DM

Atividades Investigativas
Utopia ou realidade na aprendizagem significativa da matemática?

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Laura Cristina Teixeira Pacheco
MESTRADO EM ENSINO DA MATEMÁTICA NO 3º CICLO DO ENSINO BÁSICO E SECUNDÁRIO

UNIVERSIDADE da MADEIRA
A Nossa Universidade
www.uma.pt

janeiro | 2014

Atividades Investigativas
Utopia ou realidade na aprendizagem significativa da matemática?
Laura Cristina Teixeira Pacheco

UNIVERSIDADE da MADEIRA

Atividades Investigativas
Utopia ou realidade na aprendizagem significativa da matemática?

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Laura Cristina Teixeira Pacheco

MESTRADO EM ENSINO DA MATEMÁTICA NO 3º CICLO DO ENSINO BÁSICO E SECUNDÁRIO

ORIENTAÇÃO

Elsa Maria dos Santos Fernandes

"A possibilidade de aprender é muito mais ampla

que a possibilidade de ensinar"

(Guillermo Orozco Gómez)

Resumo

A matemática, infelizmente e de uma forma errada, ainda é encarada por muitos como uma ciência que é acessível apenas para alguns "iluminados". Segundo a frase célebre de Paulo Freire, "Não há saber mais ou saber menos há saberes diferentes" e é este tipo de filosofia que é necessário incutir nas nossas escolas e na sociedade. A meu ver, as atividades investigativas vão ao encontro do pensamento de Paulo Freire, uma vez que, neste tipo de atividades, deve ser dado enfoque aos diferentes percursos e saberes.

A matemática deveria ser encarada como uma disciplina que educa para a vida – educação matemática. Neste sentido, ela deveria ser trabalhada em diferentes contextos para que os alunos alarguem o seu campo de visão e utilizem a matemática de uma forma crítica e em prol do seu bem-estar.

O presente estudo visou compreender de que forma as atividades investigativas contribuem para a aprendizagem significativa da matemática e qual o seu contributo na formação de alunos autónomos e com competências para pensar e agir.

A investigação incidiu sobre a prática matemática dos alunos quando realizavam atividades investigativas sobre a unidade temática das semelhanças, nomeadamente, sobre figuras semelhantes, razão de semelhança e critérios de semelhança de triângulos, onde foi utilizada uma metodologia qualitativa de natureza descritiva através da observação participante. O estudo foi efetuado numa turma do sétimo ano e teve por base três propostas de trabalho, sendo que a primeira foi mais de carácter introdutório. Nestas atividades, foram utilizados materiais manipuláveis e o *Microsoft Excel* no sentido de motivar os alunos e facilitar a compreensão dos conteúdos trabalhados. Os materiais utilizados despertaram um enorme interesse nos alunos, os quais começaram logo a explorá-los, manuseando-os livremente sem qualquer objetivo pré-definido, isto é, antes de se inteirarem do propósito da atividade.

As atividades investigativas aliadas aos materiais manipuláveis são uma mais-valia na aprendizagem dos alunos uma vez que o conhecimento é construído de uma forma natural através de um processo espontâneo e dinâmico, consequentemente, significativo. Com a realização de atividades investigativas, são proporcionados aos alunos momentos de exploração e de investigação aleatórios, culminando numa aprendizagem de improviso, no sentido em que esta não obedece a regras pré-definidas e estimula e desenvolve o raciocínio dos alunos.

Palavras-chave: Atividades investigativas; construção da aprendizagem; aprendizagem significativa; materiais manipuláveis; educação matemática.

Abstract

Mathematics, unfortunately and wrongly, is still seen by many people as a science that is available only to a few "enlightened". According to Paulo Freire's in his famous statement "There´s no learning more or less to know just different knowledges" and this is the type of philosophy that is necessary to instil in our schools and in society. According to my point of view the research activities are according to the thinking of Paulo Freire, since this type of activities should give emphasis to the different routes and knowledge.

Mathematics should be seen as a subject that educates for life – mathematics education. In this sense, she should be worked in different contexts for students to extend their skyline and using mathematics in a critical way and promoting their well-being.

This study aimed to understand how research activities contribute to the meaningful learning of mathematics and what is its contribution to the formation of independent learners with skills to think and act.

The investigation focused on the mathematical practice of students when they are performing research activities about the thematic unit of the similarities, namely about similar figures, reason of similarity and similarity criteria of triangles, where it was used a qualitative methodology of descriptive nature through participant observation. The study was performed in a seventh grade class and it was based on three proposals, in which the first had an introductory caracter. These activities were used to manipulate materials and the Microsoft Excel in order to motivate students and benefit the understanding of the contents worked. The materials used aroused an enormous interest in students which started immediately to exploit them, handling them freely without any pre-defined aim, that is, before they absorb with the purpose of the activity.

Research activities allied to handled materials which are an asset in students´ learning since knowledge is built in a natural way through a spontaneous and dynamic process, which is consequently meaningful. With the achievement of research activities are provided to students moments of exploration and random research culminating in a learning of improvisation, in the sense that it doesn´t follow the pre-established rules and it stimulates and develops the students´ reasoning.

Key words: Research activities; the construction of learning; meaningful learning; handled materials; mathematics education.

Agradecimentos

Apesar de este ser um texto com palavras simples, as mesmas são sentidas e repletas de gratidão para todos aqueles que de uma forma direta ou indireta me ajudaram e apoiaram nesta fase da minha vida. Este foi sem dúvida um período muito turbulento, que, por vezes, parecia não ter fim à vista. No entanto, com algum esforço e o apoio de todos, tornou-se numa experiência muito enriquecedora e gratificante.

As minhas primeiras palavras de apreço são para a Professora Doutora Elsa Fernandes que esteve sempre disponível e orientou-me na elaboração deste trabalho. Agradeço-lhe a sua espontaneidade e a sua maneira de ser que, em alguns momentos, foi o "*click*" para chegar a casa e continuar a trabalhar.

Aos meus alunos do sétimo ano e aos respetivos encarregados de educação, um muito obrigada, por terem confiado em mim e terem autorizado a gravação das aulas. Não posso, obviamente, deixar de referir todos os meus alunos com os quais aprendi muito e onde foi gerada uma relação de camaradagem.

Quero agradecer à direção da escola dos 2.º e 3.º ciclos de São Jorge – Cardeal D. Teodósio de Gouveia, por disponibilizarem o material vídeo e por autorizarem a gravação das aulas, mas sobretudo pelas palavras de ânimo e de incentivo.

Um especial destaque à minha amiga e colega de curso e de mestrado, Fátima Reis, que estava sempre lá, do outro lado da linha, pronta a ouvir e a desabafar. Obrigada pelas palavras certas na hora certa e pela partilha.

Às minhas colegas Rita Abreu, Carla Silva e Dina Santos um profundo agradecimento por reverem o texto deste trabalho e por traduzirem a parte do resumo para inglês.

Uma palavra de gratidão para os colegas da escola, com quem trabalhava mais diretamente, pelo apoio, pela paciência e pela compreensão para me ouvirem quando falava das aulas e do mestrado.

Não poderei deixar de agradecer aos colegas do mestrado pela partilha de experiências e de conhecimentos e pelos bons momentos.

Segundo a sabedoria popular os últimos são sempre os primeiros. Nesse sentido, quero agradecer aos meus pais que me ensinaram o valor do trabalho e que me incutiram os melhores valores que conheciam.

A todos o meu muito obrigada e bem-haja!

Laura Pacheco

Índice

Índice de figuras

Índice de quadros

1. Introdução

Vivemos, atualmente, numa sociedade, onde os valores ético-morais estão a ser banalizados e onde há uma rutura a nível social, afetivo e económico. Os nossos alunos deparam-se, diariamente, com graves problemas de cariz familiar e socioeconómico, devido, também, à atual conjuntura económica. Todos os problemas são trazidos para a escola. Esta é vista pela sociedade, em geral, e pelos próprios alunos como obsoleta, desajustada e como um edifício fabril onde os alunos são "depositados". Os alunos encaram a escola como uma obrigação, pois esta não lhes traz garantias para o futuro e consideram que os conteúdos lecionados são desajustados da realidade. Deparamo-nos, diariamente, com alunos revoltados e desmotivados a quem a escola não lhes diz nada e o desalento é maior devido ao flagelo do desemprego.

A sociedade atual é cada vez mais exigente e requer pessoas mais criativas e empreendedoras. Nesse sentido, é urgente diversificar o processo e as estratégias de ensino, de modo a formar cidadãos criativos com espírito crítico e dotar os alunos de competências para a vida.

A escola terá que se adaptar a esta nova realidade e a disciplina de matemática é, sem dúvida, uma das áreas curriculares onde pode e deve ser trabalhada a criatividade e a exploração de situações. Esta é uma disciplina imprescindível no nosso quotidiano e em todas as profissões. As atividades investigativas são uma mais-valia no desenvolvimento da criatividade, motivação, comunicação, quer a nível da argumentação e refutação, dos raciocínios, quer na exploração das tarefas.

Assim, torna-se necessário que os professores façam uma retrospetiva à sua prática docente no sentido de consciencializarem-se da eficácia da mesma, por forma a poderem alterá-la. No entanto, para que essa mudança possa ocorrer da melhor forma é necessário que o professor desenvolva uma aprendizagem nessas novas estratégias, nomeadamente, acerca da aplicação de atividades investigativas na sala de aula. Neste tipo de atividades, o professor tem um longo caminho a percorrer, pois sai da sua zona de conforto e entra num jogo "desconhecido", o qual é "comandado" pelos alunos. O primeiro passo a ser dado deve ser mostrar abertura e disponibilidade para aprender com os alunos, uma vez que estes podem apresentar hipóteses que não foram anteriormente consideradas/investigadas pelo professor. As atividades investigativas devem ser encaradas pelos alunos e pelos professores na verdadeira aceção da palavra e não como meros exercícios, sob pena de não produzir os efeitos desejados. Refiro-me obviamente a uma aprendizagem por construção, onde os alunos são os principais intervenientes de todo esse processo, garantindo competências para a sua vida pessoal e profissional.

1.1. Motivações da investigação

A motivação para este trabalho surge na tentativa de compreender a importância das atividades investigativas na aprendizagem e formação dos nossos alunos.

O que me levou a optar pelo tema das atividades investigativas foi o querer saber mais sobre esta temática que não me era muito familiar, pois considero que as mesmas são um pilar para a aprendizagem da matemática. Esta pesquisa surge, também, do dever e da preocupação em ensinar matemática de forma a possibilitar a aprendizagem dos alunos, através da diversificação das estratégias e das propostas de trabalho. Por outro lado, sou da opinião que a escola deve formar alunos críticos e com forte capacidade de raciocínio, alunos com capacidade de contornar e superar os obstáculos, nem que, para isso, tenham que percorrer diferentes trilhos. É, também, neste sentido que a matemática e as atividades investigativas têm um papel preponderante nessa formação de espírito crítico, de persistência e de rigor, e no desenvolvimento dos raciocínios, em suma, um despertar/desenvolvimento de competências para a vida futura dos nossos alunos.

Com este trabalho, pretendo, também, dar continuidade à minha aprendizagem no que se refere ao ensino da matemática. Quero alargar a minha visão no meu processo de ensino relativamente às aulas não tradicionais. Esta vontade de perceber e de querer saber mais tem-se desenvolvido acentuadamente, depois de ter participado no Projeto CEM (construindo o êxito em matemática).

Como neste ano letivo apenas leciono às turmas de sétimo e nono anos de escolaridade, optei por fazer a minha investigação na turma do sétimo ano. A escolha desta turma deveu-se, em parte, ao facto de estes alunos provirem de um método de ensino dito tradicional, onde o foco é o professor e, também, porque nunca tinham participado no Projeto CEM, enquanto os alunos do nono ano vinham usufruindo deste Projeto desde o sétimo ano de escolaridade. Esta escolha recaiu sobre esta turma, pois estes alunos, a meu ver, seriam mais espontâneos na abordagem a este tipo de atividades, pelo simples facto de não estarem habituados a este tipo de trabalho.

1.2. Problema e objetivos da investigação

Pretendo investigar o contributo das atividades investigativas na construção da aprendizagem dos alunos. Neste sentido, este estudo visa: (1) perceber de que forma as atividades investigativas estimulam a produção criativa e as interações na sala de aula; (2) de que forma a aprendizagem matemática ganha significado quando são propostas aos alunos atividades desafiadoras?; (3) como podem as atividades investigativas favorecer o gosto/interesse pela disciplina de matemática? e (4) de que modo reagem os alunos à realização de atividades investigativas na aula de matemática?

1.3. Metodologia do estudo

Segundo Bogdan & Biklen (1991), a investigação qualitativa foca-se na descrição, na indução, na teoria fundamentada e no estudo das perceções pessoais. Desta forma, para o meu estudo, optei por uma investigação qualitativa naturalista, a qual tem como principal objetivo interpretar os fenómenos observados de uma forma natural, através da observação do trabalho realizado pelos alunos na sala de aula. Neste sentido, o método de investigação utilizado foi a observação participante. A escolha deste tipo de investigação deve-se ao facto de permitir uma maior proximidade do trabalho dos alunos perante as tarefas investigativas e porque possibilita uma análise reflexiva da minha prática docente de uma forma mais naturalista e, consequentemente, mais rica.

Inicialmente, foi realizada uma pesquisa bibliográfica, que fundamenta todo o trabalho. Foi com base nesta pesquisa que todo o trabalho foi sendo desenvolvido.

Os dados recolhidos foram de natureza qualitativa, ou seja, descritivos, os quais foram obtidos através da gravação das aulas em vídeo e áudio e da digitalização dos trabalhos realizados pelos alunos nas aulas.

1.4. Organização do trabalho

Este trabalho está estruturado em sete capítulos. No primeiro capítulo, é feito referência às motivações, ao problema e aos objetivos da investigação, e à metodologia do estudo. É ainda descrito o que é tratado em cada capítulo do trabalho, bem como a estruturação do mesmo.

O segundo capítulo dá ênfase ao enquadramento teórico, onde é exposta a importância da investigação/exploração, das conjeturas, das interações e da diversificação de estratégias a utilizar na sala de aula, nomeadamente, através da realização de atividades investigativas. Este capítulo é baseado nas opiniões de autores, investigadores que, graças aos seus estudos e investigações, têm contribuído para a evolução de um ensino não tradicional na disciplina de matemática. Este capítulo está subdividido em vários subcapítulos:

- Investigação;
- As atividades investigativas;
- O que são as atividades investigativas?;
- As atividades investigativas no currículo;
- As atividades investigativas na aprendizagem significativa da matemática;
- Os alunos;
- O envolvimento e as atitudes dos alunos nas atividades investigativas;
- A interação entre alunos e professor nas atividades investigativas;
- O professor;
- A insegurança e as crenças dos professores na aplicação de atividades investigativas;
- O papel do professor na orientação das atividades investigativas;
- A preparação e condução de uma aula de atividades investigativas;

No terceiro capítulo, é apresentada a metodologia utilizada na investigação, a descrição da turma, da unidade temática e do plano de trabalho. Neste capítulo, são também apresentados os métodos utilizados para a recolha dos dados e posterior análise.

O quarto capítulo diz respeito à análise e à interpretação dos dados recolhidos. Esta análise baseou-se na observação direta na sala de aula, na análise das gravações áudio e vídeo, na análise do trabalho desenvolvido pelos alunos nas aulas através da observação das discussões em pequeno e grande grupo e dos registos efetuados no caderno diário.

No quinto capítulo, são feitas as considerações finais acerca do trabalho desenvolvido.

Nos sexto e sétimo capítulos, são expostas as referências bibliográficas que serviram de base para este trabalho e os anexos, respetivamente.

2. Enquadramento teórico

2.1. Investigação

Segundo o dicionário do estudante da língua portuguesa, investigação *é o acto ou efeito de investigar; inquirição; pesquisa.*

Nas nossas escolas, o ensino continua a ser, na sua grande maioria, centrado no professor, onde não há espaço para os alunos fazerem investigações matemáticas, ou seja, investigar; procurar; inquirir e fazer uma pesquisa pormenorizada e cuidadosa (Ernest, 1998). Para alguns autores, uma investigação é "uma viagem até ao desconhecido", sendo que, atualmente, a grande parte dos nossos alunos não embarca nessa viagem, pois, nas aulas, apenas é dada ênfase à mecanização e aos exercícios rotineiros (Fonseca, Brunheira, & Ponte, 1999).

Os alunos distanciam-se da matemática pois só lhes é permitido explorá-la numa única direção, a do professor. É-lhes vedada a exploração em todas as direções, onde o objetivo é a viagem e não o destino (Fonseca et al., 1999). Para investigar é necessário percorrer todos os caminhos, sabe-se qual é o ponto de partida mas não sabemos, inicialmente, como alcançá-lo e onde é a meta. São estas as premissas para incutir nos alunos a predisposição para a matemática.

Porém, o termo investigação em educação matemática, segundo Abrantes, P.; Leal, L. e Ponte, J. (1998), tem sofrido mudanças relativamente ao seu significado anterior, em que a investigação matemática era vista como uma questão ou situação matemática que lhe serve como ponto de partida. Em Portugal, tal como a educação, o termo investigação tem evoluído lentamente e, segundo Abrantes, Ferreira, e Oliveira (1998), investigar significa "desenvolver e usar um conjunto de processos característicos da atividade matemática, como testar e provar conjecturas, argumentar, usar procedimentos de natureza metacognitiva" (p.165). O ensino nas nossas escolas deveria estar assente nestes pressupostos, pois só assim formaríamos cidadãos críticos, criativos e com competências para enfrentar o "mundo" cada vez mais exigente e competitivo. Ao realizarmos atividades investigativas na sala de aula, estamos a incutir valores nos nossos alunos e, consequentemente, a prepará-los para o futuro, onde eles deixam de ser "tábuas rasas" e podem formar as suas ideias e opiniões com base no processo de investigação. Este processo, que é concretizado pelos alunos, assemelha-se à investigação realizada pelos matemáticos profissionais, onde o objetivo é "descobrir relações entre objectos matemáticos conhecidos ou entre novos objectos matemáticos, procurando identificar e comprovar as respectivas propriedades" (Ponte, 2003, p. 2).

Cada vez mais, vivemos numa era digital e tecnológica, onde a exploração é o culminar do conhecimento e da aprendizagem. Segundo Abrantes et al. (1998), explorar é "entrar em terreno desconhecido, recolher dados, detectar diferenças, ser sensível às repetições e às analogias, reconhecer regularidades e padrões" (p.57).

É necessário criar hábitos de investigação nos alunos para que estes ganhem confiança e desprendimento para enfrentar novas situações e realidades, proporcionando-lhes uma visão mais ampla da realidade do seu quotidiano. Os nossos alunos têm de ser autónomos no processo de investigar, na procura de regularidades e no processo de descoberta, pois só assim as aprendizagens serão produtivas e significativas.

2.2. As atividades investigativas

Na circunstância de ensino-aprendizagem, investigar não significa necessariamente trabalhar com problemas com elevado grau de dificuldade. Significa trabalhar com questões que, à partida, parecem confusas, mas que se vão desmistificando à medida que se vai avançando na investigação. O iniciar da investigação é a parte mais difícil de todo o processo, pois esta inicia-se geralmente com um palpite, o qual vai ganhando forma e consistência, sendo que as ideias surgem de um modo sinergético. Ainda, segundo alguns autores, "investigar constitui uma poderosa forma de construir conhecimento" (Ponte, Costa, Rosendo, Maia, Figueiredo & Dionísio, 2002).

2.2.1. O que são as atividades investigativas?

Uma atividade investigativa ou investigação matemática, de uma forma geral, pode ser encarada como uma tarefa não rotineira, cujo objetivo é pesquisar/investigar ou explorar, de modo a fazer generalizações e conjeturas. Este tipo de atividades pode ser apoiado pela utilização das novas tecnologias ou de materiais manipuláveis, os quais no geral, enriquecem as tarefas e favorecem o processo de ensino-aprendizagem.

Um dos objetivos das atividades investigativas é "procurar regularidades, interpolar, extrapolar, conjecturar, testar, generalizar e provar" (Ponte, Ferreira, Varandas, Brunheira, & Oliveira, 1999, p. 17). Ainda, segundo alguns investigadores, Ponte, Boavida, Graça e Abrantes (1997), uma atividade investigativa é uma tarefa aberta e complexa, na medida em que é necessário formular conjeturas, testá-las e eventualmente demonstrá-las (citado por Ponte et al., 1999). Este tipo de tarefas apresenta um grau de dificuldade com o qual a maioria dos alunos não está familiarizado, pois não existe apenas uma solução. A partir destas tarefas, formam-se inúmeros raciocínios válidos ou não. Perante uma atividade aberta, os alunos questionam-se no sentido de encontrar regularidades e fazem "juízos" significativos para o processo de aprendizagem. Fisher (1992) refere que, neste tipo de atividades, a meta não pode ser alcançada diretamente porque existem obstáculos a ultrapassar (citado por Lopes, 2002).

A partir de atividades abertas, surgem respostas abertas e, consequentemente, novas conjeturas, quer para os alunos quer, para o professor. Perante este tipo de atividades, surgirão certamente diferentes hipóteses, mais que aquelas que o professor tinha inicialmente previsto, por melhor preparado que esteja. Este tipo de atividades difere dos exercícios rotineiros, pois não existe um procedimento ou algoritmo adequado que leve à solução esperada e desejada. É necessário uma maior predisposição para investigar, sendo que surgirão novas e diferentes ideias ao longo do processo de investigação. Estas atividades baseiam-se em enunciados e objetivos pouco precisos e estruturados e, por conseguinte, é exigido um maior envolvimento e criatividade dos alunos, onde são os próprios que definem objetivos, conduzem as experiências, formulam e testam as suas hipóteses (Abrantes et al., 1998).

As atividades investigativas de certa forma podem ser comparadas com os problemas de processo[1], uma vez que estes têm mais do que uma solução e são usados para desenvolver o uso de estratégias de resolução de problemas, sendo necessário inventar métodos criativos de resolução (Lopes, 2002). Tanto as atividades investigativas, como os problemas de processo, estão relacionados com a inquirição e averiguação matemática, o que, de certa forma, é visto pelos alunos como tarefas complexas e de um maior grau de exigência, pois a sua resolução requer uma maior atenção e disponibilidade. Segundo Ponte e Matos (1998), as tarefas investigativas podem ser bastante elaboradas e complexas, as quais podem levar algum tempo a resolver ou poderão ser simples e de fácil resolução, bastando, para tal, fazer variar alguns dos parâmetros. Porém, para que as atividades investigativas possam motivar, despertar interesse e criatividade nos alunos, não se podem restringir a algoritmos ou fórmulas diretas, mas devem envolver um maior desenvolvimento de capacidades como a observação, o raciocínio a argumentação e validação de conjeturas e onde seja dada a oportunidade ao aluno de pensar por si mesmo.

Tal como o método científico obedece a determinadas etapas, também o trabalho investigativo é constituído pelas seguintes etapas: formulação de questões, recolha e organização de dados, elaboração, teste e refinamento de conjeturas, justificação dos resultados obtidos e avaliação do trabalho (Ponte et al.,1999).

Ainda segundo os mesmos autores:

> No caso das investigações, é redutor identifica-las simplesmente com a tarefa que dá origem à atividade uma vez que a ideia mais fundamental é que a investigação esteja centrada no aluno. Este no decorrer da atividade irá (re)colocar questões que o encaminharão em direções inusitadas (p.15).

Para Frobisher (1994), é importante clarificar aos alunos o que se entende por “investigações” por forma a compreenderem o que se espera que realizem. As investigações não podem ser consideradas pelos alunos nem pelos professores como uma tarefa rotineira, pois estas poderão ser encaradas como a resolução de exercícios que remetam à reprodução de fórmulas e não como parte de um processo mais geral à aprendizagem da Matemática (citado por Ponte et al., 1999).

Em suma, um dos principais objetivos das investigações matemáticas é que os alunos mobilizem conhecimentos, saberes e se envolvam no seu processo de ensino-

---

[1] Problemas de processo são aqueles que requerem mais do que apenas o uso de operações aritméticas, fórmulas ou algoritmos, requerem o uso de estratégias combinadas.

aprendizagem, através da sua participação ativa e responsável. Desta forma, terão oportunidade de desenvolver e ampliar os seus conhecimentos matemáticos sob uma base sólida e significativa.

2.2.2. As atividades investigativas no currículo

O currículo enquanto pilar do conhecimento assenta num conjunto de intenções curriculares e de políticas educativas impostas por determinadas significações (Morgado & Paraskeva, 2000). Apple (2002) defende que o currículo é construído a partir da (re)definição das nossas políticas e práticas educacionais, as quais nunca são neutras.

Em Portugal, têm-se assistido, sobretudo a partir da década de 70, a constantes e permanentes alterações, readaptações, estruturações no sistema de ensino, ou seja, o ensino tem vivido de reformas (Morgado & Paraskeva, 2000). Recentemente, tem-se assistido a uma avalanche de reformas no sistema educativo. No caso da matemática, foram introduzidas as metas de aprendizagem no ano letivo 2010/2011, as quais, em 2013/2014, foram substituídas pelas metas curriculares de aprendizagem, sendo que estas últimas apresentam um desfasamento relativamente ao programa oficial de matemática. É com base nas estruturações e redefinições no sistema de ensino que alguns investigadores defendem que a definição do currículo de Matemática "depende de um modo essencial das concepções que se tem sobre esta disciplina, da visão que se assume dos objectivos do seu ensino e do lugar que esta deve ter no sistema educativo" (Ponte, Matos, & Abrantes, 1998, p. 312).

Porém, as *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar* (1991) contemplam um vasto leque de sugestões e uma excelente visão e abordagem sobre o que deve ser incluído no currículo de Matemática. Apenas debruçar-me-ei sobre uma ínfima parte.

Segundo o NCTM (1991) currículo é:

> Um plano operacional de ensino que descreve em pormenor o que os alunos de Matemática precisam saber, de que forma os alunos devem atingir os objetivos identificados no currículo, o que é que os professores devem fazer para ajudar os alunos a desenvolver os seus conhecimentos matemáticos, e o contexto em que a aprendizagem e o ensino devem processar-se (p. 1).

Ainda de acordo com o NCTM (1991), o currículo de matemática deve reger-se por cinco objetivos gerais, no intuito de promover uma alfabetização matemática nos alunos. Esses objetivos são: “que aprendam a dar valor à matemática”, “que adquiram confiança na sua capacidade de fazer matemática”, “que se tornem aptos a resolver problemas matemáticos”, “que aprendam a comunicar matematicamente” e “que aprendam a raciocinar matematicamente”. Para que estes objetivos sejam alcançados, é necessário que sejam cumpridos três requisitos, dos quais destaco dois:

- “ser encorajados a explorar, a fazer tentativas, e mesmo a fazer erros e a corrigi-los, de tal modo que ganhem confiança na sua capacidade de resolver problemas complexos”;
- “ler, escrever e discutir matemática, e ainda conjecturar, testar e construir argumentos sobre a validade de uma conjectura” (p.6).

A articulação e a interdisciplinaridade são outros fatores importantes a ter em conta a nível do currículo, bem como a relacionação de ideias e processos entre diferentes tópicos e áreas de conteúdo (NCTM, 1991). Cada vez mais o currículo deixa de ser visto como estático, onde era dado enfoque à repetição e memorização e passa a abranger novas realidades. No que concerne ao ensino da matemática, cada vez mais é dada ênfase à relacionação, à resolução de problemas, à exploração e à investigação matemática.

Segundo Collins (1986), existem três objetivos gerais para o ensino investigativo que são: “(a) ajudar os alunos a construir regras gerais, teorias ou princípios que já são conhecidos e a atingirem um conhecimento especializado sobre um assunto, (b) ajudar os alunos a construir genuinamente novas teorias ou princípios que surgem das suas investigações e (c) ensinar os alunos como resolver problemas através do uso de técnicas de auto-interrogação e de auto-regulação e competências metacognitivas ” (citado por Silver, 1998, p.145). Ainda segundo o autor supracitado, o ensino por descoberta coaduna-se com o primeiro objetivo geral para o ensino investigativo em matemática.

Durante muito tempo, os professores e investigadores não faziam distinção entre atividades investigativas e problemas. Só a partir da década de 90 é que essa distinção começou a ocorrer, o que contribui para um maior progresso das atividades investigativas no currículo e a sua aplicação na sala de aula.

A realização de atividades investigativas na sala de aula está contemplada no currículo e nos programas oficiais de matemática, embora ainda não lhe seja dada grande ênfase. No entanto, o questionamento e a investigação já vão ocupando um lugar de relevo nos programas oficiais e, consequentemente, nas aulas. No geral, os programas de matemática para todos os níveis de ensino sugerem que os objetivos a alcançar não se podem restringir apenas à aprendizagem, à aplicação e à relacionação de conhecimentos, mas devem "abranger o desenvolvimento de capacidades/aptidões e de atitudes e valores" (Abrante et al., 1998, p.2).

Segundo o programa de matemática do ensino básico (2007), uma das finalidades do ensino relativamente à atividade matemática é a "resolução e formulação de problemas, a formulação e teste de conjecturas, a generalização e a demonstração" (p.2).

Perante uma análise pormenorizada do programa de matemática, parece evidente que cada vez mais é dada a possibilidade ao aluno de aprender matemática, fazendo matemática. Nesse sentido, devem ser adotadas estratégias que envolvam os alunos na sua aprendizagem, tornando-os autónomos e responsáveis pelo seu processo de aprendizagem. Um dos objetivos gerais do ensino da matemática refere que os alunos devem ser autónomos e capazes de fazer matemática, isto é, devem ser capazes de explorar regularidades e formular e investigar conjeturas matemáticas.

As NCTM (1991) dão ênfase à necessidade dos alunos fazerem matemática, o que é possível através da exploração, da investigação, da descrição e da discussão que, por conseguinte, promovem o raciocínio e a comunicação matemática.

Na parte concernente às orientações metodológicas, o programa de matemática foca o currículo nacional e refere que:

> o aluno deve ter diversos tipos de experiências matemáticas, nomeadamente resolvendo problemas, realizando actividades de investigação, desenvolvendo projectos, participando em jogos e ainda resolvendo exercícios que proporcionem uma prática compreensiva de procedimentos (p.8).

O programa refere ainda a importância do uso das calculadoras, dos computadores e dos materiais manipuláveis, sobretudo, na resolução de problemas e na realização de tarefas exploratórias e de investigação.

Tenho a convicção de que um bom currículo de Matemática seria aquele que se centrasse no aluno.

2.2.3. As atividades investigativas na aprendizagem significativa da matemática

A capacidade de pensar matematicamente é tão importante como dominar os conteúdos e conceitos matemáticos. Pois, é através desta capacidade que os alunos podem julgar e procurar estratégias para a resolução de problemas, contribuindo desta forma para uma aprendizagem significativa da matemática. Para que ocorram aprendizagens significativas, é necessário saber fazer matemática, isto é, raciocinar matematicamente, explorar e investigar diferentes situações com vista a estabelecer conjeturas e generalizações. Na perspetiva de diferentes organizações, professores e investigadores, aprender e saber matemática deve consistir, essencialmente, em fazer matemática (Ponte, 2003).

Segundo Ponte (2003), a ideia de que aprender matemática é fazer matemática surgiu em Portugal em 1988. No entanto, passados quase 25 anos, a meu ver, esta ainda não é de todo uma realidade nas nossas escolas. Esta perspetiva tem sido colocada em prática de uma forma progressiva, mas muito lenta. Segundo o autor supracitado, foi realizado um estudo pela APM sobre a "Situação do Ensino da Matemática em Portugal". Nesse estudo, chegou-se à conclusão de que 15% referiu que as "atividades de exploração" faziam parte das *situações de trabalho na aula* e 93%, revela que os exercícios são a situação mais frequente.

A grande finalidade do ensino da matemática deveria ser ensinar a pensar, quer através de tarefas de exploração, quer através de investigações matemáticas, e não somente dotar os alunos de conteúdos e estratégias na aplicação da regra ou fórmula corretas na resolução de exercícios rotineiros. É certo que é preciso saber conceitos e estabelecer relações entre eles, no entanto é mais importante fazer aprendizagens significativas, isto é, aprendizagens significativas são aquelas que derivam da interação entre pares, onde não é vedada a possibilidade de errar e voltar a fazer, onde é possível experimentar e/ou manusear, envolver-se, testar e conjeturar. A forma de aprender é equivalente à forma como a aprendizagem se realiza.

Para que a matemática deixe de ser o "bicho papão" para a grande maioria dos alunos, é necessário diversificar as estratégias utilizadas na sala de aula e, sobretudo, incutir nos alunos a predisposição para a matemática. É neste sentido que as atividades investigativas têm um papel preponderante, quer a nível da motivação, quer na construção do raciocínio matemático dos alunos. Para além disso, e segundo Ponte (2003), as atividades investigativas podem ajudar os alunos a mobilizarem e a consolidarem os seus conhecimentos matemáticos, a desenvolverem capacidades de ordem superior e a adquirirem novas aprendizagens.

Para Braumann (2002), não é possível aprender matemática sem a intervenção do fator investigativo, é “como tentar aprender a andar de bicicleta vendo os outros andar” (p.5). É através das atividades/tarefas investigativas que os alunos construem a sua própria aprendizagem, a qual é, sem dúvida, mais significativa, pois não lhes foi negada a possibilidade de experimentarem. Segundo Ponte et al., (1999):

> A perspectiva que sublinha a importância da aptidão matemática só apresenta um aspecto da realidade e tem o efeito perverso de negar à grande maioria dos que estudam Matemática a possibilidade de experimentarem em alguma medida o processo criativo, não se limitando a reproduzir apenas o que aprenderam, mas procurando encontrar coisas novas por si mesmos (p.8).

Os autores supramencionados referem que a realização de atividades de investigação é imprescindível para que os alunos atinjam alguns dos objetivos mais importantes da disciplina de matemática. Ainda, segundo alguns autores, as referidas atividades são uma mais-valia, uma vez que proporcionam uma visão mais ampla da matemática e podem ser desenvolvidas nos diferentes ciclos e por alunos de diferentes níveis de conhecimento. Este tipo de atividades estimula o envolvimento dos alunos, o que, de certa forma, contribui para uma aprendizagem significativa, pois permite relacionar e fazer conexões em diferentes conteúdos e desenvolve o raciocínio matemático (Cunha, Oliveira, & Ponte, 1995).

Aos alunos deve ser dada a oportunidade de vivenciarem diferentes formas de estar em contacto com a matemática, dando-lhes oportunidade de construírem a sua aprendizagem, através de um trabalho investigativo e autónomo ou outro. De acordo com Pólya, os alunos podem e devem ter “um sabor da Matemática em construção e do trabalho criativo e independente” (citado por Ponte et al., 1999, p.8). Ainda segundo Ponte (2003), os alunos, através da realização de atividades investigativas, vivenciam os processos característicos de investigações matemáticas, feitas por matemáticos profissionais, e, consequentemente, aprendem como investigadores.

Neste tipo de atividade, não é esperado apenas que os alunos encontrem a resposta prevista pelo professor e que todos os alunos cheguem às mesmas conclusões, mas é esperado que explorem, formulem conjeturas e se convençam a si e aos outros das suas descobertas. É neste sentido que as atividades investigativas diferem de outras tarefas rotineiras, que os alunos desenvolvem na sala de aula, em que apenas é esperada uma solução no final da resolução.

As atividades investigativas permitem aos alunos avaliar a sua capacidade de raciocinar, comunicar matematicamente e de mobilizar conhecimentos em diversas situações. É através deste tipo de atividades que os alunos podem melhorar e pôr em prática a sua capacidade de argumentação e de demonstração, quer na discussão em pequeno grupo, quer em grande grupo. Este tipo de tarefas é benéfico para desenvolver o espírito de observação e o sentido crítico, bem como o pensamento matemático dos alunos (Ponte et al., 1999).

Para Love (1988), a aprendizagem dos alunos depende da sua capacidade de "pensar por eles próprios em Matemática", e, para tal, é fundamental que se envolvam nas seguintes atividades: "identificar e iniciar os seus próprios problemas para investigar", "expressar as suas ideias e desenvolvê-las na resolução de problemas", "testar as suas ideias e hipóteses confrontando-as com experiências relevantes" e, por fim, "defender racionalmente as suas ideias e conclusões e submeter as ideias dos outros a uma crítica razoável" (p.103).

Segundo alguns investigadores, a investigação em educação matemática, realizada em Portugal, revela que:

> Dá-se grande importância às competências de baixo nível cognitivo da atividade matemática, como a memorização de factos específicos e o domínio dos conhecimentos, técnicas e terminologia; em contra-partida, dá-se pouca atenção às competências de nível mais elevado, incluindo a capacidade de resolução de problemas e de realização de investigações matemáticas (Ponte et al.,1998, p.310).

2.3. Os alunos

Os alunos estão familiarizados a utilizar na disciplina de matemática o método de mecanização para resolver as tarefas que lhe são apresentadas, sendo este um dos fatores para o desinteresse por esta área do saber. Neste sentido, há a necessidade de recorrer a novas estratégias para colmatar a desmotivação e a aversão inerentes à disciplina de matemática.

Os alunos, na sua grande maioria, não estão habituados a realizar trabalhos de investigação. Consequentemente, manifestam uma maior dificuldade para iniciarem estas tarefas. Este tipo de atividades visa o envolvimento do aluno com a tarefa e com a matemática, sendo eles próprios os responsáveis por todo o envolvimento, desde o esclarecimento das suas dúvidas, ao longo de todo o processo, às descobertas e validação das conjeturas. Portanto, é de estrema importância que os alunos se envolvam em atividades de cunho investigativo e exploratório, pois estas contribuem para o desenvolvimento da capacidade de relacionar diferentes conteúdos e ajudam no processo da comunicação. Em suma, as atividades investigativas são uma mais-valia em todo o processo de construção da aprendizagem.

2.3.1. O envolvimento e as atitudes dos alunos nas atividades investigativas

Alguns investigadores referem que a perspicácia e a flexibilidade são duas características fundamentais para trabalhar com êxito em investigações matemáticas. A perspicácia é importante para a formulação de objetivos tendo em vista a atividade proposta. A flexibilidade é fundamental para estabelecer conexões, modificações ou mesmo para abandonar as abordagens que não produzem conjeturas válidas ou não conduzem aos objetivos predefinidos (Ponte et al., 1999). Para estes autores, uma das dificuldades manifestadas pelos alunos na realização de atividades investigativas prende-se com a formulação das questões a investigar. Geralmente, sentem dificuldades em iniciar a exploração. Por vezes, o maior obstáculo dos alunos é pesquisar e aprofundar regularidades de uma forma organizada, na medida em que abandonam rapidamente as hipóteses sem as aprofundar, "saltitando" simultaneamente entre diferentes ideias. Este desvio de raciocínios condiciona a realização da tarefa. No que concerne ao registo das observações ao longo das tarefas, estes apresentam-se como dificuldades acrescidas, pois os alunos não sabem escrever matematicamente as conclusões a que chegaram. Os registos são determinantes para o evoluir e para um bom cumprimento da tarefa. Como os alunos não estão familiarizados com atividades de cariz investigativo e de descoberta, é natural que considerem este tipo de atividades estranhas e difíceis (Rocha, 1995).

Nas atividades investigativas, os alunos definem os seus objetivos, colocam as suas questões e exploram diversos caminhos/processos para atingirem esses objetivos (Ponte et al., 1999). Neste sentido, as atitudes dos alunos durante a realização de atividades investigativas são cruciais para o sucesso das mesmas. Estes devem apresentar predisposição para a realização das tarefas através do seu envolvimento em todo o processo. No entanto, nem sempre o envolvimento dos alunos é constante ao longo da atividade, embora isso não signifique que os mesmos se tenham desinteressado ou alienado da investigação. Se os alunos nunca desenvolveram uma atividade investigativa, certamente, não se envolverão na mesma, tal como seria desejado. Esse envolvimento tem de ser construído ao longo da tarefa.

Para que o trabalho dos alunos seja produtivo e rentável, os mesmos terão que ter a noção de que este é um trabalho que poderá ser ou não desenvolvido em grupo e que é sobretudo um trabalho que deve ser desenvolvido, quanto possível, autonomamente, isto é, sem a intervenção constante do professor.

Segundo Mason (s.d.), muitos professores estão a variar o seu método de ensino e estão a realizar atividades investigativas na sala de aula, no entanto apenas está a ser ensinado aos alunos como realizar este tipo de atividades sem que os próprios procedam às respetivas investigações. Se os professores tentarem incutir nos alunos estratégias e rotinas para desenvolverem os trabalhos de investigação (segundo o seu ponto de vista) essa investigação não terá valor no processo de aprendizagem, será meramente encarado pelos alunos como - mais um exercício. As atitudes que os alunos apresentam perante as atividades investigativas em todo têm a ver com a "postura" e o ambiente criado pelo professor na sala de aula. Se os professores não forem suficientemente precisos, acarretará consequências no trabalho dos alunos, podendo originar passividade no processo de investigação. O envolvimento ou o não envolvimento dos alunos nas tarefas/atividades é em parte da responsabilidade do professor e do sistema de ensino. Se a atividade investigativa não for suficientemente estimulante para os alunos, a probabilidade de atrair o seu interesse será menor.

Alguns professores do Reino Unido identificaram alguns itens nos quais é possível observar o envolvimento dos estudantes relativamente ao raciocínio matemático apresentado que são: início e sustentação do raciocínio matemático; obtenção e registo escrito de conclusões; convencer-se a si próprio e aos outros e até que ponto e de que forma podem os professores ajudarem a desenvolver o raciocínio matemático de modo a incutir nos alunos todo o ensino da matemática e não apenas restringir-se à atividade (Mason, s.d.).

2.3.2. A interação entre alunos e professor nas atividades investigativas

Segundo Clark e Peterson (1986), os processos de pensamento do professor e dos alunos, bem como as interações e os papéis assumidos por eles estão intimamente relacionados (citado por Ponte et al., 1999).

Para alguns autores as interações na sala de aula são uma mais-valia pois:

> É através das interações, entre os alunos de um grupo ou entre estes e o professor, que é favorecida a comunicação das ideias, dos pensamentos e das questões que podem conduzir a um trabalho mais profícuo quando estão envolvidos em atividades de investigação (Ponte et al., 1999, p.32).

A interação ente os diferentes intervenientes desenvolve o poder de argumentação e comunicação matemática, e é através da interação que se estabelecem conexões e, posteriormente, conjeturas. Muitas vezes é através do confronto de ideias, quer com os elementos do grupo, quer com o professor, que os alunos se apercebem dos erros e das contradições das suas conclusões. O confronto de ideias é sempre importante, mas, quando é mais produtivo, gera um novo ciclo de ideias e de hipóteses a serem testadas. As interações na sala de aula são benéficas, pois elucidam a forma de raciocinar, quer dos alunos, quer do professor, a qual culmina numa nova aprendizagem para ambos os intervenientes. É importante que os alunos se apercebam da forma de raciocinar do professor, pois é através dessa observação que estes poderão evoluir quer no envolvimento da tarefa quer na forma de raciocinar perante atividades investigativas.

Segundo alguns investigadores, a interação na sala de aula entre alunos é quase inexistente e, quando existe, é pouco, ou nada, valorizada pelo professor (Ponte, Oliveira, Cunha, & Segurado, 1998). Cada vez mais é importante valorizar a interação dos alunos uns com os outros e com o professor, pois é através dessa interação que os alunos podem clarificar o seu raciocínio e poderão estabelecer uma compreensão mais profunda de conceitos matemáticos. (Ponte et al., 1998)

Para Ponte et al., (1998) o saber matemático é desenvolvido através da ação e da reflexão. A ação está relacionada com a manipulação e a reflexão “consiste no pensar sobre a ação, e é estimulada quando se tem necessidade de explicar a um parceiro ou discutir e argumentar uma ideia (daí a importância da comunicação e da interação) ” (p.322).

Foi graças à investigação em matemática que foi possível concluir que a qualidade da aprendizagem dos alunos em matemática está dependente da qualidade das interações entre os alunos e entre estes e o professor. Estas interações são uma mais-valia para a aprendizagem dos alunos, pois é através da discussão sobre as tarefas realizadas que se proporcionam aprendizagens mais significativas e de onde podem surgir abordagens a outros conteúdos. A partilha de ideias e de raciocínios enriquece o culminar de todo o trabalho feito até então, seja ele de carácter investigativo ou não. Todo o trabalho e discussão que é gerado à volta das atividades investigativas é filtrado pelos alunos e desencadeia uma aprendizagem cooperativa e, consequentemente, significativa e produtiva. Este tipo de aprendizagem é significativo, pois foi produzida pelos alunos através das suas ideias e interações.

No entanto, é de realçar que, para que ocorram interações produtivas na sala de aula, é necessário produzir um ambiente propício para tal, ou seja, são necessárias tarefas que favoreçam e estimulem o diálogo entre os alunos, sendo que o professor tem um papel preponderante nas questões que coloca e nas interações que promove de forma a conseguir que os alunos debatam e esclareçam a matemática que produziram (Ponte et al., 1998).

As discussões mais produtivas são aquelas que são produzidas em grande grupo, pois o professor tem a oportunidade de perceber os raciocínios e métodos utilizados pelos alunos. É também através da discussão em grande grupo que o professor tem a possibilidade de observar a evolução/progresso dos alunos.

As interações/discussões são importantes, visto que desenvolvem a capacidade de argumentar e de comunicar matematicamente e estimulam o envolvimento e a criatividade dos alunos.

2.4. O professor

Segundo Margaret Mead, citada por Bogdan & Biklen (1991), os professores, para serem mais competentes, devem estudar os seus alunos através de observações e de experiências em contextos de socialização. O professor, enquanto educador e profissional que é, deve consciencializar-se de que a instituição escolar e, em particular, os alunos vivem realidades sociais cada vez mais díspares, o que influencia todo o processo de ensino-aprendizagem. Neste sentido, urge a necessidade de novas estratégias e de novos conhecimentos para fazer frente a esta nova realidade que se vive cada vez mais nas escolas. Os professores têm de modificar os seus hábitos e métodos de ensino, no entanto, para isso, têm de reconhecer as suas limitações relativamente às novas abordagens da matemática, nomeadamente, na criação e utilização de atividades investigativas na sala de aula. Para isso, e segundo (Ponte, et al., 2002), os professores têm de mostrar "(…) vontade ou capacidade para alterar as suas práticas relativamente aos modelos de ensino tradicionais veiculados pelos seus professores (…)" (p.48).

A metodologia e as tarefas utilizadas, na sala de aula, por cada professor estão correlacionadas com a sua maneira de encarrar a profissão, o ensino e as suas experiências pessoais enquanto alunos. Muitas vezes, os professores diversificam as atividades e as estratégias utilizadas na sala de aula, no entanto, grande parte das vezes, a metodologia de concretização continua a ser desajustada, na medida em que é centrada no professor. Os professores continuam a ser fiéis e a reproduzir os métodos tradicionais utilizados outrora pelos seus professores.

2.4.1. A insegurança e as crenças dos professores na aplicação de atividades investigativas

Segundo Ernest (1991), um ensino de cunho investigativo é caraterizado pelo facto de os alunos e professores assumirem responsabilidades na formulação e resolução de problemas (Abrantes et al., 1998, p.144). A aplicação de atividades investigativas na sala de aula pode trazer dificuldades acrescidas para os professores, na medida em que possam surgir questões inesperadas. Pois, este tipo de aulas deixa de ser centrado no professor e passa a ser centrado no aluno, o que de certa forma condiciona a "segurança" do professor. Ainda segundo os mesmos autores as atividades investigativas envolvem:

> Uma mudança no poder do professor que deixa de ter o controlo sobre as respostas, sobre os métodos aplicados pelos alunos e sobre a escolha de conteúdos de cada aula. Os alunos ganham controlo sobre os métodos de solução que aplicam, e finalmente sobre o próprio conteúdo (p.31).

O professor deve encarar o trabalho dos alunos perante as atividades investigativas como sendo as atividades matemáticas destes e não as suas. Neste sentido, deve aceitar todas as conclusões válidas dos alunos mesmo que estas não produzam mais conhecimento e se distanciem dos objetivos delineados pelo professor.

Neste tipo de atividades, o professor deve ser “matematicamente confiante”, não quer isto dizer que tem de saber todas as respostas corretas possíveis, mas tem de ser capaz de investigar de forma a obter conjeturas plausíveis (Abrantes et al., 1998). Apesar da insegurança dos professores na aplicação de atividades investigativas, estudos demonstram que as investigações matemáticas podem constituir uma atividade estimulante tanto para os alunos como para os professores. Um dos fatores que desencoraja os professores a desenvolverem atividades investigativas na sala de aula prende-se com o tempo disponível e com o cumprimento dos programas. Este tipo de atividades requer mais tempo e, como tal, por vezes, é entendido como perda de tempo. A maior parte das vezes, os professores estão preocupados com o cumprimento do plano de aula e acabam dando orientações muito diretas e precisas aos alunos, o que de certa forma inviabiliza os objetivos deste tipo de atividades.

Os professores enfrentam algumas dificuldades na implementação de atividades investigativas, sobretudo, se esta for uma área desconhecida para os alunos ou para o professor. No entanto, formar-se-á, ao longo do tempo, uma relação de proporcionalidade, onde as variáveis serão “dificuldades” e “experiência”. Com a continuidade do envolvimento dos alunos nestas atividades e com a experiência que vão adquirindo ao longo das situações, este tipo de atividades será mais acessível para os alunos e, consequentemente, para o desempenho do professor.

Uma das inseguranças dos professores é na condução, na exploração e na discussão das atividades investigativas, pois estas não fazem periodicamente parte do seu campo de ação e, por vezes, “fogem” ao seu controlo.

O professor sente-se receoso, pois não sabe como é que os alunos irão comportar-se perante uma atividade completamente diferente daquela a que estão habituados e como apoiá-los corretamente de forma a conseguir motivá-los e envolvê-los nas atividades. Segundo Rocha (1995), uma das essências das atividades investigativas é compreender o percurso efetuado pelos alunos e, consequentemente, o raciocínio produzido, o que poderá tornar-se num obstáculo para o professor.

Para alguns autores (Ponte et al., 1998), os professores desenvolvem crenças e conceções que determinam e influenciam decisivamente a forma de desempenhar as suas tarefas. São essas crenças e conceções que colocam em “cheque” a evolução e a melhoria do ensino da matemática, ainda em pleno século XXI. Porém, e segundo alguns estudos desenvolvidos, muitos professores consideram que as suas crenças e conceções, no que concerne à sua prática pedagógica, derivam da formação que receberam ao longo da sua aprendizagem e carreira profissional.

Muitas vezes, os professores não aplicam e rejeitam a hipótese de aplicar atividades investigativas por considerarem que estas não trazem nada de novo ao seu método de ensino. Mostram-se relutantes relativamente ao efeito das atividades investigativas na aprendizagem significativa dos alunos. Na minha perspetiva, não utilizam, porque se acomodam, porque, neste tipo de aulas, a ênfase é colocada no aluno e, sobretudo, porque ainda têm a perceção de que o ensino da matemática deve estar centrado em conteúdos e em ensinar estratégias para a resolução de exercícios rotineiros.

Muitos professores não acreditam que, com a realização de atividades de cariz investigativo, seja possível aumentar a autonomia dos alunos, respeitar o ritmo de aprendizagem dos mesmos e favorecer o seu envolvimento nas atividades a desenvolver. Este tipo de atividades tem de facto um grande poder de motivação nos alunos, no entanto é necessário um certo "tacto" na sua utilização para não se incorrer no uso inadequado das suas potencialidades. A aplicação de uma atividade investigativa será inútil, mais ainda, será uma perda de tempo, se for usada tendo por base os métodos tradicionais de ensino, onde o professor é o foco. Este tipo de atividades só produzirá efeito se for centrado no aluno.

2.4.2. O papel do professor na orientação das atividades investigativas

Um dos intervenientes que é decisivo no processo de ensino-aprendizagem é o professor. Ele tem um papel crucial na orientação das investigações matemáticas, pois é a força motriz no que concerne à produção de materiais adequados, na motivação dos alunos, na dinâmica da aula e, sobretudo, na orientação da tarefa. São estes os fatores que são determinantes no sucesso da atividade. Ao professor cabe a tarefa de estimular os alunos, pois a postura e o ambiente criado por este, na sala de aula, são determinantes para o envolvimento dos alunos em tarefas de investigação (Ponte et al., 1999).

Uma das caraterísticas que define o processo de ensino-aprendizagem é a linguagem, quer seja verbal, quer seja não-verbal. A linguagem não-verbal é muito utilizada quer pelos professores quer pelos alunos, no contexto sala de aula, sem que estes tenham noção da sua utilização e importância. Por vezes, a linguagem não-verbal desencadeia diferentes interpretações das situações e, consequentemente, aprendizagens. Neste sentido, o professor terá que dar atenção a este tipo de linguagem, quer através do tom de voz, quer através da postura corporal. A forma como o professor se envolve nas tarefas constitui um modelo a seguir pelos alunos, o qual pode ser percecionado através da linguagem não-verbal.

Uma das tarefas mais importantes que o professor terá de efetuar é a criação ou a reformulação da atividade investigativa que será realizada pelos alunos. Esta deve ter objetivos bem definidos, deve ter em conta o nível etário dos alunos, a heterogeneidade da turma e, sobretudo, o conhecimento e desenvolvimento matemático dos mesmos. Nesta mesma linha de ideias, Ollerton (1994) defende que a escolha de uma atividade investigativa deve ser bem planeada, pois deve ter em atenção vários aspetos. Assim as atividades investigativas devem:

- possibilitar "que sejam trabalhadas uma variedade de competências de conteúdo";
- possibilitar que sejam criadas "oportunidades para os alunos explorarem ideias e colocarem questões";
- apoiar "diferentes tipos de intervenções do professor desde o colocar questões ao explicar e expor";
- permitir "aos alunos tomar a maior parte da responsabilidade no seu desenvolvimento";
- ter "uma variedade de resultados, alguns dos quais podem ser inesperados". (citado por Ponte, Oliveira, Cunha, & Segurado, 1998, p.18).

O professor poderá escolher a atividade investigativa a ser trabalhada ou poderá deixar ao critério dos alunos, ou seja, serem os próprios a envolverem-se em todo o processo de descoberta e, consequentemente, aprendizagem. Serão, certamente, mais profícuas as aprendizagens dos alunos quando estes estão envolvidos em todo o processo. No entanto, é de realçar que tal só será produtivo quando estes já tenham anteriormente desenvolvido um trabalho de índole investigativo. Se for o professor a escolher a atividade a ser trabalhada, poderá, certamente, orientar melhor os alunos para os objetivos visados, visto que já houve um trabalho prévio por parte deste. No caso de serem os alunos a escolherem as situações a investigar, o professor terá um papel mais ativo, no sentido que terá de produzir mais raciocínio imediato na condução dos alunos. Será, certamente, mais motivador e emocionante quando os alunos e o professor não sabem antecipadamente o que vão descobrir, o que gera uma maior partilha de raciocínios e autoconfiança. Neste tipo de atividades e segundo alguns autores (Fonseca et al., 1999), o professor deverá mostrar abertura e disponibilidade para perceber os raciocínios apresentados pelos alunos quando estes seguem por caminhos que o professor nunca tinha pensado e produzem resultados inesperados. Mais, reforçam a ideia de que o professor deve dar continuidade a esses caminhos.

Uma boa atividade investigativa terá uma influência motivadora no desempenho dos alunos e, consequentemente, será uma mais-valia nas suas aprendizagens. Cabe ao professor orientar os alunos para que estes, ao longo do seu processo de investigação, vão interiorizando e produzindo matemática interessante, mesmo que esta não seja validada para a atividade em questão. Segundo Pirie (1987) nas atividades investigativas, "o objetivo é a jornada, não o destino" (citado por Ponte et al., 1999, p.13). Durante a realização deste tipo de atividades, os alunos podem seguir caminhos através dos quais não sejam bem-sucedidos. Neste caso, o professor deve evitar dizer-lhes imediatamente que estão errados. Segundo (Fonseca et al., 1999), o professor deve dar-lhes tempo para que sejam os próprios alunos a identificarem os erros. No entanto, quando o professor observa que os alunos seguem caminhos errados e sem fim à vista, deve intervir de forma a orientá-los para que estes não se sintam frustrados, desanimados e comprometam o seu envolvimento na tarefa. Um dos papéis do professor é também orientar direta ou indiretamente o trabalho dos alunos de forma a clarificar possíveis dúvidas, dar sugestões para o evoluir do trabalho ou relembrar conteúdos. O professor pode orientar os alunos de uma forma ligeira ou progressiva para que estes sintam que o mérito é todo deles, aquando das descobertas efetuadas.

Perante este tipo de atividades, o professor tem a oportunidade de poder observar o trabalho e o envolvimento de todos os alunos, podendo focar a sua atenção num aluno em particular ou num grupo de alunos de forma a acompanhar e orientar a aprendizagem dos alunos ao ritmo destes e, se necessário, de uma forma individualizada.

Para que os alunos se envolvam nas tarefas, o professor deve proporcionar um bom ambiente na sala de aula em que todos se sintam à vontade para apresentar e defender as suas conjeturas e refutar as ideias dos outros, vendo o seu contributo valorizado (Ponte et al., 1999).

No final da atividade, o professor deverá ser o mediador da discussão dos resultados em grande grupo. É através da discussão em grande grupo que os alunos têm acesso a todas as conclusões pertinentes que foram produzidas ao longo da atividade. A discussão proporciona aos alunos uma visão geral das estratégias e raciocínios utilizados por todos os grupos de trabalho.

Em suma, o papel do professor é preponderante na medida em que:

> Tem de ser capaz de criar as normas de trabalho e o ambiente favorável para a realização da atividade investigativa, bem como servir de modelo de comportamento matemático para os alunos. O professor tem de encontrar a linha certa para apoiar os alunos, procurando que não desistam perante as dificuldades, mas sem lhes dar demasiadas indicações, que retirem todo o desafio à tarefa (Ponte et al., 1999, p.8).

O professor deve proporcionar situações aos alunos em que estes possam investigar, testar e conjeturar de forma a tornarem-se criativos, autónomos e responsáveis pelo seu processo de aprendizagem.

2.4.3. A preparação e condução de uma aula de atividades investigativas

A preparação de uma aula, onde vão ser desenvolvidas atividades investigativas, exige, ao professor, muito trabalho prévio.

Inicialmente, é necessário definir como e quando aplicar a atividade investigativa e quais os recursos a utilizar (materiais manipuláveis ou as novas tecnologias). Para Fonseca et al., (1999), o professor deverá questionar-se e tomar decisões relativamente a:

- Qual o peso relativo a atribuir às atividades de investigação? Devem elas constituir-se como um eixo condutor do trabalho com os alunos, estão a par com outras atividades ou, pelo contrário, assumem um peso menor no currículo?
- Como se relacionam as investigações com os conteúdos a serem lecionados? Estes devem estar na sua base, ou a sua presença tem uma importância secundária? Os conteúdos podem surgir a partir da atividade ou esta deverá ser realizada depois de serem tratados?

Segue-se depois a construção da situação ou de situações a investigar, sendo que deve ser um trabalho cuidado e ponderado. As atividades investigativas a serem usadas na sala de aula devem ser bem planeadas. Não devem ser muito difíceis, pois podem causar frustração nos alunos, mas também não devem ser demasiado óbvias, pois não criam durante a sua realização, um sentimento de satisfação e automotivação nos alunos. Para que a atividade seja propícia à exploração e que estimule o pensamento matemático, é necessário que possua questões suficientemente abertas e interessantes. (Fonseca et al., 1999). Apesar de o professor atualmente ter muitos recursos em que se basear para construir as atividades investigativas, terá de adaptá-las à realidade dos alunos que possui, tendo em conta as suas vivências e experiências, bem como os objetivos visados.

Seguidamente, é necessário pensar na metodologia a utilizar, como gerir o tempo e em toda a dinâmica da aula. É preciso decidir como será desenvolvida a tarefa se individualmente ou em grupo e qual o critério a utilizar para agrupar os alunos.

Posteriormente, o professor questiona-se relativamente ao modo de mediar as discussões, como avaliar o trabalho e toda a matemática que foi produzida pelos alunos. Por fim, o professor deve fazer uma reflexão sobre todos os acontecimentos que se desenrolaram na sala de aula.

Segundo Ponte (2003) e citando alguns autores, existem três fases para a preparação de uma aula em que sejam utilizadas atividades investigativas: Tudella et al., (1999) defende a introdução da tarefa, desenvolvimento da tarefa e discussão final. Porém, outros defendem a introdução, realização e discussão da investigação. A introdução da tarefa está relacionada como esta é proposta aos alunos (por escrito, oralmente, ou pelas duas anteriores). Segundo Fonseca et al., (1999), a fase de introdução da tarefa é crucial, pois poderá influenciar o desenrolar e o sucesso de todo o trabalho, principalmente, se os alunos forem inexperientes neste tipo de atividades. Nesta primeira fase, o professor desempenha um papel primordial para o sucesso da atividade, pois é a partir desta primeira abordagem que pode motivar os alunos para a realização da tarefa. A maneira como irá ser introduzida a tarefa deverá ser adaptada com a experiência dos alunos. Se forem alunos inexperientes, faz todo o sentido que seja feita uma leitura e discussão do enunciado da tarefa. O professor poderá também optar por não fazer a leitura inicial, deixando esse trabalho para os alunos, sendo que esta decisão poderá prejudicar o bom desempenho da tarefa. O professor será, certamente, mais solicitado pelos alunos, uma vez que a grande maioria não sabe interpretar aquilo que lê. Por conseguinte, este é também um dos objetivos para o qual devemos trabalhar e dar-lhe a devida atenção. Apesar de tudo, devem ser os alunos a interpretar o enunciado? Claro que sim! A finalização da atividade poderá ficar comprometida relativamente ao tempo que foi despendido para os alunos interpretarem o enunciado, mas, futuramente, esse tempo será recuperado.

Na parte do desenvolvimento da tarefa, é focado o papel das interações aluno-aluno e aluno-professor, as quais são consideradas fundamentais para um trabalho mais rico (Ponte, 2003). Nesta fase, é esperado que os alunos demonstrem uma postura investigativa e que sejam eles os protagonistas da investigação. Nesta fase, o professor deve restringir-se a observar, atuando quando solicitado ou quando tiver a noção que os alunos estão a cometer erros que não conseguem solucionar. O professor, quando solicitado pelos alunos, deve adotar uma atitude questionadora, (Fonseca et al., 1999) devolvendo-lhes as suas questões para que sejam os próprios a solucionarem as suas dúvidas. Segundo Brunheira e Fonseca (1995), as melhores sugestões que o professor pode dar aos alunos para orientá-los são as que questionam e não as que respondem diretamente às questões. Segundo o NCTM (1991), o professor deve questionar os alunos logo após as suas intervenções, usando o termo "porquê" de modo a "provocar o raciocínio", fazendo com que os alunos deem significado e consolidem as suas descobertas.

Por fim, a discussão final centra-se numa reflexão, a qual é indispensável numa aula de investigação. Porém, existem autores que defendem que a reflexão final pode ser desenvolvida através da elaboração de um relatório final (Ponte, 2003). Nesta parte da atividade, o professor deve ser o mediador e moderador da comunicação entre os alunos. Durante a discussão, os alunos deparam-se com hipóteses, estratégias e justificações diferentes das que tinham pensado, sendo que o professor deve estimulá-los a explicitar e argumentar as suas ideias e a questionar e refutar as ideias dos colegas (Fonseca et al., 1999). É através da discussão que se clarificam ideias e se validam resultados.

No que concerne ao momento ideal para fazer a discussão em grande grupo, segundo os autores supracitados, seria logo após a exploração da tarefa. No entanto, por questões de disponibilidade de horário, geralmente, as discussões são efetuadas em aulas subsequentes, o que dificulta a discussão final, pois os alunos já não se lembram muito bem daquilo que fizeram. Porém, segundo os autores será mais conveniente realizar trabalho investigativo em aulas de duas horas, onde a discussão deveria ser feita na segunda hora ou em parte dela. Nos casos em que o professor de matemática também leciona a área de formação pessoal e social ou a área de apoio ao estudo, poderá eventualmente fazer a discussão nestas aulas. O facto de não ocorrer um desfasamento de tempo entre as duas últimas etapas da atividade investigativa permite que as aprendizagens dos alunos sejam mais produtivas e significativas.

O professor poderá optar por vários momentos de discussão ao longo da tarefa, o que, por vezes, pode ser benéfico, consoante o desempenho dos alunos ou se a atividade assim o permitir. Segundo Fonseca et al., (1999), a discussão faseada pode ajudar os alunos a ultrapassar certas dificuldades, pode ser uma mais-valia para motivá-los em fases mais críticas do trabalho ou mesmo para enriquecer a exploração.

Para Fonseca et al., (1999) citando Bishop e Goffree (1986), "a aprendizagem não resulta simplesmente da atividade, mas sim da reflexão sobre a atividade". Neste sentido, o professor, no final de cada aula, deve fazer uma reflexão sobre todos acontecimentos da aula, principalmente, sobre o seu desempenho. É através desta reflexão que o professor tem consciência dos aspetos a melhorar.

O professor, à medida que se vai familiarizando com o uso de atividades investigativas na sala de aula, vai ganhado mais experiência e à-vontade, quer na preparação, quer na condução das aulas.

3. Metodologia de investigação

A metodologia de investigação é uma das partes cruciais de todo o processo de investigação. Pois, é a partir desta que é delineado todo o processo de estudo, nomeadamente, a natureza do estudo, a caraterização dos intervenientes, as técnicas de recolha e a análise dos dados. Ainda segundo Pardal, L. & Correia, E. (1995), a metodologia é o "(…) corpo orientador da pesquisa que, obedecendo a um sistema de normas, torna possíveis a selecção e articulação de técnicas, no intuito de se poder desenvolver o processo de verificação empírica" (p.10).

Em suma, a metodologia de investigação é uma caracterização e definição do processo de investigação.

3.1. Natureza do estudo

Segundo Bogdan & Biklen (1991), a investigação qualitativa é constituída por cinco características, as quais poderão ou não fazer parte integrante de um estudo. Neste tipo de investigações, a "fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal"; a investigação é descritiva; os investigadores "interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos"; este tipo de investigadores analisa os dados de forma indutiva e o "significado é de importância vital na abordagem qualitativa" (p.47).

A minha investigação desenvolveu-se segundo uma metodologia qualitativa, pois foi aquela que se revelou mais apropriada à investigação. O estudo tem como método de investigação a observação participante, sendo que para Bogdan & Biklen (1991) é a melhor técnica de recolha de dados. O facto de a investigação basear-se na observação participante traz mais benefícios ao docente, uma vez que este, ao interagir com os alunos, tem a possibilidade de analisar a sua prática docente e, consequentemente, poderá melhorá-la.

Todo o processo decorreu num ambiente naturalista, na sala da turma e na sala de informática, sendo que os autores supracitados consideram que o ambiente habitual onde os sujeitos do estudo estão inseridos facilita a compreensão das suas ações. O estudo baseou-se essencialmente na observação e na análise de todo o trabalho desenvolvido pelos alunos e os dados recolhidos são essencialmente descritivos. Todo o trabalho foi desenvolvido pelos alunos em grupo e por escrito, sendo que os trabalhos foram analisados *a posteriori*, o que contribui para analisar a forma de pensar e o modo como os alunos progrediram ao longo das sessões.

3.2. Unidade temática e propostas didáticas

A unidade temática escolhida para ser estudada/trabalhada nas aulas foi o capítulo das semelhanças, o qual foi iniciado apenas no final do terceiro período. A escolha do tema não foi tarefa fácil e a mesma recaiu no facto de, em anos letivos anteriores, ter verificado que os alunos do 9.º ano apresentavam muitas dificuldades e, no geral, não se lembravam destes conteúdos. A ideia era aplicar as atividades investigativas aos conteúdos que não eram tão valorizados pelos alunos.

Depois de alguma pesquisa e estudo, foram selecionadas algumas atividades, as quais foram adaptadas ao tema em estudo, tendo em conta os conhecimentos e capacidades dos alunos, por forma a cativar o interesse e, concludentemente, a motivação dos mesmos. Foram elaboradas três atividades investigativas sobre figuras semelhantes, razão de semelhança e critérios de semelhança de triângulos (vide anexos 1, 2 e 3 respetivamente). O objetivo destas atividades é que fossem os alunos a descobrir os conteúdos programáticos desta unidade temática, favorecendo, assim, a autonomia e a aprendizagem de uma forma construtiva e significativa, valorizando o trabalho e as interações do grupo.

No início das aulas, foi pedido aos alunos para formarem grupos de trabalho. A composição dos grupos ficou ao critério dos discentes de forma a evitar conflitos entre os mesmos e, sobretudo, para que a aula fosse o mais natural possível, uma vez que, ao longo do ano letivo, os grupos sempre foram selecionados por eles. Considero que esta estratégia foi a mais adequada, pois eles formaram grupo com os colegas com quem tinham mais afinidade e com quem estavam habituados a trabalhar. Os alunos depararam-se, portanto, com mais uma aula igual a algumas que já tinham tido ao longo do ano, diferenciando-se apenas nas atividades, na metodologia e no facto de ser filmado.

Posteriormente, foi referido que algumas aulas seriam filmadas e cujo objetivo era a realização de um estudo no âmbito do mestrado da docente. Seguidamente, foram distribuídas aos alunos as propostas de trabalho e foi referido que deveriam registar no caderno diário todas as conclusões a que o grupo chegou. Ao longo das aulas, a professora limitou-se a acompanhar e a orientar o trabalho dos alunos, incentivando-os a registar as conclusões elencadas por cada grupo. Uma das minhas funções, enquanto observadora participante, foi questionar os alunos no sentido dos mesmos progredirem na sua investigação e produzirem conhecimento matemático. O esclarecimento de dúvidas limitou-se à devolução de questões ao grupo de forma a serem os mesmos a atingir e a validar as suas descobertas. No final das atividades, foram efetuadas as discussões em grande grupo. É de referir que, em alguns casos, foi necessário fazer a discussão antes da conclusão da atividade, isto porque as conclusões posteriores seriam mais ricas e produtivas. A metodologia utilizada nas três tarefas foi sempre a mesma.

Para a realização da primeira atividade, foram utilizados alguns materiais, nomeadamente, quadradinhos de madeira e tampinhas de sumo, com o intuito de os alunos construírem figuras semelhantes. O propósito da introdução deste material manipulável foi aumentar a compreensão dos conteúdos em estudo e de forma a torná-los mais acessíveis e atrativos.

Na segunda atividade, os alunos utilizaram o Microsoft Excel para relacionarem a razão de semelhança com a ampliação, redução e congruência de figuras.

Na terceira atividade, os alunos tinham de descobrir os critérios de semelhança de triângulos e, para isso, tiveram de construir triângulos no intuito de enunciarem os critérios de semelhança dos mesmos. Para cada atividade, foram utilizadas quatro aulas de quarenta e cinco minutos.

3.3. Caracterização da turma

A minha investigação foi desenvolvida no ano letivo 2012/2013 e centrou-se numa turma do sétimo ano de escolaridade da Escola dos 2.º e 3.º Ciclos de São Jorge – Cardeal D. Teodósio de Gouveia. Esta turma é constituída por 20 alunos, dos quais três são acompanhados pela educação especial, dois dos quais são também acompanhados pelo serviço de psicologia. A turma é composta por 11 rapazes e nove raparigas, com idades compreendidas entre os 12 e 14 anos, sendo que a média das idades da turma é de 13,1 anos. Destes alunos, três estavam a repetir o sétimo ano, sendo que seis alunos já reprovaram pelo menos um ano no seu percurso escolar.

No geral, estes alunos para além de colegas, são amigos, pois, desde o início dos seus estudos têm pertencido à mesma turma e, entre alguns deles, existem relações de parentesco, nomeadamente, irmãos e primos. Alguns destes alunos provêm de famílias com baixos recursos económicos, sendo que 14 alunos usufruem da ação social escolar, dos quais, cinco com o primeiro escalão e nove com o segundo escalão. Ao nível da autonomia e dos conhecimentos matemáticos, esta turma é muito heterogénea, sendo de salientar que um aluno ficou retido. Nesta turma, 11 alunos usufruíam de 45 minutos por semana de apoio pedagógico acrescido a matemática.

Relativamente ao aproveitamento global da turma, isto é, aos níveis de classificação obtidos em todas as disciplinas pela turma, foi possível constatar que, no primeiro período, a turma apresentou uma média de 3,28 valores; no segundo período, de 3,27 valores; e, no terceiro período, de 3,43 valores. No terceiro período, quatro alunos integraram o quadro de honra da escola com uma média de 4; de 4,08; de 4,33 e de 4,58 valores.

É de salientar, porém, que, ao longo do meu estudo, refiro-me aos alunos, usando nomes fictícios de forma a preservar a identidade dos mesmos.

3.4. Recolha dos dados

Para Bogdan & Biklen (1991), os “dados refere-se aos materiais em bruto que os investigadores recolhem” (p.149), são, portanto, os constituintes que formam a base da análise. Ainda segundo os mesmos autores, “os dados são simultaneamente as provas e as pistas” (p.149). Neste sentido, todo o material recolhido pelo investigador durante o processo de investigação é importante, mesmo os acontecimentos que à partida pareçam irrisórios, pois permite-lhe progredir na investigação.

Nos estudos onde é previligiada a observação participante, todos os dados recolhidos durante o estudo são considerados notas de campo.

A recolha de dados, deste estudo, efetuou-se no terceiro período no ano letivo 2012/2013, em ambiente de sala de aula, mais precisamente na sala atribuída à turma e na sala de informática, sendo que a sala de informática só foi utilizada na segunda proposta de trabalho. Esta recolha iniciou-se com a implementação das tarefas.

Os instrumentos utilizados para a recolha dos dados foram cinco câmaras de vídeo e foram recolhidos os trabalhos realizados pelos alunos para efetuar a digitalização dos mesmos. É de salientar que, em cada grupo, existia uma câmara de vídeo, a qual tinha a função de captar imagens e sons, nomeadamente, do trabalho realizado pelos alunos e das interações dos mesmos. Na primeira aula, as filmagens foram efetuadas por uma colega que estava disponível, sendo que este tipo de metodologia não foi possível ser aplicada nas restantes aulas. Ao longo das sessões, foram efetuadas discussões em grande e pequeno grupo, as quais visavam promover a comunicação matemática e ver de que forma a mesma era utilizada pelos alunos. Desenvolvia-se, assim, o poder comunicativo e argumentativo dos alunos, bem como a partilha de ideias e estratégias. No decorrer das sessões, foram recolhidas notas de campo, as quais foram basicamente o meu diário pessoal, onde foram registadas as minhas impressões sobre os vários momentos das aulas e sobre o meu comportamento no decorrer das mesmas. Esta preocupação em analisar o meu desempenho e comportamento foi para avaliar se houve influências indiretas no trabalho dos alunos e, sobretudo, para progredir na minha aprendizagem.

Foi requerida a autorização para fazer as gravações vídeo e áudio (vide anexo 4) ao presidente da comissão provisória da escola e, uma vez que os alunos eram todos menores, aos encarregados de educação, sendo que as mesmas foram autorizadas por todos os intervenientes.

O estudo baseou-se essencialmente na observação e na análise de todo o trabalho desenvolvido pelos alunos e os dados recolhidos são essencialmente descritivos. Os dados recolhidos basearam-se nas transcrições do registo das aulas em vídeo, nas notas de campo e no registo do trabalho dos alunos de todas as aulas onde estas atividades foram desenvolvidas. Para complementar os dados e para ficarmos com uma ideia das opiniões dos alunos acerca deste tipo de aulas e de atividades, foi-lhes pedido para escreverem um texto onde dariam a sua opinião sobre estas aulas.

3.5. Análise dos dados

Para Bogdan & Biklen (1991), a análise de dados é o momento da procura e da organização de transcrições de notas de campo e de outros materiais, que formam o espólio dos dados recolhidos, com o intuito de aumentar e valorizar a compreensão dos mesmos e de dá-los a conhecer aos outros. Ainda segundo os mesmos autores, os dados contêm os ingredientes necessários para levar o investigador a pensar e a analisar de forma adequada e organizada todo o processo de investigação. Neste sentido, o investigador deverá ter tacto na seleção e análise dos dados recolhidos durante o processo de investigação, pois deverá focar-se na descoberta dos aspetos importantes.

Após a recolha dos dados, procedeu-se à análise das gravações e dos registos dos alunos. Essa análise foi feita de forma descritiva e indutiva, partindo do geral para o particular, ganhando forma à medida que foram sendo analisadas as diferentes partes. Para complementar este processo, foram dissecadas as notas de campo, as opiniões dos alunos e os registos dos trabalhos dos mesmos através das digitalizações obtidas.

4. Análise e interpretação dos resultados

Neste capítulo, será efetuada uma análise e interpretação sobre os dados recolhidos ao longo da investigação, no sentido de obter informações sobre o contributo da realização de atividades investigativas em contexto de sala de aula. A análise dos dados foi efetuada tendo por base as transcrições das aulas, as notas de campo, o trabalho realizado pelos alunos e a observação direta durante a realização das propostas de trabalho.

4.1. Análise da prática matemática escolar dos alunos

Ao longo das aulas, os alunos discutiram em pequeno e grande grupo as propostas de trabalho, onde chegaram a conclusões mais ou menos válidas, tendo em conta os objetivos visados. Os aspetos mais relevantes serão descritos neste capítulo. É de salientar que também serão apresentados alguns dos trabalhos realizados pelos alunos de forma a mostrar evidências dos resultados da investigação desenvolvida pelos mesmos e os raciocínios efetuados ao longo do trabalho.

4.1.1. Análise da prática matemática escolar dos alunos

A primeira atividade investigativa foi realizada na área de formação pessoa e social (FPS). Foi utilizada esta aula uma vez que o programa curricular de matemática não estava a ser cumprido. Nesse sentido, houve a necessidade de dar mais aulas extras para que o programa fosse cumprido na íntegra. Os alunos já tinham sido informados de que, na aula de FPS, iriam realizar uma atividade da disciplina de matemática.

O início da aula foi gerido pela diretora de turma e pelo seu par pedagógico, as quais orientaram os alunos para o preenchimento de um inquérito sobre o Projeto de Educação, Sexualidade e Afetos. Nesta parte da aula vários alunos questionaram-me:

- Professora, o quê que vamos fazer hoje na aula?

- Para quê esses sacos? O quê é isso?

- Vamos trabalhar em grupo?

Alguns alunos foram, inclusive, chamados à atenção pelas professoras pelo facto de estarem a falar comigo e a responder ao inquérito sem lerem com a devida atenção as questões.

A turma no geral estava eufórica, curiosa e com pressa para que a aula de matemática se iniciasse.

A aula de matemática iniciou-se com o pedido aos alunos para formarem grupos de cinco elementos, sendo que foram formados quatro grupos. No quadro abaixo está descrita a constituição dos grupos, sendo que os nomes apresentados são fictícios.

	Grupo I	Grupo II	Grupo III	Grupo IV
Nome dos alunos	Jordão José Carina Evandro Elsa	André João Alcindo Guido Mário	Maria Alexandra Cristiana Celeste Fátima	Jéssica Débora Pedro Daniel António

Quadro 1: Constituição dos grupos na primeira proposta de trabalho

O trabalho propriamente dito iniciou-se com um momento de conversa para contextualizar a atividade que se iria realizar e a organização da mesma. Neste momento da aula, foi possível constatar que os alunos estavam todos atentos, mais do que o habitual, às explicações e mostraram-se disponíveis para ajudar com a distribuição do material. No geral, os alunos foram céleres na formação dos grupos e não se registou qualquer incidente durante todo o processo. Apenas há a registar o facto de as alunas Jéssica e Débora não se terem associado logo ao grupo de trabalho. Só depois de serem alertadas que não poderiam trabalhar sozinhas é que as mesmas integraram o grupo. Penso que esta relutância das alunas ficou a dever-se ao facto de os restantes elementos do grupo serem rapazes.

Iniciou-se a atividade (vide anexo 1) com a distribuição do material, das tampinhas e dos quadradinhos de madeira, e de um exemplar da proposta de trabalho por cada aluno. Posteriormente, cada grupo iniciou o trabalho.

As alíneas da primeira questão tinham por base intuir as noções de forma e de tamanho de figuras.

Quando estava a transmitir as últimas instruções sobre a atividade e a dizer que já podiam iniciar a tarefa, dois elementos do grupo dois, o Guido e o João perguntaram: “Professora, podemos ir ao livro?”. Como estava a falar, apenas declinei com um gesto negativo. Naquele momento, não me apercebi de que o grupo já estava a trabalhar, apenas constatei durante a análise das filmagens. Os alunos estavam com algumas dúvidas, por isso, queriam consultar o livro.

Na primeira alínea, era pedido aos alunos para construírem com o material e desenhar no caderno duas figuras com “o mesmo tamanho (mesmo comprimento ou área)”. Todos os grupos responderam assertivamente à primeira alínea e não apresentaram grandes dúvidas. Foi possível constatar que mesmo dentro do próprio grupo houve alunos que construíram figuras diferentes.

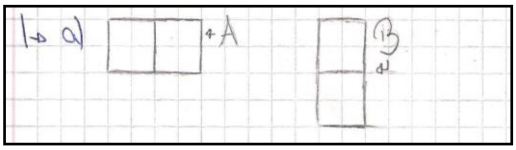


Figura 1 – Resposta da Alexandra à 1.ª alínea da questão 1.

Foi notória a importância da utilização dos materiais para alguns alunos, na medida em que fizeram uso destes para desenhar no caderno, através do decalque, ou seja, fizeram o contorno das figuras como é possível observar na figura abaixo.

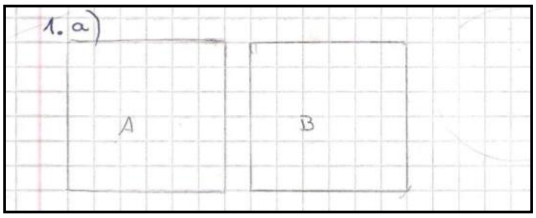


Figura 2 – Resposta do Guido à 1.ª alínea da questão 1.

Apesar de as questões serem claras, os alunos não as leram com a devida atenção. No enunciado, era pedido para desenharem duas figuras, no entanto o grupo I já estava a responder à alínea seguinte antes de concluírem a primeira, como mostra o seguinte diálogo:

Prof: O que é que acabaram de fazer?

José: Um quadrado.

Jordão: Juntei quatro quadradinhos.

Prof: Sim, e obtiveste o quê?

Jordão: Um quadrado maior.

Prof: Portanto, obtiveste quantas figuras?

Jordão: Quatro. [Referia-se aos quatro quadradinhos unitários que constituíam o quadrado por ele formado.]

Carina: Uma.

Prof: E o que é pedido no enunciado?

Jordão: O mesmo tamanho e o mesmo comprimento.

José: Duas figuras.

Prof: Então?

Jordão: Têm de ser as duas iguais?

Prof: Não sei… [lendo o enunciado] "duas figuras que tenham o mesmo tamanho"…

Jordão: Então pode ser.

Este grupo de alunos parece não ter dado muita importância às questões que foram colocadas, uma vez que não investiram muito tempo na sua interpretação. As questões foram analisadas de uma forma muito superficial e não de uma forma global. O grupo de alunos supracitado não respondeu corretamente à questão, porque menosprezou a expressão "duas figuras", sendo que este facto também ocorreu com outro grupo. Acho que os alunos não interpretam corretamente as questões, uma vez que já estão familiarizados com questões mais diretas, que se iniciam sempre com um verbo operatório.

Na alínea b), pretendia-se a construção de duas figuras com "a mesma forma". Nesta questão, todos os grupos de trabalho chegaram a uma das respostas pretendidas e não manifestaram qualquer dúvida. Todos os grupos de trabalho efetuaram construções diferentes e a maioria optou por figuras congruentes, como se pode verificar pela resposta seguinte:

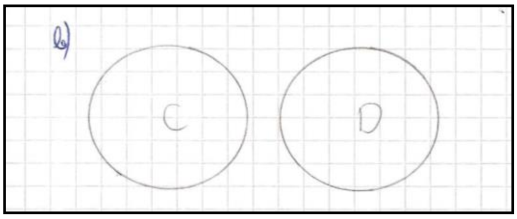


Figura 3 – Resposta do André à 2.ª alínea da questão 1.

Relativamente à alínea c), era solicitada aos alunos a construção de duas figuras com "a mesma forma e o mesmo tamanho". O segundo grupo manifestou algumas dúvidas ou pelo menos queriam confirmar o que estavam a pensar, como é possível verificar pelo seguinte diálogo:

> **Prof:** Então, qual é a dúvida?
>
> **Alcindo**: Alínea c).
>
> [Depois de a professora ler a pergunta em voz alta para se inteirar da questão, os alunos começaram a interagir.]
>
> **Mário:** É sempre igual. [Apontando para as figuras que construiu nas alíneas anteriores.]
>
> **Prof:** Será que terá de ser sempre igual?
>
> **André:** Não, podemos fazer diferente, dois quadrados juntos.
>
> **João**: Sim!
>
> **Mário**: Um retângulo.
>
> **João:** Ah! Pode ser qualquer forma, desde que as duas figuras sejam iguais.

Através da troca de impressões entre os alunos, foi possível constatar que alguns elementos do grupo estavam a duvidar da resposta, uma vez que as figuras que iriam construir eram iguais às construídas nas alíneas anteriores e daí a insegurança na resposta. Os alunos cingiram-se apenas ao trabalho realizado nas alíneas anteriores e não investigaram outras hipóteses. Não manifestaram espírito crítico. No entanto, depois de alertados para outras possibilidades, tomaram consciência da diversidade de respostas. Houve grupos que tiveram o cuidado e a preocupação de não repetir construções, pois segundo os mesmos seria mais vantajoso quando fossem responder à segunda questão. Alguns elementos deste grupo, antes de iniciarem a tarefa, leram toda a proposta de trabalho.

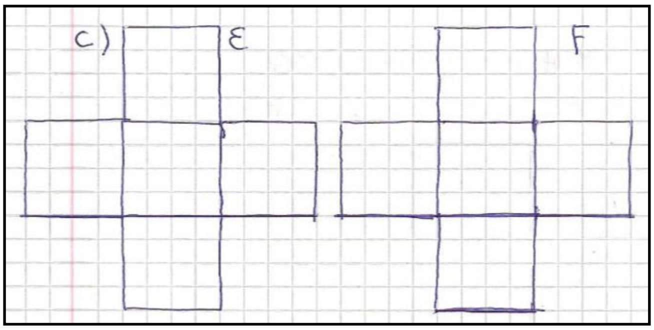


Figura 4 – Resposta da Débora à 3.ª alínea da questão 1.

A partir de determinada altura, já era possível verificar que alguns alunos já estavam a familiarizar-se com a câmara de filmar e já era notório algum esforço para estabelecerem uma comunicação e trocarem ideias. A falta de comunicação que existiu, na fase inicial nos grupos, não ficou a dever-se apenas ao facto de os alunos estarem a ser filmados. Até porque, alguns deles brincaram com o material e em alguns momentos falaram sobre assuntos extra-aula e não se incomodaram por estarem a ser filmados. Penso qua a justificação mais plausível, prende-se com o facto de os alunos não estarem habituados a realizar este tipo de tarefas e por apresentarem dificuldades ao nível da comunicação matemática. No geral, os alunos desta turma são pouco participativos, no entanto era visível alguma evolução a nível das interações no grupo.

No que concerne à alínea d), era pedido para serem construídas duas figuras com “a mesma forma, mas tamanho diferente”. Nesta alínea, o André manifestou dúvidas, as quais foram esclarecidas pelos restantes elementos do grupo.

> **André**. A mesma forma e o tamanho diferente?
>
> **João**: Sim, tipo fazer um retângulo que é a mesma forma, mas ter …
>
> **Alcindo**: Fazes um com dois e um com três. [Referindo-se a um retângulo com dois quadradinhos unitários e outro com 3.]
>
> **João**: Sim! Isso, um com três.
>
> **André**: Ah! Já percebi!

É possível constatar que apesar de as explicações dadas ao André não terem sido efetuadas com muito rigor, ele demonstrou que percebeu a explicação dos colegas. Foi curioso verificar que, apesar de o grupo ter construído dois quadrados com dimensões diferentes o, João e o Alcindo optaram por dar outro exemplo quando explicavam ao André. Este optou por efetuar uma construção diferente dos restantes elementos do grupo, como é possível verificar na figura seguinte:

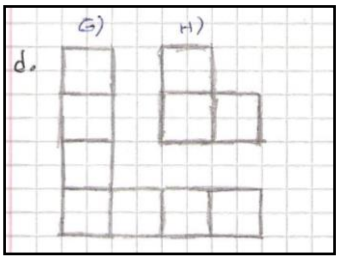


Figura 5 – Resposta do André à 4.ª alínea da questão 1.

No que respeita à alínea e), pedia-se para serem construídas duas figuras com “o mesmo tamanho, mas formas diferentes”.

Num dos grupos de trabalho, podemos constatar uma pequena discussão, a qual chamou-me à atenção, uma vez que estava relativamente próximo:

João: É o mesmo tamanho, mas a forma diferente, podes fazer…

Guido: É igual à d. [Referindo-se à alínea d).]

João: Não! Esta é a mesma forma… [Apontando para a alínea d).]

Guido: A mesma forma é o quê?

A dúvida do Guido não está relacionada com a forma da figura, mas sim com uma má leitura e interpretação das alíneas d) e e).

João: A mesma forma é o retângulo. E o tamanho diferente é que este tem dois e este tem três. E… mas é ao contrário.

[A professora, ao aperceber-se de que o Guido não tinha percebido a explicação do colega, interveio na discussão.]

Prof.: Não percebi o que estavas a explicar.

João: Estava a dizer que na c) é a mesma forma e o mesmo tamanho. Na c) não… na d).

Prof: A mesma forma, mas tamanhos diferentes!

João: Sim, isso! A mesma forma é o retângulo e que … mas a forma é diferente.

Prof: A forma é diferente?

João: Não! O tamanho é que é diferente, este tem dois quadrados e este tem três.

Prof: Então, o que que podemos dizer? Têm a mesma forma ou não?

João: Têm e tamanhos diferentes.

Por aquilo que observei, arrisco-me a dizer que a dificuldade que os alunos apresentaram deveu-se à forma como a questão estava estruturada. Nas alíneas anteriores, as questões iniciavam-se sempre com "a mesma forma", sendo que o final da questão dizia respeito ao tamanho. Nesta alínea apenas foi efetuada uma pequena variação relativamente à ordem e eram pedidas formas diferentes, o que confundiu os alunos.

Alcindo: E, a seguir, é ao contrário. [Referindo-se à alínea e).]

Prof: Então, e, agora na alínea e), como é que vão fazer?

João: Podemos fazer assim, porque os quadrados têm sempre o mesmo tamanho. [O João exemplifica com os quadradinhos uma possível construção.]

Guido: Sim! [Concordando com a construção efetuada pelo colega.]

João: Têm formas diferentes, mas têm a mesma área.

Guido: Os cubos têm a mesma área!

Prof: Os cubos?

André: Os quadradinhos.

Guido: É o mesmo tamanho, a área é a mesma, mas a forma é diferente.

André: O mesmo tamanho, mas formas diferentes? [Olhando para o trabalho dos colegas.]

Por breves instantes, fez-se silêncio no grupo e ficaram todos a olhar para o André, pois aperceberam-se de que este não estava a acompanhar o raciocínio do grupo.

André: Na e), as formas são diferentes… [Referindo-se à alínea e).] Hum…não percebo.

João: É o mesmo tamanho, porque a área é a mesma. Mas a forma é diferente.

André: Ah! Tá certo.

Prof: E se não pensarmos em termos de área. As figuras terão o mesmo tamanho?

André: Não!

Mário: O perímetro desta figura é maior do que esta. [Apontando para a figura I.]

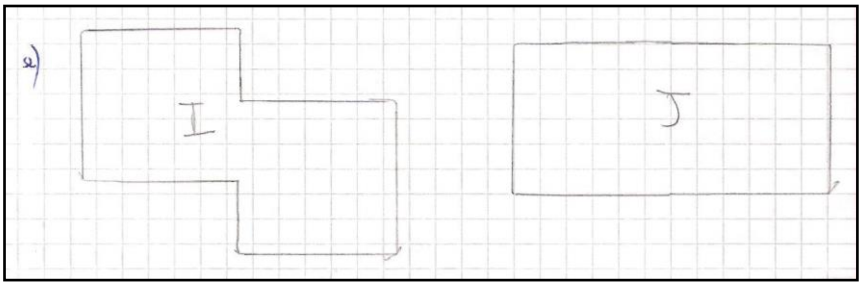


Figura 6 – Resposta do João à 5.ª alínea da questão 1.

Relativamente à alínea f), era pedido para serem construídas duas figuras com “forma e tamanho diferentes”.

Esta questão não deu azo a troca de ideias, alguns alunos limitaram-se a ouvir e a reproduzir as ideias dos colegas.

Alcindo: Esta é mais fácil: é fazer um quadrado e uma bola. [Referindo-se a uma circunferência.]

João: Não. Fixe!

Guido: Separado? [Olhando para o trabalho dos colegas.]

Alcindo: Claro!

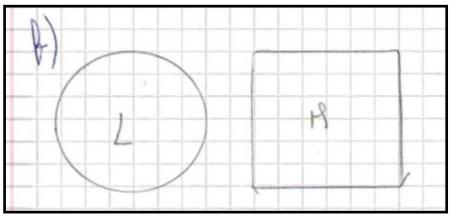


Figura 7 – Resposta do Alcindo à 6.ª alínea da questão 1.

Um elemento deste grupo ao terminar a primeira questão deparou-se com uma nota que pedia para nomear as figuras construídas anteriormente. Esta nota gerou algumas dúvidas, que foram resolvidas pelo grupo, como podemos constar pelo seguinte diálogo:

Mário: Olha, nota…nomeia cada figura que construíste, atribuindo-lhe uma letra? Pôr A, B, C, D? [Lendo a nota do enunciado.]

André: Então, a gente tem que assinalar cada uma.

Os alunos começaram a nomear as figuras construídas anteriormente.

João: Não sei se é isso. [Os restantes elementos do grupo continuam a nomear cada uma das figuras, enquanto o João observa.]

João: Porque, vê… [Lê novamente o enunciado.]

Alcindo: Agora na 2 mete-se as letras. [Referindo-se à segunda questão.]

João: Mas, aqui, quando estas figuras são iguais, não é preciso nomear, não é?

André: Não!

João: Porque se tivermos figuras diferentes… [Lê o enunciado em voz alta] "nomeia cada figura que construíste, atribuindo-lhe uma letra", deve ser só as diferentes.

Alcindo: Mas, aqui, quando for figuras congruentes vais colocar A A? [Referindo-se à resposta a dar na alínea a) da questão 2.1.]

Mário: Tens de colocar A e B.

João: Tá bem!

Um dos objetivos das alíneas da segunda questão era que os alunos descobrissem figuras semelhantes e compreendessem a noção de semelhança. Para isso, teriam de recorrer às construções efetuadas na questão anterior para mostrarem exemplos de figuras que obedecessem às condições apresentadas.

Na alínea a) era pedido para serem identificadas, pelas letras correspondentes, “duas figuras congruentes” e justificar. Nesta questão, alguns grupos manifestaram dificuldades, pois não sabiam o que era ser congruente, como podemos constatar pela seguinte transcrição:

Prof: Então, o que é ser congruente?

Jordão: Ter o mesmo…

[Por breves instantes, o grupo manteve-se em silêncio.]

Prof: Dá-me um exemplo de uma figura congruente com esta tampa.

Jordão: Aquela. [Apontando para outra tampa.]

Prof: Então, o que é ser congruente?

Evandro: Ter o mesmo comprimento e a mesma largura.

Jordão: Ter a mesma área.

Prof: Hum, então, vocês dizem que, para duas figuras serem congruentes, elas têm de ter a mesma área. [A professora constrói duas figuras, com o auxílio dos quadradinhos de madeira, com a mesma área, que não eram congruentes, como ilustra a figura abaixo.]

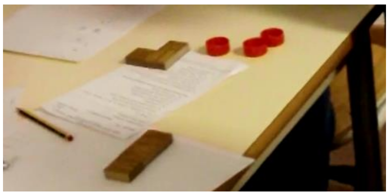


Figura 8 – Construções efetuadas pela professora

Prof: Estas duas figuras têm a mesma área?

Jordão: Sim.

José: Não.

Prof: Sim ou não?

Jordão: Sim, esta tem três quadradinhos e esta também, logo têm a mesma área.

Prof: E elas são congruentes?

Jordão: Não.

Prof: Então?

Carina: O facto de terem a mesma área não significa que sejam congruentes.

Prof: Muito bem! Então, o que são figuras congruentes?

Carina: Quando são geometricamente iguais.

Embora a Carina tivesse a noção do que era ser congruente, não partilhou as suas ideias com os colegas antes da chegada da professora. Esta aluna apresenta falta de confiança relativamente aos seus conhecimentos, daí não querer expor-se perante os colegas sem ter a certeza da resposta que iria dar. A resposta da aluna gerou espanto no grupo e foi notória a sua satisfação.

Uma vez mais a utilização do material manipulável foi crucial para que estes alunos relembrassem a noção de figuras congruentes. Os materiais manipuláveis aliados a atividades investigativas ou atividades exploratórias são fundamentais para a compreensão e construção do conhecimento matemático.

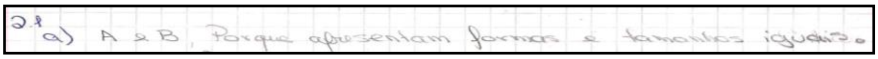


Figura 9 – Resposta do João à questão 2.1. a).

Relativamente à alínea b), era pedido para serem identificadas, pelas letras correspondentes, "duas figuras em que uma seja a ampliação da outra". Nesta questão, a ajuda da professora foi muito requisitada por todos os grupos. Alguns alunos manifestaram dificuldades, pois, apesar de terem a noção do significado da palavra "ampliar", não sabiam como aplicar neste contexto, como podemos verificar na seguinte transcrição:

Prof: O que é uma ampliação?

Débora: Aumentar.

Prof: Aumentar? E aumentar como?

[Fez-se silêncio no grupo.]

Prof: Estas duas figuras são uma ampliação da outra? [A professora construiu as figuras seguintes.]

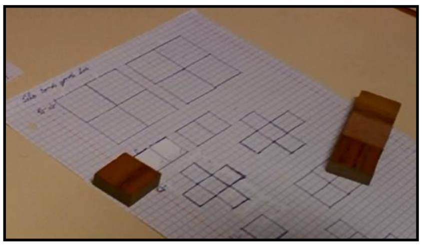


Figura 10 – Construções efetuadas pela professora

Débora: Não.

Prof: Não? Porquê Débora?

Débora: Porque isto é um quadrado e isto é um retângulo. [Apontando para as figuras.]

Prof: Então, olhando para as vossas figuras, quais serão uma ampliação?

Jéssica: A G e a H.

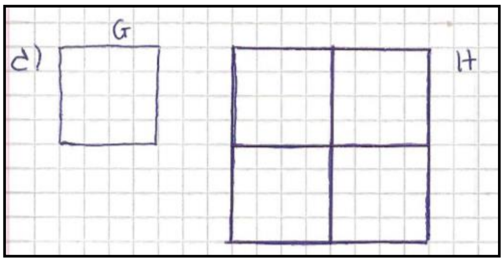


Figura 11 – Exemplo dado pela Débora à questão 2.1 b).

Prof: Porquê essas figuras e não outras?

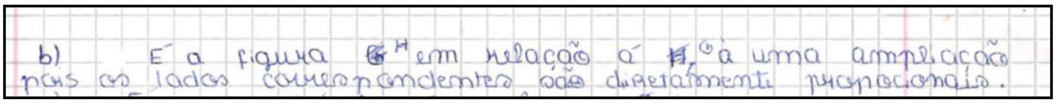
Jéssica: Porque tem a mesma forma e os lados são proporcionais.

Prof: Muito bem! Da figura G para a H há uma ampliação. E da H para a G?

Pedro: Redução.

Uma vez mais, verificou-se que os alunos não confiam nos seus raciocínios e estão constantemente à espera que o professor valide as suas respostas.

Depois de algumas achegas, os alunos procederam ao registo da resposta no caderno, complementando a resposta como podemos verificar:



b) É a figura ~~G~~ H em relação á ~~H~~ G à uma ampliação pois os lados correspondentes são diretamente proporcionais.

Figura 12 – Resposta da Jéssica à questão 2.1. b).

O termo "ampliação" foi de facto o que gerou mais dúvidas e incertezas nos diversos grupos. Notou-se que alguns grupos estavam a efetuar raciocínios válidos, no entanto não estavam a exprimir-se bem, daí que a discussão gerada fosse muito confusa, como é possível verificar na descrição abaixo:

Guido: O que é uma ampliação? Já não me lembro.

Alcindo: Ampliar é ampliar duas vezes mais o tamanho.

Prof: Só duas vezes?

Mário: Três, quatro…

Alcindo: Pode-se fazer tipo, como é que digo … a G e a H.

Guido: Pode-se fazer, tipo, um quadradinho.

Prof: Então, experimentem.

Guido: A G é um retângulo, tem de ser quatro.

Mário: Não!

Segundo o Alcindo e o Mário, a figura H (retângulo quatro por dois quadradinhos unitários) era uma ampliação da figura G (quadrado com quatro quadradinhos unitários). Neste caso, os alunos apenas estavam a comparar uma das dimensões, daí estarem convencidos de que estavam corretos. O Guido ainda tentou alertar para o erro, mas como não se explicou muito bem, os colegas não exploraram a sua sugestão. Posteriormente, a professora interveio:

Prof: A G e H têm um pormenor que não está bem.

Mário: Como assim?

Prof: Olha lá bem para as figuras.

Mário: Está certo!

Prof: Está? De certeza?

Mário: Ah! Tem razão. Tinha que ter mais dois para baixo.

Prof: Exatamente!

Pelo diálogo anterior, é possível verificar que a professora não acrescentou à discussão nada de novo, apenas conduziu os alunos a observar melhor as figuras e, consequentemente, exploraram melhor a sugestão do Guido. Os restantes elementos do grupo não estavam a visualizar as construções sugeridas pelo Guido e pelo Mário, daí a necessidade de recorrer ao material:

Prof: Vamos lá pegar nos quadradinhos e construir duas figuras, em que uma seja uma ampliação da outra.

João: Um e, depois com a ampliação, pode-se pôr o *zoom* da câmara e fica quatro. [Referindo-se a dois quadrados: um com apenas um quadradinho unitário e a outra figura formada por quatro quadradinhos.]

Prof: Esta figura é a ampliação desta? [A professora aponta para as figuras.]

Alcindo: É! É o dobro.

Prof: Ah! Esta é uma ampliação em relação a esta, quantas vezes?

Alcindo: Duas.

Guido: Quatro.

Prof: Porquê?

[O Guido pega no quadradinho unitário e sobrepõe nos quatro quadradinhos da figura ampliada.]

Prof: Será que é quatro?

André: Duas.

Prof: Porquê?

[Durante alguns instantes, fez-se silêncio no grupo.]

Prof: Então, Alcindo, porquê que dizias que eram duas?

Alcindo: Por causa dos lados, aumenta na mesma proporção em todos os lados.

João: Tá certo!

Prof: Daqui para aqui há uma ampliação. E daqui para aqui, o que está a acontecer?

Mário: Uma diminuição.

Prof: Hum…

Mário: "Desampliação".

Alcindo: Redução.

Prof: Sim, houve uma redução. E qual foi a proporção?

João: Metade.

Neste grupo de trabalho, através do diálogo que foi estabelecido, os alunos conseguiram perceber as noções de ampliação e redução. Chegaram com naturalidade à razão de semelhança das figuras.

Na figura abaixo, é possível observar uma das construções efetuadas por este grupo durante a discussão.

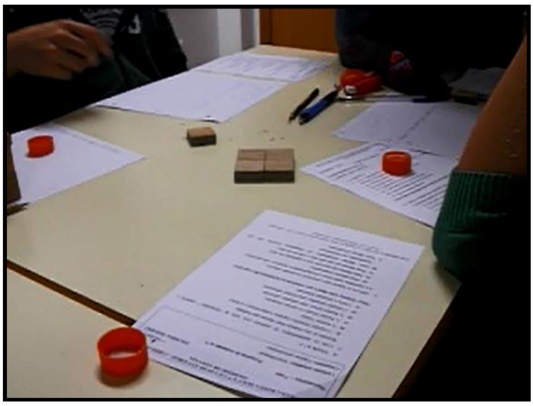


Figura 13 – Construção efetuada pelo João.

Na alínea c), era pedido para serem identificadas, pelas letras correspondentes, “duas figuras em que uma seja a redução da outra”.

Nesta alínea, os alunos não apresentaram dúvidas uma vez que este conceito estava relacionado com a alínea anterior e, como tal, já tinha sido abordado.

No que concerne à alínea d), era pedido para serem identificadas, pelas letras correspondentes, “duas figuras semelhantes em linguagem corrente, mas não semelhantes em matemática”.

No geral, os alunos apresentaram dificuldades, pois não tinham a certeza o que eram figuras semelhantes, como é possível apurar:

Prof: Ser semelhante é o quê?

Carina: Ser parecido?

Prof: O quê é isso de ser parecido?

Carina: Por exemplo, estas duas figuras são semelhantes (exemplifica, usando os quadradinhos de madeira, como ilustra a figura abaixo).

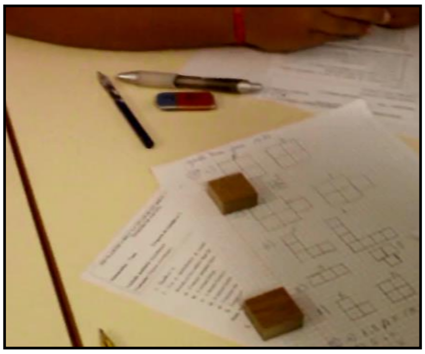


Figura 14 – Exemplo apresentado pela Carina.

Evandro: São iguais.

Prof: Já conseguimos tirar algumas conclusões?

Elsa: Para serem semelhantes, têm de ser congruentes.

Prof: E estas figuras serão semelhantes? [Apontando para duas figuras que os alunos tinham construído, como ilustra a seguinte figura.]

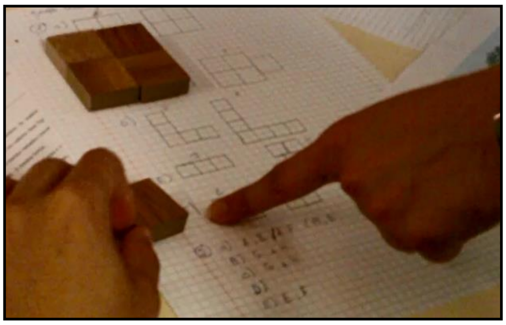


Figura 15 – Construções efetuadas pelo grupo I.

José: É

Prof: Porquê?

José: Porque um quadrado é maior do que o outro. Mas, é um quadrado à mesma.

Jordão: Professora, mas daqui p´ra aqui é ampliado.

Prof: Muito bem! Então o que é que são figuras semelhantes?

Jordão: Iguais.

Prof: Só isso?

Jordão: Ampliação.

José: Ou redução.

Prof: Então, acham que já estão em condições de responder à questão?

Jordão: Agora, sim!

Para além do termo "semelhante" ter gerado alguma controvérsia dentro dos grupos, a expressão "linguagem corrente" pareceu-me ter sido aquela que desencadeou maiores dúvidas e dificultou o trabalho dos alunos, fazendo com que os mesmos não progredissem.

João: O que é linguagem corrente?

Prof: É a linguagem que utilizamos no dia a dia. Por exemplo, se tiverem isto. [A professora construiu as figuras abaixo.]. Será que elas são semelhantes?

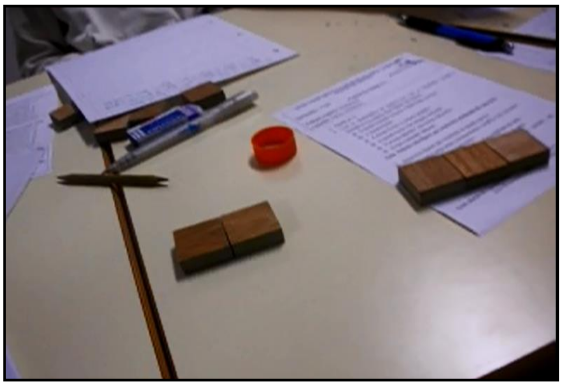


Figura 16 – Construções efetuadas pela professora.

André: São, mas não são iguais.

João: Em linguagem corrente?

Prof: Sim! Elas são as duas…

João: Retângulos.

Mário: Era o que eu estava dizendo, a I e a J.

Prof: Segundo o João, é semelhante em linguagem corrente porque são retângulos, ou seja, têm a mesma forma. E, agora, matematicamente?

João: Não são semelhantes porque esta tem dois quadrados e esta tem três.

Mário: Porque não têm a mesma área nem o mesmo comprimento.

Prof: Então, duas figuras semelhantes em matemática têm de ter…

Mário: A mesma área.

Prof: Vejamos! Estas duas figuras são semelhantes? [A professora construiu as figuras abaixo.]

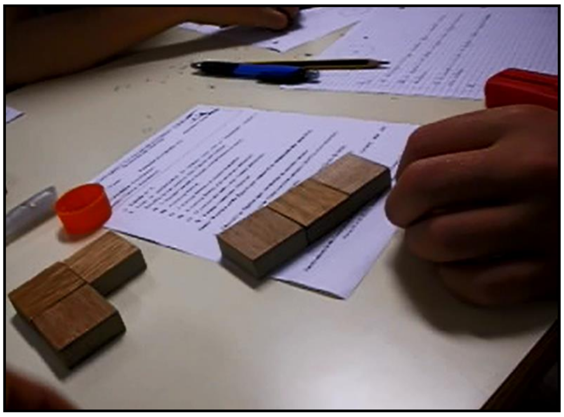


Figura 17 – Construções efetuadas pela professora.

Guido: Não.

Prof: Mas têm a mesma área.

Alcindo: Mas não têm a mesma forma.

João: Nem sequer são semelhantes em linguagem corrente!

Prof: Certo! Será que estas duas figuras são semelhantes?

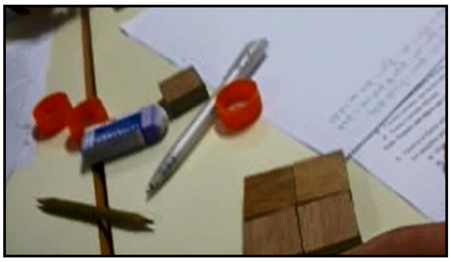


Figura 18 – Construções efetuadas pela professora.

Guido: Sim.

Prof: Em linguagem matemática ou em linguagem corrente?

João: São as duas um quadrado, mas não são iguais em linguagem matemática.

Prof: Sim! Iguais, de facto, não são. Mas serão semelhantes em linguagem matemática?

Mário: Não.

Prof: Porquê?

Mário: Porque esta vale dois quadrados e … [Referindo aos lados do quadrado.]

Guido: Olha, esta é maior do que esta.

Prof: Também! E isso …

João: É uma ampliação.

Prof: Então, há uma ampliação. E elas não são semelhantes matematicamente?

João: São.

Prof: Claro que sim, e porquê?

João: São as duas um quadrado.

Prof: Bem, então como é que terá que ser para serem semelhantes matematicamente?

Alcindo: Têm que ter a mesma forma.

Mário: E a mesma área.

É possível constatar que esta discussão não estava a ser muito esclarecedor, principalmente para o Mário, no entanto é de louvar o facto de os alunos permanecerem firmes com as suas respostas e não abandonarem a discussão. O Mário é um aluno que apresenta dificuldades de aprendizagem e normalmente não participa de uma forma espontânea nas aulas, apenas o faz quando solicitado. Porém, nesta aula teve uma participação muito produtiva.

Prof: Hum! Construam duas figuras semelhantes matematicamente.

Guido: A mesma "dá pedaço".

André: Um quadrado.

[O João e o André construíram as figuras.]

Guido: Está bom, assim! [Dirigindo-se ao André que queria juntar mais quadradinhos à construção.]

Prof: Elas são semelhantes matematicamente?

João: São e, também, em linguagem corrente.

Prof: O que é que está a acontecer daqui para aqui?

André: Uma ampliação.

Alcindo: E, ao contrário, uma redução.

Prof: Mário, elas têm a mesma área?

Mário: Não.

Prof: E agora? Não têm a mesma área, mas são matematicamente semelhantes.

Mário: Pois! [Risos.]

Prof: Então, o que podemos concluir?

Mário: Para serem semelhantes pode ser uma ampliação ou redução.

Prof: E mais?

Alcindo: Têm de ter a mesma forma.

André: Mas, se ela é ampliada ou reduzida já tem a mesma forma.

Alcindo: Tens razão!

Prof: E será que duas figuras congruentes serão matematicamente semelhantes?

Guido: Sim.

Passado algum tempo, este grupo voltou a solicitar a ajuda da professora, pois constataram que, na primeira questão, não tinham construído figuras que fossem semelhantes em linguagem corrente e que não fossem semelhante matematicamente, daí a necessidade de construírem as seguintes figuras:

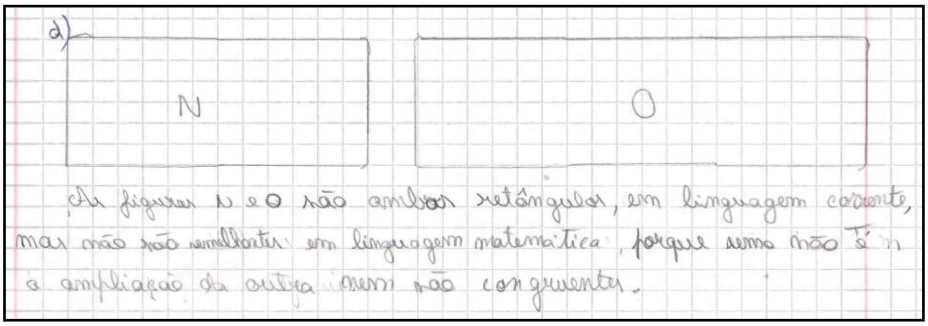


Figura 19 – Resposta de um aluno do grupo II à questão 2.1. d).

Pela resposta dos alunos, apesar de não estar completa, ficamos com a noção de que o grupo realmente percebeu o que se pretendia.

Relativamente à alínea e), era pedido para serem identificadas, pelas letras correspondentes, “duas figuras semelhantes”.

Nesta questão, já não surgiram dúvidas, uma vez que o conceito já havia sido clarificado na alínea anterior.

A segunda aula realizou-se no dia dezanove de junho e foi uma aula de quarenta e cinco minutos. Nesta aula, foi feita a discussão em grande grupo da atividade realizada na aula anterior.

A professora, nesta aula, desempenhou o papel de mediadora e optou por uma discussão transversal, isto é, não se limitou apenas a analisar questão a questão, mas tentou interligar várias questões em simultâneo. Na aula antecedente, foram recolhidos os trabalhos realizados pelos alunos para efetuar o *scanner* dos mesmos, uma vez que estes faziam parte dos dados a analisar. Como os trabalhos dos alunos foram analisados posteriormente com mais rigor e em pormenor e como a professora tinha a perceção das dúvidas apresentadas pelos alunos ao longo da realização da tarefa, a discussão, sempre que possível, foi encaminhada para esses grupos de alunos.

Na discussão da questão 1.a), chegou-se à conclusão de que as figuras construídas por um dos grupos tinham a mesma forma e o mesmo tamanho. Depois disto, é lançada a seguinte questão à turma:

> **Prof**: O que é que posso dizer relativamente a duas figuras que tenham a mesma forma e o mesmo tamanho?
>
> **Alexandra**: São congruentes.
>
> **Prof**: Toda a gente concorda com a Alexandra?
>
> [Os alunos respondem em coro que sim.]
>
> **Prof:** Então, o que é isso de ser congruente?

Maria: Quando são iguais. Quando coincidem ponto por ponto.

No seguimento da discussão anterior, o Pedro acrescentou que “os quadriláteros têm 360º”. A partir desta afirmação gerou-se a seguinte discussão:

Pedro: E os quadriláteros têm 360º.

Prof: Bem, o Pedro já está a falar na amplitude dos ângulos. Estás a dizer que para duas figuras serem congruentes, a soma das amplitudes dos ângulos têm de ser iguais? É isso?

Pedro e Carina: Sim. [Em coro.]

[A professora desenha no quadro um quadrado e um retângulo, assinalando os ângulos.]

Prof: Portanto, segundo vocês, podemos concluir que estas duas figuras são congruentes. De facto, são quadriláteros e a soma das amplitudes dos ângulos internos é 360º.

Pedro: Tá bem! Está errado, não tem nada a ver.

Nesta discussão, foi possível verificar que o aluno tentou investigar e conjeturar outras possibilidades, no entanto sem sucesso. Os alunos paulatinamente foram evoluindo e começaram a ganhar confiança para investigar outras hipóteses.

A discussão da questão 1.b) foi muito rica e produtiva ao nível de raciocínios e comunicação dos mesmos. A discussão iniciou-se porque a Carina fez o seguinte comentário:

Carina: Toda a gente, de certeza, tem tudo certo! É igual à a).

O grupo da Carina, na alínea a), construiu duas figuras congruentes, daí a sua observação. De facto, como as figuras são congruentes têm a mesma forma e, consequentemente, poderia ser a resposta à segunda alínea. Para desmistificar um pouco a ideia de que apresentar a mesma forma terá de ser obrigatoriamente congruente, foi pedido à Cristiana para representar no quadro a sua resposta.

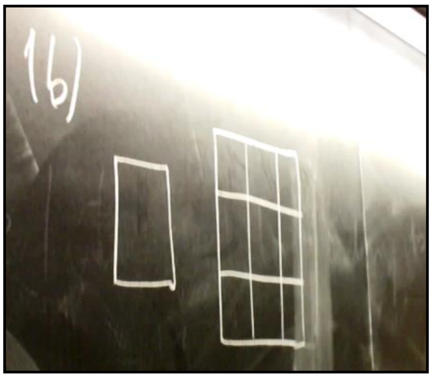


Figura 20 – Resposta da Cristiana à questão 1.b).

Prof: Estas duas figuras têm a mesma forma?

Jéssica: Sim!

Mário: Tem! Só que têm tamanhos diferentes.

Carina: Só que é ampliado.

Prof: Muito bem! E porque dizem que há uma ampliação?

André: Porque de uma figura para a outra aumenta o mesmo tamanho!

Prof: Concordam?

Prof: Tinha este (referindo-se a um quadradinho unitário), para aqui aumentou dois e para aqui aumentou também dois. [Apontando para as figuras]. É isto, André, que querias dizer?

Mário: É uma ampliação.

André: Sim!

Prof: A Cristiana aumentou a figura na horizontal…

Mário: E na vertical.

Prof: E na vertical, na mesma proporção. Como aumentou a mesma proporção, portanto os lados são diretamente proporcionais, então, aí, sim, há uma ampliação.

Alexandra: A minha figura está diferente!

Prof: Bem, isso é que eu não percebo, uma vez que vocês são do mesmo grupo.

[A professora desenha no quadro as figuras abaixo construídas pela Alexandra.]

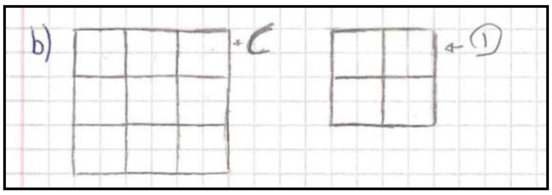


Figura 21 – Resposta da Alexandra à questão 1.b).

Prof: Vamos observar as figuras construídas pela Alexandra.

André: Isso não está certo?

Prof: Têm a mesma forma?

André: Não! Porque em cima tinha de fazer…por exemplo, em cima, tinha de fazer dois quadrados e só tem um e meio.

Através do desenrolar do diálogo, ficamos com a perceção de que o André não responde à pergunta inicialmente formulada pela professora ("Têm a mesma forma?"), mas que continua a pensar na ampliação das figuras. É possível verificar ainda que o diálogo efetuado por este aluno e pela professora é confuso, pois esta não estava a acompanhar o raciocínio do aluno.

Prof: Um e meio?

André: Aí, na horizontal.

Prof: Um, dois, três? [Contando os quadradinhos da figura C.]

André: Não é isso!

Prof: Um, dois. [A professora conta os quadradinhos do lado da figura D.]

André: Tinha que estar quatro. Quatro quadrados daqueles.

Prof: Não percebi?

Pedro: Em vez de serem três deviam ser quatro.

Prof: Em vez da figura C ser um quadrado três por três deveria ser quatro por quatro? É isso? [A professora representou no quadro as figuras que o André estava a pensar.]

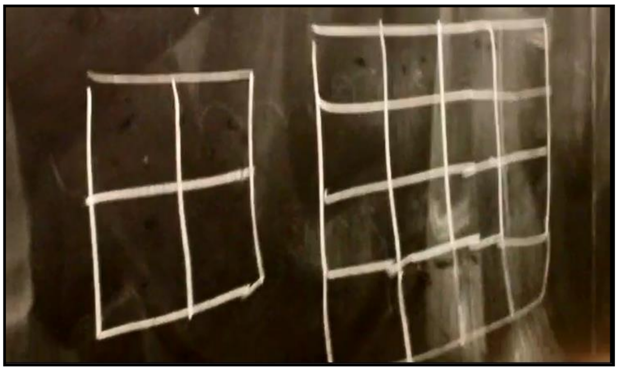


Figura 22 – Esquema efetuado pela professora através das sugestões do André.

Prof: É isto, André?

André: Sim! Assim, já ficava uma ampliação.

Prof: E qual seria a proporção da ampliação?

Pedro: Dois.

Prof: Muito bem! De dois porquê?

Jéssica: Porque a cada quadrado corresponde dois quadrados.

Prof: Certo! Então eu tenho que comparar os lados.

Mas será que nas figuras da Alexandra não havia uma ampliação? (vide figura 21)

André: Está errado!

João: Não! Está certo.

André: Tá errado.

João: A Alexandra aumentou na horizontal e na vertical.

Prof: E na mesma proporção. Aqui, em vez de ter um quadrado a corresponder a dois, tinha um quadrado e mais metade de outro. Tinha um e meio. [Apontado para as figuras desenhadas no quadro.] Portanto, há uma ampliação de razão um e meio.

André ficou percebido agora?

André: Sim, eu pensava que tinha de ser números inteiros.

Através do relato anterior, foi notória a falha de comunicação, no entanto é de louvar a capacidade do Pedro em acompanhar o raciocínio e as explicações do André, uma vez que se trata de um aluno acompanhado pela educação especial e que, muito raramente participa. A partir da discussão gerada, foi possível introduzir a noção de razão de semelhança, todavia esta não foi aprofundada visto ser o tema da segunda atividade. Pela análise das gravações, pude constatar que, apesar de o diálogo efetuado entre mim e o André não ter acontecido da melhor forma, os restantes alunos estavam atentos.

A discussão das restantes alíneas decorreu de uma forma mais calma e não surgiram opiniões divergentes.

4.1.2. Atitude dos alunos e reflexões sobre a primeira proposta de trabalho

Na realização da primeira atividade, os alunos, no início, distraíram-se com as câmaras de filmar e brincaram com o material, sendo que, inicialmente, foi dado um tempo para manusearem de forma livre o material.

Esta primeira proposta de trabalho foi de carácter introdutório e foi estruturada mais numa base de tarefa exploratória do que propriamente de uma atividade investigativa, uma vez que esta era a primeira atividade deste género que os alunos iriam desenvolver. Apesar de esta tarefa não ter proporcionado aos alunos muitos momentos de investigação e exploração, foi muito produtiva e enriquecedora.

Nesta fase, um dos objetivos era ver como os alunos iriam reagir a este tipo de atividades. Foi notório o envolvimento de todos os alunos na tarefa, os quais foram muito organizados. Apenas há a lamentar o facto de a comunicação não ter sido muito produtiva, uma vez que, inicialmente, os alunos estavam relutantes relativamente à gravação da aula. Todavia, com o desenrolar da mesma, foram-se abstraindo das câmaras e reagindo naturalmente.

Após o término da primeira proposta de trabalho, foi pedido aos alunos para escreverem uma reflexão onde dessem a sua opinião relativamente à aula e à atividade desenvolvida. É de referir que quase todas as respostas foram unânimes. Os alunos gostaram da atividade e de trabalhar em grupo, sendo que alguns grupos fazem referência à utilização do material manipulável. Foi notória a importância da utilização deste tipo de material no processo de aprendizagem dos alunos, que se tornou mais produtiva e intuitiva. Ao longo da aula e através da observação direta, pude constatar que este tipo de material facilita e auxilia no processo de exploração e descoberta. Os excertos abaixo mostram as respostas dadas pelos alunos, sendo de assinalar que algumas apresentam erros científicos e ortográficos:

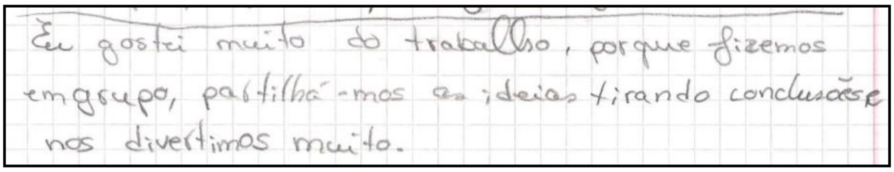

Eu gostei muito do trabalho, porque fizemos
emgrupo, partilhá-mos as ideias tirando conclusões e
nos divertimos muito.

Figura 23 – Opinião do Guido relativamente ao trabalho desenvolvido.

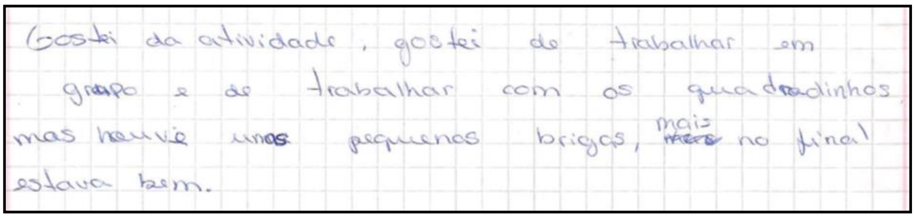

Gostei da atividade, gostei de trabalhar em
grupo e de trabalhar com os quadradinhos
mas houve uns pequenos brigas, mais no final
estava bem.

Figura 24 – Opinião da Cristiana relativamente ao trabalho desenvolvido.

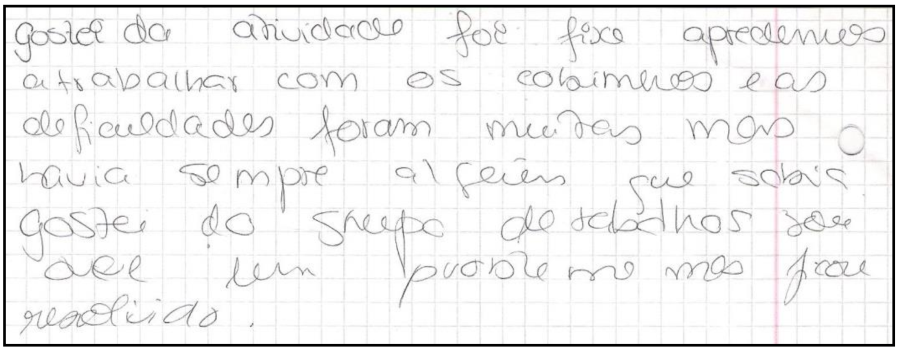

gostei da atividade foi fixe aprendemos a trabalhar com os cubinhos e as dificuldades foram muitas mas o havia sempre alguém que sabia gostei do grupo de trabalhos que tem problema mas foi realizado.

Figura 25 – Opinião da Maria relativamente ao trabalho desenvolvido.

Alguns alunos, durante a aula e nas suas respostas utilizaram muito o termo “cubinhos” quando queriam referir-se aos “quadradinhos”. Isto deve-se ao facto de, no segundo período terem trabalhado com cubinhos de madeira, daí fazerem a analogia ao mesmo material.

É de salientar que alguns alunos não gostaram que a aula fosse gravada, o que, de certa forma, deixou-os constrangidos e, consequentemente, comprometeu o seu desempenho. O seguinte excerto prova esta última afirmação:

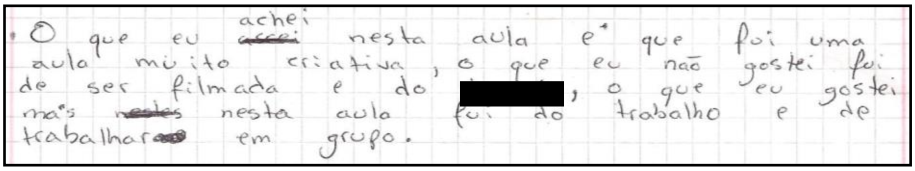

O que eu ~~acei~~ achei nesta aula é que foi uma aula muito criativa, o que eu não gostei foi de ser filmada e do [redacted], o que eu gostei mais ~~nestes~~ nesta aula foi do trabalho e de trabalhar em grupo.

Figura 26 – Opinião da Carina relativamente ao trabalho desenvolvido.

Na opinião desta aluna, houve a necessidade de ocultar o nome de um aluno por forma a manter o anonimato do mesmo. Estes dois alunos apresentam personalidades “fortes”, daí as suas opiniões divergirem muitas vezes. No entanto, é de realçar que o trabalho de grupo “correu” muito bem, como relata a própria aluna.

Apesar de muitos alunos não terem gostado de serem filmados, todos se mostraram disponíveis para participar no estudo e autorizaram as respetivas gravações.

4.1.3. Segunda proposta de trabalho

A segunda proposta de trabalho foi sobre figuras semelhantes e razão de semelhança (vide anexo 2). Um dos objetivos desta atividade era que os alunos compreendessem a noção de semelhança, relacionassem os conceitos de semelhança e proporcionalidade, determinassem a razão de semelhança e discutissem o efeito de uma ampliação ou redução sobre a área das figuras. Esta aula realizou-se na sala de informática visto que era necessário usar o Microsoft *Excel*. Os alunos trabalharam aos pares e, uma vez mais, a formação dos grupos de trabalho ficou ao critério dos mesmos.

Iniciou-se a atividade (vide anexo 2) com a distribuição de um exemplar da proposta de trabalho por cada aluno. Seguidamente, cada grupo iniciou o seu trabalho.

Devido à limitação do número de páginas deste trabalho, não foi possível analisar os dados desta segunda atividade investigativa.

Na segunda aula, realizou-se a discussão em grande grupo da segunda proposta de trabalho. Foi possível verificar que os alunos na sua grande maioria demonstraram raciocínios válidos e atingiram os objetivos pretendidos. Nesta atividade, houve uma maior participação dos alunos aquando da discussão em grande grupo.

Os alunos apresentaram muitas dúvidas nas questões 4.5. e 4.6. Nestas questões, os alunos não tiveram qualquer tipo de orientação, sendo de referir que, no geral, concluíram que a razão entre os perímetros das figuras era igual à razão de semelhança. Apenas dois grupos conseguiram concluir que a razão entre as áreas das figuras era igual ao quadrado da razão de semelhança. Foram notórios o esforço e o empenho dos alunos para conjeturarem as relações entre o perímetro, a área e a razão de semelhança de figuras.

A folha de Excel foi um instrumento fundamental para a concretização desta atividade, pois auxiliou todo o trabalho. A manipulação da figura, através da barra de deslocamento inserida na folha de Excel, permitiu aos alunos investigar a variação da razão de semelhança e a conjeturar a sua relação com a ampliação e a redução da figura.

4.1.4. Terceira proposta de trabalho

O objetivo desta proposta de trabalho (vide anexo III) era levar os alunos a investigar e a conjeturar os critérios de semelhança de triângulos. Para isso, tinham de construir e recortar triângulos, utilizando material de desenho e folhas coloridas, a partir do comprimento dos segmentos de reta e das amplitudes dos ângulos. Posteriormente, os alunos tinham de manipular os triângulos, de forma a investigar e a conjeturar os critérios de semelhança de triângulos e responder às questões propostas.

No início da aula, foi pedido aos alunos para formarem grupos de cinco elementos (foram formados quatro grupos). No entanto, há a salientar que o terceiro grupo foi constituído apenas por quatro alunos e isto deveu-se ao facto de estes alunos não estarem presentes na aula nos primeiros quarenta minutos. Os alunos supracitados estavam a realizar um teste de recuperação e, como chegaram mais tarde, formaram um grupo com seis elementos. A constituição dos grupos ficou ao critério dos alunos.

No quadro abaixo, está descrita a constituição dos grupos aquando da realização da terceira proposta de trabalho.

	Grupo I	Grupo II	Grupo III	Grupo IV
Nome dos alunos	José Jordão Pedro Jéssica Débora	Celeste Alexandra Elsa Evandro André	Guido Alcindo Mário João	Cristiana Maria Carina Fátima Daniel António

Quadro 2: Constituição dos grupos na terceira proposta de trabalho

Uma vez que os alunos estavam a demonstrar muitas dificuldades na construção do triângulo amarelo, a professora optou por iniciar esta construção em grande grupo:

> **Prof**: Como é que vou começar por desenhar um triângulo, sabendo as medidas dos seus três lados?
>
> **Jordão**: Quatro em baixo. Três e cinco nos lados. [O aluno referia-se às medidas dos comprimentos dos lados do triângulo amarelo.]
>
> **Prof**: Sim, pode ser. Então, vamos começar por desenhar um segmento de reta com quatro centímetros de comprimento. [A professora exemplifica no quadro e os alunos começam também a construir na folha amarela.]
>
> **Prof**: E agora? Como é que vamos desenhar os lados de comprimento três e cinco centímetros?
>
> **Jordão**: Usa-se a régua, para medir os cinco e três centímetros de cada lado.

Prof: Será que, usando a régua, consigo rapidamente construir o triângulo? [A professora começa por exemplificar no quadro, utilizando a régua e seguindo a sugestão dos alunos.]

Jordão: Não! Tem de usar o compasso.

Prof: Muito bem! Então como é que se faz isso?

Jordão: Abre-se o compasso com três centímetros e depois coloca-se a ponta seca aí e traça-se.

Prof: Portanto, vou colocar o compasso na extremidade do segmento de reta e marcar os três centímetros.

Jordão: Agora é fazer a mesma coisa do outro lado, mas com cinco centímetros.

José. Agora é fazer um “x”.

Jordão: Onde eles se cruzarem, traçam-se as linhas.

José: É o ponto.

Prof: Que ponto será este?

José: É o ponto de interseção dos lados do triângulo.

Jordão: É um dos vértices do triângulo.

Com esta discussão, foi possível verificar que, apesar de os alunos, inicialmente, mostrarem algumas dificuldades na construção dos triângulos até foram céleres nos seus raciocínios. A partir do momento que foi iniciada a construção do triângulo, foi possível constatar que os alunos recordaram os procedimentos e o material a utilizar. Para estes alunos, a visualização da utilização do material, embora inicialmente de uma forma incorreta, foi importante para perceberem que teria de ser usado o compasso em vez da régua.

A construção do triângulo laranja foi efetuada pelos alunos em grupo. Os alunos construíram rapidamente este triângulo, cujos procedimentos a utilizar eram iguais ao triângulo amarelo.

O grupo I, depois de ter construído os triângulos amarelo e laranja, colocaram o triângulo amarelo em cima do triângulo laranja e verificaram que o triângulo laranja era uma ampliação do triângulo amarelo, como podemos averiguar pelo seguinte diálogo:

Jordão: Estes triângulos são iguais. Isto é uma ampliação do outro. [O termo “iguais” utilizado pelo aluno não se refere a triângulos congruentes.]

José: Como é que sabes?

Jordão: Porque aqui é 1,5, aqui é 2 e aqui 2,5. [Referindo-se à diferença entre os comprimentos dos lados correspondentes dos triângulos, isto é, $4,5\ cm - 3\ cm = 1,5\ cm$, $6\ cm - 4\ cm = 2\ cm$ e $7,5\ cm - 5\ cm = 2,5\ cm$.]

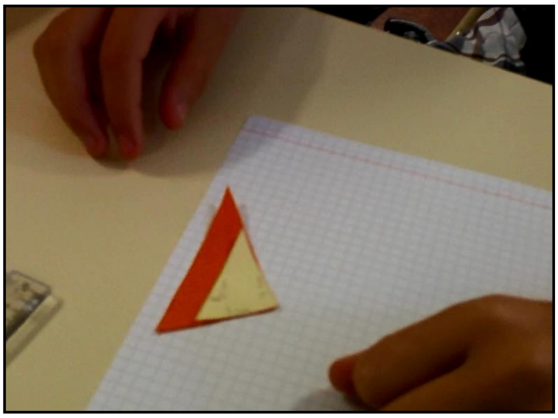


Figura 27 – Momento em que o grupo I conclui que existe uma ampliação.

Jordão: Olhe, professora uma ampliação.

Prof: Diz?

Jordão: É uma ampliação.

Prof: O quê?

Jordão: O amarelo. [Referindo-se ao triângulo amarelo.]

Prof: O triângulo amarelo é uma ampliação do triângulo laranja?

José: Não, o laranja é uma ampliação do amarelo e o amarelo é uma redução do laranja.

Prof: Não sei, investiguem!

Jordão: Ah!… não é. Faz 4,5 a dividir por 3.

Jéssica: É 1,5.

José: Faz para os outros lados.

Jéssica: Dá igual.

Jordão: Então é uma ampliação.

Pela análise inicial do diálogo entre os alunos e a professora, ficamos com a sensação de que os alunos não sabem quais as condições que são necessárias para que uma figura seja a ampliação da outra. Os discentes consideraram que o triângulo laranja era uma ampliação do triângulo amarelo uma vez que a diferença entre o comprimento dos lados correspondentes aumentava na mesma proporção, ou seja, 0,5 cm. Os alunos só investigaram a razão entre os comprimentos dos lados correspondentes, dado que a professora não confirmou a conclusão a que os alunos chegaram.

Na construção do triângulo verde-escuro, surgiram novamente algumas dúvidas, o que originou algum debate entre os alunos e a professora:

Prof: Portanto, o que é que vamos começar por fazer?

João: Vamos traçar um segmento de reta. Mas, qual é o comprimento?

Prof: Como nada é dito no enunciado, a medida do segmento de reta fica ao vosso critério. Qual é a amplitude dos ângulos?

João: 53º e 90º.

Prof: Portanto, este vai ser um triângulo…

Jordão: Retângulo.

Prof: Certo! Se eu não tivesse o transferidor conseguia desenhar um triângulo retângulo?

Jordão: Sim, usava o esquadro.

Prof: Como? [O aluno exemplifica, desenhando um triângulo]

João: Ou usava a régua e o esquadro.

Prof: Já temos um ângulo de …

Jéssica: 90.

Prof: Certo! Agora, falta desenhar o outro ângulo de amplitude 53º. O que é que vamos utilizar para medir um ângulo de 53º?

Jordão: Transferidor.

Prof: E, agora, o que é que falta fazer?

Jordão: Unir.

Figura 28 – Aluno do grupo I a construir o triângulo verde-escuro.

Este grupo de alunos não foi autónomo na construção do triângulo verde, uma vez que no enunciado não constavam as medidas do comprimento dos lados do triângulo. No entanto, demonstraram que estavam à vontade na construção do triângulo e na utilização do transferidor.

O grupo II, através da discussão em pequeno grupo, recorda outros conteúdos já lecionados:

Elsa: E este quanto é que é? [Referindo-se à amplitude do terceiro ângulo interno do triângulo verde-escuro.]

André: Esse, não é preciso medir. Basta somares os outros dois…dá 143.

Elsa: 180 menos 143 quanto é que dá?

André: 37.

Os grupos de trabalho não manifestaram dificuldades na construção do triângulo verde-claro, uma vez que este era semelhante ao verde-escuro.

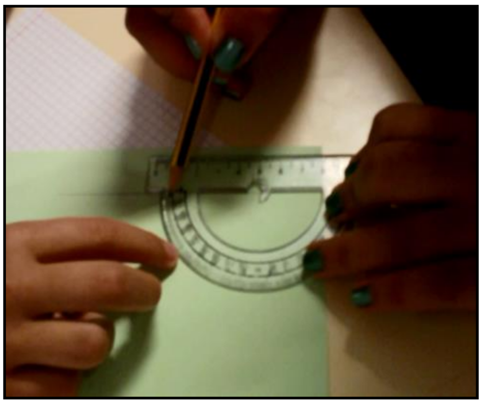


Figura 29 – Alunos do grupo II a construir o triângulo verde-claro.

Este momento serviu para recordar alguns conteúdos:

Prof: O que é que tens que começar por fazer?

André: Um segmento de reta.

Prof: E, agora, o que é que falta fazer?

Celeste: Marcar a amplitude dos ângulos.

Prof: Depois disso, farás o quê?

Celeste: Traçar uma reta.

Prof: Será uma reta?

Alexandra: É um segmento de reta.

Prof: Qual é a diferença entre segmento de reta e uma reta?

Elsa: O segmento de reta tem princípio e fim e a reta não tem princípio nem fim.

A construção do triângulo azul foi outro momento, no qual os alunos solicitaram a ajuda da professora. Através do seguinte diálogo e da abordagem da professora, é possível contatar que as dificuldades dos alunos prendem-se, essencialmente, com a interpretação do enunciado. Os alunos, apesar de hesitarem, fizeram corretamente o esboço do triângulo azul e o grupo interagiu, no sentido de levar a "bom porto" a construção do triângulo, como é possível verificar:

> **José**: Não estamos a perceber como é que é para fazer.
>
> **Prof**: Desenhem na folha um esquema do triângulo que têm de construir, sabendo que os "comprimentos dos lados são 6 cm e 4,5 cm e o ângulo por eles formado de 30º".
>
> [Os alunos desenharam um triângulo.]
>
> **Prof**: Vamos imaginar que esse triângulo está à escala, coloca as medidas dos lados e o ângulo por eles formado. [Os alunos hesitaram, mas colocaram corretamente.]
>
> **Prof**: Onde é que fica o ângulo de amplitude 30º? [Apontando para os três ângulos internos do triângulo.]
>
> **Alexandra**: Onde a professora tem o dedo.
>
> **Prof**: E porquê que é aqui?
>
> **Alexandra**: Porque o ângulo é formado pelos lados de 6 e 4,5 cm.
>
> **Prof**: Muito bem! Agora é só construir o triângulo à escala, usando o material de desenho. Vão começar por fazer o quê?
>
> **Jordão**: O segmento de reta de 6 cm.
>
> **Pedro**: Depois pego no compasso… e medir até 30º. [O aluno faz confusão entre compasso e transferidor, mas é, rapidamente, corrigido pelo colega.]
>
> **Jordão**: Não é com o compasso é com o transferidor.
>
> **Prof**: Certo! E depois?
>
> **Joana**: Traçar o segmento de reta.
>
> **Prof**: Sim! E qual é a medida desse segmento de reta.
>
> **Joana**: 4,5 cm.
>
> **Pedro**: Depois, é só unir ao outro vértice.
>
> **Prof**: Unir à extremidade do segmento de reta, que formará o vértice do triângulo.

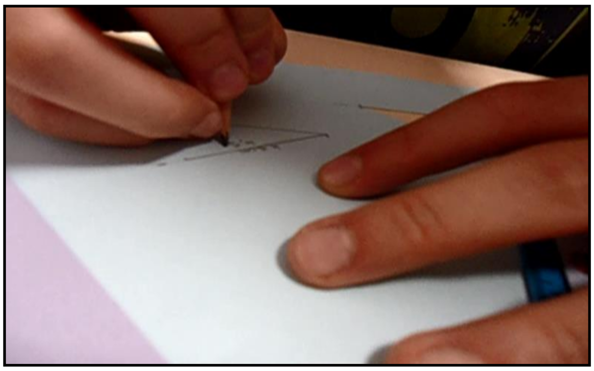


Figura 30 – Alunos do grupo II a construir o triângulo azul.

O quarto grupo era o que estava mais atrasado, pois chegaram mais tarde, no entanto e apesar de serem alunos com mais dificuldades de aprendizagem, estavam a encarar a tarefa com determinação e muita responsabilidade. Enquanto a professora aguardava que o grupo construísse o triângulo azul, foi estabelecido o seguinte diálogo:

Prof: Maria, como classificas esse triângulo azul quanto aos lados?

Maria: Equilátero.

Prof: O que é ser …

Maria: É todo diferente. [Referia-se aos comprimentos dos lados do triângulo.]

Prof: Então, como é que se chama um triângulo, cujos comprimentos dos lados são todos diferentes?

Maria: Escaleno.

Prof: Então, em que é que ficamos? É equilátero ou escaleno?

Maria: Escaleno! Enganei-me.

Os grupos de trabalho tiveram o cuidado em dividir tarefas. Todos os alunos, à exceção do quarto grupo, construíram dois triângulos cada. É notório que, por vezes, os alunos não dão importância ou não aceitam a opinião dos colegas. A constatação anterior advém do seguinte diálogo:

Jéssica: Pedro constrói o triângulo cinzento.

Jordão: Este é igual ao azul.

O Pedro começa a construir o triângulo e o José ajuda-o. Começam por traçar o segmento de reta de 9 cm.

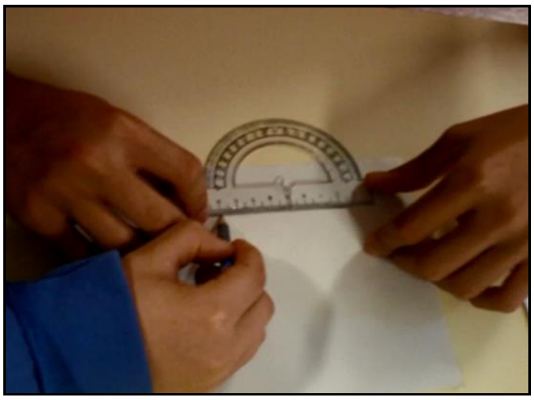


Figura 31 – Os alunos Pedro e José construindo o triângulo cinzento.

Posteriormente, o Pedro começa por traçar o segmento de reta de 12 cm, mas a Jéssica alerta-o:

> **Jéssica**: Pedro tem de ser com o transferidor.

O José continua sem dar importância ao que a colega diz, mas depois o Pedro diz:

> **Pedro**: Tem de ser com o transferidor. Mede 30º. Mas para fazer 30º tens de fazer primeiro os doze centímetros.
>
> **Jéssica**: Pedro, tá errado! Professora, pode vir aqui se faz favor?
>
> **José**: Está certo.
>
> **José**: Professora, não era melhor fazer aqui os doze?
>
> **Prof**: Vamos lá ver!
>
> **Jéssica**: Não é, é o ângulo primeiro.
>
> **Prof**: Espera Jéssica. Faz lá, José, o que estavas a dizer.
>
> [O José constrói o segmento de reta com 12 cm.]
>
> **Prof**: Bem, agora, tens de construir um ângulo adjacente a esses dois lados e com trinta graus.
>
> [O aluno, depois de algumas tentativas, verificou que estava errado.]
>
> **José**: Como? Não dá!
>
> **Prof**: Pois, era isso que a Jéssica estava a dizer.

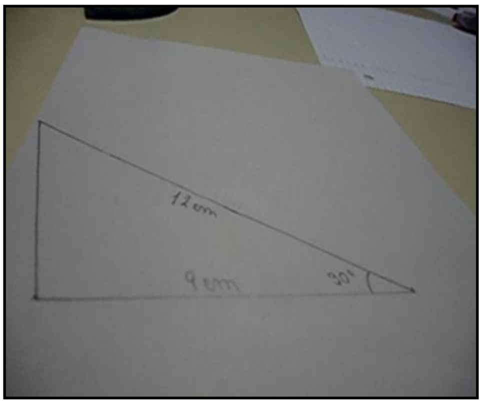


Figura 32 – Triângulo cinzento.

Relativamente à construção do triângulo rosa, houve alguns grupos que apresentaram as seguintes dificuldades:

Mário: Professora, pode vir aqui se faz favor?

Guido: O que é ângulos adjacentes?

Prof: Bem, vejo que foram consultar o livro para ver o que eram ângulos adjacentes. Muito bem! Então o que são ângulos adjacentes?

João: Pois, é isso que a gente não sabe!

Prof: Vamos lá ver então!

[A professora faz um esboço de um triângulo e assinala um dos ângulos internos.]

Prof: Este ângulo é adjacente a que lados do triângulo?

Alcindo: Este e este. [Apontando corretamente para os lados do triângulo.]

Figura 33 – Momento em que o aluno indica os lados adjacentes ao ângulo.

Prof: Este ângulo é adjacente a que lados? [Assinalando outro ângulo interno.]

[Os alunos apontam corretamente para os lados do triângulo.]

Prof: Então, o que são ângulos adjacentes?

Mário: Encostados.

Prof: Encostados? Os ângulos adjacentes são formados pelos lados do triângulo e têm um lado comum.

João: Então, isso quer dizer que fazendo um segmento de reta estes dois ângulos tem de ser adjacentes a esse segmento de reta.

[A professora afastasse do grupo e os alunos começam a trabalhar.]

Alcindo: Traça um segmento à tua escolha.

Guido: Quanto é que é isto?

Mário: Este ângulo? Já não me lembro. Acho que é 45. [O aluno pega no transferidor e mede novamente a amplitude do ângulo.]

Guido: Não é! É 48. Põe um "número redondo". Coloca os dois 50.

[Os alunos constroem novamente o triângulo.]

Figura 34 – Momento em que o Mário e o Guido constroem o triângulo rosa.

Alcindo: Acho que era ao contrário.

Guido: Não.

Alcindo: Este era para aqui e este era para aqui.

Mário: É! Tens razão.

Apesar de ser o Mário e o Guido que estavam a construir o triângulo, é notória a atenção dos restantes elementos do grupo, que acabaram por corrigir os colegas.

A construção do último triângulo gerou ainda alguma discussão e indecisões nos grupos. O terceiro grupo solicitou, uma vez mais, a ajuda da professora para a construção do triângulo lilás. Segundo o Alcindo, quaisquer dois ângulos que construísse iriam ser adjacentes ao segmento de reta. Os alunos não estavam a interpretar bem a questão. Depois de uma pequena ajuda, ficaram a construir o triângulo. No entanto, ao longo da construção surgiram mais algumas dúvidas:

> **Alcindo**: Como é que eu faço isto aqui? Já não me lembro.
>
> [O Alcindo desenhou um segmento de reta, posteriormente, mediu a amplitude de um ângulo e traçou o respetivo lado adjacente. Faltava-lhe apenas medir a amplitude do outro ângulo que não era adjacente ao segmento de reta inicialmente construído.]
>
> **Alcindo**: Temos de fazer um ângulo aqui e outro aqui. [Apontando para o desenho.]
>
> [Os alunos ficaram durante alguns segundos em silêncio a olhar para a construção.]
>
> **Alcindo**: É traçar uma linha.
>
> **João**: Mas, e o ângulo? A gente não precisa saber?
>
> **Alcindo**: Eu não sei como é que se faz.

O Alcindo pegou no transferidor para marcar o ângulo, mas posicionou o transferidor no segmento de reta escolhido, apercebendo-se rapidamente do erro que estava a cometer:

> **Alcindo**: Assim não é… Ah! É este lado. [Muda o transferidor para o segmento de reta correto.]

Depois de construídos todos os triângulos, os alunos começaram a manipulá-los com vista a investigar relações entre eles e a responder às questões que se apresentavam na proposta de trabalho.

Na questão 1.1, era pedido para agruparem “triângulos semelhantes, de forma a que exista uma relação entre os triângulos de cada grupo”.

O grupo I agrupou os triângulos cinzento e amarelo, no entanto estes triângulos não eram semelhantes. A professora, ao aperceber-se do erro cometido pelos alunos, interveio:

> **Prof**: Porquê que os triângulos cinzento e amarelo são semelhantes?
>
> **André**: Porque o triângulo cinzento é uma ampliação do triângulo amarelo.
>
> **Prof**: De certeza? Verifiquem novamente.

De seguida, os alunos chegaram à conclusão de que estavam errados e reagruparam novamente os triângulos.

> **Prof**: Porquê que os triângulos verdes são semelhantes?

Evandro: Porque têm dois ângulos iguais, o de 90º e 53º.

Prof: Qual é a amplitude deste ângulo aqui? [Apontando para o outro ângulo interno do triângulo verde.]

André: 37º.

Prof: Porquê 37º?

André: Porque é 180 menos noventa e menos cinquenta e três.

Prof: Exatamente. Porquê que os triângulos lilás e rosa são semelhantes?

André: Porque têm dois ângulos com a mesma amplitude, 60º.

Prof: Sim. O que é que posso afirmar mais sobre estes triângulos?

André: São iguais e equiláteros.

Alexandra: Congruentes.

Prof: Então quais são os triângulos intrusos?

André: Pois, não temos!

Este grupo foi o único que não possuía triângulos intrusos. Os alunos acabaram por construir o triângulo lilás igual ao triângulo rosa. Só se aperceberam de que os triângulos rosa e lilás eram congruentes, quando lhes foi pedido para agrupá-los.

No grupo III, ocorreram momentos de discussão muito profícuos, uma vez que os alunos tentavam relacionar conteúdos já apreendidos.

Alcindo: Se dividirmos o comprimento dos lados dos triângulos dá 1,5.

Prof: O que é esse 1,5?

João: É a razão de semelhança.

Prof: O que é que se pode dizer relativamente a estes dois triângulos? [Referindo-se ao triângulos amarelo e laranja.]

Alcindo: São semelhantes.

Guido: O triângulo laranja é uma ampliação do triângulo amarelo.

Prof: Porquê que agruparam o triângulo azul com o cinzento?

João: Porque a razão de semelhança é 2. Porque 4,5 vezes 2 dá 9 e 6 vezes 2 dá 12.

Alcindo: E a amplitude do ângulo é igual.

João: Há ampliação, pois os lados são diretamente proporcionais.

Prof: E, relativamente aos triângulos verdes, já concluíram alguma coisa?

Guido: Não.

Prof: Já analisaram os ângulos?

Prof: Continua a fazer isso…pode ser que encontres alguma relação. [Incentivando o aluno a manipular os triângulos.] Qual é a amplitude do ângulo em falta no triângulo verde-claro?

João: Faz 37º mais 57º. [Os alunos cometeram um erro, pois a amplitude do ângulo era 53º e não 57º.]

Alcindo: Dá 94.

Guido: Agora faz 180 menos 94.

João: 86.

Prof: 86?

João: Mas não é… porque é obtuso. [Através da observação direta do triângulo que tinham construído, os alunos consideraram que o triângulo verde-claro possuía um ângulo obtuso, no entanto tratava-se de um ângulo reto.]

Guido: Obtuso?

João: Isto não está certo!

Os alunos demonstraram espírito crítico, pois tiveram a sensibilidade de verificar que o resultado que obtiveram para a amplitude do ângulo (86º) não estava correto, pois era um ângulo reto e não obtuso como os alunos consideravam. Apesar de a professora saber que os alunos estavam errados, não os quis alertar de imediato para essa situação. Nesse sentido, questionou os alunos relativamente ao triângulo verde-escuro, com o intuito de fazerem a analogia entre os ângulos deste triângulo com os do triângulo verde-claro e chegarem à conclusão de que o ângulo não era obtuso.

Prof: Qual é a amplitude do ângulo que falta assinalar no triângulo verde-escuro?

Mário: 90, 53… 127. [O aluno comete um erro, ao fazer os cálculos mentalmente.]

Mário: 37… 37.

Prof: Ah! 37º.

João: 37º é este! [Referindo-se ao ângulo do triângulo verde-claro.]

Os alunos, nesta faz, já começaram a comparar a amplitude dos ângulos dos dois triângulos, no entanto não lhes deram a devida importância. O João tentou estabelecer uma relação entre os dois triângulos, mas rapidamente abandonou a ideia, uma vez que a sua teoria não era válida para o outro ângulo. A professora, ao aperceber-se de que os alunos abandonaram a observação do João, tentou incentivá-los a continuar a estabelecer uma relação entre os dois triângulos.

> **Prof**: Ah! Então parece que já existe alguma coisa em comum. Mais?
>
> [Os alunos mantêm-se em silêncio.]
>
> Este ângulo é 57º? Viram bem? [Os alunos não se apercebem que erraram.]
>
> Era 53º.
>
> **Alcindo**: Ah, pois é! Este ângulo é 53º, eu é que marquei mal.
>
> **Prof**: De certeza? Não é melhor confirmar?
>
> [O Mário pega no transferidor e confirma a amplitude do ângulo.]
>
> **Prof**: Será possível confirmar a amplitude do ângulo, usando só os dois triângulos verdes?
>
> **João**: Se este for 53º, este vai ter que ser 90º.
>
> **Prof**: Não! Sim, vai ser 90º, tens razão. Mas, manuseando apenas os triângulos, conseguimos confirmar a amplitude do ângulo.
>
> [O Mário sobrepõe os triângulos e chega à conclusão de que a amplitude do ângulo é de facto 53º.]
>
> **Prof**: Podemos então concluir que…
>
> **João**: Os triângulos são semelhantes.

Na segunda sessão, foi dada continuidade a esta atividade, até porque havia grupos que ainda não tinham concluído a construção dos triângulos. Depois de os grupos terem concluído o trabalho, procedeu-se à discussão em grande grupo.

As transcrições que se seguem reproduzem o ambiente vivido na sala de aula, inicialmente, nas discussões em pequeno grupo e, posteriormente, em grande grupo:

> **João**: O triângulo cinzento é uma ampliação do triângulo azul. Porque 4,5 vezes 2 é 9 e 6 vezes 2 é 12, por isso é uma ampliação.
>
> **Guido**: Vê se o lilás e o verde-escuro coincidem.
>
> **João**: Não! Não coincidem, porque não têm um ângulo de 90º.
>
> **Alcindo**: Estes ficam de fora. [Referindo-se aos triângulos lilás e rosa como sendo os triângulos intrusos.]
>
> **Alcindo**: Professora, é assim, estes não fazem parte. [Mostrando os grupos de triângulos que agruparam: os alunos tinham agrupado o

triângulo cinzento com o azul; verde-escuro com o laranja e o verde-claro com o amarelo.]

Prof: Quais é que não fazem parte? O rosa e o lilás? Porquê?

[Fez-se silêncio no grupo.]

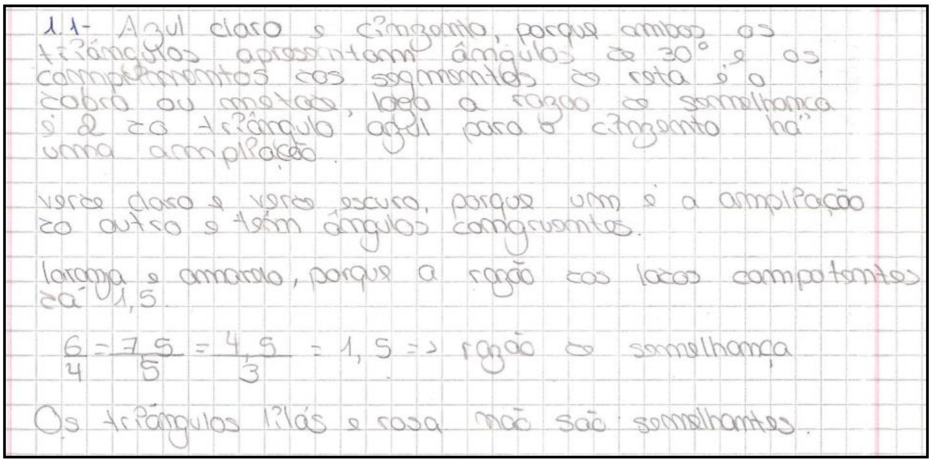
Prof: E estes fazem parte? Porquê que vocês dizem que o triângulo verde-claro e amarelo são semelhantes?

Alcindo: São congruentes.

Prof: Sim, de facto, os vossos triângulos são congruentes. Mas será que isso se vai verificar para todos os triângulos, cujas amplitudes dos ângulos sejam 37º e 53º? Investiguem no caso de terem outros triângulos.

Os alunos, inicialmente, não tiveram a necessidade de investigar para outros triângulos. Tinham a noção de que os triângulos eram congruentes, pois os comprimentos dos segmentos de reta com que tinham iniciado a construção do triângulo eram iguais, daí os triângulos serem congruentes.

A discussão em grande grupo foi iniciada com a questão 1.1. onde era pedido para os alunos investigarem e agruparem dois a dois "os triângulos semelhantes de forma, a que exista uma relação entre os triângulos de cada grupo." A imagem seguinte retrata a resposta dada por um grupo de alunos a esta questão. A resposta apresenta alguns erros ortográficos.



1.1- Azul claro e cinzento, porque ambos os triângulos apresentam ângulos de 30º e os comprimentos dos segmentos de reta é o dobro ou metade, logo a razão de semelhança é 2 do triângulo azul para o cinzento há uma ampliação.

verde claro e verde escuro, porque um é a ampliação do outro e têm ângulos congruentes.

laranja e amarelo, porque a razão dos lados correspondentes dá 1,5

$\frac{6}{4} = \frac{7,5}{5} = \frac{4,5}{3} = 1,5 \Rightarrow$ razão de semelhança

Os triângulos lilás e rosa não são semelhantes.

Figura 35 – Resposta do grupo da Celeste à questão 1.1.

Na discussão em grande grupo a primeira questão foi direcionada a um aluno:

Prof: João indica dois triângulos que sejam semelhantes?

João: O azul e o cinzento.

Prof: Porquê?

João: Porque ambos têm um ângulo de amplitude de 30º e o comprimento dos lados do triângulo é o dobro, logo a razão de semelhança é 2. Do triângulo azul para o triângulo cinzento há uma ampliação.

Prof: Existem mais triângulos semelhantes?

Jordão: O verde-claro e o verde-escuro.

Prof: Porquê?

Jordão: Porque um é a ampliação do outro e porque têm dois ângulos congruentes.

Prof: Mas é suficiente ter apenas dois ângulos congruentes de um triângulo para o outro?

Jordão: Sim, porque o outro também vai ser igual. Porque é 180 menos a soma dos dois ângulos… e vai dar igual.

Prof: Existem mais triângulos semelhantes?

Guido: O laranja e o amarelo.

Prof: Porquê que esses triângulos são semelhantes?

Alcindo: Porque a razão dos lados correspondentes dá 1,5.

Prof: Quais foram os cálculos que efetuaste.

Alcindo: 6 a dividir por 4; 7,5 a dividir por 5; e 4,5 a dividir por 3.

Prof: Existem triângulos intrusos?

Pedro: O rosa e o lilás.

Na questão 1.2, era pedido aos alunos para a "partir das conclusões da questão anterior, conjetura as condições para que dois triângulos sejam semelhantes." Esta foi uma questão onde não foi dado azo a uma discussão, apenas há a registar a resposta do aluno. Esta posição deveu-se, em parte, ao facto de ser esperada uma maior interação dos alunos nas questões subsequentes.

Prof: Quando é que dois triângulos são semelhantes?

Jordão: Quando um é ampliação do outro ou quando são congruentes.

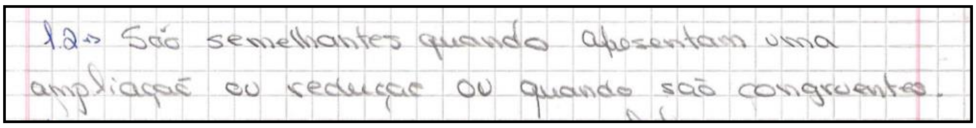


Figura 36 – Resposta do grupo do Alcindo à questão 1.2.

Relativamente à questão 1.3, os alunos tinham de identificar os triângulos intrusos. Houve um grupo que não possuía triângulos intrusos, como é possível verificar pela resposta dos alunos.

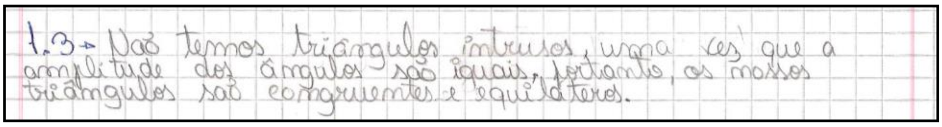


Figura 37 – Resposta do grupo da Alexandra à questão 1.3.

Prof: Quais são os triângulos intrusos?

Maria: Rosa e lilás.

Prof: Porquê?

Jéssica: Porque não têm ângulos congruentes.

Prof: Sim, porque de um triângulo para o outro não existem ângulos congruentes. E…

Alcindo: E os lados correspondentes não são diretamente proporcionais.

No que concerne à questão 1.4, era pedido para os alunos enunciarem os critérios de semelhança de triângulos. Esta foi uma das questões que gerou mais indecisões, pois os alunos tinham presente os critérios de congruência de triângulos. Alguns alunos referiram que os critérios não poderiam ser os mesmos, pois não fazia sentido uma vez que se tratava de coisas diferentes - congruência e semelhança de triângulos. Outros refutavam que "as iniciais não deveriam ser as mesmas, pois fazem confusão". No entanto, eram da opinião que os critérios só poderiam ser aqueles, porque relacionavam lados e ângulos. No diálogo seguinte, é possível "presenciar" a discussão dos alunos em torno dos critérios de semelhança de triângulos:

Prof: Quais são os critérios de semelhança de triângulos?

Carina: LAL.

José: LLL.

Carina: ALA

Prof: Será que é ALA?

Carina: Também existe.

Prof: O ALA é para a congruência de triângulos e, aqui, queremos é a semelhança de triângulos.

Carina: Então, não podemos usar os outros aqui?

Prof: Não, são duas coisas distintas. Quais foram os triângulos que se basearam para o critério LLL?

Pedro: O laranja e o amarelo.

Prof: E para o critério LAL?

Débora: Azul e o cinzento.

Prof: Quais são os triângulos que sobram?

Daniel: Os verdes e o lilás e o rosa.

Prof: O lilás e o rosa não contam, pois já vimos que não são semelhantes. Então, qual será o critério para os verdes?

Jéssica: AA

Alcindo: AAA

Prof: AAA! Vamos lá pensar.

Jordão: Não existe esse critério.

Prof: Alcindo, será que para construir um triângulo…

Jordão: Não é preciso 3. [Referindo-se aos três ângulos.]

Prof: São precisos quantos, então?

Pedro: Dois.

Prof: Porquê que bastam só dois?

Jordão: Porque o outro já é o resultado dos 180º.

Prof: Para dois triângulos serem semelhantes, como diz o Jordão, não é preciso terem os três ângulos congruentes, porque, automaticamente, se ele tem dois… o que vai acontecer ao outro relativamente à amplitude?

Evandro: Vai ser igual.

Prof: Vai ter que ser igual para perfazer os 180º, que é a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo. Então o critério será …

António: AA.

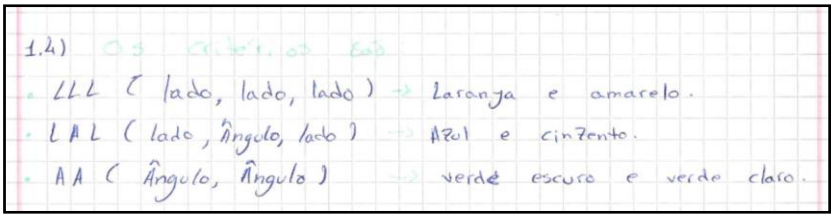

1.4)
· LLL (lado, lado, lado) → Laranja e amarelo.
· LAL (lado, Ângulo, lado) → Azul e cinzento.
· AA (Ângulo, Ângulo) → verde escuro e verde claro.

Figura 38 – Resposta do grupo da Carina à questão 1.4.

Na última questão, os alunos tinham de averiguar se no caso dos triângulos era “necessário verificar todas as condições da definição de semelhança de polígonos”. Os alunos demonstraram alguma falta de pré-requisitos, nomeadamente, na definição de polígonos, como é possível constatar:

Jordão: Não tem curvas.

Prof: Se eu desenhar um cubo não tem curvas. É um polígono?

Elsa: Não.

Pedro: É uma figura plana.

Prof: Plana, certo! Então um polígono é um figura plana composta por…

Jordão: Linhas retas. Segmentos de reta!

Prof: Por segmentos de reta. Mas, é preciso ter em atenção que os segmentos de reta não podem estar dispostos de qualquer maneira.

Jordão: A linha que limita a figura tem de ser fechada.

Prof: Muito bem. Recapitulando, um polígono é uma região limitada por uma linha poligonal fechada.

Prof: Nos triângulos é necessário verificar as duas condições dos polígonos para serem semelhantes?

Jéssica: Basta verificar um dos critérios de semelhança.

Esta questão não foi muito explorada por questões de limitação de tempo.

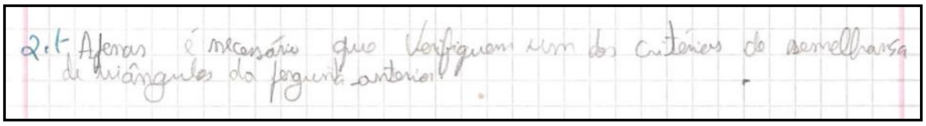

2.1 Apenas é necessário que verifiquem um dos critérios de semelhança de triângulos da pergunta anterior!

Figura 39 – Resposta do grupo do Mário à questão 2.1.

5. Considerações finais

A nível educacional, cada vez mais, tem sido reconhecido que é necessário implementar novas estratégias que correspondam às expetativas dos alunos por forma a formar jovens com espírito crítico, motivados e, acima de tudo, que se sintam parte integrante da sociedade e do contexto escolar. No entanto, por vezes, o ensino com estas características é menosprezado em prol de um ensino virado para a memorização, em que os alunos não têm espaço para serem críticos e onde é-lhes vedada a possibilidade de encontrar estratégias para solucionar os problemas. A matemática, ao longo destes anos, tem sido apresentada aos alunos como uma ciência estática onde não há espaço para a exploração e a criação. A aprendizagem da matemática é resultante da atividade efetuada. Neste sentido, se a atividade se restringir somente à resolução e à repetição de exercícios rotineiros, é apenas isso que os alunos vão aprender e perpetuar a nível futuro.

Para alguns professores, o melhor método de ensino-aprendizagem é aquele em que o professor debita conteúdos e os alunos têm uma atitude passiva, limitando-se a ouvir as explicações. Contudo, felizmente, existem professores que encaram a matemática como uma forma de explorar e investigar e tentam encorajar os alunos a raciocinar matematicamente e a envolverem-se nas atividades.

5.1. As atividades investigativas nas interações e na produção criativa dos alunos

O objetivo geral deste trabalho era analisar/compreender a importância das atividades investigativas na aprendizagem e formação dos nossos alunos. Na minha opinião, seria importante refletirmos sobre a importância e a finalidade da aplicação das atividades investigativas na sala de aula. Através da revisão da literatura que fiz e da observação e análise das aulas, posso afirmar que as atividades investigativas são imprescindíveis para o desenvolvimento cognitivo dos alunos e para a sua vida futura. Através da realização destas atividades, os alunos não aprendem somente a raciocinar e a comunicar matematicamente, mas desenvolvem também uma capacidade criativa e crítica. Segundo Santos, Brocardo, Pires e Rosendo (2002), as atividades investigativas têm importantes potencialidades educacionais, pois estimulam a participação dos alunos, favorecendo uma aprendizagem mais significativa e facilita o "envolvimento de alunos com diferentes níveis de competências e o reconheciomento e/ou estabelecimento de conexões" (p. 2).

Com o trabalho desenvolvido, com os alunos, e por mim analisado, pude verificar o mesmo que as autoras supracitadas. Foi notória a crescente participação e envolvência dos alunos ao longo das tarefas. Os alunos participavam sem receio de errar. Nestas aulas, não era evidente a heterogeneidade da turma. As atividades investigativas, são de facto, uma forma de estimular a produção criativa em matemática dos alunos, sendo que estas atividades geram conhecimentos matemáticos mais significativos e profícuos. A realização de tarefas de cariz investigativo possibilita aos alunos mobilizarem diferentes saberes e desenvolve a capacidade de ampliar os seus conhecimentos matemáticos, a sua autoestima e a sua confiança.

Com a realização deste estudo, estou em condições de afirmar que as atividades investigativas não são uma utopia na aprendizagem da matemática. Este tipo de atividades envolve e absorve totalmente os alunos, os quais são levados a raciocinar e comunicar matematicamente. Considero que a realização de atividades investigativas desencadeia um bom ambiente de aprendizagem, onde os alunos podem explorar, investigar e envolverem-se no seu processo de aprendizagem. Com este tipo de atividades, os alunos veem-se confrontados com um mundo desconhecido, o qual gera curiosidade e força anímica para continuar a investigar até chegar às conclusões desejadas. Na realização da segunda proposta de trabalho, constatei que os alunos, apesar de estarem com dificuldades para estabelecer uma relação entre as áreas das figuras e a razão de semelhança, os mesmos não queriam parar de investigar para dar início à discussão em grande grupo. Houve a necessidade de parar a atividade e dar início à discussão, uma vez que a sala de informática não estaria disponível na aula seguinte. Apesar de terem sido informados que depois continuariam com as investigações, os alunos não acataram de bom grado.

Este tipo de atividades proporciona aos alunos aulas diferentes, onde estes têm a possibilidade de construir a sua própria aprendizagem. Com base neste estudo e na observação do trabalho realizado pelos alunos, verifiquei que este tipo de atividades só fazem sentido se forem desenvolvidas em grupo, pois é a partir da interação entre os elementos do grupo que os alunos apresentam a sua forma de raciocinar e onde é estimulada a comunicação matemática. Apesar de algumas vezes a comunicação utilizada pelos alunos não primar pelo rigor científico, isto é, os alunos muitas vezes não utilizam os termos científicos, essa comunicação ativa o processo de aprendizagem.

Durante a realização das atividades investigativas, as interações entre alunos e alunos - professor são muito importantes, pois o confronto de ideias e de opiniões dá azo a novas investigações e aprendizagens, para além de proporcionar momentos de refutação e argumentação.

As atividades investigativas despertam a criatividade dos alunos e a participação quer em pequeno grupo quer em grande grupo. Neste estudo, verifiquei que, no geral, todos os alunos participaram oralmente, sendo de salientar que houve de facto alguns que se destacaram pela positiva.

Segundo Santos et al. (2002), alguns estudos realizados sobre atividades investigativas demonstram que nem sempre os alunos partilham ou discutem ideias durante o trabalho investigativo e que muitos deles tendem a trabalhar individualmente, procurando obter do professor as respostas para as suas dúvidas. Durante o meu trabalho, deparei-me com situações mais ou menos semelhantes. Inicialmente, os alunos praticamente não falavam sobre a atividade e limitavam-se a observar o trabalho uns dos outros. Em alguns momentos, foi visível que, apesar de os alunos discutirem ideias e trocarem opiniões, ainda não aceitavam como certa a opinião dos colegas e, como tal, solicitavam a minha confirmação. No entanto, na terceira atividade, já era notória uma evolução do trabalho dos alunos dentro do grupo de trabalho.

Nestas aulas, alguns alunos solicitavam a minha ajuda para lhes dar *feedback* ou simplesmente aprovar o trabalho desenvolvido para poderem prosseguir com a atividade. Em aulas anteriores, era eu quem insistia com esses alunos para trabalharem. No entanto, é de realçar que, ao longo das tarefas, foi visível uma maior autonomia e espírito de confiança dos alunos, pois fui muito menos requisitada nos grupos de trabalho.

Por tudo o que analisei e observei, acredito que a implementação de atividades investigativas estimula a criatividade e as interações dos alunos e que, com estas atividades, estamos a incutir nos nossos discentes valores para a vida.

A meu ver, uma das razões, para que as atividades investigativas não singrem de um modo espontâneo na prática letiva dos professores, está relacionada com as crenças, conceções e, sobretudo, com a falta de preparação dos professores para ultrapassar os obstáculos inerentes a este tipo de atividades. Neste sentido, os professores têm de investir mais na sua formação, nomeadamente, através de ações de formação, na área da matemática, e manterem-se atualizados sobre a evolução do ensino da matemática, através de investigação e revisão de literatura. Os professores, para poderem sair, com sucesso, da sua "zona de conforto" no que concerne ao ensino da matemática e à aplicação de atividades investigativas na sala de aula têm de realizar um trabalho prévio, no sentido de conhecerem mais sobre as temáticas a trabalhar. Não basta aplicar diferentes atividades na sala de aula, é necessário um trabalho de pesquisa no sentido de conhecer outros trabalhos e formas de atuação na sala de aula. É essencial uma mente "aberta" para a mudança.

5.2. Aprendizagem da matemática e as atividades investigativas

A forma como os alunos veem a matemática e os resultados que obtêm é algo que não pode ser ignorado. Neste sentido, as atividades investigativas devem fazer parte das atividades da sala de aula, pois estas facilitam a aprendizagem. Vários estudos realizados em Portugal comprovam que as atividades investigativas motivam os alunos e desenvolvem capacidades que contribuem para um conhecimento mais amplo da matemática e, consequentemente, facilitador ao nível da aprendizagem.

Segundo Cunha (1998), as investigações motivam os alunos e ajudam a desenvolver o raciocínio e a persistência e contribui para visualizarem ou encararem a matemática como uma ciência em evolução e construção. Para além disso, e segundo Ponte (2003), as atividades investigativas podem ajudar os alunos a mobilizarem e consolidarem conhecimentos matemáticos e, consequentemente, a enriquecerem a sua aprendizagem. De facto, durante a realização do trabalho nos grupos, pude constatar que alguns alunos mobilizaram conhecimentos, adquiridos anteriormente, o que permitiu uma aprendizagem mais profícua, pois houve uma conexão e relacionação de conteúdos. Ainda segundo Cunha et al. (1995), as atividades investigativas permitem que os alunos façam conexões em diferentes conteúdos, o que favorece o raciocínio matemático e a aprendizagem.

Com a realização destas atividades, foi dada aos alunos a oportunidade de aprenderem consoante o seu ritmo, de avaliarem as suas capacidades, entre outros, e de comunicarem matematicamente. Sendo que, segundo Braumann (2002), a aprendizagem da matemática só é possível se estiver presente o fator investigativo. A aprendizagem da matemática é equivalente à capacidade de os alunos investigarem e pensarem por eles próprios.

A aprendizagem deve ser vista/encarada de uma forma globalizante e não apenas de uma forma estática. Neste sentido, com a realização das atividades investigativas, foi desenvolvida nos alunos uma panóplia de capacidades e de competências não só a nível da matemática, mas também a nível social e relacional. Na sociedade abrangente em que vivemos, cada vez mais temos de formar jovens ativos, autodidáticos, críticos e empreendedores. Aos alunos, para além dos conteúdos matemáticos, foi-lhes incutido o espírito de persistência de camaradagem, de tolerância, de respeito pela opinião dos outros e de interajuda onde expuseram e defenderam os seus pontos de vista.

A escola e o professor cada vez mais têm um papel preponderante na formação dos jovens e a incumbência de dotá-los de capacidades para aprender e raciocinar. Para isso, é necessário diversificar as estratégias utilizadas na sala de aula, para que os alunos sejam confrontados com diferentes desafios, tal como acontece no dia-a-dia. Neste sentido, as atividades desenvolvidas nas aulas, quer sejam investigativas, quer sejam de outra natureza devem primar pela diversidade e pelo interesse dos alunos e terem um carater mais prático. A sociedade vive, na sua grande maioria, na incerteza, o que de certa forma é um dos fatores que desencadeia a ausência de motivação dos nossos alunos e, consequentemente, insucesso no processo de aprendizagem. Neste sentido, é necessário que as atividades que lhes são apresentadas sejam acessíveis e, ao mesmo tempo, desafiadoras.

5.3. Atividades investigativas na imagem da matemática

Ao nível da aprendizagem da matemática, tem vindo a ser dado enfoque à ideia de que aprender matemática consiste em fazer matemática. Nesta perspetiva, a matemática passa a ser encarada pelos alunos como uma ciência de padrões que se vai construindo por tentativa e erro baseada na observação e experimentação. (Santos et al., 2002). No entanto, para que os alunos adotem uma imagem mais positiva da matemática, é necessário proporcionar-lhes atividades não rotineiras, para que os mesmos possam evoluir, tendo em conta o seu nível de maturidade. Aliás, de uma forma geral, a imagem que os alunos têm sobre a matemática está relacionada com o sucesso/insucesso na disciplina.

Considero que as atividades investigativas são uma mais-valia na aprendizagem da matemática, pois fornecem uma imagem mais abrangente da mesma onde vários conteúdos podem ser trabalhados em simultâneo. Com este tipo de atividades, são os próprios alunos que relacionam diferentes conteúdos, os quais poderão ser ou não válidos no contexto da atividade. No entanto, todas essas produções matemáticas são profícuas, uma vez que produzem conhecimento matemático e permitem uma maior envolvência e participação dos alunos. As atividades investigativas permitem que os alunos construam a sua aprendizagem de acordo com o seu ritmo de trabalho e de aprendizagem, o que faz com que estes adquiram confiança e destreza a raciocinar matematicamente. Um dos objetivos deste tipo de atividades não é ensinar ao aluno o que deve fazer e como fazê-lo, mas sim proporcionar-lhe todas as condições para que o mesmo atinja a meta. O importante é que o aluno aprenda a aprender e que desenvolva o seu conhecimento matemático.

Um dos episódios que me marcou e à turma foi o facto de a Carina ter-se "exaltado" por eu ter iniciado a discussão em grande grupo da terceira atividade, quando o grupo da aluna ainda não tinha concluído a atividade. Como já foi referido anteriormente, este grupo iniciou o trabalho muito mais tarde, no entanto, e apesar de ser um grupo que apresenta mais dificuldades de aprendizagem, imprimiram um ritmo rápido de trabalho. É de salientar que sendo a Carina uma aluna que é acompanhada pela educação especial e que só participava quando solicitada, revelou-se, por algumas vezes, a líder do grupo. Por estas e outras situações que ocorreram na sala de aula, considero que as atividades não rotineiras favorecem o gosto/interesse pela disciplina de matemática e estimulam o trabalho e as interações na sala de aula.

5.4. Reação dos alunos às atividades investigativas

Ao longo do ano letivo, os alunos já tinham realizado algumas tarefas, tendo em conta a metodologia das atividades investigativas. No entanto, quando os alunos foram informados que iriam realizar atividades investigativas tiveram uma reação de êxtase e colocaram muitas questões, nomeadamente, “isso é para fazer exercícios?”, “o quê é isso?”, “vamos trabalhar em grupo?”, etc.

Aquando da explicação inicial da atividade, mantiveram-se em silêncio e atentos e foram colaborativos na hora de distribuir o material. Uma das reações dos alunos que me surpreendeu foi a rapidez com que formaram os grupos de trabalho, o que, em algumas aulas, era complicado de gerir, essencialmente, quando era para resolver exercícios em grupo.

Os alunos, ao longo da realização destas atividades, demonstraram interesse e foram muito empenhados. É de salientar que foi notório, ao longo das atividades, um crescimento dos alunos relativamente ao envolvimento nas atividades e à sua autonomia.

Quando foram realizadas as discussões em grande grupo, não foi necessário estimular a participação dos alunos, pois, no geral, todos tinham algo a dizer.

Nestas aulas, eram evidentes o companheirismo e a interajuda dos alunos. Alguns alunos desta turma tinham, por vezes, comportamentos inapropriados e despropositados, o que, nestas aulas não se verificou. Apenas num grupo de trabalho era visível o líder do grupo, que, neste caso era a Carina. Nos outros grupos de trabalho, os alunos estavam mais ou menos no mesmo patamar.

Dos 20 alunos, 16 disseram que gostaram de realizar este tipo de atividades e mencionaram que gostariam de repetir. Há apenas a lamentar dois alunos que, apesar de terem trabalhado e participado, disseram que não gostam “deste tipo de aulas”. Porém, outros dois alunos afirmaram que gostaram destas aulas, no entanto não foram muito convincentes, até porque foram os que menos contribuíram para a construção da aprendizagem do grupo. Apesar das dificuldades sentidas pelos alunos, é de reforçar que os mesmos não desanimaram. Houve sim, por vezes, um abrandamento no ritmo de trabalho. A utilização dos materiais foi importante a nível motivacional e ajudaram na compreensão e estruturação dos raciocínios.

No final das atividades, alguns alunos perguntaram: “no próximo ano letivo, vai haver mais aulas destas?”

Foi notório que, com este tipo de atividades e com a metodologia utilizada, os alunos se mostraram curiosos e recetivos às atividades e demonstraram predisposição para aprender.

5.5. Reflexão final

Ao realizar este estudo, constatei que os alunos reagem e encaram a matemática de acordo com as atividades que lhe são apresentadas, isto é, quando lhes são propostas atividades rotineiras, os alunos reagem de uma forma mais desmotivada e apresentam uma menor predisposição para aprender, referindo, muitas vezes, que a matemática é difícil sobretudo durante a resolução de exercícios. Durante esta investigação, pude verificar que os alunos estavam muito mais recetivos e apresentavam uma maior predisposição para aprender e para trabalhar.

Este estudo foi pautado por alguns fatores que de certa forma limitaram e tiveram implicações no estudo. O facto de a recolha de dados ter ocorrido só no final do terceiro período foi prejudicial para a concretização plena das atividades. Isto, porque, como já foi referido e justificando anteriormente, houve um grupo que não participou de forma ativa na terceira atividade. Há também a lamentar o facto de a sala de informática só estar disponível para uma sessão, e como tal, foi necessário proceder à discussão em grande grupo, antes de todos os grupos terem concluído a atividade.

A escolha do tema para a realização das atividades investigativas deveu-se ao facto de ser um dos temas em que os alunos apresentam mais dificuldades. Ao optar por este tema, senti alguma dificuldade na hora de "criar" a atividade investigativa, e isso deveu-se à pouca experiência na elaboração deste tipo de atividades, sendo que acabei por elaborar atividades que se assemelham mais a atividades exploratórias do que propriamente a atividades investigativas. Talvez, se tivesse optado por outro tema, seria mais fácil a elaboração das atividades. No entanto, considero que esta situação foi mais produtiva, pois ganhei mais experiência e maturidade. Com a revisão da literatura que fiz, já estava desperta para algumas situações a ter em conta na elaboração de atividades deste tipo, no entanto a maior aprendizagem é conseguida com a prática e através de tentativa e erro. De facto, as propostas por mim apresentadas não deram azo a que houvesse muita investigação por parte dos alunos, uma vez que se assemelhavam mais a tarefas exploratórias, no entanto foram muito produtivas para a aprendizagem dos alunos. Considero que, para produzir atividades investigativas mais profícuas, é necessária alguma experiência. Estas foram de facto as minhas primeiras criações, apesar de terem sido adaptadas de outras atividades. Porém, as mesmas surtiram efeito, na medida em que foram estimulantes para os alunos e para mim, e proporcionaram que os alunos produzissem matemática e raciocínios válidos.

A partir deste estudo, surgiram algumas questões relevantes para futuras investigações. Assim, seria pertinente investigar o porquê da relutância dos professores em aplicar atividades diversificadas, nomeadamente, atividades investigativas na sala de aula, uma vez que vários estudos comprovam o sucesso das mesmas. Um outro aspeto que considero que seria interessante analisar é se a utilização de material manipulável aliado às atividades investigativas contribui para uma melhoria significativa da aprendizagem dos alunos e de que forma este tipo de trabalho poderia ser desenvolvido individualmente. No meu estudo, considero que a utilização do material manipulável foi crucial.

A concretização deste trabalho revelou-se extremamente gratificante e compensador para mim, pois tive o privilégio de observar o interesse e o entusiasmo que os alunos imprimiram no trabalho. Durante as aulas, não me apercebi de algumas situações, principalmente as que ocorreram nos pequenos grupos e outras acabei por não lhes dar a devida atenção. Isto deveu-se ao facto de estar extremamente preocupada e querer controlar todas as situações em simultâneo. Aprendi que é preciso manter a calma, confiar nos alunos e dar-lhes espaço para pensarem e desenvolverem o trabalho. Durante a análise das gravações, é que tomei consciência de determinadas situações para as quais não estava desperta.

No fim da primeira sessão, senti-me desmotivada e preocupada, pois fiquei com a sensação de que os alunos não tinham apreendido aquilo que era pretendido com a atividade. Esta tinha sido sem dúvida uma aula mais barulhenta onde os alunos brincaram com o material e foi uma aula extremamente cansativa. Através da observação dos vídeos, constatei que a minha primeira análise da aula não tinha sido a mais correta. Os alunos conseguiram aliar a brincadeira e o trabalho de uma forma espontânea e produtiva. Estas aulas são propícias a um maior barulho que advém da interação e do entusiasmo dos alunos. No final deste estudo, senti que valeu a pena o investimento físico e profissional, pois alunos e professora adquiriram novos conhecimentos e ganharam experiência, maturidade e confiança.

Em suma, “se nós fizermos o nosso trabalho corretamente, talvez as escolas se tornem lugares onde os alunos realmente aprendam a pensar” (Abrantes et al., 1998, p.70).

6. Referências bibliográficas

Abrantes, P., Ferreira, C., & Oliveira, H. (1998). Matemática Para Todos: investigações na sala de aula. In P. Abrantes, L. C. Leal, & J. P. Ponte (Edits.), *Investigar para Aprender Matemática* (2.ª ed., pp. 165-172). Lisboa: APM e Projeto MPT.

Abrantes, P., Leal, L. C., & Ponte, J. P. (1998). *Investigar para Aprender Matemática* (2.ª ed.). Lisboa: APM e Projeto MPT.

Apple, M. W. (2002). *Ideologia e Currículo.* Porto: Porto Editora.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1991). *Investigação Qualitativa em Educação.* Porto: Porto Editora.

Braumann, C. A. (2002). Divagações sobre investigação matemática e o seu papel na aprendizagem da matemática. In J. P. Ponte, C. Costa, A. I. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo, & A. F. Dionísio, *Actividades de Investigação na Aprendizagem da Matemática e na Formação dos Professores* (1.ª ed., pp. 5-24). Lisboa: Secção de Educação e Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação.

Brunheira, L., & Fonseca, H. (1995). Investigar na aula de Matemática. In P. Abrantes, L. C. Leal, & J. P. Ponte (Edits.), *Investigar para Aprender Matemática* (2.ª ed., pp. 193-199). Lisboa: APM e Projeto MPT.

Cunha, H., Oliveira, H., & Ponte, J. P. (1995). *Investigações matemáticas na sala de aula.* Obtido em 15 de dezembro de 2012, de http://www.prof2000.pt/users/j.pinto/textos/texto4.PDF

Ernest, P. (1998). Investigações, Resolução de Problemas e Pedagogia. In P. Abrantes, L. C. Leal, & J. P. Ponte (Edits.), *Investigar para Aprender Matemática* (2.ª ed., pp. 25-48). Lisboa: APM e Projeto MPT.

Fonseca, H., Brunheira, L., & Ponte, J. P. (1999). *As actividades de investigação, o professor e a aula de Matemática.* Obtido em 15 de dezembro de 2012, de http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/artigos-por-temas.htm#Investigacoes%20matematicas,%20resolucao%20de%20problemas,%20aplicacoes%20da%20matematica

Lopes, C. A. (2002). *Estratégias e Métodos de Resolução de Problemas em Matemática* (1.ª ed.). Lisboa: Edições ASA.

Love, E. (1988). Avaliando a Actividade Matemática. In P. Abrantes, L. C. Leal, & J. P. Ponte (Edits.), *Investigar para Aprender Matemática* (2.ª ed., pp. 89-105). Lisboa: APM e Projeto MPT.

Mason, J. (s.d.). Resolução de Problemas Matemáticos no Reino Unido: Problemas Abertos, Fechados e Exploratórios. In P. Abrantes, L. C. Leal, & J. P. Ponte (Edits.), *Investigar para Aprender Matemática* (2.ª ed., pp. 73-88). Lisboa: APM e Projeto MPT.

Morgado, J. C., & Paraskeva, J. M. (2000). *Currículo:factos e significações* (1.ª ed.). Lisboa: ASA.

NCTM. (1991). *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar*. Lisboa: APM e IIE.

Ponte, J. P. (2003). (P. Dias, Ed.) Obtido em 24 de Novembro de 2012, de http://area.fc.ul.pt/pt/Teses%20Mestrado%20e%20Doutoramento/Tese%20Mestrado%20Paulo%20Dias/Capitulo%202.pdf

Ponte, J. P., & Matos, J. F. (1992). Processos Cognitivos e Interacções Sociais nas Investigações Matemáticas. In P. Abrantes, L. C. Leal, & J. P. Ponte (Edits.), *Investigar para Aprender Matemática* (2.ª ed., pp. 119-137). Lisboa: APM e Projeto MPT.

Ponte, J. P., Costa, C., Rosendo, A. I., Maia, E., Figueiredo, N., & Dionísio, A. F. (2002). *Actividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação dos professores* (1.ª ed.). Lisboa: Educação, Secção de Educação e Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências de.

Ponte, J. P., Ferreira, C., Varandas, J. M., Brunheira, L., & Oliveira, H. (1999). *A Relação Professor-Aluno na Realização de Investigações Matemáticas* (1.ª ed.). Lisboa: APM e Projeto MPT.

Ponte, J. P., Matos, J. F., & Abrantes, P. (1998). *Investigação em Educação Matemática*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Ponte, J. P., Oliveira, H., Cunha, M. H., & Segurado, M. I. (1998). *Histórias de Investigações Matemáticas* (1.ª ed.). Lisboa: IIE.

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H. M., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Oliveira, P. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico.* Obtido em 14 de Novembro de 2012, de http://www.dgidc.min-edu.pt/ensinobasico/index.php?s=directorio&pid=71

Rocha, H. (1995). Investigando com a calculadora gráfica. In P. Abrantes, L. C. Leal, & J. P. Ponte (Edits.), *investigar para Aprender Matemática* (2.ª ed., pp. 183-191). Lisboa: APM e Projeto MPT.

Santos, L.; Brocardo, J.; Pires, M. & e Rosendo, A. I. (2002). Investigações matemáticas na aprendizagem do 2º ciclo do ensino básico ao ensino superior. In J. P. Ponte; C. Costa; A. I. Rosendo; E. Maia; N. Figueiredo; A. F. Dionísio (Orgs.), Actividades de Investigação (pp. 83-106). Coimbra: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Silver, E. A. (1993). Acerca da Formulação de Problemas de Matemática. In P. Abrantes, L. C. Leal, & J. P. Ponte (Edits.), *Investigar para Aprender Matemática* (2.ª ed., pp. 139-162). Lisboa: APM e Projeto MPT.

7. Anexos

7.1. Anexo I

Escola básica dos 2.º e 3.º Ciclos de São Jorge – Cardeal D. Teodósio de Gouveia

Escola Básica dos 2º e 3º Ciclos de S. Jorge
Cardeal D. Teodósio de Gouveia

Matemática – 7.ºano **Ano letivo: 2012/2013**

Proposta de trabalho n.º 1

Unidade temática: Semelhanças

Conteúdo: Figuras semelhantes.

✍ **Tarefa n.º 1:**

1. Com os quadradinhos de madeira e/ou com as "tampinhas" constrói e desenha no teu caderno duas figuras que tenham:

- **a)** O mesmo tamanho (mesmo comprimento ou área);
- **b)** A mesma forma;
- **c)** A mesma forma e o mesmo tamanho;
- **d)** A mesma forma, mas tamanho diferente;
- **e)** O mesmo tamanho, mas formas diferentes;
- **f)** Forma e tamanho diferentes.

Nota: Nomeia cada figura que construíste, atribuindo-lhe uma letra.

2. Observa as figuras que construíste na questão anterior.

2.1. Identifica pelas letras correspondentes e justifica o teu raciocínio:

- **a)** Duas figuras congruentes;
- **b)** Duas figuras em que uma seja a ampliação da outra;
- **c)** Duas figuras em que uma seja a redução da outra;
- **d)** Duas figuras semelhantes em linguagem corrente, mas não semelhantes em Matemática;
- **e)** Duas figuras semelhantes.

Tarefa adaptada de: - Conceição, A. & Almeida, M. (2010). *Matematicamente Falando*. 7.º Ano. Areal Editores.

- Neves, M. et al. (2010). *Matemática 7*. Porto Editora.

7.2. Anexos II

ESCOLA BÁSICA DOS 2.º E 3.º CICLOS DE SÃO JORGE – CARDEAL D. TEODÓSIO DE GOUVEIA

Matemática – 7.ºano **Ano letivo: 2012/2013**

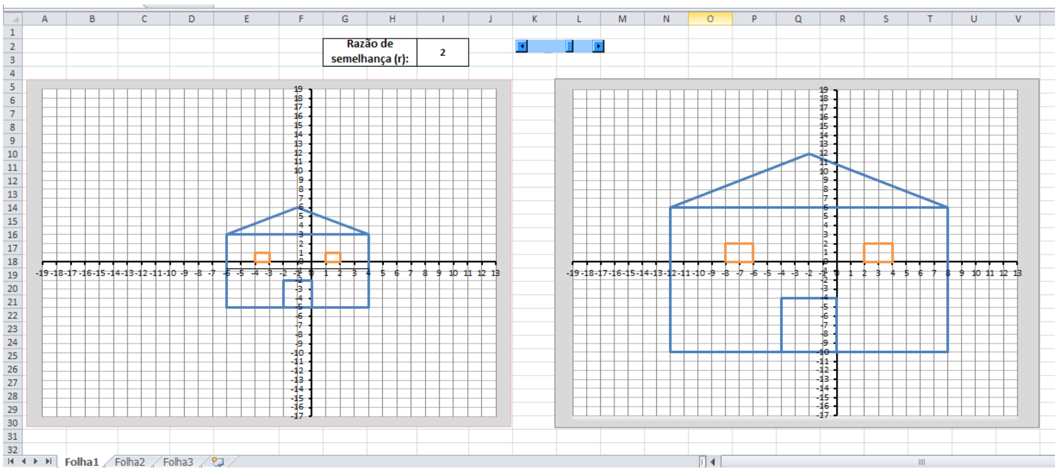
Proposta de trabalho n.º 2

Unidade temática: Semelhanças

Conteúdo: Figuras semelhantes. Razão de semelhança

Tarefa n.º 1:

1. Abre a folha de Excel, que se encontra no ambiente de trabalho do computador, e observa as figuras.



1.1. Descreve as figuras.

1.2. Manipula a barra de deslocamento.

1.2.1. O que observas?

1.2.2. As figuras obtidas são semelhantes? Justifica o teu raciocínio.

1.2.3. Desenha no teu caderno as figuras que obtiveste (a figura inicial e a sua transformada). Compara a medida dos comprimentos dos segmentos de reta da figura inicial com a dos segmentos de reta correspondente da figura transformada. Que observas?

1.2.3.1. Calcula a razão entre a medida do lado da figura transformada com a medida do lado correspondente da figura inicial. O que podes concluir?

1.2.4. Manipula a barra de deslocamento e conjetura se a conclusão que retiraste na alínea anterior mantém-se válida.

2. Tendo em conta o que observaste, nas questões anteriores, que conclusões podes retirar sobre a **razão de semelhança (r)** e as figuras obtidas.

3. Compara os ângulos internos das figuras que obtiveste. Que podes concluir?

4. Manipula a barra de deslocamento de forma que a **razão de semelhança (r)** seja menor, igual e maior do que 1.

4.1. Que conclusões podes retirar relativamente às figuras obtidas quando:

4.1.1. $r < 1$; **4.1.2.** $r = 1$; **4.1.3.** $r > 1$;

4.2. Escreve a razão entre a medida do comprimento dos lados da figura transformada e a medida do comprimento dos lados correspondente da figura inicial. Compara o valor que obtiveste com a razão de semelhança. O que concluis?

4.3. Sabendo que o lado do telhado da figura inicial mede aproximadamente 5,8 cm de comprimento, determina a medida do lado correspondente da figura transformada.

4.4. Determina o perímetro e a área das figuras obtidas (inicial e a sua transformada).

4.5. Determina a razão entre os perímetros das figuras. Compara o resultado obtido com a razão de semelhança. O que podes concluir?

4.6. Determina a razão entre as áreas das figuras. Compara o resultado obtido com a razão de semelhança. O que podes concluir?

Tarefa adaptada de: - Conceição, A. & Almeida, M. (2010). *Matematicamente Falando*. 7.º Ano. Areal Editores.

- Passos, I. & Correia, O. (2010). *Matemática em acção 7*. Lisboa Editora.

7.3. Anexo III

ESCOLA BÁSICA DOS 2.º E 3.º CICLOS DE SÃO JORGE – CARDEAL D. TEODÓSIO DE GOUVEIA

Matemática – 7.ºano **Ano letivo: 2012/2013**

Proposta de trabalho n.º3

Unidade temática: Semelhanças

Conteúdo: Critérios de semelhança de triângulos

✍ Vais utilizar instrumentos de medição e de desenho para construir triângulos semelhantes.

➯ **Triângulo Amarelo**

Constrói e recorta, na folha de papel amarela, um triângulo cujas medidas dos comprimentos dos lados são 3 cm, 4 cm e 5 cm.

➯ **Triângulo Laranja**

Constrói e recorta, na folha de papel laranja, um triângulo cujas medidas dos comprimentos dos lados são 4,5 cm, 6 cm e 7,5 cm.

➯ **Triângulo Verde-escuro**

Constrói e recorta, na folha de papel verde-escuro, um triângulo cujas amplitudes dos ângulos são 53º e 90º.

➯ **Triângulo Verde-claro**

Constrói e recorta, na folha de papel verde-claro, um triângulo cujas amplitudes dos ângulos são 37º e 53º.

➯ **Triângulo Azul**

Constrói e recorta, na folha de papel azul, um triângulo cujas medidas dos comprimentos dos lados são 6 cm e 4,5 cm e o ângulo por eles formado de 30º.

➯ **Triângulo Cinzento**

Constrói e recorta, na folha de papel cinzento, um triângulo cujas medidas dos comprimentos dos lados são 9 cm e 12 cm, e o ângulo por eles formado de 30º.

➯ **Triângulo rosa**

Constrói e recorta, na folha de papel rosa, um triângulo a partir de um segmento de reta, à tua escolha e de dois ângulos adjacentes ao segmento reta.

➯ **Triângulo lilás**

Constrói e recorta, na folha de papel lilás, um triângulo a partir de dois ângulos à tua escolha e de um segmento de reta apenas adjacente a um ângulo.

Nota: Os triângulos que acabaste de construir são semelhantes, dois a dois, à exceção de dois deles.

1. Investiga as seguintes questões, manipulando os triângulos construídos.

1.1. Investiga e agrupa, dois a dois, registando no teu caderno, os triângulos semelhantes de forma, a que exista uma relação entre os triângulos de cada grupo. Apresenta e justifica o teu raciocínio.

1.2. A partir das conclusões da questão anterior, conjetura as condições para que dois triângulos sejam semelhantes.

1.3. Indica, justificando quais são os triângulos intrusos.

1.4. Enuncia os critérios de semelhança de triângulos.

2. Dois polígonos são semelhantes se têm, simultaneamente, os ângulos respetivamente congruentes e os comprimentos dos lados correspondentes diretamente proporcionais.

2.1. No caso dos triângulos, será necessário verificar todas as condições da definição de semelhança de polígonos? Justifica.

Tarefa adaptada de: - Faria, L. et al. (2010). *Matematicamente Dinâmica – Guia do Professor*. 7.º Ano. Porto Editora

- Projeto Construindo o Êxito em Matemática (CEM) - 7.º ano – 2010/2011

7.4. Anexo IV

Autorização para a gravação das aulas

REGIÃO AUTÓNOMA DA MADEIRA
SECRETARIA REGIONAL DA EDUCAÇÃO E RECURSOS HUMANOS
ESCOLA BÁSICA DOS 2º E 3º CICLOS DE S. JORGE – CARDEAL D. TEODÓSIO DE GOUVEIA

N.º do Código do Estabelecimento de Ensino 3109-202

Exmo. (a) Sr. (a) Encarregado de Educação

Eu, Laura Cristina Teixeira Pacheco, aluna do mestrado em ensino da matemática no 3.º ciclo do ensino básico e secundário da Universidade da Madeira, estou a desenvolver um estudo sobre a importância das atividades investigativas na aprendizagem significativa da matemática. Para tal, é essencial observar e recolher dados sobre os trabalhos realizados pelos alunos nas aulas de matemática.

Venho por este meio, requerer a V. Ex.ª autorização para proceder à recolha de dados, nomeadamente resposta a inquéritos, questionários, fotografias e digitalização dos trabalhos desenvolvidos nas aulas e filmagens e/ou gravação de algumas aulas.

Desde já garanto o anonimato dos alunos e a confidencialidade dos dados obtidos, visto que estes serão apenas usados no âmbito da minha investigação.

Grata pela sua colaboração!

Com os melhores cumprimentos,

A professora de matemática

____

(Laura Pacheco)

O Presidente da Comissão Provisória

____

(Dinis Mendonça)

Eu, ____ encarregado(a) de educação do(a) aluno(a) ____, n.º _____, da turma A do 7.º ano, autorizo / não autorizo o meu educando a participar na recolha de dados conduzida pela professora Laura Cristina Teixeira Pacheco no âmbito do seu estudo.

São Jorge, ________ de abril de 2013

O encarregado de educação

____