A Aprendizagem das Noções Elementares da Álgebra e das Equações no 7º Ano de Escolaridade

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Lúcia Maria Teixeira Lopes
MESTRADO EM ENSINO DA MATEMÁTICA NO 3º CICLO DO ENSINO BÁSICO E SECUNDÁRIO

UNIVERSIDADE da MADEIRA
A Nossa Universidade
www.uma.pt

janeiro | 2014

A Aprendizagem das Noções Elementares da Álgebra e das Equações no 7º Ano de Escolaridade

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Lúcia Maria Teixeira Lopes
MESTRADO EM ENSINO DA MATEMÁTICA NO 3º CICLO DO ENSINO BÁSICO E SECUNDÁRIO

ORIENTAÇÃO
Elsa Maria dos Santos Fernandes

A aprendizagem das noções elementares da álgebra e das equações no 7º ano de escolaridade

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Lúcia Maria Teixeira Lopes

MESTRADO EM ENSINO DA MATEMÁTICA NO 3º CICLO

DO ENSINO BÁSICO E SECUNDÁRIO

ORIENTAÇÃO
Elsa Maria dos Santos Fernandes

RESUMO

Esta dissertação é fruto de um processo de reflexão sobre a minha experiência profissional de nove anos de serviço, como docente de matemática, bem como do interesse pela análise do processo de aprendizagem que os alunos do sétimo ano de escolaridade fazem das noções elementares da álgebra.

Para realizar esta investigação, foi selecionada uma turma de sétimo ano, em que a maioria dos alunos é interessada pelo seu percurso escolar, embora, por vezes, não sejam constantes na sua prestação em sala de aula, bem como na realização do estudo correto em casa.

Neste estudo, optou-se por uma metodologia de natureza qualitativa, de caráter interpretativo.

O estudo das noções elementares da álgebra no sétimo ano de escolaridade é um marco de suma importância no percurso escolar dos alunos.

É no sétimo ano de escolaridade que estes têm o primeiro contacto com noções elementares da álgebra. Por isso as experiências iniciais tornam-se fulcrais para uma aprendizagem significativa da álgebra.

Assim, neste estudo, pretende-se estudar o impacte das várias tarefas aplicadas em sala de aula, quer individualmente, quer aos pares, ou em turma, a fim de se perceber o que, efetivamente, o aluno aprendeu das noções elementares da álgebra, mais concretamente das equações.

Com estas tarefas foi possível identificar algumas das dificuldades sentidas pelos alunos, neste ramo da matemática.

Palavras-chave: noções elementares da álgebra; evolução da noção de equação; pensamento algébrico;

ABSTRACT

This research work is the conclusion of a careful reflection on my professional experience as a Maths teacher during 9 academic years, as well as a consequence of my interest on the analysis of the learning process done by seventh grade students as far as elementary notions of algebra are concerned.

In order to fulfil this research, a seventh grade class was selected, in which the majority of the students are motivated and show interest about school, though they are not always hard-working or well-succeeded inside or outside classes.

This research was done through a qualitative methodology, which was afterwards interpreted by us.

The study of algebra notions is deeply important for seventh grade students, as far as their future success as students is concerned.

In fact, it is during the seventh grade that they have their first contact with elementary algebra notions. For this reason their first experiences in this field becomes crucial for a well-succeeded learning process of algebra.

So, we intend to analyse the impact of several different tasks pursued in class, whether done individually, in pairs or as a whole class, with the aim of understanding what was actually learnt by the students related to elementary algebra notions, more precisely to equations.

Through these tasks it was then possible for us to identify some problems felt by students related to this area of Maths.

Keywords: elementary algebra notions; evolution of the notion of equation; algebraic thought

AGRADECIMENTOS

Não é possível enumerar todos aqueles que contribuíram para a minha valorização enquanto pessoa e enquanto profissional de educação, pois desde logo seria uma tarefa gigantesca indicar todos os alunos, colegas e amigos (as) com quem partilhei todos estes anos de trabalho de docência e com quem tanto aprendi.

Limito-me, por isso, a referir alguns que me incentivaram e ajudaram a realizar este mestrado, sem que as omissões representem menos valorização e estima pelos restantes.

- À Professora Doutora Elsa Fernandes, minha orientadora, pela orientação do mestrado, pela compreensão e pelas palavras de encorajamento.

- Aos alunos da turma, pela cooperação que evidenciaram e pelos bons momentos passados. Sem eles, este trabalho não seria possível.

- Ao Conselho Executivo da minha escola que colaborou no que foi necessário.

- A todos (as) os (as) meus (minhas) amigos (as) que me apoiaram e me encorajaram nesta árdua caminhada.

- Por último, mas não menos importante, agradeço ainda a toda a minha família, a do **coração** e a de sangue, pelo total apoio que me transmitiram.

Aos meus pais,

as minhas referências!

ÍNDICE

ÍNDICE DAS FIGURAS

1. INTRODUÇÃO

1.1. Refletir para evoluir!

Inicio esta dissertação com o propósito de 'Refletir para evoluir', uma vez que é lema na minha conduta diária, como docente. À medida que os anos passam, tenho a consciência que a minha prestação como docente de matemática foi-se aperfeiçoando, no entanto, está muito longe de chegar à perfeição. Esta atitude reflexiva, como defendem Oliveira e Serrazina (2002), no seu trabalho sobre "*A reflexão e o professor como investigador*", deverá notar-se na prática diária de um professor. Acredito que o facto de encarar a docência desta forma é um forte contributo para o meu crescimento individual, relacional e profissional.

A exigência comigo própria e para com os meus alunos é algo que me caracteriza. Cada aula é sempre um desafio, cuja finalidade é fazer com que os alunos aprendam e realizem matemática, quer de forma escrita, quer de forma oral, quer de forma informal, como de forma formal. Associado a esta exigência na sala de aula, também faz parte da minha atuação, propor aos alunos atividades de consolidação para casa, para os fazer folhear o caderno e o manual escolar em casa, pois, caso contrário, a maioria não realiza esse trabalho individual, que é fundamental. É claro que nem sempre há harmonia de opiniões, tanto no corpo docente, como no meio dos encarregados de educação, como nos próprios discentes. No entanto, continuo a defender que não devemos negligenciar esta parte, pois é para o bem de todos os alunos, beneficiando os interessados em cumprir o seu dever de aluno.

É certo e sabido, que ao trabalhar com alunos ávidos pelo saber, podemos atribuir uma "infinidade" de atividades, que estes estão sempre prontos para as realizar. No entanto, há os que até querem aprender, mas com pouco trabalho, por isso é importante fazê-los ver que se derem muito mais de si, construirão a sua aprendizagem de forma significativa.

Todavia, nem sempre é tão linear a evolução da prestação do aluno. Por isso, cada dia é necessário estimular a motivação do aluno, assim como a sua responsabilização, para que sejam cidadãos criativos. Existem ainda, aqueles que não se empenham muito, pois têm interesses divergentes dos escolares, não valorizando a escola, como meio de engrandecimento da sua aprendizagem, dificultando o processo de ensino-aprendizagem. Este tipo de alunos não sabe estar dentro de uma sala de aula, e não respeita os seus colegas que querem aprender e, por vezes, os próprios professores. Nestas circunstâncias, a minha tarefa é bastante dificultada. Estes alunos são um desafio enorme na apresentação/divulgação de uma matemática que lhes seja significativa. Por vezes, até se consegue que estes discentes se interessem por determinadas tarefas, quando são de carácter prático, ao passo que, quando são tarefas de carácter teórico, o seu empenho rapidamente se esgota.

É motivo de reflexão, alguns aspetos que considero importantes nas ações diárias de um professor, são eles: o ambiente de sala de aula, com tudo o que isso implica, o cargo de diretor de turma e a formação contínua.

Sempre que se inicia um ano letivo, ressoa em minha mente a afirmação de Gordon Neufeld (2008) "as crianças aprendem melhor quando gostam do seu professor e quando sabem que o seu professor gosta delas", é o que tento fazer com os meus alunos. Promover momentos de partilha e enriquecimento pessoal e coletivo, respeitando a individualidade de cada aluno e ajudando-os no seu crescimento.

Ao longo das várias aulas, incuto o saber estar na sala de aula. Exijo sempre uma postura correta, tentando, ao mesmo tempo, ser afável com os alunos para que assim possamos, em conjunto, construir um bom ambiente de aprendizagem significativa da matemática e até de valores e atitudes positivas para a vida.

Na minha ação dentro da sala de aula, os alunos são sempre a minha prioridade, pois quero que se motivem para a matemática e sintam como esta é importante para o crescimento do seu pensamento matemático e argumentação crítica, bem como, para a construção da generalização de ideias matemáticas.

Quanto mais envolvidos na aula estiverem os alunos, mais positivo será o ambiente desta, beneficiando de forma significativa o processo de ensino-aprendizagem.

É minha conduta, envolver sempre todos os alunos na aula, promovendo a participação oral de todos.

O ambiente de sala de aula será tanto mais positivo, isto é, meio onde existe construção de aprendizagem, quanto mais variado for também o tipo de atividades que se propõem aos alunos. Como menciona Skovsmose (2000) os ambientes de aprendizagem podem assumir três referências: (i) questões da matemática pura; (ii) questões que fazem referência à semirrealidade; e (iii) questões que abordam a realidade. Todas estas referências podem ainda ser abordadas apenas por exercícios ou por um cenário de investigação.

Interessa equilibrar as questões, por forma a haver uma dinâmica variada nas várias aulas, não esquecendo que tudo se processa numa inter-relação entre professor e aluno, uma vez que é à medida que os alunos se envolvem, que poder-se-á passar pelas várias referências propondo os três tipos de tarefas matemáticas.

Na minha experiência profissional, também faz parte o desempenho importante do cargo de diretora de turma, tema estudado por Cruz (2006) em que realça o importantíssimo papel do diretor de turma nos períodos pré e pós 25 de abril, com caraterísticas diferentes, dentro das prioridades políticas bem distintas. Cruz (2006) salienta a capacidade de comunicação do diretor de turma com os diferentes intervenientes na educação do aluno.

Também verifico que, os alunos que têm encarregados de educação que lhes exigem bons resultados, alguns destes esforçam-se por estar atentos nas aulas e realizam um estudo regular, para não desiludir os seus pais. No entanto, também é verdade que, mesmo que os encarregados de educação estejam presentes de forma ativa na vida escolar dos seus educandos, estes nem sempre correspondem às expectativas dos seus pais e também dos seus professores, pois são seres em processo de construção da sua personalidade, que almejam a sua identidade, estando, por isso, em constante mudança. Ao passo que, os discentes que não têm os pais tão presentes, não se mobilizam, com tanto afinco, em realizar o seu estudo e em estarem atentos nas aulas.

Reparo muitas vezes que, todos os agentes da educação – pais, educadores e professores – procuram o mesmo, isto é, pretendem entender os filhos/alunos, conduzindo-os, pelos "melhores" caminhos, numa construção de genuínos cidadãos. Pode-se dizer que todos – alunos, pais e educadores/professores – são instrumentos importantes na construção do saber de cada aluno. Contudo, cabe também ao aluno arriscar-se na aventura da aprendizagem. Cada parte não se pode desvincular da sua nobre missão, embora, por vezes, o quotidiano acelerado dificulte esta tarefa, mas todos devemos contribuir, positivamente, na mesma. Ser diretora de turma é comunicar com todas as partes envolvidas neste processo de construção de cidadãos comprometidos, que é deveras, uma missão tão complexa, quão complexo é o ser humano.

Passando à formação contínua de um docente, é algo que procuro nunca descurar, ao longo da minha carreira docente, por ser da opinião que é um dos pontos que nos permite evoluir. Uma vez que é através desta forma que vou "limando" o que ainda tem que ser aperfeiçoado, mudando e completando a minha forma de ser e agir, dentro e fora da sala de aula.

Acredito que, mantendo-me em constante atualização, poderei ser uma melhor profissional, por isso participo em ações de formação a vários níveis, uma vez que somos um TODO a desenvolver.

Uma das formações que faço, desde há quatro anos, é a formação do Projeto CEM - Construindo o Êxito na Matemática, promovida pela Universidade da Madeira, em parceria com Secretaria Regional de Educação. Com esta formação tenho aprendido e reaprendido a forma de estar na sala de aula, de abordar questões matemáticas junto dos alunos e até de estar mais à vontade na abordagem das mesmas. Frequentei este projeto direcionado para o 6º, 7º e 8º anos de escolaridade, e por incompatibilidade de horário, foi impossível frequentar o projeto para o 9º ano de escolaridade.

Reconheço que, este projeto é uma mais-valia, primeiramente, para nós - docentes, pelo recordar minucioso dos conteúdos a transmitir, e pelo esclarecimento de dúvidas que surjam, além da enriquecedora partilha de experiências profissionais/pessoais que está inerente ao projeto. Também os alunos beneficiam desta aprendizagem/reaprendizagem efetuada, visto ser uma formação para a atuação na sala de aula. Todo o processo de construção/solidificação das aprendizagens realizada pelos docentes promove um crescimento individual e coletivo de cada interveniente.

O tipo de atividades desenvolvidas nas sessões de formação, para posteriormente serem aplicadas na sala de aula, é pertinente na construção do pensamento matemático dos alunos, favorecendo uma aprendizagem significativa da matemática.

O facto de se proporcionar aos alunos atividades de grupo, faz com que estes aprendam a trabalhar em conjunto, favorecendo o seu crescimento individual e coletivo. Com as dificuldades de uns e facilidades de outros, as observações adequadas de uns e as inadequadas de outros, promove-se o espírito de equipa e de entreajuda, além de se proporcionar um envolvimento diferente dos alunos.

São atividades que promovem um ambiente de aprendizagem cooperante, com proveito para todos os alunos.

1.2. Motivações e objetivos do estudo

Depois de ter procedido a esta reflexão sobre a minha prática docente, considero a lecionação da disciplina de matemática um constante desafio para que mais crianças aprendam com entusiasmo.

Considero igualmente, que a matemática é uma das disciplinas fundamentais do percurso escolar. Assumo ser importante preparar as aulas, de acordo com os níveis que me são atribuídos.

No caso particular do sétimo ano de escolaridade, todos os conteúdos são extremamente importantes, daí ser necessário envolver todos os alunos neste ano de escolaridade, pois é o primeiro ano do 3º ciclo, base para o sucesso do mesmo. Por serem oito unidades de conteúdos a abordar, segundo o programa português em vigor, na altura em que recolhi os dados, existe uma variedade de noções a serem interiorizadas e uma pluralidade de conceitos a reter e, consequentemente, a aplicar. É de facto um ano fulcral no desempenho matemático do aluno.

Pelo facto de já não ser a primeira vez que leciono este ano de escolaridade, reconheço ser interessante observar o modo como os alunos aprendem e alcançam as noções fundamentais da álgebra, uma vez que é a primeira vez que estas noções lhes são apresentada, e que, normalmente, ficam um pouco confusos com o que se pretende com este conteúdo.

Ao falar das noções fundamentais da álgebra, saliente-se que não nos referimos apenas aos procedimentos de resolução de uma equação, mas também o saber interpretar vários conceitos que lhe estão intrínsecos: incógnita, expressão algébrica, igualdade de expressões algébricas, soluções de uma equação e consequentemente de um problema, assim como classificar as equações.

Assim, partiu-se para uma investigação cujo propósito é compreender o processo de aprendizagem das noções elementares da álgebra, realizada pelo aluno.

Como forma de orientar a investigação considerei as seguintes questões:

- Como é que o aluno aprende a noção de incógnita?
- Como é que o aluno aprende a noção de equação?
- Como é que o aluno aprende o processo algébrico da resolução de uma equação do primeiro grau?
- Como é que saber resolver equações ajuda a resolver problemas?

1.3. Organização da dissertação

O desafio inicial deste trabalho foi organizar tudo o que pretendia colocar nele, visto existir um grande número de ideias e conceitos, todos eles relevantes para esta investigação.

A presente dissertação encontra-se dividida em sete capítulos. No capítulo inicial, para além de descrever o que consta em cada capítulo, é igualmente apresentada uma reflexão sobre a minha prática docente que originou esta dissertação.

Segue-se uma exposição das motivações que deliberaram a escolha do tema, assim como os objetivos deste estudo.

A fundamentação teórica é exposta no segundo capítulo, onde é abordada a definição de álgebra, as principais orientações para o ensino das noções elementares da álgebra no sétimo ano de escolaridade e a evolução "epistemológica-histórica" da noção de equação.

No terceiro capítulo é apresentada a metodologia utilizada, onde se caracteriza o ambiente e os intervenientes no estudo, referindo a forma como se procedeu à recolha de dados. A análise e a interpretação dos dados recolhidos, que foram baseadas nos excertos das produções escritas dos alunos e em transcrições das discussões feitas em turma e nos grupos, preenchem o quarto capítulo.

No quinto capítulo, são descritas as considerações gerais acerca deste trabalho. No sexto capítulo, é apresentada a bibliografia que permitiu desenvolver todo o trabalho e, por fim, no sétimo capítulo, são expostos os anexos.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1. A álgebra e o pensamento algébrico

A álgebra, ramo importante da matemática, é trabalhada desde há muitos séculos por vários matemáticos. Estes descobriram os vários processos algébricos para encontrar as soluções de uma equação, além de terem definido várias relações entre as variáveis matemáticas. Após vários séculos de estudo, chegaram à conclusão que não existem métodos algébricos para resolver equações de grau superior ao quarto, além de definirem o teorema fundamental da álgebra.

Mas afinal, o que é a álgebra?

Numa visão geral, citando o *National Council of Teachers of Mathematics* de 2008, a álgebra fornece uma maneira sistemática para investigar relações, ajudando a descrever, organizar e compreender o mundo (NCTM, 2008).

Por outro lado, se solicitarmos aos alunos uma definição de álgebra, estes dir-nos-ão que a álgebra é "fazer contas com letras".

Procedendo à recolha de algumas definições para a álgebra, verifiquei que existem várias definições, que não são antagónicas, mas que se complementam.

Segundo Nathan (2000) a álgebra pode ser vista sob vários aspetos: primeiramente, mencionando Kieran (1992), MacLane & Birkhoff (1967) e Usiskin (1988, 1997), a álgebra pode ser vista como a aritmética generalizada, incluindo o uso de símbolos literais, tais como letras, referindo-se a quantidades desconhecidas e a generalização de operações aritméticas que se aplicam às letras; em segundo lugar, continua Nathan, a álgebra está relacionada com uso de estruturas matemáticas formais para representar relações, incluindo os procedimentos que se operam nessas estruturas, apoiando-se em Kieran (1992) e a Usiskin (1988); e em terceiro lugar, a álgebra pode ser definida como um meio formal para descrever as relações entre quantidades, mencionando ainda Usiskin (1988, 1997).

Contudo, Usiskin (1988) refere que não é fácil definir a álgebra escolar, por isso recorre a dois investigadores, Saunders Mac Lane and Garrett Birkhoff (1967), que a definem do seguinte modo:

> "Algebra starts as the art of manipulating sums, products, and powers of numbers. The rules for these manipulations hold for all numbers, so the manipulations may be carried out with letters standing for the numbers. It then appears that the same rules hold for various different sorts of numbers . . . and that therules even apply to things... which are not numbers at all. An algebraic system, as we will study it, is thus a set of elements of any sort on which functions such as addition and multiplication operate, provided only that these operations satisfy certain basic rules (P.1)" (pg. 8).

Assim, à álgebra escolar está associado o constante manipular de símbolos matemáticos, não devendo, no entanto, ficar a álgebra apenas por esta manipulação, pois seria "empobrece-la"!

O estudo da álgebra não começa propriamente no terceiro ciclo, mas no início do pré-escolar, como aponta o National Council of Teachers of Mathematics quando defende que a álgebra deve atravessar o currículo desde JI-12 e que os alunos devem aprender matemática de um modo significativo com base nos seus conhecimentos matemáticos previamente adquiridos. Este sugere ainda, que o currículo de matemática, relativamente a este tema, deve proporcionar a todos os alunos: a compreensão de regularidades, relações e funções; a representação e análise de situações matemáticas e estruturas usando símbolos algébricos; a utilização de modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas; e a análise da variação, em diversas situações (NTCM, 2000).

Na lecionação da temática da álgebra apercebemo-nos que os alunos manifestam grandes dificuldades na compreensão dos vários conceitos que são tratados: o símbolo matemático - a incógnita ou variável; a expressão algébrica; a equação - igualdade de expressões algébricas e, consequentemente, a generalização.

Trabalhar a álgebra é de facto uma etapa fulcral do currículo escolar para os alunos do 7º ano de escolaridade, no 3º ciclo, pois é no início deste estudo, que se criam as bases, para posteriormente, o mesmo ser tratado com mais profundidade no ensino secundário.

A matemática, como menciona o programa português para o ensino básico, "não é uma ciência sobre o mundo, natural ou social, no sentido em que o são algumas das outras ciências, mas sim uma ciência que lida com objetos e relações abstratas" (ME, 2007, pg.2). Por isso, à matemática está associada várias áreas de atuação, tendo em vista o dar resposta às solicitações que lhe é apresentada, dando resposta a vários problemas, bem como aos que lhe são próprios (ME,2007).

Na atuação em sala de aula, muitas vezes verificamos que os alunos aprendem vários procedimentos, e muitas vezes não os compreendem ou entendem, mas por repetição, acabam por ser decorados, mas não interiorizados. É caso para dizer que os alunos não fizeram uma aprendizagem significativa dos conteúdos que são apresentados, ficando o processo de ensino-aprendizagem da matemática condicionado, ou até mesmo escasso.

A matemática é mais do que isso, como defendem vários investigadores, tudo depende das experiências a que os alunos são expostos, implicando diretamente os professores no momento da sua atuação na sala de aula.

Apontando novamente o National Council of Teachers of Mathematic, ficamos esclarecidos que é aos educadores/professores que compete desenvolver, junto dos alunos, atividades que tenham em vista o reconhecimento de padrões, utilizando, não a linguagem formal da matemática, mas a própria linguagem dos alunos de forma a contribuir para uma aprendizagem significativa do ponto de vista do aluno, para assim, poderem obter uma preparação adequada, para o trabalho algébrico mais aprofundado nos níveis mais avançados (NCTM, 2007).

É na linguagem informal, na linguagem dos alunos, explorando esquemas e palavas, que estes, podem desenvolver a álgebra, bem como o seu pensamento algébrico, num processo inicial de familiarização com a álgebra. Efetivamente, estes não poderão ficar pelo explorar de ideias.

É necessário, com a ajuda do professor, a discussão em turma e consequente formalização de conceitos, tendo em vista a generalização. Se não ocorrer esta última etapa, os alunos ficam confusos, não entendendo o objetivo das tarefas exploratórias que lhes foram apresentadas (Ponte, 2005).

Na sala de aula, quando os alunos se envolvem nas tarefas que lhes são apresentadas, e quando a linguagem da comunicação é a sua, a possibilidade de verbalizarem o que pensam acerca de determinada situação matemática, é muito maior. Estes procuram com afinco a possível resolução de determinada situação, uma vez que também é abordada através de linguagem simples.

Este modo de agir na sala de aula vai ao encontro do que refere Kaput (2000) sobre o processo de ensino-aprendizagem da álgebra, mencionando que é necessário mudar, começando por transformar assim a imagem tradicional da álgebra, que está associada à simplificação algébrica de expressões, à resolução de equações e à aprendizagem de regras para manipular símbolos.

Assim, as linhas gerais das mudanças resultam do que se conhece do processo de ensino-aprendizagem da álgebra, refere Kaput (2000), apontando que devemos:

• começar cedo (em parte, através da construção do conhecimento informal dos alunos,

• integrar a aprendizagem da álgebra com a aprendizagem de outro assunto (através da ampliação e aplicação do conhecimento matemático),

• incluir diferentes formas do pensamento algébrico (por aplicação do conhecimento matemático),

• construir de forma natural poderes linguísticos e cognitivos (encorajando-os ao mesmo tempo a refletir sobre o que aprendem e articular com o que eles sabem), e

• incentivar a aprendizagem ativa (e a construção de relacionamentos) que atribui valor no sentido de fazer e entender.

Todo o processo de envolvência dos alunos no estudo e aprendizagem da álgebra pode e deve ser mudado, na medida em que é possível fazer com que os alunos realizem álgebra, ou pratiquem pensamento algébrico através de tarefas matemáticas de caráter exploratório que promovam a formulação da generalização, a representação de número generalizado ou de grandezas incógnitas e variáveis (Fiorentini, Miorim e Miguel, 1993).

Com o estudo da álgebra, pretende-se que o aluno desenvolva o pensamento algébrico, que não se resume em usar habilmente os procedimentos da álgebra, como refere Carpenter e Levi (2000), concebendo, deste modo, a álgebra com uma visão mais ampla.

Focar a nossa atenção apenas nos procedimentos algébricos é anular o seu produto, isto é, é esquecer a possibilidade de desenvolver o pensamento algébrico no aluno. De facto, ao contatar com a álgebra, o aluno habilitar-se-á na manipulação de expressões algébricas, e desenvolverá o seu pensamento algébrico, ampliando-o de forma significativa, uma vez que deparar-se-á com situações que o obrigarão a fazer um pensamento matemático mais profundo, e menos aritmético.

O pensamento algébrico pode assumir várias formas, esclarecem Blanton e Kaput (2005) na sua investigação, uma vez que inclui (i) o uso de aritmética como um domínio para expressar e formalizar generalizações (generalização aritmética); (ii) generalização de padrões numéricos para descrever relações funcionais (pensamento funcional); (iii) modelação como um domínio para expressar e formalizar generalizações e (iv) generalização de sistemas matemáticos alcançados a partir de cálculos e relações (Blanton e Kaput, 2005).

Todas estas formas se completam, formando um todo da álgebra, são formas que não se veem com nitidez em separado, mas que quando crescem em simultâneo capacitam o aluno para o seu estudo.

Por sua vez, Ponte, Branco e Matos (2009), na brochura sobre a álgebra no ensino, mencionam que a álgebra inclui três vertentes: representar, raciocinar e resolver problemas.

O aluno, ao ler a tarefa matemática, faz a sua representação, uma vez que é capaz de traduzir a informação que nela está contida, procurando evidenciar o sentido do símbolo matemático, depois, quando se envolve na resolução desta mesma tarefa está a raciocinar, pois ao relacionar os seus dados com as propriedades que já adquiriu, torna-se capaz de resolver a situação em questão.

Portanto, no âmbito algébrico pretende-se que os alunos desenvolvam o pensamento algébrico, bem como a sua capacidade de representar simbolicamente situações matemáticas e não matemáticas e de resolver problemas em contextos diversos (ME, 2007, pg.40).

2.2. O sentido do símbolo na matemática - a incógnita

Centrando-nos no estudo da álgebra, surge a ideia do sentido de incógnita, ou do sentido de símbolo na matemática, uma vez que neste ramo da matemática está implícito o “trabalhar” com incógnitas.

Lendo Usiskin (1988), ficamos elucidados acerca dos cinco níveis de conceções do uso das variáveis na álgebra, que está intimamente ligada ao uso de letras - incógnitas - variáveis. Assim, numa expressão matemática onde existam variáveis, ou incógnitas, poderá existir: (i) uma fórmula, por exemplo a área de um retângulo; (ii) uma equação para resolver, por exemplo $2x = 4$, onde se pretende encontrar o valor de x; (iii) uma igualdade, por exemplo $\sin x = \cos x . \tan x$; (iv) uma propriedade $1= n*1/n$, para qualquer n diferente de zero; e (v) uma função de proporcionalidade direta, que não é propriamente para resolver, mas apresenta-nos a relação entre as duas variáveis, $y = kx$. Em suma, podemos conceber a álgebra como uma generalização aritmética, que serve para resolver problemas, estudar relações/propriedades entre variáveis, de forma estruturada.

Neste ramo da matemática os alunos têm dificuldades em encontrar o significado para a incógnita na leitura de um enunciado matemático. Percebe-se que estes leem toda a tarefa matemática que lhes é apresentada, e não compreendem onde está a incógnita na contextualização dessa situação, não identificando o que é pedido, logo, não reconhecendo a incógnita, isto é a questão a que se pretende responder.

O sentido do símbolo matemático está constantemente presente nas várias tarefas matemáticas relacionadas com a álgebra. Por vezes, o aluno ao produzir um pensamento algébrico, compõe primeiramente um raciocínio numérico, uma vez que não está familiarizado com os procedimentos algébricos. O aluno partindo da exploração numérica, e sob orientação do professor, evolui, mais facilmente, para o desenvolvimento do pensamento algébrico e para o sentido de incógnita, ou variável, presente nessas tarefas, bem como, as relações entre as mesmas (Fiorentini, Miorim e Miguel, 1993).

Esta evolução, acompanhada pelo professor, terá em vista a construção significativa do sentido de incógnita.

Identificar a incógnita é essencial, quando se fala da álgebra e do pensamento algébrico, pois é com a utilização de uma, ou várias letras (variáveis, ou incógnitas) e da construção das relações entre as mesmas, que se evolui para a generalização, se assim for pretendido perante uma situação concreta. Assim, ao aluno é pedido que saiba interpretar o que representa determinada letra, ou letras, e que possíveis relações existam entre elas, para depois, no contexto desse problema, encontrar as possíveis soluções.

No processo da generalização, nada como proporcionar ao aluno tarefas com várias soluções e de resolução aberta, pois promove uma exploração matemática mais ampla por parte dos mesmos, como defendem Schoenfeld (1996) e Fiorentini, Miorim e Miguel (1991). Estas possibilitam o raciocinar de várias formas e o procurar não uma única resolução, mas várias hipóteses de resolução, até generalizar algebricamente, as condições das respetivas soluções. Todo este processo que os alunos seguem, poderá ser iniciado por uma linguagem informal, recorrendo aos seus esquemas, quer elaborados em grupos, quer individualmente, possibilitando discussões matemáticas significativas para os alunos, no sentido da construção do pensamento matemático, na busca da solução, ou soluções das tarefas que lhe são propostas, sempre orientadas e acompanhadas pelo professor (Ponte, 2005, Araújo, 2012 e Gomes, 2012).

À medida que os alunos procuram entender o enunciado, perceber o seu contexto e até expressarem as suas observações, de acordo com o que depreenderam da interpretação destas atividades, já estão a desenvolver o pensamento matemático, pois empenham-se em solucionar a situação que lhes foi apresentada.

No momento em que os alunos estão em processo de resolução, estão a procurar soluções, a construir e a eliminar possibilidades de resolução, etapas necessárias e essenciais no processo de aprendizagem de uma matemática significativa. Evidentemente, como não poderia deixar de ser, o professor é o moderador, é o orientador, é o promotor deste ambiente de aprendizagem cooperativa entre os alunos. Se o professor não cumprir a sua função, provavelmente o aluno não conseguirá construir um pensamento estrutural e significativo da matemática, logo também da álgebra.

Quando o aluno apresenta dificuldades na aritmética, também as mostra na parte algébrica da matemática. Depois ao trabalhar vários tipos de tarefas algébricas, que vão ao encontro dos seus interesses e das suas dificuldades, terá oportunidade de entender, significativamente, a álgebra, dando sentido à utilização das variáveis matemáticas, ou das incógnitas, que são usadas na estruturação de determinado pensamento matemático, no contexto da situação matemática apresentada, bem como dar significado às equações, tendo como objetivo encontrar soluções para o problema. Como orientador não se pode ficar pela constatação das dificuldades, é necessário desafiar o aluno a se superar, pois é na superação que conquistará novas aprendizagens, logo novos saberes.

2.3. A evolução "epistemológica-histórica" da noção de equação

Ao longo da história a conceção de equação foi mudando, em conformidade com o que era explorado em determinado momento histórico, como podemos verificar no estudo "*A noção de equação e suas diferentes concepções: uma investigação baseada em aspectos históricos e epistemológico"* de Ribeiro (2009).

Em determinados momentos da história a noção da equação varia. No entanto, predomina a intenção de encontrar uma solução para determinado problema, com a ajuda da resolução das equações que esse problema sugere, ou, apenas a partir da equação, encontrar as respetivas soluções ou raízes

Para o desenvolvimento deste ponto, foi fundamental o estudo elaborado por Ribeiro em 2007, referido em Ribeiro em2011, de caráter teórico, no qual foram estudados diferentes significados, formados historicamente para o conceito de equação e utilizados por diferentes povos, como os babilônios e egípcios, os gregos, os árabes e hindus e, finalmente, os europeus.

Este estudo "epistemológico-histórico" aponta várias representações para a noção de equação que foi sendo concebida ao longo da história.

Começando pelos povos babilónios e egípcios, estes realçaram que a álgebra nessa época era utilizada para resolver problemas através de equações, que ainda hoje, requerem uma hábil manipulação numérica, sendo muito mais fortes em álgebra do que em geometria. Dessa época surgem os famosos papiros de Rhind e de Moscou, que contém 110 problemas, sobre o quotidiano. Para a resolução destes problemas recorreram à equação linear a uma incógnita, pelo método da regra falsa posição, que ficou conhecido, mais tarde na Europa, e que se assemelha ao que hoje conhecemos por "método das tentativas".

Desta forma, a noção de equação caraterizava-se por ser de "carater pragmático", uma vez que partia de situações do quotidiano, sendo resolvida de "foram intuitiva". Desta forma, constata-se que não se procuravam soluções gerais de equações, mas apenas a solução de situações particulares.

Passando para os povos gregos, constatamos que existe um grande número de matemáticos que possibilitaram o desenvolvimento da geometria. Inclusive, este período ficou conhecido por período da "Idade heroica da matemática". Este período trouxe uma evolução significativa, passando de uma álgebra aritmética para uma álgebra geométrica.

Nesta época, os gregos utilizavam dois principais métodos de resolução de equações, lineares e quadráticas – o método das proporções e o da aplicação de áreas, métodos estes, pensa-se terem surgido com os pitagóricos.

Associando o pensamento de Ribeiro (2009) ao de Boyer (1978), verifica-se que após o séc. III a.C., segue-se um período de declínio, que foi interrompida entre os anos 250 a 350 d.C., quando surge o maior algebrista grego – Diofanto de Alexandria, que compôs uma importante obra intitulada "*Arithmética*". Nesta, existe uma grande contribuição para o desenvolvimento da álgebra, concretamente na simbologia e seu manuseamento.

Neste período, a conceção das equações era diferente das dos babilónios e egípcios, uma vez que os gregos não utilizavam a equação para a resolução de situações de ordem prática. Estes utilizavam-nas com caráter geométrico e, de forma dedutiva, procuravam as suas soluções, com manipulações geométricas, recorrendo, por exemplo, ao método das proporções.

Assim, tanto os babilónios e egípcios, como os gregos procederam-se à resolução de situações específicas, que resultaram da resolução de equações particulares, de acordo com situações concretas, não sendo deduzidos métodos gerais de resolução.

Debruçando-nos sobre os povos árabes e hindus, constatamos que com estes a conceção de equação é mais estrutural, uma vez que apresenta características e propriedades definindo uma classe de equações, que não estão diretamente relacionadas com situações particulares.

Estudando a matemática árabe, verifica-se que esta está relacionada com o comércio, a arquitetura, a astronomia, a geografia e a ótica, num trabalho teórico intenso. Puig (1998), referido em Ribeiro (2009), realizou um estudo detalhado sobre os principais matemáticos dessa época, um deles foi Al-khwarizmi, que escreveu importantes obras sobre a aritmética e a álgebra, nomeadamente a *"Ilm al-Jabr Wa al Muqabalah*", que trouxe muitas contribuições para o estudo das equações, designadamente para a "transposição de termos de um lado da equação para o outro". Nesta obra aparecem, pela primeira vez, as regras para resolver equações dos 1º e 2º graus, regras essas que se assemelham às que são usadas atualmente.

Na sua investigação, Ribeiro faz ainda referência ao matemático árabe Omar Khattam, uma vez que contribuiu para a teoria das equações, pois encontrou uma solução geométrica para a equação cúbica do tipo $x^3+ax=b$, fundamentando-se no estudo de Struik (1992).

A matemática hindu era descrita frequentemente por ser uma matemática intuitiva. Estes trabalhavam, essencialmente, com números e operações aritméticas ou na resolução de equações, utilizando os métodos da falsa posição ou de inversão, pois a partir dos dados do problema trabalhava-se "de trás para a frente" Ribeiro (2011).

Na Teoria das equações não podemos também esquecer os matemáticos hindus Brahmagupta e Bháskara. Brahmagupta, segundo Bashmakova & Smirnova (2000), onde mencionou Ribeiro (2009), viveu em 628 na Índia Central e descobriu as soluções gerais das equações quadráticas, determinando duas raízes, sendo uma delas negativa. Nesta descoberta pode-se verificar a influência da matemática grega. Salienta Bashmakova & Smirnova (2000) no seu trabalho, que Brahmagupta foi o primeiro a encontrar todas as soluções inteiras possíveis para a equação linear diofantina $ax+by=c$, sendo a, b e c inteiros.

Debruçando-nos em Bháskara, importante matemático hindu do séc. XII, consolidou algumas lacunas da obra de Brahmagupta. Um das suas obras é a "*Lilavati*", que é uma compilação de diversas problemáticas de Brahmagupta, onde constava muitos problemas sobre progressões aritméticas e geométricas, equações lineares e quadráticas. A ele pertence a atual fórmula resolvente para encontrar qualquer solução das equações quadráticas completas – Fórmula de Bháskara.

Nestas investigações, os árabes e hindus mostram-nos uma noção de equação cada vez mais de carater algébrico, com uma conceção mais estrutural, uma vez que apresenta características e propriedades para uma classe de equações, e não para situações particulares.

Nos povos europeus, Ribeiro (2011) salienta a obra escrita, pelo frade Luca Pacioli, "*A Summa de arithmética, geométrica, proportioni et proportionalita*", que foi finalizada em 1487. Esta obra, como o próprio título declara, envolve a aritmética, a geometria, a álgebra e a contabilidade.

No que se refere á álgebra, esta obra apresenta uma discussão da resolução de equações lineares e quadráticas.

No estudo de Ribeiro (2011), fundamentando-se nos trabalhos de Garbi (2006) e Lintz (1999), constata-se que uma das maiores descobertas, concluída pelos matemáticos italianos, no séc. XVI, foi a solução algébrica das equações cúbicas e de grau quatro. Scipione del Ferro, em 1515, conseguiu resolver algebricamente equações cúbicas do tipo $x^3+mx=n$.

Já Nicolo Fontana, mais conhecido por Tartaglia, anunciou, por volta de 1535, ter descoberto uma solução da equação cúbica $x^3+px^2=n$, escreveu a "*Nova Scientia*", em 1537, onde descreve novos métodos e instrumentos de balística. Foi também o primeiro italiano a traduzir e a publicar "*Os Elementos de Euclides*", em 1543 e publicou, em 1546, a "*Quesiti et inventioni diversi*".

O estudo das equações cúbicas e grau quatro continua a ser motivo de investigação, que foi também realizado por Cardano, outro matemático italiano, que aceitou a proposta de Zuanne de Tonini da Coi para a resolução de um problema que se transformava numa equação de grau quatro, que não conseguiu resolver.

No entanto, seu discípulo Ferrari conseguiu tal feito, e este a publicou na sua obra "*Ars Magna*", em 1545, embora fosse acusado de plágio por Tartaglia.

A álgebra desperta vários matemáticos para o seu estudo, assim François Viète, nascido em França em 1540, é considerado o pioneiro da álgebra simbólica, sendo o primeiro a demonstrar a vantagem no uso de letras para designar quantidades desconhecidas, ou incógnitas. Em 1591, publicou a sua obra mais famosa "*In Artem Analyticam Isagage*", onde desenvolve a linguagem simbólica, introduzindo uma convenção para a escrita de equações, na forma geral. Assim, utilizava a vogal para representar uma quantidade desconhecida, e uma consoante para representar grandezas, números conhecidos ou dados, além de ter adotado também palavras e abreviaturas. A ele é atribuído a transformação das equações cúbicas em x para equações do segundo grau em y, de fácil resolução.

Neste desenvolvimento da álgebra, mais propriamente da linguagem das equações, não podemos deixar de referir a importante contribuição do matemático francês René Descartes, nascido em 1596, em que, como Ribeiro (2011) no seu estudo, as maiores contribuições de Descartes resume-se nas seguintes:

> "- Leitura analítica do enunciado do problema e a redução a uma lista de quantidades e relações entre essas quantidades;
>
> - Escolha de uma quantidade que será representada por uma letra (ou de várias quantidades e várias letras);

- Representação das outras quantidades mediante expressões algébricas que descrevam a relação (aritmética) entre essas quantidades e outras que tenham sido previamente representadas por uma letra ou por uma expressão algébrica;

- Estabelecimento de uma equação (ou várias, se for o caso) igualando-se as expressões obtidas anteriormente". (pág. 79).

Descartes contribui para a exploração das equações, no que diz respeito ao número de raízes das equações, aprofundando o método de transformação de equações, iniciado por Cardano e Viéte, utilizando a combinação de letras, deixado pelo último, encerrando, com este, a álgebra simbólica, que foi utilizada tanto por Descartes, e posteriormente por Euler.

Depois da extraordinária colaboração de Descartes no campo da álgebra, nomeadamente no das equações, o matemático que se segue é Euler, como menciona Ribeiro (2011), baseando-se no trabalho de Garbi (1997). Leonhard Euler nasceu na Suíça em 1707, e trouxe marcantes contribuições para a álgebra, concretamente para as equações.

O seu trabalho sobre os números complexos desempenhou um papel preponderante na teoria das equações, uma vez que descobriu que qualquer número complexo não nulo (inclusive os reais) tem exatamente n raízes enésimas.

Outro matemático que contribuiu de forma relevante para a teoria das equações foi Carl Friedrich Gauss, que nasceu em 1777, na Alemanha. Este demonstrou o Teorema Fundamental da Álgebra - toda a equação polinomial com coeficientes reais ou complexos e de grau n, n> 0, tem pelo menos uma raiz complexa - que consta da sua tese de doutoramento em Matemática, além de ter demonstrado também que uma equação de grau n, tem exatamente n raízes.

A partir do momento em que é demonstrado o Teorema Fundamental da Álgebra, surgem outras relações muito importantes, por exemplo, toda a equação polinomial de coeficientes reais e de grau ímpar tem pelo menos uma raiz real.

Além deste resultado, também surge o Teorema de Bolzano, matemático checo, que viveu na mesma época de Gauss.

Outros matemáticos se seguiram no estudo aprofundado das equações de grau superior ao quarto, tentando demonstrar a forma de encontrar as raízes destas mesmas equações. Entre tentativas e erros, avanços e recuos temos o norueguês Niels Henrik Abel (1802-1829) e o francês Évariste Galois (1811-1832). Constata-se que neste período histórico as equações "eram vistas dentro de um sistema estrutural, com propriedades e características definidas", como refere Ribeiro (2011, pág.81).

A partir da observação da evolução da linguagem algébrica, pode-se constatar três formas de conceber uma equação, relacionando-as com diferentes registos de representação: "registo na língua natural", tal como sucede nos registos babilónicos e egípcios; "registo geométrico", tal como acontece, por exemplo, com os povos gregos, e, finalmente, o "registo algébrico" como começa a surgir com os povos árabes e hindus, perpetuando-se com os europeus.

2.4. Estudar e resolver equações

O estudo das equações acompanha-nos desde há muitos séculos e muitos matemáticos dedicaram-se a apresentar minuciosamente a sua utilidade na resolução de problemas. Assim, é possível, através de métodos algébricos, já demonstrados, resolver as equações desde o primeiro grau até ao quarto grau, para além da evolução que se constata na escrita simbólica da álgebra, que se foi aperfeiçoando, desde os babilónios e egípcios até aos nossos tempos (Ribeiro, 2009).

No estudo da álgebra pretende-se que o aluno trabalhe a linguagem algébrica, bem como o pensamento algébrico, evidenciando o cumprimento do objetivo do programa de matemática "Desenvolver nos alunos a linguagem e o pensamento algébricos, bem como a capacidade de interpretar, representar e resolver problemas, usando procedimentos algébricos e de utilizar estes conhecimentos e capacidades na exploração e modelação de situações em contextos diversos" (ME; 2007).

Já no documento sobre as Metas Curriculares para o Ensino Básico – Matemática (2013), de acordo com o Despacho n.º 5306/2012, de 18/Abril, faz-se referência às competências a serem desenvolvidas junto dos alunos, numa matemática mais significativa para estes, uma vez que pretende-se que o aluno "identifique e defina o conceito"; "reconheça" e "apresente" uma argumentação válida; "conheça" o resultado, mesmo sem justificação formal; "apresente uma demonstração" da forma mais rigorosa possível e que "justifique" o enunciado, ainda que de forma simples, "evocando propriedades" que já conheça (documento das Metas curriculares do ensino básico – matemática, 2013).

Na aprendizagem da noção de equação, inicialmente os alunos não percebem/entendem a sua utilidade e, muitas vezes, acabam por não compreender o porquê da sua existência. No entanto, depois de utilizarem várias vezes o conceito, acabam, através da repetição, por interiorizar a sua aplicabilidade. Porém, é notório, por vezes, que o conceito de equação não fica nítido, mas sim o conceito de igualdade. Por isso, ao ser-lhes apresentada uma equação, os alunos procuram logo colocar os números no "lugar" das letras/incógnitas a fim de encontrarem uma igualdade verdadeira, descurando o significado de equação.

É no contínuo estudo/prática das equações, que os alunos esclarecem o significado da equação - igualdade de expressões algébricas. No entanto, é de realçar a procura mentalmente do número que satisfaz determinada equação e não o sentido da equação em si.

Podemos afirmar que o sentido das equações não é compreendido da forma mais correta pelos alunos, porém, com o uso de materiais manipuláveis, por exemplo as balanças de pratos, há uma maior materialização da incógnita e, consequentemente, de equação. Os alunos acabam por entender este conceito, extremamente importante da álgebra, e quando o conseguem, dão significado à equação, dando sentido à igualdade de expressões algébricas, encontrando o sentido da incógnita (letra ou variável), além de descobrirem as soluções.

Assim, cada equação torna-se num desafio para descobrir a solução, para saber interpretá-la no contexto de uma situação quotidiana, para além de entender o próprio enunciado, que se revela, por vezes, indecifrável.

A dificuldade aumenta, quando é pedido aos alunos a aplicação dos princípios de equivalência a fim de resolverem as equações, para poderem encontrar a(s) solução(ões) das mesmas, sem terem que recorrer ao método da tentativa e erro. Deste modo, os alunos ao serem confrontados com a chamada álgebra processual, como refere Kieran (1992), ficam desapontados por, inicialmente, não perceberem todo o processo de resolução da equação. Os alunos até compreendem estes princípios quando usados isoladamente, no entanto, quando os juntamos, ficam desorientados.

A tarefa do professor é preponderante na condução da aprendizagem dos alunos, a fim de encontrarem o significado da álgebra, nomeadamente o da equação, que é importantíssimo nesta fase dos seus estudos, para além de encontrarem significado para o processo algébrico de resolução de equações do primeiro grau.

O aluno, provavelmente, sentir-se-á desmotivado e desorientado, pelo facto de não estar a entender com nitidez, mas é em conjunto - professor e alunos - que conseguirão, com sucesso, atingir esse mesmo significado da álgebra e a sua corelação com as situações diárias que vivem.

Além das tarefas que vão ao encontro dos interesses do aluno, a manipulação de materiais didáticos também é uma mais-valia (Martinho e Ponte, 2005), pois ajuda os alunos a visualizarem, de forma concreta, a situação problemática que estão a resolver, para depois extrapolar.

Na manipulação de materiais didáticos os alunos trabalham com todos os seus sentidos, o que se torna numa experiência de aprendizagem mais completa, ficando a disciplina de matemática a ganhar com estes materiais.

2.5. Do enunciado à equação

No contexto diário de sala de aula, é comum notar-se, neste capítulo da álgebra, particularmente no estudo das equações, muitas dificuldades na leitura e compreensão de enunciados e consequente "transformação" desses mesmos enunciados em equações matemáticas.

É notório que, inicialmente, os alunos não percebem a utilidade do estudo das equações, além de apresentarem dificuldades em escrever uma equação, de acordo com o contexto das situações matemáticas que lhes são sugeridas.

Como existem manifestas dificuldades experienciadas pelos alunos na escrita de uma equação que traduza determinado problema, estes acabam por não recorrer a essa escrita, e assim resolvem um problema, elaborando esquemas, utilizando cálculos aritméticos, ou aplicando o método por tentativa ou erro. Naturalmente que, e matematicamente falando, estes estão trabalhando o pensamento matemático e o algébrico.

Por vezes, surge a observação, emitida pelos alunos, que “as equações em vez de simplificarem o problema acabam por o complicar”. Evidentemente que, este comentário aparece no início do estudo das equações, quando o aluno não domina o conceito, nem o processo de resolução das mesmas. Depois, observa-se que enquanto o aluno não entende a parte processual da resolução de equações e da tradução de enunciados em equações, não encontra benefício algum na utilização/aplicação destas, na resolução das várias situações matemáticas que lhes são propostas.

A tradução dos problemas em equações, é de facto outra etapa marcante no estudo da temática da álgebra.

Inicialmente, propõe-se aos alunos situações matemáticas mais simples, em que estes possam resolver, de forma imediata, pelo processo que souberem, evidenciando-se a intuição matemática da maioria dos alunos, demonstrando, inclusive, as suas competências para aritmética e para o cálculo mental.

Todavia, pretende-se também que estes saibam interpretar um enunciado e transformá-lo numa equação, conforme o programa português de matemática para o sétimo ano de escolaridade, a fim de encontrar as soluções para essas situações.

Neste campo de ação, os alunos apresentam muitas dificuldades em “transformar” um enunciado numa equação de acordo com o que leem. É “conversão” que está associada a perceção do enunciado, dominando a linguagem matemática, além da linguagem corrente.

O aluno desenvolve o seu raciocínio, fortalecendo o seu pensamento algébrico, quando resolve problemas sem recorrer diretamente às equações, aplicando os seus esquemas interpretativos da situação matemática em questão, ou concebendo desenhos, criando tabelas, entre outras formas de se expressarem, descobrindo, deste modo, as soluções do problema apresentado, ou mesmo concluindo que não existem soluções.

É caso para dizer, que "tudo" o que o aluno faz promove o seu pensamento matemático.

Quando se pretende que o aluno aplique a noção de incógnita, dentro do contexto da equação, queremos que este desenvolva o seu poder de abstração, "manuseando" de forma correta o conceito de equação, a linguagem matemática, bem como o sentido de variável matemática. Por vezes, torna-se difícil fazer o aluno entender esta dimensão da matemática, sendo para tal necessário que o aluno seja exposto a diversos enunciados matemáticos, para que esta linguagem acabe por lhe ser familiar.

É no contato com variados enunciados que o aluno irá habituar-se à linguagem matemática e com a tradução de enunciados em expressões algébricas, nomeadamente equações.

Partindo do simples para o complexo, o aluno irá sucessivamente entendendo o objetivo da tradução de enunciados em equações.

Atesta-se diariamente que a tradução de uma situação matemática numa equação é um trabalho árduo para o aluno, pois construir uma equação a partir das situações que lhes são apresentadas é de certo modo esgotante, tanto para os alunos que dominam a linguagem matemática, como para os que têm dificuldades nesta parte da disciplina.

Ora, cumprir todo o processo algébrico: primeiramente, identificar a incógnita - aquilo que se procura saber; depois traduzir a “linguagem corrente” em “linguagem matemática”, tarefa que os alunos têm dificuldade em encontrar lógica; e, finalmente descobrir a solução, ou soluções da situação sugerida, é de facto um processo que é inflexível, e que deverá ser seguido.

Numa visão meramente processual da resolução das equações/problemas, é limitar a criatividade do aluno, no entanto esta poderá ser integrada e canalizada em todo o processo de resolução das equações.

O aluno, ao realizar várias tentativas, acaba por conseguir escrever a tão esperada igualdade entre expressões algébricas – equação. Esta passagem será tanto mais alcançada, quanto mais vezes o aluno for exposto a vários problemas, e que, pela repetição, vai adquirindo, de forma mais ou menos ligeira, a “passagem” de um enunciado para uma equação matemática, uma vez que depois de assente todo o processo, este acaba por ser assimilado.

É nesta ótica que o aluno encarará a escrita de uma equação, para depois procurar as soluções, quer por tentativa ou erro, quer pela aplicação dos princípios de equivalência.

Neste sentido, todas as tarefas matemáticas a propor aos alunos, e associadas a material manipulável, têm como objetivo o possibilitar a construção de uma compreensão efetiva das equações.

Por último, há que referir que todo o processo de aprendizagem, dentro e fora da sala de aula, está imbuído de uma comunicação indubitável entre professor e turma, pois é na comunicação que está o *feedback* de todo o processo de ensino-aprendizagem, caso contrário, não havia a possibilidade dos recuos e avanços nesta mesma etapa, donde surge a importância para a constante intervenção do professor junto dos alunos, em fazê-los persistir num esforço continuado na disciplina de matemática.

2.6. As tarefas exploratórias na sala de aula

Ao aluno, no início do estudo da álgebra, ou de um outro conteúdo, o professor poderá e deverá propor tarefas matemáticas exploratórias que os façam pensar/raciocinar sobre determinado assunto, tendo em vista o conjeturar.

São tarefas que interpelam os alunos e focaliza-os, de forma sequencial e lógica, num determinado assunto, tendo em vista conclusões a serem tidas em conta. As questões que são *a priori* construídas, possibilitam um evoluir matematicamente do aluno, sem este aperceber, uma vez que vai respondendo de forma entusiástica às mesmas, além de construir o seu próprio raciocínio.

Depois, a maior dificuldade prende-se com a generalização, que será melhor efetuada com o debate/discussão em grupo, sob orientação do professor.

Atribuir tarefas de aprendizagem significativas aos alunos, é decidir se estas serão um desafio "reduzido" ou "elevado", de "resposta aberta" ou "fechada", como defende Ponte (2005) na sua investigação sobre a "*Gestão Curricular em matemática*", em que realça a duração e o contexto da aplicabilidade destas mesmas tarefas.

Isto é, ao professor cabe o grande e importantíssimo papel de visualização do decorrer destas tarefas, da implicação na aprendizagem significativa da matemática para os alunos, bem como as generalizações que se pretendem efetivar.

Para além desta atenção às tarefas de carater exploratório a propor aos alunos, deverá ter-se em atenção a respetiva reflexão final sobre as mesmas, como defende Ponte (2005), uma vez que a tarefa deverá ser conclusiva e esclarecedora para o aluno, de acordo com os conteúdos matemáticos, evitando a confusão em suas mentes.

Deste modo, promove-se o ensino-exploratório, em vez do ensino direto (Ponte, 2005).

Sendo o dia-a-dia do professor agitado, fica, por vezes limitado, quanto ao tempo disponível para a pesquisa, a fim de encontrar tarefas que vão ao encontro dos interesses dos alunos e daquilo que pretende desenvolver com os mesmos, ficando a sua missão apoiada, na maioria das vezes, nos manuais escolares, que foram escolhidos pelo grupo disciplinar da sua escola, e em que os pais, com sacrifício, os adquiriram, pensando numa melhor aprendizagem para os seus filhos.

Há que destacar a elaboração dos manuais, que são estruturados por autores/investigadores dos conteúdos programáticos da matemática, vindo as editoras a manifestar preocupação/dedicação na elaboração dos mesmos, apresentando situações exploratórias, que motivam a discussão entre os alunos e possibilitam o encontro de conclusões/generalizações matemáticas. Estes estão na linha da inovação pedagógica, fugindo ao ensino por transmissão de conteúdos, investindo em várias pedagogias do ensino, nomeadamente o EMC (ensino por mudança concetual) e o EPD (ensino por descoberta), definido e defendido por Lucas e Vasconcelos (2005).

Não podemos deixar de realçar, novamente, o papel decisivo do professor na orientação do trabalho do aluno, e da turma, no que concerne à promoção da comunicação e da verbalização matemática na sala de aula, uma vez que, é ela o suporte da aprendizagem significativa (Fidalgo e Ponte, 2004).

Assim, promover comunicação na sala de aula, é também pensar nas questões a serem colocadas juntos dos discentes, como menciona Fidalgo e Ponte (2004) na sua pesquisa, ao afirmarem que “questões bem formuladas podem levar os alunos a validar, valorizar e ampliar o seu próprio pensamento”, neste caso, matemático.

2.7. O trabalho cooperativo em sala de aula

O trabalho cooperativo em sala de aula é uma mais-valia no processo de ensino aprendizagem, pois são professores e alunos que ficam a beneficiar com este tipo de orientação de trabalho em sala de aula. Além disso, também fica a matemática a ganhar, isto é, com a interação entre os alunos, possibilita-se o crescimento matemático dos mesmos, além do crescimento do ser relacional que somos.

Fernandes (1997), fundamentando-se em Dees (1990), refere que quando os alunos trabalham juntos com objetivos comuns de aprendizagem e originam um resultado final comum, estão a aprender cooperativamente. E quando, os alunos trabalham cooperativamente, entendem que podem atingir os seus objetivos quando todos os membros do grupo também atingirem os seus, ou seja, existem objetivos de grupo.

Os alunos em grupo desenvolvem-se dentro da sua linguagem, o que será fulcral para os alunos mais fracos, como para os mais fortes. Estes últimos podem usar as suas capacidades em favor dos mais fracos, solidificando os seus conhecimentos. Por outro lado, os alunos mais fracos têm a possibilidade de aprenderem matemática de uma forma mais "simples", uma vez que é exposta na sua linguagem.

Colocar os alunos em trabalho cooperativo, revela ser vantajoso para o envolvimento de toda a turma na exploração/resolução de tarefas matemáticas. Estas tarefas tornam-se muito mais motivacionais fazendo-os pensar/raciocinar, escrevendo matemática de forma informal, explicando o que observam, o que entendem, ou o que não entendem, e o que, possam vir a concluir.

Em seguida, na discussão em turma, conduzida pelo professor, serão escritas as conclusões/generalizações pretendidas, completando as tarefas e os materiais utilizados, pois é necessário haver a discussão/debate de forma a promover raciocínio abstrato, Fiorentini (1990).

Com toda esta comunicação, feita em cooperação, os alunos acabam por encarar as tarefas com grande entusiasmo. Evidentemente que o processo de familiarização com este tipo de trabalho é tanto mais produtivo, quanto mais difundido junto dos alunos.

Por estarem em pequenos grupos, a partilha é maior, pois estão num clima de confiança, expõem sem receio as suas dúvidas, além dos seus próprios saberes, acabando por construírem, todos juntos, uma matemática significativa para eles próprios, como defende Fernandes (1997).

Aprender matemática não é somente adquirir conceitos, é também envolver toda a pessoa, para a "sentir". Os alunos quando estão como meros expetadores dos conceitos que se lhes são transmitidos, não entendem, não percebem, não interiorizam esses conteúdos, ao passo que, quando os alunos se sentem envolvidos para comunicar, partilhar, construir e produzir algo em comum, já estão focados em objetivos básicos do ser humano – ser relacional, para além do objetivo último que é construir matemática.

Os alunos aprendem uns com os outros, de forma espontânea, e constroem matemática também de forma natural, o que será, com toda a certeza, motivo de crescimento coletivo.

3. METODOLOGIA DE INVESTIGAÇÃO

3.1. Natureza do estudo

A presente investigação é descritiva e indutiva, uma vez que, a partir da análise de padrões encontrados nos dados, o investigador constrói compreensões, ideias e opiniões. Constatando-se, que não há necessidade de comprovar hipóteses, modelos ou teorias como nos estudos quantitativos (Sousa & Baptista, 2011).

Na investigação qualitativa, antes da recolha dos dados, não há nenhum plano detalhado, previamente esboçado, no entanto, aquando do início do trabalho, os investigadores têm uma visualização acerca do que pretendem realizar.

Do mesmo modo, não há a formulação de questões particulares para serem respondidas, uma vez que "a formulação das questões deve ser resultante da recolha de dados e não efetuada *a priori*. É o próprio resultado do estudo que estrutura a investigação, não as ideias preconcebidas ou um plano prévio detalhado" (Bogdan & Biklen, 1994, p.83).

Assim, o presente estudo teve por objetivo investigar o processo de aprendizagem das noções elementares da álgebra, bem como a assimilação do processo algébrico para a resolução das equações do primeiro grau a uma incógnita.

Esta investigação será desenvolvida a partir da observação direta dos alunos, do seu empenhamento dentro e fora da sala de aula. Deste modo, a metodologia de investigação adotada é de natureza qualitativa, com caráter interpretativo.

A referida escolha deveu-se às características da investigação que se queria realizar e também por não ser fácil orientar um estudo de natureza quantitativa neste âmbito.

No processo de recolha dos dados, deste tipo de investigação, não há qualquer inquietação, de um modo geral, com a dimensão das amostras nem com a generalização dos resultados, uma vez que, a qualidade (validade e fiabilidade) dos dados depende muito da sensibilidade, da integridade e do conhecimento do formador, como aponta Fernandes (1991). Pelo que, não se coloca o dilema da validade e da fiabilidade dos instrumentos.

3.2. Caraterização do ambiente e dos intervenientes no estudo

Este estudo desenvolveu-se durante o ano letivo 2012/2013, incidindo-se, particularmente, nos meses de maio e junho, numa escola da Região Autónoma da Madeira. Esta é frequentada, maioritariamente, por alunos dos extratos sociais baixos e médios-baixos. Alguns alunos apresentam necessidades financeiras e afetivas, e fazem parte de famílias com carências estruturais, faltando, por vezes, referências.

A maioria dos alunos revela pouca motivação para a escola, devido a interesses divergentes dos escolares, além do pouco apoio da estrutura principal – a família. Consequentemente, há pouco interesse pela disciplina de matemática, acumulando várias dificuldades associadas à falta de conhecimentos matemáticos básicos e à inexistência de métodos e hábitos de estudo.

No entanto, a turma de sétimo ano, a quem foi dirigido o presente estudo, é constituída por alunos que, na sua maioria, revela interesse pela escola e mostram-se preocupados pela sua prestação escolar, embora, apresentem atitudes de indisciplina na sala de aula e até mesmo fora desta, além de terem métodos de estudo pouco satisfatórios.

A referida turma é constituída por vinte e seis alunos (usarei nomes fictícios para manter as suas identidades), doze raparigas e catorze rapazes. Estes, na sua maioria, gostam da disciplina de matemática e apresentam raciocínios matemáticos consideráveis, participam de forma positiva na aula, embora a professora/investigadora seguisse uma ordem de participação, porque de forma aleatória os alunos revelam não saber esperar pela sua vez, gerando confusão na sala de aula.

Os alunos realizam a maioria dos trabalhos de consolidação em casa, mas também são incapazes de realizarem o processo de reflexão acerca de atitudes negativas que tiveram para com o colega, gerando-se muitos conflitos entre os mesmos.

Acrescento que a maioria dos alunos tem intervenções matemáticas interessantes na aula, bem como perguntas pertinentes e observações espontâneas com considerável raciocínio matemático.

Destaco nos vários diálogos transcritos os alunos Mar, Déli, Riu, Rub e Leo por serem alunos com intervenções significativas na aula de matemática, além de serem cumpridores dos seus deveres de alunos.

Pela manifestação de todas estas caraterísticas, a turma despertou o meu interesse tanto como professora e como investigadora, no âmbito desta pesquisa que pretendia implementar, e porque era mais fácil para eu poder realizar as observações das suas aulas.

Esta observação iniciou-se logo no início do ano letivo, no âmbito dos outros temas matemáticos.

Por todos estes atributos, pretendi observar os alunos na introdução das noções elementares da álgebra, nomeadamente no capítulo das equações do primeiro grau. Esta observação tinha em vista o apuramento do que aconteceria no que concerne à interiorização deste conteúdo da matemática, tão importante e básico para os anos de escolaridade seguintes.

A este motivo, acresce a aposta na modificação de atitudes e comportamentos dos alunos, de forma a colocá-los em trabalho de interajuda e cooperativo, estimulando o pensamento matemático.

3.3. As tarefas aplicadas nas aulas

Os alunos ao longo do ano letivo, e nos vários temas matemáticos abordados no sétimo ano de escolaridade, foram habituados a trabalhar a pares e, por vezes, em trabalho de grupo de quatro elementos. No início de cada tema os alunos realizavam as tarefas exploratórias, propostas no manual, previamente adotado pelo grupo escolar da escola.

Além destas tarefas, foram resolvidos outros exercícios e problemas, contudo, neste relatório serão analisadas as que se referem à introdução das equações do primeiro grau e à sua própria resolução, além da determinação da solução de problemas.

As tarefas exploratórias aplicadas na introdução do tema das equações foram:

. Construção de figuras com palitos;

. Adivinhar o número;

. O número que o cartão esconde;

. A caixa dos marcadores (ver Anexo I).

Também foi explorada a noção de equação associada a “balança de pratos” (ver Anexo II).

Tendo como objetivo o conhecer, o aplicar e o consolidar os princípios de equivalência, foram exploradas várias equações (ver Anexo III).

Por fim, foram resolvidos problemas, recorrendo às equações, ou aos próprios esquemas dos alunos, que se enquadravam no contexto do problema (ver Anexo IV).

As tarefas exploratórias foram apresentadas aos alunos, tendo como objetivo o recordar das sequências e regularidades, para depois tomarem conhecimento das noções elementares da álgebra, bom como a noção de equação. Estas foram resolvidas em grupos de quatro elementos, sendo um grupo de cinco elementos, formados de acordo com a disposição dos alunos na sala de aula.

Todo o processo de resolução foi redigido nos cadernos diários de cada aluno, além do porta-voz de cada grupo ter feito a resolução numa folha à parte, para me entregar, a fim de a analisar, posteriormente. Deste modo, todos os alunos ficam com o seu caderno diário completo.

Com estas tarefas pretendia que os alunos, de forma autónoma, pensassem em situações matemáticas, produzindo pensamento matemático, expressando-se matematicamente e de forma livre para resolver estas situações. Podiam recorrer à minha ajuda, sempre que se deparassem com dúvidas, para responderem ao conjunto das questões propostas.

De referir, que também foram facultados palitos aos alunos, de modo a facilitar a realização da tarefa 1 (ver Anexo I), a fim de visualizarem e manipularem materiais na formação das várias figuras, que pertencia à sequência.

Posteriormente, recorri à exploração das balanças de pratos em equilíbrio, no âmbito da aprendizagem da noção de equação (ver Anexo II), pelo facto de estas sugerirem a igualdade entre os dois pratos, devido ao "equilíbrio" entre o peso que existe nos dois pratos da balança, para assim, ser escrita uma equação que caraterizasse cada uma das situações matemáticas.

Inicialmente, este processo foi feito sem utilizar a incógnita, recorrendo a um espaço em branco, ou um círculo, para depois, e com a utilização das letras - a incógnita, ser escrita a equação como uma igualdade de expressões algébricas.

A atividade desenvolveu-se em pares e para toda a turma, sendo os alunos questionados de forma intensa acerca do significado da balança de pratos em equilíbrio, do sentido dos objetos que não se conhece os pesos e da forma como descobrir esse valor desconhecido, fazendo referência a processos aritméticos, utilizando o método de tentativa e erro.

Na concretização do processo algébrico, foi explorado os princípios de equivalência, que decorreram da leitura e interpretação das equações, tentando encontrar as respetivas soluções, para depois deduzir-se os dois princípios de equivalência.

Primeiramente, o trabalho desenvolveu-se em turma, para depois ser continuado pelos alunos de forma individual, ou a pares.

Apresentei aos alunos várias equações (ver Anexo III) para que estes se apercebessem do significado de cada uma delas, se expressassem acerca da solução das mesmas, além de verbalizarem os vários pensamentos matemáticos que construíram, até concluir os princípios de equivalência, e, na prática, também concluírem se todo o processo algébrico favorece na resolução da própria equação.

Na exploração dos problemas (ver anexo IV), o trabalho foi marcado pela leitura, interpretação e resolução destas situações matemáticas, tendo em vista a clarificação da "linguagem corrente" e a consolidação da "linguagem algébrica" para, posteriormente, se realizar a classificação das equações. Esta atividade decorreu em pares, com discussão em turma dos resultados no fim da aula.

3.4. Recolha de dados

Dados, para Bogdan e Biklen (1994), é um termo que refere-se aos materiais em bruto que os investigadores recolhem do universo que se encontram a estudar, são os elementos que formam a base da análise em curso. Assim, estes constituem a base para a análise documental, ou seja, são "os elementos necessários para pensar de forma adequada e profunda acerca dos aspetos (…) que pretendemos explorar" (p. 149).

Pelo facto de este estudo ser de natureza qualitativa, ocorreram diversos métodos na recolha de dados. Por isso, e relativamente às tarefas iniciais, foi recolhido em áudio a discussão da resolução das mesmas em cada grupo, e para tal foi pedida a autorização prévia ao Conselho Executivo da escola e aos encarregados de educação (ver Anexo VI), além de estas resoluções serem recolhidas, numa folha à parte, para eu proceder, posteriormente, à análise das respostas dadas pelos alunos.

Quanto à exploração em turma, elaborei um diário de bordo, a fim de registar as observações pertinentes dos alunos, para depois serem analisadas por mim.

Atendendo a que, num estudo de caráter interpretativo, pretende-se conhecer a realidade tal como ela é vista pelos seus diversos atores, e para tal deve-se ter em atenção especial em compreensão do pensamento subjetivo dos participantes nos seus estudos, como evidenciam Bogdan e Biklen (1994).

Por fim, foi-lhes pedido que escrevessem as suas maiores dificuldades, focando a sua opinião acerca dos instrumentos utilizados.

3.5. Análise e interpretação dos dados

A análise dos dados recolhidos, referindo Stake (1995), abrange o dar significado às primeiras impressões, assim como às compilações finais.

Por isso, nesta investigação, a análise dos dados foi feita em fases complementares.

Primeiramente, o momento da recolha de dados, onde foi analisado a resolução das tarefas exploratórias, a discussão/defesa dos alunos das suas respostas.

Em segundo lugar, o momento da escrita do diário de bordo, elaborado por mim, onde foram registadas observações pertinentes imanadas pelos alunos, para a partir destes obter algumas conclusões.

4. ANÁLISE DOS DADOS

Dando continuidade à investigação, procederei à análise do desempenho dos alunos em sala de aula, de acordo com o tipo de tarefas desenvolvidas, uma vez que a prestação dos alunos é diferente, estando em conformidade com o tipo de tarefas, que lhes são propostas.

4.1. As tarefas exploratórias

No momento da resolução das tarefas exploratórias o ambiente de sala de aula é mais dinâmico, não necessariamente o mais silencioso, uma vez que cada grupo procura desempenhar de forma correta, e o mais completa possível, as tarefas que lhes foram apresentadas.

Observei que todos os grupos se empenharam, ajudando-se mutuamente, ora esclarecendo dúvidas dos próprios colegas, ou corrigindo-se mutuamente quer ao nível do empenho na tarefa a realizar, quer ao nível da postura na sala de aula, tendo em vista uma boa prestação do grupo.

Esta atividade envolveu de tal maneira os alunos, que não foi necessário a professora realizar chamadas de atenção, tendo apenas interferido no controle do volume das participações de cada aluno, no grupo em que se encontrava, visto o entusiasmo ser imenso.

Procedendo à análise da resolução apresentada pelos alunos à tarefa 1, onde era explorado uma sequência de quadrados (ver Anexo I), em que se pretendia que os alunos trabalhassem a sequência das figuras, observando o número de quadrados e o número de palitos do contorno das sucessivas figuras construídas. Desta forma era solicitado que desenvolvem o pensamento algébrico, utilizando os seus esquemas e justificações, e também comuniquem relações entre as variáveis matemáticas.

Como o tema das sequências já tinha sido abordado, pretendia-se, também, aferir até que ponto os alunos aprenderam o conceito da expressão algébrica do termo geral de uma sequência, mas acima de tudo, perceber se os alunos sabem identificar o que está a acontecer de figura para figura, à medida que se constrói as figuras da sequência.

Os alunos ao manipularem os palitos distribuídos, puderam observar, de forma real, as várias figuras que se iam construindo, de acordo com as que já estavam desenhadas no manual.

Observei que no início, os palitos foram motivo de brincadeira, no entanto, rapidamente passaram a ser utilizados para a construção/visualização das figuras da sequência.

Logo no início da tarefa 1, alguns grupos, como não compreenderam a primeira questão, solicitando-me ajuda, a fim de lhes esclarecer quais eram os "retângulos" que a tarefa mencionava. Desta forma, revelaram lacunas na leitura e interpretação de um enunciado, dificuldade que foi frequentemente observada ao longo da resolução da tarefa.

No diálogo seguinte apercebemo-nos da dificuldade de interpretação do enunciado:

Deli: Professora, não percebo isto?
Profª: O quê?
Deli: Não estou a perceber os retângulos?
Profª: Pensa na arrumação dos palitos? [material fornecido aos alunos] Tem palitos na vertical e outros na horizontal, não é?
Deli: Mas tem um quadrado, e está a falar em retângulos?!
Profª: Pois! Mas tu sabes que todo o quadrado é…[esperando pela resposta da aluna e esta intervém logo se seguida]
Deli: Ah! Já sei…
Profª: Já sabes o quê?
Deli: Todas as figuras são retângulos, a primeira, porque tem os lados todos iguais, é um quadrado.

Profª: Sim srª! Resolvida essa parte…e agora?! Observa a posição dos palitos, a sua quantidade.

Deli: Tem duas filas de palitos horizontais igual ao número de retângulos e os palitos verticais são, ao todo, mais um que o número da figura.

Profª: Muito bem! Continua a explorar com o teu grupo e atenção às perguntas que são feitas.

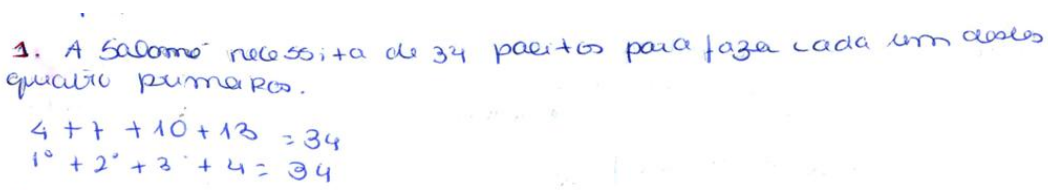
O diálogo, acima transcrito revelou muita perspicácia por parte da aluna, uma vez que esta consegue observar propriedades, exprimir relações matemáticas, revelando pensamento matemático, particularmente algébrico, embora precisa-se de uma pequena ajuda da professora.

O grupo avança na exploração, pois houve conexão entre a leitura e o pretendido, sendo verbalizadas propriedades das figuras geométricas, remetendo para representação em "registo geométrico".

Analisando as respostas dos grupos, verifiquei que nesta primeira questão, onde se pretendia saber o número total de palitos para construir as quatro primeiras figuras, dois grupos erraram a resposta, uma vez que não entenderam o que era para determinar - o total de palitos necessários para formar as quatro primeiras figuras.

Quanto aos restantes grupos, estes apresentaram as suas respostas através de frases simples ou esquemas, de acordo com o que entenderam ser mais conveniente. Neste âmbito, os alunos utilizaram o "registo na língua natural" e o "registo geométrico", sem recorrer à formalidade da álgebra.

Por exemplo, o grupo Ma apresentou a seguinte resposta:


1. A Salomé necessita de 34 palitos para faza cada um deles quatro primeiros.

4 + 7 + 10 + 13 = 34

1º + 2º + 3º + 4 = 34

Figura 1: Resposta do grupo Ma à questão 1 da tarefa 1

Este grupo evidencia que entendeu a questão que lhes foi colocada, respondendo de forma correta o total de palitos para formar as figuras, usando apenas o cálculo aritmético para indicar esse total. Usa apenas o "registo em língua natural", o que se verifica em várias respostas da maioria dos grupos.

O grupo R apresenta a seguinte resposta:

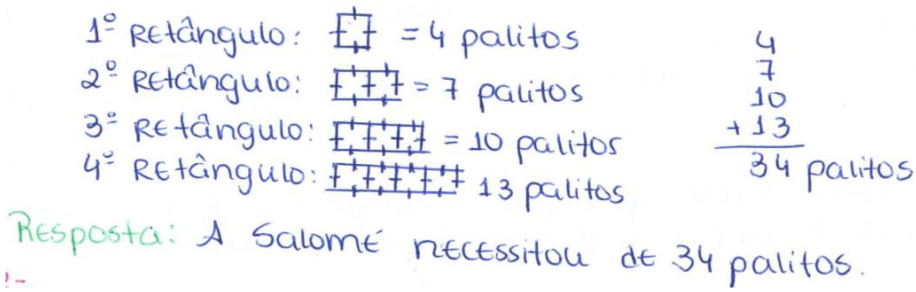


Figura 2: Resposta do grupo R à questão 1 da tarefa 1

O grupo R utiliza o "registo em língua natural", obtendo de forma correta a resposta, revelando entendimento da questão, para além do raciocínio matemático que apresenta.

Já o grupo Ro, nesta questão, apresentou apenas a resposta final, revelando não ter necessidade de construir uma resposta longa. No entanto, revela ter entendido a disposição dos palitos, bem como o sentido da pergunta.

1 Necessitou de 34 palitos

Figura 3: Resposta do grupo Ro à questão 1 da tarefa 1

Quanto ao grupo Ma, este apresenta o cálculo que realizou para encontrar a resposta:

1. A Salomé necessita de 34 palitos para fazer cada um destes quatro numeros.

4 + 7 + 10 + 13 = 34

1º + 2º + 3º + 4 = 34

Figura 4: Resposta do grupo Ma à tarefa 1 da questão 1

Observando as respostas anteriores, torna-se evidente que os alunos efetuam as suas respostas entre os “registo na língua natural” e “registo geométrico”, uma vez que recorrem a esquemas para apresentar a sua resposta.

Contudo, também existem os que não necessitam desta construção de resposta, uma vez que, apresentam a quantidade total dos palitos, efetuando apenas o cálculo numérico para obter esse total, necessários para formar as quatro primeiras figuras.

É nesta diversidade de respostas, que se descobre o pensamento matemático, constatando que não há modelos para seguir. Com estas é nítido que o conceito anterior - sequências e regularidades - foi interiorizado pela maioria dos alunos, e que estes mobilizam esses conhecimentos.

Passando para a questão 2, na qual se pretendia saber o número de palitos da 5ª e 10ª figura, verifiquei que todos os grupos apresentaram resposta correta, revelando terem percebido a “arrumação” dos palitos nas figuras sucessivas.

Os grupos apresentaram vários tipos de respostas, utilizando diversas formas de a expor.

O grupo Ma expressou-se através de desenhos - “registo geométrico”:

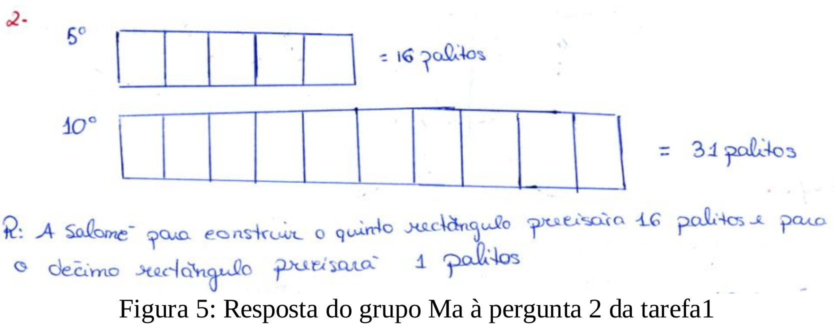
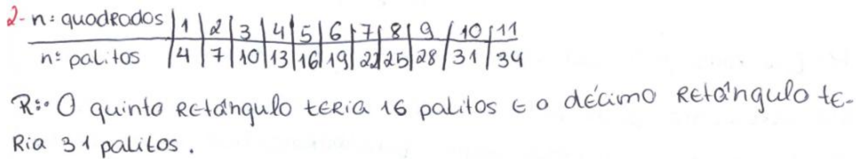


Figura 5: Resposta do grupo Ma à pergunta 2 da tarefa1

Já o grupo Mi, apresentou em tabela:



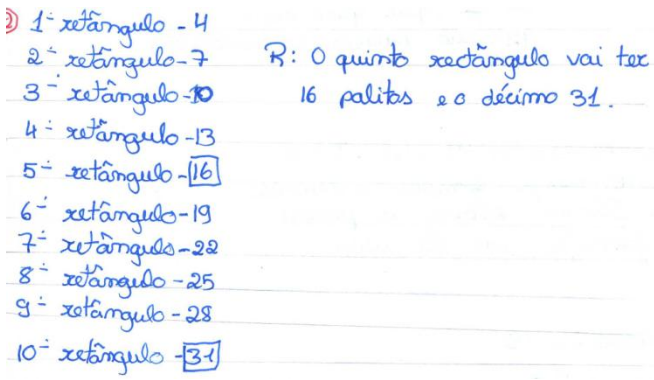
2-

n: quadrados	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
n: palitos	4	7	10	13	16	19	22	25	28	31	34

R:· O quinto retangulo teria 16 palitos e o décimo retangulo teria 31 palitos.

Figura 6: Resposta do grupo Mi à pergunta 2 da tarefa 1

Quanto ao grupo Ro, apresentou a sua resposta em forma de lista, fazendo alusão ao "registo na língua natural":



2) 1.º retângulo - 4
2.º retângulo - 7
3.º retângulo - 10
4.º retângulo - 13
5.º retângulo - $\boxed{16}$
6.º retângulo - 19
7.º retângulo - 22
8.º retângulo - 25
9.º retângulo - 28
10.º retângulo - $\boxed{31}$

R: O quinto retângulo vai ter 16 palitos e o décimo 31.

Figura 7: Resposta do grupo Ro à pergunta 2 da tarefa 1

Todos os grupos demonstram reconhecimento da forma como se dispõem os palitos nas várias figuras consecutivas, revelando compreensão da sequência, além de produzirem pensamento matemático.

É claro que, esta variedade de respostas foi possível porque os alunos estão em grupo, cooperando uns com os outros, colaborando mutuamente, a fim de, todos juntos, encontrarem as soluções para as sucessivas questões.

Notei a envolvência dos alunos no grupo, possibilitando o crescimento de todos ao nível do conhecimento matemático.

Em grupo, os alunos fazem as suas escolhas, tendo em vista o responder corretamente às questões, implicando cedências de todos os elementos, contribuindo assim para uma decisão conjunta. Como os alunos estão em cooperação, em colaboração, portanto em corresponsabilização, surge um trabalho diversificado e enriquecido com as experiências individuais de cada aluno.

Na questão 3, pretendia-se saber quais as figuras da sequência que tinham 136 e 1001 palitos. Assim, aos alunos era pedido que pensassem de forma mais aprofundada na arrumação dos palitos. Estes ao terem percebido a forma como os palitos estavam arrumados, era a base para chegar ao pretendido, contudo, alguns grupos manifestaram dificuldades em pensar "ao contrário", isto é, tendo o número total de palitos, verificar se se encontrava alguma figura, com essa quantidade de palitos.

Verifiquei nesta questão, que muitos grupos pediram a minha intervenção a fim de lhes esclarecer pergunta, revelando dificuldade na leitura e interpretação do enunciado.

O diálogo a seguir carateriza um desses momentos:

Ro: Professora, o que é para fazer?
Profª: Já leste bem o enunciado?
Ro: Sim, mas não percebo.
Profª: Observa a forma como os palitos estão dispostos nas várias figuras. Existem palitos na vertical e outros na horizontal, não é?
Ro: Sim! Hum…. mas não sei….
Profª: Será possível com 1001 formar uma figura com esta mesma lógica de colocar os palitos? E outra com 136? [Apontando para as figuras iniciais que estavam representadas na tarefa.]
Ro: Não sei!
Profª: E o resto do grupo? Tentem fazer, por exemplo, um esquema. E depois, verão que encontrarão a resposta certa!

Com este diálogo, apercebi-me que alguns alunos apesar de terem investigado o número da figura e a respetiva quantidade de palitos, de acordo com a disposição dos palitos, apresentaram dificuldades em visualizar a arrumação dos mesmos, a partir do número total de palitos.

Verifiquei também a complicação dos alunos em identificarem as operações aritméticas inversas, pois tinham o conhecimento do número total de palitos e era necessário saber a que figura correspondia. Estes precisavam de realizar o raciocínio oposto, tentando aperceber-se da forma como estes estavam dispostos, para assim poderem descobrir o número correspondente da figura da sequência.

Nesta fase da realização da tarefa, observei que, enquanto as perguntas são diretas, como aconteceu nas questões 1 e 2, os alunos, mesmo com algumas dificuldades, chegam ao resultado final, porém, quando envolve mais raciocínio, particularmente o efetuar o raciocínio contrário, o ter de construir cálculos “de trás para a frente”, torna-se tarefa difícil para alguns alunos realizarem.

A partir da quantidade total de palitos, os alunos tinham que descobrir o respetivo número da figura, desta forma constatei que os alunos sentem-se confusos, não conseguindo, de forma direta, a resposta final.

Das respostas apresentadas, dois dos cinco grupos não responderam corretamente. Uma dessas respostas foi apresentada pelo grupo Ro, revelando que não entendeu a questão. Desta forma, demonstram pouca compreensão da situação matemática em estudo.

Deste modo observamos que não entenderam o conteúdo anteriormente estudado – sequências e regularidades.

A resposta do grupo Ro foi:

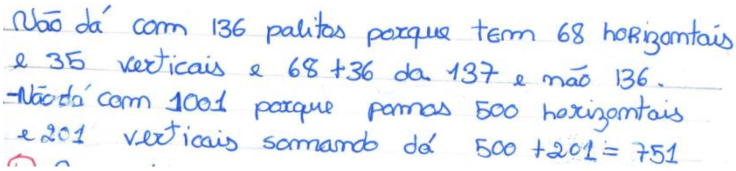


Figura 8: Resposta do grupo Ro à pergunta 3 da tarefa 1

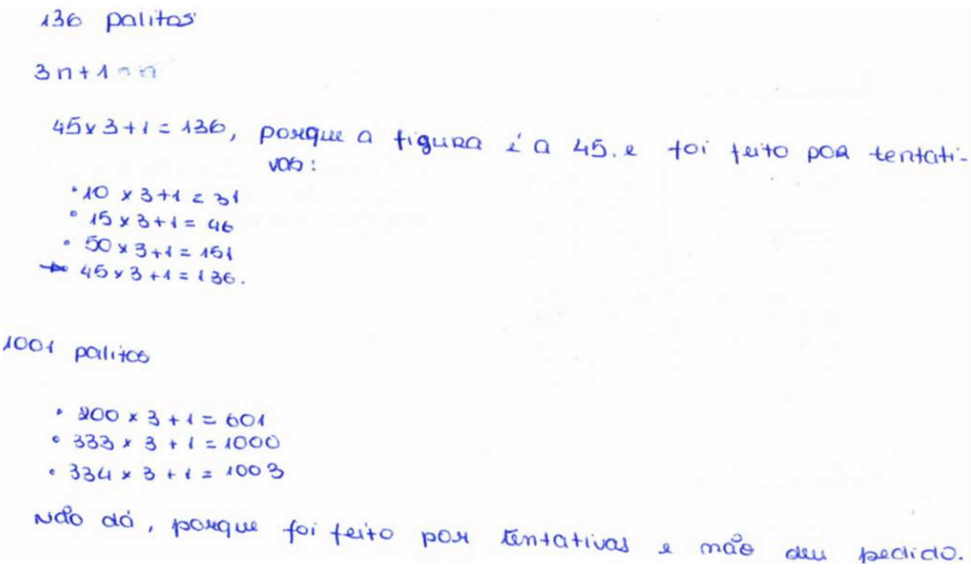
Notei que este grupo não entendeu a disposição dos palitos em cada figura, apesar de ter inicialmente apresentado em lista, a quantidade de palitos das várias figuras da sequência.

Este grupo revela que não assimilou as questões iniciais da tarefa, visto que, não interligou a informação que foi adquirindo ao longo das várias questões formuladas, e isto acontece com facilidade, uma vez que, os alunos não realizam a tarefa com atenção crítica e, principalmente, não retêm a informação que já foi trabalhada na resolução das questões anteriores.

O grupo Ro ao tentar resolver esta questão (como se pode observar acima), está a desenvolver pensamento matemático, de modo particular, o pensamento algébrico.

Este grupo efetuou raciocínio matemático, ao procurar entender o sentido da sequência, embora, não tenha conseguindo extrapolar para o termo geral da sequência.

Em contrapartida, o grupo J apresentou a seguinte resposta:


136 palitos

3n+1 = n

45x3+1 = 136, porque a figura é a 45. e foi feito por tentativas:

- 10 x 3+1 = 31
- 15 x 3+1 = 46
- 50 x 3+1 = 151
- → 45 x 3+1 = 136.

1001 palitos

- 200 x 3 + 1 = 601
- 333 x 3 + 1 = 1000
- 334 x 3 + 1 = 1003

Não dá, porque foi feito por tentativas e não deu pedido.

Figura 9: Resposta do grupo J à pergunta 3 da tarefa1

Foi evidente que o grupo J entendeu o que estava a acontecer na arrumação dos palitos nas sucessivas figuras, concluindo de forma acertada a quantidade de palitos que fazia parte da cada figura da sequência. Além disso, este grupo aplicou de forma correta as operações aritméticas inversas, revelando entendimento das mesmas, além de ter utilizado corretamente todas as informações, anteriormente fornecidas, sobre a sequência.

Com a resposta do grupo J, apercebemo-nos que este revela ter aprendido a característica da álgebra formal, ao escrever o termo geral da sequência, revelando mobilização do ”registo algébrico”.

Este grupo revela ainda pensamento matemático, nomeadamente o algébrico, o sentido de símbolo matemático, uma vez que, mostra que n representa o número da figura e que a expressão algébrica $3n+1$ corresponde à quantidade de palitos da respetiva figura. No momento em que o grupo substitui n por 45 e por 200, descobre qual a figura que terá esse número total de palitos. O grupo mostra facilidade no manuseamento da expressão algébrica, do termo geral de uma sequência, tema que foi abordado anteriormente.

Por último, o grupo demonstra uma aprendizagem significativa das sequências e regularidades, além de revelar facilidade em realizar o “registo algébrico”, a exemplo dos nossos antepassados árabes e hindus e que se perpetua nos povos europeus.

Quanto à questão 4, onde se pretendia que o aluno respondesse de que forma o número de palitos aumenta à medida que o número da ordem da figura aumenta.

Observei que todos os grupos reconheceram o modo como aumentava a quantidade de palitos nas sucessivas figuras, revelando entendimento da regularidade da sequência. É de referir que, esta questão requeria uma correta visualização de todas e de cada uma das figuras, que constituíam a sequência.

O grupo Ro respondeu a esta questão de seguinte forma:

Figura 10: Resposta do grupo Ro à pergunta 4 da tarefa 1

A apresentação da resposta do grupo Ro não está na forma mais completa, contudo o grupo constatou a correta relação do aumento do número de palitos de figura para figura.

Com esta resposta, é visível que os alunos, por vezes, sabem a solução, contudo, têm dificuldade em escrevê-la, pois não encontram a melhor forma de a redigir.

Nota-se que este grupo utilizou apenas o “registo na língua natural” para descrever a relação entre as variáveis.

Já o grupo R apresenta a sua resposta utilizando o “registo na língua natural” e o “ registo geométrico”:

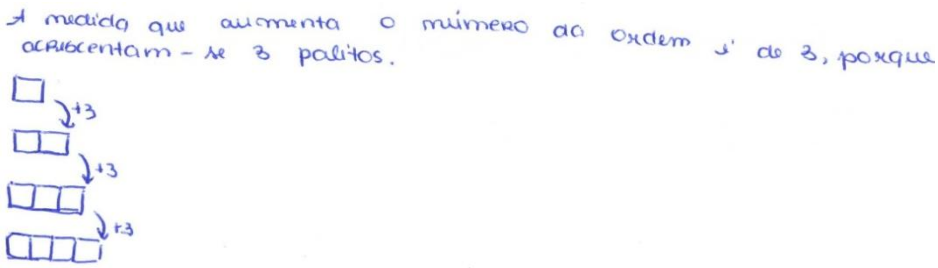


Figura 11: Resposta do grupo R à pergunta 4 da tarefa 1

Analisando a questão 5, onde se pretendia saber a diferença entre os dois termos consecutivos da sequência do contorno dos retângulos, observei que os alunos apresentaram várias dificuldades na perceção da pergunta, uma vez que estes revelaram pouca compreensão da expressão “contorno da figura”. Por este motivo, fui chamada pelos vários grupos a fim de os esclarecer a pergunta, clarificando o sentido da expressão já mencionada.

No diálogo seguinte é visível esta confusão:

> **Rub**: Profª, não percebo esta questão?
> **Profª**: O que diz a pergunta? [Profª leu]
> **Rub**: Não percebo nada Profª.
> **Profª**: O que é o contorno da figura?
> **Rub**: Ah! Já sei… é à volta…
> **Profª**: Estás a ver como sabes! Sendo assim, como vão responder à questão!?
> [A professora envolveu todo o grupo na resolução da pergunta]
> **Rub**: Temos que contar os palitos à volta da figura.
> **Profª**: Exato! Continuem a explorar.

Com este diálogo constata-se que, por vezes, as questões/dúvidas dos alunos, não são necessariamente matemáticas, mas, acima de tudo, relacionadas com lacunas associadas à leitura e interpretação do enunciado. Além disso, demonstram muita insegurança matemática, pois têm medo de errar, não querendo escrever as suas respostas, sem antes terem a certeza, de que estão no caminho correto.

Averiguei que os grupos avançavam, apenas depois de eu lhes ter ouvido e orientado um pouco mais. Assim que o grupo esclareceu as dúvidas apresentadas, passava para a elaboração da resposta. Tentando construir uma resposta simples, apresentada com esquemas, ou mais complexa, utilizando a linguagem formal da matemática.

O grupo R apresenta a seguinte resposta:

1	2	3	4	5	6	7	8
4	6	8	10	12	14	16	18

Figura 12: Resposta do grupo R à pergunta 5 da tarefa 1

O grupo R revela raciocínio lógico, uma vez que associa bem o número da figura à quantidade de palitos, além de apresentar pensamento matemático, no entanto, não apresentou a informação na tabela de forma completa, faltando a identificação de cada linha e a resposta final.

A apresentação de respostas incompletas é muito frequente, uma vez que se constata que os alunos iniciam a construção correta das respostas, no entanto, não estão despertos para a forma completa de as expor.

Pela elaboração da tabela, verifica-se que o grupo R entendeu a sequência do número de palitos do contorno das figuras, no entanto precisaram de escrever todos os termos até chegar ao pretendido. Não conseguiram efetuar a relação com a expressão algébrica, revelando pouca desenvoltura ao nível de pensamento algébrico, ficando o grupo apenas pelo cálculo aritmético do número de palitos para todas as figuras da sequência.

É a constatação de que os alunos expressam-se muito melhor na forma aritmética do que na forma algébrica.

Verifica-se que o sentido de símbolo não está ainda desenvolvido neste grupo, pois não visualizaram a relação entre o aumento do número de palitos, com o número da figura, revelando pouco pensamento algébrico.

Já o grupo I necessitou de recorrer ao "registo geométrico" a fim de responder a esta pergunta, como se apresenta a seguir.

O grupo desenha todas as figuras pedidas e responde à primeira questão de forma errada, pois não observou bem o que era o contorno das várias figuras, já à segunda questão, o grupo esquematizou, novamente de forma errada, mas respondeu corretamente a esta questão:

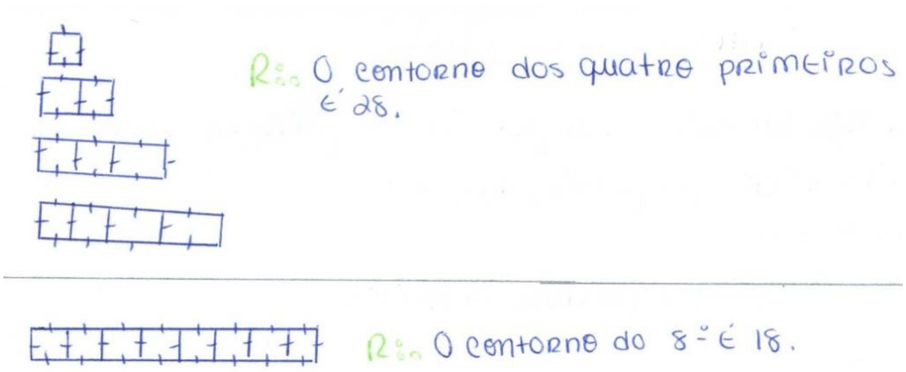


Figura 13: Resposta do grupo I à pergunta 5 da tarefa 1

Este grupo revela que ainda não domina a linguagem algébrica, daí ter a necessidade de desenhar todas as figuras, mobilizando deste modo o "registo em língua natural" e o " registo geométrico", embora não tenha entendido na totalidade a expressão "contorno da figura".

Quanto à questão 6, pretendia-se que os alunos encontrassem a figura que tivesse 84 palitos no contorno. O grupo R expôs uma resposta correta, escrevendo a operação inversa e utiliza o "registo geométrico" para esboçar a figura em causa:

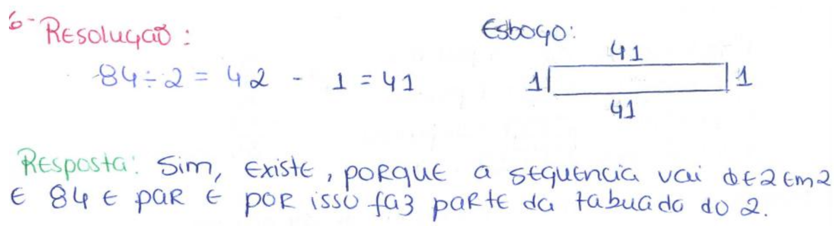


Figura 14: Resposta do grupo R à pergunta 6 da tarefa 1

O grupo demonstrou o à vontade para trabalhar com as operações aritméticas inversas, além de saber elaborar esquemas, respondendo de forma completa à questão.

Com a cooperação de todos os elementos do grupo, o grupo R elabora respostas completas.

Por sua vez, o grupo Mi apresenta a seguinte resposta:

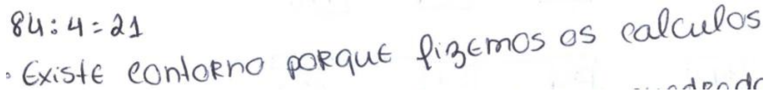


Figura 15: Resposta do grupo Mi à pergunta 6 da tarefa 1

Este grupo revela não ter entendido a arrumação dos palitos no contorno dos vários retângulos, que compõem a sequência, contudo manifesta dificuldade em realizar a operação aritmética inversa.

A compreensão das sequências e regularidades exige, além de uma boa observação das figuras geométricas desenhadas, um bom entendimento algébrico, para além de ser necessário interiorizar o sentido de símbolo matemático, uma vez que facilita no sentido da evolução das várias figuras da respetiva sequência.

Na questão 7, pretendia-se saber qual a diferença entre dois termos consecutivos da sequência do número de palitos do contorno das figuras. Gerou-se novamente dúvidas junto dos alunos, nomeadamente o termo matemático "diferença", uma vez que houve grupos que pediram-me ajuda no esclarecimento deste termo. Uns grupos entenderam que era a diferença entre o número total dos palitos das figuras e não os do seu contorno, conduzindo a uma resposta errada, enquanto outros responderam de forma correta, pois compreenderam a questão.

Por exemplo, o grupo R apresentou a seguinte resolução:

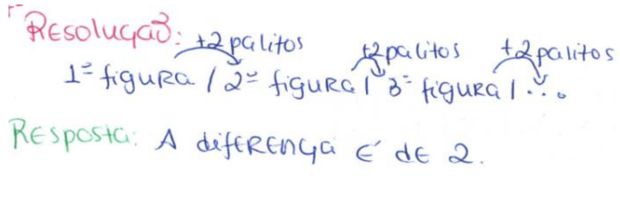


Figura 16: Resposta do grupo R à pergunta 7 da tarefa 1

Este grupo R revela ter compreendido o que era pedido, embora tenha necessitado de elaborar um esquema para justificar a sua resposta. O grupo mostra entendimento da pergunta e conhecimento da linguagem matemática, utilizando na sua resposta o “registo na língua natural”, visto que não dominam a linguagem algébrica.

O grupo Ma apresenta a seguinte resposta:

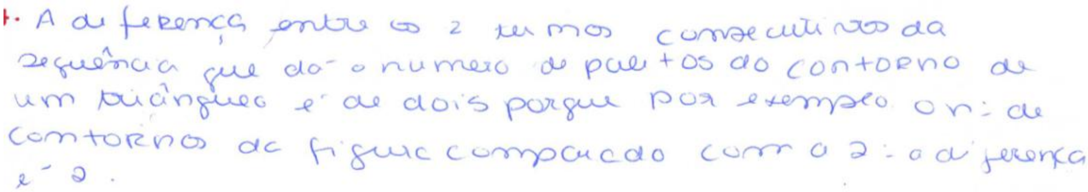

1. A diferença entre os 2 termos consecutivos da sequência que dá o número de palitos do contorno de um triângulo é de dois porque por exemplo o n: de contornos da figura comparado com o 2 : a diferença é 2.

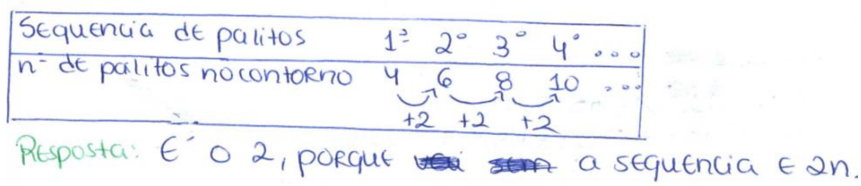
Figura 17: Resposta do grupo Ma à pergunta 7 da tarefa 1

Este grupo revelou ter entendido a questão que lhes foi colocada, e consequentemente a sequencia apresentada, embora não se expresse com clareza na sua resposta.

Com esta questão, constatei que os alunos oscilam na sua concentração, colocando em causa toda a interpretação construída desde o início da resolução da tarefa. Observei que os alunos respondem às questões, mas não as relacionam, não utilizam a informação já adquirida nas questões anteriores.

Na questão 8, pretendia-se que os alunos respondessem qual era a relação entre o número de palitos do contorno e o número de quadrados que compõem a respetiva figura. Saliento que não houve nenhum grupo que tivesse respondido corretamente a esta questão.

No entanto, o grupo R manifestou ter entendido o aumento dos palitos no contorno das figuras, escrevendo parte da expressão do termo geral da sequência, embora não fosse pedido.



Sequência de palitos	1º	2º	3º	4º ...
nº de palitos no contorno	4	6	8	10 ...
		+2	+2	+2

Resposta: É o 2, porque ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ a sequência é 2n.

Figura 18: Resposta do grupo R à pergunta 8 da tarefa 1

O grupo R manifesta raciocínio matemático e pensamento algébrico, uma vez que relacionou as variáveis pretendidas, embora não tenha chegado à resposta totalmente correta, mas iniciou, e bem, a sua resolução. O grupo demonstra o sentido de símbolo matemático, pois iniciou a escrita da expressão do termo geral da sequência em causa, revelando mobilização do "registo algébrico".

Já o grupo Ma, na resolução desta mesma questão, apresenta a resposta que a seguir é transcrita:

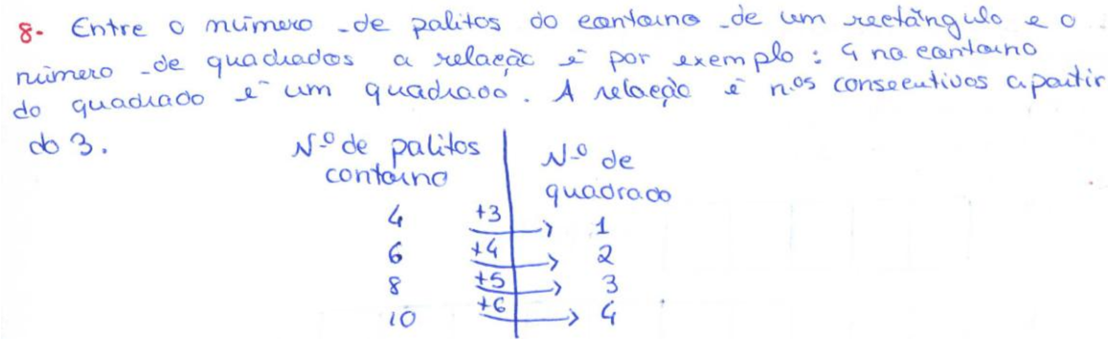


Figura 19: Resposta do grupo Ma à pergunta 8 da tarefa 1

O grupo Ma, relacionou figura a figura, compreendeu o modo como o número de palitos aumentava e definiu a lei de formação da sequência e não a relação entre o número de palitos com o respetivo contorno.

Com esta resposta, verifiquei que os alunos até constatam regularidades importantes entre os números, no entanto não responderam a pergunta que lhes foi colocada. Assim, pude constatar que o grupo não percebeu a questão e não distingue a lei de formação de uma sequência do respetivo termo geral.

4.2. A exploração da noção de equação

Na resolução da tarefa 2 era solicitado que os alunos seguissem uma sequência de operações e justificassem o facto de se obter como resultado o número inicial. Pretendendo-se que os alunos recordassem e compreendessem as operações aritméticas, e respetivas operações inversas, que assumem grande relevância para a resolução das equações.

Nesta tarefa houve vários grupos que solicitaram a ajuda da professora, havendo alguns diálogos, entre os quais:

> **Rub**: Profª! [Aluno chamando a professora.]
> Pode fazer o favor de vir ao nosso grupo?
> [A profª chega ao grupo]
> Nós não estamos a perceber o que é pedido?
> **Profª**: Vocês repararam bem no diálogo dos meninos?
> **Rub**: Sim Profª! Vimos que é verdadeiro, pois os cálculos que estão escritos são corretos, mas não percebemos…
> **Profª**: A pergunta pede para vocês explicarem o que está a acontecer, e se acontece o mesmo para outros números. Experimentem esta mesma sequência de operações com outros números e observem o que acontece!?
> **Rub**: Ah! Está bem!
> [Os alunos começaram a experimentar com outro número e….
> …passado algum tempo e estando novamente a professora junto ao grupo]
> **Rub**: Profª, já sabemos que acontece o mesmo para outros números, depois dos cálculos obtemos o número inicial.
> **Profª**: E porque é que isso acontece?
> **Grupo**: Não sabemos…
> **Profª**: Observem as operações que estão a aplicar a esse número.
> **Rub**: Parece que 'aumenta e logo depois diminui'…
> **Profª**: Grupo! [Professora chamando a atenção dos restantes elementos.]
> Ajudem o vosso colega a chegar a uma conclusão!
> [Os restantes elementos envolveram-se mais na discussão]

Este diálogo surgiu em todos os grupos, de forma mais ou menos semelhante, revelando lacunas na interpretação do enunciado, além da pouca perspicácia para a aplicação das operações aritméticas a aplicar ao número inicial.

Houve grupos que escreveram as operações aritméticas todas seguidas, sem fazer o cálculo parcial, consequentemente obtendo resultados errados. Foi necessário a minha intervenção para iniciar as operações, esclarecendo que com o resultado de cada operação construía-se a operação seguinte.

Constatei que, geralmente os alunos ao lerem os enunciados pela primeira vez, não fazem conexão da informação lida, nem da questão que é colocada, o que dificulta na resolução das tarefas que lhes são propostas.

Apenas o grupo J, apresentou uma resposta onde evidenciou a compreensão das operações aritméticas inversas. Este grupo construiu outra sequência com as operações inversas, de acordo com as apresentadas, no entanto não relacionou as operações aritméticas dentro da mesma sequência.

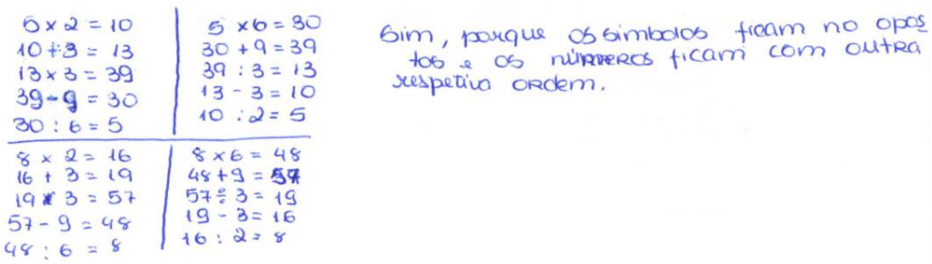
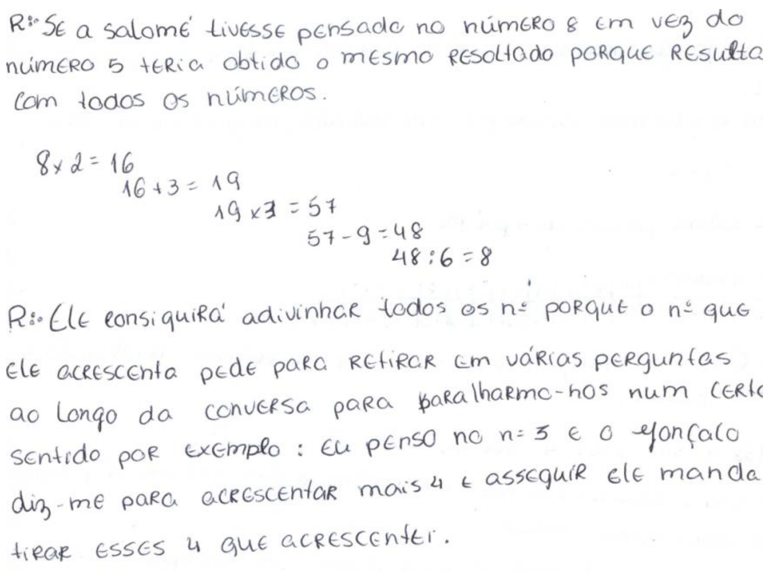


Figura 20: Resposta do grupo J à tarefa 2

Este grupo J revela entendimento de todas as operações, uma vez que verificou que ao fazer todas as operações inversas, chegaria também ao número inicial, revelou entendimento das operações aritméticas e consequente raciocínio matemático, utilizando o "registo em língua natural".

O grupo Mi justificou a razão de ser da sequência de operações, embora com algumas lacunas, e mencionou que o resultado final obtém-se igual ao inicial, pois "acrescentou-se, para depois retirar" as mesmas quantidades:


R: Se a salomé tivesse pensado no número 8 em vez do número 5 teria obtido o mesmo resoltado porque resulta com todos os números.

8 x 2 = 16
16 + 3 = 19
19 x 3 = 57
57 - 9 = 48
48 : 6 = 8

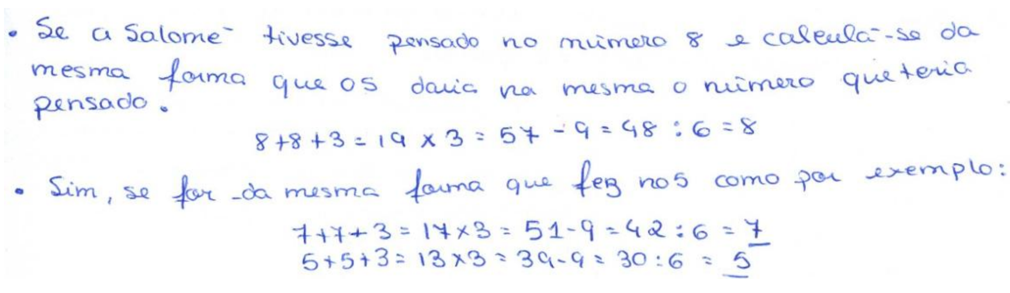
R: Ele consiguirá adivinhar todos os nº porque o nº que ele acrescenta pede para retirar em várias perguntas ao longo da conversa para baralharmo-nos num certo sentido por exemplo: eu penso no n = 3 e o Gonçalo diz-me para acrescentar mais 4 e asseguir ele manda tirar esses 4 que acrescenter.

Figura 21: Resposta do grupo Mi à tarefa 2

Este grupo revela algum entendimento da sequência de operações, no entanto não soube elaborar a justificação das mesmas.

Há referência, na sua resolução, ao ‘acrescentar’ para depois ‘retirar’, de modo a chegar novamente ao número inicial, contudo, o grupo não consegue indicar as quantidades que se acrescentam e as que se retiram.

Já o grupo Ma faz os cálculos com o número 8, como sugere a tarefa e, em seguida, realiza as mesmas operações para outros dois números, concluindo que dá para todos.


• Se a Salome tivesse pensado no numero 8 e calcula-se da mesma forma que os daria na mesma o numero que teria pensado.

8 + 8 + 3 = 19 x 3 = 57 - 9 = 48 : 6 = 8

• Sim, se for da mesma forma que fez nos como por exemplo:

7 + 7 + 3 = 17 x 3 = 51 - 9 = 42 : 6 = 7
5 + 5 + 3 = 13 x 3 = 39 - 9 = 30 : 6 = 5

Figura 22: Resposta do grupo Ma à tarefa 2

A tarefa 2 revelou-se ser de difícil resolução, pois os alunos apresentaram dificuldades na identificação e justificação das sucessivas operações aritméticas, que se aplicavam aos números escolhidos no início.

Esta tarefa mostrou que os alunos não conseguem visualizar para além da indicação das operações aritméticas.

Ao nível do pensamento matemático, também verifica-se pouco desenvolvimento, pois os alunos não conseguiram ir além das operações aritméticas, tentando estabelecer relações entre a multiplicação inicial e a divisão que aparece mais à frente. Perceberam, no geral, o facto de aumentar para depois diminuir, e vice-versa, contudo, sem uma interligação lógica.

Passando para a análise da tarefa 3, que tinha como objetivo iniciar, de modo lúdico, a noção de equação, com a descoberta do número que estava representado nos cartões, de modo a obter igualdades verdadeiras.

A tarefa explorava também as operações aritméticas inversas e a noção de equação, através da igualdade de expressões com números incógnitos, embora não utilizasse a noção de incógnita, usando apenas o “registo em língua natural” da equação.

Na questão 1, da tarefa 3, todos os grupos perceberam o que era pedido e realizaram, com o número 12, as operações indicadas, obtendo o resultado final.

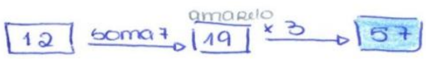


Figura 23: resposta do grupo J à questão 1 da tarefa 3

Quanto às questões 2 e 3, houve dois grupos que apresentaram um esquema de resolução, evidenciando mobilização das operações inversas, demonstrando ter conhecimento destas.

O grupo R apresentou a resposta da seguinte forma:

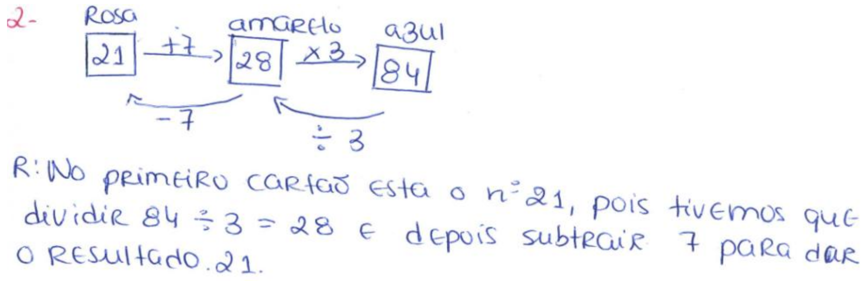


Figura 24: resposta do grupo R à questão 2 da tarefa 3

O grupo R evidencia a mobilização do "registo em língua natural" da equação. O grupo trabalha de forma intuitiva a equação.

Do mesmo modo, o grupo J apresentou a resposta seguinte, na questão 3:

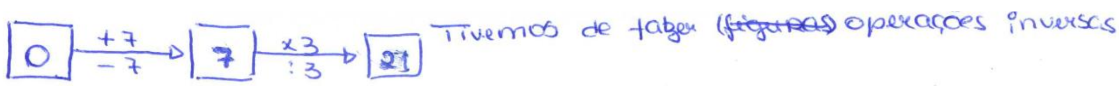


Figura 25: Resposta do grupo J à questão 3, tarefa 3

Estes dois grupos mobilizam de forma correta as operações inversas, a fim de encontrarem os números escondidos nos cartões.

Quanto aos restantes grupos, estes não apresentaram um esquema de resolução, no entanto apresentaram a resposta correta e evidenciaram as operações aritméticas inversas.

Com esta tarefa, constatei que quando o enunciado é direto, portanto menos longo, os alunos têm uma melhor prestação, evidenciando uma construção correta da resposta. Além disso, por ser menos longa a tarefa, e ser apresentada em esquemas, o aluno situa-se logo na questão, respondendo-a de forma inequívoca.

No que diz respeito à questão 4, desta tarefa 3, todos os grupos perceberam o que se pretendiam com ela, e preencheram corretamente a maior parte dos espaços. Apenas falharam na alínea e), pois não souberam fazer o simétrico de um número negativo.

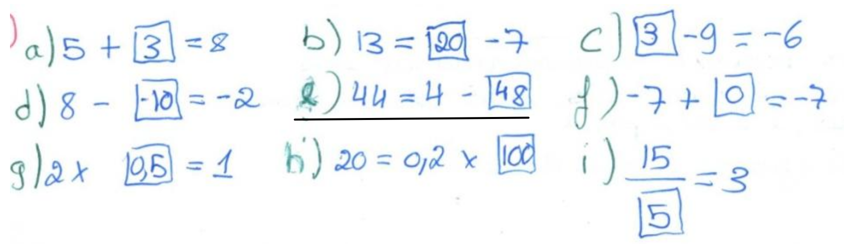


Figura 26: Resposta do grupo Ro à questão 4, tarefa 3

Nesta tarefa notei que os alunos entenderam a noção de equação como uma igualdade numérica entre duas partes, uma vez que os grupos colocaram os números nos espaços em branco, de forma a obter um resultado correto, como pretendido.

Os vários grupos preencheram de forma acertada os espaços vazios, sendo apenas difícil no caso em que envolvia o simétrico de números negativos, revelando dificuldades nesta situação (alínea e). Pode-se afirmar que enquanto os alunos trabalham a equação na forma numérica, não existe confusão, e até as suas prestações são bastante satisfatórias.

Nesta questão os alunos utilizaram o "registo natural", e responderam de forma intuitiva e correta às igualdades apresentadas. Também se pode verificar a utilização do "registo geométrico", pois é através de esquemas que são apresentadas as respostas dos alunos, e é nestes que está presente a noção de equação.

Por fim, e na realização da tarefa 4, cujos objetivos visados eram, o compreender a noção de equação e de solução de uma equação, pretendia-se que os alunos descobrissem a quantidade de marcadores em cada caixa, sabendo que os dois meninos tinham igual quantidade de palitos.

Observei que uns grupos ao lerem a tarefa, começaram logo a fazer cálculos, de forma a obterem uma igualdade verdadeira. Esta forma de procederem demonstrou facilidade em substituir as caixas de marcadores por um número, até encontrarem o valor correto, demonstrando agilidade no cálculo aritmético.

É evidente que o sentido de símbolo ainda não está presente, embora os alunos saibam que se pretende encontrar um número incógnito que transforme a igualdade dada, numa igualdade verdadeira.

De registar que, vários grupos não estavam a perceber o que era pretendido com esta questão, solicitando a minha intervenção. Apenas depois de os alunos estarem esclarecidos, acerca da igualdade de marcadores nas várias caixas, é que concluíram os seus raciocínios, descobrindo o valor correto.

No grupo Ma surgiu o seguinte diálogo entre os alunos:

> **Leo**: Mar resolve esta tarefa 4?
> **Mar**: É fácil, não tás a ver!
> **Leo**: Não!
> **Mar**: Repara. O Valter e o Edgar têm o mesmo número de marcadores. Olhando para os dois, ele têm em comum três caixas e três marcadores. Ficam de fora 8 marcadores para o Valter e duas caixas para o Edgar. Como 8:2 é 4, quer dizer que cada caixa tem 4 marcadores.
> **Leo**: Boa!

Atendendo ao diálogo, observa-se que a aluna Mar percebeu de forma correta o que se pretendia com esta tarefa, resolvendo-a e explicando-a aos restantes colegas do grupo.

Note-se a forma intuitiva do sentido de equação que a aluna possui, esta aplica intuitivamente os princípios de equivalência, encontrando a solução correta para a equação.

Esta aprendizagem autónoma, é apenas possível em trabalho cooperativo entre os elementos do grupo, tornando-se evidente o desenvolvimento matemático do mesmo, que, de forma significativa, constroem o pensamento matemático.

A resolução que o grupo Ma apresentou é a seguinte:

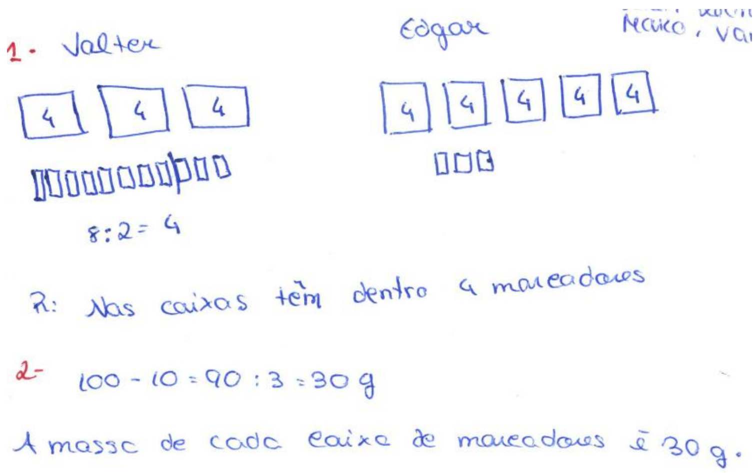


Figura 27: Resposta do grupo Ma à questão 1 e 2 da tarefa 4

Da mesma forma que a aluna Mar entendeu a questão um, também o grupo Ma, onde estava inserida a aluna Mar, resolveu de forma correta a questão dois, recorrendo às operações inversas para determinar a massa de cada caixa de marcadores, embora tenham apresentado os cálculos de forma incorreta, visto que não separaram as várias operações que efetuaram.

Esta dificuldade está associada à complicação em visualizar o cálculo no geral, uma vez que não conseguiram visualizar que o início da igualdade não é o mesmo que o fim.

De referir que o grupo Ma, foi o que realizou todas as tarefas propostas, dentro do tempo estipulado.

Quanto aos restantes grupos, houve várias discussões, no entanto não chegaram a registar as conclusões obtidas.

O grupo J recorreu à minha ajuda, estabelecendo-se o diálogo seguinte:

> **Jess**: Profª! Não percebemos a pergunta?
> **Profª**: Vamos lá então ler em conjunto. [Elemento do grupo lê a pergunta.]
> **Jess**: Continuo sem perceber.
> **Jo**: É para ‘ver’ quantos marcadores tem em cada caixa, não ‘tás’ a ver?!
> **Jess**: E como se faz isso?
> **Profª**: Pensem um pouco… se os dois meninos têm a mesma quantidade de marcadores, e se as caixas são iguais, quantos marcadores tem em cada caixa?

Jess: Está bem profª, nós vamos resolver, pois eu acho que já sei. As caixas representam o mesmo número, então vamos colocar um número e ver se dá certo.
Profª: Se dá certo o quê?
Jess: Se dá certo a quantidade de marcadores para os dois meninos.

Com este diálogo, observei que os alunos muitas vezes até realizam raciocínio correto das situações matemáticas, mas, pela sua insegurança matemática, não avançam com o seu pensamento matemático, por, segundo eles, não ser a forma acertada.

Continuando com a exploração da noção de equação, foram apresentadas aos alunos várias balanças em equilíbrio (ver Anexo II), onde se procurava descobrir o peso de determinado objeto, para além de ser escrita, juntamente com os alunos, as respetivas equações.

Os alunos manifestaram muita motivação com este tipo de comparação, e conseguiram descobrir, de forma rápida, o valor do peso dos objetos desconhecidos, ainda sem recorrer à linguagem algébrica.

Observei que, enquanto não é utilizada a forma algébrica para representar as equações, os alunos respondem de forma entusiástica às perguntas que vou elaborando, de acordo com o tipo de equação que a balança sugere.

Nas balanças em que se encontram pesos desconhecidos nos dois pratos, os alunos demoram mais algum tempo, o que é perfeitamente aceitável, todavia, acabam por descobrir esse peso incógnito, pelo método de tentativa e erro.

Com as balanças de pratos pude introduzir a noção de termos de uma equação, a noção de incógnita, além de ser definindo as equações equivalentes.

Além das balanças do manual (ver Anexo II), desenhei outras balanças no quadro, e coloquei os alunos a verbalizarem as respetivas soluções, para além de escreverem a equação correspondente. Todo este processo foi ainda feito sem a aplicação dos princípios de equivalência para a resolução de equações, sendo um trabalho orientado por mim.

Passando para a parte do ”registo algébrico” da equação, apresentei aos alunos várias equações, agora sem balanças de pratos, e tendo por base o que foi realizado na tarefa 3 (ver Anexo I), a fim de estes aplicarem as operações aritméticas inversas, para encontrarem a solução da respetiva equação.

Depois, e tendo em vista o concluir dos princípios de equivalência para a resolução das equações, continuei a apresentar equações do primeiro grau, promovendo uma participação de todos os alunos de forma ordenada, e também aleatória.

Durante esta exploração, surgiram vários diálogos, entre os alunos e professora e entre os próprios alunos, que a seguir passo a transcrever:

Profª: Vejamos esta equação x+4=5. Qual é a solução?
Leo: Essa é fácil professora, é 1.
Profª: E como lá chegaste Leo?
Leo: Coloquei o 1 no lugar de x, para dar o resultado 5.
Profª: Outra maneira para chegar ao 1? Quem sabe?
Mar: Professora 5 - 4 dá 1.
Profª: Então que operação fez a Mar? [Perguntando à turma.]
Mar: Não sei.
Mari: Ah! Profª, ela fez uma ‘conta de menos’!
Profª: Pois foi, e era uma ‘conta de menos’ que tínhamos na equação? [Tentando que os alunos visualizassem a operação inversa.]
Turma: Não! [Respondem em coro]
Profª: Então?
Leo: Ah! …… Fizemos o ‘contrário’ da soma.
Profª: Ora aí está, bem observado Leo! Fizemos a operação inversa da que estava na equação.

Com este diálogo, apercebemo-nos que os alunos ao estarem atentos às minhas constantes interpelações, bem como às dos próprios colegas, estes conseguem perceber a dinâmica das equações, chegando, de forma espontânea, aos princípios de equivalência para a resolução das equações.

Observei que os alunos, aos poucos, vão-se familiarizando com a linguagem algébrica, começando a ser utilizada na discussão em turma.

Continuando com o estudo das equações registei outros diálogos, como por exemplo o seguinte:

> **Profª**: Observemos agora a seguinte equação x – 2 = 6. [Profª escreve no quadro.]
> **Del**: Profª! [Aluna chamando a Profª.] A solução é 8.
> **Profª**: Del explica porquê?
> **Del**: Porque 6+2=8.
> **Profª**: Concordam com a resolução da Del?
> **Turma**: Sim! [Em coro]
> **Profª**: Pois é verdade! Quer dizer que foi feita, novamente, a operação inversa da operação que estava na equação!?
> [Continua a profª com a exploração.]
> Agora tenham em atenção a seguinte equação: 2 x =10. [Profª escreve no quadro.]
> **Rub** : 'Essa é boa' [sorriu], é 5!
> **Profª**: E porquê Rub?
> **Rub**: Ora professora!? Porque 10:2 é 5, e também porque 2x5 é 10.

Com esta exploração verificou-se que os alunos ao observarem uma equação, aplicam, maioritariamente, o método por tentativa e erro para descobrirem a respetiva solução.

Porém, observa-se, também, que alguns alunos conseguem visualizar a operação inversa de forma a encontrar o número desconhecido, e até expressam de forma verbal essa mesma resolução. Desta forma, constatei que alguns alunos intuíram, e muito bem, a forma de encontrar as soluções das equações.

Averiguei que quando os alunos são interpelados por mim, para observarem bem as equações, tendo em conta as operações que se observa, para depois começarem a associar as respetivas operações inversas na procura da solução da equação. Este é um passo importante para a familiarização/conclusão dos princípios de equivalência na determinação da solução de uma equação.

Mas, esta passagem revelou-se difícil para alguns alunos, enquanto para outros foi de forma calma que aprenderam e aplicaram os princípios de equivalência.

Observei que enquanto estou como orientadora dos procedimentos a efetuar, a fim de encontrar a solução da equação, os alunos sentem-se confiantes e chegam facilmente à solução. Contudo, quando os alunos estão a trabalhar sozinhos, estes não conseguem começar o processo algébrico da resolução da equação, embora digam a respetiva solução, exceto nos casos em que a equação é mais complexa.

Constato que, no momento em que solicito aos alunos, de forma individual, a resolução de uma equação, estes não conseguem como começar esta resolução. Por isso, ajudo-os a começar a resolução, contudo também apuro que os alunos não relacionam o caminho lógico da resolução de uma equação, uma vez que ainda não aprenderam.

Noto que, no momento em que se passa para a resolução das equações com incógnitas tanto no primeiro e no segundo membro, gera-se a confusão total.

Os alunos demoram algum tempo a perceber estas equações, por isso há sempre orientação da minha parte, de forma a aplicarem os procedimentos que anteriormente foram utilizados. Ainda assim, os alunos fizeram muita confusão pois não percebiam porque se mudavam os termos de um membro para o outro.

Assim sendo, foram constantemente elucidados para o facto de que ao utilizarem os princípios de equivalência, determinariam mais rapidamente a solução da equação. Os alunos, por sua vez, não concordavam com esta ideia, uma vez que preferiam continuar com o método por tentativa e erro:

Profª: Vamos agora resolver a equação 5x-6=3x+2

Rub: Profª, com essa fiquei agora confuso!

Profª: Pois é, mas vamos lá em conjunto resolvê-la. Temos termos com incógnitas nos dois membros, e também termos independentes. Não é?

Turma: Sim!

Rio: E como vamos fazer isto?

Profª: Pensem um pouco. Podemos "juntar" termos com letras com termos sem letras?

[silêncio]

Profª: Não, não podemos! Pois estes termos "não são da mesma família". Assim, vamos pensar na forma como fizemos com os números nas primeiras equações, fizemos o contrário da conta que lá estava.

Alguns alunos em coro: Não 'tou' a perceber…

[Alunos com expressões faciais desnorteadas.]

Perante a novidade da resolução das equações, os alunos mostram-se muito confusos.

[continua a profª.]

Profª: Ora bem, 5x e 3x são da mesma família.

Mas, não estão no mesmo membro. Então o 3x "vem fazer conta" com o 5x, mas com sinal menos, pois mudou de membro, lembram-se da operação inversa que fizemos, nas equações anteriores!

O mesmo se passa com os números, agora o -6 vai 'fazer conta' com o 2 mas, com sinal positivo, pois é ele que muda de membro.

Meninos! [Profª chamado a atenção da turma] não se esqueçam das operações inversas.

Mar: Isso é confuso! [Alunos com expressões faciais de confusão mental.]

Profª: Pois é, mas vamos lá fixar uma regra, só podemos somar, ou subtrair, números que tenham as mesmas letras, pois são os 'da mesma família', isto é, são termos semelhantes. Depois é 'juntar' números com números.

Mar: Pois é Profª, mas fazer isso tudo é muito complicado!

Com este diálogo, observo a resistência dos alunos em fazer a resolução mais formal das equações, e porque é novidade, os alunos não se sentem confortáveis, fazem por repelir o desconhecido.

Profª: Agora é, mas depois vocês vão entender melhor.

[A profª escreve no quadro a equação organizada.]

Agora sim, já podemos fazer as operações que estão no primeiro membro e as do segundo.

[Intervém logo o aluno Leo]

Leo: No primeiro membro dá 2x e no segundo membro dá 8.

Profª: Muito bem Leo! Já fizemos uma equação com esta forma. Como procedemos agora?
Mar: Dividimos! Agora dividimos 8 por 2 que dá 4.
Profª: Muito bem Mar! Então quer dizer que a solução da equação é o número 4.

Observei que, depois de muita insistência, os alunos vão-se apercebendo da vantagem do processo de resolução das equações, fazendo com que o seu conhecimento matemático evolua, algebricamente falando.

Nas primeiras equações era notório o entusiasmo dos alunos, pois eram mais intuitivas, sendo as soluções determinadas de forma direta. Quando deixa de o ser, os alunos apresentam certa desmotivação, dificultando todo o processo de aprendizagem e de interiorização do método algébrico para a resolução das equações.

Um dos diálogos que registei foi:

[A professora escreveu mais uma equação no quadro (2x= -10+x) e pedi aos alunos que tentassem aplicar os processos de equivalência e comecei a circular pela sala.]
Rub: Como é que se começa Profª?
Profª: Quem ajuda o Rub?
Mar: Começas por trazer o x para o primeiro membro!
Rub: Ah! Já sei! Depois mudo de sinal, pois vai fazer conta com o 2x.
Profª: Muito bem Mar! Rub já sabes continuar?!
Rub: Sim profª. Já me lembro. Depois aplico os princípios de equivalência, não é profª!? [Sorrindo]

Com este diálogo é percetível que alguns alunos tiveram mais facilidade em perceber as dinâmicas das equações, pois fez-lhes significado os processos de equivalência a aplicar. Além disso, estes alunos, que já dominavam um pouco mais o processo, começavam a ajudar os colegas que não percebiam, havendo uma maior verbalização dos processos de equivalência.

Nas equações com grau de complexidade considerável, isto é com parênteses, os alunos demonstram alguma fadiga, pois são processos mais morosos, requerendo mais atenção e concentração, para além de ser exigido que saibam várias regras a serem aplicadas numa mesma equação.

Na continuidade da exploração das equações, verificou-se o seguinte diálogo:

[A professora escreveu no quadro a equação -2 (x+1) = 3x-7]
Rub: Profª isso é muito difícil!
Profª: Estou a desafiar-vos, pois vocês são capazes.
Leo: Profª essa tem parênteses!?
Profª: Pois tem! Como aprenderam a retirar parênteses de uma expressão numérica no sexto ano?
Rub: Através da propriedade distributiva.
Profª: Assim sendo como fica?!
Leo: O primeiro membro fica -2x+2…
[A profª esperou um pouco, e interveio…]
Profª: Concordam? [Perguntando para a turma em geral.]
Mar: Não Profª. Fica -2x-2, pois 'menos vezes menos dá mais'…
Profª: Exato! São as regras dos sinais na multiplicação de números, que aplicamos no 1º período… lembram-se?
[Alunos em silêncio, continua a profª.]
Profª: E agora, o que é que devemos fazer?
Déli: Agora 'arrumamos' a equação. Os termos com incógnita para o primeiro membro e os sem incógnita ficam no segundo membro.
Leo: Não esquecer de mudar o sinal daqueles termos que mudam de membro.
Profª: Muito bem. Já sabemos o que fazer, agora façam até acabar e eu vou circulando.
[A professora circula pela sala, para ajudar os alunos que pedem ajuda, e verificar os que terminaram.]

Verifiquei que ao longo da resolução das equações em turma, e enquanto os alunos sentem-se orientados e acompanhados, conseguem fazer todo o procedimento para a resolução da equação.

No entanto, quando estão sozinhos, apresentaram várias dificuldades em seguir todo o método, mostrando que ainda não construíram uma aprendizagem significativa dos princípios de equivalência para a resolução das equações do primeiro grau. Constatei esta situação na realização de uma questão aula, em que os alunos tiveram dificuldade em concluir a resolução das equações, ainda sem parenteses, mas com vários termos.

Com a exploração da resolução das equações em turma e a aplicação dos princípios de equivalência, verifiquei que a evolução do "registo na língua natural" para o "registo algébrico" é difícil, sucedendo o mesmo, com o aprender e aplicar os princípios de equivalência na resolução de uma equação.

Foi necessário apresentar aos alunos muitas mais equações, para que estes as resolvessem, aplicando os princípios de equivalência, tendo como objetivo a familiarização com esta linguagem.

Desta forma pretendia que os alunos interiorizassem o processo algébrico da resolução das equações. Por isso, esta parte do estudo das equações ocupou muito mais tempo do que o previsto.

É de referir que quando se passa para a matemática formal, os alunos cansam-se com facilidade, e pelo facto de se repetir várias equações, ainda que através das balanças de pratos, associação a objetos conhecidos e a situações diárias, estes começam a desinteressar-se e a desviar a atenção do fundamental, tornando-se o processo de ensino-aprendizagem, tarefa árdua para o professor.

4.3. Dos problemas às equações

Constatei, no que diz respeito à resolução de problemas (ver Anexo IV), que os alunos manifestaram muitas dificuldades em escrever uma equação, de acordo com o enunciado que lhes foi apresentado. Estes preferiam resolver os problemas através dos seus esquemas.

Esta dificuldade revela que os alunos ainda não entenderam o sentido de símbolo matemático – a incógnita, além da dificuldade acrescida da tradução da linguagem corrente em linguagem matemática.

Apesar de os alunos já terem trabalhado, nas expressões numéricas, a tradução da linguagem corrente em linguagem matemática, o manuseamento do símbolo matemático continua débil, visto que a tradução em linguagem matemática ficou muito aquém do pretendido.

A transformação de um enunciado é de facto uma das prioridades do programa de matemática para o 7º ano de escolaridade, no entanto, os alunos ficaram muito aquém do pretendido.

Os alunos mostraram complicação inerente à interpretação e à associação do enunciado ao sentido de símbolo matemático e à consequente equação. Contudo, não deixaram de resolver os problemas, pois aplicaram seus próprios métodos para chegar às soluções pretendidas.

Entre os vários diálogos, saliento o seguinte, que surgiu na resolução de uma dos problemas dos coelhos (ver Anexo IV):

> [Foi lido o problema por um aluno para toda a turma, a pedido da professora.]
> **Profª**: Sabemos quantos coelhos há na capoeira?
> **Turma**: Não!
> **Profª**: Então o nº de coelhos é a nossa incógnita?
> **Leo**: Sim profª!
> **Profª** Como escreverão a relação dos animais?
> **Mar**: coelhos + galinhas =28
> **Profª**: Muito bem Mar. Mas, será que ainda podias melhorar esta 'expressão'? Por exemplo, se representarmos coelhos por c e galinhas por g?
> [Responde prontamente o aluno Riu]
> **Riu**: c+g=28
> **Profª**: Sim sr.! E será que foi escrito toda a informação que o enunciado nos dá?
> **Turma**: Não!
> **Profª**: E então?

Mar: Há mais 3 galinha do que coelhos.
Profª: Pois há! Como acrescentamos essa informação?
[Gerou-se confusão e insatisfação, pois não estavam a ver como a escrever.]
Profª: No lugar de galinhas o que é que posso escrever?
Riu: Posso escrever c+3
Profª: Então como fica Riu?
Riu: Fica c+c+3 é 28
Profª: Ora muito bem! Obtemos a equação c+c+3=28. Sendo assim, já estamos prestes a saber qual é o nº de coelhos que a avó da Salomé tem!?
Leo: Profª dá 12,5
[Risada total dos alunos]
Rub: Não pode haver 12,5 coelhos. [riu-se]

Com este diálogo é possível observar que os alunos chegam a conclusões matemáticas importantes, realizam raciocínios matemáticos significativos, embora necessitam de uma condução inicial.

Profª: Pois é verdade, observaram bem! Então, o que se pode dizer do problema?
Deli: O problema não é possível…
Profª: E o que diremos da equação? É possível?
Rub: Sim a equação é possível profª, pois chegamos a um número…
Profª: Pois sim! Tens razão Rub! A equação tem solução, e esta solução faz sentido para o problema?
[Vários nãos foram suando…]
Profª: Pois não! De facto o problema não tem solução, ele é impossível, enquanto a equação é possível e determinada.

É evidente também, o esforço que os alunos realizam para aprenderem esta novidade da matemática.

Na resolução dos problemas, notei que os alunos conseguem, à sua maneira, resolver a situação matemática, uma vez que preferem utilizar o "registo na língua natural" e o "registo geométrico", uma vez que dominam esse tipo de escrita.

Desta forma, averiguo que os alunos não utilizam o "registo algébrico", uma vez que não é ainda a sua linguagem, pois não a dominam.

Também constato, que quando os alunos realizam o seu trabalho individual, não demonstram toda a aprendizagem que efetuaram ao longo das várias discussões matemáticas produzidas em sala de aula, nomeadamente na realização da ficha de avaliação de conhecimentos que realizaram.

Contudo, se o aluno consegue resolver os problemas sem recorrer à escrita de uma equação também está a produzir raciocínio matemático, o que é positivo para a sua aprendizagem matemática.

É claro que, o objetivo último para o sétimo ano de escolaridade, no que diz respeito às noções elementares da álgebra, fica débil, no entanto, o aluno aprende e produz matemática.

Por fim, e após toda exploração das tarefas, das equações e dos problemas, os alunos foram convidados a emitir a sua opinião acerca das mesmas. Estes, na sua maioria, mencionaram que sentiram várias dificuldades na leitura e interpretação das tarefas iniciais (ver Anexo I), para além da dificuldade na interligação de toda a informação que a tarefa tinha.

Também referiram, que as dificuldades foram superadas no momento em que eu lhes esclarecia as dúvidas. Além disso, referiram o facto de não perceberem muito bem o processo de resolução de uma equação e de não conseguirem escrever uma equação a partir de um problema.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Depois da análise feita aos dados recolhidos, às várias respostas obtidas pelos alunos, às várias interações dos alunos em sala de aula e às próprias prestações dos alunos, quer em grupo, quer em pares ou individualmente, cumpre-me agora o dever de discutir as questões que traçaram toda esta investigação.

5.1. A aprendizagem da noção de incógnita e de equação, efetuada pelo aluno

De acordo com o programa em vigor para a disciplina de matemática, um dos objetivos do estudo das equações no sétimo ano de escolaridade, é aprender o sentido de incógnita e de equação. Todo este processo de aprendizagem sofre avanços e recuos no dia a dia do aluno, uma vez que é novidade, e como é necessário abstração para entender estes conceitos, inevitavelmente, observa-se alguns alunos perdidos na exploração destes conteúdos.

Com as tarefas exploratórias iniciais foi fomentado o trabalho em equipa, onde se dá a possibilidade de troca de ideias, neste caso ideias matemáticas, promovendo-se o ensino exploratório (Ponte, 2005).

Estas tarefas motivam os alunos na procura das respostas, possibilitando a sua evolução matemática, envolvendo-se positivamente na discussão em grande grupo. Esta ideia é corroborada por alguns investigadores que também trabalharam esta temática. (Silva, Veloso, Porfírio & Abrantes, 1999; Ponte, 2003; Ponte, Oliveira, Brunheira, Varandas & Ferreira, 1998; Pereira, 2004 e Teixeira, 2005).

As conversas, as chamadas de atenção, o acertar e o errar em grupo, e com os colegas, é sempre uma mais-valia na evolução do aluno em diversas dimensões, pois, estão em meio conhecido, sentindo-se confortável.

Entre progressos e retrocessos, o aluno exprime-se da forma mais coerente com aquilo que sabe, ou não sabe!

No que diz respeito à aprendizagem da incógnita matemática, os alunos manifestam dificuldade em entendê-la apenas como incógnita, pois associam esta a um número, uma vez que faz-lhes confusão ser apenas uma letra.

Deste modo, alguns alunos não associam, que essa letra significará um possível número. Quando estes, por exemplo, veem o termo 2x ficam na dúvida se o valor de x é 2, revelando total incompreensão do conceito de incógnita. Mas, com o constante trabalho que se vai fazendo com as equações, os alunos começam a entender o que se pretende com o seu estudo.

Também verifico que este entendimento leva o seu tempo, e que, por vezes, apesar de todo o trabalho efetuado em sala de aula, alguns alunos acabam o capítulo e, efetivamente, não realizaram uma aprendizagem significativa das noções elementares da álgebra mas também verifico que há alunos para quem toda esta temática fez significado nas suas mentes (Matos & da Ponte, 2008; Matos, Silvestre, Branco & Ponte, 2008.

“Tornar-se competente, não importa em qual actividade, leva muito tempo.” Arends (2008, p.19).

5.2. Aprendizagem e aplicação do processo de resolução de uma equação do primeiro grau – princípios de equivalência

Ao longo deste estudo verifiquei que todo o processo de aprendizagem e aplicação do método da resolução das equações é moroso, variando entre avanços e recuos, por parte do aluno.

Constatei que existem alunos em que o processo de resolução das equações é perceptível, e por isso não colocam em questão a vantagem de o usar e de como o utilizar.

Por outro lado, há alguns alunos que não entendem todo o processo algébrico, para a resolução das equações do primeiro grau, principalmente toda a lógica da aplicação dos princípios de equivalência.

Em equações simples, em que é pedido apenas um dos princípios de equivalência, uns alunos aplicam, de forma mais ou menos autónoma, e intuitiva, este procedimento, contudo, quando é necessário juntar os dois princípios de equivalência, manifestam dificuldades em seguir toda a "técnica".

Portanto, utilizar os princípios de equivalência em equações simples, isto é, em equações em que apenas se aplica um destes princípios, como foi mencionado anteriormente, os alunos entendem a sua lógica e percebem porque são aplicados, compreendendo a origem da sua classificação. Porém, quando é necessário a sua contínua aplicação, alguns alunos cansam-se e desinteressam-se do trabalho que estão a efetuar, acabando por aumentar a confusão em suas mentes, gerando pouco entendimento dos conceitos em causa. Como este procedimento não permite distrações, há outros alunos que se sentem limitados na execução de um processo mental tão específico, manifestando dificuldade em segui-lo de forma rígida.

Assim constato que, por um lado, há alunos que são mais metódicos e seguem os princípios de equivalência, uma vez que estes fez lógica no seu pensamento, por outro, existem alunos em que toda a técnica não fez lógica em seu entendimento, por isso não aplicam tão rapidamente o procedimento.

À medida que se vai insistindo na parte processual da resolução das equações, a maioria dos alunos, por repetição, vão-se apercebendo das diferentes utilizações dos princípios de equivalência, e vão distinguindo as vantagens que existem no uso dos mesmos.

Constato que a passagem do pensamento aritmético para o pensamento algébrico é difícil de acontecer, uma vez que ainda não é intuitivo para os alunos, precisando estes de recorrerem ao processo aritmético para dar significado ao algébrico. Este facto é corroborado por Arcavi, 2005; Kieran, 1992; Ponte, 2005 e Pereira & Saraiva 2008.

Os alunos porque pensam melhor com números, pensamento aritmético, do que com incógnitas, manifestam notórias dificuldades nas operações com os termos incógnitos. Além de ser novidade, e porque não fizeram ainda a assimilação do sentido da incógnita, é portanto necessário, desenvolver a capacidade de aprender a compreender (Lins & Gimenez, 2005).

Verifiquei que ao longo do estudo desta temática e, principalmente, ao resolver equações, existem diversas reações nos alunos, umas positivas e outras negativas. Uns alunos são persistentes, outros até acham interessante a evolução do seu conhecimento na matemática e outros nem por isso. Assim, gera-se múltiplas reações perante a parte algébrica da matemática.

Apuro, que à medida que os alunos se envolvem nas tarefas matemáticas, nas quais produzem a sua própria linguagem matemática, utilizando o “registo na língua natural”, mantem-se interessados e entusiasmados.

Também observo que, pelo facto de não terem assimilado todo o processo algébrico para a resolução de uma equação, alguns alunos desinteressam-se, pois ainda não é a sua linguagem matemática, uma vez que não estão familiarizados, pelo que, é evidente que os alunos precisam de mais algum tempo para que isso aconteça, isto é, para que o seu conhecimento evolua para o “registo algébrico”.

Nas várias aulas do estudo da parte processual da álgebra, constatei que o comportamento dos alunos era mais irrequieto, uma vez que estão em contacto com algo que ainda não dominam e que não foi ainda compreendido.

Os alunos ficam frustrados consigo próprios, pois têm que seguir um ‘caminho obrigatório’ para chegar à respetiva solução da equação, e não conseguem seguir esses mesmos passos, pois ainda não se tornaram lógico para as suas mentes, embora seja uma dos objetivos do programa de matemática para o sétimo ano de escolaridade.

Do compreender ao aplicar o procedimento para a resolução das equações, verifiquei que este processo de entendimento é complexo, uma vez que o aluno tem que interiorizar todo o método de resolução, o que não é assim tão linear, pois implica mais treino, mais dedicação e entendimento do processo. Não basta ler e responder, de forma mais ou menos rápida, tem que haver a familiarização do mesmo, pois os alunos só conseguem aplicar aquilo que aprendem, o que leva o seu tempo.

Atendendo a que, este é o primeiro contacto com a parte algébrica da matemática e com a formalização do processo de resolução das equações, e porque os alunos estão habituados essencialmente ao cálculo aritmético, custa-lhes efetuar o processo algébrico, uma vez que não estão habituados com ele, além de mostrarem resistência à mudança.

5.3. As equações e a resolução de problemas

No momento da resolução dos problemas, observei que os alunos inicialmente não conseguem ter uma opinião positiva sobre a utilização das equações na resolução de problemas.

Pude presenciar que, ao longo da resolução dos vários problemas propostos pelo manual do aluno (ver Anexo IV), quer realizado a pares, quer em turma, os alunos tinham certas dificuldades na interpretação de vários termos, por exemplo, ‘termos consecutivos’, ‘quádruplo de um número’, escrever a expressão algébrica da idade de uma pessoa no presente, passado e futuro. Em todas estas situações, estive sempre a amparar os alunos na execução da resolução de problemas, por forma a estes atingirem o objetivo de os resolver.

Todas estas dificuldades são obstáculo na resolução de problemas, estas advêm do facto de ser o primeiro contato com algumas destas expressões algébricas, apesar de os alunos já terem feito tradução em linguagem matemática, no entanto continuam a mostrar muita dificuldade nesta área.

Insistindo na resolução dos problemas, e porque os alunos não estavam à vontade com as equações, estes foram, maioritariamente, resolvidos através de esquemas, indo ao encontro do que defende Trigo (2008), uma vez que a tradução dos enunciados em linguagem algébrica revelou-se muito cansativa e desmotivante para os alunos porém, também permitiu desenvolver estratégias de resolução (Windsor, 2010; Nobre, Amado & Ponte, 2011).

Depois de os alunos encontrarem a solução para o problema, procedia-se, em algumas situações, à escrita da equação, de forma a confirmar que esta tem uma intervenção positiva na resolução dos problemas.

Verifiquei que enquanto a álgebra não tem significado para os alunos, estes não conseguem visualizar a sua importância, muito menos o seu sentido.

Observei que o sentido de símbolo ainda não foi aprendido com significado, por isso os alunos não encontram vantagem em escrever uma equação e resolvê-la, para encontrar a solução de um problema. Constato que, a dificuldade da transformação de um enunciado numa equação ainda persiste para alguns alunos, concluindo que os alunos ainda precisam de muito mais tempo para aprender este conteúdo.

Noto que, enquanto os alunos não encontrarem significado para o sentido de símbolo, de equação e do procedimento algébrico para a sua resolução, será difícil todo o processo de assimilação desta temática.

Porém, presenciei também que, a partir do momento em que o aluno sai do conforto dos seus esquemas e formas de resolver problemas, e encara esta alternativa, também sua possibilidade, consegue aprender melhor os conceitos matemáticos previstos e aplica-os na resolução de problemas.

Pude constatar que, atendendo ao facto de os alunos não dominarem a linguagem algébrica, visto ser o primeiro contato com ela, mencionaram, inclusive, que não existe vantagem nenhuma na utilização das equações para a resolução de problemas, pois, opinavam eles, em vez de ajudar, 'complica' ainda mais esse problema.

Verifiquei que a tradução de um problema em equação é tarefa difícil, pois os alunos continuam a manifestar dificuldade na tradução da linguagem corrente, em linguagem matemática.

Toda esta resistência à utilização das equações para a resolução de problemas, também deve-se ao facto de os alunos, além de não dominarem esta nova linguagem, também não dominam a passagem da linguagem corrente para a linguagem matemática. Daí, o processo de assimilação estar agravado por tantas condicionantes.

O caminho da evolução do conhecimento algébrico do aluno fica, desta forma, comprometido.

Na resolução dos vários problemas efetuados em sala de aula, foi notório a falta de interesse dos alunos em aplicarem a linguagem das equações, que à partida pode parecer complicada.

Foi com o constante trabalho diário, que os alunos evoluíram e se familiarizaram com esta linguagem, tão necessária e tão importante, para o seu crescimento matemático, nomeadamente para a sua evolução algébrica.

Portanto, a opinião inicial dos alunos evoluiu, embora fosse uma evolução lenta, pois alguns alunos ficaram bastante hesitantes na transformação da linguagem corrente na linguagem matemática, para além de não terem aprendido ainda, com significado, o processo de resolução das equações.

Por último, refiro que é apenas a partir do momento em que os alunos começam a se familiarizar com a linguagem algébrica, com a linguagem das equações, que passam a ser capazes de operar com os termos incógnitos, aplicando os princípios de equivalência de uma forma mais ou menos correta, encontrando então a solução da equação, que poderá ser, ou não, a solução do problema, (Pereira & Braga, 2012).

5.4. Competências desenvolvidas na realização do trabalho em grupo

Com a apresentação das tarefas exploratórias iniciais desta temática (ver Anexo I), o trabalho em cooperação, em colaboração, na sala de aula foi muito proveitoso, tanto para o ambiente desta, como para a aprendizagem da matemática, uma vez que os alunos envolveram-se de maneira ativa, na execução de todas as questões. Esta ideia é também corroborada por Machado & César (2012).

Toda a exploração efetuada em grupo das várias tarefas é sempre uma mais-valia para os alunos e, consequentemente para a matemática.

Os alunos ficam a ganhar, uma vez que puderam, na sua linguagem e em ambiente de confiança, discutir matemática, tanto na forma aritmética, como algébrica.

Toda a envolvência, manifestada pelos alunos na realização destas tarefas matemáticas, foi de extrema importância, pois gerou-se uma disputa entre os grupos, na procura das respostas acertadas às diversas questões, produzindo discussão e raciocínio matemático. Fiorentini, Fernandes & Cristóvão (2005) também referem o mesmo.

Em grupo, a linguagem matemática é mutuamente apurada, uma vez que o colega mais próximo é capaz de chamar à razão os vários elementos do seu grupo, promovendo aprendizagem significativa da matemática.

Ao nível das equações, os alunos envolveram-se na discussão da noção de equação e, consequentemente, na procura da respetiva solução, desenvolvendo pensamento matemático e aplicando, de forma intuitiva, os princípios de equivalência para a resolução de uma equação.

Nas explorações das tarefas em grupo, dá-se a possibilidade de os alunos evoluírem de forma autónoma, de comunicarem, de interagirem na responsabilidade e no respeito uns pelos outros, de partilharem conhecimentos, de descobrirem novos saberes e de consolidarem outros. (Fiorentini, Fernandes & Cristóvão, 2005).

Além de competências matemáticas, também estão em causa competências sociais, uma vez que ao escutarem as opiniões dos colegas, estão a dar atenção ao outro - capacidade de ouvir o que estão a partilhar.

5.5. Reflexão final

A realização deste trabalho de investigação foi um desafio de extrema importância para mim, quer em termos pessoais quer profissionais pois:

(i) impulsionou-me para uma revisão aprofundada das noções elementares da álgebra, área muito importante da matemática, tanto no percurso de um professor, como no de um aluno;

(ii) incentivou-me a empenhar-me na organização, criação e materialização, deste tipo de projeto, no terreno, que é importante, visto que está ligada ao desempenho desta atividade profissional, que por si só, é muito exigente;

(iii) e forçou-me a adaptar-me criativamente às atividades que projetei para a turma em estudo, cujas características próprias influenciam diariamente a minha ação na sala de aula. A opção pela realização de uma investigação sobre a minha prática é uma etapa que marca este meu percurso, distinguindo o quão é importante o papel do professor dentro da sala de aula, para o sucesso do processo de ensino-aprendizagem, e também, o quanto é sempre possível melhorá-lo no dia-a-dia.

É sempre um desafio, para o professor, fazer com que todos os alunos aprendam a temática que leciona, seja ela qual for, no entanto, isso não é sempre realizável, pois nem todos os alunos têm o mesmo tempo de aprendizagem e a mesma predisposição para aprender os objetivos visados.

Constato que é sempre necessário preparar e motivar os alunos para entenderem de forma significativa as noções elementares da álgebra e a matemática no geral.

Em suma com a cooperação de todos os intervenientes neste processo de ensino-aprendizagem, torna-se enriquecedora a experiencia vivida, ficando a ganhar, para além do professor e dos alunos, a matemática, nomeadamente a álgebra.

6. BIBLIOGRAFIA

Abrantes, P. (1989). *Um (bom) problema (não) é (só).* Educação e Matemática,*8*, 7-10.[Consultado em:http://www.esev.ipv.pt/mat1ciclo/COORDENADORES/Materiais%20Coordenad/Textos/Abrantes%201989.pdf a julho de 2013].

Abrantes, P. (1994). *O trabalho de projecto e a relação dos alunos com a matemática*. Lisboa:APM.[Consultado em:http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/msantos/dc05/pa.pdf a junho de 2013].

Albuquerque, C., Veloso, E., Rocha, I., Santos, L., Serrazina, L., & Nápoles, S. (2006). A Matemática na Formação Inicial de Professores. Lisboa: APM e SPCE

Almeida, A. R. S. (1999). *Emoção Na Sala de Aula (a)*. Papirus Editora. [Consultado em: http://www.google.pt/books?hl=pt-PT&lr=&id=FMBSnxYF8Q8C&oi=fnd&pg=PA11&dq=Emo%C3%A7%C3%A3o+Na+Sala+de+Aula&ots=hyGRCWOA2e&sig=b14NBKHTm33ktA8-7f6NTWRml48&redir_esc=y#v=onepage&q=Emo%C3%A7%C3%A3o%20Na%20Sala%20de%20Aula&f=false a agosto de 2013].

Alvarenga, D., & Vale, I. (2007). *A exploração de problemas de padrão: Um contributo para o desenvolvimento do pensamento algébrico*. Quadrante, pp. Vol.XVI (1), 27-55.

Araújo, I. R. D. O. (2012). *A utilização de lúdicos para auxiliar a aprendizagem e desmistificar o ensino da matemática.*

Arcavi, A. (1994). *Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics.* For the learning of Mathematics, 14(3), 24-35. [Consultado em: http://www.jstor.org/discover/10.2307/40248121?uid=3738880&uid=2&uid=4&sid=21103190097557 a março de 2013]

Arcavi, A. (2003). *The role of visual representations in the learning of mathematics*. Educational Studies in Mathematics, 52(3), 215-241.

Arends, R. (2008). *Aprender a Ensinar*. (7ª ed.) Lisboa: Editora McGraw-Hill de Portugal, Lda.

Ball, D. (2003). What Mathematical Knowledge is Needed for Teaching Mathematics? [Consultado em:http://deimos3.apple.com/<http://deimos3.apple.com/WebObjects/Core.woa/DownloadTrackPreview/tamu-public.2117699024.02117699032.2276247151.pdf>WebObjects/Core.woa/DownloadTrackPreview/tamu-public.2117699024.02117699032.2276247151.pdf<http://deimos3.apple.com/WebObjects/Core.woa/DownloadTrackPreview/tamu-public.2117699024.02117699032.2276247151.pdf>, a setembro de 2013].

Barbosa, A. C. C. (2010). *A resolução de problemas que envolvem a generalização de padrões em contextos visuais: um estudo longitudinal com alunos do 2. º ciclo do ensino básico.*[Consultado em: http://repositorium.sdum.uminho.pt/bitstream/1822/10561/1/tese.pdf a agosto de 2013].

Barbosa, E. J. T., & da Silva Junior, C. *Ensino e aprendizagem da álgebra.*

Bashmakova, I. G., & Smirnova, G. S. (2000). *The Beginnings and Evolution of the Algebra* (Vol. 23). Cambridge University Press.

Berch, D. B. (2005). Making sense of number sense implications for children with mathematical disabilities. Journal of Learning Disabilities, 38(4), 333-339.

Bergsten, C. (1999). *From sense to symbol sense*. European research in mathematics education II, 126-137.

Berrincha, R., & Saraiva, *M. J. das igualdades numéricas ao estudo das equações do 1. º grau1*[Consultado em:.http://spiem.pt/DOCS/ATAS_ENCONTROS/2009/GD3/2009_21_MSaraiva_RBerrincha.pdf, a setembro 2013]

Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. Journal for Research in Mathematics Education, 412-446.

Boavista, Maria Clara Lopes Ferreira. (2011). *O director de turma: perfil e múltiplas valências em análise.*

Bodgan, R. & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e métodos.* Porto: Porto Editora.

Borralho, A., & Barbosa, E. (2009). Exploração de padrões e pensamento algébrico. *Padrões: Múltiplas perspectivas e contextos em educação matemática/Patterns: Multiple perspectives and contexts in mathematics education*, 59-68.

Borralho, A., Vale, I., Palhares, P., & Cabrita, I. (2007). *Os Padrões no Ensino e Aprendizagem Álgebra.* [Consultado em: https://dspace.uevora.pt/rdpc/bitstream/10174/1416/1/Padr%C3%B5es%20Caminha.pdf a agosto de 2013].

Boyer, C. B., & Pérez, M. M. (1999). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza. [Consultado em: http://www.cursoraizes.com.br/resources/a_historia_da_matematica.pdf, a agosto 2013].

Boyer, C.(1978). *História da Matemática*, 2d. São Paulo: Edgard Blücher.

Branco, N. (2008). O estudo de padrões e regularidades no desenvolvimento do pensamento algébrico (tese de mestrado).Lisboa: DEFCUL. [Consultado em: http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/1197/1/17737_ULFC086729_TM.pdf a agosto de 2013].

Branco, N., Matos, A., & Ponte, J. P. (2005). *Como vai o pensamento algébrico dos alunos. Educação e Matemática*, (85), 54-59.

Brizuela, B. M., & Schliemann, A. D. (2003). *Fourth graders solving equations1*. International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Canavarro, A. (2007). *O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos.* Quadrante

Canavarro, A. P. (2009). *O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. Quadrante* 16(2), 81-118. [Acedido a 20-02-2013 em http://www.rdpc.uevora.pt/bitstream/10174/4301/1/_Quadrante_vol_XVI_2-2007-pp000_pdf081-118.pdf].

Canavarro, A. P., & Ponte, J. P. (2005). *O papel do professor no currículo de Matemática. In G. d. GTI, O professor e o desenvolvimento curricular (pp. 63-89).* Lisboa: APM.

Carvalho, C. I. P. D. (2012). *Aprendizagem das equações do 1. º grau: um estudo com alunos do 7. º ano de escolaridade*.

Cândido, P. T. (2001). *Comunicação em matemática. Ler, escrever e resolver problemas: habilidades básicas para aprender matemática*, 1, 15-28.

Carpenter, T. P., & Levi, L. (2000). Developing conceptions of algebraic reasoning in the primary grades. *No. 00-2). Wisconsin, Madison: National Center for improving student learning and achievement in mathematics and science*.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D., Brizuela, B. M., & Earnest, D. (2006). *Arithmetic and algebra in early mathematics education.* Journal for Research in Mathematics education, 87-115.

Carraher, D., & Schliemann, A. (2007). *Early algebra and algebraic reasoning. In Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (pp. 669-705).*

Cohn, P. M. (1965). *Universal algebra. New York, 965.*

Cruz, P. M. D. V. (2006). *O papel do director de turma face aos desafios da autonomia: um estudo de caso.*

Curcio, F. e Schwartz, S. (2001). *What does algebraic thinking look like and sound like with preprimary children?, Teaching Children Mathematics* 3, 296-300.

Cury, H. N., Lannes, W., Brolezzi, A. C., & Carlos, R. V. (2002). *Álgebra e educação algébrica: concepções de alunos e professores de matemática*. Educação Matemática em Revista, Rio Grande do Sul, 4, 9-15.

Da Cunha, M. I. (1989). *O bom professor e sua prática*. Papirus Editora. [Consultado em: http://www.google.pt/books?hl=pt-PT&lr=&id=LcDDvVIQy1QC&oi=fnd&pg=PA131&dq=O+bom+professor+e+sua+pr%C3%A1tica&ots=smVL6iT0rw&sig=NUdem1en3ihxFHwh_R8ZHhfpTrY&redir_esc=y#v=onepage&q=O%20bom%20professor%20e%20sua%20pr%C3%A1tica&f=false a setembro de 2013].

da Ponte, J. P. (2003). *O ensino da matemática em Portugal: Uma prioridade educativa?.*

da Ponte, J. P. *A equação do 1º grau em manuais de diversas épocas1.*

D'Ambrosio, U. (2011). *Álgebra moderna e a escola secundária. Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*, (7).

de Carvalho, A. M. F. T., Pires, M. N. M., & Gomes, M. T. (2005). *Fundamentos Teóricos do Pensamento Matemático.*

de Ciências, N. E., & da Rocha, S. M. C. *Investigação histórica na formação de professores de matemática: um estudo centrado no conceito de função.*

de Deus, K. A., Brasil, L., & Andrade, J. A. A. *Demonstrações: uma proposta para o ensino-aprendizagem de Álgebra.*

de Moura, A. R. L., & de Sousa, M. D. C. (2002). *Lógico-histórico: uma perspectiva para o ensino de álgebra.*

de Moura, A. R. L., & de Sousa, M. D. C. (2009). *O lógico-histórico da álgebra não simbólica e da álgebra simbólica: dois olhares diferentes The logic-historical of not symbolic and symbolic algebra: two different views p. 11-46*. Zetetiké: Revista de Educação Matemática, 13(24).

de Oliveira, N. (2007). *Linguagem, comunicação e matemática. Revista de Educação, 10*(10), 129-140.

de Souza Pires, F., & de Sousa, M. D. C.(2011) *Reflexões sobre o ensino de álgebra a partir da análise de concepções e do conceito de variável*. [Consultado a 04-08-13 http://www.cimm.ucr.ac.cr/ocs/files/conferences/1/schedConfs/1/papers/1328/public/1328-9079-1-PB.pdf].

Dees, R. (1991). *Cooperation in the mathematics classroom: A user's manual.* In N. Davidson (Ed.), Cooperative learning in mathematics. S. Francisco: Addison-Wesley

Estrada, M. F., Sá, C. C., Queiró, J. F., Silva, M. D. C., & Costa, M. J. (2000). *História da matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.

Eves, H. W. (1995). *Introdução à história da matemática*. Unicamp.

Experimento de Enseñanza con Alumnos de 8-9 Años. In M. H. Martinho, R. A. Ferreira, I. Vale, & J. P. Ponte (Ed.), *Ensino e Aprendizagem da Álgebra*. Actas do Encontro de Investigação em Educação Matemática (pp. 25-51). Lisboa: SPIEM.

Favinha, M., & Sousa, H. (2012). *A pertinência do papel do Director de Turma no nosso contexto escolar*.

Fernandes, D. (1991). *Notas sobre os paradigmas da investigação em educação*. Noesis, 18, 64-66.

Fernandes, D. (2007). *Vinte e cinco anos de avaliação das aprendizagens: Uma síntese interpretativa de livros publicados em Portugal.*

Fernandes, E. (1997). *O trabalho cooperativo num contexto de sala de aula*. *Análise Psicológica,* 15(4), 563-572.

Ferreira, I. Vale, & J. P. Ponte (Ed.), *Ensino e Aprendizagem da Álgebra. Actas do Encontro de Investigação em Educação Matemática (pp. 25-51).* Lisboa: SPIEM.

Fidalgo, A., & Ponte, J. P. D. (2004). *Concepções, práticas e reflexão de futuros professores do 1º ciclo do ensino básico sobre o ensino da Matemática*.

Filloy, E., & Rojano, T. (1989). *Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. For the learning of mathematics, 9(2), 19-25.*

Fiorentini, D., & miorim, M. A. (1990). *Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no Ensino da Matemática*. Boletim da SBEM-SP, 4(7).

Fiorentini, D., Fernandes, F. L. P., & Cristovão, E. M. (2005). *Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico. SEMINÁRIO LUSO-BRASILEIRO DE INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS NO CURRÍCULO E NA FORMAÇÃO DO PROFESSOR*.

Fiorentini, D., Miorim, M. A., & Miguel, A. (1993). *Contribuição para um repensar... a educação algébrica elementar*. *Revista Pro-Prosições*, 79-91.

Freire, P. (2007). *Pedagogia da Autonomia. Saberes Necessários à Prática Educativa*. (35ª ed.) São Paulo: Paz e Terra.

Gafanhoto, A. P., & Canavarro, A. P. (2008). *REPRESENTAÇÕES MÚLTIPLAS DE FUNÇÕES EM AMBIENTE COM GEOGEBRA: UM ESTUDO SOBRE O SEU USO POR ALUNOS DE 9º ANO1. Projecto Práticas Professional dos Professores de Matemática.*

Gafanhoto, A. P., & Canavarro, A. P. (2011). *Utilização e conciliação de diversas representações das funções em sala de aula. Actas do XXII Seminário de Investigação em Educação Matemática*, 1-15.

Gamoran, A., & Hannigan, E. C. (2000). *Algebra for Everyone? Benefits of College-Preparatory Mathematics for Students with Diverse Abilities in Early Secondary School*. *Educational Evaluation and Policy Analysis*, 241-254.

Garbi, G. G.(1997). *O Romance das Equações Algébricas*. São Paulo: Makron Books.

Garnica, A. V. M. (2006). *História oral e educação matemática: um inventário. Revista Pesquisa Qualitativa*, *2*(1), 137-160.

Gomes, G. J. D. (2012). *O desenvolvimento do pensamento algébrico em alunos do 1º ciclo do ensino básico*.

Guerreiro, A. *PADRÕES EM CONTEXTOS FIGURATIVOS NO 2. º ANO DA LICENCIATURA EM EDUCAÇÃO BÁSICA.*

Guimarães, F., Arcavi, A., Gómez, B., da Ponte, J. P., & Silva, J. N. (2005). *O ensino aprendizagem dos Números e da Álgebra: Que problemas, que desafios?. Encontro de investigação em educação matemática,14*.

Guimarães, H. M. (2003). *Concepções sobre a Matemática e a actividade matemática: Um estudo com Matemáticos e professores do Ensino Básico e Secundário*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Heeffer, A. (2006). Learning concepts through the history of mathematics. The case of symbolic algebra. *in A. Bishop, K. François and JP Van Bendegem (eds.), Philosophical Dimensions in Mathematics Education, Springer, Heidelberg*.

Hollar, J. C., & Norwood, K. (1999). *The effects of a graphing-approach intermediate algebra curriculum on students' understanding of function.* Journal for Research in Mathematics Education, 220-226.

Jacques, A. (2011). *O ensino de Álgebra na perspectiva dos Multisignificados de Equação: algumas possibilidades para a sala de aula*. In XIII CIAEM-ACME, Recife, Brasil. [Consultado em: http://www.cimm.ucr.ac.cr/ocs/files/conferences/1/schedConfs/1/papers/812/submission/layout/812-8179-1-LE.pdf, acedido a novembro 2013].

Jacques, A. *O ensino de Álgebra na perspectiva dos Multisignificados de Equação: algumas possibilidades para a sala de aula.*

Kaput, J. (1999). *Teaching and learning a new algebra. In E. F. (Eds.), Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Mahwah: NJ:Erlbaum.

Kaput, J. (2008). *What is algebra? What is algebric reasoning? In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton, Algebra in the Early Grades* (pp. 5-17). New York: Lawewnce Erlbaum Associates.

Kaput, J. J. (2000). *Teaching and learning a new algebra with understanding*. National Center for Improving Student learning & Achievement in Mathematics & Science.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra.

Kieran, C. (2004). *Algebraic thinking in the early grades: What is it. The Mathematics Educator*, 8(1), 139-151.

Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra. *Handbook of research on the psychology of mathematics education*, 11-49.

Kieran, Carolvn (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. In Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning(pp.707-762).[Consultado em: http://www.google.pt/books?id=W4GnocmF02IC&printsec=frontcover&hl=pt-PT&source=gbs_vpt_buy#v=onepage&q&f=false a 18 de março 2013].

Lannin, J. K. (2003). *Developing algebraic reasoning through generalization. Mathematics Teaching in the Middle School, 8(7)*, 342-349.

Leite, M. D. A. (2006, January). *Aprendizagem de conceitos matemáticos e interação entre pares durante o uso de um objeto de aprendizagem*. In *Anais do Workshop de Informática na Escola* (Vol. 1, No. 1).

Lins, R. C., & Gimenez, J. (2005). *PERSPECTIVAS EM ARITMETICA E ALGEBRA P/SECULO XXI*. Papirus Editora.

Lintz, R.G. (1999).*História da Matemática, vol. I Blumenau*: Editora da FURB.

Lopes, H. B. (2004). *A resolução de equações*.

Lorenzato, S. (2006). *Para aprender matemática*. Autores Associados.

Lucas, S., & Vasconcelos, C. (2005). *Perspectivas de ensino no âmbito das práticas lectivas: Um estudo com professores do 7º ano de escolaridade*. *REEC: Revista electrónica de enseñanza de las ciencias*, *4*(3), 4.

Luckesi, C. C. (1994). *Tendências pedagógicas na prática escolar.* Filosofia da educação. São Paulo: Cortez, 53-75.

Machado, R., & César, M. (2012). *Trabalho colaborativo e representações sociais: Contributos para a promoção do sucesso escolar, em matemática*.

Machado, S. D. A. (1999). *Educação matemática*. Editora da PUC-SP.

Martinho, M. H., & Ponte, J. P. D. (2005). *Comunicação na sala de aula de Matemática: Práticas e reflexão de uma professora de Matemática.*

Matos, A., & da Ponte, J. P. (2006). *O estudo das relações funcionais como suporte do desenvolvimento do pensamento algébrico: Uma investigação com alunos do 8. º ano. Actas do XVII SIEM-Seminário de Investigação em Educação Matemática*.

Matos, A., & da Ponte, J. P. (2008). O estudo de relações funcionais e o desenvolvimento do conceito de variável em alunos do 8.° ano. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 11(2), 195-231.

Matos, A., Silvestre, A. I., Branco, N., & Ponte, J. P. D. (2008). *Desenvolver o pensamento algébrico através de uma abordagem exploratória*.

Matos, J. M., & Valente, W. R. (2010). *Estudos comparativos sobre a reforma da Matemática Moderna. A reforma da Matemática Moderna em contextos ibero-americanos,* 1.

ME. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: ME.

ME-DEB. (2001). *Currículo Nacional do Ensino Básico: Competências Essenciais.* Lisboa: ME-DEB.

Melo, M. V. (2009*). Relação de teses e dissertações de mestrado e doutorado em Educação Matemática produzidas no Brasil Listagem relativa a 200*3 p. 113-128. *Zetetiké: Revista de Educação Matemática, 12*(21).

Mendes, I. A. (2009). *Matemática e Investigação em sala de aula*. Editora Livraria da Fisica.

Menezes, L. (2000). *Matemática, linguagem e comunicação*.

Miguel, A., & Miorim, M. Â. (2011). *História na educação matemática-Propostas e desafios*. Distribuidora Autentica LTDA.

Molina, M. (2011). *Integración del Pensamiento Algebraico en la Educación Básica. Un Experimento de Enseñanza con Alumnos de 8-9 Años.* In M. H. Martinho, R. A.

Nathan, M. J., & Koedinger, K. R. (2000). Teachers' and researchers' beliefs about the development of algebraic reasoning. Journal for Research in Mathematics Education, 168-190.

NCTM (2000). Principles and Standards for School Mathematics. Reston: NCTM.

NCTM. (1999). *Normas para a Avaliação em Matemática Escolar*. Lisboa: Associação e Professores de Matemática.

NCTM. (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Neufeld, G., & Maté, G. (2008). *Hold on to your kids: Why parents need to matter more than peers.* Random House Digital, Inc..

Nobre, S., Amado, N., & Ponte, J. P. (2011). *Representações na aprendizagem de sistemas de equações. Ensino e Aprendizagem da Álgebra – Actas do Encontro de Investigação em Educação Matemática*, 239-259.

Nóvoa, A. (2007). *O regresso dos professores*.

Novotná, J., & Hoch, M. (2008). *How structure sense for algebraic expressions or equations is related to structure sense for abstract algebra*. *Mathematics Education Research Journal*, 20(2), 93-104.

Ohlsen, M. T. (2007). Classroom assessment practices of secondary school members of NCTM. *American Secondary Education*, 4-14.

Oliveira, I., & Laval, U. (2011, March). *Problemas de estrutura algébrica: uma análise comparativa entre as estratégias utilizadas no Brasil e no Québec*. In *XIII CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*.

Oliveira, I., & Serrazina, L. (2002). *A reflexão e o professor como investigador. Reflectir e investigar sobre a prática profissional*, 29-42.

Pereira, G. N., & Braga, M. N. S. (2012). *INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA EA CONSTRUÇÃO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO: uma metodologia de ensino a compreensão de incógnitas*. Eventos Pedagógicos, 3(3), 320-340.

Pereira, M. (2004). *As Investigações Matemáticas no Ensino-Aprendizagem das Sucessões-Uma experiência com alunos do 11ºano de escolaridade*. Dissertação de Mestrado. Covilhã: UBI.

Pereira, M. N., & Saraiva, M. J. (2008). *O sentido do símbolo na aprendizagem da álgebra em alunos do 7º ano de escolaridade.* Investigation en education Matemática XII. Badajoz: Sociedade Española de Investigation en Education Matemática, SPCE e APM.

Pierce, R., & Stacey, K. (2004). *Monitoring progress in algebra in a CAS active context: Symbol sense, algebraic insight and algebraic expectation*. International Journal for Technology in Mathematics Education, 11(1), 3.

Pimentel, T. (2010). *O conhecimento matemático e didático, com incidência no pensamento algébrico, de professores do primeiro ciclo do ensino básico: que relações com um programa de formação contínua?* Braga: Instituto de Estudos da Criança.

Polya, G. (2003). *Como Resolver um Problema*.

Pommer, W. M. (2005). *Transição Aritmética&Álgebra: Contribuições da temática das Equações Diofantinas Lineares*. PONTE, 11.

Ponte, J. P. (2003). *Investigar, ensinar e aprender.* Actas do ProfMat 2003 (pp.25-39). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2006). *Números e álgebra no currículo escolar*. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos, & P. Canavarro (Eds.), *Números e álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (pp. 5-27). Lisboa: SEM-SPCE.

Ponte, J. P. D. (1992). *Concepções dos professores de matemática e processos de formação*.

Ponte, J. P. D. (2004). *As equações nos manuais escolares*.

Ponte, J. P. D. (2005). *Gestão curricular em Matemática*.

Ponte, J. P. D., & Sousa, H. (2010). *Uma oportunidade de mudança na Matemática do Ensino Básico*.

Ponte, J. P. D., Oliveira, H., Brunheira, L., Varandas, J. M., & Ferreira, C. (1998). *O trabalho do professor numa aula de investigação matemática.* Quadrante, Vol. 7(2), pp.41-70.

Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2009). *Álgebra no ensino básico*. Lisboa: DGIDC. [Consultado em: http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/7105/1/Ponte-Branco-Matos%20%28Brochura_Algebra%29%20Set%202009.pdf, a 19 de março 2013].

Pope, S., & Sharma, R. (2001). *Symbol Sense: Teacher's and Student's Understanding. Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, December, 3.

Porfírio, J., & Oliveira, H. (1999). *Uma reflexão em torno das tarefas de investigação*. *Investigações matemáticas na aula e no currículo*, 111-118. [Consultado em: http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/sd/textos/porfirio-oliveira.pdf, a 26-03-2013].

Puig, L. (1998). *Componentes de una historia del álgebra. El texto de al-Khwarizmi restaurado. Investigaciones en matemática educativa II.* Universitat de Valencia. Detartament de Didáctica de la matemática, 109-131. [Consultado em : http://www.euclides.org/menu/articles/article7.htm, a novembro de 2013].

Ramos, M. C. D. M. M. (2013). *Estruturas de gestão intermédia: o diretor de turma: constrangimentos no exercício do (s) poder (es): relatório de atividade profissional.*

Raymond, A. M., & Leinenbach, M. (2000). *Collaborative action research on the learning and teaching of algebra: a story of one mathematics teacher's development.* Educational Studies in Mathematics, 41(3), 283-307.

Ribeiro, A. J. (2008). *Equação: noção matemática ou para matemática?*. Junta de Gobierno de la FISEM, 169.

Ribeiro, A. J. (2009). *A noção de equação e suas diferentes concepções: uma investigação baseada em aspectos históricos e epistemológicos*. Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia, 2(1).

Ribeiro, A. J. (2012). *Equação e Conhecimento Matemático para o Ensino: relações e potencialidades para a Educação Matemática*. Boletim de Educação Matemática, 26(42 B), 535-557.

Ribeiro, A. J., & Machado, S. D. A. (2009). *Equação e seus multisignificados: potencialidades para a construção do conhecimento matemático. Equation and its multimeanings: potentialities to the construction of mathematical knowledge* p. 85-104. Zetetiké: Revista de Educação Matemática, 17(31).

Roldão, M. d. (2009). *Estratégias de ensino: o saber e o agir do professor*. Vila Nova de Gaia: Fundação Manuel Leão.

Rosário, P., Trigo, J., & Guimarães, C. (2003). *Estórias para estudar, histórias sobre o estudar: narrativas auto–regulatórias na sala de aula*.

Santos, A. D. S. *Uma proposta de trabalhar a matemática tendo em vista os interesses do aluno.*

Schliemann, A. D., Carraher, D. W., & Brizuela, B. M. (2007). *Bringing out the algebraic character of arithmetic: From children's ideas to classroom practice*. Lawrence Erlbaum.

Schoenfeld, A. (1996). *Porquê toda esta agitação acerca da resolução de problemas*. *Investigar para aprender Matemática*, 61-72.

Schoenfeld, A. H. (1992). *Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics*. In D. Grouws (Ed.), Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning (pp. 334-370). New York: MacMillan.

Serrazina, L., & Oliveira, I. (2002).*O professor como investigador: Leitura crítica de investigações em educação matemática.* In GTI, *Reflectir e Investigar sobre a prática profissional* (pp. 283-308). Lisboa: APM.

Serrazina, L., & Oliveira, I. (2005). *O currículo de Matemática do ensino básico sob o olhar da competência matemática*. *O professor e o desenvolvimento curricular*, 35-62.

Serrazina, L., & Oliveira, I. (2010). *Trajectórias de aprendizagem e ensinar para a compreensão*. *G. d. Investigação, O Professor e o Programa de Matemática do Ensino Básico*, 43-59.

Silva, A. B. (2013). *Função do 1º grau: algumas aplicações práticas*.

Silva, A., Veloso, E., Porfírio, J. & Abrantes, P. (1999). *O Currículo de Matemática e as Actividades de Investigação. Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 69-85). Lisboa: Projecto MPT e APM.

Skovsmose, O. (2000). *Cenários para investigação*. Bolema – Boletim de Educação Matemática, 14, 66-91.

Sleeman, D., Kelly, A. E., Martinak, R., Ward, R. D., & Moore, J. L. (1989). Studies of diagnosis and remediation with high school algebra students.*Cognitive Science*, *13*(4), 551-568.

Sousa, M. J., & Baptista, C. S. (2011). *Como fazer investigação, dissertações, teses e relatórios segundo Bolonha*. *Lisboa. Ed. Pactor. ISBN*, 978-989.

Teixeira, A. (2005). *Tarefas de investigação matemática no currículo do 7ºano do 3ºciclo do ensino básico.* Dissertação de Mestrado. Covilhã: UBI.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. *The ideas of algebra, K-12*, *8*, 19.

Usiskin, Z. (1995). *Why is algebra important to learn*. American Educator,19(1), 30-37.

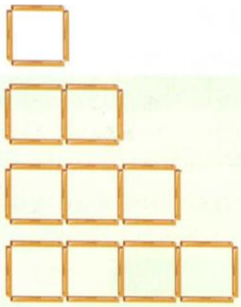
Viseu, F., Fernandes, Â., & Gonçalves, I. (2009). *O manual escolar na prática docente do professor de Matemática.*

Windsor. W., (2010). *Algebraic Thinking: A Problem Solving Approach. In Sparrow, L., Kissane, B., & Hurst, C., (Eds.). Shaping the future of mathematics education: Proceedings of the 33rd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia,* (pp.665-672). Fremantle, WA: MERGA.

7. ANEXOS

Anexo I

TAREFA 1



Usando palitos, a Salomé está a construir fileiras de quadrados criando uma sequência de rectângulos.

1. De quantos palitos necessitou a Salomé para fazer cada um destes quatro primeiros rectângulos?
2. De quantos palitos precisará a Salomé para construir o quinto rectângulo? E o décimo? Explica a tua resposta.
3. É possível construir um rectângulo com 136 palitos? E com 1001? Porquê?
4. À medida que aumenta o número de ordem do rectângulo, como varia o número de palitos necessários para o construir? Explica a tua resposta.
5. Quantos palitos existem no contorno dos quatro primeiros rectângulos? E no do 8.º?
6. Existe algum rectângulo com 84 palitos no contorno? Porquê?
7. Qual a diferença entre dois termos consecutivos da sequência que dá o número de palitos do contorno de um rectângulo?
8. Qual a relação entre o número de palitos do contorno de um rectângulo e o número de quadrados que o compõem? Explica o teu raciocínio.

TAREFA 2

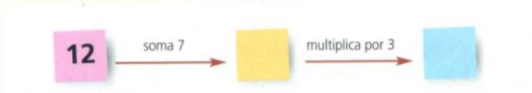
O Gonçalo disse à Salomé que conseguiria adivinhar o número em que esta pensasse.

Se a Salomé tivesse pensado no número 8 em vez do número 5, que teria acontecido? Porquê?

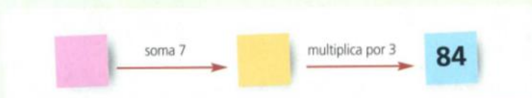
Será que o Gonçalo conseguirá adivinhar sempre o número em que a Salomé decidir pensar? Explica a tua resposta.

TAREFA 3

Cada cartão esconde um número.



1. Que números estão escritos nos cartões amarelo e azul?
2. O João escreveu um número no primeiro cartão, efectuou os cálculos e só deixou à vista o número do último cartão. Que número terá o João escrito no primeiro cartão? Explica a tua resposta.



3 Cada um de vós deve criar cadeias semelhantes à anterior, questionando o colega sobre o número que teria de estar escrito no cartão cor-de-rosa para se obter o número que deixam à vista no azul. Ganha o que adivinhar mais vezes o primeiro número da cadeia.

4 O João pediu à Ana para que descobrisse os números escritos nos círculos.

Que valores terá a Ana encontrado? Discute com o teu colega do lado. Explica o teu raciocínio.

a) $5 + \bigcirc = 8$	**b)** $13 = \bigcirc - 7$	**c)** $\bigcirc - 9 = -6$
d) $8 - \bigcirc = -2$	**e)** $44 = 4 - \bigcirc$	**f)** $-7 + \bigcirc = -7$
g) $2 \times \bigcirc = 1$	**h)** $20 = 0,2 \times \bigcirc$	**i)** $\frac{15}{\bigcirc} = 3$

TAREFA 4

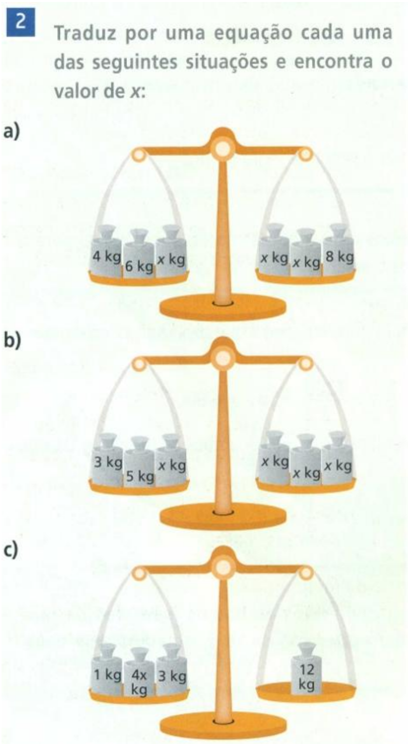
O Valter e o Edgar pousaram em cima da sua mesa de trabalho algumas caixas, ainda por abrir, com o mesmo número de marcadores e alguns marcadores mais antigos dos quais já não sabiam das caixas. Olharam para as mesas e repararam que tinham trazido para a escola o mesmo número de marcadores.

1 Quantos marcadores tem cada uma das caixas que eles trouxeram? Mostra como chegaste à tua resposta. Poderás fazê-lo usando desenhos, cálculos, esquemas e palavras.

2 Ao falar com os alunos sobre os pesos e medidas usados pelos nossos avós, a professora do João pesou três caixas de marcadores numa balança de dois pratos, usando os pesos que tinha na sala de aula.

Observando a balança em equilíbrio, o João descobriu qual a massa de cada caixa de marcadores. Indica, justificando, o valor que o João encontrou.

Anexo II

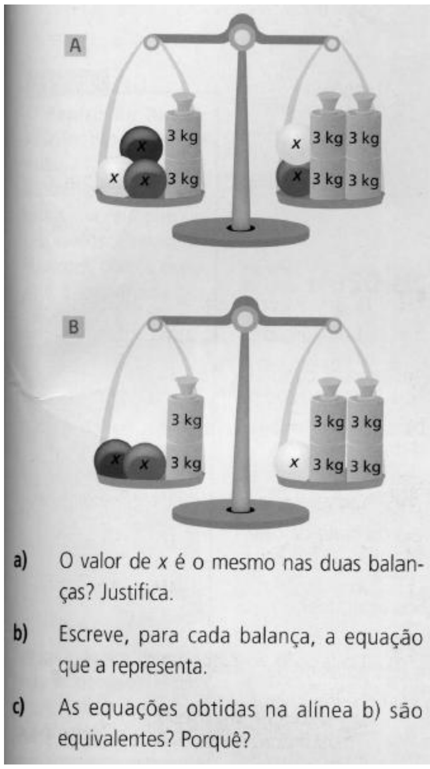


2 Traduz por uma equação cada uma das seguintes situações e encontra o valor de *x*:

a)

b)

c)



a) O valor de *x* é o mesmo nas duas balanças? Justifica.

b) Escreve, para cada balança, a equação que a representa.

c) As equações obtidas na alínea b) são equivalentes? Porquê?

Anexo III

4 Resolve cada uma das equações:

a) $2x = -10 + x$ b) $x - 7 = -12$

c) $1{,}7 = x + 0{,}1$ d) $x - \frac{1}{5} = \frac{3}{10}$

e) $5 + x = 2$ f) $-6y = -7y + 1$

g) $-y + 7 = -10 - 1$ h) $5a + 3 = 8a - 9$

5 Qual o conjunto-solução de cada uma das seguintes equações?

a) $3x = 27$ e) $-7n = 0$

b) $4y = -24$ f) $10x = -2$

c) $0{,}1z = 2$ g) $7p = 1$

d) $\frac{1}{2}m = 3$ h) $2x = 12$

6 Observa o seguinte quadrado mágico.

5	x	$15 - x$
7	$x - 3$	$16 - x$
8	$23 - 2x$	$2x - 11$

Determina o valor de x.

7 Indica o conjunto-solução de cada uma das seguintes equações:

a) $2m - 3 = 5 - 2m$

b) $-t + 7 = -10 - 1 + 2t$

c) $2x - 8 = -18$

d) $7x + 3 = 3$

e) $\frac{n}{6} - 3 = -4$

f) $10y + 3 = -10$

g) $\frac{1}{2}x - 3 + 7 = \frac{5}{2}x + 4$

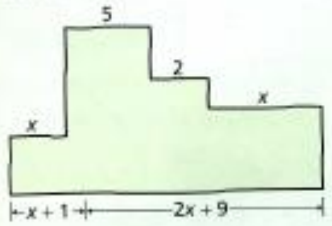
h) $6 = 1 - 5x$

Anexo IV

A avó da Salomé tem na capoeira 28 animais, entre galinhas e coelhos. A avó contou mais 3 galinhas do que coelhos. Quantos coelhos há na capoeira?

1 **A soma de dois números inteiros consecutivos é 15. Quais são os números?**

2 **A Ana fez este desenho à mão e com pouco rigor. Todas as dimensões estão expressas em cm.**



Qual é o valor de x? Pensas que a Ana cometeu um erro? Porquê?

3 **A Rosário comprou cadernos, canetas e lápis num total de 29. Há mais 2 canetas do que lápis e mais 7 cadernos do que canetas.**

Quantos cadernos, lápis e canetas a Rosário adquiriu?

4 **A Ana e a Maria são irmãs e a soma das suas idades é igual a 35.**

Qual é a idade da Ana, se a Maria é cinco anos mais nova?

5 **O João tinha, há seis anos atrás, o triplo da sua idade actual.**

Quantos anos tem agora o João?

6 **Pensei num número, multipliquei-o por 2 e ao resultado somei 8, obtendo 20.**

Em que número pensei?

7 **Somos quatro números inteiros consecutivos e a nossa soma é – 2.**

Seremos todos negativos?
Que números seremos nós?

8 **Adicionando a um número o seu triplo, obtém-se como resultado – 128.**

Qual é esse número?

9 **O quádruplo de um número natural somado com nove é igual ao número somado com seis.**

Descobre esse número.

10 **Seis turmas com 25 alunos cada uma foram a uma visita de estudo.**

Os alunos repartiram-se pelos autocarros e constataram que ficaram exactamente 30 por autocarro. Quantos autocarros foram ocupados por todos os alunos?

11 **Penalização da mesada**

O Pedro e o seu irmão mais novo recebem uma mesada. Actualmente a mesada do Pedro é superior à do irmão em 50 euros. Como partiram o vidro de uma janela quando estavam a jogar à bola, a mãe decidiu penalizá-los retirando 15% das suas mesadas, até totalizar o valor gasto com a substituição do vidro.

a) Durante os meses em que estão a pagar a substituição do vidro, a diferença em euros entre a mesada do Pedro e a do irmão mantém-se? Justifica a tua resposta.

b) O Pedro e o irmão vão estar a pagar a substituição do vidro ao longo de 6 meses. Se tivessem decidido prescindir das mesadas um mês, teriam pago o valor total da reparação e ainda sobravam 9 euros. Qual era o valor da mesada do Pedro e da do irmão antes da penalização? Apresenta todos os cálculos que efectuares.

Projecto 1001 Itens, GAVE

Anexo V

Exma. Srª Presidente do Conselho Executivo

da Escola Básica [redacted]

[redacted], 08 de maio de 2013

Assunto: Autorização para registo áudio e/ou imagem das aulas de matemática

Lúcia Maria Teixeira Lopes, docente do grupo 500 desta escola, vem por este meio solicitar a V. Ex.ª, no âmbito da elaboração da dissertação de mestrado, a autorização para o registo em áudio e/ou imagem das aulas de matemática da turma [redacted] durante os meses de maio e junho.

Estes registos serão utilizados, apenas pela docente, para fins académico-profissionais.

Atentamente,

A docente

____

(Lúcia Maria Teixeira Lopes)

Ps: esta informação foi registada nas cadernetas dos alunos de forma a obter a autorização dos EE