



# Distribuições Hiperbólicas Generalizadas: Aplicações ao Mercado Português

**Vítor Manuel Mendonça Teixeira**

Dissertação para obtenção do grau de Mestre em Matemática  
(Área de Especialização de Matemática para o Ensino)

Orientador: Professor Doutor José Luis da Silva

Funchal, Outubro de 2006

## **Resumo**

O objectivo desta tese é discutir o uso das distribuições hiperbólicas generalizadas como modelo para os retornos logarítmicos de 4 activos do mercado de capitais Português. Os activos em análise são o índice Português PSI 20 e as 3 maiores empresas pertencentes ao PSI 20: PT, EDP e BCP. Os dados são constituídos pelos valores de fecho diário durante mais de 8 anos. Utilizando o software R procederemos à estimação dos parâmetros das distribuições para ajustamento aos dados empíricos. Para medir o grau de ajustamento das distribuições aos dados empíricos usamos os gráficos QQ-plots e 4 distâncias: Kolmogorov-Smirnov, Kuiper, Anderson-Darling e Fajardo-Farias-Ornelas. Os resultados obtidos permitem concluir que o melhor ajustamento é feito pela hiperbólica generalizada e em seguida a distribuição normal inversa gaussiana. Todas as distribuições desta família ajustam-se muito melhor que a distribuição normal. Por último temos uma aplicação ao cálculo do preço de derivados financeiros, nomeadamente a fórmula de uma opção de compra Europeia no modelo discutido.

### **Palavras chave**

Distribuições hiperbólicas generalizadas; Distribuições de caudas pesadas; Análise estatística de preços de activos; Função de verosimilhança máxima; Modelo de Black-Scholes; Movimento generalizado hiperbólico de Lévy; Transformada de Esscher.

## **Abstract**

The aim of this thesis is to discuss the use of the generalized hyperbolic distributions to model log-returns of 4 Portuguese assets. We analyse the Portuguese index PSI 20 as well as the 3 biggest assets which compose the PSI 20: PT, EDP, BCP. The data are daily close prices collected for more than 8 years. Using the R software we estimate the parameters to fit distributions to the empirical data. We measure the goodness-of-fit by QQ-plots graphics and 4 distances: Kolmogorov-Smirnov, Kuiper, Anderson-Darling and Fajardo-Farias-Ornelas. The obtained results allow to conclude that generalized hyperbolic performs a better fitting followed by normal inverse gaussian; all of them performs better than normal distribution. Finally, we apply this model to obtain option prices, namely European call option, for the proposed model.

## **Keywords**

Generalized hyperbolic distributions; Heavy tailed distributions; Statistical analysis of stock prices; Maximum likelihood estimation; Black-Scholes model; Generalized hyperbolic Lévy motion; Esscher transform.

## **Agradecimentos**

Agradeço ao Prof. Dr. José Luís da Silva por ter proposto este tema, pela orientação científica e por ter criado um bom ambiente de trabalho.

Ao Departamento de Matemática e Engenharias da UMa, à comissão coordenadora do mestrado e ao Centro de Ciências Matemáticas pela organização, coordenação e disponibilidade de instalações durante a realização desta tese.

À Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Ana Abreu, Dr. Gabriel Gomes e Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Rita Vasconcelos, pelas discussões e alguma paciência em responder a questões eventualmente elementares.

À Secretaria Regional da Educação a licença sabática durante a qual foi elaborada a tese.

À minha Família pelo apoio durante a realização da tese e do mestrado em geral.

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Análise Estatística dos Dados</b>	<b>3</b>
2.1	Introdução . . . . .	3
2.2	Retornos logarítmicos . . . . .	4
2.3	Alterações de escala . . . . .	10
2.4	Log-retornos com cauda pesada e assimétrica . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Distribuições Hiperbólicas Generalizadas</b>	<b>22</b>
3.1	Introdução . . . . .	22
3.2	Distribuições . . . . .	23
3.3	Caracterização dos parâmetros das distribuições hiperbólicas generalizadas . . . . .	25
3.4	Representação como distribuição normal com mistura variância-média . . . . .	29
3.5	Função geradora de momentos . . . . .	30
3.6	Subclasses . . . . .	34
3.7	Distribuições limites . . . . .	35
3.8	Comportamento das caudas . . . . .	38
3.9	A distribuição hiperbólica generalizada t-Student assimétrica . . . . .	40
<b>4</b>	<b>Ajustamento das Distribuições aos Dados Empíricos</b>	<b>44</b>
4.1	Caracterização estatística dos dados . . . . .	44
4.2	Estimação de parâmetros . . . . .	45
4.3	Gráficos das distribuições ajustadas aos activos . . . . .	51
4.4	Testes de ajustamento . . . . .	54
4.5	Conclusão . . . . .	63

<b>5</b>	<b>Aplicações ao Cálculo do Preço de Derivados</b>	<b>67</b>
5.1	Introdução . . . . .	67
5.2	Movimento generalizado hiperbólico de Lévy . . . . .	68
5.3	Transformada de Esscher . . . . .	70
5.4	Preços de derivados com transformada de Esscher . . . . .	71
<b>A</b>	<b>Conjunto de Dados e Aspectos Computacionais</b>	<b>75</b>
A.1	Software R . . . . .	75
A.2	Conjunto de dados . . . . .	75
A.3	Descrição de procedimentos utilizados . . . . .	76
<b>B</b>	<b>Funções de Bessel</b>	<b>80</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>84</b>

# Lista de Figuras

2.1	Valores de fecho diário do PSI 20, PT, EDP e BCP. . . . .	5
2.2	Representação dos log-retornos do PSI 20. PT, EDP e BCP. . . . .	6
2.3	A densidade empírica usando a "Gaussian Kernel smoother" e a distribuição normal ajustada aos log-retornos. . . . .	8
2.4	A densidade empírica e a densidade normal ajustada aos log-retornos com uma escala logarítmica no eixo vertical. . . . .	9
2.5	A densidade empírica do PSI 20 para log-retornos diários, semanais e mensais e a respectiva distribuição normal ajustada aos dados. . . . .	12
2.6	A densidade empírica do PSI 20 para log-retornos diários, semanais e mensais e a respectiva distribuição normal ajustada aos dados usando uma escala logarítmica no eixo vertical. . . . .	13
2.7	A densidade empírica da PT para log-retornos semanais e mensais e a respectiva distribuição normal ajustada aos dados nos gráficos da esquerda e nos da direita usando uma escala logarítmica no eixo vertical. . . . .	14
2.8	A densidade empírica do EDP para log-retornos semanais e mensais e a respectiva distribuição normal ajustada aos dados nos gráficos da esquerda e nos da direita usando uma escala logarítmica no eixo vertical. . . . .	15
2.9	A densidade empírica do BCP para log-retornos semanais e mensais e a respectiva distribuição normal ajustada aos dados nos gráficos da esquerda e nos da direita usando uma escala logarítmica no eixo vertical. . . . .	15
2.10	QQ-plots do índice PSI 20 em relação à distribuição normal para diferentes intervalos de tempo. Inclui-se nestes gráficos o intervalo de tempo correspondente a duas semanas como mais um factor de comparação. . . . .	16

2.11	QQ-plots do activo PT em relação à distribuição normal para diferentes intervalos de tempo. Inclui-se nestes gráficos o intervalo de tempo correspondente a duas semanas como mais um factor de comparação. . . . .	17
2.12	QQ-plots do activo EDP em relação à distribuição normal para diferentes intervalos de tempo. Inclui-se nestes gráficos o intervalo de tempo correspondente a duas semanas como mais um factor de comparação. . . . .	18
2.13	QQ-plots do activo BCP em relação à distribuição normal para diferentes intervalos de tempo. Inclui-se nestes gráficos o intervalo de tempo correspondente a duas semanas como mais um factor de comparação. . . . .	19
3.1	Comparação entre $GH(-0, 5; 1; 0; 1; 0)$ e normal $N(0, 1)$ . . . . .	24
3.2	Comparação entre 3 distribuições com $\lambda = 1.3$ , $\alpha = 1$ , $\beta = 0$ , $\delta = 1$ e $\mu = 0, 1$ e $2$ . . . . .	26
3.3	Comparação entre 3 distribuições com $\lambda = 1.3$ , $\alpha = 1$ , $\beta = 0$ , $\mu = 0$ e $\delta = 1, 2$ e $3$ . . . . .	26
3.4	Comparação entre 3 distribuições com $\lambda = 1.3$ , $\alpha = 1$ , $\delta = 1$ , $\mu = 0$ e em que à esquerda temos $\beta = 0, -0.3$ e $0.6$ e à direita temos $\beta = 0, 0.3$ e $-0.6$ . . . . .	27
3.5	Comparação entre 3 distribuições com $\lambda = 1, 3$ , $\beta = 0$ , $\delta = 1$ , $\mu = 0$ e $\alpha = 0, 2$ e $0,7$ . . . . .	28
3.6	Comparação entre três distribuições com $\lambda = 1.3$ , $\beta = 0$ , $\mu = 0$ e $\alpha = 1$ , $\delta = 1.2$ (preto), $\alpha = 1.5$ , $\delta = 1$ (azul) e $\alpha = 2.25$ , $\delta = 0,8$ (vermelho) . . . . .	29
3.7	Funções densidade das distribuições inversas gaussianas generalizadas: $\lambda = 0$ , $\chi = 1$ (preto), $\lambda = 1$ , $\chi = 1$ (azul) e $\lambda = 18$ , $\chi = 3$ (vermelho) . . . . .	31
3.8	Representação da densidade de 3 distribuições hiperbólicas generalizadas com $\lambda = 1.3$ , $\alpha = 1$ , $\beta = 0, 1$ , $\mu = 0$ e $\delta = 1, \delta = 5$ e $\delta = 15$ . . . . .	33
3.9	Representação da densidade de 3 distribuições hiperbólicas generalizadas com $\alpha = 1$ , $\beta = 0, 1$ , $\delta = 1$ , $\mu = 0$ e $\lambda = 1, \lambda = 6$ e $\lambda = 10$ . . . . .	33
3.10	Comparação entre as curvas densidade das distribuições $GH(0.5, 1.615, 0, 1, 0)$ , $NIG(-0.5, 1, 0, 1, 0)$ e $HYP(1, 1.875, 0, 1, 0)$ . . . . .	35

3.11	A curva densidade de $GH(0, 5; 1; 0; 1; 0)$ é sobreposta pela curva densidade de $N(0, 1)$ . Os parâmetros da distribuição hiperbólica generalizada foram ajustados para $\alpha = \delta = 26$ , um valor relativamente grande para aproximar o infinito. A azul temos a curva densidade de $GH(0, 5; 1, 0, 10)$ que serve de comparação. . . . .	36
3.12	A distribuição hiperbólica generalizada de parâmetros $GH(-2; 1.0 \times 10^{-10}; 0; 2; 0)$ (preto) ajusta-se à distribuição T-student com 4 graus de liberdade(vermelho tracejado). Tomamos para $\alpha$ o valor $1.0 \times 10^{-10}$ para aproximar a zero. A azul temos a curva densidade de $GH(1, 1, 0, 1, 0)$ . . . . .	37
3.13	A distribuição hiperbólica generalizada de parâmetros $GH(-0, 5; 1.0 \times 10^{-10}; 0; 1; 0)$ ajusta-se à distribuição de Cauchy. Temos como comparação a curva densidade de $GH(0.5; 1; 0; 1; 0)$ . . . . .	38
3.14	Comportamento das caudas de distribuições hiperbólicas generalizadas com diferentes valores de $\lambda$ com $\alpha = 1, \beta = 0, \delta = 1$ e $\mu = 0$ . . . . .	39
3.15	Usando a fórmula mencionada em (3.12) temos uma aproximação para as caudas das distribuições hiperbólicas generalizadas. . . . .	40
3.16	Comparação entre as caudas de $GH(-0, 5; 1; 0; 1; 0)$ e as distribuições limites Normal, T-student e Cauchy . Todas as distribuições têm média 0 e variância 1 excepto a T-student em que como a variância é dada por $\sigma^2 = n/(n - 2)$ em que $n$ representa os graus de liberdade. Neste gráfico $n = 20$ logo a variância é 1, 11. . . . .	41
3.17	Representação da densidade de distribuições generalizadas hiperbólicas t-Student assimétricas em que $\delta = 1, \nu = 1$ e à esquerda temos $\mu = 0, -2, -4$ e respectivamente $\beta = 1, 1.25, 1.5$ e à direita temos os valores simétricos para $\mu$ e para $\beta$ . . . . .	43
4.1	Gráficos das densidades dos log-retornos do activo PSI20, das distribuições normal e da distribuição generalizada hiperbólica e subclasses ajustadas aos dados. O gráfico direito tem uma escala logarítmica no eixo vertical. . . . .	52
4.2	Gráficos pormenorizados das caudas esquerda e direita dos log-retornos do activo PSI20, da distribuição normal e da distribuição generalizada hiperbólica e subclasses ajustadas aos dados. . . . .	53

4.3	Gráficos das densidades dos log-retornos do activo PT, das distribuições normal e da distribuição generalizada hiperbólica e subclasses ajustadas aos dados. O gráfico direito tem uma escala logarítmica no eixo vertical. . . . .	54
4.4	Gráficos pormenorizados das caudas esquerda e direita dos log-retornos do activo PT, da distribuição normal e da distribuição generalizada hiperbólica e subclasses ajustadas aos dados. . . . .	55
4.5	Gráficos das densidades dos log-retornos do activo EDP, das distribuições normal e da distribuição generalizada hiperbólica e subclasses ajustadas aos dados. O gráfico direito tem uma escala logarítmica no eixo vertical. . . . .	56
4.6	Gráficos pormenorizados das caudas esquerda e direita dos log-retornos do activo EDP, da distribuição normal e da distribuição generalizada hiperbólica e subclasses ajustadas aos dados. . . . .	57
4.7	Gráficos das densidades dos log-retornos do activo BCP, das distribuições normal e da distribuição generalizada hiperbólica e subclasses ajustadas aos dados. O gráfico direito tem uma escala logarítmica no eixo vertical. . . . .	58
4.8	Gráficos pormenorizados das caudas esquerda e direita dos log-retornos do activo EDP, da distribuição normal e da distribuição generalizada hiperbólica e subclasses ajustadas aos dados. . . . .	59
4.9	QQ-plots do activo PSI20 versus distribuição normal, hiperbólica, normal inversa gaussiana e hiperbólica generalizada. . . . .	64
4.10	QQ-plots do activo PT versus distribuição normal e distribuição hiperbólica. . . . .	65
4.11	QQ-plots do activo EDP versus distribuição normal e distribuição generalizada hiperbólica. . . . .	65
4.12	QQ-plots do activo BCP versus distribuição normal e distribuição normal inversa gaussiana. . . . .	66

# Lista de Tabelas

2.1	Datas em que os dados foram recolhidos e o número de observações diárias, semanais e mensais. . . . .	4
2.2	Parâmetros estimados para a distribuição normal ajustada aos log-retornos dos dados para intervalos de observação diários, semanais e mensais. . . . .	11
2.3	Quantis empíricos e estimados para a distribuição normal ajustada aos dados. . . . .	20
4.1	Dados estatísticos do activo PSI20, PT, EDP e BCP. . . . .	45
4.2	Parâmetros estimados para a subclasse hiperbólica ( $\lambda = 1$ ) e os valores do log-likelihood obtidos. . . . .	50
4.3	Parâmetros estimados para a subclasse normal inversa Gaussiana ( $\lambda = -0.5$ ) e os valores do log-likelihood obtidos. . . . .	50
4.4	Parâmetros estimados para a hiperbólica generalizada e os valores do log-likelihood obtidos. . . . .	50
4.5	Distâncias de Kolmogorov-Smirnov. . . . .	59
4.6	Distâncias de Kuiper. . . . .	60
4.7	Distâncias de Anderson-Darling. . . . .	61
4.8	Distâncias Fajardo-Faria-Ornelas. . . . .	61

# Capítulo 1

## Introdução

O objectivo desta tese é modelar os retornos logarítmicos de activos do mercado Português de capitais usando as distribuições hiperbólicas generalizadas. O uso das distribuições hiperbólicas generalizadas na matemática financeira foi introduzido por Eberlein et al. [EK95]. Depois seguiram uma série de trabalhos nesta área de onde se destacam as tese [Kel97], [Pra99] et [Rai00]. Dentro da mesma linha de ideias estão também os trabalhos de Fajardo et al. [FF04], [FFO06] e ainda [Jon04].

O conjunto de dados aqui analisado é constituído pelo índice PSI 20 principal referência do mercado de capitais Português e 3 dos activos com maior capitalização: PT, EDP e BCP. Foram recolhidos os valores de fecho diário no período compreendido entre Março de 1996 e Fevereiro de 2006, ver Tabela 2.1 na página 4 para mais detalhes sobre os mesmos.

No Capítulo 2 estudamos os retornos logarítmicos dos activos considerados e ajustamos a distribuição normal aos dados. A alteração de escala na recolha dos dados (por exemplo semanais, mensais etc.) permitem concluir que existe uma tendência para a distribuição gaussiana; este efeito é conhecido como agregação gaussiana. Finalmente na Secção 2.4 concluímos que a distribuição normal não se ajusta a conjunto de dados com assimetria e caudas pesadas.

No Capítulo 3 introduzimos as distribuições hiperbólicas generalizadas assim como fazemos uma caracterização das suas propriedades por intermédio da variação dos seus parâmetros, ver Secção 3.3. Uma das características mais notáveis destas distribuições é a sua representação em termos da distribuição normal com mistura variância-média da distribuição generalizada inversa gaussiana. Este facto é relevante na medida em que permite concluir que as distribuições generalizadas hiperbólicas são infinitamente divisíveis. Por um lado, porque temos a divisibi-

lidade infinita das distribuições generalizadas inversas gaussianas, ver Barndorff-Nielsen et al. [BNH77], por outro porque podemos construir os processos de Lévy associados a estas distribuições. O estudo das subclasses mais importantes é feito na Secção 3.6: normal inversa gaussiana e hiperbólica. Finalmente apresentamos as distribuições limites e limites assintóticos nas Secções 3.7 e 3.8. Fazemos ainda uma referência a uma distribuição que não será usada para ajustamento mas que possui boas características para esse fim, ver Secção 3.9.

O Capítulo 4 apresenta o carácter mais prático da tese. A estimação dos parâmetros das distribuições hiperbólicas generalizadas é efectuada pelo método da máxima verosimilhança que se encontra disponível no software R. Após a estimação dos parâmetros procedeu-se aos testes de ajustamento usando os QQ-plots e as distâncias referenciadas na literatura: Kolmogorov-Smirnov, Kuiper, Anderson-Darling e Fajardo-Farias-Ornelas. Os resultados obtidos levam-nos a concluir que em primeiro lugar qualquer uma das distribuições usadas apresentam um melhor ajustamento do que a distribuição normal. Dentro da família das distribuições hiperbólicas generalizadas podemos destacar a hiperbólica generalizada por apresentar um melhor ajustamento aos dados empíricos.

No último capítulo fazemos uma aplicação do modelo hiperbólico generalizado ao cálculo do preço de derivados. O problema principal reside no facto de não existir uma medida martingala equivalente única, isto porque sendo o processo generalizado hiperbólico de Lévy puramente descontínuo estamos na presença de um mercado incompleto. A escolha mais comum na literatura é chamada transformada de Esscher sendo que matematicamente é a mais simples. Finalmente derivamos a fórmula para o preço de uma opção Europeia neste modelo embora que o seu cálculo exige algum esforço computacional.

Por fim, gostaria de sugerir alguns desenvolvimentos desta tese:

1. Estudar outros algoritmos de estimação dos parâmetros das distribuições;
2. Aplicações ao cálculo do “value at risk” (VaR) ou outras medidas de risco para o modelo hiperbólico generalizado;
3. Implementar a transformada rápida de Fourier (FFT) para calcular o preço de opções.

# Capítulo 2

## Análise Estatística dos Dados

### 2.1 Introdução

Neste capítulo iremos analisar o índice PSI 20, principal referência do mercado de valores Português assim como as cotações das 3 maiores empresas em termos de capitalização pertencentes ao índice PSI 20. Recolhemos o valor de fecho diário entre os dias 19 de Março de 1996 e 17 de Fevereiro de 2006 o que corresponde a pouco menos de 10 anos.<sup>1</sup> Neste período de tempo temos 2485 observações diárias ao que correspondem 497 observações semanais e 124 observações mensais, ver Tabela 2.1 para mais detalhes. O conteúdo deste capítulo segue de perto as ideias apresentadas em [Ben04, Capítulo 2].

A Figura 2.1 mostra-nos a evolução dos 4 conjuntos de dados recolhidos. No caso particular do índice PSI 20 temos uma subida muito segura e consistente a partir de 1996, que se acentou em 1997 e culminou com um máximo que é atingido em meados de Abril de 1998. A partir desse momento o mercado entra em descida culminando com a "queda" de 1 de Outubro de 1998 em que encerra com uma variação de -9%. A partir desse dia recuperou num movimento ao qual é dado o nome técnico de rebound até Janeiro de 1999, tendo entrado em quedas ligeiras até ao final de Setembro desse ano. O índice começa então uma subida fulgurante até Março de 2000 naquilo que ficou conhecido como a bolha das dot.coms atingindo valores nunca mais alcançados pelo PSI 20 até aos dias de hoje. Após esse valor máximo o índice entra em queda até Setembro de 2001 com os atentados terroristas em Nova York. Existe uma recuperação do índice nos meses seguintes para então entrar em queda até Setembro de 2002 e consolidar durante o ano de

---

<sup>1</sup>Dados cordialmente fornecidos por John-Patrik Gilgen LGT Bank (Schweiz) AG.

Activo	Início	Fim	Obs. diárias	Obs. semanais	Obs. mensais
PSI 20	19/03/1996	17/02/2006	2485	497	124
PT	02/06/1995	17/02/2006	2665	533	133
EDP	17/06/1997	17/02/2006	2171	434	108
BCP	02/01/1992	17/02/2006	3490	698	174

Tabela 2.1: Datas em que os dados foram recolhidos e o número de observações diárias, semanais e mensais.

2003 a partir do qual entrou numa subida consistente que se tornou mais acentuada no fim do ano de 2005 até princípios de 2006. Os restantes gráficos podem ser lidos de forma análoga.

## 2.2 Retornos logarítmicos

Consideremos uma série de preços de um activo observados nos instantes  $t_0, t_1, t_2, \dots, t_N$ . O preço destes activos serão representadas por  $s(i)$  no instante  $t_i$ . O retorno no instante  $t_i$  do investimento num activo no instante  $t_{i-1}$  é dado por

$$y(i) = \frac{s(i) - s(i-1)}{s(i-1)} \quad i = 1, \dots, N.$$

À luz do modelo de Black-Scholes é mais natural considerar o chamado retorno logarítmico, que é o logaritmo do preço relativo variando no período de tempo em questão. O retorno logarítmico no instante  $t_i$  de um investimento no instante  $t_{i-1}$  é dado por

$$x(i) = \ln\left(\frac{s(i)}{s(i-1)}\right) = \ln(s(i)) - \ln(s(i-1)), \quad i = 1, \dots, N.$$

Se os preços não forem muito voláteis, a diferença entre os retornos  $y(i)$  e os retornos logarítmicos  $x(i)$  são irrelevantes. O retorno logarítmico de um activo é normalmente referido como log-retorno designação que iremos adoptar de agora em diante. Os preços observados serão feitos em intervalos equidistantes, o que significa que  $t_i - t_{i-1} = \Delta t$  em que  $\Delta t$  é constante. Medindo o tempo em dias, significa que consideramos o preço de fecho dos activos todos os dias e não consideramos fins de semana nem feriados. Ou seja consideramos apenas os dias de negociação "trading days" em que o incremento de tempo  $\Delta t = 1$ . Muitas vezes o tempo é

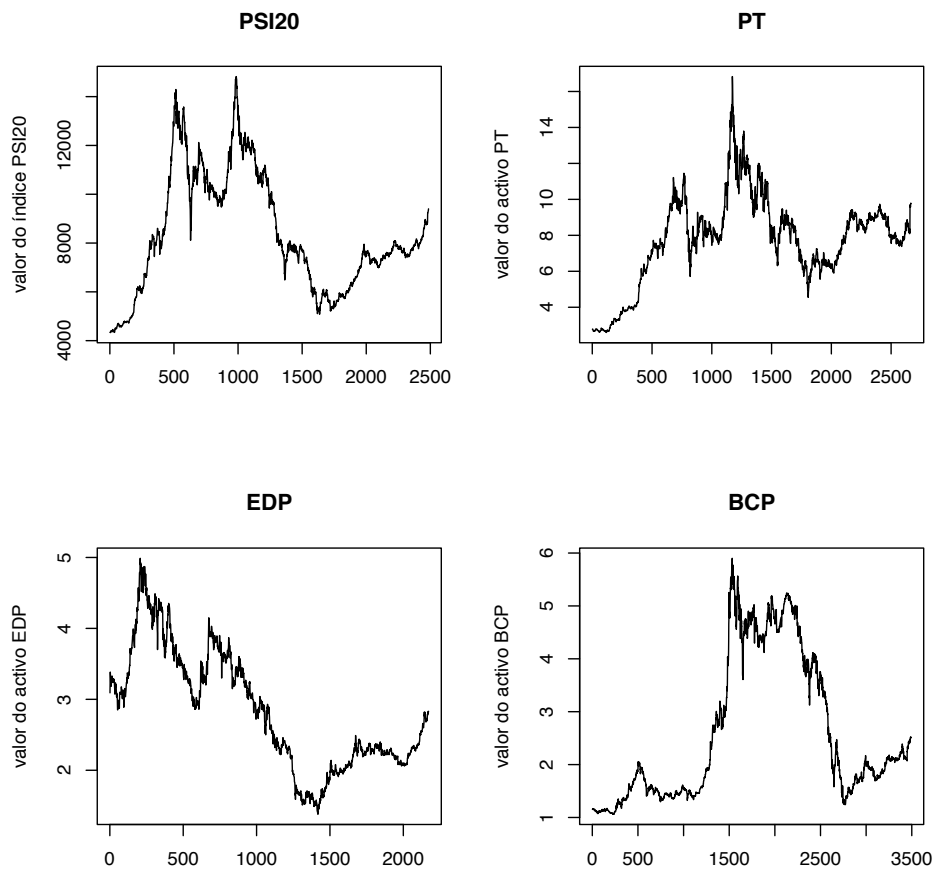


Figura 2.1: Valores de fecho diário do PSI 20, PT, EDP e BCP.

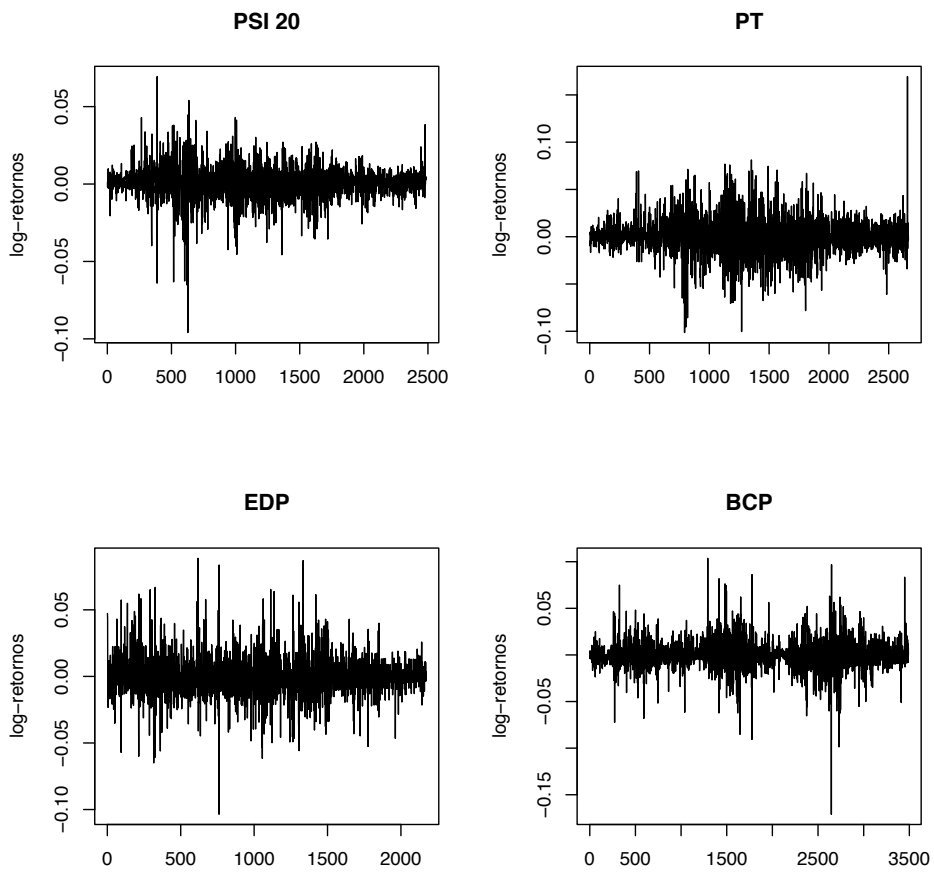


Figura 2.2: Representação dos log-retornos do PSI 20, PT, EDP e BCP.

medido em anos, mas os preços são na mesma considerados numa base diária. Usando a convenção de 252 dias de negociação num ano<sup>2</sup> temos  $\Delta t = \frac{1}{252}$  e assim os preços diários  $s(i)$  são observados nos instantes  $t_i = \frac{i}{252}$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, 252$ . Em  $t_{252} = 1$ , temos um ano completo de negociação.

Contrariamente aos retornos  $y(i)$ , os log-retornos  $x(i)$  são aditivos no sentido em que a soma de  $n$  log-retornos consecutivos é igual aos log-retornos correspondentes aos log-retornos respeitantes ao período de tempo inteiro, ou seja

$$x(i) + \dots + x(i+n-1) = \ln\left(\frac{s(i+n-1)}{s(i-1)}\right) = \ln(s(i+n-1)) - \ln(s(i-1)). \quad (2.1)$$

Vamos de seguida investigar algumas das propriedades estatísticas dos log-retornos descritas pelo movimento Browniano geométrico. Em primeiro lugar fazemos uma transformação logarítmica na expressão

$$S(t) = S(0) \exp(\mu t + \sigma B(t)), \quad t \geq 0$$

onde  $\mu$  representa a tendência do activo e  $\sigma$  representa a volatilidade do activo. Agora vejamos o incremento durante um período de tempo.

$$X(t_i) := \ln\left(\frac{S(t_i)}{S(t_{i-1})}\right) = \mu\Delta t + \sigma(B(t_i) - B(t_{i-1})), \quad i = 1, 2, \dots$$

Usando a definição de movimento Browniano, os incrementos  $B(t_i) - B(t_{i-1})$ ,  $i = 1, 2, \dots$  são variáveis aleatórias independentes com distribuição normal  $N(0, \Delta t)$ . Multiplicando cada incremento por  $\sigma$  e adicionando  $\mu\Delta t$  implica que  $X(t_i)$  tenha distribuição normal  $N(\mu\Delta t, \sigma^2\Delta t)$ . Assim, no modelo de Black-Scholes a família  $\{X(t_i), i \in \mathbb{N}\}$  de v. a. é i. i. d. com distribuição  $N(\mu\Delta t, \sigma^2\Delta t)$ .

Tendo  $N$  dados de log-retornos  $x(1), x(2), \dots, x(N)$ , estimamos a média  $\mu$  e a variância  $\sigma^2$  usando

$$\hat{\mu} = \frac{1}{N\Delta t} \sum_{n=1}^N x(i), \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{(N-1)\Delta t} \sum_{i=1}^N (x(i) - \hat{\mu})^2$$

A Figura 2.3 mostra-nos os log-retornos dos activos considerados. O "Gaussian Kernel smoother" é usado como um estimador não paramétrico das densidades. Na mesma figura incluímos a distribuições normal com parâmetros estimados. Observamos que a distribuição normal é mais larga no centro em comparação com a distribuição empírica. Isso reflecte-se numa probabilidade de cauda mais

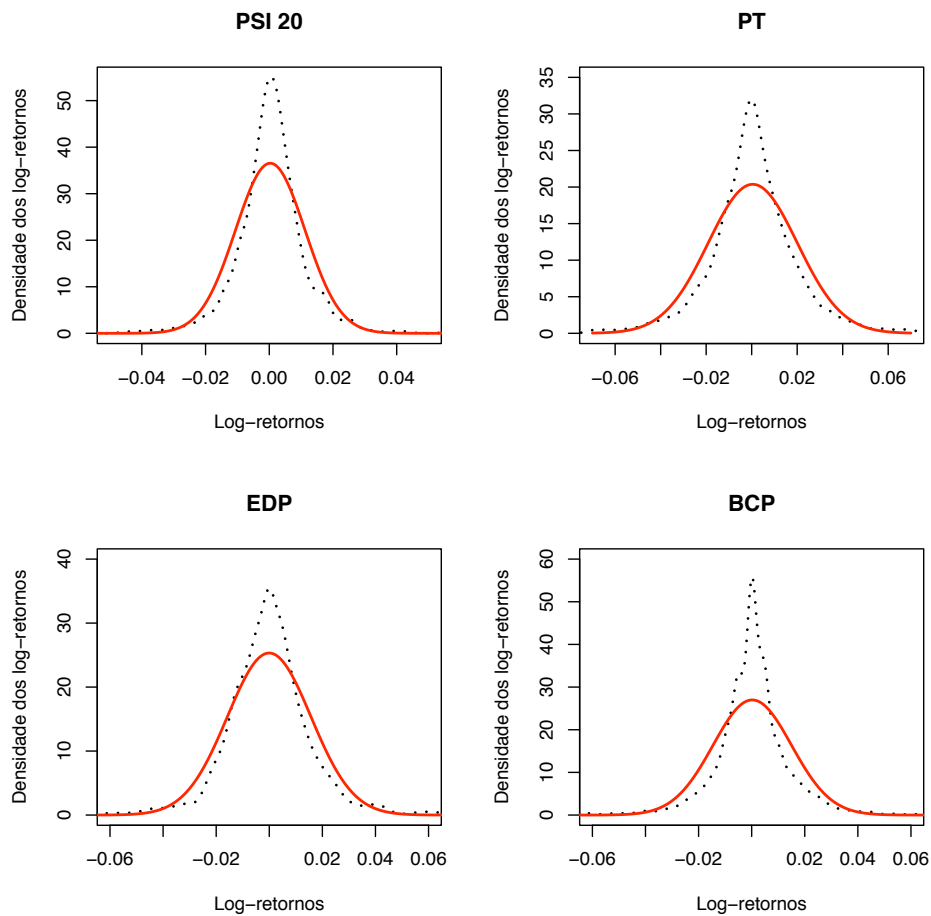


Figura 2.3: A densidade empírica usando a "Gaussian Kernel smoother" e a distribuição normal ajustada aos log-retornos.

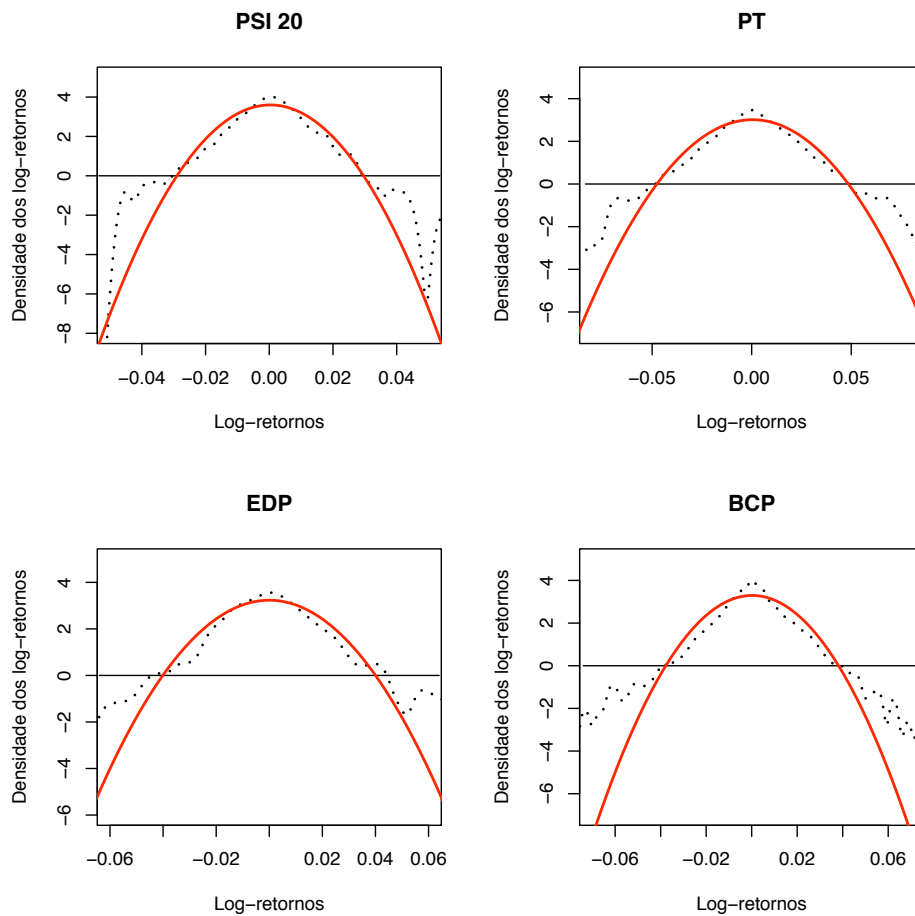


Figura 2.4: A densidade empírica e a densidade normal ajustada aos log-retornos com uma escala logarítmica no eixo vertical.

baixa do que a observada nos dados. Para dar ênfase à diferença, desenhamos a mesma distribuição com uma escala logarítmica no eixo vertical, ver Figura 2.4.

A função densidade da distribuição normal é uma parábola quando o gráfico é desenhado num eixo vertical logaritmico.

$$-\frac{1}{2} \left( \ln(2\pi\sigma^2) + \frac{(x - \mu)^2}{\sigma^2} \right)$$

Na Figura 2.4 vemos que as caudas da distribuição empírica não são bem ajustadas pela distribuição normal. Este efeito pode também ser observado nos QQ-plots das Figuras 2.10, 2.11, 2.12 e 2.13 para os diferentes activos. Os parâmetros estimados encontram-se na Tabela 2.2.

Se trabalharmos com o tempo medido em dias, temos  $\Delta t = 1$  desde que usemos os preços  $s(i)$  observados diariamente. Se no entanto usarmos o tempo medido em anos,  $\Delta t = \frac{1}{252}$  para observações diárias e  $\Delta t = \frac{1}{52}$  para observações semanais<sup>3</sup>. A escala do  $\Delta t$  altera significativamente a magnitude do  $\mu$  e do  $\sigma^2$ . Por exemplo para o índice PSI 20 medindo o tempo em dias e observando os preços diariamente obtemos  $\hat{\mu} = 0,000311$  e  $\hat{\sigma}^2 = 0,010829^2$ . Multiplicando estes números por 252, os correspondentes parâmetros estimados para valores diários são  $\hat{\mu} = 0,078363$  e  $\hat{\sigma}^2 = 0,173303^2$ . Quando o tempo é medido em anos, é comum apresentar os valores estimados  $\mu$  e  $\sigma$  em percentagem tendo por unidade de medida um ano. Então os nossos dados diários dão um log-retorno anual de 7,8% com volatilidade 17,3%. Estes valores foram calculados com recurso ao software R e usando duas funções `mean()` e `sd()` respectivamente para a média e o desvio padrão, ver Apêndice A para mais detalhes. Na próxima secção vamos investigar os efeitos das alterações de escala na distribuição dos dados.

## 2.3 Alterações de escala

Como se comportarão a distribuição dos log-retornos quando os preços dos activos são apresentados para diferentes intervalos de tempo: diários, semanais ou mensais. A partir da propriedade aditiva, referida em (2.1), os log-retornos semanais, mensais podem ser derivados dos log-retornos diários. Usando 5 dias de

<sup>2</sup>Este número é usado por convenção, na prática cada ano varia em mais ou menos dias

<sup>3</sup>Por convenção considera-se 52 semanas de negociação num ano.

	Diário		Semanal		Mensal	
	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}^2$	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}^2$	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}^2$
PSI 20	0,000311	0,000119	0,001555	0,000705	0,006094	0,003654
PT	0,000472	0,000383	0,002362	0,002189	0,009348	0,008189
EDP	-0,000041	0,000248	-0,000212	0,000985	-0,001254	0,003834
BCP	0,000224	0,000219	0,001122	0,001244	0,004316	0,005655

Tabela 2.2: Parâmetros estimados para a distribuição normal ajustada aos log-retornos dos dados para intervalos de observação diários, semanais e mensais.

negociação numa semana, o log-retorno  $x^s(i)$  para a semana  $i$  é dado por:

$$x^s(i) = \sum_{n=1}^5 x(5(i-1) + n). \quad (2.2)$$

O índice  $i$  é medido em semanas, então por exemplo  $x^s(2)$  é a mudança logarítmica do preço desde o fim da semana 1 até ao fim da semana 2. De forma similar podemos definir o log-retorno  $x^m(i)$  para o mês  $i$  como sendo

$$x^m(i) = \sum_{n=1}^{20} x(20(i-1) + n), \quad (2.3)$$

onde assumimos 20 dias de negociação no mês. Por exemplo  $x^m(4)$  é o log-retorno no 1º dia de negociação de Abril de um investimento feito num stock no 1º dia de negociação de Março. Se suposermos que os log-retornos são independentes com a mesma distribuição (não necessariamente da distribuição normal) o teorema do limite central implica que os log-retornos semanais ou mensais tenderão para uma distribuição normal. É um facto estatístico que os log-retornos aproximam-se de uma distribuição normal quando os intervalos de tempo tornam-se maiores (como por exemplo meses). Contudo é também um facto empírico de que em intervalos de tempo mais curtos (como dias, ou menores) os log-retornos estão longe de terem distribuição normal.

As Figuras 2.5, 2.6, 2.7, 2.8 e 2.9 mostram a densidade empírica do índice PSI-20, dos activos PT, EDP e BCP observados diariamente, semanalmente e mensalmente e a respectiva distribuição normal ajustada aos dados. Os parâmetros da distribuição normal foram estimados e encontram-se na Tabela 2.2.

No caso da Tabela 2.2 usou-se para obter estes valores as observações diárias e as fórmulas (2.2) e (2.3), pode-se no entanto utilizar as observações semanais

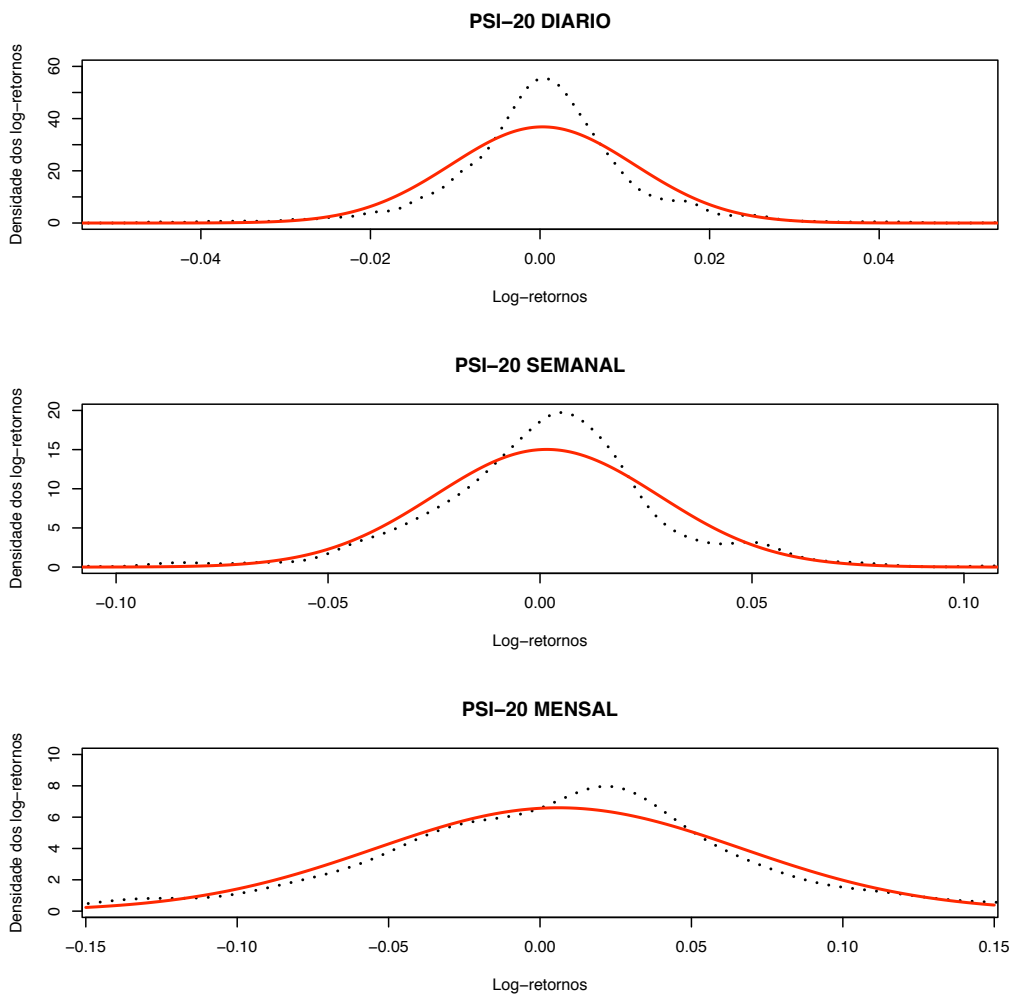


Figura 2.5: A densidade empírica do PSI 20 para log-retornos diários, semanais e mensais e a respectiva distribuição normal ajustada aos dados.

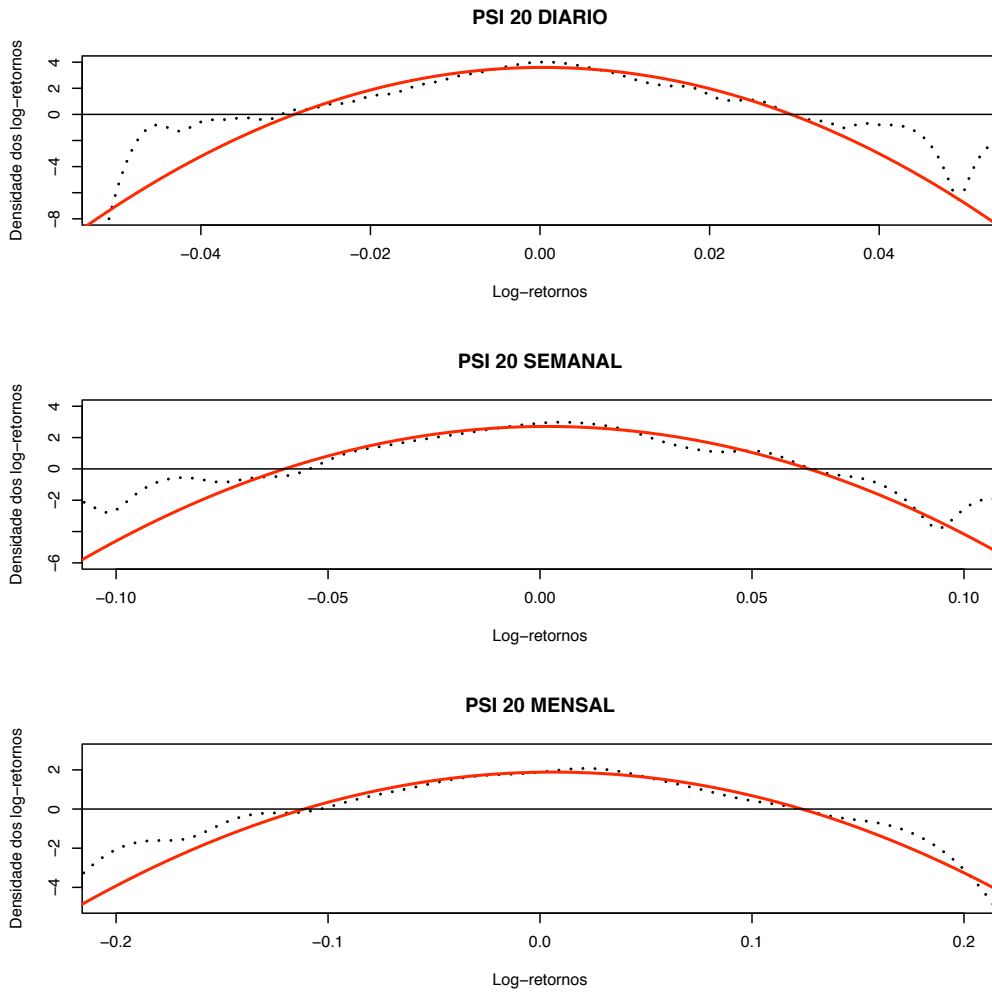


Figura 2.6: A densidade empírica do PSI 20 para log-retornos diários, semanais e mensais e a respectiva distribuição normal ajustada aos dados usando uma escala logarítmica no eixo vertical.

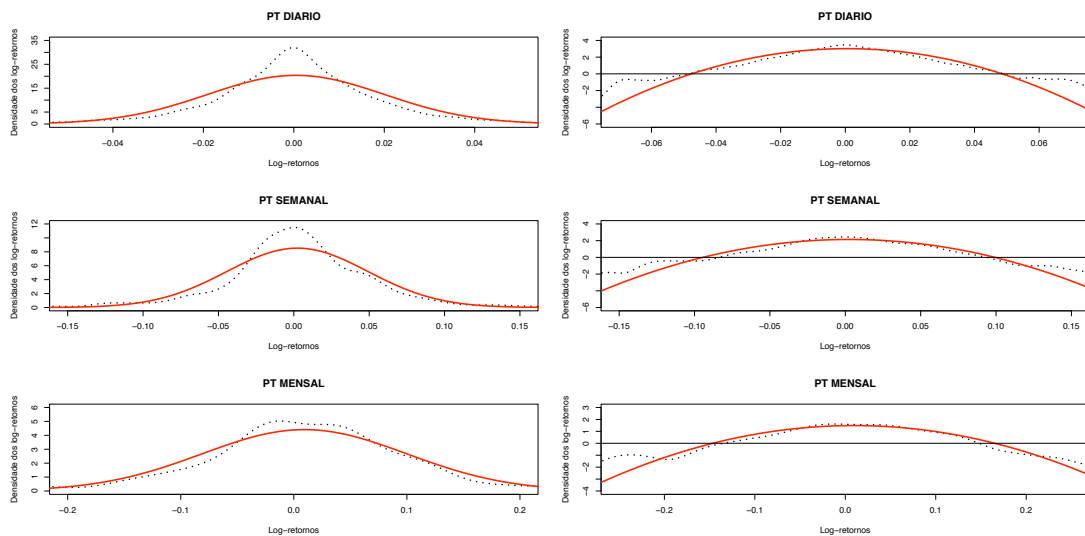


Figura 2.7: A densidade empírica da PT para log-retornos semanais e mensais e a respectiva distribuição normal ajustada aos dados nos gráficos da esquerda e na direita usando uma escala logarítmica no eixo vertical.

e mensais caso estejam disponíveis. A diferença entre usar uns ou outros será mínima.

Comparando nas Figuras 2.5-2.8 os diferentes intervalos de observação para cada um dos activos verificamos que para os intervalos de tempo maiores existe uma clara convergência para a distribuição normal, mas também torna-se mais visível uma assimetria que não pode ser descrita por uma distribuição normal.

Nas Figuras referidas no parágrafo anterior as mesmas densidades são também mostradas usando uma escala logarítmica no eixo vertical. A assimetria nos log-retornos mensais torna-se mais evidente e vemos também que as caudas são mais "pesadas" que as caudas das distribuições normais. Com recurso aos QQ-plots das Figuras 2.10-2.13 podemos ver em cada uma das figuras que os 2 primeiros QQ-plots que dizem respeito aos log-retornos diários e semanal (1ª linha) possuem claramente caudas mais "pesadas" que a distribuição normal, enquanto que nos dois QQ-plots seguintes (2ª linha) com intervalos de tempo mais alargado entre as observações essas caudas já não são tão "pesadas" aproximando mais da distribuição normal. Este fenómeno de convergência para a distribuição normal em escalas com intervalos de tempo maiores é muitas vezes apelidada de agregação Gaussiana do termo inglês "Gaussian aggregation".

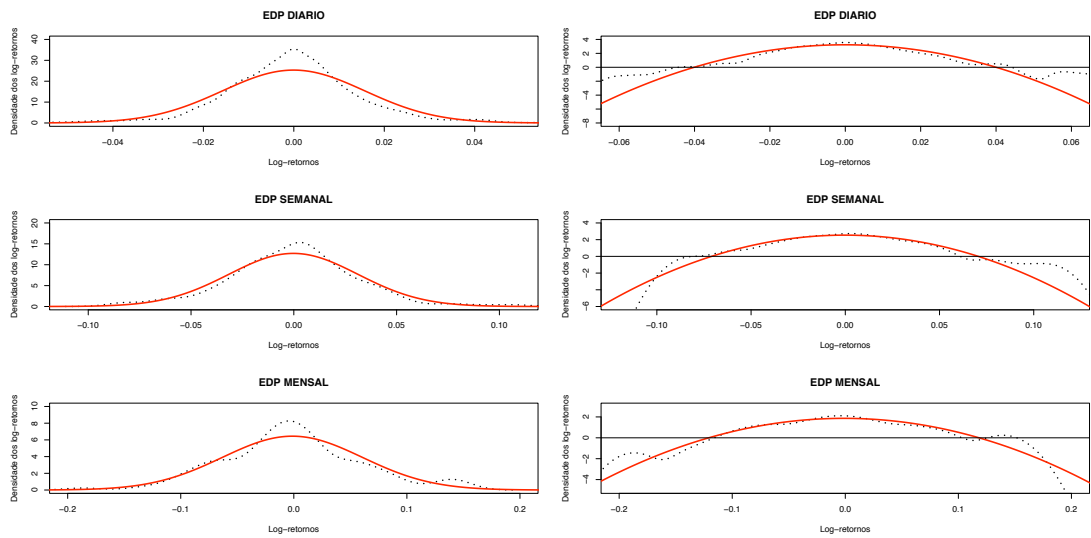


Figura 2.8: A densidade empírica do EDP para log-retornos semanais e mensais e a respectiva distribuição normal ajustada aos dados nos gráficos da esquerda e nos da direita usando uma escala logarítmica no eixo vertical.

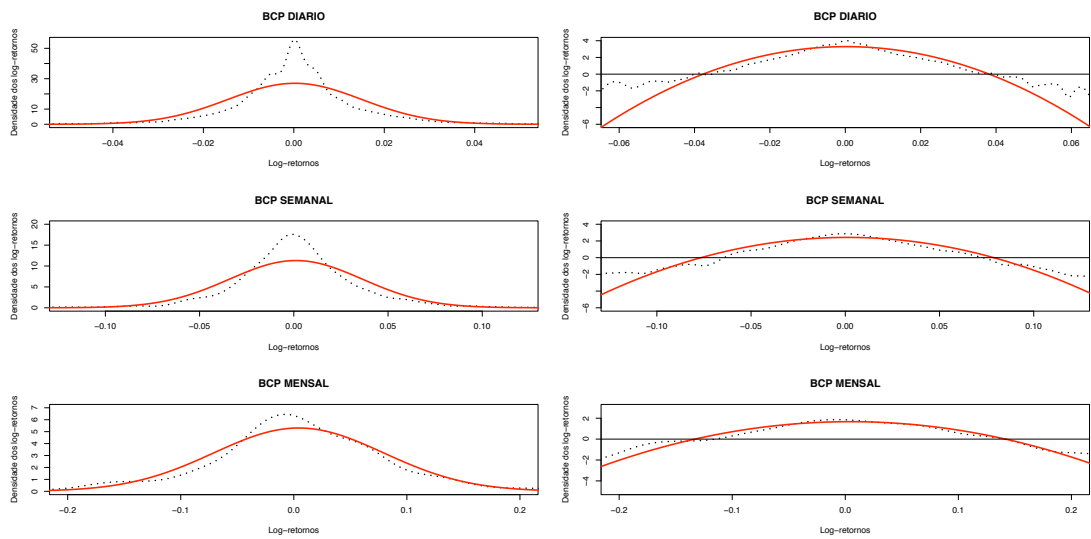


Figura 2.9: A densidade empírica do BCP para log-retornos semanais e mensais e a respectiva distribuição normal ajustada aos dados nos gráficos da esquerda e nos da direita usando uma escala logarítmica no eixo vertical.

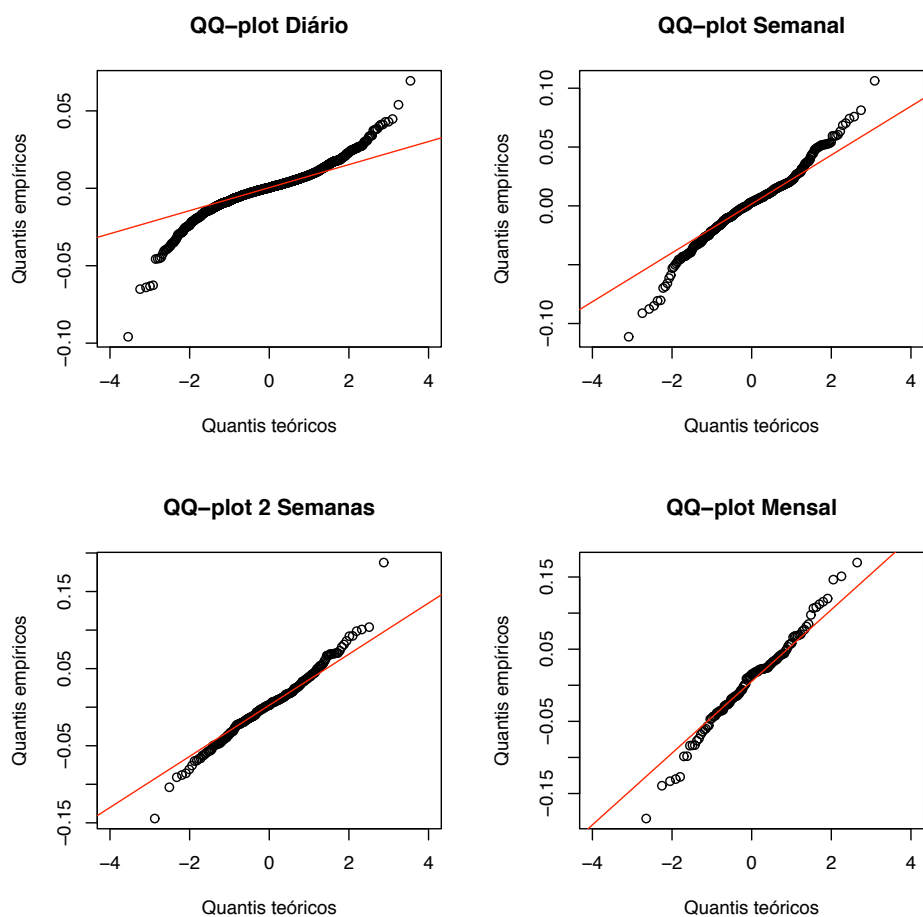


Figura 2.10: QQ-plots do índice PSI 20 em relação à distribuição normal para diferentes intervalos de tempo. Inclui-se nestes gráficos o intervalo de tempo correspondente a duas semanas como mais um factor de comparação.

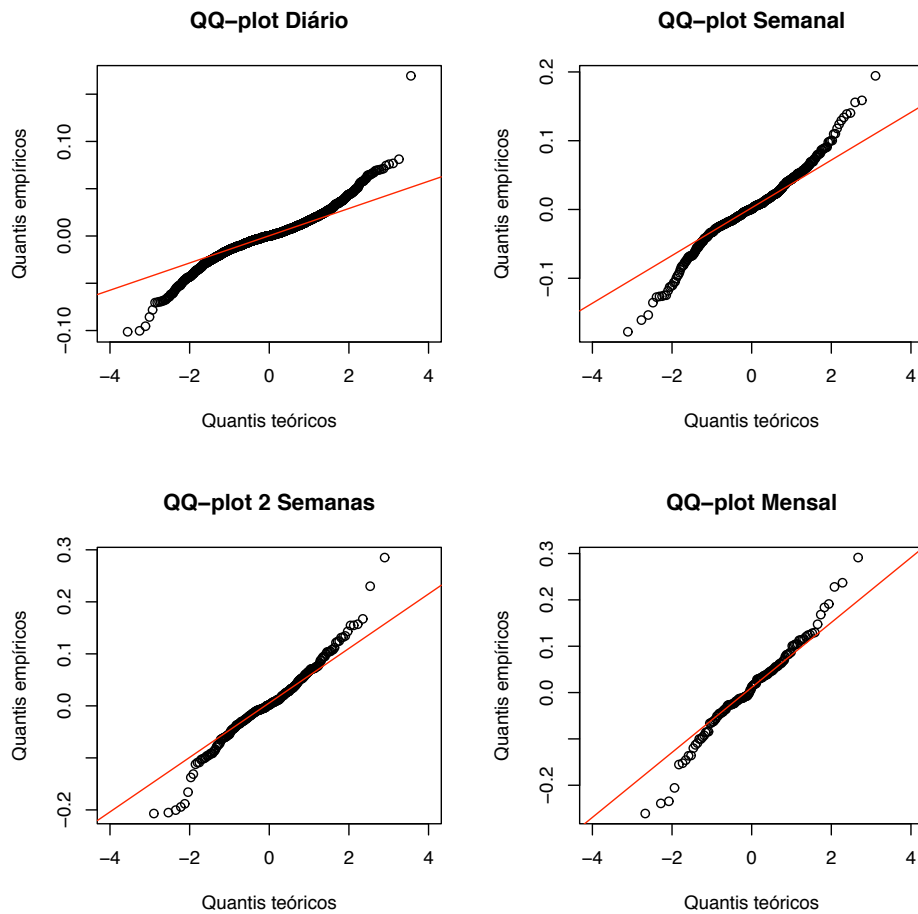


Figura 2.11: QQ-plots do activo PT em relação à distribuição normal para diferentes intervalos de tempo. Inclui-se nestes gráficos o intervalo de tempo correspondente a duas semanas como mais um factor de comparação.

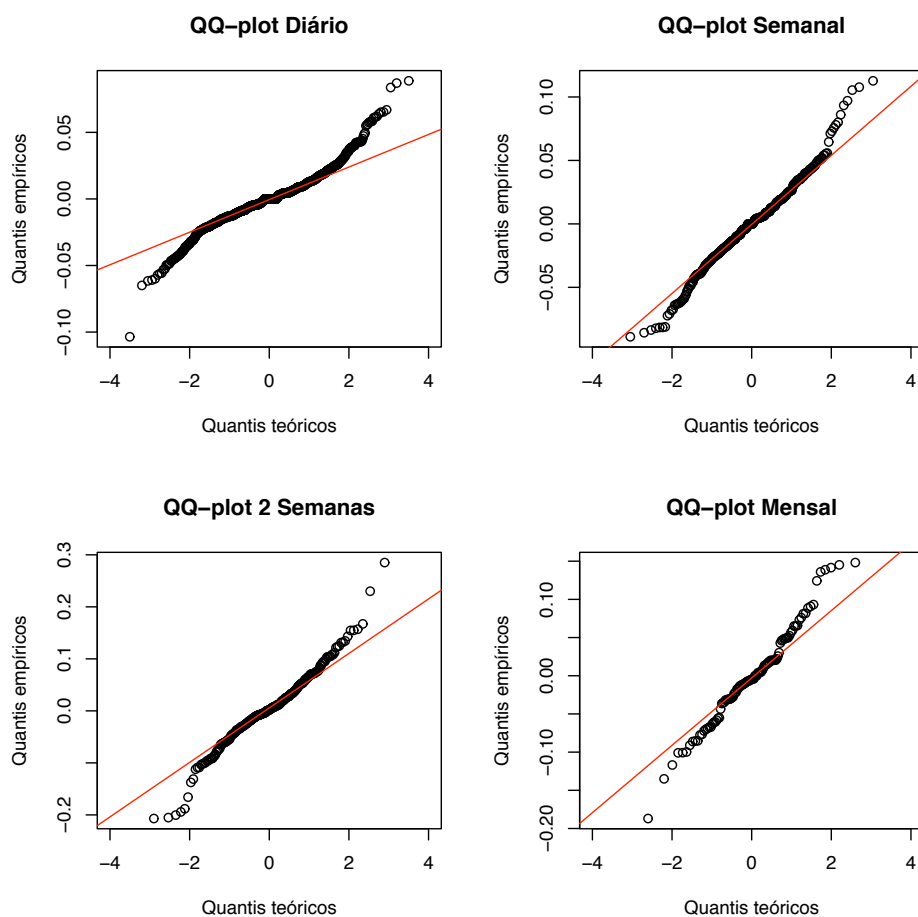


Figura 2.12: QQ-plots do activo EDP em relação à distribuição normal para diferentes intervalos de tempo. Inclui-se nestes gráficos o intervalo de tempo correspondente a duas semanas como mais um factor de comparação.

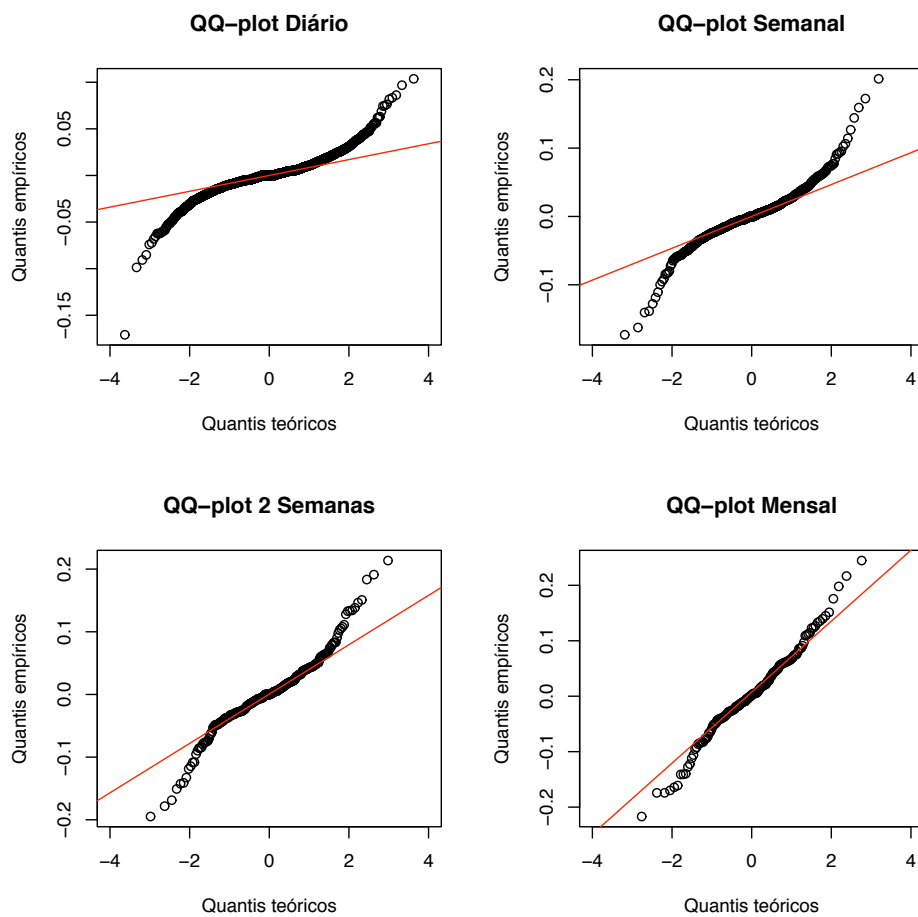


Figura 2.13: QQ-plots do activo BCP em relação à distribuição normal para diferentes intervalos de tempo. Inclui-se nestes gráficos o intervalo de tempo correspondente a duas semanas como mais um factor de comparação.

	1%		2%		98%		99%	
	Empírico	Normal	Empírico	Normal	Empírico	Normal	Empírico	Normal
PSI 20	-0,0318	-0,0249	-0,0245	-0,0219	0,0243	0,0226	0,0274	0,0255
PT	-0,0546	-0,0450	-0,0441	-0,0396	0,0449	0,0408	0,0572	0,0461
EDP	-0,0438	-0,0366	-0,0348	-0,0323	0,0385	0,0323	0,0433	0,0366
BCP	-0,0424	-0,0342	-0,0328	-0,0302	0,0326	0,0306	0,0423	0,0346

Tabela 2.3: Quantis empíricos e estimados para a distribuição normal ajustada aos dados.

## 2.4 Log-retornos com cauda pesada e assimétrica

Os log-retornos diários diferem da distribuição normal devido às caudas altas e assimetria. Nesta secção iremos usar os quantis para verificar o quanto são pesadas as caudas dos log-retornos dos activos que estamos a considerar. Uma distribuição com caudas pesadas terá quantis com valores maiores do que os de uma distribuição normal porque pressupõem maior probabilidade de ocorrerem acontecimentos extremos.

A Tabela 2.3 exhibe os quantis empíricos para os log-retornos dos dados e os quantis correspondentes à distribuição normal adequada a essa série de valores. Uma primeira análise mostra-nos que os quantis empíricos em todas as situações têm valores maiores do que os quantis correspondentes da distribuição normal ajustada aos dados o que confirma que os log-retornos estão associados a distribuições com caudas altas ou pesadas. Vejamos por exemplo o índice PSI 20, os dados empíricos para os quantis 2% e 98% são praticamente simétricos, enquanto a assimetria aparece realçada nos quantis extremos 1% e 99%. Existe uma grande diferença entre o valor estimado e o valor empírico sendo essa diferença mais evidente no quantil 1% do que no quantil 99%. Nota-se também sinais de caudas pesadas nos quantis 2% e 98%. As conclusões tiradas para o índice PSI 20 podem ser deduzidas de forma idêntica para os restantes activos em estudo. Confirma-se então que a distribuição normal subestima a probabilidade dos acontecimentos extremos.

A questão que se coloca neste momento é saber até que ponto chega essa subestimação? Suponhamos que queríamos saber quantas vezes por ano o log-retorno do PSI 20 é menor do que -0,03. Empiricamente isso acontece em 1% de todos os dias de negociação de um ano, ou seja em média acontece 5 vezes em cada 2 anos (consideramos 252 dias de negociação num ano).

Se acreditarmos na distribuição normal ajustada aos dados, a probabilidade de

um log-retorno ser inferior a  $-0,03$  é menor do que  $0,2\%$ . A distribuição normal ajustada aos dados indica que este acontecimento extremo desenrola-se em média apenas uma vez em 2 anos. Somos confrontados neste caso particular com uma grande subestimação por parte da distribuição normal.

Considerando ainda como exemplo o índice PSI 20 e tendo em atenção o QQ-plot diário e o QQ-plot semanal apresentado na Figura 2.10 verificamos que a cauda esquerda é mais "pesada" do que a cauda direita em qualquer um desses QQ-plots, fenómeno esse que não é evidente nos QQ-plots posteriores. Esta constatação é mais uma prova da existência de assimetria na distribuição dos log-retornos.

Todos os exemplos relatados nos parágrafos anteriores incidiram sobre o índice PSI 20, no entanto todas as situações referidas podem ser encontradas nos outros activos em estudo. Em termos gerais todos os activos considerados comportam-se de forma muito semelhante e para os quais se podem tirar as mesmas conclusões.

Como conclusão final poderemos referir que a distribuição normal não é um bom modelo para ajustamento a log-retornos em que o intervalo de recolha de observações seja curto. A distribuição normal não é capaz de modelar caudas "pesadas" nem possui flexibilidade para lidar com conjuntos de dados assimétricos. É importante introduzir então uma nova classe de distribuições de probabilidade capazes de modelar estes efeitos. Abordaremos este assunto no próximo capítulo.

# Capítulo 3

## Distribuições Hiperbólicas Generalizadas

### 3.1 Introdução

As distribuições de caudas pesadas foram introduzidas pelo economista V. Pareto e estudadas exhaustivamente também por Paul Lévy. Embora nessa altura estas distribuições fossem estudadas só do ponto de vista teórico, hoje encontram aplicações em muitas áreas, como a matemática financeira. Uma distribuição diz-se de caudas pesadas quando possui maior probabilidade na área das caudas comparativamente à distribuição normal com a mesma média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$ .

No capítulo 1 vimos que as distribuições de log-retornos dos mercados financeiros são assimétricas e têm caudas mais pesadas do que as de uma distribuição normal. A gestão de risco tendo por base pressupostos de uma distribuição normal leva a uma subestimação do risco. Os investigadores conscientes desse facto procuraram oferecer outro tipo de distribuições adequadas a essas características.

Já em 1963, com Mandelbrot cf. [Man63] que o comportamento dos log-retornos de activos financeiros apresentam caudas mais pesadas que as Gaussianas sugerindo então o uso das distribuições Pareto. No entanto essas distribuições apresentam caudas demasiado altas o que é provado de modo empírico.

Um novo tipo de distribuições chamadas hiperbólicas generalizadas provou ser útil no tratamento de dados financeiros. O que tornou as distribuições hiperbólicas tão populares foi o facto dos seus parâmetros serem suficientemente flexíveis para se adequarem aos mais variados conjuntos de dados e contextos.

O desenvolvimento dessas distribuições deve-se a Barndoff-Nielsen, que ajus-

tou a subclasse hiperbólica ao tamanho dos grãos de areia quando sujeitas a vento contínuo ver [BN77]. Esses conceitos mais tarde foram generalizados obtendo-se as distribuições hiperbólicas generalizadas (GH). Desde o seu desenvolvimento as distribuições hiperbólicas generalizadas foram aplicadas nos mais variados campos do conhecimento como Física, Biologia, Agronomia entre outros. A aplicação na área financeira ou económica surge em primeiro lugar através de Eberlein e Keller [EK95]. No seu trabalho usaram a subclasse hiperbólica para ajustar dados de acções da bolsa Alemã. Um trabalho mais abrangente é elaborado por Prause [Pra99] no qual surge a aplicação das distribuições hiperbólicas generalizadas para ajustar dados financeiros de activos da bolsa Alemã e índices Americanos. Nesse trabalho é também estudado o cálculo dos preços dos derivados e o do valor em risco (value at risk) denotado por VaR.

No início dos anos 90 Blæsild e Sorensen [BS92] desenvolveram um programa de computador chamado HYP que foi usado para estimar os parâmetros da subclasse hiperbólica das distribuições até 3 dimensões. Prause [Pra99] também desenvolveu um programa para estimar os parâmetros das distribuições hiperbólicas generalizadas.

Uma referência também para os trabalhos desenvolvidos no mercado Brasileiro por Fajardo [FF04] que usa as distribuições hiperbólicas generalizadas para ajustar a dados da bolsa Brasileira e analisa ainda a grau de qualidade desse ajustamento (the goodness of fit). Mostra ainda como calcular o preço dos derivados e estimar o VaR.

## 3.2 Distribuições

Convém definir os dois tipos de distribuição, em primeiro lugar a distribuição normal ou Gaussiana e por último as distribuições hiperbólicas generalizadas.

### Distribuição normal

A distribuição Normal padrão  $N(0, 1)$  tem função densidade

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.1)$$

A distribuição normal  $N(\mu, \sigma^2)$  tem função densidade

$$N(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma} N\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right), \quad x \in \mathbb{R} \quad (3.2)$$

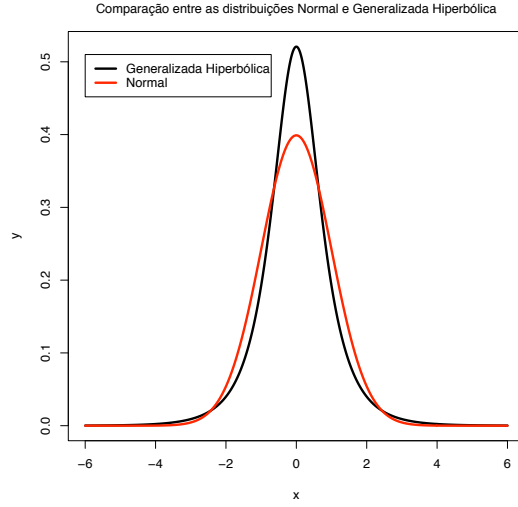


Figura 3.1: Comparação entre  $GH(-0, 5; 1; 0; 1; 0)$  e normal  $N(0, 1)$

onde os parâmetros  $\mu \in \mathbb{R}$  e  $\sigma^2 > 0$  são a média e a variância respectivamente.

### Distribuição hiperbólica generalizada

A função densidade da distribuição hiperbólica generalizada é dada por

$$GH(x; \lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu) = a(\lambda, \alpha, \beta, \delta) (\delta^2 + (x - \mu)^2)^{(\lambda - \frac{1}{2})/2} \times K_{\lambda - \frac{1}{2}}(\alpha \sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2}) \exp(\beta(x - \mu)) \quad (3.3)$$

onde

$$a(\lambda, \alpha, \beta, \delta) = \frac{(\alpha^2 - \beta^2)^{\lambda/2}}{\sqrt{2\pi} \alpha^{\lambda - \frac{1}{2}} \delta^\lambda K_\lambda(\delta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2})} \quad (3.4)$$

e  $K_\lambda$  é a função de Bessel modificada de terceira espécie com índice  $\lambda$  e  $x \in \mathbb{R}$ . O domínio de variação dos parâmetros é  $\mu \in \mathbb{R}$  e

$$\begin{aligned} \delta &\geq 0 \quad \text{e} \quad |\beta| < \alpha \quad \text{se} \quad \lambda > 0, \\ \delta &> 0 \quad \text{e} \quad |\beta| < \alpha \quad \text{se} \quad \lambda = 0, \\ \delta &> 0 \quad \text{e} \quad |\beta| \leq \alpha \quad \text{se} \quad \lambda < 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Existem diferentes parametrizações da distribuição hiperbólica generalizada na literatura. Estas diferentes parametrizações têm como objectivo devolver algum significado aos parâmetros utilizados, pois tal verificava-se quando se utilizava a distribuição normal.

$$\begin{aligned} 2^{\text{a}} \text{ parametrização} & \quad \zeta = \delta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}, \quad \rho = \beta/\alpha \\ 3^{\text{a}} \text{ parametrização} & \quad \xi = (1 + \zeta)^{-\frac{1}{2}}, \quad \chi = \xi\rho \\ 4^{\text{a}} \text{ parametrização} & \quad \bar{\alpha} = \alpha\delta, \quad \bar{\beta} = \beta\delta \end{aligned}$$

Os parâmetros da distribuição hiperbólica generalizada de forma grosseira têm a seguinte interpretação:  $\mu$  e  $\delta$  representam a localização e a escala,  $\beta$  representa a assimetria e  $\alpha$  a forma. Aumentando  $\xi$  ou diminuindo  $\zeta$  ou  $\bar{\alpha}$  reflecte-se no aumento do achatamento (kurtosis). O parâmetro  $\lambda$  determina o peso das caudas da distribuição assim como as diferentes subclasses das distribuições hiperbólicas generalizadas. Reescrevendo a densidade da distribuição hiperbólica generalizada usando a 4ª parametrização obtemos uma representação na qual o papel desempenhado pelos parâmetros  $\delta$  e  $\mu$  é mais óbvio.

### 3.3 Caracterização dos parâmetros das distribuições hiperbólicas generalizadas

Nesta secção vamos estudar o efeito de cada um dos parâmetros da distribuição hiperbólica generalizada em termos da sua função densidade  $GH$  definida em (3.3). Uma boa referência neste estudo é a tese de mestrado de Wang [Wan05].

Para distribuições simétricas temos  $\beta = \bar{\beta} = \rho = \chi = 0$ . O efeito do parâmetro  $\mu$  é bastante evidente: Um aumento no valor de  $\mu$  move o gráfico horizontalmente para a direita, ver Figura 3.2. Em relação ao parâmetro  $\delta$ , um incremento do seu valor torna o gráfico mais achatado. Se ao mesmo tempo temos um aumento de  $\delta$  com um valor de  $\alpha$  constante teremos uma diminuição do achatamento das distribuições, ver Figura 3.3. Isto simplificando bastante o papel desempenhado por cada um dos parâmetros pois cada um deles tem também impacto nas variadas características da distribuição.

No que diz respeito ao parâmetro  $\beta$  observamos que quando  $\beta > 0$  o gráfico distorce à esquerda e que quando  $\beta < 0$  o gráfico distorce à direita ver Figura 3.4. Para valores absolutos de  $\beta$  cada vez maiores a distorção é mais evidente. Além do efeito principal  $\beta$  desloca o gráfico horizontalmente o que significa que altera o valor da média.

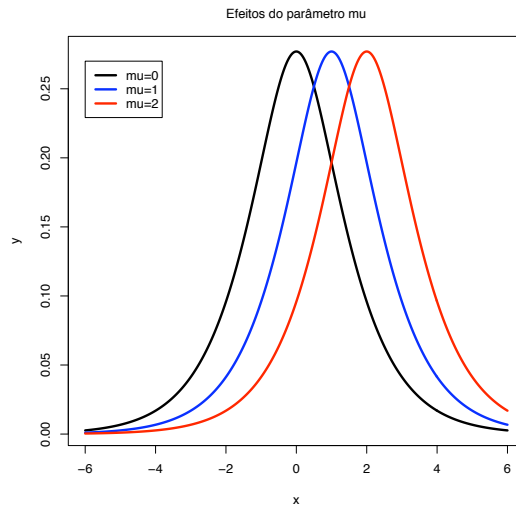


Figura 3.2: Comparação entre 3 distribuições com  $\lambda = 1.3$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 0$ ,  $\delta = 1$  e  $\mu = 0, 1$  e  $2$ .

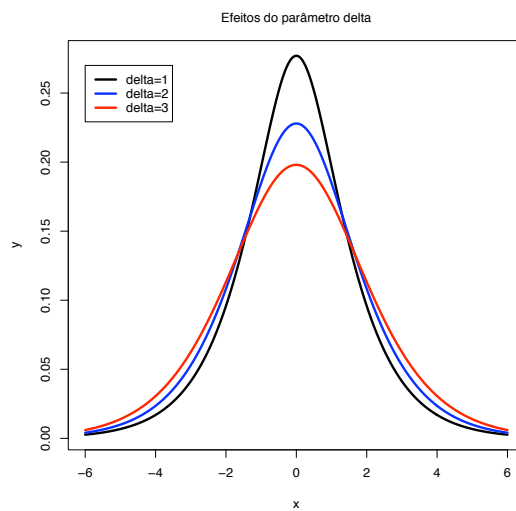


Figura 3.3: Comparação entre 3 distribuições com  $\lambda = 1.3$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 0$ ,  $\mu = 0$  e  $\delta = 1, 2$  e  $3$ .

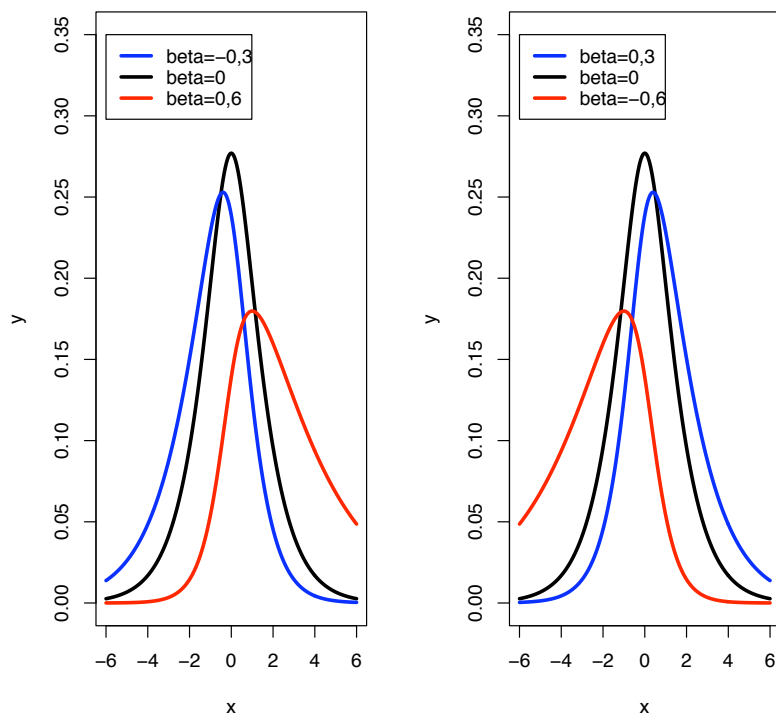


Figura 3.4: Comparação entre 3 distribuições com  $\lambda = 1.3$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\delta = 1$ ,  $\mu = 0$  e em que à esquerda temos  $\beta = 0, -0.3$  e  $0.6$  e à direita temos  $\beta = 0, 0.3$  e  $-0.6$

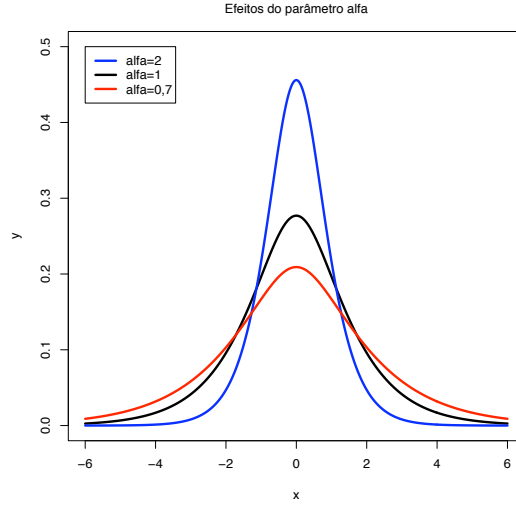


Figura 3.5: Comparação entre 3 distribuições com  $\lambda = 1, 3$ ,  $\beta = 0$ ,  $\delta = 1$ ,  $\mu = 0$  e  $\alpha = 0, 2$  e  $0,7$ .

A diminuição do parâmetro  $\alpha$  resulta num aumento do achatamento. Com os outros parâmetros constantes um aumento do valor de  $\alpha$  traduz-se num aumento da variância que torna o gráfico achatado, sendo também verdadeiro o contrário, ver Figura 3.5.

Vejam agora o efeito conjunto dos parâmetros  $\alpha\delta$ . Um aumento no valor de  $\alpha\delta$  reflecte-se numa diminuição do achatamento. Na Figura (3.6) ao aumentarmos o valor de  $\alpha$  de 1 até 2,25 enquanto diminuimos o valor do  $\delta$  de 1,2 para 0,8 obtemos o valor para o produto de  $\alpha$  por  $\delta$  que aumenta de 1,2 para 1,5 até 1,8. Os efeitos são notórios: o gráfico a vermelho que tem o maior valor para  $\alpha\delta$  tem o decrescimento mais acentuado na caudas implicando um baixo valor para o achatamento, enquanto o gráfico a preto tem o decrescimento mais lento.

Barndorff-Nielsen e Stelzer [BNS06] representam a função densidade de probabilidade das distribuições hiperbólicas generalizadas da seguinte forma:

$$GH(x; \alpha, \beta, \delta, \mu) = \frac{\bar{\gamma}^\lambda \bar{\alpha}^{\frac{1}{2}-\lambda}}{\sqrt{2\pi}\delta K_\lambda(\bar{\gamma})} \left\{ 1 + \theta^2 \right\}^{\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{4}} \times K_{\lambda-\frac{1}{2}}(\bar{\alpha} \sqrt{1 + \theta^2}) \exp \{ \beta(x - \mu) \}$$

onde

$$\gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}, \quad \bar{\alpha} = \delta\alpha, \quad \bar{\beta} = \delta\beta, \quad \bar{\gamma} = \delta\gamma, \quad \theta = \frac{x - \mu}{\delta}. \quad (3.6)$$

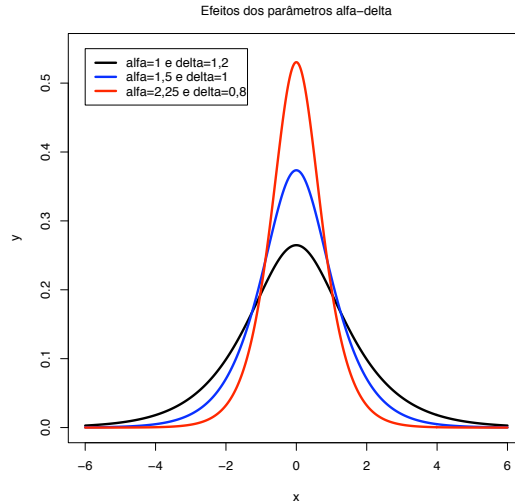


Figura 3.6: Comparação entre três distribuições com  $\lambda = 1.3$ ,  $\beta = 0$ ,  $\mu = 0$  e  $\alpha = 1$ ,  $\delta = 1.2$ (preto),  $\alpha = 1.5$ ,  $\delta = 1$ (azul) e  $\alpha = 2.25$ ,  $\delta = 0,8$ (vermelho)

Blæsild [Blæ81] provou que se  $X$  tem distribuição  $GH(\lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu)$ , então uma transformação linear  $Y = aX + b$  é também uma distribuição hiperbólica generalizada com parâmetros  $GH(\lambda, \alpha/|a|, \beta/|a|, \delta|a|, a\mu + b)$ .

### 3.4 Representação como distribuição normal com mistura variância-média

As distribuições hiperbólicas generalizadas podem ser representadas noutras formas. Por exemplo como uma distribuição normal com mistura variância-média em que a média é  $\xi = \mu + \beta\sigma^2$  e variância  $\sigma^2$ . Modelação por mistura significa modelar uma distribuição estatística por uma mistura (soma ponderada) de diferentes distribuições. Através de uma escolha de componentes que são funções densidade podemos aproximar qualquer densidade contínua com a precisão pretendida através de um número suficiente de componentes. A função densidade de probabilidade de uma mistura consiste em  $n$  distribuições e pode ser escrita da seguinte forma

$$f(x) = \sum_{i=1}^n w_i p_i(x)$$

com as seguintes restrições:

$$\begin{aligned} 0 \leq w_i &\leq 1 \\ \sum_{i=1}^n w_i &= 1 \\ \int p_i(x) dx &= 1 \end{aligned}$$

onde  $p_i(x)$  é a função densidade probabilidade da  $i$ -enésima distribuição ou  $i$ -enésimo componente densidade e  $w_i$  é chamado coeficiente, que pode ser visto como a ponderação da  $i$ -enésima distribuição na mistura. Se usarmos para as inversas gaussianas generalizadas a notação  $GIG(x; \lambda, \chi, \psi)$  as distribuições hiperbólicas generalizadas podem ser representadas por

$$GH(x; \lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu) = \int_0^{\infty} N(x; \mu + \beta\omega, \omega) GIG(\omega; \lambda, \delta^2, \alpha^2 - \beta^2) d\omega \quad (3.7)$$

onde  $N$  é dada por (3.2). A função densidade probabilidade de  $GIG(x; \lambda, \chi, \psi)$  é dada por

$$GIG(x; \lambda, \chi, \psi) = \frac{(\psi/\chi)^{\lambda/2}}{2K_{\lambda}(\sqrt{\psi\chi})} e(x; \lambda, \chi, \psi) \quad (3.8)$$

com

$$e(x; \lambda, \chi, \psi) = x^{\lambda-1} \exp\left\{-(1/2)(\chi x^{-1} + \psi x)\right\}, \quad x > 0.$$

O domínio de variação dos parâmetros é

$$\begin{aligned} \chi > 0 \quad \psi \geq 0 \quad \text{se} \quad \lambda < 0 \\ \chi > 0 \quad \psi > 0 \quad \text{se} \quad \lambda = 0 \\ \chi \geq 0 \quad \psi > 0 \quad \text{se} \quad \lambda > 0. \end{aligned}$$

Na Figura 3.7 mostramos alguns exemplos da densidade GiG.

### 3.5 Função geradora de momentos

Assumimos que  $\mu = 0$  com vista à simplificação. Como

$$\int GH(x; \lambda, \alpha, \beta, \delta, 0) = 1,$$

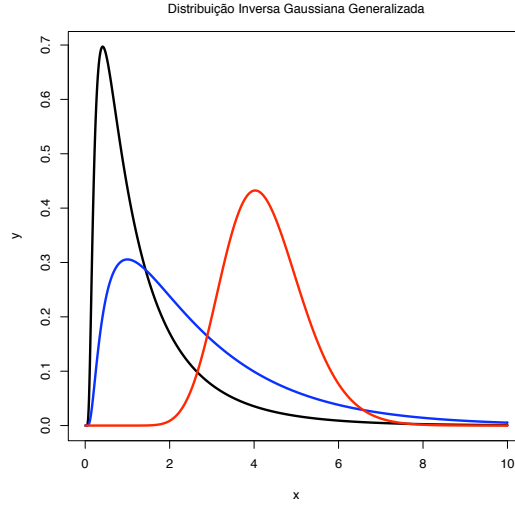


Figura 3.7: Funções densidade das distribuições inversas gaussianas generalizadas:  $\lambda = 0, \chi = 1$ (preto),  $\lambda = 1, \chi = 1$  (azul) e  $\lambda = 18, \chi = 3$ (vermelho)

$$\int \{\delta^2 + x^2\}^{(\lambda-\frac{1}{2})/2} \exp\{\beta x\} K_{\lambda-\frac{1}{2}}(\alpha \sqrt{\delta^2 + x^2}) dx = \frac{1}{a(\lambda, \alpha, \beta, \delta, 0)},$$

a função geradora de momentos da distribuição hiperbólica generalizada com  $|\beta + u| < \alpha$  é dada pela divisão das constante de normalização  $a$  definidas em (3.4) correspondendo aos parâmetros  $(\lambda, \alpha, \beta, \delta)$  e  $(\lambda, \alpha, \beta + u, \delta)$ . Assim temos

$$\begin{aligned} \int \exp\{ux\} GH(x; \lambda, \alpha, \beta, \delta, 0) dx &= a(\lambda, \alpha, \beta, \delta) \int \exp\{ux\} (\delta^2 + x^2)^{\frac{1}{2}(\lambda-\frac{1}{2})} K_{\lambda-\frac{1}{2}}(\alpha \sqrt{\delta^2 + x^2}) \exp\{\beta x\} dx \\ &= \frac{a(\lambda, \alpha, \beta, \delta)}{a(\lambda, \alpha, \beta + u, \delta)} \\ &= \left( \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 - (\beta + u)^2} \right)^{\frac{\lambda}{2}} \frac{K_{\lambda}(\delta \sqrt{\alpha^2 - (\beta + u)^2})}{K_{\lambda}(\delta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2})}. \end{aligned}$$

Como  $\mu$  é um parâmetro de localização, então a função geradora de momentos é

$$M_{GH}(u) = \exp\{u\mu\} \left\{ \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 - (\beta + u)^2} \right\}^{\lambda/2} \frac{K_{\lambda}(\delta \sqrt{\alpha^2 - (\beta + u)^2})}{K_{\lambda}(\delta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2})}, \quad |\beta + u| < \alpha \quad (3.9)$$

em que a restrição  $|\beta + u| < \alpha$  é imposta pelo domínio de variação dos parâmetros em (3.5). Se  $X$  tem distribuição  $GH(x; \lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu)$  então todos os momentos de  $X$  existem, ver [Gut95]. Consideremos as duas primeiras derivadas de  $M_{GH}(u)$  para calcular a média e a variância. Podemos considerar  $\mu = 0$  sem perda de generalidade. Como  $K'_\lambda = -K_{\lambda+1}(x) + \frac{1}{x}K_\lambda(x)$ , derivada das funções de Bessel, ver Apêndice B, então de (3.9) resulta

$$M'_{GH}(u) = \frac{(\alpha^2 - \beta^2)^{\lambda/2}}{K_\lambda(\delta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2})} \frac{K_{\lambda+1}(\delta \sqrt{\alpha^2 - (\beta + u)})}{\{\alpha^2 - (\beta + u)^2\}^{(\lambda+1)/2}}.$$

Se substituirmos  $u$  por 0 obtemos

$$M'_{GH}(0) = \frac{\beta \delta K_{\lambda+1}(\delta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2})}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} K_\lambda(\delta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2})}.$$

Denotando novamente  $\gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$ ,  $\bar{\gamma} = \delta \gamma$  temos a média das distribuições hiperbólicas generalizadas:

$$E[X] = \mu + \beta \frac{\delta K_{\lambda+1}(\bar{\gamma})}{\gamma K_\lambda(\bar{\gamma})} \quad (3.10)$$

Calculando a segunda derivada obtemos a variância:

$$Var[X] = \delta \left[ \frac{K_{\lambda+1}(\bar{\gamma})}{\gamma K_\lambda(\bar{\gamma})} + \frac{\beta^2}{\gamma^2} \left( \frac{K_{\lambda+2}(\bar{\gamma})}{K_\lambda(\bar{\gamma})} - \left( \frac{K_{\lambda+1}(\bar{\gamma})}{K_\lambda(\bar{\gamma})} \right)^2 \right) \right]$$

A expressão da média dada em (3.10) mostra-nos que todos os parâmetros têm efeito na média. Os efeitos de  $\mu$  e de  $\beta$  foram ilustrados nas Figuras 3.2 e 3.4 respectivamente. Com o conjunto de parâmetros fixados na Figura 3.4 conseguimos obter que  $E[X] = 0$  para o gráfico a preto,  $E[X] = -0,8385$  para o gráfico a azul e  $E[X] = 2,3971$  para o gráfico a vermelho. O efeito de  $\alpha$ ,  $\delta$  e  $\lambda$  não está ainda provado pois nas Figuras 3.3 e 3.5 o valor de  $\beta$  é igual a 0 logo o segundo termo da equação (3.10) não influencia a média. Se alterarmos o valor de  $\beta$  para 0.1 poderemos ver nas Figuras 3.8 e 3.9 a influência de  $\delta$  e  $\lambda$  na média. É fácil constatar que os gráficos movem-se para a direita com o aumento do  $\delta$  e do  $\lambda$ .

Finalmente, atendendo ao facto de  $M_{GH}$  possuir os momentos em torno da origem  $|x| < \alpha - \beta$ , pelo que é uma função holomorfa no plano complexo para  $|z| < \alpha - \beta$ . Assim, podemos prolongar  $M_{GH}$  ao plano complexo de forma que a função característica de  $X$  com distribuição  $GH(x; \lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu)$  é dada por

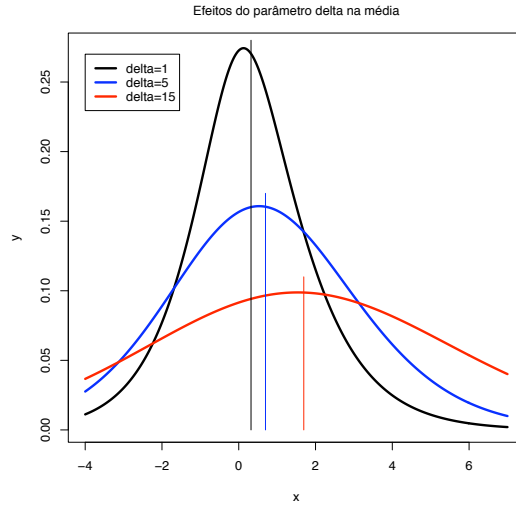


Figura 3.8: Representação da densidade de 3 distribuições hiperbólicas generalizadas com  $\lambda = 1.3$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 0$ ,  $\mu = 0$  e  $\delta = 1$ ,  $\delta = 5$  e  $\delta = 15$ .

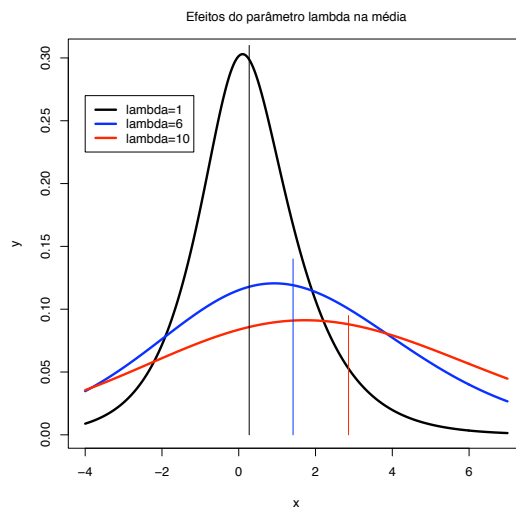


Figura 3.9: Representação da densidade de 3 distribuições hiperbólicas generalizadas com  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 0$ ,  $\delta = 1$ ,  $\mu = 0$  e  $\lambda = 1$ ,  $\lambda = 6$  e  $\lambda = 10$

$$\varphi_{GH}(u) = \exp\{i\mu u\} \left\{ \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 - (\beta + iu)^2} \right\}^{\lambda/2} \frac{K_\lambda(\delta \sqrt{\alpha^2 - (\beta + iu)^2})}{K_\lambda(\delta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2})} \quad (3.11)$$

### 3.6 Subclasses

Atribuindo valores específicos ao parâmetro  $\lambda$  obtemos diferentes subclasses.

Usando as propriedades das funções de Bessel  $K_\lambda$ , é possível simplificar a função densidade da distribuição hiperbólica generalizada quando  $\lambda \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ . Para  $\lambda = n + \frac{1}{2}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  a função de Bessel  $K_\lambda$  pode ser expressa como

$$K_{n+\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} \left( 1 + \sum_{i=1}^n \frac{(n+i)!}{(n-i)!i!} (2x)^{-i} \right).$$

Como  $K_\lambda(x) = K_{-\lambda}(x)$ , obtemos  $K_{-\frac{1}{2}}(x) = K_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} x^{-\frac{1}{2}} e^{-x}$ . Em particular esta expressão permite deduzir expressões mais simples no caso em que  $\lambda = -\frac{1}{2}$  e  $\lambda = 1$ .

**Definição 3.1** Para  $\lambda = 1$  obtemos a distribuição hiperbólica (HYP) cuja função densidade é

$$HYP(x; \alpha, \beta, \delta, \mu) = \frac{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{2\delta\alpha K_1(\delta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2})} \exp(-\alpha \sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2} + \beta(x - \mu)),$$

com  $x, \mu \in \mathbb{R}$ ,  $0 \leq \delta$  e  $|\beta| < \alpha$ .

O objectivo principal do trabalho de Barndorff-Nielsen [BN77] foi a subclasse das distribuições HYP. Note-se que a função de Bessel  $K_1$  só aparece como constante de normalização o que tem algumas vantagens computacionais.

**Definição 3.2** Para  $\lambda = -\frac{1}{2}$  obtemos a distribuição normal inversa Gaussiana (NIG) com função densidade

$$NIG(x; \alpha, \beta, \delta, \mu) = \frac{\alpha\delta}{\pi} \exp(\delta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} + \beta(x - \mu)) \frac{K_1(\alpha \sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2})}{\sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2}}$$

com  $x, \mu \in \mathbb{R}$ ,  $0 \leq \delta$  e  $0 \leq |\beta| \leq \alpha$ .

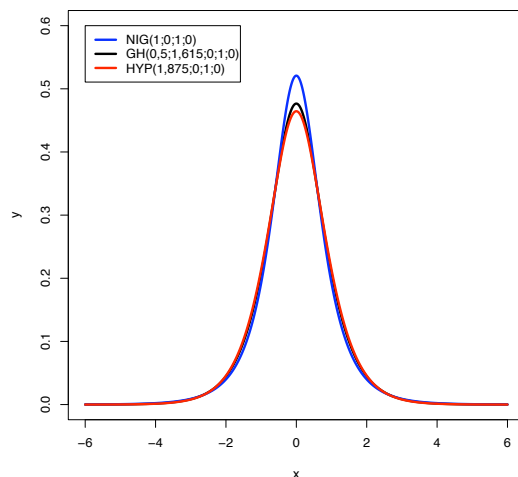


Figura 3.10: Comparação entre as curvas densidade das distribuições GH(0.5, 1.615, 0, 1, 0), NIG(-0.5, 1, 0, 1, 0) e HYP(1, 1.875, 0, 1, 0)

Nos anos mais recentes diversos autores têm ajustado com sucesso distribuições da subclasse NIG aos log-retornos de aplicações financeiras. Entre esses destacamos Eberlein e Keller [EK95], Prause [Pra97][Pra99], Barndorff-Nielsen e Shephard [BNS01].

### 3.7 Distribuições limites

Um aspecto importante das distribuições hiperbólicas generalizadas é o facto de cobrir muitos casos especiais, nomeadamente a distribuição normal, t-student e Cauchy.

1. A distribuição normal é obtida como um caso limite da distribuição hiperbólica generalizada para  $\delta \rightarrow \infty$  e  $\delta/\alpha \rightarrow \sigma^2$ .
2. A distribuição t-student é obtida como um caso limite da distribuição hiperbólica generalizada para  $\lambda > 0$  e  $\alpha = \beta = \mu = 0$ .
3. A distribuição de Cauchy é obtida como um caso limite da distribuição hiperbólica generalizada com  $\lambda = -\frac{1}{2}$ ,  $\alpha = \beta = 0$  e  $\delta = 1$ .

A Tabela 3.7 resume as condições em que se obtêm as distribuições limites.

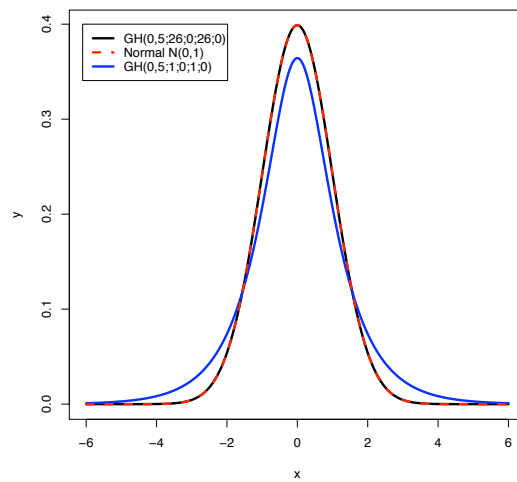


Figura 3.11: A curva densidade de  $GH(0, 5; 1; 0; 1; 0)$  é sobreposta pela curva densidade de  $N(0, 1)$ . Os parâmetros da distribuição hiperbólica generalizada foram ajustados para  $\alpha = \delta = 26$ , um valor relativamente grande para aproximar o infinito. A azul temos a curva densidade de  $GH(0, 5; 1, 0, 10)$  que serve de comparação.

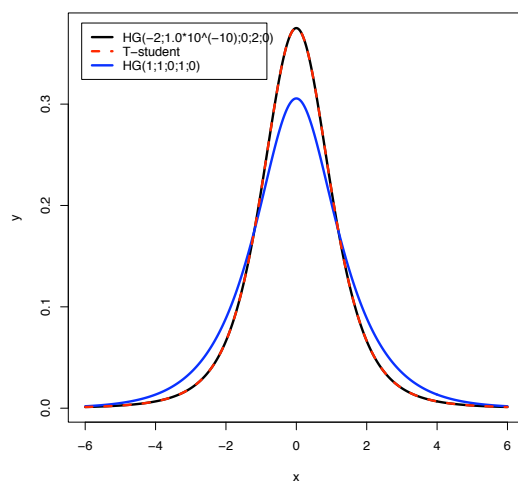


Figura 3.12: A distribuição hiperbólica generalizada de parâmetros  $GH(-2; 1.0 \times 10^{-10}; 0; 2; 0)$  (preto) ajusta-se à distribuição T-student com 4 graus de liberdade (vermelho tracejado). Tomamos para  $\alpha$  o valor  $1.0 \times 10^{-10}$  para aproximar a zero. A azul temos a curva densidade de  $GH(1, 1, 0, 1, 0)$ .

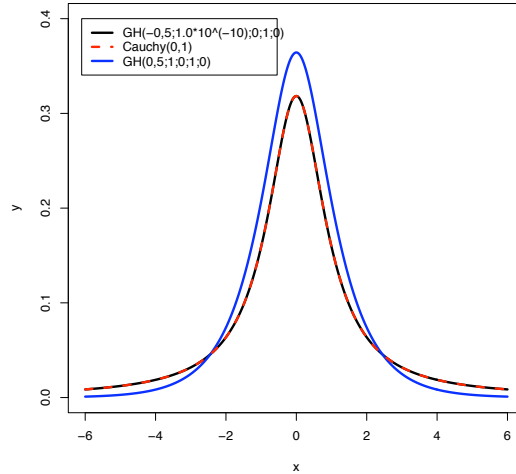


Figura 3.13: A distribuição hiperbólica generalizada de parâmetros  $GH(-0,5; 1.0 \times 10^{-10}; 0; 1; 0)$  ajusta-se à distribuição de Cauchy. Temos como comparação a curva densidade de  $GH(0,5; 1; 0; 1; 0)$ .

	Parâmetros
Normal( $\mu, \delta^2$ )	$\delta \rightarrow \infty$ e $\delta/\alpha \rightarrow \sigma^2$
T-student ( $n$ )	$\lambda < 0$ e $\alpha = \beta = \mu = 0$ . $\lambda = -\frac{n}{2}$ , $\delta = \sqrt{n}$
Cauchy (0,1)	$\lambda = -\frac{1}{2}$ , $\alpha = \beta = 0$ e $\delta = 1$

### 3.8 Comportamento das caudas

Uma das propriedades que torna as distribuições hiperbólicas generalizadas tão populares na modelação da dinâmica temporal dos mercados financeiros é o facto destas terem caudas "pesadas" o que as torna mais próximas da densidade empírica das séries temporais financeiras. As distribuições hiperbólicas decrescem exponencialmente geralmente segundo a seguinte expressão

$$GH(x; \lambda, \alpha, \beta, \delta) \sim |x|^{\lambda-1} \exp((\mp\alpha + \beta)x) \quad \text{quando } x \rightarrow \pm\infty \quad (3.12)$$

a menos de uma constante multiplicativa, ver [Pra99].

Como podemos constatar nas Figuras 3.14 e 3.15 vemos que a hiperbólica generalizada tem um decrescimento maior para  $\lambda = 1.5$  e menor para a distribuição NIG.

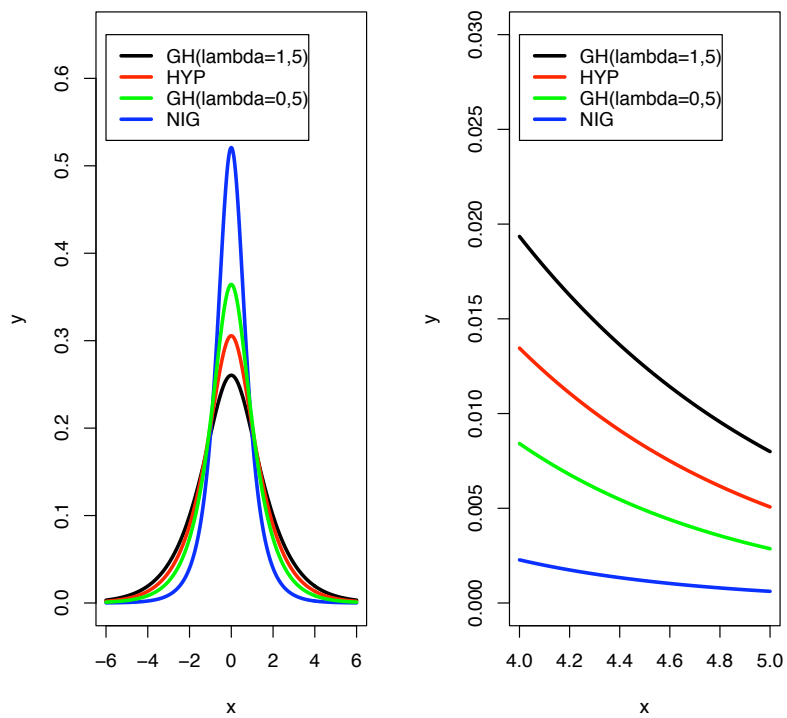


Figura 3.14: Comportamento das caudas de distribuições hiperbólicas generalizadas com diferentes valores de  $\lambda$  com  $\alpha = 1, \beta = 0, \delta = 1$  e  $\mu = 0$ .

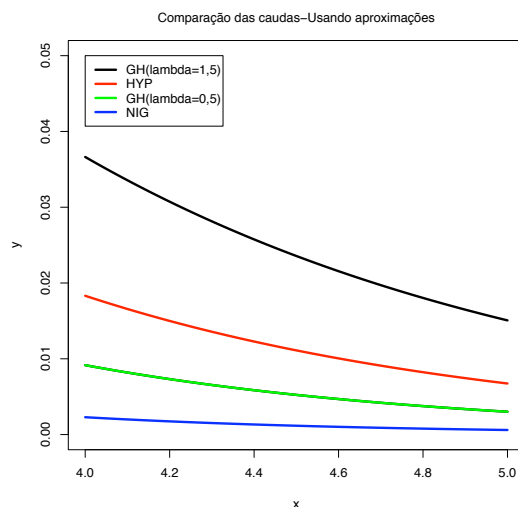


Figura 3.15: Usando a fórmula mencionada em (3.12) temos uma aproxima o para as caudas das distribui es hiperbólicas generalizadas.

### 3.9 A distribui o hiperbólica generalizada t-Student assimétrica

Os log-retornos de activos do mercado financeiro medidos em intervalos de tempo curtos por exemplo diário e semanal são caracterizados pela sua não normalidade. A distribui o empírica dos log-retornos têm caudas mais pesadas do que uma distribui o normal o que implica que existem grandes varia es nos log-retornos com maior frequência do que numa distribui o normal. Um dos conjuntos de distribui es usados para modelar os log-retornos mais utilizada na literatura são as já referidas Hiperbólicas generalizadas das quais se destaca a NIG devido às suas características teóricas. Um conjunto de distribui es alternativo para modelar dados de caudas pesadas e assimétricos são as extensões assimétricas das distribui es t-Student que lidam bem com as caudas pesadas devido ao facto de possuirem duas caudas com comportamento polinomial mas não se adaptam bem com a assimetria.

Nesta sec o iremos falar de um caso especial das distribui es hiperbólicas generalizadas chamada de distribui o hiperbólica generalizada t-Student assimétrica denotada neste texto por GHt-S. Esta distribui o   referida de uma forma breve em Prause [Pra99], Barndorff-Nielsen et al. [BNS01], Jones e Faddy [JF03]

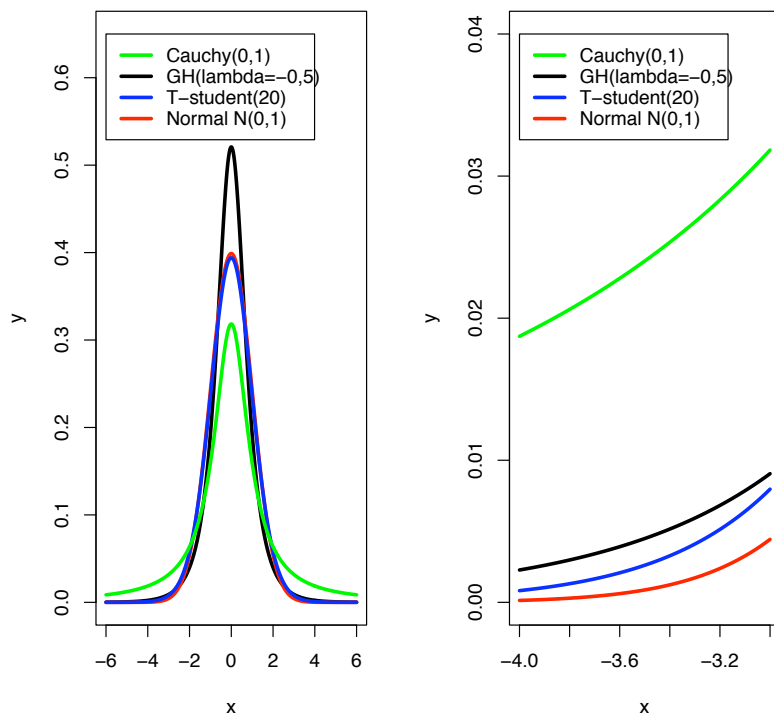


Figura 3.16: Comparação entre as caudas de  $GH(-0, 5; 1; 0; 1; 0)$  e as distribuições limites Normal, T-student e Cauchy . Todas as distribuições têm média 0 e variância 1 excepto a T-student em que como a variância é dada por  $\sigma^2 = n/(n-2)$  em que  $n$  representa os graus de liberdade. Neste gráfico  $n = 20$  logo a variância é 1,11.

e outros. Apesar de referida em varios trabalhos não é uma distribuição muito conhecida em especial no que diz respeito ao comportamento das suas caudas, pois uma delas possui um comportamento polinomial e a outra um comportamento exponencial. É o único membro da família a possuir tais características. Existem evidências empíricas de comportamentos de caudas polinomiais e exponenciais em dados financeiros assimétricos o que mostra a sua utilidade na modelação desse tipo de dados em comparação com outras distribuições, ver Aas et al. [AH06].

A GH t-Student pode ser representada como uma distribuição normal com mistura variância-média com a distribuição GIG a par do que foi feito na secção 3.4.

A densidade de GHt-S é dada por

$$GHt - S(x; \mu, \delta, \beta, \nu) = \begin{cases} \frac{2^{(1-\nu)/2} \delta^\nu |\beta|^{(\nu+1)/2} K_{\frac{\nu+1}{2}} \left( \sqrt{\beta^2(\delta^2 + (x - \mu)^2)} \right) \exp(\beta(x - \mu))}{\Gamma(\frac{\nu}{2}) \sqrt{\pi} \left( \sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2} \right)^{\frac{\nu+1}{2}}}, & \beta \neq 0 \\ \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\sqrt{\pi} \delta \Gamma(\frac{\nu+1}{2})} \left[ 1 + \frac{(x - \mu)^2}{\delta^2} \right]^{-(\nu+1)/2}, & \beta = 0. \end{cases} \quad (3.13)$$

Quando  $\beta = 0$ , a partir de (3.13) obtemos a função densidade de uma distribuição t-Student não centrada. Na Figura 3.17 temos vários exemplos de representações de densidades de GHt-S.

A média e a variância de uma variável aleatória  $X$  distribuida segundo uma GHt-Student é dada por:

$$E(X) = \mu + \frac{\beta \delta^2}{\nu - 2}$$

$$Var(X) = \frac{2\beta^2 \delta^4}{(\nu - 2)^2(\nu - 4)} + \frac{\delta^2}{\nu - 2}$$

A partir da equação (3.12) temos que a densidade da distribuição GHt-S nas caudas é dada por

$$GHt - S(x) \sim C |x|^{-\nu/2-1} \exp(-|\beta| |x| + \beta x) \quad x \rightarrow \pm\infty.$$

Então a “cauda” mais pesada decresce segundo a seguinte expressão

$$GHt - S(x) \sim C |x|^{-\nu/2-1}, \quad \begin{cases} \beta < 0, & x \rightarrow -\infty \\ \beta > 0, & x \rightarrow +\infty, \end{cases} \quad (3.14)$$

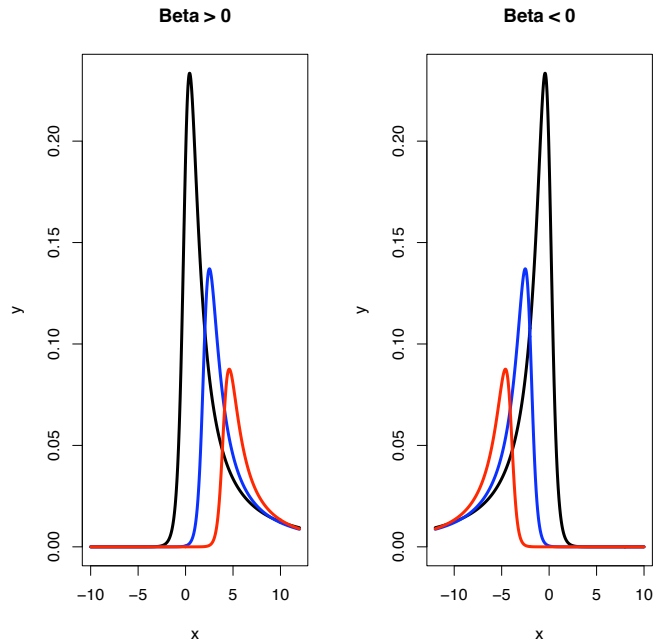


Figura 3.17: Representação da densidade de distribuições generalizadas hiperbólicas t-Student assimétricas em que  $\delta = 1$ ,  $\nu = 1$  e à esquerda temos  $\mu = 0, -2, -4$  e respectivamente  $\beta = 1, 1.25, 1.5$  e à direita temos os valores simétricos para  $\mu$  e para  $\beta$ .

e a “cauda” mais leve segundo

$$GHt - S(x) \sim C |x|^{-\nu/2-1} \exp(-2|\beta||x|), \quad \begin{cases} \beta < 0, & x \rightarrow +\infty \\ \beta > 0, & x \rightarrow -\infty \end{cases} \quad (3.15)$$

O comportamento descrito em (3.14) e (3.15) é facilmente comprovado com recurso à Figura 3.17. Este comportamento nas caudas torna esta distribuição única para modelar conjuntos de dados bastante assimétricos e com caudas pesadas.

## Capítulo 4

# Ajustamento das Distribuições aos Dados Empíricos

Neste capítulo apresentaremos os resultados dos ajustamentos aos dados empíricos dos activos mencionados na Tabela 2.1. Os ajustamentos foram obtidos utilizando software R ver [www.r-project.org](http://www.r-project.org) e o Apêndice A para um resumo dos comandos principais usados. As noções estatísticas usadas ao longo deste capítulo encontram-se em qualquer livro da especialidade.

### 4.1 Caracterização estatística dos dados

Nesta secção apresentamos medidas estatísticas com vista a obter à caracterização dos dados com que vamos trabalhar. Os dados em estudo correspondem aos mesmos que estão referidos na Tabela 2.1 no início do trabalho. Os valores obtidos para as medidas estatísticas consideradas encontram-se resumidos na Tabela 4.1.

A média dos dados em qualquer um dos activos situa-se muito próxima do zero, sendo negativa no caso do activo EDP.

O desvio padrão é uma medida da dispersão dos dados que só pode assumir valores não negativos e será tanto maior quanto maior é a dispersão dos dados. Os activos considerados possuem valores de desvio padrão relativamente próximos o que indica que possuem uma dispersão muito próxima.

O achatamento (Kurtosis) é uma medida que dá o achatamento da distribuição dos dados. Relativamente à distribuição normal, a qual possui valor de achatamento 3. É comum considerar-se apenas os casos em que o achatamento é superior a 3. Quanto maior é o valor do achatamento mais elevado é o “pico” no centro

	PSI20	PT	EDP	BCP
Número de observações	2485	2665	2171	3490
Média	0,000311	0,000472	-4,0724e(-5)	0,000224
Desvio padrão	0,010917	0,019581	0,015757	0,014786
Assimetria	-0,549966	0,134888	0,269550	-0,342402
Achatamento	6,585397	4,473917	3,928359	11,02036
Máximo	0,069413	0,169402	0,088704	0,103655
Mínimo	-0,095898	-0,101320	-0,103541	-0,170931

Tabela 4.1: Dados estatísticos do activo PSI20, PT, EDP e BCP.

e mais pesadas são as suas caudas, destacando-se nesse aspecto o activo BCP pelo seu “pico” elevado.

A assimetria (Skewness) é uma medida da assimetria da distribuição dos dados. Uma curva normal apresenta uma assimetria igual a zero sendo portanto útil para comparar as outras distribuições com a normal. Uma assimetria negativa indica que a cauda esquerda da distribuição é mais longa, ou seja os dados estão mais concentrados e deslocados para a direita. Esta situação verifica-se no caso do activo BCP e com maior evidência no activo PSI20 mas de uma forma muito ténue pois tratam-se de valores muito próximos de zero. No caso em que temos uma assimetria positiva verifica-se a situação inversa. Essa situação ocorre relativamente aos activos PT e EDP.

Em relação aos valores máximos e mínimos destaca-se nesse aspecto o activo PT por possuir a maior amplitude nos dados e como seria de esperar com menor amplitude nos dados o activo PSI20 porque se trata de um índice englobando vários activos.

## 4.2 Estimação de parâmetros

A estimação de parâmetros poderá ser feita utilizando diferentes métodos, mas de entre todos os métodos o que se destaca pela qualidade das aproximações é o método do máximo da função de verosimilhança (maximum likelihood function), ver [Pra99, Section 1.4].

A ideia por detrás da estimação dos parâmetros do maximum likelihood (MLE)

ou estimação dos parâmetros de verosimilhança é determinar os parâmetros que maximizam a probabilidade da amostra. De um ponto de vista estatístico o método de maximum likelihood é considerado a técnica mais robusta de estimação de parâmetros e que apresenta resultados mais fiáveis na estimação dos parâmetros. O método de maximum likelihood é bastante versátil e aplica-se a grande número de modelos e a diferentes tipos de dados. Apesar da metodologia do método de maximum likelihood ser simples a sua implementação pode tornar-se impraticável como é o caso em análise. No entanto nos dias de hoje existe já muito software que se ocupa dessa tarefa, como é o caso do R descrito no apêndice A.

Tal como todos os métodos possui vantagens e desvantagens. Além das vantagens já referidas podemos ainda enumerar o facto de ao considerarmos um grande número de amostras de uma determinada população o valor médio dos parâmetros estimados serem em teoria iguais aos valores referentes à população no seu todo. Os estimadores variam num intervalo de confiança pequeno.

Relativamente às desvantagens podemos mencionar o facto de os cálculos matemáticos exigidos não serem propriamente triviais principalmente no caso em que os intervalos de confiança são desejados na aproximação dos parâmetros. As estimações numéricas são exigentes razão pela qual é necessário confiar em software de qualidade para obter os melhores resultados possíveis. O método poderá não funcionar bem para amostras reduzidas e é sensível aos valores iniciais.

Vejamos uma descrição de como funciona o método de maximum likelihood.

Seja  $(X_n)_{n=1}^{\infty}$  uma sucessão de variáveis aleatórias i.i.d. e seja  $(x_1, \dots, x_n)$  uma amostra com característica  $X$  cuja distribuição é absolutamente contínua. Suponhamos que a densidade de  $X$  contém alguns parâmetros desconhecidos  $(\gamma_1, \dots, \gamma_m)$  que serão estimados tendo por base a amostra considerada.

Seja  $f(x; \gamma_1, \dots, \gamma_m)$  a função densidade de probabilidade, então a forma de verosimilhança é definida por

$$L(x_1, \dots, x_n; \gamma_1, \dots, \gamma_m) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \gamma_1, \dots, \gamma_m). \quad (4.1)$$

Com vista a uma simplificação em termos de cálculo iremos trabalhar com o logaritmo da função likelihood obtendo então a seguinte equação

$$\ln L(x_1, \dots, x_n; \gamma_1, \dots, \gamma_m) = \sum_{i=1}^n \ln f(x_i; \gamma_1, \dots, \gamma_m).$$

O método de maximum likelihood consiste em determinar  $\hat{\gamma}_1, \dots, \hat{\gamma}_n$  para os quais a função likelihood (4.1) atinge o seu máximo. Estes valores  $\hat{\gamma}_1, \dots, \hat{\gamma}_n$  são fun-

ções de  $x_1, \dots, x_n$  e estimadores de  $\gamma_1, \dots, \gamma_m$  sendo por isso chamados de maximum likelihood estimators ou estimadores de verosimilhança máxima. Estes estimadores são calculados resolvendo o seguinte sistema

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \gamma_i} = 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Como forma de ilustrar o método de maximum likelihood iremos estimar a média ( $m$ ) e o desvio padrão ( $\sigma$ ) para uma distribuição normal. Consideremos então a função densidade de probabilidade normal

$$N(x, m, \sigma) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}.$$

Temos então como função likelihood

$$L(x_1, \dots, x_n, m, \sigma) = \prod_{i=1}^n f(x_i, m, \sigma)$$

à qual podemos aplicar o logaritmo natural

$$\ln L(x_1, \dots, x_n, m, \sigma) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - n \ln \sigma - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - m}{\sigma}\right)^2.$$

Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial \ln L}{\partial m} = 0 \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n (x_i - m) = 0 \\ -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \\ \frac{1}{\sigma} \left(-n + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2\right) = 0 \end{cases}$$

obtemos

$$\begin{cases} m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \\ \sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2} \end{cases}.$$

O método de maximum likelihood poderá ser relativamente simples de aplicar quando o número de parâmetros a ser estimado é pequeno mas em situações com vários parâmetros a serem estimados a complexidade das técnicas matemáticas a aplicar será bastante elevada. Consideremos agora uma situação em que pretendemos determinar os parâmetros de uma distribuição hiperbólica generalizada em que o número de parâmetros a estimar igual é cinco.

Vejam agora a implementação do algoritmo de estimação do maximum likelihood no caso de uma distribuição hiperbólica generalizada cuja função densidade de probabilidade foi definida em (3.3).

Assumimos a independência das observações  $x_i, i = 1, \dots, n$  e maximizamos a função log-likelihood

$$L = \ln a(\lambda, \alpha, \beta, \delta) + \left(\frac{\lambda}{2} - \frac{1}{4}\right) \sum_{i=1}^n \ln(\delta^2 + (x_i - \mu)^2) + \sum_{i=1}^n \left[ \ln K_{\lambda-1}(\alpha \sqrt{\delta^2 + (x_i - \mu)^2}) + \beta(x_i - \mu) \right]$$

em que  $a$  está definida em (3.4). Obtemos as seguintes expressões para as derivadas da função log-likelihood. No Apêndice B página 82 temos a definição e propriedades das funções  $R_\lambda$  e  $S_\lambda$ . Aplicamos também propriedades das funções de Bessel  $K_\lambda$  apresentadas no mesmo apêndice e a simplificação de  $k_\lambda(x) = dK_\lambda(x)/d\lambda$  para a derivada da função de Bessel no que diz respeito à ordem.

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} L &= n \left[ \frac{1}{2} \ln \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha\delta} - \frac{k_\lambda(\delta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2})}{K_\lambda(\delta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2})} \right] \\ &+ \sum_{i=1}^n \left[ \frac{1}{2} \ln(\delta^2 + (x_i - \mu)^2) + \frac{k_{\lambda-\frac{1}{2}}(\alpha \sqrt{\delta^2 + (x_i - \mu)^2})}{K_{\lambda-\frac{1}{2}}(\alpha \sqrt{\delta^2 + (x_i - \mu)^2})} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha} L &= n \frac{\delta\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} R_\lambda(\delta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}) \\ &- \sum_{i=1}^n \sqrt{\delta^2 + (x_i - \mu)^2} R_{\lambda-\frac{1}{2}}(\alpha \sqrt{\delta^2 + (x_i - \mu)^2}) \end{aligned}$$

$$\frac{d}{d\beta} L = n \left[ -\frac{\delta\beta}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} R_\lambda(\delta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}) - \mu \right] + \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\delta}L &= n \left[ -\frac{2\lambda}{\delta} + \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} R_\lambda(\delta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}) \right] \\ &+ \sum_{i=1}^n \left[ \frac{(2\lambda - 1)\delta}{\delta^2 + (x_i - \mu)^2} - \frac{\alpha \delta R_\lambda(\alpha \sqrt{\delta^2 + (x_i - \mu)^2})}{\sqrt{\delta^2 + (x_i - \mu)^2}} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\mu}L &= -n\beta + \sum_{i=1}^n \frac{x_i - \mu}{\sqrt{\delta^2 + (\mu - x_i)^2}} \\ &\times \left[ \frac{2\lambda - 1}{\sqrt{\delta^2 + (x_i - \mu)^2}} - \alpha R_{\lambda - \frac{1}{2}}(\alpha \sqrt{\delta^2 + (x_i - \mu)^2}) \right]. \end{aligned}$$

Podemos obter soluções das equações likelihood para  $\beta$  e  $\mu$ . De  $\frac{d}{d\beta}L = 0$  e  $\frac{d}{d\mu}L = 0$  temos

$$\mu = -\frac{\delta\beta}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} R_\lambda(\delta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{x_i - \mu}{\sqrt{\delta^2 + (x_i - \mu)^2}} \\ &\times \left[ \frac{2\lambda - 1}{\sqrt{\delta^2 + (x_i - \mu)^2}} - \alpha R_{\lambda - \frac{1}{2}}(\alpha \sqrt{\delta^2 + (x_i - \mu)^2}) \right] \end{aligned}$$

As soluções das equações likelihood para os outros parâmetros são obtidas maximizando a equação log-likelihood em relação a  $(\lambda, \alpha, \delta, \beta)$ . O parâmetro de localização  $\mu$  é então determinado pela expressão (4.2). Após esta breve explicação de como podemos estimar os parâmetros, indicamos em três tabelas correspondentes às três distribuições em estudo os parâmetros deduzidos para cada um dos quatro activos em análise, ver A para algumas indicações práticas.

### Parâmetros da distribuição hiperbólica

Activo	$\alpha$	$\beta$	$\delta$	$\mu$	Log-Likelihood
PSI 20	136,3935	-4,203097	0,001183	0,000775	7954,952
PT	7,325695	1,268488	4,9774e(-8)	-5,5137e(-7)	6930,396
EDP	96,362703	3,732345	0,004151	-0,000928	6088,396
BCP	105,1704	1,240609	3,18056e(-8)	5,5726e(-8)	10338,47

Tabela 4.2: Parâmetros estimados para a subclasse hiperbólica ( $\lambda = 1$ ) e os valores do log-likelihood obtidos.

### Parâmetros da distribuição normal inversa gaussiana

Activo	$\alpha$	$\beta$	$\delta$	$\mu$	Log-Likelihood
PSI 20	65,999356	-3,485115	0,007817	0,000724	7962,031
PT	37,50635	1,068899	0,014708	0,000053	6919,706
EDP	55,383396	4,595595	0,013530	-0,001167	6093,996
BCP	36,75836	0,908320	0,008145	0,000023	10330,91

Tabela 4.3: Parâmetros estimados para a subclasse normal inversa Gaussiana ( $\lambda = -0.5$ ) e os valores do log-likelihood obtidos.

### Parâmetros da distribuição hiperbólica generalizada

Activo	$\alpha$	$\beta$	$\delta$	$\mu$	$\lambda$	Log-Likelihood
PSI 20	67,642630	-3,382798	0,007526	0,000717	-0,442819	7962,106
PT	73,25695	2,268488	4,9774e(-8)	-2,6513e(-7)	0,973778	6930,746
EDP	40,066978	4,629129	0,016387	-0,001187	-1,022826	6094,487
BCP	105,1704	1,240609	3,1805e(-8)	5,5726e(-8)	0,769000	10389,44

Tabela 4.4: Parâmetros estimados para a hiperbólica generalizada e os valores do log-likelihood obtidos.

No caso da distribuição hiperbólica e normal inversa gaussiana precisamos apenas de estimar 4 parâmetros visto que o parâmetro  $\lambda$  está fixo. Para a distribuição hiperbólica generalizada o parâmetro  $\lambda$  é mantido livre de forma a assumir o valor

mais conveniente ao ajustamento, tendo-se então neste caso 5 parâmetros para estimar. No caso concreto da estimação dos parâmetros para esta última distribuição é necessário em muitas situações considerar um valor inicial que facilite o cálculo e a convergência. O valor inicial a considerar para o caso da distribuição hiperbólica generalizada era obtido a partir dos valores obtidos para os parâmetros da distribuição HYP ou NIG.

Da análise das tabelas observamos que os valores do log-likelihood para todos os activos, no caso da distribuição hiperbólica generalizada toma valores superiores às restantes distribuições mas com muito poucas diferenças para uma das outras distribuições. A diferença entre os log-likelihood do ajustamento à hiperbólica generalizada e as restantes subclasses já seria de esperar pois existe mais um parâmetro livre para ajustamento.

Os parâmetros obtidos para o maior valor de log-likelihood constituem à partida o melhor ajustamento para os dados em consideração. Essa qualidade de ajustamento poderá ser avaliada quer em termos gráficos quer considerando diferentes medidas de distância, ver Subsecção 4.4.2 .

### **4.3 Gráficos das distribuições ajustadas aos activos**

Nesta secção iremos apresentar os ajustamentos gráficos com a representação das densidades dos log-retornos e das distribuições normal, hiperbólica, normal inversa gaussiana e hiperbólica generalizada. Para cada um dos activos elaboramos 4 gráficos: no 1º temos a densidade e os log-retornos, no 2º gráfico temos a log-densidade e os log-retornos por forma a analisar o ajustamento das caudas e no 3º e 4º gráficos temos as caudas direita e esquerda observadas em pormenor.

A densidade dos dados empíricos de cada um dos activos foram representados usando um kernel smoother gaussiano. As distribuições em estudo foram representadas utilizando os parâmetros estimados na secção anterior.

A partir das Figuras 4.1 e 4.2 vemos que existe um bom ajustamento por parte das distribuições aos dados empíricos. Qualquer uma das distribuições HYP, NIG e GH apresenta melhor ajustamento do que a distribuição normal. De entre as distribuições destaca-se a GH e a NIG pelo ajustamento aos valores centrais e as caudas. A distribuição HYP apresenta um pior ajustamento em relação aos valores centrais com um “pico” mais elevado, mas nas caudas tem um bom desempenho.

A partir das Figuras 4.3 e 4.4 vemos que existe um bom ajustamento por parte das distribuições aos dados empíricos. Qualquer uma das distribuições HYP, NIG e GH apresenta um melhor grau de ajustamento do que a distribuição normal. De

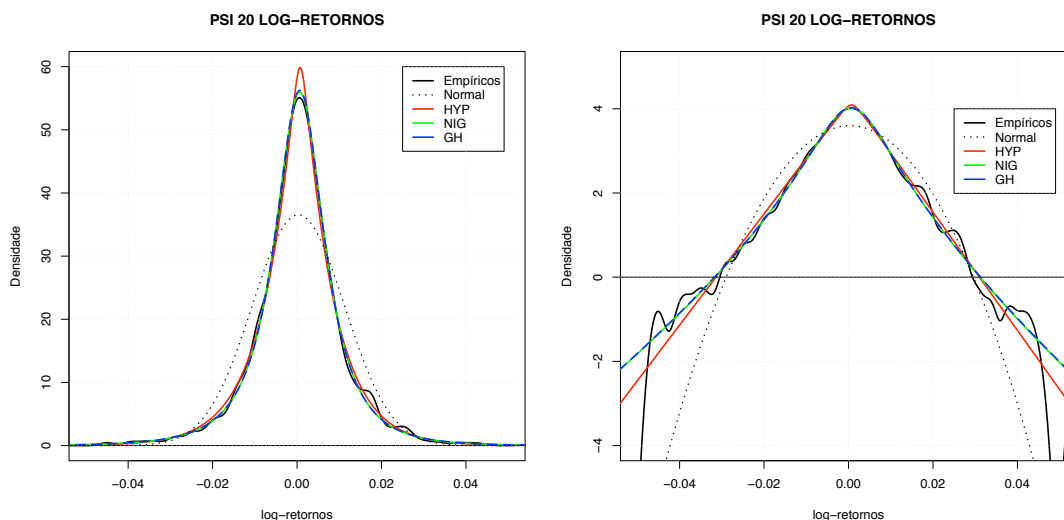


Figura 4.1: Gráficos das densidades dos log-retornos do activo PSI20, das distribuições normal e da distribuição generalizada hiperbólica e subclasses ajustadas aos dados. O gráfico direito tem uma escala logarítmica no eixo vertical.

entre as distribuições destaca-se a HYP e a GH pelo facto de em relação aos valores centrais terem um “pico” muito acima dos dados empíricos e pelo contrário a distribuição NIG apresentar valores abaixo mas aparentemente mais próximos. Em relação às caudas ambas as distribuições apresentam comportamentos muito similares como podemos ver na Figura 4.4.

A partir das Figuras 4.7 e 4.8 vemos que existe um bom ajustamento por parte das distribuições aos dados empíricos. Novamente as distribuições HYP, NIG e GH apresenta um melhor grau de ajustamento do que a distribuição normal. De entre as distribuições destaca-se a GH pelo facto de em relação aos valores centrais ter um “pico” muito acima dos dados empíricos e pelo contrário a distribuição NIG apresentar valores muito abaixo dos valores empíricos. A distribuição HYP apresenta uma melhor aproximação em relação aos valores centrais apresentados pela densidade dos dados empíricos. Em relação aos valores centrais torna-se evidente em termos gráficos que os valores à esquerda de zero não ficam bem ajustados pelas distribuições. Em relação às caudas verifica-se que existe um maior desajustamento dos dados empíricos em relação à cauda esquerda, sendo esse facto particularmente visível na Figura 4.5 com escala logarítmica e não na Figura 4.4 mais específica das caudas.

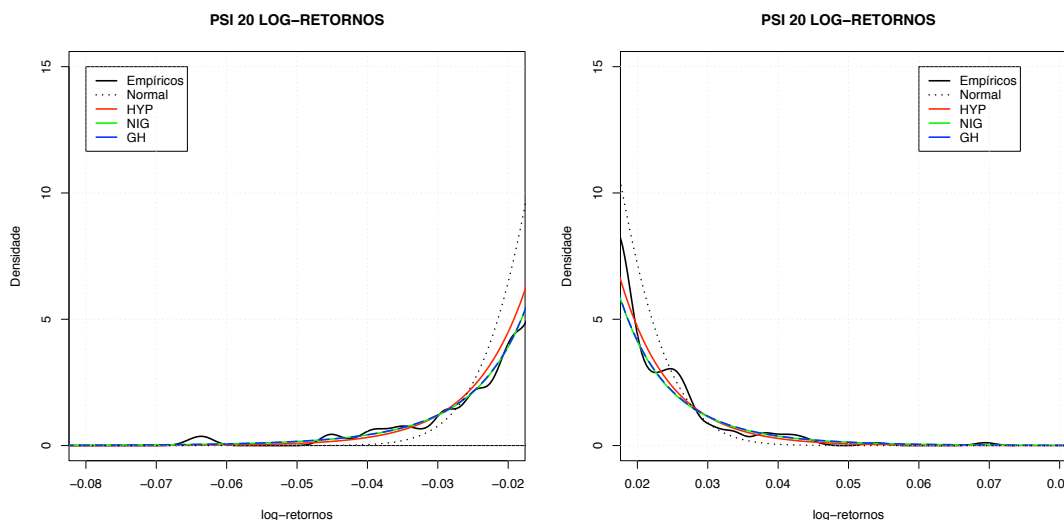


Figura 4.2: Gráficos pormenorizados das caudas esquerda e direita dos log-retornos do activo PSI20, da distribuição normal e da distribuição generalizada hiperbólica e subclasses ajustadas aos dados.

A partir das Figuras 4.5 e 4.6 vemos que existe um bom ajustamento por parte das distribuições aos dados empíricos. Qualquer uma das distribuições HYP, NIG e GH apresenta um melhor grau de ajustamento do que a distribuição normal. De entre as distribuições destaca-se a HYP pelo facto de em relação aos valores centrais ter um “pico” acima dos dados empíricos e pelo contrário a distribuição NIG e GH apresentarem valores mais próximos aos dados empíricos. Em relação aos valores centrais torna-se evidente em termos gráficos que os valores à esquerda de zero não ficam bem ajustados pelas distribuições. Em relação as caudas verifica-se que existe um maior desajustamento dos dados empíricos em relação à cauda esquerda, sendo esse facto visível nas Figuras 4.4 e 4.5.

Em sùmula podemos afirmar que em termos de uma análise gráfica os activos que parecem melhores ajustados pelas distribuições HYP, NIG e GH foram os activos PSI20 e PT e que os activos EDP e BCP apresentaram algumas dificuldades em termos de ajustamento em relação aos valores centrais e uma das caudas. Na próxima secção usaremos métodos menos subjectivos para comprovar as nossas afirmações na busca da melhor aproximação possível.

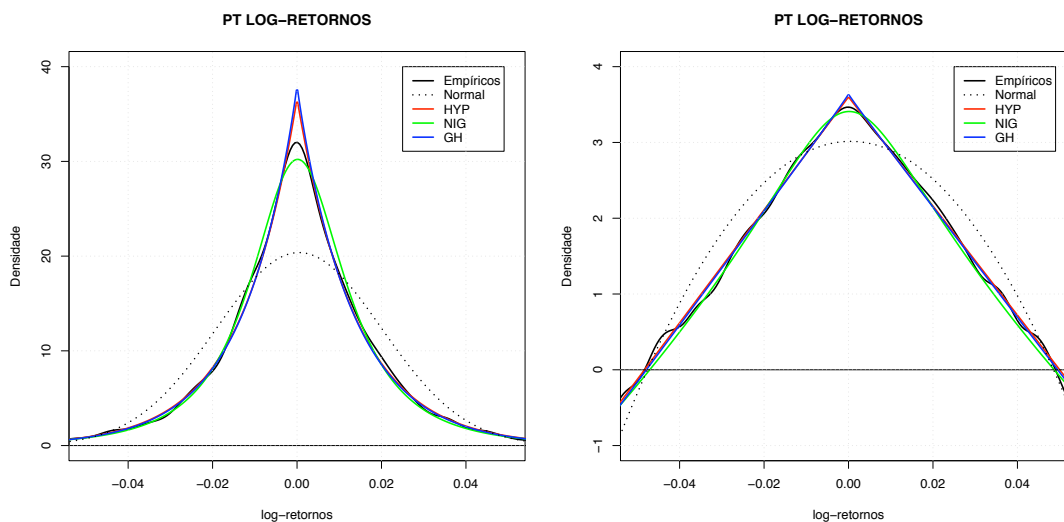


Figura 4.3: Gráficos das densidades dos log-retornos do activo PT, das distribuições normal e da distribuição generalizada hiperbólica e subclasses ajustadas aos dados. O gráfico direito tem uma escala logarítmica no eixo vertical.

## 4.4 Testes de ajustamento

Um dos problemas mais usuais em estatística é medir o grau de ajustamento de uma distribuição teórica a dados reais. Essa tarefa torna-se ainda mais importante quando estimamos parâmetros para ajustar uma distribuição a um conjunto de dados. Existem muitos métodos de verificar a qualidade desse ajustamento e a escolha depende do que se pretende com esse ajustamento. Neste caso concreto é importante termos um bom ajustamento relativamente às caudas pois a maior parte das aplicações nesta área de matemática financeira incide sobre as caudas das distribuições. Noutras situações pode ser importante avaliar a qualidade de ajustamento em relação ao conjunto total de dados.

Neste trabalho mediremos o ajustamento recorrendo aos gráficos QQ-plots muito sugestivos e de leitura simples. Depois passamos à análise das várias distâncias encontradas na literatura, nomeadamente:

- distância de Kolmogorov-Smirnov;
- distância de Kuiper;
- distância de Anderson-Darling ;

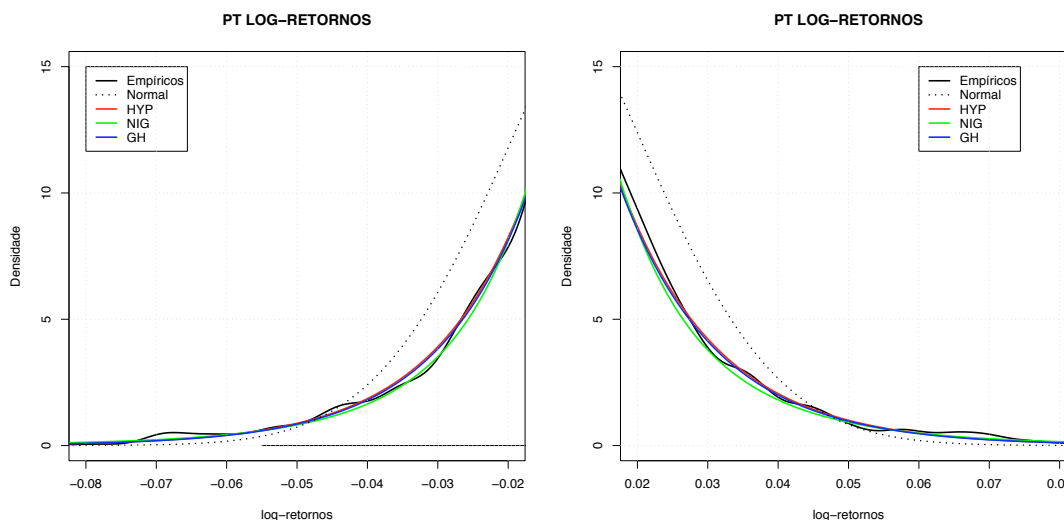


Figura 4.4: Gráficos pormenorizados das caudas esquerda e direita dos log-retornos do activo PT, da distribuição normal e da distribuição generalizada hiperbólica e subclasses ajustadas aos dados.

- distância Fajardo-Farias-Ornelas.

Os detalhes sobre cada uma das distâncias é dado mais tarde nesta secção.

#### 4.4.1 QQ-plots

O recurso a gráficos tais como os QQ-plots constituem um bom instrumento para ter uma ideia do ajustamento mas não permitem comparar qualitativamente nem quantitativamente esses diferentes ajustamentos. Basicamente num gráfico de QQ-plots temos num eixo os quantis da amostra e no outro eixo os quantis da distribuição teórica. Habitualmente também representamos a recta a 45 graus para comparação. Vejamos alguns QQ-plots dos activos em relação às distribuições normal, hiperbólica, normal inversa gaussiana e hiperbólica generalizada. Procuramos fazer uma comparação entre a qualidade de ajustamento da distribuição normal e as distribuições hiperbólica, normal inversa gaussiana e hiperbólica generalizada.

Verificamos na Figura 4.9 que apenas a distribuição normal não se ajusta aos dados empíricos nem para os valores centrais nem para as caudas como já era

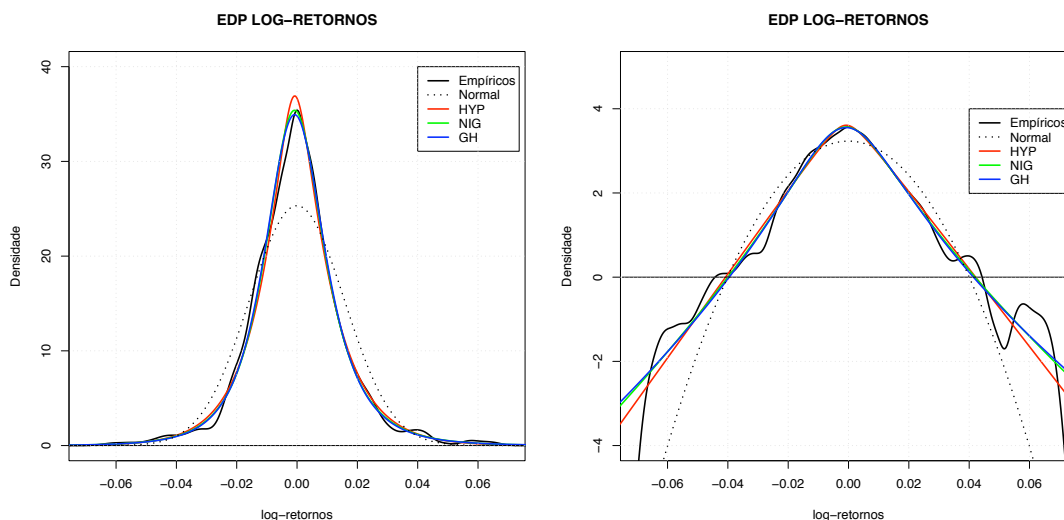


Figura 4.5: Gráficos das densidades dos log-retornos do activo EDP, das distribuições normal e da distribuição generalizada hiperbólica e subclasses ajustadas aos dados. O gráfico direito tem uma escala logarítmica no eixo vertical.

de prever. Qualquer uma das outras distribuições ajusta-se aos dados relativos ao activo PSI20 de uma forma muito próxima para os valores centrais e não tão bem em relação às caudas. De entre as distribuições destaca-se a distribuição hiperbólica como aquela que se ajusta melhor aos dados empíricos. Esse facto vem comprovar em parte o que já tínhamos verificado na Figura 4.3 em especial no de escala logarítmica que coloca em evidência o comportamento nas caudas.

Observando a Figura 4.10 novamente a distribuição normal não se ajusta aos dados empíricos do activo PT nem para os valores centrais nem para as caudas o que vem de encontro ao já esperado. Da observação dos QQ-plots concluímos que qualquer uma das outras distribuições ajusta-se aos dados relativos ao activo PT de uma forma muito próxima para os valores centrais e não de forma tão perfeita em relação às caudas. O gráfico da Figura 4.3 não denota uma tão boa aproximação nos valores centrais, como mostram os QQ-plots por exemplo da distribuição HYP na Figura 4.10. Para uma melhor conclusão em termos de qualidade de ajustamento será necessário esperar pela aplicação das distâncias na subsecção seguinte.

A Figura 4.11 mostra mais uma vez que a distribuição normal não se ajusta aos dados empíricos dos log-retornos de um activo financeiro, neste caso concreto

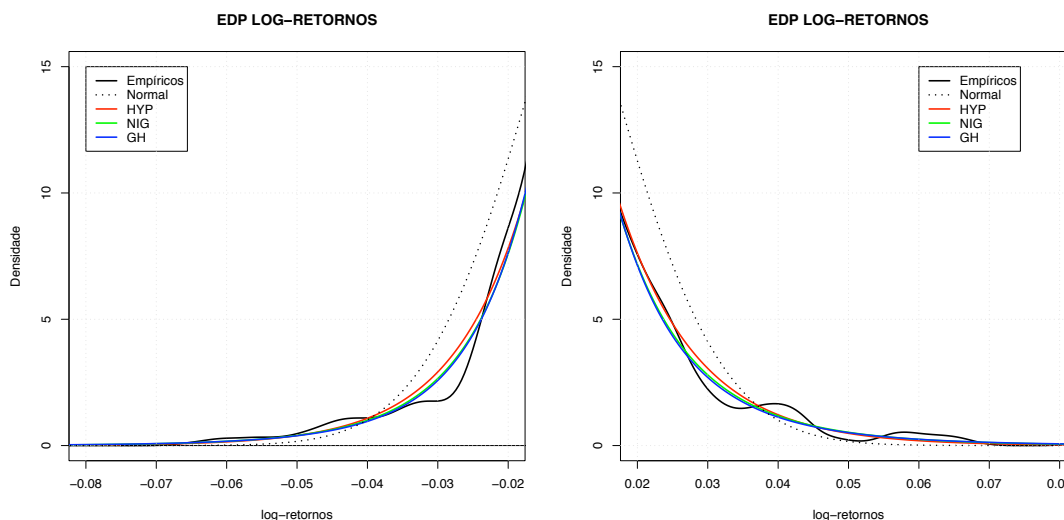


Figura 4.6: Gráficos pormenorizados das caudas esquerda e direita dos log-retornos do activo EDP, da distribuição normal e da distribuição generalizada hiperbólica e subclasses ajustadas aos dados.

o activo EDP. A distribuição GH que aparece como exemplo na Figura 4.11 é aquela que ajusta-se melhor aos dados do activo EDP, apesar de notarmos algum desfazamento em relação às caudas. Em relação aos valores centrais o gráfico do QQ-plot da distribuição GH vem de encontro ao que já tínhamos observado na Figura 4.5, ou seja que existe uma boa aproximação.

Em relação ao activo BCP, podemos observar na Figura 4.12 que não existe um ajustamento da distribuição NIG em relação aos valores centrais nem em relação às caudas. Nota-se no QQ-plot que esse ajustamento é mais deficiente em relação aos valores centrais positivos e as caudas o que vai de encontro ao que foi observado nas Figuras 4.7 e 4.8 em que se nota desfazamentos entre os dados empíricos e as distribuições ajustadas. O activo BCP foi aquele em que se assiste a uma maior diferença entre os dados empíricos e as distribuições utilizadas.

Para medir a qualidade de ajustamento entre a distribuição empírica e a distribuição teórica além de uma inspeção visual dos gráficos devem ser utilizadas diversas distâncias já referidas anteriormente. No entanto a observação pormenorizada dos gráficos QQ-plots constitui um bom ponto de partida na avaliação da qualidade de ajustamento. Após a definição de cada uma das distâncias e caracterização das suas principais propriedades condensaremos os resultados obtidos em

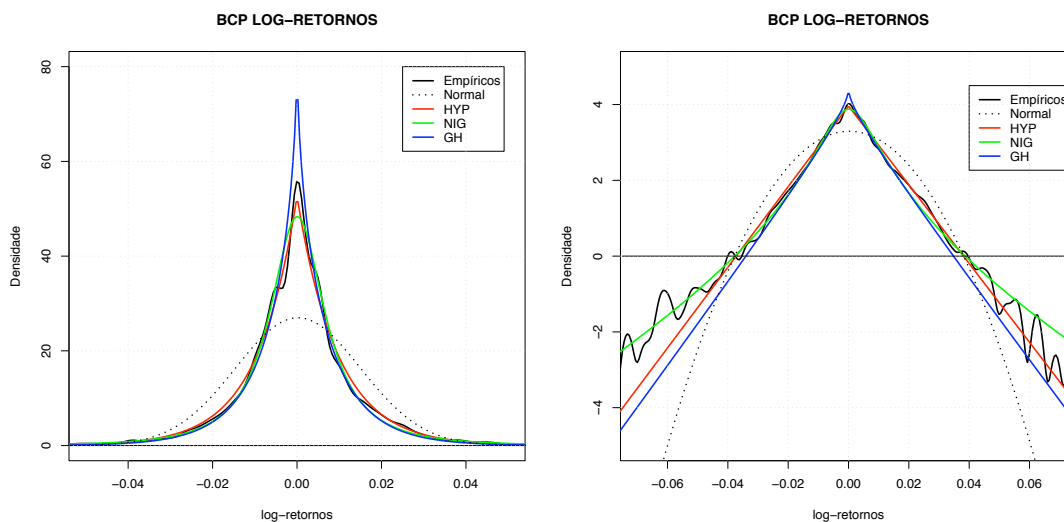


Figura 4.7: Gráficos das densidades dos log-retornos do activo BCP, das distribuições normal e da distribuição generalizada hiperbólica e subclasses ajustadas aos dados. O gráfico direito tem uma escala logarítmica no eixo vertical.

tabelas.

## 4.4.2 Distâncias

### Distância de Kolmogorov-Smirnov - KS

A distância de Kolmogorov-Smirnov, inicialmente introduzida por Kolmogorov[Kol93] e mais tarde por Smirnov, é definida como a maior distância entre a distribuição empírica e a distribuição teórica para todos os valores possíveis. Esta distância não dá nenhuma indicação sobre a qualidade de ajustamento nas caudas, porque a contribuição dos valores que se situam nas caudas é desprezável comparativamente aos grandes valores provenientes das zonas centrais da distribuição. Por isso se o nosso interesse se situa nas caudas e não nas partes centrais então a distância de Kolmogorov-Smirnov não é a melhor distância a considerar. A distância é dada pela expressão seguinte:

$$KS = \sup_{x \in \mathbb{R}} |F_{emp}(x) - F_{est}(x)|$$

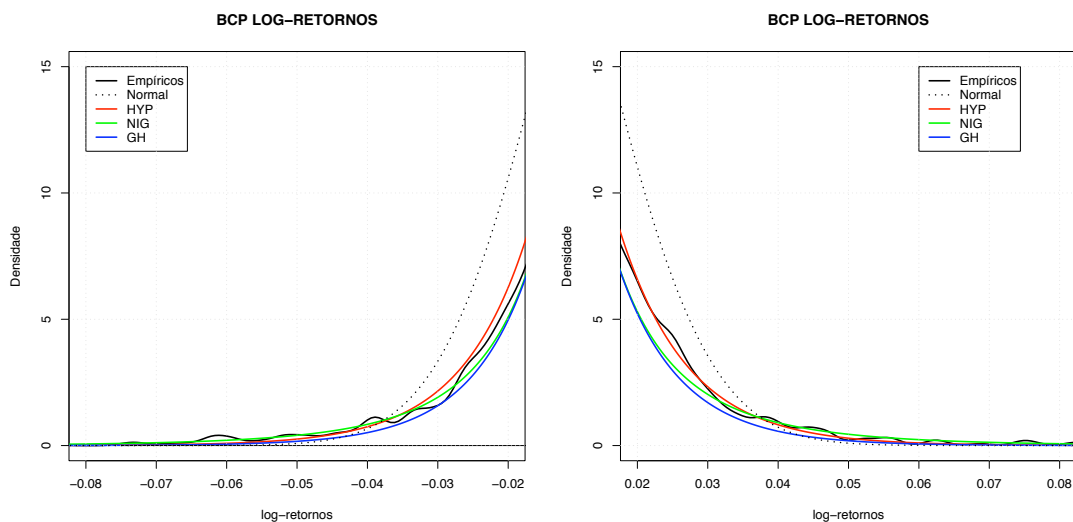


Figura 4.8: Gráficos pormenorizados das caudas esquerda e direita dos log-retornos do activo EDP, da distribuição normal e da distribuição generalizada hiperbólica e subclasses ajustadas aos dados.

onde  $F_{emp}$  é a função densidade cumulativa e  $F_{est}$  a função densidade cumulativa teórica. A função densidade cumulativa  $F_{emp}$  pode ser definida por  $F_{emp}(x) = (\# X'_i \leq x)/n$  onde  $X'_i$ 's são os elementos da amostra menores que  $x$  e  $n$  o número total de elementos.

Na Tabela 4.5 apresentamos os resultados obtidos com esta distância.

Distância de Kolmogorov-Smirnov				
Activo	Normal	HYP	NIG	GH
PSI 20	0,07516030	0,01167005	0,00844748	0,00798008
PT	0,06594342	0,02195844	0,02225421	0,02182824
EDP	0,07167126	0,05830055	0,06058709	0,06054158
BCP	0,10594668	0,06974368	0,07015714	0,07063886

Tabela 4.5: Distâncias de Kolmogorov-Smirnov.

## Distância de Kuiper - KP

Esta distância é muito usada para verificar a qualidade de ajustamento de distribuições contínuas. A principal diferença entre a distância de Kuiper e a de Kolmogorov-Smirnov é que a primeira diferencia entre as diferenças superiores e as diferenças inferiores e na segunda todas as distâncias são consideradas iguais. Esta distância realça a importância das caudas. A sua expressão é definida por:

$$KP = \sup_{x \in \mathbb{R}} \{F_{emp}(x) - F_{est}(x)\} + \sup_{x \in \mathbb{R}} \{F_{est}(x) - F_{emp}(x)\}$$

Na Tabela 4.6 apresentamos os resultados obtidos para a distância Kuiper.

Distância de Kuiper				
Activo	Normal	HYP	NIG	GH
PSI 20	0,14541643	0,02182228	0,01639191	0,01588644
PT	0,13145016	0,03939962	0,03939962	0,03939962
EDP	0,1252283	0,1151543	0,1151543	0,1151543
BCP	0,2014664	0,1283668	0,1283668	0,1283668

Tabela 4.6: Distâncias de Kuiper.

## Distância de Anderson-Darling - AD

A distância de Anderson-Darling[AD54] pode ser considerada como a distância de Kolmogorov-Smirnov ponderada, cuja ponderação é definida de forma a dar especial relevo as caudas da distribuição. Esta distância é mais sensível as caudas do que aos valores médios das distribuições. A distância considerada é definida pela seguinte expressão:

$$AD = \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{|F_{emp}(x) - F_{est}(x)|}{\sqrt{F_{est}(x)(1 - F_{est}(x))}}$$

Na tabela 4.7 apresentamos os resultados obtidos para a distância AD.

## Distância de Fajardo-Faria-Ornelas - FFO.

A distância de FFO [FFO06] é mais sensível aos valores das caudas do que aos valores centrais da distribuição. Usa a função de ponderação da distância Anderson-Darling e o desvio de direcção tal como a distância de Kuiper. Esta distância

Distância de Anderson-Darling				
Activo	Normal	HYP	NIG	GH
PSI 20	5,148971e5	0,3274208	0,05477432	0,05531154
PT	N.C.	0,04392343	0,04682480	0,04366280
EDP	91,4275749	0,1530283	0,1212338	0,1211424
BCP	5,46204e11	3,630179	0,1403227	5,169363

Tabela 4.7: Distâncias de Anderson-Darling.

incorpora as melhores características das distâncias AD e KP. A distância é definida por:

$$FFO = \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{F_{emp}(x) - F_{est}(x)}{\sqrt{F_{est}(x)(1 - F_{est}(x))}} + \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{F_{est}(x) - F_{emp}(x)}{\sqrt{F_{est}(x)(1 - F_{est}(x))}}$$

Na Tabela 4.8 apresentamos os resultados obtidos com esta distância.

Distância de Fajardo-Faria-Ornelas				
Activo	Normal	HYP	NIG	GH
PSI 20	5,148977e5	0,3624497	0,09134569	0,08969772
PT	N.C.	0,07881101	0,08112111	0,07881066
EDP	95,3936601	0,2696712	0,2304219	0,2304212
BCP	5,462040e11	3,769677	0,2567490	5,337701

Tabela 4.8: Distâncias Fajardo-Faria-Ornelas.

Da leitura das medidas apresentadas nas Tabelas 4.5-4.8 podemos verificar que a distribuição normal para qualquer um dos activos é a que apresenta os valores mais elevados o que denota fraca qualidade de ajustamento aos dados empíricos. No caso do activo PT para a distância de Anderson-Darling e FFO o software R não calcula esta distância e apresenta como sendo um valor não disponível (not available), este resultado deve-se ao facto de estas distâncias terem valores muito grandes.

Analisando a Tabela 4.5 podemos afirmar que a distribuição normal é de longe a que apresenta os valores mais elevados, o que já estávamos à espera, tendo em atenção o que já tínhamos observado em termos gráficos. Em relação às restantes distribuições as que obtêm melhores resultados é a GH e em seguida a distribuição HYP. No entanto é de destacar que os valores obtidos para estas distribuições

encontram-se bastante próximos uns dos outros o que poderá indicar que em termos de valores centrais os ajustamentos são muito equivalentes.

Os valores obtidos na Tabela 4.6 resultantes da aplicação da distância de Kuiper não nos fornece grandes indicações. A distância de Kuiper só nos permite tirar conclusões em relação ao activo PSI20, onde verificamos que o menor valor obtido corresponde à distribuição GH mas com uma diferença muito curta em para a distribuição NIG. No que diz respeito aos restantes activos a distância de Kuiper repete os mesmos valores para cada uma das distribuições o que não nos permite tirar conclusões. Os valores mais altos são obtidos para a distribuição normal.

Tendo em atenção os valores da Tabela 4.7 que correspondem aos resultados obtidos no cálculo das distâncias de Anderson-Darling podemos afirmar que os menores valores são determinados para a distribuição GH e no caso do activo PSI20 com valores muito próximos para a distribuição NIG. Considerando o activo BCP constatamos que os valores referentes à distribuição HYP e GH apresentam valores muito altos relativamente à distribuição NIG. Os valores mais altos dizem respeito à distribuição normal.

A Tabela 4.8 condensa os valores obtidos usando a distância de FFO. Uma análise a esses valores mostra-nos que os menores valores obtidos dizem respeito à distribuição GH e à distribuição NIG. Uma excepção à afirmação anterior é dada pelo activo BCP em que o valor obtido pela distribuição GH é claramente superior à obtida para a distribuição NIG. A distribuição normal é a que regista os valores mais altos desta tabela.

Os resultados obtidos nas tabelas respeitantes às distâncias estão de acordo com tudo o que foi observado nos gráficos das distribuições ajustadas aos activos e respectivos QQ-plots. Indo de encontro às nossas afirmações podemos analisar por exemplo a Figura 4.7 na página 58 em que é utilizada a escala logarítmica nota-se que a distribuição que se ajusta melhor pelo menos em termos das caudas é a distribuição NIG o que acaba por ser confirmado pelos valores obtidos pelas distâncias de Anderson-Darling e FFO e falha por muito pouco na distância de Kolmogorov. Da leitura ainda do mesmo gráfico é evidente que a distribuição que menos se ajusta aos dados empíricos é a GH o que é também confirmado pelos valores altos obtidos nas distâncias de AD e FFO e também na distância de KS por uma margem mais curta. Concluimos então que para o activo BCP a distribuição NIG é provavelmente a mais adequada.

## 4.5 Conclusão

A principal conclusão a tirar é que definitivamente a distribuição normal não poderá ser utilizada para modelar log-retornos de activos financeiros. Qualquer uma das distribuições da família hiperbólica generalizada constitui melhor alternativa para modelação de activos financeiros.

Em relação aos activos EDP e PT constatamos que a distribuição GH parece ser aquela que produz melhores resultados em termos de ajustamento, pois para qualquer uma das distâncias os seus melhores resultados são obtidos para a distribuição GH. Temos uma excepção para o activo EDP no que diz respeito à distância de Kolmogorov-Smirnov pois o valor mais baixo é obtido para a distribuição HYP, mas a diferença para a distribuição GH é mínima. Em relação à análise dos gráficos dos activos EDP e PT não nos é possível destacar nenhuma das distribuições como aquela que melhor se ajusta ao activo.

O outro activo em discussão, o PSI20 também revela melhores valores nas distâncias incluindo a distância de Kuiper para a distribuição GH. A única distância em que a distribuição GH não se confirma como a melhor para o activo PSI20 é na distância de Anderson-Darling, em que o valor obtido é inferior em uma milésima para a distribuição GH.

Concluimos que para três dos activos em questão a distribuição GH apresenta melhores resultados nas distâncias consideradas, somente para o activo BCP é que a distribuição GH não se perfilha como a mais adequada a um ajustamento dos seus dados mas sim a distribuição NIG.

Os resultados obtidos nos testes de ajustamento quer nos QQ-plots quer nas distâncias vêm de encontro às nossas expectativas iniciais. Tal como já havia sido concluído em [Pra99] os melhores ajustamentos são obtidos para a distribuição GH seguidos pela distribuição NIG e por último pela distribuição HYP.

Os valores obtidos e as conclusões retiradas são condicionadas à qualidade do software utilizado. Felizmente existe cada vez mais software de uso livre em que são disponibilizadas as distribuições hiperbólicas no entanto o software comercial é que permite efectuar os melhores ajustamentos. No nosso caso utilizamos os algoritmos que já estavam implementados no software R, contudo existe sempre a possibilidade de melhorar os algoritmos de forma a obter melhores estimações dos parâmetros. Uma sequência natural deste trabalho seria desenvolver a área de programação no que diz respeito à implementação dos algoritmos de estimação dos parâmetros de ajustamento dos dados às distribuições.

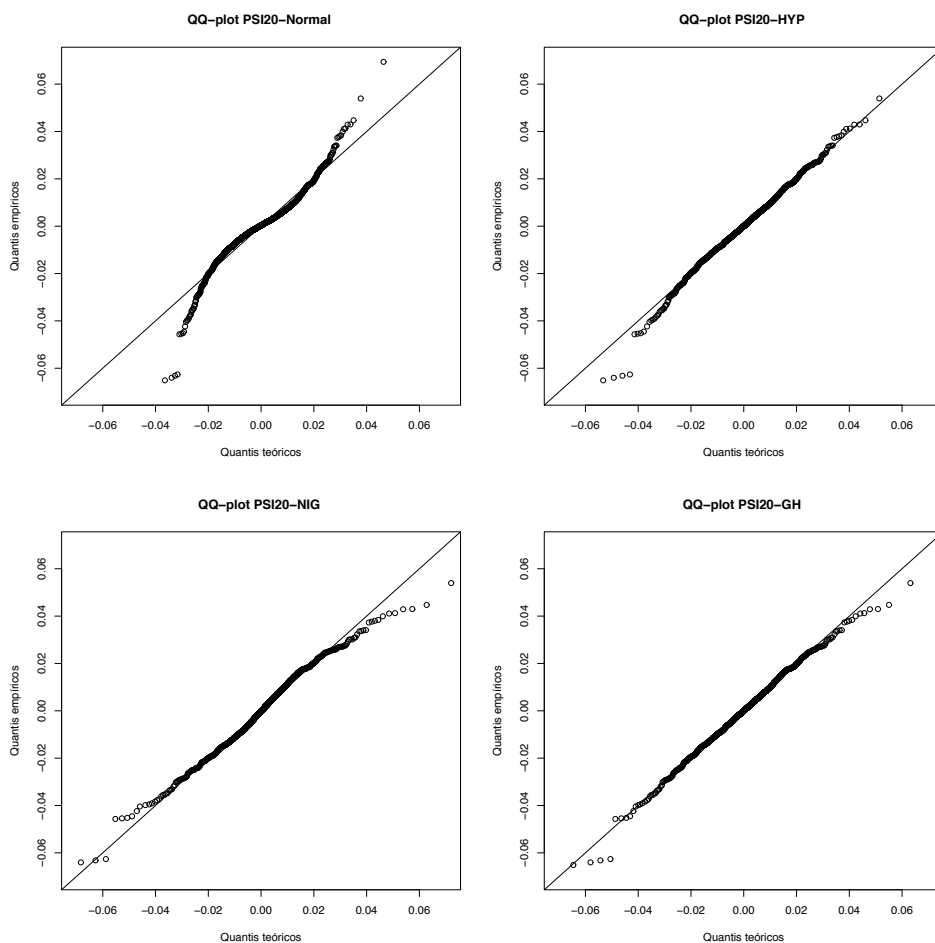


Figura 4.9: QQ-plots do activo PSI20 versus distribuição normal, hiperbólica, normal inversa gaussiana e hiperbólica generalizada.

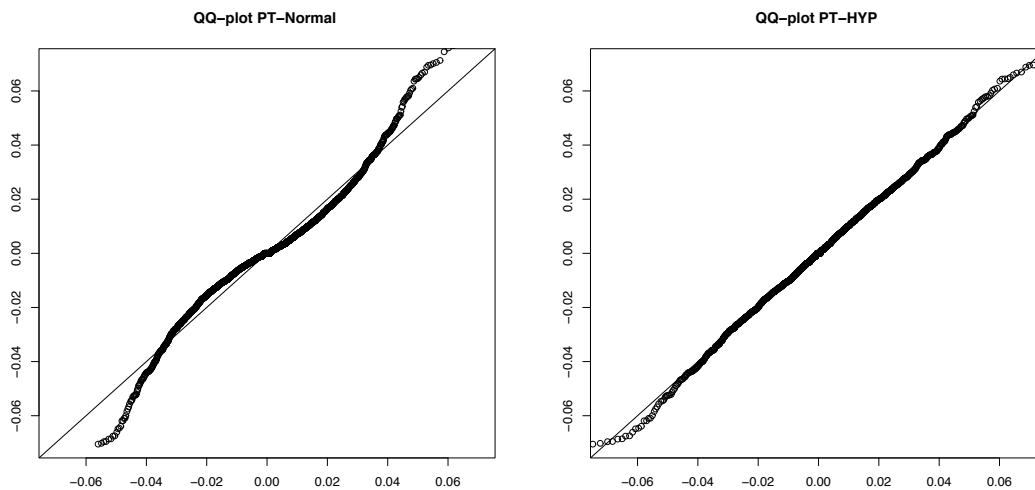


Figura 4.10: QQ-plots do activo PT versus distribuição normal e distribuição hiperbólica.

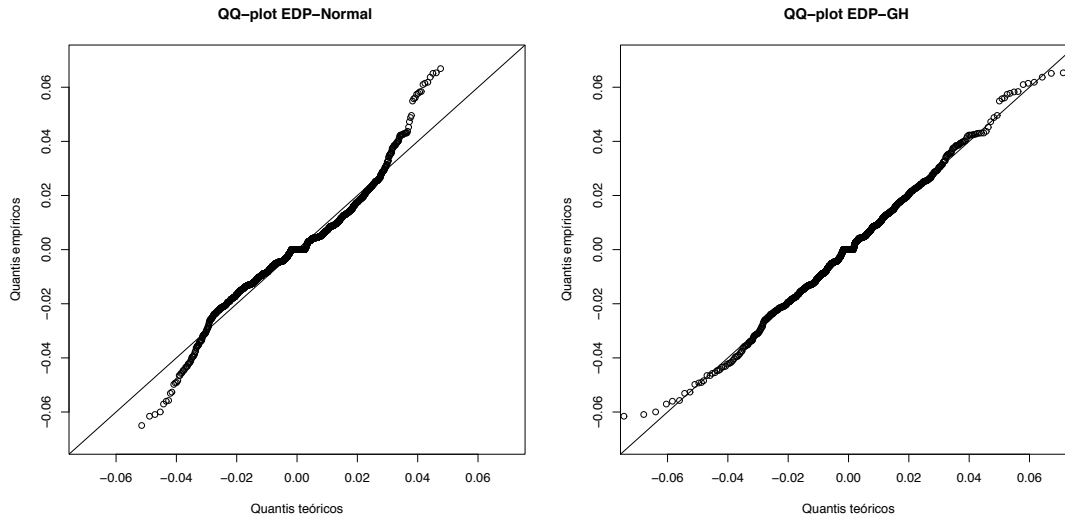


Figura 4.11: QQ-plots do activo EDP versus distribuição normal e distribuição generalizada hiperbólica.

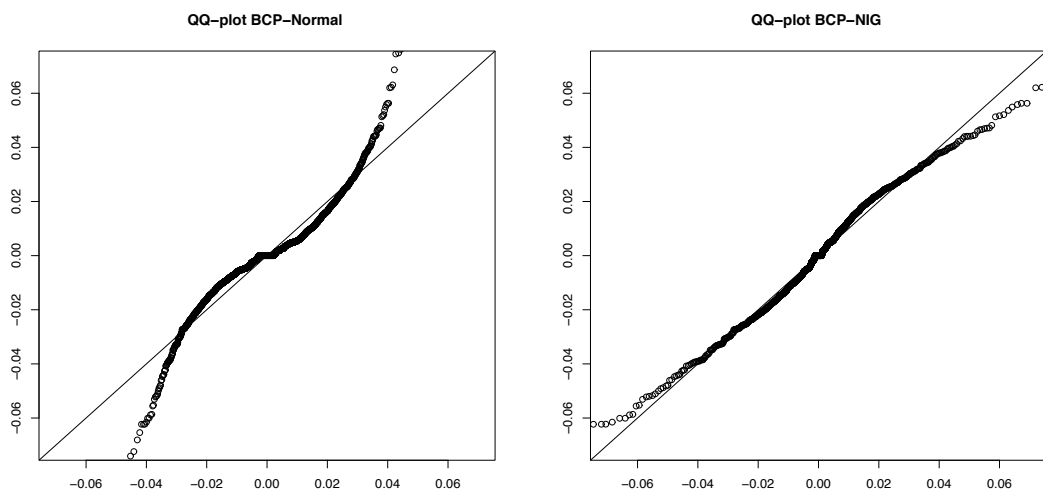


Figura 4.12: QQ-plots do activo BCP versus distribuição normal e distribuição normal inversa gaussiana.

# Capítulo 5

## Aplicações ao Cálculo do Preço de Derivados

### 5.1 Introdução

Neste capítulo vamos investigar o efeito do modelo hiperbólico generalizado no cálculo do preço de opções financeiros. Desde o trabalho pioneiro de Black-Scholes [BS73] e Merton [Mer73] que a comunidade académica foi desenvolvendo modelos mais realistas para os derivados financeiros. O modelo de Black-Scholes assume que os log-retornos possuem distribuição normal. Por outro lado, a análise apresentada nos Capítulos 2 e 4 mostram claramente que a distribuição normal exibe um ajustamento fraco aos dados empíricos. No entanto, é interessante verificar que, de longe, o modelo de Black-Scholes é ainda o mais usado pelos agentes do mercado. Este modelo é baseado no movimento Browniano geométrico ou processo log-normal

$$S_t = S(0) \exp(\mu t + \sigma B_t), \quad (5.1)$$

onde  $\mu$  é a tendência e  $\sigma$  a volatilidade. O preço actual do derivado é  $S(0)$  e  $B_t$  é o movimento Browniano no instante  $t$ . O processo  $S_t$  satisfaz a seguinte equação diferencial estocástica

$$dS_t = \left( \mu + \frac{1}{2} \sigma^2 \right) S_t + \sigma S_t dB_t$$

resultante da aplicação simples da fórmula de Itô a (5.1). É claro que, o sentido rigoroso do diferencial estocástico anterior é a equação integral estocástica

correspondente:

$$S_t = S(0) + \int_0^t \left( \mu + \frac{1}{2} \sigma^2 \right) S_u du + \int_0^t \sigma S_u dB_u.$$

Provavelmente o sucesso deste modelo está na sua simplicidade e na forma compacta das fórmulas mais comuns usadas no mercado. Um exemplo típico é o preço de uma opção de compra Europeia com preço e tempo de exercício  $K$  e  $T$ , respectivamente

$$P_t = S_t N(d_1; 0, 1) - Ke^{-r(T-t)} N(d_2; 0, 1), \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} d_1 &= d_2 + \sigma \sqrt{T-t}, \\ d_2 &= \frac{\ln(S_t/K) + (r - \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}}. \end{aligned}$$

A questão que se coloca é a de saber se é possível obter resultados compactos, como em (5.2), para o modelo hiperbólico generalizado proposto anteriormente. A resposta a esta questão não é tão evidente como no modelo de Black-Scholes mas podemos fornecer resultados da mesma natureza os quais exigem um esforço computacional maior. Esta é a missão principal deste capítulo. Finalmente de referir que os resultados aqui apresentados estão baseados nos trabalhos de Eberlein et al. [EK95], Prause [Pra99, Capítulo 1] e Keller [Kel97, Chapter 1].

## 5.2 Movimento generalizado hiperbólico de Lévy

Vimos na Secção 3.4 que a distribuição hiperbólica generalizada (GH) pode ser obtida como uma distribuição normal com mistura variância-média da distribuição generalizada inversa gaussiana (GIG), cf. (3.7). Por outro lado, Barndorff-Nielsen et al. [BNH77] mostraram que as distribuições GIG são infinitamente divisíveis. Assim, uma consequência directa deste facto é que a distribuição normal com mistura variância-média GIG ainda é uma distribuição infinitamente divisível, isto é, as distribuições GH são infinitamente divisíveis. Portanto, podemos construir processos de Lévy baseados nestas distribuições. Recordemos então a definição de um processo de Lévy.

**Definição 5.1 (Processos de Lévy)** *Seja  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$  um espaço de probabilidade com filtração o qual satisfaz as condições usuais e admitimos  $\mathcal{F} =$*

$\sigma(\cup_{t \geq 0} \mathcal{F}_t)$ . Um processo  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  com  $X_0 = 0$  quase certamente (q.c.) chama-se de Lévy se

1.  $X$  tem incrementos independentes do passado, isto é,  $X_t - X_s$  é independente de  $\mathcal{F}_s$ ,  $0 \leq s < t < \infty$ .
2.  $X$  tem incrementos estacionários, isto é,  $X_t - X_s$  tem a mesma distribuição de  $X_{t-s}$ ,  $0 \leq s < t < \infty$ .
3.  $X_t$  é contínuo em probabilidade, isto é,  $P - \lim_{t \rightarrow s} X_t = X_s$ .

**Observação 5.2** Não é objectivo desta tese discutir em pormenor todos os detalhes das definições e condições impostas; para tal sugerimos a consulta da bibliografia. Por exemplo, na definição anterior, a condição 3. é uma consequência das duas anteriores, ver [JS03, Definition II.4.1].

A distribuição  $P_{X_t}$  de um processo de Lévy  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  fica unicamente determinada por uma qualquer das suas distribuições marginais de dimensão um, digamos por  $P_{X_1}$ . O facto de  $X$  possuir incrementos independentes e estacionários resulta na divisibilidade de  $P_{X_1}$ . Assim, a sua função característica é dada pela fórmula de Lévy-Khintchine

$$\mathbb{E}(e^{iux_1}) = \exp\left(iub - \frac{c}{2}u^2 + \int (e^{iux} - 1 - iux) dF(x)\right).$$

O trio  $(b, c, F)$ , designado trio de Lévy associado a  $X_1$ , consiste das constantes  $b \in \mathbb{R}$ ,  $c \geq 0$  e a medida de Lévy  $F$ .

Atendendo ao facto da família GH com parâmetros  $(\lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu)$  ser infinitamente divisível, cada membro desta família gera um processo de Lévy  $(L_t)_{t \geq 0}$ , isto é, um processo estacionário com incrementos independentes e  $L_0 = 0$  q.c. A distribuição  $P_{L_1}$  de  $L_1$  tem densidade GH definida em (3.3). A função característica de  $L_1$  é dada por

$$\mathbb{E}(e^{iuL_1}) = \exp\left(iub + \int (e^{iux} - 1 - iux) g(x) dx\right), \quad (5.3)$$

onde a densidade da medida de Lévy  $g$  é dada por, cf. [Ebe01]

$$g(x) = \begin{cases} \frac{e^{\beta x}}{|x|} \left( \int_0^\infty \frac{\exp(-\sqrt{2y + \alpha^2|x|})}{\pi^2 y (J_\lambda^2(\delta \sqrt{2y}) + Y_\lambda^2(\delta \sqrt{2y}))} dy \right), & \lambda \geq 0 \\ \frac{e^{\beta x}}{|x|} \left( \int_0^\infty \frac{\exp(-\sqrt{2y + \alpha^2|x|})}{\pi^2 y (J_{-\lambda}^2(\delta \sqrt{2y}) + Y_{-\lambda}^2(\delta \sqrt{2y}))} dy \right), & \lambda < 0. \end{cases}$$

Na expressão (5.3) não aparece a componente gaussiana  $-\frac{\xi}{2}u^2$  no expoente, então o processo  $(L_t)_{t \geq 0}$  é puramente descontínuo ou processo com saltos.

### 5.3 Transformada de Esscher

Nesta secção vamos introduzir a transformada de Esscher [Ess32] a qual tem um papel importante no cálculo do preço de opções, ver Secção 5.4. Seja  $f$  a densidade de uma distribuição e  $\theta$  um número real tal que

$$M(\theta) := \int_{\mathbb{R}} e^{\theta x} f(x) dx$$

existe. A função na variável  $x$ ,

$$f(x; \theta) := \frac{e^{\theta x} f(x)}{M(\theta)}$$

é uma densidade de probabilidade a qual é chamada transformada de Esscher (com parâmetro  $\theta$ ) da distribuição original. A transformada de Esscher pode ser definida para processos estocásticos, nomeadamente processos de Lévy, usados em modelos do movimento do preço de stocks. O parâmetro  $\theta$  é determinado de forma que a nova medida de probabilidade seja uma medida martingala equivalente (MME).

**Definição 5.3** (cf. [Rai00, Definition 1.7]) *Seja  $L = (L_t)_{t \geq 0}$  um processo de Lévy num espaço com filtração  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)_{t \geq 0}$ . Chamamos transformada de Esscher qualquer mudança de  $P$  para uma medida equivalente local<sup>1</sup>  $Q$  com processo densidade  $Z_t = \frac{dQ}{dP}|_{\mathcal{F}_t}$  da forma*

$$Z_t = \frac{\exp(\theta L_t)}{M(\theta)^t}, \quad \theta \in \mathbb{R}, \quad (5.4)$$

onde  $M$  denota a função geradora de momentos de  $L_1$ , isto é,  $M(\theta) := \int_{\mathbb{R}} e^{\theta u} dP_{L_1}(u)$ .

**Observação 5.4** 1. A transformada de Esscher é interpretada como uma transformada da medida de probabilidade  $P$  e não como a transformada (da distribuição) do processo  $L$ . Deste modo, evitamos complicações com filtrações etc.

---

<sup>1</sup>Local neste contexto significa que para cada  $t$  as restrições  $Q_t := Q|_{\mathcal{F}_t}$  e  $P_t := P|_{\mathcal{F}_t}$  são medidas equivalentes.

2. O processo de densidade de Esscher  $Z = (Z_t)_{t \geq 0}$  definido em (5.4) coincide com a transformada de Esscher em dimensão 1 da distribuição marginal com o mesmo parâmetro  $\theta$ , pois

$$\begin{aligned} Q(L_t \in B) &= \int_{\Omega} \mathbb{1}_B(L_t(w)) \frac{\exp(\theta L_t(w))}{M(\theta)^t} dP(w) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_B(x) \frac{\exp(\theta x)}{M(\theta)^t} dP_{L_t}(x), \end{aligned}$$

para qualquer  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ .

3. A equação (5.4) define um processo densidade para qualquer  $\theta \in \mathbb{R}$  tal que  $\mathbb{E}(\exp(\theta L_1)) < \infty$  e  $L$  é ainda um processo de Lévy relativamente a  $Q$ , cf. [Rai00, Proposition 1.8].

## 5.4 Preços de derivados com transformada de Esscher

Depois das considerações anteriores o nosso objectivo nesta secção é elaborar um modelo para o preço de opções de derivados de tal forma que os log-retornos produzem uma distribuição hiperbólica generalizada. Vamos considerar o seguinte mercado com dois activos: um activo sem risco com dinâmica determinística dada por

$$\begin{cases} dD_t = rD_t dt, & 0 \leq t \leq T \\ D_0 = 1, \end{cases}$$

onde  $r$  é a taxa de juros e  $T$  é o instante de exercício. O segundo activo é um stock dado pelo processo  $(S_t)_{0 \leq t \leq T}$  o qual segue a dinâmica

$$S_t = S_0 \exp(L_t), \quad (5.5)$$

onde  $(L_t)_{0 \leq t \leq T}$  é o processo de Lévy generalizado hiperbólico. Como o processo  $(S_t)_{0 \leq t \leq T}$  é puramente descontínuo por  $(L_t)_{0 \leq t \leq T}$  o ser, então estamos na presença de um mercado incompleto. Por isso temos de escolher uma MME particular sendo que os preços dos activos financeiros são obtidos como a esperança sob estas medidas, ver [DS95]. Não vamos aqui discutir a problemática da escolha da MME porque sai fora do âmbito desta tese, no entanto o leitor interessado pode consultar [GS94], [BDES96], [Kel97] e referências nesses trabalhos. Uma

análise e caracterização do conjunto das MME é feito em [EJ97]. Assim, no que respeita à valorização de activos seguimos a escolha mais comum na literatura, ou seja, tomamos a MME de Esscher a qual é do ponto de vista matemático a mais simples.

**Lema 5.5** *O processo do preço do activo dado em (5.5) é tal que a medida  $P$  é localmente equivalente a uma medida  $Q$  e o preço actualizado  $\exp(-rt)S_t$  é um  $Q$ -martingala. A densidade da medida  $Q$  é dada pela densidade da transformada Esscher*

$$Z_t = \frac{\exp(\theta L_t)}{M_{GH}(\theta)^t},$$

onde  $\theta$  é a única solução da equação

$$r = \log \frac{M_{GH}(\theta + 1)}{M_{GH}(\theta)}. \quad (5.6)$$

$M_{GH}$  é a função geradora de momentos da distribuição GH, ver (3.9) na página 31.

A prova do lema anterior pode ser encontra-se em [Kel97, Lemma 14] no caso das distribuições GH ou para processos de Lévy gerais em [Rai00, Lemma 1.9]. A equação (5.6) pode ser escrita explicitamente como

$$r = \mu + \frac{\lambda}{2} \log \left( \frac{\alpha^2 - (\beta + \theta)^2}{\alpha^2 - (\beta + \theta + 1)^2} \right) + \log \left( \frac{K_\lambda(\delta \sqrt{\alpha^2 - (\beta + \theta)^2})}{K_\lambda(\delta \sqrt{\alpha^2 - (\beta + \theta + 1)^2})} \right). \quad (5.7)$$

A solução da equação anterior em  $\theta$  pode ser encontrada por um dos métodos clássicos para determinar raízes, por exemplo o método de Newton. É claro que os parâmetros  $(\alpha, \beta, \delta, \mu, \lambda)$  estão fixos uma vez aplicado o processo de ajustamento do Capítulo 4. No caso da distribuição NIG a equação (5.7) tem a forma mais simples

$$r = \mu + \delta(\sqrt{\alpha^2 - (\beta + \theta)^2} - \sqrt{\alpha^2 - (\beta + \theta + 1)^2}).$$

Uma vez encontrado o parâmetro  $\theta$  podemos passar ao cálculo do preço de um derivado financeiro. Denotamos por  $\Phi(S_T)$  a função contrato (payoff function). Então o preço do contrato com função contrato  $\Phi(S_T)$  é dado por

$$\mathbb{E}_Q(e^{-rT} \Phi(S_T)) = e^{-rT} \int_{\mathbb{R}} \Phi(S_0 e^x) dQ_{L_T}(x),$$

onde  $Q_{L_T}$  é a distribuição de  $L_T$ . No caso de uma opção de compra Europeia a função contrato é dada por

$$\Phi(S_T) = (S_T - K)^+,$$

onde  $K$  é o preço de exercício e  $x^+ = x$  se  $x \geq 0$  e  $x^+ = 0$  se  $x < 0$ . Assim, o preço da opção de compra Europeia é dado por

$$\begin{aligned} P_t &= \mathbb{E}_Q(e^{-rT} \Phi(S_T)) \\ &= e^{-rT} \mathbb{E}_Q((S_T - K)^+) \\ &= \int_{\{S_0 e^x - K\}} (S_0 e^x - K) dQ_{L_T}(x) \\ &= S_0 \int_{\gamma}^{\infty} GH^{*T, \theta+1}(x) dx - e^{-rT} K \int_{\gamma}^{\infty} GH^{*T, \theta}(x) dx, \end{aligned} \quad (5.8)$$

onde  $\gamma = \log\left(\frac{K}{S_0}\right)$  e  $GH^{*T, \theta}$  é dada por

$$GH^{*T, \theta}(x) = GH^{*T, \theta}(x, \alpha, \beta, \delta, \mu, \lambda) = \frac{e^{\theta x}}{M^T(\theta)} GH^{*T}(x, \alpha, \beta, \delta, \mu, \lambda). \quad (5.9)$$

A dedução mais rigorosa da fórmula (5.8) pode ser consultada em [Kel97, Section 1.4.2]. Resta determinar a convolução da densidade GH. Da família de distribuições GH só a NIG ( $\lambda = -0.5$ ) é fechada para a convolução, mais precisamente temos

$$NIG^{*T}(x, \alpha, \beta, \delta, \mu) = NIG(x, \alpha, \beta, T\delta, T\mu),$$

e neste caso o cálculo do preço da opção de compra Europeia é directo por intermédio de (5.8). O caso geral é mais complicado, mas podemos usar o seguinte lema, ver [Pra97, Lemma 1.14], a qual reduz o cálculo ao caso simétrico e centrado, isto é,  $\beta = 0$ .

**Lema 5.6** *A convolução  $GH^{*T}$  é caracterizada por*

$$\begin{aligned} GH^{*T}(x, \alpha, \beta, \delta, \mu, \lambda) &= \frac{e^{\beta x}}{M_0^T(\beta)} GH^{*T}(x, \alpha, 0, \delta, \mu, \lambda) \\ &= \frac{e^{\beta x}}{M_0^T(\beta)} GH^{*T}(x - T\mu, \alpha, 0, \delta, 0, \lambda) \end{aligned} \quad (5.10)$$

onde  $M_0^T(\beta)$  é a função geradora de momentos  $M_{GH}$  com  $\beta = 0$  elevado a  $T$  e calculada no argumento  $\beta$ .

No caso em que  $\beta = \mu = 0$ , a função característica de GH é real e dada por, cf. (3.11)

$$\varphi_{GH}(u) = \left( \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + u^2} \right)^{\lambda/2} \frac{K_\lambda(\delta \sqrt{\alpha^2 + u^2})}{K_\lambda(\alpha\delta)}$$

e, portanto, a densidade de  $GH^{*T}$  é dada pela fórmula de Fourier inversa como

$$GH^{*T}(x, \alpha, 0, \delta, 0, \lambda) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos(ux) \varphi_{GH}^T(u) du. \quad (5.11)$$

O cálculo deste tipo de integrais é feito pela transformada de Fourier rápida (FFT), por exemplo <http://www.nr.com>. A sua implementação não é feita nesta tese mas é um assunto de grande interesse o qual deve ser desenvolvido e estudado. Nomeadamente, comparar preços de derivados (sejam opções de compra, de venda ou outras) para as diferentes distribuições da classe GH. Obter o gráfico das diferenças entre os preços de Black-Scholes e de GH e subclasses.

Finalmente apresentamos em 4 passos o cálculo do preço de opções usando FFT:

1. Primeiro resolvemos a equação (5.7) ou uma das subclasses para obter o parâmetro  $\theta$ .
2. Em segundo, calculamos a densidade simétrica centrada  $GH^{*T}(x-T\mu, \alpha, 0, \delta, 0)$  usando a FFT por intermédio da fórmula (5.11).
3. Em terceiro, a transformada de Esscher é calculada pela igualdade (5.9) e (5.10).
4. Finalmente, o preço da opção é dado pela formula (5.8) o qual é essencialmente uma integração.

# Apêndice A

## Conjunto de Dados e Aspectos Computacionais

### A.1 Software R

O software R faculta uma grande variedade de ferramentas estatísticas (por exemplo: modelação linear e não linear, testes estatísticos clássicos, análise de séries temporais e outras) e técnicas gráficas. O software R é livre e está disponível no site oficial do projecto [www.r-project.org](http://www.r-project.org).

O software R encontra-se em permanente desenvolvimento, existindo muitos packages adaptados aos mais diferentes temas. No caso concreto deste trabalho foi imprescindível a utilização de vários packages dos quais destacaria o package `Rmetrics - Marketes and Basic Statistics` desenvolvido por Diethelm Wuertz. Mais informações sobre este package no endereço [www.rmetrics.org](http://www.rmetrics.org).

### A.2 Conjunto de dados

No Capítulo 2, nomeadamente na Tabela 2.1 página 4 apresentamos os 4 conjunto de dados utilizados nesta tese. Eles consistem no fecho diário do índice PSI 20 e das 3 maiores empresas cotadas no índice: PT, EDP e BCP. Estes dados foram gravados no formato csv o qual pode ser importado para o R embora existam outras alternativas.

## A.3 Descrição de procedimentos utilizados

Para o uso de algum dos packages disponíveis é necessário fazer o seu carregamento no início do código usando a instrução `require()`, tendo no entanto o cuidado de anteriormente ter usando `load packages ...` e `install packages ...` no menu `packages`.

### Importação de dados

`scan()` Esta função é utilizada para importar no formato `csv`, por exemplo:  
`y<-scan(file="psi20.csv")`

Uma vez carregados os dados diários de fecho do PSI 20 podemos calcular os seus retornos logarítmicos  
`x<-diff(log(y))`

### Gráficos

`plot()` Esta função permite fazer um gráfico dos dados; o exemplo seguinte produz a Figura 2.1 na página 5.

```
plot(x, lty=1,lwd="1",type="l", main="PSI 20",  
xlab="",ylab="valor do índice PSI20")
```

O gráfico da densidade empírica e densidade da distribuição normal ajustada aos dados PSI 20.(ver Figura 2.3)

```
kde = density(x)  
plot(kde$x, kde$y, type = "l", lty = 3, lwd =2, xlim = c(-0.05,  
0.05), ylim = c(0, 55),  
xlab = "Log-retornos", ylab = "Densidade dos log-retornos",  
main = "PSI 20")  
s = seq(from = -0.5, to = 0.5, length = 500)  
# densidade da distribuição normal  
lines(s, dnorm(s, mean(x), sd(x)),lwd="2", col = "red")
```

`qqnorm()` Esta função permite fazer um QQ-plot dos dados em relação à distribuição normal, consideremos o seguinte exemplo da Figura 2.10.

```
qqnorm(y, xlim=c(-4,4), main="QQ-plot Diário", xlab="Quantis teóricos",  
ylab="Quantis empíricos")  
qqline(x, col="2")
```

## Medidas estatísticas elementares

`mean()`, `sd()`, `var()`, `skewness()`, `kurtosis()`, `max()`, `min()` e `length()`. Estas funções permitem calcular a média, o desvio padrão, variância, assimetria, achatamento, máximo, mínimo e contagem do número de dados. Os valores indicados na Tabela 4.1 na página 45 foram obtidos com estas funções.

## Estimação de parâmetros

`ghFit()`, `hypFit()` e `nigFit()`. Estas funções permitem estimar os parâmetros das distribuições GH HYP e NIG pelo método de maximum likelihood estimator. Antes de se aplicar estes comandos é necessário carregar os pacotes: `fBasics`, `KernSmooth`. O código seguinte permite obter a Figura 4.1.

```
hyp = hypFit(x)
hyp.est = hyp@fit$estimate
nig = nigFit(x)
nig.est = nig@fit$estimate
gh = ghFit(x,alpha=nig.est[1],beta=nig.est[2],
delta=nig.est[3],mu=nig.est[4],lambda=-0.4064305)
gh.est = gh@fit$estimate
LLH = c(hyp = hyp@fit$minimum,nig = nig@fit$minimum,
gh = gh@fit$minimum)
#####
s = seq(-0.06, 0.06, length = 500)
hyp.y = dhyp(s, hyp.est[1], hyp.est[2], hyp.est[3], hyp.est[4])
nig.y = dnig(s, nig.est[1], nig.est[2], nig.est[3], nig.est[4])
gh.y = dgh(s, gh.est[1], gh.est[2], gh.est[3], gh.est[4], gh.est[5])
norm.y = dnorm(s, mean(x), sd(x))
##### Gráfico logarítmico da densidade empírica
kde = density(x)
plot(kde$x, log(kde$y), type = "l", lwd = 2,xlab="log-retornos",
ylab="Densidade",xlim = c(-0.05, 0.05), ylim = c(-4, 5),
main = "PSI 20 LOG-RETORNOS")
##### Gráficos das densidades das distribuições
lines(s, log(hyp.y), col = "red", lwd = 2)
lines(s, log(nig.y), col = "green", lwd = 2)
lines(s, log(gh.y), col = "blue", lwd = 2,lty=5)
lines(s, log(norm.y), lty = 3, lwd = 2)
```

```
##### Legenda do gráfico
legend(0.025,4, c("Empíricos","Normal","HYP","NIG","GH"),lty=c(1,3,1,1,1),
lwd=2, col=c("black","black","red","green","blue"))
segments(-0.055,0,0.055,0)
```

## Cálculo das distâncias

As distâncias utilizadas para testar o ajustamento dos dados empíricos aos dados teóricos às distribuições estimadas foram, ver Subsecção 4.4.2 na página 58, KS, KP, AD, e FFO. O código apresentado usa a distribuição normal e distribuição HYP, para as restantes distribuições é análogo. Os valores encontram-se nas Tabelas 4.5-4.8 a partir da página 59.

```
##### Distribuição empírica
x.sort<-sort(x)
fn<-seq(1:length(x))/length(x)
##### Cálculo das distâncias relativas à distribuição teórica normal
x.normal<-pnorm(x.sort,mean(x.sort),sd(x.sort))
ks.distance.normal<-max(abs(fn-x.normal))
ad.distance.normal<-max(abs(fn-x.normal)/sqrt(x.normal*(1-x.normal)))
kuiper.distance.normal<-max(fn-x.normal) + max(x.normal-fn)
fof.distance.normal<-(max((fn-x.normal)/sqrt(x.normal*(1-x.normal)))
+ max((x.normal-fn)/sqrt(x.normal*(1-x.normal))))
##### Cálculo das distâncias relativas à distribuição teórica hiperbólica
x.hyp<-phyp(x.sort, hyp.est[1],hyp.est[2],hyp.est[3],hyp.est[4])
ks.distance.hyp<-max(abs(fn-x.hyp))
ad.distance.hyp<-max(abs(fn-x.hyp)/sqrt(x.hyp*(1-x.hyp)))
kuiper.distance.hyp<-max(fn-x.hyp) + max(x.hyp-fn)
fof.distance.hyp<-(max((fn-x.hyp)/sqrt(x.hyp*(1-x.hyp))) +
max((x.hyp-fn)/sqrt(x.hyp*(1-x.hyp))))
```

Neste apêndice colocamos como exemplo os principais códigos utilizados na elaboração deste trabalho. Evitamos colocar todos os códigos usados pois isso tornaria este apêndice demasiado extenso, visto que todas as figuras, tabelas e cálculos efectuados neste trabalho foram realizados usando o software R. Além dos exemplos mostrados acima, torna-se necessário uma consulta aos vários manuais de apoio que se encontram disponíveis na Internet. Os principais manuais de apoio utilizados neste trabalho encontram-se disponíveis em:

- <http://stat.ethz.ch/CRAN/doc/packages/fBasics.pdf>;

- <http://cran.r-project.org/doc/contrib/Ricci-distributions-en.pdf>;
- <http://cran.r-project.org/doc/manuals/R-intro.pdf>.

# Apêndice B

## Funções de Bessel

Neste apêndice vamos coleccionar algumas propriedades das funções de Bessel modificadas as quais são usadas largamente ao longo desta tese nas distribuições hiperbólicas generalizadas. A referência clássica para este assunto é Abramowitz e Stegun [AS92].

**Definição B.1** *Sejam  $K_\lambda(z)$  e  $I_{\pm\lambda}(z)$ ,  $z \in \mathbb{C}$  soluções da equação diferencial*

$$z^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + z \frac{dw}{dz} - (z^2 + \lambda^2)w = 0.$$

As soluções  $K_\lambda$  e  $I_\lambda$  possuem a seguinte relação, cf. [AS92, Equação 9.6.2]

$$K_\lambda(z) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sin(\lambda\pi)} (I_{-\lambda}(z) - I_\lambda(z)),$$

sendo o lado direito substituído pelo seu valor limite se  $\lambda$  é inteiro ou zero.

**Observação B.2** 1. As funções  $K_\lambda$ ,  $I_{\pm\lambda}$  são regulares no plano- $z$  excepto no eixo real negativo.

2. Para cada  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$  ( $\mathbb{R}_0^-$  conjunto dos números reais menores ou iguais a zero) fixo,  $K_\lambda(z)$ ,  $I_\lambda(z)$  são funções inteiras.
3.  $K_\lambda(z)$  tende para zero quando  $|z| \rightarrow 0$  no sector  $|\arg z| \leq \frac{\pi}{2}$  para qualquer  $\lambda$ .
4.  $K_\lambda(z)$  e  $I_{\pm\lambda}(z)$  são reais e positivas quando  $\lambda > -1$  e  $z > 0$ .

Existem várias representações integrais para  $K_\lambda$ , cf. [AS92, 9.6.21-9.6.25] mas a representação dada na Proposição B.3 é da autoria de Barndorff-Nielsen e Blaesild [BNB81, Appendix 1].

**Proposição B.3 (Representação integral)** *Para qualquer  $z > 0$  temos*

$$K_\lambda(z) = \frac{1}{2} \int_0^\infty x^{\lambda-1} \exp\left(-\frac{z}{2}(x + x^{-1})\right) dx.$$

Algumas propriedades elementares das funções de Bessel modificadas.

**Corolário B.4 (Propriedades elementares)** *1. Simetria na ordem*

$$K_\lambda(z) = K_{-\lambda}(z).$$

*2. Relação de recorrência*

$$K_{\lambda+1}(z) = \frac{2\lambda}{z} K_\lambda(z) + K_{\lambda-1}(z).$$

*3. Conjugado para ordens reais*

$$K_\lambda(\bar{z}) = \overline{K_\lambda(z)}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

*4. Monotonia para ordens positivas*

$$K_{\lambda+\varepsilon}(z) > K_\lambda(z), \quad \lambda > 0, \varepsilon > 0, z > 0.$$

Propriedades assintóticas de  $K_\lambda$  para argumentos pequenos.

**Proposição B.5** *Consideremos o parâmetro  $\lambda$  fixo e  $z \rightarrow 0$ , então*

$$\begin{aligned} K_0(z) &\sim -\ln(z). \\ K_\lambda(z) &\sim \Gamma(\lambda) 2^{\lambda-1} z^{-\lambda}. \end{aligned}$$

*Para quaisquer  $\varepsilon > 0$ ,  $\lambda \geq 0$  e  $0 < z \uparrow \infty$  temos*

$$\frac{K_\lambda(z)}{K_{\lambda+\varepsilon}(z)} \downarrow 1.$$

Especialmente interessante para o Capítulo 4 são as derivadas das funções de Bessel modificadas nas  $(\lambda, z)$ -variáveis, cf. [AS92, Equações 9.6.27-29 e 9.6.42-46].

**Proposição B.6 (Derivadas)** 1. Para  $\lambda = 0$  temos

$$K'_0(z) = -K_1(z).$$

2. Para  $\lambda$  arbitrário a seguinte relação tem lugar

$$K'_\lambda(z) = -\frac{\lambda}{z}K_\lambda(z) - K_{\lambda-1}(z), \quad n \in \{1, 2, \dots\}.$$

3. A derivada de  $\ln K_\lambda$  é dada por

$$(\ln K_\lambda(z))' = \frac{\lambda}{z} - R_\lambda(z), \quad z > 0,$$

onde

$$R_\lambda(z) := \frac{K_{\lambda+1}(z)}{K_\lambda(z)}. \quad (\text{B.1})$$

A função  $R_\lambda$  é crescente quando  $\lambda < -\frac{1}{2}$  e decrescente quando  $\lambda > -\frac{1}{2}$ , cf. [Lor67].

4. A derivada na variável  $\lambda$  é

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_\lambda(z)}{\partial \lambda} &= -\pi \cos(\lambda\pi)K_\lambda(z), \quad \lambda \neq 0, \pm 1, \pm 2 \dots \\ \left[ \frac{\partial K_\lambda(z)}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=0} &= 0 \\ \left[ \frac{\partial K_\lambda(z)}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=n} &= \frac{n!}{2(2z)^n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{z^k K_k(z)}{2^k (n-k)! k!}. \end{aligned}$$

**Teorema B.7 (Funções de Bessel do primeiro e segundo tipo)** Sejam  $z > 0$  e  $\lambda \geq 0$  dados, então temos

$$\begin{aligned} \frac{K_{\lambda-1}(z)}{zK_\lambda(z)} &= \int_0^\infty \frac{g_\lambda(t)}{z^2 + t} dt, \\ g_\lambda(t) &= \frac{2}{\pi^2 t (J_\lambda^2(\sqrt{t}) + Y_\lambda^2(\sqrt{t}))} > 0, \end{aligned}$$

onde  $J_\lambda$  e  $Y_\lambda$  são as funções de Bessel do primeiro e segundo tipos, respectivamente. Isto é, são as soluções da equação diferencial

$$z^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + z \frac{dw}{dz} + (z^2 - \lambda^2)w = 0.$$

# Bibliografia

- [AD54] T. W. Anderson and D. A. Darling. A test of goodness of fit. *J. Am. Stat. Assoc.*, 49:765–769, 1954.
- [AH06] K Aas and I. H. Haff. The generalized hyperbolic skew Student’s  $t$ -distribution. *Journal of Financial Econometrics*, 4(2):275–309, 2006.
- [AS92] M. Abramowitz and A. Stegun. *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*. Dover Publications Inc., New York, 1992.
- [BDES96] H. Bühlmann, F. Delbaen, P. Embrechts, and A. N. N. Shiryaev. No-arbitrage, change of measure and conditional Esscher transforms. *CWI Quarterly*, 9(4):291–317, 1996. Mathematics of finance, Part I.
- [Ben04] Fred Espen Benth. *Option theory with stochastic analysis*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [Blæ81] P. Blæsild. The two-dimensional hyperbolic distribution and related distributions, with an application to Johannsen’s bean data. *Biometrika*, 68(1):251–263, 1981.
- [BN77] O. E. Barndorff-Nelsen. Exponentially decreasing distributions for the logarithm of particle size. *Proceedings of the Royal Society London A*, (353):401–419, 1977.
- [BNB81] O. Barndorff-Nielsen and P. Blæsild. Hyperbolic distributions and ramifications: contributions to theory and application. In *Statistical distributions in scientific work, Vol. 4 (Trieste, 1980)*, volume 79 of *NATO Adv. Study Inst. Ser. C: Math. Phys. Sci.*, pages 19–44. Reidel, Dordrecht, 1981.

- [BNH77] O. Barndorff-Nielsen and C. Halgreen. Infinite divisibility of the hyperbolic and generalized inverse Gaussian distributions. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete*, 38(4):309–311, 1977.
- [BNS01] O. E. Barndorff-Nielsen and N. Shephard. Normal modified stable processes. *Teor. ĽmovĽr. Mat. Stat.*, (65):1–19, 2001.
- [BNS06] O. E. Barndorff-Nielsen and R. Stelzer. Absolute moments of generalized hyperbolic distributions and approximate scaling of normal inverse gaussian LĽvy processes. *Scand. J. Statist.*, 32(4):617–637, 2006.
- [BS73] F. Black and M. Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *J. Polit. Econ.*, 81:637–654, 1973.
- [BS92] P. BlĽsild and M. K. SĽrensen. 'hyp' – a computer program for analyzing data by means of the hyperbolic distribution. Technical report, University of Århus, 1992.
- [DS95] F. Delbaen and W. Schachermayer. The no-arbitrage property under a change of numĽraire. *Stoch. Stoch. Rep.*, 53(3-4):213–226, 1995.
- [Ebe01] E. Eberlein. Application of generalized hyperbolic LĽvy motions to finance. Barndorff-Nielsen, Ole E. (ed.) et al., LĽvy processes. Theory and applications. Boston: BirkhĽuser. 319-336 (2001)., 2001.
- [EJ97] E. Eberlein and J. Jacod. On the range of options prices. *Finance Stoch.*, 1(2):131–140, 1997.
- [EK95] E. Eberlein and U. Keller. Hyperbolic distributions in finance. *Bernoulli*, 1:281–299, 1995.
- [Ess32] F. Esscher. On the probability function in the collective theory of risk. *Skand. Aktuarie Tidskr.*, 15:175–195, 1932.
- [FF04] J. Fajardo and A. Farias. Generalized hyperbolic distributions and brazilian data. *Brazilian Review of Econometrics*, 24(2):1–21, 2004.
- [FFO06] A. Farias, J. Fajardo, and J. R. H. Ornelas. Goodness-of-fit test focuses on VaR calculation. *Brazilian Review of Econometrics*, 2006.

- [GS94] H. U. Gerber and E. S. W. Shiu. Option pricing by Esscher transforms. *Transactions of Society of Actuaries*, 46:99–191, 1994.
- [Gut95] A. Gut. *An intermediate course in probability*. Springer-Verlag, New York, 1995.
- [JF03] M. C. Jones and M. J. Faddy. A skew extension of the  $t$ -distribution, with applications. *J. R. Stat. Soc. Ser. B Stat. Methodol.*, 65(1):159–174, 2003.
- [Jon04] F. Jonsson. On the Fitting of Generalized Hyperbolic Distributions to Financial Data. Master’s thesis, University of Stockholm, 2004.
- [JS03] J. Jacod and A. N. Shiryaev. *Limit theorems for stochastic processes. 2nd ed.* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften. 288. Berlin: Springer, 2003.
- [Kel97] U. Keller. *Realistic modelling of financial derivatives*. PhD thesis, University of Freiburg, 1997.
- [Kol93] A. N. Kolmogorov. Sulla determinazione empirica di una legge di distribuzione. *Giorn. Inst. Ital. Attuari*, 4(89–91), 1993.
- [Lor67] L. Lorch. Inequalities for some Whittaker functions. *Arch. Math. (Brno)*, 3:1–9, 1967.
- [Man63] B. B. Mandelbrot. The variation of certain speculative prices. *Journal of Business*, 36:394–419, 1963.
- [Mer73] R. C. Merton. Theory of rational option pricing. *Bell J. Econom. and Management Sci.*, 4:141–183, 1973.
- [Pra97] K. Prause. Modelling financial data using generalized hyperbolic distributions. Technical Report 48, University of Freiburg, 1997.
- [Pra99] K. Prause. *The Generalized Hyperbolic Model: Estimation, Financial Derivatives, and Risk Measures*. PhD thesis, University of Freiburg, 1999.
- [PV02] D. D. Pestana and S. F. Velosa. *Introdução à Probabilidade e à Estatística*. Fundação Calouste Gulbenkian, 2002.

- [Rai00] S. Raible. *Lévy Processes in Finance: Theory, Numerics, and Empirical Facts*. PhD thesis, University of Freiburg, 2000.
- [Wan05] C. Wang. On the Numerics of Estimating Generalized Hyperbolic Distributions. Master's thesis, Humboldt-University of Berlin, 2005.