

51
Gon com
T/M

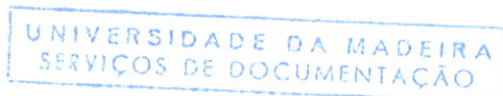
Departamento de Matemática



Universidade da Madeira

TESE DE MESTRADO:

“Como resolver problemas de Matemática”



Orientador: Prof. Doutor Jorge Nuno Silva

Mestranda: Ida Maria Faria de Lira Gonçalves

2001

“Todo o problema novo, com interesse, tem uma ideia-chave, um abre-te Sésamo que ilumina o espírito de súbita alegria: a clássica ideia luminosa que faz gritar “Eureka!”. Ora esse é o momento áureo de alegria que o aluno precisa de conhecer alguma vez: só por essa porta se entra no segredo da Matemática, se descobrem os seus tesouros, se apreendem as suas recônditas harmonias.”

(José Sebastião e Silva, 1965)

ÍNDICE

Introdução.....	iii
Agradecimentos.....	vi
1- Métodos de resolução de problemas.....	1
1.1-Contradição.....	1
1.2-Indução Matemática.....	5
1.3-Problema mais simples/Caso especial.....	10
1.4-Relacionar problemas.....	18
1.5-Analisar um problema em subproblemas.....	25
1.6-Voltar para trás.....	32
2- Tipos de problemas.....	36
2.1- Problemas de lógica.....	36
2.2- Problemas de contagem.....	44
2.3- Problemas de probabilidades.....	58
3- Matemática Recreativa.....	73
3.1- Problemas.....	73
3.2- Jogos.....	97
4- Resolução de problemas na sala de aula.....	107
Bibliografia.....	122

INTRODUÇÃO

A resolução de problemas sempre foi e continua a ser uma actividade do ser humano. Actualmente, com o ritmo acelerado de mudança da sociedade apela-se ainda mais à capacidade de resolução de problemas dos cidadãos. Uma larga componente da actividade diária envolve resolução de problemas: Qual é o melhor método de financiamento para o novo carro? Qual é a melhor maneira de poupar dinheiro? Como escolher um parceiro?

A resolução de problemas de matemática nunca saiu bem à primeira a ninguém, nem mesmo aos grandes génios. A melhor maneira para aprender a resolver problemas de matemática é resolver problemas de matemática! Ninguém pode aprender a nadar, tocar piano ou resolver problemas lendo um livro sobre isso. Para desenvolver a capacidade de resolver problemas é preciso muita prática e muito trabalho árduo. Se alguém resolve problemas com muita facilidade é porque já gastou muitas horas e muitos dias a resolver problemas, a fazer e desfazer, a apagar e tentar de novo.

Contudo, aprender a resolver problemas pode ser engraçado e gratificante. É um processo de desenvolvimento das capacidades mentais e isso proporciona um conjunto de técnicas que serão úteis noutras partes do estudo e ao longo da vida.

Pensamos, muitas vezes, que um problema de matemática é uma tarefa muito difícil e que só é acessível aos bons alunos. Tal não é verdade. Todas as pessoas resolveram, já, muitos e difíceis problemas. Um problema pode ser mais simples ou mais complexo, mas o que caracteriza a situação como problema é que estando num ponto A e querendo ir para um ponto B, sem nunca se ter percorrido esse caminho ou, mesmo já o tendo percorrido, propor então fazê-lo de um modo diferente.

Gradualmente, foi-se tornando mais clara e merecedora de consenso a noção de que problema é uma questão para a qual não se dispõe, de imediato, de nenhum processo rotineiro para a resolver. Por exemplo, se no 7º ano pedirmos a um aluno para determinar o máximo divisor comum entre dois números ou para justificar a afirmação: “O número de divisores de um quadrado perfeito é sempre um número ímpar.”, enquanto a primeira questão é um exercício de treino de um processo conhecido, a segunda é um problema pois terá que ser o aluno a experimentar caminhos para poder chegar à solução.

Convém notar a distinção essencial entre um exercício e um problema. Um exercício é uma questão que averigua o conhecimento dos alunos em determinadas matérias, usualmente, naquelas que foram recentemente estudadas. Geralmente, é uma questão que sabemos resolver imediatamente, pois é sempre claro como havemos de proceder para resolvê-la, basta aplicar um algoritmo ou resultado conhecido. Ao contrário, um problema é uma questão que não pode ser respondida imediatamente. Estes são, muitas vezes, paradoxais e requerem investigação, pensamento e habilidade antes de chegarmos à solução. É preciso conceber toda uma estratégia para a sua resolução. Uma mesma questão, dependendo dos conhecimentos e da experiência de cada pessoa, pode ser para uns um intrincado problema e para outros apenas um exercício elementar.

Um problema, para ser efectivo, tem de provocar a curiosidade da pessoa a quem é proposto. Para isso, deve estar formulado de forma apropriada de acordo com as motivações, interesses e características pessoais de quem o vai resolver. Deve constituir para ele um verdadeiro desafio.

Um bom problema é misterioso e interessante. É misterioso porque, no princípio, não sabemos como resolvê-lo. Se não é interessante nem sequer pensamos muito nele. Se é interessante, no entanto, queremos pôr muito tempo e esforço para entendê-lo.

Acreditando-se que a resolução de problemas tem um papel importante na formação global de qualquer indivíduo (habitua-o a procurar e organizar dados, a adaptar-se a uma

situação nova, a ter sentido crítico, a analisar questões, a fazer tentativas, a ter confiança nos seus processos, a ser determinado mas flexível, ...) e que pode desenvolver o gosto pela Matemática (através de actividades de descoberta, de raciocínio, de jogo, ...) começou a encarar-se a resolução de problemas no ensino sob uma nova perspectiva: além do seu papel de aplicação de conhecimentos passou a utilizar-se também na introdução e organização de novos conceitos ou, simplesmente, como actividade lúdica.

Quem defende que a resolução de problemas deveria ter um papel mais importante no ensino da Matemática, pretende que o aluno tenha uma participação activa na construção do seu próprio conhecimento. O aluno tem de determinar o que é verdadeiramente o problema e, muitas vezes, isso é a fase mais difícil e mais interessante de todo o processo – delimitar por detrás duma situação aparentemente confusa um problema de Matemática bem determinado. Depois, é a tensão da procura dum plano de solução, tensão que desaparece com a alegria da descoberta.

Ao reconhecermos a importância dos problemas não devemos perder de vista que estes só por si não têm poderes mágicos para fazer funcionar uma turma. Pelo contrário, se não forem bem escolhidos e adequadamente propostos aos alunos podem até tornar-se num factor de desenvolvimento de atitudes negativas. Ao incluir problemas no seu ensino, o professor de Matemática deve estar consciente de que se trata duma difícil actividade lectiva. Os problemas implicam uma dinâmica de interacção entre ele e a turma muito complexa e cheia de imprevistos para a qual é necessária flexibilidade, bom senso e muito tacto pedagógico.

É importante que o problema proposto à turma seja apropriado para os seus alunos. Apropriado porque lhes desperta interesse. Apropriado porque eles não dispõem de um método para a sua resolução imediata, o que o transformaria num simples exercício. Devem evitar-se também problemas demasiado fáceis porque a satisfação e o sentimento de êxito que os estudantes poderão obter depende muito de terem atacado e resolvido um problema que constitui um verdadeiro desafio.

Mas, infelizmente, muitos professores dizem que não podem iniciar os seus alunos na resolução de problemas porque os programas são muito extensos e que nem sequer há tempo para os cumprir.

No entanto, nos objectivos do programa do 7º ano aponta-se que o aluno deve revelar “capacidades de criar soluções pessoais para problemas novos”. Nos objectivos do programa do 8º ano indica-se a importância de “orientar a capacidade do aluno para uma utilização da Matemática na resolução de problemas correntes” e nos objectivos do programa do 10º ano indica-se que o aluno deve ser capaz “de utilizar na resolução de problemas, os conceitos e técnicas adquiridos”. Finalmente, no programa do 12º ano refere-se que se espera que o aluno seja capaz de exprimir “oralmente e por escrito ... os pensamentos e raciocínios que efectua na resolução de problemas”.

Na verdade, não são os problemas que impedem o cumprimento integral dos programas, mas são os programas que para serem integralmente cumpridos exigem que se dê atenção à prática de resolução de problemas. Aliás, não poderia ser de outro modo pois a Matemática sem problemas seria algo de inconcebível.

Se se pretende desenvolver a curiosidade dos alunos, estimular a sua capacidade e gosto pelo pensamento independente, o que também tem de ser um objectivo de todo o programa de Matemática a qualquer nível, então os problemas são um instrumento indispensável.

Uma vez que nas aulas, apesar das recomendações do programa, nem sempre é possível dedicar muito tempo à resolução de problemas então, nas escolas, começou a surgir o Problema da Semana ou da Quinzena, os Clubes de Matemática e outras actividades que visam olhar a Matemática com uma perspectiva mais lúdica e que permite uma maior liberdade ao aluno. Este tipo de actividades extracurriculares tem como objectivo motivar não só aqueles alunos brilhantes a quem tantas vezes falta um estímulo e uma orientação para desenvolver as suas potencialidades (e que não raramente acabam por se desinteressar da

Matemática), mas também muitos outros alunos que revelam um mínimo de gosto e inclinação para esta disciplina.

Um tipo de problemas que são propostos em concursos ou noutras iniciativas não curriculares, com o objectivo de despertar a curiosidade e o gosto pela Matemática e que também pode ser utilizado para introduzir o estudo da Geometria no espaço, é por exemplo, “Usando apenas seis fósforos, formar quatro triângulos equiláteros.” Estes “puzzle problems” são apaixonantes para os entusiastas (que não se encontram obrigatoriamente entre os matemáticos). A sua resolução requer quase sempre uma percepção súbita do caminho certo, uma ideia luminosa que nos leva a dizer Eureka! (Neste caso, essa ideia seria ver a três dimensões).

Estes problemas são susceptíveis de interessar fortemente alguns alunos para os quais constituem um desafio intelectual, mas não têm o mesmo efeito sobre muitos outros alunos.

Os alunos acostumaram-se de tal modo a questões que incidem apenas em conhecimentos, que não sabem como responder a questões que envolvem a resolução de problemas.

Com este trabalho, pretendo ajudar a investigar e resolver problemas. Quem é inexperiente na resolução de problemas, desiste rapidamente. E isso acontece por diversas razões: – não sabe como começar; – pode fazer alguns progressos iniciais, mas depois não consegue ir mais longe; – tenta algumas coisas, nada resulta, então desiste.

Uma pessoa que tenha experiência na resolução de problemas é muito mais persistente. Confiantemente, faz algumas tentativas para começar. Pode não resolver o problema mas já fez algum progresso. Depois utiliza algumas técnicas. Quem é experiente neste campo actua a três níveis diferentes: – Estratégias (ideias matemáticas e psicológicas para começar e prosseguir na resolução de problemas); – Táticas (diversos métodos matemáticos que funcionam em diversos campos); – Ferramentas (algumas técnicas e truques para situações específicas).

Quando confrontado com um problema, não podemos resolvê-lo imediatamente, senão não seria um problema mas um mero exercício. Devemos começar com um processo de investigação. Essa investigação pode ter muitas formas, contudo, quando somos principiantes, é melhor sermos organizados. Primeiro, devemos pensar estrategicamente, não tentar resolvê-lo imediatamente. Segundo G. Polya, a resolução de problemas deve ser dividida em quatro fases: compreender o enunciado; estabelecer um plano; executar o plano e verificar a solução.

Determinados métodos ajudam-nos a resolver muitos mais problemas e a resolvê-los mais depressa. Contudo, mesmo que não se tenha sucesso na resolução de algum problema, o esforço será sempre interessante e educativo.

A teoria da resolução de problemas está longe de ser como um “livro de receitas” para resolver muitos problemas. Mas, à medida que ganhamos experiência no uso dos métodos para resolver problemas, ficamos peritos a usá-los que o processo fica mais automático ou natural. Isto acontece com todos os aprendizes hábeis, quer guiando um carro, jogando ténis ou resolvendo problemas de matemática.

Os problemas e a sua resolução estão no coração dos matemáticos. Quem resolve problemas, diverte-se; os adeptos da resolução de problemas sabem como brincar com a Matemática, compreendem e apreciam a sua beleza.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais o apoio que me deram.

Não posso deixar de agradecer ao meu marido o incentivo, o apoio e a compreensão que sempre me deu, o que me ajudou muito na realização deste trabalho.

E, finalmente, agradeço a Deus a força de vontade que me deu, sem a qual este trabalho não teria sido feito.

Calheta
Julho de 2001

Ida Lira

1 – MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Infelizmente, não há receitas que nos permitam resolver problemas de Matemática. Contudo, há alguns métodos que são muito úteis na resolução de muitos problemas.

Neste capítulo, serão abordados alguns desses métodos e serão dados exemplos de problemas que podem ser resolvidos através deles.

Embora este trabalho esteja organizado por tópicos, não devemos pensar que a resolução de problemas está separada em partes. Ao olharmos para um problema nem sempre é possível saber qual é o melhor método a usar. É por isso que a nossa mente deve estar aberta a todas as possibilidades.

Quando, depois de tentar aplicar todos os métodos conhecidos, não conseguirmos resolver o problema, provavelmente, a melhor coisa a fazer é pôr o problema de lado por alguns minutos, horas ou dias, e trabalhar noutra coisa ou descansar uma noite antes de voltar ao problema. Muitas vezes, o tempo que passamos a resolver outros problemas ou a dormir, dá-nos uma nova perspectiva para resolver o problema que achamos difícil numa primeira tentativa.

1.1– CONTRADIÇÃO

Provar por contradição é um simples mas poderoso utensílio no raciocínio matemático.

Queremos provar uma proposição P . Esta ou é verdadeira ou é falsa. Não há meio termo, tem que ser uma ou outra. A estratégia usada neste tipo de prova é eliminar a possibilidade de P ser falsa. Então supomos que P é falsa e provamos que esta suposição é absurda, chegando a uma contradição. A única conclusão possível é que P é verdadeira.

Este tipo de prova é usualmente útil para provar que alguma coisa não pode acontecer.

Quando começamos a pensar num problema, é sempre importante perguntar: “O que acontece se negarmos a conclusão?” Obteremos algo que podemos provar mais facilmente?” Se a resposta for sim, então tentamos provar por contradição. Este método nem sempre funciona, mas essa é a natureza da investigação!

Há mais de 2000 anos Euclides já usou o método da contradição quando provou que há uma infinidade de números primos.

Vejamos alguns problemas que se podem resolver utilizando o método da contradição.

PROBLEMA 1.1.1 - *Explique porque existe uma infinidade de números primos.*

Solução: Relembremos que um número primo é um número positivo que tem como divisores apenas o 1 e ele próprio. Logo, os primeiros números primos são 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, Qualquer número inteiro é divisível por um número primo (Teorema de Euler). De facto, pode ser factorizado numa única maneira em factores primos.

Resolveremos este problema usando o método da contradição. Suponhamos que existe, de facto, apenas um número finito de primos. Representemos esses primos por p_1, p_2, \dots, p_k . Consideremos o número $N = (p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k) + 1$, a soma do produto de todos os primos com 1. Então, como vimos anteriormente, N deve ser divisível por algum número primo. Contudo,

não é divisível por p_1 , porque a divisão por p_1 tem resto 1. Do mesmo modo, N não é divisível por nenhum p_2, p_3, \dots, p_k . Mas estes são todos os primos que existem. No entanto, N tem que ser divisível por algum primo. Chegamos, assim, a uma contradição.

Concluimos, então, que não pode existir apenas um número finito de primos, mas sim uma infinidade deles.

□

PROBLEMA 1.1.2 – Mostre que $\sqrt{2}$ é irracional.

Solução 1: Usando o método da contradição, suponhamos que $\sqrt{2}$ é racional. Assim, podemos escrevê-lo sob a forma de fracção irredutível.

Seja então $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, com p e q primos entre si.

Então $\frac{p^2}{q^2} = 2$, logo $p^2 = 2q^2$.

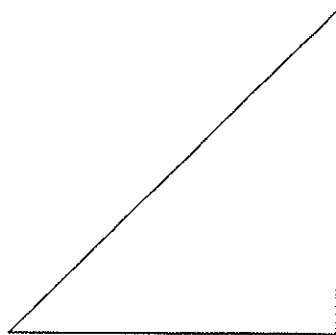
Isto significa que p^2 é par e, portanto, p também seria par. Então $p = 2r$.

Substituindo em $p^2 = 2q^2$, vem: $4r^2 = 2q^2 \Leftrightarrow 2r^2 = q^2$

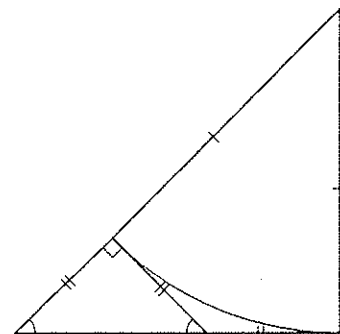
Prova-se assim que q^2 é par e, portanto, também o será q . Verifica-se que isto é uma contradição, já que se p e q são ambos pares, a fracção $\frac{p}{q}$ não seria irredutível.

□

Solução 2: Vejamos outra demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$. Pelo Teorema de Pitágoras, um triângulo rectângulo isósceles com as duas arestas iguais de comprimento 1, tem hipotenusa com comprimento $\sqrt{2}$. Se $\sqrt{2}$ for racional, existe algum inteiro positivo que a multiplicar por estes três lados produz um triângulo cujos lados são comprimentos inteiros, e portanto, este será o menor triângulo rectângulo isósceles com esta propriedade. Mas dentro de qualquer triângulo rectângulo isósceles cujos três lados têm comprimentos inteiros podemos sempre construir um triângulo menor com a mesma propriedade, como nos mostra a figura seguinte. Concluimos, assim, que $\sqrt{2}$ não pode ser racional.



Se este é um triângulo rectângulo isósceles com lados inteiros



então há um triângulo menor com a mesma propriedade

Fig.1

Construção: Um arco circular com centro no vértice mais elevado e raio igual ao lado vertical do triângulo intersecta a hipotenusa num ponto, a partir do qual é traçada a perpendicular à hipotenusa até ao lado horizontal. Cada segmento de recta na figura tem comprimento inteiro, e os três segmentos assinalados com “//” têm o mesmo comprimento. (Dois deles são tangentes ao círculo a partir do mesmo ponto). Portanto, o triângulo rectângulo isósceles menor, com hipotenusa na base horizontal, também tem lados inteiros.

□

PROBLEMA 1.1.3 – Dado que já foi provado o teorema de que todos os quadrados de números inteiros não nulos são positivos, prove que a equação $x^2 + 1 = 0$ não tem solução inteira.

Solução: O primeiro passo ao aplicar o método da contradição a este problema é assumir que $x^2 + 1 = 0$ tem uma solução inteira, seja $x = c$, onde c é um inteiro.

Resolvendo a equação $x^2 + 1 = 0$ em ordem a x , obtemos $x^2 = -1$. Substituindo c por x , obtemos $c^2 = -1$. Este resultado é uma contradição ao já provado Teorema segundo o qual o quadrado de qualquer inteiro tem que ser positivo.

□

PROBLEMA 1.1.4 – Sejam a e b números inteiros positivos. Mostre que $b^2 + b + 1 = a^2$ não tem soluções inteiras positivas.

Solução. Queremos mostrar que a igualdade $b^2 + b + 1 = a^2$ não pode ser verdadeira. Então, suponhamos o contrário, ou seja, que a igualdade referida é verdadeira.

Se $b^2 + b + 1 = a^2$ então $b < a$ e $a^2 - b^2 = b + 1$.

Usemos a útil tática de factorizar e assim obtemos $(a - b)(a + b) = b + 1$.

Desde que $a > b \geq 1$, temos que $a - b \geq 1$ e $a + b \geq 2 + b$, deste modo, o lado esquerdo da igualdade é maior ou igual que $1 \cdot (b + 2)$, o que é estritamente maior do que o lado direito da igualdade. Isto é impossível, e assim a suposição inicial, de que $b^2 + b + 1 = a^2$ é verdadeira deve, de facto, ser falsa.

□

PROBLEMA 1.1.5 – Se a equação $ax^2 + (c + b)x + (e + d) = 0$ tem raízes reais maiores que 1, mostre que a equação $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ tem pelo menos uma raiz real.

Solução: A hipótese é que $P(x) = ax^2 + (c + b)x + (e + d) = 0$ tem raízes reais maiores que 1, e a conclusão pretendida é que $Q(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ tem pelo menos uma raiz real. Suponhamos que a conclusão é falsa, isto é, que $Q(x)$ não tem raízes reais. Assim, $Q(x)$ é sempre positivo ou sempre negativo para todos os números reais x . Sem perda de generalidade, suponhamos que $Q(x) > 0$ para qualquer real x , e neste caso, $a > 0$.

Agora a nossa estratégia é usar a desigualdade que envolve $Q(x)$ para originar a contradição, mas temos que usar a hipótese sobre $P(x)$ de algum modo. Como estão os dois polinómios relacionados? Podemos escrever

$$Q(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = ax^4 + (c + b)x^2 + (e + d) + bx^3 - bx^2 + dx - d,$$

daí,

$$Q(x) = P(x^2) + (x - 1)(bx^2 + d) \quad (*)$$

Seja y uma raiz de $P(x)$. Asumimos que $y > 1$. Consequentemente, se pusermos $u := \sqrt{y}$, temos $u > 1$ e $P(u^2) = 0$. Substituindo x por u em $(*)$ fica

$$Q(u) = P(u^2) + (u - 1)(bu^2 + d) = (u - 1)(bu^2 + d).$$

Relembre que assumimos que $Q(x)$ é sempre positivo, então $(u - 1)(bu^2 + d) > 0$. Mas, também podemos fazer a substituição $x = -u$ em $(*)$, e obtemos

$$Q(-u) = P(u^2) + (-u - 1)(bu^2 + d) = (-u - 1)(bu^2 + d).$$

Deste modo, devemos ter $(u - 1)(bu^2 + d) > 0$ e $(-u - 1)(bu^2 + d) > 0$. Mas isto é impossível, uma vez que $(u - 1)$ e $(-u - 1)$ são números positivo e negativo, respectivamente.

Chegamos a uma contradição, assim a nossa suposição inicial de que $Q(x)$ era sempre positivo tem que ser falsa. Concluimos que $Q(x)$ tem que ter pelo menos uma raiz real. \square

Por que razão a contradição resultou neste exemplo? Certamente, há outras maneiras de provar que um polinómio tem pelo menos uma raiz real. O que nos ajudou neste problema foi o facto de a negação da conclusão originar algo mais simples de provar. Uma vez que assumimos que $Q(x)$ não tinha raízes reais, obtivemos uma boa desigualdade com a qual pudemos trabalhar proveitosamente.

PROBLEMA 1.1.6 – *Há mais adultos do que rapazes, mais rapazes do que raparigas, mais raparigas do que famílias. Se nenhuma família tem menos do que três crianças, então qual é o menor número de famílias que pode haver? (Considere uma família igual a dois adultos).*

Solução: Se houvesse apenas uma família então haveria pelo menos duas raparigas, pelo menos três rapazes e pelo menos quatro adultos. Mas quatro adultos formam duas famílias e isso é uma contradição.

Se houvesse apenas duas famílias, então haveria pelo menos três raparigas, pelo menos quatro rapazes e pelo menos cinco adultos. Mas se houver cinco adultos significa que não pode haver apenas duas famílias; há pelo menos três. Logo, esta hipótese também conduz a uma contradição.

Se houvesse apenas três famílias, então haveria pelo menos quatro raparigas, pelo menos cinco rapazes e pelo menos seis adultos. Isto não é contraditório. Assim, três famílias satisfazem a condição.

De facto, suponhamos que havia três casais. O primeiro casal tinha duas raparigas e um rapaz, o segundo casal tinha também duas raparigas e um rapaz, e o terceiro casal tinha três rapazes. Então havia seis adultos, cinco rapazes, quatro raparigas e três famílias. Todas as condições do problema são satisfeitas.

Então a resposta é que três famílias é o menor número que pode haver. \square

1.2- INDUÇÃO MATEMÁTICA

A indução matemática é um dos métodos mais importantes usado em toda a Matemática.

É um método poderoso para provar afirmações que envolvem números inteiros como, por exemplo: “A soma dos ângulos internos de qualquer polígono com n lados é $180(n - 2)$ graus.” ou “A desigualdade $n! > 2^n$ é verdadeira para qualquer inteiro positivo $n \geq 4$.”

Quando queremos provar $P(k)$, para qualquer $k \geq n_0$, procedemos do seguinte modo:

- (i) Primeiro verificamos que $P(n_0)$ satisfaz a hipótese. Este é chamado o “caso básico”, e usualmente é um exercício fácil.
- (ii) Assumimos que $P(n)$ é verdadeira para algum inteiro n , arbitrário. $P(n)$ é chamada a hipótese de indução. Depois mostramos que a hipótese de indução implica que $P(n + 1)$ também é verdadeira.

Usemos o método de indução para resolver alguns problemas.

PROBLEMA 1.2.1 – Prove que a soma dos ângulos internos de um polígono com n lados é $180(n - 2)$ graus.

Solução: O caso básico ($n_0 = 3$) é o facto já conhecido de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° . Agora suponhamos que o Teorema é verdadeiro para um polígono com n lados. O objectivo é mostrar que isso também é verdadeiro para um polígono com $(n + 1)$ lados, isto é, a soma dos ângulos internos de um polígono com $(n + 1)$ lados é $180(n + 1 - 2) = 180(n - 1)$ graus.

Seja S um polígono arbitrário com $(n + 1)$ lados, com vértices v_1, v_2, \dots, v_{n+1} . Decomponhamos S na união do triângulo T com vértices v_1, v_2, v_3 e o polígono U com vértices v_1, v_3, \dots, v_{n+1} , como nos mostra a Fig.1.

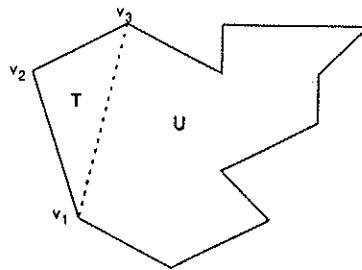


Fig.1

A soma dos ângulos internos de S é igual à soma dos ângulos internos de T (que é 180°) mais a soma dos ângulos internos de U (que é $180(n - 2)$ pela hipótese de indução, porque U tem apenas n lados). Daí a soma é $180 + 180(n - 2) = 180(n - 1)$, assim como queríamos demonstrar.

□

PROBLEMA 1.2.2 – Prove que se n é um inteiro maior do que 3, então $n! > 2^n$.

Solução: O caso básico, $n_0 = 4$, é obviamente verdadeiro: $4! > 2^4$, ou seja, $24 > 16$. Agora suponhamos que $n! > 2^n$ para algum n . Queremos usar isto para provar o próximo caso; isto é, queremos provar que $(n + 1)! > 2^{n+1}$. Pensemos estrategicamente: o lado esquerdo da hipótese de indução é $n!$, e o lado esquerdo do nosso objectivo é $(n + 1)!$. Como obter um a partir do outro? Multiplicando ambos por $(n + 1)$, claro.

Multiplicando ambos os lados de uma desigualdade por um número positivo não muda a sua veracidade, então obtemos

$$(n + 1)! > 2^n (n + 1) > 2^n \cdot 2 = 2^{n+1}.$$

□

PROBLEMA 1.2.3 – Verifique a fórmula $1 + 2 + 3 + \dots + (k - 1) + k = (k + k^2) / 2$.

Solução: Quando usamos o método de indução, é importante proceder sistematicamente.

Primeiro, qual é a afirmação $P(k)$ que tem que ser verificada? $P(k)$ é

$$1 + 2 + 3 + \dots + (k - 1) + k = (k + k^2) / 2.$$

É fácil verificar $P(1)$, pois $1 = (1 + 1^2) / 2$.

A mais interessante, e subtil, parte do método de indução é a parte (ii).

Suponhamos que $P(k)$ é verdadeira, ou seja, assumimos que

$$1 + 2 + 3 + \dots + (k - 1) + k = (k + k^2) / 2. \quad (*)$$

Desta igualdade queremos obter a igualdade correspondente para $(k + 1)$.

Adicionamos $(k + 1)$ aos dois lados de (*). Obtemos

$$1 + 2 + 3 + \dots + k + (k + 1) = \frac{k + k^2}{2} + (k + 1)$$

Simplificando, temos

$$1 + 2 + 3 + \dots + (k + 1) = \frac{k + k^2 + 2(k + 1)}{2}$$

ou

$$1 + 2 + 3 + \dots + (k + 1) = \frac{(k + 1) + (k + 1)^2}{2}$$

Esta última é precisamente $P(k + 1)$. Repare que, assumindo que é válido para $P(k)$, obtivemos $P(k + 1)$. Isto é precisamente a parte (ii) do método de indução.

A verificação está completa. De acordo com o método de indução, desde que se verifique (i) e (ii), podemos ter a certeza que $P(k)$ se verifica para qualquer $k \geq 1$.

□

Às vezes é conveniente começar a indução noutra ponto diferente de $k = 1$. No próximo problema começamos em $k = 0$.

PROBLEMA 1.2.4 – *Suponha que S é um conjunto com k elementos. Mostre que S tem precisamente 2^k subconjuntos.*

Solução: Usaremos o método de indução para resolver este problema. Começemos por lembrar que um conjunto A é chamado um subconjunto do conjunto B se cada elemento de A também é um elemento de B . Em particular, $\emptyset \subset A$, onde \emptyset é o conjunto vazio. Também $A \subset A$.

Como já referimos, será preferível começar a indução em $k = 0$ e não em $k = 1$. Para o passo (i), note que se $S = \emptyset$ não tem elementos então o único subconjunto de S é o próprio S . Assim, S tem $1 = 2^0$ subconjuntos. Desta maneira verificamos $P(0)$.

Para o passo (ii), assumimos que $P(k)$ é válido. Isso significa que qualquer conjunto com k elementos tem 2^k subconjuntos. Seja $S = \{s_1, s_2, \dots, s_k, s_{k+1}\}$ um conjunto com $(k + 1)$ elementos e $S' = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$. Repare que o conjunto S' tem 2^k subconjuntos, por hipótese de indução.

Agora contamos os subconjuntos do próprio S . Certamente, qualquer subconjunto de S' também é subconjunto de S . Isso equivale a 2^k subconjuntos de S . Além disso, se A é qualquer subconjunto de S' então $A \cup \{s_{k+1}\}$ é um subconjunto de S . Isso representa mais 2^k subconjuntos de S . Assim, identificamos um total de $2^k + 2^k = 2 \times 2^k = 2^{k+1}$ subconjuntos do conjunto S . Repare que contamos, de facto, todos os subconjuntos de S , desde que qualquer subconjunto de S ou contém s_{k+1} ou não contém. Portanto, derivamos $P(k + 1)$ de $P(k)$. Isso é a parte (ii) do método de indução.

E, deste modo, a verificação fica completa.

□

PROBLEMA 1.2.5 – *(Princípio das Gavetas) Suponha que k é um número inteiro positivo. Se $(k + 1)$ cartas forem colocadas em k caixas de correio, mostre que uma caixa de correio deve conter pelo menos duas cartas.*

Solução: Embora sejam possíveis muitas soluções, usaremos indução com o objectivo de ilustrar o método.

A afirmação $P(k)$ é “Se $(k + 1)$ cartas forem colocadas em k caixas de correio então alguma caixa deverá conter pelo menos duas cartas.” Para o caso $k = 1$, notemos que se $k + 1 = 2$ cartas forem colocadas em $k = 1$ caixa de correio então alguma caixa (nomeadamente a única caixa) irá receber duas cartas (aliás, todas as cartas).

Agora suponhamos que $P(k)$ está provado. Suponhamos que $(k + 1) + 1$ cartas foram colocadas em $(k + 1)$ caixas de correio. Observemos as seguintes situações:

- Se a última caixa está vazia, então todas as cartas foram colocadas nas primeiras k caixas. Em particular, pelo menos $(k + 1)$ (aliás, $(k + 2)$) cartas foram colocadas nessas primeiras k caixas. Aplicando a hipótese de indução concluímos que uma dessas k caixas contém pelo menos duas cartas.
- Se a última caixa contém precisamente uma carta, então as restantes $(k + 1)$ cartas foram colocadas novamente nas primeiras k caixas. Aplicamos a hipótese de indução às primeiras k caixas. Deste modo, uma delas conterà pelo menos duas cartas.
- Se a última caixa contém duas ou mais cartas, então está provado porque alguma caixa (nomeadamente a última) contém pelo menos duas cartas.

E, assim, concluímos a verificação da nossa afirmação.

□

PROBLEMA 1.2.6 – Suponha que temos um grafo admissível na esfera de raio unitário, no espaço tridimensional. Por grafo admissível entende-se uma ligação conexa de arcos. Dois arcos juntam-se apenas nas suas extremidades, às quais chamamos vértices. Os arcos são chamados arestas. Uma aresta é a porção do arco que fica entre dois vértices. Uma face é qualquer região bidimensional, sem buracos, que é limitada por arestas e vértices. A Fig.1 ilustra um grafo admissível e um não admissível.

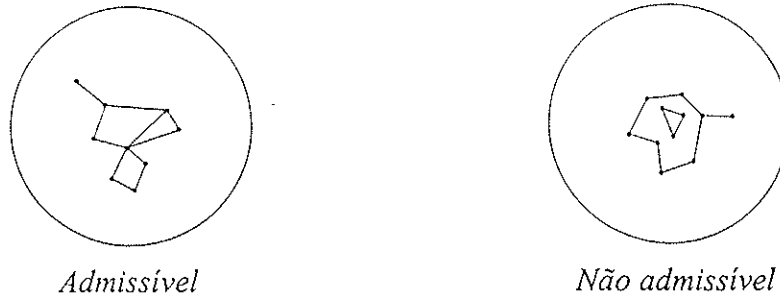


Fig.1

Este problema pretende que se verifique a Fórmula de Euler para um grafo admissível. Seja V o número de vértices, A o número de arestas e F o número de faces. Segundo a Fórmula de Euler: $V - A + F = 2$.

Solução: Começamos com alguns casos especiais, só para ter a certeza que entendemos o que se passa. Veremos no capítulo seguinte que o método de arranjar casos especiais é de grande utilidade na resolução de alguns problemas.

O grafo mais simples que é admissível, segundo as definições dadas, consiste num único vértice. Ver Fig.2. O complemento do vértice na esfera, é uma face válida. Assim, $V = 1$, $A = 0$ e $F = 1$. Então $V - A + F = 1 - 0 + 1 = 2$ e verificamos que a Fórmula de Euler é válida.

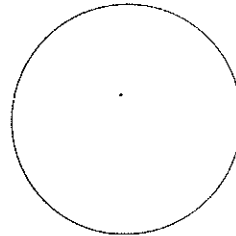


Fig.2

O próximo grafo mais complexo tem uma aresta com um vértice em cada extremidade. O complemento (na esfera) desta aresta com as suas extremidades é uma única face. Ver Fig.3. Assim, neste caso, $V = 2$, $A = 1$ e $F = 1$. Vemos que $V - A + F = 2 - 1 + 1 = 2$. Logo a Fórmula de Euler também é válida neste caso.

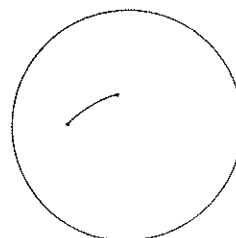


Fig.3

Seja $P(k)$ a afirmação “A Fórmula de Euler é válida para qualquer grafo admissível com k arestas.” Podemos usar o método de indução para provar que esta afirmação se verifica para qualquer k .

O caso básico $P(1)$ já foi verificado. Para a parte (ii) do método de indução, assumimos que a Fórmula de Euler é válida para qualquer grafo admissível com k arestas. Agora seja G um grafo com $(k + 1)$ arestas. Haverá alguma aresta que possa ser removida de G de modo que o restante grafo G' continue admissível? Seja V' , A' e F' o número de vértices, de arestas e de faces do grafo G' . Agora considere o que devem ser os correspondentes números V , A e F do grafo G .

O grafo G é obtido de G' (estamos a inverter a construção que produziu G') somando uma aresta. Se a aresta é adicionada juntando apenas uma extremidade e deixando a outra livre (a aresta adicionada está a tracejado na Fig.4), então o número de faces não muda, o número de arestas e de vértices aumentam uma unidade. Assim, $V = V' + 1$, $A = A' + 1$ e $F = F'$. Uma vez que, pela hipótese $V' - A' + F' = 2$, temos que $V - A + F = 2$. Se, em vez disso, a aresta é adicionada juntando-se a dois vértices (a aresta adicionada está a tracejado na Fig.5 – há duas possibilidades como podemos ver na figura), então o número de faces e de arestas aumentam uma unidade e o número de vértices não muda. Portanto, $V = V'$, $A = A' + 1$ e $F = F' + 1$. Uma vez que, pela hipótese $V' - A' + F' = 2$, temos que $V - A + F = 2$.

Como há apenas estas duas maneiras de juntar uma nova aresta, estabelecemos o passo (ii) do método de indução. E assim provamos o pretendido.

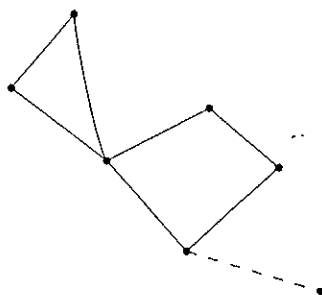
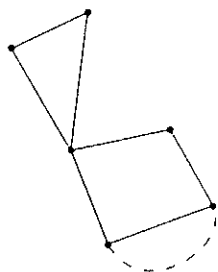


Fig.4



ou

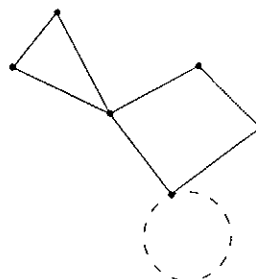


Fig.5

□

1.3 – PROBLEMAS MAIS SIMPLES / CASO ESPECIAL

O método de arranjar um problema semelhante, mas mais simples, antes de trabalhar um problema complexo é muito útil uma vez que muitos dos métodos de resolução de problemas são comuns aos dois, embora o problema mais complexo tenha algumas complicações adicionais. Contudo, se quando estivermos a resolver o problema mais simples descobirmos alguns dos métodos de resolução do problema mais complexo, será mais fácil concluir a resolução do problema do que se tivéssemos que resolvê-lo de uma só vez.

Não é sempre verdade que resolvendo um problema mais simples ou examinando um caso especial chegamos à solução do problema original, mas é certo que nos ajuda a começar. Este método é muito útil para atacar um problema. Vejamos alguns exemplos.

PROBLEMA 1.3.1 – *Determine o número de zeros com que termina o número 100!*

Solução: Relembre que $100! = 100 \times 99 \times 98 \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$. Adicionamos um zero no fim de um produto sempre que multiplicamos por 10. Assim, multiplicar por qualquer número terminado em 1,3,7, ou 9 não pode adicionar um zero ao produto (uma vez que nenhum destes números divide 10). De facto, a factorização de 10 em números primos é $10 = 5 \times 2$. Vamos tentar resolver este problema contando o factor 5 em 100!

Começamos por ver o que acontece com os números de 1 a 10. No intervalo de 1 a 10, apenas os números 5 e 10 têm o 5 como factor. O 5 tem que ser emparelhado com 2 para fazer 10 e o 10 não precisa ser emparelhado. Os dois factores iguais a 10 resultantes contribuem com dois zeros para o produto total que forma o factorial.

Nos números de 11 a 20, apenas os números 15 e 20 têm como factores o 5. Raciocinando como no último parágrafo, contamos com mais dois zeros.

Os números entre 21 e 30 são um pouco diferentes. Como anteriormente, 25 e 30 são os únicos números que têm como factores o 5, mas 25 tem dois cincos como factores. Assim, $22 \times 24 \times 25 = 11 \times 12 \times (2 \times 5) \times (2 \times 5)$ e isto contribui com $10 \times 10 = 100$, ou seja, dois zeros. Assim, o intervalo de 21 a 30 contribui com um total de três zeros.

O intervalo de 31 a 40 é um dos simples, como os dois primeiros intervalos que consideramos e, portanto, contribui com dois zeros.

O intervalo de 41 a 50 é um dos especiais porque 45 contribui com um factor de 5 mas 50 contribui com dois factores. Assim, este intervalo contribui com três zeros.

O intervalo de 51 a 60 e o intervalo de 61 a 70 são iguais aos dois primeiros, logo cada intervalo contribui com dois zeros.

O intervalo de 71 a 80 é um dos especiais porque 75 contribui com dois factores de 5 e 80 contribui com um factor de 5. Deste modo, a contribuição total de zeros é três.

O intervalo de 81 a 90 contribui com dois factores de 5 e portanto adiciona dois zeros.

O intervalo de 91 a 100 contém o 95 e o 100. O primeiro destes contribui com um factor de 5 e o segundo contribui com dois. Assim, três factores são adicionados.

Tendo em conta todas estas análises, temos seis intervalos em que cada um contribui com dois zeros e quatro intervalos em que cada um contribui com três zeros. Isto dá-nos um total de 24 zeros que irão aparecer no fim de 100!

□

Este exemplo ilustra importantes características para o sucesso da resolução de problemas:

- Identificamos a característica essencial da qual depende o problema (que os zeros finais derivam da multiplicação por 10).
- Começamos por analisar um caso especial (isto é, o produto $10 \times 9 \times 8 \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$).
- Determinamos como passar do caso especial para o problema original.

Olhando para a solução do problema aqui apresentada, vemos que podíamos ter sido mais eficazes e rápidos. Os números de 1 a 100 contêm $100 \div 5 = 20$ múltiplos de 5. Quatro desses múltiplos de 5 são, de facto, múltiplos de 25, daí contribuem com dois cincos. Isto dá-nos um total de 24 factores de 5 em 100! Emparelhando cada um destes com um número par obtemos um factor de 10, e portanto, um zero. Concluimos assim, que há 24 zeros no fim de 100!

PROBLEMA 1.3.2 – *Qual é o maior número de regiões nas quais três linhas rectas (de extensão infinita) podem dividir o plano?*

Solução: Usando o método de arranjar um caso especial ou um problema mais simples, começaremos a resolver este problema com a simples questão: “Qual é o maior número de regiões nas quais uma linha recta pode dividir o plano?” É claro que não há nada para discutir, porque um linha separa sempre o plano em duas regiões.

Depois pensamos em duas linhas. Ver Fig.1 (em cima). Se as duas linhas são coincidentes, então o plano continua dividido em apenas duas regiões. Se, em vez disso, as duas linhas são distintas mas paralelas então o plano fica separado em três regiões diferentes. Ver Fig.1 (em baixo).

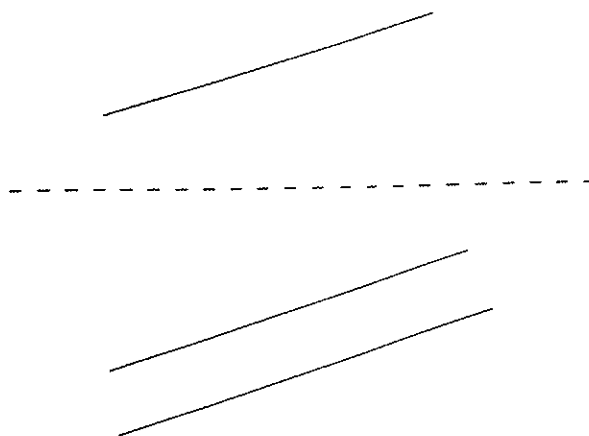


Fig.1

Pensamos nos dois casos descritos como sendo degenerados ou atípicos pela seguinte razão: se deixarmos cair duas palhinhas no chão, então a probabilidade de que elas fiquem sobrepostas, ou paralelas, é zero. Por outro lado, as palhinhas irão ficar de modo a que sejam concorrentes (ou não paralelas), com probabilidade 1.

Referimo-nos a esta última situação como a posição geral para as duas palhinhas.

Agora suponha que as nossas duas linhas estão na posição geral. Esta situação está ilustrada na Fig.2. Então o plano fica separado em quatro regiões.

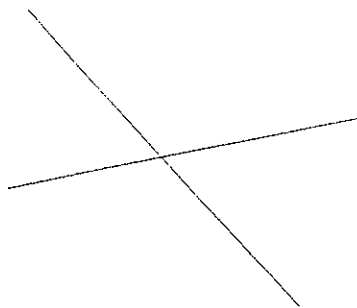


Fig.2

Finalmente, passamos a três linhas. Se as três linhas coincidem, então estamos na mesma situação que para uma linha. Se duas linhas coincidem, então estamos na mesma situação que para duas linhas. Então suponhamos que as três linhas são distintas.

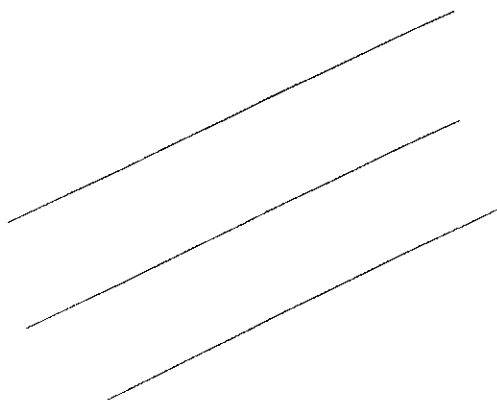


Fig.3

Se as três linhas são paralelas, então o plano fica separado em quatro regiões. Ver Fig.3. Se duas linhas são paralelas e a terceira é concorrente com estas, então o plano fica separado em seis regiões. Ver Fig.4. Agora suponhamos que nenhuma das três linhas são paralelas.

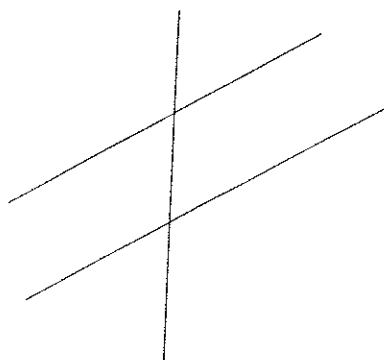


Fig.4

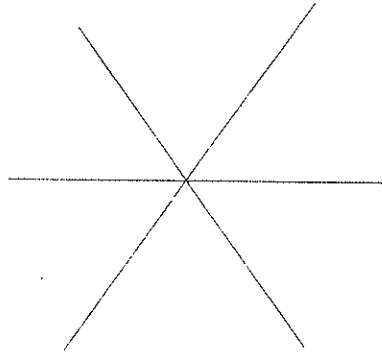


Fig.5

Se as três linhas se intersectam num único ponto, então o plano fica separado em seis regiões. Ver Fig.5. Se as três linhas se intersectam em pontos diferentes, e nenhuma delas são paralelas (isto é, estão na posição geral, ou seja, aquela que ocorre com probabilidade 1) então o plano fica separado em sete regiões. Ver Fig.6. Este é o número máximo de regiões nas quais três linhas podem dividir o plano.

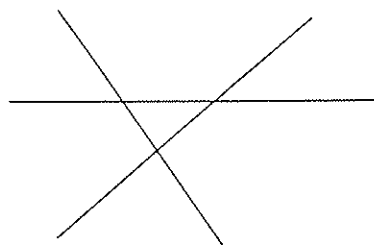


Fig.6

Neste problema usamos o método de arranjar um caso especial para começar a compreender como funcionava o problema.

□

PROBLEMA 1.3.3 – Há cofres numa fila numerados de 1 a 1000. No início, todos os cofres estão fechados. Passa uma pessoa e abre todos os cofres múltiplos de 2, começando pelo cofre número 2. Então os cofres 2, 4, 6, ..., 998, 1000 ficam abertos. Passa outra pessoa, e muda o estado (isto é, fecha o cofre se está aberto, e abre-o se está fechado) de todos os cofres múltiplos de 3, começando pelo cofre número 3. Depois outra pessoa muda o estado de todos os cofres múltiplos de 4, começando pelo cofre número 4, etc. Este processo continua até que mais nenhum cofre possa ser alterado. Quais são os cofres que ficarão fechados?

Solução: Muito provavelmente, não há nada de especial sobre o número 1000 neste problema. Podemos tornar o problema mais fácil, simplificando-o ao assumir um número muito menor de cofres, digamos 10, para começar. Agora sujemos as mãos fazendo uma tabela na qual usaremos “o” para aberto e “x” para fechado. Inicialmente (passo 1), os 10 cofres estão

fechados. A tabela seguinte mostra o estado de cada cofre em cada passo. Paramos no 10º passo, uma vez que mais passos não afectarão o estado dos cofres.

PASSO	NÚMERO DO COFRE									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
2	x	o	x	o	x	o	x	o	x	o
3	x	o	o	o	x	x	x	o	o	o
4	x	o	o	x	x	x	x	x	o	o
5	x	o	o	x	o	x	x	x	o	x
6	x	o	o	x	o	o	x	x	o	x
7	x	o	o	x	o	o	o	x	o	x
8	x	o	o	x	o	o	o	o	o	x
9	x	o	o	x	o	o	o	o	x	x
10	x	o	o	x	o	o	o	o	x	o

Vemos que os cofres fechados têm os números 1, 4 e 9; uma conjectura razoável é que apenas os cofres cujos números são quadrados perfeitos ficarão fechados.

O que é que determina se um cofre está aberto ou fechado? Depois de preencher a tabela, sabemos a resposta: a paridade do número de vezes que o estado do cofre muda. Um cofre fica aberto ou fechado conforme o número de mudanças de estado é par ou ímpar. O que causa a mudança de estado? Quando é que o estado do cofre é alterado? Simplifiquemos as coisas, considerando apenas um cofre, por exemplo, o cofre número 6. Este foi alterado nos passos 1, 2, 3 e 6, num total de quatro vezes (um número par, no entanto o cofre ficou aberto). Se olharmos para o cofre número 10, este foi alterado nos passos 1, 2, 5 e 10. Agora é claro:

O cofre número n é alterado no passo k se e só se k divide n .

Assim, podemos reformular a nossa conjectura de um modo diferente, no entanto, equivalente:

Prove que $d(n)$ é ímpar se e só se n é um quadrado perfeito,

onde $d(n)$ denota o número de divisores de n , incluindo 1 e n . Podemos sempre emparelhar um divisor d de n com n/d . Por exemplo, se $n = 28$, é natural emparelhar o divisor 2 com o divisor 14. Assim, ao longo da lista de divisores de n , cada divisor terá um único par a menos que n seja um quadrado perfeito, pois nesse caso \sqrt{n} é emparelhada com ela própria. Por exemplo, os divisores de 28 são 1, 2, 4, 7, 14 e 28, que podem ser organizados nos seguintes pares (1, 28), (2, 14), (4, 7), e é claro que $d(n)$ é par. Por outro lado, os divisores do quadrado perfeito 36 são 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 e 36, cujos pares são (1, 36), (2, 18), (3, 12), (4, 9) e (6, 6). Repare que 6 é emparelhado com ele próprio, então o número de divisores é ímpar. Deste modo, podemos concluir que $d(n)$ é ímpar se e só se n é um quadrado perfeito.

E, assim, resolvemos o nosso problema, concluindo que os cofres que ficarão fechados são aqueles cujos números são quadrados perfeitos.

□

PROBLEMA 1.3.4 – *O Sr. Mendes convidou 10 casais para uma festa na sua casa. Perguntou a quem estava presente, incluindo a sua mulher, a quantas pessoas apertaram a mão. Ficou a saber que cada pessoa apertou a mão a um diferente número de pessoas. Se assumirmos que ninguém apertou a mão ao seu parceiro, quantas pessoas apertaram a mão à mulher do Sr. Mendes? (A resposta do Sr. Mendes não interessa).*

Solução: Este problema parece difícil. Parece que não temos informação suficiente para resolvê-lo. Para tentar resolvê-lo vamos usar o método de torná-lo mais simples, olhando para um caso especial, onde há, por exemplo, mais 2 casais além dos anfitriões.

O anfitrião descobriu que das cinco pessoas que interrogou há cinco diferentes “números de apertos de mão”. Como esses números variam entre 0 e 4, inclusive (porque ninguém aperta a mão ao seu parceiro/parceira), os cinco números de apertos de mão encontrados são 0, 1, 2, 3 e 4. Denominemos essas pessoas por P_0, P_1, \dots, P_4 , respectivamente. Vejamos a Fig.1, onde A representa o anfitrião.

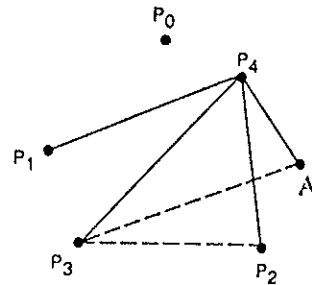


Fig.1

É interessante olhar para as pessoas com os números extremos de apertos de mão (0 e 4), isto é, P_0 e P_4 . Consideremos P_0 o membro da festa “menos sociável”, pois ele/ela não apertou a mão a ninguém. Por outro lado, P_4 será o membro da festa “mais sociável”, pois apertou a mão a todas as pessoas possíveis, o que significa que todas as pessoas presentes na festa, excepto o parceiro de P_4 , apertaram a mão a P_4 . Então qualquer pessoa que não seja parceiro de P_4 tem um número de apertos de mão diferente de zero. Concluimos, assim, que P_4 e P_0 devem ser parceiros.

Agora podemos relaxar pois encontramos o aspecto crucial para a resolução deste problema. O nosso instinto diz-nos que, provavelmente, P_3 e P_1 também são parceiros. Como podemos provar isto?

Tentemos adaptar o argumento usado anteriormente. P_3 apertou a mão a todos menos um e excepto ao seu parceiro. P_1 apenas apertou a mão a uma pessoa. Será que temos mais alguma informação? Sim: P_4 foi a pessoa a quem P_1 e P_3 apertaram a mão. Por outras palavras, se excluirmos P_4 e o seu parceiro, P_0 , então P_1 e P_3 ficam com o papel que P_0 e P_4 tiveram; isto é, eles são, respectivamente, a pessoa “menos/mais sociável”, e pela mesma razão, têm que ser parceiros (P_3 apertou a mão a duas das três pessoas P_1, P_2 e A, e sabemos que P_1 não apertou a mão a P_3 , então a única pessoa possível que pode ser parceiro de P_3 é P_1).

Agora é fácil ver que as únicas pessoas que sobram são P_2 e A. Eles devem ser parceiros, então P_2 é a anfitriã, e ela apertou a mão a duas pessoas. Agora é fácil adaptar este argumento ao caso geral de n casais. Para tal, devemos usar o método de indução. Para cada inteiro positivo n , seja $P(n)$

“Se o anfitrião convida n casais, e ninguém aperta a mão ao seu parceiro, e se cada uma das $2n + 1$ pessoas interrogadas pelo anfitrião apertou um diferente número de mãos, então a anfitriã apertou n mãos”.

É fácil verificar que $P(1)$ é verdadeira desenhando uma figura e observando a única possibilidade. Precisamos mostrar que $P(n)$ implica $P(n + 1)$. Então, assumimos que $P(n)$ é verdadeira. Agora consideremos uma festa com $n + 1$ casais (além do anfitrião e da anfitriã) satisfazendo a hipótese (ninguém aperta a mão ao seu parceiro, e todos os números de apertos de mão são diferentes). Então todos os números de apertos de mão desde 0 até $2(n + 1) = 2n + 2$

2, inclusive, irão ocorrer entre as $2n + 3$ pessoas interrogadas pelo anfitrião. Consideremos a pessoa X, a qual apertou o maior número de mãos, ou seja, $2n + 2$. Esta pessoa apertou a mão a todos excepto duas das $2n + 4$ pessoas presentes na festa. Uma vez que ninguém aperta a mão a si próprio ou ao seu parceiro, X apertou a mão a toda a gente possível. Então a única pessoa que pode ser seu parceiro tem que ser a pessoa Y, a qual não apertou a mão a ninguém.

Agora, tiremos X e Y da festa. Se não contarmos mais apertos de mão envolvendo estas duas pessoas, reduzimos a uma festa com n casais convidados, e o número de apertos de mão de toda a gente (excepto o anfitrião, sobre quem não temos nenhuma informação) diminui exactamente 1, uma vez que toda a gente apertou a mão a X e ninguém apertou a mão a Y. Mas, pela hipótese de indução, $P(n)$, sabemos que a anfitriã apertou n mãos. Mas, de facto, a anfitriã apertou mais uma mão – a de X. Então, numa festa com $n + 1$ convidados, a anfitriã apertou $n + 1$ mãos, estabelecendo, deste modo, $P(n + 1)$.

Tendo em conta o que vimos anteriormente, podemos concluir que, numa festa com 10 casais convidados, a anfitriã deu 10 apertos de mão.

□

Muitas vezes, a resolução de alguns problemas envolve o método de arranjar um caso mais simples e um outro método, como por exemplo, contradição ou indução. Nestes casos, arranjamos um problema mais simples, de modo a podermos fazer uma conjectura e depois tentamos prová-lo por indução (ou contradição), como fizemos no problema anterior.

Às vezes, quando consideramos um problema mais simples perdem-se todos os aspectos difíceis do problema original. Nesse caso, resolver o problema mais simples não ajuda em nada a resolução do problema mais complexo.

Mais sério do que o perigo de que ao considerarmos um problema mais simples se perca a complexidade do problema original, é o perigo de considerar problemas aparentemente mais simples mas que são mais difíceis de resolver. Embora seja, geralmente, verdade que reduzindo o número de elementos de um problema reduzimos a sua complexidade, nem sempre é assim. Às vezes, reduzir o número de elementos de um determinado problema, ou eliminar algumas das suas características, resulta num problema que é mais difícil de resolver. Algumas vezes, o suposto problema mais simples é impossível de resolver. O seguinte problema ilustra o perigo envolvido ao considerarmos problemas mais simples.

PROBLEMA 1.3.5 – *Suponha que tem 10 montões de moedas com 10 moedas em cada montão. Há um montão inteiro que é composto por moedas que pesam menos 2 gramas do que deviam. Sabemos o peso correcto de uma moeda. As moedas devem ser pesadas numa balança de ponteiros, a qual nos diz quantos gramas pesa um conjunto de objectos nela colocado. Como determinar qual é o montão mais leve com o menor número de pesagens?*

Solução: Uma aproximação que falha é tentarmos simplificar o problema reduzindo o número de moedas em cada montão a uma moeda e, simplesmente, determinar qual das 10 moedas é a mais leve. Isto faz com que o número de pesagens seja muito maior que no problema original, onde se tinha 10 montões com 10 moedas cada um. De que outro modo podemos simplificar este problema?

A outra maneira óbvia de simplificar o problema é reduzir o número de montões.

O problema mais simples que pode ser apresentado, reduzindo o número de montões, é decidir qual de dois montões é mais leve. É claro que isto pode ser feito com uma pesagem, pesando uma moeda de cada um dos dois montões e determinar se têm o peso correcto de uma moeda ou se pesam menos dois gramas. No entanto, a solução para 2 montões não indica

como devemos resolver o problema com 10 montões. Depois devemos tentar resolver o problema com 3 montões.

O problema dos 3 montões pode ser resolvido numa única pesagem, assim como o problema de 10 montões. Contudo, é necessário um “insight”, ou seja, uma ideia luminosa para conseguirmos isso. Mas, infelizmente, não há nenhum método que nos proporcione o “insight”. Ao tentarmos resolver o problema mais simples, com apenas 3 montões, é mais provável que se consiga obter esse “insight”, mas não é garantido que o consigamos. Agora, tentemos determinar qual é a combinação de moedas dos diferentes montões que nos permite determinar qual dos 3 montões é o mais leve, apenas com uma pesagem.

Para que o problema dos 3 montões seja resolvido numa única pesagem, temos de incluir um determinado número de moedas de cada montão e usarmos a quantidade que pesou a menos para determinarmos qual dos montões é o mais leve. Para usar a informação relativa ao número de gramas que as moedas tinham a menos (do que teriam se fossem todas verdadeiras), temos que ter um modo de associar a quantidade de peso a menos com cada um dos montões.

O procedimento necessário para associar cada montão com a quantidade de peso a menos consiste em tirar 1 moeda do primeiro montão, 2 moedas do segundo montão e 3 moedas do terceiro. Se o ponteiro da balança mostrar menos 2 gramas, sabemos que o primeiro montão é o mais leve. Se mostrar menos 4 gramas, o segundo montão é o mais leve. Se mostrar menos 6 gramas, então o terceiro montão é o mais leve.

Agora é fácil ver que o problema original dos 10 montões é resolvido numa única pesagem do seguinte modo: tiramos 1 moeda do primeiro montão, 2 moedas do segundo montão, e assim sucessivamente, até tirarmos 10 moedas do décimo montão. Depois pesamos todas estas moedas e determinamos quantos gramas pesam a menos. O número de gramas que pesarem a menos, dividido por 2, é o número do montão que é mais leve. Assim, a solução pode ser encontrada com uma única pesagem, quando temos um número suficientemente grande de moedas em cada montão. Reduzindo o número de moedas em cada montão não simplifica o problema; aliás, isso faz com que o problema fique muito mais difícil, ao ponto de impedir que se veja a elegante solução do problema original.

□

1.4 – RELACIONAR PROBLEMAS

Quando tivermos uma Teoria de Problemas satisfatória, será possível estabelecer relações profundas e detalhadas entre problemas de diferentes tipos. Mas, mesmo sem tal teoria, ainda podemos estabelecer algumas relações básicas entre problemas diferentes.

É por isso que, quando temos um problema para resolver, é importante tentar lembrar se já vimos um problema análogo, pois a resolução de um problema análogo é de grande ajuda para a resolução do problema que queremos resolver.

Nesta secção veremos alguns exemplos de problemas semelhantes, cuja resolução de um é análoga à resolução do outro.

PROBLEMA 1.4.1 – *Encontre o elemento seguinte nesta sequência*

$1, 11, 21, 1211, 111221, \dots$

Solução: Se interpretarmos os elementos da sequência como quantidades numéricas, então parece não haver uma relação óbvia. Mas quem disse que eram números? Se olharmos para a relação entre um elemento e o seu precedente, e prestarmos atenção ao conteúdo simbólico, veremos uma relação. Cada elemento “descreve” o anterior. Por exemplo, o terceiro elemento é 21, o qual pode ser descrito como “um 2 e um 1”, isto é, 1211, que é o quarto elemento. Este pode ser descrito como “um 1, um 2 e dois 1’s”, isto é, 111221. Deste modo, o elemento seguinte é 312211 (“três 1’s, dois 2’s e um 1”).

□

PROBLEMA 1.4.2 – *Consegue determinar o próximo termo da sequência*

$1, 1, 1, 3, 1, 4, 1, 1, 3, 6, 1, 2, 3, 1, 4, 8, 1, 3, 3, 2, 4, 1, 6, \dots?$

Solução: Se seguirmos o raciocínio usado na resolução do problema anterior, veremos que é fácil a resolução deste.

Começamos com 1. Contamos o que vemos: “Um” 1 ou “1” 1. Adicionamos isso à sequência, e obtemos

$1, 1, 1.$

Contamos outra vez. Agora vemos “Três” 1’s. Adicionamos 3, 1 à sequência e obtemos

$1, 1, 1, 3, 1.$

Agora vemos “Quatro” 1’s e “Um” 3. Adicionando isto à sequência, obtemos

$1, 1, 1, 3, 1, 4, 1, 1, 3.$

Agora há “Seis” 1’s, “Dois” 3’s e “Um” 4. A sequência fica

$1, 1, 1, 3, 1, 4, 1, 1, 3, 6, 1, 2, 3, 1, 4.$

Continuando deste modo, obtemos

1, 1, 1, 3, 1, 4, 1, 1, 3, 6, 1, 2, 3, 1, 4, 8, 1, 3, 3, 2, 4, 1, 6, 1, 2.

Logo, o próximo termo da sequência dada será 1.

□

PROBLEMA 1.4.3 – *Um homem viaja com um lobo, uma cabra e um cesto de couves. A cabra não pode ficar sozinha com o lobo, senão será comida. Pela mesma razão, as couves não podem ficar sozinhas com a cabra. No entanto, o lobo não tem interesse nas couves.*

O grupo precisa atravessar um rio, e o único transporte disponível é um pequeno barco que apenas pode transportar o homem e um dos outros três elementos.

Qual é o menor número de viagens necessárias para que todo o grupo atravesse o rio?

Solução: Para resolver este problema é necessário fazer um desvio. Assim, o homem leva a cabra para a outra margem do rio, volta atrás, leva o lobo para a outra margem e traz a cabra de volta à sua posição original. Depois pega nas couves, leva-as para a outra margem e deixa-as lá com o lobo. Finalmente, volta atrás e leva a cabra para a outra margem, e deste modo, resolvemos o problema.

□

PROBLEMA 1.4.4 – *Três homens e três rapazes querem atravessar um rio. O único barco disponível pode transportar só um homem ou só dois rapazes. Todos são capazes de remar. Como é que a viagem pode ser realizada, e qual é o menor número de viagens necessárias?*

Solução: Este problema é análogo ao anterior pois o objectivo é o mesmo, ou seja, atravessar um rio respeitando algumas limitações (neste caso, é o número de pessoas que o barco pode transportar, no exemplo anterior, também era o número de elementos que o barco podia transportar e o facto de o lobo e a cabra ou a cabra e as couves não poderem ficar sós). Estes dois problemas diferem no número de elementos e no facto de, no exemplo anterior, só o homem era capaz de remar e, neste exemplo, todos são capazes de remar. Então, será de prever que a dada altura será necessário fazer um desvio para resolver o problema, assim como fizemos no problema anterior.

No início, dois rapazes são transportados para a outra margem, depois um desses rapazes volta com o barco; a seguir um homem vai para o outro lado, e o rapaz que está lá volta com o barco. Nesta altura, temos um homem no outro lado e dois homens e três rapazes no ponto de partida, e já foram feitas quatro viagens.

Repetimos o processo mais duas vezes, de modo que após um total de doze viagens os três homens estão no outro lado do rio e os três rapazes estão no ponto de partida. Depois, dois rapazes vão para o outro lado, um desses rapazes volta com o barco e leva o último rapaz para o destino final. Deste modo, foram feitas quinze viagens.

Repare que, em cada passo, a estratégia é óbvia. Há apenas um variação: no processo anterior, depois dos dois primeiros rapazes irem para a outra margem e um voltar para trás e depois um homem atravessar o rio, esse rapaz poderia ter levado o terceiro rapaz para a outra margem e então depois voltar para trás com o barco. Para realizar este processo são necessárias o mesmo número de viagens.

□

PROBLEMA 1.4.5 – Seis bailarinas querem se dispor em três filas, mas em cada fila deverão estar três bailarinas. Como deverão se colocar?

Solução: Se pensarmos num triângulo vemos que tem três arestas que representam as três filas, e como cada vértice está ligado a duas arestas, a bailarina que ficar na posição do vértice será contada duas vezes. Deste modo, três bailarinas em três filas somam nove bailarinas, mas as três bailarinas que estão nas posições dos três vértices são contadas duas vezes, logo subtraímos três às nove bailarinas e obtemos, exactamente, seis bailarinas. E, deste modo, o problema fica resolvido. Ver Fig.1.

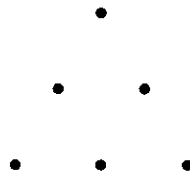


Fig.1

□

PROBLEMA 1.4.6 – Distribua 24 pessoas em 6 filas, de modo que cada fila tenha 5 pessoas.

Solução: Este problema é semelhante ao anterior, portanto, é provável que usando o raciocínio usado anteriormente se consiga chegar à solução. É lógico pensarmos num polígono com 6 lados (pois queremos distribuir as pessoas em 6 filas), logo só poderá ser o hexágono. Como um hexágono tem seis vértices, então seis bailarinas serão contadas duas vezes. Assim, 5 bailarinas em 6 filas somam 30 bailarinas, mas se subtrairmos 6 bailarinas (as 6 que ficam nos vértices e são contadas duas vezes) obtemos 24 bailarinas, como pretendido. Ver Fig.2. E, deste modo, resolvemos o problema.

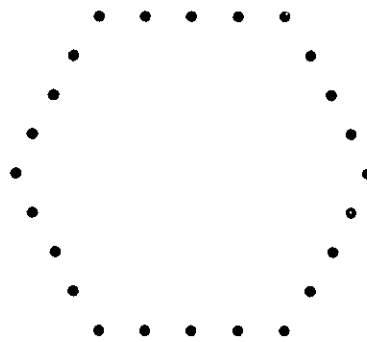


Fig.2

□

O problema seguinte tem significado histórico, pois o célebre matemático Leonhard Euler (1707-1783) contribuiu muito para a sua resolução.

PROBLEMA 1.4.7 – (*As sete Pontes de Königsberg*). Na cidade de Königsberg há sete pontes. (Actualmente, segundo algumas contagens, tem oito pontes). Mas o problema com oito pontes tem uma solução diferente - veja problema seguinte. A Fig.1 mostra as sete pontes. O problema consiste em desenhar um caminho contínuo que atravessasse cada ponte exactamente uma vez.

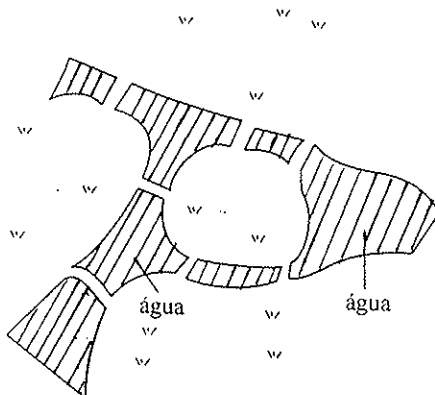


Fig.1

Solução: Na figura, as partes com água estão a tracejado e a terra e as pontes estão a branco. Repare que cada um dos quatro pedaços de terra têm acesso a um número ímpar de pontes. Assim, temos a seguinte situação: se um caminho começa numa região em particular, então não pode terminar lá. Por outro lado, se o caminho não começar nessa região então deverá terminar nela.

Suponha que uma região R tem três pontes. Assuma que o trajecto começa dentro de R. Num primeiro movimento, o trajecto passa por uma ponte de R e vai para o exterior de R. Mais tarde (talvez não imediatamente), o trajecto pode atravessar outra ponte de R; desta vez atravessa de fora para dentro. Agora temos apenas uma ponte de R que não foi atravessada. Como o trajecto tem que passar por todas as pontes apenas uma vez, então depois deverá passar pela ponte de R que sobra. Agora todas as pontes de R foram atravessadas e o trajecto está fora de R. Não pode voltar atrás, para dentro de R, porque todas as pontes de R já foram utilizadas. Aplicamos o mesmo raciocínio às regiões que têm 5 ou qualquer número ímpar de pontes.

Deste modo, concluímos que não há caminho que verifique as condições do problema. □

PROBLEMA 1.4.8 – A Fig.2 mostra a cidade de Königsberg com oito pontes. Mostre que agora é possível desenhar um caminho contínuo que atravessa cada ponte exactamente uma vez.

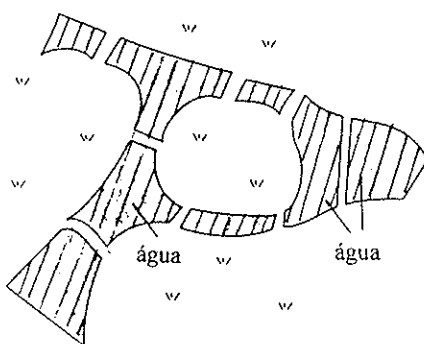


Fig.2

Solução: Repare que duas regiões têm acesso a um número ímpar de pontes e outras duas regiões têm acesso a um número par de pontes.

Para conseguir um caminho que verifique as condições do problema temos que começar o percurso numa região que tenha acesso a um número ímpar de pontes e terminar na outra região que tem acesso a um número ímpar de pontes.

Experimente e verá que consegue desenhar vários caminhos que verificam as condições do problema.

□

PROBLEMA 1.4.9 – Considere a Fig. 1. Mostre que é possível passar um lápis ao longo da figura de modo a percorrermos todos os segmentos uma e uma só vez, sem levantar o lápis do papel.

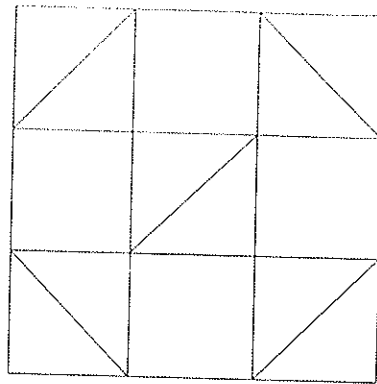


Fig. 1

Solução: Este problema é semelhante ao anterior e resolve-se utilizando um raciocínio análogo ao utilizado anteriormente. Repare que todos os vértices têm um número par de arestas excepto os dois vértices do centro, que têm cinco arestas. Então, a estratégia consiste em começar num desses vértices com cinco arestas e acabar no outro. Um possível trajecto é mostrado na Fig. 2, onde os números denotam a sequência do percurso.

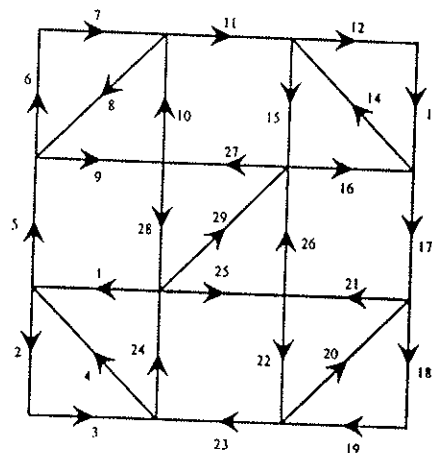
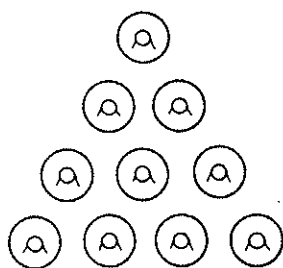


Fig. 2

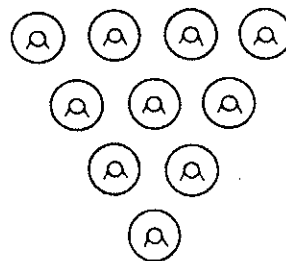
□

PROBLEMA 1.4.10 – Suponha que tem uma pirâmide construída com 10 bolas de bowling. Ver Fig.1. Como inverter a pirâmide deslocando apenas 3 bolas? Ver Fig.2.



Estado inicial

Fig.1



Estado final

Fig.2

Solução: Podemos resolver este problema usando o método da contradição (e não apenas tentativa e erro).

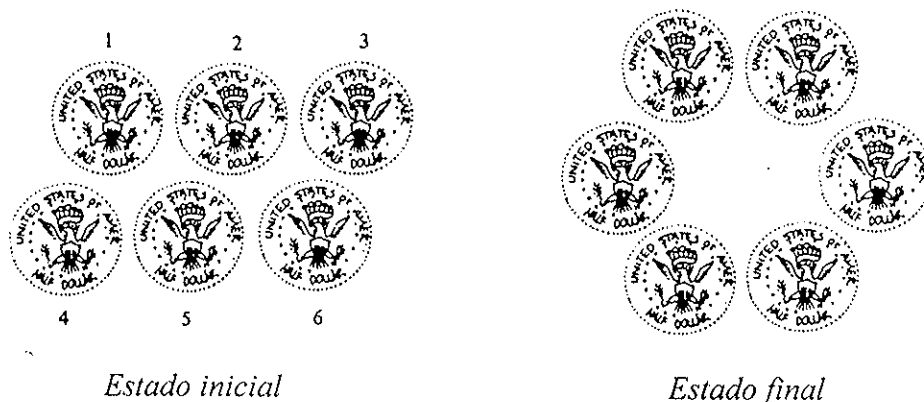
Para aplicar o método da contradição temos que ter um conjunto bem definido de possibilidades. O menor conjunto de possibilidades consiste em perguntar onde ficará a linha com quatro bolas no estado final em relação à sua posição no estado inicial. Há seis possibilidades para isso – por cima da linha que tem uma bola no estado inicial; na linha que tem uma bola; na linha que tem duas bolas, na linha que tem três bolas; na linha que tem quatro bolas ou por baixo da linha que tem quatro bolas. Usando o método da contradição vamos eliminar todas as possibilidades, excepto uma.

É óbvio que, se a linha que tem quatro bolas ficar por cima da linha que tem uma bola ou por baixo da linha que tem quatro bolas, teremos que deslocar mais do que 3 bolas, contradizendo a restrição de usarmos apenas três deslocações. Deste modo, eliminamos estas duas possibilidades. Para transformar a linha que tem uma bola no estado inicial na linha que tem quatro bolas no estado final requer, no mínimo, três movimentos de bolas (para obter apenas este aspecto do estado final) . E, além disso, a linha que tem duas bolas terá que ser a linha que tem três bolas, produzindo, deste modo, mais do que três movimentos. Se a linha que tem quatro bolas no estado inicial continuar a ser a linha com quatro bolas no estado final, todas as seis bolas que estão por cima dessa linha terão que ser deslocadas, contradizendo as condições do problema. Finalmente, se a linha que tem três bolas se transformar na linha que tem quatro bolas no estado final, as três bolas que estão por cima da linha que tem três bolas terão que ser deslocadas e mais uma bola da linha com quatro bolas também terá que ser deslocada, contradizendo a restrição de deslocarmos apenas três bolas. Este resultado deixa apenas a possibilidade de transformar a linha com duas bolas no estado inicial na linha com quatro bolas no estado final, produzindo a solução de uma maneira bastante directa: as duas bolas das extremidades da linha com quatro bolas são deslocadas para as posições da extremidade da linha com duas bolas, e a bola do topo no estado inicial é deslocada para o meio da linha que fica por baixo da linha com duas bolas e obtemos, assim, o estado final.

Provavelmente, a maneira mais comum de resolver este problema não é usar o método da contradição mas, em vez disso, olhar para um subconjunto de 7 ($=10 - 3$) bolas do estado inicial que permanecem nas mesmas posições no estado final. Geralmente, se não sabemos o número mínimo de movimentos que se podem fazer para transformar o estado inicial no estado final num problema deste tipo, devemos olhar para o maior subconjunto de elementos do estado inicial que permanecem na mesma posição no estado final, e se subtrairmos esse número ao número total de elementos, obtemos o menor número de movimentos.

□

PROBLEMA 1.4.11 – Suponha que tem 6 moedas dispostas em duas linhas (como nos mostra o lado esquerdo da Fig.1). Como deslocar apenas 2 moedas de modo a obter a disposição hexagonal mostrada no lado direito da Fig.1?



Estado inicial

Estado final

Fig.1

Solução: Este problema é semelhante ao anterior. Os dois problemas envolvem uma distribuição de objectos que devem ser reorganizados no menor número de movimentos de modo a obter uma outra configuração.

Por analogia ao problema das bolas de bowling, é útil perguntar quais são as quatro bolas (= 6 – 2) que se mantêm na mesma posição e quais são as duas bolas que devem ser deslocadas, para passarmos do estado inicial ao final. Mas, uma vez que há apenas $(6 \times 5) / 2 = 15$ combinações de duas moedas que se deslocam, será relativamente simples investigar todas as possibilidades, usando o método da contradição.

Contudo, de acordo com o último parágrafo da resolução do problema anterior, uma estratégia útil seria olhar para o maior subgrupo que ocupa a mesma posição no estado inicial e no estado final e, através desta estratégia perceptual, resolver este problema.

É fácil verificar que as moedas nas posições 1, 2, 4 e 6 estão exactamente na mesma configuração que as quatro moedas do topo do estado final. Assim, chegamos à solução deslocando as moedas 3 e 5 para as duas posições de baixo. Uma solução análoga pode ser encontrada mantendo as moedas 1, 5, 6 e 3 na mesma posição (formando a parte de baixo do hexágono) e deslocando as moedas 2 e 4 para as duas posições do topo. Contudo, estes movimentos são os únicos dois dos 15 movimentos possíveis de duas moedas que resolvem este problema.

Cada um destes dois problemas podem ser resolvidos com, essencialmente, o mesmo método, embora o número de moedas ou bolas que o jogador tem que deslocar seja diferente de problema para problema.

□

1.5 – ANALISAR UM PROBLEMA EM SUBPROBLEMAS

Um método de resolução de problemas importante consiste em definir subproblemas com vista a facilitar a resolução do problema original. A este método também se chama “Separar um problema em partes”. De facto, o objectivo é substituir um problema difícil em dois ou mais problemas mais simples.

É claro que, se já sabemos como resolver os subproblemas, ou se alguns deles são análogos a problemas que já resolvemos, então é óbvio que deve ser mais fácil resolver o conjunto de problemas mais simples do que o problema original.

Este método é vantajoso para atacar problemas que requerem uma sequência de mais de duas ou três acções para o resolver – que é o que a maioria dos problemas não triviais requerem. Contudo, alguns problemas não são muito simplificados com este método, são os chamados problemas de “insight” porque requerem poucos passos para serem resolvidos, desde que o “insight” seja encontrado.

É claro que este método também não funciona se não conseguirmos arranjar um subproblema plausível. Contudo, se o problema parece ter muitos passos em vez de ser um problema de “insight” é vantajoso passar algum tempo a tentar encontrar um subproblema adequado, devido ao enorme poder deste método.

O problema visto anteriormente no qual três homens e três rapazes queriam atravessar um rio é um exemplo de um problema que é resolvido utilizando este método, onde o subproblema consiste em levar um homem para o outro lado do rio e voltar com o barco ao ponto de partida.

Vejamos alguns exemplos de problemas que se resolvem facilmente usando este método.

PROBLEMA 1.5.1 – *Um helicóptero que levava três homens caiu no deserto (mas todos sobreviveram). Os homens decidiram que a sua melhor hipótese de sobreviverem consistia em se separarem em diferentes direcções com a esperança de encontrarem ajuda. Antes de se separarem, depararam-se com o problema de encontrarem uma divisão igual dos seus “stocks” de água e garrafas. Eles tinham 5 garrafas cheias de água, 5 garrafas “meias cheias” de água e 5 garrafas vazias. Todas as garrafas são do mesmo tamanho. Eles queriam dividir tanto a quantidade de água como o número de garrafas, igualmente, entre eles. Como podem eles conseguir isso?*

Solução: Se não consegue resolver este problema, considere a seguinte sugestão. Deve, inicialmente, definir três subproblemas que consistem na tentativa de dividir as garrafas cheias igualmente pelos três homens, dividir as garrafas “meias cheias” igualmente pelos três homens, e dividir as garrafas vazias igualmente pelos três homens. É óbvio que estes subproblemas não vão resolver o problema. Um subproblema alternativo é o seguinte: primeiro verificamos que a quantidade total de água é $15/2$ garrafas cheias de água e segundo, que o número total de garrafas é 15. Disto, podemos concluir que, cada pessoa terá que levar $5/2$ garrafas cheias de água e 5 garrafas.

Os subproblemas relevantes consistem na tentativa de dar a cada homem $5/2$ garrafas cheias de água distribuídas por 5 garrafas. Há várias maneiras de resolver o primeiro subproblema, e apenas uma delas irá impossibilitar a resolução dos outros dois subproblemas. A única maneira que impede a obtenção do objectivo é dar ao primeiro homem todas as garrafas “meias cheias”. Qualquer outra maneira de dar ao primeiro homem $5/2$ garrafas

cheias de água e 5 garrafas irá permitir a resolução dos outros dois subproblemas. Então, para resolver o subproblema para o primeiro homem podemos fazer o seguinte: dar ao primeiro homem 1 garrafa cheia de água, 3 garrafas “meias cheias” e 1 garrafa vazia, ou dar ao primeiro homem 2 garrafas cheias de água, 1 garrafa “meia cheia” e 2 garrafas vazias. Desde que o primeiro subproblema seja resolvido, é fácil resolver os outros dois subproblemas. □

PROBLEMA 1.5.2 – O ás e o 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8 de copas são colocados, virados para cima, numa fila em cima da mesa. Depois, um conjunto de oito cartas contendo o ás e o 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8 de espadas são embaralhados e colocados à frente do jogador, virados para baixo. À medida que cada carta de espadas é virada, a copa correspondente é tirada da fila. Qual é a probabilidade de que todas as copas sejam tiradas sem nunca ocorrer um intervalo (buraco) na fila de copas?

Solução: Considere como subproblema a probabilidade de que a primeira copa tirada não cause um buraco na fila.

A probabilidade obtida ao resolver o primeiro subproblema (tirar uma copa sem produzir um buraco na fila) é, exactamente, $2/8$. Esta probabilidade resulta do facto de haver duas posições finais (nas extremidades) da fila, e apenas essas duas cartas, que estão nessas posições finais, podem ser tiradas sem causar um buraco. Como há 8 cartas na fila, a probabilidade é $2/8$.

Uma vez que o primeiro subproblema está resolvido e a sua probabilidade determinada, o segundo subproblema consiste em determinar a probabilidade da segunda carta ser tirada das extremidades da fila. Se para o primeiro subproblema esta probabilidade foi encontrada com sucesso, então há ainda duas cartas nas extremidades, mas apenas sete cartas no total. Assim, a probabilidade de tirar, com sucesso, a segunda carta das extremidades da fila é $2/7$.

Continuamos deste modo, definindo, sucessivamente, subproblemas para tirar cartas de cada extremidade da fila até todas as cartas serem tiradas. A probabilidade de todos os subproblemas serem resolvidos com sucesso é $\frac{2}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{2}$, ou $1/315$. A probabilidade encontrada para o conjunto dos subproblemas é, simplesmente, o produto das probabilidades encontradas para cada subproblema. Repare que este problema de probabilidades representa uma interessante variação no uso do método de analisar um problema em subproblemas, uma vez que há dois conjuntos paralelos de subproblemas envolvidos neste problema. Por um lado, há a série de subproblemas que consistem em tirar cartas das extremidades da fila, reduzindo progressivamente o comprimento da fila sem produzir um buraco. Por outro lado, há a série de subproblemas que consistem em determinar a probabilidade de cada um desses subproblemas. □

PROBLEMA 1.5.3 – Cinco quadrados são inseridos num rectângulo 3×2 , como ilustra a Fig.1. Três dos quadrados têm a letra A, um quadrado tem a letra B, e um quadrado tem a letra C. Qualquer quadrado pode ser deslocado, dentro do rectângulo, para um quadrado adjacente, desde que o quadrado para onde se desloca esteja vazio. O problema consiste em fazer uma sequência de movimentos de modo a obter o estado final, como mostra a Fig.2.

A	A	C
A		B

Fig.1

A	A	B
A		C

Fig.2

Solução: Deslocando os quadrados A, B e C nos quatro quadrados da direita do rectângulo não resolvemos o problema, pois os três quadrados apenas podem ser deslocados de um modo cíclico dentro dos quatro quadrados, o que nunca muda a ordem dos quadrados B e C, precisamente, o que é pretendido no estado final. A dada altura, os quadrados B e C têm que ser separados na primeira e terceira colunas do rectângulo com o objectivo de obtermos uma mudança na ordem cíclica dos quadrados B e C.

Uma definição mais específica do subproblema consiste em separar os quadrados B e C para os lados opostos do rectângulo. Ver Fig.3. Repare que depois dos quadrados B e C serem separados como no subproblema 1, é fácil deslocar B para próximo de C (que é o subproblema 2) e depois deslocar os A's de modo que B possa ficar por cima de C na terceira coluna. Assim, no caso deste subproblema particular, verificamos rapidamente que podemos resolver o problema original partindo do subproblema. Agora, só falta obter o subproblema 1 partindo do estado inicial.

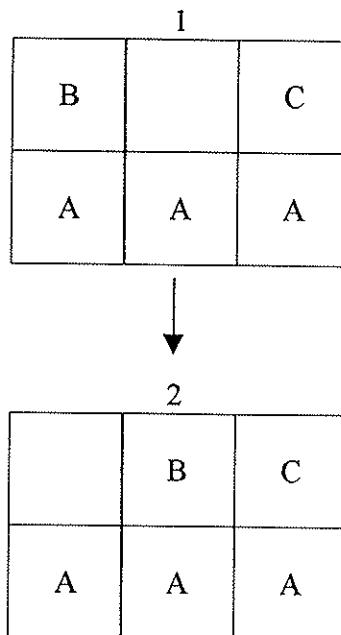


Fig.3

Para obter o subproblema 1, partindo do estado inicial, basta fazer a sequência de movimentos ilustrada na Fig.4. E, assim, resolvemos o problema.

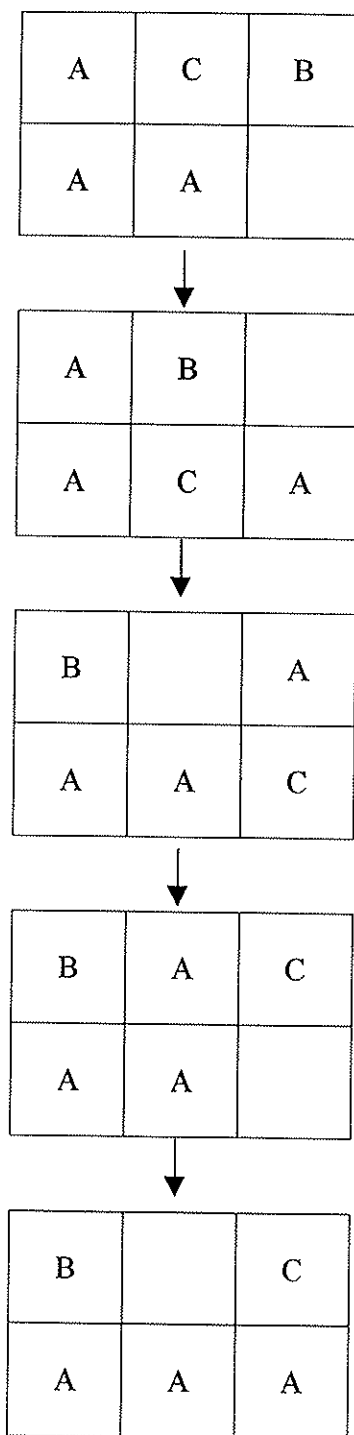


Fig.4

□

PROBLEMA 1.5.4 – Todos os dias, o João vai para o trabalho a pé e volta para casa de bicicleta ou vai para o trabalho de bicicleta e volta para casa a pé. De qualquer modo, a viagem de ida e volta demora 1 hora. Se ele fosse e voltasse de bicicleta, demoraria 30 minutos. Quanto tempo demora uma viagem de ida e volta, se ele for e voltar a pé?

Solução: O primeiro subproblema a ser definido consiste em determinar quanto tempo ele demora de bicicleta numa viagem (de ida e de volta). Depois podemos determinar, como segundo subproblema, quanto tempo demora se for a pé (apenas o percurso de ida ou de volta). Depois é trivial determinar quanto tempo demora se fizer os dois percursos a pé, e o problema fica resolvido. Sabemos que se for de bicicleta, demora 30 minutos a fazer os dois percursos, donde se conclui que demora 15 minutos a fazer cada percurso. Se esses 15 minutos forem subtraídos a 1 hora (que é o que demora quando faz um percurso a pé e outro de bicicleta), restam 45 minutos para o percurso a pé. Duplicando isto obtemos 90 minutos para os dois percursos a pé, que é a solução do nosso problema.

□

Muitos problemas de álgebra são receptivos a este método. Em vez de trabalhar directamente para determinar a quantidade desconhecida, usamos subproblemas para determinar outras quantidades desconhecidas que estão relacionadas com a quantidade pretendida por uma relação conhecida. Quando todas as quantidades desconhecidas, excepto a quantidade do problema original, forem determinadas, podemos usar a relação conhecida para resolver o problema original.

Vejamos um problema deste tipo.

PROBLEMA 1.5.5 – *A Susana trouxe uma certa quantidade de chapéus para vender no mercado. De manhã, ela vendeu os seus chapéus a 300\$00, recebendo 1800\$00. À tarde, reduziu o preço para 200\$00 cada e vendeu o dobro dos que vendeu de manhã. Quanto recebeu a Susana pela venda dos chapéus?*

Solução: O primeiro subproblema consiste em determinar quantos chapéus foram vendidos de manhã. A partir disto, é trivialmente fácil determinar o número de chapéus vendidos à tarde, que é o segundo subproblema.

A solução para o subproblema é a seguinte: se a Susana recebeu 1800\$00, de manhã, vendendo os chapéus a 300\$00, é evidente que vendeu 6 chapéus. Isto implica que ela vendeu 12 chapéus à tarde. Portanto, a Susana recebeu $1800\$00 + 2400\$00 = 4200\$00$ durante o dia.

□

Os dois problemas anteriores são, de facto, muito simples, mas o objectivo da sua apresentação foi ilustrar o método de analisar um problema em subproblemas.

PROBLEMA 1.5.6 – *Seja o paralelogramo $[ABCD]$ ilustrado na Fig.1. Sabendo que AE e CF são perpendiculares a BD , prove que $\overline{AE} = \overline{CF}$.*

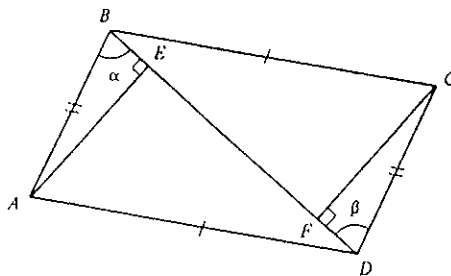


Fig.1

Solução: Uma maneira comum de provar que dois segmentos de recta têm o mesmo comprimento consiste em provar que são lados correspondentes de triângulos congruentes. Neste caso, isto significa que temos que provar que o triângulo [ABE] é congruente com o triângulo [CDF] ou provar que o triângulo [AED] é congruente com o triângulo [CFB]. Estes dois subproblemas alternativos parecem ser equivalentes e, portanto, podemos escolher, arbitrariamente, o subproblema que consiste em provar que o triângulo [ABE] é congruente com o triângulo [CDF].

Para provar que o triângulo [ABE] é congruente com o triângulo [CDF] é útil definir, previamente, o subproblema que consiste em provar que o triângulo [ABD] é congruente com o triângulo [CDB].

O triângulo [ABD] é, evidentemente, congruente com o triângulo [CDB], uma vez que os três lados correspondentes são iguais. Disto, podemos concluir que o ângulo α é igual ao ângulo β . Tendo em conta isto, podemos concluir que o triângulo [ABE] é congruente com o triângulo [CDF], uma vez que são ambos triângulos rectângulos e há ângulos correspondentes (os ângulos que estão ao lado do ângulo recto) que são iguais e a hipotenusa também é igual. Agora que provamos que estes triângulos são congruentes, podemos ver que o lado [AE] é igual ao lado [CF] por serem lados correspondentes de triângulos congruentes e, assim, o problema fica resolvido.

□

PROBLEMA 1.5.7 – Considere a Fig. 1. Sabendo que o diâmetro do círculo é igual a 10 cm, determine \overline{AC} .

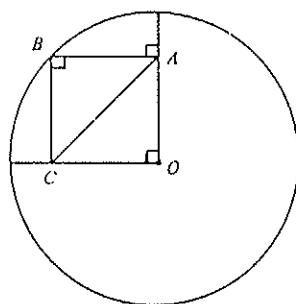


Fig. 1

Solução: À partida, este problema parece ser bastante difícil de resolver uma vez que temos pouca informação. Contudo, um subproblema razoável para determinar \overline{AC} consiste em determinar algum triângulo com o qual o triângulo [ABC] é congruente, onde o comprimento de um ou mais lados desse triângulo sejam conhecidos. Alternativamente, podemos tentar determinar algum triângulo congruente com o triângulo [AOC].

É claro que o triângulo [ABC] é congruente com o triângulo [AOC], mas isto não nos ajuda muito, pois não conhecemos os comprimentos de nenhum dos lados destes dois triângulos. Não há outros triângulos explicitamente desenhados na Fig. 1. Assim, temos que desenhar linhas adicionais com o objectivo de definir novos triângulos que possam ser congruentes com os triângulos já dados. É óbvio que temos que desenhar linhas que resultem num triângulo com um ou mais lados cujo comprimento é conhecido. Os únicos comprimentos conhecidos são o diâmetro e o raio do círculo. Assim, o triângulo construído deve incluir um diâmetro ou raio. Tendo isto em conta, mais cedo ou mais tarde, teremos a ideia de desenhar o raio [OB] para definir os triângulos [BOA] e [BOC], os quais são ambos congruentes com os triângulos originais [ABC] e [AOC] (o que se prova facilmente). Disto,

concluimos que a linha [AC] é igual a [OB], por serem lados correspondentes de triângulos congruentes e, uma vez que [OB] é o raio do círculo, sabemos então que [AC] é igual ao raio do círculo cujo comprimento é 5 cm.

□

A prática comum em Matemática de conjecturar e provar um ou mais lemas como subproblemas com o objectivo de provar teoremas, é um bom exemplo do uso deste método.

O método de indução matemática também usa este método pois divide a prova em duas partes: em primeiro lugar, prova que é verdade para $n = 1$ e depois mostra que se for verdade para n , também é verdade para $n + 1$.

1.6 – VOLTAR PARA TRÁS

O método de voltar para trás é semelhante ao método da contradição. Contudo, o método de voltar para trás difere no modo como o objectivo é considerado em relação aos dados. No método da contradição, o objectivo é considerado como fazendo parte da informação dada, no entanto, no método de voltar para trás, o objectivo não faz parte da informação dada. Começamos no fim e tentamos determinar afirmações precedentes, as quais não precisam ser afirmações dadas mas que, quando todas juntas, irão produzir o objectivo.

Porque é que queremos inverter a situação desta maneira, partindo dos objectivos para os dados em vez de partir dos dados para o objectivo? Quando é que este método é mais apropriado, e porquê? Ou seja, quais são os problemas que devem ser resolvidos usando este método?

O método de voltar para trás é, provavelmente, mais útil se o problema tiver um único objectivo específico, como é o caso de todos os problemas para provar. Por outro lado, nos problemas em que o objectivo não é específico e há, de facto, uma variedade de objectivos, usar este método só tem desvantagens. Este método é apropriado para problemas que pedem para provar alguma coisa mas, geralmente, não é conveniente para problemas que pedem para encontrar algo, embora alguns problemas deste tipo também se resolvam usando este método.

Vejam alguns exemplos de problemas que são resolvidos por este método.

PROBLEMA 1.6.1 – *A Maria tinha uma cesta com maçãs e encontrou um amigo a quem deu metade das maçãs que tinha e mais meia maçã. Depois encontrou outro amigo a quem deu, também, metade das maçãs que ainda tinha e mais meia maçã. Continuou assim, até encontrar um quinto amigo a quem deu metade das maçãs que restavam e mais meia maçã, ficando sem nenhuma maçã.*

Quantas maçãs tinha a Maria antes de encontrar o primeiro amigo?

Solução: Uma das dificuldades na resolução deste problema está relacionada com a tendência que temos para procurar a solução seguindo a sequência em que os dados nos são apresentados no enunciado. Mas a melhor maneira de resolver este problema é começar do fim para o princípio, ou seja, utilizar o método de voltar para trás. É o mais natural neste problema, pois o que conhecemos é a quantidade de maçãs que, no fim, a Maria tem no cesto – nenhuma maçã – e não as que tem no princípio.

Assim, se no fim a Maria não tem nenhuma maçã, então antes de encontrar o quinto amigo tinha uma, pois só assim, depois de lhe dar metade das que tinha, isto é, meia, e mais meia maçã, fica sem nenhuma.

Da mesma forma, se depois de encontrar o quarto amigo fica com uma maçã, então antes de o encontrar tinha 3, pois só assim, depois de lhe dar metade das maçãs, isto é, uma e meia, e, mais meia maçã, poderá ficar com uma.

Seguindo o mesmo raciocínio, concluímos que antes de encontrar o terceiro amigo tinha 7 maçãs, pois só assim, depois de lhe dar metade das maçãs, isto é, três e meia, e mais meia maçã, poderá ficar com três.

Do mesmo modo, concluímos que antes de encontrar o segundo amigo, a Maria tinha 15 maçãs e antes de encontrar o primeiro amigo, tinha 31 maçãs.

□

PROBLEMA 1.6.2 – Três pessoas jogam um jogo no qual uma pessoa perde o jogo e duas pessoas ganham. O jogador que perde tem que duplicar a quantidade de dinheiro que cada um dos outros jogadores tem nessa altura. Os três jogadores combinam jogar três jogos. No final dos três jogos, cada jogador perdeu um jogo e cada jogador tem 8 contos.
Qual era o montante inicial de cada jogador?

Solução: À primeira vista, parece que a informação é insuficiente para determinar a resposta. Contudo, como os três jogadores acabaram com a mesma quantidade de dinheiro, 8 contos, é possível calcular o montante inicial de cada um se resolvermos o problema usando o método de voltar para trás. Denominemos o primeiro jogador que perde por J_1 , o segundo por J_2 e o terceiro por J_3 .

No fim do terceiro jogo, J_1 , J_2 e J_3 têm 8 contos cada um. Voltando para trás, no final do segundo jogo, J_1 e J_2 tinham que ter 4 contos cada um, uma vez que ambos ganharam o terceiro jogo (J_3 é que perdeu), e assim, ambos duplicaram o seu montante. Uma vez que J_1 e J_2 ganharam 4 contos cada um no terceiro jogo, J_3 deve ter perdido 8 contos no terceiro jogo, então J_3 tinha 16 contos no final do segundo jogo. Agora voltamos para trás para determinar os montantes de cada jogador no início do primeiro jogo.

A solução deste problema, obtida usando o método de voltar para trás, está representada na Fig.1, onde observamos que no início, J_1 tinha 13 contos, J_2 tinha 7 contos e J_3 tinha 4 contos.

	J_1	J_2	J_3
Fim do 3º jogo	8	8	8
Fim do 2º jogo	4	4	16
Fim do 1º jogo	2	14	8
Início	13	7	4

Fig.1

Repare que, se os jogadores não tivessem terminado todos os jogos com a mesma quantidade de dinheiro, seria impossível determinar com quanto começou cada jogador, porque a ordem pela qual os jogadores ganharam ou perderam faria diferença.

Contudo, neste exemplo, a ordem pela qual os jogadores ganharam ou perderam os jogos não faz diferença para determinar o montante inicial de cada jogador.

Também, se tivéssemos nomes para os jogadores, não poderíamos dizer quem começou com 13 contos, quem começou com 7 contos e quem começou com 4 contos, a menos que se conhecesse a ordem pela qual eles ganharam. Neste exemplo, apenas denominamos o primeiro jogador que perde por J_1 , o segundo por J_2 e o terceiro por J_3 . Isto estava completamente adequado, uma vez que o problema não pedia para associarmos os montantes aos nomes dos jogadores.

Este problema é um exemplo extremo da utilidade do método de voltar para trás, uma vez que é praticamente impossível resolvê-lo de outro modo.

□

PROBLEMA 1.6.3 – Quinze moedas são colocadas em cima numa mesa à frente de dois jogadores. Os jogadores alternam a vez de jogar; cada um tira de 1 a 5 moedas, n vezes, até um jogador tirar a última moeda da mesa, ganhando as 15 moedas. Haverá um método de jogar que garanta a vitória? Se há, então qual é?

Solução: O estado final que permite ganhar o jogo consiste em haver um número de moedas na mesa entre 1 e 5 na última jogada. Neste estado, o último jogador pode tirar todas as moedas que estão na mesa e ganhar o jogo. Agora, será que podemos voltar para trás deste estado de possibilidades e conjecturar um estado precedente para o adversário no qual, faça ele o que fizer, não altera o estado final desejável?

É claro que se confrontarmos o adversário com 6 moedas na jogada anterior, não interessa quantas moedas ele/ela tira (de 1 a 5) que ainda ficam de 1 a 5 moedas para a vez do último jogador, dando-lhe a vitória.

Assim, o objectivo é confrontar o adversário com 6 moedas na penúltima jogada. Mas não podemos fazer isso na primeira jogada, por isso temos que voltar para trás outra vez e perguntar qual é a posição precedente que temos que ter para que, faça o adversário o que fizer, possamos ter 6 moedas após a sua jogada.

Após pensar um pouco, percebemos que se pudermos confrontar o adversário com 12 moedas na jogada anterior à nossa, então não interessa quantas moedas ele/ela tira (de 1 a 5), que podemos tirar um número suficiente de moedas para confrontá-lo com 6 moedas na próxima jogada. Deste modo, queremos confrontar o adversário com 12 moedas, e podemos fazê-lo se na primeira jogada tirarmos 3 moedas da mesa.

Concluimos, assim, a resolução do problema e podemos constatar que o método de voltar para trás foi muito útil na resolução do mesmo.

□

Uma prova do Teorema de Pitágoras pode ser obtida usando o método acima referido.

PROBLEMA 1.6.4 – Sabemos que segundo o Teorema de Pitágoras, para qualquer triângulo rectângulo, $c^2 = a^2 + b^2$, onde c é o comprimento da hipotenusa. Prove este Teorema, onde os dados são, primeiro, os axiomas da Geometria Euclideana; segundo, a definição da área de um rectângulo; e, terceiro, a suposição de que a área de figuras que não se sobrepõem é aditiva.

Solução: Em vez de tentar usar os dados na tentativa de derivar a expressão pretendida, é muito mais simples olhar para a expressão pretendida e reparar que ela está a afirmar que a área do quadrado de lado c , construído na hipotenusa, é igual à soma das áreas dos quadrados com lados a e b , construídos nos outros lados do triângulo rectângulo. Esta solução está representada na Fig. 1.

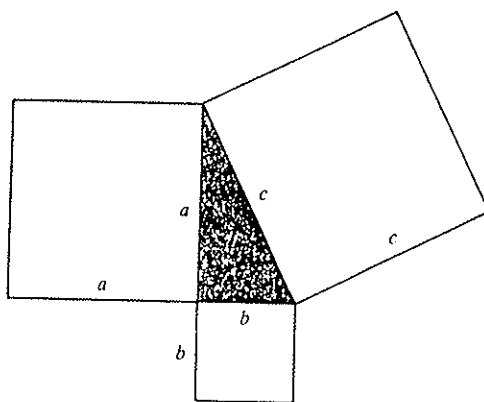


Fig. 1

Assim, partindo da expressão $c^2 = a^2 + b^2$ e usando o método de voltar para trás obtivemos um subproblema que parece ser mais fácil de trabalhar do que o problema original. nomeadamente, mostrar que a área do quadrado maior de lado c é igual à soma das áreas dos quadrados menores de lados a e b .

Para provar que a afirmação do subproblema é verdadeira, precisamos arranjar expressões para as áreas dos três quadrados que estejam nos mesmos termos, só então é que podemos determinar se a soma das áreas dos dois quadrados menores é igual à área do quadrado maior. Uma vez que a área do triângulo original é a base para qualquer relação entre as áreas dos três quadrados, parece natural tentar expressar a área de cada quadrado em termos da área do triângulo original, T .

É bastante simples reflectir o triângulo T nos quadrados construídos nos catetos a e b .

Assumindo que $a > b$, podemos dispor dois triângulos no quadrado de lado a e obter, ainda, um rectângulo com área $a(a - b)$. No caso do quadrado menor de lado b , dois triângulos T irão formar um rectângulo que tem uma área maior que a do quadrado de lado b . A área obtida pelos dois triângulos T é igual à área do quadrado de lado b mais um rectângulo com área $b(a - b)$. Tudo isto é mostrado na Fig.2. Assim, podemos substituir os termos $a^2 + b^2$ por $4T + a(a - b) - b(a - b) = 4T + (a - b)^2$.

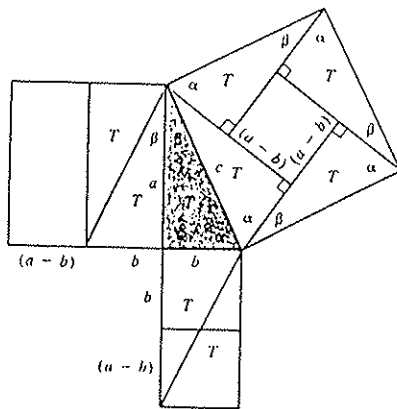


Fig.2

Conseguir dispor os triângulos T no quadrado maior (de lado c) é um desafio. Contudo, com a ideia de reflectir o triângulo original sobre o lado comum com os vários quadrados construídos nos seus lados, chegamos à conclusão que devemos construir quatro triângulos T dentro do quadrado de lado c , como nos mostra a Fig.2. Para construir os quatro triângulos T dentro do quadrado maior, a propriedade mais crítica do triângulo original e que devemos reparar é que $\alpha + \beta = 90^\circ$. Tirando quatro triângulos T do quadrado de lado c resta um quadrado de lado $(a - b)$ no meio dos quatro triângulos. Então a área do quadrado maior é $c^2 = 4T + (a - b)^2$, exactamente igual ao que foi obtido para a soma das áreas dos outros dois quadrados. Deste modo, a área do quadrado construído no lado c é igual à soma das áreas dos quadrados construídos nos lados a e b , e assim, o Teorema de Pitágoras fica demonstrado.

Talvez esta não seja a demonstração do Teorema de Pitágoras mais simples, mas é aqui apresentada com o objectivo de ilustrar este método.

□

2 – TIPOS DE PROBLEMAS

2.1 – PROBLEMAS DE LÓGICA

A lógica tem um papel importante em todos os problemas que resolvemos. Mas alguns problemas têm uma natureza mais geométrica, outros são problemas mais relacionados com a contagem e probabilidades, e há ainda outros que são mais analíticos.

Neste subcapítulo, usaremos a lógica como a ferramenta mais importante para formular e resolver problemas.

Começaremos com um problema clássico do género: “Pessoas que são sinceras e pessoas que são mentirosas.”

PROBLEMA 2.1.1 – *Suponha que está numa ilha onde a população é de dois tipos: mentirosos e sinceros. Quando fazemos uma pergunta cuja resposta é sim/não, se a pessoa é sincera diz sempre a verdade e o mentiroso, mente sempre.*

Que pergunta podemos fazer a alguém que se encontre na ilha para determinar se essa pessoa é mentirosa ou sincera?

Solução: Se fizermos uma pergunta directa do tipo: “É uma pessoa sincera?” então uma pessoa sincera responderá “Sim” e o mentiroso (que mente sempre) também responderá “Sim”. Obteremos um resultado semelhante se perguntarmos “É mentiroso?”. Assim, uma pergunta directa e elementar não nos permite distinguir o mentiroso do sincero.

Deste modo, será aconselhável fazer uma pergunta do tipo “se-então”. Provavelmente, será mais relevante fazer uma questão da forma “Se fosse uma pessoa sincera o que responderia a ...?”. Como a segunda parte da questão deve estar relacionada com o problema que estamos a tentar resolver então a pergunta deveria ser a seguinte:

“Se fosse uma pessoa sincera como responderia à questão, “É mentiroso?”?”

Agora analisemos como os dois tipos de habitantes da ilha responderiam a esta questão.

É claro que uma pessoa sincera responderia à questão “É mentiroso?” dizendo que “Não.”

Um mentiroso pode pensar tão claramente como uma pessoa sincera. Ele/ela sabe que uma pessoa sincera, quando questionada se é um mentiroso, diria “Não”. Mas o mentiroso costuma mentir sempre. Então ele/ela responderá “Sim”.

Assim, encontramos uma questão à qual uma pessoa sincera responderá sempre “Não” e um mentiroso responderá sempre “Sim”. Isto, certamente, permite-nos distinguir os mentirosos dos sinceros, e resolve o nosso problema.

□

PROBLEMA 2.1.2- *Seis pessoas, denominadamente A, B, C, D, E e F, estão na carruagem restaurante de um comboio. Cada uma delas é de Lisboa, Coimbra, Porto, Guarda, Aveiro e Faro. São conhecidos os seguintes factos:*

- 1) A e o homem de Lisboa são físicos;
- 2) E e a mulher de Coimbra são professores;
- 3) a pessoa do Porto e C são engenheiros;
- 4) B e F são veteranos da Guerra do Golfo, mas a pessoa do Porto nunca foi militar;
- 5) a pessoa de Aveiro é mais velha que A;
- 6) a pessoa de Faro é mais velha que C;
- 7) na Guarda, B e o homem de Lisboa saíram;
- 8) em Braga, C e o homem de Aveiro saíram.

Faça corresponder os nomes das pessoas com as suas profissões e cidades.

Solução: Não devemos subestimar a importância da ajuda visual. Esta ajuda-nos a organizar os dados de uma maneira que meros rabiscos não o fazem. Com isto em mente, construímos a seguinte tabela:

	A	B	C	D	E	F
Lisboa	x	x	x		x	
Coimbra	x		x		x	
Porto	x	x	x		x	x
Guarda						
Aveiro	x	x	x			
Faro			x			

Pomos um x quando essa ligação é impossível. Por exemplo, a afirmação 1) garante que A não é o homem de Lisboa, então pomos um x na coluna A em frente a Lisboa. Do mesmo modo, a afirmação 7) garante que B não é de Lisboa. As afirmações 1) e 2) juntas, implicam que A, que é um físico, não pode ser de Coimbra (uma vez que a mulher de Coimbra é professora). Os outros x's resultaram de raciocínios semelhantes.

Depois de colocar todos os x's, vemos que C só pode ser de Guarda. Mas então a única cidade possível para A é Faro. Uma vez que Guarda corresponde a C, automaticamente é eliminada para as outras cinco pessoas e representamos isso com #. Do mesmo modo, eliminamos Faro para todos excepto A. Colocamos * para indicar que uma cidade corresponde a uma pessoa.

Agora é fácil ver que E tem que ser de Aveiro, B de Coimbra, F de Lisboa e, finalmente, D do Porto. Como se pode observar na seguinte tabela:

	A	B	C	D	E	F
Lisboa	x	x	x	#	x	*
Coimbra	x	*	x	#	x	#
Porto	x	x	x	*	x	x
Guarda	#	#	*	#	#	#
Aveiro	x	x	x	#	*	#
Faro	*	#	x	#	#	#

Finalmente, as afirmações 1), 2) e 3) associam seis iniciais ou cidades com profissões. Assim concluímos que:

- A é de Faro e é físico;
- B é de Coimbra e é professora;
- C é de Guarda e é engenheiro;
- D é do Porto e é engenheiro;
- E é de Aveiro e é professor;
- F é de Lisboa e é físico.

E, assim, resolvemos o problema.

□

PROBLEMA 2.1.3 – *Dois turistas vão passar férias ao Hawai. Independentemente, cada um compra a mesma estátua do Deus da Guerra, Māuna Loa. Cada um põe a sua compra na bagagem para a viagem de regresso a casa. Mas a companhia de viação perde as duas preciosidades.*

Cada viajante pede reembolso pelo objecto perdido. Como não tinham provas do verdadeiro valor da estátua, cada viajante estima um valor para a estátua perdida. Os dois requerentes não falaram um com o outro antes de fazerem a reclamação.

O gerente que avalia as reclamações avisa-os que irá julgar as reclamações do seguinte modo: (i) o valor das reclamações deve variar entre 5 contos e 200 contos, inclusive; (ii) a pessoa que fizer a reclamação mais baixa deve estar a dizer a verdade e deverá ser premiada com a quantia que reclamar mais 3 contos de recompensa pela honestidade; (iii) a pessoa que fizer a reclamação mais alta deve estar a mentir e portanto será castigada e, por isso, receberá o valor da reclamação menos 3 contos pela desonestidade. No caso de empate, os dois requerentes serão tratados como no caso (iii).

Os dois concorrentes são espertos e querem receber o máximo. Então qual será a melhor estratégia que cada um dos turistas deverá adoptar?

Solução: É claro que cada viajante quer maximizar o valor a receber. Designemos os viajantes por A e B. Se ambos fazem reclamações de 200 contos então cada um receberá 197 contos. E ambos sabem disso. Raciocinando deste modo, A decide que é melhor reclamar apenas 199 contos. Mas o viajante B raciocina do mesmo modo, pois sabe que A irá pensar assim. Portanto B decide reclamar 198 contos.

O viajante A, contudo, pode seguir o mesmo raciocínio que B usou, descrito no último parágrafo. Como sabe que B pode ter pensado desta maneira, então A decide pedir 197 contos.

Procedendo sempre assim, os dois turistas acabam por reclamar 5 contos, recebendo apenas 2 contos.

□

A resolução deste problema é complicada. É um exemplo do tipo de problemas que muitas vezes aparecem na Teoria dos Jogos, nos quais dois jogadores que usam raciocínios correctos chegam a conclusões que parecem disparatadas. O que está em causa é o ponto de vista. Se cada jogador pudesse saber o que vai na mente do outro jogador, e pudessem comunicar um com o outro, então chegariam a uma conclusão mais desejável.

Uma vez que os dois jogadores estão a tentar “passar a perna” um ao outro, as estratégias de cada jogador levam-no, de facto, a uma posição perdedora.

PROBLEMA 2.1.4 – *Três pessoas estão sentadas à volta de uma mesa redonda com os olhos fechados. Um chapéu é colocado em cada cabeça. Cada chapéu é vermelho ou preto, e os três jogadores sabem disso. Todos abrem os olhos ao mesmo tempo, e cada jogador que vê um chapéu vermelho levanta a mão. O primeiro jogador a ser capaz de identificar correctamente a cor do seu chapéu ganhará o jogo.*

Dadas estas condições, o que acontecerá se dois chapéus forem vermelhos e um preto?

Solução: Designemos os jogadores por A, B e C. Suponhamos que C usa o chapéu preto.

Uma vez que há dois chapéus vermelhos, os três jogadores levantam a mão. O jogador A vê que C está a usar um chapéu preto. Então ele pensa que não pode estar a usar um chapéu preto, senão o jogador B não teria a mão levantada. Então A conclui que deve estar a usar um chapéu vermelho. O jogador B raciocina analogamente. Então, A ou B, o que for mais rápido, irá falar e ganhará o jogo. Quanto ao jogador C, ele vê que A e B estão a usar chapéus vermelhos e ambos têm a mão levantada. Então ele apercebe-se que o seu chapéu tanto pode ser vermelho como preto e não consegue chegar a nenhuma conclusão. □

PROBLEMA 2.1.5 – *Analise o último problema assumindo que cada jogador usa um chapéu vermelho.*

Solução: Designemos novamente os jogadores por A, B e C. É claro que os três jogadores irão levantar a mão, porque cada um verá um chapéu vermelho (aliás, dois chapéus vermelhos). Suponhamos que A é o mais rápido dos três jogadores. Ele sabe que o seu chapéu não pode ser preto, porque se fosse preto então B saberia que o seu chapéu não poderia ser preto, senão C não teria a sua mão levantada. Deste modo, se o chapéu do jogador A fosse preto então B teria concluído que o seu chapéu era vermelho e teria respondido. O jogador C poderia raciocinar do mesmo modo, se o chapéu do jogador A fosse preto, e teria falado. Uma vez que nem B nem C falaram, A conclui que o seu chapéu é vermelho, responde, e ganha o jogo. □

PROBLEMA 2.1.6 – *Certo dia, na escola, roubaram a carteira da professora. Baseados numa série de evidências, a procura do culpado rapidamente se restringiu à Lisa, Jessica, David, Tiago e Mara.*

As crianças, na tentativa de se defenderem, fizeram as seguintes declarações:

Lisa: Eu não tirei a carteira. Eu nunca roubei nada. Foi o Tiago que tirou.

Jessica: Eu não tirei a carteira. O meu pai é muito rico, e eu tenho a minha carteira. A Mara sabe quem é o verdadeiro culpado.

David: Eu não tirei a carteira. Eu não conhecia a Mara antes do início das aulas este ano. Foi o Tiago que tirou.

Tiago: Eu não tirei. Foi a Mara. A Lisa está a mentir quando diz que fui eu que roubei a carteira.

Mara: Eu não tirei a carteira. Foi a Jessica que tirou. O David está a mentir quando diz que não me conhece pois ele conhece-me há muitos anos.

Mais tarde, usando incentivos irresistíveis, as autoridades levam cada estudante a admitir que duas das suas afirmações eram verdadeiras mas uma era falsa.

Quem roubou a carteira?

Solução: A primeira e última afirmações do Tiago ou são ambas verdadeiras ou ambas falsas. Uma vez que cada estudante disse exactamente uma declaração falsa, essas duas devem ser verdadeiras. Então o Tiago não é o culpado.

Examinemos agora a declaração do David. Na sua terceira declaração, ele diz que foi o Tiago que roubou a carteira. Sabemos que isso é falso. Deste modo, sabemos que as outras duas declarações são verdadeiras, incluindo a declaração que afirma que ele não conhecia a Mara antes de começarem as aulas nesse ano. Disto concluímos que a Mara está a mentir quando diz que o David a conhece há muitos anos. Então ela está a dizer a verdade nas outras duas declarações, incluindo aquela em que diz que foi a Jessica quem tirou a carteira. E, assim, resolvemos o problema.

□

PROBLEMA 2.1.7 – *O casal Sousa foi jantar fora, deixando os seus quatro filhos com uma ama. Entre as muitas informações que o casal deu à ama antes de saírem, uma delas foi que três das quatro crianças mentiam constantemente e apenas uma delas dizia, regularmente, a verdade, e disseram-lhe qual era. Mas como recebeu muita informação ao mesmo tempo, ela esqueceu qual das crianças era a sincera. Quando ela estava a preparar o jantar para as crianças, uma delas partiu um vaso no quarto ao lado. A ama perguntou quem tinha partido o vaso. As crianças deram as seguintes respostas:*

Beatriz: Foi o Carlos que partiu o vaso.

Carlos: Foi o João que o partiu.

Laura: Eu não o parti.

João: O Carlos mentiu quando disse que fui eu que o parti.

Sabendo que apenas uma destas respostas é verdadeira, a ama rapidamente descobriu qual foi a criança que partiu o vaso. Descubra quem foi.

Solução: Usaremos o método da contradição para resolver este problema.

Há duas abordagens possíveis para este problema. Primeiro, devemos tentar testar cada uma das quatro possibilidades para descobrir quem partiu o vaso. Esta abordagem parece ser o caminho mais directo para chegar ao objectivo; contudo, não funcionará sem primeiro determinarmos qual das quatro crianças está a dizer a verdade e quais são as três que mentem. Quando descobrirmos quem são os mentirosos e quem é sincero, será trivial determinar quem partiu o vaso. Desta maneira, para aplicar com êxito o método da contradição a este problema, devemos testar as quatro possibilidades com vista a determinar quem diz a verdade.

A Beatriz não pode ser a criança que diz sempre a verdade, senão ela e a Laura estariam ambas a dizer a verdade, contradizendo a informação de que só uma delas diz a verdade. Pela mesma razão, o Carlos não pode estar a dizer a verdade, uma vez que, assim, o Carlos e a Laura estariam ambos a dizer a verdade. A Laura não pode estar a dizer a verdade

porque então, se o João está a mentir, o Carlos está a dizer a verdade, contrariamente à informação de que só uma criança diz a verdade. A única possibilidade que é coerente com a informação dada é que o João está a dizer a verdade e a Beatriz, o Carlos e a Laura estão a mentir. Dado isto, é trivial determinar que foi a Laura quem partiu o vaso.

□

PROBLEMA 2.1.8 – *Quando eu tiver a idade que o meu pai tem agora, eu terei cinco vezes a idade que o meu filho tem actualmente. Mas nessa altura, o meu filho terá mais oito anos do que eu tenho agora. Actualmente, a soma da minha idade com a do meu pai é igual a 100. Que idade tem o meu filho?*

Solução: Para simplificar, usaremos P para referir o narrador, F para o seu filho e A para o seu pai. Também assumimos que I (A), I (P) e I (F) indica a idade da pessoa correspondente. P diz, “Quando eu tiver a idade que o meu pai tem agora, eu terei cinco vezes a idade que o meu filho tem actualmente”. Isto significa que A é cinco vezes mais velho que F.

$$I(A) = 5 \cdot I(F).$$

Depois P diz, “Mas nessa altura, o meu filho terá mais oito anos do que eu tenho agora”. Por outras palavras, a diferença de idades entre P e F é menos oito anos do que a diferença de idades entre P e A. Então

$$I(A) - I(P) = I(P) - I(F) + 8.$$

Simplificando esta igualdade e usando o facto de que $I(A) = 5 \cdot I(F)$, obtemos

$$I(P) + 4 = 3 \cdot I(F)$$

Isto é equivalente a $I(A) + I(P) + 4 = 5 \cdot I(F) + 3 \cdot I(F) = 8 \cdot I(F)$.

Por outro lado, P na última afirmação diz que a soma da sua idade com a do seu pai é igual a 100. Então obtemos

$$I(A) + I(P) + 4 = 104 = 8 \cdot I(F), \text{ e concluímos, assim, que } I(F) = 13.$$

Sabendo isto, podemos também verificar que $I(P) = 3 \times 13 - 4 = 35$ e $I(A) = 100 - 35 = 65$.

□

PROBLEMA 2.1.9 – *Está um dia quente. Quatro casais, no decorrer da tarde, bebem muitos sumos. A Sónia bebe dois, a Rosa bebe três, a Lúcia bebe quatro e a Maria bebe cinco. O Sr. Sousa bebe tantos como a sua esposa. Mas o Sr. Freitas bebe o dobro do que bebe a sua esposa, o Sr. Gonçalves bebe o triplo do que bebe a sua esposa e o Sr. Mendes bebe o quádruplo do que bebe a sua esposa. Os quatro casais bebem ao todo 44 sumos.*

Qual é o sobrenome de cada senhora?

Solução: As senhoras consomem um total de 14 sumos, então os seus maridos devem ter bebido o resto dos sumos que são 30. Seja x, y, z e w o número de sumos consumidos pela Sra. Sousa, Sra. Freitas, Sra. Gonçalves e Sra. Mendes, respectivamente. Então, temos

$$x + 2y + 3z + 4w = 30.$$

Há quatro escolhas para x . Depois de ter escolhido x , temos 3 escolhas para y . Depois de ter escolhido x e y , restam apenas duas escolhas para z . Depois de conhecer os valores de x, y e z , o valor de w também será conhecido. Então teremos um total de $4 \times 3 \times 2 = 24$ soluções possíveis que podemos experimentar na equação anterior. É uma boa ideia começar com uma conjectura e tentar corrigi-la. Os valores que fazem a soma anterior $x + y + z + w$, máxima ou mínima (um valor próximo de 30) são bons valores para começar.

Tentaremos realizar estes dois processos ao mesmo tempo de modo a minimizar a nossa procura. Notemos que $x + y + z + w = 14$. Se substituirmos isto na equação anterior obtemos $y + 2z + 3w = 16$. Se $z = 4$, então $y + 3w = 8$. Isto leva a que $w = 2$, mas então o menor valor que y pode tomar é 3, donde $y + 3w$ será maior que 8. Se 4 é muito grande para z , então z também não pode ser 5. Do mesmo modo, 4 e 5 também são muito grandes para w . Então z e w só podem ter os valores 2 e 3, o que deixa os valores 4 e 5 para x e y . Agora temos apenas quatro opções para testar. Se $z = 2$, substituindo em $y + 2z + 3w = 16$, obtemos $y + 3w = 12$, mas como w tem que ser 3, concluímos que y também será 3, o que não é possível. Se $z = 3$, $y + 3w = 10$, substituindo w por 2 obtemos $y = 4$ e, conseqüentemente, $x = 5$.

Assim, obtemos $x = 5, y = 4, z = 3$ e $w = 2$. Concluímos, deste modo, que as quatro senhoras chamavam-se Sónia Mendes, Rosa Gonçalves, Lúcia Freitas e Maria Sousa.

□

PROBLEMA 2.1.10 – Considere as letras dispostas do seguinte modo:

$$\begin{array}{r} L \ E \ T \ S \\ + \ W \ A \ V \ E \\ \hline L \ A \ T \ E \ R \end{array}$$

Isto representa um problema de adição. Letras diferentes correspondem a dígitos diferentes (escolhidos entre 0, 1, 2, ..., 9).

Duas ocorrências da mesma letra correspondem ao mesmo dígito. O problema consiste em identificar todos os dígitos.

Solução: Começamos com o L da palavra LATER. Este L surge do transporte da soma anterior. Uma vez que o L e o W que somamos de modo a obter este L não podem ser maiores que 9, não há maneira (mesmo que tivéssemos transportado algum número da soma de E com A) de este L ser outra coisa senão 1 (também não pode ser 0, porque um 0 naquela posição nunca seria escrito). Deste modo, $L = 1$.

Agora W só pode ser 8 ou 9, uma vez que temos que somar L com 8 ou com 9 de modo a transportarmos 1 para a posição seguinte. Contudo, W não pode ser 8, uma vez que A tem que ser 0 e, assim, teria que haver transporte da soma de E com A de modo que $L + W = 1 + 8$ seja igual a 10. Com A igual a 0, isso forçará o E a ser igual a 9, e teria de haver transporte da soma de T com V para que E não seja igual a T. Mas, depois de transportarmos, o resultado seria que $T = 0$ e 0 já foi usado para o A. Portanto, W não pode ser igual a 8, terá que ser 9.

Assim, obtemos

$$\begin{array}{r} I E T S \\ + 9 0 V E \\ \hline 1 0 T E R \end{array}$$

Agora, qualquer que seja o E, T terá que ser grande (para haver transporte), de modo que T seja diferente de E. Mas T + V deverá originar outra vez o E. Como poderá ser, a menos que V seja 9? Mas V não pode ser 9 porque 9 já foi usado. Então V terá que ser 8, e a soma de S com E terá que originar um transporte. Agora temos

$$\begin{array}{r} I E T S \\ + 9 0 8 E \\ \hline 1 0 T E R \end{array}$$

Note que T não pode ser 2, senão E seria 1 e 1 já foi usado. Se T = 3, então E é 2 e temos

$$\begin{array}{r} I 2 3 S \\ + 9 0 8 2 \\ \hline 1 0 3 2 R \end{array}$$

Uma vez que 9 e 8 já foram usados, então S não pode ser maior do que 7. Mas então a soma da coluna mais à direita não produzirá um transporte e não resolvemos o problema.

Se T = 4, então E = 3 e temos

$$\begin{array}{r} I 3 4 S \\ + 9 0 8 3 \\ \hline 1 0 4 3 R \end{array}$$

Estamos bloqueados outra vez porque se S = 7 então R = 0 e 0 já foi usado; se S = 6, então não há transporte. Por isso não podemos admitir que T = 4.

A possibilidade T = 5 está eliminada pela mesma razão. Agora tentemos T = 6. Então E = 5 e temos

$$\begin{array}{r} I 5 6 S \\ + 9 0 8 5 \\ \hline 1 0 6 5 R \end{array}$$

O que é diferente agora é que S = 7 e R = 2 é uma escolha viável e tudo funciona bem. Assim, resolvemos o nosso problema como podemos ver

$$\begin{array}{r} I 5 6 7 \\ + 9 0 8 5 \\ \hline 1 0 6 5 2 \end{array}$$

Também é fácil ver que T = 7 não funciona; T = 8 não pode ser escolhido porque o 8 já foi usado. E, deste modo, encontramos a única solução para o nosso problema.

□

2.2 - PROBLEMAS DE CONTAGEM

Os problemas de contagem aparecem sob muitas formas, como por exemplo, “Quantas mãos diferentes de cinco cartas de poker pode haver?” ou “De quantas maneiras diferentes podemos obter o número 8 lançando dois dados?”.

Para termos sucesso na resolução de problemas que envolvem contagem é necessário ter uma estratégia de organização.

Vejamos alguns exemplos.

PROBLEMA 2.2.1 – *Uma turma de Matemática tem 12 alunos. No início de cada aula, cada aluno aperta a mão a cada um dos outros alunos. Quantos apertos de mão são dados?*

Solução: Usaremos o método de arranjar um caso especial para resolver este problema. Suponhamos que havia apenas dois alunos. Então, apenas era possível um aperto de mão.

Agora suponhamos que um novo aluno entrava na sala. Ele/ela tinha que apertar a mão a cada um dos alunos que já lá estavam. Então, isso faz mais dois apertos de mão. O número total de apertos de mão é $1 + 2 = 3$.

Se um quarto aluno entrasse na sala, então ele/ela deveria apertar a mão a cada um dos alunos que já estavam na sala. O número total de apertos de mão seria então $1 + 2 + 3 = 6$.

A relação agora é clara: a adição de um quinto aluno resultaria em $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ apertos de mão. Quando chegarmos ao décimo segundo aluno, teremos $1 + 2 + 3 + \dots + 9 + 10 + 11 = 66$ apertos de mão.

E, deste modo, resolvemos o problema.

□

Muitas vezes, a solução ou análise de um problema sugere outros. O problema seguinte é sugerido pelo anterior.

PROBLEMA 2.2.2 – *Assuma que k é um inteiro positivo. Qual é a soma dos inteiros*

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + (k - 1) + k ?$$

No capítulo anterior já resolvemos um problema semelhante a este utilizando o método de indução. Mas, neste caso, não podemos usar o método de indução pois não queremos provar nada, mas determinar a que é igual aquela soma.

Antes de resolver este problema faremos uma discussão preliminar.

Pensem em S como uma função. Seja $S(k) = 1 + 2 + 3 + \dots + (k - 1) + k$.

Que tipo de função deve ser? Se uma função $f(k)$ aumenta uma quantidade fixa, digamos 3, cada vez que k é aumentado de 1, então f deve ser uma função linear. De facto, f deve ser da forma $f(k) = 3k + b$. Do mesmo modo, se a função g aumenta uma função linear cada vez que k é aumentado de 1, então devemos suspeitar que g é uma função quadrática. (Para quem tem conhecimentos de Análise, pensa no conceito de derivada: a derivada de uma

função quadrática é uma função linear). Por exemplo, se $g(k) = k^2$ então $g(k + 1) - g(k) = 2k + 1$, e esta diferença é linear.

Estas considerações ajudam-nos a começar a resolução do problema.

Solução: Um método útil para analisar uma soma é reescrever cada termo de modo que sejam introduzidos alguns cancelamentos. Repare que

$$\begin{aligned} 2^2 - 1^2 &= 3 = 2 \cdot 1 + 1 \\ 3^2 - 2^2 &= 5 = 2 \cdot 2 + 1 \\ 4^2 - 3^2 &= 7 = 2 \cdot 3 + 1 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ k^2 - (k-1)^2 &= 2 \cdot (k-1) + 1 \\ (k+1)^2 - k^2 &= 2 \cdot k + 1 \end{aligned}$$

Agora adicionamos as colunas

$$\begin{aligned} [2^2 - 1^2] + [3^2 - 2^2] + [4^2 - 3^2] + \dots + [(k+1)^2 - k^2] = \\ [2 \cdot 1 + 1] + [2 \cdot 2 + 1] + [2 \cdot 3 + 1] + \dots + [2 \cdot k + 1]. \end{aligned}$$

No lado esquerdo cancelamos alguns termos (a isto chamamos “efeito telescópio”), ou seja, todos os termos excepto o primeiro e o último são cancelados, e o lado direito pode ser factorizado. O resultado é

$$(k+1)^2 - 1^2 = 2(1 + 2 + 3 + \dots + k) + \underbrace{(1+1+1+\dots+1)}_{k \text{ vezes}}$$

ou

$$k^2 + 2k = 2 \cdot S + k$$

Relembre que S é a soma que queremos calcular. Resolvendo em ordem a S , obtemos

$$S = \frac{k^2 + k}{2}$$

□

Esta fórmula é muitas vezes atribuída a Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855). Muitas histórias fazem referência à sua precocidade e prodigioso poder mental. A história seguinte tem muitas variantes mas é aqui apresentada uma das mais simples.

Quando Gauss tinha 10 anos, a professora castigou a sua turma com uma tediosa soma:

$$1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100.$$

Enquanto os outros alunos somavam os números vagarosamente, o pequeno Carl descobriu um atalho e, rapidamente, chegou à resposta 5050. Ele foi o único aluno a encontrar a soma correcta. O seu “insight” foi notar que 1 podia ser emparelhado com 100, 2 com 99, 3 com 98, etc, e produzir 50 somas idênticas de 101. Daí a resposta de $101 \times 50 = 5050$. Um modo mais formal de fazer isto é escrever a soma em questão duas vezes, do seguinte modo

$$\begin{aligned} S &= 1 + 2 + 3 + \dots + 99 + 100 \\ S &= 100 + 99 + \dots + 2 + 1. \end{aligned}$$

Então, é claro que $2S = 100 \times 101$. Donde $S = 50 \times 101$.

Isto é um bom truque, principalmente para uma criança de 10 anos, e tem muitas aplicações.

E, partindo deste caso especial para $k = 100$, também podemos obter a fórmula encontrada anteriormente.

$$\begin{aligned} S &= 1 + 2 + 3 + \dots + (k - 1) + k \\ S &= k + (k - 1) + \dots + 2 + 1 \end{aligned}$$

$$\text{Então } 2S = k \cdot (k + 1), \text{ donde } S = \frac{k(k + 1)}{2}.$$

E, deste modo, chegamos à solução deste problema usando um método visto no capítulo anterior, o qual consiste em arranjar um caso especial.

PROBLEMA 2.2.3 – *Calcule a soma dos cubos dos primeiros k inteiros.*

Solução: Queremos calcular a seguinte soma

$$1^3 + 2^3 + \dots + (k - 1)^3 + k^3.$$

Comecemos por determinar a fórmula para a soma dos quadrados dos primeiros k inteiros.

Neste caso, podemos usar o método de relacionar problemas uma vez que este problema é análogo ao anterior. Seguindo o esquema usado no problema anterior, comecemos por observar que

$$r^3 - (r - 1)^3 = r^3 - r^3 + 3r^2 - 3r + 1 = 3r^2 - 3r + 1.$$

Adicionando de $r = 1$ até k obtemos uma “soma telescópica” no lado esquerdo onde a maior parte dos termos serão cancelados

$$(k^3 - (k - 1)^3) + ((k - 1)^3 - (k - 2)^3) + \dots + (2^3 - 1) + (1 - 0) =$$

$$(3k^2 - 3k + 1) + (3(k - 1)^2 - 3(k - 1) + 1) + \dots + (3 - 3 + 1).$$

Simplificando, reorganizando e aplicando a fórmula para a soma dos primeiros k inteiros, obtemos:

$$\begin{aligned}
k^3 &= 3(k^2 + (k-1)^2 + \dots + 1) - 3(k + (k-1) + \dots + 1) + (1 + 1 + \dots + 1) \\
&= 3(k^2 + (k-1)^2 + \dots + 1) - 3\frac{k(k+1)}{2} + k \\
&= 3(k^2 + (k-1)^2 + \dots + 1) - \frac{3k^2 + k}{2}.
\end{aligned}$$

Finalmente, resolvendo em ordem a $(k^2 + (k-1)^2 + \dots + 1)$, obtemos:

$$k^2 + (k-1)^2 + \dots + 1 = \frac{2k^3 + 3k^2 + k}{6}.$$

Para a soma dos cubos, repetimos este processo novamente. Começemos por observar que

$$r^4 - (r-1)^4 = r^4 - r^4 + 4r^3 - 6r^2 + 4r - 1 = 4r^3 - 6r^2 + 4r - 1.$$

Adicionando de $r = 1$ até k obtemos uma “soma telescópica” no lado esquerdo onde a maior parte dos termos serão cancelados

$$\begin{aligned}
&(k^4 - (k-1)^4) + ((k-1)^4 - (k-2)^4) + \dots + (2^4 - 1) + (1 - 0) = \\
&(4k^3 - 6k^2 + 4k - 1) + (4(k-1)^3 - 6(k-1)^2 + 4(k-1) - 1) + \dots + (4 \cdot 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 - 1).
\end{aligned}$$

Simplificando, reorganizando e aplicando a fórmula para a soma dos primeiros k e para a soma dos quadrados dos primeiros k , obtemos:

$$k^4 = 4(1 + 2^3 + \dots + k^3) - 6(1 + 2^2 + \dots + k^2) + 4(1 + 2 + \dots + k) - k.$$

Resolvendo em ordem a $(1 + 2^3 + \dots + k^3)$, obtemos:

$$\begin{aligned}
1 + 2^3 + \dots + k^3 &= \frac{k^4 + 6(1 + 2^2 + \dots + k^2) - 4(1 + 2 + \dots + k) + k}{4} \\
&= \frac{1}{4} \left(k^4 + 6\frac{2k^3 + 3k^2 + k}{6} - 4\frac{k^2 + k}{2} + k \right) \\
&= \frac{k^2(k+1)^2}{4}.
\end{aligned}$$

□

PROBLEMA 2.2.4 – Observe os seguintes triângulos, subdivididos em triângulos mais pequenos, como nos mostra a Fig.1. Repare que a primeira figura tem uma “linha” de triângulos mais pequenos, e o número total de triângulos mais pequenos é 1. Na figura seguinte, as (primeiras) duas linhas juntas têm um total de $2^2 = 4$ triângulos mais pequenos. Na figura seguinte, as (primeiras) três linhas juntas têm um total de $3^2 = 9$ triângulos mais

pequenos. A relação continua: as primeiras k linhas juntas têm um total de k^2 triângulos mais pequenos. Prove esta relação.

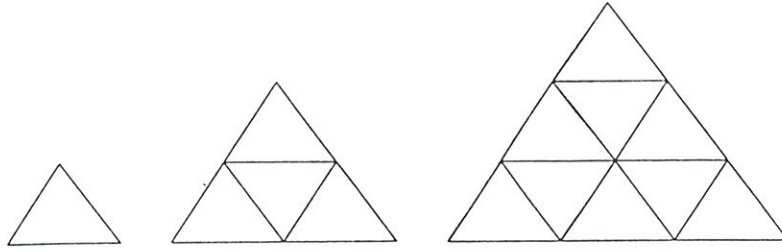


Fig. 1

Solução: Cada nova linha tem mais 2 triângulos que a linha anterior. Como a primeira linha tem apenas 1 triângulo, o número de triângulos numa figura com k linhas será

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1).$$

O que temos aqui é a soma dos primeiros k números ímpares.

Se adicionarmos todos os números de 1 a $(2k - 1)$ e depois subtrairmos os números pares nesta soma, obtemos a soma dos números ímpares de 1 a $(2k - 1)$. Então, a última expressão pode ser escrita como:

$$[1 + 2 + 3 + 4 + \dots + (2k - 1)] - [2 + 4 + 6 + \dots + (2k - 2)].$$

Já vimos, anteriormente, uma fórmula para a soma dos primeiros k termos. Na segunda soma (dos números pares) podemos pôr o 2 em evidência, obtendo

$$[1 + 2 + 3 + 4 + \dots + (2k - 1)] - 2[1 + 2 + 3 + \dots + (k - 1)].$$

Usando a fórmula obtida, anteriormente, temos que a última expressão é igual a

$$\frac{(2k - 1)^2 + (2k - 1)}{2} - 2 \frac{(k - 1)^2 + (k - 1)}{2}.$$

Fazendo alguns cálculos, obtemos:

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) &= \frac{(2k - 1)^2 + (2k - 1)}{2} - 2 \frac{(k - 1)^2 + (k - 1)}{2} \\ &= \frac{(2k - 1)((2k - 1) + 1)}{2} - 2 \frac{(k - 1)((k - 1) + 1)}{2} \\ &= \frac{(2k - 1) \cdot 2k - (k - 1) \cdot 2k}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2k [(2k-1) - (k-1)]}{2} \\
&= \frac{2k^2}{2} \\
&= k^2.
\end{aligned}$$

E, assim, provamos o pretendido. □

PROBLEMA 2.2.5 - *O João tem 44 moedas de um escudo e dez bolsos nos quais vai colocar as moedas. Será que ele consegue distribuí-las pelos bolsos de modo que cada bolso contenha um número diferente de escudos?*

Solução: Se ele quer colocar um número diferente de escudos em cada um dos bolsos, então ele tem que ter pelo menos $0 + 1 + 2 + \dots + 9 = 45$. Como ele tem apenas 44 escudos não consegue fazer o pretendido. □

Vejamos agora outro tipo de soma, conhecida por soma geométrica.

PROBLEMA 2.2.6 – *Seja λ um número real e k um inteiro positivo. Calcule*

$$S = 1 + \lambda + \lambda^2 + \dots + \lambda^k.$$

Solução: A chave para resolver este problema está em notar que multiplicando S por λ não altera a forma da soma dada. De facto,

$$\lambda S = \lambda + \lambda^2 + \dots + \lambda^{k+1}.$$

As somas S e λS diferem apenas na presença de 1 na primeira delas e na presença de λ^{k+1} na segunda. Por outras palavras

$$S - 1 = \lambda S - \lambda^{k+1},$$

ou seja,

$$(\lambda - 1) S = \lambda^{k+1} - 1.$$

Finalmente, podemos concluir que

$$S = \frac{\lambda^{k+1} - 1}{\lambda - 1}$$

□

O seguinte exemplo é sugerido pela solução deste problema. Suponha que queremos saber o valor da soma $S = 1 + (1/3) + (1/3)^2 + \dots + (1/3)^{100}$. Seria muito aborrecido adicionar todos estes números. Mas esta soma representa uma soma geométrica, com $\lambda = (1/3)$ e $k = 100$. Assim,

$$S = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{101} - 1}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{101}\right)$$

Agora podemos usar uma calculadora ou um computador para ver que o valor desta expressão é aproximadamente $1.5 - 9.702 \times 10^{-49}$.

Às vezes, quando $-1 < \lambda < 1$, é conveniente raciocinar do seguinte modo. Para $k \in \{1, 2, 3, \dots\}$ fazemos

$$S_k = 1 + \lambda + \lambda^2 + \dots + \lambda^k.$$

Sabemos, do problema anterior que

$$S_k = \frac{1 - \lambda^{k+1}}{1 - \lambda} \quad (*)$$

Agora podemos perguntar o que aconteceria se, em vez de somarmos apenas um número finito de potências de λ , adicionássemos todas as potências de λ . Isto corresponde a deixar k tender para infinito na equação (*).

O resultado é que a soma $S = 1 + \lambda + \lambda^2 + \dots$ de todas as potências não negativas de λ é equivalente ao lado direito da equação (*) quando k cresce sem limite. Como $|\lambda| < 1$, é óbvio que λ^{k+1} torna-se cada vez mais pequeno, de facto, tende para zero, à medida que k tende para infinito. Por outras palavras, $S_k \rightarrow 1/(1 - \lambda)$. Escrevemos

$$\sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j = \frac{1}{1 - \lambda} \quad (**)$$

Vejamos um exemplo ilustrativo. A que é igual a soma

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots ?$$

Tendo em conta (**), observamos que

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^j = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

Agora vejamos algumas questões elementares sobre contagem.

PROBLEMA 2.2.7 - Consideremos k objectos $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$. Quantos pares ordenados diferentes podemos arranjar usando estes k objectos?

Solução: Há k escolhas possíveis (nomeadamente a_1, a_2, \dots, a_k) para o primeiro elemento do par ordenado. Depois de ter escolhido um objecto para o primeiro elemento, quantas escolhas restam para o segundo elemento? A resposta é que há $(k - 1)$ escolhas possíveis entre os objectos $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ restantes.

Assim, se escolhermos a_1 para o primeiro elemento então podemos escolher qualquer a_2, a_3, \dots, a_k para o segundo elemento – temos $(k - 1)$ escolhas. Se escolhermos a_2 para o primeiro elemento então podemos escolher qualquer $a_1, a_3, a_4, \dots, a_k$ para o segundo elemento – são $(k - 1)$ escolhas. E assim sucessivamente.

Em resumo, há k escolhas para o primeiro elemento do par ordenado. Para cada uma dessas escolhas há $(k - 1)$ escolhas para o segundo elemento do par ordenado. O número total de possíveis pares ordenados, escolhidos entre $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, é então $k(k - 1)$. □

Podemos usar a estratégia de contagem deste problema para abordar um facto básico sobre permutações ou ordenações de conjuntos finitos.

PROBLEMA 2.2.8 – Consideremos k objectos $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$. De quantas maneiras diferentes podemos ordenar estes objectos?

Solução: Suponhamos que temos k posições nas quais os objectos vão ser colocados. Ver Fig.1. Há k objectos diferentes (nomeadamente a_1, a_2, \dots, a_k) que podem ser colocados na primeira posição.

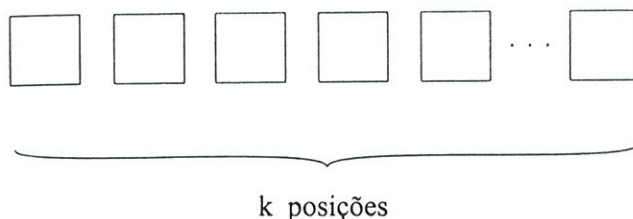


Fig.1

Depois de ter colocado um objecto na primeira posição, restam $(k - 1)$ objectos diferentes para serem colocados na segunda posição. Assim, raciocinando como no problema anterior, temos $k(k - 1)$ escolhas para os pares de objectos que podem ser colocados nas duas primeiras posições.

Depois de ter escolhido dois objectos para as duas primeiras posições, vemos que restam $(k - 2)$ objectos para colocar na terceira posição. Assim, há $k(k - 1)(k - 2)$ escolhas de objectos para colocar nas três primeiras posições.

Se continuarmos este raciocínio veremos que há $k(k - 1)(k - 2)(k - 3)$ escolhas para as quatro primeiras posições, e assim sucessivamente.

No final, há $k(k - 1)(k - 2)\dots\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = k!$ diferentes ordenações possíveis dos k objectos $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$. □

PROBLEMA 2.2.9- Consideremos k objectos $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$. Suponhamos que m é um inteiro positivo menor ou igual a k . De quantas maneiras diferentes podemos escolher m objectos entre os k ?

Um exemplo deste tipo de problema é perguntar de quantas maneiras diferentes podemos escolher mãos de cinco cartas de poker de um baralho de 52. Ou de quantas maneiras diferentes 11 pessoas de uma equipa de futebol podem ser escolhidas dum grupo de 25. O que é interessante neste problema, e distingue-o dos anteriores, é que não estamos interessados na ordem, ou seja, esta mão de cartas num jogo de poker

$A\spadesuit, K\heartsuit, J\spadesuit, 9\clubsuit, 7\diamond$

é exactamente igual a esta

$K\heartsuit, 7\diamond, 9\clubsuit, A\spadesuit, J\spadesuit.$

Agora vejamos a solução do problema.

Solução: Precisamos de uma estratégia para seleccionar m objectos entre os k objectos existentes. Suponhamos que procedemos do seguinte modo: seleccionamos uma ordenação para todo o conjunto dos k objectos e escolhemos como subconjunto de m objectos os primeiros m objectos que aparecem nessa ordenação. Ver Fig.2. Uma vez que há $k!$ maneiras diferentes de ordenar k objectos, isto sugere que há $k!$ subconjuntos diferentes de m objectos.

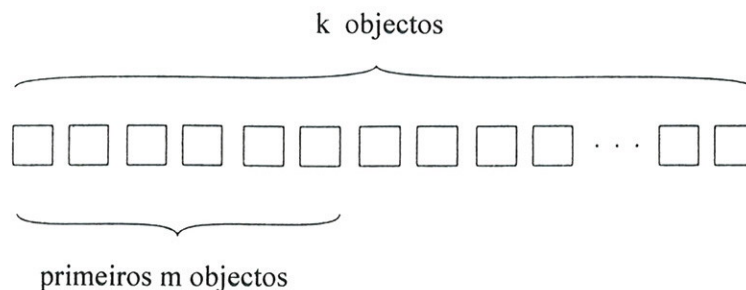


Fig.2

É claro que deve haver algo errado neste raciocínio, uma vez que a resposta $k!$ parece não depender de m . O que está errado é o seguinte: estamos a contar as várias ordenações desses primeiros m objectos como sendo diferentes. Não é isso que queremos, por isso dividimos pelo número possível de ordenações desses m objectos, ou seja, dividimos por $m!$. Do mesmo modo, estamos a contar as várias ordenações dos últimos $(k - m)$ objectos como sendo diferentes. Como não é isso que queremos, temos que dividir pelo número de possíveis ordenações desses objectos, ou seja, dividimos por $(k - m)!$. Agora o nosso esquema de contagem está correcto, e descobrimos que o número de diferentes subconjuntos de m objectos escolhidos entre um total de k objectos é

$$\frac{k!}{m!(k-m)!}$$

Repare uma vez mais que a nossa estratégia ao derivar a fórmula foi esta: agarrámos no número de possíveis ordenações da totalidade dos k objectos, e pensamos em termos de escolher os primeiros m entre qualquer ordenação. Mas devemos dividir pelas diferentes ordenações possíveis desses primeiros m objectos. E também devemos dividir pelas diferentes ordenações possíveis dos restantes $(k - m)$ objectos.

□

A fórmula $\frac{k!}{m!(k-m)!}$ é usada universalmente na contagem de objectos e é representada por $\binom{k}{m}$. Esta é muitas vezes designada por **coeficiente binomial**.

$$\text{Assim, temos que } \binom{k}{m} = \frac{k!}{m!(k-m)!}$$

PROBLEMA 2.2.10 – *Quantas mãos diferentes de 5 cartas de poker podemos ter a partir de um baralho de 52 cartas?*

Solução: Tendo em conta as ideias desenvolvidas anteriormente, isto é um exercício e não um problema, pois para resolvê-lo basta aplicarmos a fórmula encontrada.

$$\text{O número de mãos de poker será igual a } \binom{52}{5} = \frac{52!}{5!47!} = 2\,598\,960.$$

□

PROBLEMA 2.2.11 – *Quantos pares de mãos de bridge podem ser distribuídas de um baralho de 52 cartas?*

Solução: Relembre que o bridge é jogado por duas equipas de duas pessoas. A cada pessoa são distribuídas 13 cartas. Consideremos apenas uma das equipas.

O primeiro membro da equipa tem 13 cartas de um total de 52. O número de mãos possíveis que essa pessoa pode ter são

$$J_1 = \binom{52}{13} = \frac{52!}{13!39!}$$

O segundo membro da equipa também tem 13 cartas, escolhidas entre as restantes 39. (Repare que neste jogo não damos primeiro 13 cartas ao primeiro membro da equipa e depois

Certamente que não é coincidência que os coeficientes dos termos sejam exactamente os elementos do Triângulo de Pascal.

De facto, é verdade que o coeficiente de $x^r y^{n-r}$, em $(x + y)^n$, é igual a $\binom{n}{r}$.

Teorema Binomial – Para qualquer inteiro positivo n ,

$$(x + y)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} x^{n-r} y^r.$$

Desenvolvendo a soma, obtemos

$$(x + y)^n = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \dots + \binom{n}{n-1} x y^{n-1} + \binom{n}{n} y^n.$$

Agora percebemos porque é que $\binom{n}{r}$ é chamado coeficiente binomial.

PROBLEMA 2.2.12 – *Verifique a fórmula Binomial.*

$$(x + y)^n = x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \dots + \binom{n}{n-2} x^2 y^{n-2} + \binom{n}{n-1} x y^{n-1} + y^n.$$

Solução: Não é viável, para um n arbitrário, tentar multiplicar a expressão $(x + y)^n$. Mas se n for pequeno, já é viável fazer a multiplicação. Isto sugere que devemos usar o método de indução.

Quando $n=1$, a fórmula fica $x + y = x + y$.

Para praticar, vamos experimentar para $n = 2$:

$$(x + y)^2 = x^2 + \binom{2}{1} xy + y^2 = x^2 + 2xy + y^2 = x^2 + \binom{2}{1} x^{2-1} y + y^2.$$

Isto é conhecido e verdadeiro, e coincide com a fórmula pretendida.

Agora suponhamos que a fórmula já foi verificada para n , e usamos essa informação para verificar para $n+1$.

Então, estamos a assumir que

$$(x + y)^n = x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \dots + \binom{n}{n-2} x^2 y^{n-2} + \binom{n}{n-1} x y^{n-1} + y^n.$$

Multiplicando os dois lados da equação por $(x + y)$, obtemos

$$(x+y)^{n+1} = (x+y) \left[x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \dots + \binom{n}{n-2} x^2 y^{n-2} + \binom{n}{n-1} xy^{n-1} + y^n \right]$$

Agora desenvolvemos o lado direito. Repare que, excepto para os termos x^{n+1} e y^{n+1} cada termo $x^s y^r$ aparecerá duas vezes no desenvolvimento. Assim, temos

$$(x+y)^{n+1} = x^{n+1} + \left[1 + \binom{n}{1} \right] x^n y + \left[\binom{n}{1} + \binom{n}{2} \right] x^{n-1} y^2 + \left[\binom{n}{2} + \binom{n}{3} \right] x^{n-2} y^3 + \dots + \left[\binom{n}{n-2} + \binom{n}{n-1} \right] x^2 y^{n-1} + \left[\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} \right] xy^n + y^{n+1}$$

Tendo em conta um resultado visto anteriormente, segundo o qual $\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}$, podemos escrever isto do seguinte modo

$$(x+y)^{n+1} = x^{n+1} + (n+1)x^n y + \binom{n+1}{2} x^{n-1} y^2 + \binom{n+1}{3} x^{n-2} y^3 + \dots + \binom{n+1}{n-1} x^2 y^{n-1} + \binom{n+1}{n} xy^n + y^{n+1}.$$

Esta é a igualdade desejada para $(n+1)$. A indução está, portanto, completa. E, assim, verificamos a fórmula Binomial. □

PROBLEMA 2.2.13 – *Suponha que S é um conjunto com k elementos. Prove que S tem 2^k subconjuntos, usando os coeficientes binomiais.*

Solução: No capítulo anterior provámos por indução que um conjunto com k elementos tem 2^k subconjuntos. Agora vamos analisar este problema sob o ponto de vista da combinatória.

Para contar o número total de subconjuntos de um conjunto S com k elementos, podemos contar o número de subconjuntos de S que têm um dado número de elementos n , e depois fazer variar n de 0 até k e somar.

$$\begin{aligned} N(n) &= \{\text{número de subconjuntos com } n \text{ elementos}\} \\ &= \{\text{número de maneiras de escolher } n \text{ elementos de um conjunto com } k \\ &\quad \text{elementos}\} \\ &= \binom{k}{n}. \end{aligned}$$

Então, temos apenas que mostrar que

$$\binom{k}{0} + \binom{k}{1} + \dots + \binom{k}{k} = 2^k .$$

Se aplicarmos o Teorema Binomial a $(1 + 1)^k$ temos

$$\begin{aligned} 2^k = (1 + 1)^k &= \binom{k}{0} 1^k + \binom{k}{1} 1^{k-1} \cdot 1 + \dots + \binom{k}{k-1} 1 \cdot 1^{k-1} + \binom{k}{k} 1^k \\ &= \binom{k}{0} + \binom{k}{1} + \dots + \binom{k}{k-1} + \binom{k}{k} . \end{aligned}$$

Deste modo, provamos que S tem $N(0) + N(1) + \dots + N(k) = 2^k$ subconjuntos, usando os coeficientes binomiais.

□

2.3 – PROBLEMAS DE PROBABILIDADES

A variedade de técnicas de contagem mencionadas no subcapítulo anterior irão, certamente, ser necessárias para esta secção. Mas os problemas de probabilidades têm outra dimensão. Num problema de probabilidades é vital delimitar o espaço amostra. O mundo das probabilidades está cheio de puzzles e paradoxos, que estão, muitas vezes, relacionados com a falta de compreensão do espaço amostra ou espaço de probabilidades.

Muitos problemas elementares de probabilidades resolvem-se usando, cuidadosamente, argumentos caso-a-caso ou argumentos de contagem.

O primeiro problema a ser aqui tratado é inspirado num programa televisivo americano que se chama “Vamos fazer um acordo”. A natureza do programa, de um modo simplificado, é a seguinte: O concorrente é confrontado com três portas. Ele/ela sabe que atrás de uma porta está um óptimo prémio, por exemplo, um luxuoso carro; e que atrás das outras duas portas, está algo menos desejável, por exemplo, uma cabra. O concorrente escolhe uma porta, ao acaso, e receberá o prémio que estiver atrás dessa porta. Mas o apresentador encoraja-o a mudar de ideias, deixando-o confuso sobre qual será a melhor escolha.

Sabemos que o concorrente escolhe uma porta ao acaso. Suponhamos que escolheu a porta 3. Antes da porta ser aberta, revelando o que está por detrás dela, a apresentadora diz, “Eu agora vou abrir uma das portas que tem uma cabra”. A porta é aberta e sai a cabra. Depois a apresentadora diz, “Quer mudar a escolha feita?”.

É claro que o concorrente não irá escolher a porta que a apresentadora já abriu, uma vez que está uma cabra atrás dessa porta. Então, a questão é se o concorrente deverá trocar a porta já escolhida pela outra porta (a porta que o concorrente não escolheu e que a apresentadora não abriu). Uma ingénua abordagem será dizer que há igual probabilidade de estar uma cabra atrás da porta que resta ou atrás da porta que o concorrente já escolheu, pois atrás de uma porta há uma cabra e atrás de outra há um carro. Contudo, este ingénuo palpite não tem em conta que há duas cabras distintas. Uma análise mais cuidadosa desta situação ocorre na solução do seguinte problema, e revela uma resposta surpreendente.

PROBLEMA 2.3.1 – Use uma análise caso-a-caso para resolver o problema anterior.

Solução: Designemos as cabras por C_1 e C_2 e o carro por C_r . Por simplicidade, assumimos que o concorrente irá seleccionar a porta 3. Não podemos, contudo, assumir que a apresentadora revela sempre a cabra que está atrás da porta 1; porque poderá não estar uma cabra atrás da porta 1 (poderá estar atrás da porta 2). A tabela seguinte mostra-nos os vários casos a considerar.

PORTA 1	PORTA 2	PORTA 3
C_1	C_2	C_r
C_2	C_1	C_r
C_1	C_r	C_2
C_2	C_r	C_1
C_r	C_1	C_2
C_r	C_2	C_1

Como vimos no subcapítulo anterior, há $3! = 6$ permutações possíveis de 3 objectos. É por isso que há seis linhas na tabela.

- 1) No 1º caso, a apresentadora irá revelar uma cabra atrás da porta 1 ou 2. Não é vantajoso para o concorrente alterar a escolha feita, por isso anotamos N.
- 2) O 2º caso é semelhante ao primeiro, também não é vantajoso para o concorrente mudar a escolha. Anotamos N.
- 3) No 3º caso, a apresentadora irá revelar uma cabra atrás da porta 1, e é vantajoso para o concorrente mudar pois o carro está atrás da outra porta. Anotamos S.
- 4) O 4º caso é semelhante ao terceiro, e é vantajoso para o concorrente mudar. Anotamos S.
- 5) No 5º caso, a apresentadora revela uma cabra atrás da porta 2. É vantajoso para o concorrente mudar, então anotamos S.
- 6) O 6º caso é como o quinto, logo é vantajoso para o concorrente mudar, e por isso anotamos S.

Observe que na nossa análise caso-a-caso encontramos 4 S's e apenas 2 N's. Assim, obtemos dois contra um a favor da mudança após a apresentadora revelar a porta onde está uma cabra.

□

PROBLEMA 2.3.2 – Oito tiras de papel com as letras A, B, C, D, E, F, G e H são colocadas numa caixa. As oito tiras são tiradas da caixa uma a uma. Qual é a probabilidade de que as primeiras quatro a saírem da caixa sejam A, C, E e H (em qualquer ordem)?

Solução: Este problema é muito menos interessante do que parece. Depois de escolhermos as primeiras quatro tiras, não interessa o que fazemos. É o enunciado do problema exclui a ordem pela qual as tiras saem da caixa. Vemos que estamos a seleccionar aleatoriamente 4 objectos de 8. Queremos saber se quatro em particular, em qualquer ordem, são os que seleccionamos.

O número de maneiras diferentes de escolher 4 objectos entre 8 é

$$\binom{8}{4} = \frac{8!}{4!4!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 70.$$

Destes diferentes subconjuntos de 4, apenas um será o conjunto {A, C, E, H}. Assim, a probabilidade de que as 4 primeiras tiras sejam as que queríamos é 1/70.

□

PROBLEMA 2.3.3 – Suponha que escreve 37 cartas e depois põe a direcção em 37 envelopes para enviar junto com as cartas. Fechando os olhos, coloca aleatoriamente uma carta em cada envelope. Qual é a probabilidade de que apenas um envelope contenha a carta errada?

Solução: Digamos que tanto as cartas como os envelopes são numerados de 1 a 37. Se as cartas de 1 a 36 são colocadas nos envelopes de 1 a 36, então o que resta é a carta 37 e o envelope 37. Então esta carta é, obrigatoriamente, colocada no envelope correcto.

É claro que não há nada de especial sobre a numeração usada no último parágrafo. Isso só nos ajuda a verificar que é impossível ter apenas uma carta no envelope errado. Se uma carta está no envelope errado então pelo menos duas cartas estão em envelopes errados.

Deste modo, a resposta ao nosso problema é que a probabilidade é 0.

□

PROBLEMA 2.3.4 – *Suponha que escreve 37 cartas e depois põe a direcção em 37 envelopes para enviar junto com as cartas. Fechando os olhos, coloca aleatoriamente uma carta em cada envelope. Qual é a probabilidade de apenas duas cartas ficarem nos envelopes errados e todas as outras nos envelopes correctos?*

Solução: Se apenas duas cartas devem ficar em envelopes errados então elas devem ter sido trocadas; por exemplo, a carta 5 pode ser colocada no envelope 19 e a carta 19 no envelope 5. Assim, o número de possibilidades de colocar duas cartas nos envelopes errados é igual ao número das diferentes escolhas de duas cartas entre 37. Como todas as outras cartas têm que ser colocadas nos envelopes correctos então não há escolhas para essas cartas. Logo, o número pretendido é

$$N = \binom{37}{2} = \frac{37!}{2!35!} = \frac{37 \times 36}{2 \times 1} = 666.$$

Agora, se imaginarmos os envelopes na sua ordem correcta (numerados de 1 a 37), dispostos numa fila em cima da mesa, então uma distribuição aleatória das cartas pelos envelopes corresponde apenas a uma ordenação aleatória das cartas. Assim, o número de diferentes maneiras possíveis de distribuir 37 cartas pelos 37 envelopes é 37!. Concluindo, a probabilidade de que todas as cartas, excepto duas, estejam nos envelopes correctos é

$$P = \frac{666}{37!} \approx 4.84 \times 10^{-41}.$$

□

Veremos agora um problema mais complicado envolvendo novamente cartas e envelopes.

PROBLEMA 2.3.5 – *Suponha que escreve 37 cartas e depois põe a direcção em 37 envelopes para enviar junto com as cartas. Fechando os olhos, coloca aleatoriamente uma carta em cada envelope. Qual é a probabilidade de que apenas um envelope contenha a carta certa, e cada um dos outros 36 contenham cartas erradas?*

Solução: Veremos que este problema é bastante diferente dos anteriores, apesar do enunciado ser semelhante.

Suponhamos, como nos problemas anteriores, que tanto as cartas como os envelopes estão numeradas de 1 a 37. O que difere do problema anterior é que agora queremos que apenas uma carta esteja no envelope correcto.

Digamos que a carta 1 é colocada no envelope 1. Então o número de possíveis configurações para as outras 36 cartas é que as cartas de 2 a 37 serão colocadas nos envelopes de 2 a 37, mas nenhuma carta será colocada no envelope com número idêntico. Portanto,

temos que contar o número de permutações de 36 elementos nas quais nenhum elemento fica na sua posição original.

Fazemos uma análise semelhante se apenas a carta 2 for colocada no envelope 2. Mais uma vez, temos que contar o número de permutações de 36 elementos nas quais nenhum elemento fica na sua posição original. Aplica-se uma análise semelhante se apenas a carta 3 for colocada no envelope 3, e por aí adiante.

Deste modo, o número total de possíveis distribuições das cartas é: 37 vezes o número de permutações de 36 objectos nas quais cada objecto é colocado numa nova posição. No fim, temos que dividir por $37!$, ou seja, o número de permutações de 37 objectos.

Como acontece muitas vezes no raciocínio analítico, o nosso problema original conduziu-nos a um novo problema. Agora vamos formular e resolver o novo problema, e depois voltaremos à resolução deste.

SUB-PROBLEMA – (Bernoulli-Euler) *Suponha que tem k objectos distintos nas posições de 1 a k . De quantas maneiras diferentes eles podem ser reordenados de modo a que nenhum objecto fique na sua posição original?*

Solução: Denominemos os objectos por a_1, a_2, \dots, a_k e designemos as suas posições por P_1, P_2, \dots, P_k . O número que procuramos será chamado $M(k)$, que é o número de reordenações de a_1, a_2, \dots, a_k entre as posições P_1, P_2, \dots, P_k de modo que nenhum a_j fique na sua posição correspondente P_j .

Consideremos dois casos separadamente:

- (i) quando a_1 fica em P_2 e a_2 fica em P_1 e, além disso, a_3, \dots, a_k são distribuídos entre P_3, \dots, P_k ;
- (ii) quando a_1 fica em P_2 mas a_2 não fica em P_1 .

Caso (i) – As posições de a_1 e a_2 são pré-definidas. Os restantes $k - 2$ elementos a_3, \dots, a_k serão distribuídos entre P_3, \dots, P_k de modo que nenhum a_j fique em P_j . O número de maneiras possíveis para fazer isto é $M(k - 2)$.

Caso (ii) – É conveniente ver o segundo caso deste modo: estamos a distribuir $a_2, a_3, a_4, \dots, a_k$ entre $P_1, P_3, P_4, \dots, P_k$ mas o primeiro destes objectos (nomeadamente a_2) não pode ficar na primeira destas posições (nomeadamente P_1), o segundo destes objectos (a_3) não pode ficar na segunda destas posições (P_3), e assim sucessivamente. Deste modo, estamos a descrever $M(k - 1)$.

Juntando estes dois casos, vemos que o número de reordenações possíveis, nas quais a_1 fica em P_2 , é $M(k - 2) + M(k - 1)$.

Agora podemos fazer uma análise semelhante para determinar o número de reordenações possíveis nas quais a_1 fica em P_3 . É claro que a resposta será a mesma: $M(k - 2) + M(k - 1)$. Obteremos a mesma resposta se considerarmos a_1 em P_4, P_5 ou P_k . Em suma, temos $k - 1$ repetições do mesmo número de reordenações, que é $M(k - 2) + M(k - 1)$. Juntando tudo, encontramos o número que procuramos, ou seja, o número total de reordenações possíveis de a_1, a_2, \dots, a_k , que é

$$M(k) = (k - 1) [M(k - 2) + M(k - 1)].$$

Reorganizamos os termos e escrevemos do seguinte modo:

$$M(k) = k \cdot M(k-1) - M(k-1) + (k-1) \cdot M(k-2)$$

ou

$$M(k) - k \cdot M(k-1) = (-1) [M(k-1) - (k-1) \cdot M(k-2)] \quad (*)$$

Isto é a chamada relação recursiva para a função $M(k)$. As relações recursivas são um importante utensílio na matemática finita.

Substituindo k por 3, 4, 5, ..., k em (*), obtemos

$$M(3) - 3 \cdot M(2) = (-1) [M(2) - 2 \cdot M(1)]$$

$$M(4) - 4 \cdot M(3) = (-1) [M(3) - 3 \cdot M(2)]$$

$$M(5) - 5 \cdot M(4) = (-1) [M(4) - 4 \cdot M(3)]$$

.

.

.

$$M(k) - k M(k-1) = (-1) [M(k-1) - (k-1) \cdot M(k-2)]$$

Podemos substituir a primeira destas equações na segunda e obtemos

$$M(4) - 4 \cdot M(3) = (-1)^2 [M(2) - 2 \cdot M(1)]$$

Depois podemos substituir esta equação na terceira, e assim sucessivamente. O resultado final é

$$M(k) - k M(k-1) = (-1)^{k-2} [M(2) - 2 \cdot M(1)].$$

Mas $(-1)^{k-2} = (-1)^k$. Também $M(1) = 0$ e $M(2) = 1$ (pela definição de $M(k)$). Colocando esta informação na última equação, obtemos

$$M(k) - k M(k-1) = (-1)^k$$

Dividindo os dois membros por $k!$, obtemos

$$\frac{M(k)}{k!} - \frac{M(k-1)}{(k-1)!} = \frac{(-1)^k}{k!} \quad (**)$$

Agora escrevemos a fórmula (**) para os casos 2, 3, 4, ..., k e obtemos

$$\frac{M(2)}{2!} - \frac{M(1)}{1!} = \frac{(-1)^2}{2!}$$

$$\frac{M(3)}{3!} - \frac{M(2)}{2!} = \frac{(-1)^3}{3!}$$

.

.

.

$$\frac{M(k)}{k!} - \frac{M(k-1)}{(k-1)!} = \frac{(-1)^k}{k!}$$

Ao adicionarmos todas estas equações obtemos uma “soma telescópica” (pois tudo se cancela, excepto a primeira e última parcelas). E, tendo em conta que $M(1) = 0$, o resultado é o seguinte

$$\frac{M(k)}{k!} = \frac{(-1)^2}{2!} + \frac{(-1)^3}{3!} + \dots + \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Assim, o resultado final é

$$M(k) = k! \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^k}{k!} \right).$$

Esta fórmula permite contar as reordenações possíveis ou permutações. E, deste modo, completamos a solução do subproblema.

Agora completemos a solução do PROBLEMA 2.3.5. Já determinamos que o número de maneiras de colocar uma carta no envelope certo e cada uma das outras 36 em envelopes errados é $37 \cdot M(36)$ (aqui estamos a usar a notação do subproblema). A probabilidade de conseguir esse arranjo é

$$\begin{aligned} p &= \frac{37 \cdot M(36)}{37!} \\ &= \frac{37 \cdot 36! \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \dots + \frac{(-1)^{36}}{36!} \right)}{37!} \\ &= \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \dots + \frac{1}{36!}. \end{aligned}$$

Esta é a solução final do nosso problema. □

PROBLEMA 2.3.6 – *Uma mulher vai visitar um casal de amigos que já não via há muito tempo. Ela sabe que eles têm dois filhos com idades diferentes, mas não sabe de que sexo são. Quando ela bate à porta da casa, um rapaz responde.*

Qual é a probabilidade de que a outra criança também seja um rapaz?

Solução: Este é um exemplo ideal para ilustrar o conceito de espaço amostra. Uma análise incorrecta seria dizer, “Há mais uma criança. É um rapaz ou uma rapariga. Então a probabilidade de ser um rapaz é 50-50, ou seja, $1/2$ ”.

O que é que está errado neste raciocínio? Temos que ter cuidado com o espaço amostra que neste caso consiste em todos os possíveis pares de crianças. Se considerarmos todos os pares de crianças em que o primeiro elemento do par corresponde à criança mais velha e o segundo elemento corresponde ao mais novo, então temos as seguintes possibilidades

(Rapaz, Rapaz), (Rapaz, Rapariga), (Rapariga, Rapaz), (Rapariga, Rapariga).

Há quatro possíveis pares de crianças. Como não sabemos se a criança que respondeu à porta é o mais velho ou o mais novo então não fazemos ideia se essa criança é o primeiro ou o segundo elemento do par ordenado. Assim, qualquer um dos três primeiros pares ordenados pode ser o que descreve as crianças nesta família.

Destes três pares ordenados, dois revelam que a outra criança é uma rapariga e um revela que a outra criança é um rapaz. Deste modo, concluímos que há $1/3$ de probabilidade de que a outra criança seja um rapaz.

□

Suponha que modificamos os dados do último problema como se segue: considere todos os possíveis pares de crianças em que o primeiro elemento do par ordenado corresponde à criança que responde à porta e o segundo elemento corresponde à outra criança. Então as possibilidades são

(Rapaz, Rapaz), (Rapaz, Rapariga), (Rapariga, Rapaz), (Rapariga, Rapariga).

O facto de ser um rapaz a responder à porta elimina as duas últimas possibilidades. Os pares que nos interessam são (Rapaz, Rapaz) e (Rapaz, Rapariga). Concluímos, deste modo, que há $1/2$ de probabilidade de que a segunda criança seja um rapaz. Mas algo está errado nesta análise. Ora vejamos a seguinte análise.

Para confundi-lo ainda mais, vamos modificar um pouco a análise deste problema. Considere todos os possíveis pares de crianças na ordem (responde à porta, outra). A primeira criança do par ordenado é a que responde à porta, a segunda é a outra criança. Então temos as seguintes possibilidades

(Rapaz₁, Rapaz₂), (Rapaz₂, Rapaz₁), (Rapaz, Rapariga),
(Rapariga, Rapaz), (Rapariga₁, Rapariga₂), (Rapariga₂, Rapariga₁).

A mudança que fizemos deve-se ao seguinte facto: se há dois rapazes, então pode ter sido qualquer um a responder à porta. Então devemos distinguir estas possibilidades. O mesmo raciocínio é aplicado se houver duas raparigas. Como anteriormente, reparemos que uma vez que a criança que responde à porta é um rapaz, então os três últimos pares ordenados devem ser eliminados da nossa análise. Logo, os pares que nos interessam são (Rapaz₁, Rapaz₂), (Rapaz₂, Rapaz₁), (Rapaz, Rapariga). Concluímos, deste modo, que há $2/3$ de probabilidade de que a segunda criança seja um rapaz. Mas continua a haver algo errado nesta análise! Tente descobrir o quê, antes de continuar a ler.

Se está céptico em relação ao resultado destes problemas, então deve estar motivado para fazer um experiência. Substitua “Rapaz” e “Rapariga” por “Cara” e “Escudo”, respectivamente. Lance a moeda ao ar duas vezes e registe os dois resultados obtidos numa fila (linha). Lance a moeda outra vez duas vezes e registe novamente os resultados numa fila. Repita este processo 50 vezes de modo a obter um conjunto de dados experimentais. Isto representa 50 famílias, cada uma com duas crianças. Duas caras correspondem a dois rapazes, dois escudos correspondem a duas raparigas, e por aí adiante.

Agora, sem pensar analiticamente, examinemos os dados experimentais. Considere a questão “Dado que um elemento do par é cara, qual é a probabilidade do outro elemento também ser cara?”. Como ilustração, suponhamos que fizemos 50 pares de lançamentos de uma moeda e obtivemos os resultados representados na tabela seguinte:

E	C		E	C		C	E		C	C		E	C
C	C		E	C		C	E		E	C		E	E
E	C		C	E		C	C		C	C		E	E
C	E		E	C		C	E		C	C		C	C
C	C		C	E		C	C		E	E		C	C
C	E		E	C		C	E		E	C		E	E
C	C		C	C		C	E		C	C		C	E
C	E		E	C		E	C		E	E		C	E
C	E		E	C		C	C		E	E		C	C
C	E		C	C		C	E		C	E		E	E

Repare que há 43 pares nos quais pelo menos um elemento é cara. Desses 43 pares, 15 têm duas caras. Baseados nesta amostra, calculamos que a probabilidade de ambos serem cara, dado que um é cara, é $15/43 \approx 0.3488$. Isto é um valor muito próximo de $1/3$, que era o que previa a nossa análise inicial.

□

Com vista a relacionar o primeiro problema com a experiência, vamos mudar um pouco os parâmetros do problema.

PROBLEMA 2.3.7 – *Uma mulher vai visitar um casal de amigos que já não via há muito tempo. Ela sabe que eles têm dois filhos com idades diferentes, mas não sabe de que sexo são.*

Quando ela bate à porta da casa, um rapaz responde “Eu sou o filho mais velho da casa. O bebé está nas traseiras a dormir”.

Qual é a probabilidade de que a outra criança seja um rapaz?

Solução: Esta é uma questão diferente! Relembre que todos os possíveis pares de crianças, na ordem (mais velho, mais novo) são

(Rapaz, Rapaz), (Rapaz, Rapariga), (Rapariga, Rapaz), (Rapariga, Rapariga).

Os únicos que satisfazem a hipótese de que o mais velho é um rapaz são o primeiro e segundo pares. Desses pares, um tem um rapaz como segunda criança e um tem uma rapariga. Então a probabilidade de que a criança que está a dormir seja um rapaz é igual à probabilidade de ser uma rapariga. Logo, a resposta a esta questão é $1/2$.

□

É útil olhar para os nossos dados experimentais. Relembre que “Caras” correspondem a rapazes e “Escudos” a raparigas. Repare que há 31 pares que têm caras como primeiro elemento. Desses, 15 têm caras como segundo elemento e 16 têm escudos como segundo elemento. Assim, os dados experimentais sugerem que há uma probabilidade de $15/31 \approx 0.4839$ de que a segunda criança seja um rapaz e uma probabilidade de $16/31 \approx 0.5161$ de que a segunda criança seja uma rapariga.

PROBLEMA 2.3.8 – Um saco contém um certo número de bolas vermelhas e um certo número de bolas azuis. O número de bolas de cada tipo tem que ser positivo ou zero. A primeira bola é tirada ao acaso e é vermelha. Se uma segunda bola for tirada, qual é a probabilidade de também ser vermelha?

Solução: O que é novo aqui é que não sabemos quantas bolas há no saco nem quantas bolas há de cada tipo. Sabemos, para começar, que há pelo menos uma bola vermelha. Mas todas as outras podem ser vermelhas, ou não haver mais nenhuma vermelha. Como ter em conta esta informação (ou falta dela)?

Digamos que o número total de bolas no saco é N e representemos por k o número de bolas vermelhas que há no saco. Daremos ao N diferentes análises conforme o número de bolas do saco que são vermelhas. Escrevemos S_k para a situação em que há k bolas vermelhas no saco, $1 \leq k \leq N$. B_1 é um saco que representa a situação S_1 (uma bola vermelha), B_2 é um saco que representa a situação S_2 (duas bolas vermelhas), e por aí adiante. Juntando-as todas, há $1 + 2 + 3 + \dots + (N - 1) + N = N(N + 1)/2$ bolas vermelhas em todos os sacos. Cada uma tem uma probabilidade de ser seleccionada igual a

$$\frac{1}{N(N + 1)} = \frac{2}{N(N + 1)}.$$

A probabilidade de que a primeira bola vermelha a ser seleccionada esteja em B_1 é $1 \times 2/[N(N + 1)]$, porque B_1 tem apenas uma bola vermelha; a probabilidade de que a primeira bola vermelha seleccionada esteja em B_2 é $2 \times 2/[N(N + 1)]$, porque B_2 tem duas bolas vermelhas; a probabilidade de que a primeira bola vermelha seleccionada esteja em B_3 é $3 \times 2/[N(N + 1)]$, e assim sucessivamente. Então a probabilidade de que a primeira bola vermelha seleccionada esteja em B_k é $k \times 2/[N(N + 1)]$.

Depois da primeira bola vermelha ser seleccionada do saco B_k , então restam $(k - 1)$ bolas vermelhas e $(N - 1)$ bolas deixadas no saco. Então a probabilidade de que a segunda bola seleccionada seja vermelha é $(k - 1)/(N - 1)$. A probabilidade do primeiro acontecimento juntamente com a probabilidade do segundo acontecimento é o produto das suas probabilidades. Assim,

$$P_k = \frac{k \times 2}{N(N + 1)} \cdot \frac{k - 1}{N - 1}.$$

Uma vez que cada um dos k sacos tem igual probabilidade de ter sido seleccionado (isto é, cada uma das distribuições das bolas tem a mesma probabilidade de ter ocorrido), a probabilidade total de que a segunda bola seja vermelha é

$$P = \sum_{k=1}^N P_k = \sum_{k=1}^N \frac{k \times 2}{N(N + 1)} \cdot \frac{k - 1}{N - 1}.$$

Esta é uma quantidade que se pode calcular.

$$P = \frac{2}{(N-1)N(N+1)} \sum_{k=1}^N k(k-1)$$

$$= \frac{2}{(N-1)N(N+1)} \left[\sum_{k=1}^N k^2 - \sum_{k=1}^N k \right]$$

Já vimos que $\sum_{k=1}^N k = \frac{N(N+1)}{2}$ e que $\sum_{k=1}^N k^2 = \frac{2N^3 + 3N^2 + N}{6}$. Assim, obtemos

$$P = \frac{2}{(N-1)N(N+1)} \left[\frac{2N^3 + 3N^2 + N}{6} - \frac{N(N+1)}{2} \right]$$

$$= \frac{2}{(N-1)N(N+1)} \left[\frac{N(2N^2 + 3N + 1 - 3N - 3)}{6} \right]$$

$$= \frac{2}{(N-1)(N+1)} \left[\frac{2(N-1)(N+1)}{6} \right]$$

$$= \frac{2}{3}$$

Concluimos, assim, que a probabilidade de que a segunda bola seja vermelha é $\frac{2}{3}$.

□

PROBLEMA 2.3.9 – Encontre o menor número inteiro positivo N de modo que, num quarto contendo N pessoas, duas delas tenham o mesmo dia de aniversário (não interessa o ano, só interessa o dia). Assuma que um ano tem 365 dias.

Solução: Às vezes é conveniente calcular a probabilidade de que alguma coisa não vai acontecer, e depois subtrair esse resultado a 1.

Tendo isto em conta, fixamos N e calculamos a probabilidade de que nenhuma de duas pessoas, num quarto com N pessoas, fazem anos no mesmo dia. Designemos as pessoas por P_1, P_2, \dots, P_N . Então a pessoa P_1 pode fazer anos em qualquer um dos 365 dias do ano sem contradizer a condição de que nenhuma de duas pessoas que estão no quarto terá o mesmo dia de aniversário. Uma vez que a pessoa P_1 tem um dia de aniversário fixo (que é o dia em que nasceu, mas estamos a reescrever a história por causa da nossa análise), então a pessoa P_2 não pode ter o mesmo dia de aniversário pois queremos manter dias de aniversário distintos. Assim, a pessoa P_2 tem 364 escolhas para o dia do seu aniversário. Raciocinando de modo análogo, a pessoa P_3 tem 363 escolhas para o dia do seu aniversário. Resumindo, o número total de combinações de dias de aniversários de N pessoas, sem que duas delas façam anos no mesmo dia, é

$$365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \dots \cdot [365 - (N - 1)].$$

O número total de todas as distribuições de aniversários entre N pessoas é

$$\underbrace{365 \cdot 365 \cdot 365 \cdots 365}_{N \text{ vezes}}$$

Resumindo, a probabilidade de que N pessoas, que estão num quarto, tenham dias de aniversário distintos é

$$P = \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdots [365 - (N - 1)]}{365^N}$$

Para simplificar os cálculos, reescrevemos a fórmula do seguinte modo

$$P = \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdots \frac{365 - (N - 1)}{365}$$

E agora, com a ajuda da calculadora ou do computador, fazemos os cálculos. Começamos à esquerda, multiplicando as fracções todas juntas. Quando o produto total for inferior a 1/2, o assunto fica resolvido. A última fracção a ser multiplicada é que nos vai dizer o que deve ser N.

Se multiplicarmos 23 termos, obtemos uma probabilidade de 0.4927027. Usando apenas 22 termos obtemos uma probabilidade de 0.5243046. É claro que o menor N que origina uma probabilidade inferior a 1/2 de que cada pessoa que está no quarto tenha um distinto dia de aniversário é N = 23.

Concluimos que se houver 23 pessoas no quarto, a probabilidade de que duas pessoas tenham o mesmo dia de aniversário é $P = 1 - 0.4927027 = 0.5072973$.

□

O CLÁSSICO PROBLEMA DO CASAMENTO

Um rapaz quer casar. Na procura de uma esposa, ele decide sair com 100 mulheres, no máximo. Depois de sair com uma mulher por uns tempos, ele deve casar com ela, ou rejeitá-la e começar a sair com outra. Desde que uma mulher seja rejeitada, ele não volta a sair com ela depois. Finalmente, ele deve escolher apenas uma mulher e casar com ela.

A característica interessante deste problema é que o rapaz pode olhar para trás, mas não pode olhar para a frente. A qualquer altura ele pode dizer “A minha actual namorada é mais atraente e mais compreensiva do que qualquer mulher com quem já saí anteriormente.” Tendo isto em conta, ele pode decidir casar com ela, ou pode pensar “Esta mulher é magnífica, mas eu aposto que alguém melhor aparecerá brevemente.”

O “problema do casamento” consiste em determinar a melhor estratégia para o rapaz. Com vista a eliminar os aspectos emocionais do problema, este será reformulado do seguinte modo:

PROBLEMA 2.3.10 – *Um chapéu contém 100 tiras de papel. Em cada tira está escrito um número inteiro positivo (repare que qualquer inteiro positivo pode aparecer nas tiras e não apenas os inteiros entre 1 e 100) que corresponde ao valor, em escudos, que a pessoa poderá receber, caso escolha essa tira. Os inteiros não aparecem, necessariamente, com alguma sequência ou relação. Cada tira tem um número diferente, assim há apenas uma tira com o maior inteiro.*

Uma pessoa que não tem, à priori, conhecimento de quais são os números que aparecem nas tiras – mas que sabe que há 100 tiras – tira, ao acaso, tiras do chapéu, uma a uma. A pessoa olha para o número escrito na tira, depois ou concorda em aceitar aquele número de escudos, e desiste do jogo, ou decide escolher outra tira.

Repare que o concorrente olha para a tira e então decide se desiste ou continua a jogar. Ele/ela pode continuar em frente mas não pode voltar atrás. Se nenhuma escolha for feita até ser tirada a centésima tira, então o concorrente tem que aceitar o número de escudos que estiver na centésima tira.

Qual é a melhor estratégia para o concorrente? (Aqui, melhor estratégia significa aquela que leva o concorrente a ganhar o maior número de escudos.)

Ao lermos este problema parece que não há estratégia que o resolva, e pensamos que é preciso é ter sorte para ser bem sucedido.

Suponhamos, antecipadamente, que a estratégia terá a seguinte forma: o concorrente tira um certo número de tiras – digamos k tiras – e vai anotando os números que vão saindo. Após terem sido tiradas k tiras, o concorrente afirma que seleccionará a próxima tira que satisfizer a “propriedade P ”, a qual é determinada.

Solução: Designemos a primeira tira a ser tirada por “tira 1”, a seguinte por “tira 2”, e assim sucessivamente.

O nosso objectivo é otimizar o número de escudos a receber. Qualquer estratégia que resulte em escolher a $(s + 1)^{\text{a}}$ tira, $s \geq k$, pode ser melhorada se recordarmos o maior número M das tiras 1, 2, ..., s e depois seleccionarmos a próxima tira que tiver um número superior a M (se nenhuma dessas tiras aparecer, então o concorrente não tem outra escolha senão ficar com a última tira). Aplicando esta observação repetidamente, vemos que a melhor estratégia, dado o conjunto de parâmetros mencionado no parágrafo anterior ao início da solução, consiste em tomar nota do maior número M de qualquer tira 1, 2, ..., k e depois seleccionar a próxima tira que tiver um número superior a M .

Uma vez estabelecido este esquema, o nosso trabalho é escolher o melhor k possível. Suponhamos que o maior número de todas as 100 tiras, Q , aparece na tira $r + 1$. O concorrente não terá a sorte de escolher essa tira a menos que duas condições sejam verificadas:

- 1) $r \geq k$ (porque vamos rejeitar as primeiras k tiras, portanto se $r < k$ então as $(r + 1)^{\text{as}}$ tiras, contendo o número maior, serão rejeitadas);
- 2) o maior número nas tiras de 1 a r é também o maior número nas tiras de 1 a k (pois se o maior número P , nas tiras de 1 a r , é superior ao maior número M , nas tiras de 1 a k , então $P < Q$ e P será escolhido antes de as $(r + 1)^{\text{as}}$ tiras serem todas seleccionadas).

A probabilidade de que o maior número Q esteja na tira $r + 1$ (ou em qualquer tira em particular) é $1/100$. A probabilidade de encontrar a tira com o número Q , assumindo que essa é a tira número $r + 1$, é k/r . Em suma, a probabilidade de acabar o jogo com a tira que tiver o maior número Q , dado que essa é a $(r + 1)^{\text{a}}$ tira e que vamos rejeitar as primeiras r tiras e escolher a $(r + 1)^{\text{a}}$, é

$$p_r = \frac{1}{100} \cdot \frac{k}{r} .$$

Os valores permitidos para r são $r = k, k+1, \dots, 99$. Assim, a probabilidade de ganhar o jogo, usando a estratégia designada, é

$$P = \sum_{r=k}^{99} p_r = \frac{k}{100} \sum_{r=k}^{99} \frac{1}{r} \quad (*)$$

Mas agora vejamos uma observação importante sobre a soma do lado direito da última fórmula:

Se x é positivo e pequeno, então podemos escrever

$$\ln(1+x) = x \cdot \{ \ln[(1+x)^{1/x}] \}$$

e a expressão dentro do logaritmo no lado direito é a expressão que usamos para definir o número de Euler $e \approx 2.718$, quando $x \rightarrow 0$. Assim temos que

$$\ln(1+x) \approx x \cdot \ln e = x$$

Aplicaremos esta observação à nossa soma do seguinte modo

$$\begin{aligned} \ln N &= \ln \left[\frac{N}{N-1} \cdot \frac{N-1}{N-2} \cdot \dots \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{1} \right] \\ &= \ln \left(\frac{N}{N-1} \right) + \ln \left(\frac{N-1}{N-2} \right) + \dots + \ln \left(\frac{3}{2} \right) + \ln \left(\frac{2}{1} \right) \\ &= \ln \left(1 + \frac{1}{N-1} \right) + \ln \left(1 + \frac{1}{N-2} \right) + \dots + \ln \left(1 + \frac{1}{2} \right) + \ln \left(1 + \frac{1}{1} \right) \end{aligned}$$

Agora podemos aplicar a nossa observação de que $\ln(1+x) \approx x$ a cada uma destas parcelas, substituindo $x > 0$ por $1/(N-1)$, $1/(N-2)$, O resultado é o seguinte

$$\ln N \approx \frac{1}{N-1} + \frac{1}{N-2} + \dots + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} .$$

Depois vemos que

$$\sum_{r=k}^{99} \frac{1}{r} = \sum_{r=1}^{99} \frac{1}{r} - \sum_{r=1}^{k-1} \frac{1}{r} \approx \ln 100 - \ln(k) = \ln \left(\frac{100}{k} \right) .$$

Mas, com esta aproximação, a fórmula (*) para a probabilidade de escolher a tira com o maior número, passando por k tiras e depois escolhendo a seguinte tira com o próximo maior número que encontramos, é

$$P \approx \frac{k}{100} \cdot \ln \left(\frac{100}{k} \right) .$$

Queremos escolher k de modo que a probabilidade seja tão grande quanto possível.

É claro que podemos maximizar uma função deste tipo, usando conhecimentos de Análise. Mas, em vez disso, se pegarmos numa calculadora gráfica ou num computador (com software apropriado) e olharmos para o gráfico da função

$$P(x) = \frac{x}{100} \cdot \ln\left(\frac{100}{x}\right),$$

conseguimos determinar onde P toma o seu valor máximo. Veremos que a resposta é aproximadamente $x = 100/e$, onde e , como já vimos, é o número de Euler.

Concluimos desta análise que o jogador deve examinar as primeiras $100/e$ tiras (arredondando, obtemos 37), lembrando o maior número observado nessas tiras. A próxima tira que sair com um número maior do que o máximo já observado é a que deve ser escolhida. Esta é a melhor estratégia a utilizar.

□

PROBLEMA.2.3.11 – *Este problema é antigo e famoso: “Qual é a probabilidade que o próximo ar que inspirar contenha uma molécula que foi expelida por Júlio César quando ele exclamou: “Também tu, Brutus?”.*

Há dois pontos neste problema: um é que podemos arranjar um modelo matemático e chegar à resposta; o outro é que a probabilidade de partilharmos ar com Júlio César é surpreendentemente alta.

Solução: Para começar, não podemos saber tudo. Devemos fazer algumas suposições. Uma é que o último ar que Júlio César exalou está uniformemente distribuído pela atmosfera. A segunda é que todas as moléculas que estavam nesse ar ainda estão presentes na atmosfera – elas não se dispersaram por lugares desconhecidos no universo, e não se decompueram nem recombinaram com outros elementos (por exemplo, num processo de oxidação). Finalmente, devemos assumir que as moléculas de ar estão igualmente distribuídas na atmosfera (isto não é completamente verdade, pois a atmosfera fica mais rarefeita à medida que nos aproximamos da superfície da terra – contudo, próximo da superfície da terra, onde vivemos, a hipótese é aproximadamente verdadeira).

Também precisamos de alguma informação. Primeiro, podemos usar o Manual de Física e Química para encontrar a massa da nossa atmosfera, a magnitude do número de Avogadro, e o peso, em gramas, das moléculas da atmosfera. O resultado é que a atmosfera contém 10^{44} moléculas.

O peso molecular (em gramas) para qualquer gás à temperatura normal é 22.4 litros e contém 6×10^{23} moléculas. As experiências mostram que uma respiração normal contém 0.4 litros de ar. Assim, o número de moléculas numa respiração normal é

$$0.4 \times \frac{1}{22.4} \times 6 \times 10^{23} .$$

Isto equivale a 1.0714×10^{22} moléculas.

Assim, a situação é bastante simples: a nossa próxima respiração terá 1.0714×10^{22} moléculas, e a última respiração de Júlio César tinha 1.0714×10^{22} moléculas, e estas estão misturadas num universo de 10^{44} moléculas. Qual é a probabilidade de as duas respirações terem pelo menos uma molécula em comum?

Primeiro discutiremos o assunto intuitivamente. Arredondemos o número de moléculas para 10^{22} .

Uma vez que a atmosfera tem 10^{44} moléculas, isso faz um total de 10^{22} respirações, cada uma tendo 10^{22} moléculas. Se a última respiração de 10^{22} moléculas de Júlio César está igualmente e aleatoriamente distribuída na atmosfera, então há, provavelmente, uma molécula dessa última respiração em cada uma das outras respirações (por isso há uma molécula exalada por Júlio César em cada uma das respirações). Por isso, parece quase certo que a sua próxima respiração contenha uma molécula exalada por Júlio César.

O truque é fazer isto de um modo preciso. E o processo de fazer os cálculos exactos leva-nos a um problema maior, envolvendo cálculos científicos. De acordo com o que vimos anteriormente, a atmosfera contém $10^{44} - 10^{22}$ moléculas que não pertenceram a Júlio César. Se escolher uma molécula da sua próxima respiração, a probabilidade de que não seja de Júlio César é

$$\frac{10^{44} - 10^{22}}{10^{44}} = 1 - 10^{-22} . \quad (*)$$

Esta probabilidade aplica-se a cada uma das moléculas da sua próxima respiração. Então a probabilidade de que cada molécula da sua próxima respiração não seja de Júlio César é o produto do número em (*) com ele próprio 10^{22} vezes (uma vez por cada molécula na sua próxima respiração). Assim, a probabilidade de que nenhuma molécula da sua próxima respiração tenha sido exalada por Júlio César é

$$(1 - 10^{-22})^{10^{22}} \quad (**)$$

Mas aqui temos um problema: se introduzirmos o número $(1 - 10^{-22})$ na calculadora, de certeza que a resposta será 1 – porque a calculadora, provavelmente, usa apenas 10 dígitos. O número em (**) é seguramente diferente de 1. Como devemos proceder? É conhecido que a expressão $(1 + 1/k)^k$ tende para o número de Euler, $e \approx 2.718$, quando $k \rightarrow \infty$. O nosso número verifica exactamente este modelo com $k = 10^{22}$. Concluimos, assim, que a probabilidade de a nossa próxima respiração não conter uma molécula da última respiração de Júlio César é

$$(1 - 10^{-22})^{10^{22}} \approx \frac{1}{e} \approx \frac{1}{2.718} \approx 0.368 .$$

Por outras palavras, a probabilidade de conter uma molécula da última respiração de Júlio César na sua próxima respiração é pelo menos 63%.

□

3 – MATEMÁTICA RECREATIVA

3.1 – PROBLEMAS

PROBLEMA 3.1.1 – *Dois amigos, que já não se viam há muito tempo, encontraram-se e um perguntou ao outro: “Quantos filhos tens e que idades têm?”.*

– O amigo respondeu: “Tenho três filhos. O produto das suas idades é 36 e a soma é igual ao número da porta da minha casa.”

Depois de pensar um pouco, o amigo responde:

– Falta-me um dado para saber a idade de cada um dos teus filhos.

– Tens razão, esqueci-me de te dizer que o mais velho toca piano.

Quais as idades de cada um dos filhos?

Solução: Após a primeira leitura, parece impossível resolver este problema, pois pensamos que não há informação suficiente para determinar as idades. É por isso que é um problema.

Como o produto das três idades é 36 então só há algumas possibilidades. Vejamos a seguinte tabela com todas as possibilidades cuja multiplicação de três números dá 36 e com as respectivas somas das três idades.

IDADES	PRODUTO	SOMA
1, 1, 36	36	38
1, 2, 18	36	21
1, 3, 12	36	16
1, 4, 9	36	14
1, 6, 6	36	13
2, 2, 9	36	13
2, 3, 6	36	11
3, 3, 4	36	10

Sabemos que o produto das idades é 36. Não sabemos qual é o número da porta, mas mesmo que soubéssemos qual é a soma das idades, o problema continuava indeterminado porque, caso contrário, o amigo não diria que faltava um dado. Isso significa que a soma é 13, porque é o único número que aparece mais do que uma vez. Assim, o amigo tinha três filhos com idades 1, 6, 6 ou 2, 2, 9. Depois ele diz que o mais velho toca piano. Isso significa que tem um filho mais velho. Assim, concluímos que as idades são 2, 2, 9.

□

PROBLEMA 3.1.2 – *Considere a Fig.1. Consegue ligar cada letra que está em cima com a respectiva letra que está em baixo, com caminhos que não se cruzam nem ultrapassam os limites do quadrado grande?*

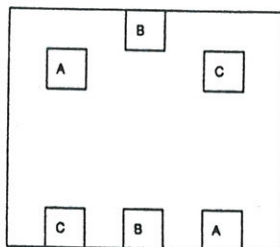


Fig.1

Solução: Como proceder ? Parece impossível. Mas a confiança dita que: “lá por um problema parecer impossível não significa que o seja.” Nunca devemos admitir a derrota após um olhar rápido e superficial do problema. Começemos otimistas; devemos assumir que o problema pode ser resolvido. Só após muitas tentativas falhadas é que devemos tentar provar a impossibilidade. Se não conseguirmos, não admitamos a derrota. Voltemos ao problema mais tarde.

Agora tentemos resolver o problema. O “pensamento desejável” é sempre engraçado, e muitas vezes útil. Por exemplo, neste problema, a maior dificuldade é que as letras A e C, que estão em cima, estão nos lugares errados. Então, porque não deslocá-las de modo a tornar o problema trivialmente fácil? Ver Fig.2.

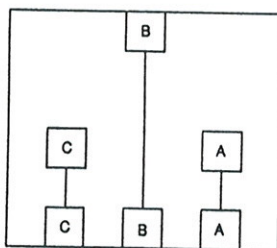


Fig.2

Aplicamos o importante método de transformar o problema num mais fácil.

“Se o problema dado é muito difícil, resolva um mais fácil.”

É claro que ainda não resolvemos o problema original. Ou já resolvemos? Podemos tentar empurrar as letras para as suas posições originais, uma de cada vez. Primeiro a letra A, como nos mostra a Fig.3.

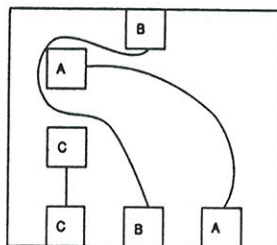


Fig.3

Depois a letra C, como podemos ver na Fig.4.

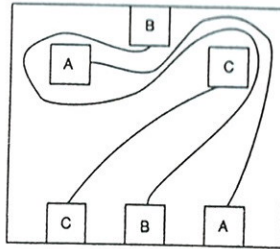


Fig.4

E, de repente, o problema está resolvido.

É claro que há uma moral na história. Muitas pessoas, quando confrontadas com este problema, dizem imediatamente que é impossível. As pessoas que são boas a resolver problemas, no entanto, não o dizem. Devemos evitar declarações imediatas de impossibilidade pois elas são, muitas vezes, desonestas.

□

Resolvemos este problema usando duas estratégias importantes. Primeiro, usamos uma estratégia psicológica ao cultivar uma atitude aberta e otimista. Segundo, aplicamos o método de transformar o problema num mais simples. E tivemos sorte, pois o problema mais simples ajudou-nos imenso na resolução do problema original.

Quem é bom na resolução de problemas consegue ter ideias que muitas pessoas não têm. A isso chamamos **criatividade**. É como estar a ver um espectáculo de magia, onde coisas maravilhosas acontecem, de maneiras surpreendentes e difíceis de explicar. O exemplo que se segue é um problema simples mas que tem uma solução inesperada. Pense um pouco no problema antes de começar a ler a solução!

PROBLEMA 3.1.3 – *Um macaco sobe uma montanha. Começou às 8:00 h da manhã e chega ao cimo ao meio-dia. Ele passa a noite no cume da montanha. Na manhã seguinte, deixa o topo da montanha às 8:00 h e desce pelo mesmo caminho que usou no dia anterior, chegando ao fundo ao meio-dia. Prove que há um momento entre as 8:00 h e o meio-dia no qual o macaco está exactamente no mesmo lugar da montanha nos dois dias. (Note que não especificamos nada sobre a velocidade a que o macaco viaja. Por exemplo, ele pode subir a uma velocidade de 50 km/h nos primeiros minutos, depois ficar sentado durante horas, etc. E o macaco não tem que subir e descer à mesma velocidade).*

Solução: Suponhamos que o macaco sobe a montanha de qualquer maneira. No momento em que ele começa a descer na manhã seguinte, há outro macaco a começar a subir, viajando do mesmo modo que o primeiro macaco viajou no dia anterior. Num determinado lugar, os dois macacos encontrar-se-ão. É esse o lugar e o momento que queremos!

□

Uma coisa extraordinária na resolução deste problema é a “ideia luminosa” de inventar um segundo macaco. A ideia parece vir de nenhum lugar, porém, resolve o problema instantaneamente. É a criatividade em acção. A reacção natural ao vermos tão brilhante e imaginativa solução é dizer, “Wow! Como foi que ele/ela pensou nisso! Eu nunca teria chegado lá.” Às vezes, de facto, ver uma solução criativa pode ser inibidor. Mesmo que algumas pessoas sejam mais criativas do que outras, devemos acreditar que quase toda a gente pode aprender a ser mais criativo. Parte desse processo advém de cultivarmos uma atitude de confiança, deste modo, quando virmos uma solução bonita, não devemos pensar, “Eu nunca teria pensado naquilo”, mas em vez disso, pensar, “Boa ideia! É parecida a algumas que eu já tive.”

PROBLEMA 3.1.4 – *Um quadrado está inscrito numa circunferência que, por sua vez, está inscrita num quadrado. Determine a razão entre as áreas dos dois quadrados. Ver Fig.1.*

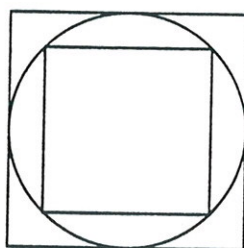


Fig.1

Solução: Este problema pode, certamente, ser resolvido algebricamente. (Consideramos x como sendo o comprimento do quadrado menor, e depois usamos o Teorema de Pitágoras, etc) mas vejamos um resolução interessante.

A figura está cheia de simetrias. Podemos rodar e/ou reflectir muitas partes da figura e continuamos a preservar a área dos dois quadrados. O que escolher entre tantas possibilidades? Precisamos de usar a hipótese de que os objectos estão inscritos uns nos outros. Se rodarmos o quadrado menor 45° , os seus vértices, agora, coincidem com os pontos de tangência entre a circunferência e o quadrado maior, e a solução é imediata. Ver Fig.2.

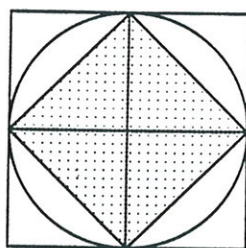


Fig.2

Agora é óbvio que o quadrado menor tem metade da área do quadrado maior.

□

Este problema é um bom exemplo de como a simetria é muito útil na resolução de alguns problemas. As simetrias mais simples são a rotação e a reflexão. É aconselhável, antes de resolver um problema, verificar se alguma rotação ou reflexão podem ajudar na sua resolução.

Analogamente à simetria, o que também é de grande ajuda na resolução de alguns problemas é a paridade. O exemplo mais elementar de paridade é “par/ímpar”, mas há muitos outros. Muitas vezes, os argumentos sobre paridade eliminam todas as complicações aparentes do problema e dão-nos uma solução surpreendente.

Vejamos um exemplo onde a paridade aparece sob outro aspecto, o qual é fundamental para resolver o problema.

PROBLEMA 3.1.5 – Queremos ladrilhar uma casa de banho com medidas $8 \times 8 \text{ m}^2$. Cada azulejo tem medidas $2 \times 1 \text{ m}^2$. Numas esquinas da casa de banho está uma pia, e o seu cano ocupa um quadrado $1 \times 1 \text{ m}^2$ no chão. Na esquina oposta está uma sanita, e o seu cano ocupa um quadrado $1 \times 1 \text{ m}^2$. A situação é mostrada na Fig.1. A Fig.2 ilustra um modo de dividir o chão em quadrados 1×1 .

Como é possível ladrilhar o chão do modo pretendido?

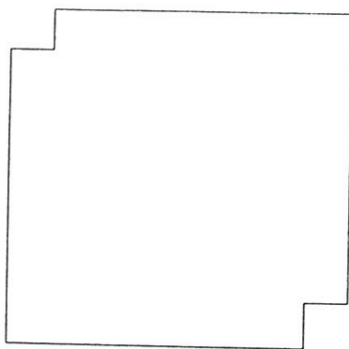


Fig.1

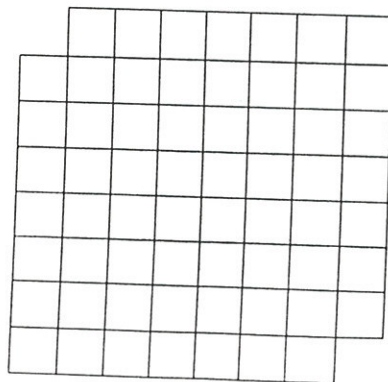


Fig.2

Solução: A área a ser ladrilhada é $8 \times 8 \text{ m}^2$ menos 2 m^2 , por outras palavras, temos que ladrilhar uma área de 62 m^2 . Assim, usaremos 31 azulejos.

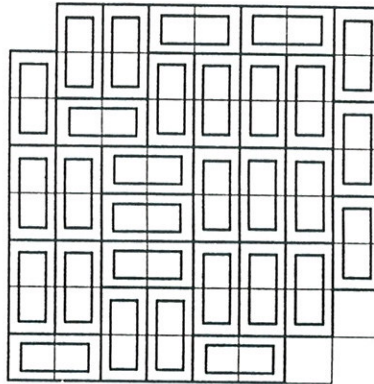


Fig.3

A Fig.3 mostra uma possível disposição dos azulejos; repare que não cobrem todo o chão. Há dois quadrados que sobram (na esquina inferior direita), e eles não podem ser cobertos por um único azulejo. Outras tentativas falham do mesmo modo.

Será que o chão não pode ser ladrilhado do modo pretendido? Mas como podemos arranjar um argumento convincente que explique porque é que nenhuma maneira de ladrilhar o chão resulta? A ideia que introduzimos agora, inspirada no conceito de paridade – consiste em colorir o chão da casa de banho como um tabuleiro de xadrez. Ver Fig.4. Repare que quando colocamos o azulejo $2 \times 1 \text{ m}^2$ no chão, este cobrirá dois quadrados adjacentes. Um destes será preto e o outro será branco. Assim, se colocarmos dois azulejos no chão, eles cobrirão um total de 2 quadrados pretos e 2 quadrados brancos. Em geral, k azulejos colocados no chão cobrirão k quadrados pretos e k quadrados brancos. No entanto, o chão da casa de banho que queremos ladrilhar tem 32 quadrados pretos e 30 quadrados brancos. Como o número de quadrados pretos cobertos tem que ser igual ao número de quadrados brancos cobertos, temos um problema impossível de resolver. Esta casa de banho nunca poderá ser ladrilhada do modo pretendido.

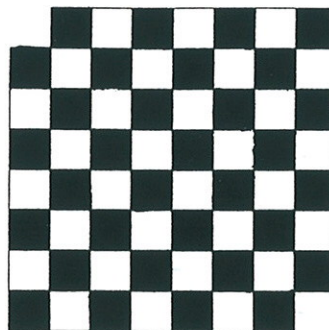


Fig.4

□

PROBLEMA 3.1.6 – Ligue os nove pontos seguintes com um caminho contínuo composto por quatro linhas rectas.



Fig.1

Solução: Este problema é impossível a não ser que nos libertemos da fronteira artificial dos nove pontos. Uma vez que se decida desenhar linhas que ultrapassem essa fronteira, torna-se bastante fácil resolvê-lo. Tracemos uma primeira linha que junta três pontos, e das restantes três linhas, cada nova linha liga mais dois pontos. Ver Fig.2.

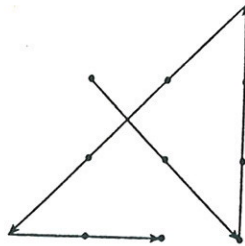


Fig.2

□

PROBLEMA 3.1.7 – Qual é a letra que se segue na sequência

U, D, T, Q,,C, S, S, ...?

Solução: A sequência é a lista das primeiras letras dos números um, dois, três, ... ; então a resposta é “O” de “oito”.

□

PROBLEMA 3.1.8 – Qual é o próximo elemento na sequência

9, 61, 52, 63, 94, 46, 18, ...?

Solução: Começemos por ler os números de trás para a frente. Assim, obtemos a seguinte sequência

9, 16, 25, 36, 49, 64, 81.

Olhando para esta sequência descobrimos, rapidamente, que o seguinte elemento é o 100, pois temos a sequência dos quadrados dos números 3, 4, 5,

Sendo assim, o número que se segue na sequência original é o 1, ou seja, 001.

□

PROBLEMA 3.1.9 – *O Sr. João decidiu deixar de fumar, dizendo: “Acabarei os vinte e sete cigarros que ainda tenho e não voltarei a fumar”.*

Ele tinha o costume de fumar apenas dois terços de cada cigarro. Não tardou a descobrir que com a ajuda de fita adesiva podia juntar três beatas e fazer outro cigarro.

Com 27 cigarros, quantos pode fumar antes de abandonar o tabaco para sempre?

Solução: Tendo em conta que com três beatas ele pode fazer outro cigarro, concluímos que dos 27 cigarros que tinha, consegue fumar mais 9. Mas com esses 9, consegue fumar mais 3, e com esses 3 consegue fumar mais 1. Logo, consegue fumar, além dos 27 cigarros que tinha, mais 13 cigarros, fumando no total 40 cigarros.

□

PROBLEMA 3.1.10 – *Para numerar as páginas de um livro, o impressor usou 1890 dígitos. Quantas páginas tinha o livro?*

Solução 1: Temos apenas que contar o número de dígitos usados:

De 1 a 9	há	$9 \times 1 = 9$ dígitos
De 10 a 99	há	$90 \times 2 = 180$ dígitos
De 100 a 599	há	$500 \times 3 = 1500$ dígitos
De 600 a 659	há	$60 \times 3 = 180$ dígitos
De 660 a 666	há	$7 \times 3 = 21$ dígitos

TOTAL = 1890 dígitos

Portanto, o livro tinha 666 páginas.

□

Este problema poderá ser resolvido de outro modo.

Solução 2: Um volume de 99 páginas numeradas precisa de $9 + 2 \times 90 = 189$ dígitos. Assim, $189 + 3(x - 99) = 1890$. Resolvendo esta equação, obtemos $x = 666$.

□

PROBLEMA 3.1.11 – *Foi encontrado um pedacinho de papel onde podemos ler*

72 frangos

** 679* \$00*

*Vemos que o primeiro e último dígitos do preço estão apagados, e estão representados por *'s. Quais são os dígitos que estão apagados e qual é o preço de cada frango?*

Solução: Seja P o preço de um frango em escudos. Então, $72P = a679b$, onde a e b correspondem aos dígitos apagados. Aqui estamos a assumir que P é um número inteiro. Para simplificar, designemos $a679b$ por x . Agora temos que x é divisível por 8 uma vez que 72 é divisível por 8. Mas, como $x = a6 \times 1000 + 79b$, e 1000 é divisível por 8, então $79b$ também deverá ser divisível por 8. Isto sugere que $9b$ deve ser divisível por 4, então $b = 2$ ou 6 . Entre os números 792 e 796, apenas 792 é divisível por 8, logo $b = 2$.

Por outro lado, x também é divisível por 9. Isto implica que a soma dos seus dígitos deve ser divisível por 9. Então $a + 6 + 7 + 9 + 2 = a + 24$ deve ser divisível por 9. Disto temos que $a = 3$. Portanto P , o preço de um frango, é $36792/72 = 511$ escudos.

□

PROBLEMA 3.1.12 – *Escolha qualquer número com 3 dígitos. Escreva-o num pedaço de papel e depois escreva os mesmos 3 dígitos, ao lado dos 3 primeiros. Assim, termina com um número com 6 dígitos como, por exemplo, 479479.*

Divida esse número por 7, depois divida a resposta obtida por 11. E, finalmente, divida a resposta obtida por 13. A resposta será interessante, de facto, esta será o número de 3 dígitos com que começou.

Como explica isto?

Solução: Repare que $7 \cdot 11 \cdot 13 = 1001$, e multiplicar um número com 3 dígitos por 1001 é o mesmo que escrevê-lo duas vezes seguidas.

□

PROBLEMA 3.1.13 – *Um homem que tinha três filhos morreu e deixou um testamento onde dizia que gostaria que o filho mais velho ficasse com metade dos seus 35 camelos, o outro filho deveria ficar com um terço dos camelos e o filho mais novo ficaria com um nono dos camelos. Como não houve concordância entre eles, foram falar com um sábio que também possuía um camelo. Como foi que o sábio fez a divisão dos camelos de modo que todos ficaram satisfeitos com o que herdaram e o sábio também recebeu um camelo?*

Solução: Como o número 35 não é divisível por 2, 3 ou 9, então é claro que todos perderiam algo. O sábio, para resolver este problema, juntou o seu camelo à cáfila de 35 camelos, ficando, assim, com 36 camelos. Assim, o filho mais velho recebeu 18 camelos, o outro filho recebeu 12 camelos e o filho mais novo recebeu 4 camelos, totalizando 34 camelos. Deste modo, sobraram dois camelos: um do sábio e o outro ficou como pagamento pela sua ajuda.

□

PROBLEMA 3.1.14 – *Três mulheres chegaram a um motel que anunciava um preço de 2700\$00 por noite. Cada uma delas deu 1000\$00 ao porteiro, e pediram-lhe para devolver 300\$00. O porteiro voltou à recepção, onde soube que o quarto, de facto, custava apenas 2500\$00 por noite. Ele deu 2500\$00 à recepcionista, voltou ao quarto, e devolveu a cada hóspede 100\$00, decidindo não lhes dizer nada sobre o preço actual. Desta maneira, o*

porteiro embolsou 200\$00, enquanto cada hóspede gastou $1000\$00 - 100\$00 = 900\$00$, fazendo um total de $200\$00 + 3 \times 900\$00 = 2900\$00$. O que aconteceu aos outros 100\$00?

Solução: Este problema está, deliberadamente, a tentar enganar-nos, fazendo-nos pensar que o lucro que o porteiro teve mais a quantia gasta pelas hóspedes deveria perfazer um total de 3000\$00. Por exemplo, tentemos modificar um pouco o problema: o que aconteceria se o actual preço do quarto fosse 0\$00? Então o porteiro iria embolsar 2700\$00 e as hóspedes iriam gastar 2700\$00, o que somaria 5400\$00! A invariante, neste caso, não seria 3000\$00, mas 2700\$00, que é a quantia gasta pelas hóspedes, e esta será sempre igual à quantia que o porteiro guardou (200\$00) mais a quantia dada à recepcionista (2500\$00).

□

QUADRADOS MÁGICOS

PROBLEMA 3.1.15 – Imagine um quadrado 3×3 , como mostra a Fig.1. O desafio é colocar os números de 1 a 9, um em cada quadrado, de modo que cada linha e cada coluna somem o mesmo valor.

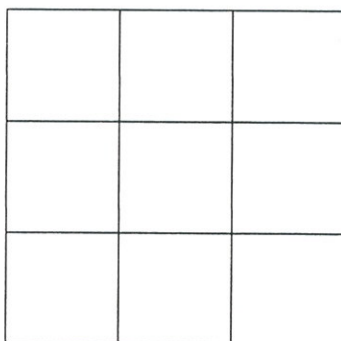


Fig.1

Solução: Começemos por determinar o que deve ser a soma comum S . Se adicionarmos cada número de cada linha, então o que se segue é verdade: uma vez que há três linhas vamos obter, três vezes, a soma comum S . Então a soma de todos os números será $3S$. E cada quadrado será contado apenas uma vez. Assim, temos:

$$3S = [1 + 2 + 3 + \dots + 9]$$

Usando a fórmula da soma de números inteiros consecutivos, temos:

$$3S = (9 \times 10) / 2$$

Resolvendo esta equação, determinamos que $S = 15$. Então precisamos colocar os números de 1 a 9 de modo que a soma em cada linha e em cada coluna seja igual a 15.

Geralmente, é útil começar com um valor extremo, então colocamos o 9 no centro. Isto limita muito os números que podemos colocar à esquerda e à direita do 9, ou em cima e em

baixo. As escolhas são $1 + 5$, $2 + 4$ ou $3 + 3$. A terceira está excluída porque só podemos usar o 3 uma vez. Então colocamos 4 e 2 à esquerda e à direita do 9, e 5 e 1 em cima e em baixo do 9, respectivamente. Ver Fig.2.

	5	
4	9	2
	1	

Fig.2

Não podemos colocar o 3 na linha de baixo, porque $1 + 3$ é muito pequeno; não há um terceiro número cuja soma com 4 dê 15. Então, colocamos o 3 na linha de cima; digamos na esquina superior esquerda. Isto obriga a que na esquina superior direita seja colocado o 7, o que leva a que na esquina inferior direita seja colocado o 6, e conseqüentemente, se coloque o 8 na esquina inferior esquerda. Ver Fig.3.

Verificando as somas das três colunas e das três linhas, constatamos que construímos um quadrado mágico.

3	5	7
4	9	2
8	1	6

Fig.3

O melhor quadrado mágico não só tem todas as linhas e todas as colunas a somar o mesmo número, mas também as diagonais somam o mesmo número. A Fig.4 mostra-nos um quadrado mágico 3×3 onde isso é verdade. Como podemos descobrir um quadrado mágico assim? Bem, há sempre a tentativa e erro. Em vez de começarmos com 9 no centro do quadrado, devíamos ter começado com um número diferente; depois podíamos construir o quadrado, como fizemos no exemplo anterior. Há apenas nove números para experimentar nesse quadrado do centro; podemos sempre pensar que essas nove tentativas conduzir-nos-ão ao sucesso.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Fig.4

Quando estamos a lidar com quadrados maiores do que 3×3 , digamos 5×5 ou 6×6 , então estes processos de acerta/não acerta tornam-se ineficientes. É desejável termos uma certa estratégia para construir estes quadrados mágicos.

Começamos com o quadrado mágico que construímos na Fig.4. Suponhamos que deslocamos cada número para cima (na direcção vertical) um quadrado. Isto esvazia a linha de baixo. Mas assim, também empurramos a primeira linha de cima; então deslocamo-la para a linha de baixo. O resultado é mostrado na Fig.5.

3	5	7
4	9	2
8	1	6

Fig.5

Repare que o resultado continua a ser um quadrado mágico, com o mesmo número mágico 15. É claro que isto não é grande surpresa, visto que não alteramos nenhuma linha (apenas as deslocamos) e apenas baralhamos os números de cada coluna, preservando o seu conteúdo.

Pela mesma razão, podemos deslocar tudo uma unidade para a direita. Isto esvazia a coluna esquerda, e desloca a coluna mais à direita para fora da aresta. Então, o que devemos fazer é rodá-la para a coluna da esquerda. Se o fizermos, verificamos que o resultado continua a ser um quadrado mágico com o número mágico 15.

Motivados pelo nosso sucesso com as duas últimas experiências, tentemos mudar a diagonal do quadrado mágico da Fig.5. O quadrado completo está representado na Fig.6. Pegue num lápis e experimente. Vamos mudar cada número da Fig.5 um quadrado para a direita e um quadrado para cima. Representemos os quadrados da primeira linha por a_{11} , a_{12} , a_{13} , os da segunda linha por a_{21} , a_{22} , a_{23} e os da terceira linha por a_{31} , a_{32} , a_{33} .

Reparemos, primeiro, nos números mais óbvios:

$$4 \rightarrow a_{12}, \quad 9 \rightarrow a_{13}, \quad 8 \rightarrow a_{22}, \quad 1 \rightarrow a_{23}.$$

2	4	9
6	8	1
7	3	5

Fig.6

Agora pensemos nos outros números. Se deslocarmos o número 3 para a direita e para cima, parece que foi empurrado para fora do quadrado, mas se imaginarmos que a aresta de cima e a de baixo estão ligadas, então o 3 fica na posição a_{32} . Analogamente, o número 5 desloca-se para a posição a_{33} . Se do mesmo modo, imaginarmos que a aresta direita está ligada à aresta esquerda, verificamos que o número 2 é deslocado para a posição a_{11} e o 6 para a posição a_{21} . Resta-nos o 7, e não há outro lugar para ele a não ser o a_{31} .

Olhando para a Fig.6, depressa nos apercebemos que continua a ser um quadrado mágico! Assim, descobrimos que as deslocações direita/esquerda, para cima/para baixo e na diagonal parecem preservar os quadrados mágicos. Será que há uma ideia geral por detrás de toda esta simetria?

O que aconteceria se agarrássemos num quadrado de papel e colássemos a margem esquerda com a direita? Se não consegue visualizar isso, então tente fazê-lo; obtemos um tubo, ou um cilindro. Agora, depois de ter colado a margem esquerda com a direita, cole a margem de cima com a de baixo. O que obtemos assemelha-se a um “donut”, ou o que os matemáticos chamam algo homeomorfo a um “donut”. As três operações que temos utilizado – translação esquerda/direita, translação para cima/para baixo, e movimento diagonal – são muito naturais no estudo dos homeomorfismos.

Se deslocarmos cada quadrado uma unidade para a direita não temos que nos preocupar em “sair da margem” pois já tínhamos apagado os limites ao ligarmos a margem esquerda e direita do quadrado.

Do mesmo modo, se deslocarmos cada quadrado uma unidade para cima não temos que nos preocupar em “sair da margem” pois já tínhamos apagado os limites ao ligarmos a margem superior e inferior do quadrado. Finalmente, os movimentos na diagonal são muito menos misteriosos se os virmos do ponto de vista dos homeomorfismos.

Uma vez que podemos deslocar da esquerda para a direita, de cima para baixo, ou ao longo das diagonais, parece que não importa onde começa o quadrado mágico. As localizações parecem ser todas equivalentes.

	1	

Fig.7

Agora vamos construir um quadrado mágico 3×3 , começando na posição a_{12} . Ver Fig.7. Colocamos um 1 nessa posição. As linhas e as colunas nessa figura têm três elementos cada, então 3 parece ser um período apropriado para este problema. Começando na posição a_{12} , dispomos 1, 2 e 3 ao longo da diagonal (não faz sentido dispormos 1, 2 e 3 ao longo de uma linha ou de uma coluna, uma vez que é suposto a soma ser 15). Vejamos como obter este quadrado mágico. Dispomos 1, 2 e 3 ao longo da diagonal que se desloca para cima e para a direita. Ver Fig.8. Depois olhamos para as diagonais que se deslocam para cima e para a esquerda e dispomos os números nessas diagonais usando o período 3. Começando com 1 na posição a_{12} , colocamos 4 (resultante da soma de 1 com 3) na posição a_{31} e depois 7 (resultante da soma de 4 com 3) na posição a_{23} . A seguir, começando com 2 na posição a_{33} , colocamos 5 em a_{22} e 8 em a_{11} . Finalmente, começando com 3 em a_{21} , depois colocamos 6 em a_{13} e 9 em a_{32} .

	1	
3		
		2

Fig.8

O que fizemos faz sentido geometricamente, pois preenchemos o quadrado. Faz sentido numericamente, pois usamos os números de 1 a 9. Também faz sentido do ponto de vista da paridade, porque explora o período 3 do problema. E, além do mais, produz um quadrado mágico. Ver Fig.9. Note que é, de facto, um quadrado mágico especial, porque até as diagonais somam 15.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Fig.9

□

PROBLEMA 3.1.16 – Use as ideias desenvolvidas no problema anterior para construir um quadrado mágico 5×5 .

Solução: Sem fazer mais análises, vamos tentar imitar o método que resultou para o quadrado mágico 3×3 .

		1		

Fig.10

Começamos como na Fig.10. Temos um quadrado 5×5 , e colocamos um 1 na posição a_{13} – no centro da linha de cima. Depois dispomos os números 1, 2, 3, 4, 5 deslocando-se para cima e para a direita. Ver Fig.11. A seguir, olhamos para as diagonais que se deslocam para cima e para a esquerda e dispomos os números nessas diagonais usando o período 5. Por exemplo, começando com 1 na posição a_{13} , colocamos o 6 em a_{52} e depois 11 em a_{41} e depois 16 em a_{35} e, finalmente, 21 em a_{24} . Completamos as outras diagonais de um modo análogo. O resultado é mostrado na Fig. 12.

		1		
	5			
4				
				3
			2	

Fig.11

10	18	1	14	22
17	5	13	21	9
4	12	25	8	16
11	24	7	20	3
23	6	19	2	15

Fig.12

Continua a ser um quadrado mágico. O número mágico é o 65, como já podíamos prever, calculando-o do mesmo modo que calculamos o número 15 no problema anterior. □

Por outro lado, um quadrado mágico $n \times n$, em que n é par, requer um conjunto de técnicas para a sua construção completamente diferente. De facto, o método depende da paridade do número n , mesmo supondo que n é par. Por exemplo, quando n é um múltiplo de 4, aplicamos um determinado conjunto de técnicas. Quando n é igual a 6, outro conjunto de técnicas é aplicado.

Fig.13

Concluimos este tema com algumas palavras sobre quadrados em que n é múltiplo de 4. Considere um quadrado 4×4 como o da Fig.13. Coloque os números de 1 a 16 no quadrado pela sua ordem natural: 1 a 4 na primeira linha, 5 a 8 na segunda linha, e assim sucessivamente. Ver Fig.14. Ainda não temos um quadrado mágico! Substitua cada elemento de cada diagonal pelo seu número complementar. Aqui, por “o seu número complementar” entende-se o número que, quando adicionado, faz 17. Por exemplo, o número complementar de 6 é o 11 e o número complementar de 13 é o 4. Pensamos no 6 e 11 como complementares

porque a distância de 6 a 1 é igual à distância de 11 a 16. Tendo trocado todos os elementos das diagonais, chegamos ao quadrado da Fig.15, que é um quadrado mágico!

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Fig.14

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

Fig.15

Se quisermos adaptar o método descrito para um quadrado 8×8 , é aconselhável subdividir o quadrado 8×8 em blocos 4×4 e aplicar o método para quadrados 4×4 a cada bloco.

Durante 180 anos pensaram que era impossível construir um quadrado mágico 10×10 . Agora sabe-se que isso pode ser feito. Consegue fazê-lo?

PROBLEMAS QUE ENVOLVEM PESAGENS

Começamos com um problema clássico que envolve um conjunto de objectos que parecem ser iguais mas não são.

PROBLEMA 3.1.17 – *Suponha que tem 9 pérolas todas parecidas, mas uma delas tem peso diferente. Não sabemos se a pérola esquisita é mais leve ou mais pesada do que as outras. A única maneira que temos de as pesar é utilizando uma balança de pratos. Ver Fig.1. Como descobrir qual é a pérola esquisita com apenas três pesagens?*

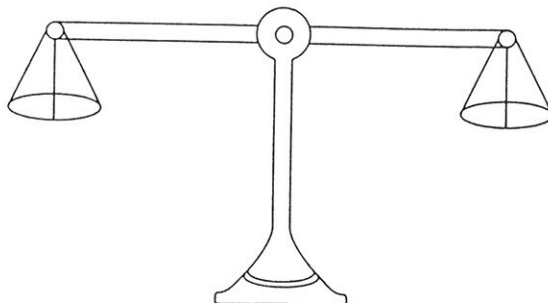


Fig.1

Solução: Note que pesar uma pérola contra a outra é uma perda de tempo. Se elas não se equilibrarem, concluímos que uma delas é a pérola esquisita, mas qual delas?

Se, por outro lado, pesarmos uma pérola contra outra e elas se equilibrarem, então ficamos a saber que nenhuma delas é a pérola esquisita; a pérola esquisita deve ser uma das outras sete. Isso dá-me duas pérolas que eu posso usar como “controladoras”, mas mais sete pérolas para testar.

No entanto, não há outras maneiras de fazer pesagens com uma balança de dois pratos. O que é que tem que ser feito? Podemos fazer um uso mais eficiente deste número limitado de pesagens, dividindo as 9 pérolas em três grupos de 3. É claro que 3 é escolhido porque é o único número que divide 9 (além do 1 e do 9). Podemos pensar em cada grupo de três pérolas como uma “super-pérola”. Designemos os grupos de três pérolas por G_1 , G_2 e G_3 .

Começemos por pesar G_1 contra G_2 .

- 1) Se houver equilíbrio, então as seis pérolas em G_1 e G_2 são pérolas normais. A pérola esquisita é uma das pérolas de G_3 .
- 2) Se não houver equilíbrio, então todas as pérolas de G_3 são pérolas normais. A pérola esquisita está em G_1 ou em G_2 , mas não sabemos em qual.

Consideremos, primeiro, o caso 1. Num segundo passo, pesamos G_1 contra G_3 . É claro que não se vão equilibrar, G_3 será mais leve ou mais pesado. Tome nota disso. Suponhamos que G_3 é mais pesado. Isso significa que a pérola esquisita é mais pesada que as outras, e está em G_3 .

Agora seleccione quaisquer duas pérolas de G_3 e pese-as uma contra a outra. Se elas se equilibrarem, então a pérola esquisita é a terceira pérola de G_3 e é mais pesada. Se não se equilibrarem, então a mais pesada das duas é a pérola esquisita.

Consideremos, agora, o caso 2. Tome nota qual dos dois grupos, G_1 ou G_2 , é o mais pesado. Suponhamos que G_1 é o mais pesado. Agora pese G_1 contra G_3 . Se houver equilíbrio, então a pérola esquisita está em G_2 e é mais leve. Escolha quaisquer duas pérolas de G_2 e pese-

as uma contra a outra. Se elas se equilibrarem, então a pérola esquisita é a terceira pérola de G_2 e é mais leve. Se elas não se equilibrarem, então a pérola mais leve das duas é a pérola que procuramos.

Se, em vez disso, G_1 e G_3 não se equilibrarem, então a única possibilidade é que G_1 é mais pesado que G_3 (de outro modo haveria três pesos diferentes, o que é impossível). Então, a pérola esquisita está em G_1 , e é mais pesada. Num último passo, pese quaisquer duas pérolas de G_1 e proceda como nos casos anteriores.

Deste modo, descobrimos qual é a pérola esquisita usando apenas três pesagens.

Note que, depois de termos observado que a melhor estratégia era dividir em grupos de três e criar três “super-pérolas”, os passos seguintes foram quase automáticos. Se, em vez disso, tivéssemos dividido em grupos de $\{2, 2, 5\}$ ou $\{4, 4, 1\}$, então não teríamos sabido o que fazer após o primeiro passo.

□

PROBLEMA 3.1.18 – *Suponha, agora, que tem 12 pérolas todas parecidas, mas uma delas tem um peso diferente. Não sabemos se a pérola esquisita é mais pesada ou mais leve que as outras. Quantas pesagens são necessárias para encontrar a pérola esquisita?*

Solução: Este problema está relacionado com o anterior, mas o número de pérolas mudou. Portanto, se queremos ter êxito na procura da pérola esquisita, usando apenas três pesagens, temos que ter uma nova ideia.

Comece por usar a ideia da “super-pérola”. Divida as 12 pérolas em três grupos de 4. Designe-os por G_1 , G_2 e G_3 .

Num primeiro passo, pese G_1 contra G_2 .

- 1) Se houver equilíbrio, então todas as oito pérolas de G_1 e G_2 são pérolas normais. A pérola esquisita é uma das pérolas de G_3 .
- 2) Se não houver equilíbrio, então todas as pérolas de G_3 são pérolas normais. A pérola esquisita está em G_1 ou G_2 , mas não sabemos em qual.

Consideremos, primeiro, o caso 1, que é relativamente fácil. Tire quaisquer três pérolas de G_1 e pese-as contra quaisquer três pérolas de G_3 . Se elas se equilibrarem, então a pérola diferente é a que sobra em G_3 . Pesando-a contra uma pérola de G_1 , sabemos se a pérola esquisita é mais leve ou mais pesada. Se elas não se equilibrarem, então a pérola esquisita estará entre as três pérolas de G_3 e saberemos se é mais leve ou mais pesada (uma vez que as pérolas de G_1 são normais). Agora, uma terceira pesagem, irá descobrir qual das três pérolas de G_3 é a pérola esquisita.

Para o caso 2, suponha que G_1 é mais pesado e G_2 é mais leve. Denominemos as pérolas em G_1 por a, b, c, d e as pérolas em G_2 por a', b', c', d' . Numa segunda pesagem, pesamos $\{a, b, a'\}$ contra $\{c, d, b'\}$.

- (a) Se houver equilíbrio, então a pérola esquisita é c' ou d' (as pérolas de G_1 e G_2 que não usamos nesta segunda pesagem). É claro que c' e d' vêm do lado mais leve (de G_2), logo sabemos que a pérola esquisita é mais leve. Para a terceira pesagem, pesamos c' contra d' . A pérola esquisita é a mais leve das duas.
- (b) Se não houver equilíbrio, então supomos que $\{a, b, a'\}$ é mais pesado. Isto significa que c e d são pérolas controladoras, e a' também é (porque a' é de G_2 que é

mais leve). Assim, a pérola esquisita é a , b ou b' . Finalmente, pesamos a contra b . Se elas se equilibrarem, então a pérola esquisita é b' e é mais leve. Se não se equilibrarem, então a pérola esquisita é a mais pesada das duas, uma vez que a e b são de G_1 .

(c) O caso em que $\{c, d, b'\}$ é mais pesado é tratado como no subcaso b.

Assim, com apenas três pesagens, conseguimos descobrir qual era a pérola esquisita. \square

PROBLEMA 3.1.19 – *Suponha que tem 80 pérolas. Uma é mais leve do que todas as outras. Encontre a pérola esquisita apenas com quatro pesagens, utilizando uma balança de pratos.*

Solução: O que parece mais óbvio fazer é dividir as 80 pérolas em dois grupos de 40 e pesá-los um contra o outro. O grupo mais leve é o que contém a pérola esquisita. Depois dividimos esse grupo em dois grupos de 20. Pesamo-los um contra o outro, e encontramos o grupo de 20 mais leve. E continuamos a proceder assim.

O inconveniente desta estratégia é que, depois de quatro pesagens, apenas limitamos as 80 pérolas a um grupo de 5 pérolas. O que é que estamos a fazer errado? Não estamos a fazer uso total do facto de sabermos que a pérola esquisita é mais leve. Em vez disso, começemos por dividir as pérolas em três grupos de 27, 27 e 26.

Pesamos 27 contra 27. Se se equilibrarem, então a pérola esquisita está entre as 26, e é mais leve. Se não se equilibrarem, então a pérola esquisita está no grupo mais leve. Pode ver que, depois de uma pesagem, reduzimos as pérolas a um grupo ou de 26 ou de 27, porque estamos a tirar uma grande vantagem do facto de sabermos que a pérola esquisita é mais leve.

Em primeiro lugar (se houver equilíbrio), dividimos as restantes 26 pérolas em grupos de 9, 9 e 8. Pesamos 9 contra 9. E repetimos o que fizemos anteriormente. Pode ver que, depois de reduzirmos a 9 pérolas, reduzimos a 3, e assim resolvemos o problema.

Se ao pesarmos 27 contra 27 não houver equilíbrio, então pegamos no grupo de 27 mais leve, dividimo-lo em três grupos de 9 e pesamos um grupo de 9 contra outro. Se elas se equilibrarem, então trabalhamos com o terceiro grupo de 9. Se não se equilibrarem, escolhemos o grupo de 9 mais leve. Depois reduzimo-lo a 3, e assim sucessivamente.

E, deste modo, resolvemos o problema. \square

PROBLEMA 3.1.20 – *Suponha que tem 24 bolas, todas semelhantes. Contudo, um certo número delas é feito de vidro e um certo número é feito de quartzo. As bolas de vidro são mais pesadas. Todas as bolas de vidro pesam o mesmo e todas as de quartzo também têm o mesmo peso. Quantas pesagens são necessárias, usando uma balança de pratos, para determinar o número de bolas de vidro e o número de bolas de quartzo?*

Solução: Um procedimento seria designar uma bola como sendo a “bola de teste” e pesar cada uma das outras bolas, em série, contra essa. Digamos que a k -ésima bola é a primeira bola contra a qual a bola de teste não se equilibra. Se as S primeiras bolas se equilibram com a bola de teste, mas a k -ésima bola (para qualquer k) for mais pesada, então a k -ésima bola é de vidro; além disso, a bola de teste e todas as bolas testadas até aí, incluindo a $(k - 1)^{\text{a}}$ bola têm que ser de quartzo. Depois, podemos continuar a pesar a $(k + 1)^{\text{a}}$ bola contra a bola de teste, e

a seguir a $(k + 2)^a$ bola contra a bola de teste, e por aí adiante. Qualquer uma que seja mais pesada é de vidro, e qualquer uma que se equilibre é de quartzo. Assim, teremos classificado todas as bolas após 23 pesagens (não é preciso, nem é possível, pesar a bola de teste contra ela própria). Repare que, se a primeira bola a não se equilibrar for mais leve então simplesmente verificamos que essa bola é de quartzo e todas as precedentes (incluindo a bola de teste) são de vidro. E o problema é concluído como anteriormente.

O que apresentamos nesta solução mostra falta de imaginação. Será que podemos arranjar um algoritmo mais eficiente? Começemos como anteriormente. Tire duas bolas e pese-as uma contra a outra. Agora temos duas possibilidades.

1) As bolas não se equilibram. Então a mais pesada é de vidro e a mais leve é de quartzo. Agora coloque essas duas bolas num lado da balança. Agarre em mais duas e coloque-as do outro lado. Se as duas novas bolas forem mais pesadas, então são ambas de vidro. Se forem mais leves, então são ambas de quartzo. Se houver equilíbrio, então uma é de quartzo e a outra é de vidro. Em qualquer um destes três casos, podemos contar quantas bolas de vidro e quantas de quartzo há entre as duas novas candidatas (repare que o problema não nos pede para identificar as bolas, pede apenas para contá-las). Então, colocamos essas duas novas bolas à parte e anotamos o que observamos. Depois colocamos mais duas bolas na balança e pesamo-las contra as duas primeiras. Continuamos a proceder deste modo. Vemos que todas as bolas serão pesadas e contadas após $1 + 22/2 = 12$ pesagens. Conseguimos, assim, um substancial progresso.

2) As bolas equilibram-se. Então, ou são as duas de vidro ou as duas de quartzo. Agora, como fizemos no caso 1, usamos estas duas como um par de teste. Tire outro par de bolas e pese-as contra as duas primeiras. Se houver equilíbrio, então temos mais duas bolas do mesmo tipo (ou de vidro ou de quartzo), mas ainda não sabemos de que tipo. Continue até encontrar um par que não se equilibre. Digamos que é o k -ésimo par. Se esse k -ésimo par for mais pesado, então podemos concluir que o par de teste, e todos os pares pesados até aí, são de quartzo. Se o k -ésimo par for mais leve, então podemos concluir que o par de teste, e todos os pares pesados até aí, são de vidro. Suponhamos que o k -ésimo par é mais pesado (o caso em que é mais leve é tratado do mesmo modo). Agora separe as duas bolas desse par e pese-as uma contra a outra. Se elas se equilibrarem, então são ambas de vidro. Se não se equilibrarem, então uma delas é de vidro e sabemos qual é. Em qualquer caso, escolhemos uma bola de vidro do k -ésimo par e uma bola de quartzo do par de teste. Use essas duas para formar um novo par de teste, e agora proceda como no caso 1, para testar os restantes pares de bolas. No total, usamos $1 + (k - 1) + 1 + (24 - 2k)/2 = 13$ pesagens.

Vimos que, agrupando as bolas aos pares, podemos contar o número de bolas de cada tipo em 12 ou 13 pesagens. Poderíamos ser ainda mais eficientes se usássemos triplos de bolas ou quádruplos? O problema com os quádruplos é que há cinco possibilidades. Podem ser todas de vidro, ou três de vidro e uma de quartzo, ou duas de vidro e duas de quartzo, ou uma de vidro e três de quartzo, ou todas de quartzo. É fácil verificar que usar quádruplos não fará nenhum progresso. Do mesmo modo, concluímos que usar triplos também não melhora nada. A questão torna-se ainda mais complicada se usarmos grupos de cinco ou de seis.

Há estratégias mais elaboradas que permitem contar o número de bolas de cada tipo em menos de 13 pesagens, mas neste trabalho não será feito um tratamento mais exaustivo deste assunto.

□

PROBLEMA 3.1.21 – Qual é o menor número de pesos que temos que utilizar para pesar todas as medidas (inteiras) entre 1 e 40 grs?

Solução: Estamos habituados a usar base 10, mas muitas vezes a base 2 é mais útil. Isto sugere que se possa usar pesos de 1 gr, 2 grs, 4 grs, 8 grs, 16 grs e 32 grs, ou seja, apenas seis pesos. Uma vez que qualquer número entre 1 e 40 pode ser escrito em base 2, é claro que estes pesos resolverão o problema. Por exemplo, o número que, em base 10, representamos por 27 pode ser escrito, em base 2, como 11011. Isto significa que para pesar 27 grs são necessários pesos de 16 grs, 8 grs, 2 grs e 1 gr.

Será que conseguíamos pesar essas quantidades utilizando menos pesos? Suponhamos que tínhamos apenas cinco pesos. Quantas quantidades diferentes podemos pesar com estes cinco pesos? É o mesmo que perguntar, “quantos subconjuntos diferentes tem um conjunto de cinco elementos?”. A resposta (como já vimos anteriormente) é $2^5 = 32$. Como o nosso objectivo é pesar as 40 quantidades diferentes desde 1 a 40, é claro que os cinco pesos não são suficientes. Concluimos, assim, que o menor número viável de pesos é seis.

□

O que acontecerá se mudarmos os parâmetros do problema? Digamos que podemos colocar pesos nos dois lados da balança. Por exemplo, os pesos 1, 3 e 9 são suficientes para pesar todas as medidas entre 1 e 13. Vejamos como. Suponhamos que estamos a pesar um saco S. A tabela seguinte mostra-nos como pesar cada medida desde 1 gr a 13 grs. Não é difícil ver que o que fazemos, em seis dessas linhas, é subtrair até encontrarmos o peso que queremos.

GRAMAS =PESO DE S	LADO ESQUERDO DA BALANÇA	LADO DIREITO DA BALANÇA
1	1	S
2	3	1 + S
3	3	S
4	1 + 3	S
5	9	1 + 3 + S
6	9	3 + S
7	1 + 9	3 + S
8	9	1 + S
9	9	S
10	1 + 9	S
11	3 + 9	1 + S
12	3 + 9	S
13	1 + 3 + 9	S

PROBLEMA 3.1.22 – *Suponha que tem 13 pérolas e uma balança de pratos. Assuma que sempre que pesa seis pérolas contra outras seis, há equilíbrio. Explique porque é que isso implica que as 13 pérolas têm o mesmo peso.*

Solução: Vamos resolver este problema usando o método da contradição. Suponhamos que a conclusão é falsa. Então pelo menos uma pérola tem peso diferente. Agora, ordenemos as pérolas, da esquerda para a direita, de modo que a mais pesada fique à esquerda e o peso das seguintes vá decrescendo. Denominemos as pérolas por P_1, P_2, \dots, P_{13} .

Agora, ou $\{ P_1, P_2, \dots, P_6 \}$ pesadas contra $\{ P_7, P_8, \dots, P_{12} \}$ não se equilibram ou então $\{ P_2, P_3, \dots, P_7 \}$ pesadas contra $\{ P_8, P_9, \dots, P_{13} \}$ não se equilibram (porque alguma pérola pesará mais do que a sua vizinha da direita) e, deste modo, chegamos a uma contradição.

E assim provamos o pretendido.

□

PROBLEMA 3.1.23 – *Um comerciante tem um recipiente que contém 24 cl de um líquido precioso. Para uma dada transacção, ele tem disponíveis apenas recipientes de 5 cl, 11 cl e 13 cl. Como é que ele pode dividir o líquido em três partes iguais?*

Solução: Vamos resolver este problema em três passos.

No primeiro passo, ele enche os recipientes de 5 cl e 11 cl com o líquido. Repare que restam apenas $24 - (5 + 11) = 8$ cl, no recipiente original.

No segundo passo, despeja todo o conteúdo do recipiente de 5 cl no de 13 cl, e acaba de enchê-lo com o conteúdo do recipiente de 11 cl. Repare que restam exactamente $11 - (13 - 5) = 3$ cl no recipiente de 11 cl.

No terceiro passo, enche o recipiente de 5 cl com o conteúdo do recipiente de 13 cl, e depois esvazia o recipiente de 5 cl no de 11 cl. Assim, temos 8 cl de líquido no recipiente original, 8 cl no recipiente de 11 cl e 8 cl no recipiente de 13 cl.

Deste modo, resolvemos o problema.

□

PROBLEMA 3.1.24 – *Queremos trazer do rio 1 cl de água, mas temos apenas um recipiente de 8 cl e um de 5 cl. Como devemos proceder?*

Solução: Como este problema é semelhante ao anterior, vamos tentar resolvê-lo usando a mesma estratégia que usamos anteriormente. Resolveremos este problema em três passos.

No primeiro passo, enchemos o recipiente de 8 cl. Depois enchemos o recipiente de 5 cl usando o conteúdo do recipiente de 8 cl. Assim, restam 3 cl no recipiente de 8 cl.

No segundo passo, após termos esvaziado o recipiente de 5 cl, despejamos os 3 cl que estão no recipiente de 8 cl no recipiente de 5 cl. Depois enchemos, novamente, o recipiente de 8 cl e enchemos, até ao topo, o recipiente de 5 cl usando o conteúdo do recipiente de 8 cl. Como o recipiente de 5 cl já contém 3 cl de água, restam 6 cl no recipiente de 8 cl.

Finalmente, esvaziamos o recipiente de 5 cl e enchemo-lo usando o conteúdo do recipiente de 8 cl. Como o recipiente de 8 cl continha 6 cl de água, resta apenas 1 cl, como desejado. E, deste modo, resolvemos o problema.

□

PROBLEMA 3.1.25 – *Temos um recipiente com capacidade de 6 cl e outro com capacidade de 4 cl. Enchemos esses recipientes num rio. Como podemos usá-los para que um deles contenha apenas 3 cl de água?*

Solução: O que está implícito no problema, e que agora tornamos explícito, é que as únicas acções que podemos fazer são: (i) encher um recipiente, (ii) esvaziar um recipiente, ou (iii) despejar um recipiente no outro. Sendo este o caso, as operações possíveis correspondem a somar e subtrair múltiplos de 4 e 6. Sabemos que a adição e subtracção de números pares resulta sempre num número par. Então não há maneira de obter o número 3.

Concluimos, assim, que o problema não pode ser resolvido.

□

3.2 – JOGOS

A Teoria dos Jogos constitui, actualmente, uma parte importante do pensamento analítico moderno.

Nesta secção veremos exemplos de alguns jogos que traduzem situações problemáticas. O objectivo de muitos deles é que a melhor estratégia seja definida para que um determinado jogador ganhe o jogo.

PROBLEMA 3.2.1 – *(As Torres de Hanoi)* A Fig.1 ilustra o famoso puzzle intitulado “Torres de Hanoi”. Repare que há quatro discos, de tamanho decrescente, no poste esquerdo. O objectivo é deslocar todos os discos, na mesma configuração, para o poste mais à direita. Segundo as regras só podemos deslocar um disco de cada vez de um poste para outro, com a restrição de que um disco maior nunca deve ser colocado por cima de um disco menor.

Qual é a estratégia a usar para deslocar os quatro discos para o poste mais à direita?

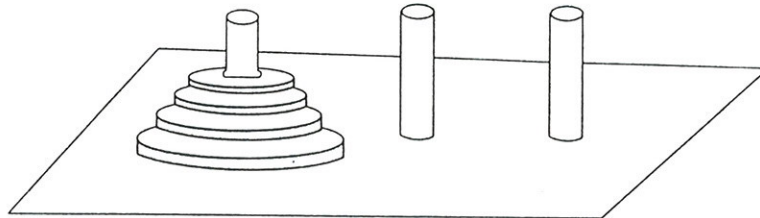


Fig.1

Solução: Para resolver este problema usaremos o método de arranjar um caso mais simples. Então, começaremos com um problema mais simples. Suponha que há apenas 2 discos, o menor em cima e o maior em baixo, ambos no poste mais à esquerda. No primeiro passo, colocamos o disco menor no poste do meio. Depois colocamos o disco maior no poste direito. Finalmente, colocamos o disco menor no poste direito, em cima do disco maior. Isto resolve o problema para dois discos.

Agora vejamos como fazer quando temos 3 discos. É razoável supor que a solução para 3 discos irá usar o que aprendemos ao resolver o problema para 2 discos. Denominemos os discos por 1, 2 e 3, onde 1 representa o menor e 3 o maior. Denominemos os postes por A, B e C, onde A representa o poste mais à esquerda e C o poste mais à direita.

Começemos por colocar 1 em C. Depois colocamos 2 em B. Agora colocamos 1 em B e depois 3 em C. Podemos ver que o que fizemos foi transferir o disco maior para o poste que está mais à direita e colocar o disco 1 e 2, na sua ordem correcta, no poste B. Esta é, precisamente, a situação descrita no primeiro parágrafo desta solução. Então, agora devemos repetir os mesmos passos para transferir 1 e 2 para o poste C. E, deste modo, resolvemos o caso de 3 discos.

Agora consideremos 4 discos. Usando o que aprendemos no parágrafo anterior, o nosso plano é colocar o maior disco (o disco 4) no poste mais à direita, enquanto os restantes 1, 2 e 3 discos (na sua ordem correcta) ficam no poste A ou B. Isto irá reduzir a situação ao problema resolvido no último parágrafo.

Começemos por colocar 1 em B e 2 em C. Depois colocamos 1 em C e a seguir transferimos 3 para B. Agora o disco 4 está sozinho e temos que transferi-lo para C.

Colocamos 1 em A, 2 em B, e depois 1 em B. Agora o poste C está livre, os discos 1, 2 e 3 estão em B na sua ordem correcta e 4 está sozinho em A. Logo, é fácil transferir 4 para C. Finalmente, transferimos 1, 2 e 3 para o poste C usando a solução para o problema com 3 discos. Isto completa a solução para o problema das Torres de Hanoi com 4 discos.

□

Repare como, na solução deste problema, a resolução de casos mais simples foi mais do que um exercício, foi muito importante para organizarmos o nosso pensamento. A solução do problema com 2 discos fez com que a apresentação da solução do problema com 3 discos fosse mais simples e elegante. Do mesmo modo, a solução para o problema com 3 discos tornou relativamente simples a solução do problema com 4 discos.

PROBLEMA 3.2.2 – *Desenhe quatro linhas paralelas num pedaço de papel. Ver Fig.1. Dobre o papel pela linha a tracejado indicada na Fig.2.*

Explique a um amigo que irá, numa metade do pedaço de papel, ligar as linhas em dois pares. (Há três maneiras diferentes de fazer isso; a Fig.3 mostra as três possibilidades diferentes que podemos fazer). Não deve mostrar ao seu amigo o que fez. Com a sua parte virada para baixo, convide o seu amigo a fazer o mesmo: ligar os quatro pedaços de linha restantes em dois pares.

Depois faça uma aposta com ele: se a figura resultante, quando o papel estiver desdobrado, for um laço contínuo, então você ganhará a aposta; se a figura resultante for dois laços disjuntos, então o seu amigo ganhará a aposta.

A aposta será em dinheiro. Será o seu amigo prudente se aceitar a aposta?

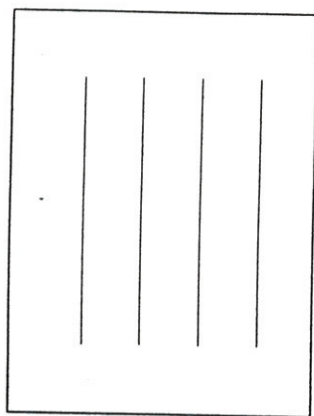


Fig.1

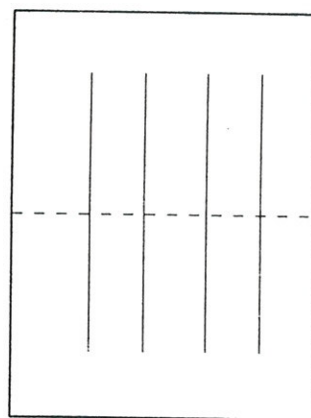


Fig.2

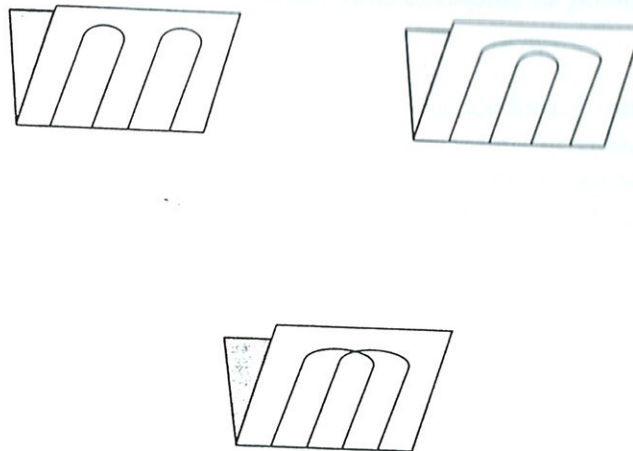


Fig.3

Solução: Esta é uma situação que, à primeira vista, parece justa. Mas não é.

Observe a Fig.4. Com o papel desdobrado, podemos ver as diferentes coisas que poderia ter feito (o seu trabalho está sempre no topo) contra todas as coisas que o seu amigo também poderia ter feito (o trabalho dele/dela está sempre em baixo).

Repare que em seis dessas nove configurações possíveis o resultado é um laço contínuo e apenas em três dessas nove configurações o resultado é dois laços disjuntos. Você tem 2/3 de hipóteses de ganhar a aposta.

O seu amigo não será prudente se aceitar a aposta.

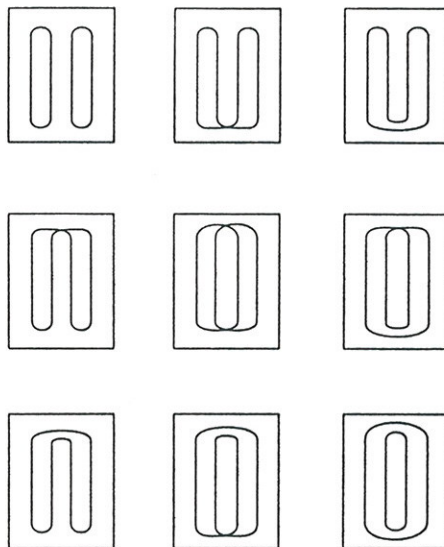


Fig.4

□

PROBLEMA 3.2.3 – *(Tradicional Chinês)* Neste jogo começamos com dois montes de moedas. Os montes podem, ou não, ter o mesmo número de moedas. Há dois jogadores. Uma jogada legal é: (i) tirar qualquer número de moedas de um monte, ou (ii) tirar o mesmo número de moedas de cada monte. Ganha o jogador que tirar a última moeda da mesa.
Dê dois exemplos de posições vencedoras e dois exemplos de posições perdedoras.

Solução: Começemos por definir o que é uma posição vencedora. É uma posição segundo a qual o jogador tem a certeza que ganha desde que jogue correctamente. Uma posição perdedora é uma posição segundo a qual o jogador tem a certeza que vai perder, independentemente do que fizer (desde que, é claro, o outro jogador não cometa nenhum erro).

O exemplo trivial de uma posição vencedora, neste jogo, é $(1, 0)$. Esta representação significa que há uma moeda no primeiro monte e nenhuma moeda no segundo monte. Esta é uma posição vencedora porque o jogador que tem a vez de jogar usará a regra (i) e tirará todas as moedas do primeiro monte (neste caso, a única moeda). Do mesmo modo, a posição $(k, 0)$, onde k é um inteiro positivo, é uma posição vencedora. Pois o jogador tira, simplesmente, todas as moedas do primeiro monte.

Os dois exemplos referidos no último parágrafo são muito “triviais” porque o jogador que tem a vez de jogar ganha, instantaneamente, nessa jogada, desde que jogue correctamente. Uma posição vencedora “não trivial” será aquela em que o jogador que tem a vez de jogar terá que planear pelo menos uma jogada para fazer depois do outro jogador jogar.

Voltando para trás, partindo do que vimos no parágrafo anterior, vemos que qualquer posição $(j, j + 1)$, para $j \geq 2$, é uma posição vencedora. O jogador face a esta posição terá que usar a regra (ii) e tirar $(j - 1)$ moedas de cada monte. Isso deixará a posição $(1, 2)$ para o outro jogador enfrentar. Agora o outro jogador perde o jogo, faça o que fizer:

- 1) Se o outro jogador tirar 1 moeda de cada monte, então fica $(0, 1)$ e o primeiro jogador ganha;
- 2) Se o outro jogador tirar todas as moedas do primeiro monte, então fica $(0, 2)$ e o primeiro jogador tira todas as moedas do segundo monte e ganha;
- 3) Se o outro jogador tirar um moeda do segundo monte, então fica $(1, 1)$. O primeiro jogador pode tirar as duas moedas de uma só vez (pela regra (ii)), limpando a mesa;
- 4) Se o outro jogador tirar todas as moedas do segundo monte, então fica $(1, 0)$ e o primeiro jogador tira a moeda do primeiro monte e ganha.

Tendo em conta a análise anterior, vemos que qualquer posição $(1, k)$, com $k > 2$, é uma posição vencedora, pois o jogador que tem a vez de jogar tira $(k - 2)$ moedas do segundo monte e deixa para o outro jogador a posição $(1, 2)$, que sabemos que é uma posição perdedora.

Já vimos várias posições vencedoras, mas vimos apenas uma posição perdedora, nomeadamente $(1, 2)$ ou $(2, 1)$. Um jogador face a esta posição perderá, faça o que fizer.

A posição $(3, 5)$ também é uma posição perdedora. Vamos analisar e descobrir porquê. Se o jogador face a esta posição tirar uma moeda do segundo monte, então o outro jogador fica com a posição $(3, 4)$ e já vimos que esta é uma posição vencedora. Se ele/ela, em vez disso, tirar duas moedas do segundo monte, então o outro jogador usa a regra (ii) e limpa a mesa. Se o jogador tirar três moedas do segundo monte então o outro jogador fica com um posição $(j + 1, j)$ e ganha. Se o jogador tirar quatro moedas do segundo monte, então resta $(3, 1)$; o outro jogador tira uma moeda do primeiro monte, deixando o adversário numa posição perdedora $(2, 1)$. Se o jogador tirar todas as moedas do segundo monte, então o outro jogador ganha, pela regra (i).

Se o jogador tirar uma moeda do primeiro monte, então o outro jogador tira quatro moedas do segundo monte, deixando o adversário numa posição perdedora. Se o jogador tirar duas moedas do primeiro monte, então o outro jogador tira três moedas do segundo monte e o adversário fica numa posição perdedora. Mais uma vez, é uma perda imediata tirar todas as moedas do primeiro monte numa única jogada.

Resta verificar os casos em que o jogador tira um número igual de moedas de cada monte. É fácil verificar esses casos pois são análogos aos casos já discutidos. □

PROBLEMA 3.2.4 – *Um jogo é jogado por dois jogadores numa mesa rectangular plana. Os jogadores alternam a vez de colocar moedas (todas do mesmo tamanho) em cima da mesa. As moedas devem ser colocadas de modo que não fiquem sobrepostas e que não ultrapassem os limites da mesa. O vencedor é o último jogador a colocar uma moeda na mesa. Sugira uma estratégia para que o primeiro jogador ganhe sempre.*

Solução: Na sua primeira jogada, o primeiro jogador deverá colocar o centro da moeda no centro da mesa. Depois disso, cada vez que o segundo jogador faz uma jogada, o primeiro jogador deverá colocar a sua moeda, exactamente, na posição simétrica em relação ao centro da mesa. Deste modo, cada vez que o primeiro jogador acaba a sua jogada, as posições das moedas na mesa são simétricas em relação ao centro. Portanto, se o segundo jogador pode jogar, o primeiro jogador também pode. Então, o primeiro jogador será o jogador que põe sempre a última moeda possível, ganhando jogo. □

PROBLEMA 3.2.5 – *Um jogo é jogado por dois jogadores. O primeiro jogador escreve um número (inteiro positivo) de 1 a 10. O segundo jogador escreve um número de 1 a 10 e os dois números são adicionados. Depois o primeiro jogador escreve um número de 1 a 10 e este número é adicionado à soma anterior. Os jogadores continuam a jogar alternadamente.*

O jogador que escrever o número que faça com que a soma seja, exactamente, igual a 100, ganha! Arranje uma estratégia vencedora para o primeiro jogador. Arranje uma estratégia vencedora para o segundo jogador.

Solução: Designemos o primeiro jogador por A e o segundo por B. Comecemos por arranjar uma estratégia vencedora para o jogador A.

Para resolver este problema vamos usar o método de voltar para trás. O jogador A ganha se na sua última jogada a soma for um valor entre 90 e 99. Depois ele pode adicionar o número necessário para que a soma seja igual a 100. Com vista a ter esta situação, na sua penúltima jogada, A deve fazer com que a soma seja igual a 89 de modo que, não interessa que número B adicionar, a soma será um número entre 90 e 99. Mas o primeiro jogador só pode fazer isto se a soma anterior for um valor entre 79 e 88. Assim, na sua antepenúltima jogada ele deve fazer com que a soma seja igual a 78.

Continuando do mesmo modo, vemos que para A ganhar o jogo, B tem que começar cada jogada com as seguintes somas. Os números estão escritos por ordem inversa:

89, 78, 67, 56, 45, 34, 23, 12, 1.

Deste modo, A escreve 1 na sua primeira jogada. Depois B escreve o seu número (entre 1 e 10). A escreve a diferença de modo que a soma seja 12. Outra vez, tendo em conta o que B escreveu, na próxima jogada A faz com que a soma seja 23, e assim sucessivamente.

Se A jogar correctamente, então não há nenhuma estratégia vencedora para B. Mas logo que A cometa um erro, B pode seguir a estratégia referida anteriormente e ganhar o jogo. Por exemplo, se na sua primeira jogada, A escrever 2 em vez de 1, então B deve adicionar 10 para que a soma seja igual a 12. Agora a situação inverteu-se e B ganha o jogo (desde que não se engane).

□

PROBLEMA 3.2.6 – *Um jogo é jogado num tabuleiro com oito quadrados adjacentes, como nos mostra a Fig.1. A posição inicial para as três peças é mostrada na Fig.1. Uma jogada legal é deslocar uma peça um quadrado para a esquerda. Uma peça pode ser deslocada para cima de outra peça ou passar por cima de outra peça. O objectivo é deslocar as três peças para o quadrado mais à esquerda. O jogador que fizer a última jogada é o vencedor.*

Qual é a estratégia vencedora para o primeiro jogador?

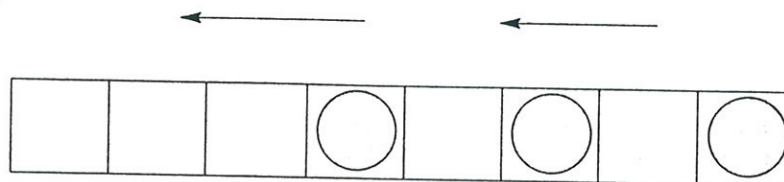


Fig.1

Solução: Denomine o primeiro jogador por A e o segundo jogador por B. Desenhe um tabuleiro. Use três moedas como peças. Tente jogar vários jogos. Faça isso só ou com um amigo. O que é que nota? Façam o que fizerem, A ganha. Como é que pode ser assim?

Repare que as peças deslocam-se apenas para a frente (esquerda) e nunca para trás (direita). Numere as três peças por 1, 2 e 3, da esquerda para a direita. Em qualquer jogo, a peça 1 será deslocada três vezes na sua caminhada para o quadrado mais à esquerda. A peça 2 será deslocada cinco vezes e a peça 3 será deslocada sete vezes. Então, o número total de jogadas legais em qualquer jogo é $3 + 5 + 7 = 15$. Ou seja, qualquer jogo terá o mesmo número ímpar de jogadas.

Dessas jogadas, o jogador A fará as jogadas número 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13 e 15. Por outras palavras, aconteça o que acontecer durante o jogo, o jogador A fará sempre a última jogada. Portanto, o jogador A será o vencedor deste jogo.

A conclusão da nossa análise é que qualquer estratégia é uma estratégia vencedora para A.

□

PROBLEMA 3.2.7 – *Existe uma estratégia vencedora para o primeiro jogador do “jogo do galo”?*

Solução: O “jogo do galo” é jogado num tabuleiro com 9 quadrados (3 em cada linha). Os dois jogadores alternam as jogadas e marcam um dos quadrados em cada vez. O primeiro jogador a marcar três quadrados numa linha (horizontal, vertical ou diagonal) ganha o jogo.

Tentaremos ilustrar através de alguns exemplos o facto de que, se ambos os jogadores jogarem correctamente, o jogo terminará empatado.

Designemos os dois jogadores por A e B, onde A é o primeiro jogador. Também assumimos que A marca o quadrado do centro na sua primeira jogada, e B marca uma das esquinas. Agora A tem, basicamente, quatro opções diferentes, como podemos ver na Fig.1 (ele tem, realmente, sete opções mas por causa da simetria reduzem-se para quatro).

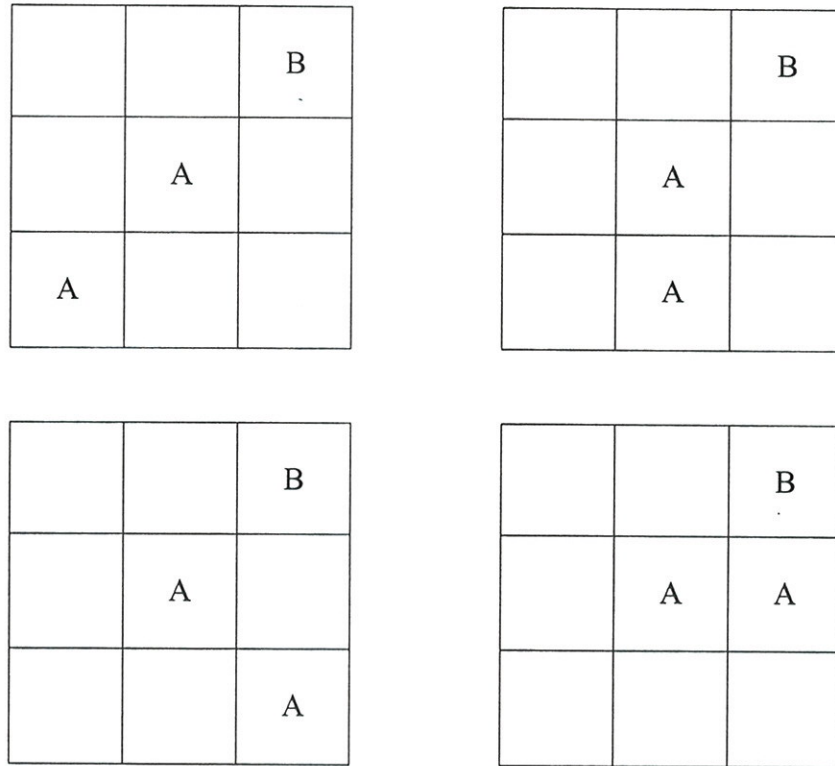


Fig.1

No primeiro caso (da esquerda), B é obrigado a jogar numa esquina, senão A pode ganhar na sua quarta jogada (verifique esta situação). Repare que, por causa da simetria, não importa qual das restantes esquinas B escolhe. Também nos outros três casos, B tem apenas uma jogada que não resulta na sua derrota. E, excepto para o último caso, o mesmo é verdade para A na sua próxima jogada. E isto continua até que todos estes jogos terminem empatados.

Uma vez que o último caso parece um pouco diferente (A tem mais opções na sua próxima jogada), vamos continuar a análise. Depois do segundo jogador ter feito a sua jogada temos o seguinte:

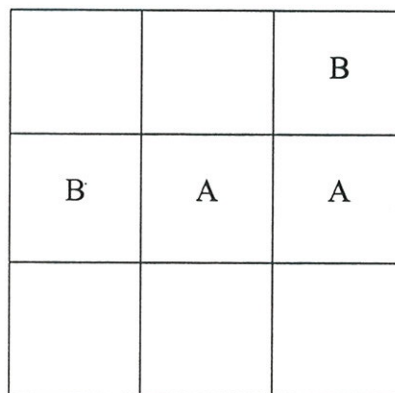


Fig.2

Agora a única limitação de A é que ele não deve marcar a esquina inferior direita porque senão B marcará a esquina superior esquerda e, apesar da próxima jogada de A, B ganhará o jogo. Mas qualquer outra jogada apenas levará ao empate.

□

PROBLEMA 3.2.8 – Cada uma das letras A, D, E, I, N, O, P, R, S é escrita num cartão. Os nove cartões são colocados na mesa, virados para cima, para que cada letra fique visível. Ao lado dos cartões está a seguinte lista de palavras: ASP, AID, SIN, RIO, ARE, PIE, END, POD (são usadas palavras em Inglês devido à difícil tradução e respectiva relação com o jogo). Dois jogadores jogam um jogo no qual eles alternam a vez de seleccionar um cartão sem reposição. O primeiro jogador a conseguir as letras necessárias para formar uma palavra da lista é o vencedor. Se os dois jogadores jogarem correctamente, qual é o resultado deste jogo?

Solução: As nove letras podem ser distribuídas num quadrado com as oito palavras em linhas, colunas ou na diagonal:

A	R	E
S	I	N
P	O	D

Isto mostra que o jogo é isomorfo ao jogo do galo. Assim, como vimos no problema anterior, se os dois jogadores jogarem correctamente, o jogo acabará empatado.

□

PROBLEMA 3.2.9 – Suponha que está num concurso televisivo. O apresentador tem dois envelopes e pede-lhe para escolher um (é sabido que cada um deles contém dinheiro). Após ter feito a sua escolha, é informado que um envelope tem o triplo do dinheiro que tem no outro envelope, mas não sabemos em qual está o triplo. Você abre o envelope e vê que tem 15000\$00. Assim, o outro envelope ou tem 5000\$00 ou tem 45000\$00. Agora, o apresentador oferece-lhe a oportunidade de trocar os envelopes. Deverá trocar? Porquê? Se substituirmos o “triplo” pelo “dobro” ou por “um e meio” então a sua resposta muda?

Solução: Devemos sempre trocar. Repare que da primeira vez que escolhemos um envelope, temos a mesma probabilidade de escolher o que tem mais dinheiro ou o que tem menos dinheiro. Isto significa que, desde que se escolha um envelope, o outro envelope tem 45000\$00 com probabilidade 1/2 e 5000\$00 também com probabilidade 1/2. Assim, a média obtida é

$$\frac{45000}{2} + \frac{5000}{2} = 25000 > 15000.$$

Se um envelope tiver o “dobro” do que tem no outro, a média obtida é 18750\$00, e se um envelope tiver “um e meio” vezes a quantidade que está no outro, a média obtida é 16250\$00. Em qualquer caso, devemos sempre trocar. Uma boa maneira de compreender porque é sempre bom trocar é supor que um envelope tem, digamos, cem vezes o que tem no outro. Assim, o outro envelope terá 150\$00 ou 1500000\$00 (com probabilidade 1/2). Parece óbvio que devemos trocar!

□

PROBLEMA 3.2.10 – Um dado é lançado. Está numerado, como habitualmente, de 1 a 6 nos seis lados. Se um 6 não sair nos primeiros 30 lançamentos, então o jogador receberá um milhão de escudos. Se, em vez disso, sair um 6 nos primeiros 30 lançamentos, então ele deverá pagar 100\$00. Será que ele deve jogar este jogo ou não?

Solução: A probabilidade de que um 6 não saia nos primeiros 30 lançamentos é

$$p = \left(\frac{5}{6}\right)^{30} \approx 0.00421272.$$

O jogo será favorável para o jogador se

$$p \geq \frac{P}{P + G},$$

onde P é a quantia que ele paga se perder e G é a quantia que recebe se ganhar. Assim, deverá jogar se e só se tiver a desigualdade

$$\left(\frac{5}{6}\right)^{30} \geq \frac{100}{1000100}.$$

Uma calculadora mostra-nos que esta desigualdade é verificada. Portanto, é favorável para ele jogar este jogo.

□

PROBLEMA 3.2.11 – Disponha um baralho de 52 cartas viradas para baixo. Peça a um amigo para dividir o baralho em três subgrupos, usando cortes simples, e colocá-las em cima da mesa, viradas para baixo. Depois diga “Eu aposto contigo o dinheiro que quiseres como uma dessas três cartas do topo é uma figura (dama, conde ou rei).”

Será o seu amigo prudente se aceitar a aposta?

Solução: O seu amigo deve pensar que há apenas 12 figuras num baralho de 52 cartas. As hipóteses de seleccionar um figura são, portanto, $12/52 \approx 0.2308$. Claramente, a aposta favorece-o e ele deve aceitá-la.

Infelizmente, o seu amigo (se ele está, de facto, a pensar deste modo) não compreendeu o conceito de espaço amostra, nem como contar correctamente. Então vejamos a seguinte análise.

Se pensarem bem, então o que você e o seu amigo estão a fazer é seleccionar 3 cartas, ao acaso, de um baralho de 52. A questão é qual a probabilidade de que uma dessas 3 cartas seja um figura. Há $\binom{52}{3}$ maneiras de seleccionar 3 cartas entre 52. Parece ser conveniente (e isto acontece em muitos problemas de probabilidades) calcular quantas maneiras há de não escolher uma figura. Por outras palavras, devemos calcular a probabilidade de falhar.

Se vamos seleccionar 3 cartas e nenhuma delas é figura, então devemos seleccionar 3 cartas entre $40=52-12$. O número de maneiras de fazer isso são $\binom{40}{3}$. Assim, a probabilidade de falhar e não seleccionar uma figura é

$$\frac{\binom{40}{3}}{\binom{52}{3}} = \frac{\frac{40!}{3!37!}}{\frac{52!}{3!49!}} = \frac{40 \cdot 39 \cdot 38}{52 \cdot 51 \cdot 50} \approx 0.44706 .$$

Como resultado destes cálculos, a probabilidade de que iremos obter uma figura entre 3 cartas que seleccionamos é

$$P = 1 - 0.44706 = 0.55294.$$

Repare que a probabilidade de que uma das 3 cartas do topo seja uma figura é superior a 1/2, portanto a situação descrita não é uma boa aposta para o seu amigo.

□

Repare que o espaço amostra não é o conjunto das 52 cartas. Se fosse, então a probabilidade de escolher uma figura seria 12/52, como já foi discutido. Em vez disso, o espaço amostra é o conjunto de todos os triplos de cartas, e a questão é qual é a probabilidade de que uma carta do triplo seja uma figura. Isto altera consideravelmente as probabilidades!

PROBLEMA 3.2.12 – *Comenta-se que o tema sobre probabilidades teve origem quando, em 1654, Chevalier de Mére escreveu ao seu amigo Blaise Pascal (um matemático do séc. XVII) a perguntar-lhe porque é que perdia constantemente quando jogava com dados. Disse que tinha apostado bastante dinheiro em como, em 24 lançamentos consecutivos de um par de dados, apareceria um 12. Pascal analisou a situação, e explicou-lhe o que estava a fazer errado. O que seria?*

Solução: A probabilidade de obter um 12 quando lançamos dois dados 24 vezes é

$$\begin{aligned} 1 - P \{ \text{não obter um 12 em 24 lançamentos de dois dados} \} &= 1 - \left(\frac{35}{36} \right)^{24} \\ &= 1 - \left(\frac{5}{6} \right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6} \right)^{20} \cdot \left(\frac{7}{6} \right)^{24} = 1 - 0.508596 = 0.491404 < 0.5 \end{aligned}$$

Chevalier de Mére estava a apostar muito dinheiro numa situação que lhe era um pouco desfavorável.

□

4 - RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NA SALA DE AULA

Um professor de Matemática tem a grande oportunidade de desenvolver nos alunos o gosto pelo raciocínio independente, desafiando-lhes a curiosidade ao apresentar-lhes problemas compatíveis com os conhecimentos destes e auxiliando-os por meio de indagações estimulantes. É deste modo que os alunos começam a gostar de Matemática.

É importante fazer com que os alunos percebam que um problema de Matemática pode ser tão divertido quanto um jogo de palavras cruzadas, ou que o intenso trabalho mental pode ser tão agradável quanto um jogo de futebol.

Um dos mais importantes deveres do professor é o de auxiliar os seus alunos. O estudante deve adquirir tanta experiência pelo trabalho independente quanto lhe for possível. Mas se ele for deixado sozinho, sem ajuda ou com auxílio insuficiente, é possível que não experimente qualquer progresso. Mas o professor não deve ajudar demais senão nada restará para o aluno fazer.

Se o aluno não for capaz de fazer muita coisa, o professor deverá deixar-lhe, pelo menos, alguma ilusão de trabalho independente. Para isso, deve auxiliá-lo discretamente, sem que o aluno se aperceba.

O melhor é, porém, ajudar o aluno com naturalidade. O professor deve colocar-se no lugar do aluno, perceber o ponto de vista deste, procurar compreender o que se passa na sua cabeça e fazer uma pergunta ou indicar um passo que poderia ter ocorrido ao próprio estudante.

Segundo G. Polya, a resolução de um problema está dividida em quatro fases e para cada uma destas fases há uma série de questões e sugestões que ajudam o aluno a resolver o problema. Vejamos quais são as quatro fases e uma lista de questões e sugestões que podem ser usadas em cada fase.

1ª FASE: COMPREENSÃO DO PROBLEMA

Qual é a incógnita? Quais são os dados? Qual é a condicionante? É possível satisfazer a condicionante? A condicionante é suficiente para determinar a incógnita? Ou é insuficiente? Ou redundante? Ou contraditória?

Trace uma figura. Adote uma notação adequada. Separe as diversas partes da condicionante.

2ª FASE: ESTABELECIMENTO DE UM PLANO

Já o viu antes? Ou já viu o mesmo problema apresentado sob uma forma ligeiramente diferente?

Conhece um problema análogo? Conhece algum problema que lhe poderia ser útil?

Considere a incógnita! E procure pensar num problema conhecido que tenha a mesma incógnita ou outra semelhante. Eis um problema análogo e já antes resolvido. É possível utilizá-lo? É possível utilizar o seu resultado ou o seu método?

É possível reformular o problema?

Se não puder resolver o problema proposto, procure antes resolver algum problema análogo. É possível imaginar um problema análogo mais acessível? Um problema mais

genérico? Um problema mais específico? Um problema análogo? É possível resolver uma parte do problema? Mantenha apenas uma parte da condicionante, deixe a outra de lado, até que ponto fica assim determinada a incógnita? É possível obter dos dados alguma coisa útil? É possível pensar noutros dados apropriados para determinar a incógnita? É possível variar a incógnita, ou os dados, ou todos eles, se necessário, de tal maneira que fiquem mais próximos entre si?

Utilizou todos os dados? Utilizou toda a condicionante?

3ª FASE: EXECUÇÃO DO PLANO

Ao executar o seu plano de resolução, verifique cada passo. É possível verificar claramente que o passo está correcto? É possível demonstrar que ele está correcto?

4ª FASE: RETROSPECTIVA

É possível verificar o resultado? É possível verificar o argumento?

É possível chegar ao resultado por um caminho diferente? É possível perceber isto num relance?

É possível utilizar o resultado, ou o método, em algum outro problema?

Ao procurar ajudar o aluno, discreta e naturalmente, o professor fará as mesmas perguntas e indicará os mesmos passos, várias vezes. Assim, em inúmeros problemas, o professor tem de perguntar: Qual é a incógnita? Podemos variar as palavras e colocar a mesma questão de várias maneiras: Do que é que se precisa? O que é que se deve procurar? O objectivo destas questões é focalizar a atenção do aluno na incógnita. Algumas vezes, obtém-se o mesmo efeito de maneira mais natural, com uma sugestão: Considere a incógnita! Tanto a questão como a sugestão têm ambas o mesmo objectivo: ambas tendem a provocar a mesma operação mental.

Estas questões e sugestões também são úteis a qualquer pessoa que procura resolver problemas por si próprio. Se ficarmos suficientemente familiarizados com a lista de questões apresentada anteriormente e conseguirmos perceber, por detrás da sugestão, a acção sugerida, veremos que a lista enumera, indirectamente, operações mentais típicas, úteis para a resolução de problemas. Algumas destas questões sugerem a utilização de alguns métodos de resolução de problemas, abordados no 1º capítulo. Por exemplo, a questão "Conhece um problema relacionado com este?", sugere que se use o método de relacionar problemas, ou "É possível resolver uma parte do problema?", sugere a utilização do método de analisar um problema em subproblemas.

Quando o professor dirige aos seus alunos uma questão ou uma sugestão poderá ter em vista dois objectivos: primeiro, auxiliá-lo a resolver o problema que lhe é apresentado; segundo, desenvolver no estudante a capacidade de, futuramente, resolver problemas por si próprio. Mas os dois objectivos mencionados estão intimamente ligados: se o aluno conseguir resolver o problema que lhe é apresentado, terá acrescentado alguma coisa à sua capacidade de resolver problemas. Se a mesma questão for proveitosamente repetida, dificilmente o aluno deixará de notá-la e será induzido a formular, ele próprio, essa questão em situação semelhante.

O estudante poderá assimilar tão bem algumas das questões da lista apresentada anteriormente que, finalmente, será capaz de apresentá-la a si próprio no momento apropriado e de realizar, naturalmente, a operação mental correspondente ou aplicar o método adequado para a resolução do problema.

A resolução de problemas é uma habilitação prática, como, por exemplo, o é conduzir. Adquirimos qualquer habilitação por imitação e prática. Ao tentarmos resolver problemas temos de imitar o que fazem outras pessoas quando resolvem os seus e, por fim, aprendemos a resolver problemas, resolvendo-os.

Vejamos alguns exemplos onde podemos aplicar as quatro fases mencionadas e algumas questões e sugestões apropriadas a cada fase.

PROBLEMA 4.1 – *Calcule a diagonal de um paralelepípedo rectângulo do qual são conhecidos o comprimento, a largura e a altura.*

Solução: O professor pode tornar o problema interessante, concretizando-o. A sala de aula é um paralelepípedo rectângulo cujas dimensões podem ser medidas ou estimadas. Os alunos devem calcular, “medir indirectamente”, a diagonal da sala. O professor indica o comprimento, a largura e a altura da sala e, com um gesto, mostra a diagonal.

O diálogo entre o professor e os seus alunos pode começar do seguinte modo:

- Qual é a incógnita?
- O comprimento da diagonal de um paralelepípedo.
- Quais são os dados?
- O comprimento, a largura e a altura do paralelepípedo.
- Adopte uma notação adequada. Qual é a letra que deve representar a incógnita?
- x .
- Quais são as letras que escolheria para o comprimento, a largura e a altura?
- a , b , c .
- Qual é a condicionante que relaciona a , b e c com x ?
- x é a diagonal do paralelepípedo no qual a , b e c são, respectivamente, o comprimento, a largura e a altura.
- Trata-se de um problema razoável? Ou seja, a condicionante é suficiente para determinar a incógnita?
- Sim, é razoável. Se conhecermos a , b e c , conheceremos o paralelepípedo. Se o paralelepípedo ficar determinado, a sua diagonal também o ficará.

O objectivo deste conjunto de questões é ajudar o aluno a compreender o problema. Uma vez compreendido o problema, passemos à fase seguinte, ou seja, estabelecer um plano. Temos um plano quando conhecemos, pelo menos de um modo geral, quais os cálculos ou desenhos que precisamos executar para obter a incógnita. O principal feito na resolução de um problema é a concepção da ideia de um plano. A melhor coisa que um professor pode fazer pelos seus alunos é proporcionar-lhes, discretamente, uma ideia luminosa. As indagações e sugestões a seguir apresentadas tendem a provocar tal ideia. As boas ideias são baseadas na experiência e em conhecimentos previamente adquiridos, tais como, problemas anteriormente resolvidos e teoremas anteriormente demonstrados. Assim sendo, deve-se muitas vezes começar o trabalho pela questão: “Conhece um problema relacionado com este?” ou, se quisermos ser mais específicos, “Considere a incógnita! E procure pensar num problema conhecido que tenha a mesma incógnita ou outra semelhante.” Se nenhuma destas questões ajudarem, podemos fazer a seguinte questão: “É possível

reformular o problema?"

Voltemos ao problema anterior. Quando o deixamos, os alunos tinham acabado de compreender o problema e de mostrar algum interesse por ele. Eles poderiam ter agora algumas ideias próprias, alguma iniciativa. Se o professor não notar qualquer sinal dessa iniciativa, terá de repetir cuidadosamente todo o seu diálogo com os estudantes. Ele deve estar preparado para apresentar de novo, com modificações, as indagações não respondidas. Deve também estar preparado para encontrar, muitas vezes, o silêncio desconcertante dos seus alunos (o qual será aqui indicado por reticências).

- Conhece um problema relacionado com este?
- ...
- Considere a incógnita! Conhece um problema que tenha a mesma incógnita ou outra semelhante?
- ...
- Então, qual é a incógnita?
- A diagonal de um paralelepípedo.
- Conhece algum problema que tenha a mesma incógnita?
- Não. Ainda não resolvemos nenhum problema em que entrasse a diagonal de um paralelepípedo.
- Conhece algum problema que tenha um incógnita semelhante?
- ...
- Repare, a diagonal é um segmento, um segmento de recta. Nunca resolveu um problema cuja incógnita fosse o comprimento de uma linha?
- Claro que já resolvemos desses problemas. Por exemplo, calcular um lado de um triângulo rectângulo.
- Está certo. Eis um problema relacionado com este já resolvido. É possível utilizá-lo?
- ...
- Teve sorte de se lembrar de um problema relacionado com o seu e que já resolveu antes. Não gostaria de utilizá-lo? É possível introduzir algum elemento auxiliar para possibilitar a sua resolução?
- ...
- Repare que o problema de que se lembrou refere-se a um triângulo. Há algum triângulo no paralelepípedo?

Esperemos que esta última indicação seja bastante explícita para dar a ideia da solução, que é a introdução de um triângulo rectângulo (destacado na Fig.1), do qual a diagonal pedida é a hipotenusa. No entanto, o professor deve estar preparado para o caso em que até esta indicação tão explícita seja insuficiente para despertar os alunos do seu torpor. Deve ainda preparar-se para usar toda uma gama de indicações mais ou menos explícitas.

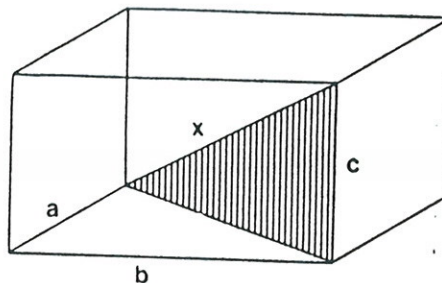


Fig.1

Não gostaria de ter um triângulo na figura? Que tipo de triângulo gostaria de ter na figura? Ainda não pode calcular a diagonal, mas já disse que é capaz de calcular o lado de um triângulo. Então o que fará agora? Poderia calcular a diagonal se ela fosse o lado de um triângulo?

Quando, finalmente, com maior ou menor ajuda, os estudantes conseguirem introduzir o elemento auxiliar decisivo, que é o triângulo rectângulo, o professor deverá estar convicto de que seus alunos vêm bastante adiante, antes de encorajá-los a passar aos cálculos.

– Acho que foi uma boa ideia traçar aquele triângulo. Agora tem um triângulo, mas qual é a incógnita?

– A incógnita é a hipotenusa do triângulo. Podemos calculá-la pelo Teorema de Pitágoras.

– Sim, se forem conhecidos os dois catetos. Mas não são.

– Um cateto é dado, é c . O outro, parece que não é difícil de achar. Sim, o outro cateto é a hipotenusa de um outro triângulo rectângulo.

– Muito bem! Agora vejo que já tem um plano.

Após ter concebido o plano, falta executá-lo. Conceber um plano, a ideia da resolução, não é fácil. Para conseguir isto é preciso, além de conhecimentos anteriores, de bons hábitos mentais e de concentração no objectivo e mais uma coisa: boa sorte. Executar o plano é muito mais fácil; paciência é do que mais se precisa.

Se o aluno tiver realmente concebido um plano, o professor terá então um período de relativa tranquilidade. O maior risco é o de que o aluno esqueça o seu plano, o que pode facilmente ocorrer se ele recebeu o plano de fora e o aceitou por influência do professor. Mas se foi ele próprio quem preparou o plano, mesmo com alguma ajuda, e concebeu com satisfação a ideia final, não perderá facilmente essa ideia. De qualquer maneira, o professor deve insistir para que o aluno verifique cada passo.

Retomemos o problema no ponto em que o deixamos. O aluno conseguiu, finalmente, ter a ideia da resolução. Ele conseguiu visualizar o triângulo do qual a incógnita x é a hipotenusa e a altura dada c é um dos catetos; o outro cateto é a diagonal de uma face. Deve-se insistir para que o aluno adote uma notação apropriada. Ele deve escolher y para denotar o outro cateto, que é a diagonal da face cujos lados são a e b . Assim, conseguirá perceber com maior clareza a ideia da resolução, que consiste em introduzir um problema auxiliar cuja incógnita será y . Neste caso, estamos a usar o método de analisar um problema em subproblemas. Por fim, usando um triângulo após o outro, ele poderá chegar a (ver Fig.1)

$$\begin{aligned}x^2 &= y^2 + c^2 \\y^2 &= a^2 + b^2\end{aligned}$$

e daí, eliminando a incógnita auxiliar y ,

$$\begin{aligned}x^2 &= a^2 + b^2 + c^2 \\x &= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\end{aligned}$$

O professor não terá motivo de interromper o aluno se este executar correctamente as operações, a não ser, para alertá-lo de que deverá verificar cada passo. Assim, o professor pode perguntar:

– É possível perceber claramente que o triângulo de lados x , y e c é rectângulo?

Depois de ter resolvido o problema é aconselhável fazer uma retrospectiva. Até mesmo

os alunos razoavelmente bons, uma vez resolvido o problema e feita a demonstração, fecham os livros e passam a outro assunto. Deste modo, eles perdem uma fase importante e instrutiva do trabalho de resolução. Se fizerem uma retrospectiva da solução completa, reconsiderando e reexaminando o resultado final e o caminho que levou até este, eles poderão consolidar o seu conhecimento e aperfeiçoar a sua capacidade de resolver problemas.

Nesta altura, o estudante cumpriu o seu plano. Ele escreveu a resolução, verificando cada passo. Assim, tem boas razões para crer que resolveu correctamente o seu problema. Apesar de tudo, é sempre possível haver erros, especialmente se o argumento for longo e trabalhoso. Daí, a conveniência das verificações. O professor deverá fazer questões do tipo: “É possível verificar o resultado? É possível verificar o argumento? É possível chegar ao resultado por um caminho diferente?”

Um dos primeiros deveres do professor é não dar aos seus alunos a impressão de que os problemas matemáticos têm pouca relação uns com os outros. Surge uma oportunidade natural de investigar as relações de um problema quando fazemos a retrospectiva da sua resolução. E já vimos que, relacionar problemas é um bom método para resolver alguns problemas. O professor deve encorajar os alunos a imaginarem casos em que eles poderão utilizar novamente o procedimento usado ou o resultado obtido. É possível utilizar o resultado, ou o método, em algum outro problema?

Voltando novamente ao problema, relembremos que os estudantes tinham, finalmente, chegado à solução: se as três arestas de um paralelepípedo rectângulo, que se originam num mesmo vértice, são a , b e c , a diagonal será

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} .$$

É possível verificar o resultado? O professor pode apresentar várias questões a que os alunos facilmente responderão com “Sim”, mas um “Não” revelará uma séria falha no resultado.

Utilizou todos os dados? Todos os dados aparecem na sua fórmula que exprime a diagonal?

O nosso problema é da Geometria Espacial: calcular a diagonal de um paralelepípedo de dimensões dadas a , b e c . Ele é análogo a outro problema da Geometria Plana: calcular a diagonal de um rectângulo de dimensões dadas, a e b . O resultado do nosso problema no “espaço” será análogo ao resultado do problema no “plano”?

Se a altura c decrescer até se anular, o paralelepípedo transformar-se-á num paralelogramo. Se fizer $c = 0$ na sua fórmula, obterá a fórmula correcta para a diagonal de um paralelogramo rectângulo?

Se a altura c decrescer, a diagonal também decrescerá. A sua fórmula mostra isto?

Se todas as três dimensões do paralelepípedo crescerem numa determinada proporção, a diagonal também crescerá nessa proporção. Se na sua fórmula substituir a , b e c por $12a$, $12b$ e $12c$, respectivamente, a expressão da diagonal, devido a essa substituição, também deverá ficar multiplicada por 12. Será que isto está certo?

Se a , b e c estiverem em metros, a fórmula fornecerá a diagonal também em metros. Mas se mudar todas as medidas para centímetros, a fórmula deverá continuar válida. Estará isto certo?

Estas indagações podem ser, facilmente, transferidas para problemas semelhantes. Após alguma experiência com problemas semelhantes, um estudante inteligente poderá perceber as ideias básicas gerais: a utilização dos dados relevantes, a variação dos dados, a analogia. Se ele adquirir o hábito de dirigir a atenção para estes pontos, melhorará, certamente, a sua capacidade de resolver problemas.

Depois o professor deverá voltar à indagação: “É possível utilizar o resultado, ou o

método, em algum outro problema?”

□

Vejamos um exemplo onde os alunos podem encontrar uma interpretação concreta.

PROBLEMA 4.2 – *No centro da cobertura rectangular de um edifício que tem 21 metros de comprimento e 16 metros de largura, instala-se um mastro de 8 metros de altura. Para amarrar o mastro, precisamos de quatro cabos iguais. Estes partem do mesmo ponto, 2 metros abaixo do topo do mastro, e são fixados nos quatro cantos da cobertura do edifício. Qual será o comprimento de cada cabo?*

Solução: Os estudantes podem utilizar o método do problema que acabaram de resolver, introduzindo um triângulo rectângulo num plano vertical e outro no plano horizontal, ou então, podem utilizar o resultado, imaginando um paralelepípedo rectângulo, do qual a diagonal x é um dos quatro cabos e as arestas são:

$$a = 10.5$$

$$b = 8$$

$$c = 6$$

Pela aplicação directa da fórmula, obtém-se $x = 14.5$.

□

Voltemos por um momento ao primeiro problema aqui considerado. O trabalho principal, que consistiu na descoberta de um plano, poderia ter seguido uma linha de raciocínio diferente, com a apresentação das seguintes indagações:

Conhece algum problema relacionado com este?

Conhece um problema análogo?

Como vê, o problema proposto é da Geometria Espacial. Poderia imaginar um problema análogo, mais simples, da Geometria Plana?

Os estudantes, mesmo que sejam vagarosos e indiferentes, serão forçados a contribuir com pelo menos uma minúscula parte da ideia. Além disso, se os alunos forem assim tão lentos, o professor não deverá tomar o presente problema sem antes ter discutido, para preparar os alunos, o problema análogo relativo ao paralelogramo. Aí então, ele poderá prosseguir da seguinte maneira:

Eis aqui um problema relacionado com este já antes resolvido. É possível utilizá-lo?
Deve-se introduzir algum elemento auxiliar para tornar possível a sua utilização?

Por fim, o professor pode chegar a sugerir aos alunos a ideia desejada, que consiste em conceber a diagonal de um paralelepípedo como a diagonal de um paralelogramo apropriado, que precisa ser introduzido na figura (como a intersecção de um paralelepípedo com um plano que passa por duas arestas opostas). No que vimos anteriormente, o contacto com o conhecimento dos estudantes foi estabelecido por intermédio da incógnita: um problema resolvido antes foi lembrado porque a sua incógnita era igual à do problema proposto. Aqui, é a analogia que proporciona a ideia da resolução.

Este método utilizado pelo professor, de questionar o aluno, consiste essencialmente nisto: começar por fazer questões ou sugestões como as apresentadas na lista e; se necessário, descer gradualmente para outras mais específicas e concretas até chegar à que provoca a

resposta na mente do estudante. As sugestões devem ser simples e naturais pois, caso contrário, não poderiam ser discretas. Estas devem ser genéricas, aplicáveis não apenas ao problema em questão, mas também a problemas de todos os tipos, pois só assim elas poderão desenvolver a capacidade do estudante e não somente uma técnica específica. A lista tem de ser curta, para que as questões possam ser frequentemente repetidas sem truques e em condições diferentes. Desse modo, é provável que elas sejam finalmente assimiladas pelo estudante e contribuam para o desenvolvimento de um hábito mental. Este método de questionar não deve ser rígido, deve pois, permitir uma certa elasticidade e variação, admitir abordagens diversas, pode e deve ser aplicado de tal maneira, que as questões apresentadas pelo professor possam ter ocorrido ao próprio aluno .

O professor que desejar experimentar, em aula, o método referido, deverá proceder com cautela. Deverá preparar cuidadosamente os exemplos que pretende discutir, considerando também diversas abordagens. É preciso ter cuidado com as questões e saber distinguir as questões boas das más. Por exemplo, quando foi feita a indagação: “Conhece um problema relacionado com este?”; em lugar desta, com a melhor das intenções de ajudar os alunos, pode ser apresentada a questão: “ É possível aplicar o Teorema de Pitágoras?” A intenção pode ser a melhor, mas a questão é das piores. Precisamos perceber em que situação foi apresentada, para em seguida ver porque há tantas objecções contra este tipo de “auxílio”:

1) Se o estudante estiver próximo da solução, ele entenderá a sugestão implícita na indagação; mas se não estiver, é muito provável que de modo algum perceba onde se quer chegar com a questão. Assim esta deixará de auxiliar no exacto momento em que o auxílio for mais necessário.

2) Se a sugestão for compreendida, revelará todo o segredo, restando muito pouco para o estudante fazer.

3) A sugestão é de natureza muito específica. Mesmo que o estudante a aproveite na resolução do presente problema, nada aprenderá para problemas futuros. A questão não é instrutiva.

4) Mesmo que o estudante compreenda a sugestão, dificilmente perceberá como ocorreu ao professor apresentar tal questão. E como poderia ele, o estudante, chegar a esta questão por si próprio? Parece um passe de mágica, assim como tirar um coelho de um chapéu!

PROBLEMA 4.3 – *Inscriva um quadrado num triângulo dado. Dois vértices do quadrado devem situar-se sobre a base do triângulo e os outros dois vértices sobre os outros dois lados do triângulo, um em cada lado.*

Solução: Comecemos por fazer a seguinte questão:

- Qual é a incógnita?
- Um quadrado.
- Quais são os dados?
- É dado um triângulo, nada mais.
- Qual é a condicionante?
- Os quatro vértices do quadrado devem situar-se sobre o perímetro do triângulo, dois deles sobre a base e um vértice em cada um dos outros dois lados.
- É possível satisfazer a condicionante?
- Acho que sim. Não tenho muita certeza.
- Parece achar que o problema não é muito fácil. Se não puder resolver o problema proposto procure, primeiro, resolver algum problema relacionado com este. É possível

satisfazer uma parte da condicionante?

– Que quer dizer com “parte da condicionante”?

– Como vê, a condicionante refere-se a todos os vértices do quadrado. Quantos vértices tem este?

– Quatro.

– Uma parte da condicionante seria relativa a menos de quatro vértices. Mantenha apenas uma parte da condicionante, deixe a outra de lado. Que parte da condicionante é possível satisfazer?

– É fácil traçar um quadrado que tenha dois vértices sobre o perímetro - ou mesmo três vértices sobre o perímetro.

– Trace uma figura!

O aluno traça a Fig.1.

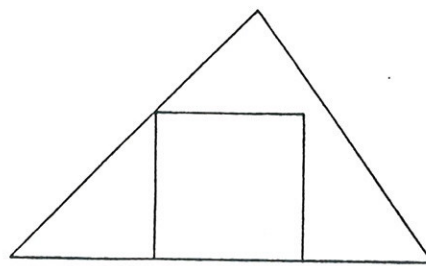


Fig.1

– Manteve uma parte da condicionante e deixou a outra de lado. Até que ponto ficou a incógnita assim determinada?

– O quadrado não ficará determinado se tiver apenas três vértices sobre o perímetro.

– Muito bem! Trace uma figura.

O aluno desenha a Fig.2.

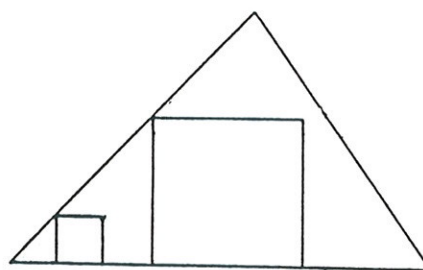


Fig.2

– Como já disse; o quadrado não fica determinado pela parte da condicionante que foi mantida. Como é que ele pode variar?

– ...

– Três dos vértices do quadrado estão sobre o perímetro do triângulo, mas o quarto não está onde deveria ficar. O seu quadrado, como observou, está indeterminado, ele pode variar, assim como o seu quarto vértice. Como é que ele pode variar?

– ...

– Tente experimentalmente, se desejar. Trace outros quadrados com três vértices sobre o perímetro, da mesma maneira que já traçou os dois quadrados na figura. Trace quadrados grandes e pequenos. O que parece ser o lugar geométrico do quarto vértice? Como é que ele pode variar?

O professor levou o aluno até próximo da ideia da solução. Se este for capaz de perceber que o lugar geométrico do quarto vértice é uma recta, ele terá chegado à solução. □

PROBLEMA 4.4 - *Dois ângulos estão em planos diferentes, mas cada lado de um deles é paralelo ao lado correspondente do outro e está também na mesma direcção. Demonstre que os dois ângulos são iguais.*

Solução: Começemos com a seguinte indagação:

- Qual é a hipótese?
- Dois ângulos estão em planos diferentes. Cada lado de um é paralelo ao lado correspondente do outro e tem também a mesma direcção.
- Qual é a conclusão?
- Os dois ângulos são iguais.
- Trace uma figura. Adapte uma notação adequada.

O aluno traça as linhas da Fig.1 e escolhe, com a ajuda do professor, as letras que aparecem na figura.

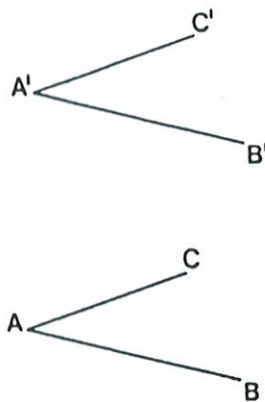


Fig.1

- Qual é a hipótese? Responda usando a notação adoptada.
- A, B, C não estão no mesmo lado do plano que A', B', C' e AB é paralela a A'B' e AC é paralela a A'C'. Além disso, AB tem a mesma direcção que A'B' e AC a mesma que A'C'.
- Qual é a conclusão?
- O ângulo BAC é igual ao ângulo B'A'C'.
- Considere a conclusão! E procure pensar num problema que tenha a mesma conclusão ou outra semelhante.
- Se dois triângulos forem congruentes, os ângulos correspondentes serão iguais.
- Muito bem. Eis um problema relacionado com este e já antes demonstrado. É possível

utilizá-lo?

- Parece que sim, mas ainda não vejo bem como.
- É preciso introduzir algum elemento auxiliar para tornar possível a sua utilização?
- ...
- Bem, o Teorema que tão bem citou é relativo a triângulos, refere-se a um par de triângulos congruentes. Há algum triângulo na sua figura?
- Não, mas posso traçar alguns. Deixe-me ligar B a C e B' a C'. Haverá então dois triângulos, o triângulo ABC e o triângulo A'B'C'. Ver Fig.2.
- Está certo. Mas para que servem esses triângulos?
- Para demonstrar a conclusão, que o ângulo BAC é igual ao ângulo B'A'C'.

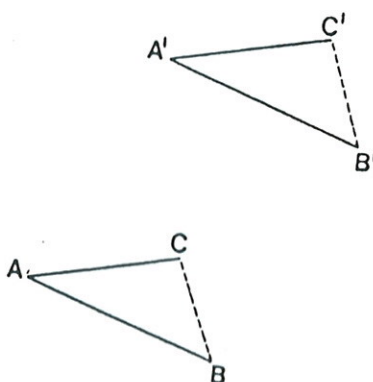


Fig.2

- Bem, se quer demonstrar isto, de que tipo de triângulos precisa?
- De triângulos congruentes. Está claro, posso escolher B, C, B' e C' de tal maneira que $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $\overline{AC} = \overline{A'C'}$.
- Muito bem! Que deseja agora demonstrar?
- Quero demonstrar que os triângulos são congruentes, que o triângulo ABC é igual ao triângulo A'B'C'. Se conseguir demonstrar isto, daí se seguirá imediatamente a conclusão que o ângulo BAC é igual ao ângulo B'A'C'.
- Certo! Tem um novo objectivo. Considere a conclusão! E procure pensar num Teorema conhecido que tenha a mesma conclusão ou outra semelhante.
- Dois triângulos são congruentes quando os três lados de um deles forem respectivamente iguais aos três lados do outro.
- Muito bem. Agora eis um problema relacionado com este e já antes demonstrado. É possível utilizá-lo?
- Poderia utilizá-lo se soubesse que $\overline{BC} = \overline{B'C'}$.
- É isso mesmo. Portanto, o que é que procura?
- Demonstrar que $\overline{BC} = \overline{B'C'}$.
- Procure pensar num teorema conhecido que tenha a mesma conclusão ou outra semelhante.
- É, conheço um teorema que termina: "...então as duas linhas são iguais." Mas parece que não cabe aqui.
- É preciso introduzir algum elemento auxiliar para tornar possível a sua utilização?

- ...
- Repare, como poderia demonstrar que $\overline{BC} = \overline{B'C'}$, quando não há na figura uma relação entre \overline{BC} e $\overline{B'C'}$?
- ...
- Utilizou a hipótese? Qual é a hipótese?
- Admitimos que AB é paralela a $A'B'$ e AC paralela a $A'C'$. Sim, é claro que terei que utilizar isto.
- Utilizou toda a hipótese? Diz que AB é paralela a $A'B'$. Isto é tudo o que se sabe sobre essas linhas?
- Não, \overline{AB} também é igual a $\overline{A'B'}$, pelo traçado. Como também \overline{AC} e $\overline{A'C'}$ são iguais.
- Duas linhas paralelas do mesmo comprimento. É uma configuração interessante. Já a viu antes?
- Sim, é claro! Paralelogramo! Deixe-me ligar A a A' , B a B' e C a C' .
- A ideia não é assim tão má. Quantos paralelogramos tem agora a sua figura?
- Dois, não, três. Não, dois. Quero dizer, há dois que posso demonstrar imediatamente que são paralelogramos. Há um terceiro que parece ser um paralelogramo e posso demonstrar que o é. Com isso, a demonstração estará concluída.

□

PROBLEMA 4.5 – A água escorre para um vaso cilíndrico à razão r . O vaso tem a forma de um cone circular recto, de base horizontal, com o vértice para baixo, o raio da base é a e a altura do cone é b . Ver Fig.1. Determine a razão à qual o nível de água sobe quando a profundidade for y . Em seguida, calcule o valor numérico da incógnita, sabendo-se que $a = 4$ m, $b = 3$ m, $r = 2$ m³ por minuto e $y = 1$ m.

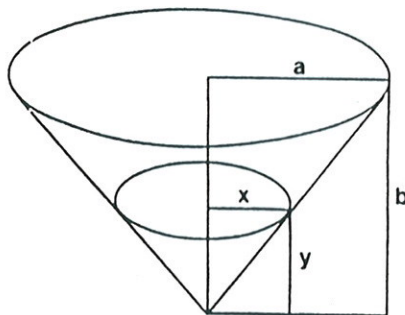


Fig.1

Solução: Admite-se que os alunos conhecem as mais simples regras de diferenciação e a noção de “razão de variação”. Usando o método de questionar, começaremos pela seguinte indagação:

- Quais são os dados?
- O raio da base do cone $a = 4$ m; a altura do cone $b = 3$ m; a razão à qual a água escorre para o vaso $r = 2$ m³ por minuto e a profundidade da água num certo momento $y = 1$ m.
- Certo. O enunciado do problema sugere que, provisoriamente, se deve desprezar os

valores numéricos; trabalhar com as letras; expressar a incógnita em função de a , b , r e y e só no final, depois de chegar à expressão literal da incógnita, substituir as letras pelos valores numéricos. Eu seguiria esta sugestão. Agora, qual é a incógnita?

– A razão à qual a superfície da água sobe quando a profundidade é y .

– Como? Poderia repetir isso por outras palavras?

– A razão de variação da profundidade da água que é aumentada.

– Está certo, a razão de variação de y . Mas o que é razão de variação? Volte às definições.

– A derivada é a razão de variação.

– Correcto. Ora, y é uma função? Como dissemos, desprezamos o valor numérico de y .

É possível imaginar que y varia?

– Sim, y , a profundidade, aumenta com o decorrer do tempo.

– Portanto, y está em função de quê?

– Do tempo t .

– Muito bem. Adapte uma notação adequada. Como poderia escrever a “razão de variação de y ” em símbolos matemáticos?

$$- \frac{dy}{dt}.$$

– Certo. Assim, esta é a sua incógnita. É preciso expressá-la em função de a , b , r e y . A propósito, um destes dados é uma razão. Qual deles?

– r é a razão à qual a água escorre para o vaso.

– Como é isso? Pode dizê-lo por outras palavras?

– r é a razão de variação do volume de água no vaso.

– Como? É possível reformulá-lo de outra maneira? Como representaria isso numa notação adequada?

$$- r = \frac{dV}{dt}.$$

– O que é V ?

– O volume da água no vaso no instante t .

– Muito bem. Agora, tem de expressar $\frac{dy}{dt}$ em função de a , b , $\frac{dV}{dt}$ e y . Como faria isto?

– ...

– Se não puder resolver o problema proposto, procure resolver algum problema relacionado com este. Se ainda não percebe a relação que existe entre $\frac{dy}{dt}$ e os dados, procure introduzir alguma conexão mais simples que possa servir de intermediária. Como fazer isto?

– ...

– Não percebeu que há outras relações? Por exemplo, serão y e V independentes uma da outra?

– Não. Quando y cresce, V também cresce.

– Portanto, há uma relação. Qual é?

– Bem, V é o volume de um cone cuja altura é y . Mas ainda não sei qual é o raio da base.

– Não obstante, pode tomá-lo em consideração. Chame-o de alguma coisa, digamos x .

$$- V = \frac{\pi x^2 y}{3}.$$

– Certo. E x , depende de y ?

– Sim. Quando a profundidade da água cresce, o raio da superfície livre, x , também cresce.

– Portanto, há uma relação entre eles. Qual é?

– É claro, triângulos semelhantes

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b}.$$

– Está a ver? Mais uma relação. Eu não gostaria de deixar de aproveitá-la. Não se esqueça de que procura conhecer a relação entre V e y .

– Tenho

$$x = \frac{a y}{b}$$

$$V = \frac{\pi a^2 y^3}{3b^2}.$$

– Muito bem. Isto não parece um bom elemento auxiliar? Mas não deve esquecer o seu objectivo. Qual é a incógnita?

– Bem, $\frac{dy}{dt}$.

– Precisa encontrar uma relação entre $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dV}{dt}$ e as outras grandezas. E já aqui tem uma entre y , V e outras quantidades. O que fazer?

– Diferenciar! Está claro!

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi a^2 y^2}{b^2} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

Eis tudo aí.

– Ótimo. E quanto aos valores numéricos?

– Se $a = 4$; $b = 3$; $\frac{dV}{dt} = r = 2$; $y = 1$, então

$$2 = \frac{\pi \times 16 \times 1}{9} \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2}{\frac{\pi \times 16 \times 1}{9}} = \frac{18}{\pi \times 16 \times 1}.$$

□

As indagações e sugestões mencionadas na lista não podem fazer milagres. Elas não nos podem fornecer soluções para todos os problemas sem que haja algum esforço da nossa parte. Quando, desanimados pelo insucesso, ficamos inclinados a abandonar o problema, elas poderão indicar uma nova tentativa, um novo aspecto, uma variante do problema, um novo

estímulo: elas poderão nos manter a pensar.

Quando um estudante comete erros tolos ou é irritantemente vagaroso, a causa é sempre a mesma: ele não tem qualquer desejo de resolver o problema, nem mesmo deseja entendê-lo, por isso, não chegou sequer a compreendê-lo. Portanto, o professor que realmente deseja ajudar o aluno deve, antes de tudo, estimular a sua curiosidade, incutir-lhe certo desejo de resolver o problema. O professor deve também conceder algum tempo ao aluno para que ele tome a decisão e se dedique à sua tarefa. O professor pode utilizar a lista de questões e sugestões para ajudar os seus alunos. Se estes progredirem, não necessitam de auxílio e o professor não lhes deve fazer qualquer pergunta, mas sim deixá-los trabalhar sozinhos, o que é, obviamente, muito melhor para a sua independência. Este deve encontrar alguma questão adequada ou sugestões que possam auxiliar os alunos, quando estes não conseguirem ir adiante, porque aí há o risco de que o estudante se canse e abandone o problema ou perca o interesse e cometa erros tolos como resultado da sua indiferença.

Podemos utilizar a lista na resolução dos nossos próprios problemas. Para o fazermos adequadamente, procedemos como no caso anterior. Quando o nosso progresso é satisfatório, quando novas observações surgem espontaneamente, seria uma estupidez prejudicar esse avanço espontâneo com indagações. Mas quando o progresso fica bloqueado, quando nada nos ocorre, corremos o risco de desistir do problema. Então é tempo de pensar numa ideia geral que nos possa ser útil, em indagações ou sugestões da lista que possam ser apropriadas ao caso. Qualquer questão que tenha possibilidade de mostrar um novo aspecto do problema será bem vinda: ela poderá reconquistar o interesse e, assim, manter-nos a trabalhar e a pensar!

BIBLIOGRAFIA

- APOSTOL, T. M. – “Irrationality of The Square Root of Two – A Geometric Proof”, Amer. Math. Monthly, Novembro de 2000, 841 - 842.
- FERNANDEZ, L.; GOORANSARAB, H. – Solutions Manual for Techniques of Problem Solving, MAS, Dezembro de 1997.
- KRANTZ, S. G. – Techniques of Problem Solving, MAS, Dezembro de 1996.
- POLYA, G. – How to Solve it, Anchor, 1957.
- WICKELGREN, W. A. – How to Solve Mathematical Problems, Dover, Março de 1995.
- ZEITZ, P. – The Art and Craft of Problem Solving, Wiley, 1ª edição, Fevereiro de 1999.

ENDEREÇOS DA INTERNET

- www.sercomtel.com.br/matematica/alegria/probl/pcriativ.htm
- www.mycharades.com/mostra_charada.asp?id=70
- www.terravista.pt/BaiaGatas/1371/manual.htm

ERRATA

Página	Linha	Onde está	Deve estar
1	37	(p_1, p_2, \dots, p_k)	$p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k$
10	37	factores	zeros
62	26	21!	2!
101	11	colocadas de modo que	colocadas em fila de modo que