

A Nossa
Universidade

Colégio dos Jesuítas
Rua dos Ferreiros - 9000-082, Funchal

Tel: +351 291 209400
Fax: +351 291 209410
Email: gabinetedareitoria@uma.pt

DM

Aprendizagens Algébricas e o Desenvolvimento do
Pensamento Algébrico em Alunos do 8º Ano

Dalila Maria Teixeira Faria da Silva



Aprendizagens Algébricas e o Desenvolvimento do Pensamento Algébrico em Alunos do 8º Ano

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Dalila Maria Teixeira Faria da Silva

MESTRADO EM ENSINO DA MATEMÁTICA NO 3º CICLO DO
ENSINO BÁSICO E SECUNDÁRIO


UNIVERSIDADE da MADEIRA
A Nossa Universidade
www.uma.pt

outubro | 2013

DIMENSÕES: 45 X 29,7 cm

PAPEL: COUCHÊ MATE 350 GRAMAS

IMPRESSÃO: 4 CORES (CMYK)

ACABAMENTO: LAMINAÇÃO MATE

NOTA*

Caso a lombada tenha um tamanho inferior a 2 cm de largura, o logótipo institucional da Uma terá de rodar 90°, para que não perca a sua legibilidade/identidade.

Caso a lombada tenha menos de 1,5 cm até 0,7 cm de largura o layout da mesma passa a ser aquele que consta no lado direito da folha.



Aprendizagens Algébricas e o Desenvolvimento do Pensamento Algébrico em Alunos do 8º Ano

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Dalila Maria Teixeira Faria da Silva

MESTRADO EM ENSINO DA MATEMÁTICA NO 3º CICLO DO
ENSINO BÁSICO E SECUNDÁRIO

ORIENTAÇÃO

Elsa Maria dos Santos Fernandes

Resumo

A todos os alunos deve ser proporcionada uma aprendizagem da álgebra que promova o desenvolvimento da linguagem e do pensamento algébrico, no entanto este é um dos temas da matemática relativamente ao qual os alunos continuam a apresentar muitas dificuldades.

Este estudo tem como objetivo compreender como os alunos de 8.º ano aprendem álgebra e, em particular, como desenvolvem o seu pensamento algébrico. Tendo em conta a complexidade deste objetivo, houve a necessidade de centrar o estudo em duas questões: (a) Que dificuldades manifestam os alunos na aprendizagem da álgebra? (b) De que forma a atividade matemática do aluno pode influenciar a aprendizagem da álgebra e o desenvolvimento do pensamento algébrico?

A investigação seguiu uma metodologia qualitativa, no paradigma interpretativo, e incide no trabalho desenvolvido pelos alunos de uma turma de 8.º ano da qual a investigadora é professora. A recolha de dados baseou-se na observação direta dos comportamentos dos alunos, que foram registados através de anotações, da gravação de áudio e vídeo de algumas aulas e, ainda, em documentos produzidos pelos alunos. Procurou-se evidenciar os momentos onde ocorreram as principais aprendizagens e o desenvolvimento do pensamento algébrico.

A experiência decorre ao longo do desenvolvimento dos tópicos de Funções e Equações e baseia-se na aplicação de um diversificado número de tarefas. As propostas de trabalho escolhidas pretendem proporcionar aos alunos experiências significativas para a aprendizagem da álgebra, promover o trabalho em grupo e a discussão na turma.

Os resultados mostram que é necessário compreender as dificuldades que os alunos apresentam na álgebra, para lhes poder proporcionar uma aprendizagem contextualizada e com significado. Ao longo deste estudo foram muitas as dificuldades apresentadas pelos discentes, mas também se verificaram aprendizagens algébricas significativas que contribuíram para o desenvolvimento da linguagem e do pensamento algébrico nos mesmos.

Palavras-Chave: Álgebra; Pensamento algébrico; Linguagem algébrica, Dificuldades na álgebra.

Abstract

All students should have the opportunity to learn algebra in such a way that it must enable the development of both algebraic language and thought. However, this topic in what mathematics is concerned, is the one students still show many difficulties to grasp.

This study has as a goal to understand how 8th grade students learn algebra, and particularly how they develop their algebraic thought. Bearing in mind the complexity of this goal, the present study had to be centered in two questions: (a) what difficulties did the students show while learning algebra? (b) In what way does the mathematical activity of students influence the learning of algebra and the development of algebraic thought?

The investigation followed a qualitative methodology, inserted in the interpretative paradigm and it is focused on the work developed by an 8th grade class, whose mathematics teacher is this researcher. The data collection was based on direct observation of students' behavior, which was registered through notations, audio and video recordings of some classes and documents that students created. The main purpose was to show the moments where both the core learning and the algebraic thought took place.

The experiment is carried out as the topics *functions* and *equations* were explained to students and it is based on the application of a varied number of tasks. The chosen work proposals intend to provide the students meaningful experiences to the learning of algebra and at the same time promote group work and class debate.

The results reveal that it is necessary to understand the difficulties students show in algebra so that a contextualized and meaningful learning could be assured them. Throughout this study, students have revealed many difficulties. However considerable algebraic learning was achieved, which contributed to the development of language and of algebraic thought.

Key words: algebra, algebraic thought, algebraic language, difficulties in algebra.

Agradecimentos

A realização do presente trabalho não teria sido possível sem o contributo de muitas pessoas. Cumpre agradecer a todos os que, de forma direta ou indireta, me apoiaram.

À professora doutora Elsa Fernandes, Orientadora deste estudo, cujos conselhos e imprescindível apoio foram cruciais para a concretização deste trabalho.

Aos meus pais, pelos valores que me transmitiram e por me terem mostrado a inestimável importância da educação e da formação.

Ao António, meu marido, sempre presente, pelo apoio incondicional, nos bons e nos maus momentos.

Aos meus filhos, Henrique e Maria Inês, por todos os beijos e carinhos, que tornam os meus dias mais fáceis, em especial durante os últimos tempos.

Aos meus irmãos, cunhados, sobrinhos e sogros, que sempre me apoiaram de forma incondicional em todos os momentos.

À Sónia que, além de me apoiar e incentivar em todas as situações da minha vida, em especial nos momentos de desânimo e de insegurança, muito me ajudou e aconselhou em todo este processo.

Aos meus alunos, que deram a sua possível colaboração, sem a qual este projeto não teria sido possível.

Aos colegas e amigos da escola, com especial destaque para a Marlene Silva, a Silvina Freitas e a Ana Ferreira, pela partilha de experiências, sobretudo nas reuniões do projeto de formação do CEM8 (Construindo o Êxito em Matemática, 8.º ano), e pela valiosa ajuda na planificação e adaptação das propostas de trabalho.

Às formadoras do projeto CEM (Construindo o Êxito em Matemática) que, nos últimos anos, me têm incentivado para a aplicação das tarefas e da filosofia de trabalho que apresento neste estudo.

Às amigas Lúcia Pires e Valentina Barrancos, pelo carinho e disponibilidade demonstrados.

Índice

1. Introdução.....	1
1.1. Motivações e Objetivos do Estudo	1
1.2. Organização do Relatório	3
2. O ensino e a aprendizagem da álgebra.....	5
2.1. Desenvolvimento do pensamento algébrico	6
2.2. Aprendizagem da álgebra no 3.º ciclo	7
2.3. Significado dos símbolos e das letras	9
2.4. Estudo das Expressões Algébricas, Equações, Inequações e Funções	12
2.4.1. Estudo das Expressões Algébricas	13
2.4.2. Equações.....	14
2.4.3. Sistemas de equações do 1.º grau com duas incógnitas.	15
2.4.4. Equações do 2.º grau.	15
2.4.5. Inequações.	16
2.4.6. Funções.....	17
2.5. Dificuldades manifestadas na aprendizagem da álgebra	18
3. Metodologia	21
3.1. Opções metodológicas	21
3.2. Caracterização dos intervenientes.....	23
3.3. Escolha das Propostas pedagógicas	23
3.4. Planificação das Propostas pedagógicas	25
4. Análise e Interpretação dos Dados	31
4.1. Proposta de trabalho n.º 10: “Vai um Giro”	31
4.2. Proposta de trabalho n.º 11 – Estudo da função linear e da função afim.....	36
4.3. Proposta de trabalho n.º 12 – Equações literais	40
4.4. Proposta de trabalho n.º 13 – Morada da Mariana.....	43

4.5.	Proposta de trabalho n.º 14 – Classificação de sistemas e resolução de problemas	45
4.6.	Proposta de trabalho n.º 15 – Multiplicação de polinómios	57
4.7.	Proposta de trabalho n.º 16 – Casos notáveis da Multiplicação de binómios.....	64
5.	Considerações finais.....	72
5.1.	Dificuldades manifestadas pelos alunos na aprendizagem da álgebra.....	72
5.2.	A atividade matemática dos alunos e a aprendizagem da álgebra e o desenvolvimento do pensamento algébrico.	75
5.3.	Reflexão final.....	76
6.	Referências.....	79
7.	Anexos	84
7.1.	Anexo I –Vai Um Giro?.....	85
7.2.	Anexo II – Estudo da função linear e função afim	87
7.3.	Anexo III – Equações Literais	90
7.4.	Anexo IV – Morada da Mariana	91
7.5.	Anexo V- Classificação de sistemas e resolução de problemas	96
7.6.	Anexo VI – Multiplicação de polinómios.....	98
7.7.	Anexo VII – Casos notáveis da multiplicação	100
7.8.	Anexo VIII – Pedido de autorização aos Encarregados de Educação	103

Lista de Figuras

Figura 1: Resposta apresentada, pelo grupo 1, à questão 1	32
Figura 2: Resposta final apresentada, pelo grupo 5, à questão 1	32
Figura 3: Tabela apresentada para o custo dos bilhetes pré-comprados, pelo grupo 1	33
Figura 4: Tabela apresentada para o custo dos bilhetes pré-comprados, pelo grupo 2	33
Figura 5: Resposta apresentada, pelo grupo 6, à questão 5	34
Figura 6: Resposta apresentada, pelo grupo 1, à questão 7.2	35
Figura 7: Resposta apresentada, pelo grupo 5, à questão 7.4	35
Figura 8: Reflexão de um aluno sobre a proposta 10	36
Figura 9: Resposta apresentada, pelo grupo 4, na situação 1	37
Figura 10: Esboço do gráfico apresentado, pelo grupo 1, na situação 2	37
Figura 11: Resposta apresentada, pelo grupo 1, à questão 1.1	38
Figura 12: Resposta apresentada, pelo grupo 1, à questão 1.2	38
Figura 13: Resposta apresentada, pelo grupo 3, à questão 2.1.	39
Figura 14: Apreciação de um aluno à proposta de trabalho n.º 11	40
Figura 15: Resposta apresentada, pelo grupo 1, à questão 1.1	40
Figura 16: Resposta apresentada, pelo grupo 3, à questão 1.2	41
Figura 17: Resposta apresentada, pelo grupo 2, à questão 2.1	42
Figura 18: Resposta apresentada, pelo grupo 2, à questão 2.2	42
Figura 19: Resposta apresentada, pelo grupo 5, à questão 1.1	46
Figura 20: Resposta apresentada, pelo grupo 2, à questão 1.2	48
Figura 21: Resposta apresentada, pelo grupo 3, à questão 1.4.4	49
Figura 22: Resposta apresentada, pelo grupo 3, à questão 1.4.6	50
Figura 23: Resposta apresentada, pelo grupo 2, à questão 3.4	52
Figura 24: Apreciação de um aluno à tarefa 1	52
Figura 25: Identificação das variáveis, apresentada pelo grupo 4, do problema 1	53
Figura 26: Sistema apresentado, pelo grupo 4, do problema 1	53
Figura 27: Sistema final, do problema 1, apresentado pelo grupo 4.	53
Figura 28: Sistema apresentado, pelo grupo 2, do problema 2	55
Figura 29: Apreciação feita, pelo grupo 2, à tarefa 2	56
Figura 30: Esboço apresentado, pelo grupo 5, à questão i)	57
Figura 31: Resposta apresentada, pelo grupo 1, à questão ii)	59

Figura 32: Construções apresentadas, por dois grupos, à questão 1	59
Figura 33: Resposta apresentada, pelo grupo 5, à questão 1	60
Figura 34: Resposta apresentada, pelo grupo 1, à questão 4	61
Figura 35: Resposta apresentada, pelo grupo 4, à questão 5 da situação 1	61
Figura 36: Resposta apresentada, pelo grupo 5, à situação 2	62
Figura 37: Resposta apresentada, pelo grupo 1, à situação 2	62
Figura 38: Resposta apresentada, no quadro interativo, pelo grupo 4 à situação 3.....	63
Figura 39: Resposta apresentada, pelo grupo 3, à situação 3	63
Figura 40: Resposta apresentada, pelo grupo 5, à situação	63
Figura 41: Apreciação apresentada pela aluna Le. , à proposta de trabalho n.º 15	64
Figura 42: Apreciação apresentada pela aluna De. , à proposta de trabalho n.º 15.....	64
Figura 43: Apreciação do aluno Gu. , à proposta de trabalho n.º 15	64
Figura 44: Primeira construção apresentada, pelo grupo 1, à questão 1.	65
Figura 45: Primeira construção apresentada, pelo grupo 5, à questão 1.	65
Figura 46: Construção do quadrado, apresentada, pelo grupo 4, à questão 1.	65
Figura 47: Resposta apresentada, pelo grupo 1, à questão 4.	67
Figura 48: Resposta apresentada pelo grupo 5, à questão 4 da situação 2.	68
Figura 49: Construção apresentada, por grupo 5, à questão 1 da situação 3.	68
Figura 50: Resposta apresentada, pelo grupo 5, à questão 3 da situação 3.	69
Figura 51: Registo da decomposição feita pelo grupo 2, na questão 5, da situação 3.....	69
Figura 52: Apreciações feitas, pelos alunos, à proposta de trabalho n.º 16.....	71

1. INTRODUÇÃO

1.1. MOTIVAÇÕES E OBJETIVOS DO ESTUDO

A matemática pode e deve ser aprendida por todos os alunos. (Princípios e Normas para a Matemática Escolar, NCTM, 2007, p. 13)

A disciplina de Matemática é considerada por muitos alunos como uma disciplina difícil e onde poucos terão sucesso, sentimento global que é apoiado pela nossa sociedade. Por essa razão, muitos alunos se sentem desculpados por não atingirem os objetivos mínimos da disciplina. Preferem dizer que não conseguem e ‘cruzam os braços’, não fazendo nenhum esforço para ultrapassar as dificuldades, nem dedicando algum tempo ao estudo da disciplina. Da mesma forma, quando se reúnem forças para realizar um trabalho positivo e não se consegue obter o resultado desejado, o receio de voltar a falhar pode tornar-se mais forte do que a vontade de ultrapassar as dificuldades, diminuindo a coragem para voltar a tentar.

O professor de Matemática tem, assim, como grande desafio contrariar esta ideia e motivar os alunos para a aprendizagem da Matemática. Para Ponte (2003), o ensino da Matemática desenvolve-se em torno de um triângulo cujos vértices são a Matemática, o aluno e o professor. Segundo este autor “[s]ó despertando no aluno o gosto por aprender conseguiremos que ele se envolva profundamente na aprendizagem” (Ponte, 2003, p.14). O professor tem, por isso, um papel fundamental como motivador da aprendizagem e gestor do processo ensino e aprendizagem.

O professor não deve limitar-se a ‘dar a matéria’, mas deve tentar envolver os seus alunos com tarefas motivadoras que tenham significado para os discentes. As aulas não devem ter um caráter rotineiro, onde os alunos apenas resolvem exercícios de aplicação dos conhecimentos, mas devem, também, ser propostos diversos tipos de tarefas que envolvam, desde a resolução de problemas, atividades investigativas e de exploração e a modelação de situações.

Com este trabalho, pretendo desenvolver nos alunos a capacidade de “resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação matemática” como previsto no

Programa de Matemática para o Ensino Básico (Ponte; Serrazina; Guimarães; Brenda; Guimarães; Sousa; Menezes; Martins & Oliveira, 2007, p.7), e proporcionar aos alunos “uma experiência Matemática genuína, lidando com situações e ideias matematicamente ricas e usando conceitos matemáticos na interpretação e modelação de situações da sociedade actual” (Ponte 2003, p.24).

O Programa de Matemática para o Ensino Básico (Ponte *et al.*, 2007), centra-se no estudo de quatro grandes temas matemáticos: Números e Operações, Álgebra, Geometria e Organização e Tratamento de Dados. Decorrente da minha experiência profissional, dos quatro temas mencionados é na álgebra que os alunos do 3.º ciclo costumam apresentar maiores dificuldades. Para estes, a linguagem algébrica é muito abstrata e não apreendem os vários significados dos símbolos e das letras utilizados e associam o estudo da álgebra unicamente à manipulação de símbolos e à resolução de equações e de expressões algébricas. Como não compreendem a linguagem algébrica nem as regras de resolução de equações e expressões algébricas, memorizam-nas e resolvem de forma mecanizada. Isto acontece porque, muitas vezes, a aprendizagem da álgebra é feita de forma descontextualizada, sendo apresentada aos alunos uma lista de regras que são memorizadas e aplicadas sem uma compreensão das mesmas.

No entanto, com a aprendizagem da álgebra, no 3.º ciclo, espera-se que o aluno desenvolva o pensamento algébrico, a capacidade de resolver problemas e de modelar situações matemáticas ou de outras áreas (Ponte *et al.*, 2007). É aconselhável que sejam proporcionadas diversas experiências de exploração e investigação, desde os primeiros anos de escolaridade. Isto deve ser feito, de forma contextualizada, fazendo conexões com outras áreas, como por exemplo a aritmética e a geometria, e permitindo aos alunos uma aprendizagem com compreensão. Na realização de algumas destas tarefas os alunos devem ter oportunidade de usar, como recurso, materiais manipuláveis, a calculadora gráfica, alguns programas informáticos de geometria dinâmica e, até, *applets* algébricos.

Desde o início da minha atividade profissional procurei lecionar a disciplina de Matemática de uma forma motivadora. Sempre tentei propor aos alunos uma diversidade de tarefas, como atividades de exploração e de investigação, resolução de problemas com recurso a materiais manipuláveis, a *software* informático e ao quadro interativo e também resolução de exercícios que proporcionem a prática compreensiva de procedimentos.

Neste contexto, tornou-se pertinente a realização de uma experiência de ensino cujo ponto de partida consistisse em incluir na planificação da unidade de ensino relativa ao tema Funções e Equações, uma diversidade de tarefas de carácter investigativo e exploratório nas subunidades: função linear e afim, equações literais, sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas e operações com polinómios.

Assim, com o objetivo de averiguar quais as dificuldades que estes alunos apresentam na compreensão destes conteúdos e que estratégias utilizam para as ultrapassar, são apresentadas tarefas que proporcionam aos alunos experiências de aprendizagem significativas e promovem a capacidade de resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação matemática, permitindo o recurso a conceitos e procedimentos algébricos. Utilizei material manipulável e meios tecnológicos, o programa informático de geometria dinâmica, Geogebra, e promovi o trabalho em grupo e posterior discussão na turma.

Ao longo deste trabalho, pretendo responder às seguintes questões de investigação:

- (a) Que dificuldades manifestam os alunos na aprendizagem da álgebra?
- (b) De que forma a atividade matemática do aluno pode influenciar a aprendizagem da álgebra e o desenvolvimento do pensamento algébrico?

Para responder a estas questões pretendo analisar a evolução da aprendizagem dos alunos relativamente às estratégias de resolução de problemas, à compreensão da linguagem algébrica e, em especial, ao desenvolvimento do pensamento algébrico.

1.2. ORGANIZAÇÃO DO RELATÓRIO

Este relatório encontra-se dividido em cinco capítulos. O primeiro capítulo inclui a introdução, onde revelo as motivações pessoais, a pertinência e o objetivo deste estudo, as questões de investigação e a estrutura deste relatório.

O segundo capítulo contém o enquadramento teórico que serviu de base para o estudo realizado. Ao longo do capítulo é feita uma análise do ensino e da aprendizagem da álgebra, tendo em atenção a importância do desenvolvimento do pensamento algébrico.

Também é analisada a aprendizagem e o estudo das várias estruturas algébricas no 3.º ciclo, por fim são apresentadas algumas das dificuldades manifestadas pelos alunos neste tema.

O terceiro capítulo expõe as opções metodológicas utilizadas para a realização deste estudo, a caracterização dos intervenientes no estudo, a descrição dos procedimentos adotados na recolha e análise dos dados. Além disso, são apresentadas as tarefas propostas e a respetiva planificação.

O quarto capítulo é dedicado à análise e interpretação dos dados recolhidos. Aqui se descrevem algumas situações ocorridas nas aulas e as aprendizagens feitas pelos alunos, evidenciando os momentos onde se manifesta o desenvolvimento do pensamento algébrico. Esta análise baseou-se na observação direta dos comportamentos dos alunos, que foram registados através de anotações, da gravação de áudio e vídeo de algumas aulas e, ainda, de documentos produzidos pelos discentes.

O capítulo cinco, contém algumas considerações finais sobre o trabalho desenvolvido. São, também, apresentadas as principais conclusões e uma reflexão pessoal de todo o percurso da investigação.

2. O ENSINO E A APRENDIZAGEM DA ÁLGEBRA

Todos os alunos deveriam aprender álgebra. (NCTM, 2007, p. 39)

Historicamente, a álgebra está associada à formalização e sistematização de técnicas de resolução de problemas, e já apareciam várias destas situações nos papiros de Amhes/Rhind e de Moscovo (Duarte, 2011; Ponte, 2006). Também os gregos deram um grande contributo para o estudo da álgebra, Euclides (300 a.C.) desenvolveu métodos geométricos de completar quadrados e Diofanto (329-409 d.C.) foi o primeiro a usar uma linguagem sincopada e a desenvolver métodos aproximados para a resolução de equações, sendo por isso, considerado o fundador da álgebra. Também na obra *Lilavati* de Bhaskara, o matemático hindu mais importante no século XII, aparecem muitos problemas sobre progressões, equações lineares e quadráticas. No entanto, foi al-Khwarizmi (790-840) o primeiro a usar o termo “álgebra” para designar a operação de transposição de termos numa equação (Duarte, 2011; Ponte, 2006). O francês François Viète, que é considerado o fundador da álgebra moderna, foi o primeiro a demonstrar as vantagens do uso das letras para designar quantidades desconhecidas.

Durante muito tempo, o estudo da álgebra esteve ligado, quase exclusivamente, à manipulação de símbolos e à resolução de equações e de expressões algébricas. Atualmente, a álgebra está associada ao estudo de “relações matemáticas abstratas, que tanto podem ser expressas por equações, inequações ou funções” (Ponte, Branco & Matos, 2009, p.8) e, também, à modelação de situações.

Continua a existir a ideia de que a álgebra emprega uma linguagem muito abstrata e que os alunos muitas vezes não compreendem. Neste momento, o Programa de Matemática (Ponte *et al.*, 2007) dá indicações para uma abordagem deste tema, “tendo em vista o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos (...) bem como o trabalho com tarefas que envolvam atividades de simbolização e de modelação” (p.55). Também refere que “é importante que sejam proporcionadas aos alunos experiências informais antes da manipulação algébrica formal” (Ponte *et al.*, 2007, p.55), experiências estas que deverão ser realizadas desde os primeiros anos de escolaridade de forma progressiva e contextualizada, contribuindo para uma aprendizagem com compreensão.

2.1. DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO

Muitas são as investigações feitas sobre a linguagem e o pensamento algébrico. Apesar de não existir uma única definição para pensamento algébrico, a maioria dos investigadores acredita que este é mais do que a simples manipulação dos símbolos. Como referem Pereira e Saraiva (2008), “o pensamento algébrico, para além da capacidade de cálculo, contempla a capacidade de trabalhar com estruturas matemáticas e de usar os símbolos algébricos na resolução de problemas” (p.2).

Por outro lado, muitos dos pesquisadores consideram que o desenvolvimento do pensamento se evidencia quando a atividade principal é o processo de generalização e formalização. Segundo Matos, Silvestre, Branco e Ponte (2008), “[o] pensamento algébrico, mais do que manipular expressões e resolver equações, envolve as capacidades de estabelecer generalizações e relações, interpretar situações e resolver problemas” (p.1). O processo matemático de generalização e formalização referido tem por “base a observação e análise de dados numéricos, padrões, regularidades ou relações matemáticas” (Kaput, 1999), com o objetivo da formação de conjeturas, que serão expressas em linguagens formais com recurso a várias formas de representação como por exemplo tabelas, gráficos, fórmulas ou símbolos matemáticos. Este processo, como refere Ponte, Nunes e Quaresma (2008), “pode ocorrer com base na Aritmética, na Geometria, em situações de modelação matemática ou em qualquer outro campo” (p.6), desde que seja contextualizado e de acordo com os conhecimentos dos alunos.

Se começarmos a desenvolver o pensamento algébrico logo nos primeiros anos de escolaridade, iremos contribuir para “uma abordagem à Matemática mais integrada e interessante, na qual os alunos desenvolvam as suas capacidades matemáticas motivados por uma actividade rica e com sentido” (Canavarro, 2009, p.113), o que poderá ajudar a melhorar a atitude e a predisposição dos alunos para o estudo da álgebra e da matemática.

Para desenvolver o pensamento algébrico, devem ser trabalhados vários temas algébricos, desde o pré-escolar até ao 12.º ano, facultando a todos os alunos capacidades de:

- Compreender padrões, relações e funções;
- Representar e analisar situações matemáticas e estruturas, usando símbolos algébricos;

Usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas;
Analisar mudança em diversas situações (NCTM, 2007, p.39).

O estudo dos temas algébricos deve ser feito de forma contínua e progressiva, em todos os anos de escolaridade, e deverão ser estabelecidas conexões com outras áreas, em especial com a aritmética e a geometria. Desta forma, os alunos no 3.º ciclo e no ensino secundário terão mais à vontade em lidar com os diversos conceitos algébricos e maior destreza na análise e interpretação de determinadas situações matemáticas ou de outras áreas. Por exemplo: se forem proporcionadas atividades de exploração de padrões, desde os primeiros anos de escolaridade, os alunos terão maior capacidade para compreender a noção de função; o trabalho com os números e as suas propriedades serão importantes para a compreensão e utilização dos símbolos e das expressões algébricas; “ao aprender que a matemática pode ser um meio para descrever situações, os alunos irão desenvolvendo noções elementares de modelação matemática” (Leitão & Canguero, s. d., p.3). Aqui estão presentes várias formas de pensamento algébrico “a dimensão de aritmética generalizada, o pensamento funcional e a modelação” (Duarte, 2011, p.63). De notar que para melhor desenvolver a compreensão, devem ser feitas generalizações com base nas experiências dos alunos e, desta forma, a aprendizagem da álgebra estará apenas ligada à manipulação de símbolos e aplicação de regras (Matos *et al.*, 2008).

Para Ponte *et al.* (2009), “o pensamento algébrico inclui a capacidade de lidar com expressões algébricas, equações, inequações, sistemas de equações e de inequações e funções, e a capacidade de lidar com outras relações e estruturas matemáticas e usá-las na interpretação e resolução de problemas matemáticos ou de outros domínios” (p.10).

2.2. APRENDIZAGEM DA ÁLGEBRA NO 3.º CICLO

Segundo Ponte (2006), durante algum tempo, a álgebra foi menosprezada no currículo português, em particular no programa do ensino básico de 1991, onde a “Álgebra desaparece como grande tema” (p.17). Neste, está proposto o estudo das funções, que aparece como tema, e o cálculo algébrico, onde são trabalhadas apenas as regras de manipulação e transformação de expressões com variáveis e a resolução de equações (Ponte, 2006).

No programa atual do ensino básico (Ponte *et al.*, 2007) já é dada uma maior relevância ao estudo da álgebra, pois surge como um dos grandes temas a ser abordado. Apesar de no 1.º ciclo não surgir como tema independente, são dadas indicações para ser desenvolvido o pensamento algébrico “no trabalho com sequências, ao estabelecerem-se relações entre números e entre números e operações” (p.7), com o objetivo de preparar os alunos para o estudo da álgebra, nos 2.º e 3.º ciclos, e atingir o propósito de:

Desenvolver nos alunos a linguagem e o pensamento algébricos, bem como a capacidade de interpretar, representar e resolver problemas usando procedimentos algébricos e de utilizar estes conhecimentos e capacidades na exploração e modelação de situações em contextos diversos. (Ponte *et al.*, 2007, p.55).

Passa a ser importante que todos os alunos aprendam álgebra e desenvolvam o pensamento algébrico sendo, por isso, “necessário que entendam os conceitos algébricos, as estruturas e princípios que regem as manipulações simbólicas e como estes símbolos podem ser utilizados para traduzir ideias matemáticas” (Borrvalho e Barbosa, s. d.). Com toda a aprendizagem desenvolvida na álgebra, os alunos, no 3.º ciclo, devem ser capazes de “interpretar e representar situações em contextos diversos, usando linguagem e procedimentos algébricos; interpretar fórmulas em contextos matemáticos e não matemáticos; resolver problemas, comunicar, raciocinar e modelar situações recorrendo a conceitos e procedimentos algébricos” (Ponte *et al.*, 2007, p.55). Do decorrer desta aprendizagem, os alunos devem também “compreender o conceito de função e ser capazes de o usar em diversas situações, em particular de proporcionalidade directa e inversa” (p.55).

Neste âmbito, é proposto que no 2.º ciclo seja feito o estudo das expressões numéricas e propriedades das operações, trabalhadas as sequências e regularidades e também sejam abordadas situações de proporcionalidade directa. No 3.º ciclo são aprofundados os conhecimentos adquiridos no ciclo anterior e serão abordados os temas: Sequências e regularidades, Equações (1.º grau, literais, 2.º grau, sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas); Inequações e Funções (proporcionalidade directa e inversa, função linear e afim e funções do tipo $y=ax^2$).

As orientações metodológicas dadas são direccionadas para o desenvolvimento do pensamento algébrico com “o estudo de relações de diversos tipos (equações, inequações e funções) e da variação (...) e o trabalho com tarefas que envolvam simbolização e modelação” (Ponte *et al.*, 2007, p.55). Devem ser “proporcionadas aos alunos experiências

informais antes da manipulação algébrica formal (por exemplo, na resolução de equações, sistemas de equações e inequações) e valorizado o trabalho com as fórmulas conhecidas dos alunos" (Ponte *et al.*, 2008, p.7), como por exemplo as fórmulas das áreas de figuras geométricas.

Para melhorar a aprendizagem dos alunos devem ser propostas tarefas de exploração e investigação que promovam a capacidade de resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação matemática e que, se possível, seja dada aos alunos a oportunidade de recorrer ao uso de materiais manipuláveis e das tecnologias, calculadoras e computadores. “A capacidade de cálculo das ferramentas tecnológicas alarga o tipo de problemas acessíveis aos alunos e permite-lhes executar procedimentos rotineiros de forma rápida e precisa, o que deixa mais tempo para o desenvolvimento de conceitos e a modelação” (NCTM, 2007, p.27). Além disso, a utilização das tecnologias permite fazer cálculos e construir gráficos de forma correta, eficiente e rápida, possibilitando a análise e exploração sobre as possíveis transformações.

Na aprendizagem da álgebra é, também, importante o conhecimento da linguagem algébrica, sendo por isso fundamental a compreensão do significado dos símbolos e das letras utilizados.

2.3. SIGNIFICADO DOS SÍMBOLOS E DAS LETRAS

Segundo Ponte *et al.* (2009) “o simbolismo algébrico tem o poder de aglutinar as ideias concebidas operacionalmente em agregados compactos, tornando por isso a informação mais fácil de compreender e manipular” (p.72). São vários os símbolos utilizados na matemática e é imprescindível que os alunos compreendam os diferentes significados na aritmética e na álgebra, como por exemplo: o sinal de igual, os símbolos de desigualdade e de diferente e as variáveis.

O símbolo de igualdade assume vários significados. Nos primeiros anos de escolaridade, na aritmética, significa a procura do resultado de uma operação e, mais tarde, na álgebra, assume o significado de equivalência entre duas expressões. Nesta situação, “a igualdade é usada para representar o equilíbrio” (Barbosa e Junior, 2011) entre a expressão que está à esquerda e a que está à direita do sinal de igual. Pode-se também considerar que “a noção de igualdade desempenha um papel fundamental, tendo um significado muito

mais próximo de “equivalência” do que de “identidade” (Ponte *et al.*, 2009, p.20). De referir que os alunos devem compreender que, sendo uma relação de equivalência, satisfaz as propriedades de reflexividade, simetria e transitividade.

Ponte *et al.* (2009) referem que existem duas concepções do sinal de igual, uma processual e outra estrutural, que “levam Carolyn Kieran a distinguir entre pensamento aritmético e pensamento algébrico” (p.21). Acrescentam que o símbolo de igualdade “numa perspectiva processual indica a realização de uma operação, e, numa perspectiva estrutural, remete para uma relação de equivalência” (Ponte *et al.*, 2009, p.21). Este símbolo também poderá assumir um sentido funcional, quando estuda a dependência de duas variáveis, como por exemplo $y = 4x + 1$, sendo x um número real.

Durante todo o percurso escolar, é importante que os alunos tenham oportunidade de desenvolver várias experiências que sejam significativas e que os conduzam à identificação e distinção dos vários significados do sinal de igual. Os alunos devem ser capazes de perceber que o significado do símbolo de igualdade depende da situação. São disto exemplos os casos em que é pedido “um cálculo, a afirmação de uma relação de equivalência, uma pergunta acerca dos objectos que satisfazem uma relação de equivalência, e uma função estabelecendo uma correspondência entre dois conjuntos” (Ponte *et al.*, 2009, p.23).

Os símbolos de desigualdade e de diferente são também de grande relevância no ensino da aritmética e da álgebra. As relações de ordem são estudadas desde os primeiros anos, mas nem sempre são bem entendidas pelos alunos, porque muitas vezes aparecem de forma descontextualizada.

Logo no início do 1.º ciclo, 1.º e 2.º anos, os alunos começam a usar os símbolos de maior e de menor e, já nesta fase devem perceber que existe um conjunto de números maiores (ou menores) que um número dado, compreender a noção de transitividade e que estas relações não gozam das propriedades reflexiva e simétrica.

Mais tarde, já no 3.º ciclo, deverá ser aprofundado este estudo no conjunto dos números reais, em especial no trabalho com inequações. Neste caso, será também importante estudar as relações de menor ou igual e de maior ou igual e verificar que estas relações satisfazem a propriedade transitiva e reflexiva (para todo o número a , $a \leq a$) (Ponte *et al.*, 2009).

Outro conceito importante na álgebra é o de variável, que geralmente é representada por uma letra. O termo ‘variável’ pode ter vários significados, como refere Duarte (2011) citando Sheffield e Cruikshank (2005), “pode significar um símbolo que assume vários valores de um dado conjunto (como em $\text{Área} = c \times l$) ou pode ter só um valor bem determinado (como em $5c = 20$), o que cria dificuldades de compreensão do conceito pelos alunos” (p.88).

Segundo as Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar (NCTM,1991), “perceber o conceito de variável é essencial para o estudo da álgebra” (p.122). Para que os alunos fiquem com a noção de variável bem consolidada, este conceito deve ser desenvolvido desde muito cedo, e devem ser proporcionadas várias experiências significativas, de acordo com o nível dos alunos. Nos primeiros anos poderão ser propostas situações em que seja necessário encontrar um número específico e posteriormente, os alunos deverão ser capazes de perceber que poderão substituir os números desconhecidos por letras e que, em contextos diferentes, as mesmas letras têm significados diferentes. Branco (2008) refere que Küchemann (1981) descreve seis níveis de interpretação e uso das letras, que se encontram por ordem crescente de dificuldade e começam pelas noções mais simples como: letra avaliada; letra não considerada e letra como objeto, passando depois para as noções fundamentais de:

Letra como incógnita: a letra assume um valor específico mas desconhecido.

Letra como número generalizado: a letra é vista como uma representação, ou pelo menos pode tomar vários valores em vez de apenas um.

Letra como variável: a letra é entendida como a representação de um conjunto de valores não especificados e observa-se uma relação sistemática entre dois conjuntos de valores. (Branco, 2008, p.18)

Como refere Silva (2012), “quando um aluno for capaz de trabalhar com a letra como variável, significa que este compreendeu o uso das letras na totalidade.” (p.19)

Procurando desenvolver no aluno a capacidade de lidar com diversos tipos de relações matemáticas e estudar situações de variação em contextos significativos, institucionaliza-se no 3.º ciclo o uso da linguagem algébrica, trabalha-se com expressões, equações, inequações e funções (Ponte *et al.*, 2007, p.7). Esta ideia não tem continuidade no novo programa de Matemática do ensino básico (Bivar, Grosso, Oliveira & Timóteo, 2013) onde o estudo das Funções aparece separado do domínio da álgebra, o que é questionável. Como afirmam Fiorentini, Fernandes e Cristovão (2005), “se um dos

conceitos fundamentais da álgebra é o de variável, como explorá-lo e desenvolvê-lo sem o estudo concomitante das funções?” e, por outro lado, os conceitos e procedimentos de funções estudados assumem claramente um carácter algébrico.

2.4. ESTUDO DAS EXPRESSÕES ALGÉBRICAS, EQUAÇÕES, INEQUAÇÕES E FUNÇÕES

As raízes históricas da álgebra encontram-se associadas ao estudo de métodos gerais de resolução de equações (NCTM, 2007, p.39).

É no 3.º ciclo que os alunos aprendem a resolver equações, de forma formal, aplicando as regras e os princípios de resolução. Neste ciclo para além do estudo das equações do 1.º grau com uma incógnita, os alunos também trabalham com sequências e regularidades, expressões algébricas, equações literais, equações do 2.º grau com uma incógnita, sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas e operações com polinómios. Também é abordado o estudo das funções (proporcionalidade direta, proporcionalidade inversa, linear e afim e quadrática) e das inequações.

O estudo das estruturas algébricas, anteriormente descritas, tem como objetivo contribuir para desenvolver a capacidade de utilizar linguagem algébrica, de resolver problemas, e desenvolver o raciocínio matemático (Ponte *et al.*, 2009). Estes tópicos permitem a exploração de conexões com outros temas da matemática, em particular com a geometria e os números e operações, e proporcionam “aos alunos um amplo conjunto de ferramentas para a modelação de situações da realidade” (Ponte *et al.*, 2009, p.148). A exploração destes tópicos deve ser feita em paralelo com a representação gráfica e devem ser utilizados vários recursos, como por exemplo: materiais manipuláveis, a calculadora gráfica e o computador com a utilização da folha de cálculo, *software* de geometria dinâmica e *applets* algébricos.

Muitas vezes, os alunos mecanizam os procedimentos de resolução de equações, de sistemas de equações e de inequações, porém não os compreendem. Para evitar esta situação, devem ser “proporcionadas aos alunos experiências informais antes da manipulação algébrica formal” (Ponte *et al.*, 2007, p.55), permitindo também que os alunos façam “uma transição progressiva da linguagem natural para a linguagem matemática” (p.55).

2.4.1. ESTUDO DAS EXPRESSÕES ALGÉBRICAS

O trabalho com expressões algébricas constitui uma vertente importante da aprendizagem da Álgebra. (Ponte *et al.*, 2009, p.77).

No estudo das expressões algébricas, os alunos devem adquirir capacidades de simplificar expressões algébricas, reconhecer, identificar e efetuar operações com monómios e polinómios e, em particular, compreender e utilizar os casos notáveis da multiplicação de binómios, tanto no cálculo numérico como na factorização de polinómios. E, como refere Ponte *et al.* (2009), esta aprendizagem “faz-se em simultâneo com a aprendizagem das sequências, das funções e das equações, procurando-se assim que estas façam sentido para os alunos” (p.77). Aqui os alunos devem reconhecer o sinal de igual como uma equivalência de expressões, e saber que duas expressões são equivalentes quando assumem o mesmo valor, para todo o valor atribuído à variável. Segundo Campos (2010), “[a] equivalência de expressões algébricas tem de ser justificada pelas propriedades das operações – comutativa, associativa, distributiva, existência de elemento neutro ou elemento absorvente – ou pela definição das operações inversas ($x = b - a$ se e só se $x + a = b$, etc.)”(p. 28).

Para os alunos do 3.º ciclo, o programa sugere que a “aprendizagem das operações com monómios e polinómios e da simplificação de expressões algébricas deve ser progressiva e recorrer a situações que permitam aos alunos compreender a manipulação simbólica envolvida, por exemplo, efectuando cálculos a partir de expressões algébricas, substituindo as letras por valores numéricos” (Ponte *et al.*, 2007, p.55). Devem ser estabelecidas conexões com outras áreas, em especial com os números e operações e a geometria.

Para operar com monómios e polinómios, podem ser feitas ligações com os números e operações, porque os alunos precisam de conhecer bem as propriedades das operações, ou com a geometria através da interpretação geométrica da área de um quadrilátero. Também os casos notáveis da multiplicação de binómios, que têm um papel relevante no estudo das expressões algébricas, devem ser trabalhados, recorrendo à interpretação geométrica, a partir da determinação da área do quadrado, ou “a partir de uma pequena tarefa de investigação proposta aos alunos, onde eles investiguem as regularidades existentes quando, por exemplo, se subtraem quadrados perfeitos

consecutivos” (Ponte *et al.*, 2009, p.58). De referir que, na interpretação geométrica, a utilização de material manipulável facilita a compreensão da noção de equivalência entre duas expressões.

2.4.2. EQUAÇÕES.

“A aprendizagem das equações (...) representa para os alunos uma nova etapa no seu estudo da matemática” (Ponte, 2004, p.1).

Até aqui, os alunos estavam habituados a trabalhar com expressões aritméticas cujo único objetivo é o cálculo e, agora, o sinal de igual toma o significado de equivalência e aparecem também as letras que terão o significado de incógnita. É importante que sejam proporcionadas tarefas onde seja necessário fazer a transição da linguagem natural para a linguagem matemática, levando os alunos a identificar a incógnita e perceber o sentido da equivalência. Também poderão ser propostas tarefas em que seja necessário recorrer a *applets* com balanças de dois pratos que ajudam os alunos a perceber a noção de equivalência, como sendo o equilíbrio da balança.

Para resolver uma equação, os alunos devem analisar os dados da equação e estabelecer estratégias de resolução. Como estão habituados a trabalhar aritmeticamente, nem sempre conseguem perceber o processo de resolução de equações e mecanizam as técnicas de resolução. Por vezes, chegam a descobrir ‘novas’ regras como, por exemplo, na resolução da equação $3x = 2$, fazendo, erradamente, $x = 2 - 3$.

Os alunos devem ser incentivados a usar várias estratégias de resolução, desde métodos intuitivos, recorrendo a situações de visualização e a abordagens numéricas, antes de usarem métodos formais (Fernandes, 2011). Para melhor compreensão da resolução de equações, poderão ser propostas tarefas em que seja necessário o recurso a representações gráficas.

Ao longo do 3.º ciclo, as equações do 1.º grau propostas aos alunos vão sendo cada vez mais complexas, “[a]s equações mais simples são as numéricas, que envolvem apenas uma variável, no papel de incógnita. Mais complexas são as equações que envolvem duas e mais variáveis, usualmente designadas por equações literais” (Ponte *et al.*, 2009, p.102).

Nas equações literais aparecem duas letras, que são variáveis que assumem o mesmo papel. No entanto, uma equação literal pode ser escrita em ordem a uma das letras, representando a expressão de uma função afim, e esta passagem nem sempre é de fácil

compreensão para os alunos, porque as variáveis mudam de significado. A variável que isolamos passa a ser a variável dependente e a outra passa a ser a variável independente. Por isso, o trabalho com estas equações deve ser feito a partir de exemplos relacionados com contextos significativos para os alunos e ser relacionado com o estudo das funções, onde seja necessário isolar uma variável, construir gráficos e identificar a solução.

Os alunos devem reconhecer que uma equação do 1.º grau com duas incógnitas é uma equação literal, que a sua representação gráfica é uma reta e que, para essa equação há uma infinidade de soluções e que as soluções são pares ordenados de números.

2.4.3. SISTEMAS DE EQUAÇÕES DO 1.º GRAU COM DUAS INCÓGNITAS.

Nos sistemas de equações, os alunos trabalham com a conjunção de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas e a sua interpretação geométrica. Aqui, os alunos deverão ser capazes de resolver equações literais, identificar as soluções como pares ordenados de números e saber que a sua representação gráfica é uma reta.

Os alunos do 3.º ciclo, de uma forma formal, resolvem sistemas de equações pelo método de substituição. Este método “baseia-se numa das ideias poderosas da Álgebra – a possibilidade de substituir uma expressão algébrica por outra equivalente” (Ponte *et al.*, 2009, p.150). Para melhor compreensão de um sistema de equações deve ser incentivada a representação gráfica, de preferência recorrendo a *software* de geometria dinâmica ou à calculadora gráfica, o que facilitará a visualização da solução, coordenadas do ponto de interseção das retas (se existir), e ajudará na classificação do sistema de equações em possível (determinado ou indeterminado) ou impossível. Também deve ser incentivada a resolução e formulação de problemas envolvendo sistemas de equações.

2.4.4. EQUAÇÕES DO 2.º GRAU.

A aprendizagem das equações do 2.º grau a uma incógnita deve ser progressiva e recorrer a situações que envolvam as operações com monómios e polinómios, simplificação de expressões e os casos notáveis da multiplicação. O trabalho com equações do 2.º grau deve iniciar-se pela resolução de equações incompletas, em que os alunos, para

as resolverem formalmente, utilizam a noção de raiz quadrada e a lei do anulamento do produto. Na resolução das equações completas, os alunos deverão ter a oportunidade de utilizar outros métodos de resolução, além da fórmula resolvente, como por exemplo o método de completar o quadrado. Com o estudo das equações do 2.º grau, podem ser estabelecidas conexões com as funções e com a geometria (Ponte *et al.*, 2009) e devem ser feitas representações gráficas com recurso à calculadora gráfica ou a programas informáticos, como por exemplo o Geogebra ou a folha de cálculo.

2.4.5. INEQUAÇÕES.

Desde cedo, os alunos começam a trabalhar com os sinais maior e menor e com as propriedades das relações de ordem. Esta aprendizagem é essencial para o estudo com inequações do primeiro grau com uma incógnita, que é feito no 9.º ano de escolaridade. Tal como nas situações anteriores, inicialmente devem ser propostos problemas que requeiram a resolução de inequações simples e que, para a representação do conjunto solução, seja necessário que os alunos tenham em conta o contexto do problema.

Devem ser propostas situações que levem progressivamente à resolução de inequações mais complexas, necessitando que os alunos tomem conhecimento das regras de resolução de inequações. Nas explorações das situações, os alunos devem ter oportunidade de constatar quando estas regras são as mesmas que as das equações e em que casos são diferentes (multiplicação de ambos os membros por um mesmo número negativo), além de que o conjunto solução de uma inequação pode ser representado na forma de intervalo e também graficamente. É imprescindível que os alunos sejam capazes de compreender que “[o] conjunto-solução destas condições é muitas vezes infinito e ilimitado e trabalha-se com frequência com a conjunção e disjunção de condições em conjuntos infinitos” (Ponte *et al.*, 2009, p.156). Os alunos devem ser incentivados a fazer a representação gráfica das expressões que formam a inequação e verificar qual o conjunto solução.

2.4.6. FUNÇÕES.

“O conceito de função é um dos mais importantes da Matemática, constituindo uma poderosa ferramenta para representar e interpretar situações, tanto da realidade como da própria Matemática, que envolvam relações entre variáveis.” (Azevedo, 2009, p.13)

Segundo Matos (2007), para compreender o conceito de função é necessário perceber como duas variáveis se relacionam. Esta noção deve ser preparada desde o 1.º ciclo, com a exploração de atividades com padrões e regularidades, em que sejam usadas diversas formas de representação.

No decorrer do 3.º ciclo, “uma função é estudada essencialmente como relação entre variáveis, embora também seja apresentada como correspondência unívoca entre elementos de dois conjuntos” (Ponte *et al.*, 2007, p.56). O estudo das funções deve estar associado à resolução de problemas e à modelação de situações, com a utilização de várias formas de representação, pois “os alunos deverão ser capazes de compreender as relações entre tabelas, gráficos e símbolos e ser capazes de avaliar as vantagens e as desvantagens de cada uma destas formas de representação” (NCTM, 2007, p.40).

Os alunos devem ser incentivados a utilizar e relacionar os vários tipos de representação. Como refere Candeias (2010), “é a variedade de representações que dá o significado aos objectos matemáticos, sendo essencial para a aprendizagem matemática que os alunos adquiram a capacidade de interpretar o mesmo conceito em diferentes representações e a flexibilidade em passar de umas representações para outras.” (p.20) Azevedo (2009) sugere que as tarefas a desenvolver devem realçar a utilidade e importância de cada representação.

Devem ser proporcionadas tarefas aos alunos que contribuam para “desenvolver a sua capacidade de ler e interpretar gráficos de funções, que constitui uma capacidade importante para o seu futuro enquanto cidadãos” (Ponte *et al.*, 2009, p.127).

Os alunos devem ser incentivados a fazer a representação gráfica das funções com recurso à calculadora gráfica, à folha de cálculo ou a *software* de geometria dinâmica, que auxiliam a análise e o estudo da variação das funções. Em particular, no estudo das funções afim e linear, os alunos devem analisar a representação gráfica e compreender a influência da variação dos parâmetros.

2.5. DIFICULDADES MANIFESTADAS NA APRENDIZAGEM DA ÁLGEBRA

A álgebra é uma ferramenta importante de resolução de problemas de várias áreas, e contribui para o desenvolvimento da capacidade de abstração e de generalização. No entanto, algumas das dificuldades manifestadas nesta área devem-se, em grande parte, ao seu carácter abstrato e, também, às diferenças existentes na passagem da aritmética para a álgebra. É frequente os alunos não perceberem a linguagem utilizada e não compreenderem o sentido e o significado dos símbolos e das letras usadas. Isto acontece quando “a aprendizagem da Álgebra é (...) mecânica e desprovida de significado” (Branco, 2008, p.28). Por essa razão, Nobre, Amado e Ponte (2012), afirmam que:

(...) é fundamental dar especial atenção ao modo como os novos conceitos ou procedimentos são introduzidos de modo a reduzir a possibilidade dos alunos aprenderem apenas por memorização de regras, pelo que devem ser proporcionadas experiências, sempre que possível, que os ajudem na compreensão do significado dos processos utilizados”(p.1).

Como já foi referido, muitas das dificuldades apresentadas pelos alunos estão relacionadas com a transição da aritmética para a álgebra, Ponte *et al.* (2009) mencionam que algumas dessas dificuldades envolvem:

Ver a letra como representando um número ou um conjunto de números;

Pensar numa variável como significando um número qualquer;

Atribuir significado às letras existentes numa expressão;

Dar sentido a uma expressão algébrica;

Passar informação da linguagem natural para a algébrica;

Compreender as mudanças de significado dos símbolos, na Aritmética e na Álgebra. (p.74)

Para construir, de forma sólida, o pensamento algébrico, é importante que este seja trabalhado nos primeiros anos, de forma informal, em paralelo com a aritmética, a partir de situações reais como por exemplo usando a comparação de quantidades. Nesta situação devem ser introduzidos alguns símbolos, de uma forma gradual e contextualizada, com base nas experiências dos alunos, bem como algumas formas de representação como a linguagem natural, tabelas e gráficos.

Na resolução de equações, são muitas as dificuldades apresentadas, porque os alunos não percebem o que é uma equação, desconhecem o significado das expressões, da

igualdade e da incógnita. Estas dificuldades devem-se, muitas vezes, ao facto de os alunos não fazerem a transição da aritmética para a álgebra e continuarem a usar, na álgebra, os conceitos aprendidos na aritmética. Existem também “dificuldades de natureza pré-álgebra, tais como a realização da separação de um número do sinal de menos que o precede” (Branco, 2008, p.32).

Alguns dos erros e dificuldades dos alunos na resolução de equações, que são apresentados por Ponte *et al.* (2009), são: não saber como começar a resolver a equação; adição incorreta de termos que não são semelhantes; adição incorreta de termos semelhantes; interpretação dos sinais “+” e “=” como indicadores de uma ação; uso de parênteses (não aplicam a propriedade distributiva); transposição incorreta de termos; conclusão incorreta da resolução da equação.

No entanto, muitos alunos apresentam maior dificuldade em atribuir significado a expressões algébricas do que a equações. “Daí que, alguns deles, sejam tentados a acrescentar-lhes “=0”, transformando-as numa equação que, em seguida, podem tentar resolver” (Matos 2007, p.35), sendo por isso, importante desenvolver, também atividades de manipulação de símbolos algébricos.

Na resolução de equações literais, persistem as dificuldades apresentadas na resolução das equações e acrescem outras, já que os alunos não reconhecem uma equação literal como uma equação do 1.º grau com duas incógnitas, têm dificuldades em resolver a equação em ordem a uma das incógnitas e em verificar que há uma infinidade de soluções e que as soluções são pares ordenados de números.

No trabalho com sistemas de equações do 1.º grau a duas incógnitas, Ponte *et al.* (2009) indica as seguintes dificuldades: “compreender a noção de sistema e a natureza da solução de um sistema de equações; compreender os processos de resolução de sistemas de equações e ser capaz de os executar correctamente até obter a solução;” e ainda acrescenta “ser capaz de resolver problemas dados por enunciados verbais, traduzindo as condições dadas por um sistema de equações e interpretando a solução do sistema de acordo com as condições dadas” (p.151). Para facilitar a interpretação da solução do sistema os alunos devem ser incentivados a usar o método de resolução gráfica.

Nas equações do 2.º grau, além das dificuldades anteriormente descritas para a resolução de equações, os alunos têm dificuldades nas técnicas de factorização e na

aplicação da fórmula resolvente. Nobre, Amado e Ponte (2012) salientam que, se o professor incentivar os alunos “a utilizar diferentes técnicas na resolução de equações do 2.º grau pode melhorar a compreensão que os alunos têm dessas equações” (p.391) e recomendam a utilização das tecnologias, em particular a folha de cálculo.

Para a resolução de inequações, os alunos, usam, por vezes, as mesmas regras de resolução das equações, trocam o sinal da desigualdade pelo sinal de igual e aplicam as regras de resolução de equações. Depois, consideram que o conjunto solução é formado por um só elemento e não um intervalo.

Na aprendizagem de funções, os alunos apresentam várias dificuldades que “começam a surgir na compreensão do conceito, quando este é introduzido. Frequentemente, os alunos confundem objecto e imagem, não conseguindo determinar um em função do outro” (Candeias, 2010, p.2). Também apresentam complicações na construção e interpretação dos gráficos, na passagem de uma representação para outra, na relação com os problemas e na lei de formação. Como afirma Azevedo (2009) “este é um conceito no qual os alunos revelam dificuldades, quer na sua compreensão abstracta, quer na sua aplicação à resolução de problemas.” (p.13)

O uso das tecnologias, calculadora gráfica e/ou computador, pode ajudar os alunos a ultrapassar as dificuldades apresentadas, porque facilitam a elaboração de gráficos, a realização de cálculos e a modelação de situações. Com refere Candeias (2010), as “dificuldades poderão ser contrariadas com a utilização de um *software* que os liberte das tarefas rotineiras de representação, permitindo-lhes que se possam concentrar nas condições do enunciado, nas estratégias de resolução e na interpretação e avaliação dos resultados” (p.2)

3. METODOLOGIA

Neste capítulo, apresento a metodologia utilizada para este estudo. Começo por expor as opções metodológicas adotadas, continuo com a caracterização dos intervenientes e concluo com, a justificação da escolha das propostas pedagógicas e as respetivas planificações.

3.1. OPÇÕES METODOLÓGICAS

Segundo Nabais (2010), “toda a investigação tem por base uma orientação teórica, a qual denota um certo modo de entendimento do mundo e nos permite identificar aspectos que, para nós, se revelam importantes” (p.113). Cabe ao investigador escolher a melhor forma, de dar resposta às preocupações ou inquietações que surgem ao longo do seu percurso. Por isso, partindo da pesquisa feita, pretendo com este estudo dar resposta às questões de investigação formuladas.

A metodologia usada neste estudo é de natureza qualitativa e segue o paradigma interpretativo. “A investigação interpretativa permite um distanciamento ao tornar estranho aquilo que é familiar e ao explicitar o que está implícito” (Lessard-Hébert, M. Goyette & Boutin, 2008, p. 43) e procura compreender e explicar o comportamento dos participantes no seu contexto, perante determinadas situações.

Este estudo segue algumas características indicadas por Bogdan e Biklen (1994): os dados são tidos no ambiente natural e o investigador é o instrumento principal da recolha de dados; a investigação é descritiva; os investigadores interessam-se mais pelo processo do que pelos resultados e tendem a analisar os dados de forma indutiva; o significado é de importância vital na abordagem qualitativa.

Assumi o papel de investigadora participante, visto ser professora da turma sobre a qual incidiu o estudo. Há, por isso, um “carácter de proximidade entre o investigador e os participantes” (Lessard-Hébert *et al.*, 2008, p.47). Os dados recolhidos foram predominantemente descritivos, “[e]sta perspetiva obriga-nos a ver o comportamento no seu contexto e não privilegia os resultados em detrimento dos processos.” (Bogdan e Biklen, 1994, p.265).

Com esta investigação, propícia à análise e reflexão da minha atuação como docente, pretendo melhorar as minhas práticas educativas. Como refere Bogdan e Biklend (1994) “todos os educadores podem ser mais eficazes se utilizarem a investigação qualitativa para o seu trabalho” (p.283).

Os principais instrumentos de recolha de dados foram o registo de notas de campo, gravações de vídeo e de áudio, registo fotográfico e os documentos produzidos pelos alunos. Os documentos que recolhi e fotocopiei foram essencialmente as resoluções de cada atividade proposta e as reflexões elaboradas em grupo. No final do ano, compilei algumas resoluções, conclusões e reflexões que os alunos apresentaram no seu portefólio, elaborado durante o ano letivo. O registo fotográfico foi essencialmente das construções realizadas nas aulas.

Por estar a desempenhar duas funções, o de professora da turma, apoiando e orientando o trabalho dos alunos, e o de investigadora, observando o comportamento dos alunos perante determinadas situações, tinha a noção de que alguns aspetos do papel de investigadora poderiam estar a ser negligenciados. Contudo, o facto de ser a professora da turma permitiu-me colmatar o que, à partida, parecia ser uma lacuna.

No início, realizei algumas gravações de vídeo, mas os alunos mostraram-se incomodados e pediram para fazer, apenas, a gravação de áudio. Note-se que, antes de fazer as gravações, fiz um pedido de autorização dirigido ao Conselho Executivo da escola e aos encarregados de educação, como se pode ver no Anexo VIII. Foi, também, explicado aos alunos que os registos serviriam unicamente para a investigação e seria mantido o anonimato de cada aluno. É importante proteger os indivíduos e as informações, como referem Lessard- Hérbert *et al.* (2008,) “o investigador deverá informar corretamente os indivíduos, logo no início do trabalho de campo, sobre os objetivos da investigação e as actividades que pretende levar a cabo” (p.84). De notar que todos os encarregados de educação, alunos e Conselho Executivo da escola deram o seu consentimento para a participação no estudo.

3.2. CARACTERIZAÇÃO DOS INTERVENIENTES

O estudo realiza-se no ano letivo 2012/13, no decorrer dos 2.º e 3.º períodos, na Escola Básica do 2.º e 3.º Ciclos Dr. Eduardo Brazão de Castro. Os alunos que frequentam esta escola vivem em dois bairros sociais que rodeiam a escola e nas zonas altas da freguesia de São Roque, sendo a maioria proveniente de famílias carenciadas.

Neste ano letivo lecionei a disciplina de Matemática a uma turma de 8.º ano de escolaridade (8.º 1) e outra de 9.º ano de escolaridade (9.º 1). A recolha dos dados que são apresentados e analisados no presente relatório recai sobre o 8.º 1, por ser uma turma em que grande parte dos alunos apresenta grandes dificuldades e insucesso na disciplina. A maioria dos alunos afirma não gostar da disciplina de Matemática, apresenta pouca vontade de aprender e, em geral, pouca motivação para o estudo em geral.

Integravam a turma 20 alunos, 12 rapazes e 8 raparigas. Destes, alguns manifestaram aspirações de prosseguir estudos, mas a sua dedicação ao trabalho e ao estudo dentro e fora da sala de aula era irregular. Os alunos revelavam dificuldade em executar tarefas muito extensas, desistiam ao primeiro obstáculo, eram pouco autónomos e demonstravam baixo nível de autoestima. Com base no projeto curricular da turma, os principais problemas apresentados pelos alunos foram: dificuldades em cumprir as regras e normas da sala de aula; falta de concentração; ausência de métodos de trabalho e de estudo; pouca responsabilidade; dificuldades na Língua Portuguesa (interpretação, expressão oral e escrita) e na Matemática, e dificuldades na memorização dos conteúdos.

3.3. ESCOLHA DAS PROPOSTAS PEDAGÓGICAS

A escolha deste tema deve-se ao facto da álgebra ter um grande peso no programa da disciplina de Matemática de 8.º ano e os alunos, em geral, apresentarem grandes dificuldades nesta área. As propostas apresentadas contemplam o estudo de diversos conteúdos dos tópicos de Funções e Equações: função linear e afim, equações literais, sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas e operações com polinómios.

Na escolha das propostas de trabalho tive em atenção que os alunos, no 3.º ciclo, devem ser capazes de “interpretar e representar situações em contextos diversos, usando

linguagem e procedimentos algébricos; interpretar fórmulas em contextos matemáticos e não matemáticos; resolver problemas, comunicar, raciocinar e modelar situações recorrendo a conceitos e procedimentos algébricos” (Ponte *et al.*, 2007, p.55). Pretendo, com esta investigação, estudar a evolução dos alunos relativamente às estratégias de resolução de problemas, à compreensão da linguagem algébrica e, em especial, ao desenvolvimento do pensamento algébrico.

Atendendo a que “[o]s alunos devem aprender matemática com compreensão, construindo ativamente novos conhecimentos a partir da experiência e de conhecimentos prévios” (NCTM, 2007, p.21), procurei apresentar propostas de trabalho sobre temas conhecidos dos alunos, com o objetivo de desenvolver a capacidade de resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação matemática. Para envolver os alunos na resolução das tarefas propostas, procurei utilizar, sempre que possível, materiais manipuláveis e as tecnologias.

Foi minha preocupação promover uma grande diversidade de propostas, como refere Candeias (2010) “[t]rabalhar em diversos contextos é essencial para situar e aprofundar a aprendizagem da Matemática, tornando-a mais significativa do que a conseguida através de processos centrados na exposição e aplicação de conceitos previamente definidos” (p.14). Desta forma, pretendi que os alunos se envolvessem na resolução das propostas, que adquirissem os conhecimentos e estabelecessem conexões entre os conhecimentos.

Das sete propostas escolhidas, cinco foram elaboradas e apresentadas pela equipa do projeto Construindo o Êxito em Matemática (CEM), visto que se enquadram na filosofia de educação apresentada neste trabalho. As outras duas propostas foram construídas com base em diferentes manuais. De referir que, as propostas foram adaptadas tendo em atenção as características gerais da turma. Algumas das adaptações foram realizadas no projeto de formação Construindo o Êxito em Matemática - 8.º ano (CEM8), na escola. Este projeto de formação decorreu no ano letivo 2012/13 na escola, com o objetivo de proporcionar a todos os docentes, a informação e o apoio necessários à mudança de práticas preconizada pela reestruturação do Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte *et al.*, 2007) e a nova reorganização curricular.

3.4. PLANIFICAÇÃO DAS PROPOSTAS PEDAGÓGICAS

Na escolha das propostas de trabalho e na planificação das aulas tive em conta a revisão da literatura realizada, os objetivos e indicações metodológicas presentes no programa do ensino básico (Ponte *et al.*, 2007), as metas curriculares para o 3.º ciclo do ensino básico (Bivar, Grosso, Oliveira & Timóteo, 2012), que, segundo o Despacho n.º 15971/2012, são “orientações recomendadas para o ano letivo de 2012-2013 e que identificam os desempenhos que traduzem os conhecimentos a adquirir e as capacidades que se querem ver desenvolvidas, respeitando a ordem de progressão da sua aquisição”, e o projeto curricular da turma sobre a qual recai o presente estudo.

Na planificação, incluí algumas tarefas de carácter investigativo e exploratório, que visam proporcionar aos alunos experiências de aprendizagem significativas para o desenvolvimento do pensamento algébrico, promovendo o trabalho em grupo (3 ou 4 alunos) e a discussão na turma. Os grupos não foram os mesmos em todas as propostas e a escolha dos grupos foi da responsabilidade dos alunos. Em cada proposta, o número atribuído aos grupos foi aleatório. Na proposta n.º 13 seguiu-se outra estratégia de trabalho, já que foi explorada em grande grupo.

A numeração adotada para as propostas apresentadas segue uma lógica anual, por isso a primeira proposta que consta do estudo é a n.º 10.

Para além do conjunto de sete propostas de trabalho, que se encontram em anexo, referentes aos vários temas de álgebra, nos tópicos de Funções e Equações, foram também realizados tarefas e exercícios propostos no manual adotado pela escola. Desta forma procurei trabalhar com uma diversidade de tarefas, “permitindo que os alunos ponham em prática os conhecimentos que vão adquirindo e conduzindo a uma melhor compreensão dos conceitos.” (Azevedo, 2009, p.36). Na realização destes exercícios, os alunos trabalharam a pares ou individualmente e apresentaram as suas conclusões à turma.

Na concretização de todas as propostas, procurei acompanhar e valorizar os raciocínios e as estratégias dos alunos, esclarecer as dúvidas que foram surgindo, estimular as explicações e justificações dos resultados, ideias e processos matemáticos. Atendendo a que “o que os alunos aprendem resulta de dois factores principais: a actividade que realizam e a reflexão que sobre ela efectuam” (Ponte, 2005, p.1), procurei responder às

questões dos alunos com outras perguntas que os obriguem a pensar um pouco mais, observando aspetos que até então não tinham tido em consideração. Procurei incentivar a exposição e discussão de estratégias e resultados e conduzir as discussões de forma a clarificar e promover a reflexão sobre todo o trabalho desenvolvido, destacando o que foi realmente importante na realização de cada proposta.

A primeira proposta de trabalho, n.º 10, – “Vai um giro?” – foi escolhida por abordar um tema do quotidiano dos alunos, visto alguns serem utentes regulares da rede de transportes públicos, da empresa Horários do Funchal, e usarem ‘o giro’. A proposta foi elaborada pelo projeto Construindo o Êxito em Matemática (CEM), tendo sofrido pequenas alterações no CEM8, na atualização do preçário apresentado. Esta proposta de trabalho teve como objetivo proporcionar aos alunos a oportunidade de desenvolver o conceito de função na modelagem de situações, na interpretação e na resolução de problemas. Para a resolução desta proposta de trabalho, os alunos formaram sete grupos com dois e três elementos.

Os alunos iniciaram a proposta fazendo um estudo sobre a escolha da melhor opção de compra do bilhete, atendendo às situações apresentadas. Também foi pedido que construíssem uma tabela para cada situação, bilhete comprado a bordo e bilhete comprado no posto de venda, e que representassem esses valores num referencial cartesiano. Depois, foi solicitado que considerassem as duas correspondências representadas e verificassem se poderiam ser funções (aqui os alunos tinham que relembrar o conceito de função), por fim apelou-se à análise no contexto da situação.

Foi relembrado o conceito de função de proporcionalidade direta e a escrita da expressão algébrica que a define. A proporcionalidade direta passa a ser “encarada como uma função (linear) que envolve grandezas que assumem valores racionais (ou reais) positivos e negativos” (Ponte *et al.*, 2009, p.116). Os alunos tiveram também a possibilidade de relacionar as representações algébrica e gráfica das funções afim e linear.

Nesta proposta, os alunos deveriam explorar as várias formas de representar funções: tabelas, gráficos e expressões algébricas, pois, como referem Brocardo, Delgado, Mendes, Rocha e Serrazina (2006) “[i]ncluir várias destas formas na mesma exploração ajuda os alunos a ver relações entre elas e mover-se de modo flexível entre as diferentes formas” e “usar diferentes representações ajuda a que mais alunos compreendam as ideias apresentadas.” (p.16).

Na proposta de trabalho n.º 11, procurou-se que os alunos fizessem o estudo da função linear e da função afim, investigassem e interpretassem as variações destas funções com recurso ao programa de geometria dinâmica Geogebra, que permite uma visão mais dinâmica do gráfico de uma função facilitando este estudo. De referir que os alunos já tiveram contacto com o *software* Geogebra, tendo, por isso, conhecimento dos vários menus que o constituem.

Na situação 1, os alunos deveriam estudar a influência da variação do parâmetro a no gráfico de funções do tipo $y = ax$. Na situação 2, teriam que fazer o estudo da influência da variação dos parâmetros a e b no gráfico das funções do tipo $y = ax + b$.

Nesta proposta, os alunos deveriam usar as capacidades do programa Geogebra para o estudo da variação de funções, criando seletores e fazendo variar os valores dos parâmetros pedidos. De referir que esta proposta foi elaborada pelo projeto CEM e que os grupos de trabalho foram os mesmos que na proposta anterior.

Com a proposta de trabalho n.º 12, pretendeu-se iniciar o “estudo das equações literais”. Para a situação 1 foi selecionada uma fórmula já conhecida dos alunos. Estes deveriam interpretar a fórmula em contextos matemáticos e não matemáticos. De uma forma natural, os alunos revolveriam a equação em ordem a uma das variáveis e determinariam o valor de uma variável sabendo o valor da outra variável. Procurou-se que os alunos fizessem a conexão com os conhecimentos adquiridos nas funções e que relacionassem a expressão algébrica com o gráfico.

Com a situação 2, pretendeu-se que os alunos fizessem a tradução da linguagem natural para a linguagem matemática, reconhecendo que uma equação do 1.º grau com duas incógnitas é uma equação literal, que tem uma infinidade de soluções e que as soluções são pares ordenados de números.

A proposta de trabalho n.º 13 - “Morada da Mariana” - foi elaborada pela equipa do projeto CEM, e apresentada aos alunos em Microsoft PowerPoint, sendo resolvida e discutida com toda a turma. Com esta proposta foi introduzido o estudo dos sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas, a resolução gráfica e o método de substituição, dando especial atenção à passagem da informação da linguagem natural para algébrica e permitindo relacionar com o estudo das funções afim e das equações literais.

A partir dos conhecimentos adquiridos no estudo das equações literais, os alunos foram incentivados a escrever as equações em ordem a y . Depois, foi proposto que fizessem a representação gráfica de cada uma das equações, permitindo que relacionassem as equações com as funções afim, e apelando à aplicação dos conhecimentos apreendidos no estudo destas funções. Desta forma, os alunos resolveram o sistema graficamente e fizeram a interpretação gráfica da solução do sistema, como sendo o ponto de interseção das duas retas, tendo sido, assim, “promovida a compreensão da solução”, como sugere (Ponte *et al.*, 2009). Depois, foi introduzido o método de substituição para resolver o sistema.

Na proposta de trabalho n.º 14 – “Classificação de sistemas e resolução de problemas” - a tarefa 1 foi escolhida por partir de um problema rotineiro e sugerir o recurso ao Geogebra para a resolução gráfica de um sistema de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas, permitindo a visualização da solução e classificação do sistema. Para a resolução desta proposta foram formados seis grupos.

Para a resolução do item 1.1. desta tarefa, foi sugerido aos alunos que encontrassem o número de galinhas e de coelhos que a quinta poderia ter. Pretendia-se que fossem utilizados métodos aritméticos na resolução e que, por tentativa e erro, os discentes chegassem à solução do problema.

Na tradução do problema da linguagem natural para a linguagem matemática é importante que os alunos percebam que existem duas informações, que dão origem a duas equações com duas incógnitas.

Os itens 1.4., 2 e 3 tinham como objetivo a classificação de sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas. Foi sugerida a utilização do programa informático Geogebra, que permite a construção dos gráficos de forma correta e ajuda na visualização e interpretação da solução do sistema, para que, a partir das representações gráficas os alunos reconhecessem sistemas possíveis (determinados e indeterminados) e impossíveis. Aqui seria necessário aplicar alguns conhecimentos de geometria, pois os alunos teriam que reconhecer a posição relativa de duas retas no plano. De realçar que pedi para que os alunos fizessem um esboço dos gráficos no seu caderno e os interpretassem, tendo em atenção o contexto do problema.

Com a tarefa 2, os alunos deveriam resolver problemas através da sua tradução simbólica em sistemas de equações, consolidar a sua aprendizagem na resolução de sistemas e interpretar a solução encontrada no contexto do problema. Foi implementada uma metodologia de trabalho diferente, cada grupo escolheu um problema e fez a apresentação da sua resolução à turma, sendo que cada problema foi resolvido por dois grupos.

Nesta tarefa era importante que os alunos encontrassem as estratégias mais adequadas para a resolução de cada problema e que as apresentassem à turma, desenvolvendo desta forma a capacidade de resolução de problemas, a comunicação matemática e conseqüentemente, o pensamento algébrico.

A proposta de trabalho n.º 15, “Multiplicação de polinómios”, foi elaborada pelo projeto CEM, tendo sofrido pequenas alterações, pelo grupo de formação do CEM8 da escola. Com esta proposta pretendia-se introduzir a multiplicação de polinómios, estabelecendo conexões com os temas de geometria e dos números e operações, o que, segundo Ponte *et al.* (2007) “contribui para evitar a abordagem à Álgebra apenas como um conjunto de regras e procedimentos a memorizar” (p.56). Esta proposta também procura desenvolver o raciocínio indutivo, com a generalização da propriedade da multiplicação entre dois polinómios.

Para o desenvolvimento desta proposta, foi facultado aos alunos material manipulável, várias peças construídas em ‘esponja’, quadrados azuis e amarelos e retângulos laranja. A multiplicação de polinómios surgiu na escrita de expressões algébricas que expressam a área de retângulos, construídos com peças. Os alunos simplificaram essas expressões por dois processos distintos: cálculo da área dos retângulos construídos e, uso do conhecimento prévio das propriedades das operações aritméticas, tais como, a propriedade distributiva da multiplicação relativamente à adição. Os alunos trabalharam em cinco grupos, e após a resolução de cada uma das partes da proposta de trabalho, foi feita a discussão no grande grupo. Na discussão foi utilizado o quadro interativo, o que facilitou a apresentação das construções, pois os discentes puderam manipular, de forma interativa, as peças.

Com esta abordagem, pretendia-se que os alunos interpretassem e representassem situações geométricas, usando linguagem e procedimentos algébricos. Contribuindo desta

forma para o desenvolvimento da capacidade de raciocínio e de comunicação matemáticos, o que implica o desenvolvimento do pensamento algébrico.

De referir que, nesta fase, de aplicação da proposta, os alunos já simplificaram expressões algébricas, conhecem e sabem aplicar os termos monómio e polinómio. Assim, os alunos fizeram a abordagem a partir de uma proposta do manual adotado, com a exploração de sequências.

A proposta de trabalho n.º 16, “Casos notáveis da multiplicação de binómios”, foi elaborada pelo projeto CEM. A metodologia de trabalho utilizada nesta proposta foi a mesma da proposta anterior. Assim, os alunos utilizaram o mesmo material manipulável e trabalharam em grupo. A discussão foi feita após a conclusão de cada parte da proposta, no grande grupo.

Com esta proposta pretendia-se que os alunos compreendessem e utilizassem os casos notáveis da multiplicação de binómios, estabelecendo conexões com o tema da geometria. Os casos notáveis da multiplicação de binómios surgiram da escrita de expressões algébricas que expressam a área de quadrados, sendo a sua dedução feita através das conexões entre os procedimentos algébricos e geométricos. Desta forma, procurou-se, também, desenvolver o raciocínio dedutivo e indutivo.

Para facilitar a compreensão, por parte dos alunos, dos casos notáveis da multiplicação, a proposta apresentava três situações.

Feita a exposição das propostas de trabalho que serviram de base para o estudo, passo à análise e interpretação dos dados recolhidos. Foram muitas as situações que ocorreram na sala de aula, pelo que apresentarei apenas as que suscitaram maior discussão ou maiores dúvidas nos alunos e as que foram importantes para o desenvolvimento e mobilização da aprendizagem e do pensamento algébrico dos alunos.

4. ANÁLISE E INTERPRETAÇÃO DOS DADOS

Neste capítulo, faço a análise dos dados recolhidos nas aulas através das gravações, notas de campo e documentos produzidos pelos alunos. Tive em atenção o desempenho, as aprendizagens e as dificuldades manifestadas pelos alunos em cada proposta de trabalho. Os diálogos apresentados são transcrições de gravações feitas ou de notas de campo.

4.1. PROPOSTA DE TRABALHO N.º 10: “VAI UM GIRO”

Esta proposta de trabalho foi escolhida para introduzir o estudo das funções linear e afim, promovendo a resolução de problemas e a modelação de situações. Os alunos formaram sete grupos de trabalho, que aparecem numerados de 1 a 7.

Como estes discentes são pouco autónomos, foi necessário incentivá-los a iniciarem a resolução da proposta, uma vez que costumam desistir quando se deparam com alguma dificuldade, quer ao nível da compreensão dos enunciados quer da falta de pré-requisitos. Os alunos demoraram algum tempo na leitura da primeira parte da proposta, alegando que “era muito grande” e revelaram algumas dificuldades na interpretação do enunciado, como se pode verificar no diálogo seguinte:

Sa.: Professora, não estou a perceber a questão 1.

Professora: Já leste bem a questão? O que é pedido?

Sa.: A 1 está a perguntar se ela teria poupado se tivesse comprado os bilhetes pré-comprados...

Professora: Se ela tivesse comprado um bilhete pré-comprado quanto pagaria?
E quanto pagou a tia da Eva?

Sa.: Ela pagou 3,80€.

Professora: E se tivesse um bilhete pré-comprado quanto pagaria?

Sa.: 1,30€... para cada uma, pagaria 2,60€.

Professora: Acham que sim, não vos está a faltar dados? Leiam com atenção. (Dirigindo-se ao grupo)

Nesta questão, todos os grupos determinaram o valor a pagar se a tia Eva comprasse os bilhetes a bordo, e o custo dos bilhetes pré-comprados. Neste último caso, tinham de ter em atenção que era necessário comprar o cartão (0,50€) e pelo menos duas viagens. Alguns alunos não tiveram os cuidados indicados e surgiram respostas do tipo:

1- De- pago $\left\{ \begin{array}{l} \text{Eva} - 0,40 + 0,50 = 1,20 \text{ €} \\ \text{Tia} - 1,30 + 0,50 = 1,80 \text{ €} \end{array} \right\} \underline{3+3=6 \text{ €}}$

Figura 1: Resposta apresentada, pelo grupo 1, à questão 1

Estes alunos não tiveram em atenção que estavam a pagar duas vezes o cartão. Aqui, são notórias as dificuldades que têm na interpretação dos enunciados, pois prestam atenção a alguns dos dados, apenas o preço do bilhete.

Alguns alunos expressaram os processos de resolução e resultados oralmente, mas apresentaram dificuldades em colocá-los por escrito e em usar a notação, simbologia e vocabulários próprios. Uma aluna apresentou, oralmente, o seguinte raciocínio:

Fi.: Ela não poupa, porque primeiro tem que pagar 1€ para os cartões, cada cartão é 50 cêntimos, e tem de carregar 2 viagens. Dá 1,40€ para a Eva e 2,60€ para a tia. Ao todo dá 5€.

Professora: Onde estão os cálculos? (A aluna mostrou a calculadora)

Professora: Agora terão de escrever e justificar a resposta.

Procurei incentivar os alunos para o registo das respostas, apresentando todo o raciocínio efetuado e recorrendo ao vocabulário próprio. No entanto, a resposta final apresentada pela maioria dos alunos foi a seguinte:

R: Compensa os 5€ se elas derem mais que uma volta, mas já não compensa se derem só uma, pois assim só pagam 3,80€.

Figura 2: Resposta final apresentada, pelo grupo 5, à questão 1

Na questão 2, todos os alunos foram de opinião que a melhor opção seria comprar o bilhete a bordo, porque a tia não teria dinheiro suficiente para comprar o bilhete pré-comprado. No entanto, surgiram algumas dúvidas, como as expressas no diálogo seguinte:

Fi.: Professora na questão 2, é para duas pessoas, ou é só para a tia da Eva?

Professora: É para a Eva e a tia, na viagem do dia 23.

Di.: O melhor é o bilhete comprado a bordo, porque o total dava 3,80€ e ela tinha 4,50€.

Professora: E se fosse o bilhete pré-comprado?

Gu.: Dava 4,80€.

Fi.: Ia dar mais, ela tinha que pagar 5€.

Na questão 3, todos os alunos construíram corretamente a tabela que relaciona o custo dos bilhetes comprados a bordo com o número de viagens. No entanto, no caso da elaboração da tabela que relaciona o custo dos bilhetes pré-comprados, surgiram dúvidas, em dois grupos, como mostram as figuras seguintes.

viagens para adulto			
1	1,80 €	5	9,00 €
2	3,60 €	6	10,80 €
3	5,40 €	7	12,60 €
4	7,20 €	8	14,40 €
		9	16,20 €

Figura 3: Tabela apresentada para o custo dos bilhetes pré-comprados, pelo grupo 1

O grupo 1 considerou que uma viagem custava 1,80 € e completou a tabela, multiplicando o número de viagens por esse valor, não tendo em atenção que, no valor 1,80€, já estava incluído o preço do cartão. Já o grupo 2 não tomou em atenção o valor do cartão e calculou o custo a pagar como o produto de 1,30€ pelo número de viagens. Nestas duas situações os alunos revelaram dificuldades na interpretação do enunciado, não tendo em consideração todos os aspetos referidos.

bilhetes pré-comprados	
n.º de viagens	custo
1	1,30 €
2	2,60 €
3	3,90 €
4	5,20 €
5	6,50 €
6	7,80 €
7	9,10 €
8	10,40 €
9	11,70 €

Figura 4: Tabela apresentada para o custo dos bilhetes pré-comprados, pelo grupo 2

Como alguns dos alunos não se recordavam da noção de função e de referencial cartesiano no plano, sugeri que fizessem, como trabalho de casa, uma investigação sobre

estes assuntos. No entanto, poucos foram os que fizeram a pesquisa pedida, sendo necessário fazer uma revisão, com toda a turma, sobre a definição e construção de um referencial cartesiano, identificação de pontos no referencial cartesiano e do conceito de função.

Atendendo aos conceitos abordados, foram apresentadas as seguintes respostas:

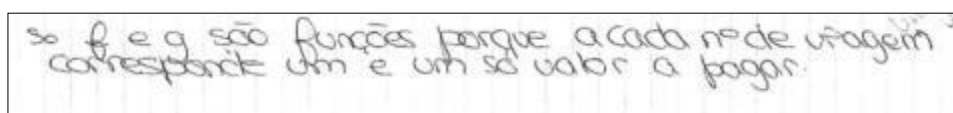


Figura 5: Resposta apresentada, pelo grupo 6, à questão 5

Aqui verifica-se que os alunos foram capazes de compreender o conceito de função como uma correspondência unívoca entre dois conjuntos.

Os alunos não apresentaram dificuldades em verificar que, se a variável independente pudesse tomar qualquer valor, os gráficos seriam retas. O grupo 3 apresentou como semelhança, entre os gráficos construídos, “os dois são retas” e como diferença “a reta f passa na origem e a reta g começa no ponto $(0, 50)$ ”. Note-se que, os alunos ao referirem que o gráfico da função g começa no ponto $(0, 50)$, não têm em consideração o facto de o gráfico ser uma reta. Surgiram outras respostas que revelaram falta de rigor na linguagem matemática, como no caso do grupo 5, apresentou como diferença, o gráfico da função f é uma reta que passa pela origem do referencial cartesiano e o gráfico da função g começa no número zero¹, evidenciando dificuldades em identificar um ponto no referencial cartesiano, não indicando um par ordenado, mas sim apenas uma das coordenadas do ponto.

No diálogo seguinte, está subjacente a definição de gráfico de uma função de proporcionalidade direta, apesar de mais uma vez a terminologia usada não ser a mais correta.

Sa.: Professora, na questão 7.2. a resposta é a f .

Professora: Porquê?

Sa.: Porque é uma reta que passa na origem. Não é?

Professora: O gráfico é uma reta que passa pela origem do referencial. Devem colocar a resposta completa e com os termos corretos.

¹ A frase que um aluno, do grupo 5, apresentou como justificação foi: “as diferenças é que a reta f passa na origem e a reta g começa no número zero”.

Apesar de ter ocorrido o diálogo anterior, o grupo 1 não recorreu ao que foi discutido para justificar que a função f é uma função de proporcionalidade direta, tendo apresentado a seguinte resposta:

Handwritten student work on grid paper showing a table of travel data and calculations to determine a direct proportionality constant.

n.º de viagens	1	2	3	...
Preço a pagar	1,90	3,80	5,70	...

$\frac{1,90}{1} = 1,90$ $\frac{3,80}{2} = 1,90$ $\frac{5,70}{3} = 1,90$
 - 1,90 é a constante de proporcionalidade direta.
 $f(v) = 1,9v$

Figura 6: Resposta apresentada, pelo grupo 1, à questão 7.2

Nesta resposta, está implícita a noção de razão, de constante de proporcionalidade direta, e a escrita da expressão algébrica da função de proporcionalidade direta.

Na escrita da expressão algébrica que permite calcular o custo dos bilhetes pré-comprados, em função do número de viagens, os alunos utilizaram os dados da tabela, que construíram anteriormente, e surgiu a resposta apresentada na figura 7.

Handwritten student work on grid paper showing the derivation of a linear function for pre-purchased tickets.

pré-comprado

$$g(v) = v \times 1,30 + 0,50$$

$$g(v) = 1,30v + 0,50$$

$$g(2) = 2 \times 1,30 + 0,50$$

$$g(3) = 3 \times 1,30 + 0,50$$

$$g(9) = 9 \times 1,30 + 0,50$$

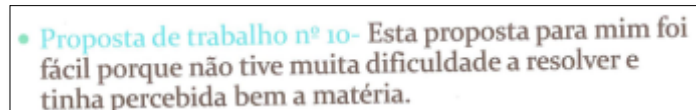
Figura 7: Resposta apresentada, pelo grupo 5, à questão 7.4

No final, foi feita a discussão em grande grupo e aproveitado o momento para 'batizar' as funções abordadas de função linear e função afim. Depois, foram discutidas e analisadas as semelhanças e diferenças entre estas funções.

Os alunos foram capazes de usar modelos matemáticos, de relacionar os vários tipos de representação de funções (tabelas, gráficos e expressão algébrica) e, em particular,

de relacionar as funções afim e linear. Tendo, no entanto, revelado alguma insegurança nos conceitos apreendidos e falta de rigor matemático na linguagem oral e escrita.

Na reflexão feita sobre esta atividade, um aluno refere, no seu portefólio, que:



• Proposta de trabalho nº 10- Esta proposta para mim foi fácil porque não tive muita dificuldade a resolver e tinha percebida bem a matéria.

Figura 8: Reflexão de um aluno sobre a proposta 10

4.2. PROPOSTA DE TRABALHO N.º 11 – ESTUDO DA FUNÇÃO LINEAR E DA FUNÇÃO AFIM

Para esta proposta, foi necessário utilizar o laboratório de informática da escola. Os alunos iniciaram a proposta com recurso ao programa informático Geogebra. Introduziram, com facilidade, a expressão algébrica da função, mas tiveram algumas dificuldades em criar o seletor, porque não leram com atenção toda a informação fornecida. Incentivei os alunos para que lessem com atenção o enunciado e seguissem todas as indicações dadas.

Na resolução da situação 1, depois de introduzirem a expressão algébrica da função, os alunos fizeram variar o valor do parâmetro a , utilizando o seletor. Na análise da variação do parâmetro surgiram algumas dúvidas como as descritas no diálogo seguinte:

Je.: Na 1 a função é decrescente.

Professora: Decrescente? Porquê?

Je.: Porque a cada valor menor que der, a reta vai descendo.

Neste caso, a aluna referia-se ao valor dado ao seletor, fazendo confusão entre a monotonia da função e o declive da reta. Como alguns grupos apresentaram a mesma resposta, senti a necessidade de interromper a resolução e debater esta situação.

Nas questões seguintes, não surgiram grandes dúvidas, no entanto, os alunos revelaram pouco rigor no registo das respostas. Apesar de ter solicitado que reformulassem e completassem as respostas apresentadas, estes continuaram a ser pouco rigorosos, como podemos verificar nas respostas apresentadas na figura 9.

1.4- Aproxima-se do eixo das abscissas quando o valor de a é mais pequeno do que o valor absoluto.

1.5- Aproxima-se do eixo das ordenadas quando o valor de a é maior que o valor absoluto.

Figura 9: Resposta apresentada, pelo grupo 4, na situação 1

Os alunos responderam apenas à segunda parte das questões, mostrando algumas incorreções de linguagem, pois da forma como está elaborada a resposta, parece que estão a comparar o valor atribuído a a com outro valor qualquer e não com o valor absoluto de a .

Na situação 2, os alunos demonstraram alguma facilidade na utilização do programa Geogebra. Todavia, continuaram a revelar pouco rigor na apresentação escrita dos resultados, isto porque consideram que nas aulas de Matemática as respostas devem ser curtas, tipo ‘telegrama’, sem quaisquer justificações e explicações. O esboço do gráfico exibido pelo grupo 1 (figura 10) é um exemplo que revela o pouco cuidado, que os alunos tiveram, na apresentação dos resultados. Embora, tenham desenhado duas retas para representar o gráfico de cada uma das funções, não foram rigorosos na sua construção.

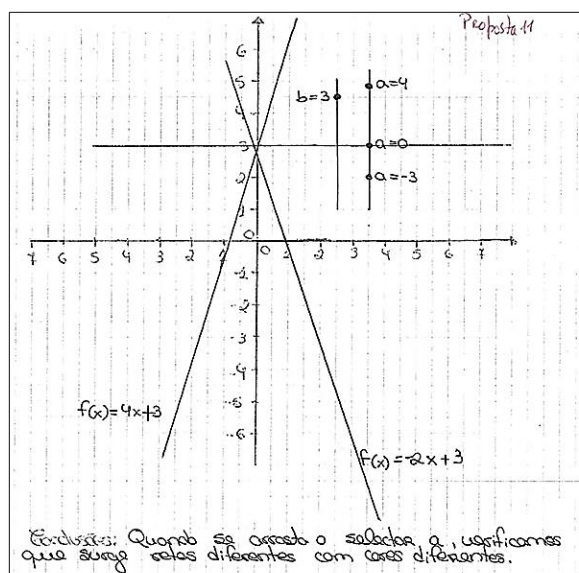
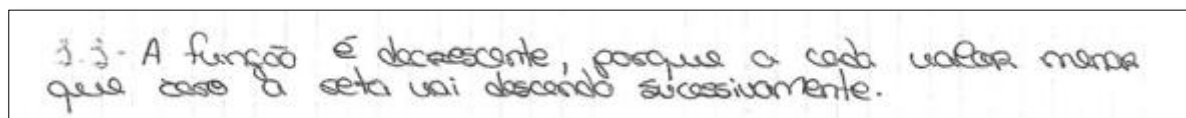


Figura 10: Esboço do gráfico apresentado, pelo grupo 1, na situação 2

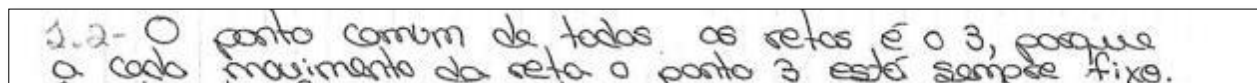
A resposta apresentada pela maioria dos grupos, para a primeira questão foi “decrecente”, mas o grupo 1 apresentou a seguinte justificação:



1.1- A função é decrescente, porque a cada valor menor que zero a reta vai descendo sucessivamente.

Figura 11: Resposta apresentada, pelo grupo 1, à questão 1.1

Analisando esta resposta, verifico que este grupo não relaciona o facto de a função ser decrescente com os valores correspondentes entre as variáveis independente e dependente, mas sim com a inclinação do gráfico da função. Ao afirmarem “a cada valor menor que zero a reta vai descendo sucessivamente”, pretendem dizer que, quanto menor for o valor de a , maior é a inclinação da reta. Também surgiram dificuldades na indicação do ponto comum a todas as retas, tendo sido apresentadas respostas como a seguinte:



1.2- O ponto comum de todas as retas é o 3, porque a cada movimento da reta o ponto 3 está sempre fixo.

Figura 12: Resposta apresentada, pelo grupo 1, à questão 1.2

Para estes alunos o ponto comum é 3 e não $(0, 3)$. Este foi um erro muito comum, o que significa que estes alunos ainda não identificam um ponto num referencial cartesiano com duas coordenadas, uma abcissa e uma ordenada. Mais tarde, apercebi-me que, pela mesma razão, os discentes revelavam dificuldades em completar a tabela da questão 2.1, na indicação do ponto de interseção com os eixos coordenados, apresentando só a coordenada diferente de zero. Isto levou à não conclusão do preenchimento da tabela, como podemos verificar na figura seguinte:

2.1 - Expressão Analítica da função	Ponto de intersecção no eixo das abscissas	Ponto de intersecção no eixo das ordenadas	Valor do parâmetro b	Valor do parâmetro a	$y_1 - y_0$ $y_1 - x_0$
$g(x) = 2x + 5$	-2,5	5	$b = 5$	2	
$g(x) = 2x + 3$	-1,5	3	$b = 3$	2	
$g(x) = 2x - 1$	0,5	-1	$b = -1$	2	

Figura 13: Resposta apresentada, pelo grupo 3, à questão 2.1.

Como os alunos estavam com dificuldade em continuar a resolução, senti a necessidade de discutir a forma de representar as coordenadas de um ponto num referencial cartesiano. Posteriormente, foi feita a discussão e conclusão da proposta no grande grupo.

Nesta proposta, os alunos utilizaram, com alguma facilidade, o programa informático Geogebra, o que facilitou a construção dos gráficos. No entanto, os alunos não foram rigorosos no registo das respostas, apresentaram respostas incompletas e não usaram a terminologia correta, tanto na oralidade como na escrita. Não sentiram necessidade de escrever as conclusões que tiraram por observação dos gráficos, e justificavam-se, dizendo ‘não está a ver?’ e ‘está ali, é preciso escrever?’.

Posto isto, considero que os objetivos da proposta não foram todos alcançados, porque os alunos observaram a influência da variação dos parâmetros nos gráficos das funções, mas não foram capazes de descrever esta situação, o que se deve, também, ao facto de não estarem habituados a escrever e a justificar as suas respostas. Foram necessárias mais algumas aulas para trabalhar estes conteúdos e colmatar as situações que não foram compreendidas nesta proposta.

Apesar de se apelar à construção e visualização dos gráficos no Geogebra, para o estudo das funções afim e linear, os alunos não revelaram muito empenho na realização desta proposta, como se pode ver pela apreciação, abaixo transcrita, que um aluno apresentou no seu portefólio.

- Proposta de trabalho nº11 – Esta proposta foi um pouco difícil porque não percebi muito bem a matéria das funções . Mas depois de entender olhei novamente para a ficha e percebi que era muito simples e fácil .

Figura 14: Apreciação de um aluno à proposta de trabalho n.º 11

4.3. PROPOSTA DE TRABALHO N.º 12 – EQUAÇÕES LITERAIS

Os alunos já tinham conhecimento da fórmula escolhida para a situação 1, mas apresentaram dificuldades na sua resolução. Na questão 1.1, muitos alunos não calcularam bem os valores na escala kelvin, pelo que senti necessidade de pedir aos alunos que efetuassem uma leitura atenta do enunciado e, depois, no grande grupo, foram esclarecidas as dúvidas que perduraram.

Na questão 1.1 surgiram algumas dúvidas que estão relacionadas com a não atribuição de significado das variáveis, tendo por isso sido apresentada a resposta seguinte:

Handwritten student work on grid paper showing the following equations:

$$0^{\circ}\text{C} = 0^{\circ} + 273$$

$$0^{\circ}\text{C} = 273\text{K}$$

$$100^{\circ}\text{C} = 100 + 273$$

$$100^{\circ}\text{C} = 373\text{K}$$

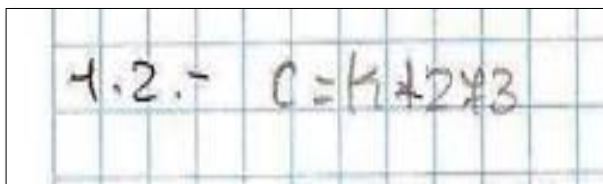
$$273\text{K (Kelvin)} = 0^{\circ}\text{C (Celsius)}$$

$$373\text{K (Kelvin)} = 100^{\circ}\text{C (Celsius)}$$

Figura 15: Resposta apresentada, pelo grupo 1, à questão 1.1

Ao analisar esta resolução, verifico que estes alunos não fizeram a interpretação correta da fórmula dada, porque substituíram as variáveis k e C por zero, no primeiro caso e por cem no segundo caso, demonstrando que não entenderam o significado das variáveis da fórmula. Escreveram uma expressão para cada situação, de forma incorreta, e resolveram-nas usando métodos aritméticos. Na discussão com a turma sobre a apresentação da resolução da figura 15, os alunos verificaram que o que escreveram não estava matematicamente correto e corrigiram, melhorando o rigor matemático.

Já na questão 1.2., alguns grupos simplesmente trocaram as letras, demonstrando perceber o significado de escrever em ordem a uma das incógnitas, no entanto, revelaram que não dominam as regras de resolução de uma equação, como mostra a figura 16.



The image shows a handwritten equation on a grid background. The text is "1.2.- C = k + 243". The numbers "1.2." are written in a slightly larger font than the rest of the equation. The equation itself is written in a simple, somewhat shaky hand.

Figura 16: Resposta apresentada, pelo grupo 3, à questão 1.2

No momento de discussão e apresentação à turma, senti a necessidade de debater com os alunos as regras de resolução de equações.

Na apresentação da última questão, os alunos foram capazes de fazer a ligação com os conhecimentos adquiridos nas funções, relacionando a expressão algébrica com o gráfico, mas revelaram ainda, dificuldades na identificação de um ponto no referencial cartesiano, limitando-se a indicar uma das coordenadas do ponto, como podemos verificar no diálogo seguinte:

Fi.: O gráfico A não pode ser, porque a reta tem de ser crescente.

Professora: Porquê?

Fi.: O C é positivo. (referindo-se à variável C, na equação)

Professora: O C é positivo. Será a letra C?

Ig.: O declive é positivo. (Pausa)

Ig.: O gráfico B não pode ser porque tem de passar pelo ponto 273.

Professora: Qual é o ponto?

Verifica-se, mais uma vez, que existe uma tendência de os alunos indicarem como coordenadas do ponto apenas uma das coordenadas, que geralmente coincide com o valor onde a reta corta o eixo das abcissas ou das ordenadas.

O enunciado da situação 2 foi mais simples e, os alunos não tiveram dificuldade em perceber que estavam envolvidas duas variáveis. No entanto, a identificação das variáveis e a escrita da equação pedida, provocou alguma discussão nos grupos, e o grupo 2 apresentou a seguinte resposta:

2.1. $12 = 2C + 4B$
 C - o preço de 2 carros
 B - preço de 4 bonecas

Figura 17: Resposta apresentada, pelo grupo 2, à questão 2.1

Existe uma certa incoerência, nesta resposta, entre a identificação das variáveis e a escrita da equação. Este grupo referiu que a variável c representava o preço de dois carros e depois, na escrita da expressão, colocou $2c$, não tendo em atenção que isso corresponderia ao preço de quatro carros, o mesmo sucedendo com a variável b . Mais uma vez, são evidentes as dificuldades que estes alunos têm na interpretação de enunciados e na tradução da linguagem natural para a linguagem matemática.

Na questão 2.2, todos os alunos usaram o método de tentativa e erro para indicar as soluções possíveis, isto porque, estão mais habituados a utilizar métodos aritméticos do que algébricos. Uma das respostas apresentadas foi a que se pode ver na figura 18.

2.2. B - 1€ C - 4€
 $2 \times 4 + 4 \times 1 = 8 + 4 = 12 \text{ Euros.}$
 ou
 B - 1,5€ C - 3€
 $2 \times 3 + 4 \times 1,5 = 6 + 6 = 12 \text{€}$
 ou
 B - 2€ C - 2€
 $2 \times 2 + 4 \times 2 = 4 + 8 = 12 \text{€}$

Figura 18: Resposta apresentada, pelo grupo 2, à questão 2.2

Na discussão em grande grupo, os alunos verificaram que foram muitos os valores atribuídos às incógnitas tendo, por isso, concluído que existem muitas soluções possíveis.

Na realização desta proposta, os alunos apresentaram algumas dificuldades na compreensão das equações literais, devido ao nível de abstração que é exigido. As complicações verificaram-se na tradução da linguagem natural para linguagem matemática, na interpretação do significado de variável, na manipulação simbólica e na

resolução de equações. Também surgiram problemas na interpretação das soluções, pois os alunos estão habituados a obter um número como solução, mas neste contexto devem concluir que existe uma infinidade de soluções e que estas são pares ordenados. Foi, por isso, necessário dedicar mais aulas do que as previstas inicialmente, para trabalhar as equações literais. Assim, os alunos tiveram oportunidade de resolver alguns exercícios e tarefas propostas no manual.

4.4. PROPOSTA DE TRABALHO N.º 13 – MORADA DA MARIANA

Os alunos foram informados que nesta atividade o trabalho seria desenvolvido no grande grupo. Foi pedida a colaboração para a leitura da proposta, sendo necessário um narrador, um aluno que representasse o Afonso, outro o João e uma aluna para ler as falas da Mariana. Os alunos iniciaram a leitura e, logo no segundo slide, começaram a fazer suposições sobre o número da porta da Mariana. No terceiro slide, tentaram traduzir para linguagem algébrica o enunciado do problema, embora com algumas dificuldades:

Fi.: Professora, não é y igual a x vezes 2?

Ma.: Acho que é x igual a y ao quadrado.

Gu.: É x igual a 21.

Professora: x é igual a 21? O que é o x ?

Vários alunos: É o número da porta do apartamento.

Sa.: Vezes dois ... vinte e um é igual a x vezes 2, que é igual a $2x$.

Os alunos reduziram as duas condições apresentadas no enunciado a uma só, o dobro do número da porta do apartamento é 21. De salientar a confusão estabelecida entre o conceito de dobro de um número e quadrado de um número. Depois de alguma discussão sobre a condição apresentada pela aluna **Sa.**, inclusive para a solução da equação dada, e confrontados com as informações dadas pela ‘Mariana’, os alunos aperceberam-se de que a condição apresentada não estava correta. Um aluno manifestou-se, dizendo “mas ele necessitou de mais informações”, pelo que foi necessário continuar a ler a apresentação. No slide 6, surgiu o seguinte diálogo:

Sa. : É x mais y que é igual a 21.

Professora: Porque é que vocês só me falaram em x e aqui aparece x e y ?

Sa.: Que é para distinguir o número da porta do prédio do número da porta do apartamento.

Ce. : Porque são duas incógnitas?

Os alunos conseguiram perceber não só o significado das variáveis como a razão das letras escolhidas. Alerttei-os para a importância da escolha das representações simbólicas para as variáveis que, não sendo a mais adequada, pode dificultar a resolução do problema.

Na escrita da segunda condição surgiram, também, algumas dúvidas e só após uma leitura atenta os alunos foram capazes de fazer a tradução para a linguagem algébrica.

Professora: Qual é a segunda condição?

Je. : É x a dividir por y.

Vários alunos: x vezes y mais y.

Professora: Vamos ler a condição. Devem ler com atenção.

Ce. : (lendo) O número da porta do prédio é o dobro da porta do meu apartamento.

Fi. : É x vezes 2.

Sa. : Professora, x vezes 2 é igual a y.

Na escrita das equações em ordem a y, os alunos demonstraram dificuldades, tendo feito a transposição incorreta de termos, colocando $y = x + 21$ e $y = \frac{2}{x}$ e revelando, mais uma vez, que não dominam as regras de resolução de equações do 1.º grau.

Na representação gráfica das equações, os alunos aplicaram os conhecimentos adquiridos nas funções: verificaram que a primeira condição definia uma função afim, com ordenada na origem 21 e declive -1, e que o gráfico da função era uma reta decrescente. No entanto, para a construção dos gráficos, sentiram necessidade de fazer uma tabela com alguns valores, apesar de para a segunda condição terem afirmado que “passava na origem”. Depois, verificaram e explicaram a solução no contexto do problema, referindo que a solução era o ponto de interseção das duas retas. Aproveitei esta conclusão e expliquei que, para a obtenção da solução estavam a usar a conjunção das duas condições. De seguida, introduzi a noção e as várias formas de representar um sistema de equações do 1.º grau com duas incógnitas.

Propus que os alunos resolvessem, individualmente ou a pares, o sistema pelo método da substituição, mas estes apresentaram muitas dificuldades, porque não seguiram todas as indicações dadas. Alguns desmotivaram e abandonaram a tarefa. Por este motivo, optei por continuar a resolução em grande grupo.

Professora: Vamos seguir os passos. Quem quer resolver no quadro?

(O aluno **Ce.** leu o 1º passo e o **Ma.** ofereceu-se para fazer a resolução no quadro.)

Professora: Ou seja vamos resolver uma das equações ou a 1ª ou a 2ª em ordem a uma das incógnitas. O que é que isto significa? Vamos olhar para as equações, alguma está escrita em ordem a uma incógnita?

Fi. : A segunda?

Professora: A segunda está?

Fi.: Está em ordem a x.

Alertei para a escolha da melhor equação, que deve ser a equação mais simples, para facilitar os cálculos. No processo da substituição da incógnita pela expressão obtida, surgiram muitas dúvidas pelo que, para facilitar a compreensão dos alunos, foram usadas cores diferentes para as expressões a substituir.

Professora: É importante que percebam bem o que é o método da substituição. Temos $x=2y$, então vamos substituir na outra equação o valor de x por...

Lu.: 21.

Professora: 21? O valor de x é igual a 2y, então vamos substituir x por...

Vários alunos: 2y.

Professora: 2y. Estamos a substituir x por 2y.

Fi.: Mas y é igual a 21.

Professora: A equação de baixo mantém-se.

Fi. : E já acabou aí?

Na substituição do valor obtido para y não surgiram tantas dificuldades, mas na escrita da solução do sistema, alguns alunos não tiveram em atenção a ordem das letras, tendo apresentado como solução (7, 14), evidenciando que persiste a dificuldade na identificação das coordenadas de um ponto num referencial cartesiano e revelando que não relacionaram esta solução com a obtida na resolução gráfica.

4.5. PROPOSTA DE TRABALHO N.º 14 – CLASSIFICAÇÃO DE SISTEMAS E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Os alunos iniciaram a resolução da proposta com a leitura de um problema cujo enunciado é muito simples. No entanto, surgiram algumas dúvidas em como resolvê-lo, como podemos verificar no diálogo seguinte:

Le.: Primeiro tentamos dividir as 100 patas por 2.

Professora: Dividiu por 2? Porquê?

La.: Porque as galinhas têm duas patas.

Professora: E existem 100 patas de galinha?

Le.: Mas são as patas no total.

Estes alunos apresentaram algumas dificuldades na compreensão e interpretação do problema, pois não conseguiram perceber que existiam dois dados distintos, o número de

animais e o número de patas. Um pouco mais tarde, este grupo apresentou o seguinte raciocínio:

La.: Professora, não quer dizer que tenha que existir o mesmo número de galinhas e de coelhos? Pode haver mais galinhas do que coelhos?

Professora: Sim.

Jo.: Pode dar $20 \times 4 = 80$ e $10 \times 2 = 20$.

La.: Vamos ter 20 coelhos e 10 galinhas.

Evidencia-se aqui o pensamento aritmético e verifica-se que os alunos já foram capazes de relacionar os vários dados. Já outro aluno apresentou a seguinte justificação:

Fi.: Fiz assim, 2×10 dá 20 e juntei os dois. Dá 100.

Professora: E isso porquê? Porque fez 2×10 ?

Fi.: Porque são as 2 patas das galinhas. Que deu 20... 20 galinhas, não 20 patas... E isto são as patas dos coelhos que dão 80 patas.

Professora: Será a única solução?

Fi.: Ah, não sei! Vou ver se há mais.

Nos documentos que recolhi, este grupo apresentou a resposta que se encontra na figura 19.

Handwritten student work on grid paper showing calculations for a problem involving chickens and rabbits. The student lists the number of legs for chickens (20) and rabbits (80), then calculates the total number of animals (35) and the total number of legs (100). A final response explains the solution: 10 chickens and 20 rabbits.

$$\begin{array}{r} \text{N.º patas} \\ 2 \times 20 = 40 \\ \text{N.º patas de coelhos} \\ 4 \times 20 = 80 \\ \hline \text{N.º total de patas dos animais} \\ 40 + 80 = 120 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{N.º de galinhas} \\ 20 \\ \text{N.º de coelhos} \\ 10 \\ \hline \text{N.º total de animais} \\ 20 + 10 = 30 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \times 20 = 40 \\ + \\ 4 \times 15 = 60 \\ \hline 100 \end{array}$$

R: Verificamos que temos que multiplicar por 10 e 20, para dar 30 animais, logo temos de ter 10 galinhas e 20 coelhos para dar as 100 patas. Mas se Trocarmos o N.º de animais pelas patas obtemos 80 patas no total.

Figura 19: Resposta apresentada, pelo grupo 5, à questão 1.1

Ao analisar esta resposta, verifico que este grupo usou processos aritméticos, método de tentativa e erro, para resolver a questão e que tentou averiguar se existia mais alguma solução para o problema. Outros dois grupos apresentaram os cálculos de forma

mais pormenorizada, tendo indicado todos os produtos por 2 e por 4, de 1 até 20. Concluíram que só existia uma solução possível. O objetivo desta questão foi atingido, porque os alunos encontraram uma estratégia para chegar à solução do problema.

Na representação do problema em linguagem matemática, surgiu a seguinte discussão:

Je. : Professora, não sabemos o número de galinhas e de coelhos, podemos usar o x e o y .

Professora: Porquê?

Je.: São duas incógnitas.

Fi.: Então fica $20x$.

Professora: Porquê, $20x$?

Fi.: É o número de coelhos.

Professora: Então, já sabe qual é o número de coelhos?

Aqui, podemos perceber que os alunos já têm a noção de variável como incógnita, apresentando de certa forma uma evolução no pensamento algébrico. No entanto, persistem dificuldades na tradução simbólica, pois apresentam a expressão $20x$ para representar os vinte coelhos, sendo x o número de coelhos.

Como surgiram algumas dúvidas na escrita das condições, foi necessário fazer a discussão no grande grupo, para melhorar a interpretação do problema. Assim, foram debatidas quais as letras a usar e a importância de as escolher e identificar bem. Depois, um aluno sugeriu:

Je. : Professora pode ser $x + y = 30$?

Professora: Porquê?

Je.: O número de animais é 30.

Mg: Professora, não podemos fazer $30 = x + y$?

Este aluno (Mg.) não reconhece uma relação equivalente à sua, revelando não fazer a interpretação do sinal de igual como uma equivalência entre duas expressões.

Na tradução da segunda condição, um aluno fez a seguinte sugestão: “Para o número das patas das galinhas, $2x$, cada galinha tem 2 patas. Para o número das patas dos coelhos, $4y$, cada coelho tem 4 patas. Temos $2x + 4y = 100$ ”. Com isto, revela que já consegue fazer a tradução da situação em linguagem algébrica, apesar de não ter sido muito rigoroso na linguagem utilizada.

Sugeri que os alunos tivessem em atenção os coeficientes de cada incógnita, e apelei para a compreensão destes, dando origem a que a maioria das respostas apresentadas fosse semelhante à seguinte:

$$\begin{array}{l}
 x \rightarrow \text{m}^\circ \text{ de galinhas} \\
 y \rightarrow \text{m}^\circ \text{ de coelhos} \\
 x + y = 30 \\
 2x + 4y = 100 \\
 \text{m}^\circ \text{ de patas das galinhas} \quad \text{m}^\circ \text{ de patas dos coelhos}
 \end{array}$$

Figura 20: Resposta apresentada, pelo grupo 2, à questão 1.2

Vários alunos demonstraram alguma evolução no processo de tradução de linguagem natural para linguagem matemática, já conseguem atribuir significado aos símbolos usados.

Como estes alunos já tinham alguma familiaridade com o programa de geometria dinâmica Geogebra, não apresentaram dificuldades na sua utilização. No entanto, surgiram algumas dúvidas na interpretação dos gráficos que construíram. De referir que a maioria dos grupos não seguiu as instruções dadas no enunciado, tendo representado as duas condições consecutivamente, sem responder às questões. Algumas das dificuldades que surgiram são evidentes na seguinte conversa:

Fi. : A primeira equação pode ser esta: $x + y = 30$?

Je.: Tens que fazer uma linha.

Fi.: Professora, não temos que fazer uma reta?

Je.: Descreve o que observas...? (lendo a questão)

Fi.: Passa no 30 e no 25...

Ce.: A primeira é 30.

Fi.: Professora, não sei dizer isto. Observamos que nesta reta e nesta passa no 30.

Je.: Elas passam ambas no 30.

Professora: Que ponto é esse? Que coordenadas tem esse ponto?

Fi.: É o ponto 30.

Professora: Não.

Fi.: y é 30.

As dificuldades aqui apresentadas dizem respeito à identificação de pontos no referencial cartesiano. Este aluno continua a indicar apenas uma das coordenadas, confundindo as coordenadas de um ponto com o valor da ordenada desse ponto, isto porque o gráfico está a ‘cortar’ o eixo das ordenadas no 30. Outra dificuldade que persiste

é a da construção do esboço do gráfico da situação, pois os alunos continuam pouco rigorosos, como podemos observar no gráfico da figura 21, construído pelo grupo 3.

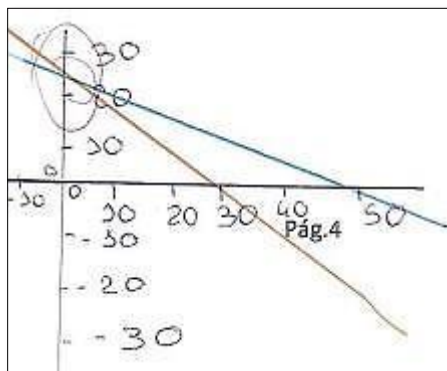


Figura 21: Resposta apresentada, pelo grupo 3, à questão 1.4.4

Analisando o gráfico, verificamos que este grupo teve a preocupação de marcar os pontos de interseção das retas com o eixo das abcissas, mas não teve o mesmo cuidado na marcação dos pontos de interseção com o eixo das ordenadas e do ponto de interseção das duas retas.

Na interpretação e análise de gráficos, no plano cartesiano, o grupo 3 utilizou uma linguagem matemática mais cuidada, revelando um desenvolvimento da comunicação matemática, e apresentando o seguinte raciocínio:

Professora: O que observam?

Ig.: Nós observamos que a reta é decrescente.

Professora: Sim a reta é decrescente, e ... o que pode dizer mais?

Gu.: Passa nos pontos $(0, 30)$ e $(30, 0)$.

Atendendo a que alguns alunos ainda demonstravam dificuldades em identificar pares ordenados no referencial cartesiano, senti a necessidade de interromper a aula e fazer um debate sobre o conceito referido, apesar de este já ter sido trabalhado no tema das funções.

Como conclusão da tarefa 1, o grupo 3 apresentou a seguinte resposta:

Nós observamos que o ponto A tem as coordenadas $(20, 20)$ e que 30 é o x e 20 é o y e logo 20 é o nome do polígono e 20 é o nome do coelho

Figura 22: Resposta apresentada, pelo grupo 3, à questão 1.4.6

A resposta apresentada evidencia que apesar das dificuldades manifestadas, os alunos conseguiram fazer a interpretação gráfica da solução de um sistema de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas, no contexto do problema.

Na resolução da questão 2, os alunos introduziram as equações no Geogebra e, na interpretação dos gráficos obtidos, surgiram algumas questões:

- Fi.** : Nós fizemos estes gráficos e estamos agora a dizer o que é...
Ce. : Eu acho que elas são paralelas.
Fi.: Elas são paralelas. Como é que eu digo os pontos, professora?
Professora: Quais são os pontos?
Fi.: Elas têm o mesmo declive, 2.
Professora: Então, podemos ver quais são as ordenadas na origem.
Sa. : Aqui a ordenada na origem é 6 e na outra é 3.
Fi. : São os pontos $(0, 6)$ e $(0, 3)$.
Professora: E na questão 2.3, existe algum ponto comum às duas retas?
Ce. : Sim.
Sa.: Não.
Ce. : Não. Não.
Professora: Porquê?
Ce. : Porque são paralelas.
Professora: As duas retas são paralelas. Há alguma solução...
Fi.: Não.

Como verificamos, os alunos foram capazes de identificar o declive das retas e, implicitamente, relacionaram-no com a posição relativa das duas retas, demonstrando que conseguiram fazer a relação com os conhecimentos adquiridos no estudo das funções afim.

O grupo 3 escreveu as duas equações em ordem a y e verificou que o declive era igual nas duas retas, mas teve dificuldade na classificação do sistema:

- Ig.**: E a pergunta, há alguma solução comum?
Professora: Há alguma solução comum às duas retas?
Ig.: Não.
Professora: Então como classificam o sistema?
Gu.: Indeterminado.
Professora: O sistema tem alguma solução?

Ig.: Ah, não! Determinado, então.
Professora: Quando é que um sistema será indeterminado?
Ig.: Tem várias soluções.
Professora: E este tem várias soluções?
Gu.: Não.
Professora: Então, se não tem soluções, vai ser o quê?
Gu.: Indeterminado.
Professora: O que significa indeterminado?
Gu.: Ah! Tem várias soluções. Então, é determinado.
Professora: E o que significa um sistema ser determinado?
Ig.: Tem uma solução.
Professora: E quando o sistema não tem solução?
Gu.: Então, é ...

As dificuldades em classificar o sistema, apresentadas no diálogo anterior, estão relacionadas com facto de os alunos não saberem o significado das palavras ‘indeterminado’ e ‘impossível’. Complicações semelhantes surgiram na questão 3, como é possível analisar no diálogo seguinte, com o grupo 2:

De.: Professora!
Professora: O que aconteceu?
De.: Elas ficaram iguais.
Professora: Qual é a posição relativa das retas?
De.: Perpendiculares.
Professora: Perpendiculares? Mas as retas cruzam-se?
Le.: São paralelas.
Professora: São paralelas? Quantos pontos têm em comum?
Fa.: Muitos. São coincidentes.
 Um pouco depois, o mesmo grupo solicitou novamente a minha presença.
De.: Professora, não entendo o que são retas coincidentes.
Professora: O que significa serem retas paralelas coincidentes?
De.: Uma em cima da outra.
Professora: Quantos pontos têm em comum?
De.: Muitos.

Este grupo apresentou dificuldades na classificação da posição relativa das retas, revelando uma grande confusão dos conceitos e referindo-se a retas coincidentes como retas que “estão uma em cima da outra”. Esta situação ficou esclarecida no grupo, na continuação do diálogo. No entanto, a resposta escrita e entregue pelo grupo apresenta muitas incorreções de linguagem, como podemos ver na figura 23, evidenciando as dificuldades que estes alunos têm na comunicação escrita. Mais uma vez, alertei a turma para a importância do uso da terminologia adequada.

3.4. Existem várias soluções comuns as duas equações. Classificam-se por sistema intermeado!

Figura 23: Resposta apresentada, pelo grupo 2, à questão 3.4

Os alunos fizeram uma apreciação individual sobre esta tarefa e, embora nem todos tivessem apresentado, a maioria afirmou ter gostado da tarefa porque “utilizamos os computadores, trabalhamos com o referencial cartesiano e aprendemos a classificar sistemas”. As questões apontadas como sendo aquelas em que encontraram maiores dificuldades variaram de aluno para aluno. Apresento uma das apreciações entregues:

Eu achei esta proposta de trabalho muito engraçada, apesar de eu ter algumas dificuldades, principalmente na questão 2.4. Gostei muito do meu grupo, todos nós trabalhamos e participamos.

Figura 24: Apreciação de um aluno à tarefa 1

Informei os alunos que, na realização da tarefa 2, seria adotada uma metodologia de trabalho diferente. Cada grupo escolheria um problema para resolver e apresentar à turma. Referi que na apresentação teriam que explicar o problema, as estratégias utilizadas e as conclusões tiradas e alertei para a entrega da resolução escrita. Todos os grupos se empenharam na resolução e apresentação do problema escolhido, mas só quatro grupos entregaram a resolução escrita.

Mais uma vez, surgiram dificuldades na passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica. Desta forma, é evidente o embaraço na definição correta das variáveis e atribuição das letras. Quando fui solicitada a esclarecer o grupo 4, que estava a resolver o problema 1, surgiu o seguinte diálogo:

Sa.: O x é a Joana e o y é a Maria.

Professora: O x é a Joana?

Sa.: É está aqui a dizer (e leu o enunciado do problema).

Professora: Então, x é a Joana?

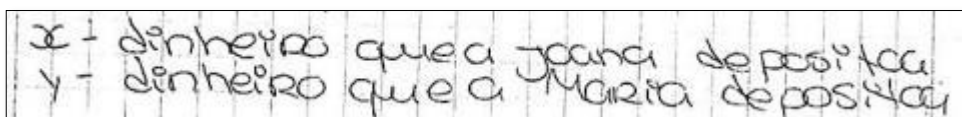
Sa.: Foi o que elas depositaram.

Professora: Então o x será o quê?

Sa.: É o que elas depositaram.

Professora: Poderá ser o dinheiro que a Joana depositou.

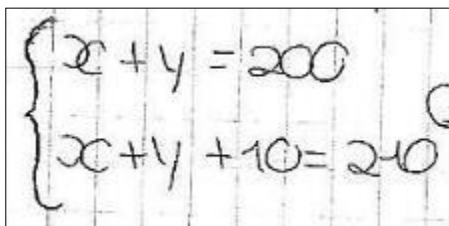
Na apresentação do problema à turma, um elemento do grupo leu o enunciado e depois, outro aluno explicou à turma o que se pretendia. Escreveram no quadro e explicaram quais as variáveis do problema e as letras escolhidas:



x - dinheiro que a Joana depositou
y - dinheiro que a Maria depositou

Figura 25: Identificação das variáveis, apresentada pelo grupo 4, do problema 1

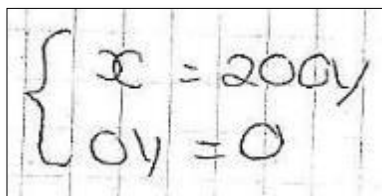
O grupo fez a tradução do problema em linguagem algébrica, tendo escrito no quadro o sistema de equações do 1.º grau com duas incógnitas, que se encontra na figura 26.



$$\begin{cases} x + y = 200 \\ x + y + 10 = 240 \end{cases}$$

Figura 26: Sistema apresentado, pelo grupo 4, do problema 1

Os alunos resolveram o sistema pelo método da substituição, mas não tiveram o cuidado de explicar à turma cada passo da resolução e o sistema que obtiveram. Na figura 27 está reproduzido o sistema final que obtido.



$$\begin{cases} x = 200 - y \\ 0y = 0 \end{cases}$$

Figura 27: Sistema final, do problema 1, apresentado pelo grupo 4.

Achei oportuno intervir, de forma a questionar a turma sobre o sistema apresentado, visto que os alunos copiaram a resolução para o caderno sem ter surgido qualquer discussão.

Professora: Então o sistema é? (para a turma)

De.: Impossível.

Professora: Impossível?

Ig.: Não. Possível indeterminado.

Professora: Quantas soluções têm?

Vários alunos: Imensas.

Professora: Então são capazes de me dar uma solução?

Sa.: A Joana poderia ter depositado 150 e a Maria 50.

Fi.: Poderia ser 100 para cada uma.

Surgiram mais algumas hipóteses, apresentadas por todos os alunos da turma, para os valores depositados pela Joana e a Maria. Foi importante a discussão na turma, para que os alunos verificassem que, se o sistema é indeterminado, tem muitas soluções.

No grupo 2, também surgiram algumas dúvidas na resolução do problema 2, por isso tentei dialogar com os alunos para que chegassem à resposta das situações que foram surgindo.

Professora: O que é pedido neste problema?

Le.: A quantidade de sumos e de sanduiches que comprou.

Professora: Então quais são as incógnitas?

Le.: O x e o y . O x é a quantidade de sumos e o y é a quantidade de sanduiches.

Professora: Como explica isto? (apontando para a expressão escrita no caderno, $x + y = 4,60$)

De.: A quantidade de sumos mais a quantidade de sanduiches no total dá 4,60 que foi o que ela gastou. E agora $0,80 \times 3$ foi que ela gastou mais 3 sanduiches.

Professora: Mas, repara. Estás a falar da quantidade de sanduiches mais a quantidade de sumos e dá um valor a pagar?

De.: Sim.

Professora: Dá um número. Quando vais falar de um valor a pagar, tens de saber o preço dos sumos mais o preço das sanduiches e vai dar o valor total a pagar. Se não sabes o preço e tens 3 sanduiches e 2 sumos, não vais saber o valor a pagar. Vais é saber o número de elementos que tens.

Professora: O que é o 4,60€?

De.: O que ela pagou no total.

Professora: O que ela pagou das sanduiches e dos sumos que comprou. E, por isso, quanto custa cada sanduiche?

De.: 0,80.

Professora: Cada sanduiche custa 0,80. As sandes colocaram como y .

De.: Será $0,80 \times y$.

Fa.: Professora, não é $x + 3$?

Professora: Porquê?

Fa.: Ela comprou mais 3 sanduiches do que sumos (y é o número de sanduiches)

Professora: Então, como fica?

Fa.: $y = x + 3$.

Na apresentação à turma, este grupo seguiu a mesma estratégia utilizada anteriormente, um aluno leu o problema, depois o grupo fez a tradução do problema para a linguagem matemática, resolveu o sistema pelo método de substituição e fez a

interpretação da solução do sistema no contexto do problema. No início da apresentação, duas alunas entrevistaram do seguinte modo:

De.: O x é a quantidade de sumos e o y é a quantidade de sanduiches.

(Escreveram as condições e uma aluna explicou)

Fa.: Isto é a quantidade de sanduiches, que é igual à quantidade de sumos mais 3. (referindo-se à expressão $y=x+3$)

Fa.: Isto aqui é o preço de uma sanduiche vezes a quantidade de sanduiches, mais o preço de um sumo, vezes a quantidade de sumos e dá 4,60€.

Este grupo apresentou o sistema transcrito na figura 28.

$$\begin{array}{l} x \rightarrow \text{quantidade de sumos} \\ y \rightarrow \text{quantidade de sanduiches} \\ \left\{ \begin{array}{l} y = x + 3 \\ 0,80 \times y + 0,30 \times x = 4,60 \end{array} \right. \quad \epsilon \end{array}$$

Figura 28: Sistema apresentado, pelo grupo 2, do problema 2

Aqui, o grupo 5, que resolveu o mesmo problema, referiu que “as equações que temos são diferentes”. Foram, então, confrontados e analisados os sistemas apresentados pelos dois grupos, e os alunos concluíram que as letras atribuídas não tinham o mesmo significado. Este momento foi importante para que os alunos refletissem sobre a importância de identificar bem as variáveis. Um aluno resolveu o sistema pelo método de substituição e os restantes alunos da turma passaram para o caderno, pelo que mais uma vez resolvi intervir para evidenciar a importância da interpretação da solução obtida.

Professora: Portanto, que conclusão é que tiraram depois da resolução do sistema?

Fi.: Que a Joana comprou 5 sanduiches e 2 sumos.

Fui também solicitada para esclarecer algumas situações do problema 3, com o grupo 3.

Gu.: Acho que a primeira parte do sistema é $x+y=20$.

Professora: Porquê?

Gu.: Porque é o número das equipas de basquetebol mais o número de equipas de voleibol e dá 20 equipas.

Professora: E a segunda expressão, qual é?

Ig.: A segunda é o número de atletas.

Ro.: Cada equipa de basquete é 6 e cada equipa de vólei é 12.

Gu.: Eu acho que é $12y + 6x = 168$.

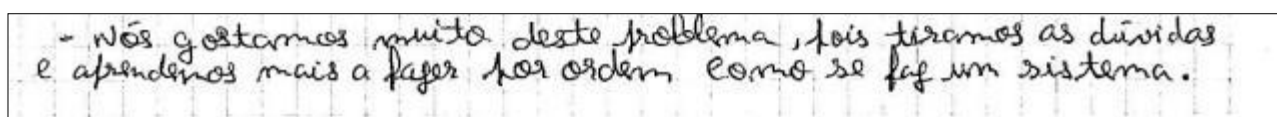
Professora: Porquê?

Gu.: Porque são os atletas por cada equipa e o número de equipas.

Neste diálogo, os alunos revelam facilidade na tradução para a linguagem algébrica, tendo sido atingido o objetivo de desenvolver a comunicação matemática.

A estratégia utilizada na apresentação à turma foi a mesma dos grupos anteriores. No início da apresentação, um dos alunos escreveu no quadro os dados do problema e identificou as variáveis do problema. Depois, escreveu o sistema que traduz o problema. Este grupo usou, também, o mesmo método na resolução do sistema, embora tenham tentado explicar cada passo da resolução apresentada. No final explicou que a solução é, “o par ordenado (12, 8), o que significa que existem doze equipas de basquetebol e oito de voleibol”.

No final, apenas dois grupos apresentaram uma apreciação da tarefa, mas surgiram também apreciações a esta tarefa nos portefólios dos alunos, como aquela que se pode ver na figura seguinte:



- nós gostamos muito deste problema, pois tiramos as dúvidas e aprendemos mais a fazer por ordem como se faz um sistema.

Figura 29: Apreciação feita, pelo grupo 2, à tarefa 2

Este grupo refere-se à resolução do sistema pelo método de substituição. Achei curioso que, na resolução destes problemas, todos os grupos tenham escolhido o método de substituição para resolver o sistema, apesar das dificuldades que os mesmos revelaram na resolução de equações.

4.6. PROPOSTA DE TRABALHO N.º 15 – MULTIPLICAÇÃO DE POLINÓMIOS

Os alunos iniciaram a resolução da proposta de trabalho com a manipulação das peças que lhes foram entregues, construídas em ‘esponja’, pois sentiram a necessidade de se familiarizarem com este material. Depois, tentaram descobrir as dimensões do retângulo laranja, sobrepondo quadrados amarelos no retângulo laranja, e verificaram que uma das dimensões é 1 unidade. Contudo, em relação à outra dimensão, surgiram dificuldades:

De.: Professora, esta é 1 e esta é 5.

Professora: De certeza? É exatamente 5? É necessário ser rigoroso...

De.: Não é bem, mas ... é quase.

Como a maioria dos alunos verificou que a outra dimensão não correspondia a um múltiplo da unidade, decidi discutir com a turma qual deveria ser o valor para essa dimensão.

Professora: Então, qual será o valor do comprimento?

Di.: 5 mais um pedacinho!

Professora: Se não sabemos o valor exato, o que vamos colocar?

Ma.: x! Colocamos a medida x.

Ficou então assente para todos os alunos que o retângulo teria dimensões 1 e x. Depois, os alunos demonstraram maior facilidade em verificar que o lado do quadrado azul tinha medida x, apesar de alguns terem iniciado as medições com a sobreposição de quadrados amarelos. Na figura seguinte pode ver-se o esboço apresentado pelo grupo 5, mas uma vez mais os alunos não foram muito rigorosos na construção.

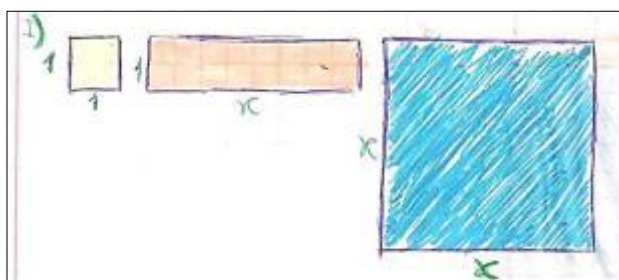


Figura 30: Esboço apresentado, pelo grupo 5, à questão i)

Para o cálculo da área, surgiram algumas dúvidas que se relacionam com o facto de ainda existirem alunos que não dominam o significado de área de uma figura e de ainda surgir alguma confusão entre as fórmulas do perímetro e da área de uma figura. Foi

necessário discutir com os alunos as noções de área e perímetro de uma figura e a fórmula da área do retângulo. No entanto, alguns alunos continuaram com dúvidas.

Fi.: Dá $2x + 2$.

Professora: Está a calcular o quê?

Ce.: É para calcular a área de cada uma das figuras.

Professora: Exato.

Sa.: É x vezes 1.

Professora: Que figura é esta?

Fi.: Um retângulo.

Professora: E como se calcula a área de um retângulo?

Ce.: É comprimento vezes largura.

Fi.: Ah! Já percebi. É 2 vezes x .

Sa.: Não. É x vezes 1.

Fi.: Pois é.

Neste diálogo é visível a confusão, que persiste, entre a definição de perímetro e área de um retângulo. A aluna **Sa.** respondeu corretamente, mas alguns colegas do grupo não compreenderam a resposta, talvez por aplicarem mal o conceito de área. Continuei a conversa até que os restantes elementos do grupo percebessem o que era pretendido calcular. De referir que estes conceitos, de perímetro e de área, já são abordados desde o 1.º ciclo e ainda não foram assimilados por estes alunos, sendo por isso importante que a abordagem dos conceitos seja contextualizada e com sentido para os alunos. De outro modo, são memorizados e mecanizados, mas não é feita uma aprendizagem com compreensão.

Além do conhecimento das fórmulas das áreas, também é necessário que os alunos conheçam bem as propriedades das operações aritméticas. Surgiram dúvidas no produto de monómios, como verificamos no diálogo:

De.: Professora, 1 vezes x ?

Mg.: Dá $1x$.

Na apresentação à turma, o grupo 1 escreveu no quadro interativo a resposta da figura seguinte. Apesar de alguma falta de organização na apresentação da resposta, verifica-se que estes alunos têm alguma facilidade na multiplicação de monómios.

$A = x \times l = 1 \times 1 = 1$
 quadrado amarelo
 $A = x \times x = x^2$
 quadrado azul
 $A = 3 \times x = 3x = x$
 retângulo laranja

Figura 31: Resposta apresentada, pelo grupo 1, à questão ii)

Na resolução da situação 1, surgiram algumas complicações na construção do retângulo de dimensões 3 por $x+2$ e surgiram várias construções diferentes:

Sa.: Utilizando as peças que te foram entregues constrói um retângulo de dimensões 3 por $x + 2$. (lendo o enunciado da questão). Então?... (mostrou o retângulo que o grupo tinha construído, com 3 quadrados amarelos).

Professora: Então, este retângulo é 3 por 1. Queremos 3 por $x+2$.

Sa.: Se colocarmos assim, temos... (alterando a construção pedida e obtendo a figura...)



Figura 31: Construção apresentada, pelo grupo 3, à questão 1

Professora: Quais são as dimensões deste retângulo?

Sa.: 3 por x .

Professora: Como será um retângulo de dimensões 3 por $x+2$?

Sa.: Será assim. (acrescentando quadrados amarelos à construção feita)

Professora: Este retângulo será de 3 por...

Sa.: $x+2$.

Foram várias as construções finais apresentadas como mostra a figura seguinte.



Figura 32: Construções apresentadas, por dois grupos, à questão 1

No registo da construção no caderno, os alunos voltam a apresentar pouco rigor na construção, como podemos observar na figura seguinte, mas salientaram as peças utilizadas, como lhes tinha sido pedido, mostrando que já existe uma preocupação em responder a todas as questões, sendo este um passo importante no desenvolvimento da comunicação matemática.

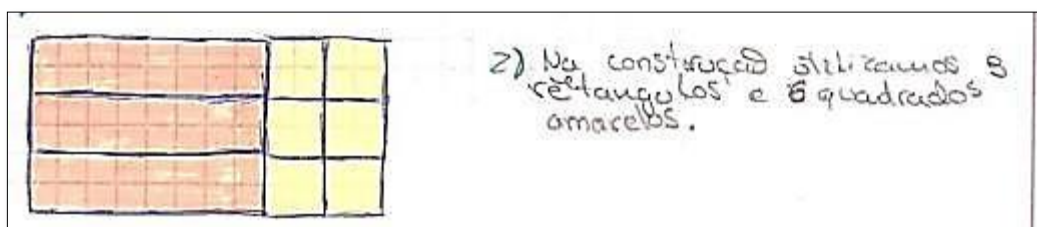


Figura 33: Resposta apresentada, pelo grupo 5, à questão 1

No entanto, no diálogo seguinte, foi pouco o rigor matemático utilizado, já que um aluno atribuiu o mesmo significado à figura e à área da figura.

Professora: O que escreveram aqui? O que representa esta expressão? (referindo-se a $3 \times (x+2)$)

Di.: É um retângulo.

Neste momento, alertei os alunos para o cuidado e o rigor que devem ter com a linguagem matemática, e referi que uma expressão pode representar a área ou o perímetro de um retângulo, mas não representa o retângulo.

Gu.: Professora, na 4? Determina a área do retângulo construído. (lendo a questão).

Professora: É melhor ver o retângulo construído e determinar a área.

Gu.: É comprimento vezes largura.

Professora: Mas vocês construíram o retângulo de que forma? Com que figuras?

La.: Este é 3, isto é x .

Gu.: Se isto é 3 e cada um deles é $1x$ (referindo-se à área dos retângulos), faço $1x+1x+1x$ e depois faço mais $1+1+1...$

Nesta conversa que mantive com o grupo 1, tentei incentivar os alunos para a manipulação das peças e para os conhecimentos adquiridos sobre áreas. Estes demonstram algum pensamento algébrico porque, partindo da construção feita, conseguiram escrever a expressão da área do retângulo.

Este grupo apresentou à turma a resposta a esta questão e teve o cuidado de mostrar a figura construída e de explicar cada parcela da expressão registada:

$$4. 1x + 1x + 1x + 1x6 = 3x + 6$$

Figura 34: Resposta apresentada, pelo grupo 1, à questão 4

Durante a realização da última questão, surgiram algumas dúvidas, uma vez que os alunos não perceberam a pergunta e solicitaram o meu apoio:

Ig.: Das duas questões anteriores o que concluis acerca de $3 \times (x+2)$? (lendo a questão).

Professora: O que obteve na questão anterior?

Ig.: $3x+6$.

Professora: E o que é isto $3x+6$?

Gu.: É a área.

Professora: A área de quê?

Gu.: Do retângulo construído.

Professora: Isto têm de ser igual a ...

Ig.: Ao de cima.

Professora: Portanto $3 \times (x+2)$ tem de ser igual a ...

Gu.: A $3x+6$.

Nesta questão, alguns grupos não seguiram a sugestão dada para calcular a área do retângulo construído a partir da área de cada figura que o constitui, mas resolveram-na aplicando a propriedade distributiva, apesar de apresentarem algumas incorreções, como mostra a figura:

$$5) \underline{3x}(x+2) = 3x+6$$

$$\underline{3x}(x+2) = 2x+3x2 = 3x+6$$

Propriedade distributiva da multiplicação em relação a adição.

Figura 35: Resposta apresentada, pelo grupo 4, à questão 5 da situação 1

Não surgiram muitas dúvidas na construção do retângulo pedido na situação 2. Foram usadas duas estratégias para a sua resolução, uma geométrica e outra algébrica. Na primeira, os alunos utilizaram a área das figuras que constituem o retângulo, e na segunda, utilizaram a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, como mostram as figuras:

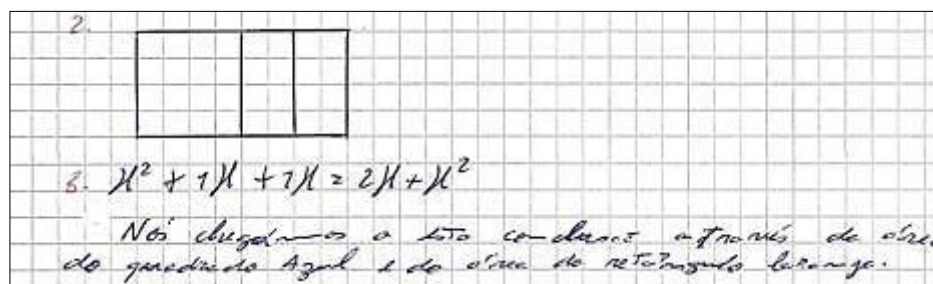


Figura 36: Resposta apresentada, pelo grupo 5, à situação 2

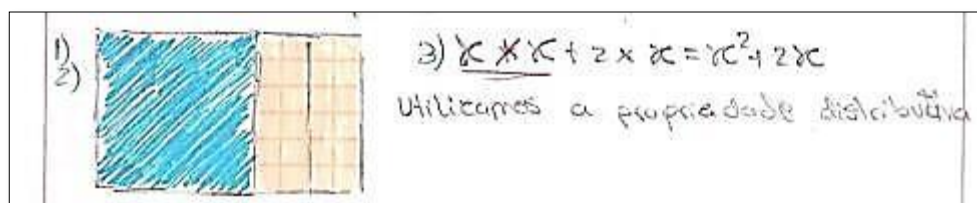


Figura 37: Resposta apresentada, pelo grupo 1, à situação 2

Estas duas estratégias foram apresentadas à turma e foram importantes as discussões que surgiram e as conexões feitas, com a aritmética e a geometria, e que conduziram os alunos à compreensão da multiplicação de um monómio por um polinómio.

Um grupo conseguiu construir, sem o meu apoio, o retângulo pedido na situação 3. Os restantes grupos solicitaram a minha ajuda. A maioria dos alunos prestou atenção a apenas uma das dimensões do retângulo construído. No entanto, foram capazes de resolver a questão 3 com alguma facilidade, porque tiveram em consideração as áreas de cada uma das peças que formavam o retângulo que construíram. A apresentação feita no quadro pelo grupo 4 encontra-se transcrita na figura seguinte, mas houve, novamente, pouco cuidado e rigor na apresentação da resposta. Este grupo usou as peças no quadro interativo para fazer a construção do retângulo.

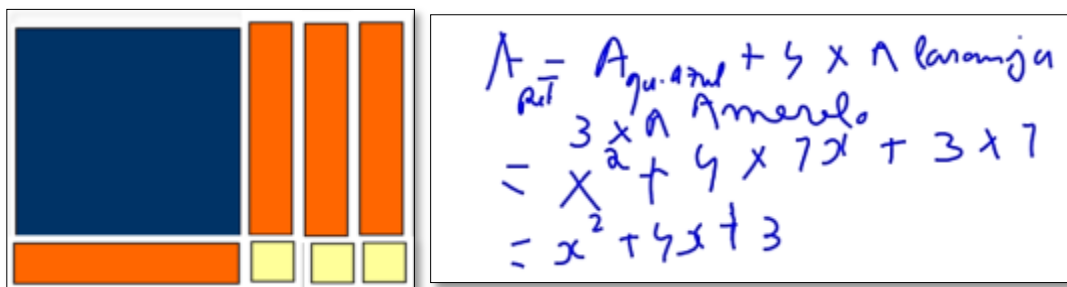


Figura 38: Resposta apresentada, no quadro interativo, pelo grupo 4 à situação 3

Todos os grupos tiveram algumas dificuldades na resolução da questão 4. Na apresentação final foi necessário analisar e discutir as estratégias utilizadas, visto que em quase todos os grupos as respostas apresentadas tinham algumas incorreções, como a resolução seguinte:

$$(X+1) \times (X+3) = X + X \times 1 + 3 = 2X \times 4$$

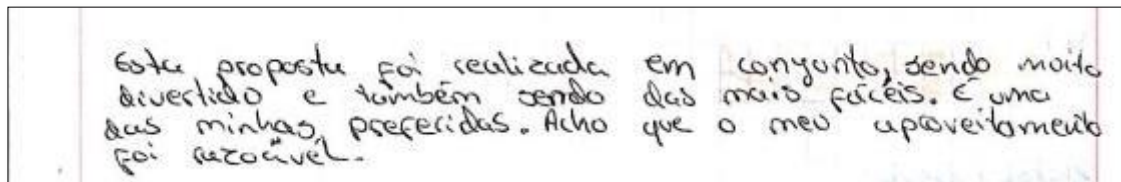
Figura 39: Resposta apresentada, pelo grupo 3, à situação 3

Este grupo revelou não dominar as regras e propriedades das operações aritméticas, em particular a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, nem a simplificação de expressões algébricas. No entanto, o grupo 5 revelou ter algum conhecimento desta propriedade, apesar de apresentar pouco rigor matemático na resolução.

Figura 40: Resposta apresentada, pelo grupo 5, à situação

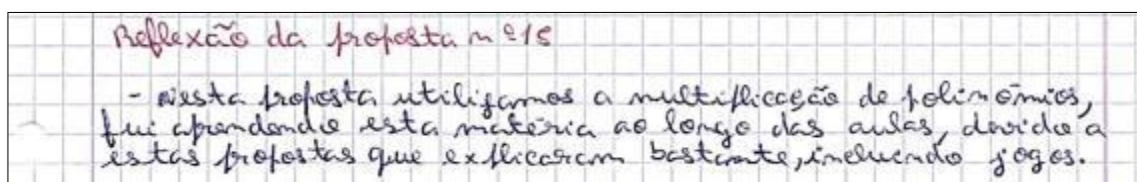
Considero que, apesar das dificuldades apresentadas em todas as questões desta proposta, a maioria dos alunos conseguiu atingir os objetivos. Foram capazes de interpretar e traduzir o problema para linguagem matemática, de usar os conhecimentos da geometria

para calcular a área das figuras construídas e de aplicar a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Esta foi uma das propostas que alguns alunos colocaram nos portefólios, onde constam as apreciações seguintes:



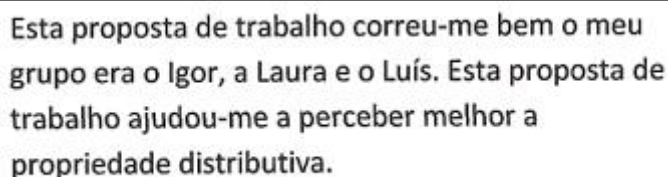
Esta proposta foi realizada em conjunto, sendo muito divertido e também sendo das mais fáceis. É uma das minhas preferidas. Acho que o meu aproveitamento foi razoável.

Figura 41: Apreciação apresentada pela aluna **Le.**, à proposta de trabalho n.º 15



Reflexão da proposta n.º 15
- nesta proposta utilizamos a multiplicação de polinómios, fui aprendendo esta matéria ao longo das aulas, devido a estas propostas que explicaram bastante, incluindo jogos.

Figura 42: Apreciação apresentada pela aluna **De.**, à proposta de trabalho n.º 15



Esta proposta de trabalho correu-me bem o meu grupo era o Igor, a Laura e o Luís. Esta proposta de trabalho ajudou-me a perceber melhor a propriedade distributiva.

Figura 43: Apreciação do aluno **Gu.**, à proposta de trabalho n.º 15

4.7. PROPOSTA DE TRABALHO N.º 16 – CASOS NOTÁVEIS DA MULTIPLICAÇÃO DE BINÓMIOS

Como os alunos já estavam familiarizados com o material manipulável, iniciaram logo a construção do quadrado pedido. No entanto, a maior parte dos grupos construiu um retângulo de dimensões $(a+b)$ e a , e não tiveram em atenção que a figura que tinham construído não era um quadrado, como se constata na figura seguinte.



Figura 44: Primeira construção apresentada, pelo grupo 1, à questão 1.

Só depois de questionados sobre a figura que tinham construído, é que refletiram e concluíram “Ah! Isto não é um quadrado”, levando-os a refazer a construção.

Na figura seguinte está representado um quadrado construído pelo grupo 5, mas, como podemos observar, mais uma vez não houve o cuidado de respeitar as dimensões pedidas. Só quando questionados sobre quais as dimensões do quadrado que tinham construído é que verificaram que este não era o pretendido.



Figura 45: Primeira construção apresentada, pelo grupo 5, à questão 1.

De referir que apenas o grupo 4 construiu de imediato o quadrado pedido, representado na figura seguinte.



Figura 46: Construção do quadrado, apresentada, pelo grupo 4, à questão 1.

Relativamente à questão 3, o grupo 5 afirmou que $(a + b)^2$ era a expressão do perímetro do quadrado construído, evidenciando que ainda persiste a confusão entre a

fórmula de perímetro e de área de uma figura. Por essa razão, senti a necessidade de questioná-los com o objetivo de os orientar.

Professora: O $a+b$ é o quê?

Pe.: É a medida do lado do quadrado.

Professora: Quando faço $(a+b)$ ao quadrado estou a calcular o quê?

Le.: Um dos lados.

Professora: Qual é a medida de um dos lados?

Pe.: $a + b$.

Le.: Ah! Está a calcular o perímetro.

Professora: O perímetro! Como se calcula o perímetro?

Le.: Não é lado mais lado?

Professora: É a soma de todos os lados, e quando aparece ao quadrado é lado vezes lado.

Le.: Ah! Então, é a área do quadrado.

No entanto, os alunos do grupo 1 afirmaram, sem hesitar, que $(a+b)^2$ representava a área do quadrado construído, mostrando já ter compreendido como determinar a área de um quadrado a partir da medida de comprimento dos seus lados.

Surgiram algumas dúvidas na resolução da questão 4 e, os alunos solicitaram o meu apoio, como revela o seguinte diálogo:

Professora: A área da figura toda é a área de quê?

Sa.: É $(a+b)$ vezes 4.

Fi.: Ao quadrado.

Professora: Mas é pedido para calcular a área da figura, tendo em atenção as peças que aqui estão.

Sa.: Então é $a+b+\dots$ isto (apontando para a figura).

Professora: Hummm...

Fi.: É $a+2b+\dots$ Não...É...

Professora: Vamos lá ver. A área da figura toda é a área de quê?

Sa.: É a área deste, mais este, mais... (apontando para a figura e mostrando as várias peças que a constituem)

Professora: E a área deste é quanto? (apontando para o quadrado azul)

Sa.: É a vezes 2.

Professora: É a área...

Sa.: a ao quadrado.

Professora: E a área deste (apontando para o quadrado amarelo)?

Sa.: É b ao quadrado e...

Fi.: $ab \dots 2ab$. Ah, já sei...

Professora: Então, como vão fazer?

Fi.: É a ao quadrado mais $2ab$ mais b ao quadrado.

Como verificamos, estes alunos também continuam a confundir o conceito de perímetro com o de área. Por essa razão, senti a necessidade de interromper a resolução para discutir, mais uma vez, estes conceitos.

O grupo que fez a apresentação desta questão escreveu a expressão para a área do quadrado como a soma das áreas de cada uma das figuras que o formam, como mostra a figura:

$$\begin{aligned}
 4 \quad A &= A_1 + A_2 + A_3 + A_4 \\
 A_1 &= a \times a = a^2 \\
 A_2 &= b \times b = b^2 \\
 A_3 &= a \times b = ab \\
 A_4 &= a \times b = ab \\
 \\
 A &= a^2 + b^2 + ab + ab = \\
 &= a^2 + b^2 + 2ab = \\
 &= 2ab + a^2 + b^2
 \end{aligned}$$

Figura 47: Resposta apresentada, pelo grupo 1, à questão 4.

Apesar dos alunos já terem trabalhado a multiplicação de binômios, surgiram algumas dificuldades na resolução da questão 6 e, senti a necessidade de orientar todos os grupos para a concretização da questão. Depois da apresentação da alínea 7, foi formalizado o caso notável da multiplicação, ‘o quadrado da soma’.

Os alunos resolveram a alínea 8 e, para trabalho de casa, solicitei que resolvessem alguns exercícios de aplicação para facilitar a compreensão deste caso notável.

A parte II foi realizada na aula seguinte, após a correção do trabalho de casa.

Inicialmente, alguns grupos tiveram dificuldade em indicar a medida do lado do quadrado que ficou visível na construção, tendo referido que essa medida era a .

Sa.: A medida é a .

Professora: Do quadrado que ficou visível?

Fi.: É a menos b .

Professora: Porquê?

Fi.: É o quadrado azul menos isto (apontando para a largura do retângulo laranja).

No que diz respeito à região que ficou sobreposta, alguns grupos verificaram, sobrepondo um quadrado amarelo, que correspondia a um quadrado amarelo. A expressão apresentada, pela maioria dos grupos, para a área do quadrado visível está representada na figura 48.

$$\begin{aligned}
 S. A &= (a \times a) - (b \times a) - (b \times a) + b^2 \\
 &= a^2 - ab - ab + b^2 \\
 &= a^2 - 2ab + b^2
 \end{aligned}$$

Figura 48: Resposta apresentada pelo grupo 5, à questão 4 da situação 2.

Analisando a resposta, verifiquei que os alunos calcularam a área de cada peça e que foram capazes de, através das indicações dadas, escrever a expressão para a área pedida. Logo, conseguiram interpretar e representar a situação 2, usando linguagem algébrica, desenvolvendo desta forma a capacidade de comunicação matemática.

De referir que, após a apresentação e discussão desta parte da proposta, foi formalizado o caso notável do ‘quadrado da diferença’ e os alunos tiveram oportunidade de aplicar os dois casos notáveis da multiplicação de binómios, na resolução de alguns exercícios.

A parte III desta proposta foi realizada na terceira aula dedicada aos casos notáveis. Os alunos receberam um quadrado de cartolina azul de lado a , por ser mais fácil para recortar. Para responder à primeira questão, colocaram um quadrado amarelo num dos cantos do quadrado azul e recortaram, como mostra a figura.



Figura 49: Construção apresentada, por grupo 5, à questão 1 da situação 3.

Na determinação da área da figura resultante, foram várias as dúvidas que surgiram, como poderemos analisar no diálogo seguinte:

Professora: Já determinaram a área da figura que obtiveram?

Gu.: Eu sei, temos que ver a área deste, depois a área deste e fazer a área ... (apontando para a figura e mostrando as duas peças obtidas)

Professora: Então, como fica?

Gu.: Fica a ao quadrado menos $2ab$.

Professora: Não é bem assim, vamos refletir um pouco mais sobre o assunto...

Depois de terem discutido qual seria a resposta, este grupo apresentou uma resposta correta e, na apresentação à turma, explicou a estratégia utilizada. Já a resposta entregue pelo grupo 5, na figura seguinte, evidencia o pouco rigor na linguagem matemática (escrevem quadrado quando deveriam ter escrito área do quadrado).

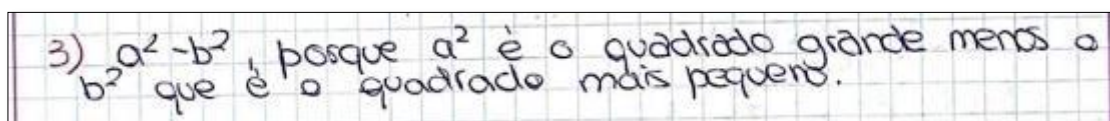


Figura 50: Resposta apresentada, pelo grupo 5, à questão 3 da situação 3.

Para decompor a figura, alguns grupos apresentaram algumas dificuldades. Como não estavam a perceber de que forma poderiam recortar a figura, solicitaram a minha presença.

Pe.: Professora, estamos na 4 e temos um problema. Não sabemos como dividir a figura para fazer dois retângulos.

Professora: Peguem apenas nesta peça e façam um corte, de forma a ficarem com dois retângulos.

Pe.: Assim (fazendo a simulação de um corte na diagonal)?

Professora: Não, assim não ficam com dois retângulos.

Pe.: Mas o problema é que, se cortamos assim, nunca ficam dois retângulos. (fazendo a simulação de outros cortes ...)

Posto isto, tentei motivar os alunos para que fizessem várias simulações. Após algumas tentativas, os alunos apresentaram a seguinte decomposição:

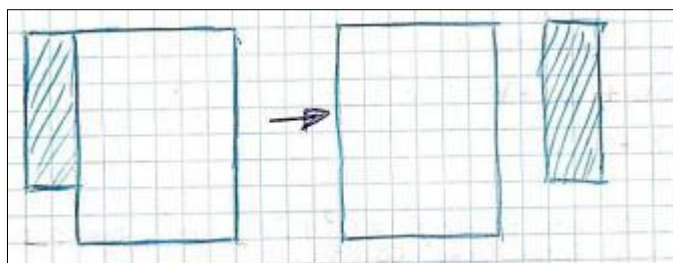


Figura 51: Registo da decomposição feita pelo grupo 2, na questão 5, da situação 3.

Depois, os alunos construíram, com alguma facilidade, o novo retângulo e verificaram que esse retângulo tem as dimensões $(a-b)$ e $(a+b)$ e, por isso, a expressão para a área deste novo retângulo é a^2-b^2 .

Na apresentação da questão 7, já foi visível maior cuidado na linguagem matemática relativamente ao início do estudo, indicando uma evolução nas aprendizagens dos alunos.

Professora: O que concluíram na questão 7?

Ig.: Que $(a+b)\times(a-b)$ é a medida da área do retângulo.

Professora: Isso já está ali. Mas, na questão 7, o que se pede é o que se conclui da exploração feita.

Fi.: Que $(a+b)\times(a-b)$ é a área da figura que tínhamos, inicialmente.

Professora: E vai dar igual a quê?

Fi.: Vai ser igual a a ao quadrado...

Sa.: Menos b ao quadrado.

Professora: E como o **Ma.** sugeriu, usando a propriedade distributiva.

O aluno foi ao quadro.

Como um aluno já tinha sugerido a utilização da propriedade distributiva para calcular $(a+b)\times(a-b)$, pedi-lhe que explicasse, no quadro, o processo de resolução.

Após a apresentação e discussão desta parte da proposta, foi formalizado o caso notável da ‘diferença de quadrados’ e os alunos tiveram oportunidade de aplicar os casos notáveis da multiplicação de binómios na resolução de alguns exercícios.

Nesta proposta, os alunos mostraram algum empenho, tiveram maior cuidado com a apresentação dos resultados e com a linguagem utilizada, e já evidenciaram maior familiaridade com a simbologia algébrica. O facto de utilizarem material manipulável e fazerem conexão com a geometria facilitou a compreensão dos casos notáveis da multiplicação de binómios. Os alunos foram capazes de traduzir para linguagem matemática as situações apresentadas, de discutir as estratégias utilizadas para resolver as situações propostas e, de compreender e deduzir os casos notáveis da multiplicação de binómios, utilizando o raciocínio dedutivo e indutivo.

Atendendo ao grau de abstração exigido neste tema, foi necessário dar algum tempo aos alunos para consolidarem os casos notáveis através da resolução de alguns exercícios e tarefas do manual adotado.

Na figura seguinte, estão agrupadas algumas das apreciações feitas pelos grupos e que constam nos portefólios dos alunos, sobre esta proposta de trabalho.

- A proposta de casos notáveis da multiplicação, foi uma das matérias mais fáceis que demos neste último período.

Proposta de trabalho nº 16- Esta proposta de trabalho não achei difícil nem fácil porque alguns dos exercícios eram difíceis mas engraçados de realizar.

Reflexão do Grupo Todo:
 Nós gostamos muito desta proposta, mas tivemos alguns dúvidas, mas tentamos esclarecê-las com a professora.

Figura 52: Apreciações feitas, pelos alunos, à proposta de trabalho n.º 16.

Analisando estas reflexões, verifico que esta proposta ajudou os alunos a compreenderem os casos notáveis da multiplicação de binómios. A utilização dos materiais manipuláveis e as conexões feitas, contribuíram para a aprendizagem. De referir que o trabalho dos alunos, na formalização e aplicação dos casos notáveis da multiplicação de binómios, contribuiu para o desenvolvimento do raciocínio matemático e da comunicação matemática.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo desta pesquisa, foi com agrado que constatei que o ensino da álgebra tem sido mais valorizado, nos últimos anos, em Portugal. Apesar da linguagem algébrica continuar a ser considerada muito abstrata, a álgebra já não é vista como a simples manipulação de símbolos e resolução de equações. A abordagem dos vários tópicos da álgebra, no 3.º ciclo, passa a ter como principal intenção o desenvolvimento da linguagem algébrica e do pensamento algébrico. O pensamento algébrico é definido por Cyrino e Oliveira (2011) “como um modo de descrever significados atribuídos aos objetos da álgebra, às relações existentes entre eles, à modelação, e à resolução de problemas no contexto da generalização destes objetos”.

Neste trabalho, tive como preocupação analisar a atividade matemática dos alunos de uma turma de 8.º ano, com o objetivo de compreender como se desenvolve a aprendizagem e o pensamento algébrico. Procurei discutir as questões de investigação que formulei: (a) Que dificuldades manifestam os alunos na aprendizagem da álgebra? (b) De que forma a atividade matemática do aluno pode influenciar a aprendizagem da álgebra e o desenvolvimento do pensamento algébrico?

Para promover a aprendizagem e o pensamento algébrico dos alunos, procurei propor uma diversidade de tarefas, sendo a maior parte tarefas de investigação e exploração que permitem fazer conexões com outras áreas, principalmente com a aritmética e a geometria. Os alunos tiveram oportunidade de fazer modelagem de situações, de passar da linguagem natural para a linguagem matemática, de generalizar e formalizar situações e recorrer a vários tipos de representação. Também, quando se proporcionou, utilizaram materiais manipuláveis e o programa informático Geogebra. Muitas foram as aprendizagens realizadas pelos alunos, mas estes também se depararam com muitas dificuldades.

5.1. Dificuldades manifestadas pelos alunos na aprendizagem da álgebra.

Na aplicação das propostas de trabalho foram várias as dificuldades manifestadas pelos alunos, essencialmente relacionadas com: a tradução da linguagem natural para a linguagem matemática, a compreensão do significado dos símbolos e da noção de variável,

a manipulação de símbolos algébricos, a interpretação da solução dos problemas e o pouco rigor matemático na linguagem oral e escrita.

Na análise dos dados recolhidos, é visível que muitos são os fatores responsáveis pelas dificuldades manifestadas na tradução da linguagem natural para a linguagem matemática. Um destes fatores é referido no projeto curricular da turma e está relacionado com as grandes dificuldades que os alunos revelam na interpretação e compreensão de textos e no vocabulário, pobre, que dominam. Estes alunos desconhecem o significado de algumas palavras, como por exemplo: determinado, indeterminado, perpendiculares. Além disso, apresentam lacunas na utilização do vocabulário específico, desconhecem alguns conceitos matemáticos (é pedido o dobro de um número e os alunos apresentam a expressão para o quadrado de um número; são pedidas as coordenadas de um ponto no referencial e os alunos não apresentam um par ordenado, limitam-se a apresentar uma das coordenadas; pede-se a área de uma figura e os alunos apresentam a expressão algébrica para o perímetro).

As dificuldades na tradução em linguagem algébrica devem-se, também, ao facto de os alunos não lerem com atenção os enunciados, em especial quando estes são muito extensos, o que leva a que não tenham em conta todas as indicações dadas e, em alguns casos, não considerem todos os dados do enunciado. Esta situação é mais frequente nas primeiras propostas em que os alunos, por exemplo, não tiveram em atenção o valor do giro para calcular o custo da viagem (proposta n.º 10), revelaram dificuldades em criar um seletor (proposta n.º 11), representaram as condições consecutivamente sem responder às questões apresentadas (proposta n.º 14), ou reduziram a uma única expressão algébrica os problemas das propostas n.º 13 e 14.

Os alunos apresentaram igualmente dificuldades na compreensão do significado dos símbolos e da noção de variável. Por exemplo, na proposta de trabalho n.º 12, surgiram algumas dificuldades na compreensão da fórmula e na atribuição de significado a cada variável, já que os alunos determinaram os valores correspondentes na escala de kelvin de forma pouco rigorosa. Nas propostas n.º 13 e 14 são, do mesmo modo, evidentes as dificuldades na identificação e escolha das duas variáveis em estudo, em particular na escrita de um sistema de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas, como refere Ponte *et al.* (2009) “uma escolha pouco cuidadosa pode originar a formulação de um sistema de resolução bastante mais complexa.” (p.76). Em algumas situações foi notória a dificuldade

na interpretação do sinal de igual como uma equivalência entre duas expressões. De uma forma geral, os alunos necessitaram, em todas as propostas, de apoio na escrita das expressões algébricas, atividade de generalização, apesar de se notar uma maior autonomia nas últimas propostas.

A identificação de um ponto num referencial cartesiano criou também, alguns obstáculos aos alunos, que usualmente só indicavam uma das coordenadas do ponto, a abcissa ou a ordenada, e que de uma forma geral correspondia ao valor onde o gráfico intersecta os eixos coordenados.

Muitos alunos revelaram, ainda, não ter consolidado os conceitos de área e perímetro de uma figura. De referir que estas noções são abordadas desde o 1.º ciclo e que estes alunos demonstraram que as tinham mecanizado mas não as compreendiam, daí ser importante, como sugere Canavarro (2009), a introdução do pensamento algébrico nos primeiros anos de escolaridade, permitindo “uma abordagem à Matemática mais integrada e interessante, na qual os alunos desenvolvam as suas capacidades matemáticas motivados por uma actividade rica e com sentido, que lhes possibilita a construção de conhecimento relevante, com compreensão” (p.113).

No entanto, outras dificuldades surgiram na resolução das propostas e que se relacionam com a manipulação simbólica. Em diversas situações, os alunos demonstraram que não dominam as regras de resolução de equações do 1.º grau, como refere Ponte *et al.* (2009), fazendo, por exemplo, a adição incorreta de termos não semelhantes e a transposição incorreta dos termos. Na resolução de sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas pelo método de substituição, demonstram dificuldades na concretização do método até obter a solução, em especial na substituição de uma expressão algébrica por outra equivalente, como referido em Ponte *et al.* (2009). Também surgiram complicações na aplicação da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e na simplificação de expressões algébricas.

A interpretação da solução nem sempre foi fácil, tendo surgido dificuldades, por exemplo, nas equações literais, porque para os alunos é “difícil entender que a resolução deste tipo de equações, não leva à obtenção de um valor concreto” (Campos, 2010, p.37), tendo por isso uma infinidade de soluções e cada solução é um par ordenado de números.

Os alunos tiveram maior facilidade na interpretação da solução de um sistema quando o resolveram graficamente, e recorrendo ao *software* de geometria dinâmica, Geogebra, do que fazendo a resolução pelo método de substituição, isto porque, com o Geogebra, os alunos tiveram a oportunidade de visualizar a solução, o que contribuiu para a sua compreensão. Curiosamente, quando lhes foi dada a oportunidade de escolher o processo para resolução do sistema, proposta n.º 14, os alunos utilizaram o método de substituição, apesar das dificuldades que apresentaram na concretização do método.

Nas primeiras propostas foi pouco o rigor matemático utilizado pelos alunos, tanto na linguagem oral como escrita, pois não se preocuparam em usar os termos e a simbologia correta, nem em escrever as respostas completas com todas as explicações e justificações necessárias. Evidenciando poucos hábitos de escrita, nas aulas de Matemática, nas respostas que apresentam colocam apenas o resultado e não justificam nem explicam como obtiveram esse resultado. No entanto, ao longo deste estudo, verificou-se uma melhoria significativa desta situação, já que os alunos acabam por fazer aquilo que lhes é solicitado. Além disso, como foi valorizado o registo das respostas completas, estes fazem um esforço para apresentá-las de forma correta, melhorando, assim, o seu resultado.

5.2. A atividade matemática dos alunos e a aprendizagem da álgebra e o desenvolvimento do pensamento algébrico.

No decorrer do estudo, foi notória a evolução na atitude dos alunos e no interesse pela aprendizagem dos vários tópicos da álgebra. Apesar de, no início, estes apresentarem algumas resistências, observáveis nas primeiras propostas, progressivamente foram fazendo uma leitura mais atenta dos enunciados e passaram a ter uma maior preocupação em saber o significado dos termos desconhecidos e em tirar os dados importantes para a resolução dos problemas propostos. Tudo isto contribuiu para que, nas últimas situações propostas fosse visível uma melhoria na interpretação e tradução dos problemas em linguagem matemática. Com o maior cuidado que foram apresentando na leitura dos enunciados, houve uma progressiva melhoria na capacidade de interpretação das situações e na atribuição de significado aos símbolos usados. Desta forma, desenvolveram a capacidade de tradução da linguagem natural para a linguagem matemática.

No decorrer do estudo, apesar das dificuldades apresentadas, os alunos foram capazes de aplicar alguns conhecimentos adquiridos anteriormente, estabelecendo conexões com a geometria e a aritmética, o que proporcionou uma aprendizagem com sentido para estes alunos.

No registo das resoluções, os discentes revelaram, inicialmente, pouco cuidado e rigor mas, aos poucos, foi-se verificando uma maior preocupação em responder a todas as questões, e de forma completa. Também nas construções feitas foi visível uma evolução por parte dos alunos. Nos primeiros esboços apresentados, dos gráficos de funções, os alunos traçaram as retas, mas não se preocuparam em marcar pelo menos dois pontos corretos. Nas últimas construções, propostas 15 e 16, já existiu uma preocupação em salientar as peças utilizadas seguindo as indicações dadas. Também foi evidente a utilização, por parte de alguns alunos, de uma linguagem matemática mais cuidada, o que representa um passo importante no desenvolvimento da comunicação matemática.

As tarefas propostas proporcionaram aos alunos uma diversidade de situações, desde a utilização de modelos matemáticos e de vários tipos de representação (tabelas, gráficos e expressão algébrica), à utilização de materiais manipuláveis e do programa informático Geogebra. De referir que o trabalho dos alunos, na formalização e generalização de situações, também contribuiu para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

O trabalho em grupo e a apresentação ao grande grupo foram muito importantes no trabalho destes alunos, porque proporcionou a discussão sobre as diferentes estratégias utilizadas para resolver cada tarefa, contribuindo para a aprendizagem com compreensão dos vários tópicos abordados e permitindo desta forma, desenvolver a linguagem e o pensamento algébrico.

5.3. Reflexão final

Este estudo foi uma experiência muito gratificante, tanto a nível profissional como pessoal. Proporcionou acima de tudo, uma reflexão profunda sobre a minha atividade e a forma de estar como profissional. Com recolha e análise de dados, e já informada pela

literatura sobre esta temática, apercebi-me de algumas situações que, de outra forma, seria mais difícil acontecer.

Com a pesquisa que fiz sobre o enquadramento teórico, passei a ter uma visão mais alargada sobre o ensino da álgebra e tive, também, a possibilidade de conhecer uma maior diversidade de abordagens e estratégias usadas. Do mesmo modo, foi-me possível aprofundar a compreensão das dificuldades dos alunos nas aprendizagens algébricas.

A recolha de dados foi realizada nos 2.º e 3.º períodos, facto que se revelou benéfico, pois os alunos já estavam habituados à metodologia de trabalho utilizada. No entanto, surgiram algumas dificuldades iniciais, relacionadas com os conteúdos abordados e também com o facto de os alunos serem pouco autónomos e apresentarem grandes dificuldades na disciplina e na interpretação e compreensão de textos. O que originou dificuldades na leitura e na tradução dos problemas apresentados e exigiu da minha parte um apoio constante. A minha atuação foi, sempre, no sentido de apoiar os alunos de forma a envolvê-los na resolução das propostas apresentadas. Procurei responder às questões destes com outras perguntas, obrigando-os a pensar um pouco mais e incentivei a exposição e discussão de estratégias e resultados.

Outras dificuldades que surgiram estão relacionadas com o facto de os alunos não dominarem alguns conhecimentos já abordados em anos anteriores, como por exemplo a noção de função, a identificação de um ponto no referencial, o conceito de perímetro e de área. Este aspeto vem reforçar a ideia de que a aprendizagem da matemática deve ser realizada de forma contextualizada e com sentido para os alunos.

Com a diversidade de tarefas que propus, pretendi que todos os alunos tivessem uma aprendizagem significativa dos vários tópicos da álgebra. De referir que a utilização de materiais manipuláveis e do programa informático Geogebra influenciaram, também, as aprendizagens feitas pelos alunos, porque colmataram algumas dificuldades apresentadas e contribuíram para uma aprendizagem com compreensão.

O tipo de propostas utilizadas não era uma questão de investigação, mas emergiu neste estudo e considero que as tarefas apresentadas do tipo investigativo/exploratório são contextualizadas e contribuíram não só para a construção do conhecimento como também para o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas, do raciocínio matemático e da comunicação matemática, com recurso a conceitos e procedimentos

algébricos e, em particular, foram fundamentais para desenvolver a linguagem e o pensamento algébrico dos alunos.

Os alunos demonstraram interesse e empenho na resolução da maioria das propostas, apesar das dificuldades e do pouco gosto pela disciplina. De referir, que o desempenho dos alunos, na proposta n.º 11, não foi o esperado, porque os alunos não seguiram as indicações dadas e não fizeram o registo completo das respostas, o que se deve ao facto de os discentes estarem pouco habituados a escrever na disciplina de Matemática. Aqui, revela-se necessário um esforço por parte dos professores para alterar as suas práticas, e abandonar a ideia de que na disciplina de Matemática não se escreve, ‘só se faz contas’. Acredito ser importante fomentar hábitos de escrita e de raciocínio, exigindo aos nossos alunos que escrevam as respostas e as justifiquem.

Apesar do estudo feito, tenho a noção de que alguns alunos, desta turma, ainda apresentam dificuldades e estão pouco à vontade com este tema. É importante prestar atenção às dificuldades apresentadas por cada aluno. Neste sentido, a gravação e registo das aulas ajuda a ‘ver’ melhor as situações que nem sempre se detetam durante as aulas. Desta forma, podemos ajudar a ultrapassar as dificuldades e contribuir para a aprendizagem com compreensão.

Este estudo não se esgota aqui, mas fica o sentimento de que é possível ajudar a desenvolver o pensamento algébrico e a construir uma base sólida para a aprendizagem da álgebra com compreensão para todos os alunos.

Com efeito, muito há, ainda, a fazer e o desafio de desenvolver nos alunos a linguagem e o pensamento algébrico não passa sem a dedicação e o envolvimento dos mesmos.

6. REFERÊNCIAS

- Azevedo, A. B. G. (2009). *O desenvolvimento do raciocínio matemático na aprendizagem de funções*. Dissertação de Mestrado, Área de especialização em Didática da Matemática. Instituto de Educação da Universidade. Lisboa.
- Barbosa, E. J.T. & Junior, C. (2011). Álgebra: Ensino e Aprendizagem. XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática, Recife Brasil. Documento consultado em <http://cimm.ucr.ac.cr>, a 29 dezembro de 2012.
- Bivar, A.; Grosso, C.; Oliveira, F. & Timóteo, M. (2012). *Metas Curriculares. Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação – DGIDC.
- Bivar, A., Grosso, C., Oliveira, F. & Timóteo, M. (2013). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação – DGIDC.
- Bogdan, R. & Biklend, S. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação*. Porto: Porto Editora.
- Borrvalho, A. & Barbosa, E. (s. d.). Pensamento Algébrico e exploração de Padrões. Documento consultado em http://www.apm.pt/files/_Cd_Borrvalho_Barbosa_4a5752d698ac2.pdf, a 22 de dezembro 2012.
- Branco, N. & Ponte, J. P. (2007). Das Regularidades às equações: Uma Proposta Pedagógica para a aprendizagem da álgebra. *Rev. Teoria e Prática da Educação*, v.10, n. 3, 407-423.
- Branco, N. (2008). *O Estudo de Padrões e Regularidades no Desenvolvimento do Pensamento Algébrico*. Dissertação de Mestrado em Educação, Área de Especialização em Didática da Matemática. Universidade de Lisboa. Lisboa

- Brocardo, J., Delgado, C., Mendes, F., Rocha, I., & Serrazina, L. (2006). Números e Álgebra: desenvolvimento curricular. *Números e Álgebra na aprendizagem da matemática e na formação de professores*, 65-92.
- Campos, A. (2010). *O discurso do Professor no ensino e aprendizagem das equações literais no 8º ano, no âmbito da experimentação do Novo Programa de Matemática do Ensino Básico*. Dissertação de Mestrado em Ensino da Matemática 3º Ciclo e Secundário. Instituto de Educação da Universidade. Lisboa.
- Canavarro, A. P. (2009). O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos, *Quadrante*, 16 (2), 81 – 118.
- Candeias, A. (2010) *Aprendizagem das funções no 8.º ano com o auxílio do software GeoGebra*. Dissertação de Mestrado, Área de especialização em Didática da Matemática. Instituto de Educação da Universidade. Lisboa.
- Cyrino, M. C. T. & Oliveira, H. M. (2011). Pensamento Algébrico ao longo do Ensino Básico em Portugal. *Bolema, Rio Claro (SP)*, v. 24, nº 38, 97.
- Duarte, J. A (2011). *Tecnologias e Pensamento Algébrico: Um Estudo sobre o Conhecimento Profissional dos Professores de Matemática*. Dissertação de doutoramento em Educação, Área de Especialização Didática da Matemática. Universidade de Lisboa. Lisboa
- Fernandes, C. F. (2011). *Equações do 1.º grau, Estratégias e erros na resolução e simplificação de equações do 1.º grau*. Dissertação de Mestrado em Ensino da Matemática. Universidade de Lisboa. Lisboa
- Fiorentini, D., Fernandes, F. & Cristovão, E. (2005). Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico. Seminário Luso-Brasileiro de Investigações Matemáticas no Currículo e na Formação do Professor.

- Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra. In E. Fennema, & T. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (133-155). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Lessard- Hébert, M., Goyette, G. & Boutin, G. (2008). *Investigação Qualitativa. Fundamentos e Práticas* (3ª ed.) (M. J. Reis, Trad.). Lisboa: Instituto de Piaget.
- Leitão, A. & Canguero, L. (s. d.). Princípios e Normas do NCTM – um percurso pela Álgebra. Documento consultado em www.apm.pt/files/_Conf_Canguero_Leitao_487e4d92df2e1.pdf, a 22 de dezembro 2012.
- Matos, A. (2007). *Explorando relações funcionais no 8.º ano: Um estudo sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico*. Dissertação de Mestrado em Educação, Área de Especialização em Didática da Matemática. Universidade de Lisboa.
- Matos, A., Silvestre, A. I., Branco, N. & Ponte, J. P. (2008). Desenvolver o pensamento algébrico através de uma abordagem exploratória. In R. Luengo, B. Alfonso, M. Machín & L. B. Nieto (Eds.), *Investigación en educación matemática XII* (505-516). Badajoz: SEIEM.
- Nabais, M. (2010). *Equações do 2.º grau. Um estudo sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 9.º ano*. Dissertação de Mestrado em Educação, Área de Especialização em Didática da Matemática. Universidade de Lisboa. Lisboa
- NCTM (1991). *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar*. Lisboa: APM
- NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM


- Nobre, S., Amado, N. & Ponte, J. P. (2012). A integração da folha de cálculo no estudo do tópico equações do 2.º grau no 9.º ano de escolaridade. Documento consultado em <http://hdl.handle.net/10451/7065>, a 5 de janeiro de 2013.
- Pereira, M. N. & Saraiva, M. J. (2008). O sentido do símbolo na aprendizagem da álgebra em alunos do 7º ano de escolaridade. *Investigation en education Matemática XII*. Badajoz: Sociedade Española de Investigation en Education Matemática, SPCE e APM.
- Ponte, J. P. (2003). O ensino da Matemática em Portugal: Uma prioridade educativa? In *O ensino da Matemática: Situação e perspectivas* (21-56). Lisboa: Conselho Nacional de Educação. Documento consultado em http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/artigos_pt.htm a 2 janeiro de 2013
- Ponte, J. P. (2004). As equações nos manuais escolares. *Revista Brasileira de História da Matemática*, 4 (8), 149-170.
- Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.
- Ponte, J. P. (2006). Números e álgebra no currículo escolar. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos & P. Canavarro (Eds.), *Números e álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (5-27). Lisboa: SEM-SPCE.
- Ponte, J.; Serrazina, L.; Guimarães, H.; Brenda, A.; Guimarães, F.; Sousa, H.; Menezes, L.; Martins, M. & Oliveira, P.(2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação – DGIDC.
- Ponte, J.P., Nunes, C.C & Quaresma, M. (2008). Explorar, investigar, interagir na aula de Matemática Elementos fundamentais para a aprendizagem. Documento consultado em <http://www.ie.ul.pt/pls/portal/docs/1/334370.PDF>, a 15 de dezembro de 2012.

Ponte, J. P., Branco, N. & Matos, A. (2009). *Álgebra no Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação, Direcção-Geral do Ensino Básico e Secundário.

Silva, F. (2012). *Pensamento Algébrico: O sentido de símbolo e de variável em alunos do 8.º ano de escolaridade*. Relatório da Prática de Ensino Supervisionada. Mestrado em Ensino da Matemática. Universidade de Lisboa. Lisboa.

7. ANEXOS

7.1. ANEXO I –VAI UM GIRO?

 <p style="text-align: center;">Escola Básica do 2.º e 3.º Ciclos Dr. Eduardo Brazão de Castro Ano Letivo 2012/2013 Matemática 8º ano Proposta de trabalho n.º 10</p>
<p>Unidade temática: Funções e equações</p> <p>Conteúdo: Noção de função. Função linear e afim Turma: 1 Data: ___/___/___</p>

VAI UM GIRO?

A tia da Eva veio passar uns dias, no período de Natal, com a família à Madeira. Os pais da Eva tiveram que trabalhar nos dias festivos, por isso, o intuito da tia foi passar o Natal com a Eva, fazer uns passeios com ela e apreciar o fogo-de-artifício, no fim de ano, com a sua sobrinha. A estadia da tia Lúcia na ilha foi entre 22 de dezembro e 5 de janeiro.

Quando chegou à Madeira, a tia propôs à Eva que fossem, no dia seguinte, ao Funchal, apreciar os preparativos para a noite do Mercado.

No dia 23 utilizaram um transporte público, do serviço urbano, da rede Horários do Funchal, para se dirigirem à baixa da cidade. No autocarro, a tia pediu ao motorista dois títulos de transporte e pagou 3,80€. A tia considerou um pouco caro e manifestou o seu desagrado ao motorista, ao que este a aconselhou a dirigir-se posteriormente a um posto de venda, onde poderia adquirir viagens a preço inferior.

Num posto de venda encontrou a seguinte informação:

Bilhetes – Títulos de utilização ocasional	
Bilhete comprado a bordo	1,90€ (valor do suporte incluído)
Bilhete pré-comprado	De 2 a 9 viagens = 1,30€ cada + de 9 viagens = 1,20€ cada
Bilhete pré-comprado Criança (entre 6 e 12 anos)	0,70€*
Bilhete de um dia	4,50€
Bilhete de 3 dias	11,55€
Bilhete de 5 dias	15,90€
Bilhete de 7 dias	21,40€
<p>Excetuando o bilhete comprado a bordo, ao efetuar a primeira compra, de um dos outros bilhetes, o cliente terá de pagar 0,50€ pelo cartão.</p> <p>Durante a viagem o cartão é pessoal e intransmissível.</p> <p>* Carregamento de, no mínimo, duas viagens.</p>	


1. Será que a tia da Eva teria poupado dinheiro se tivesse adquirido anteriormente os títulos de transporte para a viagem até à baixa citadina no dia 23? (Nota que a Eva tem 9 anos.)

2. Se a tia da Eva tivesse apenas 4,50€, qual teria sido a melhor opção para, no dia 23, utilizarem o transporte público até à baixa da cidade?
3. Constrói uma tabela que relacione o custo, até 9 viagens, dos bilhetes comprados a bordo e das viagens para adulto, quando compradas num posto de venda, não possuindo o cartão para carregamento.
4. Marca, num mesmo referencial cartesiano, os pontos correspondentes ao número de viagens compradas e o custo das viagens nas duas opções descritas na questão 3.
5. Considera:
 - $f(v)$ a correspondência que relaciona o custo das viagens compradas a bordo com o número de viagens compradas.
 - $g(v)$ a correspondência que relaciona o custo dos bilhetes, quando comprados num posto de venda, não possuindo o cartão para carregamento, com o número de viagens compradas.

Justifica porque é que $f(v)$ e $g(v)$ são funções.

6. No contexto da situação em estudo, será que faz sentido unir os pontos de coordenadas obtidos nos gráficos? Justifica a tua resposta.
7. Se a variável independente pudesse tomar qualquer valor, como seriam os gráficos de $f(v)$ e $g(v)$? Desenha-os.
 - 7.1. Analisa os gráficos construídos, procurando descrever e justificar as semelhanças e diferenças encontradas.
 - 7.2. Qual das funções é de proporcionalidade direta (função linear)? Justifica a tua resposta.
 - 7.3. Qual é a ordenada do ponto cuja abcissa é zero em cada um dos gráficos? O que representa esse valor no contexto da situação?
 - 7.4. Escreve, para cada uma das funções, uma expressão algébrica que te permita calcular o custo para qualquer número de viagens compradas.
 - 7.5. Analisa as expressões algébricas, procurando descrever e justificar as semelhanças e diferenças encontradas, no contexto da situação em estudo.

7.2. ANEXO II – ESTUDO DA FUNÇÃO LINEAR E FUNÇÃO AFIM



Escola Básica do 2.º e 3.º Ciclos Dr. Eduardo Brazão de Castro

Ano Letivo 2012/2013

Matemática 8º ano

Proposta de trabalho n.º 11

Docente: Dalila

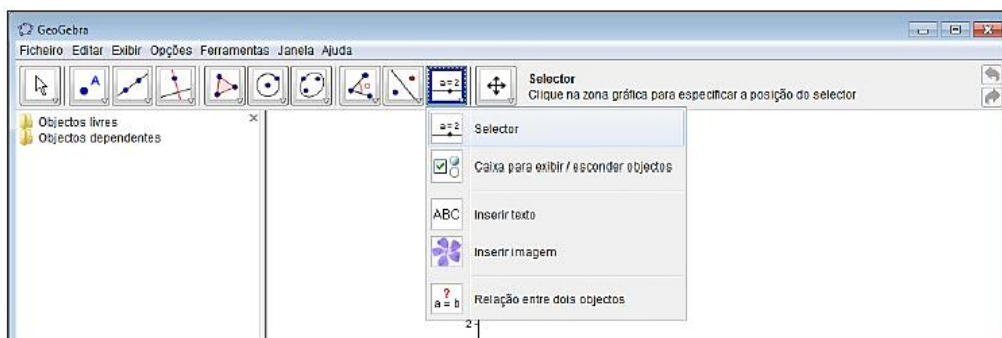
Unidade temática: Funções e equações

Conteúdo: Estudo da função linear e da função afim

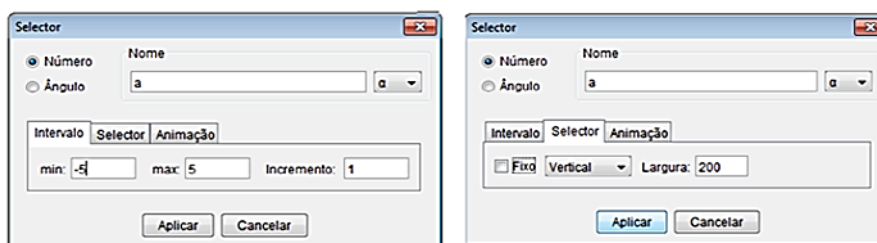
Situação 1: Função linear

As funções lineares têm como expressão analítica $y = ax$, onde a representa um valor constante. Esta tarefa tem como principal objetivo estudar a influência da variação do parâmetro a no gráfico de funções do tipo $y = ax$, recorrendo ao programa de Geometria Dinâmica: Geogebra.

Para podermos atribuir diferentes valores ao parâmetro a será conveniente criar um seletor que corresponda à variação em estudo. Para isso, abre o programa e seleciona a opção **Seletor**, presente no penúltimo menu de ferramentas.

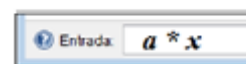


Dá um clique na zona de visualização, para que se abra a janela que define as características do teu seletor. Para seletor, a define o Intervalo de variação do seletor, tomando como valor mínimo -5 e máximo 5, e escolhe o incremento 1. Escolhe ainda nessa janela a opção Seletor para defini-lo como sendo Vertical e com largura 200, conforme se mostra nas imagens abaixo.



Após teres definido as características, clica em **Aplicar** e, assim, obterás o seletor correspondente ao parâmetro a .

No campo de entrada, escreve a expressão algébrica da função:
De seguida, clica na tecla **Enter**.



1. Faz variar o valor do parâmetro a , de forma a encontrar as expressões analíticas das retas representadas e verificar a variância desse parâmetro. Em seguida, responde:

1.1. Quando $a > 0$, a função é crescente ou decrescente?

1.2. Caso $a = 0$, com qual dos eixos coordenados a reta irá coincidir?

1.3. Qual é o ponto comum a todas estas retas? Como as classificas?

1.4. O que podes concluir relativamente à inclinação da reta, à medida que o valor de a se torna mais pequeno em valor absoluto? De qual dos eixos coordenados as retas se vão aproximando?

1.5. O que podes concluir relativamente à inclinação da reta à medida que o valor de a se torna maior em valor absoluto? De qual dos eixos coordenados as retas se vão aproximando?

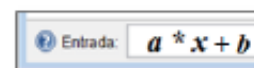
Situação 2: Função afim

As funções afim têm como expressão analítica $y = ax + b$, onde a representa um valor constante diferente de zero. Com esta tarefa terás a oportunidade de estudar a influência da variação dos parâmetros a e b no gráfico de funções do tipo $y = ax + b$, recorrendo ao Geogebra.

Para podermos atribuir diferentes valores aos parâmetros a e b será conveniente criar um novo seletor para os parâmetros a e b , que corresponda à variação em estudo.

Para isso, segue os passos que seguiste na primeira tarefa mas, agora, para criar dois seletores.

No campo de entrada, escreve a expressão algébrica da função:



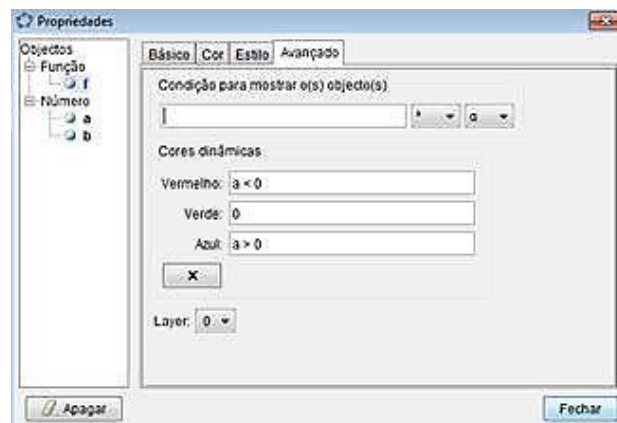
De seguida, clica na tecla **Enter**.

1. Fixa $b=3$ e faz variar o valor do parâmetro a , de forma a encontrar as expressões analíticas das retas representadas e analisar a variância do parâmetro a .

A fim de tornar a visualização dos gráficos obtidos mais explícita, podemos atribuir uma cor diferente consoante os valores que o seletor toma.

Clicando sobre o gráfico com o botão direito do rato, e em **Propriedades** ... selecionamos as condições de definição de cores em Avançado. Introduce as opções ao lado indicadas.

De seguida, clica em **Fechar**.



Arrastando o seletor a podemos verificar que surge uma reta diferente correspondente ao valor que o seletor toma nesse momento.

1.1 Quando $a < 0$, a função é crescente ou decrescente?

1.2. Qual é o ponto comum a todas estas retas? Como as classificarias?

1.3. Caso $a = 0$, como seria a representação da reta? Como classificarias a função que é representada por esta reta?

2. Fixa agora o valor do parâmetro a , por exemplo $a = 2$, e faz variar o valor de b . A fim de tornar a visualização dos gráficos obtidos mais explícita, podemos usar a opção **Ativar traço** clicando sobre o gráfico com o botão direito do rato. O que verificas?

2.1. Completa a tabela, registando apenas três expressões de algumas representações que trabalhaste na questão anterior.

Expressão analítica da função	Ponto de interseção da reta com o eixo das abcissas: $P_0 = (x_0, y_0)$	Ponto de interseção da reta com o eixo das ordenadas: $P_1 = (x_1, y_1)$	Valor do parâmetro b	Valor do parâmetro a	$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$

2.1.1. Compara os valores das duas últimas colunas da tabela. O que verificas?

2.1.2. As retas representadas têm algum ponto em comum? Como as classificas?

2.2. Analisando as representações da questão 2, que significado atribuis ao parâmetro b na expressão $y = ax + b$? Explica o teu raciocínio.

7.3. ANEXO III – EQUAÇÕES LITERAIS

Escola Básica do 2.º e 3.º Ciclos Dr. Eduardo Brazão de Castro

Ano Letivo 2012/2013

Matemática 8º ano

Proposta de trabalho n.º 12



Unidade temática: Funções e equações

Conteúdo: Equações literais

Docente: Dalila

Situação 1: Temperaturas

Existem várias escalas de temperatura, por exemplo a Celsius (°C) e a kelvin (K).

Para relacionar graus Celsius com kelvin utiliza-se a fórmula:

$$K = C + 273$$

em que C representa o valor da temperatura em graus Celsius e K representa o correspondente valor em kelvin.

- 1.1) A água congela aos 0 °C e entra em ebulição aos 100 °C. Quais são os valores correspondentes na escala kelvin?
- 1.2) Escreve a equação em ordem a C.
- 1.3) Determina o valor da temperatura em graus Celsius correspondente a 300 K.
- 1.4) Nenhum dos gráficos A e B traduz a relação:

$$K = C + 273$$

Apresenta uma razão para rejeitar o gráfico A e uma razão para rejeitar o gráfico B.

**Situação 2: Presentes dos sobrinhos**

A Luísa comprou, na loja da Ana, presentes para os sobrinhos.

Comprou quatro bonecas e dois carros.
No total gastou 12 €.




- 2.1) Escreve uma equação literal que represente a situação apresentada.
- 2.2) Quanto custou cada boneca? E cada carro?

Apresenta três soluções possíveis.

Retirado de Livro de tarefas, Xis 8.º ano, Pereira, P. P. e Pimenta, P., Texto Editora.

7.4. ANEXO IV – MORADA DA MARIANA



A Morada da Mariana

1

O AFONSO QUERIA ENVIAR UM RAMO DE FLORES À MARIANA.

TINHAM-LHE DITO QUE A MARIANA MORAVA NA RUA DAS MARAVILHAS.

Como não sabia a morada completa resolveu perguntar-lhe...



2

Mariana, podes dizer-me a tua morada?



Posso, mas ... digo-te apenas que o número da porta do meu prédio adicionado com o número da porta do meu apartamento é 21, que é o meu número da sorte.



No dia seguinte ...



3

Preciso que me dês mais alguma informação...



Está bem Afonso ... o número da porta do meu prédio é o dobro do número da porta do meu apartamento.



1. Porque é que teve o Afonso de pedir, pela segunda vez, informações à Mariana?



4

- As pistas dadas pela Mariana foram :

O número da porta do meu prédio adicionado com o número da porta do meu apartamento é 21, que é o meu número da sorte.

O número da porta do meu prédio é o dobro do número da porta do meu apartamento.



O Afonso estava com dificuldades e decidiu pedir ajuda ao João...



5

Estou com um problema João. A Mariana deu-me duas pistas para eu descobrir a morada dela, mas não consigo ...

Estás com sorte. Acabei de aprender umas coisas em matemática que são capazes de te ajudar.



O João começa as suas explicações ...



6

É assim... Começas por designar o número da porta do prédio da Mariana por x e o número da porta do apartamento por y .

Depois, ... É só traduzir as informações dadas pela Mariana através de duas equações.

2. Ajuda o Afonso, escrevendo as equações sugeridas pelo João.

x é o número da porta do prédio da Mariana
 y é o número da porta do apartamento



7

• E as pistas foram ...

O número da porta do meu prédio adicionado com o número da porta do meu apartamento é 21, que é o meu número da sorte.

O número da porta do meu prédio é o dobro do número da porta do meu apartamento.



O Afonso continuava confuso...



8



E agora João. O que é que faço?

Calma ...
 Agora podes resolver de duas maneiras...

Uma delas é:
 Escreves as equações em ordem a y .
 Depois, no mesmo referencial, representas as retas correspondentes às duas equações.
 As coordenadas do ponto comum às duas retas correspondem aos valores que procuras.



3. Representa no mesmo referencial as retas correspondentes às equações que escreveste na questão 2., seguindo as indicações do João.

4. Concordas com a afirmação do João?



9

As coordenadas do ponto comum às duas retas são os valores que procuras.

Justifica a tua resposta.



Dias depois os dois amigos encontram-se...

10

Então amigo...
Conseguiste descobrir a morada da Mariana?

Sim, sim...
Ela ficou muito surpreendida por eu ter resolvido o seu enigma.
Até disse que eu era muito inteligente!
Já ganhei pontos!!

CEM
Construção e êxito em Matemática

Mas, olha lá, disseste que havia duas maneiras ... Qual era a outra?

11

A outra é através do **método de substituição**.
Leva mais alguns passos ... mas já te explico...

Pegando no sistema de equações escrito com as pistas da morada da Mariana:

$$\begin{cases} x + y = 21 \\ x = 2y \end{cases}$$

CEM
Construção e êxito em Matemática

5. Resolve o sistema sugerido pelo João seguindo as suas indicações.

12

- Resolves uma das equações em ordem a uma das incógnitas.
- Deves escolher bem a equação por onde queres começar, de modo a facilitar os cálculos.
- Substituis, na outra equação, essa incógnita pela expressão obtida.
- Resolves essa equação de modo a encontrares o valor da incógnita.
- Agora substituí esse valor encontrado na outra equação e resolve-a.
- Finalmente escreve o valor de x e de y como par ordenado, que é a solução do sistema de equações.

CEM
Construção e êxito em Matemática

SÍTIOS das Imagens:



13

- http://1.bp.blogspot.com/_hlbFRJtcm5M/S3pmfDSAP2I/AAAAAAAAAK8/3NnuhL-sANc/s320/Hugo+02.bmp
- http://1.bp.blogspot.com/_mqlzk48JwL4/TPwvXglUt7I/AAAAAAAAAlk/TYwml6mstv8/s1600/pequetitos.jpg
- http://1.bp.blogspot.com/_dDFHkKk0rZI/TgerC9RgawI/AAAAAAAAGaE/8GDnXa_U6ZQ/s1600/menino-arrumado.jpg
- <http://t0.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcQXJ5siH8ZR7-3oQKDP46JiuSlruMmSZheLmTCFnWo4vKHqlsfCzw&t=1>
- http://www.a77.com.br/desenhos/menino_desenho_colorir_5.gif
- <http://www.desenhos.pt/img/rapaz-com-flores-b2974.jpg>


Bibliografia:

14

- Conceição, A. ; Almeida, M. (2011). *Matematicamente Falando 8*. Porto: Areal Editores.
- Ponte, J.; Serrazina, L.; Guimarães, H.; Brenda, A.; Guimarães, F.; Sousa, H.; Menezes, L.; Martins, M.; Oliveira, P. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Ministério da Educação – DGIDC.

Retirado de: Projeto Construindo o Êxito em Matemática – Projeto de formação contínua para professores de Matemática 3.º ciclo

7.5. ANEXO V- CLASSIFICAÇÃO DE SISTEMAS E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

	<p>Escola Básica do 2.º e 3.º Ciclos Dr. Eduardo Brazão de Castro Ano Letivo 2012/2013 Matemática 8º ano Turma 1 Proposta de trabalho n.º 14</p>
<p>Unidade temática: Equações do 1.º grau</p>	<p>Nome: _____</p>
<p>Conteúdo: Classificação de sistemas e resolução de problemas.</p>	<p>Data: ____/____/____</p>
<p>Docente: Dalila Silva</p>	

Situação 1:

Nesta tarefa vais aprender a utilizar o GeoGebra na resolução gráfica de sistemas de equações, partindo de um problema já conhecido.

1. Numa quinta há galinhas e coelhos num total de 30 animais. Contando as patas dos 30 animais, obtemos o número 100.


- 1.1. Quantas galinhas e quantos coelhos há na quinta?
- 1.2. Representa as condições do problema em linguagem Matemática.
- 1.3. Abre o programa GeoGebra



- 1.4. Representa graficamente, e no mesmo referencial, as equações anteriores. Para isso, segue as orientações seguintes:

- 1.3.1. Se os eixos coordenados não estiverem visíveis, no menu **Exibir** seleciona **Eixos Coordenados**.

- 1.3.2. Na barra de comandos escreve a primeira condição que obtiveste em 1.1. e, depois, clica em **Enter**.

Nota: Caso não estejas a visualizar nada no ecrã, seleciona a ferramenta  e escolhe a opção **Reduzir**.

- a) Descreve o que observas e interpreta o seu significado no contexto do problema.

- 1.3.3. Na barra de comandos escreve a segunda condição que obtiveste em 1.1. e, depois, clica em **Enter**

- a) Descreve o que observas e interpreta o seu significado no contexto do problema.

- 1.3.4. Faz um esboço do gráfico que obtiveste, no teu caderno.

- 1.3.5. Utiliza a ferramenta **Interseção de duas linhas** para determinar o ponto de interseção das duas retas.

2. Num pequeno texto descreve o que observas e interpreta o seu significado no contexto do problema.

$$y - 2x = 6$$

$$y - 2x = 3$$

3. Observa as duas equações seguintes:
- 3.1. Representa, no mesmo referencial, as retas correspondentes a estas equações.
 - 3.2. Faz um esboço do gráfico que obtiveste, no teu caderno. Descreve o que observas.
 - 3.3. Existe algum ponto comum às duas retas obtidas? Porquê? O que é que nas duas equações indica a posição relativa das retas?
 - 3.4. Há alguma solução comum às duas equações? Como classificas o sistema?
4. A Maria escreveu duas equações no seu caderno:
- 4.1. Representa, no mesmo referencial, as retas correspondentes a estas duas equações.
 - 4.2. Qual a posição relativa das duas retas traçadas?
 - 4.3. As retas interseitam-se num único ponto?
 - 4.4. Quantas soluções comuns às duas equações existem? Como classificas o sistema?

$$2x - y = 1$$

$$4x - 2y = 2$$

Situação 2: Resolve os seguintes problemas:

1. A Joana e a Maria decidiram abrir uma conta individual num banco. Para abrirem as contas, as duas depositaram um total de 200 €. No final do ano, os juros obtidos nas duas contas perfizeram um total de 10€. O montante total das duas contas, no final do ano, passou a ser de 210 €. Qual o valor do depósito inicial de cada uma das duas irmãs?
2. A Joana comprou, no bar da escola, sumos e sanduíches para alguns colegas. Comprou mais três sanduíches do que sumos. No total, pagou 4,60 €. Cada sanduíche custa 0,80 € e cada sumo 0,30 €. Quantos sumos e quantas sanduíches comprou a Joana?
3. Numa competição entre turmas de uma escola, nas modalidades de voleibol e basquetebol, participaram 20 equipas e 168 atletas. Cada equipa de voleibol inscreveu 12 atletas e cada equipa de basquetebol 6 atletas.

Determina quantas equipas de cada modalidade se inscreveram.

Adaptado de: Conceição, A.e Almeida, M., *Matematicamente falando*, Areal Editores (2011), e de Silva, Marlene, propostas de trabalho n.º13 e 15, 2011/12.



7.6. ANEXO VI – MULTIPLICAÇÃO DE POLINÓMIOS

Escola Básica do 2.º e 3.º Ciclos Dr. Eduardo Brazão de Castro



Ano Letivo 2012/2013

Matemática 8º ano

Proposta de trabalho n.º 15

Unidade temática: Sequências e regularidades. Equações de 2.º grau. Nome: _____**Conteúdo:** Multiplicação de polinómios Turma: _____ Data: ____/____/____

Nota: Apresenta o teu raciocínio de forma clara e sucinta, indicando todos os procedimentos efetuados e justificando todas as respostas.

Considera as figuras que te foram disponibilizadas:

Quadrados amarelos representam a unidade 

Retângulos laranjas 

Quadrados azuis 

- i) Descobre as dimensões do retângulo laranja e do quadrado azul.
- ii) Calcula as áreas de cada uma das figuras.

Situação I

1. Utilizando as peças te foram entregues, constrói um retângulo de dimensões 3 por $x + 2$.
2. Regista no teu caderno um esboço da construção que efetuaste, salientando quais foram as peças utilizadas.
3. No contexto da situação, o que representa a expressão $3 \times (x + 2)$?
4. Determina a área do retângulo construído.

5. Das duas questões anteriores o que concluis acerca de $3 \times (x + 2)$?

Situação II

1. Com as peças que te foram entregues, constrói um retângulo cuja área seja dada pela expressão $x \times (x + 2)$.

2. Regista no teu caderno um esboço da construção que efetuaste, salientando as peças utilizadas.

3. Determina a área do retângulo construído, e explica pormenorizadamente o processo utilizado.

Situação III

1. Utilizando as tuas peças, elabora uma construção que te permita determinar $(x + 1) \times (x + 3)$.

2. Regista no teu caderno um esboço da construção que efetuaste, salientando as peças que utilizaste.

3. Analisando a construção, determina a área do retângulo construído com as peças.

4. Procura utilizar a Propriedade Distributiva da Multiplicação em relação à Adição para determinar o valor da expressão $(x + 1) \times (x + 3)$.

5. Que concluis?

7.7. ANEXO VII – CASOS NOTÁVEIS DA MULTIPLICAÇÃO

Escola Básica do 2.º e 3.º Ciclos Dr. Eduardo Brazão de Castro



Ano Letivo 2012/2013

Matemática 8º ano

Proposta de trabalho n.º 16

Unidade temática: Sequências e regularidades. Equações de 2.º grau.

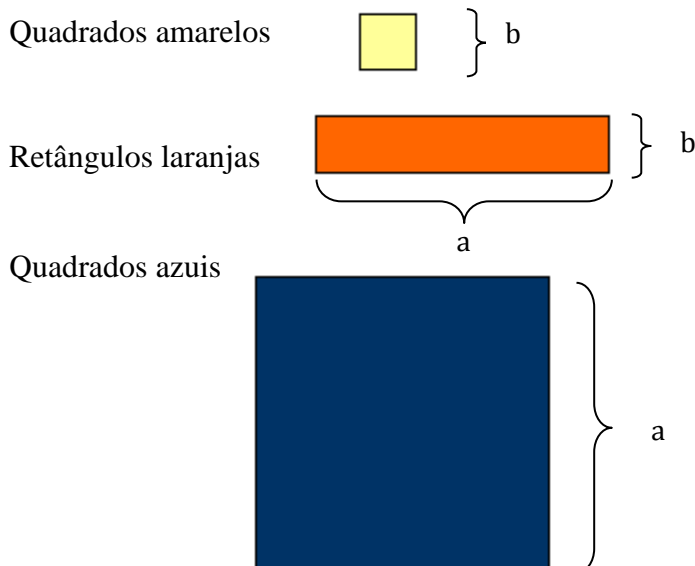
Nome: _____

Conteúdo: Casos notáveis da multiplicação

Data: ___/___/___

Nota: Apresenta o teu raciocínio de forma clara e sucinta, indicando todos os procedimentos efetuados e justificando todas as respostas.

Considera as figuras que te foram disponibilizadas e as respetivas dimensões:

**Parte I**

1. Utilizando as peças que te foram entregues, constrói um quadrado de comprimento de lado $(a+b)$.
2. Regista no teu caderno um esboço da construção que efetuaste, salientando quais foram as peças utilizadas.
3. No contexto da situação, o que representa a expressão $(a+b)^2$?
4. Tendo por base as áreas das peças utilizadas na construção do quadrado de comprimento de lado $(a+b)$, escreve uma expressão simplificada para a sua área.
5. Das duas questões anteriores, o que concluis acerca de $(a+b)^2$?

6. O que obténs quando aplicas a Propriedade Distributiva da Multiplicação em relação à Adição na expressão $(a+b)\times(a+b)$?
7. O que concluis acerca do valor de $(a+b)^2$ quando calculas a área do quadrado e quando aplicas a Propriedade Distributiva da Multiplicação em relação à Adição?
8. Tendo em conta a conclusão anterior, determina o polinómio reduzido representado pela expressão $(x+5)^2$.

Parte II

1. A construção que se segue foi efetuada com peças semelhantes às que te foram entregues. Na construção foram utilizados um quadrado azul (lado a) e dois retângulos de dimensões a por b . Os dois retângulos estão sobrepostos ao quadrado azul. Recorrendo às tuas peças, reproduz a construção apresentada.



2. Indica a medida do lado do quadrado azul que ficou visível da construção.
3. Indica a área da região que ficou sobreposta nos dois retângulos.
4. No contexto da situação, o que representa a expressão $(a-b)^2$?
5. Tendo por base as áreas das peças utilizadas na construção, escreve uma expressão para a área do quadrado azul visível.
6. Tendo em conta a conclusão anterior determina o polinómio reduzido representado pela expressão $(x-5)^2$.

Parte III

1. Utilizando um dos quadrados de lado a que te foram entregues recorta desse, um quadrado de lado b .
2. Regista no teu caderno um esboço do que obtiveste.
3. Atendendo à parte que foi retirada do quadrado inicial, indica a área da figura que obtiveste.
4. Decompõe a figura de modo a obteres dois retângulos.
5. Regista no teu caderno um esboço da decomposição obtida.

6. Recorta os dois retângulos obtidos e constrói um novo retângulo. Indica quais as suas dimensões e uma expressão para o cálculo da sua área.
7. Da exploração feita, o que podes concluir acerca de $(a+b) \times (a-b)$?
8. Tendo em conta a conclusão anterior, determina o polinómio reduzido representado pela expressão $(x+5)(x-5)$.

7.8. ANEXO VIII – PEDIDO DE AUTORIZAÇÃO AOS ENCARREGADOS DE EDUCAÇÃO



Pedido de Autorização aos Encarregados de Educação

Escola Básica dos 2º e 3º Ciclos Dr. Eduardo Brazão de Castro

Funchal, 28 de janeiro de 2013

Exmo.(a) Sr.(a) Encarregado(a) de Educação,

No âmbito do Mestrado em Ensino da Matemática no 3º Ciclo do Ensino Básico e Secundário da Universidade da Madeira, estou a desenvolver um estudo para a realização da dissertação de Mestrado.

Esta investigação visa encontrar, criar, melhorar e aprofundar métodos que incentivem a aprendizagem dos alunos relativamente à disciplina de Matemática.

Para tal, é importante observar e recolher dados sobre os trabalhos desenvolvidos pelos alunos nas aulas de Matemática.

A recolha de dados será feita ao longo do 2.º e 3.º período, do ano letivo 2012/2013. Para o efeito, pretende-se utilizar diversos materiais de recolha de informação, entre os quais se encontram a câmara fotográfica para tirar fotografias das aulas observadas e a câmara de filmar para obtermos registos de vídeo-gravação dos trabalhos desenvolvidos na sala de aula.

Deste modo, solicito a sua autorização para que possa proceder à recolha dos dados acima referidos.

Os dados serão apenas usados no âmbito da investigação, visto que, se pretende manter o respetivo anonimato dos alunos e a confidencialidade dos dados obtidos.

Agradecendo a colaboração de Vossa Excelência, peço que assine a declaração abaixo, devendo depois destacá-la e devolvê-la.

Com os melhores cumprimentos,

A professora de matemática

O Presidente do Conselho Executivo

(Dalila Silva)

(Nuno Gomes Jardim)

Declaro que autorizo o(a) meu (minha) educando(a) _____, Nº _____, a participar na recolha de dados conduzida pela professora de Matemática, no âmbito da sua dissertação de Mestrado em Ensino da Matemática.

Data: _____

Assinatura: _____