x-1), {x, -10, 10}, PlotRange -> {-10, 10},
  DisplayFunction -> Identity, PlotLabel -> "Gráfico de  $\frac{-1}{x-1}$ "]
f3 = Plot[3-1/(x-1), {x, -10, 10}, PlotRange -> {-10, 10},
  DisplayFunction -> Identity, PlotLabel -> "Gráfico de  $3+\frac{-1}{x-1}$ "]
f4 = Plot[(3x-4)/(x-1), {x, -10, 10}, PlotRange -> {-10, 10},
  DisplayFunction -> Identity, PlotLabel -> "Gráfico de  $\frac{3x-4}{x-1}$ "]

- Graphics -
- Graphics -
- Graphics -
- Graphics -
```

```
Show[GraphicsArray[{{f1}, {f2}, {f3}, {f4}}]]
```



- GraphicsArray -

2.5.4 Zeros de uma função racional fraccionária

Os zeros de uma função racional são os números (reais) que anulam o numerador e que, simultaneamente, não anulam o denominador.

O cálculo dos zeros, no *Mathematica*, das funções que estamos a estudar faz-se da mesma maneira que as anteriores - recorrendo à função *Solve*.

Vamos exemplificar calculando os zeros da função $f(x)$ da secção anterior.

```
Solve[(3 x - 4) / (x - 1) == 0]
```

```
{{x -> 4/3}}
```

2.5.5 Alguns exemplos

Abordaremos alguns exemplos extraídos de manuais do 11º ano de escolaridade, que poderão ser resolvidos com o auxílio do *Mathematica*.

■ Exemplo 18:

Uma espécie rara de insectos gigantes foi descoberta numa floresta da Amazónia. Para proteger esta espécie, cientistas fizeram transportar alguns insectos para uma área protegida.

A população de insectos, t meses depois de ser deslocada, era dada por:

$$P(t) = \frac{50(1+0,5t)}{2+0,01t} \quad (t \geq 0)$$

a) *Quantos insectos foram transportados?*

b) *Qual é população passados 5 anos?*

c) *Caso a evolução continue a verificar-se segundo o modelo, o que acontece ao número de insectos passados muitos, muitos anos?*

Alínea a):

Se pretendemos conhecer o número de insectos transportados, ele é o valor de $P(t)$ quando tinham decorridos 0 meses, o que corresponde à imagem de zero. Vamos definir a função em questão no *Mathematica*, para depois avaliar $P(0)$.

```
Clear[P]
P[t_] := 50 (1 + 0.5 t) / (2 + 0.01 t)
P[0]
```

```
25
```

Foram, portanto deslocados 25 insectos.

Alínea b):

Passados 5 anos, ou sejam 60 meses, o número de insectos existentes é dado por $P(60)$.

$P[60]$

596.154

Respondendo à questão, como tem de ser um número inteiro, conclui-se que, ao fim de 5 anos existirão, aproximadamente, 596 insectos.

Alínea c):

$P(t) = \frac{50(1+0,5t)}{2+0,01t} = \frac{50+25t}{0,01t+2}$, efectuando a divisão:

`PolynomialQuotient[50 + 25 t, 0.01 t + 2, t]`

2500.

`PolynomialRemainder[50 + 25 t, 0.01 t + 2, t]`

-4950.

Podemos escrever $P(t) = 2500 + \frac{-4950}{0,01t+2}$ e prever que, quando t tomar valores muito grandes, ou seja, quando t tender para $+\infty$, $P(t)$ tende para 2500.

Conclui-se, portanto, que a população de insectos tende a estabilizar quando atingir os 2500 insectos, ao fim de muitos, muitos anos...

Outro modo de chegar a esta conclusão seria calcular o limite de $P(t)$ quando t tende para $+\infty$.

`Limit[P[t], t -> +∞]`

2500.

■ Exemplo 19':

Quais são os números que divididos pela soma do seu dobro com 10 unidades dão um resultado igual a um.

Seja x o número real pretendido. Para respondermos à questão colocada vamos equacionar o problema:

$$\frac{x}{2x+10} = 1$$

Utilizando o *Mathematica*, podemos resolver a equação.

```
Solve[x / (2 x + 10) = 1]
```

```
{(x → -10)}
```

Logo, apenas o número -10 satisfaz o problema.

■ Exemplo 20':

Uma nódoa circular de tinta é detectada sobre um tecido.

O comprimento, em centímetros, do raio dessa nódoa, t segundos após ter sido detectada, é dada por:

$$r(t) = \frac{1+3t}{4+t}, \quad t \geq 0$$

a) *Calcule o raio da nódoa no instante em que foi detectada.*

b) *Recorrendo à sua calculadora, indique:*

b1) *O instante em que o raio da nódoa atingiu 2 cm de comprimento.*

b2) *O menor comprimento, em centímetros, que o raio da nódoa nunca ultrapassará.*

Alínea a):

O instante em que a nódoa foi detectada corresponde ao instante $t=0$, vamos definir a função no *Mathematica* e depois avaliar $r(0)$.

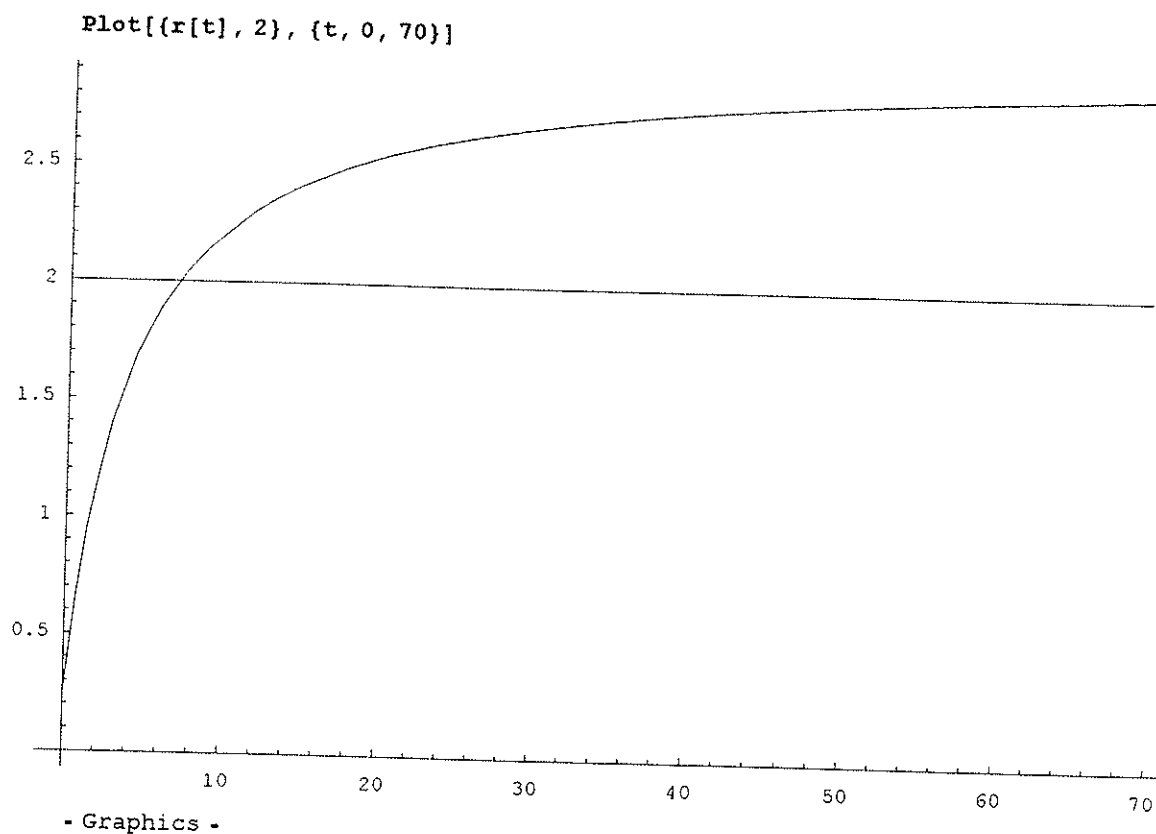
```
clear[r]
r[t_] := (1 + 3 t) / (4 + t)
r[0]

1
4
```

Logo, no instante em que foi detectada a nódoa, o seu raio era 0,25 cm.

Alínea b1):

Vamos representar graficamente $r(t)$ e a função $y=2$, para vermos para que valor(es) as duas funções se intersectam:

**Nota:**

Para uma melhor visualização ampliámos a saída anterior, seleccionando o gráfico e clicando continuamente num dos rectângulos pretos (pequenos) que aparecem depois de fazermos a selecção.

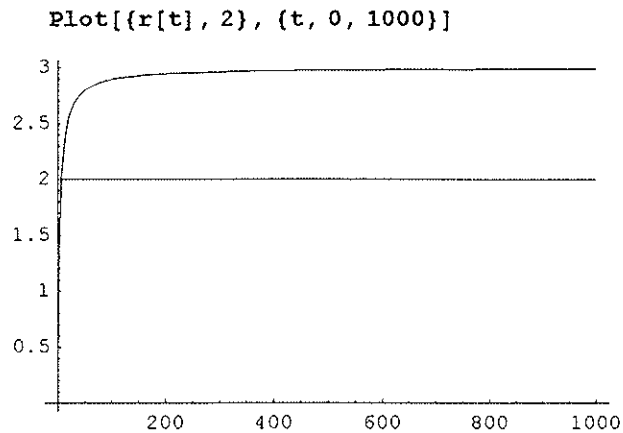
Pela análise dos gráficos vemos que o valor pretendido situar-se-á entre 6 e 8 segundos e podemos obter o valor exacto resolvendo a equação $r(t)=2$.

```
Solve[r[t] == 2, t]
```

```
{{t -> 7}}
```

Alínea b2):

Pela análise do gráfico vemos que o menor comprimento do qual a nódoa nunca ultrapassará é 3 cm, contudo aumentando o domínio de definição de $r(t)$ no gráfico podemos visualizar melhor esta intuição .



- Graphics -

Poderemos ainda calcular o limite da função $r(t)$ no infinito, para confirmar o que conjecturámos com base nos gráficos anteriores.

```
Limit[r[t], t -> +∞]
```

3

■ Exemplo 21:

Em certo modelo de esquentador a temperatura de saída da água (em graus) é dada em função da temperatura de entrada t_0 (também em graus) por

$$t = t_0 + \frac{3}{Q}$$

em que Q é a massa de água que passa por segundo, logo expresso em Kg/s.

- Sendo $t_0 = 8^\circ$ qual é o valor de Q para que a água saia a 30° ?*
- Sendo $t_1 = t_0 + \frac{3}{Q_1}$, exprime a diferença de temperaturas de saída $t - t_1$ em função dos débitos Q e Q_1 .*
- Sendo $Q_1 = 2$ Kg/s calcule Q para que a diferença $t - t_1$ seja 6° .*

Para resolvermos este exercício vamos definir a função t de duas variáveis t_0 e Q :

```
Clear[t]
t[t0_, Q_] := t0 + 3 / Q
```

Alínea a):

Temos $t_0 = 8^\circ$ e $t = 30^\circ$ e pretendemos saber qual deverá ser a massa de água que passa por segundo - Q , trata-se pois de resolver a $t(8, Q) = 30$.

```
Solve[t[8, Q] == 30, Q]
```

```
{{Q -> 3/22}}
```

N[*]

{{Q → 0.136364}}

Logo, a massa de água que passa por segundo é de aproximadamente é 0,14 Kg/s.

Alínea b):

Teremos de voltar a definir esta nova função t1, neste programa e em seguida avaliar t-t1.

```
clear[t1]
t1[t0_, Q1_] := t0 + 3 / Q1
t[t0, Q] - t1[t0, Q1]


$$\frac{3}{Q} - \frac{3}{Q1}$$

```

Logo, a diferença de temperaturas de saída é dada em função dos débitos por:

$$t-t1 = \frac{3}{Q} - \frac{3}{Q1}$$

Alínea c):

Trata-se de resolver novamente uma equação:

```
solve[t[t0, Q] - t1[t0, 2] = 6, Q]

{{Q →  $\frac{2}{5}$ }}
```

N[*]

{{Q → 0.4}}

Neste caso Q=0,4 Kg/s.

■ Exemplo 22:

Pretende-se esboçar o gráfico de n, que dá o "nível de álcool no sangue" em função do peso p de uma pessoa, depois de ela ter ingerido um litro de cerveja.

Sabe-se que:

- (i) num litro de cerveja existem 40 g de álcool;
- (ii) n(p) é a razão entre o peso (em gramas) de álcool existente no litro de cerveja e o volume (em litros) do fluido orgânico da pessoa;
- (iii) o volume do fluido orgânico da cada pessoa é numericamente igual a 70% do seu peso total (em quilogramas).

Sabendo que n(p) é expresso em gramas por litro e p é expresso em quilogramas,

- a) determine n(30), n(60) e n(80);
- b) esboce o gráfico de n quando p variar de 20 a 130;
- c) em Portugal a lei estabelece penas avultadas para quem for apanhado a conduzir com um nível de álcool no sangue superior a 0,5 gramas por litro. Indique, nas condições do

enunciado, quem não deve conduzir depois de beber um litro de cerveja.

Prova Específica de Matemática, 1993

Alínea a):

Pelo que foi dito no enunciado a função $n(p)$ é definida algebricamente do seguinte modo:

$$n(p) = \frac{40}{0,7p} = \frac{400}{7p}$$

Vamos defini-la no *Mathematica* e avaliar o seu valor para $p=30$, $p=60$ e $p=80$.

```
Clear[n]
n[p_] := 400 / (7 p)
n[{30, 60, 80}]
{ 40/21, 20/21, 5/7 }
```

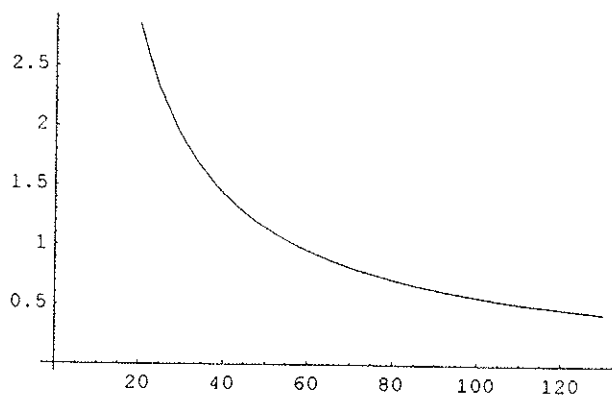
Tomando valores aproximados:

```
N[%]
{1.90476, 0.952381, 0.714286}
```

Portanto, o nível de álcool no sangue, depois de ter ingerido um litro de cerveja, para uma pessoa de 30 Kg é 1,90, para uma pessoa com 60 Kg é 0,95 e para uma pessoa com 80 Kg é 0,71, aproximadamente.

Alínea b):

```
Plot[n[p], {p, 20, 130}]
```



- Graphics -

Alínea c):

Vamos resolver a equação $n(p)=0,5$:

```
Solve[n[p] = 0.5]
```

```
{{p -> 114.286}}
```

Como a função representada é contínua e decrescente em $]0, +\infty[$, depois de beber um litro de cerveja não podem conduzir pessoas com menos de 114 Kg, aproximadamente.

2.6 Função irracional

Chama-se **função irracional** a toda função definida por um radical, pelo menos, em que a variável figura no radicando. Ou seja,

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow \sqrt[n]{A(x)}, \text{ onde}$$

- . $n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 2$
- . $A(x)$ é um polinómio ou uma fracção algébrica

Existem muitas outras situações da vida real que são modeladas por funções deste tipo. De seguida abordaremos um exemplo relacionado com a afinação de uma guitarra.

2.6.1 Exemplo de uma função irracional

Afinar uma guitarra consiste em regular a tensão das cordas de modo a que estas dêem os sons fundamentais.

Mostra-se que a frequência F do som de uma corda é proporcional à raiz quadrada da tensão t e pode ser definida pela expressão $F(t) = 10\sqrt{t}$, em que t se exprime em newtons e a frequência F em hertz.

Vamos construir uma tabela de valores de t e $F(t)$ e depois construir um gráfico com este conjunto de pontos.

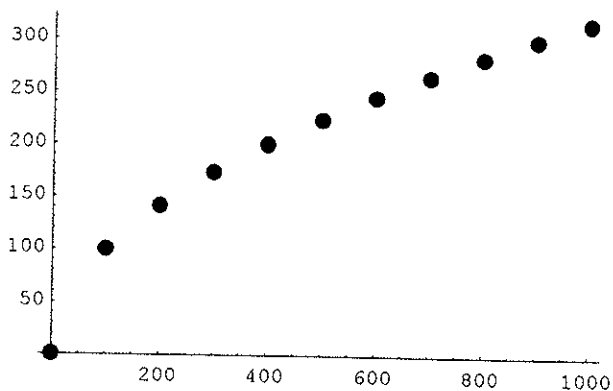
```

Clear[F]
F[t_] := 10  $\sqrt{t}$ 
TableForm[Table[{t, N[F[t]]}, {t, 0, 1000, 100}]]

0      0.
100    100.
200    141.421
300    173.205
400    200.
500    223.607
600    244.949
700    264.575
800    282.843
900    300.
1000   316.228

g1 = ListPlot[%, PlotStyle -> PointSize[.03]]

```

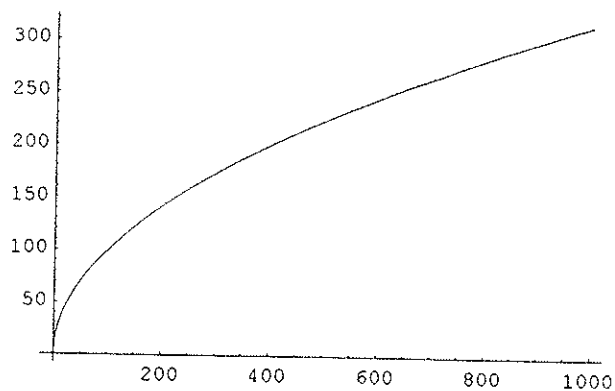


- Graphics -

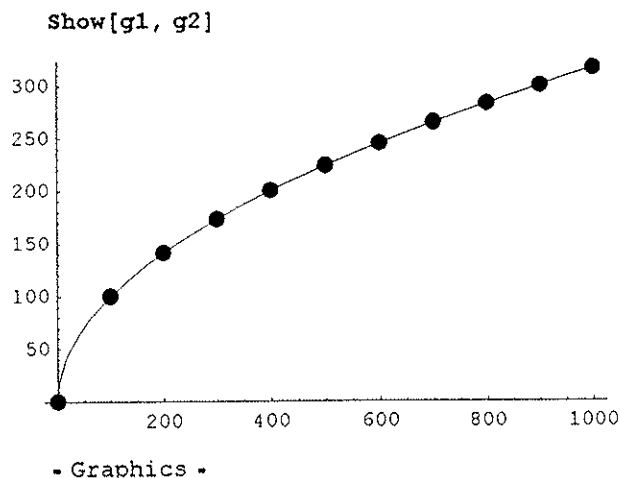
Ao gráfico anterior atribuímos o nome de g1 porque vamos precisar dele mais à frente.

Vamos pedir ao *Mathematica* que construa o gráfico da função $F(t)$, o qual chamaremos de g2, e depois sobreporemos g1 e g2.

```
g2 = Plot[F[t], {t, 0, 1000}]
```



- Graphics -



Poderemos colocar mais algumas questões relacionadas com este exemplo:

Questão 1:

Uma corda foi feita para obter o "lá", de frequência 220 hertz, indique um valor aproximado da tensão que será preciso aplicar à corda para obter aquela nota musical.

Bastará resolver a equação $F(t)=220$:

```
solve[F[t] = 220]
```

```
{{t -> 484}}
```

Concluimos que para obter um "lá" de frequência 220 hertz devemos aplicar à corda uma tensão de 484 newtons.

Questão 2:

Os sons emitidos por esta corda tornam-se identificáveis quando a tensão é superior a 250 newtons e a corda parte quando a tensão atinge os 750 newtons.

Poder-se-á, com esta corda, obter um "dó" de 132 hertz? E um "sol" de 198 hertz? E um "ré" de 297 hertz?

```
solve[F[t] = 132]
```

```
{{t -> 4356/25}}
```

Vamos pedir um valor aproximado do resultado anterior:

```
N[*]
```

```
{{t -> 174.24}}
```

Podemos obter, com uma função, valores aproximados das soluções de cada uma dada equação - utilizando a função NSolve, que funciona da mesma maneira que a função Solve.

```

NSolve[F[t] == 132]
{{t -> 174.24}}

NSolve[F[t] == 198]
{{t -> 392.04}}

NSolve[F[t] == 297]
{{t -> 882.09}}

```

Respondendo à questão 2, apenas é possível obter o "sol" de 198 hertz, uma vez que a nota "dó" de 132 hertz não é identificável e um "ré" de 297 hertz obtém-se com uma tensão de 882 newtons, aproximadamente, e esta corda não aguenta tal tensão.

2.6.2 Funções irracionais cujo índice do radical é um número par

Consideremos as funções reais de variável real definidas por:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sqrt{x}, \\
 g(x) &= \sqrt[4]{x} \text{ e} \\
 h(x) &= \sqrt[6]{x}.
 \end{aligned}$$

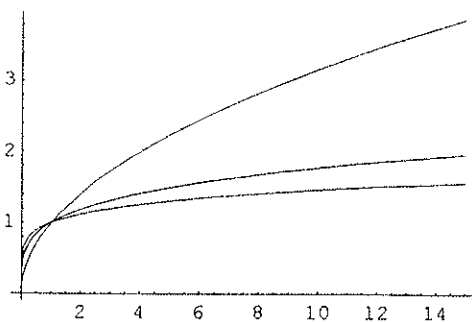
Com o *Mathematica* podem-se obter rapidamente os seus gráficos, para depois tirarmos algumas conclusões.

```

Clear[f, g, h]
f[x_] := Sqrt[x]
g[x_] := Root[x, 4]
h[x_] := Root[x, 6]
Plot[{f[x], g[x], h[x]}, {x, -15, 15}]

Plot::plnr : f[x] is not a machine-size real number at x = -15..
Plot::plnr : f[x] is not a machine-size real number at x = -13.783.
Plot::plnr : f[x] is not a machine-size real number at x = -12.4557.
General::stop : Further output of Plot::plnr will be suppressed during this calculation.

```



- Graphics -

Aqui utilizámos os valores usuais para a variação da variável independente, mas como não existem raízes quadradas de números negativos (no conjunto dos números reais) o programa emite uma mensagem, mostrando contudo, os gráficos pretendidos.

Analisando a saída anterior concluímos que:

- Domínio e contradomínio são \mathbb{R}_0^+
- $\sqrt{x} < \sqrt[4]{x} < \sqrt[6]{x} < \dots < \sqrt[2n]{x}$ se $0 < x < 1$
- $\sqrt{x} > \sqrt[4]{x} > \sqrt[6]{x} > \dots > \sqrt[2n]{x}$ se $x > 1$
- $\sqrt{x} = \sqrt[4]{x} = \sqrt[6]{x} = \dots = \sqrt[2n]{x}$ se $x=0 \vee x=1, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

2.6.3 Funções irracionais cujo índice do radical é um número ímpar

Consideremos agora as funções reais de variável real definidas por:

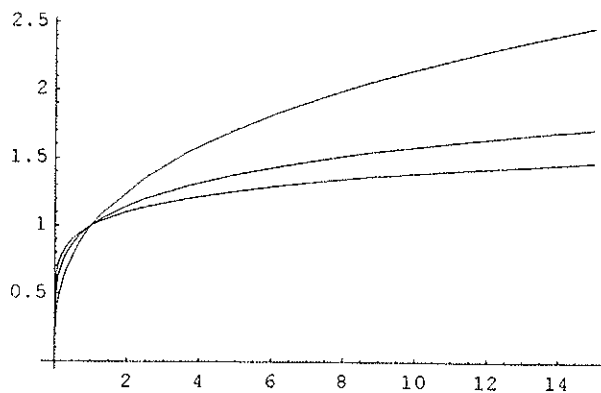
$$f(x) = \sqrt[3]{x},$$

$$g(x) = \sqrt[5]{x},$$

$$h(x) = \sqrt[7]{x}$$

e vamos defini-las e representá-las graficamente no *Mathematica*, com o objectivo de extrairmos conclusões acerca deste tipo de funções.

```
Clear[f, g, h]
f[x_] :=  $\sqrt[3]{x}$ 
g[x_] :=  $\sqrt[5]{x}$ 
h[x_] :=  $\sqrt[7]{x}$ 
Plot[{f[x], g[x], h[x]}, {x, -15, 15}]
Plot::plnr : f(x) is not a machine-size real number at x = -15..
Plot::plnr : f(x) is not a machine-size real number at x = -13.783.
Plot::plnr : f(x) is not a machine-size real number at x = -12.4557.
General::stop : Further output of Plot::plnr will be suppressed during this calculation.
```



- Graphics -

Ao obtermos estas mensagens de erro ficámos muito surpresos. Verificámos que o *Mathematica* não calcula raízes de índice ímpar de números negativos.

$$\sqrt[3]{-1}$$

$$(-1)^{1/3}$$

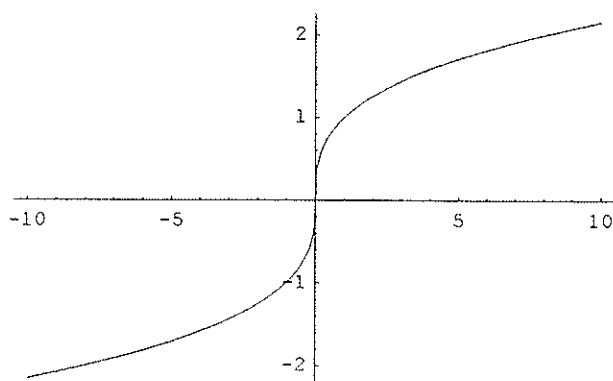
Para superar este facto vamos recorrer a um dos muitos pacotes que o programa disponibiliza. Um pacote é um ficheiro escrito em linguagem do *Mathematica*, com recurso à programação, onde estão um conjunto de funções relacionadas com uma área específica.

Neste caso concreto existe um ficheiro, de nome *Miscellaneous`RealOnly`*, que trabalha com números reais apenas.

Para carregar um pacote para a sessão que estamos a trabalhar procedemos do modo seguinte:

```
<< Miscellaneous`RealOnly`
```

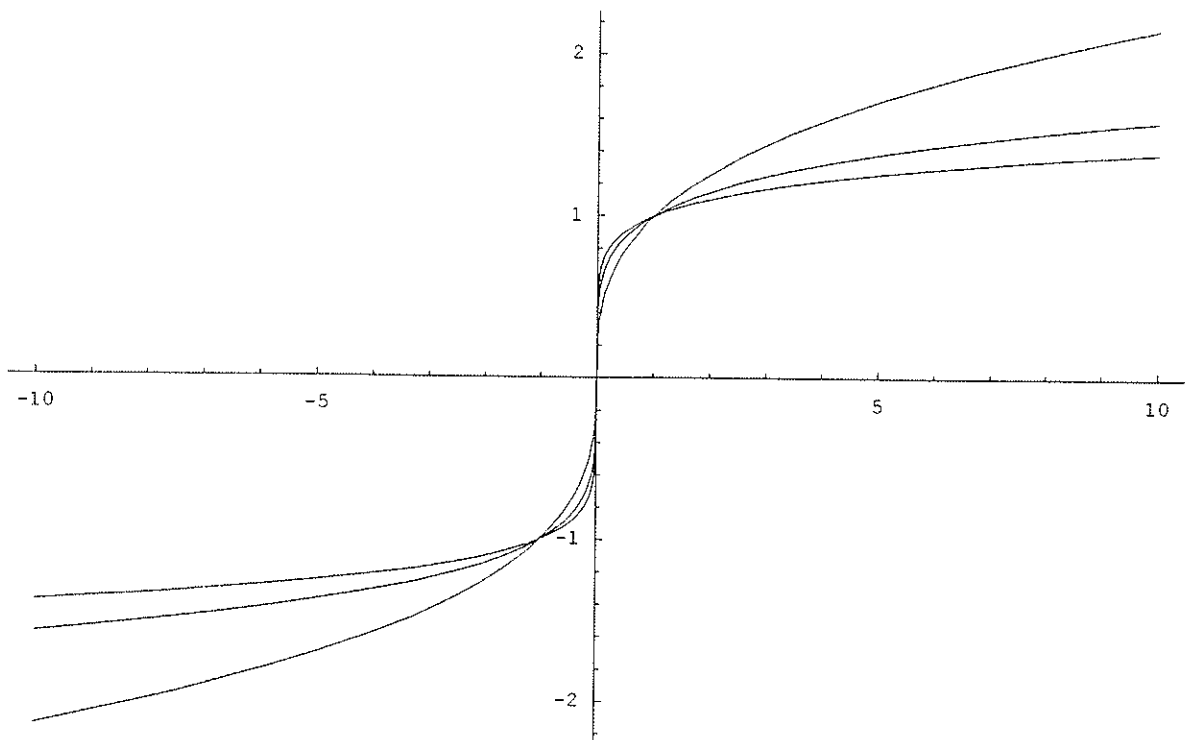
```
Plot[x^(1/3), {x, -10, 10}]
```



- Graphics -

Estamos em condições de desenhar os gráficos das funções definidas por $\sqrt[3]{x}$, $\sqrt[5]{x}$ e $\sqrt[7]{x}$, para podermos concluir as propriedades das funções irracionais de índice ímpar. Ampliaremos a saída para que se vejam melhor os objectos gráficos.

```
Plot[{f[x], g[x], h[x]}, {x, -10, 10}]
```



- Graphics -

- Domínio e contradomínio são \mathbb{R}
- $\sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{x} < \dots < \sqrt[2n+1]{x}$ se $0 < x < 1 \vee x < -1$
- $\sqrt[n]{x} > \sqrt[n]{x} > \sqrt[n]{x} > \dots > \sqrt[2n+1]{x}$ se $x > 1 \vee -1 < x < 0$
- $\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x} = \dots = \sqrt[2n+1]{x}$ se $x=0 \vee x=1, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

2.6.4 Translações dos gráficos de funções irracionais

Partindo do gráfico da função $y = \sqrt[n]{x}$ pode-se construir o gráfico de $y = a\sqrt[n]{x+c} + d$.

Do que foi dito, nas duas secções anteriores, conhece-se o gráfico da função $y = \sqrt[n]{x}$ se n é par e se n é ímpar. A partir deste conhecimento e determinando alguns pontos, pode-se obter com algum rigor o gráfico da função dada, utilizando translações horizontais e verticais, à semelhança daquilo que fizemos com as funções racionais fraccionárias.

Vamos exemplificar o que aqui está com o exemplo 27 na secção 2.6.6.

2.6.5 Equações irracionais

Numa equação irracional a incógnita aparece no radicando.

São exemplos de equações irracionais:

$$\sqrt{2x-4} + x = 4$$

$$\sqrt[3]{2x^2 - 3x + 6} = x.$$

A resolução algébrica deste tipo de equações é muito morosa e complicada, mais uma vez o *Mathematica* poderá ser utilizado na procura das soluções deste tipo de equações.

```
solve[ $\sqrt{2x-4} + x = 4$ , x]
```

```
{{x -> 5 -  $\sqrt{5}$ }}
```

```
solve[ $\sqrt[3]{2x^2 - 3x + 6} = x$ , x]
```

```
{{x -> 2}}
```

2.6.6 Alguns exemplos

O primeiro e segundo exemplos evidenciam a facilidade com que o *Mathematica* realiza cálculos numéricos e/ou simbólicos com números irracionais.

O terceiro e quarto evidenciam a facilidade com que este programa constrói gráficos e resolve equações.

Por fim, o quinto exemplo é o prometido na secção 2.6.4.

■ Exemplo 23:

Considere a função f , tal que $f(x) = \sqrt{x}$. Calcule o valor de cada uma das expressões:

a) $f(8) + 3f(18) - \frac{1}{2}f(50)$

c) $\sqrt{f(9)} \sqrt[3]{1 + f(4)}$

Vamos definir a função f e avaliar as expressões pretendidas.

```
clear[f]
```

```
f[x_] :=  $\sqrt{x}$ 
```

Alínea a):

$$f[8] + 3 f[18] - \frac{1}{2} f[50]$$

$$- \frac{5}{\sqrt{2}} + 11 \sqrt{2}$$

Podemos ainda simplificar o resultado anterior utilizando a função Simplify.

`Simplify[$\%$]`

$$\frac{17}{\sqrt{2}}$$

Notamos que o programa, no qual se desenvolve o presente trabalho, simplifica os resultados que envolvem radicais deixando os radicais no denominador, contrariamente ao que é usual no actual sistema de ensino da matemática em Portugal, onde sempre que em cálculos numéricos figura uma raiz no denominador temos de a racionalizar. Seguidamente, utilizaremos a função Rationalize para evidenciar o que acabamos de dizer.

`Rationalize[$\sqrt{2}/2$]`

$$\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Alínea c):

$$\frac{\sqrt{f[9] \sqrt[3]{1+f[4]}}}{3^{2/3}}$$

■ Exemplo 24:

Simplifique as expressões:

a) $\sqrt{4a} - \sqrt{9a} + 2\sqrt{a} - 3\sqrt{25a}$

b) $\sqrt{128a} - \sqrt{32a} + 4\sqrt{72a}$

c) $\sqrt{0,25a} + \sqrt{0,49a} - \sqrt{0,01a}$

Alínea a):

$$\sqrt{4a} - \sqrt{9a} + 2\sqrt{a} - 3\sqrt{25a}$$

$$-14\sqrt{a}$$

Alínea b):

$$\sqrt{128a} - \sqrt{32a} + 4\sqrt{72a}$$

$$28\sqrt{2}\sqrt{a}$$

Alinea c):

$$\sqrt{0.25 a} + \sqrt{0.49 a} - \sqrt{0.01 a}$$

$$1.1 \sqrt{a}$$

■ Exemplo 25:

Determine o número que adicionado com a sua raiz quadrada é igual a 2.

Para resolver este exercício teremos de equacionar o problema e seguidamente resolver a equação daí resultante.

Seja x o número pretendido. Temos que $x + \sqrt{x} = 2$.

```
solve[x + sqrt[x] = 2, x]
```

```
{{x -> 1}}
```

Logo, o número pretendido é 1.

■ Exemplo 26:

Para o par de gráficos seguintes verifique se os seus gráficos se intersectam e, no caso afirmativo, determine a abcissa dos pontos de intersecção.

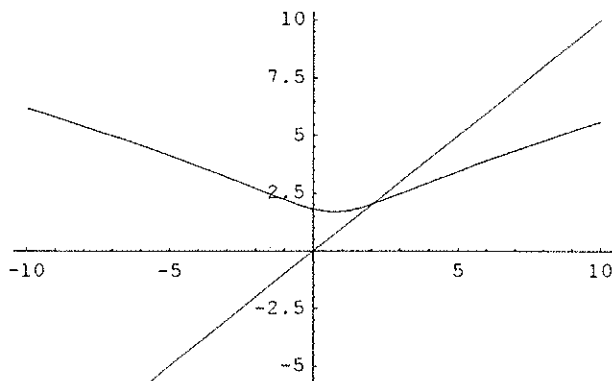
$$f(x) = \sqrt[3]{2x^2 - 3x + 6} \quad \text{e} \quad g(x) = x$$

Em primeiro lugar vamos definir estas funções no *Mathematica*.

```
Clear[f, g]
f[x_] :=  $\sqrt[3]{2x^2 - 3x + 6}$ 
g[x_] := x
```

De seguida construíremos os gráficos destas duas funções no mesmo referencial.

```
Plot[{f[x], g[x]}, {x, -10, 10}]
```



- Graphics -

Finalmente, iremos resolver a equação $f(x)=g(x)$, para determinarmos exactamente o ponto onde os gráficos das duas funções se intersectam.

```
Solve[f[x] = g[x], x]
```

```
{{x -> 2}}
```

As funções intersectam-se no ponto de abcissa 2.

Exemplo 27:

Considere a função real de variável real definida por $y=\sqrt{x}$.

Explique como, partindo do gráfico desta função, poderia obter o gráfico das funções seguintes:

$$a) f(x)=\sqrt{x-3}$$

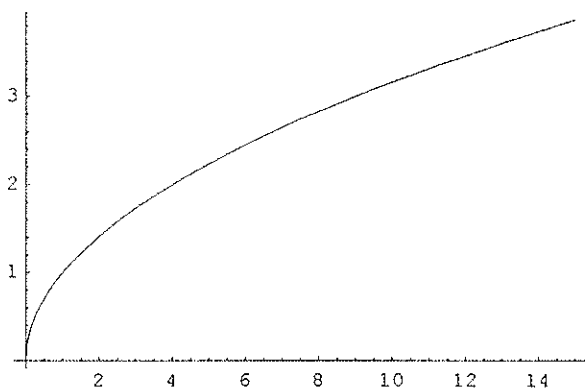
$$b) g(x)=\sqrt{x-2}+4$$

Para a resolução destas duas alíneas precisamos de conhecer o gráfico da função definida pela expressão \sqrt{x} e ainda as translações que falámos na secção 2.5.3.

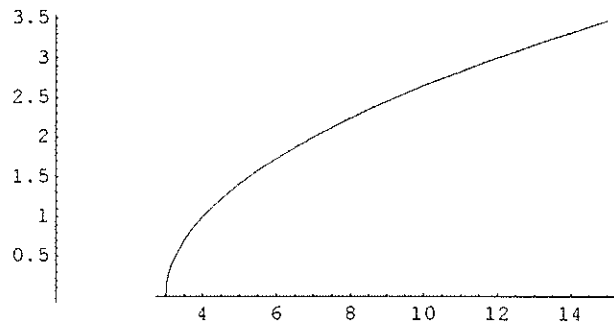
Alínea a):

O gráfico da função $f(x)=\sqrt{x-3}$ obtém-se do gráfico da função definida por \sqrt{x} , por meio de uma translação horizontal de três unidades para a direita. Podemos ilustrar com o *Mathematica* o que acabámos de dizer.

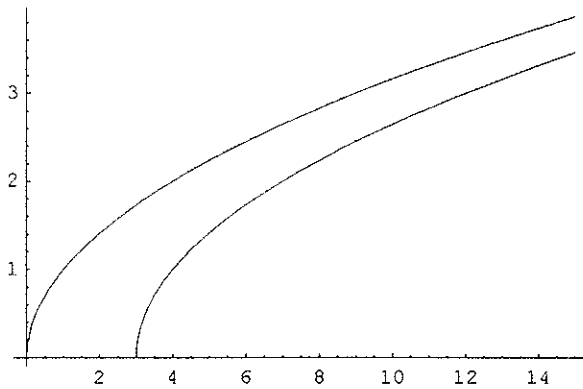
```
Clear[a, b]
a = Plot[ $\sqrt{x}$ , {x, 0, 15}]
b = Plot[ $\sqrt{x-3}$ , {x, 3, 15}, AxesOrigin -> {0, 0}]
Show[a, b]
```



- Graphics -



- Graphics -

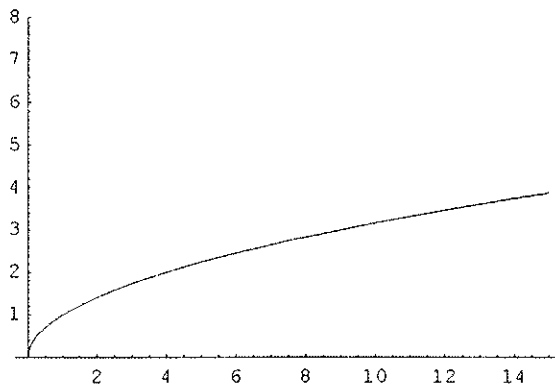


- Graphics -

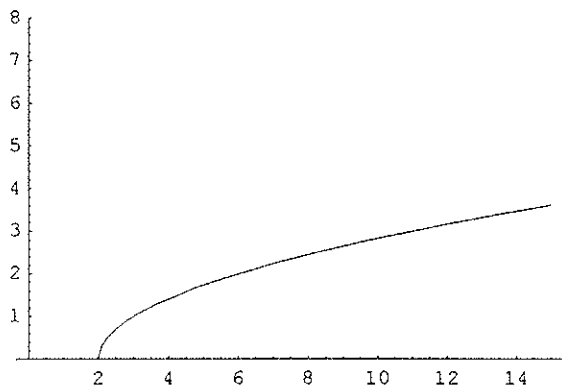
Alínea b):

Para a função $g(x) = \sqrt{x-2} + 4$ teremos uma translação horizontal de duas unidades para a direita e uma translação vertical de quatro unidades para cima. No *Mathematica*:

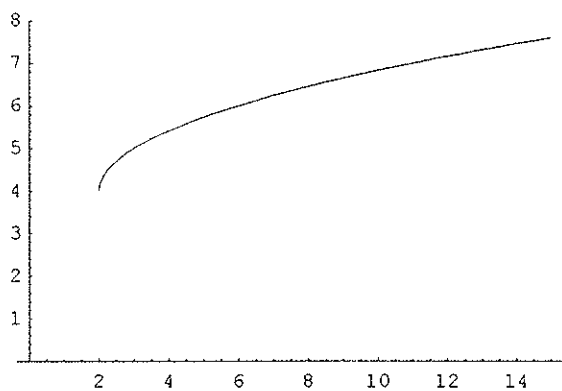
```
Clear[a, b, c]
a = Plot[Sqrt[x], {x, 0, 15}, PlotRange -> {0, 8}]
b = Plot[Sqrt[x - 2], {x, 2, 15}, PlotRange -> {0, 8}]
c = Plot[Sqrt[x - 2] + 4, {x, 2, 15}, PlotRange -> {0, 8}]
Show[a, b, c]
```



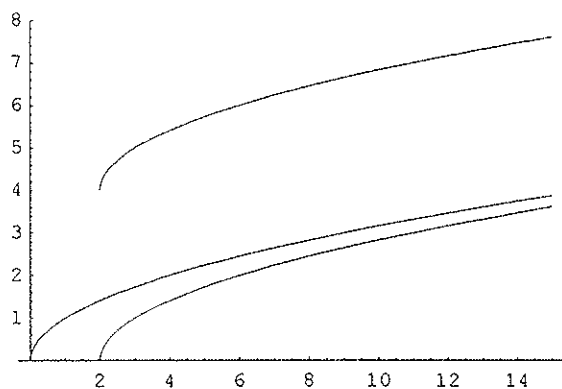
- Graphics -



- Graphics -



- Graphics -



- Graphics -

3 - Derivada de uma função

A derivada de uma função num ponto permite conhecer o comportamento local da função, nomeadamente através do declive da recta tangente ao gráfico nesse ponto; o conhecimento da função derivada permite uma visão global do comportamento da função no seu domínio.

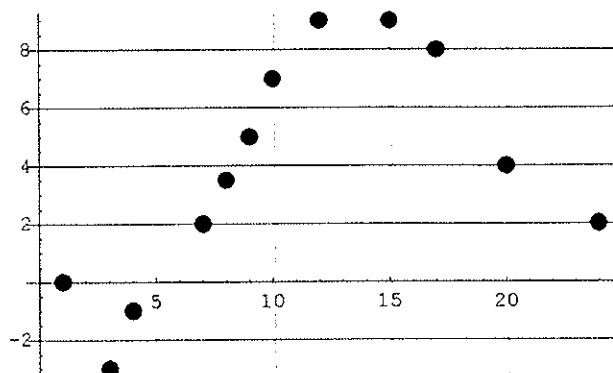
O conceito de derivada teve a sua génese a partir da resolução de problemas ligados à determinação de velocidades, tangentes, máximos e mínimos.

3.1 Taxa de variação média e instantânea

Na generalidade dada uma função $f: x \rightarrow y=f(x)$, quando x varia y também varia e pode variar sempre da mesma maneira ou de formas diferentes.

De seguida, construiremos a gráfico de uma lista de pontos {tempo (horas), temperatura (graus centígrados)} que representa as temperaturas observadas numa determinada localidade ao longo de um dia. Atribuiremos o nome de um, porque vamos precisar de o utilizar mais adiante e utilizaremos a opção `PlotStyle` com o valor `PointSize [0,03]` para que se vejam melhor os pontos e a opção `GridLines` com o valor `Automatic` para termos uma grelha que nos ajudará a situar os pontos.

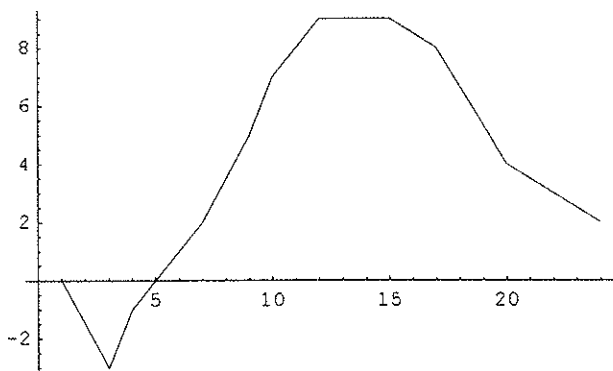
```
um = ListPlot[{{(1, 0)}, {3, -3}}, {4, -1}}, {7, 2)}, {8, 3.5)},
  {9, 5)}, {10, 7)}, {12, 9)}, {15, 9)}, {17, 8)}, {20, 4)}, {24, 2)},
  PlotStyle -> PointSize[0.03], GridLines -> Automatic]
```



- Graphics -

Vamos agora construir outro objecto gráfico com os mesmos pontos, mas com a opção `PlotJoined` a tomar o valor `True`, o qual chamaremos de dois.

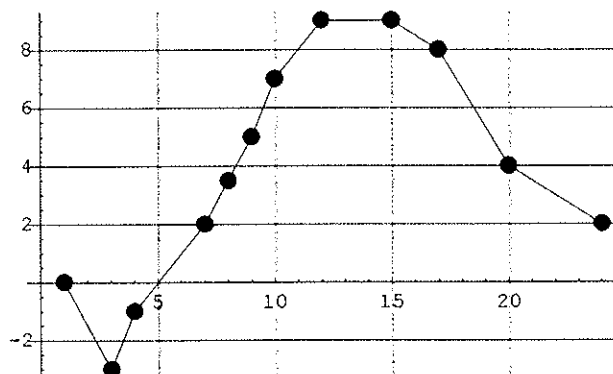
```
dois = ListPlot[{{1, 0}, {3, -3}, {4, -1}, {7, 2}, {8, 3.5}, {9, 5},
  {10, 7}, {12, 9}, {15, 9}, {17, 8}, {20, 4}, {24, 2}}, PlotJoined -> True]
```



- Graphics -

Sobrepondo os dois objectos gráficos anteriores obtemos:

```
Show[um, dois]
```



- Graphics -

Podemos observar que:

- Entre as 12 e as 15 horas a temperatura não variou.
- Entre as 4 e as 7 horas a temperatura aumentou 3°C.
- Entre as 7 e as 9 horas a temperatura aumentou também 3°C.

Obviamente, este mesmo aumento, referente aos dois últimos intervalos de tempo, não tem o mesmo significado, visto que a amplitude dos intervalos não é a mesma.

A forma mais fácil de estudar a variação da temperatura por unidade de variação de tempo (tvm) é através do quociente $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, onde f representa a função que estamos a estudar e $[a, b]$ o intervalo de tempo onde queremos estudar a variação.

Na função anterior temos:

$$\text{tvm}_{[12,15]} = \frac{9-9}{15-12} = 0$$

$$\text{tvm}_{[4,7]} = \frac{2-(-1)}{7-4} = 1$$

$$\text{tvm}_{[7,9]} = \frac{5-2}{9-7} = 1,5$$

Utilizando o *Mathematica*, podemos definir uma função que recebendo os valores que limitam o intervalo de tempo (a e b) e uma determinada função calcula a taxa de variação média da função no intervalo referido.

```
clear[tvm]
tvm[a_, b_, e_] := (e[b] - e[a]) / (b - a)
```

Vamos exemplificar, considerando a função quadrática $e(t)=3t-\frac{1}{2}t^2$, que traduz o movimento de um determinado corpo em função do tempo ($e(t)$ em metros e t em segundos).

Definindo-a no *Mathematica*, podemos calcular a taxa de variação média em alguns intervalos e analisar a interpretação geométrica deste novo conceito, recorrendo à animação de uma tabela de gráficos.

```
clear[e]
e[t_] := 3 t - t^2 / 2
```

Vamos calcular a taxa de variação em alguns intervalos de tempo para esta função $e - [0,4]$; $[0,3]$; $[0,2]$ e $[0,1]$ - intervalos de tempo de amplitude decrescente. Usaremos a função `Table`, conjuntamente com a função `TableForm`, para economizarmos espaço e notamos que os dois números que figuram na primeira coluna, de cada linha, referem-se ao intervalo.

```
TableForm[Table[{{0, a}, tvm[0, a, e]}, {a, 4, 1, -1}]]
```

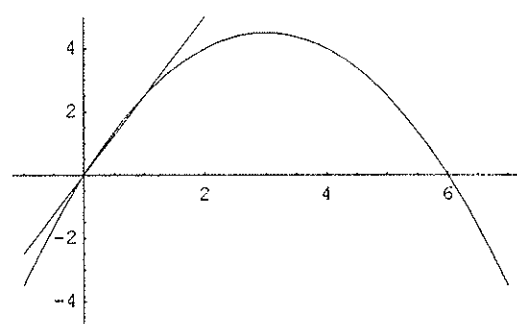
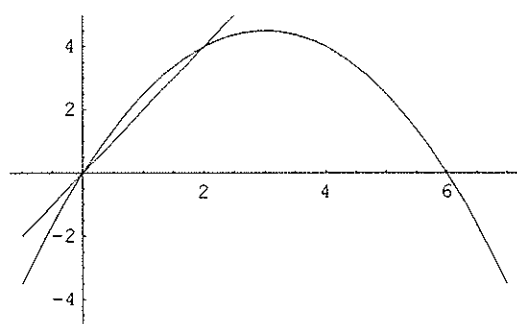
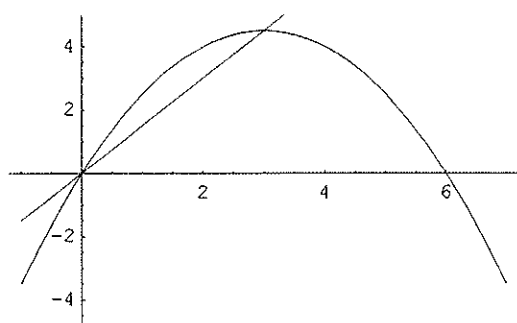
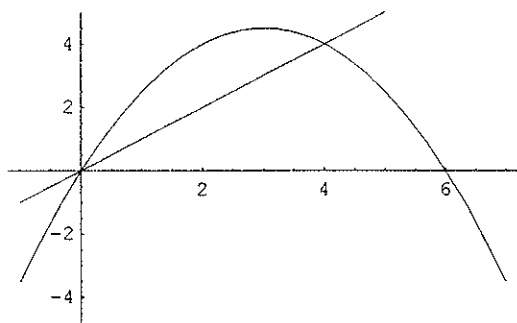
0	1
4	
0	$\frac{3}{2}$
3	
0	2
2	
0	$\frac{5}{2}$
1	

Observamos que a `tvm` varia de intervalo para intervalo, mais exactamente, à medida que a amplitude do intervalo diminui a `tvm` aumenta.

Em qualquer intervalo $[a,b]$ a taxa de variação média traduz o declive da recta que passa pelos pontos $(a,e(a))$ e $(b,e(b))$, que neste exemplo coincide com a velocidade média do corpo, em cada intervalo de tempo.

Vamos representar graficamente o que acabamos de dizer, notando que a variação da tabela é feita de uma forma algo invulgar - com um incremento negativo, para que obtivéssemos a representação da situação anterior - primeiro no intervalo $[0,4]$, depois $[0,3]$, seguidamente $[0,2]$ e finalmente $[0,1]$.

```
Table[Plot[{e[t], ((e[0+h] - e[0]) t/h) + e[0]},
  {t, -1, 7}, PlotRange -> {-5, 5}], {h, 4, 1, -1}]
```



```
{- Graphics -, - Graphics -, - Graphics -, - Graphics -}
```

Vemos que, de facto, à medida que o intervalo de tempo diminui a inclinação da recta secante (aos dois pontos cujas abcissas limitam o intervalo) é maior.

Vejamos o que se passa em intervalos de tempo mais "pequenos", isto é, intervalos de tempo de menor amplitude.

```
TableForm[Table[{{0, 0 + a}, tvn[0, 0 + a, e]}, {a, 0.14, 0.1, -0.01}]]
0
0.14      2.93
0
0.13      2.935
0
0.12      2.94
0
0.11      2.945
0
0.1       2.95
```

"Reduzindo" ainda mais a amplitude do intervalo de tempo:

```
TableForm[Table[{{0, 0 + a, e}, tvn[0, 0 + a, e]}, {a, 0.014, 0.01, -0.001}]]
0
0.014     2.993
e
0
0.013     2.9935
e
0
0.012     2.994
e
0
0.011     2.9945
e
0
0.01      2.995
e
```

À medida que os intervalos de tempo com extremo inferior zero vão-se estreitando, os valores da velocidade média (2,993; 2,9935; 2,994; 2,9945; 2,995) vão-se aproximando de 3, que corresponde à velocidade instantânea no ponto de abscissa zero.

Se considerarmos um intervalo de tempo $[0, 0+h]$ com h tendendo para zero, as rectas secantes tendem para uma recta tangente no ponto onde $x=0$, recta esta cujo declive será 3.

Este facto pode ser comprovado, calculando a tvn no referido intervalo e substituindo h por zero.

```
tvn[0, 0 + h, e]
```

$$\frac{3h - \frac{h^2}{2}}{h}$$

```
Simplify[%]
```

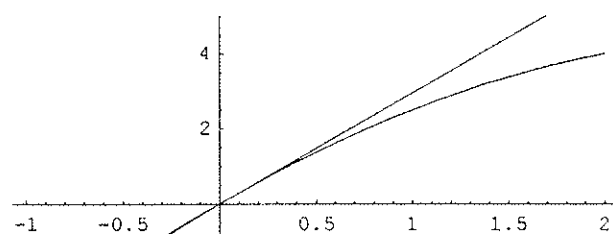
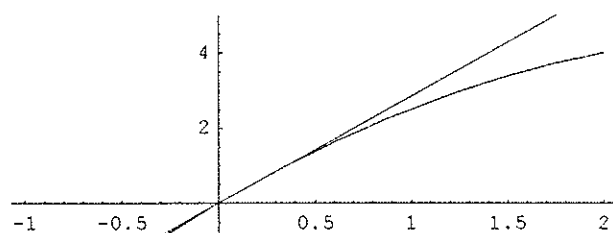
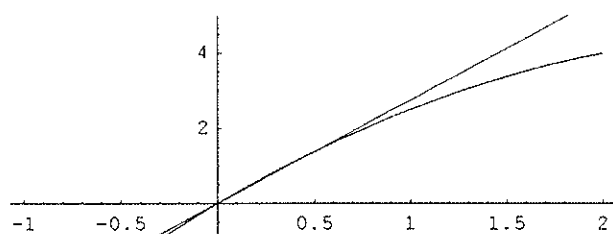
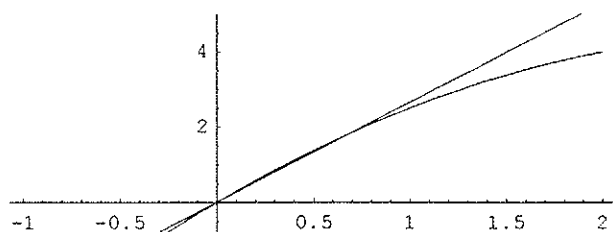
$$3 - \frac{h}{2}$$

```
%. /. h -> 0
```

```
3
```

Também é possível vermos a interpretação geométrica do que acabámos de dizer utilizando uma tabela de gráficos.

```
Table[Plot[{e[t], ((e[0+h] - e[0]) t/h) + e[0]}, {t, -1, 2}, PlotRange -> {-5, 5}],
{h, 0.7, 0.1, -0.2}]
```



{ - Graphics -, - Graphics -, - Graphics -, - Graphics - }

Como já foi dito ao longo deste trabalho, **o interesse destas tabelas de gráficos reside na sua animação**, pois por exemplo, nesta última até poderá parecer, pela simples análise no papel,

que temos quatro gráficos iguais, mas animando-os vemos que não é assim.

O conceito de velocidade instantânea que acabámos de abordar, para funções da variável tempo, identifica-se com a taxa de variação ou derivada num ponto do domínio de uma função qualquer.

Estes conceitos exprimem a rapidez com que uma função varia num dado ponto x_0 do seu domínio. O seu valor é, por definição, o limite da razão incremental no ponto x_0 :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

que são equivalentes pondo $x=x_0+h$.

3.2 Derivada de uma função

Seja f uma função que admite derivada finita em todos os pontos de um conjunto C . A cada ponto $x_0 \in C$ fica a corresponder um número real que se representa por $f'(x_0)$. Desta forma fica definida uma nova função

$$x \rightarrow f'(x)$$

de domínio C que tem o nome de **função derivada**, ou apenas **derivada**. Representa-se por qualquer uma das notações:

$$f'(x) \quad \text{ou} \quad Df(x) \quad \text{ou} \quad \frac{df}{dx} \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dx}$$

supondo que x é variável independente e y a variável dependente.

No *Mathematica*, também temos várias formas para calcular a derivada de uma função:

- **D[f,x]**, ou mais precisamente **D[f[x],x]**, dá a expressão da derivada da função $f(x)$ em ordem a x .

- $\partial_x f[x]$ representa exactamente o mesmo, sendo que o símbolo ∂ encontra-se no submenu Palettes do menu File.

- Podemos ainda utilizar o símbolo ' para calcular a derivada de uma função. Em seguida ilustraremos as diferenças entre usar **D[f,2]** e f' (ou **Derivative[1][f]**).

Vamos calcular a expressão da derivada da função e definida na secção anterior.

$$D[e[t], t]$$

$$3 - t$$

Para determinar a expressão da segunda derivada de $e(t)$ podemos fazer:

$$D[\%, t]$$

$$-1$$

No caso de não necessitarmos da primeira derivada da função, mas de uma derivada de ordem superior a esta podemos obtê-la da forma $D[f, \{x, n\}]$ onde n representa a ordem da derivada pretendida.

$$D[e[t], \{t, 2\}]$$

$$-1$$

Utilizando as outras notações teremos:

$$\partial_t e[t]$$

$$3 - t$$

$$\partial_t (\partial_t e[t])$$

$$-1$$

$$e'[t]$$

$$3 - t$$

$$e''[t]$$

$$-1$$

Notamos que esta última forma de calcular a derivada, usando o símbolo ' , só pode ser utilizada em funções. Se a aplicarmos a uma expressão o resultado fica por avaliar, o que não se passa nas outras formas de calcular a derivada.

$$(3t - t^2/2)'$$

$$\left(3t - \frac{t^2}{2}\right)'$$

$$D[3t - t^2/2, t]$$

$$3 - t$$

$$\partial_t (3t - t^2/2)$$

$$3 - t$$

O símbolo ' recebe uma função e retorna outra função, enquanto que D recebe uma expressão e retorna outra expressão.

`D[Log[x], x] [3]`

$$\frac{1}{x} [3]$$

`Log' [3]`

$$\frac{1}{3}$$

Verificamos que aplicando `D[Log[x],x]` a um número, por exemplo 3, o *Mathematica* não substitui x por 3, pois não se aplica uma expressão a um valor (embora se possa substituir uma variável por um valor numa expressão - ver a seguir). Pelo contrário, pode aplicar-se uma função a um valor, pelo que `Log' [3]` está correcto, levando o *Mathematica* a substituir x por 3, depois de calcular a derivada.

Poderemos contudo usar a função `D` para calcular uma derivada e simultaneamente substituir a variável por um determinado valor utilizando regras de reescrita locais.

`D[Log[x], x] /. x -> 3`

$$\frac{1}{3}$$

3.3 Derivada de algumas funções já conhecidas

Como já sabemos o *Mathematica* executa calculos simbólicos, vamos aproveitar este facto para calcular a expressão geral da derivada de algumas funções que abordámos.

Começemos pela função afim:

`D[m x + b, x]`

$$m$$

A derivada de uma função afim é constante para qualquer valor de $x \in \mathbb{R}$ e o valor desta constante coincide com o valor do declive da recta que a função representa.

Em particular, se $m=1$ e $b=0$ temos $f(x)=x$ e a sua derivada é :

`D[x, x]`

$$1$$

A derivada da variável independente é 1.

Se $m=0$ vem $f(x)=b$ e a sua derivada é:

`D[b, x]`

$$0$$

A derivada da constante é zero.

Vejamos agora a expressão da derivada de uma função quadrática:

$$D[ax^2 + bx + c, x]$$

$$b + 2ax$$

Podemos calcular a expressão da derivada de funções polinomiais de qualquer grau. Vamos exemplificar com uma função polinomial de grau cinco.

$$D[ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f, x]$$

$$e + 2dx + 3cx^2 + 4bx^3 + 5ax^4$$

Podemos também estabelecer as fórmulas da derivada do produto, quociente, potência, composta, ... de funções quaisquer.

$$\text{Clear}[f, g]$$

$$D[f[x] g[x], x]$$

$$g[x] f'[x] + f[x] g'[x]$$

$$D[f[x] / g[x], x]$$

$$\frac{f'[x]}{g[x]} - \frac{f[x] g'[x]}{g[x]^2}$$

Podemos reduzir ao mesmo denominador, utilizando a função Together, para obtermos a forma mais usual da derivada do quociente entre duas funções quaisquer.

$$\text{Together}[\%]$$

$$\frac{g[x] f'[x] - f[x] g'[x]}{g[x]^2}$$

$$D[f[x]^n, x]$$

$$n f[x]^{-1+n} f'[x]$$

$$D[\sqrt[n]{f[x]}, x]$$

$$\frac{f[x]^{-1+\frac{1}{n}} f'[x]}{n}$$

$$D[\text{Composition}[f, g][x], x]$$

$$f'[g[x]] g'[x]$$

3.4 Alguns exemplos

Existem muitos exemplos nos manuais dos 11º e 12º anos de escolaridade relacionados com o cálculo da derivada de uma função. Na sua grande maioria são exercícios onde dada uma função pede-se a sua função derivada. Como já exemplificámos na secção anterior como proceder perante tal questão retomaremos aqui dois exercícios que já abordámos em secções anteriores.

O primeiro exercício que abordaremos está relacionado com o vértice de uma função quadrática. Dada a sua representação gráfica, o vértice de uma função quadrática de concavidade voltada para cima é o ponto cuja ordenada é um mínimo da função e no caso da concavidade estar voltada para baixo é o ponto cuja ordenada é um máximo da função. Em qualquer dos casos trata-se do único extremo da função, pelo que a abcissa do vértice de uma função quadrática pode ser obtida resolvendo a equação que se obtém igualando a derivada da função a zero.

Assim, a alínea d) do exemplo 4 abordado na secção 2.2.6 poderá ser resolvida da forma que acabámos de expor.

O exemplo 16 também será retomado para uma outra abordagem da alínea c).

■ Exemplo 4:

Do alto de uma falésia com 40 m de altura relativamente ao nível médio das águas do mar, lança-se uma pedra verticalmente, de baixo para cima, com uma velocidade inicial de 35 m/s.

Sabe-se da Física, que quando a altura h (em metros) a que se encontra do solo t segundos após o lançamento ($t \geq 0$) é dada pela expressão:

$$h(t) = 35t - 5t^2$$

d) Recorra a uma calculadora para elaborar um quadro de valores e determinar a altura máxima que a pedra atinge.

Definindo $h(t)$:

```
clear[h]
h[t_] := 35 t - 5 t^2
```

Resolvendo a equação $h'(t)=0$:

```
solve[h' [t] = 0]
{{t -> 7/2}}
```

Para obtermos a ordenada do vértice, que depois nos dará a altura máxima que a pedra atinge, temos de calcular $h(\frac{7}{2})$:

`h[7 / 2]`

$$\frac{245}{4}$$

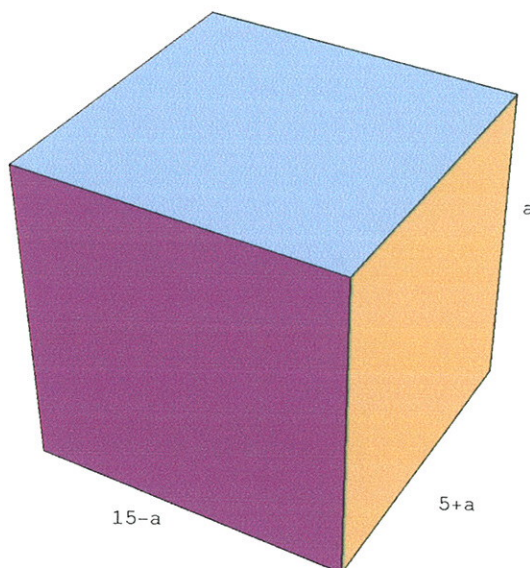
`N[%]`

61.25

Como já tínhamos visto, por outro processo, a pedra atingirá uma altura máxima de 61,25 m.

■ Exemplo 16:

A figura seguinte representa uma caixa em forma de paralelepípedo, cujas dimensões, em centímetros, estão expressas na figura.



- c) *Recorrendo ao gráfico, determine um valor de a , aproximado às décimas, para o qual o volume é máximo, e indique o valor desse volume.*

Podemos responder a esta questão calculando os zeros da derivada da função volume que definimos na alínea a) desta questão - $g(a)=7a+10a^2-a^3$.

```
Clear[g]
```

```
g[a_] := 75 a + 10 a^2 - a^3
```

```
Solve[g'[a] == 0]
```

```
{{a -> 5/3 (2 - sqrt(13))}, {a -> 5/3 (2 + sqrt(13))}}
```

$N[*]$ $\{(a \rightarrow -2.67592), (a \rightarrow 9.34259)\}$

Para $a \approx 9,3$ a função tem um máximo, como se pode comprovar graficamente. Para determinar o valor do máximo fazemos:

 $N\left[g\left[\frac{5}{3}(2 + \sqrt{13})\right]\right]$

758.076

Como já tínhamos concluído, de outro modo, para $a \approx 9,3$ o volume é aproximadamente igual a 758 cm^3 .

4 - Estudo de funções - continuação

Prosseguiremos com o estudo das funções. Estudaremos agora as funções trigonométricas, a função exponencial e a função logarítmica. De realçar que seremos mais breves, visto que o trabalho tornar-se-ia repetitivo.

4.1 Funções trigonométricas

Dado um ângulo α , existe um e um só valor para seno de α ($\text{sen } \alpha$), co-seno de α ($\text{cos } \alpha$), tangente de α ($\text{tg } \alpha$) e co-tangente de α ($\text{cotg } \alpha$). As razões trigonométricas $\text{sen } \alpha$, $\text{cos } \alpha$, $\text{tg } \alpha$ e $\text{cotg } \alpha$ já são conhecidas dos alunos desde o 9º ano de escolaridade.

Assim, podemos definir as seguintes funções de variável real $\text{sen } x$, $\text{cos } x$, $\text{tg } x$ e $\text{cotg } x$.

Antes de prosseguirmos no estudo deste tipo de funções vamos construir uma tabela com as designações para estas funções no *Mathematica*, bem como para as suas inversas.

Designação usual no sistema de ensino português	Designação no <i>Mathematica</i>
$\text{sen } x$	<code>Sin[x]</code>
$\text{cos } x$	<code>Cos[x]</code>
$\text{tg } x$	<code>Tan[x]</code>
$\text{cotg } x$	<code>Cot[x]</code>
$\text{arcsen } x$	<code>ArcSin[x]</code>
$\text{arccos } x$	<code>ArcCos[x]</code>
$\text{arctg } x$	<code>ArcTan[x]</code>
$\text{arccotg } x$	<code>ArcCot[x]</code>

Este programa assume que os argumentos das funções trigonométricas estão em radianos. Se quisermos trabalhar em graus temos de escrever a palavra `Degree` ou utilizar o símbolo $^\circ$ que se encontra num dos submenus (Palettes) do menu `File`.

Lembramos que para escrever a constante π pode fazê-lo de dois modos: escrever a palavra `Pi` ou usar o símbolo π que se encontra no mesmo submenu que o símbolo $^\circ$.

Com este programa é muito fácil construir tabelas de valores exactos dos ângulos especiais: 30°, 45° e 60°.

```
TableForm[Table[{x, Sin[x], Cos[x], Tan[x], Cot[x]}, {x, 30°, 60 Degree, 15°}]]
```

30 °	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
45 °	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	1
60 °	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

A função TableForm tem uma opção - TableHeadings - que permite-nos legendar as entradas de uma tabela. Na tabela anterior, por exemplo, é de toda a conveniência que coloquemos na primeira linha o nome das funções a que se referem os valores que temos em cada coluna.

```
TableForm[Table[{x, Sin[x], Cos[x], Tan[x], Cot[x]}, {x, 30°, 60 Degree, 15°}],
TableHeadings -> {{}, {"", "sen", "cos", "tg", "cotg"}}]
```

	sen	cos	tg	cotg
30 °	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
45 °	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	1
60 °	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

Notamos que se colocarmos a opção TableHeadings com o valor Automatic as linhas e as colunas da tabela são legendadas por inteiros.

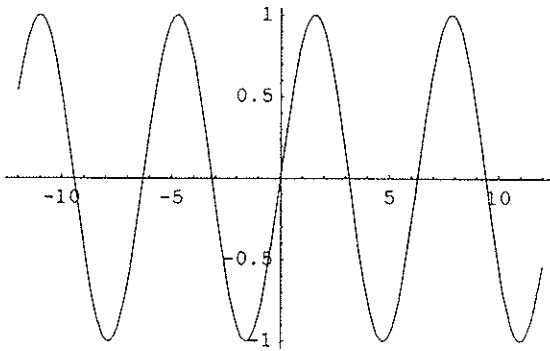
```
TableForm[Table[{x, Sin[x], Cos[x], Tan[x], Cot[x]}, {x, 30°, 60 Degree, 15°}],
TableHeadings -> Automatic]
```

	1	2	3	4	5
1	30 °	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
2	45 °	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	1
3	60 °	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

De seguida mostraremos os gráficos das funções trigonométricas, variando a forma como se pode definir o intervalo de variação da variável independente, para podermos exemplificar o que foi dito antes de construirmos a tabela anterior.

```
Plot[Sin[x], {x, -12, 12},  
PlotLabel -> "Gráfico de sen x, com x ∈ [-12,12] (radianos) "]
```

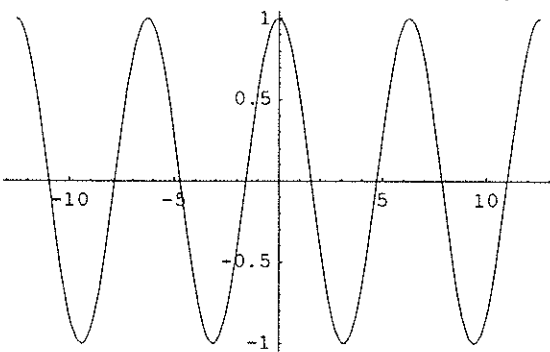
Gráfico de sen x, com x ∈ [-12,12] (radianos)



- Graphics -

```
Plot[Cos[x], {x, -720°, 720°},  
PlotLabel -> "Gráfico de cos x, com x ∈ [-720°,720°] "]
```

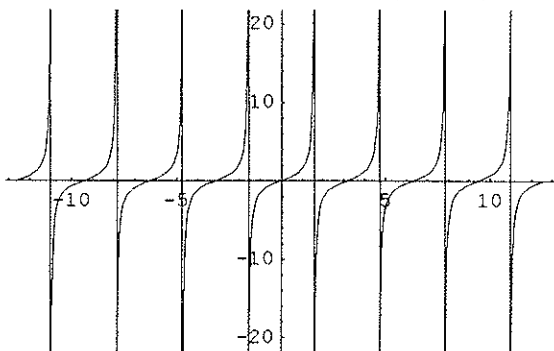
Gráfico de cos x, com x ∈ [-720°,720°]



- Graphics -

```
Plot[Tan[x], {x, -4 Pi, 4 Pi}, PlotLabel -> "Gráfico de tg x, com x ∈ [-4π,4π]"]
```

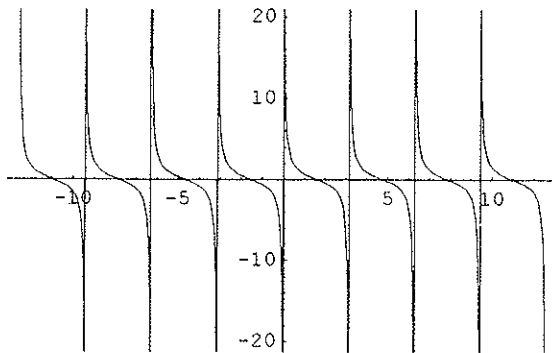
Gráfico de tg x, com x ∈ [-4π,4π]



- Graphics -

```
Plot[Cot[x], {x, -720 Degree, 720 Degree},
PlotLabel -> "Gráfico de cotg x, com x ∈ [-720 graus, 720 graus]"]
```

Gráfico de cotg x, com x ∈ [-720 graus, 720 graus]



- Graphics -

Para além das funções que já foram descritas ao longo deste trabalho que poderão ser úteis no estudo das funções trigonométricas, existem outras de domínio específico da trigonometria que vamos abordar em pormenor.

Relativamente às que já abordámos, relembramos:

- A função Table, que quando aplicada à Plot permite-nos estudar a influência de determinados parâmetros sobre o traçado gráfico das funções - aqui também podemos utilizar esta construção para analisar os gráficos das funções do tipo $f(x)=a+\text{sen}(kx+b)$, $g(x)=a+\text{cos}(kx+b)$, $h(x)=a+\text{tg}(kx+b)$ e $i(x)=a+\text{cotg}(kx+b)$.

- A função Solve para resolver equações trigonométricas, mas aqui apenas obtemos algumas soluções, visto que o *Mathematica* utiliza funções inversas para resolver equações trigonométricas e assim sendo perde algumas soluções. Por vezes utilizaremos a função FindRoot para encontrar raízes "perdidas".

- A função Limit para o cálculo de limites.

- A função D para o cálculo de derivadas.

4.1.1 Funções disponíveis no *Mathematica* relacionadas com as funções trigonométricas

A função Simplify (já nossa conhecida) permite reduzir um ângulo ao primeiro quadrante, seguindo a prática usual de que x é um ângulo do primeiro quadrante.

```
Simplify[Sin[-3 Pi / 2 + x]]
```

```
Cos[x]
```

A função TrigExpand expande as funções trigonométricas que figuram na expressão à qual se aplica, isto é, separa somas e múltiplos inteiros de um ângulo (ou mais) que figurem no argumento

das funções trigonométricas, escrevendo o resultado como soma de potências de funções trigonométricas com argumentos "unitários".

```
TrigExpand[Cos[α - β]]
```

```
Cos[α] Cos[β] + Sin[α] Sin[β]
```

```
TrigExpand[Sin[3 α]]
```

```
3 Cos[α]2 Sin[α] - Sin[α]3
```

A função TrigFactor factoriza as funções trigonométricas que figuram na expressão à qual esta se aplica, depois de a ter expandido.

```
TrigFactor[%]
```

```
(1 + 2 Cos[2 α]) Sin[α]
```

Existe ainda, a função TrigReduce que reescreve uma expressão como somas e potências de funções trigonométricas numa outra função com funções trigonométricas com argumentos combinados.

```
TrigReduce[%]
```

```
Sin[3 α]
```

4.1.2 Alguns exemplos

São muitos os exemplos relacionados com a trigonometria, onde o *Mathematica* poderá ser útil de variadas formas. Fizemos uma selecção de alguns do 11º ano e de outros do 12º, visto que este tipo de funções é abordado durante estes dois anos escolares.

Deixámos de fora da lista seguinte muitos exercícios onde simplesmente se pede para calcular limites ou então derivadas de funções que envolvem de alguma forma funções trigonométricas. Isto para evitar repetirmo-nos, apesar de em tal tipo de exercícios este programa poder ser uma mais valia para comprovar resultados.

■ **Exemplo 28:**

Simplifique cada uma das seguintes expressões:

$$a) \frac{\cos(360^\circ - \alpha)}{\cos(360^\circ + \alpha)} - \frac{\sin(180^\circ + \alpha)}{\sin(360^\circ + \alpha)}$$

$$b) \cos\left(\frac{1}{2}\pi - \alpha\right) - \operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + 3\sin\left(\alpha - \frac{7\pi}{2}\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{-\pi}{2} - \alpha\right)$$

Para responder a este tipo de questão, muito vulgar nos 11º e 12º ano, com o *Mathematica* basta aplicar a função `Simplify` às expressões que pretendermos simplificar.

Alínea a):

```
Simplify[Cos[360 Degree - α] / (1 / Cos[360 Degree + α]) -
Sin[180 Degree + α] / (1 / Sin[360 Degree + α])]
```

1

Alínea b):

```
Simplify[Cos[Pi / 2 - α] - Tan[α + Pi / 2] + 3 Sin[α - 7 Pi / 2] - Tan[-Pi / 2 - α]]
3 Cos[α] + Sin[α]
```

■ **Exemplo 29:**

A temperatura do ar, em graus centígrados, em certa cidade, num dia de Primavera, é dada pela função:

$$T(t) = 15 + 6\sin\left[\frac{\pi(t-8)}{12}\right]$$

- Qual a temperatura às 8, às 12 e às 22 horas?
- A que horas atingiu 18°C?
- Represente graficamente a função.

Vamos começar por definir a função em questão no *Mathematica*:

```
Clear[T]
T[t_] := 15 + 6 Sin[Pi (t - 8) / 12]
```

Alínea a):

Para respondermos a esta questão poderemos utilizar a função `Map` aplicada à função `T` e à lista composta pelos objectos dos quais pretendemos as imagens.

```
Map[T, {8, 12, 22}]
{15, 15 + 3√3, 12}
```

Aproximando os valores anteriores:

```
N[%]
{15., 20.1962, 12.}
```

Portanto, às 8h estavam 15°C, às 12h estavam, aproximadamente, 20,2°C e às 22h estavam 12°C.

Alínea b) e c):

```
Solve[T[t] == 18, t]
```

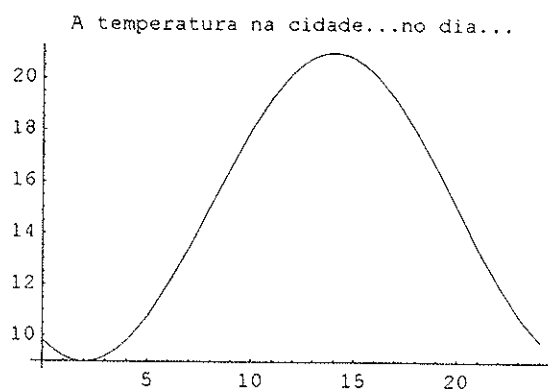
Solve::ifun : Inverse functions are being used by Solve, so some solutions may not be found.

```
{{t -> 10}}
```

Para além da solução $t=10$ (que permite concluir que às 10h a temperatura é de 18°C) obtemos uma mensagem que nos informa sobre a possibilidade de algumas soluções não terem sido encontradas, em virtude do *Mathematica* utilizar funções inversas para resolver a equação.

Vamos então construir o gráfico da função $T(t)$ no intervalo $[0,24]$ para vermos se existem mais alguma solução da equação $T(t)=18$ e desta forma respondemos já à alínea c.

```
Plot[T[t], {t, 0, 24}, PlotLabel -> "A temperatura na cidade...no dia..."]
```



- Graphics -

Pela simples análise do gráfico vemos que durante um dia a temperatura toma por duas vezes o valor de 18°C, sendo uma delas às 10h, como já tínhamos visto e outra por volta das 20h. Vamos tentar chegar a esta solução da equação $T(t)=18$ usando a função `FindRoot`.

```
FindRoot[T[t] = 18, {t, 20}]
```

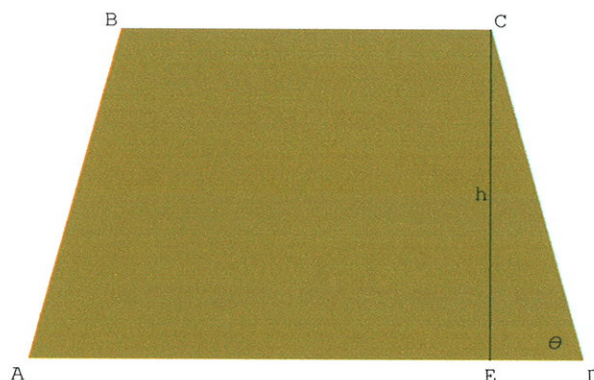
```
{t -> 18.}
```

Afinal, a temperatura atinge os 18°C, às 10h e às 18h.

■ Exemplo 30:

A pedido de um dos clientes, um fabricante tem de construir peças metálicas de área máxima, com a forma de um trapézio, em que $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = 2\text{dm}$.

Designando por θ a medida da amplitude (em radianos) do ângulo ADC,



- a) Exprima a altura h do trapézio e o comprimento da base maior em função de θ .
- b) Prove que a área $A(\theta)$ do trapézio é dada, em dm^2 , por :
- $$A(\theta) = 4\text{sen } \theta + 2\text{sen } 2\theta$$
- c) Determine o valor de θ para o qual a área do trapézio é máxima e calcule essa área.
- d) Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{A(\theta)}{\theta}$.

Prova de Aferição, Época Normal, 1994

Nota:

De seguida apresentamos uma construção para que o *Mathematica* represente a figura em questão, se desejar conhecer os pormenores da sua concepção consulte o trabalho Geometria no *Mathematica*, de Ana Isabel Xavier Correia, na subsecção 6.3.

```
Show[Graphics[{{RGBColor[0.5, 0.4, 0.1], Polygon[{{0, 0}, {1, 4}, {5, 4}, {6, 0}}]},
  Line[{{5, 4}, {5, 0}}], Text["A", {-0.1, -0.2}],
  Text["B", {0.9, 4.1}], Text["C", {5.1, 4.1}], Text["D", {6.1, -0.2}],
  Text["theta", {5.7, 0.2}], Text["h", {4.9, 2}], Text["E", {5, -0.2}]}]]
```

Alínea a):

O $\Delta[EDC]$ é um triângulo rectângulo, logo podemos aplicar as razões trigonométricas do ângulo θ :

Para determinar a altura h do trapézio:

$\sin \theta = \frac{h}{\overline{CD}} \Leftrightarrow \sin \theta = \frac{h}{2}$, resolvendo a equação em ordem a h temos

```
Solve[Sin[θ] = h / 2, h]
```

```
{{h → 2 Sin[θ]}}
```

Para determinar a base maior - B - temos de em primeiro lugar determinar o valor de \overline{ED} .

$\cos \theta = \frac{\overline{ED}}{\overline{CD}} \Leftrightarrow \cos \theta = \frac{\overline{ED}}{2}$ e resolvendo a equação em ordem a \overline{ED} temos:

```
Solve[Cos[θ] = ED / 2, ED]
```

```
{{ED → 2 Cos[θ]}}
```

Logo, a base maior mede $\overline{AD} = 2 + 2 \times 2 \cos \theta = 2 + 4 \cos \theta$

Nota:

Certamente, é mais simples e menos trabalhoso resolver estas duas últimas equações sem recorrer ao *Mathematica*, utilizámo-o apenas para infantizar o facto do programa resolver equações com mais de uma incógnita, em ordem a uma delas. O mesmo se pode dizer, em relação à resolução da alínea seguinte no que respeita ao recurso ao *Mathematica*.

Alínea b):

Vamos atribuir à base maior (B), base menor (b) e à altura as suas expressões e em seguida calcular a área do trapézio.

```
Clear[h, b, B]
```

```
h = 2 Sin[θ];
```

```
b = 2;
```

```
B = 2 + 4 Cos[θ];
```

```
Expand[(b + B) h / 2]
```

```
4 Sin[θ] + 4 Cos[θ] Sin[θ]
```

```
TrigReduce[%]
```

```
2 (2 Sin[θ] + Sin[2 θ])
```

Obviamente, a expressão que obtivemos é equivalente à dada no enunciado, no entanto podemos usar novamente a função `Expand` para que o programa efectue o produto.

```
Expand[%]
```

```
4 Sin[θ] + 2 Sin[2 θ]
```

Alínea c):

Vamos definir a função $A(\theta)$ no *Mathematica* e em seguida resolver a equação $A'(\theta)=0$, para determinarmos o ângulo para o qual a área do trapézio é máxima.

```
A[θ_] := 4 Sin[θ] + 2 Sin[2 θ]
```

```
Solve[A' [θ] = 0, θ]
```

```
Solve::ifun : Inverse functions are being used by Solve, so some solutions may not be found.
```

```
{ {θ → -π}, {θ → -π/3}, {θ → π/3}, {θ → π} }
```

Obtemos várias soluções (apesar de ainda existirem muitas outras!), mas no contexto do problema a que nos interessa é a solução $\theta = \frac{\pi}{3}$, visto que $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

Vamos ver qual é, então neste caso, a área máxima:

```
A[Pi / 3]
```

```
3 √3
```

```
N[*]
```

```
5.19615
```

Para um ângulo de 60° temos que o trapézio tem uma área máxima de, aproximadamente, $5,2 \text{ dm}^2$.

Alínea d):

```
Limit[A[θ] / θ, θ → 0]
```

```
8
```

4.2 Função exponencial

Uma **função exponencial** de base a é uma função da forma:

$$f(x) = a^x$$

com a e x números reais tais que $a > 0$ e $a \neq 1$.

Se $a=1$, $f(x)=1^x=1$ e temos uma função constante.

4.2.1 Um exemplo concreto de uma função exponencial

As amibas são seres unicelulares que se reproduzem dividindo-se de acordo com as condições ambientais. Supondo que, em certas condições, ao fim de uma hora, uma amiba se divide em duas, ao fim de n horas uma amiba em quantas se transforma?

Ao fim de 1 hora teremos **2** amibas.

Ao fim de 2 horas teremos **4** amibas ($4=2 \times 2=2^2$).

Ao fim de 3 horas teremos **8** amibas ($8=2 \times 2 \times 2=2^3$).

.

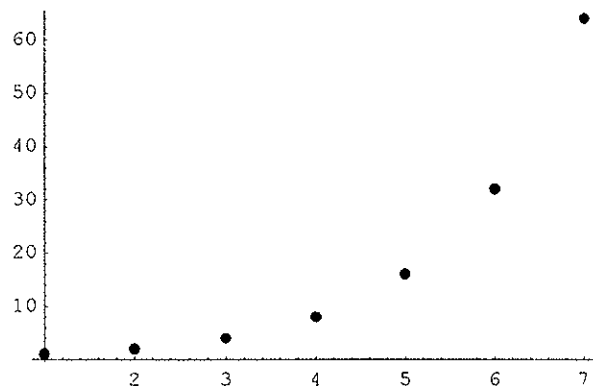
.

.

Ao fim de n horas teremos **2^n** amibas.

Vamos construir o gráfico correspondente a esta situação:

```
ListPlot[Table[2^n, {n, 0, 6}], PlotStyle -> PointSize[.02]]
```

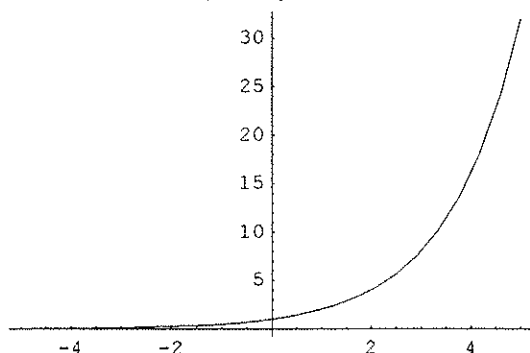


- Graphics -

Vamos seguidamente, considerar a função real de variável real $f(x)=2^x$ e vamos ver o seu gráfico.

```
Plot[2^x, {x, -5, 5}, PlotLabel -> "Gráfico da função exponencial de base 2"]
```

Gráfico da função exponencial de base 2



- Graphics -

Esta função é positiva em todo o conjunto dos números reais, é crescente em todo o seu domínio e quando $x \rightarrow -\infty$ a função tende para zero, enquanto que quando $x \rightarrow +\infty$ função também tende para $+\infty$.

Se necessitarmos de trabalhar com a função exponencial de base e e como é uma constante predefinida no *Mathematica* podemos escrevê-la utilizando um carácter maiúsculo ou então recorrer ao símbolo que existe num dos submenus do submenu Palettes do menu File.

Obviamente, o programa com que estamos a trabalhar poderá ser muito útil no estudo deste tipo de funções - na resolução de equações, no cálculo de limites e derivadas, no estudo da influência de determinados parâmetros sobre o traçado gráfico das funções, etc.

4.2.2 Alguns exemplos:

Com os exemplos que apresentamos de seguida tentaremos elucidar o que acabámos de dizer.

■ Exemplo 31:

A propagação de uma doença infecciosa numa certa escola é dada pela expressão

$$P(t) = \frac{100}{1 + e^{3-t}}$$

onde $P(t)$ é o número de estudantes infectados e t é o número de dias contados após os estudantes terem estado em contacto com outros infectados.

- Estime o número inicial de estudantes infectados.*
- A longo prazo quantos alunos irão contrair a doença?*
- Quantos dias serão necessários para 99 alunos estarem infectados?*

Vamos definir a função no *Mathematica*:

```
Clear[P]
P[t_] := 100 / (1 + E^(3 - t))
```

Alínea a):

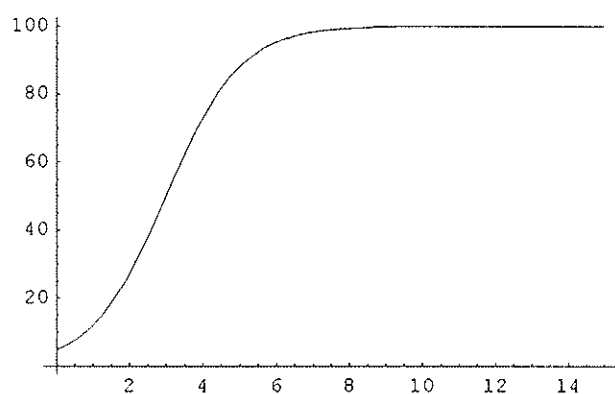
```
N[P[0]]
4.74259
```

Inicialmente, teremos aproximadamente 5 estudantes infectados.

Alínea b):

Vamos em primeiro lugar fazer o gráfico da função em questão para termos uma ideia da propagação da doença.

```
Plot[P[t], {t, 0, 15}]
```



- Graphics -

O gráfico da função sugere que esta é crescente e que tende a estabilizar com o passar dos dias, vamos ver o que se passa no infinito.

```
Limit[P[t], t -> +∞]
100
```

Como a função é crescente, o número de estudantes infectados nunca ultrapassará 100.

Alínea c):

Bastará resolver a equação $P(t)=99$.

```
NSolve[P[t] == 99, t]
```

```
Solve::ifun : Inverse functions are being used by Solve, so some solutions may not be found.
```

```
{{t -> 7.59512}}
```

Logo, podemos garantir que após 8 dias, aproximadamente, já teremos 99 alunos infectados.

■ **Exemplo 32:**

Sendo f a função definida por $f(x) = x^e$, a expressão analítica de f' é:

- (A) x^e
- (B) x^{e-1}
- (C) ex^{e-1}
- (D) $x^e \ln x$

$D[x^E, x]$

$e x^{-1+e}$

Logo, a resposta correcta é a (C).

■ **Exemplo 33':**

Prevê-se que o custo c dos terrenos na localidade X valorize nos próximos 20 anos de acordo com a fórmula:

$$c(t) = c_0 \times 1,05^t, \quad t \text{ em anos}$$

onde c_0 representa, em milhares de euros, o valor actual de um terreno.

a) Calcule o valor que um terreno poderá ter daqui a 50 anos sabendo que hoje tem o valor de 10 mil euros.

Alínea a):

Vamos definir a função no *Mathematica*:

```
Clear[c, c0]
c[t_, c0_] := c0 1.05^t
c[50, 10]
114.674
```

Daqui a 50 anos um terreno que vale actualmente 10 mil euros valerá, aproximadamente, 115 mil euros.

■ **Exemplo 34:**

Resolva o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 5^{x+y} - 5^6 = 0 \\ 5^{x-y} - 5^2 = 0 \end{cases}$$

Para resolver este sistema usamos a função `Solve` colocando dentro de chavetas as equações que o compõem.

```
Solve[{5^(x+y) - 5^6 = 0, 5^(x-y) - 5^2 = 0}, {x, y}]
```

```
Solve::ifun : Inverse functions are being used by Solve, so some solutions may not be found.
```

```
{{x -> 4, y -> 2}}
```

4.3 Função logarítmica

Seja a função $f(x)=2^x$. Como já vimos, trata-se de uma função exponencial de base dois. A função é injectiva e, por isso, admite inversa. O *Mathematica* disponibiliza uma função predefinida - `InverseFunction` - que quando aplicada a uma "função" injectiva dá a sua correspondente inversa.

Vamos então recorrer a esta função para ver que a inversa da função exponencial é a função logarítmica.

```
InverseFunction[Exp]
```

```
Log
```

Para $a > 0$ e $a \neq 1$, a **função logarítmica** com base a representa-se por:

$$f: x \rightarrow y = \log_a x \quad (x \in \mathbb{R}^+),$$

sendo que $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$, isto é, o logaritmo de qualquer número positivo na base a é o expoente que é necessário elevar a base a para obter esse número.

No *Mathematica*, esta função define-se por `Log[a,x]`. No caso de queremos o logaritmo na base natural e de um número qualquer x basta escrever `Log[x]`.

Da definição de logaritmo decorre que logaritmo de 1, em qualquer base é zero e que o logaritmo de um número na sua própria base é um. Comprovando:

```
Log[a, 1]
```

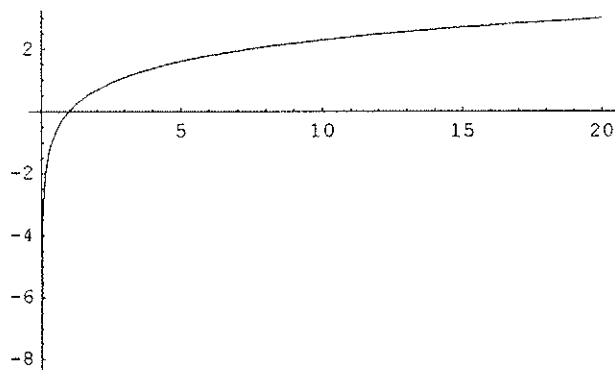
```
0
```

`Log[a, a]`

1

Vamos construir o gráfico da função logarítmica de base neperiana:

`Plot[Log[x], {x, 0, 20}]`

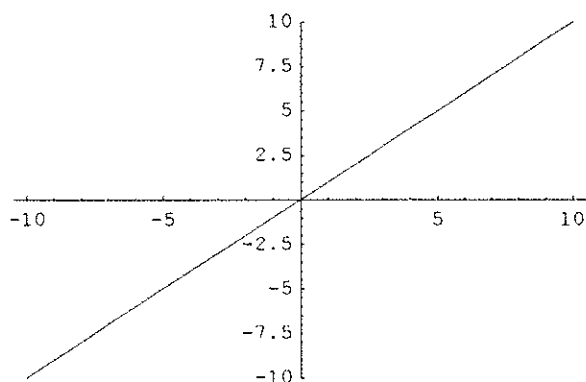


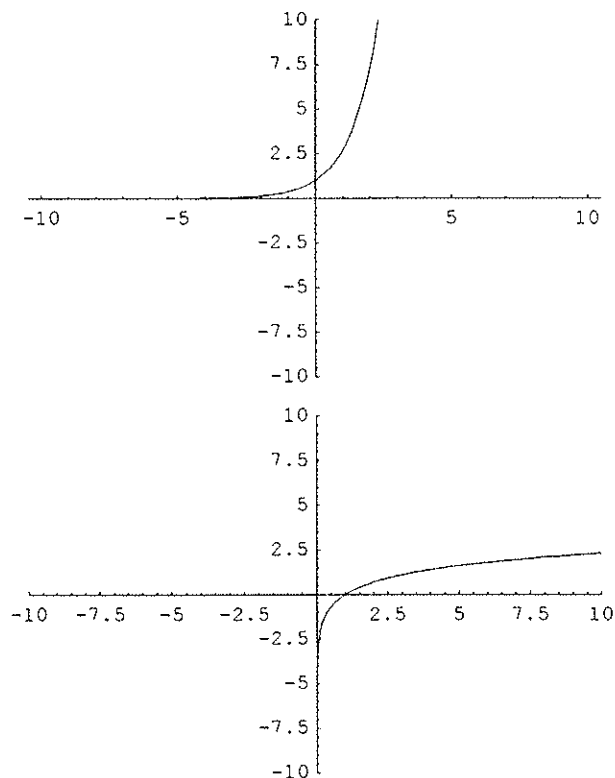
- Graphics -

Poderíamos utilizar o programa para analisar as translações deste tipo de funções bem como a influência do valor da base. Como já fizemos este tipo de estudo para outras funções ao longo deste trabalho, achámos que tornar-se-ia repetitivo. Vamos aproveitar as potencialidades gráficas do programa para evidenciar o facto de que os gráficos de duas funções inversas são simétricos relativamente à recta de equação $y=x$.

Construiremos uma tabela de com os gráficos das funções bissectriz dos quadrantes ímpares, exponencial e logarítmica que quando animada reflecte a propriedade que referimos anteriormente.

```
Table[{Plot[x, {x, -10, 10}, PlotRange -> {-10, 10}],
  Plot[E^x, {x, -10, 10}, PlotRange -> {-10, 10}],
  Plot[Log[x], {x, 0, 10}, PlotRange -> {{-10, 10}, {-10, 10}}]}
```



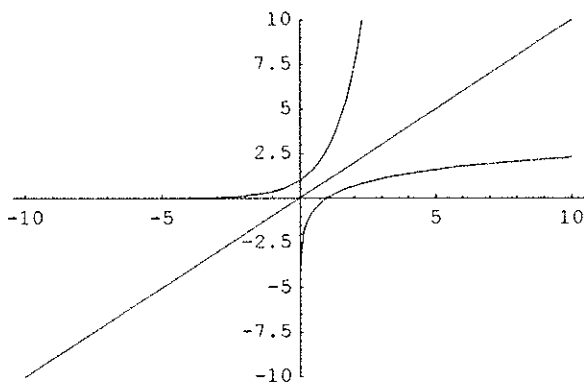


{ - Graphics -, - Graphics -, - Graphics - }

Construindo as três representações gráficas no mesmo referencial:

```
Plot[{E^x, Log[x], x}, {x, -10, 10}, PlotRange -> {-10, 10}]
```

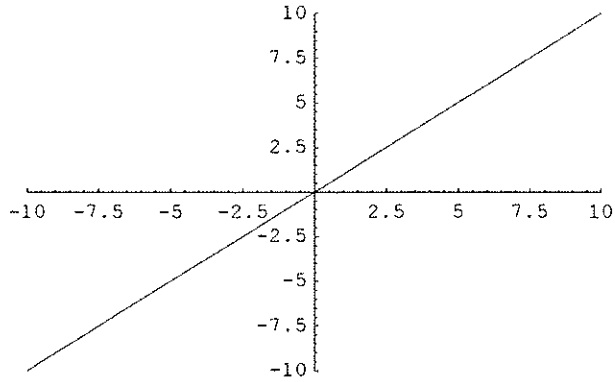
```
Plot::plnr : Log[x] is not a machine-size real number at x = -10..
Plot::plnr : Log[x] is not a machine-size real number at x = -9.18866.
Plot::plnr : Log[x] is not a machine-size real number at x = -8.30382.
General::stop : Further output of Plot::plnr will be suppressed during this calculation.
```



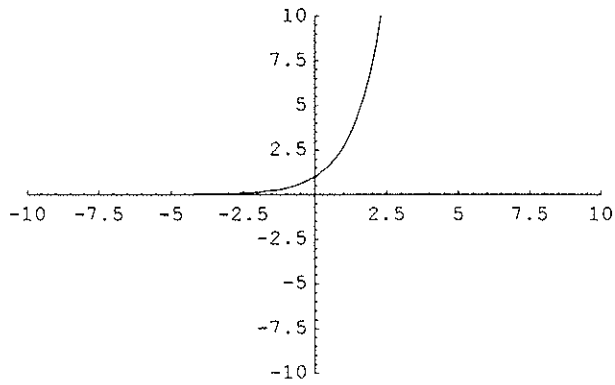
- Graphics -

A mensagem de erro que obtemos está relacionada com o domínio da função logarítmica - \mathbb{R}^+ . Podemos construir cada um dos gráficos individualmente, fixando os valores mínimo e máximo para cada um dos eixos coordenados e atribuindo um nome para depois mostrá-los utilizando a função Show.

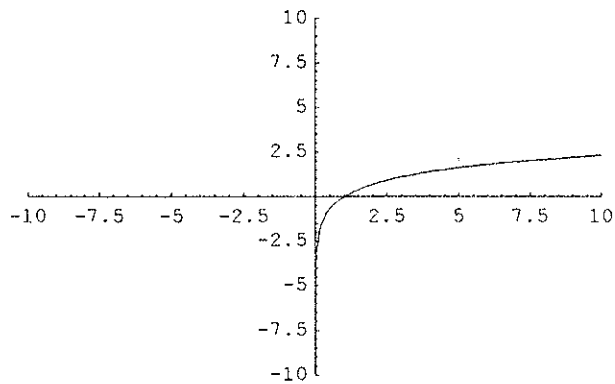
```
Clear[a, b, c]
a = Plot[x, {x, -10, 10}, PlotRange -> {{-10, 10}, {-10, 10}}]
b = Plot[E^x, {x, -10, 10}, PlotRange -> {{-10, 10}, {-10, 10}}]
c = Plot[Log[x], {x, 0, 10}, PlotRange -> {{-10, 10}, {-10, 10}}]
Show[{a, b, c}]
```



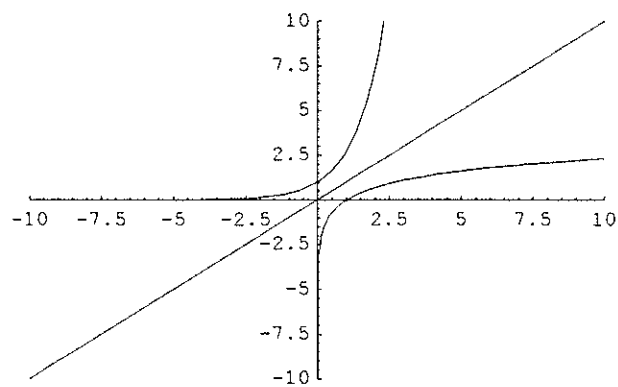
- Graphics -



- Graphics -



- Graphics -



- Graphics -

Podemos também obter a expressão geral da derivada deste tipo de funções:

$$D[\text{Log}[a, f[x]], x]$$

$$\frac{f'[x]}{f[x] \text{Log}[a]}$$

Podemos também calcular alguns limites:

$$\text{Limit}[\text{Log}[0.5, x], x \rightarrow +\infty]$$

$-\infty$

$$\text{Limit}[\text{Log}[0.5, x], x \rightarrow 0]$$

∞

$$\text{Limit}[\text{Log}[2, x], x \rightarrow +\infty]$$

∞

$$\text{Limit}[\text{Log}[2, x], x \rightarrow 0]$$

$-\infty$

4.3.1 Alguns exemplos

De seguida apresentamos alguns exemplos relacionados com as funções logarítmicas onde o *Mathematica* poderá dar uma ajuda na sua resolução.

■ Exemplo 35:

O valor de $5^{2+\log_5(w+1)}$ é igual a

- (A) $25w+25$
- (B) 5^2+w+1
- (C) $25\log_5(w+1)$
- (D) $25+\log_5(w+1)$

(Exames oficiais de 1993)

Para ver qual destas respostas é a correcta, utilizando o programa onde estamos a trabalhar, basta simplificarmos a expressão dada:

```
Simplify[5^(2 + Log[5, w + 1])]
```

```
25 (1 + w)
```

```
Expand[%]
```

```
25 + 25 w
```

Logo, a resposta correcta é a (A).

■ Exemplo 36':

A magnitude dos tremores de Terra é habitualmente medida na escala de Richter. Nesta escala a magnitude - M - de um abalo sísmico está relacionada com a energia libertada - e_l , em ergs, da seguinte forma:

$$M = \frac{\log l - 11,8}{1,5}$$

a) Um dos tremores de terra mais célebres ocorreu em S. Francisco, Estados Unidos da América, em 1906 e libertou $1,496 \times 10^{24}$ ergs de energia. Qual foi a sua magnitude na escala de Richter?

b) Qual é a energia libertada (em ergs) por um sismo de magnitude 8,5 na escala de Richter?

Para respondermos às questões formuladas vamos definir a função $M(e_l)$:

Alínea a):

```
Clear[M]
```

```
M[e_l_] := (Log[10, e_l] - 11.8) / 1.5
```

```
M[1.496 × 1024]
```

```
8.24995
```

A magnitude do sismo é de aproximadamente 8,2 na escala de Richter

Alínea b):

Temos de resolver a equação $M(e1)=8,5$:

```
Solve[M[e1] = 8.5, e1]
```

```
{{e1 -> 3.54813 × 1024}}
```

A energia libertada foi de $3,54813 \times 10^{24}$ ergs.

5 - Comentário Final

O programa *Mathematica* à primeira vista poderá não parecer de fácil utilização, dada a sua sintaxe própria, acrescido do facto de ser um programa que utiliza a língua inglesa.

Contudo, pensamos que com um pouco de insistência e perseverança, passadas algumas horas a explorá-lo aperceber-se-ão de algum do grande potencial deste programa.

Este programa é muito útil para:

- Resolver cálculos auxiliares - muitas vezes, em determinados exercícios, os cálculos não são o objectivo principal e acabamos por perder muito tempo com a execução dos mesmos. Com este sistema à mão há sempre a tentação de não nos maçarmos com os cálculos auxiliares.

- Verificar resultados - o professor muitas vezes necessita criar exercícios, mas às vezes esta intenção conduz a resultados "monstruosos", com o *Mathematica* à mão facilmente chega à solução e se não for do estilo desejado muda alguns números e avalia novamente. O aluno, por sua vez pode verificar se o(s) exercício(s) que realizou está(estão) correcto(s) ou não.

- Levar os alunos a concluírem propriedades sobre translações gráficas das funções, através da animação de uma tabela de gráficos. A este propósito refira-se que ao longo deste trabalho várias vezes construímos tabelas de gráficos, mas o interesse das mesmas consiste na sua animação e não naquilo que obtemos representado no papel.

- Combinar num mesmo documento texto, cálculo numérico e simbólico e objectos gráficos, permitindo, por exemplo, a um professor a elaboração de fichas de trabalho ou fichas de avaliação. Refira-se que este trabalho foi escrito no *Mathematica*.

- Consultar fórmulas trigonométricas, fórmula resolvente de segundo, terceiro e quarto grau para a resolução de equações, regras de derivação, limites notáveis, entre outras.

- Favorecer a auto-aprendizagem e motivar alunos e/ou professores de matemática.

Muito mais haveria a dizer sobre o *Mathematica* e as funções. Deixamos como projectos para o futuro algumas sugestões de trabalho:

- Aprofundar este estudo de funções usando, entre outras coisas, os pacotes Graphics'Legend', Graphics'FilledPlot', Graphics'Graphics', Graphics'ComplexMap', Graphics'Animation', entre outros.

- Elaborar um *Manual do Mathematica para o professor do Ensino Superior*, "varrendo" muitas das áreas onde o *Mathematica* poderá ser utilizado - Análise, Álgebra, Análise Complexa, Teoria dos Números,....

6 - Referências bibliográficas

- [1] Ana Maria Brito Jorge, Conceição Barroso Alves, Graziela Fonseca e Judite Barbedo. *Infinito 10*. Areal Editores, 1997.
- [2] Ana Maria Brito Jorge, Conceição Barroso Alves, Graziela Fonseca e Judite Barbedo. *Infinito 11 - volume 2 - Matemática 11º ano*. Areal Editores, 1998.
- [3] Ana Maria Brito Jorge, Conceição Barroso Alves, Graziela Fonseca e Judite Barbedo. *Infinito 12 - volume 2 - Matemática 12º ano*. Areal Editores, 1999.
- [4] Ângela Maria Câmara. *Matemática - Teoria e Prática - 11º ano*. Edições Rumo, 1998.
- [5] Cameron Smith e Nancy Blachman. *The Mathematica Graphics Guidebook*. Addison - Wesley, 1995.
- [6] Harmat F. W. Hofst e Margret H. Hofst. *Computing with Mathematica*. Academic Press, 1998.
- [7] Jerry Glyn e Theodore Gray. *The Beginner's Guide to Mathematica Version 3.0*. Cambridge University Press, 1999.
- [8] Jonh W. Gray. *Mastering Mathematica - Programming with Mathematica*. Academic Press - 2ª edição, 1997.
- [9] José Carmo, Amílcar Sernadas, Cristina Sernadas, F. Miguel Dionísio e Carlos Caleiro. *Introdução à Programação em Mathematica*. IST Press, 1999.
- [10] Maria Almeida Ferreira dos Santos e Maria Estefânia de Almeida F. Marques. *Exercícios Resolvidos - Matemática 12º ano - 2º volume*. Porto Editora, 1999.
- [11] Maria Augusta Ferreira Neves. *Funções 1 - Exercícios - Matemática 10º ano - Parte 2*. Porto Editora, 2000.
- [12] Maria Augusta Ferreira Neves. *Funções 1 - Matemática 10º ano - Parte 2*. Porto Editora, 2000.
- [13] Maria Augusta Ferreira Neves. *Exercícios de Matemática 11º ano - 1º volume*. Porto Editora, 1994.

-
- [14] Maria Augusta Ferreira Neves. *Funções 2 - Matemática 11º ano - Parte 2*. Porto Editora, 1998.
- [15] Maria Augusta Ferreira Neves. *Funções 2 - Matemática 12º ano - Parte 2*. Porto Editora, 1998.
- [16] Marinela Cabral St. Aubyn, Cristina Brito e Ana Cristina Martins. *MAT 11º ANO - volume 1*. Lisboa Editora, 2000.
- [17] Martha L. Abell e James P. Braselton. *Mathematica By Example*. Academic Press, 2ª edição, 1997.
- [18] Richard J. Gaylord, Samuel N. Kamin e Paul R. Wellin. *An Introduction to Programming with Mathematica*. Telos, 2ª edição, 1996.
- [19] Stephen Wolfram. *The Mathematica Book*. Wolfram Media, 3ª edição, 1996.
- [20] Yolanda Lima e Francelino Gomes. *XEQMAT - 11º ano*. Editorial O Livro, 1997.

Anexo

N° do exercício neste trabalho	Referência bibliográfica	Página na referência bibliográfica	N° do exercício na referência bibliográfica
1	12	38	2
2	1	216	7
3	16	125	34
4	1	213	2
5	12	109	25
6	11	108	1
7	11	108	3
8	12	146	7
9	11	132	1
10	11	132	3
11	11	133	5
12	11	139	2
13	11	134 e 135	3
14	11	125	9
15	11	141	11
16	1	315	43
17	1	316	52
18	2	62	1
19	20	174	2
20	2	170	6
21	20	175	98
22	2	171	8
23	4	210	41
24	2	188	69
25	14	64	2
26	14	65	3
27	14	61	4
28	13	197 e 198	4
29	10	47	14
30	10	117	4
31	4	180	4
32	15	197	39
33	15	147	13
34	15	31	3
35	3	185	12
36	3	45	2