

# REM

## **Recursos Didáticos na Aula de Matemática** **Contributos para o processo de ensino e aprendizagem**

RELATORIO DE ESTÁGIO DE MESTRADO

**Sandra Gouveia da Silva**

MESTRADO EM ENSINO DA MATEMÁTICA  
NO 3º CICLO DO ENSINO BÁSICO E SECUNDÁRIO



UNIVERSIDADE da MADEIRA

*A Nossa Universidade*

[www.uma.pt](http://www.uma.pt)

setembro | 2021

**Recursos Didáticos na Aula de Matemática**  
**Contributos para o processo de ensino e aprendizagem**  
RELATÓRIO DE ESTÁGIO DE MESTRADO

**Sandra Gouveia da Silva**

MESTRADO EM ENSINO DA MATEMÁTICA  
NO 3º CICLO DO ENSINO BÁSICO E SECUNDÁRIO

ORIENTAÇÃO  
Sónia Matilde Pinto Correia Martins

*“Travemos, pois, uma luta global contra a iliteracia, a pobreza e o terrorismo, e peguemos em livros e canetas. Eles são as nossas armas mais poderosas. Uma criança, um professor, uma caneta e um livro podem mudar o mundo. A educação é a única solução. Educação em primeiro lugar.”* (Malala Yousafzai, Discurso nas Nações Unidas, 12 de julho de 2013, para.13).

### **Agradecimentos**

Ao finalizar mais uma etapa extremamente importante no meu percurso académico, gostaria de agradecer a todas as pessoas que dele fizeram parte.

Primeiramente, um agradecimento especial à minha orientadora científica, Professora Doutora Sónia Martins, pela aceitação da orientação científica, pela partilha de conhecimentos, pelo seu exemplo como profissional e como ser humano, bem como os seus contributos, sugestões e apoio disponibilizado na elaboração deste trabalho. Agradeço, de igual modo, todo o acompanhamento e apoio facultado ao longo do Estágio Pedagógico, concretizado na escola, pois, este percurso seria mais moroso sem os mesmos.

À Diretora de Curso do Mestrado Ensino da Matemática, Professora Doutora Alcione Santos, por todo o apoio facultado para que fosse possível a concretização do Estágio Pedagógico. Grata pela partilha de saberes aquando da lecionação das cadeiras de Iniciação à Prática Profissional I, Didática I e Ensino da Matemática para a Inclusão, fundamentais na Prática Docente.

Agradeço, também, à Direção Executiva da Escola Básica e Secundária de Machico, pela aceitação da concretização do Estágio Pedagógico, pelo apoio facultado a nível logístico e humano, sendo estes elementares na minha formação a nível profissional e pessoal.

À delegada disciplinar de Matemática, prof.<sup>a</sup> Antónia Alves, pelo apoio concedido a nível logístico e humano, sendo, os mesmos, essenciais a nível formativo e pessoal.

Às orientadoras cooperantes, prof.<sup>a</sup> Gracinda Santos e prof.<sup>a</sup> Isabel Vieira, pela orientação, partilha de conhecimentos, apoio logístico e humano, bem como todo o acompanhamento efetuado ao longo do estágio, possibilitando o desenvolvimento de competências, promotoras no meu crescimento a nível pessoal e profissional.

Aos alunos dos 8.º e 10.º anos que fizeram parte deste percurso a nível formativo, pelos seus contributos, colaboração e partilha de saberes, promovendo uma aprendizagem mais profícua e enriquecedora.

A todos os docentes e funcionários da escola de Machico, aproveito para agradecer a hospitalidade e a atenção concedidas ao longo do estágio, essenciais a nível profissional e pessoal.

Um agradecimento a todos os docentes, da faculdade de Ciências Exatas e da Engenharia, bem como da Faculdade de Ciências Sociais, da Universidade da Madeira, que fizeram parte do meu percurso académico, desde a licenciatura até o mestrado.

Obrigada pela partilha de conhecimentos, reflexão, espírito crítico, e estímulo a uma maior autonomia dos seus alunos, e, concomitantemente, contribuindo para um maior crescimento profissional, pessoal e social.

A todos os funcionários da UMA, pelo apoio facultado ao longo de todo o percurso académico, atendimento, e atenção dispensadas.

A todos os colegas dos Mestrados Ensino da Matemática, Educação Física, Estatística e Aplicações, pela partilha de saberes, colaboração e espírito de interajuda, fulcrais durante o percurso académico.

À minha família, em especial aos meus pais, por todo o apoio disponibilizado, acompanhamento, preocupação e carinho demonstrados, essenciais ao longo da minha vida, para poder crescer e evoluir como profissional e como pessoa. Muito Obrigada Por Tudo!

A todos os amigos que, apesar da distância, contribuíram com palavras de incentivo e reforço positivo.

A Todos Muito Obrigada!

## Resumo

A Prática de Ensino Supervisionada (PES) assume particular relevo na formação didática dos futuros profissionais da área da educação, sendo estes, os principais agentes em toda a ação educativa. Contudo, é de suma importância empreender práticas pedagógicas que fomentem, no discente, competências fundamentais para que este se torne um cidadão ativo na sociedade, capacitado para resolver múltiplos e diversos problemas.

Este trabalho descreve toda a atividade implementada no âmbito da PES, unidade curricular do Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Secundário, numa escola da Região Autónoma da Madeira (RAM), no ano letivo 2020/2021.

Para melhor compreensão acerca dos contributos da utilização de recursos didáticos na aula de Matemática para o processo de ensino e aprendizagem, foi realizada uma investigação de natureza qualitativa, de âmbito interpretativo, nas duas turmas atribuídas para o exercício da prática de ensino. Neste contexto, foram implementadas algumas atividades de cariz exploratório e investigativo.

Na referida investigação foi fundamental perceber quais as orientações curriculares refletidas nos referenciais curriculares, nomeadamente nas *Aprendizagens Essenciais*, e programas da disciplina de Matemática (agora revogados), relativamente ao uso de recursos didáticos, e que servem de base e orientação da prática pedagógica docente. O modelo *Technological Pedagogical Content Knowledge* (TPACK) serviu para a compreensão das competências necessárias ao professor para dinamizar aulas de Matemática mais motivadoras e eficientes com recursos didáticos tecnológicos.

Os resultados apontam que o uso de recursos didáticos facilitou a tarefa do professor, permitindo a este obter novos conhecimentos, nomeadamente ao nível das tecnologias, fomentando o pensamento, raciocínio, linguagem e comunicação matemática, bem como o espírito crítico do aluno, proficiências essenciais ao aluno do século XXI.

**Palavras – chave:** Recursos Didáticos; TPACK; Aprendizagem Matemática; PES; Contributos ensino/aprendizagem;

### Abstract

The Supervised Teaching Practice (PES) admit special relevance in didactic training of the future professionals at education area, who are the main agents in all educational action. However, it is extremely important to undertake pedagogical practices that foster, in the student, important skills so that this on becomes an active citizen in society, capable of solving multiple and diverse problems.

This work describes all the activity implemented within the scope of PES, course unit of the Master's Degree in Mathematics Teaching in the 3rd Cycle of Basic and Secondary Education, in a school in the Autonomous Region of Madeira (RAM), in the academic year 2020/2021.

For a better understanding of the contributions of the use of didactic resources in the Mathematics class for the teaching and learning process, a qualitative investigation was carried out, with an interpretative scope, in the two classes assigned to the exercise of teaching practice. In this context, some exploratory and investigative activities were implemented.

In this research, it was essential to understand which curricular guidelines are reflected on the curricular referentials, namely in Essential Learnings, and Mathematics discipline programs (now revoked), in relation to the use of teaching resources, and which serve as the basis and guidance in the teaching pedagogical practice. The Technological Pedagogical Content Knowledge (TPACK) model served to understand the skills needed by the teacher to dynamize more motivating and efficient Mathematics classes with technological didactic resources.

The results show that the use of didactic resources facilitated the teacher's task, allowing him to obtain new knowledge, namely in terms of technologies, promoting the student's thinking, reasoning, language, mathematical communication, as well as the student's critical spirit, essential skills for the 21st century student.

**Keywords:** Didactic Resources; TPACK; Math Learning; PES; Contributions teaching/learning;

## Índice

<b>Introdução</b> .....	<b>1</b>
<b>PARTE I</b> .....	<b>5</b>
<b>1. Prática de Ensino Supervisionada – Visão Geral</b> .....	<b>5</b>
1.1 Descrição da escola cooperante e das turmas .....	5
1.2 Prática de Ensino Supervisionada no 3.º Ciclo .....	7
1.3 Prática de Ensino Supervisionada no Secundário .....	13
1.4 Atividades não letivas .....	17
1.5 Reflexão geral sobre o Estágio Pedagógico .....	19
<b>PARTE II</b> .....	<b>21</b>
<b>2. Fundamentação Teórica</b> .....	<b>22</b>
2.1 Recursos Didáticos na aula de Matemática .....	22
2.1.1 Recursos Didáticos Tecnológicos.....	30
2.2 Recursos Didáticos nas Orientações Curriculares .....	36
2.3 Recursos Didáticos e Opções Metodológicas .....	48
<b>3. Metodologia</b> .....	<b>54</b>
3.1 Natureza do Estudo.....	54
3.2 Recolha de Dados .....	57
3.3 Análise de Dados .....	58
3.4 Descrição das Atividades desenvolvidas no 3.º Ciclo do Ensino Básico .....	59
3.4.1 Construindo Quadrados – Teorema de Pitágoras.....	59
3.4.2 Dedução da fórmula para o cálculo do Volume da Pirâmide e do Cone...61	
3.4.3 Dedução da Translação associada a um vetor e da Translação Composta .....	63
3.5 Descrição das Atividades desenvolvidas no Ensino Secundário.....	65
3.5.1 Transformações de Funções .....	65
3.5.2 Atividade Investigativa sobre a Modelação de uma Parábola .....	65
<b>4. Análise aos contributos de diferentes recursos didáticos para o ensino e aprendizagem da Matemática</b> .....	<b>66</b>
4.1 Análise aos contributos da utilização de recursos didáticos no 3.º Ciclo .....	67
4.1.1 Geoplano Virtual na dedução do Teorema de Pitágoras .....	67
4.1.2 GeoGebra na dedução do Volume da Pirâmide e do Cone .....	74
4.1.3 GeoGebra na Translação associada a um vetor e Translação Composta.....	79

4.2 Análise aos contributos da utilização de recursos didáticos no Secundário .....	84
4.2.1 Calculadora gráfica no estudo das Transformações de Funções .....	84
4.2.2 GeoGebra na Modelação de uma Parábola.....	90
<b>5. Considerações Finais .....</b>	<b>96</b>
<b>6. Referências .....</b>	<b>101</b>
6.1 Referências Bibliográficas .....	101
6.2 Referências Legislativas .....	111
6.3 Documentos Curriculares .....	112
6.4 Documentos Oficiais da EBSM.....	113
6.5 Páginas de Internet/Sites Consultados.....	113
<b>7. Apêndices.....</b>	<b>116</b>
<b>Apêndice A</b> – Atividade Construindo Quadrados - Teorema de Pitágoras (Aula do dia 20 de janeiro de 2021) .....	117
<b>Apêndice B</b> – Atividade Construindo Quadrados - Teorema de Pitágoras (Aula do dia 22 de janeiro de 2021) .....	121
<b>Apêndice C</b> – Atividade para a Dedução da fórmula para o cálculo do Volume da Pirâmide (Aula do dia 19 de fevereiro de 2021) .....	125
<b>Apêndice D</b> – Atividade para a Dedução da fórmula para o cálculo do Volume do Cone (Aula do dia 26 de fevereiro de 2021) .....	126
<b>Apêndice E</b> – Atividade para o estudo da Translação associada a um vetor e da Translação Composta (Aula do dia 17 de março de 2021).....	127
<b>Apêndice F</b> – Atividade sobre Transformações de Funções (Aula do dia 03 de março de 2021) .....	128
<b>Apêndice G</b> – Atividade Investigativa sobre a Modelação de uma Parábola (Aula do dia 28 de abril de 2021) .....	135
<b>Apêndice H</b> – Avaliação Atividade Investigativa: Modelação de uma Parábola...	142

## Índice de Figuras

<b>Figura 1</b> – Construção de Quadrados .....	9
<b>Figura 2</b> – <i>The TPACK framework and its knowledge components</i> .....	33
<b>Figura 3</b> – <i>International Mathematics Achievement (Average Scale Scores – Eighth Grade</i> .....	38
<b>Figura 4</b> – Esquema conceptual do Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória.....	42
<b>Figura 5</b> – Capacidades fundamentais, PISA 2018 .....	45
<b>Figura 6</b> – PISA 2022. Quadro Conceptual de Matemática .....	46
<b>Figura 7</b> – Conteúdo de Aprendizagem em Matemática no Ensino Básico .....	47
<b>Figura 8</b> – Construção de Quadrados .....	60
<b>Figura 9</b> – Cálculo da capacidade dos recipientes A e B .....	61
<b>Figura 10</b> – Volume da Pirâmide.....	62
<b>Figura 11</b> – Cálculo da capacidade de cada um dos copos.....	62
<b>Figura 12</b> – Volume do Cone .....	63
<b>Figura 13</b> – Exploração do <i>software GeoGebra</i> .....	64
<b>Figura 14</b> – Construção de Quadrados .....	68
<b>Figura 15</b> – Construção de Quadrados .....	69
<b>Figura 16</b> – Construção de Quadrados .....	70
<b>Figura 17</b> – Construção de Quadrados .....	71
<b>Figura 18</b> – Construção de Quadrados .....	72
<b>Figura 19</b> – Teorema de Pitágoras.....	74
<b>Figura 20</b> – Volume da Pirâmide.....	75
<b>Figura 21</b> – Volume do Cone .....	77
<b>Figura 22</b> – Translação associada a um vetor.....	80
<b>Figura 23</b> – Translação associada a um vetor.....	81
<b>Figura 24</b> – Translação Composta.....	82
<b>Figura 25</b> – Translação Composta.....	83
<b>Figura 26</b> – Translação Vertical e Translação Horizontal de Funções.....	86
<b>Figura 27</b> - Translação Vertical e Horizontal de Funções .....	88
<b>Figura 28</b> – Contração e Dilatação Vertical do tipo $y = af(x)$ e Contração e Dilatação Horizontal do tipo $y = f(bx)$ .....	89
<b>Figura 29</b> – Reflexão de uma função do tipo $y = -f(x)$ e do tipo $y = f(-x)$ .....	89

<b>Figura 30</b> – Modelação de uma Parábola .....	92
<b>Figura 31</b> – Modelação de uma Parábola .....	93
<b>Figura 32</b> – Modelação de uma Parábola .....	94
<b>Figura 33</b> – Modelação de uma Parábola .....	95

### **Lista de Abreviaturas, Siglas e Acrónimos**

AGD – Ambiente de Geometria Dinâmica

APM – Associação de Professores de Matemática

DGE – Direção – Geral da Educação

EBSM – Escola Básica e Secundária de Machico

IPPII – Iniciação à Prática Profissional II

ME – Ministério da Educação

NCTM - *National Council of Teachers of Mathematics*

OCDE - Organização para Cooperação e Desenvolvimento Económico

OECD – *Organisation for Economic Co – Operation and Development*

PCK – Conhecimento Pedagógico e de Conteúdo

PES – Prática de Ensino Supervisionada

PISA - *Programme for International Student Assessment*

RAM – Região Autónoma da Madeira

TCK – Conhecimento Tecnológico e de Conteúdo

TIMSS - *Trends in International Mathematics and Science Study*

TPACK - *Technological Pedagogical Content Knowledge*

TPK- Conhecimento Tecnológico e Pedagógico

UMa - Universidade da Madeira

UNESCO - Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura

## Introdução

O ensino da Matemática, ao longo de vários anos, tem sofrido diversas transformações, por força da aplicação de várias mudanças curriculares, que visam oferecer à comunidade estudantil um ensino de qualidade. Tais mudanças curriculares possibilitam ao professor usar recursos didáticos diversificados, com o intuito de despertar no aluno o interesse e a motivação no processo de ensino e aprendizagem.

Canavarro *et al.* (2020) defendem que “O desenvolvimento curricular deve ser apoiado por um conjunto de recursos diversos que efetivamente contribuam para a realização de práticas curriculares adequadas em Matemática.” (p. 301). Deste ponto de vista, o professor é constantemente desafiado a implementar práticas pedagógicas, recorrendo a recursos didáticos, que proporcionem o envolvimento do aluno, em sala de aula e, deste modo, fomentar a construção do conhecimento matemático.

O avanço da tecnologia tem sido manifestamente visível, e o apelo de vários autores que defendem o seu uso, em sala de aula, como promotor de experiências matemáticas com significado (Canavarro *et al.*, 2020; Ministério da Educação [ME], 2021). Nesta perspetiva, urge compreender os contributos do uso de recursos didáticos, nomeadamente tecnológicos, na aula de Matemática para o processo de ensino e aprendizagem.

O presente relatório está organizado em duas partes, em que a parte I incide, essencialmente, na PES, decorrida na Escola Básica e Secundária de Machico, entre os meses de novembro de 2020 e maio de 2021. A parte II incide na investigação encetada no âmbito da PES.

No que diz respeito à estrutura do presente relatório, no ponto 1, da primeira parte, foi feita uma descrição da escola cooperante e das turmas no âmbito da PES, no 3.º Ciclo, e no Secundário. Nesta descrição tivemos por base o Projeto Educativo de Escola, recolhendo informação acerca da localização da escola, o meio envolvente, bem como os projetos desenvolvidos pela escola. Também foi perpetrada uma reflexão sobre as atividades não letivas e sobre o estágio pedagógico, em geral. A este respeito baseei-me nos autores A. L. Santos (2012) e Fernandes (2021).

A parte II versa sobre a apresentação da investigação com especial relevância para a opinião de alguns autores, nomeadamente Amado (2017), Bento (2012) e Fernandes (1991), no sentido de justificar a opção pelo método qualitativo, o surgimento de questões e hipóteses no decorrer do trabalho de campo, da presente investigação.

Na Fundamentação Teórica discuti algumas temáticas, recorrendo a alguns estudos teóricos, para compreender melhor o uso de *Recursos Didáticos na aula de Matemática*, como se definem e como podem ser utilizados em sala de aula. Sustentou esta secção os seguintes autores: Botas (2008); Botas e Moreira (2013); Brasil (1977); Cadavez (2013); Caldeira (2009); Couceiro (2018); Ferreira *et al.* (2008); Guimarães (2003); J. V. Moureira (2018); Lameiras (2016); Martins (2020); Martins e Fernandes (2021); Matos e Serrazina (1996); Ministério da Educação (ME, 2018a, 2018b); Pires e Amado (2013); Ponte (2009); Ponte, Oliveira, Cunha *et al.* (1998); Ponte *et al.* (2007); S. C. Silva (2015); Semião e Canavarro (2012); Silveira e Cabrita (2013); Thomaz e Megid (2017); Vaz (2018); Ventura (2013).

Na subsecção *Recursos Didáticos Tecnológicos* procurei compreender, que recursos tecnológicos poderiam ser utilizados na aula de Matemática e de que forma estes poderiam auxiliar o professor, e qual deveria ser o conhecimento necessário para que um professor pudesse lecionar Matemática utilizando recursos didáticos, nomeadamente os tecnológicos. Sustentou este estudo os seguintes autores: Bivar, Grosso, Oliveira, Timóteo e Loura (2014); Camargo (2016); Canavarro *et al.* (2020); Dias (2020); Koehler e Mishra (2009); Koehler, Mishra e Cain (2013); Leivas e Nadalon (2019); ME (2018a, 2018b); Milani *et al.* (2017); Mishra e Koehler (2006); Ponte, Matos e Abrantes (1998); Ponte, Oliveira, Cunha *et al.* (1998); Ribeiro (2020); Sampaio e Coutinho (2014); Torres e Brocardo (2015); Verdasca *et al.* (2020).

Na secção *Recursos Didáticos nas Orientações Curriculares* procurei perceber quais as orientações curriculares relativamente à utilização de recursos didáticos na aula de Matemática. Recolheu-se, também, informação respeitante ao desempenho dos alunos na Matemática, dos 4.º e 8.º anos, obtida a partir dos programas de avaliação internacional, concretamente o *Programme for International Student Assessment* (PISA) e o *Trends in International Mathematics and Science Study* (TIMSS). Para abordar esta secção analisei alguma da bibliografia dos autores: Bivar, Grosso, Oliveira e Timóteo (2013); Bivar, Grosso, Oliveira, Timóteo e Loura (2014); Canavarro *et al.* (2020); Decreto – Lei 55/2018; Despacho n.º 8209 (2021); Direção-Geral da Educação (DGE, 2016); Duarte *et al.* (2020a, 2020b); Fernandes (2014); Figueiral (2017); G. D. Martins *et al.* (2017); Gouveia (2021); J. Rocha (2020); LBSE (1986); L. Santos *et al.* (2006); Lourenço *et al.* (2019); M. A. da Silva e Fernandes (2019); ME (2018a, 2018b, 2021); Mullins *et al.* (2020); *Organisation for Economic Co – Operation and Development* (OECD, 2018); P. Pinto (2020); Rosa *et al.* (2020).

Na secção *Recursos Didáticos e Opções Metodológicas* analisei a opinião de alguns autores que abordavam de que forma o recurso didático poderia contribuir para que o aluno construísse o conhecimento matemático, bem como as opções metodológicas delineadas pelo professor. Foram discutidas ideias de autores tais como: A. Guerreiro *et al.* (2016); A. Rodrigues e Domingos (2016); Brocardo e Mendes (2016); Canavarro e Santos (2016); Correia (2009); Fraga (2015); Freire (1994, 1996); G. D. Martins *et al.* (2017); G. Pereira *et al.* (2019); H. G. Guerreiro e Serrazina (2018); H. Rocha (2010); Machado (2007); M. H. Silva e Lopes (2016); *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 1994, 2004); Oliveira *et al.* (2012); Ponte (2003); Ponte (2009); Ponte (2020); Ponte, Oliveira, Cunha *et al.* (1998); Ponte e Serrazina (2009); Rodrigues *et al.* (2020); Tolentino de Carvalho e Hércules Gontijo (2020); Vale *et al.* (2014).

Relativamente à Metodologia nesta investigação, e como já referido anteriormente, recorreu-se ao método qualitativo, no sentido de interpretar significados decorrentes do estudo de fenómenos sociais. O propósito foi compreender quais os contributos da utilização de recursos didáticos na aula de Matemática para o processo de ensino e aprendizagem. Para sustentar a fundamentação da natureza do estudo foram usados os princípios apontados por Aires (2015); Amado (2017); Bento (2012); Bogdan e Biklen (1994); Coutinho (2015); Denzin e Lincoln (2007); Fino (2008); Sousa (2009).

Na recolha de dados foram indicados os instrumentos utilizados. De referir que foram utilizadas técnicas de recolha direta, nomeadamente Observação Sistemática e Participante, e Entrevistas não Diretivas. Como técnicas de recolha não direta foram utilizadas a Pesquisa Documental, Registo Fotográfico e digital dos trabalhos dos alunos e anotações no Diário de Bordo. Foram consultados estudos dos autores: Aires (2015); Bogdan e Biklen (1994); Fino (2008).

Na análise das cinco atividades implementadas na PES, o objetivo pautou-se pela triangulação da informação resultante de diferentes fontes, nomeadamente a análise documental, os trabalhos dos alunos, as anotações no Diário de Bordo, o questionamento em sala de aula (entrevistas não diretivas), bem como a Observação Sistemática e Participante. O intuito foi triangular a informação obtida e perceber os contributos da utilização de recursos didáticos, no que diz respeito ao professor, concretamente se estes facilitaram a tarefa do professor, bem como o desenvolvimento de competências ao nível da tecnologia. No que diz respeito ao aluno, o desenvolvimento de competências, concretamente o pensamento, raciocínio, linguagem e comunicação matemática, bem

como o espírito crítico. Os autores eleitos para a análise dos dados foram Aires (2015); Amado (2017).

Na análise propriamente dita aos dados, os autores que sustentaram a mesma, no que diz respeito aos contributos do uso de recursos didáticos foram essencialmente: A. Pereira (2013); Canavarro (2017); Canavarro *et al.* (2020); Cardoso (2019); Carvalho (2018); E. L. Santos e L. Santos (2019); Fallas (2019); Koehler, Mishra e Cain (2013); NCTM (1994); Paiva (2020); Ponte (2013); Ponte e Canavarro (1997); Ponte, Oliveira, Cunha *et al.* (1998); Sampaio e Coutinho (2014); Silva e Martins (2021); Viseu *et al.* (2016).

Nas conclusões finais, emergentes das evidências encontradas e analisadas, baseei-me nos autores: Correia (2009); ME (2021); UNESCO (2009).

A motivação deste estudo deve-se ao facto de, através do estágio pedagógico, ter tido a possibilidade de aprofundar conhecimentos científicos acerca da utilização de recursos didáticos na aula de Matemática e compreender os possíveis contributos para o processo de ensino e aprendizagem desta disciplina.

A questão principal colocada, no âmbito desta investigação foi: — Quais os contributos da utilização de recursos didáticos na aula de Matemática para o processo de ensino e de aprendizagem?

A questão principal foi dissecada em cinco questões específicas, sendo estas discutidas, com base nos dados empíricos e teoria, ao longo do presente estudo:

- O que são recursos didáticos e como podem ser utilizados na aula de Matemática?
- O que nos dizem as orientações curriculares acerca do uso de recursos didáticos na aula de Matemática?
- Que recursos didáticos podem ser utilizados na aula de Matemática e de que forma podem auxiliar o professor?
- Qual o conhecimento necessário para que um professor possa lecionar Matemática utilizando recursos didáticos, nomeadamente os tecnológicos?
- De que forma o recurso didático pode contribuir para que o aluno construa o conhecimento matemático?

Na presente investigação, procurou-se analisar, interpretar e discutir os dados empíricos, com base na fundamentação teórica, no sentido de tirarmos ilações relativamente aos contributos da utilização de recursos didáticos na aula de Matemática.

## PARTE I

### 1. Prática de Ensino Supervisionada – Visão Geral

#### 1.1 Descrição da Escola Cooperante e das Turmas de Intervenção

A Escola Básica e Secundária de Machico localiza-se na zona este da Ilha da Madeira, na Estrada Tristão Vaz Teixeira, n.º 39, concelho de Machico. Este concelho integra 5 freguesias, concretamente o Porto da Cruz, Machico, Caniçal, Água de Pena, e Santo António da Serra (Escola Básica e Secundária de Machico [EBSM], 2019).

Em termos populacionais tem vindo a decrescer em parte devido à diminuição da taxa de natalidade no concelho. No que se refere à empregabilidade, as atividades predominantes são manifestamente a área económica e social (EBSM, 2019).

Existem várias instituições locais parceiras da Escola Básica e Secundária de Machico, nomeadamente: a Câmara Municipal de Machico, Junta de Freguesia, Museus e Solares, Grupos Culturais, Associações Culturais e Desportivas, Restaurantes Locais, Centro de Saúde, Bombeiros Municipais, Extensão do Conservatório de Música da Madeira, Grupo de Escuteiros, Paróquias do Concelho, Fórum Machico, Sociedade de Desenvolvimento da Madeira, Governo Regional, entre outras entidades (EBSM, 2019). Os apoios facultados são através de meios logísticos e humanos, mas também através de meios financeiros aquando da realização de grandes atividades e eventos, como, por exemplo, o *Mercado Quinhentista* organizado em parceria com o Município de Machico.

O *Mercado Quinhentista* retrata acontecimentos da época dos descobrimentos e dos primeiros povoadores da capitania de Machico, doada a Tristão Vaz Teixeira (Mercado Quinhentista de Machico [MQM], 2018). Participam neste projeto, professores, alunos da escola, e todos aqueles que procuram desempenhar um papel ativo nas iniciativas dinamizadas pela escola.

O estabelecimento de parcerias contribui positivamente em toda a ação educativa delineada e implementada pela escola, valorizando as práticas pedagógicas, bem como o envolvimento de toda a Comunidade Escolar.

No que se refere a projetos promovidos pela escola, estes são diversificados, salientando alguns: o Clube de Robótica, Agente X, Clube de Matemática Divertida, Clube de Dança, Prática de Percussão, Parlamento Jovem, Clube Europeu, Clube de Teatro, Oficina da Música, Cordofones Tradicionais Madeirenses, Expressão Plástica, Banda Rock, Prática de Teclado e a dinamização da biblioteca escolar (EBSM, 2019).

Estes projetos visam fomentar nos alunos o desenvolvimento de competências pessoais e sociais, e, conseqüentemente, contribuir para uma maior valorização curricular.

O Projeto Educativo de Escola, no que lhe concerne, tem um enorme impacto na Comunidade Educativa, visto que é através da envolvência dos vários agentes educativos que é possível determinar quais as melhores estratégias e metas a serem atingidas, no sentido do reforço e inovação de práticas pedagógicas. As mesmas visam não só o sucesso dos alunos, mas também motivar toda a comunidade educativa a tornar-se mais ativa e participativa em todas as dinâmicas desenvolvidas pela escola.

A PES foi desenvolvida numa turma de 3.º Ciclo do Ensino Básico e numa outra turma do Secundário, do ensino regular.

A turma do 8.º ano, em que ocorreu a PES, é composta por 15 alunos oriundos do concelho de Machico, 9 rapazes e 6 raparigas, com idades compreendidas entre os 12 e os 13 anos. Nesta turma não existem alunos repetentes, o que demonstra serem alunos muito empenhados e com bons resultados alcançados nos vários trabalhos realizados, bem como nos testes de avaliação. Do contacto que tive com os alunos destaco o facto de a turma ser, comumente, proativa, organizada, assídua, resiliente e determinada no processo de ensino e aprendizagem. Esta turma integra o Curso Básico de Música do 3.º Ciclo, do Ensino Articulado. Por esse facto, os alunos não têm a disciplina de Tecnologias da Informação e Comunicação, bem como a disciplina de Educação Tecnológica. Em contrapartida, os alunos frequentam as aulas no Conservatório, tendo especificamente formação em instrumento, formação musical e classe de conjunto.

Relativamente à turma do 10.º ano, a mesma é composta por 18 alunos, sendo 13 raparigas e 5 rapazes, com idades compreendidas entre os 15 e os 16 anos. Relativamente à área de residência, estes alunos são oriundos das diferentes freguesias do concelho de Machico, sendo que um deles é do concelho de Santa Cruz.

No que diz respeito à turma de Secundário, destaco o facto de demonstrar interesse e participação nas aulas, e, sempre que questionados, os alunos procuravam participar nas discussões do grande grupo, manifestando um espírito altruísta (respeito e solidariedade para com os colegas e professoras na sala de aula) e colaborativo.

O núcleo de estágio foi composto por mim, as orientadoras cooperantes na escola, prof.<sup>a</sup> Isabel Vieira, prof.<sup>a</sup> Gracinda Santos e a Professora Supervisora, Professora Doutora Sónia Martins, da Faculdade de Ciências Exatas e Engenharia da Universidade da Madeira (UMa). De realçar que as planificações a longo e médio prazo foram elaboradas pelo Grupo Disciplinar de Matemática, e no que diz respeito às planificações

a curto prazo, as mesmas foram elaboradas por mim, conjuntamente com as orientadoras cooperantes e a Professora Supervisora. No meu entender, beneficiaram a minha atuação perante a turma, no meu crescimento como profissional, significando maior autonomia, conhecimento e rigor matemático.

Destaco a relevância na elaboração de planificações, sejam estas de longo, médio ou a curto prazo, de modo a orientar, em sala de aula, toda a operacionalização conceptualizada de uma aula, desde a introdução de novos conteúdos, resolução de exercícios para consolidação, gestão de tempo, e utilização de recursos didáticos. Tudo isto, no sentido da promoção de uma aprendizagem mais significativa, procurando continuamente obter *feedback* por parte dos alunos.

Do ponto de vista de A. L. Santos (2012) “**A planificação a longo prazo** antecede normalmente o início da atividade letiva e é realizada em conjunto, pelos professores que lecionam a mesma disciplina, (...)” (p.5). No que concerne às planificações a médio prazo a autora refere que “(...) é feita ao longo do ano, por período letivo, tem por objetivo uma visão mais detalhada do trabalho a desenvolver, (...)” (A. L. Santos, 2012, p.5). Relativamente às planificações a curto prazo a autora justifica “(...) que permite a adequação à realidade e contexto escolar do grupo de alunos a que se destina.” (A. L. Santos, 2012, p.5).

Reitero todo o apoio facultado pelas orientadoras cooperantes, prof.<sup>a</sup> Isabel Vieira e prof.<sup>a</sup> Gracinda Santos. O mesmo contribuiu para uma maior compreensão de aspetos extremamente relevantes, e apropriados numa sala de aula, nomeadamente a interação com os discentes, a comunicação, domínio de conteúdos e de recursos didáticos, e, essencialmente, o auxílio que deve ser facultado aos discentes.

Nesta linha de pensamento, sublinho a importância da observação de um conjunto de aulas lecionadas pelas orientadoras cooperantes, enfatizando os seus modos de atuação, incidindo em metodologias de ensino ativas com ênfase para o questionamento e a exploração de conteúdos, geradoras de diálogo e reflexão por parte dos alunos. De ressaltar o realce na escrita e comunicação matemática salientando o rigor científico.

## **1.2 Prática de Ensino Supervisionada no 3.º Ciclo**

A PES iniciou no dia 6 de novembro de 2020, na Escola Básica e Secundária de Machico, tendo sido atribuída uma turma do 8.º ano, do 3.º ciclo do Ensino Básico, e outra turma do 10.º ano, do Ensino Secundário.

No 1.º semestre, na turma do 8.º ano, as aulas foram em regime diurno, durante a tarde, e, no Conservatório, os alunos frequentavam as aulas em horários opostos aos da escola. Assim, comecei por observar a turma no sentido de a conhecer melhor, perceber as suas dificuldades, procurando, em alguns momentos, em sala de aula, intervir esclarecendo algumas dúvidas manifestadas pelos alunos, bem como a implementação de algumas aulas em regime presencial. A respeito disto, pude constatar alguma competição entre os discentes aquando da elaboração de trabalhos de grupo, mas, concomitantemente, observei a manifestação de um espírito colaborativo e de interajuda para com os colegas que manifestaram algumas dificuldades na aprendizagem.

As unidades temáticas *Monómios e Polinómios, e Equações do 2.º grau*, do domínio *Álgebra*, foram lecionadas por mim e pela orientadora cooperante, onde se procurou, através da resolução de exercícios e problemas, envolver a turma na elaboração de trabalhos individuais e em grupo, e na discussão coletiva. Procurou-se que todos os alunos participassem, ativamente, assumindo uma postura mais interventiva em sala de aula e no grupo. Para tal, o trabalho em grupo, o questionamento, e o trabalho autónomo foram cruciais na aprendizagem, bem como a participação dos alunos na apresentação e discussão coletiva dos seus exercícios resolvidos no quadro.

No total foram lecionadas 51 aulas de 45 minutos, sendo que 28 aulas foram lecionadas no regime presencial e 23 aulas no regime *online*.

Devido ao agravamento da situação pandémica causada pelo vírus SARS-CoV-2, dando origem à COVID-19, os alunos do 3.º Ciclo e Secundário foram informados de que iriam iniciar as suas aulas à distância, no dia 13 de janeiro, estendendo-se até à pausa letiva da Páscoa. O regresso ao ensino presencial ocorreu no dia 12 de abril, para o 3.º Ciclo, e no dia 9 de abril, para o ensino Secundário.

No ensino à distância lecionei alguns conteúdos respeitantes à unidade temática *Teorema de Pitágoras*, domínio *Geometria e Medida*, procurando envolver os alunos, nas aulas, através da elaboração de trabalhos individuais e, posteriormente, a discussão dos resultados obtidos por estes, utilizando a metodologia do questionamento e reflexão crítica. Neste seguimento, dinamizou-se uma atividade denominada *Construção de Quadrados*, utilizando como recurso, um *Geoplano Virtual*. A implementação desta atividade será analisada na Parte II deste relatório.

Os alunos tinham de construir três quadrados respeitando as condições mencionadas no enunciado (cf. Apêndice A e B) partilhado com os alunos, na aula *online*, através de uma apresentação em *PowerPoint*. A figura 1 ilustra as possíveis construções

que os alunos poderiam obter, e a partir das mesmas tinham de determinar as áreas de cada um dos quadrados, no sentido de estabelecerem uma conjectura acerca de possíveis relações entre as mesmas.

### Figura 1

#### *Construção de Quadrados*



*Nota:* Construções obtidas a partir do *Geoplano Virtual*

Na 1.<sup>a</sup> construção, no seu interior resultou um triângulo retângulo, em que os alunos teriam de relacionar as áreas dos dois quadrados menores com a área do quadrado maior, procurando formular uma conjectura. Na 2.<sup>a</sup> construção obtida resultou no seu interior, em alguns casos, um triângulo obtusângulo, e em outros casos resultou um triângulo acutângulo. Através desta, os alunos procuraram verificar se a primeira conjectura formulada, isto é, a soma das áreas dos dois quadrados menores seria igual à área do quadrado maior, e se a mesma se aplicava a todo o tipo de triângulos. Os alunos concluíram que tal não se verificava, aplicando-se somente para triângulos retângulos e, deste modo, conseguiram deduzir o Teorema de Pitágoras.

As construções efetuadas pelos alunos, serviram, também, como instrumento de avaliação, contabilizadas na avaliação individual e avaliação sumativa no final do semestre.

Na opinião de Fernandes (2021) “A avaliação pedagógica pode ser concebida como um processo através do qual professores e alunos recolhem, analisam, interpretam, discutem e utilizam informações referentes à aprendizagem dos alunos (evidências de aprendizagem) tendo em vista uma diversidade de propósitos (...)” (p.6). No que diz respeito aos vários propósitos da avaliação dos alunos, de salientar o reconhecimento das aprendizagens alcançadas por estes, o acompanhamento de toda a sua evolução procurando atingir níveis pretendidos, a atribuição de classificação e o conhecimento que é dado aos alunos, e aos respetivos responsáveis de educação (Fernandes, 2021). O objetivo da avaliação é contribuir para estes progredirem nas suas aprendizagens (Fernandes, 2021).

Com efeito, existem diversos instrumentos de avaliação que permitem aferir as aprendizagens dos alunos, por exemplo, a resolução de fichas de trabalho a pares ou em grupo, a representação geométrica de conteúdos utilizando aplicativos como o *GeoGebra*, o *Geoplano*, a calculadora gráfica (física ou o emulador), e testes de avaliação. Tais instrumentos, permitem recolher informação relevante acerca das aprendizagens dos alunos. Na avaliação desta atividade foi dado maior enfoque ao raciocínio matemático, às estratégias utilizadas na formulação de conjecturas, e à comunicação matemática.

Na unidade temática *Sólidos Geométricos*, domínio *Geometria e Medida*, foram resolvidos alguns exercícios e problemas retirados de vários manuais, da Escola Virtual. Esta unidade temática não constava do manual adotado, apesar de constar nas *Aprendizagens Essenciais* (Ministério da Educação [ME], 2018a), do 8.º ano, mas também não constava do *Programa e Metas Curriculares do 8.º ano* (Bivar, Grosso, Oliveira & Timóteo, 2013), mas sim do 9.º ano.

Através da dinamização de uma atividade de exploração, retirada de um dos manuais da Escola Virtual, do 9.º ano, foi facultado aos alunos um ficheiro do *software GeoGebra*<sup>1</sup>, sobre sólidos de enchimento, em que estes teriam de manipulá-los. A partir das várias questões da tarefa, que iam sendo colocadas durante a manipulação dos sólidos, tinham de deduzir a fórmula para o cálculo do Volume de uma Pirâmide. Também, numa aula seguinte, foi dinamizada uma atividade de exploração em que os alunos tinham de deduzir a fórmula para o cálculo do Volume do Cone<sup>2</sup>, através da manipulação dos sólidos de enchimento.

Nesta perspetiva, considero pertinente a utilização de *software* interativo nas aulas *online*, pois, o mesmo, contribuiu para que os alunos mais facilmente conseguissem construir o seu raciocínio matemático, formular as suas conjecturas, estabelecendo procedimentos que permitiram deduzir a fórmula de cálculo do Volume da Pirâmide e do Cone. Nesta linha de pensamento, a manipulação de sólidos e o questionamento foram metodologias utilizadas para a construção do conhecimento matemático.

Na unidade *Do Vetor à Translação*, domínio *Geometria e Medida*, para além da resolução de exercícios do manual adotado, também foi dinamizada uma tarefa com

---

<sup>1</sup> Adaptado de Vieira, T. (2016, 5 de outubro). *Volume da Pirâmide*. GeoGebra. <https://www.geogebra.org/m/gPrcEcDF>

<sup>2</sup> Adaptado de Lima, A. F. (2020, 2 de setembro). *Volume do Cone*. GeoGebra. <https://www.geogebra.org/m/xpz7kp9m>

recurso à tecnologia<sup>3</sup>, nomeadamente com o *software GeoGebra*. Os alunos foram desafiados a construir Translações associadas a um vetor, partindo de uma figura inicial, bem como a construção de uma Translação Composta, partindo de uma segunda figura, sendo esta a imagem da figura inicial. Esta tarefa também constará da Parte II deste relatório.

Numa fase inicial expliquei aos alunos como poderiam explorar o *software GeoGebra*, e utilizar algumas ferramentas que permitiam obter a figura inicial. Numa fase seguinte, os alunos iniciaram as suas construções, nomeadamente a Translação associada a um vetor e a Translação Composta, indicando no ficheiro obtido o registo das suas conclusões. O objetivo era que estes associassem, às mesmas, os conteúdos lecionados, isto é, a soma de um ponto com um vetor, segmentos orientados equipolentes, e a amplitude dos ângulos em cada uma das figuras representadas geometricamente.

Com efeito, sempre que surgiam dúvidas, relativamente ao manuseamento do *software*, bem como ao nível do conteúdo matemático, os alunos partilhavam os seus trabalhos através da tela, na plataforma *Zoom*. Estas representações geométricas também serviram como instrumento de avaliação sumativa e contabilizadas na avaliação intercalar, com o propósito de avaliarmos a capacidade de os alunos aplicarem o raciocínio matemático, delinear estratégias, formular conjecturas e registar as suas conclusões através da escrita e comunicação matemática, utilizando a linguagem matemática adequada.

Procurei, também, projetar alguns vídeos da Escola Virtual, com o objetivo de incentivar os alunos à discussão e ao desenvolvimento do seu espírito crítico. Através do questionamento, procurei que os alunos tivessem um papel mais ativo e crítico face aos conteúdos aprendidos com recurso à multimédia, sendo este recurso facilitador das aprendizagens, visto que utiliza sons, fala humana, gestos, imagens contribuindo para uma melhor compreensão de conteúdos.

Na unidade *Isometrias*, domínio *Geometria e Medida*, através de uma apresentação em *PowerPoint*, retirada da Escola Virtual, e projetada a partir da plataforma *Zoom*, recordei algumas das isometrias já abordadas em ciclos de escolaridade anteriores, nomeadamente no 6.º ano. Através de imagens, os alunos tinham de identificar a respetiva isometria. Também procurou-se resolver exercícios do manual adotado.

---

<sup>3</sup> Tarefa dinamizada com recurso à tecnologia (p.175) adaptada de Passos, I. C., & Correia, O. F. (2014). *Matemática em Ação 8.º ano, Parte I*. Lisboa: Raiz Editora.

No ensino presencial abordei a unidade *Gráficos de funções Afim*, iniciando a mesma recorrendo à projeção histórica e à aplicabilidade do conceito de função no quotidiano. A título de exemplo, a compra de bens alimentares, abastecimento de combustível, os casos positivos de COVID-19 em função do número de pessoas, o ritmo cardíaco em função do tempo, a distância percorrida em função do tempo, a idade de seis amigos. Entretanto, foram facultadas, aos alunos, algumas fichas de trabalho, adaptadas do manual *Matemática em Ação 8.º Ano* (Passos & Correia, 2014), *Projeto Estudo em Casa*, da responsabilidade do Ministério da Educação, bem como da prof.<sup>a</sup> Gracinda Santos. Estes procuraram resolver individualmente e, posteriormente, discutidas no grande grupo, com o intuito de recordar conceitos já abordados no 7.º ano. Concretamente, recordei o conceito de domínio, contradomínio, conjunto de partida, conjunto de chegada, bem como as várias representações de uma função, nomeadamente através de uma expressão algébrica, diagrama de setas, tabela, gráfico e gráfico cartesiano.

Procurei, também, no decorrer desta unidade temática, utilizar como recurso auxiliar e didático a calculadora gráfica física, bem como o emulador da calculadora gráfica. Embora esta seja privilegiada no ensino Secundário, os alunos procuraram explorar este recurso didático, contribuindo, deste modo, para uma melhor visualização e interpretação gráfica de funções lineares e afins, com maior precisão e rigor, auxiliando durante a resolução de exercícios e problemas.

Sublinho a importância da sua utilização no estudo de funções, onde pude observar o entusiasmo manifestado pelos discentes aquando da sua exploração, sendo este o primeiro contacto que estes têm com este recurso didático. Destaco a compreensão dos alunos relativamente à representação gráfica, e a distinção do tipo de função representada, concretamente se se trata de uma função linear ou afim, bem como a perceção de objeto e imagem.

No âmbito da lecionação desta unidade temática, foi elaborada uma questão-aula como instrumento de avaliação da mesma, com o propósito de avaliar os conteúdos lecionados nesta unidade, com maior destaque para a formulação de conjecturas, utilização de linguagem e comunicação matemática adequadas. Através dos resultados obtidos, pelos alunos, foi possível analisar a efetiva aprendizagem.

No que diz respeito à avaliação, em termos gerais, foram utilizados, nesta turma, diferenciados instrumentos de avaliação das aprendizagens, nomeadamente os testes de avaliação, questão – aula, trabalhos individuais efetuados nas aulas, concretamente

através do *Geoplano* Virtual, do *GeoGebra* e a exploração de tarefas com a calculadora gráfica. De igual modo, foi avaliada a participação dos alunos durante as aulas, bem como o seu comportamento e empenho. De salientar que a avaliação foi lançada na pauta, no final do semestre, reiterando a ênfase na utilização de diferenciados recursos didáticos que estimularam aprendizagens mais significativas. O facto de ter tido a possibilidade de elaborar alguns destes instrumentos de avaliação, nomeadamente com recurso à tecnologia: atividade sobre a dedução do Teorema de Pitágoras e atividade sobre as Translações associadas a um vetor e Translação Composta, permitiu-me perceber a sua importância na avaliação do aluno e de que existem outras formas de avaliar que não passam exclusivamente pelos testes e trabalhos de casa.

Em suma, procurei, sempre, aperfeiçoar os meus conhecimentos didáticos, tendo como referência a atuação da orientadora cooperante, em sala de aula, procurando seguir as suas sugestões e orientações com o intuito de evoluir não só ao nível de conhecimentos, mas também ao nível do raciocínio, linguagem e comunicação matemática. As planificações contribuíram para refletir sobre que conteúdos lecionar, como lecionar, que materiais utilizar, o tempo disponível, que questões poderia colocar aos alunos, e como poderia dar *feedback* relativamente às suas aprendizagens.

### **1.3 Prática de Ensino Supervisionada no Secundário**

A PES, na turma do 10.º ano, iniciou no dia 10 de novembro, entretanto, no 1.º semestre devido às aulas que tínhamos na Universidade, à sexta – feira, apenas pude estar presente duas vezes por semana. No 2.º semestre a situação normalizou, e, assim, consegui comparecer a todas as aulas da turma do 10.º ano, tendo a possibilidade de implementar algumas aulas conjuntamente com a docente cooperante, quer presencialmente, quer *online*.

As aulas do 1.º semestre foram essencialmente de observação, dado que no ano letivo anterior, devido à situação pandémica, não tivemos a oportunidade de assistir às aulas que tínhamos previsto, no âmbito da cadeira de Iniciação à Prática Profissional II (IPPII). As observações destas aulas tinham como finalidade compreender todo o processo inerente à preparação, implementação, monitorização e *feedback* junto dos alunos, de modo que pudéssemos refletir, continuamente, sobre a Prática Docente e o modo de atuação em contexto de sala de aula.

No total foram lecionadas 66 aulas de 45 minutos, nas quais 32 aulas foram presenciais e 34 aulas *online*. Neste contexto, apliquei estratégias que permitissem, no

meu entender, contribuir para um contínuo aperfeiçoamento na área da docência, possibilitando aos discentes o desenvolvimento de competências ao nível do pensamento matemático, linguagem e comunicação matemática, promotoras de uma maior autonomia e integração em sala de aula. Para tal, a constante e notável presença da orientadora cooperante foi deveras crucial para poder refletir sobre toda a Prática Docente, as metodologias implementadas em sala de aula, desde a sua conceção até à sua operacionalização, a reflexão e a exploração de conteúdos. O propósito foi fomentar no aluno o seu espírito crítico, bem como obter *feedback* junto destes.

Nesta linha de pensamento, foquei a atenção nas metodologias mais ativas, recorrendo à visualização e discussão de alguns vídeos, resolução de fichas de trabalho, quer no ensino presencial e *online*, privilegiando o trabalho de grupo, promovendo o espírito colaborativo e a autonomia do grupo, tornando a sua aprendizagem com maior significado. Quer isto dizer que o apoio facultado pela orientadora cooperante foi significativo para que, a cada aula, pudesse ser uma constante evolução.

Na unidade temática *Cálculo Vetorial no Plano*, domínio *Geometria Analítica*, recorri a algumas animações do *software GeoGebra*, retiradas da plataforma Escola Virtual, para exemplificar a soma de vetores no plano, recordando as regras do triângulo e do paralelogramo, conceitos já abordados no 8.º ano de escolaridade. Também através de animações em *PowerPoint*, recordei conceitos como, por exemplo, segmentos orientados equipolentes, noção de vetor, vetores colineares e simétricos, soma de um ponto com um vetor, bem como as propriedades da adição de vetores.

Neste contexto, a resolução de exercícios visou a consolidação de conteúdos, sendo que o manual adotado era um recurso didático privilegiado, bem como o trabalho autónomo desenvolvido pelos alunos, com o intuito de aprimorar as suas aprendizagens.

A dinamização da discussão, no grande grupo, era permeada através do questionamento, visando reforçar o espírito crítico dos alunos.

Na unidade temática *Cálculo Vetorial no Espaço*, domínio *Geometria Analítica*, foi dada continuidade aos conceitos abordados no cálculo vetorial no plano, aplicando-os no espaço. A título de exemplo, as coordenadas de vetores no espaço, base canónica do espaço vetorial, soma de um ponto com um vetor, norma de um vetor, equação vetorial da reta no espaço. Neste seguimento, para uma melhor consolidação destes conceitos, foi sugerido aos alunos a resolução de exercícios, não apenas do manual adotado, mas também de exercícios retirados de outros manuais da Escola Virtual.

Relativamente à unidade temática *Generalidades sobre funções*, domínio *Funções Reais de Variável Real*, a mesma foi lecionada *online* devido ao agravamento da situação pandémica provocada pelo vírus SARS-CoV-2. Primeiramente, foram recordados alguns conceitos abordados no 8.º ano, relativamente ao estudo de funções, conceitos tais como o domínio, contradomínio, conjunto de partida e de chegada, e as formas de representação de uma função, concretamente através da expressão algébrica, diagrama de setas, tabela, gráfico e gráfico cartesiano.

Para a introdução do conceito de função composta, foi sugerido aos alunos a exploração de uma tarefa retirada de um dos manuais da Escola Virtual e discutida, com estes, no grande grupo. O objetivo pretendido foi o desenvolvimento do seu espírito crítico face a situações do quotidiano, como exemplo, concreto, o revestimento de um pavimento com tijoleiras. Também, foi utilizado como exemplo, a imagem de uma máquina transformadora, para demonstrar como obter uma função composta e respetiva expressão algébrica, o seu domínio, contradomínio, bem como a representação da mesma através de um diagrama de setas. Neste sentido, verificou-se maior confiança, por parte dos alunos, na análise de funções, através deste tipo de representação.

Na análise da função identidade, recorri a um vídeo da Escola Virtual, no sentido de clarificar este conceito e, após a visualização do mesmo, discuti o seu conteúdo no grande grupo.

No estudo do conceito de função inversa, de igual modo, foi explorada uma situação do quotidiano, relacionando o custo em função do número de pães comprados. Foi utilizada, novamente, a representação através de diagrama de setas, recorrendo à calculadora gráfica para a visualização da representação gráfica.

Posto isto, considerei relevante a resolução de exercícios como trabalho autónomo, dado que as aulas ocorreram no formato *online*, por conseguinte, foi primordial as sugestões e reflexões por parte da orientadora cooperante, para poder progredir a nível pessoal e profissional. Assim, foi essencial a planificação destas aulas, escrupulosamente, a sua implementação e monitorização, pois, através do ensino *online*, as dificuldades são maiores e torna-se mais complexo obter o *feedback* junto dos alunos. O questionamento foi uma constante nas aulas *online*.

Na unidade temática *Generalidades acerca de funções reais de variável real*, domínio *Funções Reais de Variável Real*, procurou-se privilegiar o manual adotado, na resolução de exercícios sobre o cálculo dos zeros, a paridade, recorrendo, inicialmente, à

visualização de um vídeo, da Escola Virtual, sobre a função par e a função ímpar. O foco centrou-se numa melhor compreensão, por parte dos alunos, acerca destes conteúdos.

Para abordar as transformações de funções, foi elaborada uma ficha de trabalho conjuntamente com a orientadora cooperante, sendo que esta seria para avaliação, no sentido de os alunos, a explorarem com a calculadora gráfica *Casio fx - CG50*, e discutila no grande grupo, na aula *online*. Neste âmbito, foi projetado o emulador da calculadora gráfica, entretanto, os alunos trabalharam com a calculadora física.

Na unidade temática *Monotonia, Extremos e Concavidade*, domínio *Funções Reais de Variável Real*, para abordar este conceito foi explorada uma ficha de trabalho realizada em grupo, estando estes distribuídos em salas separadas, na plataforma *Zoom*. Após a resolução da ficha de trabalho, a mesma foi discutida no grande grupo. Também recorremos à visualização de um vídeo, da Escola Virtual, sobre o conceito de extremos de uma função, procurando discutir este conceito no grande grupo.

Para o estudo da concavidade discuti este conceito, projetando uma animação a partir do *GeoGebra*, retirada da Escola Virtual e, através da sua manipulação, procurar que os alunos compreendessem como aplicar este conceito. Na resolução de exercícios recorreu-se a outros manuais da Escola Virtual, bem como o recurso ao manual adotado.

Na unidade *Estudo de Funções Elementares e Operações Algébricas com Funções*, domínio *Funções Reais de Variável Real*, no estudo da função quadrática, foi realizada uma ficha de trabalho, no ensino presencial. A mesma foi explorada, pelos alunos, com recurso à calculadora gráfica e, discutida no grande grupo, projetando o emulador da calculadora gráfica para uma melhor visualização gráfica. Os alunos sentiram-se mais confiantes, pois muitos dos conceitos foram já discutidos aquando da exploração ficha de trabalho sobre as transformações de funções.

No cálculo das coordenadas do vértice de uma função quadrática, foram abordados 4 processos para indicar as respetivas coordenadas. Os exemplos utilizados, foram retirados do *Projeto Estudar com Autonomia, Matemática A, 10.º ano*, da responsabilidade da Secretaria Regional da Educação, Ciência e Tecnologia (SRECT), tendo como docente responsável a Prof.<sup>a</sup> Gracinda Santos.

Ainda, no âmbito do estudo da função quadrática, foi elaborada uma atividade investigativa em que os alunos, divididos em grupos, procuraram modelar um fenómeno da natureza, uma construção arquitetónica, recorrendo ao *software GeoGebra*, no sentido de compreender melhor as características de uma função quadrática.

No estudo da função definida por ramos, procurou-se abordar alguns exemplos do manual adotado, concretamente o estudo de um modelo matemático para um dado tarifário, bem como a resolução de tarefas em grupo, relacionadas com o desporto. Neste sentido, os alunos exploraram as tarefas com a calculadora gráfica, sendo discutida, a sua resolução, no grande grupo. As advertências por parte da orientadora cooperante, e o apelo constante à reflexão, foram indispensáveis para poder contribuir para o desenvolvimento de algumas competências dos alunos, concretamente a reflexão e o espírito crítico.

No que diz respeito aos instrumentos de avaliação utilizados foram diversos, desde a questão aula, trabalho de grupo, concretamente a Modelação de uma Parábola utilizando o *software GeoGebra*, a exploração de algumas tarefas relacionadas com a atividade desportiva utilizando a calculadora gráfica, e testes de avaliação. Este último instrumento de avaliação tinha uma ponderação de 75%, e no que diz respeito às restantes ponderações, as mesmas foram distribuídas do seguinte modo: 15% para a realização de trabalhos, 5% para a Expressão Oral e Escrita, Cidadania e Desenvolvimento, e os restantes 5% atribuídos ao empenho, comportamento, autonomia e organização. Como instrumento de avaliação, criei, conjuntamente com orientadora cooperante, a atividade investigativa denominada Modelação de uma Parábola, com o propósito dos alunos desenvolverem competências ao nível do estabelecimento de conexões, compreensão escrita e expressão oral, autonomia, espírito colaborativo, espírito crítico, criatividade e domínio de tecnologias.

Em síntese, todo o acompanhamento realizado pela orientadora cooperante contribuiu para um maior discernimento sobre todo o processo de ensino e aprendizagem. É determinante o apoio facultado aos alunos, a reflexão que deve ser efetivada antes e após cada aula, a procura constante de informação em outras fontes como, por exemplo, a consulta de outros manuais. O uso de recursos didáticos interativos, a exploração que deve ser efetuada, na resolução de cada exercício ou problema, são cruciais no intuito de desafio constante do aluno.

#### **1.4 Atividades não letivas**

No decorrer do estágio pedagógico participei, em algumas atividades não letivas, concretamente, nas reuniões do Grupo Disciplinar de Matemática, em que, uma vez por semana, o grupo procurava refletir sobre vários assuntos discutidos em reunião de Conselho Pedagógico, no sentido de aprimorar a lecionação da disciplina de Matemática.

Com efeito, foi oportuno a observação de algumas discussões, nas reuniões do Grupo Disciplinar, pois, as mesmas, permitiram refletir sobre o desempenho docente, as competências essenciais ao exercício de funções, e os desafios constantes que um docente deve ultrapassar.

Os docentes de Matemática, dos vários ciclos de escolaridade, procuraram, durante algumas reuniões de grupo, analisar as planificações anuais, bem como as planificações a médio prazo, no sentido do cumprimento do número de aulas estipuladas, para cada unidade curricular. Procuraram analisar o ponto de situação relativamente às aprendizagens dos alunos e possíveis ajustamentos nas referidas planificações, com o objetivo de reforçar a aprendizagem e a recuperação de conteúdos não lecionados, no ano letivo anterior, devido às contingências face à COVID-19.

O Ensino à Distância revelou algumas fragilidades manifestadas pelos alunos, visto que nem todos os alunos possuíam computador e acesso à *internet*, pelo que o apoio da escola foi crucial para ultrapassar esta dificuldade.

Relativamente à Direção de Turma, tive a possibilidade de observar e compreender, de perto, o trabalho desenvolvido pelo Diretor de Turma, bem como o trabalho administrativo envolvido, e perceber que a um professor não basta lecionar, mas é importante que este possa estar envolvido nas iniciativas desenvolvidas junto da Comunidade Escolar. A participação em atividades dinamizadas pela escola, o contacto direto com os encarregados de educação, o relacionamento interpessoal para com os colegas, funcionários e direção executiva da escola, são fundamentais.

No que diz respeito a apoios concedidos às turmas, e em especial nesta fase mais complexa, a explicação *online* foi um meio encontrado para suprir algumas dificuldades manifestadas pelos discentes.

Assim, e devido às contingências impostas pela COVID-19, as explicações da disciplina de Matemática, bem como de outras disciplinas curriculares eram realizadas *online*. Os docentes procuraram, o melhor possível, esclarecer algumas dúvidas que surgiram por parte de alguns alunos, pois não havia a possibilidade de as esclarecer em sala de aula. Assim, tive a possibilidade de assistir a uma das aulas de explicação da disciplina de Matemática, *online*, de uma turma de 7.º ano, em que alguns alunos colocavam dúvidas relativamente à unidade temática *Números e Operações*.

Nesta linha de pensamento, foi importante perceber que dificuldades eram apresentadas pelos alunos, as estratégias utilizadas para as ultrapassar, o apoio constante e o reforço positivo, junto dos alunos, por parte da docente.

No seguimento do estágio pedagógico, surgiu a possibilidade de realizar um curso *online*, denominado *6.ª ed. Primeiros Passos com a Calculadora Gráfica - (online)*, através do Centro de Formação de Escolas António Sérgio. Através deste, possibilitou a aquisição de novos conhecimentos, relativamente ao manuseamento da calculadora gráfica, contribuindo, deste modo, para um melhor desempenho na leção da disciplina de Matemática A, 10.º ano. Este recurso didático é muito utilizado no ensino Secundário, não apenas no sentido de facilitador da aprendizagem do conteúdo, mas também utilizado na avaliação dos alunos como, por exemplo, nos exames nacionais.

### 1.5 Reflexão Geral sobre o Estágio Pedagógico

O facto de ter tido a oportunidade de realizar um estágio pedagógico numa escola da RAM, foi gratificante, pois tive a possibilidade de lecionar a alunos que, ao longo do ano letivo, evidenciaram serem aplicados, com vontade de aprender e de querer fazer mais.

É certamente uma nova aprendizagem, com um público alvo mais informado e com elevada destreza ao nível do manuseamento das tecnologias digitais, o que facilitou a utilização de alguns recursos didáticos, em contexto de sala de aula, quer no ensino presencial e também no ensino *online*.

Na turma do 8.º ano, utilizei recursos didáticos como o *Geoplano* virtual, o *GeoGebra*, tendo como base as referências emanadas no *Programa de Matemática do Ensino Básico e das Metas Curriculares* (Bivar, Grosso, Oliveira & Timóteo, 2013), bem como as *Aprendizagens Essenciais* (ME, 2018a) relativamente à utilização de recursos didáticos. De certo modo, permitiram atingir os objetivos propostos e as aspirações dos alunos. Assim, na aula de Matemática, os alunos procuraram manipular estes recursos e estabelecer uma ligação entre o recurso e o conteúdo matemático, verificando-se uma constante preocupação nesse sentido.

Esta turma, em termos gerais, não revelou ser problemática, dado ser constituída por alunos muito empenhados, disciplinados, com espírito de iniciativa e de abertura, que procuravam intervir nas aulas questionando sempre que surgissem dúvidas, mantendo uma atitude crítica face às aprendizagens.

Relativamente à turma do 10.º ano, também composta por alunos disciplinados, que procuravam empenhar-se durante as aulas, participando e colocando as suas questões, manifestando vontade de aprender.

Do contacto que mantive com a turma do 10.º ano, destaco o facto de a turma demonstrar interesse na utilização de recursos didáticos, concretamente a calculadora gráfica, colocando questões sobre o seu manuseamento, pois, inicialmente, desconheciam como utilizar este recurso, de extrema importância e utilizado na avaliação sumativa do ensino Secundário.

O *GeoGebra* também foi um dos recursos utilizados, quer na exemplificação da aprendizagem de conteúdos matemáticos, bem como no processo de modelação de uma Parábola, onde os alunos trabalharam colaborativamente em grupo, e onde tiveram a oportunidade de explorar e conhecer um pouco mais este recurso que inicialmente desconheciam.

Atualmente, ser professor é uma árdua tarefa implicando este estar munido de um conjunto de competências essenciais à lecionação. Competências, essas, que permitam ir ao encontro das necessidades educativas dos alunos, não só no aspeto do conhecimento, mas também ao nível da orientação e acompanhamento.

A comunicação é um dos aspetos mais importantes no processo de lecionação, pois o modo como o docente interage com os seus alunos, com os colegas, a comunidade educativa, a forma como transmite o conhecimento, revela o ser docente como ser humano, profissional, inserido numa sociedade em permanente evolução.

Também o aspeto formativo do docente é relevante, por ser fundamental, o mesmo, estar atualizado face a novos conteúdos e possíveis alterações curriculares que exijam a constante atualização de conhecimentos.

A concretização do estágio pedagógico permitiu compreender um conjunto de situações essenciais à docência e que tive a possibilidade de experienciar ao longo de um ano letivo. As sugestões constantes por parte das orientadoras cooperantes e orientadora científica foram cruciais, para poder moldar alguns aspetos, contribuindo para um processo de ensino e aprendizagem mais dinâmicos. Contudo, alguns aspetos poderiam ainda ser aperfeiçoados, como a reflexão crítica, gestão de tempo e a comunicação em consonância com a Prática Docente, para poder, efetivamente, assumir uma postura mais profissional.

## PARTE II

O facto de ter tido a possibilidade de frequentar algumas unidades curriculares com uma forte componente didáctica, no curso do Mestrado em Ensino da Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Secundário, possibilitou novas aprendizagens relativamente à utilização de alguns recursos didáticos passíveis de serem utilizados na aula de Matemática. Recursos esses, que indico: *GeoGebra*, *Geoplano Virtual*, Calculadora Gráfica *Online (Desmos)*, Sólidos em cartolina, aplicação *Mirage* para visualização de Sólidos geométricos através da realidade aumentada, robôs, Tangram, dobragens (técnica do Origami), impressora 3D. Estes foram os mais utilizados em sala de aula, cujo objetivo seria a sua utilização no estudo de alguns conteúdos matemáticos, nomeadamente no âmbito da geometria e das funções.

A motivação pela escolha do tema supracitado deve-se ao facto de ter tido a oportunidade de, através do estágio pedagógico, explorar e aprofundar os meus conhecimentos acerca dos potenciais contributos dos recursos didáticos utilizados na aula de Matemática, para o processo de Ensino e de Aprendizagem desta disciplina.

Através da criação e implementação de tarefas para a aula de Matemática, no 3.º Ciclo e Secundário, onde são usados recursos didáticos de diferentes naturezas, procurei, através de iniciativas de âmbito investigativo, compreender os contributos destes recursos para o processo de Ensino e Aprendizagem, sendo este o principal foco desta investigação. Para tal, baseámo-nos em temas do currículo desta disciplina. Assim, na presente investigação, colocou-se como questão principal: — Quais os contributos da utilização de recursos didáticos na aula de Matemática para o processo de Ensino e de Aprendizagem?

Dada a natureza, do que pretendíamos compreender, optou-se por implementar uma investigação do tipo qualitativo, pois, segundo Fernandes (1991), “O foco da investigação qualitativa é a compreensão mais profunda dos problemas, é investigar o que está “por trás” de certos comportamentos, atitudes e convicções.” (p.3).

Segundo Amado (2017), no âmbito da investigação qualitativa, “Os métodos utilizados são flexíveis e adaptáveis aos contextos sociais (...)” (p.45). O autor enfatiza, ainda, no que diz respeito à observação de detalhes descritivos (e.g., pessoas, locais, conversas) que:

“(...) uma vez observados, sugerem perguntas e hipóteses a formular durante o próprio processo de pesquisa), de modo a permitirem uma investigação que tenha em conta os contextos em que os fenómenos se verificam e a complexidade de fatores que lhes dão origem.” (Amado, 2017, p.45)

Neste sentido, e no decorrer da investigação, poderão surgir novas hipóteses e a formulação de novas questões, opinião também partilhada por Bento (2012) quando refere que a investigação qualitativa “(...) Emerge do processo de investigação em vez de ser pré-estabelecida; em consequência, as questões de investigação podem mudar e ser redefinidas durante o processo; (...)” (p. 2).

Para podermos discutir a questão principal, a mesma foi dissecada em cinco questões mais específicas, concretamente:

- O que são recursos didáticos e como podem ser utilizados na aula de Matemática?
- O que nos dizem as orientações curriculares acerca do uso de recursos didáticos na aula de Matemática?
- Que recursos didáticos podem ser utilizados na aula de Matemática e de que forma podem auxiliar o professor?
- Qual o conhecimento necessário para que um professor possa lecionar Matemática utilizando recursos didáticos, nomeadamente os tecnológicos?
- De que forma o recurso didático pode contribuir para que o aluno construa o conhecimento matemático?

## 2. Fundamentação Teórica

### 2.1 Recursos Didáticos na aula de Matemática

A Matemática como disciplina integrante do currículo escolar, por vezes é considerada pelos alunos como sendo complexa. Contudo, os docentes procuram adotar estratégias, para ir ao encontro dos interesses dos estudantes, com o intento de que estes possam alcançar o sucesso.

Conforme as *Aprendizagens Essenciais do Ensino Secundário*, do 10.º ano de escolaridade, numa aula de Matemática, o professor deve estimular os alunos a recorrerem a “(...) situações e contextos variados, incluindo a utilização de materiais diversificados e tecnologia (...)”, fomentando o raciocínio e a comunicação matemática (Ministério da Educação [ME], 2018b, p.5).

Assim, e procedendo a uma análise cuidada às *Aprendizagens Essenciais*, quer do Ensino Básico, quer do Ensino Secundário (ME, 2018a, 2018b), relativamente à utilização de recursos didáticos nas aulas de Matemática, podemos observar que em cada

conteúdo temático é feita referência à utilização de: materiais manipuláveis, uso de tecnologia digital, aplicativos e programas computacionais que fomentem e enriqueçam o ambiente de aprendizagem (ME, 2018a, 2018b).

Nas *Aprendizagens Essenciais, 8.º ano, 3.º Ciclo do Ensino Básico: Matemática*, o ME (2018a) é unânime na utilização de variados recursos didáticos incluindo o uso de tecnologia, em sala de aula, o que permite conceder ao professor maior autonomia na utilização de recursos didáticos.

Ponte *et al.* (2007) atestam que “A aprendizagem da Matemática inclui sempre vários recursos. Os alunos devem utilizar materiais manipuláveis na aprendizagem de diversos conceitos (...)” (p. 9). A importância que é atribuída ao uso de recursos diversos, na aprendizagem de conceitos matemáticos, revela-se um processo dinâmico e produtivo.

Pepin (2009, citado por Pires & Amado, 2013) alude que, “Geralmente, associava-se recursos a materiais manipuláveis, a régua e compassos, ao quadro ou ao manual escolar, sem dúvida o recurso dominante” (p. 473).

Nesta perspetiva, é importante perceber, em concreto, o que são exatamente recursos didáticos, e se todo o recurso utilizado na aula de Matemática pode ser considerado um recurso didático.

Para Nunes e Ponte (2010, citados por Vaz, 2018), “(...) recursos didáticos são os que o professor dispõe para desenvolver o currículo, que utiliza e quer que os seus alunos utilizem, constituindo por isso um elemento importante da gestão curricular.” (p.42).

Os recursos didáticos utilizados, na aula de Matemática, podem ser de diferentes naturezas destacando-se os recursos tecnológicos e não tecnológicos.

Alguns autores definem os recursos didáticos como sendo recursos físicos que podem ser utilizados em distintas áreas, independentemente dos métodos e estratégias utilizadas (Cerqueira & Ferreira, 2000, citados por Couceiro, 2018). Contudo, existem autores que defendem que os recursos didáticos se assemelham a materiais didáticos (Couceiro, 2018).

No que diz respeito ao conceito de materiais didáticos, Chamorro (2003, citado por Botas & Moreira, 2013) defende que estes podem ser manipulados e orientados permitindo aos alunos a obtenção de resultados significativos relativos à atividade implementada em sala de aula.

É pertinente compreender o que são materiais manipuláveis, pois, conforme Pinto (2012), “Tal como é referido em NCTM [*National Council of Teachers of Mathematics*] (2000/2007), materiais manipuláveis podem ser entendidos como objectos [*sic*] concretos

que forneçam uma oportunidade para atingir certos objectivos [*sic*], quando manipulados ou pelo aluno e/ou professor.” (p.20). Neste sentido, os materiais manipuláveis permitem ao aluno ter a possibilidade de os manusear, explorar, com maior eficiência e rapidez, procurando relacioná-los com o conteúdo matemático em estudo, e assim obter uma melhor compreensão desse mesmo conteúdo.

No que diz respeito à classificação de materiais manipuláveis, estes podem ser considerados materiais estruturados e não estruturados, sendo importante analisar a opinião de alguns autores (Damas, Oliveira, Nunes & Silva, 2010, p.5, citados por J. V. Moreira, 2018) que defendem que:

“Os materiais estruturados “são suportes de aprendizagem que permitem envolver os alunos numa construção sólida e gradual das bases matemáticas” e considera[m] que um material manipulável não estruturado é aquele que na sua “(...) génese não apresenta uma preocupação em corporizar estruturas matemáticas”.” (p. 30)

Na opinião da autora Botas (2008), o material não estruturado:

“(…) é aquele que ao ser concebido não corporizou estruturas matemáticas, e que não foi idealizado para transparecer um conceito matemático, não apresentando, por isso uma determinada função dependendo o seu uso da criatividade do professor.” (p.27)

Existem múltiplos materiais, em que na sua estrutura, não foram concebidos para o estudo de um dado conceito matemático, mas que podem ser modificados, adaptados e manipulados criativamente. O professor deve ter presente que conceitos matemáticos pretende que o aluno aprenda e que objetivos pretende, alcançar, com a sua utilização.

Na perspetiva de Couceiro (2018), no que se refere à classificação de recursos didáticos, estes:

“(…) são classificados de diferentes formas, consoante o critério utilizado pelo autor (...), por isso, não há nenhuma categorização tradicional e universalmente aceite. Estes podem categorizar os recursos tendo em conta o seu desenvolvimento e a sua utilização, a sua natureza ou a finalidade que têm no processo educativo.” (p.67)

Podemos ter como exemplos de recursos estruturados, os que foram concebidos para serem utilizados no estudo específico de conceitos matemáticos. A título de exemplo, pode-se considerar o compasso ou o transferidor, que possuem uma ligação direta com o conteúdo matemático produzido com o seu uso (construção de circunferências ou arcos de circunferência e medição de ângulos, respetivamente). Mas os recursos estruturados também podem ser de natureza digital como o *software* de Geometria Dinâmica

*GeoGebra*, sendo este considerado “(...) um software de utilização simples, com o qual podemos fazer construções (incluindo pontos, vetores, segmentos, retas, e secções cónicas), bem como implementar um conjunto variado de funções.” (Cadavez, 2013, p.27). Os recursos estruturados, digitais ou físicos, possuem a característica de serem manipulados pelo utilizador, professor ou aluno. Contudo, a seleção que o professor faz do momento em que utiliza uns ou outros (físicos ou digitais) depende do seu propósito didático. Segundo Martins (2020), “A forma como, por exemplo, se constroem [*sic*] e relacionam objetos geométricos é consideravelmente distinta se utilizarmos ferramentas físicas (lápis, régua, compasso...) ou um software de geometria dinâmica” (p.76).

Em termos gerais, o *GeoGebra* possibilita o estudo de três grandes áreas da Matemática, nomeadamente a Geometria, a Álgebra e o Cálculo (Silveira & Cabrita, 2013), possuindo inúmeras potencialidades pedagógicas, no processo ensino e aprendizagem. Assim, contribui para que os alunos ultrapassem dificuldades “(...) na visualização espacial, no desenho, construções geométricas e na aplicação de conhecimentos de geometria a situações concretas (...)” (Cadavez, 2013, p. 16).

O *Geoplano* é também considerado um excelente recurso para efetuar representações geométricas no plano, facilitando o cálculo de áreas e perímetros, e o estudo de figuras poligonais, e que também pode ser usado digitalmente.

Segundo Ventura (2013), “O modelo do geoplano, simulado no computador, tem como características tornar o geoplano mais flexível e rápido e, conseqüentemente, mais variado e (...) criativo (...)” (p.25). Também este recurso contribui para a aprendizagem de conceitos matemáticos e para o aluno desenvolver “(...) competências espaciais e visuais, construir conceitos como área e perímetro e compreender transformações geométricas euclidianas como a reflexão, rotação, translação e simetria.” (Coelho *et al.*, 2012, citados por Lameiras, 2016, p. 16).

As calculadoras gráficas também desempenham um papel extremamente relevante na aprendizagem Matemática dos alunos, particularmente no Ensino Secundário. Neste sentido, Dunham e Dick (1994, citados por Semião & Canavarro, 2012) defendem que a “(...) utilização da calculadora gráfica permite, por exemplo, a experimentação, a investigação e a resolução de problemas, dando origem a uma nova dinâmica na sala de aula (...)” (p. 799).

A calculadora gráfica permite não só efetuar e verificar cálculos, mas também efetuar representações gráficas, resolver problemas, pois, através de tarefas investigativas e de exploração, o aluno tem a possibilidade de aprofundar este recurso possibilitando a

modelação de situações concretas. Doerr e Zangor (2000, citados por Semião & Canavarro, 2012) referem-se à calculadora como sendo uma “(...) ferramenta de visualização (...) utilizada para encontrar visualizações apropriadas de um gráfico, para representar e interpretar dados (...)” (p. 799).

Face à diversificação de recursos possíveis de serem utilizados no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, estes devem ser criteriosamente selecionados pelo professor, conforme o conteúdo matemático a ser aprendido, pelo aluno, e estabelecendo uma correlação entre o recurso e o conteúdo. Como viemos a discutir, existem recursos didáticos que se prestam à aprendizagem de certos conteúdos matemáticos específicos, logo, cabe ao professor analisá-los e procurar selecioná-los segundo os seus objetivos de aprendizagem. Assim, depreendemos que o recurso didático deverá estar em intrínseca relação com o objetivo ou fim para o qual é usado, ou seja, com o propósito do seu uso.

É crucial analisar a relação dos recursos didáticos na definição de estratégias e metodologias que permitam “(...) **identificar possíveis práticas educativas que possam explicar um maior sucesso escolar na aprendizagem dos conceitos matemáticos.**” (Caldeira, 2009, p.76). Contudo, é extremamente importante refletir sobre a envolvimento do aluno em sala de aula, quais os seus objetivos e ambições, e se as práticas educativas implementadas são geradoras de uma Matemática mais atrativa e impulsionadora. Segundo Caldeira (2009), “**A motivação, a confiança, a comunicação, as estratégias criativas e dinâmicas são fundamentais para a construção de uma matemática mais criativa.**” (p.76).

Para que o professor possa motivar os seus alunos, numa aula de Matemática, deve ter o cuidado na preparação e implementação de um plano de aula, definindo criteriosamente as suas estratégias, recursos a serem utilizados, bem como as metodologias a serem implementadas, que permitam alcançar os objetivos de aprendizagem definidos.

A utilização de recursos didáticos, na aula de Matemática, permite auxiliar na aprendizagem de um determinado conteúdo matemático, se a este estiver associado um propósito, e se o mesmo for devidamente utilizado, combinando os conhecimentos e experiência do professor, bem como as suas estratégias pedagógicas. Serrazina (1998, citada por Caldeira, 2009) “afirma que o sucesso dos materiais manipulativos depende, por um lado, de como as tarefas são implementadas pelos professores, por outro, da forma como vêem [*sic*] a matemática, do seu processo de ensino-aprendizagem e do seu conhecimento ético.” (p. 79).

Do ponto de vista de Ponte e Serrazina (2000, citados por Caldeira, 2009) “(...) o uso de materiais diversos, pode contribuir para o desenvolvimento de um ambiente de trabalho participativo, através de uma actividade [sic] matemática estimulante.” (p. 79). Com efeito, estimular os alunos a uma maior participação na aula de Matemática é uma tarefa desafiante para um professor de Matemática. Pensar em cada uma das aulas a implementar, e quais os recursos que podem ser utilizados, para uma maior implicação dos alunos nas atividades desenvolvidas, e que, estes, sejam geradores de um ambiente mais propício à aprendizagem, é realmente um grande desafio.

A compreensão de um determinado conteúdo matemático implica, por vezes, o aluno ter capacidade de abstração, e nesta perspetiva os recursos didáticos são determinantes na sua aprendizagem. Botas e Moreira (2013, citados por J. V. Moreira, 2018) aludem que “Uma das formas de promover diferentes experiências de aprendizagem matemática enriquecedoras é através do uso de materiais didáticos, os quais assumem um papel ainda mais determinante por força da característica abstrata da matemática.” (p. 27).

Neste âmbito, torna-se importante desenvolver atividades nas quais os alunos se sintam envolvidos num ambiente de aprendizagem mais instigante, onde estes possam investigar, explorar, formular conjeturas, analisar resultados, recorrendo a recursos didáticos mais motivadores e que tornem a aprendizagem da Matemática mais significativa, lúdica, divertida e concreta. Em contrapartida, Matos e Serrazina (1996) referem que frequentemente “(...) são utilizados métodos expositivos, acreditando-se na eficácia da transmissão do saber, em vez de se compreender que o conhecimento matemático não se transmite, mas ele é essencialmente construído pelos alunos.” (p. 22). Os mesmos autores defendem a importância de os alunos entenderem diferentes conceitos, não através da mecanização, mas operacionalizando-os em diferentes contextos, sendo esta uma das tarefas do professor (Matos & Serrazina, 1996). Neste sentido, os recursos didáticos em colaboração com metodologias que apelem a um papel ativo do aluno na sua aprendizagem, poderão ajudar os alunos a construírem o seu próprio conhecimento matemático.

Ponte e Serrazina (2000, citados por Ponte, 2009) abordam também a questão do ensino expositivo, referindo que neste tipo de abordagem “(...) a comunicação tem por padrão fundamental a conhecida sequência I-R-F, ou seja, iniciação-resposta-*feedback*” (p. 105). É evidente que no ensino expositivo, recorrendo-se a um método mais diretivo,

o professor desempenha um papel mais ativo, e o aluno desempenha um papel como agente passivo, na sala de aula, apenas respondendo quando questionado pelo professor.

Neste âmbito, torna-se fulcral a implementação de um método não diretivo, onde o aluno seja o centro da aprendizagem, onde o professor promova atividades que permitam ao aluno construir conhecimentos a partir das suas conjecturas e do processo de tentativa e erro. O conhecimento matemático não se esgota e é através das tentativas do aluno que este alcança o conhecimento matemático ou outros conhecimentos advindos de outros contextos. A possibilidade que os alunos têm de estabelecer conexões com outras áreas curriculares, fomentam e reforçam os seus conhecimentos matemáticos e não matemáticos.

O ME (2018a), através do documento ministerial *Aprendizagens Essenciais, 8.º ano, 3.º Ciclo do Ensino Básico: Matemática*, apela ao estabelecimento de conexões com outras áreas curriculares, e que permitam ao aluno, na disciplina de Matemática, desenvolver “(...) conhecimentos, capacidades e atitudes, (...)” (ME, 2018a, p. 3). Estas competências visam dar um contributo, no sentido de desencadear nos alunos uma atitude mais positiva em relação à Matemática.

Ferreira *et al.* (2008) referem que os “(...) materiais manipuláveis (...) permitem a elaboração do conhecimento mediante a realização de atividades dinâmicas nas quais o aluno é incentivado a pensar, analisar, agindo sobre o objeto de seu aprendizado.” (p. 10). O aluno é estimulado a raciocinar, a pensar criticamente, a usar a sua criatividade tornando-se um agente ativo e dinamizador no processo de aprendizagem.

Relativamente às opções metodológicas por parte do professor, Guimarães (2003) refere que “(...) estão muito relacionadas com as suas concepções [*sic*] relativas à Matemática – por exemplo, sobre a sua natureza e valor, sobre a forma como se produz e desenvolve o conhecimento matemático (...)” (p. 98). Neste sentido, voltamos a afirmar que o professor também desempenha um papel deveras importante na construção do conhecimento do aluno, ou melhor, nas oportunidades que são dadas aos alunos para que participem na construção do seu conhecimento matemático. O modo como o professor irá preparar as tarefas, selecionar os recursos didáticos utilizados na sua implementação, bem como a metodologia de trabalho com o aluno na sala de aula, irá definir como este poderá construir o saber matemático podendo levá-lo ao sucesso ou insucesso. Assim, é importante estimular o interesse do aluno pela Matemática, motivar, envolver o aluno na procura de informação, na descoberta e na discussão, tornando-o num agente ativo que procura, construir, os seus conhecimentos autonomamente.

Neste seguimento, Botas e Moreira (2013) advogam que “(...) é importante proporcionar diversas oportunidades de contato [*sic*] com materiais para despertar interesse e envolver o aluno em situações de aprendizagem matemática (...)” (p. 254). Entretanto, segundo Thomaz e Megid (2017):

“(...) o ensino a partir da transmissão de conhecimentos, sem reflexão sobre os conteúdos abordados, nem sempre atinge os objetivos relacionados ao ensino de matemática. Os modelos mais comuns de aulas dessa disciplina pressupõem uma sala com carteiras (e alunos) enfileiradas e uma lousa repleta de instruções e exercícios.” (p. 834)

As mesmas autoras (Thomaz & Megid, 2017) referem, ainda, que “Em muitas salas de aula, a matemática é algo pouco atraente para os alunos, gerando, a partir do seu ensino, uma relação de medo, falta de vontade, baixa autoestima e falta de êxito.” (p. 834). Assim, é fundamental desenvolver dinâmicas que fomentem no aluno a sua autonomia, autoestima, e espírito crítico na construção do conhecimento.

Segundo Brasil (1977) “Tem sido um fracasso demonstrar aos professores que a aula expositiva (sobretudo, numa disciplina essencialmente ativa como a Matemática) é inteiramente inútil.” (p.21). Torna-se importante mudar mentalidades, incutir nos professores de Matemática estratégias pedagógicas que permitam, aos alunos, aprendizagens mais efetivas e dinâmicas, contrariando, deste modo, os métodos tradicionais que distanciam os alunos da disciplina de Matemática. Nesta perspectiva, é importante utilizar recursos didáticos que possam incrementar nos alunos o interesse pela Matemática, contribuindo para que desenvolvam competências ao nível do pensamento matemático, bem como da comunicação matemática, escrita e oral. Neste contexto, o conceito de literacia matemática ganha relevância “(...) como um processo de alfabetização matemática, no qual é equacionada a competência no domínio de noções matemáticas de diferentes campos teóricos desta disciplina.” (Martins & Fernandes, 2021, pp. 76–77). Contudo, para que o aluno possa desenvolver competências matemáticas, a utilização de certos materiais e recursos didáticos poderão facilitar a aprendizagem dos conteúdos matemáticos.

Utilizar recursos didáticos em sala de aula, requer conhecimento por parte do professor, sobre as suas potencialidades na aprendizagem do conteúdo matemático, bem como as competências que pretendemos que o aluno desenvolva com a sua utilização. Graells (2000, citado por Botas e Moreira, 2013) salienta a intencionalidade dos materiais didáticos onde estes permitem “(...) fornecer informação; (...) proporcionar o treino e o exercício de capacidades; cativar o interesse e motivar o aluno; avaliar as capacidades e

conhecimentos; proporcionar simulações, com o objetivo da experimentação, observação e interação; (...)” (p. 257).

No processo ensino e aprendizagem da Matemática é deveras importante a orientação emanada pelo professor, e neste sentido, Damas *et al.* (2010, citados por S.C. Silva, 2015) referem “(...) que se o ensino da Matemática for bem orientado, permite que os alunos desenvolvam a capacidade de raciocínio lógico, com clareza e rigor” (p. 24).

Para que os alunos possam desenvolver tais capacidades é importante envolvê-los em atividades quer sejam investigativas, exploratórias ou de resolução de problemas, onde seja dado maior enfoque ao trabalho colaborativo, utilizando recursos didáticos. Neste âmbito, permite ao aluno cooperar com os seus pares e, concomitantemente, desenvolver competências pessoais e sociais que promovam a cidadania e participação ativa na sociedade. Neste sentido, Ponte, Oliveira, Cunha *et al.* (1998) consideram que as potencialidades do trabalho de grupo fomentam a capacidade de interação entre os discentes, bem como promovem o progresso na capacidade de cooperação.

### ***2.1.1 Recursos Didáticos Tecnológicos***

Nesta subsecção considerou-se pertinente abordar mais especificamente os recursos tecnológicos, para compreendermos as suas potencialidades na abordagem de alguns conteúdos matemáticos. Além disso, e pelo facto de algumas aulas na PES terem sido lecionadas no ensino *online*, dadas as circunstâncias face à situação pandémica, procurou-se utilizar recursos tecnológicos por considerar-se que os mesmos eram adequados à modalidade de ensino adotada.

A tecnologia tem sido mais frequentemente utilizada nas salas de aula, dada a sua importância e contributos para o processo de Ensino e Aprendizagem. Segundo o ME (2018b), no documento ministerial, *Aprendizagens Essenciais, 10.º ano, Ensino Secundário: Matemática A*, “A tecnologia é uma ferramenta cada vez mais presente na sociedade e no mercado de trabalho e também um recurso essencial no ensino, ajudando os alunos a perceber as ideias matemáticas, a raciocinar, a resolver problemas e a comunicar.” (p. 3).

Nesta perspetiva, quando procuramos refletir acerca dos contributos dos recursos didáticos para a aprendizagem Matemática, torna-se essencial refletir em que medida os recursos tecnológicos podem privilegiar o ensino e a aprendizagem, e reforçar a literacia matemática dos alunos.

Do ponto de vista do professor, alguns autores mencionam a relevância das competências digitais adquiridas, pelo que “(...) os recursos digitais (...) *permitiram* [ênfase adicionada] tornar central o currículo de Matemática recorrendo a estratégias e metodologias diversificadas aproximando cada um dos alunos da essência conteudinal desta área.” (Verdasca *et al.*, 2020, p. 42). Neste contexto, é primordial o manuseamento de ferramentas digitais, por parte do docente, por forma a tornar o processo de Ensino e Aprendizagem mais eficaz e motivador para os discentes.

O ME (2018b) defende, no documento *Aprendizagens Essenciais, 10.º ano, Ensino Secundário: Matemática A*, a utilização da tecnologia de uma forma criteriosa e sensata, promovendo a aquisição de novas capacidades na área da programação, sendo que em alguns países, esta já faz parte dos programas curriculares da disciplina de Matemática.

Segundo Kickbush (2012, como citado em Verdasca *et al.*, 2020), “Existe evidência científica que mostra que a inclusão de tecnologia, em sala de aula, cria ambientes de bem-estar para a aprendizagem (...)” (p. 51). O autor acredita que a utilização de tecnologia potencia ambientes promotores de aprendizagem. Rosen e Manny-Ikan (2012, citados por Verdasca *et al.*, 2020, p.51) referem que a tecnologia “(...) favorece o desempenho dos alunos (...)”.

A tecnologia, ao contrário de algumas posições defendidas por alguns críticos, permite envolver o aluno no processo de ensino e aprendizagem. A aquisição de novas competências, não só ao nível da aprendizagem do conteúdo, mas também adquirir competências tecnológicas, que visam preparar o aluno para ingressar no mercado de trabalho, sendo este cada vez mais tecnológico e, que, requer recursos humanos cada vez mais capacitados a este nível.

Ponte, Matos e Abrantes (1998) destacam ainda a importância “(...) das novas tecnologias de informação (calculadoras, computadores e telemática – cuja face mais visível é, presentemente, a INTERNET) e a sua crescente utilização nos mais diversos domínios (...) de importância estratégica para o progresso científico e tecnológico.” (p. 310). Neste âmbito, é relevante a valorização da tecnologia na aula de Matemática, não descurando a utilização de recursos não tecnológicos (estruturados e não estruturados).

Leivas e Nadalon (2019) advogam que “Na Geometria é importante explorar o uso de objetos manipuláveis e de softwares, visto haver, por vezes, dificuldade na visualização de objetos geométricos, principalmente no espaço, geralmente apresentados em sala de aula utilizando-se somente quadro, giz e livro didático.” (p.33).

O modelo *Technological Pedagogical Content Knowledge* (TPACK) pode ajudar a compreender melhor como se interligam o conhecimento tecnológico, pedagógico e de conteúdo, numa sala de aula, em que se utilizam recursos didáticos, em particular tecnológicos. Este modelo foi introduzido, pela primeira vez, por Mishra e Koehler em 2006, “*in the Teachers College Record under the title “Technological Pedagogical Content Knowledge: A Framework for Teacher Knowledge”*” (Mishra & Koehler, 2006, citados por Koehler, Mishra & Cain, 2013, p.13).

Do cruzamento dos três principais conhecimentos supramencionados emergem quatro novos conhecimentos, nomeadamente “(...) a Pedagogia-Conteúdo, a Tecnologia-Conteúdo, a Tecnologia-Pedagogia e o TPACK (...)” (Camargo, 2016, para.4). Para podermos perceber esta ligação entre estes conhecimentos é necessário compreender o que significa exatamente o modelo TPACK.

O TPACK define-se como sendo o conhecimento necessário para que um professor possa lecionar, na sua área disciplinar e nível de escolaridade, recorrendo às tecnologias (Koehler & Mishra, 2009; Mishra & Koehler, 2006; Torres & Brocardo, 2015).

Segundo este modelo é importante que os professores estejam munidos de uma estrutura de conhecimento que agregue o conhecimento ao nível do conteúdo, da pedagogia, o currículo, a escola e os alunos, definindo assim o Conhecimento Pedagógico e de Conteúdo (PCK) (Sampaio & Coutinho, 2014). Entretanto, o cruzamento do Conhecimento Tecnológico com o Conhecimento de Conteúdo, origina um novo conhecimento denominado por Conhecimento Tecnológico e de Conteúdo (TCK) (Torres & Brocardo, 2015).

Neste sentido, é importante compreender, na prática, como se relaciona o Conhecimento Tecnológico com o Conhecimento de Conteúdo. Torres e Brocardo (2015), relativamente ao Conhecimento Tecnológico e de Conteúdo (TCK), referem que:

“O professor deverá perceber os impactos que as tecnologias podem trazer aos conteúdos a lecionar. O software de geometria dinâmica, por exemplo, ao possibilitar que o aluno “brinque” com as construções arrastando pontos, vai permitir formas de provar ou refutar conjecturas que anteriormente não eram possíveis.” (p. 184)

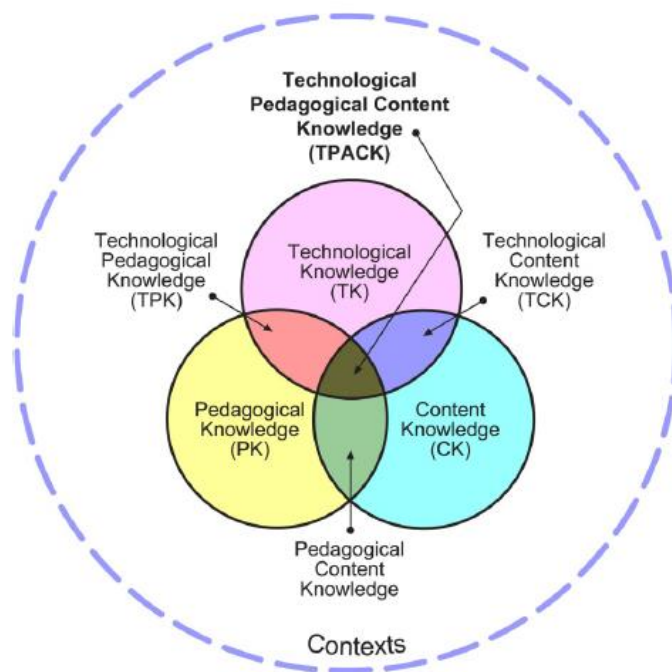
Também é importante compreender como se relaciona o Conhecimento Tecnológico com o Pedagógico, dado que o cruzamento destes dois conhecimentos dá origem a um novo conhecimento designado por Conhecimento Tecnológico e Pedagógico (TPK) (Torres & Brocardo, 2015). Este cruzamento vem na linha de uma ideia já

anteriormente discutida. Isto é, o facto de ser crucial o professor perceber quais os objetivos que pretende, alcançar, com a utilização de um determinado recurso didático, conhecendo o seu potencial, e que benefícios que o recurso trará para o processo de Ensino e Aprendizagem de um determinado conteúdo.

Sampaio e Coutinho (2014) advogam que “Um ensino com recurso à tecnologia impõe a compreensão das relações de reforço mútuo entre estes elementos, em conjunto, pois no centro do TPACK está a dinâmica entre conteúdo, pedagogia e tecnologia.” (s.p.). A figura 2 ilustra como se relacionam os conhecimentos PCK, TCK e TPK formando o conhecimento TPACK.

### Figura 2

*The TPACK framework and its knowledge components.*



*Nota:* Adaptado de M. J. Koehler e P. Mishra (2009, p.63) em <https://www.learntechlib.org/primary/d/29544>

A função orientadora do professor é determinante no envolvimento, do aluno, nas tarefas matemáticas com recurso às tecnologias, sendo que na perspetiva de Dias (2020) “(...) *the teacher needs to have theoretical knowledge that provides support for the action and that helps him to plan his classes with the use of technologies.*” (p. 55). O conhecimento adquirido por parte do professor acerca das novas tecnologias, associado ao conhecimento teórico, nomeadamente dos conteúdos matemáticos, bem como a implementação de metodologias de ensino adequadas é essencial e significativo na

construção do conhecimento por parte do aluno. No entanto, por vezes, “(...) os professores evidenciam diversas dificuldades, dilemas e receios. Sentem-se em cheque a experimentar os materiais, têm medo de não fazer “bem” as coisas.” (Ponte, Oliveira, Cunha *et al.*, 1998, p. 122). É importante que o professor se sinta confiante ao manusear determinados recursos (tecnológicos e não tecnológicos) para que, no momento da sua utilização, possa transmitir segurança e confiança ao aluno.

A formação contínua de professores pode ser uma boa estratégia. É essencial que os professores possam contornar algumas lacunas existentes ao nível de conhecimentos, não só no que diz respeito ao conhecimento teórico (conteúdo), mas também ao nível de metodologias de ensino mais eficazes, bem como o conhecimento tecnológico, fomentando uma prática letiva mais dinâmica e produtiva.

A utilização de diferentes recursos tecnológicos, na aula de Matemática, pode ser benéfica e despertar no aluno a curiosidade, a criatividade, e autonomia, no processo de Ensino e Aprendizagem, permitindo ao professor esquivar-se do paradigma tradicional e conservador. Segundo Ribeiro (2020):

“(...) a utilização de computadores e a realização de jogos são atividades que fogem do tradicional, nestas atividades os alunos são movidos pela ação, o que faz com que eles saiam do estado de acomodação, superando seus limites, e são motivados a realizar as atividades movidas pelos sentimentos de entusiasmo, levando a realizar grandes conquistas.” (p. 88)

A importância que tem para o aluno em explorar novos recursos tecnológicos, investigar, compreender um determinado conteúdo, pode contribuir para que este se envolva “(...) de forma cooperativa para descobrir alguma coisa, adquirir conhecimento e novas experiências. Existe uma intenção e uma atitude de curiosidade que move os participantes.” (Milani *et al.*, 2017, p. 229).

No documento *Recomendações para a melhoria das aprendizagens dos alunos em Matemática*, é feito um apelo à utilização de recursos diversos, inclusive os tecnológicos. Canavarro *et al.* (2020) defendem “(...) que as escolas de todos os níveis de escolaridade sejam equipadas com recursos diversificados para o ensino-aprendizagem da Matemática, incluindo material didático, livros e revistas, bem como recursos tecnológicos específicos para a sua atividade, nomeadamente calculadoras e computadores.” (p.275).

Todavia, coloca-se a questão: — Quais as orientações curriculares relativamente à utilização de recursos tecnológicos e não tecnológicos na aula de Matemática?

No *Programa e Metas Curriculares para o Ensino Secundário, Matemática A, 10.º Ano*, recentemente revogado através do Despacho n.º 6605-A/2021, de 6 de julho de 2021, e publicado em Diário da República, 2.ª série, N.º 129, Bívar, Grosso, Oliveira, Timóteo e Loura (2014) aludem que:

“Os professores e os alunos têm ao seu dispor, por exemplo, um vasto conjunto de recursos que facilitam o cálculo, as representações geométricas e a representação gráfica de funções, mas importa que os alunos adquiram capacidade crítica para reconhecer as situações em que a tecnologia não permite só por si justificar a adequação dos resultados encontradas ao problema proposto ou ilustrar devidamente os conceitos e procedimentos matemáticos envolvidos.” (p. 28)

Por outro lado, Bívar, Grosso, Oliveira, Timóteo e Loura (2014) defendem a importância de os alunos conseguirem “(...) dominar procedimentos como operar com polinómios, efetuar representações de gráficos de funções, resolver equações (...) sem necessitarem de utilizar recursos tecnológicos (calculadoras, computadores, etc.) (...)” (p.28). Com efeito, neste documento existe um claro apelo ao recurso a procedimentos analíticos sem recorrer à tecnologia, sejam estes recursos físicos ou digitais (*softwares*).

Os mesmos autores referem, ainda, que “Apenas a memorização e a compreensão cumulativa de conceitos, técnicas e relações matemáticas permitem alcançar conhecimentos progressivamente mais complexos e resolver problemas progressivamente mais exigentes.” (Bívar, Grosso, Oliveira, Timóteo & Loura, 2014, p. 28).

O revogado *Programa e Metas Curriculares para o Ensino Secundário, Matemática A, 10.º Ano*, apela à memorização de conteúdos, referindo que esta permite obter um maior alcance na sua compreensão e resolução de problemas de maior complexidade (Bivar, Grosso, Oliveira, Timóteo & Loura, 2014).

Os mesmos autores (Bivar, Grosso, Oliveira, Timóteo & Loura, 2014) defendem a importância de o aluno ter autonomia para refletir, conjecturar, testar, compreender conceitos, desenvolvendo capacidades conceptuais e matemáticas, sem que estes tenham de recorrer a recursos tecnológicos, em alguns contextos. Contudo, tal não significa que não os possa utilizar, mas que possuam a destreza e a conveniente perceção na sua utilização (Bivar, Grosso, Oliveira, Timóteo & Loura, 2014).

Por conseguinte, existe, segundo as *Aprendizagens Essenciais*, quer para o Ensino Básico, quer para o Ensino Secundário, a possibilidade de utilização de recursos que permitam aos alunos compreender com maior facilidade o conteúdo matemático (ME, 2018a; 2018b). De modo a compreendemos a utilização dos recursos didáticos na

disciplina de Matemática, na secção seguinte, debruçar-nos-emos nas orientações curriculares a este respeito.

## 2.2 Recursos Didáticos nas Orientações Curriculares

Para abordarmos este tema, numa parte inicial, tecemos algumas considerações sobre os documentos orientadores designados atualmente por “referenciais curriculares” (p.241- (3)), segundo o n.º 1, do Despacho n.º 6605-A/2021, de 6 de julho de 2021. Assim, particularmente, debruçámo-nos nos documentos orientadores sobre o uso de recursos didáticos, nomeadamente: o revogado *Programa e Metas Curriculares do Ensino Básico e do Ensino Secundário* (Bivar, Grosso, Oliveira & Timóteo, 2013; Bívar, Grosso, Oliveira, Timóteo & Loura, 2014), anteriormente homologado pelo Despacho n.º 9888-A/2013, de 26 de julho de 2013, Despacho n.º 10874/2012, de 10 de agosto de 2012, e Despacho n.º 868-B/2014, de 20 de janeiro de 2014, respetivamente; as *Aprendizagens Essenciais do Ensino Básico e Secundário* (ME, 2018a, 2018b), homologadas pelo Despacho n.º 6944-A/2018, de 19 de julho de 2018, e Despacho n.º 8476-A/2018, de 31 de agosto de 2018, respetivamente; e o *Perfil do Aluno à Saída da Escolaridade Obrigatória* (G. D. Martins *et al.*, 2017), homologado pelo Despacho n.º 6478/2017, de 26 de julho de 2017.

O Ministério da Educação tem procurado, no que diz respeito à disciplina de Matemática, promover estratégias mais eficazes, no sentido de reforçar e contribuir para efetivar aprendizagens mais significativas por parte dos alunos. Face aos resultados obtidos nos testes do *Programme for International Student Assessment* (PISA) e *Trends in International Mathematics and Science Study* (TIMSS), da responsabilidade da Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Económico (OCDE) e *International Association for the Evaluation of Educational Achievement* (IEA), respetivamente, desencadeou um conjunto de medidas, nomeadamente:

“Em 2005, o Ministério de Educação deu início a um investimento sem precedentes na promoção do sucesso [d]a Matemática dos alunos do Ensino Básico, tendo em conta os resultados dos alunos portugueses no PISA 2003 (com incidência na Matemática).” (Canavarro *et al.*, 2020, p.206).

Desde 2005, tendo por base a realização de anteriores avaliações internacionais, nomeadamente através do teste *Third International Mathematics and Science Study* (TIMSS), em 1995, e através do *Programme for International Student*

*Assessmenttem* (PISA), em 2003, em que Portugal participou, tem-se verificado um crescente progresso ao nível da aprendizagem na disciplina de Matemática.

“o chamado *Plano de Ação para a Matemática* é um exemplo de como foi possível articular os esforços dos investigadores, dos formadores, dos professores, das escolas e da administração, no sentido de alterar positiva e significativamente as formas de ensinar e de aprender, (...).” (Fernandes, Borralho, Vale, Gaspar & Dias, 2011; Fernandes, Vale, Borralho & Cruz, 2010, citados por Fernandes, 2014, p.37).

O facto de se realizar este tipo de avaliação internacional, contribui para a implementação de políticas educativas que permitam aos alunos alcançar maior sucesso na aprendizagem da Matemática, mas também em outras áreas curriculares.

Rosa *et al.* (2020) publicaram um artigo científico sobre os testes de *PISA*, *TIMSS* e *PIRLS* em Portugal: *Uma análise comparativa*, onde referem que:

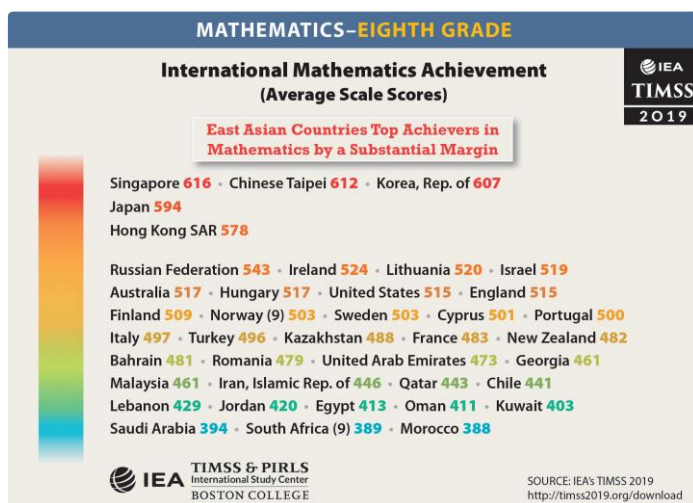
“Na edição do PISA-2018, numa lista ordenada de 79 participantes, Portugal ficou em 24.º lugar na literacia científica, 24.º na literacia de leitura e 22.º na literacia matemática, com 492 pontos em cada domínio, ficando acima da média da OCDE em todos os domínios.” (p.97)

Recentemente foram publicados os resultados da avaliação internacional implementada através do teste TIMSS, refletindo o desempenho dos alunos dos 4.º e 8.º anos, nas disciplinas de Matemática e Ciências, onde Portugal participou e tendo já participado em estudos anteriores, nomeadamente em 1995, 2011 e 2015 (Duarte *et al.*, 2020a). Este estudo envolveu vários países, a nível mundial, e teve como objetivo apresentar resultados ao nível do desempenho dos alunos na disciplina de Matemática (Duarte *et al.*, 2020a). Simultaneamente, dar um contributo para a implementação de reformas curriculares, bem como a promoção de práticas letivas mais eficazes no ensino da Matemática (Duarte *et al.*, 2020a).

Portugal obteve em 2019, na avaliação global ao nível do desempenho dos alunos do 8.º ano, a pontuação de 500 pontos (Duarte *et al.*, 2020b), conforme ilustra a figura 3 (Mullins *et al.*, 2020). Na escala TIMSS de Matemática corresponde à pontuação média, indicando uma melhoria considerável quando comparado com o estudo realizado em 1995, em que Portugal também participou (Duarte *et al.*, 2020b).

**Figura 3**

*International Mathematics Achievement (Average Scale Scores) – Eighth Grade*



Nota: Adaptado de I. V. S. Mullins, *et al.* (2020, p.2) em <https://timss2019.org/reports/wp-content/themes/timssandpirls/download-center/TIMSS-2019-Highlights.pdf>

Estes resultados são reveladores de um investimento na educação, e concretamente na disciplina de Matemática, em que o país procurou, de certo modo, adaptar os currículos nacionais à realidade escolar. A intenção era melhorar e inovar o ensino da Matemática, procurando utilizar, na sala de aula, recursos didáticos mais inovadores e práticas pedagógicas que permitissem ao aluno um maior envolvimento no processo de Ensino e Aprendizagem. No entanto, a 4 de abril de 2017, a Associação de Professores de Matemática (APM), representada por Lurdes Figueiral e Rui Candeias, solicitou uma audição na Comissão Parlamentar de Educação e Ciência. O propósito era apresentar as suas preocupações face à disciplina de Matemática, bem como o sentimento dos alunos, ainda persistente, em relação a esta disciplina.

Segundo Figueiral (2017) os problemas na disciplina de Matemática continuam a aumentar e “Está a crescer a aversão à Matemática, por parte dos alunos em fases, de novo, muito precoces, com consequências nas suas aprendizagens e até na sua autoestima e gosto pela disciplina e pela escola.” (p.1).

Figueiral (2017) alerta, ainda, que:

“Está a aumentar o sentimento de impotência dos professores e das famílias porque, com os atuais programas, acentuam-se dificuldades desnecessárias e desvirtua-se aquilo que, ao nível da investigação específica nacional e internacionalmente são as grandes opções para o ensino da disciplina.” (p.1)

A homologação de novos documentos ministeriais, nomeadamente as *Aprendizagens Essenciais* (ME, 2018a, 2018b), são reflexo de uma vontade de mudança, e a pretensão em melhorar o desempenho dos alunos na disciplina de Matemática.

De facto, ao nível do 1.º ciclo, concretamente o 4.º ano de escolaridade, os resultados obtidos na avaliação internacional, através do teste TIMSS realizado em 2019, não foram muito animadores, tendo ocorrido uma descida no que se refere ao desempenho dos alunos deste ciclo de escolaridade. Face a estes resultados, Gouveia (2021) considera que:

“Os números do TIMSS (...) indiciam que a aprendizagem da Matemática e o desenvolvimento das capacidades que essa aprendizagem é suposto [sic] promover foram mais bem sucedidos durante a vigência do Programa de 2007 do que durante a vigência das Metas Curriculares.” (s.p.)

É pretensão do Ministério da Educação rever os currículos na disciplina de Matemática, onde sugere a introdução de novos conteúdos, concretamente conhecimentos computacionais e de programação (P. Pinto, 2020). Com efeito, tal tem vindo a acontecer nas novas diretrizes ministeriais.

Segundo João Costa (2020, citado por J. Rocha, 2020) a disciplina de Matemática tem sido difícil de recuperar após a reprovação, levando alguns alunos ao insucesso, por vezes, consequência das desigualdades sociais e económicas das famílias.

É urgente o reforço de medidas sociais e económicas que promovam o ensino nas escolas e, deste modo, fomentem o sucesso escolar. Segundo a alínea j) do número 1 do artigo 4.º do decreto-lei 55/2018, de 6 de julho refere que a:

“j) Flexibilidade contextualizada na forma de organização dos alunos e do trabalho e na gestão do currículo, utilizando os métodos, as abordagens e os procedimentos que se revelem mais adequados para que todos os alunos alcancem o Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória;” (p. 2931)

Neste seguimento, destaca-se a importância que a autonomia e a flexibilidade curriculares vieram trazer às escolas. Contribuiu, deste modo, para uma maior autonomia na implementação e gestão dos seus currículos, permitindo-lhes utilizar recursos mais empreendedores, estimulando a aprendizagens mais significativas, no sentido de satisfazer as pretensões do meio envolvente e da comunidade educativa. Segundo a alínea c) do artigo 9.º da lei n.º 46/86, de 14 de outubro, da Lei de Bases do Sistema Educativo (LBSE, 1986) refere a necessidade de “c) Fomentar a aquisição e aplicação de um saber cada vez mais aprofundado assente no estudo, na reflexão crítica, na observação e na experimentação.” (p. 3071).

A envolvimento do aluno na descoberta, na experimentação, na reflexão, promove a aquisição de saberes mais estimulantes na disciplina de Matemática, mas também em todas as outras áreas curriculares.

Na alínea d) do artigo 4.º do decreto-lei nº 55/2018, de 6 de julho, publicado em Diário da República, na 1.ª série, Nº 129, menciona o “d) Reconhecimento dos professores enquanto agentes principais do desenvolvimento do currículo, com um papel fundamental na sua avaliação, na reflexão sobre as opções a tomar, na sua exequibilidade e adequação aos contextos de cada comunidade escolar;” (p. 2930). Neste sentido, a autonomia e a flexibilidade curriculares vieram possibilitar ao professor uma maior liberdade pedagógica, em sala de aula, permitindo a utilização de recursos e metodologias pedagógicas diversificadas.

É, de igual modo, de suma importância a dinamização de tarefas, e o estabelecimento de conexões com outras áreas do saber. Pois, de acordo com L. Santos *et al.* (2006) “(...) a existência de conexões dentro da Matemática, ou seja, o tratamento de um bloco temático deve ocorrer em mais do que um momento e ser relacionado com conteúdos de outros temas.” (p. 14). O estabelecimento de conexões com outras áreas do saber promove novos conhecimentos e desenvolve novas competências essenciais ao desenvolvimento pessoal e social do aluno.

É crucial perceber que competências deve desenvolver o aluno, durante o processo educativo, até à saída da escolaridade obrigatória. Os documentos ministeriais, nomeadamente o *Perfil do Aluno à Saída da Escolaridade Obrigatória* (G. D. Martins *et al.*, 2017), as *Aprendizagens Essenciais* (ME, 2018a, 2018b), são documentos orientadores de extrema relevância, e permitem ser um forte contributo na gestão curricular. Contudo, no que se refere ao *Programa e Metas Curriculares do Ensino Básico e Secundário* (Bivar, Grosso, Oliveira & Timóteo, 2013; Bivar, Grosso, Oliveira, Timóteo & Loura, 2014) agora revogado, na sua análise constata-se que, o mesmo, não é tão ambicioso, sendo este mais conservador quanto à utilização de tecnologia em sala de aula, focando-se na abstração e memorização de conteúdos. Quanto às *Aprendizagens Essenciais* (ME, 2018a, 2018b), e o *Perfil do Aluno à Saída da Escolaridade Obrigatória* (G. D. Martins *et al.*, 2017), documentos atuais, denominados referenciais curriculares, são mais dinâmicos quanto ao desenvolvimento de competências e demonstrativos de uma maior abertura quanto à utilização de recursos didáticos (físicos e digitais) na aprendizagem da Matemática.

No que diz respeito à Matemática, são várias as competências a serem desenvolvidas, pelo aluno, segundo o *Perfil do Aluno à Saída da Escolaridade Obrigatória* (G. D. Martins *et al.*, 2017), homologado em 2017, e referenciadas nas *Aprendizagens Essenciais* (ME, 2018a, 2018b), homologadas, em 2018. De salientar a comunicação, pensamento crítico e criativo, raciocínio e resolução de problemas, saber científico, técnico e tecnológico, desenvolvimento pessoal e autonomia, relacionamento interpessoal, entre outras competências consideradas essenciais ao desenvolvimento pessoal e social do aluno (ME, 2018a; 2018b; G. D. Martins *et al.*, 2017).

A importância dos princípios e valores mencionados no documento *Perfil do Aluno à Saída da Escolaridade Obrigatória* (G. D. Martins *et al.*, 2017), visam a promoção de uma aprendizagem inclusiva e que, esta, possa ser um contributo para uma maior participação e cidadania ativa. De igual modo, fomentar a reflexão, a curiosidade e a inovação com sentido de responsabilidade, integridade e liberdade (G. D. Martins *et al.*, 2017).

Na perspetiva de G. D. Martins *et al.* (2017):

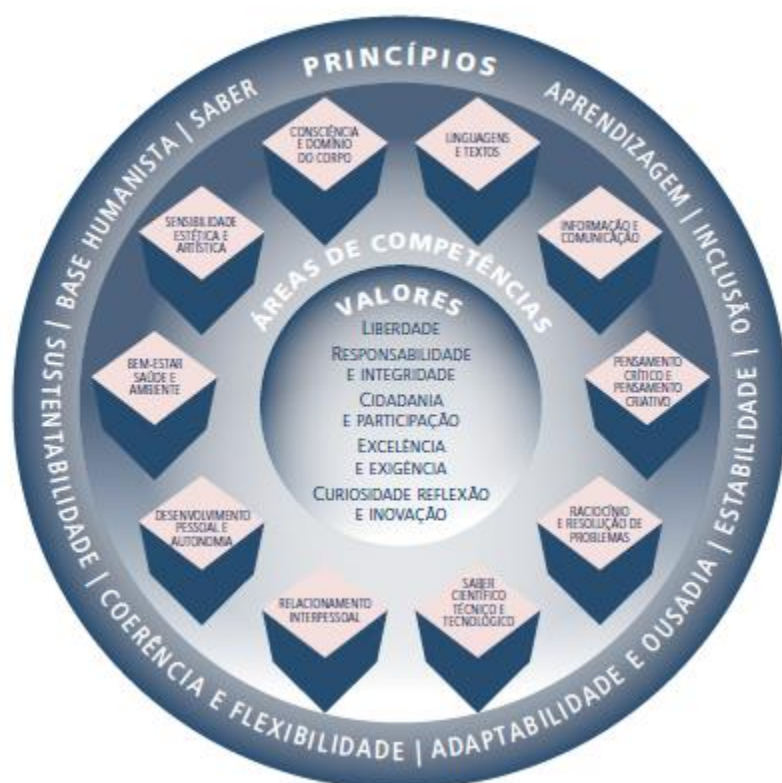
“O *Perfil dos Alunos* aponta para uma educação escolar em que os alunos desta geração global constroem e sedimentam uma cultura científica e artística de base humanista. Para tal, mobilizam valores e competências que lhes permitem intervir na vida e na história dos indivíduos e das sociedades, tomar decisões livres e fundamentadas sobre questões naturais, sociais e éticas, e dispor de uma capacidade de participação cívica, ativa, consciente e responsável.” (p. 10)

Note-se o aspeto humanista, para além do conhecimento que o aluno deve adquirir, aquando do seu percurso escolar, dotando-o de competências essenciais a uma intervenção livre, responsável e ciente dos seus direitos e deveres de cidadão. Que este possa dar um contributo em sociedade, tendo por base os seus princípios e valores éticos. Por conseguinte, é importante o apoio familiar para ser possível os alunos desenvolverem tais competências fundamentais no século XXI, não cabendo apenas à escola promover o seu desenvolvimento.

A figura 4 ilustra que competências, princípios e valores devem ser adquiridos, ao longo do processo educativo, constituindo o *Perfil de Aluno à Saída da Escolaridade Obrigatória* (G. D. Martins *et al.*, 2017).

**Figura 4**

*Esquema concetual do Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória.*



*Nota:* Adaptado de G. D. Martins *et al.* (2017, p. 11) em <http://www.dge.mec.pt/noticias/perfil-dos-alunos-saida-da-escolaridade-obrigatoria>

Para desenvolver tais competências é essencial o aluno estar munido de um conjunto de recursos e materiais didáticos que possibilite a construção do saber matemático aliado a outras áreas do saber. Segundo G. D. Martins *et al.* (2017) é importante “(...) abordar os conteúdos de cada área do saber, associando-os a situações e problemas presentes no quotidiano da vida do aluno ou presentes no meio sociocultural e geográfico em que se insere, recorrendo a materiais e recursos diversificados;” (p.31).

É notório, no documento *Orientações de Gestão Curricular para o Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico, do 1.º ao 9.º ano de escolaridade* (Direção – Geral da Educação [DGE], 2016), estabelecido pelo Decreto-Lei n.º 17/2016, de 4 de abril de 2016, a referência à utilização de recursos diferenciados no estudo de diferentes conteúdos, em diferentes áreas do conhecimento. No que se refere à disciplina de Matemática, por exemplo, no domínio de Geometria e Medida, a DGE (2016) considera:

“(...) fundamental ter em conta que a aprendizagem inicial deve privilegiar a manipulação, observação e análise de objetos e materiais específicos. É a partir das observações, descrições e representações de objetos e imagens que os alunos começam a descrever propriedades e relações geométricas (...)” (p. 15)

Bivar, Grosso, Oliveira e Timóteo (2013) referem no *Programa de Matemática do Ensino Básico* que “A experiência acumulada dos professores e das escolas é um elemento fundamental no sucesso de qualquer projeto educativo, não se pretendendo, por isso, espartilhar e diminuir a sua liberdade pedagógica nem condicionar a sua prática letiva.” (p. 28). Neste sentido, um dos fatores de sucesso dos alunos é sem dúvida a experiência do professor na lecionação de uma dada disciplina, bem como as estratégias pedagógicas utilizadas e que os autores referem poder auxiliar o aluno no processo de ensino e aprendizagem. Contudo, no que se refere à utilização de recursos didáticos apenas é feita referência à utilização da calculadora, ressaltando “(...) que esse uso não comprometa a aquisição de procedimentos e o treino do cálculo mental (...)” (Bivar, Grosso, Oliveira & Timóteo, 2013, p. 28).

As escolas estão atualmente dotadas de maior autonomia e flexibilidade curricular, o que permitirá ao professor optar por determinadas metodologias, na sala de aula, e em concreto na disciplina de Matemática. Nesse âmbito, a seleção dos recursos didáticos que melhor permitirão a aprendizagem Matemática dos alunos recai efetivamente sobre o professor.

A Matemática tem sido observada como sendo uma área de grande complexidade, contudo numa aula de Matemática é possível desconstruir essa complexidade. No que se refere às *Aprendizagens Essenciais, 8.º ano, 3.º Ciclo do Ensino Básico: Matemática* (ME, 2018a), por exemplo, no domínio de Geometria e Medida, é referido a possibilidade de “Utilizar modelos geométricos e outros materiais manipuláveis, e instrumentos variados incluindo os de tecnologia digital e a calculadora, na exploração de propriedades de figuras no plano e de sólidos geométricos.” (ME, 2018a, p. 9). Com efeito, em termos gerais, denota-se a possibilidade de utilização de recursos variados, em diferentes domínios, “Recorrendo a situações e contextos variados, incluindo a utilização de materiais diversificados e tecnologia, [onde] os alunos devem resolver tarefas que requeiram a resolução de problemas, o raciocínio e a comunicação matemáticos (...)” (ME, 2018a, p. 9).

Ao analisarmos o *Programa e Metas Curriculares para o Ensino Secundário* (Bivar, Grosso, Oliveira, Timóteo & Loura, 2014), verificamos que este documento apela

à conceptualização, à abstração, ao cálculo e à capacidade na resolução de problemas, delimitando a utilização de recursos didáticos e tecnológicos. No que a este aspeto se refere, é mencionado que:

“As salas de aulas estão, em geral, dotadas de determinados equipamentos que podem constituir uma mais-valia para a prática letiva. A tecnologia no Ensino Secundário deve, portanto, ser aproveitada para ajudar os alunos a compreender certos conteúdos e relações matemáticas e para o exercício de certos procedimentos; essa utilização deve, no entanto, ser criteriosa, já que, caso contrário, pode condicionar e comprometer gravemente a aprendizagem e a avaliação.” (Bivar, Grosso, Oliveira, Timóteo & Loura, 2014, p.28)

A respeito disto, os autores justificam “(...) que no Ensino Secundário a tecnologia, e mais especificamente a calculadora gráfica, deve ser utilizada em sala de aula e consequentemente em certos instrumentos de avaliação (...)” (Bivar, Grosso, Oliveira, Timóteo & Loura, 2014, p.29). Contudo, deve haver especial atenção na sua utilização, “(...) desde que devidamente controlada e acompanhada de uma análise crítica da validade de conjeturas que essas experiências possam induzir.” (Bivar, Grosso, Oliveira, Timóteo & Loura, 2014, p.29).

No Ensino Básico, não é feita referência explícita à utilização de recursos didáticos no *Programa e Metas Curriculares de Matemática* (Bivar, Grosso, Oliveira & Timóteo, 2013). Apenas, está expresso o desenvolvimento de competências ao nível do conhecimento de factos e procedimentos, raciocínio matemático, comunicação matemática oral e escrita, bem como a resolução de problemas (Bivar, Grosso, Oliveira & Timóteo, 2013). Assim, estamos perante um documento orientador, atualmente revogado, que não apela, em particular, ao uso da tecnologia na aula de Matemática.

A OCDE iniciou em 2015, um conjunto de discussões, no âmbito da concretização de um projeto que define quais os conhecimentos, habilidades, atitudes e valores que permitirão aos estudantes florescerem, e poderem adequar as suas vidas e o mundo em 2030 (M. A. da Silva & Fernandes, 2019).

O objetivo primordial deste projeto é “(...) desenvolver uma matriz conceitual de aprendizagem para o ano de 2030, com base em um cenário global de longo prazo, construído conjuntamente por *stakeholders*, *experts*, líderes de opinião, governos, empresários, gestores e entidades sociais.” (M. A. da Silva & Fernandes, 2019, p. 276).

Nesta perspetiva, no âmbito da Matemática, é deveras importante preparar o aluno não só ao nível do conhecimento matemático, mas também capacitar ao nível de competências pessoais e sociais. É essencial que se torne um cidadão, que no futuro

conseguirá ser autónomo, resiliente e capaz de resolver múltiplos problemas que eventualmente possam surgir.

Tendo por base o teste de PISA realizado em 2018, Lourenço *et al.* (2018) fazem referência às sete capacidades matemáticas fundamentais, na aprendizagem da disciplina de Matemática, conforme ilustra a figura 5.

### Figura 5

Capacidades fundamentais, PISA 2018



Nota: Fonte: IAVE, a partir da OCDE 2019. Adaptado de Lourenço *et al.* (2019, p.42).

Copyright 2019 por IAVE, I.P.

[https://www.cnedu.pt/content/noticias/internacional/RELATORIO\\_NACIONAL\\_PISA\\_2018\\_IAVE.pdf](https://www.cnedu.pt/content/noticias/internacional/RELATORIO_NACIONAL_PISA_2018_IAVE.pdf)

É importante que o aluno consiga interpretar, aplicar procedimentos, raciocinar matematicamente, formular conjecturas, no sentido de testar e provar resultados.

O teste de PISA, a realizar-se em 2022, prevê um novo quadro conceptual onde estão definidas as competências a serem desenvolvidas pelos alunos no século XXI.

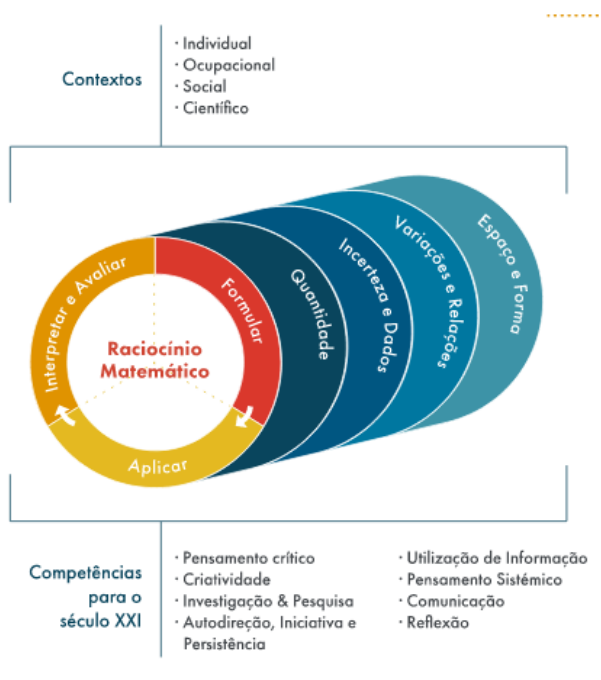
“O PISA 2022 compreende a matemática no contexto de um mundo em rápida mudança, impulsionada por novas tecnologias e tendências nas quais os cidadãos são criativos e empenhados, formulando juízos e decisões não-rotineiros para utilização individual e no âmbito da sociedade em que vivem. Isso coloca em foco a capacidade de raciocinar matematicamente, que sempre fez parte da estrutura conceptual do PISA. Esta mudança tecnológica também cria a necessidade dos [sic] alunos entenderem os conceitos de pensamento computacional que fazem parte da literacia matemática.” (*Organisation for Economic Co-Operation and Development* [OECD], 2018, s.p.)

Neste seguimento, em diversos contextos, o aluno deve conseguir usar o pensamento crítico, ser criativo, desenvolver atitudes de pesquisa e investigação, ser autónomo, resiliente, capacidade de iniciativa, saber analisar informação matemática, pensamento generalizado, reflexivo e comunicativo (OECD, 2018). A figura 6 ilustra,

conforme a OECD (2018), um conjunto de proficiências a serem alcançadas pelos alunos constituindo um novo perfil de aluno.

### Figura 6

PISA 2022. *Quadro Conceptual de Matemática*



Nota: Adaptado de OECD (2018, s.p.) em <https://pisa2022-maths.oecd.org/pt/index.html#Twenty-First-Century-Skills>

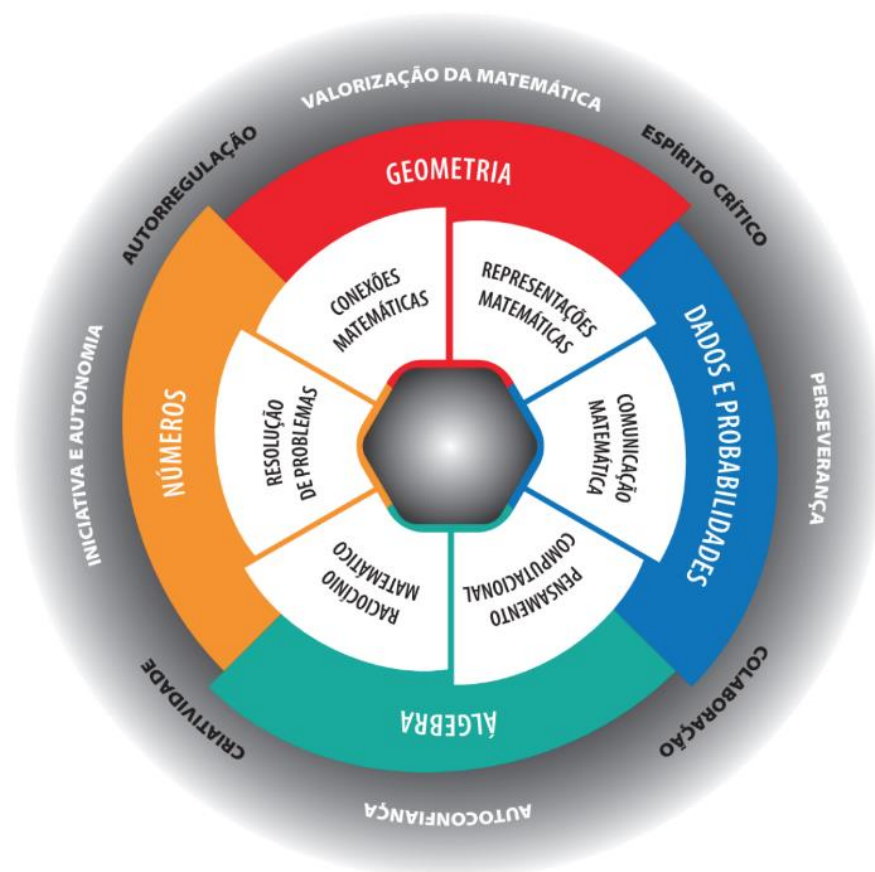
É importante que o professor possa fomentar atividades que permitam ao aluno desenvolver estas proficiências, e que as mesmas contribuam para se tornarem cidadãos ativos e participativos numa sociedade competitiva e em constante mudança. É cada vez mais fundamental envolver o aluno no uso de novas tecnologias, para que possam desenvolver conhecimentos de literacia digital e, deste modo, construir novos conhecimentos com maior eficácia e eficiência.

A nova proposta de *Aprendizagens Essenciais para o Ensino Básico* (ME, 2021), que passaram por um processo de consulta pública, foi homologada através do Despacho n.º 8209/2021, de 19 de agosto de 2021, publicado em Diário da República, 2.ª Série, N.º 161. Neste âmbito, foi delineado um novo esquema conceptual, figura 7, que sucintamente estabelece uma relação entre os conteúdos a serem lecionados, capacidades e atitudes matemáticas transversais, e os conhecimentos matemáticos a serem atingidos pelos alunos (ME, 2021).

Este novo documento curricular foi desenhado tendo por base, essencialmente, o *Perfil do Aluno à Saída da Escolaridade Obrigatória*, as *Aprendizagens Essenciais* homologadas em 2018, a *Estratégia Nacional de Educação para a Cidadania* (Despacho n.º 8209/2021, 19 de agosto de 2021), corroborando com algumas das propostas da OCDE para o novo currículo do futuro.

### Figura 7

*Conteúdo de Aprendizagem em Matemática no Ensino Básico*



Nota: Adaptado de ME (2021, p.4) em

[https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens\\_Essenciais/3\\_ciclo/aemat\\_8a\\_2021-08-19.pdf](https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/3_ciclo/aemat_8a_2021-08-19.pdf)

Neste seguimento, torna-se crucial perceber as opções metodológicas utilizadas pelo professor, na sala de aula, suscetíveis de fomentar aprendizagens nas quais os recursos didáticos, e em especial os tecnológicos, assumem particular relevância na atividade do aluno.

### 2.3 Recursos Didáticos e Opções Metodológicas

A opção metodológica refletida pelo professor, para uma aula de Matemática, pode ser considerada um desafio. Conhecer a turma, os seus alunos e as suas capacidades, são fatores a ter em apreciação na implementação de uma dada estratégia metodológica.

Na perspectiva de G. Pereira *et al.* (2019):

“A realidade atual da complexidade do processo de aprendizagem, o seu caráter multifacetado, a heterogeneidade da população escolar e as múltiplas funções e tarefas necessárias nas instituições educativas, exigem uma formação que prepare o professor para um adequado desempenho profissional, ou seja, os professores têm de dominar uma multiplicidade de saberes para o exercício da profissão.” (p. 605)

O nível de conhecimentos de um professor pode ter enorme influência no processo de Ensino e Aprendizagem, e em todo o desenrolar de uma aula. Compreender que, numa sala de aula, nem todos pensam da mesma maneira, pode ser instigante para professor e aluno.

A atual exigência de um mundo em permanente evolução requer uma maior dedicação por parte do professor, quer seja no processo educativo, quer seja no desempenho de tarefas administrativas a que está impelido a executar. Neste sentido, o professor precisa ser criativo, reinventar-se perante a heterogeneidade dos seus educandos e a multiplicidade de conhecimentos e de recursos didáticos ao seu dispor.

Planificar uma aula poderá ser desafiante para o professor, dado que este terá de efetuar escolhas que certamente serão determinantes no processo de Ensino e Aprendizagem. Refletir sobre os recursos mais adequados na aprendizagem de um determinado conteúdo, e se esses mesmos recursos correspondem aos objetivos a serem alcançados para uma aula de Matemática, são alguns dos desafios que um professor poderá ter.

Segundo M. H. Silva e Lopes (2016):

“Os professores podem fazer uma enorme diferença positiva na vida dos alunos, quando valorizam estratégias de ensino e aprendizagem que promovem um ambiente de sala de aula em que aprender se torna agradável e que contribuem para o aumento da motivação, do envolvimento e da autonomia dos alunos perante a aprendizagem.” (p. 13)

A valorização de metodologias de ensino diversificadas, em contexto de sala de aula, poderá possibilitar um maior desenvolvimento, por parte do aluno, no processo de aprendizagem. Contudo, o professor desempenha um papel determinante em todo o processo, estimulando os seus alunos a um maior envolvimento na sala de aula.

Zbiek e Hollebrands (2008, citados por H. Rocha, 2010) destacam:

“(...) a importância do [*sic*] professor estar ciente dos papéis que tendencialmente assume, conhecendo e refletindo [*sic*] sobre papéis alternativos, ponderando os seus conhecimentos, crenças e concepções [*sic*] relativamente ao papel do professor e dos alunos no processo de ensino e aprendizagem da Matemática.” (s.p.)

O papel do professor, em sala de aula, torna-se fundamental, na medida, em que este deixa de gerir maioritariamente a aula e orienta os seus alunos até que estes se tornem efetivamente autónomos, assumindo os comandos da atividade, promovendo um novo paradigma educacional.

Os mesmos autores, Zbiek e Hollebrands (2008, citados por H. Rocha, 2010), “inspirando-se nas caracterizações previamente existentes, apresentam um conjunto de onze papéis diferentes que o professor pode assumir: assistente técnico, avaliador, colaborador, condutor das actividades [*sic*] da aula, conselheiro, definidor de tarefas, explicador, facilitador, gestor, recurso e regulador do tempo.” (s.p.).

Consoante as necessidades de cada aluno, o professor assume uma função específica conforme a situação que decorre na sala de aula. As múltiplas funções assumidas pelo professor do ponto de vista de Ponte (2003, p.40) ao “Conceber tarefas, produzir materiais, criar situações de aprendizagem, gerir o ambiente da sala de aula e avaliar os alunos, são funções (...)” de elevada complexidade. O autor refere, nitidamente, o elevado nível de responsabilidade que um professor assume perante os alunos e toda uma comunidade educativa.

Assim, que opções metodológicas pode um professor implementar numa aula de Matemática para a mesma seja bem-sucedida e corresponda às expectativas dos seus envolvidos?

Ponte (2009) realça que “As questões colocadas pelo professor desempenham um fundamental da constituição da comunicação na sala de aula. O primeiro passo para sair da lógica estrita do ensino expositivo é fazer perguntas, de preferência boas perguntas e de tipos diversos.” (p. 103). Neste sentido, a importância do questionamento, por parte do professor, tornando-se promissor na discussão, reflexão e comunicação na aula de Matemática.

Bray (2011), Bussi (1998) e Hufferd-Ackles *et al.* (2004), citados por C. Rodrigues *et al.* (2020) aludem que:

“As discussões matemáticas são um elemento potenciador do discurso na sala de aula, ao fomentar o questionamento entre os alunos, a explicação, a partilha de

ideias, a justificação, a argumentação, a demonstração e a sistematização do conhecimento emergente deste processo” (pp. 26 – 27)

A oportunidade que os alunos têm, em sala de aula, de apresentar as suas conjecturas e a possibilidade de as poder testar e fundamentar, pode tornar o ambiente de aprendizagem mais envolvente e produtivo.

Segundo A. Guerreiro *et al.* (2016), “Contrariamos a visão simplista da comunicação como instrumento de transferência de conhecimento (do professor para os alunos) para assumirmos a comunicação como processo de interação, no qual o conhecimento matemático é socialmente construído.” (p. 279). Neste sentido, o aluno deixa de ser um agente passivo para tornar-se um agente ativo e que interage com os seus pares.

Pensar numa metodologia que possa orientar o aluno, nos seus raciocínios e observações, é uma tarefa que cabe ao professor, optando pela melhor trajetória que possa conduzir os seus educandos a obter respostas às suas questões. De acordo com Brocardo e Mendes (2016) “É muito importante analisar cada recurso percebendo até que ponto as imagens mentais que a sua utilização permite desenvolver ajudam, ou não, na estruturação do pensamento dos alunos e apoiam o desenvolvimento da sua proficiência matemática.” (p. 157). As autoras destacam a importância da adequação de recursos no sentido de que estes possam ajudar o aluno na estruturação do pensamento matemático e o desenvolvimento de competências matemáticas.

Ponte (2020) ressalva que “(...) é fundamental escolher tarefas apropriadas, que possam servir de base a uma atividade matemática rica e multifacetada por parte dos alunos, bem como encontrar oportunidades para que estes reflitam sobre o trabalho realizado.” (p. 813). Neste contexto, o autor adverte para a seleção de tarefas que propiciem a reflexão e a construção de conhecimento.

Para Vale *et al.* (2014) “Numa aula de matemática, a aprendizagem depende fortemente do professor e das tarefas que este propõe. As tarefas selecionadas são fundamentais para caracterizar e apresentar o seu trabalho.” (p. 122). A importância da seleção de tarefas que permitam ao aluno ser o centro da aprendizagem, e este ter a oportunidade de desenvolver as suas potencialidades, num ambiente de interação social e cooperação com o grupo e os seus pares.

“O questionamento é uma ferramenta poderosa no apoio aos alunos enquanto pensadores criativos. Isto só é possível se os professores estiverem eles próprios confortáveis em fazer este tipo de trabalho, se apresentarem tarefas criativas aos seus alunos, dispuserem de recursos didáticos para explorar e aplicarem

estratégias de ensino adequadas. Assim, é fundamental que os professores possam tirar proveito de todo o potencial associado a uma tarefa e, por isso, precisam de oportunidades para as explorar e resolvê-las da mesma forma que serão exploradas com os seus próprios alunos.” (Vale *et al.*, 2014, pp. 122–123)

Numa aula que se prevê dinâmica e promissora “Os alunos discutem e ajudam-se entre si, encorajando-se a ser perseverantes, no sentido de conseguirem um desempenho melhor do que aquele que obteriam se trabalhassem individualmente” (Johnson & Johnson, 2009, citados por H. G. Guerreiro & Serrazina, 2018, p.72).

A relevância do trabalho colaborativo entre os pares e o grupo promove aprendizagens mais significativas. Segundo o *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 1994) é importante reforçar “O papel do aluno no discurso” (p.48). Salienta, também, que estes “Devem aprender a verificar, rever e rejeitar afirmações com base na evidência matemática e usar uma variedade de ferramentas matemáticas.” (NCTM, 1994, p.48). A ênfase na utilização de ferramentas, que auxiliem o aluno na construção do conhecimento matemático, promovendo, deste modo, a comunicação matemática.

A utilização de recursos didáticos, numa aula de Matemática, associados a uma prática pedagógica significativa, poderá auxiliar a fomentar novas aprendizagens. “No entanto, a introdução de um novo recurso na sala de aula nem sempre é fácil ou pacífica, podendo fazer surgir (...) tensões e des-sintonias ou incongruências com a matemática ensinada e aprendida na sala de aula.” (Canavarro & Santos, 2016, p. 3). As referidas tensões mencionadas pelas autoras, podem advir do desconhecimento na utilização do recurso, que se pretende que este seja preponderante na aprendizagem de conteúdos.

Canavarro e Santos (2016) destacam a diversidade de recursos didáticos, na medida, em que estes “(...) vêm colocar acrescidos desafios ao professor na sua integração junto dos alunos, desafios que começam desde logo na planificação do ensino, seleção e adaptação de tarefas e formas de gerir a aula.” (p. 3). Por sua vez, o uso de tecnologia poderá ser desafiante, por parte do professor, pois H. Rocha (2010) defende que a “(...) presença da tecnologia foi identificada como proporcionando uma alteração significativa nos papéis assumidos pelo professor, com um incremento significativo no assumir do papel de conselheiro.” (s.p.). Assim, na visão da autora, a tecnologia tornou-se essencial e facilitadora na tarefa do professor, na medida, em que este assume uma postura de orientador, perante o trabalho desencadeado pelo aluno.

Para Oliveira *et al.* (2012) os recursos didáticos são utilizados “(...) como uma ferramenta para pensar sobre a situação, apoiar o raciocínio dos alunos e a comunicação matemática.” (p. 570). Contudo, do ponto de vista de Moyer (2001, citado por Oliveira *et al.*, 2012), “(...) a integração de recursos didáticos na sala de aula tem um carácter motivacional, tornando as aulas mais apelativas (...)” (p. 570). Na opinião de Correia (2009) estamos perante “Um paradigma mais centrado nas aprendizagens.” (p. 412).

A utilização de recursos nem sempre apresentam o mesmo resultado, dependendo da forma como o aluno faz uso dos mesmos. Neste âmbito, A. Rodrigues e Domingos (2016) referem que “(...) o mesmo recurso não produz os mesmos resultados com dois alunos diferentes ou com duas turmas diferentes e poderá não ser o mais adequado para ambas.” (p. 29). Neste campo de ação, as metodologias implementadas numa aula de Matemática e os recursos utilizados devem ser criteriosamente pensados pelo professor.

Tolentino de Carvalho e Hércules Gontijo (2020) referem que “(...) para favorecer a produção de conhecimentos de modo criativo nas aulas de matemática, faz-se necessário a instauração de formas de interações comunicativas que privilegiem o protagonismo dos alunos e professores (...)” (p.113).

A comunicação matemática, escrita e oral, desempenha um papel fundamental no processo de aprendizagem do aluno. As suas experiências, tentativas, progressos e sucessos permitem a construção do conhecimento matemático de uma forma enriquecedora.

Ponte e Serrazina (2009) defendem que “Em vez de se proporem exercícios para os alunos praticarem processos já conhecidos, propõem-se tarefas em que eles têm de definir estratégias e argumentar soluções.” (p.3). Estes autores realçam a importância da definição de estratégias, da argumentação, que fomentem no aluno o espírito crítico e a criatividade.

Ponte, Oliveira, Cunha *et al.* (1998) reforçam a importância das atividades investigativas, na medida, em que estas fomentam o estímulo do aluno para “(...) justificar e provar as suas afirmações, explicitando matematicamente as suas argumentações (...)” (p. 16). Neste seguimento, a importância da implementação de tarefas, atividades de exploração ou de investigação, que promovam nos alunos o raciocínio, a exploração, investigação, pesquisa, a representação, a formulação de conjeturas, a discussão e comunicação, em sala de aula. Por conseguinte, são deveras cruciais para a concretização de uma aprendizagem efetiva e significativa e, de igual modo, essenciais na construção do conhecimento matemático.

O NCTM publicou em meados do ano 2000, *Os Princípios e Normas para a Matemática Escolar*, traduzidos pela APM em 2007. No documento *Executive Summary*, disponível no *site* do NCTM (2004), podemos observar, sucintamente, os princípios e normas pelos quais os professores se devem reger. Nesta perspetiva, um dos princípios enfatiza o ensino e a atuação do professor, a sua compreensão e comprometimento com os discentes, devendo este conhecer o conteúdo que deve ensinar e que pretende que os discentes aprendam, recorrendo a recursos disponíveis, que fomentem a atualização de conhecimentos (NCTM, 2004). Assim:

*“To be effective, teachers must understand and be committed to students as learners of mathematics. They must know and understand deeply the mathematics they are teaching and be able to draw on that knowledge with flexibility in their teaching tasks. Teachers must be supported with ample opportunities and resources to enhance and refresh their knowledge.”* (NCTM, 2004, p.2)

O ato educativo, na visão de G. D. Martins *et al.* (2017, p.32), é descrito como sendo formativo, alicerçado no ensino, envolvendo a aceitação “(...) de princípios e estratégias pedagógicas e didáticas (...)” incitando à aprendizagem. Os mesmos autores advogam a pertinência em estabelecer:

*“(...) a melhor forma e os recursos mais eficazes para todos os alunos aprenderem, isto é, para que se produza uma apropriação efetiva dos conhecimentos, capacidades e atitudes que se trabalharam, em conjunto e individualmente, e que permitem desenvolver as competências previstas no Perfil dos Alunos ao longo da escolaridade obrigatória.”* (G. D. Martins, 2017, p.32)

Ao revisitarmos alguns artigos e obras de Paulo Freire (1994, 1996), notável pedagogo que marcou a história da educação, o autor chama a atenção de que é necessário pensar a educação, na medida, em que esta seja libertadora, democrática e não opressora. As suas pedagogias são um real exemplo de que tipo de educador pretendemos para o século XXI, para podermos ter uma escola, uma comunidade que seja reflexiva, crítica e ativa na sociedade.

O aluno, na perspetiva de Freire (1996), deve ser o centro da aprendizagem, não se limitando apenas a absorver o conhecimento transmitido pelo professor, mas que este seja incessante e livre na procura do conhecimento, autonomamente, aguçando a sua curiosidade, e as suas ideias sejam respeitadas pelo educador. Neste seguimento, o professor deixa de ser o centro da aprendizagem, seguindo uma educação não diretiva.

Fraga (2015), corroborando com as ideologias de Paulo Freire, alerta para o facto, de que:

“Ensinar exige rigorosidade metódica: não basta querer ser educador; é crucial que essa vontade esteja acompanhada de um desejo constante em querer “pensar certo”, o que nos incute uma preocupação constante, mas saudável, pela busca de outras tantas formas de (des)construir o conhecimento.” (p.7)

Entretanto, Machado (2007) ressalta a importância das qualidades humanas de um professor, referindo que este deve ser “(...) uma pessoa com plena consciência de si mesmo e da sua actuação [*sic*], pois só dessa forma poderá internacionalizar o processo educativo e, assim, interferir na aprendizagem e no desenvolvimento dos alunos.” (p.220).

Neste âmbito, é importante que o professor seja reflexivo nas suas práticas pedagógicas, não se conforme com o conhecimento adquirido, mas que seja incessante na procura de novos conhecimentos. Que consiga implementar metodologias desafiadoras, que permitam ao aluno ser um agente atuante, em sala de aula, desconstruindo o conhecimento, contribuindo para uma maior liberdade de pensamento, contribuindo para uma comunidade educativa mais participativa e cooperante na sociedade em que se insere.

### **3. Metodologia de investigação**

#### **3.1 Natureza do Estudo**

A metodologia constitui uma das etapas cruciais do processo de investigação. Esta etapa é de enorme relevância, pois é através desta que detalhamos, em concreto, quais os métodos e técnicas de investigação que irão ser aplicados, nomeadamente quais os instrumentos de recolha, tratamento e análise de dados que serão utilizados, no intuito de obtenção de resultados credíveis e consistentes.

Neste estudo, optou-se pelo método qualitativo, pois o principal objetivo desta investigação é compreender quais os contributos dos recursos didáticos usados na aula de Matemática para o processo de Ensino e de Aprendizagem desta disciplina. Assim, e segundo Denzin e Lincoln (2007), o método qualitativo “(...) implica uma ênfase sobre as qualidades das entidades e sobre os processos e os significados que não são examinados ou medidos experimentalmente (...)” (p.23). Neste âmbito, o foco é a interpretação de significados advindos de processos, ao passo que, na investigação quantitativa as variáveis são mensuráveis, isto é, medíveis, estabelecendo-se uma relação de causalidade entre as mesmas (Denzin & Lincoln, 2007).

O nosso principal interesse, e de acordo com Amado (2017), “(...) é a possibilidade de particularizar, mais do que de generalizar; a representatividade das conclusões, longe de ser estatística é social e teórica assente em critérios de compreensão e de pertinência.” (p.46). Assim, podemos salientar algumas características da investigação qualitativa, nomeadamente: indutiva, holística e naturalista, procurando compreender a realidade através de processos indutivos, apoiada em questões e hipóteses colocadas ao longo do processo (Amado, 2017). Nesta linha de pensamento, o autor afirma que o método qualitativo “(...) assenta numa visão holística da realidade (ou problema) a investigar, sem a isolar do contexto ‘natural’ (histórico, socioeconómico e cultural) em que se desenvolve e procurando atingir a sua ‘compreensão’ através de processos inferenciais e indutivos (...)” (Amado, 2017, p.43).

Consideramos também que este paradigma qualitativo é, de igual modo, descritivo, pois, na perspetiva de Bento (2012), “(...) o investigador faz uma interpretação dos dados, descreve os participantes e os locais, analisa os dados para configurar temas ou categorias e retira conclusões;” (p. 2).

Partindo do objetivo principal, concretamente a compreensão dos contributos da utilização de recursos didáticos na aula de Matemática, para o processo de ensino e aprendizagem, dissecámo-lo em cinco objetivos específicos, nomeadamente:

- Compreender o que são recursos didáticos no contexto da disciplina de Matemática e como podem ser utilizados;
- Analisar os documentos curriculares e respetivas orientações quanto à utilização de recursos didáticos;
- Analisar que recursos didáticos podem ser utilizados na aula de Matemática e de que forma podem auxiliar a tarefa do professor;
- Compreender qual o conhecimento necessário para que um professor possa lecionar Matemática utilizando recursos didáticos, nomeadamente os tecnológicos;
- Analisar de que forma o recurso didático pode contribuir para que o aluno construa o seu conhecimento matemático;

No que concerne a estratégias de pesquisa, na perspetiva de Aires (2015), “(...) esta compreende um conjunto de capacidades, pressupostos, pressuposições e práticas que os investigadores aplicam à medida que passam do campo teórico (paradigmático) ao campo empírico.” (p. 21).

O cerne da investigação qualitativa, enfatizada por Bento (2012), “(...) é compreender e encontrar significados através de narrativas verbais e de observações em vez de através de números” (p.1).

Numa investigação qualitativa, quando comparada com a investigação quantitativa relativamente à designação de critérios, segundo Lincoln e Guba (1985, citados por Coutinho, 2015, p.109) existem quatro, concretamente “(...) a credibilidade (credibility) que corresponde à validade interna (...); a transferibilidade (transferability) que corresponde à generalização; a dependabilidade (dependability) que corresponde à fiabilidade e a confirmabilidade (confirmability) que corresponde à objectividade [sic] (...)”.

Quanto à questão da precisão dos resultados (Credibilidade), Sousa (2009) alude que “(...) no final (...) [de] um processo de observação, verificar se na realidade o que se constatou poderá ser considerado como uma representação fiel do que na realidade aconteceu ou se, por qualquer motivo, não é tão fidedigno quanto se pretendia.” (p. 129). Neste sentido, respeitar-se-á a informação recolhida sendo que esta deverá corresponder à veracidade de todo o trabalho produzido pelos alunos e pela professora/investigadora, no âmbito desta investigação. Não obstante, a interpretação dessa realidade será sempre feita tendo por base os pressupostos teóricos inerentes ao estudo.

Relativamente à generalização (transferibilidade) é a capacidade de extrapolar os resultados obtidos de um dado contexto em estudo para outros contextos, pois, de acordo com Morrow (2005, citado por Coutinho, 2015) só é possível se:

“(...) o investigador fornecer ao leitor a informação suficiente sobre o contexto em que o estudo decorreu, como foram seleccionados os participantes, que relações estabeleceu com os mesmos por forma a que o leitor possa decidir de que forma os resultados são transferíveis (...).” (p.110)

Considero, relevante, que os resultados obtidos traduzam a realidade que procurei compreender, independentemente de estes serem transferíveis ou não para outros contextos.

No que diz respeito à consistência dos dados, concretamente a dependabilidade (fiabilidade), é a possibilidade de obter os mesmos resultados caso o estudo seja efetuado por outros investigadores com os mesmos participantes e no mesmo contexto (Coutinho, 2015). A informação obtida, através do trabalho de campo, só terá consistência se houver convergência de informação recolhida, no mesmo contexto e com os mesmos sujeitos participantes na investigação, por diferentes investigadores também eles participantes.

Relativamente à questão da neutralidade por parte do investigador (confirmabilidade), Fino (2008) considera que “(...) a validade e a riqueza de significado dos resultados obtidos dependem directamente [*sic*] e em grande medida da habilidade, disciplina e perspectiva [*sic*] do observador, e é essa, simultaneamente, a sua riqueza e [a] sua fraqueza.” (p. 39). O investigador ao interagir com os participantes em estudo, deve respeitar a sua cultura, princípios e valores, bem como os resultados obtidos transmissores da situação em investigação, não associando as suas crenças e ideias pessoais. Deve procurar, interpretar a realidade tendo por base os pontos de vista dos intervenientes.

No que concerne às questões éticas Bogdan e Biklen (1994) advogam “(...) o consentimento informado e a protecção [*sic*] dos sujeitos contra qualquer espécie de danos.” (p.75). Neste âmbito, efetuou-se um pedido formal direccionado ao Presidente do Conselho Executivo da escola, onde decorreu a investigação, bem como a solicitação de um consentimento informado e livre aos encarregados de educação dos alunos, das duas turmas participantes, e às duas docentes de Matemática das respetivas turmas, também participantes na investigação. Foi-lhes garantida a confidencialidade e o anonimato relativamente à sua identidade. Para tal, utilizaram-se códigos de identificação, concretamente letras do alfabeto português, de modo a tornar a informação relativa aos sujeitos participantes, no estudo, não identificável.

### **3.2 Recolha de Dados**

No processo de recolha de dados, procurou-se, em contexto de sala de aula, recorrer a diferentes técnicas de recolha de dados empíricos, nomeadamente a técnicas diretas, sobretudo socorrendo-nos de instrumentos como a observação sistemática “(...) através do contacto directo [*sic*] com situações específicas.” (Aires, 2015, p.25). Atendendo a este tipo de observação, existe uma intencionalidade por parte do investigador que, de uma forma sistemática, procura obter informação no intuito de alcançar os objetivos delineados para a investigação. A Observação Participante é mais significativa em todo o processo de investigação, visto que “Durante a estada no campo, os dados recolhidos são provenientes de fontes diversas, nomeadamente observação participante, propriamente dita, que é o que o observador apreende, vivendo com as pessoas e partilhando as suas actividades [*sic*].” (Fino, 2008, p.39).

Recorremos também a entrevistas informais, nomeadamente a designada entrevista aberta, definida como sendo “(...) não-directiva [*sic*] ou em profundidade

utiliza-se a partir de um conjunto de critérios operativos fundamentais que justificam a sua validade como instrumento de captação e de transmissão de significado.” (Aires, 2015, p. 29). Assim, através do questionamento ao aluno, em sala de aula, foi possível recolher informação e proceder ao seu registo no Diário de Bordo, respeitante a toda a ação, aprendizagem de conteúdos, e procedimentos matemáticos, recorrendo ao uso de recursos didáticos.

Recorreu-se, de igual modo, a técnicas indiretas, concretamente a pesquisa documental, o registo fotográfico e digital dos trabalhos produzidos pelos alunos, e anotações no diário de bordo. Para Bogdan e Biklen (1994, p.177) o diário é considerado uma “(...) descrição regular e contínua e um comentário reflexivo sobre os acontecimentos (...)”.

Os mesmos autores (Bogdan & Biklen, 1994) preconizam a autenticidade do investigador quando regista os dados. Defendem ainda que, mesmo que alguns resultados obtidos não agradem ao investigador, e algumas das vezes este se sinta pressionado na apresentação de resultados, deve manter a “(...) sua devoção e fidelidade aos dados que obtém.” (Bogdan & Biklen, 1994, p.77).

### 3.3 Análise de Dados

A análise interpretativa foi efetuada separadamente, isto é, iniciamos a análise dos dados obtidos com a turma do 8.º ano, e em seguida analisaram-se os dados da turma do 10.º ano.

Ainda no que diz respeito à interpretação dos dados, Amado (2017) salienta que “(...) o material recolhido (fruto das interpretações dos sujeitos investigados) há de vir a ser interpretado (com base em teorias prévias, ou em hipóteses progressivas, emergentes, a construir durante o processo de recolha e de análise) pelo próprio analista.” (p.51). Assim, no âmbito desta investigação encetada durante as aulas, na turma do 8.º ano e na turma do 10.º ano da PES, analisamos os contributos dos recursos didáticos utilizados para o ensino e aprendizagem da Matemática. Em particular, analisamos o conhecimento necessário para que um professor possa lecionar a disciplina de Matemática utilizando recursos didáticos, e de que forma esses recursos contribuíram para que o aluno construísse o seu conhecimento matemático. Esta análise foi efetuada com base na implementação das seguintes atividades:

- Construindo Quadrados na dedução do Teorema de Pitágoras

- Exploração de uma tarefa retirada do manual *Novo Espaço 9.º ano* para a dedução do volume da Pirâmide e do Cone
- Exploração de uma tarefa retirada do manual *Matemática em Ação 8.º ano* na abordagem do conceito de Translação associada a um vetor e Translação composta.
- Transformações de Funções com uma ficha de trabalho
- Atividade Investigativa sobre a modelação de uma Parábola

A análise foi sustentada com base na fundamentação teórica, concretamente, foram analisados os documentos orientadores que refletem sobre a utilização de recursos didáticos, bem como a opinião fundamentada de alguns autores que se dedicaram ao estudo da utilização de recursos didáticos no processo de ensino e aprendizagem. Assim, procurou-se perceber, por parte dos alunos, como construíam o seu pensamento, raciocínio, linguagem e comunicação matemática, associando o conteúdo ao recurso didático, tendo por base a metodologia implementada pela professora.

No processo de análise, recorreu-se à triangulação dos dados obtidos a partir das diferentes fontes, pois, de acordo com Aires (2015), esta técnica permite “(...) recolher e analisar os dados a partir de diferentes perspectivas [*sic*] para os contratar e interpretar. Esta confrontação pode alargar-se aos métodos, teorias, informação e investigadores.” (p. 55).

### **3.4 Descrição das Atividades desenvolvidas no 3.º Ciclo do Ensino Básico**

#### **3.4.1 Construindo Quadrados – Teorema de Pitágoras**

Para introduzir a unidade temática *Teorema de Pitágoras*, lecionada no ensino *online*, devido às circunstâncias já mencionadas, de modo que a aprendizagem do conteúdo se tornasse mais compreensível para os alunos, planeamos uma atividade denominada *Construindo Quadrados*. Esta atividade foi adaptada de uma tarefa dinamizada na unidade curricular IPPII, do Mestrado em Ensino de Matemática (Adaptação de uma tarefa planificada em contexto de estágio pedagógico na Escola Básica dos 2.º e 3.º Ciclo de São Roque, ano letivo de 2008/2009).

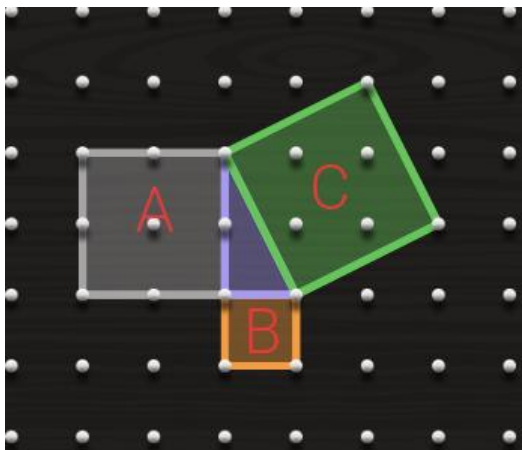
Para a sua concretização projetamos um *PowerPoint*, cujo objetivo foi a construção de quadrados através do *Geoplano Virtual*. Desta forma, pretendíamos que os alunos conseguissem, a partir do cálculo das áreas de cada um dos quadrados unidos por

um único vértice em comum, e contendo no seu interior um triângulo retângulo, deduzir o Teorema de Pitágoras.

Na primeira questão pretendíamos que os alunos visualizassem a figura construída, conforme ilustra a figura 8, e indicassem as áreas de cada um dos quadrados.

### Figura 8

#### *Construção de Quadrados*



Seguidamente, desafiamos os alunos a construírem 2 conjuntos de quadrados, à sua escolha, respeitando as indicações do enunciado (cf. apêndice A). Após as construções efetuadas, solicitou-se o preenchimento de uma tabela com a indicação das áreas para cada um dos quadrados, bem como a reflexão por parte dos alunos sobre o triângulo obtido no interior da construção e a suposta relação existente entre as áreas dos quadrados construídos (cf. apêndice A).

Dando continuidade à atividade, pedimos também que observassem as suas construções e procurassem concluir o valor da área do quadrado maior assente no lado maior do triângulo e as áreas dos dois quadrados menores assentes em cada um dos lados menores do triângulo (cf. apêndice A). Em seguida, solicitou-se a verificação da regularidade obtida para os triângulos retângulos, e se a mesma se verificava para os triângulos acutângulos e obtusângulos (cf. apêndice A).

Para finalizar a atividade, os alunos foram estimulados a construir 2 conjuntos de quadrados em que no seu interior obtivessem um triângulo acutângulo e na 2.<sup>a</sup> construção um triângulo obtusângulo (cf. apêndice A). De igual modo, teriam de indicar as áreas de cada quadrado construído e indicar a propriedade relacionada com os comprimentos dos lados dos triângulos retângulos. No entanto, como não foi possível discutir todas as

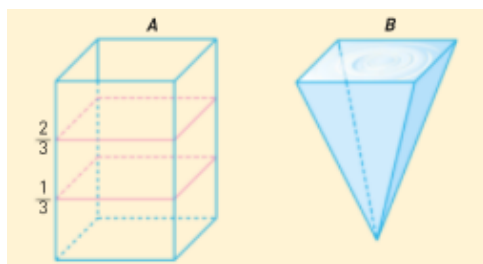
construções dos alunos, as mesmas foram discutidas numa aula seguinte, no grande grupo (cf. apêndice B).

### 3.4.2 Dedução da fórmula para o cálculo do Volume da Pirâmide e do Cone

Para introduzir os conceitos de Volume da Pirâmide e Volume do Cone, na unidade temática *Sólidos Geométricos*, procurou-se implementar uma tarefa retirada do manual *Novo Espaço 9.º ano* (Costa & Rodrigues, 2019), contudo, apesar de esta unidade constar nas *Aprendizagens Essenciais, 8.º ano, 3.º Ciclo do Ensino Básico: Matemática* (ME, 2018a), não estava contemplada no manual do 8.º ano, pelo que tínhamos de pesquisar exercícios e tarefas, para que os alunos pudessem explorar e discutir nas aulas, no grande grupo. Assim, e no âmbito da investigação, consideramos para análise a realização da tarefa de exploração para a dedução do cálculo do Volume da Pirâmide e do Cone, em que os alunos tiveram de responder a algumas questões referentes à determinação da capacidade dos recipientes A e B, conforme ilustra a figura 9.

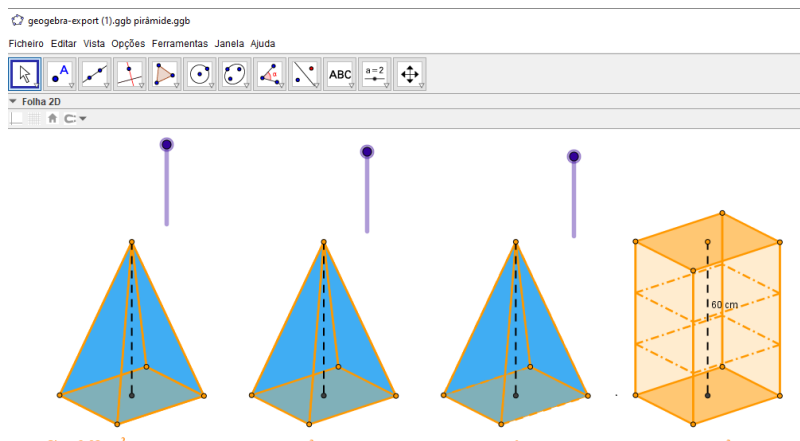
#### Figura 9

*Cálculo da capacidade dos recipientes A e B*



*Nota:* Adaptado de Costa, B., & Rodrigues, E. (2019, p.101). *Novo Espaço – Matemática 9.º ano, Parte I*. Porto: Porto Editora.

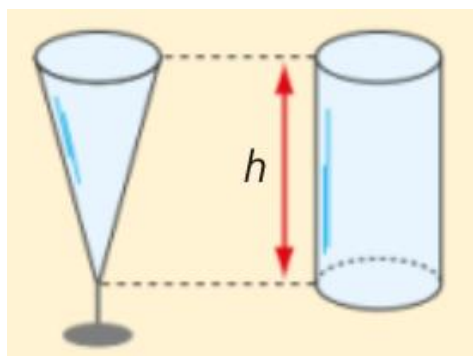
Para simplificar a exploração da tarefa, foi disponibilizado aos alunos um ficheiro previamente preparado e adaptado do *site* oficial *GeoGebra*, para que estes manipulassem os sólidos de enchimento, nomeadamente as três Pirâmides e o Prisma Quadrangular, e, desta forma, respondessem às questões colocadas (cf. apêndice C). A figura 10 ilustra o ficheiro partilhado com os alunos durante a aula *online*.

**Figura 10***Volume da Pirâmide*

*Nota:* Animação adaptada de Vieira (2016, s.p.) Copyright 2016 por Tiago Vieira. Reproduzido com permissão. <https://www.geogebra.org/m/gPrcEcDF>

Após os alunos manipularem os sólidos de enchimento (através dos seletores do ficheiro *GeoGebra*), procurou-se, através do questionamento, que os alunos deduzissem o Volume da Pirâmide relacionando-o com o Volume do Prisma Quadrangular.

Numa aula seguinte, procurou-se que os alunos, da mesma forma, conseguissem encontrar a fórmula que lhes permitia calcular o Volume do Cone, conforme ilustra a figura 11, através da exploração de uma tarefa retirada do manual *Novo Espaço 9.º Ano* (Costa & Rodrigues, 2019), (cf. apêndice D).

**Figura 11***Cálculo da capacidade de cada um dos copos*

*Nota:* Adaptado de Costa, B., & Rodrigues, E. (2019, p.107). *Novo Espaço – Matemática 9.º ano, Parte I*. Porto: Porto Editora.

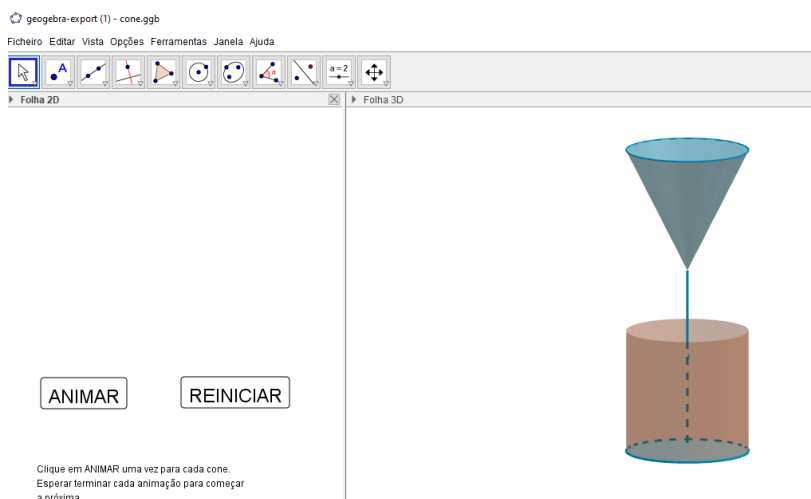
Para facilitar a exploração da tarefa e para que os alunos pudessem responder às questões colocadas (cf. apêndice D), foi-lhes facultado um ficheiro adaptado do *site*

oficial *GeoGebra*, para que manipulassem os sólidos de enchimento e, deste modo, promover a discussão no grande grupo.

A figura 12 ilustra o ficheiro partilhado com os alunos, durante a aula *online*, no sentido de auxiliar na exploração da tarefa e motivar para uma participação ativa, quer fosse individual ou coletivamente.

### Figura 12

#### *Volume do Cone*



*Nota:* Animação adaptada de Lima (2020, s.p.) Copyright 2020 por Almir Lima. Reproduzido com permissão. <https://www.geogebra.org/m/xpz7kp9m>

Após a dedução da fórmula que lhes permitia calcular o Volume quer da Pirâmide, quer do Cone, os alunos tiveram a possibilidade de resolver exercícios de aplicação e consolidação dos novos conteúdos aprendidos.

#### **3.4.3 Dedução da Translação associada a um vetor e da Translação Composta**

Com a realização da tarefa, adaptada do manual adotado *Matemática em Ação 8.º ano* (Passos & Correia, 2014), pretendia-se que os alunos, a partir de construções efetuadas no *software GeoGebra*, pudessem estabelecer relações entre a representação e o conteúdo matemático, e deduzir propriedades intrínsecas à Translação associada a um vetor e à Translação Composta.

Para iniciarmos a tarefa, apresentamos um *PowerPoint* partilhado através da tela, da plataforma *Zoom*, em que numa fase inicial, e de forma breve, foi explicado aos alunos como poderiam explorar as várias ferramentas do *software GeoGebra Calculator*, acedendo gratuitamente, não sendo necessário proceder à sua instalação, facilitando o seu acesso. Após a apresentação do *software*, procedeu-se à exemplificação da construção de

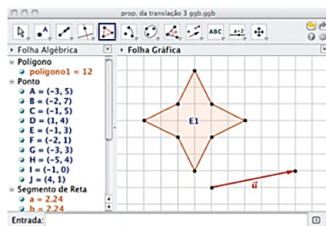
uma figura e a sua Translação associada a um vetor, no sentido de demonstrar aos alunos como poderiam elaborar as suas construções (cf. apêndice E). A figura 13 ilustra as indicações seguidas pelos alunos.

### Figura 13

#### Exploração do software GeoGebra


**61** Utilizar o programa geogebra para a determinação da imagem de uma figura, por meio de uma translação

61.1 Como determinar a imagem de uma figura, como por exemplo a estrela E1, pela translação de vetor  $\vec{u}$ ?



1.º Passo: Aceder ao site <https://www.geogebra.org/calculator>


2.º Passo: Clicar no ícone  e em seguida selecionar a opção

Retas selecionar o ícone vetor  e desenhar o vetor  $\vec{v}$  na

área de trabalho

3.º Passo: Para obter a translação da figura E2

selecionar a opção Transformar e em seguida

clicar no ícone translação por um vetor  e

depois clicar em cima da figura E2 e do vetor  $\vec{v}$


obtendo a imagem E3

4.º Passo: Para obter a soma de vetores, clicar em

Retas ícone vetor a partir de um ponto  e em

seguida clicar na extremidade do vetor  $\vec{u}$

5.º passo: Desenhar o vetor  $\vec{u} + \vec{v}$  a partir do

ícone vetor 

*Nota:* Indicações facultadas aos alunos para a construção de figuras e obtenção das respetivas imagens por meio de uma Translação.

Os alunos procuraram acompanhar a exemplificação da construção inicial e também eles tomaram a iniciativa de realizar as suas próprias construções. Desta iniciativa resultou diversas construções muito pertinentes, sendo que cada aluno construía uma figura à sua escolha e definiam o comprimento do vetor associado à Translação.

As construções decorreram com algumas paragens, pois os alunos manifestavam algumas dificuldades em seguir as indicações para a construção no *GeoGebra*. Após as construções passou-se ao momento de discussão procurando perceber que relações poderiam estabelecer entre as representações e o conteúdo matemático.

Numa aula seguinte, procurou-se que os alunos dessem continuidade às suas construções procedendo à Translação da imagem da figura construída inicialmente, obtendo uma terceira figura associada a um segundo vetor construído, definindo assim a Translação Composta (cf. apêndice E). As construções dos alunos, foram partilhadas na plataforma *Google Classroom*, para avaliação formativa e sumativa.

### 3.5 Descrição das Atividades desenvolvidas no Ensino Secundário

#### 3.5.1 Transformações de Funções

A aula deste dia, realizada à distância, tinha como propósito introduzir um novo conteúdo, concretamente as transformações de funções.

Para tal, eu e a orientadora cooperante, elaboramos uma ficha de trabalho com o propósito de que a mesma fosse explorada com recurso à calculadora gráfica (cf. apêndice F).

Para um melhor entendimento na sua utilização projetou-se o emulador da calculadora gráfica, demonstrando algumas das funcionalidades do seu teclado, bem como o *menu* que deveriam aceder para a introdução da expressão algébrica e respetiva representação gráfica. Assim, procurou-se exemplificar as primeiras funções da tabela 1, para que os alunos através da calculadora física pudessem obter a sua representação gráfica, e responder às questões colocadas na ficha de trabalho.

Na tabela 1, tabela 2, e tabela 3 (cf. apêndice F), procurou-se que os alunos explorassem, com a calculadora, as Translações Verticais, Horizontais, e Translações Compostas. Da mesma forma, tinham de identificar o vetor de Translação associado, bem como o domínio, contradomínio e representação gráfica das funções indicadas nas referidas tabelas, retirando as respetivas ilações.

Nas tabelas 4 e 5 (cf. apêndice F), pretendia-se que os alunos representassem graficamente as funções e, de igual modo, indicassem o domínio, contradomínio e coeficiente de contração e dilatação vertical, bem como o coeficiente de contração e dilatação horizontal.

Por fim, era esperado que indicassem o domínio, contradomínio e a representação gráfica da imagem do gráfico das funções indicadas pela reflexão de eixo  $Ox$  e eixo  $Oy$  (cf. apêndice F).

Os alunos procuraram, durante 3 aulas, explorar estes conceitos visualizando-os através da calculadora gráfica, e procedendo à sua reprodução manual na ficha de trabalho.

#### 3.5.2 Atividade Investigativa sobre a Modelação de uma Parábola

Na exploração da nova unidade temática, em concreto o *Estudo de Funções Elementares e Operações Algébricas com Funções*, iniciamos com o estudo da função quadrática. Para esta investigação considerou-se apenas a atividade investigativa de

modelação de uma Parábola. Os alunos começaram por efetuar um registo fotográfico de um local ou fenómeno da natureza que expressasse uma Parábola.

Eu e a orientadora cooperante, elaboramos uma ficha de trabalho, de âmbito investigativo, no sentido de orientar os alunos, na realização da atividade investigativa, com recurso ao *software GeoGebra* (cf. apêndice G).

Os alunos organizaram-se em grupos, sendo que a aula foi implementada em regime presencial, o que facilitou a concretização da atividade, bem como o apoio prestado aos grupos durante a atividade investigativa.

Numa primeira fase, foi necessário instalar o *software GeoGebra* nos computadores portáteis, dos alunos, dado que os computadores existentes na sala de informática eram em número insuficiente, pois, devido à COVID-19, foi necessário colocar alguns deles nas salas de aula, para serem utilizados no ensino à distância. Neste sentido, os alunos utilizaram os seus portáteis, para a realização da atividade investigativa.

Após a marcação de alguns pontos, alguns grupos verificaram que não iriam obter uma Parábola, pois a sua curva não coincidia com a curva da mesma, pelo que resolveram optar por modelar outro fenómeno/local, com características semelhantes à Parábola, tendo alcançado esse objetivo.

Foi proposto aos grupos, uma estratégia inicial para a obtenção dos modelos matemáticos, através da marcação de pontos, nos locais estratégicos, onde mudava o comportamento da Parábola, criando listas de pontos, e, através da função polinómio, os alunos seleccionavam essa mesma lista, obtendo a curva da Parábola. Contudo, face a esta limitação, foi sugerido um segundo método, através da Regressão Bivariada, sendo que este último foi facilitador na obtenção do modelo matemático de uma função polinomial de 2.º grau.

#### **4. Análise aos contributos de diferentes recursos didáticos para o ensino e aprendizagem da Matemática**

Nesta secção, analisarei pormenorizadamente a implementação das atividades enunciadas nas secções anteriores, no intuito de compreender em que medida os recursos didáticos utilizados, em sala de aula, representaram contributos para o processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

Num primeiro momento, apresentamos a análise da utilização de alguns recursos didáticos no 3.º Ciclo, e em seguida foram analisados os recursos didáticos utilizados no Secundário.

#### **4.1 Análise aos contributos da utilização de recursos didáticos no 3.º Ciclo**

##### ***4.1.1 Geoplano Virtual na dedução do Teorema de Pitágoras***

Para abordar o Teorema de Pitágoras, foi sugerido aos alunos desenvolverem uma construção de quadrados unidos por um único vértice em comum, usando o *Geoplano Virtual*. O uso de tecnologia em sala de aula, e neste caso específico tratando-se de uma aula *online*, para estes alunos era invulgar, pois estávamos perante um ambiente de aprendizagem diferente do habitual, dadas as circunstâncias resultantes da propagação do vírus SARS-CoV-2.

Para o professor, impelido de preparar, implementar e monitorizar a tarefa, é verdadeiramente desafiante. É de suma importância definir estratégias pedagógicas que permitam ao aluno a compreensão do conteúdo, bem como o recurso a “Modelos físicos, materiais, calculadoras e computadores (...)” (NCTM, 1994, p.131), que estimulem a aprendizagem. É fulcral o enriquecimento de “(...) experiências essenciais para a construção do conhecimento, amplo e profundo, de conceitos e procedimentos matemáticos” (NCTM, 1994, p.131). Neste sentido, o propósito em utilizar a tecnologia foi com o intuito de permitir ao aluno estabelecer procedimentos, construir o conhecimento, e depreender o conteúdo matemático.

Antes de iniciarmos a atividade questionamos os alunos se conheciam o *Geoplano*, o qual “(...) responderam que desconheciam (...) e que nunca trabalharam nesta aplicação.” (Diário de Bordo, Anotações e Reflexões 8.º Ano, 20 de janeiro de 2021, p.1). Com efeito:

“A tecnologia tem um papel fundamental no ensino, para a criação de ambientes de aprendizagem que “integram o uso de ferramentas matemáticas e tecnológicas como recursos essenciais para ajudar os alunos a aprender e a fazer sentido das ideias matemáticas, a raciocinar matematicamente e a comunicar o seu pensamento matemático”” (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2014, p.78, citado por Fallas, 2019, p.3).

Assim, para iniciarmos esta atividade com recurso à tecnologia, neste caso concreto utilizando uma *app*, “(...) foi exibida uma apresentação em *PowerPoint*, onde, de forma breve, foi explicado aos alunos como poderiam utilizar cada uma das

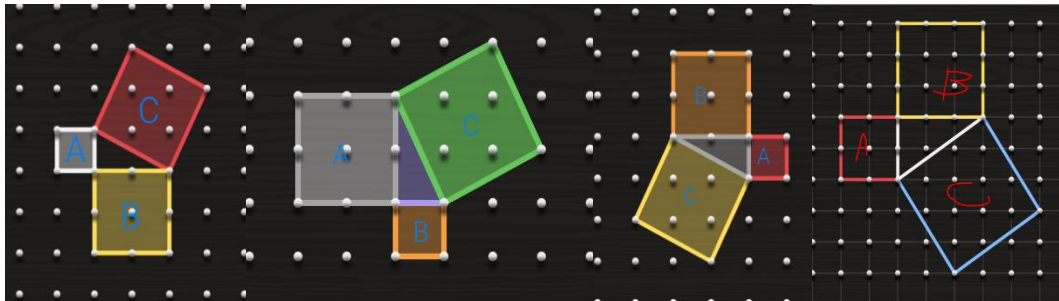
ferramentas do *Geoplano Virtual* (<https://apps.mathlearningcenter.org/geoboard/>), para a construção de quadrados, possuindo determinadas características.” (Martins & Silva, 2021, p.3).

No que diz respeito às características que os quadrados deveriam possuir e que os alunos deveriam seguir, estavam assinaladas no enunciado, através das indicações facultadas (cf. Apêndice A), nomeadamente: O quadrado A estar ligado ao quadrado B por apenas um vértice; o quadrado B estar ligado ao quadrado C por apenas um vértice; o quadrado C estar ligado ao quadrado A por apenas um vértice e estar ligado ao quadrado B por apenas um vértice. No enunciado não referia propriamente a construção de uma figura em que no interior resultasse um triângulo retângulo, no entanto, a figura apresentada no enunciado continha no seu interior um triângulo retângulo.

Para que, objetivamente, conseguissem construir os quadrados, e indicar as respetivas áreas, era extremamente importante uma correta interpretação do enunciado. A figura 14 traduz, efetivamente, a interpretação concretizada por parte de alguns alunos, CA, MA, I e T, respetivamente.

**Figura 14**

*Construção de Quadrados*



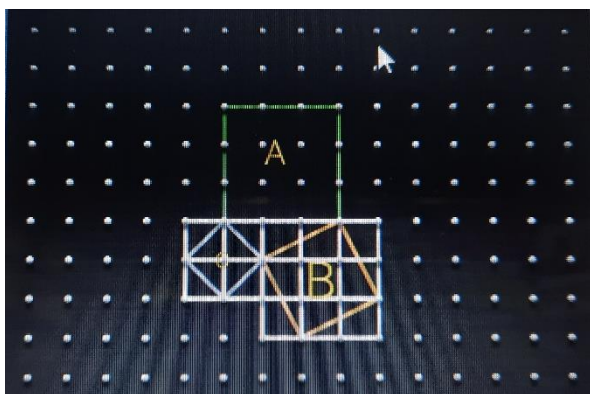
*Nota:* Adaptado de Martins e Silva (2021, p.3). Construção de Quadrados dos alunos CA, MA, I, T, respetivamente.

Nas primeiras construções dos alunos, nem sempre resultou, no seu interior, um triângulo retângulo, pelo que “(...) alguns alunos construíram figuras em que obtiveram (...) um triângulo não retângulo (...)” (Diário de Bordo, Anotações e Reflexões 8.º Ano, 20 de janeiro de 2021, p.2). Entretanto, foi solicitado aos alunos a partilha dos seus trabalhos, para serem analisados e comparados conjuntamente. De referir que “(...) na apresentação em *PowerPoint*, começou-se por analisar uma figura inicial em que resultou, no seu interior, um triângulo retângulo.” (Diário de Bordo, Anotações e Reflexões 8.º Ano, 20 de janeiro de 2021, p.2). A maioria dos alunos orientou-se pela figura apresentada, inicialmente, no enunciado, em que emergiu um triângulo retângulo

no interior da construção. Contudo, alguns alunos obtiveram uma construção cujo triângulo não era retângulo. Assim, analisando a construção da aluna MO, observando os quadrados B e C, consta-se que o polígono resultante no interior da construção não é um triângulo retângulo, conforme ilustra a figura 15.

**Figura 15**

*Construção de Quadrados*



*Nota:* Construção da aluna MO

Segundo o NCTM (1994), “As representações são cruciais para o desenvolvimento do pensamento matemático e é através do seu uso que encontram modelos para as ideias matemáticas, que se definem e clarificam relações importantes e se fomenta a compreensão.” (p.131). A respeito disto, o TPACK poderá explicar a integração de tecnologia em sala de aula, contribuindo como facilitador da tarefa por parte do professor e a compreensão do conteúdo pelo aluno.

Guerrero (2010, citado por Sampaio & Coutinho, 2014) argumenta que “(...) um professor evidencia ter desenvolvido o TPACK Matemático para algumas tecnologias educativas se for capaz de usar essas tecnologias para tornar os conteúdos matemáticos que deve lecionar nas suas aulas mais facilmente compreensíveis e acessíveis aos alunos (...)” (s.p.). Para tal, a orientação facultada aos alunos foi essencial para estes poderem construir o conhecimento matemático e compreender o conteúdo implícito através de representações.

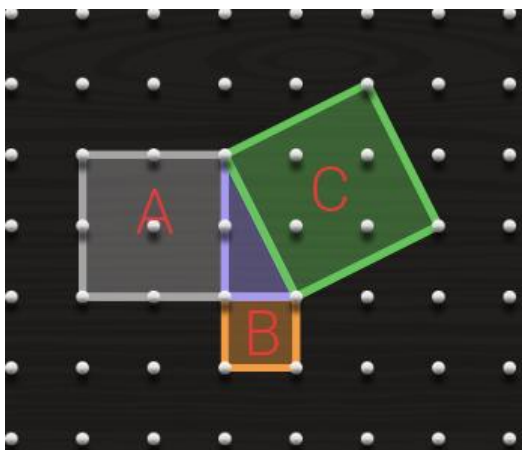
De salientar que “(...) os alunos ainda revelavam dificuldades na indicação da área do quadrado maior, pelo que houve a necessidade em partilhar uma das construções elaborada pela professora, para tornar mais compreensível o referido cálculo.” (Diário de Bordo, Anotações e Reflexões 8.º Ano, 20 de janeiro de 2021, p.2). Assim, através da

demonstração, foi possível simplificar o cálculo da área do quadrado maior, visto que nenhum aluno, de início, conseguia efetuar o cálculo que era pretendido.

A figura 16 ilustra a construção partilhada no momento da discussão do cálculo das áreas de cada um dos quadrados.

### Figura 16

#### *Construção de Quadrados*

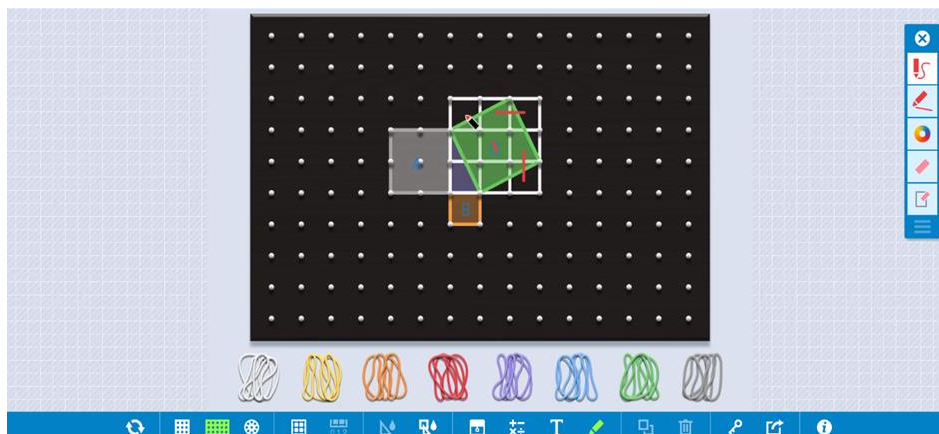


*Nota:* Construção partilhada na aula *online* para auxiliar no cálculo das áreas de cada um dos quadrados

Neste sentido, observando as dificuldades evidenciadas pelos alunos, foi-lhes solicitado a partilha dos seus trabalhos, em que procurou-se discutir, com estes, as suas estratégias, por forma a retificar possíveis incorreções como, por exemplo, na contagem dos quadrados unitários.

No cálculo das áreas dos quadrados, os alunos procuraram aplicar algumas estratégias, embora, de início, ainda manifestassem algumas dificuldades na contagem dos quadrados unitários que compõem o quadrado maior, como anteriormente referimos. Neste aspeto, sublinho o papel de conselheiro por parte do professor para que, de facto, conseguissem superar esta dificuldade.

A figura 17 ilustra a estratégia definida pelo aluno MA, no que diz respeito à contagem dos quadrados unitários, concretamente na indicação da área do quadrado maior. Neste seguimento, o aluno partilhou a sua tela expondo à turma o seu raciocínio, na efetiva contagem dos quadrados unitários, recorrendo às ferramentas disponíveis no *Geoplano*, efetuando a contagem para toda a turma. O facto de o aluno ter partilhado o seu trabalho, proporcionou, também, aos colegas a definição de estratégias de contagem que lhes permitisse ultrapassar esta dificuldade.

**Figura 17***Construção de Quadrados*

*Nota:* Adaptado de Martins e Silva (2021, p.3). Estratégia definida pelo Aluno MA.

Perante as representações e estratégias delineadas pelos alunos, transcrevo um excerto de um diálogo mantido entre a professora e os dois alunos, LV e MA, retirado de Martins e Silva (2021, p.3):

LV: Vamos juntar pedacinhos.

Professora: Vamos montar um puzzle. Formando uma unidade.

Professora: LV, como calculaste a área?

LV: Ainda estou a fazer os quadradinhos possíveis.

Professora: Como vamos fazer para calcular a área destes quadrados? [falando dos incompletos]

LV: Vamos construir todos.

MA: Acho que já consegui fazer o total.

Professora: E como conseguiste?

MA: Pondo quadrados em tudo.

Professora: Podes explicar como contaste?

Assim, “O aluno MA partilhou a sua tela e, com recurso à ferramenta de lápis, foi contando em voz alta o número de quadrados unitários que compoñham os quadrados construídos.” (Martins & Silva, 2021, p.4). Analisando o diálogo entre a professora e os dois alunos, LV e MA, constata-se que estes compreenderam como tinham de construir o quadrado unitário, quando o mesmo era incompleto, e desta forma conseguissem contabilizá-los para o cálculo da área do quadrado maior. Este excerto evidencia a construção do pensamento e raciocínio matemático, a definição de estratégias e procedimentos, bem como a sua capacidade de fundamentação e criticidade. A exemplificação por parte da professora foi essencial para orientar os alunos no pensamento, raciocínio e definição de estratégias.

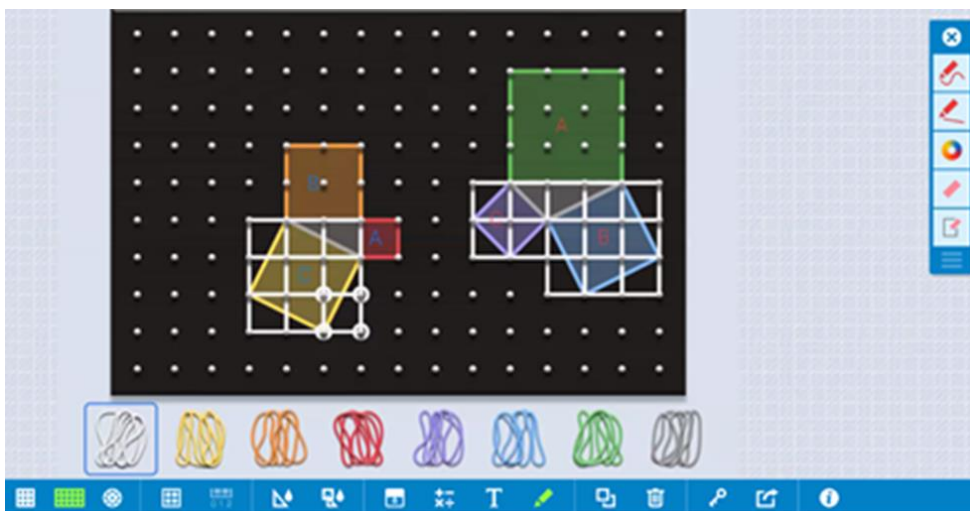
Na continuação da atividade, os alunos procuraram identificar o polígono formado, “(...) resultante da ligação dos três quadrados” (Martins & Silva, 2021, p.4), tendo, estes, concluído que em todas as construções obtinham um triângulo. A partir desta conclusão surgiram novos conceitos, sobretudo a amplitude dos “(...) ângulos internos e as características dos seus lados.” (Martins & Silva, 2021, p.4).

Posto isto, os alunos depreenderam que os triângulos obtidos no interior das várias construções eram de diferentes naturezas, obtendo triângulos retângulos, obtusângulos ou acutângulos (Martins & Silva, 2021). Com base nas representações, os alunos formularam uma conjectura que lhes permitiu estabelecer uma relação entre os três quadrados assentes em cada um dos lados do triângulo.

Ao elaborarem dois conjuntos de construções, em que no seu interior obtiveram um triângulo retângulo, concluíram que a soma das áreas dos dois quadrados menores era igual à área do quadrado maior. Todavia, os alunos teriam de verificar se a referida conjectura se aplicava aos triângulos acutângulos e também aos obtusângulos, tendo, estes, chegado à conclusão de que tal não se verificava conforme evidencia as construções da aluna I, na figura 18.

### Figura 18

#### *Construção de Quadrados*



*Nota:* Adaptado de Martins e Silva (2021, p.4). Construção da Aluna I.

Neste sentido, e para uma melhor apreensão acerca das áreas dos quadrados obtidos nas várias construções, transcrevo um excerto de um diálogo decorrido entre a aluna I e a professora, retirado de Martins e Silva (2021, p.4):

Professora: Quais foram os valores que obtiveste para as áreas? Existe alguma relação?

[A aluna I respondeu corretamente, quanto aos valores das áreas dos quadrados, em ambas as construções.]

Professora: Existe alguma relação quando comparas as áreas dos quadrados? Tanto numa construção como na outra.

I: Sim. Somando as áreas dos pequenos dá o maior, mas não deu na segunda figura...

Professora: E que figuras tinhas no interior das construções?

I: É um triângulo reto. [referindo-se à construção da esquerda].

Professora: Porque dizes que é retângulo?

I: Ah, sim, retângulo.

Professora: E na segunda.

I: É escaleno.

A partir deste diálogo, apesar de alguma ambiguidade quanto à classificação dos triângulos, por estar “(...) a confundir a classificação quanto aos lados com a classificação quanto aos ângulos (...)” (Martins & Silva, 2021, p.4), podemos inferir a percepção da aluna I, relativamente aos resultados obtidos. Neste âmbito, a aluna deduziu que estes resultados não eram os mesmos para triângulos de diferentes naturezas, apenas se aplicava a triângulos retângulos. Nesta linha de pensamento, resultou uma conjectura em que só se aplica, quando no interior de uma construção se obtém um triângulo retângulo. A aluna I deduziu que, para um triângulo que não fosse retângulo, não se aplica a conjectura formulada. Para tal, foi crucial as metodologias de ensino implementadas pela professora, nomeadamente o questionamento para que os alunos pudessem conjecturar e tirar as suas ilações.

Para que os alunos conseguissem obter a fórmula do Teorema de Pitágoras, foi-lhes questionado “(...) como poderiam relacionar os lados do triângulo com as áreas de cada quadrado, se não poderiam aplicar o mesmo raciocínio que aplicaram à soma das áreas.” (Diário de Bordo, Anotações e Reflexões 8.º Ano, 20 de janeiro de 2021, p.6). Inicialmente, os alunos não compreenderam o que lhes foi solicitado, contudo, a aluna BP referiu “(...) se não era a fórmula que estava no manual que a professora pretendia (reflexão conjunta com a Professora Supervisora, Doutora Sónia Martins).” (Diário de Bordo, Anotações e Reflexões 8.º Ano, 20 de janeiro de 2021, p.6).

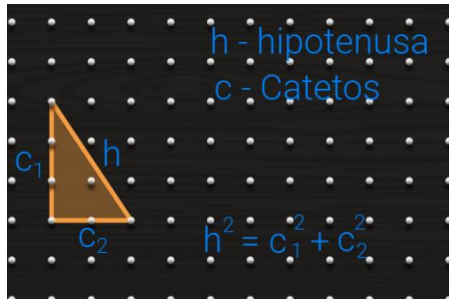
Para os alunos era evidente que a conjectura em que a soma das áreas dos quadrados menores era igual à área do quadrado maior, unicamente se aplicava quando no interior da construção o triângulo fosse retângulo, validando as suas conclusões.

A figura 19 ilustra a enunciação formal, em linguagem matemática, do Teorema de Pitágoras, decorrente da discussão conjunta entre a Professora e os alunos, tendo por base os trabalhos elaborados por estes, no *Geoplano*, e o questionamento ao longo da aula

*online*. Contudo, para que os alunos, efetivamente, compreendessem a sua aplicação prática, era crucial a resolução de exercícios e problemas.

### Figura 19

*Teorema de Pitágoras*



*Nota:* Enunciação formal do Teorema de Pitágoras

Neste âmbito, podemos aferir a importância da tecnologia tendo, esta, auxiliado os alunos a raciocinar, definir estratégias e procedimentos, conjecturar, refutar, comunicar matematicamente e generalizar resultados. A importância do conhecimento por parte da professora, relativamente ao manuseamento de novas tecnologias, segundo Martins e Silva (2021) foi essencial na orientação dos alunos (TPK) durante a concretização da atividade para a dedução do Teorema de Pitágoras (PCK), utilizando o *Geoplano Virtual* (TCK), para construírem o conhecimento matemático (TPACK). Contudo, apesar de algumas dificuldades manifestadas por dois dos alunos, relativamente à finalização das suas construções, procurou-se que cada um deles partilhasse os seus trabalhos com o objetivo de envolvê-los na discussão, e levá-los a refletir e a pensar criticamente.

Em suma, a representação e a construção de significados possibilitaram o desenvolvimento da criatividade, espírito crítico e comunicação matemática dos alunos, bem como a sua adequação à modalidade de ensino *online*.

#### 4.1.2 *GeoGebra na dedução do Volume da Pirâmide e do Cone*

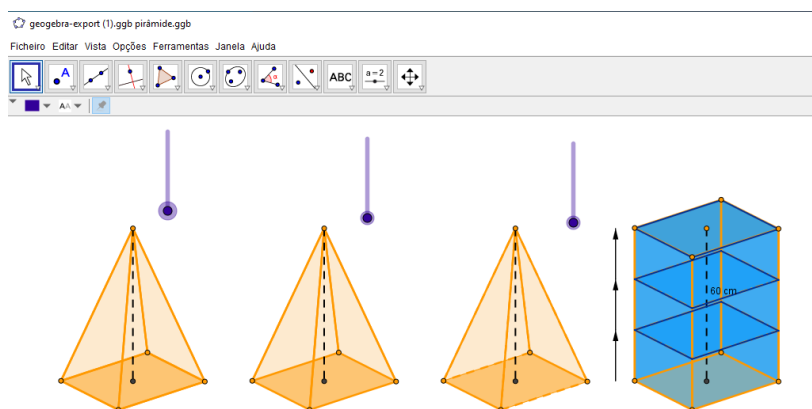
Para a abordagem do conceito de Volume da Pirâmide e do Cone, os alunos auxiliados por uma *app*, contendo um ficheiro *GeoGebra*, procuraram manipular esse ficheiro de modo que pudessem visualizar o processo de enchimento da Pirâmide, bem como do Cone em comparação com o Prisma e Cilindro, respetivamente. Pretendia-se que os alunos deduzissem a fórmula que permitia determinar o volume de ambos os sólidos, Pirâmide e Cone, através da sua manipulação vertendo o líquido contido no Prisma para a Pirâmide e fazendo o mesmo entre o Cilindro e o Cone.

A metodologia utilizada pela professora, durante o processo de manipulação dos sólidos geométricos, baseou-se no questionamento, mas para tal guiou-se, de antemão, por um conjunto de questões assinaladas nas tarefas (cf. Apêndices C e D) propostas aos alunos, retiradas do manual *Novo Espaço 9.º Ano* (Costa & Rodrigues, 2019). Estas questões visavam orientar os alunos no seu pensamento e raciocínio matemático na dedução da fórmula para o cálculo do Volume da Pirâmide e do Cone, bem como na comunicação matemática, procurando promover a participação dos alunos. Briten, Stevens, e Treby, (2012, citados por Paiva, 2020) sustentam que “(...) torna-se importante criar um ambiente que fomente a comunicação, considerando com especial atenção o papel do questionamento como meio de promoção do raciocínio e da aprendizagem” (p.136).

Nesta linha de pensamento, no que se refere a tarefas de cariz exploratório e investigativo, Ponte (2013) destaca a importância de os alunos explorarem situações onde alguns elementos são conhecidos, podendo colocar as suas questões, seguindo o seu raciocínio. A figura 20 ilustra o processo de manipulação das três Pirâmides e do Prisma durante o processo de enchimento dos sólidos.

## Figura 20

### *Volume da Pirâmide*



*Nota:* Animação adaptada de Vieira (2016, s.p.) Copyright 2016 por Tiago Vieira. Reproduzido com permissão. <https://www.geogebra.org/m/gPrcEcDF>

Nesta perspetiva, os alunos procuraram manipular as três Pirâmides, com o intento de encontrar um modelo matemático que lhes permitisse deduzir a fórmula para o cálculo do Volume da Pirâmide. Assim, “(...) procurou-se discutir no grande grupo a exploração dos sólidos concretizada pelos alunos. Neste âmbito, colocou-se a questão aos alunos sobre quantas Pirâmides seriam necessárias para encher um Prisma. Um dos alunos

respondeu que seriam necessárias 3 Pirâmides.” (Diário de Bordo, Anotações e Reflexões 8.º Ano, 19 de fevereiro de 2021, p.7). Através da questão colocada não se observou grandes dificuldades por parte de alguns discentes. Contudo, o objetivo era a envolvimento de todos, na aula *online*, por forma a tornar mais significativa as suas aprendizagens, mas constatou-se que apenas os ‘melhores’ alunos participavam, intervindo e respondendo às questões que iam sendo colocadas.

No decorrer da aula, foram colocadas várias questões (cf. apêndice C), sendo que algumas destas tinham como finalidade a determinação do volume dos dois recipientes A e B, sem utilizar a fórmula de cálculo do Volume da Pirâmide. Procurou-se que os alunos relacionassem a área da base com a altura (os alunos antes de iniciarem a atividade, resolveram um exercício sobre o cálculo do volume de um paralelepípedo retângulo), sendo estas iguais para ambos os recipientes A e B, estando os dados explícitos no enunciado (cf. apêndice C). De salientar que, em ambas as tarefas, está explícito o termo capacidade. No entanto, estes dois termos (volume e capacidade) não têm o mesmo significado, sendo que poder-se-ia ter colocado uma questão a este respeito, no sentido de os alunos refletirem acerca da sua distinção, contudo não foi discutido com estes. Através deste cálculo possibilitava aos alunos obterem as fórmulas de cálculo para o Volume da Pirâmide e do Cone.

“Em seguida, colocou-se a questão sobre a capacidade de cada um dos recipientes, A e B, pelo que facilmente os alunos conseguiram responder que o recipiente A teria de capacidade 36 litros e o recipiente B teria (...) 12 litros, tendo em atenção os dados facultados, inicialmente, no enunciado, nomeadamente as medidas das bases de cada um dos sólidos e respetivas alturas, quer do Prisma, quer da Pirâmide, estes seriam iguais. Os alunos facilmente perceberam que para encher uma Pirâmide necessitariam apenas de  $\frac{1}{3}$  do líquido contido no prisma.” (Diário de Bordo, Anotações e Reflexões 8.º Ano, 19 de fevereiro de 2021, p.7)

Alguns alunos facilmente compreenderam quais seriam as capacidades para ambos os recipientes através da manipulação do enchimento de sólidos. Entretanto, com a continuação da colocação de questões (cf. Apêndice C), concluíram que “(...) a área da base de cada um dos sólidos, (...) seriam iguais (...)” (Diário de Bordo, Anotações e Reflexões 8.º Ano, 19 de fevereiro de 2021, p.7). Facilmente perceberam que o polígono representado na base era um quadrado e este era igual para ambos os recipientes.

Assim, visto que os alunos perceberam que a altura do Prisma era a mesma para a Pirâmide, facilmente relacionaram a área da base com a altura. Neste seguimento, um dos alunos inferiu “(...) que poderiam obter o resultado através da área da base

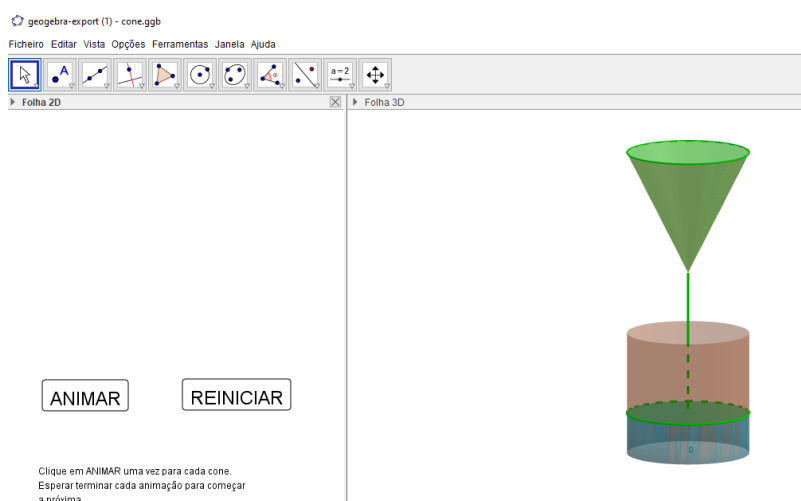
multiplicando pela altura e dividindo por 3 (...)” (Diário de Bordo, Anotações e Reflexões 8.º Ano, 19 de fevereiro de 2021, p.8). Contudo, senti a necessidade de aprofundar este conceito, através da resolução de exercícios e problemas, em outros momentos, nas aulas, para melhor compreensão por parte dos alunos menos participativos e interventivos nesta aula *online*, visto que só os ‘melhores’ alunos participavam, como referi anteriormente.

A respeito disto, Ponte, Oliveira, Cunha *et al.* (1998) sublinham a importância do apoio facultado aos discentes, o tempo despendido para a realização da atividade e a sua gestão, orientação, discussão e avaliação do trabalho desenvolvido por estes.

Numa aula seguinte, os alunos foram incentivados a dar continuidade à exploração dos sólidos geométricos, tendo sido facultado um ficheiro *GeoGebra*, com o desígnio de encontrarem um modelo matemático que definisse o Volume do Cone, por comparação com o Volume do Cilindro. Novamente com o recurso à manipulação dos sólidos geométricos, procurou-se que os alunos respondessem a algumas das questões plasmadas no enunciado (cf. apêndice D). A figura 21 ilustra o processo de enchimento do Cilindro com líquido contido no Cone, e vertido para o respetivo recipiente. Desta forma, foi-lhes dada a possibilidade de explorarem conceitos, nomeadamente a noção de área, medida, capacidade e, que, interligados, seria uma excelente oportunidade de encontrarem o tão almejado modelo matemático que lhes permitia definir o Volume do Cone.

**Figura 21**

### *Volume do Cone*



*Nota:* Animação adaptada de Lima (2020, s.p.) Copyright 2020 por Almir Lima. Reproduzido com permissão. <https://www.geogebra.org/m/xpz7kp9m>

Do ponto de vista de Cardoso (2019) é significativo a utilização do *software GeoGebra*, visto que o mesmo permite “(...) criar, construir e desenvolver objetos de

aprendizagem (...)", realçando a oportunidade de manipulação e desta forma obter o conhecimento e assimilação de conteúdos (p. 51).

Em termos metodológicos, o questionamento por parte da professora foi uma constante para que os alunos se envolvessem na discussão e tornasse a sua aprendizagem mais profícua. Na continuação da discussão os alunos perceberam que para verter o líquido contido no Cilindro para o Cone era necessário "(...) apenas  $\frac{1}{3}$  do líquido contido no Cilindro." (Diário de Bordo, Anotações e Reflexões 8.º Ano, 26 de fevereiro de 2021, p.9).

Após terem respondido às questões propostas no enunciado (cf. apêndice D), alguns alunos perceberam que a altura e a área da base eram iguais para ambos os recipientes, Cone e Cilindro, pelo que teriam de, apenas, relacionar estas duas variáveis. Assim, "(...) para que os alunos obtivessem a fórmula que permitia calcular o Volume do Cone, colocou-se a questão de qual seria o polígono representado na base, pelo que os alunos referiram tratar-se de uma circunferência." (Diário de Bordo, Anotações e Reflexões 8.º Ano, 26 de fevereiro de 2021, pp.9 – 10). Este momento de aula poderia ter sido aproveitado para discutir a diferença entre círculo e circunferência, contudo não foi discutido com os alunos. Desta conclusão, alguns alunos conseguiram relacionar a área da base e a altura, aludindo serem estas duas variáveis iguais, para ambos os recipientes, concluindo que "(...) o volume do cone [é] (...)  $V = \frac{1}{3} A_b \times h$ ." (Diário de Bordo, Anotações e Reflexões 8.º Ano, 26 de fevereiro de 2021, p.10).

Na opinião de E. L. Santos e L. Santos (2019), utilizar o *software GeoGebra*, possui inúmeras vantagens:

"(...) contribui para regular o ensino, quando o professor: (i) durante a planificação reconhece que a forma como usa a tecnologia pode alterar a forma como o conhecimento é apresentado;(ii) complementa a estratégia de ensino com outros materiais, considerando as necessidades dos alunos, para finalizar as aprendizagens com sucesso; e (iii) reflete sobre o seu trabalho, ao decidir a introdução de alterações ao ficheiro GeoGebra para utilizações futuras." (p.22)

Em síntese, a utilização do *software GeoGebra* auxiliou na apreensão de conteúdos, nomeadamente na dedução da fórmula para o cálculo do volume de sólidos geométricos, em concreto a Pirâmide e o Cone, do domínio Geometria e Medida. Do ponto de vista do professor permitiu a implementação de uma metodologia usando aplicativos, mas também possibilitou ao aluno ter a oportunidade de explorar, raciocinar, argumentar e comunicar matematicamente utilizando linguagem matemática adequada.

#### 4.1.3 *GeoGebra na Translação associada a um vetor e Translação Composta*

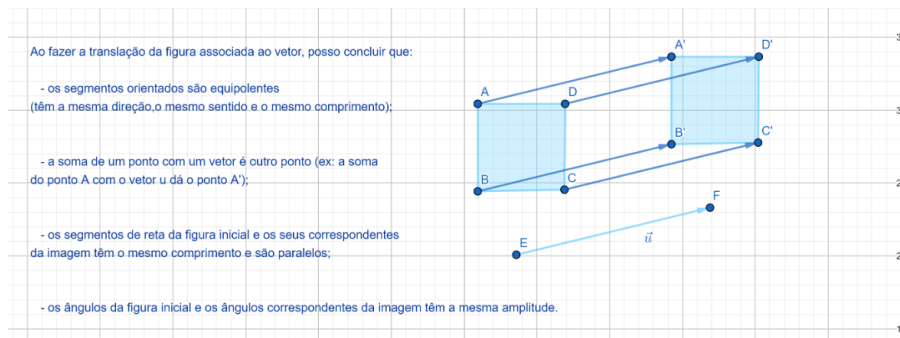
Na dinamização desta tarefa, proposta no manual *Matemática em Ação do 8.º Ano* (Passos & Correia, 2014), solicitou-se aos alunos o acesso ao *software GeoGebra*, sendo este gratuito e não sendo necessária a instalação.

Apesar do desconhecimento inicial, procurei que os alunos se familiarizassem com o mesmo, pois na atividade anterior, num primeiro contacto, tiveram a oportunidade de explorar este *software* de geometria dinâmica.

Após breve exemplificação da utilidade de algumas ferramentas do *GeoGebra*, as quais os discentes necessitariam para as suas construções, foram desafiados a construir algumas figuras à sua escolha, no sentido de, numa primeira fase, obterem a sua Translação associada a um vetor cujo comprimento foi definido pelos discentes.

Destas construções, resultaram alguns trabalhos muito pertinentes e criativos, sendo uma excelente oportunidade para consolidar alguns conteúdos e propriedades implícitas, nomeadamente a soma de um ponto com um vetor, segmentos orientados equipolentes, congruência de figuras geométricas e vetor colinear. No que diz respeito a estes conceitos, os mesmos foram abordados em aulas anteriores, pelo que o recurso à tecnologia foi com o propósito de tornar a aprendizagem do conteúdo, referente à Translação, mais perceptível. Assim, quanto à utilização deste recurso “Havia a preocupação por parte dos alunos em querer aprender a manusear o *software GeoGebra*, mas também em aprender o conteúdo matemático.” (Diário de Bordo, Anotações e Reflexões 8.º Ano, 17 de março de 2021, p. 10). Note-se, a partir da reflexão obtida através das anotações no Diário de Bordo, o interesse manifestado pelos alunos no manuseamento do recurso didático, bem como na aprendizagem do conteúdo. Contudo “(...) como estavam mais focados no manuseamento da ferramenta, tornou-se mais complicado a associação de alguns conceitos às construções, sendo que os alunos recorreram ao manual como recurso auxiliar.” (Diário de Bordo, Anotações e Reflexões 8.º Ano, 17 de março de 2021, p. 11). Desta reflexão, podemos inferir que o recurso tecnológico por si só não efetiva a aprendizagem, no entanto, se forem adaptadas metodologias adequadas à aprendizagem de um dado conteúdo matemático, utilizando um recurso adequado, o aluno pode, efetivamente, construir o conhecimento matemático (TPACK).

A figura 22 ilustra a perceção e a comunicação de alguns conceitos matemáticos, aprendidos pela aluna LV, explanados na sua construção, relativamente ao conceito de Translação.

**Figura 22***Translação associada a um vetor*

*Nota:* Construção da aluna LV

Neste sentido, a aplicação de Ambientes de Geometria Dinâmica (AGD), de acordo com Carvalho (2018) “(...) permite concretizar abordagens mais dinâmicas o que, indo mais de encontro aos interesses dos alunos, potencia a realização de aprendizagens mais significativas.” (p.10). A aluna através desta construção, partindo de uma figura inicial e da representação de um vetor, obteve a sua translação associada ao vetor representado, coligando, deste modo, vários conteúdos matemáticos, como descreve no seu registo.

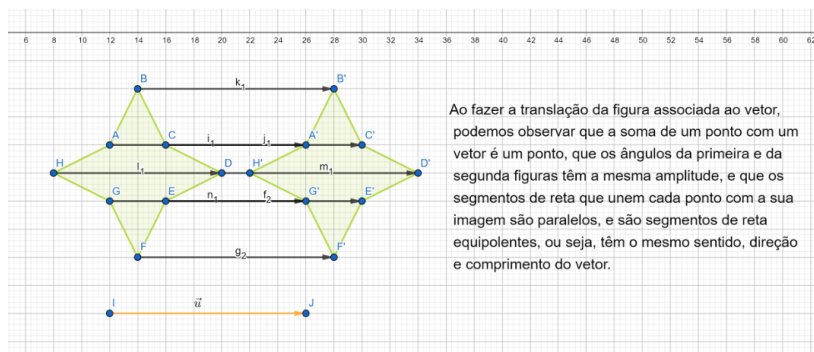
Inicialmente, constataram-se alguns equívocos relativamente ao conceito de segmento orientado equipolente e vetor, sendo que para alguns discentes era manifestamente o mesmo conceito. De referir que no *software GeoGebra*, através da representação, o segmento orientado e vetor representam-se da mesma forma, gerando equívocos. Neste sentido, “(...) procurei esclarecer esta dúvida procurando explicar-lhes que o segmento orientado equipolente era “fixo”, não se movimentava, sendo considerado um representante do vetor definido, enquanto, que, o vetor era livre, movimentando-se para qualquer direção.” (Diário de Bordo, Anotações e Reflexões 8.º Ano, 17 de março de 2021, p. 11). Neste sentido, para além da representação, a resolução de exercícios e problemas seria também uma estratégia adequada para desmistificar estes conceitos.

Através da representação com recurso ao *software* de Geometria Dinâmica, o mesmo auxiliou, de certa forma, a que os alunos devolvessem o seu *feedback* à professora, isto é, apresentassem as suas dificuldades e progressos ao nível da construção e aprendizagem do conteúdo. O intuito foi de confrontar o nível de compreensão dos conteúdos implícitos na construção, bem como o nível de autonomia, perceção, e comunicação na construção do conhecimento matemático. A figura 23 ilustra outra forma de representação, em que o vetor associado à translação possui um dado comprimento,

direção e sentido, podendo-se, deste modo, perceber que a figura transformada se movimenta conforme a direção, sentido e comprimento do vetor.

**Figura 23**

*Translação associada a um vetor*



*Nota:* Construção da aluna I

De realçar que estas construções foram partilhadas através da tela, da plataforma *Zoom*, na aula *online*, e discutidas no grande grupo coadjuvando, desta forma, a um maior envolvimento por parte dos alunos, e conseqüentemente a construção do seu conhecimento matemático. As construções foram posteriormente partilhadas na plataforma *Google Classroom* para avaliação dos alunos, quer ao nível da avaliação formativa, bem como sumativa.

Do ponto de vista de E. L. Santos e L. Santos (2019) “A atividade dos alunos com o GeoGebra ficou beneficiada com a atividade de *feedback* oral do professor e o professor também beneficiou dessa interação conhecendo melhor os alunos e as suas necessidades.” (p.22). A este respeito, a ênfase na utilização de AGD foi promissora, possibilitando à professora conhecer melhor os seus alunos, as suas potencialidades, bem como algumas fragilidades manifestadas ao nível do manuseamento do recurso e a compreensão de alguns conceitos aquando das suas construções.

Na opinião de Cardoso (2019) o *software GeoGebra* permite “(...) movimentar as figuras em diversas direções, podendo ser trabalhadas as propriedades das figuras geométricas, os conceitos de semelhança e congruência, cálculo de ângulos, conteúdos algébricos, dentre outros.” (p. 51). O facto de ser dada a possibilidade de, em sala de aula, os discentes poderem manipular, explorar, conjecturar, argumentar e criar o seu próprio conhecimento é deveras profícuo na promoção da sua aprendizagem.

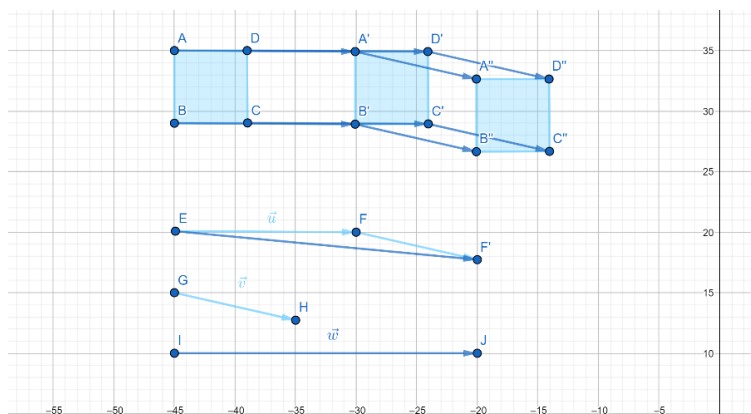
No que diz respeito à segunda parte da tarefa, dado que a mesma estava dividida em duas partes, os alunos deram continuidade à construção iniciada na primeira parte. De início foi evidente algumas dificuldades sentidas ao tentarem concretizar as construções,

nomeadamente ao nível do manuseamento do *GeoGebra*, bem como em associar alguns conteúdos matemáticos. Segundo o registo de algumas notas no Diário de Bordo, “(...) os alunos manifestaram algumas dificuldades no manuseamento desta nova ferramenta de apoio, contudo, com a continuidade da exploração da tarefa, (...) sentiram-se mais familiarizados com o *software GeoGebra*.” (Diário de Bordo, Anotações e Reflexões 8.º Ano, 17 de março de 2021, p. 10).

Na prossecução da atividade, foi sugerido a partilha dos seus trabalhos no sentido da prestação de apoio e esclarecimento de dúvidas na sua concretização. A este respeito, o *feedback* dos discentes foi crucial para que, estes, pudessem superar obstáculos. Nesta linha de pensamento, Saha, Ayub e Tarmizi (2010, citados por Paiva, 2020) referem que “Este tipo de *software* tem o potencial de promover a aprendizagem centrada no aluno e a aprendizagem ativa (...)” (p. 133). A oportunidade que os alunos têm de errar e as tentativas que efetuam, permite a estes tornarem a sua aprendizagem mais enriquecedora. Assim, podemos observar de forma implícita, através da figura 24, alguns dos conceitos associados à translação composta, nomeadamente a soma de vetores, bem como a preocupação por parte dos alunos na escrita e linguagem matemática, através da representação de vetores e respetivos pontos representados na construção.

**Figura 24**

*Translação Composta*



*Nota:* Construção da aluna LV

A maioria dos alunos procurou, de facto, participar ativamente nesta tarefa procurando tirar partido das aprendizagens e do conhecimento matemático.

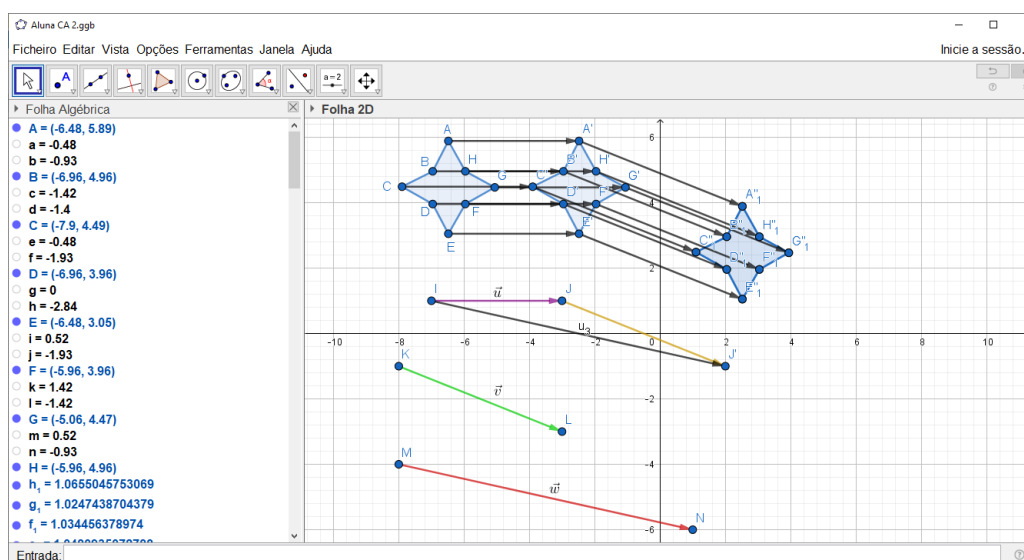
Durante as construções ficou visível a preocupação por parte dos alunos na utilização e manuseamento das várias ferramentas disponibilizadas, e o solicitar apoio, concretamente na representação de vetores, e até na própria construção da figura,

nomeadamente na ligação dos segmentos de reta que também gerou, de início, alguma dificuldade. De realçar que pelo facto de ter sido uma aula à distância, impedia a professora estar junto dos seus alunos, e desta forma poderia ter facultado maior apoio tornando a sua presença mais significativa, embora a maioria dos alunos conseguiu concretizar os seus trabalhos com sucesso, apesar das dificuldades já mencionadas. Em alternativa, alguns alunos optaram por fazer as suas representações no caderno diário, e neste sentido procuraram com que não ficassem prejudicados na sua prestação.

A figura 25 ilustra outra representação em que os vetores representados têm uma dada direção, sentido e comprimento definidos pela aluna CA.

**Figura 25**

### *Translação Composta*



*Nota:* Construção da aluna CA

De salientar que estes trabalhos foram contabilizados na avaliação sumativa e a sua classificação lançada na avaliação intercalar, pelo que os alunos demonstraram maior empenho e dedicação durante a implementação da tarefa. Contudo, o uso deste *software* nem sempre foi consensual, pois alguns alunos preferem aprender o conteúdo matemático sem ter a necessidade de recorrer à tecnologia. Neste sentido, embora o aluno MA tenha conseguido concluir a sua construção com sucesso, compreendendo os conteúdos implícitos, não se mostrou muito motivado para a utilização das tecnologias “(...) referindo: *“Também ainda não percebi a necessidade de usar aquele programa, já que é confuso, no caderno era mais fácil e rápido.”*” (Diário de Bordo, Anotações e Reflexões 8.º Ano, 19 de março de 2021, p. 12). A adaptação dos alunos a determinados recursos didáticos nem sempre é unânime, sendo potenciadora de alguma relutância, por parte

destes, à sua utilização na aprendizagem de um dado conteúdo matemático. O facto de estes terem de aprender a manusear os recursos e associá-los ao conteúdo, por vezes, é gerador de alguma ansiedade e desapontamento. A respeito desta situação, reitero o papel do professor que, para além de conselheiro, procura motivar os seus alunos na concretização das suas tarefas, no sentido do alcance do sucesso.

A motivação em utilizar recursos tecnológicos na concretização da tarefa pode explicar, de alguma forma, como podem os alunos estar motivados no processo de Ensino e Aprendizagem. Segundo A. Pereira (2013), a autora elucida a “(...) motivação [como] um conjunto de forças impulsionadoras que mobilizam e orientam a ação de um indivíduo em direção a um objetivo (...)” (p. 446). A este respeito, o objetivo deste aluno, na aprendizagem do conteúdo matemático, não recorria necessariamente à utilização de tecnologia, visto que através de papel e lápis era mais fácil a representação da Translação.

Em termos gerais, observou-se alguma preocupação por parte dos discentes ao solicitarem a ajuda da professora, no intuito de superar as já mencionadas dificuldades, relativamente à utilização de algumas ferramentas deste *software*. Contudo, observaram-se algumas dificuldades na associação do conteúdo matemático à representação.

Em síntese, ao longo das construções, constatou-se por parte dos discentes, a preocupação na perceção do conteúdo matemático, tendo esta tarefa auxiliado na construção do pensamento, linguagem e comunicação matemática, promovendo a construção do conhecimento matemático. Estes alunos, habitualmente recorrem ao caderno diário e ao manual para estudo autónomo, sendo que o *GeoGebra*, permitiu auxiliar na compreensão de conteúdos relacionados com a geometria e vetores.

## **4.2 Análise aos contributos da utilização de recursos didáticos no Secundário**

### ***4.2.1 Calculadora gráfica no estudo das Transformações de Funções***

Na turma do 10.º ano, Matemática A, implementou-se uma ficha de trabalho em que os alunos puderam explorar, com recurso à calculadora gráfica, alguns tipos de transformações de funções, nomeadamente as Translações Verticais e Horizontais, Dilatação e Contração Vertical e Horizontal, e Reflexão.

Durante a implementação da tarefa, constatou-se algum desconhecimento na utilização da calculadora gráfica e dos vários *menus* disponíveis, que permitiam explorar alguns conteúdos matemáticos, concretamente na unidade temática *Generalidades Acerca de Funções Reais de Variável Real*.

Neste seguimento, foi necessário explorar algumas das funcionalidades do teclado e o *menu* respeitante à exploração de funções, precisamente a introdução da expressão algébrica e a representação gráfica. Observou-se, da parte dos discentes, recetividade e motivação na utilização da calculadora gráfica, sendo que as aulas foram lecionadas *online*, devido às restrições impostas pelo Governo Central.

Com a implementação da tarefa, o objetivo era a exploração das várias situações apresentadas na ficha de trabalho, com recurso à calculadora gráfica, e a sua transcrição para os cadernos diários. O intento era que os discentes desenvolvessem competências essenciais à aprendizagem da Matemática, nomeadamente o raciocínio, a escrita e a comunicação matemática. Segundo Ball (2003, citado por Viseu *et al.*, 2016) “Os alunos ao transcreverem para o caderno o que retiram da calculadora, (...) com a devida justificação, desenvolvem a capacidade de comunicar claramente o seu raciocínio matemático, considerada uma competência essencial” (p.81).

Do ponto de vista do professor, existiu o comprometimento na elaboração de uma atividade que fosse adequada e que possibilitasse ao aluno a sua exploração. De acordo com Ponte (2007, citado por Ponte, 2013) “(...) tarefas de natureza aberta, de cunho exploratório e/ou investigativo, constituem bons pontos de partida para a aprendizagem dos alunos, sobretudo quando existem (...) momentos de discussão coletiva (...)” (pp. 340 – 341). A importância da discussão coletiva e, sobretudo, se esta for acompanhada de questões bem delineadas e precisas, que possam orientar o aluno no seu pensamento, raciocínio, argumentação, e comunicação, competências decisivas na formação do aluno do século XXI.

Após a resolução individual da Ficha de Trabalho, a mesma foi discutida no grande grupo com o objetivo de averiguar a compreensão dos alunos face aos novos conteúdos que eram lecionados.

No manuseamento da calculadora gráfica, constatei que:

“O aluno B sentia-se confiante na utilização deste recurso, e auxiliou a colega L que sentiu algumas dificuldades na utilização da calculadora gráfica. Este aluno, apesar de ser repetente, demonstrou estar bastante motivado, participando ativamente nas aulas sempre que possível.” (Diário de Bordo, Anotações e Reflexões 10.º Ano, 3 de março de 2021, p.1)

O aluno B revelou ser o mais interventivo, porque já possuía alguns conhecimentos sobre a calculadora gráfica, tornando a discussão mais enriquecedora. Auxiliou alguns dos seus colegas que estavam com alguma dificuldade no seu

manuseamento, sendo que o seu contributo foi deveras crucial e demonstrativo de um espírito colaborativo e de interaguda.

Na discussão da resolução da Ficha de Trabalho, e para entender a perceção dos alunos face às Translações, discuti os exemplos apresentados, questionando sobre quantas unidades o gráfico se deslocava na vertical, bem como na horizontal. Os discentes facilmente responderam, indicando as respetivas unidades, não se verificando grandes incertezas neste tipo de transformações. Procurei, de igual modo, discutir o domínio e o contradomínio das respetivas funções, para uma melhor abrangência sobre a apreensão do conteúdo pelos discentes.

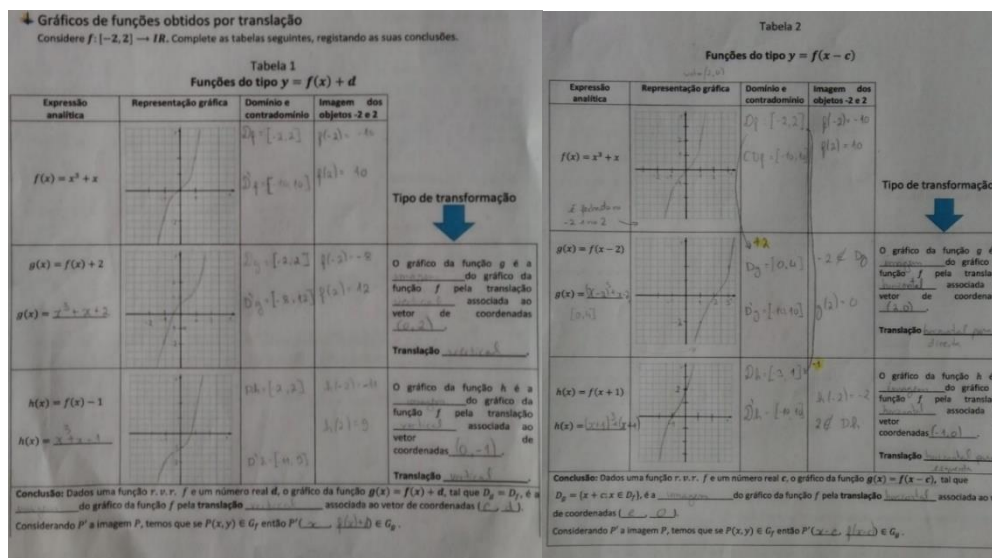
Por ter observado alguma hesitação quanto ao domínio e contradomínio:

“(…) sentimos a necessidade de abordar novamente a questão das translações, pois relativamente aos conceitos domínio e contradomínio havia algumas dúvidas por parte de alguns alunos. Recorreu-se também a outro exemplo de função, polinómio do 3.º grau, que permitia visualizar com maior precisão a translação da função.” (Diário de Bordo, Anotações e Reflexões 10.º Ano, 5 de março de 2021, pp.1 – 2)

A figura 26 ilustra a transcrição da aluna L, para a Ficha de Trabalho, da representação gráfica obtida com a utilização da calculadora gráfica, respeitante às Translações Verticais e Translações Horizontais.

**Figura 26**

*Translação Vertical e Translação Horizontal de funções*



Nota: Transcrição da aluna L

Efetuada uma análise mais cuidada observa-se a preocupação da aluna na indicação da escala para o eixo  $Ox$  e  $Oy$ , bem como a sua compreensão relativamente à

Translação da função quando aplicadas transformações ao nível do contradomínio da função.

Os alunos também observaram as Translações Horizontais quando ocorridas transformações ao nível do domínio de uma função, sendo que o seu contradomínio se mantinha. De realçar novamente a preocupação da aluna na indicação da escala nos dois eixos, bem como em destacar, em amarelo, as unidades que, adicionando aos valores do intervalo do domínio da função inicial, permitem obter uma nova função cujo contradomínio se mantém. É notório a compreensão acerca do vetor de translação associado.

No que diz respeito às Translações Verticais e Horizontais, onde ocorriam transformações, em simultâneo, no domínio e no contradomínio, de salientar, que não se registou grandes dificuldades, neste tipo de transformação, pelo que os alunos, em geral, compreenderam as Translações e respetivo vetor de Translação associado. A calculadora gráfica permitiu-lhes uma melhor visualização gráfica deste tipo de transformação.

Na perspetiva de Viseu *et al.* (2016) “A tecnologia, em particular a calculadora gráfica, veio mudar a dinâmica da aula de Matemática e a forma de resolver as tarefas matemáticas.” (p. 81). Os autores justificam, deste modo, a importância deste recurso didático, na aprendizagem da Matemática, salientando a sua relevância na resolução de tarefas.

Ponte e Canavarro (1997) justificam a importância da utilização da calculadora e salientam que “É fundamental que o professor conheça bem as características da sua calculadora e das calculadoras habitualmente usadas pelos seus alunos. Só desse modo os poderá ensinar a usar este instrumento de modo correto e eficiente (...)” (p.56). O modelo TPACK permite demonstrar que competências deve o professor desenvolver ao nível da utilização da tecnologia para que, efetivamente, possa lecionar a Matemática utilizando recursos didáticos tecnológicos. De acordo com Koehler, Mishra e Cain (2013) “*Teaching successfully with technology requires continually creating, maintaining, and re-establishing a dynamic equilibrium among all components.*” (p. 17). Nesta perspetiva é importante o estabelecimento de um equilíbrio entre os conhecimentos que definem o TPACK, nomeadamente PCK, TCK e TPK, para que, de facto, o professor possa evidenciar conhecimentos acerca da tecnologia e possa ensinar, convenientemente, a disciplina de Matemática.

A figura 27 ilustra a transcrição para a Ficha de Trabalho da aluna L, da representação gráfica obtida, a partir da calculadora gráfica, respeitante às Translações Verticais e Horizontais.

**Figura 27**

*Translação Vertical e Horizontal de funções*

Tabela 3

Funções do tipo  $y = f(x - c) + d$

Expressão analítica	Representação gráfica	Domínio e contradomínio	Imagem dos objetos $\mathbb{R}$ e $\mathbb{Z}$	Tipo de transformação
$f(x) = x^3 + x$		$D_f = \mathbb{R}$ $D_f = [-2, 2]$	$f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ $f(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$	
$g(x) = f(x - 2) + 3$ $g(x) = (x - 2)^3 + (x - 2) + 3$		$D_g = \mathbb{R}$ $D_g = [0, 4]$	$g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ $g(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$	O gráfico da função $g$ é a <u>translação</u> do gráfico da função $f$ pela translação associada ao vetor de coordenadas $(2, 3)$ . Translação <u>vertical e horizontal</u> .
$h(x) = f(x + 2) - 3$ $h(x) = (x + 2)^3 + (x + 2) - 3$		$D_h = \mathbb{R}$ $D_h = [-4, 0]$	$h(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ $h(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$	O gráfico da função $g$ é a <u>translação</u> do gráfico da função $f$ pela translação associada ao vetor de coordenadas $(-2, -3)$ . Translação <u>vertical e horizontal</u> .

Conclusão: Dados uma função  $r, v, r, f$  e dois números reais  $c$  e  $d$ , o gráfico da função  $g(x) = f(x - c) + d$ , tal que  $D_g = \{x + c : x \in D_f\}$ , é a translação do gráfico da função  $f$  pela translação associada ao vetor de coordenadas  $(c, d)$ .  
Considerando  $P$  a imagem  $P$ , temos que se  $P(x, y) \in G_f$  então  $P'(x + c, y + d) \in G_g$ .

Nota: Transcrição da aluna L

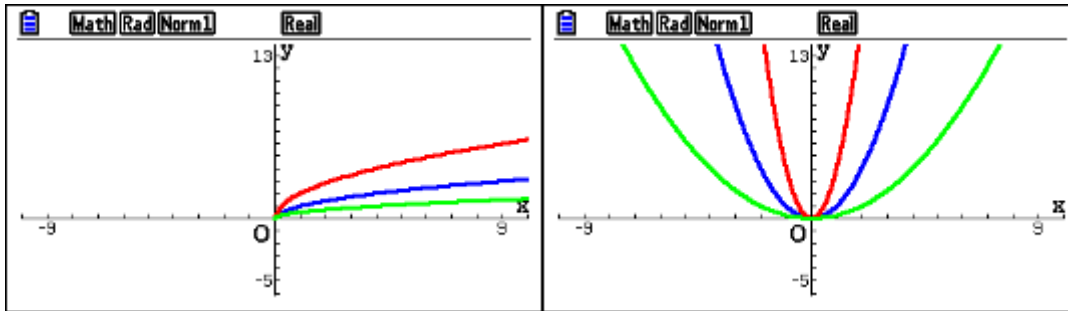
No que diz respeito à questão da Contração e Dilatação Vertical, bem como a Contração e Dilatação Horizontal, havia algumas dúvidas relativamente ao coeficiente associado à respetiva transformação:

“Relativamente às funções transformadas obtidas pela Dilatação e Contração Vertical, e também pela Dilatação e Contração Horizontal, gerou algumas dúvidas em alguns alunos, mais precisamente na indicação do respetivo coeficiente associado à expressão algébrica. Contudo, com a partilha do emulador da calculadora gráfica e discussão no grande grupo, os alunos compreenderam como obter as funções transformadas pela dilatação e contração.” (Diário de Bordo, Anotações e Reflexões 10.º Ano, 9 de março de 2021, p.2)

Assim, através da discussão com a turma, clarifiquei esta questão, exemplificando com o emulador da calculadora gráfica, no sentido de os conteúdos ficarem mais perceptíveis. A figura 28 ilustra a representação gráfica das transformações, nomeadamente da Contração e Dilatação Vertical, bem como a Contração e Dilatação Horizontal.

**Figura 28**

*Contração e Dilatação Vertical do tipo  $y=a(fx)$  e Contração e Dilatação Horizontal do tipo  $y=f(bx)$*



*Nota:* Gráficos obtidos a partir do emulador da calculadora gráfica

Na função transformada do tipo  $y=-f(x)$ , obtida através de uma Reflexão de eixo  $Oy$ , onde se aplicam transformações ao nível do seu contradomínio, observou-se facilidade na apreensão deste tipo de funções, não se registando quaisquer dúvidas. No que se refere à função transformada do tipo  $y=f(-x)$ , através de uma Reflexão de eixo  $Ox$ , aplicando transformações ao nível do seu domínio, também não se registou grandes dificuldades na sua aprendizagem. A figura 29 ilustra a transcrição das alunas N e R, respetivamente.

**Figura 29**

*Reflexão de uma função do tipo  $y = -f(x)$  e do tipo  $y = f(-x)$*

Expressão analítica	Representação gráfica	Domínio e Contradomínio	Tipo de transformação
$f(x) = \sqrt{x}$		$D = \{x \in \mathbb{R}^+ \}$ $CD = \{y \in \mathbb{R}^+ \}$	<p>↓</p> <p>O gráfico de <math>g</math> é a <u>imagem</u> do gráfico da função <math>f</math> pela <u>reflexão</u> de eixo <u>Oy</u>.</p>
$g(x) = f(-x)$ $g(x) = -\sqrt{-x}$		$D = \{x \in \mathbb{R}^+ \}$ $CD = \{y \in \mathbb{R}^+ \}$	

**Conclusão:**  
Seja  $f$  uma função  $r.v.$   $f$ , e  $g$  a função definida por  $g(x) = f(-x)$ , tal que  $D_g = D_f$ .  
O gráfico de  $g$  é a imagem do gráfico de  $f$ , pela reflexão de eixo Oy.  
Considerando  $P'$  a imagem  $P$ , temos que se  $P(x, y) \in G_f$  então  $P'(-x, y) \in G_g$ .

*Nota:* Transcrição das alunas N e R respetivamente

O NCTM (1994) salienta a relevância do poder matemático extensível a todos os alunos e defende que “Os professores de Matemática precisam de recursos adequados. As calculadoras, os computadores, e os materiais manipuláveis são tão essenciais à aprendizagem e à actividade [sic] em matemática como os produtos químicos o são para

os laboratórios de Química.” (p. 189). Assim, torna-se fulcral, o uso de recursos didáticos que permitam o alcance do poder matemático.

Em síntese, a utilização da calculadora gráfica no estudo de funções foi impactante na aprendizagem dos alunos contribuindo para um maior reforço das suas aprendizagens, desenvolvimento do pensamento e raciocínio matemático, linguagem e comunicação matemática, bem como o domínio de novas tecnologias essenciais à Aprendizagem Matemática.

#### **4.2.2 GeoGebra na Modelação de uma Parábola**

Para a realização desta atividade os alunos foram estimulados a pesquisarem locais/fenómenos que considerassem possuir as características de uma Parábola. O objetivo da concretização da mesma foi, para além de estes investigarem possíveis modelos que se assemelhassem a uma Parábola, estabelecer conexões entre a Matemática e estes locais/fenómenos. “A modelação das ideias matemáticas através do uso de representações (concretas, visuais, gráficas e simbólicas) é uma componente central no ensino da Matemática.” (NCTM, 1994, p. 157). Neste seguimento, foram várias as sugestões por parte dos alunos que, desde logo, sentiram-se impulsionados para a concretização desta atividade investigativa.

Assim, e do ponto de vista de Canavarro (2017), a autora sustenta que:

“O estabelecer de conexões tem de ser intencionalmente preparado pelo professor. Os alunos precisam de ter experiências em que sejam apoiados nos seus esforços de estabelecer conexões entre o que fazem com os materiais manipuláveis e as ideias matemáticas que estes representam — e isto é válido para quaisquer representações.” (p.40)

O enfoque que é dado às representações e o estabelecimento de conexões utilizando recursos didáticos, na representação de ideias matemáticas plasmadas no quotidiano, é deveras promissor na aprendizagem do aluno.

No parecer do NCTM (1994) é fundamental o estabelecimento de conexões promovendo um enquadramento e conexão para as ideias matemáticas. A relevância na formulação, resolução de problemas, raciocínio e comunicação matemática (NCTM, 1994) são essenciais no desenvolvimento de competências do aluno, promovendo a sua integração na sociedade.

Para a concretização da atividade, foi utilizado o *software GeoGebra*, salientando que os alunos desconheciam este recurso, pelo que houve a necessidade de, mesmo que brevemente, exemplificar algumas ferramentas para que, realmente, pudessem explorar o

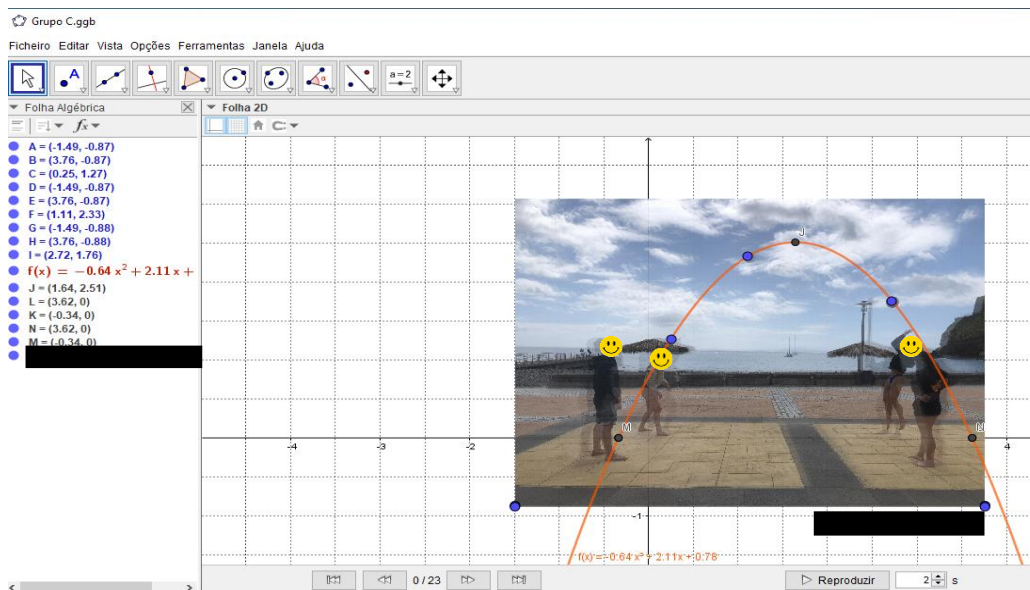
mesmo. De referir que foi elaborada uma ficha de orientação de como poderiam iniciar o processo de modelação, desde a inserção de uma fotografia, a marcação de pontos, bem como o método de obtenção do modelo matemático que melhor representaria a situação em estudo. Seguidamente, os alunos, formados em grupos, procuraram trabalhar colaborativamente na modelação do fenómeno/local pelo qual optaram.

Verificou-se, entretanto, que “No decorrer do trabalho de investigação (...) alguns alunos sentiram algumas dificuldades no manuseamento do *software GeoGebra*, tendo sido necessário dar algum apoio para que, estes, conseguissem avançar com a atividade de investigação.” (Diário de Bordo, Anotações e Reflexões 10.º Ano, 28 de abril de 2021, p.3). Neste sentido, foi importante o apoio facultado, para conseguirem ultrapassar esta dificuldade ao nível do manuseamento do *software*.

Ultrapassada esta fase, os grupos procuraram, após a inserção da fotografia, proceder à marcação dos pontos, contudo, em alguns casos verificaram que o modelo que pretendiam modelar, em parte, não se assemelhava a uma Parábola. Neste aspeto, foi-lhes sugerido encontrar outra situação que considerassem ser efetivamente uma parábola, e desta forma, obter um modelo matemático adequado. De salientar que os alunos apenas tiveram uma aula para a implementação da atividade investigativa, pelo que os grupos concluíram os seus trabalhos em casa, e entregues posteriormente à Professora para avaliação, por ser este trabalho um instrumento de avaliação.

Foram várias as situações que os alunos procuraram modelar, constatando-se o estabelecimento de conexões com situações do quotidiano, (e.g., desporto, locais históricos, natureza). Deste modo, com a realização da atividade, procuraram desenvolver o raciocínio matemático, a formulação, a resolução de problemas, e a comunicação matemática (NCTM, 1994).

Foram analisados os trabalhos elaborados pelos alunos referentes à modelação de uma Parábola, e a aplicação de conceitos matemáticos respeitantes à função quadrática, nomeadamente a determinação do vértice, os extremos, zeros, monotonia e sinal. A figura 30 ilustra o trabalho realizado pelos elementos do grupo B, onde estes procuraram encontrar a curva da Parábola que definia a trajetória de uma bola, desde o seu lançamento até ao embate no solo, respeitante a uma atividade desportiva, Voleibol de Praia.

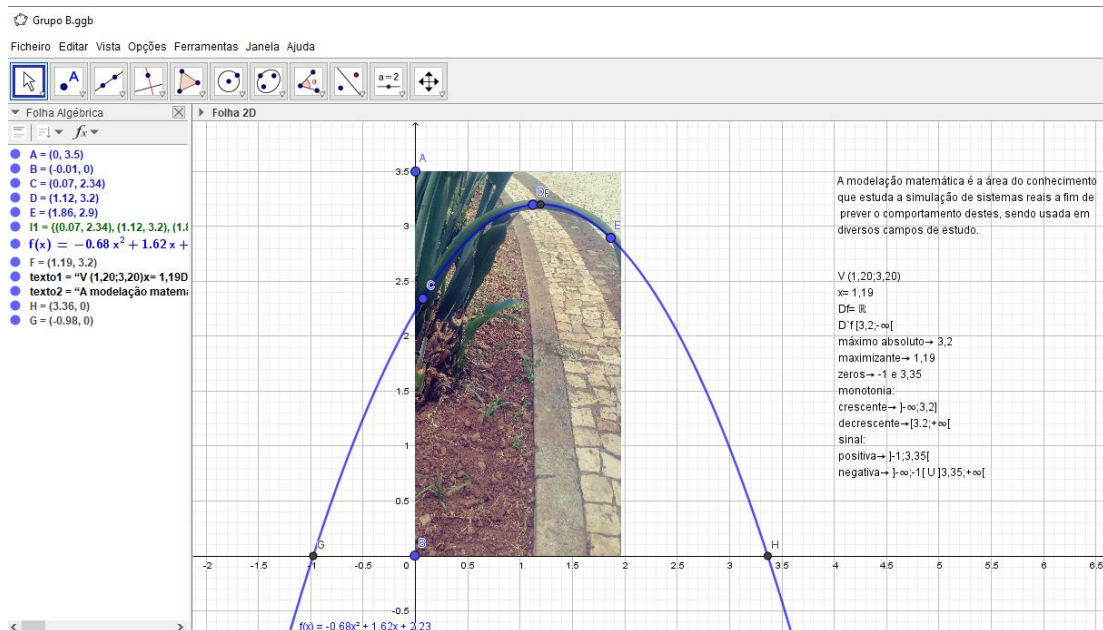
**Figura 30***Modelação de uma Parábola*

*Nota:* Modelação grupo C

Relativamente ao desempenho do grupo C, este foi extremamente criativo ao procurar obter um modelo matemático que melhor descrevia a curva na atividade desportiva, onde podemos observar o lançamento de uma bola, desde o instante inicial até o embate no solo, definindo a trajetória da bola. Contudo, na ficha de trabalho era solicitado a indicação dos extremos, zeros, monotonia e sinal, mas o grupo C não indicou os intervalos de monotonia e de sinal, não significando que houvesse dificuldades nesta parte. Os elementos deste grupo são alunos muito regulares e apresentam resultados positivos durante as aulas, devido à sua assídua participação nas aulas, sempre que questionados, e colocando questões quando não compreendem determinados conteúdos. No que diz respeito ao manuseamento do *software*, “(...) com alguma orientação conseguiram obter o modelo para a situação que pretendiam modelar.” (Diário de Bordo, Anotações e Reflexões 10.º Ano, 28 de abril de 2021, p.4).

Em termos gerais observou-se um bom ambiente no grupo, revelador de um espírito colaborativo e de companheirismo, sendo que o grupo manifestou interesse na realização da atividade.

Na figura 31 o grupo B procurou, modelar, uma situação da natureza, concretamente a curva da folha de uma planta.

**Figura 31***Modelação de uma Parábola*

*Nota:* Modelação grupo B

Relativamente ao desempenho do grupo B, o mesmo demonstrou elevada motivação sendo que o líder do grupo, o aluno B, demonstrou elevada capacidade de interajuda e espírito crítico. Apesar de verificar-se pequenas imprecisões ao nível do raciocínio matemático, o grupo procurou de forma quase plena e autónoma executar a atividade investigativa. Todavia, “Sempre que surgiam dúvidas o grupo B procurava esclarecer, inclusive questionaram-me se o trabalho que fizeram estava correto. Note-se a preocupação do grupo na elaboração de um trabalho com qualidade, revelador de muito empenho e dedicação.” (Diário de Bordo, Anotações e Reflexões 10.º Ano, 28 de abril de 2021, p.3).

Quanto ao grupo A, apesar de este também ter revelado pequenas imprecisões ao nível do raciocínio e linguagem matemática, conseguiu de forma quase plena executar a atividade investigativa, envolvendo todos os elementos do grupo. De uma forma autónoma e responsável, o grupo demonstrou criatividade ao procurar modelar um repuxo de água, conforme ilustra a figura 32. No entanto:

“(…) a situação que, inicialmente, pretendiam encontrar um modelo matemático que se assemelhasse a uma Parábola, não foi conseguida. O grupo ao analisar o local que tencionava modelar, concretamente um arco do interior de uma igreja, apenas parte deste era considerado uma Parábola, sendo que a restante não poderia ser considerada uma Parábola, formando colunas na vertical que sustentavam a parte superior do arco em formato de curva. O grupo decidiu, deste modo, fazer

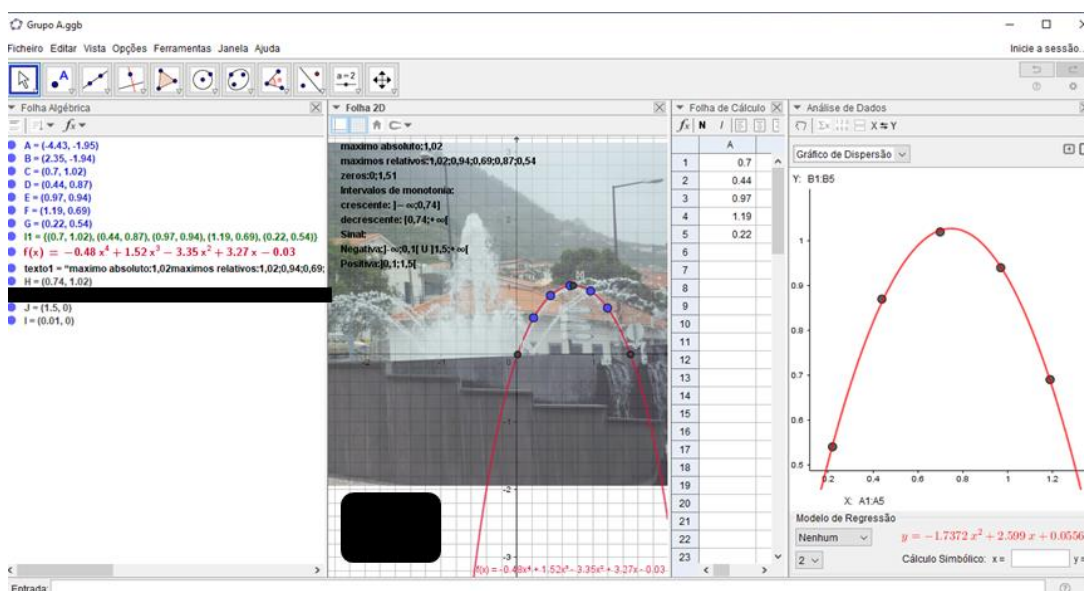
uma segunda opção tendo sido bem-sucedido.” (Diário de Bordo, Anotações e Reflexões 10.º Ano, 28 de abril de 2021, p.4).

A figura 32 ilustra o modelo matemático encontrado pelo grupo A, para descrever a trajetória do repuxo de água, embora na expressão algébrica que surge junto à curva da Parábola, surge um polinómio de grau 4. Tal facto deve-se a que o grupo inicialmente optou por outro processo de modelação, concretamente através da criação de listas de pontos e a aplicação da função polinómio. Com a aplicação do método de Regressão Bivariada, o grupo foi bem-sucedido.

Ressalva-se a persistência do grupo em conseguir finalizar o seu trabalho, bem como a criatividade demonstrada ao longo da realização da atividade.

### Figura 32

#### Modelação de uma Parábola



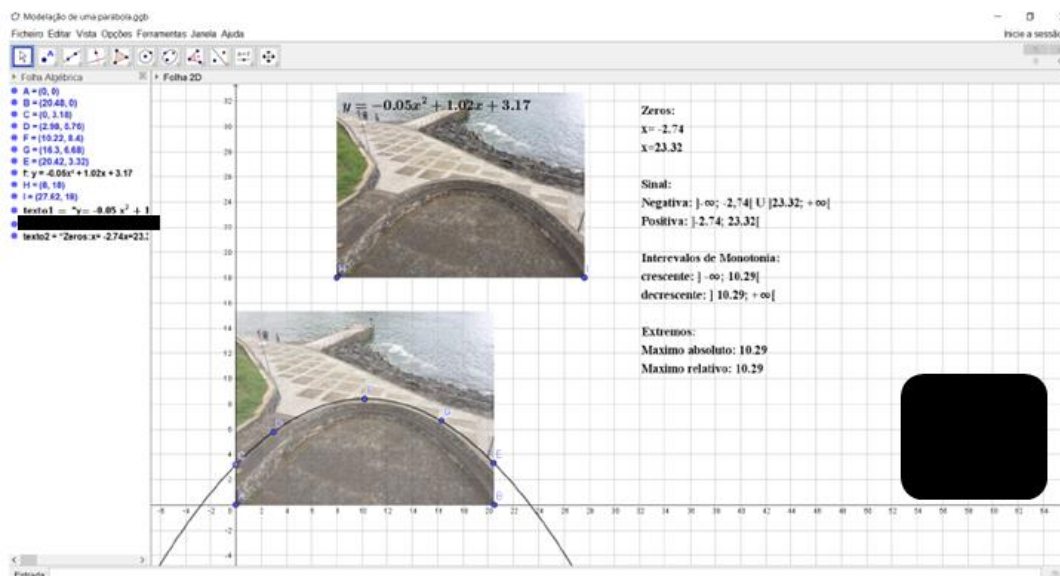
*Nota:* Modelação grupo A

No que diz respeito ao grupo D, o local que procuraram modelar foi muito sugestivo. Apesar de pequenas imprecisões ao nível do raciocínio matemático e dos cálculos, verificou-se que o grupo demonstrou uma interpretação quase plena do enunciado. O grupo demonstrou espírito crítico e criatividade na seleção do local que pretendiam modelar e, além disso, revelaram espírito de interajuda e colaboração.

Os elementos do grupo demonstraram responsabilidade e autonomia na execução das tarefas delegadas no grupo. A figura 33 ilustra o local que o grupo elegeu para obter um modelo matemático que melhor descrevia a curva da Parábola.

Figura 33

## Modelação de uma Parábola



Nota: Modelação grupo D

Em termos gerais, o objetivo da implementação desta atividade foi no intuito de os alunos visualizarem e compreenderem as características de uma Parábola, concretamente a indicação da expressão algébrica da função que a definia, a determinação do vértice, zeros, extremos, monotonia e sinal. O propósito desta atividade era facilitar a aprendizagem destes conceitos matemáticos, simplificando posteriormente a resolução de exercícios e problemas que envolvessem estes conceitos.

Em suma, e de acordo com Canavaro *et al.* (2020) os autores advogam:

“(…) que os professores na sua prática pedagógica devam: valorizar tarefas que promovam o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos, nomeadamente, resolução de problemas e atividades de investigação; diversificar as formas de interação em aula, criando oportunidades de discussão entre os alunos, de trabalho de grupo e de trabalho de projeto; utilizar situações de trabalho que envolvam contextos diversificados, nomeadamente, situações da realidade e da História da Matemática; e utilizar materiais que proporcionem um forte envolvimento dos alunos na aprendizagem, nomeadamente, materiais manipuláveis, calculadoras e computadores.” (p. 273)

De referir que esta atividade foi contabilizada na avaliação formativa dos alunos, privilegiando-se como critérios de avaliação: a aplicação de conhecimentos em contextos matemáticos e não matemáticos, compreensão escrita e expressão oral, autonomia, organização e empenho, espírito crítico e criatividade, saber técnico e tecnológico, bem como o relacionamento interpessoal (cf. Apêndice H).

Em suma, a atividade possibilitou o desenvolvimento do pensamento, raciocínio, linguagem e comunicação matemática, estabelecimento de conexões, bem como a capacidade de argumentação e espírito crítico do aluno.

## 5. Considerações Finais

A Matemática tem sido percebida ao longo dos tempos como sendo complicada e de difícil compreensão. Diante deste cenário, foram implementadas, ao longo de décadas, sucessivas alterações curriculares, com o intuito de desmistificar esta disciplina, e possibilitar, aos alunos, aprendizagens mais significativas.

Diante das recomendações sucessivamente emanadas, os docentes são impelidos a se reinventarem e idealizarem metodologias de ensino propícias à aprendizagem do aluno. A utilização de recursos didáticos pode ser uma indubitável opção para auxiliar no processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Neste âmbito, procurei ao longo do estágio pedagógico, compreender que recursos didáticos poderiam ser utilizados em sala de aula, e de que forma estes poderiam auxiliar a tarefa do professor. De igual modo, procurei compreender qual o conhecimento necessário para que o professor possa ensinar a Matemática utilizando recursos didáticos, bem como os possíveis contributos para o aluno, utilizando recursos didáticos na construção do conhecimento matemático.

No âmbito desta investigação, e para uma melhor percepção dos contributos da utilização de recursos didáticos, em contexto de sala de aula, foram implementadas cinco atividades, três no 3.º Ciclo e duas no ensino Secundário. Neste sentido, foram utilizados alguns recursos didáticos, particularmente o *Geoplano Virtual*, *software GeoGebra*, e Calculadora Gráfica, com maior enfoque para os recursos tecnológicos dadas as circunstâncias de ensino à distância.

A utilização destes recursos possibilitou a aprendizagem de conteúdos, no 3.º Ciclo, salientando o Teorema de Pitágoras, o Volume da Pirâmide e do Cone, a Translação associada a um vetor, bem como a Translação Composta, e no ensino Secundário, ressaltando as Transformações de Funções e a Modelação de uma função quadrática.

Na fase de implementação das várias atividades enquadrando recursos didáticos, pude asseverar, em relação ao desempenho dos discentes, que estes percebiam mais facilmente o conteúdo matemático, embora, por vezes, a sua utilização desencadeasse

alguma ansiedade. Pois, é de referir que estas atividades foram implementadas em regime *online*, à exceção da atividade investigativa sobre a Modelação de uma Parábola, com recurso ao *software GeoGebra*, concretizada presencialmente.

A utilização de recursos didáticos e tecnológicos, em contextos educativos, permite ao aluno ter uma maior perceção do conteúdo matemático. Além disso, permite interpretar a tarefa com maior facilidade, mesmo que esta esteja relacionada com qualquer outro conteúdo matemático, tornando-o mais concreto, proporcionando ao aluno a construção do pensamento matemático, formulação de conjecturas, demonstração, refutação, reformulação, verificação e construção do conhecimento matemático.

Do ponto de vista de Correia (2009), “As novas tecnologias permitem a criação de situações de aprendizagem diversificadas, que não passam todas necessariamente pelo professor.” (p.412). Assim, podemos sublinhar a importância de uma aprendizagem focada no aluno, onde o professor desempenha um papel mais centralizado na orientação, procurando definir metodologias que fomentem a aprendizagem significativa. Neste âmbito, o propósito em utilizar recursos didáticos, centrou-se, não apenas em simplificar a tarefa do professor, isto é, na implementação das tarefas tornar o conteúdo matemático mais compreensível para o aluno, concebendo uma simbiose entre o conteúdo e o recurso didático.

As atuais versões, respeitantes aos referenciais curriculares, designadamente as *Aprendizagens Essenciais*, recentemente homologadas, apelam, nitidamente, ao desenvolvimento de uma predisposição positiva, na aprendizagem da Matemática, compreensão e utilização do conhecimento matemático (ME, 2021). Estas proficiências são decisivas na resolução de problemas, raciocínio matemático, pensamento computacional, comunicação matemática, representação, com especial enfoque para o uso de recursos tecnológicos e o estabelecimento de conexões (ME, 2021). Nas aulas de Matemática, com o intuito de que os alunos desenvolvessem tais competências, deu-se especial atenção à utilização de recursos didáticos, privilegiando os tecnológicos. Neste sentido, no que diz respeito aos alunos do 3.º Ciclo, observou-se que a tecnologia proporcionou o desenvolvimento do raciocínio e linguagem matemática, concomitantemente a comunicação matemática, e consequentemente a construção do conhecimento matemático, a partir das representações obtidas, com recurso aos meios tecnológicos.

No ensino Secundário, com enfoque para a modelação matemática, os alunos procuraram, através da realização de atividades investigativas, construir o seu

conhecimento matemático assente numa base sustentada no pensamento, raciocínio, linguagem e comunicação matemática. Neste sentido, observou-se por parte dos discentes, motivação, empenho, espírito colaborativo, interajuda, e construção do conhecimento matemático, competências essenciais ao aluno do século XXI, emanadas nos documentos curriculares, com especial atenção para o *Perfil do Aluno à Saída da Escolaridade Obrigatória* (G. D. Martins *et al.*, 2017).

No que diz respeito a possíveis dificuldades, concretamente ao nível do manuseamento das tecnologias por parte do aluno, apesar de estas terem surgido, foi preponderante o papel do professor, no intento de que estas fossem dissipadas. Da parte do professor, salienta-se, o facto de as aulas terem sido *online*, dificultou a interação e a comunicação entre a professora e os alunos, durante a implementação de algumas metodologias, utilizando alguns recursos didáticos, nomeadamente o *GeoGebra*. O conhecimento matemático só se constrói se houver consonância entre o conteúdo, metodologia e recurso, definindo o TPACK.

O ME (2021) argumenta com base no documento curricular, *Aprendizagens Essenciais*, homologado a 19 de agosto de 2021, que:

“A aprendizagem da Matemática beneficia do uso de recursos diversos que possibilitem, entre outros, o uso e exploração de representações múltiplas de forma eficiente. Os materiais manipuláveis devem ser utilizados sempre que favoreçam a compreensão de conhecimentos matemáticos e a conexão entre diferentes representações matemáticas. As **ferramentas tecnológicas** devem ser consideradas como recursos incontornáveis e potentes para o ensino e a aprendizagem da Matemática.” (p.6)

Nesta perspetiva, o ME reforça a importância da utilização destes recursos, na construção do conhecimento, procurando beneficiar as aprendizagens, e tornando-as mais efetivas e significativas para os discentes.

Relativamente à literacia matemática, durante as aulas, procurei que a mesma fosse uma constante, na medida, em que os alunos, através do desenvolvimento de competências matemáticas, destacando o raciocínio, formulação, linguagem e comunicação matemática, procuraram construir o conhecimento matemático. Importa ressaltar o apelo feito por parte do ME (2021), no que diz respeito a esta competência matemática:

“A literacia digital dos alunos deve incluir a realização de cálculos, a construção de gráficos, a realização de simulações, a recolha, organização e análise de dados, a experimentação matemática, a investigação e a modelação, a partilha de ideias. Todos os alunos devem poder aceder livremente a calculadoras, robôs, aplicações disponíveis na Internet e software para tratamento estatístico, geometria, funções,

modelação, e ambientes de programação visual. A **Internet** deve constituir-se como fonte importante de acesso à informação ao serviço do ensino e da aprendizagem da Matemática.” (pp.6–7)

Nesta linha de raciocínio, importa salientar o foco na utilização destes recursos, na experimentação matemática, em atividades investigativas e na modelação matemática, em diversos domínios, promotores de um ensino e aprendizagem mais benéficos. De ressaltar que estes recursos, nomeadamente as aplicações digitais (*Geoplano Virtual, software GeoGebra, emulador calculadora gráfica*) foram utilizados no estudo da Geometria (3.º Ciclo) e no estudo de funções (Secundário), no âmbito desta investigação.

Não obstante, e durante a PES, as sugestões por parte das orientadoras cooperantes, e Professora Supervisora da UMa, foram fulcrais para poder evoluir e, deste modo, dar o meu contributo na sala de aula. As suas experiências profissionais foram essenciais e notáveis em todo o processo.

O modelo TPACK permite explicar como pode o professor lecionar a disciplina de Matemática, utilizando recursos didáticos, visto que este relaciona três importantes conhecimentos, especificamente o PCK, TCK e TPK. Neste seguimento, a formação de professores pode auxiliar neste aspeto, dado que permite aprofundar conhecimentos, não só ao nível do conteúdo, mas também ao nível pedagógico e tecnológico. O facto de ter frequentado um curso de formação, relativo à utilização da calculadora gráfica, bem como as unidades curriculares, no âmbito da Didática, ministradas ao longo do Mestrado em Ensino da Matemática, na UMa, contribuíram para aprofundar conhecimentos acerca de alguns recursos didáticos.

Segundo a Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura (UNESCO, 2009, p.11) é fundamental “O desenvolvimento profissional docente (...)”. Desta forma, contribui para “(...) a aquisição de habilidades para usar metodologias e tecnologias mais sofisticadas, com mudanças no currículo visando o aprofundamento do saber e a aplicação do conhecimento académico aos problemas do mundo real e à pedagogia.” (UNESCO, 2009, p.11). É essencial definir um perfil adequado do professor do século XXI, capacitado em diferentes níveis, salientando o profissional, pessoal e social, contribuindo para o desenvolvimento de competências dos alunos, consideradas essenciais à Saída da Escolaridade Obrigatória.

No que se refere às limitações, nesta investigação, destaco o facto de a maioria das atividades ter sido executadas através do ensino *online*. Neste aspeto, dificultou, por vezes, o apoio que poderia ter sido facultado aos alunos, se as mesmas tivessem sido

realizadas presencialmente, poderiam fomentar a proximidade entre professor e aluno, ressaltando o aspeto social, em concreto a interação social.

Relativamente a estudos futuros, esta investigação poderia ser aprofundada, no sentido de se compreender que outros recursos didáticos poderão ser utilizados, em sala de aula, e que contributos poderão ter no processo de ensino e aprendizagem. Outra questão que, também, poderia ser aprofundada seria se, a utilização de recursos didáticos, tem maior impacto em alunos que realizam as suas atividades individualmente, ou se estes terão maior impacto em alunos que realizam atividades em grupo, isto é, colaborativamente.

Em suma, e procedendo a uma síntese geral, do ponto de vista do professor possibilitou o desenvolvimento de conhecimentos e habilidades ao nível da tecnologia. Os recursos didáticos, numa aula de Matemática, promovem a construção do conhecimento matemático, permitem desenvolver competências essenciais à literacia matemática, nomeadamente o pensamento e raciocínio matemático, formulação de conjeturas, linguagem e comunicação matemática. Permitem, de igual forma, promover o espírito crítico do aluno, competência essencial e prevista no currículo do futuro a ser concebido pela OCDE.

## 6. Referências

### 6.1 Referências Bibliográficas

- Aires, L. (2015). *Paradigma Qualitativo e Práticas de Investigação Educacional* (1ª ed. digital atualizada). Lisboa: Universidade Aberta.  
<http://hdl.handle.net/10400.2/2028>
- Amado, J. (Coord.). (2017). *Manual de Investigação Qualitativa em Educação* (3ª ed.). Coimbra: Imprensa da Universidade de Coimbra.  
<https://doi.org/10.14195/978-989-26-1390-1>
- Bogdan, R. C., & Biklen, S. K. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação: Uma Introdução à Teoria e aos Métodos* (M. J. Alvarez, S. B. Santos, & T. M. Baptista, Trans.). Porto: Porto Editora. (Original publicado em 1991).
- Botas, D. (2008). *A utilização dos materiais didáticos nas aulas de Matemática: Um estudo no 1.º Ciclo*. [Dissertação de Mestrado, Universidade Aberta]. Repositório Aberto. <http://hdl.handle.net/10400.2/1235>
- Botas, D., & Moreira, D. (2013). A utilização dos materiais didáticos nas aulas de Matemática – Um estudo no 1.º Ciclo. *Revista Portuguesa de Educação*, 26(1), 253-286. <https://doi.org/10.21814/rpe.3259>
- Brasil, L. A. (1977). *Aplicações da Teoria de Piaget ao Ensino da Matemática* (A. E. Lima & L. O. Lima, Colabs.), (1.ª ed.). Rio de Janeiro: Forense – Universitária.
- Brocardo, J., & Mendes, F. (2016). Os Recursos na Aprendizagem da Matemática. In A. P. Canavarro, A. Borralho, J. Brocardo, & L. Santos (Eds.), *Recursos na Educação Matemática, Livro de Atas do EIEM 2016, Encontro em Investigação em Educação Matemática* (pp.157-158). Évora: Universidade de Évora. SPIEM. [http://spiem.pt/blog/bfd\\_download/2016-evora-624mb-recursos-na-educacao-matematica/](http://spiem.pt/blog/bfd_download/2016-evora-624mb-recursos-na-educacao-matematica/)
- Cadavez, C. M. (2013). *A utilização de software educativo na aprendizagem da Geometria por alunos do 3.º Ciclo do Ensino Básico*. [Dissertação de Mestrado, Instituto Politécnico de Bragança]. Biblioteca Digital do IPB.  
<http://hdl.handle.net/10198/7641>
- Caldeira, M. F. (2009). *A Importância dos Materiais para uma Aprendizagem Significativa da Matemática* [Tese de Doutoramento, Universidad de Málaga, Escola Superior de Educação João de Deus]. RiUMA - Repositorio Institucional de la Universidad de Málaga. <http://hdl.handle.net/10630/4574>
- Canavarro, A. P. (2017). O que a investigação nos diz acerca da aprendizagem

- da matemática com conexões — ideias da teoria ilustradas com exemplos. *Revista Educação e Matemática*, 144-145, 38-42. Repositório Universidade de Évora. <http://hdl.handle.net/10174/23007>
- Canavarro, A. P., & Santos, L. (2016). Recursos na Educação Matemática. In A. P. Canavarro, A. Borralho, J. Brocardo, & L. Santos (Eds.), *Recursos na Educação Matemática, Livro de Atas do EIEM 2016, Encontro em Investigação em Educação Matemática* (pp.3-6). Évora: Universidade de Évora. SPIEM. [http://spiem.pt/blog/bfd\\_download/2016-evora-624mb-recursos-na-educacao-matematica/](http://spiem.pt/blog/bfd_download/2016-evora-624mb-recursos-na-educacao-matematica/)
- Canavarro, A. P., Albuquerque, C., Mestre, C., Martins, H., Carvalho e Silva, J. (Coord.), Almiro, J., Santos, L., Gabriel, L., Seabra, O., & Correia, P. (2020). *Recomendações para a melhoria das aprendizagens dos alunos em Matemática* [Relatório Final, versão final]. Lisboa: Ministério da Educação. Lisboa: Direção-Geral da Educação. [https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Estudos\\_Relatorios/gtm\\_27\\_03\\_2020\\_relatorio\\_final.pdf](https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Estudos_Relatorios/gtm_27_03_2020_relatorio_final.pdf)
- Cardoso, T. A. (2019). A Utilização do Software GeoGebra no Ensino e Aprendizagem da Matemática. *Ideias E Inovação - Lato Sensu*, 5(1), 45-52. <https://periodicos.set.edu.br/ideiaseinovacao/article/view/7087>
- Carvalho, S. M. (2018). *As Potencialidades do Uso da Geometria Dinâmica no Estudo da Circunferência no 9.º Ano*. [Trabalho de Projeto, Universidade de Lisboa]. Repositório da Universidade de Lisboa. <http://hdl.handle.net/10451/37776>
- Correia, F. (2009). Computadores na Escola: Ferramenta para a Mudança ou “Mais do Mesmo” com Máscara Tecnológica?! In L. Rodrigues & P. Brazão (Orgs.), *POLÍTICAS EDUCATIVAS - Discursos e Práticas* (pp. 403-413). Funchal: Universidade da Madeira, Centro de Investigação em Educação. DigitUMa. <http://hdl.handle.net/10400.13/2770>
- Costa, B., & Rodrigues, E. (2019). *Novo Espaço – Matemática 9.º ano, Parte I*. Porto: Porto Editora.
- Couceiro, C. S. (2018). *Recursos Didáticos no Ensino da Matemática e das Ciências Naturais*. [Relatório Final de Estágio, Instituto Politécnico de Viseu]. Repositório Científico do Instituto Politécnico de Viseu. <http://hdl.handle.net/10400.19/6052>
- Coutinho, C. (2015). Avaliação da qualidade da investigação qualitativa: algumas considerações

- teóricas e recomendações práticas. In F. Neri de Souza, D. Neri de Souza, & A. P. Costa (Orgs.), *Investigação Qualitativa: Inovação, Dilemas e Desafios* (1ª ed. digital, vol.2, pp. 103-123). Aveiro: Ludomedia.
- [file:///C:/Users/HP/Downloads/Ebook\\_Investigacao\\_Qualitativa\\_Vol2-vjrwv4.pdf](file:///C:/Users/HP/Downloads/Ebook_Investigacao_Qualitativa_Vol2-vjrwv4.pdf)
- da Ponte, J. P. (2020). A didática da matemática e o trabalho do professor. *Revista Brasileira de Ensino de Ciências e Matemática*, 3(3), 809-826.  
<https://doi.org/10.5335/rbecm.v3i3.11831>
- da Silva, M. A., & Fernandes, E. F. (2019). O projeto educação 2030 da OCDE: uma bússola para a aprendizagem. *Revista Exitus*, 9(5), 271-300.  
<https://doi.org/10.24065/2237-9460.2019v9n5ID1108>
- Denzin, N. K., & Lincoln, Y. S. (2007). *O Planejamento da Pesquisa Qualitativa: Teorias e Abordagens* (S. R. Netz, Trad.), (2.ª ed.). Porto Alegre: Artmed: Bookman (Original publicado em 2003).
- Dias, M. O. (2020). Portuguese mathematics teachers who adopt digital technologies in their curriculum acts [Professores de matemática portugueses que adotam tecnologias digitais em seus atos curriculares]. *Tangram – Revista de Educação Matemática*, 3(2), 51-70. <https://doi.org/10.30612/tangram.v3i2.11425>
- Duarte, A. (Coord.), Nunes, A., Tavares, J., Mota, M., & Venâncio, T. (2020a). *TIMSS 2019 – PORTUGAL. VOLUME 0: ESTUDO TIMSS 2019*. Instituto de Avaliação Educativa, I. P.  
[https://www.cnedu.pt/content/noticias/internacional/TIMSS2019\\_Volume\\_0.pdf](https://www.cnedu.pt/content/noticias/internacional/TIMSS2019_Volume_0.pdf)
- Duarte, A. (Coord.), Nunes, A., Tavares, J., Mota, M., & Venâncio, T. (2020b). *TIMSS 2019 – PORTUGAL. RESULTADOS A MATEMÁTICA E A CIÊNCIAS – 8.º ANO – VOLUME 2*. Instituto de Avaliação Educativa, I. P.  
[https://www.cnedu.pt/content/noticias/internacional/TIMSS2019\\_Volume\\_2.pdf](https://www.cnedu.pt/content/noticias/internacional/TIMSS2019_Volume_2.pdf)
- Fallas, L. F. (2019). *O Conhecimento Tecnológico e Pedagógico do Conteúdo (Technological Pedagogical Content Knowledge – TPACK) na Formação Inicial de Professores de Matemática do 3.º Ciclo do Ensino Básico e do Ensino Secundário* [Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa]. Repositório da Universidade de Lisboa. <http://hdl.handle.net/10451/39751>
- Fernandes, D. (2014). Avaliações externas e melhoria das aprendizagens dos alunos: questões críticas de uma relação (im)possível. In M. Miguéns (Coord.), *Avaliação*

*Externa e Qualidade das Aprendizagens* (pp.21-49). Lisboa: Conselho Nacional de Educação.

<https://www.cnedu.pt/pt/publicacoes/seminarios-e-coloquios/1062-avaliacao-externa-e-qualidade-das-aprendizagens>

Fernandes, D. (2021). *Avaliação Pedagógica, Classificação e Notas: Perspetivas Contemporâneas*. Folha de apoio à formação - Projeto de Monitorização, Acompanhamento e Investigação em Avaliação Pedagógica (MAIA). Lisboa: Ministério da Educação/Direção-Geral da Educação.

<https://afc.dge.mec.pt/projeto-maia/documentos-do-projeto/folhas-de-apoio-formacao>

Ferreira, A. P., Nogueira, C. M., & Oliveira, L. L. (2008). Os recursos didáticos como mediadores dos processos de ensinar e aprender matemática. *Cadernos PDE: O professor PDE e os desafios da escola pública paranaense 2008*, 1, 1-28.

[http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes\\_pde/2008\\_uem\\_mat\\_artigo\\_adriana\\_possobom\\_de\\_oliveira\\_ferreira.pdf](http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2008_uem_mat_artigo_adriana_possobom_de_oliveira_ferreira.pdf)

Fino, C. N. (2008). A etnografia enquanto método: um modo de entender as culturas (escolares) locais. In C. Escallier & N. Veríssimo (Orgs.), *Educação e cultura: Actas do II Colóquio do Departamento de Ciências da Educação da Universidade da Madeira e VII Colóquio Internacional da Sociedade Europeia de Etnografia da Educação* (pp. 35-45). Funchal: Departamento de Ciências da Educação da Universidade da Madeira. <https://digituma.uma.pt/handle/10400.13/528>

Fraga, N. (2015). Viver Freire nas práticas pedagógicas do século XXI. *Revista Diversidades*, 46, 6-9. <http://hdl.handle.net/10400.13/3484>

Freire, P. (1994). *Pedagogia do Oprimido* (23ª ed.). São Paulo: Paz e Terra (Original publicado em 1970).

<https://cpers.com.br/wp-content/uploads/2019/10/Pedagogia-do-Oprimido-Paulo-Freire.pdf>

Freire, P. (1996). *Pedagogia da Autonomia: Saberes Necessários à Prática Educativa* (25ª ed.). São Paulo: Paz e Terra.

<https://cpers.com.br/wp-content/uploads/2019/09/9.-Pedagogia-da-Autonomia.pdf>

Guerreiro, A., Ferreira, R. A., Menezes, L., & Martinho, M. H. (2016). Comunicação na sala de aula: a perspetiva do ensino exploratório da matemática. *Zetetike*, 23(2), 279–295. <https://doi.org/10.20396/zet.v23i44.8646539>

- Guerreiro, H. G., & Serrazina, L. (2018). Normas sociais e sociomatemáticas numa aprendizagem participada da noção de 10%. *Quadrante – Revista de Investigação em Educação Matemática*, 27(1), 69-94.  
<https://doi.org/10.48489/quadrante.22960>
- Guimarães, H. M. (2003). Algumas dicotomias no ensino e aprendizagem da Matemática. In M. I. Miguéns (Dir.), *O Ensino da Matemática: Situação e Perspectivas* (1ª ed., pp.89-100). Lisboa: Conselho Nacional de Educação.
- Koehler, M. J., & Mishra, P. (2009). What is technological pedagogical content knowledge? *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education*, 9(1), 60-70. Waynesville, NC USA: Society for Information Technology & Teacher Education. <https://www.learntechlib.org/primary/d/29544>
- Koehler, M. J., Mishra, P., & Cain, W. (2013). What is Technological Pedagogical Content Knowledge (TPACK)? *Journal of Education*, 193(3), 13-19.  
<https://www.bu.edu/journalofeducation/files/2014/02/BUJoE.193.3.Koehleretal.pdf>
- Lameiras, S. G. (2016). *Os conceitos de área e de perímetro: contribuições do uso do geoplano e da tecnologia dinâmica*. [Relatório do Projeto de Investigação, Instituto Politécnico de Setúbal]. Repositório Comum.  
<http://hdl.handle.net/10400.26/11426>
- Leivas, J. C., & Nadalon, D. O. (2019). Superfícies e sólidos de revolução com auxílio do software GeoGebra [Surfaces and solids of revolution with GeoGebra software Assistance]. *Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*, 9(2), 30-49.  
<http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/revista/index.php/ripem/article/view/2053>
- Lourenço, V. (Coord.), Duarte, A., Nunes, A., Amaral, A., Gonçalves, C., Mota, M., & Mendes, R. (2019). *PISA 2018 – PORTUGAL. Relatório Nacional*. Lisboa: Instituto de Avaliação Educativa, I.P.  
[https://www.cnedu.pt/content/noticias/internacional/RELATORIO\\_NACIONAL\\_PISA2018\\_IAVE.pdf](https://www.cnedu.pt/content/noticias/internacional/RELATORIO_NACIONAL_PISA2018_IAVE.pdf)
- Machado, G. (2007). A relevância das características pessoais no processo de desenvolvimento profissional docente. In C. Leite & A. Lopes (Orgs.), *Escola, Currículo e Formação de Identidades* (1ª ed., pp. 213-232). Porto: Edições ASA.

- Martins, S. (2020). Applets como artefactos de mediação semiótica na formação inicial de professores na Licenciatura em Educação Básica. *Quadrante*, 29(1), 74–96. <https://doi.org/10.48489/quadrante.23014>
- Martins, S., & Fernandes, E. (2021). LITERACIA MATEMÁTICA: Contributos do design de cenários de aprendizagem na formação inicial de professores. In H. Spínola, & S. M. Carreira (Orgs.), *Literacia Científica: Ensino, Aprendizagem e Quotidiano* (1.ª ed., pp.73–87). Funchal: Centro de Investigação em Educação (CIE-UMa). Funchal: Imprensa Académica. <http://dx.doi.org/10.34640/universidademadeira2021martinsfernandes>
- Martins, S. C., & Silva, S. G. (2021). Recursos Didáticos na aula de Matemática: Contributos do Geoplano Virtual na Dedução do Teorema de Pitágoras por alunos do 8.º ano [Artigo Submetido para publicação]. *Revista Educação e Matemática*. Associação de Professores de Matemática.
- Matos, J. M., & Serrazina, M. L. (1996). *Didáctica da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.
- Milani, R., Civiero, P. A., Soares, D. A., & de Lima, A. S. (2017). O Diálogo nos Ambientes de Aprendizagem nas Aulas de Matemática. *Revista Paranaense de Educação Matemática*, 6(12), 221-245. <http://revista.unespar.edu.br/index.php/rpem/article/view/542/439>
- Mishra, P., & Koehler, M. J. (2006). Technological Pedagogical Content Knowledge: A Framework for Teacher Knowledge. *Teachers College Record* 108(6), 1017–1054. [http://onezoneheights.pbworks.com/f/MISHRA\\_PUNYA.pdf](http://onezoneheights.pbworks.com/f/MISHRA_PUNYA.pdf)
- Moureira, J. V. (2018). *Materiais não estruturados na Geometria e Medida em EPE e no 1.º CEB* [Relatório de Estágio, Escola Superior de Educação de Paula Frassinetti]. Repositório ESEPF. <http://repositorio.esepf.pt/handle/20.500.11796/2653>
- Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Foy, P., Kelly, D. L., & Fishbein, B. (2020). *TIMSS 2019 International Results in Mathematics and Science*. Boston College, TIMSS & PIRLS International Study Center. <https://timssandpirls.bc.edu/timss2019/international-results/>
- National Council of Teachers of Mathematics. (1994). *Normas Profissionais para o Ensino da Matemática* (A. P. Canavarro, L. C. Leal, L. Moureira, M. J. Veloso, & M. M. Graça, Trads.), (1.ª ed.). Lisboa: Associação de Professores de

- Matemática. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional (Original publicado em 1991).
- Oliveira, H., Menezes, L., & Canavarro, A. P. (2012). Recursos Didáticos numa aula de Ensino Exploratório: Da Prática à representação de uma prática. In A. P. Canavarro, L. Santos, A. M. Boavida, H. Oliveira, L. Menezes, & S. Carreira (Eds.), *Práticas de ensino da Matemática, Investigação em Educação Matemática 2012* (pp.559-572). (L. Pinheiro, ed.). Escola Superior de Educação de Portalegre. [http://spiem.pt/DOCS/ATAS\\_ENCONTROS/atas\\_EIEM\\_2012.pdf](http://spiem.pt/DOCS/ATAS_ENCONTROS/atas_EIEM_2012.pdf)
- Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura. (2009). *Padrões de Competência em TIC para Professores. Marco Político [ICT competency standards for teachers: policy framework]* (C. B. David, Trad.). UNESCO. (Original publicado em 2008). [https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000156210\\_por](https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000156210_por)
- Paiva, J. (2020). O papel do feedback oral na coconstrução de significados num ambiente de geometria dinâmica. *Quadrante*, 29(2), 132-153. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22569>
- Passos, I. C., & Correia, O. F. (2014). *Matemática em Ação 8.º ano, Parte I*. Lisboa: Raiz Editora.
- Pereira, A (2013). Motivação na Aprendizagem e no Ensino. In F. H. Veiga (Coord.), *Psicologia da Educação - Teoria, Investigação e Aplicação: Envolvimento dos Alunos na Escola* (pp. 445-494). Lisboa: Climepsi Editores.
- Pereira, G., Gouveia, I., & Fraga, N. (2019). O professor do século XXI, que competências e desafios? As perceções das alunas de 1.º ano do Mestrado em Educação Pré-escolar e Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico. In N. Fraga (Org.), *O professor do século XXI em perspetiva comparada: Transformações e Desafios para a construção de sociedades sustentáveis, actas da II Conferência Internacional de Educação Comparada* (1.ª ed., pp. 600-623). Funchal: Centro de Investigação em Educação – CIE-UMA. <http://hdl.handle.net/10400.13/2849>
- Pinto, S. I. (2012). *Materiais estruturados: Qual o seu papel na aprendizagem dos primeiros números?* [Dissertação de Mestrado, Instituto Politécnico de Lisboa]. Repositório Científico Instituto Politécnico de Lisboa. <http://hdl.handle.net/10400.21/2380>
- Pires, M. V., & Amado, N. (2013). Materiais didáticos e recursos no ensino e

- aprendizagem da matemática. In J. A. Fernandes, M. H. Martinho, J. Tinoco, & F. Viseu (Orgs.), *Atas do XXIV Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp.473-478). Braga: APM & CIED da Universidade do Minho.  
[https://www.apm.pt/files/files/SIEM/Atas\\_SIEM/2013\\_Braga\\_ATAS\\_XXIV\\_SIEM.pdf](https://www.apm.pt/files/files/SIEM/Atas_SIEM/2013_Braga_ATAS_XXIV_SIEM.pdf)
- Ponte, J. P. (2003). O ensino da Matemática em Portugal: Uma prioridade educativa? In M. I. Miguéns (Dir.), *O Ensino da Matemática: Situação e Perspectivas* (1ª ed., pp.21-56). Lisboa: Conselho Nacional de Educação.
- Ponte, J. P. (2009). O Novo Programa de Matemática como Oportunidade de Mudança para os Professores do Ensino Básico. *Revista Interações*, 5(12), 96-114.  
<https://doi.org/10.25755/int.392>
- Ponte, J. P. (2013). Aprendizagem em Áreas de Conhecimento: a Matemática – Aprendizagem dos Alunos e Desenvolvimento Profissional dos Professores. In F. H. Veiga (Coord.), *Psicologia da Educação - Teoria, Investigação e Aplicação: Envolvimento dos Alunos na Escola* (pp. 333-358). Lisboa: Climepsi Editores.
- Ponte, J. P., & Canavarro, A. P. (1997). *Matemática e Novas Tecnologias*. Lisboa: Universidade Aberta.
- Ponte, J. P., & Serrazina, L. (2009). O Novo Programa de Matemática: Uma oportunidade de mudança. *Revista Educação e Matemática*, 105, 2-6.  
<https://em.apm.pt/index.php/em/issue/view/107/110>
- Ponte, J. P., Matos, J. M., & Abrantes, P. (1998). *Investigação em Educação Matemática: Implicações Curriculares* (1ª ed.). Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.
- Ponte, J. P., Oliveira, H., Cunha, M. H., & Segurado, M. I. (1998). *Histórias de Investigações Matemáticas* (1ª ed.). Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.
- Ponte, J. P., Serrazina, M. L., Guimarães, H. M., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M. E., & Oliveira, P. A. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: DGIDC. Repositório Científico do Instituto Politécnico de Viseu. <http://hdl.handle.net/10400.19/1155>
- Ribeiro, J. P. (2020). Uso da Tecnologia da Informação e Jogos Didáticos como Recurso no Ensino de Matemática. *Boletim Cearense de Educação e História da Matemática*, 7(19), 74 - 90. <https://doi.org/10.30938/bocehm.v7i19.2738>
- Rocha, H. (2010). Dos Constructos Teóricos à Sala de Aula: Um Olhar sobre a

- Calculadora Gráfica. In A. Breda, A. F. Mota, A. Monteiro, A. Martins, D. Fernandes, E. Nolasco, G. Barbosa, J. Carvalho e Silva, L. Costa, M. B. Pereira, M. T. Santos, T. B. Neto, T. Castanhola, Y. Catarino, & P. Correia (Orgs.), *Actas do XXV Encontro Nacional de Professores de Matemática – PROFMAT 2010* (s.p.). Aveiro: Associação de Professores de Matemática. Aveiro: Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro.
- <https://www.apm.pt/files/files/PROFMAT/2010/ACTAS.pdf>
- Rodrigues, A., & Domingos, A. (2016). Recursos e o Ensino da Matemática. In A. P. Canavarro, A. Borralho, J. Brocardo, & L. Santos (Eds.), *Recursos na Educação Matemática, Livro de Atas do EIEM 2016, Encontro em Investigação em Educação Matemática* (pp.29-31). Évora: Universidade de Évora. SPIEM.
- [http://spiem.pt/blog/bfd\\_download/2016-evora-624mb-recursos-na-educacao-matematica/](http://spiem.pt/blog/bfd_download/2016-evora-624mb-recursos-na-educacao-matematica/)
- Rodrigues, C., Ponte, J. P., & Menezes, L. (2020). Práticas discursivas de professores de Matemática na condução de discussões coletivas. *Quadrante*, 29(2), 24-46.
- <https://doi.org/10.48489/quadrante.22575>
- Rosa, V. A., Maia, J. S., Mascarenhas, D., & Teodoro, A. (2020). PISA, TIMSS e PIRLS em Portugal: Uma análise comparativa [PISA, TIMSS and PIRLS in Portugal: A comparative analysis]. *Revista Portuguesa de Educação*, 33(1), 94–120. <https://doi.org/10.21814/rpe.18380>
- Sampaio, P. A., & Coutinho, C. M. (2014). Integração do TPACK no processo de Ensino/Aprendizagem da Matemática. *Paidei@ - Revista Científica de Educação a Distância*, 6(10), (s.p.).
- <https://periodicos.unimesvirtual.com.br/index.php/paideia/article/view/358>
- Santos, A. L. (2012). *O ensino e aprendizagem da matemática: um relatório reflexivo sobre a prática* [Dissertação de Mestrado, Universidade Nova de Lisboa]. Repositório Universidade Nova. <http://hdl.handle.net/10362/8563>
- Santos, E. L., & Santos, L. (2019). O papel do GeoGebra nas práticas de regulação do ensino da área do paralelogramo. *Quadrante*, 28(1), 6-26.
- <https://doi.org/10.48489/quadrante.22977>
- Santos, L., Canavarro, A. P., & Machado, S. (2006). Orientações curriculares actuais para a Matemática em Portugal. In J. P. Ponte, L. Serrazina, A. Guerreiro, C. Ribeiro, & L. Veia (Orgs.), *Currículo e Desenvolvimento Curricular: Desafios para a Educação Matemática, XV Encontro de Investigação em Educação Matemática*

- (pp.1-22). Vila Real de Santo António: ESE UALG. Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação. SPIEM  
[http://spiem.pt/DOCS/ATAS\\_ENCONTROS/atas\\_EIEM\\_2006.pdf](http://spiem.pt/DOCS/ATAS_ENCONTROS/atas_EIEM_2006.pdf)
- Semião, M. J., & Canavarro, A. P. (2012). A utilização da calculadora gráfica na aula de Matemática: um estudo com alunos do 12º ano no âmbito das Funções. In O. Magalhães & A. Folque (Orgs.), *I Jornadas de investigação em Educação* (pp. 797-812). Évora: Departamento de Pedagogia e Educação da Universidade de Évora. <https://core.ac.uk/reader/62457240>
- Silva, M. H., & Lopes, J. P. (2016). Três estratégias básicas para a melhoria da aprendizagem: Objetivos de aprendizagem, avaliação formativa e feedback. *EduPSI - Revista Eletrónica de Educação e Psicologia*, 7, 12-31.  
<http://edupsi.utad.pt/index.php/component/content/article/79-revista2/144#ftn1>
- Silva, S. C. (2015). *A utilização dos Materiais Manipuláveis no Ensino da Matemática no 1.º Ciclo*. [Relatório de Estágio, Instituto Superior de Ciências Educativas do Douro]. Repositório Comum. <http://hdl.handle.net/10400.26/24992>
- Silveira, A., & Cabrita, I. (2013). O GeoGebra como ferramenta de apoio à aprendizagem significativa das Transformações Geométricas Isométricas. *Revista Indagatio Didactica*, 5(1), 149-170. <https://doi.org/10.34624/id.v5i1.4312>
- Sousa, A. B. (2009). *Investigação em Educação* (2.ª ed.). Lisboa: Livros Horizonte.
- Thomaz, P. H., & Medig, M. A. (2017). Recursos Didáticos no Ensino da Matemática: o jogo como estratégia de ensino e o programa ler e escrever. *Currículo sem Fronteiras*, 17(3), 833-847.  
<http://www.curriculosemfronteiras.org/vol17iss3articles/thomaz-megid.htm>
- Tolentino de Carvalho, A., & Hércules Gontijo, C. (2020). Discursos em interações comunicativas em aulas de matemática e o desenvolvimento da criatividade compartilhada. *Quadrante*, 29(2), 109-131.  
<https://doi.org/10.48489/quadrante.22573>
- Torres, J., & Brocardo, J. (2015). As tecnologias digitais na aula de matemática: conceções e práticas de ensino de professores. In A. Pereira, A. A. Vasconcelos, C. Delgado, C. G. da Silva, F. Botelho, J. Pinto, J. Duarte, M. Rodrigues, & M. P. Alves (Coords.), *Entre a Teoria, os Dados e o Conhecimento (III): Investigar práticas em contexto* (1ª ed., pp. 181-192). Setúbal: Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Setúbal.

[https://www.si.ips.pt/ese\\_si/web\\_gessi\\_docs.download\\_file?p\\_name=F-1578426110/3\\_ebook\\_versao\\_final\\_web.pdf](https://www.si.ips.pt/ese_si/web_gessi_docs.download_file?p_name=F-1578426110/3_ebook_versao_final_web.pdf)

- Vale, I., Barbosa, A., & Pimentel, T. (2014). Tarefas para promover a criatividade em Matemática. In J. Brocardo, A. M. Boavida, C. Delgado, E. Santos, F. Mendes, J. Duarte, L. Santos, M. Baía, & M. Figueiredo (Eds.), *Tarefas Matemáticas, Investigação em Educação Matemática 2014* (pp. 121-134). Setúbal: Escola Superior de Educação. Setúbal: Instituto Politécnico de Setúbal. SPIEM. [http://spiem.pt/DOCS/ATAS\\_ENCONTROS/atas\\_EIEM\\_2014.pdf](http://spiem.pt/DOCS/ATAS_ENCONTROS/atas_EIEM_2014.pdf)
- Vaz, A. R. (2018). *As potencialidades de recurso a diferentes materiais didáticos e a tarefas matemáticas de diferente natureza no ensino da matemática*. [Relatório de Estágio, Instituto Politécnico de Santarém]. Repositório Científico do Instituto Politécnico de Santarém. <http://hdl.handle.net/10400.15/2180>
- Ventura, S. R. (2013). *O geoplano na resolução de tarefas envolvendo os conceitos de área e perímetro: um estudo no 2.º Ciclo do ensino básico*. [Dissertação de Mestrado, Universidade de Lisboa]. Repositório da Universidade de Lisboa. <http://hdl.handle.net/10451/10243>
- Verdasca, J., Neves, A. M., Fonseca, H., Fateixa, J. A., Procópio, M., & Magro-C, T. (2020). *Melhorar Aprendizagens em Matemática pelo Uso Intencional de Recursos Digitais: O Hyptiamat como intervenção preventiva na CIM do Ave* (1.ª ed.). Lisboa: ME/PNPSE. <https://pnpse.min-educ.pt/estudo4>
- Viseu, F., Campos, S., Fernandes, J. A., & Rocha, H. (2016). Uso da calculadora gráfica na exploração de modelos contínuos não lineares. *REVEMAT*. Florianópolis (SC), 11(2), 79-98. <https://doi.org/10.5007/1981-1322.2016v11n2p79>

## 6.2 Referências Legislativas

- Decreto-Lei n.º 17/2016, de 04 de abril de 2016. Diário da República, 1.ª série – N.º 65. [http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Noticias\\_Imagens/2016\\_dl17.pdf](http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Noticias_Imagens/2016_dl17.pdf)
- Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho de 2018. Diário da República, 1.ª série - N.º 129. <https://dre.pt/application/conteudo/115652962>
- Despacho n.º 10874/2012, de 10 de agosto de 2012. Diário da República, 2.ª série - N.º 155. [https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Basico/Legislacao/despacho\\_10874\\_2012.pdf](https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Basico/Legislacao/despacho_10874_2012.pdf)

- Despacho n.º 9888-A/2013, de 26 de julho de 2013. Diário da República, 2.ª série - N.º 143. [https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Basico/Legislacao/despacho\\_9888a\\_2013\\_programa\\_matematica\\_eb.pdf](https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Basico/Legislacao/despacho_9888a_2013_programa_matematica_eb.pdf)
- Despacho n.º 868-B/2014, de 20 de janeiro de 2014. Diário da República, 2.ª série – N.º 13. [https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Basico/Legislacao/despacho\\_868b\\_2014.pdf](https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Basico/Legislacao/despacho_868b_2014.pdf)
- Despacho n.º 6478/2017, de 26 de julho de 2017. Diário da República, 2.ª série – N.º 143. <https://dre.pt/application/conteudo/107752620>
- Despacho n.º 6944-A/2018, de 19 de julho de 2018. Diário da República, 2.ª série - N.º 138. <https://dre.pt/application/conteudo/115738779>
- Despacho n.º 8476-A/2018, de 31 de agosto de 2018. Diário da República, 2.ª série - N.º 168. [https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/ESecundario/despachoe\\_secundario.pdf](https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/ESecundario/despachoe_secundario.pdf)
- Despacho n.º 6605-A/2021, de 6 de julho de 2021. Diário da República, 2.ª série - N.º 129. <https://dre.pt/application/conteudo/166512681>
- Despacho n.º 8209/2021, de 19 de agosto de 2021. Diário da República, 2.ª série – N.º 161. <https://dre.pt/application/conteudo/169831748>
- Lei n.º 46/86, de 14 de outubro de 1986. Diário da República, 1.ª série - N.º 237. <https://dre.pt/application/conteudo/222418>

### 6.3 Documentos Curriculares

- Bivar, A., Grosso, C., Oliveira, F., & Timóteo, M. C. (2013). *Programa e Metas Curriculares Matemática. Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência. [https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Basico/Metas/Matematica/programa\\_matematica\\_basico.pdf](https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Basico/Metas/Matematica/programa_matematica_basico.pdf)
- Bivar, A., Grosso, C., Oliveira, F., Timóteo, M. C., & Loura, L. (2014). *Programa e Metas Curriculares Matemática A. Ensino Secundário*. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência. [http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Secundario/Documentos/Documentos\\_Disciplinas\\_novo/Curso\\_Ciencias\\_Tecnologias/Matematica\\_A/programa\\_metas\\_curriculares\\_matematica\\_a\\_secundario.pdf](http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Secundario/Documentos/Documentos_Disciplinas_novo/Curso_Ciencias_Tecnologias/Matematica_A/programa_metas_curriculares_matematica_a_secundario.pdf)
- Direção – Geral da Educação. (2016). *Orientações de gestão curricular para o Programa e Metas Curriculares de Matemática: Ensino Básico. Dos 1.º ao 9.º anos de*

*Escolaridade*. Lisboa: Ministério da Educação. Lisboa: Direção – Geral da Educação.

[https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/EBasico/Matematica/mat\\_documento\\_orientador\\_ensino\\_basico.pdf](https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/EBasico/Matematica/mat_documento_orientador_ensino_basico.pdf)

Martins, G. D. (Coord.), Gomes, C. A., Brocardo, J. M., Pedroso, J. V. (Ed.), Carrillo, J. L., Silva, L. M., Encarnação, M. M., Horta, M. J., Calçada, M. T., Nery, R. F., & Rodrigues, S. M. (2017). *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória*. Lisboa: Ministério da Educação. Lisboa: Direção-Geral da Educação.

[http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Projeto\\_Autonomia\\_e\\_Flexibilidade/perfil\\_dos\\_alunos.pdf](http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Projeto_Autonomia_e_Flexibilidade/perfil_dos_alunos.pdf)

Ministério da Educação. (2018a). *Aprendizagens Essenciais 8.º ano, 3.º Ciclo do Ensino Básico, Matemática*. Lisboa: Ministério da Educação.

[https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens\\_Essenciais/3\\_ciclo/matematica\\_3c\\_8a\\_ff\\_18julho\\_rev.pdf](https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/3_ciclo/matematica_3c_8a_ff_18julho_rev.pdf)

Ministério da Educação. (2018b). *Aprendizagens Essenciais 10.º ano, Ensino Secundário, Matemática A*. Lisboa: Ministério da Educação.

[https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens\\_Essenciais/10\\_matematica\\_a.pdf](https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/10_matematica_a.pdf)

Ministério da Educação. (2021). *Aprendizagens Essenciais 8.º ano, 3.º Ciclo do Ensino Básico, Matemática*. Lisboa: Ministério da Educação.

[https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens\\_Essenciais/3\\_ciclo/aemat\\_8a\\_2021-08-19.pdf](https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/3_ciclo/aemat_8a_2021-08-19.pdf)

#### **6.4 Documentos Oficiais da EBSM**

Escola Básica e Secundária de Machico. (2019). *Projeto Educativo de Escola. 2018/19 – 2021/22*.

[https://ebsm.pt/base/wp-content/uploads/2020/11/Projeto-Educativo\\_18-22.pdf](https://ebsm.pt/base/wp-content/uploads/2020/11/Projeto-Educativo_18-22.pdf)

#### **6.5 Páginas de Internet/Sites Consultados**

Bento, A. V. (2012, 11 de abril). *Investigação Quantitativa e Qualitativa: Dicotomia ou Complementaridade?* Repositório do Bento.

<http://www3.uma.pt/bento/Repositorio/Investigacaoqualequan.pdf>

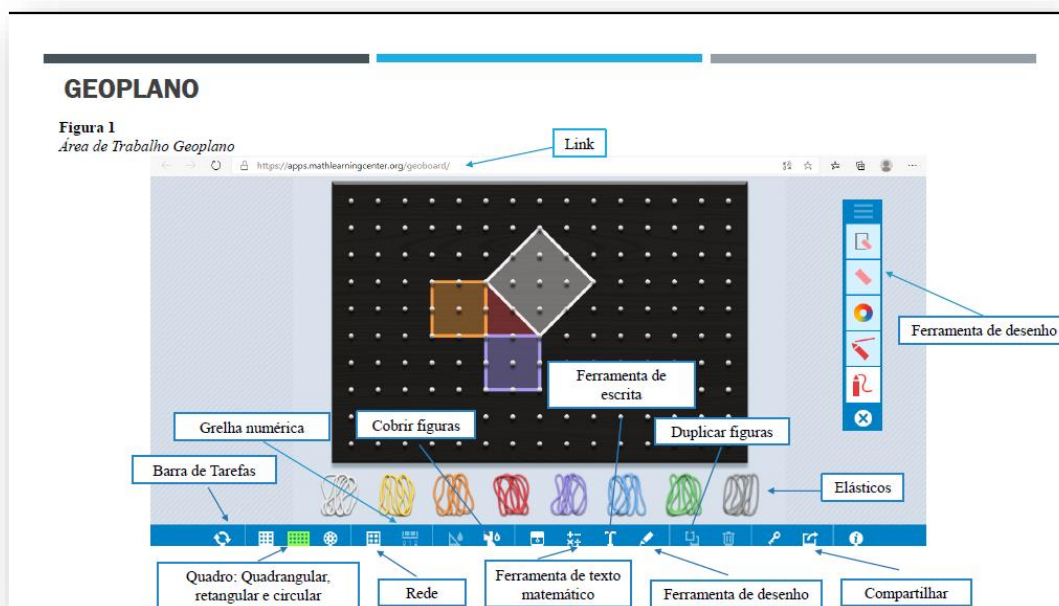
- Camargo, G. (2016, 16 de novembro). *Como o TPACK pode me ajudar a utilizar a tecnologia na sala de aula?* Objetos de Aprendizagem.  
<http://objetosdeaprendizagem.com.br/como-o-tpack-pode-me-ajudar-a-utilizar-a-tecnologia-na-sala-de-aula/>
- Fernandes, D. (1991). *Notas sobre os Paradigmas da Investigação em Educação*.  
 Yumpu. <https://www.yumpu.com/pt/document/view/50426284/notas-sobre-os-paradigmas-da-investigacao-em->
- Figueiral, L. (2017, 4 de abril). *Audição na Comissão Parlamentar de Educação e Ciência*. Associação de Professores de Matemática.  
[https://wordpress.apm.pt/wp-content/uploads/2017/09/interv8Comiss\\_AR-1.pdf](https://wordpress.apm.pt/wp-content/uploads/2017/09/interv8Comiss_AR-1.pdf)
- Gouveia, M. J. (2021, 19 de julho). Qual o caminho que queremos seguir? *Harmonices Mundi*.  
<https://hmciencias.blogspot.com/2021/07/qual-o-caminho-que-queremos-seguir.html>
- Lima, A. F. (2020, 2 de setembro). *Volume do Cone*. GeoGebra.  
<https://www.geogebra.org/m/xpz7kp9m>
- Mercado Quinhentista de Machico. (2018, 18 de janeiro). *Edição 2018*.  
<https://mercadoquinhentista.com/2018/01/18/edicao-2018/>
- National Council of Teachers of Mathematics. (2004, 7 de janeiro). *Executive Summary: Principles and Standards for School Mathematics*.  
<https://www.nctm.org/Standards-and-Positions/Principles-and-Standards/>
- Organisation for Economic Co-operation and Development. (2018). *PISA 2022: Quadro Conceptual de Matemática*. PISA 2022.  
<https://pisa2022-maths.oecd.org/pt/index.html#Twenty-First-Century-Skills>
- Pinto, P. (2020, 08 de dezembro). *Matemática: Disciplina vai ter conhecimento computacional a programação*. pplware.  
<https://pplware.sapo.pt/informacao/matematica-disciplina-vai-ter-conhecimento-computacional-a-programacao/>
- Rocha, J. (2020, 9 de dezembro). *Crianças portuguesas com piores notas a matemática*. Mãe-Me-Quer.  
<https://maemequer.sapo.pt/noticias/criancas-portuguesas-com-piores-notas-a-matematica/>
- Vieira, T. (2016, 5 de outubro). *Volume da Pirâmide*. GeoGebra.  
<https://www.geogebra.org/m/gPrEcDF>
- Yousafzai, M. (2013, 12 de julho). *Discurso de Malala Yousafzai: Youth Takeover* (“Dia de

*Malala*”), *Nações Unidas*, 12 de Julho de 2013. Fundação Calouste Gulbenkian.

<https://gulbenkian.pt/os-direitos-humanos-e-os-desafios-do-seculo-xxi/manual/malala-yousafzai/>

## **7. APÊNDICES**

**Apêndice A – Atividade Construindo Quadrados – Teorema de Pitágoras**  
(Aula do dia 20 de janeiro de 2021)<sup>4</sup>



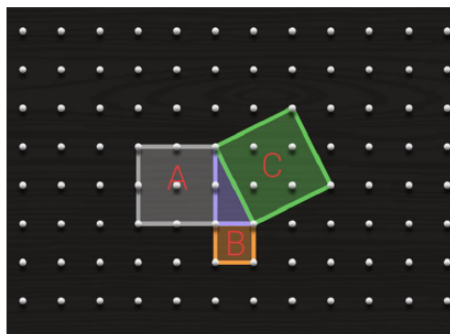
<sup>4</sup> Adaptação de uma tarefa dinamizada na disciplina de Iniciação à Prática Profissional II da Universidade da Madeira (UMA) pela docente Sónia Martins (Adaptação de uma tarefa planificada em contexto de estágio pedagógico na Escola Básica dos 2.º e 3.º Ciclo de São Roque, ano letivo 2008/2009)

Observa três quadrados, A, B e C construídos que satisfazem as seguintes condições:

- O quadrado A está ligado ao quadrado B por apenas um vértice;
- O quadrado B está ligado ao quadrado C por apenas um vértice;
- O quadrado C está ligado ao quadrado A por apenas um vértice e ao quadrado B por outro vértice.

1. Determina as áreas dos 3 quadrados e regista no teu caderno. Considera como unidade de medida a área do menor quadrado possível de ser construído no Geoplano.

Figura 2  
Construindo quadrados



2. Constrói 2 conjuntos de quadrados, que satisfaçam as condições apresentadas na figura 1 e determina as suas áreas. Regista os teus resultados no teu caderno.

Cria uma pasta no ambiente de trabalho do teu computador e guarda as tuas construções atribuindo-lhes um nome (figura 3 e figura 4).

Figura 2  
Construindo quadrados



3. Preenche a tabela com os resultados que obtiveste para as áreas dos 3 quadrados em cada figura.

4. Analisa as construções nas quais o triângulo formado no interior é retângulo. Existe alguma relação entre as áreas dos 3 quadrados construídos em cada figura?

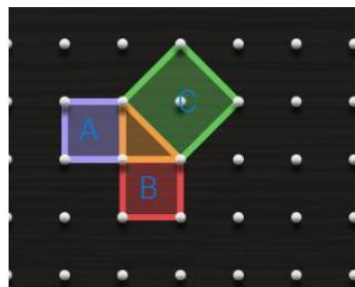
**Tabela 1**  
*Construindo quadrados*

Figuras construídas	Área quadrado A	Área quadrado B	Área quadrado C
Figura 1			
Figura 2			
Figura 3			

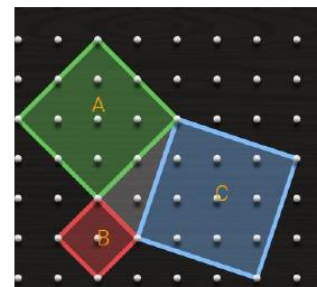
5. Observa cada uma das figuras que construístes, onde se espera que tenhas construído um quadrado assente em cada um dos lados do triângulo.

O que podes concluir quanto à área do quadrado assente sobre o lado maior do triângulo, relativamente às áreas dos outros dois quadrados assentes em cada um dos lados menores do triângulo?

**Figura 3**  
*Construindo quadrados*



**Figura 4**  
*Construindo quadrados*



6. Procura verificar se obténs os mesmos resultados com outros triângulos não retângulos, concretamente triângulos acutângulos e obtusângulos.

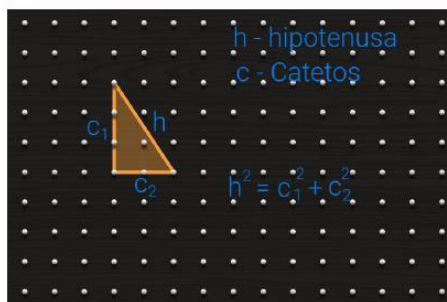
Constrói duas figuras nessas condições, no Geoplano virtual, e calcula as suas áreas. Guarda na tua pasta de trabalho, no ambiente de trabalho do teu computador.

**Tabela 2**  
*Construindo quadrados*

Figuras construídas	Área quadrado A	Área quadrado B	Área quadrado C
Figura 5 Triângulo acutângulo no interior			
Figura 6 Triângulo Obtusângulo no interior			

7. Parece que os triângulos retângulos possuem uma propriedade relacionada com os comprimentos dos seus lados. Procura indicar essa propriedade.

Propriedade construção de quadrados:



Num triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

Adaptação de uma tarefa dinamizada na disciplina de Introdução à Prática Pedagógica II da Universidade da Madeira (UMa) pela docente Sónia Martins (Adaptação de uma tarefa planificada em contexto de estágio pedagógico na Escola Básica dos 2.º e 3.º Ciclos de São Roque, ano letivo 2008/2009)

**Apêndice B – Atividade Construindo Quadrados – Teorema de Pitágoras**  
(Aula do dia 22 de janeiro de 2021)<sup>5</sup>

**CONSTRUINDO QUADRADOS**  
MATEMÁTICA – 8.º ANO

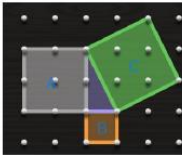
Geoplano



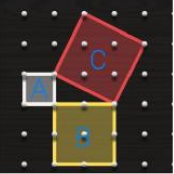
**CONSTRUINDO QUADRADOS**

1. Na construção das vossas figuras verificaram que no seu interior formou-se uma nova figura geométrica. Qual?
2. Como classificas a figura formada no interior da construção quanto aos seus ângulos?
3. Relativamente à medida do lado de cada quadrado, existe relação com a medida de cada lado do triângulo?

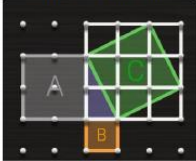
**Figura 1**  
*Construindo quadrados*



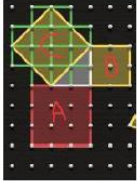
**Figura 2**  
*Construindo quadrados*



**Figura 3**  
*Construindo quadrados*



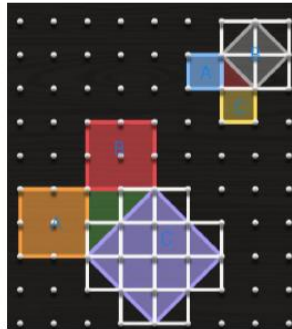
**Figura 4**  
*Construindo quadrados*



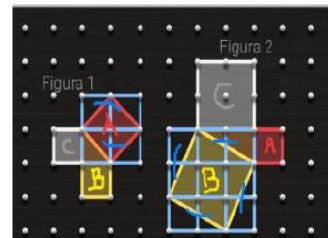
<sup>5</sup> Adaptação de uma tarefa dinamizada na disciplina de Iniciação à Prática Profissional II da Universidade da Madeira (UMA) pela docente Sónia Martins (Adaptação de uma tarefa planificada em contexto de estágio pedagógico na Escola Básica dos 2.º e 3.º Ciclo de São Roque, ano letivo 2008/2009)

## CONSTRUINDO QUADRADOS

**Figura 5**  
*Construindo quadrados*



**Figura 6**  
*Construindo quadrados*



## CONSTRUINDO QUADRADOS

4. Preenche a tabela indicando as áreas dos quadrados A, B e C.

**Tabela 1**  
*Construindo quadrados*

Figuras construídas	Área quadrado A	Área quadrado B	Área quadrado C
Figura 1			
Figura 2			
Figura 3			
Figura 5			
Figura 6			

## CONSTRUINDO QUADRADOS

5. Como classificas a figura formada no interior da construção quanto aos seus ângulos e os seus lados?

Figura 11  
Construindo quadrados

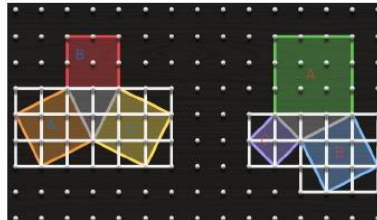


Figura 12  
Construindo quadrados

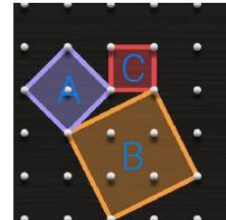


Figura 13  
Construindo quadrados

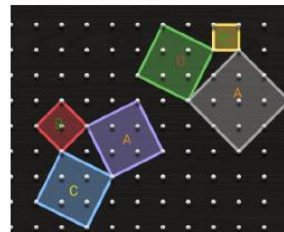


Figura 14  
Construindo quadrados



## CONSTRUINDO QUADRADOS

7. Preenche a tabela indicando a área dos quadrados A, B e C.
8. Quando comparam as áreas em cada construção o que observam?
9. Existe alguma regularidade? Se existir esta aparece em todos os casos ou só em alguns?

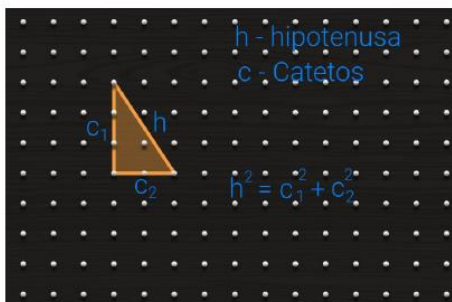
Tabela 2  
Construindo quadrados

Figuras construídas	Área quadrado A	Área quadrado B	Área quadrado C
Figura 11			
Figura 12			
Figura 13			
Figura 14			

## CONSTRUINDO QUADRADOS

10. Parece que os triângulos retângulos possuem uma propriedade relacionada com os comprimentos dos seus lados. Procura indicar essa propriedade.

Propriedade construção de quadrados:

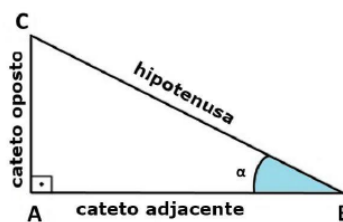


Num triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

## CONSTRUINDO QUADRADOS

Definição de hipotenusa, cateto oposto e cateto adjacente

Propriedade construção de quadrados:



**Hipotenusa** – É o lado maior de um triângulo retângulo e é oposto ao ângulo reto que define este tipo de triângulo.

**Catetos** – São os dois lados menores de um triângulo retângulo, formando o ângulo reto do triângulo. Os catetos são denominados oposto ou adjacente, de acordo com a sua posição em relação a um dado ângulo do triângulo retângulo: se o cateto está junto ao ângulo de referência, é chamado adjacente; se está oposto a este ângulo, é chamado oposto.

Adaptação de uma tarefa dinamizada na disciplina de Introdução à Prática Pedagógica II da Universidade de Madeira (UMA) pela docente Sónia Martins (Adaptação de uma tarefa planificada em contexto de estágio pedagógico na Escola Básica dos 2.º e 3.º Ciclos de São Roque, ano letivo 2008/2009)

## Apêndice C – Atividade para a Dedução da fórmula para o cálculo do Volume da Pirâmide<sup>6</sup>

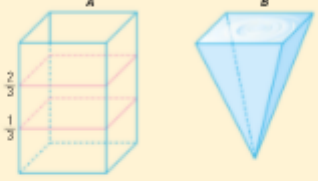
(Aula do dia 19 de fevereiro de 2021)

**Tarefa 8**

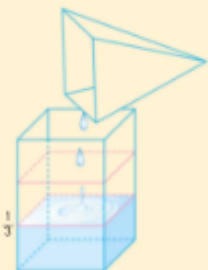
Na figura estão representados dois recipientes **A** e **B**, com bases iguais e de igual altura.

O recipiente **A** tem a forma de prisma quadrangular regular e está vazio.

O recipiente **B** tem a forma de pirâmide quadrangular regular e está cheio com líquido.



O líquido do recipiente **B** foi vertido para o recipiente **A**, que ficou como é sugerido pela figura abaixo.



- Se a capacidade do recipiente **A** for de 36 litros, qual é a capacidade do recipiente **B**?
- Se a capacidade do recipiente **B** for de 20 litros, qual é a capacidade do recipiente **A**?
- Admita que o recipiente **A** tem 60 cm de altura e de perímetro da base 1 m.
 

Determina:

  - a área da base de cada um dos recipientes;
  - a capacidade do recipiente **B**.
- Sejam  $A_b$  e  $h$ , respetivamente, a área da base dos recipientes e a altura.
 

Neste contexto, indica o significado de cada uma das seguintes expressões:

  - $V = A_b \times h$
  - $V = \frac{1}{3} \times A_b \times h$

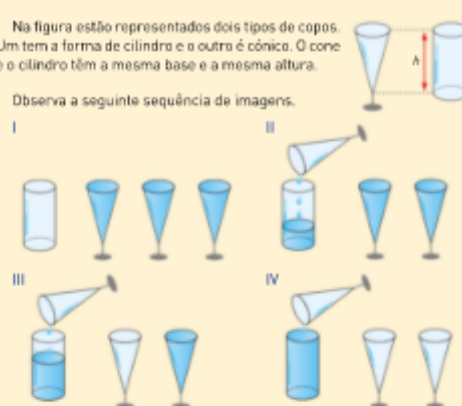
<sup>6</sup> Retirado de Costa, B., & Rodrigues, E. (2019). *Novo Espaço – Matemática 9.º ano*, Parte I. Porto: Porto Editora.

**Apêndice D – Atividade para a Dedução da fórmula para o cálculo do  
Volume do Cone<sup>7</sup>**  
(Aula do dia 26 de fevereiro de 2021)

**Tarefa 9**

Na figura estão representados dois tipos de copos. Um tem a forma de cilindro e o outro é cônico. O cone e o cilindro têm a mesma base e a mesma altura.

Observa a seguinte sequência de imagens.



Tomando como verdadeiro aquilo que é sugerido pela sequência de imagens, responde às perguntas seguintes.

- É possível que a capacidade do copo cônico seja de 18 cl e a do copo cilíndrico seja 50 cl, sabendo que este não transbordou? Explica.
- Se a capacidade do copo cônico for de 20 cl, qual é a capacidade do copo cilíndrico?
- Se a capacidade do copo cilíndrico for de 75 cl, qual é a capacidade do copo cônico?
- Admite que o copo cilíndrico tem de altura 12 cm. Indica a altura do líquido nesse copo na imagem II.
- Sejam:
  - $h$  – altura do cilindro e do cone
  - $r$  – raio das bases do cilindro e do cone
 Aceitando o que é sugerido pela sequência de imagens acima e foi afirmado na página anterior:
  - escreve uma fórmula que te permita calcular o volume do:
    - cilindro;
    - cone.
  - calcula o volume do cone se  $h = 10$  cm e  $r = 3$  cm. Apresenta o resultado em centímetros cúbicos, arredondado às centésimas.

IMAGEM: FICHA 1001A

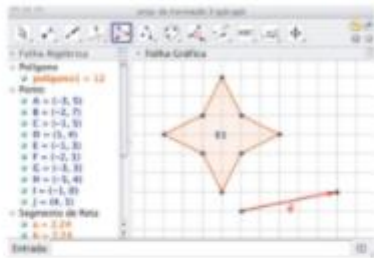
<sup>7</sup> Retirado de Costa, B., & Rodrigues, E. (2019). *Novo Espaço – Matemática 9.º ano*, Parte I. Porto: Porto Editora.






## Apêndice E – Atividade para o estudo da Translação associada a um vetor e da translação composta<sup>8</sup>

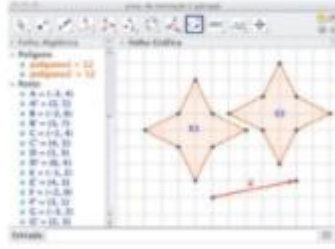
(Aula do dia 17 de março de 2021)

**61 Utilizar o programa geogebra para a determinação da imagem de uma figura, por meio de uma translação**

61.1 Como determinar a imagem de uma figura, como por exemplo a estrela E1, pela translação de vetor  $\vec{u}$  ?



- No menu ferramentas, escolhe a opção  e clica sequencialmente nos vértices do polígono. Fica desenhada a figura E1. Explora o programa e escolhe uma cor para a figura.
- No menu ferramentas, no botão  escolhe a opção  e desenha o vetor.
- Para a construção da imagem da figura E1 pela translação de vetor  $\vec{u}$  clica no botão  escolhe a opção  e obténs E2, a imagem de E1.
- Podés explorar o programa e acrescentar letras, mudar cores, etc.



61.2

- Podés aproveitar esta última imagem, desenhando outro vetor,  $\vec{v}$ , e considerando E2 como a figura original, desenha a imagem de E2 pela translação do vetor  $\vec{v}$ , obtendo assim E3.
- Como se chama a aplicação que transforma E1 em E3? Qual é o vetor que lhe está associado?

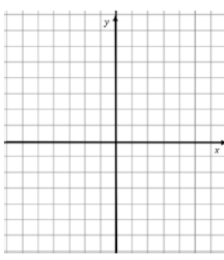
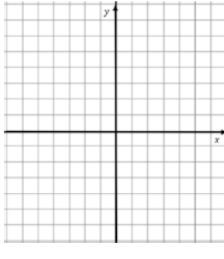
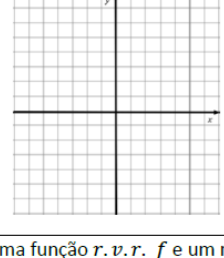
61.3 Inventa outras figuras, outros vetores e determina as suas imagens. Diverte-te!

<sup>8</sup> Retirado de Passos, I. C., & Correia, O. F. (2014). *Matemática em Ação 8.º ano*, Parte I. Lisboa: Raiz Editora.



Tabela 2

Funções do tipo  $y = f(x - c)$

Expressão analítica	Representação gráfica	Domínio e contradomínio	Imagem dos objetos -2 e 2
$f(x) = x^3 + x$			
$g(x) = f(x - 2)$ $g(x) = \underline{\hspace{2cm}}$			
$h(x) = f(x + 1)$ $h(x) = \underline{\hspace{2cm}}$			
<p><b>Conclusão:</b> Dados uma função r. v. r. <math>f</math> e um número real <math>c</math>, o gráfico da função <math>g(x) = f(x - c)</math>, tal que <math>D_g = \{x + c : x \in D_f\}</math>, é a _____ do gráfico da função <math>f</math> pela <b>translação</b> _____ associada ao vetor de coordenadas (____, ____).</p> <p>Considerando <math>P'</math> a <b>imagem</b> <math>P</math>, temos que se <math>P(x, y) \in G_f</math> então <math>P'(\underline{\hspace{1cm}}, \underline{\hspace{1cm}}) \in G_g</math>.</p>			

Tipo de transformação



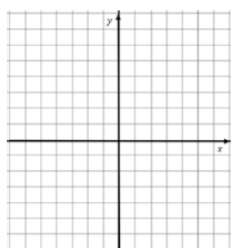
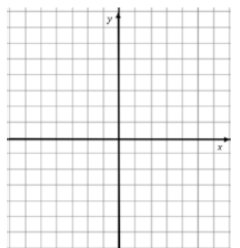
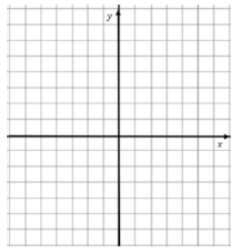

O gráfico da função  $g$  é a \_\_\_\_\_ do gráfico da função  $f$  pela translação \_\_\_\_\_ associada ao vetor de coordenadas \_\_\_\_\_.

**Translação** \_\_\_\_\_.

O gráfico da função  $h$  é a \_\_\_\_\_ do gráfico da função  $f$  pela translação \_\_\_\_\_ associada ao vetor de coordenadas \_\_\_\_\_.

**Translação** \_\_\_\_\_.

Tabela 3  
Funções do tipo  $y = f(x - c) + d$

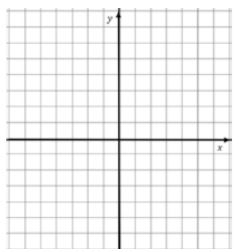
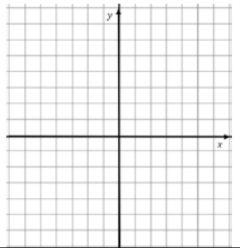
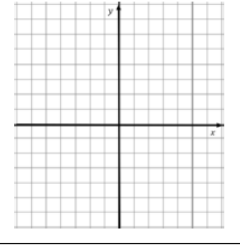
Expressão analítica	Representação gráfica	Domínio e contradomínio	Imagem dos objetos -2 e 2
$f(x) = x^3 + x$			
$g(x) = f(x - 2) + 3$ $g(x) = \underline{\hspace{2cm}}$			
$h(x) = f(x + 2) - 3$ $h(x) = \underline{\hspace{2cm}}$			
<p>Tipo de transformação</p> 			
			<p>O gráfico da função <math>g</math> é a _____ do gráfico da função <math>f</math> pela translação associada ao vetor de coordenadas _____.</p> <p>Translação _____ e _____.</p>
			<p>O gráfico da função <math>g</math> é a _____ do gráfico da função <math>f</math> pela translação associada ao vetor de coordenadas _____.</p> <p>Translação _____ e _____.</p>
<p><b>Conclusão:</b> Dados uma função r. v. r. <math>f</math> e dois números reais <math>c</math> e <math>d</math>, o gráfico da função <math>g(x) = f(x - c) + d</math>, tal que <math>D_g = \{x + c: x \in D_f\}</math>, é a _____ do gráfico da função <math>f</math> pela <b>translação</b> associada ao vetor de coordenadas (____, ____).</p> <p>Considerando <math>P'</math> a <b>imagem</b> <math>P</math>, temos que se <math>P(x, y) \in G_f</math> então <math>P'(\underline{\hspace{1cm}}, \underline{\hspace{1cm}}) \in G_g</math>.</p>			

**Gráficos de funções obtidos por contração e por dilatação**


Considere  $f: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ . Complete as tabelas seguintes, registrando as suas conclusões.

Tabela 4

**Funções do tipo  $y = af(x)$**

Expressão analítica	Representação gráfica	Domínio e contradomínio	Imagem dos objetos 0, 1 e 4
$f(x) = \sqrt{x}$			
$g(x) = 2f(x)$ $g(x) = \underline{\hspace{2cm}}$			
$h(x) = \frac{1}{2}f(x)$ $h(x) = \underline{\hspace{2cm}}$			

Tipo de transformação



O gráfico da função  $g$  é a \_\_\_\_\_ do gráfico da função  $f$  por uma dilatação \_\_\_\_\_ de coeficiente \_\_\_\_\_.

**Dilatação** \_\_\_\_\_.

O gráfico da função  $h$  é a \_\_\_\_\_ do gráfico da função  $f$  por uma contração \_\_\_\_\_ de coeficiente \_\_\_\_\_.

**Contração** \_\_\_\_\_.

**Conclusão:** Dada uma função r. v. r.,  $f$ , o gráfico da função  $g(x) = af(x)$  tal que  $D_g = D_f$ , é a \_\_\_\_\_ do gráfico da função  $f$  por uma:


- dilatação \_\_\_\_\_ de coeficiente \_\_\_\_\_ se  $a > 1$ ;
- contração \_\_\_\_\_ de coeficiente \_\_\_\_\_ se  $0 < a < 1$ .

Considerando  $P'$  a **imagem**  $P$ , temos que se  $P(x, y) \in G_f$  então  $P'(\underline{\hspace{1cm}}, \underline{\hspace{1cm}}) \in G_g$ .

Considere  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Complete a tabela seguinte, registrando as suas conclusões.

Tabela 5

Funções do tipo  $y = f(bx)$

Expressão analítica	Representação gráfica	Domínio e contradomínio	Imagem dos objetos 1, 2, 4
$f(x) = x^2$			
$g(x) = f(2x)$ $g(x) = \underline{\hspace{2cm}}$			<p>Tipo de transformação</p>  <p>O gráfico da função <math>g</math> é a <u>                    </u> do gráfico da função <math>f</math> por uma contração <u>                    </u> de coeficiente <u>                    </u>.</p> <p><b>Contração</b> <u>                    </u>.</p>
$h(x) = f\left(\frac{1}{2}x\right)$ $h(x) = \underline{\hspace{2cm}}$			<p>O gráfico da função <math>h</math> é a <u>                    </u> do gráfico da função <math>f</math> por uma dilatação <u>                    </u> de coeficiente <u>                    </u>.</p> <p><b>Dilatação</b> <u>                    </u>.</p>
<p><b>Conclusão:</b> Dada uma função r.v.r. , <math>f</math> , o gráfico da função <math>g(x) = f(bx)</math> tal que <math>D_g = \left\{\frac{x}{b} : x \in D_f\right\}</math>, é a <u>                    </u> do gráfico da função <math>f</math> por uma:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• contração <u>                    </u> de coeficiente <u>                    </u> se <math>a &gt; 1</math> ;</li> <li>• dilatação <u>                    </u> de coeficiente <u>                    </u> se <math>0 &lt; a &lt; 1</math> .</li> </ul> <p>Considerando <math>P'</math> a <b>imagem</b> <math>P</math>, temos que se <math>P(x, y) \in G_f</math> então <math>P'(\underline{\hspace{1cm}}, \underline{\hspace{1cm}}) \in G_g</math>.</p>			

### Gráficos de funções obtidos por reflexão em relação aos eixos coordenados

Considere  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ . Complete as tabelas seguintes, registrando as suas conclusões.

Tabela 6  
Funções do tipo  $y = -f(x)$

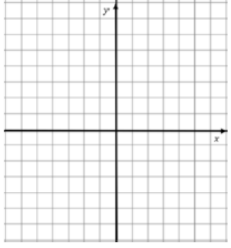
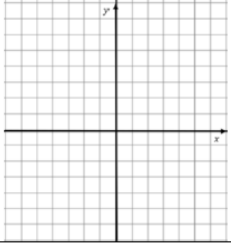


Expressão analítica	Representação gráfica	Domínio e Contradomínio	Imagem dos objetos -3 e 2
$f(x) = \sqrt{x}$			
$g(x) = -f(x)$ $g(x) = \underline{\hspace{2cm}}$			
<p>Tipo de transformação</p> 			
<p>O gráfico da função <math>g</math> é a _____ gráfico da função <math>f</math> pela _____ de eixo _____.</p>			
<p><b>Conclusão:</b></p> <p>Seja <math>f</math> uma função r.v.r.f, e <math>g</math> a função definida por <math>g(x) = -f(x)</math>, tal que <math>D_g = D_f</math>.</p> <p>O gráfico de <math>g</math> é a _____ do gráfico de <math>f</math>, pela <b>reflexão de eixo</b> _____.</p>			

Tabela 7  
Funções do tipo  $y = f(-x)$

Expressão analítica	Representação gráfica	Domínio e Contradomínio	Imagem dos objetos -2 e 2
$f(x) = \sqrt{x}$			
$t(x) = f(-x)$ $t(x) = (-x)^2 - 2x + 1$			

Tipo de transformação



O gráfico de  $t$  é a \_\_\_\_\_ do gráfico da função  $f$  pela \_\_\_\_\_ de eixo \_\_\_\_\_.

**Conclusão:** Seja  $f$  uma função r.v.r.f, e  $g$  a função definida por  $g(x) = f(-x)$ , tal que  $D_g = D_f$ .  
O gráfico de  $g$  é a \_\_\_\_\_ do gráfico de  $f$ , pela **reflexão de eixo** \_\_\_\_\_.

## Apêndice G – Atividade Investigativa sobre a Modelação de uma Parábola<sup>10</sup>

(Aula do dia 28 de abril de 2021)

Escola [REDACTED]
Matemática - 10.º Ano

**Atividade Investigativa – Modelação de uma parábola<sup>1</sup>**  
**Função quadrática**

**Modelação de uma parábola**  
 recorrendo ao programa de geometria dinâmica *Geogebra*

A modelação matemática é a área do conhecimento que estuda a simulação de sistemas reais a fim de prever o comportamento destes, sendo usada em diversos campos de estudo, tais como a física, a química, a biologia, a economia e as engenharias. Ou seja, a modelação matemática consiste na atividade (ou tentativa) de descrever matematicamente um fenómeno real. ("Modelagem Matemática", 2020, s.p.)<sup>2</sup>

A modelação matemática "consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual." (Bassanezi, 2004; Santos Junior, 2011, citados por Castro, 2013, p.36)<sup>3</sup>

\* Bassanezi, 2004, citado por Santos Junior, C. P. (2011). *Modelagem matemática: uma ferramenta importante para aprendizagem do ensino da matemática no mundo das tecnologias*. Paper presented at the XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática, Recife, Brasil.

**Atividade:** [REDACTED]

Observa no concelho de [REDACTED] uma situação/fenómeno real (pontes, monumentos, natureza, desporto...) onde possas identificar uma parábola. Tira uma fotografia dessa situação/fenómeno e utilizando o programa de geometria dinâmica *Geogebra* descobre a expressão analítica da função quadrática que essa parábola representa. Estuda todas as características dessa função (domínio, contradomínio, vértice, eixo de simetria, extremos, zeros e sinal, monotonia e tabela de variação) e interpreta os dados obtidos face ao fenómeno apresentado.

Apresenta a tua modelação junto da comunidade escolar (exposição, jornal da escola, sítio da internet da escola...).

**Procedimentos na exploração da atividade do programa de geometria dinâmica *Geogebra***

- Para aceder ao programa de geometria dinâmica, **GeoGebra Classic**, aceder ao link <https://www.geogebra.org/classic> e surgirá a seguinte janela de visualização:


---

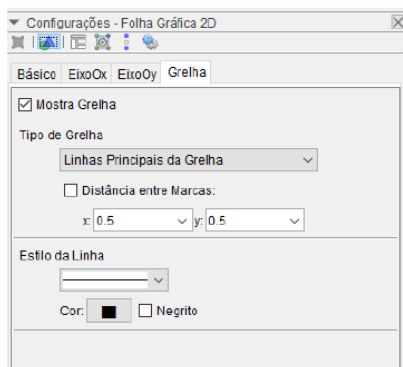
<sup>1</sup> Atividade Investigativa elaborada conjuntamente pela Prof.ª Gracinda Santos e mestranda Sandra Silva


<sup>2</sup> Modelagem Matemática. (2020). Wikipédia: A enciclopédia livre. [https://pt.wikipedia.org/wiki/Modelagem\\_matem%C3%A1tica](https://pt.wikipedia.org/wiki/Modelagem_matem%C3%A1tica)

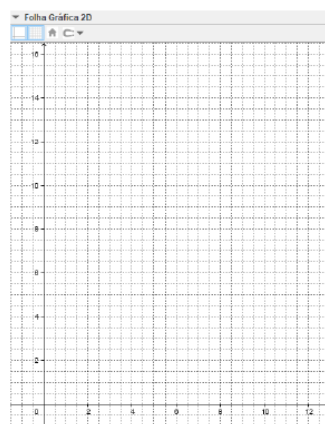
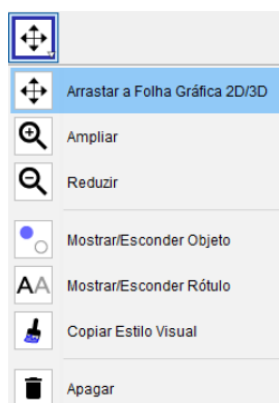
<sup>3</sup> Castro, A. S. (2013). *Modelação Matemática em contexto de sala de aula*. [Relatório de estágio]. Universidade de Aveiro. ria-repositório institucional. <http://hdl.handle.net/10773/13865>

<sup>10</sup> Atividade Investigativa elaborada conjuntamente com a Prof.ª G. Santos

- Seguidamente, clicar no canto direito superior em  e seleccionar a opção **configurações**, escolhendo o idioma em **Português (Portugal)**, e em **arredondamentos** seleccionar **3 casas decimais**.
- Seleccionar a **folha gráfica 2D**, e em **configurações**, separador **grelha**, seleccionar como **tipo de grelha**, **linhas principais da grelha**.

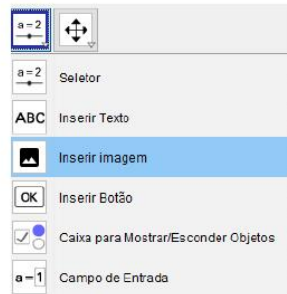


- Clicar na ferramenta  para mover a **folha gráfica** posicionando o referencial cartesiano no 1.º quadrante.

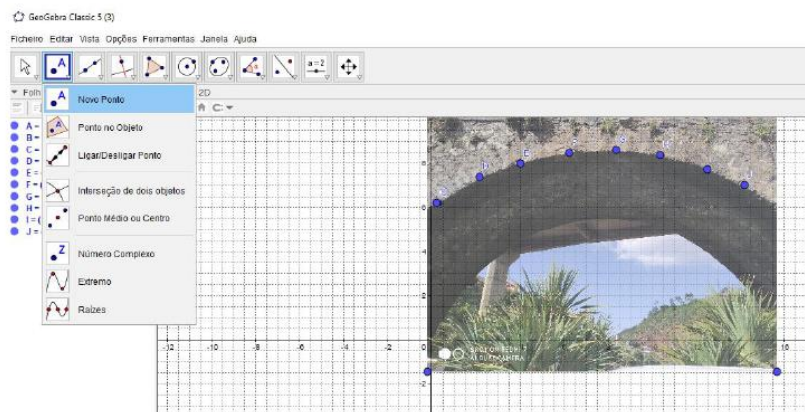


- No ambiente de trabalho do vosso computador, criar uma pasta com o nome **Modelação com uma parábola**, e guardar, na pasta, a foto seleccionada com a imagem da construção ou objeto a ser modelado.

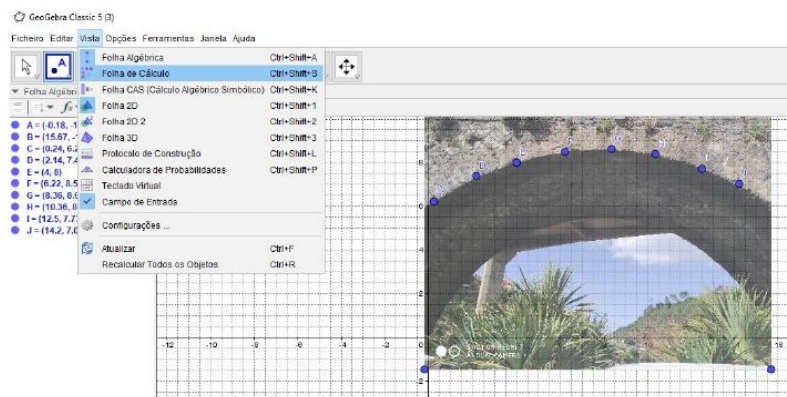
6. Em **inserir imagem**, selecionar a fotografia, guardada no vosso ambiente de trabalho, com a construção ou objeto a ser modelado, arrastando a imagem e colocando-a na origem do referencial.



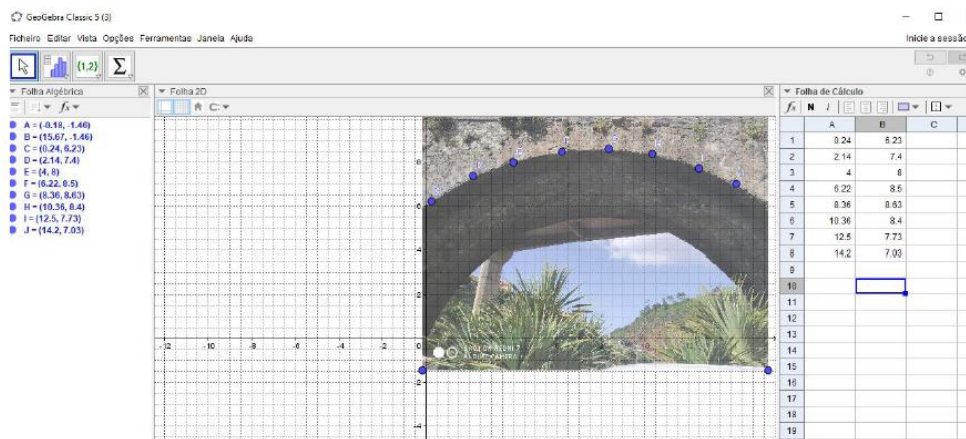
7. Para que a imagem não se mova, **fixar a imagem e definir a transparência da figura, em 75%, em propriedades da imagem**, separador **cor**, para facilitar a marcação de pontos e a visualização dos eixos.
8. Para os grupos que pretendam modelar o lançamento de um objeto, por exemplo uma bola, deverão colocar as imagens no Geogebra (sobrepostas fazendo coincidir o plano de visualização. Assim, e de cada vez que se sobrepõe uma fotografia, clareamos a anterior nas suas propriedades para que se consiga visualizar a trajetória do objeto nos diferentes momentos, assinalando os pontos que definem a sua trajetória).
9. Selecionar a ferramenta **ponto** e marcar alguns pontos sobre a curva da construção ou objeto a modelar. Os pontos poderão ser marcados essencialmente nas partes onde muda o comportamento da curva.



10. Seguidamente selecionamos a opção folha de cálculo.



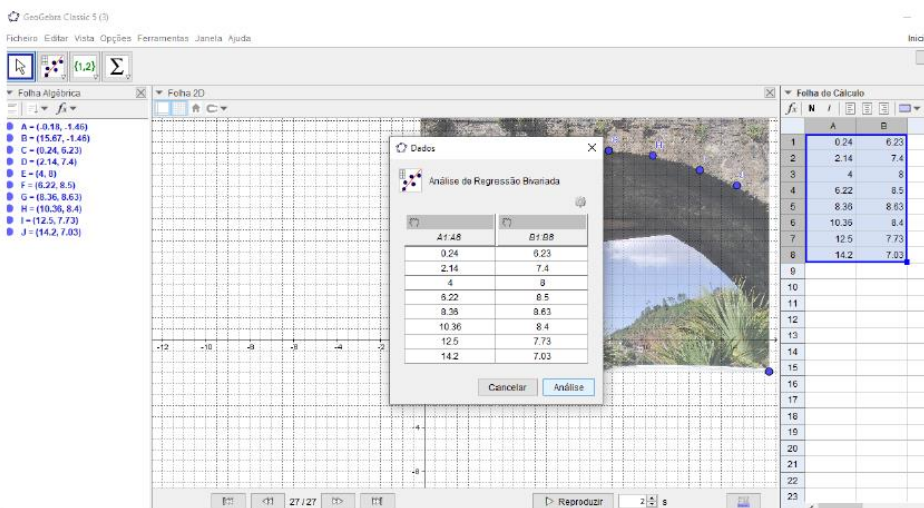
11. Na folha de cálculo colocamos em coluna as coordenadas dos pontos que queremos ajustar ao modelo matemático (primeira coluna abcissas e segunda coluna ordenadas). Atenção, para não colocar os pontos A e B que aparecem de início e que servem para redimensionar a imagem.



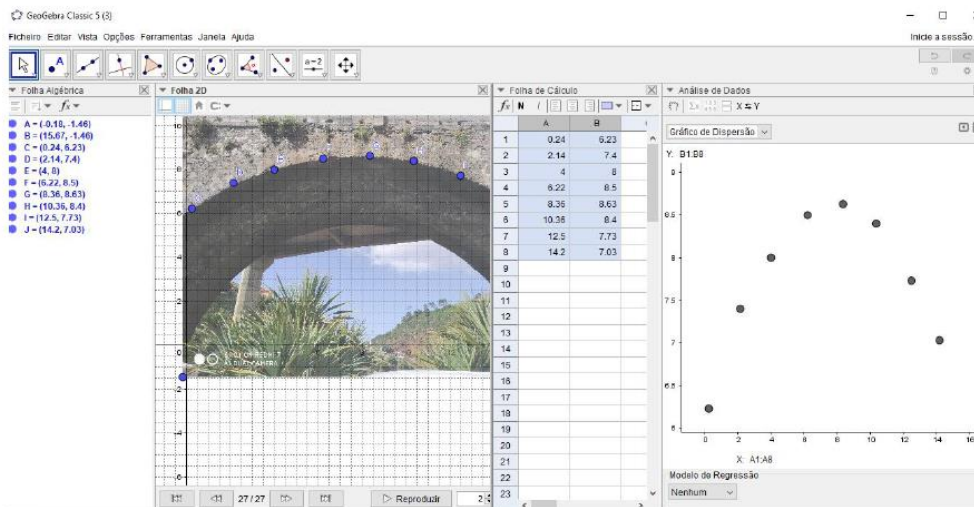
12. Selecionar as células do excel correspondentes aos pontos inseridos e selecionar a opção análise de regressão bivariada.



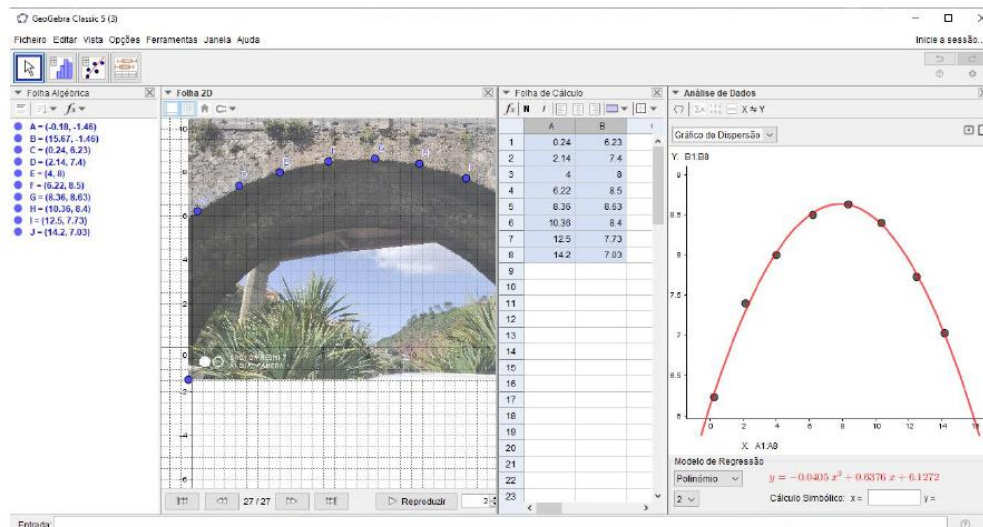
13. Clicar em análise para que o software possa analisar os pontos inseridos.



14. Ao lado vai abrir uma janela com uma sugestão de análise dos dados.



15. Por defeito o programa tem a opção nenhum no Modelo de Regressão. Seleccionamos a opção **polinómio** de grau **2**. Alargamos a janela do gráfico da função obtida para conseguirmos visualizar toda a informação, em particular a sua expressão algébrica. Na caixa de entrada, inserimos a expressão algébrica.



16. Para escrever a **expressão algébrica** junto à parábola, clicar em cima da curva obtida, com o **botão direito do rato** e na opção **configurações**, separador **Básico** ativar a opção **exibir rótulo** e em seguida **opção legenda e valor**.

17. Para calcular o vértice da parábola, indicar o valor dos parâmetros  $a$ ,  $b$  e  $c$ , aplicando um dos 4 métodos aprendidos nas aulas.
18. Indicar o eixo de simetria, os extremos, zeros, tabela de variação e de sinal do gráfico da função obtida.
19. Para guardar a figura obtida, no ambiente de trabalho do vosso computador, selecionar a opção **ficheiro**, em **guardar como**, indicando um nome para o ficheiro, à vossa escolha, e guardar a imagem no formato JPEG, enviando, depois, para o Google Classroom.

Bom Trabalho! 😊

**Apêndice H** – Avaliação Atividade Investigativa

Modelação de uma Parábola

Níveis de Desempenho /Critérios *	Exemplar	Competente	Revela algum progresso	Necessita de Progredir	Observações Gerais
<p><b>Aplicação de conhecimentos em contextos matemáticos e não matemáticos</b></p>	<p>Aplica <b>corretamente</b> o conhecimento matemático, nomeadamente a indicação <b>correta</b> dos zeros da função, extremos, monotonia, sinal, coordenadas do vértice e expressão algébrica de uma função quadrática. Usa <b>corretamente</b> a simbologia matemática</p>	<p>Aplica o conhecimento matemático com <b>pequenas imprecisões</b>, nomeadamente na indicação dos zeros da função, extremos, monotonia, sinal, coordenadas do vértice e expressão algébrica de uma função quadrática. Usa <b>corretamente</b> a simbologia matemática apresentando <b>pequenas imprecisões</b>.</p>	<p>Aplica o conhecimento matemático com <b>algumas imprecisões</b>, nomeadamente na indicação dos zeros da função, extremos, monotonia, sinal, coordenadas do vértice e expressão algébrica de uma função quadrática. Usa a simbologia matemática apresentando <b>algumas imprecisões</b>.</p>	<p>Aplica <b>incorretamente</b> o conhecimento matemático ou não o aplica, nomeadamente na indicação dos zeros da função, extremos, monotonia, sinal, coordenadas do vértice e expressão algébrica de uma função quadrática. Usa <b>incorretamente</b> a simbologia matemática.</p>	
<p><b>Compreensão escrita e expressão oral</b></p>	<p>Interpreta <b>plenamente</b> o enunciado, reconhecendo à linguagem matemática e expressando <b>corretamente</b> o raciocínio matemático. Utiliza <b>corretamente</b> a linguagem matemática, comunicando-a de forma <b>completamente eficiente</b>.</p>	<p>Interpreta <b>quase plenamente</b> o enunciado, reconhecendo à linguagem matemática, contudo apresenta <b>pequenas imprecisões</b> ao nível do raciocínio matemático. Apresenta <b>pequenas imprecisões</b> relativamente à linguagem matemática,</p>	<p>Interpreta o enunciado com <b>alguma dificuldade</b>, reconhecendo à linguagem matemática com <b>alguma dificuldade</b>, revelando <b>algumas imprecisões</b> ao nível do raciocínio matemático. Apresenta <b>algumas imprecisões</b></p>	<p>Interpreta o enunciado com <b>grande dificuldade</b>, não reconhecendo a linguagem matemática, revelando <b>muitas imprecisões</b> ao nível do raciocínio matemático. Apresenta <b>grandes imprecisões</b> relativamente à</p>	

		comunicando-a de uma forma <b>quase eficiente</b> .	relativamente à linguagem matemática, comunicando-a com <b>alguma dificuldade</b> .	linguagem matemática, comunicando-a com <b>muita dificuldade</b> .	
<b>Autonomia/Organização/Empenho</b>	Revela <b>excelente</b> organização, responsabilidade, autonomia e motivação, envolvendo <b>todos</b> os elementos do grupo na procura de fenómenos a modelar. Foram <b>corretamente</b> atribuídas tarefas a <b>todos</b> os elementos do grupo durante a realização da atividade investigativa. O grupo conseguiu de <b>forma plena</b> definir estratégias que permitissem conduzir e solucionar a atividade investigativa. O trabalho foi <b>entregue dentro do prazo</b> estabelecido.	Revela <b>boa</b> organização, responsabilidade, autonomia e motivação, envolvendo <b>quase todos</b> os elementos do grupo na procura de fenómenos a modelar. Foram <b>corretamente</b> atribuídas tarefas a <b>quase todos</b> os elementos do grupo durante a realização da atividade investigativa. O grupo conseguiu de <b>forma quase plena</b> definir estratégias que permitissem conduzir e solucionar a atividade investigativa. O trabalho de grupo foi <b>entregue com ligeiro atraso</b> após o término do prazo estabelecido.	Revela <b>alguma</b> organização, responsabilidade, autonomia e motivação, envolvendo <b>alguns</b> elementos do grupo na procura de fenómenos a modelar. Foram <b>satisfatoriamente</b> atribuídas tarefas a <b>quase todos</b> os elementos do grupo durante a realização da atividade investigativa. O grupo manifestou <b>algumas dificuldades</b> na definição de estratégias que permitissem conduzir e solucionar a atividade investigativa.	Revela <b>falta</b> de organização, responsabilidade, autonomia e motivação, não procurando envolver todos os elementos do grupo na procura de fenómenos a modelar. Foram <b>incorretamente</b> atribuídas tarefas a todos os elementos do grupo durante a realização da atividade investigativa. O grupo manifestou <b>grandes dificuldades</b> na definição de estratégias que permitissem conduzir e solucionar a atividade investigativa.	

			O trabalho de grupo foi <b>entregue com algum tempo de atraso.</b>	O trabalho de grupo foi entregue com <b>manifesto tempo de atraso ou não foi entregue.</b>	
<b>Espírito Crítico e Criatividade</b>	Manifesta <b>elevada</b> criatividade na seleção do fenômeno a modelar. Durante a realização da atividade investigativa manifesta ter <b>um elevado</b> nível de espírito crítico, analisando de <b>forma correta</b> se os resultados obtidos estão <b>efetivamente corretos.</b>	Manifesta <b>boa</b> criatividade na seleção do fenômeno a modelar, embora com pequenas imprecisões. Durante a realização da atividade investigativa manifesta ter um <b>quase elevado</b> nível de espírito crítico, analisando de <b>forma correta</b> se os resultados obtidos estão corretos, embora com <b>ligeiras imprecisões.</b>	Manifesta <b>alguma</b> criatividade na seleção do fenômeno a modelar, com <b>algumas imprecisões.</b> Durante a realização da atividade investigativa manifesta <b>algum</b> espírito crítico analisando os resultados obtidos com <b>alguma imprecisão.</b>	Manifesta <b>muito pouca</b> criatividade na seleção do fenômeno a modelar, com <b>elevadas imprecisões.</b> Durante a realização da atividade investigativa manifesta <b>falta</b> de espírito crítico analisando os resultados obtidos com <b>elevadas imprecisões.</b>	
<b>Saber técnico e tecnológico</b>	Manuseia o software GeoGebra de <b>forma excelente.</b> Interpreta <b>corretamente</b> os resultados obtidos pelo software. Indica <b>corretamente</b> os cálculos efetuados.	Manuseia o software GeoGebra de <b>forma quase excelente.</b> Interpreta os resultados obtidos através do software com <b>ligeiras imprecisões.</b> Indica os cálculos efetuados com <b>ligeiras imprecisões.</b>	Manuseia o software GeoGebra com <b>alguma dificuldade.</b> Interpreta com os resultados obtidos pelo software com <b>algumas imprecisões.</b> Indica os cálculos efetuados com <b>algumas imprecisões.</b>	Manuseia o software GeoGebra com <b>grande dificuldade.</b> Interpreta os resultados obtidos pelo software com <b>elevadas imprecisões.</b> Indica os cálculos efetuados com <b>elevadas imprecisões.</b>	

<b>Relacionamento interpessoal</b>	Manifesta um <b>elevado nível</b> de relacionamento interpessoal, espírito colaborativo e cooperativo.	Manifesta <b>bom</b> nível de relacionamento interpessoal, espírito colaborativo e cooperativo.	Manifesta <b>algum nível</b> de relacionamento interpessoal, espírito colaborativo e cooperativo.	Manifesta <b>pouco nível</b> de relacionamento interpessoal, espírito colaborativo e cooperativo.	
------------------------------------	--	---	---	---	--

**Escala avaliativa no âmbito da atividade investigativa – Modelação de uma parábola**

	<b>Níveis de desempenho</b>			
	<b>Exemplar</b> 20	<b>Competente</b> [15;20[	<b>Revela algum progresso</b> [10;15[	<b>Necessita de progredir</b> [0;10[
<b>Cotação de Critérios de avaliação</b>	<b>Pontuação</b>			
<b>Aplicação de conhecimentos em contextos matemáticos e não matemáticos</b>	60 pontos	[45;60[pontos	[30;45[pontos	[0;30[pontos
<b>Compreensão escrita e expressão oral</b>	40 pontos	[30;40[pontos	[20;30[pontos	[0;20[pontos
<b>Autonomia/Organização/Empenho</b>	35 pontos	[26;35[pontos	[17,5;26[pontos	[0;17,5[pontos
<b>Espírito Crítico e Criatividade</b>	30 pontos	[24; 30[pontos	[15;24[pontos	[0;15[pontos
<b>Saber técnico e tecnológico</b>	25 pontos	[16;25[pontos	[12;16[pontos	[0;16[pontos
<b>Relacionamento interpessoal</b>	10 pontos	[7;10[pontos	[5;7[pontos	[0;5[pontos

## Grelha de Avaliação - Modelação de uma parábola

	Critérios de Avaliação						Cotação
Grupos	Aplicação de conhecimentos em contextos matemáticos e não matemáticos	Compreensão escrita e expressão oral	Autonomia/Organização/Empenho	Espírito Crítico e Criatividade	Saber técnico e tecnológico	Relacionamento interpessoal	
<b>Grupo A</b>	Aplica o conhecimento matemático com pequenas imprecisões, nomeadamente na indicação dos zeros da função, extremos, monotonia, sinal, coordenadas do vértice; não indicação da expressão algébrica na caixa de entrada do GeoGebra; o grupo utilizou a calculadora	Interpretação quase plena do enunciado, reconhecendo a linguagem matemática; Pequenas imprecisões ao nível do raciocínio matemático; bom nível de comunicação matemática durante a atividade investigativa (38 pontos)	Bom nível de organização, responsabilidade, autonomia e organização procurando envolver quase todos os elementos do grupo; foram satisfatoriamente atribuídas tarefas ao grupo; O grupo conseguiu de forma quase plena definir estratégias que permitissem solucionar a atividade (26 pontos)	Elevado nível de criatividade na seleção do fenómeno a modelar Algum nível de espírito crítico na análise dos resultados (27 pontos)	Manuseia o software GeoGebra de forma quase excelente; ligeiras imprecisões na indicação dos cálculos (20 pontos)	Elevado nível de relacionamento interpessoal (10 pontos)	175 pontos

	gráfica para efetuar os cálculos, no entanto, pretendia-se que o fizessem com recurso ao GeoGebra (54 pontos)						
<b>Grupo B</b>	Aplica o conhecimento matemático com pequenas imprecisões, nomeadamente na indicação dos zeros da função, extremos, monotonia, sinal, coordenadas do vértice; o grupo utilizou a calculadora gráfica para efetuar os cálculos, no entanto, pretendia-se que o fizessem com recurso ao GeoGebra	Interpretação quase plena do enunciado, reconhecendo a linguagem matemática; Pequenas imprecisões ao nível do raciocínio matemático; bom nível de comunicação matemática durante a atividade investigativa (39 pontos)	Bom nível de organização, responsabilidade, autonomia e organização procurando envolver quase todos os elementos do grupo; foram satisfatoriamente atribuídas tarefas ao grupo; O grupo conseguiu de forma quase plena definir estratégias que permitissem solucionar a atividade (29 pontos)	Elevado nível de criatividade na seleção do fenómeno a modelar quase elevado nível de espírito crítico (29,5 pontos)	Manuseia o software GeoGebra de forma quase excelente; ligeiras imprecisões na indicação dos cálculos (23 pontos)	Elevado nível de relacionamento interpessoal (10 pontos)	186.5 pontos

	(56 pontos)						
<b>Grupo C</b>	<p>Aplica o conhecimento matemático com algumas imprecisões, nomeadamente a não indicação dos zeros da função, extremos, monotonia, sinal, coordenadas do vértice; (44 pontos)</p>	<p>Interpretação quase plena do enunciado; não evidenciam a linguagem matemática por não indicarem os cálculos solicitados no enunciado; bom nível de comunicação matemática durante a atividade investigativa (32 pontos)</p>	<p>Bom nível de organização, responsabilidade, autonomia e organização procurando envolver quase todos os elementos do grupo; foram satisfatoriamente atribuídas tarefas ao grupo; O grupo conseguiu de forma quase plena definir estratégias que permitissem solucionar a atividade (26 pontos)</p>	<p>Elevado nível de criatividade na seleção do fenómeno a modelar Algum nível de espírito crítico na análise dos resultados (25 pontos)</p>	<p>Manuseia o software GeoGebra de forma quase excelente Não indicação dos cálculos (16 pontos)</p>	<p>Elevado nível de relacionamento interpessoal (10 pontos)</p>	<p>153 pontos</p>
<b>Grupo D</b>	<p>Aplica o conhecimento matemático com pequenas imprecisões, nomeadamente na indicação dos zeros da função, extremos, monotonia, sinal,</p>	<p>Interpretação quase plena do enunciado, reconhecendo a linguagem matemática; Pequenas imprecisões ao nível do raciocínio matemático;</p>	<p>Bom nível de organização, responsabilidade, autonomia e organização procurando envolver quase todos os elementos do grupo; foram satisfatoriamente atribuídas tarefas ao grupo; O grupo conseguiu de forma quase plena definir estratégias que permitissem solucionar a atividade (26 pontos)</p>	<p>Elevado nível de criatividade na seleção do fenómeno a modelar Algum nível de espírito crítico na análise dos resultados (27 pontos)</p>	<p>Manuseia o software GeoGebra de forma quase excelente; indicação dos cálculos com ligeiras imprecisões</p>	<p>Elevado nível de relacionamento interpessoal (10 pontos)</p>	<p>178 pontos</p>

	coordenadas do vértice; não indicação da expressão algébrica na caixa de entrada do GeoGebra; o grupo utilizou a calculadora gráfica para efetuar os cálculos, no entanto, pretendia-se que o fizessem com recurso ao GeoGebra (55 pontos)	bom nível de comunicação matemática durante a atividade investigativa (38 pontos)			(22 pontos)		
--	--	---	--	--	-------------	--	--