Tarefas de Natureza Exploratória e Investigativa no Ensino e Aprendizagem das Funções Quadráticas Envolvendo o Uso da Calculadora Gráfica

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Maria Gorete Ferreira de Freitas

MESTRADO EM ENSINO DA MATEMÁTICA NO 3º CICLO DO ENSINO BÁSICO E SECUNDÁRIO

UNIVERSIDADE da MADEIRA

A Nossa Universidade

www.uma.pt

setembro | 2012

Tarefas de Natureza Exploratória e Investigativa no Ensino e Aprendizagem das Funções Quadráticas Envolvendo o Uso da Calculadora Gráfica

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Maria Gorete Ferreira de Freitas
MESTRADO EM ENSINO DA MATEMÁTICA NO 3º CICLO DO ENSINO BÁSICO E SECUNDÁRIO

ORIENTAÇÃO
Custódia Mercês Reis Rodrigues Drumond

RESUMO

A presente dissertação de mestrado centra-se numa reflexão sobre a minha experiência profissional, ao longo dos últimos vinte e nove anos, no âmbito do ensino da matemática e de um estudo que visa analisar o modo como a resolução de tarefas de natureza exploratória e investigativa, envolvendo o uso da calculadora gráfica, contribui para a compreensão e aprendizagem de um dos conteúdos do programa do 10º ano do ensino secundário, a Função Quadrática.

A investigação em causa assume um caráter qualitativo, caracterizando-se de forma descritiva e interpretativa, por isso, procurei descrever, analisar e compreender a atividade desenvolvida pelos alunos ao longo da realização das tarefas.

Os resultados obtidos nesta investigação, permitiram-me concluir que os alunos sabem identificar as propriedades de funções quando representadas graficamente e algebricamente**,** mostrando que adquiriram competências relativamente a algumas propriedades da função quadrática, revelaram aptidões para interpretar e compreender problemas relativos às funções quadráticas, estabelecendo a sua relação com os respetivos contextos e que têm preferência por usar processos analíticos na resolução dos problemas, embora, alguns usassem também os processos gráficos com a ajuda da calculadora. Os alunos identificaram facilmente regularidades nos casos que lhes foram apresentados e formularam conjeturas. De igual forma, demonstraram facilidade em testar, validar ou refutar as conjeturas formuladas, justificando sempre o seu raciocínio.

Este estudo sugere, assim, que a resolução de problemas e a realização de tarefas de carácter investigativo, com recurso à calculadora gráfica, contribuem para o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos.

Podemos ainda concluir que, pelos resultados obtidos neste estudo, o ensino/aprendizagem da matemática pode beneficiar da utilização da calculadora gráfica, no decurso do processo, criando um ambiente de trabalho propício à aprendizagem e desencadeando nos alunos uma maior motivação e cooperação, levando-os a adquirirem conhecimentos por construção e dedução

Palavras-chave: Aprendizagem das funções quadráticas, resolução de problemas, tarefas de exploração e investigação, calculadora gráfica.

Abstract

The following Masters' dissertation is mainly focused upon a reflection of my professional experience over the last twenty nine years, regarding the teaching of Mathematics and on exploratory, investigating, task-solving theme, which involves the use of a graphic calculator and its contributions for a better comprehension and learning of the contents lectured in the 10^{th} grade of High Education Program, the Quadratic Function.

The result of this investigation allowed me to conclude that students can identify the function's properties when graphically and algebraically represented, showing the acquisition of competences regarding the quadratic functions' proprieties, the aptitude for interpretation and understanding of quadratic functions' related problems, the relation between quadratic functions and its various application contexts, which reflects on their general preference on analytical processes, although some preferred graphic processes with the help of calculator.

The students quickly identified regularities in the observed cases and developed patterns. Likewise, they were able to test, validate or discard these same patterns, always justifying properly.

This investigation suggests, therefore, that the resolution of problems and the accomplishment of investigative tasks, resorting to the graphic calculator, contribute to the development of Mathematical reasoning of students.

We can also conclude that, as the results of this dissertation will show, the learning of Mathematics can be improved by the use of the graphic calculator, allowing a better work environment and awakening a bigger motivation/corporation spirit in students, which ultimately will grant them knowledge by construction and deduction.

Keywords: Learning of the quadratic function, problem solving, investigation and exploration tasks, graphic calculator.

À memória dos meus pais,
Manuel e Maria

Agradecimentos

A presente tese resultou do meu trabalho, esforço e dedicação e do conjunto das pessoas que de alguma forma me incentivaram, apoiaram e comigo colaboraram para que esta se concretizasse. Por isso, pretendo expressar, nesta nota, o meu agradecimento a todos aqueles que, direta ou indiretamente, fizeram parte desta caminhada.

À Professora Doutora Custódia Drumond, orientadora desta tese, a quem expresso a minha gratidão e agradecimento, especialmente pelas sugestões e comentários tecidos ao longo das várias fases, sem os quais seria impossível concluí-la com êxito.

À minha grande amiga, Dra. Paula Baptista, pela forma como me ajudou na concretização deste trabalho e, especialmente, pelo carinho, amizade, apoio e incentivo, e pela partilha de conhecimentos e experiências.

Ao meu marido, Xavier, um agradecimento, muito especial, pelo encorajamento, ajuda e compreensão demonstrados ao longo da realização deste estudo. Obrigada por me teres feito acreditar que seria capaz.

À professora Rosinda Rodrigues pela colaboração na revisão do texto.

Aos meus amigos e colegas de mestrado que acederam a trocar ideias, saberes e experiências, em particular à Dra. Cláudia e à Dra. Olívia.

À minha sobrinha Simone pelo carinho e pelo apoio de sempre.

À direção da escola pela disponibilidade.

Aos alunos por colaborarem, com empenho e alegria, nas tarefas propostas que fazem parte deste estudo.

Ao citarmos nomes, corremos o risco de esquecer alguém. Por isso, o meu agradecimento final vai para todos os que convivem comigo, os meus familiares, os meus amigos,

A todos, muito obrigada!

Gorete Freitas

De tudo ficaram três coisas:
A certeza de que estava sempre começando.
A certeza de que era preciso continuar e,
A certeza de que seria interrompido antes de terminar.
Fazer da interrupção, um caminho novo.
Fazer da queda, um passo de dança,
Do medo, uma escada.
Do sonho, uma ponte,
E da procura, um encontro.

Fernando Pessoa

Índice

Índice de figuras

Índice de quadros

1. Introdução

Neste capítulo, apresento as motivações que orientaram a minha investigação centrada no ensino das funções quadráticas, bem como o problema, os objetivos e as questões de investigação a que pretendo responder. Abordo, em seguida, as orientações curriculares para o ensino deste tópico e, finalmente, a forma como foi organizada.

1.1. Motivação e pertinência do estudo

Nós, professores do ensino secundário, temos o objetivo primordial de formar indivíduos competentes, criativos, flexíveis e dinâmicos, que procurem constante aprendizagem e que sejam capazes de lidar com situações novas.

A realização deste trabalho de investigação surge do meu interesse no desenvolvimento dos processos de ensino-aprendizagem e na procura de procedimentos pedagógico-didáticos facilitadores da construção do conhecimento por parte dos alunos.

As funções e a tecnologia assumem, na sociedade em que vivemos, papéis fundamentais. A utilização da tecnologia, nas aulas de matemática, permite auxiliar os alunos na compreensão de conceitos e no desenvolvimento de atividades que contribuam para a sua educação, de modo a tornarem-se cidadãos reflexivos, críticos e intervenientes na sociedade DES (2001). Efetivamente, o conceito de função é central no ensino da matemática e o seu estudo ocupa um lugar de relevo nos programas desta disciplina no ensino secundário. Os conhecimentos sobre funções são, segundo o programa de matemática A, "indispensáveis para a compreensão do mundo em que vivemos" (Ministério da Educação, 2001, p. 26). O programa refere explicitamente que o estudo deste tema deve ser abordado de modo a privilegiar o trabalho intuitivo com "funções que relacionam variáveis da vida corrente, da Geometria, da Física, da Economia e de outras disciplinas" (DES; 2001, p. 26).

De acordo com o Ministério da Educação (2001), o estudante deve tornar-se agente da sua própria aprendizagem, propondo-se uma metodologia geral em que:

- Os conceitos são construídos a partir da experiência de cada um e de situações concretas;
- Os conceitos são abordados sob diferentes pontos de vista e progressivos níveis de rigor e formalização;
- Haja maior ligação da matemática com a vida real, com a tecnologia e com as questões abordadas noutras disciplinas, ajudando a enquadrar o conhecimento numa perspetiva histórico-cultural.

De acordo com o mesmo programa, o desenvolvimento do tema das funções tem de ser suportado em tarefas, desempenhadas individualmente ou em grupo, "que contemplem a modelação matemática, o trabalho experimental e o estudo de situações realistas sobre as quais se coloquem questões significativas e se fomente a resolução de problemas não rotineiros" (DES; 2001, p.2). Nesta perspetiva, o programa destaca a importância das tarefas a selecionar, as quais deverão contribuir para o desenvolvimento do pensamento científico, levando o estudante a intuir, conjeturar, experimentar, provar, avaliar e devem, ainda, promover o reforço das atitudes de autonomia e de cooperação (Ministério da Educação, 2001, p. 10).

Na conceção e aplicação das tarefas na sala de aula, para além de todos os aspetos já mencionados, é fundamental não esquecer que os nossos alunos vivem numa sociedade onde as novas tecnologias desempenham um papel cada vez mais importante.

O programa afirma que este tema detém uma ênfase particular na ligação entre as fórmulas e as representações geométricas, sendo esta ligação operatória para todos os que utilizam a matemática, pois a capacidade de as relacionar é fundamental para o mundo de hoje e do futuro. Assim, este tema deverá fornecer uma formação, tão básica como a tabuada, para a vida toda, (Ministério da Educação, 2001, p. 26; p.27).

Segundo o *National Council Teachers of Mathematics* (NCTM ,2007), "o termo *representação* refere-se tanto ao processo como ao resultado – por outras palavras, à aquisição de um conceito ou de uma relação matemática expressa numa determinada forma e à forma, em si mesma" (p. 75). Este documento sublinha a importância da utilização de múltiplas representações na aprendizagem da matemática, referindo, em particular, que "a representação é predominante na Álgebra. Os gráficos transmitem certos tipos de informação visual, enquanto as expressões simbólicas poderão ser mais facilmente manipuladas, analisadas e transformadas" (p. 422). O documento acrescenta que as representações facilitam o raciocínio e constituem ferramentas essenciais para as demonstrações, enfatizando a ideia de que representações diferentes apoiam diferentes formas de pensar e manipular objetos matemáticos.

Na aprendizagem das funções, é fundamental proporcionar aos alunos experiências de aprendizagem que promovam a manipulação de certas características das suas diferentes representações, por exemplo, os diferentes parâmetros na representação simbólica; ou a translação, dilatação, contração e simetria da sua representação gráfica. No trabalho com as diferentes representações de funções, devem ser propostas aos alunos tarefas que realcem a utilidade de cada representação. Cada uma destas representações dá informações específicas sem, no entanto, conseguir descrever completamente o conceito de função. É indispensável que os alunos trabalhem com cada uma das representações e que também traduzam informação de umas para outras, uma vez que estas se complementam. As diferentes representações de uma função devem ser relacionadas entre si para que os alunos apreendam este conceito na sua globalidade.

A importância da representação gráfica de uma função vem permitir um aspeto global no estudo das funções fazendo com que o aluno compreenda conceitos matemáticos e sinta a necessidade de fazer, em alguns casos, o seu estudo analítico. Este processo vai facilitar o trabalho do aluno e torná-lo muito mais aliciante, levando-o a raciocinar, investigar, experimentar e não se limitar a ouvir e reproduzir os conceitos transmitidos.

No âmbito da resolução de tarefas, segundo as indicações metodológicas para o estudo das funções, deve dar-se especial ênfase à resolução de problemas usando métodos numéricos e gráficos em simultâneo, procedimento em que a resolução analítica será sempre acompanhada da verificação numérica e gráfica. Alguns dos cálculos podem ser efetuados pela calculadora, ficando o aluno com mais tempo disponível para refletir no problema e aumentando, deste modo, a importância do desenvolvimento de capacidades para fazer uma boa utilização desta tecnologia.

A Associação de Professores de Matemática (APM, 2007), referindo-se aos Princípios para a Matemática Escolar (pp. 11-29), enuncia o Princípio da Tecnologia: “A tecnologia é essencial no ensino e na aprendizagem da matemática; influencia a matemática que é ensinada e melhora a aprendizagem dos alunos” (p. 26). A utilização das novas tecnologias no ensino da matemática tem sido uma recomendação expressa dos programas de matemática para o ensino secundário. Dando resposta a estas indicações, a maioria das editoras nacionais, numa estratégia competitiva e comercial, fazem acompanhar os manuais em livro (do professor e do aluno) com suportes didáticos que empregam a tecnologia digital (CD-ROM, e-books, filmes e referências a sites). Na competência da aquisição de conhecimentos, com recurso às tecnologias, ter-se-á de empregar novos tipos de abordagem: mais centrada no aluno, mais baseada em investigação e em respostas a questões, transformando a sala de aula numa comunidade de aprendizagem e não apenas de ensino. As calculadoras gráficas de última geração possuem um conjunto de aplicações (gráficos, geometria, folha de cálculo, dados e estatística, …) que em muitas das suas características são autênticos minicomputadores, permitindo a realização de explorações muito interessantes. O facto de muitos alunos já terem adquirido esta tecnologia, estando disponível em sala de aula, torna ainda mais fácil este tipo de trabalho. De facto, a possibilidade que agora temos de ir alterando os parâmetros das expressões analíticas das funções, podendo observar em tempo real as transformações que ocorrem nas suas representações gráficas, motiva-nos a fazer conjeturas sobre algumas das suas propriedades, o que seria muito mais difícil, ou quase impossível, sem a tecnologia que temos hoje ao nosso dispor. A introdução da tecnologia poderá ser um fator importante se for integrada numa transformação geral da abordagem feita, neste caso, ao estudo das funções. Trata-se de um processo em que:

- Se dá ênfase às múltiplas representações das funções (tabelas, gráfico, expressão analítica) e à sua interpretação em problemas concretos ligados a várias situações da realidade e de outras ciências;
- Se valorizam estratégias de exploração e descoberta por parte do aluno;
- Se dá tempo ao aluno para que possa fazer as suas próprias descobertas;
- Se reconhece a necessidade de ensinar e educar no uso da máquina, desenvolvendo o espírito crítico;
- Se utiliza a máquina como um instrumento de trabalho flexível ao longo de todo o ano e em todos os momentos de trabalho dos alunos.

A perceção da importância da matemática e do seu ensino tem vindo a sofrer alterações. Na atualidade, o ensino da matemática tem como objetivo tornar os jovens matematicamente competentes. Esta noção está relacionada com atitudes, capacidades e conhecimentos como refere Abrantes (1999). A competência matemática adquire-se através de variadas experiências de aprendizagem e da reflexão sobre essas experiências, permitindo deste modo desenvolver a capacidade de usar matemática, para analisar e resolver problemas, para raciocinar e comunicar.

Neste sentido, torna-se pertinente a realização de uma investigação sobre a aprendizagem das funções quadráticas do 10.º ano de escolaridade com tarefas de exploração e investigação com recurso à calculadora gráfica. Saber-questionar, saber-explorar e saber-construir serão certamente as palavras-chave para atingir os objetivos propostos nesta investigação. Com este estudo, espero contribuir para o meu próprio desenvolvimento pessoal e profissional e, simultaneamente, suscitar reflexões e interesse a outros professores na realização deste de atividades desta natureza.

1.2. Objetivos e questões da investigação

O estudo que me proponho desenvolver tem como objetivo analisar o modo como a resolução de tarefas de natureza exploratória e investigativa, envolvendo o uso da calculadora gráfica, contribui para a compreensão e aprendizagem das funções quadráticas pelos alunos do 10.º ano de escolaridade.

De modo a compreender melhor as dificuldades de aprendizagem dos alunos relativamente às funções quadráticas, decidi considerar o tópico funções quadráticas, com recurso à calculadora gráfica como objeto de estudo. Assim, formulei o seguinte problema e nele identifiquei três questões de investigação:

Problema. Analisar o modo como a resolução de tarefas de natureza exploratória e investigativa, envolvendo o uso da calculadora gráfica, contribui para a compreensão e aprendizagem das funções quadráticas no 10.º ano de escolaridade. Deste objetivo, resultam as seguintes questões de investigação:

1. Como interpretam os alunos, as propriedades das funções em diferentes representações? Em particular, como traduzem informação de uma representação para outra?
2. Quais as representações e processos utilizados pelos alunos na resolução de problemas, com funções quadráticas?
3. Como formular e investigar conjeturas matemáticas?

Com a realização desta investigação, espero contribuir para um melhor esclarecimento das problemáticas associadas à aprendizagem das funções com utilização da calculadora gráfica e, deste modo, poder fomentar a discussão no seio da comunidade de professores, no sentido de se encontrar estratégias e metodologias válidas, de forma a melhorar o ensino da unidade curricular “Funções quadráticas”, no 10.º ano de escolaridade.

1.3. Organização geral da investigação

Esta investigação está estruturada em oito capítulos. Este primeiro capítulo é dedicado à introdução. Aqui são apresentados: a pertinência do estudo, tendo por base uma reflexão sobre as minhas motivações enquanto professor; a importância da realização de investigação nesta área da matemática; os objetivos e as questões subjacentes à investigação. O segundo capítulo consiste numa reflexão crítica sobre o meu percurso profissional, ao longo dos últimos vinte e nove anos, no ensino da matemática. O terceiro capítulo trata da fundamentação teórica, no qual se faz a explanação de um conjunto de conceitos que têm a ver com a introdução de tarefas de natureza exploratória e investigativa, bem como a utilização das calculadoras em sala de aula. O capítulo seguinte diz respeito à planificação da unidade e à explicitação das estratégias de ensino concebidas para cumprir os objetivos traçados, tendo em conta as características da turma. O quinto capítulo explicita as opções metodológicas e as principais características dos participantes do estudo, bem como os procedimentos adotados relativamente à recolha e análise dos dados. O capítulo sexto dá conta dos resultados obtidos e por fim, no capítulo sétimo, são apresentados os principais resultados do estudo, seguidos de algumas recomendações que resultam do trabalho realizado. Este capítulo termina com uma reflexão pessoal sobre a concretização do estudo e o contributo para o meu desenvolvimento pessoal e profissional. Concluo o trabalho com a indicação das referências bibliográficas seguidas dos anexos.

2. Reflexão sobre prática pedagógica

Sempre acreditei que, para fazermos algo bem, precisamos de fazê-lo com muito amor, dedicação, responsabilidade e empenho e, para ser um bom professor, é preciso ter vocação, respeito, dedicação para com os alunos. Por outro lado, um professor não pode mostrar-se satisfeito com a sua sabedoria, necessita de investir continuamente na busca de conhecimento. É com base nessa filosofia que há 29 anos desenvolvo, com muito orgulho, o meu trabalho.

Procuro fazer das minhas aulas diárias um acontecimento novo e enriquecedor. Tento sempre utilizar atividades significativas e desafiadoras que despertem nos alunos a vontade de aprender. Quando, por um lado, se quer aprender e, por outro, se quer ensinar, o processo de ensino-aprendizagem ocorre com naturalidade.

A minha relação com a matemática foi sempre boa, pois tinha facilidade em compreendê-la e tinha gosto por novos desafios. Os meus professores do ensino secundário viam-me com aptidão para esta área e incentivaram-me para uma licenciatura neste domínio. Terminado o 12º ano, fui tirar o curso de Ensino da Matemática na universidade.

Quando comecei a lecionar, estava a frequentar o primeiro ano do curso. Na altura, havia muita falta de professores, nomeadamente de matemática, e o sistema de ensino permitia que com apenas o 12º ano, fazendo oferecimento de serviços na Secretaria Regional de Educação, pudéssemos ser chamados a lecionar. E nesse mesmo ano, de 1983, fui chamada para lecionar o 8ºano da disciplina de matemática.

Foi simultaneamente uma experiência aliciante e bastante assustadora. Foi-me atribuída uma turma de alunos, com personalidades bem marcadas, e foi muito confuso passar de aluna a professora de uma forma tão repentina. Porém, tinha o conhecimento exigido em matemática, suficiente para esclarecer dúvidas aos alunos e conseguir expressar-me de forma natural, de modo a expor os conceitos matemáticos de uma forma clara e concisa.

Jamais esquecerei estes primeiros alunos, pois tiveram muito significado na minha aprendizagem como profissional do ensino da matemática. Foi com eles que aprendi uma pequena parte do que é ser professor. Lembro ainda, com agrado, a compreensão e o carinho dos meus alunos perante a minha primeira experiência profissional.

Estes primeiros anos foram aliciantes pois, como estava a fazer a licenciatura em

Ensino da Matemática, usava as minhas turmas como laboratório para as estratégias estudadas na universidade e tirava ilações dessas teorias. Foi um período em que procurei relacionar os aspetos teóricos com os aspetos práticos. Eu tinha a preocupação de combinar a teoria e a prática, para que fosse possível apresentar um bom resultado. Assumia uma postura não só crítica, mas também reflexiva da prática educativa diante da realidade, de modo a poder ministrar uma educação de qualidade.

Enfrentei inúmeros desafios para me tornar uma boa profissional. Muitas disciplinas do curso da licenciatura em Ensino da Matemática foram fundamentais, pois facultaram-me uma compreensão mais profunda dos conteúdos matemáticos, cooperando para o desenvolvimento de um raciocínio lógico e dedutivo de extrema importância já que precisamos de dominar um conjunto de conhecimentos, muito para além daquilo que pretendemos transmitir em sala de aula. As disciplinas pedagógicas estão fundamentadas em simulações e conhecimentos teóricos desenvolvidos e transmitidos por pesquisadores e profissionais que se dedicaram a investigar e escrever sobre diversas metodologias no processo de ensino-aprendizagem. Na sala de aula, por sua vez, o professor pode pôr em prática as metodologias tão discutidas na universidade e daí tirar conclusões sobres as mesmas. Embora na universidade os assuntos teóricos sejam suficientes e, por vezes, orientem quanto a possíveis maneiras de transmitir essa teoria, somente na prática, ao deparar com as dificuldades, é que se aperfeiçoa o que foi assimilado.

O maior desafio que tinha como estudante de licenciatura em Ensino da Matemática era o de mudar a forma de pensar e de ensinar matemática. Posteriormente, durante todo o estágio, consegui ver melhor a importância da teoria e da prática profissional, trazendo autores de diversos artigos para apoio do meu trabalho em sala de aula e também para o melhor entendimento da prática profissional. O estágio possibilitou um repensar da educação matemática, procurando a cada momento ser mais que professora, ser uma educadora e uma ouvinte e perceber que um professor de matemática não acaba a sua formação no estágio. Pelo contrário, fica sensibilizado para a procura de formação ao longo de toda a sua carreira.

Enquanto professora o meu objetivo principal é o sucesso do aluno, pois, só assim, considero que a minha profissão tem sentido e valor.

Destes anos, ficou ainda a experiência de lidar com alunos com problemas disciplinares e mostrando desinteresse pela disciplina, com turmas de alunos com características muito diversas, quer ao nível dos conhecimentos, quer ao nível das capacidades e ritmos de aprendizagem, quer ainda do empenho, da capacidade de concentração, motivação, interesse e modo de ser e de estar. Este problema é um desafio sem soluções únicas e pré-concebidas. Por isso, tenho procurado ter uma atitude criativa e dinâmica para ultrapassar estes obstáculos. Para motivar os alunos, tenho usado estratégias e metodologias de trabalho que correspondem aos interesses deles. Descobrir o que o aluno sabe, o que precisa conhecer para superar dificuldades, o que lhe desperta interesse, estimulá-lo para que se sinta motivado a aprender e perceber como quer aprender.

Daí que o meu principal objetivo seja “descomplicar” a matemática. Fazer o aluno entender que os conceitos matemáticos fazem sentido e só procurando responder aos “porquês”, em detrimento da mecanização, é que se chega a um bom resultado. Tento, então, ensinar a matemática de modo a ser um estímulo à capacidade de investigação lógica do aluno, fazendo-o desenvolver a capacidade de pensar e raciocinar.

Proporciono atividades diversificadas de modo a promover nos alunos o desenvolvimento da capacidade de compreensão dos conceitos matemáticos e dos processos, de forma estimulante e, simultaneamente, a resolverem problemas, proceder a investigações matemáticas de modo a raciocinarem e a comunicarem matematicamente. Valorizo o recurso à calculadora por assumir um papel importante na motivação e na promoção do gosto por aprender, uma vez que é mais estimulante para os alunos desenvolverem a sua criatividade. Utilizo-a, sobretudo, em atividades de caráter investigativo, na resolução de problemas ou na modelação. A calculadora é ainda importante na realização de trabalhos de grupo, pois é uma maneira de trocar ideias, de desenvolver a capacidade de argumentação, de envolver os alunos na atividade matemática. Com menos frequência, também já realizei jogos matemáticos, o que despertou interesse na disciplina pelos alunos, pois viram a aprendizagem como um processo interessante e divertido e onde participaram de uma forma ativa. É com a diversificação de metodologias, que consigo envolver os alunos a participarem de forma ativa e construtiva no processo de ensino-aprendizagem.

Um dos meus maiores desafios, enquanto professora de matemática, tem sido, e procurarei que continue sendo, o de desenvolver nos alunos a capacidade de pensar matematicamente e dar-lhes a confiança necessária, para que eles participem ativamente na aula de matemática e contribuam para a sua construção.

Mas a exigência, o rigor, a par da desmistificação da inutilidade da matemática, é um desafio para qualquer professor, mas mais que tudo, é a motivação necessária para que a mensagem por mim transmitida faça com que o aluno construa e descubra, através do seu trabalho, a importância da matemática.

Para mim, dentro da sala de aula, todos os alunos são tratados da mesma forma, porque todos devem ter a oportunidade de estudar uma matemática de qualidade.

Uma das minhas melhores experiências foi a de trabalhar com alunos adultos em horário pós-laboral. Muitos destes alunos voltaram a estudar, passados 10 ou mais anos depois de terem feito o 3ºciclo, com o objetivo de tirarem um curso superior ou mesmo progredirem no seu trabalho. Estes alunos, motivados e com muito espírito de sacrifício a favor da sua instrução, fizeram com que estes anos fossem os mais enriquecedores quer a nível profissional quer pessoal, por vê-los evoluir e recuperar o tempo perdido.

No fim de um ano letivo, quem não gosta de ouvir comentários, como por exemplo: “ Se não fosse a professora não teria conseguido” ou “ Nunca gostei de matemática mas agora é a minha disciplina preferida”. Sem dúvida que o empenho e o gosto que tenho pela disciplina são importantes e, felizmente, tenho conseguido transmitir essa realidade a muitos alunos.

Ao longo destes anos constatei que a sala de aula é muito mais que um lugar para adquirir conhecimentos, é também um lugar onde os alunos crescem como pessoas e, para tal, o professor tem que ser um bom educador, tem de educar os alunos para o futuro.

Com tudo isto, fui crescendo como professora, o que não significa que o ensino já não tenha “segredos” para mim, pois todos os anos são-me lançados novos desafios e, eu própria, estabeleço novas metas em prol de um ensino mais próximo dos alunos e mais de acordo com o seu sucesso.

É com “paixão” que todos os anos começo mais um ano letivo pois o meu sonho sempre foi ser professora. É esta “paixão” pela matemática e a experiência que fui acumulando que me permite agora lecionar com a segurança de que estou a fazer um bom trabalho, refletindo-se no sucesso e nas notas de exame dos meus alunos.

É importante que o professor de matemática goste do que faz e procure novas formas de ensinar. Pois, quando trabalhamos naquilo que nos dá prazer, em atividades que gostamos de realizar, poucas razões temos para nos queixar e, frequentemente, dizemos que adoramos o nosso trabalho. Ou ainda, se o aluno não aprende da forma que eu ensino, então adapto o meu ensino de forma a que ele possa aprender.

Uma das estratégias que uso para motivar os alunos nas minhas aulas é o de dar a conhecer alguns episódios da História da Matemática no início da lecionação de novos temas, de modo a mostrar aos alunos que a matemática é uma ciência evolutiva e em permanente construção. Também procuro que os alunos compreendam através das atividades propostas na sala de aula a importância da matemática na vida quotidiana. Não é possível preparar alunos capazes de solucionar problemas, ensinando conceitos matemáticos desvinculados da realidade, ou que se mostrem sem significado para eles, esperando que saibam como utilizá-los no futuro. Por isso, é necessário pensar em tornar o ensino da matemática uma das formas de preparar os alunos para a participação ativa dentro da sociedade.

Julgo poder afirmar que, nas minhas aulas, desenvolvo um trabalho que é significativo para o crescimento global dos alunos, que os ajuda a saber pensar e raciocinar de forma clara. Associo o ensino da matemática ao desenvolvimento das capacidades, sendo este aspeto que procuro prioritariamente explorar nas aulas. Esta preocupação concretiza-se na realização de atividades de natureza diversa, nomeadamente, resolução de exercícios e problemas, realização de generalizações e sínteses, trabalhos práticos, relação da matemática com a realidade, atividades de investigação e exploração e, sobretudo, discussão e comunicação.

Procuro diversificar as formas de trabalho, recorrendo ao trabalho individual, trabalho em pequenos grupos e com toda a turma, estimulando sempre a interação entre os alunos.

Uso vários materiais de trabalho nas aulas como livros variados, alguns materiais manipulativos, computador e calculadoras. Aliás, a calculadora é um dos instrumentos a que recorro com frequência para apoiar determinadas atividades, nomeadamente, as de natureza investigativa e a resolução de problemas. Mas o aspeto que considero essencial no processo de ensino e aprendizagem da matemática, tem a ver com o papel do professor e dos alunos, pelo que procuro imaginar e pôr em prática estratégias que proporcionam ao aluno um papel ativo na aprendizagem. Penso que uma boa solução é conduzir o ensino numa perspetiva de “construção”, no sentido de envolver os alunos num tipo de atividade semelhante à dos cientistas matemáticos, de modo que o trabalho seja desenvolvido com o espírito de resolução de alguns problemas desafiantes e que dê lugar à descoberta por parte dos alunos, valorizando, em qualquer atividade matemática, a explicitação dos “porquês”.

Sempre tive a preocupação de refletir sobre as minhas planificações e também sobre a forma como ensino, pois só assim poderei melhorar enquanto professora.

Para lidar de forma flexível com o programa, faço uma preparação bastante cuidada e atempada das aulas, dedicando especial atenção à planificação das unidades didáticas. Este trabalho é fundamental, uma vez que habitualmente não me limito a um só manual. A preparação do meu trabalho é apoiada por diversos materiais, desde aqueles que eu própria desenvolvo e reformulo, em função da avaliação que faço aquando da sua utilização, aos que vou recolhendo nos diversos contextos profissionais.

Nas minhas aulas, procuro adequar as estratégias de ensino-aprendizagem às necessidades de cada um, com recursos a materiais didáticos e sempre que possível à utilização das novas tecnologias (Por exemplo, recorri a aplicações computacionais de Geometria Dinâmica – Geogebra, quando os conteúdos a lecionar estavam relacionados com a Geometria, ou, quando foi necessário efetuar a representação gráfica de algumas funções. É muito mais fácil mostrar as alterações produzidas pela variação dos parâmetros na representação gráfica destas funções). A calculadora gráfica está sempre presente nas minhas aulas pois é um instrumento facilitador da prática da matemática e bom contributo para desenvolver o espírito de observação crítica dos alunos, bem como realizar com maior rapidez e eficácia determinados trabalhos.

É importante reconhecer a necessidade de aplicar técnicas inovadoras de ensino, pois envolvendo os alunos nas atividades desenvolvidas durante as aulas, percebe-se o interesse por aulas dinâmicas, criativas, tornando o relacionamento entre professor e aluno mais sólido.

As relações de amizade que estabeleço com os meus alunos ao longo das aulas são um fator importante para este processo ensino-aprendizagem pois, só assim se sentem à vontade para tirar qualquer dúvida ou mesmo até para expor qualquer problema pessoal. Recorri frequentemente à utilização do reforço positivo e até de pequenos incentivos, com o objetivo de valorizar o esforço, a dedicação e o empenho de todos aqueles que visavam vencer os obstáculos. Dentro e fora da sala de aula procurei sempre desenvolver a autoestima e a confiança dos alunos, estimulando a autonomia, a criatividade, a autocrítica e a opinião pessoal.

Considero positiva a relação que mantenho com os alunos, relação que tem como base o respeito mútuo e a compreensão. Mantenho com estes uma relação próxima e efetuosa tratando-os pelo nome e tenho sempre uma palavra amiga quer na sala de aula, quer fora dela.

As minhas aulas desenrolam-se num clima agradável, ligeiro e saudável. As atitudes e sentimentos que manifesto com a generalidade dos alunos são de grande paciência e atenção revelando sempre a calma e naturalidade nas relações, bem como interesse pelo que o aluno faz, decorrendo as aulas sem tensão aparente.

Na relação pedagógica, continuo a defender e preocupar-me com o sucesso dos alunos, não por caminhos de facilidade, mas pela aquisição de conhecimentos que lhes permita corresponder aos objetivos pretendidos nesta disciplina e consequentemente sucesso nas etapas seguintes. O clima de diálogo é constante e por isso os alunos reprovados reconhecem as limitações e razões do seu insucesso nesta disciplina.

A formação tem sido, e continua a ser, uma preocupação constante ao longo de toda a minha carreira profissional. Procuro manter-me atualizada em termos de conhecimento profissional, científico, pedagógico e didático inerente à minha disciplina, a fim de melhorar as minhas práticas educativas e otimizar o ensino na escola.

Por iniciativa própria, a nível particular ou oficial participei em conferências, ações, cursos, encontros e congressos, tendo em vista a minha atualização científica/ tecnológica e pedagógica-didática e sem a preocupação de colecionar diplomas e/ou obter créditos. Mantenho-me atualizada através da leitura de legislação, jornais e revistas relacionados com a matemática (por exemplo, as revistas "Educação e Matemática", "Quadrante" e a "Revista Ibero-Americana de Estudos em Educação") que incluem vários trabalhos realizados por colegas em outras escolas, ideias e experiências de ensino e trabalhos relacionados com a investigação em ensino e aprendizagem da matemática, bibliografia especializada, consulta de sites de interesse na Internet, reuniões informais com colegas para troca de experiências pedagógicas e também formação científica, didática e pedagógica. Deste modo, faço os estudos no sentido de ir ao encontro das necessidades dos alunos mediante os programas.

Manter-se atualizado sobre as novas metodologias de ensino e desenvolver práticas pedagógicas mais eficientes são alguns dos principais desafios da minha profissão. Procuro melhorar o meu conhecimento e, assim, de modo natural, transporto novos conhecimentos, novas metodologias para dentro da sala de aula. Utilizo novas maneiras de ver como os meus alunos aprendem.

Ser professora é, antes de tudo, permitir a minha própria aprendizagem, é não temer o novo e o desconhecido, é refletir sobre novas metodologias, é possibilitar o melhor para o processo de ensino-aprendizagem dos meus alunos. Se não tivesse esta qualidade teria sido melhor procurar outra profissão.

Procuro refletir sobre a minha prática, o que tem contribuído para o meu desenvolvimento profissional como professora, pois é uma forma de enfrentar situações novas e melhorar as práticas da sala de aula.

Deste modo, penso que o futuro passará por continuar a trabalhar com empenho, procurando deixar marcas positivas nos alunos que se cruzarem no meu caminho.

Como conclusão, posso dizer que todos os meus objetivos têm sido cumpridos, através de uma boa relação pedagógica, em que a maioria dos meus alunos atinge os objetivos a que se propõem, melhorando a sua aprendizagem e aprendendo a tornarem-se pessoas melhores.

Hoje, fazendo uma autoavaliação, percebo que adquiri mais segurança e sinto-me preparada para uma atuação em sala de aula, porém estou ciente de que em cada dia aprendemos novas coisas e que precisamos estar recetivos a essas novidades para o enriquecimento do processo ensino-aprendizagem, ou seja, o processo de formação deve ser contínuo.

Lecionei, durante os primeiros cinco anos, alunos do 3º ciclo (7º, 8ºe 9 anos), o primeiro ano na Escola Secundária Francisco Franco, nos dois anos seguintes na Escola Secundária Dr. Ângelo Augusto da Silva, um ano na Escola Secundária do Funchal, o ano de estágio na Escola Secundária Jaime Moniz e a partir de 1889 até o momento leciono o nível secundário (10º,11º e 12º anos), na Escola Secundária Francisco Franco.

Além das aulas também fui muitas vezes diretora de turma, atividade que, para além de ter uma maior proximidade com a turma e contactar e receber os encarregados de educação, proporciona uma missão interessante, pois permite-nos ter um conhecimento maior do percurso individual dos alunos e do seu enquadramento familiar e sociocultural, ajudando a perceber certas dificuldades e a tentar ser útil na orientação do seu futuro.

Também preparei e corrigi provas de exame a nível de escola e tenho corrigido exames a nível nacional.

Sendo a profissão de professor fortemente especializada e complexa, a mesma requer uma formação que forçosamente não se pode esgotar na formação inicial. O professor terá, pois, de assumir a postura de humildade de querer aprender sempre e sempre mais, ao longo do seu percurso profissional, sobre a sua área de docência.

A minha preocupação acerca dos processos, recursos, erros e dificuldades que os alunos enfrentam no processo de aprendizagem a as consequências que os mesmos têm para o seu percurso escolar, levam-me a refletir sobre a avaliação. Esta é um dos pontos fundamentais e incontornáveis do processo de ensino-aprendizagem.

Costumo avaliar os meus alunos diariamente, pois assim consigo perceber as dificuldades que apresentam e acompanhar o seu progresso e se este está acontecendo de acordo com as minhas expectativas ou se há necessidade de refletir sobre a minha atuação como mediadora do processo ensino-aprendizagem. Quanto ao aluno, a avaliação permite que ele saiba como está o seu desempenho entendido do ponto de vista do professor, bem como a eventualidade de existência de lacunas na sua aprendizagem. Avalio para apreender os conhecimentos e as necessidades dos alunos e, a partir daí, verificar se é possível realizar intervenções pedagógicas apropriadas, que tendam a gerar melhorias nas suas aprendizagens. Quando avalio, de uma certa forma estou-me avaliando, pois o aluno é também produto da minha prática.

No início de cada ano, informo os alunos dos instrumentos de avaliação a utilizar, para que não fiquem surpreendidos com procedimentos com que não estão familiarizados e, previamente, procuro aplicar na sala de aula esses instrumentos de avaliação, tendo em conta os critérios definidos em departamento e aprovados em Conselho Pedagógico (fichas de avaliação, trabalho, questões de aula, diagnóstico,…)

No processo de ensino-aprendizagem, aplico diferentes tipos de avaliação. Numa fase inicial, procedo à avaliação de diagnóstico e, posteriormente, à avaliação formativa, sumativa e grelha de registos de avaliação de trabalhos e recolha de informação diária, em todas as turmas. A avaliação diagnóstica tem como objetivo o conhecimento prévio dos alunos com a finalidade de estabelecer uma forma de trabalho e desenvolver uma planificação que permita o desenvolvimento dos alunos. As fichas formativas permitem, analisar os conhecimentos adquiridos e refletir sobre algumas falhas. Os registos das fichas formativas e sumativas, bem como a avaliação dos trabalhos desenvolvidos, são instrumentos necessários para o desenvolvimento dos alunos. Periodicamente, costumo promover a autoavaliação dos alunos, incentivando-os a uma reflexão crítica e construtiva.

Se a avaliação contribuir para o desenvolvimento das capacidades dos alunos, pode-se dizer que ela se converte numa ferramenta pedagógica, num elemento que melhora a aprendizagem do aluno.

3. Fundamentação Teórica

3.1. Atividades investigativas

"*É fazendo que aprendemos as coisas que temos de aprender, antes de podermos fazê-las*".

ARISTÓTELES (384- 322 a.C.)

É importante o aluno ser considerado como um sujeito ativo e interativo no seu processo de construção de conhecimento. Tem de ser criativo no processo de ensino-aprendizagem e não apenas um recetor do conhecimento. Ele deverá ser criador do seu próprio conhecimento. Assim sendo, saber matemática transformou-se em fazer matemática. Os objetivos e as finalidades da matemática evoluíram com o tempo, havendo atualmente, uma maior atenção à forma como ela é entendida. "Aprender matemática com compreensão tem a capacidade de tornar mais fácil a aprendizagem subsequente. Ideias e conceitos bem fundamentados e eficazmente relacionados são mais facilmente aplicados a novas situações" (NCTM, 2007, p.21).

O aluno deve participar ativamente na construção do seu conhecimento. Só assim, tal como afirma Pólya (2003), é possível estimular "o pensamento independente" e capacitar o aluno com ferramentas para o desenvolver.

Cabe ao professor a oportunidade de mudar, respeitando as atitudes dos alunos, as suas diferenças e valorizando o que eles conseguem desenvolver dentro das suas potencialidades. Estaremos, deste modo, a formar, mais do que alunos repetidores de conceitos matemáticos, alunos que valorizam as suas experiências e transformando as aulas em espaços privilegiados para uma aprendizagem com mais significado.

Segundo, a APM em 1988 através do documento *Renovação do Currículo em Matemática* defende-se que:

> Explorar, investigar e analisar situações, discutir entre si e com o professor as várias estratégias e processos de trabalhar, formular e resolver problemas, inventar

nova terminologia, entrar em defesa das conclusões a que vão chegando, redigir os resultados e compará-los eventualmente com os de outros alunos ou grupos de alunos [...] é um fator que pode ser realmente decisivo na transformação positiva da matemática escolar. (p. 47).

Em todos os níveis de ensino os alunos devem, segundo o NCTM (1991), viver a experiência de fazer conjeturas, abstrair propriedades matemáticas, comunicar os seus raciocínios, validar as suas conclusões, questionar e discutir o seu próprio raciocínio e o dos outros.

Quanto à perspetiva de que aprender matemática consiste, essencialmente, em fazer matemática a APM reforça esta ideia ao afirmar que:

A experiência matemática deve constituir o paradigma das atividades escolares nesta disciplina. Desde o princípio da escolaridade até ao fim do ensino secundário, e de acordo com o nível de desenvolvimento e maturidade dos alunos, estes deverão estar mergulhados num ambiente intelectualmente estimulante, no qual experimentar e fazer matemática sejam atividades naturais e desejadas. (APM, 1988,p.40).

As tarefas são uma das principais formas de envolver os alunos em atividade. As *Normas para profissionais para o ensino da Matemática* (*NCTM*,1994), distinguem diferentes tipos de tarefas matemáticas: “projetos, problemas, construções, aplicações e exercícios em que os alunos se envolvem” (p. 22). Tarefas adequadas e oportunas permitirão ao professor a aquisição de um maior e mais significativo conhecimento acerca do "pensamento e compreensão dos seus alunos, ao mesmo tempo que estimulam os alunos a ir mais além" (NCTM, 1994, p. 29). Além disso, o professor deverá procurar aperceber-se do modo como os alunos são conduzidos à exploração dos conteúdos em causa, procurando compreender como raciocinam os seus alunos NCTM (1994), para isso o professor pede aos alunos para registarem as justificações escritas dos seus raciocínios.

Assim, é fundamental que o professor proponha aos seus alunos tarefas de natureza diversificada, que lhes permitam explorar e descobrir matemática, proporcionando momentos de descoberta guiada por conceitos matemáticos, com atividade investigativa, estimulando a capacidade de resolver problemas e de comunicar matematicamente. Esta atitude de descoberta está de acordo com Abrantes (1998), quando afirma que:

. … a prática pedagógica deve valorizar tarefas que promovam o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos, nomeadamente a resolução de problemase as atividades de investigação, e que diversifiquem as formas de interação em aula,

> criando oportunidades de discussão entre os alunos, de trabalho de grupo e de trabalho projeto (p. 81-82).

Também o (NCTM) 1994 defende que os alunos, na sua aprendizagem da matemática, deverão "ser capazes de formular e resolver problemas, de julgar o papel do raciocínio matemático numa situação da vida real, e de comunicar matematicamente" (p. 21). Fazem também alusão ao que consideram boas propostas de tarefas para os professores apresentarem aos seus alunos: as "que não separam o pensamento matemático dos conceitos matemáticos ou aptidões, que despertam a curiosidade dos alunos e que os convidam a especular e a prosseguir com as suas intuições" (NCTM, 1994, p. 27), ou seja, são consideradas boas atividades em matemática aquelas que relacionam o pensamento matemático com os conceitos matemáticos ou aptidões e que despertam a curiosidade dos alunos.

Diversos autores referem que é necessário recorrer a diferentes processos matemáticos, para que seja possível a resolução de problemas e atividades de investigação, aos quais são atribuídos diferentes graus de importância consoante o tipo de atividades.

Segundo o NCTM (1994):

> As atividades devem incentivar nos alunos o sentimento de que a matemática é um domínio em mudança e evolução, no qual as ideias crescem e se desenvolvem ao longo do tempo e para o qual contribuíram muitos grupos culturais (p. 28).

No programa de matemática A, a resolução de problemas é considerada não só como indicação metodológica mas também como tema, e surge ainda como motivação, como sistema de recuperação e como forma privilegiada para suscitar a comunicação oral e escrita. No ponto das sugestões metodológicas gerais, pode ler-se: “destaca-se a importância das atividades a selecionar, as quais deverão contribuir para o desenvolvimento do pensamento científico, levando o aluno a intuir, conjeturar, experimentar, provar, avaliar e ainda para o reforço das atitudes de autonomia e de cooperação” (DES, 2001, p. 10). Deste modo, o programa atual do ensino secundário faz referências significativas à resolução de problemas e à realização de atividades de investigação pelos alunos como forma de desenvolvimento pessoal e social.

As tarefas de natureza exploratória e investigativa cumprem o objetivo de construção do conhecimento por parte do aluno e dão resposta aos desafios postos pela sociedade e pela matemática que tem por função explorá-los.

Para que os alunos desenvolvam plenamente as suas competências matemáticas e assumam uma visão alargada da natureza desta ciência, Ponte (2003) defende que as tarefas de exploração e investigação têm de ter um papel importante na sala de aula.

As investigações matemáticas

> implicam processos complexos de pensamento e requerem o envolvimento e a criatividade dos alunos. Mas, além disso, são caracterizadas por se partir de enunciados e objetivos pouco precisos e estruturados, levando a que sejam os próprios alunos a definir o objetivo, conduzir experiências, formular e testar hipóteses. (Abrantes et al., 1996, p. 1).

Segundo Oliveira, Ponte, Cunha e Segurado (1997), as atividades de investigação assumem um importante papel educacional na medida em que:

> a) Constituem uma parte essencial da atividade matemática e são, portanto, fundamentais para proporcionar uma completa visão desta ciência;
> b) Estimulam nos alunos o tipo de envolvimento necessário para que possa ocorrer uma aprendizagem significativa;
> c) Fornecem pontos de partida múltiplos para alunos de diversos níveis de competência matemática;
> d) Promovem um modo de pensamento holístico, essencial no raciocínio matemático, relacionando muitos tópicos e estratégias de pensamento. (p.135).

As atividades investigativas em sala de aula, para além de motivar os alunos para a matemática, fomentam o raciocínio, contribuem para desenvolver o espírito crítico, o gosto pela pesquisa que, através das aulas tradicionais e expositivas não seriam estimulados e incrementados.

De acordo com os autores, Ponte, Brocardo e Oliveira (2003), em qualquer disciplina, o envolvimento do aluno é condição fundamental da aprendizagem. Este é um aspeto fundamental das investigações e explorações, tarefas que requerem a participação do aluno na formulação das questões a estudar favorecendo o seu envolvimento na aprendizagem.

Realizar uma atividade de exploração significa “entrar em terreno desconhecido, recolher dados, detetar diferenças, ser sensível às repetições e às analogias, reconhecer regularidades e padrões – ou porventura um sentido ainda mais forte – investigar, procurar, encontrar e descobrir” (APM, 1988, p. 59). A exploração conduz à formulação de conjeturas que apela ao uso de capacidades intelectuais, ao espírito de observação**,** à definição e organização de uma estratégia, à imaginação e ao poder de abstração e ainda à avaliação das hipóteses de resolução a que se seguem a argumentação e a demonstração:

> Na realidade, se pretendêssemos sintetizar em poucas palavras o que é fazer matemática, a sequência de palavras … exploração/conjetura/argumentação/prova--reformulação da conjetura… poderia bem constituir um ponto de partida para essa síntese." (APM, 1988, p. 62).

Na perspetiva de Ponte,

> (...)"investigar" consiste em procurar compreender algo de modo aprofundado, tentar encontrar soluções adequadas para os problemas com que nos deparamos. Trata-se de uma capacidade de primeira importância para todos os cidadãos, que deve permear todo o trabalho da escola, tanto dos alunos como dos professores. (2010, p.15)

Ainda segundo Ponte (2003, p.2) "... investigar não significa necessariamente lidar com problemas na fronteira do conhecimento nem com problemas de grande dificuldade. Significa, apenas, trabalhar a partir de questões que nos interessam e que se apresentam inicialmente confusas, mas que conseguimos clarificar e estudar de modo organizado" Deste modo, realizamos uma investigação quando formulamos as nossas próprias questões e procuramos responder-lhes, de modo tanto quanto possível fundamentado e rigoroso. Segundo o autor, investigar corresponde a realizar descobertas, recorrendo a processos válidos, como formular problemas, explorar hipóteses, fazer e testar conjeturas, generalizar e construir argumentos, demonstrações e comunicação dos resultados. Parte-se de uma questão geral pouco estruturada e tenta-se formular uma questão mais precisa e sobre ela produzir várias conjeturas que devem ser testadas, para validar ou rejeitar essas conjeturas, ou novas questões sejam avaliadas até ganharem credibilidade, conferindo então uma validade matemática. Ainda segundo este autor, investigar é descobrir relações, padrões, semelhanças e diferenças procurando identificar e comprovar de forma exaustiva as diversas propriedades levantadas pelo investigador.

De acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2003, p. 13), "... investigar é descobrir relações entre objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos, procurando identificar as respetivas propriedades." Normalmente, uma investigação matemática envolve um ou mais problemas, havendo assim uma relação estreita entre problemas e investigação.

Dar ao aluno o papel de investigador é incentivá-lo à criação, utilização e comparação de uma vasta variedade de processos cognitivos que permitem ampliar os conhecimentos e os métodos que levam à resolução dos problemas e "se se pretende que os alunos desenvolvam plenamente as suas competências matemáticas e assumam uma visão alargada da natureza desta ciência, então as tarefas de exploração e investigação têm de ter um papel importante na sala de aula.” (Ponte, 2003, p.12).

Investigar não envolve apenas o conteúdo em si, mas a relação entre professor e aluno, em que os sujeitos interagem numa troca de experiências, construindo conceitos e transformando a sala de aula num espaço agradável para a aprendizagem.

> O conceito de investigação matemática, como atividade de ensino-aprendizagem, ajuda a trazer para a sala de aula o espírito de atividade genuína, constituindo por isso, uma poderosa metáfora educativa. O aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjeturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão de argumentos com os seus colegas e o professor. (Ponte, Brocardo; Oliveira, 2009, p.23).

As tarefas exploratório-investigativas em matemática mobilizam os múltiplos sentidos sobre um conceito ou noção matemática, despertando o interesse e a curiosidade dos alunos para o estudo desta disciplina.

As atividades de investigação matemática estão centradas no trabalho coletivo, que valoriza a participação ativa dos alunos de forma a torná-los corresponsáveis pelo trabalho em sala de aula. O professor, ao deixar de ser o único detentor do conhecimento, delega no aluno a responsabilidade pela construção do seu conhecimento que será mais consolidado e que o levará a fazer ligações com outros conhecimentos menos corretamente assimilados.

Para trabalhar com a metodologia de investigação matemática, não são necessários problemas ou questões difíceis, mas questões mais abertas e interessantes para os alunos, provocando-os a procurar a solução.

> É de notar que as tarefas, embora sejam importantes, não determinam por si só o que acontece na sala de aula. Uma mesma tarefa pode dar origem a situações de aprendizagem muito diversas, dependendo do modo como é apresentada aos alunos, do modo como estes aceitam o desafio que lhes é proposto e, muito em especial, do modo como evolui a situação de trabalho na sala de aula (Ponte, 2010, p.22).

Apesar dos alunos passarem a desempenhar um papel de maior destaque durante o desenvolvimento de atividades de caráter investigativo, o professor não deixa de assumir um papel de grande importância para o bom desenvolvimento das tarefas de caráter investigativo.

Numa aula de investigação, o professor tem vários papéis para desempenhar: desafiar os alunos; avaliar o progresso dos alunos; raciocinar matematicamente; apoiar o trabalho dos alunos; fornecer e recordar informações; e, finalmente, promover a reflexão dos alunos (Ponte et al. 1998).

A realização de investigação matemática pelos alunos pode contribuir para o seu desenvolvimento em vários níveis: (i) Na aprendizagem do que são e como se fazem investigações;(ii) Na aprendizagem de conceitos, ideias e procedimentos matemáticos; (iii) Na aprendizagem de objetos curriculares transversais, como a capacidade de comunicação e o trabalho em grupo; (iv) Na formação de novas conceções e atitudes em relação à matemática (Ponte, 2003).

Ponte, Oliveira, Brunheira, Varandas e Ferreira (1999) definiram quatro características de uma investigação matemática: (i) Formular a questão a investigar*;* (ii) Formular conjeturas relativamente a essa questão; (iii) Testar as conjeturas e, eventualmente, reformulá-las e (iv) Validar e comunicar os resultados. Cada uma destas etapas inclui diversas atividades, que podem ser observadas no Quadro 1.

Quadro 1: Momentos na realização de uma investigação

Momentos de uma investigação	Atividades
Exploração e formulação de questões	Reconhecer uma situação problemática; Explorar a situação problemática; Formular questões;
Formulação de conjeturas	Organizar dados; Formular conjeturas
Teste e reformulação de conjeturas	Realizar testes; Refinar uma conjetura;
Justificação e avaliação	Justificar uma conjetura; Avaliar o raciocínio ou o resultado do raciocínio.

Fonte: Investigação sobre investigações Matemáticas em Portugal, Ponte. 2003(p. 7).

Para Ponte (2003), uma tarefa de investigação pode ser caracterizada a partir de quatro dimensões básicas: i) O grau de dificuldade, ii) A estrutura, iii) O contexto referencial; e iv) O tempo requerido para a sua resolução.

O grau de dificuldade está relacionado com a perceção de dificuldade que o aluno encontra durante a realização da tarefa, a disponibilidade ou não de um processo imediato para a resolver. De acordo com Ponte (2005), o grau de dificuldade varia entre os polos de desafio reduzido e desafio elevado.

A estrutura de uma tarefa, segundo Ponte (2003), varia entre os polos “aberto” e “fechado”. Numa tarefa fechada, o que é dado e o que é pedido é claro e preciso, enquanto numa tarefa aberta existe um elevado grau de incerteza relativamente ao que é dado, ou ao que é pedido ou em ambas as situações. O contexto referencial pode divergir entre tarefas contextualizadas em situações de realidade e tarefas puramente matemáticas.

No que se refere ao tempo para a resolução de uma tarefa matemática, este pode variar entre “curto” e “longo”. A realização de uma tarefa pode demorar minutos, dias, semanas ou até mesmo meses. A duração pode ser curta ou longa, como indica a figura 1.

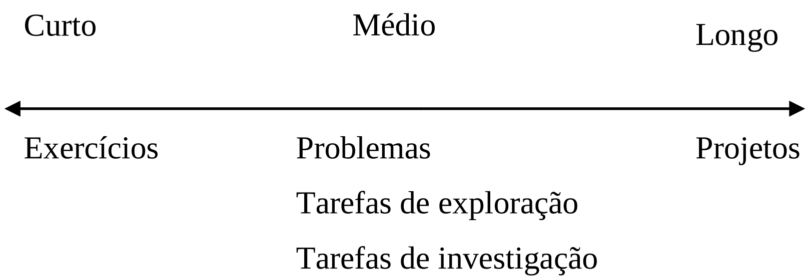


Figura 1: Diversos tipos de tarefas, quanto à duração. Ponte (2005)

O autor, considera tarefas de vários tipos e de naturezas diferentes, como os exercícios, os problemas, as explorações e as investigações. Os exercícios são tarefas de dificuldade reduzida e de estrutura fechada. Os problemas também têm uma estrutura fechada, mas têm um grau de dificuldade mais elevado. As explorações são tarefas que têm um grau de dificuldade reduzida, mas têm uma estrutura aberta, à semelhança das investigações. Estas são tarefas de estrutura aberta, mas com um grau de dificuldade elevado. Podemos distinguir graus de exploração de investigação consoante a dificuldade da tarefa, designando por exploração uma investigação fácil, quando apresenta um grau de dificuldade reduzido (fig. 2).

Figura 2: Os diversos tipos de tarefas, em termos do seu grau de desafio e de abertura

Assim as tarefas investigativas são descritas como as que apresentam um caráter aberto, possibilitando aos estudantes diferentes estratégias ao resolvê-las e possivelmente chegarem a diferentes resultados de acordo com a estratégia escolhida. Também podem permitir que os alunos formulem as questões a serem respondidas a partir de um tema geral.

Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2006), para que uma tarefa seja considerada uma investigação é fundamental que seja motivadora e desafiadora, não sendo demasiado acessível ao aluno, nem o processo de resolução nem a solução da questão. As atividades de investigação diferem claramente das tarefas que são habitualmente usadas no processo de ensino-aprendizagem, uma vez que são muito mais abertas, permitindo que o aluno coloque as suas próprias questões e estabeleça o caminho a seguir.

As investigações matemáticas constituem atividades que se podem realizar na sala de aula e que se relacionam, de muito perto, com a resolução de problemas, Tanto as investigações como os problemas constituem tarefas de desafio elevado, diferindo na estrutura, ou seja na sua abertura. Se, nos problemas, estamos perante uma tarefa mais fechada, nas investigações estamos perante uma tarefa mais aberta.

Apesar de aspetos comuns, existem distinções que são salientadas por diversos autores para diferençarem as investigações matemáticas da resolução de problemas.

Frobisher (1994) procura clarificar esta questão, partindo de um conceito geral (que nota como ‘problema’) que se subdivide em dois grandes grupos: problemas e investigações, tal como se mostra na Figura 3.

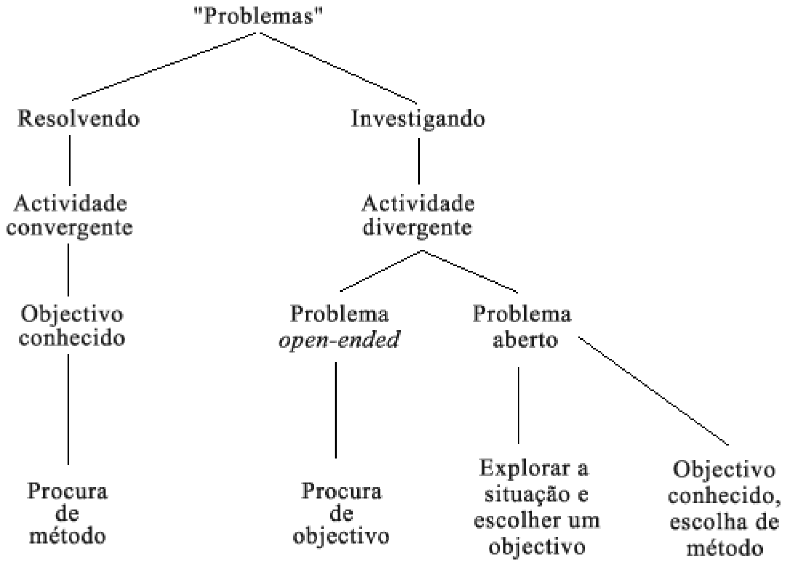


Figura 3: Relação entre problemas e investigações (Frobisher, 1994) citado em Brocardo, 2001.

De acordo com o esquema, problema pode ser visto como uma atividade convergente (com uma meta clara), em que conhecemos o objetivo a atingir e devemos procurar o método para chegar a uma resposta. A investigação é uma atividade divergente (sem uma meta clara). O autor considera que a investigação é um problema em aberto (open-ended), cujo contexto é uma situação que conduz a um objetivo que é escolhido como constituindo o resultado da exploração dessa situação. Para além disto, é o aluno que deve decidir sobre o modo de explorar a situação. No segundo caso, considerado um problema aberto (open problem), onde não está especificada nenhuma meta e é o aluno que escolhe o objetivo, trata-se de uma situação em que a decisão sobre o método de exploração é da responsabilidade do aluno. Por último, considera-se a investigação, quando se conhece o objetivo e o aluno deve escolher o método, uma vez que retira o poder de decisão ao aluno sobre o que se vai investigar.

Segundo Oliveira, Segurado e Ponte (1996), a resolução de problemas consiste num processo mais convergente, com metas mais bem definidas, se comparado com a investigação matemática.

Esta distinção é defendida por Ponte, quando afirma o seguinte:

> O aspeto mais distintivo das atividades de investigação em relação à resolução de problemas diz respeito à natureza da questão a estudar. Enquanto na

resolução de problemas a questão tende a ser apresentada já completamente especificada ao aluno, na atividade de investigação as questões iniciais são de um modo geral vagas, necessitando de ser trabalhadas, tornadas mais precisas e transformadas em questões concretas pelo aluno (Ponte, 1998, p. 1).

Fonseca, Brunheira e Ponte (1999, p. 4) afirmam:

[...] na resolução de problemas o objetivo é encontrar um caminho para atingir um ponto não imediatamente acessível. É um processo convergente. Numa investigação matemática, o objetivo é explorar todos os caminhos que surgem como interessantes a partir de uma dada situação. É um processo divergente. Sabe-se qual é o ponto de partida¸ mas não se sabe qual será o ponto de chegada."

Segundo Ernest (1996), o primeiro aspeto que os distingue é a formulação de problemas, isto é, na resolução de problemas as questões estão formuladas no início, enquanto nas investigações, esse será o primeiro passo a ser desenvolvido pelo aluno. Uma outra distinção entre resolução de problemas e investigações matemáticas relaciona-se com os seus objetivos, ou seja, num problema procura-se encontrar um caminho que conduza à solução ou soluções, e nas investigações, o objetivo é a própria exploração. Para este autor, a exploração de uma investigação é um processo divergente enquanto a resolução de problemas é um processo convergente. O autor refere ainda que, embora haja características comuns entre estes dois conceitos, podem ser entendidas como uma abordagem pedagógica em que os papéis do professor e dos alunos são diferentes. Numa abordagem de resolução de problemas é ao professor que cabe colocar o problema e ao aluno a tarefa de encontrar um caminho que o conduza à solução. Na resolução de um problema o aluno pode ter alguma criatividade, mas o professor pode controlar tanto o conteúdo quanto o modo de ensinar.

Ainda segundo Ponte (2003), tanto a resolução de problemas como as investigações apelam à imaginação e à criatividade, envolvem processos de raciocínio complexos e requerem um elevado grau de desempenho.

Outro aspeto importante para diferenciar estes conceitos tem a ver com as estratégias a seguir. Se na realização de problemas, faz sentido falar em estratégias gerais (heurísticas), ou seja, um conjunto de perguntas que o aluno deve colocar a si próprio em cada fase de resolução de um problema e que se destinam a organizar o seu pensamento de uma forma sistemática e eficaz, (Pólya, 1945), tal não é operatório numa investigação, dadas as possíveis explorações que se podem fazer.

Embora diversos autores se tenham dedicado a estudar a resolução de problemas, as heurísticas de Pólya (1945) são incontornáveis dada a sua relevância prática, por este ter sido o primeiro e ter servido de base a todos os outros. Pólya identifica quatro fases na resolução de um problema:

- Compreender o problema
- Estabelecer um plano
- Executar o plano
- Refletir sobre o trabalho realizado

Compreender um problema consiste na leitura e compreensão do seu enunciado, é interpretar a informação fornecida de forma que ela possa fazer sentido para o aluno. Envolve o entendimento verbal e a identificação das partes principais do problema: Qual é a ou as incógnitas, os dados e as condicionantes. É evidente que a compreensão do problema aumenta à medida que o aluno atua sobre a situação. Estabelecer um plano é pensar numa forma de o abordar, prever o caminho a seguir para chegar à solução do problema. Nesta fase, é importante conseguir selecionar ou inventar uma estratégia de resolução do problema. Se tal não levar a nada, o estabelecimento do plano pode ainda ter que passar por procurar fazer variações do problema, generalizações, particularizações e pela procura de problemas semelhantes ou mais simples, desenhar esquemas. Executar o plano é pôr em prática o plano identificado na fase anterior, verificando todos os passos e analisando a sua correção. É ao longo da sua execução que surge a formulação de conjeturas e o respetivo teste, seguindo muitas vezes um processo cíclico.

Finalmente, na quarta fase de reflexão e análise da solução obtida, encontramos “a solução” do problema mas é importante refletir sobre ela. A reflexão permite identificar até que ponto o problema está resolvido e se a estratégia seguida foi ou não adequada. Assim, em primeiro lugar, deve-se testar “a solução” encontrada e analisar a sua validade no contexto do problema e, caso esta não verifique o problema, tentar uma nova abordagem. Mas mesmo que a solução encontrada seja correta é sempre possível aumentar a compreensão do problema procurando, por exemplo, generalizações ou verificando se alterações nas condições iniciais do problema afetam a solução.

Existe uma condição adicional a que Pólya faz referência para o sucesso da resolução e que diz respeito ao campo afetivo. Segundo este autor, não basta compreender o problema, é igualmente preciso querer resolvê-lo, isto é, deve haver interesse, curiosidade e sentido de desafio para aquele que empreenda esta tarefa.

Para o autor, estas estratégias devem ser explicitamente ensinadas e constituem um conjunto de instrumentos que o indivíduo passa a ter ao seu dispor para resolver problemas. O conhecimento de tais estratégias ajudam o indivíduo a tornar-se mais apto a resolver problemas.

Para Oliveira (1998) "o conceito de atividade pretende aproximar a atividade do aluno à do matemático" (p.4).

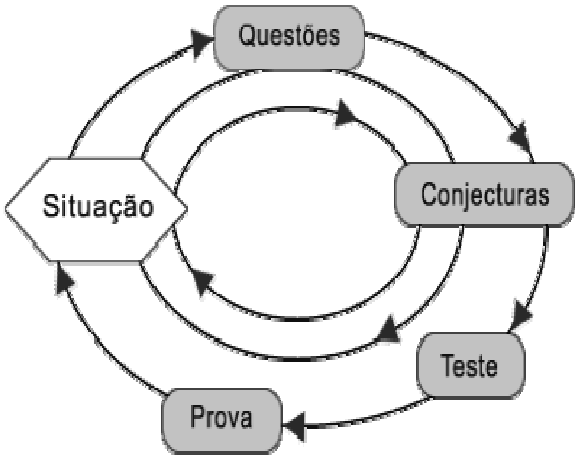


Figura 4: A atividade de investigação (Oliveira, 1998,p. 15)

No esquema anterior, a autora indica resumidamente os processos matemáticos envolvidos numa atividade de investigação. Estes são: formulação de questões, formulação de conjeturas, teste de conjeturas, prova das conjeturas que resistiram a sucessivos testes. Trata-se de processos matemáticos que interagem entre si.

3.2. A calculadora gráfica e a aprendizagem da matemática

Não é possível atingir os objetivos e competências gerais deste programa sem recorrer à dimensão gráfica, e essa dimensão só é plenamente atingida quando os estudantes trabalham com uma grande quantidade e variedade de gráficos com apoio de tecnologia adequada (calculadoras gráficas e computadores).

Ministério da Educação, 2001, p. 15

A calculadora começou por ser uma ferramenta para fazer cálculo, atualmente é utilizada em diversas atividades e por pessoas de todas as profissões e estratos sociais. Muitos trazem-na permanentemente consigo, uma vez que todos os telemóveis possuem uma calculadora que permite efetuar as operações aritméticas usuais.

No ensino, as calculadoras, quando usadas apropriadamente, podem também ser uma ferramenta para a aprendizagem da matemática. O uso adequado da calculadora é uma forma de aumentar a quantidade e a qualidade de aprendizagem oferecida aos alunos durante o decurso da sua educação matemática. No processo de ensino-aprendizagem, esta tecnologia cria novas condições de aprendizagem, nomeadamente na compreensão dos conceitos matemáticos, no desenvolvimento de diversas formas de raciocínio, na resolução de problemas, tornando-se uma importante ferramenta de apoio ao trabalho realizado pelo professor. Atualmente, o estudo da matemática exige a análise de situações e a procura de soluções, e neste aspeto, a calculadora é uma ferramenta adequada, de acordo com o NCTM (1991):

> As calculadoras permitem aos alunos a exploração de ideias numéricas e de regularidades, a realização de experiências importantes para o desenvolvimento de conceitos e a investigação de aplicações realistas, ao mesmo tempo que colocam a ênfase nos processos de resolução de problemas. O uso inteligente das calculadoras pode aumentar, quer a qualidade do currículo, quer a qualidade da aprendizagem.

Mais recentemente, esta mesma organização volta a referir que as calculadores e os computadores, como ferramentas essenciais para o ensino e a aprendizagem da matemática NCTM (2007), "proporcionam imagens visuais das ideias matemáticas, facilitam a organização e a análise de dados, e realizam cálculos de forma eficaz e exata" (p. 26). As tecnologias são apresentadas como ferramentas que poderão apoiar fortemente as investigações realizadas pelos alunos, em áreas tão distintas como a Geometria, os Números, a Álgebra e a Estatística. O NCTM (2007) refere também que os alunos, quando utilizam ferramentas tecnológicas, podem concentrar-se mais na tomada de decisões, na reflexão, no raciocínio e na resolução de problemas. O trabalho realizado com recurso à tecnologia permite analisar mais exemplos e mais formas de representação do que o trabalho realizado num ambiente de papel e lápis. Desta forma, os alunos podem mais facilmente formular e explorar conjeturas NCTM (2007). Ou seja, o uso da calculadora incentiva a conjetura, a experimentação, a verificação, nova conjetura, lançando os alunos no desenvolvimento e construção de métodos próprios de resolução de problemas.

O uso que fazemos da calculadora decorre naturalmente das suas potencialidades, mas, dentro destas, é mais fruto das tarefas que escolhemos trabalhar com ela do que da tecnologia propriamente dita.

A utilização da calculadora também permite aos professores diversificarem as atividades que propõem aos alunos. Estas podem contribuir fortemente para uma abordagem investigativa da aprendizagem da matemática, isto é, na realização de investigações e explorações que implicam o desenvolvimento da capacidade de observação, do espírito crítico, a formulação e teste de conjeturas, a criação de argumentos convincentes e o desenvolvimento do raciocínio matemático (Ponte e Canavarro, 1997). A tecnologia aumenta o alcance e a qualidade das investigações, porque providencia meios de visualização de ideias matemáticas de múltiplas perspetivas NCTM (2000). Assim, criam-se oportunidades para que os alunos trabalhem um pouco como os matemáticos, construindo e desenvolvendo com gosto a sua própria experiência matemática. A resolução de problemas também é favorecida pelo uso de tecnologias dado que proporcionam novas estratégias de resolução e permitem a abordagem de problemas com maior complexidade, isto é, de mais e melhores problemas realistas e relevantes, capazes de estimular o interesse dos alunos pela matemática (Matos, Carreira, Santos e Amorim, 1994; Ponte, 1997; Ponte e Canavarro, 1997). Ponte (1995) acrescenta que a calculadora gráfica "incentiva o investimento no desenvolvimento de capacidades intelectuais de ordem mais elevada, como o raciocínio, a resolução de problemas e a capacidade crítica, que se situam para além do cálculo e da compreensão de conceitos e relações matemáticas simples" (p.23). De igual modo, a simulação e a modelação são aspetos importantes da utilização das tecnologias. Em particular, recomenda-se a utilização de sensores de recolha de dados acoplados a calculadoras gráficas ou computadores para, nalgumas situações, os estudantes tentarem identificar "modelos matemáticos que permitam a sua interpretação". Os alunos são encorajados a fazer, testar, conjeturar, criar e avaliar modelos matemáticos, experimentando uma atividade matemática muito próxima da dos matemáticos (Carreira, 1992; Fey, 1991). Contudo, as simulações e a modelação não devem substituir o estudo experimental (Ponte, 1997). "O papel das novas tecnologias, e em particular da calculadora, na construção e exploração de modelos matemáticos passa naturalmente pelas potencialidades de manipulação de múltiplas representações matemáticas e simbólicas que advêm da introdução de tais ferramentas." (Matos, 1994, p.9).

Ponte (1995) afirma que uma das vantagens da utilização da calculadora gráfica no estudo de funções é "a valorização da linguagem gráfica e de novas formas de representação, uma vez que as representações múltiplas que as máquinas proporcionam, com especial destaque para a gráfica, permitem outras abordagens às situações matemáticas, para além dos processos formais de cunho algébrico ou analítico".

O uso de tecnologias ajuda a criação de novas dinâmicas na sala de aula, de ambientes de trabalho que estimulam a discussão e a partilha de ideias, que incentivam a formulação de conjeturas e a comunicação matemática (oral e escrita), nomeadamente através do tipo de dados e de argumentos usados pelos alunos, assim como a sua capacidade crítica perante argumentos alheios (Ponte e Canavarro, 1997).

Esta é a era da tecnologia e, como tal, os nossos alunos possuem e utilizam máquinas muito sofisticadas que, se bem utilizadas, permitem facilitar a prática de alguns conteúdos matemáticos. Mas é o professor que decide quando e como usar a tecnologia no desenvolvimento e aperfeiçoamento das práticas matemáticas. Deverá, por isso, criar atividades matemáticas que tirem partido das vantagens do que a tecnologia faz bem e de forma eficiente (NCTM,2000; Ponte 1997).

Segundo o Princípio da Tecnologia estabelecido pelo National Council of Teachers of Mathematics (2000), os alunos podem aprender mais matemática e mais profundamente com o uso apropriado e responsável de tecnologia. Esta influencia o modo como a matemática é ensinada e aprendida, assim como o que é ensinado e quando, atendendo a que os alunos podem debruçar-se sobre assuntos mais gerais, fazer e testar conjeturas e modelar e resolver problemas mais complexos anteriormente inacessíveis para eles, trabalhando a níveis de generalização e abstração mais altos NCTM (2000).

As tecnologias estimulam os estudantes na procura de informações e estes, por sua vez, adquirem mais interesse em aprender. Os recursos tecnológicos levam ainda os estudantes à integração e construção de novos significados sobre os conteúdos estudados, propiciando, desse modo, novas condições de produção de conhecimento.

As calculadoras gráficas e os computadores, usados de uma forma adequada e eficaz, podem modificar aquilo que os alunos aprendem, a forma como aprendem e como são ensinados. Além disso, nos atuais programas de matemática do ensino secundário, o uso das calculadoras gráficas é obrigatório, e referem que há vantagem em utilizar a calculadora gráfica em diferentes tipos de atividade matemática.

Ponte e Canavarro (2000) afirmam que a utilização das TIC na aula de matemática, contribui para o desenvolvimento do raciocínio estratégico, do espírito crítico, do aumento da discussão e comunicação de ideias nos grupos de trabalho, entre os grupos, em grande grupo ou com o professor.

Estudos realizados demonstram que, quando a tecnologia é bem utilizada, enriquece a aprendizagem matemática, tornando-a mais profunda, ou seja,uno aprende matemática de forma mais significativa.

O uso das calculadoras nas aulas de matemática depende de diversos fatores e talvez um deles seja a conceção que o professor tem sobre a matemática e sobre o ensino da matemática.

4. Unidade de ensino

Neste capítulo apresento os princípios gerais que orientaram a escolha da unidade de ensino que fundamenta este estudo. Explico e justifico as opções tomadas na elaboração da planificação da unidade, tendo em conta, as características da turma, o programa de Matemática do Ensino Secundário em vigor, uma descrição dos objetivos de cada uma das tarefas propostas e, por fim, as diversas formas de avaliação utilizadas.

4.1. Princípios gerais

O programa de Matemática A do Ensino Secundário em vigor tem como objetivo fundamental desenvolver a capacidade de resolução de problemas. A valorização dos problemas de natureza aberta é evidente. Estes, segundo o programa, colocam o aluno perante a necessidade de elaborar e testar conjeturas e construir cadeias argumentativas capazes de justificá-las. Estas são ferramentas fundamentais para abordar o método científico.

O programa está organizado em torno de grandes temas, os temas matemáticos e os transversais. Os temas matemáticos são: Cálculo Diferencial, Geometria, Funções, Sucessões, Probabilidades e Estatística, sendo esta escolha " feita tendo em conta os conteúdos presentes em anteriores programas e a preocupação de algum equilíbrio entre as principais áreas da matemática (DES, p. 6). Importância significativa é atribuída tanto a técnicas específicas como a estratégias que são "uma base de apoio que os estudantes utilizam na sua atividade matemática independentemente do tema e que atravessam o programa de forma transversal" (DES, p. 6). Os temas transversais são: Comunicação Matemática; Aplicações e Modelação Matemática; História da Matemática; Lógica e Raciocínio Matemático; Resolução de Problemas e Atividades Investigativas; Tecnologia e Matemática. Estes pontos vão ao encontro das normas que surgem no *Principles and Standards for School Mathematics* do NCTM, que são: Resolução de Problemas; Raciocínio e Demonstração; Comunicação; Conexões e Representação, que "consistem em descrições daquilo que o ensino da matemática deverá tornar os alunos capazes de saber e fazer" (NCTM, 2007, p. 7).

A disciplina de Matemática é, neste programa, descrita como: "uma das bases teóricas essenciais e necessárias de todos os grandes sistemas de interpretação da realidade que garantem a intervenção social com responsabilidade e dão sentido à condição humana". (DES, 2001, p.3)

Com este desígnio são formalizadas finalidades, objetivos e competências gerais, divididas em três partes: valores/atitudes; capacidades/aptidões e conhecimentos da disciplina de matemática, que têm por objetivo orientarem o professor no sentido de proporcionar o desenvolvimento de capacidades matemáticas essenciais à sua vida futura.

A unidade de ensino que serve de base a este estudo está inserida no Tema 2 – Funções e Gráficos do programa de Matemática A do Ensino Secundário (DES, 2001).

Este estudo centra-se na realização da unidade de ensino "Funções Quadráticas" do 10.º ano de escolaridade, visando estudar como os alunos pensam e aprendem sobre as funções quadráticas, nas suas diferentes representações, quando utilizam a calculadora gráfica como ferramenta importante na realização das tarefas a propor, não sendo entendida apenas como simples instrumento de cálculo mas sim, principalmente, como meio de pesquisa. Deste modo, a calculadora gráfica é integrada numa abordagem das funções em que se dá ênfase às múltiplas representações deste conceito (tabelas, gráfico e expressão algébrica) e à sua interpretação em problemas e se valorizam as estratégias de exploração e pesquisa por parte dos alunos.

Os *princípios e normas para Matemática escolar* (NCTM,2007), incluem normas que remetem para as representações e acentuam a importância da utilização de múltiplas representações na aprendizagem da matemática. É referido que "a representação é predominante na Álgebra. Os gráficos transmitem certos tipos de informação visual, enquanto as expressões simbólicas poderão ser mais facilmente manipuladas, analisadas e transformadas" (NCTM, 2007, p. 422).

Uma forma de conhecer o comportamento global da função é obter representações gráficas adequadas, utilizando as potencialidades da calculadora gráfica ou fazer o seu estudo analítico, determinando domínio, zeros, intervalos de monotonia, extremos relativos, etc.

Desde 1989 que o NCTM recomenda o uso e a utilização das calculadoras gráficas de forma a proporcionar aos alunos novas perspetivas na resolução e na abordagem de tarefas, abordagens estas que recaem essencialmente no uso de várias representações e na investigação das ideias matemáticas.

Em 1995, nas orientações do programa de Matemática foram feitas recomendações para o uso da calculadora gráfica nas salas de aula. Contudo, apenas só em 1997 é que esta utilização passou a constar no programa oficial do Ministério da Educação como sendo obrigatório para a lecionação da disciplina e a autorização do seu uso nos Exames Nacionais.

No passado, os recursos didáticos utilizados no processo do ensino-aprendizagem da matemática eram essencialmente o quadro, o lápis, a borracha e o papel, atualmente há outros recursos que se tornaram frequentes e até, em situações específicas, imprescindíveis na sala de aula – designadamente as calculadoras e os computadores. O NCTM (1991) refere que os "ambientes de aula tecnologicamente ricos" vieram provocar uma dinâmica de aula diferente onde os intervenientes da ação, professor e alunos, participam no "desenvolvimento dos conhecimentos matemáticos e na resolução de problemas em matemática (p.149).

As calculadoras gráficas são ferramentas que devem ser entendidas não só como instrumentos de cálculo mas essencialmente como meios incentivadores do espírito de pesquisa e investigação. As calculadoras gráficas e os computadores, usados de uma forma adequada e eficaz, podem modificar aquilo que os alunos aprendem, a forma como aprendem e como são ensinados. No entanto, há que ter alguns cuidados no que se relaciona com a representação gráfica de uma função na calculadora pois o que se vê no visor é apenas uma parte dessa representação. Assim, a representação gráfica da mesma função com janelas de visualização diferentes, assume aspetos distintos que podem sugerir outro tipo de conjeturas o que exige que se conheçam algumas características do comportamento dessa mesma função. Por essa razão, DES (2001) sublinha que os conhecimentos teóricos e os resultados apresentados pela calculadora gráfica devem ser sempre confrontados. Torna-se, pois, necessário que o professor tenha consciência das limitações da calculadora gráfica e ganhe um conhecimento sólido das razões que estão por detrás de determinados resultados "enganadores", dando oportunidade aos alunos de compreenderem que aquilo que a calculadora apresenta no ecrã pode ser uma visão distorcida da realidade (DES 2001).

O programa de Matemática A indica que as calculadoras gráficas permitem a "condução de experiências matemáticas, elaboração e análise de conjeturas; investigação e exploração de várias ligações entre diferentes representações para uma situação problemática” (Ministério da Educação, 2001, p. 16). Estudos realizados demonstram que quando a tecnologia é bem utilizada, o aluno aprende matemática de forma mais significativa. É claro que isto só é possível se o professor estiver ciente das limitações da tecnologia e um conhecimento sólido das razões que levam aos tais resultados “enganadores”. E, pelo seu lado, os alunos devem ter oportunidade de compreenderem que aquilo que a calculadora apresenta no ecrã pode ser uma visão distorcida da realidade e saber interpretá-la (Ministério da Educação,2001).

Segundo Ponte (1990), a calculadora gráfica, como outras ferramentas tecnológicas, pode simplificar alguns procedimentos rotineiros e proporcionar “uma maior concentração naquilo que é verdadeiramente importante – a compreensão do significado dos conceitos, a elaboração e implementação de estratégias para a resolução dos problemas, e a sua análise crítica e discussão” (p. 9).

Da unidade de ensino consta, ainda, um momento de avaliação, realizado individualmente no seu final, cuja tarefa se encontra também em anexo.

4.2. Planificação

A planificação para estas aulas foi elaborada tendo em conta as características dos alunos, objetivos e indicações metodológicas do programa de matemática. Foram ainda tidas em consideração as orientações curriculares constantes na brochura sobre Funções (Teixeira, Precatado, Albuquerque, Antunes & Nápoles, 1997), as recomendações das *Normas* do NCTM (2007) e também as questões e objetivos da investigação.

O facto de os alunos da turma terem um raciocínio e uma comunicação matemática muito desenvolvidos e com bastante interesse por problemas, levou-me a elaborar uma planificação centrada no ensino-aprendizagem exploratório.

O estudo das funções quadráticas pode seguir diferentes abordagens, pois existem diversos caminhos para a sua concretização. Nesta investigação, a abordagem ao estudo das funções quadráticas tem por base a resolução de tarefas de natureza exploratória e investigativa, como forma de potenciar a compreensão e aprendizagem destas funções.

Nas indicações metodológicas gerais do programa do ensino secundário em vigor, “destaca-se a importância das atividades a selecionar, as quais deverão contribuir para o desenvolvimento do pensamento científico, levando o aluno a intuir, conjeturar, experimentar, provar, avaliar e ainda para o reforço das atitudes de autonomia e de cooperação" (DES, 2001, p. 10). Deste modo, o programa faz referência à realização de atividades de investigação e exploração por parte dos alunos.

A planificação foi elaborada tendo em conta vários tipos de tarefas. Segundo Ponte (2005, p.23) "contemplando diversos tipos de tarefa e momentos próprios para exploração, reflexão e discussão, o professor dá um passo importante para criar oportunidades que favoreçam a aprendizagem dos alunos". Segundo o autor, a diversificação de tarefas é necessária uma vez que cada uma delas desempenha um papel importante para atingir objetivos de natureza curricular, que são:

- As tarefas de natureza mais *fechada* (exercícios, problemas), importantes para o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos, uma vez que este raciocínio se baseia numa relação estreita e rigorosa entre dados e resultados,
- As tarefas de natureza mais *acessível* (explorações, exercícios), pelo seu lado, possibilitam a todos os alunos um elevado grau de sucesso, contribuindo para o desenvolvimento da sua autoconfiança,
- As tarefas de natureza mais *desafiante* (investigações, problemas), são indispensáveis para que os alunos tenham uma efetiva experiência matemática.

As tarefas de cunho mais *aberto* são essenciais para o desenvolvimento de certas capacidades nos alunos, como a autonomia, a capacidade de lidar com situações complexas, etc. (idem, p. 17).

Nesta unidade de ensino são usados diversos tipos de tarefas, sendo atribuídos à resolução de problemas e às tarefas de investigação papéis importantes. A resolução de problemas é um processo que envolve ativamente os alunos na formulação de conjeturas, na investigação e exploração de ideias, que os leva a discutir e a pôr em questão a sua própria maneira de pensar e também a dos outros, a validar resultados e a construir argumentos convincentes NCTM (1991).

Pólya (1977) acredita que a capacidade de descobrir e a capacidade de inventar podem ser desenvolvidas através de um ensino habilidoso que desperte os alunos para os princípios da descoberta e que lhes dê uma oportunidade de praticarem estes princípios. Assim, considera que o ensino da resolução de problemas deve proporcionar uma larga experiência com a sua resolução e uma análise dos processos que conduzam à sua solução. Para este autor, os alunos deviam adquirir hábitos de pensamento elaborado e, por isso, construiu um modelo para a resolução de problemas que contempla quatro fases: 1.ª

Compreensão do problema; 2ª Estabelecer um plano; 3ª Execução do plano; 4ª Reflexão e análise do resultado obtido. Na sua perspetiva, é útil ensinar aos alunos estratégias gerais (heurísticas) de resolução de problemas, ou seja, um conjunto de perguntas que o aluno deve colocar a si próprio em cada fase de resolução de um problema e que se destinam a organizar o seu pensamento de uma forma sistemática e eficaz.

A resolução de problemas está considerada no programa como motivação, como sistema de recuperação e como forma privilegiada para suscitar a comunicação oral e escrita. No ponto das sugestões metodológicas gerais, pode ler-se: “destaca-se a importância das atividades a selecionar, as quais deverão contribuir para o desenvolvimento do pensamento científico, levando o aluno a intuir, conjeturar, experimentar, provar, avaliar e ainda para o reforço das atitudes de autonomia e de cooperação” (Ministério da Educação, 2001, p. 10). Deste modo, o programa atual do ensino secundário faz referências significativas à resolução de problemas e à realização de atividades de investigação pelos alunos.

Considerando a importância da diversificação das tarefas na gestão curricular e na aprendizagem e visando a consolidação de conhecimentos adquiridos, na planificação foram preparadas tarefas de natureza mais fechada, incluí exercícios e problemas retirados do manual escolar adotado pela escola. Os exercícios e problemas escolhidos são de diferentes níveis de dificuldade, permitindo que os alunos ponham em prática os conhecimentos que vão adquirindo e conduzi-los a uma melhor compreensão dos conceitos. No entanto, foi dado ênfase às tarefas de investigação e exploração. Nesta seleção também é tido em conta o contexto dos problemas, uma vez que em situações reais os alunos podem dar um significado às ferramentas matemáticas que estão a aprender.

Segundo Ponte (2005), “os momentos de discussão constituem […] oportunidades fundamentais para negociação de significados matemáticos e construção de novo conhecimento” (p. 16). Sendo assim, durante a elaboração da planificação, foram reservados momentos para estas discussões, pensados sempre para ocorrerem depois da realização das tarefas e discutidos em grande grupo, ou seja, com toda a turma. Estes propiciam o desenvolvimento da comunicação matemática do aluno e constituem uma excelente oportunidade para refletir sobre o seu trabalho e o seu poder de argumentação (Ponte, 2005).

A nível de recursos, o programa evidencia a importância da tecnologia, referindo que:

> “Não é possível atingir os objetivos e competências gerais deste programa sem recorrer à dimensão gráfica, e essa dimensão só é plenamente atingida quando os estudantes trabalham com uma grande quantidade e variedade de gráficos com apoio de tecnologia adequada (calculadoras gráficas e computadores). (DES,2001, p.15).

A calculadora deverá ser um recurso sempre presente nesta unidade uma vez que os alunos devem “responder aos problemas que lhes são propostos e devem procurar formas próprias de organização e expressão para a modelação das situações” (DES, 2001, p. 8).

4.3. Tarefas

Para o estudo da unidade de ensino foram construídas seis tarefas, pensadas não só para desenvolver o estudo em questão, mas também para permitir ao aluno construir de uma forma sólida o conhecimento relativo à unidade. Durante este processo foram, ainda, tidos em conta os objetivos gerais do Programa do Ensino Secundário e os objetivos específicos aí sugeridos para o desenvolvimento do tema. Apresento, em seguida, uma descrição dos objetivos inerentes a cada uma das tarefas selecionadas para o estudo desta subunidade.

Esta investigação centra-se, sobretudo na realização da unidade temática do 10.º ano de escolaridade - a *Função Quadrática*.

O estudo das funções quadráticas pode seguir diferentes abordagens, pois existem diversos caminhos para a sua concretização. Nesta investigação, a abordagem ao estudo das funções quadráticas tem por base a resolução de tarefas de natureza exploratória e investigativa e a resolução de problemas no contexto de “matemática pura” e de simulação da realidade, com o uso da calculadora gráfica. Estas tarefas têm como objetivo principal contribuir para a compreensão e aprendizagem dos alunos, do conceito de função quadrática.

Cada tarefa é realizada numa aula de 90 minutos. Os alunos, em grupos de quatro elementos cada, resolvem as tarefas, registam e justificam os resultados e no final da aula apresentam esses resultados para discussão com a turma.

Durante a resolução de cada uma das tarefas**,** a minha função foi a de acompanhar e orientar os alunos, esclarecendo as suas dúvidas e ajudando-os a ultrapassar as dificuldades, fazendo chamadas de atenção para que nada fosse esquecido, sugerindo estratégias e processos de resolução. O meu papel foi sempre o de questionar os alunos perante as solicitações, não o de fornecer-lhes respostas, mas sim encaminhá-los no seu trabalho e orientá-los na sua procura. Quando manifestavam dificuldades colocava novas questões que os conduziam a uma nova reflexão e, desta forma, ia orientando para novas formas de raciocínio.

Relativamente à resolução das tarefas utilizei o Emulador da calculadora gráfica Casio fx-CG10/20. O emulador é uma ferramenta de fácil utilização para apresentar conceitos de matemática na sala de aula. Com este software os intervenientes poderão usufruir de uma representação interativa da calculadora.

A tarefa 1 (Anexo 1), que se intitula "Triângulos inscritos num Triângulo", é constituída por um problema base de Geometria e por seis questões, relativas a esse problema. Os objetivos desta tarefa são os de:

- Esboçar o gráfico da função que relaciona a área do Triângulo com o deslocamento;
- Identificar uma representação algébrica da função que relaciona a área do triângulo com o deslocamento, usando a regressão quadrática com a calculadora gráfica;
- Determinar a expressão algébrica da função que relaciona a área do Triângulo com o deslocamento por processos analíticos;
- Determinar valores de área máxima;
- Resolver uma condição.

As questões 1.1 e 1.2 apelam à observação dos alunos, quanto à relação entre o deslocamento de um ponto, variável independente, e a área do triângulo, variável dependente. Nas questões 1.3 e 1.4, podem utilizar a calculadora no MENU *STAT* colocando numa lista os valores de x e noutra as áreas $f(x)$, dos triângulos correspondentes. A utilização da calculadora permite obter, usando a regressão quadrática, a expressão algébrica da área. A determinação das áreas, pelos alunos, no preenchimento da tabela, sugere, para a questão 1.5, a representação algébrica da função área, que é equivalente à obtida através da calculadora gráfica. Na determinação da área máxima, pode recorrer-se, por exemplo, ao máximo da função através da calculadora gráfica ou às coordenadas do vértice da parábola por processos algébricos. Finalmente, na questão 1.6., resolução da uma inequação, os alunos podem recorrer à calculadora no MENU *GRAPH*, colocar as expressões $y_1 = -\frac{1}{2}x^2 + 4x \ e \ \ y_2 = \frac{15}{2}$ e, depois, efetuar os respetivos gráficos. Para visualizar corretamente os dois gráficos, realizados em simultâneo**,** têm de escolher uma janela adequada. De seguida, determinam os pontos de intersecção entre a parábola e a reta de equação $y = \frac{15}{2}$ (neste caso, os pontos de coordenadas $\left(3, \frac{15}{2}\right)$ e $\left(5, \frac{15}{2}\right)$ são os pretendidos). Finalmente, os alunos apresentam a solução correta da inequação, afirmando que $f(x) < \frac{15}{2}$ quando $x \in]3,5[$. Deste modo, podemos concluir que os alunos fazem uma interpretação correta do problema e adotam uma estratégia adequada que envolve processos gráficos na resolução da inequação $f(x) < \frac{15}{2}$, apresentando a sua solução correta, ou por processos algébricos resolvendo a inequação do 2º grau.

A tarefa 2 (Anexo 2), denominada "Funções quadráticas: Uma abordagem geométrica", é constituída por quatro questões. Os seus objetivos são estudar e sistematizar o comportamento da função quadrática quando apresentada na forma $y = a(x-h)^2) + k$ e identificar o significado dos parâmetros a, h e k.

Com recurso à calculadora gráfica, os alunos obtêm e reproduzem numa folha de papel os gráficos das funções definidas pelas suas representações algébricas. Depois identificam, em cada caso, o eixo de simetria, as coordenadas do vértice da parábola, o sentido da concavidade e os extremos, possibilitando assim o estudo das propriedades de funções quadráticas cuja representação algébrica é do tipo $y = ax^2$. Os alunos devem explicitar o efeito do parâmetro a no gráfico da função, identificar as suas propriedades e efetuar generalizações (o aluno terá de concluir que o valor de a determina o sentido da concavidade e a abertura da parábola. Quanto maior for o valor absoluto de a, mais estreita será a curva. Por seu lado, quanto menor for o valor absoluto de a, mais larga é a curva, ou seja, quanto maior for $|a|$ mais "fechada " é a parábola. Se a é positivo, então a concavidade da parábola é voltada para cima. Quando a é negativo, a parábola tem concavidade voltada para baixo.

Na questão 1.2., os alunos voltam a recorrer à calculadora gráfica para esboçar gráficos de funções do tipo $y = ax^2 + k$, $y = a(x+h)^2$ e $y = a(x+h)^2 + k$. Os alunos devem explicitar os efeitos dos parâmetros a, h e k, relativamente aos gráficos das funções, e identificar as coordenadas do vértice da parábola, bem como a equação do eixo de simetria e os extremos. Após este estudo os alunos devem reconhecer, na questão 1.3., que podem obter, por exemplo, o gráfico de $y = 2\ (x-4)^2 + 7$, a partir do gráfico de $y = 2x^2$ efetuando sobre este uma translação associada ao vetor (4 ,7).

Em relação à questão 1.4. os alunos, numa resposta rápida, indicam que: a altura máxima é de 259 pés, que é atingida em 4 segundos**;** a ordenada do vértice é o máximo uma vez que a é negativo**;** a parábola tem concavidade voltada para baixo e a função tem um máximo.

Após a realização desta tarefa os alunos deverão compreender e demonstrar que qualquer função quadrática pode ser escrita na forma $y = a(x - h)^2 + k$, podendo, por isso, o seu gráfico ser obtido por transformação do gráfico de $y = x^2$. Definem o vértice da parábola, o eixo de simetria, os extremos, o domínio, contradomínio, e o sentido da concavidade.

A tarefa 3 (Anexo 3): "Exploração de funções quadráticas" tem por objetivos:

- Estudar os efeitos dos parâmetros α e β na função $y = (x - \alpha)(x - \beta)$;
- Analisar as informações que cada um dos parâmetros nos dá;
- Escrever uma expressão algébrica de uma função quadrática quando esta está representada graficamente.

A tarefa é constituída por oito questões. Para as seis primeiras questões, e recorrendo à calculadora gráfica, os alunos devem estudar e analisar os efeitos dos parâmetros α e β, quando a função é dada na forma $y = (x - \alpha)(x - \beta)$ e discutir as informações que cada um deles fornece. Os alunos devem concluir que α e β são os zeros da função e que a função quadrática interceta o eixo dos yy no ponto de ordenada $\alpha \times \beta$. A questão 1.7. é para escreverem uma expressão algébrica de uma função quadrática quando esta está representada graficamente. Nesta questão prevê-se que os alunos podem apresentar várias soluções possíveis se existirem dúvidas sobre a ordenada do ponto onde a função interseta o eixo dos yy. Na questão 1.8., os alunos têm que dar um exemplo de uma função quadrática que não admita zeros (uma resposta possível pode ser $y = x^2 + 2$ ou qualquer outro polinómio do 2.º grau em que $\Delta < 0$.

As tarefas 4 e 5 (Anexos 4 e 5) são constituídas por problemas, onde se pretende que os alunos apliquem os conhecimentos sobre as funções quadráticas na resolução de um problema em contexto real. Em cada problema, os alunos podem começar por representar a função graficamente, através da calculadora gráfica, e devem procurar uma janela de visualização que se adeque à sua representação gráfica. O manuseamento da calculadora gráfica permite encontrar resultados, cujos significados devem ser interpretados pelos alunos. Mas estes também podem usar outras representações (numérica ou algébrica) para chegarem aos mesmos resultados.

A tarefa 6 (anexo 6) é constituída por três alíneas que envolvem transformações de funções. Os alunos representam numa folha de papel os gráficos das funções apresentadas e descrevem o resultado com recurso à linguagem das transformações geométricas. Devem resolver, justificar e registar os gráficos elaborados e os pontos relevantes obtidos (com ou sem a calculadora gráfica), bem como todos os cálculos efetuados. Devem ainda reconhecer o efeito de cada uma das referidas transformações sobre as características de uma função dada. Em particular, indicar o gráfico, o contradomínio, os zeros, se existirem, estudar o sinal da função e simetrias.

A tarefa de avaliação, (anexo 7), realizou-se em contexto de sala de aula num bloco de 90 minutos em que todos os alunos da turma realizaram individualmente o teste de avaliação. No seu conteúdo, incluem-se exercícios destinados, exclusivamente, a aferir e avaliar o desempenho e os conhecimentos dos alunos, sobre funções quadráticas, abordados nas tarefas investigativas.

Para a preparação do teste, para além das tarefas apresentadas, os alunos realizaram exercícios e problemas do manual escolar adotado, relacionados com os assuntos abordados nas tarefas ou com os conteúdos programáticos trabalhados nestas aulas. Deste modo, os alunos não perderam o contacto com o seu manual, pois este constituiu um instrumento essencial de apoio à sua aprendizagem. Foi, ainda, proposta a realização de alguns exercícios e problemas do manual como trabalho de casa.

4.4. Avaliação

A avaliação é um elemento fundamental da prática pedagógica que se caracteriza, para além da sua importância, pela complexidade e subjetividade. Assim, assumindo que a avaliação é parte integrante e fundamental do processo de ensino-aprendizagem, é fundamental que esta seja compatível com as práticas pedagógicas implementadas.

Perante a utilização de tarefas que pretendem o desenvolvimento da colaboração em trabalho de grupo, de discussões em pequeno e grande grupo, da partilha de saberes e responsabilidades, da formulação de generalizações a partir de experiências, da capacidade de comunicação e do espírito crítico, como são exemplos as atividades investigativas e exploratórias, a avaliação não se pode limitar à realização dos tradicionais testes escritos.

Nas atividades aplicadas nesta investigação, na avaliação dos alunos, tive em conta o seu desempenho, o interesse demonstrado nos assuntos discutidos, a sua participação na realização das tarefas propostas, o respeito pela diferença, o cumprimento dos objetivos, a qualidade das respostas dadas e o seu desempenho nas discussões dentro do grupo e na apresentação do conteúdo trabalhado. Pude ainda avaliar a capacidade de comunicação, argumentação e entreajuda dos alunos com os colegas de grupo, na criatividade desenvolvida pelos alunos e, também, o manuseamento da calculadora gráfica, pois esta ferramenta constitui não só um instrumento auxiliar de aprendizagem e de cálculo, como também um meio incentivador para o espírito de pesquisa.

5. Metodologia de investigação

5.1. Opções metodológicas

O objetivo desta investigação é analisar o modo como a resolução de problemas e a realização de tarefas de natureza exploratória e investigativa, envolvendo o uso da calculadora gráfica, contribuem para a compreensão e assimilação das funções quadráticas de alunos do 10.º ano de escolaridade.

Assim sendo, pareceu-me adequado recorrer a uma metodologia de investigação de natureza qualitativa, por esta “enfatizar a descrição, a indução, a teoria fundamentada e o estudo das perceções pessoais" (Bogdan & Biklen 1994, p.11).

Segundo Bogdan e Biklen (1994), o facto de se pretender recolher dados tal como ocorrem, em ambiente natural, sendo o investigador o instrumento principal dessa recolha, e que esses dados sejam essencialmente descritivos e interpretativos, preocupando-se mais com o processo do que apenas com os resultados, justifica a realização de uma abordagem qualitativa.

A investigação qualitativa, segundo Bogdan e Biklen (1994), possui cinco características, sendo que nem todas elas têm que estar necessariamente presentes em todas as investigações.

1. *Na investigação qualitativa a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal*. O investigador permanece no local do estudo (a sala de aula) observando, registando e descrevendo através do seu contacto direto com os alunos no seu ambiente natural, pois a recolha direta de informação em aula contribui para que as ações sejam apreendidas por ambos, professor e alunos. Estes autores são de opinião de que, quando os dados são recolhidos através de observação participante, o investigador deve assumir que o comportamento humano é significativamente influenciado pelo ambiente no qual decorre a investigação.

2. A *investigação qualitativa é descritiva.* Os dados recolhidos neste estudo são essencialmente descritivos e dizem respeito a todo o processo em análise, sendo a compreensão dos processos e estratégias utilizadas pelos alunos nesta investigação a

principal preocupação, pelo que são recolhidos na forma de palavras ou imagens e não de números. A descrição dos dados é pormenorizada, não se baseia apenas nos factos concretamente observados mas também no ambiente que os envolve.

3. *Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos.* O que interessa justamente é conhecer o tipo de processos que o aluno desenvolve na resolução das tarefas ou seja, quais os problemas e as reações (comportamentos e atitudes), os recursos, os obstáculos, que lhe estão inerentes e se revelam variações ao longo do tempo. Assim, as técnicas qualitativas usadas permitem perceber de que forma essas alterações ocorrem;

4. *Os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva.* Não se recolhe dados com o objetivo de confirmar hipóteses construídas previamente. Pelo contrário, primeiro recolhem-se os dados e depois é que se fazem sínteses indutivas no sentido de possíveis generalizações. A teoria nasce desde a base. O investigador qualitativo quer abrir novos caminhos para a compreensão do fenómeno que estuda. Neste tipo de investigação, o que importa ao investigador é observar e verificar o que realmente acontece, para depois tirar as suas conclusões relativamente ao contexto geral, aos casos particulares, às relações, etc.;

5. *O significado é de importância vital na abordagem qualitativa.* Esta característica do tipo de pesquisa qualitativa, diz respeito à importância que é atribuída ao significado das coisas. O investigador preocupa-se com a resposta de cada um dos alunos, pois o importante é compreender o que significa, na perspetiva de cada um dos intervenientes, pois os dados recolhidos dão conta do que cada aluno diz e faz, fornecendo os elementos que permitem ilustrar e estruturar a apresentação dos resultados.

Nesta investigação foi utilizada uma metodologia de *investigação qualitativa*, porque penso que este estudo, de um modo geral, vai ao encontro das cinco características referidas por Bogdan e Biklen (1994), uma vez que os participantes são alunos, os dados são recolhidos pelo investigador no contexto escolar. Estes dados são essencialmente descritivos de todo o processo em análise, sendo a principal preocupação a compreensão dos processos e estratégias utilizadas pelos alunos quando resolvem as tarefas. Os dados documentais (produzidos pelos alunos ou através da observação) são analisados pelo investigador e a sua interpretação constitui o instrumento primordial de análise.

Não se pretende com este estudo chegar a generalizações que possam ser utilizadas em larga escala, mas sim deverá refletir o facto de que o significado atribuído pelos participantes às vivências durante a investigação se revelou como um fator muito importante para a sua aprendizagem.

Como referem Bogdan e Biklen (1994) numa investigação qualitativa os investigadores: "…privilegiam essencialmente, a compreensão dos comportamentos a partir da perspetiva dos sujeitos de investigação." (p. 16).

A investigação envolveu uma turma do 10.º ano e a professora da turma, que também foi a investigadora. Ocorreu no 2.º e 3.º períodos do presente ano letivo, numa escola pública do ensino secundário, da zona do Funchal e desenvolveu-se em seis blocos letivos de 90 minutos cada um. As seis tarefas propostas aos alunos foram elaboradas tendo em conta o tempo disponível para a sua concretização na sala de aula e de modo a constituírem oportunidades para desenvolver um maior conhecimento relativo aos processos matemáticos envolvidos na atividade de investigação. Representam contextos para abordar os tópicos previstos no programa de Matemática A (ME, 2001). Na sua elaboração, para além dos objetivos e indicações metodológicas presentes no referido programa, foram tidas em consideração as orientações curriculares constantes na brochura sobre Funções (Teixeira, Precatado, Albuquerque, Antunes & Nápoles, 1997) e também as recomendações das *Normas* do NCTM (2007).

Numa investigação de caráter qualitativo, é fundamental obter informação de diversas fontes. Por isso, os dados recolhidos neste estudo, dizem respeito aos processos de aprendizagem dos alunos e foram obtidos através de registos escritos, feitos pela professora, a partir da observação realizada durante as aulas em que se efetuaram as tarefas. Da recolha e análise das propostas de resolução das tarefas de cada um dos grupos, do teste de avaliação**,** bem como de um questionário proposto aos alunos, ficou-se a conhecer as perceções dos alunos relativamente às tarefas desenvolvidas.

Assim, nesta investigação pretende-se estudar o processo de construção de novos conhecimentos e analisar a forma como a resolução de tarefas de natureza exploratória e investigativa desenvolve as competências nos alunos, através do recurso à calculadora gráfica.

Neste estudo, é dada especial importância aos alunos, pois a professora procura que os dados recolhidos deem conta do que cada aluno diz e faz, fornecendo os elementos que permitem ilustrar e estruturar o raciocínio desenvolvido pelo mesmo, assim como a forma da apresentação dos resultados a que chega.

Procura-se, por um lado, focar a atenção no processo de ensino-aprendizagem e, por outro, estudar, refletir e compreender como é que os alunos pensam e aprendem as funções quadráticas**.** É também importante conhecer o tipo de processos que o aluno desenvolve nas tarefas matemáticas, a sequência das opções escolhidas pelo aluno à medida que lhe é proposta a realização de uma tarefa, os recursos que utiliza no processo de aprendizagem, como os usa e a reflexão sobre o processo desenvolvido, os obstáculos surgidos e os resultados finais da sua aprendizagem. Por outro lado, o papel desempenhado pela professora, e as interações que se estabelecem entre os alunos é muito relevante ao longo de todo o processo**.**

Após a conclusão das tarefas e a realização do teste de avaliação, foi aplicado um questionário (anexo 8) aos alunos da turma. Este questionário teve o propósito de compreender melhor as perceções dos alunos relativamente às tarefas desenvolvidas, se a calculadora os ajudou na compreensão e na resolução das tarefas e se os ajudou no seu processo de aprendizagem.

Relativamente ao processo de ensino-aprendizagem de matemática, Ponte (2002, p.7) afirma que: “cada vez mais o trabalho investigativo em matemática é importante para a aprendizagem dos alunos. De modo análogo, deve ser também reconhecido que o trabalho investigativo em questões relativas à prática profissional é necessário para o desenvolvimento profissional do professor”.

A realização de trabalho investigativo na aula de matemática, “ constitui uma experiência tão fundamental para a aprendizagem matemática do aluno como para o desenvolvimento profissional do professor” (Ponte, Fonseca & Brunheira, 1999, p.15).

Assim, esta investigação incide também sobre a minha própria prática de professora de matemática. Ponte (2004) considera que pesquisar a própria prática é um “processo fundamental de construção do conhecimento”. O autor refere que a investigação sobre a prática pode ter como objetivos:

> Visar principalmente alterar algum aspeto da prática, uma vez que seja estabelecida a necessidade dessa mudança;
> Procurar compreender a natureza dos problemas que afetam essa mesma prática com vista à definição, num momento posterior de uma estratégia de ação. (Ponte 2002, p. 3).

Uma investigação deste tipo favorece tanto o professor envolvido como o meio onde este professor está inserido. Ponte (2002, p.3) indica quatro grandes razões para que os professores realizem pesquisas sobre sua prática:

> (i) para se assumirem como autênticos protagonistas no campo curricular e profissional, tendo mais meios para enfrentar os problemas emergentes dessa

mesma prática; (ii) como modo privilegiado de desenvolvimento profissional e organizacional; (iii) para contribuírem para um património de cultura e conhecimento dos professores como grupo profissional; e (iv) como contribuição para o conhecimento mais geral sobre os problemas educativos.

Nesta investigação procuro, por um lado, focar a atenção no processo de ensino-aprendizagem e, por outro lado, estudar, refletir e compreender como é que os alunos pensam e aprendem sobre as funções.

5.2. Participantes

A turma que participou na investigação é constituída por dezasseis alunos, com uma média de idade de quinze anos, todos do sexo masculino. Todos os alunos estavam no 10º ano pela primeira vez. O seu aproveitamento é bom, é uma turma simpática, unida e esforçada, revelando interesse pela disciplina e pela escola, tendo aderido com entusiasmo a este projeto de investigação.

No geral, é uma turma caracterizada por ser bastante trabalhadora, empenhada, interessada, com bons hábitos de trabalho, uma turma considerada por todos os professores como sendo exemplar.

5.3. Instrumentos de recolha de dados

Neste estudo, a recolha de dados e as observações incidiram sobre os alunos da turma, em contexto natural de sala de aula. Sendo esta investigação de natureza qualitativa, envolveu a aquisição de dados descritivos, relevando mais o processo do que o produto, havendo a preocupação de descrever a perspetiva dos participantes.

A investigadora para além de ser a observadora participante é igualmente a professora de matemática desta turma. A investigadora não é, neste caso, um elemento perturbador ou estranho no ambiente o que se pôde confirmar através da atuação dos alunos que decorreu da forma mais natural possível. Salientando esta vantagem, Bogdan e

Biklen (1994) afirmam que a investigação em educação pode tirar partido da relação de proximidade existente entre o investigador e o objeto de estudo.

Numa investigação de natureza qualitativa é fundamental obter informação de diversas fontes. Os instrumentos utilizados na recolha de dados neste estudo foram:

- Recolha e análise das resoluções das tarefas efetuadas (propostas de resolução das tarefas de cada um dos grupos);
- Discussões proporcionadas no final de cada tarefa;
- Recolha de informações junto dos alunos através da observação direta e de conversas informais durante as aulas de matemática;
- Tarefa de avaliação;
- Questionário aplicado aos mesmos no final da experiência.

Este trabalho de recolha e análise de dados segue um registo descritivo e interpretativo, sem retirar o significado conferido pelos alunos, pois as respostas dadas a cada uma das questões das tarefas, bem como a cada uma das questões dos testes, deram uma visão global do material obtido.

5.4. A análise de dados

Segundo Bogdan e Biklen (1994) a análise de dados é:

> O processo de busca e de organização sistemático de transcrições de entrevistas, de notas de campo e de outros materiais que foram sendo acumulados, com o objetivo de aumentar a sua própria compreensão desses mesmos materiais e de lhe permitir apresentar aos outros aquilo que encontrou. A análise envolve o trabalho com os dados, a sua organização, divisão em unidades manipuláveis, síntese, procura de padrões, descoberta dos aspetos importantes e do que deve ser aprendido e a decisão sobre o que vai ser transmitido aos outros (p. 205).

Em suma, é um processo de compreensão e sistematização da informação, recolhida com o objetivo de responder às questões propostas no início da investigação, que nos transporta das descrições vagas até aos produtos finais Bogdan e Biklen (1994).

A análise de dados é feita em três fases (Merrian,1988): (i) redução de dados; (ii) apresentação de dados; e (iii) a interpretação e verificação.

A análise dos dados iniciou-se durante o processo da sua recolha, tendo sido aprofundada e analisada mais atentamente após terminada essa recolha. Segundo Merriam (1988), na investigação qualitativa a análise dos dados começa com frequência no primeiro momento de recolha de dados. Pela natureza do estudo, esta análise assume um caráter essencialmente descritivo e interpretativo, procurando relações entre os dados específicos constituídos pelos diferentes materiais obtidos, numa perspetiva indutiva, sem a finalidade de provar hipóteses previamente formuladas.

Todos os dados obtidos ao longo deste estudo foram metodicamente analisados, tendo em consideração os princípios de uma investigação qualitativa e de modo a poderem contribuir para responder às questões de investigação.

Na primeira fase da análise dos dados foi efetuada uma leitura detalhada dos diversos dados recolhidos (registos escritos efetuados pela investigadora e pelos alunos), o que possibilitou a formulação das categorias de análise que tiveram como objetivo facilitar a análise dos dados, tendo como ponto de partida as questões do estudo, como sugerem Bogdan e Biklen (1994).

Segundo Vala (1986), a construção de um sistema de categorias pode ser feita *a priori* (tendo em conta as questões de investigação), ou *a posteriori* (tendo em conta os dados recolhidos durante a investigação), ou ainda através da combinação destes dois processos. Considerando o objetivo deste trabalho e tendo em conta alguns aspetos da revisão de literatura, os estudos empíricos que realizei e os dados recolhidos, optei pelas seguintes categorias de análise: dificuldades na tradução de uma representação noutra representação, processos usados na resolução de problemas; formular e investigar conjeturas matemáticas. Procedi à ramificação destas categorias nas seguintes subcategorias:

1. Representação gráfica de uma função visualizada no ecrã da calculadora;
2. Tradução de uma representação gráfica numa representação algébrica;
3. Tradução de uma representação numérica numa representação algébrica;
4. Opção por processos algébricos ou gráficos na resolução de problemas;
5. Identificação de regularidades e sua formulação e teste de conjeturas.

Com base nestas categorias e tentando dar resposta a cada uma delas, no capítulo seguinte será realizada uma análise mais profunda da resolução e reflexão sobre os dados recolhidos ao longo das aulas.

6. Análise de dados

Depois de realizadas as propostas pedagógicas, importa agora trabalhar, refletir e analisar, em particular, cada uma das questões lançadas. É com base nestas questões e tentando dar resposta a cada uma delas, que me proponho, neste capítulo, fazer uma análise mais profunda a cada resolução e reflexão desenvolvida pelos alunos.

6.1. Procedimentos para a obtenção de ecrãs de visualização ideais

Na questão 1.3. pretende-se que os alunos identifiquem uma representação algébrica da função que relaciona a área do triângulo com o deslocamento, usando a regressão quadrática com a calculadora gráfica.

Procedimento com a calculadora: Através da calculadora no Menu Stat Edit; na list 1, inserimos os valores para x e na list 2, inserimos f(x). Depois com a janela xmin=0 / xmáx=10, ymin=0/ymáx=10, visualizamos o Gráfico e obtemos uma função quadrática.
Pela regressão quadrática chegamos a função $y=ax^2+bx+c$ em que $a=-0,5$, $b=4$, $c=0$ ou seja $y=-0,5x^2+4x+0$
É designada por função quadrática por é uma função real de variável real definida por um polinómio do 2º grau, ou seja, definida por uma expressão do tipo: $y=ax^2+bx+c$; $a\neq 0$.

Figura 5: Resolução da questão 1.3. (tarefa 1)

O grupo responde à questão de uma forma muito segura, esquematiza e menciona os passos que o levou a encontrar o ecrã de visualização ideal e depois a obter a expressão analítica da função. Sem dúvida que transparece uma organização mental estruturada e bastante coesa, evidenciada pela forma como o grupo transcreve cada passo da resolução.

Vejamos de seguida os ecrãs capturados pelo emulador da calculadora gráfica fx-CG na resolução desta questão (fig.6):

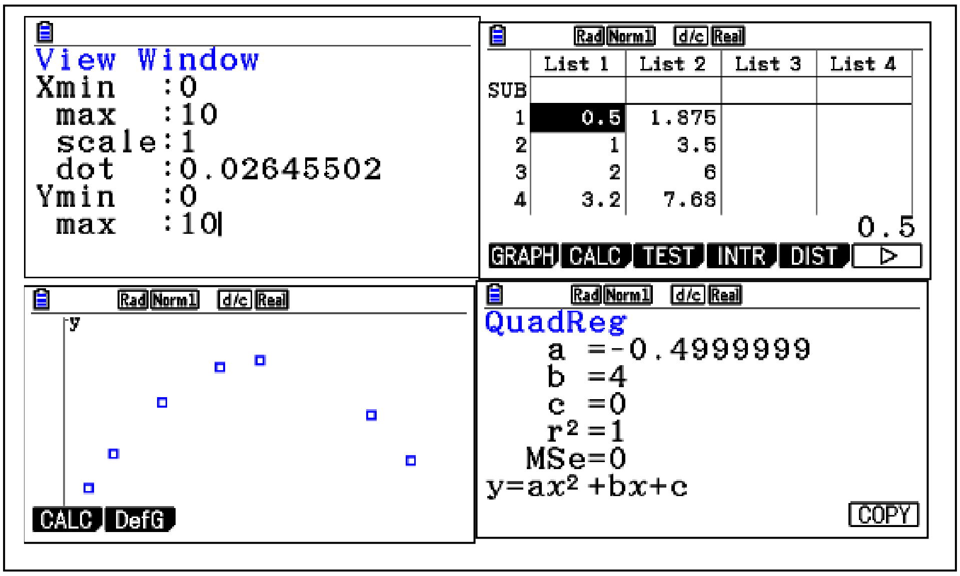


Figura 6: Ecrãs de visualização capturados na resolução da questão 1.2. (tarefa 2)

Todos os grupos respondem à questão de forma correta identificando todos os passos processados na busca do ecrã de visualização ideal.

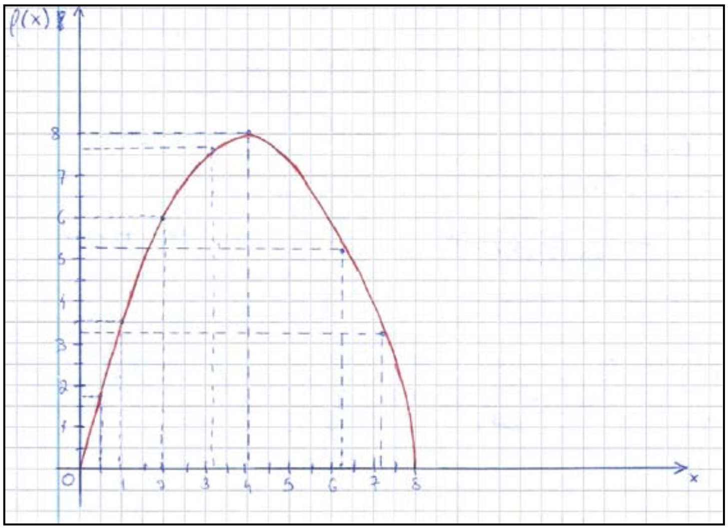
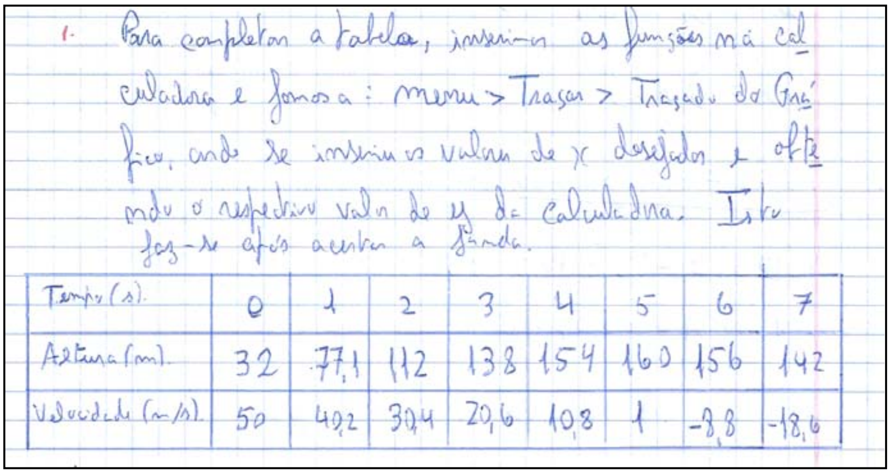


Figura 7: Esboço gráfico da função apresentada pelo grupo III

Relativamente à interpretação dos dados do desenho do gráfico visualizado no ecrã da calculadora, os alunos apresentam com rigor o respetivo esboço gráfico e mostram que conhecem e que são capazes de identificar as propriedades de uma função (domínio, zeros, contradomínio, extremos relativos, …) através do desenho do gráfico visualizado no ecrã da calculadora. Igualmente mostram que sabem definir uma janela de visualização adequada para a visualização do gráfico.

Na resolução da questão 1.1 da tarefa 5 o grupo I, recorre à calculadora para completar a tabela. (fig.8)


1. Para completar a tabela, inserimos as funções na calculadora e fomos a: menu > Traçar > Traçado do Gráfico, onde se inserem os valores de x desejados e obtendo o respectivo valor de y da calculadora. Isto faz-se após acertar a janela.

Tempo (s)	0	1	2	3	4	5	6	7
Altura (m)	32	77,1	112	138	154	160	156	142
Velocidade (m/s)	50	40,2	30,4	20,6	10,8	1	-8,8	-18,6

Figura 8: Resolução da questão 1 (tarefa 5)

Também nesta questão os alunos compreendem perfeitamente todos os passos que serão necessários para alcançar os resultados desejados.

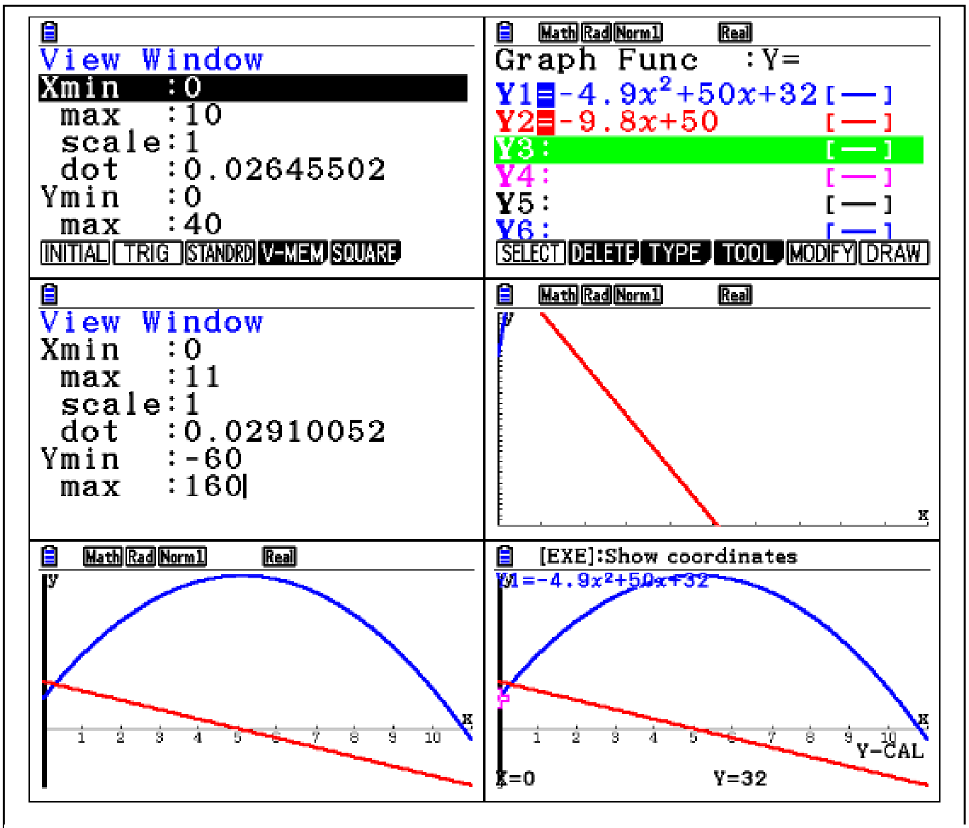


Figura 9: Ecrãs de visualização capturados na resolução da questão 1 (tarefa 5)

Ao observarmos as imagens do ecrã (fig. 9), denota-se que:

1. O aluno sabe introduzir a função;

2. Ao verificar que a representação gráfica da função não é visível, compreende a necessidade de dar instruções à calculadora, até alcançar uma representação onde seja visível o vértice da função;
3. De seguida, sabe dar novas instruções à máquina, no sentido de responder à questão.

6.2. Da representação gráfica à representação algébrica

Na questão 1.7 da tarefa 3, são apresentadas várias representações gráficas e é solicitada uma expressão que as defina algebricamente. Nas quatro representações é possível identificar graficamente o valor exato dos zeros das funções. Cada grupo identifica-os e aplica com facilidade a estratégia definida.

Aluno A: No gráfico (A), os zeros da função são 1 e 3 por isso vou pôr $(x-1)(x-3)$

Professora: É essa a expressão?

Aluno A: Não sei, ainda vou experimentar assim, com o a igual a 1 [Introduz na calculadora e confirma]. Dá mesmo igual. [Escreve] (fig.10)

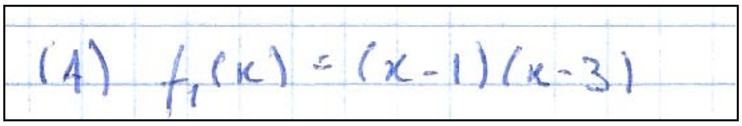


Figura 10: Resposta do aluno A

Professora: O que é que verificaste?

Aluno: Estive a verificar os zeros, o mínimo e a interseção com os yy.

Na resolução desta questão todos os grupos utilizam a mesma estratégia, recorrendo à família de funções quadráticas $y = a(x - \propto)(x - \beta)$ para todas as funções representadas. À medida que vão utilizando a calculadora gráfica, revelam preocupação em justificar as suas opções.

Professora: Explica agora o aluno C

Aluno C: Agora neste vou fazer o mesmo processo. Primeiro vou ver o vértice da parábola. [Utiliza a calculadora]. A concavidade está voltada para baixo e o a é negativo.

Vou experimentar -1… [Experimenta na calculadora] Dá. Os zeros são 1 e -3, também confirmam… Agora nesta só tem um zero, o zero é duplo e é …, é só $x\ +2$ ao quadrado ou $-(x+2)\ (x+2)$, [Experimenta na calculadora]. Oh!,.. o a não é -1 porque a intersecção com os yy não é -4.

Aluno D: A intersecção com os yy é -2 a parábola é mais aberta, então sofreu uma dilatação, então o a poderá ser $-\frac{1}{2}$.... [Experimenta na calculadora]. Dá mesmo igual.

Professora: porquê $-\frac{1}{2}$?

Aluno: Porque quando o a é -1 intersetava o eixo das ordenadas no -4, mas como tem que intersetar no -2, há uma dilatação o a passa para metade, por isso é que pensei no $-\frac{1}{2}$.

Professora: E pensaste bem.

A figura seguinte revela a resposta obtida, pelo grupo, a esta questão:

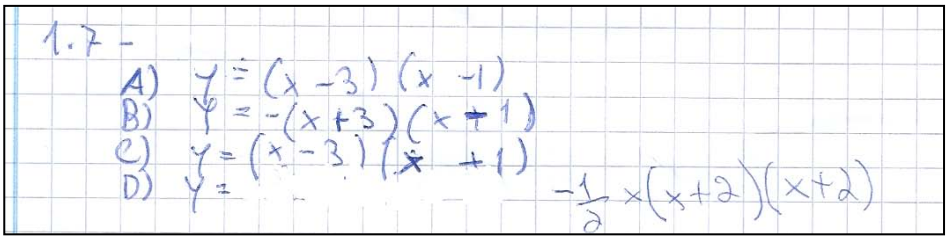


Figura 11: Resolução da questão 1.7. (tarefa 3)

Outro grupo, na determinação do parâmetro a, opta por resolver a equação em ordem a a, atribuindo as coordenadas de um ponto da função a x e y, diferente do vértice da parábola. Como se verifica na figura 12:

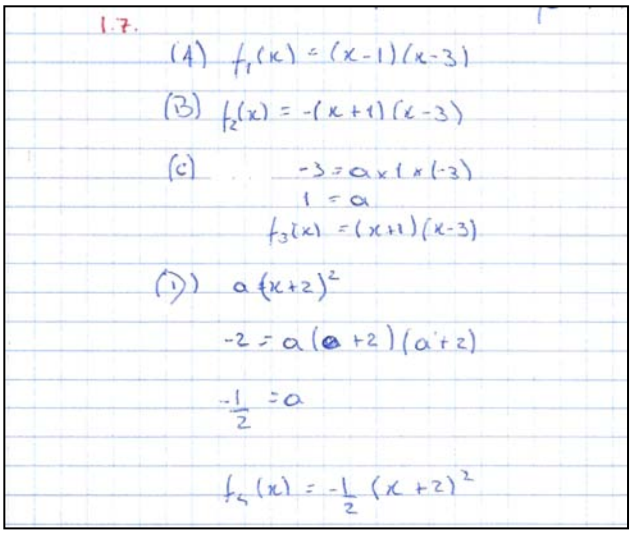


Figura 12: Resolução da questão 1.7. (tarefa 3)

Ainda nesta questão, o grupo IV, tenta resolver a questão e atribui aos parâmetros α e β, da equação $y = a(x - \alpha)\,(x - \beta)$, os zeros da função quadrática, mas não determina o parâmetro a corretamente (fig. 13).

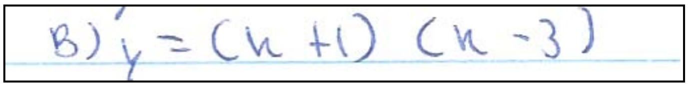


Figura 13: Resolução da questão 1.7. (tarefa 3)

Questão 6.3. da tarefa de avaliação. Nesta questão, é solicitado aos alunos que escrevam analiticamente as funções f e g, cuja representação gráfica é dada no enunciado. O aluno D apresenta um raciocínio correto para a sua resolução, assim como todos os cálculos para justificar a sua resposta.

Como podemos verificar o Aluno D escreve a equação na forma $f(x) = a(x-h)^2 + k,\, a \neq 0$ e substitui os parâmetros h e k pelas coordenadas do vértice da parábola para determinar o valor de a. O aluno resolveu a equação em ordem a a, atribuindo as coordenadas de um ponto da função a x e y, diferente do vértice da parábola. Do mesmo modo procedeu para encontrar a expressão algébrica da função g (fig. 14):

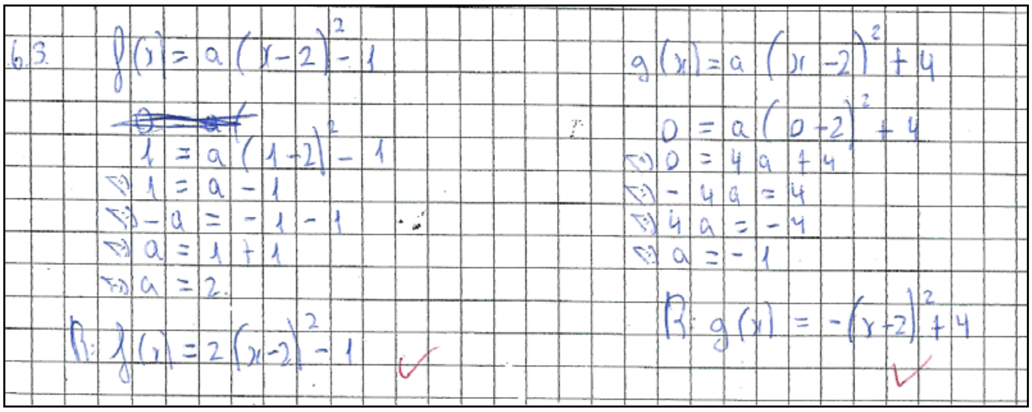


Figura 14: Resolução da questão 6.3. (tarefa de avaliação).

O Grupo I, nesta questão, recorre à família de funções quadráticas. Identifica o valor do vértice da parábola e utiliza a expressão $a\,(x-h)^2\, +\, k$. Identifica, graficamente, os valores do vértice que assinala com os respetivos parâmetros na expressão algébrica. Para o parâmetro a opta por realizar várias tentativas na calculadora gráfica, atribuindo-lhe valores e verificando se o gráfico obtido coincide com o dado.

Este aluno revela fraco desempenho, particularmente no cálculo do parâmetro a, quando quer converter para as equações na forma $f(x) = a(x - h)^2 + k \, , a \neq 0$ (fig.15).

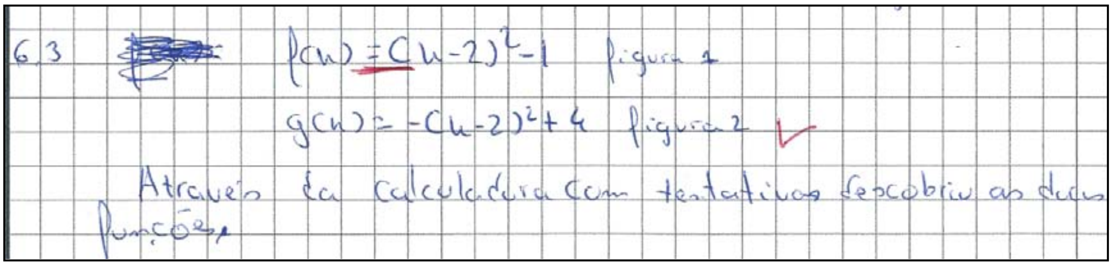

6.3 $f(x) = (x-2)^2 - 1$ figura 1
$g(x) = -(x-2)^2 + 4$ figura 2
Através da calculadora com tentativas descobriu as duas funções.

Figura 15: Resolução da questão 6.3. (tarefa de avaliação).

Na sua maioria, os alunos mostram-se capazes de converter a representação gráfica de uma função quadrática numa representação algébrica quando recorre, sobretudo, à transformação de funções. Alguns alunos revelam algumas dificuldades, quando consideram as coordenadas do vértice e as coordenadas de um outro ponto da função na determinação do parâmetro a.

6.3. Tradução de uma representação numérica numa representação algébrica

A questão 1.1.destina-se a identificar os valores que a variável independente pode tomar no contexto do problema apresentado, mostrando se os alunos compreenderam o seu significado nesse contexto, ou seja, em termos geométricos.

Aluno P: Em relação aos valores que o x pode tomar… [Pensa] No máximo pode tomar 8.

Professora: Porquê?

Aluno P: E não pode chegar a 8… Nem a zero, porque o ponto P só se desloca sobre o segmento CB nunca coincide com C nem com B. Por isso, o x vai pertencer a um intervalo aberto entre zero e oito. [Escreve]

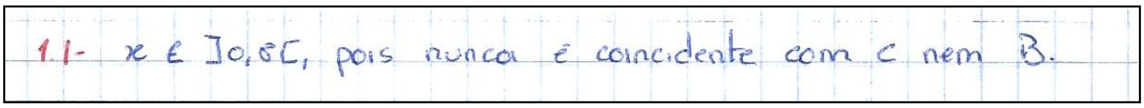

1.1- $x \in \,]0,8[$, pois nunca é coincidente com C nem B.

Figura 16: Resolução da questão 1.1. (tarefa 1)

Na questão 1.2., é solicitado ao aluno que complete a tabela que regista os valores para o deslocamento x e as áreas $f(x)$ dos triângulos $[PBQ]$ correspondentes.

Os alunos assinalam que os triângulos $[ABC]$ e $[QPC]$ são semelhantes e determinam corretamente a medida dos comprimentos dos catetos $[QP]$ e $[PB]$ do triângulo inscrito $[PQB]$ da figura e, sem dificuldades, o cálculo da área do triângulo inscrito $[PBQ]$ (fig. 4.12) e, assim, preenchem corretamente a tabela.

Grupo I: Se x for 0,5 então o comprimento de PQ é também 0,5.

Professora: Porquê?

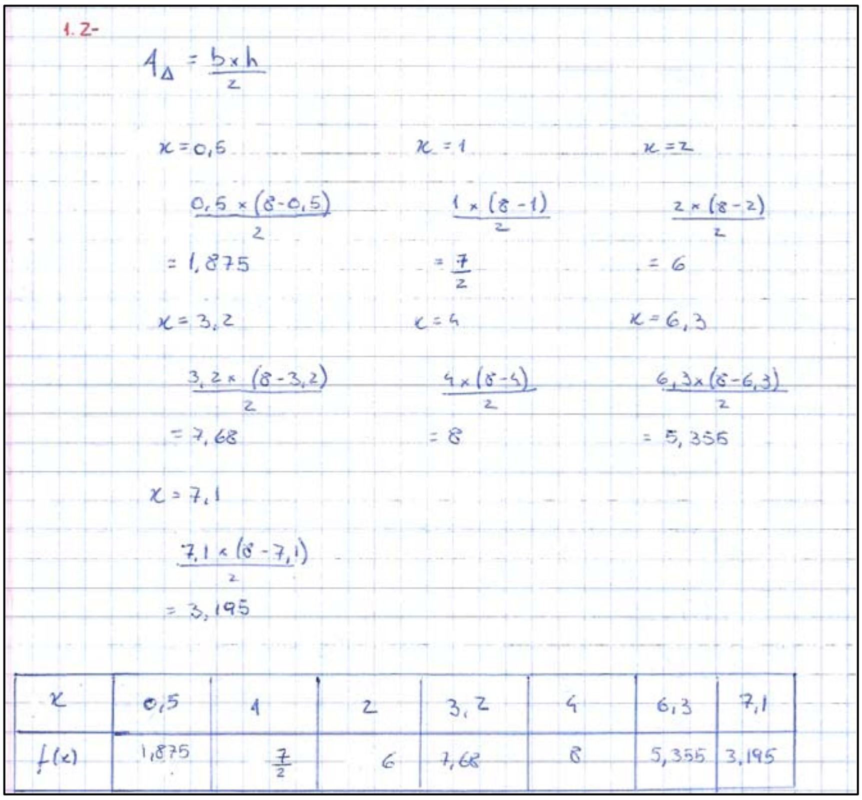
Grupo II: Professora… os triângulos são semelhantes.

Professora: São semelhantes, porquê?

Grupo III: Os triângulos têm dois ângulos iguais, o ângulo reto e o ângulo agudo C é comum aos dois triângulos, ora o triângulo $[ABC]$ é retângulo e isósceles, então o triângulo $[QPC]$ também é retângulo e isósceles.

Professora: Muito bem explicado. E qual é o comprimento do segmento de reta $[BP]$, ?

Grupo I : Se x é 0,5 então o comprimento de PB é $8 - 0{,}5$.


1.2-

$A_\Delta = \frac{b \times h}{2}$

$x = 0{,}5$: $\frac{0{,}5 \times (8-0{,}5)}{2} = 1{,}875$

$x = 1$: $\frac{1 \times (8-1)}{2} = \frac{7}{2}$

$x = 2$: $\frac{2 \times (8-2)}{2} = 6$

$x = 3{,}2$: $\frac{3{,}2 \times (8-3{,}2)}{2} = 7{,}68$

$x = 4$: $\frac{4 \times (8-4)}{2} = 8$

$x = 6{,}3$: $\frac{6{,}3 \times (8-6{,}3)}{2} = 5{,}355$

$x = 7{,}1$: $\frac{7{,}1 \times (8-7{,}1)}{2} = 3{,}195$

x	0,5	1	2	3,2	4	6,3	7,1
$f(x)$	1,875	$\frac{7}{2}$	6	7,68	8	5,355	3,195

Figura 17: - Resolução da questão 1.2. (tarefa 1)

A determinação das áreas, pelos alunos, em vários casos particulares, sugere, para a questão 1.4, a representação algébrica, por processos analíticos de uma forma imediata, como podemos verificar nas resoluções obtidas nesta questão, por dois grupos (fig.18):

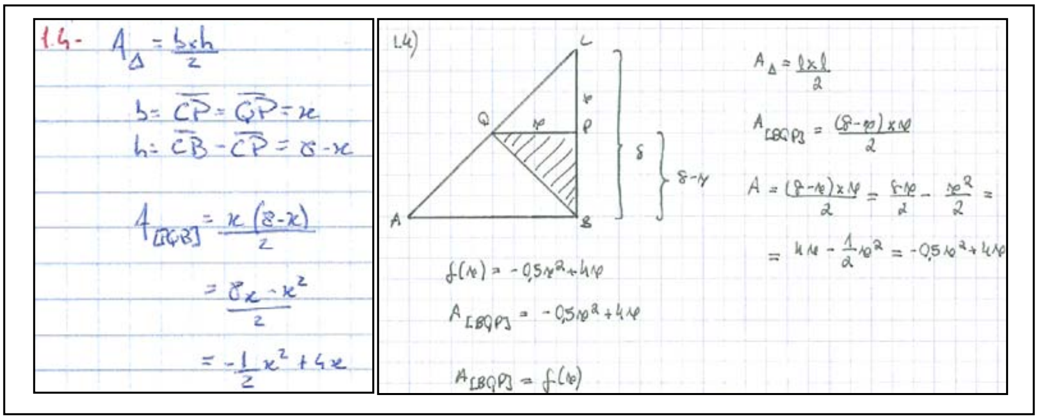


Figura 18: Resolução da questão 1.4. (tarefa 1)

Na resolução da questão comprova-se assim que os grupos conseguem fazer a passagem da representação numérica à representação algébrica.

Na resolução da questão 8.1. da tarefa de avaliação, o Aluno M responde ao problema da tarefa de avaliação com um excelente desempenho. Nesta questão, o aluno passa de uma representação numérica para uma representação algébrica determinando corretamente a expressão da área do retângulo, em função de *x*. (fig. 19)

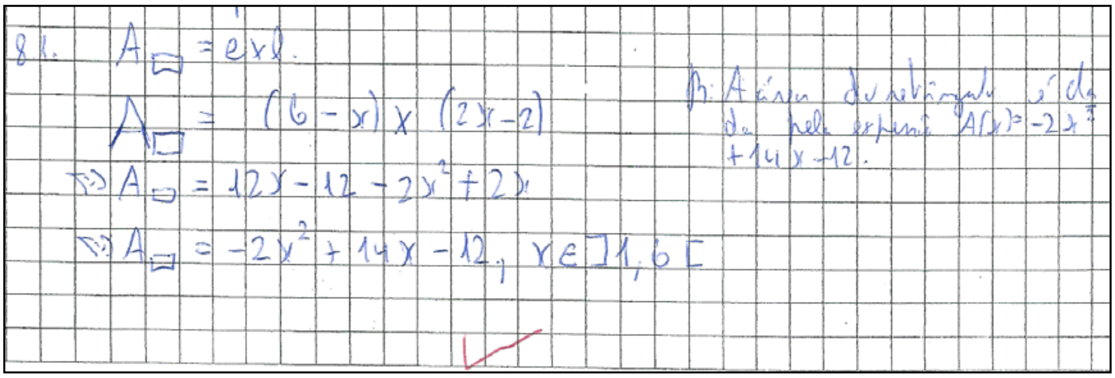


Figura 19: Resolução da questão 8.1. (tarefa de avaliação)

Também o aluno R faz uma interpretação correta do problema e converte-o numa representação algébrica (fig. 20).

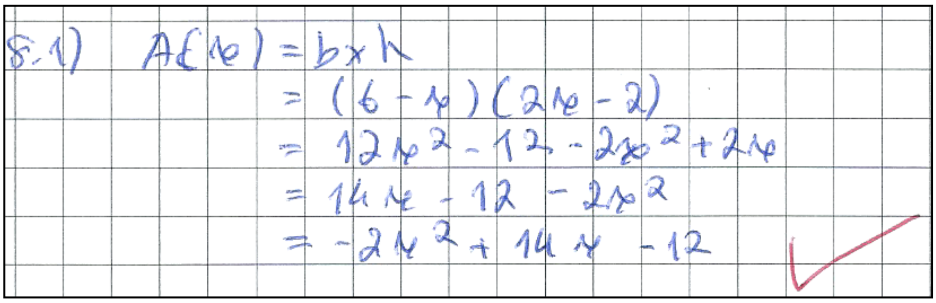


Figura 20: Resolução da questão 8.1. (tarefa de avaliação)

No entanto, alguns alunos não conseguiram encontrar a expressão que representa a área pedida, por não identificarem corretamente o comprimento ou a largura, como podemos observar nas duas figuras seguintes. Nota-se que faltou algum rigor na indicação do cálculo da área do retângulo (fig. 21).

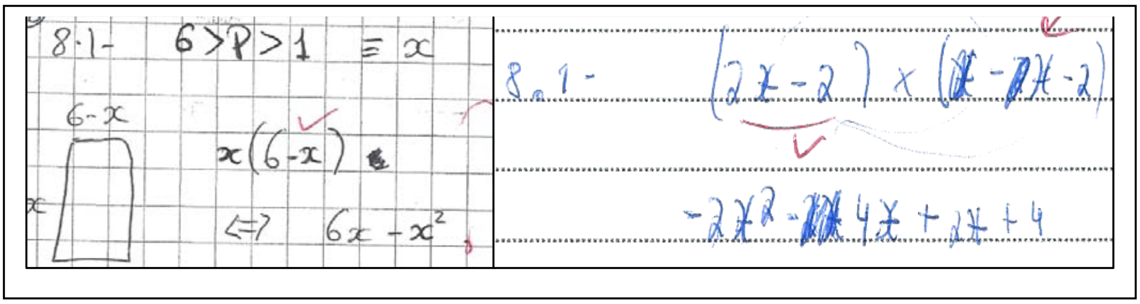


Figura 21: Resolução da questão 8.1. (tarefa de avaliação)

6.4. Opção por processos algébricos na resolução de problemas

Na questão 1.6. (tarefa 1), são pedidos os valores para os quais a área é inferior a $\frac{15}{2}$. Os alunos definem com facilidade a estratégia de resolução de inequações.

Pensava que os alunos iriam resolver esta questão graficamente, mas estava enganada, pois todos os grupos resolveram-na por processos analíticos, com excelente rigor matemático como se verifica na resolução apresentada pelo grupo II (fig.22). Este grupo determina corretamente as raízes da equação $0{,}5x^2 + 4x - 7{,}5 = 0$, situa o gráfico em relação ao eixo dos xx e identifica corretamente a variação do sinal da função.

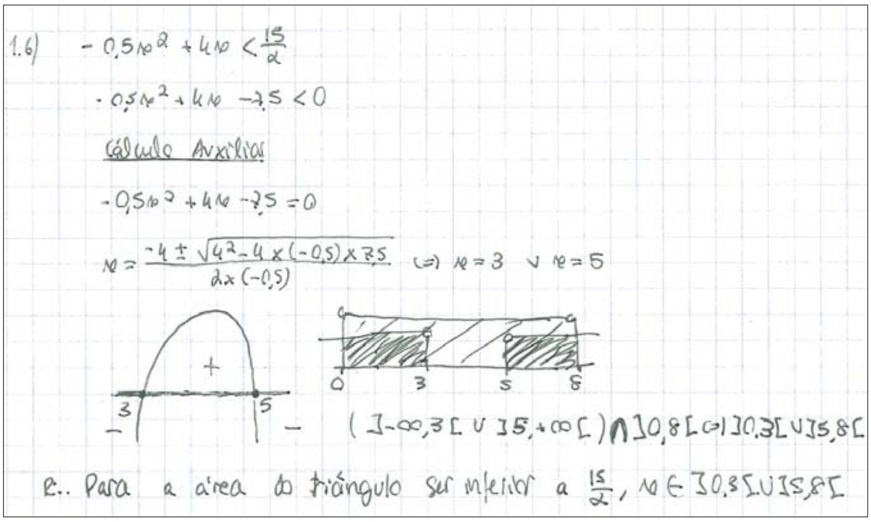


Figura 22: Resposta da questão 1.6. (tarefa 1)

O grupo IV determina corretamente as raízes da equação $-0{,}5x^2 + 4x - \frac{15}{2} = 0$, situa o gráfico em relação ao eixo dos xx e identifica corretamente a variação do sinal da função. Do ponto de vista formal utiliza incorretamente o símbolo de equivalência entre uma condição e um conjunto (fig. 23).

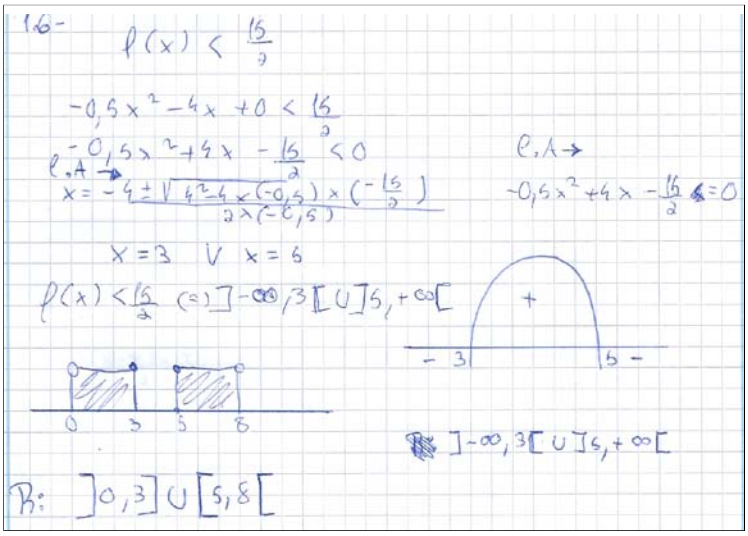


Figura 23: Resposta da questão 1.6. (tarefa 1)

Em suma, todos os grupos tiveram um bom desempenho nesta questão, tanto ao nível do cálculo de expressões como da resolução de inequações do 2.º grau.

Na questão 1.1 da tarefa 4, pergunta-se se é golo? Os alunos compreenderam de imediato o que se pretendia pela afirmação seguinte de um dos grupos (fig. 24).

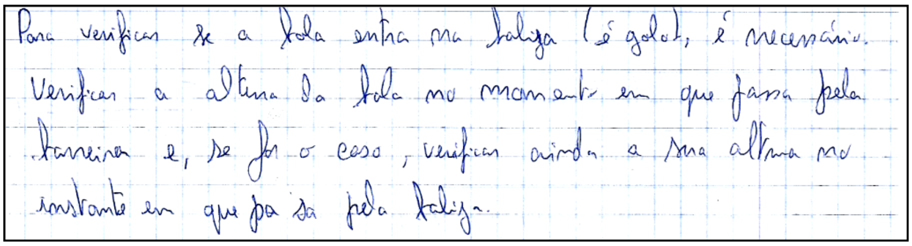

Para verificar se a bola entra na baliza (é golo), é necessário.
Verificar a altura da bola no momento em que passa pela barreira e, se for o caso, verificar ainda a sua altura no instante em que passa pela baliza.

Figura 24: Resolução da questão 1.1. (tarefa4)

Na resolução desta questão, o grupo II opta por uma resolução algébrica. Traduz o problema por meio de um esquema, interpreta corretamente o valor a atribuir ao x , ao considerar que aos 25 metros a altura terá que ser inferior a 2,44m e aos 9,15m terá que ser superior a 1,95m; calcula corretamente os valores de $h(25)$ e de $h(9{,}15)$ e interpreta corretamente os resultados obtidos no contexto do problema. Eis aqui alguns registos dos trabalhos dos grupos (fig.25):

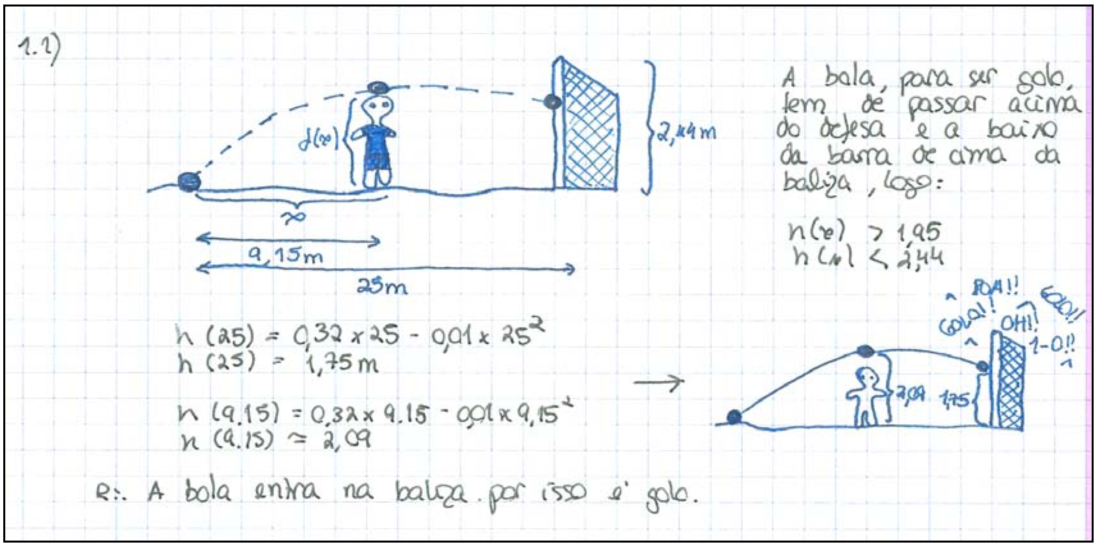
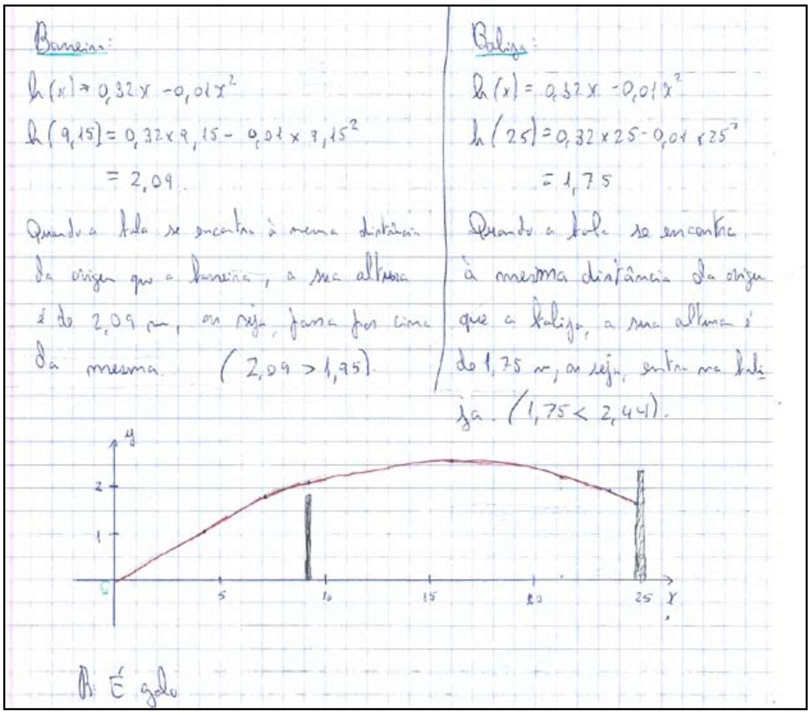


Figura 25: Resolução da questão 1.1. (tarefa 4)


Barreira:
$h(x) = 0,32x - 0,01x^2$
$h(9,15) = 0,32 \times 9,15 - 0,01 \times 9,15^2$
$= 2,09$
Quando a bola se encontra à mesma distância da origem que a barreira, a sua altura é de 2,09 m, ou seja, passa por cima da mesma (2,09 > 1,95).

Baliza:
$h(x) = 0,32x - 0,01x^2$
$h(25) = 0,32 \times 25 - 0,01 \times 25^2$
$= 1,75$
Quando a bola se encontra à mesma distância da origem que a baliza, a sua altura é de 1,75 m, ou seja, entra na baliza. (1,75 < 2,44).

R: É golo

Figura 26: Resolução da questão 1.1. (tarefa 4)

Na questão 1.2 os alunos reconhecem a função quadrática na forma $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx}$, determinando as coordenadas do seu vértice e respondem corretamente à questão.

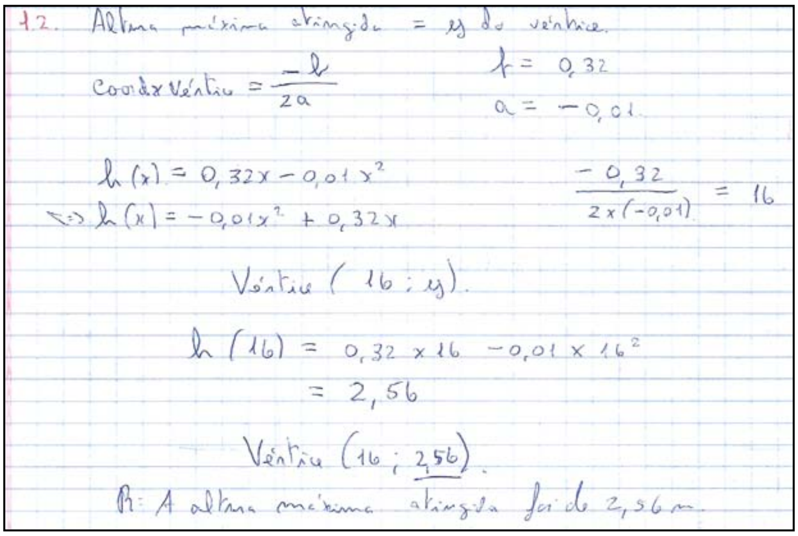
Professora: Como vão calcular a altura máxima da bola?

Grupo I: Será a ordenada do vértice.

Professora: Porquê?

Grupo I: porque a é menor que zero, então o vértice é o ponto máximo.

E apresentam a seguinte resolução:


1.2. Altura máxima atingida = y do vértice.

Coord x Vértice $= \frac{-b}{2a}$ $b = 0,32$ $a = -0,01$

$h(x) = 0,32x - 0,01x^2$
$\Leftrightarrow h(x) = -0,01x^2 + 0,32x$

$\frac{-0,32}{2 \times (-0,01)} = 16$

Vértice (16 ; y).

$h(16) = 0,32 \times 16 - 0,01 \times 16^2$
$= 2,56$

Vértice (16 ; 2,56).

R: A altura máxima atingida foi de 2,56 m.

Figura 27:Resolução da questão 1.2. (tarefa 4)

Na questão 1.3., o grupo III fez uma interpretação correta do problema, desenha um triângulo retângulo, identifica corretamente o comprimento dos catetos e utiliza o teorema de Pitágoras para calcular a distância pedida, como se pode verificar na fig.28

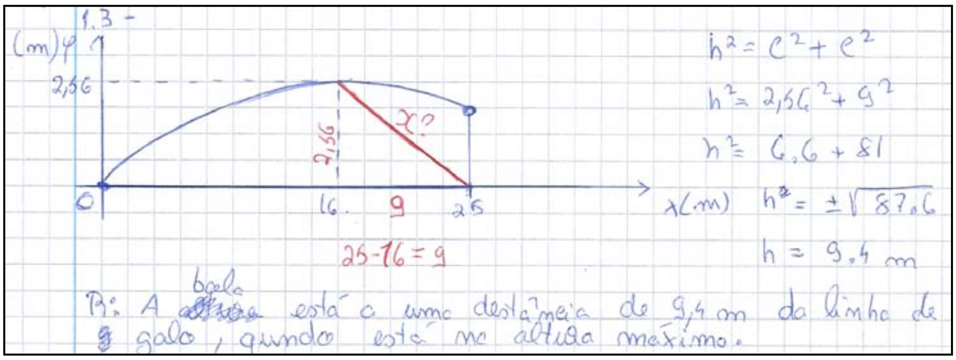


Figura 28: Resolução da questão 1.3 (tarefa 4)

Na questão 6, da tarefa 5 (nesta questão é pedido ao aluno para assinalar o eixo de simetria do gráfico da função e que explique o seu significado no contexto do problema), O grupo calcula a abcissa do vértice, identifica a equação do eixo de simetria e interpreta corretamente o resultado obtido no contexto do problema (fig. 29).

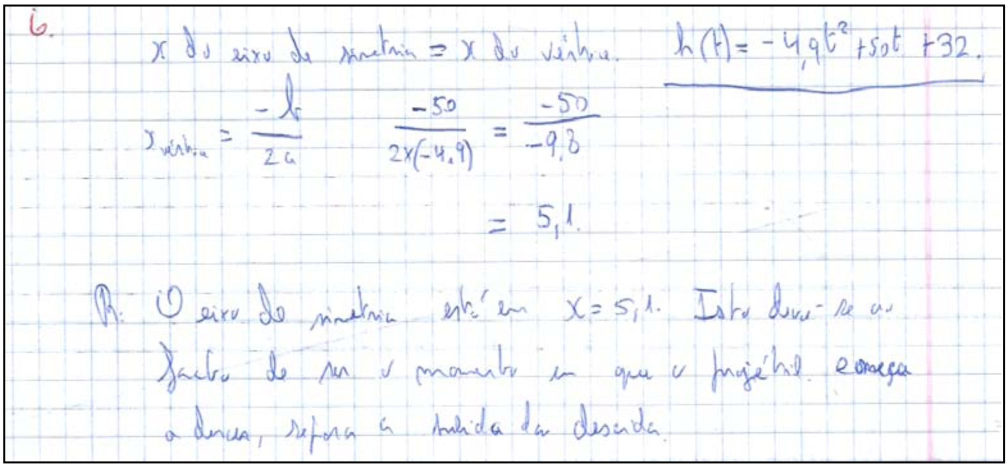


Figura 29: Resolução da questão 6 (tarefa 5)

A maioria dos alunos revela ser capaz de definir, com facilidade, estratégias para resolver problemas com funções utilizando vários processos.

Podemos concluir que os alunos têm facilidade em interpretar e compreender problemas que envolvem funções, estabelecendo relação com o significado que tomam no seu contexto. Optam, sobretudo, por processos algébricos na resolução dos problemas, embora numa ou noutra questão utilizem processos gráficos.

6.5. Opção por processos gráficos na resolução de problemas

Na resposta à questão 5 (da tarefa 5), em que é pedida a velocidade do projétil, quando este chega ao solo, um dos grupos opta pela resolução gráfica (fig. 30), representando graficamente as funções h e v.

Grupo II: Vou calcular os zeros de h… [Utiliza a calculadora].

Professora: Para quê?

Grupo II: Porque, primeiro tenho de saber quanto tempo é que o projétil leva a atingir o solo e depois, nesse instante, calcular a velocidade, na função v.

Grupo II: Dá 10,8, e agora vou ver, na função v qual é o valor da ordenada quando o x for 10,8… … [Utiliza a calculadora]. Já tenho a resposta, è 55,4 m/s.

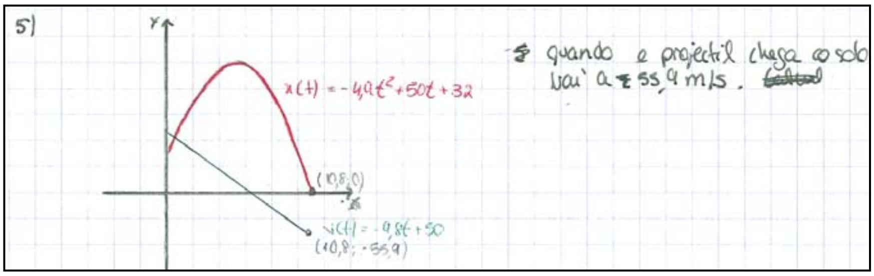


Figura 30: Resolução da questão 1.1. (tarefa 4)

Na questão 5 (da tarefa 4), o grupo III resolveu graficamente esta questão (fig.31).

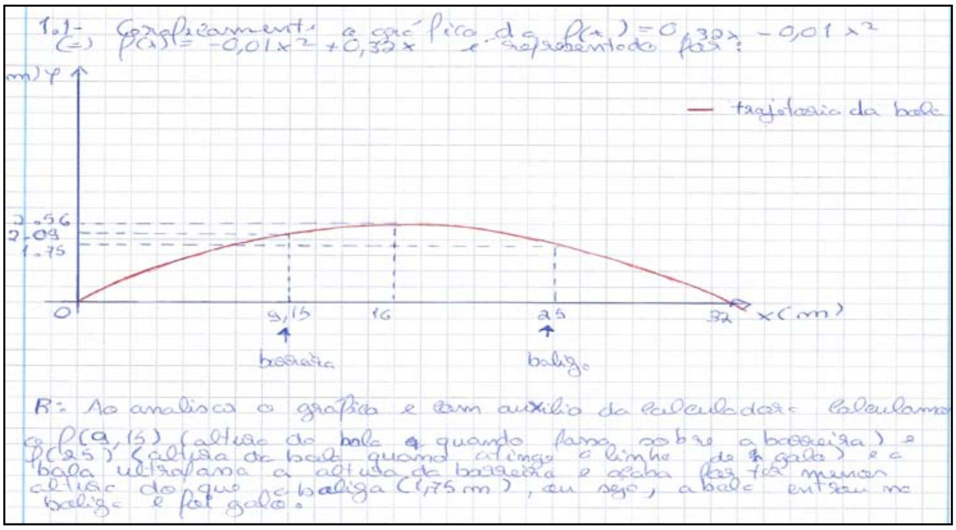


Figura 31: Resolução da questão 5 (tarefa 4)

Na Questão 1.1., da tarefa 6, é pedido aos alunos que esbocem os gráficos das funções $g, h, i,$ e j , e que os comparem com a representação gráfica de f .

Professora: Já têm o gráfico da função g?

Grupo II: Não, mas é fácil, é uma simetria axial do gráfico de f.

Professora: Em relação a que eixo?

Grupo II: Ao eixo Oy.

Professora: E o gráfico de h?

Grupo III: O gráfico da função h, em relação ao da função f, obtém-se através de uma translação vertical para cima de 3 unidades.

Grupo III: Ou por meio de uma translação vertical associada a um vetor de coordenadas (0, 3).

Grupo III: O de i é uma translação horizontal para a esquerda de 1 unidade e o j é o módulo de f.

Professora: Expliquem melhor como vais desenhar o gráfico de j.

Grupo III: A parte do gráfico que é positiva fica igual e a parte que é negativa faz-se uma simetria em relação ao eixo Ox, fica assim.. [e desenha]

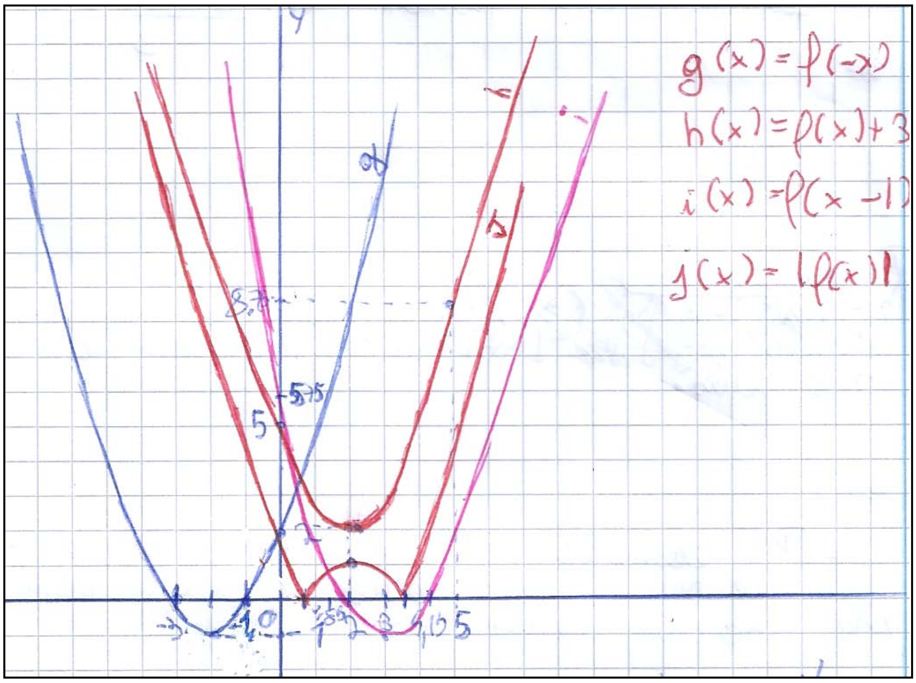


Figura 32: Resolução da questão 1.1. (tarefa 6)

6.6. Identificação de regularidades e formulação e teste de conjeturas

Através do recurso à calculadora gráfica, os alunos envolveram-se ativamente na realização destas duas tarefas, experimentando, explorando, investigando, escolhendo e decidindo, e avaliando os resultados alcançados. Nas aulas em que se realizaram estas atividades, diversificou-se os momentos de investigação, com resolução de exercícios, de problemas e momentos de construção de situações novas em discussão orientada pela professora. Os alunos foram conduzidos ao desenvolvimento da capacidade de articular conceitos e raciocínios. De facto, no decorrer das discussões sobre as tarefas de exploração/investigação, permiti que os alunos expusessem livremente os processos de resolução usados e respetivos resultados.

6.6.1. Análise da tarefa 2

Na resolução da tarefa 2, é pedido aos alunos que estudem a influência que os parâmetros das representações algébricas têm nas representações gráficas, de uma família de funções do tipo $y = a\,(x - h)^2 + k$.

Na questão 1.1, os alunos estudam a influência do parâmetro a na família de funções $y = ax^2$, partindo da observação e da análise das representações obtidas na calculadora gráfica.

Nesta questão, os alunos perceberam que o coeficiente de x^2, implicava a mudança de abertura da parábola, o que podemos perceber através das seguintes respostas:

Professora: Que efeitos têm as variações de a no gráfico das funções $y = ax^2$?

Grupo I: Se a é positivo, o gráfico tem a concavidade voltada para cima e quando é negativo é para baixo.

Grupo I: E o número sendo maior e positivo, aproxima-se cada vez mais do eixo y, sendo assim quanto menor for o número mais se aproximará do eixo x.

Grupo I: Repare que quanto mais se aumenta o valor absoluto de a mais a parábola de equação $y\ = ax^2$, se fecha em torno do eixo das ordenadas.

Professora: Então o que podemos concluir do efeito do parâmetro a no gráfico da função?

Grupo I : O valor de a determina o sentido da concavidade e a abertura da parábola. Quanto maior for o valor absoluto de a, mais estreita será a curva. Por seu lado, quanto menor for o valor absoluto de a, mais larga é a curva. Se a é positivo, então a concavidade da parábola é voltada para cima. Quando a é negativo, a parábola tem concavidade voltada para baixo.

As conclusões dos alunos, nesta situação, satisfizeram as expetativas no que diz respeito ao parâmetro a. Observando as representações gráficas, os alunos identificaram algumas características e propriedades das funções correspondentes, como se verifica na resolução desta questão pelo grupo II (fig.33).

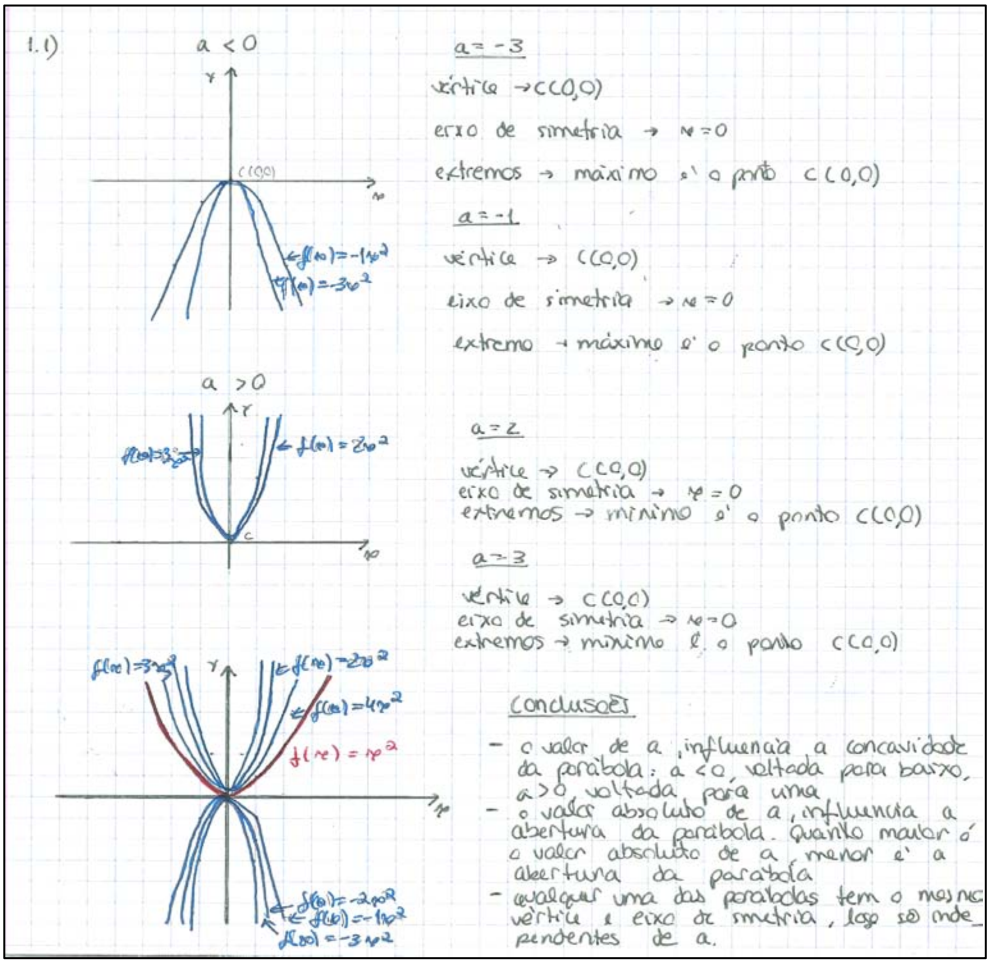
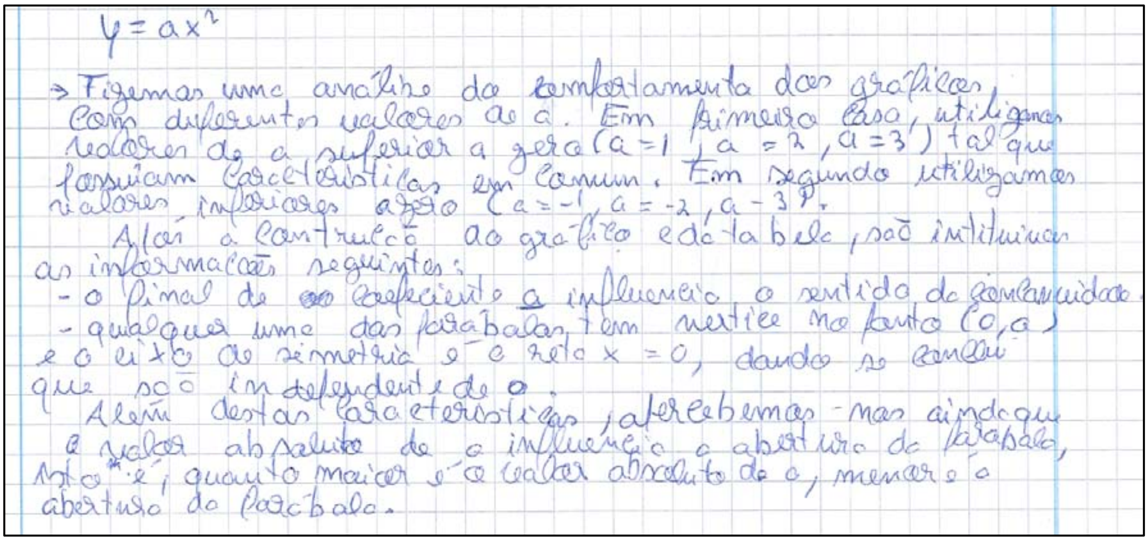


Figura 33: Resolução da questão 1.1. (tarefa 2)

E também da conclusão do grupo III (fig. 34)


$y = ax^2$

→ Fizemos uma análise do comportamento dos gráficos, com diferentes valores de a. Em primeiro caso, utilizamos valores de a superior a zero (a = 1, a = 2, a = 3) tal que possuíam características em comum. Em segundo utilizamos valores inferiores a zero (a = -1, a = -2, a - 3).

Além da construção do gráfico e da tabela, são intituídas as informações seguintes:

- o sinal do coeficiente a influencia o sentido da concavidade.
- qualquer uma das parábolas tem vértice no ponto (0, 0) e o eixo de simetria é a reta x = 0, dando a concluir que são independentes de a.

Além destas características, percebemos mas ainda que o valor absoluto de a influencia a abertura da parábola, isto é, quanto maior é o valor absoluto de a, menor é a abertura da parábola.

Figura 34: Resolução da questão 1.1 (tarefa 2)

Na questão 1.2.,

Professora: Ok. Vamos agora ver para que serve o h em $(x + h)^2$?

Aluno R: A parábola desloca-se horizontalmente, para a direita e para esquerda, ao variar h .

Aluno D: E é a abcissa do vértice da parábola.

Aluno C: Bestial. Já entendi! E o k faz subir ou descer a parábola. E é a ordenada do vértice.

Professora: Como podem obter uma representação gráfica da função $f(x) = (x - 2)^2 - 3$ a partir do gráfico da função $f(x) = x^2$?

Aluno G: Primeiro faria um deslocamento horizontal de 2 unidades para a direita e depois um outro deslocamento na vertical, de 3 unidades para baixo.

Aluno R: Mas também podemos fazer ao contrário: primeiro o deslocamento vertical e depois o horizontal.

Os quatro alunos obtiveram um bom desempenho nesta questão. Conseguiram relacionar os parâmetros h e k, em $y = a(x - h)^2 + k$, com os efeitos de deslocamentos horizontal e vertical do gráfico de $y = ax^2$; e ainda que o gráfico de $y = a(x - h)^2 + k$ resulta da translação do gráfico de $y = ax^2$ associada ao vetor de coordenadas (h, k), como se verificou no diálogo com os alunos e também no relatório apresentado por um dos grupos (fig.35).

Relatórios:

O gráfico de $y=ax^2+k$ obtém-se a partir do gráfico de $y=x^2$, através da translação vertical de acordo com o vector $\vec{v}(0,k)$. A abertura da parábola depende dos valores de a.

O gráfico de $y=a(x+h)^2$ obtém-se a partir do gráfico de $y=x^2$, através da translação horizontal, de acordo com o vector $\vec{v}(h;0)$. A abertura da parábola depende dos valores de a

O gráfico de $y=a(x+h)^2+k$ obtém-se a partir do gráfico de $y=x^2$, através da translação vertical e outra horizontal de acordo com os respectivos vectores. $\vec{v}(0;k)$ e $\vec{v}(h;0)$

Figura 35: Resolução da questão 1.1. (tarefa 2)

É impressionante o tipo de raciocínio matemático que os alunos desenvolveram quando estavam a resolver os problemas que lhes foram propostos.

Alguns dos alunos desta turma, conseguiram de uma tal forma simplificar o processo matemático, que muitas vezes ficava perplexa com aqueles raciocínios, brilhantes, como ilustra a resolução das questões 1.3. e 1.4. (fig.36, fig.37 e fig.38):

1.3.

$y=-7x^2$

Para obtermos $y=-7x^2$ através de $y=x^2$, teremos, em primeiro lugar, de a transformar numa função simétrica em relação ao eixo das abcissas e, em seguida, existe uma contração da função, pois, $y=x^2$ é transformado em $y=-7x^2$

$y=(x+3)^2$

A função $y=(x+3)^2$ pode ser obtida através da função $y=x^2$, deslocando-a 3 unidades para a esquerda por intermédio do vector $\vec{v}(3,0)$

$y=2(x-4)^2+7$

Em relação à função $y=ax^2$, primeiro vai existir uma contração, pois a=2, e depois a função vai fazer um movimento de translação através do vector (4,7)

Figura 36: Resolução da questão 1.3. (tarefa 2)

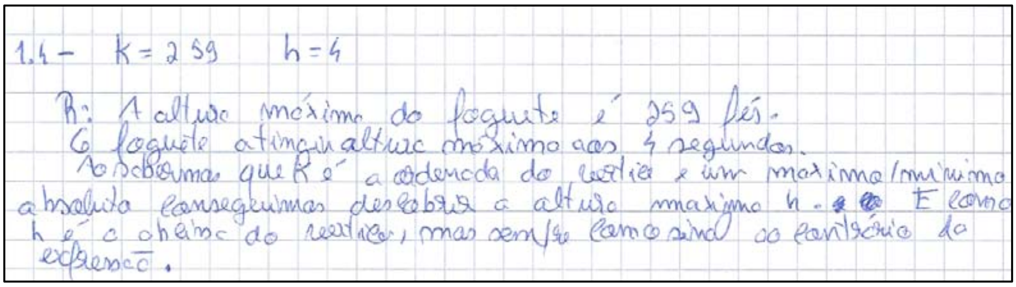


Figura 37: Resolução da questão 1.4. (tarefa 2)

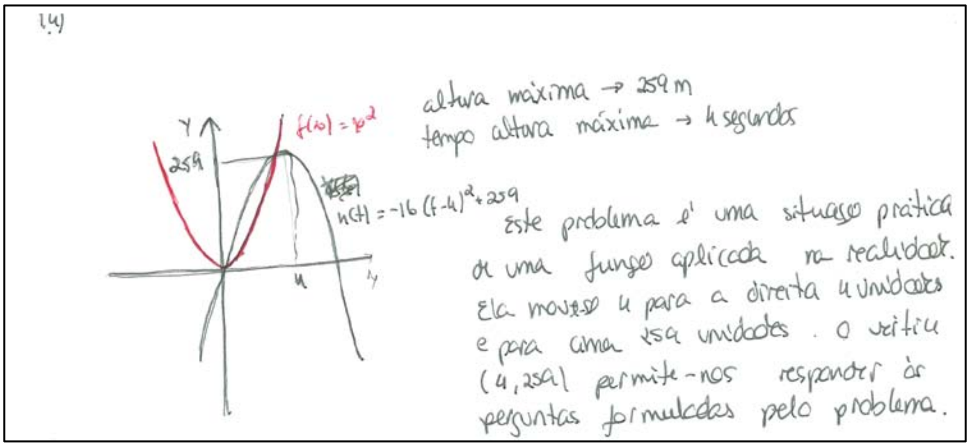


Figura 38: Resolução da questão 1.4. (tarefa 2)

Os resultados apontam que, de um modo geral, os alunos compararam, interpretaram e analisaram o comportamento das funções e identificaram a generalidade das propriedades da função, usando a calculadora gráfica, levantando conjeturas e procurando evidências que as confirmassem, e conseguindo organizar as ideias a ponto de as registar de forma coerente, conforme se observou ao ler os registos escritos pelos alunos.

Este tipo de atividades investigativas, promoveu a interconexão de formas de raciocínio algébrico e geométrico, contribuindo para o estudo das funções, de modo particular, as funções quadráticas.

6.6.2. Análise da tarefa 3

Na situação descrita na questão 1.2 da tarefa 3, ao analisarem o significado dos valores -2 e 1, os alunos afirmaram de imediato que é a intersecção com os xx.

Professora: Verifica o que acontece em relação ao eixo dos yy?

Aluno: E não sei se o -2 também não tem a ver com a interseção com os yy…Sim, a função interseta o eixo dos yy no -2. Vou ter que experimentar noutras funções para ver se dá… [Utiliza a calculadora].

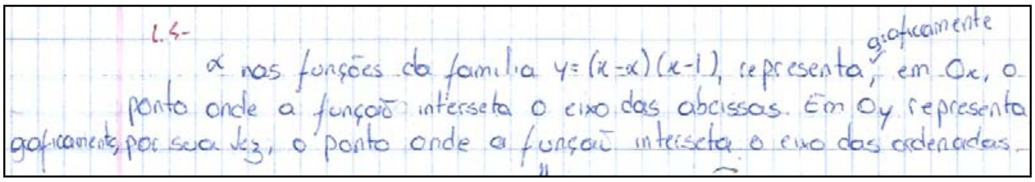
Além disso, mostra preocupação em testar a sua conjetura, realizando experiências para mais casos particulares:

Professora: O que é que estás a experimentar?

Aluno: Estou a ver com $x\ +2$… E dá. O valor do segundo fator, neste caso $x-1$, dá um zero que é 1 e o outro, $x+2$, dá outro zero que é -2 e é também o valor da interseção com os yy.

Aluno: Aqui para investigar os gráficos das funções vou experimentar substituir o $\propto$ por 2… [Faz experiências na calculadora] Agora vou por -1. Portanto o $\propto$ continua a ser um dos zeros. Quando o $\propto$ é -2, os zeros são 1 e -2. Quando o $\propto$ é -3, os zeros são o 1 e o -3. Ou seja, o $\propto$ tem a ver com os zeros e acho que tem a ver com a interseção com os yy. Deixe ver… [Experimenta] Sim, dá. A interseção com os yy é outra vez o valor do $\propto$. [Escreve]

Na questão 1.4., uma pequena investigação sobre a influência do parâmetro $\propto$ no gráfico das funções da família $y\ =\ (x - \propto)\ (x-\ 1)$, o aluno explora alguns casos particulares, atribuindo valores ao parâmetro $\propto$. Na sua investigação, o aluno identifica regularidades relacionadas com os valores dos zeros e com o ponto de interseção com o eixo dos yy. E, em cada caso que testa, mostra preocupação em confirmar a conjetura anteriormente formulada:



1.4-

α nas funções da familia $y=(x-\alpha)(x-1)$, representa, graficamente, em Ox, o ponto onde a função interseta o eixo das abcissas. Em Oy representa graficamente, por sua vez, o ponto onde a função interseta o eixo das ordenadas.

Figura 39: Resolução da questão 1.4. (tarefa3)

Professora: E se os zeros fossem outros?

Aluno: Vou analisar… [Experimenta na calculadora], por exemplo, se aqui [apontando para $x\ -1$] fosse 2 duplicava, dava -4. [Continua a experimentar] Mas, se fosse aqui $x -\ 1$ dava sempre a interseção com os yy.

Aluno: Ia ser um vezes o outro… Era o produto dos zeros.

Ao tentar encontrar uma justificação para a regularidade encontrada no exemplo anterior, o aluno formula uma generalização quando verifica que o valor da interseção do gráfico das funções com o eixo dos yy é igual a um dos zeros, porque o outro zero é 1. Quando começa a mudar esse valor verifica que a interseção com o eixo dos yy é igual ao produto dos zeros da função, estabelecendo assim uma generalização da sua conjetura inicial:

Professora: Então qual seria, em qualquer função, a interseção com o eixo dos yy ?

Aluno: Ia ser um vezes o outro… Era o produto dos zeros.

A conjetura formulada nesta questão tem uma importância significativa em termos matemáticos, revelando, além disso, o desenvolvimento da sua aptidão para relacionar as representações algébrica e gráfica de funções.

Aluno: Se $\propto$ por 2 e β for 3… [Faz experiências na calculadora]. Quando o $\propto$ é -2 e β for -3… Quando o $\propto$ é -2, e β é 3. [Experimenta] Sim, dá. A interseção com os yy é outra vez o produto dos zeros. É $\propto$ vezes β. [Escreve]

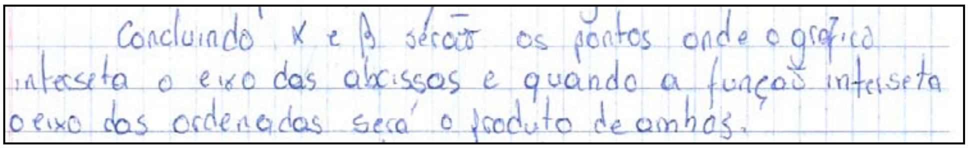
O aluno identifica claramente quais os valores que poderiam alterar o comportamento gráfico da família de funções dada, aproveitando todos os testes que realiza para confirmar e justificar a conclusão a que chegou anteriormente.

Professora: Quais os valores que experimentaste?

Grupo II: Dei valores positivos e negativos… [Pensa] Mas também pode tomar o valor 2 para um zero e o outro 2. Se for zero um dos zeros, o produto é sempre zero. E a interseção com os yy fica zero [Confirma na calculadora].

Professora: E se o $\propto$ for igual a β?

Grupo IV: Aí há um zero duplo e confirma-se a interseção com os yy, se, por exemplo, $\propto$ e β forem 1, é 1.



Concluindo, α e β serão os pontos onde o gráfico intersseta o eixo das abcissas e quando a função intersseta o eixo das ordenadas será o produto de ambos.

Figura 40: Resposta de um grupo

Mais uma vez, as conjeturas que o grupo formula são significativas. Uma vez que o grupo já conhecia a identificação dos zeros das investigações realizadas na aula, neste caso, o aspeto mais interessante do seu raciocínio, está na identificação da interseção do gráfico com o eixo dos yy como sendo o produto dos zeros da função.

Posso concluir que de um modo geral na turma em análise, os alunos observaram regularidades, com facilidade, em casos particulares. Revelaram facilidade em generalizar as regularidades e em formular conjeturas. Além disso, definiram, com alguma facilidade, estratégias para testar as conjeturas e, com base nesses testes, validá-las. Revelaram-se capazes de generalizar as regularidades que encontraram e de justificar as conjeturas que formularam.

6.7. Tarefa de avaliação

Esta avaliação da aprendizagem visa determinar em que medida os objetivos pedagógicos, traçados inicialmente, foram atingidos por cada um dos participantes nesta investigação e também obter informações sobre o sucesso ou insucesso desta metodologia.

Para verificar se os alunos, individualmente, eram capazes de aplicar os conhecimentos e as competências adquiridas e recolher informação nos vários domínios da aprendizagem no final deste período de ensino e aprendizagem, foi feita uma tarefa de avaliação sobre as funções quadráticas. Os resultados desta tarefa, foram muito satisfatórios, houve apenas uma negativa. De um ponto de vista quantitativo, registou-se, uma melhoria significativa dos resultados. A média das classificações positivas habitualmente era de 70%, subiu para os 93,75%. A média das notas era de 12 valores passou para 14,5. O que demonstra que estas tarefas contribuíram para um reforço das aprendizagens e do trabalho autónomo.

6.8. Opinião dos alunos

Após a realização das tarefas de exploração e investigação foi proposto um questionário aos alunos, tendo como objetivo conhecer a opinião destes sobre as atividades desenvolvidas nas aulas de matemática e inquirir-lhes se estas os ajudaram no seu processo de aprendizagem.

A tarefa que mais gostaram de realizar foi, sem dúvida, a tarefa 4 (preferida por 70%), porque segundo os alunos era um problema que “combinava conhecimentos matemáticos com situações da vida real”. A que menos gostaram foi a 2 com 19% “porque era preciso fazer muitos gráficos e tirar muitas conclusões”. 60% dos alunos são de opinião de que nenhuma das tarefas lhe desagradou pois tiveram gosto em resolvê-las. As maiores dificuldades sentidas por alguns alunos, na realização das tarefas, foram a interpretação e a escolha do processo de resolução.

A calculadora ajudou-os a desenhar, compreender, analisar, tirar conclusões e confirmar resultados, porque com a calculadora é mais rápido concluir ou descobrir.

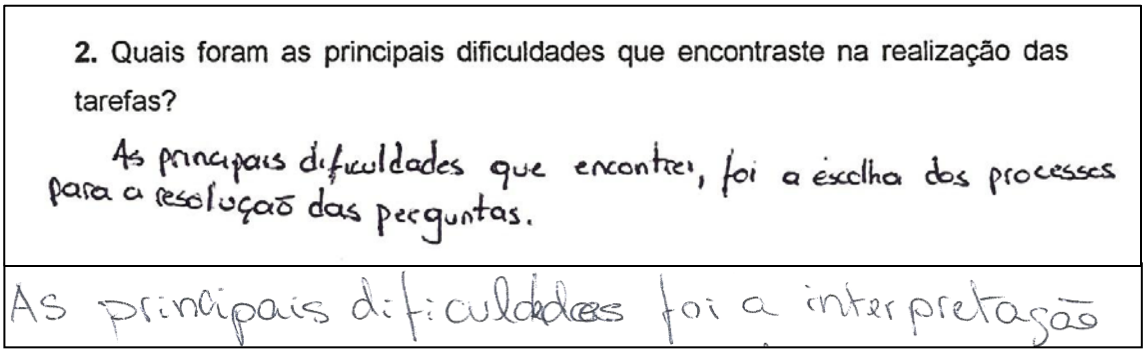
Quanto aos benefícios que tiraram dessa experiência, os alunos apontaram a aquisição e aprofundamento de conhecimentos, facilitação da aprendizagem e melhoria da investigação. O facto de trabalharem em grupo (razão apontada por 58% dos alunos), permitiu partilhar conhecimentos e confrontar ideias, discutir as dúvidas e tirar conclusões e, deste modo, realizar as tarefas. Nas figuras seguintes, apresento algumas das suas opiniões:

1. Das tarefas realizadas, qual gostaste mais de resolver? E qual a que menos te agradou? Porquê?

Gostei mais da actividade que envolvia a determinação do remate num jogo de futebol. Combinava conhecimentos matemáticos com uma situação da vida real, o que é sempre uma maneira de saber que estamos a estudar para um bom objectivo. Gostei menos da actividade que dizia respeito às transformações.

A tarefa que mais me agradou foi a número 4, relacionada com o remate pois abordou um caso real e concreto, demonstrando a utilidade das funções quadráticas no dia-a-dia. A que menos agradou foi a do estudo das funções quadráticas por requerer a construção de muitos gráficos e estar concebido de forma ~~abstracta~~ abstracta.

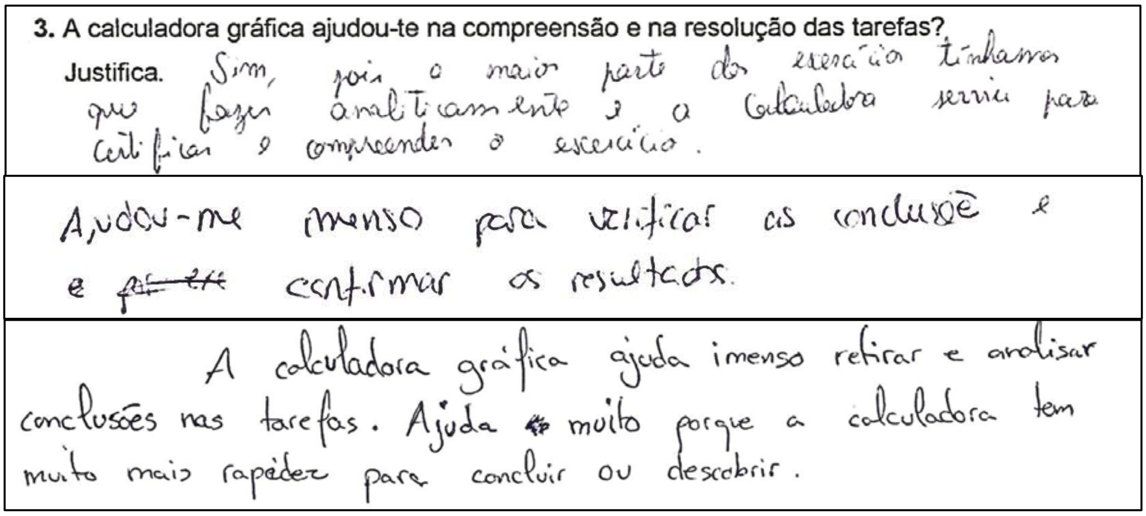
Figura 41: Resposta de dois alunos


2. Quais foram as principais dificuldades que encontraste na realização das tarefas?

As principais dificuldades que encontrei, foi a escolha dos processos para a resolução das perguntas.

As principais dificuldades foi a interpretação

Figura 42: Opinião de dois alunos

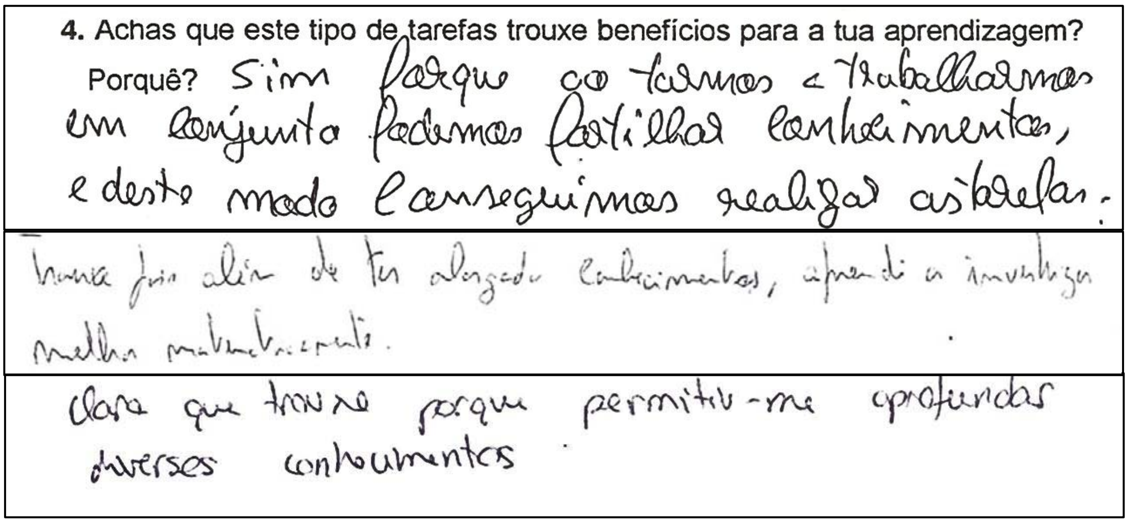

3. A calculadora gráfica ajudou-te na compreensão e na resolução das tarefas?

Justifica. Sim, pois a maior parte dos exercícios tínhamos que fazer analiticamente e a calculadora servia para certificar e compreender o exercício.

Ajudou-me imenso para verificar as conclusõe e e ~~[illegible]~~ confirmar os resultados.

A calculadora gráfica ajuda imenso retirar e analisar conclusões nas tarefas. Ajuda muito porque a calculadora tem muito mais rapidez para concluir ou descobrir.

Figura 43: Opinião de três alunos


4. Achas que este tipo de tarefas trouxe benefícios para a tua aprendizagem?

Porquê? Sim porque como formos e trabalharmos em conjunto podemos partilhar conhecimentos, e desta modo conseguimos realizar as tarefas.

Trouxe pois além de ter alargado conhecimentos, aprendi a investigar melhor matematicamente.

Claro que trouxe porque permitiu-me aprofundar diversos conhecimentos.

Figura 44: Opinião de três alunos

5. Consideras que este tipo de tarefas deverá ser implementado como prática habitual na sala de aula? Claro que sim, penso que estes este método implementado é excelente pois fez-me "crescer" o nível de conhecimento e de aprendizagem.

Sim. Acho que sim porque facilita muito a aprendizagem.

Acho que seria benefico para os alunos e professores na medida em que estimula o raciocínio e aumenta o aproveitamento dos alunos.

Figura 45: Opinião de três alunos

No final foi proposto aos alunos que, por iniciativa própria, apresentassem um desenho artístico, feito na calculadora, onde só usaram funções quadráticas. Eis alguns desses desenhos (Fig. 46).

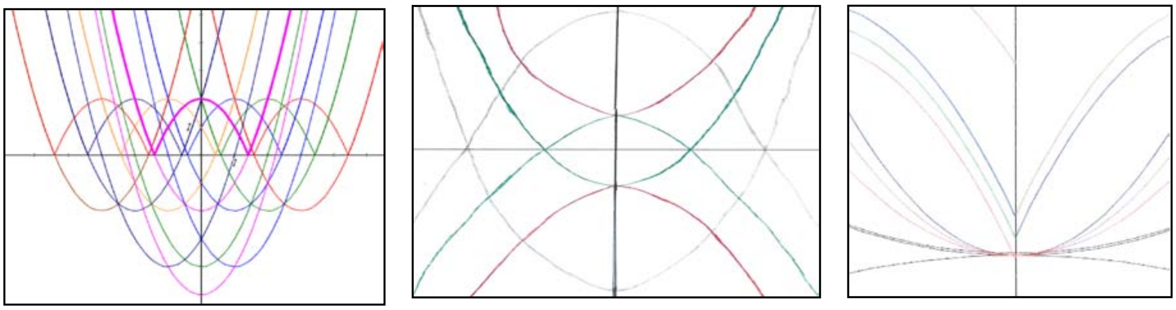


Figura 46: Desenhos artísticos apresentados por três alunos

7. Conclusão

Neste capítulo, procuro apresentar os resultados e conclusões mais relevantes de modo a procurar responder às questões da investigação. Começo por realizar uma breve síntese do estudo e, em seguida, apresento as principais conclusões decorrentes da unidade da aplicação das tarefas de natureza exploratória e investigativa. No final realizo uma reflexão de caráter pessoal como professora e investigadora.

7.1. Síntese do estudo

O ensino-aprendizagem exploratório é defendido como sendo um processo centrado no aluno e que lhe permite elaborar, testar e validar conjeturas construídas por si, vivenciando a verdadeira experiência matemática.

Nesta perspetiva, este estudo tem como objetivo analisar o modo como a resolução de tarefas de natureza exploratória e investigativa, envolvendo o uso da calculadora gráfica, contribui para a compreensão e aprendizagem das funções quadráticas de alunos do 10.º ano de escolaridade. Com o intuito de analisar este objetivo foram formuladas as seguintes questões de investigação:

1. Como interpretam, os alunos, as propriedades das funções em diferentes representações? Em particular como traduzem informação de uma representação para outra?
2. Quais as representações e processos utilizados pelos alunos na resolução de problemas, com funções quadráticas?
3. Formular e investigar conjeturas matemáticas.

Esta investigação centra-se na realização de uma unidade de ensino e compreende um conjunto de seis tarefas de caráter exploratório e investigativo. Cada tarefa foi realizada em pequenos grupos e aplicada em aulas de 90 minutos. Foi reservado, sempre, um período de tempo no final do trabalho desenvolvido pelos grupos para apresentação e discussão dos resultados na turma. A recolha de dados foi realizada com recurso à observação das aulas e os materiais produzidos pelos alunos durante a realização das tarefas de natureza exploratória e investigativa. No final da unidade, foi aplicado um questionário com o objetivo de conhecer a opinião dos alunos sobre as atividades desenvolvidas nas aulas de matemática.

7.2. Principais conclusões do estudo

Os resultados obtidos confirmam que os alunos desta turma se envolveram neste tipo de atividade, com o auxílio da calculadora, com entusiasmo, interesse e motivação e reconheceram-lhe potencialidades ao nível da aprendizagem da matemática e do desenvolvimento de capacidades.

Esta proposta pedagógica parece ter contribuído fortemente para um bom desempenho dos alunos, pois a contextualização, a valorização da intuição, a realização do trabalho em grupo e a discussão de resultados em grande grupo na aula, levaram os alunos a não ter receio de procurar relações, formular conjeturas, mudar de representações e alterar estratégias. Deixaram de identificar a regra a aplicar e passaram a procurar compreender o problema e encontrar regularidades em que se apoiar. Verificou-se que por ser um grupo de tarefas, e não uma tarefa isolada, se conseguiu alcançar o conjunto dos diversos objetivos de aprendizagem, sendo contudo de relevar o papel das novas tecnologias e da abordagem exploratória/investigativa.

Após a realização desta investigação os alunos revelaram aptidões para interpretar e compreender problemas com funções quadráticas, definir e aplicar estratégias adequadas para a sua resolução, estabelecendo a sua relação com os respetivos contextos. Conclui-se que têm preferência em usar processos analíticos na resolução de problemas, no cálculo de expressões e na resolução de inequações do 2.º grau.

No que se refere ao trabalho com as diferentes representações de funções, interpretaram de forma adequada a informação dada por funções representadas de forma gráfica e verbal e fizeram a conversão da forma verbal para a numérica e para a gráfica. Alguns alunos revelaram dificuldades na conversão da representação gráfica para a algébrica, o que vai ao encontro do que defende Kaput (1989) sobre as dificuldades dos alunos na aprendizagem da Álgebra.

Assim, conclui-se que a maioria dos alunos sabe identificar as propriedades de uma função na representação gráfica e que, geralmente, é capaz de converter a representação gráfica de uma função quadrática numa representação algébrica, revelando, portanto, que as competências adquiridas na aprendizagem da função quadrática estão interiorizadas, tal como defende Kieran (2007).

Estes resultados apoiam a tese de que devem ser dadas oportunidades aos alunos para ganharem experiência no uso de diversas representações matemáticas e para estabelecerem ligações entre elas. A realização das tarefas propostas, integradas no processo de ensino-aprendizagem das funções quadráticas, parece cumprir esse propósito.

Os alunos identificaram facilmente regularidades nos casos que lhe foram apresentados e formularam conjeturas. De igual forma, apresentaram facilidade em testar, validar ou refutar as conjeturas formuladas, justificando sempre o seu raciocínio. Para além desta facilidade, tentaram sempre procurar outros aspetos nos casos que exploraram, no sentido de realizarem novas descobertas com grande importância para a aprendizagem da matemática, indo ao encontro do que refere Pólya (1954).

Este estudo também parece ter contribuído para a evolução de alguns alunos. Na verdade, as tarefas de exploração de famílias de funções quadráticas, com recurso à calculadora gráfica, contribuíram para o desenvolvimento das capacidades de explorar, pois este instrumento facilitou a pesquisa, incentivando os alunos nas tarefas e permitiu a confrontação constante das várias formas de representar funções, o que parece ter promovido uma melhor compreensão das funções e das suas propriedades. Verificou- -se ainda que, na resolução destas tarefas, a calculadora gráfica assumiu, na atividade dos alunos, um papel importante na visualização de gráficos de funções, na validação de conjeturas, na confirmação de resultados obtidos por processos analíticos e na resolução de problemas. Deixou-se de ter como objetivo principal “como construir um gráfico” para se privilegiar a leitura e a interpretação dos gráficos, bem como as suas características, procurando estimular o uso de práticas investigativas.

O trabalho de grupo foi reconhecido, pelos alunos, como muito significativo para a aprendizagem e como tendo favorecido a realização das tarefas.

Também o facto de apresentarem os seus resultados à turma no final de cada tarefa, foi um aspeto positivo, “…as discussões realizadas com toda a turma exigem aos alunos a oportunidade de síntese, espírito crítico e a capacidade de resumir ideias ou conjeturas que sejam produto de trabalho individual ou de grupo” (NCTM 1991, p. 80). Estas discussões e reflexões, enriqueceram as estratégias dos alunos, permitindo-lhes refletir não só sobre o modo como resolveram o problema, mas também conhecer as estratégias utilizadas pelos colegas. Esta conclusão confirma o ponto de vista de Ponte (2005). A discussão em grande grupo constituiu um momento de reflexão e consequentemente de aprendizagem para o aluno. De um modo geral esta discussão ajuda a estabelecer um ambiente em que os alunos aprendem a trabalhar cooperativamente e, desse modo, ganham confiança na sua capacidade de desenvolver um trabalho não rotineiro. Estas reflexões parecem, portanto, ter contribuído para a clarificação do pensamento intuitivo e para a sua formalização e abstração. A apresentação por escrito da resolução das tarefas, bem como as apresentações orais e discussões parecem ter contribuído para que passassem a refletir nas suas respostas aos problemas, bem como na justificação das suas estratégias. Fomentaram, assim, o desenvolvimento das capacidades de comunicar matematicamente e de raciocinar justificando os processos usados. Confirmamos, ainda, a afirmação do NCTM (1991), de que "A capacidade de ler, escrever, ouvir, pensar criativamente e comunicar acerca dos problemas, desenvolverá e aprofundará a compreensão dos alunos acerca da matemática" (p. 93).

7.3. Reflexão de caráter pessoal

Neste estudo, fez-se prova da importância da experimentação, do fazer matemática por parte do aluno e está de acordo com Abrantes quando diz que "É através de atividades matemáticas intencionais, das experiências que vive, que um indivíduo consolida, descobre ou inventa conhecimento" (Abrantes, 1999. p.3).

O desenvolvimento de investigações matemáticas em sala de aula representa uma valorização de aprendizagem tanto para o aluno quanto para o professor. Para o aluno, porque este passa a constituir-se um sujeito ativo de seu próprio conhecimento, produzindo e criando conceitos matemáticos. Para o professor, porque encontra uma forma significativa de ensinar, compreender, trabalhar e estabelecer relação com a matemática, levando os alunos a interessarem-se mais pelas aulas de matemática.

Penso que este tipo de tarefas de investigação, devido às suas características, requer uma metodologia de trabalho em grupo. A troca de experiências e de ideias aliada a uma saudável competitividade constituem não só aspetos de motivação, como também podem ser condutores de uma aprendizagem decorrente de interações entre os alunos.

O estudo que realizei permitiu-me refletir sobre o desenvolvimento dos alunos durante a realização das tarefas, os procedimentos que utilizam durante a realização das mesmas e as atitudes que demonstram ter. Permitiu-me ainda refletir sobre a minha prática profissional. Uma das reflexões que faço é sobre o trabalho mecanizado que vem sendo realizado em muitas aulas de matemática, que inibe, por certo, as atitudes positivas dos alunos com relação a essa área do conhecimento e o desenvolvimento do pensamento dos alunos.

Pelo facto de esta experiência ter sido, para mim, bastante gratificante, como professora e investigadora, espero sinceramente que este estudo contribua, como um exemplo de uma experiência motivadora da aplicação da investigação matemática em sala de aula, para que colegas que futuramente tenham contacto com este documento, tomem iniciativas do género. Espero que sirva também de incentivo para que outros professores experimentem proporcionar aos seus alunos atividades de exploração e investigação, contribuindo com as suas experiências e reflexões para um melhor conhecimento das potencialidades educativas deste tipo de atividade matemática.

Tendo em conta a metodologia utilizada nesta investigação, os resultados não podem ser generalizáveis. No entanto, refletindo no trabalho realizado, considero que esta investigação se revelou vantajosa para todos os intervenientes e julgo que não deixa de ser uma descrição científica de uma experiência que ocorreu com alunos numa escola.

O facto de ser simultaneamente professora e investigadora traduziu-se num momento importante de reflexão e de aprendizagem, pois planifiquei e ensinei, mas também analisei e refleti sobre as minhas aulas.

Como sugestão para possíveis estudos, seria interessante desenvolver estratégias análogas para o capítulo das funções racionais ou das sucessões, através do recurso a tarefas de natureza exploratória, investigativa e de resolução de problemas, em particular o recurso a diversas representações matemáticas ou das suas conexões e a importância destas na aprendizagem das progressões aritméticas e geométricas, bem como dos limites de sucessões.

Deixo ainda a sugestão para a realização do desenvolvimento de um estudo realizado por vários professores, onde se proporia, ao longo das atividades na sala de aula, um leque diversificado de problemas. Esta experiência seria implementada em várias escolas no mesmo ano de escolaridade, far-se-ia uma análise de várias resoluções que evidenciassem o estabelecimento de diferentes tipos de conexões, com assuntos ligados aos conteúdos estudados no Ensino Básico e Ensino Secundário.

Apesar do número de anos de exercício na docência, procurei sempre inovar em metodologias no processo de ensino-aprendizagem da matemática, nomeadamente porque reconheço a importância fulcral da inovação na aprendizagem dos alunos e na minha contínua formação enquanto docente.

8.Referências bibliográficas

Abrantes, P. (coord), Precatado, A.; Lopes, A. V.; Baeta, A.; Ferreira, E.; et al. (1998). *Diagnóstico e Recomendações para o Ensino e Aprendizagem da Matemática*. Relatório preliminar. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Abrantes, P., Leal, L. C. e Ponte, J. P. (1996). *Investigar para Aprender Matemática*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática e Projeto Matemática Para Todos.

Abrantes, P., Veloso, E., Porfírio, J. e P Silva, A.(1999). O currículo de matemática e as atividades de investigação. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca, & L. Brunheira (Eds.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 69-85). Lisboa: Projeto MPT e APM.

Abrantes, P., Serrazina, L. & Oliveira, I. (1999). *A matemática na educação básica*. Lisboa: Ministério da Educação – Departamento da Educação Básica.

Associação de Professores de Matemática (1988). *Renovação do currículo de Matemática*. Lisboa: APM.

Associação de Professores de Matemática (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Tradução do original Principles and Standards for School Mathematics, publicado por National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) em 2000. Edição portuguesa da Associação de Professores de Matemática: APM.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em Educação.* Porto: Porto Editora.

Brocardo, J. (2001). *As investigações na aula de matemática: um projeto curricular no 8.º ano*. Lisboa: (Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM. Consultado a 18/12/2011. Disponível em: http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/3101/1/ulsd041324_Joana_Brocardo.pdf

Matos, J. F., Carreira, S. P., Santos, M., Amorim, I. (1994). *Ferramentas Computacionais na Modelação Matemática.* Lisboa: Projeto Modelação no Ensino da Matemática, Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Carreira, S. (1992). *A aprendizagem da trigonometria num contexto de aplicações e modelação com recurso à folha de cálculo*. (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Ministério da Educação (2001). Matemática A – 10º ano. Cursos Gerais de Ciências Naturais, Ciências e Tecnologias, Ciências Socioeconómicas. Lisboa: ME – DES.

Ernest, P. (1996). Investigações, resolução de problemas e pedagogia. In P. Abrantes, L. Cunha Leal e J. P. Ponte (Orgs.), *Investigar para aprender matemática*: Textos selecionados (pp. 25-47). Lisboa: Projeto Matemática Para Todos e APM.

Fey, J. (1991). Tecnologia e educação matemática: Uma revisão de desenvolvimentos recentes e problemas importantes. In J. P. Ponte (Org.), *O computador na Educação Matemática*. Série Cadernos de Educação Matemática, n.º 2, pp.45-79.Lisboa: APM.

Fonseca, H., Brunheira , L., Ponte, J. P. As atividades de investigação, o professor e a aula de Matemática. *Atas do ProfMat 99*. Lisboa: APM, 1999.

Frobisher, L. (1994). Problems, investigations and an investigative approach. In A. Orton e G. Wain (Eds.), *Issues in teaching mathematics* (pp: 150-173). London: Cassel.

Kaput, J. J. (1989). Linking representations in the symbol systems of algebra. In S. Wagner & C. Kieran (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra* (pp. 167-194). Reston, VA: NCTM.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. In F. Lester (Ed.), Second handbook of mathematics teaching and *learning* (pp. 707-762). Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Matos, J. F., Carreira, S. Santos, M., Amorim, I. (1994). *Ferramentas computacionais na modelação matemática.* Lisboa: Projeto Modelação no Ensino da Matemática, Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar*. Lisboa: APM (publicado originalmente em inglês em 2000).

NCTM. (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar*. Lisboa: APM e IIE. (publicado originalmente em inglês em 1989).

NCTM. (1994). *Normas profissionais para o ensino da Matemática*. Lisboa: APM e IIE. (publicado originalmente em inglês em 1991).

NCTM. (2000*). Principles and standards for school Mathematics*. Reston: NCTM.

Merrian, S. B. (1988). *Case study research in education*. S. Francisco, CA: Jossey-Bass

Oliveira. H. (1998). *Atividades de investigação na aula de Matemática*: aspetos da prática do professor. (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Oliveira, H.; Segurado, M. I.; Ponte, J. P.(1996). Explorar, investigar e discutir na aula de matemática. In A. Roque & M. J. Lagarto (Eds.), *Atas do ProfMat 98* (pp. 207-213). Lisboa: APM.

Oliveira, H., Ponte, J. P., Cunha, M. H., & Segurado, M. I. (1997). Mathematical investigations in the classroom: A collaborative project. In V. Zack, J. Mousley & C. Breen (Eds.), *Developing practice: Teachers' inquiry and educational change* (pp. 135-142). Geelong, Australia: Centre for Studies in Mathematics, Science and Environmental Education.

Pólya, G. (1945). *How to solve it*: *A new aspect of the mathematical method*. Princeton: Princeton University Press.

Pólya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning: Induction and analogy in mathematics* (Vol. 1). Princeton, NJ: Princeton University Press.

Pólya, G. (1977). *A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro. Editora Interciência.

Pólya, G. (2003). *Como resolver problemas: Um aspeto novo do método matemático*. Lisboa: Gradiva (publicado originalmente em inglês em 1945).

Ponte J. P., Brocardo J., & Oliveira H. (2003). *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica.

Ponte, J. P. (1990). *Novas tecnologias da informação – uma oportunidade de renovação educativa*? Lisboa: Universidade de Lisboa.

Ponte, J. P. (1995). Novas tecnologias na aula de Matemática. *Educação e Matemática 34*, 2-7. Lisboa: APM

Ponte, J. P. (1997). *As Novas Tecnologias e a Educação.* Lisboa: Texto Editora.

Ponte, J. P. (2002). Investigar a nossa própria prática. In GTI (Org.), *Refletir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 5-28). Lisboa: APM. Consultado a 18/08/2012. Disponível em: http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/02-Ponte%20(GTI).pdf

Ponte, J.P. (2003). *Investigações matemáticas em Portugal*. *Investigar em educação, 2*, 93-169,2003. Consultado a 07/05/2012. Disponível em: http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/03-Ponte(Rev-SPCE).pdf

Ponte, J.P. (2003) Investigar, ensinar e aprender. *Atas do ProfMat 2003*. Lisboa: APM. Consultado a 07/05/2012. Disponível em: http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/03-Ponte(Profmat).pdf

Ponte, J. P. (2004). Pesquisar para compreender e transformar a nossa própria prática. *Educação em Revista*, *24*, 37-66. Consultado a 07/05/2012. Disponível em: http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/3983/1/04-Ponte_ArtigoER-Curitiba.pdf

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM. Consultado a 07/05/2012. Disponível em: http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/fdm/textos/Ponte%2005_GTI-tarefas-gestao2.pdf

Ponte, J. P., & Canavarro, P. (1997). *Matemática e novas tecnologias*. Lisboa: Universidade Aberta.

Ponte, J. P., Oliveira, H., Brunheira, L., Varandas, J. e Ferreira, C. (1999). *Investigando as Aulas de Investigações Matemáticas. In Investigações matemáticas na aula e no currículo*, (pp.133-151). Lisboa: Projeto MPT e APM.

Ponte, J. P., Oliveira, H., Cunha H., & Segurado, I. (1998). *Histórias de investigações matemáticas*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Ponte, J. P.; Brocardo, J.; Oliveira, H. (2009). *Investigações Matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica.

Ponte, J. P.; Brocardo, J.; Oliveira, H. (2006). *Investigações Matemáticas na Sala de Aula*. 1ª edição; Belo Horizonte: Autêntica.

Ponte, J. P.; et al. (1998) O trabalho do professor numa aula de investigação matemática. *Quadrante*,*v.7* n. *2*, p. 41-70.

Ponte, J. P. (2010); Explorar e investigar em matemática: Uma atividade no ensino e na aprendizagem. *UNIÓN*: *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *n. 21*, p. 13-30, marzo. 2010. Consultado a 14/08/2012. Disponível em: http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/3043/1/10-Ponte-Union_21.pdf

Vala, J. (1986). A análise de conteúdo. In A. S. Silva & J. M. Pinto (Orgs.), *Metodologia das ciências sociais*. Porto: Afrontamento.

Teixeira, P., Precatado, A., Albuquerque, C., Antunes, C., & Nápoles, S. (1997). *Funções - 10º ano de escolaridade*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário. Consultado a 12/08/2011. Disponível em: http://area.dgidc.min-edu.pt/mat-no-sec/brochuras.htm#funcoes_10

Anexos

ANEXO 1

Tarefa 1- Triângulos inscritos num triângulo

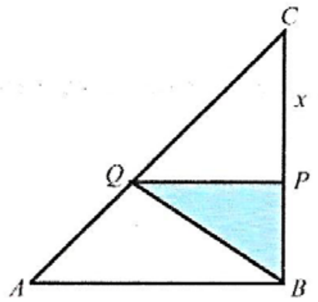
Na figura 1, está representado um triângulo retângulo isósceles $[ABC]$

Tem-se $\overline{AB} = \overline{BC} = 8$.

Um ponto P desloca-se sobre o segmento $[CB]$, nunca coincidindo com C, nem com o ponto B.

Um ponto Q desloca-se sobre o segmento $[AC]$, acompanhando o movimento do P, de forma que $[QP]$ seja sempre paralelo a $[AB]$.

x representa a distância entre os pontos P e C, isto é, $x = \overline{PC}$.



1.1. Que valores pode tomar x?

1.2. Complete a seguinte tabela, que regista os valores para o deslocamento x e as áreas $f(x)$ dos triângulos $[PBQ]$ correspondentes.

x	0,5	1	2	3,2	4	6,3	7,1
$f(x)$			6				3,195

1.3. Utilize a calculadora para obteres uma representação gráfica da função e um modelo analítico que se ajuste à situação apresentada.

1.4. Por processos exclusivamente analíticos, determine a expressão algébrica da função que relaciona a área do triângulo obtido com o deslocamento x e compare-a com a representação obtida pela calculadora.

1.5. Como classifica, quanto aos lados, o triângulo $[PBQ]$ que tem maior área? Qual é essa área?

1.6. Determine os valores de x para os quais a área do triângulo é inferior a $\frac{15}{2}$.

Adaptado de "Séries de problemas de Matemática A n.º5 – GAVE- Março 2010"

ANEXO 2

Tarefa 2 – Funções Quadráticas: Uma abordagem geométrica

Com o auxílio da calculadora gráfica :

1.1. Investigue a influência do **parâmetro** $\boldsymbol{a}$ em funções do tipo $y = ax^2, a \neq 0$ atribuindo a seu gosto, valores ao parâmetro a

Analisando os gráficos obtidos, complete o quadro seguinte:

$y = ax^2$	Sentido da concavidade	Coordenadas do vértice	Eixo de simetria	Extremos
$a > 0$				
$a < 0$				

Tendo em conta o que observou, registe as observações que achar pertinentes.
No caso geral como se relaciona o gráfico da função $y = ax^2$ com o de $y = x^2$?
Como é que o parâmetro a influencia o gráfico da função?

1.2. Faça um estudo semelhante para as funções do tipo:

$y = ax^2 + k$; $y = a(x+h)^2$ e $y = a(x+h)^2 + k$

Explicite os efeitos dos parâmetros a, h e k relativamente aos gráficos das funções e identifique as coordenadas do vértice da parábola e a equação do eixo de simetria e os extremos.
Elabore um relatório com o registo dos gráficos e as conclusões a que chegou, e explique como pode obter cada um deles à custa do gráfico da função $y = x^2$.

1.3. Tendo em conta o que aprendeu, descreva como pode obter o gráfico de cada uma das funções a partir do gráfico de $y = x^2$:

$y = -7x^2$ $\quad y = (x+3)^2$ $\quad y = 2(x-4)^2 + 7$

1.4. A função $h(t) = -16(t-4)^2 + 259$ modela o voo de um modelo de foguetes onde $h(t)$ é a altura do foguete em pés e t é o tempo, em segundos, decorrido desde o lançamento. Qual é a altura máxima do foguete? Em quanto tempo atingiu a altura máxima? Em que é que este problema se relaciona com as pesquisas anteriores?

ANEXO 3

Tarefa 3- Exploração de funções quadráticas.

1.1. Represente graficamente, usando calculadora, a função definida por

$$y = (x+2)(x-1).$$

1.2. Por observação do gráfico qual o significado dos números -2 e 1, relativamente ao gráfico?

1.3. Investigue os gráficos das funções da família $y = (x - \propto)(x-1)$.

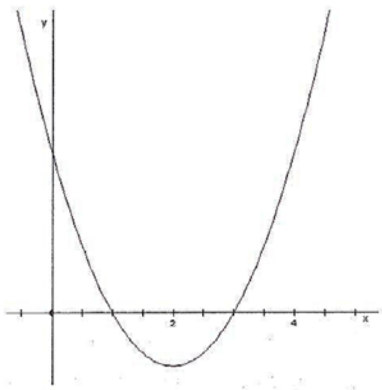
1.4. Qual o significado de $\propto$ relativamente ao gráfico?

1.5. Investigue agora os gráficos das funções da família $y = (x - \propto)(x - \beta)$. Atribue vários valores, positivos, negativos e zero a α e β; experimente também o caso em que α = β.

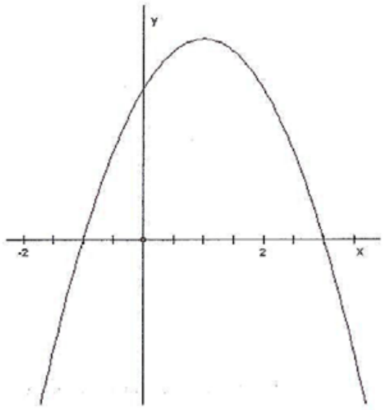
1.6. Qual é o significado de α e β relativamente ao gráfico?

1.7. Encontre expressões que definam as funções cujas representações gráficas são as seguintes: Verifique as expressões que encontrou com a calculadora gráfica.

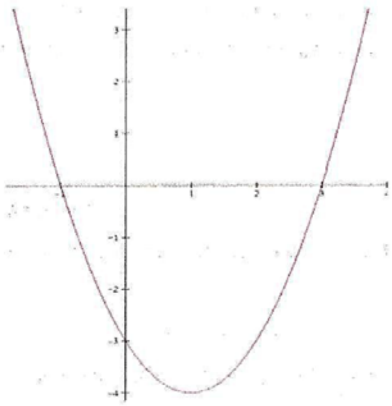
(A)



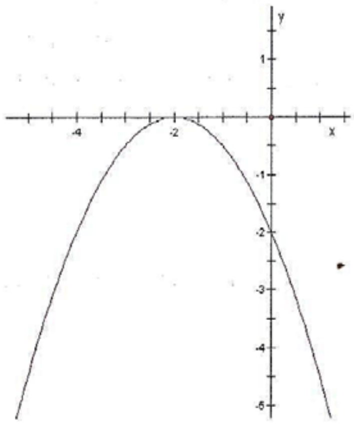
(B)



(C)



(D)



1.8. Escreve uma expressão algébrica de uma função quadrática que não tenha zeros.
Esboçe o gráfico recorrendo à calculadora gráfica e confirme que não tem zeros.

Adaptado de "Funções 10.º ano, DES"

ANEXO 4

Tarefa 4

Num jogo de futebol, vai ser cobrado um livre, a 25 metros da baliza (ver figura 1).

A barreira está à distância regulamentar de 9,15 metros da bola.

O plano da trajetória da bola é perpendicular à linha de golo.

A bola pode não passar a barreira ou pode passar por cima dela. Se passar por cima da barreira, a bola segue na direção da baliza, fora do alcance do guarda-redes.

Admita que só pode acontecer uma das quatro situações seguintes:

- a bola não passa a barreira;
- a bola sai por cima da barra da baliza;
- a bola bate na barra da baliza;
- a bola entra na baliza.

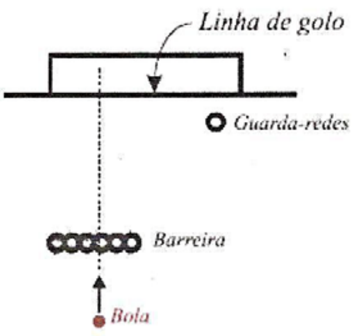


Figura 1

Na barreira, o jogador mais alto tem 1,95 metros de altura.

A barra da baliza está a 2,44 metros do chão.

Admita que, depois de rematada, a bola descreve um arco, de tal modo que a sua altura, relativamente ao solo, medida em metros, é dada por

$$h(x) = 0{,}32x - 0{,}01x^2$$

sendo x a distância, em metros, da projeção da bola no solo ao local onde ela é rematada (ver figura 2).

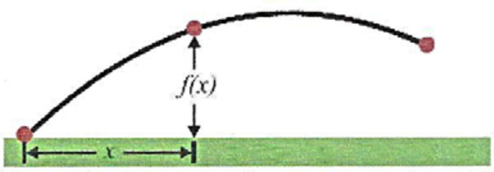


Figura 2

1.1. É golo? Justifique a sua resposta.

1.2. Qual é a altura máxima atingida pela bola?

1.3. A que distância da linha de golo está a bola, quando atinge a altura máxima?
Apresente o resultado em metros, arredondado às décimas.

"Séries de problemas de Matemática A n.º8 – GAVE- Março 2010"

ANEXO 5

Tarefa 5

Lançamento de um projétil

Um projétil é lançado na vertical de uma altura de $32\,m$, com uma velocidade de $50\,m/s$. A altura h(t), em metros, acima do solo, t segundos após o lançamento, é dada por $h(t) = -4{,}9t^2 + 50t + 32$ e a velocidade v em m/s em cada instante é dada por $v(t) = -9{,}8t + 50$.

1- Usando as potencialidades da calculadora gráfica, preencha a tabela seguinte:

Tempo (s)	0	1	2	3	4	5	6	7
Altura(m)								
Velocidade (m/s)								

2- No mesmo referencial, represente graficamente as duas funções recorrendo à calculadora .

3- Qual é a altura máxima que o projétil atinge? Em que instante? Qual é a velocidade nesse momento? Que valores toma a velocidade antes desse momento? E depois?

4- Qual é o domínio de cada uma das funções? E o contradomínio?

5- Qual é a velocidade do projétil no momento em que chega ao solo? Como a determina?

6- O gráfico da função que relaciona o tempo com a altura do projétil é um gráfico simétrico. Assinale o eixo de simetria. Que explicação tem essa simetria no contexto da situação apresentada?

Adaptado de “Funções 10.º ano, DES”

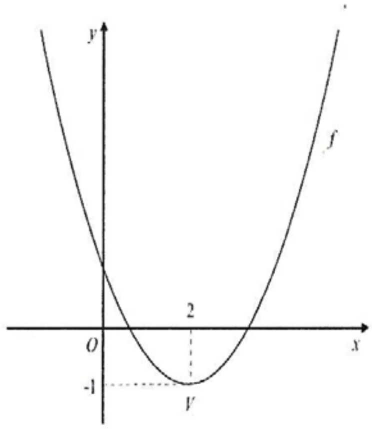
ANEXO 6

Tarefa 6- Transformações de funções

1. Na figura 1, está representada, num referencial $o.n.\ x0y$, parte da parábola que é o gráfico de uma função f .

Sabe-se que:

- A parábola interseta o eixo $0y$ no ponto de coordenadas $(0,2)$
- O ponto V, vértice da parábola, tem coordenadas $(2,-1)$



Sejam g, h, i e j as funções, de domínio $\mathbb{R}$, definidas, respetivamente, por:

$g(x) = f(-x)$

$h(x) = f(x) + 3$

$i(x) = f(x-1)$

$j(x) = |f(x)|$

1.1. Esboça os gráficos das funções g, h, i e j .

Compara-os com a representação gráfica de f.

Indica:

1.2. Os zeros de g.

1.3. O conjunto solução de $h(x) \leq 0$.

1.4. O contradomínio das funções f, g, h, i e j.

1.5. Para que valores de $h \in \mathbb{R}$, a função $y = f(x+h)$ tem zeros exclusivamente negativos? Justifica a tua resposta.

2. Indica funções em que o gráfico de uma função t seja igual ao da função definida por $t(-x)$.

Justifica a tua resposta.

3. Considera uma função p de domínio $\mathbb{R}$ e de contradomínio $[a, b[$, com a e $b \in \mathbb{R}$.

Indica, justificando, o contradomínio das seguintes funções:

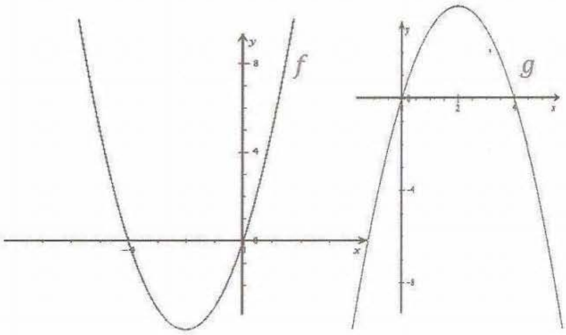
3.1. $\mathrm{p}(\mathrm{x}) - 3$.

3.2. $|p(x)|$, sabendo que $a < 0$ e que $b < 0$.

ANEXO 7

Tarefa de avaliação sobre a função quadrática

1. Considere a representação gráfica das funções f e g. Qual das afirmações seguintes pode ser verdadeira?



(A) $f(x) = x(x+4)$ e $g(x) = x(x-4)$

(B) $f(x) = x(x+4)$ e $g(x) = x(4-x)$

(C) $f(x) = x(4-x)$ e $g(x) = x^2 - 4$

(D) $f(x) = x^2 - 4$ e $g(x) = x(4-x)$

2. Considere as funções reais de variável real definidas por $f(x) = x^2 + k$ e $g(x) = x + 2$.
O conjunto dos valores de k para os quais os gráficos de f e g se intersetam é:

(A) $[0,2]$ (B) $\left]-\infty, \frac{9}{4}\right]$ (C) $]-\infty, 2]$ (D) $[0, +\infty[$

3. O conjunto de valores de k para os quais a função g definida por $g(x) = -2x^2 + 8x + k$, não tenha zeros reais é:

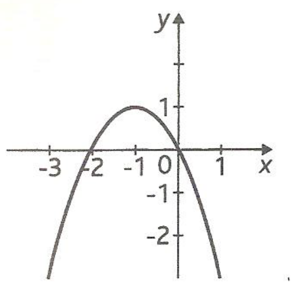
(A) $\mathbb{R} \setminus \{-8\}$ (B) $[-8,0]$ (C) $]-\infty, -8[$ (D) $]-8, +\infty[$

4. Relativamente à função *f*, definida por $f(x) = a(x+b)^2 + c \quad (a,b,c \in IR,\ a \neq 0)$, sabe-se que é tem zeros -1 e 3 e tem contradomínio $[-1,+\infty[$.
Então, podemos afirmar que:

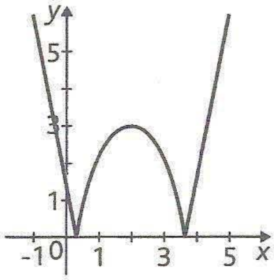
(A) $a > 0$, $b = -1$ e $c = 2$ (B) $a > 0$, $b = 2$ e $c = -1$

(C) $a < 0$, $b = 1$ e $c = -2$ (D) $a > 0$, $b = -1$ e $c = -1$

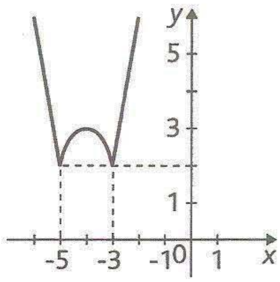
5. Considere a função real de variável real f representada graficamente na figura ao lado.
Qual dos gráficos seguintes pode representar a função g, definida por $g(x) = |f(x-3)| + 2$?



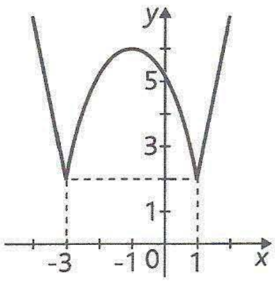
(A)



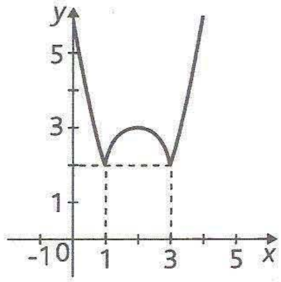
(B)



(C)



(D)



6. Na figuras 1 e na figura 2, estão representações gráficas de duas funções quadráticas, f e g, em referenciais o.n. cujos eixos se ocultaram. A unidade, em qualquer dos referenciais, é o lado da quadrícula.

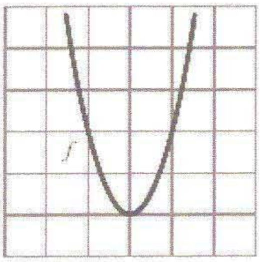


Figura 1

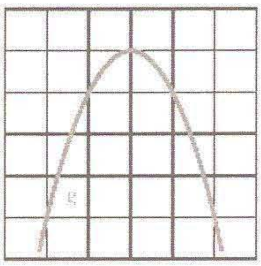


Figura 2

6.1. Desenhe o referencial na figura 1, sabendo que a reta de equação $x = 2$ é eixo de simetria da parábola e que o contradomínio da função é $[-1, +\infty[$.

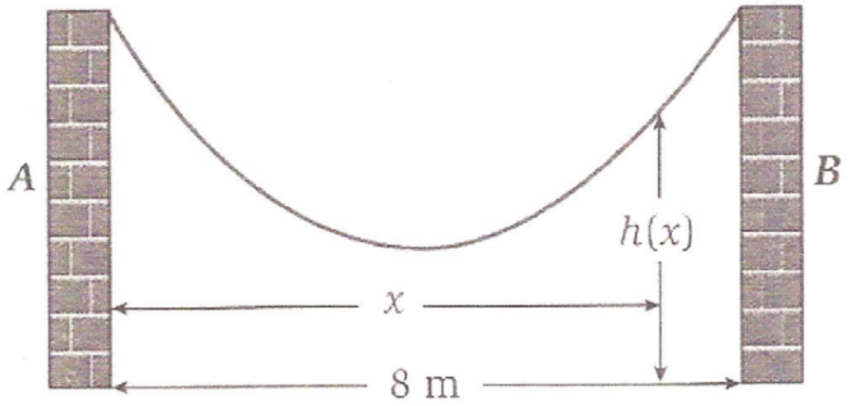
6.2. Desenhe o referencial na figura 2, sabendo que:

$$g(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \epsilon [0,4]$$

6.3. Defina analiticamente as funções f e g, considerando os referenciais que desenhou.

7. O Diogo Participou num campeonato de Skate numa pista parabólica. A rampa onde se realizou o campeonato foi construída entre dois postes A e B, a uma distância de 8 metros um do outro, como mostra a figura. A função h representa a altura dessa pista de skate, relativamente ao chão, em função do seu comprimento lateral x, $0 \leq x \leq 8$.

Altura da pista de skate: $h(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 5$



7. Determine:

7.1. A que altura do chão se encontra o Diogo no início do salto;

7.2. A altura máxima e mínima da pista;

7.3. A altura do ponto da pista que dista 1,2 m da parede B;

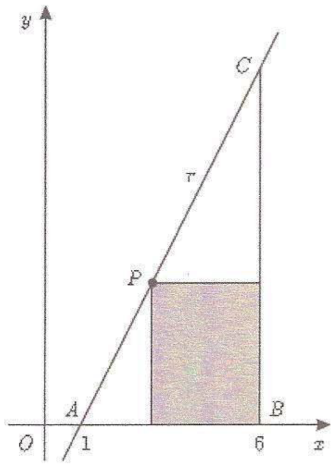
7.4. $h(2)$ e interprete a solução no contexto da situação descrita;

7.5. A distância entre os pontos da pista que estão a 2 metros de altura;

7.6. O conjunto solução da inequação $h(x) < 3{,}25$, usando métodos analíticos, e interprete o resultado obtido no contexto da situação descrita.

8. Na Figura, está representada, em referencial $o.n.xOy$, a reta *r*, definida pela equação $y = 2x - 2$

Tal como a figura sugere, *A* e *B* são os pontos de coordenadas $(1, 0)$ e $(6, 0)$, respetivamente, e *C* é o ponto da reta *r* de abcissa 6



Considere que um ponto *P* se desloca ao longo do segmento de reta $[AC]$, nunca coincidindo com o ponto *A*, nem com o ponto *C*

A cada posição do ponto *P* corresponde um retângulo em que uma das diagonais é o segmento [*BP*] e em que um dos lados está contido no eixo Ox

Seja *x* a abcissa do ponto *P* ($x \in]1,6[$)

8.1. Mostre que a área do retângulo é dada, em função de *x*, por

$$S(x) = -2x^2 + 14x - 12$$

8.2. Determine os valores de *x* para os quais a área do retângulo é inferior a 8

ANEXO 8

Questionário proposto aos alunos após a realização das tarefas de exploração e investigação

Questionário

O questionário que se segue tem por objetivo conhecer a tua opinião sobre as atividades propostas, nestas últimas semanas, nas aulas de Matemática.

Nas tuas respostas, procura ser tão completo e tão claro quanto possível.

1. Das tarefas realizadas, qual gostaste mais de resolver? E qual a que menos te agradou? Porquê?

2. Quais foram as principais dificuldades que encontraste na realização das tarefas?

3. A calculadora gráfica ajudou-te na compreensão e na resolução das tarefas? Justifica.

4. Achas que este tipo de tarefas trouxe benefícios para a tua aprendizagem? Porquê?

5. Consideras que este tipo de tarefas deverá ser implementado como prática habitual na sala de aula?

Obrigada pela tua colaboração

ANEXO 9

Autorização do Encarregado de Educação

Exmo. Encarregado de Educação
do aluno:__________________________________, nº __ do 10.º ano, turma 6

No âmbito do Mestrado em ensino da Matemática da Universidade da Madeira, vou desenvolver com os alunos desta turma, nas aulas de Matemática, uma investigação para analisar o modo como a resolução de tarefas de natureza exploratória e investigativa, envolvendo o uso da calculadora gráfica, contribui para a compreensão e aprendizagem das funções quadráticas de alunos do 10.º ano de escolaridade.

Para tal, solicito a sua autorização para recolher alguns dados do seu educando, no âmbito da resolução de tarefas matemáticas, que permita perceber a forma como ele viveu as aulas e o modo como pensou e aprendeu sobre as funções quadráticas, nas suas diferentes representações. Informo que os dados recolhidos para a investigação terão um carácter confidencial, servindo apenas como elementos da parte empírica da dissertação, pelo que não serão difundidos.

Note-se que analisar o que os alunos têm a dizer sobre este tipo de aulas é fundamental para divulgar esta experiência e, assim, contribuir para uma melhoria do ensino da Matemática.

Com os melhores cumprimentos,

____

(Maria Gorete Ferreira de Freitas, a professora de Matemática)

Declaro que autorizo a recolha de dados, referente às tarefas realizadas pelo meu educando _______________________________________, nas aulas de Matemática, com a professora Gorete Freitas, no âmbito da sua dissertação de Mestrado.

27 / 02 / 2012

______________________________ (Encarregado de Educação)

ANEXO 10

Autorização do Conselho Executivo

Exma. Sra. Presidente do Conselho Executivo da Escola Secundária Francisco Franco

Informo que pretendo desenvolver com os alunos do 10.º ano, turma 6, nas aulas de Matemática, uma investigação para analisar o modo como a resolução de tarefas de natureza exploratória e investigativa, envolvendo o uso da calculadora gráfica, contribui para a compreensão e aprendizagem das funções quadráticas.

Neste sentido, solicito autorização a V. Exa. para recolher alguns dados dos alunos da turma, no âmbito da resolução de tarefas matemáticas, de modo a poder perceber a forma como eles viverão as aulas e o modo como pensarão e aprenderão sobre as funções quadráticas, nas suas diferentes representações.

Informo que esta investigação não interfere no normal funcionamento das atividades letivas. Informo também que já obtive autorização dos encarregados de educação para a recolha dos dados.

Note-se que, para divulgar esta experiência e, assim, contribuir para uma melhoria do ensino da Matemática é fundamental analisar a forma como os alunos pensam e aprendem.

Com os melhores cumprimentos.

Funchal, 5 de março de 2012

____

(Gorete Freitas, a professora de Matemática)