UNIVERSIDADE DA MADEIRA

Tempos locais das auto-intersecções do movimento Browniano

por

Custódia Mercês Reis Rodrigues Drumond

UNIVERSIDADE DA MADEIRA
AGOSTO 2000

51
DRU Tem
T/D+C

UNIVERSIDADE da MADEIRA

Tempos locais das auto-intersecções do movimento Browniano

por

Custódia Mercês Reis Rodrigues Drumond

Dissertação submetida com vista à obtenção
do grau de Doutor em Matemática
na Universidade da Madeira
Funchal, Madeira
Portugal

UNIVERSIDADE DA MADEIRA
AGOSTO 2000

Índice

Capítulo 1

Introdução

As intersecções de caminhos do movimento Browniano têm vindo a ser estudadas desde os anos quarenta [Lév40]. Podemos considerar auto-intersecções do caminho de um único movimento Browniano ou intersecções de caminhos de vários movimentos Brownianos independentes [Wol78], estudar intersecções simples [DEK50] ou então um número superior de repetições [DEKT57], [MS98]. Note-se que tais questões podem ser levantadas independentemente da dimensão do espaço onde o movimento Browniano é considerado e, como é intuitivo, as auto-intersecções tornam-se cada vez mais raras à medida que a dimensão aumenta.

Existe uma vasta literatura sobre os tempos locais das intersecções do movimento Browniano. Veja-se, por exemplo, [Lév40], [Var69], [Wes80], [FHSW97] e suas referências.

Uma definição informal, mas sugestiva, dos tempos locais das auto-intersecções simples do movimento Browniano $\mathbf{B}$ é expressa à custa de um integral da distribuição δ de Dirac ou de Donsker:

$$L := \int \int \delta \left(\mathbf{B}\left(t_2\right) - \mathbf{B}\left(t_1\right) \right) dt_2 dt_1.$$

Este integral é interpretado como a soma de todas as contribuições de cada par de tempos t_1 e t_2 para os quais o movimento Browniano $\mathbf{B}$, em $\mathbb{R}^d$, se encontra no mesmo ponto.

Na modelização de Edwards de moléculas de polímeros por caminhos Brownianos, L é usado para modelizar o efeito de "volume excluído", ver [Edw65]. Como exemplo de outra aplicação, Symanzik introduziu L como um instrumento para a teoria construtiva de campos quânticos [Sym69].

Uma definição rigorosa de L pode ser dada através do limite da sucessão de aproximações Gaussianas da distribuição δ,

$$(2\pi\varepsilon)^{-\frac{d}{2}} \exp\left(-\frac{|\mathrm{B}(t_2)-\mathrm{B}(t_1)|^2}{2\varepsilon}\right)$$

(ver [FHSW97]) ou em termos dos funcionais Brownianos generalizados

$$\int_0^{1-\varepsilon}\int_{s+\varepsilon}^1 \delta\left(\mathbf{B}(t)-\mathbf{B}(s)\right)dtds$$

(ver [Wat91]). Em ambos os casos, à medida que a dimensão d aumenta torna-se necessário subtrair um número cada vez maior das primeiras parcelas da decomposição em caos das aproximações, quando estas são interpretadas como funcionais lineares sobre o espaço das funções teste (veja-se, por exemplo, [FHSW97] e [Wat91]). Em 1991, Watanabe provou que os funcionais Brownianos

$$\int_0^{1-\varepsilon}\int_{s+\varepsilon}^1 \left(\delta(\mathbf{B}(t)-\mathbf{B}(s)) - \frac{1}{2\pi(t-s)^{d/2}}\right)dtds$$

para $d=2,3$ e

$$\int_0^{1-\varepsilon}\int_{s+\varepsilon}^1 \left(\delta(\mathbf{B}(t)-\mathbf{B}(s)) - \frac{1}{2\pi(t-s)^{d/2}}\right.$$

$$\left.+\frac{d}{(2\pi)^{d/2}(t-s)^{d/2+1}}\sum_{i,j}\int_{s+\varepsilon}^t (B_j(r)-B_j(s))dB_i(r)\right)dtds$$

para $d=4,5$ convergem para distribuições de Hida quando ε tende para zero.

É também possível interpretar as aproximações dos tempos locais das auto-intersecções do movimento Browniano como variáveis aleatórias. Aliás, a investigação por nós desenvolvida ao longo desta tese assenta nessa interpretação. Em [LG85] e [Var69] pode ver-se que para $d>1$ a esperança desta variável aleatória diverge no limite, pelo que, torna-se necessária uma subtracção.

Para $d=3$ Westwater construiu outra normalização para tornar bem definido o factor de Gibbs $\exp(-gL)$ do modelo de polímeros [Wes80].

Em 1985, Yor considerou a seguinte aproximação $L_{\vec{\varepsilon}}$ de L,

$$L_{\vec{\varepsilon}} := \int\int \delta\left(\mathbf{B}\left(t_2\right) - \mathbf{B}\left(t_1\right) + \vec{\varepsilon}\right) dt_2 dt_1$$

e mostrou, para $d = 3$, que uma renormalização multiplicativa do tipo

$$r\left(\vec{\varepsilon}\right)\left(L_{\vec{\varepsilon}} - E\left(L_{\vec{\varepsilon}}\right)\right)$$

tem por limite em lei um movimento Browniano, independente do original $\mathbf{B}$ (ver [Yor85b]).

Ao longo desta tese usamos regularizações Gaussianas δ_ε da distribuição δ de Dirac definidas por

$$\delta_\varepsilon\left(\mathbf{B}\left(t_2\right) - \mathbf{B}\left(t_1\right)\right) := (2\pi\varepsilon)^{-\frac{d}{2}} \exp\left(-\frac{\left|\mathbf{B}\left(t_2\right) - \mathbf{B}\left(t_1\right)\right|^2}{2\varepsilon}\right),$$

onde $\varepsilon > 0$. Introduzimos e estudamos a família de variáveis aleatórias centradas

$$L_\varepsilon := \int_0^t dt_2 \int_0^{t_2} dt_1 \delta_\varepsilon\left(\mathbf{B}\left(t_2\right) - \mathbf{B}\left(t_1\right)\right).$$

Quando se interpreta tais aproximações L_ε como funcionais lineares sobre o espaço das funções teste, pode concluir-se que para $d = 2$ ou $d = 3$, $L_{\varepsilon,c} := L_\varepsilon - \mathbb{E}(L_\varepsilon)$ converge, quando ε converge para zero, para $L_{0,c}$ e que, à medida que a dimensão do espaço aumenta, é necessário subtrair um maior número de termos da respectiva decomposição em caos para que o funcional limite seja uma distribuição de Hida [FHSW97]. Tal, no entanto, não é suficiente para garantir a convergência da família das variâncias das aproximações $L_{\varepsilon,c}$ quando interpretadas como variáveis aleatórias. Neste caso é necessário efectuar uma renormalização multiplicativa.

No segundo capítulo são recordados alguns conceitos fundamentais da análise ruído branco e apresentados os espaços a serem utilizados nos restantes capítulos.

No terceiro capítulo são apresentadas as aproximações $L_{\varepsilon,c}$ dos tempos locais que irão ser adoptadas ao longo de todo o trabalho, assim como as suas decomposições em caos (ver Proposição 3.3.5). Escrevemos cada termo desta decomposição numa soma na qual destacamos a parcela mais singular, que é um *martingale*.

O Capítulo 4 concentra os resultados que consideramos serem os centrais desta investigação, ver os Teoremas 4.1.1 e 4.1.2 na página 43 e os Teoremas

4.2.1 e 4.2.2 na página 78. Estabelece-se que, para um tempo local convenientemente subtraído e renormalizado, cada termo da sua expansão em caos converge, em lei, para um movimento Browniano. A prova de que os *kernels,* associados aos referidos termos, podem ser considerados como soma de *martingales* com outros termos menos singulares, desempenha papel fundamental ao longo de toda a investigaç ão desenvolvida neste capítulo, que é encerrado com o resultado deveras interessante de que na nossa família de *martingales*, elementos distintos convergem em lei para movimentos Brownianos independentes.

É bem conhecido que para se criarem objectos bem definidos a partir dos tempos locais é necessário recorrer a regularizações (vejam-se, por exemplo, [LG85] e [Var69]). Dedicamos o Capítulo 5 ao estabelecimento de que para $d \geq 3$ é necessária a renormalização (multiplicativa), $r(\varepsilon)$, do quadrado dos tempos locais centrados, para que a esperança tenha limite finito, sendo

$$r(\varepsilon) = \begin{cases} |\ln \varepsilon|^{-\frac{1}{2}} & \text{se } d = 3 \\ \varepsilon^{\frac{d-3}{2}} & \text{se d} > 3 \end{cases} .$$

Esta renormalização é independente da ordem do termo da decomposição, dependendo exclusivamente da dimensão do espaço que intervém na definição do tempo local. Pretendemos determinar a variância dos tempos locais renormalizados e calcular o seu limite quando $\varepsilon \to 0^+$. Apresentamos três formas de estudar este problema:

1. efectuando o cálculo directo;

2. usando a fórmula de Clark-Ocone;

3. usando a expansão em caos.

Incluímos um apêndice com a indicação de alguns cálculos que justificam a igualdade entre duas expressões apresentadas na Secção 1 do Capítulo 5.

Ao longo do trabalho serão apresentadas algumas questões que surgem espontaneamente e a que gostaríamos de dar resposta na continuação desta investigação, nomeadamente, a convergência para um movimento Browniano das somas dos termos da decomposição em caos dos tempos locais.

A maioria dos resultados apresentados nesta tese já foram publicados, vejam-se, por exemplo, os artigos [DFS00] e [DdFS00], e foram anunciados nas Conferências Internacionais em Marselha em 1995 e em Lisboa em 1998, nos "Math Encounters" IX, X, XI e XVI organizados pelo Centro de Ciências Matemáticas (CCM) da Universidade da Madeira, no 2º Encontro Nacional de Física Matemática, Programa PRAXIS, em 1997 e no Encontro Nacional da Sociedade Portuguesa da Matemática, Universidade do Minho, em 1998.

Agradecimentos

Em primeiro lugar gostaria de agradecer ao Prof. Doutor Ludwig Streit pela orientação deste projecto. Sem o seu conselho e introdução no mundo da investigação esta tese nunca teria existido. Agradeço-lhe também pelo facto de ter sido paciente nas múltiplas ocasiões em que eu não pude, por razões várias, apresentar-lhe na altura combinada a resolução dos problemas que me tinham sido propostos. Estou-lhe também muito grata pela oportunidade que me tem dado, desde 1991, de contactar com um leque muito grande de cientistas de vários países.

Agradecimentos também muito especiais são os que dirijo ao Prof. Doutor José Luís Silva pela ajuda /TEXnica na elaboração desta tese, pelos seus ensinamentos e pela sua colaboração, nomeadamente através das muitas e valiosas discussões que tivemos.

Um muito obrigado à Prof.ªDoutora Margarida de Faria com quem tenho também partilhado esta investigação e que para além da preciosa ajuda em questões técnicas e científicas me apoiou emocionalmente em diversas ocasiões difíceis.

A minha Educação Científica deve-se também à participação nos diversos Cursos Concentrados proferidos pelo ilustre Prof. Doutor Yu. Kondratiev, da Universidade de Bona, que anualmente tem honrado a Universidade da Madeira com a sua visita, pelo que lhe estou extremamente agradecida.

É com grande prazer que agradeço aos Profs. Doutores: T. Hida, Rui Vilela Mendes, Hui-Hsiung Kuo, Werner Westerkamp, Peter Leukert, Tobias Kuna, Martin Grothaus, Sergio Albeverio, Ana Bela Cruzeiro, Ricardo Lima, J. Claude Zambrini, J. Potthoff, L. Vasquez, P. Blanchard, Conceição Carvalho, Witold Karwowski, H. Ouerdiane, Rita Vasconcelos, P. Combe, J. Castanheira da Costa, José Carmo e J. Alves Sousa pelos convites para apresentar palestras, pelos ensinamentos e/ou pelo apoio.

Pedindo desculpa aos que ficarão por mencionar gostaria de registar que estou agradecida aos meus colegas e amigos Maria João Oliveira, Sandra Mendonça, Maribel Gordon, Elias Rodrigues, Teresa Homem de Gouveia, Glória Cravo, Graça Vieira, Orlando Freitas, Egídio Pereira, Mário Cunha, Ana Isabel Cardoso, Teresa Silva e Isabel Bejar Alonso, por me terem encorajado e apoiado.

Obrigado também à Dona Maria José, à Dona Anita, a Frau H. Litschewsky e à Dona Micaela pelo apoio prestado em alguns serviços, pois contribuiram para que eu pudesse dedicar mais tempo à escrita da tese.

Ao Centro de Ciências Matemáticas da Universidade da Madeira e aos projectos 428/INIDA, PRODEP Nº 4/95, PRAXIS/2/2.1/MAT/175/94 e Luso-Tunisino 423/Tunísia estou muito reconhecida pelos financiamentos cedidos.

Gostaria de agradecer à Universidade da Madeira e à Secretaria Regional de Educação o apoio dado a este projecto.

Um muito obrigado à minha irmã Lidia e à minha mãe, por me terem substituído na educação dos meus filhos nos muitos momentos em que o trabalho para esta tese me afastou da família.

Ao meu marido, agradeço não só o apoio ao longo de todo o tempo que decorreu este trabalho mas sobretudo a sua compreensão e o seu companheirismo nos momentos de grande stress.

Finalmente ao Hugo Ari e à Ana Cristina de quem muito me orgulho de ser mãe, obrigada por respeitarem o tempo que dediquei a este trabalho e pelos vossos tão variados gestos de carinho que me fortalecem cada dia.

Capítulo 2

Pré-requisitos da Análise Ruído Branco

Neste capítulo são reproduzidos alguns resultados e noções da análise ruído branco introduzidos em [HKPS93], [FHSW97] ou [DFS98]. Tais conceitos são também desenvolvidos em [BK95]. Começamos por registar algumas notas fundamentais da teoria geral sobre os tripletos de Gel'fand.

2.1 Tripletos nucleares

O objecto primordial da análise Gaussiana é um espaço de Hilbert separável real $\mathcal{H}$, munido de um produto interno $(.,.)$ e da norma correspondente $|.|$ (veja-se, por exemplo, [HKPS93], [Kre88], [KT80a], [KT80b], [KT81] e [KT82]). Consideramos em primeiro lugar um espaço vectorial real $\mathcal{D}$, separável, munido de uma sucessão crescente $\{(.,.)_p , p \in \mathbb{N}_0\}$, $(.,.)_0 := (.,.)$, de produtos escalares, isto é, designando por $|.|_p$ a norma em $\mathcal{D}$ associada a $(.,.)_p$ tem-se

$$|\cdot|_0 \leq |\cdot|_1 \leq \cdots \leq |\cdot|_p \leq \ldots, |\cdot|_0 := |\cdot| .$$

Assumimos que o sistema de produtos escalares é compatível, isto é, se $\{\varphi_n, n \in \mathbb{N}\}$ é uma sucessão de Cauchy de elementos de $\mathcal{D}$ para a norma $|\cdot|_p$, convergente para zero segundo a norma $|.|_q$, $p, q \in \mathbb{N}$, então ela converge para zero relativamente à norma $|.|_p$. Representa-se por $\mathcal{N}_p$ o espaço de Hilbert real que se obtém completando $\mathcal{D}$ relativamente a $|.|_p$. De $|\cdot|_p \leq |\cdot|_q$ para $p \leq q$ resulta que $\mathcal{N}_q \subseteq \mathcal{N}_p$. Representa-se por $\mathcal{N}$ a intersecção dos espaços de Hilbert $\mathcal{N}_p$, isto é,

$$\mathcal{N} = \bigcap_{p=0}^{\infty} \mathcal{N}_p,$$

e equipamo-lo com a topologia do limite projectivo $\mathcal{T}_{pr}$, isto é, com a mais grossa das topologias definidas em $\mathcal{N}$ tal que, para todo o $p \in \mathbb{N}_0$, as injecções canónicas $\mathcal{N} \to \mathcal{N}_p$ são contínuas. O espaço $\mathcal{N}$ com a topologia $\mathcal{T}_{pr}$ é representado por

$$\mathcal{N} = pr \lim_{p \in \mathbb{N}_0} \mathcal{N}_p.$$

Para esta topologia uma base de vizinhanças abertas de zero é dada pelos conjuntos

$$\mathcal{U}(p, \varepsilon) = \{\varphi \in \mathcal{N} : |\varphi|_p < \varepsilon\}, \text{ para cada } p \in \mathbb{N}_0 \text{ e cada } \varepsilon > 0.$$

Como consequência da compatibilidade dos produtos escalares obtém-se que $\mathcal{N}$ é completo relativamente à topologia do limite projectivo, constituindo um espaço de Hilbert contável. Assim, $\mathcal{N}$ é um espaço vectorial topológico metrizável de Fréchet (a métrica é dada por $\rho(\varphi, \psi) := \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{2^p} \frac{|\varphi-\psi|_p}{1+|\varphi-\psi|_p}$, ver, por exemplo, [GV68], Capítulo I, Secção 3).

Supõe-se também que $\mathcal{N}$ é nuclear, ou seja, considera-se que para cada $p \in \mathbb{N}$ existe $q \in \mathbb{N}$ $(q \geq p)$ tal que a injecção $\iota_p^q : \mathcal{N}_q \to \mathcal{N}_p$ é do tipo Hilbert-Schmidt, isto é,

$$\left\|\iota_p^q\right\|_{HS}^2 := \sum_{k=1}^{\infty} \left|\iota_p^q e_k\right|_p^2 < \infty$$

para todo o sistema ortonormado completo $(e_k, k \in \mathbb{N})$ de $\mathcal{N}_q$.

O completado de $\mathcal{N}$ com respeito à norma $|.|$ é o espaço $\mathcal{H}$.

Representa-se por $\mathcal{N}_{-p}$ o dual do espaço $\mathcal{N}_p$ relativamente a $\mathcal{H}$. Trata-se de um espaço de Hilbert cujo produto interno será denotado por $(.,.)_{-p}$.

Pela teoria geral dos espaços duais [GV68], o espaço dual de $\mathcal{N}$ relativamente a $\mathcal{H}$, denotado por $\mathcal{N}'$, pode ser escrito na forma

$$\mathcal{N}' = \bigcup_{p \in \mathbb{N}_0} \mathcal{N}_{-p}. \tag{2.1}$$

O espaço $\mathcal{N}'$ está munido com a topologia do limite indutivo $\mathcal{T}_{ind}$ definida pela família dos espaços duais $\mathcal{N}_{-p}$ e representa-se por $\mathcal{N}' = ind \lim_{p \in \mathbb{N}_0} \mathcal{N}_{-p}$.

Esta topologia é a mais fina das topologias em $\mathcal{N}'$ tal que para todo o $p \in \mathbb{N}_0$ as injecções canónicas $\mathcal{N}_{-p} \to \mathcal{N}'$ são contínuas.

Note-se que, como caso particular, $\mathcal{H}$ pode ser escolhido de entre um dos espaços de Hilbert $\mathcal{N}_p$, $p \in \mathbb{N}$.

Identifica-se $\mathcal{H}$ com o seu dual, pelo que, para cada $p \in \mathbb{N}$, temos as inclusões densamente contínuas

$$\mathcal{N}_p \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{N}_{-p}.$$

Obtém-se, assim, a cadeia de inclusões densamente contínuas:

$$\ldots \supset \mathcal{N}_{-p} \supset \ldots \supset \mathcal{N}_{-1} \supset \mathcal{H} \supset \mathcal{N}_1 \supset \ldots \supset \mathcal{N}_p \supset \ldots .$$

O par dual $\langle .,. \rangle$ entre $\mathcal{N}'$ e $\mathcal{N}$ é introduzido como uma extensão do produto interno em $\mathcal{H}$, pelo que para um elemento f de $\mathcal{H}$ considerado como um elemento de $\mathcal{N}_{-p}$ o par $\langle f, \varphi \rangle$, com $\varphi \in \mathcal{N}_p$, é igual a (f, φ).

Adiante vamos necessitar do produto tensorial de espaços nucleares que é um espaço nuclear (veja-se, por exemplo, [HKPS93, Appendix 5]). Vamos começar por recordar o produto tensorial de espaços de Hilbert. Consideremos o espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ e $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ um seu sistema ortonormado completo. Para cada multi-índice $\alpha := (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ seja $e_\alpha := e_{\alpha_1} \otimes \ldots \otimes e_{\alpha_n}$ a forma n-linear conjugada definida por

$$e_\alpha\left((\varphi_1, ..., \varphi_n)\right) := (e_{\alpha_1}, \varphi_1)...(e_{\alpha_n}, \varphi_n), \varphi_i \in \mathcal{N}, i = 1, ..., n.$$

Considera-se o espaço de Hilbert gerado pela família dos elementos e_α com $\alpha \in \mathbb{N}^n$ para o qual $(e_\alpha : \alpha \in \mathbb{N}^n)$ constitui uma base ortogonal. O espaço de Hilbert separável resultante é designado por produto tensorial de ordem n do espaço $\mathcal{H}$ e é representado por $\mathcal{H} \otimes \ldots \otimes \mathcal{H}$ ou, simplesmente, por $\mathcal{H}^{\otimes n}$.

Um elemento f de $\mathcal{H}^{\otimes n}$ pode ser representado na forma

$$f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} f_\alpha e_\alpha, \; f_\alpha \in \mathbb{R},$$

onde $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} |f_\alpha|^2 < \infty$. Dados $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} f_\alpha e_\alpha$, $g = \sum_{\beta \in \mathbb{N}^n} g_\beta e_\beta \in \mathcal{H}^{\otimes n}$ o produto interno de f e g está definido pela soma

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} f_\alpha g_\alpha.$$

Não havendo perigo de confusão entre os elementos de $\mathcal{H}$ e $\mathcal{H}^{\otimes n}$, preservaremos a notação $(.,.)$ e $|\cdot|$ para, respectivamente, o produto interno e a norma em $\mathcal{H}^{\otimes n}$. Definindo

$$\mathcal{N}^{\otimes n} := \bigcap_{p\in\mathbb{N}_0} \mathcal{N}_p^{\otimes n}$$

munido com a topologia do limite projectivo, prova-se que $\mathcal{N}^{\otimes n}$ é um espaço nuclear a que chamamos produto tensorial de ordem n de $\mathcal{N}$. O dual do espaço $\mathcal{N}^{\otimes n}$ relativamente a $\mathcal{H}^{\otimes n}$ será representado por $\mathcal{N}'^{\otimes n}$ e pode ser escrito como

$$\mathcal{N}'^{\otimes n} = \bigcup_{p\in\mathbb{N}_0} \mathcal{N}_{-p}^{\otimes n}$$

estando este espaço munido da topologia do limite indutivo.

Temos assim definido o tripleto

$$\mathcal{N}^{\otimes n} \subset \mathcal{H}^{\otimes n} \subset \mathcal{N}'^{\otimes n}, n \in \mathbb{N}.$$

Para $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{H}$ representa-se por $f_1 \hat{\otimes} \ldots \hat{\otimes} f_n$, ou $\hat{\otimes}_{i=1}^n f_i$, o produto tensorial simétrico de $f_1, \ldots, f_n$, isto é,

$$f_1 \hat{\otimes} \ldots \hat{\otimes} f_n := (n!)^{-1} \sum_{\pi\in\mathfrak{S}(n)} f_{\pi(1)} \otimes \ldots \otimes f_{\pi(n)},$$

onde $\mathfrak{S}(n)$ denota o grupo das permutações de n elementos. Dados dois produtos tensoriais simétricos de grau n,

$$\hat{\otimes}_{i=1}^n f_i \text{ e } \hat{\otimes}_{i=1}^n g_i,\ f_i, g_i \in \mathcal{H},\ i = 1, ..., n,$$

define-se o produto escalar por

$$(\hat{\otimes}_{i=1}^n f_i, \hat{\otimes}_{i=1}^n g_i)_{\mathcal{H}^{\hat{\otimes} n}} := \sum_{\pi\in\mathfrak{S}(n)} (f_1, g_{\pi(1)}) \ldots (f_n, g_{\pi(n)}),$$

e estendemo-lo por linearidade às combinações lineares de tais tensores. O completado do espaço pré-Hilbertiano que se obtém relativamente à norma $|.|$ é denotado por $\mathcal{H}^{\hat{\otimes} n}$ e é um subespaço de Hilbert do espaço $\mathcal{H}^{\otimes n}$. Para cada elemento f de $\mathcal{H}^{\hat{\otimes} n}$ tem-se

$$|f|^2_{\mathcal{H}^{\hat{\otimes} n}} = n! \, |f|^2_{\mathcal{H}^{\otimes n}}.$$

De forma análoga definem-se os espaços $\mathcal{N}_p^{\hat{\otimes}n}$, $\mathcal{N}_{-p}^{\hat{\otimes}n}$, $\mathcal{N}^{\hat{\otimes}n}$ e $\mathcal{N}'^{\hat{\otimes}n}$.

Considerando $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ o espaço complexificado de $\mathcal{H}$ define-se o espaço de Fock $\Gamma(\mathcal{H})$ sobre $\mathcal{H}$ como sendo a soma directa dos espaços de Hilbert $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}^{\hat{\otimes}n}$, $n = 0, 1, ...,$

$$\Gamma(\mathcal{H}) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_{\mathbb{C}}^{\hat{\otimes}n}, \; \mathcal{H}_{\mathbb{C}}^{\hat{\otimes}0} := \mathbb{C}.$$

Assim, um elemento genérico de $\Gamma(\mathcal{H})$ é uma sequência da forma $F = (f^{(n)})_{n=0}^{\infty}$ onde cada $(f^{(n)} \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}^{\hat{\otimes}n})$ e

$$|F|_{\Gamma(\mathcal{H})}^2 := \sum_{n=0}^{\infty} n! \left| f^{(n)} \right|_{\mathcal{H}^{\otimes n}}^2 < \infty.$$

Em $\Gamma(\mathcal{H})$ tem-se definido um produto interno dado pela soma

$$(F, G)_{\Gamma(\mathcal{H})} := \sum_{n=0}^{\infty} n! (f^{(n)}, g^{(n)})_{\mathcal{H}^{\otimes n}},$$

$F = (f^{(n)})_{n=0}^{\infty}$, $G = (g^{(n)})_{n=0}^{\infty} \in \Gamma(\mathcal{H})$.

Desempenha um papel importante o subespaço, do espaço $\Gamma(\mathcal{H})$, constituído pelas sequências tais que apenas um número finito de componentes é diferente de zero, isto é, pelos vectores que, sem perda de generalidade, podemos representar sob a forma

$$(f^{(0)}, f^{(1)}, \ldots, f^{(m)}, 0, 0, \ldots), m \in \mathbb{N}_0.$$

Este subespaço é denotado por $\Gamma'(\mathcal{H})$ e é denso em $\Gamma(\mathcal{H})$.

Para cada $f \in \mathcal{H}$ e cada $n \in \mathbb{N}$ sejam

$$f^{\otimes n} := f \otimes \ldots \otimes f \in \mathcal{H}^{\hat{\otimes}n}$$

e

$$\Gamma(f) := (1, \frac{1}{1!} f, \ldots, \frac{1}{n!} f^{\otimes n}, \ldots).$$

Para cada subespaço A de $\mathcal{H}$ considere-se o conjunto $\{\Gamma(f) : f \in A\}$. Se A for denso em $\mathcal{H}$, então $\{\Gamma(f) : f \in A\}$ é total em $\Gamma(\mathcal{H})$ (veja-se, por exemplo, o Capítulo 2 de [Gui72]).

De acordo com a definição do produto interno em $\Gamma(\mathcal{H})$, tem-se, para $f, g \in \mathcal{H}$,

$$(\Gamma(f), \Gamma(g))_{\Gamma(\mathcal{H})} = \exp((f, g))$$

e

$$|\Gamma(f)|_{\Gamma(\mathcal{H})}^2 = \exp(|f|^2).$$

2.2 Decomposição em caos usando os polinómios de Hermite

Tendo em vista a introdução de uma medida de probabilidade no espaço $\mathcal{N}'$, consideramos a σ-álgebra gerada pelos conjuntos cilíndricos. Dados uma família finita $\varphi_1, ..., \varphi_d \in \mathcal{N}$ e $F \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ (onde $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ designa a σ-álgebra de Borel em $\mathbb{R}^d$), entende-se por conjunto cilíndrico $C_{\varphi_1,...,\varphi_d,F}$ o conjunto definido por:

$$C_{\varphi_1,...,\varphi_d,F} := \{\varphi \in \mathcal{N}' : (\langle \varphi, \varphi_1 \rangle, ..., \langle \varphi, \varphi_d \rangle) \in F\}.$$

A família dos conjuntos cilíndricos forma uma álgebra (não uma σ-álgebra) e vamos denotar a σ-álgebra gerada pelos conjuntos cilíndricos por $C_\sigma(\mathcal{N}')$. Mediante a fixação de uma função característica, por aplicação do Teorema de Minlos definimos uma medida Gaussiana μ no espaço $(\mathcal{N}', C_\sigma(\mathcal{N}'))$,

$$\int_{\mathcal{N}'} \exp(i\langle x, \varphi \rangle) d\mu(x) = \exp(-\frac{1}{2} |\varphi|^2), \ \varphi \in \mathcal{N},$$

ver, por exemplo, [HKPS93] e [Hid80].

O espaço central ao longo deste trabalho será o espaço das funções complexas de quadrado integrável com respeito à medida μ, isto é, o espaço

$$\begin{aligned} L^2(\mu) \ \ : \ &= L^2(\mathcal{N}', C_\sigma(\mathcal{N}'), \mu) \\ &= \left\{ F : \mathcal{N}' \to \mathbb{C}, |F|^2_{L^2(\mu)} := \|F\|^2 := \int_{\mathcal{N}'} |F(x)|^2 \, d\mu(x) < \infty \right\}. \end{aligned}$$

O produto interno em $L^2(\mu)$ será denotado por $((.,.))$. De um modo geral, para $p \in [1, \infty]$, o espaço $L^p(\mathcal{N}', C_\sigma(\mathcal{N}'), \mu)$ com a correspondente norma $\|.\|_p$ representa-se por $L^p(\mu)$ ou por (L^p). Identifica-se a norma $\|.\|_2$ com $\|.\|$.

Vamos de seguida construir um sistema ortonormado em $L^2(\mu)$. Define-se a exponencial de Wick por

$$\begin{aligned} : \ \exp(\langle x, \varphi \rangle) : &:= \frac{\exp(\langle x, \varphi \rangle)}{\mathbb{E}_\mu(\exp(\langle .,. \rangle))} \\ &= \exp(\langle x, \varphi \rangle - \frac{1}{2} |\varphi|^2), \ x \in \mathcal{N}', \ \varphi \in \mathcal{N}, \end{aligned} \tag{2.2}$$

onde $\mathbb{E}_\mu$ designa a esperança relativamente à medida μ. Quando μ está fixa, também se representa $\mathbb{E}_\mu$ simplesmente por $\mathbb{E}$. Considerando a expansão em série de Taylor (veja-se, por exemplo, [HKPS93]) obtém-se

$$: \exp(\langle x, \varphi \rangle) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle H_n(x), \varphi^{\otimes n} \rangle, \ \varphi \in \mathcal{N},$$

onde a aplicação

$$H_n : \mathcal{N}' \to \mathcal{N}'^{\hat{\otimes} n}, n \in \mathbb{N}_0$$

é chamada a $n-$ésima potência de Wick de $x \in \mathcal{N}'$. Usualmente, H_n é denotada por $: x^{\otimes n} :$.

Para cada $\varphi^{(n)} \in \mathcal{N}^{\hat{\otimes} n}$, $n \in \mathbb{N}_0$ o monómio de Wick "liso" de ordem n correspondente ao núcleo $\varphi^{(n)}$ é dado por

$$\langle : x^{\otimes n} :, \varphi^{(n)} \rangle, x \in \mathcal{N}', n \in \mathbb{N}_0.$$

A definição de monómio de Wick "liso", introduzida acima, pode ser estendida por aproximação a uma função mensurável, relativamente a $C_\sigma(\mathcal{N}')$, de modo a incluir os núcleos $f^{(n)} \in \mathcal{H}^{\hat{\otimes} n}$. Mais precisamente, dado $f^{(n)} \in \mathcal{H}^{\hat{\otimes} n}$ existe uma sucessão $(\varphi_j^{(n)})_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{N}^{\hat{\otimes} n}$ convergente para $f^{(n)}$ e tal que a sucessão $(\langle : x^{\otimes n} :, \varphi_j^{(n)} \rangle)_{j \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy em $L^p(\mu)$, $p \geq 1$. Como este espaço é completo, o limite da sucessão $(\langle : x^{\otimes n} :, \varphi_j^{(n)} \rangle)_{j \in \mathbb{N}}$ existe e denotamo-lo por $\langle : x^{\otimes n} :, f^{(n)} \rangle$. Do mesmo modo, se verifica que este limite é independente da sucessão $(\varphi_j^{(n)})_{j \in \mathbb{N}}$ considerada. É válida a seguinte propriedade de ortogonalidade, ver [HKPS93].

Proposição 2.2.1 *Para quaisquer $f^{(n)} \in \mathcal{H}^{\hat{\otimes} n}, g^{(m)} \in \mathcal{H}^{\hat{\otimes} m}$ temos*

$$\int_{\mathcal{N}'} \langle : x^{\otimes n} :, f^{(n)} \rangle \langle : x^{\otimes m} :, g^{(m)} \rangle d\mu(x) = \delta_{nm} n! (f^{(n)}, g^{(n)}).$$

Definição 2.2.2 *Uma função $\varphi : \mathcal{N}' \to \mathbb{R}$ da forma*

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{N} \langle x^{\otimes n}, \varphi^{(n)} \rangle, x \in \mathcal{N}', \varphi^{(n)} \in \mathcal{N}^{\hat{\otimes} n}, N \in \mathbb{N}_0, n = 0, 1, ..., N,$$

é chamada polinómio contínuo. Denota-se por $\mathcal{P}(\mathcal{N}')$ o espaço dos polinómios contínuos.

Atendendo ao facto de que as potências de Wick $: x^{\otimes n} :$ e as potências usuais $x^{\otimes n}$ podem ser escritas umas em função das outras, cada elemento de $\mathcal{P}(\mathcal{N}')$ pode ser representado sob a forma:

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{N} \langle : x^{\otimes n} :, \tilde{\varphi}^{(n)} \rangle, x \in \mathcal{N}', \tilde{\varphi}^{(n)} \in \mathcal{N}^{\hat{\otimes} n}, N \in \mathbb{N}_0, n = 0, 1, ..., N.$$

É conhecido que $\mathcal{P}(\mathcal{N}')$ é denso em $L^2(\mu)$ (veja-se, por exemplo, o teorema 1.9 em [HKPS93]).

É válido ainda o seguinte resultado fundamental.

Teorema 2.2.3 *Existe um isomorfismo unitário $L^2(\mu) \simeq \Gamma(\mathcal{H})$ no seguinte sentido [HKPS93]: dado $F \in L^2(\mu)$ existe uma, e uma só, sequência $(F^{(n)})_{n \in \mathbb{N}_0} \in \Gamma(\mathcal{H})$ tal que*

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle : x^{\otimes n} :, F^{(n)} \rangle$$

e

$$\|F\|^2_{L^2(\mu)} = \sum_{n=0}^{\infty} n! \left| F^{(n)} \right|^2_{\mathcal{H}^{\otimes n}}.$$

Observação 2.2.4 *A propriedade do teorema anterior é conhecida na análise ruído branco por decomposição em caos ou decomposição ortogonal.*

Observação 2.2.5 *Como consequência do teorema anterior tem-se*

1. $: exp(\langle ., f \rangle) : \longleftrightarrow \Gamma(f), f \in \mathcal{H};$
2. $\langle : x^{\otimes n} :, \varphi^{(n)} \rangle \longleftrightarrow \varphi^{(n)}, \varphi^{(n)} \in \mathcal{N}^{\hat{\otimes} n}.$

2.3 Espaços de funções teste e funções generalizadas de Hida

Para muitas aplicações, o espaço $L^2(\mu)$ é pequeno. Uma forma conveniente para resolver este problema consiste na introdução de um espaço de funcionais teste estritamente contido em $L^2(\mu)$ e na utilização do seu espaço dual.

Consideremos o espaço dos polinómios contínuos $\mathcal{P}(\mathcal{N}')$. Para $\varphi \in \mathcal{P}(\mathcal{N}')$ com representação

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{N} \langle : x^{\otimes n} :, \varphi^{(n)} \rangle$$

introduz-se a norma Hilbertiana $\|.\|_{p,q}$, $p,q \in \mathbb{N}_0$ em $\mathcal{P}(\mathcal{N}')$ por

$$\|\varphi\|_{p,q}^2 := \sum_{n=0}^{N} n! 2^{nq} \left|\varphi^{(n)}\right|_p^2 .$$

Denota-se o fecho de $\mathcal{P}(\mathcal{N}')$ com respeito à norma $\|.\|_{p,q}$ por $(\mathcal{H}_p)_q$. Defina-se

$$(\mathcal{N}) := pr \lim_{p,q \in \mathbb{N}} (\mathcal{H}_p)_q .$$

O espaço assim construído é nuclear e a topologia em $(\mathcal{N})$ é univocamente determinada pela topologia considerada em $\mathcal{N}$ (pode ver-se, por exemplo, [HKPS93] e [KLP$^+$96]).

A partir da teoria da dualidade para espaços nucleares [GV68] resulta que o dual de $(\mathcal{N})$ relativamente a $L^2(\mu)$ é dado por

$$(\mathcal{N})' := \operatorname{ind}\lim_{p,q \in \mathbb{N}} (\mathcal{H}_{-p})_{-q},$$

onde $(\mathcal{H}_{-p})_{-q}$ representa o dual de $(\mathcal{H}_p)_q$ relativamente a $L^2(\mu)$. Denota-se a forma bilinear dual entre $(\mathcal{N})'$ e $(\mathcal{N})$ por $\langle\!\langle \cdot, \cdot \rangle\!\rangle$ a qual corresponde à extensão do produto interno $(\!(.,.)\!)$ em $L^2(\mu)$, isto é, para um elemento $f \in L^2(\mu)$ considerado como um elemento de $(\mathcal{H}_{-p})_{-q}$ o par $\langle\!\langle f, \varphi \rangle\!\rangle$, com $\varphi \in (\mathcal{H}_p)_q$, é igual $(\!(f, \bar{\varphi})\!)$.

A acção de uma distribuição $\Phi \in (\mathcal{N})'$,

$$(\mathcal{H}_{-p})_{-q} \ni \Phi = \sum_{n=0}^{\infty} \langle : .^{\otimes n} :, \Phi^{(n)} \rangle, \Phi^{(n)} \in \mathcal{N}'^{\hat{\otimes} n}$$

sobre uma função teste

$$(\mathcal{N}) \ni \varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \langle : .^{\otimes n} :, \varphi^{(n)} \rangle, \varphi^{(n)} \in \mathcal{N}^{\hat{\otimes} n}$$

é dada por

$$\langle\!\langle \Phi, \varphi \rangle\!\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n! \langle \Phi^{(n)}, \varphi^{(n)} \rangle.$$

Dado $\varphi \in \mathcal{N}$, a exponencial de Wick $: \exp(\langle ., \varphi \rangle) :$ tem norma $\|.\|_{p,q}$ igual a

$$\|: \exp(\langle ., \varphi \rangle) :\|_{p,q}^2 = \exp(2^q |\varphi|_p^2),$$

pelo que para todo $\varphi \in \mathcal{N}$ a exponencial de Wick $: \exp(\langle ., \varphi \rangle) :$ está em $(\mathcal{N})$.

É possível caracterizar os espaços $(\mathcal{N})$ e $(\mathcal{N})'$ através da sua transformada $\mathcal{S}$.

Definição 2.3.1 *Seja $\Phi \in (\mathcal{N})'$. Designa-se por transformada $\mathcal{S}$ de Φ a aplicação de $\mathcal{N}$ em $\mathbb{C}$ definida por*

$$(\mathcal{S}\Phi)(\varphi) := \langle\!\langle \Phi, : \exp(\langle ., \varphi \rangle) : \rangle\!\rangle, \quad \varphi \in \mathcal{N}.$$

2.4 Funcionais-$\mathcal{U}$ e teoremas de caracterização

Começamos por recordar a seguinte

Definição 2.4.1 *Chama-se funcional-$\mathcal{U}$ toda a aplicação $F : \mathcal{N} \to \mathbb{C}$ que verifica as condições:*

i) $\forall f, g \in \mathcal{N}$, a aplicação $\lambda \mapsto F(g + \lambda f)$ de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{C}$ admite uma extensão inteira;

ii) para alguma forma quadrática contínua B em $\mathcal{N}$, existem constantes $C_1, C_2 > 0$, tais que $\forall f \in \mathcal{N}, \forall z \in \mathbb{C}$ se tem

$$|F(zf)| \leq C_1 \exp(C_2 |z|^2 |B(f)|).$$

Observação 2.4.2 *A condição ii) da definição anterior é equivalente a*

ii)' Existem constantes $C, K > 0$ e $p \in \mathbb{N}_0$ tais que para todo o $f \in \mathcal{N}$, $z \in \mathbb{C}$,

$$|F(zf)| \leq C \exp(K |z|^2 |f|_p^2).$$

Uma caracterização do espaço $(\mathcal{N})'$ em função da sua transformada $\mathcal{S}$ é expressa no teorema que se segue (veja-se, por exemplo, [HKPS93], [KLP+96]).

Teorema 2.4.3 *Uma aplicação $F : \mathcal{N} \to \mathbb{C}$ é transformada $\mathcal{S}$ de um elemento Φ de $(\mathcal{N})'$ se, e só se, F é um funcional-$\mathcal{U}$. Nestas condições, Φ é único.*

Referimos ainda um teorema relativo à integração duma família de funcionais generalizados.

Teorema 2.4.4 *Sejam $(\Omega, \mathcal{B}, m)$ um espaço de medida e $\lambda \longmapsto \Phi(\lambda)$ uma aplicação de Ω em $(\mathcal{N})'$. Assume-se que a transformada $\mathcal{S}$ de $\Phi(\lambda)$, $F_\lambda := \mathcal{S}(\Phi(\lambda))$, satisfaz as seguintes condições:*

i) Para cada $\varphi \in \mathcal{N}$ a aplicação $\lambda \longmapsto F_\lambda(\varphi)$ é mensurável;

ii) existe uma norma $|.|$ contínua em $\mathcal{N}$ tal que para todo $\lambda \in \Omega$, F_λ satisfaz a limitação

$$|F_\lambda(z\varphi)| \leq C_\lambda \exp(K_\lambda |z|^2 |\varphi|^2)$$

e tal que $\lambda \longmapsto K_\lambda$ é quase certamente limitada segundo a medida m e $\lambda \longmapsto C_\lambda$ é integrável relativamente à medida m.

Então, existem $q, p > 0$ tais que Φ é integrável à Bochner em $(\mathcal{H}_{-p})_{-q}$. Tem-se, em particular,

$$\int_\Omega \Phi(\lambda) dm(\lambda) \in (\mathcal{N})'$$

e

$$\mathcal{S}\left(\int_\Omega \Phi(\lambda) dm(\lambda)\right)(\varphi) = \int_\Omega \mathcal{S}(\Phi(\lambda))(\varphi) dm(\lambda), \varphi \in \mathcal{N}.$$

2.5 Exemplo

Neste trabalho o espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, atrás referido, será sempre o espaço $L_d^2 := L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$, $\mathcal{N}$ o espaço $S_d := S(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$ das funções teste de rápido decrescimento no infinito, de domínio $\mathbb{R}$ e tomando valores em $\mathbb{R}^d$ e, consequentemente, $\mathcal{N}'$ corresponderá ao respectivo espaço das distribuições de Schwartz $S_d' := S'(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$. Temos, assim, o tripleto nuclear

$$S_d \subset L_d^2 \subset S_d'.$$

Neste caso particular, para $\mathrm{f} = (f_1, \ldots, f_d)$, $\mathrm{g} = (g_1, \ldots, g_d) \in L_d^2$, tem-se

$$(\mathrm{f}, \mathrm{g}) := \sum_{i=1}^{d} (f_i, g_i)_{L^2(\mathbb{R})}$$

e

$$|\mathrm{f}|^2 = \sum_{i=1}^{d} |f_i|^2_{L^2(\mathbb{R})}.$$

O par dual $\langle .,. \rangle$ entre S'_d e S_d é dado por

$$\langle \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\varphi} \rangle = \sum_{i=1}^{d} \langle \omega_i, \varphi_i \rangle, \forall \boldsymbol{\omega} \in S'_d, \forall \boldsymbol{\varphi} \in S_d,$$

uma extensão do produto interno definido em L^2_d. Isto é, sempre que $\mathrm{f} \in L^2_d$, $\boldsymbol{\varphi} \in S_d$,

$$\langle \mathrm{f}, \boldsymbol{\varphi} \rangle = \sum_{i=1}^{d} \langle f_i, \varphi_i \rangle = \sum_{i=1}^{d} (f_i, \varphi_i) = (\mathrm{f}, \boldsymbol{\varphi})_{L^2_d}. \tag{2.3}$$

Sobre o espaço mensurável $(S'_d, \mathcal{B}(S'_d))$ (onde $\mathcal{B}(S'_d)$ designa a σ-álgebra gerada pelos conjuntos cilíndricos) definimos a medida Gaussiana μ por introdução da função C,

$$C(\boldsymbol{\varphi}) = \exp(-\frac{1}{2} |\boldsymbol{\varphi}|^2) = \int_{S'_d} \exp(i \langle \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\varphi} \rangle) \, d\mu(\boldsymbol{\omega}), \boldsymbol{\varphi} \in S_d. \tag{2.4}$$

Obtém-se assim, o espaço de medida $(S'_d, \mathcal{B}(S'_d), \mu)$ denominado espaço ruído branco.

Com o formalismo apresentado na Secção 2.3, uma versão do movimento Browniano $\mathbf{B}$ em dimensão d é dada por

$$\mathbf{B}(t)(\boldsymbol{\omega}) = (B_1(t), ..., B_d(t))(\boldsymbol{\omega}) := (\langle \omega_1, 1\!\!1_{[0,t]} \rangle, ..., \langle \omega_d, 1\!\!1_{[0,t]} \rangle).$$

No que se segue consideraremos sempre d-tuplos de ruídos brancos Gaussianos $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_d) \in S'_d$ e correspondentes d-tuplos de funções teste $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_d)$, $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \psi_2, ..., \psi_d) \in S_d$.

Utilizar-se-á a notação

$$\begin{aligned} \vec{n} &= (n_1, ..., n_d), \, n = \sum_{i=1}^{d} n_i, \, \vec{n}! = \prod_{i=1}^{d} n_i!, \qquad (2.5) \\ \binom{\vec{n}}{\vec{k}} &= \binom{n_1}{k_1} \cdots \binom{n_d}{k_d}, \\ \vec{m} \wedge \vec{n} \ &: = (m_i \wedge n_i, ..., m_d \wedge n_d), \end{aligned}$$

$$\omega^{\otimes(\vec{m}+\vec{n}-2\vec{k})} = \omega_1^{\otimes(m_1+n_1-2k_1)} \otimes \ldots \otimes \omega_d^{\otimes(m_d+n_d-2k_d)},$$

$$\varphi^{\otimes\vec{m}} \otimes_{\vec{k}} \psi^{\otimes\vec{n}} = \left(\varphi_1^{\otimes m_1} \hat{\otimes}_{k_1} \psi_1^{\otimes n_1}\right) \otimes \ldots \otimes \left(\varphi_d^{\otimes m_d} \hat{\otimes}_{k_d} \psi_d^{\otimes n_d}\right),$$

onde cada $\varphi_i^{\otimes m_i} \hat{\otimes}_{k_i} \psi_i^{\otimes n_i}$, $1 \leq i \leq d$, representa a simetrização da função

$$\int_{\mathbb{R}^{k_i}} \varphi_i^{\otimes m_i}(s_1, \ldots, s_{k_i}, \cdot)\psi_i^{\otimes n_i}(s_1, \ldots, s_{k_i}, \cdot)ds_1 \ldots ds_{k_i}.$$

No espaço dos polinómios sobre S'_d, definido na Secção 2.3 e representado por $\mathcal{P}(S'_d)$, introduz-se a norma Hilbertiana $\|.\|_{p,q}$, com $p, q \in \mathbb{N}_0$, definindo para cada $\varphi \in \mathcal{P}(S'_d)$ representável por

$$\varphi(\omega) = \sum_{\vec{n}=0}^{N} \langle : \omega^{\otimes\vec{n}} :, \varphi^{(\vec{n})}\rangle, \varphi^{(\vec{n})} \in S_d^{\hat{\otimes}n},$$

$$\|\varphi\|_{p,q}^2 := \sum_{\vec{n}=0}^{N} \vec{n}! 2^{nq} \left|\varphi^{(\vec{n})}\right|_{L_d^{2\otimes n}}.$$

Representa-se por $(S_{d,p})_q$ o completado de $\mathcal{P}(S'_d)$ relativamente à norma $\|.\|_{p,q}$ e designa-se por (S_d) o limite projectivo da sucessão dos espaços $(S_{d,p})_q$, isto é,

$$(S_d) = pr \lim_{p,q\in\mathbb{N}} (S_{d,p})_q.$$

O espaço (S_d) assim construído é nuclear e a topologia em (S_d) é univocamente determinada pela topologia definida em S_d, tendo-se, ainda,

$$(S_d)' = ind \lim_{p,q\in\mathbb{N}} (S_{d,-p})_{-q},$$

onde $(S_{d,-p})_{-q}$ denota o dual de $(S_{d,p})_q$ relativamente a (L^2). Os elementos do espaço $(S_d)'$ são chamados distribuições de Hida ou funcionais Brownianos generalizados.

O par dual entre uma distribuição de Hida $\Phi \in (S_d)'$ da forma

$$(S_{d,-p})_{-q} \ni \Phi = \sum_{\vec{n}=0}^{\infty} \langle : .^{\otimes\vec{n}} :, \Phi^{(\vec{n})}\rangle, \Phi^{(\vec{n})} \in S_d'^{\hat{\otimes}n}$$

e uma função teste $\varphi \in (S_d)$, dada por

$$\varphi = \sum_{\vec{n}=0}^{\infty} \langle : \cdot^{\otimes \vec{n}} :, \boldsymbol{\varphi}^{(\vec{n})} \rangle, \boldsymbol{\varphi}^{(\vec{n})} \in S_d^{\hat{\otimes} n},$$

é da forma

$$\langle\langle \Phi, \varphi \rangle\rangle = \sum_{\vec{n}=0}^{\infty} \vec{n}! \langle \boldsymbol{\Phi}^{(\vec{n})}, \boldsymbol{\varphi}^{(\vec{n})} \rangle.$$

Com $\boldsymbol{\varphi} \in S_d$ e $\boldsymbol{\omega} \in S_d'$, a função geradora definida em (2.2) representa-se por:

$$: \exp(\langle \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\varphi} \rangle) : := \exp\left(\langle \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\varphi} \rangle - \frac{1}{2} |\boldsymbol{\varphi}|^2_{L^2_d} \right) = \prod_{i=1}^{d} \exp\left(\langle \omega_i, \varphi_i \rangle - \frac{1}{2} |\varphi_i|^2_{L^2(\mathbb{R})} \right) \tag{2.6}$$

$$= \prod_{i=1}^{d} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \langle : \omega_i^{\otimes k} :, \varphi_i^{\otimes k} \rangle \right) \tag{2.7}$$

$$= \sum_{n_1, n_2, \ldots, n_d = 0}^{\infty} \frac{1}{n_1! \ldots n_d!} \langle : \omega_1^{\otimes n_1} :, \varphi_1^{\otimes n_1} \rangle \ldots \langle : \omega_d^{\otimes n_d} :, \varphi_d^{\otimes n_d} \rangle \tag{2.8}$$

$$= \sum_{n_1, n_2, \ldots, n_d = 0}^{\infty} \frac{1}{n_1! \ldots n_d!} \langle \otimes_{i=1}^{d} : \omega_i^{\otimes n_i} :, \otimes_{i=1}^{d} \varphi_i^{\otimes n_i} \rangle \tag{2.9}$$

$$=: \sum_{\vec{n}=0}^{\infty} \frac{1}{\vec{n}!} \langle : \boldsymbol{\omega}^{\otimes \vec{n}} :, \boldsymbol{\varphi}^{\otimes \vec{n}} \rangle. \tag{2.10}$$

Assim, temos

$$: \exp(\langle \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\varphi} \rangle) := \sum_{\vec{n}=0}^{\infty} \frac{1}{\vec{n}!} \langle : \boldsymbol{\omega}^{\otimes \vec{n}} :, \boldsymbol{\varphi}^{\otimes \vec{n}} \rangle. \tag{2.11}$$

A Proposição 2.2.1 pode escrever-se agora do seguinte modo

Proposição 2.5.1 *Para cada* $f^{(\vec{n})} \in L_d^{2\hat{\otimes}n}, g^{(\vec{m})} \in L_d^{2\hat{\otimes}m}$ *tem-se*

$$\int_{S'_d} \langle : \omega^{\otimes \vec{n}} :, f^{(\vec{n})} \rangle \langle : \omega^{\otimes \vec{m}} :, g^{(\vec{m})} \rangle d\mu(\omega) = \delta_{\vec{n}\vec{m}} \vec{n}! (f^{(\vec{n})}, g^{(\vec{n})})_{L_d^{2\hat{\otimes}n}} \tag{2.12}$$

onde $\vec{n} = (n_1, ..., n_d)$, $\vec{m} = (m_1, ..., m_d)$, $n = \sum_{i=1}^d n_i$ *e* $m = \sum_{i=1}^d m_i$.

Prova Suponhamos que $f^{(\vec{n})} = \varphi^{\hat{\otimes}n}$ e $g^{(\vec{n})} = \psi^{\hat{\otimes}m}$ com $\varphi, \psi \in S_d$. Consideram-se

$$: \exp_\mu(\langle \omega, \lambda_1 \varphi \rangle) : \text{ e } : \exp_\mu(\langle \omega, \lambda_2 \psi \rangle) :, \ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

Usando a expressão (2.11) obtém-se

$$\int_{S'_d} : \exp_\mu(\langle \omega, \lambda_1 \varphi \rangle) : . : \exp_\mu(\langle \omega, \lambda_2 \psi \rangle) : d\mu(\omega) \tag{2.13}$$

$$= \int_{S'_d} \sum_{\vec{n}=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^n}{\vec{n}!} \langle : \omega^{\otimes \vec{n}} :, \varphi^{\otimes \vec{n}} \rangle \sum_{\vec{m}=0}^{\infty} \frac{\lambda_2^m}{\vec{m}!} \langle : \omega^{\otimes \vec{m}} :, \psi^{\otimes \vec{m}} \rangle d\mu(\omega)$$

$$= \sum_{\vec{n},\vec{m}=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^n \lambda_2^m}{\vec{n}! \vec{m}!} \int_{S'_d} \langle : \omega^{\otimes \vec{n}} :, \varphi^{\otimes \vec{n}} \rangle \langle : \omega^{\otimes \vec{m}} :, \psi^{\otimes \vec{m}} \rangle d\mu(\omega). \tag{2.14}$$

Por outro lado,

$$\int_{S'_d} : \exp_\mu(\langle \omega, \lambda_1 \varphi \rangle) : . : \exp_\mu(\langle \omega, \lambda_2 \psi \rangle) : d\mu(\omega) \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned}
&= \exp(-\frac{1}{2}\lambda_1^2 |\varphi|^2 - \frac{1}{2}\lambda_2^2 |\psi|^2) \int_{S'_d} \exp(\langle \omega, \lambda_1 \varphi + \lambda_2 \psi \rangle) d\mu(\omega) \\
&= \exp(-\frac{1}{2}\lambda_1^2 |\varphi|^2 - \frac{1}{2}\lambda_2^2 |\psi|^2 + \frac{1}{2} |\lambda_1 \varphi + \lambda_2 \psi|^2) \\
&= \exp\left(\lambda_1 \lambda_2 \sum_{i=1}^d (\varphi_i, \psi_i) \right) \\
&= \prod_{i=1}^d \exp(\lambda_1 \lambda_2 (\varphi_i, \psi_i)) \\
&= \prod_{i=1}^d \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda_1 \lambda_2)^k}{k!} (\varphi_i, \psi_i)^k
\end{aligned}$$

$$= \sum_{\vec{n}=0}^{\infty} \frac{(\lambda_1\lambda_2)^n}{\vec{n}!}(\varphi^{\otimes\vec{n}}, \psi^{\otimes\vec{n}}). \tag{2.16}$$

Por comparação de coeficientes entre (2.14) e (2.16), fórmula de polarização e continuidade, conclui-se o resultado da proposição.■

No nosso caso o Teorema 2.2.3 toma a forma:

Proposição 2.5.2 *Para $F \in (L^2)$, existe uma única sucessão $(F^{(\vec{n})})_{n\in\mathbb{N}_0} \in \Gamma(L^2)$ tal que*

$$F(\omega) = \sum_{\vec{n}=0}^{\infty} \langle : \omega^{\otimes\vec{n}} :, F^{(\vec{n})} \rangle$$

e

$$\|F\|^2_{(L^2)} = \sum_{\vec{n}=0}^{\infty} \vec{n}! \left|F^{(\vec{n})}\right|^2_{L_d^{2\hat{\otimes}n}}.$$

A proposição que apresentamos de seguida é uma generalização do Corolário 2.13 de [HKPS93] para o caso em que $\varphi = \langle : \omega^{\otimes\vec{m}} :, f^{(\vec{m})} \rangle$, $f^{(\vec{m})} \in L_d^{2\hat{\otimes}m}$ e $\psi = \langle : \omega^{\otimes\vec{n}} :, g^{(\vec{n})} \rangle$, $g^{(\vec{n})} \in L_d^{2\hat{\otimes}n}$. Tal resultado irá ser de grande utilidade nos restantes capítulos.

Proposição 2.5.3 *Sejam*

$$\varphi = \langle : \omega^{\otimes\vec{m}} :, f^{(\vec{m})} \rangle, f^{(\vec{m})} \in L_d^{2\hat{\otimes}m} \text{ e } \psi = \langle : \omega^{\otimes\vec{n}} :, g^{(\vec{n})} \rangle, g^{(\vec{n})} \in L_d^{2\hat{\otimes}n}$$

dois monómios dados. Então o produto pontual de φ e ψ é dado por

$$(\varphi\psi)(\omega) = \sum_{\vec{k}=0}^{\vec{m}\wedge\vec{n}} \vec{k}! \binom{\vec{m}}{\vec{k}} \binom{\vec{n}}{\vec{k}} \langle : \omega^{\otimes(\vec{m}+\vec{n}-2\vec{k})} :, f^{(\vec{m})} \otimes_{\vec{k}} g^{(\vec{n})} \rangle, \quad \mu - q.c. \, (\omega \in S'_d)$$

(logo pertence a (L^2)), onde $f^{(\vec{m})} \otimes_{\vec{k}} g^{(\vec{n})}$ é a função simétrica em cada um dos d blocos de $(m_i + n_i - 2k_i)$-variáveis correspondente a

$$\iint_{\mathbb{R}^k} f^{(\vec{m})}(s_1^1, \ldots, s_{k_1}^1, \cdot, \ldots, s_1^d, \ldots, s_{k_d}^d, \cdot)$$
$$.g^{(\vec{n})}(s_1^1, \ldots, s_{k_1}^1, \cdot, \ldots, s_1^d, \ldots, s_{k_d}^d, \cdot) ds_1^1 \ldots ds_{k_1}^1 \ldots ds_1^d \ldots ds_{k_d}^d.$$

Prova É suficiente provar este resultado para os elementos $\varphi^{\otimes\vec{n}} \in S_d^{\otimes n}$, visto que o conjunto de tais elementos é um espaço denso em $L_d^{2\hat{\otimes}n}$.

Assim, se $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_d)$, $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \ldots, \psi_d) \in S_d$ e $\boldsymbol{\omega} \in S'_d$ podemos generalizar o Corolário 2.13 de [HKPS93] pondo

$$
\begin{aligned}
&(\langle : \cdot^{\otimes\vec{m}} :, \boldsymbol{\varphi}^{\otimes\vec{m}}\rangle \langle : \cdot^{\otimes\vec{n}} :, \boldsymbol{\psi}^{\otimes\vec{n}}\rangle)(\boldsymbol{\omega}) \\
= \; & (\langle : \cdot^{\otimes m_1} :, \varphi_1^{\otimes m_1}\rangle \langle : \cdot^{\otimes n_1} :, \psi_1^{\otimes n_1}\rangle)(\omega_1) \ldots (\langle : \cdot^{\otimes m_d} :, \varphi_d^{\otimes m_d}\rangle \langle : \cdot^{\otimes n_d} :, \psi_d^{\otimes n_d}\rangle)(\omega_d) \\
= \; & \sum_{k_1=0}^{m_1 \wedge n_1} k_1! \binom{m_1}{k_1} \binom{n_1}{k_1} \langle : \omega_1^{\otimes(m_1+n_1-2k_1)} :, \varphi_1^{\otimes m_1} \hat{\otimes}_{k_1} \psi_1^{\otimes n_1}\rangle \ldots \\
& \ldots \sum_{k_d=0}^{m_d \wedge n_d} k_d! \binom{m_d}{k_d} \binom{n_d}{k_d} \langle : \omega_d^{\otimes(m_d+n_d-2k_d)} :, \varphi_d^{\otimes m_d} \hat{\otimes}_{k_d} \psi_d^{\otimes n_d}\rangle \\
& =: \sum_{\vec{k}=0}^{\vec{m}\wedge\vec{n}} \vec{k}! \binom{\vec{m}}{\vec{k}} \binom{\vec{n}}{\vec{k}} \langle : \boldsymbol{\omega}^{\otimes(\vec{m}+\vec{n}-2\vec{k})} :, \boldsymbol{\varphi}^{\otimes\vec{m}} \otimes_{\vec{k}} \boldsymbol{\psi}^{\otimes\vec{n}}\rangle.
\end{aligned}
$$

Dado que cada $\varphi_i^{\otimes m_i} \hat{\otimes}_{k_i} \psi_i^{\otimes n_i}$, $1 \le i \le d$, corresponde à simetrização da função

$$\int_{\mathbb{R}^{k_i}} \varphi_i^{\otimes m_i}(s_1, \ldots, s_{k_i}, \cdot) \psi_i^{\otimes n_i}(s_1, \ldots, s_{k_i}, \cdot) ds_1 \ldots ds_{k_i},$$

então $\boldsymbol{\varphi}^{\otimes\vec{m}} \otimes_{\vec{k}} \boldsymbol{\psi}^{\otimes\vec{n}}$ corresponde ao produto tensorial destas funções simétricas. Portanto, $\boldsymbol{\varphi}^{\otimes\vec{m}} \otimes_{\vec{k}} \boldsymbol{\psi}^{\otimes\vec{n}}$ é uma função simétrica em cada um dos d blocos de $(m_i + n_i - 2k_i)$-variáveis, $1 \le i \le d$.

No caso geral, i.e., quando

$$L_d^{2\hat{\otimes}m} \ni f = \langle : \cdot^{\otimes\vec{m}} :, f^{(\vec{m})}\rangle \text{ e } L_d^{2\hat{\otimes}n} \ni g = \langle : \cdot^{\otimes\vec{n}} :, g^{(\vec{n})}\rangle$$

a generalização do resultado anterior é dada por

$$(fg)(\boldsymbol{\omega}) = \sum_{\vec{k}=0}^{\vec{m}\wedge\vec{n}} \vec{k}! \binom{\vec{m}}{\vec{k}} \binom{\vec{n}}{\vec{k}} \langle : \boldsymbol{\omega}^{\otimes(\vec{m}+\vec{n}-2\vec{k})} :, f^{(\vec{m})} \otimes_{\vec{k}} g^{(\vec{n})}\rangle,$$

onde as notações têm o mesmo significado anterior e agora $f^{(\vec{m})} \otimes_{\vec{k}} g^{(\vec{n})}$ é uma função simétrica em cada um dos d blocos de $(m_i + n_i - 2k_i)$-variáveis da função

$$\int_{\mathbb{R}^k} f^{(\vec{m})}(s_1^1, \ldots, s_{k_1}^1, \cdot, \ldots, s_1^d, \ldots, s_{k_d}^d, \cdot) g^{(\vec{n})}(s_1^1, \ldots, s_{k_1}^1, \cdot, \ldots, s_1^d, \ldots, s_{k_d}^d, \cdot) ds_1^1 \ldots ds_{k_d}^d.$$

■

2.6 O espaço das funções generalizadas regulares do ruído branco

Nesta secção introduzimos de forma breve o espaço $\mathcal{G}^{-1}$ das funções generalizadas regulares do ruído branco e algumas das suas propriedades. Este espaço será usado na Secção 2.8 para obter uma relação entre a derivada de Hida e a fórmula de Clark-Ocone generalizada. Para mais pormenores sobre $\mathcal{G}^{-1}$ ver [GKS99], [GKU99] e [Gro98].

Consideremos os funcionais $\varphi \in L^2(\mu)$ da forma

$$\varphi(\omega) = \sum_{\vec{n}=0}^{\infty} \langle : \omega^{\otimes \vec{n}} :, \varphi^{(\vec{n})} \rangle, \ \varphi^{(\vec{n})} \in S_d^{\hat{\otimes} n}$$

e rapidamente convergentes, isto é, tais que

$$\|\varphi\|_q^2 := \sum_{\vec{n}=0}^{\infty} (\vec{n}!)^2 2^{qn} \left|\varphi^{(\vec{n})}\right|^2 < \infty.$$

Define-se o espaço de Hilbert G_q^1, $q \in \mathbb{N}_0$, por

$$G_q^1 := \left\{ \varphi \in (L^2) : \|\varphi\|_q^2 < \infty \right\}.$$

O espaço das funções teste $\mathcal{G}^1$ é introduzido como sendo o limite projectivo dos espaços G_q^1, $q \in \mathbb{N}_0$. Representam-se por G_{-q}^{-1} e $\mathcal{G}^{-1}$, respectivamente, os duais de G_q^1 e $\mathcal{G}^1$ relativamente a (L^2).

Atendendo a que a função constante 1 é um elemento de $\mathcal{G}^1$, podemos prolongar o conceito de esperança $\mathbb{E}(\cdot)$ de funções integráveis a distribuições $\Phi \in \mathcal{G}^{-1}$ pondo

$$\mathbb{E}(\Phi) := \langle\langle \Phi, 1 \rangle\rangle.$$

A partir da teoria geral da dualidade de espaços conclui-se que

$$\mathcal{G}^{-1} = \bigcup_{q\geq 0} G^{-1}_{-q}.$$

O espaço de Hilbert G^{-1}_{-q} admite a seguinte representação

$$G^{-1}_{-q} = \left\{ \Phi(\omega) = \sum_{\vec{n}} \langle : \omega^{\otimes \vec{n}} :, \Phi^{(\vec{n})} \rangle, \|\Phi\|^2_{-q} := \sum_{\vec{n}} 2^{-qn} \left|\Phi^{(\vec{n})}\right|^2 < \infty \right\}.$$

Para $\zeta \in S_d$, a exponencial de Wick é dada por

$$\begin{aligned} : \exp\langle \omega, \zeta \rangle : &= \exp\left(\langle \omega, \zeta \rangle - \tfrac{1}{2} |\zeta|^2 \right) \\ &= \sum_{\vec{n}} \frac{1}{\vec{n}!} \langle : \omega^{\otimes \vec{n}} :, \zeta^{\otimes \vec{n}} \rangle, \quad \omega \in S'_d. \end{aligned}$$

Em virtude de a série

$$\sum_{\vec{n}} (\vec{n}!)^2 2^{qn} \left| \frac{1}{\vec{n}!} \zeta^{\otimes \vec{n}} \right|^2_{L^{2 \otimes \vec{n}}_d} = \sum_{\vec{n}} 2^{qn} |\zeta|^{2n}_{L^2_d}$$

convergir se, e só se, $2^q |\zeta|^2_{L^2_d} < 1$, deduz-se que as exponenciais de Wick não pertencem a $\mathcal{G}^1$. Contudo, pertencem a G^1_q desde que $2^q |\zeta|^2_{L^2_d} < 1$, o que torna possível definir a transformada $\mathcal{S}$ para distribuições regulares. Para cada $\zeta \in S_d$ tal que $2^q |\zeta|^2_{L^2_d} < 1$ define-se a transformada $\mathcal{S}$ de $\Phi \in \mathcal{G}^{-1}$ por

$$(\mathcal{S}\Phi)(\zeta) := \langle\langle \Phi, : \exp\langle \cdot, \zeta \rangle : \rangle\rangle = \sum_{\vec{n}} \left(\Phi^{(\vec{n})}, \zeta^{\otimes \vec{n}} \right)_{L^{2\hat{\otimes} n}_d}.$$

2.7 O integral de Itô

Os integrais estocásticos têm um vasto campo de aplicações e o seu estudo tem estado relacionado com a tentativa de dar resposta a muitos problemas de caracter prático. Consideraremos o espaço de probabilidade $(S'_1, C_\sigma(S'_1), \mu)$ e referir-nos-emos exclusivamente ao integral de Itô

$$\int_S^T f(t, \omega) dB_t(\omega), 0 \leq S < T, \tag{2.17}$$

onde $B_t(\omega)$ representa o movimento Browniano unidimensional e f é uma função real definida em $[0,\infty] \times S_1'$.

A classe de funções f para a qual se define o integral de Itô é caracterizada na seguinte (ver [Oks98], [KS91])

Definição 2.7.1 *Representaremos por $\mathcal{A} = \mathcal{A}(S,T)$ a família das funções*

$$f : [0,\infty] \times S_1' \to \mathbb{R}$$

que verificam

1. $(t,\omega) \mapsto f(t,\omega)$ *é* $\mathcal{B}\times C_\sigma(S')$*-mensurável, onde* $\mathcal{B}$ *representa a* σ*-álgebra de Borel em* $[0,\infty]$*;*

2. $f(t,.)$ *é* $\mathcal{F}_t$*-adaptado (ver Observação 2.7.2 para este conceito);*

3. $\mathbb{E}(\int_S^T f^2(t,\omega)dt) < \infty$.

Observação 2.7.2 *Recorde-se que*

1. *Sendo* $\mathbf{B}_t(\omega)$ *um movimento Browniano de dimensão d, denota-se por* $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^d$*, a* σ*-álgebra gerada pelas variáveis aleatórias* $\mathbf{B}_s$*,* $s \le t$*, ou seja,* $\mathcal{F}_t$ *é a menor das* σ*-álgebras que contém todos os conjuntos da forma*

$$\{\omega : \mathbf{B}_{t_1}(\omega) \in F_1, ..., \mathbf{B}_{t_k}(\omega) \in F_k\},$$

   com $t_j \le t$*,* F_j *conjuntos de Borel em* $\mathbb{R}^d$ *e* $j \le k = 1, 2, ...$ *(Assume-se que* $\mathcal{F}_t$ *contém todos os conjuntos de medida nula, isto é, a medida* μ *é completa em* $\mathcal{F}_t$*);*

2. *Uma filtração, num espaço mensurável* $(\Omega, \mathcal{E})$*, é uma família* $\mathcal{M} = \{\mathcal{M}_t\}_{t\ge 0}$ *de* σ*-álgebras* $\mathcal{M}_t \subseteq \mathcal{E}$ *tal que* $0 \le s \le t \Rightarrow \mathcal{M}_s \subseteq \mathcal{M}_t$*;*

3. *Se* $\mathcal{M} = \{\mathcal{M}_t\}_{t\ge 0}$ *é uma filtração no espaço* $(\Omega, \mathcal{E})$*, um processo*

$$g : [0,\infty] \times \Omega \to \mathbb{R}^n$$

   diz-se $\mathcal{M}_t$*-adaptado se para cada* $t \ge 0$ *a função* $\omega \longmapsto g(t,\omega)$ *for* $\mathcal{M}_t$*-mensurável;*

4. *Um processo estocástico d-dimensional* $\{M_t\}_{t\ge 0}$ *num espaço de probabilidade* $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ *é chamado um martingale com respeito à filtração* $\{\mathcal{M}_t\}_{t\ge 0}$ *se:*

(a) M_t *é* $\mathcal{M}_t$*-mensurável para todo o* t;

(b) $\mathbb{E}(|M_t|) < \infty$ *para todo o* t;

(c) $\mathbb{E}(M_s \mid \mathcal{M}_t) = M_t$ *para todo o* $s \geq t$,

onde $\mathbb{E}(\cdot \mid \mathcal{M}_t)$ *designa a esperança condicionada relativamente à* σ*-álgebra* $\mathcal{M}_t$.

Em $\mathcal{A}$ consideremos as funções h da forma

$$h(t,\omega) = \sum_{j\geq 0} a_j(\omega)\mathbb{I}_{[t_j,t_{j+1})}(t),$$

usualmente denominadas funções elementares. Repare-se que por cada função elementar h pertencer à classe $\mathcal{A}$, cada função a_j tem de ser $\mathcal{F}_{t_j}$-mensurável. O integral de Itô da função elementar h, representado por $\mathcal{I}(h)$, é definido por

$$\mathcal{I}(h) := \int_S^T h(t,\omega)dB_t(\omega) = \sum_{j\geq 0} a_j(\omega)\left(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}\right)(\omega). \tag{2.18}$$

Prova-se que se h for uma função elementar limitada, então

$$\mathbb{E}\left(\left(\int_S^T h(t,\omega)dB_t(\omega)\right)^2\right) = \mathbb{E}\left(\int_S^T h^2(t,\omega)dt\right),$$

resultado este que é conhecido por *Isometria de Itô*. Prova-se ainda que cada função $f \in \mathcal{A}$ pode ser aproximada por uma sucessão de funções elementares limitadas e usa-se este facto para definir o integral de Itô de f. Mais propriamente:

Definição 2.7.3 *(Integral de Itô) Seja* $f \in \mathcal{A}$. *Chama-se integral de Itô de* f *ao longo do intervalo* $[S,T]$ *e representa-se por*

$$\int_S^T f(t,\omega)dB_t(\omega) \tag{2.19}$$

ao limite em $L^2(\mu)$ *de*

$$\int_S^T h_n(t,\omega)dB_t(\omega)$$

onde $\{h_n\}$ *é uma sucessão de funções elementares limitadas tal que*

$$\mathbb{E}\left(\int_S^T (f(t,\omega) - h_n(t,\omega))^2\, dt\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Observação 2.7.4 *O limite anterior existe em* $L^2(\mu)$ *uma vez que, pela Isometria de Itô, se pode provar que a sucessão* $\left\{\int_S^T h_n(t,\omega)dB_t(\omega)\right\}$ *é de Cauchy em* $L^2(\mu)$. *A partir da prova da consistência da definição do integral de Itô estabelece-se a Isometria de Itô em* $\mathcal{A}$.

De seguida introduz-se a noção de integral de Itô em dimensões superiores.

Definição 2.7.5 *Seja* $\mathrm{B} = (B_1, ..., B_d)$ *um movimento Browniano em* $\mathbb{R}^d$ *e consideremos a filtração* $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$. *Represente-se por* $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}^{m\times d}(S,T)$ *o conjunto das matrizes* A *do tipo* $m\times d$ *com* $A = [a_{ij}(t,\omega)]$, *onde cada entrada* $a_{ij}(t,\omega)$ *pertence à classe* $\mathcal{A}$.

Se $A \in \mathcal{A}_{\mathcal{F}}^{m\times d}(S,T)$ *define-se, usando notação matricial,*

$$\int_S^T A d\mathrm{B} := \int_S^T \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1d} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{md} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dB_1 \\ \vdots \\ dB_d \end{pmatrix}$$

como sendo a matriz $m \times 1$ *em que a i-ésima componente é dada pela soma dos integrais de Itô*

$$\sum_{j=1}^{d} \int_S^T a_{ij}(s,\omega) dB_j(s,\omega).$$

2.8 Derivada de Hida e fórmula de Clark-Ocone

Começamos por recordar o conceito de derivada de Gâteaux de funções reais definidas em S_d'. No caso especial quando derivamos (no sentido de Gâteaux) na direcção da distribuição δ_t, $t \in \mathbb{R}$, comparamo-la com a acção da derivada de Hida ∂_t, $t \in \mathbb{R}$ (veja-se, por exemplo, [Hid80] e [HKPS93]).

Definição 2.8.1 *Sejam* $\mathrm{y} \in S_d'$ *e* F *uma aplicação definida em* S_d' *e com valores em* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$. *Para cada* $\mathrm{x} \in S_d'$, *considere-se a função real*

$\lambda \mapsto F(\mathrm{x} + \lambda \mathrm{y})$. *Se esta função for diferenciável em $\lambda = 0$ dizemos que F é diferenciável à Gâteaux em* x *na direcção* y *e escrevemos*

$$D_{\mathrm{y}}F(\mathrm{x}) := \frac{d}{d\lambda}F(\mathrm{x} + \lambda \mathrm{y}) \mid_{\lambda=0} .$$

Esta definição aplica-se a polinómios e exponenciais podendo ser prolongada ao espaço (S_d). Mais propriamente, podemos enunciar o seguinte

Teorema 2.8.2 *([HKPS93]) Para cada $\mathrm{y} \in S'_d$, D_{y} é um operador contínuo de (S_d) em si próprio. Em particular, as funções teste em (S_d) são infinitamente diferen-ciáveis à Gâteaux em cada direcção de S'_d.*

O operador D_{y} actua linearmente e admite as regras usuais do produto e da cadeia.

No Capítulo 5 iremos calcular derivadas de Gâteaux no caso particular em que y tem todas as componentes iguais a zero excepto uma que é igual à distribuição δ de Dirac e que identificamos com a derivada de Hida ∂_t. Hida introduziu em 1975 (veja-se [Hid75]) a derivada ∂_t que admite várias definições equivalentes como sejam a de Kubo e Takenaka (veja-se, por exemplo, [KT80b]) e a de Kuo (veja-se, por exemplo, [Kuo83]).

Para aplicarmos a fórmula de Clark-Ocone generalizada necessitamos do conceito de integral de Itô generalizado. Porém, antes de o recordarmos, precisamos de outras noções.

Definição 2.8.3 *Para cada função teste ψ em $\mathcal{G}^1$ com funções kernel $\psi_{\vec{n}}$, $n \in \mathbb{N}_0$, define-se o operador gradiente de ψ, $\nabla\psi := (\partial^i_\cdot \psi)_{1 \le i \le d}$, onde para cada $1 \le i \le d$, $\partial^i_\cdot \psi$ é o funcional em $L^2(\mathbb{R}) \otimes G^1_q$, $q \in \mathbb{N}_0$, dado pela sucessão*

$$\psi^i_{\vec{n}}(t,s) := (n_i + 1)\psi_{\overrightarrow{n+\delta_i}}(s^1_1, ..., s^1_{n_1}; ...; s^i_1, ..., s^i_{n_i}, t; s^{i+1}_1, ..., s^{i+1}_{n_{i+1}}; ...; s^d_1, ..., s^d_{n_d})$$

pertencente a $L^2(\mathbb{R}) \otimes L^2(\mathbb{R}^n)$, ou seja,

$$\partial^i_t \psi(s) = \sum_{\vec{n}} \langle : \omega^{\otimes \vec{n}} :, \psi^i_{\vec{n}}(t,s) \rangle .$$

O operador linear $\partial^i_\cdot : G^1_q \to L^2(\mathbb{R}) \otimes G^1_q$ assim definido é contínuo, o mesmo acontecendo ao operador gradiente $\nabla : G^1_q \to \mathbb{R}^d \otimes L^2(\mathbb{R}) \otimes G^1_q$, sendo ambos prolongáveis ao espaço das funções generalizadas regulares $\mathcal{G}^{-1}$. Com efeito, dada $\Phi \in \mathcal{G}^{-1}$, ter-se-á $\Phi \in G^{-1}_{-q}$ para algum $q \in \mathbb{N}_0$. Representemos por $(\Phi_{\vec{n}})$, $n \in \mathbb{N}_0$, $\Phi_{\vec{n}} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ a sucessão que caracteriza Φ e consideremos o funcional determinado pela sucessão

$$\Phi^i_{\vec{n}}(t,s) := (n_i+1)\Phi_{\overrightarrow{n+\delta_i}}(s^1_1,...,s^1_{n_1};...;s^i_1,...,s^i_{n_i},t;s^{i+1}_1,...,s^{i+1}_{n_{i+1}};...;s^d_1,...,s^d_{n_d})$$

que é um elmento de $L^2(\mathbb{R}) \otimes L^2(\mathbb{R}^n)$.

Prova-se (veja-se [FOS00]) que a sucessão $(\Phi^i_{\vec{n}})$, $n \in \mathbb{N}_0$, define um funcional de $L^2(\mathbb{R}) \otimes G^{-1}_{-p}$, para $p > q$, que é representado por $\partial^i_{\cdot}\Phi$. O operador $(\partial^i_{\cdot}\Phi)_{1\leq i\leq d}$ é denominado gradiente de Φ, é denotado por $\nabla\Phi$ e é um operador linear limitado de G^{-1}_{-q} em $\mathbb{R}^d \otimes L^2(\mathbb{R}) \otimes G^{-1}_{-p}$.

Seja Φ um elemento de $L^2(\mathbb{R}) \otimes G^{-1}_{-q}$, para algum $q \in \mathbb{N}_0$, caracterizado por uma sucessão $\Phi_{\vec{n}}(\cdot;\cdot) \in L^2(\mathbb{R}) \otimes L^2(\mathbb{R}^n)$, $n \in \mathbb{N}_0$. Consideremos o funcional caracterizado pela sucessão

$$\begin{aligned}\Psi^i_{\vec{0}} &: = 0\\ \Psi^i_{\vec{n}} &: = \widetilde{\Phi}_{\overrightarrow{n-\delta_i}} \in L^2(\mathbb{R}^n), \vec{n} = (n_1,...,n_d), n \in \mathbb{N},\end{aligned}$$

onde $\widetilde{\Phi}_{\overrightarrow{n-\delta_i}}$ representa a simetrização de $\Phi_{\overrightarrow{n-\delta_i}}$ nas variáveis $t, s^i_1, ..., s^i_{n_i-1}$. Para cada $1 \leq i \leq d$, a sucessão $(\Psi^i_{\vec{n}})$, $n \in \mathbb{N}_0$, define uma distribuição de G^{-1}_{-q} (veja-se [FOS00]), denotada por $I_i(\Phi)$. Para cada função teste ψ de $\mathcal{G}^1$ com funções *kernel* $(\psi_{\vec{n}})$, $n \in \mathbb{N}_0$, temos para cada $1 \leq i \leq d$,

$$\langle\langle I_i(\Phi), \psi\rangle\rangle = \langle\langle \Phi, \partial^i_{\cdot}\psi\rangle\rangle$$

(usamos a mesma notação $\langle\langle .,.\rangle\rangle$ para o produto dual entre $L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{G}^{-1}$ e $L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{G}^1$); $I_i(\Phi)$ é o único funcional de $\mathcal{G}^{-1}$ para o qual a igualdade anterior é verificada para todas as funções teste $\psi \in \mathcal{G}^1$.

Definição 2.8.4 *Se $\Phi \in \mathbb{R}^d \otimes L^2(\mathbb{R}) \otimes G^{-1}_{-q}$, para algum $q \in \mathbb{N}_0$ e é um processo adaptado para a filtração $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$, chama-se integral generalizado de Itô de Φ à distribuição em $\mathcal{G}^{-1}$, $\mathcal{I}(\Phi)$, definida pela soma*

$$\mathcal{I}(\Phi) := \sum_{i=1}^d I_i(\Phi_i)$$

onde, para cada $i = 1,...,d$, $I_i(\Phi_i)$ é a única função generalizada regular em $\mathcal{G}^{-1}$ para a qual se verifica a igualdade

$$\langle\langle I_i(\Phi_i), \psi\rangle\rangle = \langle\langle \Phi_i, \partial^i_{\cdot}\psi\rangle\rangle$$

para cada função teste ψ em $\mathcal{G}^1$.

Certos funcionais Φ do movimento Browniano admitem uma representação em termos do integral de Itô,

$$\Phi = \mathbb{E}(\Phi) + \int \varphi(\tau) d\mathrm{B}(\tau). \tag{2.20}$$

A fórmula de Clark-Ocone faculta-nos uma forma explícita para a função integranda φ a partir de Φ (veja-se, por exemplo, [Cla70] e [Oco84]). Apresentamos uma versão mais geral, uma vez que é dada no contexto das funções generalizadas regulares do ruído branco (veja-se, por exemplo, [FOS00] e [AOU98]).

Teorema 2.8.5 *[FOS00](Fórmula de Clark-Ocone) Toda a função generalizada regular Φ do ruído branco ($\Phi \in \mathcal{G}^{-1}$) pode ser escrita como um integral generalizado de Itô*

$$\Phi = \mathbb{E}(\Phi) + \mathcal{I}(\varphi)$$

com $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_d)$ definido por

$$\varphi_i(t) = \Gamma(1\!\!1_{[0,t]}) \partial_t^i \Phi. \tag{2.21}$$

No teorema, $\Gamma(A)$ refere-se à *segunda quantificação* do operador A. Recorde-se que dado um operador linear limitado A no espaço de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$, define-se a *segunda quantificação* de A, denotada por $\Gamma(A)$, como sendo o operador que aplica cada $\varphi \in (L^2)$, com expansão em caos

$$\varphi(\omega) = \sum_{\vec{n}=0}^{\infty} \langle : \omega^{\otimes \vec{n}} :, \varphi^{(\vec{n})} \rangle, \ \varphi^{(\vec{n})} \in S_d^{\hat{\otimes} n},$$

em

$$(\Gamma(A)\varphi)(\omega) = \sum_{\vec{n}=0}^{\infty} \langle : \omega^{\otimes \vec{n}} :, A^{\otimes n} \varphi^{(\vec{n})} \rangle.$$

Capítulo 3

Tempos locais

3.1 Definição

Intuitivamente, os tempos locais do movimento Browniano podem ser vistos como uma ferramenta que serve para calcular a média dos tempos que uma partícula Browniana demora a passar por um dado ponto. Informalmente, os tempos locais do movimento Browniano podem ser definidos pela fórmula de Tanaka

$$L(\tau, \vec{\mathrm{a}}) := \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \delta\left(\mathrm{B}(t) - \vec{\mathrm{a}}\right) dt, \quad \vec{\mathrm{a}} \in \mathbb{R}^d, \tau \in \mathbb{R}^+$$

onde $\mathbf{B}$ é o movimento Browniano vectorial com valores em $\mathbb{R}^d$, definido no espaço de probabilidade de Wiener e δ é a distribuição de Dirac ou de Donsker.

Para $d = 1$, os tempos locais foram rigorosamente definidos como integrais de Bochner na Análise Ruído Branco em [LLSW93].

Uma prova de que para $\vec{\mathrm{a}} \neq 0$ os tempos locais podem ser rigorosamente definidos em $(S_d)'$, usando o Teorema 2.4.4, pode ser vista em [Leu94]. Quando $\vec{\mathrm{a}} = \vec{0}$ e $d \geq 2$ (atendendo a que o movimento Browniano começa na origem), os tempos locais não são elementos de $(S_d)'$.

Os tempos locais das auto-intersecções simples do movimento Browniano são definidos por

$$L(t) := \iint_{\Delta_t} \delta(\mathrm{B}(t_2) - \mathrm{B}(t_1)) dt_2 dt_1,$$

com $\Delta_t = \{(t_1, t_2) : 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t\}$.

Para $d = 1$, os tempos locais das auto-intersecções do movimento Browniano foram rigorosamente definidos como integrais de Bochner na análise ruído branco em [FHSW97]. Para dimensões $d \geq 2$, os tempos locais são usualmente manipulados através de regularizações, veja-se, por exemplo, [Wat91], [SW93] e [FHSW97].

Ao longo deste trabalho estudaremos os tempos locais das auto-intersecções simples do movimento Browniano sempre para o caso $\vec{\mathbf{a}} = 0$. Para simplificar a escrita, tempos locais das auto-intersecções do movimento Browniano serão designados, simplesmente, por tempos locais.

3.2 Sucessão de aproximações

De acordo com as observações anteriormente apresentadas, é desejável efectuar regularizações aos tempos locais L das auto-intersecções do movimento Browniano, com o objectivo de construir renormalizações bem definidas em dimensões superiores. Estudaremos os tempos locais do movimento Browniano recorrendo a aproximações Gaussianas da distribuição δ de Dirac. Para $\varepsilon > 0$, consideraremos a regularização

$$L_\varepsilon := \int_0^t dt_2 \int_0^{t_2} dt_1 \delta_\varepsilon \left(\mathbf{B}\left(t_2\right) - \mathbf{B}\left(t_1\right)\right), \tag{3.1}$$

com

$$\delta_\varepsilon \left(\mathbf{B}\left(t_2\right) - \mathbf{B}\left(t_1\right)\right) := (2\pi\varepsilon)^{-\frac{d}{2}} \exp\left(-\frac{\left|\mathbf{B}\left(t_2\right) - \mathbf{B}\left(t_1\right)\right|^2}{2\varepsilon}\right). \tag{3.2}$$

Um dos nossos objectivos consiste em estudar a expansão em caos do quadrado dos tempos locais. Observe-se que, o termo de ordem zero desta, que coincide com a esperança do quadrado dos tempos locais, não é finito (veja-se e. g. [FHSW97]).

Para indicar a projecção de Φ sobre o caos de ordem $n \geq k$ usaremos o índice superior (k), isto é,

$$\langle\langle \Phi^{(k)}, F \rangle\rangle := \sum_{\vec{n}: n \geq k}^{\infty} \vec{n}! \langle \varphi^{(\vec{n})}, F^{(\vec{n})} \rangle.$$

3.3 Propriedades

A proposição seguinte estabelece que quando se subtrai a um tempo local os primeiros termos da sua expansão em caos (número este dependente da dimensão do espaço considerado) obtém-se uma distribuição de Hida. Para a prova pode ver-se [FHSW97].

Proposição 3.3.1 *Para $d = 1, 2, 3, ...$, $2N > d - 2$ e $0 \leq T_1 < T_2 < \infty$, o integral de Bochner*

$$L^{(2N)}(T_1, T_2) := \int_{T_1}^{T_2} dt_2 \int_{T_1}^{t_2} dt_1 \delta^{(2N)} \left(\mathbf{B}(t_2) - \mathbf{B}(t_1)\right) \in (S_d)'.$$

Os *kernels* de $L^{(2N)}$ são já conhecidos, veja-se, por exemplo, [FHSW97].

Proposição 3.3.2 *Relativamente a $L^{(2N)}$, para $d = 2$ e $n = 1$ o kernel correspondente $F_{2\vec{n}}^{T_1,T_2}$, toma a forma:*

$$\frac{1}{4\pi} 1\!\!1_{[T_1,T_2]^2}(s_1, s_2) \left[-\ln(T_2 - s_1 \wedge s_2) + \ln(s_1 \vee s_2 - s_1 \wedge s_2) + \right.$$

$$\left. + \ln(T_2 - T_1) - \ln(s_1 \vee s_2 - T_1)\right].$$

Nos restantes casos, para $2n > d - 2$, as funções kernel com $n \geq N$, no intervalo $[T_1, T_2]$, são dadas por:

$$\begin{aligned} & F_{2\vec{n}}^{T_1,T_2}(s_1, ..., s_{2n}) \\ = \; & (-1)^n \left((2\pi)^{\frac{d}{2}} 2^n \vec{n}!\right)^{-1} \left(-n - \frac{d}{2} + 1\right)^{-1} \left(-n - \frac{d}{2} + 2\right)^{-1} \\ & \cdot 1\!\!1_{[T_1,T_2]^{2n}}(s_1, ..., s_{2n}) \\ & \cdot \left(-(T_2 - u)^{-n-\frac{d}{2}+2} + (v - u)^{-n-\frac{d}{2}+2} + (T_2 - T_1)^{-n-\frac{d}{2}+2} - (v - T_1)^{-n-\frac{d}{2}+2}\right) \end{aligned}$$

com $u := \min\{s_1, ..., s_{2n}\}$ e $v := \max\{s_1, ..., s_{2n}\}$. Todos os restantes kernels $F_{\vec{n}}^{T_1,T_2}$ são nulos.

Observação 3.3.3 *Ao longo de toda a tese, $v(s)$ e $u(s)$, com $s = (s_1, ..., s_n)$, representarão $\max\limits_{1 \leq i \leq n} s_i$ e $\min\limits_{1 \leq i \leq n} s_i$, respectivamente. Sempre que não haja* *perigo de confusão, em lugar de $v(s)$ (respectivamente, $u(s)$) usaremos simplesmente v (respectivamente, u). Observamos, ainda, que quando temos apenas uma variável ter-se-á, obviamente, $v = u = s$.*

Para facilitar a escrita usaremos as notações:

$$C_{2n} := (-1)^n \left((2\pi)^{\frac{d}{2}} 2^n n!\right)^{-1} \left(n + \frac{d}{2} - 1\right)^{-1} \left(n + \frac{d}{2} - 2\right)^{-1} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} R \ : \ &= \mathbb{1}_{[T_1,T_2]^{2n}} (s_1, ..., s_{2n}) \\ &\cdot \left(-(T_2 - u)^{-n-\frac{d}{2}+2} + (v-u)^{-n-\frac{d}{2}+2} + (T_2 - T_1)^{-n-\frac{d}{2}+2} - (v - T_1)^{-n-\frac{d}{2}+2}\right) \end{aligned}$$

Um dos nossos grandes objectivos reside no estudo do quadrado dos tempos locais, pelo que, numa primeira análise, se estudam as propriedades L^p dos *kernels* dos tempos locais. É válido o seguinte resultado.

Proposição 3.3.4 *Com $\varkappa = n + \frac{d}{2} - 2$, tem-se:*

i) $\mathbb{1}_{[T_1,T_2]^{2n}} . (T_2 - T_1)^{-\varkappa} \in L^p(\mathbb{R}^{2n})$, $p > 0$;

ii) $\mathbb{1}_{[T_1,T_2]^{2n}} . (v - T_1)^{-\varkappa} \in L^p(\mathbb{R}^{2n})$ *sse* $p < \frac{2n}{\varkappa}$;

iii) $\mathbb{1}_{[T_1,T_2]^{2n}} . (T_2 - u)^{-\varkappa} \in L^p(\mathbb{R}^{2n})$ *sse* $d < \frac{2n}{\varkappa}$;

iv) para d igual a 1 ou 2 e $n \geq 2$ ou $d > 2$ temos

$$\begin{aligned} 0 \ &\leq \ R \leq \mathbb{1}_{[T_1,T_2]^{2n}} . \left((v-u)^{-\varkappa} - (T_2 - T_1)^{-\varkappa}\right) \\ &\leq \ \mathbb{1}_{[T_1,T_2]^{2n}} . (v-u)^{-\varkappa} ; \end{aligned}$$

v) $\mathbb{1}_{[T_1,T_2]^{2n}} . (v - u)^{-\varkappa} \in L^p(\mathbb{R}^{2n})$ *sse* $p < \frac{2n-1}{\varkappa}$. *Logo, para $d \geq 3$,* $\mathbb{1}_{[T_1,T_2]^{2n}} . (v-u)^{-\varkappa} \notin L^2(\mathbb{R}^{2n})$.

Prova Seja $\Delta_{2n} = \{(s_1, ..., s_{2n}) : T_1 \leq s_1 \leq s_2 \leq ... \leq s_{2n} \leq T_2\}$.

i) É óbvio que $\mathbb{1}_{[T_1,T_2]^{2n}} . (T_2 - T_1)^{-\varkappa} \in L^2(\mathbb{R}^{2n})$, pois trata-se duma função simples que só não é nula num intervalo limitado.

ii) Vejamos para que valores de p temos $\mathbb{1}_{[T_1,T_2]^{2n}} \cdot (v - T_1)^{-\varkappa} \in L^p(\mathbb{R}^{2n})$.

$$
\begin{aligned}
& \left|\mathbb{1}_{[T_1,T_2]^{2n}}.\,(v-T_1)^{-\varkappa}\right|^p_{L^p} \\
= & \int\cdots\int_{[T_1,T_2]^{2n}} d^{2n}\mathrm{s}\,(v-T_1)^{-\varkappa p} \\
= & (2n)!\int_{\Delta_{2n}} d^{2n}\mathrm{s}\,(v-T_1)^{-\varkappa p} \\
= & (2n)!\int_{T_1}^{T_2} dv\,(v-T_1)^{-\varkappa p}\int_{T_1}^{v} ds_{2n-1}\int_{T_1}^{s_{2n-1}} ds_{2n-2}\cdots\int_{T_1}^{s_2} ds_1 \\
= & \frac{(2n)!}{(2n-2)!}\int_{T_1}^{T_2} dv\,(v-T_1)^{-\varkappa p}\int_{T_1}^{v} ds\,(v-s)^{2n-2} \\
= & 2n\int_{T_1}^{T_2} dv\,(v-T_1)^{-(\varkappa p+1-2n)}.
\end{aligned}
$$

Para que o integral seja convergente é necessário e suficiente que

$$\varkappa p+1-2n<1,$$

ou seja, que $p<\dfrac{2n}{\varkappa}$. Note-se que

$$\mathbb{1}_{[T_1,T_2]^{2n}}.(v-T_1)^{-\varkappa}\in L^2(\mathbb{R}^{2n})$$

se, e só se, $d<4$.

iii) Relativamente a $\mathbb{1}_{[T_1,T_2]^{2n}}.\,(T_2-u)^{-\varkappa}$, temos

$$
\begin{aligned}
& \left|\mathbb{1}_{[T_1,T_2]^{2n}}.\,(T_2-u)^{-\varkappa}\right|^p_{L^p} \\
= & \int\cdots\int_{[T_1,T_2]^{2n}} d^{2n}\mathrm{s}\,(T_2-u)^{-\varkappa p} \\
= & (2n)!\int_{\Delta_{2n}} d^{2n}\mathrm{s}\,(T_2-u)^{-\varkappa p} \\
= & (2n)!\int_{T_1}^{T_2} du\,(T_2-u)^{-\varkappa p}\int_{\mathrm{u}}^{T_2} ds_2\cdots\int_{s_{2n-1}}^{T_2} ds_{2n}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (2n)! \int_{T_1}^{T_2} du\,(T_2-u)^{-\varkappa p}\,(-)^{2n-1}\int_{T_2}^{u} ds_2 \cdots \int_{T_2}^{s_{2n-1}} ds_{2n} \\
&= \frac{(2n)!}{(2n-2)!}\int_{T_1}^{T_2} du\,(T_2-u)^{-\varkappa p}\int_{u}^{T_2} ds\,(u-s)^{2n-2} \\
&= 2n\int_{T_1}^{T_2} du\,(T_2-u)^{-(\varkappa p+1-2n)} .
\end{aligned}
$$

Para que o integral seja convergente é necessário e suficiente que

$$\varkappa p+1-2n<1,$$

ou seja, que $p<\dfrac{2n}{\varkappa}$. Podemos, em particular, concluir que

$$\mathbb{1}_{[T_1,T_2]^{2n}}.\,(T_2-u)^{-\varkappa}\in L^2(\mathbb{R}^{2n}),$$

se, e só se, $d<4$.

iv) Das relações $T_2-u\leq T_2-T_1$ e $v-T_1\leq T_2-T_1$, atendendo a que $\varkappa$ é positivo, resulta

$$R\leq \mathbb{1}_{[T_1,T_2]^{2n}}.\left((v-u)^{-\varkappa}-(T_2-T_1)^{-\varkappa}\right)\leq \mathbb{1}_{[T_1,T_2]^{2n}}.\,(v-u)^{-\varkappa} .$$

Por outro lado designando $g(v)=R$, tem-se

$$g'(v)=-\varkappa\mathbb{1}_{[T_1,T_2]^{2n}}.\left((v-u)^{-\varkappa-1}-(v-T_1)^{-\varkappa-1}\right)\leq 0$$

pelo que, quando $\varkappa>0$, g é decrescente o que permite concluir iv).

v) Temos

$$
\begin{aligned}
\left|\mathbb{1}_{[T_1,T_2]^{2n}}.\,(v-u)^{-\varkappa}\right|_{L^p}^{p} &= \int\cdots\int_{[T_1,T_2]^{2n}} d^{2n}\mathrm{s}\,(v-u)^{-\varkappa p} \\
&= (2n)!\int_{T_1}^{T_2} dv\int_{T_1}^{v} ds_{2n-1}\cdots\int_{T_1}^{s_3} ds_2\int_{T_1}^{s_2} du\,(v-u)^{-\varkappa p} \\
&= (2n)!\int_{T_1}^{T_2} dv\frac{1}{(2n-2)!}\int_{T_1}^{v} du\,(v-u)^{-\varkappa p}\,(v-u)^{2n-2} \\
&= 2n\,(2n-1)\int_{T_1}^{T_2} dv\int_{T_1}^{v} du\,(v-u)^{-\varkappa p+2n-2}
\end{aligned}
$$

Para que $\mathbb{1}_{[T_1,T_2]^{2n}}.(v-u)^{-\varkappa} \in L^p(\mathbb{R}^{2n})$ é necessário e suficiente que

$$\varkappa p - 2n + 2 < 1,$$

o que é equivalente a

$$p < \frac{2n-1}{\varkappa}.$$

Assim, para $d \geq 3$, $\mathbb{1}_{[T_1,T_2]^{2n}}.(v-u)^{-\varkappa} \in L^p(\mathbb{R}^{2n})$ se, e só se, $p < 2$. ∎

Observe-se que o termo mais singular do *kernel* é o que possui o factor $(v-u)^{-\varkappa}$, pois u e v estão no intervalo $[T_1, T_2]$ e $-\varkappa$ é negativo quando $d \geq 2$ $(n > 1)$.

No que respeita à sucessão de aproximações L_ε, tem-se a seguinte expansão em caos, a qual consideraremos aqui só para $d \geq 3$, quando se toma para domínio de integração o conjunto $\Delta_t = \{(t_1, t_2) : 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t\}$ onde $t \in \mathbb{R}^+$.

Proposição 3.3.5 *(cf. [FHSW97, Teorema 3]) Para cada* $\varepsilon > 0$, L_ε *tem kernels* $\mathbf{F}_{\varepsilon,\vec{n}}$ *dados por*

$$\begin{aligned} &\mathbf{F}_{\varepsilon,\vec{n}}(s_1, s_2, ..., s_n) &(3.4)\\ &= (-1)^{\frac{n}{2}} \left(\varkappa(\varkappa+1)(2\pi)^{\frac{d}{2}} 2^{\frac{n}{2}} \frac{\vec{n}}{2}!\right)^{-1} \Theta(u)\Theta(t-v) \\ &.\left((v-u+\varepsilon)^{-\varkappa} + (t+\varepsilon)^{-\varkappa} - (v+\varepsilon)^{-\varkappa} - (t-u+\varepsilon)^{-\varkappa}\right) \end{aligned}$$

se todos os n_i *forem pares, e zero nos restantes casos com* $\varkappa := \frac{n+d}{2} - 2$ *e onde* Θ *é a função de Heaviside. Para* $2N > d-2$, *tem-se ainda que* $L_\varepsilon^{(2N)}$ *converge fortemente para* $L^{(2N)}$ *quando* $\varepsilon \to 0^+$.

Cada termo não nulo da expansão em caos pode, pois, ser entendido como a soma de quatro parcelas onde a primeira, que desempenhará um papel fundamental ao longo de todo o capítulo seguinte, é

$$M_t(d, \vec{n}, \varepsilon) := \iint_{[0,t]^n} d^n\mathrm{s}\,(v-u+\varepsilon)^{-\varkappa} : \omega^{\otimes\vec{n}}(\mathrm{s}) : . \tag{3.5}$$

Do facto de termos $M_t(d, \vec{n}, \varepsilon) \in (L^2)$ conclui-se que $M_t(d, \vec{n}, \varepsilon) \in \mathcal{G}^{-1}$. O Teorema 2.8.5 (fórmula de Clark-Ocone) garante-nos então que

$$M_t(d, \vec{n}, \varepsilon) = \mathbb{E}(M_t(d, \vec{n}, \varepsilon)) + \mathcal{I}(\varphi)$$

com $\varphi_i(\tau) = \Gamma(1\!\!1_{[0,\tau]})\partial_\tau^i M_t(d, \vec{n}, \varepsilon)$.

Temos

$$\begin{aligned}
\varphi_i(\tau) &= \Gamma(1\!\!1_{[0,\tau]})\partial_\tau^i M_t(d, \vec{n}, \varepsilon) \qquad (3.6)\\
&= \Gamma(1\!\!1_{[0,\tau]})\partial_\tau^i \left(\iint_{[0,t]^n} d^n\mathrm{s}\, (v - u + \varepsilon)^{-\varkappa} : \boldsymbol{\omega}^{\otimes\vec{n}}(s) : \right)
\end{aligned}$$

$$= \Gamma(1\!\!1_{[0,\tau]}) \iint_{[0,t]^n} \frac{d^n\mathrm{s}}{(v-u+\varepsilon)^{\varkappa}} \bigotimes_{j=1, j\neq i}^{d} : \omega_j^{\otimes n_j}(s_1^j, ..., s_{n_j}^j) : \otimes \partial_\tau^i \left(: \omega_i^{\otimes n_i}(s_1^i, ..., s_{n_i}^i) : \right)$$

$$= n_i\Gamma(1\!\!1_{[0,\tau]}) \iint_{[0,t]^n} \frac{d^n\mathrm{s}}{(v-u+\varepsilon)^{\varkappa}} \bigotimes_{j=1, j\neq i}^{d} : \omega_j^{\otimes n_j}(s_1^j, ..., s_{n_j}^j) : \otimes \left(\left(: \omega_i^{\otimes(n_i-1)} : \hat{\otimes}\delta_\tau^i \right)(s_1^i, ..., s_{n_i}^i) \right)$$

pois dadas as distribuições $x,\, y \in S_d'$ e $n \in \mathbb{N}$, sabemos que

$$D_y : x^{\otimes n} := n : x^{\otimes n-1} : \hat{\otimes} y.$$

Por outro lado, é também conhecido que, com x e y nas condições anteriores e $\eta \in S_d$,

$$\langle : x^{\otimes n-1} : \hat{\otimes} y, \eta \rangle = \langle : x^{\otimes n-1} :, \langle y, \eta \rangle \rangle.$$

Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned}
\varphi_i(\tau) &= n_i\Gamma(1\!\!1_{[0,\tau]}) \langle : \boldsymbol{\omega}^{\otimes(\vec{n}-\vec{\delta}_i)} : \hat{\otimes}\delta_\tau^i, (v-u+\varepsilon)^{-\varkappa} \rangle \\
&= n_i\Gamma(1\!\!1_{[0,\tau]}) \langle : \boldsymbol{\omega}^{\otimes(\vec{n}-\vec{\delta}_i)} :, \langle \delta_\tau^i, (v-u+\varepsilon)^{-\varkappa} \rangle \rangle \\
&= n_i\Gamma(1\!\!1_{[0,\tau]}) \langle : \boldsymbol{\omega}^{\otimes(\vec{n}-\vec{\delta}_i)} :, (v-u+\varepsilon)^{-\varkappa}\, 1\!\!1_{[0,t]^{n-1}} \rangle \\
&= n_i \langle : \boldsymbol{\omega}^{\otimes(\vec{n}-\vec{\delta}_i)} :, (v-u+\varepsilon)^{-\varkappa}\, 1\!\!1_{[0,t]^{n-1}} 1\!\!1_{[0,\tau]^{n-1}} \rangle \\
&= n_i \langle : \boldsymbol{\omega}^{\otimes(\vec{n}-\vec{\delta}_i)} :, (\tau-u+\varepsilon)^{-\varkappa}\, 1\!\!1_{[0,\tau]^{n-1}} \rangle
\end{aligned}$$

donde resulta, atendendo a que $\mathbb{E}(M_t(d,\vec{n},\varepsilon)) = 0$,

$$\begin{aligned} M_t(d,\vec{n},\varepsilon) &= \mathcal{I}(\varphi) = \sum_{i=1}^{d} \mathcal{I}_i(\varphi_i) \\ &= \sum_{i=1}^{d} n_i \mathcal{I}_i \left(\int \cdots \int_{[0,\tau]^{n-1}} d^{n-1}\mathrm{s}\, (\tau - u + \varepsilon)^{-\varkappa} : \boldsymbol{\omega}^{\otimes(\vec{n}-\vec{\delta}_i)}(\mathrm{s}) : \right) \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{d} n_i \int_0^t dB_i(\tau) \int_{[0,\tau]^{n-1}} \cdots \int d^{n-1}\mathrm{s}\, (\tau - u + \varepsilon)^{-\varkappa} : \boldsymbol{\omega}^{\otimes(\vec{n}-\vec{\delta}_i)}(\mathrm{s}) : \qquad (3.7)$$

$$=: \sum_{i=1}^{d} n_i \int_0^t dB_i(\tau)\, m_i(\tau) \qquad (3.8)$$

$$=: \sum_{i=1}^{d} M_{i,t}. \qquad (3.9)$$

Conclui-se, deste modo, que

$$\varphi_i = n_i \int_{[0,\tau]^{n-1}} \cdots \int d^{n-1}\mathrm{s}\, (\tau - u + \varepsilon)^{-\varkappa} : \boldsymbol{\omega}^{\otimes(\vec{n}-\vec{\delta}_i)}(\mathrm{s}) : .$$

As restantes parcelas de cada termo da decomposição em caos apresentados na Proposição 3.3.5 representar-se-ão por

$$N_t(d,\vec{n},\varepsilon) := \int_{[0,t]^n} \cdots \int d^n\mathrm{s} \left((t+\varepsilon)^{-\varkappa} - (v+\varepsilon)^{-\varkappa} - (t-u+\varepsilon)^{-\varkappa} \right) : \boldsymbol{\omega}^{\otimes\vec{n}}(\mathrm{s}) : . \qquad (3.10)$$

Todos os processos $\{M_{i,t}\}$, $\{M_t\}$ e $\{N_t\}$ são contínuos.

Definição 3.3.6 *Representaremos o termo de $\vec{n}$-ésima ordem da expansão do tempo local L_ε renormalizado por*

$$K_t(d,\vec{n},\varepsilon) := (-1)^{\frac{n}{2}} \left(\varkappa(\varkappa+1)(2\pi)^{\frac{d}{2}} 2^{\frac{n}{2}} \frac{\vec{n}}{2}! \right)^{-1} \left(M_t(d,\vec{n},\varepsilon) + N_t(d,\vec{n},\varepsilon) \right). \qquad (3.11)$$

3.4 Renormalização

Observação 3.4.1 *Uma observação chave é a de que $M_t(d,\vec{n},\varepsilon)$ é mais singular que $N_t(d,\vec{n},\varepsilon)$, sempre que $\varkappa$ é positivo.*

A observação anterior permite-nos concluir que as divergências dos tempos locais estão associadas ao termo $M_t(d,\vec{n},\varepsilon)$, pelo que a constante de renormalização estar-lhe-á directamente relacionada.

Suponhamos que $r(\varepsilon)$ é tal que $r^2(\varepsilon)\left\|M_t(d,\vec{n},\varepsilon)\right\|^2_{(L^2)}$ tem limite finito quando ε tende para zero. Vejamos que usando $r(\varepsilon)$ podemos definir uma renormalização para L.

Considerando

$$L_{\varepsilon,\mathrm{ren}} := r(\varepsilon)\left(L_\varepsilon - \mathbb{E}(L_\varepsilon)\right) \tag{3.12}$$

resultará

$$\left\|L^2_{\varepsilon,\mathrm{ren}}\right\|^2_{(L^2)} = r^2(\varepsilon)\sum_{\vec{n}=0}^{\infty}\vec{n}!\left|\mathbf{F}_{\varepsilon,\vec{n}}(s_1,s_2,\dots,s_n)\right|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

$$\begin{aligned}
&= r^2(\varepsilon)\sum_{\vec{n}=0}^{\infty}C_n^2\vec{n}!\left(\left|(v-u+\varepsilon)^{-\varkappa}+(t+\varepsilon)^{-\varkappa}-(v+\varepsilon)^{-\varkappa}-(t-u+\varepsilon)^{-\varkappa}\right|^2_{L^2([0,t]^n)}\right)\\
&\leq 16r^2(\varepsilon)\sum_{\vec{n}=0}^{\infty}C_n^2\vec{n}!\left|(v-u+\varepsilon)^{-\varkappa}\right|^2_{L^2([0,t]^n)}\\
&= 16r^2(\varepsilon)\left\|\sum_{\vec{n}=0}^{\infty}M_t(d,\vec{n},\varepsilon)\right\|^2_{(L^2)}
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Encontraremos um tal $r(\varepsilon) = r(\varepsilon,d)$ que dependerá exclusivamente da variável ε e da dimensão d, o qual será apresentado já no início do próximo capítulo. O $r(\varepsilon,d)$ que designaremos por $r(\varepsilon)$, ou simplesmente por r, é determinado pela ordem da parcela mais singular das normas de todos os *kernels* da decomposição em caos dos tempos locais das auto-intersecções.

Capítulo 4

A expansão em caos

Varadhan, em 1969, veja-se [Var69], mostrou que, para $d = 2$, os tempos locais das auto-intersecções centradas do movimento Browniano, num ponto $\vec{y}$ convergem em média quadrática quando $\vec{y} \to 0$. O resultado anterior, conhecido por renormalização de Varadhan, foi abordado mais recentemente de diferentes formas, veja-se, por exemplo, [Ros86b], [LG85] e [Yor85a].

Em 1985, Yor ([Yor85b]) estabeleceu uma extensão do resultado de Varadhan para $d = 3$.

Mostraremos neste capítulo que, quando $d \geq 3$, cada termo da decomposição em caos dos tempos locais das auto-intersecções do movimento Browniano converge para um movimento Browniano independente do original. Mais, a termos distintos da decomposição correspondem limites que são movimentos Brownianos independentes. Começaremos por estabelecer diversos lemas que serão necessários para a prova de tais resultados.

4.1 Convergência de cada termo da expansão

4.1.1 Teoremas principais

Começamos por observar que $M_{i,t}(d, \vec{n}, \varepsilon)$ e $M_t(d, \vec{n}, \varepsilon)$, definidos em (3.9) e (3.5) respectivamente, são *martingales*.

Efectivamente, de (3.9) tem-se

$$M_{i,t}(d, \vec{n}, \varepsilon) = n_i \int_0^t dB_i(v) m_i(v)$$

tendo–se, portanto, $M_{i,t}(d,\vec{n},\varepsilon)$ na forma de um integral estocástico onde a função integranda não depende do tempo t, sendo a dependência deste parâmetro exclusiva do limite superior de integração, o que nos permite concluir que se trata de um *martingale* (veja-se [Hid80], [DPV97] e [KS91]).

Que $M_t(d,\vec{n},\varepsilon)$ é um *martingale* é agora imediato atendendo a que é soma de *martingales*.

O facto de $M_{i,t}(d,\vec{n},\varepsilon)$ e $M_t(d,\vec{n},\varepsilon)$ serem *martingales* desempenhará um papel determinante na forma como estabeleceremos os teoremas que passamos a enunciar:

Teorema 4.1.1 *Para $d \geq 3$ e cada $\varepsilon > 0$ considere-se*

$$r(\varepsilon) := \begin{cases} |\ln \varepsilon|^{-\frac{1}{2}} & se\ d = 3 \\ \varepsilon^{\frac{d-3}{2}} & se\ d > 3 \end{cases} \tag{4.1}$$

e os martingales $M_{i,t}(d,\vec{n},\varepsilon)$ renormalizados definidos por $r(\varepsilon)\,M_{i,t}$. Para cada $i = 1,...,d$, $r(\varepsilon)\,M_{i,t}(d,\vec{n},\varepsilon)$ converge em lei para o movimeno Browniano β_i, isto é, convergem em lei para movimentos Brownianos independentes β_i:

$$r(\varepsilon)M_{i,t} \underset{\varepsilon\to 0^+}{\overset{\mathcal{L}}{\longrightarrow}} \sqrt{\frac{n_i}{n}}k_n\beta_i \tag{4.2}$$

onde

$$k_n^2 := \frac{\vec{n}!n!}{(n+d-5)!}\begin{cases} 1 & se\ d = 3 \\ \Gamma(d-3) & se\ d > 3 \end{cases}. \tag{4.3}$$

Mais ainda, os movimentos Brownianos β_i, $i = 1,...,d$ assim obtidos são independentes.

Teorema 4.1.2 *Para $d \geq 3$, os termos de $\vec{n}$-ésima ordem da decomposição em caos do tempo local renormalizado convergem em lei para um movimento Browniano β isto é,*

$$rK_t(d,\vec{n},\varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0^+}{\overset{\mathcal{L}}{\longrightarrow}} c_{\vec{n},d}k_n\beta_{\vec{n}} \tag{4.4}$$

com

$$c_{\vec{n},d}^2 := (2\pi)^{-d}\,2^{-n}\left(\left(\frac{n+d}{2}-1\right)\left(\frac{n+d}{2}-2\right)\frac{\vec{n}}{2}!\right)^{-2} \tag{4.5}$$

sendo k_n e $r(\varepsilon)$ os definidos em (4.3) e (4.1), respectivamente.

4.1.2 Provas

Lema 4.1.3 *Para $i \in \{1, 2, ..., d\}$ os martingales $M_{i,t}$ são ortogonais.*

Prova Já sabemos que se tratam de *martingales*. Estudemos a ortogonalidade. A partir da expressão (3.7) temos

$$\mathbb{E}\left(M_{i,t}M_{j,t}\right)$$

$$= n_i n_j \mathbb{E}\left(\int_0^t dB_i\left(\tau\right) \iint_{[0,\tau]^{n-1}} d^{n-1}\mathrm{s}\left(\tau - u + \varepsilon\right)^{-\varkappa} \int_0^t dB_j\left(\tau\right)\right.$$

$$\left.\iint_{[0,\tau]^{n-1}} d^{n-1}\mathrm{s}'\left(\tau - u' + \varepsilon\right)^{-\varkappa} : \omega^{\otimes\left(\vec{n}-\vec{\delta}_i\right)}\left(\mathrm{s}\right) : . : \omega^{\otimes\left(\vec{n}-\vec{\delta}_j\right)}\left(\mathrm{s}'\right) :\right).$$

pelo que, aplicando a Isometria de Itô obtém-se a seguinte representação para $\mathbb{E}\left(M_{i,t}M_{j,t}\right)$

$$n_i n_j \int_0^t d\tau \mathbb{E}\left(\iint_{[0,\tau]^{n-1}} d^{n-1}\mathrm{s}\left(\tau - u + \varepsilon\right)^{-\varkappa} \iint_{[0,\tau]^{n-1}} d^{n-1}\mathrm{s}'\left(\tau - u' + \varepsilon\right)^{-\varkappa}\right.$$

$$\left. . : \omega^{\otimes\left(\vec{n}-\vec{\delta}_i\right)}\left(\mathrm{s}\right) : . : \omega^{\otimes\left(\vec{n}-\vec{\delta}_j\right)}\left(\mathrm{s}'\right) :\right).$$

Por $: \omega^{\otimes\vec{n}}\left(.\right) :$ e $: \omega^{\otimes\vec{m}}\left(.\right) :$ serem ortogonais sempre que $\vec{n} \neq \vec{m}$ (veja-se, por exemplo, [HKPS93]) conclui-se a ortogonalidade dos processos $M_{i,t}$ e $M_{j,t}$ sempre que $i \neq j$.■

O comportamento de $M_{i,t}$, quando $\varepsilon \to 0^+$, é estudado no lema seguinte.

Lema 4.1.4 *Quando $\varepsilon \to 0^+$,*

$$\left\|M_{k,t}\right\|^2_{(L^2)} = \frac{n_k \vec{n}!\,(n-1)!}{(n+d-5)!}\left(t + o\left(1\right)\right)\begin{cases} \left|\ln \varepsilon\right| & se\ d = 3 \\ \Gamma(d-3)\varepsilon^{3-d} & se\ d > 3 \end{cases} \tag{4.6}$$

Prova De (3.9) e de (3.7) resulta que

$$\left\|M_{k,t}\right\|^2_{(L^2)}$$

$$= \mathbb{E}\left(\left(\int_0^t dB_k(\tau) n_k \iint_{[0,\tau]^{n-1}} d^{n-1}s \, (\tau - u + \varepsilon)^{-\varkappa} : \omega^{\otimes(\vec{n}-\vec{\delta}_k)}(s) :\right)^2\right)$$

$$= n_k^2 \int_0^t d\tau \mathbb{E}\left(\left(\iint_{[0,\tau]^{n-1}} d^{n-1}s \, (\tau - u + \varepsilon)^{-\varkappa} : \omega^{\otimes(\vec{n}-\vec{\delta}_k)}(s) :\right)^2\right).$$

Atendendo à Proposição 2.5.1 obtém-se

$$\begin{aligned} \|M_{k,t}\|^2_{(L^2)} &= n_k^2 \int_0^t n_1!...n_{k-1}! \, (n_k - 1)! n_{k+1}!...n_d! \left|(\tau - u + \varepsilon)^{-\varkappa}\right|^2_{L^2\left([0,\tau]^{n-1}\right)} d\tau \\ &= n_k \vec{n}! \int_0^t \left|(\tau - u + \varepsilon)^{-\varkappa}\right|^2_{L^2\left([0,\tau]^{n-1}\right)} d\tau. \end{aligned}$$

Assim,

$$\|M_{k,t}\|^2_{(L^2)} = \frac{n_k \vec{n}!}{n} \left|(v - u + \varepsilon)^{-\varkappa}\right|^2_{L^2([0,t]^n)}. \tag{4.7}$$

Tem-se

$$\left|(v - u + \varepsilon)^{-\varkappa}\right|^2_{L^2([0,t]^n)} = \iint\limits_{[0,t]^n} d^n\mathrm{s} \, (v - u + \varepsilon)^{-2\varkappa} \tag{4.8}$$

$$= n(n-1) \int_0^t dv \int_0^v du \frac{(v-u)^{n-2}}{(v - u + \varepsilon)^{2\varkappa}} \tag{4.9}$$

$$= n(n-1) \varepsilon^{3-d} \int_0^t dv \int_0^{\frac{v}{\varepsilon}} dx \frac{x^{n-2}}{(x+1)^{n+d-4}}, \tag{4.10}$$

quando se procede à substituição $u = v - \varepsilon x$.

Para $d > 3$, através da fórmula 3.194.3. de [GR80], o integral

$$\int_0^\infty dx \frac{x^{n-2}}{(x+1)^{n+d-4}} \tag{4.11}$$

toma a forma

$$B(n-1, d-3),$$

onde B representa a função beta, cuja forma integral é dada por

$$\int_0^1 t^{n-2} (1-t)^{d-4} \, dt, \tag{4.12}$$

veja-se, por exemplo, fórmula 8.380.1. de [GR80]. Por indução na variável n e para $n \geq 2$ prova-se que (4.12) é igual a

$$\frac{(d-4)!}{(n-1)\,n\ldots(n+d-5)}$$

pelo que

$$\left|(v-u+\varepsilon)^{-\varkappa}\right|^2_{L^2([0,t]^n)} = \frac{n!\Gamma(d-3)\varepsilon^{3-d}}{(n+d-5)!}\left(t+o\left(1\right)\right). \tag{4.13}$$

Relativamente a $d=3$, a partir de (4.9) resulta que

$$\left|(v-u+\varepsilon)^{-\varkappa}\right|^2_{L^2([0,t]^n)} = n\,(n-1)\int_0^t dv\int_0^v du\frac{(v-u)^{n-2}}{(v-u+\varepsilon)^{n-1}}$$

pelo que considerando a substituição

$$s = v-u$$

tem-se

$$\left|(v-u+\varepsilon)^{-\varkappa}\right|^2_{L^2([0,t]^n)} = n\,(n-1)\int_0^t dv\int_0^v ds\frac{s^{n-2}}{(s+\varepsilon)^{n-1}}.$$

Considerando nova substituição:

$$r = s+\varepsilon,$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\left|(v-u+\varepsilon)^{-\varkappa}\right|^2_{L^2([0,t]^n)} &= n\,(n-1)\int_0^t dv\int_\varepsilon^{v+\varepsilon} dr\frac{(r-\varepsilon)^{n-2}}{r^{n-1}} \\
&= n\,(n-1)\int_0^t dv\int_\varepsilon^{v+\varepsilon} dr\sum_{j=0}^{n-2}\binom{n-2}{j}(-\varepsilon)^j\,r^{-1-j} \\
&= n\,(n-1)\int_0^t dv\int_\varepsilon^{v+\varepsilon} dr\left(\frac{1}{r}+\sum_{j=1}^{n-2}\binom{n-2}{j}(-\varepsilon)^j\,r^{-1-j}\right)
\end{aligned}$$

$$= \; n\,(n-1)\int_0^t dv\left(\ln\frac{v+\varepsilon}{\varepsilon}+\sum_{j=1}^{n-2}\binom{n-2}{j}\frac{\varepsilon^j}{j}(-1)^{j+1}\left((v+\varepsilon)^{-j}-\varepsilon^{-j}\right)\right)$$

$$= n\,(n-1)\left((t+\varepsilon\,(n-1))\ln(t+\varepsilon)-(t+\varepsilon\,(n-1))\ln\varepsilon - t\,(n-1)+\right.$$

$$\left.+\sum_{j=2}^{n-2}\binom{n-2}{j}\frac{(-1)^{j+1}}{j}\left(\frac{\varepsilon^j}{(1-j)\,(t+\varepsilon)^{j-1}}-\frac{\varepsilon}{1-j}-t\right)\right).$$

Assim, vemos que (para $d=3$),

$$\left|(v-u+\varepsilon)^{-\varkappa}\right|^2_{L^2([0,t]^n)} = |\ln\varepsilon|\,n\,(n-1)\,(t+o\,(1)) \tag{4.14}$$

$$= \frac{n!\,|\ln\varepsilon|\,(t+o\,(1))}{(n+d-5)!}. \tag{4.15}$$

A conclusão da prova resulta agora facilmente de (4.7), (4.13) e de (4.15).■

Na sequência vamos estudar a convergência em lei destes *martingales* renormalizados. Para tal, o Teorema VIII.3.11 de [JS87] garante-nos que é equivalente mostrar a convergência das respectivas características. Uma vez que os processos $M_{i,.}$ são contínuos, tal reduz-se a provar a convergência em probabilidade de $\langle r(\varepsilon)M_{i,.}(d,\vec{n},\varepsilon), r(\varepsilon)M_{j,.}(d,\vec{n},\varepsilon)\rangle_t$ quando $\varepsilon\to 0^+$. Trataremos desta convergência na Proposição 4.1.9 cujas condições para o estabelecimento do seu enunciado serão desde já preparadas.

Através da Proposição 3.2.17 de [KS91], usando (3.8), o facto de B_i e B_j serem ortogonais sempre que $i\neq j$ e de $\langle B_i\rangle_\tau=\tau$ podemos concluir que

$$\begin{aligned}\langle rM_{i,.}, rM_{j,.}\rangle_t &= r^2\left\langle\int_0^t dB_i(\tau)\,m_i(\tau)\,,\int_0^t dB_j(\tau)\,m_j(\tau)\right\rangle_t\\ &= r^2\int_0^t m_i(\tau)\,m_j(\tau)\,d\langle B_i,B_j\rangle_\tau\\ &= r^2\delta_{ij}\int_0^t d\tau\,(m_i(\tau))^2.\end{aligned} \tag{4.16}$$

Precisamos então estimar

$$\int_0^t d\tau\,(m_i(\tau))^2 := \sum_{\vec{m},m=0}^{2n-2}\left\langle :\omega^{\otimes\vec{m}}:, G^{(i)}_{\vec{m}}\right\rangle$$

onde $G^{(i)}_{\vec{m}}$ representa o *kernel* associado ao vector $\vec{m}$. Recorrendo a (4.16) vemos que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\langle rM_{i,.}, rM_{j,.}\rangle_t\right) &= \delta_{ij} r^2(\varepsilon)\mathbb{E}\left(\langle M_{i,.}\rangle_t\right)\\ &= \delta_{ij} r^2(\varepsilon)\mathbb{E}\left(M^2_{i,t}\right).\end{aligned}$$

Usando a ortogonalidade dos *martingales* $M_{i,t}$ e (4.7) obtemos

$$\mathbb{E}\left(\langle rM_{i,.}, rM_{j,.}\rangle_t\right) = \delta_{ij} r^2 \frac{n_j}{n}\vec{n}! \left\|(v-u+\varepsilon)^{-\varkappa}\right\|^2_{L^2([0,t]^n)}.$$

Mais precisamente,

$$\mathbb{E}\left(\langle rM_{i,.}, rM_{j,.}\rangle_t\right) = \delta_{ij}\frac{n_i \vec{n}! n!}{n(n+d-5)!}\left(t+o(1)\right)\begin{cases} 1 & \text{se } d=3\\ \Gamma(d-3) & \text{se } d>3\end{cases} \tag{4.17}$$

para $r(\varepsilon)$ definido conforme (4.1).

Provaremos que todos os termos de ordem não nula, da decomposição em caos de $\langle rM_{i,.}(d,\vec{n},\varepsilon), rM_{j,.}(d,\vec{n},\varepsilon)\rangle_t$ convergem para zero, em média quadrática, quando ε tende para zero. Alargaremos tal resultado aos termos da decomposição em caos de

$$\langle rM_.(d,\vec{n},\varepsilon), rM_.(d,\vec{n}',\varepsilon)\rangle_t \tag{4.18}$$

para $\vec{n}$ e $\vec{n}'$ arbitrários.

Dados $\vec{n}$ e $\vec{n}'$ tem-se

$$\langle rM_.(d,\vec{n},\varepsilon), rM_.(d,\vec{n}',\varepsilon)\rangle_t = r^2\left\langle \sum_{j=1}^{d} M_{j,.}(d,\vec{n},\varepsilon), \sum_{i=1}^{d} M_{i,.}(d,\vec{n}',\varepsilon)\right\rangle_t$$

$$= r^2\sum_{i,j=1}^{d}\langle M_{j,.}(d,\vec{n},\varepsilon), M_{i,.}(d,\vec{n}',\varepsilon)\rangle_t$$

$$= r^2\sum_{i,j=1}^{d}\left\langle n_j\int_0^t dB_j(\tau)\, m_j(\tau), n_i'\int_0^t dB_i(\tau)\, m_i'(\tau)\right\rangle_t \tag{4.19}$$

$$= r^2\sum_{i,j=1}^{d} n_j n_i' \delta_{ij}\int_0^t m_j(\tau)\, m_i'(\tau)\, d\tau \tag{4.20}$$

$$= r^2\sum_{i=1}^{d} n_i n_i'\int_0^t m_i(\tau)\, m_i'(\tau)\, d\tau. \tag{4.21}$$

Assim,

$$\|\langle rM_{\cdot}(d,\vec{n},\varepsilon), rM_{\cdot}(d,\vec{n}',\varepsilon)\rangle_t\|_{(L^2)}^2 = \left\| r^2 \sum_{i=1}^{d} n_i n_i' \int_0^t m_i(\tau)\, m_i'(\tau)\, d\tau \right\|_{(L^2)}^2 \tag{4.22}$$

$$\leq c.r^4 \sum_{i=1}^{d} n_i^2 n_i'^2 \left\| \int_0^t m_i(\tau)\, m_i'(\tau)\, d\tau \right\|_{(L^2)}^2 . \tag{4.23}$$

Ora,

$$\left\| \int_0^t m_i(\tau)\, m_i'(\tau)\, d\tau \right\|_{(L^2)}^2 = \sum_{\vec{p}=0}^{\infty} \vec{p}!\, \|G_{\vec{p}}\|_{L^2([0,t]^p)}^2$$

onde $G_{\vec{p}}$ representam os *kernels* de $\int_0^t m_i(\tau)\, m_i'(\tau)\, d\tau$. Atendendo a que existe apenas um número finito de $G_{\vec{p}}$ não nulos, basta-nos provar que, para todo o $p \in \mathbb{N}$, $\|G_{\vec{p}}\|_{L^2([0,t]^p)}^2$ tem limite zero quando $\varepsilon \to 0^+$.

Na decomposição em caos de $\int_0^t m_i(\tau)\, m_i'(\tau)\, d\tau$, o termo associado ao *kernel* de ordem mais elevada, eventualmente não nulo, é da forma

$$\int_0^t d\tau \int_0^\tau d^{n-1}\mathrm{s} \int_0^\tau d^{n'-1}\mathrm{s}' (\tau - u + \varepsilon)^{-\varkappa} (\tau - u' + \varepsilon)^{-\varkappa'} : \omega^{\otimes \vec{n} - \vec{\delta}_i} \otimes \omega^{\otimes \vec{n}' - \vec{\delta}_i} :,$$

veja-se a Proposição 2.5.3. Assim, o *kernel* de maior ordem depende de $n + n' - 2$ variáveis e é a simetrização de

$$G_{n,n'}(s_1, ..., s_{n-1}; s_1', ..., s_{n'-1}') := \int_0^t d\tau \Theta(\tau - v \vee v')(\tau - u + \varepsilon)^{-\varkappa}(\tau - u' + \varepsilon)^{-\varkappa'}$$

onde Θ é a função de Heaviside. Deste modo podemos representar o *kernel* de ordem mais elevada por

$$G_{\vec{n}+\vec{n}'-2\vec{\delta}_i}(s_1, ..., s_{n-1}; s_1', ..., s_{n'-1}') = Sym(G_{n,n'}(s_1, ..., s_{n-1}; s_1', ..., s_{n'-1}'))$$

onde $Sym(G_{n,n'})$ representa a simetrização de $G_{n,n'}$. Podemos ainda representar $G_{n,n'}(s_1, ..., s_{n-1}; s_1', ..., s_{n'-1}')$ por

$$\int_{v \vee v'}^t d\tau (\tau - u + \varepsilon)^{-\varkappa} (\tau - u' + \varepsilon)^{-\varkappa'}.$$

Tendo em vista a simplificação dos cálculos mais adiante, consideremos a decomposição

$$G_{n,n'} := G^{(1)}_{n,n'} + G^{(2)}_{n,n'} \tag{4.24}$$

onde $G^{(1)}_{n,n'} := \Theta(u'-u)G_{n,n'}$ e $G^{(2)}_{n,n'} := \Theta(u-u')G_{n,n'}$.

Faremos o controle dos termos da decomposição em caos de

$$\langle rM_{.}(d,\vec{n},\varepsilon), rM_{.}(d,\vec{n}',\varepsilon)\rangle_t$$

usando uma aproximação muito útil através da introdução da família de funções simétricas em cada um dos grupos de variáveis $(s_1,...,s_{n-1})$ e $(s'_1,...,s'_{n'-1})$:

$$\begin{aligned} &H_{n,n'}(s_1,...,s_{n-1};s'_1,...,s'_{n'-1};\varepsilon;d) \\ &:= H^{(1)}_{n,n'}(s_1,...,s_{n-1};s'_1,...,s'_{n'-1};\varepsilon;d) + H^{(2)}_{n,n'}(s_1,...,s_{n-1};s'_1,...,s'_{n'-1};\varepsilon;d) \end{aligned} \tag{4.25}$$

onde

$$H^{(1)}_{n,n'} := \frac{2}{n\wedge n'+d-6}\Theta(u'-u)(v\vee v'-u'+\varepsilon)^{-\frac{n'+d}{2}+3}(v\vee v'-u+\varepsilon)^{-\frac{n+d}{2}+2}$$

e

$$H^{(2)}_{n,n'} := \frac{2}{n\wedge n'+d-6}\Theta(u-u')(v\vee v'-u+\varepsilon)^{-\frac{n+d}{2}+3}(v\vee v'-u'+\varepsilon)^{-\frac{n'+d}{2}+2},$$

para $n,n' \geq 4$ ou $d>4$ (de modo a garantir que se tenha sempre pelo que teremos sempre $n\wedge n'+d-6>0$). As funções $H_{n,n'}$ desempenharão um papel decisivo, pois vão permitir-nos controlar, de forma razoavelmente simples, as normas de quase todos os *kernels* de $\int_0^t m_i(\tau)\, m'_i(\tau)\, d\tau$.

Vamos começar por determinar funções simétricas em cada grupo de variáveis $(s_1,...,s_{n-1})$ e $\left(s'_1,...,s'_{n'-1}\right)$ que majorem as funções $G_{n,n'}$. A expressão das majorações estará directamente relacionada com os valores absolutos dos parâmetros $\varkappa$ e $\varkappa'$. Assim, precisamos ter em atenção os casos:

1. $\varkappa>1$ e $\varkappa'>1$;

2. $\varkappa>1$ e $\varkappa'=1$;

3. $\varkappa>1$ e $\varkappa'<1$;

4. $\varkappa=1$ e $\varkappa'=1$;

5. $\varkappa = 1$ e $\varkappa' < 1$;

6. $\varkappa < 1$ e $\varkappa' < 1$;

7. $\varkappa = 1$ e $\varkappa' > 1$;

8. $\varkappa < 1$ e $\varkappa' > 1$;

9. $\varkappa < 1$ e $\varkappa' = 1$.

A forma de analisar os casos 7, 8 e 9 é idêntica à que irá ser adoptada para o estudo das situações 2, 3 e 5, respectivamente, tendo-se apenas que ter em conta a troca entre $\varkappa$ e $\varkappa'$.

Estabelecendo a relação entre os parâmetros $\varkappa$ e $\varkappa'$ e os parâmetros n, n'(números naturais pares) e d ($d \geq 3$) podemos estabelecer o seguinte:

Lema 4.1.5 *Para $G_{n,n'}$ e $H_{n,n'}$ introduzidos anteriormente tem-se:*

1. $0 \leq G_{n,n'} \leq H_{n,n'}$, *se* $n, n' \geq 4$ *ou* $d > 4$;

2. $0 \leq G_{n,2} \leq \frac{2}{n-2}(v \vee u' - u' + \varepsilon)^{-1}(v \vee u' - u + \varepsilon)^{-\frac{n}{2}+5}$, *se* $d = 4$ *e* $n \geq 4$;

3. $0 \leq G_{n,2} \leq \frac{2}{n+1}(v \vee u' - u' + \varepsilon)^{-\frac{1}{2}}(v \vee u' - u + \varepsilon)^{-\frac{n+3}{2}}$, *se* $d = 3$ *e* $n \geq 4$;

4. $0 \leq G_{2,2} \leq (u \vee u' - u \wedge u' + \varepsilon)^{-1} |\ln \varepsilon|$, *se* $d = 4$;

5. $0 \leq G_{2,2} \leq 2(u \vee u' - u \wedge u' + \varepsilon)^{-\frac{1}{2}}(t - u \vee u' + \varepsilon)^{\frac{1}{2}}$, *se* $d = 3$.

Repare-se que todos os casos possíveis para n, n' e d estão contemplados no lema anterior.

Prova Com $d = 5$, podemos ter $n = 2$ e $n' > 2$, ou $n > 2$ e $n' = 2$, ou $n = 2$ e $n' = 2$. Uma vez que o estudo das três situações faz-se de forma análoga, apresentamos apenas o caso em que $d = 5$, $n = 2$ e $n' > 2$. Ora, sendo $n = 2$ ter-se-á $u = v$ pelo que obtemos

$$\begin{aligned}
G^{(1)}_{2,n'} &= \int_{v \vee v'}^{t} d\tau (\tau - v + \varepsilon)^{-\frac{3}{2}} (\tau - u' + \varepsilon)^{-\frac{n'+1}{2}} \\
&\leq \int_{v \vee v'}^{t} d\tau (v \vee v' - v + \varepsilon)^{-\frac{3}{2}} (\tau - u' + \varepsilon)^{-\frac{n'+1}{2}} \\
&\leq \frac{2}{n' - 1}(v \vee v' - v + \varepsilon)^{-\frac{3}{2}} (v \vee v' - u' + \varepsilon)^{-\frac{n'-1}{2}} \\
&\leq H^{(1)}_{2,n'}.
\end{aligned}$$

De modo análogo se prova que $G^{(2)}_{2,n'} \leq H^{(2)}_{2,n'}$.

Sempre que $n, n' \geq 4$ ou $d > 5$ os expoentes $\varkappa$ e $\varkappa'$ dos *kernels* $G_{n,n'}$ são maiores que 1. Por ser mais simples, fazemos o estudo separadamente consoante $u' > u$ ou $u > u'$. Consideremos em primeiro lugar $u' > u$. Temos, por definição,

$$G^{(1)}_{n,n'} = \Theta(u'-u)G_{n,n'}$$

$$\begin{aligned}
&= \Theta(u'-u)\int_0^t d\tau\Theta(\tau - v\vee v')(\tau - u + \varepsilon)^{-\varkappa}(\tau - u' + \varepsilon)^{-\varkappa'} \\
&= \int_{v\vee v'}^t d\tau(\tau - u\wedge u' + \varepsilon)^{-\varkappa}(\tau - u\vee u' + \varepsilon)^{-\varkappa'} \\
&\leq \int_{v\vee v'}^t d\tau(v\vee v' - u\wedge u' + \varepsilon)^{-\varkappa}(\tau - u\vee u' + \varepsilon)^{-\varkappa'} \\
&= (v\vee v' - u\wedge u' + \varepsilon)^{-\varkappa}\frac{1}{-\varkappa'+1} \\
&\quad .((t - u\vee u' + \varepsilon)^{-\varkappa'+1} - (v\vee v' - u\vee u' + \varepsilon)^{-\varkappa'+1}) \\
&\leq \frac{1}{\varkappa'-1}(v\vee v' - u\wedge u' + \varepsilon)^{-\varkappa}(v\vee v' - u\vee u' + \varepsilon)^{-\varkappa'+1} \\
&= \frac{1}{\varkappa'-1}\Theta(u'-u)(v\vee v' - u + \varepsilon)^{-\varkappa}(v\vee v' - u' + \varepsilon)^{-\varkappa'+1} \\
&\leq H^{(1)}_{n,n'}.
\end{aligned}$$

Para $u > u'$, prova-se da mesma maneira que

$$G^{(2)}_{n,n'} \leq H^{(2)}_{n,n'}.$$

O caso 1 resulta agora directamente de (4.24) e de (4.25).
Supondo agora que $n' = 2$, $d = 4$ e $n \geq 4$ obtém-se

$$G^{(1)}_{n,2} = \int_{v\vee u'}^t d\tau(\tau - u\wedge u' + \varepsilon)^{-\varkappa}(\tau - u\vee u' + \varepsilon)^{-1}$$

$$
\begin{aligned}
&\le (v \vee u' - u \vee u' + \varepsilon)^{-1} \int_{v\vee u'}^{t} d\tau(\tau - u \wedge u' + \varepsilon)^{-\varkappa} \\
&\le \frac{1}{\varkappa - 1}(v \vee u' - u \wedge u' + \varepsilon)^{-\varkappa+1}(v \vee u' - u \vee u' + \varepsilon)^{-1} \\
&= \frac{2}{n-2}(v \vee u' - u \wedge u' + \varepsilon)^{-\frac{n}{2}+5}(v \vee u' - u \vee u' + \varepsilon)^{-1} \\
&= \frac{2}{n-2}\Theta(u' - u)(v \vee u' - u + \varepsilon)^{-\frac{n}{2}+5}(v \vee u' - u' + \varepsilon)^{-1}.
\end{aligned}
$$

Do mesmo modo prova-se que

$$
G_{n,2}^{(2)} \le \frac{2}{n-2}\Theta(u - u')(v \vee u' - u + \varepsilon)^{-\frac{n}{2}+5}(v \vee u' - u' + \varepsilon)^{-1}.
$$

Quando $n' = 2$, $d = 3$ e $n \ge 4$, obtém-se

$$
\begin{aligned}
G_{n,2}^{(1)} &= \Theta(u' - u) \int_{v\vee u'}^{t} d\tau(\tau - u + \varepsilon)^{-\varkappa}(\tau - u' + \varepsilon)^{-\frac{1}{2}} \\
&\le \Theta(u' - u)(v \vee u' - u' + \varepsilon)^{-\frac{1}{2}} \int_{v\vee u'}^{t} d\tau(\tau - u + \varepsilon)^{-\varkappa} \\
&\le \frac{2}{n+1}\Theta(u' - u)(v \vee u' - u' + \varepsilon)^{-\frac{1}{2}}(v \vee u' - u + \varepsilon)^{-\frac{n+3}{2}}.
\end{aligned}
$$

Usando o mesmo tipo de artifício mostra-se que

$$
G_{n,2}^{(2)} \le \frac{2}{n+1}\Theta(u - u')(v \vee u' - u' + \varepsilon)^{-\frac{1}{2}}(v \vee u' - u + \varepsilon)^{-\frac{n+3}{2}},
$$

o que estabelece 3.

Supondo $n' = n = 2$ e $d = 4$ vem

$$
\begin{aligned}
G_{2,2}^{(1)} &= \Theta(u' - u) \int_{u\vee u'}^{t} d\tau(\tau - u + \varepsilon)^{-1}(\tau - u' + \varepsilon)^{-1} \\
&= \Theta(u' - u) \int_{u'}^{t} d\tau(\tau - u + \varepsilon)^{-1}(\tau - u' + \varepsilon)^{-1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \Theta(u'-u)(u'-u+\varepsilon)^{-1}\int_{u'}^{t} d\tau(\tau-u'+\varepsilon)^{-1} \\
&= \Theta(u'-u)(u'-u+\varepsilon)^{-1}\left(\ln(t-u'+\varepsilon)-\ln\varepsilon\right) \\
&\leq \Theta(u'-u)(u'-u+\varepsilon)^{-1}\left|\ln\varepsilon\right|;
\end{aligned}
$$

e com prova análoga deduz-se que

$$G_{2,2}^{(2)} \leq \Theta(u-u')(u-u'+\varepsilon)^{-1}\left|\ln\varepsilon\right|,$$

o que estabelece 4.

Finalmente, se $n'=n=2$ e $d=3$ tem-se

$$
\begin{aligned}
G_{2,2}^{(1)} &= \Theta(u'-u)\int_{u\vee u'}^{t} d\tau(\tau-u+\varepsilon)^{-\frac{1}{2}}(\tau-u'+\varepsilon)^{-\frac{1}{2}} \\
&= \Theta(u'-u)\int_{u'}^{t} d\tau(\tau-u+\varepsilon)^{-\frac{1}{2}}(\tau-u'+\varepsilon)^{-\frac{1}{2}} \\
&\leq \Theta(u'-u)(u'-u+\varepsilon)^{-\frac{1}{2}}\int_{u'}^{t} d\tau(\tau-u'+\varepsilon)^{-\frac{1}{2}} \\
&= 2\Theta(u'-u)(u'-u+\varepsilon)^{-\frac{1}{2}}\left((t-u'+\varepsilon)^{\frac{1}{2}}-\varepsilon^{\frac{1}{2}}\right) \\
&\leq 2\Theta(u'-u)(u'-u+\varepsilon)^{-\frac{1}{2}}(t-u'+\varepsilon)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

Com um raciocínio idêntico deduz-se que

$$G_{2,2}^{(2)} \leq 2\Theta(u-u')(u-u'+\varepsilon)^{-\frac{1}{2}}(t-u+\varepsilon)^{\frac{1}{2}}$$

o que conduz a 5, pelo que podemos dar por concluída a demonstração do lema.■

O lema anterior é fundamental no estabelecimento do

Lema 4.1.6 *Para* $\vec{n}+\vec{n}'-2\vec{\delta}_i \neq 0$,

$$r^2(\varepsilon)G_{n,n'} \underset{\varepsilon\to 0^+}{\longrightarrow} 0$$

em $L^2([0,t]^{n+n'-2})$.

Prova Com base no lema anterior para o caso em que $n, n' \geq 4$ ou $d > 4$ basta-nos mostrar que $|r^2(\varepsilon)H_{n,n'}|^2_{L^2([0,t]^{n+n'-2})} \underset{\varepsilon\to 0^+}{\longrightarrow} 0$.

Temos

$$|r^2(\varepsilon)H_{n,n'}|^2_{L^2([0,t]^{n+n'-2})}$$

$$\begin{aligned}
&= r^4(\varepsilon)\int\cdots\int_{[0,t]^{n-1}} d^{n-1}\mathrm{s}\int\cdots\int_{[0,t]^{n'-1}} d^{n'-1}\mathrm{s}'\frac{4}{(n\wedge n'+d-6)^2}\\
&\quad .\Big(\Theta(u'-u)(v\vee v'-u'+\varepsilon)^{-\frac{n'+d}{2}+3}(v\vee v'-u+\varepsilon)^{-\frac{n+d}{2}+2}\\
&\quad + \Theta(u-u')(v\vee v'-u+\varepsilon)^{-\frac{n+d}{2}+3}(v\vee v'-u'+\varepsilon)^{-\frac{n'+d}{2}+2}\Big)^2\\
&\leq \frac{8r^4(\varepsilon)}{(n\wedge n'+d-6)^2}\Big(\int\cdots\int_{[0,t]^{n-1}} d^{n-1}\mathrm{s}\int\cdots\int_{[0,t]^{n'-1}} d^{n'-1}\mathrm{s}'\,(\Theta(u'-u)\\
&\quad .\Big((v\vee v'-u'+\varepsilon)^{-\frac{n'+d}{2}+3}(v\vee v'-u+\varepsilon)^{-\frac{n+d}{2}+2}\Big)^2\\
&\quad + \Theta(u-u')\Big((v\vee v'-u+\varepsilon)^{-\frac{n+d}{2}+3}(v\vee v'-u'+\varepsilon)^{-\frac{n'+d}{2}+2}\Big)^2\Big)\Big)\\
&= \frac{16r^4(\varepsilon)}{(n\wedge n'+d-6)^2}\int\cdots\int_{[0,t]^{n-1}} d^{n-1}\mathrm{s}\int\cdots\int_{[0,t]^{n'-1}} d^{n'-1}\mathrm{s}'\Theta(u'-u)\\
&\quad .(v\vee v'-u'+\varepsilon)^{-n'-d+6}(v\vee v'-u+\varepsilon)^{-n-d+4}
\end{aligned}$$

$$= \frac{16r^4(\varepsilon)(n-1)(n-2)(n'-1)(n'-2)}{(n\wedge n'+d-6)^2}\int_0^t dv\int_0^v du\int_0^t dv'\int_0^{v'} du'\Theta(u'-u)$$

$$\cdot\frac{(v-u)^{n-3}(v'-u')^{n'-3}}{(v\vee v'-u'+\varepsilon)^{n'+d-6}(v\vee v'-u+\varepsilon)^{n+d-4}}.$$

Para abreviar um pouco a escrita que se segue, seja

$$A := \frac{16r^4(\varepsilon)(n-1)(n-2)(n'-1)(n'-2)}{(n\wedge n'+d-6)^2}. \tag{4.26}$$

Facilmente se obtém a seguinte majoração para a última expressão considerada,

$$A\int_0^t dv\int_0^v du\int_0^t dv'\int_0^{v'} du'\frac{\Theta(u'-u)}{(v\vee v'-u'+\varepsilon)^{d-3}(v\vee v'-u+\varepsilon)^{d-1}}.$$

Efectuando as substituições $y=\frac{v}{\varepsilon}$, $x=\frac{u}{\varepsilon}$, $y'=\frac{v'}{\varepsilon}$ e $x'=\frac{u'}{\varepsilon}$ a expressão anterior vem igual a

$$A\varepsilon^{8-2d}\int_0^{\frac{t}{\varepsilon}} dy\int_0^y dx\int_0^{\frac{t}{\varepsilon}} dy'\int_0^{y'} dx'\frac{\Theta(x'-x)}{(y\vee y'-x'+1)^{d-3}(y\vee y'-x+1)^{d-1}}$$

$$= A\varepsilon^{8-2d}\int_0^{\frac{t}{\varepsilon}} dy\int_0^{\frac{t}{\varepsilon}} dy'\int_0^y dx\int_x^{y'} dx'\frac{1}{(y\vee y'-x'+1)^{d-3}(y\vee y'-x+1)^{d-1}}. \tag{4.27}$$

Para podermos calcular os integrais torna-se necessário dividir em 3 casos, consoante $d=3$, $d=4$ ou $d>4$. Porém, antes de fazermos o estudo dos vários casos, convém observarmos que

$$r^4(\varepsilon)=\begin{cases}(\ln\varepsilon)^{-2} & \text{se}\quad d=3\\ \varepsilon^{2d-6} & \text{se}\quad d>3\end{cases}, \tag{4.28}$$

pelo que

$$A\varepsilon^{8-2d}=\frac{8(n-1)(n-2)(n'-1)(n'-2)}{(n\wedge n'+d-6)^2}\begin{cases}\varepsilon^2(\ln\varepsilon)^{-2} & \text{se}\quad d=3\\ \varepsilon^2 & \text{se}\quad d>3\end{cases} \tag{4.29}$$

1. Quando $d=3$ a expressão anterior toma a forma

$$\begin{aligned}&A\varepsilon^2\int_0^{\frac{t}{\varepsilon}} dy\int_0^{\frac{t}{\varepsilon}} dy'\int_0^y dx\frac{y'-x}{(y\vee y'-x+1)^2}\\ =\;& A\varepsilon^2\left(\int_0^{\frac{t}{\varepsilon}} dy\int_0^{\frac{t}{\varepsilon}} dy'\int_0^y dx\frac{\Theta(y'-y)(y'-x)}{(y\vee y'-x+1)^2}\right.\\ &\left.+\int_0^{\frac{t}{\varepsilon}} dy\int_0^{\frac{t}{\varepsilon}} dy'\int_0^y dx\frac{\Theta(y-y')(y'-x)}{(y\vee y'-x+1)^2}\right)\end{aligned}$$

$$= A\varepsilon^2 \left(\int_0^{\frac{t}{\varepsilon}} dy \int_y^{\frac{t}{\varepsilon}} dy' \int_0^{y} dx \frac{y'-x}{(y'-x+1)^2} \right.$$

$$\left. + \int_0^{\frac{t}{\varepsilon}} dy' \int_{y'}^{\frac{t}{\varepsilon}} dy \int_0^{y'} dx \frac{y'-x}{(y-x+1)^2} \right).$$

Ora,

$$\int_0^{\frac{t}{\varepsilon}} dy \int_y^{\frac{t}{\varepsilon}} dy' \int_0^{y} dx \frac{y'-x}{(y'-x+1)^2}$$

$$= \int_0^{\frac{t}{\varepsilon}} dy \int_y^{\frac{t}{\varepsilon}} dy' \left(\ln(y'+1) - \ln(y'-y+1) - (y'-y+1)^{-1} + (y'+1)^{-1} \right)$$

$$= \int_0^{\frac{t}{\varepsilon}} dy \left(\left(y - 2 - \frac{t}{\varepsilon} \right) \ln\left(\frac{t}{\varepsilon} - y + 1 \right) \right.$$

$$\left. + \left(\frac{t}{\varepsilon} + 2 \right) \ln\left(\frac{t}{\varepsilon} + 1 \right) - (y+2)\ln(y+1) \right)$$

$$= \frac{3t}{\varepsilon} + \frac{t^2}{2\varepsilon^2} - \left(\frac{2t}{\varepsilon} + 3 \right) \ln\left(\frac{t}{\varepsilon} + 1 \right). \qquad (4.30)$$

Por seu lado,

$$\int_0^{\frac{t}{\varepsilon}} dy' \int_{y'}^{\frac{t}{\varepsilon}} dy \int_0^{y'} dx \frac{y'-x}{(y-x+1)^2}$$

$$= \int_0^{\frac{t}{\varepsilon}} dy' \int_{y'}^{\frac{t}{\varepsilon}} dy \left(\ln(y+1) - \ln(y-y'+1) + \frac{y'-y+1}{y-y'+1} - \frac{y'-y+1}{y+1} \right)$$

$$= \int_0^{\frac{t}{\varepsilon}} dy' \left(\left(y' - \frac{t}{\varepsilon} + 1 \right) \ln\left(\frac{t}{\varepsilon} - y' + 1 \right) \right.$$

$$\left. - \left(y' - \frac{t}{\varepsilon} + 1 \right) \ln\left(\frac{t}{\varepsilon} + 1 \right) + \ln(y'+1) \right)$$

$$= \frac{t^2}{4\varepsilon^2} - \frac{5t}{2\varepsilon} + \left(\frac{t}{\varepsilon} + \frac{5}{2} \right) \ln\left(\frac{t}{\varepsilon} + 1 \right).$$

Atendendo a (4.29) concluímos agora facilmente que, quando $d=3$,

$$\left|r^2(\varepsilon)H_{n,n'}\right|^2_{L^2([0,t]^{n+n'-2})} \underset{\varepsilon\to 0^+}{\longrightarrow} 0.$$

2. Quando $d=4$, usando (4.27), resulta que

$$\left|r^2(\varepsilon)H_{n,n'}\right|^2_{L^2([0,t]^{n+n'-2})}$$

$$\begin{aligned}
&\leq A\int_0^{\frac{t}{\varepsilon}} dy \int_0^{\frac{t}{\varepsilon}} dy' \int_0^{y} dx \frac{\ln(y\vee y'-x+1)}{(y\vee y'-x+1)^3}\\
&= A\left(\int_0^{\frac{t}{\varepsilon}} dy \int_0^{\frac{t}{\varepsilon}} dy' \int_0^{y} dx\Theta(y'-y) \frac{\ln(y\vee y'-x+1)}{(y\vee y'-x+1)^3}\right.\\
&\quad\left. + \int_0^{\frac{t}{\varepsilon}} dy \int_0^{\frac{t}{\varepsilon}} dy' \int_0^{y} dx\Theta(y-y') \frac{\ln(y\vee y'-x+1)}{(y\vee y'-x+1)^3}\right)\\
&= 2A\left(\int_0^{\frac{t}{\varepsilon}} dy \int_y^{\frac{t}{\varepsilon}} dy' \int_0^{y} dx \frac{\ln(y'-x+1)}{(y'-x+1)^3}\right.\\
&\quad\left. + \int_0^{\frac{t}{\varepsilon}} dy' \int_{y'}^{\frac{t}{\varepsilon}} dy \int_0^{y'} dx \frac{\ln(y-x+1)}{(y-x+1)^3}\right)\\
&= 2A\int_0^{\frac{t}{\varepsilon}} dy \int_y^{\frac{t}{\varepsilon}} dy' \int_0^{y} dx \frac{\ln(y'-x+1)}{(y'-x+1)^3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2A\int_0^{\frac{t}{\varepsilon}} dy \int_y^{\frac{t}{\varepsilon}} dy' \left(\frac{\ln(y'-y+1)}{2(y'-y+1)^2} - \frac{\ln(y'+1)}{2(y'+1)^2} + \frac{1}{4(y'-y+1)^2)} - \frac{1}{4(y'+1)^2)}\right)\\
&= A\int_0^{\frac{t}{\varepsilon}} dy \left(\frac{\ln(\frac{t}{\varepsilon}+1)}{\frac{t}{\varepsilon}+1} - \frac{\ln(\frac{t}{\varepsilon}-y+1)}{\frac{t}{\varepsilon}-y+1} - \frac{\ln(y+1)}{y+1}\right.\\
&\quad\left. - \frac{3}{2(\frac{t}{\varepsilon}-y+1)} + \frac{3}{2(\frac{t}{\varepsilon}+1)} - \frac{3}{2(y+1)} + \frac{3}{2}\right)\\
&= A\left(\left(\frac{t}{t+\varepsilon}-\frac{3}{2}\right)\ln\left(\frac{t}{\varepsilon}+1\right) + \frac{3t^2+6t\varepsilon}{2t\varepsilon+2\varepsilon^2}\right).
\end{aligned}$$

Uma vez que o factor A é composto pelo produto de $\varepsilon^2(= r^4(\varepsilon))$ por uma expressão que não depende de ε, imediatamente se conclui que também neste caso $(d=4)$ se tem $|r^2(\varepsilon)H_{n,n'}|^2_{L^2([0,t]^{n+n'-2})} \underset{\varepsilon\to 0^+}{\longrightarrow} 0$.

1. Para $d>4$, atendendo uma vez mais a (4.27), podemos considerar

$$
\begin{aligned}
&\left|r^2(\varepsilon)H_{n,n'}\right|^2_{L^2([0,t]^{n+n'-2})}\\
\leq\ & \frac{A\varepsilon^{8-2d}}{d-4}\int_0^{\frac{t}{\varepsilon}} dy\int_0^{\frac{t}{\varepsilon}} dy'\int_0^{y} dx\frac{1}{(y\vee y'-x+1)^{d-1}(y\vee y'-y'+1)^{d-4}}\\
=\ & \frac{A\varepsilon^{8-2d}}{d-4}\left(\int_0^{\frac{t}{\varepsilon}} dy\int_0^{\frac{t}{\varepsilon}} dy'\int_0^{y} dx\frac{\Theta(y'-y)}{(y\vee y'-x+1)^{d-1}(y\vee y'-y'+1)^{d-4}}\right.\\
&\left.+\int_0^{\frac{t}{\varepsilon}} dy\int_0^{\frac{t}{\varepsilon}} dy'\int_0^{y} dx\frac{\Theta(y-y')}{(y\vee y'-x+1)^{d-1}(y\vee y'-y'+1)^{d-4}}\right)\\
\leq\ & \frac{A\varepsilon^{8-2d}}{d-4}\left(\int_0^{\frac{t}{\varepsilon}} dy\int_y^{\frac{t}{\varepsilon}} dy'\int_0^{y} dx\frac{1}{(y'-x+1)^{d-1}}\right.\\
&\left.+\int_0^{\frac{t}{\varepsilon}} dy\int_0^{y} dy'\int_0^{y'} dx\frac{1}{(y-x+1)^{d-1}(y-y'+1)^{d-4}}\right)\\
=\ & \frac{A\varepsilon^{8-2d}}{d-4}\left(\int_0^{\frac{t}{\varepsilon}} dy\int_y^{\frac{t}{\varepsilon}} dy'\int_0^{y} dx\frac{1}{(y'-x+1)^{d-1}}\right.\\
&\left.+\int_0^{\frac{t}{\varepsilon}} dx_2\int_0^{x_2} dx_1\int_0^{x_1} dx\frac{1}{(x_2-x+1)^{d-1}(x_2-x_1+1)^{d-4}}\right)\\
=\ & \frac{A\varepsilon^{8-2d}}{d-4}\left(\int_0^{\frac{t}{\varepsilon}} dy\int_y^{\frac{t}{\varepsilon}} dy'\int_0^{y} dx\frac{1}{(y'-x+1)^{d-1}}\right.\\
&\left.+\int_0^{\frac{t}{\varepsilon}} dx_1\int_{x_1}^{\frac{t}{\varepsilon}} dx_2\int_0^{x_1} dx\frac{1}{(x_2-x+1)^{d-1}(x_2-x_1+1)^{d-4}}\right)\\
\leq\ & \frac{A\varepsilon^{8-2d}}{d-4}\left(\int_0^{\frac{t}{\varepsilon}} dy\int_y^{\frac{t}{\varepsilon}} dy'\int_0^{y} dx\frac{1}{(y'-x+1)^{d-1}}\right.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& + \int_0^{\frac{t}{\varepsilon}} dx_1 \int_{x_1}^{\frac{t}{\varepsilon}} dx_2 \int_0^{x_1} dx \frac{1}{(x_2 - x + 1)^{d-1}} \Bigg) \\
\leq & \ \frac{2A\varepsilon^{8-2d}}{d-4} \int_0^{\frac{t}{\varepsilon}} dy \int_y^{\frac{t}{\varepsilon}} dy' \int_0^{y} dx \frac{1}{(y' - x + 1)^{d-1}} \\
= & \ \frac{2A\varepsilon^{8-2d}}{(d-2)\,(d-4)} \int_0^{\frac{t}{\varepsilon}} dy \int_y^{\frac{t}{\varepsilon}} dy' \left((y' - y + 1)^{-d+2} - (y'+1)^{-d+2} \right) \\
= & \ \frac{2A\varepsilon^{8-2d}}{(d-2)(d-3)\,(d-4)} \int_0^{\frac{t}{\varepsilon}} dy \left(\left(\frac{t}{\varepsilon} + 1 \right)^{-d+3} - \left(\frac{t}{\varepsilon} - y + 1 \right)^{-d+3} \right. \\
& \left. - (y+1)^{-d+3} + 1 \right) \\
= & \ \frac{2A\varepsilon^{8-2d}}{(d-2)(d-3)\,(d-4)} \left(\frac{t}{\varepsilon} - \frac{2}{d-4} + \varepsilon^{d-4} \left(t + \frac{2(t+\varepsilon)}{d-4} \right) (t+\varepsilon)^{-d+3} \right).
\end{aligned}
$$

Recorrendo uma vez mais a (4.29), é agora simples concluir, também para este caso, que $\left| r^2(\varepsilon) H_{n,n'} \right|^2_{L^2([0,t]^{n+n'-2})} \underset{\varepsilon \to 0^+}{\longrightarrow} 0$.

Ainda para o estabelecimento do lema falta-nos estudar os casos em que pelo menos um de entre n e n' é 2 e d é 3 ou 4.

Consideremos o vector $\vec{n} = (n_1, ..., n_d)$. Atendendo a que para cada $j \in \{1, ..., d\}$, n_j é par, conclui-se que existe um único índice $i \in \{1, ..., d\}$ tal que $n_i = 2$, tendo-se para os restantes índices $\forall j \neq i$, $n_j = 0$. Das expressões (4.19) e (4.20) deduz-se

$$
\left\langle M_{j,\cdot} \left(d, \vec{n}, \varepsilon \right), M_{i,\cdot} \left(d, \vec{n}', \varepsilon \right) \right\rangle_t = n_j n_i' \delta_{ij} \int_0^t m_j\left(\tau\right) m_i'\left(\tau\right) d\tau \tag{4.31}
$$

o que nos permite concluir que quando $n = n' = 2$ e $\vec{n} \neq \vec{n}'$ temos

$$
\left\langle M_{j,\cdot} \left(d, \vec{n}, \varepsilon \right), M_{i,\cdot} \left(d, \vec{n}', \varepsilon \right) \right\rangle_t = 0.
$$

Se $n = n' = 2$ e $\vec{n} = \vec{n}'$, por (4.31) resulta

$$
\begin{aligned}
& \left\langle M_{j,\cdot} \left(d, \vec{n}, \varepsilon \right), M_{i,\cdot} \left(d, \vec{n}', \varepsilon \right) \right\rangle_t \\
= & \ \delta_{ij} n_i n_j \int_0^t d\tau (\tau - s + \varepsilon)^{-\frac{d}{2}+1} (\tau - s' + \varepsilon)^{-\frac{d}{2}+1} : \omega_i(s) \omega_j(s') :
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\mathbb{E}\left(\left\langle M_{j,\cdot}\left(d,\vec{n},\varepsilon\right), M_{i,\cdot}\left(d,\vec{n}',\varepsilon\right)\right\rangle_t\right)\\
=\;& 4\int_0^t d\tau(\tau-s+\varepsilon)^{-\frac{d}{2}+1}(\tau-s'+\varepsilon)^{-\frac{d}{2}+1} : \omega_i(s)\omega_i(s') :\\
&+\mathbb{E}\left(\left\langle M_{j,\cdot}\left(d,\vec{n},\varepsilon\right), M_{i,\cdot}\left(d,\vec{n}',\varepsilon\right)\right\rangle_t\right),
\end{aligned}
$$

pois para apenas um valor de $i \in \{1, ..., d\}$ se tem $n_i = 2$ (sendo os restantes $n_j = 0$, $j \neq i$). Assim,

$$
0 \leq G_{2,2} \leq \begin{cases} 2(u \vee u' - u \wedge u' + \varepsilon)^{-\frac{1}{2}}(t - u \vee u' + \varepsilon)^{\frac{1}{2}} & \text{se} \quad d = 3 \\ 4(u \vee u' - u \wedge u' + \varepsilon)^{-1} \left|\ln \varepsilon\right| & \text{se} \quad d = 4 \end{cases}.
$$

Analisemos então em cada caso o quadrado da norma em $L^2\left([0,t]^2\right)$. Ora, quando $d = 3$, temos

$$
\begin{aligned}
&\left|2\left(u \vee u' - u \wedge u' + \varepsilon\right)^{-\frac{1}{2}}\left(t - u \vee u' + \varepsilon\right)^{\frac{1}{2}}\right|^2_{L^2\left([0,t]^2\right)}\\
=\;& 4\int_0^t du \int_0^t du' \left(u \vee u' - u \wedge u' + \varepsilon\right)^{-1}\left(t - u \vee u' + \varepsilon\right)\\
=\;& 8\int_0^t du \int_0^u du' \left(u - u' + \varepsilon\right)^{-1}\left(t - u + \varepsilon\right)\\
=\;& 4\left(\left(3\varepsilon^2 + 4\varepsilon t + t^2\right)\left(\ln\left(\varepsilon + t\right) - \ln \varepsilon\right) - \frac{3t\left(2\varepsilon + t\right)}{2}\right)
\end{aligned}
$$

e, como $r^4 = \ln^{-2}\varepsilon$, conclui-se que, para $n = 2$ e $d = 3$,

$$
r^4 \left|G^{(i)}_{n,n}\right|^2_{L^2\left([0,t]^2\right)} \underset{\varepsilon \to 0^+}{\longrightarrow} 0.
$$

Quando $d = 4$ temos

$$
\begin{aligned}
&\left|\left(u \vee u' - u \wedge u' + \varepsilon\right)^{-1}\left|\ln \varepsilon\right|\right|^2_{L^2\left([0,t]^2\right)}\\
=\;& \int_0^t du \int_0^t du' \left(u \vee u' - u \wedge u' + \varepsilon\right)^{-2}\ln^2 \varepsilon\\
=\;& 2\ln^2 \varepsilon \int_0^t du \int_0^u du' \left(u - u' + \varepsilon\right)^{-2}\\
=\;& -\ln^2 \varepsilon \ln\left(\varepsilon + t\right) + \ln^3 \varepsilon + t\frac{\ln^2 \varepsilon}{\varepsilon}
\end{aligned}
$$

e, como se tem $r^4 = \varepsilon^2$, resulta que para $n = 2$ e $d = 4$

$$r^4 \left| G_{n,n}^{(i)} \right|^2_{L^2\left([0,t]^2\right)} \underset{\varepsilon \to 0^+}{\longrightarrow} 0.$$

Resta-nos estudar os casos em que $n = 2$ e $n' > 2$; $n > 2$ e $n' = 2$ quando a dimensão d é 3 ou 4. Dada a analogia entre estes dois casos, trataremos apenas de um. Como exemplo, consideremos $n = 2$, $n' > 2$. Obtemos,

$$r^2(\varepsilon) G_{n,n'}(s_1, s_1', ..., s_{n'-1}')$$

$$\begin{aligned}
&= r^2(\varepsilon) \int_0^t d\tau \Theta(\tau - s_1 \vee v')(\tau - s_1 + \varepsilon)^{-\frac{d}{2}+1} (\tau - u' + \varepsilon)^{-\frac{n'+d}{2}+2} \\
&= r^2(\varepsilon) \int_{s_1 \vee v'}^t d\tau (\tau - s_1 + \varepsilon)^{-\frac{d}{2}+1} (\tau - u' + \varepsilon)^{-\frac{n'+d}{2}+2} \\
&= r^2(\varepsilon) \left(\int_{s_1 \vee v'}^t d\tau \Theta(u' - s_1)(\tau - s_1 + \varepsilon)^{-\frac{d}{2}+1} (\tau - u' + \varepsilon)^{-\frac{n'+d}{2}+2} \right. \\
&\quad \left. + \int_{s_1 \vee v'}^t d\tau \Theta(s_1 - u')(\tau - s_1 + \varepsilon)^{-\frac{d}{2}+1} (\tau - u' + \varepsilon)^{-\frac{n'+d}{2}+2} \right) \\
&\leq r^2(\varepsilon) \left((s_1 \vee v' - s_1 + \varepsilon)^{-\frac{d}{2}+1} \int_{s_1 \vee v'}^t d\tau (\tau - u' + \varepsilon)^{-\frac{n'+d}{2}+2} \right. \\
&\quad \left. + (s_1 \vee v' - u' + \varepsilon)^{-\frac{n'+d}{2}+2} \int_{s_1 \vee v'}^t d\tau (\tau - s_1 + \varepsilon)^{-\frac{d}{2}+1} \right)
\end{aligned}$$

$$= r^2(\varepsilon)\Theta(u' - s_1) \begin{cases} \dfrac{2\left((s_1 \vee v' - u' + \varepsilon)^{\frac{-n'+3}{2}} - (t - u' + \varepsilon)^{\frac{-n'+3}{2}} \right)}{(n'-3)(s_1 \vee v' - s_1 + \varepsilon)^{\frac{1}{2}}} & \text{se} \quad d = 3 \\[2ex] \dfrac{2\left((s_1 \vee v' - u' + \varepsilon)^{-\frac{n'}{2}+1} - (t - u' + \varepsilon)^{-\frac{n'}{2}+1} \right)}{(n'-2)(s_1 \vee v' - s_1 + \varepsilon)} & \text{se} \quad d = 4 \end{cases}$$

$$
+r^2(\varepsilon)\Theta(s_1-u')\begin{cases} 2\frac{(t-s_1+\varepsilon)^{\frac{1}{2}}-(s_1\vee v'-s_1+\varepsilon)^{\frac{1}{2}}}{(s_1\vee v'-u'+\varepsilon)^{\frac{n'-1}{2}}} & \text{se} \quad d=3 \\ \frac{\ln(t-s_1+\varepsilon)-\ln(s_1\vee v'-s_1+\varepsilon)}{(s_1\vee v'-u'+\varepsilon)^{\frac{n'}{2}}} & \text{se} \quad d=4 \end{cases}.
$$

As expressões seguintes majoram as anteriores pela mesma ordem por que são indicadas

$$
r^2(\varepsilon)\Theta(u'-s_1)\begin{cases} \frac{2(s_1\vee v'-s_1+\varepsilon)^{-\frac{1}{2}})}{n'-3}(s_1\vee v'-u'+\varepsilon)^{\frac{-n'+3}{2}} & \text{se} \quad d=3 \\ \frac{2(s_1\vee v'-s_1+\varepsilon)^{-1})}{n'-2}(s_1\vee v'-u'+\varepsilon)^{-\frac{n'}{2}+1} & \text{se} \quad d=4 \end{cases}
$$

$$
+r^2(\varepsilon)\Theta(s_1-u')\begin{cases} \frac{2(t-s_1+\varepsilon)^{\frac{1}{2}}}{(s_1\vee v'-u'+\varepsilon)^{\frac{n'-1}{2}}} & \text{se} \quad d=3 \\ \frac{\ln(t-s_1+\varepsilon)-\ln(s_1\vee v'-s_1+\varepsilon)}{(s_1\vee v'-u'+\varepsilon)^{\frac{n'}{2}}} & \text{se} \quad d=4 \end{cases}.
$$

Precisamos mostrar que em cada um destes casos temos funções pertencentes a $L^2([0,t]^{n'})$ com norma convergente para zero. Para isso, basta-nos mostrar que cada uma das quatro funções obedece a tal condição. Ambos os ramos da primeira função admitem, numa primeira fase uma análise conjunta. Vejamos,

$$
\left| r^2(\varepsilon)\frac{2(s_1\vee v'-s_1+\varepsilon)^{1-\frac{d}{2}})}{n'+d-6}(s_1\vee v'-u'+\varepsilon)^{-\frac{n'+d}{2}+3}\right|^2_{L^2([0,t]^{n'})} \tag{4.32}
$$

$$
= \frac{4r^4(\varepsilon)}{(n'+d-6)^2}\int_0^t ds_1 \iint_{[0,t]^{n'-1}} d^{n'-1}s'(s_1\vee v'-s_1+\varepsilon)^{2-d}(s_1\vee v'-u'+\varepsilon)^{-n'-d+6}
$$

$$
= \frac{4r^4(\varepsilon)(n'-1)(n'-2)}{(n'+d-6)^2}\int_0^t ds_1\int_0^t dv'\int_0^{v'} du'\frac{(v'-u')^{n'-3}}{(v'-s_1+\varepsilon)^{d-2}(v'-u'+\varepsilon)^{n'+d-6}}.
$$

De $u' > s_1$ e $v' > u'$, a expressão anterior vem igual a

$$\frac{4r^4(\varepsilon)(n'-1)(n'-2)}{(n'+d-6)^2}\int_0^t dv'\int_0^{v'} du'\int_0^{u'} ds_1 \frac{(v'-u')^{n'-3}}{(v'-s_1+\varepsilon)^{d-2}(v'-u'+\varepsilon)^{n'+d-6}}$$

$$\leq \frac{4r^4(\varepsilon)(n'-1)(n'-2)}{(n'+d-6)^2}\int_0^t dv'\int_0^{v'} du'\int_0^{u'} ds_1 \frac{(v'-u'+\varepsilon)^{3-d}}{(v'-s_1+\varepsilon)^{d-2}}, \quad (4.33)$$

igual a

$$\frac{4r^4(\varepsilon)(n'-1)(n'-2)}{(n'+d-6)^2}(-\varepsilon(\varepsilon+t)\ln(\varepsilon+t)+(\varepsilon^2+\varepsilon t)\ln\varepsilon+\varepsilon t+\frac{t^2}{2})$$

quando $d=3$ e igual a

$$\frac{4r^4(\varepsilon)(n'-1)(n'-2)}{(n'+d-6)^2}\left(-\frac{3}{2}\ln(\varepsilon+t)-\frac{1}{2}\ln^2\varepsilon+\ln\varepsilon\ln(\varepsilon+t)+\ln\varepsilon+\frac{t}{\varepsilon}\right)$$

quando $d=4$. Em ambos os casos, atendendo a (4.28), conclui-se que (4.32) tem limite zero quando $\varepsilon \to 0^+$.

Quanto à situação $u' < s_1$ e $d=3$ temos

$$\left|2r^2(\varepsilon)(s_1\vee v'-u'+\varepsilon)^{\frac{-n'+1}{2}}(t-s_1+\varepsilon)^{\frac{1}{2}}\right|^2_{L^2([0,t]^{n'})} \quad (4.34)$$

$$= 4r^4(\varepsilon)\int_0^t ds_1 \iint_{[0,t]^{n'-1}} d^{n'-1}s'(s_1\vee v'-u'+\varepsilon)^{-n'+1}(t-s_1+\varepsilon)$$

$$= 4r^4(\varepsilon)(n'-1)(n'-2)$$

$$\cdot\int_0^t ds_1\int_0^t dv'\int_0^{s_1} du'(s_1\vee v'-u'+\varepsilon)^{-n'+1}(v'-u')^{n'-3}(t-s_1+\varepsilon)$$

$$= 4r^4(\varepsilon)(n'-1)(n'-2)$$

$$
\cdot \int_0^t ds_1 \left(\int_0^{s_1} dv' + \int_{s_1}^t dv' \right) \int_0^{s_1} du' (s_1 \vee v' - u' + \varepsilon)^{-n'+1} (v' - u')^{n'-3} (t - s_1 + \varepsilon)
$$

$$
\begin{aligned}
&= 4r^4(\varepsilon)(n'-1)(n'-2) \left(\int_0^t ds_1 \int_0^{s_1} dv' \int_0^{v'} du' \frac{(v'-u')^{n'-3}(t-s_1+\varepsilon)}{(s_1-u'+\varepsilon)^{n'-1}} \right. \\
&\quad \left. + \int_0^t ds_1 \int_{s_1}^t dv' \int_0^{s_1} du' \frac{(v'-u')^{n'-3}(t-s_1+\varepsilon)}{(v'-u'+\varepsilon)^{n'-1}} \right),
\end{aligned}
$$

usando para a primeira parcela a relação $v' < s_1$, $u' < s_1$ e $u' < v'$ e para a segunda parcela a relação $u' < v'$, $u' < s_1$ e $s_1 < v'$. Uma boa majoração para (4.34), e de simples justificação, é, por exemplo,

$$
\begin{aligned}
& 4r^4(\varepsilon)(n'-1)(n'-2) \left(\int_0^t ds_1 \int_0^{s_1} dv' \int_0^{v'} du' \frac{t-s_1+\varepsilon}{(s_1-u'+\varepsilon)^2} \right. \\
& \quad \left. + \int_0^t ds_1 \int_{s_1}^t dv' \int_0^{s_1} du' \frac{t-s_1+\varepsilon}{(v'-u'+\varepsilon)^2} \right) \\
&= 4r^4(\varepsilon)(n'-1)(n'-2) \left(\left(\frac{11}{2}\varepsilon^2 + 6\varepsilon t + \frac{3}{2}t^2 \right) \ln(\varepsilon + t) \right. \\
& \quad \left. - \left(\frac{11}{2}\varepsilon^2 + 4\varepsilon t + \frac{t^2}{2} \right) \ln \varepsilon - \frac{11}{2}\varepsilon t - \frac{9}{4}t^2 - \frac{2\varepsilon t + t^2}{2} \ln(\varepsilon^2 + \varepsilon t) \right).
\end{aligned}
$$

Recordando (4.28), é fácil agora concluir que (4.34) converge para zero quando ε tende para zero.

Nos casos em que $u' < s_1$ e $d = 4$ começamos por observar que

$$
\begin{aligned}
& \ln(t - s_1 + \varepsilon) - \ln(s_1 \vee v' - s_1 + \varepsilon) \\
&= \ln\left(1 + \frac{t-s_1}{\varepsilon}\right) - \ln\left(1 + \frac{s_1 \vee v' - s_1}{\varepsilon}\right) \\
&\leq \ln(\varepsilon + t - s_1) - \ln \varepsilon \\
&\leq \ln(1 + t) - \ln \varepsilon,
\end{aligned}
$$

pelo que resulta

$$\begin{aligned}
&\left| r^2(\varepsilon)(s_1 \vee v' - u' + \varepsilon)^{-\frac{n'}{2}} (\ln(t - s_1 + \varepsilon) - \ln(s_1 \vee v' - s_1 + \varepsilon)) \right|^2_{L^2([0,t]^{n'})} \\
\leq \; & \left| r^2(\varepsilon)(s_1 \vee v' - u' + \varepsilon)^{-\frac{n'}{2}} (\ln(1+t) - \ln \varepsilon) \right|^2_{L^2([0,t]^{n'})} \\
= \; & r^4(\varepsilon)(n'-1)(n'-2) \int_0^t ds_1 \int_0^t dv' \int_0^{v' \wedge s_1} du' \frac{(\ln(1+t) - \ln\varepsilon)^2 (v'-u')^{n'-3}}{(s_1 \vee v' - u' + \varepsilon)^{n'}} \\
\leq \; & r^4(\varepsilon)(n'-1)(n'-2) \int_0^t ds_1 \int_0^t dv' \int_0^{v' \wedge s_1} du' \frac{(\ln(1+t) - \ln\varepsilon)^2}{(s_1 \vee v' - u' + \varepsilon)^3} \\
= \; & r^4(\varepsilon)(n'-1)(n'-2)(\ln(1+t) - \ln\varepsilon)^2 \left(\int_0^t ds_1 \int_0^{s_1} dv' \int_0^{v'} du' \frac{1}{(s_1 - u' + \varepsilon)^3} \right. \\
& \left. + \int_0^t ds_1 \int_{s_1}^t dv' \int_0^{s_1} du' \frac{1}{(v' - u' + \varepsilon)^3} \right) \\
= \; & r^4(\varepsilon)(n'-1)(n'-2)(\ln(1+t) - \ln\varepsilon)^2 \left(2\ln\varepsilon \right. \\
& \left. + \frac{2\varepsilon t + t^2}{\varepsilon(\varepsilon+t)} - \ln(\varepsilon + t) - \frac{1}{2}\ln^2(\varepsilon + t) \right),
\end{aligned}$$

que tem limite zero quando ε tende para zero, atendendo a que, neste caso, $r^4(\varepsilon) = \varepsilon^2$.■

Acabámos de provar que o *kernel* de ordem mais elevada de

$$\langle rM_{\cdot}(d, \vec{n}, \varepsilon), rM_{\cdot}(d, \vec{n}', \varepsilon) \rangle_t$$

converge para zero em média quadrática, para todo o t, quando ε tende para zero. Ora, cada um dos outros *kernels* de ordem $\vec{k}$ obtém-se por integrações do tipo

$$Sym \left(\int_0^t ds G_{n,n'}(s, s_2, ..., s_{n-1}; s, s'_2, ..., s'_{n'-1}) \right),$$

onde se usa a notação $Sym(.)$ para representar a simetrização do argumento. O lema que se segue é importantíssimo, pois estabelece o comportamento de todos os *kernels* $G_{\bar{k}}$ para $2 \leq k < n + n' - 2$.

Lema 4.1.7 *Sejam $n, n' \geq 2$, $m, m' > 1$ e $F_{n,n',m,m'}$ uma função simétrica nas variáveis $\mathrm{s} = (s_1, ..., s_n)$ e também nas variáveis $\mathrm{s}' = (s'_1, ..., s'_{n'})$ tal que*

$$
\begin{aligned}
&0 \leq F_{n,n',m,m'}(s_1, ..., s_n; s'_1, ..., s'_{n'}) \\
\leq &\; c \int_0^t d\tau \Theta \left(\tau - \max_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n'} (s_i, s'_j) \right) (\tau - u + \varepsilon)^{-m} (\tau - u' + \varepsilon)^{-m'} \\
= &\; : c \int_0^t d\tau f_{n,n',m,m'}(\mathrm{s}, \mathrm{s}', \varepsilon, d, \tau),
\end{aligned}
$$

onde c é uma constante positiva. Então, existe uma constante real positiva $c_{m,m'}$ tal que

$$
\begin{aligned}
0 \;\leq&\; \int_0^t ds F_{n,n',m,m'}(s_1, ..., s_{n-1}, s; s'_1, ..., s'_{n'-1}, s) \\
\leq c_{m,m'} &\int_0^t d\tau \Theta \left(\tau - \max_{1 \leq i < n, 1 \leq j < n'} (s_i, s'_j) \right) (\tau - u + \varepsilon)^{-m+\frac{1}{2}} (\tau - u' + \varepsilon)^{-m'+\frac{1}{2}},
\end{aligned}
\tag{4.35}
$$

ou ainda,

$$
\leq \; c_{m,m'} \int_0^t d\tau f_{n-1,n'-1,m-\frac{1}{2},m'-\frac{1}{2}}(\mathrm{s}, \mathrm{s}', \varepsilon, d, \tau).
$$

Prova Por hipótese temos

$$
\begin{aligned}
0 \;\leq&\; \int_0^t ds F_{n,n',m,m'}(s_1, ..., s_{n-1}, s; s'_1, ..., s'_{n'-1}, s) \\
\leq&\; c \int_0^t ds \int_0^t d\tau \Theta \left(\tau - \max_{1 \leq i < n, 1 \leq j < n'} (s_i, s'_j, s) \right) \\
&\cdot \left(\tau - \min_{1 \leq i \leq n-1} (s_i, s) + \varepsilon \right)^{-m} \left(\tau - \min_{1 \leq j \leq n'-1} (s'_j, s) + \varepsilon \right)^{-m'}
\end{aligned}
\tag{4.36}
$$

$$= c\int_0^t ds \int_0^t d\tau \Theta(\tau - \max(v, v', s))(\tau - \min(u, s) + \varepsilon)^{-m}(\tau - \min(u', s) + \varepsilon)^{-m'}$$

$$= c\int_0^t ds \int_0^t d\tau \Theta(\tau - \max(v, v', s))\Theta(u' - u)$$

$$.(\tau - \min(u, s) + \varepsilon)^{-m}(\tau - \min(u', s) + \varepsilon)^{-m'}$$

$$+c\int_0^t ds \int_0^t d\tau \Theta(\tau - \max(v, v', s))\Theta(u - u')$$

$$.(\tau - \min(u, s) + \varepsilon)^{-m}(\tau - \min(u', s) + \varepsilon)^{-m'}.$$

Apresentamos apenas a prova relativa a $u' > u$, na medida em que o estudo relativo a $u < u'$ pode ser feito de modo análogo. Assim, considerando $u' > u$, podemos partir o intervalo $[0, t]$, relativo à integração em s, em 4 subintervalos obtendo-se

$$c\int_0^t ds \int_0^t d\tau \Theta(\tau - \max(v, v', s))\Theta(u' - u)$$

$$.(\tau - \min(u, s) + \varepsilon)^{-m}(\tau - \min(u', s) + \varepsilon)^{-m'}$$

$$= c\left(\int_{v\vee v'}^t d\tau \int_0^u ds(\tau - s + \varepsilon)^{-m-m'} + \int_{v\vee v'}^t d\tau \int_u^{u'} ds(\tau - u + \varepsilon)^{-m}(\tau - s + \varepsilon)^{-m'}\right.$$

$$+ \int_{v\vee v'}^t d\tau \int_{u'}^{v\vee v'} ds(\tau - u + \varepsilon)^{-m}(\tau - u' + \varepsilon)^{-m'}$$

$$\left. + \int_{v\vee v'}^t d\tau \int_{v\vee v'}^{\tau} ds(\tau - u + \varepsilon)^{-m}(\tau - u' + \varepsilon)^{-m'}\right).$$

Para a conclusão da prova bastará provarmos que cada uma destas quatro parcelas é majorada pelo produto de

$$\int_0^t d\tau \Theta(\tau - v \vee v')(\tau - u + \varepsilon)^{-m+\frac{1}{2}}(\tau - u' + \varepsilon)^{-m'+\frac{1}{2}}$$

por uma constante.

1. Temos
$$\int_{v\vee v'}^{t} d\tau \int_0^u ds(\tau - s + \varepsilon)^{-m-m'}$$
$$\begin{aligned} &= \frac{1}{m+m'-1}\int_{v\vee v'}^{t} d\tau((\tau - u + \varepsilon)^{-m-m'+1} - (\tau+\varepsilon)^{-m-m'+1}) \\ &\leq \frac{1}{m+m'-1}\int_{v\vee v'}^{t} d\tau(\tau - u + \varepsilon)^{-m-m'+1} \end{aligned}$$
$$\leq \frac{1}{m+m'-1}\int_0^t d\tau\Theta(\tau - v\vee v')(\tau - u+\varepsilon)^{-m+\frac{1}{2}}(\tau - u' + \varepsilon)^{-m'+\frac{1}{2}},$$
na medida em que $u < u'$, $m > \frac{1}{2}$ e $m' > \frac{1}{2}$.

2. Quanto a
$$\int_{v\vee v'}^{t} d\tau \int_u^{u'} ds(\tau - u + \varepsilon)^{-m}(\tau - s + \varepsilon)^{-m'}$$
$$= \frac{1}{m'-1}\int_{v\vee v'}^{t} d\tau(\tau - u + \varepsilon)^{-m}\left((\tau - u' + \varepsilon)^{-m'+1} - (\tau - u + \varepsilon)^{-m'+1}\right).$$
Com $m' > 1$ obtém-se a majoração
$$\frac{1}{m'-1}\int_{v\vee v'}^{t} d\tau(\tau - u + \varepsilon)^{-m}(\tau - u' + \varepsilon)^{-m'+1},$$
e, porque $u < u'$, esta, por sua vez, é dominada por
$$\begin{aligned} &\frac{1}{m'-1}\int_{v\vee v'}^{t} d\tau(\tau - u + \varepsilon)^{-m}(\tau - u' + \varepsilon)^{-m'+1}\sqrt{\frac{\tau - u + \varepsilon}{\tau - u' + \varepsilon}} \\ = \; &\frac{1}{m'-1}\int_0^t d\tau\Theta(\tau - v\vee v')(\tau - u + \varepsilon)^{-m+\frac{1}{2}}(\tau - u' + \varepsilon)^{-m'+\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

3. Tem-se

$$\begin{aligned}
&\int_{v\vee v'}^{t} d\tau \int_{u'}^{v\vee v'} ds(\tau-u+\varepsilon)^{-m}(\tau-u'+\varepsilon)^{-m'} \\
= &\int_{v\vee v'}^{t} d\tau(\tau-u+\varepsilon)^{-m}(\tau-u'+\varepsilon)^{-m'}(v\vee v'-u') \\
\leq &\int_{v\vee v'}^{t} d\tau(\tau-u+\varepsilon)^{-m}(\tau-u'+\varepsilon)^{-m'}(\tau-u') \\
\leq &\int_{v\vee v'}^{t} d\tau(\tau-u+\varepsilon)^{-m+\frac{1}{2}}(\tau-u'+\varepsilon)^{-m'+\frac{1}{2}} \\
= &\int_{0}^{t} d\tau\Theta(\tau-v\vee v')(\tau-u+\varepsilon)^{-m+\frac{1}{2}}(\tau-u'+\varepsilon)^{-m'+\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

atendendo a que $u<u'$.

4. Finalmente

$$\begin{aligned}
&\int_{v\vee v'}^{t} d\tau \int_{v\vee v'}^{\tau} ds(\tau-u+\varepsilon)^{-m}(\tau-u'+\varepsilon)^{-m'} \\
= &\int_{v\vee v'}^{t} d\tau(\tau-u+\varepsilon)^{-m}(\tau-u'+\varepsilon)^{-m'}(\tau-v\vee v') \\
\leq &\int_{v\vee v'}^{t} d\tau(\tau-u+\varepsilon)^{-m}(\tau-u'+\varepsilon)^{-m'+1} \\
\leq &\int_{0}^{t} d\tau\Theta(\tau-v\vee v')(\tau-u+\varepsilon)^{-m+\frac{1}{2}}(\tau-u'+\varepsilon)^{-m'+\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

■

Observação 4.1.8 *Para o caso particular em que $\vec{n}=\vec{n}'$, e tendo em conta (4.16) e a Proposição 2.5.3, o kernel de maior ordem de*

$$\left\langle rM_{i,\cdot}\left(d,\vec{n},\varepsilon\right),rM_{j,\cdot}\left(d,\vec{n},\varepsilon\right)\right\rangle_t,$$

que representamos por $r^2G_{n,n}$, possui $2n-2$ argumentos e é dado por

$$r^2G_{n,n}\left(s_1,s_1';...;s_{n-1},s_{n-1}'\right)=r^2n_i^2\int_0^t d\tau\frac{\Theta\left(\tau-v\vee v'\right)}{\left(\tau-u+\varepsilon\right)^{\varkappa}\left(\tau-u'+\varepsilon\right)^{\varkappa}}. \tag{4.37}$$

Note-se que a função $\frac{\Theta(\tau - v \vee v')}{(\tau - u + \varepsilon)^{\varkappa}(\tau - u' + \varepsilon)^{\varkappa}}$ *já é simétrica nas variáveis* $(s_1, ..., s_{n-1}, s'_1, ..., s'_{n-1})$*. O integral em (4.37) pode ser calculado através de tabelas integrais (usando, por exemplo, [GR80], números 2.15 e 2.263.4), mas o Lema 4.1.5 permite-nos concluir que* $n_i^2 H_{n,n'}(s_1, ..., s_{n-1}; s'_1, ..., s'_{n'-1}; \varepsilon; d)$ *com* $\vec{n} = \vec{n}'$ *majora* $G_{n,n}(s_1, s'_1; ...; s_{n-1}, s'_{n-1})$*. Através do Lema 4.1.6 conclui-se que o termo de maior ordem da decomposição em caos do processo de cross-variation dos martingales renormalizados* $rM_{i,\cdot}$ *e* $rM_{j,\cdot}$ *(*$\langle rM_{i,\cdot}, rM_{j,\cdot}\rangle$*) converge para zero, em média quadrática, para todo o* $t > 0$*. Os kernels correspondentes aos restantes termos (veja-se a Proposição 2.5.3) podem ser obtidos integrando sobre* s *e* s'*, como, por exemplo, em*

$$Sym \int_0^t ds G_{n,n}(s, s; s_2, s'_2; ...; s_{n-1}, s'_{n-1}).$$

Os Lemas 4.1.6 e 4.1.7 estabelecem que todos os kernels, excepto o de ordem nula, ou seja, a esperança, convergem para zero em média quadrática.

A observação anterior juntamente com (4.17) constitui uma prova da

Proposição 4.1.9 *O limite em média quadrática de* $\langle rM_i, rM_j\rangle_t$ *é igual a*

$$\delta_{ij} \frac{t n_i \vec{n}! (n-1)!}{(n+d-5)!} \begin{cases} 1 & se\, d = 3 \\ \Gamma(d-3) & se\, d > 3 \end{cases}.$$

Prova do Teorema 4.1.1: O limite anterior é, a menos do produto por uma constante, a variação quadrática dum movimento Browniano. O teorema em questão é então uma consequência do Teorema VIII.3.11 de [JS87]. No caso presente, e em virtude dos *martingales* $M_{i,t}$ serem contínuos, a aplicação do referido resultado requer a convergência em probabilidade das variações quadráticas num conjunto denso de tempos t. Esta convergência temos assegurada, pois temos garantida a convergência em média quadrática das variações quadráticas (veja-se Observação 4.1.8). ■

Para controlar as restantes parcelas representadas em $N_t(d, \vec{n}, \varepsilon)$, observemos que

$$\|N_t(d, \vec{n}, \varepsilon)\|^2_{(L^2)} \tag{4.38}$$

$$= \left\| \iint_{[0,t]^n} d^n \mathbf{s} \left((t+\varepsilon)^{-\varkappa} - (v+\varepsilon)^{-\varkappa} - (t-u+\varepsilon)^{-\varkappa}\right) : \boldsymbol{\omega}^{\otimes \vec{n}}(\mathbf{s}) : \right\|^2$$

$$= \vec{n}! \left|(t+\varepsilon)^{-\varkappa} - (v+\varepsilon)^{-\varkappa} - (t-u+\varepsilon)^{-\varkappa}\right|^2_{L^2([0,t]^n)}$$

$$\leq 3\vec{n}!\left(\left|(t+\varepsilon)^{-\varkappa}\right|^2_{L^2([0,t]^n)}+\left|(v+\varepsilon)^{-\varkappa}\right|^2_{L^2([0,t]^n)}+\left|(t-u+\varepsilon)^{-\varkappa}\right|^2_{L^2([0,t]^n)}\right).$$

Estudemos, então, cada uma destas normas separadamente.

A primeira é igual a $t^n (t+\varepsilon)^{-2\varkappa}$, ou seja, tem ordem $O(1)$.

Para a segunda, e para $d \geq 3$,

$$\begin{aligned}\iint_{[0,t]^n} d^n s_i (v+\varepsilon)^{-2\varkappa} &= n\int_0^t dv \frac{v^{n-1}}{(v+\varepsilon)^{n+d-4}} \\ &= n\varepsilon^{4-d}\int_0^{\frac{t}{\varepsilon}} dx \frac{x^{n-1}}{(x+1)^{n+d-4}} \\ &= \begin{cases} O(1) & \text{se } d=3 \\ O(\ln\varepsilon) & \text{se } d=4 \\ O\left(\varepsilon^{4-d}\right) & \text{se } d>4 \end{cases},\end{aligned}$$

cujas divergências são suprimidas pela renormalização $r^2(\varepsilon) = \varepsilon^{d-3}$.

Relativamente à terceira norma e procedendo à mudança de variável

$$t - u = \varepsilon x,$$

mostra-se que as estimativas encontradas aquando do estudo da norma anterior mantêm-se válidas. Acabámos, assim, de provar o

Lema 4.1.10 $r(\varepsilon) N_t(d, \vec{n}, \varepsilon)$ *converge em média quadrática para zero, quando* $\varepsilon \to 0^+$.

De seguida provaremos o

Lema 4.1.11 *Os processos* $\{r(\varepsilon) N_.(d, \vec{n}, \varepsilon) : \varepsilon > 0\}, \{r(\varepsilon) M_.(d, \vec{n}, \varepsilon) : \varepsilon > 0\}$ *e suas combinações lineares são tight (veja-se [KS91]).*

Prova Um critério de *tightness* de $r(\varepsilon)M_t$ (segundo [KS91], p.64) consiste na determinação de constantes positivas α, β e C_T, para as quais se verifica a desigualdade

$$\sup_{\varepsilon>0} \mathbb{E}\left|rM_t - rM_s\right|^\alpha \leq C_T \left|t-s\right|^{1+\beta} \tag{4.39}$$

para quaisquer $T > 0$ e $0 \leq s, t \leq T$.

Num primeiro passo mostraremos que

$$\sup_{\varepsilon>0} \mathbb{E}\left|rM_t - rM_s\right|^2 \leq C'_T \left|t-s\right|. \tag{4.40}$$

Com efeito e sem perda de generalidade consideremos $t \geq s$. Tem-se

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left|M_t - M_s\right|^2 &= \vec{n}!\left|(v-u+\varepsilon)^{-\varkappa}\right|^2_{L^2([0,t]^n\setminus[0,s]^n)} \\
&= \vec{n}!n\int_s^t dv\iint_{[0,v]^{n-1}} d^{n-1}s\,(v-u+\varepsilon)^{-2\varkappa} \\
&= \vec{n}!n\,(n-1)\int_s^t dv\int_0^v du\frac{(v-u)^{n-2}}{(v-u+\varepsilon)^{n+d-4}} \\
&\leq \vec{n}!n\,(n-1)\int_s^t dv\int_0^t du\frac{(v-u)^{n-2}}{(v-u+\varepsilon)^{n+d-4}}.
\end{aligned}$$

Efectuando a substituição $v-u=\varepsilon x$, e tomando $T>t$, $\mathbb{E}\left|M_t-M_s\right|^2$ pode ser majorado por

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^{3-d}\vec{n}!n\,(n-1)\int_s^t dv\int_0^{\frac{T}{\varepsilon}} dx\frac{1}{(x+1)^{d-2}} \\
= \;&\vec{n}!n\,(n-1)\,(t-s)\begin{cases}\ln(T+\varepsilon)-\ln\varepsilon & \text{se } d=3\\ \frac{1}{d-3}\left(\varepsilon^{3-d}-(T+\varepsilon)^{3-d}\right) & \text{se } d>3\end{cases}.
\end{aligned}$$

A renormalização desta estimativa pelo factor r^2 permite-nos obter uma majoração com a forma desejada (4.40).

Na sequência, e de modo a obter-se (4.39) pretende-se aplicar a hipercontractividade do semigrupo de Ornstein-Uhlenbeck $\{P_l := \exp(-lN) : l \geq 0\}$ gerado por $N := d\Gamma(1)$, onde 1 representa a função identidade em $L(\mathbb{R},\mu)$ (veja-se por exemplo [HKPS93] Cap.3C p.67, Cap.4A p.77 e Cap.7A p.234).

Sabemos que se

$$\varphi(\omega) = \sum_{\vec{n},n=0}^{\infty}\left\langle :\omega^{\otimes\vec{n}}:,\mathbf{F}^{(\vec{n})}\right\rangle$$

tem-se

$$\|\varphi\|^2_{(L^2)} = \sum_{\vec{n},n=0}^{\infty}\vec{n}!\left|\mathbf{F}^{(\vec{n})}\right|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Consideremos

$$\varphi = rM_t - rM_s.$$

Do Teorema 7.1 de [HKPS93] resulta que se $l > 0$ é tal que

$$\exp(-l) \leq \sqrt{\frac{p-1}{q-1}}, p > 1, q < \infty \text{ e } p \leq q,$$

então P_l é uma contracção de (L^p) em (L^q). Já sabemos que cada rM_t está em (L^2), pelo que $\varphi \in (L^2)$. Assim, tomando $p = 2$ e $q > 2$, existe $0 < c < 1$ tal que

$$\|P_l\varphi\|_q \leq c\|\varphi\|_2,$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\|exp(-2nl)\varphi\|_q &\leq c\|\varphi\|_2 \\
\Leftrightarrow \quad \|exp(-2nl)\varphi\|_q^q &\leq c^q\|\varphi\|_2^q \\
\Leftrightarrow \|\varphi\|_q^q &\leq c^q.exp(2nl)\|\varphi\|_2^q.
\end{aligned}$$

Isto é, para $q > 2$ existe uma constante $b := c^q.exp(2nl)$ tal que

$$\begin{aligned}
\|rM_t - rM_s\|_q^q &\leq b\|rM_t - rM_s\|_2^q \qquad (4.41) \\
&= b\left(\|rM_t - rM_s\|_2^2\right)^{\frac{q}{2}}.
\end{aligned}$$

Por sua vez,

$$r^2\|M_t - M_s\|_2^2$$

é da ordem de $|t-s|$. Assim, e tendo em atenção que $q > 2$, conclui-se que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(|rM_t - rM_s|^q) &= \|rM_t - rM_s\|_q^q \\
&\leq b\left(\|rM_t - rM_s\|_2^2\right)^{\frac{q}{2}} \\
&\leq b(\vec{n}!n(n-1))^{\frac{q}{2}}|t-s|^{\frac{q}{2}}.
\end{aligned}$$

Provámos, assim, que (4.39) é verificado para $\alpha = q > 2$, $\beta = \frac{q}{2} - 1 > 0$ e $C_T = b(\vec{n}!n(n-1))^{\frac{q}{2}}$, pelo que rM_t são *tight*.

Do facto de cada uma das parcelas que compõem N_t ser majorada por M_t, prova-se facilmente que tanto rN_t como rK_t são *tight*.■

Estamos agora em condições de estabelecer o seguinte

Lema 4.1.12 *Com* $0 \leq t_1 < t_2 < ... < t_l < \infty$,

$$(rK_{t_1}, rK_{t_2}, ..., rK_{t_l})$$

e

$$(rM_{t_1}, rM_{t_2}, ..., rM_{t_l})$$

têm o mesmo limite em distribuição quando $\varepsilon \longrightarrow 0^+$.

Prova Pretende-se estudar o limite de

$$(rK_{t_1}, rK_{t_2}, ..., rK_{t_l})$$

quando $\varepsilon \longrightarrow 0^+$, com $0 \leq t_1 < t_2 < ... < t_l < \infty$.

Introduzindo a função característica e usando o método de Cramer-Wold ([KS91]), procuramos

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \mathbb{E}\left(\exp\left(ir\sum_{j=1}^{l} z_j K_{t_j}\right)\right).$$

Temos

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\exp\left(ir\sum_{j=1}^{l} z_j K_{t_j}\right)\right)\\
&= \mathbb{E}\left(\exp\left(ir\sum_{j=1}^{l} z_j \left(M_{t_j} + N_{t_j}\right)\right)\right)
\end{aligned}$$

$$= \mathbb{E}\left(\exp\left(ir\sum_{j=1}^{l} z_j M_{t_j}\right)\right) + \mathbb{E}\left(\exp\left(ir\sum_{j=1}^{l} z_j M_{t_j}\right)\left(\exp\left(ir\sum_{j=1}^{l} z_j N_{t_j}\right) - 1\right)\right).$$

Atendendo a que $\left|\exp(ir\sum_{j=1}^{l} z_j M_{t_j})\right| = 1$, tem-se

$$\begin{aligned}
&\left|\mathbb{E}\left(\exp\left(ir\sum_{j=1}^{l} z_j M_{t_j}\right)\left(\exp\left(ir\sum_{j=1}^{l} z_j N_{t_j}\right) - 1\right)\right)\right|^2\\
&\leq \left\|\exp\left(ir\sum_{j=1}^{l} z_j N_{t_j}\right) - 1\right\|^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{E}\left(\left(\exp\left(-ir\sum_{j=1}^{l} z_j N_{t_j}\right)-1\right)\left(\exp\left(ir\sum_{j=1}^{l} z_j N_{t_j}\right)-1\right)\right)\\
&= \mathbb{E}\left(2-2\cos\left(r\sum_{j=1}^{l} z_j N_{t_j}\right)\right). \qquad (4.42)
\end{aligned}
$$

Como

$$
|1-\cos x| \leq \frac{x^2}{2},
$$

vem

$$
(4.42) \leq \mathbb{E}\left(\left(r\sum_{j=1}^{l} z_j N_{t_j}\right)^2\right).
$$

Ora, provámos no Lema 4.1.10 que rN_t converge, em média quadrática, para zero, quando $\varepsilon \longrightarrow 0^+$. Logo, podemos concluir que

$$
\left|\mathbb{E}\left(\exp\left(ir\sum_{j=1}^{l} z_j M_{t_j}\right)\left(\exp\left(ir\sum_{j=1}^{l} z_j Nt_j\right)-1\right)\right)\right| \underset{\varepsilon\to 0^+}{\longrightarrow} 0,
$$

pelo que

$$
\mathbb{E}\left(\exp\left(ir\sum_{j=1}^{l} z_j K_{t_j}\right)\right)
$$

e

$$
\mathbb{E}\left(\exp\left(ir\sum_{j=1}^{l} z_j M_{t_j}\right)\right)
$$

convergem em média quadrática para o mesmo valor.■

Prova do Teorema 4.1.2: Temos

$$
\begin{aligned}
\langle rM_{.}\rangle_t &= \sum_{j=1}^{d}\langle M_{i,.}, M_{j,.}\rangle_t\\
&= r^2\sum_{i=1}^{d}\langle M_{i,.}\rangle_t.
\end{aligned}
$$

pelo que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\langle rM_{\cdot}\rangle_t\right) &= \sum_{i=1}^{d} \mathbb{E}\left(\langle rM_{i,\cdot}\rangle_t\right) \\
&= \sum_{i=1}^{d} \frac{n_i \vec{n}!(n-1)!}{(n+d-5)!}(t+o(1)) \begin{cases} 1 & \text{se } d=3 \\ \Gamma(d-3) & \text{se } d>3 \end{cases} \\
&= \frac{\vec{n}!n!}{(n+d-5)!}(t+o(1)) \begin{cases} 1 & \text{se } d=3 \\ \Gamma(d-3) & \text{se } d>3 \end{cases},
\end{aligned}$$

atendendo ao Lema 4.1.4.

Tem-se que $\langle rM_{\cdot}\rangle_t - \mathbb{E}\left(\langle rM_{\cdot}\rangle_t\right)$ não é mais do que a soma de todos os termos de ordem não nula da decomposição em caos das variações quadráticas $\langle M_{i,\cdot}\rangle_t$, $i = 1, ..., d$, que, conforme provámos anteriormente, convergem em média quadrática para zero. A partir do Teorema 4.1.1 sabe-se que $rM_{i,\cdot}(d, \vec{n}, \varepsilon)$ converge em lei para $\sqrt{\frac{n_i}{n}} k_n \beta_i$ que, a menos do produto por uma constante, é a variação quadrática de um movimento Browniano. Logo $rM_{\cdot}(d, \vec{n}, \varepsilon)$ converge em lei para $c_{\vec{n},d}\beta_{\vec{n}}$, sendo $\beta_{\vec{n}}$ um movimento Browniano (note-se que $c_{\vec{n},d}$ e k_n são os definidos em (4.5) e (4.3), respectivamente).

Por outro lado, rN_t converge para zero, em média quadrática (veja-se Lema 4.1.10). Estes factos são suficientes (veja-se Lema 4.1.12) para garantir, através do método de Cramer-Wold, a convergência de rK_t em dimensão finita. Esta convergência, juntamente com a condição de rK_t ser *tight* (garantida pelo Lema 4.1.11), asseguram a convergência em lei de rK_t (veja-se, por exemplo, o Teorema 4.15 de [KS91]).■

4.2 Independência dos movimentos Brownianos limites

Nesta secção mostraremos que os diversos movimentos Brownianos limites das famílias de *martingales* dos tipos $rM_{i,\cdot}$ e $rM_{\cdot}$, para além de serem independentes entre si, são também independentes dos movimentos Brownianos originais, isto é, dos movimentos Brownianos que intervêm na definição das auto-intersecções dos tempos locais.

4.2.1 Teoremas principais

Teorema 4.2.1 *O processo* $\left(r(\varepsilon)M_{1,.}(d,\vec{n},\varepsilon),...,r(\varepsilon)M_{d,.}(d,\vec{n},\varepsilon),B_1,...,B_d\right)$, *com* $\varepsilon > 0$, *converge em lei para o processo* $(\beta_1,...,\beta_d,B_1,...,B_d)$ *onde, para* $i=1,...,d$, *os* B_i *são os movimentos Brownianos que intervêm na definição dos tempos locais e os* β_i *são os movimentos Brownianos referidos no Teorema 4.1.1. Mais ainda, os* $2d$ *movimentos Brownianos limites,* β_i *e* B_i, $i=1,...,d$, *são independentes.*

Teorema 4.2.2 *Para* $\vec{n} \neq \vec{n}'$, *o processo*

$$\begin{pmatrix} rM_{.}(d,\vec{n},\varepsilon) \\ rM_{.}(d,\vec{n}',\varepsilon) \\ B_1 \\ \cdots \\ \cdots \\ B_d \end{pmatrix}$$

converge em lei para o movimento Browniano

$$\begin{pmatrix} k_n\beta_{\vec{n}} \\ k_{n'}\beta_{\vec{n}'} \\ B_1 \\ \cdots \\ \cdots \\ B_d \end{pmatrix},$$

(veja-se (4.3) para a definição de k_n*).*

4.2.2 Provas

Prova do Teorema 4.2.1: A prova é uma consequência do Teorema VIII.3.11 de [JS87]. Os elementos da matriz das covariâncias de $M_{i,.}$ são de um dos tipos

$$\langle M_{i,.}, M_{j,.}\rangle_t,\ \langle M_{i,.}, B_{j,.}\rangle_t \text{ ou } \langle B_i, B_j\rangle_t.$$

Quanto a $\langle B_i, B_j\rangle_t$, sabemos ser igual a $\delta_{ij}t$, uma vez que B_i e B_j são componentes de um movimento Browniano vectorial.

Estudemos agora $\langle M_{i,.}, M_{j,.}\rangle_t$. Através de (3.8) temos

$$\langle M_{i,.}, M_{j,.}\rangle_t = \left\langle n_i\int_0^t dB_i(\tau)\,m_i(\tau),\, n_j\int_0^t dB_j(\tau)\,m_j(\tau)\right\rangle$$

$$
\begin{aligned}
&= n_i n_j \int_0^t m_i(\tau)\, m_j(\tau)\, d\langle B_i, B_j\rangle_\tau \\
&= n_i n_j \delta_{ij} \int_0^t m_i(\tau)\, m_j(\tau)\, d\tau.
\end{aligned}
$$

Assim, e pelo Teorema 4.1.1 conclui-se que

$$
\forall i \neq j, \quad \langle M_{i,.}, M_{j,.}\rangle_t = 0,
$$

e que

$$
\lim_{\varepsilon \to 0^+} \langle r M_{i,.}, r M_{i,.}\rangle_t = \frac{n_i}{n} k_n^2 t, \text{ em média quadrática.}
$$

Vejamos que $r(\varepsilon)\langle M_{i,.}, B_{j,.}\rangle_t$ também converge para zero em média quadrática. Temos

$$
\langle M_{i,.}, B_{j,.}\rangle_t = \left\langle n_i \int_0^t dB_i(\tau)\, m_i(\tau), \int_0^t dB_j \right\rangle
$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
\langle M_{i,.}, B_{j,.}\rangle_t &= n_i \int_0^t m_i(\tau)\, d\langle B_i, B_j\rangle_\tau \\
&= n_i \delta_{ij} \int_0^t m_i(\tau)\, d\tau. \qquad (4.43)
\end{aligned}
$$

Ora,

$$
\left\| \langle M_{i,.}, B_j\rangle_t \right\|^2_{(L^2)} = \left(\vec{n} - \vec{\delta}_i\right)! n_i^2 \delta_{ij} \left| F_{\vec{n}-\vec{\delta}_i} \right|^2_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
F_{\vec{n}-\vec{\delta}_i}(s_1, \ldots s_{n-1}) \; : &= \int_0^t d\tau \prod_{i=1}^{n-1} \Theta(\tau - s_i)\, (\tau - u + \varepsilon)^{-\frac{n+d}{2}+2} \\
&= \int_v^t d\tau\, (\tau - u + \varepsilon)^{-\frac{n+d}{2}+2} \\
&= \frac{2}{n+d-6} \left\{ (v - u + \varepsilon)^{-\frac{n+d}{2}+3} - (t - u + \varepsilon)^{-\frac{n+d}{2}+3} \right\}.
\end{aligned}
$$

Atendendo a que para $d = 3$ e $n > 3$, ou $d = 4$ e $n > 2$, ou $d > 4$ e $n \geq 2$,

$$(v - u + \varepsilon)^{-\frac{n+d}{2}+3} \geq (t - u + \varepsilon)^{-\frac{n+d}{2}+3} \geq 0,$$

e que

$$\left|F_{\vec{n}-\vec{\delta}_i}\right|^2_{\hat{L}^2(\mathbb{R}^{n-1})} \leq \left|F_{\vec{n}-\vec{\delta}_i}\right|^2_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})},$$

basta-nos provar que

$$r^2(\varepsilon)\left|(v - u + \varepsilon)^{-\frac{n+d}{2}+3}\right|^2_{L^2\left([0,t]^{n-1}\right)}$$

tem limite zero. Temos

$$\begin{aligned}
&\left|(v - u + \varepsilon)^{-\frac{n+d}{2}+3}\right|^2_{L^2\left([0,t]^{n-1}\right)} \\
&= (n-1)(n-2)\int_0^t dv \int_0^v du \frac{(v-u)^{n-3}}{(v-u+\varepsilon)^{n+d-6}} \\
&\leq (n-1)(n-2)\int_0^t dv \int_0^v du \frac{1}{(v-u+\varepsilon)^{d-3}}.
\end{aligned}$$

Obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_0^t dv \int_0^v du \frac{1}{(v-u+\varepsilon)^{d-3}} \\
&= \begin{cases}
\frac{t^2}{2} & \text{se} \quad d = 3 \\
(\varepsilon + t)\left(\ln(\varepsilon + t) - \ln\varepsilon\right) - t & \text{se} \quad d = 4 \\
\ln\varepsilon - \ln(\varepsilon + t) + \frac{t}{\varepsilon} & \text{se} \quad d = 5 \\
\frac{(\varepsilon+t)^{2-d}\left(\varepsilon^3 + 3\varepsilon^2 t + 3\varepsilon t^2 + t^3\right) - \varepsilon^{4-d}(\varepsilon - t(d-5))}{(d-4)(d-5)} & \text{se} \quad d > 5
\end{cases}
\end{aligned}$$

que, quando multiplicado pelo factor de renormalização

$$r^2(\varepsilon) = \begin{cases} |\ln\varepsilon|^{-1} & \text{se} \quad d = 3 \\ \varepsilon^{d-3} & \text{se} \quad d > 3 \end{cases},$$

converge para zero, tal como pretendíamos mostrar.

Quando $d = 3$ e $n = 2$, obtém-se

$$F_{\vec{n}-\vec{\delta}_i}(s) = \int_s^t dv(v - s + \varepsilon)^{-\frac{1}{2}} = 2\sqrt{t - s + \varepsilon} - 2\sqrt{\varepsilon}.$$

Facilmente se mostra que

$$|\ln \varepsilon|^{-1} \left|F_{\vec{n}-\vec{\delta}_i}(s)\right|^2_{L^2([0,t])} \underset{\varepsilon \to 0^+}{\longrightarrow} 0.$$

Finalmente, no caso em que $d = 4$ e $n = 2$, vem

$$F_{\vec{n}-\vec{\delta}_i}(s) = \int_s^t dv(v - s + \varepsilon)^{-1} = \ln|t - s + \varepsilon| - \ln \varepsilon,$$

que, quando renormalizado pelo factor ε, também converge para zero em média quadrática. Conclui-se, assim, que os movimentos Brownianos $\beta_1, ..., \beta_d$, $B_1, ..., B_d$ são independentes.■

Prova do Teorema 4.2.2: Basearemos esta prova também no Teorema VIII.3.11 de [JS87]. Cada um dos elementos da matriz das covariâncias é de um dos tipos

$$\langle rM_{.}(d, \vec{n}, \varepsilon), rM_{.}(d, \vec{n}, \varepsilon)\rangle_t, \ \langle rM_{.}(d, \vec{n}, \varepsilon), rM_{.}(d, \vec{n}', \varepsilon)\rangle_t,$$

$$\langle rM_{.}(d, \vec{n}, \varepsilon), B_i\rangle_t \text{ ou } \langle B_i, B_j\rangle_t.$$

Sabemos já que $\langle B_i, B_j\rangle_t = \delta_{ij}t$.

Quanto a $\langle rM_{.}(d, \vec{n}, \varepsilon), B_i\rangle_t$, podemos representá-lo por

$$\left\langle r\sum_{j=1}^{d} M_{j,.}(d, \vec{n}, \varepsilon), B_i \right\rangle_t = r\sum_{j=1}^{d} \langle M_{j,.}(d, \vec{n}, \varepsilon), B_i\rangle_t$$

$$= r\left\langle M_{i,.}(d, \vec{n}, \varepsilon), B_i\right\rangle_t + r\sum_{j=1, j\neq i}^{d} \left\langle M_{j,.}(d, \vec{n}, \varepsilon), B_i\right\rangle_t. \qquad (4.44)$$

Atendendo a (4.43), a segunda parcela de (4.44) é zero, pelo que (4.44) é igual a

$$r\left\langle M_{i,.}(d, \vec{n}, \varepsilon), B_i\right\rangle_t,$$

que sabemos convergir para zero em média quadrática (Teorema 4.2.1).

Estudemos agora

$$\langle rM_{.}(d,\vec{n},\varepsilon), rM_{.}(d,\vec{n}',\varepsilon)\rangle_t, \ \vec{n}\neq\vec{n}'. \tag{4.45}$$

Da secção anterior sabemos que

$$\langle rM_{.}(d,\vec{n},\varepsilon), rM_{.}(d,\vec{n}',\varepsilon)\rangle_t = r^2\sum_{i=1}^{d} n_i n_i' \int_0^t m_i(\tau)\, m_i'(\tau)\, d\tau \tag{4.46}$$

e

$$\left\|\langle rM_{.}(d,\vec{n},\varepsilon), rM_{.}(d,\vec{n}',\varepsilon)\rangle_t\right\|^2 \leq c.r^4\sum_{i=1}^{d} n_i^2 n_i'^2 \left\|\int_0^t m_i(\tau)\, m_i'(\tau)\, d\tau\right\|^2.$$

Os Lemas 4.1.6 e 4.1.7 permitem-nos então concluir que para todos os *kernels* $G_{\vec{k}}$ de (4.45) com $k\geq 2$ argumentos tem-se

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} r^4(\varepsilon)\left|G_{\vec{k}}\right|^2_{L^2([0,t]^k)} = 0.$$

Por outro lado, de $\vec{n}\neq\vec{n}'$, resulta que $:\omega^{\otimes\vec{n}}:$ e $:\omega^{\otimes\vec{n}'}:$ são ortogonais. Logo,

$$\mathbb{E}\left(\langle rM_{.}(d,\vec{n},\varepsilon), rM_{.}(d,\vec{n}',\varepsilon)\rangle_t\right) = 0, \tag{4.47}$$

pelo que podemos afirmar que, sempre que $\vec{n}\neq\vec{n}'$ os *martingales* renormalizados $r(\varepsilon)M_t(d,\vec{n},\varepsilon)$ e $r(\varepsilon)M_t(d,\vec{n}',\varepsilon)$ convergem em lei para movimentos Brownianos independentes.

Para finalizarmos o estudo da convergência em lei do processo

$$\begin{pmatrix} rM_{.}(d,\vec{n},\varepsilon) \\ rM_{.}(d,\vec{n}',\varepsilon) \\ B_1 \\ \dots \\ \dots \\ B_d \end{pmatrix},$$

resta-nos estudar a variação quadrática dos *martingales*. Dado $\vec{n}$ seja $r(\varepsilon)M_t(d,\vec{n},\varepsilon)$ o correspondente *martingale*. Tem-se

$$\langle r(\varepsilon)M_{.}(d,\vec{n},\varepsilon), r(\varepsilon)M_{.}(d,\vec{n},\varepsilon)\rangle_t = r^2(\varepsilon)\sum_{i,j=1}^{d}\langle M_{i,.}(d,\vec{n},\varepsilon), M_{j,.}(d,\vec{n},\varepsilon)\rangle_t$$

pelo que, atendendo à Proposição 4.1.9, podemos concluir que o limite em média quadrática da variação quadrática de $r(\varepsilon)M_t(d,\vec{n},\varepsilon)$ é

$$\sum_{i=1}^{d} \frac{n_i}{n} k_n^2 t = k_n^2 t,$$

onde k_n é o definido em (4.3).■

Capítulo 5

O quadrado centrado dos tempos locais centrados

À semelhança do que foi considerado em [FHSW97], e mencionado no Capítulo 3, fixaremos a aproximação dos tempos locais

$$L_\varepsilon(T_1,T_2) := \iint\limits_{\Delta_{T_1,T_2}} d^2t\,\delta_\varepsilon(\mathrm{B}(t_2)-\mathrm{B}(t_1)),\ \varepsilon>0$$

com $\Delta_{T_1,T_2} := \{(t_1,t_2) : T \leq t_1 \leq t_2 \leq T_2\}$ e

$$\begin{aligned}\delta_\varepsilon(\mathrm{B}(t_2)-\mathrm{B}(t_1)) &:= (2\pi\varepsilon)^{-\frac{d}{2}}\exp\left(-\frac{|\mathrm{B}(t_2)-\mathrm{B}(t_1)|^2}{2\varepsilon}\right) \\ &= (2\pi\varepsilon)^{-\frac{d}{2}}\exp\left(-\tfrac{1}{2\varepsilon}\langle\omega,\, 1\!\!1_{[t_1,t_2]}\rangle^2\right).\end{aligned} \tag{5.1}$$

Consideraremos

$$L_{\varepsilon,\mathrm{ren}}(T_1,T_2) := r(\varepsilon)\left(L_\varepsilon(T_1,T_2)-\mathbb{E}\left(L_\varepsilon(T_1,T_2)\right)\right),$$

ou, ainda,

$$L_{\varepsilon,\mathrm{ren}}(T_1,T_2) = r(\varepsilon)\,L_{\varepsilon,c}(T_1,T_2),$$

sendo $r(\varepsilon)$ o definido em (4.1) e

$$L_{\varepsilon,c}(T_1,T_2) := L_\varepsilon(T_1,T_2)-\mathbb{E}\left(L_\varepsilon(T_1,T_2)\right).$$

Repare-se que primeiro centra-se a variável e em seguida divide-se pelo tipo de divergência que mostraremos ter. Omitiremos os argumentos T_1 e T_2 de $L(T_1,T_2)$, dada a facilidade de identificação do triângulo sobre o qual incidirá cada caso.

5.1 A esperança da sua renormalização

Toda esta secção é dedicada ao estudo da esperança do quadrado dos tempos locais renormalizados. Começamos pela análise do caso menos singular.

Teorema 5.1.1 *Quando $d = 3$, temos*

$$\mathbb{E}(L^2_{\varepsilon,ren}) \underset{\varepsilon\to 0^+}{\longrightarrow} \frac{T_2 - T_1}{2\pi^2}.$$

Prova

$$\mathbb{E}\left(L^2_{\varepsilon,\mathrm{ren}}\right) = r^2(\varepsilon)\left(\mathbb{E}\left(L^2_\varepsilon\right) - \left(\mathbb{E}\left(L_\varepsilon\right)\right)^2\right), \tag{5.2}$$

ou, ainda,

$$\mathbb{E}\left(L^2_{\varepsilon,\mathrm{ren}}\right) = r^2(\varepsilon)\,\mathbb{E}\left(\left(L_{\varepsilon,c}\right)^2\right). \tag{5.3}$$

Pela definição dos tempos locais das auto-intersecções do movimento Browniano, obtém-se:

$$\mathbb{E}\left(L^2_\varepsilon\right) = \iint\limits_{\Delta_{T_1,T_2}} d^2t \iint\limits_{\Delta_{T_1,T_2}} d^2s\,\mathbb{E}\left(\delta_\varepsilon\left(\mathbf{B}(t_2) - \mathbf{B}(t_1)\right)\delta_\varepsilon\left(\mathbf{B}(s_2) - \mathbf{B}(s_1)\right)\right).$$

Usando (5.1) resulta:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(L^2_\varepsilon\right) &= \iint_{\Delta_{T_1,T_2}} d^2t \iint_{\Delta_{T_1,T_2}} d^2s \frac{1}{(2\pi\varepsilon)^d} \\ &\cdot\mathbb{E}\left(\exp\left(-\frac{1}{2\varepsilon}\left|\mathbf{B}(t_2) - \mathbf{B}(t_1)\right|^2\right)\exp\left(-\frac{1}{2\varepsilon}\left|\mathbf{B}(s_2) - \mathbf{B}(s_1)\right|^2\right)\right).\end{aligned}$$

Atendendo a que $\mathbf{B}^2 = \sum\limits_{i=1}^{d} B_i^2$ e $\Delta B_i = \langle\omega_i, g\rangle$, onde g é uma função indicatriz, tem-se:

$$\mathbb{E}\left(L^2_\varepsilon\right) = \iint_{\Delta_{T_1,T_2}} d^2t \iint_{\Delta_{T_1,T_2}} d^2s \left(\frac{1}{2\pi\varepsilon}\right)^d \cdot$$

$$\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{d}\exp\left(\frac{-1}{2\varepsilon}\left(\langle\omega_i,g_1\rangle^2+\langle\omega_i,g_2\rangle^2\right)\right)\right)$$

com

$$\begin{cases} g_1 &= \mathbb{1}_{[t_1,t_2]} \\ g_2 &= \mathbb{1}_{[s_1,s_2]} \end{cases}.$$

Como as variáveis aleatórias definidas por $f_i(\omega)=\left(\langle\omega_i,g_1\rangle^2,\langle\omega_i,g_2\rangle^2\right)$, $i=1,...,d$, são independentes e igualmente distribuídas, pode escrever-se

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(L_\varepsilon^2\right) &= (2\pi\varepsilon)^{-d}\iint_{\Delta_{T_1,T_2}} d^2t\iint_{\Delta_{T_1,T_2}} d^2s \\ &\cdot\left(\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{-1}{2\varepsilon}\left(\langle\omega,g_1\rangle^2+\langle\omega,g_2\rangle^2\right)\right)\right)\right)^d.\end{aligned}$$

Note-se que no contexto actual ω representa uma distribuição unidimensional. Represente-se por (e_1,e_2) a base o.n. do subespaço gerado por g_1 e g_2, com $e_1=\frac{g_1}{|g_1|}$ e $e_2=\left(|g_2|^2-\frac{(g_2,g_1)^2}{|g_1|^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(g_2-\frac{(g_2,g_1)}{|g_1|^2}g_1\right)$. Resulta então:

$$\begin{aligned}&\langle\omega,g_1\rangle^2+\langle\omega,g_2\rangle^2 \qquad (5.4)\\ &=\langle(\omega,e_1)\,e_1+(\omega,e_2)\,e_2,g_1\rangle^2+\langle(\omega,e_1)\,e_1+(\omega,e_2)\,e_2,g_2\rangle^2\\ &=\left((\omega,e_1)\,(e_1,g_1)+(\omega,e_2)\,(e_2,g_1)\right)^2+\left((\omega,e_1)\,(e_1,g_2)+(\omega,e_2)\,(e_2,g_2)\right)^2. \qquad (5.5)\end{aligned}$$

Representemos as variáveis (ω,e_n) (Gaussianas do tipo $N(0,1)$) por $X^{(n)}$, $n=1,\,2$. Com esta notação, (5.4) pode ser escrito na forma

$$\begin{aligned}&X^{(1)^2}\left((e_1,g_1)^2+(e_1,g_2)^2\right)+X^{(2)^2}\left((e_2,g_1)^2+(e_2,g_2)^2\right)\\ &+2X^{(1)}X^{(2)}\,(e_1,g_1)\,(e_2,g_1)+(e_1,g_2)\,(e_2,g_2).\end{aligned}$$

Considerando a matriz:

$$M:=\begin{bmatrix}(e_1,g_1)^2+(e_1,g_2)^2 & (e_1,g_1)\,(e_2,g_1)+(e_1,g_2)\,(e_2,g_2)\\ (e_1,g_1)\,(e_2,g_1)+(e_1,g_2)\,(e_2,g_2) & (e_2,g_1)^2+(e_2,g_2)^2\end{bmatrix}$$

obtém-se, equivalentemente,

$$\mathbb{E}\left(L_\varepsilon^2\right)=(2\pi\varepsilon)^{-d}\iint\limits_{\Delta_{T_1,T_2}} d^2t\iint\limits_{\Delta_{T_1,T_2}} d^2s\left(\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{-1}{2\varepsilon}\left(\vec{X}M\vec{X}\right)\right)\right)\right)^d.$$

Simplificando, obtém-se

$$\mathbb{E}\left(L_\varepsilon^2\right) = (2\pi\varepsilon)^{-d} \iint\limits_{\Delta_{T_1,T_2}} d^2t \iint\limits_{\Delta_{T_1,T_2}} d^2s \left(\det\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}M\right)\right)^{-\frac{d}{2}}.$$

Se considerarmos a matriz

$$G = \begin{bmatrix} \tau & \delta \\ \delta & \sigma \end{bmatrix},$$

com

$$\begin{aligned} \sigma &:= s_2 - s_1 \\ \tau &:= t_2 - t_1 \\ \delta &:= \left|[t_1, t_2] \cap [s_1, s_2]\right| \text{ (amplitude do intervalo de intersecção),} \end{aligned}$$

podemos, ainda, escrever

$$\mathbb{E}\left(L_\varepsilon^2\right) = (2\pi\varepsilon)^{-d} \iint\limits_{\Delta_{T_1,T_2}} d^2t \iint\limits_{\Delta_{T_1,T_2}} d^2s \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\operatorname{tr} G + \frac{1}{\varepsilon^2}\det G\right)^{-\frac{d}{2}} \tag{5.6}$$

uma vez que

$$\begin{aligned} &\det\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}M\right) \\ &= 1 + \frac{1}{\varepsilon}\left((e_1, g_1)^2 + (e_1, g_2)^2 + (e_2, g_1)^2 + (e_2, g_2)^2\right) \\ &\quad + \frac{1}{\varepsilon^2}\left(\left((e_1, g_1)^2 + (e_1, g_2)^2\right)\left((e_2, g_1)^2 + (e_2, g_2)^2\right)\right. \\ &\quad \left. - \left((e_1, g_1)(e_2, g_1) + (e_1, g_2)(e_2, g_2)\right)^2\right) \\ &= 1 + \frac{1}{\varepsilon}\operatorname{tr} M + \frac{1}{\varepsilon^2}\det M, \end{aligned} \tag{5.7}$$

onde

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} M &= (e_1, g_1)^2 + (e_1, g_2)^2 + (e_2, g_1)^2 + (e_2, g_2)^2 \\ &= |g_1|^2 + |g_2|^2 \\ &= \operatorname{tr} G \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\det M &= \left(|g_1|^2 + \frac{(g_1,g_2)^2}{|g_1|^2}\right)\left(|g_2|^2 - \frac{(g_1,g_2)^2}{|g_1|^2}\right) \\
&\quad -\frac{(g_1,g_2)^2}{|g_1|^2}\left(|g_2|^2 - \frac{(g_1,g_2)^2}{|g_1|^2}\right) \\
&= |g_1|^2 |g_2|^2 - (g_1,g_2)^2 \\
&= \det G.
\end{aligned}$$

Por outro lado, e como já foi referido,

$$\begin{aligned}
\delta_\varepsilon(\mathbf{B}(t_2) - \mathbf{B}(t_1)) &:= (2\pi\varepsilon)^{-\frac{d}{2}} \exp\left(-\frac{|\mathbf{B}(t_2) - \mathbf{B}(t_1)|^2}{2\varepsilon}\right) \\
&= (2\pi\varepsilon)^{-\frac{d}{2}} \prod_{i=1}^{d} \exp\left(\tfrac{-1}{2\varepsilon}\langle\omega_i, g_1\rangle^2\right).
\end{aligned}$$

Como as variáveis dadas por $p_i(\omega) = \langle\omega_i, g_1\rangle$, $i = 1, ..., d$, são Gaussianas do tipo $N(0,1)$, independentes e igualmente distribuídas obtém-se

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(L_\varepsilon) &= (2\pi\varepsilon)^{-\frac{d}{2}} \int_{T_1}^{T_2} dt_2 \int_{T_1}^{t_2} dt_1 \left(\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{-1}{2\varepsilon}\langle\omega, g_1\rangle^2\right)\right)\right)^d \\
&= (2\pi\varepsilon)^{-\frac{d}{2}} \int_{T_1}^{T_2} dt_2 \int_{T_1}^{t_2} dt_1 \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}|g_1|^2\right)^{-\frac{d}{2}} \\
&= (2\pi\varepsilon)^{-\frac{d}{2}} \int_{T_1}^{T_2} dt_2 \int_{T_1}^{t_2} dt_1 \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}(t_2 - t_1)\right)^{-\frac{d}{2}};
\end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned}
(\mathbb{E}(L_\varepsilon))^2 &= (2\pi\varepsilon)^{-d} \int_{T_1}^{T_2} dt_2 \int_{T_1}^{t_2} dt_1 \int_{T_1}^{T_2} ds_2 \int_{T_1}^{s_2} \\
&\quad \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}(t_2 - t_1)\right)^{-\frac{d}{2}} \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}(s_2 - s_1)\right)^{-\frac{d}{2}} ds_1.
\end{aligned}$$

Assim, e atendendo a (5.3), obtemos:

$$\mathbb{E}\left(\left(L_{\varepsilon,c}\right)^2\right)$$

$$= (2\pi\varepsilon)^{-d}\left(\int_{T_1}^{T_2} dt_2 \int_{T_1}^{t_2} dt_1 \int_{T_1}^{T_2} ds_2 \int_{T_1}^{s_2} ds_1\right.$$

$$\left.\left(\left(1+\frac{1}{\varepsilon}(\tau+\sigma)+\frac{1}{\varepsilon^2}\left(\tau\sigma-\delta^2\right)\right)^{-\frac{d}{2}}-\left(\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\tau\right)\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\sigma\right)\right)^{-\frac{d}{2}}\right)\right).$$

Efectuando em cada integral uma transformação de variável do tipo $x'=\dfrac{x}{\varepsilon}$, a expressão anterior vem igual a

$$\mathbb{E}\left(\left(L_{\varepsilon,c}\right)^2\right)=\frac{\varepsilon^{4-d}}{(2\pi)^d}\int_{\frac{T_1}{\varepsilon}}^{\frac{T_2}{\varepsilon}} dt_2 \int_{\frac{T_1}{\varepsilon}}^{\frac{t_2}{\varepsilon}} dt_1 \int_{\frac{T_1}{\varepsilon}}^{\frac{T_2}{\varepsilon}} ds_2 \int_{\frac{T_1}{\varepsilon}}^{s_2} ds_1 \tag{5.8}$$

$$.\left(\left(1+\tau+\sigma+\tau\sigma-\delta^2\right)^{-\frac{d}{2}}-\left((1+\tau)(1+\sigma)\right)^{-\frac{d}{2}}\right).$$

A expressão (5.8) pode ser adaptada às possíveis posições relativas dos intervalos $[t_1,t_2]$ e $[s_1,s_2]$. Pode acontecer: a disjunção dos intervalos (inexistência de *overlap*); a inclusão de um no outro (*overlap* total); ou a existência de elementos em comum sem que um dos intervalos esteja contido no outro (*overlap* parcial). Em cada uma destas situações suporemos que $s_1 \leq t_1$ e, consequentemente, multiplicaremos o valor correspondente a (5.8) por dois para compensar a simetria original das variáveis s e t.

Na inexistência de *overlap* a contribuição é nula pois $\delta=0$.

Relativamente à situação de *overlap* total, supomos, sem perda de generalidade, que $[t_1,t_2]\subset[s_1,s_2]$. A contribuição pode ser representada por

$$\frac{\varepsilon^{4-d}}{(2\pi)^d}\int_0^{\frac{T_2-T_1}{\varepsilon}} d\sigma \int_0^{\sigma} d\tau \int_{\frac{T_1}{\varepsilon}}^{\frac{T_2}{\varepsilon}-\sigma} ds \int_s^{s+\sigma-\tau} dt \tag{5.9}$$

$$.\left(\left(1+\tau+\sigma+\tau\sigma-\tau^2\right)^{-\frac{d}{2}}-\left((1+\tau)(1+\sigma)\right)^{-\frac{d}{2}}\right)$$

ou, mais simplesmente, por

$$\frac{\varepsilon^{4-d}}{(2\pi)^d}\int_0^{\frac{T_2-T_1}{\varepsilon}} d\sigma \int_0^{\sigma} d\tau \left(\frac{T_2}{\varepsilon}-\sigma-\frac{T_1}{\varepsilon}\right)(\sigma-\tau) \tag{5.10}$$

$$.\left(\left(1+\tau+\sigma+\tau\sigma-\tau^2\right)^{-\frac{d}{2}}-\left((1+\tau)(1+\sigma)\right)^{-\frac{d}{2}}\right).$$

Assim, considerando $d = 3$, obtemos a contribuição

$$\begin{aligned}&\tfrac{\varepsilon}{8\pi^3}\int_0^{\frac{T_2-T_1}{\varepsilon}} d\sigma \int_0^{\sigma} d\tau \left(\tfrac{T_2-T_1}{\varepsilon}-\sigma\right)(\sigma-\tau)\\ &\cdot\left(\left(1+\tau+\sigma+\sigma\tau-\tau^2\right)^{-\frac{3}{2}}-\left((1+\tau)(1+\sigma)\right)^{-\frac{3}{2}}\right).\end{aligned} \tag{5.11}$$

Recorrendo a diversas fórmulas integrais, a algumas integrações por partes e mudanças de variável (indicadas em apêndice), mostra-se que a expressão (5.11) é igual a:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4\pi^3}\left(T_2-T_1+\varepsilon\right)\arctan\sqrt{1+2\frac{T_2-T_1}{\varepsilon}}\\ &-\frac{3}{4\pi^3}\left(T_2-T_1+5\varepsilon\right)\arctan\frac{\sqrt{1+2\frac{T_2-T_1}{\varepsilon}}}{3}\\ &-\frac{3}{4\pi^3}\left(T_2-T_1+5\varepsilon\right)\arctan\frac{\sqrt{1+\frac{T_2-T_1}{\varepsilon}}}{2}+\left(\frac{-116}{3}+7\pi\right)\frac{\varepsilon}{8\pi^3}\\ &+\frac{\pi-8}{8\pi^3}\left(T_2-T_1\right)+\frac{1}{2\pi^3}\left(T_2-T_1+\varepsilon\right)\ln\left(1+\frac{T_2-T_1}{\varepsilon}\right)\\ &+\frac{1}{\pi^3}\sqrt{\varepsilon^2+2\left(T_2-T_1\right)\varepsilon}+\frac{5\varepsilon}{2\pi^3}\sqrt{1+\frac{T_2-T_1}{\varepsilon}}.\end{aligned}$$

Ora, quando $\varepsilon \to 0^+$, esta contribuição é da ordem de $\ln \varepsilon$, pois:

1. a soma das cinco primeiras parcelas converge para
$$\left(T_2-T_1\right)\left(\frac{-5}{8\pi^2}+\frac{\pi-8}{8\pi^3}\right);$$

2. a sexta parcela é da ordem de $\ln \varepsilon$ e, quando dividida por $-\ln \varepsilon$, obtém-se no limite
$$\frac{T_2-T_1}{2\pi^3};$$

3. as duas últimas parcelas têm limite zero.

Conclusão: Se dividirmos cada contribuição do *overlap* total por $-\ln \varepsilon$ e calcularmos o limite quando $\varepsilon \longrightarrow 0^+$, obtemos $\frac{T_2 - T_1}{2\pi^3}$. Da simetria original entre as variáveis s e t resultam duas possibilidades de *overlap* total, donde o limite será:

$$\frac{T_2 - T_1}{\pi^3}.$$

Na situação de *overlap* parcial, muito mais melindrosa que as restantes situações, a expressão encontrada, já considerando a contribuição vinda da independência entre as variáveis s e t, é dada por

$$\frac{2}{(2\pi)^d} \int_0^{T_2-T_1} d\sigma \int_0^{\sigma} d\delta \int_{\delta}^{T_2-T_1-\sigma+\delta} d\tau \int_{T_1}^{T_2-\sigma-\tau+\delta}$$
$$\left(\left(\varepsilon^2 + \varepsilon\left(\tau + \sigma\right) + \tau\sigma - \delta^2\right)^{-\frac{d}{2}} - \left(\left(\varepsilon + \tau\right)\left(\varepsilon + \sigma\right)\right)^{-\frac{d}{2}} \right) ds.$$

E, quando se considera $d = 3$, obtém-se:

$$\frac{1}{4\pi^3} \int_0^{T_2-T_1} d\sigma \int_0^{\sigma} d\delta \int_{\delta}^{T_2-T_1-\sigma+\delta} d\tau \int_{T_1}^{T_2-\sigma-\tau+\delta}$$
$$\left(\left(\varepsilon^2 + \varepsilon\left(\tau + \sigma\right) + \tau\sigma - \delta^2\right)^{-\frac{3}{2}} - \left(\left(\varepsilon + \tau\right)\left(\varepsilon + \sigma\right)\right)^{-\frac{3}{2}} \right) ds,$$

ou, ainda,

$$\frac{1}{4\pi^3} \int_0^{T_2-T_1} d\sigma \int_0^{T_2-T_1} d\tau \int_{0\vee(\sigma+\tau-T_2+T_1)}^{\sigma\wedge\tau} d\delta \left(T_2 - T_1 - \sigma - \tau + \delta\right)$$
$$\cdot \left(\left(\varepsilon^2 + \varepsilon\left(\tau + \sigma\right) + \tau\sigma - \delta^2\right)^{-\frac{3}{2}} - \left(\left(\varepsilon + \tau\right)\left(\varepsilon + \sigma\right)\right)^{-\frac{3}{2}} \right).$$

Realizando as substituições $\varepsilon + \sigma = s$ e $\varepsilon + \tau = t$ e considerando $T := T_2 - T_1$, obtém-se

$$\frac{1}{4\pi^3} \int_{\varepsilon}^{\varepsilon+T} ds \int_{\varepsilon}^{\varepsilon+T} dt \int_{0\vee(s+t-2\varepsilon-T)}^{(s\wedge t)-\varepsilon} d\delta \left(T - s - t + 2\varepsilon + \delta\right)$$
$$\cdot \left(\left(\frac{1}{st - \delta^2}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{1}{st}\right)^{\frac{3}{2}} \right).$$

Efectuando de seguida a substituição $\delta = x\sqrt{st}$, resulta

$$\frac{1}{4\pi^3}\int_{\varepsilon}^{\varepsilon+T} ds \int_{\varepsilon}^{\varepsilon+T} dt\sqrt{st}\int_{0\vee\frac{s+t-2\varepsilon-T}{\sqrt{st}}}^{\frac{s\wedge t-\varepsilon}{\sqrt{st}}} dx\left(T-s-t+2\varepsilon+x\sqrt{st}\right)$$
$$\cdot\left(\left(\frac{1}{st-x^2st}\right)^{\frac{3}{2}}-\left(\frac{1}{st}\right)^{\frac{3}{2}}\right)$$
$$= \frac{1}{4\pi^3}\int_{\varepsilon}^{\varepsilon+T}\frac{ds}{s}\int_{\varepsilon}^{\varepsilon+T}\frac{dt}{t}\int_{0\vee\frac{s+t-2\varepsilon-T}{\sqrt{st}}}^{\frac{s\wedge t-\varepsilon}{\sqrt{st}}} dx\left(T-s-t+2\varepsilon+x\sqrt{st}\right)$$
$$\cdot\left(\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^{\frac{3}{2}}-1\right). \tag{5.12}$$

Como a função definida por

$$\frac{1}{st}\int_{0\vee\frac{s+t-2\varepsilon-T}{\sqrt{st}}}^{\frac{s\wedge t-\varepsilon}{\sqrt{st}}} dx\left(T-s-t+2\varepsilon+x\sqrt{st}\right)\left(\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^{\frac{3}{2}}-1\right)$$

é simétrica em s e t, (5.12) é ainda igual a

$$\frac{1}{2\pi^3}\int_{\varepsilon}^{\varepsilon+T}\frac{dt}{t}\int_{\varepsilon}^{t}\frac{ds}{s}\int_{0\vee\frac{s+t-2\varepsilon-T}{\sqrt{st}}}^{\frac{s-\varepsilon}{\sqrt{st}}} dx\left(T-s-t+2\varepsilon+x\sqrt{st}\right)\left(\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^{\frac{3}{2}}-1\right). \tag{5.13}$$

De seguida faremos o estudo da ordem de grandeza deste integral triplo, provando que:

1. determinadas parcelas têm ordem finita (nestes casos usa-se uma majoração e prova-se que ela tem limite finito quando $\varepsilon \to 0^+$);
2. as restantes parcelas são logaritmicamente divergentes.

Começaremos por estudar

$$\frac{1}{2\pi^3}\int_{\varepsilon}^{\varepsilon+T}\frac{dt}{t}\int_{\varepsilon}^{t}\frac{ds}{s}\int_{0\vee\frac{s+t-2\varepsilon-T}{\sqrt{st}}}^{\frac{s-\varepsilon}{\sqrt{st}}} dx\left(s+t-2\varepsilon-x\sqrt{st}\right). \tag{5.14}$$

Dado que a função integranda é não negativa e que

$$\left[0\vee\frac{(s+t-2\varepsilon-T)}{\sqrt{st}},\frac{s-\varepsilon}{\sqrt{st}}\right]\subseteq\left[0,\frac{s-\varepsilon}{\sqrt{st}}\right],$$

podemos considerar como majoração para o integral (5.14)

$$\frac{1}{2\pi^3}\int_\varepsilon^{\varepsilon+T}\frac{dt}{t}\int_\varepsilon^t\frac{ds}{s}\int_0^{\frac{s-\varepsilon}{\sqrt{st}}}dx\left(s+t-2\varepsilon-x\sqrt{st}\right),$$

que tende para uma constante quando $\varepsilon \longrightarrow 0^+$. Fica, assim, provado que a contribuição da parcela em questão é da ordem de $O(1)$.

O integral

$$\frac{-T}{2\pi^3}\int_\varepsilon^{\varepsilon+T}\frac{dt}{t}\int_\varepsilon^t\frac{ds}{s}\int_{0\vee\frac{s+t-2\varepsilon-T}{\sqrt{st}}}^{\frac{s-\varepsilon}{\sqrt{st}}}dx$$

pode ser representado na forma

$$-\frac{T}{2\pi^3}\int_\varepsilon^{\varepsilon+T}\frac{ds}{s}\int_s^{2\varepsilon+T-s}\frac{dt}{t}\int_0^{\frac{s-\varepsilon}{\sqrt{st}}}dx-\frac{T}{2\pi^3}\int_{\varepsilon+\frac{T}{2}}^{\varepsilon+T}\frac{dt}{t}\int_{2\varepsilon+T-t}^t\frac{ds}{s}\int_{\frac{(s+t-2\varepsilon-T)}{\sqrt{st}}}^{\frac{s-\varepsilon}{\sqrt{st}}}dx,$$

cujo valor é dado por

$$\begin{aligned}\frac{T}{\pi^3}\Bigg(&\arcsin\frac{T}{2\varepsilon+T}-\frac{2\sqrt{(2\varepsilon+T)\,\varepsilon-\varepsilon^2}}{2\varepsilon+T}\\&-\ln\left(\varepsilon+\frac{T}{2}\right)+\ln\varepsilon-\frac{2\sqrt{(2\varepsilon+T)\,(\varepsilon+T)-(\varepsilon+T)^2}}{2\varepsilon+T}\\&+\frac{T+2\sqrt{(2\varepsilon+T)\left(\varepsilon+\frac{T}{2}\right)-\left(\varepsilon+\frac{T}{2}\right)^2}}{\varepsilon+\frac{T}{2}}\Bigg).\end{aligned}$$

Observe-se que nesta expressão apenas a parcela

$$\frac{T}{\pi^3}\ln\varepsilon$$

diverge quando $\varepsilon \longrightarrow 0^+$.

Provaremos que o valor da esperança que estamos estudando, é logaritmicamente divergente. Sabemos já que a contribuição do *overlap* total tem ordem $\ln\varepsilon$ e que é dada por $-\frac{T}{\pi^3}\ln\varepsilon$. Mostraremos que o integral que nos falta estudar é divergente e é da ordem de $\ln\varepsilon$.

Avaliemos então a ordem de

$$\frac{1}{2\pi^3}\int_{\varepsilon}^{\varepsilon+T}\frac{dt}{t}\int_{\varepsilon}^{t}\frac{ds}{s}\int_{0\vee\frac{s+t-2\varepsilon-T}{\sqrt{st}}}^{\frac{s-\varepsilon}{\sqrt{st}}}dx\left(T-s-t+2\varepsilon+x\sqrt{st}\right)\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{5.15}$$

Mais uma vez, vamos estudar parcela a parcela. Quanto a

$$\frac{\varepsilon}{\pi^3}\int_{\varepsilon}^{\varepsilon+T}\frac{dt}{t}\int_{\varepsilon}^{t}\frac{ds}{s}\int_{0\vee\frac{s+t-2\varepsilon-T}{\sqrt{st}}}^{\frac{s-\varepsilon}{\sqrt{st}}}dx\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}, \tag{5.16}$$

e tendo em conta que a função a integrar é não negativa, podemos considerar a majoração

$$\frac{\varepsilon}{\pi^3}\int_{\varepsilon}^{\varepsilon+T}\frac{dt}{t}\int_{\varepsilon}^{t}\frac{ds}{s}\int_{0}^{\frac{s-\varepsilon}{\sqrt{st}}}dx\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

que é da ordem de $O(1)$; o que nos leva a concluir que a parcela (5.16), tem a mesma ordem.

Relativamente a

$$\frac{1}{2\pi^3}\int_{\varepsilon}^{\varepsilon+T}\frac{dt}{t}\int_{\varepsilon}^{t}ds\int_{0\vee\frac{s+t-2\varepsilon-T}{\sqrt{st}}}^{\frac{s-\varepsilon}{\sqrt{st}}}dx\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}, \tag{5.17}$$

e procedendo da mesma forma, adoptamos a majoração

$$\frac{1}{2\pi^3}\int_{\varepsilon}^{\varepsilon+T}\frac{dt}{t}\int_{\varepsilon}^{t}ds\int_{0}^{\frac{s-\varepsilon}{\sqrt{st}}}dx\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

que, por sua vez, é majorada por

$$\frac{1}{2\pi^3}\int_{\varepsilon}^{\varepsilon+T}\frac{dt}{t}\int_{\varepsilon}^{t}ds\int_{0}^{\sqrt{\frac{s}{t}}}dx\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

de ordem $O(1)$. assim, também o integral (5.17) é da ordem $O(1)$.

Quanto a

$$\frac{1}{2\pi^3}\int_{\varepsilon}^{\varepsilon+T}\frac{dt}{\sqrt{t}}\int_{\varepsilon}^{t}\frac{ds}{\sqrt{s}}\int_{0\vee\frac{s+t-2\varepsilon-T}{\sqrt{st}}}^{\frac{s-\varepsilon}{\sqrt{st}}}dx\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}, \tag{5.18}$$

e usando ainda o mesmo argumento, consideremos a majoração

$$\frac{1}{2\pi^3}\int_{\varepsilon}^{\varepsilon+T}\frac{dt}{\sqrt{t}}\int_{\varepsilon}^{t}\frac{ds}{\sqrt{s}}\int_{0}^{\sqrt{\frac{s}{t}}}dx\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\leq \frac{1}{2\pi^3}\int_{\varepsilon}^{\varepsilon+T}dt\int_{\varepsilon}^{t}ds\frac{1}{\sqrt{s}\sqrt{t-s}}$$

que é da ordem $O(1)$. Igualmente se conclui que também a expressão (5.18) é da ordem $O(1)$. No que respeita a

$$\frac{1}{2\pi^3}\int_{\varepsilon}^{\varepsilon+T}dt\int_{\varepsilon}^{t}\frac{ds}{s}\int_{0\vee\frac{s+t-2\varepsilon-T}{\sqrt{st}}}^{\frac{s-\varepsilon}{\sqrt{st}}}dx\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

e uma vez mais seguindo o mesmo raciocínio, podemos majorá-lo por

$$\frac{1}{2\pi^3}\int_{\varepsilon}^{\varepsilon+T}dt\int_{\varepsilon}^{t}\frac{ds}{s}\int_{0}^{\sqrt{\frac{s}{t}}}dx\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\leq \frac{1}{2\pi^3}\int_{\varepsilon}^{\varepsilon+T}dt\int_{\varepsilon}^{t}ds\frac{1}{\sqrt{s}\sqrt{t-s}},$$

que, como foi referido há pouco, tem ordem $O(1)$.

Falta estudar o integral

$$\frac{T}{2\pi^3}\int_{\varepsilon}^{\varepsilon+T}\frac{dt}{t}\int_{\varepsilon}^{t}\frac{ds}{s}\int_{0\vee\frac{s+t-2\varepsilon-T}{\sqrt{st}}}^{\frac{s-\varepsilon}{\sqrt{st}}}dx\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}, \tag{5.19}$$

o qual pode ser representado por

$$\frac{T}{2\pi^3}\left(\int_{\varepsilon}^{\varepsilon+\frac{T}{2}}+\int_{\varepsilon+\frac{T}{2}}^{T+\varepsilon}\right)\frac{dt}{t}\int_{\varepsilon}^{t}\frac{ds}{s}\int_{0\vee\frac{s+t-2\varepsilon-T}{\sqrt{st}}}^{\frac{s-\varepsilon}{\sqrt{st}}}dx\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Ora,

$$\frac{T}{2\pi^3}\int_{\varepsilon+\frac{T}{2}}^{T+\varepsilon}\frac{dt}{t}\int_{\varepsilon}^{t}\frac{ds}{s}\int_{0\vee\frac{s+t-2\varepsilon-T}{\sqrt{st}}}^{\frac{s-\varepsilon}{\sqrt{st}}}dx\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{T}{2\pi^3}\int_{\varepsilon+\frac{T}{2}}^{T+\varepsilon}\frac{dt}{t}\int_{\varepsilon}^{t}\frac{ds}{s}\int_{0}^{\sqrt{\frac{s}{t}}}dx\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\\
&= \frac{T}{2\pi^3}\int_{\varepsilon+\frac{T}{2}}^{T+\varepsilon}dt\frac{1}{t}\left(-\arcsin\left(-2s+1\right)+\arcsin\left(-2\varepsilon+1\right)\right)\\
&\leq \frac{T}{2\pi^2}\int_{\varepsilon+\frac{T}{2}}^{T+\varepsilon}dt\frac{1}{t},
\end{aligned}
$$

expressão esta que tem limite finito quando $\varepsilon \longrightarrow 0^+$.

O integral

$$
\frac{T}{2\pi^3}\int_{\varepsilon}^{\varepsilon+\frac{T}{2}}\frac{dt}{t}\int_{\varepsilon}^{t}\frac{ds}{s}\int_{0}^{\frac{s-\varepsilon}{\sqrt{st}}}dx\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}
$$

é um majorante de

$$
\frac{T}{2\pi^3}\int_{\varepsilon}^{\varepsilon+\frac{T}{2}}\frac{dt}{t}\int_{\varepsilon}^{t}\frac{ds}{s}\int_{0\vee\frac{s+t-2\varepsilon-T}{\sqrt{st}}}^{\frac{s-\varepsilon}{\sqrt{st}}}dx\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}},
$$

que ainda precisamos avaliar. Efectuando as substituições $s = \varepsilon\sigma$ e $t = \varepsilon\tau$, somos conduzidos a

$$
\frac{T}{2\pi^3}\int_{1}^{1+\frac{T}{2\varepsilon}}\frac{d\tau}{\tau}\int_{1}^{\tau}\frac{d\sigma}{\sigma}\frac{\sigma-1}{\sqrt{\sigma\tau-(\sigma-1)^2}},
$$

que pode assumir ainda a forma

$$
\frac{T}{2\pi^3}\int_{1}^{1+\frac{T}{2\varepsilon}}\frac{d\tau}{\tau}\left(-\arctan\frac{\tau^2+2\tau-2}{2\sqrt{2\tau-1}}+\arctan\frac{\tau-2}{2\sqrt{2\tau-1}}+2\arctan\frac{\sqrt{\tau}}{2}\right). \tag{5.20}
$$

Tendo em conta que para $x > 0$ se tem

$$
\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+x^2}dx,
$$

conclui-se que

$$
\frac{\pi}{2} - \arctan x < \frac{1}{x},
$$

e, consequentemente,

$$
\arctan x = \frac{\pi}{2} - R(x),
$$

sendo $R(x)$ dominado por $\dfrac{1}{x}$.

Ora, (5.20) pode ser representado sob a forma

$$\frac{T}{2\pi^3}\int_1^{1+\frac{T}{2\varepsilon}}\frac{d\tau}{\tau}\left(-\arctan\frac{\tau^2+2\tau-2}{2\sqrt{2\tau-1}}+2\arctan\frac{\sqrt{\tau}}{2}\right) \tag{5.21}$$

$$+\frac{T}{2\pi^3}\left(\int_1^2\frac{d\tau}{\tau}\arctan\frac{\tau-2}{2\sqrt{2\tau-1}}+\int_2^{1+\frac{T}{2\varepsilon}}\frac{d\tau}{\tau}\arctan\frac{\tau-2}{2\sqrt{2\tau-1}}\right) \tag{5.22}$$

$$= \frac{T}{2\pi^3}\int_1^{1+\frac{T}{2\varepsilon}}\frac{d\tau}{\tau}\left(-\frac{\pi}{2}+R_1(\tau)+2\frac{\pi}{2}-R_2(\tau)\right) \tag{5.23}$$

$$+\frac{T}{2\pi^3}\left(\int_1^2\frac{d\tau}{\tau}\left(-\frac{\pi}{2}+R_3(\tau)\right)+\int_2^{1+\frac{T}{2\varepsilon}}\frac{d\tau}{\tau}\left(\frac{\pi}{2}-R_4(\tau)\right)\right) \tag{5.24}$$

onde: $R_1(\tau)$ é dominado por $\frac{2\sqrt{2\tau-1}}{\tau^2+2\tau-2}$, cuja ordem é do tipo $\frac{1}{\tau^{\frac{3}{2}}}$; $R_2(\tau)$ é dominado por $\frac{2}{\sqrt{\tau}}$, cuja ordem é do tipo $\frac{1}{\sqrt{\tau}}$; $R_3(\tau)$ é dominado por $\frac{2\sqrt{2\tau-1}}{\tau-2}$, cuja ordem é do tipo $\frac{1}{\sqrt{\tau}}$ e $R_4(\tau)$ é dominado por $\frac{2\sqrt{2\tau-1}}{\tau-2}$, cuja ordem é do tipo $\frac{1}{\sqrt{\tau}}$. Atendendo a que $\frac{R_1(\tau)}{\tau}$, $\frac{R_2(\tau)}{\tau}$, $\frac{R_3(\tau)}{\tau}$ e $\frac{R_4(\tau)}{\tau}$ são integráveis nos intervalos em questão e que têm limite finito quando $\varepsilon \longrightarrow 0^+$, (5.23) e (5.24) podem representar-se por

$$\begin{aligned} & \frac{T}{2\pi^2}\ln\left(1+\frac{T}{2\varepsilon}\right)+O(1) \\ = & -\frac{T}{2\pi^2}\ln(2\varepsilon)+O(1). \end{aligned}$$

Assim, renormalizando, por divisão por $-\ln\varepsilon$, e tomando o limite quando $\varepsilon \longrightarrow 0^+$, obtemos:

$$\mathbb{E}\left(L^2_{\varepsilon,\mathrm{ren}}\right) \underset{\varepsilon\to 0^+}{\overset{d=3}{\longrightarrow}} \frac{(T_2-T_1)}{2\pi^2}. \tag{5.25}$$

■

Quando nos propusemos estabelecer um teorema análogo ao anterior para uma dimensão arbitrária $d \geq 3$, confrontámo-nos com algumas expressões integrais que aparentavam ser divergentes, associadas à dimensão $d = 4$.

Decidimos então estudar este caso de forma isolada. Assim, antes de nos debruçarmos sobre o estudo do caso geral, resumido em (5.8), vamos analisar a situação quando a dimensão é $d=4$. Nesta situação tem-se

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\left(L_{\varepsilon,\mathrm{ren}}\right)^2\right) &= \frac{2r^2(\varepsilon)}{(2\pi)^4}\int_0^{\frac{T}{\varepsilon}} dt_2 \int_0^{\frac{t_2}{\varepsilon}} dt_1 \int_0^{\frac{T}{\varepsilon}} ds_2 \int_0^{\frac{s_2}{\varepsilon}} ds_1 \\ &\cdot\left(\left(1+\tau+\sigma+\tau\sigma-\delta^2\right)^{-2}-\left(\left(1+\tau\right)\left(1+\sigma\right)\right)^{-2}\right).\end{aligned}$$

Assume-se

$$s_1 < t_1,$$

hipótese esta que foi compensada pelo factor 2. Observe-se que quando os intervalos são disjuntos a contribuição é nula, uma vez que para este caso $\delta = 0$.

Na situação de *overlap* total obtemos

$$\begin{aligned}&\frac{2\varepsilon}{(2\pi)^4}\int_0^{\frac{T}{\varepsilon}} d\sigma \int_0^{\sigma} d\tau \int_0^{\frac{T}{\varepsilon}-\sigma} ds \int_s^{s+\sigma-\tau} \\ &\left(\left(1+\tau+\sigma+\tau\sigma-\tau^2\right)^{-2}-\left(\left(1+\tau\right)\left(1+\sigma\right)\right)^{-2}\right) dt.\end{aligned} \tag{5.26}$$

Renormalizando pelo factor $r^2(\varepsilon)=\varepsilon$, obtemos a expressão

$$\begin{aligned}&\frac{\varepsilon}{8\pi^4}\int_0^{\frac{T}{\varepsilon}} d\sigma \int_0^{\sigma} d\tau \left(\frac{T}{\varepsilon}-\sigma\right)(\sigma-\tau) \\ &\cdot\left(\left(1+\tau+\sigma+\sigma\tau-\tau^2\right)^{-2}-\left(\left(1+\tau\right)\left(1+\sigma\right)\right)^{-2}\right).\end{aligned} \tag{5.27}$$

Usando a definição de integral impróprio e o teorema da convergência dominada de Lebesgue, vemos que a expressão anterior converge, quando $\varepsilon \to 0^+$, para

$$\frac{T}{8\pi^4}\int_0^{\infty} d\sigma \int_0^{\sigma} d\tau\,(\sigma-\tau)\left(\left(1+\tau+\sigma+\sigma\tau-\tau^2\right)^{-2}-\left(\left(1+\tau\right)\left(1+\sigma\right)\right)^{-2}\right).$$

Procedendo em primeiro lugar ao cálculo da integração em σ chega-se a

$$\frac{T}{8\pi^4}\int_0^{\infty}\int_{\tau}^{\infty}(\sigma-\tau)\left(\left(1+\tau+\sigma+\sigma\tau-\tau^2\right)^{-2}-\left(\left(1+\tau\right)\left(1+\sigma\right)\right)^{-2}\right) d\sigma d\tau$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{T}{8\pi^4}\int_0^\infty \frac{-2\ln(1+\tau)+\ln(1+2\tau)}{(1+\tau)^2}d\tau \\
&= \frac{T}{16\pi^4}(1-\ln 2).
\end{aligned}
$$

Quanto à situação de *overlap* parcial, a expressão encontrada, já considerando a contribuição vinda da independência entre as variáveis s e t, é dada por

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{8\pi^4}\int_0^T d\sigma \int_0^\sigma d\delta \int_\delta^{T-\sigma+\delta} d\tau\,(T-\sigma-\tau+\delta) \\
&\cdot\left(\left(\varepsilon^2+\varepsilon(\tau+\sigma)+\tau\sigma-\delta^2\right)^{-2}-\left((\varepsilon+\tau)(\varepsilon+\sigma)\right)^{-2}\right).
\end{aligned}
\tag{5.28}
$$

Efectuando as substituições $\sigma=\varepsilon s$, $\delta=\varepsilon x$ e $\tau=\varepsilon y$ obtemos:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\varepsilon}{8\pi^4}\int_0^{T/\varepsilon} ds \int_0^s dx \int_x^{T/\varepsilon-s+x} dy\,(T/\varepsilon-s-y+x) \\
&\cdot\left(\left(1+y+s+ys-x^2\right)^{-2}-\left((1+y)(1+s)\right)^{-2}\right).
\end{aligned}
$$

Renormalizando, aplicando o teorema da convergência dominada e usando a definição de integral impróprio somos conduzidos ao valor limite, quando $\varepsilon\to 0^+$, dado por

$$
\begin{aligned}
&\frac{T}{8\pi^4}\int_0^\infty ds \int_0^s dx \int_x^\infty dy\left(\left(1+y+s+ys-x^2\right)^{-2}-\left((1+y)(1+s)\right)^{-2}\right) \\
&= \frac{T}{8\pi^4}(-1+2\ln 2).
\end{aligned}
$$

Efectivamente,

$$
\begin{aligned}
&\int_x^\infty \left(\left(1+y+s+ys-x^2\right)^{-2}-\left((1+y)(1+s)\right)^{-2}\right)dy \\
&= \frac{x^2}{(1+s-x^2+x+sx)(1+s)^2(1+x)}
\end{aligned}
$$

e tem-se, ainda,

$$\frac{T}{2\left(2\pi\right)^4}\int_0^\infty dx\int_x^\infty \frac{x^2}{\left(1+s-x^2+x+sx\right)\left(1+s\right)^2\left(1+x\right)}ds$$

$$= \frac{T}{2\left(2\pi\right)^4}\int_0^\infty \left(\frac{4x\ln\left(1+x\right)+2x^2\ln\left(1+x\right)-2x\ln\left(1+2x\right)}{x^2\left(1+x\right)^2}\right.$$

$$\left.+\frac{-x^2\ln\left(1+2x\right)-x^2-\ln\left(1+2x\right)+2\ln\left(1+x\right)}{x^2\left(1+x\right)^2}\right)dx$$

$$= \frac{T}{32\pi^4}\left(-1+2\ln 2\right).$$

Juntando todas as contribuições obtemos assim

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\mathbb{E}\left(\left(L_{\varepsilon,\mathrm{ren}}\right)^2\right)$$

$$=\frac{T}{4\pi^4}\left(1-\ln 2\right)+\frac{T}{8\pi^4}\left(-1+2\ln 2\right)=\frac{T}{8\pi^4}. \tag{5.29}$$

Acabámos de estabelecer a

Proposição 5.1.2 *Com $d=4$,*

$$\mathbb{E}\left(\left(L_{\varepsilon,ren}\right)^2\right)\to\frac{T}{8\pi^4},$$

quando ε tende para zero.

Voltemos ao caso geral, onde consideraremos $d>4$ que, como referimos aquando da representação de (5.8) só tem contribuição não nula nos *overlaps* total e parcial. Assume-se, sem perda de generalidade, compensando com o factor 2, que $s_1<t_1$.

No caso de *overlap* total temos:

$$\frac{2r^2\left(\varepsilon\right)\varepsilon^{4-d}}{\left(2\pi\right)^d}\int_0^{\frac{T}{\varepsilon}}d\sigma\int_0^\sigma d\tau\int_0^{\frac{T}{\varepsilon}-\sigma}ds\int_s^{s+\sigma-\tau}$$

$$\left(\left(1+\tau+\sigma+\tau\sigma-\tau^2\right)^{-\frac{d}{2}}-\left(\left(1+\tau\right)\left(1+\sigma\right)\right)^{-\frac{d}{2}}\right)dt$$

$$=\frac{2}{\left(2\pi\right)^d}\int_0^{\frac{T}{\varepsilon}}d\sigma\int_0^\sigma d\tau\left(T-\varepsilon\sigma\right)\left(\sigma-\tau\right)$$

$$\cdot\left(\left(1+\tau+\sigma+\sigma\tau-\tau^2\right)^{-\frac{d}{2}}-\left(\left(1+\tau\right)\left(1+\sigma\right)\right)^{-\frac{d}{2}}\right). \tag{5.30}$$

Atendendo a que para cada $\varepsilon > 0$, a expressão

$$T(\sigma - \tau)\left(\left(1+\tau+\sigma+\sigma\tau-\tau^2\right)^{-\frac{d}{2}} - \left((1+\tau)(1+\sigma)\right)^{-\frac{d}{2}}\right)$$

majora a função integranda de (5.30), podemos aplicar o teorema da convergência dominada de Lebesgue e a definição de integral impróprio e concluir que o integral (5.30) converge para

$$\begin{aligned}
&\frac{2T}{(2\pi)^d}\int_0^{+\infty} d\sigma \int_0^{\sigma} (\sigma-\tau) \\
&\cdot\left(\left(1+\tau+\sigma+\sigma\tau-\tau^2\right)^{-\frac{d}{2}} - \left((1+\tau)(1+\sigma)\right)^{-\frac{d}{2}}\right) d\tau \\
= \; &\frac{2T}{(2\pi)^d}\int_0^{+\infty} d\tau \int_{\tau}^{+\infty} (\sigma-\tau) \\
&\cdot\left(\left(1+\tau+\sigma+\sigma\tau-\tau^2\right)^{-\frac{d}{2}} - \left((1+\tau)(1+\sigma)\right)^{-\frac{d}{2}}\right) d\sigma \\
= \; &\frac{2T}{(2\pi)^d}\int_0^{+\infty} d\tau \left(\frac{4(2\tau+1)^{\frac{4-d}{2}}}{(d-2)(d-4)(\tau+1)^2} - \frac{4(\tau+1)^{2-d}}{(d-2)(d-4)}\right), \qquad (5.31)
\end{aligned}$$

quando $\varepsilon > 0^+$. Imediatamente reconhecemos que o segundo integral é convergente.

Quanto ao primeiro, que também não é difícil mostrar que é convergente para cada $d > 4$, pode ser resolvido usando as fórmulas 2.155 e 2.154 de [GR80], nos casos em que d é par, e as fórmulas 2.249.1, 2.247 e 2.246 de [GR80], nos casos em que d é ímpar.

A contribuição do *overlap* parcial pode ser representada por

$$\begin{aligned}
&\frac{2r^2(\varepsilon)\,\varepsilon^{4-d}}{(2\pi)^d}\int_0^{T} d\sigma \int_0^{\sigma} d\delta \int_{\delta}^{T-\sigma+\delta} d\tau\,(T-\sigma-\tau+\delta) \qquad (5.32)\\
&\cdot\left(\left(\varepsilon^2+\varepsilon(\tau+\sigma)+\tau\sigma-\delta^2\right)^{-\frac{d}{2}} - \left((\varepsilon+\tau)(\varepsilon+\sigma)\right)^{-\frac{d}{2}}\right)
\end{aligned}$$

e, considerando as transformações $\sigma = \varepsilon s$, $\delta = \varepsilon x$, $\tau = \varepsilon y$ e $d = 4+2n$, esta assume a forma

$$\begin{aligned}
&\frac{2r^2(\varepsilon)\,\varepsilon^{4-d}}{(2\pi)^d}\int_0^{\frac{T}{\varepsilon}} ds \int_0^{s} dx \int_{x}^{\frac{T}{\varepsilon}-s+x} dy\left(\frac{T}{\varepsilon}-s-y+x\right) \\
&\cdot\left(\left(1+y+s+ys-x^2\right)^{-\frac{d}{2}} - \left((1+y)(1+s)\right)^{-\frac{d}{2}}\right)
\end{aligned}$$

com limite

$$\frac{2T}{(2\pi)^d}\int_0^\infty ds\int_0^s dx\int_x^\infty dy\left(\left(1+y+s+ys-x^2\right)^{-\frac{d}{2}}-\left((1+y)(1+s)\right)^{-\frac{d}{2}}\right), \tag{5.33}$$

obtido por aplicação do teorema da convergência dominada de Lebesgue e pela definição de integral impróprio. Ora,

$$\int_x^\infty\left(\left(1+y+s+ys-x^2\right)^{-\frac{d}{2}}-\left((1+y)(1+s)\right)^{-\frac{d}{2}}\right)dy$$

$$=\frac{2\left((s+1)(x+1)-x^2\right)^{\frac{2-d}{2}}}{(d-2)(s+1)}+\frac{2(s+1)^{-\frac{d}{2}}(x+1)^{\frac{2-d}{2}}}{2-d}. \tag{5.34}$$

Invertendo a ordem de integração, podemos substituir (5.33) por

$$\frac{2T}{(2\pi)^d}\int_0^\infty dx\int_x^\infty ds\int_x^\infty dy\left(\left(1+y+s+ys-x^2\right)^{-\frac{d}{2}}-\left((1+y)(1+s)\right)^{-\frac{d}{2}}\right) \tag{5.35}$$

simplificável, usando (5.34), em

$$\frac{2T}{(2\pi)^d}\int_0^\infty dx\left(\frac{4(2x+1)^{\frac{2-d}{2}}}{(d-2)^2}-\frac{4(x+1)^{2-d}}{(d-2)^2}\right.$$
$$\left.+\frac{2x^2}{2-d}\int_x^\infty ds\frac{\left(s(x+1)-x^2+x+1\right)^{-\frac{d}{2}}}{s+1}\right).$$

Imediatamente conclui-se que

$$\frac{2T}{(2\pi)^d}\int_0^\infty dx\left(\frac{4(2x+1)^{\frac{2-d}{2}}}{(d-2)^2}-\frac{4(x+1)^{2-d}}{(d-2)^2}\right)$$

converge dado que $d>4$. Precisamos então avaliar

$$\frac{2T}{(2-d)(2\pi)^d}\int_0^\infty\left(2x^2\int_x^\infty ds\frac{\left(s(x+1)-x^2+x+1\right)^{-\frac{d}{2}}}{s+1}\right)dx. \tag{5.36}$$

Não conseguimos determinar a natureza deste integral duplo para d arbitrário maior que 4. Calculámos directamente $\lim_{\varepsilon\to 0^+}\mathbb{E}((r(\varepsilon)L_{\varepsilon,c})^2)$ para

$d = 5, 6, 7, 8, 9$ e 10 e obtivemos, respectivamente,

$$\begin{pmatrix} t(2\pi)^{-5}\left(-\frac{16}{9}+\frac{2}{3}\pi\right) \\ t(2\pi)^{-6}\left(-\frac{5}{6}+\frac{4}{3}\ln 2\right) \\ t(2\pi)^{-7}\left(\frac{48}{25}-\frac{3}{5}\pi\right) \\ t(2\pi)^{-8}\left(\frac{34}{45}-\frac{16}{15}\ln 2\right) \\ (2\pi)^{-9}t\left(-\frac{656}{441}+\frac{10}{21}\pi\right) \\ t(2\pi)^{-10}\left(-\frac{33}{56}+\frac{6}{7}\ln 2\right) \end{pmatrix} \tag{5.37}$$

O cálculo dos integrais intervenientes em (5.8) envolve o cancelamento de divergências devidas à subtracção do quadrado da esperança de L_ε, e que estão associadas a expressões analíticas cuja dificuldade de análise aumenta com o crescimento da dimensão e consoante o intervalo $[s_1, s_2] \cap [t_1, t_2]$ está estrita ou parcialmente contido em $[s_1, s_2]$.

Ora, perante o desejo de obter uma expressão simples para (5.8), e dadas as circunstâncias anteriores, torna-se necessário estudar $\mathbb{E}((L_{\varepsilon,c})^2)$ sob um outro ponto de vista. Nas duas próximas secções faremos um estudo de $\mathbb{E}((r(\varepsilon)L_{\varepsilon,c})^2)$ segundo diferentes abordagens. Na primeira, $L_{\varepsilon,c}$ é reescrito como um integral de Wiener usando a fórmula de Clark-Ocone. Na segunda usa-se o Teorema 4.1.2 e somam-se todas as variâncias dos movimentos Brownianos limites, ou seja,

$$t \sum_{\substack{m_1=0 \\ \vec{m}\neq 0}}^{\infty} \cdots \sum_{m_d=0}^{\infty} c_{2\vec{m},d}^2,$$

e verifica-se que esta soma é igual a

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \mathbb{E}\left((r(\varepsilon)L_{\varepsilon,c})^2\right).$$

5.2 $\mathbb{E}((r(\varepsilon)L_{\varepsilon,c})^2)$ e a fórmula de Clark-Ocone.

Esta secção é inteiramente dedicada ao cálculo de $\mathbb{E}((r(\varepsilon)L_{\varepsilon,c})^2)$ por recurso à fórmula de Clark-Ocone. Mais propriamente, estabelecemos a

Proposição 5.2.1 *Para $d \geq 4$,*

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \mathbb{E}\left((r(\varepsilon)L_{\varepsilon,c})^2\right)$$

$$= \frac{8t}{(2\pi)^d(d-2)} \begin{cases} \left(\frac{2(d-4)}{(d-3)(d-2)} \sum_{k=1}^{\frac{d}{2}-2} \frac{(-1)^k k}{d-2k-2} + \frac{2}{d-3} \sum_{k=1}^{\frac{d}{2}-3} \frac{(-1)^{k+1}k}{d-2k-4} + \frac{(-1)^{\frac{d}{2}}}{d-2} + \frac{(-1)^{\frac{d}{2}+1}(d-4)}{d-3} \ln 2\right), \\ \textit{se } d \geq 4 \textit{ é par;} \\ \\ \frac{d-4}{d-3}\left(2 \sum_{k=0}^{\frac{d-7}{2}} \frac{(-1)^k}{d-2k-6} - \frac{d-1}{(d-2)(d-4)} + \frac{(-1)^{\frac{d-1}{2}}\pi}{2}\right), \\ \textit{se } d \geq 5 \textit{ é ímpar.} \end{cases} \tag{5.38}$$

Prova Na demonstração deste resultado usa-se a *Isometria de Itô*,

$$\mathbb{E}\left(\left(\int \varphi dB\right)^2\right) = \mathbb{E}\left(\int \varphi^2 ds\right). \tag{5.39}$$

Porém, antes de a aplicarmos a $\mathbb{E}\left((r(\varepsilon)L_{\varepsilon,c})^2\right)$, precisamos de determinar φ para o qual se tem a igualdade

$$r(\varepsilon)L_{\varepsilon,c} = \int \varphi d\mathbf{B}.$$

Aplicando a fórmula de Clark-Ocone (veja-se Teorema 2.8.5) conclui-se que

$$\varphi_i(\tau) = \Gamma(\mathbb{1}_{[0,\tau]})\partial^i_\tau(r(\varepsilon)L_{\varepsilon,c}) \tag{5.40}$$

onde aqui Γ designa o operador de segunda quantificação e

$$\partial^i_\tau(r(\varepsilon)L_{\varepsilon,c})(\omega) = \lim_{\alpha \to 0^+} \frac{r(\varepsilon)L_{\varepsilon,c}(\omega + \alpha\delta^i_\tau) - r(\varepsilon)L_{\varepsilon,c}(\omega)}{\alpha}. \tag{5.41}$$

Calculemos então $\varphi_i(\tau)$. Temos

$$\varphi_i(\tau) \;=\; \Gamma(\mathbb{1}_{[0,\tau]})\partial^i_\tau\left(\int_0^t dt_2 \int_0^{t_2} dt_1 \frac{r(\varepsilon)}{(2\pi\varepsilon)^{d/2}} \exp\left(-\frac{|\mathbf{B}(t_2) - \mathbf{B}(t_1)|^2}{2\varepsilon}\right)\right) \tag{5.42}$$

$$
\begin{aligned}
&= \Gamma(\mathbb{1}_{[0,\tau]}) \int_0^t dt_2 \int_0^{t_2} \frac{-r(\varepsilon)}{\varepsilon(2\pi\varepsilon)^{d/2}} \left\langle \omega, \mathbb{1}_{[t_1,t_2]} \right\rangle \\
&\quad . \exp(-\frac{1}{2\varepsilon} \left\langle \omega, \mathbb{1}_{[t_1,t_2]} \right\rangle^2) \partial_\tau \left\langle \omega, \mathbb{1}_{[t_1,t_2]} \right\rangle dt_1 \\
&= \frac{-r(\varepsilon)}{\varepsilon(2\pi\varepsilon)^{d/2}} \Gamma(\mathbb{1}_{[0,\tau]}) \int_0^t dt_2 \int_0^{t_2} \\
&\quad . \exp(-\frac{1}{2\varepsilon} \left\langle \omega, \mathbb{1}_{[t_1,t_2]} \right\rangle^2) \left\langle \omega, \mathbb{1}_{[t_1,t_2]} \right\rangle \mathbb{1}_{[t_1,t_2]}(\tau) dt_1. \qquad (5.43)
\end{aligned}
$$

Uma forma de identificar φ_i consiste na determinação dos seus *kernels*, os quais podem ser calculados através da sua transformada $\mathcal{S}$. Ora, tendo em atenção (5.43), resulta que $\mathcal{S}(\varphi_i)(f)$ é igual a

$$
\frac{-r(\varepsilon)}{\varepsilon(2\pi\varepsilon)^{d/2}} \int_0^t dt_2 \int_0^{t_2} dt_1 \mathbb{1}_{[t_1,t_2]}(\tau) \mathcal{S} \left(\exp\left(-\frac{\left\langle \cdot, \mathbb{1}_{[t_1,t_2]} \right\rangle^2}{2\varepsilon} \right) \left\langle \cdot, \mathbb{1}_{[t_1,t_2]} \right\rangle \right) \left(\mathbb{1}_{[0,\tau]} f \right), \qquad (5.44)
$$

pelo que basta-nos calcular

$$
\mathcal{S}(\exp(-\frac{1}{2\varepsilon} \left\langle \cdot, \mathbb{1}_{[t_1,t_2]} \right\rangle^2) \left\langle \cdot, \mathbb{1}_{[t_1,t_2]} \right\rangle)(\mathbb{1}_{[0,\tau]} f). \qquad (5.45)
$$

Usando a fórmula 5.55c do Teorema 5.53 de [HKPS93], a expressão (5.45) vem igual a

$$
(\eta, \xi)_{L^2(\mathbb{R})} (\mathcal{S}\phi)(\xi) + (D_\eta (\mathcal{S}\phi))(\xi) \qquad (5.46)
$$

com $\phi(\omega) := \exp(-\frac{1}{2\varepsilon} \left\langle \omega, \mathbb{1}_{[t_1,t_2]} \right\rangle^2)$, $\eta := \mathbb{1}_{[t_1,t_2]}$, $\xi := \mathbb{1}_{[0,\tau]} f$, sendo D_η a derivada de Gâteaux na direcção η em (S). Temos:

$$
(\eta, \xi)_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{t_1}^{t_2 \wedge \tau} f(s) ds. \qquad (5.47)
$$

Recorrendo à definição de operador integral e ao Exemplo 4.23 de [HKPS93] obtém-se

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{S} \left(\exp\left(-\frac{1}{2\varepsilon} \left\langle \omega, \mathbb{1}_{[t_1,t_2]} \right\rangle^2 \right) \right) \left(\mathbb{1}_{[0,\tau]} f \right) \\
&= \varepsilon^{d/2} (\varepsilon + t_2 - t_1)^{-d/2} \exp\left(-\frac{\left(\mathbb{1}_{[0,\tau]} f, \mathbb{1}_{[t_1,t_2]} \int_{t_1}^{t_2} \mathbb{1}_{[0,\tau]} f(s) ds \right)}{2(\varepsilon + t_2 - t_1)} \right)
\end{aligned}
$$

$$= \varepsilon^{d/2}(\varepsilon + t_2 - t_1)^{-d/2} \exp\left(-\frac{1}{2\,(\varepsilon + t_2 - t_1)}\left(\int_{t_1}^{t_2\wedge\tau} f(s)ds\right)^2\right),$$

pelo que

$$(\mathcal{S}\phi)\left(1\!\!1_{[0,\tau]}f\right) = \varepsilon^{d/2}(\varepsilon + t_2 - t_1)^{-d/2} \exp\left(-\frac{\left(\int_{t_1}^{t_2\wedge\tau} f(s)ds\right)^2}{2\,(\varepsilon + t_2 - t_1)}\right). \qquad (5.48)$$

De [HKPS93] (veja-se secção A do Capítulo 10), pode afirmar-se que

$$\begin{aligned}(D_\eta \mathcal{S}\phi)(1\!\!1_{[0,\tau]}f) &= \left\langle -1\!\!1_{[t_1,t_2]}, \frac{1\!\!1_{[t_1,t_2]}}{\varepsilon + t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} 1\!\!1_{[0,\tau]}(s)f(s)ds\right\rangle (\mathcal{S}\phi)(\xi) \\ &= -\frac{t_2 - t_1}{\varepsilon + t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2\wedge\tau} f(s)ds\,(\mathcal{S}\phi)(\xi),\end{aligned}$$

onde D_η representa a derivada de Gâteaux na direcção η.Assim, podemos substituir (5.44) por

$$\frac{-r(\varepsilon)}{(2\pi)^{d/2}}\int_0^t dt_2 \int_0^{t_2} dt_1\, 1\!\!1_{[t_1,t_2]}(\tau)\,(\varepsilon + t_2 - t_1)^{-1-d/2} \qquad (5.49)$$

$$.\exp\left(-\frac{1}{2(\varepsilon + t_2 - t_1)}\left(\int_{t_1}^{t_2\wedge\tau} f(s)ds\right)^2\right)\int_{t_1}^{t_2\wedge\tau} f(s)ds. \qquad (5.50)$$

Determinemos o funcional generalizado, chamemo-lo Ψ, que tem (5.50) por transformada $\mathcal{S}$. Pela igualdade (5.55b) do Teorema 5.35 de [HKPS93] sabe-se que para $\Phi \in (S)'$, $\eta, f \in S$

$$(\mathcal{S}D_\eta^*\Phi)(f) = (\eta, f)_{L^2(\mathbb{R})}(\mathcal{S}\Phi)(f) \qquad (5.51)$$

onde, para $\Phi \in (S)'$ com expansão $\Phi\,(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\langle : x^{\otimes n} :, F_n\rangle$ e $\eta \in S'$,

$$D_\eta^*\Phi\,(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left\langle : x^{\otimes(n+1)} :, \eta\hat{\otimes}F_n\right\rangle.$$

Identificando $\int_{t_1}^{t_2\wedge\tau} f(s)ds$ com $(\eta, f)_{L^2(\mathbb{R})}$ conclui-se que $\eta = \mathbb{1}_{[t_1,t_2\wedge\tau]}$. Determinemos agora Φ de modo a que

$$\exp\left(-\frac{1}{2(\varepsilon+t_2-t_1)}\left(\int_{t_1}^{t_2\wedge\tau} f(s)ds\right)^2\right) = (\mathcal{S}\Phi)(f). \tag{5.52}$$

A partir do Exemplo 4.23 de [HKPS93], que dá-nos a fórmula explícita dos *kernels* Gaussianos, e usando o conceito de operador integral mostra-se que

$$\Phi(\omega) = \exp\left(-\frac{1}{2}\left\langle \omega, \frac{1}{\sqrt{\varepsilon+t_2-t_2\wedge\tau}}\mathbb{1}_{[t_1,t_2\wedge\tau]}\right\rangle^2\right). \tag{5.53}$$

Assim, conclui-se que o funcional Ψ é dado por

$$\Psi = D_\eta^*\Phi = D^*_{\mathbb{1}_{[t_1,t_2\wedge\tau]}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left\langle \omega, \frac{1}{\sqrt{\varepsilon+t_2-t_2\wedge\tau}}\mathbb{1}_{[t_1,t_2\wedge\tau]}\right\rangle^2\right).$$

Atendendo a (5.49), (5.50), (5.52) e à última igualdade, resulta que (5.44) é igual a

$$\frac{-r(\varepsilon)}{(2\pi)^{d/2}}\int_0^t dt_2 \int_0^{t_2} \mathbb{1}_{[t_1,t_2]}(\tau)$$

$$(\varepsilon+t_2-t_1)^{-1}(\varepsilon+t_2-t_2\wedge\tau)^{-d/2}(\mathcal{S}D^*_{\mathbb{1}_{[t_1,t_2\wedge\tau]}}\Phi)(f)dt_1. \tag{5.54}$$

A igualdade (5.53) de [HKPS93] permite-nos afirmar que

$$\Psi(\omega) = D^*_{\mathbb{1}_{[t_1,t_2\wedge\tau]}}\Phi(\omega) = \langle \omega, \mathbb{1}_{[t_1,t_2\wedge\tau]}\rangle\Phi(\omega) - \left(D_{\mathbb{1}_{[t_1,t_2\wedge\tau]}}\Phi\right)(\omega). \tag{5.55}$$

Ora tem-se

$$\begin{aligned}
&\left(D_{\mathbb{1}_{[t_1,t_2\wedge\tau]}}\Phi\right)(\omega)\\
= \;& -\frac{1}{\varepsilon+t_2-t_2\wedge\tau}\exp\left(-\frac{1}{2(\varepsilon+t_2-t_2\wedge\tau)}\left\langle\omega, \mathbb{1}_{[t_1,t_2\wedge\tau]}\right\rangle^2\right)\\
&\cdot\left\langle\omega, \mathbb{1}_{[t_1,t_2\wedge\tau]}\right\rangle D_{\mathbb{1}_{[t_1,t_2\wedge\tau]}}\left\langle\omega, \mathbb{1}_{[t_1,t_2\wedge\tau]}\right\rangle\\
= \;& -\frac{1}{\varepsilon+t_2-t_2\wedge\tau}\exp\left(-\frac{1}{2(\varepsilon+t_2-t_2\wedge\tau)}\left\langle\omega, \mathbb{1}_{[t_1,t_2\wedge\tau]}\right\rangle^2\right)\\
&\cdot\left\langle\omega, \mathbb{1}_{[t_1,t_2\wedge\tau]}\right\rangle\cdot\left\langle\mathbb{1}_{[t_1,t_2\wedge\tau]}, \mathbb{1}_{[t_1,t_2\wedge\tau]}\right\rangle
\end{aligned}$$

$$= -\frac{t_2 \wedge \tau - t_1}{\varepsilon + t_2 - t_2 \wedge \tau} \exp\left(-\frac{1}{2\left(\varepsilon + t_2 - t_2 \wedge \tau\right)} \left\langle \boldsymbol{\omega}, 1\!\!1_{[t_1, t_2 \wedge \tau]} \right\rangle^2\right) \left\langle \boldsymbol{\omega}, 1\!\!1_{[t_1, t_2 \wedge \tau]} \right\rangle.$$

Aplicando (5.54) conclui-se, finalmente, que

$$\begin{aligned}
\varphi(\tau) &= \frac{-r(\varepsilon)}{(2\pi)^{d/2}} \int_0^t dt_2 \int_0^{t_2} dt_1 1\!\!1_{[t_1, t_2]}(\tau) \left(\varepsilon + t_2 - t_1\right)^{-1} \left(\varepsilon + t_2 - t_2 \wedge \tau\right)^{-d/2} \Psi(\boldsymbol{\omega}) \\
&= \frac{-r(\varepsilon)}{(2\pi)^{d/2}} \int_\tau^t dt_2 \int_0^\tau \left(\varepsilon + t_2 - \tau\right)^{-1-d/2} \\
&\quad . \exp\left(\frac{-1}{2\left(\varepsilon + t_2 - \tau\right)} \langle \boldsymbol{\omega}, 1\!\!1_{[t_1, t_2 \wedge \tau]} \rangle^2\right) \left\langle \boldsymbol{\omega}, 1\!\!1_{[t_1, \tau]} \right\rangle dt_1
\end{aligned}$$

Resumindo, encontrámos para o tempo local centrado e renormalizado a seguinte igualdade

$$r(\varepsilon) L_{\varepsilon,c}(t) = \int_0^t \boldsymbol{\varphi}(\tau).d\mathbf{B}(\tau)$$

com

$$\boldsymbol{\varphi}(\tau) = -\frac{r(\varepsilon)}{(2\pi)^{d/2}} \int_\tau^t dt_2 \int_0^\tau dt_1 \left(\varepsilon + t_2 - \tau\right)^{-1-d/2} e^{-\frac{|\mathbf{B}(\tau) - \mathbf{B}(t_1)|^2}{2(\varepsilon + t_2 - \tau)}} \langle \boldsymbol{\omega}, 1\!\!1_{[t_1, \tau]} \rangle. \tag{5.56}$$

Podemos então escrever

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(r(\varepsilon)(L_{\varepsilon,c})^2) \\
&= \mathbb{E}\left(\left(\int_0^t \boldsymbol{\varphi}(\tau).d\mathbf{B}(\tau)\right)^2\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \int_0^t \int_0^t \varphi_i(\tau)\varphi_j(\tau')dB_i(\tau)dB_j(\tau')\right).
\end{aligned} \tag{5.57}$$

Aplicando (5.39) a (5.57) somos conduzidos a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}((r(\varepsilon)L_{\varepsilon,c})^2) &= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \delta_{ij} \int_0^t \mathbb{E}(\varphi_i(\tau)\varphi_j(\tau))d\tau \\
&= \mathbb{E}\left(\int_0^t \boldsymbol{\varphi}^2(\tau)d\tau\right),
\end{aligned}$$

igual, por sua vez, a

$$\frac{r^2(\varepsilon)}{(2\pi)^d}\int_0^t d\tau\int_\tau^t dt_2\int_0^\tau dt_1\int_\tau^t ds_2\int_0^\tau ds_1(\varepsilon+t_2-\tau)^{-d/2-1}(\varepsilon+s_2-\tau)^{-d/2-1}$$

$$.\sum_{i=1}^d\prod_{j=1,j\neq i}^d\mathbb{E}\left(\exp\left(-\frac{|B_j(\tau)-B_j(t_1)|^2}{2(\varepsilon+t_2-\tau)}-\frac{|B_j(\tau)-B_j(s_1)|^2}{2(\varepsilon+s_2-\tau)}\right)\right)$$

$$.\mathbb{E}\left(\exp\left(-\frac{|B_i(\tau)-B_i(t_1)|^2}{2(\varepsilon+t_2-\tau)}-\frac{|B_i(\tau)-B_i(s_1)|^2}{2(\varepsilon+s_2-\tau)}\right)\langle\omega_i,1\!\!1_{[t_1,\tau]}\rangle.\langle\omega_i,1\!\!1_{[s_1,\tau]}\rangle\right),$$

por substituição de φ. Consideremos as variáveis aleatórias normalizadas

$$X_1:=\langle.,(\tau-t_1)^{-1/2}1\!\!1_{[t_1,\tau]}\rangle$$

e

$$X_2:=\langle.,(t_1-s_1)^{-1/2}1\!\!1_{[s_1,t_1]}\rangle,$$

onde supomos $s_1\leq t_1$ (compensando com o factor 2, dada a simetria entre as variáveis t_1 e s_1). Podemos assim escrever

$$\begin{aligned}&\exp\left(-\frac{|B_i(\tau)-B_i(t_1)|^2}{2(\varepsilon+t_2-\tau)}-\frac{|B_i(\tau)-B_i(s_1)|^2}{2(\varepsilon+s_2-\tau)}\right)\langle\omega_i,1\!\!1_{[t_1,\tau]}\rangle.\langle\omega_i,1\!\!1_{[s_1,\tau]}\rangle\\ =\ &\exp\left(-\frac{1}{2}(aX_1^2+2bX_1X_2+cX_2^2)\right)(fX_1^2+gX_1X_2)\end{aligned}$$

com

$$\begin{array}{lll}a=\frac{\tau-t_1}{\varepsilon+t_2-\tau}+\frac{\tau-t_1}{\varepsilon+s_2-\tau}, & b=\frac{\sqrt{\tau-t_1}\sqrt{t_1-s_1}}{\varepsilon+s_2-\tau}, & c=\frac{t_1-s_1}{\varepsilon+s_2-\tau},\\ f=\tau-t_1, & g=\sqrt{\tau-t_1}\sqrt{t_1-s_1}. & \end{array}$$

Assim,

$$\mathbb{E}((r(\varepsilon)L_{\varepsilon,c})^2)$$

$$=\frac{2dr^2(\varepsilon)}{(2\pi)^d}\int_0^t d\tau\int_\tau^t dt_2\int_0^\tau dt_1\int_\tau^t ds_2\int_0^{t_1} ds_1(\varepsilon+t_2-\tau)^{-d/2-1}(\varepsilon+s_2-\tau)^{-d/2-1}$$

$$\cdot \left(\mathbb{E}\left(\exp\left(-\frac{1}{2}(aX_1^2 + 2bX_1X_2 + cX_2^2)\right)\right)\right)^{d-1}$$
$$\cdot \left(f\mathbb{E}\left(\exp\left(-\frac{1}{2}(aX_1^2 + 2bX_1X_2 + cX_2^2)\right) X_1^2\right)\right.$$
$$\left. + g\mathbb{E}\left(\exp\left(-\frac{1}{2}(aX_1^2 + 2bX_1X_2 + cX_2^2)\right) X_2X_1\right)\right).$$

Tem-se

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left(\exp\left(-\frac{1}{2}(aX_1^2 + 2bX_1X_2 + cX_2^2)\right) X_1^2\right) \\ = & -2\frac{\partial}{\partial a}\mathbb{E}\left(\exp\left(-\frac{1}{2}(aX_1^2 + 2bX_1X_2 + cX_2^2)\right)\right) \end{aligned} \tag{5.58}$$

e

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left(\exp\left(-\frac{1}{2}(aX_1^2 + 2bX_1X_2 + cX_2^2)\right) X_1X_2\right) \\ = & -\frac{\partial}{\partial b}\mathbb{E}\left(\exp\left(-\frac{1}{2}(aX_1^2 + 2bX_1X_2 + cX_2^2)\right)\right), \end{aligned} \tag{5.59}$$

pelo que uma primeira simplificação de $\mathbb{E}((r(\varepsilon)L_{\varepsilon,c})^2)$ exige apenas o cálculo de $\mathbb{E}\left(\exp\left(-\frac{1}{2}(aX_1^2 + 2bX_1X_2 + cX_2^2)\right)\right)$. Ora,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left(\exp\left(-\frac{1}{2}(aX_1^2 + 2bX_1X_2 + cX_2^2)\right)\right) \\ = & \mathbb{E}\left(\exp\left(-\frac{1}{2}(X, AX)\right)\right) \end{aligned}$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \text{ e } X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}.$$

Atendendo a que as variáveis X_1 e X_2 são independentes e igualmente distribuídas com densidade $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{1}{2}X_i^2)$, obtemos

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(-\frac{1}{2}(X, AX)\right)\right) = \frac{1}{2\pi}\int \exp\left(-\frac{1}{2}(X_1^2 + X_2^2 + (X, AX))\right) dX_1dX_2$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int \exp\left(-\frac{1}{2}(X,(\mathbb{1}+A)\,X)\right)dX_1 dX_2,$$

onde $\mathbb{1}$ é a matriz identidade. Os vectores próprios de $\mathbb{1}+A$ são

$$\begin{bmatrix} -\dfrac{-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}c-\frac{1}{2}\sqrt{(a^2-2ac+c^2+4b^2)}}{b} \\ 1 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} -\dfrac{-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}c+\frac{1}{2}\sqrt{(a^2-2ac+c^2+4b^2)}}{b} \\ 1 \end{bmatrix},$$

associados, respectivamente, aos valores próprios

$1+\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}c+\frac{1}{2}\sqrt{(a^2-2ac+c^2+4b^2)}$ e $1+\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}c-\frac{1}{2}\sqrt{(a^2-2ac+c^2+4b^2)}$.

Assim,

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(-\frac{1}{2}(X,AX)\right)\right)=\frac{1}{\sqrt{(1+a)\,(1+c)-b^2}}. \tag{5.60}$$

As igualdades (5.58), (5.59) e (5.60) permitem-nos então afirmar que

$$\mathbb{E}((r(\varepsilon)L_{\varepsilon,c})^2)$$

$$\begin{aligned}
&= 2r^2(\varepsilon)d\,(2\pi)^{-d}\int_0^t d\tau\int_\tau^t dt_2\int_0^\tau dt_1\int_\tau^t ds_2\int_0^{t_1} ds_1(\varepsilon+t_2-\tau)^{-\frac{d}{2}-1}\\
&\quad.(\varepsilon+s_2-\tau)^{-\frac{d}{2}-1}(1+a+c+ac-b^2)^{-\frac{d-1}{2}}\\
&\quad.\left(-2f\frac{\partial}{\partial a}(1+a+c+ac-b^2)^{-\frac{1}{2}}-g\frac{\partial}{\partial b}(1+a+c+ac-b^2)^{-\frac{1}{2}}\right)\\
&= 2d\varepsilon^{d-3}\,(2\pi)^{-d}\int_0^t d\tau\int_\tau^t dt_2\int_0^\tau dt_1\int_\tau^t ds_2\int_0^{t_1} ds_1(\varepsilon+t_2-\tau)^{-\frac{d}{2}-1}\\
&\quad.(\varepsilon+s_2-\tau)^{-\frac{d}{2}-1}(1+a+c+ac-b^2)^{-\frac{d}{2}-1}(f(1+c)-bg)\\
&= 2d\varepsilon^{d-3}\,(2\pi)^{-d}\int_0^t d\tau\int_\tau^t dt_2\int_0^\tau dt_1\int_\tau^t ds_2\int_0^{t_1}\\
&\quad\frac{\tau-t_1}{((t_1-\tau+s_2-s_1+\varepsilon)\,(t_2-t_1+\varepsilon)+(\tau-t_1)\,(t_2-\tau+\varepsilon))^{1+\frac{d}{2}}}ds_1.
\end{aligned}$$

Procede-se de seguida à mudança das variáveis

$$\begin{cases} t_1 = \varepsilon t_1' \\ t_2 = \varepsilon t_2'{}' \\ \tau = \varepsilon \tau' \\ s_1 = \varepsilon s_1' \\ t_2 = \varepsilon t_2' \end{cases}.$$

Obtém-se

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}((r(\varepsilon)L_{\varepsilon,c})^2) \\ = \;& 2\varepsilon d\,(2\pi)^{-d} \int_0^{\frac{t}{\varepsilon}} d\tau \int_\tau^{\frac{t}{\varepsilon}} dt_2 \int_0^{\tau} dt_1 \int_\tau^{\frac{t}{\varepsilon}} ds_2 \int_0^{t_1} \\ & \frac{\tau - t_1}{\left((t_1 - \tau + s_2 - s_1 + 1)\,(t_2 - t_1 + 1) + (\tau - t_1)\,(t_2 - \tau + 1)\right)^{1+\frac{d}{2}}} ds_1. \end{aligned}$$

Considere-se as transformações de variáveis

$$\begin{cases} x = \tau - t_1 \\ y = t_2 - \tau + 1 \\ z = s_2 - s_1 - (\tau - t_1) + 1 \\ s_1 = s_1 \\ t_1 = t_1 \end{cases}.$$

As condições gerais que anteriormente se escreviam na forma:

$$0 \le s_1 \le t_1 \le \tau \le s_2, t_2 \le \frac{t}{\varepsilon},$$

traduzem-se agora por

$$0 \le s_1 \le t_1 \wedge x \ge 0 \wedge t_1 - s_1 \le z - 1 \wedge y \ge 1 \wedge s_1 \le \frac{t}{\varepsilon} - z - x + 1.$$

Os integrais em s_1 e t_1 admitem então a representação

$$\int_0^{\frac{t}{\varepsilon}-z-x+1} ds_1 \int_{s_1}^{z+s_1-1} dt_1 = (z-1)\left(\frac{t}{\varepsilon}-z-x+1\right).$$

A nova função integranda, que é não negativa, é

$$(z-1)(t-\varepsilon z-\varepsilon x+\varepsilon)\frac{x}{(z(x+y)+xy)^{1+\frac{d}{2}}}$$

(observe-se que já efectuámos o produto por ε). Mas sendo o nosso objectivo a determinação do limite da variância de rL_ε podemos simplificar o cálculo se aplicarmos o teorema da convergência monótona de Lebesgue. Observe-se que o limite da função integranda majora-a para todo o ε. Então, por aplicação do referido teorema, vem

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0^+} \mathbb{E}((r(\varepsilon)L_{\varepsilon,c})^2 && (5.61)\\
&= 2td\,(2\pi)^{-d}\int_1^\infty dy\int_1^\infty dz(z-1)\int_0^\infty dx\frac{x}{(z(x+y)+xy)^{1+\frac{d}{2}}}\\
&= \frac{2td}{(2\pi)^d}\int_1^\infty dy\int_1^\infty dz(z-1)(y+z)^{-1-\frac{d}{2}}\int_0^\infty dx\frac{x}{\left(x+\frac{yz}{y+z}\right)^{1+\frac{d}{2}}}\\
&= \frac{8t}{(2\pi)^d(d-2)}\int_1^\infty dy\int_1^\infty dz(z-1)(y+z)^{-2}(yz)^{1-\frac{d}{2}}, && (5.62)
\end{aligned}$$

por aplicação da fórmula 3.191.2 de [GR80]. Para tornar mais leve a escrita omitiremos a constante $\frac{8t}{(2\pi)^d(d-2)}$ e adoptaremos a notação

$$\alpha := \frac{d}{2}+1.$$

Deste modo,

$$\begin{aligned}
&\int_1^\infty dy\int_1^\infty dz(z-1)(y+z)^{-2}(yz)^{1-\frac{d}{2}} && (5.63)\\
&= \int_1^\infty dz\frac{(z-1)}{z^{\alpha-2}}\int_1^\infty dy\frac{1}{(y+z)^2y^{\alpha-2}}. && (5.64)
\end{aligned}$$

Através das transformações

$$\begin{cases} z=\frac{1}{x}\\ y=\frac{s}{x}\end{cases}$$

o integral duplo (5.64) é convertido em

$$\int_0^1 dx(1-x)x^{2\alpha-6}\int_x^\infty ds\frac{1}{(s+1)^2 s^{\alpha-2}}.$$

De seguida usa-se o método de primitivação por partes, obtendo-se

$$\frac{1}{(2\alpha-5)(2\alpha-4)}\int\limits_1^\infty \frac{ds}{(s+1)^2 s^{\alpha-2}}+\frac{1}{2\alpha-5}\int\limits_0^1 \frac{x^{\alpha-3}dx}{(1+x)^2}-\frac{1}{2\alpha-4}\int\limits_0^1 \frac{x^{\alpha-2}dx}{(1+x)^2}. \tag{5.65}$$

A mudança de variável $s=\dfrac{1}{x}$ aplicada ao integral

$$\int_1^\infty \frac{1}{(s+1)^2 s^{\alpha-2}}ds \tag{5.66}$$

transforma-o em

$$\int_0^1 \frac{x^{\alpha-2}}{(1+x)^2}dx.$$

Substituindo (5.66) em (5.65) obtemos

$$\frac{-2\alpha+6}{(2\alpha-5)(2\alpha-4)}\int_1^\infty \frac{x^{\alpha-2}}{(1+x)^2}dx+\frac{1}{2\alpha-5}\int_0^1 \frac{x^{\alpha-3}}{(1+x)^2}dx. \tag{5.67}$$

Existem diferentes fórmulas integrais consoante α é ou não um número inteiro. Dada a relação existente entre α e d (inteiro não inferior a 3), há que distinguir os casos em que d é par daqueles em que d é ímpar.

Comecemos por supor que d é par. Aplicando a fórmula 2.111.4 de [GR80] aos dois integrais da expressão (5.67), esta vem igual a

$$\frac{-2\alpha+6}{(2\alpha-5)(2\alpha-4)}\sum_{k=1}^{\alpha-3}\frac{(-1)^{k-1}k}{\alpha-2-k}+\frac{1}{2\alpha-5}\sum_{k=1}^{\alpha-4}\frac{(-1)^{k-1}k}{\alpha-3-k}$$
$$+\frac{(-1)^{\alpha+1}}{2\alpha-4}+\frac{2\alpha-6}{2\alpha-5}(-1)^\alpha\ln 2.$$

Substituindo α em função da dimensão d e multiplicando pelo factor $\frac{8t}{(2\pi)^d(d-2)}$ obtemos o valor de $\lim_{\varepsilon\to0^+}\mathbb{E}((r(\varepsilon)L_{\varepsilon,c})^2)$ para os casos em que $d\geq 4$ é par:

$$\frac{8t}{(2\pi)^d(d-2)}\left(\frac{2(d-4)}{(d-3)(d-2)}\sum_{k=1}^{\frac{d}{2}-2}\frac{(-1)^k k}{d-2k-2}+\frac{2}{d-3}\sum_{k=1}^{\frac{d}{2}-3}\frac{(-1)^{k+1}k}{d-2k-4}\right.$$

$$+\frac{(-1)^{\frac{d}{2}}}{d-2}+(-1)^{\frac{d}{2}+1}\frac{d-4}{d-3}\ln 2\Bigg).$$

Quando d é ímpar convém reescrever a expressão (5.67) na forma

$$\frac{-2\alpha+6}{(2\alpha-5)(2\alpha-4)}\int_1^\infty \frac{x^{\alpha-2+\frac{1}{2}}}{(1+x)^2\sqrt{x}}dx+\frac{1}{2\alpha-5}\int_0^1 \frac{x^{\alpha-3+\frac{1}{2}}}{(1+x)^2\sqrt{x}}dx$$

e aplicar a fórmula 2.245.1 de [GR80]. Seguindo esta estratégia, (5.67) vem igual a

$$\frac{-2\alpha+6}{2\alpha-5}\sum_{k=0}^{\alpha-\frac{7}{2}}\frac{(-1)^k}{2\alpha-2k-6}+\frac{2\alpha-6}{2\alpha-5}\sum_{k=0}^{\alpha-\frac{9}{2}}\frac{(-1)^k}{2\alpha-2k-8}$$
$$-\frac{1}{(2\alpha-5)(2\alpha-4)}+\frac{\pi}{2}(-1)^{\alpha-\frac{7}{2}}\frac{2\alpha-6}{2\alpha-5}.$$

De seguida, substituindo α na expressão anterior e multiplicando o resultado obtido por $\frac{8t}{(2\pi)^d(d-2)}$ obtém-se o $\lim_{\varepsilon\to 0^+}\mathbb{E}((r(\varepsilon)L_{\varepsilon,c})^2)$ quando $d\geq 5$ e ímpar:

$$\frac{8t\,(d-4)}{(2\pi)^d(d-2)\,(d-3)}\left(2\sum_{k=0}^{\frac{d-7}{2}}\frac{(-1)^k}{d-2k-6}-\frac{d-1}{(d-2)(d-4)}+(-1)^{\frac{d-1}{2}}\frac{\pi}{2}\right),$$

o que termina a demonstração. ■

5.3 O $\lim_{\varepsilon\to 0^+}\mathbb{E}((r(\varepsilon)L_{\varepsilon,c})^2)$ e as variâncias dos movimentos Brownianos limites dos termos $r(\varepsilon)K_t\,(d,\vec{n},\varepsilon)$.

Nesta secção expomos algumas propriedades dos tempos locais relacionadas com a sua expansão em caos, merecendo especial destaque o estudo da esperança da renormalização do quadrado dos tempos locais, desta vez "calculada" usando algumas das propriedades dos seus *kernels* estudadas no Capítulo 4.

Atendendo às proposições 2.5.2 e 3.3.5, e supondo que $n=\sum_{i=1}^{d} n_i$, onde cada n_i é par, L_ε pode ser escrito na forma

$$\sum_{\vec{n}=0}^{\infty}\int\cdots\int_{[0,t]^n}(-1)^{\frac{n}{2}}\left(\varkappa(\varkappa+1)(2\pi)^{\frac{d}{2}}2^{\frac{n}{2}}\frac{\vec{n}}{2}!\right)^{-1}$$

$$\left((v-u+\varepsilon)^{-\varkappa}+(t+\varepsilon)^{-\varkappa}-(v+\varepsilon)^{-\varkappa}-(t-u+\varepsilon)^{-\varkappa}\right):\omega^{\otimes\vec{n}}(\mathrm{s}):d^n\mathrm{s}$$

$$=\sum_{\vec{n}=0}^{\infty}(-1)^{\frac{n}{2}}\left(\varkappa(\varkappa+1)(2\pi)^{\frac{d}{2}}2^{\frac{n}{2}}\frac{\vec{n}}{2}!\right)^{-1}\int\cdots\int_{[0,t]^n}$$

$$\left((v-u+\varepsilon)^{-\varkappa}+(t+\varepsilon)^{-\varkappa}-(v+\varepsilon)^{-\varkappa}-(t-u+\varepsilon)^{-\varkappa}\right):\omega^{\otimes\vec{n}}(\mathrm{s}):d^n\mathrm{s},$$

onde $\varkappa:=\frac{n+d}{2}-2$. Aplicando (3.5) e (3.10) podemos escrever

$$L_\varepsilon=\sum_{\vec{n}=0}^{\infty}(-1)^{\frac{n}{2}}\left(\varkappa(\varkappa+1)(2\pi)^{\frac{d}{2}}2^{\frac{n}{2}}\frac{\vec{n}}{2}!\right)^{-1}\left(M_t(d,\vec{n},\varepsilon)+N_t(d,\vec{n},\varepsilon)\right)$$

e, usando (3.11), tem-se ainda

$$L_\varepsilon=\sum_{\vec{n}=0}^{\infty}K_t(d,\vec{n},\varepsilon). \tag{5.68}$$

Observação 5.3.1 *Para cada $\varepsilon>0$, L_ε, tal como apresentado no Capítulo 3, é um elemento de (L^2), atendendo a que o domínio de integração é limitado e a função a integrar é uma Gaussiana. Por outro lado temos o seguinte*

Lema 5.3.2 *Com $c_{\vec{n},d}$ definido em (4.5) e*

$$\mathfrak{M}_t(d,\varepsilon):=r(\varepsilon)\sum_{\vec{n},n_i\ par}c_{\vec{n},d}M_t(d,\vec{n},\varepsilon) \tag{5.69}$$

tem-se:

1. *Para cada $a\in\mathbb{R},\mathfrak{M}_t(d,\varepsilon)\in\mathcal{D}(N^a)\subset(L^2)$, quando $\varepsilon>0$;*

2. *Para todo $a\in\left[0,\frac{d-2}{4}\right),\mathfrak{M}_t(d,\varepsilon)\in\mathcal{D}(N^a)$, quando $\varepsilon=0$;*

onde $\mathcal{D}(N^a)$ designa o domínio do operador N^a definido para cada $\varphi\in(L^2)$ por:

$$N^a\varphi=\sum_{\vec{n}}n^a\langle:\omega^{\otimes\vec{n}}:,\varphi^{(\vec{n})}\rangle.$$

Prova Da definição do operador N^a resulta que

$$\|N^a M_t\|^2_{(L^2)} = n^{2a}\vec{n}! \left\|(v-u+\varepsilon)^{-\varkappa}\right\|^2_{L^2([0,t]^n)}.$$

Utilizando (4.13) e (4.14) resulta

$$\left\|(v-u+\varepsilon)^{-\varkappa}\right\|^2_{L^2([0,t]^n)} = \begin{cases} (n(n-1)t + o(1))\,|\ln\varepsilon| & \text{se } \ d=3 \\ (t+o(1))\,\varepsilon^{3-d}\frac{n!(d-4)!}{(n+d-5)!} & \text{se } \ d>3 \end{cases},$$

pelo que obtemos

$$\|N^a \mathfrak{M}_t(d,\varepsilon)\|^2_{(L^2)}$$

$$= \sum_{\vec{n}:n_i \text{ par}} \vec{n}! c^2_{\vec{n},d} n^{2a} \begin{cases} (n(n-1)t + o(1)) & \text{se } \ d=3 \\ (t+o(1))\,\frac{n!(d-4)!}{(n+d-5)!} & \text{se } \ d>3 \end{cases}. \tag{5.70}$$

Seja

$$a_n^{(d)} = \sum_{\vec{m}:\, m_i \text{ par},\, m=n} \frac{(2\vec{m})!}{(2^m \vec{m}!)^2}. \tag{5.71}$$

Tomando o limite de (5.70) quando ε tende para zero por valores positivos, a série assim obtida é convergente quando a série

$$\sum_{n \text{ par}} a_n^{(d)} \frac{n^{2a}}{\left(\left(\frac{n+d}{2}-2\right)\left(\frac{n+d}{2}-1\right)\right)^2} \begin{cases} n(n-1) & \text{se } \ d=3 \\ \frac{n!}{(n+d-5)!} & \text{se } \ d>3 \end{cases}$$

é finita. Prova-se directamente para $d = 1, 2$ e 3 que $a_n^{(d)} \leq c \cdot \left(\frac{n}{2}+1\right)^{\frac{d-2}{2}}$ e mostra-se indutivamente que esta desigualdade mantém-se válida para d, quando se supõe que a mesma relação é válida para $d-2$. Assim, usando a majoração

$$0 < a_n^{(d)} \leq c \cdot \left(\frac{n}{2}+1\right)^{\frac{d-2}{2}},$$

vemos que os termos da série têm ordens não superiores a

$$O\left(n^{\frac{d-2}{2}+2a-4-(d-5)}\right) = O\left(n^{-\frac{d}{2}+2a}\right),$$

pelo que a condição

$$-\frac{d}{2}+2a<-1$$

é suficiente para a convergência no caso $\varepsilon = 0$.

Nos casos em que $\varepsilon > 0$, e atendendo a que a dimensão do espaço não desempenha um papel determinístico no estabelecimento do resultado, basta-nos prová-lo no caso unidimensional. A partir da definição (3.1) dos tempos locais é suficiente mostrar que o resultado é válido para δ_ε. Temos

$$\mathcal{S}\left(\delta_\varepsilon\left(\mathbf{B}\left(t_2\right)-\mathbf{B}\left(t_1\right)\right)\right)(f)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\left(\left|t_2-t_1\right|+\varepsilon\right)}}\exp\left(-\frac{1}{2\left(\left|t_2-t_1\right|+\varepsilon\right)}\left(\int_{t_1}^{t_2} f(s)\,ds\right)^2\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_n \frac{(-1)^n}{2^{n+\frac{1}{2}}n!\left(\left|t_2-t_1\right|+\varepsilon\right)^{n+\frac{1}{2}}}\left(\mathbb{1}_{[t_1,t_2]},f\right)^{2n},
\end{aligned}$$

pelo que o *kernel* de ordem n é dado por

$$\begin{cases} 0 & \text{, se } n \text{ é ímpar}\\[2ex] \dfrac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\pi}.2^{\frac{n+1}{2}}\frac{n}{2}!\left(\left|t_2-t_1\right|+\varepsilon\right)^{\frac{n+1}{2}}}\mathbb{1}_{[t_1,t_2]}^{\otimes n} & \text{, se } n \text{ é par}\end{cases}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\left\|\delta_\varepsilon\left(\mathbf{B}\left(t_2\right)-\mathbf{B}\left(t_1\right)\right)\right\|_{(L^2)}^2 &= \sum_{n:n\text{ é par}} \frac{n!\left|t_2-t_1\right|^n}{\pi 2^{n+1}\left(\frac{n}{2}!\right)^2\left(\left|t_2-t_1\right|+\varepsilon\right)^{n+1}} \qquad (5.72)\\
&\le \sum_{n:n\text{ é par}} \frac{n!}{\varepsilon\pi 2^{n+1}\left(\frac{n}{2}!\right)^2}.
\end{aligned}$$

Usando a fórmula de Stirling conclui-se que $\frac{n!}{2^{n+1}\left(\frac{n}{2}!\right)^2} \sim n^{-\frac{3}{2}}$ e, considerando $x=\frac{\Delta t}{\Delta t+\varepsilon}$, podemos interpretar a série em (5.72) como uma série de potências convergente no disco de raio 1. Podemos mesmo concluir que também a série de potências $\sum_{n:\, n\text{é par}} n^{2a-\frac{3}{2}}x^{2n}$ converge para cada valor real a, pelo que $\delta_\varepsilon(\mathbf{B}(t_2)-\mathbf{B}(t_1)) \in \mathcal{D}(N^a)$ e, por conseguinte, $L_{\varepsilon,c} \in \mathcal{D}(N^a)$, para todo $a \in \mathbb{R}$.■

O lema anterior permite-nos concluir que

$$\sum_{\vec{n}=0}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \left(\varkappa (\varkappa + 1) (2\pi)^{\frac{d}{2}} 2^{\frac{n}{2}} \frac{\vec{n}}{2}! \right)^{-1} N_t (d, \vec{n}, \varepsilon) \in (L^2) . \tag{5.73}$$

Tendo em vista a sua comparação com a esperança do tempo local renormalizado, vamos calcular a soma dos termos constantes do limite de todos os *cross-variations* de *martingales* renormalizados $r(\varepsilon) M_{k,\cdot}(d, \vec{n}, \varepsilon)$. Sabemos já que

$$\begin{aligned} E(t,d) \quad : &= \sum_{\vec{n}, n_i \text{ par}} c^2_{\vec{n},d} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \sum_{j,k=1}^{d} \langle r(\varepsilon) M_{k,\cdot}(d, \vec{n}, \varepsilon), r(\varepsilon) M_{j,\cdot}(d, \vec{n}, \varepsilon) \rangle_t \\ &= \sum_{\vec{n}, n_i \text{ par}} c^2_{\vec{n},d} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \sum_{j=1}^{d} \| r(\varepsilon) M_{j,t}(d, \vec{n}, \varepsilon) \|^2_{(L^2)} \\ &= \sum_{\vec{n}, n_i \text{ par}} c^2_{\vec{n},d} \vec{n}! t \cdot \begin{cases} n(n-1) & \text{se} \quad d = 3 \\ \frac{n!(d-4)!}{(n+d-5)!} & \text{se} \quad d > 3 \end{cases} . \end{aligned} \tag{5.74}$$

Usando a substituição $\vec{n} = 2\vec{m}$ resulta

$$\begin{aligned} E(t,d) &= \sum_{\vec{n}, n_i \text{ par}} c^2_{\vec{n},d} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \sum_{j,k=1}^{d} \langle r(\varepsilon) M_{k,\cdot}(d, \vec{n}, \varepsilon), r(\varepsilon) M_{j,\cdot}(d, \vec{n}, \varepsilon) \rangle_t \\ &= \sum_{\vec{m}} \overrightarrow{(2m)}! t c^2_{\overrightarrow{2m},d} \cdot \begin{cases} 2m(2m-1) & \text{se} \quad d = 3 \\ \frac{2m!(d-4)!}{(2m+d-5)!} & \text{se} \quad d > 3 \end{cases} , \end{aligned} \tag{5.75}$$

com

$$c^2_{\overrightarrow{2m},d} = \left((m + d/2 - 2)(m + d/2 - 1)(2\pi)^{d/2} 2^m \vec{m}! \right)^{-2} ; \tag{5.76}$$

pelo que

$$\sum_{\vec{n}, n_i \text{ par}} c^2_{\vec{n},d} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \sum_{j,k=1}^{d} \langle r(\varepsilon) M_{k,\cdot}(d, \vec{n}, \varepsilon), r(\varepsilon) M_{j,\cdot}(d, \vec{n}, \varepsilon) \rangle_t$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^d} \sum_{\vec{m}} \frac{\overrightarrow{2m}!t}{\left(2^m \vec{m}!\right)^2 \left((m + d/2 - 2)(m + d/2 - 1)\right)^2} \begin{cases} 2m(2m-1) & \text{se} \quad d = 3 \\ \frac{(2m)!(d-4)!}{(2m+d-5)!} & \text{se} \quad d > 3 \end{cases} \tag{5.77}$$

$$= \frac{t}{(2\pi)^d} \sum_{m=1}^{\infty} a_m^{(d)} \frac{1}{\left((m + d/2 - 2)(m + d/2 - 1)\right)^2} \begin{cases} 2m(2m-1) & \text{se} \quad d = 3 \\ \frac{(2m)!(d-4)!}{(2m+d-5)!} & \text{se} \quad d > 3 \end{cases},$$

onde, para cada $m = 0, 1, 2, 3, ...$, $a_m^{(d)}$ é dado por (5.71), ou seja,

$$a_m^{(d)} = \sum_{\vec{n}:n=m} \frac{\overrightarrow{2n}!}{\left(2^n \vec{n}!\right)^2} = 2^{-2m} \sum_{\substack{m_1=0 \\ m_1+\ldots+m_d=m>0}}^{\infty} \cdots \sum_{m_d=0}^{\infty} \frac{\overrightarrow{2n}!}{\left(\vec{n}!\right)^2} \tag{5.78}$$

$$= \sum_{\vec{n}:n=m} \frac{\prod_{i=1}^d (2n_i)!}{\left(2^{\sum_{i=1}^d n_i} \prod_{i=1}^d n_i!\right)^2}$$

$$= \sum_{\vec{n}:n=m} \prod_{i=1}^{d} \frac{(2n_i)!}{\left(2^{n_i} n_i!\right)^2}.$$

Tem-se, em particular,

$$a_m^{(1)} = 2^{-2m} \frac{(2m)!}{(m!)^2}, \tag{5.79}$$

pelo que

$$a_m^{(d)} = \sum_{\vec{n}:n=m} \prod_{i=1}^{d} a_{n_i}^{(1)}. \tag{5.80}$$

Tem-se ainda válida a seguinte relação

Lema 5.3.3

$$a_m^{(d_1+d_2)} = \sum_{m_1,m_2:m_1+m_2=m} a_{m_1}^{(d_1)} a_{m_2}^{(d_2)}. \tag{5.81}$$

Prova Com efeito, de (5.80) resulta que

$$a_m^{(d_1+d_2)} = \sum_{\substack{n_1,\ldots,n_{d_1},n'_1,\ldots,n'_{d_2} \\ \sum_{i=1}^{d_1} n_i + \sum_{j=1}^{d_2} n'_j = m}} \prod_{i=1}^{d_1} a_{n_i}^{(1)} \prod_{j=1}^{d_2} a_{n'_j}^{(1)}.$$

Denotando por $m_1 = \sum_{i=1}^{d_1} n_i$ e por $m_2 = \sum_{j=1}^{d_2} n'_j$ podemos escrever

$$a_m^{(d_1+d_2)} = \sum_{m_1,m_2:m_1+m_2=m} \sum_{\vec{n}:n=m_1} \prod_{i=1}^{d_1} a_{n_i}^{(1)} \sum_{\vec{n}':n'=m_2} \prod_{j=1}^{d_2} a_{n'_j}^{(1)}$$

e, aplicando novamente (5.80), vem, tal como queríamos,

$$a_m^{(d_1+d_2)} = \sum_{m_1,m_2:m_1+m_2=m} a_{m_1}^{(d_1)} a_{m_2}^{(d_2)}.$$

■

Lema 5.3.4 *Com $m \in \mathbb{N}$, tem-se*

$$\begin{aligned} a_m^{(d)} &= \frac{1}{m!} \frac{d^m}{dx^m} (1-x)^{-d/2} \big|_{x=0} \\ &= \frac{\Gamma\left(m+\frac{d}{2}\right)}{\Gamma(m+1)\,\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Prova Para $d = 1$

$$\begin{aligned} a_m^{(1)} &= 2^{-2m} \frac{(2m)!}{(m!)^2} = \frac{1}{m!} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{2m-1}{2} \\ &= \frac{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(m+1)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Por outro lado, com $|x| < 1$, sabe-se, por exemplo, por 1.112.4 de [GR80], com x substituído por $-x$, que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-x}} &= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1.3}{2.4}x^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^3 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}x^4 + \ldots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \end{aligned}$$

onde $a_n = \frac{1.3.5.7....(2n-1)}{2^n n!} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = a_n^{(1)}$. Ou seja,

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{m=0}^{\infty} a_m^{(1)} x^m. \tag{5.82}$$

Além disso, pelo Lema 5.3.3, temos

$$a_n^{(d)} = \sum_{m=0}^{\infty} a_m^{(d-1)} a_{n-m}^{(1)}.$$

Finalmente, por indução mostra-se facilmente que

$$(1-x)^{-\frac{d}{2}} = \sum_{m=0}^{\infty} a_m^{(d)} x^m, \tag{5.83}$$

donde o resultado.

Observe-se que se pode mostrar directamente que $a_m^{(d)} = \frac{\Gamma\left(m+\frac{d}{2}\right)}{\Gamma(m+1)\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}$, para $d = 2$ e 3. Admitindo esta condição válida para d, prova-se que ela verifica-se para $d+2$. Dada a arbitrariedade de d em $\mathbb{N}$ (para $d = 1$ vimos atrás que a condição também é verificada) conclui-se que

$$a_m^{(d)} = \frac{\Gamma\left(m+\frac{d}{2}\right)}{\Gamma(m+1)\,\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}, \tag{5.84}$$

para todo $d \in \mathbb{N}$.■

O resultado que de seguida apresentamos é particularmente útil na prova da igualdade que nos propusemos mostrar nesta secção, nos casos em que a dimensão do espaço é 3 ou 4.

Corolário 5.3.5 *Para todo o número natural m, tem-se*

$$a_m^{(2)} = \sum_{n=0}^{m} \frac{(2n)!}{(2^n\, n!)^2} \frac{(2\,(m-n))!}{(2^{m-n}\,(m-n)!)^2} = 1, \tag{5.85}$$

$$a_m^{(3)} = \frac{(2m+1)!}{(2^m m!)^2}$$

e

$$a_m^{(4)} = m+1.$$

Prova Com efeito, atendendo a (5.82), para $|x| < 1$, o quadrado da série $\sum_{m=0}^{\infty} a_m^{(1)} x^m$ coincide com a série $\sum_{m=0}^{\infty} x^m = \frac{1}{1-x}$, resultando

$$\frac{1}{1-x} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{m} a_n a_{m-n} x^m.$$

Pelo Lema 5.3.4, conclui-se assim que

$$a_m^{(2)} = \frac{1}{m!}\frac{d^m}{dx^m}(1-x)^{-1}\mid_{x=0} = \sum_{n=0}^{m} a_n a_{m-n} = 1;$$

ou seja,

$$\sum_{n=0}^{m} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{(2(m-n))!}{2^{2(m-n)}((m-n)!)^2} = \sum_{n=0}^{m} \frac{(2n)!}{2^{2m}(n!)^2}\frac{(2(m-n))!}{((m-n)!)^2} = 1.$$

Agora, usando (5.81) e (5.85) resulta

$$a_m^{(3)} = \sum_{n=0}^{m} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} = \frac{(2m+1)!}{(2^m m!)^2}. \tag{5.86}$$

Finalmente, de $a_m^{(2)} = 1$ e de (5.81), resulta que $a_m^{(4)} = m+1.$■

Recorrendo ao lema anterior, e supondo $d = 3$, obtemos

$$\begin{aligned}
E(t,3) &= \sum_{\vec{n}, n_i \text{ par}} c_{\vec{n},d}^2 \lim_{\varepsilon\to 0^+} \sum_{j,k=1}^{d} \langle r(\varepsilon) M_{k,.}(d,\vec{n},\varepsilon), r(\varepsilon) M_{j,.}(d,\vec{n},\varepsilon)\rangle_t \\
&= \frac{2t}{(2\pi)^3} \sum_{m=1}^{\infty} a_m^{(3)} \frac{m(2m-1)}{((m-1/2)(m+1/2))^2} \\
&= \frac{2t}{(2\pi)^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(2m+1)(2m)!m(2m-1)}{(2^m)^2(m!)^2((m-1/2)(m+1/2))^2} \\
&= \frac{8t}{(2\pi)^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(2m)!m}{(2^m)^2(m!)^2(m-1/2)(m+1/2)} \\
&= \frac{t}{2\pi^2}
\end{aligned}$$

igual, por sua vez, tal como vimos na primeira secção do Capítulo 5, a $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \mathbb{E}\left(L_{\varepsilon,\text{ren}}^2\right)$.

Com $d = 4$, obtém-se

$$E(t,4) = \sum_{\vec{n}, n_i \text{ par}} c_{\vec{n},d}^2 \lim_{\varepsilon\to 0^+} \sum_{j,k=1}^{d} \langle r(\varepsilon) M_{k,.}(d,\vec{n},\varepsilon), r(\varepsilon) M_{j,.}(d,\vec{n},\varepsilon)\rangle_t$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{t}{(2\pi)^4}\sum_{m=1}^{\infty} a_m^{(4)}\frac{1}{(m(m+1))^2}2m \\
&= \frac{2t}{(2\pi)^4}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m\,(m+1)} \\
&= \frac{t}{8\pi^4} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\mathbb{E}\left(L^2_{\varepsilon,\mathrm{ren}}\right).
\end{aligned}
$$

Para $d > 4$, usando (5.84), a soma

$$
E(t,d) = \frac{t}{(2\pi)^d}\sum_{m=1}^{\infty} a_m^{(d)}\frac{1}{\left(\left(m+\frac{d}{2}-2\right)\left(m+\frac{d}{2}-1\right)\right)^2}\frac{(2m)!(d-4)!}{(2m+d-5)!} \tag{5.87}
$$

transforma-se em

$$
\frac{t}{(2\pi)^d}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\Gamma\left(m+\frac{d}{2}\right)(2m)!(d-4)!}{\Gamma(m+1)\,\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)\left((m+d/2-2)\,(m+d/2-1)\right)^2(2m+d-5)!}, \tag{5.88}
$$

que pode ser avaliada para cada valor de d (à semelhança do que fizemos para $d = 3, 4$) recorrendo a sucessivas integrações e/ou derivações de (5.83), para exprimir o termo geral da série apenas em função da variável m. A soma (5.88) pode ser comparada com (5.8), tendo-se

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\left(r(\varepsilon)L_{\varepsilon,c}\right)^2\right) &= \frac{2\varepsilon}{(2\pi)^d}\int_0^{\frac{t}{\varepsilon}}dt_2\int_0^{\frac{t_2}{\varepsilon}}dt_1\int_0^{\frac{t}{\varepsilon}}ds_2\int_0^{\frac{s_2}{\varepsilon}} \\
&\left(\left(1+\tau+\sigma+\tau\sigma-\delta^2\right)^{-\frac{d}{2}} - \left((1+\tau)\,(1+\sigma)\right)^{-\frac{d}{2}}\right)ds_1.
\end{aligned} \tag{5.89}
$$

Tanto a soma (5.88) como o integral (5.89) foram calculados para algumas concretizações de d (e coincidiram em todos estes valores), em particular, por exemplo, obteve-se

$$\begin{pmatrix} E(t,3) \\ E(t,4) \\ E(t,5) \\ E(t,6) \\ E(t,7) \\ E(t,8) \\ E(t,9) \\ E(t,10) \end{pmatrix} = (2\pi)^{-d} t \begin{pmatrix} 16\pi \\ 2 \\ -\frac{16}{9} + \frac{2}{3}\pi \\ -\frac{5}{6} + \frac{4}{3}\ln 2 \\ \frac{48}{25} - \frac{3}{5}\pi \\ \frac{34}{45} - \frac{16}{15}\ln 2 \\ -\frac{656}{441} + \frac{10}{21}\pi \\ -\frac{33}{56} + \frac{6}{7}\ln 2 \end{pmatrix}.$$

Comparando estes resultados com (5.25), (5.29) e (5.37) constata-se que

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \mathbb{E}\left(L^2_{\varepsilon,\mathrm{ren}}\right)$$

$$= \sum_{\vec{n}, n_i \text{ par}} c^2_{\vec{n},d} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \sum_{j,k=1}^{d} \langle r(\varepsilon) M_{k,\cdot}(d,\vec{n},\varepsilon), r(\varepsilon) M_{j,\cdot}(d,\vec{n},\varepsilon)\rangle_t$$

para tais valores da dimensão. Por outro lado permite-nos obter a soma de algumas séries curiosas.

Deixamos em aberto o problema de generalizar este resultado a dimensões arbitrárias $d \geq 3$.

A.1 Cálculos para a Secção 5.3.

Neste apêndice indicamos o método que seguimos para converter a expressão (5.11):

$$\frac{\varepsilon}{8\pi^3}\int_0^{\frac{T_2-T_1}{\varepsilon}} d\sigma \int_0^{\sigma} d\tau \left(\tfrac{T_2-T_1}{\varepsilon}-\sigma\right)(\sigma-\tau)$$
$$.\left(\left(1+\tau+\sigma+\sigma\tau-\tau^2\right)^{-\frac{3}{2}}-\left((1+\tau)(1+\sigma)\right)^{-\frac{3}{2}}\right),$$

em:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4\pi^3}(T_2-T_1+\varepsilon)\arctan\sqrt{1+2\frac{T_2-T_1}{\varepsilon}}\\
&-\frac{3}{4\pi^3}(T_2-T_1+5\varepsilon)\arctan\frac{\sqrt{1+2\frac{T_2-T_1}{\varepsilon}}}{3}\\
&-\frac{3}{4\pi^3}(T_2-T_1+5\varepsilon)\arctan\frac{\sqrt{1+\frac{T_2-T_1}{\varepsilon}}}{2}+\left(\frac{-116}{3}+7\pi\right)\frac{\varepsilon}{8\pi^3}\\
&+\frac{\pi-8}{8\pi^3}(T_2-T_1)+\frac{1}{2\pi^3}(T_2-T_1+\varepsilon)\ln\left(1+\frac{T_2-T_1}{\varepsilon}\right)\\
&+\frac{1}{\pi^3}\sqrt{\varepsilon^2+2(T_2-T_1)\varepsilon}+\frac{5\varepsilon}{2\pi^3}\sqrt{1+\frac{T_2-T_1}{\varepsilon}}.
\end{aligned}\tag{90}$$

Por aplicação das fórmulas 2.264.5 e 2.244.1 de [GR80] obtém-se, respectivamente,

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\sigma} d\tau\,(\sigma-\tau)\left(1+\tau+\sigma+\sigma\tau-\tau^2\right)^{-\frac{3}{2}}\\
=\;&-\frac{1}{\sqrt{1+2\sigma}}+\frac{1}{\sqrt{1+\sigma}}+\frac{1-2\sigma+\sigma^2}{(1+\sigma)(5+\sigma)\sqrt{1+2\sigma}}+\frac{\sigma-1}{(5+\sigma)\sqrt{1+\sigma}}
\end{aligned}$$

e

$$\int_0^{\sigma} d\tau\,(\sigma-\tau)(1+\tau)^{-\frac{3}{2}}=-4\sqrt{1+\sigma}+2\sigma+4,$$

pelo que (5.11) pode-se escrever

$$\frac{\varepsilon}{8\pi^3}\int_0^{\frac{T_2-T_1}{\varepsilon}} d\sigma\left(\frac{T_2-T_1}{\varepsilon}-\sigma\right)\left(\left(-\frac{1}{\sqrt{1+2\sigma}}+\frac{1}{\sqrt{1+\sigma}}\right.\right.$$

$$
\begin{aligned}
& + \frac{1-2\sigma+\sigma^2}{(1+\sigma)(5+\sigma)\sqrt{1+2\sigma}} + \frac{\sigma-1}{(5+\sigma)\sqrt{1+\sigma}}\Bigg) \\
& - (1+\sigma)^{-\frac{3}{2}}\left(-4\sqrt{1+\sigma}+2\sigma+4\right)\Bigg) \\
= \; & \frac{\varepsilon}{8\pi^3}\left(4\int_0^c \frac{c-\sigma}{1+\sigma}d\sigma - \int_0^c \frac{(c-\sigma)(2\sigma+4)}{(1+\sigma)^{\frac{3}{2}}}d\sigma\right. \\
& \left. - 4\int_0^c \frac{(c-\sigma)\sqrt{1+2\sigma}}{(1+\sigma)(5+\sigma)}d\sigma + \int_0^c \frac{(c-\sigma)(2\sigma+4)}{\sqrt{1+\sigma}(5+\sigma)}d\sigma\right),
\end{aligned}
$$

onde $c = \frac{T_2-T_1}{\varepsilon}$.

Apresentamos de seguida indicações sobre o desenvolvimento destas quatro parcelas.

1. De forma imediata obtém-se $\int_0^c \frac{c-\sigma}{1+\sigma}d\sigma = -c + (c+1)\ln(c+1)$;

2. Para a simplificação de $\int_0^c \frac{(c-\sigma)(2\sigma+4)}{(1+\sigma)^{\frac{3}{2}}}d\sigma$ usam-se as fórmulas 2.223 alíneas 1, 2 e 3 de [GR80] obtendo-se
$$\int_0^c \frac{(c-\sigma)(2\sigma+4)}{(1+\sigma)^{\frac{3}{2}}}d\sigma = 4(1-c)\sqrt{1+c} + \frac{4}{3}(1+c)^{\frac{3}{2}} - 16;$$

3. Aplica-se o método de integração por partes a
$$-4\int_0^c \frac{(c-\sigma)\sqrt{1+2\sigma}}{(1+\sigma)(5+\sigma)}d\sigma$$
por primitivação de $\frac{c-\sigma}{(1+\sigma)(5+\sigma)}$. Obtém-se
$$
\begin{aligned}
& -4\int_0^c \frac{(c-\sigma)\sqrt{1+2\sigma}}{(1+\sigma)(5+\sigma)}d\sigma \\
= \; & -(c+1)\sqrt{1+2c}\ln(1+c) + (c+5)\sqrt{1+2c}\ln(5+c) - (5+c)\ln 5 \\
& +(c+1)\int_0^c \frac{\ln(1+\sigma)}{\sqrt{1+2\sigma}}d\sigma - (c+5)\int_0^c \frac{\ln(5+\sigma)}{\sqrt{1+2\sigma}}d\sigma.
\end{aligned}
$$

Efectuam-se as substituições de variáveis $1+\sigma = x$ e $5+\sigma = x$ no primeiro e no segundo integrais, respectivamente, e aplica-se, em ambos os casos, a fórmula 2.727.5 de [GR80] resultando

$$
\begin{aligned}
& -4\int_0^c \frac{(c-\sigma)\sqrt{1+2\sigma}}{(1+\sigma)(5+\sigma)}d\sigma \\
= \;& 2(c+1)\arctan\sqrt{1+2c} - 6(5+c)\arctan\frac{\sqrt{1+2c}}{3} + 8\sqrt{1+2c} \\
& -8-\frac{\pi}{2}+30\arctan\frac{1}{3}+c\left(6\arctan\frac{1}{3}-\frac{\pi}{2}\right);
\end{aligned}
$$

4. Aplica-se o método de integração por partes a

$$\int_0^c \frac{(c-\sigma)(2\sigma+4)}{\sqrt{1+\sigma}(5+\sigma)}d\sigma = \int_0^c \frac{4c-2\sigma^2+(2c-4)\sigma}{(5+\sigma)\sqrt{1+\sigma}}d\sigma,$$

por primitivação de $(1+\sigma)^{-\frac{1}{2}}$ e, em seguida, faz-se a substituição $1+\sigma = x$. Somos assim conduzidos à expressão

$$\frac{8}{3}(1+c)^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{5}c - \frac{8}{3} - 4(3c+15)\int_1^{1+c}\frac{\sqrt{x}}{(x+4)^2}dx,$$

que, por aplicação da fórmula 2.213.5 de [GR80], é transformada em

$$
\begin{aligned}
& -\frac{44}{3}+30\arctan\frac{1}{2}+\left(6\arctan\frac{1}{2}-4\right)c \\
& +\frac{8}{3}(1+c)^{\frac{3}{2}}+12(1+c)^{\frac{1}{2}}-6(c+5)\arctan\frac{\sqrt{1+c}}{2}.
\end{aligned}
$$

Substituindo c e as expressões determinadas em 1, 2, 3 e 4 em (90) (a qual é igual a (5.11)), obtém-se a expressão desejada.

Bibliografia

[AOU98] K. Aase, B. Øksendal, and J. Ubøe. White noise generalizations of the Clark-Ocone theorem with application to mathematical finance. Technical Report 6, University of Aarhus, University of Aarhus, 1998.

[BK93] R. F. Bass and D. Khoshnevisan. Intersection local times and Tanaka formulas. *Ann. Inst. H. Poincaré*, 29:419–451, 1993.

[BK95] Yu. M. Berezansky and Yu. G. Kondratiev. *Spectral Methods in Infinite-Dimensional Analysis.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1995.

[BSST93] Ph. Blanchard, M. Sirugue-Collin, L. Streit, and D. Testard, editors. *Dynamics of complex and Irregular Systems*, Singapore, 1993. World Scientific.

[Cla70] J. M. C. Clark. The representation of functionals of Brownian motion by stochastic integrals. *Ann. Math. Stat.*, 41:1282–1295, 1970.

[DdFS00] C. Drumond, M. de Faria, and L. Streit. The square of self-intersection local time of Brownian motion. In *Stochastic Processes, Physics and Geometry: New Interplays*, pages –. AMS, Providence, RI, 2000. A Volume in Honor of Sergio Albeverio", Vol. I. CMS Conference Proceedings Series.

[DEK50] A. Dvoretzky, P. Erdos, and S. Kakutani. Double points of paths of Brownian motion in n-space. *Acta Sci. Math. Szeged*, 12:75–81, 1950.

[DEK54] A. Dvoretzky, P. Erdös, and S. Kakutani. Double points of paths of Brownian motion in the plane. *Bull. Res. Council Israel Sect. F*, 3:364–371, 1954.

[DEKT57] A. Dvoretzky, P. Erdös, S. Kakutani, and S. J. Taylor. Triple points of the Brownian motion in 3-space. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 53:856–862, 1957.

[DFS98] C. Drumond, M. Faria, and L. Streit. Uma nota sobre a expansão em caos dos tempos locais de auto-intersecção do movimento Browniano. In J. M. Ferreira and A. Rosa, editors, *Boletim Da Sociedade Portuguesa de Matemática*, volume 39, pages 35–41, Lisboa, 1998.

[DFS00] C. Drumond, M. Faria, and L. Streit. The renormalization of self intersection local times I: The chaos expansion. *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.*, 3(2):223–236, 2000. http:/ma.utexas.edu/mp-arc/index-98.html.

[DPV97] T. Deck, J. Potthoff, and G. Våge. A review of white noise analysis from a probabilistic standpoint. *Acta Appl. Math.*, 48:91–112, 1997.

[Dyn84] E. B. Dynkin. Polynomials of the occupation field and related random fields. *J. Funct. Anal.*, 58:20–52, 1984.

[Dyn88a] E. B. Dynkin. Regularized self-intersection local times of planar Brownian motion. *Ann. Probab.*, 16:58–73, 1988.

[Dyn88b] E. B. Dynkin. Self-intersection gauge for random walks and for Brownian motion. *Ann. Probab.*, 16:1–57, 1988.

[Edw65] S. F. Edwards. The statistical mechanics of polymers with excluded volume. *Proc. Phys. Soc.*, 85:613–624, 1965.

[FHSW97] M. Faria, T. Hida, L. Streit, and H. Watanabe. Intersection local times as generalized white noise functionals. *Acta Appl. Math.*, 46:351–362, 1997.

[FOS00] M. Faria, M. J. Oliveira, and L. Streit. A generalized Clark-Ocone formula. *Random Operators and Stochastic Equations*, 8(2):163–174, 2000.

[GHR84] D. Geman, J. Horowitz, and J. Rosen. A local time analysis of intersections of Brownian paths in the plan. *Ann. Probab.*, 12:86–107, 1984.

[GKS99] M. Grothaus, Yu. G. Kondratiev, and L. Streit. Regular generalized functions in Gaussian analysis. *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.*, 2(1):1–24, 1999.

[GKU99] M. Grothaus, Yu. G. Kondratiev, and G. F. Us. Wick calculus for regular generalized stochastic functions. *Random Oper. Stochastic Equations*, 7(4):301–328, 1999.

[GR80] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryshik. *Table of Integrals, Series and Products.* Academic Press, New York, 1980.

[Gro98] M. Grothaus. *New Results in Gaussian Analysis and their Applications in Mathematical Physics.* PhD thesis, University of Bielefeld, 1998.

[Gui72] A. Guichardet. *Symmetric Hilbert Spaces and Related Topics.* Lecture Notes in Math. Springer, Berlin, 1972.

[GV68] I. M. Gel'fand and N. Ya. Vilenkin. *Generalized Functions*, volume IV. Academic Press, New York, 1968.

[Hid75] T. Hida. *Analysis of Brownian Functionals.* Number 13 in Carleton Math. Lectures Notes. Carleton, 1975.

[Hid80] T. Hida. *Brownian Motion.* Springer, Berlin, 1980.

[HKPS93] T. Hida, H. H. Kuo, J. Potthoff, and L. Streit. *White Noise. An infinite dimensional calculus.* Kluwer, Dordrecht, 1993.

[IPAV95] P. Imkeller, V. Perez-Abreu, and J. Vives. Chaos expansion of double intersection local times of Brownian motion in $\mathbb{R}^d$ and renormalization. *Stoch. Proc. Appl.*, 56:1–34, 1995.

[JS87] J. Jacod and A. N. Shiryaev. *Limit Theorems for Stochastic Processes.* Springer, Berlin, 1987.

[KLP$^+$96] Yu. G. Kondratiev, P. Leukert, J. Potthoff, L. Streit, and W. Westerkamp. Generalized functionals in Gaussian spaces: The characterization theorem revisited. *J. Funct. Anal.* , 141(2):301–318, 1996.

[Kre88] P. Kreé. La theorie des distributions en dimension quelconque et l'integration stochastique. *Lecture Notes in Math. Springer, Berlin*, 1316:170–233, 1988.

[KS91] I. Karatzas and S. E. Shreve. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, volume 113 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer Berlin, 1991.

[KT80a] I. Kubo and S. Takenaka. Calculus on Gaussian white noise I. *Proc. Jap. Acad.*, 56:376–380, 1980.

[KT80b] I. Kubo and S. Takenaka. Calculus on Gaussian white noise II. *Proc. Jap. Acad.*, 56:411–416, 1980.

[KT81] I. Kubo and S. Takenaka. Calculus on Gaussian white noise III. *Proc. Jap. Acad.*, 57:433–437, 1981.

[KT82] I. Kubo and S. Takenaka. Calculus on Gaussian white noise IV. *Proc. Jap. Acad.*, 58:186–189, 1982.

[Kuo83] H.-H. Kuo. Brownian functionals and applications. *Acta Appl. Math.*, 1:175–188, 1983.

[Leu94] P. Leukert. Generalized functions on Gaussian spaces, constructions, characterizations, calculus. Diplom Math. University of Bielefeld, 1994.

[Lév40] P. Lévy. Le mouvement brownien plan. *American J. Math.*, 62:440–487, 1940.

[LG85] J. F. Le Gall. Sur le temps local d'intersection du mouvement Brownian plan et la méthode de renormalisation de Varadhan. *Lecture Notes in Math. Springer*, 1123:314–331, 1985.

[LG86] J. F. Le Gall. Sur la saucisse de Wiener et les points multiples du mouvement brownien. *Ann. Probab.*, 14:1219–1244, 1986.

[LLSW93] A. Lascheck, P. Leukert, L. Streit, and W. Westerkamp. Quantum mechanical propagators in terms of Hida distributions. *Rep. Math. Phys.*, 33:221–232, 1993.

[Lyo86] T. J. Lyons. The critical dimension at which quasi-every Brownian motion is self-avoiding. *Adv. in Appl. Probab. (Spec. Suppl.)*, pages 87–99, 1986.

[MS98] S. Mendonça and L. Streit. Multiple intersection local times in terms of white noise. Technical report, Univ. da Madeira, 1998. Submitted to Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.

[NV92] D. Nualart and J. Vives. Smoothness of Brownian local times and related functionals. *Potential Analysis*, 1:257–263, 1992.

[NV95] D. Nualart and J. Vives. Chaos expansion and local times. *Publications Mathematiques*, 36:827–636, 1995.

[Oco84] D. Ocone. Malliavin's calculus and stochastic integral representations of functionals of diffusion processes. *Stochastics*, 12:161–185, 1984.

[Oks98] B. Øksendal. *Stochastic Differential Equations. An Introduction with Applications.* Springer, Berlin, 5th edition, 1998.

[PA93] V. Perez-Abreu. Chaos expansions: A review. Preprint, CIMAT, 1993.

[Pen89] M. D. Penrose. On the existence of self-intersections for quasi-every Brownian path in space. *Ann. Probab.*, 17:482–502, 1989.

[Ros83] J. Rosen. A local time approach to the self-intersections of Brownian paths in space. *Comm. Math. Phys.*, 88:327–338, 1983.

[Ros86a] J. Rosen. A renormalized local time for multiple intersections of planar Brownian motion. *Lecture Notes in Math. Springer, Berlin*, 1204:515–531, 1986.

[Ros86b] J. Rosen. Tanaka's formula and renormalisation for intersections of planar Brownian motion. *Ann. Probab.*, 14:1425–1451, 1986.

[Shi91] N. R. Shieh. White noise analysis and Tanaka formula for intersections of planar Brownian motion. *Nagoya Math. J.*, 122:1–17, 1991.

[SW93] L. Streit and W. Westerkamp. A generalization of the characterization theorem for generalized functionals of white noise. In Blanchard et al. [BSST93], pages 174–187.

[Sym69] K. Symanzik. *Euclidean Quantum Field Theory. In Local Quantum Theory.* Academic New York, 1969.

[Var69] S. R. S. Varadhan. *Appendix to Euclidean Quantum Field Theory by K. Symanzik. In Local Quantum Field Theory.* Academic New York, 1969.

[Wat91] H. Watanabe. The local time of self-intersections of Brownian motions as generalized Brownian functionals. *Lett. Math. Phys.*, 23:1–9, 1991.

[Wer93] W. Werner. Sur les singularités des temps locaux d'intersection du mouvement brownien plan. *Ann. Inst. H. Poincaré*, 29:391–418, 1993.

[Wes80] J. Westwater. On Edward's model for long polymer chains. *Comm. Math. Phys.*, 72:131–174, 1980.

[Wol78] R. Wolpert. Wiener path intersection and local time. *J. Funct. Anal.*, 30:329–340, 1978.

[Yor85a] M. Yor. Complements aux formules de Tanaka-Rosen. *Lecture Notes in Math. Springer, Berlin*, 1123:332–348, 1985.

[Yor85b] M. Yor. Renormalisation et convergence en loi pour les temps locaux d'intersection du mouvement brownien dans $\mathbb{R}^3$. *Lecture Notes in Math. Springer, Berlin*, 1123:350–365, 1985.