

DM

Sistemas Dinâmicos Não-lineares e Aplicações

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Laura José Fernandes Berenguer

MESTRADO EM MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E APLICAÇÕES



UNIVERSIDADE da MADEIRA

A Nossa Universidade

www.uma.pt

agosto | 2020

Sistemas Dinâmicos Não-lineares e Aplicações

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Laura José Fernandes Berenguer

MESTRADO EM MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E APLICAÇÕES

ORIENTAÇÃO

Rafael Domingos Garanito Luís

Sistemas Dinâmicos Não-lineares e Aplicações

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Laura José Fernandes Berenguer
MESTRADO EM MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E APLICAÇÕES

JÚRI

Professora Doutora Maria Teresa Alves Homem de Gouveia
Professor Doutor José Luís da Silva
Professor Doutor Rafael Domingos Garanito Luís

Agradecimentos

A composição de uma dissertação no mestrado advém de uma experiência pessoal que abrange inúmeros desafios, os quais solicitam, muitas vezes, o isolamento para os conseguir ultrapassar. Ainda assim, nestas páginas, devo expressar a minha gratidão para com aqueles que durante os últimos dois anos acompanharam o meu percurso, em especial:

Ao Professor Doutor Rafael Luís, orientador desta dissertação, pela dedicação e confiança que constantemente depositou em mim. O seu registo de ensino cativou-me desde a licenciatura, contribuindo para que o meu interesse pela Matemática fosse cada vez maior, em particular por este tema dado nas suas aulas. Agradeço-lhe também por me ter apoiado em muitas outras situações ao longo da realização desta dissertação, dado as circunstâncias imprevistas que tivemos de ultrapassar, e pela sua orientação importantíssima na execução desta dissertação.

Aos professores do Departamento de Matemática, da Faculdade de Ciências Exatas e da Engenharias, por toda a formação académica fundamental na minha formação profissional. Um obrigado especial à Professora Doutora Ana Abreu por ser uma das profissionais que mais se preocupa com qualquer aluno e, mesmo sabendo que este mestrado estaria previsto não abrir no ano letivo 2018/2019, fez todos os possíveis para que isso acontecesse, dando assim oportunidade para que eu e os meus colegas pudessemos realizar este mestrado. Agradeço-lhe desde já pela compreensão, disponibilidade e apoio imprescindível da sua parte ao longo do mestrado.

Aos meus pais, Magda e Helder Berenguer, por todos os sacrifícios que têm feito e por todas as oportunidades que me têm proporcionado, bem como pelo apoio incansável no meu quotidiano para a realização desta dissertação.

A toda a minha família por estarem presentes, me apoiarem nas minhas decisões e compreenderem o meu isolamento em muitas situações, mas também por me ajudarem a abstrair em momentos de maior stress, nunca deixando de me apoiar.

À minha avó materna, Elisa Fernandes, por ser uma das mulheres que mais adoro e por ter estado sempre lá, seja para rirmos, seja para os meus desabafos e nunca ter deixado de acreditar em mim.

Aos meus colegas de mestrado pelo companheirismo e ajuda na superação de diversas situações ao longo do mestrado e às restantes pessoas mais próximas, agradeço pelo incentivo e auxílio demonstrados, dando-me sempre força para terminar mais uma etapa da minha vida académica.

Resumo

Uma equação que contém uma, ou mais, das suas derivadas e uma função desconhecida é chamada de equação diferencial. Dado isto, os objetivos desta dissertação são estudar sistemas dinâmicos não-lineares, determinar a estabilidade de estados estacionários, estudar o comportamento das órbitas no diagrama de fases, linearizar sistemas e resolver problemas aplicados.

As equações diferenciais ordinárias de primeira ordem podem ser classificadas conforme os métodos empregues na obtenção da sua solução explícita. As propriedades qualitativas dos pontos de equilíbrio e, por sua vez, a sua estabilidade, podem ser obtidas através do esboço do campo vetorial associado, sendo classificados por poço, ponto de sela ou fonte. Nas equações diferenciais não-lineares autónomas de segunda ordem, o seu estudo é, em geral, descrito no diagrama de fases. Introduzindo uma mudança de variável, obtém-se um sistema diferencial não-linear de primeira ordem, onde a sucessão de estados para os diversos valores da variável independente traçam as órbitas no diagrama de fases. Os pontos de equilíbrio, neste diagrama, são classificados como centros ou pontos de sela.

Nos sistemas autónomos de primeira ordem, à medida que a variável independente t varia, os pares $(x(t), y(t))$ traçam um caminho de fase direcionado no plano xOy . Os pontos de equilíbrio são classificados conforme o comportamento das órbitas à sua volta. Quando não se consegue determinar a solução analítica nem a equação das órbitas no diagrama de fases, recorre-se à técnica de linearização. Esta técnica transforma, localmente, as propriedades um sistema não-linear num sistema linear. Quanto à estabilidade dos pontos de equilíbrio e construção do respetivo diagrama de fases associado, estes dependem dos valores próprios da matriz jacobiana do sistema linear, podendo representar nós, pontos de sela, centros ou espirais.

Palavras-chave: Sistemas dinâmicos, Pontos de equilíbrio, Estabilidade, Órbitas, Diagrama de fases.

Abstract

An equation that contains one, or more, of its derivatives and an unknown function is called a differential equation. Given this, the objectives of this dissertation are to study nonlinear dynamic systems, to determine the stability of stationary states, to study the behavior of the orbits in the phase diagram, to linearize systems and to solve applied problems.

First order ordinary differential equations can be classified according to the methods used to obtain their explicit solution. The qualitative properties of the equilibrium points and their stability, can be obtained by sketching the associated vector field, being classified by sink, saddle point or source. In second order autonomous nonlinear differential equations, their study is, in general, described in the phase diagram. By change of variables, a first order nonlinear differential system is obtained, such that the succession of states for the various values of the independent variable gives the orbits in the phase diagram. The equilibrium points in this diagram are classified as centers or saddle points.

In first order autonomous systems, as the independent variable t varies, the pairs $(x(t), y(t))$ gives a phase path ordered in the xOy plane. The equilibrium points are classified according to the behavior of the orbits in its neighborhood. When it is not possible to determine the analytical solution or the equation of the orbits in the phase diagram, the technique of linearization is used. This technique transforms, locally, the properties of a non-linear system into a linear system. As regards the stability of the equilibrium points and the construction of the respective associated phase diagram, they depend on the eigenvalues of the jacobian matrix of the linear system, which can represent nodes, saddle points, centers or spirals.

Keywords: Dynamical systems, Equilibrium points, Stability, Orbits, Phase diagram.

Índice

| | |
|--|----|
| 1. Equações diferenciais: conceitos básicos e definições | 5 |
| 1.1 Soluções das equações diferenciais | 6 |
| 1.2 Problema de valor inicial | 7 |
| 1.3 Existência, unicidade e dependência contínua..... | 8 |
| 1.4 Campos vetoriais e curvas integrais..... | 10 |
| 2. Equações diferenciais não-lineares de primeira ordem | 13 |
| 2.1 Equações com variáveis separadas ou separáveis..... | 14 |
| 2.2 Equações diferenciais homogêneas | 16 |
| 2.3 Equações diferenciais autónomas | 19 |
| 2.4 Estudo qualitativo das soluções | 21 |
| 2.5 Algumas aplicações das equações diferenciais não-lineares de primeira ordem..... | 27 |
| 2.5.1 Modelo do crescimento específico ou Lei da alometria | 27 |
| 2.5.2 Modelo logístico da dinâmica populacional | 28 |
| 3. Equações diferenciais não-lineares de ordem superior..... | 31 |
| 3.1 Equações autónomas no diagrama de fases | 31 |
| 3.2 Sistemas conservadores do tipo $\mathbf{x}'' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ | 40 |
| 3.3 Sistemas conservadores dependentes de parâmetros | 43 |
| 3.4 Representação gráfica das soluções | 46 |
| 3.5 Algumas aplicações das equações diferenciais não-lineares de ordem superior..... | 48 |
| 3.5.1 Modelo da fricção a seco | 48 |
| 3.5.2 Modelo do relógio de pêndulo: ciclo-limite | 49 |
| 4. Sistemas dinâmicos de equações diferenciais ordinárias não-lineares..... | 51 |
| 4.1 Classificação dos sistemas dado a sua ordem..... | 51 |
| 4.1.1 Sistemas de primeira ordem | 51 |
| 4.1.2 Sistemas de ordem superior..... | 53 |
| 4.2 Solução geral de sistemas de equações diferenciais de primeira ordem..... | 54 |
| 4.2.1 Método não matricial (ou de substituição) | 54 |
| 4.2.2 Método matricial | 55 |
| Sistema homogêneo..... | 56 |
| Sistema não homogêneo | 58 |
| 4.3 Diagrama de fases | 60 |

| | | |
|-------|---|-----|
| 4.4 | Aproximação linear nos pontos de equilíbrio | 65 |
| 4.4.1 | λ_1, λ_2 reais, distintos e com mesmo sinal..... | 68 |
| 4.4.2 | λ_1, λ_2 reais, distintos e com sinais opostos | 69 |
| 4.4.3 | Complexos conjugados..... | 71 |
| 4.4.4 | Casos degenerados..... | 74 |
| 4.5 | Construção do diagrama de fases..... | 76 |
| 4.6 | Aplicação dos sistemas dinâmicos não-lineares | 83 |
| | Conclusão | 85 |
| | Apêndices | 87 |
| | Apêndice A: Problemas aplicados a equações diferenciais não-lineares de primeira ordem | 87 |
| A.1 | Equações especiais | 87 |
| | Equações de Bernoulli | 87 |
| | Equações de Clairaut | 89 |
| | Equações de Riccati..... | 90 |
| | Equações redutíveis às de primeira ordem | 91 |
| A.2 | Algumas aplicações das equações diferenciais não-lineares de primeira ordem..... | 92 |
| | Modelo do crescimento de uma célula | 92 |
| | Modelo da absorção de drogas | 94 |
| | Modelo dos juros compostos e inflação | 95 |
| | Apêndice B: Problemas aplicados aos sistemas dinâmicos de equações diferenciais ordinárias não-lineares | 96 |
| B.1 | Algumas aplicações dos sistemas dinâmicos não-lineares..... | 96 |
| | Modelo da estratégia de equipamentos..... | 96 |
| | Modelo dos biodigestores..... | 102 |
| | Modelo geral da competição entre duas espécies..... | 107 |
| | Modelo da lei da gravitação universal..... | 111 |
| | Bibliografia..... | 119 |
| | Índice remissivo..... | 123 |

Lista de Figuras

| | |
|---|----|
| Figura 1.1: Campo vetorial da equação $y' = x + y$ e curva integral que passa no ponto $(0,1)$ | 11 |
| Figura 2.1: Campo vetorial da equação $y' = y - x^2$ | 14 |
| Figura 2.2: Família de curvas integrais da forma $y = \frac{k}{x}, k \in \mathbb{R}$ | 15 |
| Figura 2.3: Curva integral do PVI $y' = \frac{3y-xy}{x}, y(1) = 3e^{-1}$ | 16 |
| Figura 2.4: Curvas integrais da equação $y' = \frac{y}{x-y}$ | 18 |
| Figura 2.5: Curvas integrais da equação $x' = \frac{x-y}{y}$ | 19 |
| Figura 2.6: Soluções da equação $u' = u^2$ | 20 |
| Figura 2.7: Gráfico de $f(y) = y(2 - y)$ | 22 |
| Figura 2.8: Campo vetorial e curvas integrais da equação $y' = y(2 - y)$ | 23 |
| Figura 2.9: Linha de fase para $y' = f(y)$, com $f(y) = y(2 - y)$ | 23 |
| Figura 2.10: Linha de fase para $y' = f(y)$, com $f(y) = y(4 - y)^2$ | 23 |
| Figura 2.11: Equilíbrio das equações diferenciais ordinárias escalares: estável (esquerda) e instável (direita). | 25 |
| Figura 2.12: Estabilidade da equação $u' = u - u^3$ | 26 |
| Figura 3.1: (a) O ponto representativo P num segmento de um caminho de fase. (b) Caminho fechado: P parte de A e retorna a A num número infinito de vezes..... | 33 |
| Figura 3.2: O caminho AB ao longo do qual o tempo de transição é calculado (arco vermelho)..... | 34 |
| Figura 3.3: Diagrama de fases para a equação do pêndulo simples..... | 35 |
| Figura 3.4: Diagrama de fases para a equação $x'' + \omega^2 x = 0$ | 37 |
| Figura 3.5: Ponto de sela: apenas os caminhos MO e $M'O$ é que se aproximam da origem. | 38 |
| Figura 3.6: Diagrama de fases para a equação $x'' + \sin x = 0$ | 39 |
| Figura 3.7: Uma partícula P sobre a força de $f(x)$ | 40 |
| Figura 3.8: Uma partícula P ligada a uma mola de comprimento natural $l = AO$, onde o deslocamento de O para P é dado por x | 41 |
| Figura 3.9: Diagrama de fases da equação $x'' = -xe^{-x}$ | 43 |
| Figura 3.10: Diagrama de estabilidade representativo ilustrando curvas de estabilidade para os pontos da equação $x'' = f(x, \lambda)$ | 44 |
| Figura 3.11: Diagrama de fases para o caso de um cordão deslizando sobre um fio circular..... | 46 |
| Figura 3.12: Diferentes formas de solução da equação do pêndulo $x'' + \sin x = 0$. Em particular, (a) a solução periódica \mathcal{L}_p e uma solução rodopiante \mathcal{L}_w no diagrama de fases; (b) como uma solução (x, t) ; (c) no espaço da solução (x, y, t) ; (d) numa superfície de fase cilíndrica que pode ser usada para equações diferenciais periódicas em x | 47 |

| | |
|--|-----|
| Figura 3.13: Diagrama de fases para o caso da fricção a seco. | 49 |
| Figura 4.1: Estabilidade dos pontos de equilíbrio: estável (esquerda) e assintoticamente estável (direita). | 52 |
| Figura 4.2: Diagrama de fases para o sistema $x' = y(1 - x^2); y' = -x(1 - y^2)$, onde as linhas tracejadas representam as isoclínicas de inclinação zero e infinita. | 61 |
| Figura 4.3: Diagrama de fases dos sistemas $x' = y; y' = -x$ (esquerda) e $x' = xy; y' = -x^2$ (direita). | 62 |
| Figura 4.4: Típico diagrama de fases para o modelo predador-presa. | 64 |
| Figura 4.5: Nó estável (a); Nó instável (b). | 69 |
| Figura 4.6: Ponto de sela. | 69 |
| Figura 4.7: Diagrama de fases do sistema linear $x' = 3x - 2y; y' = 5x - 4y$. A origem é um ponto de sela. | 71 |
| Figura 4.8: Centro. | 72 |
| Figura 4.9: Espiral estável (a); Espiral instável (b). | 73 |
| Figura 4.10: Diagrama de fases do sistema de Van der Pol. | 74 |
| Figura 4.11: Classificação para o sistema linear $x' = ax + by; y' = cx + dy$ no plano pOq | 75 |
| Figura 4.12: Diagrama de fases para o sistema $x' = x - y; y' = 1 - xy$ | 78 |
| Figura 4.13: Diagrama de fases para o sistema não-linear $u' = v; v' = -a\sin u - \beta v$ | 80 |
| Figura 4.14: Diagrama de fases do sistema $u' = u(v - 1); v' = 4 - u^2 - v^2$ | 82 |
| Figura 4.15: Diagrama de fases típico para o modelo geral da epidemia. | 84 |
| | |
| Figura B.1: Comportamento armamentista: (a) Estado de paz, (b) Tendência de estado de guerra permanente e (c) Limitação de equipamentos. | 98 |
| Figura B.2: Diagrama de fases para o caso em que $ad - bc > 0$ | 99 |
| Figura B.3: Diagrama de fases para o caso em que $ad - bc < 0$ | 100 |
| Figura B.4: Diagramas de fases para a situação de estado de paz permanente ($bh + gd < 0$) (a) e estado de guerra $bh + gd > 0$ (b). | 101 |
| Figura B.5: Relação entre a quantidade de bactérias (x) e de biogás (y). | 103 |
| Figura B.6: Produção de biogás. | 104 |
| Figura B.7: Quantidade de bactérias num biodigestor. | 104 |
| Figura B.8: Trajetórias do sistema $x' = x(\alpha - rx - py), y' = kx$ | 105 |
| Figura B.9: Diagrama de fases para o sistema linearizado $u' = -\frac{\alpha\beta}{k}v - pu v; v' = ku - \beta v$ | 106 |
| Figura B.10: Diagrama de fases para o caso em que $\frac{c}{d} > \frac{a}{\alpha}$ e $\frac{c}{\beta} > \frac{a}{b}$ | 109 |
| Figura B.11: Diagrama de fases para o caso em que $\frac{c}{d} < \frac{a}{\alpha}$ e $\frac{c}{\beta} > \frac{a}{b}$ | 110 |
| Figura B.12: Diagrama de fases para o caso em que $\frac{a}{\alpha} > \frac{c}{d}$ e $\frac{c}{\beta} > \frac{a}{b}$ | 110 |
| Figura B.13: Diagrama de fases para o caso em que $\frac{c}{d} > \frac{a}{\alpha}$ e $\frac{c}{\beta} < \frac{a}{b}$ | 111 |
| Figura B.14: Movimento ascendente e descendente de um corpo. | 113 |

Figura B.15: Força de atração universal entre duas partículas de massas m_1 e m_2 localizadas em R_1 e R_2 no espaço. 116

Figura B.16: Atração exercida sobre uma partícula de massa unitária localizada em x^0 116

Figura B.17: Área abrangida pelo vetor posição $x(t)$ no plano de movimento, onde $\frac{\Delta S}{\Delta t} \cong \frac{1}{2} \left\| \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \times x(t) \right\|$ 117

Lista de Tabelas

Tabela 3.1: Caracterização dos caminhos de fase na equação $x'' + \sin x = 0$ 39

Tabela 4.1: Classificação para o sistema linear $x' = ax + by; y' = cx + dy$ no plano pOq , onde $p = a + d, q = ad - bc$ e $\Delta = p^2 - 4q$ 76

Introdução

Esta tese foi elaborada no âmbito da dissertação do Mestrado em Matemática, Estatística e Aplicações. O tema proposto foi Sistemas Dinâmicos Não-Lineares e Aplicações.

Os objetivos desta dissertação são estudar sistemas dinâmicos não-lineares com aplicações às diferentes áreas do saber, determinar a estabilidade de estados estacionários, estudar o comportamento das órbitas no diagrama de fases, linearizar sistemas e resolver problemas aplicados.

Esta dissertação contém conteúdos teóricos subjacentes aos métodos necessários para se resolver os diferentes problemas, bem como exemplos ilustrativos e esclarecedores da teoria.

O cálculo e as equações diferenciais nasceram juntos, dado que os dois teoremas básicos do cálculo estão intimamente ligados à solução da equação diferencial mais simples e importante

$$x'(t) = f(t), \quad (1)$$

ou seja, obter a função incógnita $x(t)$, uma vez conhecida a sua derivada $f(t)$.

Com base em [1, 2], com o aparecimento do cálculo no final do século XVII por obra de I. Newton (1642-1727) e G.W. Leibnitz (1646-1716), inúmeros problemas mecânicos puderam ser modelados matematicamente na forma de equações diferenciais.

Newton forneceu a base para a aplicação das equações diferenciais no século XVIII, classificando as equações diferenciais de primeira ordem de acordo com as formas $\frac{dy}{dx} = f(x)$, $\frac{dy}{dx} = f(y)$ e $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ obtendo, portanto, um método para resolver a última equação, no qual $f(x, y)$ é um polinômio em x e y , usando séries infinitas.

Diferente de Newton que considerava variáveis mudando com o tempo, Leibniz estudava as variáveis x e y variando sobre sequências de valores infinitamente próximos. Este matemático introduziu a notação dx e dy como as diferenças entre os valores sucessivos dessas sequências, estabeleceu a notação de derivada $\frac{dy}{dx}$ e o sinal de integral. Em 1691, este matemático descobriu o método de separação de variáveis e desenvolveu o método de redução de equações homogêneas em equações separáveis. Em 1694, apresenta o procedimento para a resolução de equações lineares de primeira ordem.

Leibniz comunicava em especial com os irmãos Jakob Bernoulli (1654-1705) e Johann Bernoulli (1667-1748), os quais contribuíram significativamente para o desenvolvimento de métodos de resolução das equações diferenciais e expansão no campo das suas aplicações.

Vários problemas foram resolvidos explicitamente por grandes matemáticos, como os da família Bernoulli e Leonhard Euler. Contudo, com o passar do tempo, percebeu-se que não seria possível obter procedimentos gerais de resolução explícita para as equações diferenciais e, no século XVII, pesquisadores desta ciência começaram a procurar outros métodos de estudo das equações diferenciais que não a sua solução explícita. Segundo Danielle Nóbrega em [3], nessa época Augustin Louis Cauchy (1789-1857) teve grande destaque demonstrando a existência de soluções para uma grande parte das equações diferenciais.

Euler introduziu métodos que geravam uma solução aproximada da equação diferencial. No primeiro deles, a aproximação é feita com linhas poligonais por um processo que deu origem aos métodos de cálculo numérico das soluções. No segundo método, a solução é aproximada por polinômios ou, mais especificamente, por uma série de potências.

Leonhard Euler, entre os anos de 1734 e 1735, identificou a condição para que equações diferenciais de primeira ordem sejam exatas. Em 1739 desenvolveu o método de variação das constantes e em 1743 demonstrou a teoria dos fatores integrantes.

Este matemático usava, frequentemente, a série de potências para solucionar equações diferenciais, onde incluía o uso de aproximações numéricas e o desenvolvimento de métodos numéricos. Além disso, foi o responsável por efetuar o primeiro tratamento sistemático do cálculo de variações. De acordo com [4], trabalhou com séries de Fourier, utilizando as funções de Bessel nos estudos sobre vibrações de uma membrana circular esticada e aplicou as transformadas de Laplace para resolver equações diferenciais.

Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) veio a suceder Euler, mostrando que a solução geral de uma equação linear homogênea de ordem n é uma combinação linear de n soluções independentes, destacando-se também pelo seu trabalho fundamental em equações diferenciais parciais e cálculo de variações.

Até ao final do século XVIII, foi desenvolvido diversos métodos elementares para solucionar equações diferenciais ordinárias. No começo do século XIX, Carl Friedrich Gauss (1777-1855) e Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) contribuíram no desenvolvimento das teorias e conceitos de funções de variáveis complexas. Gauss percebeu que a teoria das funções de uma variável complexa era a chave para alcançar os resultados necessários em equações diferenciais aplicadas, enquanto Cauchy desenvolveu o método da equação característica, o qual foi uma importante ferramenta na análise e solução de muitas equações diferenciais parciais.

Com base em [3], Pierre-Simon de Laplace (1749-1827) teve também o seu destaque no campo da mecânica celeste dado o seu método “A transformada de Laplace” permitir solucionar uma equação diferencial ordinária de coeficientes constantes por meio da resolução de uma equação algébrica.

Após o início do século XIX, os métodos gerais de resolução explícita das equações diferenciais perderam a sua proeminência e nenhum método de maior relevância foi desenvolvido até o aparecimento do cálculo operacional.

Contudo, já no final do século XIX iniciou-se a investigação de questões teóricas de existência e unicidade e, no ano de 1876, Rudolf Lipschitz (1832-1903) desenvolveu o teorema da existência para soluções de equações diferenciais de primeira ordem. Com tudo isto, iniciou-se assim a teoria qualitativa geométrica representada por H. Poincaré (1854-1912) e A.M. Lyapunov (1857-1918), bem como a teoria da aproximação analítica (expansão em séries) e da aproximação numérica [5, 6].

Segundo [7], a teoria das equações diferenciais foi aplicada primeiramente às ciências físicas e posteriormente a outras atividades humanas. Estas equações associam uma função incógnita a uma ou mais das suas derivadas, sendo que a sua resolução significaria encontrar todas as suas soluções, isto é, todas as funções que as satisfazem.

Atualmente, o desenvolvimento das soluções de determinadas equações diferenciais ainda continua como objeto de pesquisa, fazendo com que muitos problemas atrativos e importantes ainda não tenham sido resolvidos. O campo das equações diferenciais continua sendo estudado por muitos investigadores, fazendo com que as equações diferenciais constituem uma das aplicações mais importantes do cálculo, uma vez que traduzem matematicamente muitos dos fenómenos estudados em várias áreas do saber.

Ao longo desta dissertação, pretende-se mostrar alguns conceitos gerais sobre as equações diferenciais não-lineares de primeira ordem e ordem superior, bem como resolução de sistemas não-lineares. Toda a teoria pode ser encontrada detalhadamente na bibliografia apresentada.

No primeiro capítulo é apresentado alguns dos conceitos básicos e definições acerca desta temática.

No segundo e terceiro capítulos é abordado o estudo qualitativo, resolução analítica e algumas aplicações sobre as equações diferenciais não-lineares de primeira ordem e ordem superior.

Por fim, no quarto capítulo é exposto algumas ideias sobre os sistemas não-lineares, mais propriamente, a sua resolução analítica através do método de substituição, método matricial ou pela linearização à volta dos seus respetivos pontos de equilíbrio, o seu estudo qualitativo e um exemplo de aplicação prática.

Capítulo 1

Equações diferenciais: conceitos básicos e definições

Genericamente, uma equação diferencial é uma relação entre uma função desconhecida e as suas derivadas. Existem dois tipos de equações diferenciais:

- (i) Equações diferenciais ordinárias (EDO): A função incógnita que aparece na equação, y (na notação usada), representa uma função de variável independente x , sendo a sua forma geral

$$F(x, y, y', y'', \dots) = 0, \text{ onde } y' = \frac{dy}{dx}, y'' = \frac{d^2y}{dx^2}, \dots \quad (2)$$

Chama-se ordem da equação diferencial à ordem da derivada de ordem superior que aparece na equação.

- (ii) Equações de derivadas parciais (EDP): A função u é uma função de várias variáveis $u(x, z, t, \dots)$ e a equação é uma relação entre u , as variáveis independentes x, z, t, \dots e as derivadas parciais de u .

Pode-se, ainda, classificar as equações diferenciais ordinárias quanto à sua linearidade.

Definição 1 [8]: *Seja I um intervalo aberto da reta real. Uma equação diferencial ordinária linear de ordem n , na variável independente x , é uma equação que é (ou pode ser) expressa da seguinte forma*

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x), \quad (3)$$

onde as funções a_0, a_1, \dots, a_n são funções (conhecidas) contínuas no intervalo I e a função a_0 não se anula nesse intervalo.

Definição 2 [3]: *Uma equação diferencial ordinária não-linear é uma equação diferencial ordinária que não segue as propriedades das equações lineares.*

Note-se, portanto, que nas equações diferenciais lineares, tanto o y como as suas derivadas são sempre de primeiro grau, não surgem produtos de y ou das suas derivadas e não figuram funções transcendentais de y (exponencial, seno, cosseno, logaritmo, potência, etc) ou das suas derivadas.

Observação 3: *Nesta dissertação apenas estudam-se equações diferenciais ordinárias.*

Observação 4: *No caso das equações diferenciais de primeira ordem, estas podem ser escritas essencialmente de três formas equivalentes*

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)} \quad \text{ou} \quad f(x, y)dx - dy = 0. \quad (4)$$

Esta característica faz com que, em muitos casos, se possa escolher a variável independente que seja mais vantajosa na ótica da análise e resolução da equação diferencial em causa. Em particular, pode acontecer que determinada equação diferencial de primeira ordem não seja linear se for reescrita considerando uma outra variável independente (na prática trocando o papel das variáveis independentes/dependentes).

1.1 Soluções das equações diferenciais

Sem alguma compreensão teórica sobre a natureza das soluções, pontos de equilíbrio, bem como propriedades de estabilidade, não seria possível entender quando é que as soluções numéricas (mesmo aquelas fornecidas por packages bem utilizados) são confiáveis. Assim, nesta secção, averiguamos quais os critérios que levam uma função f a ser classificada como solução de uma dada equação diferencial.

Definição 5 [3]: *Qualquer função f definida num intervalo real I que quando substituída na equação diferencial reduz a equação a uma identidade é chamada de solução para a equação nesse intervalo. Ou seja, uma solução para a equação diferencial*

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (5)$$

é uma função f que possui pelo menos n derivadas e satisfaz a equação $F(x, f(x), f'(x), \dots, f^{(n)}(x)) = 0$ para todo x pertencente ao intervalo.

Exemplo 6 [8, p. 7]: *A relação $y = x^2$ é uma solução da equação diferencial $y' + y = x(x + 2)$, uma vez que substituindo y por x^2 na equação anterior se obtém uma identidade*

$$y' + y = x(x + 2) \Leftrightarrow 2x + x^2 = x(x + 2).$$

Vejamos agora o que diferencia as soluções explícitas das soluções implícitas.

Definição 7 [8]: *Seja $f(x)$ uma função real definida para todo o x pertencente a um intervalo real aberto I e que tenha derivada de ordem n . A função f designa-se uma solução explícita da equação diferencial no intervalo I se satisfaz as condições:*

- (a) $F(x, y, y', \dots, y^{(n)})$ está definida para todo $x \in I$;
- (b) $F(x, f(x), f'(x), \dots, f^{(n)}(x)) = 0$ para todo $x \in I$.

Ou seja, a função F , que está associada exclusivamente à forma da equação diferencial, deve, enquanto função explícita de x , fazer sentido para todo $x \in I$. Por outro lado, a substituição de $f(x)$ e das suas derivadas na expressão da equação diferencial deve conduzir a equação diferencial a uma identidade no intervalo real aberto I .

Exemplo 8 [8, p. 8]: *A função $f(x) = 2 \sin x + 3 \cos x$ é uma solução explícita da equação diferencial de segunda ordem*

$$y'' + y = 0 \quad (6)$$

para todo o $x \in \mathbb{R}$.

Resolução. Tem-se que $f(x) = 2 \sin x + 3 \cos x$, $f'(x) = 2 \cos x - 3 \sin x$ e $f''(x) = -2 \sin x - 3 \cos x$, pelo que $f(x)$, $f'(x)$ e $f''(x)$ estão definidos para todo o $x \in \mathbb{R}$. Substituindo y por $f(x)$ e y'' por $f''(x)$ na Equação (6), obtém-se a identidade

$$-2 \sin x - 3 \cos x + 2 \sin x + 3 \cos x = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$$

que é válida para todo o x real. Portanto, a função $f(x)$ diz-se uma solução explícita da Equação (6) para todo o $x \in \mathbb{R}$. Podemos notar também, que a forma da Equação (6) não impõe, por si só, qualquer restrição aos valores que a variável independente x pode tomar, pelo que $D_F = \mathbb{R}$. Em suma, $y = f(x)$ verifica, para todo o $x \in \mathbb{R}$, as condições impostas pela Equação (6).

Definição 9 [8]: Uma relação (implícita) $g(x, y) = 0$ diz-se uma **solução implícita** da equação diferencial se define pelo menos uma função real $f(x)$ num intervalo aberto I , tal que $f(x)$ é uma solução explícita da equação diferencial em I .

Pode-se assim dizer que uma solução da equação diferencial é uma relação explícita ou implícita entre as variáveis x e y que satisfaz a referida equação num determinado intervalo aberto I , sempre que o domínio de $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$ contenha I e o mesmo acontecendo com o domínio de F (enquanto função explícita de x).

Exemplo 10 [8, p. 11]: A relação $xy = 1$ é uma solução implícita da equação diferencial de primeira ordem

$$y' = -x^{-2} \tag{7}$$

no intervalo $I = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Resolução. De facto, $xy = 1$ define uma função real $f(x) = x^{-1}$ para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Assim, facilmente se conclui que $f(x)$ é uma solução explícita da Equação (7) em I , como requerido.

1.2 Problema de valor inicial

Resolver uma equação diferencial significa obter todas as funções $y = f(x)$ que são solução dessa equação. Em muitas situações concretas o que se pretende é encontrar uma solução y da equação diferencial que, num determinado ponto ou instante x_0 , assume o valor y_0 , isto é, que satisfaz a condição $y(x_0) = y_0$. Uma condição deste tipo diz-se **condição inicial** e o problema de encontrar uma solução de uma equação diferencial que satisfaça uma dada condição inicial diz-se **problema de valor inicial ou problema de Cauchy**.

Geometricamente, o conjunto solução de uma equação diferencial ordinária de primeira ordem define um conjunto de curvas no plano xOy . Essas curvas designam-se por **curvas integrais** da equação diferencial e, por esse motivo, as soluções de uma equação diferencial são também denominadas curvas integrais. Cada uma das curvas integrais é solução de um determinado problema de valor inicial.

Geralmente, por meio de manipulação algébrica, consegue-se reescrever a equação diferencial de primeira ordem na forma de uma ou mais equações do tipo

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \quad (8)$$

Existem infinitas soluções da equação diferencial (8). Dado um valor inicial $y(x_0) = y_0$, é possível calcular a derivada y' no ponto x_0 (igual a $f(x_0, y_0)$) e geralmente é possível encontrar uma curva integral que passe pelo ponto (x_0, y_0) e com derivada igual a $f(x, y)$ em cada ponto. O problema de valor inicial consiste então em encontrar a curva integral (ou curvas integrais) que passa pelo ponto (x_0, y_0) e que satisfaça a Equação (8).

Exemplo 11 [8, p. 23]: *Determine uma solução do problema de valor inicial (PVI)*

$$y' = -\frac{x}{y}, \quad y(3) = 4,$$

sabendo que a equação diferencial admite uma família de soluções que pode ser escrita na forma

$$x^2 + y^2 = c^2. \quad (9)$$

Resolução. *A condição $y(3) = 4$ significa que se pretende determinar uma solução da equação diferencial dada, tal que $y = 4$ quando $x = 3$. Assim sendo, o par de valores $(x, y) = (3, 4)$ deve verificar a condição da família de soluções da equação. Substituindo $x = 3$ e $y = 4$ na Equação (9), obtém-se $9 + 16 = c^2$, ou seja, $c^2 = 25$.*

Assim,

$$y = \pm\sqrt{25 - x^2}.$$

Deve-se escolher o sinal positivo para que $y = 4$ quando $x = 3$. Assim, a função f definida por

$$f(x) = \sqrt{25 - x^2}, \quad -5 < x < 5,$$

é solução do problema proposto e a solução particular escreve-se na forma $y = \sqrt{25 - x^2}$.

1.3 Existência, unicidade e dependência contínua

Escusado será dizer que não existe um método analítico geral que resolva todas as equações diferenciais. De facto, mesmo equações diferenciais ordinárias escalares e não autónomas de primeira ordem relativamente simples, poderão não ser resolvidas de forma fechada.

Assim, compreender quando uma dada equação diferencial pode ser resolvida em termos de funções elementares ou funções especiais conhecidas é uma área ativa da pesquisa. Como as equações diferenciais inevitavelmente têm muitas soluções, a única maneira pela qual podemos deduzir a unicidade da solução é impor condições iniciais adequadas.

Teorema 12 [9]: *Seja $F(t, u)$ uma função contínua. Então o problema de valor inicial*

$$u' = F(u, t), \quad u(t_0) = a, \quad u' = \frac{du}{dt}, \quad (10)$$

admite uma solução $u = f(t)$ que é, pelo menos, definida para tempos próximos, ou seja, quando $|t - t_0| < \delta$ para algum $\delta > 0$.

O **Teorema 12** garante que existe uma solução para o problema de valor inicial, pelo menos, para valores suficientemente próximos do instante inicial t_0 . O intervalo de existência de uma solução depende tipicamente da equação e dos dados iniciais específicos. Assim, pode-se concluir que existem apenas duas maneiras possíveis de uma solução não poder ser estendida além do tempo t_0 :

- (i) A solução torna-se ilimitada: $|u(t)| \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow t_0$, ou
- (ii) Se o lado direito de $F(t, u)$ é definido apenas num subconjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$, então a solução $u(t)$ alcança a fronteira $\partial\Omega$ quando $t \rightarrow t_0$.

Se nenhuma das duas ocorre em tempo finito, então a solução é necessariamente global.

Observação 13: *O Teorema 12 pode ser adaptado a qualquer sistema de ordem superior de equações diferenciais ordinárias. Contudo, apesar deste teorema garantir a existência de uma solução para o problema de valor inicial, a obtenção desta solução pode não ser simples.*

Observação 14: *Se $F(t, u)$ é uma função de classe C^1 (continuamente diferenciável), então existe uma e apenas uma solução para o problema de valor inicial.*

Teorema 15 [9]: *Se $F \in C^n$ para $n \geq 1$ (conjunto de funções diferenciáveis com derivadas de ordem n contínuas), então qualquer solução para o sistema $u' = F(t, u)$ é da classe $u \in C^{n+1}$. Se $F(t, u)$ é uma função analítica [10] (função que pode ser expandida em séries de Taylor), então todas as soluções $u(t)$ são analíticas.*

Assim, verifica-se que a continuidade de $u(t)$ implica continuidade de $F(t, u(t))$, o que significa que u' é contínua e, portanto, $u \in C^1$. Isto, por sua vez, implica que $F(t, u(t)) = u'$ é continuamente diferenciável de t , e, portanto, $u \in C^2$ e assim por diante até a ordem n .

No mundo real, as condições iniciais poderão não ser conhecidas exatamente. Os erros experimentais e físicos só nos permitem dizer que os seus valores são aproximadamente iguais aos do nosso modelo matemático. Assim, para manter a relevância física, precisamos de ter a certeza de que pequenos erros nas nossas medições iniciais não induzem uma grande mudança na solução.

Teorema 16 [9]: *Considere um problema de valor inicial*

$$u' = F(t, u, \mu), \quad u(t_0) = a(\mu), \quad (11)$$

em que a equação diferencial e/ou condições iniciais dependem continuamente de um ou mais parâmetros $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_k)$. Então a solução única $u(t, \mu)$ depende continuamente dos parâmetros.

Um exemplo é o modelo linear de crescimento exponencial $u' = \alpha u$ quando $\alpha > 0$. Uma mudança muito pequena nas condições iniciais tem um efeito negligenciável a curto prazo sobre a solução, mas, em intervalos de tempo maiores, as diferenças entre as duas soluções serão dramáticas. Assim, a “dependência sensível” das soluções sobre as condições iniciais já aparece em equações lineares muito simples. Por razões semelhantes, a dependência contínua não impede que as soluções exibam um comportamento caótico [11, 12].

Exemplo 17 [9, p. 18]: *Seja $u(t)$ uma solução para o sistema autônomo $u' = F(u)$ com $F \in C^1$, tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = u^*$. Então u^* é um ponto de equilíbrio ($F(u^*) = 0$).*

Resolução. *Seja $v(t, a)$ a solução para o problema do valor inicial $v' = F(v)$, $v(0) = a$. O Teorema 16 implica que $v(t, a)$ é uma função contínua na posição inicial a , e, portanto, $v(t, u(s))$ é uma função contínua em $s \in \mathbb{R}$. Desde que $\lim_{s \rightarrow \infty} u(s) = u^*$, temos que $\lim_{s \rightarrow \infty} v(t, u(s)) = v(t, u^*)$. Por outro lado, como o sistema é autônomo implica que $v(t, u(s)) = u(t + s)$ e, portanto,*

$$\lim_{s \rightarrow \infty} v(t, u(s)) = \lim_{s \rightarrow \infty} u(t + s) = u^*.$$

Igualando as equações dos dois limites precedentes, concluímos que $v(t, u^) = u^*$ para todo t , e, portanto, a solução com valor inicial $v(0) = u^*$ é um ponto de equilíbrio. A mesma conclusão se verifica quando $t \rightarrow -\infty$, ou seja, $\lim_{t \rightarrow -\infty} u(t) = u^*$.*

*Quando os limites anteriores existem, as soluções que começam e terminam em pontos de equilíbrio desempenham um papel particular na dinâmica e são conhecidas como **órbitas heteroclínicas**, ou, se o equilíbrio inicial e final é o mesmo, **órbitas homoclínicas**. Obviamente, limitar os pontos de equilíbrio é apenas um dos possíveis comportamentos de longo prazo de soluções para equações diferenciais ordinárias não-lineares, que também podem se tornar ilimitadas em tempo finito ou infinito, ou aproximar órbitas periódicas, conhecidas como ciclos-limite, ou tornar-se completamente caóticas, dependendo da natureza do sistema e das condições iniciais.*

Dada a aplicabilidade das equações diferenciais, torna-se muito importante saber como determinar analiticamente as suas soluções. Tal constitui a teoria quantitativa das equações diferenciais. Por outro lado, na resolução de um problema, aplicado ou não, é também importante saber se existe solução para o mesmo e se essa solução é única. Esta abordagem constitui a teoria qualitativa das equações diferenciais [13].

1.4 Campos vetoriais e curvas integrais

Como já foi descrito, não é possível resolver analiticamente a maioria das equações diferenciais (no sentido de se obter algebricamente uma solução). Assim, vamos descrever um processo que permite aferir quando uma equação tem solução ou não, sem a resolver analiticamente.

Suponhamos que se quer ter uma ideia da curva integral que é solução do problema de valor inicial

$$y' = x + y, \quad y(0) = 1, \quad (12)$$

sem recorrer à resolução analítica da equação.

A Equação (12) diz-nos que o declive de qualquer ponto (x, y) , no gráfico que é solução da equação, é igual à soma da abcissa com a respetiva ordenada. Em particular, esta curva que é solução tem de passar no ponto $(0,1)$ e, portanto, o declive neste ponto é $0 + 1 = 1$. Assim, uma pequena porção do gráfico solução numa vizinhança do ponto $(0,1)$, assemelha-se a um pequeno segmento que passa em $(0,1)$ com declive 1. Como guia de despiste da restante curva, desenha-se pequenos segmentos em cada ponto (x, y) de declive $x + y$. O resultado é chamado de **campo vetorial**, representado na **Figura 1.1**.

Seguindo a orientação dos vetores, conseguimos assim ter uma ideia da curva integral associada ao problema de valor inicial (ilustrado na **Figura 1.1**).

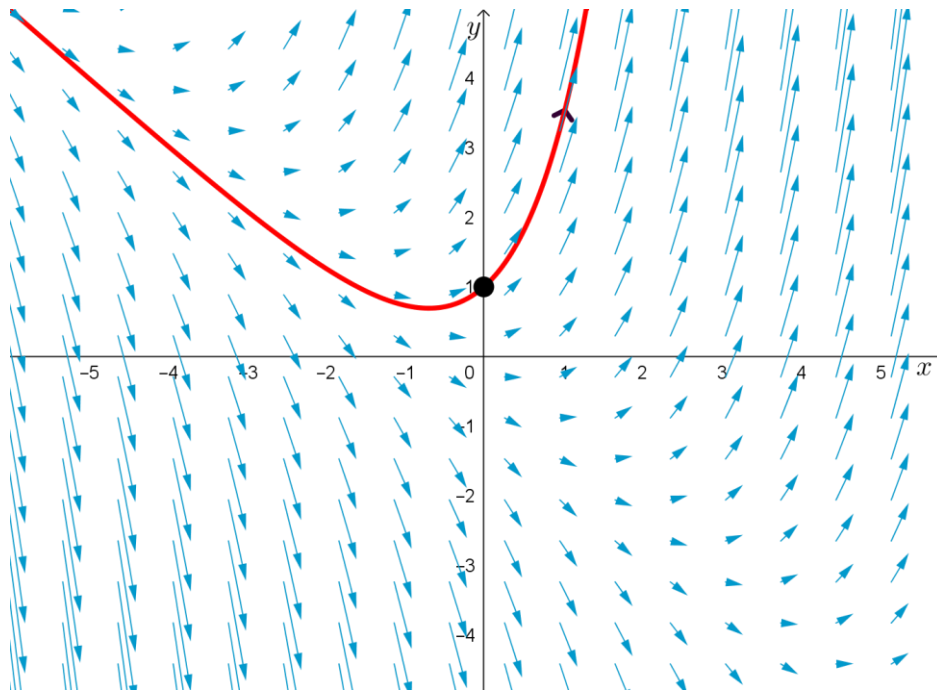


Figura 1.1: Campo vetorial da equação $y' = x + y$ e curva integral que passa no ponto $(0,1)$.

De um modo geral, suponhamos que temos uma equação diferencial de primeira ordem na forma

$$y' = F(x, y), \quad (13)$$

onde $F(x, y)$ é uma função que depende de x e de y . A equação diferencial diz-nos que o declive da curva solução ou curva integral no ponto (x, y) é $F(x, y)$. Se se desenhar um segmento de reta (orientado) com declive $F(x, y)$ em alguns pontos (x, y) , o resultado é conhecido como **campo vetorial ou campo de direções**. Estes segmentos de reta orientados indicam a direção a qual a curva integral tende a se aproximar. Assim, o campo vetorial dá-nos uma indicação

geral das curvas integrais que são solução de uma equação diferencial, para além de contribuir para um melhor entendimento das equações diferenciais, constituindo um método gráfico para se encontrar as suas soluções aproximadas [14].

Capítulo 2

Equações diferenciais não-lineares de primeira ordem

Em muitas aplicações, uma equação diferencial ordinária de primeira ordem pode ser representada na forma

$$u' = F(t, u), \quad u' = \frac{du}{dt}, \quad (14)$$

onde a variável independente t representa o tempo e a função desconhecida $u(t)$ é uma quantidade física dinâmica. As equações diferenciais ordinárias de primeira ordem são muitas vezes representadas na “**forma normal**”

$$y' = f(x, y), \quad (15)$$

ou ainda, de forma equivalente

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0, \quad (16)$$

a qual podemos designar como “**forma diferencial**”. Note-se que, quando uma equação diferencial de primeira ordem se encontra escrita na forma normal, a presença do termo $y' = \frac{dy}{dx}$ torna claro que x é a variável independente e y a variável dependente, isto é, a função $y(x)$ é a incógnita do problema. Contudo, o mesmo não se passa quando a equação diferencial é expressa na forma diferencial. Em todo o caso, assumiremos que se nada for dito em contrário, x é a variável independente e y a variável dependente.

Resolver uma equação diferencial ordinária de primeira ordem consiste em encontrar as curvas integrais, de tal modo que a direção das retas tangentes em cada ponto da curva coincida com a direção pré-estabelecida do campo naquele ponto [15]. O lugar geométrico dos pontos onde cada tangente à curva integral preserva uma direção constante são linhas chamadas **isoclínicas**.

Assim, obtemos a equação de uma isoclínica tomando

$$\frac{dy}{dx} = k, \quad (17)$$

onde k é uma constante (inclinação da tangente).

Exemplo 18 [16, p. 18]: Considere $y' = y - x^2$. Determine o seu campo vetorial.

Resolução. As isoclínicas são as curvas $y' = k$, portanto, a família de parábolas dadas por $y = x^2 + k, k \in \mathbb{R}$.

Para cada valor de k temos que $y' = k$ em cada ponto da isoclínica, e, desta forma, obtemos o campo vetorial representado na **Figura 2.1**.

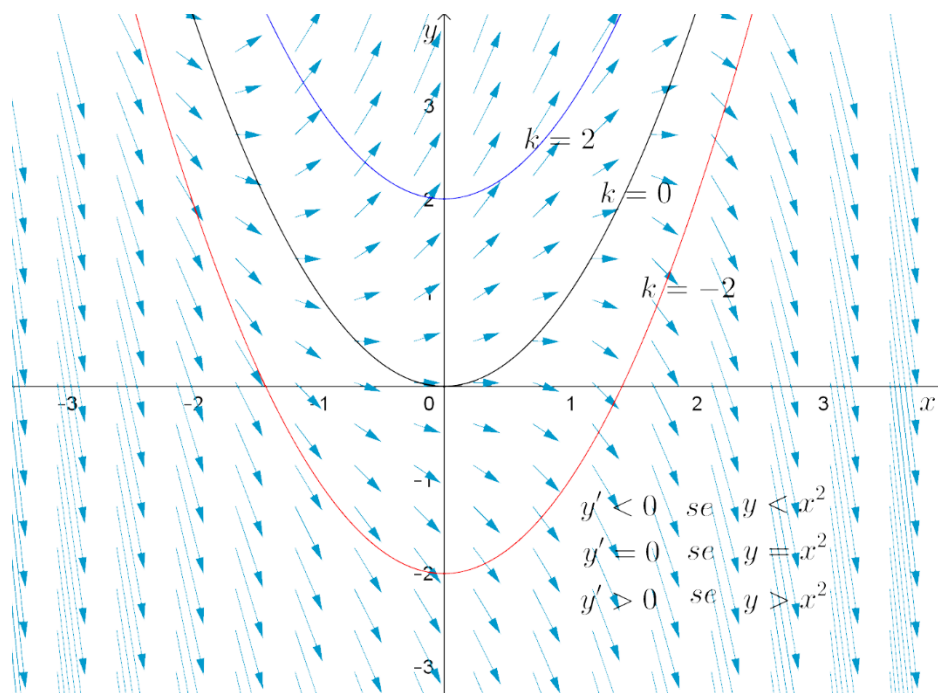


Figura 2.1: Campo vetorial da equação $y' = y - x^2$.

As equações diferenciais serão classificadas conforme os métodos empregues na obtenção da sua solução explícita. Mas, isto não deve sugerir que sempre se disporá de um método de solução explícita para qualquer equação diferencial ordinária, mesmo de primeira ordem e por mais liberais que sejamos quanto às operações aceitáveis. Na verdade, poderíamos dizer que a quantidade de equações que possuem soluções explícitas é praticamente nula, quando comparada àquelas que têm soluções. A importância do estudo de tais equações está no que podemos aprender delas e na utilização que delas fazemos para analisar as demais.

2.1 Equações com variáveis separadas ou separáveis

Vejamos o que distingue as equações diferenciais com variáveis separadas ou separáveis das restantes classes de equações.

Definição 19: A equação diferencial $M(y)dy = N(x)dx$ chama-se equação de variáveis separadas e o seu integral é dado por

$$\int M(y)dy = \int N(x)dx + C, \quad C \in \mathbb{R}. \quad (18)$$

Para uma equação diferencial da forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y), \quad (19)$$

em que o segundo membro é o produto de duas funções (f depende de x e g depende de y) e assumindo que $g(y) \neq 0$, podemos transformar a Equação (19) na seguinte forma

$$\frac{1}{g(y)} dy = f(x) dx. \quad (20)$$

Integrando o primeiro membro em relação a y e o segundo em relação a x , obtém-se

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx + C, \quad C \in \mathbb{R}. \quad (21)$$

Consideremos agora o exemplo $xy' + y = 0$. Supondo que $x \neq 0$, obtemos a equação equivalente

$$y' = -\frac{y}{x}. \quad (22)$$

A Equação (22) pode ser resolvida através de uma simples primitivação direta, pois y' agora exprime-se à custa de x e de y . Sabemos que, por definição, a derivada de y é o limite do quociente do acréscimo de y , dy , pelo acréscimo de x , dx , isto é,

$$y' = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{dy}{dx}, \quad (23)$$

e que, portanto, quando existe y' , $\frac{dy}{dx}$ é uma aproximação de y' .

Retomando à Equação (22), tomando y' por $\frac{dy}{dx}$ obtemos $x \frac{dy}{dx} + y = 0$, ou seja, $x \frac{dy}{dx} = -y$. Uma simples manipulação algébrica resulta

$$\frac{1}{y} dy = -\frac{1}{x} dx, \quad x \neq 0 \wedge y \neq 0. \quad (24)$$

Integrando-se o primeiro membro em ordem a y e o segundo membro em ordem a x , obtemos o seguinte

$$\ln|y| = -\ln|x| + c \Leftrightarrow |y| = e^{\ln|x|^{-1}} e^c \Leftrightarrow y = \frac{k}{x}, k = \pm e^c. \quad (25)$$

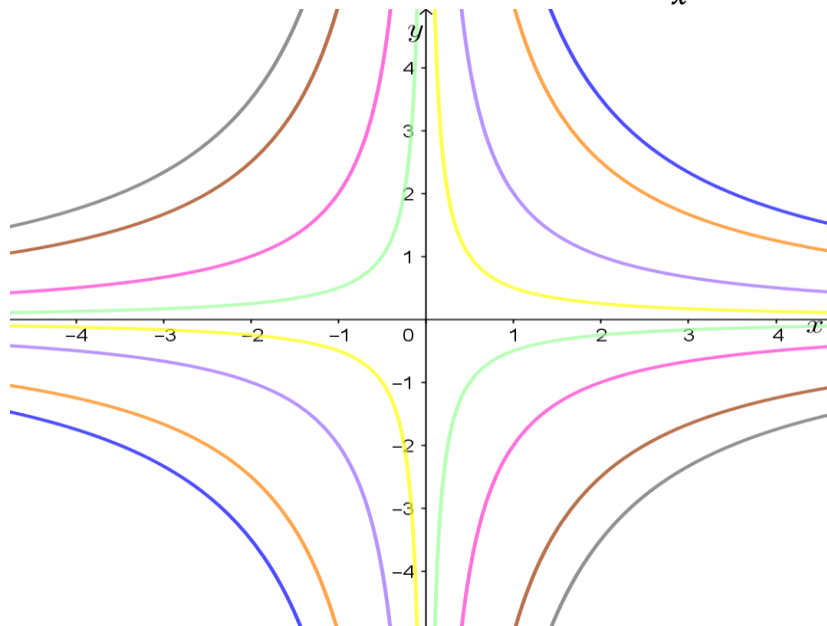


Figura 2.2: Família de curvas integrais da forma $y = \frac{k}{x}$, $k \in \mathbb{R}$.

No seguimento da resolução foi imposto que $y \neq 0$, uma vez que se $y = 0$ então $y' = 0$. Substituindo na equação resulta $x \cdot 0 + 0 = 0$ que é uma proposição verdadeira para todo o x . Assim, conclui-se que $y = 0$ é solução da equação e como $y = \frac{k}{x}$ é solução com $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, vem que $y = \frac{k}{x}$ com $k \in \mathbb{R}$ é solução geral da equação diferencial, obtendo-se, portanto, uma família de curvas integrais semelhante às da **Figura 2.2**.

Exemplo 20: Resolva a equação $y' = \frac{3y-xy}{x}$, tal que $y(1) = 3e^{-1}$.

Resolução. Fatorizando o segundo membro e separando as variáveis vem que

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \left(\frac{3}{x} - 1 \right) dx \quad (x \neq 0 \wedge y \neq 0).$$

Integrando ambos os membros nas respectivas variáveis resulta

$$\ln |y| = 3 \ln |x| - x + c \Leftrightarrow y = c_1 x^3 e^{-x}, \quad c_1 = \pm e^c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

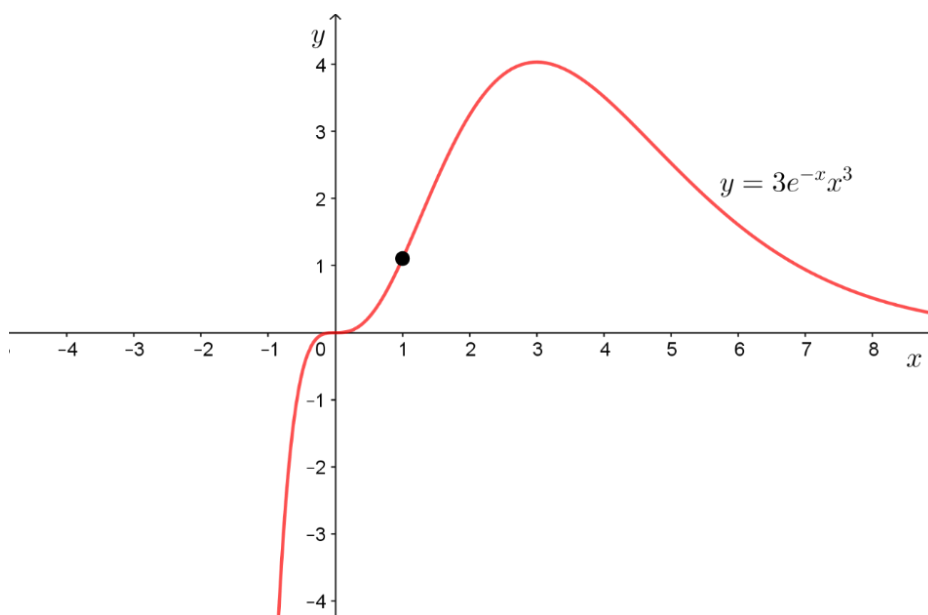


Figura 2.3: Curva integral do PVI $y' = \frac{3y-xy}{x}$, $y(1) = 3e^{-1}$.

Como $y = 0$ é também solução da equação inicial, vem que $y = kx^3 e^{-x}$, $k \in \mathbb{R}$ é a solução geral da equação. Para determinarmos a solução do problema de valor inicial (PVI) resolva-se a equação $y(1) = e^{-1}$, ou seja, $3e^{-1} = ke^{-1}$, donde $k = 3$. Assim $y = 3x^3 e^{-x}$ é a solução particular que satisfaz a condição inicial dada. Na **Figura 2.3** traçamos a curva integral.

2.2 Equações diferenciais homogêneas

Veamos agora uma categoria de equações diferenciais que podem ser transformadas em equações diferenciais com variáveis separáveis através de uma adequada mudança de variável.

Definição 21 [8]: Uma função $F(x, y)$ definida num domínio D de \mathbb{R}^2 diz-se uma função homogênea de grau n para todo $(x, y) \in D$, se

$$F(tx, ty) = t^n F(x, y), \quad \forall t \in I, \quad (26)$$

onde I é um intervalo de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $(tx, ty) \in D$.

Uma equação diferencial da forma $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ é dita equação diferencial homogênea de primeira ordem se a função $-\frac{M(x, y)}{N(x, y)}$ for homogênea de grau 0.

Teorema 22 [8]: Se $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$ é uma equação diferencial homogênea de primeira ordem, então a mudança de variável $y(x) = v(x)x$ transforma a equação diferencial dada numa equação diferencial de variáveis separáveis v e x .

Mais concretamente, a mudança de variável $y = vx$ ($y' = v'x + v$) transforma a equação diferencial homogênea $y' = F\left(\frac{y}{x}\right)$, onde $F\left(\frac{y}{x}\right) = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)}$, numa equação de variáveis separáveis. Note-se que, para reconhecer facilmente se uma função racional é da forma $F\left(\frac{y}{x}\right)$, observam-se os expoentes de cada termo no numerador e denominador (soma do expoente de x mais o expoente y) os quais deverão ser iguais, tal que na mudança de variável $y(x) = v(x)x$ mantém-se x como variável independente da equação diferencial. Resultado idêntico seria obtido usando a mudança de variável $x(y) = v(y)y$, mas neste caso y passaria a assumir o papel de variável independente. Há casos em que esta mudança de variável é mais vantajosa, pelo facto da equação de variáveis separáveis que se obtém ser mais simples de resolução, mas tal só pode ser aferido realizando o cálculo recorrendo a cada uma destas mudanças de variável [8, 17].

Outra situação que aconselha o uso das mudanças de variável em detrimento da outra, surge no âmbito da resolução de PVI. Por exemplo, num PVI em que a condição seja $y(0) = 1$, a mudança de variável $v = y/x$ pode não ser adequada, uma vez que a condição inicial envolve $x = 0$, sendo geralmente preferível usar $v = x/y$. De igual modo, se a condição for $y(1) = 0$, então pode ser preferível usar $v = y/x$ em vez de $v = x/y$, já que a condição inicial envolve $y = 0$.

Exemplo 23 [16, p. 62]: Estude a equação homogênea

$$y' = \frac{y}{x - y}, \quad (27)$$

e a sua equivalente

$$x' = \frac{x - y}{y}. \quad (28)$$

Resolução. Os pontos singulares da Equação (27), isto é, onde $\frac{y}{x-y}$ não é contínua, satisfazem a equação da reta $y = x$. Na Equação (28), os pontos singulares encontram-se na reta $y = 0$ (eixo x). A interseção das retas singulares dá-nos o ponto singular isolado $(0, 0)$. Tomando $y = zx$, obtemos

$$z + x \frac{dz}{dx} = \frac{z}{1-z}.$$

Separando as variáveis e integrando resulta

$$\frac{1}{z} = -\ln|z| - \ln|x| + \ln A \Leftrightarrow ze^{\frac{1}{z}} = \frac{1}{Ax}.$$

Retomando à variável original y , obtemos

$$ye^{-y} = ke^x, \quad k = \frac{1}{A}.$$

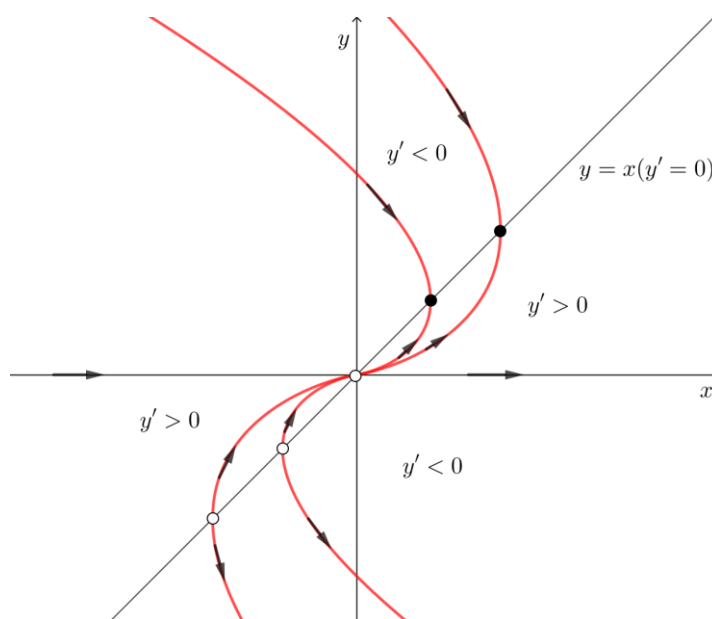


Figura 2.4: Curvas integrais da equação $y' = \frac{y}{x-y}$.

Com base na **Figura 2.4**, podemos observar que:

- (a) $y' > 0$ (y é crescente) se $\frac{y}{x-y} > 0$, isto é, $y > 0$ e $y < x$ ou $y < 0$ e $y > x$;
- (b) $y' < 0$ se $y > 0$ e $y > x$, ou se $y < 0$ e $y < x$;
- (c) $y' \rightarrow \infty$ quando $y - x \rightarrow 0$, isto é, quando $y \rightarrow x$;
- (d) As semirretas $y = 0$ e $x < 0$, $y = 0$ e $x > 0$ são soluções da Equação (27).

Analogamente, para resolver a Equação (28), fazemos $x = zy$ e obtemos

$$x = y \ln \left| \frac{A}{y} \right|.$$

De acordo com a **Figura 2.5**, verificamos que:

- (a) $x' > 0$ se $y > 0$ e $x > y$, ou se $y < 0$ e $x < y$;
- (b) $x' < 0$ se $y > 0$ e $x < y$, ou se $y < 0$ e $x > y$;
- (c) Os pontos críticos (máximos, mínimos) relativos de cada curva integral são obtidos na intersecção destas curvas com a reta $x = y$, pois, neste caso, $x' = 0$ e $x'' = -\frac{1}{y}$. Se $y > 0$ temos os pontos de máximo e se $y < 0$ temos os pontos mínimos;

(d) $x \rightarrow 0$ quando $y \rightarrow 0$ ou $y \rightarrow \infty$.

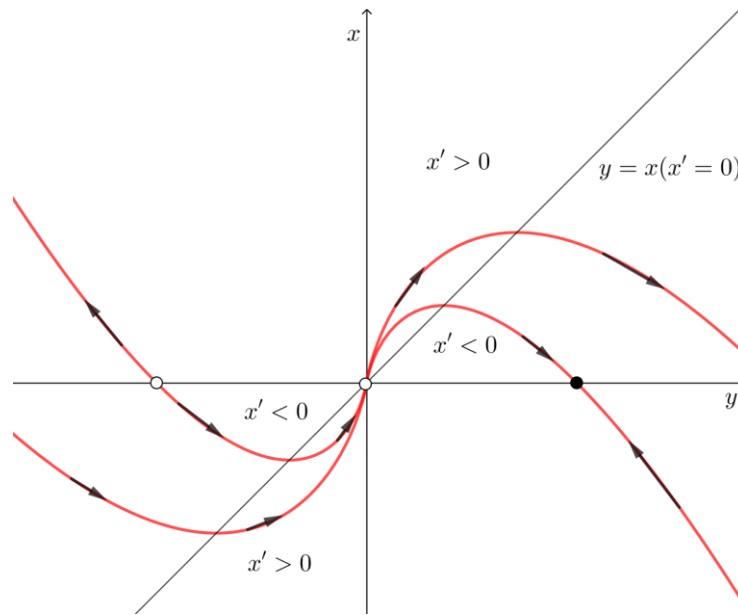


Figura 2.5: Curvas integrais da equação $x' = \frac{x-y}{y}$.

2.3 Equações diferenciais autónomas

Uma equação diferencial é chamada **autónoma** se o seu lado direito não depender explicitamente da variável independente t , isto é, se apresentar a forma

$$\frac{du}{dt} = F(u). \quad (29)$$

Todas as equações diferenciais ordinárias autónomas podem ser resolvidas por integração direta. Assim, separando as variáveis e integrando em relação a t , o resultado será

$$\frac{1}{F(u)} \frac{du}{dt} = 1 \Leftrightarrow \int \frac{1}{F(u)} du = t + k, \quad (30)$$

onde k é arbitrária. O integral do lado esquerdo pode ser avaliado pela mudança de variável que substituí t por u , onde $du = \left(\frac{du}{dt}\right) dt$ e

$$\int \frac{1}{F(u)} \frac{du}{dt} dt = \int \frac{du}{F(u)} = G(u), \quad (31)$$

onde $G(u)$ indica uma primitiva conveniente da função $1/F(u)$. Assim, a solução pode ser escrita da forma implícita

$$G(u) = t + k. \quad (32)$$

Se formos capazes de resolver a equação implícita, podemos obter a solução explícita

$$u(t) = H(t + k), \quad (33)$$

em termos da função inversa $H = G^{-1}$. Finalmente, para satisfazer a condição inicial ($u(t_0) = u_0$) definimos $t = t_0$ na fórmula da solução implícita, em que $G(u_0) = t_0 + k$. Portanto, a solução para o problema de valor inicial é

$$u(t) = H(t - t_0 + G(u_0)). \quad (34)$$

Exemplo 24 [9, p. 3]: *Considere o problema de valor inicial*

$$\frac{du}{dt} = u^2, \quad u(t_0) = u_0.$$

Resolução. *Para resolver a equação diferencial, reescrevemos a equação separando as variáveis e integrando ambos os membros obtendo*

$$-\frac{1}{u} = t + k.$$

Resolvendo a equação algébrica resultante de u e usando a condição inicial t_0 , deduzimos

$$u = -\frac{1}{t + k} \Leftrightarrow k = -\frac{1}{u_0} - t_0.$$

Portanto, a solução para o problema de valor inicial é dada por

$$u = \frac{u_0}{1 - u_0(t - t_0)}.$$

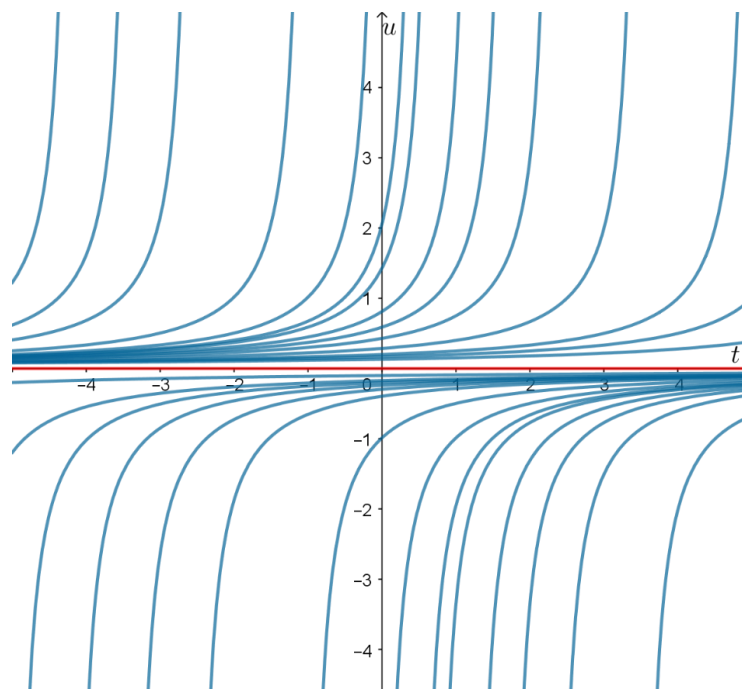


Figura 2.6: Soluções da equação $u' = u^2$.

Assim, à medida que t se aproxima do valor crítico $t^ = t_0 + \frac{1}{u_0}$ a solução “explode”, significando que $u(t) \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow t^*$. O tempo de explosão depende dos dados iniciais,*

ou seja, quanto maior o valor de $u_0 > 0$, mais rápido a solução vai para infinito. Se $u_0 < 0$, a solução é definida para todo $t > t_0$, mas tem uma singularidade em $t^* = t_0 + \frac{1}{u_0} < t_0$. A única solução que existe para todo tempo positivo e negativo é a solução constante $u(t) \equiv 0$, correspondente à condição inicial $u_0 = 0$, representada pela linha vermelha na **Figura 2.6**.

Observação 25: Em geral, os pontos de equilíbrio constantes para uma equação diferencial ordinária autónoma desempenham um papel distinto. Se $u(t) \equiv u^*$ é uma solução constante, então $\frac{du}{dt} \equiv 0$ e, portanto, a expressão da equação diferencial autónoma implica que $F(u^*) = 0$. Logo, os pontos de equilíbrio coincidem com as raízes da função $F(u)$. De facto, já que dividimos por $F(u)$, a derivação da fórmula da solução implícita assume, desde logo, que não estamos num ponto de equilíbrio.

2.4 Estudo qualitativo das soluções

Uma vez que uma solução para um sistema de equações diferenciais ordinárias tenha um valor limite, essa solução é um ponto de equilíbrio. Contudo, encontrar os pontos de equilíbrio para um sistema de equações diferenciais ordinárias é apenas a primeira etapa, seguidamente é preciso entender as suas propriedades de estabilidade para caraterizar aqueles que podem ser realizadas em circunstâncias físicas normais.

Em muitas situações reais, não é possível por meios analíticos obter a solução, portanto, o estudo qualitativo é essencial. Assim, o esboço do campo vetorial associado à equação diferencial representa um instrumento importante para este estudo qualitativo.

Para caraterizar o comportamento das soluções de uma equação diferencial de primeira ordem e, uma vez que conhecemos uma expressão para a primeira derivada, estudando a função derivada, podemos descrever o comportamento das soluções da equação diferencial. Para essa classe particular de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, a análise qualitativa fornece informação suficiente para descrever de forma mais pormenorizada as soluções da equação.

Para um problema de valor inicial associado a uma equação autónoma em que f é uma função de classe C^1 ,

$$\frac{dy}{dt} = f(y), \quad y(t_0) = y_0 \quad (35)$$

o Teorema da Existência e Unicidade da solução (**Teorema 12**) permite garantir a existência e unicidade da solução para qualquer condição inicial, garantindo assim, que as curvas integrais para um problema autónomo com $f \in C^1$ não se intersectam.

Definição 26: Uma solução particular $y = y_0$ diz-se um ponto de equilíbrio da equação diferencial autónoma $y' = f(y)$, se $f(y_0) = 0$.

Observação 27: Para as equações diferenciais autónomas, os pontos de equilíbrio são as soluções da equação diferencial que são constantes.

Definição 28: Dizemos que um ponto de equilíbrio $y = y_0$ da Equação (35) é:

1. Um **poço**, se toda a solução com condição inicial suficientemente próxima de y_0 tende para y_0 quando $t \rightarrow +\infty$. A um poço está associado um **ponto de equilíbrio estável**.
2. Uma **fonte**, se toda a solução com condição inicial suficientemente próxima de y_0 tende para y_0 quando $t \rightarrow -\infty$. A uma fonte está associado um **ponto de equilíbrio instável**.
3. Todo o ponto de equilíbrio que não é poço nem fonte designa-se por **ponto de sela**. A um ponto de sela está associado um **ponto de equilíbrio semi-estável**.

Fazendo o estudo da função f podemos descrever o comportamento das soluções. Seguidamente, os pontos de equilíbrio vão definir as soluções constantes e, finalmente, estudando o sinal de f podemos caracterizar a monotonia das soluções [15].

Exemplo 29: Estude de modo qualitativo a equação $y' = y(2 - y)$.

Resolução. Seja $f(y) = y(2 - y)$. Como se pode visualizar na **Figura 2.7**, $f(y) = 0$ se e só se $y = 0$ ou $y = 2$, então $y = 0$ e $y = 2$ são pontos de equilíbrio da equação diferencial dada (soluções constantes $y(t) = 0$ e $y(t) = 2$ ilustradas na **Figura 2.8**).

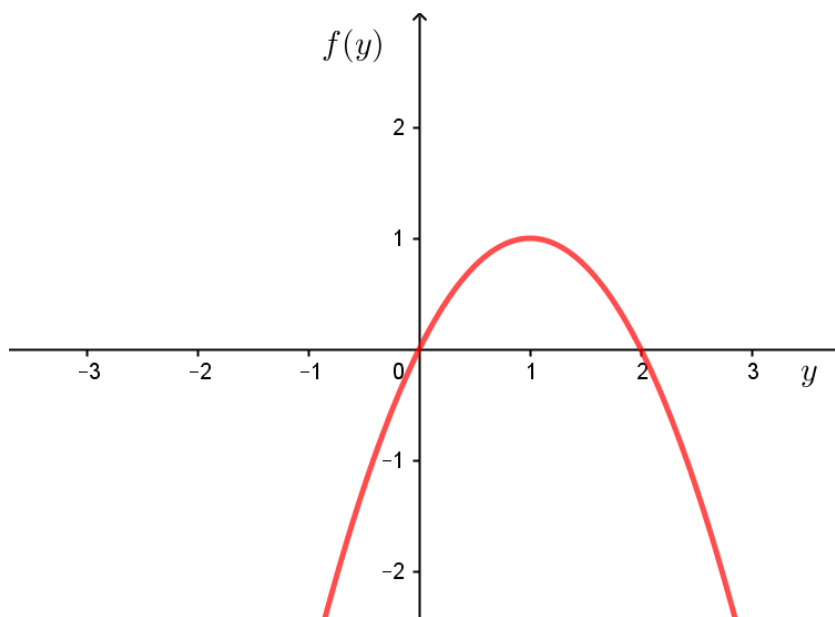


Figura 2.7: Gráfico de $f(y) = y(2 - y)$.

O estudo do sinal de f permite também determinar as regiões do plano tOy em que as soluções são funções crescentes e as regiões em que as soluções são funções decrescentes. Ora, $f(y) > 0$ quando $0 < y < 2$, qualquer solução que passe por um ponto desta região do plano é uma função crescente.

Como as trajetórias das soluções de problemas autónomos não se intersectam (unicidade dos PVIs), as retas $y = 0$ e $y = 2$ são assíntotas horizontais dessas trajetórias. Portanto, nesta região, as soluções tendem para $y = 2$ quando $t \rightarrow +\infty$ e para $y = 0$ quando $t \rightarrow -\infty$. Como, $f(y) < 0$ quando $y < 0$ ou $y > 2$ temos que qualquer solução que passe por um ponto destas regiões do plano é uma função decrescente. Para uma solução que passe num ponto da região $y > 2$ temos que as soluções são decrescentes e que tendem para $y = 2$

quando $t \rightarrow +\infty$. Para uma solução que passe num ponto da região $y < 0$ temos que as soluções são decrescentes e que tendem para $y = 0$ quando $t \rightarrow -\infty$, como se ilustra na **Figura 2.8**.

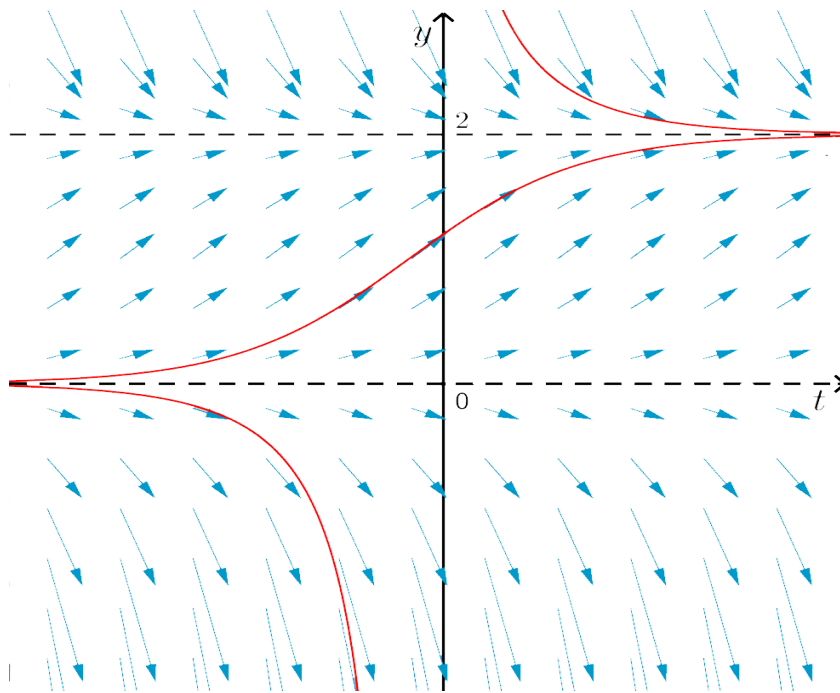


Figura 2.8: Campo vetorial e curvas integrais da equação $y' = y(2 - y)$.

Para se classificar os pontos de equilíbrio da equação $y' = y(2 - y)$, reúne-se a informação num diagrama que se designa por **Linha de fase**, sendo representado na **Figura 2.9**. As direções indicam que $y = 0$ é um ponto de equilíbrio instável (fonte) e que $y = 2$ é um ponto de equilíbrio estável (poço).

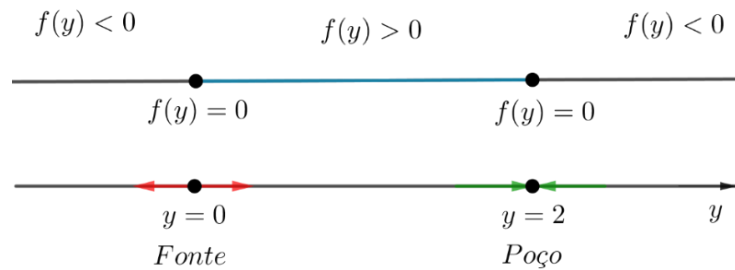


Figura 2.9: Linha de fase para $y' = f(y)$, com $f(y) = y(2 - y)$.

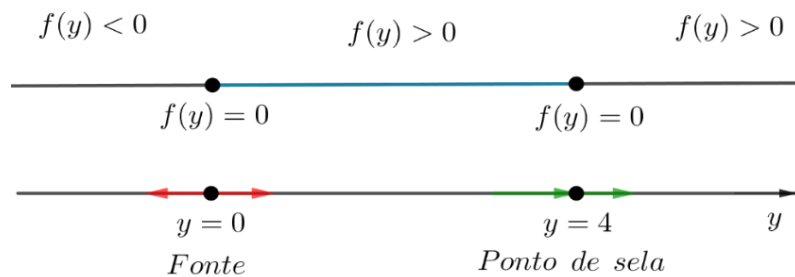


Figura 2.10: Linha de fase para $y' = f(y)$, com $f(y) = y(4 - y)^2$.

Exemplo 30: Para se classificar os pontos de equilíbrio $y = 0$ ou $y = 4$ da equação $y' = y(4 - y)^2$, começa-se por estudar o sinal de $f(y) = y(4 - y)^2$. Tem-se que $f(y) < 0$ sempre que $y < 0$ ou $y > 4$ e $f(y) > 0$ quando $0 < y < 4$. Assim, $y = 0$ é instável (fonte) e $y = 4$ é semi-estável à esquerda (ponto de sela), como ilustra a **Figura 2.10**.

Ao analisar a estabilidade das equações diferenciais ordinárias de primeira ordem

$$\frac{du}{dt} = F(u), \quad (36)$$

verifica-se que todas as soluções que não são de equilíbrio são funções estritamente monótonas. Assim, como consequência da monotonicidade, existem apenas três comportamentos possíveis para o ponto de equilíbrio:

- (a) Torna-se ilimitado num determinado período: $|u(t)| \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow t^*$;
- (b) Existe para todo $t \geq t_0$, mas se torna ilimitado quando $t \rightarrow \infty$;
- (c) Existe para todo $t \geq t_0$ e tem valor limite $u(t) \rightarrow u^*$ quando $t \rightarrow \infty$, que deve ser um ponto de equilíbrio.

Seja u^* um ponto de equilíbrio, ou seja, $F(u^*) = 0$. Assumindo que $F(u) > 0$ para todos os valores de u que estão ligeiramente abaixo de u^* , isto é, num intervalo da forma $u^* - \delta < u < u^*$. Qualquer solução $u(t)$ que comece nesse intervalo $u^* - \delta < u(t_0) < u^*$ deve estar aumentando. Além disso, $u(t) < u^*$ para todos os valores de t , uma vez que a solução não pode passar pelo ponto de equilíbrio, portanto, $u(t)$ é uma solução do tipo (c).

Teorema 31 [9]: *Um ponto de equilíbrio u^* de uma equação diferencial ordinária autónoma $u' = F(u)$ é assintoticamente estável se e só se $F(u) > 0$ para $u^* - \delta < u < u^*$ e $F(u) < 0$ para $u^* < u < u^* + \delta$, para algum $\delta > 0$.*

Por outras palavras, como se verifica na **Figura 2.11**, se $F(u)$ muda de positiva para negativa à medida que u aumenta através do ponto de equilíbrio, então o ponto de equilíbrio é assintoticamente estável. Se as desigualdades são invertidas e $F(u)$ passa de negativo para positivo, então o ponto de equilíbrio é instável. Além disso, um ponto de equilíbrio onde $F(u)$ apresenta o mesmo sinal em ambos os lados, por exemplo o ponto $u^* = 0$ para $F(u) = u^2$, é estável de um lado e instável do outro (semi-estável).

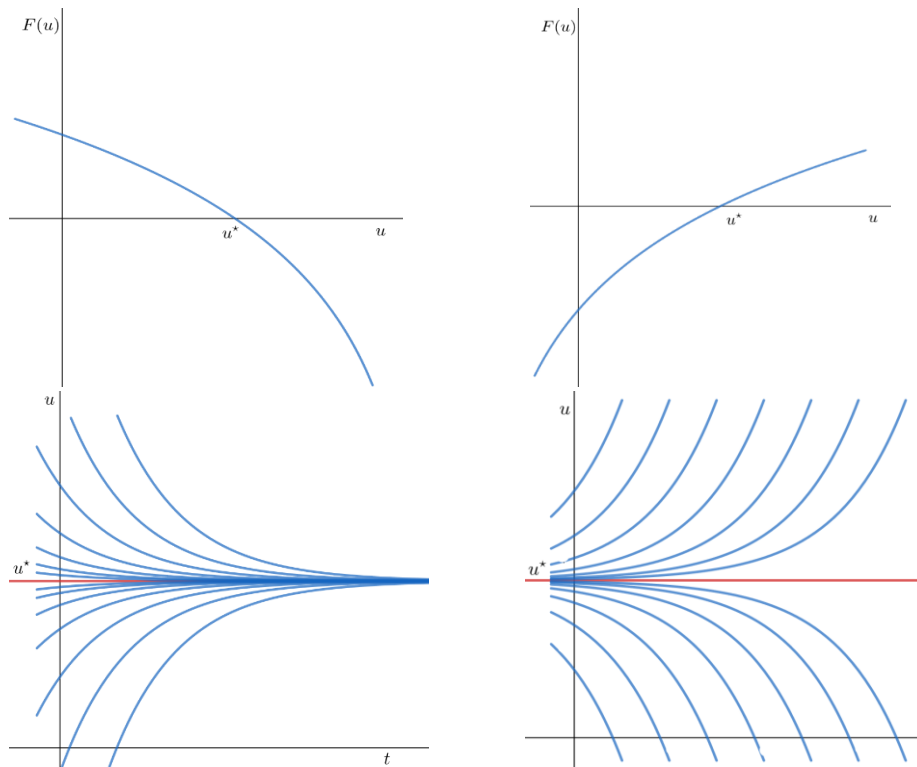


Figura 2.11: Equilíbrio das equações diferenciais ordinárias escalares: estável (esquerda) e instável (direita).

Exemplo 32 [9, p. 22]: *Estude a estabilidade da equação diferencial $u' = u - u^3$.*

Resolução. *Seja $F(u) = u - u^3$, resolvendo esta equação descobrimos três pontos de equilíbrio: $u_1 = -1, u_2 = 0$ e $u_3 = 1$. À medida que t aumenta (ver **Figura 2.12**), o gráfico da função $F(u)$ muda de positivo para negativo no primeiro ponto de equilíbrio $u_1 = -1$, o que comprova a sua estabilidade. Da mesma forma, o gráfico volta de negativo para positivo em $u_2 = 0$, estabelecendo a instabilidade do segundo ponto equilíbrio. O último ponto equilíbrio $u_3 = 1$ é estável, uma vez que $F(u)$ muda novamente de positivo para negativo.*

Assim, qualquer solução com condição inicial negativa, $u_0 < 0$, acabará, assintoticamente, por convergir para o primeiro ponto equilíbrio, $u(t) \rightarrow -1$, quando $t \rightarrow +\infty$. De facto, se $u_0 < -1$, então $u(t)$ está aumentando monotonamente para -1 , enquanto se $-1 < u_0 < 0$, a solução está diminuindo em direção a -1 . Por outro lado, se $u_0 > 0$, a solução correspondente converge para o outro ponto equilíbrio estável, $u(t) \rightarrow 1$, tal que os pontos com $0 < u_0 < 1$ estão aumentando monotonamente, enquanto aqueles com $u_0 > 1$ estão diminuindo.

*A única solução que não termina em -1 ou 1 quando $t \rightarrow +\infty$ é o ponto de equilíbrio instável $u(t) = 0$. Assim, conclui-se que qualquer perturbação, por menor que seja, forçará as soluções a escolher um dos pontos de equilíbrio, algo que se verifica por observação das curvas na **Figura 2.12**, em que todas elas, com exceção do eixo horizontal, convergem para uma das soluções estáveis ± 1 e divergem da solução instável 0 quando $t \rightarrow +\infty$.*

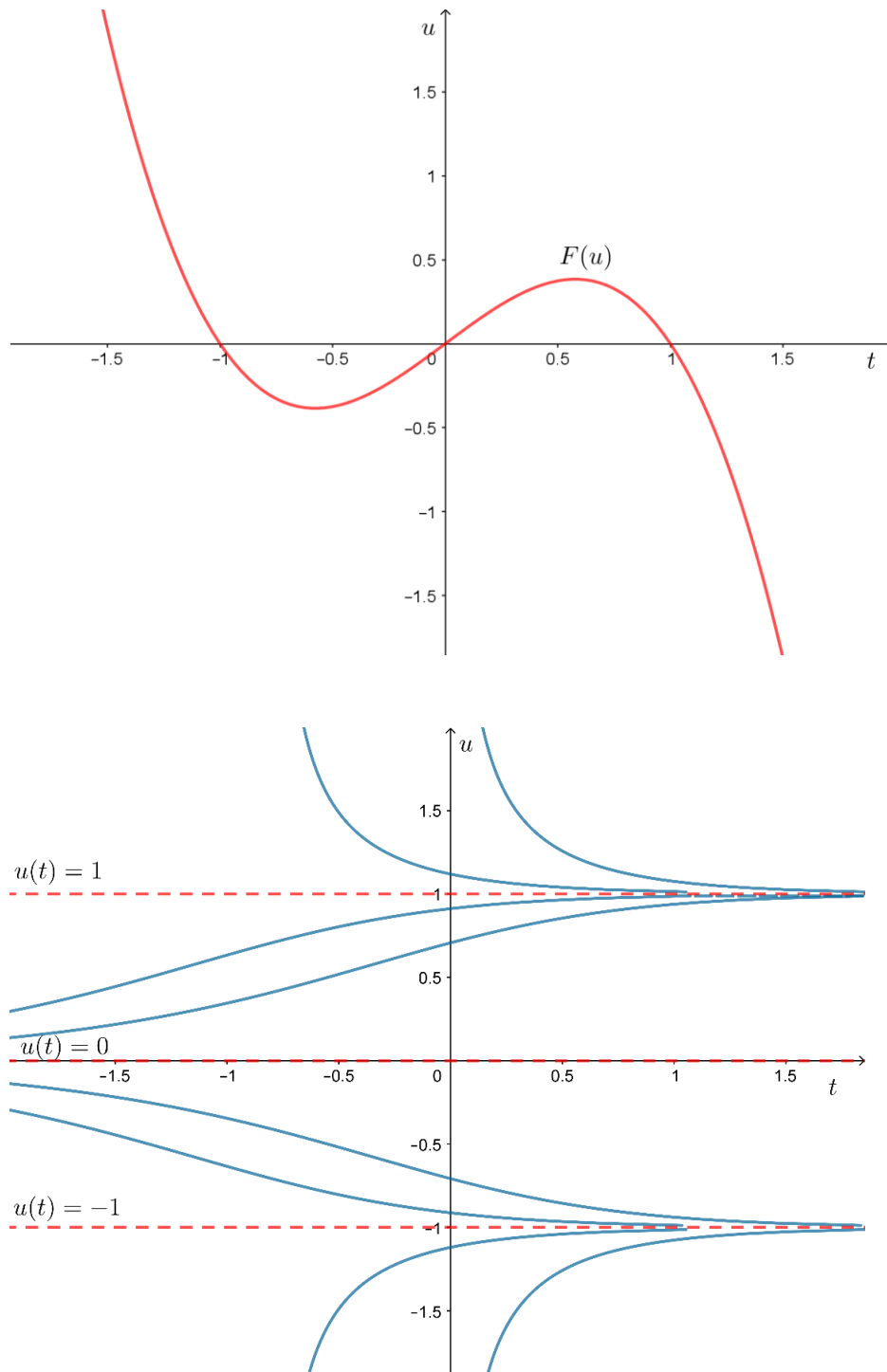


Figura 2.12: Estabilidade da equação $u' = u - u^3$.

Teorema 33 [9]: *Seja u^* um ponto de equilíbrio de uma equação diferencial ordinária de primeira ordem $u' = F(u)$. Se $F'(u^*) < 0$, então u^* é assintoticamente estável. Se $F'(u^*) > 0$ então u^* é instável.*

No **Exemplo 32**, como $F'(u) = 1 - 3u^2$ temos que os valores de $F'(u)$ nos pontos de equilíbrio são

$$F'(-1) = -2 < 0, \quad F'(0) = 1 > 0 \quad \text{e} \quad F'(1) = -2 < 0.$$

Assim, os sinais confirmam a conclusão anterior de que ± 1 são pontos de equilíbrio estáveis, enquanto 0 é instável.

Quando $F'(u^*) = 0$, o teste da derivada é inconclusivo e uma análise adicional é necessária para obter a estabilidade do ponto de equilíbrio. Por exemplo, as equações $u^* = u^3$ e $u^* = -u^3$ ambas satisfazem a condição $F'(0) = 0$ no ponto de equilíbrio $u^* = 0$, mas, de acordo com o **Teorema 31**, a primeira tem um ponto de equilíbrio instável, enquanto a última tem um ponto de equilíbrio estável. Assim, o **Teorema 33** não é tão poderoso quanto o teste algébrico direto do **Teorema 31**, apesar do **Teorema 33** apresentar a vantagem, ao contrário do teste algébrico, de poder ser generalizado diretamente para sistemas de equações diferenciais ordinárias.

2.5 Algumas aplicações das equações diferenciais não-lineares de primeira ordem

Nesta secção serão apresentadas algumas aplicações das equações diferenciais não-lineares de primeira ordem, com vista a aplicar alguma da teoria apresentada no **Capítulo 1** e nas secções anteriores.

Primeiramente, introduzimos o conceito de lei da Alometria e de seguida apresentamos o modelo logístico da dinâmica populacional.

2.5.1 Modelo do crescimento específico ou Lei da alometria

Nem todas as partes do corpo de um indivíduo tem em cada instante de tempo um desenvolvimento proporcional. Assim, a alometria estuda estes diferentes padrões de crescimento. Com base em [16], se $x = x(t)$ e $y = y(t)$ representarem os tamanhos de órgãos ou partes do corpo distintos de um mesmo indivíduo num instante t , então uma parte cresce mais rapidamente que a outra se

$$\frac{dx}{dt} > \frac{dy}{dt}.$$

Assim, a Lei da Alometria estabelece que, no mesmo indivíduo, os crescimentos específicos dos seus órgãos são proporcionais. O modelo matemático que traduz este facto pode ser representado por

$$\frac{dx}{dy} = k \frac{x}{y}, \tag{37}$$

com $x > 0$, $y > 0$ e k é uma constante (taxa de crescimento relativo). Separando as variáveis e integrando, obtemos

$$\ln x = k \ln y + \ln c, c > 0, \quad \text{ou seja,} \quad x = cy^k (x > 0 \wedge y > 0).$$

2.5.2 Modelo logístico da dinâmica populacional

Embora uma população de pessoas, animais ou bactérias consista num conjunto de indivíduos, o comportamento agregado pode muitas vezes ser modelado de forma eficaz por um sistema dinâmico que envolve várias variáveis continuamente. De acordo com [18], Thomas Malthus (1798) considerava que o número de indivíduos $N(t)$ no tempo t satisfaz uma equação diferencial de primeira ordem na forma

$$N' = \rho N, \quad (38)$$

onde o fator de proporcionalidade $\rho = \beta - \delta$ mede a taxa de crescimento, ou seja, a diferença entre o número de nascimento e o número de mortes. Assim, se os nascimentos excedem as mortes $\rho > 0$ a população aumenta, enquanto que, se $\rho < 0$, mais pessoas estão morrendo logo a população diminui. No modelo mais simples, a taxa de crescimento é assumida como independente do tamanho da população, logo as soluções da equação diferencial satisfazem a lei de crescimento exponencial malthusiano $N(t) = N_0 e^{\rho t}$, onde $N_0 = N(0)$ é o tamanho inicial da população. Assim, se $\rho > 0$ a população cresce sem limite, enquanto se $\rho < 0$ a população morre.

Num cenário mais realista, a taxa de crescimento dependerá do tamanho da população e dos fatores ambientais externos. Assim, a taxa de crescimento $\rho(N) > 0$ quando $N < N^*$, enquanto $\rho(N) < 0$ quando $N > N^*$, onde a capacidade de suporte $N^* > 0$ depende da disponibilidade de recursos. A classe mais simples de funções que satisfaz estas desigualdades são da forma $\rho(N) = \mu N(N^* - N)$, onde $\mu > 0$ é uma constante positiva. Isto nos leva ao modelo populacional não-linear apresentado por Peter Olver em [9] dado por

$$N' = \mu N(N^* - N). \quad (39)$$

Assumindo $u(t) = \frac{N(t)}{N^*}$, de modo que u represente o tamanho da população em proporção à capacidade de suporte N^* , um cálculo direto mostra que $u(t)$ satisfaz a chamada equação diferencial logística [19]

$$u' = \lambda u(1 - u), \quad (40)$$

onde $\lambda = N^* \mu$ e o tempo inicial é dado por $t_0 = 0$.

Existem dois pontos de equilíbrio: $u(t) = 0$ e $u(t) = 1$, obtidos pela configuração do lado direito da equação ao igualar a zero. O primeiro representa uma população inexistente sem indivíduos (extinção) e, portanto, sem reprodução. O segundo corresponde a uma população estática que está no tamanho ideal para o ambiente, onde as mortes equilibram exatamente os nascimentos. Para resolver a equação diferencial logística, primeiro escrevemos na forma separada e depois integramos ambos os membros, onde k é uma constante de integração

$$\begin{aligned} \frac{du}{u(1-u)} = \lambda dt &\Leftrightarrow \lambda t + k = \int \frac{1}{u} + \frac{1}{1-u} du \\ \Leftrightarrow \lambda t + k = \ln \left| \frac{u}{1-u} \right| &\Leftrightarrow u(t) = \frac{ce^{\lambda t}}{1 + ce^{\lambda t}}, \quad c = \pm e^k. \end{aligned}$$

Usando a condição inicial, encontramos a solução particular na forma

$$u_0 = u(0) = \frac{c}{1+c} \Leftrightarrow u(t) = \frac{u_0 e^{\lambda t}}{1 - u_0 + u_0 e^{\lambda t}}.$$

Como o tempo $t \rightarrow \infty$, a solução tende para o valor de equilíbrio $u(t) \rightarrow 1$, que corresponde a $N(t) \rightarrow N^*$ aproximando-se da capacidade de suporte no modelo populacional original. Para valores iniciais pequenos $u_0 \ll 1$, a solução inicialmente cresce a uma taxa exponencial, correspondendo a uma população com recursos ilimitados. No entanto, conforme a população aumenta, a falta gradual de recursos tende a desacelerar a taxa de crescimento e, eventualmente, a população satura no valor de equilíbrio. Por outro lado, se $u_0 > 1$, a população é muito grande para ser sustentada pelos recursos disponíveis, e assim, desaparece até atingir o mesmo valor de saturação. Se $u_0 = 0$, então a solução permanece no equilíbrio $u(t) = 0$, fazendo com que $u_0 < 0$ seja a única solução que existe por um período finito com

$$u(t) \rightarrow \infty, \quad t \rightarrow t^* = \frac{1}{\lambda} \ln \left(1 - \frac{1}{u_0} \right).$$

Capítulo 3

Equações diferenciais não-lineares de ordem superior

Muito poucas equações diferenciais ordinárias têm soluções explícitas expressáveis em termos finitos. Isto ocorre porque o repertório de funções padrão em termos dos quais as soluções podem ser expressas é muito limitado para acomodar a variedade de equações diferenciais encontradas na prática. Mesmo que uma solução possa ser encontrada, a "fórmula" é muitas vezes complicada para exibir claramente as principais características da solução.

O estudo qualitativo das equações diferenciais diz respeito a como deduzir as características importantes das soluções das equações diferenciais sem realmente resolvê-las. Assim, neste capítulo, será introduzido o **diagrama de fases**, que é usado extensivamente para obter diretamente da equação diferencial propriedades como equilíbrio, periodicidade, crescimento ilimitado, estabilidade e assim por diante.

3.1 Equações autónomas no diagrama de fases

A equação diferencial autónoma de segunda ordem apresenta uma forma geral do tipo

$$x'' = f(x, x', t), \quad (41)$$

onde $x(t_0)$ e $x'(t_0)$ são as condições iniciais, t é a variável independente e $x = x(t)$, $x'(t) = \frac{dx}{dt}$ e $x'' = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)$ são as variáveis dependentes. Este tipo de equação é designado de sistema dinâmico e pode ser interpretado como uma equação do movimento para um sistema mecânico, em que x representa o deslocamento de uma partícula de massa unitária, x' a sua velocidade, x'' a aceleração e f a força aplicada. Assim, a Equação (41) expressa a Lei de Newton do movimento para uma partícula [20]:

$$\text{aceleração} = \text{força por unidade de massa.}$$

Existem dois tipos de equações diferenciais não-lineares de ordem superior:

- (i) Autónomas, em que f não depende explicitamente de t ;
- (ii) Não autónomas, onde t aparece explicitamente na função f .

Consideremos sistemas autónomos dados pela equação diferencial

$$x'' = f(x, x'). \quad (42)$$

Para se obter a representação no diagrama de fases, introduzimos a mudança de variável

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = f(x, y) \end{cases} \quad (43)$$

fazendo com que este par de equações represente um sistema diferencial não-linear de primeira ordem.

No diagrama de fases com eixos x e y , o estado do sistema no tempo t_0 consiste no par de valores $(x(t_0), y(t_0))$. Estes valores de x e y , representados por um ponto P , servem como condições iniciais para as equações diferenciais de primeira ordem simultâneas do sistema não-linear (43) e, portanto, determinam todos os estados pelos quais o sistema passa num movimento particular. Assim, a sucessão de estados dada parametricamente por

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad (44)$$

traça uma curva através do ponto inicial P chamada **trajetória, órbita ou caminho de fase**.

A direção a ser atribuída a um caminho de fase no diagrama de fases é obtida da relação $x' = y$. Quando $y > 0$, $x' > 0$, portanto x aumenta com o tempo. Por sua vez, quando $y < 0$, x está diminuindo com o tempo. Assim, as direções das órbitas são da esquerda para a direita no semiplano superior e da direita para a esquerda no semiplano inferior [15].

Para obter uma relação entre x e y que defina os caminhos de fase (equação das trajetórias), usamos a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x, y)}{y}. \quad (45)$$

Um caminho de fase particular é escolhido, exigindo que este passe por um ponto particular $P(x, y)$ que corresponde a um estado inicial (x_0, y_0) , onde $y(x_0) = y_0$. Assim, o padrão completo dos caminhos de fase, incluindo as setas direcionais, constitui o **diagrama de fases**. Quanto aos pontos de equilíbrio, estes correspondem a soluções constantes que ocorrem quando x' e y' são simultaneamente zero, isto é, pontos do eixo x onde

$$\begin{cases} x' = 0 \\ y' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ f(x, y) = 0 \end{cases}. \quad (46)$$

Na representação do diagrama de fases, o tempo t não é envolvido quantitativamente, mas pode ser caracterizado pelas seguintes considerações. Suponhamos que o sistema esteja num estado A no tempo $t = t_A$. O ponto móvel P representa os estados em tempos $t \geq t_A$, movendo-se continuamente ao longo do arco \widehat{AB} (da esquerda para a direita em $y > 0$) à medida que t aumenta e é chamado de ponto representativo em \widehat{AB} . A velocidade de P ao longo da curva \widehat{AB} é dada na forma de componente por

$$(x'(t), y'(t)) = (y, f(x, y)). \quad (47)$$

Se t_B é o tempo que P alcança o ponto B , o tempo T_{AB} é o tempo que levou P para se mover de A para B , então

$$T_{AB} = t_B - t_A, \quad (48)$$

sendo independente do tempo inicial t_A . A quantidade T_{AB} é chamada de **tempo decorrido ou tempo de transição** de A para B ao longo do caminho da fase. Assim, se $x(t)$ representa qualquer solução particular de $x'' = f(x, x')$, então a família de soluções $x(t - t_1)$, onde t_1

pode ser qualquer valor, é representada pelo mesmo caminho de fase e o mesmo ponto representativo.

Consideremos agora o caso de um caminho de fase representado como uma curva fechada, como na **Figura 3.1(b)**. Seja A qualquer ponto no caminho de fase e P o ponto representativo para A no momento t_A , após um certo intervalo de tempo T , P retorna para A tendo percorrido o caminho uma vez. Assim, o seu segundo circuito começa em A no tempo $t_A + T$, mas como as suas posições subsequentes dependem apenas do tempo decorrido desde o seu ponto de partida e não do seu tempo de partida, o segundo circuito levará o mesmo tempo que o primeiro circuito e assim por diante. Portanto, um caminho de fase fechado representa um movimento que é periódico no tempo.

O tempo decorrido $T_{AB} = t_B - t_A$ do ponto representativo P desde A para B ao longo do caminho de fase pode ser expresso da seguinte forma

$$T_{AB} = \int_{t_A}^{t_B} \frac{dx}{y(x)}. \quad (49)$$

Observação 34: Se o ponto representativo P para se deslocar do ponto A para o ponto B tiver de passar na origem, então para o cálculo do tempo de transição temos de dividir o tempo decorrido em dois caminhos $T_{AB} = t_{A0} + t_{0B}$. Além disso, no cálculo do tempo de transição temos de ter cuidado de verificar se entre esses dois pontos a função $y(x)$ é positiva ou negativa, dado esta ser positiva quando trabalhamos no semiplano superior e negativa no semiplano inferior.

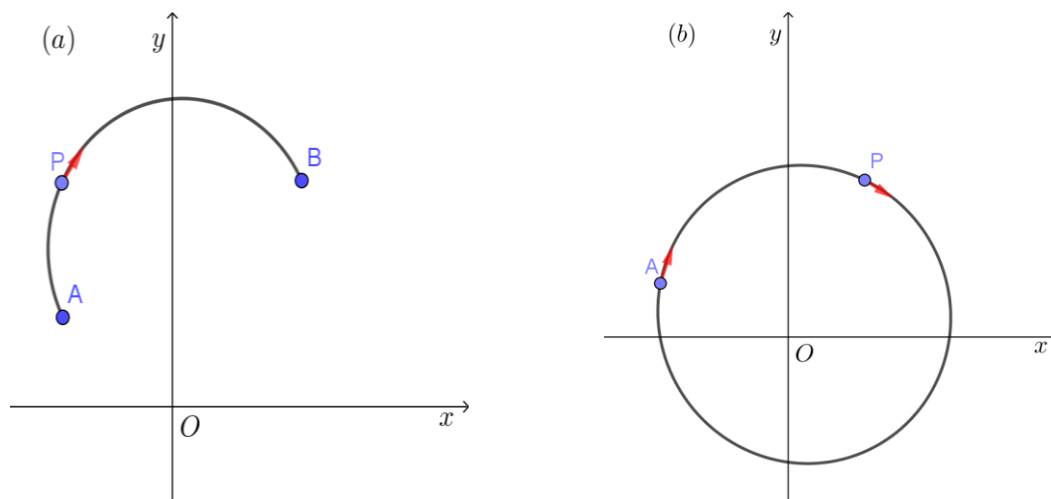


Figura 3.1: (a) O ponto representativo P num segmento de um caminho de fase. (b) Caminho fechado: P parte de A e retorna a A num número infinito de vezes.

Exemplo 35 [21, p. 8]: Os caminhos de fase de um sistema são dados pela família $x + y^2 = C$, onde C é uma constante arbitrária. No caminho com $C = 1$, o ponto representativo move-se de $A(0, 1)$ para $B(-1, -\sqrt{2})$. Obtenha o tempo de transição T_{AB} .

Resolução. O caminho especificado é mostrado na **Figura 3.2**. Este cruza o eixo x no ponto $C(1, 0)$, em $\widehat{AC} \Rightarrow y = \sqrt{1-x}$ e em $\widehat{CB} \Rightarrow y = -\sqrt{1-x}$. Então,

$$\begin{aligned}
 T_{AB} &= \int_A^C \frac{dx}{y} + \int_C^B \frac{dx}{y} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} + \int_1^{-1} \frac{dx}{-\sqrt{1-x}} \\
 &= [-2(1-x)^{1/2}]_0^1 + [2(1-x)^{1/2}]_1^{-1} = 2 + 2\sqrt{2}.
 \end{aligned}$$

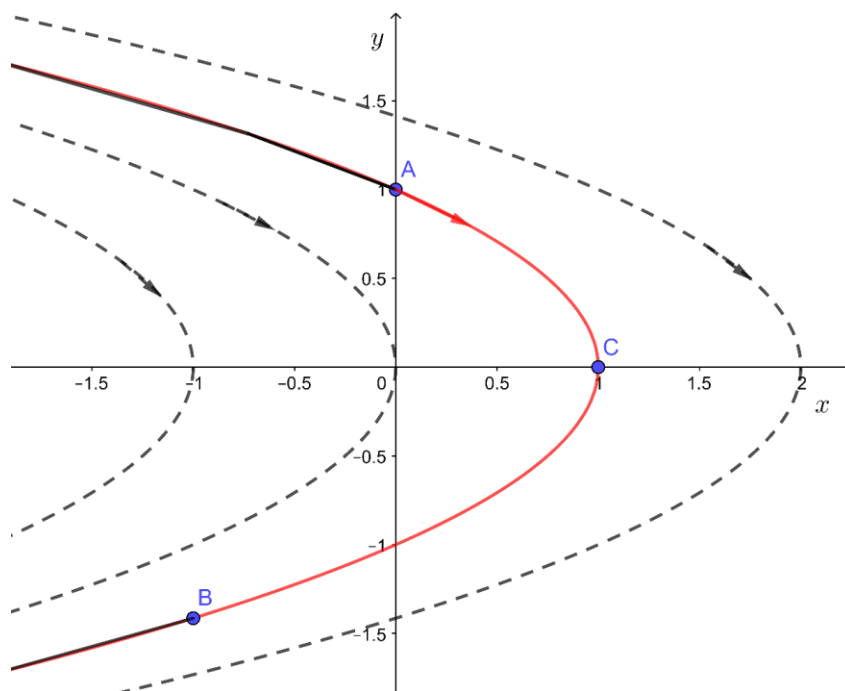


Figura 3.2: O caminho AB ao longo do qual o tempo de transição é calculado (arco vermelho).

Resumidamente, nas equações diferenciais autónomas $x'' = f(x, x')$ representadas no diagrama de fases pela Equação (43):

- (i) A equação dos caminhos de fase é: $\frac{dy}{dx} = \frac{f(x,y)}{y}$;
- (ii) As direções das órbitas no diagrama de fases são da esquerda para a direita no semiplano superior e da direita para esquerda no semiplano inferior;
- (iii) Os pontos de equilíbrio situados no eixo x são os pontos onde $f(x, 0) = 0$ e são representados como soluções constantes;
- (iv) Os caminhos de fase interseam o eixo x em ângulos retos, exceto possivelmente nos pontos de equilíbrio;
- (v) O tempo de transição para o ponto representativo P de um ponto A até um ponto B ao longo de um caminho de fase é dado pelo integral de linha $T_{AB} = \int_{t_A}^{t_B} \frac{dx}{y(x)}$;
- (vi) Os caminhos de fase fechados representam soluções de tempo periódicas $(x(t), y(t))$, ou seja, todo o caminho fechado à volta do ponto de equilíbrio é um **centro** e está associado a um ponto de equilíbrio estável;
- (vii) Seja $x_1(t)$ qualquer solução particular de $x'' = f(x, x')$. Então as soluções $x_1(t - t_1)$, para qualquer t_1 , fornecem o mesmo caminho de fase e ponto representativo;

- (viii) No diagrama de fases, um ponto de equilíbrio é instável se for um **ponto de sela**, ou seja, se à sua volta as órbitas aproximam-se por um lado e divergem por outro ao longo do eixo x e/ou y . No diagrama de fases, os pontos de equilíbrio estáveis são geralmente representados por pontos inteiros (“bolas fechadas”) e os instáveis por pontos abertos (“bolas abertas”).

Exemplo 36 [21, p. 1]: *Considere uma partícula P de massa m , suspensa a partir de um ponto O por uma corda leve de comprimento a que pode balançar num plano vertical. Se não há atrito, a equação do movimento de um pêndulo simples é*

$$x'' + \omega^2 \sin x = 0,$$

onde x é a inclinação da corda da vertical para baixo, g é a constante gravitacional e $\omega^2 = \frac{g}{a}$. Faça a representação do diagrama de fases e analise a estabilidade dos pontos de equilíbrio.

Resolução. Efetuando a mudança de variável $x' = y$ e $y' = f(x, y) = -\omega^2 \sin x$, calculamos os respectivos pontos de equilíbrio

$$\begin{cases} x' = 0 \\ y' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = k\pi, k \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Para representar o diagrama de fases, determinamos a equação das trajetórias

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -\frac{\omega^2 \sin x}{y} \Leftrightarrow \int y \, dy = \int -\omega^2 \sin x \, dx \\ \Leftrightarrow \frac{y^2}{2} &= \omega^2 \cos x + c, \quad \omega^2 \neq 0, c \in \mathbb{R}, \text{ tal que } \omega^2 \cos x + c \geq 0. \end{aligned}$$

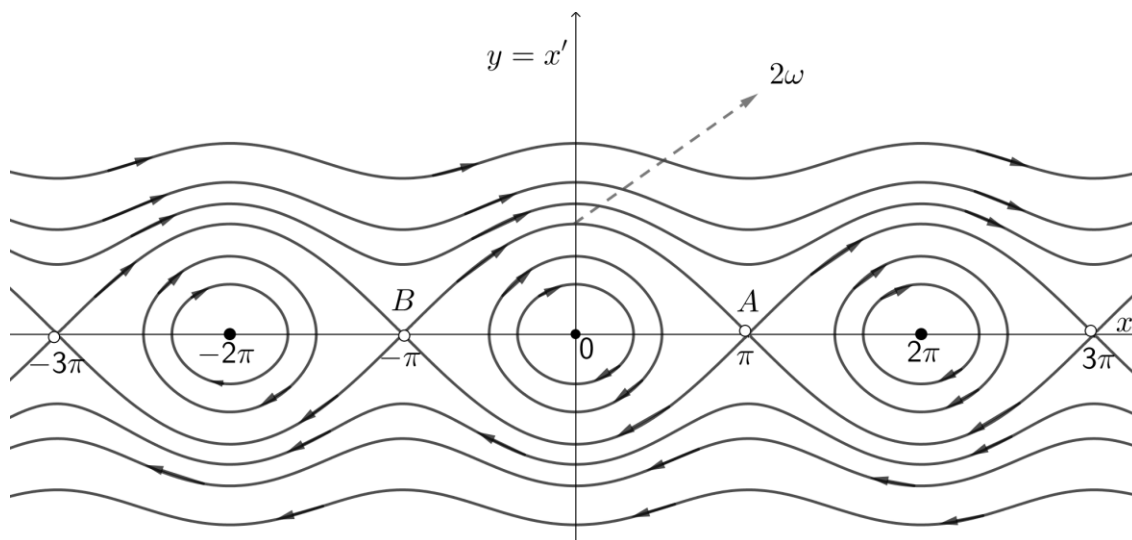


Figura 3.3: Diagrama de fases para a equação do pêndulo simples.

O caminho de fase pode ser identificado em termos de C . Nos caminhos que unem $(-\pi, 0)$ e $(\pi, 0)$, $C = \omega^2$. Para caminhos dentro dessas curvas, $\omega^2 > C > -\omega^2$ e para caminhos fora dessas curvas, $C > \omega^2$. Assim, um determinado par de valores (x, y) ou (x, x') , representado por um ponto P no diagrama, é chamado de estado do sistema. Um estado dá a velocidade

angular $x' = y$ numa inclinação particular x e essas variáveis são o que sentimos quando olhamos para um pêndulo oscilante em qualquer momento particular.

As direções das órbitas ao longo dos caminhos de fase são indicadas pelas setas na **Figura 3.3**. Portanto, a direção é sempre da esquerda para a direita no semiplano superior e da direita para a esquerda no semiplano inferior. Quando o pêndulo trava sem balançar, $x = 0$ e $x' = 0$, que corresponde à origem na **Figura 3.3**. A função de tempo correspondente $x(t) = 0$ é uma solução constante perfeitamente legítima da equação do movimento do pêndulo, logo o caminho da fase degenera para um único ponto. Se a suspensão consistir de uma haste leve, haverá uma segunda posição de equilíbrio ($x = \pi$ e $x' = 0$), onde a haste será equilibrada verticalmente no final (ponto A no diagrama de fases). A mesma condição física é descrita por $x = -\pi$ e $x' = 0$, representada pelo ponto B. Assim, conclui-se que o estado $x = n\pi$ e $x' = 0$, onde n é qualquer inteiro, corresponde fisicamente a um desses dois estados de equilíbrio.

Como os pontos O, A e B representam estados de equilíbrio físicos, eles são chamados de pontos de equilíbrio no diagrama de fases. Considerando a família de curvas fechadas imediatamente ao redor da origem, estas curvas indicam movimentos periódicos, nos quais o pêndulo oscila para a frente e para trás na vertical, associando assim a uma família de pontos de equilíbrio estáveis (centros) dados por $(x, y) = (2k\pi, 0)$. As linhas onduladas na parte superior e inferior da **Figura 3.3**, nas quais x' é de sinal constante e x aumenta ou diminui continuamente, correspondem a movimentos giratórios no pêndulo. As flutuações em x' são devidas à influência gravitacional e, para caminhos de fase nos quais x' é muito grande, essas flutuações tornam-se imperceptíveis, ou seja, os caminhos de fase tornam-se quase retas paralelas ao eixo do xx .

Quando $C = 1$, obtemos uma família de pontos de equilíbrio instáveis (pontos de sela). Assim, conclui-se que, se o estado inicial for deslocado ligeiramente da origem, ele segue para uma das curvas fechadas próximas e o pêndulo oscila com pequena amplitude em torno da origem, tornando a origem num ponto de equilíbrio estável. Se o estado inicial é ligeiramente deslocado de A, ele normalmente cairá no caminho de fase que o leva para longe do estado de equilíbrio A, logo este ponto de equilíbrio é instável. Uma análise mais aprofundada sobre a dinâmica do pêndulo pode ser vista em Baker e Blackburn em [22].

Exemplo 37 [21, p. 9]: Construa o diagrama de fases para a equação do oscilador harmônico simples $x'' + \omega^2 x = 0$.

Resolução. Efetuando a mudança de variável

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = f(x, y) = -\omega^2 x \end{cases}$$

verifica-se que existe um único ponto de equilíbrio

$$\begin{cases} x' = 0 \\ y' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

Os caminhos de fases são as soluções da equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\omega^2 x}{y}, \quad (50)$$

ou seja,

$$y^2 + \omega^2 x^2 = C,$$

onde C é arbitrário, sujeito a $C \geq 0$ para soluções reais. Na **Figura 3.4** observamos o diagrama de fases, consistindo numa família de elipses concêntricas na origem. Todas as soluções são, portanto, periódicas o que faz com que o ponto de equilíbrio (origem) seja uma solução periódica (centro) estável.

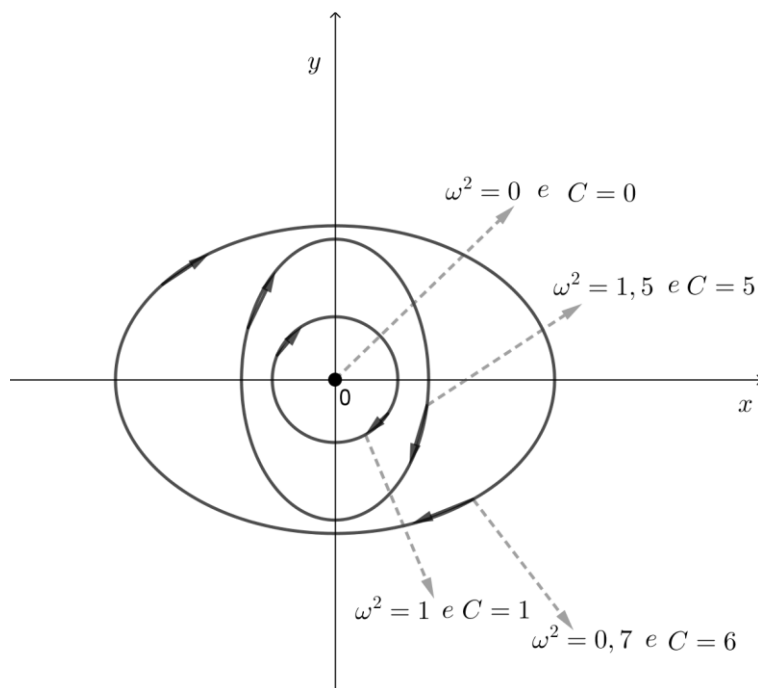


Figura 3.4: Diagrama de fases para a equação $x'' + \omega^2 x = 0$.

Exemplo 38 [21, p. 10]: Construa o diagrama de fases para a equação de um oscilador harmónico $x'' - \omega^2 x = 0$, com variável independente t e dependente $x = x(t)$.

Resolução. Tomando $y = x'$ e $y' = \omega^2 x$, resulta que o respetivo ponto de equilíbrio é

$$\begin{cases} x' = 0 \\ y' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}.$$

Para o cálculo da equação das trajetórias, usamos a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\omega^2 x}{y}.$$

Separando as variáveis e integrando ambos os membros, obtemos

$$y^2 = \omega^2 x^2 + C, \quad C \in \mathbb{R} \text{ tal que } \omega^2 x + C \geq 0.$$

Estes caminhos são hipérbolas ($C > 0$ e $C < 0$), juntamente com as suas assíntotas $y = |\omega x|$ ($C = 0$). Ao analisar a **Figura 3.5**, na vizinhança do ponto de equilíbrio (origem) verifica-se que, por um lado as órbitas convergem e por outro elas divergem, logo este ponto é chamado de ponto de sela (ponto de equilíbrio instável), uma vez que um pequeno

deslocamento do estado de equilíbrio, geralmente, levará o sistema para um caminho de fase que o leva para longe do estado de equilíbrio.

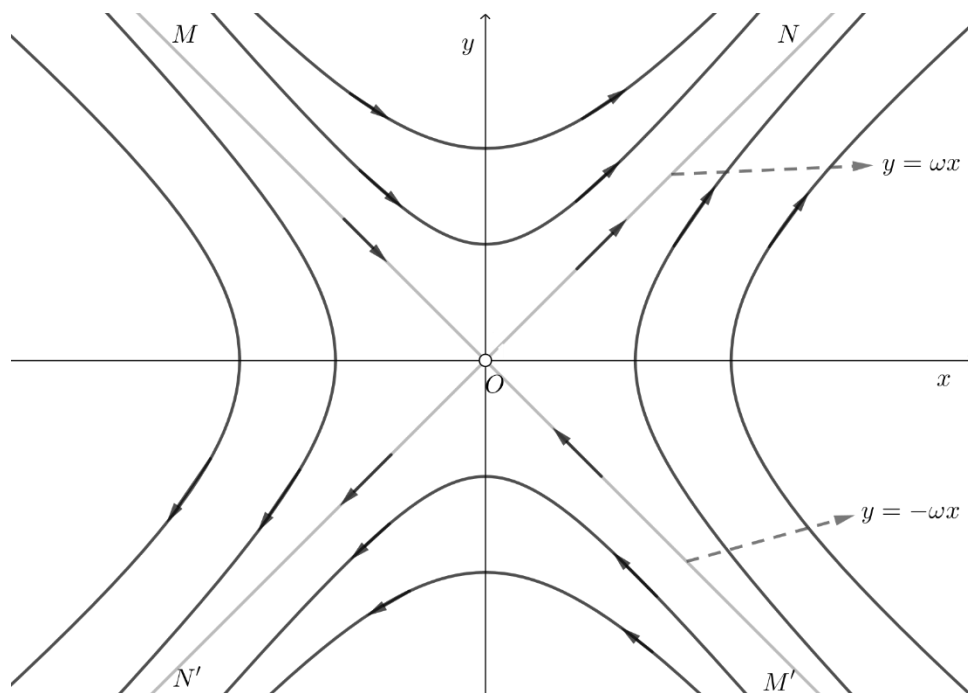


Figura 3.5: Ponto de sela: apenas os caminhos MO e $M'O$ é que se aproximam da origem.

Definição 39: Uma curva diz-se **separatriz** se passa nos pontos de equilíbrio e separa o comportamento das órbitas.

Por exemplo, no **Exemplo 38**, $y = |\omega x|$ é a separatriz, pois separa o comportamento das órbitas quando $C > 0$ para quando $C < 0$.

Exemplo 40 [21, p. 12]: Encontre os pontos de equilíbrio e a equação geral para os caminhos de fase de $x'' + \sin x = 0$. Obtenha os caminhos de fase específicos que satisfazem as condições iniciais (a) $x(t_0) = 0, y(t_0) = x'(t_0) = 1$; (b) $x(t_0) = 0, y(t_0) = 2$.

Resolução. As equações diferenciais no diagrama de fases são, em termos de t ,

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = f(x, y) = -\sin x \end{cases}$$

Os pontos de equilíbrio são os pontos pertencentes ao eixo das abcissas em que $\sin x = 0$, isto é, em $x = n\pi$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Quando n é par são centros, quando n é ímpar são pontos de sela. A equação das trajetórias é dada por

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sin x}{y},$$

ou seja,

$$\frac{y^2}{2} = \cos x + C, C \in \mathbb{R} \text{ tal que } \cos x + C \geq 0, \quad (51)$$

onde C é o parâmetro dos caminhos de fase.

Quanto ao diagrama de fases, este está desenhado na **Figura 3.6**, sendo que a caracterização dos caminhos de fase da equação $x'' + \sin x = 0$ para os diversos valores da constante C estão descritos na **Tabela 3.1**.

Tabela 3.1: Caracterização dos caminhos de fase na equação $x'' + \sin x = 0$.

| Valores de C | Tipos de movimento |
|----------------|--|
| $C = -1$ | Pontos de equilíbrio em $(n\pi, 0)$ (centros para n par e pontos de sela para n ímpar) |
| $-1 < C < 1$ | Caminhos fechados (movimentos periódicos) |
| $C = 1$ | Caminhos que ligam pontos de equilíbrio (separatrizes) |
| $C > 1$ | Movimentos giratórios |

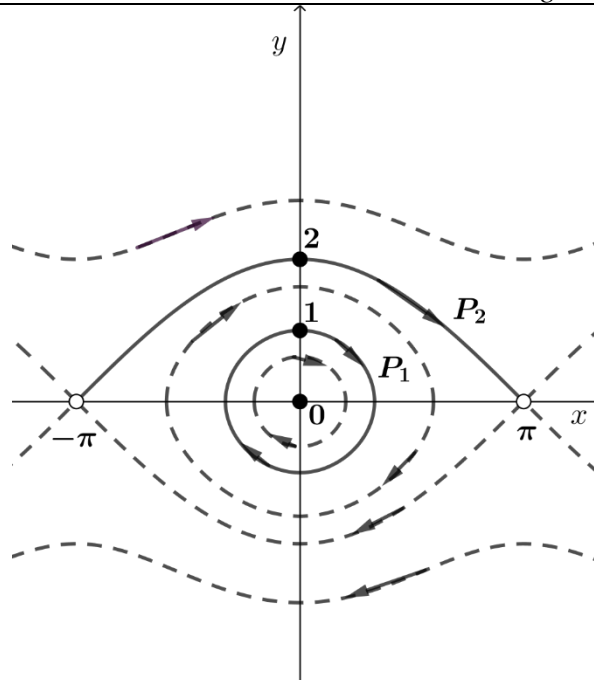


Figura 3.6: Diagrama de fases para a equação $x'' + \sin x = 0$.

(a) $x(t_0) = 0$ e $y(t_0) = 1$. Substituindo na Equação (51), temos $\frac{1}{2} = 1 + C$, de modo que $C = -\frac{1}{2}$. O caminho de fase associado é $y^2 = 2 \left(\cos x - \frac{1}{2} \right)$ (P_1 na **Figura 3.6**). Este caminho está fechado, indicando assim um movimento periódico.

(b) $x(t_0) = 0$ e $y(t_0) = 2$. Substituindo na Equação (51), temos $2 = 1 + C$, logo $C = 1$. O caminho de fase correspondente é $y^2 = 2(\cos x + 1)$. Neste caminho $y = 0$ em $x = \pm n\pi$, de modo que o caminho conecte dois pontos de equilíbrio. Quando $t \rightarrow +\infty$, o caminho se aproxima de $(\pi, 0)$ saindo de $(-\pi, 0)$ em $t = -\infty$. Este caminho, ilustrado como P_2 na **Figura 3.6**, é a separatriz pois separa dois modos de movimento, oscilatório e giratório, conectando assim dois pontos de sela.

3.2 Sistemas conservadores do tipo $x'' = f(x)$

Considere a família de equações diferenciais autónomas na forma

$$x'' = f(x). \quad (52)$$

Substituindo x' pela nova variável y , obtém-se um par equivalente de equações de primeira ordem

$$x' = y, \quad y' = f(x). \quad (53)$$

Quando $f(x)$ não é linear, a análise das soluções da Equação (52) é auxiliada considerando-se um modelo mecânico cuja equação do movimento é a mesma que a Equação (52). Na **Figura 3.7**, uma partícula P com massa unitária está livre para se mover ao longo do eixo Ox . Esta é influenciada por uma força $f(x)$ que depende apenas da coordenada de deslocamento x , sendo expressa como positiva se atua na direção positiva do eixo x . Assim, a equação do movimento de P toma a forma da Equação (52). Note-se que as forças de atrito são excluídas, uma vez que são geralmente funções da velocidade, x' , e a sua direção de ação depende do sinal de x' , enquanto a força $f(x)$ depende apenas da posição.

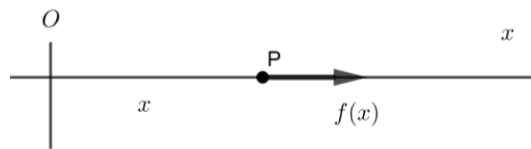


Figura 3.7: Uma partícula P sobre a força de $f(x)$.

Por observação da **Figura 3.7**, $f(x) > 0$ sempre, portanto f movimenta-se da esquerda para a direita, não havendo pontos de equilíbrio do sistema. Assim, esperamos que, sejam quais forem as condições iniciais, P seja levado ao infinito, não havendo comportamento oscilatório. Em seguida, suponhamos que

$$f(x) = -\lambda x, \quad \lambda > 0, \quad (54)$$

onde λ é uma constante. A equação do movimento é dada por

$$x'' = -\lambda x, \quad (55)$$

expressando a força na partícula unitária exercida por uma mola linear de rigidez λ quando a origem é tomada no ponto em que a mola tem o seu comprimento natural l (**Figura 3.8**). Tal mola causa oscilações originadas por $f(x)$, **força restauradora**, significando que a sua direção é sempre de modo a tentar conduzir P em direção à origem.

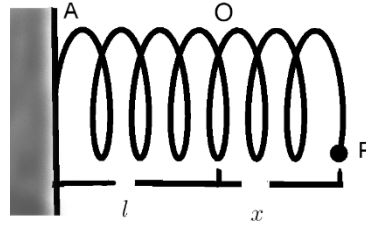


Figura 3.8: Uma partícula P ligada a uma mola de comprimento natural $l = AO$, onde o deslocamento de O para P é dado por x .

Na **Figura 3.8**, quando a partícula P se move de uma posição x para uma posição próxima $x + \delta x$, o trabalho δW feito em P por $f(x)$ é dado por

$$\delta W = f(x)\delta x. \quad (56)$$

Este trabalho vai incrementar uma energia cinética T na partícula com massa unitária, onde $T = \frac{1}{2}x'^2$ e

$$\delta T = \delta W = f(x)\delta x. \quad (57)$$

Dividindo por δx e garantindo que $\delta x \rightarrow 0$, obtém-se

$$\frac{dT}{dx} = f(x).$$

Agora definindo uma função $V(x)$ pela relação

$$\frac{dV}{dx} = -f(x),$$

$V(x)$ é chamada de **função potencial** para $f(x)$, especificamente,

$$V(x) = - \int f(x) dx, \quad (58)$$

onde $\int f(x) dx$ significa qualquer integral indefinido particular de $f(x)$. Se especificarmos um dispositivo autónomo que originará uma força $f(x)$, como uma mola na **Figura 3.8** ou o campo de gravitação da Terra, então $V(x)$ é igual à energia potencial física armazenada no dispositivo de qualquer forma. Assim, das equações anteriores, obtemos

$$\frac{d}{dt}(T + V) = 0, \quad (59)$$

de modo que, durante qualquer movimento particular,

$$T + V = \text{constante}$$

ou, explicitamente,

$$\frac{1}{2}x'^2 - \int f(x)dx = C, \quad (60)$$

onde C é um parâmetro que depende do movimento particular e da função potencial específica que foi escolhida. Assim, conclui-se que sistemas expressos pela equação $x'' = f(x)$ são chamados de sistemas conservadores, tal que, da Equação (60) obtemos

$$x' = \pm\sqrt{2(C - V(x))}. \quad (61)$$

Como as equações equivalentes no diagrama de fases são

$$x' = y, \quad y' = f(x),$$

a respetiva equação dos caminhos de fase é dada por

$$y = \pm\sqrt{2(C - V(x))}. \quad (62)$$

Quanto aos pontos de equilíbrio dos sistemas conservadores, estes ocorrem em pontos onde $y = 0$ e $f(x) = 0$, ou alternativamente, onde

$$y = 0 \text{ e } \frac{dV}{dx} = 0.$$

Os valores de x obtidos são aqueles onde $V(x)$ tem um mínimo, máximo ou ponto de inflexão, sendo que o tipo de ponto de equilíbrio é diferente nestes três casos. Assim, nos sistemas conservadores:

- Um mínimo de $V(x)$ gera um centro (ponto estável);
- Um máximo de $V(x)$ gera um ponto de sela (ponto instável);
- Um ponto de inflexão gera uma cúspide.

Exemplo 41 [21, p. 19]: *Considere a seguinte equação diferencial $x'' = -xe^{-x}$. Mostre que a origem é um centro no diagrama de fases.*

Resolução. *Como esta equação é uma equação do tipo $x'' = f(x)$, conclui-se que estamos a trabalhar com sistemas conservadores. Fazendo uma mudança de variável e calculando o ponto de equilíbrio*

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -xe^{-x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ -xe^{-x} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases},$$

verificamos, através da representação da equação dos caminhos no diagrama de fases, que a origem é um centro

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{xe^{-x}}{y} \Leftrightarrow \frac{y^2}{2} = \int -xe^{-x} dx \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{2(C + e^{-x}(x + 1))}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Usando a função $V(x)$, obtém-se

$$V(x) = -\int -xe^{-x} dx \Leftrightarrow V(x) = -e^{-x}(x + 1) + k, \quad k \in \mathbb{R},$$

concluindo assim que esta função tem um mínimo em $x = 0$. Portanto, a origem é um centro, indicando um movimento periódico. Quando $x \rightarrow +\infty$, $V(x) \rightarrow 0$, logo o diagrama de fases é composto pelas curvas

$$y = \pm\sqrt{2(C - V(x))}.$$

Por análise da **Figura 3.9**, conclui-se que o valor $C = 0$ é um valor crítico, uma vez que separa a região oscilatória da região em que um dado ponto P vai para infinito. Logo esse caminho é uma separatriz dada por

$$\frac{y^2}{2} + V(x) = \frac{y^2}{2} - e^{-x}(x + 1) + k = C = 0.$$

Para valores de $-1 < C < 0$, obtemos centros à volta do ponto de equilíbrio, sendo que estes ovais tornam-se cada vez mais estendidos para a direita à medida que nos aproximamos de 0. Já para valores de $C \geq 0$, a mola vai esticando cada vez mais tendendo para infinito.

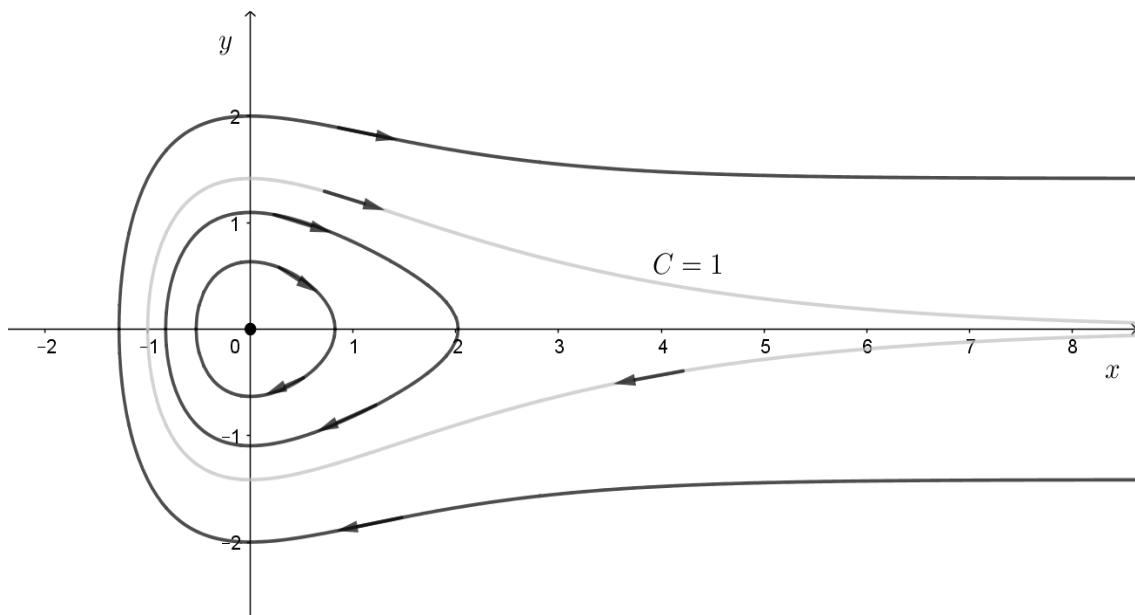


Figura 3.9: Diagrama de fases da equação $x'' = -xe^{-x}$.

3.3 Sistemas conservadores dependentes de parâmetros

Suponhamos que $x(t)$ satisfaz a condição

$$x'' = f(x, \lambda), \tag{63}$$

onde λ é um parâmetro. Os pontos de equilíbrio do sistema são dados por $f(x, \lambda) = 0$, ou seja, qualquer ponto sobre a curva $f(x, \lambda) = 0$ é um ponto de equilíbrio e a sua localização dependerá do parâmetro λ .

Existe um método gráfico simples de analisar a estabilidade dos pontos de equilíbrio num sistema dependente de parâmetros. Assumindo que $f(x, \lambda)$ seja contínua em x e λ , traça-se a curva $f(x, \lambda) = 0$ no plano $\lambda O x$, representando a curva dos pontos de equilíbrio. Depois, sombreamos os domínios nos quais $f(x, \lambda) > 0$ e, se o segmento da curva tiver um sombreamento abaixo dele, os pontos de equilíbrio dessa curva são estáveis, já que λ é fixo e f muda de positiva para negativa à medida que x aumenta.

Na **Figura 3.10**, a linha entre A e B corresponde ao conjunto de pontos de equilíbrio estáveis, sendo A e B pontos de equilíbrio instáveis e C um ponto também instável, uma vez que a função f é positiva em ambos os lados de C . Quanto à natureza dos pontos de equilíbrio para um dado valor de λ , por exemplo quando $\lambda = \lambda_0$, o sistema tem três pontos de equilíbrio, dois dos quais são estáveis. Assim, na **Figura 3.10**, A , B e C são conhecidos como **pontos de bifurcação**, de modo que, à medida que λ varia, o ponto de equilíbrio pode se dividir em dois ou mais, ou vários pontos de equilíbrio podem se fundir num único ponto de equilíbrio.

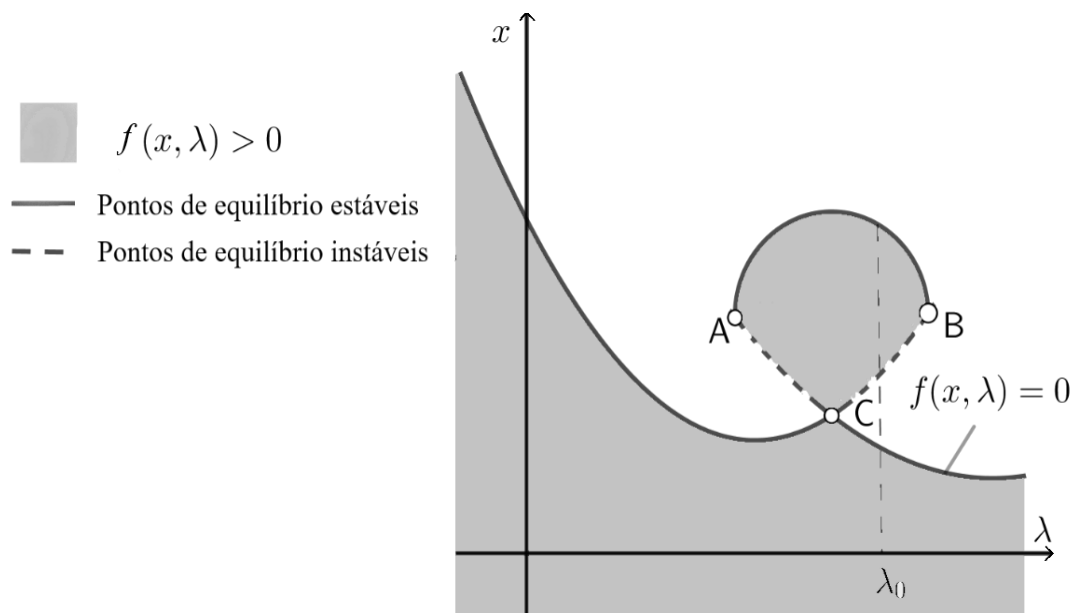


Figura 3.10: Diagrama de estabilidade representativo ilustrando curvas de estabilidade para os pontos da equação $x'' = f(x, \lambda)$.

Em suma, para analisar a estabilidade dos pontos de equilíbrio e representar no espaço dos parâmetros um sistema dependente de parâmetros na forma $x'' = f(x, \lambda)$, temos de seguir o respectivo procedimento:

- (i) Desenhar no plano $\lambda O x$ a curva $x'' = f(x, \lambda)$;
- (ii) Sombrear apenas as zonas onde a função $f(x, \lambda) > 0$;
- (iii) Se a curva dos pontos de equilíbrio ($f(x, \lambda) = 0$) está acima do sombreado, então esta fica contínua, se estiver abaixo do sombreado fica descontínua;
- (iv) Em termos de estabilidade, todos os pontos de equilíbrio que estejam sobre a linha contínua são estáveis e sobre a linha descontínua são instáveis;
- (v) Relativamente aos pontos de bifurcação, a sua estabilidade depende do que acontece à sua volta, ou seja, se nesses pontos traçarmos uma reta na horizontal e o sombreado estiver acima, o ponto de equilíbrio é instável, sendo representado por um ponto aberto no espaço dos parâmetros, se o sombreado estiver abaixo, o ponto de equilíbrio é estável, sendo representado por um ponto fechado.

Exemplo 42 [21, p. 38]: *Um cordão desliza sobre um fio circular liso de raio a que é restrito para girar em torno de um diâmetro vertical com velocidade angular constante ω . Analise a estabilidade do cordão.*

Resolução. O cordão tem um componente de velocidade $a\theta'$ tangente ao fio e um componente $a\omega \sin \theta$ perpendicular ao fio, onde θ é a inclinação do raio para o cordão, da vertical para baixo. A energia potencial V e cinética T são dadas por

$$T = \frac{1}{2}ma^2(\theta'^2 + \omega^2 \sin^2 \theta) \text{ e } V = -mga \cos \theta.$$

Como o sistema está sujeito a uma restrição de movimento, a equação de energia não se sustenta, logo, a equação de Lagrange para o sistema é a seguinte

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \theta'} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = - \frac{\partial V}{\partial \theta}$$

que origina

$$a\theta'' = a\omega^2 \sin \theta \cos \theta - g \sin \theta.$$

Definindo $\frac{a\omega^2}{g} = \lambda$, obtemos

$$a\theta'' = \frac{a\theta' d\theta'}{d\theta} = g \sin \theta (\lambda \cos \theta - 1)$$

e fazendo a respetiva integração, temos a equação dos caminhos de fase

$$\frac{1}{2}a\theta'^2 = g(1 - \frac{1}{2}\lambda \cos \theta) \cos \theta + C.$$

Usando a notação da equação do sistema dependente de parâmetros, obtemos

$$f(\theta, \lambda) = \frac{g \sin \theta (\lambda \cos \theta - 1)}{a},$$

logo, os pontos de equilíbrio são dados por

$$\begin{aligned} f(\theta, \lambda) = 0 &\Leftrightarrow \sin \theta (\lambda \cos \theta - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \sin \theta = 0 \vee \cos \theta = \frac{1}{\lambda}, \quad \lambda \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \theta = k\pi, k \in \mathbb{R} \vee \theta = \cos^{-1} \frac{1}{\lambda}, \quad 1/\lambda \in [-1, 1] \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

As regiões onde $f > 0$ e $f < 0$ são separadas por curvas onde $f = 0$ e podem ser localizadas verificando o sinal em alguns pontos específicos, por exemplo, $f\left(\frac{\pi}{2}, 1\right) = -\frac{g}{a} < 0$. Assim, como ilustra a **Figura 3.11**, todas as regiões onde $f > 0$ são sombreadas e as regiões onde $f < 0$ não são sombreadas. Quanto à linha dos pontos de equilíbrio, ou seja, onde $f(\theta, \lambda) = 0$, se esta está acima do sombreado ficou contínua, se está abaixo do sombreado ficou descontínua/tracejada.

Assim, conclui-se que quando $\lambda > 1$ ao traçar linhas retas verticais obtém-se um conjunto de pontos de intersecção com $f(\theta, \lambda) = 0$. Em alguns desses pontos, a curva $f(\theta, \lambda) = 0$ é contínua, logo obtemos uma família de pontos de equilíbrio estáveis $\theta = \cos^{-1} \frac{1}{\lambda}$ e noutros pontos $f(\theta, \lambda) = 0$ é descontínua, logo temos uma família de pontos de equilíbrio instáveis $\theta = k\pi$. Quando $0 < \lambda \leq 1$, fazendo o mesmo raciocínio, obtemos uma família de pontos de

equilíbrio estáveis $\theta = k\pi$ quando k é par e uma família de pontos instáveis $\theta = k\pi$ quando k é ímpar.

Quanto ao ponto A , este é chamado de ponto de bifurcação, sendo um ponto de equilíbrio estável. Neste caso, dado a sua forma, este ponto é chamado de **ponto de bifurcação de forquilha**.

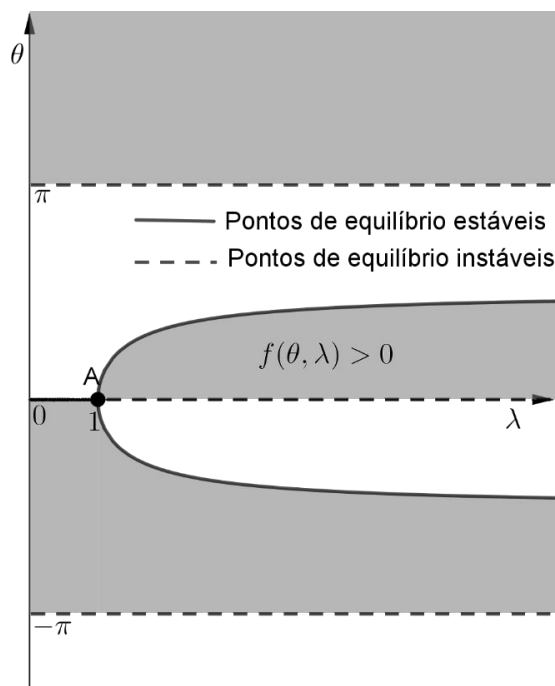


Figura 3.11: Diagrama de fases para o caso de um cordão deslizando sobre um fio circular.

3.4 Representação gráfica das soluções

As soluções e caminhos de fase do sistema

$$x' = y, \quad y' = f(x, y), \quad (64)$$

podem ser representadas graficamente de várias maneiras. Como foi visto anteriormente, as soluções de $\frac{dy}{dx} = \frac{f(x,y)}{y}$ são os caminhos no diagrama de fases (x, y) . Assim, como forma de comprovação, diferentes maneiras de exibir os caminhos e soluções da equação do pêndulo $x'' = -\sin x$ são ilustradas na **Figura 3.12**.

Se as soluções de $x'' = f(x, x')$ são conhecidas, seja exatamente ou numericamente, então o comportamento de x em termos de t pode ser visualizado num gráfico (x, t) como na **Figura 3.12(b)** para uma solução periódica do pêndulo.

Alternativamente, o tempo (t) pode ser adicionado como um terceiro eixo ao diagrama de fases para que as soluções possam ser encontradas parametricamente como $(x(t), y(t), t)$ em três dimensões (**Figura 3.12(c)**).

Se $f(x, x')$ é periódica em x , isto é, se existe um número C tal que $f(x + C, x') = f(x, x')$ para todo x , então os caminhos de fase em qualquer intervalo de x de comprimento C são repetidos em qualquer intervalo anterior ou posterior de comprimento C . Assim, as soluções podem ser enoveladas à volta de um cilindro de circunferência C . A **Figura 3.12(d)** mostra os caminhos de fase da **Figura 3.12(a)** marcados no cilindro, onde o eixo x é agora enrolado à volta do cilindro.

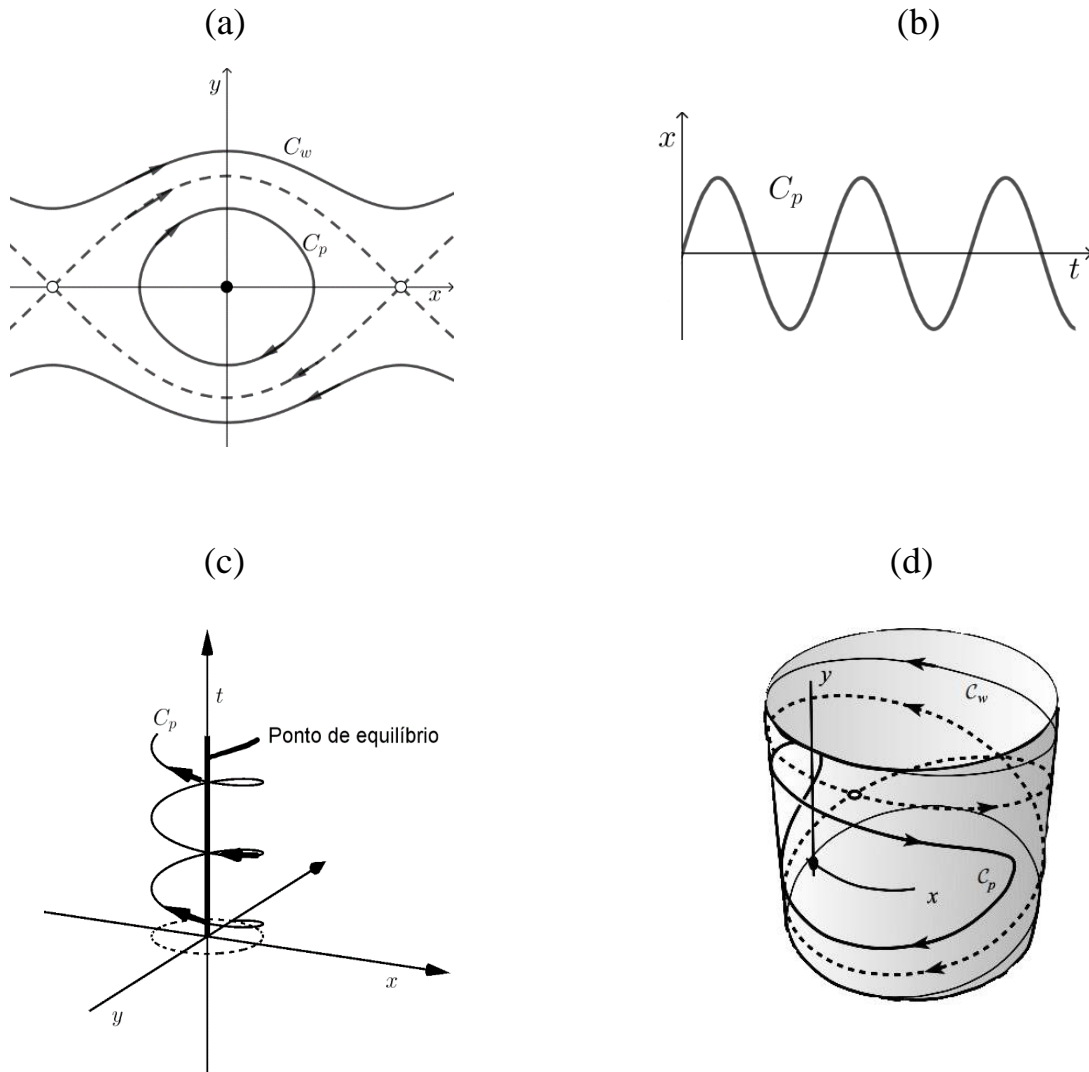


Figura 3.12: Diferentes formas de solução da equação do pêndulo $x'' + \sin x = 0$. Em particular, (a) a solução periódica \mathcal{L}_p e uma solução rodopiante \mathcal{L}_w no diagrama de fases; (b) como uma solução (x, t) ; (c) no espaço da solução (x, y, t) ; (d) numa superfície de fase cilíndrica que pode ser usada para equações diferenciais periódicas em x .

3.5 Algumas aplicações das equações diferenciais não-lineares de ordem superior

Nesta secção serão apresentadas algumas aplicações das equações diferenciais não-lineares de ordem superior, com vista a aplicar a teoria apresentada nas secções anteriores.

Primeiramente introduzimos o modelo da fricção a seco, seguido do modelo do relógio de pêndulo com o conceito de ciclo-limite e oscilação auto-animada. Os dois modelos apresentados têm por base as ideias desenroladas no livro de Jordan e Smith [21].

3.5.1 Modelo da fricção a seco

A fricção a seco ocorre quando as superfícies de dois sólidos estão em contacto e em movimento relativo sem lubrificação. Considerando o exemplo de uma correia contínua acionada por rolos a uma velocidade constante v_0 e de um bloco de massa m conectado a um suporte fixo por uma mola de rigidez c que repousa sobre a correia. Se F é a força de atrito entre o bloco e a correia e x é a extensão da mola, então a equação do movimento é dada por

$$mx'' + cx = F. \quad (65)$$

Suponhamos que F depende da velocidade de deslizamento $v_0 - x'$. Para pequenas velocidades de deslizamento, a força de atrito é proporcional à velocidade de deslizamento. Assim, para um dado valor fixo pequeno da velocidade de deslizamento s_c , a magnitude da força de atrito atinge o pico e gradualmente vai se aproximando de uma constante F_0 ou $-F_0$ para grandes velocidades de deslizamento.

Supondo agora um caso mais simples com descontinuidade na origem

$$F = F_0 \operatorname{sgn}(v_0 - x'), \quad (66)$$

onde F_0 é uma constante positiva e a função sgn (sinal) é definida por

$$\operatorname{sgn}(u) = \begin{cases} 1, & u > 0 \\ 0, & u = 0 \\ -1, & u < 0 \end{cases}.$$

A equação do movimento torna-se

$$mx'' + cx = F_0 \operatorname{sgn}(v_0 - x'), \quad (67)$$

donde as soluções para os caminhos de fase nessas regiões são dadas por

$$y = x' > v_0: my^2 + c \left(x + \frac{F_0}{x} \right)^2 = \text{constante}$$

e

$$y = x' < v_0: my^2 + c \left(x - \frac{F_0}{x} \right)^2 = \text{constante}.$$

Estas soluções são famílias de elipses deslocadas, onde a primeira apresenta o seu centro em $(-\frac{F_0}{c}, 0)$ e a segunda em $(\frac{F_0}{c}, 0)$. Efetuando uma mudança de variável $x' = x\sqrt{c}$ e $y' = y\sqrt{m}$, obtemos a equação dos caminhos de fase, ilustrados na **Figura 3.13** na forma não dimensional, representando arcos de círculos deslocados

$$y' > v_0\sqrt{m}: y'^2 + \left(x' + \frac{F_0}{\sqrt{c}}\right)^2 = \text{constante},$$

$$y' < v_0\sqrt{m}: y'^2 + \left(x' - \frac{F_0}{\sqrt{c}}\right)^2 = \text{constante}.$$

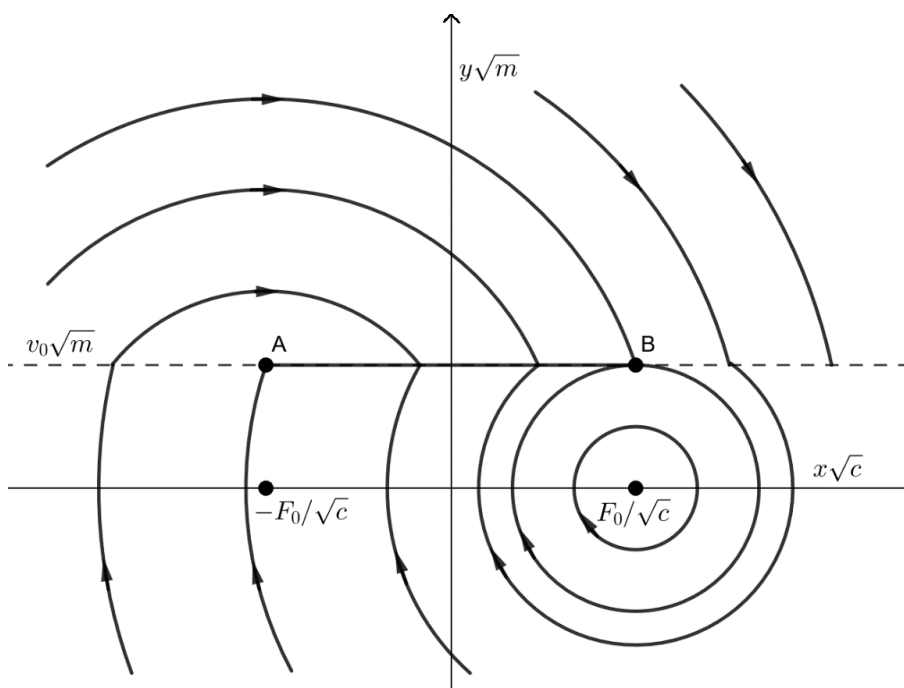


Figura 3.13: Diagrama de fases para o caso da fricção a seco.

Por análise da **Figura 3.13**, verificamos que existe um único ponto de equilíbrio estável (centro) $(\frac{F_0}{c}, 0)$ e obtemos o estado $x' = v_0$ para $|x| < F_0/c$, concluindo que o bloco se moverá com a correia ao longo de AB até que a fricção máxima disponível, F_0 , seja insuficiente para resistir à tensão crescente da mola. Isto ocorre em B quando $x = F_0/c$, tal que o bloco entra numa oscilação representada pelo caminho fechado C até $(F_0/c, v_0)$. De facto, para qualquer condição inicial situada fora dessa elipse o sistema se converge nessa oscilação.

3.5.2 Modelo do relógio de pêndulo: ciclo-limite

A "roda de escape" é uma roda dentada que aciona o relógio através de uma sucessão de engrenagens. Esta tem um fuso ao seu redor do qual está enrolado um arame com um peso na sua extremidade livre. A roda de escape é interrompida intermitentemente pela "âncora" que tem dois dentes. A âncora é presa ao eixo do pêndulo e balança com ele, controlando a rotação da roda de escape. A âncora e os dentes na roda de escape são projetados de tal modo que,

quando uma extremidade da âncora perde o contacto com um dente, a outra extremidade engata um dente, mas permite que a roda de escape gire através de um pequeno ângulo que gira as mãos do relógio.

Toda vez que isso acontece, a âncora recebe pequenos impulsos que são ouvidos como "marca" do relógio. Esses impulsos mantêm a oscilação do pêndulo que de outra forma desapareceria. A perda de energia potencial devido à descida do peso é, portanto, alimentada periodicamente no pêndulo através do mecanismo de ancoragem. Embora os impulsos empurrem o pêndulo na mesma direção a cada liberação da âncora, a forma da âncora garante que eles sejam ligeiramente diferentes em magnitude. Assim, se o pêndulo estiver balançando com uma amplitude muito grande, a sua perda de energia por ciclo, devido ao atrito, é grande, o impulso fornecido pelo escapamento é insuficiente para compensar isso e a amplitude consequentemente diminui.

Por sua vez, se a amplitude é muito pequena, a perda de atrito é pequena, os impulsos compensarão em excesso e a amplitude se acumulará. Um estado balanceado é então abordado no plano θ, θ' como uma curva fechada isolada C . Tal oscilação periódica isolada, ou ciclo-limite, pode ocorrer apenas em sistemas descritos por equações não-lineares.

Considerando o caso em que o movimento pode ser aproximado pela equação

$$I\theta'' + k\theta' + c\theta = f(\theta, \theta'), \quad (68)$$

onde I é o momento de inércia do pêndulo, k é uma pequena constante de amortecimento, c é outra constante determinada pela gravidade, θ é o deslocamento angular e $f(\theta, \theta')$ é o momento fornecido duas vezes por ciclo pelo mecanismo de escapamento. O momento $f(\theta, \theta')$ será dado por uma função não-linear em θ e θ' , portanto, a função do modelo é a seguinte

$$f(\theta, \theta') = \frac{1}{2} [(k_1 + k_2) + (k_1 - k_2)\text{sgn}(\theta')] \delta(\theta), \quad (69)$$

onde $\delta(\theta)$ é o impulso e k_1, k_2 são restrições positivas, ou seja, entregas de impulsos ao pêndulo quando $\theta = 0$. Por análise da função, conclui-se que, se $\theta' > 0$ então $f(\theta, \theta') = k_1 \delta(\theta)$, se $\theta' < 0$ então $f(\theta, \theta') = k_2 \delta(\theta)$ e o pêndulo é conduzido para superar o amortecimento se $k_2 > k_1$.

Nos relógios de pêndulo, a oscilação gerada por uma fonte de energia cuja entrada não é regulada externamente, mas que automaticamente se sincroniza com a oscilação existente, é chamada de **oscilação auto-animada** [22].

Capítulo 4

Sistemas dinâmicos de equações diferenciais ordinárias não-lineares

No capítulo anterior foi abordado a aplicação de métodos do diagrama de fases à equação $x'' = f(x, x')$ através do sistema de primeira ordem equivalente $x' = y, y' = f(x, y)$. No entanto, a formulação apropriada de problemas mecânicos, biológicos e geométricos não é feita por meio de uma equação de segunda ordem, mas sim com um tipo mais geral de sistema de primeira ordem da forma $x' = X(x, y), y' = Y(x, y)$.

Assim, o aparecimento destes sistemas representa um incentivo para a construção de um diagrama de fases com coordenadas x, y em que as soluções são representadas pelas curvas $(x(t), y(t))$, onde $x(t), y(t)$ são as soluções. Quanto aos pontos de equilíbrio, nesta situação, estes podem ocorrer em qualquer parte do plano. Portanto, neste capítulo, será abordado um pouco melhor esta temática, bem como o conceito de aproximação linear perto dos pontos de equilíbrio, resolução de equações mais simples e determinação do caráter local dos caminhos, algo que permite que a estabilidade dos pontos de equilíbrio seja estabelecida, representando assim, um ponto de partida para investigações globais das soluções.

4.1 Classificação dos sistemas dado a sua ordem

Antes de abordarmos qualquer sistema de equações diferenciais, é necessário sabermos qual o tipo de sistema que estamos a trabalhar. Para tal, nesta secção, iremos exemplificar como distinguir os sistemas de equações diferenciais ordinárias quanto à sua ordem.

4.1.1 Sistemas de primeira ordem

Um sistema de primeira ordem de equações diferenciais ordinárias é geralmente apresentado na forma

$$\frac{du_1}{dt} = F_1(t, u_1, \dots, u_n), \dots, \frac{du_n}{dt} = F_n(t, u_1, \dots, u_n), \quad (70)$$

onde u_1, \dots, u_n são funções escalares da variável independente t . O sistema (70) também pode ser escrito na forma vetorial

$$\frac{du}{dt} = F(t, u), \quad (71)$$

onde $u(t) = (u_1(t), \dots, u_n(t))^T$ e $F(t, u) = (F_1, \dots, F_n)^T$ com $F_i = F_i(t, u_1, \dots, u_n)$, função com $n + 1$ variáveis. Cada solução $u(t)$ serve para parametrizar uma curva $C \in \mathbb{R}^n$ também conhecida como trajetória ou órbita do sistema. As condições iniciais gerais são

$$u_1(t_0) = a_1, \dots, u_n(t_0) = a_n, \quad (72)$$

ou, em forma vetorial,

$$u(t_0) = a, \quad (73)$$

onde t_0 é um tempo inicial prescrito, enquanto o vetor $a = (a_1, \dots, a_n)^T$ fixa a posição inicial da solução desejada.

Um sistema de equações diferenciais é chamado de autônomo se o seu lado direito não depender explicitamente da variável independente t , apresentando a seguinte forma geral

$$\frac{du}{dt} = F(u), \quad (74)$$

onde $F(u) = v$ representa o campo vetorial da velocidade do fluido na posição u . A solução $u(t)$ para o problema de valor inicial (73) ou (74) descreve o movimento de uma partícula de fluido que começa na posição a no tempo t_0 , tal que a equação diferencial nos diz que a velocidade do fluido em cada ponto da trajetória da partícula corresponde ao campo vetorial prescrito. Neste tipo de sistemas, um ponto de equilíbrio é constante ($u(t) \equiv u^*$ para todo t), se cada ponto de equilíbrio surge como uma solução para o sistema de equações algébricas

$$F(u^*) = 0. \quad (75)$$

Definição 43 [9]: Um ponto de equilíbrio u^* para um sistema autônomo de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem é chamado

- **Estável**, se para todo (pequeno) $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que, toda a solução $u(t)$ tendo condições iniciais dentro da distância $\delta > \|u(t_0) - u^*\|$ do ponto de equilíbrio permanece dentro da distância $\varepsilon > \|u(t) - u^*\|$ para todo $t \geq t_0$;
- **Assintoticamente estável**, se é estável e, além disso, existe $\delta_0 > 0$ tal que, sempre que $\delta_0 > \|u(t_0) - u^*\|$ temos $u(t) \rightarrow u^*$ quando $t \rightarrow \infty$.

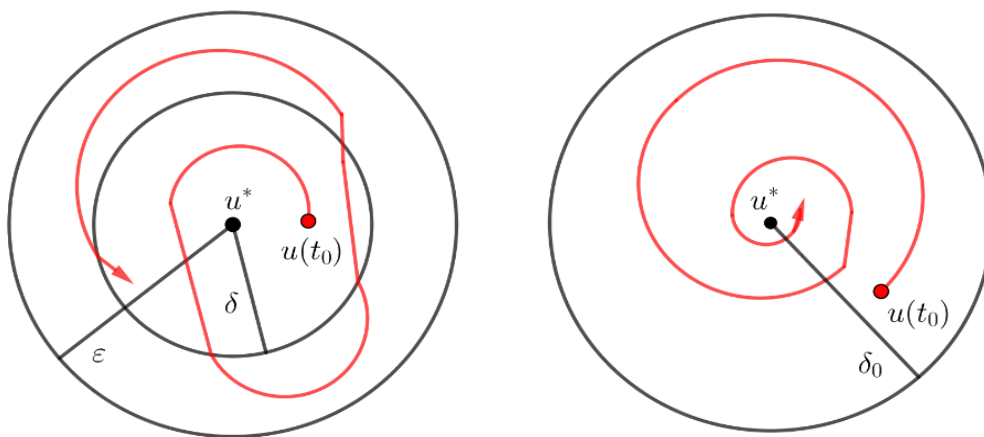


Figura 4.1: Estabilidade dos pontos de equilíbrio: estável (esquerda) e assintoticamente estável (direita).

Assim, como se pode visualizar na **Figura 4.1**, embora as soluções próximas a um ponto de equilíbrio estável possam se afastar um pouco, elas devem permanecer relativamente próximas ao ponto de equilíbrio, enquanto que, no caso da estabilidade assintótica, estas soluções convergem para o ponto de equilíbrio.

4.1.2 Sistemas de ordem superior

Muitas aplicações físicas levam a sistemas de equações diferenciais ordinárias de ordem superior. No entanto, há uma simples reformulação que os converterá em sistemas equivalentes de primeira ordem. Além disso, os esquemas de solução numérica para os problemas de valor inicial de ordem superior são inteiramente baseados na sua reformulação como sistema de primeira ordem.

Assim, para tal, nas equações diferenciais de segunda ordem

$$u'' = F(t, u, u'), \quad (76)$$

introduz-se uma nova variável dependente $v = u'$ e, desde que, $v' = u''$ as funções u e v satisfazem o sistema equivalente de primeira ordem

$$u' = v, \quad v' = F(t, u, v). \quad (77)$$

Por outro lado, é fácil verificar que se $u(t) = (u(t), v(t))^T$ é qualquer solução para o sistema de primeira ordem, então a sua primeira componente $u(t)$ define uma solução para a equação escalar que estabelece a sua equivalência. Além disso, as condições iniciais básicas $u(t_0) = u_0$ e $v(t_0) = v_0$ para o sistema de primeira ordem traduzem-se num par de condições iniciais $u(t_0) = u_0$ e $u'(t_0) = v_0$ especificando o valor da solução e da sua derivada de primeira ordem para a equação de segunda ordem.

Da mesma forma, dada uma equação de terceira ordem

$$u''' = F(t, u, u', u''), \quad (78)$$

assumindo,

$$v = u', \quad w = v' = u'', \quad (79)$$

as variáveis u, v e w satisfazem o sistema equivalente de primeira ordem

$$u' = v, \quad v' = w \quad \text{e} \quad w' = F(t, u, v, w). \quad (80)$$

Exemplo 44 [9, p. 11]: *Considere a equação de Van der Pol dada por*

$$u'' + (u^2 - 1)u' + u = f(t). \quad (81)$$

A Equação (81) surge na modelagem de um circuito elétrico com um tríodo¹ cuja resistência muda com a corrente. Para converter a Equação (81) num sistema equivalente de primeira ordem, assume-se que $v = u'$, donde

¹ Válvula termiônica de três elétrodos que contém um cátodo incandescente, uma placa e uma grelha [36].

$$v' = f(t) - (u^2 - 1)v - u$$

é o sistema do diagrama de fases equivalente.

Observação 45: Existe uma técnica simples que converterá qualquer sistema não autónomo num sistema autónomo equivalente envolvendo uma variável adicional, nomeadamente, introduz-se uma coordenada extra $u_0 = t$ para representar o tempo, que satisfaz a equação diferencial elementar $du_0/dt = 1$ com a condição inicial $u_0(t_0) = t_0$. Assim, o sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem pode ser escrito na forma autónoma

$$\frac{du_0}{dt} = 1, \quad \frac{du_1}{dt} = F_1(u_0, u_1, \dots, u_n), \dots, \frac{du_n}{dt} = F_n(u_0, u_1, \dots, u_n). \quad (82)$$

Por exemplo, a forma autónoma do sistema de Van der Pol é a seguinte

$$\frac{du_0}{dt} = 1, \quad \frac{du_1}{dt} = u_2, \quad \dots, \quad \frac{du_2}{dt} = f(u_0) - (u_1^2 - 1)u_2 - u_1,$$

onde u_0 representa a variável tempo.

4.2 Solução geral de sistemas de equações diferenciais de primeira ordem

Por vezes, podemos ter duas equações diferenciais onde as variáveis estão relacionadas entre si, ou seja, temos um sistema de equações diferenciais. Nesta secção, iremos demonstrar como resolver um sistema de equações diferenciais de primeira ordem, de modo a obter a sua solução geral através de dois métodos: matricial e não matricial [23, 17, 14].

4.2.1 Método não matricial (ou de substituição)

Considerando o facto de que as variáveis x e y dependem de uma variável independente t e que estão relacionadas entre si de acordo com a seguinte lei

$$\begin{cases} x'(t) + ax(t) + by(t) = f(t) \\ y'(t) + cy(t) + dx(t) = g(t) \end{cases} \quad (83)$$

onde a, b, c e d são constantes e f e g são funções reais de variável real dependentes da variável t , a técnica para se resolver o sistema (83) reside no facto de se derivar uma das equações e substituir as respetivas expressões na outra equação, resultando assim, numa equação linear com coeficientes constantes de segunda ordem.

Assumindo o caso em que $f(t) = g(t) = 0$, a primeira equação do sistema (83) é equivalente a

$$y(t) = \frac{-x'(t) - ax(t)}{b}, b \neq 0. \quad (84)$$

Derivando y em ordem à variável t e substituindo y e y' na segunda equação do sistema (83), vem que

$$y'(t) = \frac{-x''(t) - ax'(t)}{b},$$

$$\frac{-x''(t) - ax'(t)}{b} + c \frac{-x'(t) - ax(t)}{b} + dx(t) = 0. \quad (85)$$

A Equação (85) é equivalente a $x''(t) + (a+c)x'(t) + (ac-bd)x(t) = 0$ que é uma equação linear de segunda ordem com coeficientes constantes, cujo polinómio característico é $r^2 + (a+c)r + ac - bd = 0$. Esta equação apresenta como solução geral 3 casos distintos:

- (i) Se as raízes forem reais distintas r_1 e r_2 : $x(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$;
- (ii) Se as raízes forem complexas conjugadas na forma $r = \alpha \pm \beta i$: $x(t) = e^{\alpha t} (A \cos \beta t + B \sin \beta t)$, $A, B \in \mathbb{R}$;
- (iii) Se a raiz for real dupla r : $x(t) = e^{rt} (c_1 + c_2 t)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Se, por título de exemplo, as raízes forem reais distintas, então

$$x(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \quad (86)$$

Substituindo na expressão $y(t) = \frac{-x'(t) - ax(t)}{b}$ resulta

$$y(t) = -\frac{r_1 + a}{b} c_1 e^{r_1 t} - \frac{r_2 + a}{b} c_2 e^{r_2 t}.$$

Assim, a solução geral do sistema homogéneo é

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} \\ y(t) = -\frac{r_1 + a}{b} c_1 e^{r_1 t} - \frac{r_2 + a}{b} c_2 e^{r_2 t}, \end{cases} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \quad (87)$$

No caso de um sistema com mais do que duas equações, pode-se utilizar este método. Contudo, devido a manipulação algébrica constata-se que este método não é prático.

4.2.2 Método matricial

Um sistema de primeira ordem com n equações diferenciais de coeficientes constantes com funções incógnitas y_1, y_2, \dots, y_n , pode ser representado na forma

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n + f_1 \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n + f_2 \\ \vdots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n + f_n \end{cases}, \quad (88)$$

onde f_1, f_2, \dots, f_n representam funções na mesma variável independente que as incógnitas do sistema. O sistema (88) pode ser escrito na forma matricial

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}, \quad (89)$$

ou, em forma notacional,

$$Y' = AY + F. \quad (90)$$

Sistema homogêneo

Este sistema toma a forma $Y' = AY$.

Teorema 46: A solução geral do sistema de equações diferenciais lineares homogêneas de primeira ordem com coeficientes constantes $Y' = AY$ é dada por

$$Y = c_1 v^1 e^{\lambda_1 x} + c_2 v^2 e^{\lambda_2 x} + \dots + c_n v^n e^{\lambda_n x}, \quad (91)$$

onde v_1, v_2, \dots, v_n representam os n vetores próprios linearmente independentes da matriz quadrada A associados aos valores próprios $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ e c_1, c_2, \dots, c_n representam constantes arbitrárias.

Vamos detalhadamente estudar os vários casos possíveis para matrizes do tipo 2×2 :

- **Caso 1:** A matriz A possui 2 valores próprios reais distintos;
- **Caso 2:** A matriz A possui um valor próprio real duplo;
- **Caso 3:** A matriz A possui 2 valores próprios complexos conjugados.

Caso 1: A matriz A tem 2 valores próprios distintos $\lambda_1 \neq \lambda_2$ com vetores próprios independentes associados v^1 e v^2 . Neste caso,

$$y^1 = v^1 e^{\lambda_1 x} \text{ e } y^2 = v^2 e^{\lambda_2 x} \quad (92)$$

são duas soluções linearmente independentes e a solução geral do sistema toma a forma

$$Y(x) = c_1 v^1 e^{\lambda_1 x} + c_2 v^2 e^{\lambda_2 x}. \quad (93)$$

Exemplo 47: Determine a solução do sistema

$$\begin{cases} x' = 3x - 4y \\ y' = x - 2y \end{cases}.$$

Resolução. A matriz A é $\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$. Os valores próprios de A são $\lambda = 2$ e $\lambda = -1$. Quanto aos vetores próprios, começamos pelo valor próprio $\lambda = -1$. Teremos de resolver o sistema $Av = -1v$, ou seja,

$$\begin{cases} 3v_1 - 4v_2 = -v_1 \\ v_1 - 2v_2 = -v_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = v_2 \\ v_2 \text{ qualquer} \end{cases} \Rightarrow (v_1, v_1) = v_1(1,1).$$

Para o valor próprio $\lambda = 2$, resolvemos o sistema $Av = 2v$ e obtemos $v_2(4,1)$, v_2 qualquer. Assim, a solução geral do sistema é dada por

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{-t} + 4c_2 e^{2t} \\ y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} \end{cases}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Caso 2: A matriz A tem um valor próprio duplo λ com vetor próprio associado v . Uma solução é $y^1(x) = v e^{\lambda x}$ e a outra solução y^2 , independente de y^1 , é da forma $y^2(x) = (xv + u)e^{\lambda x}$, onde u é um vetor a determinar. A solução geral, neste caso, é dada por

$$Y(x) = c_1 v e^{\lambda x} + c_2 (xv + u)e^{\lambda x}, \quad (94)$$

sendo u o vetor que verifica a relação $(A - \lambda I)u = v$.

Exemplo 48: Resolva o sistema

$$\begin{cases} y_1'(x) = 4y_1 + y_2 \\ y_2'(x) = -y_1 + 2y_2 \end{cases}.$$

Resolução. A matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ tem o valor próprio $\lambda = 3$ com multiplicidade 2. Um vetor próprio associado a $\lambda = 3$ é, por exemplo, $v = (1, -1)$. Vamos determinar o vetor $u = (u_1, u_2)$ tal que $(A - \lambda I)u = v$, isto é,

$$\left(\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Daqui decorre que

$$\begin{cases} u_1 + u_2 = 1 \\ -u_1 - u_2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_2 = 1 - u_1 \\ u_1 \text{ qualquer} \end{cases}.$$

Como $(u_1, 1 - u_1) = u_1(1, -1) + (0, 1)$, então u poderá ser $(0, 1)$. Logo, a solução geral do sistema é

$$\begin{cases} y_1(x) = (c_1 + c_2 x)e^{3x} \\ y_2(x) = (-c_1 + c_2 - c_2 x)e^{3x} \end{cases}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Caso 3: A matriz A tem 2 valores próprios complexos conjugados $\lambda = \alpha \pm \beta i$ com vetores próprios associados v e \bar{v} . Uma solução complexa do sistema é

$$y_c(x) = v e^{\lambda x} = v e^{(\alpha + \beta i)x}. \quad (95)$$

Como queremos determinar uma solução real do sistema, resulta que

$$y(x) = c_1 \operatorname{Re}(v e^{(\alpha + \beta i)x}) + c_2 \operatorname{Im}(v e^{(\alpha + \beta i)x}), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \quad (96)$$

Exemplo 49: Determine a solução do sistema

$$\begin{cases} x' = 4x + 5y \\ y' = -2x - 2y \end{cases}.$$

Resolução. Os valores próprios da matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$ são $\lambda_1 = 1 + i$ e $\lambda_2 = 1 - i$. Determinemos agora o vetor próprio associado a $\lambda_1 = 1 + i$. Este decorre da solução de $(A - (1 + i)I)X = 0$, ou seja,

$$\begin{bmatrix} 3 - i & 5 \\ -2 & -2 - (1 + i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Daqui advém que

$$\begin{cases} (3 - i)x_1 + 5x_2 = 0 \\ -2x_1 + (-3 - i)x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{(i - 3)x_1}{5} \\ x_1 \text{ qualquer} \end{cases}.$$

Escolhemos, por uma questão de simplicidade, $x_1 = 5$. Assim, $x_2 = i - 3$ e, deste modo, podemos considerar o vetor próprio associado a λ_1 como $v = (5, -3 + i)$. Uma solução complexa do sistema é então dada por $Y_c = ve^{\lambda_1 t}$, que é equivalente a

$$\begin{bmatrix} x_c \\ y_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 + i \end{bmatrix} e^{(1+i)t} = \begin{bmatrix} 5e^t \cos t \\ (-3 \cos t - \sin t)e^t \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 5e^t \sin t \\ (\cos t - 3 \sin t)e^t \end{bmatrix}.$$

Consequentemente, a solução real é

$$\begin{cases} x(t) = 5c_1 \cos(t) e^t + 5c_2 \sin(t) e^t \\ y(t) = (c_2 - 3c_1) \cos(t) e^t - (c_1 + 3c_2) \sin(t) e^t \end{cases}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Sistema não homogéneo

Este sistema toma a forma $Y' = AY + F$, onde $F = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ sendo f_1 e f_2 funções reais de variável real contínuas. A solução geral pode ser obtida pelo método da variação das constantes seguindo as seguintes etapas:

1. Resolvemos o sistema homogéneo associado $Y' = AY$, cuja solução geral é dada por $Y = Y_h C = Y_h \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$, em que Y_h representa uma matriz quadrada do tipo 2×2 e C é uma matriz coluna do tipo 2×1 ;
2. A solução geral do sistema completo é calculada pelo método da variação das constantes. Escrevendo $Y(x) = Y_h(x)C(x) = Y_h(x) \begin{bmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{bmatrix}$ pretende-se determinar as funções c_1 e c_2 . Como Y é solução da equação completa, substituindo Y e Y' no sistema inicial obtemos $Y'_h C + Y_h C' = AY_h C + F$. Como $Y'_h C = AY_h C$, a equação anterior reduz-se à equação $Y_h C' = F$, equivalente por sua vez a $C' = Y_h^{-1} F$, sendo Y_h^{-1} a matriz inversa de Y_h e F a matriz dos termos independentes do sistema inicial.

Teorema 50: A solução geral do sistema não homogêneo é dada por

$$Y(x) = Y_h(x) \int Y_h^{-1}(x)F(x), \quad (97)$$

onde as matrizes $Y_h(x)$ e $Y_h^{-1}(x)$ são determinadas como se ilustra acima.

Exemplo 51: Resolva o sistema $\begin{cases} x' = 3x - 4y + e^{-2t} \\ y' = x - 2y - 3e^{-2t} \end{cases}$.

Resolução. Este sistema é equivalente a

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{-2t} \\ -3e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

A solução geral do sistema homogêneo associado é dada por

$$Y_h(t) = \begin{bmatrix} x_h(t) \\ y_h(t) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} = \begin{bmatrix} 4e^{2t} & e^{-t} \\ e^{2t} & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

Vamos agora determinar a matriz inversa da matriz $Y_h(t)$. Antes recordemos que se $\det|B| = \det \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$, então a matriz inversa de B , B^{-1} , pode ser determinada por

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}. \quad (98)$$

Deste modo vem que

$$Y_h^{-1} = \frac{1}{3e^t} \begin{bmatrix} e^{-t} & -e^{-t} \\ -e^{2t} & 4e^{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{e^{-2t}}{3} & \frac{-e^{-2t}}{3} \\ \frac{-e^t}{3} & \frac{4e^t}{3} \end{bmatrix}.$$

Assim, o vetor das variáveis $C(x)$ é dado por

$$\begin{aligned} C(t) = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} &= \int Y_h^{-1}(x)f(t)dt = \int \left(\begin{bmatrix} \frac{e^{-2t}}{3} & \frac{-e^{-2t}}{3} \\ \frac{-e^t}{3} & \frac{4e^t}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-2t} \\ -3e^{-2t} \end{bmatrix} \right) dt \\ &= \begin{bmatrix} \int \frac{4}{3} e^{-4t} dt \\ \int -\frac{13}{3} e^{-t} dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{3} e^{-4t} + k_1 \\ \frac{13}{3} e^{-t} + k_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Substituindo $C(t)$ na expressão $Y(t) = Y_h(t)C(t)$ resulta

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3e^{-2t} + 4k_1e^{2t} + k_2e^{-t} \\ 4e^{-2t} + k_1e^{2t} + k_2e^{-t} \end{bmatrix},$$

onde k_1 e k_2 são constantes arbitrárias.

4.3 Diagrama de fases

Considere o sistema geral de primeira ordem dado por

$$x' = X(x, y), \quad y' = Y(x, y). \quad (99)$$

O sistema (99) é **autônomo**, uma vez que a variável de tempo t não aparece no lado direito das equações diferenciais. Assim, as soluções $x(t)$ e $y(t)$ podem ser representadas num plano de eixos cartesianos x e y , tal que, à medida que a variável independente t vai aumentando, $(x(t), y(t))$ traçam uma curva direcionada no plano xOy denominado **caminho de fase**.

Para este tipo de sistemas, as condições iniciais são representadas da seguinte forma

$$x = x_0, y = y_0 \quad \text{com} \quad t = t_0, \quad (100)$$

onde x_0 e y_0 são os valores iniciais no tempo t_0 . Pelo **Teorema 12**, existe uma e apenas uma solução que satisfaz essa condição quando (x_0, y_0) é um "ponto comum". Isso não significa que exista um e apenas um caminho de fase através do ponto (x_0, y_0) no diagrama de fases, pois esse mesmo ponto pode servir como condições iniciais para outros tempos iniciais. Portanto, pode surgir outros caminhos de fase através do mesmo ponto fazendo com que o diagrama de fases seja um enovelado de curvas cruzadas.

Assim, para os sistemas, a **equação dos caminhos** no diagrama de fases é a seguinte

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y(x, y)}{X(x, y)}. \quad (101)$$

No diagrama de fases, os sinais de X e Y em qualquer ponto específico determinam a direção através do ponto, e geralmente, as direções em todos os outros pontos podem ser determinadas pela exigência de continuidade da direção dos caminhos adjacentes. Os **pontos de equilíbrio** do sistema são todos os pontos onde $X(x, y)$ e $Y(x, y)$ são iguais a zero, ou seja,

$$\begin{cases} x' = X(x, y) = 0 \\ y' = Y(x, y) = 0 \end{cases} \quad (102)$$

Se x_1 e y_1 são soluções das igualdades anteriores, então $x(t) = x_1$ e $y(t) = y_1$ são **soluções constantes** (pontos de equilíbrio) do sistema de primeira ordem autônomo e são representados por caminhos de fase degenerados [15].

Os caminhos de fase que intersectam a curva definida pela equação $Y(x, y) = cX(x, y)$ fazem-no todos com a mesma inclinação c tal que, tais curvas são conhecidas como **isoclínicas**. As duas isoclínicas particulares $Y(x, y) = 0$, cujo caminhos intersectam com inclinação zero, e $X(x, y) = 0$, cujo caminhos intersectam com inclinação infinita, são úteis no desenho do diagrama de fases. Os pontos onde essas isoclínicas se cruzam definem os pontos de equilíbrio e, numa região do plano xOy em que $X(x, y) > 0$ e $Y(x, y) > 0$ ou $X(x, y) < 0$ e $Y(x, y) < 0$, os caminhos da fase devem ter inclinações positivas. Da mesma forma, se $X(x, y)$ e $Y(x, y)$ tiverem sinais opostos numa dada região, então os caminhos de fase devem ter inclinações negativas.

Exemplo 52 [21, p. 50]: Localize os pontos de equilíbrio e esboce os caminhos de fase do sistema

$$x' = y(1 - x^2), \quad y' = -x(1 - y^2). \quad (103)$$

Resolução. Os pontos de equilíbrio ocorrem quando

$$\begin{cases} x' = 0 \\ y' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(1 - x^2) = 0 \\ -x(1 - y^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 1 \\ y = \pm 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -1 \\ y = \pm 1 \end{cases}.$$

Logo, existem cinco pares de soluções $(0,0)$, $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,1)$ e $(-1,-1)$ que são pontos de equilíbrio. A equação dos caminhos de fase é dada por

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x(1 - y^2)}{y(1 - x^2)}. \quad (104)$$

Como a Equação (104) é de primeira ordem de variáveis separáveis, então

$$\begin{aligned} -\int \frac{x dx}{1 - x^2} &= \int \frac{y dy}{1 - y^2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \ln|1 - x^2| = -\frac{1}{2} \ln|1 - y^2| + C \\ &\Leftrightarrow (1 - x^2)(1 - y^2) = A, \quad A \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Existem soluções especiais ao longo das linhas $x = \pm 1$ e $y = \pm 1$, onde $A = 0$. Estas soluções e as localizações dos pontos de equilíbrio ajudam-nos a representar o diagrama de fases.

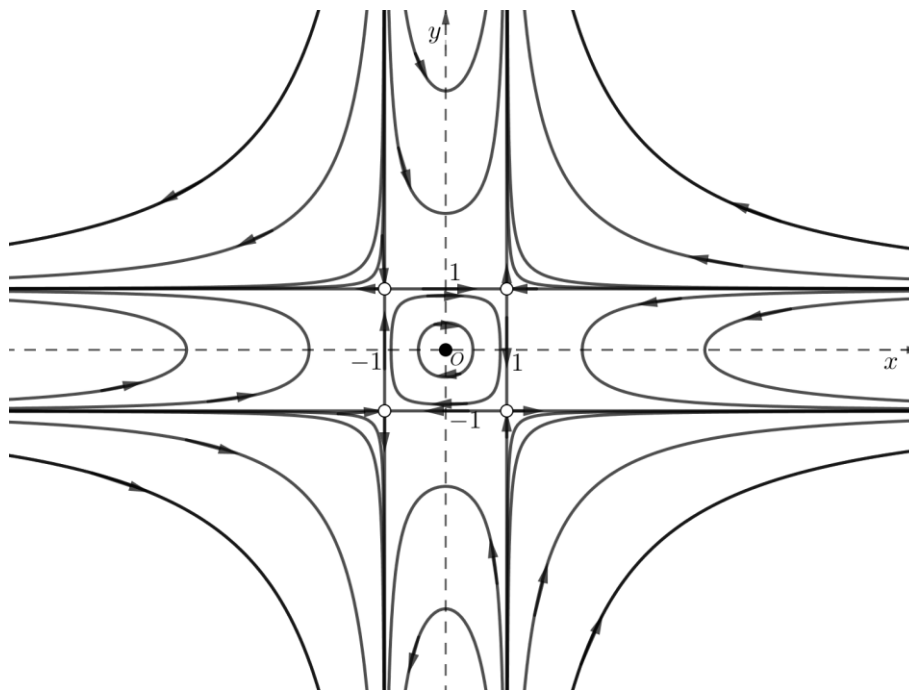


Figura 4.2: Diagrama de fases para o sistema $x' = y(1 - x^2); y' = -x(1 - y^2)$, onde as linhas tracejadas representam as isoclínicas de inclinação zero e infinita.

Assim, como podemos observar na **Figura 4.2**, primeiro traçamos as curvas integrais contantes (curvas dos pontos de equilíbrio onde $A = 0$) e, em seguida, identificamos as direções dos caminhos, sabendo que estas podem ser encontradas por continuidade. Por exemplo, no ponto $(0,1)$ $x' = 1(1 - 0) = 1 > 0$ (função constante) e $y' = 0(1 - 1) = 0$ (função constante), portanto, o caminho de fase tem direção da esquerda para a direita, ou seja, para saber a

direção dos caminhos no diagrama de fases, analisamos o sinal de x' e y' do sistema (103) em pontos pertencentes as curvas dos pontos de equilíbrio [15]. Por conseguinte, representamos as diferentes curvas integrais para os diferentes valores da constante A da equação dos caminhos e, para estas curvas, a sua direção segue a mesma dada nas curvas dos pontos de equilíbrio ao seu redor.

Por fim, para analisar a estabilidade dos pontos de equilíbrio, analisamos o que acontece à sua volta dado a direção dos caminhos. Assim, o ponto $(0,0)$ é um centro (solução periódica), ponto de equilíbrio estável, sendo representado por um ponto fechado no diagrama de fases, enquanto que, todos os outros pontos de equilíbrio em qualquer intervalo de A são pontos de equilíbrio instáveis (pontos de sela), uma vez que à sua volta por um lado as órbitas convergem por outro estas divergem, sendo assim representados por pontos abertos.

Exemplo 53 [21, p. 52]: Compare os diagramas de fases dos sistemas (i) $x' = y, y' = -x$ e (ii) $x' = xy, y' = -x^2$.

Resolução. Os pontos de equilíbrio dos sistemas (i) e (ii) são $(0,0)$ e $(0,y)$ respetivamente. A equação dos caminhos é a mesma em ambos os sistemas, ou seja,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \Leftrightarrow \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C \Leftrightarrow y^2 + x^2 = 2C, \quad C \in \mathbb{R} \text{ e } C \geq 0.$$

No entanto, como ilustra a **Figura 4.3**, no primeiro caso existe apenas um ponto de equilíbrio, enquanto que, no segundo caso, todos os pontos do eixo Oy são pontos de equilíbrio.

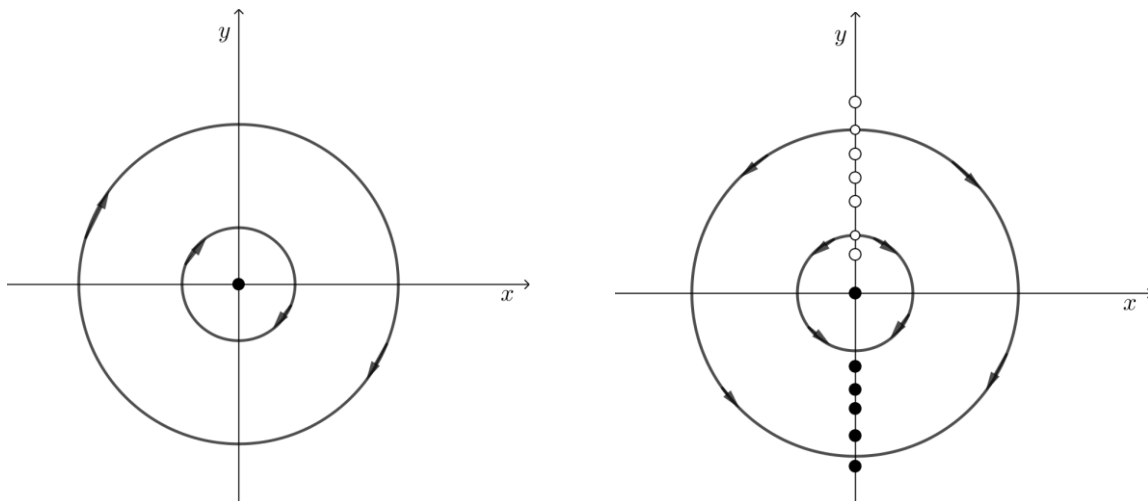


Figura 4.3: Diagrama de fases dos sistemas $x' = y; y' = -x$ (esquerda) e $x' = xy; y' = -x^2$ (direita).

Ao considerar o sinal de x' e y' nos vários quadrantes, ou seja, com o objetivo de determinar a direção dos caminhos, analisasse o sinal de x' e y' utilizando pontos pertencentes a cada quadrante. Por exemplo, no ponto $(1,1)$, no primeiro caso, $x' > 0$ e $y' < 0$ logo x cresce e y decresce, portanto, como as órbitas não intersectam o ponto de equilíbrio, por continuidade, a direção é sempre a mesma no sentido horário, fazendo com que o ponto de equilíbrio seja estável (centro). Já no segundo caso, no mesmo ponto, $x' > 0$ e $y' < 0$ logo x cresce e y

decrece. Contudo, como as órbitas intersectam a linha dos pontos de equilíbrio (eixo Oy) a direção das órbitas pode mudar, que é o que acontece neste caso. Assim, obtemos uma família de pontos de equilíbrio instáveis quando $y > 0$ (as órbitas divergem dos pontos de equilíbrio) e uma família de pontos de equilíbrio estáveis quando $y \leq 0$ (as órbitas convergem para os pontos de equilíbrio).

Exemplo 54 (Modelo predador-presa (modelo de Lotka-Volterra)) [21, p. 53]: Num lago existem duas espécies de peixes: A (a presa) que vive em plantas das quais existe um suprimento abundante e B (o predador) que subsiste ao comer A . Seja $x(t)$ a população de A e $y(t)$ a de B , assumindo que A tenha uma vida relativamente longa e se reproduza rapidamente se for deixado em paz, então com o tempo δt há um aumento populacional dado por

$$ax\delta t, \quad a > 0.$$

Devido a nascimentos e mortes "naturais" e "aumento negativo" temos

$$-cxy\delta t, \quad c > 0.$$

Pelo facto de A ser comido por B , o aumento da população líquida de A , δx , é dado por

$$\delta x = ax\delta t - cxy\delta t.$$

Portanto, no limite, $\delta t \rightarrow 0$ e temos

$$x' = ax - cxy.$$

Supondo que, na ausência de presas, a taxa de inanição de B predomine sobre a taxa de natalidade, mas que o crescimento compensatório de B seja novamente proporcional ao número de encontros com A , então

$$y' = -by + xyd, \quad b > 0, \quad d > 0.$$

Para este sistema de primeira ordem, os pontos de equilíbrio são $(0,0)$ e $(\frac{b}{d}, \frac{a}{c})$. A equação dos caminhos de fase é dada por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(-b + xd)y}{(a - cy)x}. \quad (105)$$

Como a Equação (105) é de variáveis separáveis, então

$$\int \frac{a - cy}{y} dy = \int \frac{-b + xd}{x} dx \Leftrightarrow a \ln y + b \ln x - cy - xd = C,$$

onde C é uma constante arbitrária, ou seja, este é um sistema de curvas fechadas centralizadas no ponto de equilíbrio $(\frac{b}{d}, \frac{a}{c})$, como se observa na **Figura 4.4**. A direção dos caminhos pode ser obtida a partir do sinal de x' num único ponto e, por conseguinte, isso determina as direções em todos os outros pontos por continuidade.

A partir das equações de x' e y' , as isoclínicas de inclinação zero ocorrem em $y' = 0$, ou seja, nas linhas $y = 0$ e $y = dx/b$ e as de inclinação infinita em $x' = 0$, ou seja, nas linhas $x = 0$ e $y = ax/c$. Como os caminhos estão fechados, as flutuações de $x(t)$ e $y(t)$, a partir de qualquer população inicial, são periódicas, sendo que a população máxima de A fica cerca

de um quarto de período atrás da população máxima de B. À medida que A é comido, fazendo com que B prospere, a população x de A é reduzida, causando eventualmente uma queda na de B. Assim, a escassez de predadores leva ao ressurgimento de A e o ciclo recomeça.

Contudo, uma mudança repentina de estado devido a causas externas coloca o estado do sistema numa outra curva fechada, não sendo prevista nenhuma tendência para uma população em equilíbrio nem para a população desaparecer. Ainda assim, verifica-se que, se uma das populações pudesse se extinguir, então essa população seria a do predador, uma vez que quando atinge o seu máximo vai convergindo para zero, enquanto que a população de presas parte sempre de um valor próximo de zero.

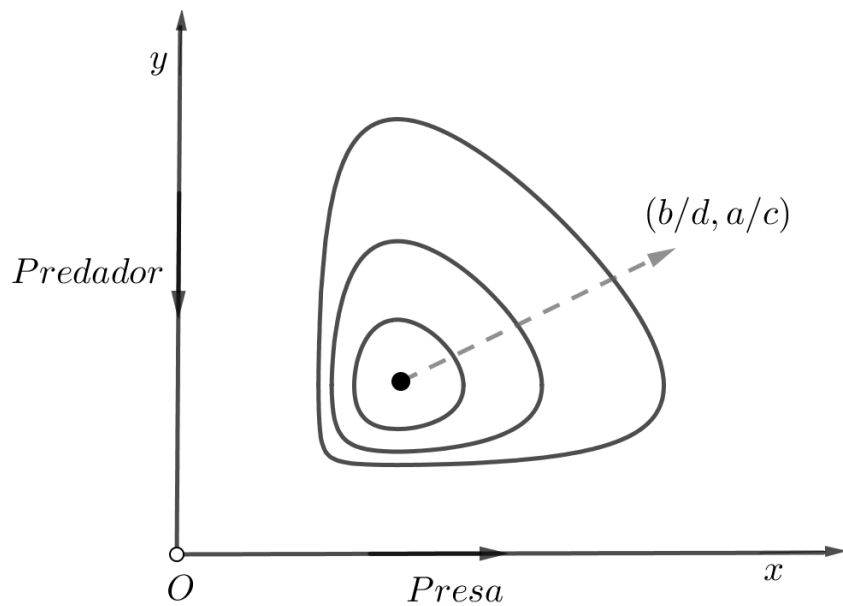


Figura 4.4: Típico diagrama de fases para o modelo predador-presa.

Observação 55: O tempo T decorrido ao longo de um segmento C de um caminho de fase ligando dois estados é dado por

$$T = \int_C dt = \int_C \left(\frac{dx}{dt}\right)^{-1} \left(\frac{dx}{dt}\right) dt = \int_C \frac{dx}{X(x,y)}. \quad (106)$$

Como alternativa, seja ds um elemento de comprimento de C , então $ds^2 = dx^2 + dy^2$ no caminho de fase e

$$T = \int_C \left(\frac{ds}{dt}\right)^{-1} \left(\frac{ds}{dt}\right) dt = \int_C \frac{ds}{(X^2 + Y^2)^{1/2}}. \quad (107)$$

Os integrais acima dependem apenas de X , Y e da geometria do caminho de fase, portanto, a escala de tempo está implícita no diagrama de fases.

Resumidamente, para desenhar o diagrama de fases para sistemas autónomos de equações diferenciais não-lineares de primeira ordem, com a variável independente t e dependentes $x(t)$ e $y(t)$, procedemos da seguinte maneira:

- (i) Calculamos os pontos de equilíbrio do sistema: $x' = 0$ e $y' = 0$;

- (ii) Obtemos a equação dos caminhos de fase através da equação: $\frac{dy}{dx} = \frac{Y(x,y)}{X(x,y)}$;
- (iii) Desenhemos as curvas que passam nos pontos de equilíbrio, bem como as restantes curvas integrais de acordo com a expressão da equação dos caminhos para os diferentes valores da constante;
- (iv) Analisamos o sinal de x' e y' nos vários quadrantes, utilizando pontos pertencentes as curvas integrais que passam nos pontos de equilíbrio, tendo o cuidado de que quando estas se intersectam a direção das curvas integrais pode mudar. Em seguida, por questões de continuidade, a direção das restantes curvas integrais nos restantes intervalos da constante segue a mesma direção dada pelos vetores nas curvas que passam nos pontos de equilíbrio ao seu redor;
- (v) Por fim, para analisar a estabilidade dos pontos de equilíbrio, observamos o que acontece à sua volta, ou seja, se as curvas integrais formam um centro ou convergem para o ponto de equilíbrio, este diz-se **estável** (representado por uma “bola fechada”), se as curvas integrais divergem do ponto de equilíbrio, este diz-se **instável** (ponto de sela) representado no diagrama de fases por uma “bola aberta”.

4.4 Aproximação linear nos pontos de equilíbrio

Existem sistemas não-lineares para a qual não se consegue determinar a sua solução analítica nem a equação dos caminhos no diagrama de fases, tal como vimos nas secções anteriores. Nestes casos, para analisar a estabilidade dos pontos de equilíbrio e, por sua vez, representar o diagrama de fases é necessário recorrer à técnica de aproximação linear à volta de cada ponto de equilíbrio do sistema não-linear.

Com base nesta ideia, consideremos o sistema

$$\begin{cases} x' = X(x, y) \\ y' = Y(x, y) \end{cases} \quad (108)$$

Supondo que o ponto de equilíbrio a ser estudado tenha sido movido para a origem, tal que $X(0,0) = Y(0,0) = 0$. Podemos escrever, por uma expansão de Taylor,

$$\begin{cases} X(x, y) = ax + by + P(x, y) \\ Y(x, y) = cx + dy + Q(x, y) \end{cases} \quad (109)$$

onde $a = \frac{\partial X}{\partial x}(0,0)$, $b = \frac{\partial X}{\partial y}(0,0)$, $c = \frac{\partial Y}{\partial x}(0,0)$, $d = \frac{\partial Y}{\partial y}(0,0)$ e $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ são de menor ordem de grandeza do que os termos lineares, já que (x, y) se aproxima da origem $(0, 0)$. Assim, a aproximação linear das fórmulas de a, b, c e d na vizinhança da origem é definida através do sistema linear

$$x' = ax + by, \quad y' = cx + dy, \quad (110)$$

fazendo com que as soluções deste sistema linear sejam geometricamente semelhantes ao sistema não-linear (108) perto da origem, expectativa que é alcançada na maioria dos casos.

Em situações dimensionais mais elevadas, não podemos confiar em propriedades simples de monotonicidade. Portanto, a ideia-chave é que a derivada $F'(u^*)$ determina a

inclinação da reta tangente, que é uma aproximação linear à função $F(u)$ próxima ao ponto de equilíbrio u^* . De maneira semelhante, uma função com valor vetorial $F(u)$ é substituída pela sua aproximação linear perto de um ponto de equilíbrio.

No caso escalar,

$$\frac{du}{dt} = F(u), \quad (111)$$

a linearização de uma função escalar num ponto significa substituí-la pela aproximação da linha tangente

$$F(u) \approx F(u^*) + F'(u^*)(u - u^*). \quad (112)$$

Se u^* é um ponto de equilíbrio, então $F(u^*) = 0$ e, portanto, o primeiro termo do segundo membro da Equação (112) desaparece. Logo, próximo ao ponto de equilíbrio, as soluções da Equação (111) serão aproximadas pela sua linearização

$$\frac{du}{dt} = F'(u^*)(u - u^*). \quad (113)$$

Reescrevendo agora a equação linearizada em termos do desvio $v(t) = u(t) - u^*$ do ponto de equilíbrio, como u^* é fixo, $dv/dt = du/dt$ e assim a equação linearizada assume a forma elementar

$$\frac{dv}{dt} = av, \quad (114)$$

onde $a = F'(u^*)$ é o valor da derivada no ponto de equilíbrio. Na Equação (111), o ponto de equilíbrio original u^* corresponde ao ponto de equilíbrio $v^* = 0$ da Equação (114). Portanto, a Equação (114) tem um ponto de equilíbrio assintoticamente estável em $v^* = 0$, se e somente se, $a = F'(u^*) < 0$, enquanto que, para $a = F'(u^*) > 0$ a origem é instável.

A mesma técnica de linearização pode ser aplicada para analisar a estabilidade de um ponto de equilíbrio u^* para um sistema autónomo de primeira ordem dado por

$$u' = F(u). \quad (115)$$

Aproximando-se a função $F(u)$ perto de um ponto de equilíbrio, onde $F(u^*) = 0$, pela sua primeira ordem polinomial de Taylor obtemos

$$F(u) \approx F(u^*) + F'(u^*)(u - u^*) = F'(u^*)(u - u^*), \quad (116)$$

onde $F'(u^*)$ representa a sua matriz jacobiana $n \times n$ no ponto de equilíbrio. Portanto, para soluções próximas, o desvio do equilíbrio $v(t) = u(t) - u^*$ será orientado pelo sistema linearizado

$$\frac{dv}{dt} = Av \quad \text{onde} \quad A = F'(u^*). \quad (117)$$

Neste sistema, o ponto de equilíbrio zero é assintoticamente estável, se e somente se, todos os valores próprios da matriz dos coeficientes $A = F'(u^*)$ tiverem parte real negativa. Por

outro lado, se um ou mais dos valores próprios tiverem parte real positiva, a solução zero será instável, sendo estes critérios de estabilidade linearizados também válidos no caso não-linear [24, 25].

Teorema 56 [9]: *Seja u^* um ponto de equilíbrio para a equação diferencial ordinária de primeira ordem $u' = F(u)$. Se todos os valores próprios da matriz jacobiana $F'(u^*)$ têm parte real negativa, $Re\lambda < 0$, então u^* é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável. Se, por outro lado, $F'(u^*)$ possui um ou mais valores próprios com parte real positiva, $Re\lambda > 0$, então u^* é um ponto de equilíbrio instável.*

Portanto, para utilizarmos a técnica de aproximação linear num sistema não-linear na forma

$$x' = X(x, y), \quad y' = Y(x, y), \quad (118)$$

calculamos, primeiramente, os pontos de equilíbrio do sistema ($x' = 0, y' = 0$) e efetuamos uma aproximação linear à volta de cada ponto de equilíbrio. Por exemplo, o sistema (118) pode ser representado na forma matricial

$$\begin{bmatrix} X(x, y) \\ Y(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{X}(x, y) \\ \tilde{Y}(x, y) \end{bmatrix}, \quad (119)$$

onde a e b são as derivadas de X em ordem a x e y e c e d são as derivadas de Y em ordem a x e y respetivamente no ponto de equilíbrio. Considerando que $E(x, y)$ é o ponto de equilíbrio do sistema não-linear, para analisar a estabilidade de E ignoramos a última parcela do segundo membro do sistema (119) e substituímos x e y pelas coordenadas do ponto de equilíbrio, obtendo assim, um sistema linear de equações diferenciais dado na forma

$$x' = ax + by, \quad y' = cx + dy. \quad (120)$$

Como este sistema é linear, a sua solução geral pode ser obtida pelo método de substituição ou matricial, como foi visto anteriormente, ou numa abordagem mais simples através da equação dos caminhos de fase $\frac{dy}{dx} = \frac{cx+dy}{ax+by}$. Contudo, estes métodos-padrão levam a relações implícitas entre x e y que são difíceis de interpretar geometricamente. Logo, muitas das vezes, recorre-se à técnica de linearização para a análise do diagrama de fases. Assim, para tal, começamos por representar o sistema linear na forma matricial

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad (121)$$

e calculamos o polinómio característico da matriz do sistema, com o objetivo de determinar os valores próprios da matriz jacobiana

$$\begin{aligned} P(\lambda) = \det|A - \lambda I| = 0 &\Leftrightarrow P(\lambda) = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}, \end{aligned} \quad (122)$$

onde $p = a + d$ e $q = ad - bc$. Os padrões do diagrama de fases dividem-se em três classes, de acordo com os valores próprios:

- (a) λ_1, λ_2 reais, distintos e com mesmo sinal;

- (b) λ_1, λ_2 reais, distintos e com sinais opostos;
- (c) λ_1, λ_2 complexos conjugados.

Procederemos então à análise de cada caso em separado.

4.4.1 λ_1, λ_2 reais, distintos e com mesmo sinal

Assumindo que λ_1 é o valor próprio maior, de modo que $\lambda_1 > \lambda_2$, a solução geral e a equação dos caminhos no diagrama de fases para o sistema linear, tal como foi descrito anteriormente, é dado por

$$x(t) = C_1 r_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 r_2 e^{\lambda_2 t}, \quad y(t) = C_1 s_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 s_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (123)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'} = \frac{C_1 s_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 s_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t}}{C_1 r_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 r_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t}}, \quad (124)$$

onde C_1, C_2 são constantes arbitrárias e r_1, s_1, r_2 e s_2 são constantes obtidas pela resolução do sistema linear com $\lambda = \lambda_1$ e $\lambda = \lambda_2$ respetivamente. Supondo, primeiramente, que λ_1 e λ_2 sejam negativos, de modo que $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$, ao longo de qualquer caminho de fase

- x e y se aproximam da origem com $t \rightarrow +\infty$;
- x e y se aproximam do infinito com $t \rightarrow -\infty$.

Além disso, existem quatro vias de fase radiais que se encontram ao longo de um par de linhas retas da seguinte maneira:

- Se $C_2 = 0$, $\frac{y}{x} = \frac{s_1}{r_1}$;
- Se $C_1 = 0$, $\frac{y}{x} = \frac{s_2}{r_2}$.

Através da equação dos caminhos, sendo os termos dominantes aqueles que envolvem $e^{\lambda_1 t}$ para t positivo “grande” e $e^{\lambda_2 t}$ para t negativo “grande”, obtemos

$$\frac{dy}{dx} \rightarrow \frac{s_1}{r_1} \text{ com } t \rightarrow +\infty, \quad (125)$$

$$\frac{dy}{dx} \rightarrow \frac{s_2}{r_2} \text{ com } t \rightarrow -\infty. \quad (126)$$

Assim, verifica-se que todo caminho de fase é tangencial para $y = (s_1/r_1)x$ na origem e se aproxima na direção de $y = (s_2/r_2)x$ no infinito. As soluções radiais são chamadas **assíntotas**, tal que, se os valores próprios λ_1, λ_2 são positivos, com $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$, no diagrama de fases todos os caminhos de fase são direcionados para o exterior indo da origem para o infinito [15]. Esses padrões mostram uma nova característica chamada **nó**. A **Figura 4.5(a)** mostra um nó estável e a **Figura 4.5(b)** um nó instável. As condições dos coeficientes que correspondem a esses casos são:

$$\text{Nó estável: } \Delta = p^2 - 4q > 0, q > 0, p < 0;$$

$$\text{Nó instável: } \Delta = p^2 - 4q > 0, q > 0, p > 0.$$

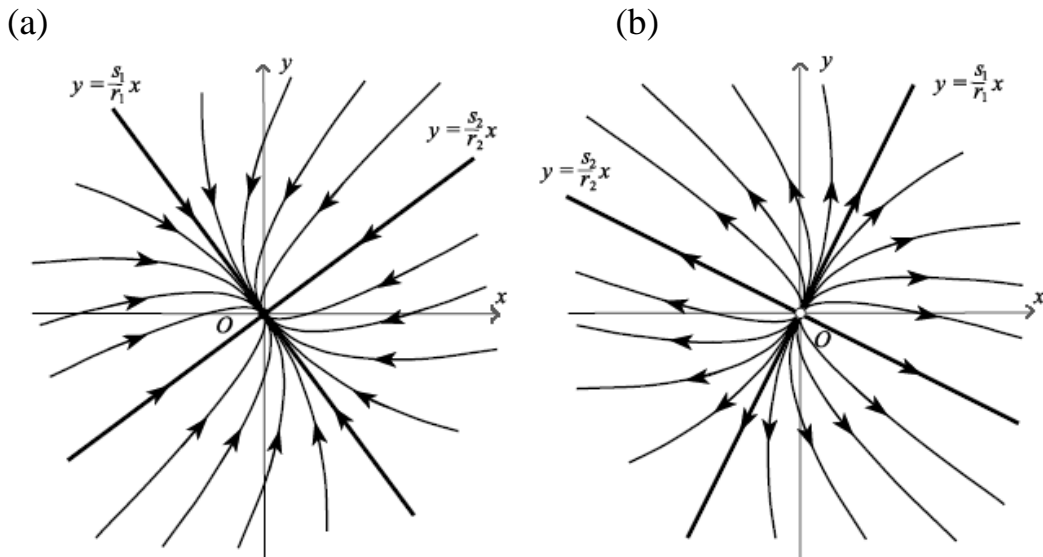


Figura 4.5: Nó estável (a); Nó instável (b).

4.4.2 λ_1, λ_2 reais, distintos e com sinais opostos

Neste caso, $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$ e a solução geral do sistema linear é a mesma que no caso anterior. Da mesma maneira, podemos deduzir que quatro dos caminhos são linhas retas irradiando da origem, dois deles ao longo de cada uma das linhas $\frac{y}{x} = \frac{s_1}{r_1}$ e $\frac{y}{x} = \frac{s_2}{r_2}$, sendo quebrados pelo ponto de equilíbrio na origem [15].

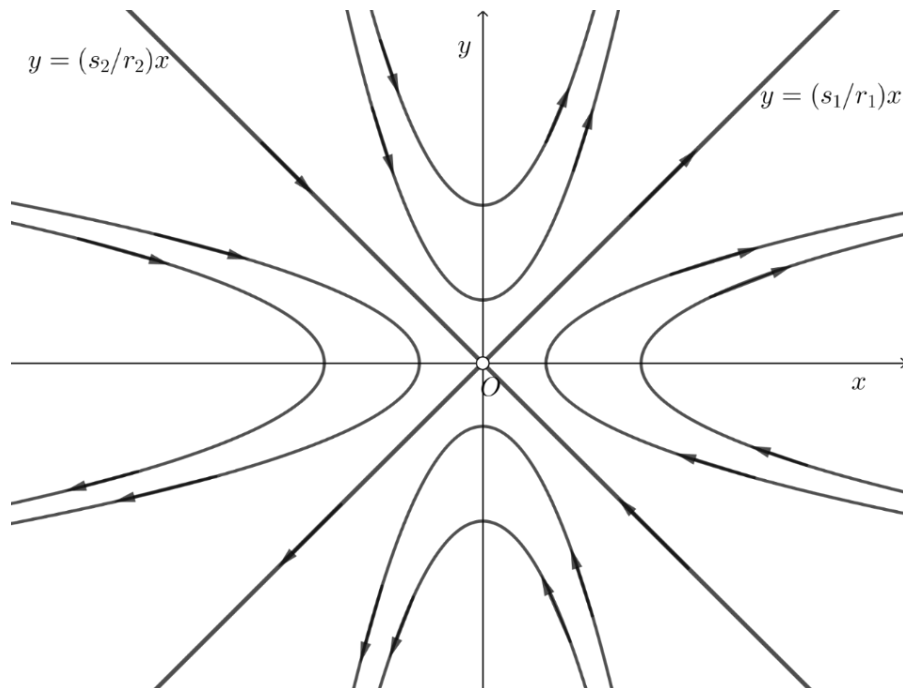


Figura 4.6: Ponto de sela.

Na **Figura 4.6** existem apenas dois caminhos que se aproximam da origem, sendo estes linhas retas que se encontram ao longo de $y/x = s_2/r_2$, obtidos pela colocação de $C_1 = 0$. O outro par de caminhos retos vai para o infinito quando $t \rightarrow \infty$, como todos os outros

caminhos. Além disso, todo caminho (exceto os dois que se encontram ao longo de $y/x = s_2/r_2$) começa no infinito quando $t \rightarrow -\infty$ e o ponto de equilíbrio na origem é designado de ponto de sela (ponto de equilíbrio instável), tal que as condições dos coeficientes que corresponde a este caso são:

$$\text{Ponto de sela: } \Delta = p^2 - 4q > 0, q < 0.$$

Exemplo 57 [21, p. 66]: *Esboce o diagrama de fases do sistema*

$$\begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = 5x - 4y \end{cases}.$$

Resolução. *O sistema linear, na forma matricial, é dado por*

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

sendo os valores próprios da matriz do sistema $\lambda = 1$ e $\lambda = -2$. Como a origem é o ponto de equilíbrio deste sistema e como os valores próprios são reais, distintos e de sinais opostos, conclui-se que a origem é um ponto de sela (ponto de equilíbrio instável). Para fazer o esboço do diagrama de fases, primeiro necessitamos de traçar as assíntotas. Como estas são linhas retas, ou seja, tem a forma $y = mx$, podemos descobrir os valores de m substituindo $y = mx$ e $y' = m$ na equação dos caminhos de fase

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5x - 4y}{3x - 2y},$$

o que implica que $m = \frac{5-4m}{3-2m}$. Portanto,

$$2m^2 - 7m + 5 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{5}{2} \vee m = 1,$$

de modo que as assíntotas são dadas por

$$y = \frac{5}{2}x \quad \text{e} \quad y = x.$$

Agora que já conhecemos as suas equações, traçamos no plano xOy as assíntotas e, com o objetivo de conhecer as suas direções, analisamos o sinal de x' e y' do sistema linear em qualquer ponto pertencente a estas retas, tendo o cuidado de efetuar esta análise em cada quadrante, uma vez que quando as curvas se interseitam no ponto de equilíbrio a direção pode mudar. Por exemplo, no ponto $(1,0)$, $x' = 3 > 0$ e $y' = 5 > 0$ logo x e y crescem.

Para além disso, se quisermos conhecer a qual valor próprio corresponderia as assíntotas, podemos calcular os vetores próprios através da forma $Av = \lambda v$. Por exemplo, para o valor próprio $\lambda = 1$ temos $v_1(1,1)$, v_1 qualquer. Logo, este vetor está associado à reta $y = x$. Para o valor próprio $\lambda = -2$ resulta $v_1\left(1, \frac{5}{2}\right)$, v_1 qualquer. Assim, este vetor está associado à reta $y = \frac{5}{2}x$. Quanto à solução geral do sistema linear, esta é dada por

$$\begin{cases} x(t) = c_1 r_1 e^t + c_2 r_2 e^{-2t} \\ y(t) = c_1 s_1 e^t + c_2 s_2 e^{-2t} \end{cases}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Os caminhos $B'O, BO$ na **Figura 4.7** correspondem a soluções com $C_1 = 0$, pois interseitam a origem à medida que $t \rightarrow \infty$. Nestes caminhos

$$\frac{y}{x} = \frac{C_2 s_2 e^{-2t}}{C_2 r_2 e^{-2t}} = \frac{s_2}{r_2} = \frac{5}{2}.$$

Da mesma forma, em OA e OA'

$$\frac{y}{x} = \frac{s_1}{r_1} = 1,$$

portanto, podemos escolher $s_1 = r_1 = 1, s_2 = 5$ e $r_2 = 2$. Colocando esses valores na fórmula da solução geral obtemos

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^t + 2C_2 e^{-2t} \\ y(t) = C_1 e^t + 5C_2 e^{-2t} \end{cases},$$

onde C_1 e C_2 são constantes arbitrárias.

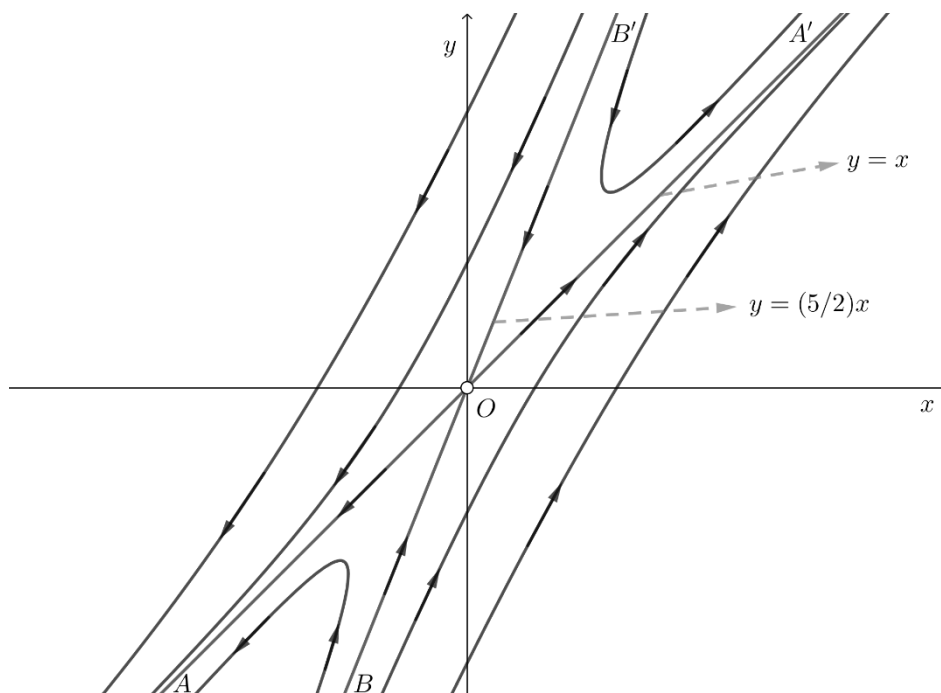


Figura 4.7: Diagrama de fases do sistema linear $x' = 3x - 2y; y' = 5x - 4y$.
A origem é um ponto de sela.

4.4.3 Complexos conjugados

Neste caso, os valores próprios são representados na forma $\lambda = \alpha \pm \beta i$ (α, β reais) e a solução geral do sistema linear, como foi visto anteriormente, é dado por

$$\begin{cases} x(t) = e^{\alpha t} \operatorname{Re} \{ C r_1 e^{i\beta t} \} \\ y(t) = e^{\alpha t} \operatorname{Re} \{ C s_1 e^{i\beta t} \} \end{cases}, \quad (127)$$

onde C, r_1 e s_1 são todos complexos em geral. Supondo que $\alpha = 0$ e colocando C, r_1 e s_1 na forma polar

$$C = |C|e^{i\gamma}, \quad r_1 = |r_1|e^{i\rho}, \quad s_1 = |s_1|e^{i\sigma}, \quad (128)$$

a solução geral pode ser representada da seguinte forma

$$\begin{cases} x(t) = |C||r_1| \cos(\beta t + \gamma + \rho) \\ y(t) = |C||s_1| \cos(\beta t + \gamma + \sigma) \end{cases}. \quad (129)$$

O movimento do ponto representativo $(x(t), y(t))$ no diagrama de fases consiste em duas componentes harmônicas simples de igual frequência circular β e fase, mas amplitudes diferentes nas direções x e y . Na **Figura 4.8**, os caminhos de fase formam uma família de elipses geometricamente semelhantes que são inclinadas num ângulo constante em relação aos eixos. Este caso é designado de centro e as condições algébricas correspondentes são:

Centro: $p = 0, q > 0$.

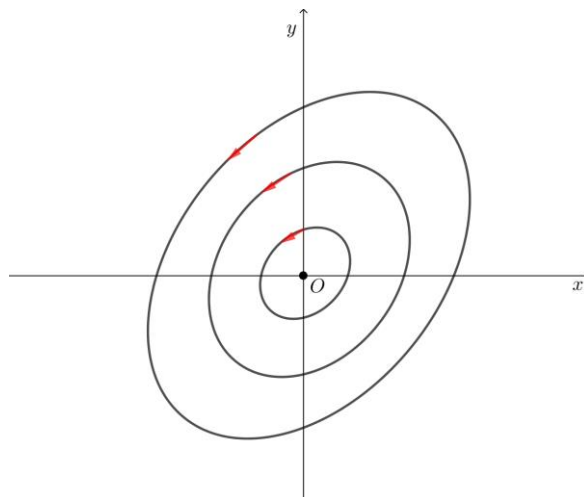


Figura 4.8: Centro.

Suponhamos agora que $\alpha \neq 0$. À medida que t aumenta, os caminhos elípticos acima são modificados pelo fator $e^{\alpha t}$, impedindo que cada elipse consiga fechar e se transforme numa espiral de contração semelhante à **Figura 4.9** se $\alpha < 0$ ou numa espiral de expansão se $\alpha > 0$. Neste caso, o ponto de equilíbrio é designado de espiral ou foco, estável se $\alpha < 0$ ou instável se $\alpha > 0$.

As condições algébricas para tais situações são:

Espiral estável: $\Delta = p^2 - 4q < 0, q > 0, p < 0$;

Espiral instável: $\Delta = p^2 - 4q < 0, q > 0, p > 0$.

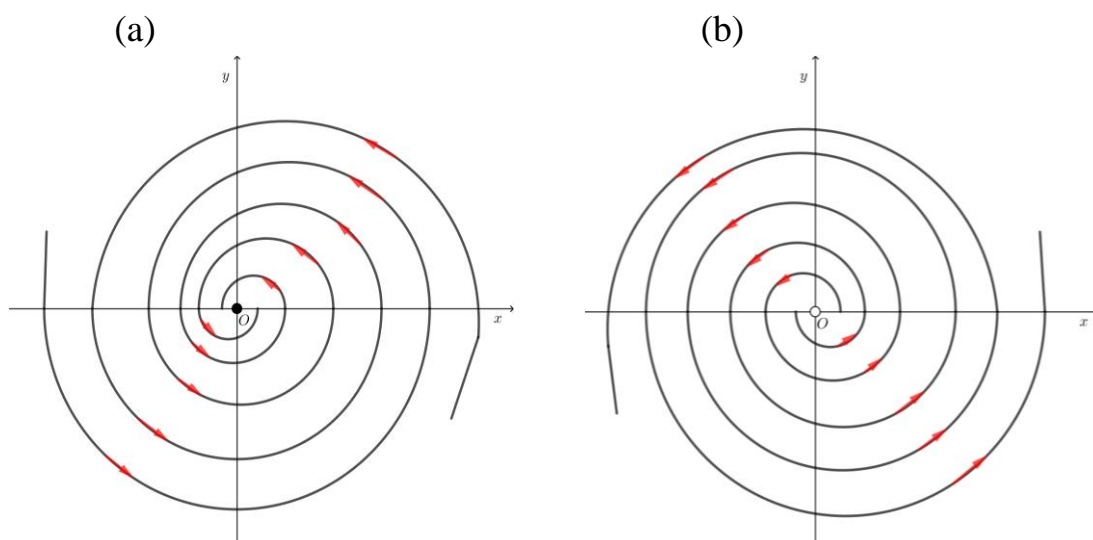


Figura 4.9: Espiral estável (a); Espiral instável (b).

Contudo, nestes casos, para conhecer a direção das espirais ou do centro, uma vez que o sentido pode ser horário ou anti-horário, temos de analisar o sinal de x' e y' do sistema linear associado, tal como fazíamos nos casos anteriores, usando quaisquer pontos pertencentes a cada quadrante [15].

Exemplo 58 [21, p. 69]: *Determine a natureza do ponto de equilíbrio do sistema*

$$\begin{cases} x' = -x - 5y \\ y' = x + 3y \end{cases} .$$

Resolução. *O sistema linear, na forma matricial, é dado por*

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

sendo os valores próprios da matriz do sistema dados por $\lambda = 1 - i$ e $\lambda = 1 + i$. Como a origem é o ponto de equilíbrio deste sistema e como os valores próprios são complexos conjugados com $\Delta = p^2 - 4q = -4 < 0$, $p = 2 > 0$ e $q > 0$, então estamos perante uma espiral instável e, por sua vez, um ponto de equilíbrio instável. Com o objetivo de conhecer a sua direção, utilizamos, por exemplo, o ponto $(1,0)$. Neste ponto, $x' = -1 < 0$ e $y' = 1 > 0$, logo x decresce e y cresce o que nos leva a concluir que os caminhos em espiral desenrolam-se no sentido anti-horário.

Exemplo 59 [9, p. 28]: *Considere o sistema de van der Pol*

$$\frac{du}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = -(u^2 - 1)v - u.$$

Analise a estabilidade do ponto de equilíbrio e represente o diagrama de fases.

Resolução. *O único ponto de equilíbrio é a origem ($u = v = 0$). Calculando a matriz jacobiana do sistema, vem*

$$F'(u, v) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2uv - 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ e, portanto, } F'(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Os valores próprios de $F'(0, 0)$ são $\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$, o que correspondem a uma espiral instável do sistema linearizado próximo ao ponto de equilíbrio. Portanto, a origem é um ponto de equilíbrio instável para o sistema não-linear de van der Pol e todas as soluções que não são de equilíbrio e, começam perto de 0, acabam em espiral.

Por outro lado, pode-se visualizar na **Figura 4.10** que as soluções suficientemente afastadas da origem formam uma espiral em direção ao centro e que todas as soluções que não são de equilíbrio formam uma espiral em direção a uma órbita periódica estável conhecida como ciclo-limite para o sistema. Assim, quaisquer dados iniciais diferentes de zero acabarão seguindo de perto a órbita do ciclo-limite à medida que circulam periodicamente em torno da origem.

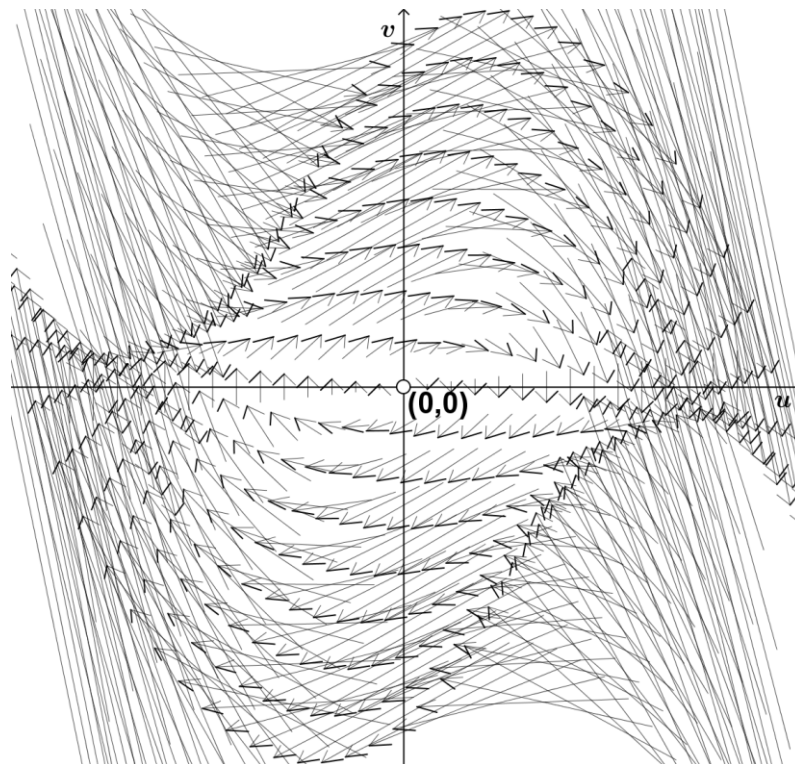


Figura 4.10: Diagrama de fases do sistema de Van der Pol.

4.4.4 Casos degenerados

Estes casos ocorrem quando há um valor próprio repetido ou este é igual a zero. Se $q = \det A = 0$, os valores próprios são $\lambda_1 = p$ e $\lambda_2 = 0$. Se $p \neq 0$, com v_1 e v_2 vetores próprios, a solução geral do sistema é

$$x(t) = C_1 v_1 e^{pt} + C_2 v_2 \quad (130)$$

e a linha de pontos de equilíbrio é dada por

$$ax + by = 0. \quad (131)$$

Assim, neste caso, os caminhos de fase formam uma família de linhas retas paralelas. Já no outro caso especial ($q = 0$ e $p = 0$), se $\Delta = 0$ os valores próprios são reais e iguais a $\lambda = \frac{p}{2}$. Se $p \neq 0$, o ponto de equilíbrio se torna num nó degenerado no qual as duas assíntotas convergem.

O centro também pode ser considerado como um caso degenerado formando uma transição entre espirais estáveis e instáveis. A existência de um centro depende da existência de uma relação exata específica, $a + d = 0$, entre os coeficientes do sistema. Portanto, um centro é um exemplo bastante frágil. Consequentemente, se a aproximação linear de um sistema não-linear der origem a um centro, não é possível concluir com segurança que o sistema original apresente um centro, uma vez que, muitas das vezes, este sistema pode ter uma espiral estável ou instável.

Se existe uma vizinhança de um ponto de equilíbrio de modo que todo caminho de fase que começa na vizinhança se aproxima do ponto de equilíbrio, este ponto é conhecido como **atrator**, exemplos disso são o nó estável e a espiral estável. Um atrator com todas as direções dos caminhos invertidas, como o caso dos nós e espirais instáveis, é designado de **repulsor**. Se os valores próprios da equação linearizada têm partes reais diferentes de zero, então o ponto de equilíbrio é considerado **hiperbólico**, como acontece no caso das espirais, pontos de sela e nós.

Portanto, resumidamente, os diagramas de fases bem como a classificação dos pontos de equilíbrio do sistema linear $x' = ax + by, y' = cx + dy$, de acordo com os parâmetros p, q e Δ , são representados na **Tabela 4.1** e **Figura 4.11** (ver página 70 em [21]).

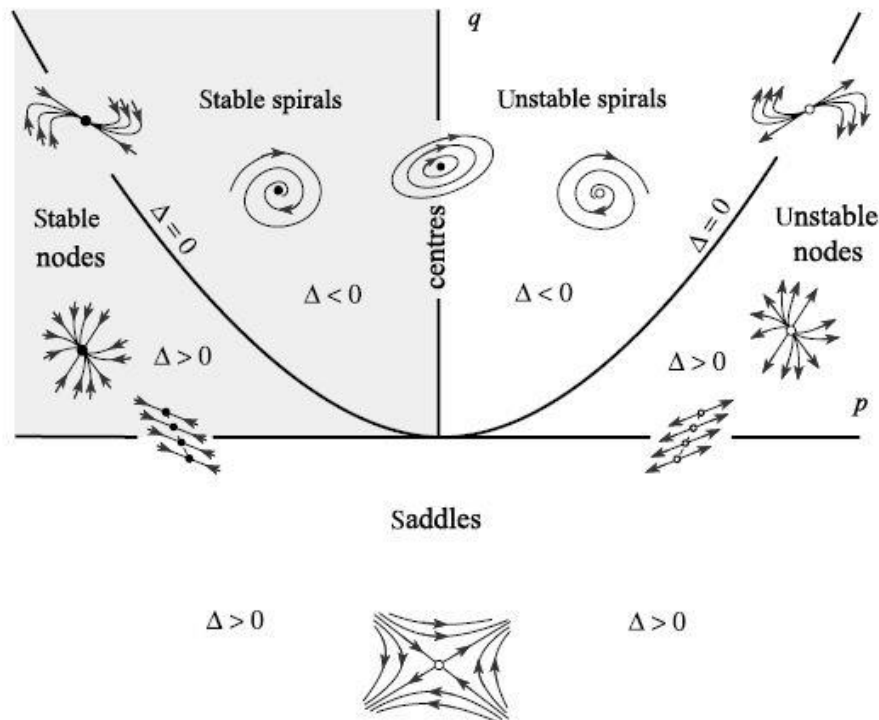


Figura 4.11: Classificação para o sistema linear $x' = ax + by; y' = cx + dy$ no plano pOq .

Tabela 4.1: Classificação para o sistema linear $x' = ax + by; y' = cx + dy$ no plano pOq , onde $p = a + d, q = ad - bc$ e $\Delta = p^2 - 4q$.

| | $p = a + d$ | $q = ad - bc$ | $\Delta = p^2 - 4q$ |
|------------------------------|-------------|---------------|---------------------|
| Ponto de sela | ---- | $q < 0$ | $\Delta > 0$ |
| Nó estável | $p < 0$ | $q > 0$ | $\Delta > 0$ |
| Espiral estável | $p < 0$ | $q > 0$ | $\Delta < 0$ |
| Nó instável | $p > 0$ | $q > 0$ | $\Delta > 0$ |
| Espiral instável | $p > 0$ | $q > 0$ | $\Delta < 0$ |
| Centro | $p = 0$ | $q > 0$ | $\Delta < 0$ |
| Nó estável degenerado | $p < 0$ | $q > 0$ | $\Delta = 0$ |
| Nó estável degenerado | $p > 0$ | $q > 0$ | $\Delta = 0$ |

4.5 Construção do diagrama de fases

Agora que já entendemos como analisar a estabilidade de cada ponto de equilíbrio e efetuar a representação gráfica do diagrama de fases, vamos verificar como se constrói um diagrama de fases de um sistema não-linear com vários pontos de equilíbrio usando a técnica de linearização.

Suponhamos que o sistema

$$\begin{cases} x' = X(x, y) \\ y' = Y(x, y) \end{cases} \quad (132)$$

tem um ponto de equilíbrio em (x_0, y_0) , tal que

$$X(x_0, y_0) = 0, \quad Y(x_0, y_0) = 0. \quad (133)$$

O padrão dos caminhos de fase próximos a (x_0, y_0) pode ser investigado linearizando as equações em (x_0, y_0) e mantendo apenas os termos lineares da série de Taylor para X e Y nesse ponto. Se as coordenadas locais forem definidas por

$$\xi = x - x_0, \quad \eta = y - y_0, \quad (134)$$

então, na vizinhança do ponto, temos

$$\begin{bmatrix} \xi' \\ \eta' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}, \quad (135)$$

onde

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial X}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial Y}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial Y}{\partial y}(x_0, y_0) \end{bmatrix}. \quad (136)$$

Assim, o ponto de equilíbrio é então classificado e representado no diagrama de fases usando os métodos vistos na secção anterior e, este processo, é feito para cada ponto de equilíbrio, sendo, por sua vez, possível prever o padrão completo dos caminhos de fase do sistema não-linear.

Observação 60: Quando analisamos a estabilidade de cada ponto de equilíbrio separadamente e fazemos a respetiva representação gráfica do diagrama de fases no plano xOy , a origem é sempre o ponto de equilíbrio em questão.

Exemplo 61 [21, p. 74]: Esboce o diagrama de fases para o sistema não-linear

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = 1 - xy \end{cases}.$$

Resolução. Este sistema apresenta dois pontos de equilíbrio em $(-1, -1)$ e $(1, 1)$. A matriz para a linearização, a ser avaliada em cada ponto de equilíbrio, é

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial y} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -y & -x \end{bmatrix}.$$

Portanto, para o ponto de equilíbrio $(-1, -1)$, a matriz linearizada apresenta a seguinte forma

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

e o sistema linear de equações diferenciais associado é dado por

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + y \end{cases}.$$

O polinómio característico da matriz linearizada é $P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2$, cujas raízes são $\lambda = 1 \pm i$.

Como estas raízes são complexas conjugadas, pela **Tabela 4.1** temos uma espiral instável ($p = 2 > 0, q = 2 > 0$ e $\Delta = -4 < 0$), ou seja, um ponto de equilíbrio instável representado no plano xOy com origem em $(-1, -1)$ por um ponto aberto. Com o objetivo de conhecer a direção desta espiral, analisamos o sinal de x' e y' do sistema linear em alguns pontos pertencentes a cada quadrante. Por exemplo, no ponto $(1, 2)$, $x' = 1 - 2 = -1 < 0$ e $y' = 1 + 2 = 3 > 0$ logo, neste ponto, y cresce e x decresce, portanto, a espiral movimentar-se no sentido anti-horário.

Fazendo o mesmo raciocínio para o ponto de equilíbrio $(1, 1)$, a matriz linearizada é dada por

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Calculando os respetivos valores próprios desta matriz temos $\lambda = \pm\sqrt{2}$, portanto, estamos perante um ponto de equilíbrio instável (ponto de sela), uma vez que $p = 0, q = -2 < 0$ e $\Delta = 8 > 0$ (ver **Tabela 4.1**). Com o objetivo de conhecer a equação das assíntotas associadas a este ponto de sela, utilizamos a equação dos caminhos de fase para o sistema linear associado, onde $y = mx$ e $y' = m$. Assim,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x - y}{x - y} \Leftrightarrow m = \frac{-1 - m}{1 - m} \Leftrightarrow m = -1 \pm \sqrt{2}.$$

Agora conhecidas as assíntotas, traçamos no plano xOy com origem no ponto de equilíbrio $(1,1)$ as duas retas $y = (-1 + \sqrt{2})x$ e $y = (-1 - \sqrt{2})x$, bem como as respectivas curvas características da situação de ponto de sela. Por fim, para conhecer a direção destas curvas, utilizamos pontos pertencentes as assíntotas em qualquer quadrante e analisamos o sinal de x' e y' do sistema linear associado. Por exemplo, para a reta $y = (-1 + \sqrt{2})x$, usamos o ponto $(1, -1 + \sqrt{2})$ e verificamos que $x' = 1 + 1 - \sqrt{2} > 0$ e $y' = -1 + 1 - \sqrt{2} < 0$. Logo, a direção é da direita para a esquerda. Fazendo o mesmo raciocínio para a reta $y = (-1 - \sqrt{2})x$, usando o ponto $(1, -1 - \sqrt{2})$ verificamos que $x' = 1 + 1 + \sqrt{2} > 0$ e $y' = -1 + 1 + \sqrt{2} > 0$, logo a direção é da esquerda para a direita. Finalmente, fazendo o mesmo procedimento para os restantes quadrantes, obtemos a direção das assíntotas e, por sua vez, a direção das curvas no diagrama de fases, uma vez que estas seguem a direção dada pelas assíntotas ao seu redor.

Feita a análise para os dois pontos de equilíbrio em separado, é representando o diagrama de fases em conjunto, onde os caminhos de fase nas vizinhanças dos pontos de equilíbrio são agora conhecidos. Como se verifica na **Figura 4.12**, as órbitas que saem de um ponto de equilíbrio vão-se ligando as outras do outro ponto de equilíbrio, seguindo assim a mesma direção. Além disso, como ilustra a **Figura 4.12**, observa-se que existem sempre órbitas que unem os pontos de equilíbrio, para além das outras que se ligam de acordo com a sua direção.

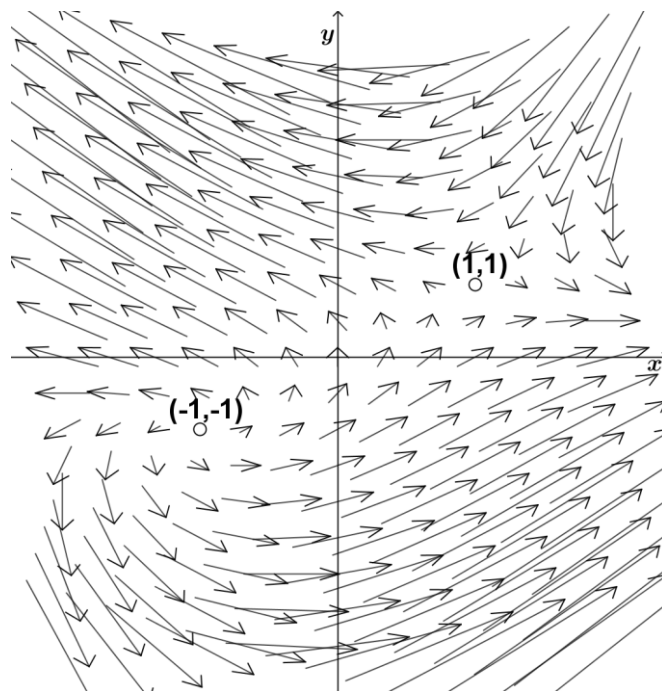


Figura 4.12: Diagrama de fases para o sistema $x' = x - y; y' = 1 - xy$.

Este processo pode ser auxiliado esboçando nos campos de direção as linhas $x = 0$, $x = 1$, etc., a curva $1 - xy = 0$, na qual os caminhos de fase têm inclinação zero, e a linha $y = x$,

na qual os caminhos têm declives infinitos. Por outro lado, como tínhamos visto anteriormente, neste exemplo, as curvas dos pontos de equilíbrio (curvas isoclínicas) são $x' = x - y = 0$ e $y' = 1 - xy = 0$, ou seja, $y = x$ e $y = \frac{1}{x}$, intersectando-se nos dois pontos de equilíbrio do sistema não-linear.

Exemplo 62 [9, p. 25]: A equação diferencial ordinária de segunda ordem $m\theta'' + \mu\theta' + k \sin \theta = 0$ descreve as oscilações amortecidas de um pêndulo rígido que gira em torno de um pivô sujeito a uma força gravitacional uniforme na direção vertical. A função desconhecida $\theta(t)$ mede o ângulo do pêndulo a partir da vertical, a constante $m > 0$ é a massa do pêndulo, $\mu > 0$ é o coeficiente de atrito e $k > 0$ representa a força gravitacional. Estude os pontos de equilíbrio e a sua estabilidade.

Resolução. Definindo $u(t) = \theta(t)$, $v(t) = \theta'$, obtemos o sistema não-linear

$$u' = v, \quad v' = -\alpha \sin u - \beta v,$$

onde $\alpha = \frac{k}{m}$ e $\beta = \frac{\mu}{m}$ são duas constantes positivas. Os pontos de equilíbrio ocorrem

$$v = 0, \quad -\alpha \sin u - \beta v = 0.$$

Portanto, $u = k\pi$, sendo k um número inteiro.

O sistema possui infinitos pontos de equilíbrio $u_k^* = (k\pi, 0)$. O ponto de equilíbrio $u_0^* = (0, 0)$ corresponde a $u = \theta = 0$, $v = \theta' = 0$, o que significa que o pêndulo está em repouso na parte inferior do seu arco. Logo, como os efeitos de atrito acabarão diminuindo os pequenos movimentos próximos do pêndulo, este ponto de equilíbrio é considerado estável. Já no ponto de equilíbrio $u_1^* = (\pi, 0)$ correspondente a $u = \theta = \pi$, $v = \theta' = 0$, o pêndulo está imóvel no topo do seu arco, fazendo com que este ponto seja instável, uma vez que essa configuração de equilíbrio é teoricamente possível, mas altamente improvável de ser observada na prática.

Como $u = \theta$ é uma variável angular, os pontos de equilíbrio cujos valores de u diferem por um inteiro múltiplo 2π definem a mesma configuração física e, portanto, devem ter propriedades de estabilidade idênticas. Todos os pontos de equilíbrio restantes u_k^* correspondem fisicamente a uma ou outra destas duas possibilidades: quando $k = 2j$ é par, o pêndulo fica na parte inferior, enquanto que, quando $k = 2j + 1$ é ímpar, o pêndulo está no topo.

Aplicando agora a técnica de linearização à volta dos pontos de equilíbrio, com o objetivo de confirmar as conclusões anteriores, verificamos que o sistema não-linear, ou seja,

$$F(u, v) = \begin{bmatrix} v \\ -\alpha \sin u - \beta v \end{bmatrix},$$

apresenta uma matriz jacobiana $F'(u, v) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha \cos u & -\beta \end{bmatrix}$. No ponto de equilíbrio trivial

$u_0^* = (0, 0)$, a matriz jacobiana $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha & -\beta \end{bmatrix}$ apresenta os valores próprios $\lambda = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha}}{2}$.

Como $\alpha, \beta > 0$, ambos os valores próprios têm parte real negativa e, portanto, a origem é um ponto de equilíbrio estável. Se $\beta^2 < 4\alpha$, os valores próprios são complexos, portanto, a origem

é estável e, no diagrama de fases, as soluções entram em espiral na origem, o que corresponde a um pêndulo com oscilações amortecidas de magnitude decrescente [26].

Por outro lado, se $\beta^2 > 4\alpha$, o sistema está sobrecarregado e os dois valores próprios são negativos, fazendo com que a origem seja um nó estável. Neste caso, as soluções decaem exponencialmente para a origem. Fisicamente, esta análise aplica-se a todos os pontos de equilíbrio uniformes $u_{2j}^* = (2j\pi, 0)$, que representam, por sua vez, o mesmo ponto de equilíbrio inferior.

Já no ponto de equilíbrio $u_1^* = (\pi, 0)$, a matriz jacobiana $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & -\beta \end{bmatrix}$ apresenta os valores próprios $\lambda = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\alpha}}{2}$. Neste caso, os valores próprios são reais, sendo um positivo e o outro negativo. Logo, o sistema linearizado tem um ponto de equilíbrio instável (ponto de sela) e, portanto, o sistema não-linear também é instável nesse ponto de equilíbrio.

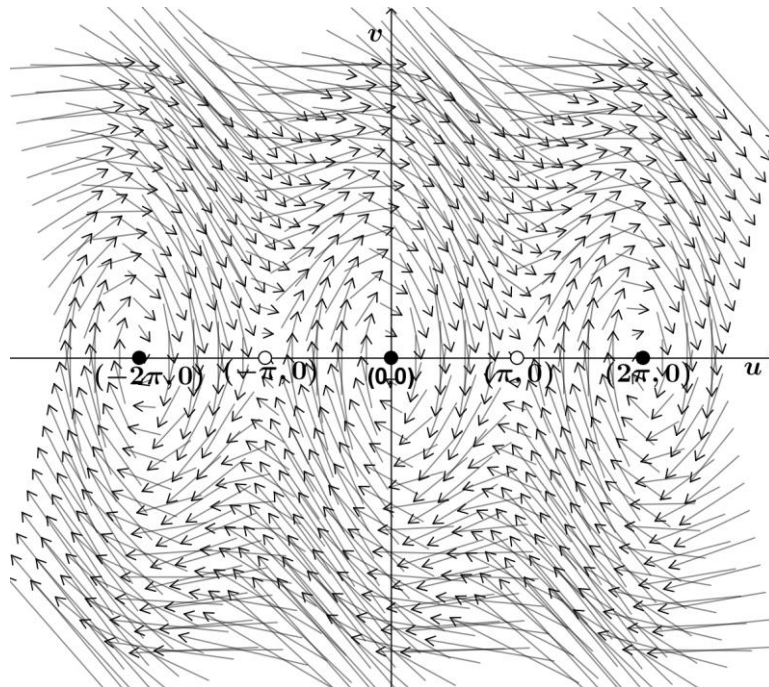


Figura 4.13: Diagrama de fases para o sistema não-linear $u' = v; v' = -\alpha \sin u - \beta v$.

Além disso, com base na **Figura 4.13**, verificamos que quase todas as soluções acabam entrando em espiral nos pontos de equilíbrio estáveis e que as soluções com uma grande velocidade inicial giram várias vezes ao redor do centro, mas, eventualmente, o efeito cumulativo das forças de atrito vence e o pêndulo termina num modo oscilatório amortecido. Cada um dos pontos de equilíbrio instáveis tem a mesma forma de sela que as suas linearizações, com as duas soluções muito especiais correspondentes à linha própria e estável da linearização, na qual o pêndulo gira algumas vezes e, no limite quando $t \rightarrow \infty$, o pêndulo termina ficando de pé na posição de equilíbrio instável.

Uma análise mais profunda demonstra a estabilidade estrutural local de qualquer equilíbrio não-linear, cuja linearização é estruturalmente estável e, portanto, não possui valores próprios no eixo imaginário ($\text{Re}\lambda \neq 0$). Estabilidade estrutural significa que, não são apenas as

propriedades de estabilidade do equilíbrio ditadas pela aproximação linearizada, mas, próximo ao ponto de equilíbrio, todas as soluções para o sistema não-linear são pequenas perturbações das soluções para o sistema linearizado correspondente e, portanto, próximo ao ponto de equilíbrio, os retratos das duas fases têm as mesmas características qualitativas.

Assim, pontos de equilíbrio estáveis da linearização permanecem estáveis no sistema não-linear e pontos de sela instáveis da linearização permanecem pontos de sela, embora as linhas próprias se tornem ligeiramente curvadas à medida que se afastam do equilíbrio.

Exemplo 63 [9, p. 29]: Considere o sistema não-linear

$$u' = u(v - 1), \quad v' = 4 - u^2 - v^2.$$

Calcule os pontos de equilíbrio, analise a sua estabilidade e represente o diagrama de fases.

Resolução. Este sistema apresenta quatro pontos de equilíbrio em $(0,2)$, $(0,-2)$, $(\sqrt{3}, 1)$ e $(-\sqrt{3}, 1)$. A matriz jacobiana do sistema é dada por

$$F'(u, v) = \begin{bmatrix} v - 1 & u \\ -2u & -2v \end{bmatrix}.$$

Para o ponto de equilíbrio $(0, 2)$, a matriz linearizada é

$$F'(0,2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

Os valores próprios são $\lambda = 1$ e $\lambda = -4$. Como estas raízes são reais com sinais contrários, pela **Tabela 4.1**, estamos perante um ponto de sela ($p = -3 < 0$, $q = -4 < 0$ e $\Delta = 25 > 0$), ou seja, um ponto de equilíbrio instável representado no plano xOy com origem em $(0, 2)$. Com o objetivo de conhecer a direção das órbitas características do ponto de sela, recorreremos ao cálculo dos vetores próprios $F'(0,2)V = \lambda V$, isto é,

$$\begin{cases} V_1 = \lambda V_1 \\ -4V_2 = \lambda V_2 \end{cases}.$$

Para o valor próprio $\lambda = 1$ temos o vetor $(1,0)$ e para o valor próprio $\lambda = -4$ temos o vetor $(0,1)$. Portanto, iremos ter duas assíntotas $y = 0$ e $x = 0$. Para conhecer a direção das curvas características do ponto de sela, utilizamos um ponto de um quadrante e analisamos o sinal de u' e v' do sistema linear associado. Por exemplo, para o ponto $(1,1)$, verificamos que $u' = 1 > 0$ e $v' = -4 < 0$, logo a direção é da esquerda para a direita. No ponto $(-1,-1)$, observamos que $u' = -1 < 0$ e $v' = 4 > 0$, portanto a direção é da direita para a esquerda.

Agora para o ponto de equilíbrio $(0, -2)$, a matriz linearizada é $F'(0, -2) = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, cujos valores próprios são $\lambda = -3$ e $\lambda = 4$. Como estas raízes são reais com sinais contrários, pela **Tabela 4.1**, estamos perante um ponto de sela ($p = 1 > 0$, $q = -12 < 0$ e $\Delta = 49 > 0$). Com o objetivo de conhecer a direção das órbitas características do ponto de sela, recorreremos ao cálculo dos vetores próprios $F'(0, -2)V = \lambda V$, isto é,

$$\begin{cases} -3V_1 = \lambda V_1 \\ 4V_2 = \lambda V_2 \end{cases} .$$

Para o valor próprio $\lambda = -3$ temos o vetor $(1,0)$ e para o valor próprio $\lambda = 4$ temos o vetor $(0,1)$. Portanto, iremos ter duas assíntotas $y = 0$ e $x = 0$. Analisando o sinal de u' e v' do sistema linear associado num ponto de um quadrante, por exemplo, para o ponto $(1,1)$, verificamos que $u' = -3 < 0$ e $v' = 4 > 0$, logo a direção é da direita para a esquerda. Já no ponto $(-1,-1)$, observamos que $u' = 3 > 0$ e $v' = -4 < 0$, portanto a direção é da esquerda para a direita.

Fazendo o mesmo raciocínio para o ponto de equilíbrio $(\sqrt{3},1)$, a matriz linearizada é $F'(\sqrt{3},1) = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & -2 \end{bmatrix}$ cujos valores próprios são $\lambda = -1 \pm \sqrt{5}i$. Como estas raízes são complexas conjugadas, pela **Tabela 4.1**, estamos perante uma espiral estável ($p = -2 < 0, q = 6 > 0$ e $\Delta = -20 < 0$). Com o objetivo de conhecer a direção desta espiral, analisamos o sinal de u' e v' do sistema linear em alguns pontos pertencentes a cada quadrante. Por exemplo, no ponto $(2,1)$, $u' = \sqrt{3} > 0$ e $v' = -8 < 0$ logo, neste ponto, u cresce e v decresce, portanto, a espiral movimenta-se no sentido horário. Por fim, no ponto de equilíbrio $(-\sqrt{3},1)$, a matriz linearizada $F'(-\sqrt{3},1) = \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & -2 \end{bmatrix}$ apresenta os valores próprios $\lambda = -1 \pm \sqrt{5}i$. Pela **Tabela 4.1**, estamos perante uma espiral estável ($p = -2 < 0, q = 6 > 0$ e $\Delta = -20 < 0$) movimentando-se no sentido anti-horário, devido a análise feita ao sinal de u' e v' do sistema linear em alguns pontos, nomeadamente, no ponto $(2,1)$ onde $u' = -\sqrt{3} < 0$ e $v' = -2 + 4\sqrt{3} > 0$, ou seja, u decresce e v cresce.

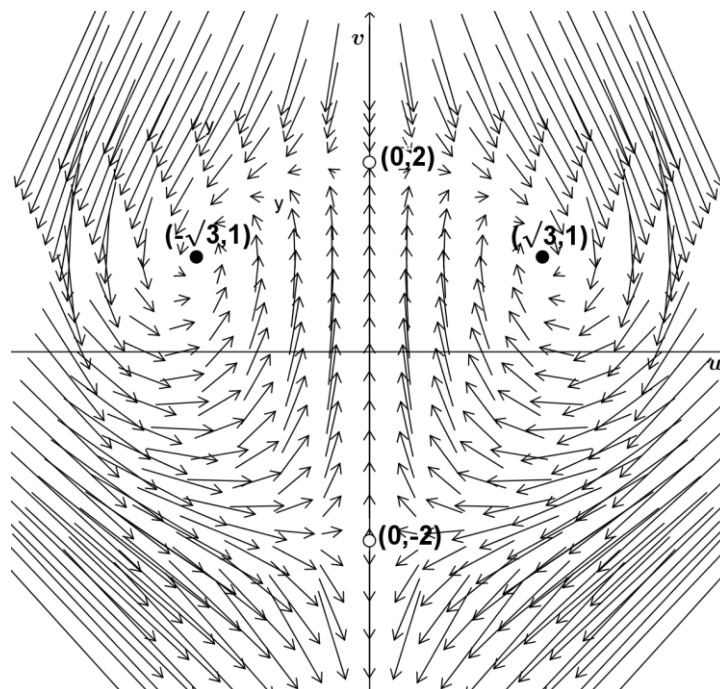


Figura 4.14: Diagrama de fases do sistema $u' = u(v - 1); v' = 4 - u^2 - v^2$.

Feita a análise para os quatro pontos de equilíbrio em separado, é representando o diagrama de fases em conjunto, onde os caminhos de fase nas vizinhanças dos pontos de equilíbrio são

agora conhecidos. Como se verifica na **Figura 4.14**, as órbitas que saem de um ponto de equilíbrio vão se ligando às outras do outro ponto de equilíbrio, seguindo assim a mesma direção. Na **Figura 4.14** observa-se que existem sempre órbitas que unem os pontos de equilíbrio, para além das outras que se ligam de acordo com a sua direção.

4.6 Aplicação dos sistemas dinâmicos não-lineares

Nesta secção é apresentada uma aplicação dos sistemas dinâmicos não-lineares, com o objetivo de aplicar a teoria apresentada nas secções anteriores. Nesta aplicação prática, modelo geral da epidemia (modelo SIR), foi introduzido o conceito de estado endêmico da doença.

Seguindo a ideia de [21], consideremos a propagação de uma doença não fatal numa população com tamanho constante durante o período da epidemia. No momento t suponhamos que a população consista em:

- $x(t)$ suscetíveis: aqueles até agora não foram infetados e, portanto, passíveis de infeção;
- $y(t)$ infecciosos: aqueles que têm a doença e que não estão isolados;
- $z(t)$ que estão isolados ou que se recuperaram e, portanto, são imunes.

Supondo que haja uma taxa de contacto constante entre suscetíveis e infecciosos e que uma proporção constante desses contactos resulte em transmissão. Com o tempo δt , δx dos suscetíveis se torna infeccioso,

$$\delta x = -\beta xy \delta t, \quad (137)$$

onde β é uma constante positiva. Se $\gamma > 0$ é a taxa na qual os infecciosos atuais se tornam isolados, então

$$\delta y = \beta xy \delta t - \gamma y \delta t, \quad (138)$$

logo, o número de novos isolados, δz , é dado por

$$\delta z = \gamma y \delta t. \quad (139)$$

Assumindo que a quantidade de suscetíveis $x(t)$ está sendo adicionada a uma taxa constante μ por unidade de tempo, para equilibrar a população da maneira mais simples assumimos que as mortes ocorrem naturalmente e apenas entre os imunes, ou seja, entre os $z(t)$ idosos que, na maioria, teve a doença. Para uma população constante, o sistema de equações é o seguinte

$$\begin{cases} x' = -\beta xy + \mu \\ y' = \beta xy - \gamma y \\ z' = \gamma y - \mu \end{cases} . \quad (140)$$

Considerando que a variação de x e y , os participantes ativos, é representada no diagrama de fases, perto do ponto de equilíbrio

$$x = \gamma/\beta + \xi, \quad y = \mu/\gamma + \eta, \quad (141)$$

onde ξ e η são valores pequenos para que $x' = \xi'$ e $y' = \eta'$. Mantendo apenas os termos lineares na expansão do lado direito das equações de x' e y' , obtemos

$$\begin{cases} \xi' = -\frac{\beta\mu}{\gamma}\xi - \gamma\eta \\ \eta' = \frac{\beta\mu}{\gamma}\xi \end{cases} . \quad (142)$$

Portanto, as equações de x' e y' dizem-se linearizadas perto do ponto de equilíbrio. A eliminação de ξ dá-nos que

$$\gamma \eta'' + (\beta\mu)\eta' + (\beta\mu\gamma) \eta = 0, \quad (143)$$

logo, quando o “amortecimento” é leve ($\beta\mu/\gamma^2 < 4$), o caminho de fase é uma espiral estável, tal que, todas as condições iniciais levam a um ponto de equilíbrio estável, representado na **Figura 4.15** pelo ponto E , chamado de **estado endêmico** da doença [27, 28].

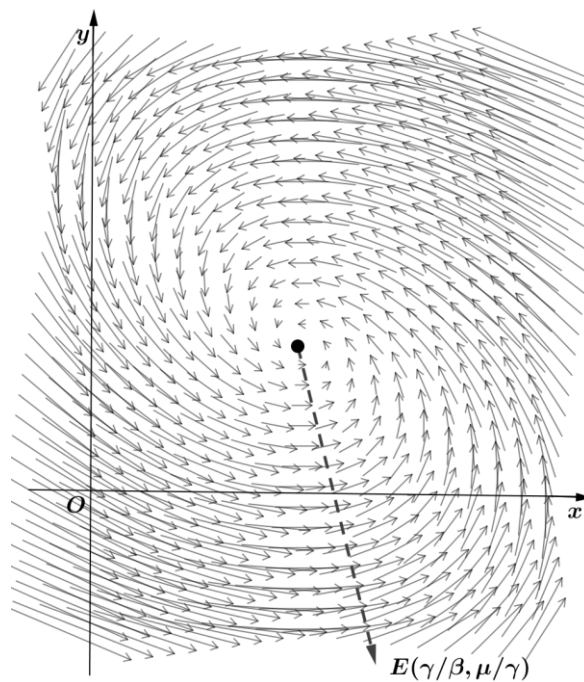


Figura 4.15: Diagrama de fases típico para o modelo geral da epidemia.

Conclusão

Esta dissertação teve como objetivo ampliar o conhecimento sobre sistemas dinâmicos não-lineares com aplicações às diferentes áreas do saber.

A vontade de redigir uma dissertação com base neste tema surgiu do interesse despertado em equações diferenciais e sistemas dinâmicos não-lineares de ordem superior, bem como o seu estudo qualitativo, resolução analítica e técnicas de representação dos mesmos nas aulas da disciplina de Matemática e Aplicações a outras Ciências.

Este trabalho foi escrito ilustrando algumas aplicações e exemplos ilustrativos da teoria subjacente, relacionada essencialmente à física, biologia, bem como outras áreas de aplicação.

Toda a teoria e resultados narrados encontram-se nos livros e artigos apresentados na bibliografia.

Sentenciamos que os objetivos foram cumpridos, pelo facto desta dissertação expor de forma sintetizada a teoria e alguns resultados, em língua portuguesa, de um tema rico em problemas aplicados a diferentes áreas, possibilitando que se estude o futuro, em sistemas determinísticos, baseado em dinâmicas do presente e do passado através do papel fundamental da dinâmica das órbitas na vizinhança de estados estacionários.

Esta dissertação superou as nossas expectativas por resumir toda a informação relevante em quatro capítulos. Abordamos vários conteúdos sobre a teoria da estabilidade de estados estacionários, comportamento das órbitas no diagrama de fases, bem como técnicas de linearização que nos ajudam a representar a dinâmica local dos sistemas não-lineares no diagrama de fases. Conteúdos que são importantíssimos não só para a minha área de formação (economia) mas para diversas outras áreas de investigação que utilizam sistemas dinâmicos semelhantes aos apresentados anteriormente.

Acreditamos que esta dissertação contribua de forma considerável para um melhor entendimento do objeto de estudo exposto, podendo ser utilizada no ensino e em perspectivas futuras de investigação. Esperamos também que este instrumento de trabalho forneça as ferramentas para aventurar-nos a entender que a teoria das equações diferenciais ordinárias e sistemas dinâmicos não é uma teoria isolada, mas sim uma teoria que pode ser utilizada de diversas formas e para diferentes propósitos.

Apêndices

Apêndice A: Problemas aplicados a equações diferenciais não-lineares de primeira ordem

Nesta secção será abordado algumas informações complementares sobre as equações diferenciais não-lineares de primeira ordem.

Primeiramente é apresentado as equações especiais, nomeadamente, as equações de Bernoulli, de Clairaut, de Riccati e equações redutíveis às de primeira ordem, com a apresentação de três modelos ilustrativos da teoria: modelo do crescimento de peixes, modelo do transporte de partículas e modelo da corda suspensa. Por fim, é abordado 3 das aplicações das equações diferenciais não-lineares de primeira ordem.

A.1 Equações especiais

Como já foi descrito, existem poucos tipos de equações que podem ser resolvidas por métodos analíticos. No entanto, às vezes, é possível resolver uma equação não-linear efetuando uma mudança conveniente da variável dependente que a transforma numa equação linear.

Veremos então um conjunto importante de equações não-lineares que têm essa característica.

Equações de Bernoulli

Esta equação aparece normalmente no estudo do crescimento de uma população de peixes

$$y' + g(x)y = h(x)y^n, \quad (144)$$

onde g e h são funções contínuas de x em $(a, b) \in \mathbb{R}$ e n é qualquer constante.

Observações:

- (a) Se $x_0 \in (a, b)$, então o problema de valor inicial (x_0, y_0) tem uma única solução se $n \geq 1$ ou $n = 0$;
- (b) Se $n = 1$, a Equação (144) é linear e de variáveis separadas;
- (c) Se $n \neq 0$ e 1 , então a mudança de variável $z = y^{1-n}$ reduz a Equação (144) a uma equação linear.

Assim, temos que $y = 0$ é a solução trivial da Equação (144). Se $y \neq 0$, podemos escrever a Equação (144) na forma

$$y^{-n}y' + g(x)y^{1-n} = h(x). \quad (145)$$

Tomando $z = y^{1-n}$, segue que $z' = (1 - n)y^{-n}y'$ e substituindo na Equação (144) obtemos

$$z' + (1 - n)g(x)z = (1 - n)h(x) \text{ (equação linear).} \quad (146)$$

Exemplo 64 (Modelo do crescimento de peixes (Von Bertalanffy)) [16, p. 79]: *A pesca sempre foi um elemento importante para a sobrevivência de muitas raças. Atualmente, os modelos matemáticos podem ser utilizados para estabelecer em que condições o peixe pode ser capturado. Assim, o peso $p(t)$ de cada espécie é dado pela equação de Von Bertalanffy*

$$p' = \alpha p^{2/3} - \beta p, \quad (147)$$

a qual estabelece que o aumento do peso de um peixe é proporcional à área da sua superfície, sendo α a constante de anabolismo, representando a taxa de síntese de massa por unidade de superfície do animal, e β a constante de catabolismo, representando a taxa de diminuição da massa por unidade de massa.

A Equação (147) é uma equação de Bernoulli com $n = \frac{2}{3}$. Fazendo a substituição $z = p^{1-2/3} = p^{1/3}$ obtemos

$$z' + \frac{\beta}{3}z = \frac{\alpha}{3},$$

portanto,

$$p(t) = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 \left(1 + \frac{C\beta}{\alpha} e^{-\frac{\beta t}{3}}\right)^3.$$

Quando $t = 0$, o valor de p é insignificante logo usando $p(0) \cong 0$ obtemos

$$C = -\frac{\alpha}{\beta}.$$

Assim, $p(t) = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 \left(1 - e^{-\frac{\beta t}{3}}\right)^3$ e, quando t cresce, p tende para $P_\infty = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3$. Tomando $k = \frac{\beta}{3}$ temos

$$p(t) = P_\infty(1 - e^{-kt})^3, \quad (148)$$

que fornece o peso do peixe em cada instante t . A Equação (148) é chamada de equação de Von Bertalanffy para o aumento do peso do peixe, tal que derivando duas vezes esta equação em ordem a t obtemos

$$p'' = 3k^2 P_\infty e^{-kt}(1 - e^{-kt})(3e^{-kt} - 1), \quad (149)$$

o que nos leva a concluir que $p' = 0$ quando $t = 0$ ou quando $t \rightarrow +\infty$ e $p'' = 0$ se $t = 0$ ou quando $t \rightarrow +\infty$ ou $t = \frac{\ln 3}{k}$. Se $p \neq 0$ então $p' > 0$, ou seja, o peso é sempre crescente, tendo um valor limite P_∞ . Matematicamente, P_∞ é “atingido” quando $t \rightarrow +\infty$, mas, na realidade, este tempo infinito é aproximadamente 10 anos. Esta contradição pode ser minorada se, por exemplo, estabelecermos que 99% do peso limite de um peixe é atingido depois de 10 anos. Por outro lado, $t^* = \frac{\ln 3}{k}$ é um ponto de inflexão da curva obtida da Equação (149), sendo que o instante de maior variação do peso do peixe, dado por $\frac{dp}{dt}$, atinge o seu valor máximo em $t = t^*$, tal que para esse ponto $p(t^*) = 0,296 P_\infty$.

Do princípio da Alometria sabemos que o crescimento do organismo é proporcional à superfície do corpo, então podemos escrever a equação de Von Bertalanffy na forma

$$p' = \alpha S - \beta p, \quad (150)$$

sendo S a superfície fisiológica do organismo. Para expressarmos S e p em termos do comprimento linear l do organismo, assumimos que este cresce isometricamente e tem uma constante específica gravitacional. Assim,

$$p' = \frac{d}{dt}(bl^3).$$

Substituindo na Equação (150), obtemos

$$l' = \lambda - kl, \quad \lambda = \frac{a}{3b} \quad e \quad k = \frac{\beta}{3}. \quad (151)$$

Assim, a Equação (151) é autônoma e a sua solução, usando a condição inicial $l(0) \cong 0$, é dada por

$$l(t) = \frac{\lambda}{k} - Ce^{-kt}, \quad C = \frac{\lambda}{k}.$$

Por outro lado, o comprimento linear l_∞ é dado quando $t \rightarrow +\infty$, isto é, $l_\infty = \frac{\lambda}{k}$. Desta forma, obtemos a expressão da equação de Von Bertalanffy para o crescimento do peixe em comprimento dada por

$$l(t) = l_\infty(1 - e^{-kt}).$$

Equações de Clairaut

A forma geral destas equações é dada por

$$y = xy' + f(y'), \quad (152)$$

sendo f uma função derivável. Para resolvermos uma equação deste tipo, o procedimento é efetuar uma substituição de $p = dy/dx$. Assim, a equação vem escrita na forma

$$y = xp + f(p), \quad (153)$$

e, derivando em relação a variável x , obtemos

$$\frac{dp}{dx}(x + f'(p)) = 0.$$

Se $\frac{dp}{dx} = 0$, então $p = c$ (constante). Substituindo este valor na Equação (153), obtemos uma família de retas na forma

$$x'(t) = f(t).$$

Se $x = -f'(p)$, então

$$y = -pf'(p) + f(p),$$

logo, a solução singular da equação de Clairaut é dada, na forma paramétrica, por

$$x = -f'(t), \quad y = f(t) - tf'(t), \quad \text{onde } t \text{ é o parâmetro.} \quad (154)$$

Equações de Riccati

A sua forma geral é dada por

$$y' = f_1(x) + f_2(x)y + f_3(x)y^2. \quad (155)$$

Para resolvê-la, devemos supor que uma solução particular y_p desta equação seja conhecida tal que, a solução geral é obtida quando fazemos a substituição na Equação (155):

$$y = y_p(x) + \frac{1}{v(x)}.$$

Simplificando, temos

$$\frac{dv}{dt} = -(f_2(x) + 2f_3(x)y_p) - f_3(x). \quad (156)$$

Exemplo 65 (Modelo do transporte de partículas) [16, p. 86]: *Este tipo de problema surge em vários estudos relacionados com teoria eletroquímica de células combustíveis, reatores nucleares, etc. Como exemplo simples, imaginemos uma barra longa com uma extremidade em 0 (origem) e outra com $x_0 > 0$.*

Uma modificação possível verifica-se quando uma partícula colide com um núcleo atômico da barra e, neste caso, dá origem a duas outras partículas, uma para cada direção. Num intervalo pequeno de comprimento Δ , esta colisão dá-se, aproximadamente, para uma quantidade $\sigma\Delta$ das partículas que o atravessam (existe uma quantidade desprezível de colisões secundárias).

*Neste exemplo, a ideia-chave consiste em obter a **função de reflexão** $R(x)$, função que representa o número de partículas que escapam à direita de uma barra de comprimento x para cada partícula que entra por aquela extremidade.*

Supondo que N partículas entram pela extremidade em $x + \Delta$:

1. $\sigma\Delta N$ colidem e dão origem a $\sigma\Delta N$ que escapam em $x + \Delta$;
2. $\sigma\Delta N$ que entram em x ;
3. $(1 - \sigma\Delta N)N$ chegam incólumes até x e entram;

Logo, N partículas entram em x e, pela definição de $R(x)$, temos que $NR(x)$ destas partículas voltam a escapar pela extremidade x . Dessas últimas,

4. $NR(x)(1 - \sigma\Delta)$ escapam incólumes em $x + \Delta$;
5. $NR(x)\sigma\Delta$ colidem e o mesmo número escapa em $x + \Delta$;
6. $NR(x)\sigma\Delta$ entram em x .

Assim, verifica-se que $NR(x)$ escapam em $x + \Delta$ para as N partículas que entraram em x . Logo, $NR(x)\sigma\Delta$, que novamente entram em x , darão origem a $(\sigma\Delta NR(x))R(x)$ que escapam em $x + \Delta$ e $(\sigma\Delta)^2 NR(x)$ voltando a x e daí por diante. Sendo $NR(x + \Delta)$ o número de

partículas que escapam em $x + \Delta$ das N que lá entraram, a equação diferencial para $R(x)$ é então dada por

$$R' = \sigma + \sigma R^2,$$

onde a condição inicial é $R(0) = 0$, pois uma barra de comprimento zero não reflete partículas.

Equações redutíveis às de primeira ordem

Algumas equações diferenciais de ordem superior podem ter a sua ordem reduzida com a substituição de $y' = p$.

Exemplo 66 (Modelo da corda suspensa (Catenária)) [16, p. 91]: Uma corda homogênea, flexível e inextensível suspensa pelas suas extremidades em equilíbrio sob a ação do seu peso, determina a configuração de uma curva muito parecida com uma parábola.

Consideremos um sistema de coordenadas com a origem no ponto mais baixo da curva e com a curva situada no plano xOy , sendo o eixo y coincidente com a vertical.

Seja P um ponto genérico $P = (x, y)$ da corda e o segmento OP o segmento que está em equilíbrio devido à ação das forças:

1. T : tensão atuando tangencialmente em P e formando um ângulo α com o eixo x ;
2. H : tensão da corda no ponto O , atuando horizontalmente;
3. ps : peso do pedaço OP da corda cujo comprimento é s , agindo verticalmente em sentido contrário do eixo y (p é o peso por unidade de comprimento).

O equilíbrio do segmento OP implica que $H + T + ps = 0$. Decompondo esta equação sobre os dois eixos temos

$$H = T \cos \alpha \quad e \quad ps = T \sin \alpha.$$

Dividindo membro a membro estas equações, obtemos

$$\tan \alpha = \frac{ps}{H} = ks, \quad k = \frac{p}{H}, \quad \tan \alpha = y' \quad e \quad \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + (y')^2}.$$

Derivando ambos os membros em ordem a x , obtemos a equação diferencial da catenária

$$y'' = k\sqrt{1 + (y')^2}.$$

O artifício para a sua resolução é o mesmo da equação de Clairaut, ou seja, tomamos $y' = p$ o que nos leva à equação

$$\frac{dp}{dx} = k\sqrt{1 + p^2} \quad (\text{equação com variáveis separáveis}).$$

Integrando ambos os membros e usando a condição inicial $p(0) = 0$, a solução do problema de valor inicial é dada por

$$\ln \left(p + \sqrt{1 + p^2} \right) = kx + c_1 \Leftrightarrow p = \frac{1}{2} (e^{kx} - e^{-kx}).$$

Daí,

$$y = \frac{1}{2} \int (e^{kx} - e^{-kx}) dx = \frac{1}{2k} (e^{kx} + e^{-kx}) + c_2.$$

Como $y(0) = 0$, temos $c_2 = -\frac{1}{k} \log 0$

$$y = \frac{1}{k} \left(\frac{e^{kx} + e^{-kx}}{2} - 1 \right) = \frac{1}{k} (\cosh kx - 1) \quad (\text{equação da catenária}).$$

A.2 Algumas aplicações das equações diferenciais não-lineares de primeira ordem

Nesta secção serão apresentadas algumas aplicações das equações diferenciais não-lineares de primeira ordem, complementares às apresentadas anteriormente no **Capítulo 2**.

Primeiramente, introduzimos o modelo do crescimento de uma célula, seguidamente o modelo da absorção de drogas e, finalmente, o modelo dos juros compostos e inflação.

Modelo do crescimento de uma célula

De acordo com [16], a massa de uma célula pode ser dada em função do tempo, isto é, $m = m(t)$, com $m_0 = m(0)$ a sua massa inicial no instante $t = 0$. O crescimento da célula é determinado somente pela velocidade do metabolismo no seu interior. Como o aumento (output) do metabolismo depende da massa das moléculas em atividade, devemos esperar que a razão de crescimento da massa celular seja proporcional à sua massa presente em cada instante

$$m' = km,$$

onde $k > 0$ é a constante de proporcionalidade e $m < M$, pois quando a célula atinge um determinado tamanho ela divide-se. Assim, a solução geral da equação diferencial é dada por

$$m(t) = Ae^{kt}. \quad (157)$$

Usando a condição inicial $m_0 = m(0)$, obtemos

$$m(t) = m_0 e^{kt} \text{ com } m < M.$$

Assim, a célula tem um crescimento exponencial até se dividir, isto é, enquanto $m_0 e^{kt} < M$, o que implica que $t < \frac{1}{k} \ln \left(\frac{M}{m_0} \right)$. Neste caso, o conceito de crescimento específico é muito importante, sendo definido por

$$\frac{1}{m} m' = k \text{ (constante)}, \quad (158)$$

onde m' mede a velocidade do crescimento e k mede a velocidade de crescimento relativa à massa presente. Por exemplo, podemos supor que no início existia apenas uma quantidade m_0 de células meristemáticas (aquelas que se reproduzem por divisão) responsáveis pelo crescimento de uma planta. Se as células provenientes da divisão de uma meristemática também forem meristemáticas, o processo de divisão continuará e o modelo que descreve este crescimento será dado por

$$m' = \gamma m, \quad m(0) = m_0.$$

Se supormos agora que as células originais com a divisão de uma meristemática terão probabilidade p de serem meristemáticas e $(1 - p)$ de serem indivisíveis (ou diferenciadas), o modelo proposto por Tornley em [29] será dado por

$$m' = \gamma m \left(1 + \frac{\ln p}{\ln 2}\right), \quad m(0) = m_0. \quad (159)$$

Quando p varia de 1 a 0, a população meristemática passará por um período de crescimento, seguido por um declínio e posterior extinção, acompanhado pela produção de células diferenciadas. A parte fundamental, neste modelo, consiste em determinar o comportamento de $p = p(t)$, tal que uma primeira aproximação poderá ser dada por

$$p' = -kp, \quad \text{onde } k \text{ é uma diferenciação das células.} \quad (160)$$

Substituindo esta função na Equação (159), obtemos

$$m' = \gamma m \left(1 - \frac{kt}{\ln 2}\right).$$

Separando as variáveis e integrando, vem que

$$m(t) = m_0 e^{\left[\gamma \left(1 - \frac{kt}{2 \ln 2}\right)t\right]}.$$

Analisando esta função, concluímos que o valor máximo de m ocorre quando

$$1 - \frac{kt}{\ln 2} = 0, \quad \text{ou seja,} \quad t^* = \frac{\ln 2}{k} \Rightarrow m(t^*) = m_0 e^{\frac{1}{2}\gamma t^*},$$

portanto, conclui-se que

$$m'' = 0 \text{ quando } t = \frac{\ln 2}{k} \left(1 \pm \sqrt{\frac{k}{\ln 2}}\right), \quad (161)$$

que são os pontos de inflexão da curva-população das células meristemáticas.

A produção de células diferenciadas depende do valor $(1 - p(t))$ e a sua população $n = n(t)$ é dada pela equação

$$n' = \gamma m - \gamma m \left(1 + \frac{\ln p}{\ln 2}\right), \quad n(0) = 0. \quad (162)$$

Usando o valor de $m = m(t)$, temos que

$$n' = \left(\frac{\gamma m_0}{t^*}\right) t e^{\left[\gamma \left(1 - \frac{t}{2t^*}\right)t\right]}, \quad (163)$$

separando as variáveis e integrando a Equação (163), obtemos

$$n(t) = m_0 \left\{ 1 - e^{\left[\gamma\left(1 - \frac{t}{2t^*}\right)\right]} + \left(\frac{\pi\gamma t^*}{2}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}\gamma t^*} \left\{ \operatorname{erf}\left(\frac{1}{2}\gamma t^*\right)^{\frac{1}{2}} + \operatorname{sgn}(t - t^*) \operatorname{erf}\left[\left(\frac{\gamma}{2t^*}\right)^{\frac{1}{2}} |t - t^*|\right] \right\} \right\},$$

onde $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-z^2} dt$ (função erro) e $\operatorname{sgn}(x) = \text{ sinal de } x (= 0 \text{ se } x = 0)$.

Modelo da absorção de drogas

Um problema fundamental em Farmacologia é saber como cai a concentração de uma droga no sangue de um paciente. O conhecimento deste facto permite estabelecer qual a dosagem a ser inserida e o intervalo de tempo que cada aplicação deve ser feita. O modelo mais simples, apresentado por Rodney Bassanezi e Wilson Jr. em [16], supõe que a taxa de variação da concentração é proporcional à concentração da droga na corrente sanguínea, em termos matemáticos,

$$\frac{dy}{dt} = -ky, \quad (164)$$

onde $k > 0$ é uma constante encontrada experimentalmente.

Suponhamos que seja dada ao paciente uma dose inicial y_0 absorvida pelo sangue instantaneamente no instante $t = 0$. A solução geral da equação é dada por

$$y = y_0 e^{-kt}. \quad (165)$$

Suponhamos que depois de um tempo T uma segunda dose, com a mesma quantidade y_0 , é administrada. Teremos então

- $y(T_-) = y_0 e^{-kt}$ (quantidade da droga no sangue imediatamente antes da segunda dose);
- $y(T_+) = y_0 e^{-kt} + y_0$ (quantidade da droga logo após a aplicação da segunda dose).

Portanto, $y(t) = y_0(1 + e^{-kt})e^{-k(t-T)}$ nos dá a quantidade de droga no sangue no instante $t \geq T$.

Continuando o tratamento, pela injeção da quantidade y_0 no final de cada intervalo de tempo igual a T , obtemos

$$y(t) = y_0(1 + e^{-kT} + e^{-2kT})e^{-k(t-2T)}, \quad t \geq 2T.$$

Assim,

$$y(nT_+) = y_0 \frac{1 - e^{-(n+1)kT}}{1 - e^{-kT}}.$$

Quando n cresce, $y(nT_+)$ tende para

$$y_s = \frac{y_0}{1 - e^{-kT}},$$

que é o nível de saturação da droga. Logo, se soubermos o valor de y_0 e o nível de saturação, podemos determinar o intervalo de aplicação T ,

$$T = -\frac{\ln\left(\frac{y_s - y_0}{y_s}\right)}{k}, \quad (166)$$

e ainda, se soubermos o valor do nível de saturação e de T , podemos conhecer qual deve ser a dosagem y_0 ,

$$y_0 = y_s(1 - e^{-kT}).$$

Modelo dos juros compostos e inflação

O atual sistema financeiro utiliza o regime de juros compostos, pois ele oferece uma maior rentabilidade se comparado ao regime de juros simples. As modalidades de investimentos e financiamentos são calculadas de acordo com esse sistema, portanto é de grande utilidade estudá-lo. Seguindo a ideia de Ramon Santos, William Boyce e Richard Diprima em [30, 31], suponhamos que uma quantia é depositada num banco que paga juros a uma taxa r ao mês. O valor $S(t)$ do investimento, em qualquer instante t , depende tanto da frequência de capitalização dos juros, ou seja, da periodicidade em que os juros são aplicados, quanto da taxa de juros, tal que a taxa de variação do valor do investimento é $\frac{dS}{dt}$. Essa quantidade é igual a taxa segundo a qual os juros acumulam, que é a taxa de juros (r) vezes o valor atual do investimento ($S(t)$). Assim, a equação diferencial de primeira ordem é dada por

$$S' = rS. \quad (167)$$

Supondo que o valor inicial de investimento é S_0 , os valores de $S(t)$ para qualquer instante de tempo t são dados por

$$S(t) = S_0 e^{rt}. \quad (168)$$

Podemos agora supor que possam existir, além da acumulação de juros, depósitos e levantamentos ocorrendo a uma taxa constante k . Matematicamente, esses depósitos e levantamentos entram como uma contribuição aditiva na equação diferencial

$$S' = rS + k, \quad (169)$$

onde $k > 0$ representa depósitos e $k < 0$ os levantamentos. Assim, a solução geral da Equação (169) é dada por

$$S(t) = ce^{rt} - \frac{k}{r}, \quad (170)$$

onde c é uma constante arbitrária. Usando a condição inicial $S(0) = S_0$, a solução do problema de valor inicial é então dada por

$$S(t) = S_0 e^{rt} + \frac{k}{r}(e^{rt} - 1),$$

onde $S_0 e^{rt}$ é a parte que representa os juros compostos em si e $\frac{k}{r}(e^{rt} - 1)$ é a parte referente aos depósitos ou levantamentos a uma taxa k .

Apêndice B: Problemas aplicados aos sistemas dinâmicos de equações diferenciais ordinárias não-lineares

Nesta secção será abordado problemas aplicados aos sistemas dinâmicos de equações diferenciais ordinárias não-lineares, mais propriamente, algumas das suas aplicações práticas.

B.1 Algumas aplicações dos sistemas dinâmicos não-lineares

Com vista a complementar a teoria dada no **Capítulo 4**, nesta secção irá ser apresentado 4 aplicações complementares dos sistemas dinâmicos não-lineares.

Primeiramente foi introduzido o modelo da estratégia de equipamentos, seguido pelo modelo dos biodigestores, o modelo geral da competição entre duas espécies e, por fim, o modelo da lei da gravitação universal.

Modelo da estratégia de equipamentos

A disponibilidade de equipamentos para prevenção de eventuais conflitos é um fator indispensável e planeado em cada país. De acordo com [16], consideremos dois países A e B razoavelmente "isolados" dos demais e que possuem uma política externa pacífica. Supondo que o poder militar de um país seja declarado pela sua "quantidade de armas" num determinado instante ou pelo capital que esta quantidade significa, ou seja, $x = x(t)$ e $y = y(t)$ representam o potencial de guerra das duas nações, tal que x e y são funções contínuas com derivadas contínuas para $t > 0$. No modelo matemático em questão, quanto maior o potencial de guerra de um país, mais este será fonte de problemas para o outro e a depreciação dos equipamentos existentes, em relação ao tempo(t), será responsável pela diminuição do poder militar de cada país.

Admitindo que a depreciação seja proporcional à quantidade de equipamentos existentes, se um país tem intuídos agressivos secretos, isto pode influenciar o crescimento do seu potencial de guerra e, por sua vez, se não houver uma situação económica compatível para suportar o crescimento ostensivo do outro país, isto pode levar a uma diminuição na aquisição de armas. Assim, o modelo matemático é dado por

$$\begin{cases} x' = -ax + by + g(t) \\ y' = cx - dy + h(t) \end{cases} \quad (171)$$

onde a, b, c e d são constantes positivas, b e c representam os coeficientes de proporcionalidade provocada pela interação entre os dois países, a e d são os coeficientes de depreciação do material de guerra e $g(t)$ e $h(t)$ são as estratégias particulares de cada país.

Dependendo das estratégias utilizadas, poderemos ter dois modelos distintos.

Modelo 1: Não há estratégias particulares ($h = 0$ e $g = 0$). Neste caso, o sistema é

$$\begin{cases} x' = -ax + by \\ y' = cx - dy \end{cases}, \quad (172)$$

onde o polinômio característico associado é $\lambda^2 + (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0$, cujas raízes são $\lambda = \frac{1}{2}[-(a + d) \pm \sqrt{(a + d)^2 - 4(ad - bc)}]$. Portanto, λ_1 e λ_2 são raízes reais distintas.

A solução geral do sistema (172), como vimos na Equação (87), é

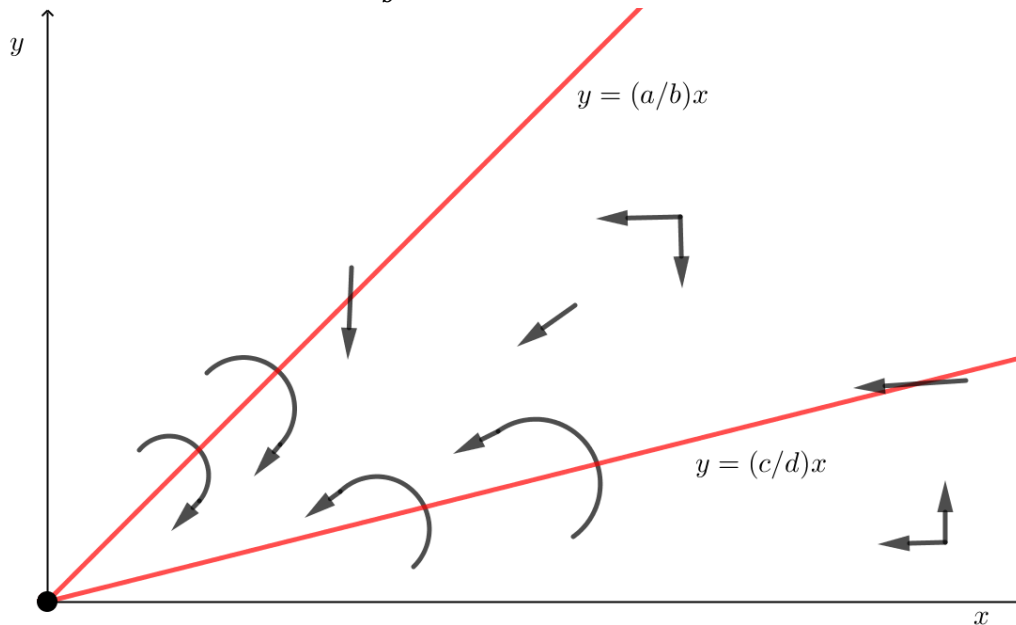
$$\begin{cases} x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} \\ y(t) = A \frac{a + \lambda_1}{b} e^{\lambda_1 t} + B \frac{a + \lambda_2}{b} e^{\lambda_2 t} \end{cases}, \quad (173)$$

onde A e B são constantes arbitrárias.

Neste sistema, o ponto de equilíbrio é a origem e a sua natureza depende essencialmente do sinal de $ad - bc$, ou seja, se $ad - bc > 0$, λ_1 e λ_2 são raízes negativas e o ponto de equilíbrio é um nó estável, portanto, os países estarão em paz permanentemente (**Figura B.1(a)**). Se $ad - bc < 0$, λ_1 e λ_2 são raízes positivas e o ponto de equilíbrio é um ponto de sela (instável), tal que as quantidades x e y crescem sem limitação. Neste caso, a tendência é um estado de guerra crescente com o tempo onde não há possibilidade de diminuição dos equipamentos para os dois países (**Figura B.1(b)**). Por fim, se $ad - bc = 0$, então $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = -(a + d) < 0$, logo toda a reta $y = (a/b)x = (c/d)x$ é constituída pelos pontos de equilíbrio e, dependendo das quantidades iniciais dos equipamentos de cada país, estas quantidades tenderão para um valor infinito (x_∞, y_∞) sobre a reta $y = (a/b)x$, tal que, nesta situação, não deverá ocorrer uma guerra (**Figura B.1(c)**).

Em todos estes casos, as únicas órbitas que se dirigem para a origem são as semirretas

$$y = \frac{a + \lambda_2}{b} x, \quad A = 0 \text{ e } B \neq 0. \quad (174)$$



(a)

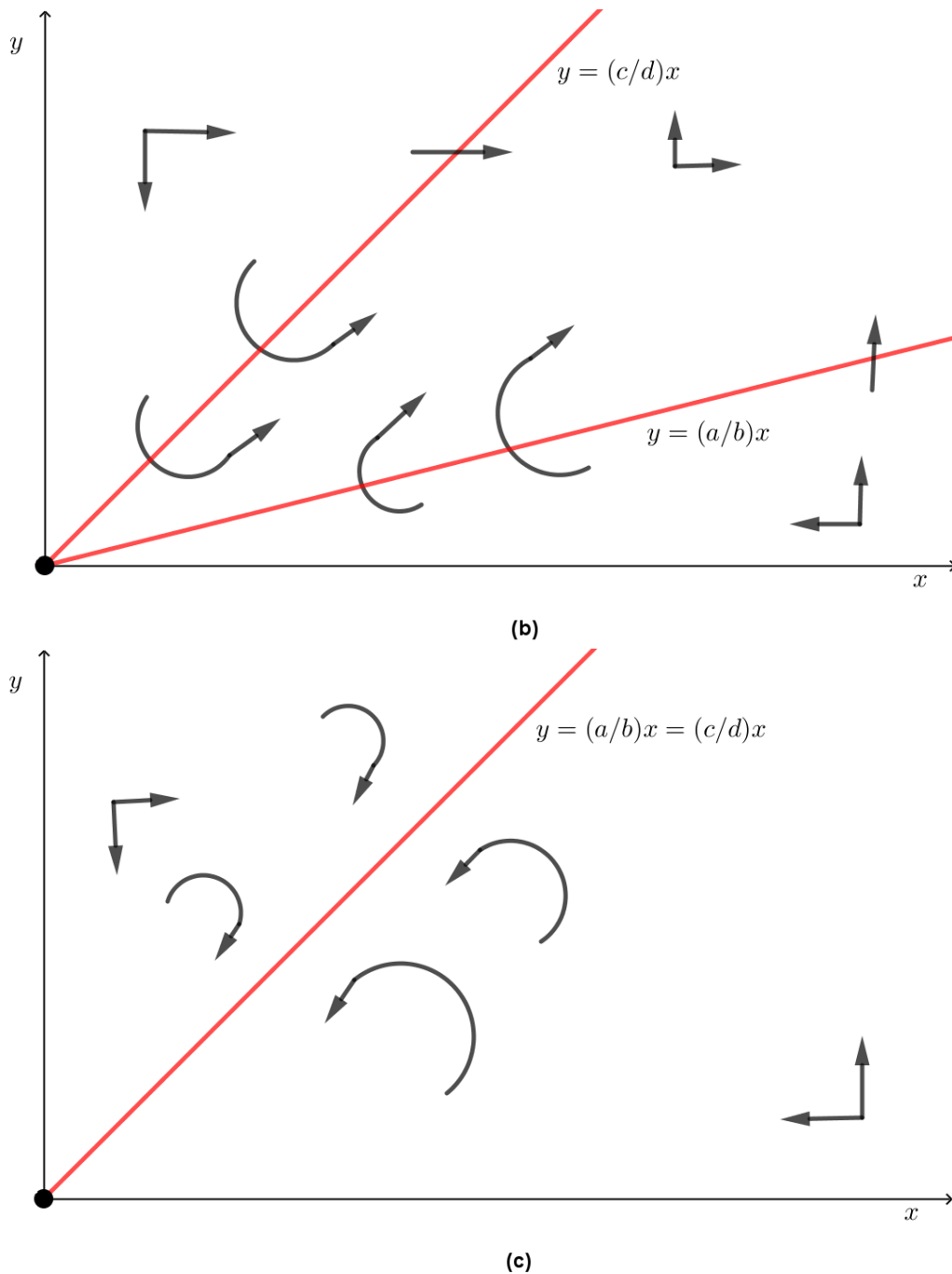


Figura B.1: Comportamento armamentista: (a) Estado de paz, (b) Tendência de estado de guerra permanente e (c) Limitação de equipamentos.

Modelo 2: Existem estratégias constantes não nulas. O sistema é o seguinte

$$\begin{cases} x' = -ax + by + g \\ y' = cx - dy + h \end{cases} \quad (175)$$

onde a, b, c e d são constantes positivas e h e g são constantes não nulas. Se $ad \neq bc$, então o ponto de equilíbrio deste sistema, $\left(\frac{gd+bh}{ad-bc}, \frac{ah+gc}{ad-bc}\right)$, é obtido pela interseção das isoclínicas

$$-ax + by + g = 0, \quad cx - dy + h = 0. \quad (176)$$

Por outro lado, se $ad = bc$ não teremos ponto de equilíbrio.

Para determinar a natureza da estabilidade do ponto de equilíbrio, consideramos a mudança de variáveis

$$x = x_e + u, \quad y = y_e + v,$$

onde u e v são pequenas variações dos valores de

$$x_e = \frac{gd + bh}{ad - bc}, \quad y_e = \frac{ah + gc}{ad - bc}.$$

Portanto, o sistema (175) torna-se

$$\begin{cases} u' = -au + bv \\ v' = cu - dv \end{cases}, \quad (177)$$

onde o ponto de equilíbrio é a origem e o estudo da sua estabilidade é análogo ao efetuado para o sistema (172). Quanto à solução geral, esta é dada por

$$\begin{cases} x(t) = x_h + x_p \\ y(t) = y_h + y_p \end{cases},$$

onde x_h, y_h são as soluções gerais do sistema (177) e x_p, y_p são soluções particulares do sistema (175). Assim, quando $ad - bc \neq 0$ podemos escrever a solução geral do sistema na forma

$$\begin{cases} x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} + x_e \\ y(t) = A \frac{a + \lambda_1}{b} e^{\lambda_1 t} + B \frac{a + \lambda_2}{b} e^{\lambda_2 t} + y_e \end{cases}. \quad (178)$$

Além disso, se $ad - bc > 0$, λ_1 e λ_2 são ambas negativas e o ponto de equilíbrio (x_e, y_e) é um nó estável, como se visualiza na **Figura B.2**.

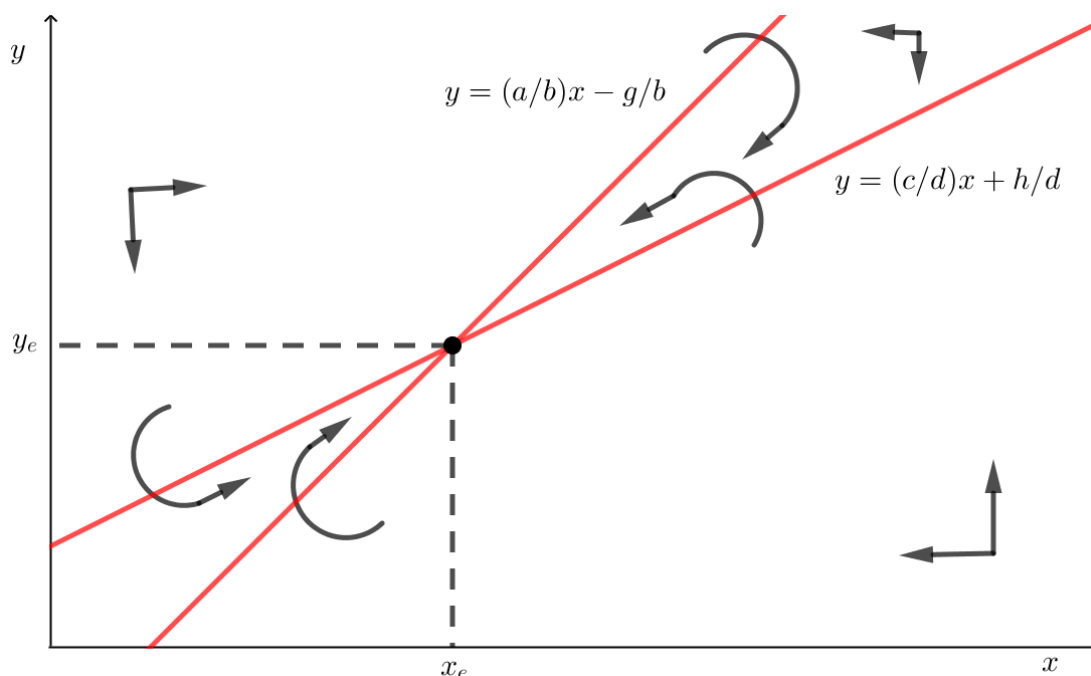


Figura B.2: Diagrama de fases para o caso em que $ad - bc > 0$.

Se $ad - bc < 0, \lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 < 0$ logo, o ponto de equilíbrio é um ponto de sela (instável). As órbitas que se dirigem para o ponto de equilíbrio são obtidas quando $A = 0$ e $B \neq 0$, ou seja,

$$y = \frac{a + \lambda_2}{b}(x - x_e) + y_e. \quad (179)$$

Esta reta é denominada de separatriz (reta azul na **Figura B.3**) e determina quando as potencialidades de guerra dos países crescem ou diminuem. Se o ponto de equilíbrio (x_e, y_e) estiver no primeiro quadrante, então $x(t)$ e $y(t)$ crescem sem limitação quando (x_0, y_0) estiver situado na região acima da separatriz. Caso contrário, $x(t)$ e $y(t)$ diminuirão a partir de um instante t , atingindo valores constantes num tempo finito. Neste caso, o aumento da quantidade de equipamentos, devido à influência do país vizinho, é menor que as depreciações o que deve levar o sistema de estratégias de equipamentos a parar.

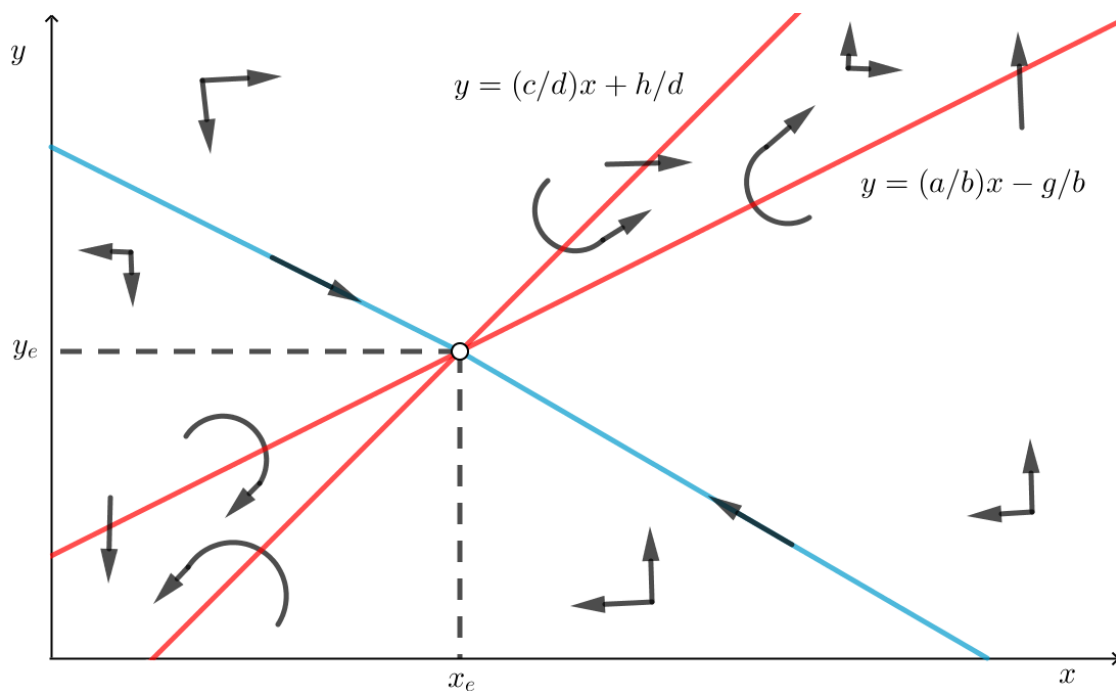
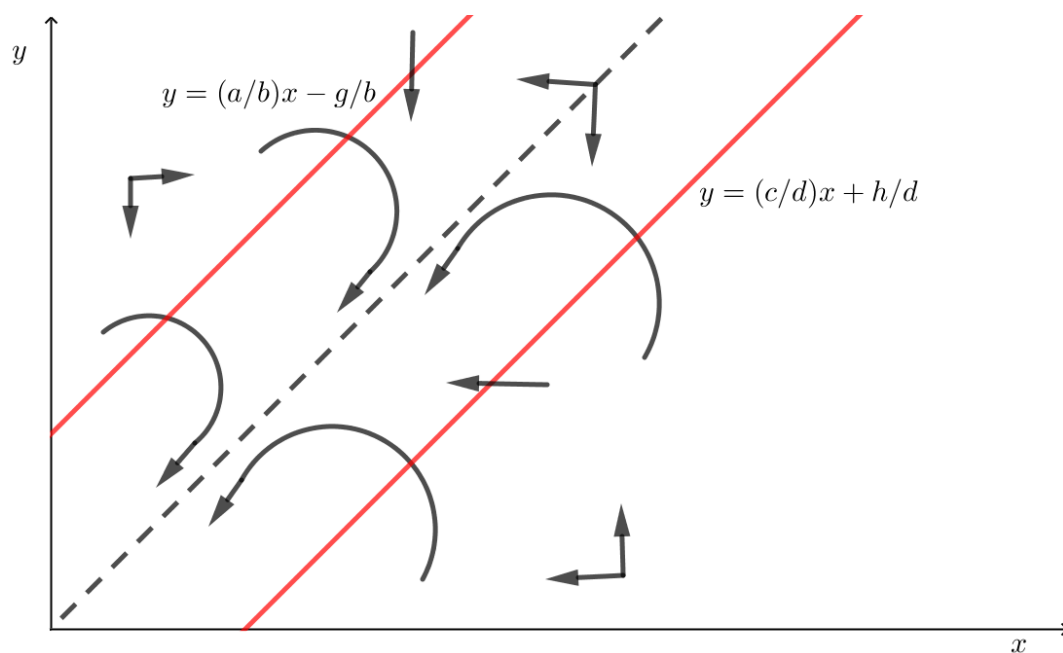
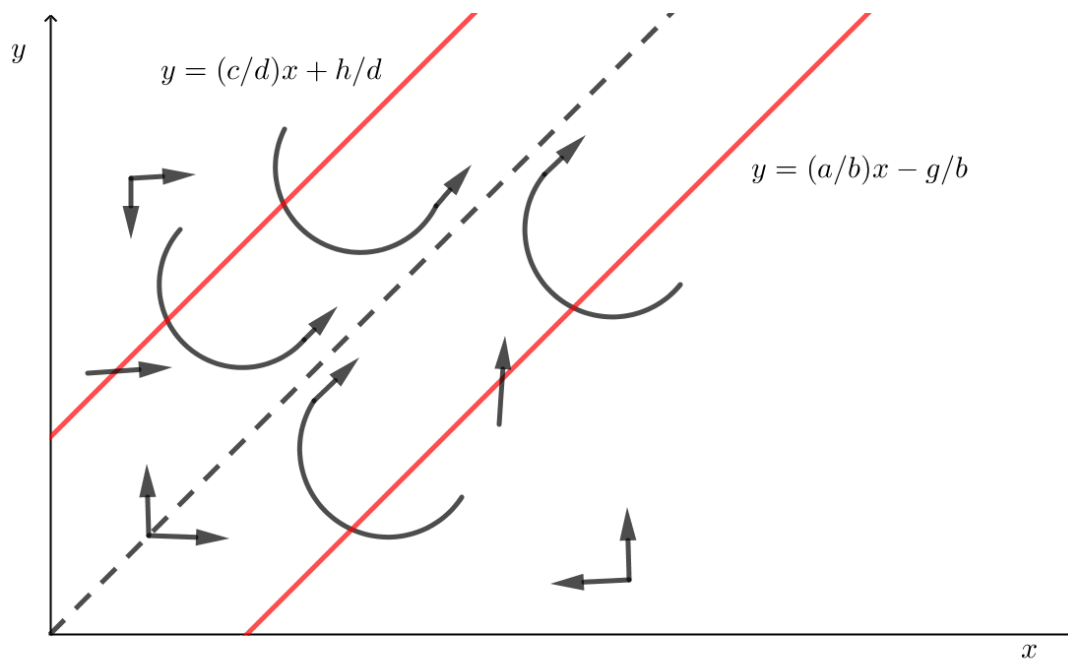


Figura B.3: Diagrama de fases para o caso em que $ad - bc < 0$.



(a)



(b)

Figura B.4: Diagramas de fases para a situação de estado de paz permanente ($bh + gd < 0$) (a) e estado de guerra ($bh + gd > 0$) (b).

Se $ad - bc = 0$, não podemos usar a solução geral (178) uma vez que as isoclínicas, neste caso,

$$y = \frac{a}{b}x - \frac{g}{b}, \quad y = \frac{c}{d}x + \frac{h}{d}, \quad (180)$$

são retas paralelas. Portanto, quando t cresce, $(x(t), y(t))$ aproximam-se de algum ponto (x^*, y^*) situado sobre uma reta com coeficiente angular $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, como ilustra a **Figura B.4**.

Modelo dos biodigestores

Um biodigestor consiste num depósito de fermentação anaeróbica de matérias orgânicas frescas, substrato ou biomassa, que produz um gás combustível composto essencialmente de metano ou dióxido de carbono. Tal mistura é designada de biogás e a sua utilização é bastante diversificada. Outro produto obtido através de um biodigestor é o fertilizante, resíduo da matéria orgânica depois de fermentada.

Com base em [16], consideremos duas das componentes básicas de um biodigestor: $x(t)$ a quantidade de bactérias que produzem o biogás e $y(t)$ a quantidade de biogás produzido que continua no interior do biodigestor. Supondo que x e y são variáveis dependentes do tempo t e x é uma população de bactérias generalizadas, sendo a sua variação dependente da sua própria quantidade e o seu crescimento dependente das condições ambientais, a variação da quantidade de biogás no interior do biodigestor é proporcional à quantidade de bactérias presentes, ou seja,

$$\begin{cases} x' = F(x) - pxy \\ y' = kx - h(y, t) \end{cases} \quad (181)$$

onde p e k são constantes positivas, $F(x)$ fornece a variação das bactérias, independentemente da presença de biogás, o tempo pxy é responsável pelo fator de inibição e a função $h(y, t)$ é responsável pelo tipo de fuga de biogás efetuada.

Veremos então alguns casos peculiares deste modelo.

Caso 1: Todo o gás produzido é mantido no biodigestor ($F(x) = \alpha x$) e o crescimento das bactérias ainda não está inibido, ou seja,

$$\begin{cases} x' = \alpha x - pxy \\ y' = kx \end{cases} \quad (182)$$

Neste caso, $x = 0$ é uma reta de equilíbrio e equação dos caminhos no diagrama de fases é dada por

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\alpha - py}{k}, \quad (x \neq 0). \quad (183)$$

Integrando ambos os membros da Equação (183), obtemos

$$x = \frac{\alpha}{k}y - \frac{p}{2k}y^2 + C,$$

onde C é a constante de integração. Supondo que $x(0) = x_0 > 0$ e $y(0) = 0$, então

$$x = \frac{\alpha}{k}y - \frac{p}{2k}y^2 + x_0. \quad (184)$$

Assim, como ilustra a **Figura B.5**, conclui-se que x , como função de y , atinge o seu valor máximo $x_M(x_0) = x_0 + \frac{\alpha^2}{2kp}$ quando $y = \alpha/p$, enquanto que, y é limitado por

$$y_M(x_0) = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 2kx_0p}}{p} > \frac{\alpha}{p}.$$

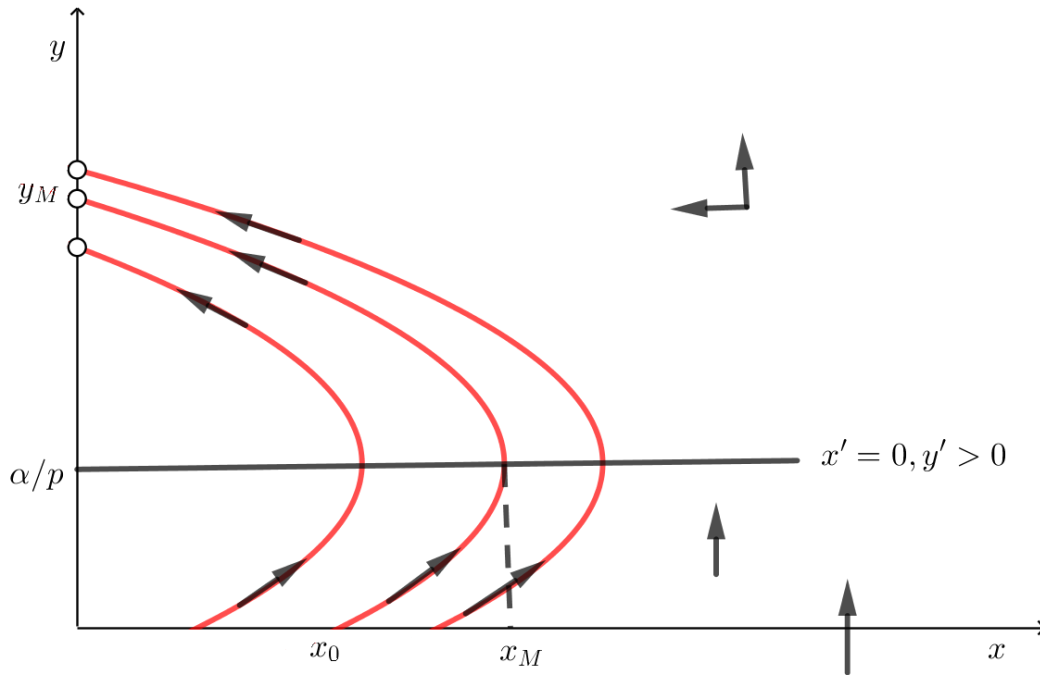


Figura B.5: Relação entre a quantidade de bactérias (x) e de biogás (y).

Os valores de x_M e y_M dependem da quantidade inicial de bactérias x_0 . Portanto, substituindo a Equação (184) na segunda equação do sistema (182), obtemos a equação de variáveis separáveis

$$\frac{dy}{dt} = \alpha y - \frac{p}{2} y^2 + x_0 k. \quad (185)$$

Separando as variáveis e integrando, obtemos

$$y(t) = \frac{y_M y_* (1 - e^{-tD})}{y_* - y_M e^{-tD}}, \quad (186)$$

$$D = \sqrt{\alpha^2 + 2pkx_0}, \quad y_M = \frac{\alpha + D}{p} > 0 \quad \text{e} \quad y_* = \frac{\alpha - D}{p} < 0.$$

Na **Figura B.6** observamos que, quando $t \rightarrow +\infty$, $y(t)$ tende para y_M , ou seja, a produção de biogás é limitada.

Como já tínhamos visto anteriormente, a quantidade máxima de bactérias é atingida quando $y = x/p$, ou seja, quando $t_1 = \ln(D + \alpha/D - \alpha)/D$, portanto, derivando a Equação (186) em relação a t e substituindo na segunda equação do sistema (182), obtemos

$$\frac{dy}{dt} = 4 \frac{kx_0 D^2 e^{-tD}}{[(\alpha - D) + (\alpha + D)e^{-tD}]^2} = kx \quad (187)$$

$$\Leftrightarrow x(t) = \frac{4x_0 D^2 e^{-tD}}{[(\alpha - D) + (\alpha + D)e^{-tD}]^2},$$

o que evidencia que, quando $t \rightarrow +\infty$ as bactérias tendem a se extinguir, como ilustra a **Figura B.7**.

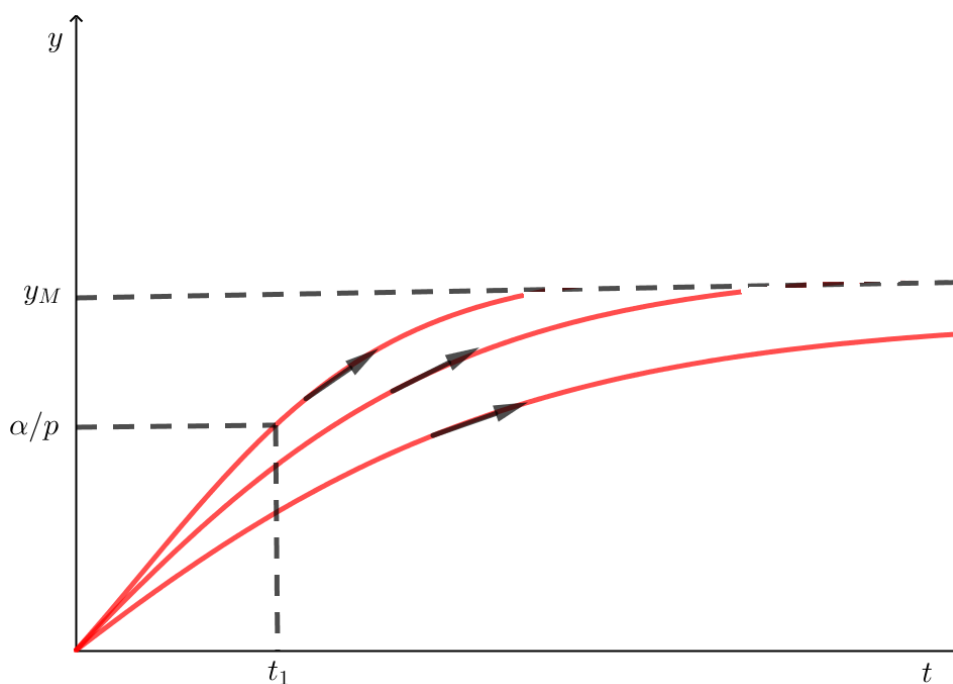


Figura B.6: Produção de biogás.

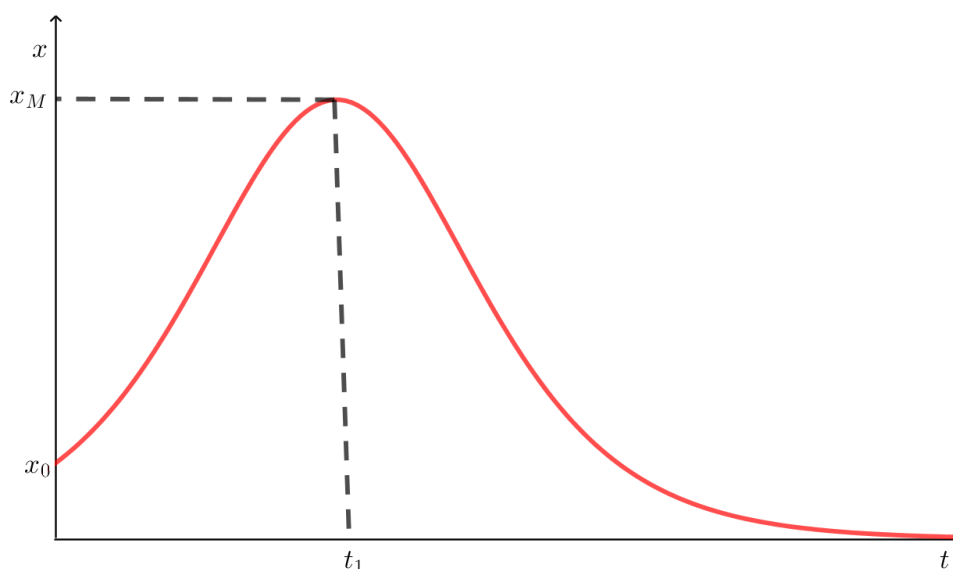


Figura B.7: Quantidade de bactérias num biodigestor.

Caso 2: Todo o gás produzido é mantido no biodigestor ($F(x) = \alpha x - rx^2$) e o crescimento das bactérias é inibido, ou seja,

$$\begin{cases} x' = \alpha x - pxy - rx^2, & x > 0, \\ y' = kx \end{cases} \quad (188)$$

onde α, r, p e k são constantes positivas. Neste caso, os pontos de equilíbrio não são isolados e constituem todo o semieixo positivo Oy ($x = 0, y \geq 0$). Supondo que $x(0) = x_0 > 0$ e $y(0) = 0$, a equação dos caminhos no diagrama de fases é dada por

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\alpha}{k} - \frac{r}{k}x - \frac{p}{k}y \Leftrightarrow x = Ae^{-\frac{r}{k}y} - \frac{p}{r}y + \frac{\alpha r + pk}{r^2}, \quad (189)$$

$$A = x_0 - \frac{\alpha r + pk}{r^2}$$

sendo A determinado pelas condições iniciais. Como $\frac{dx}{dy} = -\frac{Ar}{k} e^{-\frac{r}{k}y} - \frac{p}{r}$, temos que $\frac{dx}{dy} = 0$ quando

$$y = y^* = \frac{k}{r} \ln \left(-\frac{Ar^2}{pk} \right), \quad x_0 < \frac{\alpha}{r},$$

portanto, com base na **Figura B.8**, conclui-se que, se $x_0 > \frac{\alpha}{r}$, então $x(y)$ é sempre decrescente, tal que

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{Ar^2}{k^2} e^{-\frac{r}{k}y}, \quad \text{logo} \quad \frac{d^2x}{dy^2} \Big|_{y=y^*} = -\frac{p}{k} < 0$$

e y^* é um ponto máximo para $x(y)$.

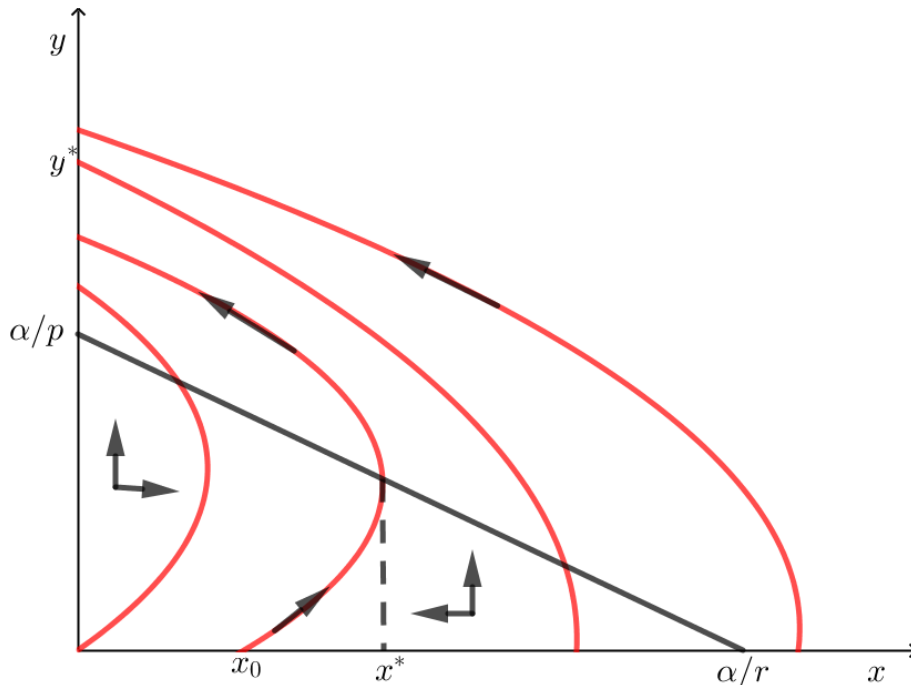


Figura B.8: Trajetórias do sistema $x' = x(\alpha - rx - py)$, $y' = kx$.

Caso 3: A colheita do gás produzido por um biodigestor pode ser efetuada de várias maneiras. Consideremos o caso em que a colheita é proporcional à quantidade existente, ou seja, $h(y, t) = \beta y$, onde β representa a taxa de colheita. O sistema de equações diferenciais para $F(x) = \alpha x$ é dado por

$$\begin{cases} x' = \alpha x - pxy \\ y' = kx - \beta y \end{cases}, \quad x, \alpha, p, k, \beta > 0. \quad (190)$$

Este sistema apresenta dois pontos de equilíbrio, dados pelas soluções do sistema algébrico

$$\begin{cases} \alpha x - pxy = 0 \\ kx - \beta y = 0 \end{cases} = \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \frac{\alpha\beta}{kp} \\ y = \frac{\alpha}{p} \end{cases}. \quad (191)$$

O sistema (190) linearizado no ponto de equilíbrio $(0,0)$ é

$$\begin{cases} x' = \alpha x \\ y' = kx - \beta y \end{cases} \quad (192)$$

onde as raízes do polinômio característico associado são $\lambda_1 = \alpha$ e $\lambda_2 = -\beta$. Portanto, o ponto de equilíbrio $(0,0)$ é um ponto de sela, sendo a órbita $x = 0$ ($y > 0$) a que converge para o ponto de equilíbrio.

Quanto ao ponto de equilíbrio $(\alpha\beta/kp, \alpha/p)$, substituindo $x = u + \frac{\alpha\beta}{kp}$ e $y = v + \frac{\alpha}{p}$ no sistema (190), temos que

$$\begin{cases} u' = -\frac{\alpha\beta}{k}v - pu v, \\ v' = ku - \beta v \end{cases} \quad (193)$$

logo, as raízes do polinômio característico são $\lambda = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\beta}}{2} < 0$. Portanto, como se pode visualizar na **Figura B.9**, o ponto de equilíbrio é um ponto estável, constituindo um nó estável se $\beta \geq 4\alpha$ ou uma espiral estável se $\beta < 4\alpha$.

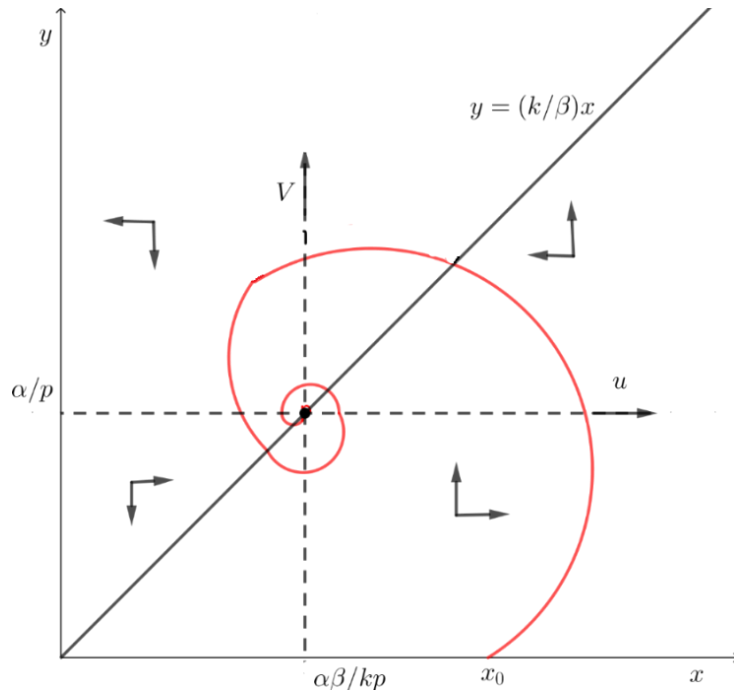


Figura B.9: Diagrama de fases para o sistema linearizado $u' = -\frac{\alpha\beta}{k}v - pu v$; $v' = ku - \beta v$.

Neste caso, verificamos que $x' = 0$ se $y = \frac{\alpha}{p}$, logo

$$x'' = \alpha x' - px'y - pxy',$$

portanto,

$$\frac{d^2x}{dt^2} \Big|_{y=\frac{\alpha}{p}} = -px \frac{dy}{dt} \Big|_{y=\frac{\alpha}{p}} = -px \left(kx - \frac{\alpha\beta}{p} \right) > 0.$$

Assim, concluímos que, se $x < \frac{\alpha\beta}{kp}$ surge um ponto mínimo para $x = x(t)$, se $x > \frac{\alpha\beta}{kp}$ então $\frac{d^2x}{dt^2} \Big|_{y=\frac{\alpha}{p}} < 0$, surgindo um ponto máximo em $x(t)$.

Modelo geral da competição entre duas espécies

A interação entre duas espécies A e B se processa de maneira que cada espécie afeta negativamente a outra na luta pela sobrevivência. Como os recursos são limitados, seguindo a ideia defendida por [16], o modelo de crescimento logístico é o mais indicado para representar o modelo matemático em questão

$$\begin{cases} x' = ax - bx^2 & (\text{se } y = 0) \\ y' = cy - dy^2 & (\text{se } x = 0) \end{cases} \quad (194)$$

onde $x(t)$ e $y(t)$ são as populações das espécies A e B no tempo t respetivamente. Se incluirmos o efeito da competição, a interação será modelada supondo que a taxa de crescimento da cada espécie seja reduzida por um fator proporcional à população da outra espécie. Portanto, as equações que dirigem tal ecossistema são

$$\begin{cases} x' = x(a - bx - \alpha y) \\ y' = y(c - dy - \beta x) \end{cases} \quad (x \geq 0, y \geq 0), \quad (195)$$

indicando que as respetivas taxas de crescimento são inibidas de uma maneira linear pelas duas populações.

Os pontos de equilíbrio do sistema (195) são quatro: a origem $(0,0)$, resultante da interseção das retas $x = 0$ e $y = 0$, o ponto $(a/b, 0)$, resultante da interseção da reta $a - bx - \alpha y = 0$ com a reta $y = 0$, da interseção das retas $c - dy - \beta x = 0$ e $x = 0$ obtemos o ponto $(0, c/d)$ e, por fim, o ponto $\left(\frac{ad-ca}{bd-\alpha\beta}, \frac{cb-a\beta}{bd-\alpha\beta} \right)$ da interseção das retas $c - dy - \beta x = 0$ e $a - bx - \alpha y = 0$, desde que $(bd - \alpha\beta) \neq 0$.

Quanto à estabilidade destes pontos, o ponto $(0,0)$ será sempre um nó instável, independentemente dos valores dos coeficientes que aparecem no sistema (195), pois tal sistema linearizado é dado por

$$\begin{cases} x' = ax \\ y' = cy \end{cases} \quad (a > 0, c > 0), \quad (196)$$

onde $\lambda_1 = a$ e $\lambda_2 = c$ são as raízes do polinómio característico associado.

Para a análise do ponto $\left(\frac{a}{b}, 0 \right)$, consideramos a mudança de variáveis $x = \frac{a}{b} + u$ e $y = v$. O sistema (195) passa a ser

$$\begin{cases} u' = -au - \frac{a\alpha}{b}v - bu^2 - \alpha uv \\ v' = \left(c - \frac{a\beta}{b}\right)v - dv^2 - \beta uv \end{cases}, \quad (197)$$

que linearizado no ponto $\left(\frac{a}{b}, 0\right)$ é dado por

$$\begin{cases} u' = -au - \frac{a\alpha}{b}v \\ v' = \left(c - \frac{a\beta}{b}\right)v \end{cases}. \quad (198)$$

As raízes do polinómio característico associado são $\lambda_1 = -a$ e $\lambda_2 = c - \frac{a\beta}{b}$. Como λ_1 é sempre negativo, se $\frac{c}{\beta} < \frac{a}{b}$ então $\lambda_2 < 0$ e o ponto de equilíbrio será um nó estável. Se $\frac{c}{\beta} > \frac{a}{b}$ então $\lambda_2 > 0$ e o ponto de equilíbrio será um ponto de sela (instável).

Efetuada uma análise análoga para o ponto de equilíbrio $\left(0, \frac{c}{d}\right)$, obtemos que as raízes características são $\lambda_1 = a - \alpha \frac{c}{d}$ e $\lambda_2 = -c$. Portanto, se $\frac{a}{\alpha} < \frac{c}{d}$ o ponto será um nó estável e se $\frac{a}{\alpha} > \frac{c}{d}$ será um ponto de sela.

Por fim, para que o ponto de equilíbrio $(x_e, y_e) = \left(\frac{ad-c\alpha}{bd-\alpha\beta}, \frac{cb-a\beta}{bd-\alpha\beta}\right)$ com $(bd - \alpha\beta) \neq 0$ esteja no primeiro quadrante, é necessário que $\frac{c}{d} > \frac{a}{\alpha}$ e $\frac{a}{b} > \frac{c}{\beta}$ ou $\frac{c}{d} < \frac{a}{\alpha}$ e $\frac{a}{b} < \frac{c}{\beta}$. Logo, a mudança de variáveis $x = x_e + u, y = y_e + v$, efetuada no sistema (195), fornece o sistema linearizado

$$\begin{cases} u' = -bx_e u - \alpha x_e v \\ v' = -\beta y_e u - dy_e v \end{cases}. \quad (199)$$

Neste sistema, o polinómio característico da matriz dos coeficientes é $P(\lambda) = \lambda^2 + (bx_e + dy_e)\lambda + (bd - \beta\alpha)x_e y_e$, cujas raízes são $\lambda = -\frac{1}{2}(bx_e + dy_e) \pm \frac{1}{2}[(bx_e + dy_e)^2 - 4(bd - \beta\alpha)x_e y_e]^{\frac{1}{2}}$. Como $\Delta = (bx_e - dy_e)^2 + 4\alpha\beta x_e y_e > 0$, se $\frac{c}{d} > \frac{a}{\alpha}$ e $\frac{a}{b} > \frac{c}{\beta} \Rightarrow \frac{ac}{bd} > \frac{\alpha c}{\alpha\beta} \Rightarrow \alpha\beta - bd > 0$, logo $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 < 0$ portanto o ponto de equilíbrio será um ponto de sela. Se $\frac{c}{d} < \frac{a}{\alpha}$ e $\frac{a}{b} < \frac{c}{\beta} \Rightarrow \alpha\beta - bd < 0$ e, portanto, $\lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 < 0$ o que implica que o ponto (x_e, y_e) seja um nó estável.

No diagrama de fases, a equação dos caminhos do sistema (195) é dada por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(c - dy - \beta x)}{x(a - bx - \alpha y)}, \quad (200)$$

que é uma equação que não admite solução envolvendo funções elementares, logo os eixos do diagrama são ambas isoclínicas e órbitas. Dependendo da posição relativa das outras isoclínicas, $c - dy - \beta x = 0$ onde $\frac{dy}{dx} = 0$ e $a - bx - \alpha y = 0$ onde $\frac{dx}{dy} = 0$, temos quatro formas distintas do diagrama de fases. A primeira é ilustrada pela **Figura B.10**, onde $(0,0)$ é um nó instável, $(0, c/d)$ é um nó estável e $(a/b, 0)$ é um ponto de sela. Neste caso, a espécie

y sobrevive, sendo a sua população limite $y_\infty = \frac{c}{d}$, e a espécie x será extinta, a não ser que $y_0 = 0$ e aí $x_\infty = \frac{a}{b}$.

Na segunda (**Figura B.11**), o ponto $(0,0)$ é um nó instável, $(0, c/d)$ é um ponto de sela e $(a/b, 0)$ é um nó estável. Neste caso, a espécie x sobrevive e tende para $x_\infty = \frac{a}{b}$, enquanto que a espécie y tende para a extinção, a não ser que $x_0 = 0$ e aí $y_\infty = \frac{c}{d}$.

Já na **Figura B.12**, $(0,0)$ é um nó instável, $(0, c/d)$ é um ponto de sela, $(a/b, 0)$ é também um ponto de sela e (x_e, y_e) é um nó estável. Neste caso, as duas espécies sobrevivem e tendem para

$$x_e = x_\infty = \frac{ad - c\alpha}{bd - \alpha\beta}, \quad y_e = y_\infty = \frac{cb - \alpha\beta}{bd - \alpha\beta}, \quad (201)$$

com $bd - \alpha\beta > 0$ (fraca competição entre as duas espécies).

Por fim, na **Figura B.13**, o ponto $(0,0)$ é um nó instável, $(0, c/d)$ é um nó estável, $(a/b, 0)$ é também um nó estável e (x_e, y_e) é um ponto de sela (instável). Neste caso, haverá extinção de uma das espécies dependendo da condição inicial das populações, ou seja, só poderá haver coexistência das espécies se o ponto inicial estiver na separatriz, que é composta pelas duas órbitas que se dirigem para (x_e, y_e) .

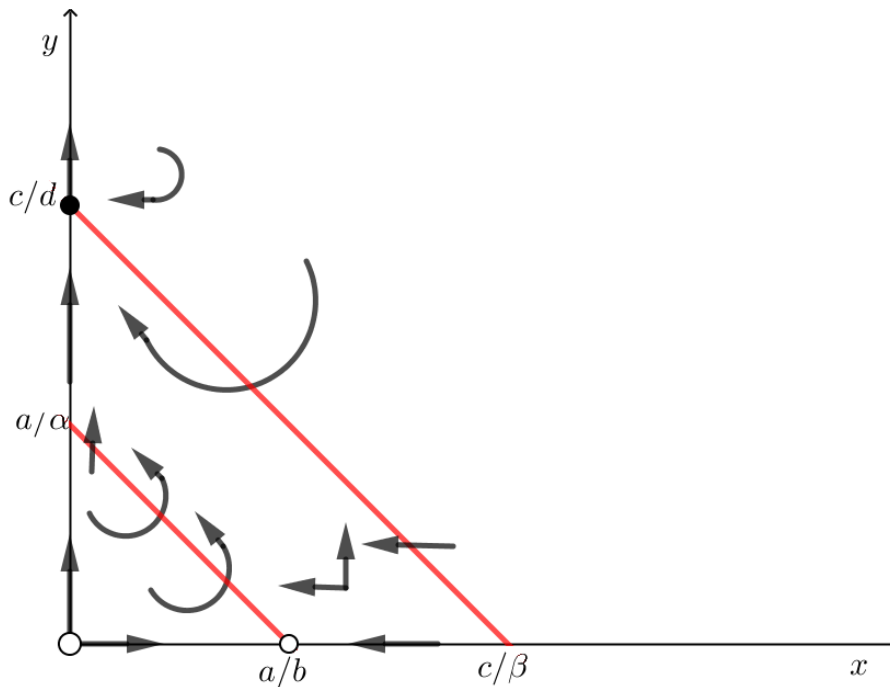


Figura B.10: Diagrama de fases para o caso em que $\frac{c}{d} > \frac{a}{\alpha}$ e $\frac{c}{\beta} > \frac{a}{b}$.

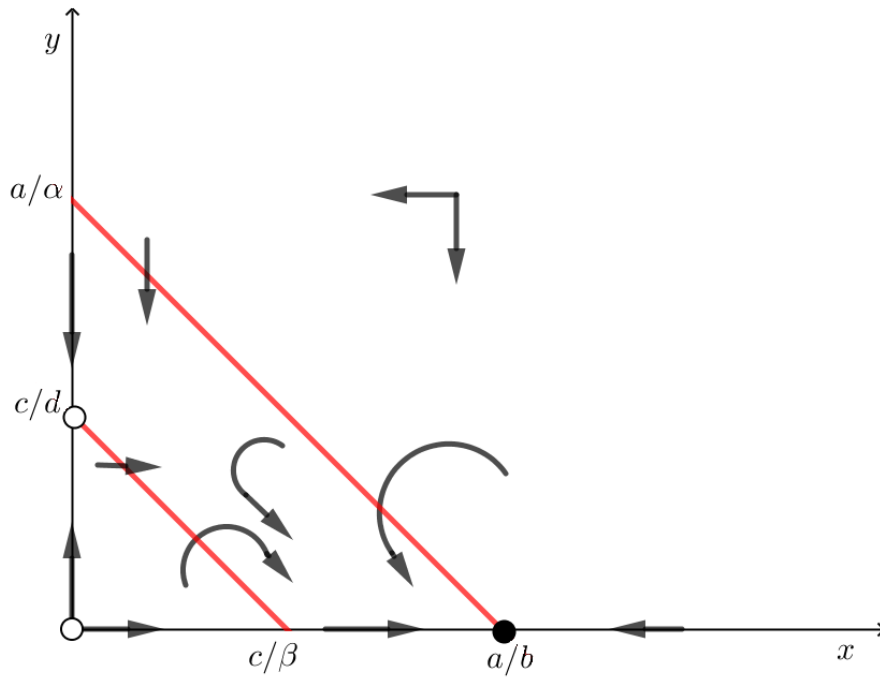


Figura B.11: Diagrama de fases para o caso em que $\frac{c}{d} < \frac{a}{\alpha}$ e $\frac{a}{b} > \frac{c}{\beta}$.

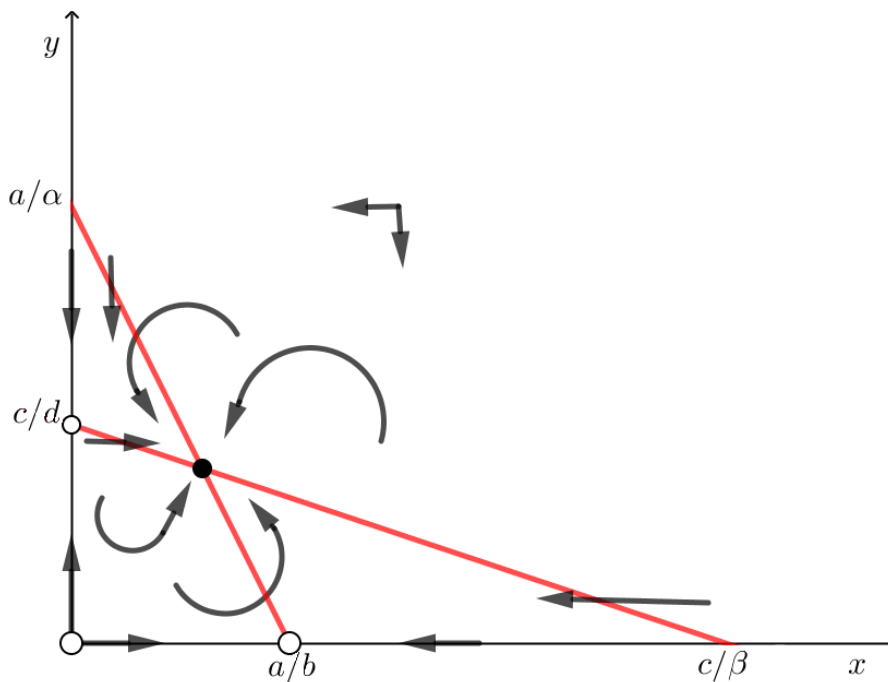


Figura B.12: Diagrama de fases para o caso em que $\frac{a}{\alpha} > \frac{c}{d}$ e $\frac{c}{\beta} > \frac{a}{b}$.

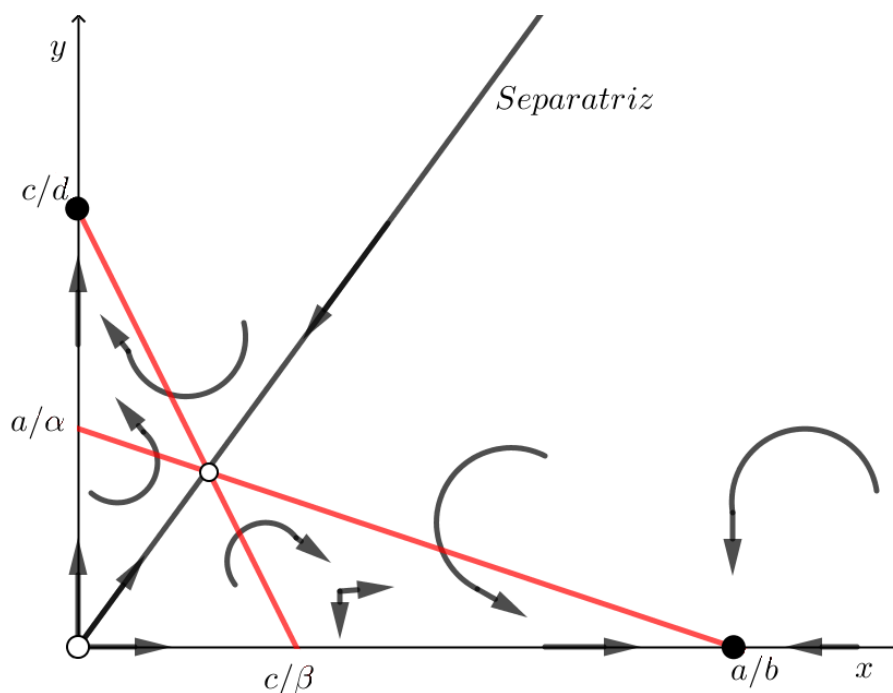


Figura B.13: Diagrama de fases para o caso em que $\frac{c}{d} > \frac{a}{\alpha}$ e $\frac{c}{\beta} < \frac{a}{b}$.

A lei de Gause [32] estabelece que não podem coexistir duas espécies em estado de competição forte sem que uma delas acabe por se extinguir. No entanto, no caso em que (x_e, y_e) é um nó estável, as duas espécies, na verdade, não estão competindo, pois $bd - \alpha\beta > 0$ indicando que os fatores de competição α e β são bastante pequenos.

Modelo da lei da gravitação universal

A noção do peso como propriedade inerente de um corpo, considerada por Aristóteles, perdurou até a época de Newton, que procurou uma explicação mais razoável. As próprias Leis de Kepler [33] sobre o movimento planetário não alteravam em nada as ideias relativas aos fenômenos terrestres. Estas leis, apresentadas abaixo, descreviam e analisavam o movimento observado nos planetas, mas não estabeleciam nenhuma teoria explicativa:

- (i) Todos os planetas movem-se segundo órbitas elípticas, nas quais um dos focos é ocupado pelo Sol;
- (ii) Uma reta imaginária que vai de qualquer planeta ao Sol abrange áreas iguais em tempos iguais;
- (iii) O quadrado do período de revolução de qualquer planeta ao redor do Sol é proporcional ao cubo do semieixo da elipse.

Como forma de comprovar estas três leis experimentais, Newton aplicou ao movimento planetário as suas leis de movimento e gravitação, mostrando que as forças não atuavam somente em corpos de dimensões do Sol ou planetas, mas sim entre quaisquer corpos, concluindo, através de medidas de aceleração centrípeta da Lua, que a aceleração de um corpo que cai é inversamente proporcional ao quadrado da sua distância à Terra, conceção que permitiu o surgimento da Lei da Gravitação Universal [34].

Esta lei indica que duas partículas de massas m_1 e m_2 , separadas por uma distância r , se atraem mutuamente e as forças de atração tem intensidade

$$F = \frac{Gm_1m_2}{r^2}, \quad (202)$$

onde G é a constante de gravitação universal ($G = 6,674 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$). Estas forças atuam na direção da reta que une as partículas, de acordo com a terceira lei de Newton [20], que nos diz que quando duas partículas exercem forças entre si, essas forças são iguais em intensidade, têm a direção da reta que as une e são de sentidos opostos.

De acordo com [16], consideremos uma partícula de massa m sujeita apenas à força gravitacional da Terra. Usando a segunda lei de Newton [33], $mx'' = F$, podemos escrever

$$mx'' = -\frac{GmM}{x^2}, \quad (203)$$

onde M é a massa da Terra e x é a distância do corpo de massa m ao centro da Terra. Quando $x = R$ (raio da Terra), $x'' = -g$ logo

$$\frac{GM}{R^2} = g. \quad (204)$$

Sempre que um corpo estiver próximo da superfície terrestre, supomos que $\frac{GM}{x^2} = g$ obtendo assim a seguinte equação diferencial

$$x'' = -\frac{gR^2}{x^2}, \quad (205)$$

com $x'(R) = v_0$ no movimento ascendente e $x'(R) = -v_0$ no movimento descendente. Considerando $v(t) = x'(t)$, ou seja,

$$x'' = v' = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx},$$

substituindo na Equação (205) obtemos

$$vv' = -gR^2 \frac{1}{x^2},$$

cuja solução é

$$\frac{v^2}{2} = \frac{gR^2}{x} + C, \quad x = R, \quad C = \frac{v_0^2}{2} - gR.$$

Assim,

$$v(t) = \sqrt{2gR \left(\frac{R}{x} - 1 \right) + v_0^2} \quad (\text{movimento ascendente}) \quad (206)$$

e

$$v(t) = -\sqrt{2gR \left(\frac{R}{x} - 1 \right) + v_0^2} \quad (\text{movimento descendente}). \quad (207)$$

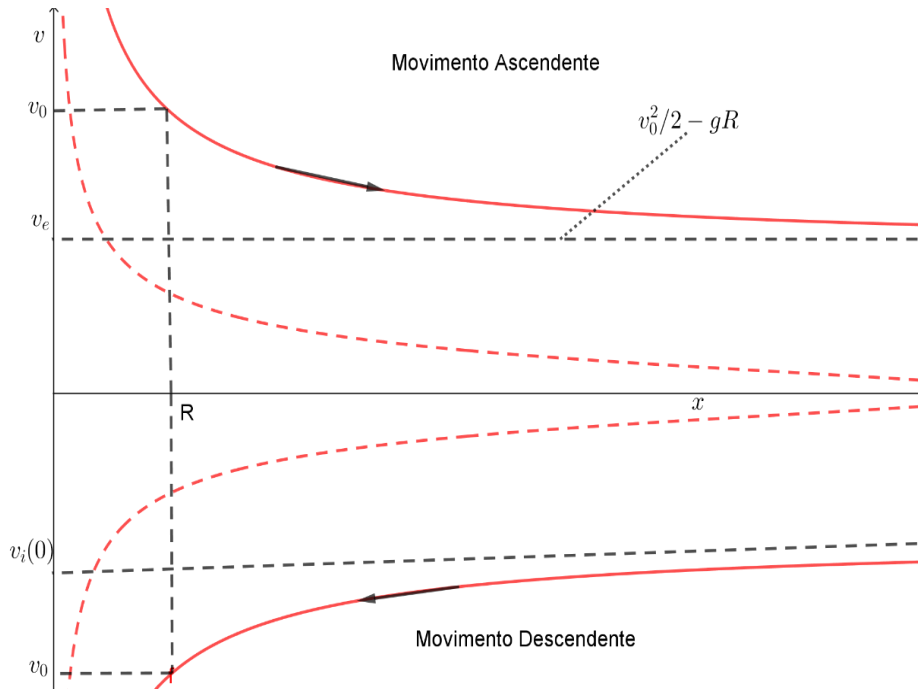


Figura B.14: Movimento ascendente e descendente de um corpo.

Por análise da **Figura B.14**, concluímos que a velocidade em valor absoluto diminui quando a altura x (distância à Terra) aumenta. Se $v_0^2 \geq 2Rg$, a velocidade nunca se anula e, portanto, o corpo continua em movimento. Se estiver a subir, continua para sempre e se estiver caindo, só vai parar porque a superfície terrestre servirá de anteparo. Por fim, se um corpo é abandonado a uma distância h da Terra, ou seja, $v(h) = 0$, a sua velocidade de impacto v_i é determinada se considerarmos $x = R$, tal que

$$v_i = -\sqrt{2gR - \frac{2gR^2}{h}}, \quad (208)$$

ou seja, a velocidade de impacto é proporcional à altura h do corpo que é abandonado e o seu maior valor absoluto se aproxima da velocidade de escape.

Considerando agora a resistência do ar como uma força de atrito sempre contrária ao movimento. Usando a segunda lei de Newton [20] obtemos, para pequenas velocidades,

$$mx'' = -\frac{gR^2}{x^2}m - kx', \quad k > 0. \quad (209)$$

Para grandes velocidades, a força de atrito do ar depende quadraticamente da velocidade, por isso teremos dois casos

$$mx'' = -\frac{gR^2}{x^2}m + kx'^2 \quad (\text{movimento descendente}) \quad (210)$$

e

$$mx'' = -\frac{gR^2}{x^2}m - kx'^2 \quad (\text{movimento ascendente}). \quad (211)$$

A diferença entre $\frac{GM}{x^2}$ e g é pequena quando x está suficientemente próximo de R , ou seja, será menor que 5% do valor de g quando x for menor que 165,43 km. De facto, se $g - \frac{GM}{x^2} = 0,05g$ então

$$x^2 = \frac{GM}{0,95g} = \frac{gR^2}{0,95g} = 1,0526316R^2 \Rightarrow x = 1,0259784R,$$

portanto,

$$x - R = 0,0259784R = 165,43\text{km}.$$

Considerando $\frac{GM}{x^2} = g$ temos

$$mx'' + kx' = -mg \quad (212)$$

(pequenas velocidades),

$$mx'' - kx'^2 = -mg \quad (213)$$

(movimento descendente para grandes velocidades),

ou

$$mx'' + kx'^2 = -mg \quad (214)$$

(movimento ascendente para grandes velocidades).

Assumindo a mudança de variável $v(t) = x'$, verificamos que a equação para as pequenas velocidades pode ser dada por

$$v' + \frac{k}{m}v = -g,$$

cuja solução é

$$v(t) = e^{-\frac{k}{m}t} \left[\int -ge^{\frac{k}{m}t} dt + c \right] = -\frac{m}{k}g + ce^{-\frac{k}{m}t}, \quad (215)$$

onde c é a constante de integração. Se $v(0) = v_0$ então

$$v(t) = \left(v_0 + \frac{m}{k}g \right) e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{m}{k}g,$$

onde a velocidade limite é dada por $v_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} |v(t)| = \frac{m}{k}g$. Para se obter $x(t)$ basta integrar a expressão da velocidade $v(t)$ em ordem a $x(t)$ e obtemos

$$x(t) = -\frac{m}{k} \left(v_0 + \frac{m}{k}g \right) e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{m}{k}gt + c,$$

onde c é a constante de integração, tal que, se $x(0) = x_0$ e $v_\infty = \frac{m}{k}g$ temos

$$x(t) = x_0 + \frac{m}{k} (v_0 + v_\infty) \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right) - v_\infty t. \quad (216)$$

Com o objetivo de resolver a equação do movimento descendente para grandes velocidades, consideramos que $v(t) = x'$, ou seja, a equação fica transformada em

$$mv' - kv^2 = -mg, \quad (217)$$

cujo integral é

$$\int \frac{dv}{\left(v - \sqrt{\frac{gm}{k}}\right)\left(v + \sqrt{\frac{gm}{k}}\right)} = \frac{k}{m}t + c,$$

onde c é a constante de integração. Usando frações parciais na integração, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\sqrt{\frac{gm}{k}}} \ln \left| \frac{v - \sqrt{\frac{gm}{k}}}{v + \sqrt{\frac{gm}{k}}} \right| &= \frac{k}{m}t + c \\ \Leftrightarrow \frac{v - \sqrt{v_\infty}}{v + \sqrt{v_\infty}} &= Ke^{2\sqrt{\frac{gk}{m}}t}, \quad (-v_0 \neq v_\infty). \end{aligned} \quad (218)$$

Consideremos agora a equação da segunda lei de Newton [20] para o movimento de uma partícula, dada na forma vetorial por

$$\frac{d^2x}{dt^2}m = f, \quad (219)$$

ou, componente a componente, por

$$\begin{cases} \frac{d^2x_1}{dt^2}m = F_1 \\ \frac{d^2x_2}{dt^2}m = F_2, \\ \frac{d^2x_3}{dt^2}m = F_3 \end{cases}$$

onde $x_i(t)$ são os componentes cartesianos da trajetória $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ em relação a um sistema inercial.

A terceira lei de Newton [20] nos fornece uma expressão para a força de atração universal entre os corpos que, no caso de duas partículas pontuais de massas m_1 e m_2 localizadas em R_1 e R_2 no espaço, será de igual intensidade atrativa (**Figura B.15**), sendo a sua expressão dada por

$$\frac{Gm_1m_2}{\|x^1 - x^2\|^2}. \quad (220)$$

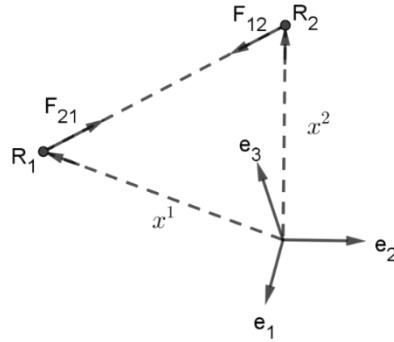


Figura B.15: Força de atração universal entre duas partículas de massas m_1 e m_2 localizadas em R_1 e R_2 no espaço.

Vectorialmente, poderíamos escrever que a força exercida por m_1 sobre m_2 é dada por

$$f_{1,2} = \frac{Gm_1m_2}{\|x_1 - x_2\|^3}(x_1 - x_2), \quad (221)$$

onde $f_{2,1} = -f_{1,2}$, sendo esta expressão válida para partículas pontuais. Assim, se um corpo ocupa um volume V no espaço e tem densidade de massa $\rho(x_1, x_2, x_3)$, a atração (**Figura B.16**) que exercerá sobre uma partícula de massa unitária localizada em x^0 será então dada pelo integral

$$\iiint_V \frac{\rho(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3}{\|x - x^0\|^3} (x_i - x_i^0) = F_i. \quad (222)$$

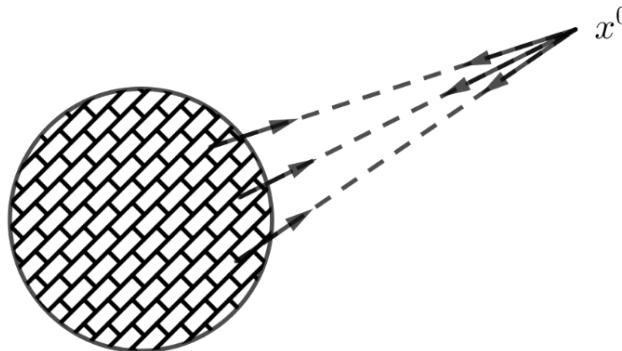


Figura B.16: Atração exercida sobre uma partícula de massa unitária localizada em x^0 .

Com base nesta expressão, e usando coordenadas esféricas, Newton mostrou que a força de atração exercida por um corpo esférico de massa M , com densidade variando apenas radicalmente, sobre uma massa m localizada em x^0 é igual a

$$\frac{GmM(x^1 - x^0)}{\|x^1 - x^0\|^3}, \quad (223)$$

onde x^1 é o centro do corpo esférico, ou seja, este corpo atua como uma partícula de massa M localizada no seu centro.

Supondo que um corpo celeste de massa M esteja fixado na origem do sistema de coordenadas, estudemos o movimento de um outro corpo de massa m sob a influência apenas

da atração gravitacional do corpo maior. Dada a disparidade de massas, suponhamos que a influência do corpo menor sobre o maior é negligenciável.

A força exercida sobre o corpo de massa m depende apenas do ponto do espaço (x_1, x_2, x_3) que ocupa a k -ésima componente desta força,

$$F_k = -\frac{GMmx_k}{\|x\|^3}. \quad (224)$$

Pela segunda lei de Newton [20], o seu movimento é dirigido pelo sistema de três equações diferenciais não-lineares dado por

$$\frac{d^2x_k}{dt^2} m = -GMm \frac{x_k}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (225)$$

ou, vectorialmente, por

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -GM \frac{x}{\|x\|^3}. \quad (226)$$

Multiplicando a Equação (226) vectorialmente por x , obtemos

$$\frac{d}{dt} \left(x \times \frac{dx}{dt} \right) = 0 \quad \text{ou} \quad x \times \frac{dx}{dt} = c = \text{constante},$$

que representa a conservação da quantidade de movimento angular. Este facto permite-nos concluir que o vetor posição $x(t)$ e o vetor velocidade dx/dt são sempre perpendiculares ao vetor fixo c e, portanto, o movimento, neste caso, é plano, isto é, se desenvolve no plano que passa pela origem perpendicular a c . Outra conclusão é que $\|x \times \frac{dx}{dt}\| = 2 \frac{dS}{dt}$, onde $S(t)$ é a área abrangida pelo vetor posição $x(t)$ no plano de movimento [35], sendo esta conclusão a segunda lei de Kepler ilustrada pela **Figura B.17**.

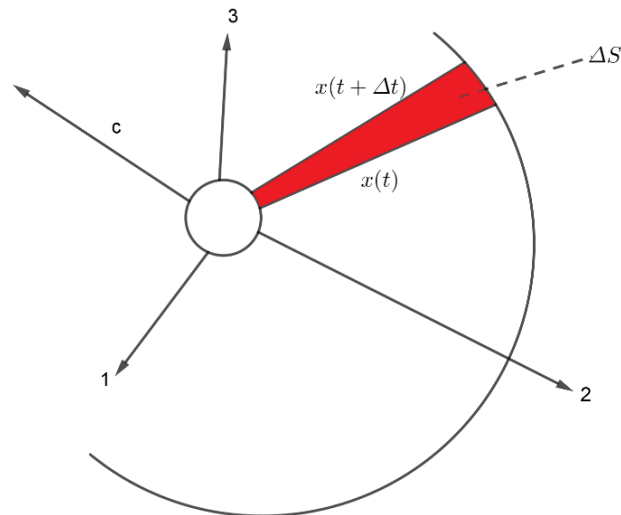


Figura B.17: Área abrangida pelo vetor posição $x(t)$ no plano de movimento, onde

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} \cong \frac{1}{2} \left\| \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \times x(t) \right\|.$$

Bibliografia

- [1] W. Boyce e R. DiPrima, *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*, 8ª ed., Rio de Janeiro: LTC, 2006.
- [2] A. Koestler, *The Sleepwalkers, a History of Man's Changing Vision of the Universe*, New York: Grosset and Dunlap, 1963.
- [3] D. Nóbrega, “Equações diferenciais ordinárias e algumas aplicações,” *Trabalho de conclusão da Licenciatura em Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Norte*, pp. 1-60, 2016.
- [4] F. Teixeira, “Modelos Descritos por Equações Diferenciais Ordinárias,” *Dissertação de mestrado, Universidade Estadual Paulista*, pp. 15-17, 2012.
- [5] M. Kline, *Mathematical Thought Ancient to Modern Times*, New York: Oxford University Press, 1972.
- [6] O. Neugebauer, *Exact Sciences in Antiquity*, 2ª ed., New York: Dover Publications, 1969.
- [7] F. Diacu, *Introdução a Equações Diferenciais: Teoria e Aplicações*, 1ª ed., Rio de Janeiro: LTC, 2004.
- [8] J. Figueiredo e C. Ribeiro, “Apontamentos de equações diferenciais: Complementos de Análise Matemática EE,” Universidade de Minho, 2013.
- [9] P. Olver, “Nonlinear Ordinary Differential Equations,” University of Minnesota, 2017.
- [10] “Wikipédia,” [Online]. Available: https://pt.wikipedia.org/wiki/Fun%C3%A7%C3%A3o_anal%C3%ADtica. [Acedido em 15 02 2020].
- [11] K. Alligood, T. Sauer e J. Yorke, *Chaos. An Introduction to Dynamical Systems*, Springer-Verlag: New York, 1997.
- [12] R. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Redwood City, California: Addison–Wesley, 1989.
- [13] N. Piskounov, *Cálculo Diferencial e Integral*, 9º ed., vol. 2, Lopes da Silva Editora, 1990.
- [14] R. Luís, “Sebenta de Matemática II para a Economia,” Universidade da Madeira. Funchal, 2018-2019.
- [15] R. Shone, *Economic Dynamics: Phase Diagrams and Their Economic Application*, 2ª ed., New York: Cambridge University Press, 2002.

- [16] R. Bassanezi e W. Jr., Equações diferenciais com aplicações, São Paulo: HARBRA Itda, 1988.
- [17] J. Villate, “Equações diferenciais e equações de diferenças,” Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 2001.
- [18] C. Aguiar, “eventos.unipampa.edu,” [Online]. Available: <https://www.if.ufrj.br/~carlos/infoenci/notasdeaula/roteiros/aula06.pdf>. [Acedido em 20 7 2019].
- [19] A. Lobeiro, E. Kaviski, L. Gramani e O. Junior, “Análise do comportamento das soluções do modelo logístico com limiar e resolução por meio de uma maplet programada via maple,” pp. 4-8, 2012.
- [20] “SóFísica,”[Online].Available: <https://www.sofisica.com.br/conteudos/Mecanica/Dinamica/leisdenewton.php>. [Acedido em 24 02 2020].
- [21] D. Jordan e P. Smith, Nonlinear Ordinary Differential Equations: An Introduction For Scientists and Engineers, 4^o ed., New York: OXFORD University Press, 2007.
- [22] G. Baker e J. Blackburn, The Pendulum, Oxford University Press, 2005.
- [23] A. Oliveira, “Sebenta de Matemática I (M195),” Faculdade de Ciências, Universidade do Porto, 2012.
- [24] J. Hale, Ordinary Differential Equations, 2^a ed., Huntington,New York: R.E. Krieger Pub. Co., 1980.
- [25] M. Hirsch e S. Smale, Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra, New York: Academic Press, 1974.
- [26] P. Olver e C. Shakiban, Applied Linear Algebra, Prentice–Hall, Inc.: Upper Saddle River, N.J., 2006.
- [27] F. Hoppensteadt, Mathematical Methods of Population Biology, New York: Cambridge University Press, 1982.
- [28] P. Waltman, Deterministic Threshold Models in the Theory of Epidemics, In: Springer Lecture Notes in Biomathematics. New York: Springer, 1974.
- [29] J. Tornley, Mathematical Model in Plant Physiology, New York: Academic Press, 1976.
- [30] “Academia.edu,”[Online].Available: https://www.academia.edu/30198520/Equa%C3%A7%C3%B5es_Diferenciais_e_suas_Aplica%C3%A7%C3%B5es. [Acedido em 20 07 2019].

- [31] W. Boyce e R. Diprima, *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno.*, 9ª ed., Rio de Janeiro: LTC, 2012.
- [32] “InfoEscola,” [Online]. Available: <https://www.infoescola.com/ecologia/principio-de-gause/>. [Acedido em 22 12 2019].
- [33] “SóFísica,”[Online].Available: <https://www.sofisica.com.br/conteudos/Mecanica/GravitacaoUniversal/lk.php>. [Acedido em 3 07 2019].
- [34] “fq.pt,”[Online]. Available: <http://www.fq.pt/forcas/lei-da-gravitacao-universal>. [Acedido em 27 02 2020].
- [35] D. Pogorelov, *Fundamentals of Orbital Mechanics*, San Francisco: Holden Day Inc., 1964.
- [36] “Infopédia,” [Online]. Available: <https://www.infopedia.pt/dicionarios/lingua-portuguesa/triodo>. [Acedido em 19 05 2020].

Índice remissivo

A

Alometria, 27
Amortecimento, 50, 84
Amplitude, 36, 72
Anabolismo, 88
Aproximação linear, 65, 67, 75
Assíntotas, 68, 77
Assintoticamente estável, 24, 26, 52, 67
Atracção gravitacional, 117
Atrator, 75
Auto-animada, 50

B

Bifurcação, 46
Biodigestor, 102

C

Caminho de fase, 32, 35, 60, 68
Caminhos elípticos, 72
Campo vetorial, 11, 21
Catabolismo, 88
Catenária, 91, 92
Cauchy, 2
Célula, 92
Centro, 34, 42, 65, 72, 76
Ciclo, 50, 64
Ciclo-limite, 48, 50, 74
Competição, 107, 111
Comportamento oscilatório, 40
Condição inicial, 7, 17, 109
Constante de gravitação, 112
Curvas integrais, 7, 12, 65
Cúspide, 42

D

Dependência contínua, 10
Depreciação, 96
Desvio, 66
Diagrama de fases, 32, 35, 42, 67, 76, 85
Dinâmica local, 85
Direção, 32, 60, 65, 73, 112

E

Ecossistema, 107
Elipses, 37, 72
Equação de Bernoulli, 88
Equação de Clairaut, 89
Equação diferencial, 5, 11, 14, 19, 28, 31
Equação do movimento, 31, 35, 40, 48
Equação dos caminhos, 34, 60, 67
Equação linear, 55, 87
Equipamentos, 96
Espaço dos parâmetros, 44
Espiral, 72, 76, 77
Estabilidade, 6, 24, 43, 53, 67
Estabilidade estrutural, 80
Estado, 27, 32, 35
Estado de guerra, 97
Estado endêmico, 84
Estados estacionários, 85
Estável, 22, 34, 52, 65, 72
Estratégias, 96
Estudo qualitativo, 21, 31
Euler, 2
Expansão de Taylor, 65

F

Fator de inibição, 102
Fator de proporcionalidade, 28
Foco, 72
Fonte, 22
Força de atrito, 48, 113
Força restauradora, 40
Fricção, 48
Função analítica, 9
Função de reflexão, 90
Função homogénea, 17
Função potencial, 41
Funções contínuas, 87, 96
Funções estritamente monótonas, 24

G

Gauss, 2

- H**
Hiperbólico, 75
- I**
Impulso, 50
Inclinação, 35, 45, 66
Instável, 22, 65, 72, 80
Isoclínicas, 13, 60
- J**
Juros compostos, 95
- L**
Lagrange, 2, 45
Laplace, 2
Lei da Gravitação Universal, 111
Lei de crescimento exponencial, 28
Lei de Gause, 111
Lei de Kepler, 117
Leibnitz, 1
Linha de fase, 23
- M**
Matriz jacobiana, 66, 67
Máximo, 42, 64
Mecanismo, 50
Método da variação das constantes, 58
Método de substituição, 67
Método matricial, 55
Mínimo, 42, 107
Modelo de Lotka-Volterra, 63
Modelo de transporte, 90
Modelo logístico, 28
Modelo mecânico, 40
Modelo populacional, 28
Monotonicidade, 24, 65
Movimento ascendente, 112
Movimento descendente, 112
Movimentos giratórios, 36, 39
Movimentos periódicos, 36, 39
- N**
Não-linear, 5, 32, 67, 76, 87
Newton, 1, 31, 111, 116
- Nível de saturação, 95
Nó degenerado, 75
Nó estável, 68, 76
Nó instável, 68, 76
- O**
Órbitas, 32, 85, 111
Órbitas heteroclínicas, 10
Órbitas homoclínicas, 10
Órbitas periódicas, 10
Ordem, 5, 31, 51
Oscilação, 49, 50
- P**
Pêndulo, 35, 46, 49, 79
Poço, 22
Ponto aberto, 44
Ponto de equilíbrio, 21, 24, 42, 43, 66, 76
Ponto de inflexão, 42, 88
Ponto de sela, 22, 35, 42, 70, 76
Ponto fechado, 44
Pontos críticos, 18
População limite, 109
Populações, 64, 107
Problema de valor inicial, 7, 9, 52
- R**
Repulsor, 75
- S**
Sentido, 73
Separatriz, 38, 39, 100
Sinal, 22, 40, 65
Sistema autónomo, 52, 66
Sistema dinâmico, 28, 31
Sistema homogéneo, 56
Sistema linear, 65, 67, 71, 75
Sistema não autónomo, 54
Sistema não homogéneo, 58
Sistema não-linear, 32, 67, 76
Sistemas conservadores, 42, 43
Solução complexa, 57
Solução explícita, 6, 14
Solução geral, 54, 67
Solução implícita, 7
Solução real, 57

T

Taxa de colheita, 105
Tempo de transição, 32
Teorema da Existência e Unicidade, 21
Teoria eletroquímica, 90
Tornley, 93
Trajetórias, 22, 32

V

Valores próprios, 56, 67
Van der Pol, 53, 54
Velocidade de deslizamento, 48
Vetores próprios, 56
Von Bertalanffy, 88, 89