

DM

**A Matemática e o Bilhar**  
Aplicações geométricas

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Duarte Nuno Martins da Silva e Freitas**  
MESTRADO EM MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E APLICAÇÕES



UNIVERSIDADE da MADEIRA

*A Nossa Universidade*

[www.uma.pt](http://www.uma.pt)

setembro | 2025



**A Matemática e o Bilhar**  
Aplicações geométricas  
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Duarte Nuno Martins da Silva e Freitas**  
MESTRADO EM MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E APLICAÇÕES

ORIENTAÇÃO  
Luís Elias Ribeiro Rodrigues



# Resumo

A prática do bilhar configura-se como um domínio privilegiado de aplicação empírica de conhecimentos matemáticos, físicos e geométricos. A dinâmica do jogo permite a análise rigorosa de trajetórias, ângulos, vetores de força e fenômenos de rotação. A mesa, delimitada por tabelas retangulares, pode ser modelada como um plano geométrico no qual se formalizam princípios como a reflexão especular, a conservação do momento linear e determinadas transformações simétricas. Assim, a execução de uma tacada eficaz depende não apenas de destreza motora, mas também da compreensão (ainda que intuitiva) de estruturas matemáticas subjacentes.

As situações de snooker, caracterizadas pela ausência de linha direta entre a bola branca e a bola-alvo devido à interposição de outras bolas, evidenciam a necessidade de raciocínio geométrico avançado. Nesses casos, o jogador recorre a trajetórias indiretas com uma ou múltiplas reflexões nas tabelas. Embora sejam tradicionalmente utilizados modelos baseados em simetrias ou sistemas de marcação numérica (como os sistemas de diamantes), tais métodos revelam limitações em contexto competitivo.

Neste enquadramento, o presente trabalho propõe uma abordagem inovadora, articulando fundamentos teóricos e aplicação prática. Introduzem-se conceitos da teoria de grupos, em particular ações de grupo, bem como noções de espaços e transformações afins. Com base nesse referencial, desenvolve-se

um modelo específico para o bilhar, orientado para a transferência efetiva do conhecimento ao contexto competitivo. O objetivo consiste em capacitar o atleta para identificar, em situações de snooker, o ponto ótimo de contacto na tabela, otimizando a decisão e a execução. Por fim, apresenta-se um código informático, concebido a partir dos resultados obtidos, destinado ao apoio ao treino.

**Palavras-chave:** Ações de Grupo, Espaços Afins, Transformações afins, Reflexão, Tacada, Bilhar.

# Abstract

The practice of billiards constitutes a privileged domain for the empirical application of mathematical, physical, and geometrical knowledge. The dynamics of the game allow for rigorous analysis of trajectories, angles, force vectors, and rotational phenomena. The table, bounded by rectangular cushions, can be modeled as a geometric plane in which principles such as specular reflection, conservation of linear momentum, and certain symmetric transformations are formalized. Thus, the execution of an effective shot depends not only on motor skill but also on an understanding (often intuitive) of underlying mathematical structures.

Snooker situations, characterized by the absence of a direct line between the cue ball and the target ball due to the interposition of other balls, highlight the need for advanced geometric reasoning. In such cases, the player relies on indirect trajectories involving one or multiple reflections off the cushions. Although traditional models based on symmetries or numerical marking systems (such as diamond systems) are commonly used, these methods reveal limitations in competitive contexts.

Within this framework, the present work proposes an innovative approach that articulates theoretical foundations with practical application. Concepts from group theory, particularly group actions, are introduced, along with notions of affine spaces and affine transformations. Based on this theoretical

foundation, a specific model for billiards is developed, oriented toward the effective transfer of knowledge to competitive play. The objective is to enable the athlete to identify, in snooker situations, the optimal point of contact on the cushion, thereby optimizing decision-making and execution. Finally, a computer program developed from the results of this work is presented as a training support tool.

**Keywords:** Group Actions; Affine Spaces; Affine Transformations; Reflection; Shot; Billiards.

# Agradecimentos

Agradeço profundamente aos meus pais pelo amor, pela educação e pelos valores que me transmitiram, os quais contribuíram de forma decisiva para a minha formação pessoal e académica. Graças a eles, tornei-me uma pessoa realizada, perseverante, sonhadora e orientada por sólidos princípios. Ensinaram-me que as conquistas individuais são igualmente conquistas da família. Nesse sentido, este trabalho é também vosso. O meu sincero agradecimento ao meu pai, Luís, e à minha mãe, Teresa.

Agradeço ao meu tio, José Cardoso, e aos meus avós paternos, o avô Aurélio e a avó Eugénia, pelo apoio prestado aos meus pais na minha educação e formação. A todos eles manifesto a minha profunda gratidão pelo amor, ensinamentos e momentos de convívio partilhados. Que descansem em paz.

Agradeço à minha companheira, Marlene, e às minhas filhas, Catarina, Patrícia e Teresa, por toda a felicidade, equilíbrio e motivação que trazem à minha vida. Agradeço-lhes por acreditarem nos meus sonhos e por me incentivarem a continuar a sonhar e a concretizar os meus objetivos. Graças a vós, encontro diariamente motivos para ser feliz. O meu profundo amor e reconhecimento.

Agradeço ao meu amigo, José Luís Freitas, orientador de estágio e colega de profissão, pela amizade, exigência, aconselhamento e partilha ao longo do nosso percurso pessoal e profissional. Das nossas convívências e debates

resultaram inúmeras aprendizagens, alegrias e ideias valiosas. A tua ausência é profundamente sentida. Descansa em paz.

Agradeço a todos os meus colegas de profissão pela partilha de experiências e conhecimentos. A troca de opiniões constitui um elemento essencial para o crescimento pessoal e profissional, pois ninguém evolui isoladamente. O meu sincero agradecimento a todos.

Agradeço aos meus professores pelos conhecimentos transmitidos, pelos princípios inculcados e pelo rigor académico exigido, fundamentais para a construção do meu percurso. Sem o vosso contributo, este caminho não teria sido possível.

Por fim, agradeço ao meu orientador deste trabalho, professor Elias Rodrigues, pela sua dedicação, disponibilidade, acompanhamento atento e partilha de conhecimento ao longo de todo o processo. O meu sincero agradecimento.

# Índice

<b>Lista de Figuras</b>	<b>ix</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Notas prévias . . . . .	1
1.2 Objetivos . . . . .	3
<b>2 Conceitos Matemáticos</b>	<b>5</b>
2.1 Teoria de Grupos . . . . .	6
2.1.1 Grupos, Homomorfismos de Grupos e Subgrupos . . . . .	7
2.1.2 Ações de grupo . . . . .	15
2.2 Espaços Afins . . . . .	21
2.2.1 Referenciais ou Sistemas de coordenadas afins . . . . .	24
2.2.2 Subespaços afins . . . . .	25
2.2.3 Transformações afins . . . . .	27
2.2.4 Transformações afins ortogonais . . . . .	35
<b>3 Bilhar - Aplicações Geométricas</b>	<b>39</b>
3.1 Introdução . . . . .	39
3.2 Conceitos desenvolvidos . . . . .	48
3.3 Contributos . . . . .	86
3.3.1 Aplicações das simetrias . . . . .	86

3.3.2	Aplicações dos resultados obtidos . . . . .	88
	<b>Conclusão</b>	<b>93</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>95</b>
	<b>Anexos</b>	<b>96</b>
	<b>A Aplicação em DEV - PASCAL</b>	<b>97</b>

# Lista de Figuras

3.1	Exemplo de uma tacada . . . . .	42
3.2	Situações de Snooker e Livres a estudar - variantes . . . . .	45
3.3	Posicionamento do jogador e identificação das tabelas . . . . .	46
3.4	Posição relativa da bola branca . . . . .	46
3.5	Consideração sobre a trajetória da bola branca . . . . .	47
3.6	Tacada “sem” efeito . . . . .	47
3.7	Ângulos de incidência ( $\theta$ ) e de reflexão ( $\delta$ ) de uma tacada . . .	47
3.8	Tipos e número de tabelas de uma tacada . . . . .	49
3.9	Trajcetórias $T$ e $T^*$ de uma tacada . . . . .	50
3.10	Erros iniciais e finais de uma tacada . . . . .	52
3.11	Trajcetórias $T$ e $T^*$ : possíveis situações . . . . .	53
3.12	Exemplos de tacadas: número de movimentos . . . . .	54
3.13	Tacada $m$ : Coordenadas dos pontos $A$ , $B$ e $C$ . . . . .	56
3.14	Tacada $s$ : Coordenadas dos pontos $A$ , $B$ e $C$ . . . . .	56
3.15	Trajcetórias $T$ e $T^*$ de tacadas . . . . .	57
3.16	Trajcetórias $T$ e $T^*$ de uma tacada composta alternada de 1 <sup>a</sup> espécie . . . . .	59
3.17	Posição ideal de contacto de tacadas compostas alternadas de 1 <sup>a</sup> espécie . . . . .	61
3.18	Tacada composta alternada de 2 <sup>a</sup> espécie . . . . .	62

3.19	Posição ideal de contacto de tacadas compostas alternadas de 2 <sup>a</sup> espécie . . . . .	64
3.20	Tacada composta não alternada de 1 <sup>a</sup> espécie que apenas utiliza tabelas pequenas . . . . .	69
3.21	Posição ideal de contacto de tacadas compostas não alternadas de 1 <sup>a</sup> espécie . . . . .	71
3.22	Tacada composta não alternada de 2 <sup>a</sup> espécie que utiliza apenas tabelas grandes . . . . .	72
3.23	Posição ideal de contacto de tacadas compostas não alternadas de 2 <sup>a</sup> espécie . . . . .	74
3.24	Coordenadas da bola objeto em $T^*$ de tacadas compostas não alternadas - variante $A$ . . . . .	78
3.25	Situação problema . . . . .	80
3.26	Situação problema: Posição ideal de contacto - variante $A$ . . . . .	80
3.27	Tacadas $r$ e $s$ : Posição ideal de contacto - variante $A$ - possíveis soluções . . . . .	81
3.28	Tacadas $t$ e $u$ : Posição ideal de contacto - variante $A$ - possíveis soluções . . . . .	81
3.29	Variantes de mesas de bilhar . . . . .	82
3.30	Situação problema: Efeito do erro inicial e final numa tacada - variante $B$ . . . . .	84
3.31	Situação problema: Efeito do erro inicial e final de uma tacada - posição ideal de contacto . . . . .	85
3.32	Tacadas $r$ , $s$ , $t$ e $u$ - variantes . . . . .	87
3.33	Tacadas $r$ , $s$ e $t$ - simetrias . . . . .	87
3.34	Tacada $u$ - Simetria $A$ . . . . .	88
3.35	Tacadas $r$ , $s$ e $t$ - posição ideal de contacto . . . . .	90

*LISTA DE FIGURAS*

xi

3.36 Tacada  $u$  - posição ideal de contacto . . . . . 91



# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Notas prévias

Os jogos desempenham um papel significativo no desenvolvimento do raciocínio matemático, especialmente em crianças em idade escolar. Entre eles, destaca-se o jogo de bilhar, uma modalidade acessível a indivíduos de todas as idades, cuja prática contribui de forma eficaz para o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático, através das seguintes vertentes:

- i) Resolução de problemas: Os jogadores precisam aplicar conceitos matemáticos durante a partida, o que estimula o pensamento crítico e a análise das consequências das suas ações e decisões.
- ii) Estratégia e planeamento: O jogo exige um planeamento cuidadoso, antecipação de jogadas futuras e consideração de múltiplas possibilidades, favorecendo a tomada de decisões fundamentadas.
- iii) Abstração e generalização: Os jogadores desenvolvem a capacidade de reconhecer e aplicar padrões matemáticos em diferentes contextos e situações de jogo.

- iv) *Motivação e concentração:* A prática do bilhar é naturalmente desafiante, envolvente e motivadora, promovendo elevados níveis de foco e persistência.
- v) *Colaboração e competição:* O jogo promove a colaboração, a comunicação e o trabalho em equipa, ao mesmo tempo que proporciona uma oportunidade de competição saudável e respeitosa.

Ou seja, do ponto de vista educacional, a prática de bilhar contribui significativamente para o desenvolvimento do raciocínio matemático, ao proporcionar oportunidades para aplicar conceitos matemáticos de forma prática, resolver problemas complexos, desenvolver estratégias, promover a abstração e a generalização, bem como cultivar competências de pensamento crítico enquanto mantêm os jogadores motivados e concentrados.

Por outro lado, o bilhar desempenha também um papel relevante no desenvolvimento integral de jovens e atletas, tanto a nível físico como mental, nomeadamente através de:

- i) *Desenvolvimento de habilidades motoras finas:* A sua prática requer precisão e controlo motor fino para realizar tacadas com exatidão. Ajuda os jovens a desenvolver e aprimorar estas capacidades motoras.
- ii) *Foco e concentração:* Para ser bem-sucedido, é necessário manter total concentração em cada tacada. Isso contribui para o desenvolvimento de competências de foco e atenção, úteis não apenas no desporto, mas também na escola, no trabalho e noutras atividades.
- iii) *Pensamento estratégico e tático:* O bilhar é um jogo que exige planeamento estratégico e tomada de decisões táticas. O desenvolvimento destas competências é essencial para a vida dos atletas e também para a resolução de problemas no seu dia a dia.

- iv) Desenvolvimento social: A prática do bilhar ajuda os jovens a desenvolver competências sociais, como o trabalho em equipa, a comunicação e o respeito pelos outros.
- v) Gestão emocional: Tal como em outros desportos, o bilhar ensina os jogadores a lidar com a pressão, a frustração e o fracasso. Aprender a controlar as emoções e a manter a calma sob pressão é uma habilidade valiosa, com benefícios em várias áreas da vida.
- vi) Promoção da atividade física: A prática de bilhar promove uma atividade física moderada e pode ajudar os indivíduos a manterem-se ativos e saudáveis.

## 1.2 Objetivos

Esta dissertação tem três objetivos fundamentais:

- (1) Oferecer uma compreensão nova ou mais profunda dos princípios matemáticos intrínsecos à prática do jogo de bilhar, ajudando os jogadores a melhorar as suas habilidades durante uma partida, através da implementação de estratégias que lhes permitam superar os desafios que surjam.
- (2) Desenvolver um código informático que permita criar uma aplicação informática de apoio a qualquer atleta de bilhar, quer durante uma partida, quer como ferramenta de treino.
- (3) Desenvolver ferramentas matemáticas que possibilitem a produção de material didático escolar sobre a Matemática e o Bilhar, auxiliando e complementando os conteúdos programáticos do módulo B5: Os Jogos e a Matemática, presente nos cursos profissionais.

Quanto ao primeiro objetivo, pretende-se partilhar conhecimento matemático relevante e aplicável à prática do bilhar, que possa ser utilizado eficazmente pelos jogadores durante uma partida, com vista ao aperfeiçoamento do seu desempenho e ao desenvolvimento de metodologias de treino mais eficientes.

No que diz respeito ao segundo objetivo, a criação de uma aplicação informática direcionada para a prática do bilhar poderá constituir uma ferramenta inovadora capaz de melhorar as habilidades técnico-táticas dos atletas. Essa aplicação disponibilizaria algoritmos matemáticos e recursos geométricos capazes de auxiliar o jogador na definição da melhor estratégia a adotar em diferentes momentos da partida ou de treino.

Relativamente ao terceiro objetivo, enquanto professor de Matemática nos cursos profissionais durante vários anos, constatei que o módulo B5: Os Jogos e a Matemática, sendo um módulo opcional, não é frequentemente explorado pelos professores nas escolas, apesar do interesse demonstrado pelos alunos em relação aos tópicos a abordar. Na minha perspetiva, a fraca adesão à prática educativa deste módulo deve-se a diversos fatores, entre os quais destaco: a limitação de recursos disponíveis, como a ausência de material didático adequado, a inexistência de laboratórios especializados ou de professores com formação específica, a fraca especificidade dos conteúdos programáticos e o facto de os jogos sugeridos se encontrarem desatualizados ou descontextualizados face à vida quotidiana dos alunos. Deste modo, considero fundamental contribuir para o enriquecimento dos conteúdos programáticos deste módulo através da inclusão do jogo de bilhar, potenciando a criação de materiais didáticos que evidenciem a matemática presente na sua prática.

# Capítulo 2

## Conceitos Matemáticos

O bilhar, à primeira vista, é uma modalidade desportiva centrada na destreza manual e na experiência empírica. No entanto, uma análise mais profunda evidencia que o comportamento das bolas, os ângulos de incidência e reflexão, bem como as interações entre bolas e tabelas, podem ser descritos e otimizados através de ferramentas matemáticas rigorosas. A aplicação de conceitos avançados, como a Teoria de Grupos e os Espaços Afins, permite formalizar a dinâmica do jogo, prever trajetórias e fundamentar estratégias com base científica.

A necessidade de recorrer a estas ferramentas matemáticas surge do facto de que cada jogada pode ser interpretada como uma combinação de movimentos e transformações geométricas. A Teoria de Grupos fornece um enquadramento para analisar os efeitos de reflexões e rotações, enquanto os Espaços Afins permitem representar trajetórias, posições e deslocamentos das bolas de forma precisa. Esta abordagem não só aumenta a compreensão do jogo, como também fornece suporte para a tomada de decisões estratégicas, demonstrando a mais-valia da matemática na prática do bilhar.

## 2.1 Teoria de Grupos

A Teoria de Grupos constitui um ramo fundamental da álgebra abstrata, dedicado ao estudo de conjuntos equipados com uma operação binária que satisfaz quatro propriedades essenciais: fecho, associatividade, existência de elemento neutro e existência de inverso. No contexto do bilhar, os grupos mais relevantes são os grupos de isometrias do plano, que incluem reflexões, rotações e translações, ou seja, transformações que preservam distâncias e ângulos.

Cada colisão da bola com uma tabela pode ser modelada como uma reflexão especular, em conformidade com a lei física que estabelece a igualdade entre ângulo de incidência e ângulo de reflexão. Quando ocorrem múltiplos ressaltos, estas reflexões podem ser combinadas através de composição de transformações, o que, do ponto de vista algébrico, constitui a operação de grupo. Por exemplo, a composição de duas reflexões em retas paralelas equivale a uma translação, enquanto a composição de duas reflexões em retas concorrentes equivale a uma rotação. Estas propriedades explicam matematicamente técnicas como a técnica do espelho, em que o jogador projeta mentalmente a trajetória refletida para simplificar o cálculo da trajetória ideal.

A Teoria de Grupos permite, portanto, compreender e prever padrões complexos de movimento e reflexo, oferecendo uma base formal para estratégias que, de outra forma, seriam avaliadas apenas intuitivamente. A sua aplicação reforça a precisão e a eficiência na execução das tacadas e demonstra a importância de estruturas algébricas na análise de fenômenos geométricos presentes no bilhar.

### 2.1.1 Grupos, Homomorfismos de Grupos e Subgrupos

**Definição 2.1.1.** *Seja  $G$  um conjunto e  $*$  uma operação binária definida em  $G$  por*

$$* : G \times G \rightarrow G.$$

*Diz-se que o par  $(G, *)$  é um grupo se satisfaz:*

- i)  $\forall a, b, c \in G, (a * b) * c = a * (b * c)$ ;*
- ii)  $\exists^1 e \in G: \forall a \in G: e * a = a * e = a$ ;*
- iii)  $\forall a \in G, \exists^1 a' \in G: a * a' = a' * a = e$ .*

**Definição 2.1.2.** *O grupo  $(G, *)$  diz-se abeliano (comutativo) se satisfaz a condição*

$$\forall a, b \in G, a * b = b * a.$$

#### Observação 2.1.3.

- i) O elemento  $e$  acima referido chama-se de elemento neutro do grupo.*
- ii) Se o grupo  $G$  é abeliano, podemos usar o símbolo  $+$  para representar a operação binária (notação aditiva). O elemento neutro é designado por  $0$  e, dado  $a \in G$ , o elemento  $a'$ , designa-se por simétrico de  $a$  e representa-se por  $-a$ .*
- iii) No caso geral, dado  $a \in G$ , o elemento  $a'$ , designa-se por inverso de  $a$  e representa-se por  $a^{-1}$ .*

**Exemplo 2.1.4.** *Eis alguns exemplos de conjuntos que são grupos:*

- i)  $(\mathbb{Z}, +)$  - Inteiros com adição.*

- ii)  $(\mathbb{R}, +)$  - Reais com adição.
- iii)  $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \times)$  - Reais sem zero com multiplicação.
- iv) Qualquer espaço vetorial com adição vetorial forma um grupo abeliano.
- v)  $(GL(n, \mathbb{R}), \times)$  - Matrizes  $n \times n$  invertíveis com entradas reais.

**Notas:**

1. Para  $n \geq 2$ ,  $(GL(n, \mathbb{R}), \times)$ , não é grupo abeliano, pois o produto de matrizes não é comutativo.
2. Os grupos  $(\mathbb{Z}, +)$ ,  $(\mathbb{R}, +)$ ,  $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \times)$  e  $(\mathbb{Z}_n, +)$  são abelianos.

*Eis alguns exemplos de conjuntos que não são grupos:*

- i)  $(\mathbb{N}, +)$  - Naturais com adição, pois o simétrico de um número natural não é natural.
- ii)  $(\mathbb{Z}, \times)$  - Inteiros com multiplicação, pois há inteiros que não admitem inverso inteiro (por exemplo o número 2).
- iii)  $(\mathbb{R}, \times)$  - Reais com multiplicação, pois o zero não tem inverso.
- iv) Matrizes  $2 \times 2$  com entradas reais e determinante 0, pois existem pares de matrizes com determinante nulo cuja soma não tem determinante nulo.

**Definição 2.1.5** (Grupo das funções bijetivas de um conjunto  $X$  em si próprio com composição). *Seja  $X$  um conjunto qualquer (finito ou infinito). O conjunto de todas as funções bijetivas de  $X$  em si mesmo, com a composição de funções como operação, forma um grupo.*

*Esse grupo é chamado de grupo Simétrico sobre  $X$ , e denota-se por:*

- i)  $S_X$ , se  $X$  for qualquer conjunto (no caso geral).
- ii)  $S_n$ , se  $X = \{1, 2, 3, 4, \dots, n\}$ .

Recorde-se que dada uma função  $f : A \rightarrow B$ , temos que:

- i)  $f$  é injetiva sse  $\forall x_1, x_2 \in A, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ ;
- ii)  $f$  é sobrejetiva sse  $\forall y \in B, \exists x \in A : f(x) = y$ ;
- iii)  $f$  é bijetiva se  $f$  é simultaneamente injetiva e sobrejetiva.

**Notas:**

- i) Cada elemento do grupo é uma função bijetiva  $f : X \rightarrow X$  (ou seja, uma permutação dos elementos de  $X$ ).
- ii) A operação é a composição de funções:  $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ .
- iii) O elemento neutro é a identidade  $\text{Id}_X$ , tal que  $\text{Id}_X(x) = x, \forall x \in X$ .
- iv) O inverso de uma função  $f$  representa-se por  $f^{-1}$ .

**Observação 2.1.6.** *Acerca do grupo simétrico  $S_n$  podemos constatar que:*

- i)  $S_n$  é um grupo não comutativo (ou seja, a composição de duas permutações nem sempre dá o mesmo resultado se a ordem for trocada), exceto para  $n \leq 2$ .
- ii) A ordem do grupo é  $|S_n| = n!$ , com  $n! = n \times (n - 1) \times \dots \times 1$ .

**Exemplo 2.1.7.** *Seja o conjunto  $X = \{1, 2, 3\}$ , então:*

- i) *Existem  $3! = 6$  funções bijetivas de  $X$  em  $X$ .*
- ii) *Cada função pode ser vista como uma permutação dos elementos de  $X$ .*

iii) As permutações formam o grupo  $S_3$ .

Podemos representar as permutações como funções através do uso de matrizes de duas linhas:

$$\text{Permutação } f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ f(1) & f(2) & f(3) \end{pmatrix}.$$

As 6 permutações de  $S_3$  em forma de função são:

Nome	Matriz da função
$e$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
$s$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
$t$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
$r$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$
$a$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
$b$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Éis um exemplo de composição de duas permutações com matrizes:

Sejam  $s$  e  $r$  definidas por:

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad e \quad a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dado que:

i) Para  $X = 1 : (s \circ a)(1) = s(a(1)) = s(2) = 1;$

ii) Para  $X = 2 : (s \circ a)(2) = s(a(2)) = s(3) = 3;$

iii) Para  $X = 3 : (s \circ a)(3) = s(a(3)) = s(1) = 2.$

Resulta,

$$s \circ a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = r.$$

A tabela seguinte ilustra a composição das 6 permutações aplicando esta regra para cada par de funções.

o	e	s	t	r	a	b
e	e	s	t	r	a	b
s	s	e	b	a	r	t
t	t	a	e	b	s	r
r	r	b	a	e	t	s
a	a	t	r	s	b	e
b	b	r	s	t	e	a

**Definição 2.1.8** (Homomorfismo de grupos). *Sejam  $G$  e  $H$  dois grupos com operações  $\cdot$  (em  $G$ ) e  $*$  (em  $H$ ).*

*Uma função  $\phi : G \rightarrow H$  é chamada de homomorfismo de grupos se,  $\forall a, b \in G$ ,  $\phi(a \cdot b) = \phi(a) * \phi(b)$ .*

*Se os grupos forem ambos escritos multiplicativamente, podemos simplificar a notação para  $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$ .*

**Definição 2.1.9.** *Seja  $\phi : G \rightarrow H$  um homomorfismo de grupos. Diz-se que  $\phi$  é:*

i) *monomorfismo se  $\phi$  é injetiva.*

- ii) epimorfismo se  $\phi$  é sobrejetiva.
- iii) isomorfismo se  $\phi$  é bijetiva. Escreve-se  $G \simeq H$  quando existe um isomorfismo entre  $G$  e  $H$ .
- iv) endomorfismo se  $G = H$ .
- v) automorfismo se  $\phi$  é um isomorfismo e um endomorfismo.

**Proposição 2.1.10.** *Seja  $\phi : G \rightarrow H$  um homomorfismo de grupos. Então:*

- i)  $\phi(e_G) = e_H$  (a imagem do elemento neutro do primeiro grupo é o elemento neutro do segundo grupo).
- ii)  $\phi(a^{-1}) = (\phi(a))^{-1}, \forall a \in G$ .

**Exemplo 2.1.11.** *Eis alguns exemplos de homomorfismos:*

- i) A função  $\phi : G \rightarrow H$  dada por  $\phi(g) = e_H, \forall g \in G$  é um homomorfismo (homomorfismo trivial).
- ii) Se  $H \subseteq G$  é um subgrupo, a função inclusão  $f : H \rightarrow G$ , definida por  $f(h) = h$ , é um homomorfismo.
- iii) A função  $\det : \text{GL}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , onde  $\text{GL}_n(\mathbb{R})$  é o grupo das matrizes reais de ordem  $n$ , é um homomorfismo porque:  $\det(AB) = \det(A) \det(B), \forall A, B \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ .
- iv) A função  $\phi : (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{R}^+, \cdot)$ , definida por  $\phi(x) = e^x$ , é um homomorfismo porque:  $\phi(x + y) = e^{x+y} = e^x \cdot e^y = \phi(x) \cdot \phi(y)$ .

**Definição 2.1.12** (Subgrupo). *Seja  $G$  um grupo com operação  $\cdot$ . Um subconjunto  $H \subseteq G$  é subgrupo se com a mesma operação de  $G$  também for grupo, e denota-se por  $H \leq G$ .*

Em seguida, apresentamos dois critérios práticos para ver se um dado conjunto é subgrupo de um grupo.

**Proposição 2.1.13.** *Seja  $G$  um grupo e  $H$  um subconjunto de  $G$ .  $H$  é um subgrupo de  $G$  se:*

- i)  $e_G \in H$ ;*
- ii)  $\forall a, b \in H, a \cdot b \in H$ ;*
- iii)  $\forall a \in H, a^{-1} \in H$ .*

**Proposição 2.1.14.** *Seja  $G$  um grupo e  $\emptyset \neq H \subseteq G$ , então  $H \leq G$  se*

$$\forall a, b \in H, a \cdot b^{-1} \in H.$$

**Exemplo 2.1.15.** *Seja  $G = (\mathbb{Z}, +)$  e  $H = 2\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$*

*$H$  é um subgrupo de  $G$ , pois:*

- i)  $H \subseteq G$ ;*
- ii)  $0_G \in H$ ;*
- iii) Dados  $a, b \in H$ , temos  $a + b \in H$  (a soma de dois pares é par);*
- iv)  $\forall a \in H$ , temos  $-a \in H$  (o simétrico de um par é par).*

Em seguida mostraremos que a imagem de um subgrupo sob um homomorfismo é sempre um subgrupo do grupo de chegada e a pré-imagem de um subgrupo é também um subgrupo do grupo de partida.

**Proposição 2.1.16** (Imagem de um subgrupo). *Se  $\phi : G \rightarrow H$  é um homomorfismo de grupos e  $K \leq G$ , então:*

$$\phi(K) = \{\phi(k) : k \in K\} \leq H.$$

*Demonstração.* Temos  $\phi(K) \subseteq H$ . Sejam  $a, b \in K$ , então  $\phi(a)$  e  $\phi(b) \in \phi(K)$ . Pela definição 2.1.8 e pela proposição 2.1.10, temos que  $\phi(a) \cdot (\phi(b))^{-1} = \phi(a) \cdot \phi(b^{-1}) = \phi(a \cdot b^{-1}) \in \phi(K)$ . Logo,  $\phi(K) \leq H$ .  $\square$

**Proposição 2.1.17** (Pré-imagem de um subgrupo). *Seja  $\phi : G \rightarrow H$  um homomorfismo de grupos e  $L \leq H$ , então a pré-imagem de  $L$ , dada por*

$$\phi^{-1}(L) = \{g \in G : \phi(g) \in L\} \text{ é um subgrupo de } G.$$

*Demonstração.* Seja  $\phi : G \rightarrow H$  um homomorfismo de grupos e  $L \leq H$ . Como,  $\phi(e_G) = e_H \in L$  então  $e_G \in \phi^{-1}(L)$  e  $\forall a, b \in \phi^{-1}(L)$ , então  $\phi(a), \phi(b) \in L$ , logo:  $\phi(a \cdot b^{-1}) = \phi(a) \cdot (\phi(b))^{-1} \in L$  portanto  $a \cdot b^{-1} \in \phi^{-1}(L)$ . Concluimos assim que  $\phi^{-1}(L) \leq G$ .  $\square$

**Definição 2.1.18.** *Seja  $\phi : G \rightarrow H$  um homomorfismo de grupos. O núcleo de  $\phi$ , denotado por  $\ker(\phi)$ , é o subconjunto de  $G$  formado pelos elementos que são levados ao elemento neutro de  $H$ , ou seja,*

$$\ker(\phi) = \{g \in G : \phi(g) = e_H\} = \phi^{-1}(\{e_H\}).$$

**Proposição 2.1.19.** *Seja  $\phi : G \rightarrow H$  um homomorfismo de grupos. Então*

*i)  $\ker(\phi) \leq G$  (o núcleo de  $\phi$  é sempre um subgrupo de  $G$ ).*

*ii)  $\phi$  é injetiva (isto é, um monomorfismo) se e só se  $\ker(\phi) = \{e_G\}$ .*

**Definição 2.1.20.** *Seja  $G$  um grupo. Um subgrupo  $N \leq G$  é chamado de subgrupo normal (ou subgrupo invariante) e escreve-se  $N \trianglelefteq G$  se, para todo  $g \in G$  e  $n \in N$ , o conjugado  $gng^{-1}$  também pertence a  $N$ . Ou seja,*

$$N \trianglelefteq G \iff \forall g \in G, gNg^{-1} \subseteq N.$$

**Proposição 2.1.21.** *Seja  $N \leq G$ . Então as seguintes asserções são equivalentes:*

- i)  $N \trianglelefteq G$ ;
- ii)  $\forall g \in G, gNg^{-1} = N$ ;
- iii)  $\forall g \in G, gN \subseteq Ng$ ;
- iv)  $\forall g \in G, gN = Ng$ .

**Proposição 2.1.22.** *Dado um homomorfismo de grupos,  $\phi : G \rightarrow H$ , o núcleo,  $\ker(\phi)$ , é um subgrupo normal de  $G$ .*

*Demonstração.* Vamos verificar que  $\ker(\phi) \trianglelefteq G$ .

Como  $\{e_H\} \leq H$ , pela proposição 2.1.17,  $\ker \phi = \phi^{-1}(\{e_H\})$  é um subgrupo de  $G$ . Por outro lado, para qualquer  $g \in G$  e  $k \in \ker(\phi)$ , temos

$$\phi(gkg^{-1}) = \phi(g)\phi(k)\phi(g^{-1}) = \phi(g)e_H\phi(g)^{-1} = \phi(g)\phi(g)^{-1} = e_H$$

Ou seja,  $gkg^{-1} \in \ker(\phi)$

Portanto,  $g \ker(\phi) g^{-1} \subseteq \ker(\phi)$ , e assim  $\ker(\phi) \trianglelefteq G$ . □

### 2.1.2 Ações de grupo

Uma ação de grupo pode ser definida à direita ou à esquerda de um determinado conjunto. Nesta secção vamos explorar esses conceitos.

**Definição 2.1.23** (Ação de Grupo à Esquerda). *Seja  $(G, \cdot)$  um grupo com elemento neutro  $e_G$  e  $X$  um conjunto. Dizemos que  $G$  atua (à esquerda) no conjunto  $X$  quando está fixada uma aplicação  $\cdot : G \times X \rightarrow X$  que satisfaz:*

- i)  $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x, \forall g, h \in G, \forall x \in X$ ;
- ii)  $e_G \cdot x = x, \forall g \in G, \forall x \in X$ .

**Nota:** Como  $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$ , então podemos escrever  $ghx$  sem que haja ambiguidade.

**Definição 2.1.24.** *Sejam  $G$  um grupo,  $X$  um conjunto e  $\cdot : G \times X \rightarrow X$  uma ação de grupo à esquerda. Dado  $g \in G$ , define-se uma função  $\phi_g : X \rightarrow X$ , por  $\phi_g(x) = g \cdot x, \forall x \in X$ .*

**Proposição 2.1.25.** *Da função  $\phi_g$  definida em 2.1.24 resulta que:*

i)  $\phi_{e_G}(x) = e \cdot x = x, \forall x \in X$ . Ou seja,  $\phi_{e_G} = \text{Id}_X$ ;

ii) Dados  $g_1, g_2 \in G, x \in X$ , como  $\phi_{g_1 g_2}(x) = (g_1 g_2) \cdot x = g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = g_1 \cdot (\phi_{g_2}(x)) = \phi_{g_1}(\phi_{g_2}(x)) = (\phi_{g_1} \circ \phi_{g_2})(x)$ , logo  $\phi_{g_1 g_2} = \phi_{g_1} \circ \phi_{g_2}$ ;

iii) A aplicação  $\phi(g)$  é bijetiva e  $(\phi_g)^{-1} = \phi_{g^{-1}}$ , pois dado  $x \in X, (\phi_g \circ \phi_{g^{-1}}) = \phi_{g g^{-1}} = \phi_e = \text{Id}_X$ , e,  $(\phi_{g^{-1}} \circ \phi_g) = \phi_{g^{-1} g} = \phi_e = \text{Id}_X$ .

**Definição 2.1.26.** *Sejam  $G$  um grupo,  $X$  um conjunto e  $\cdot : G \times X \rightarrow X$  uma ação de grupo à esquerda. Dado  $g \in G$ , define-se a função  $\phi$  da seguinte forma*

$$\begin{aligned} \phi : G &\rightarrow S_X \\ g &\mapsto \phi(g) = \phi_g. \end{aligned}$$

**Teorema 2.1.27.** *Dada uma ação de grupo,  $\cdot : G \times X \rightarrow X$ , a função  $\phi : G \rightarrow S_X$  definida em 2.1.26 é um homomorfismo entre os grupos  $(G, \cdot)$  e  $(S_X, \circ)$ .*

*Reciprocamente, se  $\phi : (G, \cdot) \rightarrow (S_X, \circ)$  é um homomorfismo de grupos então a aplicação*

$$\begin{aligned} \cdot : G \times X &\rightarrow X \\ (g, x) &\mapsto g \cdot x = (\phi(g))(x) \end{aligned}$$

*é uma ação de grupo.*

*Demonstração.* Dados  $g_1, g_2 \in G$ , temos que  $\phi(g_1 g_2) = \phi_{g_1 g_2} = \phi_{g_1} \circ \phi_{g_2}$ .

Reciprocamente, se:  $\phi : (G, \cdot) \rightarrow (S_X, \circ)$  é um homomorfismo de grupos então, dados  $g_1, g_2 \in G, x \in X$ , temos que:

- i)  $g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = g_1 \cdot (\phi(g_2)(x)) = (\phi(g_1))((\phi(g_2))(x)) = (\phi(g_1) \circ \phi(g_2))(x) = (\phi(g_1 g_2))(x) = (g_1 g_2) \cdot x;$
- ii)  $e \cdot x = (\phi(e))(x) = \text{Id}_X(x) = x.$

□

**Definição 2.1.28** (Ação de Grupo à Direita). *Seja  $(G, \cdot)$  um grupo com elemento neutro  $e_G$  e  $X$  um conjunto. Dizemos que  $G$  atua (à direita) no conjunto  $X$  quando está fixada uma aplicação  $\cdot : X \times G \rightarrow X$  que satisfaz:*

- i)  $(x \cdot g) \cdot h = x \cdot (gh), \forall g, h \in G, \forall x \in X;$
- ii)  $x \cdot e_G = x, \forall x \in X.$

Note-se que, dados  $g, h \in G, x \in X$ , numa ação à esquerda  $gh$  "atua" em  $x$  da seguinte forma: primeiro "atua"  $h$  e em seguida  $g$ . Numa ação à direita, primeiro "atua"  $g$  e em seguida  $h$ .

Se o grupo for abeliano, uma ação à esquerda é equivalente a uma ação à direita.

**Definição 2.1.29.** *Sejam  $G$  um grupo,  $X$  um conjunto e  $\cdot : X \times G \rightarrow X$  uma ação de grupo à direita. Dado  $g \in G$ , define-se uma função  $\phi_g : X \rightarrow X$ , por  $\phi_g(x) = x \cdot g, \forall x \in X.$*

**Proposição 2.1.30.** *Da função  $\phi_g$  definida em 2.1.29 resulta que:*

- i)  $\phi_e(x) = x \cdot e = x$ , ou seja,  $\phi_e = \text{Id}_X;$
- ii) *Dados  $g_1, g_2 \in G, x \in X$ , como  $\phi_{g_1 g_2}(x) = x \cdot (g_1 g_2) = (x \cdot g_1) \cdot g_2 = (\phi_{g_1}(x)) \cdot g_2 = \phi_{g_2}(\phi_{g_1}(x)) = (\phi_{g_2} \circ \phi_{g_1})(x)$ , temos que  $\phi_{g_1 g_2} = \phi_{g_2} \circ \phi_{g_1};$*
- iii)  $(\phi_g)^{-1} = \phi_{g^{-1}}$ , pois dado  $x \in X$ ,  $(\phi_g \circ \phi_{g^{-1}})(x) = \phi_{g^{-1}g}(x) = \phi_e(x) = \text{Id}_X(x) = x$ , e  $(\phi_{g^{-1}} \circ \phi_g)(x) = \phi_{gg^{-1}}(x) = \phi_e(x) = \text{Id}_X(x).$

**Definição 2.1.31.** *Sejam  $G$  um grupo,  $X$  um conjunto e  $\cdot : X \times G \rightarrow X$  uma ação de grupo à direita. Dado  $g \in G$ , define-se a função  $\phi$  da seguinte forma*

$$\begin{aligned}\phi: G &\rightarrow S_X \\ g &\mapsto \phi(g) = \phi_g\end{aligned}$$

**Teorema 2.1.32.** *Dada uma ação de grupo à direita,  $\cdot : X \times G \rightarrow X$ , a função  $\phi : G \rightarrow S_X$  acima definida é um homomorfismo entre os grupos  $(G, \cdot)$  e  $(S_X, \star)$  onde, dados  $g, h \in S_X$ ,  $g \star h = h \circ g$ .*

*Reciprocamente, se  $\phi : (G, \cdot) \rightarrow (S_X, \star)$  é um homomorfismo então a aplicação:*

$$\begin{aligned}\cdot : X \times G &\rightarrow X \\ (x, g) &\mapsto x \cdot g = (\phi(g))(x)\end{aligned}$$

*é uma ação de grupo.*

*Demonstração.* Dados  $g_1, g_2 \in G$ ,  $\phi(g_1g_2) = \phi_{g_1g_2} = \phi_{g_2} \circ \phi_{g_1} = \phi_{g_1} \star \phi_{g_2}$ .

Reciprocamente, se  $\phi : (G, \cdot) \rightarrow (S_X, \circ)$  é um homomorfismo de grupos então, dados  $g_1, g_2 \in G$ ,  $x \in X$ , temos que:

- i)  $(x \cdot g_1) \cdot g_2 = (\phi(g_1)(x)) \cdot g_2 = (\phi(g_2))(\phi(g_1)(x)) = (\phi(g_2) \circ \phi(g_1))(x) = (\phi(g_1g_2))(x) = x \cdot (g_1g_2)$ ;
- ii)  $x \cdot e = (\phi(e))(x) = \text{Id}_X(x) = x$ .

□

**Exemplo 2.1.33.** *Considere os seguintes exemplos:*

i) *Ação por permutação (ação natural de  $S_n$ )*

*O grupo simétrico  $S_n$  atua no conjunto  $X = \{1, 2, \dots, n\}$  por permutação:*

$$\sigma \cdot i = \sigma(i), \quad \sigma \in S_n, \quad i \in X.$$

ii) *Ação por multiplicação de matrizes*

O grupo  $GL_n(\mathbb{R})$  (matrizes invertíveis  $n \times n$ ) atua em  $\mathbb{R}^n$  por multiplicação:

$$A \cdot v = Av, \quad A \in GL_n(\mathbb{R}), v \in \mathbb{R}^n.$$

iii) *Ação de  $\mathbb{Z}$  por translação*

O grupo  $\mathbb{Z}$  atua em  $\mathbb{R}$  por translações:

$$n \cdot x = x + n, \quad n \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}.$$

**Definição 2.1.34.** *Seja  $G$  um grupo e  $X$  um conjunto no qual  $G$  age. A órbita de um elemento  $x \in X$  sob a ação de  $G$  é o conjunto dado por:*

$$O_x = \{g \cdot x : g \in G\}.$$

*Ou seja, a órbita de  $x$  é o conjunto de todos os elementos de  $X$  que podem ser alcançados pela ação de algum  $g \in G$  sobre  $x$ .*

**Exemplo 2.1.35.** *Considere os seguintes exemplos:*

i) *Ação de  $S_3$  sobre  $X = \{1, 2, 3\}$*

*Considere o grupo simétrico  $S_3$  agindo sobre o conjunto  $X = \{1, 2, 3\}$  por permutação. A órbita do elemento  $1 \in X$  é o conjunto de todos os elementos que podem ser alcançados pela ação dos elementos de  $S_3$  sobre 1:*

$$O_1 = \{1, 2, 3\}.$$

*Analogamente, temos que  $O_2 = O_3 = \{1, 2, 3\}$ .*

ii) *Ação de  $\mathbb{Z}$  sobre  $\mathbb{R}$  por translação*

Considere o grupo  $\mathbb{Z}$  agindo sobre o conjunto  $\mathbb{R}$  por translação. A órbita de um ponto  $x \in \mathbb{R}$  é o conjunto de todos os pontos que podem ser alcançados pela ação de qualquer  $n \in \mathbb{Z}$ :

$$O_x = \{x + n : n \in \mathbb{Z}\}.$$

**Proposição 2.1.36.** *O conjunto das órbitas forma uma partição de  $X$ , ou seja, estar na mesma órbita é uma relação de equivalência em  $X$ .*

*Demonstração.* Para provar que o conjunto  $\{O_x : x \in X\}$  é uma partição em  $X$ , vamos mostrar que:

- i)  $\forall x \in X, O_x \neq \emptyset$ ;
- ii)  $X = \bigcup_{x \in X} O_x$ ;
- iii)  $\forall x, y \in X, O_x \cap O_y \neq \emptyset \Rightarrow O_x = O_y$ .

Quanto a i), dado  $x \in X$ ,  $e_G \cdot x = x$ , logo  $x \in O_x$  o que faz que  $O_x \neq \emptyset$ . Relativamente a ii), dado  $x \in X$ ,  $x \in O_x \subseteq \bigcup_{x \in X} O_x$ , logo  $X \subseteq \bigcup_{x \in X} O_x$ . Por outro lado,  $\forall x \in X$ ,  $O_x \subseteq X$ , logo  $\bigcup_{x \in X} O_x \subseteq X$ . Daqui resulta que  $X = \bigcup_{x \in X} O_x$ . No que concerne a iii), dados  $x, y \in X$  suponhamos que  $O_x \cap O_y \neq \emptyset$ . Para provar que  $O_x = O_y$  basta provar que  $O_x \subseteq O_y$ . Assim, como  $O_x \cap O_y \neq \emptyset$ ,  $\exists g, h \in G$  tais que  $g \cdot x = h \cdot y$ . Dado  $z \in O_x$  existe  $l \in G$  tal que  $z = lx = lg^{-1}gx = lg^{-1}hy = (lg^{-1}h)y \in O_y$ .

□

**Definição 2.1.37.** *O estabilizador de um elemento  $x \in X$ , denotado  $E_x$ , é o conjunto dado por  $E_x = \{g \in G : g \cdot x = x\}$ .*

**Proposição 2.1.38.** *Seja  $x \in X$ . Então,  $E_x$  é um subgrupo de  $G$  e  $\bigcap_{x \in X} E_x$  é um subgrupo normal de  $G$ .*

*Demonstração.* Dado  $x \in X$ ,  $e_G \cdot x = x \Rightarrow e_G \in E_x$ . Dados  $g, h \in E_x$ ,  $(gh^{-1})x = g(h^{-1}x) = g(h^{-1}(hx)) = g((h^{-1}h)x) = gx = x$ . Portanto,  $E_x$  é um subgrupo de  $G$ .

Por outro lado temos,

$$\begin{aligned} \bigcap_{x \in X} E_x &= \{g \in G : gx = x, \forall x \in X\} \\ &= \{g \in G : (\phi(g))(x) = x, \forall x \in X\} \\ &= \{g \in G : \phi(g) = \text{Id}_X\} = \ker(\phi). \end{aligned}$$

Logo,  $\bigcap_{x \in X} E_x \trianglelefteq G$ . □

**Definição 2.1.39.** *Uma ação (à esquerda) do grupo  $G$  no conjunto  $X$ ,  $\cdot : G \times X \rightarrow X$ , diz-se:*

- i) transitiva se  $\forall x, y \in X, \exists g \in G : y = gx$ .*
- ii) simples sse  $\forall x \in X, E_x = \{e_G\}$ .*

Observe-se que uma ação é transitiva sse  $\forall x \in X, O_x = X$ .

**Nota:** Analogamente, define-se uma ação de grupo transitiva ou simples pela direita de um conjunto.

**Proposição 2.1.40.** *Considere a ação de grupo  $\cdot : G \times X \rightarrow X$  e  $\cdot : X \times G \rightarrow X$  que atuam pela esquerda e pela direita do conjunto  $X$ . A ação de grupo é simples então  $\forall x \in X, \forall g, h \in G, gx = hx \Rightarrow g = h$ .*

*Demonstração.*  $gx = hx \Rightarrow h^{-1}gx = x \Rightarrow h^{-1}g = e \Rightarrow g = h$ . □

## 2.2 Espaços Afins

Na definição de um espaço vamos utilizar as ações de grupo à esquerda e à direita de um conjunto. Vamos considerar uma ação de grupo de  $G$  num conjunto  $X$  como um homomorfismo de grupos definidos por  $\phi : (G, \cdot) \rightarrow (S_X, \circ)$  se a ação é à esquerda e,  $\phi : (G, \cdot) \rightarrow (S_X, \star)$  se a ação é à direita, conforme esclarece as proposições 2.1.30 e 2.1.34.

**Definição 2.2.1.** Dizemos que  $E$  é um espaço afim no espaço vetorial  $V$  sobre um corpo  $\mathbb{K}$ , quando está fixada uma ação  $\phi$  transitiva e simples do grupo abeliano  $(V, +)$  no conjunto  $E$ .

**Nota:** Como  $(V, +)$  é um grupo abeliano, não se distingue ação à esquerda de ação à direita.

**Notação 2.2.2.** Dados  $v \in V$  e  $A \in E$  escrevemos  $A \oplus v$  em vez de  $\phi(v)(A)$ .

**Proposição 2.2.3.** Seja  $E$  um espaço afim num espaço vetorial  $V$  sobre um corpo  $\mathbb{K}$ . Dados  $A, B \in E$  e  $u, v \in V$ , temos que:

i)  $A \oplus \vec{0} = A$ ;

ii)  $(A \oplus u) \oplus v = A \oplus (u + v)$ ;

iii) Pela definição 2.2.1 temos que a ação fixada  $\phi$  é transitiva e simples. Assim, temos que  $\forall A, B \in E, \exists^1 v \in V : B = A \oplus v$ .

*Demonstração.* Recorde-se que a ação  $\phi$  é um homomorfismo entre  $(V, +)$  e  $(S_E, \circ)$ .

i)  $A \oplus \vec{0} = (\phi(\vec{0}))(A) = \text{Id}_E(A) = A$ .

ii)  $(A \oplus u) \oplus v = ((\phi(u))(A)) \oplus v = (\phi(v))((\phi(u))(A)) = (\phi(v) \circ \phi(u))(A) = (\phi(v + u))(A) = (\phi(u + v))(A) = A \oplus (u + v)$ .

Como  $(A \oplus u) \oplus v = A \oplus (u + v)$ , podemos escrever  $A + u + v$  para representa-la sem que haja ambiguidade. Em vez de  $\oplus$ , como um ligeiro abuso de notação, usaremos a partir de agora apenas  $+$ .

iii) Demonstra-se trivialmente.

□

**Definição 2.2.4.** *Seja  $E$  um espaço afim num espaço vetorial  $V$  sobre um corpo  $\mathbb{K}$ . Dados  $A, B \in E$ , o único vetor  $v$  tal que  $B = A + v$  representa-se por  $\overrightarrow{AB}$ .*

**Proposição 2.2.5.** *Seja  $E$  um espaço afim num espaço vetorial  $V$  sobre um corpo  $\mathbb{K}$ . Temos que:*

- i)  $\forall A \in E, \forall v \in V, \exists^1 B \in E : v = \overrightarrow{AB}$ ;
- ii)  $\forall A, B, C \in E$ , temos que  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ .

*Demonstração.*

- i) Demonstração imediata. Basta considerar  $B = A + v$ .
- ii)  $A \oplus (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = (A \oplus \overrightarrow{AB}) \oplus \overrightarrow{BC} = B \oplus \overrightarrow{BC} = C$ . Daqui decorre que  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ .

□

**Proposição 2.2.6.** *Seja  $E$  um espaço afim associado ao espaço vetorial  $V$ . Então para  $A, B, C \in E$  e  $u, v \in V$ , temos que:*

- i)  $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ ;
- ii)  $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ ;
- iii)  $A + \overrightarrow{AB} = B$ .

*Demonstração.*

- i) Dado  $A \in E$ , temos  $A + \vec{0} = A$ , logo  $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ .
- ii) Dados  $A, B \in E$ , temos  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$ , logo  $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ .
- iii) Demonstração imediata.

□

### 2.2.1 Referenciais ou Sistemas de coordenadas afins

Seja  $E$  um espaço afim associado ao espaço vetorial  $V$ . Quando fixamos um ponto  $A \in E$ , então, para todo o ponto  $P \in E$ , existe um único vetor  $\vec{v} \in V$  tal que  $\vec{v} = \overrightarrow{AP}$ . Isto define uma bijeção

$$\begin{aligned} \psi_A : E &\rightarrow V \\ P &\mapsto \overrightarrow{AP} \end{aligned}$$

Quando fixamos uma base  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  em  $V$ , a cada vetor  $\vec{v} \in V$  corresponde uma única sequência formada pelas coordenadas de  $\vec{v}$  nesta base. Isto é,  $\vec{v}$  corresponde a  $(a_1, \dots, a_n)$  sse  $\vec{v} = a_1\vec{e}_1 + \dots + a_n\vec{e}_n$ .

Se fixarmos um ponto  $A \in E$ , ao qual chamamos origem e uma base  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  de  $V$ , então a cada ponto  $P$  podemos associar as coordenadas,  $(a_1, \dots, a_n)$  de  $\overrightarrow{AP}$  na base  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ . Fixando um ponto como origem e uma base do espaço vetorial  $V$ , sobre o corpo  $\mathbb{K}$  fica estabelecida uma correspondência bijetiva entre  $E$  e  $\mathbb{K}^n$ , definida por:

$$P \leftrightarrow (a_1, a_2, \dots, a_n) \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} = \sum_{i=1}^n a_i e_i.$$

**Definição 2.2.7** (Sistema de coordenadas afim). *Seja  $E$  um espaço afim associado ao espaço vetorial  $V$ . Quando fixamos um ponto  $O$  como origem e uma base,  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  em  $V$ , definindo desta forma uma bijeção entre  $E$  e  $\mathbb{K}^n$ , dizemos que temos um sistema de coordenadas ou referencial para  $E$ . Se  $\overrightarrow{OP} = \sum_{i=1}^n a_i e_i$ , chamamos a  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  coordenadas do ponto  $P$  (neste sistema de coordenadas (afim) ou referencial).*

**Exemplo 2.2.8.** *Considere o espaço afim  $E$  associado ao espaço vetorial  $V = \mathbb{R}^2$ . Sejam  $O, P \in E$  tal que  $O(2, 1)$  e  $O(5, 4)$ . Considerando que o ponto  $O$  é a origem do espaço afim e a base do espaço vetorial  $V = \mathbb{R}^2$  é*

$(e_1, e_2)$  com  $\vec{e}_1 = (1, 0)$  e  $\vec{e}_2 = (1, 1)$ , as coordenadas afins  $(a_1, a_2)$  tais que  $\overrightarrow{OP} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2$  são dadas por:

$$\overrightarrow{OP} = a_1(1, 0) + a_2(1, 1) \Leftrightarrow (3, 3) = (a_1 + a_2, a_2) \Leftrightarrow (a_1, a_2) = (-2, 3).$$

### 2.2.2 Subespaços afins

**Definição 2.2.9** (Subespaço afim). *Seja  $E$  um espaço afim associado ao espaço vetorial  $V$ ,  $E \neq \emptyset$  um subconjunto de  $E$  e  $W$  um subespaço vetorial de  $V$ . Dizemos que  $F$  é um subespaço afim de  $E$  associado a  $W$  quando:*

- i)  $\forall A, B \in F, \overrightarrow{AB} \in W$ ;
- ii)  $\forall A \in F, \forall v \in W, A + v \in F$ .

**Definição 2.2.10.** *Seja  $E$  be um espaço afim associado ao espaço vetorial  $V$ . Dado um ponto  $P \in E$  e um subespaço vetorial  $W$  de  $V$ , definimos*

$$P + W = \{P + v : v \in W\}.$$

**Proposição 2.2.11.** *Seja  $E$  um espaço afim associado ao espaço vetorial  $V$ . Dado um ponto  $P \in E$  e um subespaço vetorial  $W$  de  $V$ . Temos:*

- i)  $P + W$  é um subespaço afim de  $E$  associado ao subespaço vetorial  $W$ ;
- ii) Se  $F$  é um subespaço afim associado ao espaço vetorial  $W$  e  $P \in F$ , então  $P + W = F$ .

*Demonstração.* Seja  $P \in E$  e  $W$  um subespaço vetorial de  $V$ .

Vamos começar por provar i) usando a definição 2.2.9.

Temos que  $P = P + \vec{0} \in P + W \Rightarrow P + W \neq \emptyset$  e, é imediato que  $P + W \subseteq E$  por definição de  $P + W$ .

Por outro lado, sejam  $A, B \in P + W$ , existem  $v_1, v_2 \in W$  tais que  $A = P + v_1$  e  $B = P + v_2$ . Temos que,

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PB} = -\overrightarrow{PA} + v_2 = v_2 - v_1 \in W.$$

Além disso, dado  $A \in P + W$ , então  $\exists w \in W$  tal que  $A = P + w$  e  $\forall v \in W$ ,  $A + v = (P + w) + v = P + (w + v) \in P + W$ , pois  $w + v \in W$ .

Relativamente a *ii*), seja  $F$  um subespaço afim do espaço vetorial  $W$  e suponhamos que  $P \in F$ . Resulta da alínea *ii*) da definição 2.2.9 que  $P + W \subseteq F$ . Além disso, dado  $Q \in F$ ,  $\overrightarrow{PQ} \in W$ , logo  $Q = P + \overrightarrow{PQ} \in P + W$ . Portanto,  $F \subseteq P + W$ .  $\square$

**Teorema 2.2.12.** *Seja  $E$  um espaço afim associado ao espaço vetorial  $V$ , e  $(F_i)_{i \in I}$  uma família de subespaços afins de  $E$ , tais que  $F_i$  está associado ao espaço vetorial  $W_i$ ,  $\forall i \in I$ .*

*Se  $\bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset$  então  $\bigcap_{i \in I} F_i$  é um subespaço afim de  $E$  associado ao subespaço vetorial  $\bigcap_{i \in I} W_i$ .*

*Demonstração.* Seja  $F = \bigcap_{i \in I} F_i$  e  $W = \bigcap_{i \in I} W_i$ , com  $F \neq \emptyset$ . temos que  $W$  é um subespaço vetorial de  $V$ .

Seja  $A, B \in F$ , temos que, para todo  $i \in I$ ,  $A, B \in F_i$ , segue-se que, para todo  $i \in I$ ,  $\overrightarrow{AB} \in W_i$ , e portanto  $\overrightarrow{AB} \in W$ .

Seja  $A \in F$  e  $v \in W$ , então, para todo  $i \in I$ ,  $A \in F_i$  e  $v \in W_i$ . Segue-se que, para todo  $i \in I$ ,  $A + v \in F_i$ , e portanto,  $A + v \in \bigcap_{i \in I} F_i = F$ .  $\square$

**Corolário 2.2.13.** *Dado um espaço afim  $E$  e  $X \subseteq E$  com  $X \neq \emptyset$ , a interseção de todos os subespaços afins de  $E$  que contém  $X$  é o menor subespaço afim de  $E$  que contém  $X$ .*

**Definição 2.2.14.** *Seja  $E$  um espaço afim e  $X \neq \emptyset$  um subconjunto de  $E$ . Então chamamos à interseção de todos os subespaços afins de  $E$  que contém  $X$  de subespaço afim gerado por  $X$ .*

O subespaço afim gerado por  $X$ , será representado por  $\langle X \rangle_{af}$ .

Se  $X = \{P_1, \dots, P_n\}$  podemos escrever,  $\langle P_1, \dots, P_n \rangle_{af}$  em vez de  $\langle X \rangle_{af}$ .

**Notação 2.2.15.** Dado um espaço vetorial  $V$  e os vetores  $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ , o subespaço vetorial gerado por  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , que é dado por  $\{\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i : \lambda_i \in \mathbb{K}, \leq i \leq n\}$  será representado por  $\langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle_{vet}$ .

**Teorema 2.2.16.** Seja  $E$  um espaço afim associado ao espaço vetorial  $V$  sobre um corpo  $K$ , se  $P_0, P_1, \dots, P_n$  são pontos em  $E$ , então:  $\langle P_0, P_1, \dots, P_n \rangle_{af} = \{P_0 + \lambda_1 \overrightarrow{P_0 P_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{P_0 P_n} : \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}\} = P_0 + \langle \overrightarrow{P_0 P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0 P_n} \rangle_{vet}$ .

*Demonstração.* Pela definição 2.2.14, o subespaço afim gerado pelos pontos  $P_0, P_1, \dots, P_n$  é o menor subespaço afim de  $E$  que contém todos esses pontos.

Seja  $A = \langle P_0, P_1, \dots, P_n \rangle_{af}$ . Pela proposição 2.2.11 existe um subespaço vetorial  $W \subseteq V$  tal que  $A = P_0 + W$ . Como  $P_i \in A$  para todo  $i = 1, \dots, n$ , segue que  $\overrightarrow{P_0 P_i} \in W$ . Logo,  $\langle \overrightarrow{P_0 P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0 P_n} \rangle_{vet} \subseteq W$ , o que implica  $P_0 + \langle \overrightarrow{P_0 P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0 P_n} \rangle_{vet} \subseteq A$ .

Por outro lado, o conjunto  $B = P_0 + \langle \overrightarrow{P_0 P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0 P_n} \rangle_{vet}$  é um subespaço afim de  $E$  que contém  $P_0$  e todos os pontos  $P_1, \dots, P_n$ , pois  $P_i = P_0 + \overrightarrow{P_0 P_i}$ , para todo  $i = 1, \dots, n$ . Pela minimalidade de  $A$ , segue que  $A \subseteq B$ .

Concluimos, portanto, que  $\langle P_0, P_1, \dots, P_n \rangle_{af} = P_0 + \langle \overrightarrow{P_0 P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0 P_n} \rangle_{vet}$ , ou seja,  $\langle P_0, P_1, \dots, P_n \rangle_{af} = \{P_0 + \lambda_1 \overrightarrow{P_0 P_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{P_0 P_n} : \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}\}$ .  $\square$

**Corolário 2.2.17.** A dimensão de um subespaço afim gerado por  $n+1$  pontos é menor ou igual  $n$ .

### 2.2.3 Transformações afins

Sejam  $E_1$  e  $E_2$  espaços afins associados aos espaços vetoriais  $V_1$  e  $V_2$  respectivamente. Uma aplicação  $f : E_1 \rightarrow E_2$  define, para cada  $A$  em  $E_1$ , uma

aplicação  $\vec{f}_A : V_1 \rightarrow V_2$  por  $\vec{f}_A(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{f(A)f(B)}$ , ou de forma equivalente,  $\vec{f}_A(\vec{v}) = \overrightarrow{f(A)f(A+\vec{v})}$ .

**Definição 2.2.18.** *Sejam  $E_1$  e  $E_2$  espaços afins associados aos espaços vetoriais  $V_1$  e  $V_2$  respectivamente. Uma aplicação  $f : E_1 \rightarrow E_2$  diz-se uma transformação afim, se existe  $A$  em  $E_1$ , tal que a aplicação  $\vec{f}_A : V_1 \rightarrow V_2$  definida por  $\vec{f}_A(\vec{v}) = \overrightarrow{f(A)f(A+\vec{v})}$  é uma aplicação linear.*

**Proposição 2.2.19.** *Sejam  $E_1$  e  $E_2$  espaços afins associados aos espaços vetoriais  $V_1$  e  $V_2$  respectivamente, e  $f : E_1 \rightarrow E_2$  uma transformação afim. Seja  $A \in E_1$  um ponto tal que  $\vec{f}_A$  é linear e seja  $B$  um ponto qualquer de  $E_1$ , então  $\vec{f}_A = \vec{f}_B$ .*

*Demonstração.* Nas condições do enunciado temos que as aplicações  $\vec{f}_A$  e  $\vec{f}_B$  têm ambas domínio  $V_1$ . Seja  $v \in V_1$ ,

$$\begin{aligned} \vec{f}_B(\vec{v}) &= \overrightarrow{f(B)f(B+\vec{v})} = \overrightarrow{f(B)f(A)} + \overrightarrow{f(A)f(B+\vec{v})} = \\ &= -\overrightarrow{f(A)f(B)} + \vec{f}_A(\overrightarrow{A(B+\vec{v})}) = -\vec{f}_A(\overrightarrow{AB}) + \vec{f}_A(\overrightarrow{A(B+\vec{v})}) = \\ &= \vec{f}_A(\overrightarrow{BA}) + \vec{f}_A(\overrightarrow{A(B+\vec{v})}) = \vec{f}_A(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{A(B+\vec{v})}) = \vec{f}_A(\overrightarrow{B(B+\vec{v})}) = \vec{f}_A(\vec{v}). \end{aligned}$$

□

Quando  $f : E_1 \rightarrow E_2$  é uma transformação afim a aplicação linear  $\vec{f}_A$  não depende do ponto  $A$  escolhido.

**Definição 2.2.20.** *Seja  $f : E_1 \rightarrow E_2$  uma transformação afim. Dado  $A \in E_1$ , a aplicação linear  $\vec{f}_A$ , será representada apenas por  $\vec{f}$ , e será chamada a aplicação linear associada a  $f$ .*

**Proposição 2.2.21.** *Sejam  $E_1$  e  $E_2$  espaços afins associados aos espaços vetoriais  $V_1$  e  $V_2$  respectivamente, e  $f : E_1 \rightarrow E_2$  uma aplicação. Dado  $A \in E_1$ ,  $f$  é uma transformação afim sse, existe uma aplicação linear  $\vec{f} : V_1 \rightarrow V_2$  tal que,  $f(A+v) = f(A) + \vec{f}(v), \forall v \in V_1$ .*

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ ) Seja  $f$  é uma transformação afim. Dado  $A \in E_1, \forall v \in V_1$ , existe uma aplicação linear  $\vec{f} : V_1 \rightarrow V_2$  tal que  $\overrightarrow{f(A)f(A+v)} = \vec{f}(v)$ , que é equivalente a  $f(A+v) = f(A) + \vec{f}(v)$ .

( $\Leftarrow$ ) Reciprocamente, suponhamos que existe uma aplicação linear  $\vec{f} : V_1 \rightarrow V_2$  tal que  $f(A+v) = f(A) + \vec{f}(v), \forall A \in E_1, \forall v \in V_1$ . Para mostrar que  $f$  é uma transformação afim, basta provar que  $\vec{f}_A : V_1 \rightarrow V_2$  definida por  $\vec{f}_A(v) = \overrightarrow{f(A)f(A+v)}$  é uma aplicação linear. Dado  $v \in V_1$ , temos que,

$$\begin{aligned} \vec{f}_A(v) &= \overrightarrow{f(A)f(A+v)} \\ &= \overrightarrow{f(A)(f(A) + \vec{f}(v))} \\ &= \vec{f}(v). \end{aligned}$$

Portanto, provamos que  $\vec{f}_A = \vec{f}$ , logo,  $\vec{f}_A$  é uma aplicação linear. □

**Proposição 2.2.22.** *Sejam  $E_1$  e  $E_2$  espaços afins associados aos espaços vetoriais  $V_1$  e  $V_2$  respectivamente, e  $f : E_1 \rightarrow E_2$  uma transformação afim. Temos*

- i)  $f$  é injectiva sse  $\vec{f}$  é injectiva;
- ii)  $f$  é sobrejetiva sse  $\vec{f}$  é sobrejetiva.

*Demonstração.* Suponhamos que  $f$  é injetiva, basta mostrar que  $\ker \vec{f} = \{\vec{0}\}$ . Sejam  $v \in \ker \vec{f}$  e  $A \in E_1$ , temos  $f(A+v) = f(A) + \vec{f}(v) = f(A) + \vec{0} = f(A)$ , como  $f$  é injetiva, temos  $A+v = A$ , logo  $v = \vec{0}$ .

Reciprocamente, suponhamos que  $\vec{f}$  é injetiva. Sejam  $A, B \in E_1$  tais que  $f(A) = f(B)$ , temos  $f(A) = f(A + \overrightarrow{AB}) = f(A) + \vec{f}(\overrightarrow{AB})$ . Logo  $\vec{0} = \vec{f}(\overrightarrow{AB})$ , como  $\vec{f}$  é injetiva, obtemos  $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ , donde  $A = B$ .

Suponhamos que  $f$  é sobrejetiva, seja  $v \in V_2$  e seja  $A \in E_1$ , temos que  $f(A) + v \in E_2$ , como  $f$  é sobrejetiva, existe  $B \in E_1$  tal que  $f(B) = f(A) + v$ , donde  $v = \overrightarrow{f(A)f(B)} = \vec{f}(\overrightarrow{AB})$ . Portanto  $\vec{f}$  é sobrejetiva.

Suponhamos que  $\vec{f}$  é sobrejetiva, seja  $C \in E_2$  e seja  $A \in E_1$ ,  $\overrightarrow{f(A)C} \in V_2$ , logo  $\exists u \in V_1$  tal que  $\vec{f}(u) = \overrightarrow{f(A)C}$ , temos  $f(A + u) = f(A) + \vec{f}(u) = f(A) + \overrightarrow{f(A)C} = C$ , logo  $f$  é sobrejetiva.

□

**Proposição 2.2.23.** *Sejam  $E_1, E_2$  e  $E_3$  espaços afins associados aos espaços vetoriais  $V_1, V_2$  e  $V_3$ , respetivamente com  $f : E_1 \rightarrow E_2$  e  $g : E_2 \rightarrow E_3$  transformações afins. Então,  $g \circ f$  é uma transformação afim e  $\overrightarrow{g \circ f} = \vec{g} \circ \vec{f}$ .*

*Demonstração.* Seja  $A, B \in E_1$ , temos

$$\begin{aligned} \overrightarrow{(g \circ f)_A}(\overrightarrow{AB}) &= \overrightarrow{(g \circ f)(A)(g \circ f)(B)} = \\ \overrightarrow{(g(f(A)))(g(f(B)))} &= \vec{g}(\overrightarrow{f(A)f(B)}) = \vec{g}(\vec{f}(\overrightarrow{AB})) = (\vec{g} \circ \vec{f})(\overrightarrow{AB}) \end{aligned}$$

Logo,  $\overrightarrow{(g \circ f)_A}$  é linear, e portanto  $g \circ f$  é uma transformação afim. Ou seja,  $\overrightarrow{g \circ f} = \vec{g} \circ \vec{f}$ . □

Assim, temos que a composição de transformações afins é uma transformação afim.

**Proposição 2.2.24.** *Sejam  $E_1$  e  $E_2$  espaços afins associados aos espaços vetoriais  $V_1$  e  $V_2$ , respetivamente. Se  $f : E_1 \rightarrow E_2$  é uma transformação afim bijetiva então  $f^{-1}$  é uma transformação afim. Além disso a aplicação  $\vec{f} : V_1 \rightarrow V_2$  é bijetiva e  $(\vec{f})^{-1} = \vec{f}^{-1}$ .*

*Demonstração.* Dado  $B \in E_2$ ,  $\vec{v}_1 \in V_1$ ,  $\vec{v}_2 \in V_2$ , seja  $A = f^{-1}(B) \in E_1$ , temos que:

$$\text{i) } \frac{\overrightarrow{(f_B^{-1} \circ \vec{f})(v_1)}}{f^{-1}(B)f^{-1}(f(A) + f(A)f(A + v_1))} = \frac{\overrightarrow{f_B^{-1}(f(A)f(A + v_1))}}{f^{-1}(B)f^{-1}(B + f(A)f(A + v_1))} =$$

$$= \overrightarrow{A(A + v_1)} = v_1.$$

Provamos que  $\overrightarrow{f_B^{-1}} \circ \vec{f} = \text{Id}_{V_1}$ .

$$\begin{aligned} \text{ii) } (\vec{f} \circ \overrightarrow{f_B^{-1}})(v_2) &= \vec{f}(\overrightarrow{f^{-1}(B)f^{-1}(B + v_2)}) = \vec{f}(\overrightarrow{Af^{-1}(B + v_2)}) = \\ &= \overrightarrow{f(A)f(f^{-1}(B + v_2))} = \overrightarrow{f(A)(f(A) + v_2)} = v_2. \end{aligned}$$

Provamos que  $\vec{f} \circ \overrightarrow{f_B^{-1}} = \text{Id}_{V_2}$ .

Por 1) e 2) provamos que  $\overrightarrow{f_B^{-1}} = (\vec{f})^{-1}$ , onde  $\vec{f}$  é bijetiva e  $(\vec{f})^{-1} = \overrightarrow{f_B^{-1}}$  é linear. Portanto  $f^{-1} : V_2 \rightarrow V_1$  é uma aplicação afim.

Ou seja, a inversa de uma transformação afim bijetiva é uma transformação afim.  $\square$

**Proposição 2.2.25.** *Seja  $E$  um espaço afim associado a um espaço vetorial real, de dimensão  $n$ . O conjunto das transformações afins bijetivas de  $E$  em  $E$ , com a operação de composição de funções, é um grupo denominado grupo afim e é designado por  $\text{Aff}_n(\mathbb{R})$ .*

*Demonstração.* Ora, o conjunto  $\text{Aff}_n(\mathbb{R})$  satisfaz as propriedades de grupo, como se mostra de seguida:

- i) Fechado para a composição: Se  $f_1, f_2 \in \text{Aff}_n(\mathbb{R})$ , então  $f_1 \circ f_2 \in \text{Aff}_n(\mathbb{R})$ , pela proposição 2.2.23;
- ii) Associatividade:  $(f_1 \circ f_2) \circ f_3 = f_1 \circ (f_2 \circ f_3)$  para quaisquer  $f_1, f_2, f_3 \in \text{Aff}_n(\mathbb{R})$ , pois a composição de funções goza da propriedade associativa;
- iii) Elemento neutro: Existe um elemento neutro  $\text{Id}_E \in \text{Aff}_n(\mathbb{R})$ , que é a transformação identidade, tal que  $\text{Id}_E \circ f = f \circ \text{Id}_E = f, \forall f \in \text{Aff}_n(\mathbb{R})$ ;
- iv) Inverso: Para cada  $f \in \text{Aff}_n(\mathbb{R})$ ,  $f^{-1} \in \text{Aff}_n(\mathbb{R})$ , pela proposição 2.2.24, e  $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \text{Id}_E$ .

□

Assim, o conjunto das transformações afins bijetivas de  $E$  em  $E$ , com a operação de composição de funções, forma um grupo, denominado **grupo afim**  $\text{Aff}_n(\mathbb{R})$ .

Todas as propriedades acima apresentadas são válidas se substituirmos o corpo  $\mathbb{R}$  por um qualquer corpo  $\mathbb{K}$  e de forma análoga se define  $\text{Aff}_n(\mathbb{K})$ .

**Lema 2.2.26.** *Seja  $E_1$  um espaço afim sobre o espaço vetorial  $V$ , e sejam  $A_0, A_1, \dots, A_m$  pontos tais que a dimensão de  $\langle A_0, A_1, \dots, A_m \rangle_{af}$  é igual a  $m$ , então, para qualquer ponto  $P \in \langle A_0, A_1, \dots, A_m \rangle_{af}$  existem, e são únicos,  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{K}$  tais que  $P = A_0 + \lambda_1 \overrightarrow{A_0A_1} + \dots + \lambda_m \overrightarrow{A_0A_m}$ .*

*Demonstração.* Sejam  $A_0, A_1, \dots, A_m$  pontos tais que a dimensão de  $\langle A_0, A_1, \dots, A_m \rangle_{af}$  é igual a  $m$ . Seja  $P \in \langle A_0, A_1, \dots, A_m \rangle_{af}$ , pelo teorema 2.2.16, existem  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{K}$  tais que  $P = A_0 + \lambda_1 \overrightarrow{A_0A_1} + \dots + \lambda_m \overrightarrow{A_0A_m}$ .

Temos,

$\dim \left( \langle A_0, A_1, \dots, A_m \rangle_{af} \right) = \dim \left( \langle \overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_m} \rangle_{vet} \right) = m$  e,  $P = A_0 + \lambda_1 \overrightarrow{A_0A_1} + \dots + \lambda_m \overrightarrow{A_0A_m}$  sse  $\overrightarrow{A_0P} = \lambda_1 \overrightarrow{A_0A_1} + \dots + \lambda_m \overrightarrow{A_0A_m}$ . Portanto, os escalares  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  são únicos porque os vetores  $\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_m}$  são linearmente independentes. □

**Proposição 2.2.27.** *Sejam  $E_1$  e  $E_2$  espaços afins associados aos espaços vectoriais  $V_1$  e  $V_2$  respetivamente e seja  $n$  a dimensão de  $E_1$ . Sejam  $A_0, A_1, \dots, A_n$ , pontos de  $E_1$  tais que  $E_1 = \langle A_0, A_1, \dots, A_n \rangle_{af}$ , e  $B_0, B_1, \dots, B_n$  pontos de  $E_2$ , não necessariamente distintos. Então, existe uma única transformação afim  $f : E_1 \rightarrow E_2$  tal que  $f(A_i) = B_i, \forall 0 \leq i \leq n$ . Além disso  $f(E_1) = \langle f(A_0), f(A_1), \dots, f(A_n) \rangle_{af}$ .*

*Demonstração.* Existência:

Seja  $P \in E_1 = \langle A_0, A_1, \dots, A_n \rangle_{af} = \{A_0 + \lambda_1 \overrightarrow{A_0A_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{A_0A_n} : \lambda_i \in$

$\mathbb{K}, 1 \leq i \leq n\}$ , então existem, e são únicos,  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$  tais que  $P = A_0 + \lambda_1 \overrightarrow{A_0A_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{A_0A_n}$ . Definimos  $f(P) = B_0 + \lambda_1 \overrightarrow{B_0B_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{B_0B_n}$ . Temos  $f(A_0) = B_0 + 0\overrightarrow{B_0B_1} + \dots + 0\overrightarrow{B_0B_n} = B_0$  e, dado  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $f(A_i) = B_0 + 0\overrightarrow{B_0B_1} + \dots + 0\overrightarrow{B_0B_{i-1}} + 1\overrightarrow{B_0B_i} + 0\overrightarrow{B_0B_{i+1}} + \dots + 0\overrightarrow{B_0B_n} = B_i$ .

Vejamos que  $f$  é uma transformação afim.

Seja  $P = A_0 + \lambda_1 \overrightarrow{A_0A_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{A_0A_n} \in E_1$ ,  $\vec{f}_{A_0}(\overrightarrow{A_0P}) = \overrightarrow{f(A_0)f(P)} = B_0 \left( B_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{B_0B_i} \right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{B_0B_i}$ . Como  $\overrightarrow{A_0P} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{A_0A_i}$  temos que  $\vec{f}_{A_0}$  é a única aplicação linear tal que as imagens dos vetores da base de  $V_1$ ,  $\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n}$  são os vetores  $\overrightarrow{B_0B_1}, \dots, \overrightarrow{B_0B_n}$ . Portanto  $f$  é uma aplicação afim.

Unicidade:

Suponhamos  $f_1$  e  $f_2$  duas aplicações afins tais que  $f_1(A_i) = B_i = f_2(A_i)$ , para todo  $1 \leq i \leq n$ . Seja  $P \in E_1$  então existem  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$  tais que  $P = A_0 + \lambda_1 \overrightarrow{A_0A_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{A_0A_n}$  e

$$\begin{aligned} \overrightarrow{B_0f_1(P)} &= \overrightarrow{f_1(A_0)f_1(P)} = \vec{f}_1(\overrightarrow{A_0P}) = \vec{f}_1\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{A_0A_i}\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{f}_1(\overrightarrow{A_0A_i}) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{f_1(A_0)f_1(A_i)} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{B_0B_i} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{f_2(A_0)f_2(A_i)} = \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{f}_2(\overrightarrow{A_0A_i}) = \vec{f}_2\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{A_0A_i}\right) = \vec{f}_2(\overrightarrow{A_0P}) = \overrightarrow{f_2(A_0)f_2(P)} = \overrightarrow{B_0f_2(P)}. \end{aligned}$$

Logo  $f_1(P) = B_0 + \overrightarrow{B_0f_1(P)} = B_0 + \overrightarrow{B_0f_2(P)} = f_2(P)$ , portanto  $f_1 = f_2$ .

Temos  $Q \in f(E_1)$  sse  $\exists P \in E_1$  tal que  $Q = f(P)$  sse,  $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ , tais que  $Q = f\left(A_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{A_0A_i}\right)$  sse,  $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ , tais que  $Q = B_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{B_0B_i}$  sse  $Q \in \langle B_0, B_1, \dots, B_n \rangle_{af}$ .  $\square$

**Corolário 2.2.28.** *Sejam  $E_1$  e  $E_2$  espaços afins associados aos espaços vetoriais  $V_1$  e  $V_2$ , respectivamente, e seja  $n$  a dimensão de  $E_1$ . Sejam  $A_0, A_1, \dots, A_n$ , pontos de  $E_1$  tais que  $E_1 = \langle A_0, A_1, \dots, A_n \rangle_{af}$  e  $f : E_1 \rightarrow E_2$  uma transformação afim.*

Temos que,

i)  $f$  é sobrejectiva sse  $\langle f(A_0), f(A_1), \dots, f(A_n) \rangle_{af} = E_2$ ;

ii)  $f$  é injetiva sse  $\dim \left( \langle f(A_0), f(A_1), \dots, f(A_n) \rangle_{af} \right) = n$ .

*Demonstração.* A alínea (i) é imediata pela proposição 2.2.27.

Quanto à alínea (ii) temos pela proposição 2.2.22 que  $f$  é injetiva sse  $\vec{f}$  é injetiva sse

$$\dim \left( \langle \vec{f}(\overrightarrow{A_0A_1}), \dots, \vec{f}(\overrightarrow{A_0A_n}) \rangle_{vet} \right) = n \text{ sse } \dim \left( \langle \overrightarrow{f(A_0)f(A_1)}, \dots, \overrightarrow{f(A_0)f(A_n)} \rangle_{vet} \right) = n \text{ sse } \dim \left( \langle f(A_0), f(A_1), \dots, f(A_n) \rangle_{af} \right) = n. \quad \square$$

**Teorema 2.2.29.** *Sejam  $E_1$  e  $E_2$  espaços afins associados aos espaços vectoriais  $V_1$  e  $V_2$  respetivamente. Seja  $g : W_1 \rightarrow W_2$  uma aplicação linear,  $A \in E_1$  e  $B \in E_2$ . Então existe uma única aplicação afim tal que  $f(A) = B$  e  $\vec{f} = g$ .*

*Demonstração.* Unicidade:

Se  $f$  é uma aplicação nas condições do enunciado, temos,  $\forall P \in E_1$ ,  $f(P) = f(A + \overrightarrow{AP}) = f(A) + \vec{f}(\overrightarrow{AP}) = B + g(\overrightarrow{AP})$ . Logo, se existir  $f$ , então é única.

Existência:

Seja  $f : E_1 \rightarrow E_2$  definida por  $f(P) = B + g(\overrightarrow{AP})$ . Temos  $\overrightarrow{Bf(P)} = g(\overrightarrow{AP})$ , donde  $\forall v \in V_1$ ,  $\vec{f}_A(v) = \overrightarrow{f(A)f(A+v)} = \overrightarrow{Bf(A+v)} = g(\overrightarrow{A(A+v)}) = g(v)$ . Portanto  $f$  é uma aplicação afim e  $\vec{f} = g$ .  $\square$

**Corolário 2.2.30.** *Considerando  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{R}^m$  com a estrutura afim usual, uma transformação afim,  $f$ , fica univocamente definida por uma aplicação linear  $\vec{f}$  e pela imagem do ponto  $(0, 0)$ .*

**Exemplo 2.2.31.** *Considerando o espaço afim usual em  $\mathbb{R}^2$  e sendo  $O = (0, 0)$ , uma aplicação afim  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  satisfaz  $f(P) = f(O + \overrightarrow{OP}) = f(O) + \vec{f}(\overrightarrow{OP})$ . Se  $P = (x, y)$ , existem  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  tais que,*

$$\vec{f}(\overrightarrow{OP}) = \vec{f}(x, y) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix} = (ax + by, cx + dy)$$

Supondo que  $f(0, 0) = (e, f)$ , obtemos que as transformações afins de  $\mathbb{R}^2$  em  $\mathbb{R}^2$  são da forma  $f(x, y) = (e, f) + (ax + by, cx + dy) = (e + ax + by, f + cx + dy)$ , onde  $a, b, c, d, e, f$  são números reais.

**Exemplo 2.2.32.** Considere  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma transformação afim representada pela matriz  $M = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$  e a translação pelo vetor  $t(1, 2)$ . Para um ponto  $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ , a transformação  $f$  é dada por:

$$f(P) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 3y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x + 1 \\ 3y + 2 \end{bmatrix}.$$

A transformação afim pode ser expressa de maneira mais compacta utilizando matrizes. Se  $P \in \mathbb{R}^n$  é um ponto no espaço afim, a transformação afim é dada por:

$$f(P) = M \cdot P + t.$$

onde  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é uma matriz que representa a transformação linear e  $t \in \mathbb{R}^n$  é um vetor de translação (da origem).

## 2.2.4 Transformações afins ortogonais

Nesta subsecção, iremos estudar as transformações que preservam o ângulos e as distâncias.

Consideremos o produto interno usual,  $\langle -, - \rangle$  no espaço vetorial  $\mathbb{R}^n$ . Dados vetores  $(x_1, \dots, x_n)$  e  $(y_1, \dots, y_n)$ , identificamos estes vetores com as matrizes coluna,  $X$  e  $Y$ , formadas pelas coordenadas dos  $(x_i)$  e dos  $(y_i)$ , respectivamente. O produto interno destes vetores é

$$\langle X, Y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = \left( [x_1 \dots x_n] \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \right)_{11} = (X^T Y)_{11}.$$

, onde  $(X^T Y)_{11}$  é a única entrada da matriz  $X^T Y$ .

**Proposição 2.2.33.** *Sejam,  $n, m$  naturais maiores ou iguais a 2,  $(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ ,  $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $X$  e  $Y$  as matrizes coluna correspondentes aos vetores  $(x_1, \dots, x_m)$  e  $(y_1, \dots, y_n)$ . Se  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma aplicação linear e  $A$  é a matriz dessa aplicação linear nas bases canônicas de  $\mathbb{R}^m$  e  $\mathbb{R}^n$  temos:*

$$\langle AX, Y \rangle = \langle X, A^T Y \rangle.$$

*Demonstração.* Nas condições do enunciado temos:

$$\langle AX, Y \rangle = \left( (AX)^T Y \right)_{11} = \left( (X^T A^T) Y \right)_{11} = \left( X^T (A^T Y) \right)_{11} = \langle X, A^T Y \rangle.$$

□

Pretendemos estudar as aplicações lineares de  $\mathbb{R}^n$  em  $\mathbb{R}^n$  que preservam os ângulos e os comprimentos dos vetores. Uma vez que os ângulos e os comprimentos são definidos a partir do produto interno, estas são as aplicações lineares  $\vec{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tais que  $\langle \vec{f}(u), \vec{f}(v) \rangle = \langle u, v \rangle$ .

**Proposição 2.2.34.** *Seja  $\vec{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma aplicação linear e  $A$  a matriz de  $\vec{f}$  quando fixamos em  $\mathbb{R}^n$  a base canônica. Temos*

$$\langle \vec{f}(u), \vec{f}(v) \rangle = \langle u, v \rangle, \forall u, v \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow A^T = A^{-1}.$$

*Demonstração.* Sejam  $X$  e  $Y$  os vetores coluna formados pelas coordenadas de  $u$  e  $v$  na base canônica, respetivamente. Seja  $I_n$  a matriz identidade de ordem  $n$ , temos:  $\langle \vec{f}(u), \vec{f}(v) \rangle = \langle u, v \rangle, \forall u, v \in \mathbb{R}^n$  sse  $\langle AX, AY \rangle = \langle X, Y \rangle, \forall X, Y$  sse  $\langle X, A^T AY \rangle = \langle X, Y \rangle, \forall X, Y$  sse  $\langle X, (A^T A)Y \rangle - \langle X, I_n Y \rangle = 0, \forall X, Y$  sse  $\langle X, (A^T A - I_n)Y \rangle = 0, \forall X, Y$  sse  $(A^T A - I_n)Y = 0, \forall Y$  sse  $A^T A - I_n$  é a matriz nula sse  $A^T A = I_n$  sse  $A^T = A^{-1}$ . □

**Definição 2.2.35.** *Seja  $A$  uma matriz quadrada  $n \times n$ , dizemos que  $A$  é uma matriz ortogonal quando  $A^T = A^{-1}$ .*

**Proposição 2.2.36.** *Dadas  $A$  e  $B$  duas matrizes quadradas  $n \times n$ , se  $A$  e  $B$  são ortogonais, então  $AB$  e  $A^{-1}$  são matrizes ortogonais.*

*Demonstração.* Considera as matrizes quadradas  $n \times n$  ortogonais,  $A$  e  $B$ . Temos que:

$$\text{i) } (AB) \cdot (AB)^T = (AB)(B^T A^T) = A(BB^T)A^T = AA^T = AA^{-1} = I_n.$$

$$\text{ii) } A^{-1} \cdot (A^{-1})^T = A^T(A^T)^{-1} = I_n.$$

Portanto, as matrizes  $AB$  e  $A^{-1}$  são matrizes ortogonais.  $\square$

**Proposição 2.2.37.** *Se  $A$  é uma matriz ortogonal então  $\det(A) \in \{-1, 1\}$ .*

*Demonstração.* Temos  $(\det(A))^2 = \det(A) \det(A^T) = \det(AA^T) = \det(I_n) = 1$ , logo,  $\det(A) = 1$  ou  $\det(A) = -1$ .  $\square$

**Definição 2.2.38.** *Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma transformação afim, dizemos que  $f$  é uma transformação afim ortogonal se, para quaisquer pontos  $A, B, C$ ,  $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle = \langle \overrightarrow{f(A)f(B)}, \overrightarrow{f(A)f(C)} \rangle$ .*

**Proposição 2.2.39.** *Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma afim. Seja  $\vec{f}$  a aplicação linear associada a  $f$  e  $A$  a matriz de  $\vec{f}$  na base canónica. São equivalentes:*

*i)  $f$  é uma transformação afim ortogonal;*

$$\text{ii) } \langle \vec{f}(u), \vec{f}(v) \rangle = \langle u, v \rangle, \forall u, v \in \mathbb{R}^n;$$

*iii)  $A$  é uma matriz ortogonal.*

*Demonstração.* Pelo que foi visto anteriormente, é imediato que ii) e iii) são equivalentes. Basta mostrar a equivalência entre i) e ii).

Suponhamos que  $f$  é uma transformação afim ortogonal e sejam  $A$  um ponto de  $\mathbb{R}^n$  e,  $u, v$  vetores de  $\mathbb{R}^n$ . Temos que,

$$\begin{aligned} \langle \vec{f}(u), \vec{f}(v) \rangle &= \left\langle \overrightarrow{f(A)(f(A) + \vec{f}(u))}, \overrightarrow{f(A)(f(A) + \vec{f}(v))} \right\rangle = \\ &= \left\langle \overrightarrow{f(A)f(A + u)}, \overrightarrow{f(A)f(A + v)} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{A(A + u)}, \overrightarrow{A(A + v)} \right\rangle = \langle u, v \rangle. \end{aligned}$$

Reciprocamente, sejam  $A, B, C$  pontos de  $\mathbb{R}^n$ , temos:

$$\langle \overrightarrow{f(A)f(B)}, \overrightarrow{f(A)f(C)} \rangle = \langle \vec{f}(\overrightarrow{AB}), \vec{f}(\overrightarrow{AC}) \rangle = \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle. \quad \square$$

**Observação 2.2.40.** *Pelo que foi visto anteriormente, o conjunto das transformações afins ortogonais com a composição de funções forma um grupo chamado grupo afim ortogonal que é subgrupo do grupo afim  $\text{Aff}_n(\mathbb{R})$ .*

# Capítulo 3

## Bilhar - Aplicações Geométricas

### 3.1 Introdução

Um dos objetivos deste trabalho é estudar as transformações geométricas que estão presentes na trajetória de uma bola na realização de uma tacada de bilhar sem aplicação de efeito que utilize tabelas, desprezando a sua velocidade. Neste sentido, vamos restringir-nos a espaços afins associados ao espaço vetorial  $\mathbb{R}^2$ , embora, muitos conceitos possam ser generalizados a  $\mathbb{R}^n$ .

Fixado um referencial no espaço afim, cada contacto da bola com qualquer tabela da mesa de bilhar, dá origem a uma transformação afim (reflexão) cuja parte linear é dada por  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  e, pode incluir uma translação da origem segundo o vetor  $t = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix}$ , conforme exemplificam os exemplos 2.2.31 e 2.2.32 do capítulo 2.

Existem tacadas que utilizam várias tabelas e na impossibilidade de definir um referencial que evite as translações, torna-se difícil efetuar a com-

posição de duas ou mais transformações afins. Podemos converter as transformações afins de  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  em transformações lineares de  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  de forma a simplificar o cálculo da sua composição.

Fixado um referencial (identificando o espaço afim com  $\mathbb{R}^2$ ) e dada uma transformação afim  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dado o ponto  $P$  de coordenadas  $(x, y)$ ,  $\exists a, b, c, d, t_x, t_y \in \mathbb{R}$ , tais que,

$$f(P) = f(x, y) = (ax + by, cx + dy) + (t_x, t_y) = (ax + by + t_x, cx + dy + t_y).$$

Identificando  $\mathbb{R}^2$  como o plano  $z = 1$  a transformação afim  $f$  corresponde à aplicação linear  $\bar{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por  $\bar{f}(x, y, z) = (ax + by + t_x z, cx + dy + t_y z, z)$ . A matriz da aplicação linear  $\bar{f}$  é dada por  $M = \begin{bmatrix} a & b & t_x \\ c & d & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

A composição de várias transformações é feita multiplicando as suas matrizes de forma a obter uma única matriz que representa a transformação composta. Dado  $(x, y, 1) \in \mathbb{R}^3$ , temos  $\bar{f}(x, y, 1) = M \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by + t_x \\ cx + dy + t_y \\ 1 \end{bmatrix}$ .

Dada a natureza das tacadas de bilhar a estudar, vamos definir as seguintes matrizes  $3 \times 3$ .

**Definição 3.1.1.** *Numa tacada de bilhar a trajetória de uma bola sofre alterações sempre que contacta uma tabela. As trajetórias resultantes podem ser traduzidas pelas matrizes seguintes:*

$$i) \text{ Reflexão segundo } x = c: R_x(c) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$ii) \text{ Reflexão segundo } y = c: R_y(c) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Observação 3.1.2.** *Da definição 3.1.1, resulta:*

$$i) R_x(c) \times R_x(d) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2c - 2d \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$ii) R_y(c) \times R_y(d) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2c - 2d \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$iii) R_x(c) \times R_y(d) = R_y(d) \times R_x(c) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2c \\ 0 & -1 & 2d \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

*Note-se que esta alínea permite comutar o produto de matrizes  $R_x(c)$  e  $R_y(d)$ . Este resultado permite efetuar primeiro todas as reflexões paralelas a um dos eixos, mantendo a sua ordem, e em seguida efetuar as reflexões paralelas ao outro eixo, mantendo igualmente a sua ordem, tal como é exemplificado nas alíneas seguintes.*

$$iv) R_x(c) \times R_y(d) \times R_x(e) = R_y(d) \times R_x(c) \times R_x(e) = R_x(c) \times R_x(e) \times R_y(d) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2c - 2e \\ 0 & -1 & 2d \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$v) R_x(e) \times R_y(d) \times R_x(c) = R_y(d) \times R_x(e) \times R_x(c) = R_x(e) \times R_x(c) \times R_y(d) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2e - 2c \\ 0 & -1 & 2d \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$vi) R_x(c) \times R_y(d) \times R_y(f) = R_y(d) \times R_y(f) \times R_x(c) = R_y(d) \times R_x(c) \times R_y(f) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2c \\ 0 & 1 & 2d - 2f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$vii) R_x(c) \times R_y(f) \times R_y(d) = R_y(f) \times R_y(d) \times R_x(c) = R_y(f) \times R_x(c) \times R_y(d) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2c \\ 0 & 1 & 2d - 2f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$R_y(d) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2c \\ 0 & 1 & 2f - 2d \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$viii) R_x(c) \times R_x(e) \times R_x(g) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2c - 2e + 2g \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$ix) R_y(d) \times R_y(f) \times R_y(h) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2d - 2f + 2h \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Exemplo 3.1.3.** Vamos considerar que queremos efetuar uma tacada numa mesa de bilhar com dimensões  $n \times 2n$ , tal como a figura 3.1 sugere.

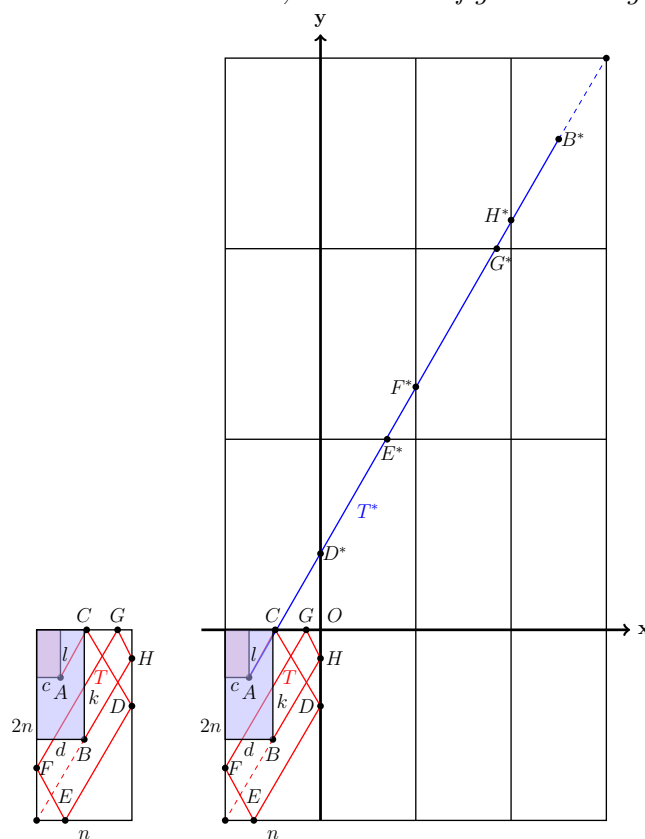


Figura 3.1: Exemplo de uma tacada

*Pretende-se que a bola branca (ponto A) siga a trajetória sugerida através do contacto em 6 tabelas da mesa de bilhar (pontos C, D, E, F, G e H) de forma a embater na bola objeto (ponto B). Para tal fixamos um referencial de forma que as tabelas superior e da direita estejam contidas nos semieixos negativos das abcissas e ordenadas, respetivamente, e que a origem seja o ponto de intersecção dessas tabelas. Imaginando que não existia tabelas, a bola branca seguiria uma trajetória linear onde o transformado do ponto B é dado pelo ponto  $B^*$ .*

*Por observação da figura 3.1 e considerando  $n = 2$ , as coordenadas das bolas A e B são  $(-1.5, -1)$  e  $(-1, -2.3)$  respetivamente.*

*Nesta tacada, com recurso a 6 tabelas, após o contacto com cada tabela são efetuadas ordenadamente reflexões segundo as retas:*

$$y = 0, x = 0, y = -4, x = -2, y = 0, x = 0.$$

*Assim, a matriz que transforma B em  $B^*$  é dada por  $M = R_y(0) \cdot R_x(0) \cdot$*

$$R_y(-4) \cdot R_x(-2) \cdot R_y(0) \cdot R_x(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

*Ao aplicar a matriz M em B, obtemos  $(5, 10.3)$ , as coordenadas do ponto  $B^*$  em  $\mathbb{R}^2$ .*

$$M \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -2.3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -2.3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10.3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Note-se que a matriz  $M$  pode ser dada por  $M = R_y(0) \cdot R_y(-4) \cdot R_y(0) \cdot R_x(0) \cdot R_x(-2) \cdot R_x(0) =$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \times 0 - 2 \times (-2) + 2 \times 0 \\ 0 & -1 & 2 \times 0 - 2 \times (-4) + 2 \times 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nas situações de snooker vamos estudar três variantes: variante  $A$ , a bola objeto está junto a um copo (um dos 6 “buracos” presentes numa mesa de bilhar); variante  $B$ , a bola objeto está próximo de um copo e variante  $C$ , a bola objeto está longe de um copo.

Vamos considerar outras situações, denominadas de situações livres, categorizadas na variante  $D$  e representam situações em que é necessário embater a bola branca diretamente na bola objeto de forma que esta embata em pelo menos uma tabela antes de ir na direção de um copo.

Em situações de snooker, nas variantes  $A$ ,  $B$  e  $C$ , o nosso objetivo é realizar uma tacada sem falta com recurso às tabelas da mesa de bilhar de forma que a bola branca contacte em primeiro lugar com a bola objeto. Na variante  $D$ , o objetivo é ensacar a bola objeto num copo específico, através da realização de uma tacada sem falta fazendo com que a bola branca contacte diretamente a bola objeto e esta, de seguida, contacte a sequência de tabelas da mesa de bilhar pretendidas e entre no copo previamente determinado.

Na figura 3.2 temos uma ilustração das variantes apresentadas.

Em qualquer tacada é fundamental identificar corretamente a posição ideal de contacto da bola branca na 1<sup>a</sup> tabela ou na bola objeto pretendida de forma a ter sucesso. As tacadas e os estudos que vamos realizar têm os seguintes pressupostos:

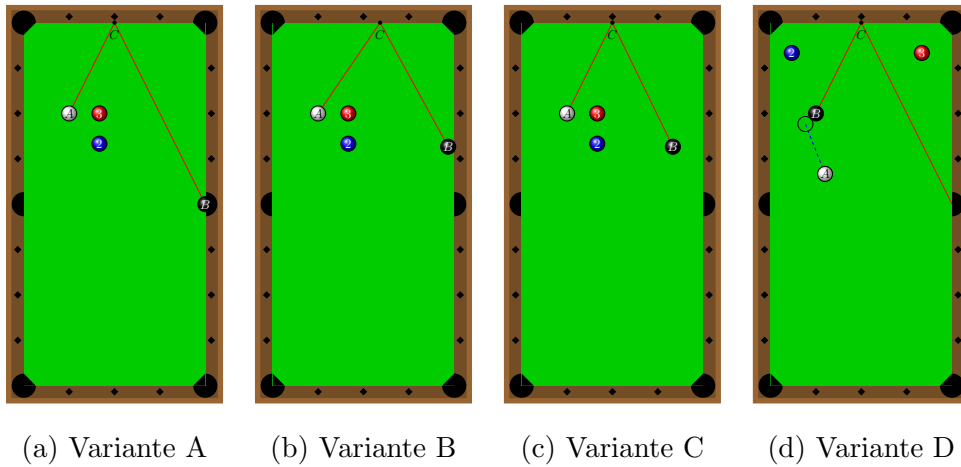


Figura 3.2: Situações de Snooker e Livres a estudar - variantes

- i) As bolas branca e objeto, estão representadas pelos pontos  $A$  e  $B$ , respetivamente. O ponto  $C$  representa o ponto de contacto da bola  $A/B$  na 1ª tabela.
- ii) O objetivo de cada tacada, se possível, é determinar a posição correta do ponto  $C$  de forma a realizar uma tacada com sucesso.
- iii) As dimensões de uma mesa de bilhar é  $n \times 2n$ .
- iv) Ao preparar uma tacada o jogador está de frente para a tabela na qual será dado o 1º contacto, idealizando assim se a posição da mesa será na horizontal ou na vertical e em seguida definir as tabelas da mesa da seguinte forma: tabela 1, tabela onde sofrerá o primeiro contacto; tabela 2, tabela perpendicular à tabela 1 cuja bola branca se aproxima após o início da tacada; tabela 3, tabela paralela à tabela 1 e, tabela 4, tabela paralela à tabela 2. Na figura 3.3 temos uma ilustração da posição do jogador e a identificação das tabelas da mesa de bilhar, atendendo se a 1ª tabela de contacto da bola branca é uma tabela pequena (tacada  $r$ ) ou grande (tacada  $s$ ).

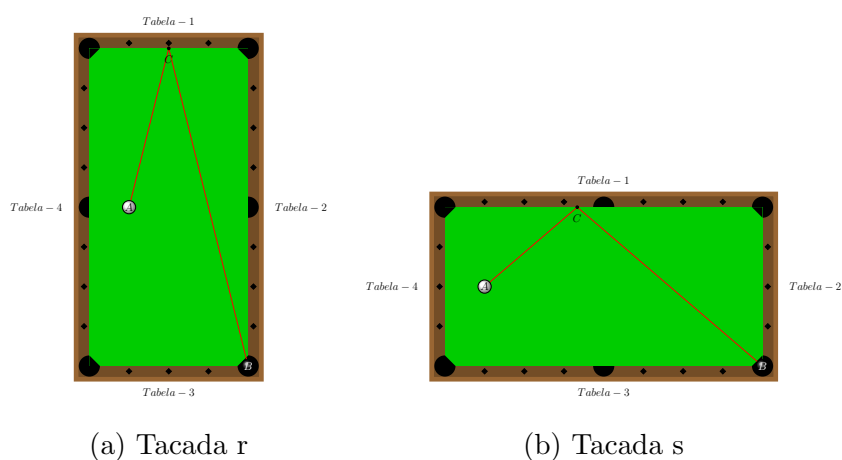


Figura 3.3: Posicionamento do jogador e identificação das tabelas

- v) A posição relativa do ponto  $A$  à mesa de bilhar é dado pelo par ordenado  $(c, l)$  onde:
- i)  $c$ , é a menor distância da bola  $A$  a uma reta perpendicular à tabela 1 que contém um copo da mesa posicionado na direção oposta da tacada.
  - ii)  $l$ , é a distância da bola branca à tabela 1.

Na figura 3.4, temos a ilustração dos parâmetros  $c$  e  $l$  em cada umas das tacadas representadas.

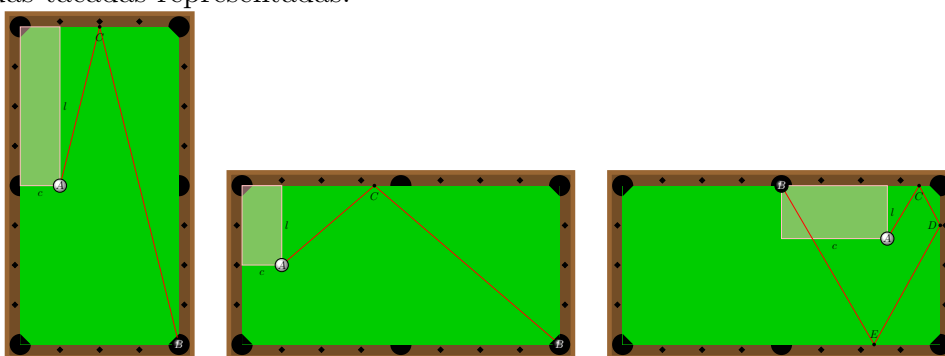


Figura 3.4: Posição relativa da bola branca

Analogamente o par ordenado,  $(d, k)$ , dá a posição relativa da bola objeto, ponto  $B$ .

- vi) Nos estudos realizados, a trajetória da bola branca será sempre para cima e para a direita, como a figura 3.5 ilustra (analogamente faz-se em outras direções e sentidos).

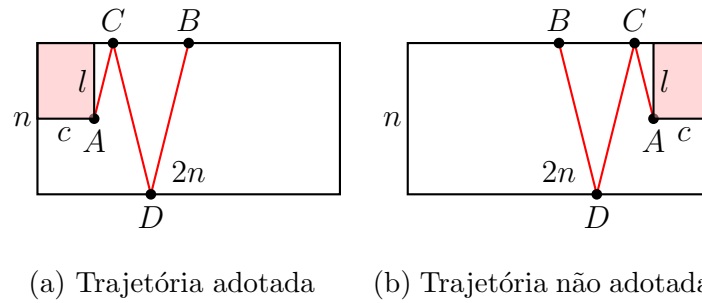


Figura 3.5: Consideração sobre a trajetória da bola branca

- vii) Numa tacada não é aplicado qualquer efeito na bola  $A$ . O contacto do taco na bola  $A$  é no centro da bola  $A$ , tal como a figura 3.6 sugere.

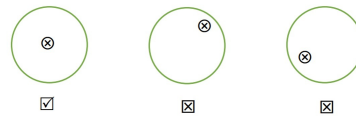


Figura 3.6: Tacada “sem” efeito

- viii) A bola  $A$  ao embater numa tabela sofre uma alteração na sua trajetória na qual a amplitude dos ângulos de incidência ( $\theta$ ) e de reflexão ( $\delta$ ) são iguais, ou seja,  $\theta = \delta$ , como a figura 3.7 sugere.

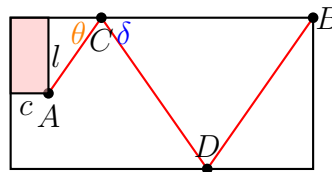


Figura 3.7: Ângulos de incidência ( $\theta$ ) e de reflexão ( $\delta$ ) de uma tacada

- ix) A bola  $A$  tem sempre velocidade para alcançar o resultado desejado.  
 x) A trajetória da bola  $A$  não está sujeita a quaisquer fenómenos físicos externos.

## 3.2 Conceitos desenvolvidos

Nesta secção, desenvolvemos conteúdos inéditos e inovadores no âmbito do bilhar, com o propósito de produzir resultados suscetíveis de aplicação prática em contexto real de jogo. Pretende-se que tais resultados possam ser utilizados por qualquer atleta, constituindo uma alternativa eficaz aos métodos tradicionais, que, em determinadas situações, se revelam de difícil aplicação ou impraticáveis.

**Definição 3.2.1** (Tacada, início e fim de uma tacada). *Tacada é o movimento deliberado e único realizado pelo jogador ao golpear a bola branca com o taco. O início de uma tacada é o momento em que o taco toca a bola branca (bola A). O fim de uma tacada é a posição da bola branca no momento em que esta percorre a distância pretendida na horizontal, atendendo à posição relativa do jogador sobre a mesa de bilhar.*

**Definição 3.2.2** (Tipos de tacadas). *Uma tacada diz-se:*

- i) elementar (ou simples) se não utiliza tabelas da mesa de bilhar. Caso contrário, designa-se por tacada composta.*
- ii) composta de 1ª espécie se a 1ª tabela de contacto da bola branca é uma tabela pequena. Caso a 1ª tabela de contacto da bola branca é uma tabela grande diz-se que a tacada é composta de 2ª espécie.*
- iii) alternada se na sua trajetória não contacta consecutivamente duas tabelas da mesma dimensão. Caso contrário diz-se não alternada.*
- iv) bem-sucedida caso a bola branca (ponto A) descreva a trajetória pretendida, contactando as tabelas predefinidas na sequência estabelecida e acabe por contactar a bola objeto (ponto B).*

### **Notas:**

- 1. Qualquer tacada elementar é considerada alternada e bem-sucedida.*

2. Qualquer tacada composta que utiliza apenas uma tabela é considerada alternada.

**Definição 3.2.3** (Número de tabelas de uma tacada). O número de tabelas utilizadas na tacada  $r$ , representa-se por  $t_r$  e verifica a condição,  $t_r = t_{\bar{r}} + t_{\underline{r}}$ , onde  $t_{\bar{r}}$  e  $t_{\underline{r}}$  representam, respetivamente, o número de tabelas grandes (de dimensão  $2n$ ) e de tabelas pequenas (de dimensão  $n$ ) utilizadas.

**Notas:**

- i) Caso a bola branca esteja em contacto com a tabela antes de efetuar a tacada, esse contacto não é contabilizado como uma tabela utilizada.
- ii) Caso a tacada seja bem sucedida e a bola objeto esteja em contacto com a tabela, o contacto da bola branca na bola objeto não é contabilizado como uma tabela utilizada.

**Exemplo 3.2.4.** Considere as tacadas  $m$ ,  $q$ ,  $y$  e  $z$ , cuja trajetória da bola branca estão ilustradas na figura 3.8, onde o objetivo das tacadas é fazer com que a bola  $A$  entre em contacto com a bola  $B$ .

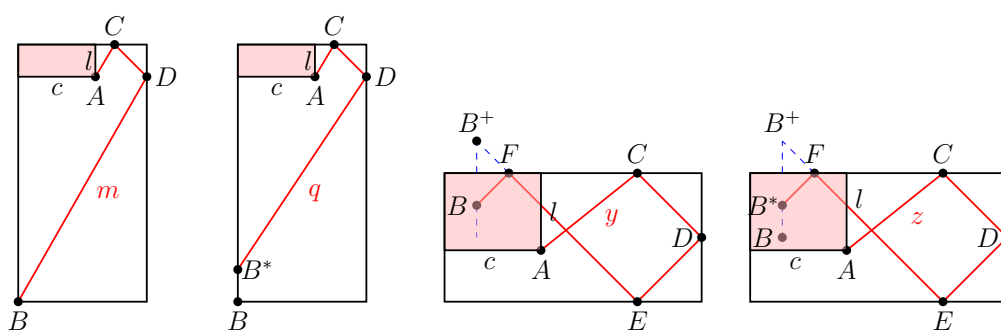


Figura 3.8: Tipos e número de tabelas de uma tacada

Temos que:

i) A tacada  $m$  é composta alternada de 1ª espécie. A tacada  $q$  é composta não alternada de 1ª espécie, enquanto as tacadas  $y$  e  $z$  são tacadas compostas não alternadas de 2ª espécie.

ii) Apenas as tacadas  $m$  e  $y$  são bem-sucedidas.

iii) As tacadas  $m$  e  $q$  usam duas tabelas ( $t_m = t_q = 2$ ) e as tacadas  $y$  e  $z$  usam quatro tabelas ( $t_y = t_z = 4$ ).

**Observação 3.2.5** (Trajetória de uma tacada e respetiva trajetória linear). A trajetória  $T$  de uma tacada  $r$ , designada por  $T(r)$  ou  $T_r$ , pode ser transformada numa trajetória linear,  $T_r^*$ , através da aplicação de transformações geométricas (translação, rotação, reflexão e reflexão deslizante) chamadas de isometrias, ou seja, que preservam as distâncias.

**Exemplo 3.2.6.** Na figura 3.9 temos a ilustração da trajetória  $T$  e da trajetória linear,  $T^*$ , de uma tacada.

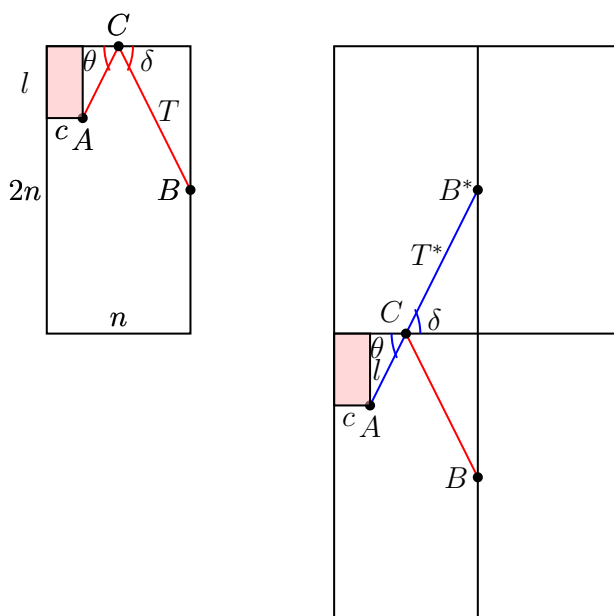


Figura 3.9: Trajetórias  $T$  e  $T^*$  de uma tacada

*Podemos observar que:*

- i) A tacada é composta e os ângulos de incidência ( $\theta$ ) e de reflexão ( $\delta$ ) que a bola branca faz ao contactar com a 1ª tabela são iguais, logo, podemos transformar a trajetória  $T$  na trajetória linear  $T^*$  cujos pontos de  $T^*$  são os mesmos de  $T$  até o contacto na 1ª tabela e, após este contacto, os pontos transformados de  $T^*$  segundo  $T$  obtêm-se através de sucessivas reflexões pela reta que contém a última tabela que entrou em contacto, considerando que as sucessivas reflexões são feitas por ordem inversa à ordem das tacadas. Por exemplo, a 1ª reflexão corresponde à reflexão após contacto na última tabela.*
- ii) O segmento de reta  $[AB^*]$  é a trajetória linear  $T^*$  que se obtêm de  $T$ , que é dada pela união dos segmentos de reta  $[AC]$  e  $[CB]$ . Note-se que  $B^*$  é o ponto transformado de  $B$  enquanto que os pontos  $A$  e  $C$  são os pontos transformados de si próprios.*

**Definição 3.2.7** (Erro inicial de uma tacada). *O erro inicial de uma tacada  $r$ , é a distância entre o 1º contacto da bola branca na tabela e o ponto ideal de contacto nessa tabela de forma a obter uma tacada bem sucedida e, representa-se por  $e_i(r)$ .*

**Definição 3.2.8** (Erro final de uma tacada). *O erro final de uma tacada  $r$ ,  $e_f(r)$ , é a distância entre a bola de contacto  $B$  e o seu ponto final.*

**Observação 3.2.9.** *Das definições 3.2.7 e 3.2.8 podemos constatar:*

- i) Em qualquer tacada  $r$ ,  $e_i(r)$  e  $e_f(r)$  são números reais não negativos.*
- ii) A tacada  $r$  é bem sucedida se e somente se  $e_i(r) = e_f(r) = 0$ . Caso contrário,  $x$  não é bem-sucedida.*
- iii) Considera-se que a posição da bola  $B$  dá a posição ideal de contacto sobre a bola  $B$ .*

**Exemplo 3.2.10.** Considera as tacadas  $r$  e  $s$  ilustradas na figura 3.10.

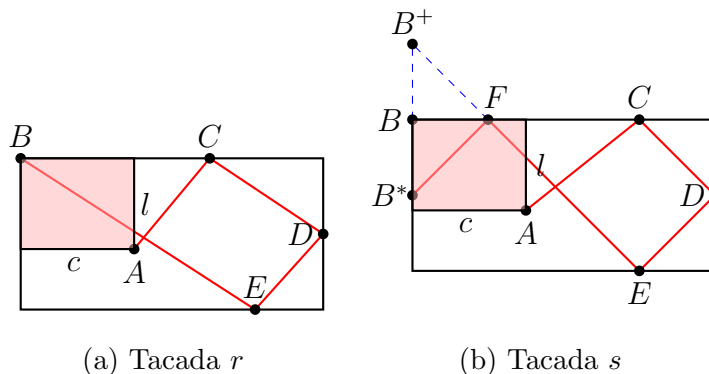


Figura 3.10: Erros iniciais e finais de uma tacada

Podemos observar que:

- i) As tacadas  $r$  e  $s$  ilustradas representam a mesma situação problema, cujo objetivo é aplicar com o recurso à utilização de 3 tabelas da mesa de bilhar uma trajetória na bola  $A$  de forma a contactar com a bola  $B$  que está junto a um copo da mesa de bilhar.
- ii) Ao contrário da tacada  $r$ , na tacada  $s$ , o objetivo não foi alcançado, pois o primeiro ponto de contacto da bola  $A$  na 1ª tabela, não é o ponto ideal de contacto, fazendo com que a bola  $A$  na sua trajetória não contacte a bola  $B$  mas sim o ponto  $B^*$ , pois utilizou uma 4ª tabela na sua trajetória designada pelo ponto  $F$ .
- iii) A tacada  $r$  é bem sucedida logo,  $e_i(r) = e_f(r) = 0$ .
- iv) Designando os pontos  $C$  e  $B$ , nas tacadas  $r$  e  $s$ , respetivamente por  $C_r$ ,  $C_s$ ,  $B_r$  e  $B_s$ , temos que o erro inicial da tacada  $s$ , ( $e_i(s)$ ), é dado por  $e_i(s) = d(C_r, C_s) > 0$  e o erro final da tacada  $s$ , ( $e_f(s)$ ), é dada por  $e_f(s) = d(B_r, B^*) > 0$ .

**Exemplo 3.2.11.** Considera as trajetórias  $T$  e  $T^*$  da tacada representada na figura 3.9, à qual vamos designar de  $r$ . A tacada  $r$  pode ser ou não bem

sucedida, originando três situações possíveis (A, B e C), tal como a figura 3.11 ilustra:

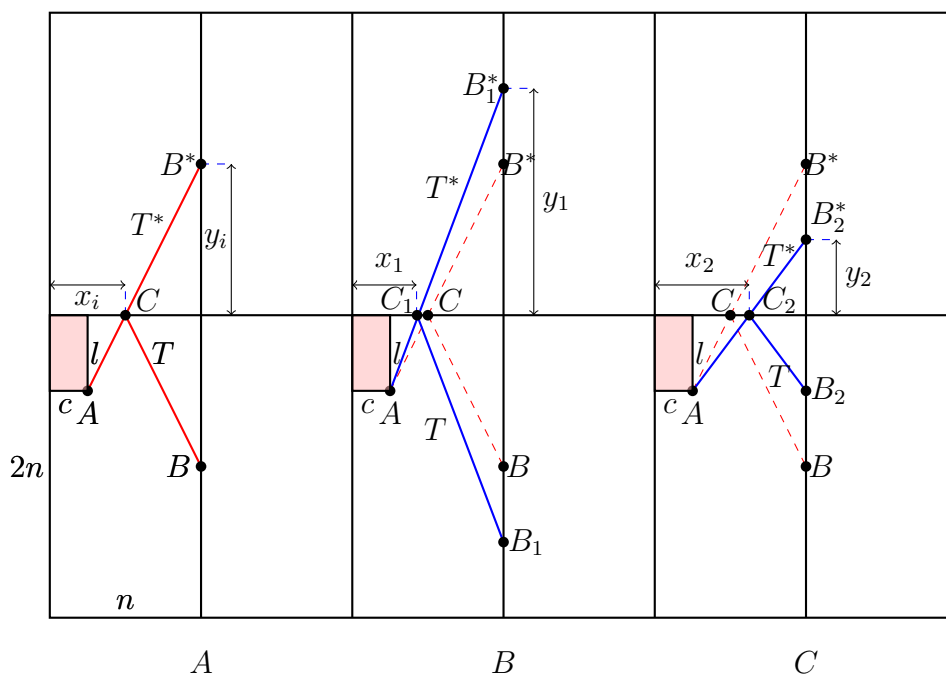


Figura 3.11: Trajetórias  $T$  e  $T^*$ : possíveis situações

Para cada situação podemos afirmar que:

- i) Situação A:  $r$  é bem sucedida, ou seja,  $e_i(r) = e_f(r) = 0$ .
- ii) Situação B:  $r$  não é bem sucedida, onde:  $e_i(r) = x_i - x_1 > 0$  e  $e_f(r) = y_1 - y_i > 0$ .
- iii) Situação C:  $r$  não é bem sucedida, onde:  $e_i(r) = x_2 - x_i > 0$  e  $e_f(r) = y_i - y_2 > 0$ .

**Definição 3.2.12** (Número de movimentos de uma tacada). O número de movimentos de uma tacada  $r$  é definido pelo par  $(\alpha_r, \beta_r)$  onde:

- i) o número inteiro de movimentos ascendentes/descendentes de uma tacada  $r$ , é designado por  $\alpha_r$ , e representa o número de tabelas pequenas

parcialmente ou totalmente percorridas na vertical pela bola branca após o contacto com a 1ª tabela.

- ii) o número inteiro de movimentos laterais de uma tacada  $r$ , é designado por  $\beta_r$ , e representa o número de tabelas pequenas percorridas parcialmente ou totalmente na horizontal pela bola branca.

**Notas:** O número de movimentos de uma tacada elementar  $r$ , são  $(0, 1)$  ou  $(0, 2)$ .

**Definição 3.2.13** (Posição relativa das bolas branca e objeto à mesa de bilhar). A posição relativa da bola branca à mesa de bilhar é dada pelo par ordenado  $(c, l)$  onde  $c$  é a distância mínima na horizontal da bola branca à reta perpendicular à 1ª tabela de contacto que passa num copo do lado oposto à trajetória da bola, e,  $l$  é a distância na vertical da bola branca à 1ª tabela de contacto. Analogamente, o par ordenado  $(d, k)$  dá a posição relativa da bola objeto à mesa de bilhar.

**Exemplo 3.2.14.** Considera-se as tacadas  $m$ ,  $p$  e  $s$  ilustradas na figura 3.12.

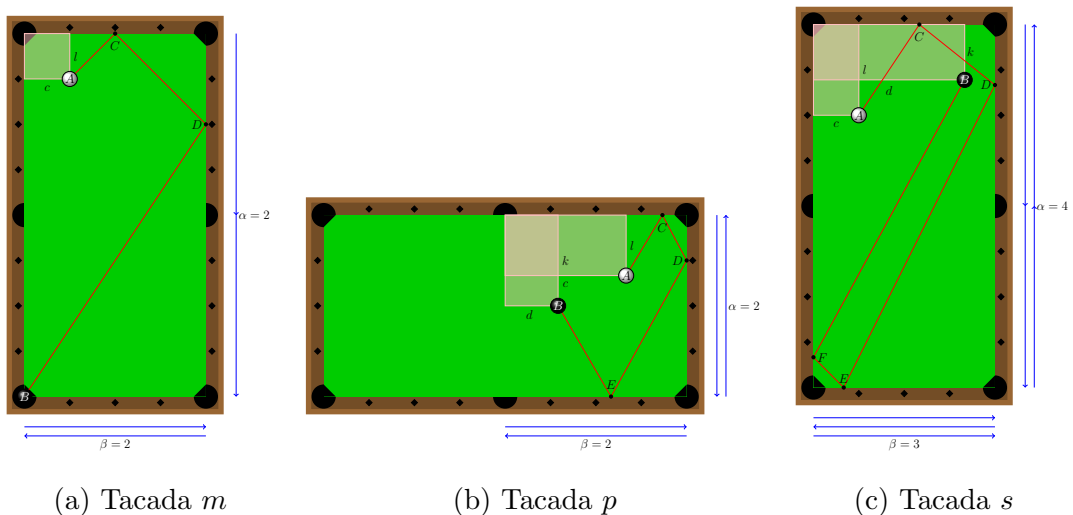


Figura 3.12: Exemplos de tacadas: número de movimentos

Nas tacadas  $m$ ,  $p$  e  $s$ , podemos verificar como são identificadas as posições relativas das bolas branca e objeto. Por outro lado, temos que o número de movimentos das tacadas  $m$ ,  $p$  e  $s$  são  $(2, 2)$ ,  $(2, 2)$  e  $(4, 3)$ , respetivamente.

**Definição 3.2.15** (Referencial cartesiano e coordenadas de pontos sobre a mesa de bilhar). Vamos aplicar um referencial cartesiano  $xOy$ , onde  $O$  é o ponto de intersecção das tabelas 1 e 2 e, os eixos  $Ox$  e  $Oy$  contêm respetivamente as tabelas 1 e 2. A orientação dos eixos  $Ox$  e  $Oy$  são as mesmas que os movimentos ascendentes/descendentes e laterais da bola branca antes do contacto na 1ª tabela da mesa de bilhar.

Considera-se que,

$$j = \begin{cases} 1 & , d(A, Oy) \leq n \\ 2 & , d(A, Oy) > n \end{cases} \quad (3.1)$$

Assim, obtemos as coordenadas de alguns pontos relevantes:

- i) Bola branca:  $A(c - jn, -l)$ ;
- ii) Ponto de contacto na tabela 1:  $C(C_x - jn, 0)$ , onde  $C_x$  é a menor distância de  $C$  a uma reta perpendicular à tabela 1 que contém um copo da mesa posicionado na direção oposta da tacada;

**Nota:** Caso a tacada seja bem sucedida, vamos designar  $C_x$  por  $x_i$  (posição ideal de contacto)

- iii) Bola objeto:  $B(x_B, y_B)$ .

**Exemplo 3.2.16.** De seguida apresentamos dois exemplos de tacadas que mostram a correta aplicação de um referencial cartesiano do plano sobre uma mesa de bilhar, a determinação das coordenadas da bola branca, da sua posição relativa, as coordenadas do ponto de contacto na tabela 1 e as coordenadas da bola objeto, atendendo à tacada a efetuar.

Considera as tacadas  $m$  e  $s$ , representadas nas figuras 3.13 e 3.14, respectivamente.

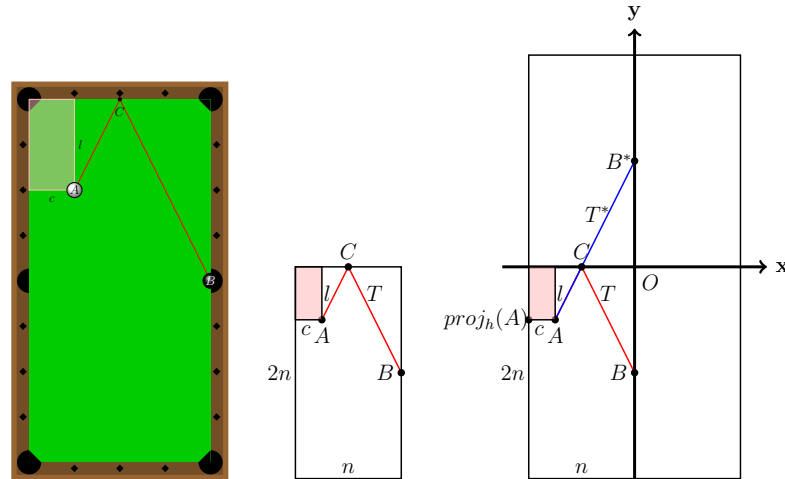


Figura 3.13: Tacada  $m$ : Coordenadas dos pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$

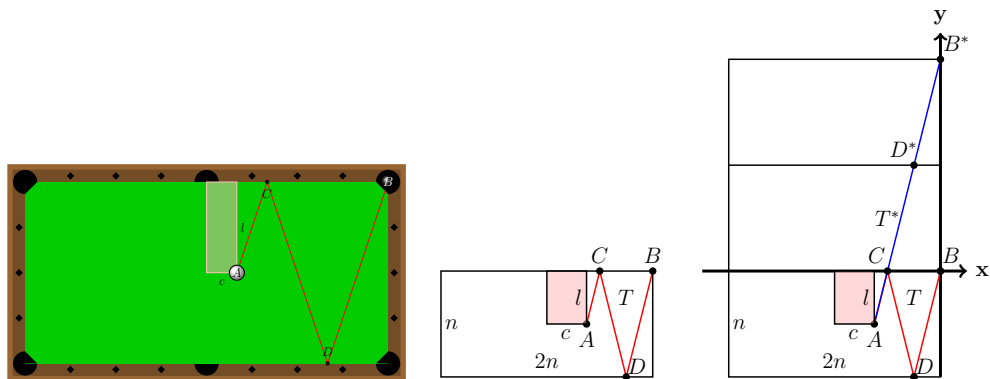


Figura 3.14: Tacada  $s$ : Coordenadas dos pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$

Assim, obtemos que:

- i) Na tacada  $m$ ,  $A(c-n, -l)$ ,  $C(C_x-n, 0)$  e  $B(0, -n)$ .
- ii) Na tacada  $s$ ,  $A(c-n, -l)$ ,  $C(C_x-n, 0)$  e  $B(0, 0)$ .

**Definição 3.2.17** (Coordenadas dos pontos da trajetória e respetiva trajetória linear de uma tacada). As coordenadas dos pontos que pertencem à trajetória de uma tacada  $r$ , designaremos por  $(x_T, y_T)$ . As coordenadas dos pontos da trajetória linear de uma tacada  $r$ , são os transformados dos pontos

de coordenadas  $(x_T, y_T)$ , através da utilização de isometrias e que designaremos por  $(x_{T^*}, y_{T^*})$ .

Na figura 3.15 apresentamos como exemplo as trajetórias  $T$  e  $T^*$  das tacadas  $s$  e  $q$ .

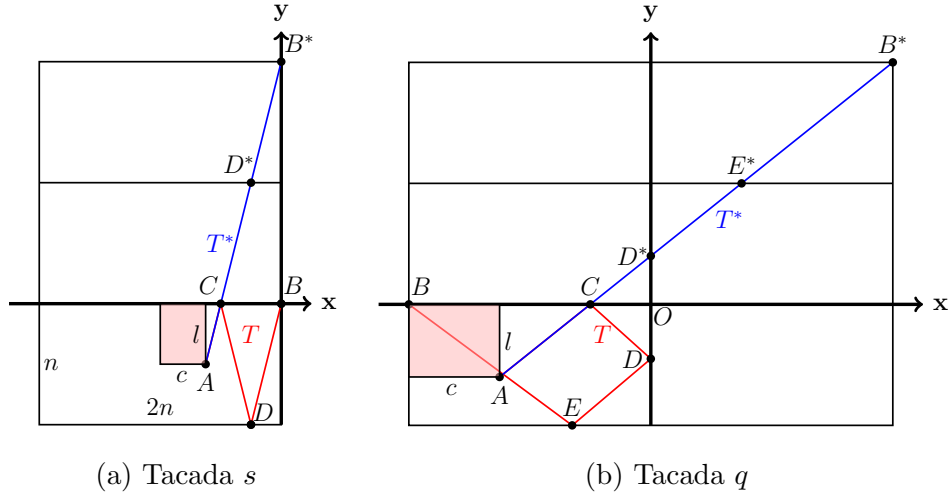


Figura 3.15: Trajetórias  $T$  e  $T^*$  de tacadas

**Observação 3.2.18** (Relação entre tacadas alternadas de 1ª espécie e as trajetórias  $T$  e  $T^*$ ). *Seja  $r$  uma tacada composta alternada de 1ª espécie. Sejam as posições relativas da bola branca  $(c, l)$  e da bola objeto  $(d, k)$ , com coordenadas  $(c - n, -l)$  e  $(d - n, -k)$ , respetivamente. As coordenadas da bola branca são as mesmas nas trajetórias  $T$  e  $T^*$ , e, as coordenadas da bola objeto em  $T^*$  são dadas em função da posição relativa  $(d, k)$ , na trajetória  $T$  através da função  $\psi$  com  $t_r + 1$  ramos, da seguinte forma,*

$$\psi(d, k) = \begin{cases} (2in + d - n, 4in - k) & \text{se } t_r = 0 + 4i \\ (2in + d - n, 4in + k) & \text{se } t_r = 1 + 4i \\ (2in - (d - n), 4in + k) & \text{se } t_r = 2 + 4i \\ (2in - (d - n), 4in + 4n - k) & \text{se } t_r = 3 + 4i \end{cases}, i \in \mathbb{N}_0. \quad (3.2)$$

Por outro lado, a função  $\psi$  apresentada em (3.2) pode ser apresentada matricialmente na forma,

$$\psi(d, k) = \begin{cases} \begin{bmatrix} d - n & -k & 1 \end{bmatrix}^T & \text{se } t_r = 0 \\ R_y(0) \cdot \begin{bmatrix} d - n & -k & 1 \end{bmatrix}^T & \text{se } t_r = 1 \\ R_y(0) \cdot R_x(0) \cdot \begin{bmatrix} d - n & -k & 1 \end{bmatrix}^T & \text{se } t_r = 2 \\ R_y(0) \cdot R_x(0) \cdot R_y(-2n) \cdot \begin{bmatrix} d - n & -k & 1 \end{bmatrix}^T & \text{se } t_r = 3 \\ R_y(0) \cdot R_x(0) \cdot R_y(-2n) \cdot R_x(-n) \cdot \begin{bmatrix} d - n & -k & 1 \end{bmatrix}^T & \text{se } t_r = 4 \\ \dots & \dots \end{cases} \quad (3.3)$$

**Exemplo 3.2.19.** Consideremos as trajetória  $T$  e  $T^*$  da tacada  $r$ , ilustrada na figura 3.16. Pretendemos que ao longo da trajetória da bola branca, esta, após o contacto em  $t_r$  tabelas entre em contacto com a bola objeto. Para tal podemos encontrar as respetivas coordenadas da bola objeto na trajetória linear  $T^*$  como a observação 3.2.18 sugere.

Assim, após o contacto em 6 tabelas, as coordenadas da bola objeto na trajetória  $T^*$  são  $\psi(d, k) = (2in - (d - n), 4in + k) = (6 - d, 8 + k)$  com,  $t_r = 2 + 4i$ ,  $i = 1$  e  $n = 2$ .

A posição relativa, segundo  $T$  da bola objeto e as suas coordenadas da bola objeto são  $(1, 2.3)$  e  $(-1, -2.3)$ , respetivamente. Assim, as coordenadas do ponto  $B^*$  são  $\psi(1, 2.3) = (6 - 1, 8 + 2.3) = (5, 10.3)$ .

Por outro lado, na forma matricial, obtemos o mesmo resultado dado que  $\psi(1, 2.3) = R_y(0) \cdot R_x(0) \cdot R_y(-4) \cdot R_x(-2) \cdot R_y(0) \cdot R_x(0) \cdot \begin{bmatrix} -1 & -2, 3 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 5 & 10.3 & 1 \end{bmatrix}^T$ .

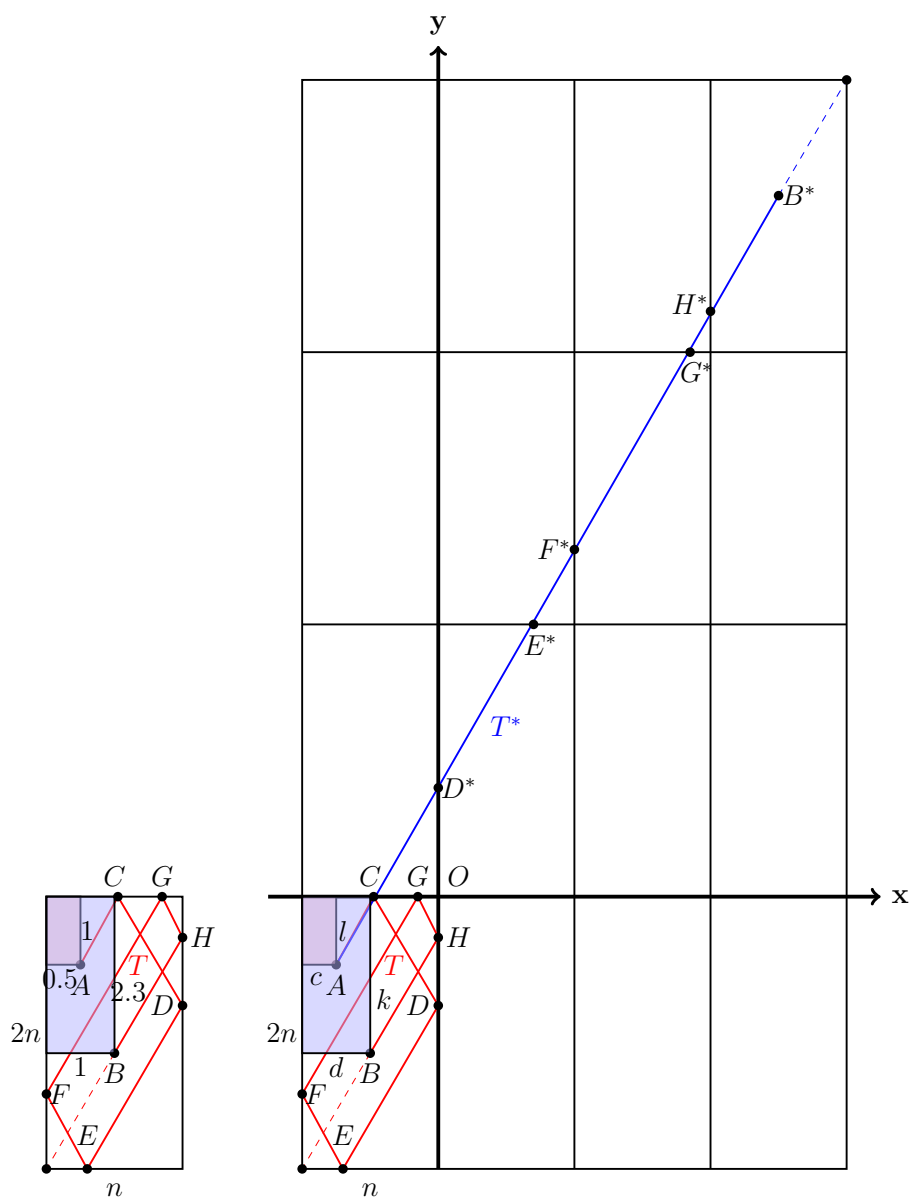


Figura 3.16: Trajetórias  $T$  e  $T^*$  de uma tacada composta alternada de 1ª espécie

**Proposição 3.2.20** (Relação entre tacadas alternadas de 1ª espécie e a trajetória linear  $T^*$ ). *Seja  $r$  uma tacada composta alternada de 1ª espécie tal que as posições relativas das bolas branca,  $A$ , e objeto,  $B$  são  $(c, l)$  e  $(d, k)$ , respectivamente, e as coordenadas da bolas branca, objeto em  $T$  e, objeto em*

$T^*$ , são  $(c - n, -l)$ ,  $(d - n, -k)$  e  $\psi(d, k)$ , respetivamente. Então o segmento de reta  $[AB^*]$  que define a trajetória  $T^*$  está contido na reta de equação,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{l+4in-k}{2in+d-c}x - l + \frac{l+4in-k}{2in+d-c}(n-c) & \text{se } t_r = 0 + 4i \\ \frac{l+4in+k}{2in+d-c}x - l + \frac{l+4in+k}{2in+d-c}(n-c) & \text{se } t_r = 1 + 4i \\ \frac{l+4in+k}{2in+2n-d-c}x - l + \frac{l+4in+k}{2in+2n-d-c}(n-c) & \text{se } t_r = 2 + 4i \\ \frac{l+4in+4n-k}{2in+2n-d-c}x - l + \frac{l+4in+4n-k}{2in+2n-d-c}(n-c) & \text{se } t_r = 3 + 4i \end{cases}, i \in \mathbb{N}_0. \quad (3.4)$$

Mais, a posição ideal de contacto,  $x_i$ , na tabela 1 de forma à bola branca embater na bola objeto é solução da equação  $f(x_i - n) = 0$ , onde  $f$  está definida em (3.4) e  $x_i$  é dado por,

$$x_i = \begin{cases} \frac{2in(l+2c)+ld-kc}{l+4in-k} & \text{se } t_r = 0 + 4i \\ \frac{2in(l+2c)+ld+kc}{l+4in+k} & \text{se } t_r = 1 + 4i \\ \frac{2in(l+2c)+l(2n-d)+kc}{l+4in+k} & \text{se } t_r = 2 + 4i \\ \frac{2in(l+2c)+l(2n-d)+c(4n-k)}{l+4in+4n-k} & \text{se } t_r = 3 + 4i \end{cases}, i \in \mathbb{N}_0. \quad (3.5)$$

**Nota:** Caso se aplique no máximo 3 tabelas ( $i = 0$  e  $0 \leq t_r \leq 3$ ) temos a solução trivial,

$$x_i = \begin{cases} \frac{ld-kc}{l-k} & \text{se } t_r = 0 \\ \frac{ld+kc}{l+k} & \text{se } t_r = 1 \\ \frac{l(2n-d)+kc}{l+k} & \text{se } t_r = 2 \\ \frac{l(2n-d)+c(4n-k)}{l+4n-k} & \text{se } t_r = 3 \end{cases}. \quad (3.6)$$

**Exemplo 3.2.21.** Pretende-se encontrar o ponto ideal de contacto na tabela 1 ( $x_i$ ) nas tacadas apresentadas na figura 3.17.

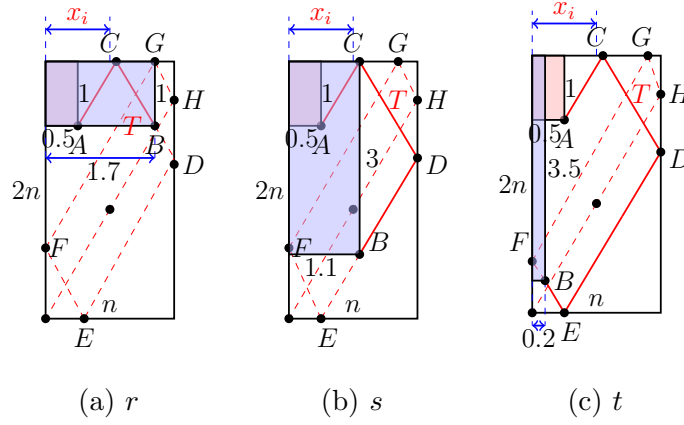


Figura 3.17: Posição ideal de contacto de tacadas compostas alternadas de 1ª espécie

Considerando  $n = 2$ , temos que nas tacadas  $r$ ,  $s$  e  $t$  a posição inicial relativa da bola branca é  $(0.5, 1)$  e a posição da bola objeto é  $(1.7, 1)$ ,  $(1.1, 3)$  e  $(0.2, 3.5)$ , respetivamente.

A posição do ponto ideal de contacto  $(x_i)$  em  $r$ ,  $s$  e  $t$ , está a 1.1 unidades de medida do ponto de referência, como refere a proposição 3.2.20 e os cálculos seguintes ilustram:

$$i) \text{ Tacada } r: x_i = \frac{ld+kc}{l+k} = \frac{1 \times 1.7 + 1 \times 0.5}{1+1} = 1.1.$$

$$ii) \text{ Tacada } s: x_i = \frac{l(2n-d)+kc}{l+k} = \frac{1 \times (2 \times 2 - 1.1) + 3 \times 0.5}{1+3} = \frac{4.4}{4} = 1.1.$$

$$iii) \text{ Tacada } t: x_i = \frac{l(2n-d)+c(4n-k)}{l+4n-k} = \frac{1 \times (2 \times 2 - 0.2) + 0.5 \times (4 \times 2 - 3.5)}{1+4 \times 2 - 3.5} = \frac{6.05}{5.5} = 1.1.$$

**Observação 3.2.22** (Relação entre tacadas alternadas de 2ª espécie e as trajetórias  $T$  e  $T^*$ ). Seja  $r$  uma tacada composta alternada de 2ª espécie, cuja posição relativa da bola branca é  $(c, l)$  e da bola objeto é  $(d, k)$ , e respetivas coordenadas  $(c-jn, -l)$  e  $(d-jn, -k)$  com  $j$  definido em (3.1). Na trajetória  $T^*$ , as coordenadas da bola branca são as mesmas que em  $T$  e as coordenadas da bola objeto na trajetória  $T^*$  são definidas em função da sua posição relativa  $(d, k)$  na trajetória  $T$  através da função  $\psi$  com  $t_r + 1$  ramos, da seguinte

forma,

$$\psi(d, k) = \begin{cases} (4in + d - jn, 2in - k) & \text{se } t_r = 0 + 4i \\ (4in + d - jn, 2in + k) & \text{se } t_r = 1 + 4i \\ (4in - (d - jn), 2in + k) & \text{se } t_r = 2 + 4i \\ (4in - (d - jn), 2in + 2n - k) & \text{se } t_r = 3 + 4i \end{cases}, i \in \mathbb{N}_0. \quad (3.7)$$

Por outro lado a função  $\psi$  apresentada em (3.7) pode ser apresentada matricialmente na forma,

$$\psi(d, k) = \begin{cases} \begin{bmatrix} d - jn & -k & 1 \end{bmatrix}^T & \text{se } t_r = 0 \\ R_y(0) \cdot \begin{bmatrix} d - jn & -k & 1 \end{bmatrix}^T & \text{se } t_r = 1 \\ R_y(0) \cdot R_x(0) \cdot \begin{bmatrix} d - jn & -k & 1 \end{bmatrix}^T & \text{se } t_r = 2 \\ R_y(0) \cdot R_x(0) \cdot R_y(-n) \cdot \begin{bmatrix} d - jn & -k & 1 \end{bmatrix}^T & \text{se } t_r = 3 \\ R_y(0) \cdot R_x(0) \cdot R_y(-n) \cdot R_x(-2n) \cdot \begin{bmatrix} d - jn & -k & 1 \end{bmatrix}^T & \text{se } t_r = 4 \\ \dots & \dots \end{cases}. \quad (3.8)$$

**Exemplo 3.2.23.** Consideremos a tacada  $s$ , uma tacada composta alternada de 2ª espécie, ilustrada na figura 3.18.

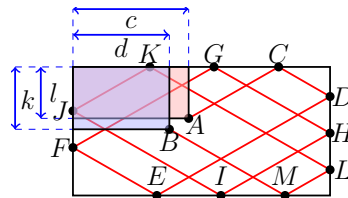


Figura 3.18: Tacada composta alternada de 2ª espécie

Pretendemos que na trajetória da bola branca, esta, após o contacto de  $t_s$ ,

tabelas entre em contacto com a bola objeto. Para tal, podemos encontrar as coordenadas da bola objeto na trajetória linear  $T^*$ , como a observação 3.2.22 sugere.

Após o contacto de 11 tabelas, as coordenadas da bola objeto na trajetória  $T^*$  são  $\psi(d, k) = (4in - (d - jn), 2in + 2n - k) = (20 - d, 12 - k)$ , com  $i = 2$ ,  $j = 2$  e  $n = 2$ .

Considerando a posição relativa, segundo  $T$ , e as coordenadas da bola objeto de  $(1.5, 0.97)$  e  $(-2.5, -0.97)$ , respetivamente, então as coordenadas do ponto  $B^*$  são  $\psi(1.5, 0.97) = (20 - 1.5, 12 - 0.97) = (18.5, 11.03)$ .

Por outro lado, matricialmente obtemos igualmente o resultado pretendido, dado que,  $\psi(1.5, 0.97) = R_y(0) \cdot R_x(0) \cdot R_y(-2) \cdot R_x(-4) \cdot R_y(0) \cdot R_x(0) \cdot R_y(-2) \cdot R_x(-4) \cdot R_y(0) \cdot R_x(0) \cdot R_y(-2) \cdot \begin{bmatrix} -2.5 & -0.97 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 18.5 & 11.03 & 1 \end{bmatrix}^T$ .

**Proposição 3.2.24** (Relação entre tacadas alternadas de 2ª espécie e a trajetória linear  $T^*$ ). *Seja  $r$  uma tacada composta alternada de 2ª espécie e assumem-se que as posições relativas das bolas branca,  $A$ , e objeto,  $B$ , são  $(c, l)$  e  $(d, k)$ , respetivamente. As coordenadas da bola branca, bola objeto na trajetória  $T$  e, da bola objeto na trajetória  $T^*$ , são dadas por  $(c - jn, -l)$ ,  $(d - jn, -k)$  e  $\psi(d, k)$ , respetivamente. Então, com  $j$  definido em (3.1), o segmento da reta  $[AB^*]$  que define a trajetória  $T^*$  está contida na reta de equação,*

$$g(x) = \begin{cases} \frac{2in+l-k}{4in+d-c}x - l + \frac{2in+l-k}{4in+d-c}(jn - c) & \text{se } t_r = 0 + 4i \\ \frac{2in+l+k}{4in+d-c}x - l + \frac{2in+l+k}{4in+d-c}(jn - c) & \text{se } t_r = 1 + 4i \\ \frac{2in+l+k}{4in+4n-d-c}x - l + \frac{2in+l+k}{4in+4n-d-c}(jn - c) & \text{se } t_r = 2 + 4i \\ \frac{2in+2n+l-k}{4in+4n-d-c}x - l + \frac{2in+2n+l-k}{4in+4n-d-c}(2j - c) & \text{se } t_r = 3 + 4i \end{cases}, \quad i \in \mathbb{N}_0. \quad (3.9)$$

Mais, a posição ideal de contacto,  $x_i$ , na tabela 1 de forma à bola branca,  $A$ , embater na bola objeto,  $B$ , é solução da equação  $g(x_i - jn) = 0$ , onde  $g$  está definida em (3.9) e é dada por,

$$x_i = \begin{cases} \frac{2in(2l+c)+ld-kc}{2in+l-k} & \text{se } t_r = 0 + 4i \\ \frac{2in(2l+c)+ld+kc}{2in+l+k} & \text{se } t_r = 1 + 4i \\ \frac{2in(2l+c)+l(4n-d)+kc}{2in+l+k} & \text{se } t_r = 2 + 4i \\ \frac{2in(2l+c)+l(4n-d)+c(2n-k)}{2in+2n+l-k} & \text{se } t_r = 3 + 4i \end{cases}, i \in \mathbb{N}_0. \quad (3.10)$$

**Nota:** Caso se aplique no máximo 3 tabelas temos que  $i = 0$  e assim surge a posição ideal trivial,

$$x_i = \begin{cases} \frac{ld-kc}{l-k} & \text{se } t_r = 0 \\ \frac{ld+kc}{l+k} & \text{se } t_r = 1 \\ \frac{l(4n-d)+kc}{l+k} & \text{se } t_r = 2 \\ \frac{l(4n-d)+c(2n-k)}{2n+l-k} & \text{se } t_r = 3 \end{cases}. \quad (3.11)$$

**Exemplo 3.2.25.** Das tacadas apresentadas na figura 3.19 pretende-se encontrar a posição ideal de contacto na tabela 1 ( $x_i$ ) de forma a obter tacadas bem sucedidas.

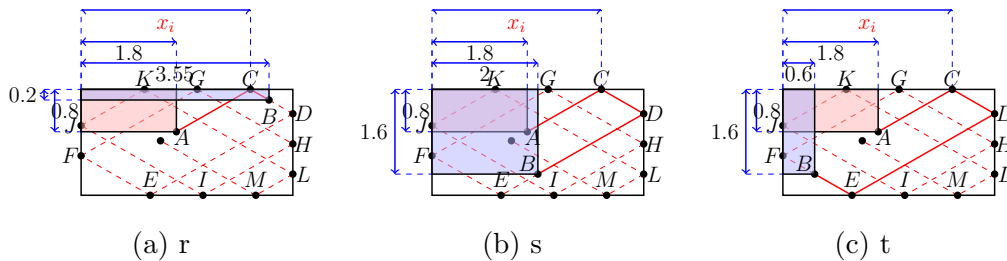


Figura 3.19: Posição ideal de contacto de tacadas compostas alternadas de 2ª espécie

Considerando  $n = 2$  e sabendo que em qualquer tacada apresentada a posição relativa da bola branca é  $(1.8, 0.8)$  e que a posição relativa da bola objeto nas tacadas  $r, s$  e  $t$  são  $(3.55, 0.2)$ ,  $(2, 1.6)$  e  $(0.6, 1.6)$ , respetivamente, a posição ideal de contacto  $(x_i)$  em cada uma das tacadas apresentadas, pela proposição 3.2.24 é:

$$i) \text{ Tacada } r: x_i = \frac{ld+kc}{l+k} = \frac{0.8 \times 3.55 + 0.2 \times 1.8}{0.8 + 0.2} = 3.2.$$

$$ii) \text{ Tacada } s: x_i = \frac{l(4n-d)+kc}{l+k} = \frac{0.8 \times (4 \times 2 - 2) + 1.6 \times 1.8}{0.8 + 1.6} = \frac{7.68}{2.4} = 3.2.$$

$$iii) \text{ Tacada } t: x_i = \frac{l(4n-d)+c(2n-k)}{l+2n-k} = \frac{0.8 \times (4 \times 2 - 0.6) + 1.8 \times (2 \times 2 - 1.6)}{0.8 + 2 \times 2 - 1.6} = \frac{10.24}{3.2} = 3.2.$$

Ou seja, o ponto ideal de contacto na tabela 1 de cada uma das tacadas anteriores está a 3.2 unidades de medida do ponto de referência.

**Observação 3.2.26** (Relação entre tacadas alternadas de  $r^a$  espécie e as trajetórias  $T$  e  $T^*$ ). Seja  $m$  uma tacada composta alternada de  $r^a$  espécie, em que a posição relativa das bolas branca e objeto em  $T$  são  $(c, l)$  e  $(d, k)$ , respetivamente. As respetivas coordenadas na trajetória  $T$  são  $(c - jn, -l)$  e  $(d - jn, -k)$  com,  $j$  definido em (3.1) e,

$$r = \begin{cases} 1 & , \text{ a tacada é de } 1^a \text{ espécie} \\ 2 & , \text{ a tacada é de } 2^a \text{ espécie} \end{cases} \quad (3.12)$$

As coordenadas da bola objeto na trajetória  $T^*$  são definidas em função da sua posição relativa  $(d, k)$  na trajetória  $T$  através da função  $\psi$  com  $t_m + 1$  ramos, da seguinte forma,

$$\psi(d, k) = \begin{cases} (2irn + d - jn, 2(3 - r)in - k) & \text{se } t_m = 0 + 4i \\ (2irn + d - jn, 2(3 - r)in + k) & \text{se } t_m = 1 + 4i \\ (2irn - (d - jn), 2(3 - r)in + k) & \text{se } t_m = 2 + 4i \\ (2irn - (d - jn), 2(3 - r)in + 2(3 - r)n - k) & \text{se } t_m = 3 + 4i \end{cases}, i \in \mathbb{N}_0. \quad (3.13)$$

Por outro lado a função  $\psi$  apresentada em (3.13) pode ser definida matricialmente na forma,

$$\psi(d, k) = \begin{cases} \begin{bmatrix} d - jn & -k & 1 \end{bmatrix}^T & \text{se } t_m = 0 \\ R_y(0) \cdot \begin{bmatrix} d - jn & -k & 1 \end{bmatrix}^T & \text{se } t_m = 1 \\ R_y(0) \cdot R_x(0) \cdot \begin{bmatrix} d - jn & -k & 1 \end{bmatrix}^T & \text{se } t_m = 2 \\ R_y(0) \cdot R_x(0) \cdot R_y(-2n) \cdot \begin{bmatrix} d - jn & -k & 1 \end{bmatrix}^T & \text{se } t_m = 3 \\ R_y(0) \cdot R_x(0) \cdot R_y(-2n) \cdot R_x(-n) \cdot \begin{bmatrix} d - jn & -k & 1 \end{bmatrix}^T & \text{se } t_m = 4 \\ \dots & \dots \end{cases}, \text{ com } r = 1. \quad (3.14)$$

$$\psi(d, k) = \begin{cases} \begin{bmatrix} d - jn & -k & 1 \end{bmatrix}^T & \text{se } t_m = 0 \\ R_y(0) \cdot \begin{bmatrix} d - jn & -k & 1 \end{bmatrix}^T & \text{se } t_m = 1 \\ R_y(0) \cdot R_x(0) \cdot \begin{bmatrix} d - jn & -k & 1 \end{bmatrix}^T & \text{se } t_m = 2 \\ R_y(0) \cdot R_x(0) \cdot R_y(-n) \cdot \begin{bmatrix} d - jn & -k & 1 \end{bmatrix}^T & \text{se } t_m = 3 \\ R_y(0) \cdot R_x(0) \cdot R_y(-n) \cdot R_x(-2n) \cdot \begin{bmatrix} d - jn & -k & 1 \end{bmatrix}^T & \text{se } t_m = 4 \\ \dots & \dots \end{cases}, \text{ com } r = 2. \quad (3.15)$$

**Proposição 3.2.27** (Relação entre tacadas alternadas de  $r^a$  espécie e a trajetória linear  $T^*$ ). *Seja  $m$  uma tacada composta alternada de  $r^a$  espécie. As posições relativas das bolas branca,  $A$ , e objeto,  $B$  são  $(c, l)$  e  $(d, k)$ , respetivamente, e as coordenadas da bola branca, bola objeto nas trajetórias  $T$  e  $T^*$  são  $(c - jn, -l)$ ,  $(d - jn, -k)$  e  $\psi(d, k)$ , respetivamente. Então, com  $j$  e  $r$  definidos em (3.1) e (3.12), respetivamente, o segmento de reta  $[AB^*]$  que define a trajetória  $T^*$  está contida na reta de equação,*

$$h(x) = \begin{cases} \frac{l+2(3-r)in-k}{2irn+d-c}x - l + \frac{l+2(3-r)in-k}{2irn+d-c}(jn-c) & \text{se } t_m = 0 + 4i \\ \frac{l+2(3-r)in+k}{2irn+d-c}x - l + \frac{l+2(3-r)in+k}{2irn+d-c}(jn-c) & \text{se } t_m = 1 + 4i \\ \frac{l+2(3-r)in+k}{2irn+2rn-d-c}x - l + \frac{l+2(3-r)in+k}{2irn+2rn-d-c}(jn-c) & \text{se } t_m = 2 + 4i \\ \frac{l+2(3-r)in+2(3-r)n-k}{2irn+2rn-d-c}x - l + \frac{l+2(3-r)in+2(3-r)n-k}{2irn+2rn-d-c}(jn-c) & \text{se } t_m = 3 + 4i \end{cases}, i \in \mathbb{N}_0. \quad (3.16)$$

Mais, a posição ideal de contacto,  $x_i$ , na tabela 1 de forma à bola branca, A, embater na bola objeto, B, é solução da equação  $h(x_i - jn) = 0$ , onde  $h$  está definida em (3.16).

Daqui decorre que,

$$x_i = \begin{cases} \frac{2in(rl+(3-r)c)+ld-kc}{l+2(3-r)in-k} & \text{se } t_m = 0 + 4i \\ \frac{2in(rl+(3-r)c)+ld+kc}{l+2(3-r)in+k} & \text{se } t_m = 1 + 4i \\ \frac{2in(rl+(3-r)c)+l(2rn-d)+kc}{l+2(3-r)in+k} & \text{se } t_m = 2 + 4i \\ \frac{2in(rl+(3-r)c)+l(2rn-d)+c(2(3-r)n-k)}{l+2(3-r)in+2(3-r)n-k} & \text{se } t_m = 3 + 4i \end{cases}, i \in \mathbb{N}_0. \quad (3.17)$$

E, a posição ideal trivial, até 3 tabelas ( $i = 0$ ), é dada por,

$$x_i = \begin{cases} \frac{ld-kc}{l-k} & \text{se } t_m = 0 \\ \frac{ld+kc}{l+k} & \text{se } t_m = 1 \\ \frac{l(2rn-d)+kc}{l+k} & \text{se } t_m = 2 \\ \frac{l(2rn-d)+c(2(3-r)n-k)}{l+2(3-r)n-k} & \text{se } t_m = 3 \end{cases}. \quad (3.18)$$

**Observação 3.2.28** (Relação entre tacadas não alternadas de 1ª espécie que só utilizam tabelas pequenas e as trajetórias  $T$  e  $T^*$ ). *Seja  $r$  uma tacada composta não alternada de 1ª espécie que só utiliza tabelas pequenas. A*

posição relativa da bola branca é dada por  $(c, l)$  e da bola objeto por  $(d, k)$ . As suas coordenadas, na trajetória  $T$ , são respetivamente  $(c-n, -l)$  e  $(d-n, -k)$ , e as coordenadas da bola objeto na trajetória  $T^*$ , ponto  $B^*$ , é definida em função da sua posição relativa  $(d, k)$  na trajetória  $T$  através da função  $\psi$  com  $t_r + 1$  ramos, da seguinte forma,

$$\psi(d, k) = \begin{cases} (d-n, 4in-k) & \text{se } t_r = 0 + 2i \\ (d-n, 4in+k) & \text{se } t_r = 1 + 2i \end{cases}, i \in \mathbb{N}_0. \quad (3.19)$$

Por outro lado a função  $\psi$  apresentada em (3.19) pode ser definida matricialmente na forma,

$$\psi(d, k) = \begin{cases} \begin{bmatrix} d-n & -k & 1 \end{bmatrix}^T & \text{se } t_r = 0 \\ R_y(0) \cdot \begin{bmatrix} d-n & -k & 1 \end{bmatrix}^T & \text{se } t_r = 1 \\ R_y(0) \cdot R_y(-2n) \cdot \begin{bmatrix} d-n & -k & 1 \end{bmatrix}^T & \text{se } t_r = 2 \\ R_y(0) \cdot R_y(-2n) \cdot R_y(0) \cdot \begin{bmatrix} d-n & -k & 1 \end{bmatrix}^T & \text{se } t_r = 3 \\ R_y(0) \cdot R_y(-2n) \cdot R_y(0) \cdot R_y(-2n) \cdot \begin{bmatrix} d-n & -k & 1 \end{bmatrix}^T & \text{se } t_r = 4 \\ \dots & \dots \end{cases}. \quad (3.20)$$

**Exemplo 3.2.29.** Consideremos a tacada  $r$  composta não alternada de 1ª espécie que utiliza apenas tabelas pequenas, apresentada na figura 3.20.

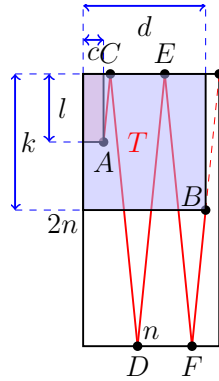


Figura 3.20: Tacada composta não alternada de 1ª espécie que apenas utiliza tabelas pequenas

*Pretendemos que na trajetória da bola branca, esta, após o contacto de  $t_r$  tabelas entre em contacto com a bola objeto. Para tal, podemos encontrar as coordenadas da bola objeto na trajetória linear  $T^*$ , como a observação 3.2.28 sugere.*

*Após o contacto de 4 tabelas, as coordenadas da bola objeto na trajetória  $T^*$  são  $\psi(d, k) = (d - n, 4in - k) = (d - 2, 16 - k)$ , com  $i = 2$  e  $n = 2$ .*

*Considerando que a posição relativa (segundo  $T$ ) e as coordenadas da bola objeto, são de  $(1.8, 2)$  e  $(-0.2, -2)$ , respetivamente, então as coordenadas do ponto  $B^*$  são  $\psi(1.8, 2) = (1.8 - 2, 16 - 2) = (-0.2, 14)$ .*

*Por outro lado, matricialmente, obtemos,  $\psi(1.8, 2) = R_y(0) \cdot R_y(-4) \cdot R_y(0) \cdot R_y(-4) \cdot \begin{bmatrix} -0.2 & -2 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -0.2 & 14 & 1 \end{bmatrix}^T$ .*

**Proposição 3.2.30** (Relação entre tacadas não alternadas de 1ª espécie que só utilizam tabelas pequenas e a trajetória linear  $T^*$ ). *Seja  $r$  uma tacada composta não alternada de 1ª espécie que só utilizam tabelas pequenas. As posições relativas das bolas branca,  $A$ , e da bola objeto,  $B$ , são  $(c, l)$  e  $(d, k)$ , respetivamente, e as coordenadas da bola branca em  $T$  e  $T^*$  são  $(c - n, -l)$ . As coordenadas da bola objeto em  $T$  e  $T^*$  são,  $(d - n, -k)$  e  $\psi(d, k)$ , respe-*

tivamente. Então o segmento de reta  $[AB^*]$  que define a trajetória  $T^*$  está contido na reta de equação,

$$p(x) = \begin{cases} \frac{l+4in-k}{d-c}x - l + \frac{l+4in-k}{d-c}(n-c) & \text{se } t_r = 0 + 2i \\ \frac{l+4in+k}{d-c}x - l + \frac{l+4in+k}{d-c}(n-c) & \text{se } t_r = 1 + 2i \end{cases}, i \in \mathbb{N}_0. \quad (3.21)$$

Mais, a posição ideal de contacto,  $x_i$ , na tabela 1 de forma à bola branca,  $A$ , embater na bola objeto,  $B$ , é solução da equação  $p(x_i - n) = 0$ , onde  $p$  está definida em (3.21).

Daqui resulta que,

$$x_i = \begin{cases} \frac{2in(0l+2c)+ld-kc}{l+4in-k} & \text{se } t_r = 0 + 2i \\ \frac{2in(0l+2c)+ld+kc}{l+4in+k} & \text{se } t_r = 1 + 2i \end{cases}, i \in \mathbb{N}_0. \quad (3.22)$$

Caso se aplique no máximo 3 tabelas temos que  $i = 0$  ou  $i = 1$  e portanto,

$$x_i = \begin{cases} \frac{ld-kc}{l-k} & \text{se } t_r = 0 \\ \frac{ld+kc}{l+k} & \text{se } t_r = 1 \\ \frac{2n \times (0l+2c)+ld-kc}{l+4n-k} & \text{se } t_r = 2 \\ \frac{2n \times (0l+2c)+ld+kc}{l+4n+k} & \text{se } t_r = 3 \end{cases}. \quad (3.23)$$

**Exemplo 3.2.31.** Nas tacadas  $r$ ,  $s$  e  $t$  apresentadas na figura 3.21, pretendemos encontrar a posição ideal de contacto na tabela 1 ( $x_i$ ) de forma a obter tacadas bem sucedidas.

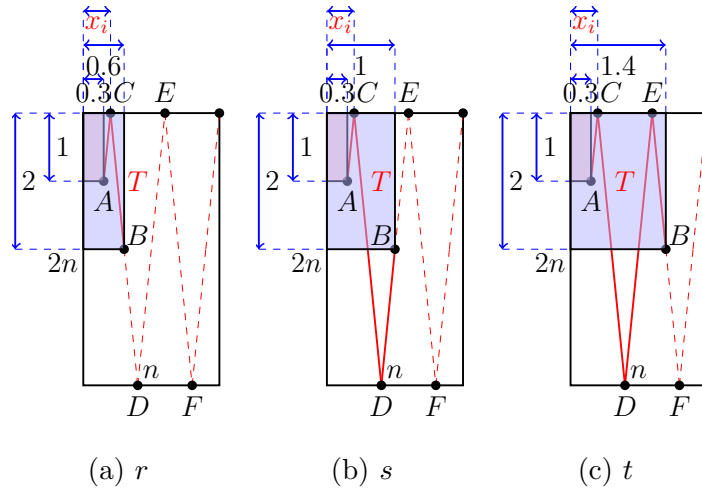


Figura 3.21: Posição ideal de contacto de tacadas compostas não alternadas de 1ª espécie

Considerando  $n = 2$  e sabendo que em qualquer tacada apresentada a posição relativa da bola branca é  $(0.3, 1)$  e que a posição relativa da bola objeto nas tacadas  $r$ ,  $s$  e  $t$  são  $(0.6, 2)$ ,  $(1, 2)$  e  $(1.4, 2)$ , respetivamente, a posição ideal de contacto  $(x_i)$  em cada uma das tacadas apresentadas, pela proposição 3.2.30 são:

$$i) \text{ Tacada } r: x_i = \frac{ld+kc}{l+k} = \frac{1 \times 0.6 + 2 \times 0.3}{1+2} = \frac{1.2}{3} = 0.4.$$

$$ii) \text{ Tacada } s: x_i = \frac{2n \times (0l+2c) + ld - kc}{l+4n-k} = \frac{4 \times (2 \times 0.3) + 1 \times 1 - 2 \times 0.3}{1+8-2} = \frac{2.8}{7} = 0.4.$$

$$iii) \text{ Tacada } t: x_i = \frac{2n \times (0l+2c) + ld + kc}{l+4n+k} = \frac{4 \times (2 \times 0.3) + 1 \times 1.4 + 2 \times 0.3}{1+4 \times 2+2} = \frac{4.4}{11} = 0.4.$$

Ou seja, o ponto ideal de contacto na tabela 1 de cada uma das tacadas anteriores está a 0.4 unidades de medida do ponto de referência.

**Observação 3.2.32** (Relação entre tacadas não alternadas de 2ª espécie que só utilizam tabelas grandes e as trajetórias  $T$  e  $T^*$ ). Seja  $s$  uma tacada composta não alternada de 2ª espécie que só utiliza tabelas grandes. A posição relativa das bolas branca e objeto em  $T$  são  $(c, l)$  e  $(d, k)$ , respetivamente. As suas coordenadas são respetivamente  $(c - jn, -l)$  e  $(d - jn, -k)$ .

As coordenadas da bola objeto em  $T^*$  podem ser definidas em função da sua posição relativa na trajetória  $T$  através da função  $\psi$  com  $t_s + 1$  ramos, com  $j$  definido em (3.1), da seguinte forma,

$$\psi(d, k) = \begin{cases} (d - jn, 2in - k) & \text{se } t_s = 0 + 2i \\ (d - jn, 2in + k) & \text{se } t_s = 1 + 2i \end{cases}, i \in \mathbb{N}_0. \quad (3.24)$$

Por outro lado a função  $\psi$  apresentada em (3.24) pode ser definida matricialmente na forma,

$$\psi(d, k) = \begin{cases} \begin{bmatrix} d - jn & -k & 1 \end{bmatrix}^T & \text{se } t_s = 0 \\ R_y(0) \cdot \begin{bmatrix} d - jn & -k & 1 \end{bmatrix}^T & \text{se } t_s = 1 \\ R_y(0) \cdot R_y(-n) \cdot \begin{bmatrix} d - jn & -k & 1 \end{bmatrix}^T & \text{se } t_s = 2 \\ R_y(0) \cdot R_y(-n) \cdot R_y(0) \cdot \begin{bmatrix} d - jn & -k & 1 \end{bmatrix}^T & \text{se } t_s = 3 \\ R_y(0) \cdot R_y(-n) \cdot R_y(0) \cdot R_y(-n) \cdot \begin{bmatrix} d - jn & -k & 1 \end{bmatrix}^T & \text{se } t_s = 4 \\ \dots & \dots \end{cases} \quad (3.25)$$

**Exemplo 3.2.33.** Na figura 3.22 apresenta-se a tacada  $s$  composta não alternada de 2ª espécie que utiliza apenas tabelas grandes.

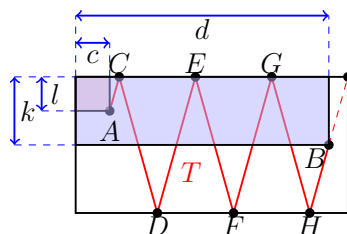


Figura 3.22: Tacada composta não alternada de 2ª espécie que utiliza apenas tabelas grandes

Pretendemos que na trajetória da bola branca, esta, após o contacto de  $t_s$  tabelas entre em contacto com a bola objeto. Para tal, podemos encontrar as coordenadas da bola objeto na trajetória linear  $T^*$ , como a observação 3.2.32 sugere.

Assim, após o contacto de 6 tabelas, as coordenadas da bola objeto em  $T^*$  são  $\psi(d, k) = (d - jn, 2in - k) = (d - 4, 12 - k)$ , com  $i = 3$ ,  $j = 2$  e  $n = 2$ .

Considerando que a posição relativa (segundo  $T$ ) e as coordenadas da bola objeto, são de  $(3.72, 1)$  e  $(-0.28, -1)$ , respetivamente, então as coordenadas do ponto  $B^*$  em  $T^*$  são  $\psi(d, k) = \psi(3.72, 1) = (3.72 - 4, 12 - 1) = (-0.28, 11)$ .

Por outro lado, matricialmente, obtemos,  $\psi(3.72, 1) = R_y(0) \cdot R_y(-2) \cdot R_y(0) \cdot R_y(-2) \cdot R_y(0) \cdot R_y(-2) \cdot \begin{bmatrix} -0.28 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -0.28 & 11 & 1 \end{bmatrix}^T$ .

**Proposição 3.2.34** (Relação entre tacadas não alternadas de 2ª espécie que apenas utilizam tabelas grandes e a trajetória linear  $T^*$ ). *Seja  $s$  uma tacada composta não alternada de 2ª espécie que apenas utiliza tabelas grandes. As posições relativas das bolas branca,  $A$ , e objeto,  $B$ , são  $(c, l)$  e  $(d, k)$ , respetivamente. As coordenadas da bolas branca em  $T$  e  $T^*$  são  $(c - jn, -l)$  e as coordenadas da bola objeto em  $T$  e  $T^*$  são  $(d - jn, -k)$  e  $\psi(d, k)$ , respetivamente. Então o segmento de reta  $[AB^*]$  que define a trajetória  $T^*$  está contido na reta de equação,*

$$v(x) = \begin{cases} \frac{l+2in-k}{d-c}x - l + \frac{l+2in-k}{d-c}(jn - c) & \text{se } t_s = 0 + 2i \\ \frac{l+2in+k}{d-c}x - l + \frac{l+2in+k}{d-c}(jn - c) & \text{se } t_s = 1 + 2i \end{cases}, i \in \mathbb{N}_0. \quad (3.26)$$

Mais, a posição ideal de contacto,  $x_i$ , na tabela 1 de forma à bola branca,  $A$ , embater na bola objeto,  $B$ , é solução da equação  $v(x_i - jn) = 0$ , onde  $v$  está definida em (3.26).

Daqui resulta que,

$$x_i = \begin{cases} \frac{2in(0l+1c)+ld-kc}{l+2in-k} & \text{se } t_s = 0 + 2i \\ \frac{2in(0l+1c)+ld+kc}{l+2in+k} & \text{se } t_s = 1 + 2i \end{cases}, i \in \mathbb{N}_0. \quad (3.27)$$

Caso se aplique no máximo 3 tabelas temos que  $i = 0$  ou  $i = 1$  e assim,

$$x_i = \begin{cases} \frac{ld-kc}{l-k} & \text{se } t_s = 0 \\ \frac{ld+kc}{l+k} & \text{se } t_s = 1 \\ \frac{2n(0l+1c)+ld-kc}{l+2n-k} & \text{se } t_s = 2 \\ \frac{2n(0l+1c)+ld+kc}{l+2n+k} & \text{se } t_s = 3 \end{cases}, i \in \mathbb{N}_0. \quad (3.28)$$

**Exemplo 3.2.35.** Nas tacadas  $r$ ,  $s$  e  $t$  apresentadas na figura 3.23, pretendemos encontrar a posição ideal de contacto na tabela 1 ( $x_i$ ) de forma a obter tacadas bem sucedidas.

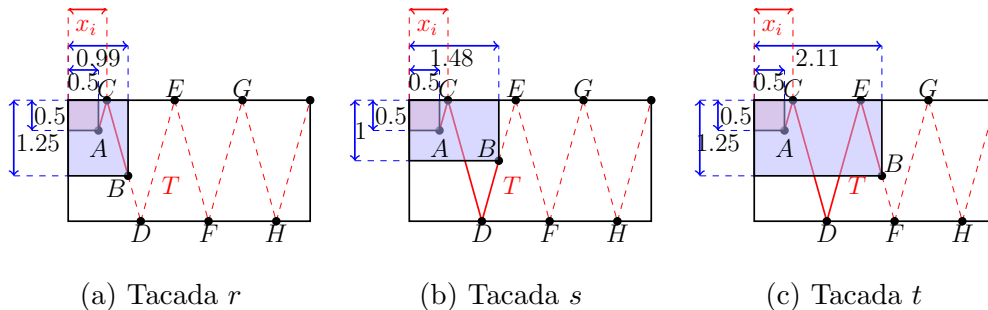


Figura 3.23: Posição ideal de contacto de tacadas compostas não alternadas de 2ª espécie

Seja  $n = 2$ . Em qualquer tacada apresentada a posição relativa da bola branca é  $(0.5, 0.5)$  e as posições relativas da bola objeto nas tacadas  $r$ ,  $s$  e  $t$  são  $(0.99, 1.25)$ ,  $(1.48, 1)$  e  $(2.11, 1.25)$ , respetivamente. A posição do ponto ideal de contacto ( $x_i$ ) em cada uma das tacadas apresentadas, pela proposição 3.2.34, são:

$$i) \text{ Tacada } r: x_i = \frac{ld+kc}{l+k} = \frac{0.5 \times 0.99 + 0.1.25 \times 0.5}{0.5+1.25} = \frac{1.12}{1.75} = 0.64.$$

$$ii) \text{ Tacada } s: x_i = \frac{2n(0l+1c)+ld-kc}{l+2n-k} = \frac{4 \times 0.5 + 0.5 \times 1.48 - 1 \times 0.5}{0.5+4-1} = \frac{2.24}{3.5} = 0.64.$$

$$iii) \text{ Tacada } t: x_i = \frac{2n(0l+1c)+ld+kc}{l+2n+k} = \frac{4 \times 0.5 + 0.5 \times 2.11 + 1.25 \times 0.5}{0.5+4+1.25} = \frac{3.68}{5.75} = 0.64.$$

Ou seja, o ponto ideal de contacto na tabela 1 de cada uma das tacadas anteriores está a 0.64 unidades de medida do ponto de referência.

**Observação 3.2.36** (Relação entre tacadas não alternadas de  $r^a$  espécie que só utilizam tabelas da mesma dimensão e as trajetórias  $T$  e  $T^*$ ). *Seja  $m$  uma tacada composta não alternada de  $r^a$  espécie que só utiliza tabelas da mesma dimensão. A posição relativa das bolas branca e objeto são respetivamente  $(c, l)$  e  $(d, k)$ . As suas coordenadas são respetivamente  $(c - jn, -l)$  e  $(d - jn, -k)$ . As coordenadas da bola objeto em  $T^*$  são definidas em função da sua posição relativa  $(d, k)$  através da função  $\psi$  com  $t_m + 1$  ramos, com  $j$  e  $r$  definidos respetivamente em (3.1) e (3.12), da seguinte forma:*

$$\psi(d, k) = \begin{cases} (d - jn, 2(3 - r)in - k) & \text{se } t_m = 0 + 2i \\ (d - jn, 2(3 - r)in + k) & \text{se } t_m = 1 + 2i \end{cases}, i \in \mathbb{N}_0. \quad (3.29)$$

Por outro lado a função  $\psi$  apresentada em 3.29 pode ser definida matricialmente na forma,

$$\psi(d, k) = \begin{cases} \begin{bmatrix} d - jn & -k & 1 \end{bmatrix}^T & \text{se } t_m = 0 \\ R_y(0) \cdot \begin{bmatrix} d - jn & -k & 1 \end{bmatrix}^T & \text{se } t_m = 1 \\ R_y(0) \cdot R_y(-2n) \cdot \begin{bmatrix} d - jn & -k & 1 \end{bmatrix}^T & \text{se } t_m = 2 \\ R_y(0) \cdot R_y(-2n) \cdot R_y(0) \cdot \begin{bmatrix} d - jn & -k & 1 \end{bmatrix}^T & \text{se } t_m = 3 \\ R_y(0) \cdot R_y(-2n) \cdot R_y(0) \cdot R_y(-2n) \cdot \begin{bmatrix} d - jn & -k & 1 \end{bmatrix}^T & \text{se } t_m = 4 \\ \dots & \dots \end{cases}, \text{ com } r = 1. \quad (3.30)$$

$$\psi(d, k) = \begin{cases} \begin{bmatrix} d - jn & -k & 1 \end{bmatrix}^T & \text{se } t_m = 0 \\ R_y(0) \cdot \begin{bmatrix} d - jn & -k & 1 \end{bmatrix}^T & \text{se } t_m = 1 \\ R_y(0) \cdot R_y(-n) \cdot \begin{bmatrix} d - jn & -k & 1 \end{bmatrix}^T & \text{se } t_m = 2 \\ R_y(0) \cdot R_y(-n) \cdot R_y(0) \cdot \begin{bmatrix} d - jn & -k & 1 \end{bmatrix}^T & \text{se } t_m = 3 \\ R_y(0) \cdot R_y(-n) \cdot R_y(0) \cdot R_y(-n) \cdot \begin{bmatrix} d - jn & -k & 1 \end{bmatrix}^T & \text{se } t_m = 4 \\ \dots & \end{cases}, \text{ com } r = 2. \quad (3.31)$$

**Proposição 3.2.37** (Relação entre tacadas não alternadas de  $r^a$  espécie que apenas utilizam tabelas da mesma dimensão e a trajetória linear  $T^*$ ). *Seja  $m$  uma tacada composta não alternada de  $r^a$  espécie que apenas utiliza tabelas da mesma dimensão. As posições relativas das bolas branca,  $A$ , e objeto,  $B$ , são  $(c, l)$  e  $(d, k)$ , respetivamente. As coordenadas da bola branca, nas trajetórias  $T$  e  $T^*$  são  $(c - jn, -l)$ . As coordenadas da bola objeto em  $T$  e  $T^*$  são  $(d - jn, -k)$  e  $\psi(d, k)$ , respetivamente. Então, com  $r$  definido em (3.12), o segmento de reta  $[AB^*]$  que define a trajetória  $T^*$  está contido na reta de equação,*

$$q(x) = \begin{cases} \frac{l+2(3-r)in-k}{d-c}x - l + \frac{l+2(3-r)in-k}{d-c}(jn - c) & \text{se } t_m = 0 + 2i \\ \frac{l+2(3-r)in+k}{d-c}x - l + \frac{l+2(3-r)in+k}{d-c}(jn - c) & \text{se } t_m = 1 + 2i \end{cases}, i \in \mathbb{N}_0. \quad (3.32)$$

*Mais, a posição ideal de contacto,  $x_i$ , na tabela 1 de forma à bola branca,  $A$ , embater na bola objeto,  $B$ , é solução da equação  $q(x_i - jn) = 0$ , com  $q$  definida em (3.32).*

A solução desta equação é,

$$x_i = \begin{cases} \frac{2in(0l+(3-r)c)+ld-kc}{l+2(3-r)in-k} & \text{se } t_m = 0 + 2i \\ \frac{2in(0l+(3-r)c)+ld+kc}{l+2(3-r)in+k} & \text{se } t_m = 1 + 2i \end{cases}, i \in \mathbb{N}_0, \quad (3.33)$$

Caso se aplique no máximo 3 tabelas temos que  $i = 0$  ou  $i = 1$  e a solução trivial é dada por,

$$x_i = \begin{cases} \frac{ld-kc}{l-k} & \text{se } t_m = 0 \\ \frac{ld+kc}{l+k} & \text{se } t_m = 1 \\ \frac{2n(0l+(3-r)c)+ld-kc}{l+2(3-r)n-k} & \text{se } t_m = 2 \\ \frac{2n(0l+(3-r)c)+ld+kc}{l+2(3-r)n+k} & \text{se } t_m = 3 \end{cases}. \quad (3.34)$$

**Observação 3.2.38.** *Seja  $r$  uma tacada composta, bem sucedida, onde a bola  $B$  está junto a um copo da mesa de bilhar. O número de tabelas 1 e 3 utilizadas na tacada coincidem com o número de reflexões sobre retas paralelas a  $Oy$  e o número de tabelas 2 e 4 coincidem com o número de reflexões sobre paralelas a  $Ox$  realizadas pela trajetória da bola branca.*

**Observação 3.2.39.** *Seja  $r$  uma tacada composta, bem sucedida, onde a bola  $B$  está junto a um copo da mesa de bilhar. As coordenadas da bola objeto na trajetória  $T^*$ , ponto  $B^*$ , são  $((\beta_r - j)n, \alpha_r n)$ .*

**Exemplo 3.2.40.** *Considere as tacadas compostas, bem sucedidas, apresentadas na figura 3.24.*

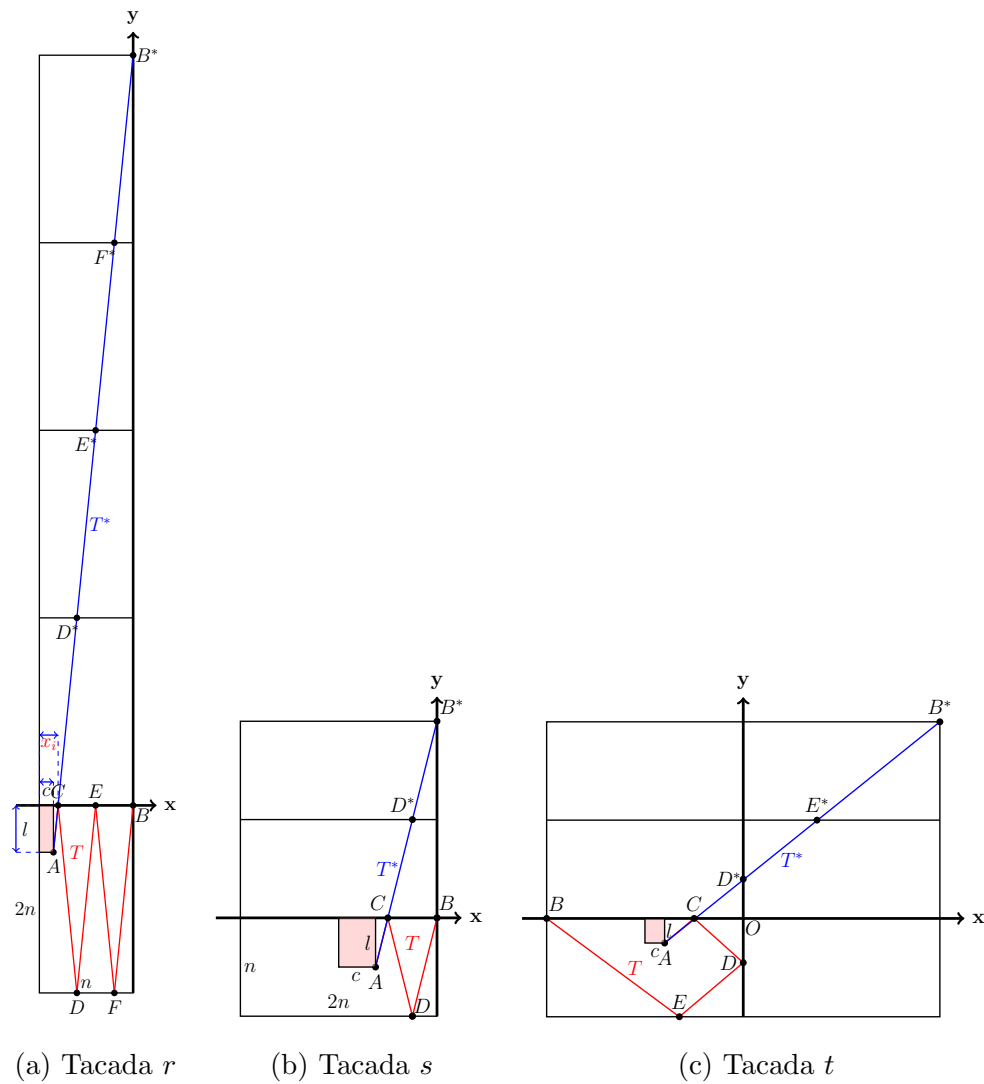


Figura 3.24: Coordenadas da bola objeto em  $T^*$  de tacadas compostas não alternadas - variante A

Segundo a observação 3.2.39, temos que:

- i) Tacada  $r$ : As coordenadas do ponto  $B^*$  são  $((\beta_r - j)n, \alpha_r n) = (0, 8n)$ , dado que  $\beta_r = 1$ ,  $\alpha_r = 8$  e  $j = 1$ .
- ii) Tacada  $s$ : As coordenadas do ponto  $B^*$  são  $((\beta_s - j)n, \alpha_s n) = (0, 2n)$ ,

com  $\beta_s = 1$ ,  $\alpha_s = 2$  e  $j = 1$ .

iii) Tacada  $t$ : As coordenadas do ponto  $B^*$  são  $((\beta_t - j)n, \alpha_t n) = (2n, 2n)$ , dado que  $\beta_t = 3$ ,  $\alpha_t = 2$  e  $j = 1$ .

**Proposição 3.2.41** (Trajetória linear  $T^*$  de uma tacada composta bem sucedida em que a bola objeto está sobre um copo da mesa de bilhar). *Seja  $r$  uma tacada composta bem sucedida com movimentos  $(\alpha_r, \beta_r)$  em que a bola objeto, bola  $B$ , está junto a um copo da mesa de bilhar, com posição relativa  $(d, k)$  e coordenadas  $(d - jn, -k)$ . A posição relativa e coordenadas da bola branca na trajetória  $T$  são  $(c, l)$  e  $(c - jn, -l)$ , respetivamente. As coordenadas da bola objeto em  $T^*$  são  $((\beta_r - j)n, \alpha_r n)$ .*

Com  $j$  definido em (3.1), a reta que contém o segmento de reta  $[AB^*]$  que define a trajetória linear  $T^*$  é dado por,

$$u(x) = \frac{\alpha_r n + l}{\beta_r n - c} x - l + \frac{\alpha_r n + l}{\beta_r n - c} (jn - c). \quad (3.35)$$

A posição ideal de contacto na tabela 1,  $(x_i)$ , de forma à tacada ser bem sucedida é solução da equação  $u(x_i - jn) = 0$ , onde  $u$  é definida em (3.35).

Sendo  $x_i$  dado por,

$$x_i = \frac{\alpha_r c + \beta_r l}{\alpha_r n + l} n. \quad (3.36)$$

#### Notas:

- i) A determinação da posição de ideal de contacto de uma tacada composta e bem sucedida na variante  $A$ , não depende do parâmetro  $j$ ;
- ii) Para determinar a posição ideal de contacto nas condições apresentadas é apenas necessário saber o número de movimentos da tacada  $r$ ,  $(\alpha_r, \beta_r)$ , e a posição relativa da bola branca,  $(c, l)$ .

**Exemplo 3.2.42.** *Considere a situação problema ilustrada na figura 3.25.*

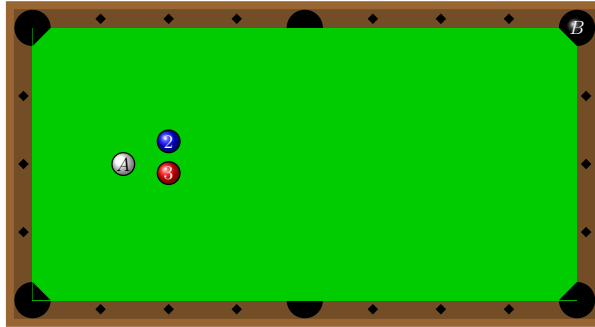


Figura 3.25: Situação problema

Um jogador pretende que a bola branca,  $A$ , contacte a bola preta,  $B$ , de forma a ganhar a partida. No entanto, tem duas bolas, 2 e 3, a impedir a possibilidade da bola branca contactar diretamente a bola preta sem recorrer ao uso de tabelas da mesa de bilhar. Assim, o jogador idealiza uma tacada composta a adotar de forma a obter o resultado pretendido. Vamos imaginar que o jogador idealizou as tacadas  $r$ ,  $s$ ,  $t$  e  $u$  apresentadas na figura 3.26.

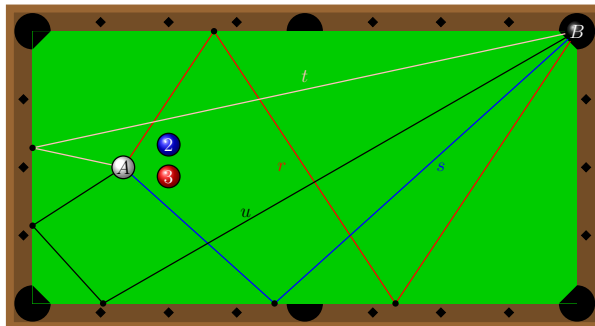


Figura 3.26: Situação problema: Posição ideal de contacto - variante A

Para a tacada escolhida ser bem sucedida é necessário encontrar a posição ideal de contacto na tabela 1 pela bola branca ( $x_i$ ). Para tal, vamos utilizar o resultado obtido em (3.36).

Considerando  $n = 2$ , nas figuras 3.27 e 3.28 apresenta-se cada uma das

tacadas idealizadas pelo jogador, a posição relativa da bola branca e o respetivo número de movimentos inerentes a cada tacada.

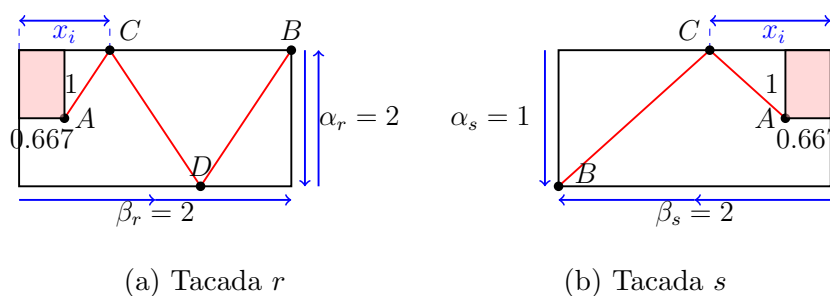


Figura 3.27: Tacadas  $r$  e  $s$ : Posição ideal de contacto - variante  $A$  - possíveis soluções

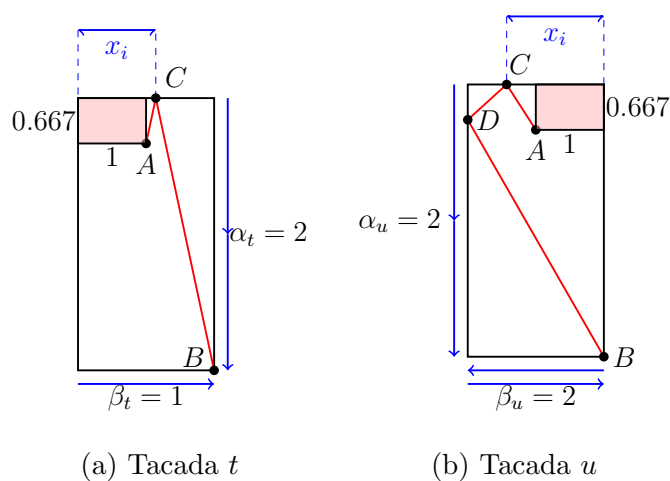


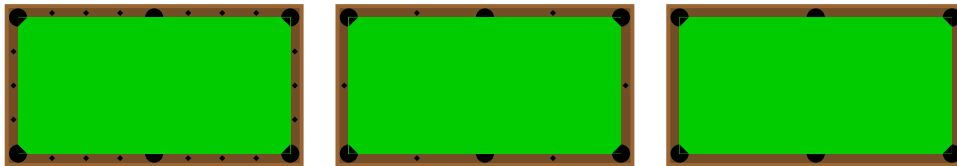
Figura 3.28: Tacadas  $t$  e  $u$ : Posição ideal de contacto - variante  $A$  - possíveis soluções

Obtendo os seguintes resultados:

- i) Tacada  $r$ :  $x_i = \frac{2 \times 0.667 + 2 \times 1}{2 \times 2 + 1} \times 2 = 1,333$ ;
- ii) Tacada  $s$ :  $x_i = \frac{1 \times 0.667 + 2 \times 1}{1 \times 2 + 1} \times 2 = 1,778$ ;
- iii) Tacada  $t$ :  $x_i = \frac{2 \times 1 + 1 \times 0.667}{2 \times 2 + 0.667} \times 2 = 1,143$ ;
- iv) Tacada  $u$ :  $x_i = \frac{2 \times 1 + 2 \times 0.667}{2 \times 2 + 0.667} \times 2 = 1,429$ .

**Observação 3.2.43.** *O resultado obtido em (3.36) é importante, pois:*

- i) garante ao jogador o conforto de identificar a distância sobre a tabela 1 de contacto,  $x_i$ , a partir da posição relativa da bola branca, do número de movimentos ascendentes/descendentes e laterais a realizar pela tacada e da dimensão que julgar adequada estipular para a tabela pequena da mesa de bilhar.*
- ii) é muito complicado, realizar tacadas com recurso a mais do que uma tabela com rigor científico através do uso de simetrias.*
- iii) permite criar uma aplicação informática que coloque em prática os resultados obtidos neste documento e que apresente modelos de treino nesta modalidade.*
- iv) permite ao jogador, aliar o rigor científico à sua inspiração/sensação na toma de decisões.*
- v) é funcional ser utilizada em competição dados que as dimensões das mesas de bilhar são  $n \times 2n$  e existem 3 variantes de mesas com diferentes marcas (diamantes) de apoio nas tabelas, tal como a figura 3.29 sugere.*



(a) Variante 1

(b) Variante 2

(c) Variante 3

Figura 3.29: Variantes de mesas de bilhar

**Notas:**

- 1. Variante 1: Tem 3 diamantes por tabela pequena. A distância entre dois diamantes é  $\frac{n}{4}$ .*
- 2. Variante 2: Tem 1 diamante por tabela pequena. A distância entre*

o diamante e os copos sobre essa tabela pequena é  $\frac{n}{2}$ .

3. Variante 3: Não tem a marcação de diamantes nas tabelas.

**Observação 3.2.44** (Efeito do erro inicial no erro final obtido de uma tacada composta não bem sucedida, onde a bola objeto está sobre um copo da mesa de bilhar). *Seja a tacada não bem sucedida  $r$  com erro inicial,  $e_i(r)$ , erro final,  $e_f(r)$ , e, a posição de contacto na tabela 1 é o ponto  $C$ . Se as posições relativas das bolas branca e objeto são  $(c, l)$  e  $(d, k)$ , respetivamente, temos que:*

i) *Se  $C_x < x_i$ , a trajetória linear  $T^*$ , está contida na reta definida por,*

$$t(x) = \frac{\alpha_r n + e_f(r) + l}{\beta_r n - c} x - l - \frac{\alpha_r n + e_f(r) + l}{\beta_r n - c} (c - jn). \quad (3.37)$$

*Onde, as coordenadas da bola branca, ponto  $C$  e do ponto  $B^*$  são  $(c - jn, -l)$ ,  $(x_i - e_i(r) - jn, 0)$  e  $((\beta_r - j)n, \alpha_r n + e_f(r))$ , respetivamente.*

*O zero dessa reta é  $x_i - e_i(r) - jn$ , de onde se obtém,*

$$x_i - e_i(r) = c + \frac{l(\beta_r n - c)}{\alpha_r n + e_f(r) + l} = \frac{n(\alpha_r c + \beta_r l) + e_f(r)c}{\alpha_r n + e_f(r) + l}. \quad (3.38)$$

ii) *Se  $C_x > x_i$  a trajetória linear  $T^*$  está contida na reta definida por,*

$$l(x) = \frac{\alpha_r n - e_f(r) + l}{\beta_r n - c} x - l - \frac{\alpha_r n - e_f(r) + l}{\beta_r n - c} (c - jn). \quad (3.39)$$

*Onde, as coordenadas da bola branca, ponto  $C$  e do ponto  $B^*$  são  $(c - jn, -l)$ ,  $(x_i + e_i(r) - jn, 0)$  e  $((\beta_r - j)n, \alpha_r n - e_f(r))$ , respetivamente.*

*O zero dessa reta é  $x_i + e_i(r) - jn$ , de onde se obtém,*

$$x_i + e_i(r) = \frac{l\beta_r n + \alpha_r n c - e_f(r)c}{\alpha_r n - e_f(r) + l}. \quad (3.40)$$

iii) Por i) e ii), a trajetória linear  $T^*$ , está contida na reta definida por,

$$v(x) = \frac{\alpha_r n + we_f(r) + l}{\beta_r n - c} x - l - \frac{\alpha_r n + we_f(r) + l}{\beta_r n - c} (c - jn) \quad (3.41)$$

com,

$$w = \begin{cases} 1 & , C_x < x_i \\ -1 & , C_x > x_i \end{cases} . \quad (3.42)$$

Como o zero da função  $v$  é  $x_i - we_i(m) - jn$  resulta,

$$x_i - we_i(r) = c + \frac{l(\beta_r n - c)}{\alpha_r n + we_f(r) + l} \quad (3.43)$$

**Exemplo 3.2.45.** Considere a situação apresentada na figura 3.30 onde se pretende aplicar uma tacada composta bem sucedida de forma à bola branca,  $A$ , contactar a bola  $B$  através do uso de tabelas. Repare que a bola  $B$  não está posicionada sobre um copo, mas sim  $\frac{n}{2}$  unidades de medida antes do copo do fundo junto à tabela grande.

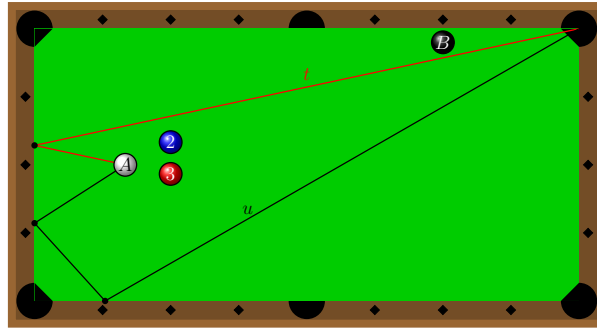


Figura 3.30: Situação problema: Efeito do erro inicial e final numa tacada - variante  $B$

Sendo assim é necessário determinar  $e_i(t)$  e  $e_i(u)$  de forma a obter o contacto pretendido.

Na figura 3.31 apresentamos as tacadas normais e corrigidas  $t$  e  $u$ , onde se apresentam os movimentos de cada tacada e a respetiva posição relativa da bola branca.

Considerando  $n = 2$ , a bola  $B$  está a uma unidade de medida do copo ilustrado.

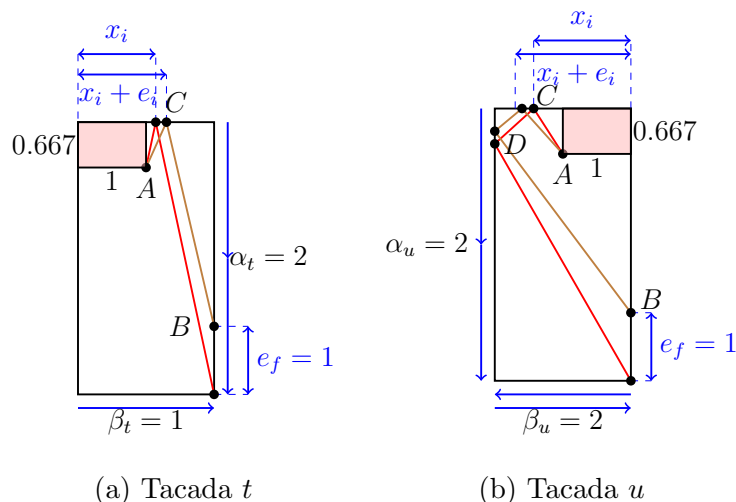


Figura 3.31: Situação problema: Efeito do erro inicial e final de uma tacada - posição ideal de contacto

Assim, pelas equações (3.36) e (3.43), obtemos:

i) Tacada  $t$ :

1. A posição ideal de contacto,  $x_i$ , é:  $\frac{2(2 \times 1 + 1 \times 0.667)}{2 \times 2 + 0.667} = 1.143$ .
2. A posição ideal de contacto corrigido,  $x_i + e_i$ , é:  $1 + \frac{0.667(1 \times 2 - 1)}{2 \times 2 - 1 + 0.667} = 1.18$ .

ii) Tacada  $u$ :

1. A posição ideal de contacto,  $x_i$ , é:  $\frac{2(2 \times 1 + 2 \times 0.667)}{2 \times 2 + 0.667} = 1.429$ ;
2. A posição ideal de contacto corrigido,  $x_i + e_i$ , é:  $1 + \frac{0.667(2 \times 2 - 1)}{2 \times 2 - 1 + 0.667} = 1.5457$ .

### 3.3 Contributos

Uma das dificuldades ao praticar bilhar consiste em “escapar” com sucesso a uma situação de snooker através do uso de tabelas. Nesta secção vamos salientar a utilidade e praticabilidade dos resultados obtidos neste trabalho, na ótica do jogador, em detrimento das simetrias que tradicionalmente são utilizadas, através da apresentação de alguns exemplos práticos.

#### 3.3.1 Aplicações das simetrias

Nas variantes  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ , vamos ilustrar algumas tacadas e simetrias a realizar de forma a produzir uma tacada bem sucedida.

As simetrias a realizar procuram identificar pontos auxiliares interiores/exteriores à mesa de bilhar que vão permitir ao jogador tomar a decisão correta ao efetuar uma tacada.

De seguida, apresentamos algumas simetrias que podem ser aplicadas em tacadas que utilizam apenas uma tabela:

- i) Simetria  $A$ : Simetria da posição da bola branca relativamente à 1<sup>a</sup> tabela de contacto da mesma;
- ii) Simetria  $B$ : Simetria da posição da bola objeto relativamente à 1<sup>a</sup> tabela de contacto da bola branca;
- iii) Simetria  $C$ : Simetria da posição da bola objeto relativamente à 1<sup>a</sup> tabela de contacto da bola branca com recurso do ponto médio de  $[AB]$ , ponto  $M$ , onde  $A$  e  $B$  são os pontos das bolas branca e objeto, respetivamente.

As simetrias  $A$ ,  $B$  e  $C$  são facilmente aplicáveis na determinação do ponto ideal de contacto na 1<sup>a</sup> tabela, ponto  $C$ , quando se tratam de tacadas que usam apenas uma tabela.

De seguida apresentamos algumas situações problema, cujo objetivo é exemplificar a aplicação das simetrias sugeridas de forma a realizar uma tacada composta bem sucedida.

Na figura 3.32 apresenta-se as tacadas  $r$ ,  $s$ ,  $t$  e  $u$ , nas variantes  $A$ ,  $C$ ,  $B$  e  $D$ , respetivamente.

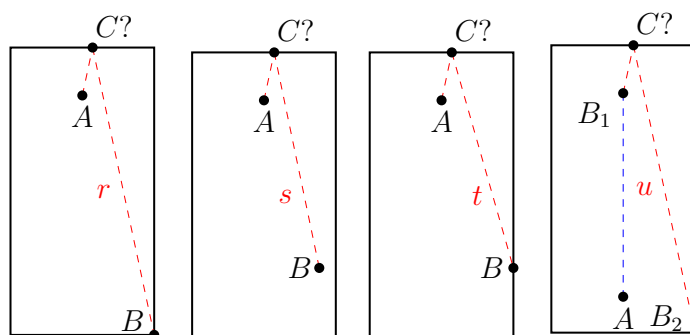


Figura 3.32: Tacadas  $r$ ,  $s$ ,  $t$  e  $u$  - variantes

Nas tacadas  $r$ ,  $s$  e  $t$  vamos identificar o ponto ideal de contacto na 1ª tabela, ponto  $C$ , a partir das simetrias  $A$ ,  $B$  e  $C$ , respetivamente, de forma à bola  $A$  contactar com sucesso na bola  $B$ .

Na figura 3.33 apresenta-se as simetrias aplicadas e a correta identificação do ponto  $C$ .

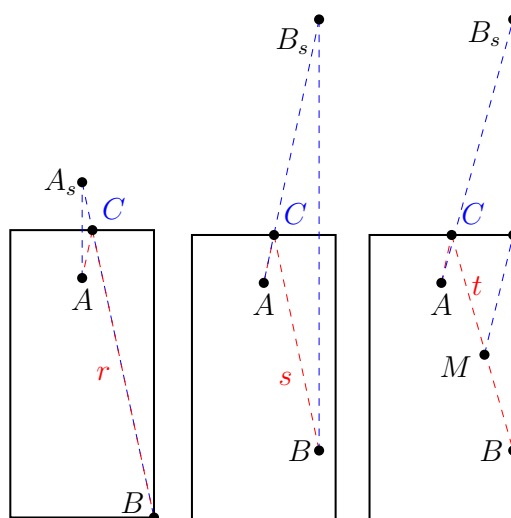


Figura 3.33: Tacadas  $r$ ,  $s$  e  $t$  - simetrias

Na tacada  $u$ , pretende-se contactar a bola  $A$  na bola  $B_1$  e fazendo com que essa vá a uma tabela e entre no copo, identificado por  $B_2$ . Neste caso, vamos supor que a bola de contacto  $B_1$  é a bola branca e aplicamos uma das simetrias apresentadas (por exemplo, a simetria  $A$ ). Ao identificar o ponto de embate da bola  $B_1$  na tabela (ponto  $C$ ), de forma a fazer com que a bola  $B_1$  vá em direção do copo (identificado pelo ponto  $B_2$ ), pretende-se igualmente identificar o ponto de contacto da bola  $A$  na bola  $B_1$ , de forma à tacada ser bem sucedida. Para tal vamos idealizar a bola  $F_a$ , bola tangente à bola objeto  $B_1$ , que está contida na reta  $CB_1$  e realizar a tacada de forma à bola  $A$  ir na direção da bola  $F_a$ , tal como a figura 3.34 ilustra.

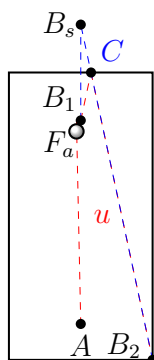


Figura 3.34: Tacada  $u$  - Simetria  $A$

### 3.3.2 Aplicações dos resultados obtidos

É importante encontrar cientificamente outras formas (mais práticas, eficazes e capazes de serem utilizadas pelos jogadores de bilhar durante uma partida) de identificar a posição do ponto  $C$ , pois geralmente a aplicação de simetrias é mais complicada quanto maior o número de tabelas utilizadas.

Através dos estudos efetuados e dos resultados alcançados nesta dissertação destaca-se a descoberta de uma expressão analítica capaz de determinar com precisão o ponto ideal de contacto da bola branca, quer na 1ª

tabela (nas variantes  $A$ ,  $B$  e  $C$ ) quer na bola objeto (variante  $D$ ), de forma a obter uma tacada composta bem sucedida.

Salientamos que essa expressão pode ser utilizada em qualquer tacada composta, nas variantes  $A$ ,  $B$ ,  $C$  ou  $D$ .

Em tacadas compostas que utilizam mais do que uma tabela, esta resolução analítica é mais vantajosa e prática de ser utilizada por um atleta durante uma partida de bilhar, em detrimento dos métodos tradicionais conhecidos.

De seguida apresentamos novamente as tacadas  $r$ ,  $s$ ,  $t$  e  $u$  ilustradas na figura 3.32, cujo objetivo é aplicar os resultados obtidos neste trabalho na identificação do ponto ideal de contacto na 1ª tabela de forma a produzir tacadas compostas bem sucedidas.

Considerando  $n = 2$  e a posição relativa da bola branca nas tacadas  $r$ ,  $s$  e  $t$  é  $(1, 0.667)$ , obtemos:

- i) Tacada  $r$  - Variante A: Sabendo que o número de movimentos são  $(1, 2)$ , pela equação 3.36 definida na proposição 3.2.41, obtemos  $x_i = 1.143$ ;
- ii) Tacada  $s$  - Variante C: Sabendo que a tacada é composta alternada de 1ª espécie, a posição relativa da bola  $B$  é  $(1.77, 3)$  e  $t_s = 1$ , pela proposição 3.2.27 e equações (3.12) e (3.18) obtemos,  $x_i = \frac{ld+kc}{l+k} = \frac{ld+kc}{l+k} = 1.14$ ;
- iii) Tacada  $t$  - Variante B: Sabendo que a tacada é composta alternada de 1ª espécie, o erro final é de uma unidade de medida ( $e_f(t) = 1$ ) com  $w = -1$  e o número de movimentos são  $(2, 1)$ , pelas observação 3.2.44 e equação (3.43) obtemos,  $x_i + e_i(x) = 1 + \frac{0.667(1 \times 2 - 1)}{2 \times 2 - 1 + 0.667} = 1.18$ .

Na figura 3.35 apresentamos uma ilustração dos resultados obtidos nas tacadas  $r$ ,  $s$  e  $t$ .

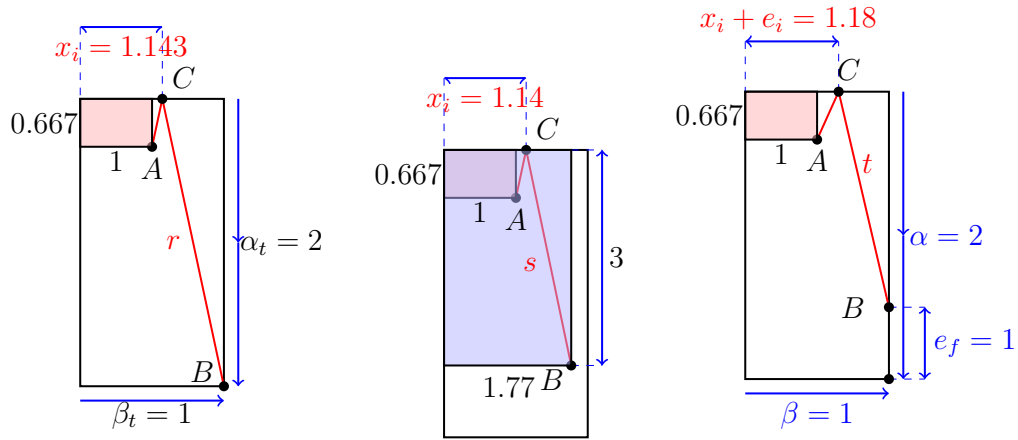


Figura 3.35: Tacadas  $r$ ,  $s$  e  $t$  - posição ideal de contacto

Na determinação da posição ideal de contacto na tacada  $u$  - variante  $D$ , imaginamos que a bola objeto,  $B_1$ , é a bola branca e que a bola objeto está no copo onde queremos que entre,  $B_2$ . Vamos resolver esta situação tal como fizemos na tacada  $r$  - variante  $A$ .

Sabendo que são iguais as posições das bolas  $A$  e  $B_1$  nas respetivas tacadas  $r$  e  $u$ , a posição ideal de contacto da bola  $B_1$  na tabela, na tacada  $u$  será a mesma que na tacada  $r$  que já tinha sido determinada ( $x_i = 1.143$ ).

Assim, identificado a posição ideal de contacto na tabela 1 vamos seguir ordenadamente as seguintes etapas:

- i) identificar a reta,  $m$ , que passa pelo ponto  $C$  e pelo centro da bola  $B_1$ ;
- ii) identificar o ponto da superfície da bola objeto,  $B_1$ , que pertence à reta  $m$  e que será o ponto de contacto da bola  $A$ ;
- iii) idealizar uma bola tangente à bola objeto,  $B_1$ , no ponto identificado em *ii*), bola  $F_a$ , cujo centro pertence à reta  $m$ ;
- iv) identificar o segmento de reta  $[F_a A]$ , cujos extremos são os centros das bolas  $F_a$  e  $A$ ;
- v) realizar a tacada fazendo com que a bola branca percorra a direção do





# Conclusão

Este trabalho teve o objetivo de explorar e desenvolver conceitos matemáticos inéditos, funcionais e capazes de serem utilizados pelos atletas de bilhar em ambiente de jogo ou treino, em detrimento dos métodos conhecidos: simetrias e sistemas de diamantes. Toda a teoria desenvolvida no âmbito do bilhar é inédita.

Julgamos ter atingido os objetivos a que nos propusemos, pois foram apresentados resultados inéditos para a resolução de alguns problemas que podem ocorrer durante uma partida de bilhar.

A necessidade de se redigir um texto com este tema, surge da dificuldade em se encontrar bibliografia, que apresente técnicas práticas e funcionais para resolver alguns problemas que podem ocorrer durante uma partida de bilhar e possam ser facilmente aplicáveis pelos atletas.

Assim, pensamos que este trabalho poderá ser útil a quem queira conhecer diferentes perspectivas na resolução de alguns problemas ao praticar bilhar, nomeadamente, conhecer um sistema que permite sair de uma situação de snooker com sucesso, através do uso das tabelas da mesa de bilhar. Por essa razão, o trabalho apresenta muitos exemplos e imagens ilustrativas.

Como complemento, foi concebido um código informático que poderá servir de base para uma futura aplicação didática, seja em modo de treino ou jogo, permitindo tornar o bilhar mais acessível e interativo para os atletas.

Evidentemente, o desenvolvimento desta teoria para um maior leque de tacadas e modelos de mesas de bilhar poderão ser objeto de trabalho futuro.

# Bibliografia

- [1] BERGER, Marcel, Geometry I, New York, Springer, 1994.
- [2] CURTIS, Charles W., Linear Álgebra : An introduction approach, New York, Springer, 1991.
- [3] Davis, Diana, Billiards, Surfaces, and Geometry: A Problem-Centered Approach, American Mathematical Society, 2025.
- [4] FERNANDES, Rui Loja; RICO, Manuel, Introdução à Álgebra, 2<sup>a</sup> Edição, IST Press, 2014.
- [5] HUNGERFORD, Thomas W., Algebra, New York, Springer, 1974.
- [6] JACOBSON, Nathan, Basic Algebra I, second edition, W.H. Freeman, 1985.
- [7] KOCAK, Murat, Three Cushion Billiards Systems: From beginning to master, Independently published, 2022.
- [8] LANG, Serge, Linear Algebra, New York, Springer, 1987.
- [9] MACLANE, Saunders; BIRKHOFF, Garrett, Álgebra, New York, MacMillan International, 1988.
- [10] MONTEIRO, António, Álgebra linear e geometria analítica, Lisboa, McGraw-Hill, 2001.

- [11] MONTEIRO, António Antunes; MATOS, Isabel Teixeira, Álgebra: um primeiro curso, Lisboa, Escolar Editora, 2001.
- [12] ROTMAN, Joseph J., Advanced Modern Algebra, American Mathematical Society, second edition, 2010.
- [13] TABACHNIKOV, Serge, Geometry and Billiards, American Mathematical Society, 2005.

# Anexo A

## Aplicação em DEV - PASCAL

Uma das preocupações é tornar útil a cada jogador aplicar os conteúdos desenvolvidos neste trabalho. Assim, de forma a possibilitar um treino/jogo mais eficiente por parte do jogador criamos um programa em DEV - PASCAL ao qual um jogador pode carregar no seu telemóvel e começar o treino efetivo e assim usufruir do trabalho aqui desenvolvido.

Esta aplicação para telemóvel funciona, confirma os resultados obtidos e oferece a solução para cada uma das situações nas variantes apresentadas.

Eis o código desenvolvido em DEV - PASCAL:

```
1  program Untitled;  
2  uses crt;  
3  var  
4  opcao, a, b, n, tipoTacada, r: integer;  
5  e_f, x, x_c, xi, c, l, d, k: real;  
6  begin  
7  clrscr;  
8  writeln('=== MathFXPoolApp - saídas de Snooker ===');  
9  writeln;
```

```
10  writeln('Que tipo de situação pretende praticar?');
11  writeln('1) Sair de snooker com a bola objeto num copo
      ');
12  writeln('2) Sair de snooker com a bola objeto próximo
      do copo');
13  writeln('3) Sair de snooker com a bola objeto numa
      posição livre');
14  writeln;
15  write('Escolha uma opção (1-3): ');
16  readln(opcao);
17  writeln;
18
19  case opcao of
20  1:
21  begin
22  writeln('== Opção 1: Bola objeto no copo ==');
23  write('1) posição da bola branca - posição (c): ');
24  readln(c);
25  write('  posição (l): ');
26  readln(l);
27  write('2) Número de movimentos - ascendentes (a): ');
28  readln(a);
29  write('  Laterais (b): ');
30  readln(b);
31  write('3) Dimensão da tabela (n): ');
32  readln(n);
33
34  if (a * n + 1) <> 0 then
35  begin
```

```

36  x := n * (a * c + b * l) / (a * n + l);
37  writeln;
38  writeln('?? A posição ideal de contacto na tabela é: ',
          x:0:2);
39  end
40  else
41  writeln('?? Erro: Divisão por zero na fórmula.');
```

2:

```

45  begin
46  writeln('== Opção 2: Bola próxima do copo ==');
```

1) posição da bola branca - posição (c): ');

```

48  readln(c);
49  write('  posição (l): ');
50  readln(l);
51  write('2) Número de movimentos - ascendentes (a): ');
52  readln(a);
53  write('  Laterais (b): ');
54  readln(b);
55  write('3) Dimensão da tabela (n): ');
56  readln(n);
57  write('4) Valor do erro final (e_f): ');
58  readln(e_f);
59  write('5) Valor de k (-1 se xcorrigido > xideal, 1
        caso contrário): ');
60  readln(k);
61
62  if (a * n + k * e_f + l) <> 0 then
```

```
63  begin
64  x_c := c + (l * (b * n - c)) / (a * n + k * e_f + l);
65  writeln;
66  writeln('?? A posição corrigida de contacto na tabela é
        : ', x_c:0:2);
67  end
68  else
69  writeln('?? Erro: Divisão por zero na fórmula.');
```

70 end;

71

72 3:

73 begin

74 writeln('== Opção 3: Bola objeto em posição livre ==')

75 ;

76 write('1) Tipo de tacada (1 = alternada, 2 = mesma
 dimensão): ');

77 readln(tipoTacada);

78 write('2) posição da bola branca - posição (c): ');

79 readln(c);

80 write(' posição (l): ');

81 readln(l);

82 write('3) posição da bola objeto - posição (d): ');

83 readln(d);

84 write(' posição (k): ');

85 readln(k);

86 write('4) Dimensão da tabela (n): ');

87 readln(n);

88 write('5) Tipo de espécie (r = 1 ou 2): ');

89 readln(r);

```
89
90  writeln;
91  writeln('--- Cálculos do ponto ideal de contacto x_i
      ---');
92
93  // 1 tabela (comum a ambas as tacadas)
94  if (1 + k) <> 0 then
95  begin
96  xi := (1 * d + k * c) / (1 + k);
97  writeln('? [1 tabela] x_i = ', xi:0:2);
98  end
99  else
100  writeln('?? Erro no cálculo com 1 tabela (divisão por
      zero)');
101
102  if tipoTacada = 1 then
103  begin
104  // Alternada - 2 tabelas
105  if (1 + k) <> 0 then
106  begin
107  xi := (1 * (2 * r * n - d) + k * c) / (1 + k);
108  writeln('? [2 tabelas] x_i = ', xi:0:2);
109  end
110  else
111  writeln('?? Erro no cálculo com 2 tabelas (divisão por
      zero)');
112
113  // Alternada - 3 tacadas
114  if (1 + 2 * (3 - r) * n - k) <> 0 then
```

```
115  begin
116  xi := (1 * (2 * r * n - d) + c * (2 * (3 - r) * n - k)
        ) / (1 + 2 * (3 - r) * n - k);
117  writeln('?? [3 tacadas] x_i = ', xi:0:2);
118  end
119  else
120  writeln('?? Erro no cálculo com 3 tacadas (divisão por
        zero)');
121  end
122  else if tipoTacada = 2 then
123  begin
124  // Mesma dimensão - 2 tabelas
125  if (1 + 2 * (3 - r) * n - k) <> 0 then
126  begin
127  xi := (2 * n * (3 - r) * c + l * d - k * c) / (1 + 2 *
        (3 - r) * n - k);
128  writeln('?? [2 tabelas] x_i = ', xi:0:2);
129  end
130  else
131  writeln('?? Erro no cálculo com 2 tabelas (divisão por
        zero)');
132
133  // Mesma dimensão - 3 tacadas
134  if (1 + 2 * (3 - r) * n + k) <> 0 then
135  begin
136  xi := (2 * n * (3 - r) * c + l * d + k * c) / (1 + 2 *
        (3 - r) * n + k);
137  writeln('?? [3 tacadas] x_i = ', xi:0:2);
138  end
```

```
139  else
140  writeln('?? Erro no cálculo com 3 tacadas (divisãõ
      por zero)');
141  end
142  else
143  writeln('?? Tipo de tacada inválido. Insira 1 ou 2.');
```

```
144  end;
145
146  else
147  writeln('?? Opção inválida. Tente novamente.');
```

```
148  end;
149
150  writeln;
151  writeln('=== Fim do programa ===');
```

```
152  writeln('Pressione ENTER para sair...');
```

```
153  readln;
154  end.
```