A Avaliação da Resolução de Problemas

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Artur José Madeira Cardoso de Sousa

MESTRADO EM ENSINO DA MATEMÁTICA NO 3º CICLO DO ENSINO BÁSICO E SECUNDÁRIO

UNIVERSIDADE da MADEIRA

A Nossa Universidade

www.uma.pt

julho | 2014

A avaliação da resolução de problemas

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Artur José Madeira Cardoso de Sousa

MESTRADO EM ENSINO DA MATEMÁTICA
NO 3º CICLO DO ENSINO BÁSICO E SECUNDÁRIO

ORIENTAÇÃO
Elsa Maria dos Santos Fernandes

Resumo

Esta investigação teve como objetivo, compreender como é que a avaliação da resolução de problemas contribui para melhorar a aprendizagem da resolução de problemas. A dificuldade na resolução de problemas é de facto um fenómeno mundial com uma extensão considerável em termos cronológicos. Tendo-se escrito muito acerca deste assunto, a verdade é que continua a colocar muitos pontos de interrogação, no que concerne aos métodos e estratégias para ultrapassar este problema. Combinar a avaliação com a resolução de problemas nem sempre é fácil. A resolução de problemas é muito importante para que se cinja a uma visão simplista, temos que perceber que esta se reveste de uma oportunidade para alargar e diversificar os instrumentos de avaliação. Para além disso, permite que os alunos com dificuldades se envolvam ativamente com os seus colegas, numa busca cooperativa pela solução do problema, beneficiando assim ambas as partes. No sentido de verificar o acima referido, os alunos foram colocados em grupos e foi-lhes proposto uma ficha de trabalho de problemas. Os problemas propostos foram os mais diversificados possíveis, no sentido de apelar aos vários tipos de raciocínio e estratégias. Para este estudo foi escolhida uma turma do 5º ano com alunos com bons resultados em matemática e outros com dificuldades. No que concerne à metodologia de investigação, optou-se pela qualitativa e descritiva, com uma pequena nuance quantitativa para consubstanciar o estudo.

Palavras-chave: Avaliação; Resolução de problemas; Trabalho cooperativo; Oportunidade

Abstract

The aim of this investigation is try to understand how the evaluation of the problem solving contributes to enhance the learning of problem solving. The difficulties in problem solving are in fact a world phenomenon with a considerable extension in chronological terms. A lot has been written about this subject, the truth is, it still puts a lot of question marks on the methods and strategies applied to overcome this problem. Merging the evaluation with the problem solving it's not a simple task. The problem solving is too important to be seen in such a simple way, so we have to realize that this is an opportunity to wide and multiply the assessment instruments. Beyond this, it allows struggling students to involve actively with their colleagues, in a cooperative search for the problem's solution, benefiting both parties. In the attempt of proving the last sentence, the students were put on "balanced" groups and have been proposed to a problem's worksheet. The problems proposed were as versatile as possible, with the objective of trying to appeal to the various types of reasoning and strategies. For this study it was chosen a fifth grade class with high and low marks in mathematics. Concerning the investigation methodology, we went for the qualitative and descriptive type, with a quantitative "twist" to consubstantiate the study.

Keywords: Evaluation; Problem solving; Cooperative work; Opportunity

Agradecimentos

Estes últimos meses têm sido muito duros por todo o trabalho acumulado em diferentes funções, contudo, houve um conjunto de pessoas que me ajudaram a superar todas as adversidades e cansaços.

Em primeiro lugar agradeço a toda a minha família e amigos por todo o apoio, força e ânimo, prestados em todos os momentos ao longo desta jornada.

Agradeço à Ilda pelo carinho e auxílio que me brindou sempre que precisei.

Não posso também deixar de agradecer à Professora Elsa Fernandes, pelos conselhos, sugestões e apoio, que foram muito importantes para que esta investigação chegasse a bom porto.

Aos meus colegas e ao Conselho Executivo da minha escola, um grande bem-haja por toda a ajuda e amizade.

Termino com uma palavra de agradecimento aos meus alunos, pela cooperação nas atividades desenvolvidas, pois sem eles este trabalho não seria concretizado.

Índice geral

Índice de figuras

Índice de quadros e gráficos

1. Introdução

1.1. Motivação e objeto de estudo

"Nós precisamos saber, e nós iremos saber"
David Hilbert

Esta célebre frase de David Hilbert é reveladora da insaciável vontade humana em busca do conhecimento absoluto e da essência de todas as coisas. O homem desde sempre procurou responder às questões, o que somos, de onde viemos e para onde vamos. A descoberta do Bosão de Higgs[1], ou comummente chamada "partícula de Deus" levantou um pouco do véu relativamente a estas perguntas. De facto, foi no Laboratório Europeu de Física de Partículas (CERN), através do acelerador de partículas (LHC), que foi detetada pela primeira vez em 2012esta partícula subatómica. Este foi mais um passo dado em busca da verdade acerca dos mistérios que a vastidão do universo encerra, porém, esta descoberta trouxe novas perguntas, que certamente o Homem tudo fará para saber lhes dar resposta.

Não posso discordar que esta vontade em querer saber mais, em melhorar todos os aspetos que envolvem a minha vida foi-me imbuída desde tenra idade. Foi com este espírito com que encarei a docência, ensinar aquilo que aprendi, mas não ficar estanque nos meus conhecimentos, porque é sempre possível melhorar aquilo que fazemos. Não nos podemos contentar com a letargia do suficiente, é preciso ir em busca do conhecimento, porque o saber faz-nos melhor e mais responsáveis na prática docente.

A responsabilidade inerente à docência é algo incontornável e à qual teremos de estar dispostos a assumir desde o primeiro dia em que atravessamos os portões da escola. De repente, a responsabilidade desdobra-se em pontualidade, assiduidade, assertividade, justiça, compreensão, afabilidade, disponibilidade… e a lista continua. Por mais que queiramos reduzir a lista esta continuará longa…, ser professor é isto mesmo, dar o melhor de si. É isso que tento fazer dia após dia, dar o melhor de mim pelos alunos, para que também eles possam ultrapassar as suas dificuldades, é isso que me motiva.

[1]O britânico Peter Higgs e o belga François Englert realizaram trabalhos acerca do Bosão de Higgs (partícula elementar que explica a origem da massa das outras partículas) e ganharam o Prémio Nobel da Física 2013 por seus trabalhos teóricos, na década de 1960.

Quando olho para os fatores que me levaram à escolha do tema deste trabalho, rapidamente penso naquilo, a que a meu ver, os alunos têm mais dificuldades a nível da matemática, a resolução de problemas. Vi neste trabalho uma oportunidade de aprender e perceber mais um pouco sobre a resolução de problemas que, segundo Abrantes (1989), já há muito tempo é reconhecida como tendo um lugar de destaque na aprendizagem, visto que é o motor do desenvolvimento e da actividade matemática. Senti necessidade de tentar perceber porque é que os alunos sentem tantas dificuldades ao resolver problemas e quais os caminhos devem ser seguidos para que se possa dar a volta. Para além disso, quis aliar a avaliação, que é o fator fundamental da vida escolar dos alunos, à resolução de problemas. Assim nasceu a avaliação da resolução de problemas, com o objetivo de ajudar a que os alunos melhorem a sua performance durante a resolução de problemas, enquanto são submetidos a uma avaliação verdadeiramente holística. Esta avaliação contempla todas as fases da resolução de problemas e não apenas a visão redutora cingida apenas à solução. Para além disto são valorizados fatores como a contribuição individual para o grupo e a cooperação. De repente florescem oportunidades no domínio avaliativo, já que, poderemos, por exemplo, tomar como objeto de avaliação outras componentes como a comunicação oral e escrita. Sendo a avaliação e a resolução de problemas os fatores que motivaram este estudo, estes serão alvo de uma pequena reflexão ainda neste capítulo.

Não podemos tomar como garantido que um aluno à partida por ter dificuldades na resolução de problemas, irá ostracizar esta área da matemática e dessa forma tenderá a criar obstáculos na sua implementação em sala de aula. Nós docentes temos de pensar, ou pelo menos acreditar, que um aluno mostrará alguma recetividade para desenvolver a tarefa de resolução de problemas. Claro que poderá haver alguma resistência inicial, mas esta faz parte e cabe a nós professores inverter este comportamento. Agrada à maioria dos alunos o trabalho de grupo, por isso, há que fazer disso um forte aliado para que os discentes (pelo menos aqueles que têm mais dificuldades e que mostram resistência) comecem a ver a resolução de problemas como uma atividade interessante, que tem o condão de os poder ajudar a desenvolver o raciocínio e interagir com os colegas melhorando a aprendizagem. Na minha modesta opinião, considero que os alunos devem sentir a paixão do professor por este tema, para que também eles se sintam tentados a trabalhá-lo, ou pelo menos olhá-lo, sob outro prisma. Diz-se, que só saímos vencedores de uma guerra depois de ganharmos várias batalhas, assim é o caso da implementação dos problemas nas aulas. Só faremos progressos se houver um trabalho consistente e progressivo, para que não haja o "perigo" dos alunos olharem para a resolução de problemas como uma tarefa estranha, deslocada e irregular, servindo apenas como atividade lúdica ou como introdução de algum tema. Este é o meu contributo para que os alunos vejam a matemática, não como um problema que precisa de ser resolvido, mas como uma oportunidade de poder vencer neste mundo competitivo. Assim, com este estudo pretendo analisar a forma como os alunos resolvem os problemas, as dinâmicas das discussões geradas em grupo e como as mesmas os ajudam a superarem as dificuldades. Irei procurar compreender como é que a avaliação da resolução de problemas contribui para melhorar a aprendizagem da resolução de problemas. Foram assim formuladas algumas questões que servirão de guia para o estudo e que procurarei dar resposta após a análise dos dados recolhidos. As questões consideradas no estudo foram as seguintes:

- Como é que o trabalho de grupo beneficia os alunos na resolução de problemas?
- Como é que a avaliação faseada da resolução de problemas promove aprendizagem da resolução de problemas?
- Que benefícios para a aprendizagem da matemática advém da avaliação da resolução de problemas?

1.2. A formulação e a resolução de problemas

A formulação e a resolução de problemas é um assunto que me é muito querido e que tem sido o meu cavalo de batalha ao longo dos meus anos como docente. De ano para ano deparo-me sempre com a mesma realidade, alunos com imensa dificuldade na resolução de problemas, sendo um "bicho papão" para a maioria deles. Seja qual for o nível de escolaridade do aluno, este responderá convictamente que apresenta dificuldades na resolução de problemas. Os alunos não se sentem à vontade durante a tarefa de resolver de um problema, porque não foram estimulados a resolvê-los ou resolveram-nos de uma forma demasiado residual. De facto, é notório que apesar de alguns docentes prepararem os seus alunos no 1º ciclo para adquirirem traquejo na resolução de problemas, não é menos verdade que a maior parte raramente o faz. Tradicionalmente, e não retirando a sua importância e o seu valor, insiste-se demasiado no algoritmo e nos exercícios ditos rotineiros, deixando para último plano a resolução de problemas. Hoje em dia trabalha-se, de uma forma quase "obsessiva", um pouco por culpa dos famigerados “rankings”, para os resultados de exame. Concentra-se todos os esforços, exercitando quase até à exaustão situações típicas de exame, esquecendo-se de outros aspetos, porventura, também importantes da Matemática e que precisam de ser desenvolvidos. Tendo em conta o trabalho empreendido pelos alunos ao longo do ano, será justo que em apenas um dia (num exame) se atribua mais de um quarto da sua classificação final nesta componente avaliativa? Não obstante a sua importância como instrumento de avaliação, podermos nos perguntar se o peso atribuído ao exame é adequado ou se é atribuído um peso demasiado grande na classificação final do aluno. Evitando entrar em demagogias, deve ficar na ideia que o exame, para o bem ou para o mal, sujeita os alunos a uma pressão a que não estão habituados e que há uns que lidam melhor com a mesma que outros. Naturalmente, que isto gera uma série de questões, como as que se seguem por exemplo:

- Um aluno que tem bons resultados ao longo do ano e que teve um mau resultado no exame é um aluno que teve uma preparação pouco adequada, os instrumentos de avaliação ao longo do ano não evidenciaram possíveis lacunas, a pressão a que esteve sujeito no exame levou a melhor?

- Um aluno que tem fracos resultados ao longo do ano e que teve um resultado satisfatório no exame é um aluno que não foi corretamente avaliado (não foram expostas/contempladas as verdadeiras capacidades do aluno), teve uma boa preparação para o exame (treino intensivo de exercícios típicos de exame), soube gerir a pressão durante o exame tirando partido dos seus pontos fortes?

- Será que um aluno que tem bons resultados nos exames revela competências na resolução de problemas ou, por outro lado, será que um aluno que tem maus resultados nos exames é incompetente na resolução de problemas?

Estas e muitas outras questões se poderão colocar, havendo uma certa ambiguidade de opiniões relativamente ao exame como um dos instrumentos de avaliação com maior peso na nota final do aluno.

Voltando à formulação e resolução de problemas, muito se tem dito e escrito acerca deste assunto e apesar de ser um dos objetos que devem ser desenvolvidos em termos curriculares, não tem tido o destaque merecido em termos de sala de aula. Por exemplo, Abrantes, Matos e Ponte (1998) referem, que é muito importante a capacidade de formulação de problemas porque melhora, de uma forma significativa e em diversas situações a compreensão das relações matemáticas envolvidas. Indicam ainda, que com base em diversos estudos, inicialmente, os problemas formulados pelos alunos são geralmente exercícios, parecidos com os que estão habituados a resolver, pelo que, com algum trabalho esta capacidade poderá ser desenvolvida. Evidentemente, que um problema depois de ser enunciado (formulado) deve ser resolvido, se possível pelos colegas de turma, no sentido de se verificar o seu sentido. Aqui entra o processo de resolução de problemas, que, como referem, Abrantes, Matos e Ponte (1998), os alunos tendem a ter dificuldades iniciais, mas que se tiverem um acompanhamento adequado no seu processo de ensino, os mesmos serão capazes de aos poucos multiplicarem as suas estratégias durante a resolução dos problemas. Para além disto, os alunos irão querer dispensar mais tempo na resolução de problemas (sentir-se-ão mais motivados para tal) e isso trará melhorias claras no seu desempenho. Coloca-se então a questão: "Haverá tempo para implementar esta forma de trabalho na sala de aula". A resposta é sim, simplesmente cada docente terá de fazer a parte que lhe compete, ou seja, a capacidade de resolver problemas é algo que leva tempo, pelo que não vamos querer que os alunos se tornem "experts" neste campo de um dia para o outro. Se os docentes, ao longo de cada ano letivo, dedicarem algumas aulas ou parte das aulas, a este assunto, tudo se tornará mais fácil. É com a combinação do trabalho de todos os docentes que se poderá fazer a diferença e com isto se criam oportunidades de avaliação diferenciadas, ao invés de concentrar tudo em testes ou questões aula.

1.3. A Avaliação

A avaliação é um assunto que tem uma importância brutal na vida académica de um aluno e que não pode ser tratada como uma qualquer banalidade. Considero que avaliar, constitui a tarefa mais difícil na profissão como docente, porque é desejável que as capacidades dos alunos sejam correctamente interpretadas, para que se afaste um pouco a subjetividade inerente à própria avaliação. Assim, ser o mais justo possível na forma como avaliamos, é uma tarefa a tempo inteiro e que não se pode esgotar com os tradicionais testes. Citando Irene de Albuquerque, "um bom ensino da Matemática forma melhores hábitos de pensamento e habilita o indivíduo a usar melhor a sua inteligência". Por isso, os instrumentos de avaliação devem ser múltiplos e bastante abrangentes, senão, corremos o risco de errarmos no nosso julgamento acerca das capacidades matemáticas de um aluno. Será que simplesmente porque um discente tem maus resultados num teste tem de ser rotulado como um mau aluno a Matemática? Este aluno poderá ter dificuldades na comunicação escrita, ou algum "atabalhoamento mental", que leve a que tenha dificuldades a exprimir-se corretamente num teste. Por outro lado, poderá ter ideias bastante "iluminadas" que permitam desbloquear a resolução de um problema em grupo ou ter uma maior facilidade na comunicação oral e sentir-se mais à vontade neste tipo de interação. Terá de ser dada a oportunidade de testar várias áreas da Matemática no sentido de perceber quais os pontos fortes dos alunos e como estes os poderão levar a que melhorarem nas áreas em que se sentem mais vulneráveis. Pela sua diversidade e riqueza, dou uma especial ênfase à avaliação da resolução de problemas. Repare-se que, durante a resolução de problemas, poderemos avaliar uma série de aspetos que não são contemplados quando, por exemplo, um aluno realiza um teste. Poderemos avaliar o trabalho do grupo (ou seja o resultado do trabalho desenvolvido pelos alunos), a forma como cada aluno trabalhou para o grupo, a comunicação oral dos alunos no grupo e a discussão de resultados em grande grupo. Os exercícios que se trabalham diariamente na sala de aula, que fazem parte de um determinado conteúdo e que depois são alvo de testes, poderão provocar constrangimentos nos alunos que não dominam essa parte da matéria (um aluno que tenha muitas dificuldades em geometria e que seja sujeito a um teste apenas com esta parte da matéria, certamente, os seus resultados não serão os melhores). Na resolução de problemas os alunos não ficam limitados a problemas que envolvam apenas um conteúdo e poderão explorar várias formas de resolução dos mesmos, sem terem de, por exemplo, recorrer a um determinado algoritmo. Note-se, que é importante que os alunos tenham uma boa base matemática e que devem conhecer algumas das suas importantes relações. Mas, a matemática é uma ciência que é desenvolvida, geralmente, por mentes soltas, descomplexadas e sem barreiras porque estas conseguem ir além daquilo que já foi feito e pensado. Um passo nesse sentido, é pôr os alunos a resolverem problemas e que os mesmos sintam que estão a ser avaliados durante este processo de acordo com o seu empenho e dedicação.

1.4. Reflexão sobre a minha prática

Apesar de ainda não ter muitos anos de docência, a verdade é que já lecionei vários anos de escolaridade fazendo uma incursão pelo 2º, 3º ciclo e secundário. Já lecionei o 5º, 7º, 8º, 9º, 11º, 11º do curso profissional, Curso EFA básico (matemática para a vida) e Curso EFA Secundário (Sociedade, tecnologia e ciência), o que ilustra bem a variedade de realidades com que tenho sido bafejado. Desde o primeiro dia em que iniciei as minhas funções como professor nos cursos de Educação e Formação de Adultos (EFA) à noite, que sempre me propus a dar o meu melhor, mesmo que as coisas não corressem da forma como estivesse à espera. A minha experiência lectiva, de uma forma geral, tem sido boa e me tem criado expectativas positivas em relação ao ensino, porém, este percurso não foi sempre fácil. Ao longo dos meus anos de ensino tenho sido brindado com o mais variado tipo de turmas. Tive turmas muito indisciplinadas, em que alguns dos alunos, alvo de múltiplas participações, dificultavam imenso o decorrer das aulas. Nesse tipo de turmas, fui obrigado a alterar por diversas vezes a forma como abordava os conteúdos, no sentido, de me aproximar o mais possível aos seus interesses e assim poder cativá-las. Claro, que neste processo de adaptação houve sucessos e insucessos, porém, desistir nunca foi alternativa.

Em retrospetiva, tenho tido a felicidade de experienciar um pouco de tudo e essa variedade, na minha opinião, tem-me ajudado imenso a evoluir a minha forma de lecionar.

1.4.1 Projeto CEM

Frequentei, durante o ano passado, o Projeto CEM 7º ano e encontro-me a frequentar o Projeto CEM 5º ano. Inicialmente, desconhecia como se norteava o Projeto CEM, pelo que, foi com alguma curiosidade que comecei a assistir às sessões de formação. Desde logo, verifiquei que é dada a primazia às tarefas investigativas em detrimento do método expositivo. Constatei, que a maneira como se abordavam os conteúdos era interessante e muito diferente das ditas "aulas tradicionais". Apesar de algumas das tarefas não poderem ser aplicadas na sua plenitude (pela falta de algum equipamento informático como computadores e projetores multimédia), procurei adaptar algumas, de forma a poder aplicá-las aos meus alunos, para que estes também sentissem como é trabalhar a Matemática de maneira diferente. Os alunos mostraram-se bastante entusiasmados com as tarefas trabalhadas por serem diferentes, por darem a oportunidade de trabalharem em grupos e de chegarem às conclusões por eles mesmos. Os alunos gostam de trabalhar em grupo, aplicam-se na resolução das tarefas e apesar de haver algumas falhas, esforçam-se para serem os primeiros a terminar. Desta forma, considero, que mesmo que seja aos poucos, deve-se introduzir as tarefas investigativas para trabalhar alguns dos conteúdos lecionados, porque embora se pense o contrário, não se perde tempo com este tipo de tarefas. Os conceitos que ficam bem percebidos e consolidados, dificilmente ficarão esquecidos e dessa forma evita-se que se volte a explicá-los futuramente, ganhando-se assim tempo. Para além disso, as tarefas investigativas promovem a autonomia e a confiança, fatores que devem ser estimulados desde tenra idade, porque os mesmos irão se refletir no seu aproveitamento a médio ou a longo prazo.

Evidentemente, que os aspetos positivos do Projeto CEM não se ficam por aqui, estes estendem-se à lecionação e ao enriquecimento pedagógico. Repare-se, que ao realizar as tarefas cedidas pelas formadoras do Projeto CEM, damos a oportunidade dos alunos trabalharem e discutirem entre si as suas ideias. Isso por si só é extremamente facilitador, já que, os alunos constroem a sua aprendizagem e dá-se margem de manobra para que se possa dar apoio aos alunos com maiores dificuldades. Os discentes que manifestam mais dificuldades na disciplina de Matemática e eventualmente na participação oral, poderão de uma forma mais consistente, partilhar e aprender com os colegas, sem constrangimentos. Mais tarde ou mais cedo, obteremos frutos deste trabalho, já que os alunos se sentirão mais confiantes para partilharem as suas dúvidas ou as suas certezas com toda a turma e isso sim, será o culminar da aprendizagem Matemática.

1.4.2. Experiência como formador

A minha experiência como formador surgiu pela altura do meu estágio pedagógico. Propuseram-me que fizesse uma formação no âmbito da minha área de lecionação. Pensei seriamente em que tipo de formação poderia apostar que fosse diferente daquilo que tinha sido feito até então. Certo dia, quando abri o armário do grupo de Matemática, verifiquei que havia muitos materiais manipuláveis que davam a sensação de terem pouca utilização. Depois, também pensei que poderia fazer algo que envolvesse o uso das novas tecnologias, nomeadamente a informática e a internet. Havendo muito material gratuito na internet que pode ser usado em benefício da aprendizagem, porque não utilizá-lo? Assim, surgiu a formação “Utilização de softwares matemáticos gratuitos, applets e materiais no ensino da matemática”, um título grande de acordo com a riqueza que a envolve. Esta formação teve um feedback muito positivo por parte dos formandos, que a acharam muito interessante e que lhes deu uma nova visão sobre o uso destes materiais e softwares nas suas aulas.

Mais tarde fui escolhido pelo meu grupo, para formador na escola do Projeto CEM, para o 7º ano de escolaridade. A implementação dos Novos Programas de Matemática é uma tarefa que não deve ser levada de ânimo leve, porque acarreta a responsabilidade de trabalharmos os novos conteúdos da maneira mais pedagógica possível e que beneficie as aprendizagens. Por isso, procurei dar o meu melhor no desempenho das minhas funções como formador, para que as formandas pudessem também elevar a sua forma de ensinar e trabalhar o novo programa. Foi uma experiência gratificante, porque num ambiente de companheirismo e partilha houve momentos de discussão muito profícuos, aquando da exploração das tarefas do Projeto. Atualmente, para além de estar a receber formação do Projeto CEM para o 5º ano, fui também incumbido da tarefa de replicar a mesma na escola onde leciono. Apesar da mudança de ciclo, observo nestes formandos, a par do ano passado, a mesma vontade de partilhar e de "aprender" novas formas de ensinar ou trabalhar os conteúdos e isso é motivo de grande satisfação.

1.5. Organização da dissertação

A presente tese está dividida em sete capítulos que não podem ser indissociáveis já que os mesmos se vão complementando ao longo da leitura. No primeiro capítulo temos a introdução, onde estão descritos os objetivos e as minhas motivações para a escolha do tema, nomeadamente o impacto que resolução de problemas e a avaliação têm numa formação matemática integral dos alunos. Ainda neste capítulo, falo um pouco acerca da minha prática letiva. Concluo este capítulo refletindo acerca da minha experiência como formador e o impacto do Projeto CEM na minha prática pedagógica. Segue-se a fundamentação teórica, onde é feita a revisão da literatura que orientou parte deste estudo. Aqui são referidos aspetos históricos, sociais, técnicos, entre outros, de algumas componentes como, a avaliação, os problemas, a resolução de problemas e a avaliação da resolução de problemas. O terceiro capítulo indica os métodos de investigação usados durante o estudo, é referida a natureza do estudo, caracterizado o ambiente e os intervenientes, a escolha dos problemas, os instrumentos de avaliação aplicados, o método de recolha de dados e a forma como foram analisados e interpretados. No capítulo seguinte foi feita a análise dos dados recolhidos e foi dada a sua interpretação. Note-se que análise realizada baseou-se, no trabalho efetuado pelos alunos em sala de aula durante a resolução da ficha de problemas e nas posteriores entrevistas. De acordo com os resultados obtidos foi feita a sua interpretação. No quinto capítulo, foram tecidas algumas considerações gerais acerca do estudo realizado e procurou-se dar resposta às questões de investigação elaboradas no primeiro capítulo. No sexto capítulo estão esplanadas todas as referências bibliográficas utilizadas na elaboração do trabalho. Este trabalho é concluído com toda a panóplia de anexos usados como suporte nesta investigação.

2. Fundamentação Teórica

2.1. A avaliação da aprendizagem

Desde há muitos anos a avaliação das aprendizagens vem ocupando as mentes dos investigadores devido à sua complexidade. Como avaliar? Que peso deve ter a avaliação qualitativa e a quantitativa para que esta seja mais favorável para o aluno? Que métodos e instrumentos de avaliação a utilizar? São questões que os educadores procuram responder no sentido de serem justos e transparentes no processo de avaliação dos seus alunos.

Faz sentido nesta altura distinguir classificação de avaliação, já que, é recorrente a dificuldade em distinguir estas duas valências. Classificar é, de acordo com o dicionário electrónico infopédia[2], "atribuir uma nota a" ou "qualificar", ou seja, é atribuir um valor qualitativo ou quantitativo, neste caso, à performance do aluno.

Definir avaliação é uma tarefa um pouco mais complexa devido à "enormidade" do seu significado como veremos mais adiante. A subjetividade intrínseca à avaliação e busca pela sua objetividade tem sido uma preocupação constante desde os anos 20. "Vários têm sido os estudos, as explicações e as medidas preconizadas para reduzir a subjetividade na avaliação. No entanto na prática o problema continua por resolver" (Pinto,1991, p.38). O autor refere ainda que, é frequente ouvir dizer que "tudo é avaliar", pelo que considera importante, tentar redefinir o conceito de avaliação, de uma forma mais operacional, para que o diálogo sobre esta matéria seja mais profícuo. Para Barlow, (2006, p.12) "(…) avaliar é emitir um julgamento preciso ou não, sobre uma realidade qualificável ou não, depois de ter efetuado ou não uma medição". Esta definição põe a nu a complexidade daquilo que deve ser a avaliação, ou seja, esta terá de ser flexível o suficiente para que se possa adequar a qualquer realidade.

A avaliação das aprendizagens no que se refere à matemática não escapa a toda esta agitação. Segundo o National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 1991), o principal propósito da avaliação é ajudar os professores a conhecerem melhor o que sabem os alunos e a tomarem decisões significativas no seu ensino. A incidência principal é sobre a interação dos professores e alunos em contexto de sala de aula pelo que as normas para avaliação do NCTM indicam que terá de haver uma mudança em

[2] Consultado em http://www.infopedia.pt/lingua-portuguesa/classificar (30/12/2013)

termos curriculares que passam pela alteração de alguns dos instrumentos de avaliação, nomeadamente os testes. A razão dessa mudança prende-se com o facto de que muitos dos atuais testes não são capazes de aferir acercadas reais capacidades dos alunos. Kilpatrick (1991), faz referência a Thorndike, que na conferência final do Inquérito Internacional de Exames, afirmou que os exames deveriam ser psicometricamente "puros". Esta ideia estende-se aos nossos dias, já que alguns dos testes mais comuns são os de resposta múltipla e de resposta curta. Não será, portanto, de estranhar que este tipo de testes apenas expõe aquilo que o aluno não sabe. Kilpatrick (1991, pp.61-62) citando Kandel (1936) relata que "uma classificação alta num teste deste tipo não demonstra infalivelmente a obtenção daquilo que denominamos por uma educação liberal; mas uma classificação baixa demonstra infalivelmente uma falha dessa educação liberal porque revela a ausência das bases (…)"

Fazendo referência ao NCTM (1991), facilmente percebemos que aquilo que se ensina aos alunos é fortemente influenciado pela forma como os avaliamos. Desta forma as normas para a avaliação indicam que as notas obtidas nos testes escritos não são suficientes para mostrar o verdadeiro conhecimento dos alunos, pelo que, os professores devem tentar diversificar as formas de classificar, pontuar e informar, no sentido de encontrar o melhor processo para determinar os conhecimentos matemáticos dos alunos. Tendo a mesma linha de pensamento, Santos (2002) refere que a avaliação deve existir nas mais diversas situações (formais ou informais), ser ativamente participada pelos seus atores e ser a mais diversa possível para que as aprendizagens evoluam e atinjam o sucesso.

O NCTM (1991) refere um conjunto de aspetos que devem merecer uma atenção especial na avaliação. Indica que os alunos devem ser avaliados sobre aquilo que sabem e pensam sobre a matemática. Dá-se ênfase aos saberes adquiridos pelos alunos (valoriza-se o que os alunos aprendem) ao invés de apenas valorizar-se o que os alunos não sabem (característica de muitos dos atuais testes de avaliação). Por isso, para minimizar os efeitos de uma avaliação baseada em testes "tradicionais", devem ser usadas diversas técnicas de avaliação como a escrita, a oralidade e a demonstração (note-se que o NCTM não exclui os chamados "testes normalizados", estes apenas devem ser uma das muitas formas de avaliar). Deve-se integrar a avaliação como sendo uma componente do processo de ensino. O ensino da matemática deve ser o mais diversificado possível e compreender uma visão sobre o seu todo e tudo o que ela representa. Sempre que possível, a matemática deve explorar problemas ou situações problemáticas e sua aplicabilidade nos mais diversos contextos. Também não foram esquecidas as tecnologias, nomeadamente o uso da calculadora, computadores e materiais manipuláveis, devendo também fazer parte da avaliação. Finalmente, os instrumentos de recolha dos resultados da aplicação dos currículos e ensino devem ser recorrentemente avaliados.

Ainda de acordo com o NCTM (1991), a avaliação deve reger-se segundo três princípios gerais: 1 - as formas e os instrumentos de avaliação devem ser compatíveis com as várias componentes do currículo (finalidades, objetivos, conteúdos, processos matemáticos e experiências de aprendizagem); 2 – os modos e instrumentos de recolha de dados (de diversas fontes) deverão ser variados; 3 – os métodos e práticas avaliativas deverão se coadunar com o tipo de informação que se pretende, ao fim a que se destina e ao grau de desenvolvimento do aluno.

A avaliação das aprendizagens é um tema que tem muitas nuances e todas as suas componentes devem ser tratadas sempre que possível com o mesmo rigor, porque assim estaremos a tornar algo tão subjetivo um pouco mais objetivo. Não convém que nos esqueçamos que ao sermos mais objetivos, estaremos a ser mais justos na avaliação dos alunos, eventualmente, isso se refletirá num melhor ensino e numa melhor aprendizagem.

2.2. Saberemos distinguir um problema de um exercício?

Quantos de nós já resolvemos um exercício pensando que estávamos a resolver um problema e vice-versa. De acordo com o dicionário eletrónico Priberam[3], problema é, tendo em conta o contexto, uma "questão matemática proposta para se lhe achar solução". Portanto, não será de estranhar que confundamos muitas das vezes exercício com problema. Vejamos, um exercício é uma questão matemática e, evidentemente, quando é colocada tem o objetivo de se ver determinada a solução (por exemplo: podemos ter um exercício em que é pedido para determinar a solução da equação $x^2 - 1 = 0$).

Dificuldades nesta distinção não surgiram agora, repare-se, por exemplo, que nos anos 80, muito daquilo que se considerava problemas, eram notoriamente

[3]Consultado em http://www.priberam.pt/DLPO/problema (30/12/2013)

superficiais, em que se usavam truques ou métodos rotineiros para a sua resolução. Estas práticas poderiam acrescentar um pouco mais de que o mero exercício ou a prática da tabuada, mas a resolução de problemas é muito mais do que isso (Schoenfeld, 1992). Kilpatrick e Stanic (1989), vêm corroborar ainda mais com esta indefinição, referindo que historicamente, os problemas fazem parte do currículo escolar essencialmente como veículo de introdução e prática de exercícios. Assim, basta verificar que as secções da resolução de problemas dos testes normalizados, contêm simples aplicações de conhecimentos a situações problemáticas já bem ensaiados e nos quais já se conhece bem a estrutura. Estes testes poderão conter tipos de exercícios trabalhados nos livros de texto e do tipo de ensino praticado, mas estão longe de trabalhar tipos de problemas mais abertos e originais (Kilpatrick, 1991).Por outro lado, Krulik e Rudnick (1987) definem problema como "a situation, a quantitative or otherwise, that confronts an individual or group of individuals, that requires resolution, and for which the individual sees no apparent or obvious means or path to obtaining a solution" (p.3). No sentido de esclarecer esta questão em torno dos problemas e dos exercícios, Abrantes (1989) citando Kantowski (1981), refere que "um problema é uma situação que difere de um exercício pelo facto de o aluno não dispor de um procedimento ou algoritmo que conduzirá com certeza a uma solução". Abrantes (1989) citando parte do documento do NCTM (1987) indica que:

> "A resolução de problemas deve ser um processo que envolva ativamente os alunos na formulação de conjeturas, na investigação e exploração de ideias, que os leve a discutir e pôr em questão a sua própria maneira de pensar e também a dos outros, a validar resultados e a construir argumentos convincentes. Por isso mesmo, a resolução de problemas não acontece quando os alunos fazem uma página de cálculos (…)". (p.8)

Moreira (1987), diz que a matemática é nada mais do que conjeturas, provas e refutações encadeadas e define problema como uma questão à qual o aluno não tem à partida um método para resolvê-la. Desta forma, verificamos ainda atualmente que, "infelizmente", considera-se, por exemplo, a resolução de problemas como sendo uma mera tradução de uma questão numa equação com uma ou mais incógnitas (Abrantes, 1988).

Obviamente que a prática regular de exercícios não é uma tarefa descabida, já que permite dominar técnicas de cálculo que também são importantes, mas não devemos toldar o nosso intelecto, apenas com este aspeto da matemática. É importante resolver problemas e definir bem o seu lugar na aprendizagem, porque queiramos ou não a matemática nos acompanhará ao longo da vida, e um cérebro competente na resolução de problemas terá alguma vantagem (veja-se por exemplo os testes psicotécnicos aplicados na contratação de colaboradores).

Abrantes (1989) afirma que para que haja uma renovação do Ensino da Matemática é fundamental que se clarifique as ideias sobre o que é a resolução de problemas e que tenhamos uma visão mais alargada sobre o que é um problema. É também importante que se dê oportunidade aos alunos para explorarem, resolverem, investigarem e discutirem problemas nas mais variadas situações para que este tipo de aprendizagem seja realmente significativo. Desta forma, é importante que os professores e alunos tenham consciência do que significa um exercício e um problema e que um, pode, facilmente tornar-se no outro se não fizermos uma “leitura” correta de cada situação. É preciso saber tirar partido do melhor dos dois mundos, os exercícios, no sentido de dominar as técnicas de cálculo e os problemas com o objetivo de desenvolver o raciocínio. A chave do sucesso poderá estar na determinação de um rácio ótimo entre a quantidade de problemas e a quantidade de exercícios que devem ser explorados / praticados durante as aulas.

2.3. A resolução de problemas e o currículo

“Uma das finalidades do ensino da Matemática é a de contribuir para que os alunos desenvolvam capacidades e competências em resolução de problemas” (Charles, 1982; Fernandes, 1988, 1991, 1992; Lester, 1980a, 1980b, 1983, 1985; Ponte, 1987) citado por Fernandes & Vale (1994, p.145)).

A integração dos problemas nos currículos vem já desde o tempo dos antigos egípcios, chineses e gregos. Basta ver, por exemplo, o Papiro de Ahmes, que por volta do ano 1650 A.C. foi copiado pelo escriba Ahmes. Este documento não é mais do que um manuscrito matemático egípcio que contém uma série de problemas (Kilpatrick e Stanic, 1989). Na verdade desde cedo verificou-se que a resolução de problemas no currículo não só melhoraria substancialmente o raciocínio dos alunos, como seria uma forma de levar a que os alunos fizessem matemática, como atestam Kilpatrick e Stanic, (1989, p.8) "num certo sentido, a resolução de problemas nos currículos foi simplesmente um meio de conseguir que os alunos estudassem Matemática. Os problemas foram um elemento do currículo de Matemática que contribuiu, tal como outros elementos, para o desenvolvimento do poder de raciocinar."

Durante o século XIX a teoria da disciplina mental foi um meio de expressar as ideias. A disciplina mental (resultado da fusão entre a psicologia das faculdades e a tradição das artes liberais – onde se encontrava a matemática), como teoria curricular tinha o objetivo de desenvolver certas capacidades ou faculdades como a perceção, memória, imaginação, compreensão e intuição ou razão. De entre as artes liberais considerava-se que a matemática seria o principal veículo para o desenvolvimento da faculdade do raciocínio. Apesar da teoria da disciplina mental não ter sido extinta no virar do século, viu a sua importância ser cada vez mais reduzida, já que cada vez mais psicólogos, sociólogos e educadores iam tomando uma posição contra esta teoria. Estes críticos consideravam que esta sociedade em mudança, que assistia a um "boom" escolar (a população escolar cresceria entre 1890 e 1940 cerca de vinte vezes), aliada a uma intensa industrialização, teria que ver o seu currículo escolar alterado. Nesta altura, considerou-se que as pessoas deveriam apenas estudar o que fosse imprescindível para o desempenho da profissão escolhida. A sociedade, por sua vez, voltou-se para os testes de inteligência como forma de selecionar os alunos de acordo com os seus conhecimentos, filtrando o acesso a certos conteúdos dos currículos escolares mediante as suas capacidades. Como a matemática era um elemento crucial no currículo, foi obviamente atacada pelos críticos, já que, apesar dos mesmos considerarem a disciplina importante, argumentavam que as pessoas não precisavam de saber mais do que a Aritmética do 6º ano de escolaridade (Kilpatrick e Stanic, 1989). Kilpatrick e Stanic (1989, p.11) citando Smith (1909), expressaram "preocupação acerca da tendência de todo o país de tornar a Aritmética, assim como outros assuntos, mais interessantes para as crianças", argumentando que "nós devemos fazer tudo o que pudermos para tornar a Aritmética interessante ou mesmo atrativa para as crianças, mas que não devemos esperar atingir estes resultados oferecendo uma fraca substituta para o vigoroso assunto que nos chegou". Os autores consideram ainda que, Smith, não queria desistir da sua ideia de que qualquer trabalho que envolvesse a matemática, contribui para o desenvolvimento da capacidade das pessoas "para atacar os problemas do dia-a-dia"

(Smith,1900, p.2). Ou seja, para ele, saber calcular algo como o máximo divisor comum era tão importante como resolver um problema.

Nos anos 50 assiste-se a uma reforma, a Matemática Moderna - como resposta internacional à necessidade de reforço da formação matemática. Esta reforma irá estender-se também a Portugal, sendo aplicada ao longo dos anos 60 e levando cerca de 10 anos a ser generalizada a toda a população escolar pré-universitária (Matos, 2006). No final dos anos 70, vários estudos apontavam para um resultado francamente negativo no que concerne às aprendizagens e conteúdos caraterísticos da Matemática Moderna, já que os resultados ficaram muito aquém do esperado pelos reformadores (Matos, 2005). Note-se que no final dos anos 80, as condições de ensino eram desadequadas, fruto da falta de professores profissionalizados em matemática, da sobrelotação das escolas devido ao não acompanhamento em termos estruturais da massificação do ensino e da transição de um regime ditatorial para um regime democrático.

Internacionalmente, durante os anos 60, grande parte dos países tinham implementado nos seus currículos a Matemática Moderna. A pressa em ensinar crianças ainda muito jovens, abstrações ou coisas como a nova teoria numérica (do estilo de "aritmética do relógio[4]"), aliada à impreparação por parte dos professores e pais, traduziu-se numa grande falha já que as crianças não estavam a conseguir aprender a nova Matemática. A reação a esta falha foi o movimento *back to basics*. Como os alunos não estavam a conseguir aprender com a nova Matemática, resolveu-se voltar à instrução focada no básico, ou seja ao lápis, papel e algoritmo. Este movimento verificou-se com maior profundidade nos Estados Unidos, porém esta prática foi bastante difundida em outros países. Após uma década, onde se explorou avidamente o domínio da técnica e da prática repetitiva na resolução dos exercícios, tornou-se real o maior receio dos progressistas. Agora, os estudantes eram incapazes de pensar matematicamente e de resolver problemas (a resolução de problemas não fazia parte do currículo). Para além disso verificou-se que estes estudantes eram ainda piores no básico do que aqueles que tinham tido a nova Matemática. Não seria de estranhar que no final dos anos 70 a resolução de problemas estava quase fora do programa. A título de exemplo, quando Schoenfeld em 1978, sugeriu à Comissão do Programa do ICME-4 que deveria haver sessões para explorar a resolução de problemas (ICME-4 de 1980),

---

[4]Em matemática, **aritmética modular** (chamada também de **aritmética do relógio**) é um sistema de aritmética para inteiros, onde os números "voltam para trás" quando atingem um certo valor, o **módulo**. Informação consultada nos livros "Elementos de Álgebra" de Arnaldo Garcia e Yves Lequain e "Introdução à Teoria dos Números" de José Plinio de Oliveira Santos.

asseguraram-lhe que seriam incluídas no programa. Porém quando recebeu o programa preliminar verificou que o tópico por ele sugerido (resolução de problemas) foi indicado como sendo “aspetos pouco usuais do currículo”(Schoenfeld, 1992).

Apesar de todas as contrariedades o tema da resolução de problemas tomou um novo fôlego durante os anos 80. Durante esta década o desenvolvimento curricular e a investigação em resolução de problemas teve um enorme impulso, fruto da publicação de dois importantes documentos pelo National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), a Agenda for Action (1980) e o Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics (1989)[5]. A Agenda era um documento cujo objectivo era o de sugerir direcções quanto ao desenvolvimento curricular e quanto à ênfase a dar ao ensino na década de 80. “(…) Na verdade, a Agenda foi largamente responsável pelo facto deste período ter sido chamado «a década da resolução de problemas» nos Estados Unidos” (Lester,1993, p.17). As Normas, por outro lado, procuraram estabelecer normas para o currículo e para o ensino e ser uma arma política no que concerne à educação matemática.

A Agenda indica que “a resolução de problemas deveria ser o foco da Matemática escolar” (NCTM, 1980, p.1). Contudo, esta recomendação não foi acompanhada por quaisquer sugestões no que se refere a tornar a resolução de problemas como o centro da matemática escolar. Já as Normas contêm inúmeras sugestões sobre este assunto, mostrando haver já algum trabalho desenvolvido em matéria de resolução de problemas (Lester, 1993).

Paralelamente, em Portugal, no início dos anos oitenta, realizaram-se alguns congressos que de acordo com Matos (2008, p.143), citando Lopes, Matos, J.M. & Mestre, (1981); Matos, J. M., Almeida & Teixeira, (1982); Ponte, (1981a, 1981b, 1982) “centraram-se em temas didáticos, na resolução de problemas” (Lopes, Matos, J. M. & Mestre, 1982; Matos, J. F., 1982; Ponte & Abrantes, 1982) ou na “formação de professores” (Abrantes & Ponte, 1982). Note-se que apesar das formas de trabalho em sala de aula apresentadas nestes congressos serem “algo rudimentares” e as suas conclusões escassas, salienta-se aqui o desejo de mudança de uma situação que consideravam profissionalmente frustrante. Nesta época é também possível encontrar textos que exprimem futuras orientações programáticas, como por exemplo o

[5] Normas para a avaliação em matemática.

documento aprovado nos debates da Sociedade Portuguesa de Matemática (SPM) ("Os programas em debate", 1982) que indicava de uma forma sintética tendências de outros países para a mudança, apresentando um programa de orientações curriculares para Portugal, senão vejamos:

- Procura-se relevar o papel dos problemas como motor da investigação e da descoberta;

- Aposta-se na utilização das tecnologias como as calculadoras e o computador evidenciando o aspeto prático que o programa preconiza.

- A interdisciplinaridade, ou seja a relação da matemática com as outras disciplinas é vista com maior atenção tal como as diferentes aplicações da matemática.

- Este programa destaca a importância do aspeto formativo.

De acordo com Matos (2008), aqui está expressa a tríade (problemas, tecnologias e aplicações) que corresponde a uma alternativa à Matemática Moderna e que irá surgir mais tarde, com uma força renovada, em diversos documentos portugueses.

Os programas nacionais de Matemática Moderna em vigor, nos anos 80, aliados ao descontentamento profissional verificado no ensino professado nas escolas, leva a que se valorize a resolução dos problemas em oposição a estes programas. Ao contrário do que aconteceu nos Estados Unidos, esta valorização da resolução dos problemas não vai contra o movimento *Back to Basics*. A resolução de problemas em Portugal surge como o reverso de um ensino dito como abstrato e repetitivo, caraterísticas da Matemática Moderna, porém, não em oposição a um ensino que se pretendia limitado às funções matemáticas mais básicas (caraterística do movimento *back to basics*) (Matos, 2008).

A fundação da Associação de Professores de Matemática (APM) em 1986 e a tradução da Agenda for Action (1985) e das Normas de Avaliação do NTCM foram três marcos importantes na crescente importância dada à resolução de problemas em termos curriculares, já que, recomenda como já vimos, que a resolução de problemas seja o foco do ensino nos anos 80. Matos (2008), refere que os programas adotados alguns anos mais tarde, nomeadamente o de 1991, inseriram nas suas orientações curriculares, por exemplo, a resolução de problemas, a aplicação da matemática à realidade ou a relação entre a intuição e a formalidade na apresentação de conteúdos. Nunes e Tudichum (1989) numa entrevista concedida ao Educação e Matemática, respondendo acerca da importância da resolução dos problemas nos futuros programas, apontam que a capacidade de resolver problemas, raciocinar e comunicar são as capacidades que ao constarem no currículo de Matemática, deverão ser desenvolvidas e trabalhadas do 1º ao 12º ano.

Através de algumas investigações levadas a cabo na segunda metade dos anos 90, pode-se concluir que os alunos desde que devidamente apoiados e orientados no seu processo de ensino são capazes de utilizar, mesmo tendo algumas dificuldades iniciais, diversas formas para resolver um problema. Isto mostra que um aluno mesmo que não tenha sido estimulado para a resolução de problemas desde tenra idade não implica que mais tarde não o consiga fazer (poderá apenas levar mais tempo do que um aluno que tenha tido contacto com este tipo de abordagem matemática desde os primeiros anos da sua vida). Mais, diversos estudos indicam que tem sido difícil implementar a resolução de problemas no dia-a-dia escolar já que "esbarra" com as pretensões da atual prática letiva. De facto, muitos professores, têm-se deparado com muitas dificuldades na implementação da resolução de problemas mesmo durante a sua formação inicial, alegando, a imensa pressão exercida para que se cumpram os programas, a falta de materiais ou mesmo a dificuldade em executar tarefas na sala de aula que envolvam problemas, mesmo estes estando incluídos no programa. (Matos, 2008). A leitura feita anteriormente, não deixa margens para dúvidas, a resolução de problemas, apesar de estar contemplada nos novos currículos, sofre de inúmeros constrangimentos que limitam o seu uso em contexto de sala de aula. O Programa de Matemática do Ensino Básico de 2007 (PMEB, 2007) assume a necessidade de que as três capacidades transversais de toda a aprendizagem matemática (a resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação matemática), deverão ser recorrentemente trabalhadas e desenvolvidas em espaço próprio e com objetivos gerais e específicos bem definidos. O PMEB (2007) considera que a atividade matemática deve ter como dimensões principais, a resolução e formulações de problemas, a formulação e teste de conjeturas, a generalização e a demonstração, e a elaboração e refinamento de modelos. Não é difícil de concluir que este Programa quer ver-se alicerçado no desenvolvimento de capacidades fundamentais como é a resolução de problemas, a comunicação e raciocínio matemático. Os objetivos gerais pretendem clarificar e tornar mais explícito o que se espera que os alunos aprendam dando ênfase à valorização de dimensões em que consta entre outras a resolução de problemas. Assim, tendo em conta os objetivos gerais, os alunos deverão ser capazes de compreender problemas nos mais diversos contextos (matemáticos e não matemáticos) e de os resolver selecionando as estratégias adequadas; deverão apreciar se os resultados são plausíveis e se são adequados ao contexto das soluções obtidas; deverão verificar todo o seu trabalho, refletir sobre as estratégias usadas e reconhecer que poderão ser utilizadas outras estratégias em outras situações; deverão ser ainda capazes de formular problemas. O PMEB (2007) acrescenta ainda que a resolução de problemas é tida como uma oportunidade dos alunos não só aprofundarem o seu conhecimento matemático como o ampliar e consolidar. Desta forma, os discentes ao resolverem um problema terão de ter em atenção à sua resolução, à adequação das suas estratégias de resolução e apreciar as soluções obtidas. Para além disto, o PMEB (2007), operacionaliza a resolução de problemas, indicando cabalmente como é que a mesma se enquadra e como deve ser trabalhada ao longo dos diferentes ciclos de ensino (tópico, objetivos específicos e notas que se encontram no final de cada capítulo dedicado aos ciclos de ensino).

Já o Novo Programa de Matemática do Ensino Básico de 2013 (PMEB, 2013), assume que a resolução de problemas envolve uma série de capacidades que deverão ser desenvolvidas nos alunos. Será pois importante que a leitura e interpretação dos enunciados/dados, mobilização de conhecimentos sobre os factos, conceitos e relações, a aplicação e seleção de regras e procedimentos sejam previamente treinados e estudados. Para além disso, as estratégias aplicadas deverão ser sempre revistas para que depois se faça um correto juízo (interpretação) do resultado final obtido. O PMEB (2013) indica que a resolução de problemas, tendo em conta, a exigência da sua finalidade não deverá passar por uma mera estratégia de exploração ou descoberta (embora possa constituir um facto de motivação para a introdução de um tema). Os alunos também devem ser incentivados, progressivamente, a apresentar métodos para a resolução de problemas mais formais, apesar de inicialmente, poderem ser consideradas estratégias menos formais como esquemas, diagramas ou outras representações. O PMEB de 2013 vai ainda mais longe, referindo que desde o 1º ciclo, o número de passos necessários para resolver um problema deve aumentar de ano para ano, na medida em que, considera que os alunos devem terminar este ciclo de estudo sabendo resolver questões que não apenas sejam de resposta imediata. Para justificar o facto anterior o PMEB (2013, p.8) refere que "estudos nacionais e internacionais recentes, como o Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS), mostram que, em 2011, 60% dos alunos portugueses do 4.º ano não conseguem ultrapassar esse patamar (*Intermediate International Benchmark*)." O Novo Programa de Matemática do Ensino Básico indica qual a orientação atual e o papel atribuído à resolução de problemas no ensino da matemática, sendo porém pouco claro no que se refere à forma de explorar os problemas. Para além disso, não convém que esqueçamos que “as capacidades de resolução de problemas desenvolvem-se lentamente ao longo de um período alargado de tempo”(Lester, 1993, p.20), pelo que tem de haver um esforço combinado de professores e pais no sentido de estimular este tipo de tarefas desde tenra idade nas crianças. Naturalmente, esta tarefa revela-se por vezes titânica, já que os docentes têm de preparar os alunos para os exames de final de ciclo, tendo para isso de cumprir os extensos programas. Ora, os professores tendo em conta esse objetivo, resolvem exaustivamente, muitas das vezes, exercícios rotineiros, próprios de exame final, ficando com pouca margem para explorar problemas que estimulem o raciocínio e desenvolvimento de técnicas de resolução de problemas. E, sendo a resolução de problemas um dos aspetos fundamentais da matemática, são dadas poucas indicações de como avaliá-la, ou seja, como avaliar de acordo com os padrões que o Novo Programa de Matemática do Ensino Básico preconiza?

2.4. Porque é um problema a resolução de problemas?

Muito se tem discutido acerca da forma como os alunos resolvem problemas. Todos os anos, quando questiono os alunos acerca das suas maiores dificuldades no âmbito da disciplina de matemática, é quase consensual a resposta, “na resolução de problemas”. Surpreendentemente, ou não, esta dificuldade e esta resposta “bem tipificada” surge em qualquer nível de escolaridade ou em escolas diferentes. Então porque é para os alunos uma dificuldade a resolução de problemas? Vários estudos (SIAEP, 3.º Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS), Programme for International Student Assessment (PISA)) mostram que os alunos quando confrontados com este tipo de atividades revelam muita dificuldade e um desempenho muito aquém das expetativas (Amaro, Cardoso, Reis, 1994; Ramalho,1994, 2002). “Este insucesso poderá estar relacionado com a sobrevalorização do domínio de procedimentos e algoritmos e à pouca experiência com atividades que envolvem o raciocínio e a resolução de problemas não rotineiros.” (Barbosa, Palhares, Vale, 2008, p.89). Já em 1975, se verificava um problema semelhante como refere Matos (2008, p.13) citando Silva (1975), “a comparação dos resultados dos alunos portugueses com os de outros países, mostrando como eles são particularmente fracos (…) na capacidade de resolução de problemas, e por vezes mais altos nas questões rotineiras (…).” Segundo o mesmo autor, esta situação deve-se à persistência de um ensino predominantemente virado para memorização da rotina. Lester (1993), constata que os alunos não conseguem resolver problemas, excetuando os considerados rotineiros, apesar de aparentemente terem adquirido competências ao nível do cálculo e de conhecimento de algoritmos. Para o autor esta situação advém de três razões principais:

1- A complexidade intelectual manifestada durante a resolução de problemas;
2- Há uma falta de entendimento acerca dos processos envolvidos na resolução de problemas;
3- São quase residuais as oportunidades que os alunos têm para se envolverem no processo de resolução de problemas.

Delgado (1994), particularizando a situação para os alunos portugueses do 2.º ciclo, refere que mesmo manifestando domínio pelas técnicas de cálculos e procedimentos, os professores de matemática deste nível de ensino são confrontados com o facto de os alunos terem muitas dificuldades na resolução de problemas.

Estas dificuldades na resolução de problemas estendem-se também ao nível da interpretação de resultados, pois um problema só estará totalmente correto, ou seja, plenamente concretizado se a resposta final for adequada ao contexto do problema. Lester (1993), interroga-se sobre a falta de preocupação dos alunos em verificarem se as soluções fazem sentido, dando para isso um exemplo: um homem dirige-se para casa num automóvel a 64 km/h demorando 20 minutos, quanto tempo levará se fizer o trajeto a 80 km/h? Alguns alunos usando uma regra de três simples (pensando provavelmente que se trataria de uma situação de proporcionalidade direta) obtêm 25 minutos como resposta. Apesar de ser claramente errado o resultado obtido, já que viajando a uma maior velocidade iria levar menos tempo a chegar a casa, os alunos se revelam pouco críticos não colocando em causa o resultado. “Os alunos não pareceram preocupados com a incoerência desta solução” (Lester, 1993, p.15). Ao contrário do que se pensa, as dificuldades na resolução de problemas, por parte dos alunos, poderá ter origem no próprio professor. Charles (1990), refere que para muitos professores, a tarefa mais difícil e onde se sentem menos confiantes e confortáveis é quando estão a trabalhar com alunos enquanto estes desenvolvem a “arte” de resolver problemas. Naturalmente, um professor que não se sinta à vontade ou que não dê a devida importância à resolução de problemas, irá colocá-la de parte ou não irá dar o devido destaque como importante capacidade a desenvolver.

Lester (1993), apoiando-se em algumas investigações em ensino da resolução de problemas apresenta algumas sugestões a considerar quando se pretende que os alunos ultrapassem as suas dificuldades neste assunto. Lester sugere que, tendo em conta que a resolução de um problema é uma atividade que leva algum tempo, os alunos devem resolver muitos problemas no sentido de desenvolverem progressivamente a suas capacidades. Considera que o ensino deve ser planeado de uma forma sistemática e bem definida, um ensino em resolução de problemas, porque a maioria dos alunos beneficia desta forma de trabalho. Lester, diz ainda que os alunos devem ser ensinados acerca de todos os processos que envolvem a resolução de problemas como, por exemplo, as estratégias e fases de resolução de problemas e as heurísticas.

Assim, é importante que olhemos de frente os “insucessos” dos alunos no que concerne a resolução de problemas, e adequemos as estratégias às turmas que temos para conseguir dar a volta a esta longa “tradição”. Como dizem Kilpatrick e Stanic (1989, p.22), “(…) tomar seriamente a noção que a resolução de problemas é realmente para todos. Precisamos de olhar mais para o que as crianças podem de facto fazer e insistir na larga evidência do que conta como capacidade de resolver problemas”.

2.5. Como resolver um problema?

Como já vimos anteriormente, a resolução de problemas é um tópico que tem sido objeto de investigação já há muitos anos. Resolver um problema é um processo bastante complexo que se não for devidamente estimulado torna-se muito difícil desenvolvê-lo. Leva muito tempo e muita prática para que dominemos a técnica e ganhemos “desembaraço” na resolução de problemas, pelo que esta componente da matemática deve ser desenvolvida desde tenra idade. Não existem métodos infalíveis para que se domine a técnica da resolução de problemas, mas é certo que poderemos melhorar e muito as nossas capacidades neste domínio utilizando algumas ferramentas.

Lester (1985) refere que a investigação em resolução de problemas gira em torno de três questões fundamentais:

1. Ao resolver um problema o que é que um aluno faz de forma correta ou incorreta e ao resolvê-lo fá-lo de forma suficiente ou insuficiente?
2. O que é que se pretende que um aluno seja capaz de realizar?
3. O que é que poderemos fazer para que a capacidade de resolução de problemas melhore ao longo do tempo?

Estas questões não são de fácil resposta e passam por um grande envolvimento por parte do professor, já que o mesmo deverá saber identificar para cada aluno, por exemplo, o potencial e as insuficiências quando consideramos as duas primeiras questões. Dando resposta à terceira questão, uma das formas que poderá contribuir para melhorar a capacidade de resolução de problemas dos alunos, passa, por exemplo, por usar modelos ou processos de resolução de exercícios, como os que veremos seguidamente.

Pólya (1969/1984), considerado por muitos o "pai" do método para a resolução de problemas, citado por Kilpatrick e Stanic (1989) relata que "saber Matemática é ser capaz de fazer Matemática". Os autores citando Pólya (1981) referem ainda que "o que é o saber fazer em Matemática? A capacidade de resolver problemas". Pólya considerava que a resolução de problemas deveria ser orientada (pelo menos numa fase inicial) pelo professor, sendo os mesmos discutidos com os alunos e praticados de forma a serem compreendidos e não mecanizados. Na célebre obra "How to solve it", Pólya (1957), desmembra o processo de resolução de problemas em quatro fases, a primeira envolve a compreensão do problema e a perceção do que é pedido, a segunda tem que ver com a ligação entre os diversos itens ou seja perceber como a incógnita está ligada aos dados para estabelecermos o nosso plano de resolução. Na terceira fase, colocamos em prática o plano delineado anteriormente e na última fase refletimos sobre a nossa resolução, revendo-a e discutindo-a. Kilpatrick (1967), por outro lado, distribuiu os processos de resolução de problemas por três áreas, a orientação para o problema, que corresponde à primeira fase de Pólya, a produção de material relevante, que corresponde às segunda e terceira fases, e a avaliação.

A resolução dos problemas também poderá ser facilitada usando técnicas na elaboração dos protocolos por parte dos alunos. Amaro, Borralho e Fernandes (1994) referem assim algumas dessas técnicas, a introspeção, a retrospeção e a chamada técnica de "pensar alto". Na introspeção, os alunos têm de ir descrevendo a forma como estão a pensar conforme vão resolvendo o problema. Na retrospeção, pede-se ao aluno que descreva todos os passos, ao fim ao cabo, todos os processos mentais que utilizou para resolver o problema proposto. A técnica de “pensar alto”, por outro lado, permite que se observe o comportamento do aluno conforme vai resolvendo o problema sem que ele próprio tenha de se “auto-observar”. Assim, basta que o aluno vá relatando tudo aquilo que faz durante a atividade.

Cabrita, Fernandes e Leitão (1994) referem que a resolução de problemas, envolve processos que sugerem interações entre as operações mentais do resolvedor e da tarefa em si, chamados processos heurísticos. Ao longo do tempo diversos autores deram a sua definição de heurística:

- Segundo Pólya (1957), heurística, é um ramo de estudo, que não é claramente definido e que pertence à filosofia, à psicologia ou à lógica. A heurística tem o objetivo de estudar as regras e métodos das invenções e descobertas.

- Em Pólya (1962), tendo-se definido a heurística como o estudo dos métodos e meios de resolução de problemas, procura-se que as pessoas pensem acerca desses meios e métodos que usam habitualmente quando resolvem problemas.

- Já Krulic e Rudnick (1984) referem que as heurísticas são como um mapa que nos guiam para a solução do problema. Consideram que as heurísticas não garantem o sucesso ao contrário dos algoritmos (aplicados corretamente). Indicam ainda que se os alunos forem ensinados/incentivados a utilizarem as heurísticas na maior parte dos problemas que resolvem, têm uma grande probabilidade de os resolver com sucesso.

Note-se que alguns dos principais processos heurísticos identificados por Pólya (1957) são: analogia, elementos auxiliares, problemas auxiliares, decomposição e recombinação, definição, generalização, indução e indução matemática, redução ao absurdo e demonstração indireta, especialização, simetria, variação do problema, trabalhar voltando atrás.

Olhando para as diferentes definições de heurística, verificamos que todas elas têm um ponto em comum, a facilitação da resolução de problemas. Os processos identificados por Pólya em 1957, são usados hoje em dia pela maioria dos nossos alunos porque são indubitavelmente formas de tornar “mais simples” a nossa visão sobre os problemas. Mesmo que o seu uso não garanta sucesso, a verdade é que as heurísticas permitem que a chegada à solução torne-se mais fácil.

2.6. A avaliação da resolução de problemas

Como sabemos, um aluno é avaliado de acordo com uma série de parâmetros. Sabemos também que apesar dos muitos esforços para tornarmos a avaliação rigorosa e objetiva, a verdade é que, na maior parte das vezes caímos em alguma subjetividade, porque queiramos ou não é algo inerente à própria avaliação. A avaliação da resolução de problemas não é exceção. De facto, quando estamos a avaliar um problema, debatemo-nos sempre com a questão da subjetividade e por consequência surge a eterna questão, estamos a ser justos ou não? Outras questões, formuladas por Pinto (1991, p.45) poderão juntar-se a esta:

- Será possível traduzir em termos de avaliação a grande importância reconhecidamente atribuída à resolução de problemas no processo de ensino-aprendizagem? Haverá diferenças a considerar de acordo com os níveis de ensino?

- De que modo(s) se deve fazer essa avaliação? Será diferente o processo de avaliação? Será diferente o processo de avaliação quando se lida com problemas que relacionam a Matemática com a realidade ou com outras disciplinas – e que envolvam por exemplo a realização de projetos?

O autor sugere-nos ainda mais algumas questões bastante pertinentes sobre a avaliação da resolução de problemas:

- Num e noutro tipo de problemas (“puros” e “aplicados”), a avaliação deve ser global ou devemos considerar sub-capacidades ligadas a aspetos específicos da resolução de problemas?

- Como se podem desenvolver formas de registo e análise de dados com vista à avaliação dos alunos? De que modo(s) deve ser feita a informação dos resultados da avaliação aos alunos, aos pais, etc.? Em que medida e de que modo(s) a avaliação pode servir de base para a tomada de decisões relativas ao processo de ensino-aprendizagem, à progressão do aluno, etc.?

A estas questões muitas mais se poderiam juntar, no sentido de tornar a avaliação o mais abrangente e objetiva possível.

Um documento elaborado pela APM (1988), mostra claramente a situação do ensino da matemática relativamente à avaliação da resolução dos problemas. Indica, que o ensino da matemática não está ajustado nem estruturado de forma a lidar com o desenvolvimento e avaliação dos processos e estratégias de raciocínio. Naturalmente, o ensino não está, também, capacitado para resolver nos problemas novos processos como os hábitos de consulta, a cooperação, comunicação, discussão, investigação ou produção. A solução poderá passar por criar instrumentos e formas de avaliação que permitam minimizar a subjetividade da avaliação. Esta questão tem sido, ao longo dos anos, debatida por diversos autores que por sua vez têm procurado formas de dar resposta consistente a este problema. Krolle e Lester (1990) indicam que alguns investigadores têm desenvolvido esquemas analíticos de classificação baseados nas "fases" de resolução de problemas, sendo estas muito semelhantes às de Pólya (1957) que se encontram descritas em "How to solve it". Estes esquemas têm sido aplicados quando os alunos usam a técnica do "pensar alto" que já foi referida anteriormente. Esta técnica poderá ser muito útil para ajudar os professores ou investigadores a perceberem como o aluno está a abordar o problema. Para além disso, o procedimento referido anteriormente, poderá ser um dos parâmetros a serem avaliados na resolução de um problema. Contudo, será difícil observar o valor desta técnica se por exemplo, o problema for rotineiro e o avaliador estiver a examinar o trabalho escrito dos alunos, procurando provas destes terem "entendido o problema", ou "terem esboçado um plano". A juntar a isto temos de contar com os constrangimentos de existirem turmas muito grandes ou indisciplinadas. Mais, o objetivo de resolver um problema rotineiro é obter a sua solução pelo que pode haver a possibilidade dos alunos não relatarem pormenorizadamente a sua linha de pensamento, querendo rapidamente relatar a solução do problema. Outras limitações desta técnica referidas por Amaro, Borralho e Fernandes (1991) são por exemplo, (a) a fala pode ser limitada pelo pensamento; (b) a fala ou o relato preciso do aluno poderá não acompanhar a forma rápida como o pensamento se processa. A aleatoriedade do pensamento também poderá dificultar o relato. (c) Existe a possibilidade de quando o pensamento está no pico da sua atividade, haver um silenciamento por parte do aluno; (d) a pressão de ter de relatar o pensamento ou a concentração exigida poderá levar a que o aluno resolva o problema de uma forma diferente daquela que eventualmente poderia fazer senão estivesse a ser estudado. Os mesmos autores referem que houve tentativa de integrar problemas mais desafiadores na avaliação da resolução de problemas. Esta tentativa tem revelado várias complicações, na medida em que, se os alunos tiverem um tempo limitado para responderem a este tipo de problemas, terão muitas dificuldades em fazê-lo. Para além disso, se os alunos não estiverem familiarizados com este tipo de problemas, poderão não saber como abordá-los ou que tipo de resposta eles pretendem. Claro que se não foram consideradas as condicionantes acima descritas, o processo de pontuação das respostas dos alunos poderá originar classificações cujo significado é incerto ou falacioso. Note-se que quando estamos numa situação em que os problemas são mais complicados e os alunos têm pouca experiência, não deverá ser colocada de parte a avaliação, mas esta deve ser mais informal, porque para todos os efeitos, dará alguma informação de como os alunos pensam o problema.

Cockcroft (1982) citado por Abrantes e Leal (1991, p.72) dá sua visão sobre o que deve ser a avaliação da resolução de problemas:

"A avaliação deve ser acompanhada de um método adequado de registo dos processos realizados…Qualquer que seja o método utilizado, dever-se-á incluir qualidades tais como… a perseverança na resolução de problemas, a capacidade para usar os conhecimentos e para abordar oralmente os temas matemáticos".

As Normas do NCTM seguem a mesma ideia, já que consideram que o trabalho dos estudantes tem sido avaliado através de testes de lápis e papel em vez de se considerarem os processos e o raciocínio. Esta forma de avaliação tem afastado os alunos da realidade matemática, da pesquisa e do crescimento intelectual. De acordo com as Normas, a avaliação deve ser baseada em dois pilares, o quê e como. O que os alunos pensam da matemática e como os alunos pensam a matemática (NCTM, 1987).

Abrantes e Leal (1991), no âmbito do programa MAT_{789} identificam alguns dos princípios orientadores daquilo que deve ser a avaliação. Referem que a avaliação, sendo uma parte integrante do processo de aprendizagem, deve acontecer ao longo da aprendizagem e não em momentos especiais e devem-se criar situações que favoreçam o seu desenvolvimento. A avaliação deve estar de acordo com os objetivos e as metodologias seguidas (ou seja ser consistente na avaliação). Se são criadas situações diversificadas de aprendizagem, estas também terão de ser avaliadas de forma diversificada. Estas avaliações poderão ser individuais, em pequenos grupos, escritas ou orais, sempre dando ênfase aos processos em detrimento dos conteúdos. Os autores indicam também que a avaliação deve contemplar sempre o que o aluno sabe e não o que não sabe. Mediante o instrumento de avaliação utilizado, deve-se considerar tão válida uma classificação qualitativa como uma classificação quantitativa. A avaliação deve acontecer num ambiente de confiança e clareza, ao fim ao cabo, para evitar as angústias e o stress inerentes a um momento de avaliação.

Num seminário sobre a avaliação da aprendizagem organizado pela APM no ano letivo de 1990/1991, discutiu-se a avaliação da resolução de problemas. Dessa discussão, obtiveram-se algumas conclusões no que concerne este tópico. Considera-se que no caso dos problemas é importante distinguir-se resposta (proveniente da resolução) da resolução do problema em si. Para além da solução, deve ser alvo de avaliação a apresentação, escrita ou oral e a forma como foi obtida a solução. O trabalho dos alunos pode assumir diversas formas – escrita, oral ou baseada no computador. Os problemas poderão ser propostos para uma aula ou para um certo período de tempo e poderão ser trabalhados de forma individual ou em grupo (o tipo de trabalho deve ter em conta o tipo de problema).

Relativamente à avaliação de atividades de resolução de problemas em situação de trabalho de grupo, devemos distinguir a avaliação do "trabalho" e a avaliação "de cada aluno". A primeira incide sobre o trabalho realizado como produto do grupo (não como a soma das contribuições individuais) e o segundo incide sobre a avaliação do trabalho de cada aluno. Fazendo um pequeno parêntesis acerca do trabalho de grupo na resolução de problemas, Cobb, Merkel, Wheatley, Wood e Yackel (1990, p.19) referem, abaixo, como é que as crianças devem trabalhar quando estão a desenvolver a atividade de resolver problemas:

> "Children engage in two types of problem solving as they work together in small groups to complete the instructional activities. On the one hand, they attempt to solve their mathematical problems; on the other hand, they have to solve the problem of working productively of working together."

De facto, as crianças ao unirem esforços para resolverem um problema, terão imediatamente de enfrentar outro, fruto da interação entre os indivíduos. Rapidamente, nos lembramos das grandes discussões surgidas no seio de um grupo de trabalho durante a resolução de problemas. Os alunos têm de lidar com a questão de apresentar uma solução plausível e que seja consensual entre todos os elementos do grupo. Evidentemente, em algumas ocasiões, o trabalho produzido fica aquém do esperado, pela falta de entendimento dentro do próprio grupo. Como forma de ultrapassar essa barreira comunicativa/cooperativa entre os elementos de um grupo, os autores sugerem que:

"The obligations the teacher attempts to place on the children as they work in small groups are (1) that they should cooperate to solve problems and (2) that they should reach a consensus."Os autores explicam, como podem operacionalizar a "obrigação" acima descrita:

> "These two obligations mean that children should explain their thinking to one another, that they try to understand one and other's thinking, that they assume one another's solution attempts make sense, and that they persist in trying to figure things out for themselves."

A sugestão trazida pelos autores reveste-se como uma oportunidade de alargar o leque avaliativo, no que concerne à resolução de problemas em grupo. A forma como os alunos cooperam na resolução de problemas pode e deve ser alvo de avaliação, porque mostra como é que os alunos trabalham no sentido de chegar a uma solução que seja unanimemente satisfatória para o grupo.

Concluiu-se ainda no seminário da APM, que envolvendo ou não relações da matemática com outras áreas, assumindo ou não a forma de projeto, o trabalho do aluno ou de grupo de alunos deve ser avaliado como um todo. O professor deve dispor de registos de avaliação preferencialmente escritos. No caso da resolução de problemas o professor deverá dispor de (1) um documento escrito produzido pelos alunos (por exemplo um relatório) sobre a resolução de um problema se este for um trabalho mais prolongado; (2) uma folha de trabalho nos casos em que se trata de um problema ou problemas no âmbito de uma aula; (3) notas contendo dados resultantes da observação do trabalho dos alunos, quando as atividades destes é essencialmente não escrita ou quando os processos anteriores não são praticáveis. O processo de incluir os dados relativos à resolução de problemas na avaliação de cada aluno é um processo difícil, mas deve ser feito um esforço para as incluir de um modo equilibrado numa avaliação e classificação global e não deve ser esquecido que a resolução de problemas deve ser um importante fator de desenvolvimento e não mais um fator de frustração e seleção dos alunos.

Uma das formas de avaliar a resolução de problemas é realizando uma composição escrita. Kilpatrick (1991), refere que quando é solicitado aos alunos para escrever um relatório essa atividade é muito semelhante a escrever uma composição, logo a resolução descrita pode ser avaliada de um modo muito parecido de que como se avalia um ensaio. Note-se que estas composições foram usadas durante muitos anos em exames escritos de muitos países, caíram em desuso e recentemente tem-se feito tentativas para voltar a estabelecer este tipo de processo. Quando se conjuga um problema matemático não rotineiro com a tarefa de escrever um ensaio sobre a resolução abrem-se novas oportunidades à avaliação, já que os alunos poderão aliar este processo à colaboração com outros alunos. O autor termina referindo que a “matemática está relacionada com a comunicação. O aluno que não consegue comunicar aquilo que fez com um problema não o resolveu verdadeiramente”. A avaliação da resolução de problemas deve-se centrar na comunicação podendo ser esta oral, escrita ou tomar uma variedade de formas.

As Normas para a Avaliação (1991, p.217) consideram que a “avaliação deve determinar o nível de realização dos alunos em todos os aspetos da resolução de problemas”. O aluno deve ser capaz de formular problemas utilizando a informação dada, e a avaliação deve indicar quais as estratégias e técnicas de resolução de problemas usadas pelos discentes. Esta avaliação também deverá contemplar a capacidade do aluno no que concerne a verificação e interpretação de resultados e as possibilidades de generalização das soluções obtidas. As Normas defendem que as formas de avaliação da resolução de problemas devem incluir a observação dos alunos enquanto resolvem problemas individualmente, em pequenos grupos e em grande grupo. A análise dos testes, trabalhos de casa, diários, ensaios e discussão entre alunos sobre a forma de resolver um problema devem ser consideradas igualmente na avaliação. Defende-se igualmente a comunicação aos alunos da sua avaliação e esta poderá ser escrita ou oral ou ainda na forma de classificação em valores numéricos (se se tratar por exemplo de exercícios específicos). Os sistemas de classificação devem considerar dois fatores, a resposta e a estratégia utilizada, sendo por isso necessário atribuir duas notas. Uma sugestão de classificação do trabalho do aluno poderá ser por exemplo: 4 – impecável, 3 – quase tudo certo, mas com alguns erros de cálculo, 2 – ideia certa mas resolução fraca; 1- tentou; 0 - não fez nada. Poderão ser também atribuídos pontos de uma forma parcelar ou seja, por cálculos, desenhos, tabelas, estratégias e verificação elaboradas pelo aluno (NTCM, 1991).

Existem muitas formas de avaliar o trabalho do aluno quando este está envolvido na resolução de um problema, porém, o docente conhecendo como ninguém a sua turma, deverá adequar o processo de avaliação de um ponto tão importante da matemática, à realidade que tem em contexto de sala de aula.

3. Metodologia de investigação

3.1. Natureza do estudo

Este estudo tem como objetivo, compreender como é que a avaliação da resolução de problemas contribui para melhorar a aprendizagem da resolução de problemas. Esta investigação teve um carácter iminentemente qualitativo, descritivo e interpretativo, já que os "dados recolhidos são em forma de palavras e não de números (…) contêm citações feitas com base nos dados para ilustrar ou substanciar a apresentação", como referem Bogdan e Biklen (1994, p.48). Tal como os autores citados anteriormente indicam, toda a teoria ganha forma conforme vai sendo feita a análise dos dados, justificando assim a forma de recolha de dados. Para além disso, esta forma de trabalhar os dados permite perceber quais as questões fundamentais que devem ser feitas e como poderão ser respondidas, sendo por isso também um estudo de caráter interpretativo.

Assim, para avaliarmos a resolução de problemas foi necessário que os alunos resolvessem problemas da forma mais natural possível e que decorressem, se possível, mais ou menos nos moldes em que estão habituados. Este aspeto "ambiental" permitiu, que não houvesse grandes disparidades em termos comportamentais (tendo em conta a presença de fatores a que não estão habituados como câmaras de filmar, máquinas fotográficas e gravadores) em relação a outras ocasiões onde estes objetos não estão presentes. Tal como referem Abrantes e Leal (1991, p.73), "a avaliação deve acontecer num ambiente de confiança e clareza (…). A angústia e o "stress" deverão ser, a todo o custo, evitados."

Naturalmente, os resultados deste estudo não poderão ser generalizados, na medida que vários fatores que poderão condicionar o trabalho do professor na avaliação da resolução de problemas tal como, o comportamento, o nível de aproveitamento, o relacionamento intergrupal, entre outros. Tal como referido por Bogdan e Biklen (1994), mesmo que se faça um estudo numa determinada turma, não implica que se tenha a intenção de generalizar os dados a turmas semelhantes. Não nos esqueçamos, que as turmas são compostas por alunos e todos eles têm a sua individualidade, dinâmica e forma de agir distinta, pelo que, mesmo que tenhamos turmas com comportamentos semelhantes, elas poderão divergir em termos de aproveitamento ou noutro aspeto qualquer.

3.2. Caraterização do ambiente e dos intervenientes no estudo

Esta investigação foi levada a cabo durante o ano letivo 2013/2014, numa escola da Região Autónoma da Madeira (RAM). Os alunos da escola onde foi realizado o estudo têm múltiplas proveniências, já que alguns discentes vêm de famílias com bastantes dificuldades financeiras, outros de famílias que, mesmo com as dificuldades económicas, conseguem proporcionar algum conforto e estabilidade emocional e outras, infelizmente, provenientes de famílias muito descaracterizadas. Por outro lado, temos alunos cujas famílias conseguem proporcionar todo o conforto material e imaterial necessário para que os educandos tenham todas as possibilidades de obter bons resultados escolares. As turmas desta escola são de uma forma geral bastante heterogéneas, não só em termos económicos como em termos de aproveitamento. A turma sobre a qual se realizou o estudo não é exceção. Esta turma do 5º ano não é muito grande, sendo composta por dezanove alunos, havendo mais rapazes do que raparigas. A maioria destes alunos esteve na mesma escola no primeiro ciclo, pelo que, desde o início do ano letivo revelam, entre eles, alguma cumplicidade e confiança. Evidentemente que esta situação criou alguns constrangimentos quando foi necessário fazer os grupos de trabalho, visto que como existem pequenos grupos de amizade no seio da turma, alguns alunos mostraram-se renitentes em desfazê-los para executar a tarefa. Depois de iniciarem a tarefa, os alunos acabaram por mostrar-se mais cooperantes do que inicialmente se esperava. Para o estudo foram compostos5 grupos de trabalho, que traduzissem alguma da heterogeneidade da turma, destes, apenas dois foram escolhidos para fazerem parte deste estudo por limitações materiais e pelo limite de páginas a apresentar. O grupo 1 foi formado pela Joana, o Jorge, a Raquel e a Rute e o grupo 2 foi formado pela Rita, o António, o Paulo e a Luísa. No grupo 1, o Jorge e a Joana são os alunos que apresentam mais facilidade em Matemática e no grupo 2 no mesmo patamar estão o Paulo e a Rita. Por outro lado, no grupo 1 a Raquel tem mais ou menos o mesmo aproveitamento que a Rute, mas esta é mais introvertida tendo por vezes alguma dificuldade em expressar as suas ideias. No grupo 2, a Luísa é muito participativa, mas, apresenta algumas dificuldades na execução das tarefas e o António, como é muito distraído, por vezes confunde os conteúdos levando a que por vezes tenha dificuldades na sua compreensão. Note-se, que os nomes usados anteriormente são fictícios com vista a preservar o anonimato dos alunos.

3.3. A escolha dos problemas

Sendo a resolução de problemas uma das peças centrais deste estudo, houve a necessidade de refletir assertivamente, acerca de como poderia ser feita a sua escolha. Em primeiro lugar, de acordo com Abrantes, Leal e Guimarães (1991), há a necessidade de distinguir um problema de um exercício (capacidade que também deve ser trabalhada com os alunos), mas temos de ter a noção de que esta distinção é um contínuo, já que as nossas escolhas poderão recair em problemas mais simples (que poderão ser compreendidos como exercícios) ou exercícios "mais complexos" (que poderão ser compreendidos como problemas), evidenciando a complexidade da questão. Procurei diversificar os tipos de problemas escolhidos, porque desta forma poderei averiguar, como é que os alunos lidam com a riqueza inerente à própria matemática. Houve também a necessidade de adequar os problemas à faixa etária dos alunos (a maioria com 11 anos de idade), pelo que, tive de ter em atenção para que os problemas não fossem demasiado complexos ou simples.

No primeiro problema, o aluno teria de formular um problema e resolvê-lo. Tal como referem as Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar (1991), a avaliação de ser capaz de mostrar todos os aspetos referentes à resolução de problemas, pelo que a capacidade em formular problemas é um deles. Saber se um aluno é capaz de formular perguntas, usar a informação fornecida e fazer conjeturas a partir da mesma é importante para averiguar se realmente o discente adquiriu a capacidade de resolver problemas.

1. **Formulação de um problema.**

   Seis em cada oito dentistas entrevistados recomendam a pastilha elástica Supergum. Elabora uma pergunta, para acrescentar a esta afirmação, de modo a obteres um problema. Em seguida, resolve o problema.

   Adaptado de Normas para a Avaliação (1991)

Figura 1 – Formulação de um problema

Os problemas 2, 3, 4 são generalistas, ou seja, não é particularizada um tipo de capacidade a ver desenvolvida no aluno. São problemas que, pelo facto de poderem ser pensados de diversas formas, contemplam várias estratégias de resolução. É importante que os alunos resolvam este tipo de problemas porque lhes dá liberdade de pensamento e isso lhes desenvolve a criatividade.

2. Contando degraus.

No prédio onde habita a Sónia há 8 andares. O elevador avariou e a Sónia, que mora no 4.º andar, teve de descer as escadas a pé. Quando já tinha descido 10 degraus, viu que não tinha trazido o chapéu-de-chuva e voltou atrás para buscá-lo. Quando chegou à porta da rua, que ficava ao nível do rés-do-chão, tinha descido um total de 58 degraus. Quantos degraus tem o prédio?

In: Caderno de Tarefas mp.5 matemática para pensar

3. Investigação.

O gerente de um pronto-a-vestir comprou igual número de calças e *t-shirts* para vender. Pagou 2500 € por tudo. Sabendo que cada par de calças custou 80 € e cada *t-shirt* custou 45 €, investiga quantas peças comprou.

In: Caderno de Tarefas mp.5 matemática para pensar

4. À procura de um número.

Observa a seguinte tabela e descobre o número que falta.

In: Caderno de Tarefas mp.5 matemática para pensar

2	9	16
7	15	23
10	26	42
14	32	?

Figura 2 – Problemas generalistas

O quinto problema envolve o uso da calculadora como instrumento auxiliar. O uso das tecnologias como a calculadora é fundamental nos dias de hoje, é inconcebível ter de fazer longos cálculos manualmente, quanto temos ao nosso dispor ferramentas que simplificam a tarefa e fazem poupar muito tempo. Vejamos, a calculadora não pode ser vista como um instrumento castrador do cálculo mental, cada um tem o seu lugar. Se um aluno não é capaz de estabelecer estratégias de resolução de problemas, ou dominar as suas técnicas, não será a calculadora que facilitará o seu trabalho. Contudo, se olharmos para a calculadora como um auxiliar de trabalho que permita estreitar o caminho para a solução, este instrumento será sem dúvida uma mais-valia. Tendo esta tecnologia ao dispor, porque não usá-la? Não de uma forma exagerada, mas numa medida adequada a cada nível de escolaridade. Segundo Abrantes, Matos e Ponte (1998), a utilização da calculadora, valoriza estratégias como a da tentativa em erro, capacidade que quis ver em acção neste problema.

5. Investiga com a calculadora

Indica:

a) dois números pares consecutivos cujo produto seja 624;

b) dois números ímpares consecutivos cujo produto seja 1023;

In: Caderno de Tarefas mp.5 matemática para pensar

Figura 3 – Problema envolvendo o uso de calculadora

Quis, como atesta o problema 6, averiguar como é que alunos do 5º ano de escolaridade resolvem problemas, em que têm de analisar uma conjectura formulada por alguém, testar a sua veracidade e generalização. Segundo Abrantes, Matos e Ponte (1998, p. 189), enunciando um dos trabalhos de Saraiva (1992), "procura-se partir de uma conjectura baseada num número limitado de casos para uma generalização (…), aos alunos façam por escrito a verificação de situações que parecem evidentes (…)".

Nem sempre é possível encontrar noutros problemas processos de resolução tão ricos como na prova de uma conjectura (Abrantes, 1989). Logo, é importante que os alunos desenvolvam esta capacidade de análise crítica, porque ao fazê-lo estão a tornar-se mais conscientes e capazes de tomar decisões mais assertivas e precisas.

6. Foi apresentado ao Rui o seguinte problema: $\frac{2}{5} < ? < \frac{4}{7}$. Ele disse que $\frac{3}{6}$ estava entre $\frac{2}{5}$ e $\frac{4}{7}$. O Professor pediu-lhe que explicasse como tinha obtido a sua resposta e porque pensava que o seu método resultava. O Rui explicou que escolhera 3 para numerador porque $2 < 3 < 4$ e 6 para denominador porque $5 < 6 < 7$. O Rui argumenta que o seu método funciona sempre e apresenta os seguintes exemplos:

a. A fração $\frac{2}{4}$ está compreendida entre $\frac{1}{3}$ e $\frac{3}{11}$.

b. A fração $\frac{4}{9}$ está compreendida entre $\frac{2}{5}$ e $\frac{6}{11}$.

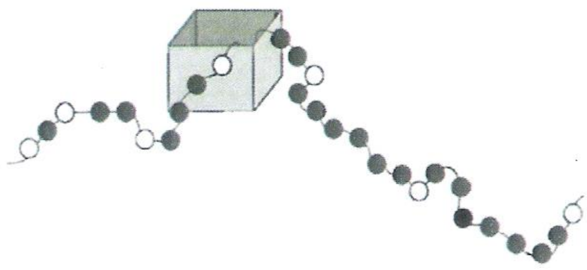
Os exemplos do Rui estão corretos? O procedimento funciona sempre? **Explica o teu raciocínio**.

In: Normas para a Avaliação (1991)

Figura 4 – Problema envolvendo a análise de uma conjectura

Para finalizar, escolhi três problemas que envolvem a perceção espacial, esquemas e sequências. Escolhi-os, porque são problemas que, pela sua fácil interpretação são comummente aplicados em testes psicotécnicos e são adequados a uma larga faixa etária. Segundo Abrantes, Matos e Ponte (1998), a capacidade de visualização é muito importante na aprendizagem e embora esteja fortemente associada à aprendizagem da geometria, a verdade é que desempenha um papel de relevo no desenvolvimento de conceitos como o de função. Para além disto, estes problemas permitem que os alunos mais fracos participem mais ativamente, já que, na maioria das vezes, não têm de usar cálculos para chegarem à solução. De acordo com um trabalho de Gordo, referido pelos autores supracitados, nem sempre, neste tipo de problemas, a lógica impera, ou seja, nem sempre é o bom aluno que chega à solução, por vezes é o aluno mais fraco que a descobre. Os autores fazem referência, para o facto de nosso ensino dar ainda muito enfâse ao domínio algébrico e numérico (dando privilégio a um tipo de inteligência), o que poderá "atirar" alguns alunos com domínio viso-espacial mais desenvolvido, para uma situação de insucesso escolar.

7. A Elisa está a fazer um colar com contas brancas e contas pretas, seguindo sempre um esquema inventado por ela. Uma parte do colar está dentro da caixa da figura.
Desenha ou descreve a parte do colar que está dentro da caixa.



In: Prova de aferição, 2.º Ciclo, 2004

Figura 5 – Problema envolvendo a visão-espacial

O problema 8 envolve o domínio combinatório/probabilístico, que aos poucos deve ser introduzido, para que em anos mais avançados os alunos não sintam dificuldades, quando lidarem com problemas deste género de nível mais avançado. Note-se que, mais que nunca, as probabilidades estão "na moda" em todo os tipos de "jogos de azar", pelo que é importante dominar este domínio para que sejamos cidadãos críticos e que sejamos capazes de realizar escolhas matematicamente conscientes.

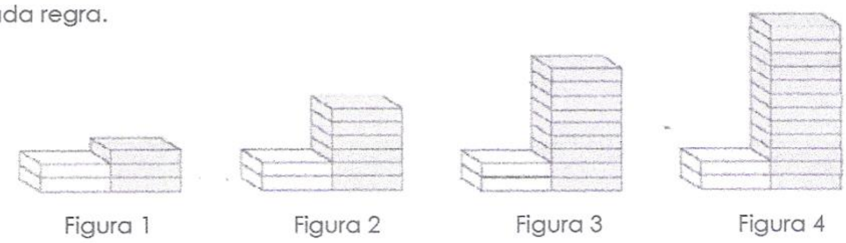
8. A Maria vai escolher dois ingredientes diferentes para fazer a sua piza. Pode escolher: azeitonas; cogumelos; ervilhas; frango; milho. Quantos tipos de piza diferentes a Maria pode fazer? Mostra como chegaste à tua resposta.

In: Prova de aferição, 2.º Ciclo, 2009

Figura 6 – Problema envolvendo o domínio combinatório

O problema 9 para além de apelar ao sentido visual, trabalha também o conceito de sequências. Quis averiguar como os alunos lidam com o reconhecimento de regularidades e como é que constroem as figuras seguintes a partir das anteriores. Este é mais um passo dado rumo à abstracção, pelo que é importante perceber como que os alunos, de uma forma pouco formal, reagem este tipo de problemas.

9. Observa a seguinte sequência de figuras, onde estão empilhados azulejos brancos e cinzentos, segundo uma determinada regra.



9. 1. Indica, a seguir, o número de azulejos de cada cor necessários para construir a figura número 10.

9.1.1. Número de azulejos brancos.

9.1.2. Número de azulejos cinzentos.

9.2. Na sequência acima representada, existirá alguma figura com um total de 66 azulejos? Explica a tua resposta.

Adaptado da Prova de aferição, 3.º Ciclo, 2003

Figura 7 – Problema de sequências e regularidades

3.4. Elaboração e aplicação dos instrumentos de avaliação

Antes de ser realizada a ficha de problemas sobre a qual incidiu o estudo, os alunos ao longo do ano letivo tiveram a oportunidade de resolver problemas que contemplavam diversos domínios. Foi necessário, numa dessas aulas dedicadas à resolução de problemas, recolher dados através do uso de instrumentos de gravação para utilizá-los no estudo. Para alicerçar ainda mais este tipo de trabalho, foi proposto, mensalmente aos alunos, a resolução do problema do mês (dinamizado pelo grupo de matemática) que propôs situações problemáticas, por vezes, bastante díspares da matéria em estudo, dando assim oportunidade para alargar o leque de problemas resolvidos (considero que os alunos devem ser capazes de resolver qualquer tipo de problema matemático, desta forma, é tão importante saberem se um termo faz parte de uma determinada sequência, como saberem formular um problema). A ficha de problemas foi realizada nos dias 26 e 27 de Fevereiro, em duas aulas de 90 minutos. Note-se, que esta mesma ficha foi também trabalhada numa outra turma do 5º ano, exatamente segundo os mesmos parâmetros. Esta ficha foi construída de forma a abarcar diversos tipos de problemas, para que os alunos saíssem fora da sua "zona de conforto". Esta diversidade de problemas permitiu também, dar algum equilíbrio aos grupos, já que há discentes que apresentam mais facilidade num tipo de problemas do que outros e assim cria-se a oportunidade para que "todos tenham voz" durante a resolução dos problemas. Notou-se muita insegurança inicial por parte dos alunos, justificada pelas repetidas vezes com que solicitavam a presença do professor para lhes prestar algum esclarecimento. Para muitas das situações, em que claramente os alunos se encontravam bloqueados por falta de comunicação, apenas lhes foi dito para discutirem as suas ideias, ou seja, cada um dar o seu ponto de vista acerca da situação. Este foi o ponto de viragem para que os grupos gradualmente ganhassem cada vez mais autonomia e rareassem os pedidos de ajuda ao docente. Após a conclusão da realização da ficha de problemas, os alunos de cada grupo de trabalho foram submetidos a uma entrevista, das quais, duas delas foram transcritas, com o objetivo de cimentar algumas ilações experienciadas ao longo do trabalho. Estas entrevistas espelham aquilo que os alunos sentiram como elementos de um grupo de trabalho, que está a ser avaliado (segundo parâmetros dados a conhecer no antes da realização da ficha) na forma como resolvem problemas.

3.5. Recolha, organização e forma de trabalhar os dados

Desde o inicio do ano letivo, os alunos têm tido a oportunidade de resolver problemas em contexto de sala de aula, na maioria das vezes em grupo e por vezes individualmente. Antes da resolução dos problemas, foram discutidos com os alunos os parâmetros sob os quais iriam ser avaliados. Após todo este processo formal de definir o peso a atribuir a cada um dos parâmetros com o aval de todos os discentes, passou-se à resolução de problemas propriamente dita. Desta forma, fui retirando algumas notas de campo, fruto da observação do trabalho dos alunos ao longo do ano letivo com o objetivo de mais tarde formalizar uma tarefa (através da gravação áudio e vídeo) na qual os alunos vêm trabalhando de uma forma continuada. Segundo Bogdan e Biklen (1994, p.150), “notas de campo são o relato escrito daquilo que o investigador ouve, vê e experiencia e pensa no decurso da recolha e refletindo sobre os dados de um estudo qualitativo”. Assim, as notas de campo serviram para refletir acerca do trabalho desenvolvido pelos alunos na resolução de problemas e a forma como iam sendo avaliados. Repare-se que pequenos comentários como “professor eu sinto mais facilidade em resolver problemas em grupo… tenho mais confiança…” ou “professor, ele (referindo-se a um colega) não está ajudando…”, realizados por diferentes alunos, foram “faróis” que me guiaram no sentido de obter os resultados pretendidos com esta investigação.

Todo este trabalho realizado com os alunos ao longo do ano, visou melhorar as competências destes na resolução de problemas (melhorar a sua capacidade de resolver problemas) e dotar-me de instrumentos, que me permitissem melhorar a minha forma de avaliar os problemas e a forma como os alunos os resolvem. Naturalmente, este processo não foi estanque e foi evoluindo de acordo com as observações feitas do trabalho dos alunos na sala de aula e toda a experiencia ganha no decurso da resolução de problemas pelos mesmos. No decurso da minha investigação e conforme ia realizando a leitura de importantes referências bibliográficas, acerca da avaliação da resolução de problemas, fui melhorando certos aspetos e alterando algumas ideias acerca deste assunto.

Note-se que, toda esta investigação assenta numa série de dados obtidos, através, do registo de observações e ideias frutificadas ao longo das aulas destinadas à resolução de problemas e, posteriormente, com a gravação áudio e vídeo complementou-se verdadeiramente o estudo. Dados, de acordo com Bogdan e Biklen (1994, p.232) são “as páginas de materiais descritivos recolhidos no processo de trabalho de campo”. Os dados provenientes deste estudo vieram sobretudo de duas fontes, o trabalho de grupo desenvolvido durante a resolução de uma ficha de problemas, e uma entrevista de opinião acerca da ficha de trabalho e correspondente avaliação (porque é fundamental saber o sentimento provocado nos atores quando estão sujeitos a este tipo de tarefas).

Os instrumentos usados para a recolha de dados foram, numa primeira fase, a câmara de vídeo, a máquina fotográfica e o gravador de voz), com o objetivo de "capturar" o diálogo entre os alunos no trabalho de grupo e posteriormente as opiniões dos mesmos durante a entrevista. Numa segunda fase, o material audiovisual recolhido foi transferido para pastas no computador, ordenados por grupo de trabalho e depois por ordem cronológica. Seguidamente, todo o material foi analisado e procedeu-se à transcrição dos elementos considerados fundamentais para constarem no estudo. Para além da transcrição dos dados, a informação constante na ficha de problemas resolvida pelos alunos foi digitalizada (como suporte aos dados transcritos). Todos os dados recolhidos são importantes e passíveis de serem analisados, por que tal como dizem Bogdan e Biklen (1994), na análise qualitativa tudo o que é alvo de exame tem potencial para ser um ponto importante para que compreendamos melhor o nosso objeto de estudo.

3.6. Análise e interpretação dos dados

Para Bogdan e Biklen (1994, p.205) a análise de dados "é o processo de busca e de organização sistemática de transcrições de entrevistas, (…) e de outros materiais que foram acumulados, com o objetivo de aumentar a sua compreensão desses próprios materiais". Para os mesmos autores, a tarefa de interpretar e dar sentido a estes dados é algo que muitas das vezes assoberba. Desta forma, após a recolha dos dados, todo o material foi escrupulosamente analisado, tanto os diálogos durante a resolução de problemas, como a entrevista aos alunos, para que fossem transcritas as partes importantes para que constassem na investigação. Foram também analisadas as dificuldades, os avanços e recuos dos alunos durante a resolução de cada um dos problemas propostos. Numa fase posterior, os problemas resolvidos pelos grupos foram avaliados segundo determinados parâmetros e estes foram também alvo de análise (ou não fosse a avaliação um dos objetos de estudo). Por fim, foram analisadas as entrevistas para determinar que sentimentos foram despertados nos alunos, aquando da realização da ficha de problemas em ambiente grupal e sabendo sobre que parâmetros iria incidir a sua avaliação.

4. Análise de resultados

4.1. A resolução de problemas

De acordo com Abrantes e Leal (1991, p.69), a "matemática é encarada como uma ciência em permanente evolução, como uma realização humana envolvida em todos os domínios e a que todas as pessoas podem ter acesso". De facto, a matemática é uma ciência rica, que excita o raciocínio e melhora a visão que temos sobre o mundo, tornando-nos mais críticos e conscientes. Apesar da matemática ser capaz proporcionar em nós um turbilhão mental, capaz de satisfazer o intelecto de qualquer individuo, a verdade, é que é muitas das vezes desprezada, principalmente pelo jovens. Estes, alegam que a disciplina é muito difícil, não conseguindo vislumbrar a sua importância num mundo extremamente concorrencial. Esta visão pode e deve ser alterada e, na minha opinião, a resolução de problemas é uma forma de caminhar nesse sentido. Segundo a *Agenda*, desde 1980, o NTCM, considera que a resolução de problemas deve ser o centro de toda a matemática escolar, pelo que é natural que se "invista" fortemente nesta área. Segundo Lester (1993), a resolução de problemas é um desafio extremamente complexo, que envolve muito mais do que recordar factos e aplicá-los. Logo, quando avaliamos a resolução de problemas temos de ser igualmente "ricos" para que não se perca a oportunidade de tornar a avaliação um pouco menos subjetiva. Evidentemente que esta tarefa de avaliar não é tão simples quanto se possa julgar, como refere Kilpatrick (1991), um dos problemas que verificamos na avaliação da resolução de problemas é o facto de os alunos terem-se acostumando a realizar testes que incidem somente em conhecimentos que não envolvam a resolução de problemas complexos. Mesmo que tenhamos um longo caminho a percorrer relativamente a esta área, é importante que aceitemos o desafio de, aos poucos, irmos trabalhando a resolução de problemas, para que esta atividade não seja estranha a muitos alunos, já numa etapa avançada da sua escolaridade.

4.1.1. Descrição analítica das aulas de resolução de problemas

Como já foi referido anteriormente, apesar de grosso modo, a maioria dos registos ter sido feita em duas aulas, nas quais foram usados instrumentos de recolha de dados, nomeadamente a câmara de filmar e o gravador de voz, este processo de resolução de problemas foi iniciado no decorrer, bastante precoce, do ano letivo. Estando plenamente convicto de que a resolução de problemas é uma capacidade fundamental e que deve ser desenvolvida, se possível, desde o início da vida escolar dos alunos, fui introduzindo aos poucos a resolução de problemas no seu quotidiano matemático. Quanto mais depressa os alunos tomarem contacto e exercitarem a resolução de problemas, este processo se tornará natural para eles. Este facto é constatado por Lester (1993), que segundo ele, os alunos devem resolver muitos problemas para melhorar a sua capacidade de resolução de problemas e que esta atividade desenvolve-se de uma forma lenta e durante muito tempo.

Rapidamente constatei, que a maioria dos alunos das duas turmas do 5º ano que lecionei este ano vinham com grandes lacunas ao nível da resolução de problemas. Esta constatação veio do facto de ter colocado alguns problemas logo nas primeiras aulas e um problema em particular, ter gerado muitas dúvidas entre os alunos. O problema era o seguinte:

Um casal e os seus dois filhos pagaram € 42,6 por uma viagem de comboio. Cada criança pagou meio bilhete.

Quanto pagou cada adulto? E cada criança?

Figura 8 – Problema sobre o custo de um bilhete

As reacções dos alunos a este problema não se fizeram esperam, ouvindo-se recorrentemente, "mas como é que vou descobrir o preço dos bilhetes…", "nada é dito sobre o preço dos bilhetes das crianças…". Por outro lado, aqueles que arriscavam um palpite, caiam no erro de querer dividir o valor pago pelos bilhetes (42,6 €) por dois, ou seja, consideravam apenas os adultos esquecendo-se das crianças. A muito custo conseguiram chegar a uma estratégia satisfatória, que seria a de considerar as duas crianças como um adulto, já que ambas pagavam meio bilhete. Assim, teríamos 42,6 € a dividir por 3, perfazendo um valor de 14,2€ por adulto. Como cada criança paga apenas meio bilhete, bastaria dividir 14,2 € por 2, dando um valor de 7,1 €. Estas dificuldades surgiram, essencialmente, porque, apesar de ter dado algum apoio, quis que os alunos discutissem em grupo como resolver o problema, para que eles próprios chegassem à solução. Porém, como exposto de seguida, essa tarefa mostrou-se árdua e demorada. Abrantes, Matos e Ponte (1998), referindo-se a um estudo levado a cabo por Joana Porfírio (1993), indicam que um dos aspectos fundamentais para o bom funcionamento do trabalho em grupo é o apoio do professor, sem lhes indicar forma de resolver, cabendo aos alunos essa tarefa. De uma forma análoga ao estudo mencionado, verifiquei que os alunos tinham muitas dificuldades em trabalhar uns com os outros, havendo, por exemplo, situações em que os alunos do próprio grupo se ignoravam por não serem do mesmo círculo de amigos. Isto, naturalmente, gerou uma grande dependência pelo professor, para que conseguissem resolver com sucesso as suas tarefas. Levar a que os alunos, no próprio grupo, se ouvissem uns aos outros de forma a chegarem a um consenso, foi uma tarefa que levou tempo, mas que teve uma evolução positiva ao longo das sessões dedicadas à resolução de problemas. Durante o ano lectivo e após algumas sessões dedicadas à resolução de problemas, pude também verificar, que "o trabalho de grupo favoreceu o envolvimento dos alunos mais fracos (…) a metodologia de trabalho agradou à maioria dos alunos (…) permitiu perceber várias maneiras de pensar e de ajudar a ultrapassar dificuldades." (Abrantes, Matos e Ponte, 1998, p. 80).

Apesar de todas as contrariedades e dificuldades, foi notória a evolução na forma como os alunos cooperaram na resolução de problemas. Note-se que, foi importante ir modificando levemente a constituição dos grupos de trabalho, para que os alunos fossem capazes de se alhear da sua relação com os seus pares fora da sala de aula e cooperassem, independentemente da com o objectivo de resolver problemas e beneficiar pela forma como trabalharam para o grupo. Tal facto é suportado por Abrantes, Matos e Ponte (1998) que indicam que o professor deve mostrar flexibilidade na composição dos grupos, tendo em conta as preferências dos alunos, assegurando a sua estabilidade. Porém, deverá orientar a formação dos grupos e proceder a alterações futuras, conforme seja necessário. Após algumas sessões de trabalho, os meus alunos foram mostrando-se mais receptivos às ideias uns dos outros e aos poucos foram melhorando a sua dinâmica de discussão e resolução dos problemas. Durante a minha investigação, fui também melhorando a forma de avaliar os alunos, criando novos parâmetros de avaliação que tornaram mais justa a classificação final do aluno. Por exemplo, considero que na resolução de problemas em grupo, não deve ser apenas avaliado o produto do seu trabalho, mas também, para trazer alguma justiça aos elementos que esforçaram-se mais, a contribuição de cada aluno para a resolução do problema. Prova-se assim que há razões mais que suficiente para que o trabalho do indivíduo ou do grupo seja avaliado de uma forma holística (Abrantes, Guimarães e Leal, 1991). Ao longo do ano lectivo, foram também feitos registos individuais na forma como foram os alunos foram evoluindo numa série de parâmetros relacionados como resolviam problemas e como trabalhavam em grupo. As classificações obtidas pelos alunos nesses parâmetros, foram de uma forma consistente, incluídas na sua avaliação global, sempre com o seu conhecimento prévio. De seguida mostra-se uma tabela de registo da evolução do aluno (os critérios de classificação detalhados encontram-se em anexo).

Ano letivo 2013/2104

Resolução de problemas (10%) – Ficha de observação

Data: ___/___/_______

Nº	Nome	Utiliza estratégias adequadas à resolução de problemas.	Discute/Justifica processos, ideias e resultados.	Exprime-se de forma clara oralmente e por escrito	Revela autonomia	Sabe trabalhar em grupo
1	A					
2	B					
3	C					
4	D					
5	E					

Cada parâmetro vale **2%** do total da avaliação por período, perfazendo um total de 10%.

0% – 0,49% - Nulo / Insuficiente
0,5% - 0,99% - Suficiente
1% - 1,49% - Bom
1,5% - 2% - Muito Bom

Note-se que os parâmetros e as respetivas ponderações, acima referidos, foram definidos no seio do grupo disciplinar, no sentido uniformizar os critérios de avaliação por todos os professores que leccionam a disciplina de matemática na escola.

Abrantes e Leal (1991, p.72) citando Cockcroft referem que "A avaliação deve ser acompanhada de um método adequado de registo dos processos realizados (…) Qualquer que seja o método utilizado dever-se-á inclui capacidades como (…) a capacidade para usar conhecimentos e para abordar oralmente os temas matemáticos." A forma com os parâmetros de avaliação estão definidos, permitiu que os alunos soubessem se estavam a fazer progressos e ao mesmo tempo permitiu-lhes melhorar a classificação final. Ao longo das aulas dedicadas à resolução de problemas, apercebi-me que os alunos gostavam cada vez mais deste tipo de atividade e com frequência me questionavam acerca da próxima vez que iríamos resolver problemas. Notei, a par de Porfírio (1993), que os alunos evoluíram no que concerne à resolução de problemas e para além disso em termos de grupo, ao melhorem a sua forma de discutir os problemas, tiveram mais facilidade em compreendê-los e em implementar uma estratégia adequada à sua resolução. Mais importante, possível verificar nos alunos, um "desprendimento" gradual do professor, dando primazia às opiniões dos colegas de grupo e só em última instância solicitar a ajuda do docente.

4.1.2. Formulação de um problema

Os problemas escolhidos, alguns deles aplicados em exame nacional, envolvem sobretudo o conceito de múltiplos e divisores. Estes, envolvem as mais diversas formas de problemas como os de perceção espacial, formulação de problemas, análise de conjeturas, sequências, uso da calculadora e esquemas.

Antes de iniciarem a resolução dos problemas, os alunos foram convidados a ler a parte inicial da ficha de trabalho, que descreve pormenorizadamente quais os parâmetros em que os mesmos seriam avaliados.

Nota para a primeira tarefa, em que os alunos tiveram de formular um problema, no qual teriam de integrar uma informação previamente dada e que foi posteriormente resolvido.

Problema 1:

1. **Formulação de um problema.**

Seis em cada oito dentistas entrevistados recomendam a pastilha elástica Supergum. Elabora uma pergunta, para acrescentar a esta afirmação, de modo a obteres um problema. Em seguida, resolve o problema.

Adaptado de Normas para a Avaliação (1991)

Figura 9 – Problema 1 (Formulação de um problema)

Este tipo de problema é muito importante porque apela à criatividade dos alunos, obriga a que se crie um problema que faça sentido, que integre a informação dada e que no final tenha uma solução (que será determinada por eles próprios). A capacidade de formular problemas é importante, de acordo com estudo elaborado por Porfírio (1993) e referido por Abrantes, Matos e Ponte (1998, p.189), porque melhora significativamente a compreensão acerca das relações matemáticas envolvidas nas mais variadas situações e se o contexto educativo for adequado, os alunos são capazes de formular problemas.

Não sendo a primeira vez que os alunos lidaram com este tipo de questão, já que tiveram oportunidade de exercitar esta capacidade em outras ocasiões, não é menos verdade que os alunos continuaram a evidenciar dificuldades neste assunto. Isto poderá dever-se ao facto destes alunos serem muito novos (idade entre os 10 e os 12 anos), não terem sido incentivados a fazer este tipo de exercício no 1º ciclo ou por não terem a desenvoltura mental para formular um problema claro, com algum índice de dificuldade e que tenha sobretudo solução.

O grupo 1, não solicitou a ajuda do professor, contudo, o problema que construíram mostra que não compreenderam o que tinha sido pedido.

1 Quantos dentistas recomendam a pastilha elástica supergum.
Só 6 dentistas recomendam a pastilha elástica supergum.

Figura 10 – Resposta da Joana ao problema 1

Os alunos não respeitaram o enunciado, não integrando a informação fornecida. É notória também a falta de informação do mesmo, tornando-o pouco claro. Posto isto, a resposta dada ao problema não faz qualquer sentido

Por outro lado os elementos do grupo 2 revelaram algumas dificuldades em compreender a pergunta.

Rita: Professor, nós não percebemos muito bem o que é para fazer na 1ª pergunta.

Professor: Terão de elaborar uma pergunta para acrescentar à afirmação dada, ou seja terão de acrescentar mais alguma coisa de forma a construírem uma pergunta.

Rita: Ah, temos de acrescentar mais uma coisa para fazer a pergunta… ah ok.

Apesar disto, as dúvidas continuaram a subsistir:

Rita: Dêem ideias para uma pergunta.

Paulo: Para que achas que serve a pastilha "Supergum"?

Rita: Mas tenho de acrescentar a afirmação!? O professor acabou de dizer…

Luísa: Que tal usarmos 80 dentistas e depois ver destes quantos não recomendam a pastilha?

Depois das dificuldades iniciais, os alunos conseguiram construir uma pergunta clara e mais de acordo com o que tinha sido pedido. Para além disso conseguiram resolver de uma forma adequada à questão proposta pelo grupo.

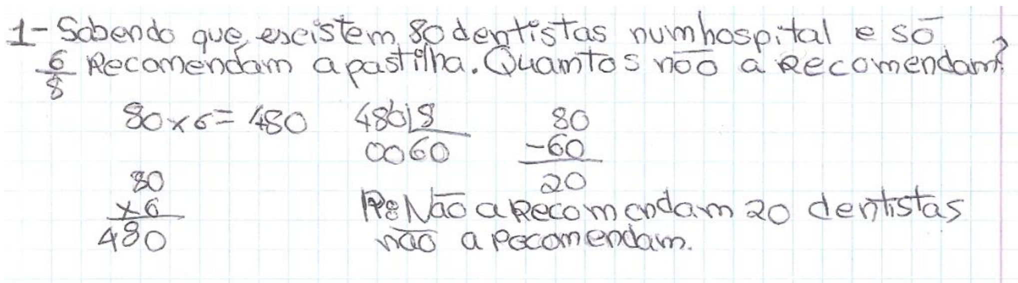


Figura 11 – Resposta da Rita ao problema 1

A formulação de problemas é uma atividade que envolve muito os elementos do grupo, embora esta não se verifique de uma forma espontânea. É necessário que o professor encoraje o trabalho dos alunos, fazendo-os refletir e melhorar as suas opções (Porfírio, 1993). Pela sua importância, na melhoria da compreensão das relações matemáticas, a formulação de problemas deve ser uma actividade que deve ser estimulada.

4.1.3. Problemas generalistas

Os problemas descritos nas questões 2, 3 e 4 poderão ser pensados e resolvidos de diferentes formas, mas, que nos quais se deve dar particular atenção ao seu enunciado, pelo facto de envolver alguns parâmetros que têm de ser respeitados.

Relativamente à questão 2, os alunos teriam de determinar o número de degraus existentes num prédio. No grupo 1, os alunos evidenciando um espírito colaborativo, foram discutindo aquilo que entendiam do problema até chegarem a uma resposta que satisfizesse todos os elementos.

Problema 2:

2. Contando degraus.

No prédio onde habita a Sónia há 8 andares. O elevador avariou e a Sónia, que mora no 4.º andar, teve de descer as escadas a pé. Quando já tinha descido 10 degraus, viu que não tinha trazido o chapéu-de-chuva e voltou atrás para buscá-lo. Quando chegou à porta da rua, que ficava ao nível do rés-do-chão, tinha descido um total de 58 degraus. Quantos degraus tem o prédio?

In: Caderno de Tarefas mp.5 matemática para pensar

Figura 12 – Problema 2 (Contando degraus)

Raquel: Eu acho que contamos desde o quarto andar… contamos sem subir nem descer porque ela desceu e subiu os mesmos dez degraus. Por isso desde o 4º andar até ao rés-do-chão desceu 58 degraus e desde o 4º andar até o 8º também deve ter 58 degraus.

Joana: Não… temos de fazer 58 menos 10, porque 10 degraus foi que ela desceu da primeira vez.

Raquel: Mas temos de contar mais 10 porque ela sobe…

Jorge: Posso dizer?... Então, ela desce dez degraus, ficamos com 58 – 10 = 48. Depois ela sobe por isso temos de tirar mais dez degraus.

Raquel: Então qual vai ser a resposta?

Joana: 58 -10 = 48 foram os degraus que ela desceu…

Raquel: Ok dá 48… e agora…

Jorge: Agora é 48 -10 que foi o que ela subiu. Que dá 38. Depois é 38 vezes 2 que é a outra metade do prédio, já que ela vive no 4º andar e o prédio tem 8 andares.

Joana: O prédio tem então 76 degraus.

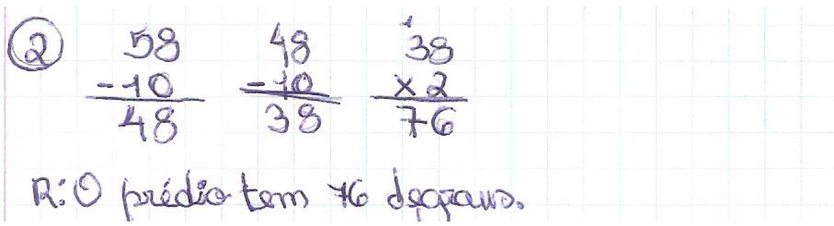


Figura 13 – Resposta da Rute ao problema 2

Nesta questão, os alunos conseguiram interpretar de uma forma correta a quase totalidade do problema, esquecendo-se, ou, não dando muita importância a uma palavra que provavelmente lhes iria ajudar na decisão correta acerca da resolução do problema. Assim, no enunciado é referido que "tinha descido um total de 58 degraus" não podendo por isso contar com o que a Sónia havia subido. Então se ao total de 58 degraus descidos retirarmos o excesso, ou seja, os 10 degraus que a Sónia desceu quando se lembrou do guarda-chuva, ficamos então com 58 – 10 = 48 degraus, do rés-do-chão ao quarto-andar. Como o prédio tem 8 andares, teremos o dobro dos degraus contados desde o apartamento da Sónia, até o rés-do-chão, ou seja, 2 x 48 = 96. Portanto, tirando o facto do primeiro grupo ter "retirado" os degraus da subida e da descida, todo o resto está correto e de acordo com o que se pretendia do problema. O grupo 2 teve algumas dificuldades iniciais em termos da interpretação do problema, como atesta o seguinte diálogo:

Rita: Haa, já percebi… Então, temos de somar 58 mais 10 que dá 68.

António: No total, é o total que dá 58.

Professor: Têm de trabalhar como um grupo… tentem chegar a um consenso, discutam as vossas opiniões.

António: É 58 menos 10.

Rita: É 58 porque ela desceu ao todo 58 degraus e depois fazemos vezes 2 porque ela está no 4º andar que é metade do prédio.

António: Se ela desceu dez e voltou ao apartamento dela, voltou a descer outra vez. É 58 menos 10.

Rita: Há, ok, já percebi o teu raciocínio.

Luísa: Eu não percebi mas pronto…

Rita: Então, ela desceu primeiro 10 degraus e depois subiu. Temos de fazer 58 menos 10 porque ela desceu…

Rita: Agora fazemos vezes 2 que dá 96. Agora damos a resposta.

Paulo: O prédio tem 96 degraus.

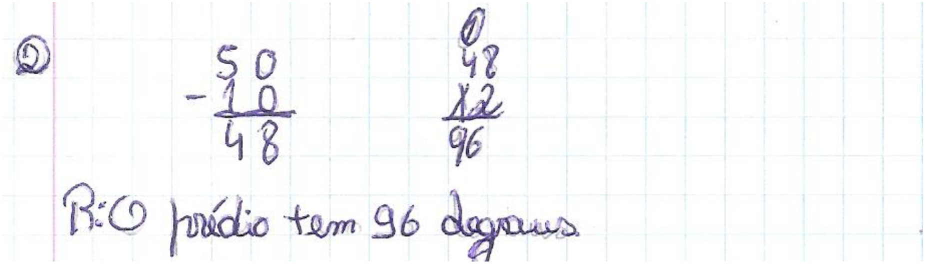


Figura 14 – Resposta do Paulo ao problema 2

É de notar a importância do diálogo e da contribuição dos diversos elementos do grupo para uma correta interpretação e resolução do problema.

Problema 3:

3. Investigação.

O gerente de um pronto-a-vestir comprou igual número de calças e *t-shirts* para vender. Pagou 2500 € por tudo. Sabendo que cada par de calças custou 80 € e cada *t-shirt* custou 45 €, investiga quantas peças comprou.

In: Caderno de Tarefas mp.5 matemática para pensar

Figura 15 – Problema 3 (Investigação)

O terceiro problema gira em torno de uma pequena investigação, na qual os alunos, sabendo o valor total pago por um certo número de peças de cada tipo e o seu preço unitário, teriam de determinar quantas peças de cada tipo compraram. Os grupos lidaram com esta questão de diferentes formas, conseguindo todos chegar ao resultado pretendido.

Raquel: Eu acho que já sei! Vamos fazer primeiro 80 mais 45 depois ao resultado fazemos vezes 3 e vemos quanto é que dá. Temos de ver quantas vezes é que chega 80mais 45 para ver quando é que dá 2500 €.

Apesar de ser uma resposta um pouco confusa, sendo a resposta "multiplicação por 3" espelho disso (método da tentativa e erro) a verdade é que ao somar 80 mais 45 estão a ser criados "grupos" (calças + t-shirt) faltando determinar quanto "grupos" serão necessários para perfazer um total de 2500 €. Torna-se evidente, que está a ser feita uma correta interpretação do problema por parte dos elementos do grupo 1. A dificuldade surge na altura de operacionalizar, ou seja, arranjar uma estratégia para a resolução do problema.

Rute: Mas temos de saber quantas peças é de cada tipo…
Rute: É para o usar o máximo divisor comum.

Note-se, que por esta altura estava a ser abordado o tema do máximo divisor comum e apesar de este problema em particular envolver o conceito de múltiplos e divisores, a Rute estava a tentar envolver algo que não se enquadrava neste problema. Aqui fica bem patente uma das dificuldades dos alunos, que é a de seleccionar apenas o essencial e o que lhes será útil para a resolução do problema, de tudo aquilo que sabem em termos matemáticos. Torna-se claro que os alunos, mesmo os de tenra idade, consideram que atividade de resolver problemas é um complemento dos conteúdos abordados nas aulas. Como refere Schoenfeld (1996), os alunos vêem os problemas como problemas escolares de matemática, rotineiros, do tipo exercício e prática, que os estudantes não estão à espera que tenham sentido. Isto mostra que os alunos estão pouco habituados a resolver problemas que, não tenham uma ligação intrínseca com a matéria em estudo e não havendo essa ligação os alunos sentem-se "tentados" em focá-la. É importante que os alunos sintam que um problema é mais de um mero exercício trabalhado nas aulas, ou seja, um problema não se encontra "preso" a um determinado conteúdo, ele poderá envolver vários conceitos, esta é a riqueza de um problema.

Raquel: Professor, eu acho que é 80 mais 45 e esse resultado vezes alguma coisa para chegarmos aos 2500 €.
Professor: Acham que o máximo divisor comum se enquadra neste problema?
Jorge: Acho que não, porque se eu usar o máximo divisor comum eu apenas terei o maior divisor dos dois números e isso não me vai ajudar.
Professor: E o mínimo múltiplo comum? Será que vai ajudar sabendo que tenho um limite pré-estabelecido (2500 €)?

Joana: Humm… não me parece que vá ajudar porque apenas vai dar o valor comum aos dois separadamente e precisamos que seja no conjunto.

Professor: Desenvolvam essa ideia e não se esqueçam que terão de ter o mesmo número de calças e de t-shirts.

Raquel: Podemos fazer 80 mais 45 até chegarmos a 2500 €. Fazendo a soma dá 125€, agora podemos fazer vezes 5 e ver o que dá.

Jorge: Podes já multiplicar por 10 que vai dar 1250€. Depois ao resultado fazemos vezes 2.

Rute: Deu-me 2500 €.

Raquel: Então vai ser quantas peças de cada?

Jorge: Vai ser 12.

Depois de ultrapassada a dificuldade em estabelecer uma estratégia para a resolução do problema, o grupo foi pouco crítico na forma como determinou a solução final para o problema. Vejamos, os elementos do grupo repararam que se multiplicassem 125 € por 10 teriam 1250 € e se a este resultado multiplicassem por 2 obteriam os 2500 €. Pensaram então, erradamente, que o número de peças de cada tipo seria 10 + 2 = 12. Aqui não houve a preocupação em verificar se a sua resposta está correta, multiplicando, por exemplo, o custo de cada peça por 12 e somar os seus resultados a ver se daria 2500 €. Os passos dados em direção à solução estão todos certos, falhou a interpretação final. A multiplicação por 2 no passo final, seria equivalente a voltar a multiplicar 125 € por 10 e por isso o resultado final seria 10 + 10 = 20. Assim teríamos 20 peças de cada tipo, 20 calças e 20 t-shirts (80 x 20 + 45 x 20 = 1600 + 900 = 2500 €).

Figura 16 – Resposta da Raquel ao problema 3

As dificuldades iniciais do grupo 2 foram análogas à do grupo 1, porém, na forma de resolver tomaram um caminho diferente optando por uma resolução mais prática.

Luísa: Nós temos de somar 80 mais 45 que dá 125 €.

Rita: Agora dividimos 2500 € por 125 €. Dá 20.

Paulo: Agora temos de ver se este resultado resulta.

Rita: Pois… fazemos 80 vezes 20 e 45 vezes 20, no final somamos tudo.

Luísa: Dá 2500…vai estar está certo!

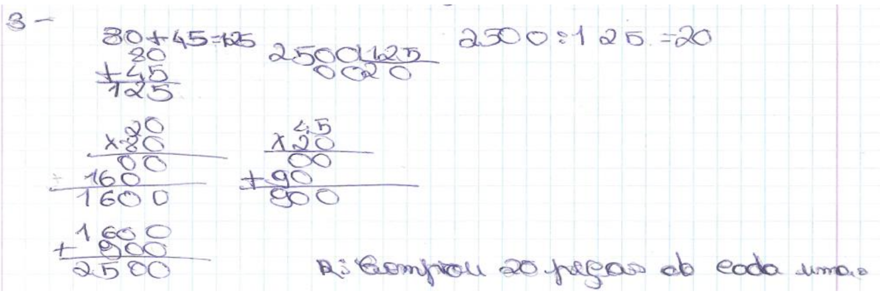
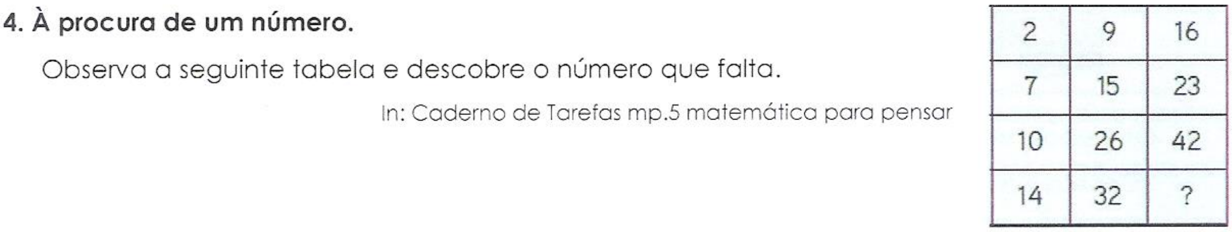


Figura 17 – Resposta da Luísa ao problema 3

Ao contrário do grupo 1, o grupo 2 teve o cuidado de verificar se o resultado obtido era coerente com o pretendido, este pormenor fez claramente toda a diferença.

Problema 4



4. À procura de um número.

Observa a seguinte tabela e descobre o número que falta.

In: Caderno de Tarefas mp.5 matemática para pensar

2	9	16
7	15	23
10	26	42
14	32	?

Figura 18 – Problema 4 (À procura de um número)

No que concerne ao problema 4, os alunos tinham uma tabela com 4 linhas e 3 colunas, em que as mesmas se encontravam preenchidas com números à exceção da do canto inferior direito. A ideia seria encontrar um padrão entre os números das linhas e das colunas, no sentido de descobrir o número em falta. Neste caso os alunos teriam que perceber que por exemplo, na 1ª linha, para chegarmos de 2 a 9 precisamos de 7 (9 – 2 = 7) e que o mesmo acontece entre 9 e 16 (16 – 9 = 7). Pensando de forma análoga nas linhas seguintes, verificamos que a diferença entre o valor das colunas permanece constante. Com isto definimos a nossa regra, para cada linha, a diferença entre o valor da coluna seguinte e da anterior permanece constante. Se fizermos 32 – 14 = 18. Logo concluímos que o valor em falta é 50, visto que 32 + 18 = 50 (pensando de forma inversa, temos, 50 – 32 = 18.

Às dúvidas manifestadas pelos grupos foram respondidas da seguinte forma:

Professor: Podem pensar no que acontece de linha para linha ou de coluna para coluna.

Rita: Somando as linhas não dá igual de uma para a outra.

António: Nem somando as colunas…

Rita: Não estou percebendo nada…

Professor: Olhem com atenção e vejam se conseguem encontrar um padrão quando se passa de coluna para coluna ou de linha para linha.

Rita: Acho que já percebi! Olhem todos, do 2 para o 9 quantos é que vai?

Paulo: Sete! É uma sequência.

Rita: E de nove para 16 é outra vez 7. Depois na linha de baixo é igual. Já perceberam a sequência?

Rita: Se de 14 para 32 faltam 18 então temos de somar 18 ao 32 para ver qual o número em falta.

Luísa: É o 50.

A discussão entre todos os elementos do grupo é fundamental, mas por vezes uma pequena dica faz toda a diferença na orientação para alcançar a resposta correta.

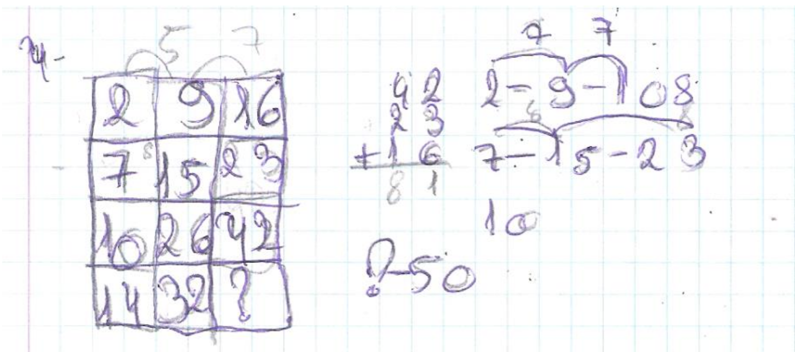


Figura 19 – Resposta do António ao problema 4

4.1.4. Problema envolvendo o uso de calculadora

O uso das tecnologias é fundamental nos dias de hoje, dessa forma, é importante colocar alunos de tão tenra idade em contacto com instrumentos de cálculo, tal como a calculadora, no sentido de explorar as suas potencialidades como auxiliar na resolução de problemas. As potencialidades do uso da calculadora são referidas por Abrantes, Matos e Ponte (1998, pg.74), "também a utilização da calculadora se mostrou de grande utilidade na formulação e resolução de problemas".

Problema 5

5. Investiga com a calculadora

Indica:

a) dois números pares consecutivos cujo produto seja 624;

b) dois números ímpares consecutivos cujo produto seja 1023;

In: Caderno de Tarefas mp.5 matemática para pensar

Figura 20 – Problema 5 (Investiga com a calculadora)

No problema 5, os grupos de trabalho tiveram oportunidade de usar a calculadora para responderem a duas questões, que sem este instrumento de auxílio e sem terem outro tipo de conhecimentos matemáticos, seria uma tarefa bastante árdua. Numa das alíneas, os alunos teriam de determinar dois números pares consecutivos cujo produto fosse 624 e na outra alínea teriam de determinar dois números ímpares cujo produto fosse 1023. Neste caso, se tivessem conhecimentos algébricos poderiam pensar da seguinte forma: dois números pares consecutivos têm a forma 2n e 2n+2. Para determinar os dois números pares consecutivos cujo produto seja 624, faríamos, $2n\,(2n+2) = 624$. Ora, podíamos simplificar a equação dividindo ambos os membros por 2, ou seja $n\,(2n+2) = 312$. Aplicando a propriedade distributiva vem, $2n^2+2n = 312$. Colocando o 2 em evidência e dividindo, depois, ambos os membros por 2 fica, $n^2+ n = 156$. Determinando as raízes da equação vem, $n = -13$ e $n = 12$. Obviamente, considerando o ano de escolaridade em questão, a solução escolhida seria $n = 12$, já que os alunos ainda não fazem cálculos com números negativos. Desta forma os números pares pretendidos seriam $2 \times 12 = 24$ e $2 \times 12 + 2 = 26$.

Não foi de estranhar, o entusiasmo com que os discentes acolheram esta tarefa, já que a maior parte deles raramente usou uma calculadora ao longo da sua, ainda curta, escolaridade. A única dúvida que surgiu nesta tarefa foi referente ao próprio enunciado, na medida que os alunos não conseguiam perceber o que eram números pares ou ímpares consecutivos. Depois da explicação, rapidamente os alunos puseram mãos à obra chegando, em poucos minutos, à solução correta em ambas as alíneas. Aqui, se percebe o à vontade com que os alunos usam a calculadora (em seu próprio benefício). Como refere Porfírio (1993), a calculadora incentiva a que os alunos não desistam de resolver os problemas, mesmo perante tentativas frustradas, que noutra situação seriam colocados de parte pelos discentes. Assim, usando a técnica da tentativa em erro, auxiliados pela calculadora para executarem rapidamente os cálculos, facilmente ultrapassaram os obstáculos propostos. Note-se também a boa estimativa que os alunos fizeram, chegado aos valores corretos em poucas tentativas.

Raquel: Isto é fácil, cheguei ao resultado em apenas 2 tentativas. Fiz 29 vezes 31 e vi que dava 899. Como estava abaixo de 1023 então aumentei os números e fiz 31 x 33 que deu 1023.

Jorge: Boa! Está certo!

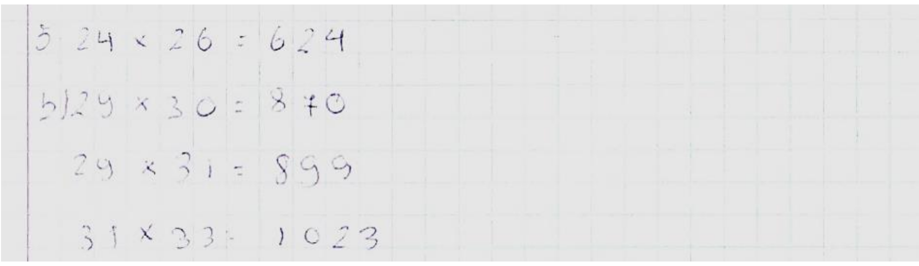


Figura 21 – Resposta da Joana ao problema 5

No grupo 2, não houve também grandes dificuldades, apesar de haver algumas dúvidas por parte de um elemento do grupo que foram prontamente esclarecidas no seio do grupo.

António: Podemos fazer 624 vezes 1 que dá 624.

Paulo: Mas 1 não é par, nem são seguidos. Os dois números têm de ser par e têm de ser consecutivos.

António: Pois é, não me tinha apercebido…

Rita: Yeah, consegui! É 24 vezes 26.

Paulo: Boa!

Rita: Agora vamos aos números ímpares.

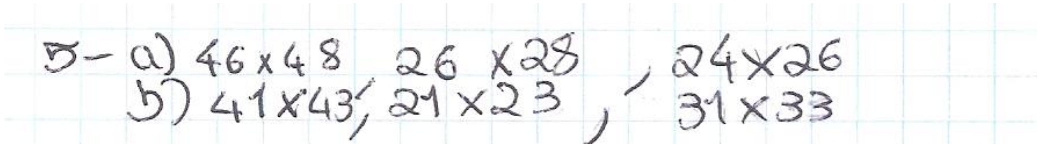
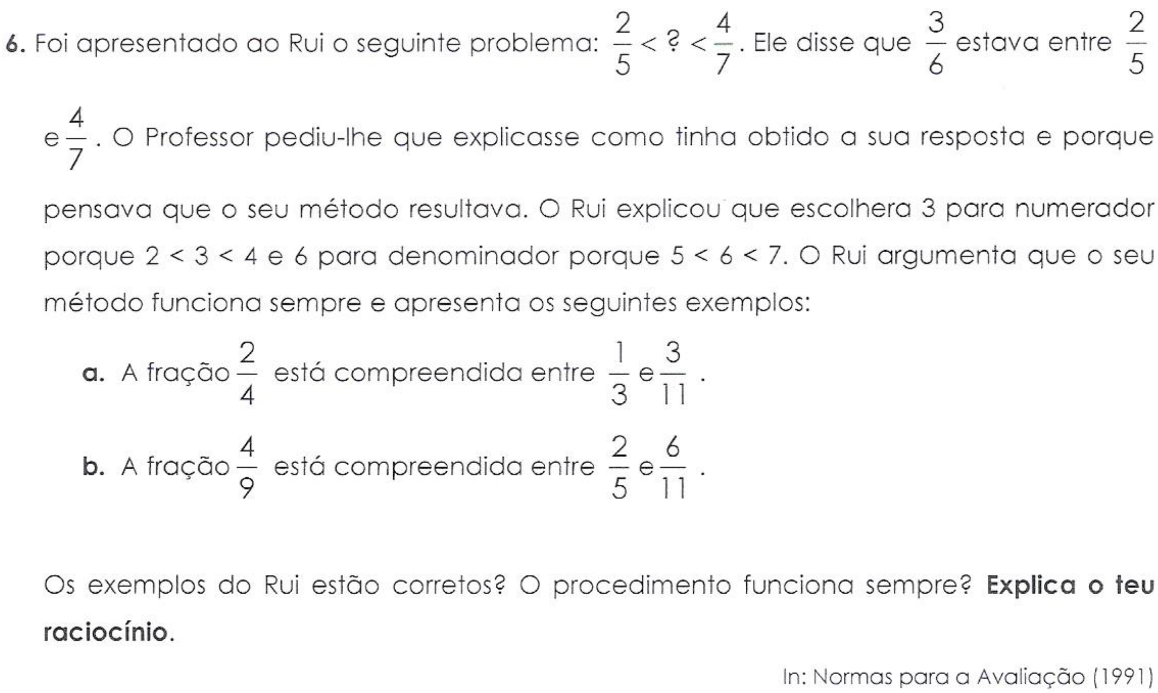


Figura 22 – Resposta da Rita ao problema 5

Tal como referem Abrantes, Matos e Ponte (1998), os alunos revelaram muita persistência em experimentarem valores na calculadora, e aos poucos foram estreitando a sua pesquisa baseados nos resultados obtidos anteriormente.

Depois de algumas tentativas falhadas chegaram à conclusão, à semelhança do outro grupo, que os dois números ímpares consecutivos cujo produto é 1023 são o 31 e o 33. Aqui, fica bem patente como a calculadora pode ser uma mais-valia no auxílio à resolução de problemas mesmo para alunos desta faixa etária. Para além disso, este tipo de problema permite que alunos mais fracos consigam participar com algum sucesso na resolução de problemas, tal como é corroborado por Abrantes, Matos e Ponte (1998).

4.1.5. Problema envolvendo a análise de uma conjetura



6. Foi apresentado ao Rui o seguinte problema: $\frac{2}{5} < ? < \frac{4}{7}$. Ele disse que $\frac{3}{6}$ estava entre $\frac{2}{5}$ e $\frac{4}{7}$. O Professor pediu-lhe que explicasse como tinha obtido a sua resposta e porque pensava que o seu método resultava. O Rui explicou que escolhera 3 para numerador porque $2 < 3 < 4$ e 6 para denominador porque $5 < 6 < 7$. O Rui argumenta que o seu método funciona sempre e apresenta os seguintes exemplos:

a. A fração $\frac{2}{4}$ está compreendida entre $\frac{1}{3}$ e $\frac{3}{11}$.

b. A fração $\frac{4}{9}$ está compreendida entre $\frac{2}{5}$ e $\frac{6}{11}$.

Os exemplos do Rui estão corretos? O procedimento funciona sempre? **Explica o teu raciocínio.**

In: Normas para a Avaliação (1991)

Figura 23 – Problema 6 (Análise de uma conjetura)

O problema 6 foi a que suscitou maiores dúvidas por parte dos alunos. A explicação para esta situação poderá residir no facto do enunciado ser um pouco extenso e com alguma complexidade. Para além disso, os alunos teriam de analisar duas situações e verificar se os procedimentos estavam corretos. Esta tarefa difere das restantes, na medida em que não é um problema tradicional em que temos uma questão, definimos uma estratégia para resolvê-la e pomo-la em prática com o objetivo de chegarmos à solução. Aqui, temos já uma estratégia de resolução definida e os alunos apenas teriam que analisá-la, verificar se os exemplos fornecidos estavam corretos e se a conjectura elaborada pelo Rui (personagem do problema) poderia ser generalizada a qualquer situação.

O problema surge quando o Rui coloca como solução $\frac{3}{6}$ para o problema $\frac{2}{5} < ? < \frac{4}{7}$ proposto pelo professor argumentando que escolheu 3 para o numerador porque 2 < 3< 4 e 6 para o denominador porque 5 < 6 < 7. Os alunos teriam de verificar a plausibilidade da conjetura para os dois exemplos dados e se funcionava na generalidade.

O desafio que impunha o problema fez com que o grupo 1 deixasse o mesmo para o fim, já que não estavam a chegar a nenhum consenso. O grupo 2 também se debatia com sérias dúvidas acerca do problema e procurava chegar a “bom porto” como atesta o diálogo:

Luísa: Vamos! Como é que vamos ver se os exemplos estão certos?

António: Eu acho que estão errados…

Paulo: Porquê?

Rita: Ah! Está certo!

António: E porque é que está certo?

Rita: Porque vê…em cima o 2 está entre o 1 e o 3 e em baixo o 4 está entre o 3 e o 11.

António: E como vamos explicar o nosso raciocínio?

Rita: Dizemos que a fração $\frac{2}{4}$ está entre $\frac{1}{3}$ e $\frac{3}{11}$ porque… é óbvio… 2 está entre 1 e 3 e 4 está entre o 3 e o 11. Para o segundo exemplo é a mesma coisa. Está certo porque o 4 está entre o 2 e o 6 e 9 está entre o 5 e o 11.

Os alunos entenderam a forma de enquadrar frações usada pelo Rui e isso fê-los ficarem presos mentalmente a este processo. Assim, em vez de tentarem usar outros métodos para verificarem se, por exemplo, $\frac{2}{4}$ está compreendido entre $\frac{1}{3}$ e $\frac{3}{11}$ tentaram provar usando o mesmo método que o Rui. Obviamente, pensando de acordo com a conjetura do Rui chegariam à resposta afirmativa de que os exemplos estão corretos. À semelhança do verifica no estudo efectuado por Saraiva (1992) e citado por Abrantes, Matos e Ponte (1998), "(…) os alunos parecem se satisfazer com a verificação de uma propriedade para um pequeno número de casos (…) a partir daí generalizam para todos os casos possíveis. A falha dos alunos estava no facto, de usarem a mesma forma de resolver do que aquela apresentada, porque obviamente traria os mesmos resultados.

Um dos elementos do grupo solicitou a presença do professor afim de verificar se a sua forma de pensar o problema tinha sido a mais correta.

Professor: Vocês usaram o método do Rui para verificar se os exemplos estavam corretos. E já pensaram se o método do Rui está errado? Como poderiam verificar se os exemplos estão corretos sem usar o método do Rui?

António: Humm… não sei… não estou a ver.

Professor: Pensem por exemplo se podem fazer alguma coisa com os denominadores.

Paulo: Eles são diferentes…

Luísa: E se tentássemos pô-los iguais?

Paulo: Como?

Luísa: Reduzindo todos ao mesmo denominador, não é?

Professor: Muito bem!

Rita: Ah! Pois… colocamos todas as frações com o mesmo denominador e depois olhamos para o numerador e ordenamos conforme o numerador.

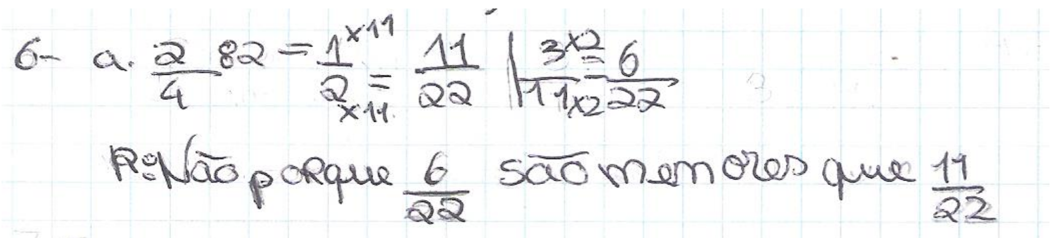


Figura 24 – Resposta da Rita ao problema 6

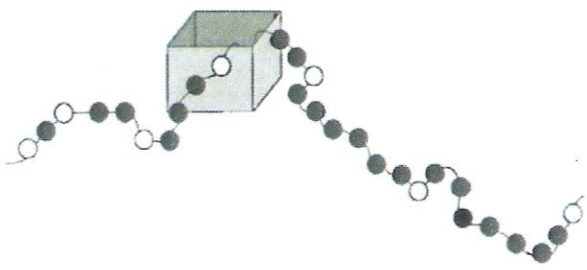
Depois da pequena dica, os alunos foram capazes de verificar se os exemplos dados estavam corretos ou não, e como um deles estava incorreto, aproveitaram-no para usá-lo como contra-exemplo, ou seja, para provar que o procedimento usado pelo Rui nem sempre funciona. Esta forma de provar, usando o contra-exemplo deve ser valorizada na avaliação e na aprendizagem, porque evidencia uma estratégia mais rápida e clara de provar a veracidade ou não de uma conjetura ou invés de tentar arranjar formas mais analíticas e complicadas de prova. Infelizmente este aspeto da matemática é muitas das vezes esquecido ou até mesmo ignorado, assim como problemas como este (conjecturas), que à partida não conhecemos o seu valor lógico (Abrantes, 1988).

4.1.6. Problemas de perceção espacial, esquemas e sequências.

Os problemas 7, 8 e 9 envolvem um tipo de raciocínio mais prático e que podem ser resolvidos recorrendo a diversas estratégias, pelo que são mais atrativos e fáceis, segundo o ponto de vista dos alunos, já que não implicam o uso de cálculos ou algoritmos complicados.

Problema 7

7. A Elisa está a fazer um colar com contas brancas e contas pretas, seguindo sempre um esquema inventado por ela. Uma parte do colar está dentro da caixa da figura.
Desenha ou descreve a parte do colar que está dentro da caixa.



In: Prova de aferição, 2.º Ciclo, 2004

Figura 25 – Problema 7 (Problema de perceção espacial)

No problema 7, há um esquema com bolas pretas e brancas, que combinados formam um colar, em que parte do mesmo se encontrava escondido dentro de uma caixa. Os alunos teriam, assim, de descobrir que parte do colar estava escondida analisando o padrão do mesmo. Neste tipo de problemas de perceção espacial, a forma de resolução é bastante alargada, já que os alunos podem recorrer a esquemas, descrições ou desenhos.

António: É uma sequência de bolas, por isso não será mais fácil desenhar o colar como se estivesse fora da caixa?

Luísa: São duas bolas então que estão dentro da caixa, para fazer quatro bolas pretas.

Rita: Não!!! Aqui à frente estão seis bolas, por isso antes temos de ter cinco.

Paulo: Pois, por cada branca aumenta uma preta.

Rita: Pois, por isso faltam as quatro bolas pretas, depois uma branca e depois três pretas.

Paulo: Ela tem razão!

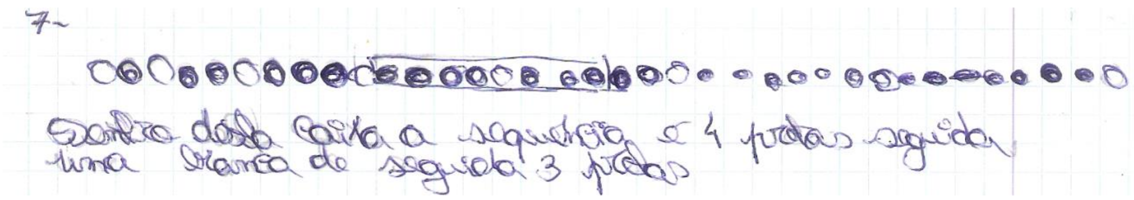


Figura 26 – Resposta da Luísa ao problema 7

Os alunos gostam muito deste tipo de actividade em que têm de reconhecer um padrão ou uma regularidade, pelo que não consideram muito difíceis de resolver, já que em vez dos tradicionais cálculos, podem apoiar-se em esquemas ou desenhos. Esta situação é corroborada por Abrantes, Matos e Ponte (1998) quando se referem a um estudo de Porfírio (1993), "os alunos se entusiasmam bastante com situações que envolvem esta estratégia. É visível a facilidade com que eles se apoiam na construção de tabelas ou de desenhos".

Problema 8

8. A Maria vai escolher dois ingredientes diferentes para fazer a sua piza. Pode escolher: azeitonas; cogumelos; ervilhas; frango; milho. Quantos tipos de piza diferentes a Maria pode fazer? Mostra como chegaste à tua resposta.

In: Prova de aferição, 2.° Ciclo, 2009

Figura 27 – Problema 8 (Combinatória)

No problema 8, os alunos teriam de escolher 2 ingredientes para fazer uma piza. Desta forma, de uma lista de 5 ingredientes, teriam de determinar quantos tipos de piza diferentes poderiam ser feitos.

Este problema de combinatória poderia ser facilmente resolvido, compreendendo que temos 5 ingredientes que têm de ser combinados dois a dois, ou seja, ${}^{5}C_{2} = \frac{5!}{(5-2)! \times 2!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2!} = \frac{20}{2} = 10$. Este podia ser perfeitamente um problema aplicado a alunos do secundário. O desafio imposto aos alunos do 5º ano seria transformar esta visão mais complexa do problema, numa mais adequada a sua idade. Os problemas deste género têm este condão, podem ser resolvido de várias formas, pelos mais variados tipos de alunos.

Naturalmente, os discentes apelaram à sua criatividade e apresentaram diversas formas de resolver o problema, todas elas, bem explicadas e resolvidas. Este tipo de problemas, à semelhança do anterior, causam muito entusiasmo nos alunos porque, permitem que os mesmos usem outras formas de resolução que não o célebre “cálculo” e para além disso pela sua simplicidade, permitem um envolvimento mais fincado dos alunos com maiores dificuldades na resolução de problemas. Posto isto, problemas desta natureza devem ser sempre considerados quando se avalia a resolução de problemas.

Neste diálogo é evidente o entusiasmo gerado por este tipo de problemas:

Raquel: É fácil!! Temos de fazer assim, cogumelos – azeitonas, cogumelos – ervilhas, cogumelos – frango, cogumelos – milho, ervilhas – azeitonas, ervilhas – frango, ervilhas - milho…

Jorge: Eu gosto de resolver este tipo de problemas…

Rute: Estás sempre a interromper a Raquel!

Joana: Pelas minhas contas dá 10 tipos de piza diferentes!

No grupo 2 vivia-se o mesmo entusiasmo:

Paulo: Temos de fazer primeiro com as azeitonas, isto não é ao calhas. Fazemos, azeitonas – cogumelos…

António: Azeitonas – ervilhas…

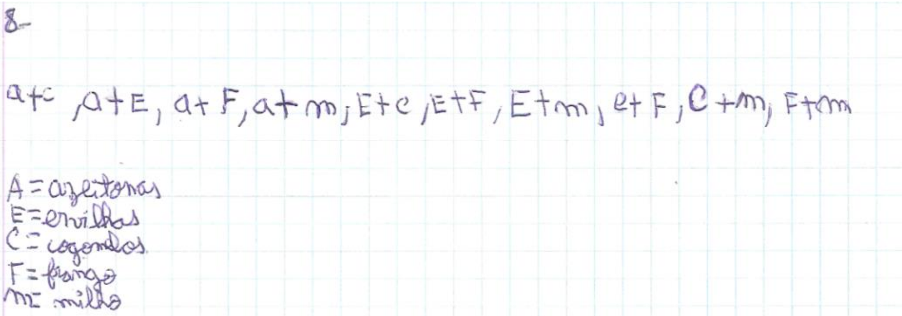
Luísa: Azeitonas – frango…

Paulo: Atenção Luísa que estás a pôr no esquema ervilhas – azeitonas e azeitonas – ervilhas. São os mesmos ingredientes por isso não vai estar certo…

Luísa: Pois têm de ser diferentes os ingredientes.

Raquel: Pois, assim dá dez!

Aqui apresenta-se os esquemas/desenhos apresentados por alguns grupos de trabalho que é bastante revelador da criatividade com que os alunos abordam estes problemas.


8-

a+c, a+E, a+F, a+m, E+c, E+F, E+m, c+F, C+m, F+m

A = azeitonas
E = ervilhas
C = cogumelos
F = frango
M = milho

Figura 28 – Resposta do Jorge ao problema 8

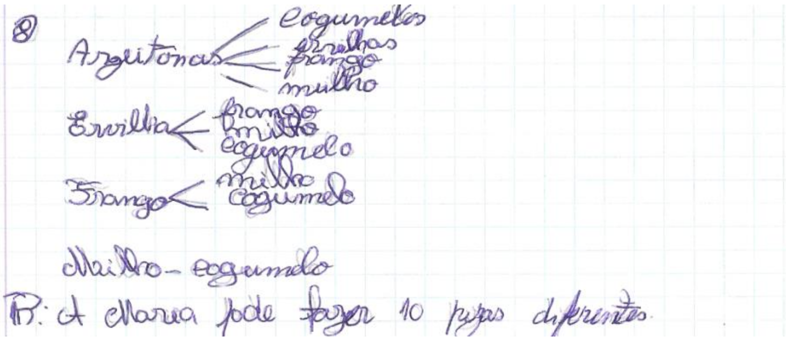

8)
Azeitonas – cogumelos, ervilhas, frango, milho
Ervilha – frango, milho, cogumelo
Frango – milho, cogumelo
Milho – cogumelo
R: A Maria pode fazer 10 pizzas diferentes.

Figura 29 – Resposta do Paulo ao problema 8

Problema 9

9. Observa a seguinte sequência de figuras, onde estão empilhados azulejos brancos e cinzentos, segundo uma determinada regra.

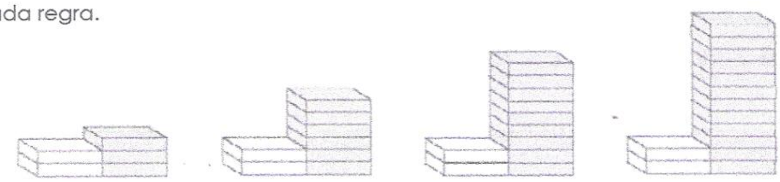


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

9. 1. Indica, a seguir, o número de azulejos de cada cor necessários para construir a figura número 10.

9.1.1. Número de azulejos brancos.

9.1.2. Número de azulejos cinzentos.

9.2. Na sequência acima representada, existirá alguma figura com um total de 66 azulejos? Explica a tua resposta.

Adaptado da Prova de aferição, 3.º Ciclo, 2003

Figura 30 – Problema 9 (Sequências)

No último problema, apresenta-se um problema típico de sequências. Tentei averiguar como é que os alunos conseguiam lidar com um assunto diferente daquele que estão acostumados a fazer. No problema, existe uma sequência de azulejos brancos e cinzentos empilhados. Na primeira questão, teriam de determinar o número de azulejos brancos e cinzentos necessários para construir a figura 10 (sabendo como variava o número de azulejos até a figura 4). Na segunda questão, os alunos teriam de averiguar se existia uma figura com um total de 66 azulejos. Na primeira questão, os alunos apenas teriam de se preocupar em perceber como variava o número de azulejos cinzentos, já que os brancos permaneciam inalterados. Como de figura para figura (considerando apenas os azulejos cinzentos) são somados 3 azulejos teríamos um termo geral do tipo 3n. Como número de azulejos brancos são sempre dois então o nosso termo geral para a sequência de figuras seria 3n + 2. Esta seria abordagem clássica de um aluno do 3º ciclo.

Eis a abordagem do grupo 1 ao problema:

Raquel: Nós temos de perceber a sequência que está aqui. Depois temos de ver para figura 10 quanto azulejos brancos e quantos cinzentos vai levar.

Rute: Acho que já sei como vamos fazer…

Raquel: Os azulejos brancos são sempre dois. A resposta da primeira é dois porque os azulejos brancos são sempre dois.

Raquel: Agora para os cinzentos. Ah, isto é a tabuada!

Jorge: Pois, fazes três vezes dez.

Raquel: Então dá 30 azulejos.

…

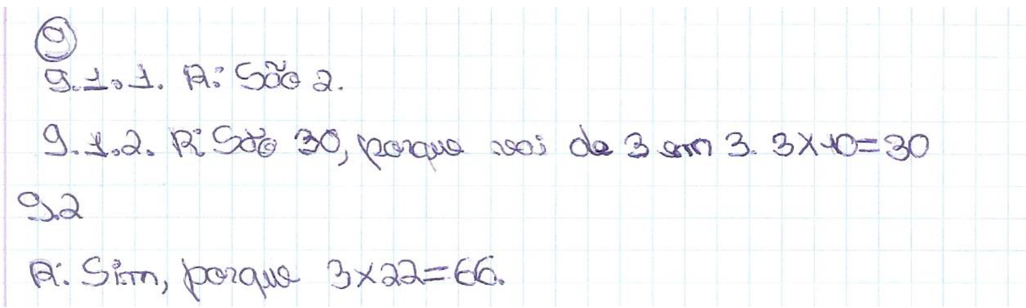
Raquel: E agora, existirá alguma figura com 66 azulejos?

Joana: Sim!

Rute: Três vezes vinte e dois dá 66.

Raquel: E qual vai ser a resposta?

Joana: Sim porque três vezes vinte e dois dá 66.


9

9.1.1. R: São 2.

9.1.2. R: São 30, porque vai de 3 em 3. 3×10=30

9.2

R: Sim, porque 3×22=66.

Figura 31 - Resposta da Rute ao problema 9

Apesar da boa cooperação entre os elementos na busca da resposta certa, provavelmente, ainda pensando na resposta anterior, os alunos apenas pensaram nos azulejos cinzentos e esqueceram-se de adicionar os dois azulejos brancos que aparecem sempre na sequência. Poderemos valorizar o que os alunos fizeram corretamente, já que para todos os efeitos a estratégia aplicada foi a adequada.

O grupo 2 chegou também com alguma facilidade à resposta das duas primeiras alíneas (número de azulejos brancos e cinzentos da figura 10) mas relativamente à última questão tomaram um rumo diferente do outro grupo.

Luísa: Eu já reparei que três vezes vinte e dois dá 66.

Raquel: Está na tabuada do três…

António: O Paulo já descobriu!

Paulo: O 66 é divisível por 3 porque vai de três em três.

Luísa: Ah! Mas estamos a nos esquecer dos azulejos brancos. Por isso podemos fazer 21 vezes 3 mais 2 que dá 65.

Raquel: E se fizermos 22 vezes três mais 2 dá 68. Assim está justificado que não existe nenhuma figura com um total de 66 azulejos.

Facilmente podiamos provar se existe alguma figura com 66 azulejos. Se retirássemos os dois azulejos brancos da figura, ficaríamos com 64 azulejos. Sabemos que as figuras formadas pelos azulejos cinzentos são múltiplos de 3, pelo que bastava verificar se 64 era múltiplo de 3. Usando o critério de divisibilidade por 3, vem 6 + 4 = 10. 10 não é múltiplo de 3, pelo que 64 não é múltiplo de 3. Assim, concluímos que não existe nenhuma figura com 66 azulejos.

A intervenção de um dos elementos do grupo lembrando, que ainda tinham de contar com os azulejos brancos fez toda a diferença no desfecho final do problema. Assim, seguiram corretamente uma estratégia parecida com a do grupo 1 e para além disso, consideraram todos os elementos do problema respondendo acertadamente à questão.

4.2. Reflexão acerca da classificação obtida na ficha de problemas

É importante perceber até que ponto os alunos beneficiam de uma avaliação que considera todas as fases da resolução de um problema, em detrimento de uma avaliação que considera apenas o resultado final obtido. Vejamos o seguinte gráfico:

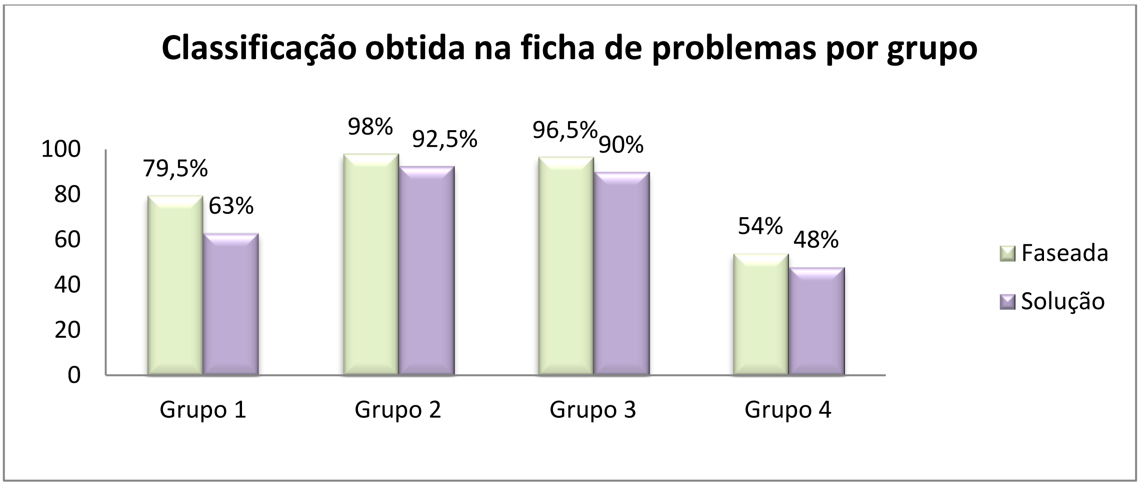


Gráfico 1 – Classificação obtida na ficha de problemas por grupo

Observando o gráfico acima verificamos que todos os grupos beneficiaram com a avaliação faseada dos problemas. No caso do grupo 1 a diferença é bastante clara (16,5%) e no caso do grupo 4 passamos de um resultado negativo para um resultado positivo. É de notar que esta diferença torna-se cada vez mais significativa se o grupo tiver mais falhas durante resolução dos problemas, ou seja, a ideia será rentabilizar aquilo que os alunos conseguem fazer com alguma qualidade e premiá-los por isso, nem que seja a fase inicial (a interpretação do problema).

Se na avaliação considerarmos o peso do resultado da ficha, mais a cooperação e o contributo individual na resolução de problemas, ao invés de considerarmos apenas o peso do resultado da ficha, observamos algumas diferenças. Tendo em conta que a cooperação leva ao desenvolvimento de competências sociais e atitudes, é importante avaliá-la, já que segundo Abrantes, Matos e Ponte (1998, pp. 81-82) citando Abrantes et al. (1997) “mais do que trabalhar num grupo, aprende-se a trabalhar em grupo”. Naturalmente, esta forma de avaliação irá beneficiar os alunos com mais dificuldade, já que permite que estes tenham o mesmo resultado que o grupo obtiver na ficha, mas, por outro lado, esta avaliação será mais justa, visto que, considera aquilo que o aluno cooperou com os outros e a forma como trabalhou para o grupo (contribuição individual). Uma avaliação em que apenas se considere o que o grupo produziu, será claramente injusta, isto porque, existem assimetrias na forma como cada aluno trabalha, pelo que, não será correto colocá-los no mesmo patamar. Como refere Porfírio (1993) num estudo feito com alunos do 7º ano de escolaridade, o trabalho de grupo permitiu que alunos mais fracos conseguissem se envolver mais nas tarefas, porém, alguns deles não conseguiram deixar de ser letárgicos. Isto revela que há diferenças de produtividade entre os elementos do grupo pelo que há que valorizar aqueles que contribuem mais para a resolução dos problemas. O gráfico abaixo traduz a produtividade de cada grupo, em termos de resultado na ficha de problemas versus o resultado obtido através de uma ponderação entre a ficha de problemas, a cooperação e o contributo individual para o grupo. O valor obtido da ponderação supracitada, vem da média obtida dentro do grupo, que comparado com a classificação da ficha é francamente menor nos grupos que tiveram resultados mais baixos. Este resultado explica-se pelo facto de haver nos grupos, alunos que não foram tão cooperantes ou que contribuíssem tanto como os seus colegas de grupo, pelo que foram penalizados. Esta forma de avaliar, mais uma vez, constitui uma oportunidade para que os alunos com maiores dificuldades, que embora não tenham tão bons resultados na resolução da ficha de trabalho quanto os seus colegas, são recompensados pelo seu esforço, dedicação e contributo como é exemplo o grupo 4 no gráfico seguinte:

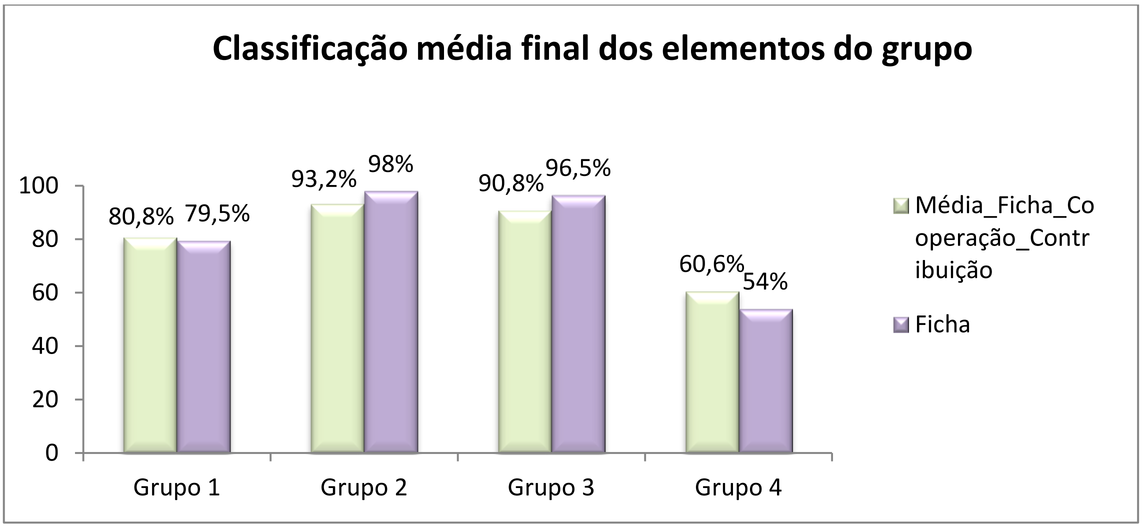


Gráfico 2 – Classificação média final dos elementos do grupo

Se quisermos olhar com maior pormenor podemos verificar a variação das classificações do grupo 4 no seguinte quadro:

Alunos (grupo 4)	Classificação da ficha de problemas (70%)	Cooperação (15%)	Contribuição individual (15%)	Classificação Final
Aluno 1	54%	75%	75%	60,3%
Aluno 2	54%	75%	80%	61,1%
Aluno 3	54%	75%	75%	60,3%

Quadro 1 – Classificação pormenorizada dos elementos do grupo 4 nos diferentes parâmetros

No quadro acima, verificamos que mesmo que o resultado na ficha de problemas não tenha sido de "encher o olho", os alunos viram o seu empenho e cooperação classificados, ou seja, estes elementos foram também alvo de avaliação, pelo que constitui um fator motivador para que da próxima vez sintam o desejo de fazer mais e melhor. Mais uma vez, fica aqui bem patente que avaliar o que os alunos sabem em consonância com o que podem dar de si aos outros, é algo que os agrada e permite ao professor criar em si certezas de que deu um passo em frente em tornar mais clara a subjetividade da avaliação.

4.3. Entrevista aos alunos acerca da resolução de problemas e sua avaliação

Depois de ter trabalhado a ficha de problemas com os alunos e dos mesmos estarem bem conscientes dos parâmetros de avaliação utilizados, foi realizada uma entrevista para analisar o seu sentimento perante toda esta realidade. Será pois importante perceber se os alunos gostam de resolver problemas em grupo, quais os seus benefícios em termos de partilha de ideias e das aprendizagens e saber o que sentem sobre esta forma de avaliação. De seguida são apresentados excertos de algumas dessas entrevistas aos alunos, cujo guião se encontra em anexo. É importante referir que apesar de seguir o guião nas questões colocadas, foram colocadas outras perguntas conforme a necessidade impunha, sendo assim uma entrevista semi-estruturada (Bogdan e Biklen, 1994). Note-se que foram escolhidos, um aluno de cada grupo, com diferentes performances em termos matemáticos, no sentido de perceber se a tendência de resposta era muito díspar de um caso para o outro, ou seja, verificar se o facto de um aluno ter melhores resultados à disciplina relativamente ao outro, irá influenciar as resposta dadas na entrevista.

Entrevista ao Paulo e Luísa

> **Professor:** Sentiu dificuldade na resolução da ficha de trabalho?
>
> **Paulo:** Não muito…
>
> **Paulo:** Senti mais dificuldade na pergunta 9 e na 6. Na 6 porque não consegui perceber muito bem o problema e na 9 porque estava a multiplicar 22 vezes 3 mas não sabia que era para somar mais 2.
>
> **Luísa:** Senti algumas dificuldades nas perguntas 1 e 6.Porque não as consegui perceber muito bem, na 6 foi algo diferente daquilo que costumamos fazer e na 1 porque é difícil formular um problema.

Foi claramente notório que o problema que trouxe mais dificuldades aos alunos foi o da análise de uma conjectura. Os alunos têm dificuldade em compreender como é que podem a partir de um caso particular, chegar à conclusão que a conjetura não é válida. De acordo com trabalho de Junqueira (1995) referido, por Abrantes, Matos e Ponte (1998) a maioria dos seus alunos levou muito tempo a perceber qual o sentido de uma justificação formal para as suas generalizações. Pela sua complexidade, os alunos precisam de um feedback e uma inquirição mais frequente por parte do professor, como atesta um trabalho de Saraiva (1992) aludido por Abrantes, Matos e Ponte (1998). Sem qualquer apoio, os alunos têm a tendência a deixar o trabalho incompleto ou até mesmo desistir de resolvê-la. A formulação de um problema foi outra questão que trouxe algumas dificuldades aos alunos, já que é uma actividade que estão pouco habituados (os alunos estão habituados a resolver problemas e não a formulá-los. Pelo facto deste tipo capacidade estar pouco desenvolvida, os alunos sentem-se alguma insegurança e por isso, na maior parte das vezes, formulam problemas simples, por vezes sem sentido. A tendência é, tal como verificado por Porfírio (1993), construir problemas muito semelhantes àqueles que já resolveram anteriormente. Assim, este tipo de tarefas devem ser introduzidas desde muito cedo para que os alunos se habituem a formular problemas e a verificar se uma determinada conjectura apresenta argumentos válidos ou inválidos.

Professor: Que acha deste tipo de atividade, resolver problemas em grupo?

Paulo: Gosto muito! É muito interessante.

Luísa: Acho que é bom para nós também chegarmos a um consenso entre o grupo

Os alunos gostam de trabalhar em grupo, embora, por vezes, haja algum desacordo aquando da constituição dos grupos de trabalho, como é atestado por Porfírio (1993) citada por Abrantes, Matos e Ponte (1998), em que muitos dos alunos "manifestavam agressividade em relação aos colegas e uma forte dependência da professora para ultrapassar as dúvidas que surgiam" (p. 80). Passada esta fase, os alunos, tal como refere Santos (1996) citada por Abrantes, Matos e Ponte (1998, p. 196), "revelam simultaneamente um grande espírito de competição entre os grupos e uma grande colaboração no interior do grupo". Facilmente se percebe que o trabalho de grupo estimula a troca de ideias entre os elementos do grupo, cria-se assim, uma dinâmica de aprendizagem diferente daquela vista em aulas tradicionais, em que o aluno aprende através do método expositivo. O trabalho de grupo favorece a persistência e o espírito crítico na resolução de problemas, assim como melhora a criatividade, num domínio tão importante como a formulação de problemas, algo que não é tão evidente quando se trabalha individualmente. Por outro lado, o trabalho de grupo melhora claramente a participação e aprendizagem dos alunos mais fracos, na medida em que a discussão das ideias no grupo torna-os mais confiantes e permite-lhes perceber a forma de pensar dos seus pares, beneficiando-lhes a aprendizagem (Porfírio, 1993). Este facto é bastante evidente no excerto da entrevista abaixo descrita:

Professor: Acha que é benéfico o trabalho de grupo para a aprendizagem?

Paulo: Sim.

Luísa: Sim! Porque assim podemos trocar ideias e ver se as ideias fazem sentido.

Professor: Acha que aprende mais em grupo com a partilha e troca de ideias?

Paulo: Eu acho que sim porque assim posso aprender outras coisas com os meus colegas.

Luísa: Sim, porque quando tenho dificuldades nos problemas os meus colegas ajudam-me até eu conseguir perceber.

Professor: Então sente-se mais confiante em partilhar as suas ideias em grupo?

Paulo: Sim, assim não existe tanto medo de errar.

Luísa: Sim, sinto-me mais à vontade para falar das minhas ideias.

No que concerne à avaliação, os alunos foram unânimes em considerar que beneficiam de uma avaliação que considera todas as fases de resolução (em detrimento de apenas considerar-se a solução final). Esta forma de avaliar traz benefícios ao nível da classificação final, obtida na resolução de problemas e um aluno que tenha bons resultados será um aluno mais motivado e confiante. É de notar que, se um aluno tiver mais cuidado na resolução de problemas, tentando respeitar todas as fases inerentes aos mesmos, naturalmente, cometerá menos erros porque procurará se manter mais concentrado na tarefa. Os alunos estão perfeitamente conscientes deste facto como se verifica no diálogo abaixo:

Professor: Relativamente à avaliação dos problemas, acha mais justa uma avaliação em que se considera todas as fases da resolução ou aquela em que se valoriza apenas a solução final?

Paulo: É mais justo avaliar todas as fases da resolução dos problemas porque assim mesmo se nos enganarmos na resposta final pelo menos ganhamos uns pontinhos nas outras partes.

Luísa: É mais justo avaliar todas as fases… Porque se tivermos a resposta errada e os cálculos certos podemos ganhar mais pontos… desde que os cálculos façam sentido.

Professor: Sabendo que todas as fases da resolução do problema serão alvo de avaliação toma mais cuidado ao resolver o problema?

Paulo: Sim.

Luísa: Sim, vamos ter mais cuidado para não nos enganarmos.

Professor: Sendo assim, acha que com este método tem mais hipótese de obter melhores resultados?

Paulo: Sim porque vamos nos concentrar em todos os passos da resolução e assim há menos hipóteses de nos enganarmos na resposta.

Luísa: Sim, porque ao nos esforçarmos para não nos enganarmos durante a resolução dos problemas, mais depressa o resultado final será correto.

5. Considerações finais

5.1. O trabalho de grupo e a resolução de problemas

A maioria dos estudos acerca da resolução de problemas, é realizado numa dinâmica de pequenos grupos, porque esta metodologia traz claramente melhores resultados quando comparado com o trabalho individual. No âmbito de uma experiência levada a cabo pelo projecto MAT_{789}, Abrantes, Matos e Ponte (1998) citando Abrantes et al. (1997) referem o trabalho em pequenos grupos, no que concerne à resolução de problemas, "não era uma metodologia possível mas sim uma forma de trabalho insubstituível".

Os alunos desta turma, , gostam de trabalhar em grupo e esse método de trabalho traz-lhes confiança. O trabalho de grupo é uma metodologia compatível com a resolução de problemas, já que se cria um bom ambiente para a aprendizagem que agrada tanto ao professor como o aluno (Abrantes, Matos e Ponte, 1998). Esse agrado ficou bem patente na entrevista, levada a cabo com alguns alunos desta turma, com comentários do tipo "gosto muito" e "sinto-me mais à vontade para falar das minhas ideias". O trabalho de grupo permitiu a troca de ideias entre os diferentes elementos, beneficiando a aprendizagem e estimulando a comunicação matemática. Este método de trabalho, tal como referido na entrevista, minimizou os constrangimentos sentidos pelos alunos, causados pela exposição de uma ideia à turma quando não existe a certeza (ou pelo menos quando o aluno não se sente seguro) da sua fiabilidade, ou seja, os alunos sentiram-se mais seguros ao exporem uma ideia à turma depois de esta ter sido discutida no seio do grupo. O trabalho de grupo é gerador de diversas opiniões, que serão trabalhadas até todos se sentirem satisfeitos com a solução apresentada, por outro lado, o trabalho individual não permite esta dinâmica, sendo que, o aluno ao trabalhar sozinho terá de chegar por si próprio às soluções sem qualquer outro suporte. Para além disto e mais importante, o trabalho de grupo permite a integração, já que os alunos mais fracos se sentirão mais à vontade para poderem expor aquilo que sabem ou aquilo que perceberam do problema, dando também eles a sua contribuição para o grupo. Naturalmente, os alunos mais fracos, para além das dificuldades ao nível do seu conhecimento matemático, mostram mais dificuldades ao nível da comunicação oral e escrita. Pela observação, verifiquei que estes raramente se manifestam ao nível de trabalho de turma, pelo que, o trabalho de grupo apresenta-se como uma oportunidade de melhorar a sua confiança e eventualmente os seus resultados. Abrantes, Matos e Ponte (1998) referindo-se a um estudo realizado por Joana Porfírio (1993), indicam que a resolução de problemas, em particular a formulação de problemas, provocou nos alunos um grande entusiasmo e que motivavam grandes discussões quando trabalhavam em pequenos grupos. Os autores referem ainda, que no decurso da investigação acima referida, concluiu-se que o trabalho em pequenos grupos foi uma estratégia adequada e que apesar de algumas dificuldades iniciais, os alunos organizaram-se e discutiram em grupo as tarefas apresentadas. Na turma, esta forma de trabalho traduziu-se positivamente, no que se refere à maior persistência durante a realização das tarefas e um envolvimento mais vincado por parte dos alunos mais fracos. Os autores supracitados frisam ainda que "o trabalho em pequenos grupos é uma metodologia consistente com os objetivos associados à resolução de problemas, suscetível de ajudar a criar um ambiente que agrada aos alunos e ao professor" (p.82, 1998). Considero que, esta forma de trabalho, reveste-se de uma oportunidade de alargar a forma de avaliar, já que permite uma avaliação simultânea da cooperação dos elementos do grupo e a contribuição individual na resolução dos problemas, como veremos mais adiante. Por todas estas razões, é claramente uma mais-valia o trabalho em grupo em detrimento do trabalho individual em ambiente de resolução de problemas, pelo menos numa fase inicial.

5.2. As fases da resolução de problemas e a avaliação

O impacto de uma avaliação faseada (avaliação que tem em conta as várias fases da resolução de problemas), na resolução de problemas é deveras substancial, como vimos nos gráficos e tabelas do ponto 4.2., na medida em que, permite um aumento na pontuação dos alunos em cada um dos problemas. Esse aumento vem do facto de se espartilhar a cotação de um problema pelas várias fases da sua resolução, o que leva a que o aluno apenas seja penalizado na "fase" em que cometeu o erro e não se focalize apenas a solução. Como indica Kilpatrick (1991), a avaliação da resolução de problemas não se pode centrar na busca de uma solução que seja satisfatória a nível pessoal, mas sim, na descrição por extenso de uma solução que seja consensual. Este sistema permitiu, que não só se aproveitasse ao máximo o que o aluno ou grupo de alunos desta turma produziu matematicamente ao resolver um problema, como para além disso, possibilitou que os mesmos prestassem mais atenção a todas as fases envolvidas na resolução, tendo um maior cuidado para não cometer erros durante o processo. Foi possível observar uma maior resiliência, por parte dos alunos que procuraram, por vezes, sem conseguir chegar à solução, implementar uma estratégia, ao invés de deixar a resposta em branco como habitualmente se verificava. Abrantes, Matos e Ponte (1998) corroboram com o supracitado mencionando que "(…) o trabalho em pequenos grupos favoreceu claramente a persistência dos alunos na procura de estratégias adequadas (…)" (p. 80). Os alunos discutiram com maior frequência as suas ideias, pensando passo a passo o problema e solicitaram com menos frequência a presença do docente, sendo este facto igualmente observado por Porfírio (1993) num dos seus estudos. Quanto mais os elementos do grupo cooperaram e contribuíram (a cooperação revelou-se fundamental nas tarefas em que requeriam maior criatividade (Porfírio, 1993)), contornando as resistências à discussão inerentes à condição humana (alguns do alunos mostravam um comportamento agressivo em relação aos seus pares (Porfírio, 1993)), melhor foi a qualidade do seu trabalho. Pelo que, se os alunos sentirem que estão a ser avaliados segundo estes parâmetros, intensificarão os seus esforços para que as discussões sejam mais profícuas e procurarão participar ativamente na busca da melhor estratégia para a resolução dos problemas (Abrantes, Matos e Ponte, 1998).

Assim, serão claros os benefícios no que se refere aos índices de motivação e entusiasmo de cada vez que os alunos tiverem que ser submetidos a este tipo de tarefa, porque se sentirão capazes de fazer mais e melhor. Isto, traduzir-se-á, eventualmente, numa maior autonomia e por fim confiança para resolver individualmente os problemas.

5.3. A aprendizagem da matemática e a avaliação da resolução de problemas

A resolução de problemas, como uma das componentes da avaliação dos alunos, poderá se revelar muito positiva. Vejamos, se os alunos resolverem fichas de problemas em grupo, permitirá que os mesmos, principalmente aqueles com maiores dificuldades, beneficiem da ajuda dos seus pares na resolução e aprendam através da partilha de ideias (Porfírio, 1993). Naturalmente, a maioria dos alunos da turma conseguiu fazer progressos, mesmo que ligeiros, no que concerne à capacidade de resolver problemas e isso trouxe-lhes melhorias ao nível da aprendizagem e consequentemente dos seus resultados. Para além disso, temos de ter consciência que todos os alunos (com maiores ou menores dificuldades), ao resolverem problemas estão a desenvolver a capacidade de fazer matemática, pois a criatividade de cada um permitirá que cheguem à solução por diferentes caminhos, sendo que desta forma os alunos aprendem criando. Assim, se os problemas forem trabalhados de forma consistente, naturalmente, os resultados e autonomia neste tipo de tarefa irão melhorar (Abrantes, Matos e Ponte, 1998). Ora, se num momento de avaliação, como um teste ou uma questão aula colocarmos alguns problemas, será mais uma oportunidade dos alunos tirarem bons resultados e assim mantém-se uma consistência avaliativa, porque estamos a avaliar uma capacidade trabalhada ao longo do ano. A resolução de problemas poderá ter algum peso também na avaliação não formal, como os trabalhos de casa ou fichas formativas. Aliadas a estas duas componentes de avaliação, poderão associar-se outras à resolução de problemas, como a atitude, a autonomia e a persistência como foi o caso dos alunos desta turma.

Referindo-se a Cockcroft, Abrantes e Leal (1991) indicam que avaliação deve ser registada e independentemente da forma de registo, esta deverá sempre incluir a perseverança e a capacidade de usar os conhecimentos na resolução de problemas. Tal como referido acima pelos autores, todas estas componentes poderão ser alvo de observação e registo pelo professor em contexto de sala de aula. Assim, os alunos foram sujeitos a um registo permanente, ao longo do ano letivo, com o objetivo de ver como evoluíam em termos de resolução de problemas, para além disso, com esse registo obtive mais algumas informações que me permitiram alargar o leque avaliativo. Esse registo também permitiu-me ajustar os tipos de problemas, no sentido de trabalhar as áreas da matemática que careciam de mais atenção e dessa forma melhorar a aprendizagem nessas mesmas áreas.

Pinto (1991) refere que tudo é avaliar, logo se é fundamental que a capacidade de resolver problemas seja desenvolvida, aproveitemos a oportunidade de sujeitá-la a uma avaliação que seja o mais globalizante possível para que traga uma maior justiça. Tudo o que envolva a resolução de problemas poderá ser sujeita a uma avaliação diversificada e no caso desta turma teve claros benefícios para os alunos, não só ao nível do desenvolvimento intelectual (nomeadamente o raciocínio matemático), como em termos de resultados finais.

5.4. Reflexão final

Quando me perguntam o que foi realizar este trabalho, não consigo deixar de pensar que não podia deixar de fazê-lo. Penso que mais tarde ou mais cedo, iria sentir necessidade de investigar, de pensar o que é este processo de resolver problemas, as razões que levam os alunos a terem dificuldades nesta tarefa e os constrangimentos associados à sua aplicação em sala de aula. Acima de tudo, senti-me impelido a tentar compreender, como poder usar a avaliação em benefício das aprendizagens dos alunos no processo de resolução de problemas. A busca por estas respostas encontrou solo fértil neste mestrado, no qual vi, uma oportunidade de poder aprender e melhorar a minha prática pedagógica, pois ambiciono fazer mais e melhor pelos meus alunos.

Esta investigação fez-me reflectir sobre muitos assuntos que se prendem com a avaliação e a resolução de problemas, trivialidades para algumas pessoas que não pensam acerca da sua importância, mas que tiveram um impacto brutal na minha forma de lidar com estes temas. Aprendi que a resolução de problemas permite alargar o espectro avaliativo, já que constitui a oportunidade de trazer mais justiça a uma avaliação manietada, talvez, subjugada aos tradicionais testes de avaliação.

É já longa a tradição das dificuldades inerentes à resolução de problemas, não só no nosso país, como em outros países do mundo. Existe muita investigação acerca deste assunto e muito se tem trabalhado (incluindo a nível curricular) para que haja mudanças nesta realidade. A verdade é que os avanços têm sido lentos por diversas razões, mas principalmente, por se achar que trabalhar problemas em contexto de sala de aula é algo que consome muito tempo e é difícil de concretizar (pelas mais variadas razões como o fraco aproveitamento da turma, a indisciplina, a extensão do currículo, a falta de materiais etc.). Ainda assim, apesar do desafio que a tarefa coloca, considero que é importante que os alunos resolvam problemas desde tenra idade e que tenham uma avaliação que contemple esta área. Repare-se que, não possível, e passe a analogia, chegar à meta sem antes percorrer o caminho, ou seja, não podemos estar à espera que os alunos saibam resolver problemas sem que antes os pratiquemos e que falhem a solução inúmeras vezes. Errar faz parte desse caminho e temos de errar tantas vezes quanto for necessário, até estreitamos a nossa via para o sucesso. Não convém que nos esqueçamos, que do erro muitas vezes surge a solução para outros problemas. Mas, para errarmos é preciso que seja dada essa oportunidade, disponibilizando algum tempo das aulas (quanto baste) para que se trabalhe os problemas. Para além disso, se queremos diversificar a avaliação do aluno, a resolução de problemas é uma componente que deve ser considerada. Se os alunos forem avaliados de uma forma diversificada traremos mais justiça na sua classificação, tendo por consequência uma maior motivação por parte destes. A redefinição da avaliação do aluno e em particular da avaliação da resolução de problemas, é um caminho que está aberto a todos os docentes e estes devem-no percorrer porque é sem dúvida gratificante. As portas encontram-se abertas para que tornemos avaliação do aluno mais dinâmica e variada, para que o mesmo sinta que esta forma de avaliar é a mais justa e que é reveladora do seu trabalho e empenho. Convictamente afirmo, que este estudo elevou as minhas certezas acerca da aposta na resolução de problemas, como uma componente indissociável de uma educação matemática integral. Os benefícios associados à resolução de problemas, como o desenvolvimento do raciocínio, da lógica e da abstração tornam os alunos mais competentes, não só na matemática como noutras áreas e no desempenho de uma futura profissão. Estes alunos serão mais atentos e mais críticos numa sociedade cada vez mais exigente. Terão uma capacidade desenvolvida que lhe permitirá realizar as escolhas corretas e se de integrarem num mundo profissional que quer o melhor entre os melhores

No decurso da minha investigação houve duas questões que emergiram que não estavam, inicialmente, no âmbito da mesma Considero que essas questões, pela sua pertinência, deveriam ser alvo de alguma reflexão. Ao avaliarmos a resolução de problemas pretendemos aferir as valências do desempenho dos alunos nessa área, pelo que faz todo o sentido, aprender mais acerca de como podemos operacionalizar a avaliação da resolução dos problemas. Consubstanciando o atrás referido, será igualmente importante perceber, qual o lugar e que impacto pode ter a resolução de problemas na avaliação dos alunos. Seguidamente faço uma pequena reflexão contemplando estes dois assuntos.

5.4.1. Operacionalizar a resolução de problemas

Ao contrário do que se possa pensar, a resolução de problemas poderá ter vários domínios no que se refere à sua avaliação. De acordo com Abrantes e Leal (1991) a aprendizagem da matemática deve ser avaliada de forma a que se abarque a multiplicidade de atividades e a riqueza dos objetivos que a disciplina oferece. Em primeiro lugar, quando se pretende que o aluno resolva problemas não devemos focar apenas um tipo problemas, mesmo que o trabalho seja feito em grupo. A diversificação de problemas permite que os alunos tenham a oportunidade de "brilhar" nas áreas em que se sentem mais à vontade. Este aspeto é corroborado por Abrantes e Leal (1991, pp. 70-71) que referem que "os alunos são diferentes uns dos outros (…) cada tipo de atividades privilegia este ou aquele aspeto", por isso "o recurso a formas de trabalho diversificadas é imperioso". Na maioria das vezes, dá-se primazia aos problemas que envolvem algoritmos ou longos cálculos, esquecendo áreas que são importantes e que não lhes é dado o merecido destaque, como o uso de tecnologias (por exemplo, o computador ou calculadora), os problemas que envolvem a visão espacial ou até mesmo problemas que dêem ênfase ao raciocínio lógico. Como refere Matos (2008), segundo a perspetiva do aluno, a aprendizagem é basicamente uma mecanização dos conteúdos transmitidos pelo professor para depois replicá-los nos testes. Mais, indica que o ensino das escolas é dominado pela aprendizagem de alguns objetivos cognitivos como a memorização de factos, técnicas de resolução exercícios tipo e algoritmos. Barbosa, Palhares e Vale (2008), acrescentam que o insucesso dos alunos na resolução de problemas deve-se, à grande importância dada aos algoritmos em detrimento de atividade que envolvam problemas não rotineiros e o raciocínio.

Evidentemente, que quanto mais diversos forem os problemas mais os alunos irão beneficiar, porque a avaliação incidirá sobre problemas em que os alunos se sentem mais à vontade e noutros nem tanto, trazendo uma maior justiça no campo avaliativo. Um problema poderá ser decomposto em diversas fases, cada uma com uma classificação associada, permitindo que o aluno consiga pontuar mesmo se não tiver a solução final correta, ou seja, valoriza-se o percurso e não apenas a meta (solução). No quadro seguinte apresenta-se uma sugestão de como um problema poderá ser classificado nas suas diferentes fases.

Problema 1 (8 pontos)				
Correta interpretação do problema	Definição de uma estratégia adequada	Resolução (aplicação da estratégia)	Solução apresentada	Verificação/justificação da adequabilidade da solução*
Pontuação				
2	2	2	1	1

* Caso um aluno chegue a uma solução mas que considere (e justifique) que a mesma não faz sentido tendo em conta a natureza do problema.

Quadro 2 – Sugestão de classificação de um problema

Naturalmente, estes parâmetros seriam adaptados mediante a forma de resolução dos alunos. Por exemplo, se um grupo ou aluno resolve corretamente um exercício com a respetiva resposta, mas não verificou se a solução era a adequada terá a cotação toda. Por outro lado, se um aluno interpreta corretamente, define uma estratégia adequada e resolve bem o problema, mas solução apresentada não é a correta, o mesmo será penalizado neste parâmetro. A avaliação da resolução de problemas poderá ser ainda mais particularizada, se para além de considerarmos a resolução dos problemas em si, termos também em conta a cooperação dos elementos do grupo e a contribuição individual de cada um dos integrantes para a resolução dos problemas. No trabalho de grupo, as dúvidas individuais, devem postas em debate pelos elementos do grupo e o trabalho produzido da cooperação entre os alunos deve ser estimulado (Porfírio, 1993). De repente abre-se uma oportunidade de avaliar domínios que são bastante significativos para a qualidade do trabalho do grupo, a cooperação e a contribuição de cada aluno para a resolução dos problemas.

Segundo Abrantes e Leal (1991), deve haver a preocupação de diversificar as formas de avaliação, no sentido de abarcar áreas como a escrita, a oralidade, os trabalhos de grupo ou individuais. Tendo em conta que algumas destas áreas favorecem mais a resolução de problemas, não devem ser descuradas, a avaliação das atitudes como o empenhamento, a relação como os outros e a motivação.

Deverá pois, imperar o bom senso, tendo em conta a realidade de cada turma na atribuição dos pesos de cada um dos parâmetros. No caso particular da turma sobre a qual incidiu o estudo, a ponderação sobre os diferentes parâmetros foi distribuída da seguinte forma:

Ficha de problemas	Cooperação dos elementos do grupo	Contribuição individual para o grupo	Nota Final
70%	15%	15%	100%

Quadro 3 – Sugestão de percentagem atribuída a cada parâmetro de avaliação

Os quadros seguintes evidenciam a forma como poderá ser classificada a cooperação dos elementos do grupo e a contribuição individual para o grupo.

Cooperação (Percentagem)	Forma de cooperação	Nível correspondente
0% - 19,4%	Não cooperou / Cooperação quase inexistente	1
19,5% - 49,4%	Cooperação fraca / insuficiente	2
49,5% - 69,4%	Cooperação satisfatória. Revela alguma solidariedade para com os colegas.	3
69,5% - 89,4%	Boa cooperação / Revela solidariedade para com os colegas	4
89,4% - 100%	Excelente cooperação / Revela muita solidariedade para com os colegas	5

Quadro 4 – Sugestão de classificação do nível cooperativo dos alunos

Contribuição individual (Percentagem)	Forma como o aluno pode contribuir individualmente para o grupo	Nível correspondente
0% - 19,4%	Não contribuiu. Não ajudou ou ajudou o grupo de uma forma pouco significativa.	1
19,5% - 49,4%	Ajudou o grupo de uma forma ténue ou em poucos problemas.	2
49,5% - 69,4%	Esforçou-se um pouco para ajudar o grupo. Contribuiu para a resolução de alguns problemas	3
69,5% - 89,4%	Esforçou-se para ajudar o grupo. Contribuiu para a resolução de quase todos os problemas.	4
89,4% - 100%	Esforçou-se muito pelo grupo. Contribuiu ativamente para a resolução de todos os problemas.	5

Quadro 5 – Sugestão de classificação da contribuição individual dos alunos para o grupo

É claro que a avaliação poderá ainda considerar a comunicação matemática na forma oral e escrita, o que mostra bem a dinâmica que a resolução de problemas “goza” e que se reveste de mais uma oportunidade para utilizarmos este instrumento de avaliação com mais frequência. Esta ideia é partilhada por Barbosa, Palhares e Vale (2008) referindo que, a comunicação matemática deve ser focada com mais frequência em contexto de sala de aula. Por todas as razões acima descritas, não há qualquer razão para termos uma avaliação focada apenas na resolução e na solução de um problema, esquecendo componentes importantes como a cooperação e o trabalho individual de cada aluno dentro do grupo.

5.4.2. A riqueza avaliativa da resolução de problemas

Muitas das vezes, a resolução de problemas é colocada de lado pelos docentes, justificada pela falta de tempo para os trabalhar, porque há um Programa Nacional do Ensino Básico que é muito extenso e que tem de ser escrupulosamente cumprido. Abrantes, Matos e Ponte (1998), referindo-se a um estudo de Canavarro e Ponte (1994), mencionam que uma professora do 3º ciclo e secundário, preocupa-se em apenas cumprir o programa, justificando que não pode perder tempo com "brincadeiras" (referindo-se à resolução de problemas). De facto, o tempo é escasso quando temos uma série de conteúdos programáticos que têm de ser trabalhados e parece que nunca vai dar tempo. Mas será que não possível encaixar "a resolução de problemas" algures no currículo e aproveitar esse facto para ter mais um elemento de avaliação? É claro que é possível! Os problemas podem ser trabalhados e avaliados de diversas formas como já vimos. Podemos usar um problema para introduzir um conteúdo programático, ou, semanalmente formar grupos para resolverem um problema durante alguns minutos e depois discuti-lo em grande grupo (aqui poderá ser avaliado o trabalho do grupo à semelhança do que anteriormente foi falado e ainda o desembaraço na comunicação oral ou escrita matemática, que tal como refere Kilpatrick (1991) poderá ser diversa, porém a avaliação da resolução dos problemas deverá focar-se nessa comunicação). Semanalmente ou quinzenalmente, poderá ser enviado para casa um problema para ser realizado individualmente, a pares ou em pequenos grupos (se for em pequenos grupos as tarefas poderão ser diferentes de grupo para grupo) e esse trabalho corresponder a uma parte da percentagem reservada ao trabalho de casa. Os problemas poderão ser integrados de uma forma sustentada nas avaliações periódicas, como questões aula ou fichas de avaliação (em vez de insistir em apenas exercícios rotineiros e diretos, próprios dos testes normalizados como referido por Kilpatrick (1991)), visto que os primeiros podem relacionar uma série de conteúdos já estudados. Abre-se também espaço para que se resolva fichas de trabalho em grupo ou individualmente, substituído algumas das tradicionais questões aula, promovendo assim a autonomia. Mais, a resolução de problemas poderá ser ainda de carácter lúdico com a criação do “problema do mês”, cuja participação permitiria melhorar componentes como a atitude e a participação. Há toda uma série de formas de integrar os problemas na avaliação do aluno e por isso há que começar a dar os passos necessários para essa realização. Claro que há muitos fatores a considerar, a começar pela turma que lecionamos, mas, se aos poucos formos trabalhando os problemas fazendo sempre notar os benefícios que deles advêm, como a melhoria na autonomia, raciocínio, resultados e eventualmente na classificação final, os alunos começarão também a tomar consciência da sua importância.

6. Referências Bibliográficas

Abrantes, P. (1988). *Viagem de ida e volta.* Lisboa: APM.

Abrantes, P. (1989). Um (bom) problema (não) é (só)... *Educação e Matemática, 8*, 7-10 e 35.

Abrantes, P., &Leal, L. C. (1991). Avaliação da aprendizagem / Avaliação na aprendizagem. In H. M. Guimarães, L. C. Leal, P. Abrantes (org.), *Avaliação: uma questão a enfrentar. Actas do seminário sobre avaliação* (pp.69-81). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Abrantes, P., Matos, J., &Ponte, J. (1998). Investigação em educação matemática – Implicações curriculares. Coimbra: Instituto de Inovação Educacional.

Amaro, G., Borralho, A. & Fernandes, D. (1994). Processos de resolução de problemas: Revisão e análise crítica de investigação que utilizou esquemas de codificação. *In* G. Amaro, A. Borralho, D. Fernandes, (org.), *Resolução de problemas: processos cognitivos, concepções de professores e desenvolvimento curricular* (pp. 35-63). Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Amaro. G., Cardoso, F. & Reis, P. (1994). Terceiro Estudo Internacional de Matemática e Ciências, Relatório Internacional, Desempenho de alunos em Matemática e Ciências:7.º e 8.º anos. Lisboa: IIE.

APM. (1988). *Renovação do currículo de Matemática*. Lisboa: APM

Barbosa, A., Palhares, P., &Vale, I. (2008). Avaliação do desempenho de alunos do 2º Ciclo na resolução de problemas envolvendo padrões. In C. Rodrigues, H. Gomes., L. Santos., L. Menezes (org.), *Avaliação em matemática: Problemas e desafios* (pp.89-100). Viseu: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação.

Barlow, M. (2006). *Avaliação escolar – Mitos e realidades.* Tradução: Fátima Murad. Porto Alegre: Artmed.

Bivar, A., Damião, H., Festas, I., Grosso, C., Oliveira, F., & Timóteo, M. (2013). *Programa de Matemática para o Ensino Básico*. Ministério da Educação e Ciência.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação– Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Brenda, A., Guimarães, F., Guimarães, H., Martins, M., Menezes, L., Oliveira, P., Ponte, J. P., Serrazina, L., & Sousa, H. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Ministério da Educação: DGIDC.

Cabrita, I., Fernandes, M. H. & Leitão, A. (1994). Variáveis de tarefa na resolução de problemas. *In* G. Amaro, A. Borralho, D. Fernandes, (org.), *Resolução de problemas: processos cognitivos, concepções de professores e desenvolvimento curricular* (pp. 93-141). Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Charles, R. (1990). Teacher education and mathematical problem solving: Some issues and directions. In R. Charles & E. Silver (Eds.) *The teaching and assessing of mathematical problem solving.* Reston, VA: Lawrence Erlbaum Associates & NCTM.

Cobb, P., Merkel, G., Wheatley, G., Wood, T., & Yackel, E. (1990).The importance of social interaction in children's construction of mathematical knowledge. In T. J. Cooney (Ed.), *Teaching and learning mathematics in the 1990's* (pp. 12-21).Reston, VA: NTCM.

Delgado, M. J. (1994). Os professores de matemática e a resolução de problemas – Três estudos de caso. In G. Amaro, A. Borralho, D. Fernandes, (org.), *Resolução de problemas: processos cognitivos, concepções de professores e desenvolvimento curricular* (p. 171). Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Dicionário Priberam da Língua Portuguesa. *Dicionário Priberam da Língua Portuguesa* (em linha), 2008-2014, http://www.priberam.pt/DLPO/problema (consultado em 30-12-2013).

Dicionários Porto Editora. *Infopédia Enciclopédia e Dicionários Porto Editora* (em linha), 2003-2014, http://www.infopedia.pt/lingua-portuguesa/classificar (consultado em 30-12-2013).

Fernandes, D., & Vale, I. (1994). Concepções e práticas de dois jovens professores perante a resolução de problemas. *In* G. Amaro, A. Borralho, D. Fernandes, (org.), *Resolução de problemas: processos cognitivos, concepções de professores e desenvolvimento curricular* (pp. 145-168). Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Garcia, A., & Lequain, Y. (2002). *Elementos de Álgebra*. Rio de Janeiro: IMPA (Projeto Euclides).

Kandel, I. L. (1936*).Examinations and their substitutes in the United States.* (Boletim nº 28). New York: Carnegie Foundation for the Advancement of Teaching.

Kilpatrick, J. (1967). *Analyzing the solution of word problems in mathematics*. Ph. D. Thesis, School of Education - Stanford University, United States.

Kilpatrick, J., & Stanic, G. M. (1989).Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. In R. I. Charles & E. A. Silver (Eds.), *The teaching and assessing of mathematical problem solving* (pp. 1-22). Reston, VA: NCTM e Lawrence Erlbaum.

Kilpatrick, J. (1991). Algumas questões na avaliação da resolução de problemas em Matemática. In H. M. Guimarães, L. C. Leal, P. Abrantes (org.), *Avaliação : uma questão a enfrentar. Actas do seminário sobre avaliação* (pp.61-68). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Kroll, D. L., &Lester, F.K. (1990).Assessing student growth in mathematical problem solving. In G. Kulm (Ed.), *Assessing higher order thinking in mathematics* (pp. 53-70).Washington, DC: American Association for the Advancement of Science.

Krulik, S., & Rudnick, J. A. (1987).*Problem solving: A handbook for teachers* (2nd ed.). Boston: Allyn and Bacon.

Lester, F. (1985).Methodological considerations in research on mathematical problem-solving instruction. In E. Silver (Ed.*) Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Lester, F. (1993). O que aconteceu à investigação em resolução de problemas de Matemática? A situação nos Estados Unidos. In D. Fernandes, A. Borralho, & G. Amaro (Eds.), *Resolução de problemas: Processos cognitivos, concepções de professores e desenvolvimento curricular* (pp. 13-34). Lisboa: IIE.

Matos, J. M. (2005). Aprendizagens no Ciclo Preparatório de 1972: um estudo sobre o sucesso da Matemática Moderna. *Educação e Matemática*, Novembro/Dezembro, 7-12.

Matos, J. M. (2006). A penetração da Matemática Moderna em Portugal na revista Labor. *Únión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática,* 5, 91-110.

Matos, J. M. (2008). *A resolução de problemas e a identidade da educação matemática em Portugal.* In B. Gómez, L. Blanco, M. Camacho, R. Luengo, (Eds.), *Investigación en educación matemática XII* (pp. 141-158). Badajoz: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Moreira, L. (1987). A resolução de problemas. *Educação e Matemática 1,* 10-12.

NCTM (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar.* Lisboa: APM e IIE.

Nunes, F., & Tudichum, B. (1989). *Da matemática nos novos programas.* Educação e Matemática, 8, 23-25.

Pinto, J. (1991). Algumas questões sobre a avaliação pedagógica – uma nova cultura de avaliação. In H. M. Guimarães, L. C. Leal, P. Abrantes (org.), *Avaliação : uma questão a enfrentar. Actas do seminário sobre avaliação* (pp.37-40). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Pólya, G. (1957). *How to solve it.* (2nded.). New York: Doubleday.

Pólya, G. (1962). *Mathematical discover*. New York: Wiley.

Porfírio, J. (1993). *A resolução de problemas na aula de Matemática: Uma experiência no 7º ano de escolaridade* (tese de mestrado, Universidade de Lisboa. Lisboa: APM.

Santos, J. P. (1998). *Introdução à Teoria dos Números*. Rio de Janeiro: IMPA (projeto Euclides).

Santos, L. (2002). Auto-avaliação regulada: Porquê, o quê e como? In *Avaliação das aprendizagens: Das concepções às práticas* (pp. 77-84). Lisboa: Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In D. Grouws (Ed.), *Handbook for research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-370). New York, NY: Macmillan.

Schoenfeld, A. (1996). Porquê toda esta agitação acerca da resolução de problemas? In P. Abrantes, L. C. Leal, & J. P. Ponte (Eds.), *Investigar para aprender matemática* (pp. 61-72). Lisboa: APM e Projecto MPT.

Smith, D. E. (1900).*The teaching of elementary mathematics*. New York: Macmillan.

7. Anexos

Anexo 1 – Ficha de problemas

Resolução de problemas

5.ºAno - 2013/2014

Os grupos de trabalho serão avaliados de acordo com os seguintes parâmetros:

- Correta interpretação do problema;
- Estratégia de resolução;
- Resolução;
- Solução apresentada;
- Justificação/adequabilidade da solução.

É importante a colaboração de todos os elementos do grupo, pois a avaliação incidirá sobre o trabalho desenvolvido pelo grupo e sobre a colaboração de cada elemento para a resolução do problema.

Lê atentamente o que pretende o problema. Verifica se a solução obtida é adequada ao problema. Deves deixar registadas todas as estratégias tomadas na resolução dos problemas.

1. Formulação de um problema.

Seis em cada oito dentistas entrevistados recomendam a pastilha elástica Supergum. Elabora uma pergunta, para acrescentar a esta afirmação, de modo a obteres um problema. Em seguida, resolve o problema.

Adaptado de Normas para a Avaliação (1991)

2. Contando degraus.

No prédio onde habita a Sónia há 8 andares. O elevador avariou e a Sónia, que mora no 4.º andar, teve de descer as escadas a pé. Quando já tinha descido 10 degraus, viu que não tinha trazido o chapéu-de-chuva e voltou atrás para buscá-lo. Quando chegou à porta da rua, que ficava ao nível do rés-do-chão, tinha descido um total de 58 degraus. Quantos degraus tem o prédio?

In: Caderno de Tarefas mp.5 matemática para pensar

3. Investigação.

O gerente de um pronto-a-vestir comprou igual número de calças e *t-shirts* para vender. Pagou 2500 € por tudo. Sabendo que cada par de calças custou 80 € e cada *t-shirt* custou 45 €, investiga quantas peças comprou.

In: Caderno de Tarefas mp.5 matemática para pensar

4. À procura de um número.

Observa a seguinte tabela e descobre o número que falta.

In: Caderno de Tarefas mp.5 matemática para pensar

2	9	16
7	15	23
10	26	42
14	32	?

5. Investiga com a calculadora

Indica:

a)dois números pares consecutivos cujo produto seja 624;

b)dois números ímpares consecutivos cujo produto seja 1023;

In: Caderno de Tarefas mp.5 matemática para pensar

6. Foi apresentado ao Rui o seguinte problema: $\frac{2}{5} < ? < \frac{4}{7}$. Ele disse que $\frac{3}{6}$ estava entre $\frac{2}{5}$ e $\frac{4}{7}$. O Professor pediu-lhe que explicasse como tinha obtido a sua resposta e porque pensava que o seu método resultava. O Rui explicou que escolhera 3 para numerador porque 2 < 3< 4 e 6 para denominador porque 5 < 6 < 7. O Rui argumenta que o seu método funciona sempre e apresenta os seguintes exemplos:

a. A fração $\frac{2}{4}$ está compreendida entre $\frac{1}{3}$ e $\frac{3}{11}$.

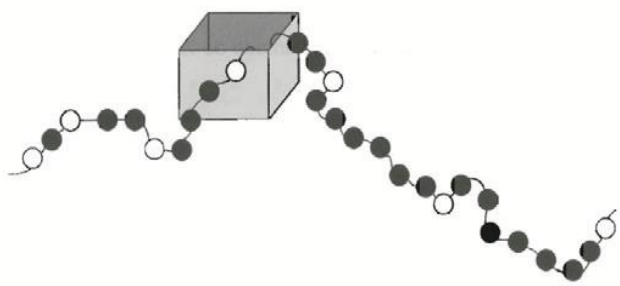
b. A fração $\frac{4}{9}$ está compreendida entre $\frac{2}{5}$ e $\frac{6}{11}$.

Os exemplos do Rui estão corretos? O procedimento funciona sempre? **Explica o teu raciocínio**.

In: Normas para a Avaliação (1991)

7.A Elisa está a fazer um colar com contas brancas e contas pretas, seguindo sempre um esquema inventado por ela. Uma parte do colar está dentro da caixa da figura.

Desenha ou descreve a parte do colar que está dentro da caixa.



In: Prova de aferição, 2.º Ciclo, 2004

8.A Maria vai escolher dois ingredientes diferentes para fazer a sua piza. Pode escolher: azeitonas; cogumelos; ervilhas; frango; milho. Quantos tipos de piza diferentes a Maria pode fazer? Mostra como chegaste à tua resposta.

In: Prova de aferição, 2.º Ciclo, 2009

9. Observa a seguinte sequência de figuras, onde estão empilhados azulejos brancos e cinzentos, segundo uma determinada regra.

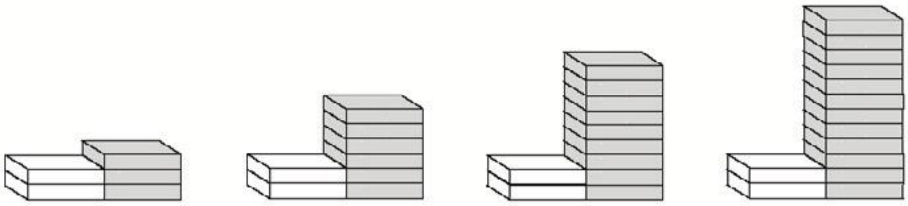


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

9. 1. Indica, a seguir, o número de azulejos de cada cor necessários para construir a figura número 10.

9.1.1.Número de azulejos brancos.

9.1.2.Número de azulejos cinzentos.

9.2. Na sequência acima representada, existirá alguma figura com um total de 66 azulejos? Explica a tua resposta.

Adaptado da Prova de aferição, 3.º Ciclo, 2003

Anexo 2 – Critérios de avaliação detalhados para uso na ficha de observação da resolução de problemas

Utiliza estratégias adequadas à resolução de problemas.
0% – 0,49% - Não usa qualquer estratégia ou usa-as de forma descontextualizada ou insuficiente (em 10 problemas menos de 2 vezes)
0,5% - 0,99% - Utiliza por vezes uma estratégia adequada à resolução do problema (em 10 problemas entre 2 a 4 vezes)
1% - 1,49% - Utiliza muitas vezes uma estratégia adequada à resolução do problema (em 10 problemas entre 5 a 7 vezes)
1,5% - 2% - Utiliza sempre ou quase sempre uma estratégia adequada à resolução do problema (em 10 problemas mais de 7 vezes)

Discute/Justifica processos, ideias e resultados.
0% – 0,49% - Não discute ou discute de forma insuficiente ideias e resultados (em 10 problemas menos de 2 vezes)
0,5% - 0,99% - Discute por vezes processos, ideias e resultados (em 10 problemas entre 2 a 4 vezes)
1% - 1,49% - Discute frequentemente processos, ideias e resultados (em 10 problemas entre 5 a 7 vezes)
1,5% - 2% - Discute sempre ou quase sempre processos, ideias e resultados (em 10 problemas mais de 7 vezes)

Exprime-se de forma clara oralmente e por escrito
0% – 0,49% - Revela muitas dificuldades em exprimir-se oralmente e por escrito (em 10 problemas menos de 2 vezes)
0,5% - 0,99% - Evidencia algumas dificuldades na expressão oral e escrita (em 10 problemas entre 2 a 4 vezes)
1% - 1,49% - Evidencia alguma facilidade na expressão oral e escrita (em 10 problemas entre 5 a 7 vezes)
1,5% - 2% - Evidencia facilidade na expressão oral e escrita (em 10 problemas mais de 7 vezes)

Revela autonomia
0% – 0,49% - Não consegue resolver problemas sem ajuda ou recorre à ajuda do professor com muita frequência. (em 10 problemas menos de 2 vezes)
0,5% - 0,99% - Resolve alguns problemas sem ajuda mas recorre com alguma frequência à ajuda do professor (em 10 problemas entre 2 a 4 vezes)
1% - 1,49% - Resolve a maior parte dos problemas sem ajuda, recorrendo apenas por vezes à ajuda do professor (em 10 problemas entre 5 a 7 vezes)
1,5% - 2% - Resolve todos ou quase todos os problemas sem ajuda e recorre à ajuda do professor em casos pontuais (em 10 problemas mais de 7 vezes)

Sabe trabalhar em grupo
0% – 0,49% - Revela muitas dificuldades em trabalhar em grupo, não interagindo ou interagindo residualmente com os restantes elementos (em 10 problemas menos de 2 vezes).
0,5% - 0,99% - Interage com o grupo mas de uma forma muito incipiente, valorizando mais o trabalho individual (em 10 problemas entre 2 a 4 vezes)
1% - 1,49% - Discute e interage com o grupo na resolução da grande parte dos problemas (em 10 problemas entre 5 a 7 vezes)
1,5% - 2% - Discute e interage sempre, ou, na sua maioria com o grupo, na resolução da grande parte dos problemas (em 10 problemas mais de 7 vezes)

Anexo 3 – Guião da entrevista aos alunos

Guião da entrevista aos alunos

P1 - Sentiu muitas dificuldades na resolução da ficha de trabalho? Se sim porquê?

P2 – Quais foram as questões em que sentiu mais dificuldades? Porquê?

P3 - Que acha deste tipo de atividade, resolver problemas em grupo?

P4 - Gostaria de repetir este tipo de atividade?

P5 - Acha que é benéfico o trabalho de grupo para a aprendizagem?

P6 - Acha que aprende mais em grupo com a partilha e troca de ideias?

P7 - Sente-se mais confiante em partilhar as suas ideias em grupo?

P8 - Acha que a resolução de problemas ajuda a melhorar o raciocínio e as estratégias de resolução?

P9 - Relativamente à avaliação dos problemas, acha mais justa uma avaliação em que se considera todas as fases da resolução ou aquela em que se valoriza apenas a solução final?

P10 - Sabendo que todas as fases da resolução do problema serão alvo de avaliação toma mais cuidado ao resolver o problema?

P11 – Acha que com este método tem mais hipótese de obter melhores resultados?

Anexo 3 – Pedido de autorização dirigido ao Conselho Executivo

Ano letivo 2013/2104

Exmo.(a) Sr.(a) Encarregado de Educação,

No âmbito do Mestrado em Ensino da Matemática no 3º Ciclo do Ensino Básico e Secundário, solicito a sua autorização para a recolha de dados do trabalho desenvolvido pelos alunos na sala de aula. A investigação levada a cabo, tem o objetivo de compreender como avaliação da resolução de problemas contribui para melhorar a aprendizagem da resolução de problemas. Assim, serão utilizados instrumentos para a recolha de dados como a máquina fotográfica, a câmara de filmar e ainda um gravador para se obterem registos do trabalho dos alunos. A recolha dos materiais será feita ao longo do 2º e 3º período nas turmas 1 e 2 do 5º ano. Informo que o material recolhido será apenas utilizado no decurso da investigação, pelo que, será preservado o anonimato dos alunos.

Agradeço desde já a sua colaboração

O professor de matemática | Presidente do Conselho Executivo

__________________________ | ______________________________

✂--✂

Eu, ____ encarregado(a) de Educação), do aluno(a) ______________________________ ______________________________ nº_____ da turma ____ do 5º ano, **autorizo/ não autorizo** (riscar o que não interessa) o meu educando a participar nas filmagens ou entrevistas levados a cabo pelo professor de matemática, no âmbito da sua dissertação de mestrado.

Funchal, ______ Fevereiro de 2014

____

O(a) Encarregado(a) de Educação