

Joaquim Amândio Rodrigues Azevedo

Aplicação do Processamento de Sinal à Análise e Síntese de Agrupamentos

Tese de Doutoramento em Engenharia Electrotécnica apresentada à
Unidade de Ciências Exactas e Humanas da Universidade do Algarve

Orientador: Prof. António Manuel Esteves Santos Casimiro

Universidade do Algarve

Setembro - 2000

Agradecimentos

Após um longo trabalho conducente a esta Tese é um prazer agradecer a todos os que contribuíram para a sua realização.

Ao Prof. António Manuel Casimiro, meu orientador científico, que lançou os fundamentos deste trabalho e que, embora estivéssemos separados durante a maior parte do tempo, sempre tive todo o seu apoio e ajuda no decurso do mesmo.

À minha esposa por toda a sua disponibilidade, ajuda e compreensão prestadas ao longo de todo este trabalho, fazendo tudo para que o mesmo decorresse sempre apesar das dificuldades que fomos encontrando.

À minha família de onde recebi as bases do meu desenvolvimento humano, em especial à minha mãe e tia que nunca me impediram de ir mais longe.

Aos meus colegas, particularmente à Dra. Ana Isabel Cardoso, ao Eng. Alberto Velez Grilo, ao Eng. Ren Xienfeng, ao Eng. Gabriel Pestana, ao Eng. Duarte Gomes e ao Sr. Nelson por toda a ajuda prestada.

Ao Prof. Ken Milne pelas suas sugestões.

À Secção Autónoma de Engenharia de Sistemas e Computadores da Universidade da Madeira, onde sou docente, por todos os meios que colocou à minha disposição para execução deste trabalho.

À Unidade de Ciências Exactas e Humanas da Universidade do Algarve onde é realizado este doutoramento.

Ao programa PRODEP pelo suporte financeiro através de uma bolsa, que me possibilitou a aquisição de bibliografia e de participação em conferências internacionais.

Ao Centro de Estudos em Física, Acústica e Telecomunicações (CEFAT) pelo apoio prestado.

À minha esposa e filhos

Índice

| | |
|---|-------|
| Índice de Figuras..... | xiii |
| Índice de Tabelas | xviii |
| Lista de Símbolos | xix |
| Prefácio | xxi |
| Motivação da Tese..... | xxi |
| Objectivos da Tese..... | xxii |
| Estrutura da Tese..... | xxii |
| | |
| 1. Estado da Arte | 1 |
| 1.1 - Introdução | 1 |
| 1.2 - Método da Transformada de Fourier | 1 |
| 1.2.1 - Métodos Clássicos | 2 |
| 1.2.1.1 - Agrupamentos Contínuos | 2 |
| 1.2.1.2 - Agrupamentos Discretos | 3 |
| 1.2.2 - Relação de Fourier | 5 |
| 1.3 - Método de Schelkunoff | 7 |
| 1.4 - Método de Woodward | 9 |
| 1.4.1 - Agrupamentos Contínuos | 9 |
| 1.4.2 - Agrupamentos Discretos | 10 |
| 1.5 - Síntese de Tschebyscheff | 10 |
| 1.5.1 - Utilizando os Zeros do Polinómio de Tschebyscheff | 11 |
| 1.5.2 - Desenvolvendo o Polinómio de Tschebyscheff | 12 |
| 1.5.3 - Fórmulas Directas | 13 |
| 1.6 - Síntese de Zolotarev | 15 |
| 1.7 - Síntese de Taylor | 18 |

Índice

| | |
|---|----|
| 1.8 - Síntese de Bayliss | 20 |
| 1.9 - Síntese de Villeneuve | 22 |
| 1.10 - Síntese de McNamara | 25 |
| 1.11 - Métodos dos Filtros | 26 |
| 1.12 - Síntese de Factores de Agrupamento com Nulos | 30 |
| Referências | 36 |
| | |
| 2. Aplicação da Relação de Fourier | 41 |
| 2.1 - Introdução | 41 |
| 2.2 - Análise e Síntese de Agrupamentos | 42 |
| 2.2.1 - Análise de Agrupamentos | 42 |
| 2.2.2 - Síntese de Agrupamentos | 44 |
| 2.3 - Adaptação do Teorema da Amostragem | 45 |
| 2.3.1 - Distribuições Contínuas | 46 |
| 2.3.2 - Distribuições Discretas | 47 |
| 2.3.3 - Relações Úteis | 49 |
| 2.4 - Métodos Revisitados | 49 |
| 2.4.1 - Método da Transformada de Fourier | 50 |
| 2.4.1.1 - Distribuições Contínuas | 50 |
| 2.4.1.2 - Distribuições Discretas | 50 |
| 2.4.2 - Método de Woodward | 52 |
| 2.4.2.1 - Distribuições Contínuas | 52 |
| 2.4.2.2 - Distribuições Discretas | 54 |
| 2.4.3 - Método de Schelkunoff | 57 |
| 2.4.4 - Síntese de Tschebyscheff | 58 |
| 2.4.4.1 - Transformada dos Polinómios de Tschebyscheff | 58 |
| 2.4.4.2 - Cálculo dos Coeficientes Utilizando o Teorema da Amostragem ... | 64 |
| 2.4.4.3 - Outros Polinómios | 65 |
| 2.4.5 - Síntese de Zolotarev | 66 |

Índice

| | |
|--|------------|
| 2.4.6 - Síntese de Taylor | 67 |
| 2.4.7 - Síntese de Bayliss | 69 |
| 2.4.8 - Síntese de Villeneuve | 69 |
| 2.4.9 - Técnica das Janelas | 70 |
| 2.4.9.1 - Distribuições Contínuas | 71 |
| 2.4.9.2 - Distribuições Discretas | 73 |
| 2.5 - Sumário | 76 |
| Referências | 77 |
| 3. Utilização da FFT | 79 |
| 3.1 - Introdução | 79 |
| 3.2 - Número de Pontos da Função a Utilizar para o Cálculo | 80 |
| 3.2.1 - Limites do Espectro | 81 |
| 3.2.2 - Valores do Erro | 82 |
| 3.2.3 - Exemplos | 84 |
| 3.2.3.1 - C_0 Coincide com o Máximo da Transformada | 84 |
| 3.2.3.2 - C_0 Não Coincide com o Máximo da Transformada | 88 |
| 3.3 - Síntese de Agrupamentos através da FFT | 91 |
| 3.3.1 - Distribuições Contínuas | 91 |
| 3.3.2 - Exemplos de Distribuições Contínuas | 93 |
| 3.3.3 - Distribuições Discretas | 96 |
| 3.3.4 - Exemplos de Distribuições Discretas | 98 |
| 3.4 - Análise de Agrupamentos através da FFT | 104 |
| 3.4.1 - Distribuições Contínuas | 104 |
| 3.4.2 - Distribuições Discretas | 106 |
| 3.5 - Sumário | 111 |
| Referências | 112 |
| 4. Novos Procedimentos na Síntese de Agrupamentos | 113 |
| 4.1 - Introdução | 113 |

Índice

| | |
|--|-----|
| 4.2 - Limitação Espacial da Distribuição | 113 |
| 4.2.1 - Distribuição Contínua | 114 |
| 4.2.2 - Distribuição Discreta | 120 |
| 4.3 - Técnica da Multiplicação de Funções | 125 |
| 4.3.1 - Técnicas Alternativas ao Método de Taylor | 125 |
| 4.3.1.1 - Multiplicação da Função de van der Maas com a Gaussiana | 125 |
| 4.3.1.2 - Amostragem da Função de van der Maas | 130 |
| 4.3.1.3 - Distribuição de Corrente Nula nos Extremos | 133 |
| 4.3.1.4 - Factor de Agrupamento de Taylor Assimétrico | 134 |
| 4.3.1.5 - Diferentes Níveis de Lóbulos Secundários | 139 |
| 4.3.2 - Técnica Alternativa ao Método de Bayliss | 140 |
| 4.3.3 - Técnica Alternativa ao Método de Villeneuve | 144 |
| 4.3.3.1 - Factor de Agrupamento Simétrico | 145 |
| 4.3.3.2 - Factor de Agrupamento Assimétrico | 147 |
| 4.3.4 - Técnica Alternativa ao Método de Zolotarev | 150 |
| 4.4 - Interpolação Polinomial | 155 |
| 4.4.1 - Interpolação para Funções com Simetrias | 155 |
| 4.4.2 - Síntese de Factores de Agrupamento Tipo Pedestal | 161 |
| 4.4.2.1 - Utilização dos Zeros do Polinómio de Tschebyscheff | 161 |
| 4.4.2.2 - Utilizando uma Técnica Aplicada nos Filtros | 164 |
| 4.4.3 - Interpolação Não uniforme | 167 |
| 4.4.4 - Síntese de Factores de Agrupamento Tipo cosec(θ) | 169 |
| 4.4.5 - Síntese de Zolotarev Revisitada | 172 |
| 4.4.6 - Geração de Nulos no Factor de Agrupamento | 174 |
| 4.5 - Aproximação Polinomial | 181 |
| 4.5.1 - Técnica de Aproximação | 181 |
| 4.5.2 - Geração de Nulos | 183 |
| 4.6 - Interpolação do Factor de Agrupamento com Agrupamentos Contínuos | 184 |
| 4.6.1 - Interpolação Não Uniforme | 185 |

Índice

| | |
|---|------------|
| 4.6.2 - Exemplos de Aplicação da Técnica de Interpolação | 187 |
| 4.7 - Sumário | 190 |
| Referências | 191 |
| 5. Conclusões | 193 |
| 5.1 - Introdução | 193 |
| 5.2 - Resumo | 193 |
| 5.3 - Conclusões | 194 |
| 5.4 - Trabalhos Futuros | 196 |
| Referências | 198 |
| Apêndices | 199 |
| Apêndice A - Algoritmos das funções <i>fftcont</i> e <i>fftdisc</i> | 199 |
| Apêndice B - Algoritmos das funções <i>ifftcont</i> e <i>ifftdisc</i> | 200 |
| Apêndice C1 - Algoritmo para Síntese de um Agrupamento Contínuo | 201 |
| Apêndice C2 - Algoritmo para a Síntese de Taylor | 202 |
| Apêndice C3 - Algoritmo para a Síntese de Bayliss | 204 |
| Apêndice C4 - Algoritmo para Síntese de um Agrupamento Discreto | 206 |
| Apêndice C5 - Algoritmo para a Síntese de Tschebyscheff com $x=x_0\cos(Bz*d/2)$.. | 207 |
| Apêndice C6 - Algoritmo para a Síntese de Tschebyscheff com $x=w\cos(Bz*d)+h$.. | 208 |
| Apêndice C7 - Algoritmo para a Síntese de Gegenbauer..... | 209 |
| Apêndice C8 - Algoritmo para a Síntese de Zolotarev | 212 |
| Apêndice C9 - Algoritmo para a Síntese de Villeneuve | 215 |
| Apêndice C10 - Algoritmo para Análise de um Agrupamento Contínuo | 218 |
| Apêndice C11 - Algoritmo para Análise de um Agrupamento Discreto | 219 |
| Apêndice C12 - Algoritmo para Análise de um Agrupamento Não Equidistante | 221 |
| Apêndice D - Algoritmo da função <i>jacobizeta</i> | 223 |
| Apêndice E - Algoritmo da função <i>ellipticf</i> | 224 |
| Apêndice F1 - Curvas para o Parâmetro C2 da Técnica Alternativa ao Método de Zolotarev | 225 |

Índice

| | |
|--|-----|
| Apêndice F2 - Curvas para o Parâmetro C3 da Técnica Alternativa ao Método de Zolotarev | 226 |
| Bibliografia | 227 |
| Índice Remissivo | 235 |

Índice de Figuras

| | | |
|------|--|----|
| 1.1 | Pequena translação da fonte de referência | 6 |
| 1.2 | Raízes do factor de agrupamento no plano de Schelkunoff | 8 |
| 1.3 | Polinómio de Zolotarev de ordem 9 | 16 |
| 1.4 | Aproximação <i>equiripple</i> | 28 |
| 2.1 | Obtenção de uma distribuição de corrente discreta por amostragem de uma função contínua | 45 |
| 2.2 | Amostragem do factor de agrupamento de uma distribuição contínua | 46 |
| 2.3 | Amostragem do factor de agrupamento de uma distribuição discreta | 47 |
| 2.4 | Método da transformada de Fourier aplicado a agrupamentos discretos | 51 |
| 2.5 | Método de Woodward aplicado a agrupamentos contínuos | 53 |
| 2.6 | Método de Woodward aplicado a agrupamentos discretos | 55 |
| 2.7 | Tabela para determinação dos coeficientes da síntese de Tschebyscheff | 62 |
| 2.8 | Factores de agrupamento em função de β_z e em função de θ | 63 |
| 2.9 | Polinómios de Gegenbauer de grau 8 | 66 |
| 2.10 | Janela rectangular contínua | 71 |
| 2.11 | Janela de Taylor de 1 parâmetro para $A=3$ | 72 |
| 2.12 | Janela de Taylor para $SLL=20$ e $\bar{n}=5$ | 73 |
| 2.13 | Janela rectangular discreta | 74 |
| 2.14 | Janela de Kaiser para $SLL=30$ dB | 75 |
| 2.15 | Janela de Tschebyscheff para $SLL=30$ dB | 76 |
| 3.1 | Obtenção da transformada de Fourier discreta de uma função contínua | 80 |
| 3.2 | Amostragem de uma função contínua | 82 |
| 3.3 | Limites do espectro espacial da função $u(\beta_z)$ | 83 |
| 3.4 | Limites do espectro do pedestal | 85 |

Índice de Figuras

| | | |
|------|--|-----|
| 3.5 | Utilização da FFT truncando o espectro com $e=0,05$ | 85 |
| 3.6 | Erro quadrático médio relativo | 86 |
| 3.7 | Utilização da FFT truncando o espectro com $E=0,05$ | 87 |
| 3.8 | Exemplo em que o limite C_0 não coincide com o máximo da função espectral | 88 |
| 3.9 | Utilização da FFT truncando o espectro com $e=0,05$ | 89 |
| 3.10 | Erro quadrático médio relativo | 89 |
| 3.11 | Utilização da FFT truncando o espectro com $E=0,05$ | 90 |
| 3.12 | Percentagem de energia desprezada | 90 |
| 3.13 | Algoritmo para aplicação da FFT na síntese de agrupamentos contínuos | 93 |
| 3.14 | Distribuição de corrente para um factor de agrupamento definido pelo co-seno limitado | 94 |
| 3.15 | Síntese de Taylor para $\bar{n}=8$, $SLL=25$ e $L=2$ | 95 |
| 3.16 | Síntese de Bayliss para $\bar{n}=10$, $SLL=30$ e $L=2$ | 96 |
| 3.17 | Algoritmo para aplicação da FFT na síntese de agrupamentos discretos | 97 |
| 3.18 | Síntese de um agrupamento tipo pedestal | 98 |
| 3.19 | Síntese de Tschebyscheff para 9 elementos obtidos pela técnica da FFT | 99 |
| 3.20 | Transformada de um período do factor de agrupamento e os pontos da distribuição de corrente do exemplo em causa | 100 |
| 3.21 | Síntese de Tschebyscheff para 10 elementos obtidos pela técnica da FFT | 100 |
| 3.22 | Síntese de Tschebyscheff para 7 elementos espaçados de um valor inferior a meio comprimento de onda | 101 |
| 3.23 | Síntese de agrupamentos utilizando os polinómios de Gegenbauer para 11 elementos espaçados de $d=0,6\lambda$ | 102 |
| 3.24 | Síntese de Zolotarev para 20 elementos | 103 |
| 3.25 | Síntese de Villeneuve para 41 elementos com $d=0,5\lambda$, $SLL=25$, e $\bar{n}=6$ | 103 |
| 3.26 | Algoritmo para aplicação da FFT inversa na análise de agrupamentos contínuos .. | 105 |
| 3.27 | Análise de um agrupamento contínuo | 106 |
| 3.28 | Algoritmo para aplicação da FFT inversa na análise de agrupamentos discretos, com junção de períodos para permitir aumentar a zona visualizável do factor de agrupamento | 108 |
| 3.29 | Factor de agrupamento de um agrupamento com 19 elementos e $d=0,6\lambda$ | 109 |

Índice de Figuras

| | | |
|------|---|-----|
| 3.30 | Factor de agrupamento de um agrupamento com 16 elementos e $d=0,5\lambda$ | 110 |
| 3.31 | Factor de agrupamento de um agrupamento não equidistante com 15 elementos .. | 111 |
| 4.1 | Janelas para um agrupamento contínuo de comprimento $L=10\lambda$ | 115 |
| 4.2 | Módulo e fase das distribuições de corrente após aplicar algumas janelas a uma distribuição de corrente dada pelo pedestal no factor de agrupamento | 116 |
| 4.3 | Factores de agrupamento obtidos por pesagem da distribuição de corrente ideal com algumas janelas | 116 |
| 4.4 | Módulo e fase das distribuições de corrente após aplicar algumas janelas a uma distribuição de corrente dada pela $\text{cosec}(\theta)$ no factor de agrupamento | 118 |
| 4.5 | Factores de agrupamento obtidos por pesagem da distribuição de corrente ideal com algumas janelas | 118 |
| 4.6 | Factores de agrupamento e distribuições de corrente para um agrupamento com $L=15\lambda$, determinados pelo método de Woodward e pela janela de Taylor | 119 |
| 4.7 | Janelas para um agrupamento discreto com $N=21$ | 120 |
| 4.8 | Módulo e fase das distribuições de corrente após aplicar algumas janelas a uma distribuição de corrente dada pelo pedestal no factor de agrupamento | 121 |
| 4.9 | Factores de agrupamento obtidos por pesagem da distribuição de corrente ideal com algumas janelas | 121 |
| 4.10 | Janelas para um agrupamento discreto com $N=50$ | 123 |
| 4.11 | Módulo e fase das distribuições de corrente após aplicar algumas janelas a uma distribuição de corrente dada pela $\text{cosec}(\theta)$ no factor de agrupamento | 123 |
| 4.12 | Factores de agrupamento obtidos por pesagem da distribuição de corrente ideal com algumas janelas | 124 |
| 4.13 | Função de van der Maas multiplicada pela função gaussiana e respectiva transformada de Fourier | 127 |
| 4.14 | Agrupamentos semelhantes aos de Taylor | 129 |
| 4.15 | Agrupamentos semelhantes aos de Taylor, obtidos por amostragem da função de van der Maas | 132 |
| 4.16 | Agrupamento referente a um factor de agrupamento semelhante ao de Taylor com uma envolvente mais plana dos lóbulos secundários centrais | 133 |
| 4.17 | Agrupamento semelhante ao obtido por Rodes | 134 |
| 4.18 | Agrupamento assimétrico obtido por amostragem de uma função apropriada | 136 |
| 4.19 | Agrupamento assimétrico obtido por multiplicação de funções apropriadas | 138 |

Índice de Figuras

| | | |
|------|--|-----|
| 4.20 | Agrupamento de Taylor com diferentes pesagens dos lóbulos secundários, em que os quatro mais próximos da origem estão 10 dB abaixo dos restantes | 140 |
| 4.21 | Agrupamento de Taylor com diferentes pesagens dos lóbulos secundários, em que os três mais próximos da origem estão 20 dB abaixo dos restantes | 140 |
| 4.22 | Função arco-tangente para $C_2=1$ e multiplicação desta com a de van der Maas | 141 |
| 4.23 | Agrupamentos semelhantes aos de Bayliss | 143 |
| 4.24 | Agrupamento referente a um factor de agrupamento semelhante ao de Bayliss com uma envolvente mais plana dos lóbulos secundários centrais | 144 |
| 4.25 | Agrupamentos semelhantes aos de Villeneuve | 146 |
| 4.26 | Obtenção de uma envolvente mais plana dos lóbulos secundários centrais | 147 |
| 4.27 | Agrupamento assimétrico com 21 elementos | 149 |
| 4.28 | Agrupamento assimétrico com 30 elementos | 150 |
| 4.29 | Curvas dos parâmetros C_2 e C_3 para alguns valores de SLL e N | 152 |
| 4.30 | Agrupamentos semelhantes aos de McNamara | 153 |
| 4.31 | Técnica desenvolvida com decaimento dos lóbulos secundários a partir da ordem K | 154 |
| 4.32 | Função com simetria de meia onda | 159 |
| 4.33 | Síntese de um factor de agrupamento tipo pedestal | 163 |
| 4.34 | Número ímpar de elementos | 164 |
| 4.35 | Síntese de um factor de agrupamento tipo pedestal | 167 |
| 4.36 | Factor de agrupamento tipo cosec(θ) | 169 |
| 4.37 | Síntese da cosec(θ) utilizando a técnica de interpolação desenvolvida | 172 |
| 4.38 | Agrupamento de Zolotarev obtido pela técnica de interpolação | 174 |
| 4.39 | Geração de um nulo em $\theta_0=102.71^\circ$ num factor de agrupamento seno cardinal | 176 |
| 4.40 | Geração de um nulo em $\theta_0=110^\circ$ num agrupamento de Tschebyscheff | 176 |
| 4.41 | Geração de um nulo de banda larga num agrupamento de Tschebyscheff | 178 |
| 4.42 | Geração de nulos num factor de agrupamento tipo pedestal | 178 |
| 4.43 | Geração de um nulo de banda larga no factor de agrupamento tipo cosec(θ) | 179 |
| 4.44 | Geração de um nulo em $\theta=150^\circ$ num agrupamento de Tschebyscheff com elementos distanciados de $4/5$ de comprimento de onda | 180 |

Índice de Figuras

| | | |
|------|---|-----|
| 4.45 | Geração de um nulo de banda larga num agrupamento de Tschebyscheff utilizando a técnica da aproximação polinomial | 184 |
| 4.46 | Aplicação da técnica de interpolação para obter o agrupamento de Taylor | 188 |
| 4.47 | Obtenção do agrupamento de Taylor com níveis de lóbulos diferentes | 188 |
| 4.48 | Obtenção do agrupamento de Taylor com níveis de lóbulos diferentes após correcção da posição das amostras | 189 |
| 4.49 | Geração de nulos num factor de agrupamento tipo pedestal | 190 |

Índice de Tabelas

| | | |
|-----|--|-----|
| 1.1 | Coeficientes do polinómio para a síntese de Bayliss | 21 |
| 1.2 | Parâmetros da síntese de Bayliss para alguns valores de <i>SLL</i> | 21 |
| 2.1 | Algumas distribuições úteis | 49 |
| 4.1 | Valores das características de um agrupamento com 21 elementos para obtenção de um factor de agrupamento assimétrico, para o método desenvolvido e para um exemplo apresentado na literatura | 149 |
| 4.2 | Forma de aplicar o processo de interpolação, de modo a obter um factor de agrupamento par com um número par de elementos | 160 |

Lista de Símbolos

Esta lista de símbolos apresenta a notação utilizada pelo autor na elaboração deste trabalho.

\underline{A} – representação no domínio das frequências, usando a transformada temporal de Fourier, do sinal $A(t)$

$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$ constante de propagação

$\beta_z = \beta \cos(\theta)$

$\underline{c}(z)$ – distribuição de corrente relativa em função da variável z

d – distância entre elementos numa distribuição discreta

D_0 – directividade máxima

f – frequência de alimentação

F – transformada de Fourier

$\underline{F}(\beta_z)$ – factor de agrupamento

FFT – *Fast Fourier Transform*

$\lambda = \frac{3 \times 10^8}{f}$ comprimento de onda no vazio

L – comprimento de uma distribuição contínua de fontes

N – número de elementos de uma distribuição discreta de fontes

θ – ângulo entre a linha de um agrupamento e o ponto onde se está a calcular o campo

P – número de pontos da FFT

τ – factor de deslocamento em relação à origem no domínio da distribuição da fonte

σ – factor de deslocamento em relação à origem no domínio do factor de agrupamento

z – eixo dos ZZ

x^* – complexo conjugado da variável x

Y^T – transposta da matriz Y

Y^+ – transposta conjugada da matriz Y

Prefácio

Neste prefácio serão enunciadas as motivações que levaram à realização deste trabalho e quais foram os principais objectivos a atingir, descrevendo o ambiente de aplicação. Por fim será apresentada a estrutura da Tese.

Motivação da Tese

Nesta última metade do século foi realizada uma quantidade considerável de investigação na análise e síntese de agrupamentos de antenas. Não obstante, o assunto está longe de estar esgotado, como se pode comprovar pelo número de trabalhos que continuam a ser publicados em revistas da especialidade e pelas conferências internacionais. De facto, a resposta à velha questão: "Qual deve ser a distribuição de fontes que dá origem a um determinado diagrama de radiação, segundo um dado critério de erro e condições?" ainda está longe de ter uma resposta imediata.

Os vários métodos de síntese existentes, com formas diferentes de abordagem, podem ser considerados em dois grupos: aqueles cuja solução é obtida de uma forma determinística e aqueles que recorrem a técnicas iterativas. Embora os métodos iterativos consigam fornecer as soluções desejadas, em muitas situações de projecto, não deixam de ser isso mesmo, iterativos.

Recentemente foi formulado por Casimiro¹ um método unificador que relaciona, através da transformada de Fourier, o factor de agrupamento e a distribuição de fontes radiantes, dentro de certas condições. Enquanto aluno e depois docente vi como alguns exemplos da síntese de agrupamentos se tornavam coerentes e simples quando resolvidos com esta teoria, comparativamente à utilização de outros métodos. Essa teoria, que vai ser aqui designada por Relação de Fourier e apresentada posteriormente, abre uma nova forma de efectuar a análise e a síntese e demonstra potencialidades a explorar.

No entanto, ainda permanece a questão: como é que o conhecimento da Relação de Fourier, baseada na transformada de Fourier cujo imenso historial de aplicação é bem conhecido, pode conduzir a técnicas concretas de análise e síntese de agrupamentos cujas soluções sejam obtidas de uma forma determinística? Esta questão faz despertar possibilidades que se vislumbram, mas, como se verá, será necessário um longo caminho para que a resposta seja completa.

Objectivos da Tese

Como foi mencionado, surgiu uma nova abordagem que pode conduzir a resultados importantes na análise e síntese de agrupamentos.

¹ Casimiro, A. M., "A Relação Básica da Radiação", tese de Doutoramento, FEUP, 1990.

Prefácio

Este trabalho de investigação tem por objectivo ver em que medida concreta a relação entre o factor de agrupamento e a distribuição de fontes em campos afastados, ou seja, a Relação de Fourier, pode dar uma interpretação mais fundamentada dos vários métodos existentes, facilitar o processo de cálculo envolvido na análise e síntese de agrupamentos e permitir elaborar técnicas determinísticas para o problema da síntese.

Dentro destes objectivos, ir-se-á lidar com dois tipos de agrupamentos de antenas: agrupamentos contínuos e agrupamentos discretos com elementos equidistantes. Optou-se por tratar só de agrupamentos lineares a uma dimensão espacial de modo a não criar uma dificuldade acrescida, pelo tratamento bidimensional e tridimensional, na elaboração do método e das várias técnicas apresentadas. Os agrupamentos não equidistantes estão fora dos objectivos aqui propostos, uma vez que é motivo de um outro trabalho de investigação e que está a decorrer neste momento.

O termo agrupamento será utilizado tanto para definir um conjunto de elementos radiantes discretos como uma fonte radiante contínua. Nesta última considera-se que cada elemento que constitui a fonte é infinitesimal. Também é de notar que em todo o trabalho se utiliza a designação de "distribuição de corrente" para a distribuição de fontes. Isto foi feito apenas para melhor compreensão e facilidade na exposição do conteúdo apresentado. Apesar dessa designação ser verdadeira quando se lida com elementos condutores, o mesmo não acontece se o agrupamento é uma ranhura ou abertura, em que as fontes radiantes podem ser encaradas como os campos na abertura. Contudo, quer para um quer para o outro caso, a abordagem é a mesma, tendo em consideração este facto.

Sendo a transformada de Fourier a ferramenta base da Relação de Fourier, ver-se-á como a teoria de processamento de sinal, baseada na mesma, pode ser importante para auxílio e compreensão dos desenvolvimentos deste trabalho.

Pretende-se também criar algoritmos que consigam realizar o cálculo computacional, não só aplicado aos vários exemplos que serão empregues para validação do método que vai ser desenvolvido, mas também para resolver qualquer problema da análise e síntese. A ferramenta computacional utilizada será o MATLAB, por causa das suas capacidades em lidar com vectores e matrizes de dados.

Devido ao princípio da reciprocidade, a abordagem realizada neste trabalho será válida para agrupamentos de emissão e de recepção.

Estrutura da Tese

Esta Tese está dividida em cinco capítulos, sendo o primeiro a apresentação do estado da arte e os restantes referentes ao trabalho desenvolvido.

O primeiro capítulo apresenta um levantamento bibliográfico dos principais métodos de análise e síntese de agrupamentos existentes. Será dada ênfase àqueles que estão dentro dos objectivos desta Tese, ficando de lado os iterativos. De acordo com a natureza deste trabalho, a descrição de cada um dos métodos é em grande parte quantitativa. Neste capítulo, dentro dos métodos da Transformada de Fourier, é apresentada a teoria base que deu origem a esta Tese.

Prefácio

O segundo capítulo demonstra como a Relação de Fourier pode, efectivamente, ser aplicada na análise e síntese de agrupamentos. Em primeiro lugar, e baseado na teoria de processamento de sinal, serão deduzidas as principais fórmulas necessárias à prossecução deste trabalho. Seguidamente, cada um dos métodos apresentados no estado da arte é revisto à luz da nova teoria. Demonstrar-se-á, também, em que casos esses mesmos métodos não são mais do que as propriedades da teoria da transformada de Fourier.

O terceiro capítulo apresenta o cálculo computacional aplicado ao método desenvolvido neste trabalho, baseado na Relação de Fourier. Para esse objectivo, utilizar-se-á a FFT (*Fast Fourier Transform*), reportando, mais uma vez, àquilo que é conhecido da teoria do processamento de sinal. Como é sabido, uma das dificuldades com que normalmente se tem que lidar é o efeito de *aliasing*, situação inerente à utilização da transformada de Fourier. Isso condiciona o cálculo do número de pontos a utilizar para a FFT. Deste modo, apresentar-se-á uma forma de determinar o número de pontos necessários para a FFT, para que o erro obtido no cálculo esteja dentro de certos limites. Por fim serão desenvolvidos os principais algoritmos de cálculo, por forma a aplicar a cada situação da análise e síntese de agrupamentos.

O quarto capítulo apresenta novos desenvolvimentos na síntese de agrupamentos. Alguns deles têm auxílio em técnicas utilizadas em processamento de sinal no projecto de filtros, como é o caso da técnica das janelas como técnica efectiva na limitação espacial da distribuição de corrente. Outra técnica aqui desenvolvida é a da multiplicação de funções. Esta tem por finalidade sintetizar um determinado agrupamento, multiplicando funções que dêem origem ao factor de agrupamento desejado. Uma outra é a interpolação polinomial. Ao contrário das duas técnicas anteriores, esta é aplicada a agrupamentos discretos, devido à sua natureza polinomial. O objectivo é obter uma amostragem não uniforme do factor de agrupamento para permitir que este passe por um certo número de pontos que não têm de ser equidistantes, como no teorema da amostragem. Embora de forma diferente, também se evidenciará como se pode obter uma amostragem não equidistante em agrupamentos contínuos.

O quinto capítulo apresenta um resumo da Tese e as conclusões tiradas com este trabalho. Por fim faz-se referência aos trabalhos futuros que podem advir da continuação da investigação neste campo.

Os apêndices apresentam alguns desenvolvimentos deste trabalho. Os apêndices A e B contêm os algoritmos, em MATLAB, para análise e síntese de agrupamentos contínuos e discretos. O apêndice C, subdividido em vários outros, apresenta os algoritmos, em MATLAB, de alguns exemplos de análise e síntese de agrupamentos. Os apêndices D e E mostram as rotinas de cálculo de duas funções importantes à realização da síntese de Zolotarev, a função zeta de Jacobi e a função integral elíptica de primeira espécie. Finalmente, o apêndice F mostra os gráficos para cálculo de dois parâmetros da técnica desenvolvida para a síntese de Zolotarev.

Para finalizar, a bibliografia utilizada, além de referenciada no final de cada capítulo, volta a ser apresentada por ordem alfabética de autor e com referência à página ou páginas onde aparece. Tem por objectivo uma maior ajuda no manuseamento futuro do manuscrito.

Estado da Arte

1.1 - Introdução

A literatura existente demonstra que a obtenção de novos métodos para análise e síntese de agrupamentos de antenas é um assunto longe de estar concluído.

Verificou-se várias vezes que alguns autores já tinham detectado pontualmente que a relação entre uma distribuição de corrente ou campo e o respectivo diagrama de radiação do factor de agrupamento é dada pela transformada de Fourier. No entanto, só recentemente é que se obteve uma relação coerente e geral, aplicável a qualquer agrupamento.

Uma vez que o principal objectivo desta Tese é a elaboração da teoria e de novas técnicas baseadas na relação de Fourier, existente entre uma fonte radiante e o respectivo diagrama de radiação, o presente capítulo apresenta apenas os principais métodos de análise e síntese de agrupamentos de antenas, que se encontrem dentro do contexto deste trabalho.

No âmbito da síntese de agrupamentos, visto que se pretende obter técnicas directas de cálculo, os métodos iterativos estão fora dos objectivos deste trabalho, não sendo aqui apresentados.

Deste modo, a pesquisa bibliográfica efectuada, e resumida neste capítulo, centra-se exclusivamente nos objectivos referidos.

1.2 - Método da Transformada de Fourier

Desde há muito tempo que se considera a transformada de Fourier a relação entre uma abertura radiante e o respectivo factor de agrupamento e a série de Fourier a relação entre um agrupamento discreto de antenas e o respectivo factor de agrupamento [1], [2]. Contudo, essa relação, considerada como uma coincidência, não permite explorar todas as potencialidades da transformada de Fourier. Foi Casimiro [3] quem sistematizou uma relação unificadora entre as fontes riantes e os respectivos factores de agrupamento, definida por Relação de Fourier.

No sentido de melhor entender a actuação dos vários métodos existentes, fez-se um levantamento bibliográfico dos principais trabalhos que identificam a relação de Fourier em análise e síntese de antenas.

1.2.1 - Métodos Clássicos

São designados por métodos clássicos de Fourier os que se referem à aplicação da transformada de Fourier no contexto deste trabalho e já identificados há bastante tempo. Como veremos, têm a particularidade de não criarem uma estrutura coerente para análise e síntese de agrupamentos, quer contínuos quer discretos.

Começemos por ver o caso contínuo, em que o conceito de transformada de Fourier está mais presente, e de seguida apresentamos o caso discreto, em que tradicionalmente se recorre à série de Fourier.

1.2.1.1 - Agrupamentos Contínuos

Desde longa data que uma relação de Fourier é conhecida para as aberturas. Silver [1] identifica como um par de transformadas de Fourier a relação entre o campo distante e o campo existente numa abertura no plano $z=0$,

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\beta_x, \beta_y) e^{-j(\beta_x x + \beta_y y)} d\beta_x d\beta_y \quad (1.1)$$

$$g(\beta_x, \beta_y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, y) e^{j(\beta_x x + \beta_y y)} dx dy = \frac{1}{2\pi} \iint_A E(x, y) e^{j(\beta_x x + \beta_y y)} dx dy \quad (1.2)$$

com $\beta_x = \beta \sin(\theta) \cos(\phi)$, $\beta_y = \beta \sin(\theta) \sin(\phi)$, $u(x, y) = E(x, y)$ dentro da abertura A e zero fora, sendo $E(x, y)$ o campo ao longo da abertura, e $g(\beta_x, \beta_y)$ é o factor de agrupamento. Dado $g(\beta_x, \beta_y)$, a distribuição do campo dentro da abertura pode ser obtida através da equação (1.1).

É interessante notar que apesar de Silver identificar a relação de Fourier, ele não a utiliza no cálculo do factor de agrupamento de aberturas. Collin [4] também apresenta expressões semelhantes às anteriores, mas em (1.1) o integral duplo é multiplicado pelo factor $1/(4\pi^2)$ em vez de $1/(2\pi)$ e em (1.2) não aparece o factor $1/(2\pi)$.

Como nas aberturas, também em distribuições de corrente se identificou uma relação de Fourier. Para uma linha de corrente, Walter [5], reconhecendo a relação entre o diagrama de radiação e a distribuição de corrente, apresenta alguns pares de transformadas de Fourier típicos.

Stutzman [6] formula o par de transformadas de Fourier para distribuições lineares de corrente da seguinte forma:

$$f(w) = \int_{-\infty}^{\infty} i(s) e^{j2\pi ws} ds \quad (1.3)$$

$$i(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(w) e^{-j2\pi ws} dw \quad (1.4)$$

em que $w = \cos(\theta)$, $s = z/\lambda$, $i(s)$ é a distribuição de corrente e $f(w)$ o factor de agrupamento. Para um diagrama de radiação desejado $f_a(w)$, o processo de síntese consiste, em primeiro lugar,

calcular o integral (1.4), obtendo-se $i_d(s)$, e depois truncar esta distribuição de corrente,

$$i(s) = \begin{cases} i_d(s) & |s| \leq \frac{l}{2\lambda} \\ 0 & |s| > \frac{l}{2\lambda} \end{cases} \quad (1.5)$$

De seguida utiliza-se a equação (1.3) para se calcular o factor de agrupamento aproximado,

$$f(w) = \int_{-l/(2\lambda)}^{l/(2\lambda)} i(s) e^{j2\pi ws} ds \quad (1.6)$$

Balanis [7] apresenta uma abordagem análoga à de Stutzman para a obtenção da corrente, mas utiliza o par de transformadas

$$\text{SF}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} I(z) e^{jz\xi} dz \quad (1.7)$$

$$I(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{SF}(\xi) e^{-jz\xi} d\xi \quad (1.8)$$

com $\xi = \beta \cos(\theta) - \alpha$, $I(z)$ é a distribuição contínua de corrente e $\text{SF}(\xi)$ o factor espacial.

Como se verifica pelos pares de transformadas, os vários autores não definem a relação de Fourier nas mesmas variáveis. O método de síntese de Fourier baseia-se no truncamento da distribuição de corrente. A dificuldade neste caso reside no facto de que na vizinhança das descontinuidades aparecem níveis de lóbulos secundários elevados. O erro obtido na aproximação do diagrama de radiação com este processo de síntese é o mínimo erro quadrático médio, em todo o domínio da variável. Deste modo, este método não permite obter o mínimo erro quadrático médio dentro da janela visível [6].

1.2.1.2 - Agrupamentos Discretos

Silver [1] e Jordan [8] apresentam a síntese de agrupamentos discretos no caso do número de elementos ser ímpar, $N=2M+1$, com uma distribuição de corrente definida em relação ao elemento central, obtendo a seguinte expressão para o campo eléctrico:

$$|E| = |A_0 e^{-jM\psi} + A_1 e^{-j(M-1)\psi} + \dots + A_{M-1} e^{-j\psi} + A_M + A_{M+1} e^{j\psi} + A_{M+2} e^{j2\psi} + \dots + A_{2M} e^{jM\psi}| \quad (1.9)$$

com $\psi = \beta d \cos(\theta) + \alpha$, sendo α a fase progressiva da corrente. Supondo uma distribuição simétrica em torno do elemento central, dada por

$$\begin{aligned} A_M &= a_0 \\ A_{M-k} &= A_{M+k}^* = a_k - jb_k \end{aligned} \quad (1.10)$$

em que o asterisco representa complexo conjugado, a expressão do campo torna-se

$$|E| = 2 \left\{ \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^M [a_k \cos(k\psi) + (-b_k) \text{sen}(k\psi)] \right\} \quad (1.11)$$

que são os $2M+1$ termos da série de Fourier. Assim, dado um diagrama de radiação $f(\theta)$ obtém-se $f(\psi)$ e desenvolve-se em série de Fourier, considerando-se o período da função de 2π . Obtidos a_k e b_k retira-se as correntes a partir das relações (1.10). Quando a distância entre elementos é inferior a $\lambda/2$, $f(\psi)$ só está especificado num intervalo inferior a 2π . Neste caso, pode-se preencher o resto do intervalo da função com uma função apropriada. Para distâncias $d > \lambda/2$ a margem de variação de ψ é superior a 2π , o que, segundo Jordan, faz com que normalmente não seja possível utilizar este método para cálculo das correntes.

Stutzman [6] também apresenta o método de Fourier para agrupamentos discretos, em que o diagrama de radiação do factor de agrupamento desejado é decomposto em série de Fourier no intervalo $-\lambda/(2d) < w < \lambda/(2d)$,

$$f(w) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m e^{j2\pi m(d/\lambda)w} \quad (1.12)$$

$$b_m = \frac{d}{\lambda} \int_{-\lambda/(2d)}^{\lambda/(2d)} f(w) e^{-j2\pi m(d/\lambda)w} dw$$

com $w = \cos(\theta)$. Como um agrupamento com um número infinito de elementos não é praticável, trunca-se a série de Fourier produzindo o diagrama aproximado,

$$f(w) = \sum_{m=-M}^M b_m e^{j2\pi m(d/\lambda)w} \quad (1.13)$$

Considerando os elementos de corrente iguais aos termos da série de Fourier, ou seja,

$$i_m = b_m \quad |m| \leq M \quad (1.14)$$

então (1.13) é idêntica à expressão do factor de agrupamento para um número ímpar de elementos. Seguindo a mesma linha de raciocínio, para um número par de elementos tem-se que

$$i_m = b_m = \frac{d}{\lambda} \int_{-\lambda/(2d)}^{\lambda/(2d)} f(w) e^{-j\pi(2m-1)(d/\lambda)w} dw \quad m \geq 1 \quad (1.15)$$

$$i_{-m} = b_{-m} = \frac{d}{\lambda} \int_{-\lambda/(2d)}^{\lambda/(2d)} f(w) e^{j\pi(2m-1)(d/\lambda)w} dw \quad -m \leq -1$$

Este desenvolvimento também aparece em Mailloux [9].

Balanis [7] considera uma forma de abordagem análoga à de Stutzman mas noutras variáveis. Desta forma, para um número ímpar de elementos, $N=2M+1$, tem-se que

$$AF(\psi) = \sum_{m=-M}^M a_m e^{jm\psi} \quad (1.16)$$

$$a_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} AF(\psi) e^{-jm\psi} d\psi \quad -M \leq m \leq M$$

$\psi = \beta d \cos(\theta) + \alpha$, sendo α a fase progressiva da corrente, $AF(\psi)$ é o factor de agrupamento e a_m as correntes. Para um número par de elementos, $N=2M$, tem-se

$$AF(\psi) = \sum_{m=-M}^{-1} a_m e^{j[(2m+1)/2]\psi} + \sum_{m=1}^M a_m e^{j[(2m-1)/2]\psi} \quad (1.17)$$

$$a_m = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} AF(\psi) e^{-j[(2m+1)/2]\psi} d\psi & -M \leq m \leq -1 \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} AF(\psi) e^{-j[(2m-1)/2]\psi} d\psi & 1 \leq m \leq M \end{cases} \quad (1.18)$$

Como acontece no caso contínuo, também aqui os vários autores não definem a relação de Fourier nas mesmas variáveis. Mais uma vez, o método de síntese de Fourier baseia-se no truncamento da distribuição de corrente, sendo o erro obtido na aproximação do diagrama de radiação com este processo de síntese o mínimo erro quadrático médio, num período da função do factor de agrupamento.

1.2.2 - Relação de Fourier

Como se constatou pela secção anterior, não há coerência entre os vários autores na definição da relação de Fourier. Mesmo para o mesmo autor, essa coerência não existe, como se pode comprovar comparando as expressões (1.16) com (1.7) e (1.8) apresentadas por Balanis. Talvez devido a este facto, embora os vários autores se refiram à relação de Fourier e às potencialidades da sua utilização, tirando algumas excepções, normalmente não a utilizam, por exemplo, na análise de agrupamentos, recorrendo-se ao cálculo integral para o caso contínuo e ao somatório para o discreto, quando nalguns casos seria mais fácil utilizar as propriedades da transformada de Fourier.

Nesta ordem de ideias, vejamos qual a relação de Fourier que será a base deste trabalho. O par de transformadas de Fourier utilizado é o definido por

$$U(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-j\omega t} dt \quad (1.19)$$

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (1.20)$$

Foi Casimiro [3] quem identificou uma relação de Fourier coerente, aplicável a qualquer conjunto de fontes desde que dentro de certas condições, definidas no teorema da pequena translação. É essa abordagem que vai ser apresentada já de seguida.

O campo eléctrico, criado por um elemento de corrente, $\underline{I} dl$, na origem do referencial, num ponto (r, θ, ϕ) é dado por

$$d\vec{E}_r = \underline{f}(\theta, \phi) \frac{e^{-j\beta r}}{4\pi r} \quad (1.21)$$

em que $\underline{f}(\theta, \phi)$ é o diagrama de radiação do elemento de corrente e que está directamente

relacionado com $\underline{I}dl$. Se este elemento sofrer um deslocamento, como mostra a figura 1.1, para o campo distante em que $r \gg r'$, \vec{R} e \vec{r}' são paralelos entre si, ficando que

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{u}_r \cdot \vec{r}' \quad (1.22)$$

sendo \vec{u}_r o versor do segmento de recta que liga a origem ao ponto onde se pretende calcular o campo e \vec{r}' o vector que liga a origem ao elemento de corrente, definidos por

$$\begin{aligned} \vec{u}_r &= \text{sen}(\theta) \cos(\phi) \vec{u}_x + \text{sen}(\theta) \text{sen}(\phi) \vec{u}_y + \cos(\theta) \vec{u}_z \\ \vec{r}' &= x \vec{u}_x + y \vec{u}_y + z \vec{u}_z \end{aligned} \quad (1.23)$$

Se o valor de corrente em \vec{r}' for de $\underline{I}dl$, o campo criado é

$$d\vec{E} = \vec{f}(\theta, \phi) \frac{\underline{I}}{\underline{I}_r} \frac{e^{-j\beta(r-\vec{u}_r \cdot \vec{r}')}}{4\pi r} = d\vec{E}_r \frac{\underline{I}}{\underline{I}_r} e^{j\beta \vec{u}_r \cdot \vec{r}'} = d\vec{E}_r \underline{c} e^{j\beta \vec{u}_r \cdot \vec{r}'} \quad (1.24)$$

Para vários elementos paralelos de corrente, o campo distante é determinado pela soma dos campos individuais. O diagrama de radiação total será o produto do diagrama de radiação da antena elementar com o factor de agrupamento, sendo este último dependente apenas da distribuição de corrente que dá origem ao campo criado e da sua posição relativa.

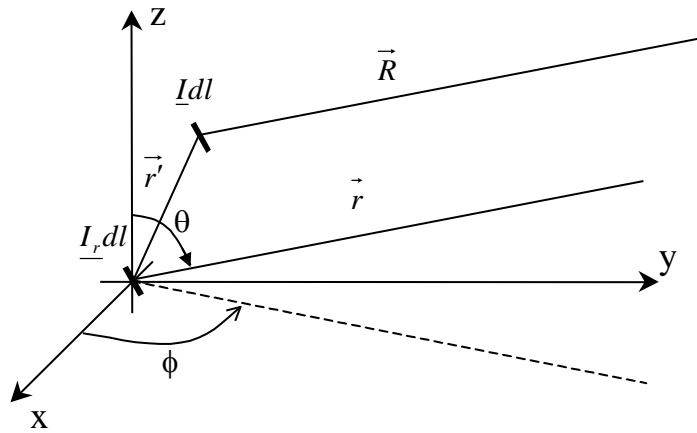


Fig. 1.1 - Pequena translação da fonte de referência.

Tendo em conta o teorema da pequena translação, em que cada elemento de corrente pode ser obtido por translação de um elemento de corrente de referência, o factor de agrupamento de uma distribuição tridimensional de corrente é a transformada de Fourier inversa [3], a menos de uma constante, da respectiva distribuição de corrente $\underline{c}(x,y,z)$, ou seja,

$$\begin{aligned} \underline{F}(\beta_x, \beta_y, \beta_z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{c}(x, y, z) e^{j(\beta_x x + \beta_y y + \beta_z z)} dx dy dz \\ &= (2\pi)^3 \underline{F}^{-1}[\underline{c}(x, y, z)] \end{aligned} \quad (1.25)$$

em que \underline{F} representa a transformada de Fourier. Por outro lado, a distribuição de corrente é obtida pela transformada directa do factor de agrupamento,

$$\begin{aligned}\underline{c}(x, y, z) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{F}(\beta_x, \beta_y, \beta_z) e^{-j(\beta_x x + \beta_y y + \beta_z z)} d\beta_x d\beta_y d\beta_z \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \mathcal{F} [\underline{F}(\beta_x, \beta_y, \beta_z)]\end{aligned}\quad (1.26)$$

A função $\underline{F}(\beta_x, \beta_y, \beta_z)$ é uma representação conveniente da transformada temporal de Fourier do factor de agrupamento e $\underline{c}(x, y, z)$ é a distribuição espacial da transformada temporal de Fourier das fontes. As constantes β_x , β_y e β_z são dadas por

$$\begin{aligned}\beta_x &= \beta \sin(\theta) \cos(\phi) = \beta \cos(\theta_x) \\ \beta_y &= \beta \sin(\theta) \sin(\phi) = \beta \cos(\theta_y) \\ \beta_z &= \beta \cos(\theta) = \beta \cos(\theta_z)\end{aligned}\quad (1.27)$$

sendo θ_x , θ_y e θ_z os co-senos directores. Como os ângulos variam entre 0 e π , essas constantes irão variar entre $-\beta$ e β , sendo β dado por

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}\quad (1.28)$$

Assim, a zona aproveitável da transformada espacial de Fourier, para o diagrama de radiação, é uma janela em β_x , β_y e β_z , de largura igual a 2β para cada caso.

As relações (1.25) e (1.26) são gerais e aplicáveis a qualquer situação, desde que estejam nas condições indicadas, isto é, aplicáveis quer para o caso contínuo quer para o caso discreto.

Embora se tenha falado em campos criados por distribuições de corrente, as equações (1.25) e (1.26) também são válidas para aberturas. Nesta situação $\underline{c}(x, y, z)$ será o campo ao longo da abertura.

Casimiro também demonstra que alguns métodos tradicionais não são nada mais do que casos particulares da utilização das propriedades da transformada de Fourier. Um desses casos é o método da multiplicação de diagramas que pela transformada de Fourier se tem uma convolução na distribuição de corrente. Também facilmente se compreende o efeito da alteração da distância entre antenas, ou seja, a propriedade da mudança de escala.

Devido às suas características generalizadoras e unificadoras, a Relação de Fourier equacionada pelas expressões (1.25) e (1.26) será a base desta Tese.

1.3 - Método de Schelkunoff

Este processo de síntese foi desenvolvido por Schelkunoff, sendo um dos métodos apresentados em vários trabalhos [2], [4], [7], [9]-[14]. Permite sintetizar um agrupamento de antenas quando se conhece a posição das raízes do factor de agrupamento.

Estado da Arte

A expressão para o factor de agrupamento de N elementos é

$$f(\psi) = \sum_{n=0}^{N-1} I_n e^{jn\psi} \quad (1.29)$$

com $\psi = \beta d \cos(\theta) + \alpha$ e sendo α a fase progressiva da corrente. Fazendo a mudança de variável

$$u = e^{j\psi} \quad (1.30)$$

tem-se $f(\psi)$ na forma de um polinómio em u ,

$$f(u) = \sum_{n=0}^{N-1} I_n u^n \quad (1.31)$$

sendo I_n as correntes de cada elemento. A variável u está no círculo unitário do plano complexo e a porção que o percorre depende da distância d e da fase α . Quando θ varia entre 0 e π , ψ variará entre $-\beta d + \alpha$ e $\beta d + \alpha$ e u percorre o círculo unitário no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio desde $e^{j(-\beta d + \alpha)}$ a $e^{j(\beta d + \alpha)}$.

Levando em consideração um teorema da álgebra, um polinómio de grau $N-1$ tem $N-1$ raízes, podendo ser factorizado,

$$f(u) = I_{N-1}(u - u_1)(u - u_2)\dots(u - u_{N-1}) = I_{N-1} \prod_{n=1}^{N-1} (u - u_n) \quad (1.32)$$

em que u_n são as raízes complexas. A amplitude de (1.32) é dada por

$$|f(u)| = |I_{N-1}| |u - u_1| |u - u_2| \dots |u - u_{N-1}| \quad (1.33)$$

Geometricamente, o valor absoluto da diferença $(u - u_n)$ representa o comprimento do segmento que liga, no plano complexo, um ponto u no círculo unitário ao ponto u_n , como mostra a figura 1.2. Desta forma, o factor de agrupamento é representado pelo produto dos comprimentos dos segmentos de recta que unem um ponto P do círculo unitário às raízes do plano complexo, do factor de agrupamento.

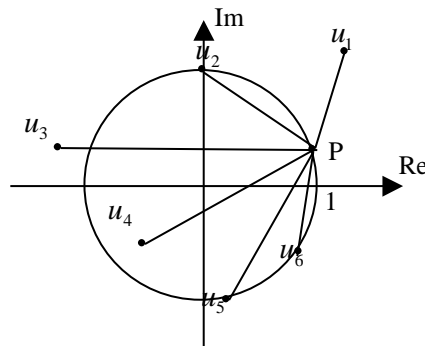


Fig. 1.2 - Raízes do factor de agrupamento no plano de Schelkunoff.

Se uma raiz estiver no círculo unitário, isso corresponde a um zero do factor de agrupamento, como facilmente se verifica pela expressão (1.33). Um método de síntese consiste em controlar os zeros do factor de agrupamento através das raízes no círculo unitário. Isto permite algum controlo do nível dos lóbulos secundários.

Tendo as raízes, as correntes são obtidas desenvolvendo a forma factorizada de $f(u)$, de modo a obter um polinómio. Os coeficientes desse polinómio são as correntes desejadas. Outra forma de se obter a distribuição de corrente é através da transformada Z [15].

1.4 - Método de Woodward

O método de Woodward é um dos processos mais populares de síntese de agrupamentos e dos mais antigos. Foi formulado por Woodward em 1947 [16] e é utilizado quando se pretende sintetizar um factor de agrupamento através de um conjunto de amostras do mesmo.

O método encontra-se descrito em vários livros e artigos, [6], [7], [9], [13], [16]-[21]. A ideia básica deste método consiste na sobreposição de um conjunto de distribuições de corrente uniforme com fases diferentes. Cada distribuição uniforme dá origem a um factor de agrupamento da forma $\text{sen}(x)/x$ para o caso contínuo e $\text{sen}(Nx)/[N\text{sen}(x)]$ para o caso discreto, pesados pela amplitude da distribuição de corrente. Essas amplitudes são escolhidas com o objectivo de coincidirem com as amostras do factor de agrupamento desejado. Como os zeros de cada uma das funções anteriores coincidem com os picos das restantes, a sua sobreposição dá um factor de agrupamento que passa pelas amostras do factor de agrupamento desejado e a função do factor de agrupamento entre amostras é a sobreposição de todas as funções. Esta é uma das razões que levou Woodward a escolher as distribuições de corrente uniforme como funções de base. A outra é que as funções seno cardinal têm o lóbulo principal mais estreito, quando comparado com outras distribuições.

A diferença entre este método e o método de síntese de Fourier é que neste último o diagrama de radiação obtido é aquele para o qual o erro quadrático médio é o mínimo, enquanto que o método de Woodward produz um diagrama de radiação que passa pelas amostras do diagrama desejado. Segundo alguns autores, a desvantagem do método de Woodward é não permitir controlar o nível dos lóbulos secundários fora das amostras.

1.4.1 - Agrupamentos Contínuos

Seja L o comprimento da distribuição de corrente e suponhamos uma distribuição uniforme com uma dada fase,

$$i_m(z) = \frac{b_m}{L} e^{-j\beta z \cos(\theta_m)} \quad (1.34)$$

sendo θ_m o ângulo onde o factor de agrupamento é amostrado. Para N amostras do factor de agrupamento desejado tem-se uma sobreposição de correntes que dá

$$I(z) = \frac{1}{L} \sum_{m=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} b_m e^{-j\beta z \cos(\theta_m)} \quad (1.35)$$

em que $m=\pm 1/2, \pm 3/2, \dots, \pm(N-1)/2$ para um número N par de amostras e $m=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm(N-1)/2$ para um número N ímpar de amostras. O factor de agrupamento total é a sobreposição das funções correspondentes a cada um dos termos de (1.35),

$$F(\theta) = \sum_{m=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} b_m \frac{\text{sen}\left\{\frac{\beta L}{2} [\cos(\theta) - \cos(\theta_m)]\right\}}{\frac{\beta L}{2} [\cos(\theta) - \cos(\theta_m)]} \quad (1.36)$$

O máximo de cada termo em (1.36) ocorre para $\theta=\theta_m$ e é igual a $F(\theta=\theta_m)$. Como já foi referido, quando um dos termos de (1.36) atinge um máximo, os outros termos associados às outras amostras são nulos em $\theta=\theta_m$. Assim, sendo $F_d(\theta)$ o factor de agrupamento desejado, tem-se

$$b_m = F_d(\theta = \theta_m) \quad (1.37)$$

Para o factor de agrupamento satisfazer os requisitos de periodicidade, 2π para θ , a posição de cada amostra é dada por

$$\theta_m = \arccos\left(m \frac{\lambda}{L}\right) \quad (1.38)$$

1.4.2 - Agrupamentos Discretos

Para agrupamentos discretos o método de Woodward é descrito de forma análoga ao do caso contínuo. Os coeficientes dos elementos da distribuição de corrente são dados por,

$$a_n(z) = \frac{1}{N} \sum_{m=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} b_m e^{-j\beta z_n \cos(\theta_m)} \quad (1.39)$$

em que n toma os mesmos valores que m , apresentados na secção anterior, sendo z_n a posição do elemento n . O factor de agrupamento é obtido da mesma forma como em (1.36), com a diferença de que agora cada termo desse somatório é o correspondente ao do agrupamento discreto uniforme, o que origina

$$F(\theta) = \sum_{m=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} b_m \frac{\text{sen}\left\{\frac{N\beta d}{2} [\cos(\theta) - \cos(\theta_m)]\right\}}{N \text{sen}\left\{\frac{\beta d}{2} [\cos(\theta) - \cos(\theta_m)]\right\}} \quad (1.40)$$

Os coeficientes b_m são determinados pela equação (1.37) e a posição das amostras pela (1.38), com L substituído por Nd .

1.5 - Síntese de Tschebyscheff

Na síntese de Tschebyscheff pretende-se obter os coeficientes do agrupamento, ou seja, a distribuição de corrente, que dão origem a um factor de agrupamento cujos lóbulos

secundários estão à mesma amplitude.

Existem vários processos para calcular os coeficientes da distribuição de corrente. Um deles consiste na utilização dos zeros dos polinómios de Tschebyscheff [8], [22]-[24]. Outra forma é desenvolvendo os polinómios de Tschebyscheff após realizar a mudança de variável que relaciona o factor de agrupamento com os polinómios [3], [4], [6], [7], [14], [25]. Estas duas formas tornam-se bastante morosas com o aumento do número de elementos, o que obriga a recorrer a outros processos para o cálculo dos coeficientes. Uma terceira forma de se obter os coeficientes é utilizando fórmulas exactas ou aproximadas [7], [9], [22], [26]-[30].

1.5.1 - Utilizando os Zeros do Polinómio de Tschebyscheff

Este processo de cálculo dos coeficientes do agrupamento de Tschebyscheff baseia-se nas características polinomiais do factor de agrupamento [8] e utiliza o método de Schelkunoff para obtenção das correntes quando são conhecidas as raízes do polinómio.

Os polinómios de Tschebyscheff têm a seguinte forma compacta:

$$T_m(x) = \begin{cases} \cos[m \arccos(x)] & |x| \leq 1 \\ \cosh[m \operatorname{arccosh}(x)] & |x| > 1 \end{cases} \quad (1.41)$$

sendo m o grau dos mesmos. Outra forma de apresentar os polinómios é

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= x \\ T_2(x) &= 2x^2 - 1 \\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x \\ T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1 \\ T_5(x) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x \\ T_6(x) &= 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1 \\ T_7(x) &= 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x \\ T_8(x) &= 128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1 \\ &\dots \end{aligned} \quad (1.42)$$

Estes polinómios e os de ordem mais elevada podem ser obtidos por recorrência,

$$T_m(x) = 2xT_{m-1}(x) - T_{m-2}(x) \quad (1.43)$$

Uma mudança de variável que permite relacionar os polinómios de Tschebyscheff com o factor de agrupamento é

$$x = x_0 \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) \quad (1.44)$$

com $\psi = \beta d \cos(\theta) + \alpha$. O grau do polinómio a utilizar é igual ao número de elementos do agrupamento menos um, ou seja, $T_{N-1}(x)$. x_0 é obtido para uma dada relação entre os níveis dos lóbulos principal e secundário, SLL (*sidelobe level*) em dB, sendo obtido pela expressão

$$x_0 = \cosh \left[\frac{\operatorname{arccosh} \left(10^{\frac{SLL}{20}} \right)}{N-1} \right] \quad (1.45)$$

Por conseguinte, para se obter os coeficientes começa-se por determinar os zeros [8], utilizando (1.41),

$$x_k = \cos \left[\frac{(2k-1)\pi}{2(N-1)} \right], \quad k = 1, 2, \dots, N-1 \quad (1.46)$$

Com estes valores, de (1.44) retira-se que

$$\psi_k = 2 \arccos \left(\frac{x_k}{x_0} \right) \quad (1.47)$$

Substituindo as raízes $u_k = e^{j\psi_k}$ no polinómio de Schelkunoff, dado pela expressão (1.32), fica-se com o factor de agrupamento na forma factorizada. Desenvolvendo-o, obtém-se um polinómio na variável u , cujos coeficientes são as correntes I_n .

Saffai-Jazi [23] propõe uma forma diferente de obtenção dos coeficientes, em que utiliza os zeros do factor de agrupamento e um sistema de equações.

1.5.2 - Desenvolvendo o Polinómio de Tschebyscheff

Outro modo de se determinar os coeficientes é substituir a equação (1.44) no polinómio de Tschebyscheff de grau igual ao número de elementos menos um e fazer

$$f(\psi) = T_{N-1} \left[x_0 \cos \left(\frac{\psi}{2} \right) \right] \quad (1.48)$$

Desenvolve-se o polinómio e compara-se o resultado com as expressões do factor de agrupamento para elementos simétricos, dadas por

$$f(\psi) = I_0 + 2 \sum_{m=1}^M I_m \cos(m\psi) \quad (1.49)$$

para $2M+1$ elementos e

$$f(\psi) = 2 \sum_{m=1}^M I_m \cos \left[\left(m - \frac{1}{2} \right) \psi \right] \quad (1.50)$$

para $2M$ elementos.

Além da mudança de variável (1.44) surgem outras que permitem obter certas características do factor de agrupamento, incluindo a distância entre elementos inferior a meio comprimento de onda. Como o diagrama de radiação do factor de agrupamento é determinado pela porção utilizada da curva de Tschebyscheff, o que depende da distância entre as antenas, para pequenos valores de d com a equação (1.44) não se faz pleno uso das potencialidades do controlo do diagrama [8], [24]. Para isso pode-se recorrer à seguinte mudança de variável [2], [4], [24], [27]:

$$x = w \cos(\psi) + h \quad (1.51)$$

em que $\psi = \beta d \cos(\theta)$, e com w e h apresentados por Collin [4] para duas situações de d em função do comprimento de onda. Dado d e sendo $d \leq \lambda/2$, tem-se que

$$\begin{cases} w = \frac{1 + x_0}{1 - \cos(\beta d)} \\ h = -\frac{1 + x_0 \cos(\beta d)}{1 - \cos(\beta d)} \end{cases} \quad (1.52)$$

com

$$x_0 = \cosh \left[\frac{2 \operatorname{arccosh} \left(10^{\frac{SLL}{20}} \right)}{N - 1} \right] \quad (1.53)$$

Este caso pode dar origem a agrupamentos superdirectivos. Se $d > \lambda/2$, os parâmetros apresentados por Collin são

$$\begin{cases} w = \frac{x_0 + 1}{2} \\ h = \frac{x_0 - 1}{2} \\ \cos(\beta d) = \frac{3 - x_0}{1 + x_0}, \quad \pi < \beta d < 2\pi \end{cases} \quad (1.54)$$

Com a mudança de variável (1.51) só se consegue sintetizar agrupamentos com um número ímpar de elementos, $N=2M+1$, e deve-se utilizar um polinómio de grau M .

1.5.3 - Fórmulas Directas

É possível calcular directamente os coeficientes da distribuição de corrente, para a mudança de variável (1.44), utilizando as expressões apresentados em [22]. Para um agrupamento com $N=2M+1$ elementos tem-se que

$$I_m = \sum_{p=m}^M (-1)^{M-p} \frac{M}{M+p} \binom{M+p}{2p} \binom{2p}{p-m} z_0^{2p} \quad (1.55)$$

com $m=0, 1, 2, \dots, M$, e para $N=2M$ elementos,

$$I_m = \sum_{p=m}^M (-1)^{M-p} \frac{2M-1}{2(M+p-1)} \binom{M+p-1}{2p-1} \binom{2p-1}{p-m} z_0^{2p-1} \quad (1.56)$$

com $m=1, 2, \dots, M$. Barbieri apresenta expressões análogas (ver Balanis [7]). Devido à dificuldade computacional quando se utiliza as fórmulas anteriores, alguns autores propuseram a simplificação do cálculo dos coeficientes recorrendo a soluções aproximadas [26].

Elliot [28] obtém os coeficientes de um agrupamento com $2M+1$ elementos em função de um conjunto de pontos equidistantes do factor de agrupamento. Considerando que a distribuição de corrente pode ser representada pela série

$$I_n = \sum_{m=-M}^M a_m e^{j \frac{2\pi m n}{2M+1}} \quad (1.57)$$

supondo elementos simétricos, por manipulação matemática os coeficientes a_m são dados pela expressão

$$(2M+1)a_m = T_{2M} \left[x_0 \cos \left(\frac{\pi m}{2M+1} \right) \right] \quad (1.58)$$

Ainda para a mudança de variável (1.44), a distribuição de corrente foi obtida por Stegen [31], para distâncias entre elementos maiores ou iguais a meio comprimento de onda. Essas correntes foram determinadas pela expansão em série de Fourier do factor de agrupamento, supondo distribuições de corrente reais e simétricas. Para N ímpar tem-se que

$$I_n = \frac{1}{N} \left\{ T_{N-1}(x_0) + 2 \sum_{s=1}^{(N-1)/2} T_{N-1} \left[x_0 \cos \left(\frac{\pi s}{N} \right) \right] \cos \left(\frac{2\pi n s}{N} \right) \right\} \quad (1.59)$$

$n = 0, 1, 2, \dots, (N-1)/2$

e para N par,

$$I_n = \frac{1}{N} \left\{ T_{N-1}(x_0) + 2 \sum_{s=1}^{N/2-1} T_{N-1} \left[x_0 \cos \left(\frac{\pi s}{N} \right) \right] \cos \left[\frac{(2n-1)\pi s}{N} \right] \right\} \quad (1.60)$$

$n = 1, 2, \dots, N/2$

Mailloux [9] e Hansen [12] também propõem estas fórmulas, para distâncias superiores a meio comprimento de onda.

Para a mudança de variável (1.51) Lo e Lee [24] e Hansen [12] sugerem uma expressão para as correntes, obtida por Drane [32], para $N=2M+1$,

$$I_n = \frac{\varepsilon_n}{4M} \sum_{m=0}^{M_1} \varepsilon_m \varepsilon_{M_2-m} T_n(y_m) S_M^n(w, h, y_m) \quad (1.61)$$

com $\varepsilon_0=1$ e $\varepsilon_n=2$ para $n \neq 0$, $y_m = \cos(m\pi/M)$, M_1, M_2 são a parte inteira de $M/2$ e $(M+1)/2$,

respectivamente, $S_M^n(w, h, y_m) = T_M(wy_m + h) + (-1)^n T_M(h - wy_m)$ e se M for um número par, $S_M^n(w, h, y_{M/2}) = T_M(wy_{M/2} + h)$.

Em processamento de sinal, com referência aos filtros digitais, Helms [33] utiliza a janela de Tschebyscheff (coeficientes da síntese de Tschebyscheff), para a mudança de variável (1.44), com um número ímpar de elementos e obtém os coeficientes da janela aplicando a transformada inversa de Fourier discreta via FFT (*Fast Fourier Transform*). Ainda no contexto de processamento de sinal, Diderich [34] e Nuttall [35] pegam na equação (1.60) e encaram-na como a parte real da exponencial, chegando a uma expressão que é calculada pela FFT.

1.6 - Síntese de Zolotarev

Com a síntese de Zolotarev pretende-se obter um factor de agrupamento anti-simétrico (*difference pattern*), caracterizado por ter dois lóbulos principais gémeos com um zero entre eles e com lóbulos secundários com a mesma amplitude. Este método de síntese foi desenvolvido por McNamara [36] utilizando os polinómios de Zolotarev.

O polinómio de Zolotarev de ordem $2n+1$ é definido por [36]

$$\begin{aligned} Z_{2n+1}(x) &= \cosh \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \ln \frac{H(M + \nu, k)}{H(M - \nu, k)} \right] \\ x &= \frac{\operatorname{sn}(M, k) \operatorname{cn}(\nu, k)}{\sqrt{\operatorname{sn}^2(M, k) - \operatorname{sn}^2(\nu, k)}} \\ M &= \frac{-K(k)}{2n+1} \end{aligned} \quad (1.62)$$

em que $H(\nu, k)$ é a função eta de Jacobi, enquanto que $\operatorname{sn}(\nu, k)$, $\operatorname{cn}(\nu, k)$ e $\operatorname{dn}(\nu, k)$ são as funções elípticas de Jacobi e $K(k)$ é o integral elíptico completo de primeira espécie para o *modulus* k [37]. Alguns autores definem as funções com o parâmetro m , em vez de k , sendo a relação entre eles dada por $m=k^2$. A figura 1.3 apresenta um exemplo para $n=4$. Os pontos assinalados são dados pelas expressões

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{k'x_3}{\operatorname{dn}(M, k)} \\ x_2 &= x_3 \sqrt{1 - \frac{\operatorname{cn}(M, k)z(M, k)}{\operatorname{sn}(M, k)\operatorname{dn}(M, k)}} \\ x_3 &= \operatorname{sn}(-M, k) \\ k' &= \sqrt{1 - k^2} \end{aligned} \quad (1.63)$$

em que $z(\nu, k)$ é a função zeta de Jacobi [37].

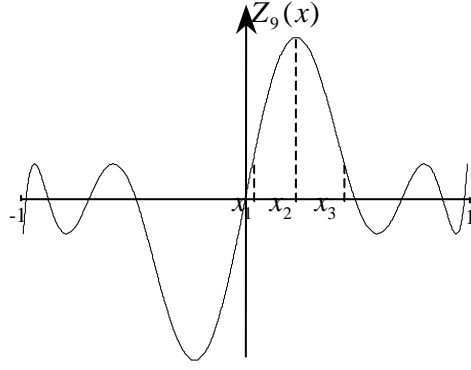


Fig. 1.3 - Polinómio de Zolotarev de ordem 9.

Embora a definição dos polinómios de Zolotarev seja dada pela expressão (1.62), McNamara apresenta expressões mais convenientes para o cálculo computacional. Para a região $0 \leq x \leq x_1$, tem-se que

$$\begin{aligned}
 Z_{2n+1}(x) &= \cos\left[(2n+1)h(M, \phi, k)\right] \\
 h(M, \phi, k) &= \frac{\pi}{2} - \arctan\left[\tan\left(\frac{\pi M}{2K}\right) \tanh\left(\frac{\pi \phi}{2K}\right)\right] + 2 \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r r^{-1} \frac{q^{2r}}{1-q^{2r}} \operatorname{sen}\left(\frac{r\pi M}{K}\right) \operatorname{senh}\left(\frac{r\pi \phi}{K}\right) \\
 \phi &= F(t, k') \\
 t &= \frac{x \operatorname{cn}(M, k)}{\sqrt{1-x^2} k' \operatorname{sn}(M, k)} \tag{1.64}
 \end{aligned}$$

em que $F(a, b)$ é o integral elíptico incompleto de primeira espécie [37], dado por

$$F(a, b) = \int_0^a \left[(1-t^2)(1-b^2 t^2) \right]^{-\frac{1}{2}} dt \tag{1.65}$$

e

$$\begin{aligned}
 q &= e^{-\frac{\pi K'}{K}} \\
 q' &= e^{-\frac{\pi K}{K'}} \\
 K &= K(k) \\
 K' &= K(k') \tag{1.66}
 \end{aligned}$$

Para a região $x_1 \leq x \leq x_3$, tem-se

$$\begin{aligned}
 Z_{2n+1}(x) &= \cos(n\pi) \cosh\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)f(M, s, k)\right] \\
 f(M, s, k) &= 4 \sum_{r=1}^{\infty} r^{-1} \frac{q^r}{1-q^{2r}} \operatorname{sen}\left(\frac{r\pi M}{K}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{r\pi s}{K}\right) \\
 s &= F(p, k)
 \end{aligned}$$

$$p = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{\text{sn}^2(M, k) - x^2}{\text{sn}^2(M, k)(1 - x^2)}} \quad (1.67)$$

Como não se conseguiu obter resultados correctos com a função $f(M, s, k)$ apresentada no artigo de McNamara, foi necessário deduzir outra expressão utilizando o desenvolvimento apresentado em [37] e cujo resultado aparece em (1.67). Para a terceira zona, $x_3 < x < 1$ tem-se

$$Z_{2n+1}(x) = \cos\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)g(M, \phi, k)\right]$$

$$g(M, \phi, k) = -\frac{\pi M \phi}{KK'} + 2 \arctan\left[\frac{\tan\left(\frac{\pi \phi}{2K'}\right)}{\tanh\left(\frac{\pi M}{2K'}\right)}\right] - 4 \sum_{r=1}^{\infty} r^{-1} \frac{q'^{2r}}{1 - q'^{2r}} \sinh\left(\frac{r\pi M}{K'}\right) \text{sen}\left(\frac{r\pi \phi}{K'}\right) \quad (1.68)$$

$$\phi = F(r, k)$$

$$r = \frac{\text{sn}(M, k) \sqrt{1 - x^2}}{\text{cn}(M, k) x}$$

O valor máximo dos polinómios de Zolotarev ocorre em $x=x_2$, ou

$$\cos(n\pi) \cosh\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)f(M, s_2, k)\right] = 10^{\frac{SLL}{20}} \quad (1.69)$$

expressão que relaciona k com o SLL para um dado agrupamento, ou seja, dado o valor da relação entre os níveis dos lóbulos principal e secundários, o factor k pode ser obtido através de (1.69). Com este valor e com a ordem do polinómio obtém-se o polinómio de Zolotarev, utilizando as expressões anteriores. Para a parte negativa dos mesmos basta notar que estes têm simetria ímpar.

Considerando um agrupamento linear com $2M$ elementos, o factor de agrupamento é dado por

$$F(\psi) = \sum_{n=1}^M a_n \text{sen}\left[\frac{(2n-1)\psi}{2}\right] \quad (1.70)$$

com $\psi=2\pi d \cos(\theta)/\lambda$ e em que se considera metade dos elementos devido à simetria. Para relacionar os polinómios de Zolotarev com o factor de agrupamento recorre-se à seguinte mudança de variável:

$$x = x_0 \text{sen}\left(\frac{\psi}{2}\right) \quad (1.71)$$

com $x_0=1/\text{sen}(\pi d/\lambda)$, de modo que quando θ varia entre 0 e π , x varia entre -1 e 1. A seguir assume-se o polinómio de Zolotarev na forma *standard*,

$$Z_{2M-1}(x) = b_1 x + b_2 x^3 + \dots + b_M x^{2M-1} \quad (1.72)$$

em que os coeficientes b_n são obtidos numericamente através de um algoritmo apropriado. McNamara alerta para o cuidado do cálculo destes coeficientes, já que podem tomar valores elevados (como nos polinómios de Tschebyscheff). Após isto substitui-se a mudança de variável (1.71) em (1.72), obtendo-se

$$Z_{2M-1}(\psi) = c_1 \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) + c_2 \sin^3\left(\frac{\psi}{2}\right) + \dots + c_M \sin^{2M-1}\left(\frac{\psi}{2}\right) \quad (1.73)$$

com

$$c_n = b_n x_0^{2M-1} \quad (1.74)$$

De seguida relaciona-se $Z_{2M-1}(\psi)$ com $F(\psi)$ e, fazendo uma abordagem semelhante à que foi feita em [22] para os polinómios de Tschebyscheff, retira-se que

$$a_n = (-1)^{M+n+1} \sum_{m=n}^M \binom{2m-1}{m-n} 2^{-(2m-1)} c_m \quad (1.75)$$

A abordagem anterior é válida para qualquer valor da distância d entre elementos. No entanto, devido à exigência de cálculo para obtenção dos coeficientes b_n , McNamara sugere que para $d \geq \lambda/2$ se utilize na expressão (1.71) $x_0=1$ e também o facto de que é possível escrever qualquer função, logo os polinómios de Zolotarev, como uma série de polinómios de Tschebyscheff. Desta forma, em vez de se obter os coeficientes b_n , deve-se calcular os coeficientes dos polinómios de Tschebyscheff, utilizando para esse efeito algoritmos apropriados.

1.7 - Síntese de Taylor

O método de síntese de Taylor lida com agrupamentos contínuos e com ele pretende-se obter um diagrama de radiação, em que os picos dos lóbulos secundários mais próximos do lóbulo principal têm a mesma amplitude e os mais afastados decaem gradualmente para zero. Este método foi proposto por Taylor [38] e tem sido melhorado por vários autores [39]-[43].

Já se viu que, para agrupamentos discretos, os polinómios de Tschebyscheff têm lóbulos secundários com níveis iguais. Para o contínuo também existe uma função com as mesmas características, sendo esta dada por

$$F(x) = \cos\left(\pi\sqrt{x^2 - A^2}\right) \quad (1.76)$$

sendo A um parâmetro ajustável, de modo que $\cosh(\pi A)$ é a relação entre os níveis dos lóbulos principal e secundários. A dificuldade em utilizar directamente esta função é que se o factor de agrupamento for dado pela equação (1.76), a distribuição de corrente não é realizável porque surgem dois Diracs nos seus extremos. Taylor propôs uma forma de resolver o problema. Como o agrupamento uniforme dá como factor de agrupamento um seno cardinal, cujos lóbulos secundários decaem para zero, Taylor propôs substituir os $\bar{n}-1$ zeros, do seno cardinal, mais próximos da origem, sendo \bar{n} um inteiro, pelos zeros da função (1.76). O diagrama de radiação assim obtido tem os lóbulos secundários, junto ao lóbulo principal, abaixo de um dado nível e os lóbulos mais afastados decaem segundo os do seno cardinal.

O factor de agrupamento é, assim, dado por

$$F(u) = \frac{\text{sen}(\pi u)}{\pi u} \frac{\prod_{n=1}^{\bar{n}-1} \left(1 - \frac{u^2}{u_n^2}\right)}{\prod_{n=1}^{\bar{n}-1} \left(1 - \frac{u^2}{n^2}\right)} \quad (1.77)$$

com $u=2a\cos(\theta)/\lambda$, o comprimento da linha de corrente é $L=2a$ e os zeros u_n são determinados pela expressão

$$u_n = \bar{n} \sqrt{\frac{A^2 + \left(n - \frac{1}{2}\right)^2}{A^2 + \left(\bar{n} - \frac{1}{2}\right)^2}} \quad (1.78)$$

O parâmetro A é dado por

$$A = \frac{1}{\pi} \text{arccosh}\left(10^{\frac{SLL}{20}}\right) \quad (1.79)$$

sendo SLL a relação entre os níveis dos lóbulos principal e secundários, em dB.

Para calcular a distribuição de corrente, Taylor utiliza o método de Woodward. Sendo $p=\pi x/a$, a distribuição de corrente é obtida em função das componentes de Fourier,

$$g(p) = \begin{cases} \sum_{m=-\infty}^{\infty} D_m e^{-jmp} & p^2 \leq \pi^2 \\ 0 & p^2 > \pi^2 \end{cases} \quad (1.80)$$

Aplicando a transformada de Fourier, $F(u) = \int_{-\pi}^{\pi} g(p)e^{jpu} dp$, a cada termo obtém-se o resultado

$$F(x) = 2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} D_m \frac{\text{sen}[\pi(x-m)]}{\pi(x-m)} \quad (1.81)$$

Como se viu pelo método de Woodward, em que os máximos do seno cardinal para um dado m coincidem com os zeros das outras funções, verifica-se que $F(m)=2\pi D(m)$, ou

$$D_m = \frac{F(m)}{2\pi} \quad (1.82)$$

Como o factor de agrupamento é uma função par, fica que

$$g(p) = \frac{1}{2\pi} \left[F(0) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} F(m) \cos(mp) \right] \quad (1.83)$$

sendo fácil de ver que esta soma é finita, pois $F(m)=0$ para $m \geq \bar{n}$. Os valores das amostras do factor de agrupamento podem ser calculados pela expressão [6], [9], [12]

$$F(m) = \frac{[(\bar{n}-1)!]^2}{(\bar{n}-1+m)! (\bar{n}-1-m)!} \prod_{n=1}^{\bar{n}-1} \left(1 - \frac{m^2}{u_n^2}\right) \quad (1.84)$$

para valores de m inferiores a \bar{n} .

1.8 - Síntese de Bayliss

Este método de síntese é análogo ao de Taylor, mas para gerar diagramas de radiação anti-simétricos, isto é, dois lóbulos principais gémeos com um zero entre eles. Foi proposto por Bayliss e será aqui descrito segundo a forma apresentada em Elliot [22].

Taylor altera a função seno cardinal, que corresponde ao agrupamento uniforme. O agrupamento uniforme não é mais do que o primeiro termo de uma distribuição que dá um factor de agrupamento par. Bayliss altera a função que dá origem ao factor de agrupamento anti-simético, ou seja, o primeiro termo de uma distribuição de corrente que dá um factor de agrupamento ímpar,

$$g(\zeta) = \text{sen}\left(\frac{\pi\zeta}{2a}\right) e^{-j\alpha\zeta} \quad (1.85)$$

sendo ζ o eixo da distribuição de corrente, α a fase progressiva e o comprimento da linha de corrente é $L=2a$. Aplicando o integral

$$F(u) = \int_{-a}^a g(\zeta) e^{j\beta\zeta \cos(\theta)} d\zeta \quad (1.86)$$

a distribuição de corrente (1.85) dá origem ao seguinte factor de agrupamento, a menos de uma constante [22]:

$$F(u) = \frac{\pi u \cos(\pi u)}{\left(u - \frac{1}{2}\right)\left(u + \frac{1}{2}\right)} \quad (1.87)$$

com $u=2a[\cos(\theta)-\alpha/\beta]/\lambda$ e os zeros ocorrem em $u=\pm(n+1/2)$. Modificando esta função como fez Taylor, tem-se

$$F(u) = \pi u \cos(\pi u) \frac{\prod_{n=1}^{\bar{n}-1} \left(1 - \frac{u^2}{u_n^2}\right)}{\prod_{n=0}^{\bar{n}-1} \left[1 - \frac{u^2}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2}\right]} \quad (1.88)$$

em que as posições dos zeros, obtidas por um estudo paramétrico com auxílio de computador

realizado por Bayliss, são dadas por

$$u_n = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ \left(-\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\right) \sqrt{\frac{\xi_n^2}{A^2 + n^2}} & n = 1, 2, 3, 4 \\ \left(-\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\right) \sqrt{\frac{A^2 + n^2}{A^2 + n^2}} & n = 5, 6, \dots, \bar{n} - 1 \end{cases} \quad (1.89)$$

Os parâmetros A e ξ_n podem ser obtidos através da expressão

$$\text{polinómio} = \sum_{n=0}^4 C_n (-SLL)^n \quad (1.90)$$

em que os coeficientes C_n são definidos pela tabela 1.1 [24].

| polinómio | C_0 | C_1 | C_2 | C_3 | C_4 |
|-----------|------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| A | 0,30387530 | -0,05042922 | -0,00027989 | -0,00000343 | -0,00000002 |
| ξ_1 | 0,98583020 | -0,03338850 | 0,00014064 | 0,00000190 | 0,00000001 |
| ξ_2 | 2,00337487 | -0,01141548 | 0,00041590 | 0,00000373 | 0,00000001 |
| ξ_3 | 3,00636321 | -0,00683394 | 0,00029281 | 0,00000161 | 0,00000000 |
| ξ_4 | 4,00518423 | -0,00501795 | 0,00021735 | 0,00000088 | 0,00000000 |

Tabela 1.1 - Coeficientes do polinómio.

A tabela 1.2 apresenta A e ξ_n para alguns valores de SLL , calculados por Elliot [22].

| | Nível dos lóbulos secundários em dB | | | | | |
|---------|-------------------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|
| | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 |
| A | 1,0079 | 1,2247 | 1,4355 | 1,6413 | 1,8431 | 2,0415 |
| ξ_1 | 1,5124 | 1,6962 | 1,8826 | 2,0708 | 2,2602 | 2,4504 |
| ξ_2 | 2,2561 | 2,3698 | 2,4943 | 2,6275 | 2,7675 | 2,9123 |
| ξ_3 | 3,1693 | 3,2473 | 3,3351 | 3,4314 | 3,5352 | 3,6452 |
| ξ_4 | 4,1264 | 4,1854 | 4,2527 | 4,3276 | 4,4093 | 4,4973 |

Tabela 1.2 - Parâmetros da síntese de Bayliss para alguns valores de SLL .

Para determinar a distribuição de corrente, considere-se a decomposição em série de Fourier de uma função ímpar, o que dá termos só em seno,

$$g(\zeta) = e^{-j\alpha\zeta} \sum_{m=0}^{\infty} B_m \text{sen} \left[\left(m + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi\zeta}{a} \right] \quad (1.91)$$

Inserindo esta expressão em (1.86) retira-se que

$$F(u) = 2j \sum_m B_m \int_0^a \text{sen} \left[\left(m + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi\zeta}{a} \right] \text{sen} \left(u \frac{\pi\zeta}{a} \right) d\zeta \quad (1.92)$$

Este integral é nulo excepto para $u=m+1/2$, donde

$$F\left(m + \frac{1}{2}\right) = jaB_m \quad (1.93)$$

Como $F(m+1/2)=0$ para $m \geq \bar{n}$, a série é truncada. Substituindo os valores de B_m , determinados pela expressão anterior, em (1.91) chega-se à distribuição de corrente para a síntese de Bayliss,

$$g(\zeta) = \frac{e^{-j\alpha\zeta}}{ja} \sum_{m=0}^{\bar{n}-1} F\left(m + \frac{1}{2}\right) \text{sen} \left[\left(m + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi\zeta}{a} \right] \quad (1.94)$$

Os valores das amostras do factor de agrupamento, tal como na síntese de Taylor, podem ser obtidos por uma expressão [9], sendo esta dada por

$$F\left(m + \frac{1}{2}\right) = \pi^2 (-1)^m \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{\prod_{n=1}^{\bar{n}-1} \left[1 - \frac{\left(m + \frac{1}{2}\right)^2}{u_n^2} \right]}{\prod_{\substack{n=0 \\ n \neq m}}^{\bar{n}-1} \left[1 - \frac{\left(m + \frac{1}{2}\right)^2}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2} \right]} \quad (1.95)$$

para $m=0, 1, 2, \dots, \bar{n}-1$.

1.9 - Síntese de Villeneuve

Um método de síntese análogo ao de Taylor, mas para distribuições discretas de corrente, foi desenvolvido por Villeneuve [44]. Este método apresenta melhores resultados do que o obtido por amostragem dos agrupamentos contínuos [22].

Da mesma forma que Taylor inicia com a função ideal, representada pela expressão (1.76), Villeneuve começa com os polinómios de Tschebyscheff. O factor de agrupamento para um agrupamento de $N=2M+1$ elementos é dado por

$$F(\psi) = \frac{\text{sen}\left(\frac{2M+1}{2}\psi\right)}{\text{sen}\left(\frac{1}{2}\psi\right)} \frac{\prod_{m=1}^{\bar{n}-1} \text{sen}\left(\frac{\psi - \psi'_m}{2}\right) \text{sen}\left(\frac{\psi + \psi'_m}{2}\right)}{\prod_{m=1}^{\bar{n}-1} \text{sen}\left(\frac{\psi - \frac{m2\pi}{2M+1}}{2}\right) \text{sen}\left(\frac{\psi + \frac{m2\pi}{2M+1}}{2}\right)} \quad (1.96)$$

em que $\psi = \beta d \cos(\theta)$ e ψ'_m é obtido em função dos zeros do polinómio de Tschebyscheff,

$$\psi'_m = \frac{\bar{n}\pi\psi_m}{(2M+1) \arccos\left[\frac{1}{x_0} \cos\left((2\bar{n}-1)\frac{\pi}{4M}\right)\right]} \quad (1.97)$$

$$\psi_m = 2 \arccos\left[\frac{1}{x_0} \cos\left((2m-1)\frac{\pi}{4M}\right)\right]$$

sendo x_0 determinado pela equação (1.45).

Para se obter a distribuição de corrente considera-se a forma do factor de agrupamento,

$$F(\psi) = \sum_{n=-M}^M a_n e^{jn\psi} \quad (1.98)$$

O seu valor em $\psi = 2\pi m / (2M+1)$ é

$$F\left(\frac{m2\pi}{2M+1}\right) = \sum_{n=-M}^M a_n e^{j\frac{2\pi mn}{2M+1}} \quad (1.99)$$

Multiplicando ambos os lados da expressão anterior por $e^{-j2\pi pm / (2M+1)}$ e resolvendo-a, obtém-se

$$a_p = \frac{1}{2M+1} \sum_{m=-(n-1)}^{\bar{n}-1} F\left(\frac{m2\pi}{2M+1}\right) e^{-j\frac{2\pi pm}{2M+1}} \quad -M \leq p \leq M \quad (1.100)$$

tendo em conta que $F[2\pi m / (2M+1)] = 0$ excepto para $-(\bar{n}-1) \leq m \leq \bar{n}-1$. A fórmula apresentada por Villeneuve que permite obter as amostras do factor de agrupamento é

$$F\left(\frac{m2\pi}{2M+1}\right) = \begin{cases} \frac{(2M+1)(-1)^m \prod_{q=1}^{\bar{n}-1} \text{sen}\left(\frac{m\pi}{2M+1} - \frac{\psi'_q}{2}\right) \text{sen}\left(\frac{m\pi}{2M+1} + \frac{\psi'_q}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{m\pi}{2M+1}\right) \text{sen}\left(\frac{m2\pi}{2M+1}\right) \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq m}}^{\bar{n}-1} \text{sen}\left[\frac{(m-q)\pi}{2M+1}\right] \text{sen}\left[\frac{(m+q)\pi}{2M+1}\right]} & m \neq 0 \\ \frac{(2M+1) \prod_{q=1}^{\bar{n}-1} \text{sen}^2\left(\frac{\psi'_q}{2}\right)}{\prod_{q=1}^{\bar{n}-1} \text{sen}^2\left(\frac{q\pi}{2M+1}\right)} & m = 0 \end{cases} \quad (1.101)$$

Através de uma abordagem semelhante chega-se às expressões para $N=2M$ elementos. Assim, o factor de agrupamento é dado por

$$F(\psi) = \frac{\text{sen}(M\psi)}{\text{sen}\left(\frac{1}{2}\psi\right)} \frac{\prod_{m=1}^{\bar{n}-1} \text{sen}\left(\frac{\psi - \psi'_m}{2}\right) \text{sen}\left(\frac{\psi + \psi'_m}{2}\right)}{\prod_{m=1}^{\bar{n}-1} \text{sen}\left(\frac{\psi - \frac{m2\pi}{2M}}{2}\right) \text{sen}\left(\frac{\psi + \frac{m2\pi}{2M}}{2}\right)} \quad (1.102)$$

com

$$\psi'_m = \frac{\bar{n}2\pi\psi_m}{2M \arccos\left[\frac{1}{x_0} \cos\left((2\bar{n}-1)\frac{\pi}{2(2M-1)}\right)\right]} \quad (1.103)$$

$$\psi_m = 2 \arccos\left[\frac{1}{x_0} \cos\left((2m-1)\frac{\pi}{2(2M-1)}\right)\right]$$

e para a distribuição de corrente tem-se que

$$a_p = \frac{1}{2M} \sum_{m=-(n-1)}^{\bar{n}-1} F\left(\frac{m2\pi}{2M}\right) e^{-j\frac{2\pi(p-1/2)m}{2M}} \quad -(M-1) \leq p \leq M \quad (1.104)$$

As amostras do factor de agrupamento são determinadas por

$$F\left(\frac{m2\pi}{2M}\right) = \begin{cases} \frac{2M(-1)^m \prod_{q=1}^{\bar{n}-1} \text{sen}\left(\frac{m\pi}{2M} - \frac{\psi'_q}{2}\right) \text{sen}\left(\frac{m\pi}{2M} + \frac{\psi'_q}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{m\pi}{2M}\right) \text{sen}\left(\frac{m2\pi}{2M}\right) \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq m}}^{\bar{n}-1} \text{sen}\left[\frac{(m-q)\pi}{2M}\right] \text{sen}\left[\frac{(m+q)\pi}{2M}\right]} & m \neq 0 \\ \frac{2M \prod_{q=1}^{\bar{n}-1} \text{sen}^2\left(\frac{\psi'_q}{2}\right)}{\prod_{q=1}^{\bar{n}-1} \text{sen}^2\left(\frac{q\pi}{2M}\right)} & m = 0 \end{cases} \quad (1.105)$$

Comparando com o método de amostragem dos agrupamentos de Taylor, a síntese de Villeneuve deve ser utilizada, pelo menos, para pequenos agrupamentos [21].

McNamara [45] generaliza este método de modo a permitir qualquer decaimento dos lóbulos secundários. Para um agrupamento com $2M$ elementos, a posição dos zeros é, agora, dada por

$$\psi'_n = \begin{cases} \frac{\psi_n^- + (v+1)(\psi_{0n}^- - \psi_n^-)}{\psi_n^-} \psi_n^- & n \leq \bar{n} \\ \psi_n^- + (v+1)(\psi_{0n}^- - \psi_n^-) & n \geq \bar{n} \end{cases} \quad (1.106)$$

com

$$\begin{aligned}\psi_n &= \pm 2 \arccos \left[\frac{1}{x_0} \cos \left(\frac{(2n-1)\pi}{2(2M-1)} \right) \right] \\ \psi_{0n} &= \pm \frac{n\pi}{M} \quad n = 1, 2, \dots, N\end{aligned}\tag{1.107}$$

O parâmetro ν permite o controlo do decaimento dos lóbulos secundários. Se $\nu=-1$ tem-se a distribuição de Tschebyscheff e se $\nu=0$ tem-se a distribuição de Villeneuve. Se $\nu>0$ os lóbulos decaem mais rapidamente do que na distribuição de Villeneuve, com o respectivo alargamento do lóbulo principal, e se $\nu<0$ os lóbulos decaem menos.

Para $2M+1$ elementos as expressões anteriores mantêm-se excepto a segunda de (1.107), que fica

$$\psi_{0n} = \pm \frac{2n\pi}{2M+1} \quad n = 1, 2, \dots, N\tag{1.108}$$

Para obter a distribuição de corrente NcNamara utiliza a forma de um agrupamento simétrico, que para $2M$ elementos é dada por

$$F(\psi) = \sum_{n=1}^M a_n \cos \left[\frac{(2n-1)\psi}{2} \right]\tag{1.109}$$

Supondo $a_M=1$, os restantes valores de a_n são obtidos impondo que a expressão anterior coincida com os $M-1$ zeros determinados anteriormente. Resolvendo este sistema de equações de $M-1$ incógnitas obtém-se a distribuição de corrente desejada.

1.10 - Síntese de McNamara

No seguimento das secções anteriores e por analogia com o método de síntese de Villeneuve, vai-se designar por síntese de McNamara o método de Zolotarev alterado [46], ou seja, da mesma forma que Villeneuve altera os polinómios de Tschebyscheff para obter um diagrama de radiação análogo ao de Taylor, McNamara altera os polinómios de Zolotarev para obter um diagrama de radiação análogo ao de Bayliss. Deste modo, o método de síntese de McNamara produz diagramas de radiação tipo Bayliss, mas para distribuições discretas.

Para um agrupamento de Zolotarev de $2M$ elementos, os zeros do factor de agrupamento são $\psi_n, n=\pm 1, \pm 2, \dots, \pm(M-1)$, com $\psi=2\pi d \cos(\theta)/\lambda$. De forma semelhante ao que foi feito em Villeneuve [44], partindo do agrupamento de Zolotarev, mantêm-se os primeiros $\bar{n}-1$ zeros, ψ_n , e os restantes são substituídos pelos zeros de um factor de agrupamento a determinar, definidos por $\psi_{0n}, n = \bar{n}, \bar{n}+1, \dots, M-1$. Os zeros são

$$\psi_n = \begin{cases} \frac{\psi_{0\bar{n}}}{\psi_{\bar{n}}} \psi_n & n \leq \bar{n} \\ \psi_{0n} & n \geq \bar{n} \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots, M-1\tag{1.110}$$

mais o zero $\psi=0$. Os zeros ψ_{0n} são determinados a partir do factor de agrupamento que produz a máxima directividade [47] ou do factor de agrupamento que produz a máxima inclinação [48] de agrupamentos discretos anti-simétricos. Estas funções são obtidas por métodos iterativos.

Se for pretendido controlar o decaimento dos lóbulos secundários, pode-se utilizar uma abordagem semelhante à que foi efectuada no final da secção anterior. Os novos zeros do factor de agrupamento são

$$\psi'_n = \begin{cases} \frac{\psi_n + \xi(\psi_{0n} - \psi_n)}{\psi_n} \psi_n & n \leq \bar{n} \\ \psi_n + \xi(\psi_{0n} - \psi_n) & n \geq \bar{n} \end{cases} \quad (1.111)$$

Se $\xi=0$ obtém-se a distribuição de Zolotarev e se $\xi=1$ os zeros são os apresentados em (1.110). Com $\xi>1$ tem-se um maior decaimento dos lóbulos secundários.

1.11 - Métodos dos Filtros

Há bastante tempo que se viu a possibilidade de se utilizar algumas técnicas dos filtros FIR (*finite impulse response*) com a finalidade de se obter os diagramas de radiação com melhores resultados.

Uma das aplicações de processamento de sinal é o projecto de filtros com determinadas características. Como nem sempre é possível obter a sua forma exacta, devido à duração ilimitada da sua resposta impulsional, tem-se que recorrer a determinadas técnicas, por forma a que o filtro resultante seja o mais aproximado do pretendido. Uma dessas técnicas consiste na multiplicação por uma janela, a fim de truncar a resposta impulsional do filtro quando esta tem duração infinita [49]-[52]. Outra técnica consiste em amostrar a resposta em frequência do filtro com um número de pontos igual ao número de coeficientes do mesmo [49], [50], [53]. É interessante notar que o método de Woodward utilizado em antenas, embora realizado de forma diferente, tem semelhanças com esta técnica. Uma terceira forma consiste na obtenção de filtros óptimos, caracterizados pela aproximação de Tschebyscheff (*equiripple*). Normalmente, este caso obriga a utilizar técnicas iterativas [54], [55].

Como já foi mencionado, o método das janelas consiste em truncar os coeficientes do filtro desejado, de modo que o resultado final seja um filtro de duração finita. Uma vez que o truncamento da série de Fourier com a janela rectangular conduz a lóbulos secundários elevados, surgiram várias janelas com melhores características para realizar o processo de truncamento. Harris [56] e Nuttall [57] apresentam um conjunto de janelas com boas características em termos de lóbulos secundários.

Em antenas, considerando que a distribuição de corrente uniforme produz diagramas de radiação com elevados lóbulos secundários, alguns autores viram que a intensidade desses lóbulos pode ser diminuída utilizando distribuições de corrente que tendessem para zero nos extremos do agrupamento [58]. Algumas das distribuições utilizadas são: rectangular, triangular, co-seno limitado, co-seno num pedestal, co-seno ao quadrado, binomial, gaussiana, Taylor, Tschebyscheff, etc [7], [58]. Estas distribuições foram analisadas quanto às suas

características. Por exemplo, o co-seno num pedestal é conhecido em processamento de sinal como a janela de Hamming.

A técnica das janelas foi aplicada recentemente em antenas para diagramas de tensão [59], mas para antenas de abertura, em que os autores sugerem multiplicar a distribuição de corrente ideal por um filtro de comprimento igual ao da antena. Anteriormente esta técnica foi apresentada por alguns autores, mas aplicada aos diagramas de potência de agrupamentos discretos [2], [60], [61]. Trabalhar com o diagrama de potência permite ignorar a fase do diagrama de tensão.

Dado um factor de agrupamento (diagrama de tensão),

$$F(\psi) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n e^{jn\psi} \quad (1.112)$$

com $\psi = \beta \cos(\theta)$, o diagrama de potência é

$$P(\psi) = F(\psi)F^*(\psi) \quad (1.113)$$

em que o asterisco representa complexo conjugado. Esta expressão também tem a forma de uma série de Fourier [2].

$$P(\psi) = \sum_{n=-N}^N b_n e^{jn\psi} \quad (1.114)$$

com

$$b_n = \begin{cases} \sum_{m=n}^N a_m a_{m-n}^* & n \geq 0 \\ \sum_{m=0}^{N+n} a_m a_{m-n}^* & n < 0 \end{cases} \quad (1.115)$$

Para um agrupamento com N elementos, o diagrama de potência terá $2N-1$ termos. Um método de síntese dos diagramas de potência seria o truncamento da sua decomposição em série de Fourier quando a sua duração fosse superior ao número de termos. Isto equivale a multiplicar pela janela rectangular, o que pode dar valores negativos para o diagrama dentro da janela visível. Outra forma consiste em pesar os coeficientes de Fourier por uma função (janela), de modo que os termos da série decresçam para zero nos seus extremos. Isto tem por objectivo diminuir o fenómeno Gibbs resultante do critério dos mínimos quadrados. A síntese do diagrama potência normalmente conduz a várias distribuições de corrente para o mesmo diagrama de potência. Milne [60] realiza este método de síntese, utilizando a janela triangular e a baseada nos polinómios de Tschebyscheff. Picazo [61] recorre à janela de Tschebyscheff e à de Taylor.

Outro método de síntese de agrupamentos baseia-se na técnica de projecto de filtros óptimos. Para o filtro passa-baixo, a figura 1.4 mostra os parâmetros de interesse da sua resposta em frequência. As três zonas importantes são: a banda de passagem, correspondente à gama frequências $0 \leq \omega \leq \omega_p$, com erro máximo de δ_1 ; a zona de transição, na gama $\omega_p \leq \omega \leq \omega_s$; e a banda de corte, na gama $\omega_p \leq \omega \leq \pi$, com erro máximo δ_2 . Sabendo o número máximo de picos da figura 1.4 para um dado número de coeficientes do filtro, a posição dos mesmos é

calculada por métodos iterativos. Com a posição dos picos, a resposta em frequência é obtida por interpolação polinomial e os coeficientes do filtro são determinados pela transformada inversa [54], [62]-[64].

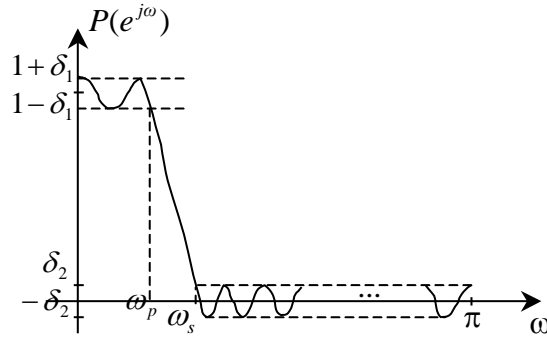


Fig. 1.4 - Aproximação *equiripple*.

Em termos de expressões, um filtro digital é definido pela resposta em frequência [63],

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n} = G(e^{j\omega})e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} = P(e^{j\omega})Q(e^{j\omega})e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} \quad (1.116)$$

em que $Q(e^{j\omega})=1, \cos(\omega/2), \sin(\omega)$ ou $\sin(\omega/2)$, dependendo do número N e da simetria da resposta impulsional do filtro, e

$$P(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{r-1} \alpha(n) \cos(\omega n) \quad (1.117)$$

O número de extremos da função é igual a $r+1$, com $r=(N+1)/2$, para N ímpar, e $r=N/2$, para N par. O método consiste em obter a função $P(e^{j\omega})$ segundo a aproximação de minimizar o máximo valor do erro. Para esse efeito, supõe-se que $D(e^{j\omega})$ é a função desejada para o filtro e $W(e^{j\omega})$ a função de pesagem da função de erro utilizada na aproximação. É empregue a fórmula de interpolação de Lagrange para interpolar os r pontos, $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{r-1}$, com os valores C_k , dada pela seguinte forma:

$$P(e^{j\omega}) = \frac{\sum_{k=0}^{r-1} \left[\frac{\beta_k}{x - x_k} \right] C_k}{\sum_{k=0}^{r-1} \left[\frac{\beta_k}{x - x_k} \right]} \quad (1.118)$$

$$\beta_k = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{r-1} \frac{1}{(x_k - x_i)}$$

$$x = \cos(\omega)$$

$$x_k = \cos(\omega_k)$$

em que

$$\begin{aligned}
 C_k &= \hat{D}(e^{j\omega_k}) - (-1)^k \frac{\delta}{\hat{W}(e^{j\omega_k})}, \quad k = 0, 1, \dots, r-1 \\
 \delta &= \frac{a_0 \hat{D}(e^{j\omega_0}) + a_1 \hat{D}(e^{j\omega_1}) + \dots + a_r \hat{D}(e^{j\omega_r})}{a_0 / \hat{W}(e^{j\omega_0}) - a_1 / \hat{W}(e^{j\omega_1}) + \dots + (-1)^r a_r / \hat{W}(e^{j\omega_r})} \\
 a_k &= \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^r \frac{1}{(x_k - x_i)} \\
 x_i &= \cos(\omega_i) \\
 \hat{D}(e^{j\omega}) &= \frac{D(e^{j\omega})}{Q(e^{j\omega})} \\
 \hat{W}(e^{j\omega}) &= W(e^{j\omega})Q(e^{j\omega})
 \end{aligned} \tag{1.119}$$

Avaliado o erro cometido, se o valor não for o desejado, escolhe-se como novos candidatos às $r+1$ frequências aquelas que correspondem aos picos da função de erro e volta-se a aplicar a fórmula da interpolação. O método continua de uma forma iterativa.

Evans [65] faz uma analogia entre o diagrama de radiação de um agrupamento, caracterizado pelo somatório das correntes $\{I_m\}$,

$$G(\eta) = \sum_{m=1}^N I_m e^{j\beta m d \eta} \tag{1.120}$$

e a resposta em frequência de um filtro FIR, definida pelas suas amostras $\{h_m\}$,

$$H(\omega) = \sum_{m=1}^N h_m e^{jm\omega T} = \sum_{m=1}^N h_m e^{j2\pi m F T} \tag{1.121}$$

sendo T o período de amostragem. Com $F = \eta d / \lambda$ e $T=1$, os dois sistemas são análogos. Supondo um agrupamento com $N=2M+1$ elementos e $d/\lambda=0,5$ por conveniência numérica, se o agrupamento for simétrico, o factor de agrupamento fica

$$G(\eta) = b_0 + \sum_{m=1}^M b_m \cos(\pi m \eta) \tag{1.122}$$

A expressão anterior pode ser posta na forma de um polinómio

$$P(x) = \sum_{m=0}^M c_m x^m \tag{1.123}$$

com $x = \cos(\pi \eta)$. Esta abordagem, que é utilizada para obtenção de filtros passa-baixo, Evans utiliza-a para obter uma aproximação ao diagrama de radiação com a forma do pedestal. O factor de agrupamento pretendido tem *equiripple* quer na zona do pedestal quer na zona dos lóbulos secundários e é obtido pelos métodos iterativos utilizados nos filtros.

Também White [66] aproveita alguns procedimentos dos filtros digitais para obter distribuições de corrente, neste caso contínuas, recorrendo à técnica de geração de polinómios contendo uma estrutura de máximos e mínimos. Mais uma vez são utilizados métodos iterativos para cálculo da solução. Shpak e Antoniou [67] é outro exemplo que utiliza os algoritmos dos filtros para síntese de agrupamentos, recorrendo à forma apresentada na expressão (1.118).

1.12 - Síntese de Factores de Agrupamento com Nulos

A obtenção de agrupamentos capazes de gerar nulos em determinadas direcções do diagrama de radiação é importante para suprimir interferências de fontes indesejadas provenientes dessas direcções. Assim, surgem vários trabalhos que apresentam métodos determinísticos ou iterativos para realizar tal objectivo. Alguns desses métodos geram os nulos, controlando apenas a fase da distribuição de corrente [68]-[72], outros apenas a amplitude [73], [74] e, ainda, a posição dos elementos [75]-[77]. Os iterativos conseguem controlar vários parâmetros do agrupamento, mas obrigam a utilizar métodos de optimização. Alguns deles pretendem criar zonas do diagrama com níveis mais baixos dos lóbulos secundários [42], [43], [78]-[82] e outros na geração efectiva de nulos em determinadas direcções [67], [83]-[88]. Uma outra forma de gerar nulos no diagrama é através de métodos adaptativos. Um agrupamento adaptativo é um sistema que controla o seu próprio diagrama, ajustando os coeficientes do agrupamento em tempo real, de modo a adaptar-se às variações do meio ambiente [9]. A teoria adaptativa baseia-se na análise matricial e em métodos de optimização [89]-[99].

Normalmente, os métodos determinísticos com controlo de fase recorrem a um sistema de equações com a aproximação dos dois primeiros termos da expansão da série de Taylor. Segundo o processo apresentado por Steyskal [68], sendo o diagrama dado pela expressão

$$f_0(u) = \sum_{n=-N}^N a_n e^{-jn\beta du} \quad (1.124)$$

com $u = \cos(\theta)$, d o espaçamento entre elementos e a_n a excitação de cada um dos $2N+1$ elementos, o método consiste em expandir em série de Taylor os coeficientes $a_n = e^{j\phi_n}$. Retendo os dois primeiros termos da série, obtém-se

$$f(u) \cong \sum_n a_n e^{-jn\beta du} + j \sum_n a_n \phi_n e^{-jn\beta du} \quad (1.125)$$

Sendo M o número de direcções onde se pretende inserir um nulo, $u = u_m$, $m=1, \dots, M$, ao impor a expressão (1.125) igual a zero em u_m obtém-se $2M$ equações reais para as $2N+1$ incógnitas, ϕ_n . Como o problema não tem solução quando $2M < 2N+1$, impõe-se que as perturbações sejam pequenas segundo o critério dos mínimos quadrados. Este problema tem solução analítica e o diagrama resultante pode ser visto como o diagrama original somado com M feixes simétricos com um dos picos orientado na direcção do nulo.

O método de controlo de amplitude consiste em colocar as raízes do círculo de Schelkunoff na posição dos nulos pretendidos e impor pares conjugados dessas raízes, a fim de que as correntes se tornem reais.

Com controlo de fase e amplitude, Gaushell [15] apresenta um método directo para gerar nulos num diagrama de radiação predefinido. Partindo da representação do círculo de Schelkunoff, em que o diagrama de radiação do agrupamento é obtido em função dos zeros, cada nulo é criado por deslocamento do zero do diagrama original mais próximo para a posição pretendida. Essa deslocação é realizada multiplicando o diagrama original pelos zeros correspondentes aos nulos a inserir e dividindo pelos zeros a retirar. O processo de cálculo baseia-se na transformada Z e na convolução numérica.

Tseng [100] também apresenta um método directo para gerar um nulo, mas para os agrupamentos de Taylor. O método consiste em introduzir um zero na posição desejada do factor de agrupamento e alterar a posição dos zeros da síntese de Taylor, de modo a que haja uma compressão da distância entre eles na zona onde se pretende o nulo e uma dilatação da distância entre zeros nos dois lados imediatos. Desta forma, há uma diminuição do nível dos lóbulos secundários à volta do nulo e um aumento dos lóbulos na zona imediata.

Steyskal [101] apresenta outro método para gerar M nulos no factor de agrupamento. Definindo o factor de agrupamento por

$$p(u) = \sum_{n=1}^N x_n e^{-jn\pi u} \quad (1.126)$$

com $u = \cos(\theta)$, a distância entre elementos igual a meio comprimento de onda e sendo x_n a excitação do elemento n , o problema de síntese consiste em procurar $p_a(u)$, de tal modo que minimize o erro segundo o critério dos mínimos quadrados,

$$\varepsilon(p_a) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 |p_0(u) - p_a(u)|^2 du = \text{mim.} \quad (1.127)$$

sujeito às condições

$$p_a(u_m) = 0, \quad m = 1, \dots, M \quad (1.128)$$

em que u_m são as posições das interferências. O autor deste artigo também propõe um outro método que em vez de utilizar (1.128) impõe as derivadas $p_a(u_m)$, até uma dada ordem, igual a zero. No entanto, este segundo método é menos efectivo [102]. Aplicando o teorema de Parseval à equação (1.127) chega-se à expressão

$$\varepsilon = \sum_{n=1}^N |x_{0n} - x_{an}|^2 \quad (1.129)$$

Colocando na forma vectorial, definindo o produto interno entre dois vectores por $(\bar{x}, \bar{y}) = \sum x_n y_n^*$ e a norma por $\|\bar{x}\| = (\bar{x}, \bar{x})^{1/2}$, tem-se que

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \|\bar{x}_0 - \bar{x}_a\|^2 = \text{mim.} \\ (\bar{x}_a, \bar{y}_m) &= 0, \quad m = 1, \dots, M \end{aligned} \quad (1.130)$$

com $\bar{x} = (x_1, \dots, x_N)$, $\bar{y} = (e^{j(\psi-\pi)u}, \dots, e^{j(\psi-N\pi)u})$ e $\psi=(N+1)/2$. Utilizando considerações geométricas, a solução do problema, para a distância entre elementos de $d=\lambda/2$, é

$$\begin{aligned} \bar{x}_a &= \bar{x}_0 - \sum_{m=1}^M \alpha_m \bar{y}_m \\ p_a(u) &= p_o(u) - \sum_{m=1}^M \alpha_m \frac{\text{sen}\left[\frac{N\pi(u-u_m)}{2}\right]}{\text{sen}\left[\frac{\pi(u-u_m)}{2}\right]} \end{aligned} \quad (1.131)$$

com os α_m determinados pelo seguinte sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} (\bar{y}_1, \bar{x}_0) \\ (\bar{y}_2, \bar{x}_0) \\ \vdots \\ (\bar{y}_M, \bar{x}_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\bar{y}_1, \bar{y}_1) & (\bar{y}_1, \bar{y}_2) & \dots & (\bar{y}_1, \bar{y}_M) \\ (\bar{y}_2, \bar{y}_1) & (\bar{y}_2, \bar{y}_2) & \dots & (\bar{y}_2, \bar{y}_M) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\bar{y}_M, \bar{y}_1) & (\bar{y}_M, \bar{y}_2) & \dots & (\bar{y}_M, \bar{y}_M) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_M \end{bmatrix}^* \quad (1.132)$$

Como se pode verificar pela solução, este método consiste em somar M funções seno cardinal $\text{sen}(Nx)/\text{sen}(x)$ ao factor de agrupamento original. Consegue-se, desta forma, gerar M nulos no diagrama. A forma de gerar um nulo de banda larga consiste em impor vários nulos próximos uns dos outros.

O resultado obtido pelo método anterior coincide com o obtido pelo método adaptativo para maximização da relação sinal/ruído apresentado em [90]. Assim, no caso de interferências infinitamente fortes, o diagrama de radiação que maximiza a relação sinal/ruído é a aproximação segundo o erro médio quadrático do diagrama original [101].

Supondo um agrupamento com um número ímpar de elementos, centrado, se no problema de síntese apresentado atrás juntar mais alguma flexibilidade à expressão de minimização, substituindo (1.129) pela equação

$$\varepsilon = \sum_{n=1}^N c_n |x_{0n} - x_{an}|^2 \quad (1.133)$$

a solução depende directamente dos coeficientes de pesagem c_n [103]. Com $c_n=1$, é somado ao diagrama original uma função tipo $\text{sen}(Nx)/\text{sen}(x)$, como se viu antes. Se $c_n=1/x_{0n}$, então a função é uma réplica da função original.

Outro método permite gerar um nulo no factor de agrupamento variando apenas os valores das correntes dos extremos do agrupamento [104]. Este baseia-se no facto de haver uma certa semelhança na estrutura dos lóbulos secundários do factor de agrupamento de um agrupamento linear uniforme e do factor de agrupamento definido apenas pelos elementos extremos, sendo este último dado por

$$f(\theta) = e^{jkd(N/2)\cos(\theta)} + e^{-jkd(N/2)\cos(\theta)} = 2 \cos\left[\frac{kdN}{2} \cos(\theta)\right] \quad (1.134)$$

com o número de elementos igual a $N+1$. O algoritmo proposto consiste em cancelar um dado

lóbulo secundário em vez de gerar um nulo no factor de agrupamento. Para isso, supondo que θ_m é a direcção donde provém uma dada interferência, cancela-se o lóbulo secundário que contém essa direcção. Para cancelar todo o lóbulo é necessário obter o ângulo θ_m que define o seu centro. Depois é adicionada uma variação de fase, δ , ao primeiro elemento e o seu conjugado ao último, de modo a deslocar a função sinusoidal para a posição do pico, θ_m . Por último, multiplica-se por uma constante, C , de módulo igual à do lóbulo a cancelar e fase oposta. A função de cancelamento para $d=\lambda/2$ e para um número ímpar de elementos é dada por

$$f(\theta_m) = Ce^{j\left[\frac{\pi}{2} \frac{N}{N+1}(2m+1)+\delta\right]} + Ce^{-j\left[\frac{\pi}{2} \frac{N}{N+1}(2m+1)+\delta\right]} = 2C \cos\left[\frac{\pi}{2} \frac{N}{N+1}(2m+1) + \delta\right] \quad (1.135)$$

em que m é o lóbulo secundário a cancelar, obtido pelos máximos da função co-seno. Por conseguinte, tendo o valor de θ_m e o pico do lóbulo secundário, f_m , as constantes são determinados por

$$|C| = \frac{|f_m|}{2} \quad (1.136)$$

$$\delta = -\left[\pi + \frac{\pi}{2} N \frac{(2m+1)}{N+1}\right]$$

A excitação é apenas a sobreposição da inicial com o sinal de cancelamento.

Ng [105] apresenta um outro método para gerar nulos utilizando uma abordagem de optimização através da análise matricial. Começa por definir o diagrama de radiação de N elementos da seguinte forma:

$$g(u) = \sum_{i=0}^{N-1} W_i e^{-j\langle p_i, u \rangle \omega_0 / c} = S^* W \quad (1.137)$$

em que p_i é o vector tridimensional da posição do elemento i , u é o versor de referência, $\langle p_i, u \rangle$ é o produto escalar de p_i com u , c é a velocidade de propagação e ω_0 é a frequência de funcionamento. Os vectores são definidos por

$$W = [W_0, W_1, \dots, W_{N-1}]^T \quad (1.138)$$

e

$$S = \left[e^{j\langle p_0, u \rangle \omega_0 / c}, e^{j\langle p_1, u \rangle \omega_0 / c}, \dots, e^{j\langle p_{N-1}, u \rangle \omega_0 / c} \right]^* \quad (1.139)$$

em que T significa transposta e $*$ transposta conjugada. Seja S_d o vector para a direcção pretendida $u=u_d$ e S_1, S_2, \dots, S_m , $m < N$, os vectores para as direcções u_1, u_2, \dots, u_m , respectivamente, onde se pretende gerar os nulos. O problema que se coloca é maximizar a potência do sinal na direcção u_d , dada por

$$Q = W^* A W \quad (1.140)$$

com $A = S_d S_d^*$, sujeito às condições

$$\begin{aligned} C^* W &= 0 \\ W^* W &= 1 \end{aligned} \quad (1.141)$$

e sendo $C = [S_1, S_2, \dots, S_m]$. Utilizando considerações da álgebra matricial, transformando o problema de otimização com restrições num problema sem restrições através do método dos multiplicadores de Lagrange [106], a solução é

$$\begin{aligned} W_{opt} &= P y_{max} \\ P &= I - C(C^* C)^{-1} C^* \end{aligned} \quad (1.142)$$

em que y_{max} é o vector próprio correspondente a $\lambda_{max}(PAP)$, sendo λ_{max} o máximo valor próprio de PAP .

O método que vai ser agora apresentado baseia-se no conceito da transformada de Fourier discreta não uniforme, NDFT (*Nonuniform Discrete Fourier Transform*), apresentada por Sonali e Mitra [107] para aplicações em processamento de sinal. Utilizando esse desenvolvimento, um dos capítulos do livro aborda a questão de gerar nulos no factor de agrupamento em antenas. A NDFT é definida por

$$X(z_k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z_k^n, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1.143)$$

em que z_0, z_1, \dots, z_{N-1} são pontos distintos localizados arbitrariamente no plano z . Na forma matricial tem-se que

$$X = Dx \quad (1.144)$$

onde os vários vectores são definidos da seguinte forma:

$$X = \begin{bmatrix} X(z_0) \\ X(z_1) \\ \dots \\ X(z_{N-1}) \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \dots \\ x(N-1) \end{bmatrix} \quad (1.145)$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & z_0^{-1} & z_0^{-2} & \dots & z_0^{-(N-1)} \\ 1 & z_1^{-1} & z_1^{-2} & \dots & z_1^{-(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & z_{N-1}^{-1} & z_{N-1}^{-2} & \dots & z_{N-1}^{-(N-1)} \end{bmatrix}$$

Se os pontos de amostragem forem distintos, um modo de calcular a NDFT inversa é

$$x = D^{-1} X \quad (1.146)$$

A outra é pela fórmula de interpolação de Lagrange, mais eficiente em termos de cálculo,

$$X(z) = \sum_{k=0}^{N-1} X(z_k) \frac{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{N-1} (1 - z_i z^{-1})}{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{N-1} (1 - z_i z_k^{-1})} \quad (1.147)$$

Os valores de $x(n)$ são identificados pelos coeficientes do polinómio.

Vejam os a proposta apresentada em [107] para gerar nulos numa antena. A NDFT do factor de agrupamento é

$$p(u_k) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n e^{jnkdu_k}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1.148)$$

com $u_k = \cos(\theta_k)$. Supondo M nulos, em $u = w_1, w_2, \dots, w_M$, o procedimento é o seguinte:

1. Representar o diagrama original $p(u)$ por $p(u_k)$ em N pontos, w_1, w_2, \dots, w_M , que contêm os extremos da função.
2. Para impor M nulos no diagrama começa-se por deslocar as M amostras de $p(u)$ mais próximas para as posições dos nulos. Depois substitui-se o valor das M amostras por zero. As restantes mantêm-se inalteradas.
3. Aplicar a NDFT inversa às N amostras para obter os coeficientes de excitação.
4. Caso seja necessário, aplicar uma nova iteração. Primeiramente, calcula-se o factor de agrupamento através da FFT dos coeficientes de excitação (utilizando a técnica *zero-padding*). A seguir, as $N-M$ amostras não nulas são movidas para os extremos mais próximos, mantendo o seu valor e volta-se a aplicar a NDFT inversa. Caso seja necessário realiza-se uma nova iteração.

Referências

- [1] Silver, S., "Microwave Antenna Theory and Design", McGraw-Hill Book Company, 1949.
- [2] Collin, R. E. e Zucker, F. J., "Antenna Theory", McGraw-Hill, 1969.
- [3] Casimiro, A. M. E. S., "A Relação Básica da Radiação", Tese de Doutorado, Universidade do Porto, FEUP, 1990.
- [4] Collin, R. E., "Antennas and Radio Wave Propagation", McGraw-Hill, 1985.
- [5] Walter, C. H., "Travelling Wave Antenna", Dover Publications, New York, 1965.
- [6] Stutzman, W. L. and Thiele, G. A., "Antenna Theory and Design", John Wiley & Sons, 1981.
- [7] Balanis C. A., "Antenna Theory, Analysis and Design", John Wiley & Sons, 2ª ed., 1997.
- [8] Jordan, E. C., "Electromagnetic Waves and Radiating Systems", Prentice-Hall, 2ª ed., 1968.
- [9] Mailloux, R. J., "Phased Array Antenna Handbook", Artech House, 1994.
- [10] Schelkunoff, S. A. e Friis, T. H., "Antenna Theory and Practice" John Wiley & Sons, 1966.
- [11] Fourikis, N., "Phased Array-Based Systems and Applications", John Wiley & Sons, 1997.
- [12] Hansen, R. C., "Phased Array Antennas", John Wiley & Sons, 1998.
- [13] Skolnik, M. I., "Introduction to Radar Systems", McGraw-Hill, 1980.
- [14] Wolff, E. A., "Antenna Analysis", Artech House, 1988.
- [15] Gaushell, D. J., "Synthesis of Linear Antenna Arrays Using Z Transforms", IEEE Transactions on Antenna and propagation, vol. AP-19, Nº 1, pág. 75-80, Janeiro 1971.
- [16] Woodward, P. M. e Lawson, J. D., "The Theoretical Precision with Which an Arbitrary Radiation-Pattern May Be Obtained From a Source of Finite Size", Journal IEE, vol. 95, nº 37, pág. 363-370, Setembro 1948.
- [17] Rhodes, D. R., "A General Theory of Sampling Synthesis", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-21, nº 2, pág. 176-181, Março 1973.
- [18] Richie, J. E. e Kritikos, H. N. "Linear Program Synthesis for Direct Broadcast Satellite Phased Arrays", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 36, nº 3, pág. 345-348, Março 1988.
- [19] Werner, D. H., e Ferraro, A. J., "Cosine Pattern Synthesis for Single and Multiple Main Beam Uniformly Spaced Linear Arrays", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 37, nº 11, pág. 1480-1484, Novembro 1989.
- [20] Kummer, W. H., "Basic Array Theory", Proceedings of the IEEE, vol. 80, nº 1, pág. 127-140, Janeiro 1992.
- [21] Hansen, R. C., "Array Pattern Control and Synthesis", Proceedings of the IEEE, vol. 80, nº 1, pág. 141-151, Janeiro 1992.
- [22] Elliot, Robert S., "Antenna Theory and Design", Prentice-Hall, 1981.
- [23] Safaai-Jazi, A., "A New Formulation for the Design of Chebyshev Arrays", IEEE Transactions on Antenna and Propagation, vol. 42, Nº 3, pág. 439-443, Março 1994.
- [24] Lo, Y. T. e Dee, S. W., "Antenna Handbook: Theory Application and Design", New York, Van Nostrand Reinhold, 1988.
- [25] Kraus, J. D., "Antennas", MacGraw-Hill, 2ª ed., 1988.
- [26] Van der Maas, G. J., "A Simplified Calculation for Dolph-Tschebyscheff Arrays", Journal of Applied Physics, vol. 25, Nº 1, pág 121-124, Janeiro 1954.
- [27] Brown, J. L., "On the Determination of Excitation Coefficients for a Tschebyscheff Pattern", IRE Transactions on Antennas and Propagation, vol. Ap-10, pág 215-216, Março 1962.

- [28] Elliot, R. S., "An Approximation to Chebyshev Distributions", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. Ap-11, pág 707-709, Novembro 1963.
- [29] Drane, C. J., "Dolph-Chebyshev Excitation Coefficient Approximation", IEEE Transactions on Antennas and Propagation", vol. Ap-12, pág 781-782, Novembro 1964.
- [30] Bresler, A. D., "A New Algorithm for Calculating the Current Distributions of Dolph-Chebyshev Arrays", IEEE Transactions on Antennas and Propagation", vol. Ap-28, Nº 6, pág 951-952, Novembro 1980.
- [31] Stegen, R. J., "Excitation Coefficients and Beamwidths of Tschebyscheff Arrays", Proceedings of the IRE, vol. 41, pág 1671-1674, Novembro 1953.
- [32] Drane, C. J., "Derivation of Excitation Coefficients for Chebyshev Arrays", Proc. IEE, vol. 110, Nº 10, pág 1755-1758, Outubro 1963.
- [33] Helms, H. D., "Nonrecursive Digital Filters: Design Methods for Achieving Specifications on Frequency Response", IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics, vol. AU-16, Nº 3, pág. 336-342, Setembro 1968.
- [34] Diderich, R., "Calculating Chebyshev Shading Coefficients via the Discrete Fourier Transform", Proceedings of the IEEE Letters, vol. 62, Nº 10, pág. 1395-1396, Outubro 1974.
- [35] Nuttall, A. H., "Generation of Dolph-Chebyshev Weights via a Fast Fourier Transform", Proceedings of the IEEE Letters, vol. 62, Nº 10, pág. 1396, Outubro 1974.
- [36] McNamara, D. A., "Direct Synthesis of Optimum Difference Patterns for Discrete Linear Arrays Using Zolotarev Distributions", IEE Proceedings-H, vol. 140, Nº 6, pág. 495-500, Dezembro 1993.
- [37] Abramowitz, M. e Stegun, I. A., "Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables", Dover Publications, 1972.
- [38] Taylor, T. T., "Design of Line-Source Antennas for Narrow Beamwidth and Low Side Lobes", IRE Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-3, nº 1, pág. 16-28, Janeiro 1955.
- [39] Hyneman, R. F., "A Technique for the Synthesis of Line-Source Antenna Patterns Having Specified Sidelobe Behaviour", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-16, nº 4, pág. 430-435, Julho 1968.
- [40] Rhodes, D. R., "On the Taylor Distribution", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-20, nº 2, pág. 143-145, Março 1972.
- [41] Elliot, R. S., "Design of Line Source Antennas for Narrow Beamwidth and Assymmetric Low Sidelobes", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-23, pág. 100-107, Janeiro 1975.
- [42] Elliot, R. S., "Design of Line Source Antennas for Sum Patterns with Sidelobes of Individually Arbitrary Heights", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-24, pág. 76-83, Janeiro 1976.
- [43] Elliot, R. S., "Design of Line Source Antennas for Difference Patterns with Sidelobes of Individually Arbitrary Heights", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-24, nº 3, pág. 310-316, Maio 1976.
- [44] Villeneuve, A. T., "Taylor Patterns for Discrete Arrays", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-32, nº 10, pág. 1089-1093, Outubro 1984.
- [45] McNamara, D. A., "Generalised Villeneuve n Distribution", IEE Proceedings, vol. 136, Pt. H, Nº 3, pág. 245-249, Junho 1989.
- [46] McNamara, D. A., "Performance of Zolotarev and Modified-Zolotarev Difference Pattern Array Distributions", IEE Proceedings-Microwave Antennas Propagation, vol. 141, Nº 1, pág. 37-44, Fevereiro 1994.
- [47] McNamara, D. A., "Excitations Providing Maximum Directivity for Difference Arrays of Discrete Elements", Electronics Letters, vol. 23, Nº 15, pág. 780-781, Julho 1987.
- [48] McNamara, D. A., "Maximisation of Normalised Boresight Slope of a Difference Array of Discrete Elements", Electronics Letters, vol. 23, Nº 21, pág. 1158-1160, Outubro 1987.
- [49] Rabiner, L. R. e Gold, B., "Theory and Application of Digital Signal Processing", Prentice-Hall, 1975.

- [50] Oppenheim, A. V. e Shafer, R. W., “Digital Signal Processing”, Prentice-Hall International Editions, 1975.
- [51] Elliot, D. F. e Rao, K. R., “Fast Transforms - Algorithms, Analyses, Applications”, Academic Press, 1982.
- [52] Hamming, R. W., “Digital Filters”, Prentice-Hall International Editions, 1989.
- [53] Rabiner, L. R., Gold, B. e McGonegal, C. A., “An Approach to the Approximation Problem for Nonrecursive Digital Filters”, IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics, vol. AU-18, Nº 2, pág. 83-106, Junho 1970.
- [54] Parks, T. W. e McClellan, J. H., “Chebyshev Approximation for Nonrecursive Digital Filters with Linear Phase”, IEEE Transactions on Circuit Theory, vol. CT-19, Nº 2, pág. 189-194, Março 1972.
- [55] Oppenheim, A. V. e Shafer, R. W., “Discrete-Time Signal Processing”, Prentice-Hall International Editions, 1989.
- [56] Harris, F. J., “On the Use of Windows for Harmonic Analysis with the Discrete Fourier Transform”, Proceedings of the IEEE, vol. 66, Nº 1, pág. 51-83, Janeiro 1978.
- [57] Nuttall, A. H., “Some Windows with Very Good Sidelobe Behavior”, IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, vol. ASSP-29, Nº 1, pág. 84-91, Fevereiro 1981.
- [58] Johnson, R. C., “Antenna Engineering Handbook”, McGraw-Hill, 1993.
- [59] Drabowitch, S., Pappiernik, A., Griffiths, H. Encinas, J. e Smith B. L., "Modern Antennas", Chapman & Hall, 1998.
- [60] Milne, K., “Synthesis of Power Radiation Patterns for Linear Array Antennas”, IEE Proceedings, vol. 134, Pt. H, Nº 3, pág. 285-296, Junho 1987.
- [61] Picazo, J. J. G., “Síntesis de Diagramas de Radiación de Arrays Lineales Equiespaciados de Haz Conformado Mediante el Uso de Ventanas de Corriente”, 3º Simpósio de Electrónica e Telecomunicações, pág. A.2.1-3, Porto, 1988.
- [62] McClellan, J. H, Parks, T. W. e Rabiner L. R., “A Computer Program for Designing Optimum FIR Linear Phase Digital Filters”, IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics, vol. AU-21, Nº 6, pág. 506-526, Dezembro 1973.
- [63] Rabiner, L. R., McClellan, J. H. e Parks, T. W., “FIR Digital Filter Design Techniques Using Weighted Chebyshev Approximation”, Proceedings of the IEEE Transactions, vol. 63, Nº 4, pág. 595-610, Abril 1975.
- [64] Shpak, D. J. e Antoniou, A., “A Generalized Reméz Method for the Design of FIR Digital Filters”, IEEE Transactions on Circuits and Systems, vol. 37, Nº 2, pág. 161-174, Fevereiro 1990.
- [65] Evans, J. E., “Synthesis of Equiripple Sector Antenna Patterns”, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, pág. 347-353, Maio 1976.
- [66] White, W. D., “A Flexible Synthesis Procedure for Line Source Antennas”, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-24, pág. 857-859, Novembro 1976.
- [67] Shpak, D. J. e Antoniou, A., “A Flexible Optimization Method for the Pattern Synthesis of Equispaced Linear Arrays with Equiphase Excitation”, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-40, Nº 10, pág. 1113-1120, Outubro 1992.
- [68] Steyskal, H., “Simple Method for Pattern Nulling by Phase Perturbation”, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-31, Nº 1, pág. 163-166, Janeiro 1983.
- [69] Giusto, R. e Vincenti, P., “Phase-Only Optimization for Generation of Wide Deterministic Nulls in the Radiation Patterns of Phased Arrays”, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-31, Nº 5, pág. 814-817, Setembro 1983.
- [70] Shore, R. A., “Nulling at Symmetric Pattern Location with Phase-Only Optimization Weight Control”, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-32, Nº 5, pág. 530-533, Maio 1984.

Estado da Arte

- [71] Haupt, R. L., “Phase-Only Adaptive Nulling with a Genetic Algorithm”, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 45, Nº 6, pág. 1009-1015, Junho 1997.
- [72] Hu, J. L., Chan, C. H. e Lin, S. M., “Synthesis of Shaped-Beam Pattern for Mobile Antenna”, IEEE Antennas and Propagation International Symposium (AP/URSI 99), pág. 1596-1599, Orlando, Julho 1999.
- [73] Vu, T. B., “Pattern Nulling in Difference Pattern by Amplitude Control”, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-33, Nº 6, pág. 669-671, Junho 1985.
- [74] Ibrahim, H. M., “Null Steering by Real-Weight Control – A Method of Decoupling the Weights”, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-39, Nº 11, pág. 1648-1650, Novembro 1991.
- [75] Bar-Ness, Y e Haimovich, A., “Synthesis of Random Antenna Array Patterns with Prescribed Nulls”, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-32, Nº 12, pág. 1298-1307, Dezembro 1984.
- [76] Ismail, T. H. e Dawoud, M. M., “Null Steering in Phased Arrays by Controlling the Element Positions”, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-39, Nº 11, pág. 1561-1566, Novembro 1991.
- [77] Ng, B. P., Er, M. H. e Kot, C., “Linear Array Geometry Synthesis with Minimum Sidelobe Level and Null Control”, IEE Proceedings on Microwave Antennas Propagation, vol. 141, Nº 3, pág. 162-166, Junho 1994.
- [78] Stutzman, W. L., “Sidelobe Control of Antenna Patterns”, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-20, pág. 102-104, Janeiro 1972.
- [79] Elliot, R. S. e Stern, G. J., “A New Technique for Shaped Beam Synthesis of Equispaced Arrays”, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-32, Nº 10, pág. 1129-1133, Outubro 1984.
- [80] Orchard, H. J., Elliot, R. S. e Stern, G. J., “Optimising the Synthesis of Shaped Beam Antenna Patterns”, IEE Proceedings, vol. 132, Pt. H, Nº 1, pág. 63-68, Fevereiro 1985.
- [81] Levret, H. e Boyd, S., “Antenna Array Pattern Synthesis via Convex Optimization”, IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 45, Nº 3, pág. 526-531, Março 1997.
- [82] Rodrigues, J. A. e Ares, F., “Synthesis of Shaped Beam Antenna Patterns with Null-Filling in the Sidelobe Region”, Electronics Letters, vol. 33, Nº 24, pág. 2004-2005, Novembro 1997.
- [83] Ng, T. S., “Array Pattern Synthesis by the Method of Alternating Orthogonal Projections: the General Case”, IEE Proceedings, vol. 132, Pt H., Nº 7, pág. 451-454, Dezembro 1985.
- [84] Suzuki, Y. e Chiba, T., “An Algorithm for Pattern Synthesis Improvement”, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-34, Nº 6, pág. 825-829, Junho 1986.
- [85] Er, M. H., “Linear Antenna Array Pattern Synthesis with Prescribed Broad Nulls”, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 38, Nº 9, pág. 1496-1498, Setembro 1990.
- [86] Ng, B. P., Er, M. H. e Kot, C., “A Flexible Array Synthesis Method Using Quadratic Programming”, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 41, Nº 11, pág. 1541-1550, Novembro 1993.
- [87] Shpak, D. J., “A Method for the Optimal Pattern Synthesis of Linear Arrays with Prescribed Nulls”, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 44, Nº 3, pág. 286-294, Março 1996.
- [88] Trastoy, A. e Ares, Francisco., “Linear Array Pattern Synthesis with Minimum Sidelobe Level and Null Control”, International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications (ICEAA 97), pág. 457-460, Turin, Setembro 1997.
- [89] Gabriel, W. F., “Adaptive Arrays – An Introduction”, Proceedings of the IEEE, vol. 64, Nº 2, pág. 239-272, Fevereiro 1976.

- [90] Applebaum, S. P., "Adaptive Arrays", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-24, N° 5, pág. 585-598, Setembro 1976.
- [91] Gabriel, W. F., "Using Spectral Estimation Techniques in Adaptive Processing Antenna Systems", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-34, N° 3, pág. 291-300, Março 1986.
- [92] Olen, C. A. e Compton, R. T., "A Numerical Pattern Synthesis Algorithm for Arrays", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 38, N° 10, pág. 1666-1676, Outubro 1990.
- [93] Tseng, C-Y. e Griffiths, L. J., "A Unified Approach to the Design of Linear Constraints in Minimum Variance Adaptive Beamformers", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 40, N° 12, pág. 1533-1542, Dezembro 1992.
- [94] Ohnishi, K. e Milton, R. T., "A New Optimization Technique for Adaptive Antenna Arrays", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 41, N° 5, pág. 525-532, Maio 1993.
- [95] Wu, R., Bao, Z. e Ma, Y., "Control of Peak Sidelobe Level in Adaptive Arrays", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 44, N° 10, pág. 1341-1347, Outubro 1996.
- [96] Godara, L. C., "Application of Antenna Arrays to Mobile Communications, Part II: Beam-Forming and Direction-of-Arrival Considerations", Proceedings of the IEEE, vol. 85, N° 8, pág. 1195-1245, Agosto 1997.
- [97] Chung, Y. C. e Haupt, R. L., "Optimum Amplitude and Phase Control for an Adaptive Linear Array using a Genetic Algorithm", IEEE Antennas and Propagation International Symposium (AP/URSI 99), pág. 1424-1427, Orlando, Julho 1999.
- [98] Jun, T., Yingning, P. e Xiqin, W., "Application of Conjugate Gradient Algorithm to Adaptive Beamforming", IEEE Antennas and Propagation International Symposium (AP/URSI 99), pág. 1460-1463, Orlando, Julho 1999.
- [99] El-Khamy, S. E., "Sidelobes Reduction and Steerable Nulling of Antenna Arrays Using Neural Networks", IEEE Antennas and Propagation International Symposium (AP/URSI 99), pág. 2600-2603, Orlando, Julho 1999.
- [100] Tseng, F. I., "Design of Array and Line-Source Antennas for Taylor Patterns with a Null", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-27, N° 4, pág. 474-479, Julho 1979.
- [101] Steyskal, H., "Synthesis of Antenna Patterns with Prescribed Nulls", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-30, N° 2, pág. 273-279, Março 1982.
- [102] Steyskal, H., "Wide-Band Nulling Performance Versus Number of Pattern Constraints for an Array Antenna", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-31, N° 1, pág. 159-163, Janeiro 1983.
- [103] Steyskal, H., Shore, R. A. e Haupt, R. L., "Methods for Null Control and Their Effects on the Radiation Pattern", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-34, N° 3, pág. 404-409, Março 1986.
- [104] El-Azhary, I., Afifi, M. S. e Excell, P. S., "A Simple Algorithm for Sidelobe Cancellation in Partially Adaptive Linear Array", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 36, N° 10, pág. 1484-1486, Outubro 1988.
- [105] Ng, T. S., "Generalized Array Pattern Synthesis Using the Projection Matrix", IEE Proceedings, vol. 132, Pt. H, N° 1, pág. 44-46, Fevereiro 1985.
- [106] Johnson, D. H. e Dudgeon, D. E., "Array Signal Processing – Concepts and Techniques", Prentice Hall, 1993.
- [107] Bagchi, S. e Mitra, S. K., "The Nonuniform Discrete Fourier Transform and Its Applications in Signal Processing", Kluwer Academic Publishers, 1999.

Aplicação da Relação de Fourier

2.1 - Introdução

Muitos dos autores que identificaram uma relação de Fourier entre o factor de agrupamento e a distribuição de corrente não utilizaram todas as potencialidades da transformada de Fourier. Normalmente fazem-no, como um caso particular, no processo de síntese de agrupamentos na designada síntese de Fourier.

Todavia, embora também de forma restrita, surgem alguns outros casos de aplicação da relação de Fourier. Collin [1] identifica uma relação de Fourier nas aberturas, mas não aproveita as propriedades da transformada. Jordan [2] emprega algumas dessas propriedades para calcular os diagramas de radiação gerados por uma fita de corrente e por uma distribuição periódica de corrente. Meyer [3] num trabalho sobre agrupamentos discretos arbitrários considera que estes podem ser vistos como a convolução de uma função de Diracs com a função envolvente dos mesmos. Outro exemplo é Bracewell [4] que, no seu livro dedicado às aplicações da transformada de Fourier, se refere ao uso das propriedades da transformada em antenas. Casimiro [5] enuncia alguns exemplos gerais de utilização das propriedades de Fourier e aplica a relação de Fourier à análise de agrupamentos de duas antenas. Grilo e Casimiro [6] aplicam-na na análise de antenas curtas. Outro trabalho é o de Johnson e Dudgeon [7] que apresenta alguma abordagem da transformada de Fourier aplicada à análise de aberturas e a agrupamentos discretos.

Apesar dos exemplos do parágrafo anterior, e como se evidenciou pelo primeiro capítulo, a Relação de Fourier, como é novidade, ainda foi pouco explorada quer para análise de agrupamentos quer pelos vários métodos de síntese. Neste capítulo pretende-se, em primeiro lugar, apresentar a teoria subjacente à análise e síntese de agrupamentos baseada na Relação de Fourier. Com esse objectivo, são desenvolvidas as principais expressões que servirão de base ao cálculo, aplicadas a agrupamentos de uma dimensão espacial. Um conceito aqui importante é o teorema da amostragem. Num levantamento bibliográfico para investigar a sua aplicação em antenas verificou-se que no caso geral não se recorria a este teorema, como é conhecido em processamento de sinal [8], mas ao método de Woodward [9]-[12] que, como veremos, é uma utilização particular do teorema da amostragem. Este teorema foi efectivamente empregue em aberturas contínuas [13]-[16], uma vez que aí a Relação de Fourier é mais evidente.

Neste capítulo, o teorema da amostragem será reavaliado para aplicação directa aos objectivos do trabalho.

Após a apresentação da teoria, os vários métodos abordados no capítulo do Estado da Arte são revistos à luz da Relação de Fourier. Como se demonstrou, a maior parte desses métodos têm formas próprias para o cálculo da distribuição de corrente ou do factor de agrupamento. Neste trabalho pretende-se ter uma forma única de o fazer. Esse intento será alcançado tendo

em conta as propriedades da transformada de Fourier inerentes à Relação de Fourier, que possibilita o uso sistemático da FFT (*Fast Fourier Transform*).

Além da característica generalizadora do método que vai ser desenvolvido, comparando com os processos tradicionais, este é mais vantajoso em termos de cálculo.

2.2 - Análise e Síntese de Agrupamentos

Como já foi referido, o trabalho desenvolvido nesta Tese baseia-se na Relação de Fourier, apresentada na secção 1.2.2. As expressões (1.25) e (1.26) são gerais e aplicadas a qualquer número de dimensões espaciais, mas, por simplicidade, a partir de agora lidar-se-á apenas com uma dimensão.

A ferramenta principal do método aqui desenvolvido é a transformada de Fourier. Uma vez que a série é apenas um caso particular da transformada, em vez de se considerar a série de Fourier para o caso discreto, como aconteceu em alguns dos trabalhos publicados, trabalhar-se-á sempre com a transformada de Fourier, como vai ser apresentado de seguida.

2.2.1 - Análise de Agrupamentos

No processo de análise de agrupamentos pretende-se obter o factor de agrupamento quando é conhecida a distribuição de corrente.

Começando pelo caso contínuo, dada uma distribuição linear contínua de corrente ao longo do eixo dos ZZ, $\underline{c}(z)$, o factor de agrupamento é determinado pela equação (1.25),

$$\underline{F}(\beta_z) = 2\pi F^{-1}[\underline{c}(z)] = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{c}(z) e^{j\beta_z z} dz \quad (2.1)$$

com $\beta_z = \beta \cos(\theta) = \beta \cos(\theta)$. Se o agrupamento for limitado, o que significa que a distribuição de corrente só é diferente de zero no intervalo $L_1 \leq z \leq L_2$, com $L_2 > L_1$ e sendo L_1 e L_2 dois valores reais, a expressão anterior fica

$$\underline{F}(\beta_z) = \int_{L_1}^{L_2} \underline{c}(z) e^{j\beta_z z} dz \quad (2.2)$$

e o comprimento do agrupamento é $L = L_2 - L_1$. Considerando $L_1 = -L_2$, o agrupamento está centrado na origem do referencial. O factor de agrupamento terá valores em toda a variável β_z e a janela visível é dada por $-\beta \leq \beta_z \leq \beta$.

De forma análoga, tendo um agrupamento discreto de correntes ao longo do eixo dos ZZ, o factor de agrupamento também é determinado pela expressão (1.25), mas $\underline{c}(z)$ só toma valores em posições discretas da variável z . Deste modo, cada elemento pode ser representado por uma função de Dirac, $\delta(z)$, multiplicada por uma constante. Assim, para um elemento na posição $z = z_i$ tem-se que

$$\underline{c}(z) = \underline{c}(z_i) \delta(z - z_i) \quad (2.3)$$

sendo $\underline{c}(z_i)$ o valor da corrente do elemento.

Aplicação da Relação de Fourier

Para vários elementos, em qualquer posição no eixo dos ZZ, a distribuição de corrente é dada por

$$\underline{c}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{c}(z_n) \delta(z - z_n) \quad (2.4)$$

em que z_n é a posição do elemento n . O factor de agrupamento resultante fica

$$\begin{aligned} \underline{F}(\beta_z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \underline{c}(z) e^{j\beta_z z} dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{c}(z_n) \delta(z - z_n) \right] e^{j\beta_z z} dz \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{c}(z_n) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(z - z_n) e^{j\beta_z z} dz \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{c}(z_n) e^{j\beta_z z_n} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Uma vez que se irá lidar com agrupamentos equidistantes, supondo d a distância entre eles, se $z_n = (n + \sigma)d$, a expressão anterior toma a seguinte forma:

$$\underline{F}(\beta_z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{c}[(n + \sigma)d] e^{j\beta_z (n + \sigma)d} \quad (2.6)$$

em que σd , $0 \leq \sigma < 1$, é o atraso dos elementos relativamente à origem do referencial. Dentro dos agrupamentos equidistantes, normalmente, considera-se duas situações típicas para a posição dos mesmos. A primeira é quando estes estão em múltiplos inteiros de d , ou seja, $z=0, \pm d, \pm 2d, \pm 3d, \dots$. Este caso é obtido considerando em (2.6) $\sigma=0$. A segunda é quando os elementos estão em posições intermédias, isto é, $z = \pm d/2, \pm 3d/2, \pm 5d/2, \dots$, sendo determinado com $\sigma=1/2$. O factor de agrupamento referente a cada caso é, então,

$$\underline{F}(\beta_z) = \begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{c}(nd) e^{j\beta_z nd} & , z = 0, \pm d, \pm 2d, \pm 3d, \dots \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{c}\left(\frac{2n+1}{2}d\right) e^{j\beta_z \frac{2n+1}{2}d} & , z = \pm d/2, \pm 3d/2, \pm 5d/2, \dots \end{cases} \quad (2.7)$$

De notar que, pelas propriedades da transformada de Fourier, uma translação corresponde na transformada inversa a uma rotação da fase de valor igual à translação [8]. Por conseguinte, a segunda expressão de (2.7) pode ser vista como a multiplicação da primeira por $e^{j\beta_z d/2}$.

Para agrupamentos equidistantes o factor de agrupamento é periódico e de período $2\pi/d$. A janela visível também é dada por $-\beta \leq \beta_z \leq \beta$. Como já é conhecido, dependendo do valor de d , a janela visível pode coincidir ou não com o período da função do factor de agrupamento.

Como normalmente se lida com agrupamentos limitados a N elementos, para elementos de corrente em posições $z=0, \pm d, \pm 2d, \pm 3d, \dots$, a expressão (2.7) fica

$$\underline{F}(\beta_z) = \sum_{n=N_1}^{N_2} \underline{c}(nd) e^{j\beta_z nd} \quad (2.8)$$

em que $N=N_2-N_1+1$, $N_2>N_1$ e sendo N_1 e N_2 dois números inteiros. Para elementos em posições $z=\pm d/2, \pm 3d/2, \pm 5d/2, \dots$, (2.7) fica

$$\underline{F}(\beta_z) = \sum_{n=N_1}^{N_2-1} \underline{c}\left(\frac{2n+1}{2}d\right) e^{j\beta_z \frac{2n+1}{2}d} \quad (2.9)$$

sendo $N=N_2-N_1$. O limites dos somatórios de (2.8) e (2.9) aparecem na forma apresentada porque, se fizermos $N_1=-N_2$, os dois agrupamentos estão centrados na origem.

2.2.2 - Síntese de Agrupamentos

Consideremos a situação inversa da anterior, caracterizado pelo processo de síntese de agrupamentos. Dado o factor de agrupamento pretende-se obter a distribuição de corrente.

Para um agrupamento contínuo, conhecendo o factor de agrupamento, a respectiva distribuição de corrente ao longo do eixo dos ZZ é obtida pela equação (1.26),

$$\underline{c}(z) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F} [\underline{F}(\beta_z)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{F}(\beta_z) e^{-j\beta_z z} d\beta_z \quad (2.10)$$

Assim determinada, a distribuição de corrente é exacta, ou seja, aquela que dá origem ao factor de agrupamento desejado. Como é do conhecimento, as distribuições de corrente obtidas nem sempre são realizáveis, o que obriga à existência dos vários métodos de síntese.

Veamos agora a síntese de agrupamentos discretos. Obviamente que mais uma vez se pode aplicar a equação (1.26) e que para agrupamentos lineares não é mais do que calcular a expressão (2.10). Não obstante, para melhor entender-se o processo de síntese, um agrupamento discreto pode ser visto como a multiplicação da transformada de Fourier do factor de um agrupamento contínuo, devido apenas a um intervalo $-\pi/d \leq \beta_z \leq \pi/d$ do mesmo, com um trem de Diracs de espaçamento d . A figura 2.1 esquematiza esse desenvolvimento, traduzido como a amostragem genérica da distribuição de corrente.

Na figura 2.1 aparecem os dois pares da transformada referente à Relação de Fourier. No lado esquerdo está o factor de agrupamento e no lado direito a distribuição de corrente. Como se pode ver pelo terceiro par apresentado na figura, um agrupamento discreto não é mais do que a amostragem de uma distribuição contínua de corrente. Essa amostragem pode estar descentrada do sistema de eixos utilizado, de modo a produzir um agrupamento na posição desejada. O factor σ traduz esse deslocamento e tem o mesmo significado que o apresentado anteriormente. Assim, amostrar a distribuição de corrente com um trem de Diracs atrasado de σd corresponde a multiplicar o trem de Diracs do lado do factor de agrupamento por $e^{j\beta_z \sigma d}$. Para os vários valores de σ tem-se uma repetição da função definida no intervalo $-\pi/d \leq \beta_z \leq \pi/d$, alterada pelos valores dos Diracs. Para $-\pi/d \leq \beta_z \leq \pi/d$ a função de repetição mantém-se inalterável, enquanto que nos restantes há afectação do factor $e^{jk2\pi\sigma}$, sendo k um número inteiro.

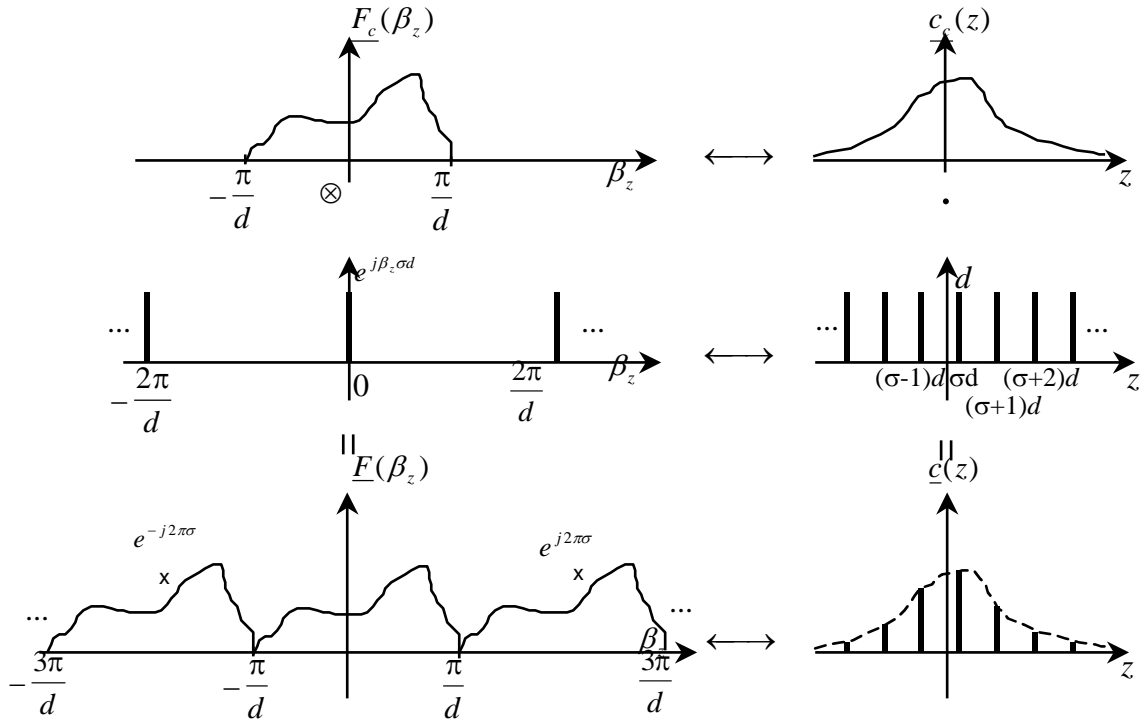


Fig. 2.1 - Obtenção de uma distribuição de corrente discreta por amostragem de uma função contínua.

Em termos de fórmulas, tendo em conta a figura 2.1, a distribuição de corrente devido ao intervalo $-\pi/d \leq \beta_z \leq \pi/d$ é dada por

$$\begin{aligned} \underline{c}_c(z) &= \frac{1}{2\pi} \mathcal{F} [F_c(\beta_z)] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/d}^{\pi/d} F(\beta_z) e^{-j\beta_z z} d\beta_z \end{aligned} \quad (2.11)$$

Amostrando essa distribuição de corrente, o que corresponde a multiplicá-la com o trem de Diracs, tem-se que

$$\begin{aligned} \underline{c}(z) &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\pi/d}^{\pi/d} F(\beta_z) e^{-j\beta_z z} d\beta_z \right] d \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[z - (n + \sigma)d] \\ &= \frac{d}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\pi/d}^{\pi/d} F(\beta_z) e^{-j\beta_z (n+\sigma)d} d\beta_z \right] \delta[z - (n + \sigma)d] \end{aligned} \quad (2.12)$$

Assim obtida, a distribuição pode ser ilimitada, como acontecia no caso contínuo.

2.3 - Adaptação do Teorema da Amostragem

A não ser em casos intermédios, que possam surgir nos métodos de síntese de agrupamentos, em geral as distribuições de corrente são limitadas. Desta forma, o processo de cálculo pode ser simplificado considerando o teorema da amostragem. Vejamos como se pode aplicar esse teorema aos agrupamentos de antenas.

2.3.1 - Distribuições Contínuas

Quando a distribuição de corrente é limitada pode-se aplicar o teorema da amostragem, como mostra a figura 2.2. Considerando que o período de amostragem é de $2\pi/S$, a condição para não haver sobreposição (*aliasing*) na distribuição de corrente é que S seja maior ou igual a L , com $L=L_2-L_1$. No caso geral, o trem de Diracs que amostra o factor de agrupamento pode estar deslocado de uma fracção τ , $0 \leq \tau < 1$, do valor do período de amostragem, o que não altera o valor da distribuição dentro do intervalo $-S/2 \leq z \leq S/2$, como se pode ver pela figura. Por conseguinte, a distribuição de corrente apresentada na figura 2.2b) é igual à da figura 2.2d), dentro desse intervalo, e a menos de uma constante.

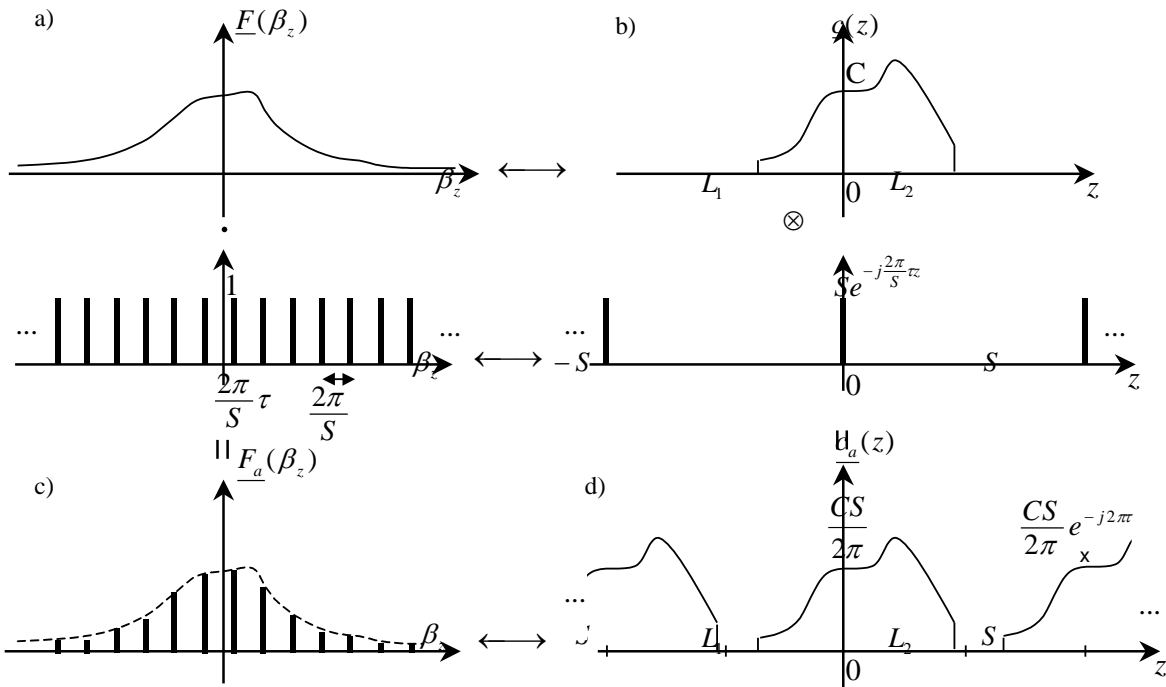


Fig. 2.2 - Amostragem do factor de agrupamento de uma distribuição contínua.

Na forma analítica, o factor de agrupamento representado na figura 2.2c) é dado por

$$\underline{F}_a(\beta_z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{F}\left[\frac{2\pi}{S}(k+\tau)\right] \delta\left[\beta_z - \frac{2\pi}{S}(k+\tau)\right] \quad (2.13)$$

Utilizando (2.10), a respectiva distribuição de corrente fica

$$\begin{aligned} \underline{c}_a(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{F}\left[\frac{2\pi}{S}(k+\tau)\right] \delta\left[\beta_z - \frac{2\pi}{S}(k+\tau)\right] e^{-j\beta_z z} d\beta_z \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{F}\left[\frac{2\pi}{S}(k+\tau)\right] e^{-j\frac{2\pi}{S}(k+\tau)z} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Como se constatou atrás, a distribuição de corrente $\underline{c}(z)$ é igual a $\underline{c}_a(z)$, dentro do intervalo $-S/2 \leq z \leq S/2$ e a menos da constante $S/(2\pi)$. Deste modo, a distribuição de corrente desejada é dada por

$$\begin{aligned} \underline{c}(z) &= \frac{2\pi}{S} \underline{c}_a(z) \\ &= \frac{1}{S} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F\left[\frac{2\pi}{S}(k+\tau)\right] e^{-j\frac{2\pi}{S}(k+\tau)z}, \quad -\frac{S}{2} \leq z \leq \frac{S}{2} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Utilizando o teorema da amostragem, como foi apresentado na figura 2.2, pode-se amostrar o factor de agrupamento de várias formas, sendo fácil visualizar as implicações na distribuição de corrente.

2.3.2 - Distribuições Discretas

De forma semelhante, as distribuições discretas limitadas podem ser determinadas através do teorema da amostragem.

Como se verifica pela figura 2.3, sendo o número de elementos limitado, para se aplicar o teorema da amostragem a quantidade de amostras empregues, P , tem que ser maior ou igual ao número de elementos, N .

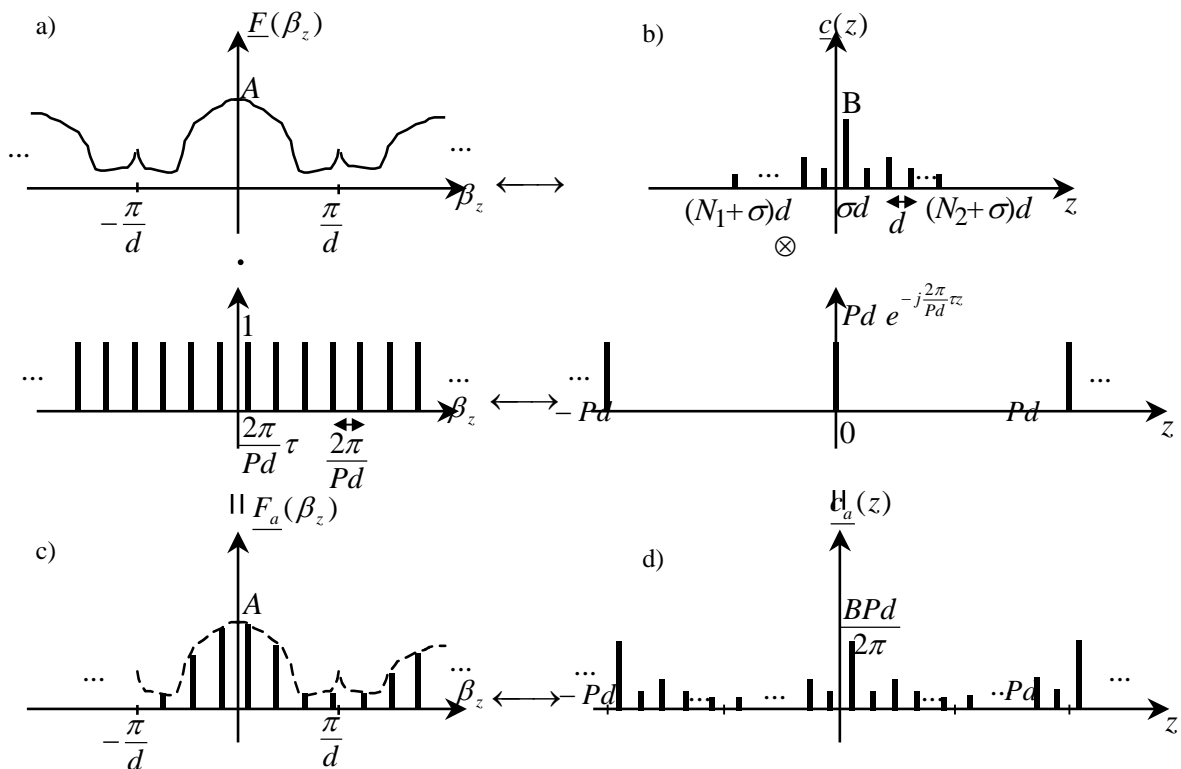


Fig. 2.3 - Amostragem do factor de agrupamento de uma distribuição discreta.

Aplicação da Relação de Fourier

O factor de agrupamento representado na figura 2.3c) é dado por

$$\underline{F}_a(\beta_z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{F}\left[\frac{2\pi}{Pd}(k+\tau)\right] \delta\left[\beta_z - \frac{2\pi}{Pd}(k+\tau)\right] \quad (2.16)$$

A distribuição de corrente referente a esse factor de agrupamento pode ser determinada utilizando a expressão (2.12)

$$\begin{aligned} \underline{c}_a(z) &= \frac{d}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\pi/d}^{\pi/d} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{F}\left[\frac{2\pi}{Pd}(k+\tau)\right] \delta\left[\beta_z - \frac{2\pi}{Pd}(k+\tau)\right] e^{-j\beta_z(m+\sigma)d} d\beta_z \right\} \delta[z - (m+\sigma)d] \\ &= \frac{d}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=\langle P \rangle} \underline{F}\left[\frac{2\pi}{Pd}(k+\tau)\right] e^{-j\frac{2\pi}{P}(k+\tau)(m+\sigma)} \delta[z - (m+\sigma)d] \end{aligned} \quad (2.17)$$

em que $\langle P \rangle$ representa as P amostras do factor de agrupamento dentro do intervalo $-\pi/d \leq \beta_z \leq \pi/d$, o que dá os seguintes limites para k :

$$\begin{aligned} -\frac{P-1}{2} \leq k \leq \frac{P-1}{2} & \text{ para } P \text{ ímpar} \\ -\frac{P}{2} \leq k \leq \frac{P}{2} - 1 & \text{ para } P \text{ par} \end{aligned} \quad (2.18)$$

A distribuição de corrente $\underline{c}(z)$ é igual a $\underline{c}_a(z)$, dentro do intervalo $-Pd/2 \leq z \leq Pd/2$, a menos da constante $Pd/(2\pi)$. Por conseguinte, a distribuição de corrente desejada é dada por

$$\begin{aligned} \underline{c}(z) &= \frac{2\pi}{Pd} \underline{c}_a(z) \\ &= \frac{1}{P} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=\langle P \rangle} \underline{F}\left[\frac{2\pi}{Pd}(k+\tau)\right] e^{-j\frac{2\pi}{P}(k+\tau)(m+\sigma)} \delta[z - (m+\sigma)d], \quad -\frac{Pd}{2} \leq z \leq \frac{Pd}{2} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Apresentando de outro modo, para $z=(n+\sigma)d$ a expressão anterior toma a seguinte forma:

$$\underline{c}[(n+\sigma)d] = \frac{1}{P} \sum_{k=\langle P \rangle} \underline{F}\left[\frac{2\pi}{Pd}(k+\tau)\right] e^{-j\frac{2\pi}{P}(k+\tau)(n+\sigma)}, \quad \begin{cases} -\frac{P-1}{2} \leq n \leq \frac{P-1}{2} & P \text{ ímpar} \\ -\frac{P}{2} \leq n \leq \frac{P}{2} - 1 & P \text{ par} \end{cases} \quad (2.20)$$

Para as situações típicas de agrupamentos discretos, se $\sigma=0$, os elementos estão em $z=0, \pm d, \pm 2d, \pm 3d, \dots$ e (2.20) fica

$$\underline{c}(nd) = \frac{1}{P} \sum_{k=\langle P \rangle} \underline{F}\left[\frac{2\pi}{Pd}(k+\tau)\right] e^{-j\frac{2\pi}{P}(k+\tau)n}, \quad \begin{cases} -\frac{P-1}{2} \leq n \leq \frac{P-1}{2} & P \text{ ímpar} \\ -\frac{P}{2} \leq n \leq \frac{P}{2} - 1 & P \text{ par} \end{cases} \quad (2.21)$$

Aplicação da Relação de Fourier

Se $\sigma=1/2$, os elementos estão em $z=\pm d/2, \pm 3d/2, \pm 5d/2, \dots$ e (2.20) fica

$$c\left(\frac{2n+1}{2}d\right) = \frac{1}{P} \sum_{k=\langle P \rangle} F\left[\frac{2\pi}{Pd}(k+\tau)\right] e^{-j\frac{2\pi}{P}(k+\tau)\left(n+\frac{1}{2}\right)}, \begin{cases} -\frac{P-1}{2} \leq n \leq \frac{P-1}{2} & P \text{ ímpar} \\ -\frac{P}{2} \leq n \leq \frac{P}{2}-1 & P \text{ par} \end{cases} \quad (2.22)$$

A abordagem que se acabou de realizar é bastante geral. Por um lado, considera qualquer número de amostras, desde que superior ou igual ao número de elementos e, por outro lado, o trem de Diracs de amostragem está onde for desejado. A expressão (2.20) não é mais do que a transformada discreta de Fourier das amostras do factor de agrupamento, adaptada aos objectivos deste trabalho. Esta transformada pode ser obtida facilmente através da FFT (*Fast Fourier Transform*), como veremos posteriormente.

2.3.3 - Relações Úteis

Qualquer factor de agrupamento pode ser determinado pela transformada inversa de Fourier da distribuição de corrente, afectada de uma constante. Utilizando as propriedades da transformada é possível simplificar o processo de análise e síntese de agrupamentos. A tabela 2.1 mostra alguns exemplos úteis de agrupamentos obtidos pela transformada de Fourier, afectada do factor 2π .

| | | |
|--------------------------------|-----------------------|---|
| A | \longleftrightarrow | $A\delta(z)$ |
| $e^{jz_0\beta_z}$ | \longleftrightarrow | $\delta(z - z_0)$ |
| $\text{sen}(z_0\beta_z)$ | \longleftrightarrow | $\frac{j}{2}\delta(z + z_0) - \frac{j}{2}\delta(z - z_0)$ |
| $\text{cos}(z_0\beta_z)$ | \longleftrightarrow | $\frac{1}{2}\delta(z + z_0) + \frac{1}{2}\delta(z - z_0)$ |
| $P_{\beta_0}(\beta_z)$ | \longleftrightarrow | $\frac{\beta_0}{\pi} \text{senc}(\beta_0 z)$ |
| $2z_0 \text{senc}(z_0\beta_z)$ | \longleftrightarrow | $P_{z_0}(z)$ |
| $\delta_{\beta_0}(\beta_z)$ | \longleftrightarrow | $\frac{1}{\beta_0} \delta_{\frac{2\pi}{\beta_0}}(z)$ |

Tabela 2.1 - Algumas distribuições úteis.

2.4 - Métodos Revisitados

Os métodos apresentados no Estado da Arte serão de seguida revistos à luz da abordagem efectuada na Relação de Fourier. Por conseguinte, ver-se-á como a teoria desenvolvida anteriormente permite simplificar, em muitos casos, o processo de cálculo.

O método desenvolvido neste trabalho, baseado na Relação de Fourier, será definido a partir daqui por método da Relação de Fourier.

2.4.1 - Método da Transformada de Fourier

O método da transformada de Fourier é aquele em que a aplicação do método da Relação de Fourier é mais evidente. Como se demonstrou, tradicionalmente consiste em truncar a distribuição de corrente, obtida por transformada do factor de agrupamento, para um dado comprimento desejado. De seguida veremos como o cálculo pode ser efectuado recorrendo-se à teoria desenvolvida na secção anterior.

2.4.1.1 - Distribuições Contínuas

Sendo dado o factor de agrupamento, a distribuição de corrente é determinada pela equação (2.10). Se o comprimento desejado para o agrupamento for L , em geral, é necessário truncar a distribuição obtida, eliminando as correntes na gama de valores $|z| > L/2$. Isto representa nada mais do que aplicar uma janela rectangular à distribuição de corrente. O erro cometido na aproximação é o mínimo erro quadrático médio [5], [17].

Após truncar a distribuição de corrente aplica-se a equação (2.2), com $L_2 = -L_1 = L/2$, para se obter o factor de agrupamento aproximado. Como o processo de truncamento representa a multiplicação por um pedestal (janela rectangular), e como a transformada inversa do pedestal dá o seno cardinal, o factor de agrupamento aproximado será a convolução entre o factor de agrupamento desejado com o seno cardinal. Daí que, geralmente, o resultado seja uma função com lóbulos secundários. Sendo a janela rectangular aquela que dá origem a maiores lóbulos secundários, uma forma de diminuir esses lóbulos pode ser aplicando outro tipo de janela. Esta situação será abordada posteriormente.

A janela que multiplica a distribuição de corrente foi considerada como centrada na origem do referencial. No entanto, caso seja pretendido, pode-se descentrar o agrupamento utilizando outros valores para L_1 e L_2 .

2.4.1.2 - Distribuições Discretas

O processo de síntese é realizado de forma análoga à do caso contínuo, com a particularidade de que a distribuição de corrente ter que ser discreta. A figura 2.4 apresenta um exemplo simples para melhor visualização da sequência de operações referentes à obtenção de um factor de agrupamento aproximado por este método.

O primeiro gráfico refere-se à definição do factor de agrupamento dentro do intervalo $-\pi/d \leq \beta_z \leq \pi/d$, que deve conter as especificações da função dentro da janela visível. O agrupamento discreto é obtido através da abordagem da figura 2.1. A distribuição é calculada através de (2.12) e está representada na figura 2.4d). O passo seguinte consiste no truncamento da distribuição de corrente por uma janela rectangular, ficando-se com N elementos, o que dá no lado do factor de agrupamento a convolução com o seno cardinal. A distribuição de corrente é, assim, dada por

$$\underline{c}_a(z) = \frac{d}{2\pi} \sum_{n=\langle N \rangle} \left[\int_{-\pi/d}^{\pi/d} \underline{F}(\beta_z) e^{-j\beta_z(n+\sigma)d} d\beta_z \right] \delta[z - (n + \sigma)d] \quad (2.23)$$

Aplicação da Relação de Fourier

e o factor de agrupamento aproximado é obtido por (2.6),

$$\underline{F}_a(\beta_z) = \frac{d}{2\pi} \sum_{n=\langle N \rangle} \left[\int_{-\pi/d}^{\pi/d} \underline{F}(\beta'_z) e^{-j\beta'_z(n+\sigma)d} d\beta'_z \right] e^{j\beta_z(n+\sigma)d} \quad (2.24)$$

em que $\langle N \rangle$ representa os N elementos da distribuição de corrente e sendo n dado pelos seguintes limites:

$$\begin{aligned} -\frac{N-1}{2} \leq n \leq \frac{N-1}{2} & \text{ para } N \text{ ímpar} \\ -\frac{N}{2} \leq n \leq \frac{N}{2} - 1 & \text{ para } N \text{ par} \end{aligned} \quad (2.25)$$

O último par de gráficos representado na figura 2.4 mostra o resultado.

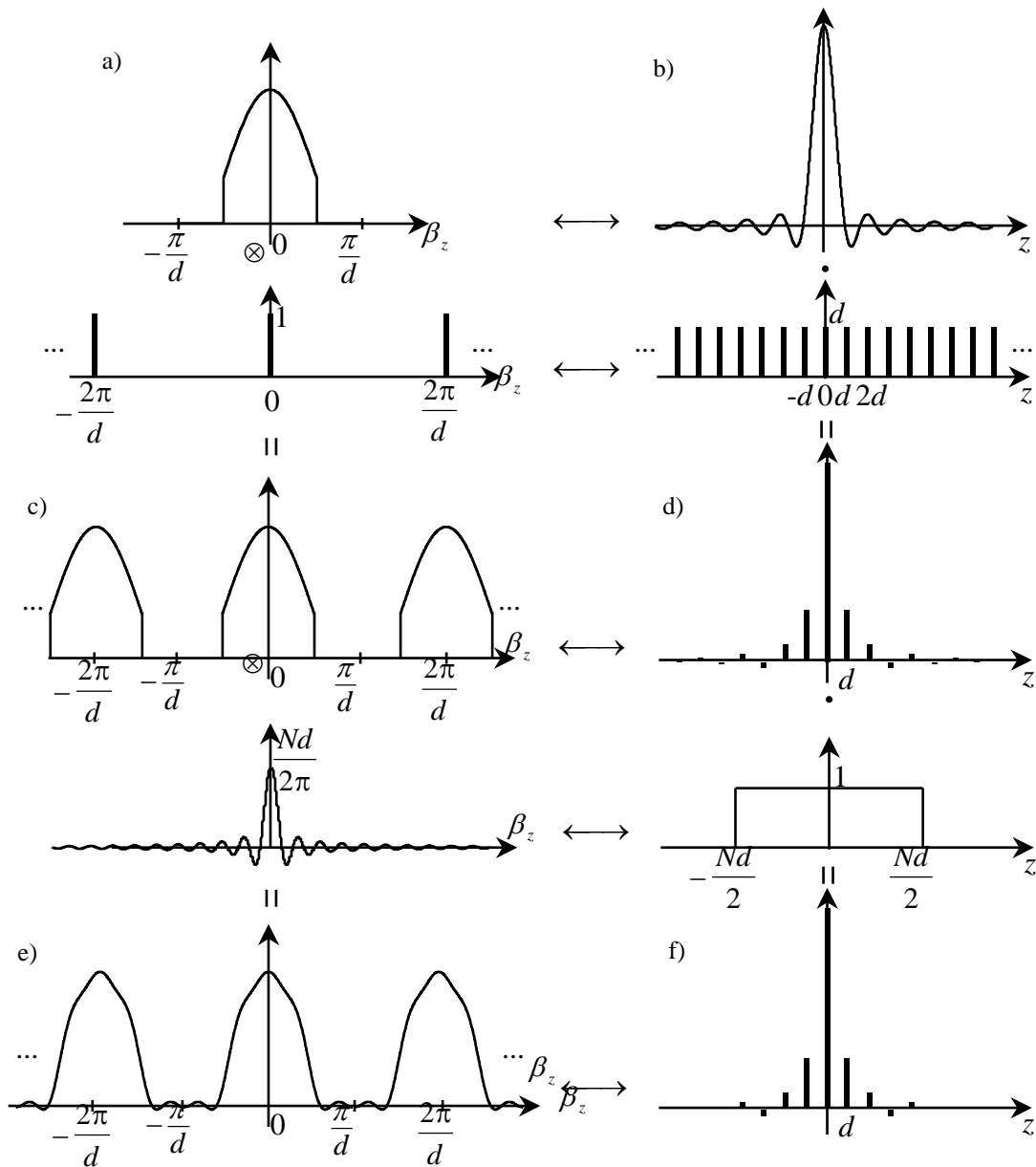


Fig. 2.4 - Método da transformada de Fourier aplicado a agrupamentos discretos.

Comparando esta forma de sintetizar o agrupamento com o apresentado na secção 1.2.1.2, vê-se que, como os seus autores normalmente trabalham com a série de Fourier, perdem a maleabilidade do processo de discretização e truncamento. Por exemplo, pode haver vantagens em primeiro truncar a distribuição de corrente e só após amostrar. Olhando para a figura 2.4 nota-se que é indiferente amostrar primeiro a distribuição de corrente ou truncá-la.

2.4.2 - Método de Woodward

O método de Woodward baseia-se no teorema da amostragem, aplicado a um conjunto de amostras do factor de agrupamento desejado. Embora alguns autores se refiram a este teorema [18], [19], continuam a apresentar o método como foi descrito por Woodward [20], baseado nas características da distribuição uniforme de corrente.

Como veremos de seguida, tendo presente o método da Relação de Fourier é fácil sintetizar um dado agrupamento, utilizando as propriedades da transformada de Fourier, e justificar todo o processo de aproximação do método de Woodward. Por exemplo, torna-se simples a comparação entre este método e o de síntese de Fourier, de modo a perceber melhor as diferenças obtidas entre eles.

2.4.2.1 - Distribuições Contínuas

Vejamos como o método de Woodward pode ser melhor entendido pelos conceitos da transformada de Fourier. Nesse sentido, a figura 2.5 apresenta um exemplo simples para melhor visualizar-se todo o processo de cálculo.

Suponhamos que se pretende sintetizar o factor de agrupamento representado na figura 2.5a). Se calcularmos a sua transformada de Fourier, o resultado é o apresentado na figura 2.5b), logo a distribuição de corrente é infinita. Utilizar apenas um conjunto de amostras, como faz o método de Woodward, significa multiplicar o factor de agrupamento desejado por um trem de Diracs. No outro lado, tem-se a convolução com outro trem de Diracs. A periodicidade do trem de Diracs é tal que na distribuição de corrente o período é igual ao comprimento desejado do agrupamento, L . Seguidamente aplica-se uma janela rectangular de comprimento L , obtendo-se o resultado apresentado em e), no factor de agrupamento, e em f), na distribuição de corrente.

Analisando a forma de cálculo descrita, verifica-se que o que o método de Woodward faz é tornar a distribuição de corrente periódica e truncá-la com a janela rectangular. Aplicando o teorema da amostragem, como foi desenvolvido na secção 2.3.1, a distribuição de corrente aproximada é dada pela expressão (2.14), com $S=L$,

$$\underline{c}_a(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=\langle P \rangle} F\left[\frac{2\pi}{L}(k+\tau)\right] e^{-j\frac{2\pi}{L}(k+\tau)z} \quad (2.26)$$

Multiplicando-a pela janela rectangular, representada na figura 2.5, fica

$$\underline{c}_a(z) = \frac{1}{L} \sum_{k=\langle P \rangle} F\left[\frac{2\pi}{L}(k+\tau)\right] e^{-j\frac{2\pi}{L}(k+\tau)z}, \quad -\frac{L}{2} \leq z \leq \frac{L}{2} \quad (2.27)$$

Aplicação da Relação de Fourier

onde $\langle P \rangle$ representa as P amostras dentro da janela visível. Os limites do somatório são obtidos como em (2.18). Comparar (2.27) com a expressão (1.35), considerando que se P é ímpar a amostragem é feita com $\tau=0$ e se P é par faz-se $\tau=1/2$.

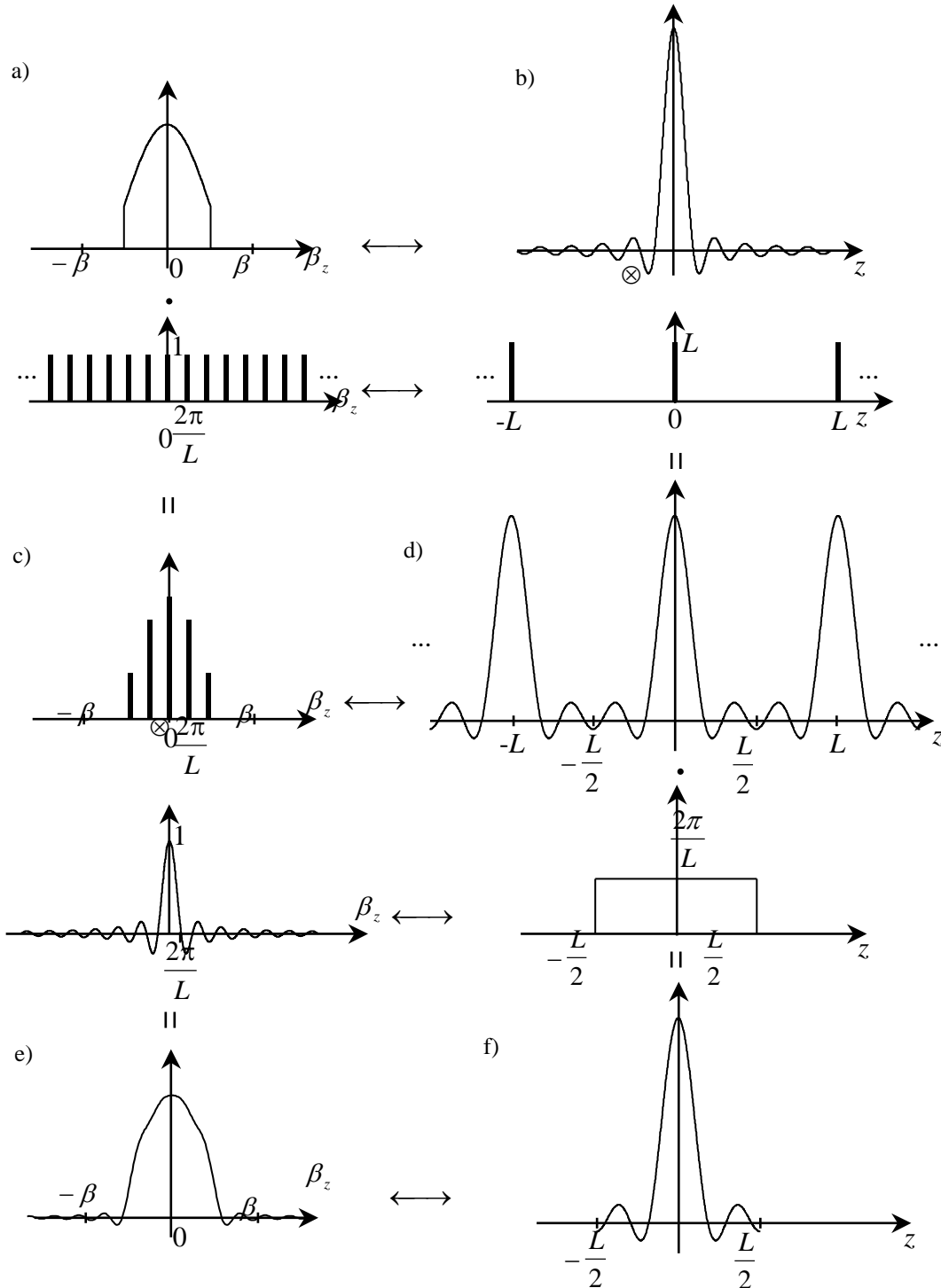


Fig 2.5 - Método de Woodward aplicado a agrupamentos contínuos.

O factor de agrupamento aproximado é obtido pela transformada inversa,

$$\begin{aligned}
 \underline{F}_a(\beta_z) &= 2\pi \mathbf{F}^{-1}[\underline{c}_a(z)] \\
 &= \int_{-L/2}^{L/2} \left\{ \frac{1}{L} \sum_{k=\langle P \rangle} \underline{F}\left[\frac{2\pi}{L}(k+\tau)\right] e^{-j\frac{2\pi}{L}(k+\tau)z} \right\} e^{j\beta_z z} dz \\
 &= \frac{1}{L} \sum_{k=\langle P \rangle} \underline{F}\left[\frac{2\pi}{L}(k+\tau)\right] \int_{-L/2}^{L/2} e^{j\left[\beta_z - \frac{2\pi}{L}(k+\tau)\right]z} dz \\
 &= \sum_{k=\langle P \rangle} \underline{F}\left[\frac{2\pi}{L}(k+\tau)\right] \frac{\text{sen}\left\{\frac{L}{2}\left[\beta_z - \frac{2\pi}{L}(k+\tau)\right]\right\}}{\frac{L}{2}\left(\beta_z - \frac{2\pi}{L}(k+\tau)\right)}
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

Como se verifica chega-se às mesmas expressões que as obtidas pela forma tradicional de síntese de Woodward, apresentadas em (1.35) e (1.36).

Resumindo, para se aplicar o método de Woodward segundo o método da Relação de Fourier, começa-se por amostrar o factor de agrupamento com um intervalo igual a $2\pi/L$. Calcula-se a transformada de Fourier desse resultado, dividindo pelo factor 2π , obtendo-se a distribuição de corrente. Trunca-se com a janela rectangular de amplitude $2\pi/L$ e pela transformada de Fourier inversa, multiplicada por 2π , obtém-se o factor de agrupamento aproximado.

Já foi referido que o método tradicional de síntese de Fourier, apresentado na secção 2.4, e o método de Woodward dão resultados diferentes. Apesar de ambos serem aplicações directas da Relação de Fourier, enquanto que na síntese tradicional de Fourier o que se faz é truncar a distribuição de corrente exacta, no método de Woodward trunca-se a distribuição de corrente obtida pelo teorema da amostragem. Os dois resultados podem, entretanto, ser iguais. Isto acontece quando o espectro espacial do factor de agrupamento for limitado e igual ao comprimento da abertura. Para o comprovar, se na figura 2.5b) a distribuição de corrente for limitada ao comprimento L , a convolução com o trem de Diracs não altera a função dentro da janela, uma vez que não ocorre sobreposição (*aliasing*) da mesma. Neste caso, também o facto de se amostrar o factor de agrupamento com um trem de Diracs centrado na origem ou descentrado da mesma não altera o valor da distribuição de corrente.

Reparando de novo na figura 2.5, comprova-se que a utilização, por parte de Woodward, das distribuições de corrente constante com fases diferentes é apenas uma coincidência da aplicação da janela rectangular. Desta forma, pode-se utilizar outro tipo de janela, o que permite obter outros resultados.

2.4.2.2 - Distribuições Discretas

A abordagem do método de Woodward para os agrupamentos discretos é semelhante à dos contínuos. A figura 2.6 mostra a aplicação do método da Relação de Fourier a um exemplo demonstrativo. Em primeiro lugar, como foi feito para o agrupamento contínuo, amostra-se o

Aplicação da Relação de Fourier

factor de agrupamento desejado. Os gráficos a) e b) da figura 2.6 correspondem aos gráficos c) e d), respectivamente, da figura 2.5, mas lidando com o intervalo $-\pi/d \leq \beta_z \leq \pi/d$, que deve conter as especificações da janela visível, e com $L=Nd$. Como se pretende um agrupamento discreto, amostra-se a distribuição de corrente nas posições pretendidas, em $z=\pm nd$ ou $z=\pm(2n+1)d/2$, com n um inteiro. Após isso, aplica-se a janela rectangular de largura Nd . O factor de agrupamento resultante é o gráfico da figura 2.6e) e a respectiva distribuição é apresentada na figura 2.6f).

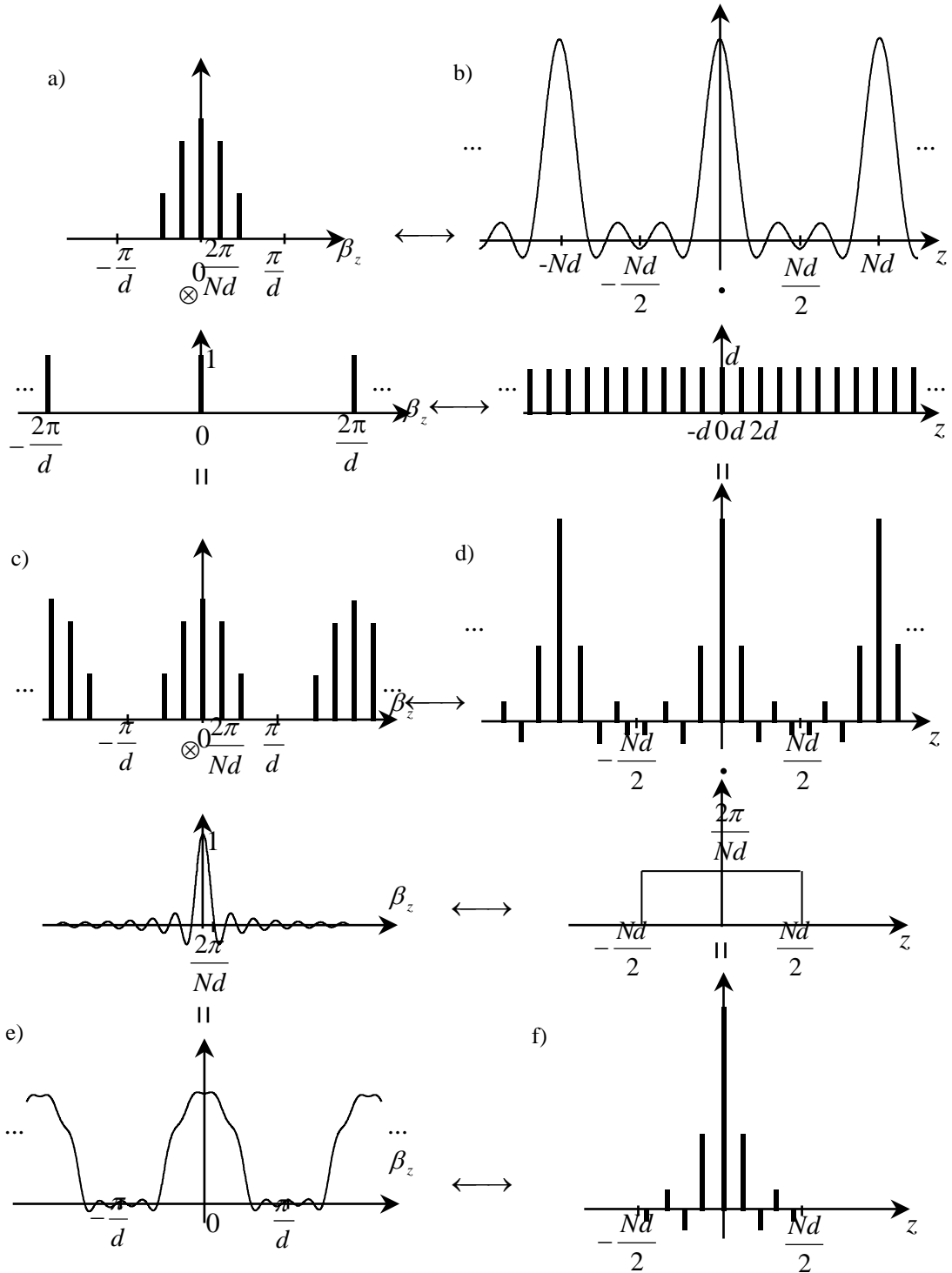


Fig. 2.6 - Método de Woodward aplicado a agrupamentos discretos.

Aplicação da Relação de Fourier

O método de Woodward utiliza a distribuição de corrente uniforme discreta como função de base. De facto, se multiplicarmos o trem de Diracs que aparece no lado da distribuição de corrente pelo pedestal apresentado na figura 2.6, o que se obtém é uma janela rectangular discreta. No factor de agrupamento tem-se a convolução de um trem de Diracs com o seno cardinal, o que dá o seno cardinal periódico, função de base do método de Woodward.

Em termos de fórmulas, a distribuição de corrente, representada na figura 2.6d), é obtida pelo teorema da amostragem com N amostras e cujo resultado já foi determinado, sendo a expressão (2.17) com $P=N$,

$$\underline{c}_a(z) = \frac{d}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=\langle N \rangle} F\left[\frac{2\pi}{Nd}(k+\tau)\right] e^{-j\frac{2\pi}{N}(k+\tau)(m+\sigma)} \delta[z - (m+\sigma)d] \quad (2.29)$$

Multiplicando pela janela rectangular, de amplitude $2\pi/(Nd)$, esta expressão fica

$$\underline{c}_a(z) = \frac{1}{N} \sum_{m=\langle N \rangle} \sum_{k=\langle N \rangle} F\left[\frac{2\pi}{Nd}(k+\tau)\right] e^{-j\frac{2\pi}{N}(k+\tau)(m+\sigma)} \delta[z - (m+\sigma)d] \quad (2.30)$$

ou de outra forma

$$\underline{c}[(n+\sigma)d] = \frac{1}{N} \sum_{k=\langle P \rangle} F\left[\frac{2\pi}{Nd}(k+\tau)\right] e^{-j\frac{2\pi}{N}(k+\tau)(n+\sigma)}, \begin{cases} -\frac{N-1}{2} \leq n \leq \frac{N-1}{2} & N \text{ ímpar} \\ -\frac{N}{2} \leq n \leq \frac{N}{2}-1 & N \text{ par} \end{cases} \quad (2.31)$$

Se para N ímpar fizer-se $\tau=\sigma=0$ e para N par $\tau=\sigma=1/2$, o resultado é o mesmo que o da expressão (1.39). Quanto ao factor de agrupamento aproximado, este é obtido pelo método da Relação de Fourier. Assim, tendo em conta (2.30), tem-se que

$$\begin{aligned} \underline{F}_a(\beta_z) &= 2\pi F^{-1}[\underline{c}_a(z)] \\ &= \int_{-Nd/2}^{Nd/2} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{m=\langle N \rangle} \sum_{k=\langle N \rangle} F\left[\frac{2\pi}{Nd}(k+\tau)\right] e^{-j\frac{2\pi}{N}(k+\tau)(m+\sigma)} \delta[z - (m+\sigma)d] \right\} e^{j\beta_z z} dz \quad (2.32) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=\langle N \rangle} F\left[\frac{2\pi}{Nd}(k+\tau)\right] \sum_{m=\langle N \rangle} e^{j\left[\beta_z - \frac{2\pi}{Nd}(k+\tau)\right](m+\sigma)d} \end{aligned}$$

Para o agrupamento ímpar o somatório em m varia entre $-(N-1)/2$ e $(N-1)/2$, com $\tau=\sigma=0$, e para um agrupamento par m varia entre $-N/2$ e $N/2-1$, com $\tau=\sigma=1/2$. Assim sendo, a expressão anterior fica

$$\underline{F}_a(\beta_z) = \frac{1}{N} \sum_{k=\langle N \rangle} F\left[\frac{2\pi}{Nd}(k+\tau)\right] \frac{\text{sen}\left\{\frac{Nd}{2}\left[\beta_z - \frac{2\pi}{Nd}(k+\tau)\right]\right\}}{\text{sen}\left\{\frac{d}{2}\left[\beta_z - \frac{2\pi}{Nd}(k+\tau)\right]\right\}} \quad (2.33)$$

que é o resultado apresentado em (1.40).

Resumindo, para se aplicar o método de Woodward segundo o método da Relação de Fourier efectua-se, em primeiro lugar, a amostragem do factor de agrupamento em intervalos iguais a $2\pi/(Nd)$ e calcula-se a transformada de Fourier. Amostra-se a distribuição de corrente e trunca-se com uma janela rectangular de largura igual a Nd . Por transformada inversa obtém-se o factor de agrupamento aproximado.

Mais uma vez, o método de Woodward dará o mesmo factor de agrupamento que a síntese tradicional de Fourier quando a distribuição de corrente, determinada por transformação do factor de agrupamento desejado, for limitada e igual ou inferior ao comprimento do agrupamento.

2.4.3 - Método de Schelkunoff

Como foi apresentado no primeiro capítulo, o método de Schelkunoff consiste em determinar a distribuição de corrente conhecendo-se as raízes do factor de agrupamento. O processo de síntese começa por desenvolver a forma factorizada do factor de agrupamento, dada pela expressão (1.32), de modo que os coeficientes são as correntes pretendidas. Esta forma de cálculo das correntes foi utilizada, por exemplo, na secção 1.5.1 na síntese de Tschebyscheff e por Elliot e Stern [21] no seu método de síntese. No entanto, esta abordagem pode ser extremamente morosa, principalmente quando o número de elementos é elevado. A título de exemplo, para a evitar, McNamara [22] emprega um sistema de equações para o cálculo das correntes, tendo por base as raízes do factor de agrupamento. Partindo da forma geral do factor de agrupamento impõe $N-1$ equações, já que são conhecidos $N-1$ pontos da função. Impondo uma corrente como tendo o valor unitário e resolvendo o sistema de equações obtém as correntes pretendidas.

Todavia, torna-se mais simples calcular as correntes directamente da forma factorizada do factor de agrupamento. Para tal basta utilizar o método da Relação de Fourier, como vai ser apresentado.

Suponhamos que se conhecem as raízes do factor de agrupamento, $\psi_n = \beta d \cos(\theta_n)$. A expressão (1.32) terá a seguinte forma na variável β_z :

$$\underline{F}(\beta_z) = I_{N-1} \prod_{n=1}^{N-1} (e^{j\beta_z d} - e^{j\psi_n}) \quad (2.34)$$

A fase progressiva está contida na corrente. A equação anterior é a expressão do factor de agrupamento na variável de interesse. Reparando na forma de (1.29), depara-se que o factor de agrupamento foi definido para um agrupamento cujo primeiro elemento encontra-se na origem. Como normalmente se lida com agrupamentos centrados, estes podem ser obtidos avançando-os de $(N-1)d/2$. Devido à Relação de Fourier, isto corresponde a rodar a fase do factor de agrupamento do mesmo valor e a expressão (2.34) fica

$$\underline{F}(\beta_z) = I_{N-1} e^{-j\beta_z \frac{N-1}{2}d} \prod_{n=1}^{N-1} (e^{j\beta_z d} - e^{j\psi_n}) \quad (2.35)$$

A distribuição de corrente é determinada pelo teorema da amostragem, com a expressão (2.21) para N ímpar e a (2.22) para N par.

2.4.4 - Síntese de Tschebyscheff

As três formas de abordagem para determinação da distribuição de corrente, apresentadas na secção 1.5, são as que normalmente se utilizam na síntese de Tschebyscheff. Através do método da Relação de Fourier a análise e síntese podem ser realizadas de uma forma mais simples e, tendo em conta as propriedades da transformada, facilmente se compreende o processo de cálculo deste tipo de agrupamento.

2.4.4.1 - Transformada dos Polinómios de Tschebyscheff

Na teoria apresentada viu-se como a distribuição de corrente pode ser obtida em função do factor de agrupamento, para um agrupamento orientado segundo o eixo dos ZZ. Sendo a relação definida pela transformada de Fourier, é de supor que os polinómios de Tschebyscheff, alterados pela mudança de variável (1.44), tenham uma dada expressão para a transformada.

Começemos por expressar a equação (1.44) na variável β_z , o que dá

$$x = x_0 \cos\left(\frac{\beta_z d}{2}\right) \quad (2.36)$$

A fase progressiva, α , que aparece na equação (1.44) através da variável ψ , é mais uma vez incluída na fase da corrente. Após a substituição da equação (2.36) nos polinómios (1.42) estes tomam a seguinte forma:

$$\begin{aligned} T_0(\beta_z) &= 1 \\ T_1(\beta_z) &= x_0 \cos\left(\frac{\beta_z d}{2}\right) \\ T_2(\beta_z) &= 2x_0^2 \cos^2\left(\frac{\beta_z d}{2}\right) - 1 \\ T_3(\beta_z) &= 4x_0^3 \cos^3\left(\frac{\beta_z d}{2}\right) - 3x_0 \cos\left(\frac{\beta_z d}{2}\right) \\ T_4(\beta_z) &= 8x_0^4 \cos^4\left(\frac{\beta_z d}{2}\right) - 8x_0^2 \cos^2\left(\frac{\beta_z d}{2}\right) + 1 \\ T_5(\beta_z) &= 16x_0^5 \cos^5\left(\frac{\beta_z d}{2}\right) - 20x_0^3 \cos^3\left(\frac{\beta_z d}{2}\right) + 5x_0 \cos\left(\frac{\beta_z d}{2}\right) \\ T_6(\beta_z) &= 32x_0^6 \cos^6\left(\frac{\beta_z d}{2}\right) - 48x_0^4 \cos^4\left(\frac{\beta_z d}{2}\right) + 18x_0^2 \cos^2\left(\frac{\beta_z d}{2}\right) - 1 \\ T_7(\beta_z) &= 64x_0^7 \cos^7\left(\frac{\beta_z d}{2}\right) - 112x_0^5 \cos^5\left(\frac{\beta_z d}{2}\right) + 56x_0^3 \cos^3\left(\frac{\beta_z d}{2}\right) - 7x_0 \cos\left(\frac{\beta_z d}{2}\right) \\ &\dots \end{aligned} \quad (2.37)$$

Aplicando directamente a Relação de Fourier a estas funções, vejamos o que acontece a cada termo.

Aplicação da Relação de Fourier

Como é do conhecimento da teoria de sinal, a transformada de uma constante dá um Dirac. Assim, tendo-se como factor de agrupamento uma constante, a distribuição de corrente será constituída apenas por um elemento,

$$1 \longrightarrow \delta(z) \quad (2.38)$$

ou seja, a transformada de 1 é $2\pi\delta(z)$ mas como a distribuição de corrente é a transformada a dividir por 2π o resultado é o apresentado em (2.38). Também é sabido que a transformada do co-seno dá dois Diracs. Desta forma, para o factor de agrupamento obtido pelo co-seno ter-se-á como resultado

$$\cos\left(\frac{\beta_z d}{2}\right) \longrightarrow \frac{1}{2}\delta\left(z + \frac{d}{2}\right) + \frac{1}{2}\delta\left(z - \frac{d}{2}\right) \quad (2.39)$$

ou seja, dois elementos em torno da origem, nas posições $z=-d/2$ e $z=d/2$. O co-seno ao quadrado pode ser considerado como a multiplicação de dois co-senos. Como a transformada do produto dá a convolução no outro domínio, tem-se neste caso a convolução de Diracs, donde facilmente se retira que

$$\cos^2\left(\frac{\beta_z d}{2}\right) \longrightarrow \frac{1}{4}\delta(z+d) + \frac{1}{2}\delta(z) + \frac{1}{4}\delta(z-d) \quad (2.40)$$

Para as várias potências do co-seno, como o aumento no expoente consiste em multiplicar por mais um co-seno, na distribuição de corrente tem-se sempre o resultado obtido para o expoente anterior a convoluir com dois Diracs, o que dá

$$\begin{aligned} \cos^3\left(\frac{\beta_z d}{2}\right) &\longrightarrow \frac{1}{8}\delta\left(z + \frac{3d}{2}\right) + \frac{3}{8}\delta\left(z + \frac{d}{2}\right) + \frac{3}{8}\delta\left(z - \frac{d}{2}\right) + \frac{1}{8}\delta\left(z - \frac{3d}{2}\right) \\ \cos^4\left(\frac{\beta_z d}{2}\right) &\longrightarrow \frac{1}{16}\delta(z+2d) + \frac{4}{16}\delta(z+d) + \frac{6}{16}\delta(z) + \frac{4}{16}\delta(z-d) + \frac{1}{16}\delta(z-2d) \\ \cos^5\left(\frac{\beta_z d}{2}\right) &\longrightarrow \frac{1}{32}\delta\left(z + \frac{5d}{2}\right) + \frac{5}{32}\delta\left(z + \frac{3d}{2}\right) + \frac{10}{32}\delta\left(z + \frac{d}{2}\right) + \frac{10}{32}\delta\left(z - \frac{d}{2}\right) \\ &\quad + \frac{5}{32}\delta\left(z - \frac{3d}{2}\right) + \frac{1}{32}\delta\left(z - \frac{5d}{2}\right) \\ &\dots \end{aligned} \quad (2.41)$$

Se analisarmos os resultados obtidos, facilmente se conclui que a transformada do co-seno elevado a uma factor M tem a seguinte relação:

$$\cos^M\left(\frac{\beta_z d}{2}\right) \longrightarrow \frac{1}{2^M} \sum_{m=0}^M \binom{M}{m} \delta\left(z - \frac{2m-M}{2}d\right) \quad (2.42)$$

com

$$\binom{M}{m} = \frac{M!}{m!(M-m)!} \quad (2.43)$$

Aplicação da Relação de Fourier

A relação (2.42) é a obtida na análise do agrupamento binomial, ou melhor dizendo, um agrupamento de N elementos que segue a distribuição binomial tem um factor de agrupamento igual a $2^{N-1} \cos^{N-1}(\beta_z d/2)$ [1], [23].

Com os resultados anteriores, e devido à linearidade da transformada de Fourier, é fácil calcular a transformada de cada uma das funções apresentadas em (2.37),

$$\begin{aligned}
 T_0(\beta_z) &\longrightarrow \delta(z) \\
 T_1(\beta_z) &\longrightarrow \frac{1}{2} x_0 \delta\left(z + \frac{d}{2}\right) + \frac{1}{2} x_0 \delta\left(z - \frac{d}{2}\right) \\
 T_2(\beta_z) &\longrightarrow \frac{1}{2} x_0^2 \delta(z+d) + (x_0^2 - 1) \delta(z) + \frac{1}{2} x_0^2 \delta(z-d) \\
 T_3(\beta_z) &\longrightarrow \frac{1}{2} x_0^3 \delta\left(z + \frac{3d}{2}\right) + \frac{3}{2} (x_0^3 - x_0) \delta\left(z + \frac{d}{2}\right) + \frac{3}{2} (x_0^3 - x_0) \delta\left(z - \frac{d}{2}\right) + \frac{1}{2} x_0^3 \delta\left(z - \frac{3d}{2}\right) \\
 T_4(\beta_z) &\longrightarrow \frac{1}{2} x_0^4 \delta(z+2d) + 2(x_0^4 - x_0^2) \delta(z+d) + (3x_0^4 - 4x_0^2 + 1) \delta(z) + 2(x_0^4 - x_0^2) \delta(z-d) \\
 &\quad + \frac{1}{2} x_0^4 \delta(z-2d) \\
 T_5(\beta_z) &\longrightarrow \frac{1}{2} x_0^5 \delta\left(z + \frac{5d}{2}\right) + \frac{5}{2} (x_0^5 - x_0^3) \delta\left(z + \frac{3d}{2}\right) + \frac{1}{2} (10x_0^5 - 15x_0^3 + 5x_0) \delta\left(z + \frac{d}{2}\right) \\
 &\quad + \frac{1}{2} (10x_0^5 - 15x_0^3 + 5x_0) \delta\left(z - \frac{d}{2}\right) + \frac{5}{2} (x_0^5 - x_0^3) \delta\left(z - \frac{3d}{2}\right) + \frac{1}{2} x_0^5 \delta\left(z - \frac{5d}{2}\right) \\
 &\dots
 \end{aligned} \tag{2.44}$$

Obtém-se as distribuições de corrente que dão origem aos factores de agrupamento de Tschebyscheff. Como se comprova, o número de elementos é igual ao grau do polinómio mais um. Também como se pode verificar pelos resultados, sendo N o número de elementos, as funções de grau par (com N ímpar) têm elementos posicionados em $z=0, \pm d, \pm 2d, \dots, \pm(N-1)d/2$, enquanto que os de grau ímpar (N par) estão em $z=\pm d/2, \pm 3d/2, \pm 5d/2, \dots, \pm(N-1)d/2$. Pode-se confirmar que os valores dos coeficientes, obtidos por esta forma de cálculo, são os mesmos que os das equações (1.55) e (1.56). Tendo em conta essa representação, as fórmulas para as distribuições de corrente dos agrupamentos de Tschebyscheff são as seguintes: para $N=2M+1$ elementos obtém-se

$$T_{N-1}(\beta_z) \longrightarrow \sum_{n=0}^M \sum_{p=n}^M (-1)^{M-p} \frac{M}{M+p} \binom{M+p}{2p} \binom{2p}{p-n} x_0^{2p} \varepsilon_n [\delta(z+nd) + \delta(z-nd)] \tag{2.45}$$

com $\varepsilon_n=1/2$ para $n=0$ e $\varepsilon_n=1$ para $n \geq 1$, e para $N=2M$ elementos fica

$$T_{N-1}(\beta_z) \longrightarrow \sum_{n=1}^M \sum_{p=n}^M (-1)^{M-p} \frac{2M-1}{2(M+p-1)} \binom{M+p-1}{2p-1} \binom{2p-1}{p-n} x_0^{2p-1} \left[\delta\left(z + \frac{2n-1}{2} d\right) + \delta\left(z - \frac{2n-1}{2} d\right) \right] \tag{2.46}$$

Como já foi mencionado anteriormente, a variável β_z não inclui a fase progressiva das correntes, factor este que permite deslocar o feixe para uma posição desejada. Quando $\beta_z = \beta \cos(\theta) = 0$, o feixe está orientado segundo $\theta = \pi/2$. Se for pretendido segundo um dado

ângulo θ_d deve-se atrasar a função, fazendo

$$\beta \cos(\theta_d) - \beta_{zd} = 0 \quad (2.47)$$

o que dá

$$\beta_{zd} = \beta \cos(\theta_d) = \frac{2\pi}{\lambda} \cos(\theta_d) \quad (2.48)$$

e calcular a transformada de $T_{N-1}(\beta_z - \beta_{zd})$. Como pela propriedade da translação da transformada de Fourier atrasar num lado significa rodar no outro, para um atraso na função do factor de agrupamento chega-se ao seguinte resultado:

$$T_{N-1}(\beta_z - \beta_{zd}) \longrightarrow \underline{c}(z) e^{-j\beta_{zd}z} \quad (2.49)$$

Quando o número de elementos do agrupamento é pequeno, as expressões (2.37) sugerem uma forma de se obter a distribuição de corrente sem ter que se utilizar as equações (2.45) ou (2.46). Vejamos o procedimento através de um exemplo. Para esse efeito, considere-se que se pretende um agrupamento que produza um diagrama de radiação, cuja direcção do feixe principal está desviada de 60° em relação à linha do agrupamento. Também se pretende que a intensidade de potência do lóbulo principal se reduza pelo menos a metade dentro de $\pm 13^\circ$, em relação à direcção de máxima radiação, e que tenha o nível máximo de lóbulos secundários (*sidelobe level*) $SLL=30\text{dB}$ abaixo do nível do lóbulo principal.

Segundo as tabelas apresentadas em Elliot [24], que nos dão o comprimento do agrupamento em função da largura do feixe, da posição do feixe principal e da relação entre os níveis do lóbulo principal e secundário, ou então utilizando o procedimento descrito em [5], o número de antenas exigido é de $N=9$ e a distância entre elementos é de $d=0,561\lambda$. Pela equação (1.45) retira-se x_0 . Uma forma sistemática de se obter os coeficientes é apresentando os resultados de (2.37) sob a forma de uma tabela, como mostra a figura 2.7. Na primeira linha dessa tabela aparecem as posições dos elementos no agrupamento. A primeira coluna indica o número de elementos, N . A segunda coluna são as várias potências do co-seno. O corpo central não é mais do que o triângulo de Pascal, equação (2.43). Na penúltima coluna aparece o factor $1/2^{N-1}$. Finalmente, na última coluna encontram-se os factores que multiplicam cada um dos co-senos e que fazem parte do polinómio de Tschebyscheff, neste caso de grau 8. Para calcular as correntes basta multiplicar cada um dos elementos dentro do tracejado pelas duas últimas colunas e somar o resultado ao longo de cada coluna, donde se retira

$$\begin{aligned} I_0 &= 1 + 2 \times \frac{1}{4} \times (-32x_0^2) + 6 \times \frac{1}{16} \times 160x_0^4 + 20 \times \frac{1}{64} \times (-256x_0^6) + 70 \times \frac{1}{256} \times 128x_0^8 \\ I_{\pm d} &= 1 \times \frac{1}{4} \times (-32x_0^2) + 4 \times \frac{1}{16} \times 160x_0^4 + 15 \times \frac{1}{64} \times (-256x_0^6) + 56 \times \frac{1}{256} \times 128x_0^8 \\ I_{\pm 2d} &= 1 \times \frac{1}{16} \times 160x_0^4 + 6 \times \frac{1}{64} \times (-256x_0^6) + 28 \times \frac{1}{256} \times 128x_0^8 \\ I_{\pm 3d} &= 1 \times \frac{1}{64} \times (-256x_0^6) + 8 \times \frac{1}{256} \times 128x_0^8 \\ I_{\pm 4d} &= 1 \times \frac{1}{256} \times 128x_0^8 \end{aligned} \quad (2.50)$$

Aplicação da Relação de Fourier

Após substituir x_0 obtém-se os seguintes valores: $I_0=5,5400678$; $I_{\pm d}=5,1130806$; $I_{\pm 2d}=3,9854129$; $I_{\pm 3d}=2,5426134$; $I_{\pm 4d}=1,4002473$. Como o feixe principal está desviado tem-se apenas que utilizar a equação (2.49), sendo a corrente normalizada nos extremos dada por

$$\begin{aligned}
 I_0 &= 3,95649 \\
 I_{-d} &= 3,65155e^{j0,561\pi} \quad \text{e} \quad I_d = 3,65155e^{-j0,561\pi} \\
 I_{-2d} &= 2,84622e^{j1,122\pi} \quad \text{e} \quad I_{2d} = 2,84622e^{-j1,122\pi} \\
 I_{-3d} &= 1,81583e^{j1,683\pi} \quad \text{e} \quad I_{3d} = 1,81583e^{-j1,683\pi} \\
 I_{-4d} &= 1e^{j0,244\pi} \quad \text{e} \quad I_{4d} = 1e^{-j0,244\pi}
 \end{aligned}
 \tag{2.51}$$

A figura 2.8 apresenta o diagrama de radiação do factor de agrupamento nas variáveis β_z e θ .

| | Posição do elemento | $\frac{7d}{2}$ | $\frac{5d}{2}$ | $\frac{3d}{2}$ | $\frac{d}{2}$ | $\frac{d}{2}$ | $\frac{3d}{2}$ | $\frac{5d}{2}$ | $\frac{7d}{2}$ | $4d$ | |
|-----|--|----------------|----------------|----------------|---------------|---------------|----------------|----------------|----------------|------|--------------------------------------|
| N | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| 1 | $\cos^0\left(\frac{\beta_z d}{2}\right)$ | | | | 1 | 1 | | | | | $x \cdot 1 \cdot x(1)$ |
| 2 | $\cos^1\left(\frac{\beta_z d}{2}\right)$ | | | | 1 | 1 | | | | | $\frac{1}{x^2}$ |
| 3 | $\cos^2\left(\frac{\beta_z d}{2}\right)$ | | | | 1 | 2 | 1 | | | | $\frac{1}{x^4} \cdot (-32x_0^2)$ |
| 4 | $\cos^3\left(\frac{\beta_z d}{2}\right)$ | | | | 1 | 3 | 3 | 1 | | | $\frac{1}{x^8}$ |
| 5 | $\cos^4\left(\frac{\beta_z d}{2}\right)$ | | | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | | | $\frac{1}{x^{16}} \cdot (160x_0^4)$ |
| 6 | $\cos^5\left(\frac{\beta_z d}{2}\right)$ | | 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | | | $\frac{1}{x^{32}}$ |
| 7 | $\cos^6\left(\frac{\beta_z d}{2}\right)$ | | 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 | | $\frac{1}{x^{64}} \cdot (-256x_0^6)$ |
| 8 | $\cos^7\left(\frac{\beta_z d}{2}\right)$ | 1 | 7 | 21 | 35 | 35 | 21 | 7 | 1 | | $\frac{1}{x^{128}}$ |
| 9 | $\cos^8\left(\frac{\beta_z d}{2}\right)$ | 1 | 8 | 28 | 56 | 70 | 56 | 28 | 8 | 1 | $\frac{1}{x^{256}} \cdot (128x_0^8)$ |
| : | | | | | | | | | | | |

Fig. 2.7 - Tabela para determinação dos coeficientes da síntese de Tschebyscheff.

Para a síntese de outro agrupamento, a tabela da figura 2.7 mantém-se excepto os termos da última coluna, entre parênteses, que serão os do polinómio pretendido. O tracejado que aparece na tabela, servindo apenas para melhor visualização dos termos utilizados, será o correspondente ao polinómio desse problema.

Aplicação da Relação de Fourier

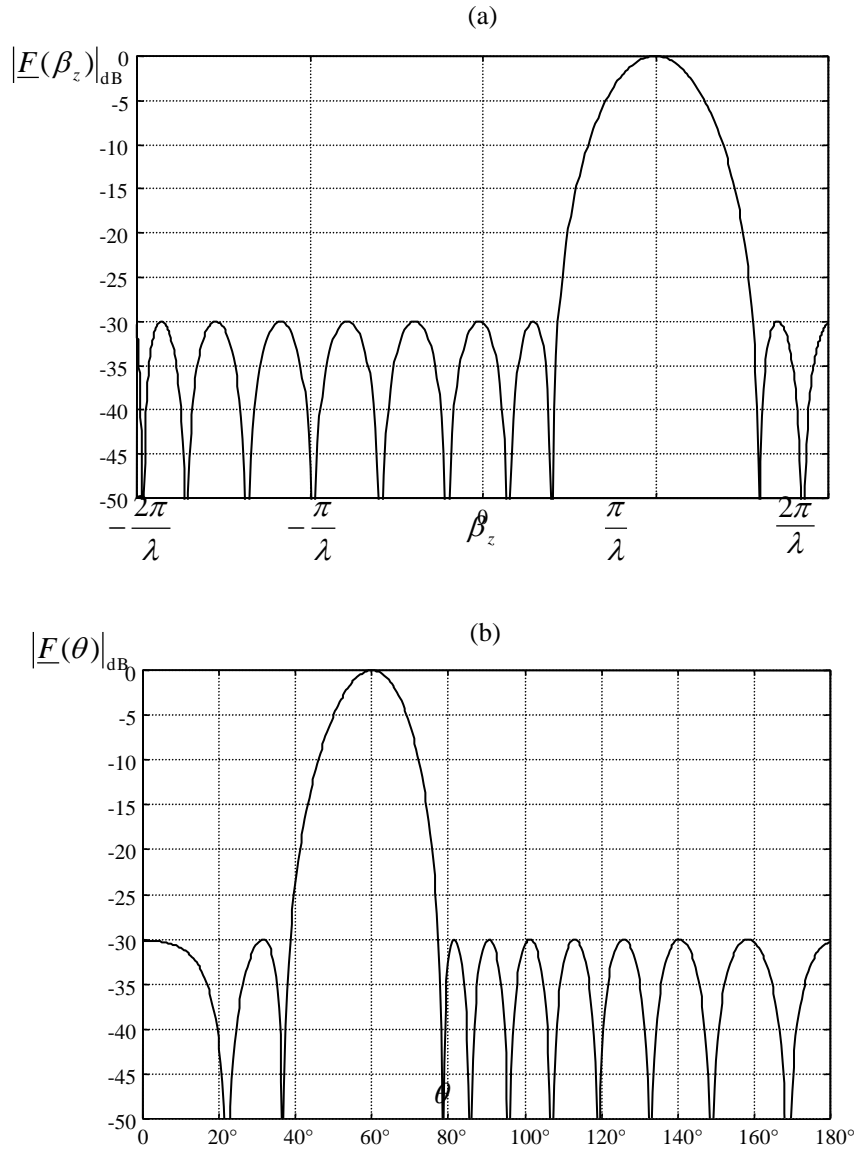


Fig. 2.8 - Factores de agrupamento: a) em função de β_z ; b) em função de θ .

Na abordagem anterior considerou-se a mudança de variável (2.36). No entanto, poder-se-á fazer uma análise semelhante utilizando a outra mudança de variável, apresentada na secção 1.5.2. Neste caso, a equação (1.51) na variável β_z é definida por

$$x = w \cos(\beta_z d) + h \quad (2.52)$$

que tem por transformada de Fourier, dividida pelo factor 2π , a seguinte expressão:

$$w \cos(\beta_z d) + h \longrightarrow \frac{w}{2} \delta(z + d) + h \delta(z) + \frac{w}{2} \delta(z - d) \quad (2.53)$$

ou seja, três Diracs na distribuição de corrente. A equação (2.52) ao quadrado terá como transformada cinco Diracs, e assim sucessivamente. Esse factor elevado a uma potência M dará origem a $2M+1$ Diracs na distribuição de corrente, em posições $x=0, \pm d, \pm 2d, \pm 3d, \dots$,

$\pm Md$. Como cada polinómio de Tschebyscheff, apresentado em (1.42), é a soma pesada do factor (2.52) elevado a uma potência, o número de Diracs, correspondentes aos elementos da distribuição de corrente, é dado pelo grau do polinómio da seguinte forma: para grau M tem-se $2M+1$ elementos. Comprova-se que só se pode sintetizar agrupamentos de Tschebyscheff com $N=2M+1$ elementos.

Pelos conceitos da Relação de Fourier, facilmente se percebe que no trabalho de Safaai-Jazi [25] quando ele eleva o factor de agrupamento de Tschebyscheff a m isso corresponde a uma convolução da distribuição de Tschebyscheff de m vezes.

Embora o processo anterior para o cálculo dos coeficientes seja interessante para pequenos agrupamentos, torna-se bastante moroso para elevados valores de N . De seguida iremos ver uma outra forma de os determinar.

2.4.4.2 - Cálculo dos Coeficientes Utilizando o Teorema da Amostragem

A forma mais óbvia de se obter a distribuição de corrente do agrupamento é através do teorema da amostragem, como foi definido anteriormente.

Como já foi referido, a transformada directa ou inversa de N impulsos de Dirac pesados e equiespaçados dá uma função periódica. Deste modo, o factor de agrupamento referente ao agrupamento de Tschebyscheff é uma função periódica, pesada por uma dada fase, como foi definido pela figura 2.1.

O factor de agrupamento, $F(\beta_n)$, é o polinómio de Tschebyscheff de grau $N-1$ com N par ou ímpar, para a mudança de variável (2.36) e é o polinómio de grau $(N-1)/2$ com N ímpar para a mudança de variável (2.52). A orientação do feixe principal para uma determinada direcção consiste em atrasar a função do factor de agrupamento, utilizando (2.49). A distribuição de corrente, para $N=2M+1$ elementos, é dada pela equação (2.21) com $P=N$, ficando

$$\underline{c}(nd) = \frac{1}{N} \sum_{k=\langle N \rangle} T_{N-1} \left[x_0 \cos \left(\frac{\pi k}{N} \right) \right] e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} \quad -M \leq n \leq M \quad (2.54)$$

ou

$$\underline{c}(nd) = \frac{1}{N} \sum_{k=\langle N \rangle} T_{\frac{N-1}{2}} \left[w \cos \left(\frac{2\pi k}{N} \right) + h \right] e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} \quad -M \leq n \leq M \quad (2.55)$$

Para $N=2M$ elementos, de (2.22) obtém-se que

$$\underline{c} \left(\frac{2n+1}{2} d \right) = \frac{1}{N} \sum_{k=\langle N \rangle} T_{N-1} \left[x_0 \cos \left(\frac{\pi k}{N} \right) \right] e^{-j \frac{\pi}{N} k(2n+1)} \quad -M \leq n \leq M-1 \quad (2.56)$$

A equação para o polinómio de Tschebyscheff é obtida por (1.41),

$$T_M(x) = \cos[M \arccos(x)] \quad (2.57)$$

levando em consideração que $\cos(jy) = \cosh(y)$.

A expressão (2.54) comprova a (1.59), supondo o agrupamento centrado na origem. As expressões anteriores têm a vantagem, já reconhecida por Mailloux [26] para as equações (1.59) e (1.60), de serem mais estáveis do que as apresentadas em (2.45) e (2.46). Saliente-se que para a mudança de variável (2.52) não foi necessário recorrer a outro procedimento, ao contrário do que acontece em (1.61).

Por definição do teorema da amostragem as fórmulas anteriores podem ter P em vez de N , desde que $P \geq N$. Isto vai permitir aplicar a FFT com o número de pontos pretendido. O trem de Diracs que amostra o factor de agrupamento também pode estar onde mais convier.

2.4.4.3 - Outros Polinómios

O que foi dito para os polinómios de Tschebyscheff pode ser aplicado a quaisquer outros. Goto [27] utiliza os polinómios de Gegenbauer para determinar diagramas de radiação com maior directividade do que com os polinómios de Tschebyscheff. Estes polinómios são obtidos pela seguinte expressão [28]:

$$G_M^t(x) = \frac{1}{\Gamma(t)} \sum_{m=0}^{[M/2]} (-1)^m \frac{\Gamma(M+t-m)}{m!(M-2m)!} (2x)^{M-2m} \quad t > 0$$

$$G_M^0(x) = \sum_{m=0}^{[M/2]} (-1)^m \frac{(M-m-1)!}{m!(M-2m)!} (2x)^{M-2m}$$
(2.58)

em que M é a ordem do polinómio e $[M/2]$ significa $M/2$ para M par e $(M-1)/2$ para M ímpar. $\Gamma(t)$ é a função Gamma¹. Estes polinómios incluem os de Tschebyscheff fazendo $t=0$ e os de Legendre quando $t=1/2$. Este último foi também empregue para síntese de antenas no trabalho apresentado em [29].

Desenvolvendo o somatório, e tendo em conta que $\Gamma(t+1)=t\Gamma(t)$, chega-se às funções polinomiais para $t>0$,

$$G_0^t(x) = 1$$

$$G_1^t(x) = 2tx$$

$$G_2^t(x) = 2t(t+1)x^2 - t$$

$$G_3^t(x) = \frac{4}{3}t(t+1)(t+2)x^3 - 2t(t+1)x$$

$$G_4^t(x) = \frac{2}{3}t(t+1)(t+2)(t+3)x^4 - 2t(t+1)(t+2)x^2 + \frac{1}{2}t(t+1)$$

...

$$G_{m+2}^t(x) = \frac{2x(m+t+1)G_{m+1}^t(x) - (m+2t)G_m^t(x)}{m+2}$$
(2.59)

A figura 2.9 apresenta os polinómios de grau 8 para vários valores de t .

¹ A função Gamma é dada pela seguinte expressão: $\Gamma(t) = \int_0^{\infty} x^{t-1} e^{-x} dx$

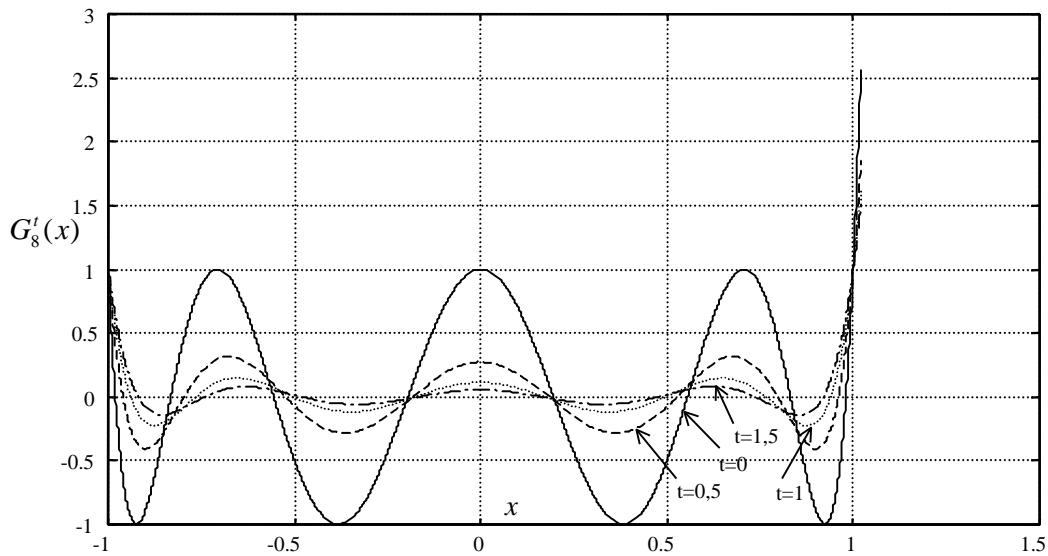


Fig. 2.9 - Polinómios de Gegenbauer de grau 8.

O processo de síntese utilizando os polinómios de Gegenbauer é análogo ao de Tschebyscheff. Da mesma forma, o grau do polinómio é igual ao número de elementos menos 1, quando se emprega a mudança de variável dada pela equação (2.36). Substituindo essa mudança de variável, ou a (2.52), em (2.58) ou em (2.59) obtém-se o factor de agrupamento. Em vez de se utilizar as fórmulas directas propostas por Goto, a distribuição de corrente é facilmente obtida pelo método da Relação de Fourier, como foi feito para Tschebyscheff. Como refere Goto, há a necessidade de se determinar expressões para x_0 , w e h , visto que as equações (1.45), (1.52), (1.53) e (1.54) deixam de ser válidas para outros polinómios que não sejam os de Tschebyscheff.

2.4.5 - Síntese de Zolotarev

Quando foi apresentada a síntese de Zolotarev, no capítulo do Estado da Arte, constatou-se que a determinação da distribuição de corrente passava por calcular os coeficientes do polinómio de Zolotarev. Contudo, utilizando o método da Relação de Fourier essa operação é desnecessária e o cálculo é efectuado directamente através do teorema da amostragem.

A mudança de variável (1.71) na variável β_z é dada por

$$x = x_0 \operatorname{sen} \left(\frac{\beta_z d}{2} \right) \quad (2.60)$$

com

$$x_0 = \frac{1}{\operatorname{sen} \left(\frac{\beta d}{2} \right)} \quad \text{ou} \quad x_0 = 1 \quad (2.61)$$

A seguir faz-se a substituição de (2.60) no polinómio de Zolotarev de grau $2M-1$, determinado pela abordagem efectuada na secção 1.6 para se obter o factor de agrupamento $Z_{2M-1}(\beta_z)$, do agrupamento com $2M$ elementos. A distribuição de corrente é determinada por aplicação da expressão (2.22).

2.4.6 - Síntese de Taylor

O método de Taylor baseia-se na alteração dos zeros de uma função base, de modo a que o factor de agrupamento tenha níveis dos lóbulos secundários abaixo de um determinado valor. Embora a forma de obtenção desse factor de agrupamento seja específica desse método, é interessante analisar o processo de cálculo da distribuição de corrente. Normalmente, esta é obtida ou pelo método de Woodward ou por cálculo directo das integrações. No entanto, como veremos, a aplicação do método da Relação de Fourier elucidará e facilitará o cálculo dessa distribuição.

Como a transformada dos agrupamentos de Taylor dão espectros espaciais limitados, uma forma exacta de se obter a distribuição de corrente é, de facto, recorrendo ao método de Woodward. Contudo, ao aplicar o método de Woodward está-se a utilizar apenas um caso particular do teorema da amostragem. Sendo o teorema da amostragem mais geral, pode-se retirar algumas das suas características para melhor aplicação ao problema em causa.

Sendo o factor de agrupamento da síntese de Taylor dado pela equação (1.77), comecemos por expressá-lo em função de β_z . Considerando uma distribuição de corrente linear de comprimento L e centrada na origem, tem-se que

$$\underline{F}(\beta_z) = \frac{\text{sen}\left(\frac{L}{2}\beta_z\right) \prod_{m=1}^{\bar{n}-1} \left[1 - \frac{\beta_z^2}{\beta_{zm}^2}\right]}{\frac{L}{2}\beta_z \prod_{m=1}^{\bar{n}-1} \left[1 - \frac{\beta_z^2}{\left(\frac{2\pi}{L}m\right)^2}\right]} \quad (2.62)$$

com

$$\beta_{zm} = \frac{2\pi}{L}u_m \quad (2.63)$$

e os valores de u_m são obtidos pela equação (1.78). Se for pretendido orientar o lóbulo principal para uma determinada direcção, isso pode ser feito da mesma forma como foi apresentado na síntese de Tschebyscheff, ou seja, desviando a função para que a posição do máximo coincida com a desejada.

De seguida, através do teorema da amostragem obtém-se a distribuição de corrente. Para se chegar ao resultado de (1.83) basta aplicar a equação (2.15) com $\tau=0$ e $S=L$, ficando

$$\underline{c}(z) = \frac{1}{L} \sum_{k=-(\bar{n}-1)}^{\bar{n}-1} \underline{F}\left(\frac{2\pi}{L}k\right) e^{-j\frac{2\pi}{L}kz} \quad -\frac{L}{2} \leq z \leq \frac{L}{2} \quad (2.64)$$

Este resultado refere-se a um agrupamento em que o feixe está centrado na origem e a amostragem do factor de agrupamento é feita em cima dos zeros do seno cardinal. A expressão (2.15), na sua forma mais geral, pode ser utilizada em qualquer situação de amostragem.

Há um ponto a salientar, que é o problema do cálculo computacional das amostras utilizadas em (2.64). Pode não haver interesse em amostrar o factor de agrupamento exactamente em cima dos zeros da função seno cardinal. Isto porque, ao fazê-lo, surgem indeterminações no cálculo da equação (2.62). Por outro lado, utilizando esses pontos de amostragem, o somatório (2.64) é truncado para um valor finito. Para resolver a indeterminação 0/0 alguns autores recorrem à expressão (1.84), o que também pode ser feito para obter $\underline{F}(2\pi k/L)$ de (2.64), após a devida alteração para as variáveis aqui utilizadas. No entanto, permitindo uma solução aproximada, com um erro muito baixo, torna-se desnecessário empregar essa fórmula, desde que se atribua outro valor a τ ou S .

Nesse sentido, consideremos que a amostragem é efectuada não em $2\pi k/L$, mas em $2\pi(k+\tau)/L$, com $0 < \tau < 1$. Isto significa descentrar o trem de Diracs que amostra o factor de agrupamento, e como se viu pela figura 2.2, não altera o resultado da distribuição de corrente na gama $-L/2 \leq z \leq L/2$. Assim, as amostras do factor de agrupamento podem ser obtidas directamente a partir de (2.62), ficando

$$\underline{F}\left[\frac{2\pi}{L}(k+\tau)\right] = \frac{\text{sen}[\pi(k+\tau)]}{[\pi(k+\tau)]} \frac{\prod_{m=1}^{\bar{n}-1} \left\{ 1 - \frac{\left[\frac{2\pi}{L}(k+\tau)\right]^2}{\beta_{zm}^2} \right\}}{\prod_{m=1}^{\bar{n}-1} \left\{ 1 - \frac{\left[\frac{2\pi}{L}(k+\tau)\right]^2}{\left(\frac{2\pi}{L}m\right)^2} \right\}} \quad (2.65)$$

e, como se pode observar, desapareceram as indeterminações 0/0, não sendo necessário recorrer a outra fórmula para obtenção das amostras. O problema é que agora as amostras caem em pontos fora dos zeros do seno cardinal, deixando de se ter uma série truncada e a equação (2.64) passa a ter a seguinte forma:

$$\underline{c}(z) = \frac{1}{L} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{F}\left[\frac{2\pi}{L}(k+\tau)\right] e^{-j\frac{2\pi}{L}(k+\tau)z} \quad -\frac{L}{2} \leq z \leq \frac{L}{2} \quad (2.66)$$

Com esta expressão a distribuição de corrente é exacta, mas obriga a utilizar um número infinito de amostras. Todavia, em termos de cálculo, se $\tau \ll 1$, τ é desprezável para valores elevados de k e as amostras são praticamente nulas para k acima de \bar{n} , truncando-se o somatório para um valor finito.

Outro modo de se lidar com as indeterminações é considerar $S=L+\Delta l$, sendo Δl também um valor muito pequeno. A amostragem seria feita agora em pontos $2\pi k/(L+\Delta l)$, caindo ligeiramente fora dos zeros do seno cardinal. Mais uma vez, o problema é que o somatório do cálculo da distribuição de corrente deixava de estar truncado, mas para efeitos de cálculo ocorre uma situação análoga à do parágrafo anterior.

2.4.7 - Síntese de Bayliss

Também para a síntese de Bayliss começemos por expressar o factor de agrupamento, dado pela equação (1.88), na variável B_z ,

$$\underline{F}(\beta_z) = \frac{L}{2} \beta_z \cos\left(\frac{L}{2} \beta_z\right) \frac{\prod_{m=1}^{\bar{n}-1} \left[1 - \frac{\beta_z^2}{\beta_{zm}^2}\right]}{\prod_{m=0}^{\bar{n}-1} \left[1 - \frac{\beta_z^2}{\left(\frac{2\pi}{L}m + \frac{\pi}{L}\right)^2}\right]} \quad (2.67)$$

com os valores de β_{zm} calculados por (2.63), mas utilizando a equação (1.89) para os valores de u_m . Para uma orientação do feixe principal diferente da origem faz-se como foi indicado na secção anterior.

A distribuição de corrente é determinada por (2.15), como foi referido para a síntese de Taylor. Para comprovar os resultados obtidos no capítulo do Estado da Arte, faz-se em (2.15) $\tau=1/2$ e $S=L$. Com estes valores consegue-se que a amostragem seja realizada nos zeros da função de base do método de Bayliss e o somatório da equação (2.15) é truncado para um valor finito, dependente de \bar{n} . A distribuição fica,

$$\underline{c}(z) = \frac{1}{L} \sum_{k=-\bar{n}}^{\bar{n}-1} \underline{F}\left[\frac{2\pi}{L}\left(k + \frac{1}{2}\right)\right] e^{-j\frac{\pi}{L}(2k+1)z} \quad -\frac{L}{2} \leq z \leq \frac{L}{2} \quad (2.68)$$

Em termos computacionais, como podem surgir indeterminações 0/0 no cálculo de $\underline{F}[2\pi(k+1/2)/L]$, também é possível adoptar uma abordagem semelhante à que foi feita para a síntese de Taylor. Assim, em vez de (2.68) utiliza-se a expressão

$$\underline{c}(z) = \frac{1}{L} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{F}\left[\frac{2\pi}{L}\left(k + \frac{1}{2} + \tau_1\right)\right] e^{-j\frac{\pi}{L}(2k+1+2\tau_1)z} \quad -\frac{L}{2} \leq z \leq \frac{L}{2} \quad (2.69)$$

sendo as amostras obtidas por (2.67). Se $\tau_1 \ll 1$, o somatório pode ser truncado e o erro cometido no cálculo da distribuição de corrente é desprezável.

2.4.8 - Síntese de Villeneuve

Para a síntese de Villeneuve, começemos, como tem sido feito, por expressar o factor de agrupamento na variável β_z , para os dois tipos de agrupamentos. As equações (1.96) e (1.102) tomam a seguinte forma:

$$\underline{F}(\beta_z) = \frac{\text{sen}\left(\frac{Nd}{2} \beta_z\right) \prod_{m=1}^{\bar{n}-1} \text{sen}\left[\frac{d}{2}(\beta_z - \beta_{zm})\right] \text{sen}\left[\frac{d}{2}(\beta_z + \beta_{zm})\right]}{\text{sen}\left(\frac{d}{2} \beta_z\right) \prod_{m=1}^{\bar{n}-1} \text{sen}\left[\frac{d}{2}\left(\beta_z - \frac{2\pi m}{Nd}\right)\right] \text{sen}\left[\frac{d}{2}\left(\beta_z + \frac{2\pi m}{Nd}\right)\right]} \quad (2.70)$$

com

$$\beta_{zm} = \frac{\psi'_m}{d} \quad (2.71)$$

em que os valores de ψ'_m são obtidos por (1.97) para $N=2M+1$ e por (1.103) para $N=2M$.

A distribuição de corrente também pode ser determinada através do método da Relação de Fourier. Para $N=2M+1$ utiliza-se (2.21), com $P=N$,

$$\underline{c}(nd) = \frac{1}{N} \sum_{k=\langle N \rangle} F \left[\frac{2\pi}{Nd} (k + \tau) \right] e^{-j \frac{2\pi}{N} (k + \tau)n}, \quad -M \leq n \leq M \quad (2.72)$$

e para $N=2M$ utiliza-se (2.22)

$$\underline{c} \left(\frac{2n+1}{2} d \right) = \frac{1}{N} \sum_{k=\langle N \rangle} F \left[\frac{2\pi}{Nd} (k + \tau) \right] e^{-j \frac{2\pi}{N} (k + \tau) \left(n + \frac{1}{2} \right)}, \quad -M \leq n \leq M - 1 \quad (2.73)$$

Com $\tau=0$ a amostragem é feita em cima dos zeros do seno cardinal periódico e a série é truncada, de modo que o resultado de (2.72) e (2.73) é o mesmo que em (1.100) e (1.104), respectivamente. Apesar disso, nessa situação surgem indeterminações 0/0 ao amostrar a equação (2.70), o que obriga a utilizar as expressões (1.101) e (1.105) para o cálculo dessas amostras. Uma forma simples de se ultrapassar esta dificuldade é amostrar fora das descontinuidades de (2.70). Como, ao contrário do caso contínuo, o somatório que aparece em (2.72) e (2.73) é sempre finito, com qualquer valor do atraso $0 < \tau < 1$ obtém-se a distribuição de corrente exacta.

Se em (2.71) utilizar-se os valores de ψ'_m determinados em (1.106) tem-se a forma geral do método de Villeneuve. A distribuição de corrente é, outra vez, determinada por (2.72) ou (2.73).

2.4.9 - Técnica das Janelas

O método tradicional de Fourier consiste em truncar a distribuição de corrente resultante de um factor de agrupamento desejado. Devido às características da transformada de Fourier, em vez de se truncar a distribuição de corrente com a janela rectangular pode-se utilizar outra janela com melhores características, como é efectuado nos filtros.

Seguidamente serão propostas algumas janelas. A janela empregue depende do critério de erro do factor de agrupamento. Embora exista um número razoável de janelas com boas características, irá dar-se maior ênfase àquelas que tenham parâmetros de controlo.

As janelas serão apresentadas nas variáveis de interesse para este trabalho. Estas também serão obtidas em função da transformada de Fourier e caso seja pretendido considerar uma janela como distribuição de corrente deve-se ter em conta o factor 2π , como aparece em (2.1) e (2.10).

A utilização concreta desta técnica será efectuada posteriormente, após terem sido desenvolvidos métodos numéricos para análise e síntese de agrupamentos.

2.4.9.1 - Distribuições Contínuas

Vejamos algumas janelas a aplicar na limitação das distribuições contínuas, começando pela janela rectangular.

A janela rectangular é aquela que trunca a distribuição de corrente no método tradicional de síntese de Fourier. Como é sabido, é a transformada de Fourier da função seno cardinal,

$$\frac{L}{2\pi} \text{senc}\left(\frac{L}{2} \beta_z\right) \longleftrightarrow P_{L/2}(z) \quad (2.74)$$

Os gráficos das funções são apresentados na figura 2.10. O erro obtido na aproximação do factor de agrupamento é o erro quadrático médio.

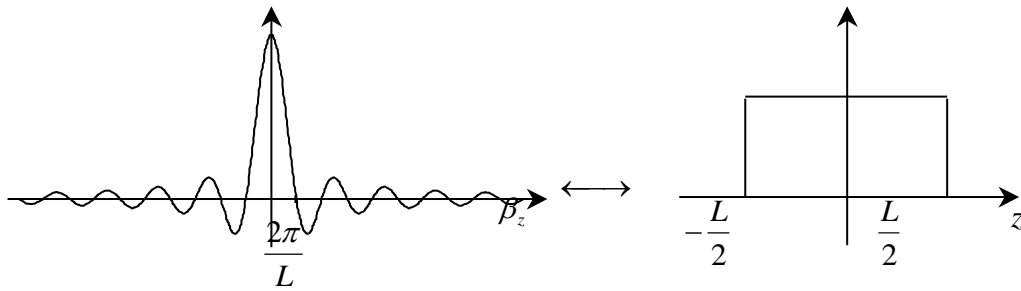


Fig. 2.10 - Janela rectangular contínua.

Esta janela tem sido empregue em agrupamentos como a distribuição de corrente uniforme. O respectivo factor de agrupamento tem o feixe mais estreito, mas apresenta níveis dos lóbulos secundários elevados. Daí que ao multiplicar uma distribuição de corrente por esta janela, correspondendo à convolução do factor de agrupamento desejado com a transformada inversa da mesma, o factor de agrupamento resultante conterà níveis dos lóbulos secundários elevados.

Outra janela é a de Taylor de 1 parâmetro, que se baseia na distribuição com o mesmo nome. Levando em consideração as expressões apresentadas em Balanis [18], para a distribuição de corrente e para o respectivo factor de agrupamento, com a afectação do factor 2π como foi referido anteriormente, a janela de Taylor de 1 parâmetro e a respectiva transformada inversa são dadas por

$$\frac{L}{2\pi} \frac{\text{sen}\left[\sqrt{\left(\frac{L}{2} \beta_z\right)^2 - A^2}\right]}{J_0(jA) \sqrt{\left(\frac{L}{2} \beta_z\right)^2 - A^2}} \longleftrightarrow \begin{cases} \frac{J_0\left[jA \sqrt{1 - \left(\frac{2}{L} z\right)^2}\right]}{J_0(jA)} & -\frac{L}{2} \leq z \leq \frac{L}{2} \\ 0 & \text{outros} \end{cases} \quad (2.75)$$

Aplicação da Relação de Fourier

em que $J_0(x)$ é a função de Bessel de primeira espécie e ordem zero e A é determinado pela relação entre os níveis dos lóbulos principal e secundário [30], em dB,

$$SLL = 20 \log_{10} \left[\frac{\sinh(A)}{A} \right] + 13,26 \quad (2.76)$$

Os gráficos das funções são apresentados na figura 2.11.

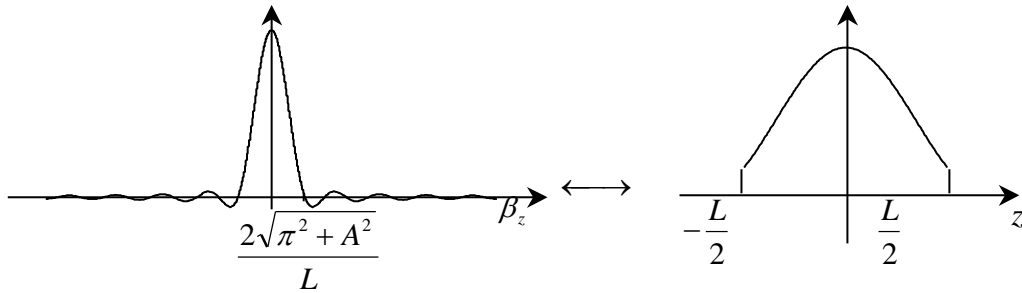


Fig. 2.11 - Janela de Taylor de 1 parâmetro para $A=3$.

Esta janela é similar à que dá o seno cardinal na transformada inversa, mas com a vantagem de se poder controlar o nível dos lóbulos secundários. O parâmetro de controlo é A . Quanto mais baixos forem os níveis dos lóbulos secundários mais largo será o lóbulo principal. Isto irá reflectir-se nos níveis dos lóbulos e na largura da zona de transição do factor de agrupamento resultante de uma distribuição truncada por esta janela.

Dentro deste grupo de janelas, consideremos ainda a janela de Taylor, que é obtida a partir da distribuição de Taylor. Desta forma, a janela é a transformada de Fourier do factor de agrupamento de Taylor, dado pela equação (2.62) com a afectação de 2π , cujo resultado é (2.64),

$$f(B_z) = \frac{\text{sen}\left(\frac{L}{2}\beta_z\right)}{2\pi K \frac{L}{2}\beta_z} \frac{\prod_{m=1}^{\bar{n}-1} \left[1 - \frac{\beta_z^2}{\beta_{zm}^2}\right]}{\prod_{m=1}^{\bar{n}-1} \left[1 - \frac{\beta_z^2}{\left(\frac{2\pi}{L}m\right)^2}\right]} \longleftrightarrow \frac{1}{LK} \sum_{k=-(\bar{n}-1)}^{\bar{n}-1} f\left(\frac{2\pi}{L}k\right) e^{-j\frac{2\pi}{L}kz}, \quad -\frac{L}{2} \leq z \leq \frac{L}{2} \quad (2.77)$$

com

$$\beta_{zm} = \frac{2\pi\bar{n}}{L} \sqrt{\frac{A^2 + \left(m - \frac{1}{2}\right)^2}{A^2 + \left(\bar{n} - \frac{1}{2}\right)^2}} \quad (2.78)$$

em que K é uma constante que normaliza a janela para a unidade, na origem. A figura 2.12 mostra os gráficos para um exemplo da janela de Taylor. Como nos casos anteriores, a expressão que aparece na figura é a posição do primeiro zero.

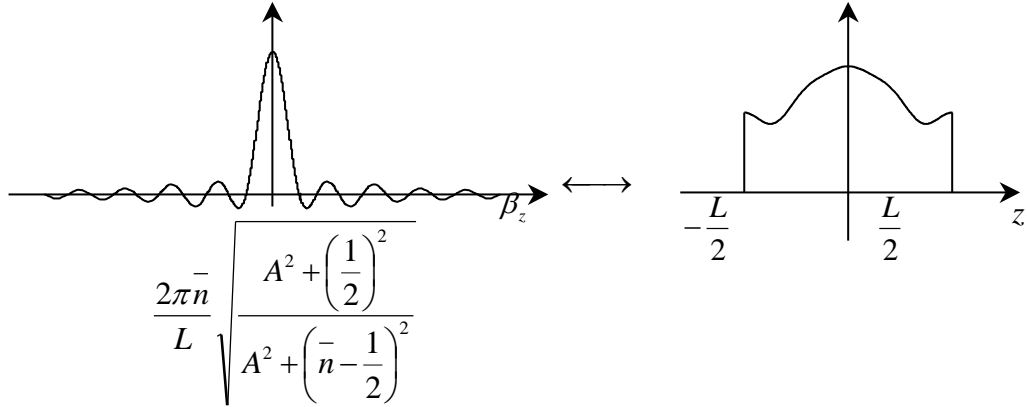


Fig. 2.12 - Janela de Taylor para $SLL=20$ e $\bar{n}=5$.

Ao truncar uma distribuição de corrente com esta janela pretende-se que o respectivo factor de agrupamento tenha níveis dos lóbulos secundários aproximadamente iguais. O parâmetro A , que controla o nível dos lóbulos secundários da transformada inversa da janela, vai permitir aumentar ou diminuir o nível dos lóbulos secundários do factor de agrupamento.

2.4.9.2 - Distribuições Discretas

Vejamos algumas janelas que se podem aplicar para limitar distribuições discretas. Embora sejam apresentadas expressões próprias para as janelas discretas, também se pode utilizar uma janela contínua para truncar um agrupamento discreto. O resultado será o mesmo, já que fora dos Diracs, que representam os elementos, multiplica-se o valor janela por zero, dando o mesmo resultado que a janela discreta.

A janela rectangular discreta, aplicada quer a agrupamentos pares quer a ímpares, é dada por

$$\frac{\text{sen}\left(\frac{Nd}{2}\beta_z\right)}{\text{sen}\left(\frac{d}{2}\beta_z\right)} \longleftrightarrow P_{(N-1)d/2}(z_n) \quad (2.79)$$

em que $z_n=nd$, com $n=-(N-1)/2, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, (N-1)/2$ para N ímpar e $z_n=(2n+1)d/2$, com $n=-N/2, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, N/2-1$ para N par. A figura 2.13 mostra os gráficos para N ímpar e par. A distribuição de corrente truncada por esta janela aproxima o factor de agrupamento com o mínimo erro quadrático médio.

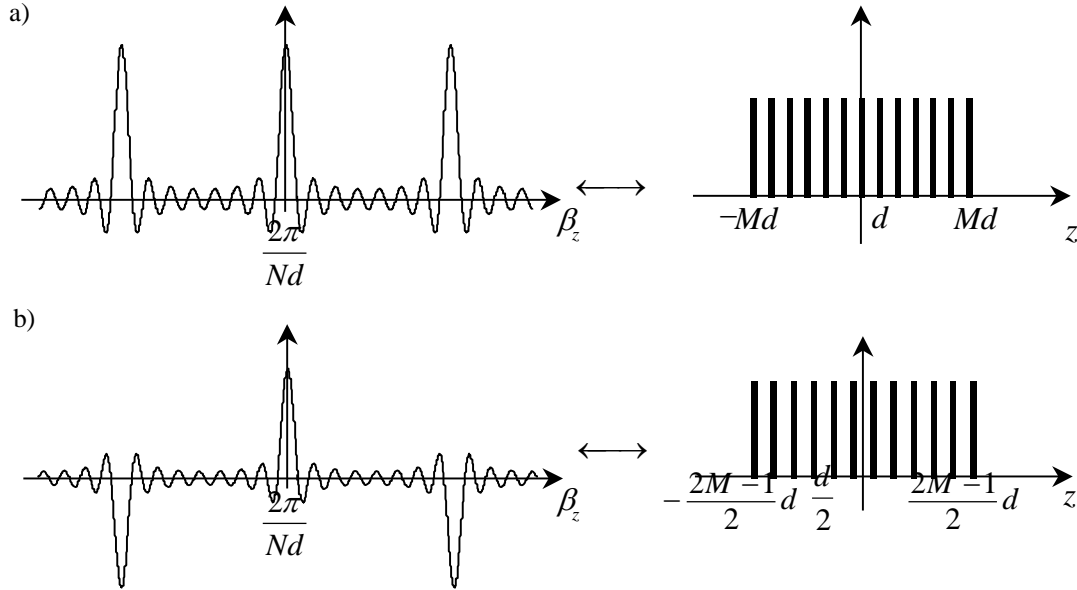


Figura 2.13 - Janela rectangular discreta: a) $N=2M+1$; b) $N=2M$.

Uma outra janela de interesse é a de Kaiser. Ao contrário das anteriores, que foram adaptadas de distribuições de corrente conhecidas, esta é efectivamente uma janela que vai ser tomada do processamento de sinal. Foi investigada por Kaiser (ver [31], [32] e [33]), sendo quase óptima no sentido em que concentra o máximo da energia à volta da origem da sua transformada de Fourier. Não sendo apresentada na literatura uma expressão para a transformada desta janela, é aqui calculada aplicando a transformada inversa de Fourier directamente aos coeficientes da mesma. A janela de Kaiser é dada, para $N=2M+1$, por

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{n=-M}^M w(n) e^{j\beta_z n d} \longleftrightarrow w(n) = \frac{J_0 \left[j\alpha \sqrt{1 - \left(\frac{n}{M} \right)^2} \right]}{J_0(j\alpha)} \quad -M \leq n \leq M \quad (2.80)$$

em que $J_0(x)$ é a função de Bessel de primeira espécie e ordem zero e α é um parâmetro que especifica a relação entre os níveis dos lóbulos principal e secundário, SLL . Para $N=2M$ tem-se

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{n=-M}^{M-1} w(n) e^{j\beta_z \frac{(2n+1)}{2} d} \longleftrightarrow w(n) = \frac{J_0 \left[j\alpha \sqrt{1 - \left(\frac{2n+1}{2M-1} \right)^2} \right]}{J_0(j\alpha)} \quad -M \leq n \leq M-1 \quad (2.81)$$

Dado SLL , Kaiser obteve uma fórmula empírica para o parâmetro α , sendo este determinado por

$$\alpha = \begin{cases} 0,1102(SLL - 8,7) & SLL > 50 \\ 0,5842(SLL - 21)^{0,4} + 0,07886(SLL - 21) & 21 < SLL < 50 \\ 0 & SLL \leq 21 \end{cases} \quad (2.82)$$

A figura 2.14 mostra os gráficos correspondentes aos dois tipos de janelas.

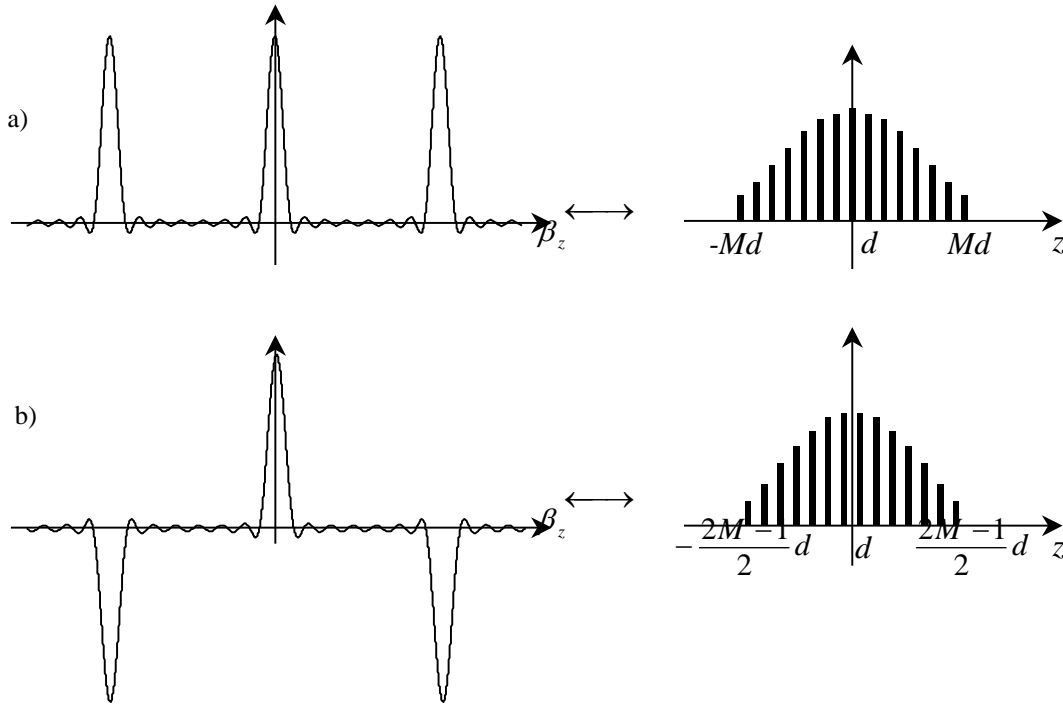


Fig. 2.14 - Janela de Kaiser para $SLL=30$ dB: a) $N=2M+1$; b) $N=2M$.

A janela de Kaiser é semelhante à de Taylor de um parâmetro, no que diz respeito quanto à forma da janela e quanto ao modo de aproximação do factor de agrupamento.

Uma última janela a considerar é a de Tschebyscheff, sendo dada pela distribuição de Tschebyscheff. Para $N=2M+1$, de (2.54) retira-se que

$$\frac{1}{2\pi K} \cos\left\{(N-1) \arccos\left[x_0 \cos\left(\frac{d}{2} \beta_z\right)\right]\right\} \longleftrightarrow \frac{1}{NK} \sum_{k=-M}^M \cos\left\{(N-1) \arccos\left[x_0 \cos\left(\frac{\pi k}{N}\right)\right]\right\} e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad -M \leq n \leq M \quad (2.83)$$

com x_0 determinado pela equação (1.45) e K é uma constante que normaliza a janela para a unidade. Para $N=2M$, tem-se

$$\frac{1}{2\pi K} \cos\left\{(N-1) \arccos\left[x_0 \cos\left(\frac{d}{2} \beta_z\right)\right]\right\} \longleftrightarrow \frac{1}{NK} \sum_{k=-M}^{M-1} \cos\left\{(N-1) \arccos\left[x_0 \cos\left(\frac{\pi k}{N}\right)\right]\right\} e^{-j\frac{\pi}{N}k(2n+1)} \quad -M \leq n \leq M-1 \quad (2.84)$$

A figura 2.15 mostra os gráficos das janelas de Tschebyscheff. A expressão apresentada é a posição do primeiro zero, que é a mesma quer N seja ímpar quer seja par.

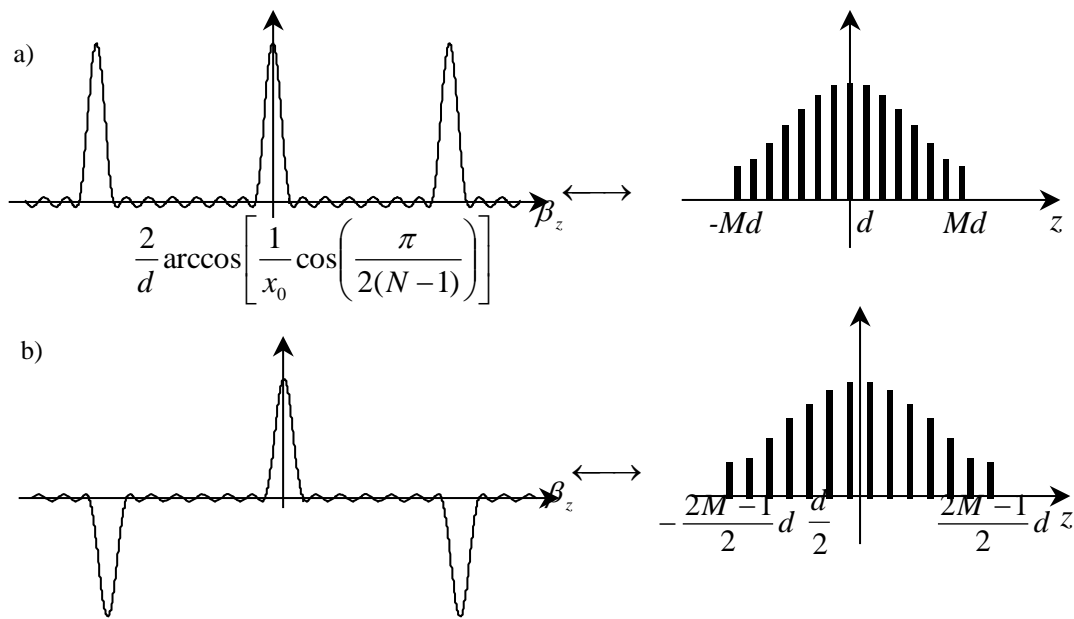


Fig. 2.15 - Janela de Tschebyscheff para $SLL=30$ dB: a) $N=2M+1$; b) $N=2M$.

Ao truncar uma dada distribuição de corrente com esta janela de Tschebyscheff pretende-se que o respectivo factor de agrupamento tenha lóbulos secundários aproximadamente iguais.

2.5 - Sumário

Neste capítulo foi apresentada a teoria, baseada na Relação de Fourier, para análise e síntese de agrupamentos, bem como as bases dos desenvolvimentos dos próximos capítulos. O método desenvolvido foi definido por método da Relação de Fourier.

Com os conceitos apresentados fez-se uma nova leitura dos principais métodos de síntese de agrupamentos, com o objectivo de retirar as características que possam ser consideradas inerentes à Relação de Fourier. Demonstra-se, assim, o papel importante e unificador desempenhado pela transformada de Fourier, e das suas propriedades, para um processo de cálculo mais simples e eficiente.

Referências

- [1] Collin, R. E., "Antennas and Radio Wave Propagation", McGraw-Hill, 1985.
- [2] Jordan, E. C., "Electromagnetic Waves and Radiating Systems", Prentice-Hall, 2ª ed., 1968.
- [3] Meyer, A., "The Use of the Convolution Theorem and the Generalized Sampling Theorem in Evaluating Arbitrary Arrays", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 14, pág 503-505, Julho 1966.
- [4] Bracewell, R. N. "The Fourier Transform and Its Applications", MacGraw-Hill, 1986.
- [5] Casimiro, A. M. E. S., "A Relação Básica da Radiação", Tese de Doutorado, Universidade do Porto, FEUP, 1990.
- [6] Grilo, F. C. V. e Casimiro, A. M. E. S., "Application of the Fourier Transform to Short Antennas", AGARD Electromagnetic Wave Propagation Panel on ELF/VLF/LF Radio Propagation and Systems Aspects", Bruxelas, Bélgica, Setembro 1992.
- [7] Johnson, D. H. e Dudgeon, D. E., "Array Signal Processing – Concepts and Techniques", Prentice Hall Signal Processing Series, 1993.
- [8] Oppenheim, A. V., Willsky, A. S. and Young, I. T., "Signals and Systems", Prentice Hall International Editions, 1983.
- [9] Taylor, T. T., "Design of Line-Source Antennas for Narrow Beamwidth and Low Side Lobes", IRE Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-3, nº 1, pág. 16-28, Janeiro 1955.
- [10] Hyneman, R. F., "A Technique For the Synthesis of Line-Source Antenna Patterns Having Specified Sidelobe Behaviour", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-16, nº 4, pág. 430-435, Julho 1968.
- [11] Stutzman, W. L., "Synthesis of Shaped-Beam Radiation Patterns using the Iterative Sampling Method", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-19, nº 1, pág. 36-41, Janeiro 1971.
- [12] Elliot, R. S., "Design of Line Source Antennas for Narrow Beamwidth and Asymmetric Low Sidelobes", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-23, pág. 100-107, Janeiro 1975.
- [13] Mayhan, J. T., "Nulling Limitations for a Multiple-Beam Antenna", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-24, nº 6, pág. 769-779, Novembro 1976.
- [14] Bucci, O. M., Franceschetti, G. e D'Elia, G., "Fast Analysis of Large Antennas - A New Computational Philosophy", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-28, nº 3, pág 306-310, Maio 1980.
- [15] Rahmat-Sammi, Y. e Cheung, R. L., "Nonuniform Sampling Techniques for Antenna Applications", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-35, nº 3, pág 268-279, Março 1987.
- [16] Drabowitch, S., Pappiernik, A., Griffiths, H. Encinas, J. e Smith B. L., "Modern Antennas", Chapman & Hall, 1998.
- [17] Papoulis, A., "The Fourier Integral and Its Applications", McGraw-Hill, 1987.
- [18] Balanis C. A., "Antenna Theory, Analysis and Design", John Wiley & Sons, 1997.
- [19] Skolnik, M. I., "Introduction to Radar Systems", McGraw-Hill, 1980.
- [20] Woodward, P. M. e Lawson, J. D., "The Theoretical Precision with Which an Arbitrary Radiation-Pattern May Be Obtained From a Source of Finite Size", Journal IEE, vol. 95, nº 37, pág. 363-370, Setembro 1948.

Aplicação da Relação de Fourier

- [21] Elliot, R. S. e Stern, G. J., "A new Technique for Shaped Beam Synthesis of Equispaced Arrays", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-32, N° 10, pág. 1129-1133, Outubro 1984.
- [22] McNamara, D. A., "Generalised Villeneuve \bar{n} Distribution", IEE Proceedings, vol. 136, Pt. H, N° 3, pág. 245-249, Junho 1989.
- [23] Kraus, J. D., "Electromagnetics", McGraw-Hill, 1984.
- [24] Elliot, Robert S., "Antenna Theory and Design", Prentice-Hall, 1981.
- [25] Safaai-Jazi, A., "Modified Chebyshev Arrays", IEEE Proceedings on Microwave Antennas Propagation, vol. 145, N° 1, pág. 45-48, Fevereiro 1998.
- [26] Mailloux, R. J., "Phased Array Antenna Handbook", Artech House, 1994.
- [27] Goto, N., "A Synthesis of Array Antennas for High Directivity and Low Sidelobes", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-20, N° 4, pág. 427-431, Julho 1972.
- [28] Cohen, H., "Mathematics for Scientists and Engineers", Prentice-Hall International, 1992.
- [29] Dawoud, M. M., e Hassan, M A., "Design of Superdirective Endfire Antenna Arrays", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 37, N° 6, pág. 796-800, Junho 1989.
- [30] Hansen, R. C., "Array Pattern Control and Synthesis", Proceedings of the IEEE, vol. 80, n° 1, pág. 141-151, Janeiro 1992.
- [31] Rabiner, L. R. e Gold, B., "Theory and Application of Digital Signal Processing", Prentice-Hall, 1975.
- [32] Hamming, R. W., "Digital Filters", Prentice-Hall International Editions, 1989.
- [33] Harris, F. J., "On the Use of Windows for Harmonic Analysis with the Discrete Fourier Transform", Proceedings of the IEEE, vol. 66, n° 1, pág. 51-83, Janeiro 1978.

Utilização da FFT

3.1 - Introdução

O cálculo da transformada de Fourier pode ser realizado através da FFT (*Fast Fourier Transform*), mesmo quando se lida com funções contínuas [1]. Visto que a base do método da Relação de Fourier é a transformada de Fourier, uma forma de se obter numericamente o factor de agrupamento ou a distribuição de fontes é com a FFT. Esta abordagem ainda foi pouco utilizada na análise e síntese de agrupamentos, como elucida um comentário de Balanis quando compara o método de Fourier com o de Woodward [2]. Ele propõe para o método de Fourier realizar numericamente o integral de Fourier e para um conjunto de amostras do factor de agrupamento utilizar o método de Woodward. Esta reflexão está patente em muitos outros trabalhos.

A FFT é às vezes aplicada a problemas electromagnéticos para cálculo das convoluções no domínio espacial, já que estas se transformam em multiplicações por aplicação da transformada de Fourier, e em estruturas periódicas [3], [4], [5], [6]. Einarsson [7] e Autrey [8] usam-na no cálculo de factores de agrupamento de agrupamentos planares discretos. Brigham [9], no seu livro referente às aplicações da FFT, reconhece que a utilização da transformada de Fourier em antenas tem-se praticamente limitado ao caso em que os integrais são obtidos pelos métodos clássicos. Depois calcula, através da FFT, o diagrama de radiação de uma distribuição contínua. Finalmente, devido ao trabalho desenvolvido em [10], onde se demonstra a possibilidade de utilização desta técnica, o trabalho de mestrado de Ramos [11] aplica a FFT nalguns agrupamentos simples.

Como se comprova, são poucos os casos de utilização da FFT para análise e síntese de agrupamentos. Neste capítulo será analisada a teoria para a sua aplicação sistemática como ferramenta de base em qualquer tipo de agrupamento, dentro do contexto dos objectivos deste trabalho.

Uma dificuldade que pode surgir quando se lida com funções de espectro não limitado é o efeito de *aliasing*. Em processamento de sinal este tipo de erro é controlado pela diminuição do período de amostragem utilizado na função a transformar, a técnica tentativa e erro. Neste capítulo, esta situação de *aliasing* será resolvida de uma forma diferente. Baseado no conhecimento de certos limites da transformada de Fourier, tentar-se-á relacionar esses limites com o erro produzido na aproximação. Por este meio conseguir-se-á uma técnica mais directa para determinação do período de amostragem.

Após apresentar a teoria, serão desenvolvidos algoritmos de cálculo baseados na Relação de Fourier e na FFT. Como exemplos concretos, esses algoritmos serão aplicados aos usuais métodos de análise e síntese, apresentados nos capítulos do Estado da Arte e cuja abordagem através do método da Relação de Fourier foi realizada no capítulo anterior.

3.2 - Número de Pontos da Função a Utilizar para o Cálculo

Quando se fala em aplicar a FFT para o cálculo da transformada de Fourier de uma dada função isso implica utilizar-se um número limitado de amostras dessa função. No caso de funções com espectro limitado pode-se obter os valores exactos do espectro recorrendo ao teorema da amostragem. Para espectros ilimitados, a utilização da FFT implica sempre um dado erro no cálculo da transformada, que será tanto maior quanto maior for o período de amostragem.

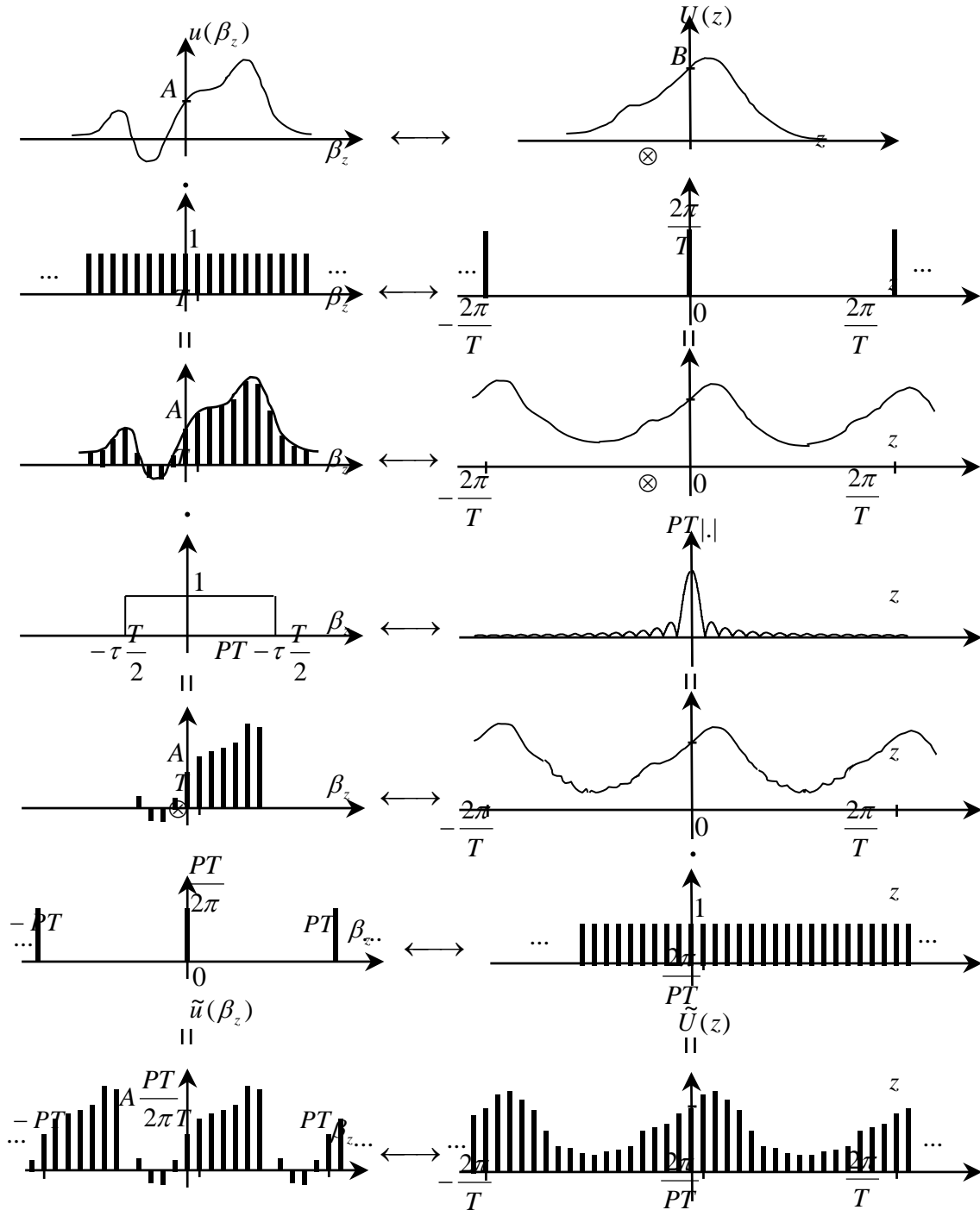


Fig. 3.1 - Obtenção da transformada de Fourier discreta de uma função contínua.

A figura 3.1 mostra como se pode obter uma aproximação da transformada de Fourier de uma função, recorrendo às propriedades da transformada discreta de Fourier [9]. As variáveis utilizadas são as de interesse para este trabalho e será empregue o termo "espectro espacial" por analogia ao "espectro frequencial".

Em primeiro lugar, a função a transformar deve ser amostrada através de um trem de Diracs de período T . Isto produz um erro de sobreposição (*aliasing*) na transformada. A seguir é necessário limitar a função para P amostras, multiplicando-a por uma janela rectangular. Esta situação conduz a um segundo erro na transformada. Por outro lado, também a transformada da função deve ser amostrada, o que é feito multiplicando-a por um trem de Diracs de período $2\pi/(PT)$. Assim, fica-se com a função original e a transformada da função periódicas e amostradas, apresentando-se numa forma propícia à utilização de técnicas computacionais.

Uma questão que se coloca é qual o número de pontos, P , a utilizar para o cálculo da FFT, a fim de que o erro esteja abaixo de um certo valor. Viu-se no parágrafo anterior que havia duas causas de erro: o intervalo entre amostras e as amostras desprezadas da função.

Quanto às amostras desprezadas, estas dependem da largura da janela que limita a função. Como, para um dada janela, se conhece a máxima amplitude das amostras desprezadas, pode-se obter uma ideia do erro.

Por outro lado, para a distância entre amostras, T , já se torna mais difícil determinar o erro produzido, uma vez que não se conhece a transformada da função, não sendo, por isso, possível ter uma ideia do *aliasing* provocado pela escolha de um certo valor. Uma forma de controlar o erro é ir diminuindo o período T para que a diferença entre as transformadas da função seja inferior a um dado valor. Contudo, se o cálculo for automático, o algoritmo tem que saber *a priori* o número de amostras a utilizar. Neste caso será importante obter uma ideia do valor da envolvente da transformada da função, de modo a calcular o período de amostragem e, com a largura da janela de truncamento, determinar P . De seguida ver-se-á como este cálculo pode ser realizado.

3.2.1 - Limites do Espectro

O período de amostragem empregue no cálculo da transformada de uma dada função é determinado pela porção de sobreposição (*aliasing*) permitida para o espectro espacial dessa função. Uma forma de se ter uma ideia do erro máximo cometido pelo *aliasing* é utilizando os limites do espectro, apresentados por Grilo, Casimiro e Lopes [12].

Os limites do espectro dão os limites máximos do espectro da função sem ter que o determinar. Trabalhando nas variáveis de interesse, sabendo que a transformada de Fourier de uma função $u(\beta_z)$ é

$$U(z) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\beta_z) e^{-j\beta_z z} d\beta_z \quad (3.1)$$

pode-se tirar a seguinte conclusão:

$$|U(z)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} u(\beta_z) e^{-j\beta_z z} d\beta_z \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |u(\beta_z)| d\beta_z \quad (3.2)$$

Utilização da FFT

Definindo a grandeza C_0 por

$$C_0 = \int_{-\infty}^{\infty} |u(\beta_z)| d\beta_z \quad (3.3)$$

o espectro do sinal está sempre abaixo deste valor, isto é,

$$|U(z)| \leq C_0 \quad (3.4)$$

Tendo em conta a propriedade da transformada da derivada de uma função, pode-se fazer

$$|(jz)^i U(z)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^i u(\beta_z)}{\partial \beta_z^i} e^{-j\beta_z z} d\beta_z \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial^i u(\beta_z)}{\partial \beta_z^i} \right| d\beta_z \quad (3.5)$$

e definir as constantes

$$C_i = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial^i u(\beta_z)}{\partial \beta_z^i} \right| d\beta_z \quad (3.6)$$

Das expressões anteriores resulta que

$$|U(z)| \leq \frac{C_i}{|z|^i}, \quad i=1, 2, \dots \quad (3.7)$$

As relações (3.4) e (3.7) definem um conjunto de curvas, abaixo das quais se encontra a amplitude da transformada de Fourier da função.

3.2.2 - Valores do Erro

Viu-se que para se calcular a transformada de Fourier de uma função esta tem de ser amostrada, como mostra a figura 3.2.

Seja $u(\beta_z)$ a função a transformar e $U(z)$ a transformada da função. Amostrando $u(\beta_z)$, com período $T_a = 2\pi/z_a$, existe sobreposição da transformada da função, representada pela zona sombreada da figura 3.2, caso o comprimento de $U(z)$ ultrapasse z_a . Isto faz com que só se tenha informação no intervalo $-z_a/2 \leq z \leq z_a/2$. Fora desse intervalo a transformada repete-se em intervalos iguais, tornando-se periódica. A transformada da função obtida por amostragem é, então, o resultado da soma da transformada exacta com as sobreposições da mesma deslocadas de um valor kz_a , $k=\pm 1, \pm 2, \dots$

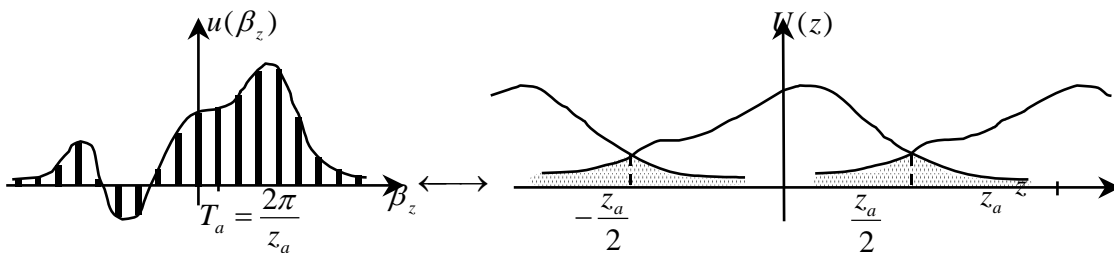


Fig. 3.2 - Amostragem de uma função contínua.

Claro que a escolha do valor de z_a vai depender do ponto da função $U(z)$ a partir do qual esta pode ser desprezada. Uma forma de o realizar é considerar que $|U(z)|$ está abaixo de um determinado valor em relação ao seu valor máximo.

Consideremos que se pretende desprezar o espectro quando este desce de um valor e abaixo do seu valor máximo. Pelos limites do espectro, definidos anteriormente, vê-se que a transformada da função está sempre abaixo desses limites, como mostra a figura 3.3. A linha a cheio é obtida pelo cruzamento das linhas dos limites do espectro. A linha a ponteados representa $|U(z)|$. Por conseguinte, ao truncar o limite do espectro num valor e abaixo do valor C_0 , a função $U(z)$ é desprezada num valor igual ou inferior.

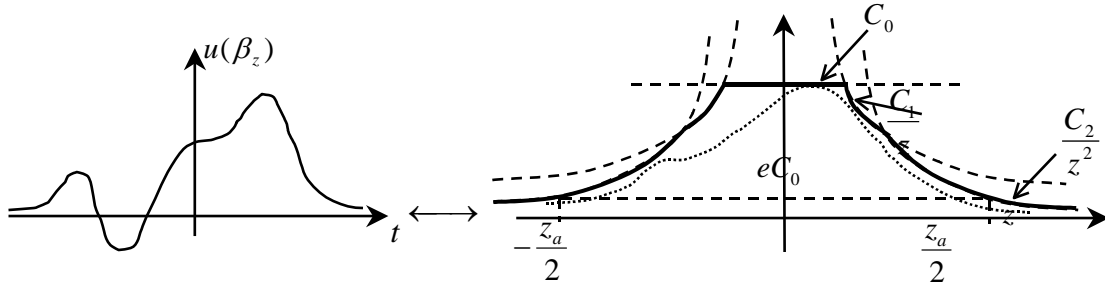


Fig. 3.3 - Limites do espectro espacial da função $u(\beta_z)$.

Analicamente tem-se que

$$\frac{C_i}{(z_a/2)^i} \leq \frac{C_0}{e} \quad (3.8)$$

em que i é o grau da derivada mais elevada da transformada. Resolvendo, retira-se que

$$z_a \geq 2 \left(\frac{C_i}{eC_0} \right)^{\frac{1}{i}} \quad (3.9)$$

Notar que não se pode dizer que o erro máximo entre a transformada exacta e a aproximada é de e . De facto, como já foi referido, a transformada aproximada é a soma da transformada exacta com réplicas deslocadas da mesma.

Uma dificuldade que pode surgir é quando o limite C_0 não coincide com o máximo da função espectral. Isto pode acontecer quando a função a transformar toma valores negativos. Neste caso não há garantia de que se está a desprezar o espectro num dado valor e abaixo do seu valor máximo. Para lidar com esta situação pode-se recorrer à relação entre módulos das funções, dada pelo teorema de Parseval,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(\beta_z)|^2 d\beta_z = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |U(z)|^2 dz \quad (3.10)$$

Como dispomos da função a transformar, calculando o primeiro integral de (3.10) obtém-se a energia total da função, E_T . Com o segundo integral calcula-se a energia do espectro que se despreza, E_d . Como não se dispõe da transformada da função, não se pode

Utilização da FFT

calcular a energia do espectro espacial pela fórmula, mas dispondo-se dos seus limites é possível determinar um limite máximo. Para isso, basta calcular a energia que está dentro do limite do espectro no intervalo $-\infty < z < -z_a/2$ e $z_a/2 < z < \infty$, uma vez que de certeza que a energia desprezada estará abaixo desse valor. Considerando que a energia desprezada está num valor E abaixo da total, tem-se que

$$\frac{2 \frac{1}{2\pi} \int_{z_a/2}^{\infty} \left(\frac{C_i}{z^i} \right)^2 dz}{\int_{-\infty}^{\infty} |u(\beta_z)|^2 d\beta_z} \leq E \quad (3.11)$$

sendo i o grau da derivada mais elevada da transformada. Resolvendo, retira-se que

$$z_a \geq 2 \left[\frac{\frac{C_i^2}{\pi(2i-1)E}}{\int_{-\infty}^{\infty} |u(\beta_z)|^2 d\beta_z} \right]^{\frac{1}{2i-1}} \quad (3.12)$$

Obteve-se uma forma de se aplicar a FFT tendo-se, *à priori*, uma ideia do erro que se está a cometer. Para um problema concreto pode-se adoptar qualquer um dos processos indicados. Com o valor de z_a calcula-se T_a e, tendo em conta a largura da janela que trunca a função a transformar, obtém-se P .

3.2.3 - Exemplos

Para aplicação da FFT foram apresentados dois processos de obtenção do período de amostragem. Para ter uma ideia do erro cometido com cada um deles analisemos dois exemplos.

3.2.3.1 - C_0 Coincide com o Máximo da Transformada

Consideremos a função pedestal, definida por

$$u(\beta_z) = P_{\beta_0}(\beta_z) e^{i\beta_1\beta_z} \quad (3.13)$$

A transformada desta função é

$$U(z) = 2\beta_0 \text{senc}[\beta_0(z - \beta_1)] \quad (3.14)$$

Os limites dos espectro espacial da função são

$$\begin{aligned} C_0 &= \int_{-\infty}^{\infty} |u(\beta_z)| d\beta_z = 2\beta_0 \\ C_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial u(\beta_z)}{\partial \beta_z} \right| d\beta_z = 2 + 2\beta_0\beta_1 \end{aligned} \quad (3.15)$$

A figura 3.4 mostra os gráficos das funções, em módulo, e os limites do espectro.

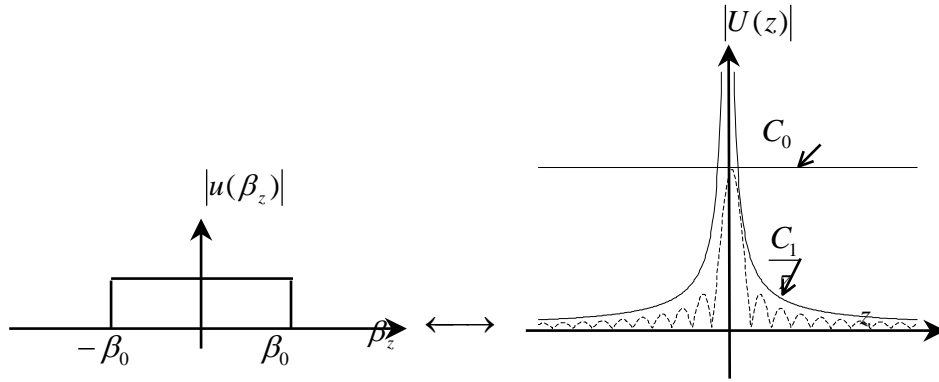


Fig. 3.4 - Limites do espectro do pedestal.

Apliquemos o primeiro processo indicado anteriormente, recorrendo-se à equação (3.9). Fazendo $\beta_0=3$, $\beta_1=0,1$ e $e=5\%$, por (3.9), obtém-se $z_a=17,333$. A figura 3.5a) apresenta os módulos da transformada aproximada (a traço contínuo) e da transformada exacta (a ponteados). A figura 3.5b) apresenta o módulo do erro relativo, dado pela diferença entre as transformadas exacta e aproximada, dividido pelo máximo da transformada.

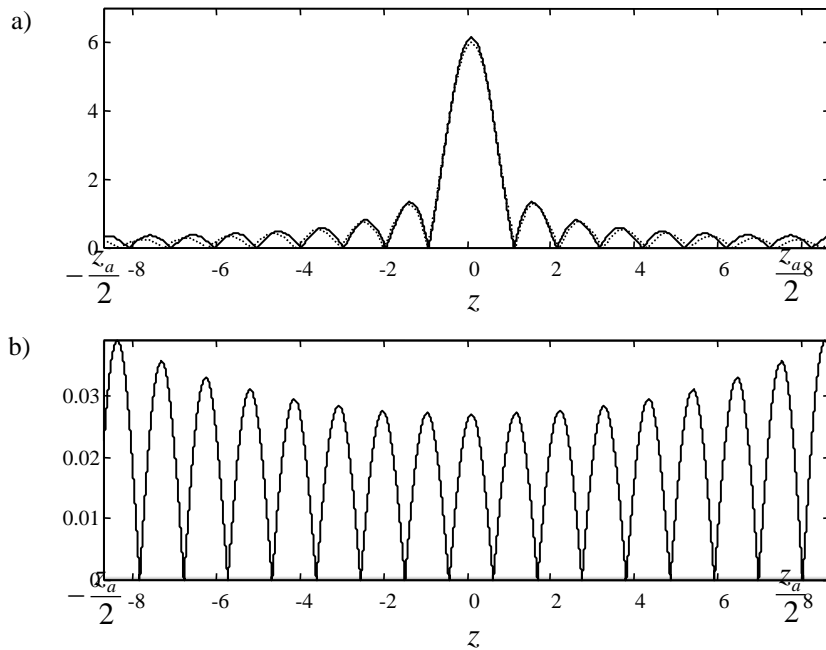


Fig. 3.5 - Utilização da FFT truncando o espectro com $e=0,05$: a) função exacta (ponteados) e função aproximada (traço contínuo); b) módulo do erro relativo.

Para se determinar o erro quadrático médio utilizou-se a expressão:

$$\mathcal{E}^{-2} = \frac{1}{z_a} \int_{-z_a/2}^{z_a/2} |U(z) - U_a(z)|^2 dz \quad (3.16)$$

Utilização da FFT

sendo $U_a(z)$ a função obtida pela FFT. Para o exemplo anterior, o erro quadrático médio foi de 0,0178.

O erro quadrático médio foi calculado para vários valores de e e determinou-se a relação

$$e_r^2 = \frac{\varepsilon^{-2}}{\max(|U(z)|)^2 e^2} \quad (3.17)$$

A figura 3.6 mostra os valores de (3.17) para e entre 0,001 e 0,1. Pela figura comprova-se que os valores estão sempre abaixo da unidade. Se assim for, o valor de e pode ser uma boa medida do erro cometido na aproximação. Para isso vejamos um pouco mais.

Por (3.15) retira-se que os limites do espectro são afectados pelas constantes β_0 e β_1 . Alterando estes valores verificou-se que quanto mais o limite do espectro coincidia com a envolvente do mesmo mais a equação (3.17) conduzia a resultados que podiam ser superiores à unidade. A situação mais desfavorável é obtida com $\beta_0=0$, na qual o limite do espectro coincide com a envolvente do mesmo. Neste caso, o máximo de (3.17) foi de cerca 1,4.

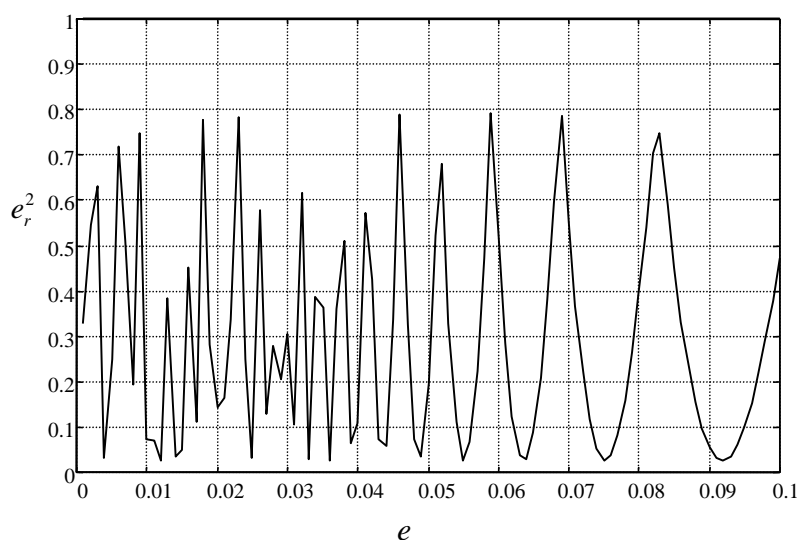


Fig. 3.6 - Erro quadrático médio relativo.

Consideremos agora o segundo processo, que recorre à equação (3.12). Foi calculada a energia total, o que deu $E_T=2\beta_0$. Fazendo $\beta_0=3$, $\beta_1=0,1$ e $E=5\%$ obtém-se que $z_a=14,345$. A figura 3.7a) mostra os módulos da transformada aproximada (a traço contínuo) e da transformada exacta (a ponteados). A figura 3.7b) apresenta o módulo do erro relativo. O erro quadrático médio, também obtido por (3.16), foi de 0,05437.

Neste caso, já se torna mais difícil obter uma relação entre o erro e a energia desprezada do espectro. Utilizando a expressão (3.17) com e substituído por E verificou-se que ela ultrapassava em muito a unidade. Desta forma, não se consegue, através do parâmetro E , tirar conclusões quanto ao erro cometido na aproximação. No entanto, a energia desprezada é inferior a E .

Utilização da FFT

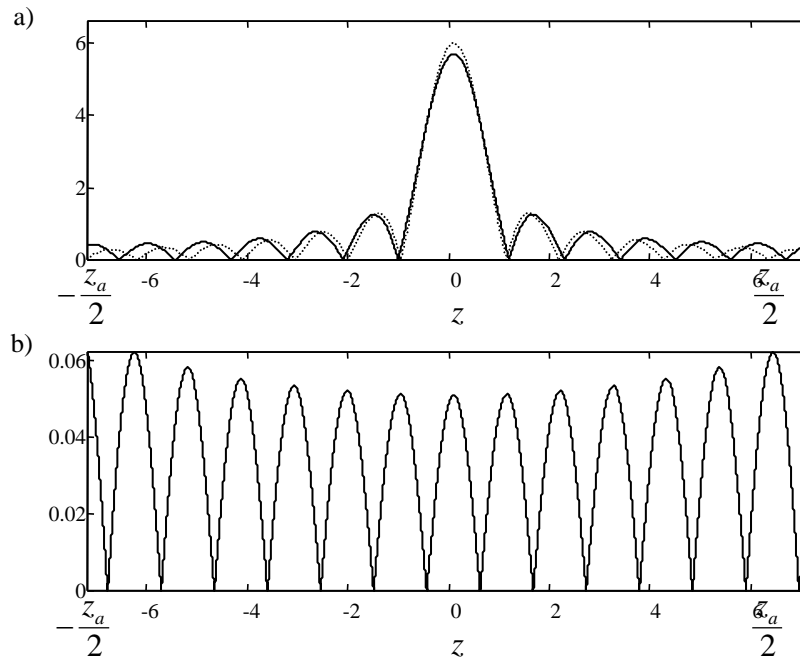


Fig. 3.7 - Utilização da FFT truncando o espectro com $E=0,05$: a) função exacta (ponteados) e função aproximada (traço contínuo); b) módulo do erro relativo.

Para comprovar que a energia desprezada está efectivamente abaixo de E , calculemos o seu valor. Sabendo que a transformada é dada por (3.14), tem-se que

$$\begin{aligned}
 E_d &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{-\frac{z_a}{2}} |U(z)|^2 dz + \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{z_a}{2}}^{\infty} |U(z)|^2 dz \\
 &= \frac{2\beta_0^2}{\pi} \int_{-\infty}^{-\frac{z_a}{2}} \frac{\text{sen}^2[\beta_0(z - \beta_1)]}{[\beta_0(z - \beta_1)]^2} dz + \frac{2\beta_0^2}{\pi} \int_{\frac{z_a}{2}}^{\infty} \frac{\text{sen}^2[\beta_0(z - \beta_1)]}{[\beta_0(z - \beta_1)]^2} dz \\
 &= \frac{2\beta_0}{\pi} \left[\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} - \frac{\cos(x_1)}{x_1} - \frac{\cos(x_2)}{x_2} + \pi - \text{Si}(x_1) - \text{Si}(x_2) \right] \\
 x_1 &= 2\beta_0 \left(\frac{z_a}{2} - \beta_1 \right) \\
 x_2 &= 2\beta_0 \left(\frac{z_a}{2} + \beta_1 \right) \\
 \text{Si}(x) &= \frac{\pi}{2} + \text{si}(x) \\
 \text{si}(x) &= -\int_x^{\infty} \frac{\text{sen}(t)}{t} dt
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

A função $\text{Si}(x)$ encontra-se tabelada em [13]. Para o exemplo, a percentagem de energia desprezada é $E_d/E_T=1,456\%$, valor inferior a E .

Recorrendo a outros exemplos constatou-se que, com o primeiro processo, o parâmetro "e" é uma boa medida do erro máximo cometido na aproximação da transformada de Fourier e que, com o segundo processo, E é uma boa medida da energia desprezada.

3.2.3.2 - C_0 Não Coincide com o Máximo da Transformada

Seja um outro tipo de exemplo, em que o parâmetro C_0 não coincide com o máximo da transformada da função,

$$u(\beta_z) = \begin{cases} \text{sen}(\pi\beta_z) & -1 \leq \beta_z \leq 1 \\ 0 & \text{outros} \end{cases} \quad (3.19)$$

A transformada é dada por

$$U(z) = 2\pi j \frac{\text{sen}(z)}{z^2 - \pi^2} \quad (3.20)$$

Os limites do espectro espacial são

$$\begin{aligned} C_0 &= \int_{-\infty}^{\infty} |u(\beta_z)| d\beta_z = \frac{4}{\pi} \\ C_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial u(\beta_z)}{\partial \beta_z} \right| d\beta_z = 4 \\ C_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial^2 u(\beta_z)}{\partial \beta_z^2} \right| d\beta_z = 6\pi \end{aligned} \quad (3.21)$$

A figura 3.8 mostra os gráficos das funções de interesse e dos limites do espectro.

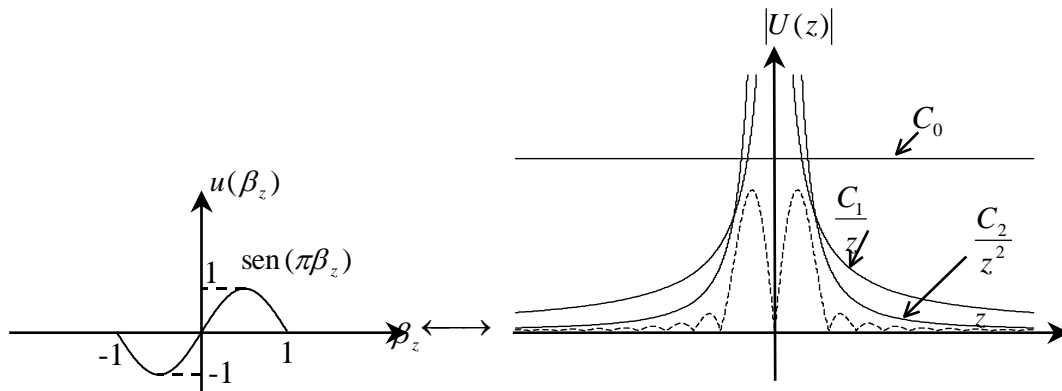


Fig. 3.8 - Exemplo em que o limite C_0 não coincide com o máximo da função espectral.

Utilizando o primeiro processo, equação (3.9), para $e=5\%$, tem-se que $z_0=34,4144$. A figura 3.9a) apresenta os módulos da transformada aproximada (a traço contínuo) e da transformada exacta (a pontead). A figura 3.9b) apresenta o módulo do erro relativo. O erro quadrático médio, obtido pela equação (3.16), dá $\varepsilon^{-2}=8,34 \times 10^{-5}$.

Utilização da FFT

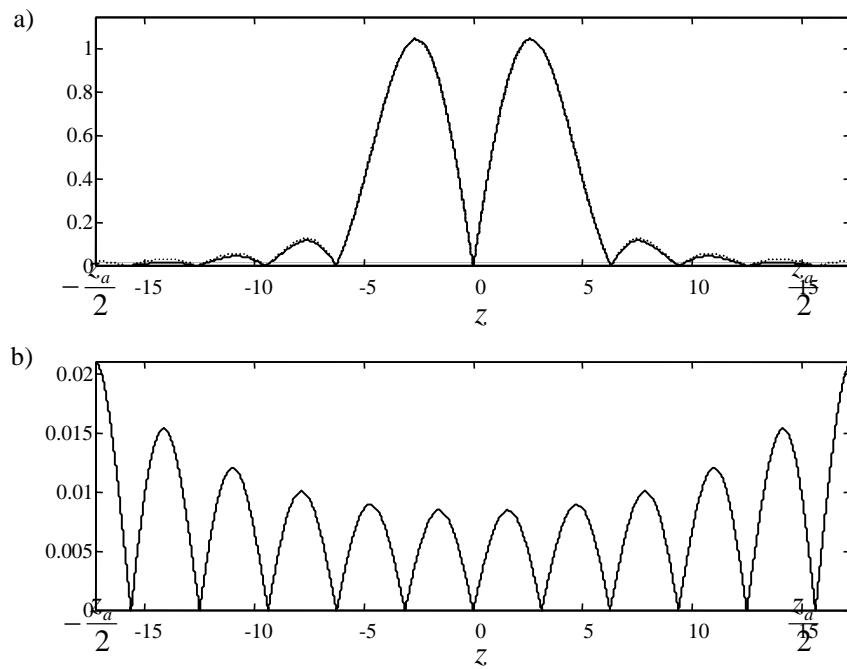


Fig. 3.9 - Utilização da FFT truncando o espectro com $e=0,05$: a) função exacta (ponteados) e função aproximada (traço contínuo); b) módulo do erro relativo.

O erro quadrático médio foi calculado para vários valores de e através da equação (3.17). A figura 3.10 mostra o resultado para e entre 0,001 e 0,1. Verifica-se que, mesmo neste caso, os valores estão sempre abaixo da unidade.

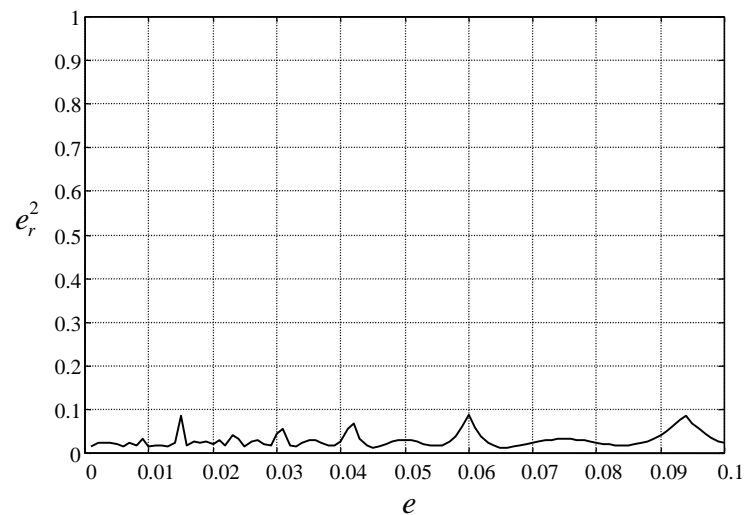


Fig. 3.10 - Erro quadrático médio relativo.

Consideremos agora o segundo processo, que recorre à equação (3.12). A energia total é $E_T=1$. Para $E=5\%$ obtém-se que $z_a=18,2033$. A figura 3.11a) apresenta os módulos da

Utilização da FFT

transformada aproximada (a traço contínuo) e da transformada exacta (a pontead). A figura 3.11b) apresenta o módulo do erro relativo. O valor do erro quadrático médio é $\bar{\varepsilon}^2 = 1,04 \times 10^{-3}$.

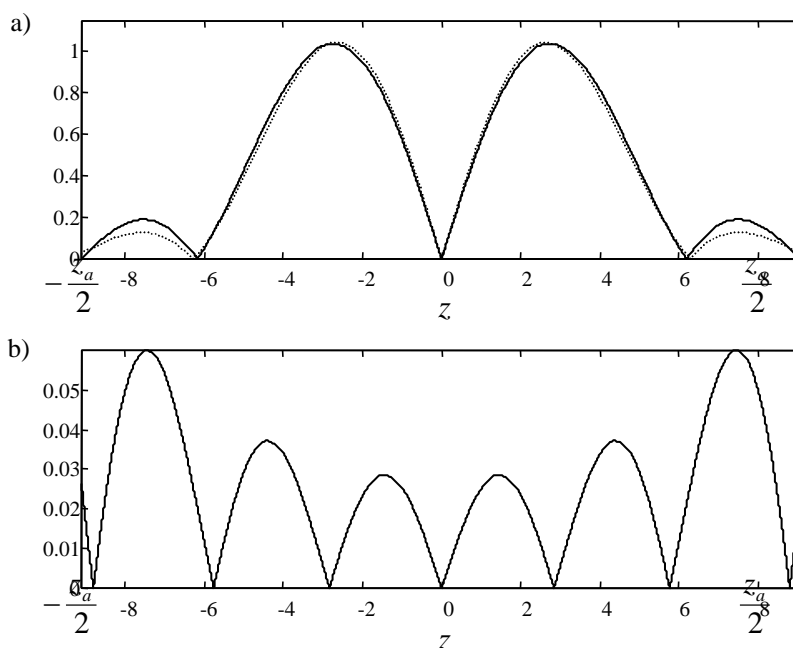


Fig. 3.11 - Utilização da FFT truncando o espectro com $E=0,05$: a) função exacta (tracejado) e função aproximada (traço contínuo); b) módulo do erro relativo.

Verificou-se, outra vez, que é difícil obter uma relação entre o erro cometido na aproximação e E . Todavia, a energia desprezada é inferior a E , como se pode comprovar pela figura 3.12 que nos dá a percentagem de energia desprezada para valores de E entre 0,001 e 0,1.

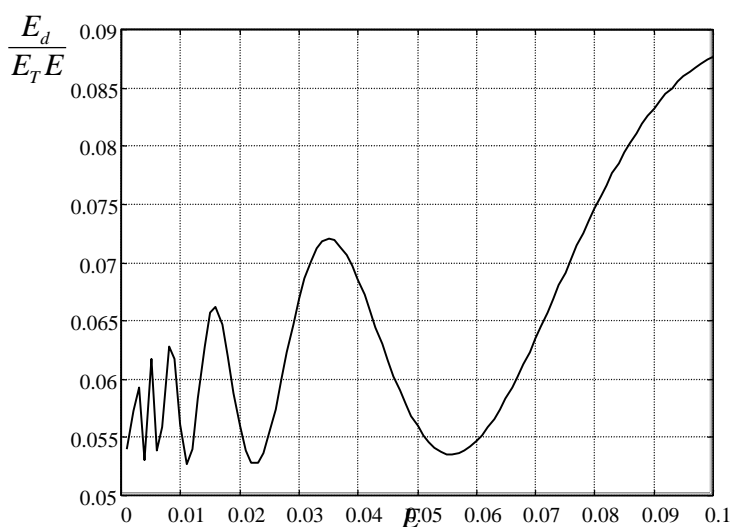


Fig. 3.12 - Percentagem de energia desprezada.

Através de outros exemplos continua-se a comprovar com o primeiro processo que o parâmetro "e" é uma boa medida do erro máximo cometido na aproximação da transformada de Fourier, mesmo quando o valor de C_0 não coincide com o máximo da transformada.

3.3 - Síntese de Agrupamentos através da FFT

No capítulo 2 desenvolveu-se o método da Relação de Fourier, determinando expressões para análise e síntese de agrupamentos. A não ser que seja fácil a obtenção analítica da transformada de Fourier, no caso geral é necessário recorrer à FFT para o cálculo da mesma.

Começando pelo problema de síntese, ver-se-á a forma de aplicar esta teoria a agrupamentos de antenas, desenvolvendo-se os algoritmos necessários para o efeito.

É sabido que na síntese de agrupamentos a distribuição das fontes deve ser limitada. Como se viu, nesta situação pode-se aplicar o teorema da amostragem. No entanto, em situações intermédias dos métodos de síntese pode ser necessário determinar a transformada de Fourier de funções de espectro não limitado ao valor desejado.

Para distribuições contínuas a utilização da FFT pode obrigar a truncar quer o factor de agrupamento quer a distribuição de fontes. Isto implica utilizar a abordagem introduzida na secção anterior.

Para distribuições discretas, com elementos equidistantes, não há necessidade de truncamento do factor de agrupamento, visto que este é periódico. Neste caso é possível obter valores exactos se a distribuição for limitada. Para distribuições não equidistantes, como a utilização da FFT obriga a ter pontos equiespaçados, é necessário realizar algum tipo de aproximação.

O algoritmo da FFT utilizado neste trabalho foi o do *MATLAB* [14], cujas expressões da série discreta são:

$$X(r) = \sum_{p=0}^{P-1} x(p) e^{-j\frac{2\pi}{P}rp} \quad 0 \leq r \leq P-1 \quad (3.22)$$

$$x(p) = \frac{1}{P} \sum_{r=0}^{P-1} X(r) e^{j\frac{2\pi}{P}rp} \quad 0 \leq p \leq P-1 \quad (3.23)$$

em que (3.22) dá a transformada de Fourier directa e a (3.23) a transformada inversa.

3.3.1 - Distribuições Contínuas

Para se obter uma expressão apropriada à aplicação da FFT utilizar-se-á a figura 3.1 e as propriedades da transformada discreta de Fourier.

A forma de abordagem, apresentada na figura 3.1, pode ser um pouco mais generalizada. Como se verificou na aplicação do teorema da amostragem, figura 2.2, o trem de Diracs que amostra a função a transformar pode estar descentrado da origem. Definindo o período de

amostragem por T_F , consideremos que τT_F , $0 \leq \tau < 1$, é o valor desse deslocamento. Sendo assim, a transformada de $\tilde{u}(\beta_z)$, que aparece no último par da figura 3.1, é dada por

$$\begin{aligned} \tilde{U}(z) &= F [\tilde{u}(\beta_z)] \\ &= \left[\sum_{k=\langle P \rangle} u[T_F(k + \tau)] e^{-jT_F(k + \tau)z} \right] \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(z - \frac{2\pi}{PT_F} n\right) \right] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j\tau \frac{2\pi}{P} n} \sum_{k=\langle P \rangle} u[T_F(k + \tau)] e^{-j \frac{2\pi}{P} kn} \delta\left(z - \frac{2\pi}{PT_F} n\right) \end{aligned} \quad (3.24)$$

em que $k=\langle P \rangle$ significa utilizar P amostras no intervalo apropriado da função. A transformada $U(z)$ pode ser aproximada por um período de $\tilde{U}(z)$. Supondo que não existe sobreposição de $U(z)$ nem truncamento de $u(\beta_z)$, a transformada $\tilde{U}(z)$ aparece multiplicada por $(1/T_F)$. Assim, para aproximação à função contínua deve-se multiplicar a transformada discreta pelo valor do período de amostragem. Desta forma, tem-se que

$$U\left(\frac{2\pi}{PT_F} n\right) = T_F e^{-j\tau \frac{2\pi}{P} n} \sum_{k=\langle P \rangle} u[T_F(k + \tau)] e^{-j \frac{2\pi}{P} kn}, \quad \begin{cases} -\frac{P}{2} \leq n \leq \frac{P-2}{2} & P \text{ par} \\ -\frac{P-1}{2} \leq n \leq \frac{P-1}{2} & P \text{ ímpar} \end{cases} \quad (3.25)$$

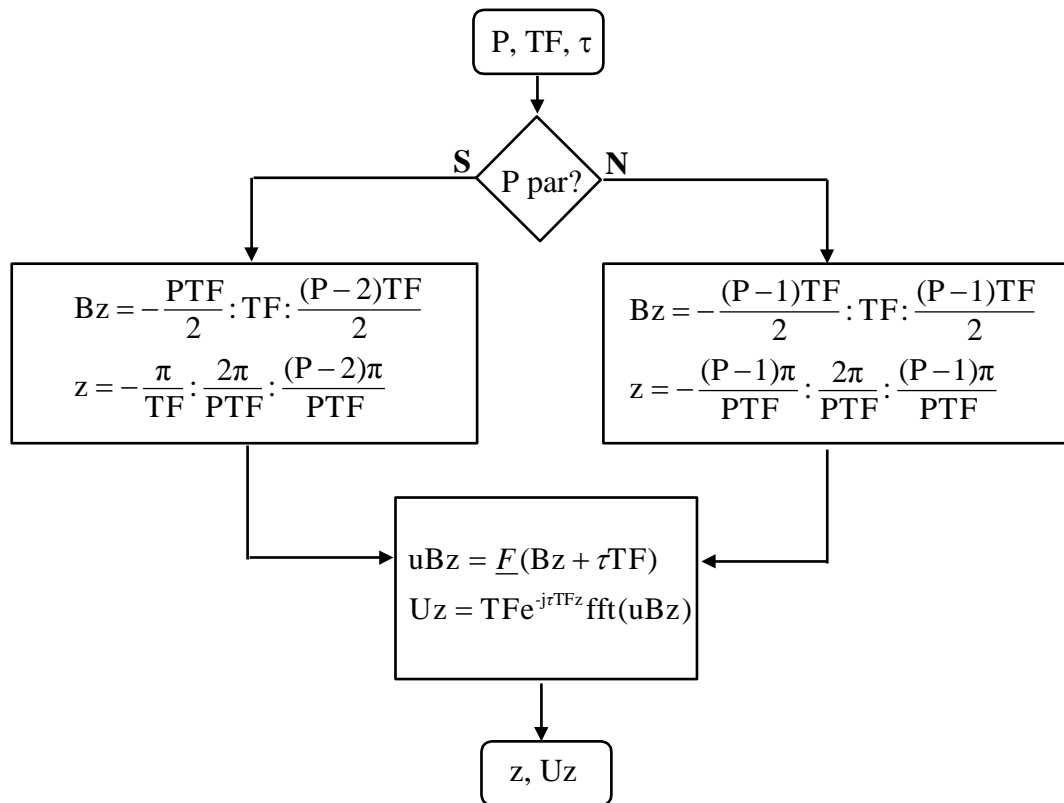
O intervalo de variação de k é o mesmo que o de n . Comparando este resultado com a equação (3.22), vê-se que ele está numa forma apropriada para aplicar directamente a FFT. Os intervalos de variação de k e n , aqui escolhidos, fazem com que se trabalhe no intervalo da transformada da função dado por $-\pi/T_F \leq z \leq \pi/T_F$, enquanto que em (3.22) trabalha-se no intervalo $0 \leq z \leq 2\pi/T_F$. Para lidar com esta situação o MATLAB dispõe da função *fftshift(.)*, que permite comutar as amostras referentes a um intervalo para o outro, tendo em conta a periodicidade da função.

A distribuição de corrente é obtida pela expressão (3.25) dividida pelo factor 2π , que aparece na Relação de Fourier, isto é,

$$c\left(\frac{2\pi}{PT_F} n\right) = \frac{T_F}{2\pi} e^{-j\tau \frac{2\pi}{P} n} \text{FFT}\{F[T_F(k + \tau)]\} \quad (3.26)$$

Esta expressão é a aproximação da equação (2.10), sendo utilizada quando se pretende realizar o cálculo computacional. Como a janela visível está centrada na origem da variável β_z , optou-se por centrar os gráficos. Daí a escolha dos intervalos de variação das variáveis k e n , apresentados atrás. Não significa, porém, que as funções estejam centradas na origem.

O fluxograma para o cálculo da transformada é apresentado na figura 3.13. O algoritmo é apresentado no apêndice A, função *fftcont(.)*. Para se ter em conta a expressão (3.26) deve-se dividir o resultado obtido por essa função por 2π . A função *fftcont(.)* também contém uma constante, σ . A utilização desse parâmetro, que permite obter amostras da distribuição de corrente descentradas da origem, será abordada nas distribuições discretas, cujo resultado é análogo.



P - Número de pontos da FFT.
 uBz - Função a aplicar a FFT.
 Uz - Transformada da função.
 TF - Período de amostragem de uBz.
 τ - Fracção do período TF de deslocamento da posição das amostras relativamente à origem.

Fig. 3.13 - Algoritmo para aplicação da FFT na síntese de agrupamentos contínuos.

De seguida serão apresentados alguns exemplos com o objectivo de melhor elucidar a utilização da técnica da FFT aqui desenvolvida.

3.3.2 - Exemplos de Distribuições Contínuas

Consideremos que se pretende sintetizar um agrupamento cujo factor de agrupamento é dado por

$$\left\{ \begin{array}{ll} \underline{F}(\theta) = \cos \left[\frac{\pi \cos(\theta)}{2 \cos\left(\frac{4\pi}{9}\right)} \right] & 80^\circ \leq \theta \leq 100^\circ \\ 0 & \text{outros} \end{array} \right. \quad (3.27)$$

O factor de agrupamento, na variável β_z , e a distribuição de corrente, na forma analítica, são dados por

$$\cos \left[\frac{\pi}{2\beta \cos\left(\frac{4\pi}{9}\right)} \beta_z \right] \Bigg|_{-\beta \cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) \leq \beta_z \leq \beta \cos\left(\frac{4\pi}{9}\right)} \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi} \frac{\beta \cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) \cos \left[\beta \cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) z \right]}{\frac{\pi^2}{4} - \left[\beta \cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) z \right]^2} \quad (3.28)$$

A figura 3.14a) mostra o factor de agrupamento desejado e a figura 3.14b) o módulo da distribuição de corrente, em dB e em escala linear. O factor de agrupamento está representado no intervalo da janela visível. A distribuição de corrente a ponteadado é obtida pela fórmula directa e a traço contínuo é a distribuição obtida pela técnica da FFT, com $T_F=0,1$ e $P=1024$. No apêndice C1 é apresentado o algoritmo MATLAB. Pode-se comprovar que o erro é maior nos extremos do agrupamento devido ao efeito *aliasing*. Para o período de amostragem utilizado, o erro máximo relativo cometido na aproximação, em módulo, foi de 0,0023.

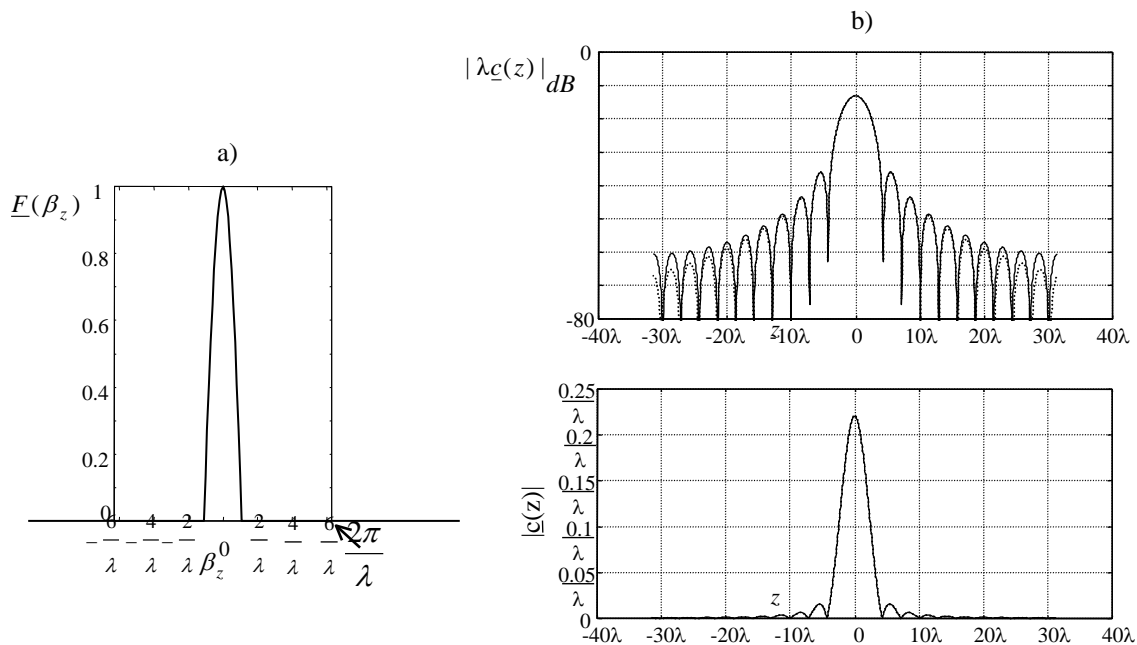


Fig. 3.14 - Distribuição de corrente para um factor de agrupamento definido pelo co-seno limitado. a) factor de agrupamento desejado; b) a distribuição de corrente a traço contínuo é obtida pela técnica da FFT, com período de amostragem $T_F=0,1$, e a ponteadado pela fórmula directa.

Quando se tem que trabalhar com o factor β vê-se que, pela equação (1.28), ele depende de λ . Como normalmente este não é especificado, torna-se mais simples trabalhar com os cálculos apenas na constante 2π . Isto representa lidar com $\beta' = 2\pi = \beta\lambda$. Após realizar os cálculos com β' , para incluir o factor λ basta recorrer à propriedade da transformada de Fourier da mudança de escala $\beta'_z = \beta_z\lambda$,

$$\underline{F}(\beta_z\lambda) \longleftrightarrow \frac{1}{\lambda} \underline{c}\left(\frac{z}{\lambda}\right) \quad (3.29)$$

Por conseguinte, como se observa pela figura 3.14, dividir β_z por λ é o mesmo que multiplicar z por esse factor e afectar a distribuição de corrente do mesmo factor. Elimina-se a necessidade de lidar com λ nos cálculos, desde que no final se tenha em conta a equação (3.29).

Para uma distribuição de corrente ilimitada, o resultado da aplicação da técnica da FFT será um conjunto de amostras que são aproximações das exactas. O número de amostras a obter para a distribuição depende de P e a gama do espectro espacial depende de T_F . Se ela for limitada, a escolha correcta da frequência de amostragem permite não produzir *aliasing* na distribuição espacial, mas, se o factor de agrupamento for ilimitado, pode haver um erro devido ao truncamento do mesmo.

Para distribuições de corrente limitadas torna-se evidente a aplicação do teorema da amostragem, o que é efectuado através da equação (2.15). Se nessa expressão fizer-se as substituições $S=2\pi/T_F$ e $z=2\pi n/(PT_F)$, obtém-se a equação (3.26). Desta forma, facilmente se calcula a distribuição de corrente para a síntese deste tipo de agrupamentos, como o de Taylor, Bayliss, etc, com amostras exactas.

Consideremos que se pretende realizar a síntese de Taylor, com $\bar{n}=8$, $SLL=25$ e $L=2$. A figura 3.15a) mostra o módulo do factor de agrupamento desejado. A figura 3.15b) apresenta os módulos e as fases das respectivas distribuições de corrente, exacta e calculada pela técnica da FFT, com $P=1024$. Verificou-se que com $\tau=10^{-8}$, o erro máximo da distribuição anda à volta de 10^{-7} . Não se deve utilizar valores de τ muito mais pequenos, porque ultrapassando o erro cometido pelo computador os resultados degradam-se. Da figura verifica-se que os módulos das funções exacta e aproximada coincidem. No gráfico das fases da distribuição de corrente salienta-se a fase aproximada obtida pela técnica da FFT. O módulo do erro relativo é inferior $1,7 \times 10^{-8}$. O algoritmo é apresentado na apêndice C2.

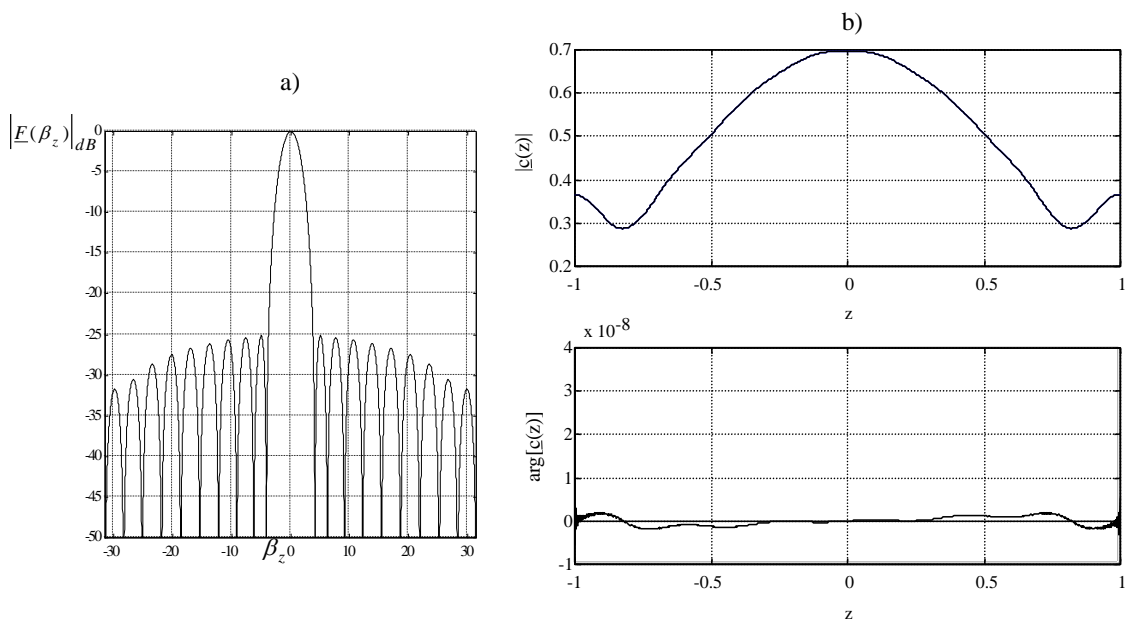


Fig. 3.15 - Síntese de Taylor para $\bar{n}=8$, $SLL=25$ e $L=2$: a) módulo do factor de agrupamento; b) módulos e fases das distribuições de corrente.

Para a síntese de Bayliss, consideremos que é pretendido realizá-la com $\bar{n}=10$, $SLL=30$ e $L=2$. A figura 3.16a) mostra o módulo do factor de agrupamento e a figura 3.16b) apresenta a distribuição de corrente utilizando a equação (3.26), mas com $\tau=1/2+10^{-8}$, como foi definido em (2.69). O gráfico da distribuição exacta confunde-se com o da figura 3.16b). O erro máximo relativo cometido na aproximação é de $1,1 \times 10^{-8}$ para $P=1024$. O algoritmo é apresentado no apêndice C3.

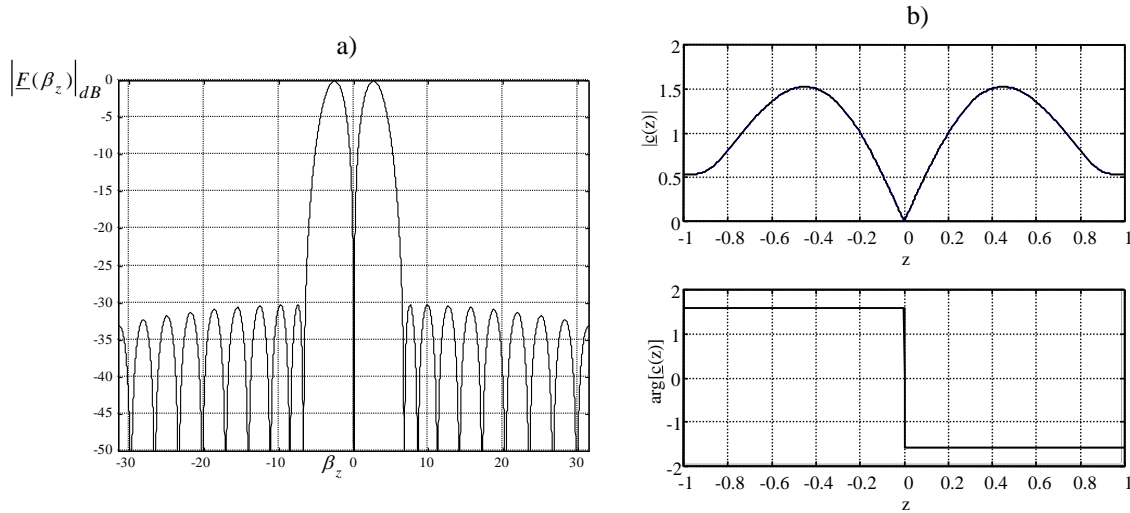


Fig. 3.16 - Síntese de Bayliss para $\bar{n}=10$, $SLL=30$ e $L=2$: a) módulo do factor de agrupamento; b) módulo e fase da distribuição de corrente.

Qualquer cálculo de outra distribuição contínua segue o mesmo procedimento: amostragem da função com o número de pontos desejado e aplicação da FFT, como foi desenvolvido neste trabalho. Facilmente se depreende a generalidade da técnica.

3.3.3 - Distribuições Discretas

A síntese de distribuições discretas, utilizando a FFT, é similar à das contínuas, mas agora não há amostragem da distribuição de corrente para o cálculo computacional, uma vez que esta, por natureza, já é discreta.

A expressão de interesse também pode ser obtida pela aplicação do teorema da amostragem a uma distribuição discreta. Assim, sendo a amostragem do factor de agrupamento realizada no intervalo $-\pi/d \leq \beta_z \leq \pi/d$, com um período $T_F=2\pi/(Pd)$, reescrevendo (2.20) tem-se

$$c[(n+\sigma)d] = \frac{1}{P} e^{-j\tau \frac{2\pi}{P}(n+\sigma)} \sum_{k=\langle P \rangle} \underline{F} \left[\frac{2\pi}{Pd} (k+\tau) \right] e^{-j\sigma \frac{2\pi}{P} k} e^{-j \frac{2\pi}{P} kn}, \begin{cases} -\frac{P-1}{2} \leq n \leq \frac{P-1}{2} & P \text{ ímpar} \\ -\frac{P}{2} \leq n \leq \frac{P}{2}-1 & P \text{ par} \end{cases} \quad (3.30)$$

Reparemos que esta expressão é igual à (3.22) a menos dos factores $1/P$, $e^{-j\sigma 2\pi k/P}$ e $e^{-j\tau 2\pi(n+\sigma)/P}$. Se agruparmos o termo $e^{-j\sigma 2\pi k/P}$ à função do factor de agrupamento, (3.30) fica numa forma apropriada para aplicar a expressão da FFT. De notar que como $e^{j\beta_z \sigma d} |_{\beta_z=2\pi k/(Pd)} = e^{-j2\pi \sigma k/P}$, isto sugere que, em termos de cálculo, se possa multiplicar o factor de agrupamento

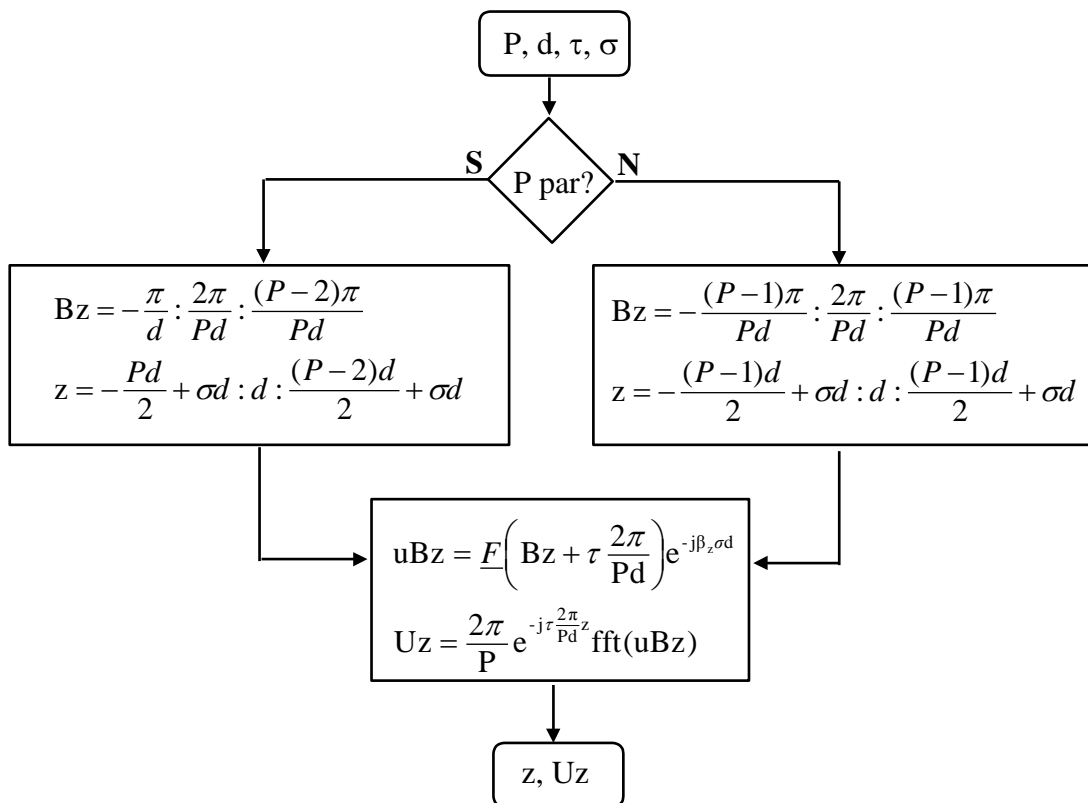
Utilização da FFT

por $e^{-j\beta_z \sigma d}$ em vez de multiplicar o trem de Diracs por $e^{j\beta_z \sigma d}$, como foi apresentado na figura 2.1. Comparando com o que foi realizado na secção 2.2.2, pelas propriedades da transformada de Fourier, verifica-se que utilizando um período do factor de agrupamento, se o multiplicarmos pelo termo $e^{-j\beta_z \sigma d}$, fizermos a convolução com o trem de Diracs centrado na origem e, finalmente, atrasarmos a distribuição de corrente de um valor igual a σd , o resultado será o mesmo.

O cálculo da distribuição de corrente discreta pela FFT é realizado, então, por

$$\underline{c}[(n + \sigma)d] = \frac{1}{P} e^{-j\tau \frac{2\pi}{P}(n+\sigma)} \text{FFT} \left\{ \underline{F} \left[\frac{2\pi}{Pd} (k + \tau) \right] e^{-j\sigma \frac{2\pi}{P} k} \right\} \quad (3.31)$$

Comparando esta expressão com a (3.26), elas são equivalentes a menos do factor multiplicativo d . Deste modo, a distribuição de corrente contínua pode ser obtida pela mesma expressão a menos de uma constante. No entanto, será mantida a distinção entre os dois algoritmos de cálculo apenas por facilidade de utilização dos parâmetros em cada caso. A figura 3.17 mostra o fluxograma para o cálculo da transformada, sendo igual à expressão anterior multiplicada por 2π , e o algoritmo é apresentado no apêndice A, função *fftdisc(.)*.



- P - Número de pontos da FFT.
- d - Distância entre elementos.
- uBz - Função a aplicar a FFT.
- Uz - Transformada da função.
- τ - Fracção do período $2\pi/(Pd)$ de deslocamento da posição das amostras relativamente à origem.
- σ - Fracção de d de deslocamento da posição dos elementos relativamente à origem.

Fig. 3.17 - Algoritmo para aplicação da FFT na síntese de agrupamentos discretos.

3.3.4 - Exemplos de Distribuições Discretas

Como no caso contínuo, serão apresentados alguns exemplos para melhor compreensão da aplicação da técnica da FFT. Também têm por objectivo o cálculo computacional aplicado a alguns dos métodos apresentados no primeiro capítulo.

Consideremos que se pretende obter um agrupamento discreto, cujo factor de agrupamento é dado por

$$\begin{cases} F(\theta) = 1 & 60^\circ \leq \theta \leq 80^\circ \\ 0 & \text{outros} \end{cases} \quad (3.32)$$

em que a distância entre elementos é de $d=0,6\lambda$ e estão deslocados da origem de metade da distância, ou seja, $\sigma=1/2$. O factor de agrupamento, na variável β_z , vale 1 na gama de valores $\beta\cos(4\pi/9) \leq \beta_z \leq \beta\cos(\pi/3)$ e a fórmula para a distribuição de corrente é obtida por (2.12), o que dá

$$\underline{c}[(n + \sigma)d] = \frac{1}{\pi} \frac{\text{sen} \left[\frac{\beta \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \beta \cos\left(\frac{4\pi}{9}\right)}{2} (n + \sigma)d \right]}{(n + \sigma)} e^{-j \frac{\beta \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \beta \cos\left(\frac{4\pi}{9}\right)}{2} (n + \sigma)d} \quad (3.33)$$

A figura 3.18a) mostra o factor de agrupamento desejado e a figura 3.18b) a parte central da distribuição de corrente, em módulo e fase. As correntes foram obtidas pela técnica da FFT, com $P=1024$ e a amostragem realizada com $\tau=0$. Para este número de pontos, o erro máximo relativo cometido na aproximação, em módulo, foi de 0,0035. No apêndice C4 é apresentado o algoritmo.

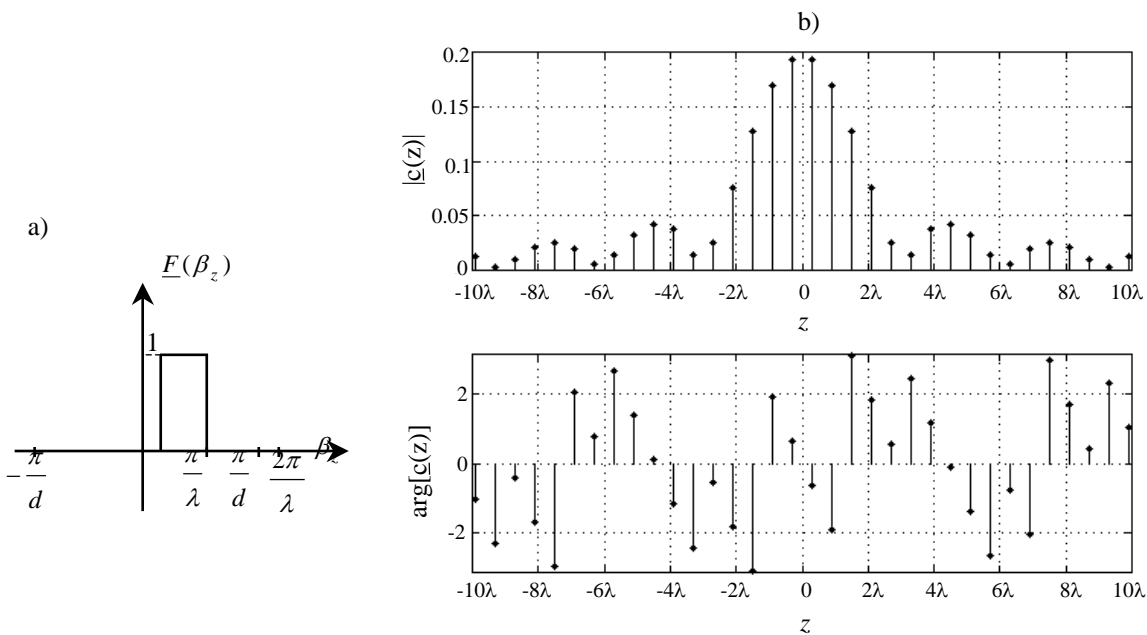


Fig. 3.18 - Síntese de um agrupamento tipo pedestal: a) factor de agrupamento; b) módulo e fase da distribuição de corrente.

Para distribuições de corrente limitadas a aplicação da técnica desenvolvida, com o número de pontos apropriado, conduz a uma distribuição exacta, a menos do erro introduzido pelo computador.

Vejamos a síntese de Tschebyscheff com um número ímpar de elementos, $N=2M+1$. Para que os elementos apareçam nas posições $z=0, \pm d, \pm 2d, \dots, \pm Md$ deve-se ter $\sigma=0$. Como exemplo prático consideremos o apresentado na secção 2.4.4.1. Pelas condições do problema tem-se $x_0=1,1374$, $d=0,561\lambda$ e, como se pretende o feixe desviado de 60° , utilizando (2.48) obtém-se um atraso da função de $\beta_{zd}=\beta\cos(\pi/3)$. A figura 3.19a) mostra o módulo do factor de agrupamento, dentro da janela visível, e a distribuição de corrente aparece na figura 3.19b). O valor utilizado para P foi o de uma potência de dois mais próxima de N . Esta escolha faz-se caso seja pretendido como facilidade da maior parte das rotinas da FFT. Contudo, podemos utilizar qualquer número de pontos, desde que igual ou superior ao número de elementos, que os resultados serão os mesmos a menos dos zeros extras. Isto só significa que se aumentou a frequência de amostragem, o que em nada altera o valor das correntes. O valor de τ é qualquer. O algoritmo é apresentado no apêndice C5.

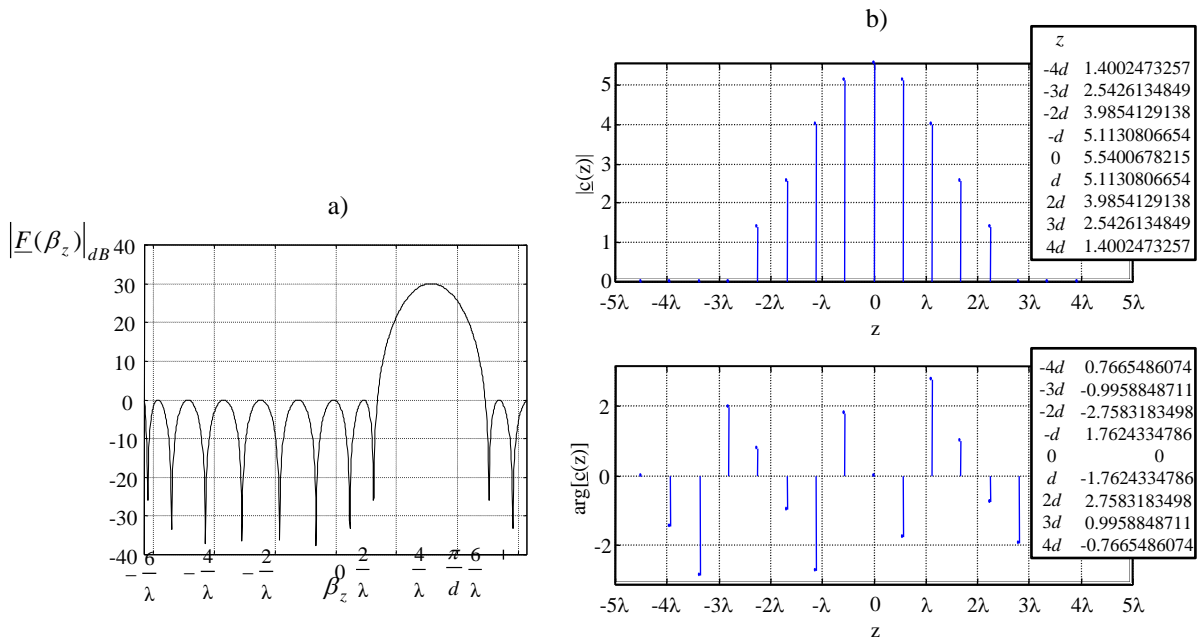


Fig. 3.19 - Síntese de Tschebyscheff para 9 elementos obtidos pela técnica da FFT, com $P=16$ pontos: a) factor de agrupamento; b) módulo e fase da distribuição de corrente.

Para elucidar o processo de amostragem da distribuição de corrente, representado na figura 2.1, a figura 3.20 mostra a distribuição de corrente obtida pela transformada de Fourier de um período do factor de agrupamento de Tschebyscheff, e zero fora do mesmo, e os pontos onde foi amostrado para dar a distribuição da figura 3.19. Como era de esperar, já que a distribuição de corrente é limitada, as amostras para além do número de elementos caem em cima dos zeros da distribuição contínua.

Para um agrupamento com um número par de elementos, estes aparecerão em posições $z=\pm d/2, \pm 3d/2, \dots, \pm(2M-1)d/2$, o que é realizado com $\sigma=1/2$. Como exemplo, consideremos o anterior mas utilizando $N=10$ e $d=0,572$. O algoritmo é o mesmo, mas com os novos valores

Utilização da FFT

de N , d e σ . A figura 3.21a) apresenta o módulo do factor de agrupamento dentro da janela visível e a figura 3.21b) a distribuição de corrente.

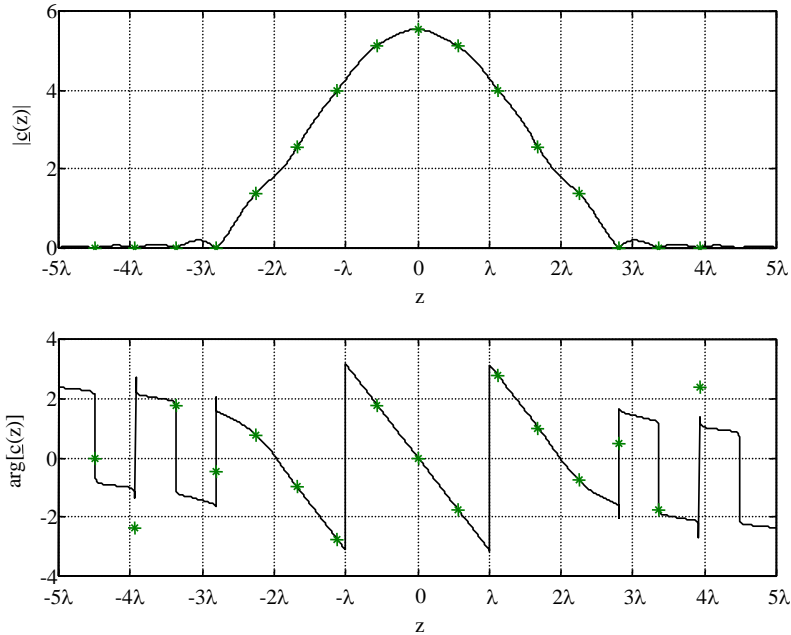


Fig. 3.20 - Transformada de um período do factor de agrupamento (a traço contínuo) e os pontos da distribuição de corrente do exemplo em causa (asterisco).

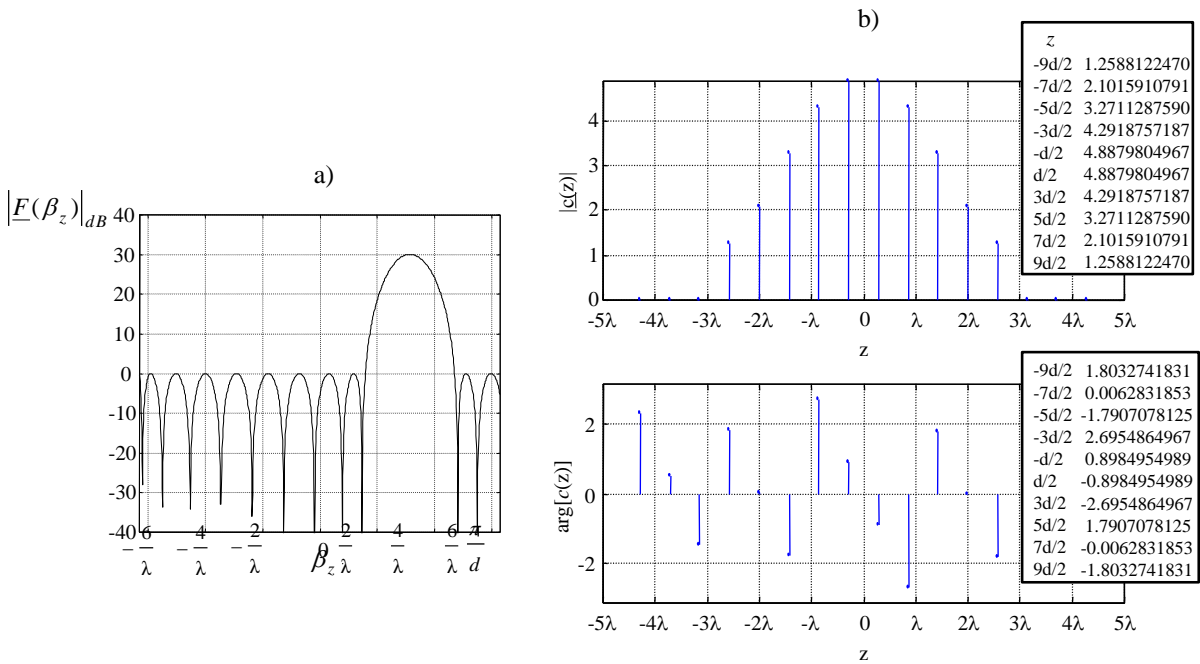


Fig. 3.21 - Síntese de Tschebyscheff para 10 elementos obtidos pela técnica da FFT, com $P=16$ pontos: a) módulo do factor de agrupamento; b) módulo e fase da distribuição de corrente.

Para os dois exemplos anteriores foi empregue a mudança de variável (2.36). Consideremos um outro em que utiliza a expressão (2.52), referente a um agrupamento superdirectivo apresentado por Collin [15]: agrupamento com 7 elementos, com $d=\lambda/24$ e cujos lóbulos secundários estão 20 dB abaixo do principal. Os parâmetros de interesse são determinados por (1.52) e (1.53). A figura 3.22 mostra os resultados, que comprovam os obtidos por Collin. O algoritmo é apresentado no apêndice C6.

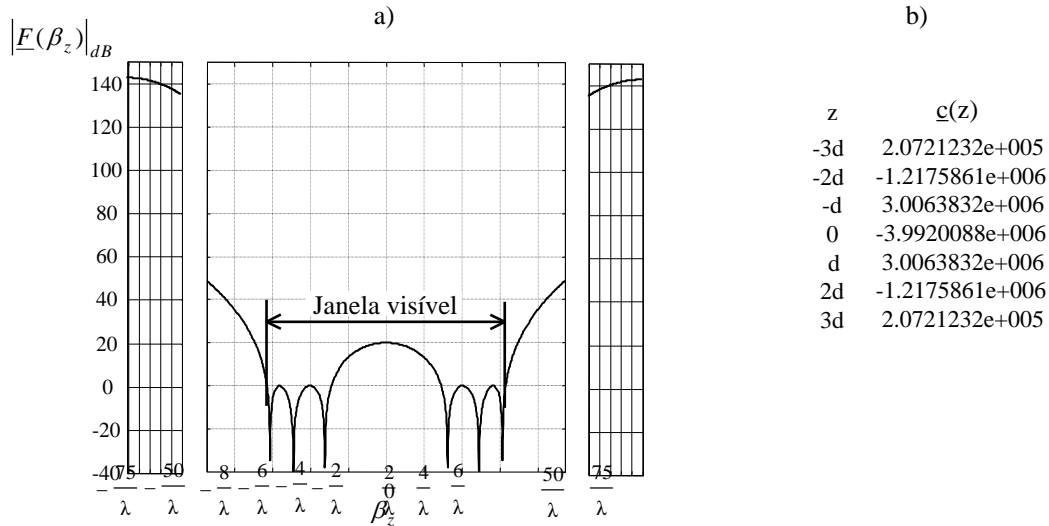


Fig. 3.22 - Síntese de Tschebyscheff para 7 elementos espaçados de um valor inferior a meio comprimento de onda: a) módulo do factor de agrupamento; b) distribuição de corrente.

Terminou-se de aplicar a técnica da FFT a alguns exemplos da síntese de Tschebyscheff. Com a mesma facilidade se pode sintetizar qualquer outro tipo de polinómio trigonométrico, como é o caso dos polinómios de Gegenbauer referidos na secção 2.4.4.3.

Pretende-se comparar a distribuição de corrente obtida pela síntese de Tschebyscheff com a de Gegenbauer, de um agrupamento de 11 elementos com $SLL=25$ dB e $d=0,6\lambda$. Utilizando a substituição (2.36), pela fórmula (1.45) tem-se para a síntese de Tschebyscheff que $x_0=1,0644$. Para a síntese de Gegenbauer utiliza-se a expressão (2.58). Com a mesma mudança de variável que para Tschebyscheff, escolhe-se o valor de x_0 correspondente a um nível máximo dos lóbulos secundários igual ao de Tschebyscheff. Fazendo $t=1/2$ (polinómio de Legendre) obteve-se $x_0=1,056$ e para $t=1$ tem-se $x_0=1,045$. A figura 3.23 mostra os resultados e o algoritmo é apresentado no apêndice C7.

Pela figura 3.23a) comprova-se que o agrupamento de Tschebyscheff é o que produz um factor de agrupamento com a largura do feixe principal mais estreita. A figura 3.23b) mostra as respectivas distribuições de corrente.

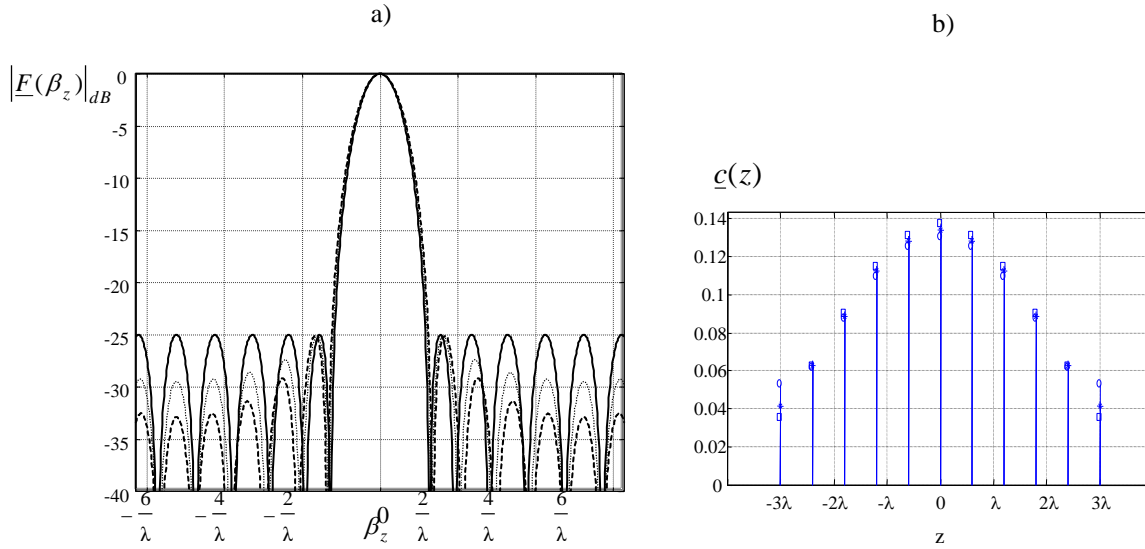
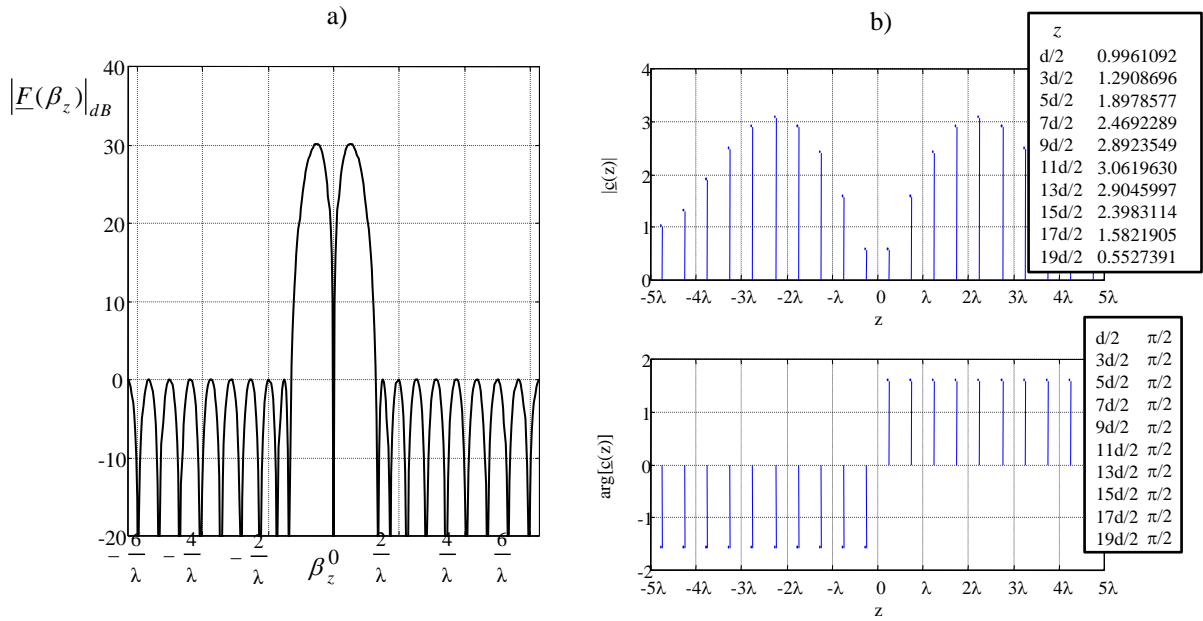


Fig. 3.23 - Síntese de agrupamentos utilizando os polinómios de Gegenbauer para 11 elementos espaçados de $d=0,6\lambda$: a) a cheio é o factor de agrupamento de Tschebyscheff (ou Gegenbauer com $t=0$), a pontado o de Gegenbauer com $t=1/2$ (ou Legendre) e a tracejado o de Gegenbauer com $t=1$; b) distribuições de corrente de Tschebyscheff (o), de Gegenbauer para $t=1/2$ (*) e para $t=1$ (□).

Na síntese de Zolotarev a parte mais complicada diz respeito à implementação da função polinomial. A aplicação da técnica da FFT é análoga aos exemplos anteriores. Como exemplo, consideremos o apresentado em [16], para um agrupamento com $2M=20$ elementos, $d=0,5\lambda$ e $SLL=30dB$. O valor de k é obtido através da equação (1.69). Para gerar o polinómio de Zolotarev são necessárias as funções $K(k)$, $sn(v,k)$, $cn(v,k)$, $dn(v,k)$, $z(v,k)$ e $F(v,k)$. O MATLAB já dispõe das rotinas para determinar as quatro primeiras funções: $K=ellipke(m)$ e $[sn,cn,dn]=ellipj(u,m)$. As duas últimas vão ter que ser implementadas. Tendo em conta [13], estas funções são definidas por,

$$\begin{aligned}
 K(m) &= \int_0^1 \left[(1-t^2)(1-b^2t^2) \right]^{-\frac{1}{2}} dt = \int_0^1 (1-m\text{sen}^2\theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta \\
 u &= \int_0^a \left[(1-t^2)(1-b^2t^2) \right]^{-\frac{1}{2}} dt = \int_0^\phi (1-m\text{sen}^2\theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta = F(\phi, m) \\
 sn(u) &= \text{sen}(\phi) \\
 cn(u) &= \cos(\phi) \\
 dn(u) &= (1-m\text{sen}^2\phi)^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

Como o MATLAB lida com o parâmetro m em vez de k deve-se fazer $m=k^2$. Para calcular $z(v,k)$ e $F(v,k)$ implementou-se as rotinas $jacobizeta(\phi,m)$ e $elliticf(\phi,m)$, respectivamente, utilizando o método da média aritmética-geométrica apresentado em [13]. Estas duas rotinas são apresentadas nos apêndice D e E, respectivamente. A figura 3.24b) mostra a distribuição de corrente obtida pela técnica da FFT e o factor de agrupamento respectivo aparece na figura 3.24a). O algoritmo encontra-se no apêndice C8.



Para finalizar, vejamos a aplicação da técnica da FFT à síntese de Villeneuve. Até agora não houve a necessidade de amostrar o factor de agrupamento de uma forma descentrada da origem, isto é, sempre se considerou $\tau=0$. Para o cálculo computacional da síntese de Villeneuve já se deve fazer $\tau \neq 0$ para evitar as descontinuidades, como foi referido na secção 2.4.8. Como exemplo de aplicação consideremos o indicado por Villeneuve, caracterizado por um agrupamento com 41 elementos, $\bar{n}=6$, $SLL=25$ e $d=0,5\lambda$. A figura 3.25a) mostra o factor de agrupamento normalizado e a figura 3.25b) a distribuição de corrente. O resultado obtido pela técnica da FFT coincide com o da fórmula desenvolvida por Villeneuve. O valor de τ é qualquer um desde que diferente de zero. O algoritmo é apresentado no apêndice C9.

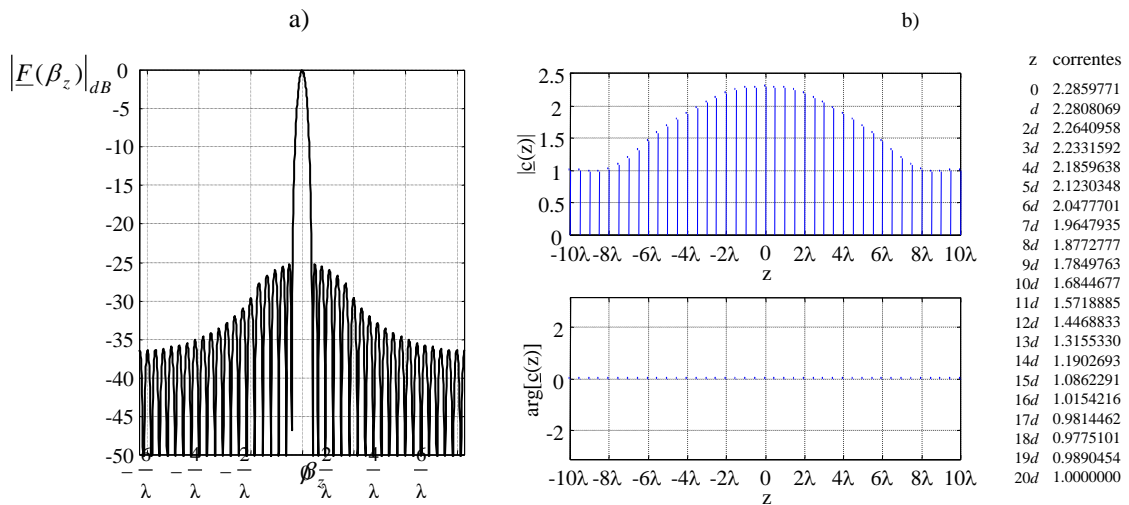


Fig. 3.25 - Síntese de Villeneuve para 41 elementos com $d=0,5\lambda$, $SLL=25$, e $\bar{n}=6$: a) módulo do factor de agrupamento; b) módulo e fase da distribuição de corrente.

3.4 - Análise de Agrupamentos através da FFT

Na secção 2.2.1 foram desenvolvidas as expressões referentes à análise de agrupamentos. Como para a síntese, a não ser que seja fácil o cálculo analítico da transformada de Fourier inversa, no caso geral é necessário recorrer à FFT para se obter o factor de agrupamento.

Para distribuições contínuas a utilização da FFT obriga a truncar o factor de agrupamento num dado valor. Isto implica utilizar a abordagem introduzida na secção 3.2. Embora esta tenha sido aplicada para a transformada directa, devido à dualidade da transformada, também pode-se aplicar à transformada inversa. Pela expressão (1.20), no cálculo dos limites deve-se ter em consideração o factor 2π .

Para distribuições discretas, com elementos equidistantes, não há necessidade de truncamento do factor de agrupamento, uma vez que este é periódico.

3.4.1 - Distribuições Contínuas

Como para a síntese de agrupamentos, as propriedades da transformada discreta de Fourier desempenharão um papel importante para aplicação da FFT à análise de agrupamentos.

A figura 3.1 apresentou o desenvolvimento para obtenção da transformada discreta de Fourier. A forma de o realizar consistiu em amostrar a função contínua, truncá-la e finalmente convoluir com o trem de Diracs. Se for feita uma abordagem semelhante, mas partindo da transformada inversa, tem-se a forma de calcular a transformada inversa de uma função contínua utilizando a transformada discreta. Para isso, a amostragem e truncamento são realizados no domínio oposto ao da figura 3.1, chegando-se a expressões análogas devido à dualidade da transformada de Fourier.

Dada a função $U(z)$ a transformada inversa aproximada de $u(\beta_z)$ é obtida amostrando $U(z)$, com o período de amostragem T_c , truncada para P pontos e convoluida com um trem de Diracs, de modo a amostrar também a inversa. Como resultado, obtém-se

$$\begin{aligned}
 \tilde{u}(\beta_z) &= F^{-1}[\tilde{U}(z)] \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[\sum_{n=\langle P \rangle} U[T_c(n+\sigma)] e^{jT_c(n+\sigma)\beta_z} \right] \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\beta_z - \frac{2\pi}{PT_c}k\right) \right] \\
 &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j\sigma\frac{2\pi}{P}k} \sum_{n=\langle P \rangle} U[T_c(n+\sigma)] e^{j\frac{2\pi}{P}kn} \delta\left(\beta_z - \frac{2\pi}{PT_c}k\right)
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

em que o trem de Diracs, que amostra a distribuição de corrente, está descentrado da origem do eixo z do valor σ , como foi apresentado anteriormente.

Utilização da FFT

Também como na transformada directa, ao amostrar $U(z)$ a transformada inversa aparece multiplicada por $(1/T_c)$. Assim, para aproximação à função contínua deve-se multiplicar a transformada discreta pelo valor do período de amostragem,

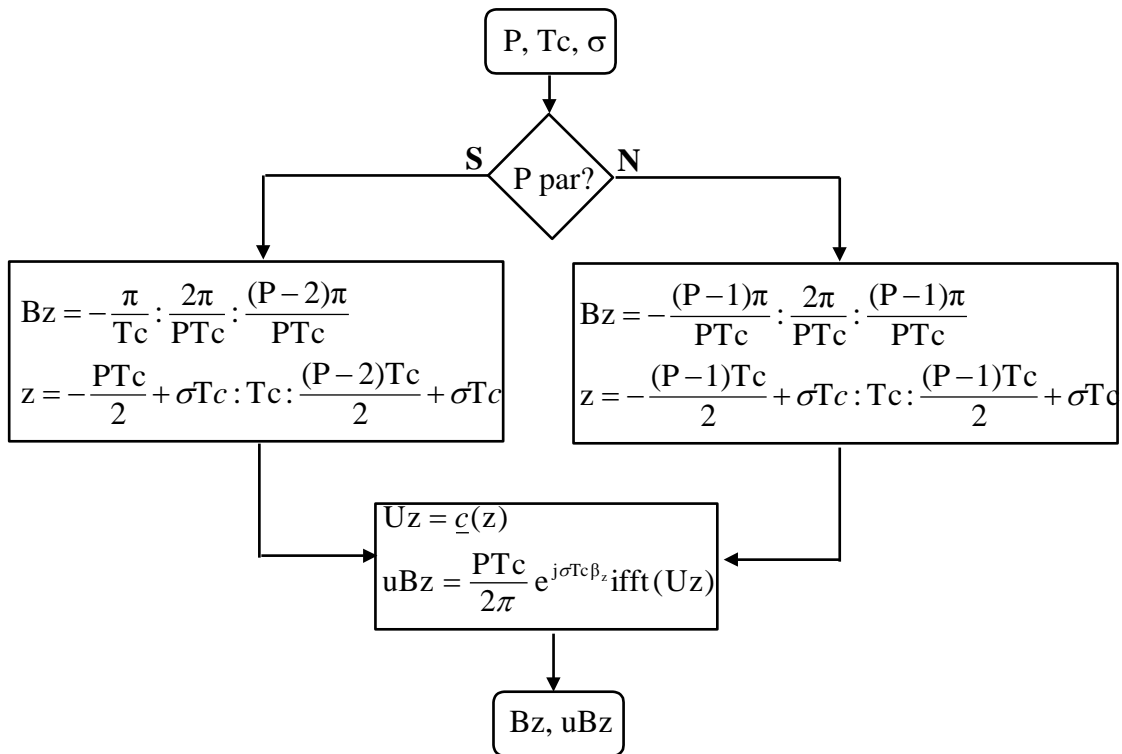
$$u\left(\frac{2\pi}{PT_c}k\right) = \frac{T_c}{2\pi} e^{j\sigma\frac{2\pi}{P}k} \sum_{n=\langle P \rangle} U[T_c(n+\sigma)] e^{j\frac{2\pi}{P}kn}, \quad \begin{cases} -\frac{P}{2} \leq k \leq \frac{P-2}{2} & P \text{ par} \\ -\frac{P-1}{2} \leq k \leq \frac{P-1}{2} & P \text{ ímpar} \end{cases} \quad (3.36)$$

Comparando este resultado com o da FFT inversa, apresentado em (3.23), vê-se que o factor de agrupamento, tendo em conta o factor 2π que relaciona o factor de agrupamento com a transformada inversa, é obtido por

$$\underline{F}\left(\frac{2\pi}{PT_c}k\right) = PT_c e^{j\sigma\frac{2\pi}{P}k} \text{IFFT}\{\underline{c}[T_c(n+\sigma)]\} \quad (3.37)$$

em que IFFT significa FFT inversa. Esta expressão é a aproximação da equação (2.1), sendo utilizada quando se pretende realizar o cálculo computacional.

O fluxograma para o cálculo da transformada inversa é apresentado na figura 3.26 e o algoritmo no apêndice B, função *ifftcont(.)*. A expressão (3.37) é determinada multiplicando essa função por 2π .



- P - Número de pontos da IFFT.
- cz - Função a aplicar a IFFT.
- uBz - Transformada inversa da função.
- Tc - Período de amostragem de Uz.
- σ - Fracção do período Tc de deslocamento da posição das amostras relativamente à origem.

Fig. 3.26 - Algoritmo para aplicação da FFT inversa na análise de agrupamentos contínuos.

Como exemplo, seja a seguinte distribuição de corrente:

$$\underline{c}(z) = \begin{cases} \left(\frac{1}{L}z + 2\right)e^{-j10\left(\frac{z-\pi}{20}\right)} & -L \leq z \leq 0 \\ \left(-\frac{1}{L}z + 2\right)e^{-j10\left(\frac{z-\pi}{20}\right)} & 0 < z \leq L \end{cases} \quad (3.38)$$

O factor de agrupamento referente a esta distribuição é

$$\underline{F}(\beta_z) = jL \frac{\sin^2\left[(\beta_z - 10)\frac{L}{2}\right]}{\left[(\beta_z - 10)\frac{L}{2}\right]^2} + 2jL \frac{\sin[(\beta_z - 10)L]}{(\beta_z - 10)L} \quad (3.39)$$

A figura 3.27 mostra os gráficos dos factores de agrupamento e da distribuição de corrente desejada. O factor de agrupamento aproximado, indicado a cheio na figura 3.27a), foi calculado pela técnica da FFT inversa, com 1024 pontos, com o período de amostragem da distribuição de $T_c=0,1$ e com $\sigma=1/2$. O factor de agrupamento obtido pela fórmula directa aparece a ponteados. O erro máximo relativo cometido na aproximação foi de 0,018. O algoritmo, para este exemplo, encontra-se no apêndice C10.

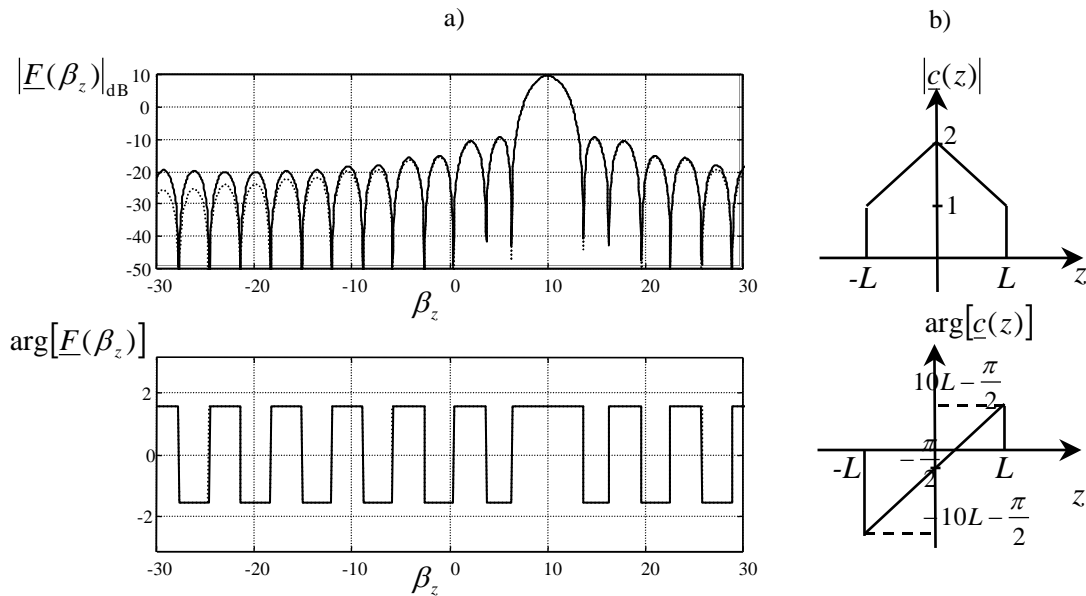


Fig. 3.27 - Análise de um agrupamento contínuo: a) o factor de agrupamento a traço contínuo é obtido pela técnica da FFT inversa e a ponteados pela fórmula directa; b) distribuição de corrente desejada.

3.4.2 - Distribuições Discretas

A aplicação da FFT a distribuições discretas torna-se mais simples devido à sua natureza. De facto, para agrupamentos equidistantes é fácil obter o factor de agrupamento, uma vez que não há necessidade de amostrar uma função contínua.

No capítulo anterior o factor de agrupamento desta distribuição é calculado pela expressão (2.6). Para se determinar P pontos do factor de agrupamento utiliza-se a expressão

$$\underline{F}\left(\frac{2\pi}{Pd}k\right) = \sum_{n=\langle P \rangle} \underline{c}[(n+\sigma)d] e^{j\frac{2\pi}{P}kn} e^{j\sigma\frac{2\pi}{P}k}, \quad \begin{cases} -\frac{P}{2} \leq k \leq \frac{P-2}{2} & P \text{ par} \\ -\frac{P-1}{2} \leq k \leq \frac{P-1}{2} & P \text{ ímpar} \end{cases} \quad (3.40)$$

Comparando este resultado com a FFT inversa, dado por (3.23), retira-se que

$$\underline{F}\left(\frac{2\pi}{Pd}k\right) = P e^{j\sigma\frac{2\pi}{P}k} \text{IFFT}\{\underline{c}[(n+\sigma)d]\} \quad (3.41)$$

A FFT inversa fornece o factor de agrupamento no intervalo $-\pi/d \leq \beta_z \leq \pi/d$. No entanto, não é esse intervalo que nos interessa, mas o da janela visível. A não ser quando $d=\lambda/2$, no caso geral ele não coincide com a janela visível. Para valores de d inferiores a meio comprimento de onda, esse intervalo contém o da janela visível, sendo fácil extrair a informação referente ao factor de agrupamento. Contudo, para $d>\lambda/2$ os limites da janela visível estão fora do mesmo.

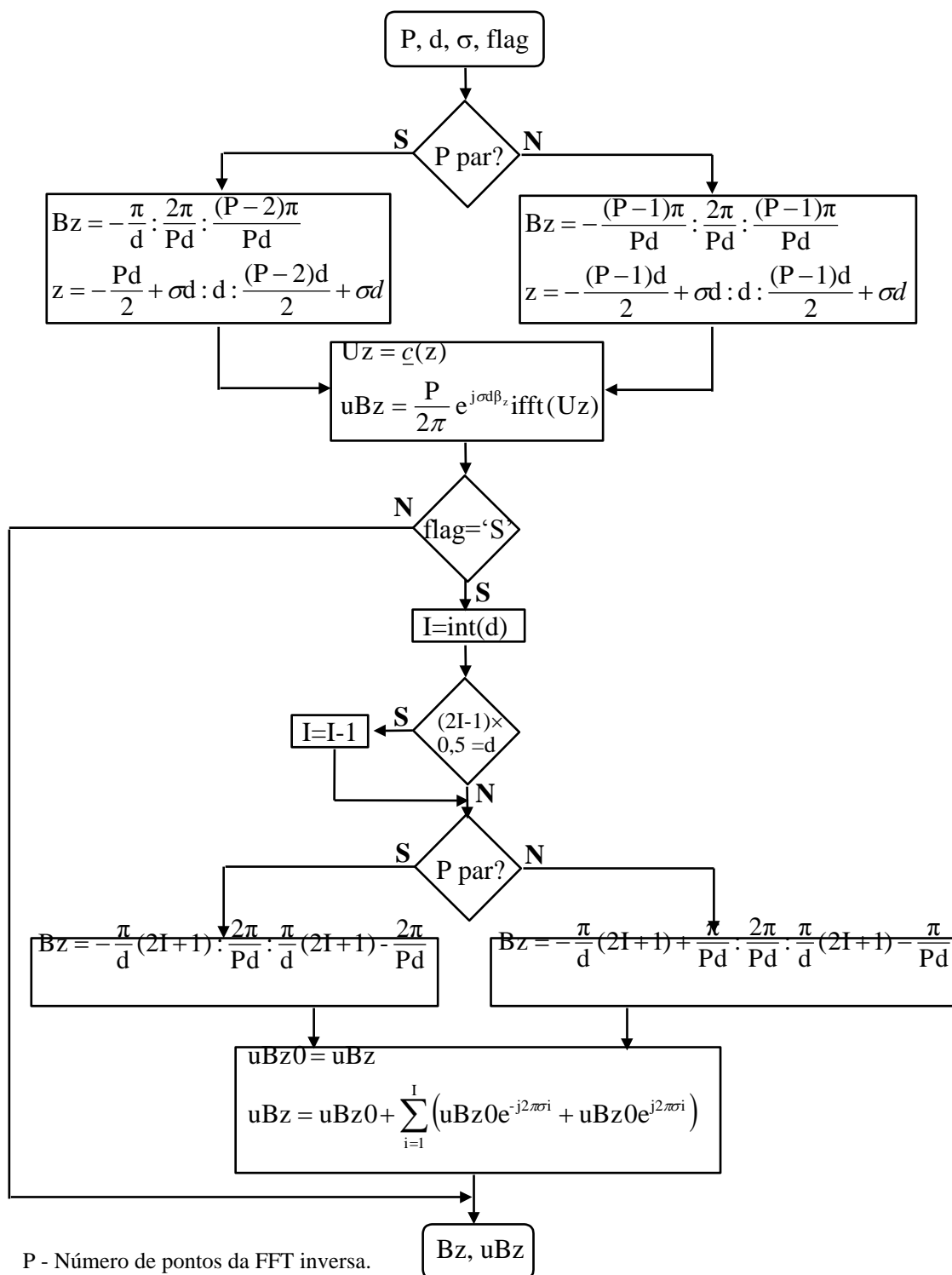
Uma forma de se aumentar o intervalo da FFT inversa é intercalando zeros entre os elementos, no que se traduz no aumento da frequência de amostragem. O número de zeros entre dois elementos indica o aumento do número de períodos que aparece na função do factor de agrupamento. Este processo é relativamente simples, tendo o incómodo de se ter que introduzir amostras nulas entre elementos nos vectores de dados de entrada.

Outra forma de o realizar, e que será empregue no processo de cálculo, é considerando a figura 2.1. Como se pode ver pelo terceiro par apresentado na figura, a função no intervalo $-\pi/d+2\pi i/d \leq \beta_z \leq \pi/d+2\pi i/d$, $i=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$, pode ser obtida pela porção no intervalo $-\pi/d \leq \beta_z \leq \pi/d$ multiplicada por $e^{j2\pi i\sigma}$. Na realidade, pela expressão (2.6), qualquer valor da função $\underline{F}(\beta_z)$ em $\beta_z=\beta_{z_0}+2\pi i/d$, com $-\pi/d \leq \beta_{z_0} \leq \pi/d$, é dado por

$$\begin{aligned} \underline{F}\left(\beta_{z_0} + \frac{2\pi}{d}i\right) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{c}[(n+\sigma)d] e^{j\beta_{z_0}(n+\sigma)d} \Big|_{\beta_z=\beta_{z_0}+\frac{2\pi}{d}i}, \quad i = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{c}[(n+\sigma)d] e^{j\left(\beta_{z_0}+\frac{2\pi}{d}i\right)(n+\sigma)d} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{c}[(n+\sigma)d] e^{j\beta_{z_0}(n+\sigma)d} e^{j2\pi i\sigma} \end{aligned} \quad (3.42)$$

A figura 3.28 mostra o fluxograma para cálculo da transformada inversa, utilizado para obtenção do factor de agrupamento de agrupamentos discretos equidistantes, tendo em conta o valor da distância entre elementos de modo a incluir toda a janela visível. A junção de períodos em cada lado da função de base permite aumentar o intervalo de visualização do factor de agrupamento e, desta forma, incluir a janela visível. Neste caso, o algoritmo é mais complicado que o anterior, mas tem a vantagem de não necessitar-se de incluir zeros entre elementos.

Utilização da FFT



- P - Número de pontos da FFT inversa.
- d - Distância entre elementos.
- cz - Função a aplicar a FFT inversa.
- uBz - Transformada inversa da função.
- σ - Fracção da distância d de deslocamento da posição dos elementos relativamente à origem.
- flag - parâmetro que se igual a 'S' junta períodos à função uBz de base.
- I - Número de períodos a juntar em cada lado da função de base.

Fig. 3.28 - Algoritmo para aplicação da FFT inversa na análise de agrupamentos discretos, com junção de períodos para permitir aumentar a zona visualizável do factor de agrupamento.

O algoritmo MATLAB é apresentado no apêndice B, função *ifftdisc(.)*. Como pode haver situações em que não se pretende expandir o intervalo de visualização, essa opção é controlada pela constante *flag*.

Como exemplo consideremos o indicado em [17], para um agrupamento com 19 elementos e supondo $d=0,6\lambda$. Como os elementos estão centrados na origem deve-se fazer $\sigma=0$ em (3.42). Utilizando a técnica da FFT inversa, com $P=1024$ pontos e seguindo o algoritmo da figura 3.28, obtém-se o resultado da figura 3.29a) para o factor de agrupamento na variável β_z , expandido de modo a incluir a janela visível. Na figura 3.29b) aparece o factor de agrupamento na variável θ . O algoritmo é apresentado no apêndice C11.

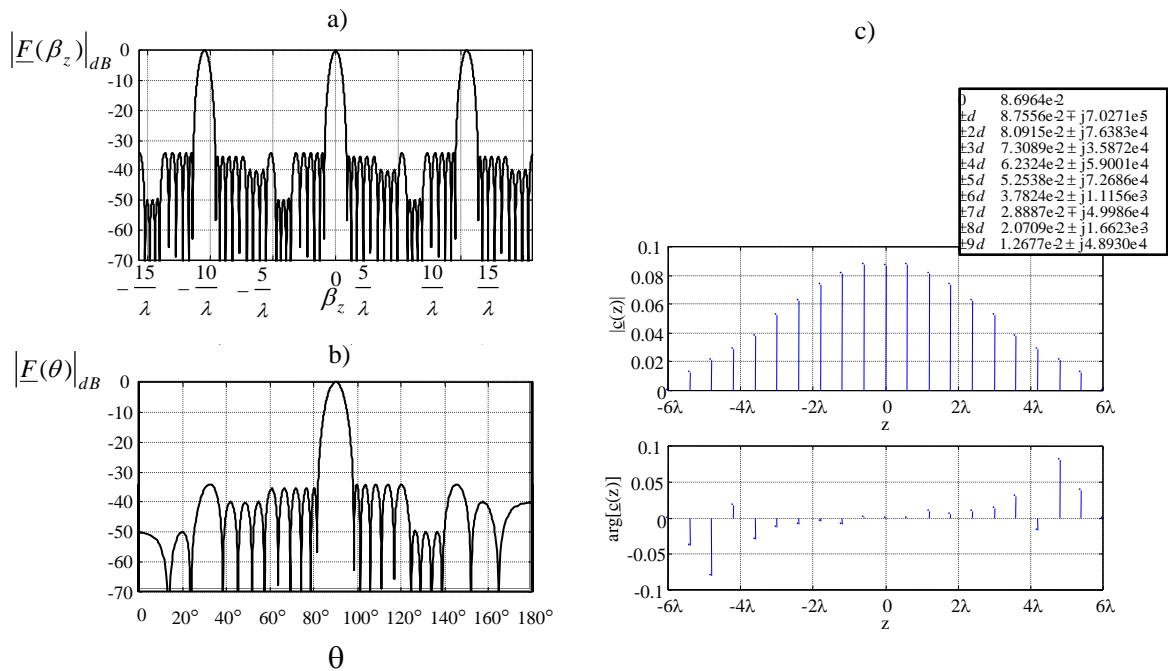


Fig. 3.29 - Factor de agrupamento de um agrupamento com 19 elementos e $d=0,6\lambda$: a) factor de agrupamento na variável β_z ; b) factor de agrupamento na variável θ ; c) distribuição de corrente que lhe deu origem.

Analisemos um exemplo de agrupamento com um número par de elementos, onde o centro do referencial é o centro do agrupamento. Neste caso σ deve ter o valor de 1/2 para que os elementos aparecem nas posições desejadas. Para o efeito, consideremos o de [18] com $N=16$, $d=0,5\lambda$ e as correntes são as da figura 3.30c). O algoritmo é o do apêndice C11, mas com os novos dados de entrada.

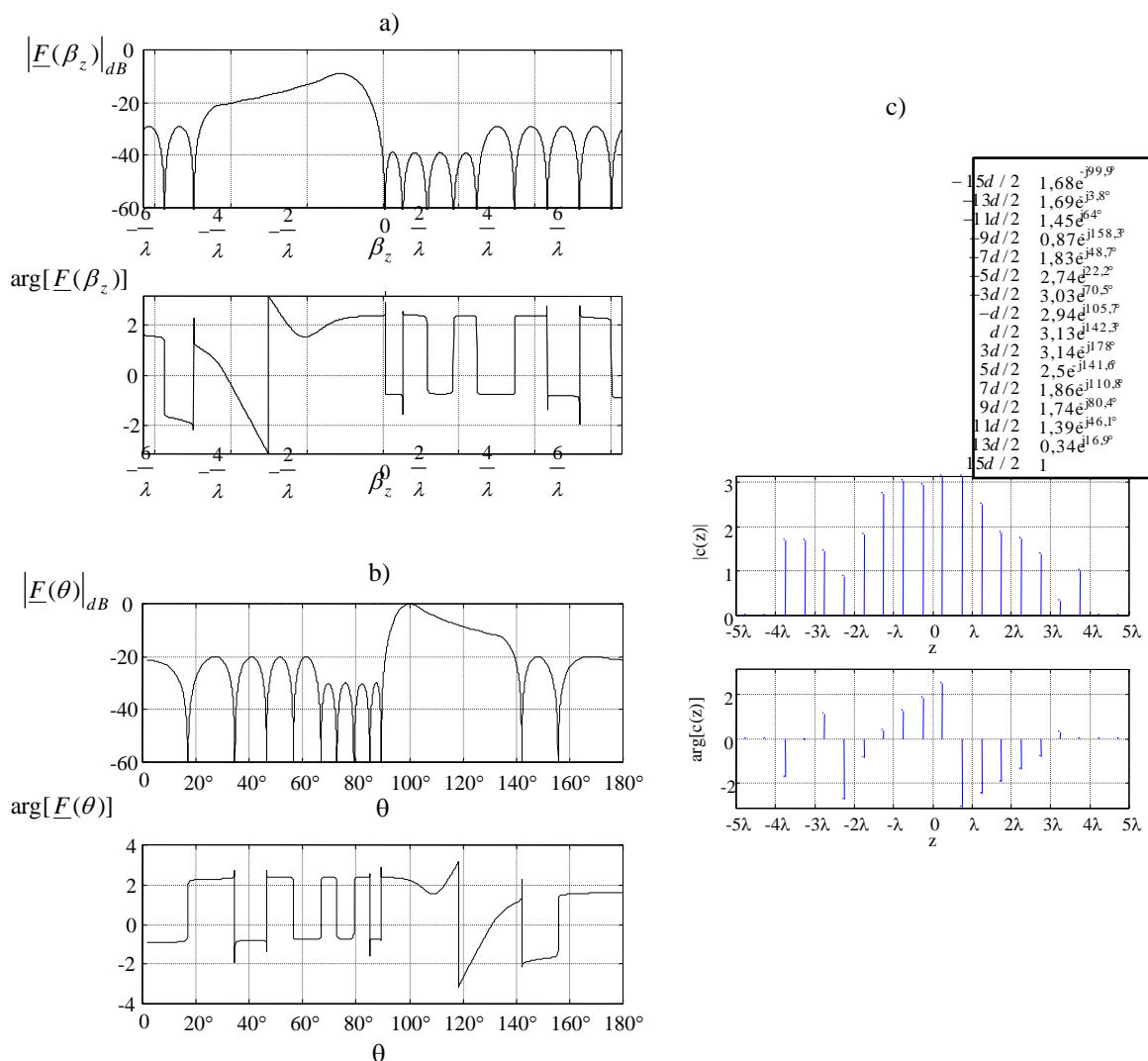


Fig. 3.30 - Factor de agrupamento de um agrupamento com 16 elementos e $d=0,5\lambda$: a) factor de agrupamento na variável β_z b) factor de agrupamento na variável θ ; c) distribuição de corrente que lhe deu origem.

Até aqui tem-se lidado apenas com agrupamentos cuja distância entre elementos é a mesma. Contudo, para completar a análise de agrupamentos convém apresentar uma forma de cálculo dos agrupamentos não equidistantes, embora não se explore esta abordagem, já que este assunto está fora do âmbito deste trabalho, como foi referido anteriormente.

Uma forma de se aplicar a técnica da FFT inversa a agrupamentos não equidistantes consiste em fazer uma amostragem da distribuição de corrente como se tratasse de uma distribuição contínua. Obviamente que a função resultante só conterá valores diferentes de zero nas amostras referentes à posição dos elementos no agrupamento. Como a FFT inversa trabalha com pontos equidistantes vai surgir um erro que pode ser controlado pelo período de amostragem. A diferença relativamente à distribuição contínua é que enquanto nessa o erro cometido deve-se à utilização de apenas alguns pontos da função, nos agrupamentos não equidistantes o erro cometido deve-se à alteração da posição do elemento para a amostra mais próxima.

O algoritmo utilizado é o da distribuição contínua, mas sem multiplicar (3.37) por T_c . O valor de σ é nulo devido à forma de construção do vector da distribuição de corrente.

O exemplo utilizado é o referido em [19] para 15 elementos, com distâncias entre eles e com amplitudes os valores da figura 3.31b) e sendo o agrupamento simétrico relativamente à origem da distribuição de corrente. O factor de agrupamento que aparece na figura 3.31a) foi obtido pela técnica da FFT inversa, com $P=65536$ pontos e $T_c=0,001$. O algoritmo é apresentado no apêndice C12. O factor de agrupamento aproximado e o obtido por soma directa são praticamente iguais dentro da janela visível. O máximo do módulo do erro relativo dentro da mesma é de $2,46 \times 10^{-4}$. Obviamente que para $T_c=0,0001$ ter-se-ia valores exactos do factor de agrupamento, uma vez que não haveria aproximação da posição do elemento com quatro algarismos decimais.

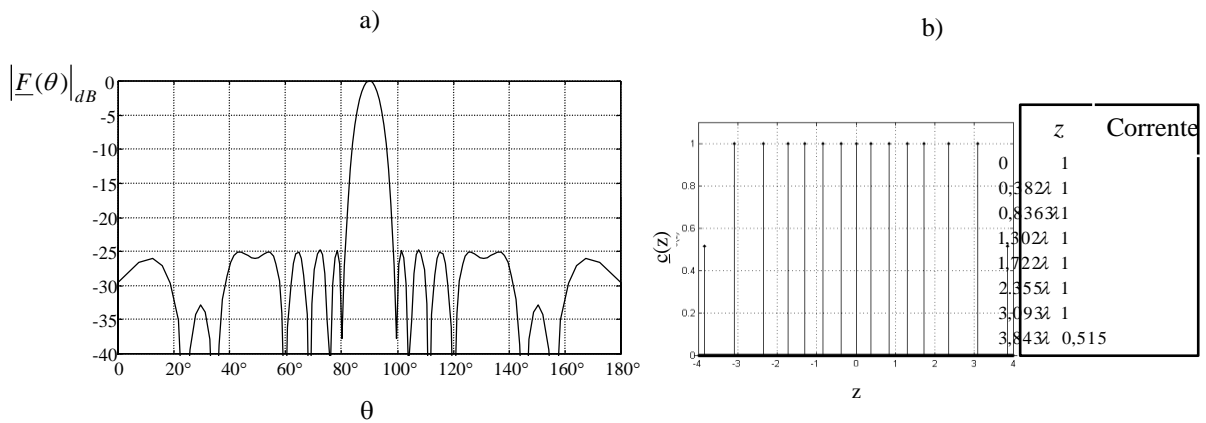


Fig. 3.31 - Factor de agrupamento de um agrupamento não equidistante com 15 elementos: a) factor de agrupamento na variável θ ; b) distribuição de corrente que lhe deu origem.

3.5 - Sumário

Neste capítulo foram desenvolvidas as técnicas baseadas na FFT, para servir de ferramenta computacional base para o cálculo numérico no método da Relação de Fourier. Visto que, nesta situação, podem surgir erros devido ao efeito de *aliasing*, a técnica dos limites do espectro permitiu determinar o número de pontos a utilizar de modo a controlar o erro máximo cometido.

Foram desenvolvidos os principais algoritmos de cálculo empregues quer na análise quer na síntese de agrupamentos contínuos ou discretos. Os exemplos apresentados têm como objectivo não só demonstrar a aplicabilidade do método, mas também servir de base a outros exemplos, já que a estrutura do algoritmo é mesma.

Por conseguinte, dispõe-se de uma ferramenta computacional capaz de resolver qualquer problema de cálculo que envolva a passagem da distribuição de fontes para o respectivo factor de agrupamento ou vice-versa. Ganha-se uma nova perspectiva de abordagem que, como se constatou, só foi pontualmente aproveitada por alguns autores.

O método da Relação de Fourier fica completo com a teoria desenvolvida, neste capítulo, na FFT. Posteriormente ver-se-á as possibilidades de aplicação deste método em novos procedimentos da síntese de agrupamentos.

Referências

- [1] Cooley, J. W., Lewis, P. A. W. e Welch, P. D., "Application of the Fast Fourier Transform to Computation of the Fourier Integrals, Fourier Series and Convolution Integrals", IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics, vol. AU-15, nº 2, pág 79-84, Junho 1967.
- [2] Balanis C. A., "Antenna Theory, Analysis and Design", John Wiley & Sons, 2ª ed., 1997.
- [3] Bucci, O. M., Franceschetti, G. e D'Elia, G., "Fast Analysis of Large Antennas - A New Computational Philosophy", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-28, nº 3, pág 306-310, Maio 1980.
- [4] Tsao, S. H. e Mittra, R., "A Spectral-Iteration Approach for Analysing Scattering from Frequency Selective Surfaces", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-30, nº 2, pág 303-308, Março 1982.
- [5] Jin, J. M. e Volakis, J. L., "Scattering and Radiation Analysis of Three-Dimensional cavity Arrays Via a Hybrid Finite-element Method", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 41, nº 11, pág 1580-1585, Novembro 1993.
- [6] Cátedra, M. F., Torres, R. P. Basterrechea, J. e Gago, E., "The CG-FFT Method, Application of Signal Processing Techniques to Electromagnetics", Artech-House, 1995.
- [7] Einarsson, O., "Optimization of Planar Arrays", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-27, nº 1, pág 86-92, Janeiro 1979.
- [8] Autrey, S. W., "Approximate Synthesis of Nonseparable Design Responses for Rectangular Arrays", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-35, nº 8, pág 907-912, Agosto 1987.
- [9] Brigham, E. O., "The Fast Fourier Transform and Its Applications", Prentice Hall, 1988.
- [10] Casimiro, A. M. E. S., Azevedo, J. A. R. e Grilo, A. J. V., "FFT for Radiation Pattern Analysis and Synthesis", IEEE Pacific Rim 1995 Conference on Communications, Computers and Signal Processing, Vitoria, Canadá, Maio 1994.
- [11] Ramos, A. C., "Uso da FFT em Estruturas Radianes Unidimensionais", Dissertação de Mestrado, Universidade do Algarve, Faro, Janeiro 1998.
- [12] Grilo, F. C. V., Casimiro, A. M. E. S. e Lopes, J. A. C., "Teoria Vectorial de Sinal", AEFEUP, 1990.
- [13] Abramowitz, M. e Stegun, I. A., "Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables", Dover Publications, 1972.
- [14] MATLAB 5.2, "Using MATLAB", The Matworks, Inc. 1998.
- [15] Collin, R. E., "Antennas and Radio Wave Propagation", McGraw-Hill, 1985.
- [16] McNamara, D. A., "Direct Synthesis of Optimum Difference Patterns For Discrete Linear Arrays Using Zolotarev Distributions", IEE Proceedings-H, vol. 140, Nº 6, pág. 495-500, Dezembro 1993.
- [17] Shpak, D. J., "A Method for the Optimal Pattern Synthesis of Linear Arrays with Prescribed Nulls", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-44, nº 3, pág 286-294, Março 1996.
- [18] Orchard, H. J., Elliot, R. S. e Stern, G. J., "Optimising the Synthesis of Shaped Beam Antenna Patterns", IEE Proceedings, vol. 132, Pt. H nº 1, pág 63-68, Fevereiro 1985.
- [19] Sandrin, W. A., Glott, C. R. e Hague, D. S., "Design of Arrays with Unequal Spacing and Partially Uniform Amplitude Taper", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-17, pág 642-644, Setembro 1969.

Novos Procedimentos na Síntese de Agrupamentos

4.1 - Introdução

Tendo sido exposta a teoria deste trabalho, baseada na Relação de Fourier conforme o desenvolvido nos segundo e terceiro capítulos, para análise e síntese de agrupamentos, neste capítulo pretende-se tirar vantagem do método apresentado para sintetizar agrupamentos com algumas características desejadas.

Na secção 2.4.9 apresentou-se uma técnica, baseada na técnica das janelas aplicada no projecto de filtros digitais. Uma vez que já dispomos das facilidades da FFT, seguidamente vai-se aplicar efectivamente essa técnica a alguns exemplos de síntese.

Outra técnica que vai aproveitar as vantagens da transformada de Fourier é a da multiplicação de funções sendo, neste caso, referente ao factor de agrupamento. Baseia-se na utilização de funções com determinadas características que possam servir de base à elaboração do factor de agrupamento aproximado. Além de produzir, nalguns casos, resultados semelhantes aos conseguidos por alguns dos métodos tradicionais, de uma forma mais simples, dá uma perspectiva de abordagem diferente do problema da síntese.

Desenvolver-se-ão, também, duas técnicas de aproximação de funções aplicadas a agrupamentos discretos. A primeira será definida por interpolação polinomial, sendo o objectivo da mesma que o factor de agrupamento passe por um certo conjunto de pontos que, ao contrário dos utilizados na interpolação referente ao teorema da amostragem, podem estar localizados em qualquer posição dentro de um período do factor de agrupamento. A segunda técnica a desenvolver consiste num misto entre a interpolação polinomial e a aproximação dos pontos desejados segundo os mínimos quadrados. Ver-se-á algumas aplicações para estas técnicas, dentro das quais surgem a obtenção de diagramas de radiação com *equiripple*, em determinadas zonas do mesmo, e a geração de nulos em determinadas direcções.

A técnica de interpolação será estendida aos agrupamentos contínuos, por forma a obter factores de agrupamento com características semelhantes às dos agrupamentos discretos.

4.2 - Limitação Espacial da Distribuição de Fontes

Um agrupamento é sempre fisicamente limitado. Quando se sintetiza um determinado agrupamento, aplicando directamente a Relação de Fourier, pode ocorrer a possibilidade de surgirem coeficientes da função da distribuição de corrente fora do comprimento físico definido para esse agrupamento. Uma forma de resolver o problema consiste em utilizar a técnica desenvolvida em 2.4.9.

Um caso particular de interesse é a existência de descontinuidades no factor de agrupamento desejado, o que produz o aparecimento do designado fenómeno Gibbs [1] quando a distribuição de corrente é truncada.

A ideia básica da técnica que vai ser desenvolvida consiste em calcular a distribuição de corrente referente ao factor de agrupamento desejado e, no caso desta distribuição ter dimensão superior à pretendida, truncá-la com uma dada janela. O processo de síntese da figura 2.4 não é mais do que a aplicação desta técnica, empregando como janela de pesagem a rectangular. Utilizando uma outra janela pode-se obter outros factores de agrupamento com algumas características desejadas. Na secção 2.4.9 foram apresentadas algumas janelas de interesse.

Sendo $\underline{c}(z)$ a distribuição de corrente que produz um determinado factor de agrupamento desejado, definindo por $W(z)$ a janela que a multiplica, a distribuição de corrente aproximada é dada por

$$\underline{c}_a(z) = \underline{c}(z)W(z) \quad (4.1)$$

Por sua vez, o factor de agrupamento aproximado é dado pela convolução do desejado com a transformada de Fourier inversa da janela, $w(\beta_z)$,

$$\underline{F}_a(\beta_z) = \underline{F}(\beta_z) \otimes w(\beta_z) \quad (4.2)$$

De seguida serão analisados alguns exemplos de aplicação desta técnica.

4.2.1 - Distribuição Contínua

Pretendendo sintetizar um agrupamento contínuo, a distribuição de corrente é obtida pela expressão (2.10). Como nem sempre se dispõe de expressões analíticas, os cálculos podem ser realizados por meio da FFT, como foi exposto no capítulo anterior.

Como primeiro exemplo consideremos o seguinte factor de agrupamento:

$$\underline{F}(\theta) = \begin{cases} 1 & \frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{outros} \end{cases} \quad (4.3)$$

Na variável β_z tem-se que

$$\underline{F}(\beta_z) = \begin{cases} 1 & 0 \leq \beta_z \leq \frac{\beta}{2} \\ 0 & \text{outros} \end{cases} \quad (4.4)$$

A distribuição de corrente, determinada por (2.10), fica

$$\underline{c}(z) = \frac{\beta}{4\pi} \text{senc} \left[\frac{\beta}{4} z \right] e^{-j\frac{\beta}{4}z} \quad (4.5)$$

A seguir aplica-se uma janela, como foi referido anteriormente. Considerando as apresentadas em 2.4.9.1, enquanto que a janela de Taylor de 1 parâmetro tem uma expressão analítica em z ,

o mesmo não acontece com a de Taylor. Desta forma, é necessário obtê-la por transformada directa, utilizando o método da Relação de Fourier. Começando pela janela de Taylor, supondo que $SLL=30$ dB e $\bar{n}=16$, pela equação (1.79) obtém-se o parâmetro A . Para poder comparar, escolhe-se para a janela de Taylor de 1 parâmetro, definida em (2.75), $A=3,27$, de modo que o nível máximo dos lóbulos secundários do factor de agrupamento aproximado coincidissem com o determinado com a janela de Taylor. A figura 4.1 mostra o gráfico das várias janelas em que se considerou o comprimento desejado para o agrupamento de $L=10\lambda$. Para os cálculos, a técnica da FFT foi aplicada com $P=16384$ pontos. Se a janela de Taylor for obtida pelo método da Relação de Fourier, com recurso à FFT, apenas no comprimento definido pela mesma, no processo de acrescentar zeros de cada lado da função para multiplicação com a distribuição de corrente deve-se ter o cuidado de que a mesma seja par, uma vez que o factor de agrupamento é uma função real.

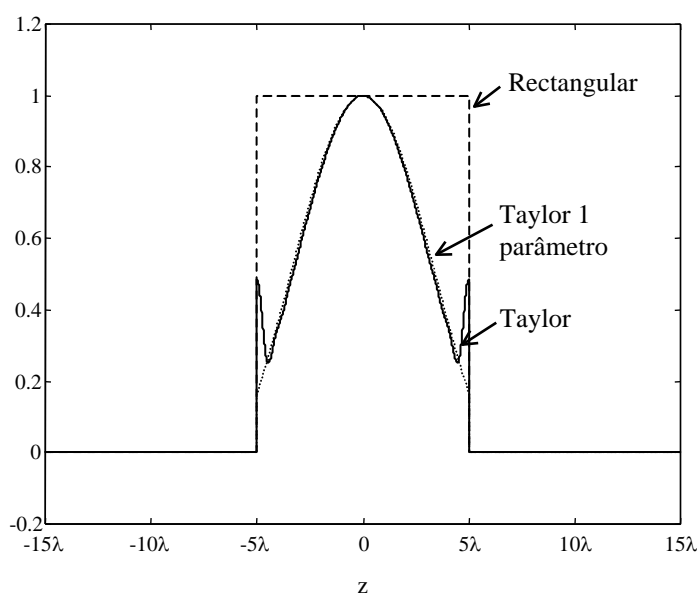


Fig. 4.1 - Janelas para um agrupamento contínuo de comprimento $L=10\lambda$.

A figura 4.2 mostra o módulo e a fase das distribuições de corrente após a aplicação de cada uma das janelas à equação 4.5. A tracejado grosso está a distribuição ideal, a tracejado fino a distribuição resultante da aplicação da janela rectangular, a ponteadado a referente à janela de Taylor de 1 parâmetro e a de traço contínuo à janela de Taylor.

A figura 4.3 mostra o factor de agrupamento desejado, que é o pedestal, e os factores de agrupamento aproximados referentes a cada uma das distribuições da figura 4.2. De notar o elevado nível dos lóbulos secundários obtido pela janela rectangular. Esta é a situação que ocorre no método de síntese de Fourier tradicional e já bastante conhecida. Com as duas janelas de Taylor o nível máximo dos lóbulos secundários pode ser diminuído até um dado valor pretendido, com o respectivo agravamento da largura da zona de transição entre o topo do pedestal e a parte referente aos lóbulos secundários. Para um dado comprimento do agrupamento, o nível máximo dos lóbulos secundários é controlado com o parâmetro A das janelas de Taylor, embora de uma forma não directamente definida.

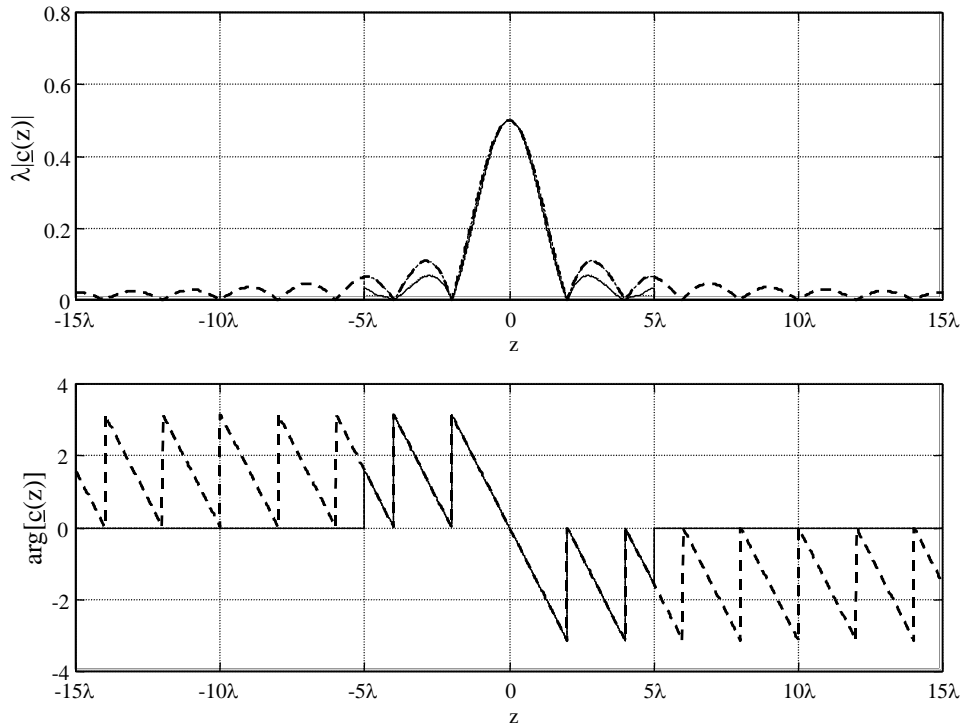


Fig. 4.2 - Módulo e fase das distribuições de corrente após aplicar as janelas rectangular (tracejado), de Taylor de 1 parâmetro (ponteados) e de Taylor (traço contínuo) a uma distribuição de corrente dada pelo pedestal no factor de agrupamento. A distribuição de corrente ideal aparece a tracejado grosso.

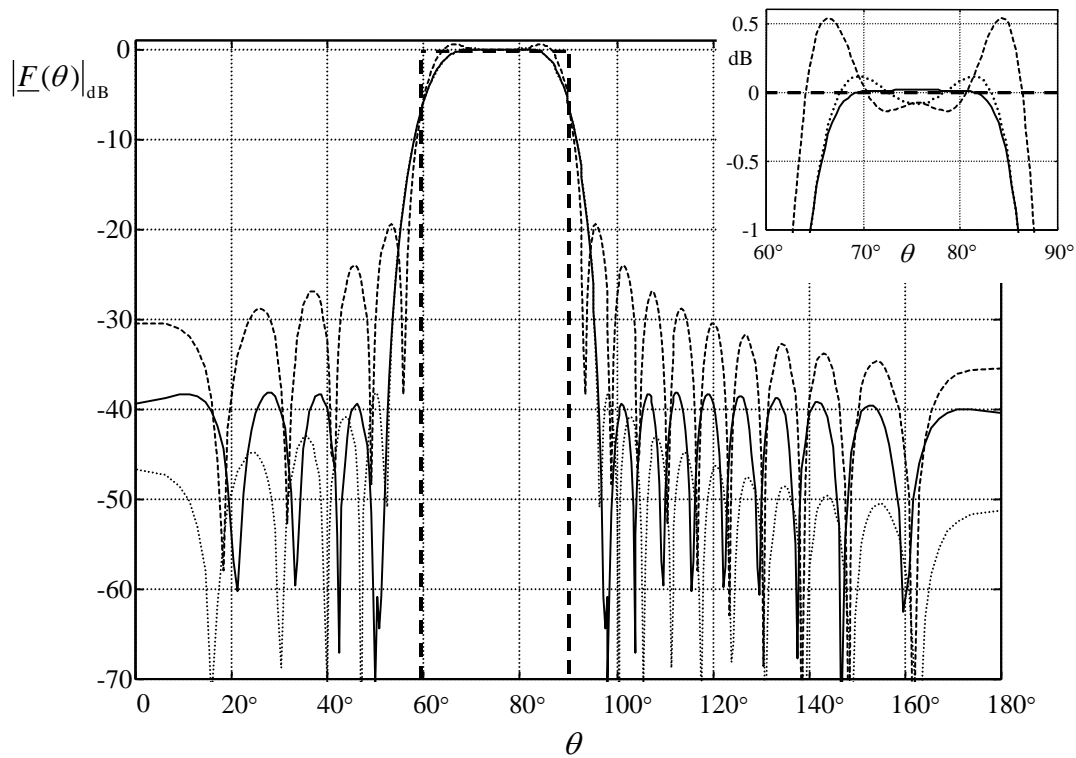


Fig. 4.3 - Factores de agrupamento obtidos por pesagem da distribuição de corrente ideal com as seguintes janelas: a tracejado com a janela rectangular; a traço contínuo com a janela de Taylor e a ponteados com a janela de Taylor de 1 parâmetro. O factor de agrupamento desejado aparece a tracejado grosso.

A escolha da janela depende, obviamente, do critério de erro que se está a utilizar. Comparando os resultados das duas janelas de Taylor do exemplo anterior, ambas têm praticamente a mesma largura da zona de transição. No entanto, como a transformada inversa da janela de Taylor de 1 parâmetro tem a forma apresentada na figura 2.11, com o nível dos lóbulos secundários a diminuir para zero, e como o factor de agrupamento aproximado é dado pela convolução do desejado com a transformada inversa da janela, os lóbulos secundários do factor de agrupamento resultante tenderão a decair para zero. Por outro lado, como a janela de Taylor dá origem a um diagrama com lóbulos secundários mais ou menos constantes junto do feixe principal, o factor de agrupamento obtido pela pesagem desta janela tenderá a nivelar os respectivos lóbulos nessa zona do diagrama

Analisemos outro exemplo de síntese, para continuar a ver o efeito produzido pela pesagem com janelas. Para tal vai-se utilizar como factor de agrupamento o tipo co-secante, empregue em radares de avião [2], ou seja, o diagrama de amplitude é proporcional a $\text{cosec}(\theta)$ e o de potência proporcional a $\text{cosec}^2(\theta)$.

$$\underline{F}(\theta) = \begin{cases} 1 & \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{95\pi}{180} \\ \frac{\text{cosec}\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)}{\text{cosec}\left(\frac{95\pi}{180} - \frac{\pi}{2}\right)} & \frac{95\pi}{180} \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3} \\ 0 & \text{outros} \end{cases} \quad (4.6)$$

Na variável β_z obtém-se

$$\underline{F}(\beta_z) = \begin{cases} 1 & \beta \cos\left(\frac{95\pi}{180}\right) \leq \beta_z \leq 0 \\ \frac{-1}{\left(\frac{\beta_z}{\beta}\right) \text{cosec}\left(\frac{95\pi}{180} - \frac{\pi}{2}\right)} & -\frac{\beta}{2} \leq \beta_z \leq \beta \cos\left(\frac{95\pi}{180}\right) \\ 0 & \text{outros} \end{cases} \quad (4.7)$$

Para este exemplo, devido à dificuldade de se obter a expressão analítica da distribuição de corrente, a técnica da FFT desenvolvida neste trabalho simplifica extraordinariamente o processo de cálculo. O resto da abordagem é semelhante à do exemplo anterior. Para a janela de Taylor, supondo que $SLL=30$ dB e $\bar{n}=16$, pela equação (1.79) obtém-se o parâmetro A . Para a janela de Taylor de 1 parâmetro $A=3,56$, de modo que o nível máximo dos lóbulos secundários do factor de agrupamento aproximado coincidissem com o obtido com a janela de Taylor. O comprimento do agrupamento é $L=10\lambda$.

A figura 4.4 apresenta as distribuições de corrente resultantes da pesagem de cada uma das janelas em causa. A figura 4.5 mostra o factor de agrupamento desejado e os factores de agrupamento de cada uma das distribuições da figura 4.4. Notar o efeito produzido por cada uma das janelas.

Por modificação dos parâmetros mais uma vez pode-se alterar o nível dos lóbulos secundários. Os principais parâmetros de controlo são o comprimento da distribuição de corrente e os parâmetros A das janelas de Taylor. Enquanto que o parâmetro A permite baixar

o nível dos lóbulos secundários, o comprimento da janela permite controlar a aproximação ao factor de agrupamento inicial. O aumento do comprimento L traduz-se na diminuição da zona de transição e do nível dos lóbulos secundários.

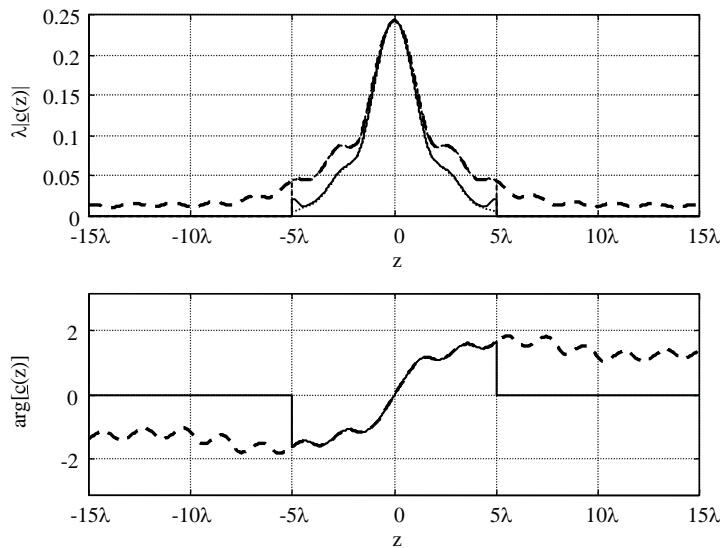


Fig. 4.4 - Módulo e fase das distribuições de corrente após aplicar as janelas rectangular (tracejado), de Taylor de 1 parâmetro (pontilhado) e de Taylor (traço contínuo) a uma distribuição de corrente dada pela $\text{cosec}(\theta)$ no factor de agrupamento. A distribuição de corrente ideal aparece a tracejado grosso.

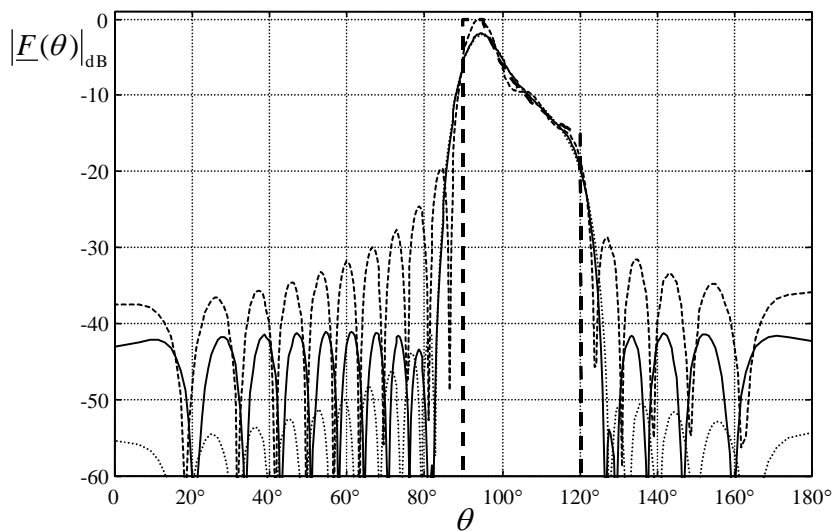


Fig. 4.5 - Factores de agrupamento obtidos por pesagem da distribuição de corrente ideal com as seguintes janelas: a tracejado com a janela rectangular; a traço contínuo com a janela de Taylor e a pontilhado com a janela de Taylor de 1 parâmetro. O factor de agrupamento desejado aparece a tracejado grosso.

Uma desvantagem da técnica da limitação espacial da distribuição de fontes é que, quando se modifica os parâmetros de controlo das janelas para alterar o nível máximo dos lóbulos secundários, afecta-se todo o gráfico do factor de agrupamento, não sendo possível baixar lóbulos apenas em determinadas zonas do diagrama. Assim, aumentando os níveis dos lóbulos secundários na zona de corte, também haverá um aumento do *ripple* na zona de passagem.

Segundo alguns autores, um dos métodos que é preferido para síntese de agrupamentos é o de Woodward. Como foi visto na secção 2.4.2, este não é mais do que uma aplicação particular do teorema da amostragem, em que limita a distribuição de corrente por recurso a um determinado conjunto de amostras do factor de agrupamento. Será interessante comparar a técnica desenvolvida com o método de Woodward, recomendando-se para isso a janela de Taylor. Para o efeito, considere-se o exemplo anterior com $L=15\lambda$. A figura 4.6a) mostra as várias distribuições de corrente: ideal a tracejado grosso, calculada pelo método de Woodward a tracejado fino e truncada pela janela de Taylor a traço contínuo. A janela de Taylor foi definida para $SLL=25$ dB e $\bar{n}=20$. A figura 4.6b) compara o factor de agrupamento obtido pelo método de Woodward com o da técnica apresentada. Repare-se na melhoria significativa, em termos de nível dos lóbulos secundários, com a aplicação desta última.

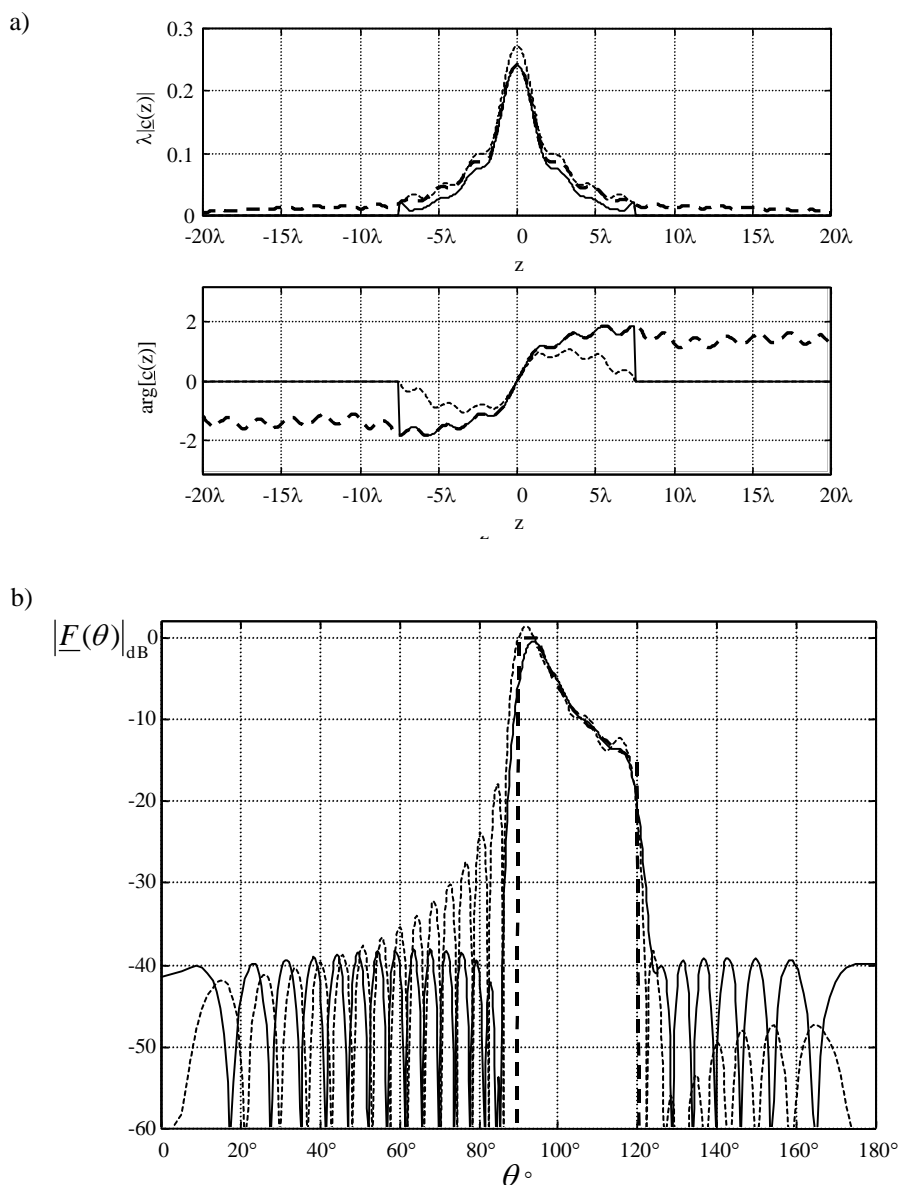


Fig. 4.6 - Factor de agrupamento tipo cosec(θ) gerado por dois métodos: a) módulo e fase das distribuições de corrente ideal (tracejado grosso), segundo o método de Woodward (tracejado fino) e pesado pela janela de Taylor (traço contínuo); b) factores de agrupamento desejado (tracejado grosso) e obtidos pelo método de Woodward (tracejado fino) e pela técnica da limitação de fontes com a janela de Taylor (traço contínuo).

4.2.2 - Distribuição Discreta

Para uma distribuição discreta a aplicação da técnica desenvolvida é análoga à da distribuição contínua, devido à Relação de Fourier. Mais uma vez, através de alguns exemplos típicos serão retiradas algumas características inerentes à utilização dessa técnica.

Seja o factor de agrupamento desejado dado pela equação (4.3), que na variável β_z fica

$$\underline{F}(\beta_z) = \begin{cases} 0 & -\frac{\pi}{d} \leq \beta_z < 0 \\ 1 & 0 \leq \beta_z \leq \frac{\beta}{2} \\ 0 & \frac{\beta}{2} < \beta_z \leq \frac{\pi}{d} \end{cases} \quad (4.8)$$

Como se vai trabalhar com distribuições de corrente discretas, aplicando (2.12) tem-se que

$$\underline{c}[(n + \sigma)d] = \frac{\beta d}{4\pi} \text{senc} \left[\frac{\beta}{4} (n + \sigma)d \right] e^{-j\frac{\beta}{4}(n+\sigma)d} \quad (4.9)$$

Seguidamente aplica-se a técnica da limitação espacial da distribuição de fontes. As janelas utilizadas são as da secção 2.4.9.2. Aplicando as janelas rectangular, a de Kaiser e a de Tschebyscheff a um agrupamento de 21 elementos espaçados de $d=0,45\lambda$, as formas das mesmas são as apresentadas na figura 4.7. Para a de Tschebyscheff considerou-se que $SLL=30$ dB e para a de Kaiser que $\alpha=3,18$, de modo que o nível máximo dos lóbulos secundários dos factores de agrupamento aproximados referentes às duas janelas coincidisse. A figura 4.8 mostra o módulo e a fase das distribuições de corrente após a aplicação de cada uma das janelas e a figura 4.9 os respectivos factores de agrupamento.

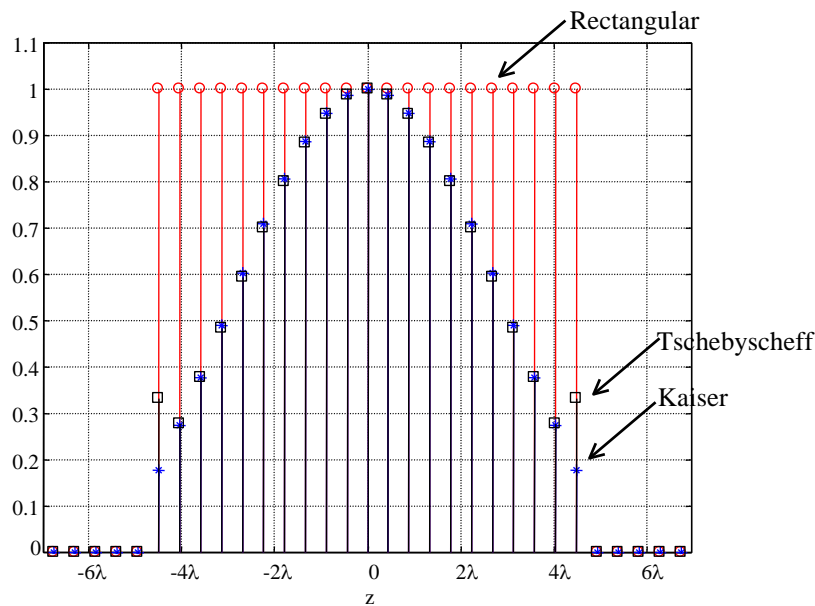


Fig. 4.7 - Janelas para um agrupamento discreto com $N=21$: com o símbolo (\circ) aparece a janela rectangular, com ($*$) a de Kaiser e com (\square) a de Tschebyscheff.

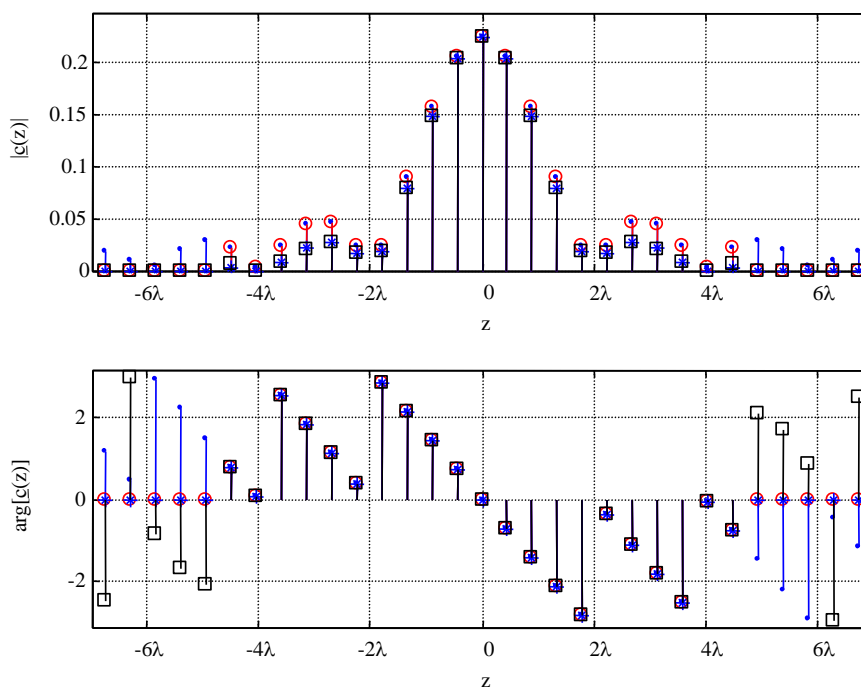


Fig. 4.8 - Módulo e fase das distribuições de corrente após aplicar as janelas rectangular (\circ), de Kaiser ($*$) e de Tschebyscheff (\square) a uma distribuição de corrente dada pelo pedestal no factor de agrupamento. A distribuição de corrente ideal aparece com o símbolo (\bullet).

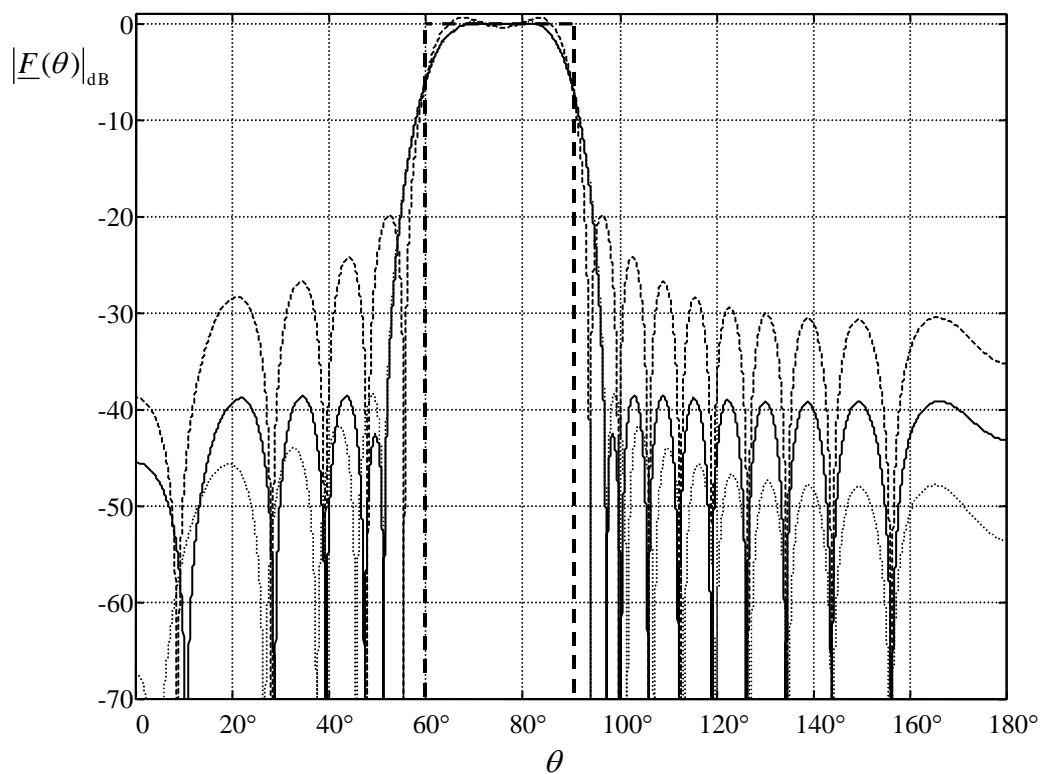


Fig. 4.9 - Factores de agrupamento obtidos por pesagem da distribuição de corrente ideal com as seguintes janelas: a tracejado com a janela rectangular; a traço contínuo com a janela de Tschebyscheff e a ponteadado com a janela de Kaiser. O factor de agrupamento desejado aparece a tracejado grosso.

Como foi mencionado no capítulo do Estado da Arte, para distribuições discretas a técnica das janelas foi aplicada à síntese de agrupamentos, mas para diagramas de potência. Já vimos neste trabalho que o mesmo pode ser feito nos de tensão, e mais logicamente, devido à Relação de Fourier. Para tirar mais algumas conclusões vejamos um exemplo, considerado no trabalho apresentado por Milne [3], com

$$\underline{F}(\theta) = \begin{cases} 0 & 0 \leq \theta < \frac{91\pi}{180} \\ \frac{\sec\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)}{\sec\left(\frac{95\pi}{180} - \frac{\pi}{2}\right)} & \frac{91\pi}{180} \leq \theta \leq \frac{95\pi}{180} \\ \frac{\operatorname{cosec}\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{cosec}\left(\frac{95\pi}{180} - \frac{\pi}{2}\right)} & \frac{95\pi}{180} < \theta \leq \frac{7\pi}{9} \\ 0 & \frac{7\pi}{9} < \theta \leq \pi \end{cases} \quad (4.10)$$

para um agrupamento com 50 elementos e $d=0,5$. Na variável β_z tem-se que

$$\underline{F}(\beta_z) = \begin{cases} 0 & -\beta \leq \beta_z < \beta \cos\left(\frac{7\pi}{9}\right) \\ \frac{-1}{\left(\frac{\beta_z}{\beta}\right) \operatorname{cosec}\left(\frac{95\pi}{180} - \frac{\pi}{2}\right)} & \beta \cos\left(\frac{7\pi}{9}\right) \leq \beta_z \leq \beta \cos\left(\frac{95\pi}{180}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\beta_z}{\beta}\right)^2} \sec\left(\frac{95\pi}{180} - \frac{\pi}{2}\right)} & \beta \cos\left(\frac{95\pi}{180}\right) < \beta_z \leq \beta \cos\left(\frac{91\pi}{180}\right) \\ 0 & \beta \cos\left(\frac{91\pi}{180}\right) < \beta_z \leq \beta \end{cases} \quad (4.11)$$

É de salientar novamente a dificuldade de obtenção da distribuição de corrente na forma analítica, pelo que esta é determinada pela técnica da FFT desenvolvida neste trabalho e indicada na figura 3.17. A figura 4.10 mostra a forma das janelas a aplicar, em que para a de Tschebyscheff se considerou $SLL=40$ dB e para a de Kaiser $\alpha=5,08$, por forma a produzir factores de agrupamentos com níveis máximos dos lóbulos secundários coincidentes.

A figura 4.11 mostra o módulo e fase das distribuições de corrente após a aplicação de cada uma das janelas e a figura 4.12 os factores de agrupamento desejado e aproximados. A forma do factor de agrupamento obtida pela janela de Tschebyscheff é semelhante à apresentada por Milne, mas sem necessidade do recurso ao diagrama de potência, embora o método de síntese de diagramas de potência permita obter mais do que uma distribuição de corrente para o mesmo módulo.

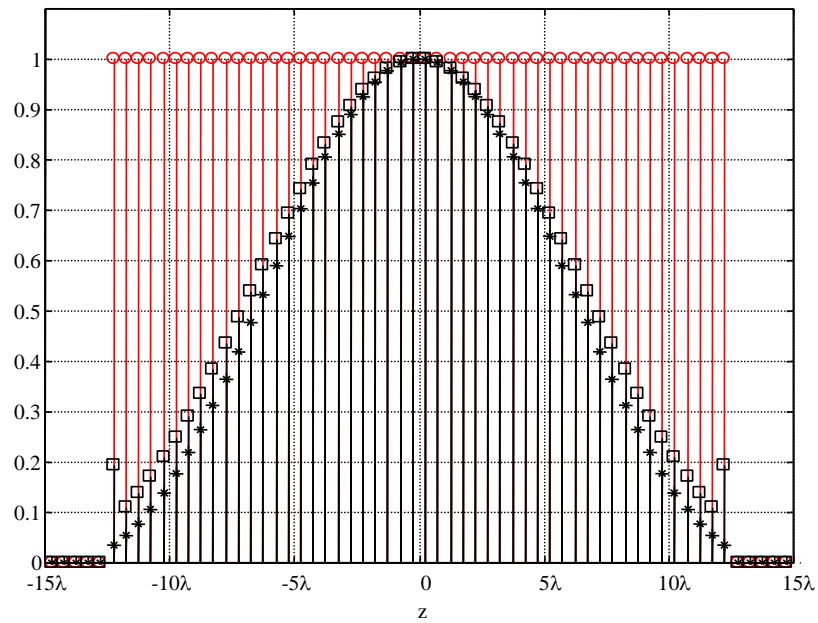


Fig. 4.10 - Janelas para um agrupamento discreto com $N=50$: com o símbolo (\circ) aparece a janela rectangular, com ($*$) a de Kaiser e com (\square) a de Tschebyscheff.

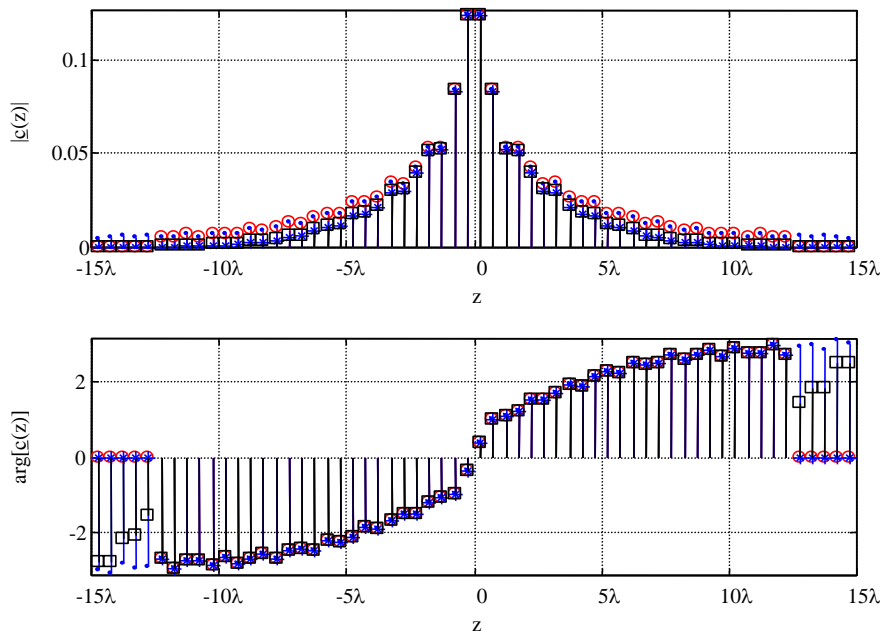


Fig. 4.11 - Módulo e fase das distribuições de corrente após aplicar as janelas rectangular (\circ), de Kaiser ($*$) e de Tschebyscheff (\square) a uma distribuição de corrente dada pela $\text{cosec}(\theta)$ no factor de agrupamento. A distribuição de corrente ideal aparece com o símbolo (\bullet).

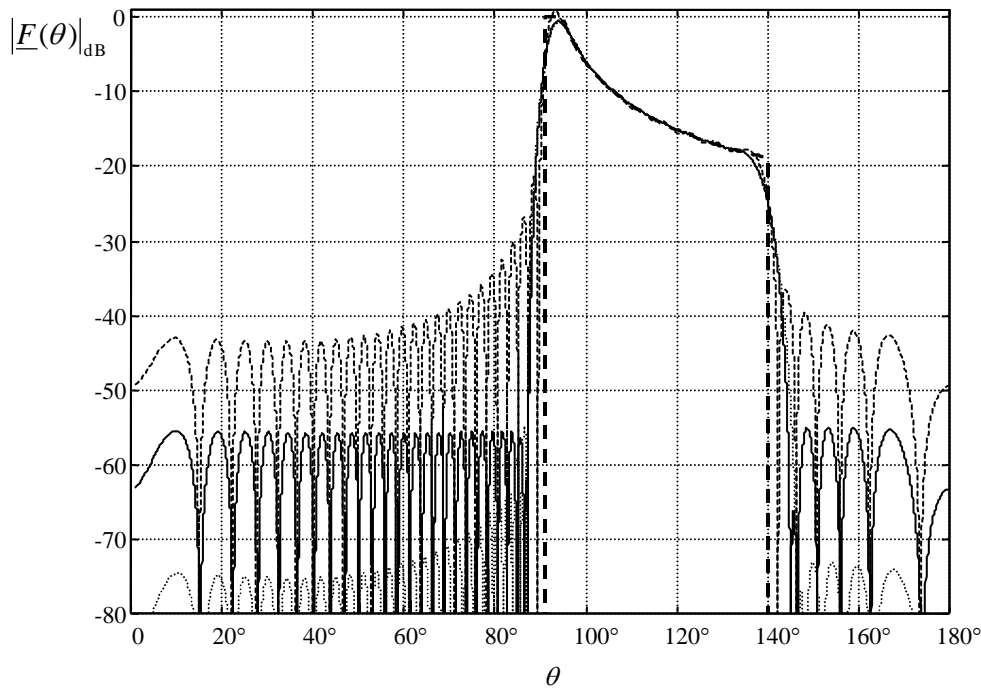


Fig. 4.12 - Factores de agrupamento obtidos por pesagem da distribuição de corrente ideal com as seguintes janelas: a tracejado com a janela rectangular; a traço contínuo com a janela de Tschebyscheff e a pontilhado com a janela de Kaiser. O factor de agrupamento desejado aparece a tracejado grosso.

A janela de Tschebyscheff mostrou ser atraente para se obter lóbulos secundários com níveis aproximadamente iguais. Por este motivo, consegue-se ter uma zona de transição mais estreita do que com a janela de Kaiser.

Por outro lado, ao contrário da janela de Tschebyscheff, com a janela de Kaiser verificou-se que o nível máximo dos lóbulos secundários do factor de agrupamento resultante era próximo do nível máximo dos lóbulos secundários da própria janela. Para os exemplos anteriores, com $\alpha=3,18$ por (2.82) tem-se que $SLL=38,21$ dB, valor próximo do nível obtido na figura 4.9, e com $\alpha=5,08$ por (2.82) tem-se que $SLL=54,8$ dB, valor também próximo do da figura 4.12. Desta forma, com a janela de Kaiser consegue-se ter um maior controlo do nível dos lóbulos secundários do factor de agrupamento.

Tentou-se com esta técnica atingir níveis iguais de lóbulos secundários numa dada zona do factor de agrupamento e diferentes entre zonas. Apesar de se ter conseguido algo, tornou-se um pouco difícil a imposição de níveis diferentes em diferentes zonas e ao mesmo tempo melhorar as características do factor de agrupamento. Contudo, esta técnica demonstrou ser interessante para diminuir o nível dos lóbulos secundários resultantes do truncamento das distribuições de corrente ideais, como se evidencia pelos vários exemplos apresentados.

4.3 - Técnica da Multiplicação de Funções

A técnica que vai ser agora desenvolvida será usada para sintetizar agrupamentos partindo de uma função de base apropriada. É definida por técnica de multiplicação de funções, porque envolve a multiplicação de duas ou mais funções, aproveitando a forma de cada uma delas para produzir o factor de agrupamento desejado.

Como é fácil verificar pela Relação de Fourier, a respectiva distribuição de corrente consiste na convolução das transformadas dessas funções e, por isso, o comprimento desta pode eventualmente ultrapassar o valor desejado. Neste caso, o truncamento da distribuição pode ser realizado quer aplicando o teorema da amostragem, adaptado no segundo capítulo, quer aplicando uma janela apropriada, conforme o desenvolvido anteriormente.

4.3.1 - Técnicas Alternativas ao Método de Taylor

Uma das técnicas mais usadas para síntese de agrupamentos contínuos é o método de Taylor. Como será referido posteriormente, vários trabalhos tentam completar o método original, a fim de obter diagramas de radiação com certas características. Nesta secção serão apresentados alguns exemplos em que se pode recorrer às propriedades inerentes da Relação de Fourier para realizar agrupamentos semelhantes aos obtidos quer pela síntese de Taylor quer pela síntese de Taylor modificada.

4.3.1.1 - Multiplicação da Função de van der Maas com a Gaussiana

O tradicional método de Taylor baseia-se na obtenção de um factor de agrupamento que tenha a largura do lóbulo principal mais estreita para uma dada relação de níveis entre lóbulos principal e secundário e, ao mesmo tempo, que seja fisicamente realizável. Para tal Taylor [4] utilizou uma função que tinha sido obtida por van der Maas [5], dada, na variável β_z , por

$$f(\beta_z) = \cos\left(\frac{L}{2}\sqrt{\beta_z^2 - A^2}\right) \quad (4.12)$$

sendo A calculado em função da relação entre os níveis dos lóbulos principal e secundários através da seguinte relação

$$A = \frac{2}{L} \operatorname{acosh}\left(10^{\frac{SLL}{20}}\right) \quad (4.13)$$

O gráfico da função (4.12) é caracterizado por conter um lóbulo principal e lóbulos secundários até ao infinito com o mesmo nível. O problema em utilizar directamente esta função como factor de agrupamento é que a respectiva distribuição de corrente não é fisicamente realizável, devido aos Diracs que surgem nos extremos da mesma. Para obter uma distribuição de corrente realizável, o que Taylor fez foi substituir os primeiros zeros da função seno cardinal pelos zeros de (4.12), até um determinado número, e manter os seguintes nas posições dos zeros do seno cardinal. Com isto consegue fazer com que o factor de agrupamento decresça para zero segundo o inverso da variável independente.

A expressão para a transformada de Fourier da função de van der Maas é apresentada em [6]. Tendo em conta a propriedade da mudança de escala, em que $\delta(x/a-1)=a\delta(x-a)$ [7], a transformada de (4.12) é dada por

$$\cos\left(\frac{L}{2}\sqrt{\beta_z^2 - A^2}\right) \longleftrightarrow \frac{\pi}{A}\delta\left(|z| - \frac{L}{2}\right) + \frac{\pi L}{2} \frac{I_1\left[A\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 - z^2}\right]}{\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 - z^2}} \quad (4.14)$$

em que $I_1(x)$ é a função de Bessel modificada de primeira ordem.

Para que a distribuição de corrente seja fisicamente realizável, o factor de agrupamento tem que tender para zero. Se assim não acontecer, a energia da função é infinita e, pelo teorema de Parseval, a da distribuição de corrente também o é. O que se propõe aqui é mais uma vez utilizar a função (4.12), devido às suas características interessantes em termos do nível dos lóbulos secundários, e multiplicá-la por uma função que a faça tender para zero. Para esse efeito considerar-se-á dois exemplos, um em que o decaimento do factor de agrupamento é segundo o inverso da variável independente e o outro em que o factor de agrupamento decai segundo uma função gaussiana.

A primeira função a estudar é aquela que produz um decaimento do factor de agrupamento semelhante ao de Taylor, sendo

$$g_1(\beta_z) = \frac{1}{\sqrt{\beta_z^2 + B^2}} \quad (4.15)$$

Como se pode constatar, esta função decai segundo $1/\beta_z$, para valores elevados da variável β_z . Multiplicando (4.15) por (4.12) os lóbulos secundários da função resultante decrescem para zero, segundo a envolvente da função anterior.

Na variável z tem-se a convolução de (4.14) com a transformada de (4.15), sendo esta última dada por

$$G_1(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\beta_z^2 + B^2}} e^{-j\beta_z z} d\beta_z = 2 \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\beta_z^2 + B^2}} \cos(\beta_z z) d\beta_z \quad (4.16)$$

O resultado deste integral é apresentado em [8], donde se retira que

$$\frac{1}{\sqrt{\beta_z^2 + B^2}} \longleftrightarrow 2K_0(Bz), \quad z > 0 \quad (4.17)$$

em que $K_0(x)$ é a função de Bessel modificada de segunda espécie. Esta função de Bessel tende para infinito quando z aproxima-se da origem. Como na convolução com um Dirac repete-se a função, com o centro na posição do Dirac, a transformada de Fourier resultante da convolução de (4.14) com (4.17) tende para infinito em $z=L/2$. Daqui que (4.15) não é recomendável para o problema de síntese.

A segunda função de interesse é a gaussiana,

$$g(\beta_z) = e^{-\frac{\beta_z^2}{(2B/L)^2}} \quad (4.18)$$

Multiplicando (4.18) por (4.12) os lóbulos secundários da função resultante decrescem para zero segundo a envolvente da função anterior. A transformada de Fourier desta função é dada por [9]

$$G(z) = \frac{2B}{L} \sqrt{\pi} e^{-\left(\frac{2B}{L}\right)^2 z^2} \quad (4.19)$$

Na convolução desta função com (4.14) já não surgem os picos como no caso anterior. O interessante da função gaussiana é que a sua transformada não contém lóbulos secundários.

A figura 4.13a) mostra a função de van der Maas alterada por (4.18), com $SLL=30$ dB, $B=60$ e $L=2$, e a 4.13b) apresenta a respectiva transformada de Fourier, obtida pela FFT.

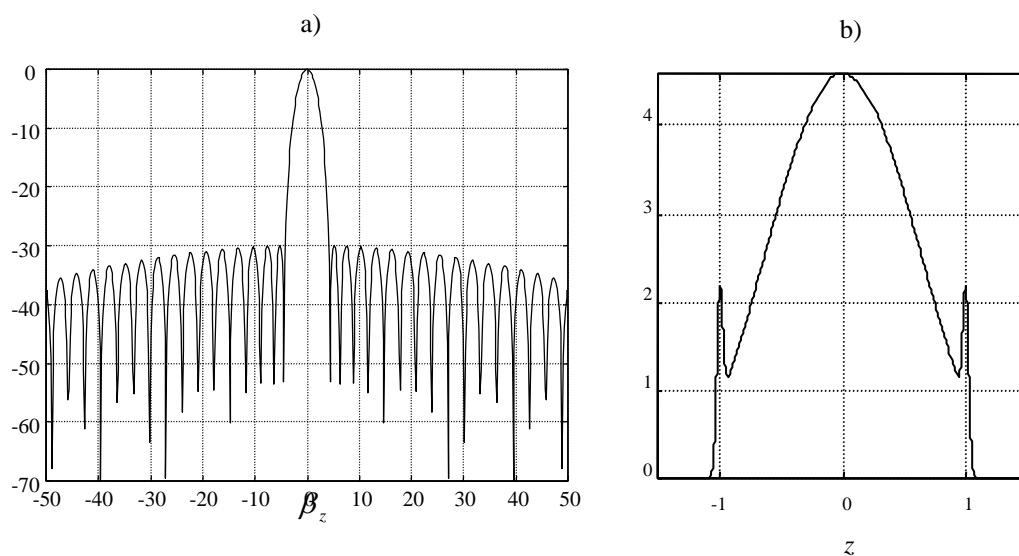


Fig. 4.13 - a) Função de van der Maas multiplicada por $g(\beta_z)$; b) respectiva transformada de Fourier.

Reparemos como a função gaussiana pode ser empregue para sintetizar um agrupamento semelhante ao de Taylor. Olhando para o gráfico da figura 4.13b) verifica-se que este tende rapidamente para zero para valores de z um pouco acima de $L/2$. Desta forma, truncando a função com uma janela rectangular de largura L , seria uma forma directa de se obter uma distribuição de corrente cujo factor de agrupamento pretende-se que seja aproximado ao de Taylor. Porém, como se pode comprovar pela figura, a função é truncada nos dois picos dos extremos, o que faz com que os lóbulos secundários do respectivo factor de agrupamento, mais próximos do feixe principal, tenham níveis mais elevados do que o pretendido.

Para manter a forma da função apresentada na figura 4.13a) pode-se escalar a função da figura 4.13b), de modo que em $z=L/2$ esta seja praticamente nula. Para esse objectivo utiliza-se a propriedade da transformada de Fourier da mudança de escala, ou seja, alarga-se ligeiramente a função da figura 4.13a), o que produz um estreitamento da função da figura 4.13b).

Para se aplicar a propriedade referida no parágrafo anterior substitui-se na função (4.12) β_z por $\alpha\beta_z$, com α um valor inferior à unidade, ficando

$$f(\beta_z) = \cos\left[\frac{L}{2}\sqrt{(\alpha\beta_z)^2 - A^2}\right] = \cos\left[\frac{\alpha L}{2}\sqrt{\beta_z^2 - \left(\frac{A}{\alpha}\right)^2}\right] \quad (4.20)$$

A técnica consiste, então, em formar o seguinte factor de agrupamento:

$$\underline{F}(\beta_z) = \frac{\cos\left[\frac{\alpha L}{2}\sqrt{\beta_z^2 - \left(\frac{A}{\alpha}\right)^2}\right]}{\cosh\left(\frac{LA}{2}\right)} e^{-\frac{\beta_z^2}{(2B/L)^2}} \quad (4.21)$$

e calcula-se a distribuição de corrente respectiva, podendo-se utilizar a técnica da FFT como foi exposto no segundo capítulo. Depois aplica-se a janela rectangular de comprimento L , sendo o factor de agrupamento desejado obtido pela transformada inversa. Devido a este truncamento da distribuição com a janela rectangular, o que dá a convolução da equação (4.21) com o seno cardinal, os lóbulos secundários mais afastados do centro do factor de agrupamento aproximado decaem segundo a envolvente do seno cardinal.

O parâmetro B controla o decaimento da função de van der Maas na região à volta do lóbulo principal e é independente de L . Quanto maior ele for, mais o factor de agrupamento se aproxima do ideal, mas a distribuição de corrente tende a ter picos muito elevados. Se ele for muito pequeno, o decaimento dos lóbulos secundários é mais rápido, mas o lóbulo principal tende a alargar-se. Escolhido o valor do parâmetro B , imposto pela amplitude do pico de corrente dos extremos da distribuição, como se faz para o parâmetro \bar{n} de Taylor, o valor de α é aquele que permite obter a relação SLL pretendida. Para o exemplo em causa, fazendo $\alpha=0,95$, o nível dos lóbulos secundários é de -29,96 dB, enquanto que com $\alpha=1$ é de -27,39.

O parâmetro α é independente de L e praticamente independente de SLL . A relação com o parâmetro B é dada pela seguinte fórmula empírica desenvolvida para o efeito:

$$\alpha = \arctan(0,356B) - 0,576 \quad (4.22)$$

Vejam os alguns exemplos. A figura 4.14 apresenta a síntese de um agrupamento semelhante ao de Taylor, para $B=50$ e para três valores de SLL : 15 dB, 30 dB e 45 dB. O cálculo foi realizado pelo método da Relação de Fourier com $P=32768$ para a FFT, de modo a obter uma boa representação gráfica e a minimizar o erro cometido através deste processo.

Como se comprova pelas figuras 4.14a), os factores de agrupamento obtidos pela técnica desenvolvida (traço contínuo) são semelhantes aos de Taylor (tracejado), para o parâmetro de Taylor dado por $\bar{n}=12$. Também se pode ver que as distribuições de corrente têm um comportamento diferente nos dois casos. No de Taylor termina numa descontinuidade, enquanto que no novo processo tende para zero ou para uma descontinuidade próxima de zero. Esta diferença entre as distribuições de corrente deve-se fundamentalmente à diferença de comportamento dos factores de agrupamento fora da região central. Isto pode ser preferível nalguns casos, como demonstra Rhodes [10]. Também se verifica que o lóbulo principal é ligeiramente mais largo na técnica desenvolvida. Comparando com o método de Rhodes,

ambos os casos apresentam praticamente a mesma largura do feixe para distribuições com a mesma amplitude dos picos laterais. De facto, o comportamento da distribuição de corrente e do factor de agrupamento obtidos por esta técnica são muito parecidos aos obtidos pelo agrupamento de Taylor alterado por Rhodes, com a vantagem de ser mais simples de realizar.

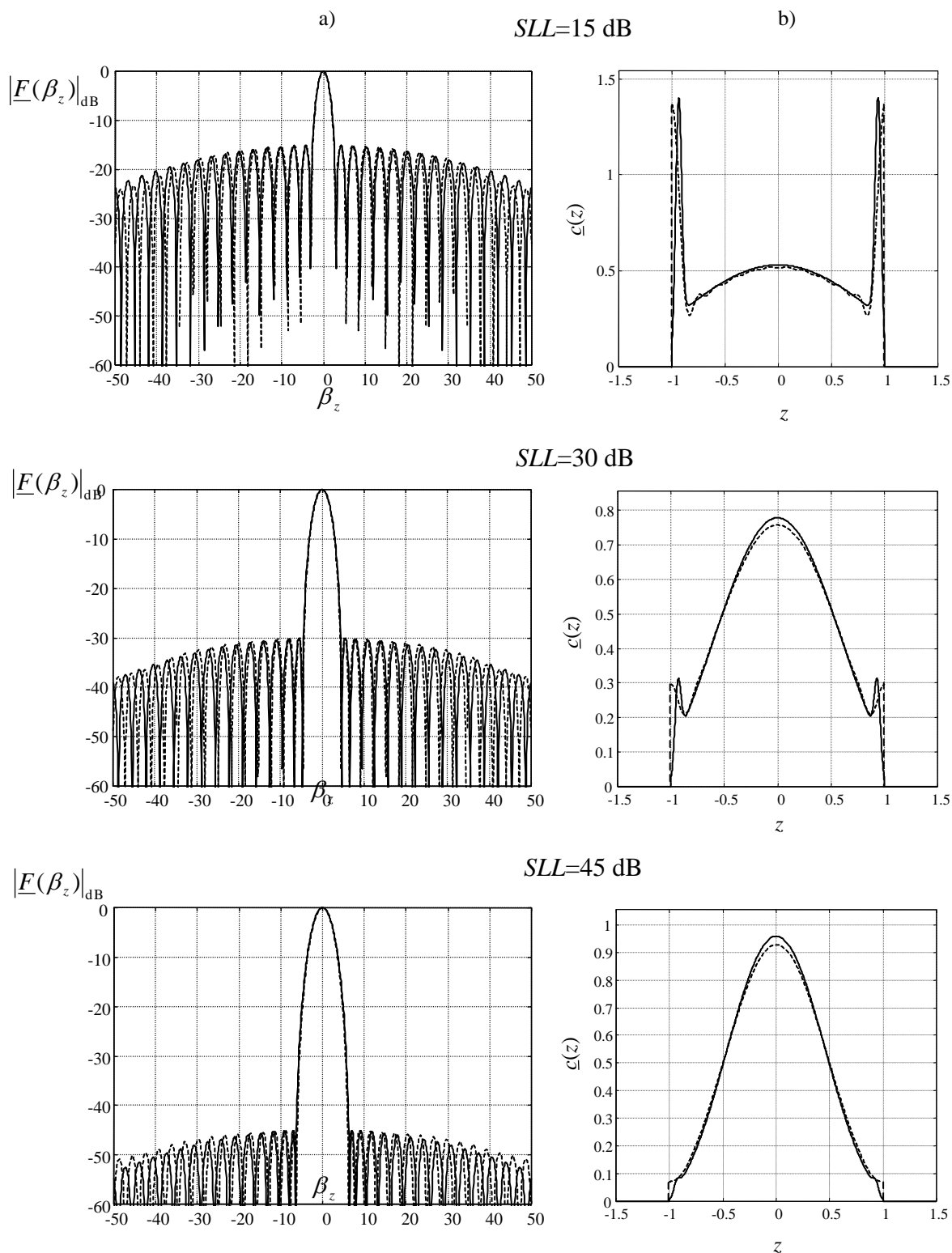


Fig. 4.14 - Agrupamentos semelhantes aos de Taylor: a) factores de agrupamento obtidos pela técnica desenvolvida, a traço contínuo, e por Taylor, a tracejado; b) respectivas distribuições de corrente.

Para fazer a comparação com os outros métodos vejamos algumas figuras de mérito. A primeira é a largura do lóbulo principal entre nulos, FNBW (*first null beamwidth*). Outro parâmetro importante é o da largura do lóbulo principal a metade da potência (-3 dB), HPBW (*half power beamwidth*). Uma última é a directividade máxima, definida por [11] e [12]

$$D_0 = \frac{4\pi |\underline{F}(\theta, \phi)|_{\max}^2}{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi |\underline{F}(\theta, \phi)|^2 \sin(\theta) d\theta d\phi} \quad (4.23)$$

em que o factor de agrupamento é o definido na Relação de Fourier. Como este não depende de ϕ , a equação fica

$$D_0 = \frac{2|\underline{F}(\theta)|_{\max}^2}{\int_0^\pi |\underline{F}(\theta)|^2 \sin(\theta) d\theta} \quad (4.24)$$

e sendo $\beta_z = \beta \cos(\theta)$, $d\beta_z = -\beta \sin(\theta) d\theta$, tem-se finalmente que

$$D_0 = \frac{2\beta |\underline{F}(\beta_z)|_{\max}^2}{\int_{-\beta}^{\beta} |\underline{F}(\beta_z)|^2 d\beta_z} \quad (4.25)$$

Para um comprimento concreto da distribuição de corrente e valor de SLL , comprovou-se que a largura do lóbulo principal do factor de agrupamento obtido pela técnica apresentada era semelhante à obtida por Rhodes [10] e que as directividades, determinadas pela equação (4.25), também eram semelhantes. O método tradicional de Taylor apresentou menor largura do lóbulo principal e maior directividade máxima, como já Rhodes tinha demonstrado.

A vantagem da técnica aqui desenvolvida face à de Taylor é a facilidade do processo de síntese. A função do factor de agrupamento decai para zero mais depressa do que em Taylor, devido à função gaussiana que multiplica a função de van der Maas, o que pode ter o seu interesse. Como o método de Taylor, também permite o controlo da amplitude do pico dos extremos da distribuição de corrente.

A abordagem apresentada demonstra a maleabilidade, no problema de síntese, da Relação de Fourier associada às propriedades da transformada. De seguida veremos mais algumas dessas potencialidades para o exemplo em causa, abrindo uma nova perspectiva para outro tipo de problemas.

4.3.1.2 - Amostragem da Função de van der Maas

Uma vez que o comprimento do agrupamento de Taylor é limitado e igual a L , outra forma de obtê-lo é através do teorema da amostragem aplicado à equação (4.12), truncando a função, de modo a manter um determinado número de lóbulos. Collin e Zuker [13] analisaram este caso quando aplicaram o método de Woodward à função de van der Maas. O factor de agrupamento resultante consistia em lóbulos secundários que aumentavam de nível, a partir do principal até ao lóbulo correspondente à da última amostra considerada e, a partir daí, decaíam segundo a envolvente do seno cardinal. Claro que desta forma deixa-se de verificar a relação desejada entre os níveis dos lóbulos principal e secundários.

Como se evidenciou, a aplicação directa do teorema da amostragem à equação (4.12) não é suficiente para sintetizar um agrupamento análogo ao de Taylor, porque ocorre uma grande distorção no factor de agrupamento desejado. Isto facilmente se entende pelas propriedades da Transformada de Fourier. Na verdade, já se viu que a transformada de (4.12) é uma função limitada com Diracs em $L/2$. Ao truncar (4.12) tem-se, na transformada, a convolução de (4.14) com o seno cardinal e ao truncar esse resultado em $L/2$ o erro é elevado. Para o minorar faz-se como na secção anterior, ou seja, utiliza-se a mudança de escala para que a posição dos Diracs ocorra num valor inferior a $L/2$.

Nesta ordem de ideias, a técnica consiste em amostrar a função de van der Maas até um certo número de lóbulos secundários, alargando a função de um valor a determinar, e impor como nulas as restantes amostras.

Para o processo de síntese forma-se o seguinte factor de agrupamento:

$$\underline{F}(\beta_z) = \frac{\cos \left[\frac{\alpha L}{2} \sqrt{\beta_z^2 - \left(\frac{A}{\alpha} \right)^2} \right]}{\cosh \left(\frac{LA}{2} \right)} \quad (4.26)$$

em que α permite o alargamento necessário da função de base. A distribuição de corrente é obtida pelo método da Relação de Fourier, recorrendo-se às amostras $\beta_{z_k} = k2\pi/L$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm K$. O valor de $K = \bar{n} - 1$ é o número de lóbulos pretendido com o mesmo nível. O valor de α é calculado com a imposição da função (4.26) ser nula em $\beta_z = (K+1)2\pi/L$, uma vez que, a partir daí, as amostras do factor de agrupamento são nulas nos pontos de amostragem. Assim, de (4.26) retira-se que

$$\cos \left\{ \frac{\alpha L}{2} \sqrt{\left[\frac{(K+1)2\pi}{L} \right]^2 - \left(\frac{A}{\alpha} \right)^2} \right\} = 0 \quad (4.27)$$

e resolvendo fica

$$\alpha = \frac{\sqrt{\left[\frac{(2K+1)\pi}{L} \right]^2 + A^2}}{(K+1)2\pi} \quad (4.28)$$

A figura 4.15 mostra os gráficos para a síntese de um agrupamento com $L=2$, $K=11$ e três situações para a relação entre os níveis dos lóbulos principal e secundários: $SLL=15$ dB, 30 dB e 45 dB. As distribuições de corrente foram calculadas através do método da Relação de Fourier com 1024 pontos para a FFT, o que dá a distribuição em pontos espaçados de $L/1024$. Os factores de agrupamento foram determinados com 32768 pontos, ficando definidos em pontos distanciados de $2\pi/(32L)$.

Como se comprova, há uma grande concordância entre os resultados obtidos pela técnica apresentada e a síntese de Taylor. Para um comprimento concreto da distribuição de corrente foram determinadas as figuras de mérito definidas anteriormente e verificou-se que, quer a

largura do lóbulo principal quer a directividade máxima, os seus valores são muito próximos dos obtidos pela síntese de Taylor. No entanto, embora os resultados sejam semelhantes não são iguais. Isto deve-se ao facto de que, enquanto que na presente técnica se impõe os valores de amostragem do factor de agrupamento, no método de Taylor estão-se a impor os zeros.

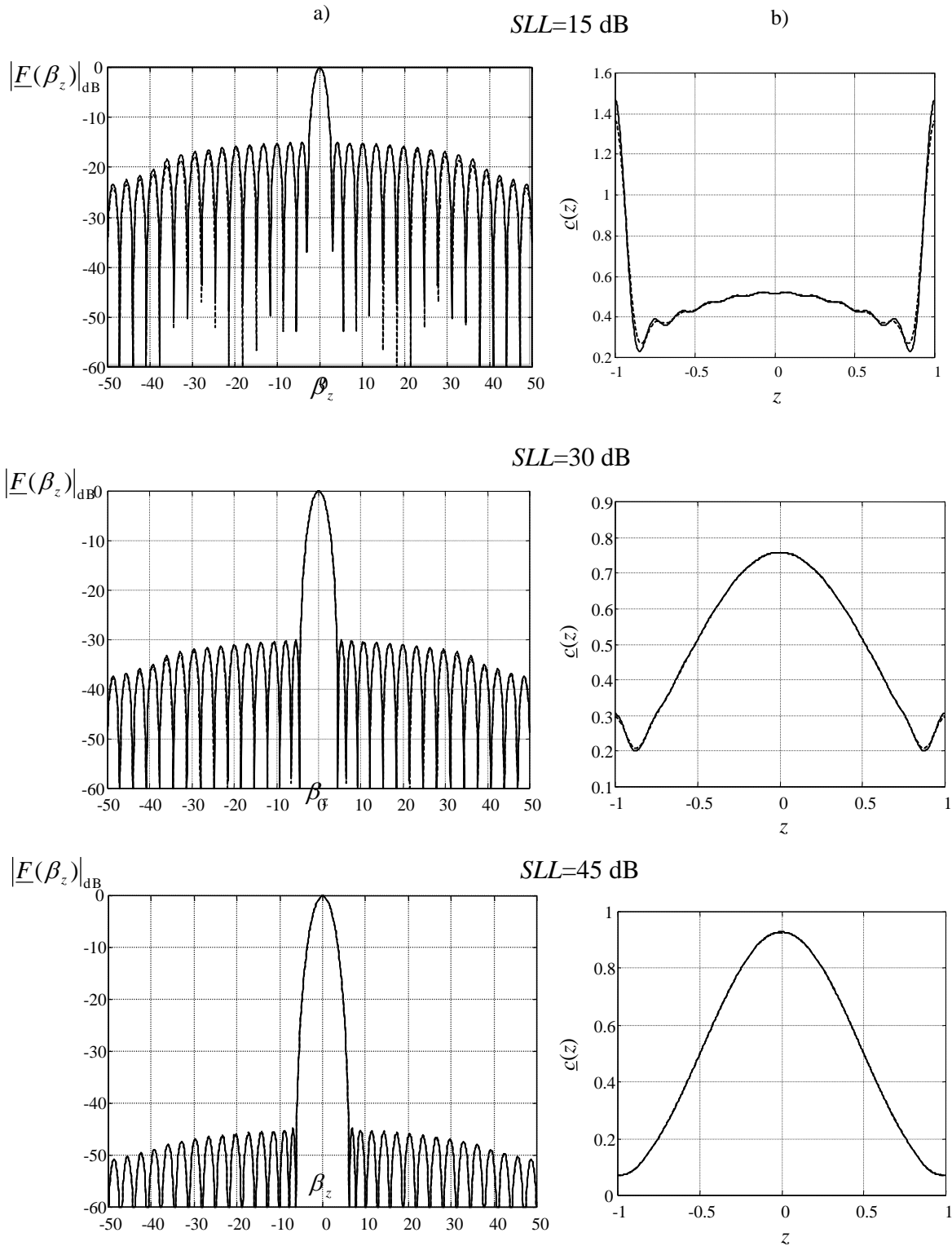


Fig. 4.15 - Agrupamentos semelhantes aos de Taylor, obtidos por amostragem da função de van der Maas: a) factores de agrupamento obtidos pela técnica desenvolvida, a traço contínuo, e por Taylor, a tracejado; b) respectivas distribuições de corrente.

Hyneman [14] alterou ligeiramente a posição dos primeiros \bar{n} zeros de Taylor para obter uma envolvente mais plana. Mesmo esta situação também pode ser conseguida com a técnica desenvolvida neste trabalho. Para esse fim basta aumentar ligeiramente o valor do parâmetro α . Um exemplo é o apresentado na figura 4.16, para $SLL=30$ dB e $K=11$, em que a situação de "equiripple" é obtida considerando α cerca de 0,6 % acima do valor necessário para se determinar a distribuição tradicional de Taylor. Isto produz uma ligeira diminuição da largura do lóbulos principal. Por outro lado, o tornar mais plana a envolvente dos lóbulos secundários centrais aumenta a ondulação na distribuição de corrente e aumenta o valor nos extremos, como também verificou Hyneman.

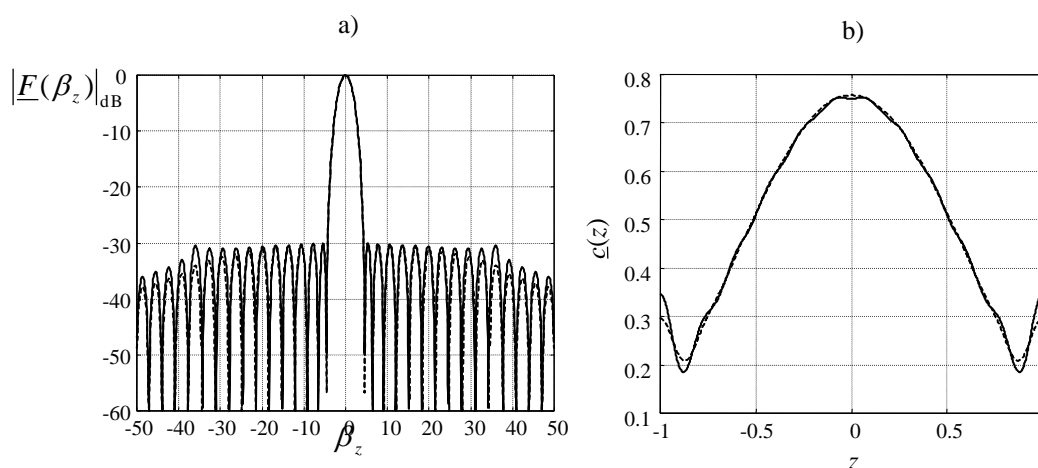


Fig. 4.16 - Agrupamento referente a um factor de agrupamento semelhante ao de Taylor com uma envolvente mais plana dos lóbulos secundários centrais: a) factores de agrupamento obtidos pela técnica desenvolvida, a traço contínuo, e por Taylor, a tracejado; b) respectivas distribuições de corrente.

4.3.1.3 - Distribuição de Corrente Nula nos Extremos

Outra situação interessante que se pode explorar é a obtenção de uma distribuição de corrente cujos extremos terminem em zero, em vez de ser numa descontinuidade como acontece na distribuição de Taylor. Isto tem algum interesse, como foi demonstrado por Rhodes [10].

A técnica anterior amostrava a função (4.26) em $\beta_{zk}=k2\pi/L$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm K$, ou seja, ao aplicar o teorema da amostragem estava-se a calcular a transformada de Fourier de um conjunto ímpar de Diracs centrados na origem.

Consideremos agora que se utilizava as amostras da função (4.26), mas em $\beta_{zk}=(2k+1)\pi/L$, $k= -K, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, K-1$. Como a função é par, tem-se um conjunto par de Diracs centrados na origem à qual se pretende aplicar a transformada de Fourier. Como é sabido da teoria de processamento de sinal, para que a transformada de Fourier, directa ou inversa, de uma função tenha um valor nulo na origem é necessário que o valor médio dessa função seja nulo. Desta forma, a distribuição de corrente referente à situação em causa terá simetria de meia onda, tornando-se nula nos extremos.

Respeitante ao que foi dito, amostrou-se a função (4.26) nas posições indicadas no parágrafo anterior, sendo nulo o valor das restantes amostras. O valor de α é determinado da mesma maneira que na secção anterior, mas agora impondo que (4.26) deve ser nula em $\beta_z=(K+1+1/2)2\pi/L$. Resolvendo retira-se que

$$\alpha = \frac{\sqrt{\left[\frac{(2K+1)\pi}{L}\right]^2 + A^2}}{(2K+3)\pi/L} \quad (4.29)$$

A figura 4.17 apresenta um exemplo para $SLL=30$ dB, $K=11$ e $L=2$. Como se pode ver pela figura 4.17b), a função a traço contínuo, a distribuição de corrente termina em zero. A função a ponteados é a distribuição de corrente obtida por Rhodes. Comparando os resultados verifica-se uma grande semelhança, quer no factor de agrupamento quer na distribuição de corrente. No entanto, a distribuição de corrente proposta tem picos mais elevados que a de Rhodes, mas a directividade máxima é ligeiramente superior.

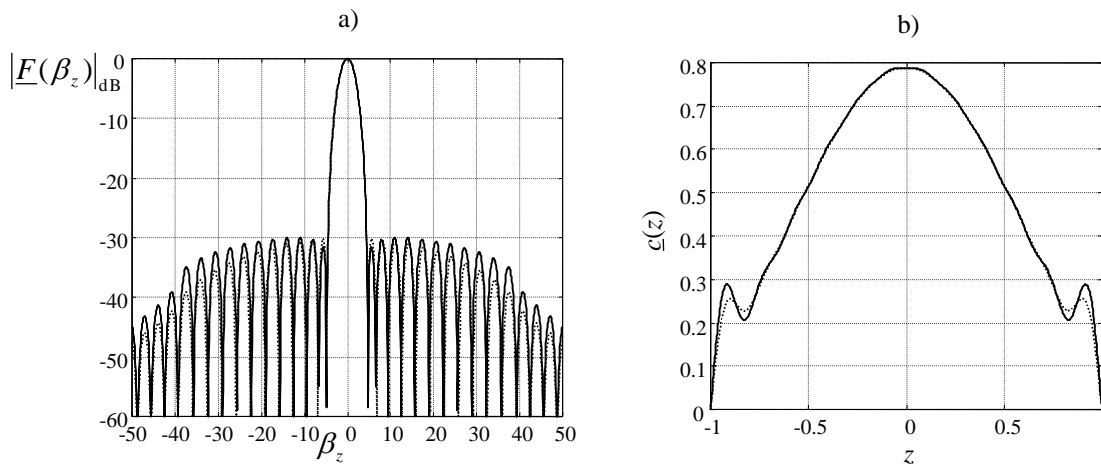


Fig. 4.17 - Agrupamento semelhante ao obtido por Rhodes: a) factores de agrupamento obtidos pela técnica desenvolvida, a traço contínuo e por Rhodes, a ponteados; b) respectivas distribuições de corrente.

4.3.1.4 - Factor de Agrupamento de Taylor Assimétrico

Aproveitando o ensejo de neste trabalho se ter obtido a distribuição de Taylor de uma forma mais simples que a tradicional, por amostragem da função de van der Maas, surge a ideia de se utilizar essa abordagem para obter factores de agrupamento de Taylor assimétricos. Um método que o realiza, por outro processo, é o de Elliot [15]. Este propôs que no método de Taylor em vez de se utilizar o parâmetro \bar{n} , igual para ambos os lados do lóbulo principal, se considerasse um número diferente de lóbulos secundários iguais para cada um dos lados do principal, isto é, \bar{n}_L para o lado esquerdo e um \bar{n}_R para o lado direito. Para que os níveis dos lóbulos de cada lado do principal fossem diferentes também considerou para a expressão (1.78) que o factor A tivesse o valor \bar{A}_L para o lado esquerdo e \bar{A}_R para o lado direito. Para mais, para obter o nível desejado dos lóbulos secundários, os valores de SLL_L e

SLL_R devem ser alterados de uma forma tentativa e erro. Como existe um desvio do lóbulo principal este também deve ser compensado. A distribuição de corrente é igualmente determinada como a de Taylor.

O que se propõe neste trabalho é também considerar a técnica da secção 4.3.1.2, supondo uma relação diferente de lóbulos secundários para ambos os lados do lóbulo principal. Assim, tem-se uma função definida pela expressão (4.26), com parâmetros $\alpha=\alpha_L$ e $A=A_L$ para valores negativos de β_z e zero para valores positivos e tem-se outra função, mais uma vez definida pela expressão (4.26), com parâmetros $\alpha=\alpha_R$ e $A=A_R$ para valores positivos de β_z e zero os restantes. De seguida amostra-se a função resultante da soma destas duas nos pontos $\beta_{zk}=k2\pi/L$, $k=-K_L, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, K_R$.

Os parâmetros A_L e A_R são determinados pela equação (4.13), com SLL_L e SLL_R , respectivamente. Quanto aos parâmetros α_L e α_R , estes já não podem ser obtidos apenas pela função (4.28), já que ao fazê-lo não se obtêm resultados satisfatórios. Contudo, consegue-se resultados razoáveis multiplicando (4.28) por um factor que depende da diferença SLL_L-SLL_R . Deste modo, se $SLL_L < SLL_R$ utilizou-se as relações

$$\alpha_L = \frac{\sqrt{\left[\frac{(2K_L+1)\pi}{L}\right]^2 + A_L^2}}{(K_L+1)2\pi} [1 - 0,005(SLL_R - SLL_L)]$$

$$\alpha_R = \frac{\sqrt{\left[\frac{(2K_R+1)\pi}{L}\right]^2 + A_R^2}}{(K_R+1)2\pi} L$$
(4.30)

e se $SLL_L > SLL_R$ tem-se que

$$\alpha_L = \frac{\sqrt{\left[\frac{(2K_L+1)\pi}{L}\right]^2 + A_L^2}}{(K_L+1)2\pi} L$$

$$\alpha_R = \frac{\sqrt{\left[\frac{(2K_R+1)\pi}{L}\right]^2 + A_R^2}}{(K_R+1)2\pi} [1 - 0,005(SLL_L - SLL_R)]$$
(4.31)

Para comparar resultados, consideremos que se pretende sintetizar um agrupamento em que $SLL_L=20$ dB, $SLL_R=40$ dB, $K_L=8$ e $K_R=20$. Para o método de Elliot foi necessário utilizar $SLL_L=13$ dB, $SLL_R=49$ dB para verificar as relações desejadas. O desvio do feixe por este método é de $\beta_{z0}=2,44/L$. Para a técnica apresentada o desvio é de $\beta_{z0}=0,26/L$. Para compensar esse desvio basta deslocar o factor de agrupamento, cujo efeito é provocar uma rotação de fase, dada por $e^{j\beta_{z0}z}$, resultante das propriedades da transformada de Fourier. A figura 4.18 mostra os resultados obtidos pelo método de Elliot e pela presente técnica, para $L=2$.

Vejamos algumas figuras de mérito, já definidas anteriormente, supondo $L=20\lambda$. Para o método de Elliot tem-se $HPBW=3,17^\circ$, $FNBW=8,7^\circ$ e $D_0=34,3$. Para a técnica apresentada tem-se que $HPBW=3,25^\circ$, $FNBW=8,9^\circ$ e $D_0=32,9$.

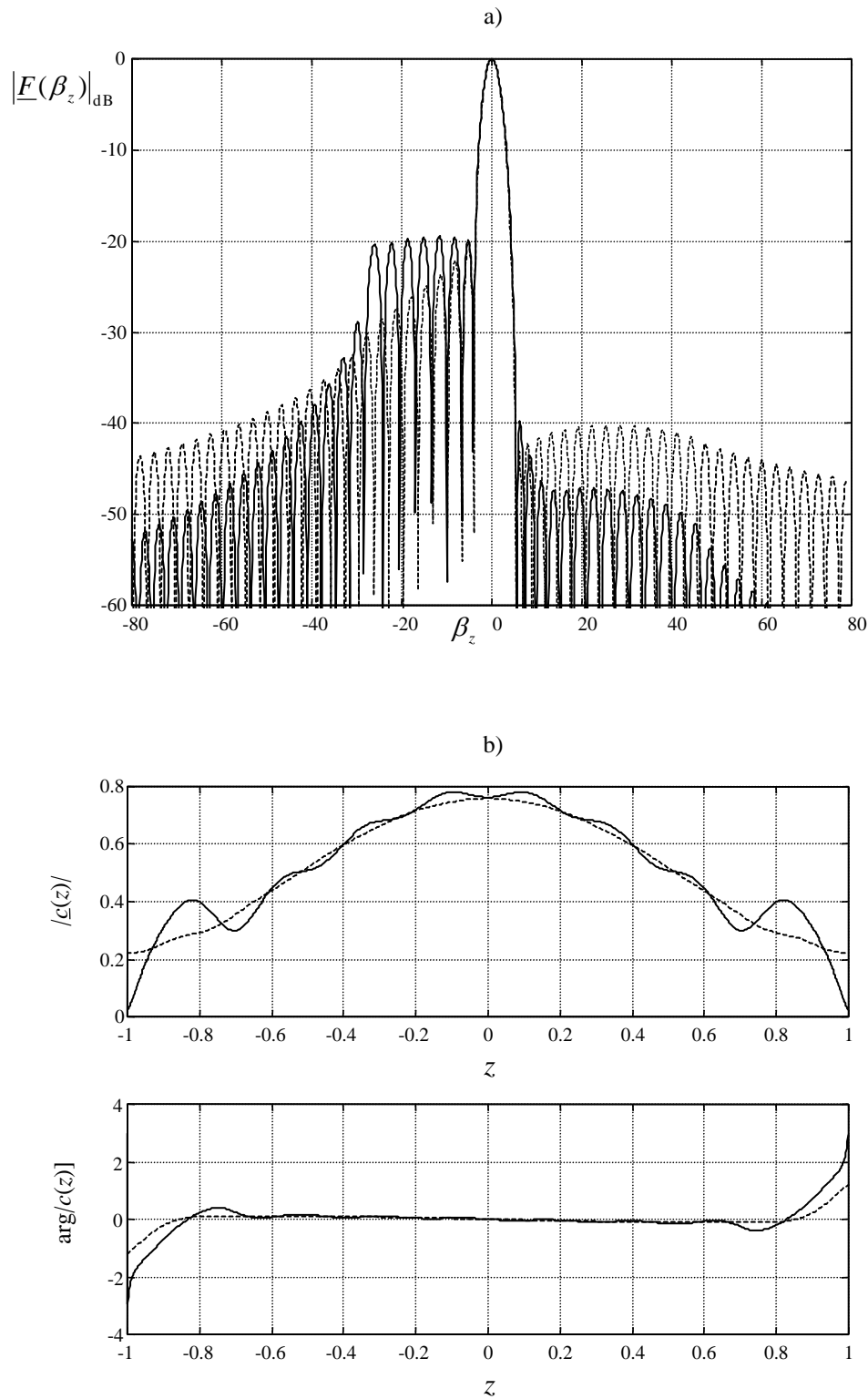


Fig. 4.18 - Agrupamento assimétrico obtido por amostragem de uma função apropriada: a) factores de agrupamento obtidos pela técnica desenvolvida, a traço contínuo, e por Elliot, a tracejado; b) respectivas distribuições de corrente.

A técnica apresentada produz uma distribuição de corrente com um comportamento mais ondulatorio do que na de Elliot e os lóbulos secundários do factor de agrupamento tomam valores mais baixos na zona de decaimento. Com a finalidade de obter uma distribuição mais semelhante à de Elliot analisemos outra possibilidade de gerar factores de agrupamento assimétricos, considerando a multiplicação por uma função de decaimento como já foi feito anteriormente.

O factor de agrupamento é gerado pela soma de uma função, definida por (4.21) com parâmetros $\alpha=\alpha_L$, $A=A_L$ e $B=B_L$ para valores negativos de β_z e zero para valores positivos, com outra função, outra vez definida por (4.21), com parâmetros $\alpha=\alpha_R$, $A=A_R$ e $B=B_R$ para valores positivos de β_z e zero os restantes. A distribuição de corrente é determinada através do método da Relação de Fourier, sendo truncada no comprimento L . O factor de agrupamento final é calculado pela transformada inversa.

As constantes A_L e A_R são determinadas como no caso anterior. Os valores B_L e B_R são aqueles que permitem o decaimento desejado para os lóbulos secundários. Os únicos parâmetros a determinar são α_L e α_R , que foram obtidos empiricamente de modo a manter uma forma simples para as expressões. Tendo em conta (4.22), para $SLL_L < SLL_R$ tem-se que

$$\begin{aligned}\alpha_L &= [\arctan(0,356B_L) - 0,576][1 - 0,0035(SLL_R - SLL_L)] \\ \alpha_R &= [\arctan(0,356B_R) - 0,576][1 + 0,0013(SLL_R - SLL_L)]\end{aligned}\quad (4.32)$$

e para $SLL_L > SLL_R$ que

$$\begin{aligned}\alpha_L &= [\arctan(0,356B_L) - 0,576][1 + 0,0013(SLL_L - SLL_R)] \\ \alpha_R &= [\arctan(0,356B_R) - 0,576][1 - 0,0035(SLL_L - SLL_R)]\end{aligned}\quad (4.33)$$

Consideremos de novo o exemplo anterior, em que $L=2$, $SLL_L=20$ dB, $SLL_R=40$ dB. Para um comportamento similar ao agrupamento de Elliot escolheu-se $B_L=40$ e $B_R=100$. A figura 4.19 mostra o resultado. A figura 4.19a) compara o factor de agrupamento obtido pela técnica desenvolvida, a traço contínuo, com a de Elliot, a tracejado. A figura 4.19b) compara as respectivas distribuições de corrente. Como se pode constatar, agora a distribuição de corrente não apresenta a ondulação que se viu na figura 4.18b), mas apenas um comportamento diferente nos extremos.

Vejamos as figuras de mérito, supondo $L=20\lambda$. Agora para a técnica presente tem-se que $HPBW=3,21^\circ$, $FNBW=8,8^\circ$ e $D_0=33,4$. Estes resultados são melhores do que os obtidos na técnica anterior e muito semelhantes aos de Elliot. O desvio do lóbulo principal foi de $\beta_{z0}=0,2/L$. Os picos dos extremos da distribuição de corrente podem ser minorados diminuindo o valor de B correspondente ao menor valor de SLL . No entanto, esta situação conduz a um aumento da largura do lóbulo principal.

A grande vantagem da técnica desenvolvida é a sua simplicidade. Tem ainda a vantagem de ser directa, enquanto que no método de Elliot é necessário, por tentativa e erro, determinar os valores de SLL para obter os desejados. Mais ainda, o desvio do lóbulo principal é muito menor na técnica desenvolvida, podendo ser desprezável, ao contrário do método de Elliot. Uma desvantagem consistirá nos picos que podem surgir nos extremos da distribuição de corrente. Outra ainda é que os valores de SLL nem sempre são verificados, principalmente para diferenças $SLL_L - SLL_R$ muito elevadas, embora se possa alterar as expressões (4.32) e (4.33) para permitir a obtenção de melhores resultados.

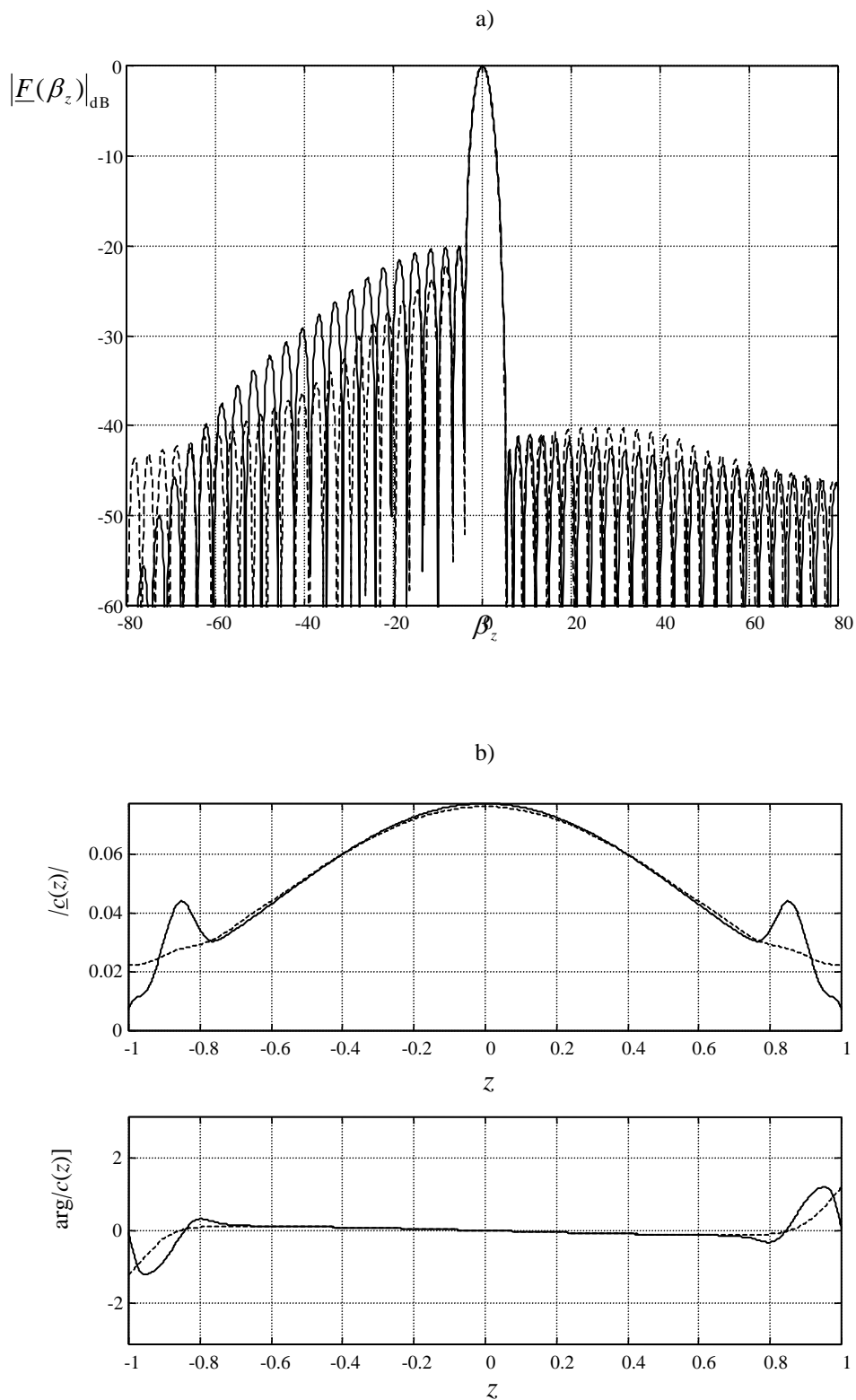


Fig. 4.19 - Agrupamento assimétrico obtido por multiplicação de funções apropriadas: a) factores de agrupamento obtidos pela técnica desenvolvida, a traço contínuo, e por Elliot, a tracejado; b) respectivas distribuições de corrente.

4.3.1.5 - Diferentes Níveis de Lóbulos Secundários.

A título de exemplo vejamos uma situação diferente, mas que se encontra no seguimento da linha das anteriores.

Alguns autores [14], [16], [17], [18] têm elaborado métodos que permitem obter diagramas de radiação com diferentes níveis de lóbulos secundários. A ideia consiste em utilizar uma pesagem diferente para os lóbulos secundários, de modo que o lóbulo principal seja o mais estreito. Os métodos apresentados por esses autores são, todavia, iterativos.

O que aqui se propõe é determinar, através da abordagem apresentada anteriormente, um factor de agrupamento com os primeiros K_1 lóbulos secundários mais próximos do principal com um dado nível e os K_2 lóbulos seguintes com um nível diferente. Para esse objectivo, utilizar-se-á mais uma vez a equação (4.26) definida para as várias partes do factor de agrupamento. Define-se uma função dada por (4.26), com parâmetros SLL_1 , A_1 e α_1 , e retira-se apenas a parte da função que vai desde a origem até ao zero K_1+1 . Depois define-se uma outra dada por (4.26), com parâmetros SLL_2 , A_2 e α_2 , e que vai desde o primeiro zero até ao zero K_2+1 . De seguida junta-se a segunda função à primeira, afectando o sinal para que se forme uma função com diferentes níveis de lóbulos secundários. Gera-se, também, o simétrico da função e amostra-se em $\beta_k=k2\pi/L$. A seguir calcula-se a distribuição de corrente e trunca-se a mesma no comprimento L . Através do método da Relação de Fourier obtém-se o factor de agrupamento aproximado.

Os parâmetros α são obtidos por tentativa erro, por forma a verificar as relações de níveis dos lóbulos secundários e tendo em conta, por exemplo, a directividade máxima do agrupamento. Como a largura do lóbulo principal está directamente ligada ao valor de α_1 , este deve ser o maior possível.

Como aplicação, tomemos o da figura 2 de Stutzman [16] para um agrupamento de comprimento $L=10\lambda$. De modo a obter um factor de agrupamento análogo aplica-se a técnica desenvolvida com $SLL_1=30$ dB, $SLL_2=20$ dB, $K_1=4$, $K_2=1$. Por tentativa e erro determinou-se que $\alpha_1=0,985$ e $\alpha_2=0,6$. A figura 4.20 mostra o resultado. A directividade máxima e a potência a -3 dB valem $D_0=17,7$ e $HPBW=6,1^\circ$, respectivamente. O agrupamento de Taylor com $SLL=30$ dB e $\bar{n}=5$ tem $D_0=17,1$ e $HPBW=6,4^\circ$. Para o agrupamento de Stutzman, obtido através de um método iterativo, este apresenta os seguintes valores: $D_0=17,9$ e $HPBW=6,1^\circ$.

Viu-se que a técnica aqui desenvolvida é capaz de produzir agrupamentos com os lóbulos centrais mais baixos. Consideremos agora outro caso, apresentado por Elliot [17], cujo factor de agrupamento deve conter os três primeiros lóbulos secundários a 40 dB e os quatro seguintes a 20 dB. Para aplicar a técnica desenvolvida os dados são: $L=10\lambda$, $SLL_1=40$ dB, $SLL_2=20$ dB, $K_1=3$, $K_2=4$, $\alpha_1=1,08$ e $\alpha_2=0,99$. A figura 4.21 mostra o factor de agrupamento e a respectiva distribuição de corrente. A largura do lóbulo principal e a forma da distribuição de corrente são idênticas às de Elliot. A directividade máxima e a potência a -3 dB valem $D_0=16,7$ e $HPBW=6,4^\circ$, respectivamente. O agrupamento de Taylor com $SLL=40$ dB e $\bar{n}=7$ tem $D_0=15,4$ e $HPBW=7,1^\circ$.

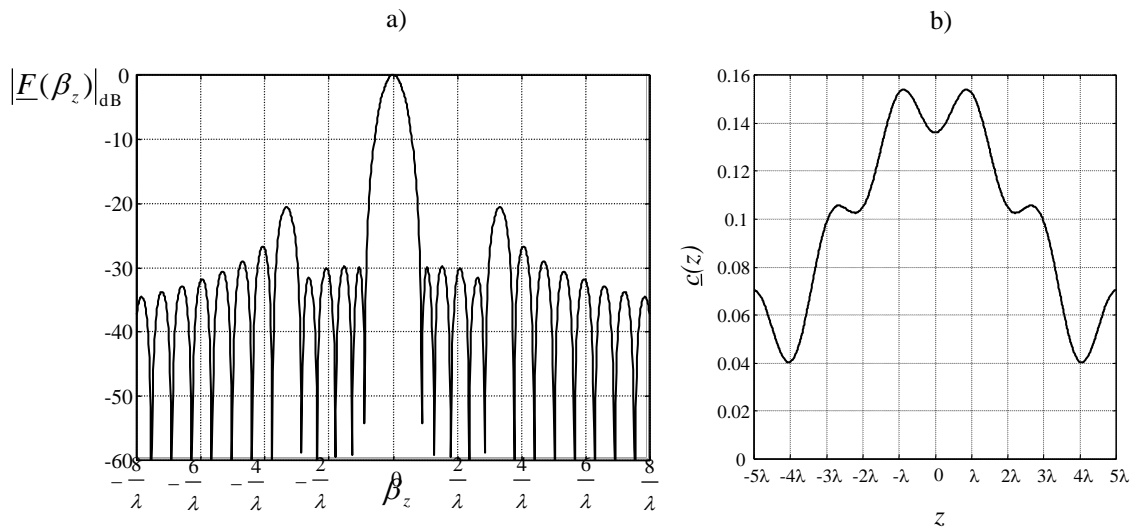


Fig. 4.20 - Agrupamento de Taylor com diferentes pesagens dos lóbulos secundários, em que os quatro mais próximos da origem estão 10 dB abaixo dos restantes: a) factor de agrupamento; b) distribuição de corrente.

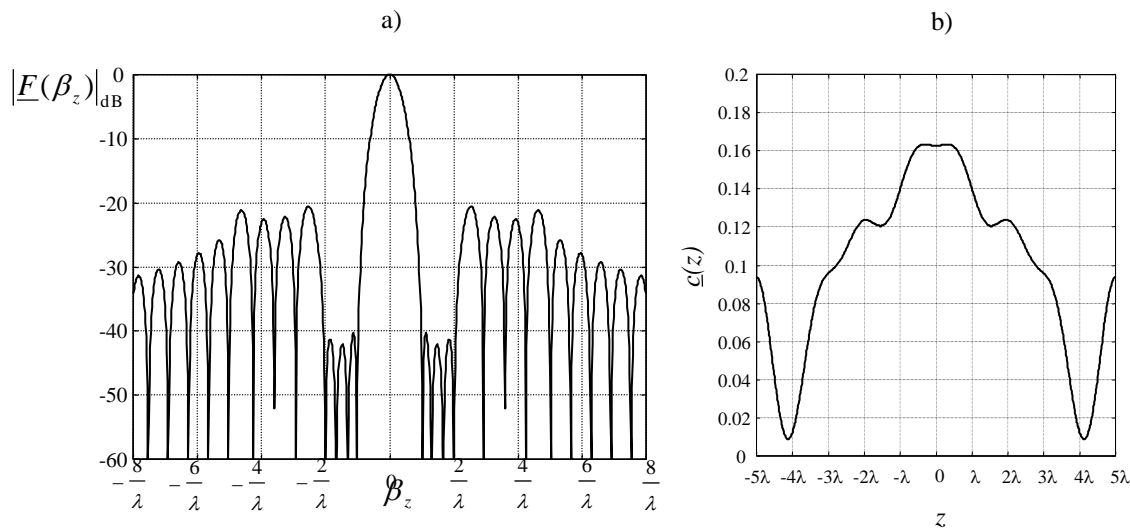


Fig. 4.21 - Agrupamento de Taylor com diferentes pesagens dos lóbulos secundários, em que os três mais próximos da origem estão 20 dB abaixo dos restantes: a) factor de agrupamento; b) distribuição de corrente.

Uma situação mais geral, em que os lóbulos são diferentemente pesados, tornou-se difícil realizar através deste processo. Um estudo mais detalhado pode, no entanto, permitir obter algumas conclusões.

4.3.2 - Técnica Alternativa ao Método de Bayliss

Foi desenvolvida anteriormente uma técnica alternativa para a síntese da distribuição de Taylor, baseada na função de van der Maas. Do mesmo modo se pensou em aplicar uma abordagem semelhante à síntese de Bayliss. A dificuldade neste caso é não se dispor de uma função de base que seja apropriada ao processo de síntese.

Contudo, voltando à função de van der Maas, dada pela equação (4.12), notou-se que se a multiplicarmos pela função arco tangente consegue-se obter lóbulos secundários praticamente iguais e o factor de agrupamento tem dois lóbulos principais como em Bayliss. Isto porque a função arco tangente tende para $\pi/2$ com o aumento do argumento, com sinal negativo para argumentos negativos e positivo para argumentos positivos, e passa na origem com um dado declive. Na variável de interesse tem-se que

$$g(\beta_z) = \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{C_2 L}{2} \beta_z\right) \quad (4.34)$$

sendo C_2 uma constante que permite controlar o declive da função na origem. Fazendo $C_2=1$ a forma de (4.34) é a apresentada na figura 4.22a). Multiplicando (4.34) por (4.12) obtém-se a forma da figura 4.22b), em que $L=2$ e $A=3,5$. Devido à parte praticamente constante de (4.34), os lóbulos secundários fora da região central estão praticamente ao mesmo nível. A amplitude dos lóbulos secundários mais próximos dos lóbulos principais diminuem ligeiramente, face aos restantes, sendo a alteração de níveis dependente de C_2 .

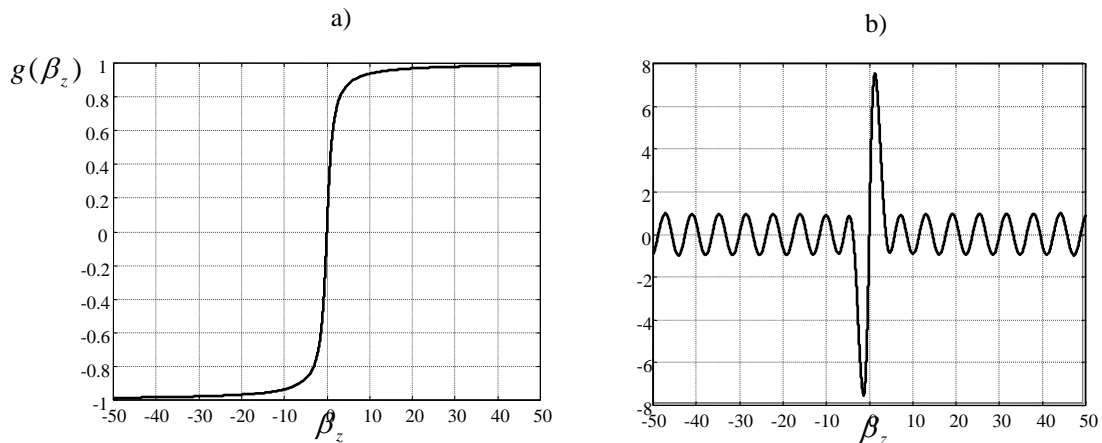


Fig. 4.22 - a) Função (4.34) para $C_2=1$; b) multiplicação de (4.34) com (4.12) para $C_2=1$ e $A=3,5$.

A transformada de Fourier da multiplicação das duas funções é a convolução das respectivas transformadas. Já se viu que a função de van der Maas é limitada no comprimento L e com dois Diracs nos extremos. A transformada da função arco tangente tende para infinito próximo da origem e decai rapidamente para zero. Como resultado, a convolução das duas transformadas dá origem a uma função com valores a tender para infinito nos extremos, embora decresça rapidamente para zero.

Comparando a multiplicação definida atrás com o factor de agrupamento de Bayliss, verificou-se que os lóbulos principais eram mais largos em Bayliss. Para uma maior correspondência ter-se-á que alargar os lóbulos da função proposta. Uma forma de o fazer é através da seguinte alteração na equação (4.12):

$$f(\beta_z) = \cos\left\{\frac{L}{2} \sqrt{[\alpha\beta_z - \text{sgn}(\beta_z)C_1]^2 - A_1^2}\right\} \quad (4.35)$$

em que $\text{sgn}(x)$ representa a função sinal. O efeito da constante C_1 foi separar o lóbulo principal da função de van der Maas em dois, sendo a distância entre eles dependente dessa constante. Quanto aos restantes parâmetros, A_1 é o que controla a amplitude dos lóbulos principais e α permite realizar uma mudança de escala, como foi feito anteriormente. A multiplicação de (4.35) por (4.34) torna a função ímpar.

Uma técnica para sintetizar uma distribuição análoga à de Bayliss começa por gerar o seguinte factor de agrupamento:

$$\underline{F}(\beta_z) = \frac{2}{\pi} \cos \left\{ \frac{L}{2} \sqrt{[\alpha \beta_z - \text{sgn}(\beta_z) C_1]^2 - A_1^2} \right\} \arctan \left(\frac{C_2 L}{2} \beta_z \right) \quad (4.36)$$

Porém, como sucedeu na secção 4.3.1, o facto desta equação ter lóbulos secundários praticamente iguais até ao infinito faz com que a distribuição de corrente contenha picos muito elevados, o que a torna fisicamente irrealizável.

Para tornar a distribuição de corrente realizável pode-se utilizar as técnicas desenvolvidas anteriormente. A primeira a considerar consiste em recorrer ao teorema da amostragem para produzir uma distribuição limitada no comprimento L .

Assim, a equação (4.36) é amostrada em valores dados por $\beta_{2k} = (2k+1)\pi/L$, $k = -K, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, K-1$. Também aqui se tem que $K = \bar{n} - 1$. Existem seis parâmetros a determinar: SLL , K , A_1 , C_1 , C_2 e α . SLL é a relação entre os níveis dos lóbulos principal e secundários, dado em dB. K é o número de lóbulos secundários que se pretende estarem ao mesmo nível. A_1 , C_1 , C_2 foram obtidos empiricamente em função de SLL ,

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{2}{L} (1,073 + 0,102 SLL + 3,435 \times 10^{-4} SLL^2) \\ C_1 &= \frac{2}{L} (1,284 + 0,031 SLL - 4,14 \times 10^{-4} SLL^2) \\ C_2 &= 1,5 e^{-0,035(SLL-4)} + 0,185 \end{aligned} \quad (4.37)$$

Estas curvas são utilizadas para valores de SLL até cerca de 60 dB, uma vez que acima deste montante o factor de agrupamento determinado por esta técnica é muito sensível a pequenas variações dos parâmetros.

O valor de α é calculado com a imposição de (4.36) ser nula em $\beta_z = (K+1+1/2)2\pi/L$, pois a função passa a tomar valores nulos nos pontos de amostragem,

$$\cos \left\{ \frac{L}{2} \sqrt{ \left[\alpha \left(K + 1 + \frac{1}{2} \right) \frac{2\pi}{L} - C_1 \right]^2 - A_1^2 } \right\} = 0 \quad (4.38)$$

Resolvendo, retira-se que

$$\alpha = \frac{C_1 + \sqrt{A_1^2 + \left[\frac{(2K+1)\pi}{L} \right]^2}}{(2K+3)\pi} \quad (4.39)$$

Tomemos em consideração alguns exemplos. A figura 4.23 mostra os gráficos para $SLL=15$ dB, 30 dB e 45 dB. O número de lóbulos secundários centrais é de $K=11$ e $L=2$. É de salientar a grande concordância de resultados entre a técnica desenvolvida e os obtidos pela síntese de Bayliss.

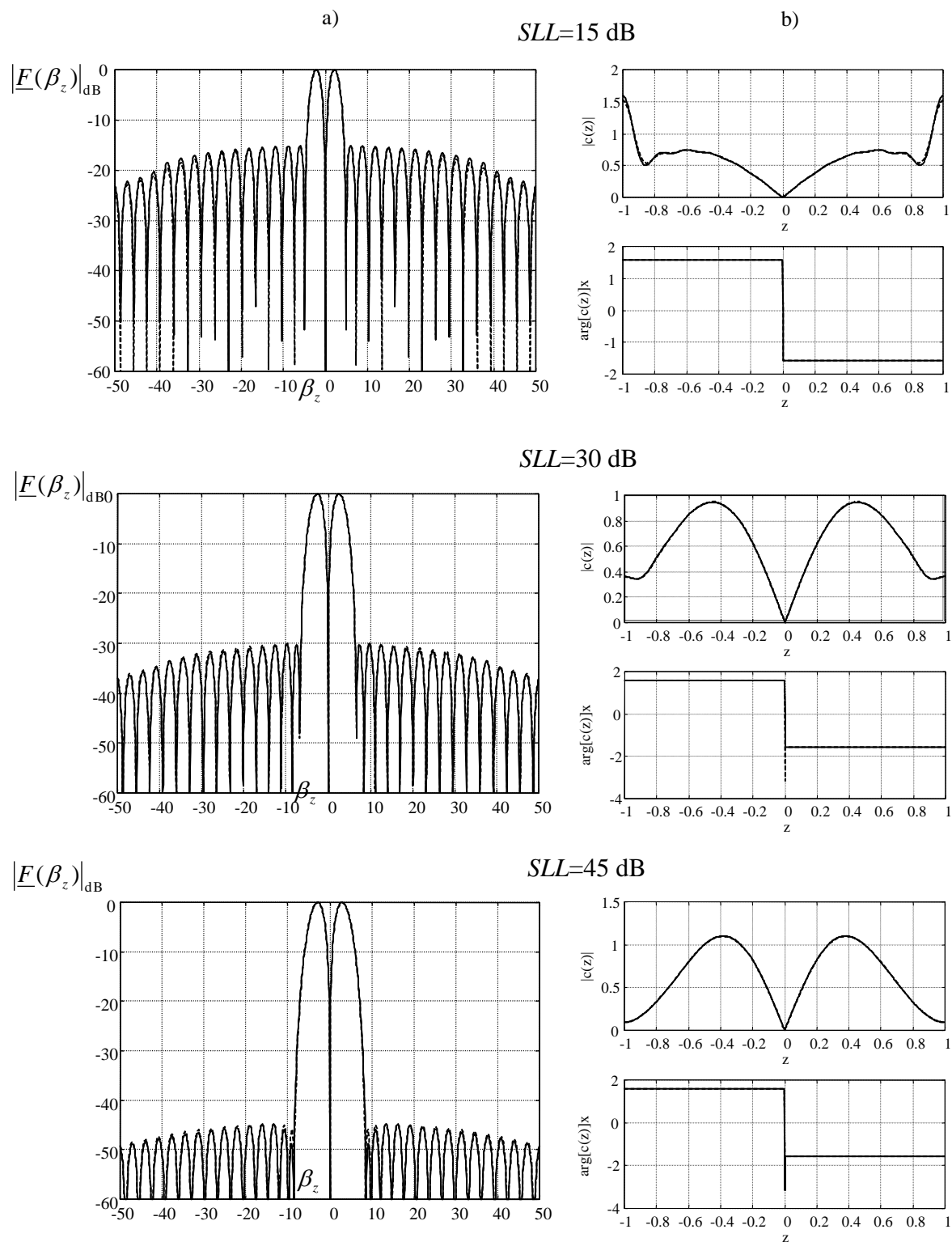


Fig. 4.23 - Agrupamentos semelhantes aos de Bayliss: a) factores de agrupamento obtidos pela técnica desenvolvida, a traço contínuo, e por Bayliss, a tracejado; b) respectivas distribuições de corrente.

A presente técnica lida com vários parâmetros. Será interessante poder utilizá-los para controlar, de alguma forma, o factor de agrupamento. SLL e K são dados de entrada e já sabemos qual é o seu efeito. Quanto a A_1 , o seu aumento permite diminuir o nível dos lóbulos secundários, o que conduz a um aumento da largura dos lóbulos principais. O parâmetro C_2 permite controlar o nível dos lóbulos secundários mais próximos dos principais. De facto, reparando no terceiro exemplo da figura 4.23a) verifica-se que esse lóbulo é mais baixo do que os restantes. Diminuindo ligeiramente C_2 consegue-se aumentar o nível desse lóbulo, tendo também como resultado o abaixamento dos restantes.

Finalmente, e como aconteceu na técnica alternativa para a síntese de Taylor, um ligeiro aumento do parâmetro α possibilita tornar mais plana a envolvente dos K lóbulos secundários. Isto provoca uma ligeira diminuição da largura dos lóbulos principais. A figura 4.24 mostra esta situação para $SLL=30$ dB e $K=11$, com α cerca de 0,5% mais elevado do que o utilizado para obter a figura 4.23.

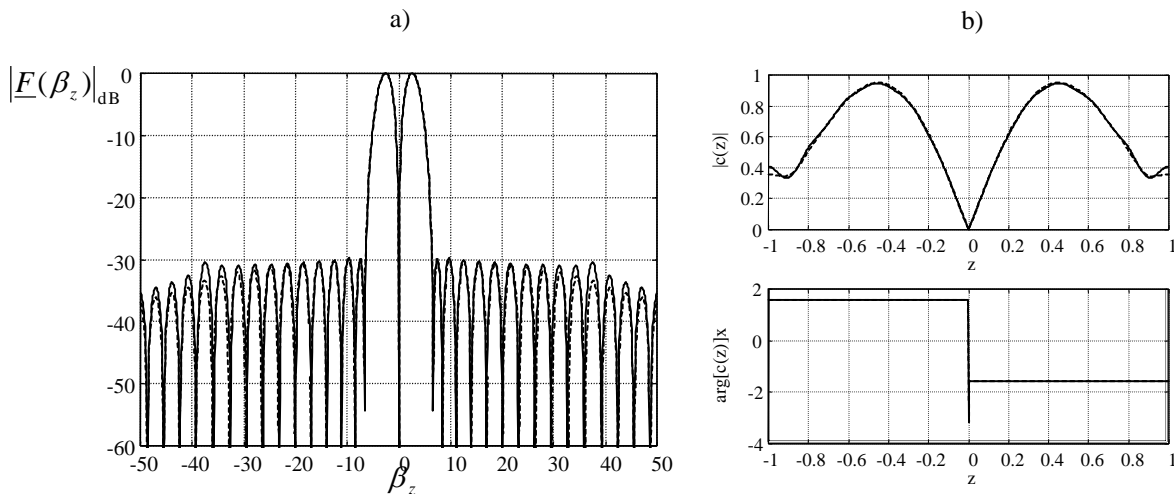


Fig. 4.24 - Agrupamento referente a um factor de agrupamento semelhante ao de Bayliss com uma envolvente mais plana dos lóbulos secundários centrais: a) factor de agrupamento obtido pela técnica desenvolvida, a traço contínuo, e por Bayliss, a tracejado; b) respectivas distribuições de corrente.

Uma outra técnica que conduz a resultados análogos aos da síntese de Bayliss consiste em multiplicar a equação (4.36) pela função gaussiana, dada por (4.18). As conclusões retiradas com este processo são semelhantes às da aplicação na síntese de Taylor. O factor de agrupamento decai mais rapidamente do que em Bayliss e a distribuição de corrente, assim determinada, pode terminar em valores mais próximos de zero.

4.3.3 - Técnica alternativa ao Método de Villeneuve

As técnicas apresentadas permitiram encarar de uma forma diferente a síntese de alguns agrupamentos contínuos conhecidos. É motivador tentar também aplicar os processos propostos a distribuições discretas. Para esse objectivo, comecemos por visitar o correspondente ao método de Taylor, ou seja, a síntese Villeneuve.

4.3.3.1 - Factor de Agrupamento Simétrico

Villeneuve altera a função seno cardinal periódica por substituição dos primeiros zeros dessa função pelos do polinómio de Tschebyscheff. Para tal são necessárias as expressões apresentadas na secção 1.9. Com a introdução da Relação de Fourier já foi possível simplificar o processo de síntese no que diz respeito ao cálculo da distribuição de corrente, apesar de se continuar a utilizar o mesmo processo de Villeneuve para se obter o factor de agrupamento. O que se propõe é usar uma forma mais simples de se gerar o factor de agrupamento. Para sintetizar o agrupamento de Taylor, o método de amostragem da função de van der Maas abre a perspectiva de também ser possível aplicar o mesmo processo, com os polinómios de Tschebyscheff, ao agrupamento de Villeneuve.

Paralelamente ao que foi efectuado na secção 4.3.1.2, consideremos a função

$$\underline{F}(\beta_z) = \frac{\cos\left\{(N-1)\arccos\left[x_0 \cos\left(\frac{\alpha\beta_z d}{2}\right)\right]\right\}}{\cos[(N-1)\arccos(x_0)]} \quad (4.40)$$

com x_0 dado por (1.45).

A equação (4.40) é amostrada em $\beta_{z_k}=k2\pi/(Nd)$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm K$, considerando mais uma vez que $K = \bar{n} - 1$ é o número de lóbulos secundários que se pretende estarem à mesma amplitude. Se fizermos $\alpha=1$, os lóbulos secundários do factor de agrupamento resultante aumentam de nível a partir do centro até ao lóbulo K e depois têm um decaimento sob a forma do seno cardinal periódico. Este parâmetro vai permitir o controlo da largura dos lóbulos principal e secundários, através de uma mudança de escala, e pode ser determinado impondo que o factor de agrupamento, definido por (4.40), seja nulo em $\beta_{z_k}=(K+1)2\pi/(Nd)$,

$$\cos\left\{(N-1)\arccos\left[x_0 \cos\left(\alpha\pi \frac{K+1}{N}\right)\right]\right\} = 0 \quad (4.41)$$

Resolvendo, obtém-se que

$$\alpha = \frac{\arccos\left\{\frac{1}{x_0} \cos\left[\frac{(2K+1)\pi}{2(N-1)}\right]\right\}}{\frac{(K+1)\pi}{N}} \quad (4.42)$$

A figura 4.25 apresenta três exemplos de síntese de agrupamentos de Villeneuve para $d=0,5\lambda$ e $K=6$. O primeiro para $SLL=15$ dB e $N=21$, o segundo com $SLL=30$ dB e $N=30$ e o terceiro com $SLL=45$ dB e $N=31$. As distribuições de corrente e respectivos factores de agrupamento são obtidos pelo método da Relação de Fourier. O número de pontos utilizados para calcular a distribuição de corrente é igual ao número de elementos do agrupamento. O número de pontos para obter o factor de agrupamento foi de 1024, o que dá a distância entre eles de $2\pi/(1024d)$.

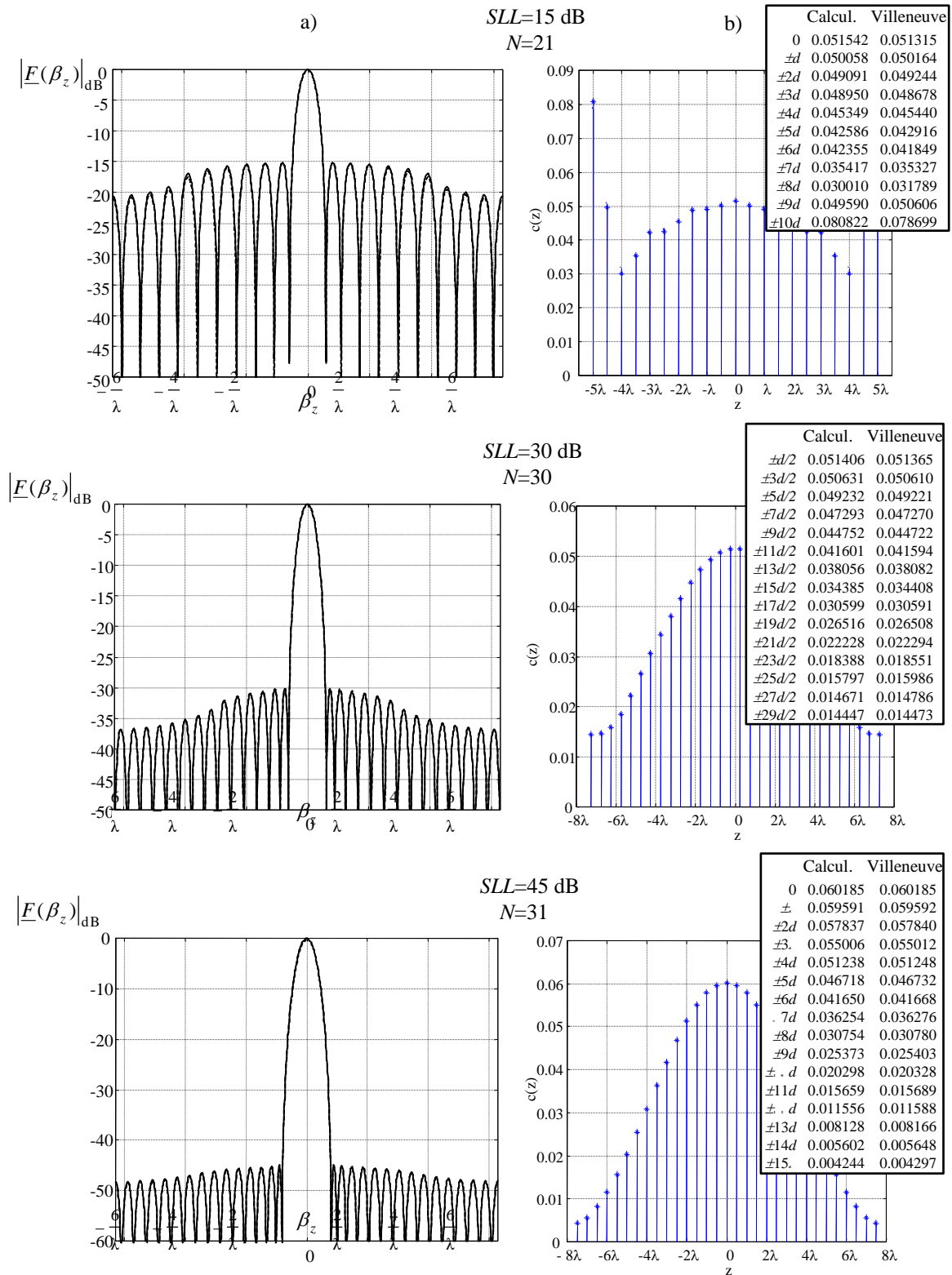


Fig. 4.25 - Agrupamentos semelhantes aos de Villeneuve: a) factores de agrupamento obtidos pela técnica desenvolvida, a traço contínuo, e por Villeneuve, a tracejado; b) respectivas distribuições de corrente: (*) para a técnica desenvolvida e (.) para o de Villeneuve.

Calculando as figuras de mérito, constatou-se que a largura do lóbulo principal e a directividade máxima tinham praticamente o mesmo valor que na síntese de Villeneuve. A expressão para a directividade máxima de um agrupamento discreto é dada por [12], [19]

$$D_0 = \frac{4\pi |F(\theta, \phi)|_{\max}^2}{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi |F(\theta, \phi)|^2 \sin(\theta) d\theta d\phi} = \frac{|F(\theta)|_{\max}^2}{\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} I_n I_m \text{senc}[(n-m)\beta d]} \quad (4.43)$$

Como no caso contínuo, também aqui é possível obter uma envolvente mais plana dos K lóbulos secundários, o que faz diminuir ligeiramente a largura do lóbulo principal. Nesse sentido basta aumentar ligeiramente o valor de α . A figura 4.26 mostra o exemplo para $SLL=25$ dB, $N=40$, $d=0,5 \lambda$ e $K=10$. Neste caso α é 0,6 % mais elevado do que o obtido pela equação (4.42).

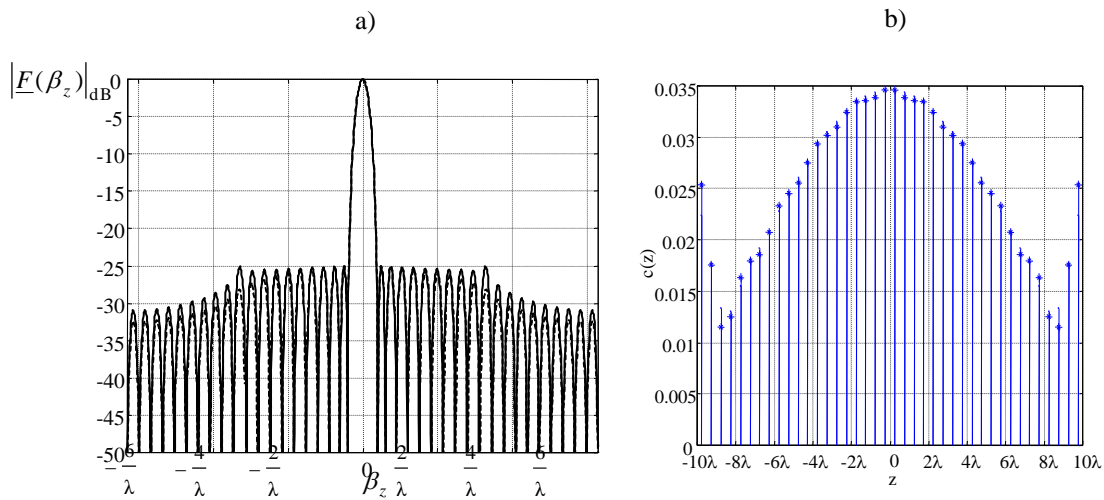


Fig. 4.26 - Obtenção de uma envolvente mais plana dos lóbulos secundários centrais: a) factor de agrupamento obtido pela técnica desenvolvida, a traço contínuo, e de Villeneuve, a tracejado; b) respectivas distribuições de corrente: (*) para a técnica desenvolvida e (.) para o de Villeneuve.

4.3.3.2 - Factor de Agrupamento Assimétrico

Também em agrupamentos discretos é útil poder-se gerar factores de agrupamento assimétricos. Chuang e Couch [20] apresentam um método com essa finalidade utilizando conceitos dos sinais analíticos. Partindo de um factor de agrupamento simétrico, com uma dada relação entre os níveis dos lóbulos principal e secundários, geram um factor de agrupamento assimétrico, recorrendo à transformada de Hilbert. Uma dificuldade do método consiste em controlar o nível dos lóbulos secundários de cada lado do lóbulo principal.

Vejamos como se pode obter factores de agrupamento assimétricos com controlo dos dois níveis de lóbulos secundários.

A primeira forma de realizar o objectivo proposto consiste em, partindo da expressão (4.40), definir uma função com duas zonas distintas. A primeira, para valores negativos de β_z , dada por (4.40) com $\alpha=\alpha_L$ e $SLL=SLL_L$ e a segunda, definida para valores positivos de β_z , dada

outra vez por (4.40) com $\alpha=\alpha_R$ e $SLL=SLL_R$. De seguida amostra-se a função resultante nos pontos $\beta_{zk}=k2\pi/(Nd)$, $k=-K_L, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, K_R$ e aplica-se o método da Relação de Fourier. Procurando os valores de α que conduzem às relações desejadas para os níveis dos lóbulos, verificou-se que o agrupamento assim gerado apresenta uma maior ondulação da envolvente da distribuição de corrente quando comparada com a síntese de Villeneuve.

A técnica, assim elaborada, produz factores de agrupamento assimétricos com possibilidade de controlo dos níveis dos lóbulos secundários dos dois lados do lóbulo principal. A dificuldade da sua aplicação consiste na obtenção dos parâmetros α que conduzam aos resultados satisfatórios. Também devido às características da corrente analisemos outra forma de gerar este tipo de agrupamento.

Como é do conhecimento, um agrupamento discreto dá origem a um factor de agrupamento periódico, de modo que a função em $\beta_z=\pi/d$ tem que ter o mesmo valor que em $\beta_z=-\pi/d$. Desta forma, ao tentar impor dois níveis distintos dos lóbulos secundários dos dois lados do lóbulo principal tem que haver uma transição entre o nível mais elevado para o mais baixo, a não ser que o factor de agrupamento seja nulo em $\beta_z=\pi/d$, situação que nem sempre acontece.

De acordo com o que foi descrito, uma segunda técnica consiste em determinar, mais uma vez, uma função com duas zonas distintas, definindo a função da mesma forma que no caso anterior. Para se obter uma transição suave entre os dois níveis de lóbulos secundários multiplica-se a parte da função referente aos níveis de lóbulos mais elevados por uma função de decaimento, que pode ser dada por

$$g(\beta_z) = e^{-\frac{(\beta_z d/2)^2}{B^2}} \quad (4.44)$$

com

$$B = \sqrt{\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{\ln\left(10^{\frac{SLL_m - SLL_M}{20}}\right)}} \quad (4.45)$$

em que SLL_m refere-se ao nível mais baixo (maior valor em módulo) e SLL_M ao nível mais elevado (menor valor em módulo). Para a função assim gerada, os parâmetros α foram obtidos empiricamente para uma gama razoável de valores da diferença $SLL_L - SLL_R$ e até cerca de uma centena de elementos. Para $SLL_L < SLL_R$ tem-se que

$$\begin{aligned} \alpha_L &= 0,1 \left[1 - e^{0,035(SLL_R - SLL_L)} \right] \left[1 - 0,006(SLL_R - SLL_L)e^{-0,1N} \right] \\ \alpha_R &= 1 + 0,0022 \left[1 - \tanh(0,05N - 2,25) \right] (SLL_R - SLL_L)^{0,58 + 0,00022(N-20)^2} \end{aligned} \quad (4.46)$$

e para $SLL_L > SLL_R$ que

$$\begin{aligned} \alpha_L &= 1 + 0,0022 \left[1 - \tanh(0,05N - 2,25) \right] (SLL_L - SLL_R)^{0,58 + 0,00022(N-20)^2} \\ \alpha_R &= 0,1 \left[1 - e^{0,035(SLL_L - SLL_R)} \right] \left[1 - 0,006(SLL_L - SLL_R)e^{-0,1N} \right] \end{aligned} \quad (4.47)$$

Seguidamente, a distribuição de corrente é obtida pelo método da Relação de Fourier, com um número de pontos para a FFT suficientemente elevado de modo a minorar os efeitos do *aliasing*, após o qual é truncada para o comprimento N . O factor de agrupamento desejado é determinado por transformada inversa desta distribuição.

Para verificação da técnica desenvolvida começemos por comparar com o exemplo apresentado em [20], para $N=21$ elementos e $d=0,5\lambda$. Chuang e Couch obtêm um factor de agrupamento com $SLL_L=35,045$ dB e $SLL_R=23,629$ dB. A presente técnica foi aplicada com $SLL_L=35$ dB e $SLL_R=23,6$ dB. A figura 4.27 mostra o factor de agrupamento gerado e a respectiva distribuição de corrente. O desvio do feixe foi de $-0,015/\lambda$.

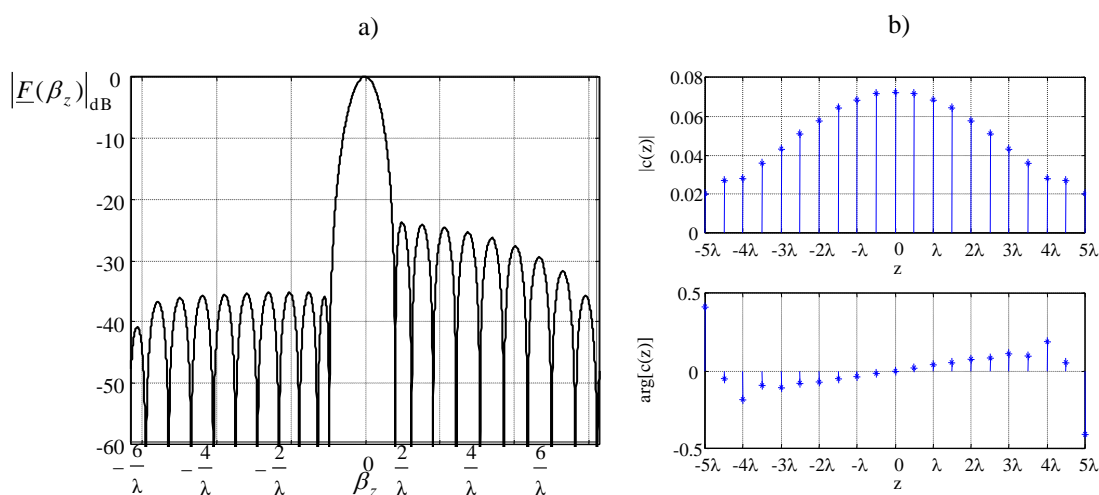


Fig. 4.27 - Agrupamento assimétrico com 21 elementos: a) factor de agrupamento; b) respectiva distribuição de corrente.

A tabela 4.1 apresenta as figuras de mérito, definidas anteriormente, comparando os resultados obtidos para o exemplo em causa com a técnica desenvolvida por Chuang e Couch. Além dos resultados similares, a técnica desenvolvida permite um maior controlo dos níveis dos lóbulos.

| Técnica | $HPBW^*$ | $FNBW^*$ | D_0 | SLL_L (dB) | SLL_R (dB) |
|----------------|-----------------|-----------------|--------|--------------|--------------|
| Chuang e Couch | $0,668/\lambda$ | $1,768/\lambda$ | 18,114 | 35,045 | 23,629 |
| Desenvolvida | $0,661/\lambda$ | $1,767/\lambda$ | 18,154 | 35,12 | 23,67 |

* - na variável β_z

Tabela 4.1 - Valores das características de um agrupamento com 21 elementos para obtenção de um factor de agrupamento assimétrico, para o método desenvolvido e para um exemplo apresentado na literatura.

Consideremos outro exemplo, para $N=30$ elementos, $d=0,5\lambda$, $SLL_L=20$ dB e $SLL_R=40$ dB. A figura 4.28 mostra os resultados. A largura do feixe principal foi de $FNBW=1,27/\lambda$ e a directividade máxima de $D_0=25,31$. O agrupamento de Tschebyscheff com $SLL=40$ dB tem uma largura do lóbulo principal de $FNBW=1,52/\lambda$ e directividade máxima de $D_0=23,28$.

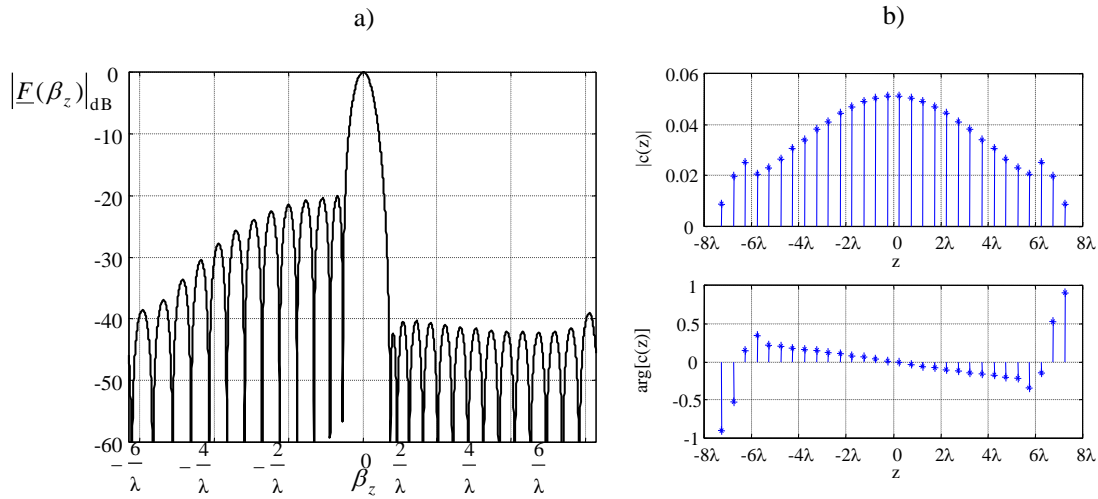


Fig. 4.28 - Agrupamento assimétrico com 30 elementos: a) factor de agrupamento; b) respectiva distribuição de corrente.

Na figura anterior nota-se que o último lóbulo do nível mais baixo não verifica a relação desejada. Isso deve-se ao emprego de fórmulas aproximadas para se obter os parâmetros α . No entanto, caso seja pretendido, pode-se melhorar o diagrama alterando ligeiramente o valor de α correspondente ao nível mais elevado.

Foi desenvolvida uma técnica simples para gerar factores de agrupamento tipo Villeneuve, mas assimétricos, com controlo dos níveis dos lóbulos secundários dos dois lados do lóbulo principal. Embora se tenha fixado no caso em que se recorre à função (4.44) para provocar um decaimento da zona dos níveis mais elevados para a zona dos níveis mais baixos pode-se, porém, utilizar duas funções, uma para cada zona com o decaimento desejado. A pesquisa dos dois parâmetros α conduzem aos resultados pretendidos. Assim, consegue-se obter diferentes agrupamentos de Villeneuve assimétricos.

4.3.4 - Técnica alternativa ao Método de Zolotarev

A técnica alternativa, desenvolvida anteriormente, para sintetizar o agrupamento de Bayliss, partindo da multiplicação da função de van der Maas pela função arco tangente, abre a perspectiva de também se desenvolver um processo análogo, com recurso aos polinómios de Tschebyscheff, para realizar as sínteses de Zolotarev e de McNamara.

De forma semelhante ao caso contínuo, comecemos por gerar a função

$$\underline{F}(\beta_z) = \cos \left\{ (N-1) \arccos \left[x_{01} \cos \left(\frac{\alpha \beta_z d}{2} - \text{sign}(\beta_z) C_1 \right) \right] \right\} \arctan \left(\frac{C_2 \beta_z N d}{2} \right) \quad (4.48)$$

em que x_{01} , α , C_1 e C_2 são parâmetros a determinar. Para se calcular a distribuição de corrente, de N elementos distanciados de d , aplica-se o método da Relação de Fourier, com amostragem da função (4.48) em $\beta_{zk} = (2k+1)\pi/(Nd)$, $k=M_1, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, M_2$, sendo $M_1=-K-2$ e $M_2=K+1$ para N par e sendo $M_1=-K-1$ e $M_2=K+1$ para N ímpar. K tem o mesmo significado

que o apresentado anteriormente. Pelo teorema da amostragem, para se obter N elementos discretos tem-se que utilizar N amostras de um período do factor de agrupamento. Desta forma, com $K=N/2-2$ para N par e $K=(N-1)/2-1$ para N ímpar, os lóbulos secundários estão ao mesmo nível. Para um valor de K inferior, o número de lóbulos secundários com o mesmo nível será igual a essa quantidade e os restantes decaem como na síntese de Villeneuve.

Alguns dos parâmetros necessários para a equação (4.48) foram calculados empiricamente. Para C_1 obteve-se a expressão que o relaciona com SLL e N ,

$$C_1 = (0,0002SLL + 0,055) \left(\frac{31,6}{N} - 0,0408 \right) \quad (4.49)$$

Considerando que $x_{01}=x_0C_3$, com x_0 dado por (1.45), a figura 4.29 mostra os gráficos para se obter os valores de C_2 e C_3 em função de SLL e N . As curvas apresentadas foram determinadas para valores de N com 20, 25, 30, 35, 40, 50, 60 e 80 elementos. Para uma melhor interpolação dos valores desses parâmetros, C_2 encontra-se de outra forma no apêndice F1 e C_3 no apêndice F2 em escala logarítmica.

Enquanto que o parâmetro x_{01} controla a amplitude dos lóbulos secundários, C_2 controla os níveis dos lóbulos secundários mais próximos do principal.

Quanto a α , este pode ser obtido através do conhecimento dos outros parâmetros e impondo que a função (4.48) seja nula em $\beta_i=(K+1+1/2)2\pi/(Nd)$,

$$\cos \left\{ (N-1) \arccos \left[x_{01} \cos \left(\frac{\alpha(K+1+1/2)\pi}{N} - C_1 \right) \right] \right\} = 0 \quad (4.50)$$

Resolvendo, retira-se que

$$\alpha = \frac{C_1 + \arccos \left\{ \frac{1}{x_{01}} \cos \left[\frac{(2K+1)\pi}{2(N-1)} \right] \right\}}{\left(K + \frac{3}{2} \right) \frac{\pi}{N}} \quad (4.51)$$

A técnica desenvolvida permite sintetizar agrupamentos semelhantes aos apresentados por McNamara [21]. Porém, ao contrário deste último, que só permite sintetizar agrupamentos com um número par de elementos, esta técnica também permite obter agrupamentos ímpares, não havendo qualquer distinção entre as duas situações.

A figura 4.30 mostra três exemplos de agrupamentos determinados pela técnica desenvolvida. Para o primeiro tem-se que $N=25$, $d=0,5\lambda$, $SLL=15$ e $K=N/2-2$. Das curvas da figura 4.29 ou apêndices F1 e F2 obtém-se C_2 e C_3 . É de notar que não se faz a comparação com a síntese de Zolotarev, uma vez que o método de McNamara não permite obter este agrupamento. Para o segundo exemplo tem-se $N=30$, $d=0,5\lambda$, $SLL=30$ e $K=(N-1)/2-1$. Como se pode comprovar, os resultados obtidos pela técnica desenvolvida são muito coincidentes com a síntese de Zolotarev elaborada por McNamara. Também as directividades máximas têm valores semelhantes. Finalmente, o terceiro exemplo é igual ao segundo, mas com $SLL=45$ dB.

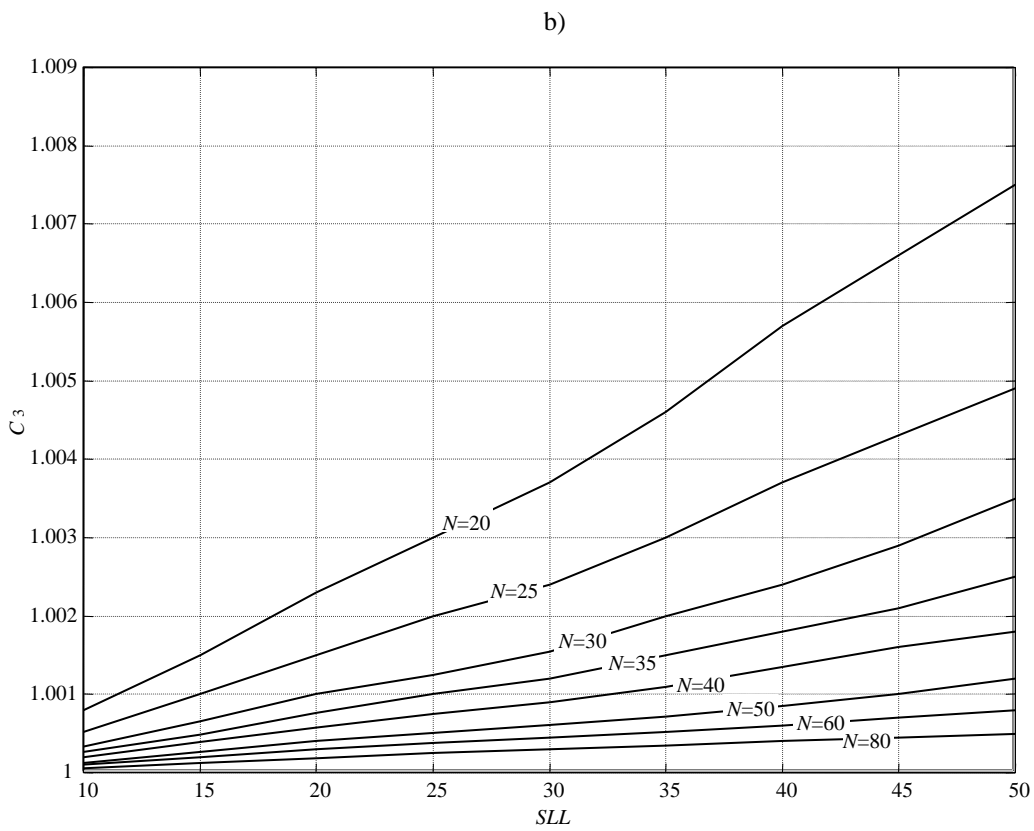
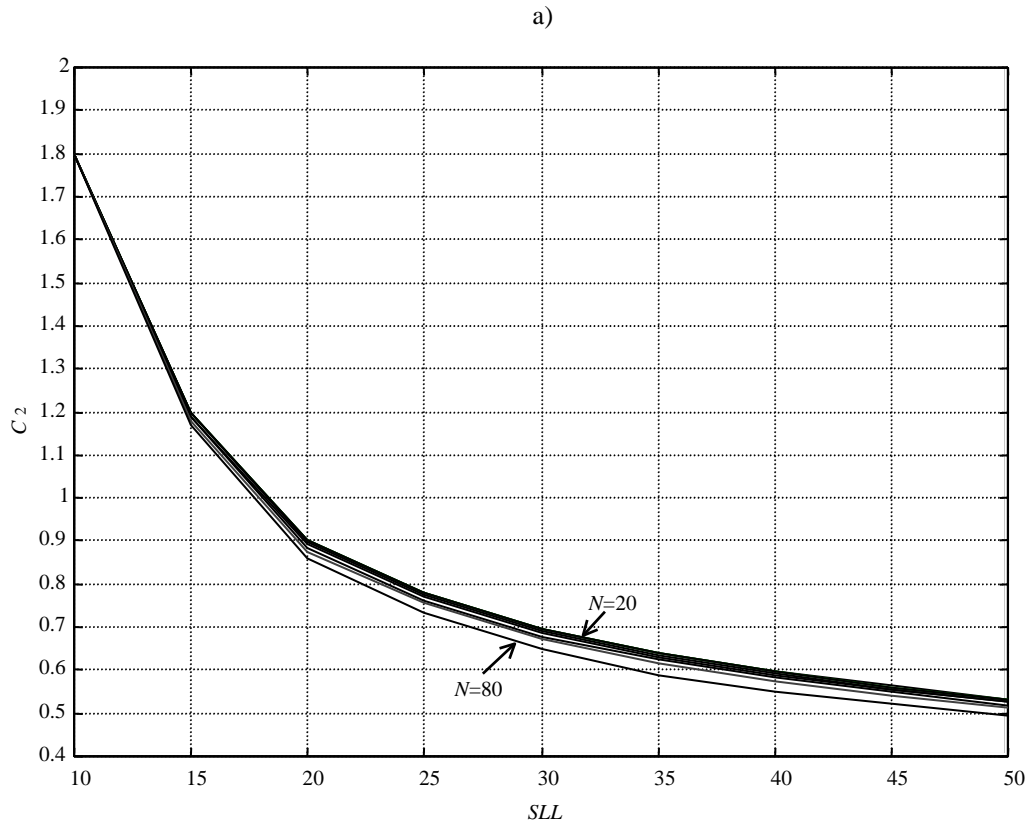


Fig. 4.29 - Curvas dos parâmetros para alguns valores de SLL e N : a) C_2 ; b) C_3 .

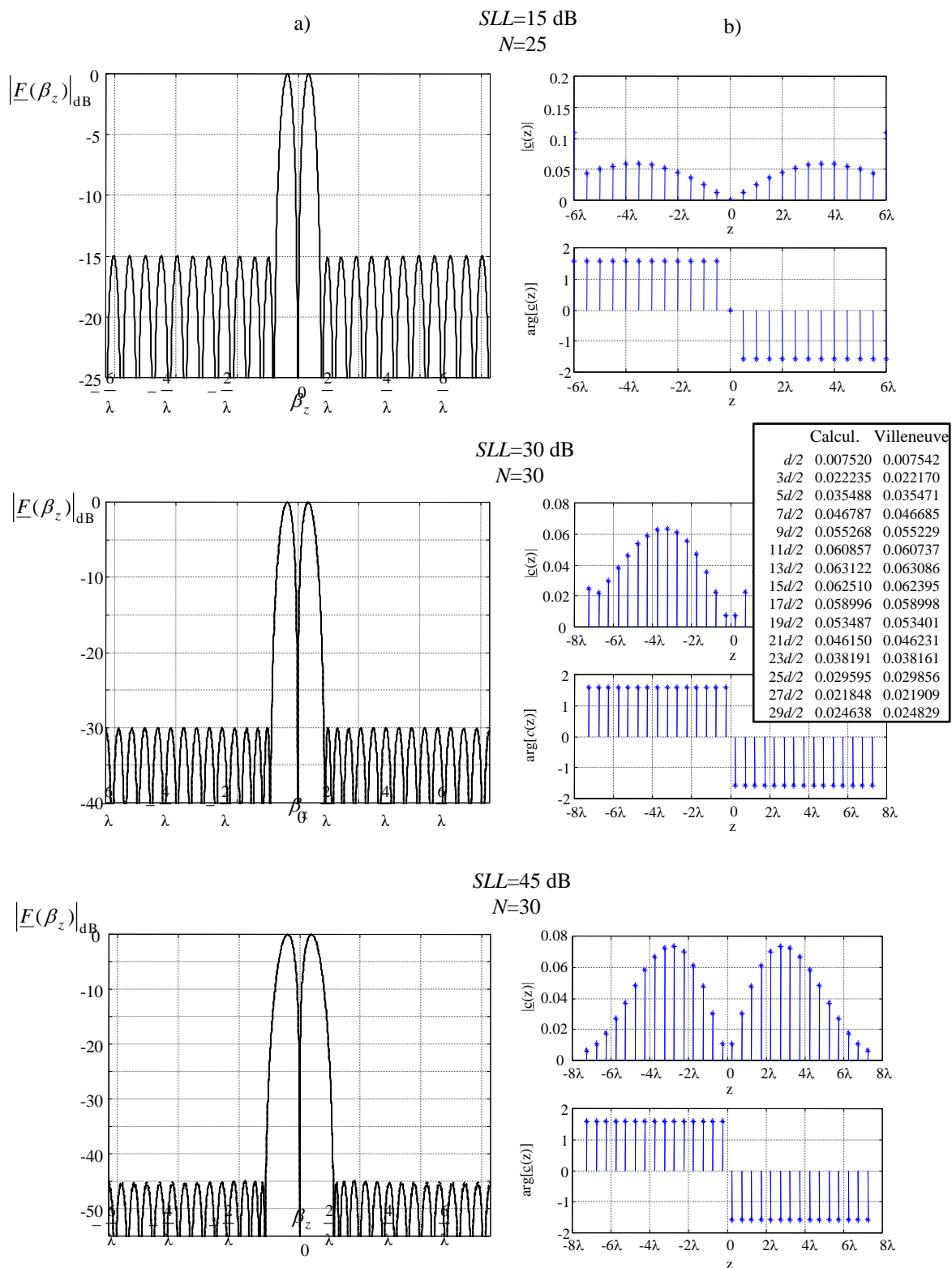


Fig. 4.30 - Agrupamentos semelhantes aos de McNamara: a) factor de agrupamento obtido pela técnica desenvolvida, a traço contínuo, e da síntese de Zolotarev, a tracejado; b) respectivas distribuições de corrente: (*) para a técnica desenvolvida e (.) para Zolotarev.

Nos exemplos apresentados na figura 4.30, K foi escolhido de modo a que todos os lóbulos secundários tivessem a mesma amplitude. Como já foi referido, para valores de K inferiores os lóbulos secundários mais afastados decaem segundo a envolvente do seno cardinal periódico.

Consideremos o exemplo para $K=6$, $N=55$, $d=0,5\lambda$ e $SLL=20$. Aplicando a técnica, a figura 4.31 mostra o resultado. Para lóbulos iguais, ou seja, com $K=26$ a directividade máxima é de $D_0=29,96$, enquanto que para $K=6$ tem-se $D_0=32,5$. Um valor de K inferior ao necessário para impor todos os lóbulos com o mesmo nível também é efectivo na diminuição do pico do extremo da distribuição de corrente.

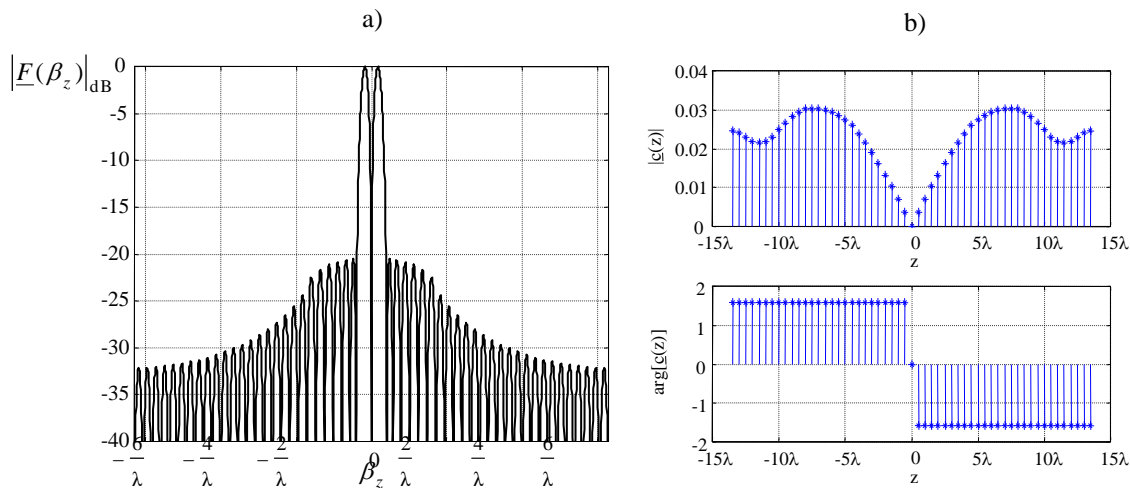


Fig. 4.31 - Técnica desenvolvida com decaimento dos lóbulos secundários a partir da ordem K : a) factor de agrupamento; b) respectiva distribuição de corrente.

São algumas as vantagens da técnica desenvolvida neste trabalho relativamente ao método de McNamara. A primeira é a sua simplicidade, não necessitando de utilizar funções elípticas como acontece com os polinómios de Zolotarev, mas requer apenas a multiplicação de funções simples. A segunda é que, enquanto a síntese de Zolotarev só permite sintetizar agrupamentos com um número par de elementos, a técnica apresentada permite obter qualquer número de elementos. A terceira vantagem é conseguir um decaimento dos lóbulos secundários de uma forma directa, ao contrário do método de McNamara [22] que necessita de recorrer a técnicas iterativas. A principal desvantagem é a obtenção de alguns dos parâmetros, sendo preciso recorrer a curvas de interpolação. Contudo, utilizando a forma de gerar o factor de agrupamento, por multiplicação de funções, posteriormente ver-se-á a possibilidade de realizar o processo de síntese sem recurso a essas curvas. Uma outra desvantagem da técnica relativamente à de McNamara é a de não permitir qualquer decaimento para os lóbulos secundários.

O tipo de abordagem descrito nesta secção, bem como nas secções anteriores, mostra uma outra forma de gerar factores de agrupamento, onde o recurso às características da transformada de Fourier continua a mostrar potencialidades a serem exploradas.

4.4 - Interpolação Polinomial

O processo de síntese de antenas consiste em obter o factor de agrupamento que melhor aproxima o factor de agrupamento desejado, segundo um determinado critério de erro. Uma forma de o realizar é escolhendo um polinómio com certas características num determinado intervalo, como é o caso da síntese de Tschebyscheff, Zolotarev, Gegenbauer, etc. As mudanças de variável, como a (2.36), (2.52) e (2.60), que permitem fazer a correspondência de um intervalo da função polinomial ao factor de agrupamento, pelo facto de utilizarem uma função sinusoidal truncam automaticamente a distribuição de corrente. Isto porque após a mudança de variável ficamos com um polinómio trigonométrico que, como se comprovou na secção 2.4.4, corresponde a uma sequência de Diracs pesados pelos coeficientes das correntes.

Outro processo de síntese consiste na aproximação do factor de agrupamento desejado por um polinómio que passe por um dado conjunto de pontos. É evidente que ao fazê-lo obtém-se um polinómio na variável independente, β , e embora a função polinomial obtida seja uma aproximação do factor de agrupamento, a distribuição de corrente não é realizável. Na realidade, a transformada de Fourier da variável independente elevada a um factor n tem como resultado um Dirac derivado n vezes. No entanto, se tivermos um polinómio trigonométrico a distribuição de corrente já é limitada. A forma de obter o polinómio pode ser efectuada através dos métodos de interpolação, como é exemplo a interpolação de Lagrange.

Com a interpolação polinomial, desenvolvida seguidamente, pretende-se controlar os valores e as posições das amostras do factor de agrupamento. Esta situação é semelhante à aplicação do teorema da amostragem para um agrupamento limitado, mas com a técnica de interpolação a amostragem é realizada de uma forma não uniforme. Na verdade, enquanto que o teorema da amostragem obriga a utilizar pontos equidistantes de um período do factor de agrupamento, no processo de interpolação pode-se impor qualquer posição e valor para uma determinada amostra.

4.4.1 - Interpolação para Funções com Simetrias

Neste procedimento parte-se da ideia de aproximar um dado factor de agrupamento por um polinómio trigonométrico. Como veremos, para que o número de elementos seja da mesma ordem de grandeza que o número de pontos de amostragem é necessário que a função a gerar seja simétrica em relação à origem.

Para se obter o polinómio deve-se escolher um certo conjunto de pontos do factor de agrupamento desejado e aplicar a fórmula de interpolação de Lagrange [23], dada por

$$P(x) = \sum_{n=0}^{M-1} y_n \frac{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq n}}^{M-1} (x - x_i)}{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq n}}^{M-1} (x_n - x_i)} \quad (4.52)$$

O polinómio trigonométrico é obtido mapeando o intervalo de interesse do factor de agrupamento, dado por $-\pi/d \leq \beta_z \leq \pi/d$, num que tenha uma variação aproximada. Uma mudança de variável que o realiza é a seguinte:

$$x = \frac{\pi}{d} \operatorname{sen}\left(\frac{\beta_z d}{2}\right) \quad (4.53)$$

Quando β_z varia entre $-\pi/d$ até 0 e depois até π/d , x varia entre $-\pi/d$ e π/d passando por 0. Entre esses valores a variação segue a função sinusoidal. Como após substituir a variável x na equação (4.52) a constante π/d do denominador corta com a do numerador esse termo pode ser retirado de (4.53).

A mudança de variável anterior é análoga à utilizada nos polinómios típicos, apresentados no segundo capítulo. O factor de agrupamento, aproximado a um polinómio trigonométrico, é, então, obtido por

$$\underline{F}(\beta_z) = P(x) \quad (4.54)$$

com

$$\begin{aligned} x &= \operatorname{sen}\left(\frac{\beta_z d}{2}\right) \\ x_n &= \operatorname{sen}\left(\frac{\beta_{zn} d}{2}\right) \\ y_n &= \underline{F}(\beta_{zn}) \end{aligned} \quad (4.55)$$

em que β_{zn} são os pontos de interpolação desejados. Tendo o factor de agrupamento, a distribuição de corrente é determinada pelo método da Relação de Fourier, aplicando o teorema da amostragem adaptado e a FFT.

A ideia do polinómio interpolador trigonométrico tem sido utilizada em processamento de sinal no projecto de filtros com *equiripple*, embora esses trabalhos recorram a outra expressão para a fórmula da interpolação de Lagrange e a mudança de variável seja um co-seno (cf. secção 1.11). Em antenas foi abordada por Ma [24] com a mudança de variável em co-seno, mas para diagramas de potência, e, no seguimento dos trabalhos nos filtros, Shpak e Antoniou [25] aplicam a mesma técnica em antenas.

Sabendo que o polinómio trigonométrico conduz a uma distribuição de corrente limitada, falta ver quantos elementos são produzidos com M pontos de interpolação. Para isso analisemos a expressão (4.52) para funções par e ímpar e com M sendo um número par ou ímpar de pontos.

Começemos por analisar M ímpar. Neste caso, a equação (4.52) fica

$$\begin{aligned}
 P(x) = & y_{\frac{M-1}{2}} \frac{\left(x - x_{\frac{M-1}{2}+1}\right) \dots (x-0) \dots \left(x - x_{\frac{M-1}{2}-1}\right) \left(x - x_{\frac{M-1}{2}}\right)}{\left(x_{\frac{M-1}{2}} - x_{\frac{M-1}{2}+1}\right) \dots \left(x_{\frac{M-1}{2}} - 0\right) \dots \left(x_{\frac{M-1}{2}} - x_{\frac{M-1}{2}}\right)} \\
 & + \dots \\
 & + y_{-n} \frac{\left(x - x_{\frac{M-1}{2}}\right) \dots (x - x_{-n-1})(x - x_{-n+1}) \dots (x-0) \dots \left(x - x_{\frac{M-1}{2}}\right)}{\left(x_{-n} - x_{\frac{M-1}{2}}\right) \dots (x_{-n} - x_{-n-1})(x_{-n} - x_{-n+1}) \dots (x_{-n} - 0) \dots \left(x_{-n} - x_{\frac{M-1}{2}}\right)} \\
 & + \dots \\
 & + y_0 \frac{\left(x - x_{\frac{M-1}{2}}\right) \dots (x - x_{-1})(x - x_1) \dots \left(x - x_{\frac{M-1}{2}}\right)}{\left(0 - x_{\frac{M-1}{2}}\right) \dots (0 - x_{-1})(0 - x_1) \dots \left(0 - x_{\frac{M-1}{2}}\right)} \\
 & + \dots \\
 & + y_n \frac{\left(x - x_{\frac{M-1}{2}}\right) \dots (x-0) \dots (x - x_{n-1})(x - x_{n+1}) \dots \left(x - x_{\frac{M-1}{2}}\right)}{\left(x_n - x_{\frac{M-1}{2}}\right) \dots (x_n - 0) \dots (x_n - x_{n-1})(x_n - x_{n+1}) \dots \left(x_n - x_{\frac{M-1}{2}}\right)} \\
 & + \dots \\
 & + y_{\frac{M-1}{2}} \frac{\left(x - x_{\frac{M-1}{2}}\right) \dots (x-0) \dots \left(x - x_{\frac{M-1}{2}-1}\right)}{\left(x_{\frac{M-1}{2}} - x_{\frac{M-1}{2}}\right) \dots \left(x_{\frac{M-1}{2}} - 0\right) \dots \left(x_{\frac{M-1}{2}} - x_{\frac{M-1}{2}-1}\right)}
 \end{aligned} \tag{4.56}$$

Para uma função par, tem-se que $x_n = -x_n$, $x_0 = 0$ e $y_n = y_n$, e a expressão anterior transforma-se em

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\frac{M-1}{2}} y_n \frac{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq n}}^{\frac{M-1}{2}} (x^2 - x_i^2)}{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq n}}^{\frac{M-1}{2}} (x_n^2 - x_i^2)} \tag{4.57}$$

ou seja, o polinómio só contém termos em x de expoente par.

Para uma função ímpar, tem-se que $x_n = -x_n$, $x_0 = 0$, $y_n = -y_n$ e $y_0 = 0$, e a expressão (4.56) fica

$$P(x) = \sum_{n=1}^{\frac{M-1}{2}} y_n \frac{x \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq n}}^{\frac{M-1}{2}} (x^2 - x_i^2)}{x_n \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq n}}^{\frac{M-1}{2}} (x_n^2 - x_i^2)} \quad (4.58)$$

e o polinómio só contém termos de expoente ímpar.

Se M for par, a expressão resultante é análoga à (4.56) sem a amostra na origem, o que conduz a expressões semelhantes às anteriores, mas com $n, i = 1, 2, \dots, M/2$.

Quanto ao grau do polinómio, para uma função par tem-se um polinómio de grau $M-1$ se M ímpar e grau $M-2$ se M par. Para uma função ímpar tem-se um polinómio de grau $M-2$ se M ímpar e grau $M-1$ se M par. Uma função genérica terá termos quer de grau par quer de grau ímpar. O grau do polinómio é $M-1$, quer M seja par ou ímpar.

Um polinómio só com termos de expoente par, após a substituição da expressão (4.55), só conterà termos em co-seno, já que $\sin^2(\beta_c d/2) = [1 - \cos(\beta_c d)]/2$. A sua transformada de Fourier consistirá em Diracs nas posições $z = 0, \pm d, \pm 2d, \dots, (N-1)d/2$, o que dá N coeficientes de Diracs, sendo $N=M$ para M ímpar e $N=M-1$ para M par, ou seja, mais um que o grau do polinómio. O agrupamento de antenas tem um número ímpar de elementos, sendo a distribuição de corrente uma função par.

Para um polinómio só com termos de expoente ímpar, após a mudança de variável, a transformada terá Diracs nas posições $z = \pm d/2, \pm 3d/2, \dots, (N-1)d/2$, o que também dá N coeficientes, sendo $N=M-1$ para M ímpar e $N=M$ para M par. Neste caso, não existe qualquer vantagem em utilizar um número ímpar de pontos para interpolar o polinómio, uma vez que o que se faz é acrescentar o ponto na origem, cujo valor é nulo. O agrupamento de antenas tem um número par de elementos, sendo a distribuição de corrente uma função ímpar.

Como qualquer função é a soma de uma par com uma ímpar, para uma função genérica a transformada do polinómio terá Diracs nas posições $z = 0, \pm d/2, \pm d, \pm 3d/2, \pm 2d, \dots, (M-1)d/2$, dando $N=2M-1$ coeficientes de Dirac na transformada de Fourier¹. A distribuição de corrente é obtida pela FFT, mas considerando agora que o intervalo entre elementos é de $d/2$. Desta forma, impondo o valor de N , este processo só permite controlar $(N+1)/2$ pontos do factor de agrupamento.

Com o intuito do processo de síntese ser eficiente, o número de elementos do agrupamento tem que ser da mesma ordem de grandeza do número de pontos de interpolação, de modo que esta técnica, com a mudança de variável apresentada em (4.55), só pode ser usada para sintetizar agrupamentos cujo respectivo factor de agrupamento tenha simetrias par, ímpar ou de meia onda.

¹ O grau do polinómio é igual a $N-1$. Por seu lado, o valor de N é duas vezes o grau do polinómio mais 1, o que dá $2M-1$.

Na técnica apresentada, no sentido de gerar um dado factor de agrupamento simétrico, começa-se por escolher os pontos de interpolação dentro do intervalo $-\pi/d \leq \beta_z \leq \pi/d$ e a seguir aplica-se o processo de interpolação desenvolvido anteriormente. Existe, porém, uma situação ainda não contemplada que é pretender-se uma distribuição de corrente par, mas determinada com um número par de elementos (elementos em $z = \pm d/2, \pm 3d/2, \dots$). Este agrupamento é resultado de um factor de agrupamento com simetria de meia onda, como mostra a figura 4.32a). A aplicação do processo de interpolação envolve, neste caso, alguns cuidados a ter. Como a função é par, utilizando um número par ou ímpar de pontos simétricos dentro do intervalo $-\pi/d \leq \beta_z \leq \pi/d$, como se visualiza na figura 4.32b), o que se consegue gerar é o polinómio que dá origem a um agrupamento com um número ímpar de elementos de corrente, como indica a figura 4.32c).

Para resolver o problema tem-se duas formas de realizar a interpolação. A primeira consiste em considerar que o período da função é de $-2\pi/d \leq \beta_z \leq 2\pi/d$, como de facto comprova a figura 4.32a), o que faz com que a mudança de variável dada por (4.55) deva ser agora $x = \text{sen}(\beta_z d/4)$. Com os pontos pretendidos dentro do intervalo $-\pi/d \leq \beta_z \leq \pi/d$ gera-se o intervalo de $-2\pi/d \leq \beta_z \leq -\pi/d$ e de $\pi/d \leq \beta_z \leq 2\pi/d$, por forma a obter um conjunto de pontos com simetria de meia onda. Interpolando através desses pontos chega-se a uma função com as características desejadas.

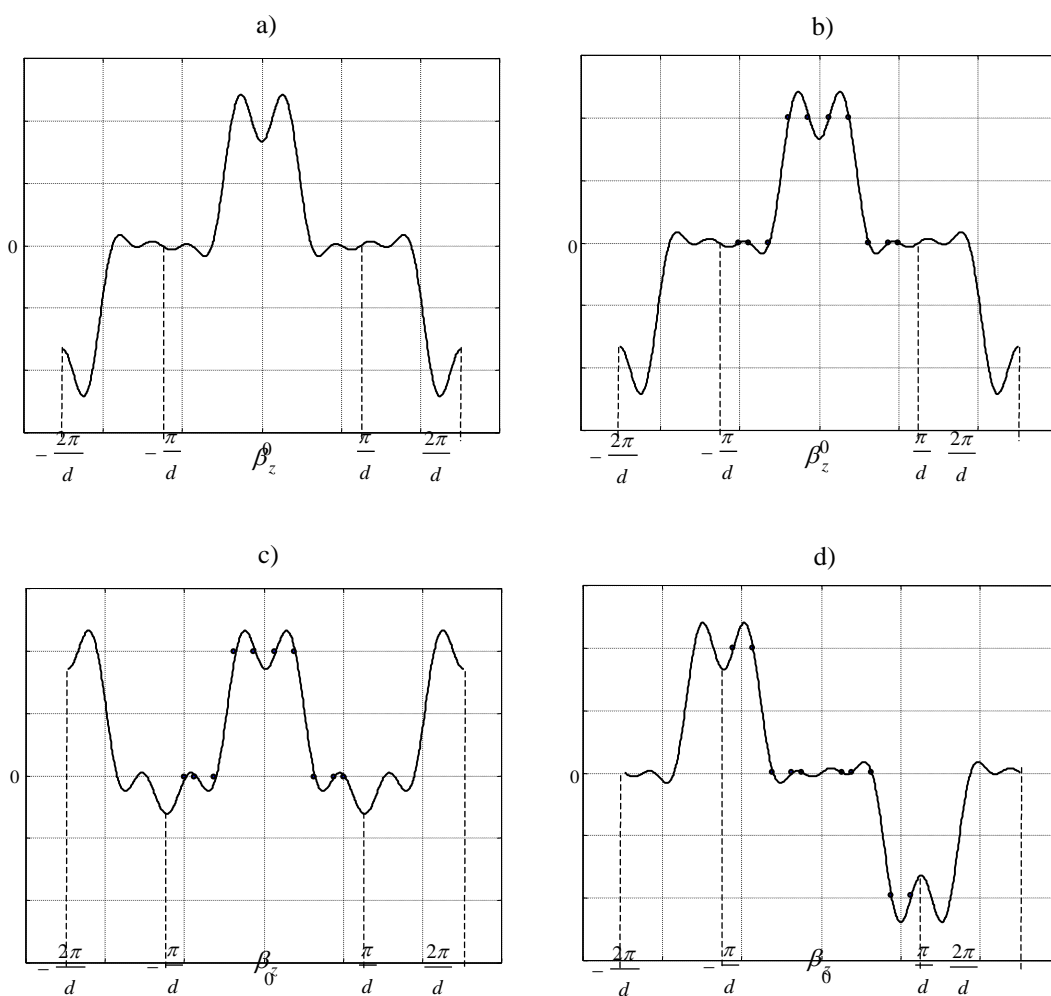


Fig. 4.32 - a) Função com simetria de meia onda; b) pontos de interpolação; c) polinómio gerado com esses pontos de interpolação; d) polinómio gerado utilizando a transformação apresentada na tabela 4.2.

Outro processo de gerar este agrupamento que, ao contrário da situação anterior, não necessita de duplicar o número de pontos a interpolar nem de alterar a forma da mudança de variável baseia-se no facto de que este tipo de função tem simetria ímpar em torno de $\pm\pi/d$. A obtenção da função passa por utilizar o intervalo $0 \leq \beta_z \leq 2\pi/d$ (ou $-2\pi/d \leq \beta_z \leq 0$) e construir um vector de pontos que tenha simetria ímpar. Consoante a escolha do número de pontos e da sua posição tem-se diferentes agrupamentos. A tabela 4.2 mostra como formar os vectores de dados para gerar o polinómio com as características desejadas. Entre parênteses apresenta-se o valor de N (número par) indicando, assim, o número de elementos de corrente que se obtém para cada caso. O factor de agrupamento é obtido por interpolação através de (4.55). A figura 4.32d) apresenta o polinómio gerado após a transformação considerada. Como se pode comprovar pela figura, este factor de agrupamento vem descentrado de π/d , como era de esperar pela forma de realizar a interpolação, sendo o pretendido obtido atrasando de π/d . A respectiva distribuição de corrente é determinada pelo método da Relação de Fourier, tendo em conta o teorema da amostragem adaptado a este trabalho e a FFT. Como o polinómio trigonométrico está avançado de π/d , as correntes devem ser multiplicadas pelo factor $e^{-jz\pi/d}$ para dar origem ao factor de agrupamento desejado.

| M | Pontos escolhidos | Novas posições e valores |
|--|--|--|
| par $\beta_{z\frac{M}{2}} \neq \frac{\pi}{d}$ | $\beta_z = [-\beta_{z\frac{M}{2}}, \dots, -\beta_{z1}, \beta_{z1}, \dots, \beta_{z\frac{M}{2}}]$ $F = [F_{\frac{M}{2}}, \dots, F_1, F_1, \dots, F_{\frac{M}{2}}]$ | $\beta_z = [\beta_{z1} - \frac{\pi}{d}, \dots, \beta_{z\frac{M}{2}} - \frac{\pi}{d}, -\beta_{z\frac{M}{2}} + \frac{\pi}{d}, \dots, -\beta_{z1} + \frac{\pi}{d}]$ $F = [F_1, \dots, F_{\frac{M}{2}}, -F_{\frac{M}{2}}, \dots, -F_1]$ ($N = M$) |
| par $\beta_{z\frac{M}{2}} = \frac{\pi}{d}$ ($F_{\frac{M}{2}} = 0$) | $\beta_z = [-\beta_{z\frac{M}{2}}, \dots, -\beta_{z1}, \beta_{z1}, \dots, \beta_{z\frac{M}{2}}]$ $F = [F_{\frac{M}{2}}, \dots, F_1, F_1, \dots, F_{\frac{M}{2}}]$ | $\beta_z = [\beta_{z1} - \frac{\pi}{d}, \dots, \beta_{z\frac{M}{2}} - \frac{\pi}{d}, -\beta_{z\frac{M}{2}-1} + \frac{\pi}{d}, \dots, -\beta_{z1} + \frac{\pi}{d}]$ $F = [F_1, \dots, F_{\frac{M}{2}}, -F_{\frac{M}{2}-1}, \dots, -F_1]$ ($N = M - 2$) |
| ímpar $\beta_{z\frac{M-1}{2}} \neq \frac{\pi}{d}$ | $\beta_z = [-\beta_{z\frac{M-1}{2}}, \dots, -\beta_{z1}, 0, \beta_{z1}, \dots, \beta_{z\frac{M-1}{2}}]$ $F = [F_{\frac{M-1}{2}}, \dots, F_1, F_0, F_1, \dots, F_{\frac{M-1}{2}}]$ | $\beta_z = [0, \beta_{z1} - \frac{\pi}{d}, \dots, \beta_{z\frac{M-1}{2}} - \frac{\pi}{d}, -\beta_{z\frac{M-1}{2}} + \frac{\pi}{d}, \dots, -\beta_{z1} + \frac{\pi}{d}, \frac{\pi}{d}]$ $F = [F_0, F_1, \dots, F_{\frac{M}{2}}, -F_{\frac{M}{2}}, \dots, -F_1, -F_0]$ ($N = M + 1$) |
| ímpar $\beta_{z\frac{M-1}{2}} = \frac{\pi}{d}$ ($F_{\frac{M-1}{2}} = 0$) | $\beta_z = [-x_{\frac{M-1}{2}}, \dots, -x_1, 0, x_1, \dots, x_{\frac{M-1}{2}}]$ $F = [F_{\frac{M-1}{2}}, \dots, F_1, F_0, F_1, \dots, F_{\frac{M-1}{2}}]$ | $\beta_z = [0, x_1 - \frac{\pi}{d}, \dots, \beta_{z\frac{M-1}{2}} - \frac{\pi}{d}, -\beta_{z\frac{M-1}{2}-1} + \frac{\pi}{d}, \dots, -\beta_{z1} + \frac{\pi}{d}, \frac{\pi}{d}]$ $F = [F_0, F_1, \dots, F_{\frac{M-1}{2}}, -F_{\frac{M-1}{2}-1}, \dots, -F_1, -F_0]$ ($N = M - 1$) |

Tabela 4.2 - Forma de aplicar o processo de interpolação, de modo a obter um factor de agrupamento par com um número par de elementos.

4.4.2 - Síntese de Factores de Agrupamento Tipo Pedestal

A técnica de interpolação apresentada pode ser utilizada para se gerar factores de agrupamento do tipo pedestal, isto é, constante numa dada zona angular do factor de agrupamento e nulo fora da mesma. Aplicando directamente o método da Relação de Fourier e truncando com a janela rectangular obtém-se uma aproximação cujos lóbulos secundários podem ter valores elevados.

Na secção 4.2.2 foi empregue a técnica da limitação espacial de fontes para diminuir essa amplitude dos lóbulos. Com a técnica de interpolação pretende-se gerar factores de agrupamento com *equiripple*, quer na zona de lóbulos secundários quer na zona do pedestal. Este problema é análogo ao de projecto de filtros passa-baixo, passa banda ou passa-alto, num circuito electrónico.

4.4.2.1 - Utilização dos Zeros do Polinómio de Tschebyscheff

Verificando-se que no projecto de filtros digitais a largura dos lóbulos secundários aumentava gradualmente a partir do pedestal, surge a ideia de se obter este tipo de factor de agrupamento utilizando como pontos de interpolação os zeros do polinómio de Tschebyscheff. Sendo assim, vai-se apresentar uma técnica que permite gerar o factor de agrupamento com aproximadamente *equiripple*. Dado um pedestal normalizado centrado em θ_0 , comecemos por definir a constante

$$\beta_{z_0} = \beta \cos(\theta_0) \quad (4.59)$$

De seguida, como a técnica de interpolação exige uma função par para que o número de elementos seja da ordem do número de pontos de interpolação, desloca-se o pedestal de modo a centrá-lo em $\theta=90^\circ$ e passa-se para a variável B_z . Como o gráfico é simétrico, considere-se apenas metade, sendo o extremo do pedestal dado por B_{z1} . Quanto ao valor de N , que pode ser calculado pelas condições da largura da zona de transição e pelo nível do *ripple*, como iremos ver mais adiante, distingamos os dois casos.

Para N ímpar, determina-se o número de pontos equidistantes que cabem dentro da metade do pedestal, sendo

$$N_p = \text{trunc}\left(\frac{\beta_{z1} N d}{2\pi}\right) \quad (4.60)$$

em que $\text{trunc}(x)$ trunca o valor de x . O restantes pontos para completar o número total necessário à interpolação são:

$$N_s = \frac{N-1}{2} - N_p \quad (4.61)$$

O valores das amostras de interpolação são, então, dados pelo vector

$$\underline{F}(\beta_z) = [F_{Np+N_s}, \dots, F_{Np+1}, F_{Np}, \dots, F_1, F_0, F_1, \dots, F_{Np+1}, \dots, F_{Np+N_s}] \quad (4.62)$$

em que $F_1=1, \dots, F_{N_p}=1, F_{N_p+1}=0, \dots, F_{N_p+N_s}=0$ e $F_0=1 \pm \delta$, sendo δ a amplitude do *ripple*. Os pontos de interpolação são obtidos em função dos zeros do polinómio de Tschebyscheff, sendo este dado pela forma

$$T(\beta_z) = \cos \left\{ (N-1) \arccos \left[x_0 \cos \left(\frac{\beta_z d}{2} \right) \right] \right\} \quad (4.63)$$

com x_0 calculado em função da amplitude do *ripple*, definido por *SLL* em dB, pela expressão (1.45). Os pontos de interpolação correspondentes aos 1s de (4.62) são dados por

$$\beta_{z_p} = -\frac{2}{d} \arccos \left\{ \frac{1}{x_0} \cos \left[\frac{(2k-1)\pi}{2(N-1)} \right] \right\} + D_p \quad k = 1, 2, \dots, N_p \quad (4.64)$$

em que D_p é determinado de modo a que o máximo do polinómio de Tschebyscheff coincida com a origem, sendo definido pela expressão

$$D_p = \frac{2}{d} \arccos \left\{ \frac{1}{x_0} \cos \left[\frac{(N_p+1)\pi}{(N-1)} \right] \right\} \quad (4.65)$$

Os pontos de interpolação correspondentes aos 0s de (4.62) são dados por

$$\beta_{z_s} = \frac{2}{d} \arccos \left\{ \frac{1}{x_0} \cos \left[\frac{(2k-1)\pi}{2(N-1)} \right] \right\} + D_s \quad k = 1, 2, \dots, N_s \quad (4.66)$$

em que D_s é determinado por forma a que o máximo do polinómio de Tschebyscheff coincida com π/d , sendo

$$D_s = \frac{\pi}{d} - \frac{2}{d} \arccos \left\{ \frac{1}{x_0} \cos \left[\frac{N_s \pi}{(N-1)} \right] \right\} \quad (4.67)$$

De seguida calcula-se o factor de agrupamento através da técnica de interpolação e as correntes são obtidas pelo método da Relação de Fourier.

Para N par, o processo é idêntico, ficando agora que

$$N_p = \text{trunc} \left(\frac{\beta_{z_1} N d}{2\pi} + \frac{1}{2} \right) \quad (4.68)$$

e

$$N_s = \frac{N}{2} - N_p \quad (4.69)$$

O valores das amostras de interpolação são

$$\underline{F}(\beta_{zn}) = [F_{N_p+N_s}, \dots, F_{N_p+1}, F_{N_p}, \dots, F_1, F_1, \dots, F_{N_p+1}, \dots, F_{N_p+N_s}] \quad (4.70)$$

em que $F_1=1, \dots, F_{N_p}=1, F_{N_p+1}=0, \dots, F_{N_p+N_s}=0$. Os pontos de interpolação correspondentes aos

Is de (4.70) são calculados pela expressão (4.64), mas com D_p dado por

$$D_p = \frac{2}{d} \arccos \left[\frac{1}{x_0} \cos \left(\frac{N_p \pi}{N-1} \right) \right] \quad (4.71)$$

Os pontos de interpolação correspondentes aos 0s de (4.70) são determinados pela expressão (4.66), mas com D_s determinado de modo a que o zero N_s+1 do polinómio de Tschebyscheff coincida com π/d ,

$$D_p = \frac{\pi}{d} - \frac{2}{d} \arccos \left\{ \frac{1}{x_0} \cos \left[\frac{[2(N_s + 1) - 1]\pi}{2(N-1)} \right] \right\} \quad (4.72)$$

O factor de agrupamento e as correntes são determinados como no caso anterior.

Para que o factor de agrupamento apareça centrado em β_{z_0} , basta deslocá-lo desse valor e, pelas propriedades da transformada de Fourier, a distribuição de corrente deve ser multiplicada pelo factor $e^{-j\beta_{z_0}z}$.

Como exemplo, consideremos que se pretende sintetizar um agrupamento com 26 elementos distanciados de $d=0,5\lambda$ e cujo factor de agrupamento seja o pedestal definido no intervalo $90^\circ \leq \theta \leq 130^\circ$, com um valor de *SLL* igual a 40 dB. A figura 4.33 mostra o resultado. Repare-se que os lóbulos secundários estão praticamente ao mesmo nível e também se tem praticamente *equiripple* na zona do pedestal. Notar que $0,01 = -40$ dB e que $1+0,01 \cong 0,086$ dB.

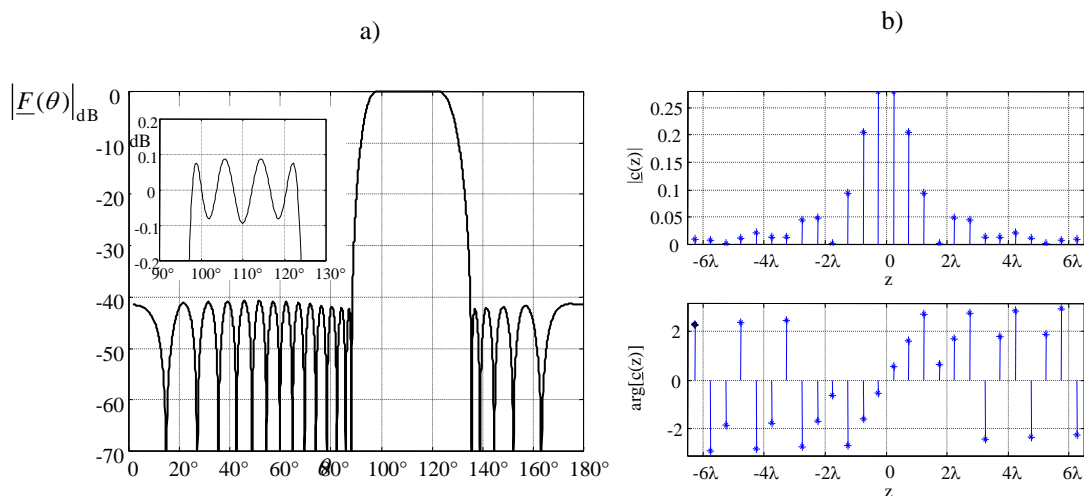


Fig. 4.33 - Síntese de um factor de agrupamento tipo pedestal: a) factor de agrupamento; b) distribuição e corrente.

Na técnica desenvolvida, o número de pontos de interpolação é igual ao número de elementos. No entanto, não é obrigatório que assim seja. Considerando um número ímpar de elementos, viu-se na secção anterior que se pode utilizar $M=N+1$ pontos. Para melhor entender a forma de amostragem vejamos onde aparecem os pontos no factor de agrupamento. A figura 4.34a) apresenta o processo de interpolação segundo a técnica desenvolvida, com M ímpar. A amostra central é colocada na origem. Se for utilizado um número par de pontos, em vez dessa amostra, são colocados dois pontos nas duas amostras que interceptam o ponto

$\underline{F}(\beta_z)=1$, como se pode observar na figura 4.34b), obtidos com auxílio dos zeros da função (4.63). O resultado é praticamente o mesmo.

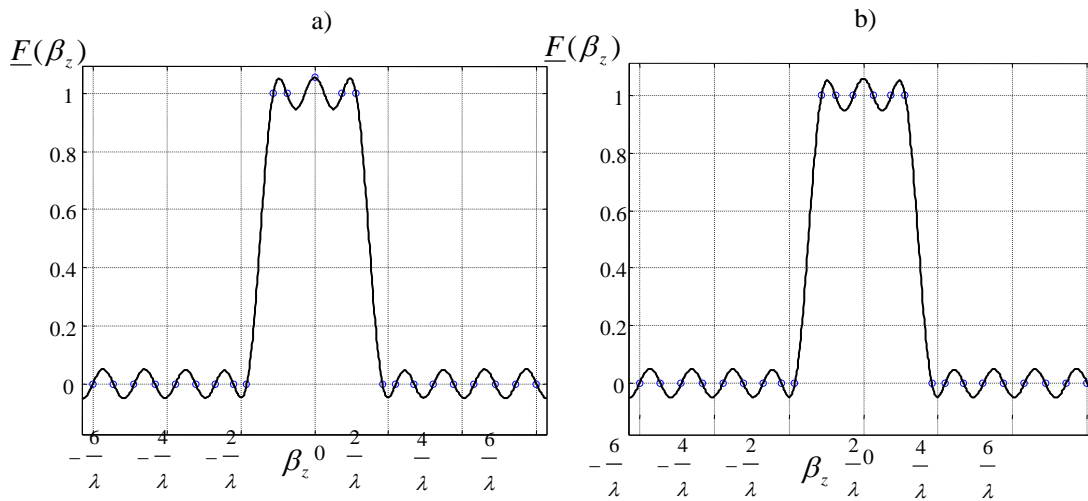


Fig. 4.34 - Número ímpar de elementos: a) interpolação com M ímpar; b) interpolação com M par.

A técnica desenvolvida para gerar este tipo de factor de agrupamento é simples de ser implementada, mas tem a desvantagem de ter o mesmo *ripple* nas duas zonas do pedestal. A técnica que vai ser apresentada de seguida elimina esta dificuldade. Também pode acontecer que o nível dos lóbulos secundários seja mais baixo que o pretendido, situação que pode ser corrigida calculando a diferença entre o nível desejado e o obtido e aplicando a técnica tendo em conta essa diferença.

4.4.2.2 - Utilizando uma Técnica Aplicada nos Filtros

Na implementação de filtros digitais existem várias técnicas que permitem gerar filtros passa-baixo ou passa-alto com *equiripple*, quer na zona de passagem quer na zona de corte. A maior parte dessas técnicas são iterativas, estando fora do âmbito deste trabalho. Contudo, Bagchi e Mitra [26] expõem uma técnica determinística para implementar filtros quase óptimos. Devido à possibilidade de efectuar a analogia entre a implementação de filtros digitais e a síntese de agrupamentos, essa técnica será utilizada para se gerar factores de agrupamento com *equiripple*, com amplitudes de *ripple* diferentes nas duas zonas de interesse.

Nos filtros a variável independente é a frequência ω , enquanto que neste trabalho é β_z . Comparando com a expressão apresentada em [26], a relação entre elas é dada por $\omega=\beta_z d$. Os parâmetros de controlo são o limite da banda de passagem, β_{zp} , o limite da banda de corte (zona dos lóbulos secundários), β_{zs} , o pico do *ripple* da zona de passagem, δ_p , e o pico do *ripple* da zona de corte, δ_s . Com estes valores, o número de elementos pode ser determinado pela expressão apresentada em [27], dada na variável independente de interesse por

$$N = \frac{-10 \log_{10}(\delta_p \delta_s) - 13}{2,324(\beta_{zs} - \beta_{zp})d} + 1 \quad (4.73)$$

A técnica começa por obter uma função analítica, definida em apenas metade devido à simetria [26]. Também se baseia nos polinómios de Tschebyscheff, mas de forma diferente da que foi desenvolvida na secção anterior.

Para N ímpar, a função analítica é dada por

$$H(\beta_z) = \begin{cases} 1 - \delta_p T_P [A_p \cos(a_p \beta_z d + b_p) + B_p], & 0 \leq \beta_z \leq \beta_{zp} \\ \delta_s T_S [A_s \cos(a_s \beta_z d + b_s) + B_s], & \beta_{zs} \leq \beta_z \leq \frac{\pi}{d} \end{cases} \quad (4.74)$$

em que $T_M(\cdot)$ é o polinómio de Tschebyscheff de ordem M , com

$$\begin{aligned} P &= N_p \\ S &= N_s \end{aligned} \quad (4.75)$$

sendo N_p o número de extremos na zona $0 \leq \beta_z < \beta_{zp}$ e N_s o número de extremos na zona $\beta_{zs} < \beta_z \leq \pi/d$. Eles são determinados pesando-se de forma proporcional as duas zonas do factor de agrupamento, com $N_p + N_s = (N-1)/2$. Os valores dos oito parâmetros de (4.74) são definidos por

$$\begin{aligned} A_p &= \frac{1}{2} \left[T_P^{-1} \left(\frac{1 + \delta_s}{\delta_p} \right) + 1 \right] \\ B_p &= A_p - 1 \\ A_s &= \frac{1}{2} \left[T_S^{-1} \left(\frac{1 + \delta_p}{\delta_s} \right) + 1 \right] \\ B_s &= A_s - 1 \\ a_p &= \frac{1}{\beta_{zp} d} \arccos \left(\frac{B_p - 1}{A_p} \right) \\ b_p &= \pi \\ a_s &= \frac{1}{\beta_{zs} d - \pi} \arccos \left(\frac{B_s - 1}{A_s} \right) \\ b_s &= \pi(1 - a_s) \end{aligned} \quad (4.76)$$

Os pontos de interpolação são as amostras colocadas nos extremos da função (4.74). Para a zona de passagem, tem-se que

$$\begin{aligned} H(\beta_{zk}) &= 1 \pm \delta_p \\ \beta_{zk} &= \frac{1}{a_p d} \left\{ \arccos \left[\frac{\cos \left(\frac{k\pi}{P} \right) - B_p}{A_p} \right] - b_p \right\}, \quad k = 1, 2, \dots, N_p \end{aligned} \quad (4.77)$$

De forma semelhante, para a zona de corte

$$H(\beta_{zk}) = \pm \delta_s$$

$$\beta_{zk} = \frac{1}{a_s d} \left\{ \arccos \left[\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{S}\right) - B_s}{A_s} \right] - b_s \right\}, \quad k = 1, 2, \dots, N_s \quad (4.78)$$

Para completar o número de pontos necessários recorre-se ao ponto em β_{zp} ou β_{zs} . O factor de agrupamento é determinado pela técnica de interpolação desenvolvida anteriormente. Como se dispõe de metade dos pontos, os restantes são obtidos por simetria. Não duplicando a origem, o número de pontos é de $2(N_p+N_s+1)-1=N$.

Para N par, a função analítica é mais uma vez dada por (4.74), mas com diferentes valores dos parâmetros:

$$P = N_p$$

$$S = 2N_s + 1$$

$$A_p = \frac{1}{2} \left[T_P^{-1} \left(\frac{1 + \delta_s}{\delta_p} \right) + 1 \right]$$

$$B_p = A_p - 1$$

$$A_s = T_C^{-1} \left(\frac{1 + \delta_p}{\delta_s} \right) + 1$$

$$B_s = 0$$

$$a_p = \frac{1}{\beta_{zp} d} \arccos \left(\frac{B_p - 1}{A_p} \right)$$

$$b_p = \pi$$

$$a_s = \frac{1}{\pi - \beta_{zs} d} \arcsen \left(\frac{1}{A_s} \right)$$

$$b_s = \frac{\pi}{2} (1 - 2a_s) \quad (4.79)$$

em que $N_p+N_s=N/2-1$. Os pontos de interpolação são calculados por (4.77), (4.78), mais um em β_{zp} ou β_{zs} e os restantes por simetria. Seguidamente é aplicada a técnica de interpolação utilizando a penúltima linha da tabela 4.2. Não duplicando a origem, o número de pontos antes de aplicar a transformação da tabela 4.2 é de $2(N_p+N_s+1)-1=N-1$ e após N pontos.

Como exemplo, consideremos um agrupamento de 31 elementos, $d=0,5\lambda$, de modo que $\delta_s=0,01$ (-40 dB), $\delta_p=0,03$ ($1\pm 0,03\cong\pm 0,26$ dB), $\beta_{zs}=2,38$ e $\beta_{zp}=1,74$. A figura 4.35 mostra o resultado. Comparar a zona de lóbulos secundários da figura obtida por esta técnica com a da figura 4.33.

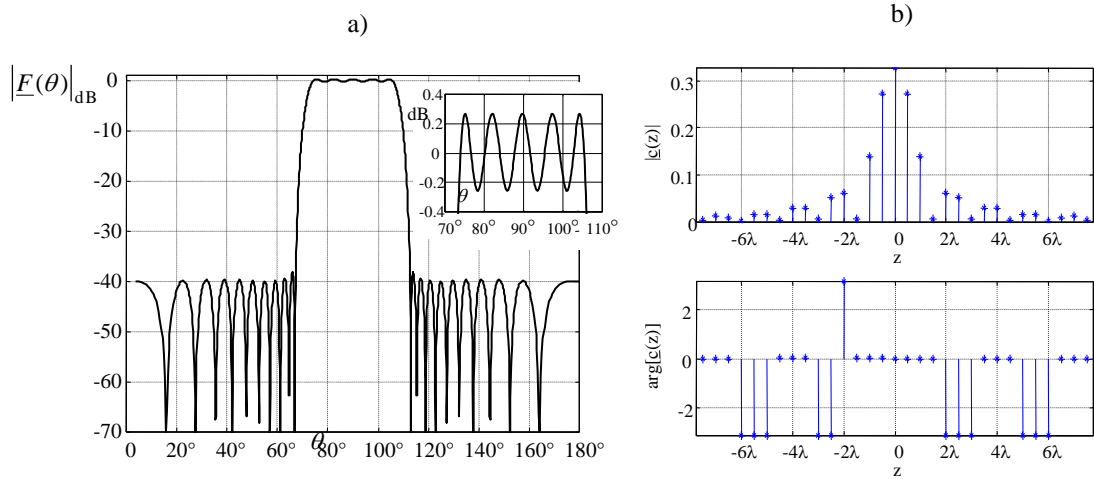


Fig. 4.35 - Síntese de um factor de agrupamento tipo pedestal: a) factor de agrupamento; b) distribuição e corrente.

Uma das desvantagens desta técnica é que ao impor um dado β_{zs} e β_{zp} os valores dos níveis dos lóbulos ou do *ripple* do pedestal podem estar longe dos desejados, a não ser que se aumente o valor de N .

4.4.3 - Interpolação Não uniforme

A técnica apresentada na secção 4.4.1 pode ser empregue para gerar factores de agrupamento simétricos, que passem por M pontos. Todavia, para funções sem qualquer tipo de simetria, com esse tipo de interpolação, tem-se $2M-1$ elementos, o que se traduz num subaproveitamento das potencialidades do processo de interpolação. Se for pretendido que, no caso geral, o número de elementos seja da mesma ordem de grandeza do número de pontos, deve-se procurar outro tipo de mapeamento para a variável x do polinómio interpolador. Olhando às propriedades da transformada de Fourier, a melhor mudança de variável seria dada por

$$x = e^{j\beta_z d} \quad (4.80)$$

uma vez que a sua transformada de Fourier consistirá num Dirac, ou seja, num elemento. Com esta mudança de variável, um polinómio que contenha todos os termos já só terá como transformada um conjunto de elementos igual ao número de pontos de interpolação.

Vejamos, então, qual a forma de mapeamento que permite obter um factor de agrupamento que passe por um determinado conjunto de pontos. Considerando (2.8) e (2.9), essas duas expressões podem tomar a seguinte forma:

$$\underline{F}(\beta_z) = e^{-j\beta_z \frac{N-1}{2} d} \sum_{n=0}^{N-1} c \left[\left(n - \frac{N-1}{2} \right) d \right] e^{j\beta_z n d} \quad (4.81)$$

Para que o factor de agrupamento passe pelo ponto β_{zi} com o valor $\underline{F}(\beta_{zi})$ impõe-se que

$$\sum_{n=0}^{N-1} c \left[\left(n - \frac{N-1}{2} \right) d \right] e^{j\beta_{zi} n d} = \underline{F}(\beta_{zi}) e^{j\beta_{zi} \frac{N-1}{2} d} \quad (4.82)$$

Para M pontos distintos, com $M=N$, tem-se um sistema de equações linearmente independentes com M incógnitas. A resolução desse sistema permite determinar as N correntes desejadas. Para evitar ter que se resolver um sistema de equações, que, no entanto, pode ser resolvido por inversão de uma matriz, façamo-lo através da interpolação de Lagrange. Para isso consideremos a expressão (4.52) na forma polinomial,

$$P(x) = \sum_{n=0}^{N-1} y_n \frac{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq n}}^{N-1} (x - x_i)}{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq n}}^{N-1} (x_n - x_i)} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{N-1} x^{N-1} = \sum_{n=0}^{N-1} a_n x^n \quad (4.83)$$

Como a interpolação de Lagrange dá o mesmo resultado que a resolução de um sistema de equações, comparando a equação (4.83) com a (4.81), o processo de interpolação é aplicado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \underline{F}(\beta_z) &= e^{-j\beta_z \frac{N-1}{2}d} P(x) \\ x &= e^{j\beta_z d} \\ x_n &= e^{j\beta_{zn} d} \\ y_n &= \underline{F}(\beta_{zn}) e^{j\beta_{zn} \frac{N-1}{2}d} \end{aligned} \quad (4.84)$$

A técnica de interpolação apresentada permite sintetizar um factor de agrupamento com qualquer forma. Sendo mais geral, obviamente que também permite sintetizar factores de agrupamento com simetrias, resultado que coincide com a técnica utilizada na secção 4.4.1.

A distribuição de corrente é obtida pelo método da Relação de Fourier, com recurso ao teorema da amostragem. Para isso, aplica-se a fórmula de interpolação de Lagrange com as substituições indicadas em (4.84), a fim de calcular os valores da função nos pontos de interesse para o referido teorema. O factor de agrupamento pode ser determinado pela primeira expressão de (4.84) ou pela transformada inversa da distribuição de corrente. No segundo caso o cálculo é muito mais rápido.

Em processamento de sinal, no contexto da generalização da transformada de Fourier discreta também é apresentada uma técnica de interpolação [28], embora não lhe seja dada essa atribuição. No entanto, os seus autores lidam com o plano complexo, de modo que a generalização é mais do âmbito da transformada Z do que da transformada de Fourier. Por isso, a técnica de interpolação desenvolvida é mais apropriada para aplicação na síntese de agrupamentos. Para mais, o cálculo dos coeficientes da transformada de Fourier é diferente.

A vantagem da presente técnica é realizar a amostragem não uniforme do factor de agrupamento. Enquanto que por aplicação do teorema da amostragem só se consegue controlar os pontos equiespaçados do factor de agrupamento, esta técnica permite controlar qualquer ponto do mesmo. Assim, ela pode ser empregue sempre que se pretenda um dado factor de agrupamento que passe por determinado conjunto de pontos, sendo estes equidistantes ou não. Tem aplicações na geração de factores de agrupamentos tipo pedestal, como foi exposto na secção anterior, de factores de agrupamentos com qualquer forma, como o caso da cosec(θ), na geração de nulos, etc.

4.4.4 - Síntese de Factores de Agrupamento Tipo cosec(θ)

Tendo-se desenvolvido a técnica geral de interpolação, vejamos a sua utilização para gerar outro tipo de factor de agrupamento. Trata-se do diagrama cosec(θ), que já foi referido anteriormente.

Consideremos que se pretende obter o seguinte factor de agrupamento:

$$A \begin{cases} 1 & \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \theta_1 \\ \frac{\operatorname{cosec}\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{cosec}\left(\theta_1 - \frac{\pi}{2}\right)} & \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \\ 0 & \text{outros} \end{cases} \quad (4.85)$$

em que A permite colocar a função na referência desejada, normalmente nos zero dB. Na variável β_z , tem-se que

$$\begin{cases} \frac{A}{\left(\frac{\beta_z}{\beta}\right) \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right)} & \beta \cos(\theta_2) \leq \beta_z \leq \beta \cos(\theta_1) \\ 1 & \beta \cos(\theta_1) \leq \beta_z \leq 0 \\ 0 & \text{outros} \end{cases} \quad (4.86)$$

Suponhamos um agrupamento com $N=26$ elementos, com distância entre eles de $d=0,5\lambda$, $\theta_1=95^\circ$ e $\theta_2=120^\circ$. Por aplicação directa do teorema da amostragem, o factor de agrupamento aproximado é o indicado na figura 4.36, em que $A=1$. Esse resultado é o mesmo que aplicar a técnica de interpolação com os pontos definidos pelos do teorema da amostragem, ou seja, com os pontos em $\beta_{z,k}=(2k+1)\pi/(Nd)$, $k=-N/2, \dots, N/2-1$.

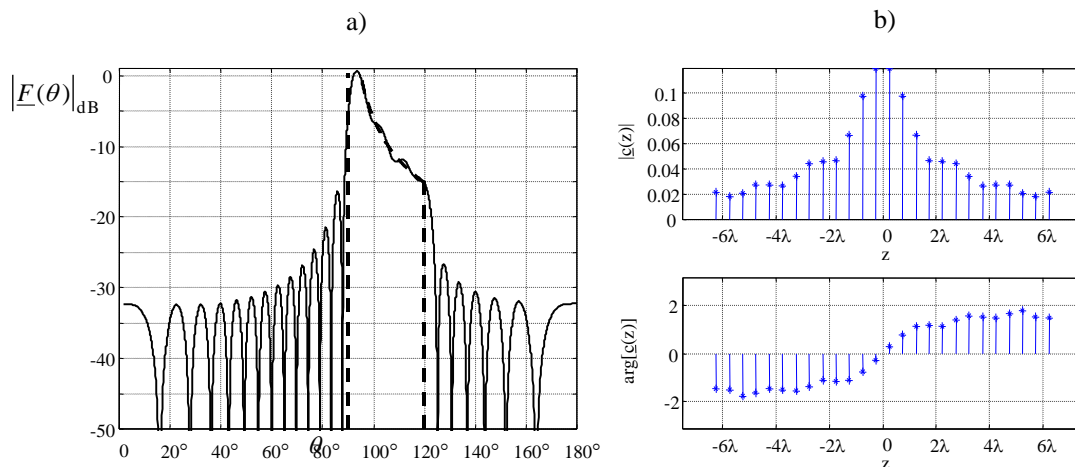


Fig. 4.36 - Factor de agrupamento tipo cosec(θ): a) factor de agrupamento; b) respectiva distribuição de corrente.

Foi demonstrado que os zeros do polinómio de Tschebyscheff são eficazes na geração de factores de agrupamento tipo pedestal com níveis de lóbulos secundários aproximadamente iguais. Vejamos uma técnica análoga para síntese da co-secante.

Suponhamos, então, que se pretende impor os lóbulos secundários do factor de agrupamento abaixo de um dado nível. Os pontos de interpolação são calculados em função dos zeros ou dos máximos do polinómio de Tschebyscheff, sendo este definido por

$$T(\beta_z) = \cos \left\{ (N-1) \arccos \left[x_0 \cos \left(\frac{\alpha \beta_z d}{2} \right) \right] \right\} \quad (4.87)$$

O número de pontos empregues em cada zona da função é igual ao número de amostras obtidas para aplicação do teorema da amostragem.

Começando pela zona do feixe, define-se por N_c o número de pontos a utilizar. Para obter a posição desses pontos começa-se por calcular os zeros da função (4.87), ou seja,

$$\beta_{zc} = \frac{2}{\alpha_c d} \arccos \left\{ \frac{1}{x_{0c}} \cos \left[\frac{(2k-1)\pi}{2(N-1)} \right] \right\} + D_c \quad k = 1, 2, \dots, N_c \quad (4.88)$$

sendo x_{0c} calculado pela expressão (1.45) com SLL igual ao nível máximo desejado para o *ripple*, SLL_c , α_c permite contrair ou dilatar a distância entre os pontos e D_c é obtido de modo a que o último ponto coincida com a última amostra da co-secante, B_{z0} , determinada pelo teorema da amostragem. Assim, tem-se que

$$D_c = \beta_{z0} + \frac{2}{\alpha_c d} \arccos \left\{ \frac{1}{x_{0c}} \cos \left[\frac{(2N_c-1)\pi}{2(N-1)} \right] \right\} \quad (4.89)$$

Para não surgir um pico elevado no extremo mais baixo da co-secante, a última amostra deve ter uma posição menos espaçada da anterior do que a dada por (4.88). Obtém-se bons resultados se a distância entre as duas últimas amostras for igual à distância entre as duas primeiras,

$$\beta_{zc}(N_c) = \beta_{zc}(N_c - 1) + \beta_{zc}(2) - \beta_{zc}(1) \quad (4.90)$$

Apesar de se recorrer a esta abordagem para posicionamento dos pontos, nesta zona é difícil obter uma técnica directa capaz de produzir *equiripple*. Com $\alpha_c=1,05$ consegue-se resultados satisfatórios. O valor das amostras é dado pela função (4.86).

Para o lado esquerdo da figura 4.36a) considera-se a equação (4.87), em que $x_0=x_{0e}$ é calculado pela expressão (1.45) com SLL igual ao nível desejado para os lóbulos secundários, SLL_e . Para o lado direito, tem-se $x_0=x_{0d}$ também obtido por (1.45), mas com $SLL=SLL_d$ sendo igual a SLL_e menos o valor do extremo mais baixo da co-secante. A constante α tem que ser calculada. Os pontos de interpolação correspondentes ao lado esquerdo do gráfico da figura 4.36a) são determinados pelos zeros do polinómio de Tschebyscheff,

$$\beta_{ze} = \frac{2}{\alpha d} \arccos \left\{ \frac{1}{x_{0e}} \cos \left[\frac{(2k-1)\pi}{2(N-1)} \right] \right\} + D_e \quad k = 1, 2, \dots, N_e \quad (4.91)$$

ou pelos máximos,

$$\beta_{ze} = \frac{2}{\alpha d} \arccos \left\{ \frac{1}{x_{0e}} \cos \left[\frac{k\pi}{(N-1)} \right] \right\} + D_e \quad k = 0, 1, \dots, N_e - 1 \quad (4.92)$$

sendo N_e o número de amostras empregues e D_e é determinado de modo a que o máximo do polinómio de Tschebyscheff coincida com π/d ,

$$D_e = \frac{\pi}{d} - \frac{2}{\alpha d} \arccos \left[\frac{1}{x_{0e}} \cos \left(\frac{N_e \pi}{(N-1)} \right) \right] \quad (4.93)$$

Os pontos de interpolação correspondentes aos lóbulos do lado direito do gráfico da figura 4.36a) são dados por

$$\beta_{zd} = -\frac{2}{\alpha d} \arccos \left\{ \frac{1}{x_{0d}} \cos \left[\frac{(2k-1)\pi}{2(N-1)} \right] \right\} + D_d \quad k = 1, 2, \dots, N_d \quad (4.94)$$

ou pelos máximos

$$\beta_{zd} = -\frac{2}{\alpha d} \arccos \left\{ \frac{1}{x_{0d}} \cos \left[\frac{k\pi}{(N-1)} \right] \right\} + D_d \quad k = 1, 2, \dots, N_d \quad (4.95)$$

sendo N_d o número de amostras utilizadas e D_d é determinado de modo a que o máximo do polinómio de Tschebyscheff coincida com $-\pi/d$,

$$D_d = -\frac{2}{\alpha d} \arccos \left[\frac{1}{x_{0d}} \cos \left(\frac{N_d \pi}{(N-1)} \right) \right] + \frac{\pi}{d} \quad (4.96)$$

Deve-se ter o cuidado de que a última amostra do lado esquerdo e a última amostra do lado direito tenham sinais iguais para N par e opostos para N ímpar, para um correcto comportamento dos lóbulos secundários. Para isso lida-se com a amostra central.

Existem duas constantes a determinar, A e α . Pode-se pensar que, se a constante A for igual a 1, o factor de agrupamento fica normalizado. Contudo, essa situação nem sempre acontece, pois o máximo vai depender fortemente do pico próximo do centro do gráfico. Quanto ao parâmetro α , este permite controlar a zona dos lóbulos secundários. Com a escolha apropriada deste parâmetro consegue-se níveis dos lóbulos secundários praticamente iguais.

Como a técnica é pouco sensível ao parâmetro A , um meio de determinar o seu valor aproximado é considerando que α toma um valor típico. Assim, para obter A fez-se $\alpha=0,97$ e utiliza-se como pontos de interpolação os zeros do polinómio de Tschebyscheff – equações (4.88), (4.91) e (4.94). Depois, aplicando a fórmula da interpolação desenvolvida neste trabalho, obtém-se o factor de agrupamento próximo da origem, visto que é nessa zona que surge o seu valor máximo. A é o inverso do máximo desta função.

Como agora o parâmetro α é a única incógnita, empregando mais uma vez os zeros do polinómio de Tschebyscheff, impõe-se que o factor de agrupamento tenha o valor de SLL_e em $B_z=\pi/d$. Através de um algoritmo de pesquisa de zero, ou outro método, calcula-se α .

Dispondo-se de todos os parâmetros, o factor de agrupamento é obtido através do processo de interpolação, mas utilizando os máximos do polinómio de Tschebyscheff para a zona dos lóbulos secundários, como é apresentado em (4.92) e (4.95), já que com estes consegue-se melhores resultados do que com os zeros do polinómio. A distribuição de corrente é determinada pelo método da Relação de Fourier.

Para o exemplo anterior, com $SLL_e=30$ dB e $SLL_c=40$ dB, o valor de α foi de 0,9776. A figura 4.37 mostra o resultado. A figura 4.37c) apresenta a diferença entre a função co-secante e o factor de agrupamento gerado.

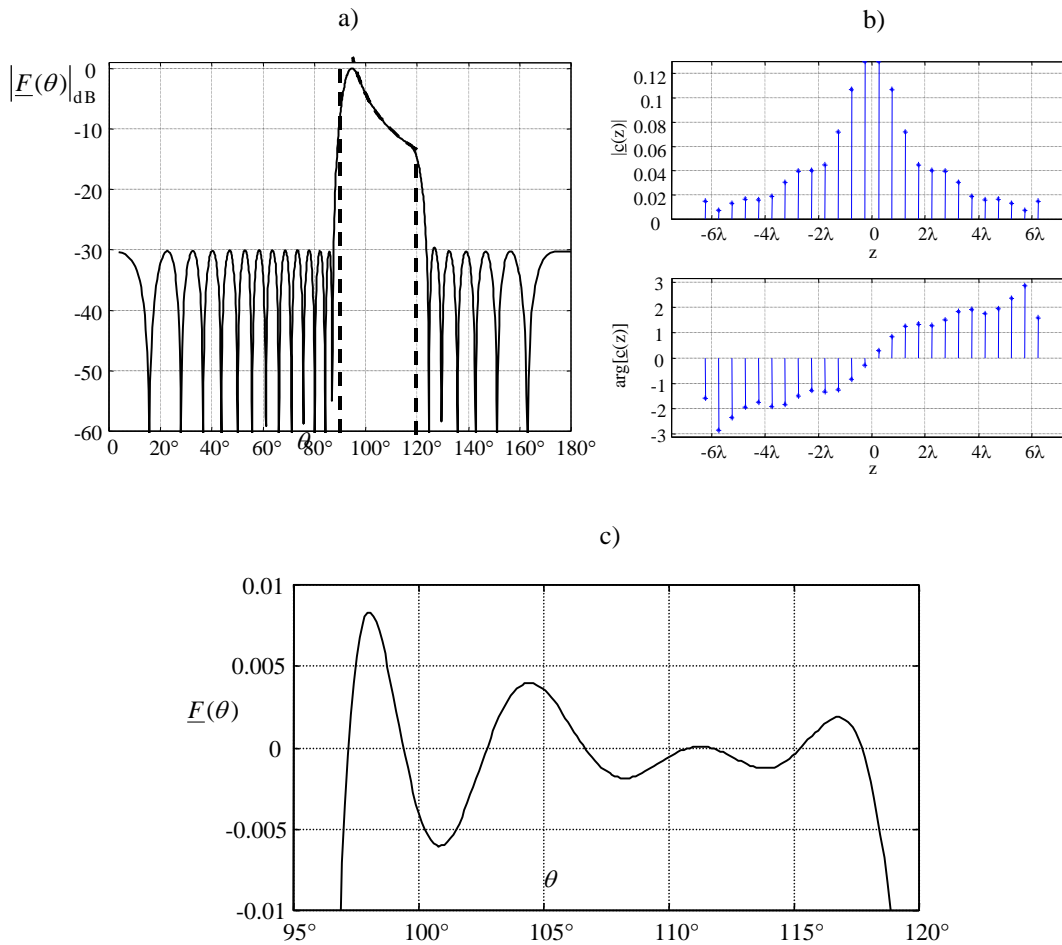


Fig. 4.37 - Síntese da cosec(θ) utilizando a técnica de interpolação desenvolvida: a) factor de agrupamento; b) respectiva distribuição de corrente; c) diferença entre a função co-secante e o factor de agrupamento gerado.

4.4.5 - Síntese de Zolotarev Revisitada

Na secção 4.3.4 foi desenvolvida uma técnica que permite gerar agrupamentos muito semelhantes aos obtidos pela síntese Zolotarev, através de multiplicação de funções simples parametrizadas. Foram referidas as várias vantagens dessa abordagem face ao processo de síntese realizado por McNamara e apresentado no primeiro capítulo deste trabalho. O inconveniente era a necessidade de interpolar curvas para obtenção de dois parâmetros necessários ao processo de síntese.

Vejamos como a técnica de interpolação permite realizar, de uma forma mais simples e directa, a síntese de agrupamentos tipo Zolotarev. Para esse objectivo serão utilizados os zeros da função (4.48) e um extremo da mesma.

Voltando, então, à equação (4.48), os dois parâmetros a determinar pelas curvas da figura 4.29 são C_2 e C_3 , respectivamente. Quanto a C_2 , este deixa de ser necessário. De facto, o novo processo utiliza apenas os zeros e o último extremo de (4.48). Deste modo, a função arco tangente que aparece nessa equação pode ser descartada, visto que ela foi empregue para dar forma aos dois lóbulos principais e não serão utilizados quaisquer pontos de interpolação sobre os mesmos a não ser o da origem que está bem determinado. Quanto ao parâmetro C_3 , como esta nova técnica é menos sensível aos desvios dos parâmetros em comparação com a da secção 4.3.4, pode-se determinar uma fórmula aproximada para as curvas da figura 4.29. Assim, retira-se que

$$\begin{aligned} C_3 &= 10^\eta + 1 \\ \eta &= \log_{10}(2,5 \times 10^{-5} SLL - 1,25 \times 10^{-4}) + 2,4256e^{-0,03N} - 0,5382 \end{aligned} \quad (4.97)$$

A posição dos pontos de interpolação são obtidos da função

$$\underline{F}(\beta_z) = \cos \left\{ (N-1) \arccos \left[x_{01} \cos \left(\frac{\alpha \beta_z d}{2} - \text{sign}(\beta_z) C_1 \right) \right] \right\} \quad (4.98)$$

com o parâmetro C_1 dado por (4.49), α por (4.51) e $x_{01} = x_0 C_3$, mais o zero na origem devido à função arco tangente. Para N par tem-se as seguintes posições dos pontos de interpolação:

$$\beta_z = \left[-\frac{\pi}{d}, -\beta_{z(\frac{N}{2}-2)}, \dots, -\beta_{z0}, 0, \beta_{z0}, \dots, \beta_{z(\frac{N}{2}-2)} \right] \quad (4.99)$$

sendo β_{zn} os zeros de (4.98), dados por

$$\beta_{zn} = \frac{2}{\alpha d} \left\{ C_1 + \arccos \left[\frac{1}{x_{01}} \cos \left(\frac{(2n+1)\pi}{2(N-1)} \right) \right] \right\}, \quad n = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 2 \quad (4.100)$$

Nesses pontos os valores de interpolação são

$$\underline{F}(\beta_z) = \left[10^{-\frac{SLL}{20}}, 0, \dots, 0 \right] \quad (4.101)$$

Para N ímpar tem-se as seguintes posições dos pontos de interpolação:

$$\beta_z = \left[-\beta_{z(\frac{N-1}{2}-1)}, \dots, -\beta_{z0}, 0, \beta_{z0}, \dots, \beta_{z(\frac{N-1}{2}-1)}, \beta_{zM} \right] \quad (4.102)$$

com

$$\begin{aligned} \beta_{zn} &= \frac{2}{\alpha d} \left\{ C_1 + \arccos \left[\frac{1}{x_{01}} \cos \left(\frac{(2n+1)\pi}{2(N-1)} \right) \right] \right\}, \quad n = 0, 1, \dots, \frac{N-1}{2} - 1 \\ \beta_{zM} &= \frac{2}{\alpha d} \left\{ C_1 + \arccos \left[\frac{1}{x_{01}} \cos \left(\frac{(N-3)\pi}{2(N-1)} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.103)$$

sendo β_{z_M} o último extremo do factor de agrupamento desejado. Os valores de interpolação são

$$\underline{F}(\beta_z) = \left[0, \dots, 0, 10^{-\frac{SLL}{20}} \right] \quad (4.104)$$

Dispondo-se dos pontos e dos respectivos valores, aplicando a técnica de interpolação polinomial, obtém-se factores de agrupamento muito semelhantes aos da síntese de Zolotarev. A vantagem deste processo face ao desenvolvido anteriormente, além do facto de não necessitar de curvas para obtenção dos parâmetros, é ser mais estável face aos mesmos. Uma das dificuldades que se encontrou com a técnica da secção 4.3.4 foi que não se conseguia obter os objectivos desejados para valores de *SLL* superiores a 50 dB. Na presente técnica, não só isso é possível como as expressões apresentadas para os diferentes parâmetros continuam a fornecer bons resultados.

Para o comprovar observemos o exemplo em que $N=45$, $d=0,5\lambda$ e $SLL=70$ dB. A figura 4.38 mostra o resultado. Notar que a síntese de Zolotarev não permite realizar este agrupamento por conter um número ímpar de elementos [21].

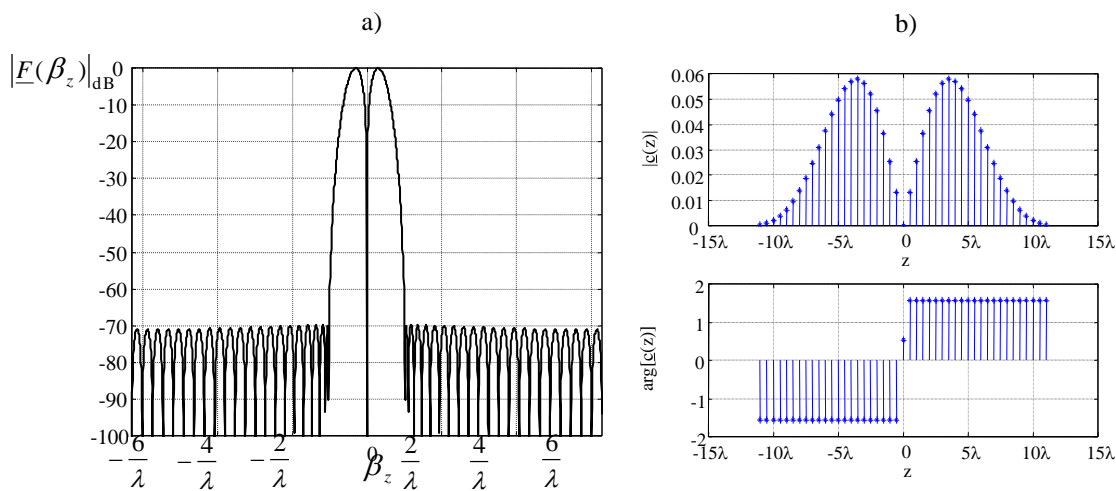


Fig. 4.38 - Agrupamento de Zolotarev obtido pela técnica de interpolação: a) factor de agrupamento; b) distribuição de corrente.

A abordagem efectuada pode ser aplicada a outros tipos de agrupamentos com características semelhantes ao apresentado.

4.4.6 - Geração de Nulos no Factor de Agrupamento

A interpolação polinomial, pela sua característica de passar por um dado conjunto de pontos do factor de agrupamento, é atraente para gerar nulos nesse factor de agrupamento.

Segundo o conceito usado na literatura, ao gerar um nulo através da inserção de um zero no factor de agrupamento, este será de banda estreita. Os de banda larga são obtidos por uma concentração de nulos muito próximos uns dos outros ou por diminuição efectiva do nível dos lóbulos secundários na zona do nulo.

Suponhamos que se pretende gerar um nulo na direcção $\theta=\theta_0$ num dado factor de agrupamento. Isto corresponde ao valor $\beta_z=\beta_{z_0}=\beta\cos(\theta_0)$. Uma forma de impor este nulo é aplicando o teorema da amostragem, mas com o trem de Diracs deslocado, de modo a que uma amostra coincida com β_{z_0} . Depois, basta fazer

$$\underline{F}(\beta_{z_0}) = 0 \quad (4.105)$$

Aplicando a FFT ao conjunto de amostras, como foi desenvolvido neste trabalho, obtém-se a distribuição de corrente. O factor de agrupamento pode ser determinada por transformada inversa. O factor de agrupamento assim obtido tem efectivamente um nulo na posição pretendida. Isto deve-se às propriedades da transformada de Fourier referente à aplicação do teorema da amostragem, em que o factor de agrupamento tem que passar pelos pontos de amostragem.

Não obstante, em geral, o factor de agrupamento original terá a sua estrutura de lóbulos secundários alterada. Normalmente, os lóbulos mais afectados são os mais próximos do nulo imposto. Uma forma de corrigir o nível dos mesmos é recorrendo à técnica de interpolação polinomial, considerando que os pontos de interpolação são as amostras calculadas anteriormente. Para corrigir um dado lóbulo secundário, desloca-se a amostra mais próxima para a posição do pico do factor de agrupamento gerado e atribui-se o valor desejado para esse pico. O factor de agrupamento final e a distribuição de corrente são obtidos como foi exposto na técnica de interpolação.

Comecemos por aplicar esta técnica a um exemplo apresentado por Steyskal [29] que corresponde a colocar um nulo em $\theta_0=102.71^\circ$ ($u_0=\sin(90^\circ-\theta_0)=0,22$ segundo Steyskal) num agrupamento linear uniforme com 21 elementos e com $d=\lambda/2$. Comparando o resultado obtido, sem correcção do nível dos lóbulos secundários, com o do artigo verifica-se que eles são semelhantes. Na verdade, como se constatou na secção 1.12, o método desenvolvido por Steyskal consiste em subtrair à função original uma função seno cardinal pesada para provocar um nulo na posição desejada. Como é do conhecimento da teoria de processamento de sinal, quando se aplica o teorema da amostragem, a recuperação da função consiste em convoluir o conjunto das amostras com a função seno cardinal. Desta forma, quando se impôs a expressão (4.105) foi o mesmo que subtrair uma amostra com o mesmo valor que o da função original. Por sua vez, a convolução de uma amostra com o seno cardinal dá o seno cardinal na posição da amostra. Daqui retira-se que o que efectivamente acontece na aplicação desta técnica é que se subtrai, ao factor de agrupamento original, um seno cardinal posicionado no nulo pretendido e de valor tal que o origine. Com a técnica de interpolação pode-se corrigir o gráfico a fim de obter os resultados desejados. De facto, o nível máximo do factor de agrupamento original é de -13,19 dB, enquanto que após a inserção do nulo passou a ser -12,29 dB. Aplicando a técnica desenvolvida, alterando apenas as duas amostras mais próximas do nulo, o resultado é o indicado na figura 4.39, onde o nível máximo é agora de -13,17 dB.

Reparemos noutro exemplo, caracterizado por um agrupamento de Tschebyscheff de 30 elementos, $d=\lambda/2$ e $SLL=25$ dB. A figura 4.40a) mostra o factor de agrupamento após inserir um nulo em $\theta=110^\circ$. Depois da rectificação dos oito picos mais próximos do nulo obtém-se o resultado da figura 4.40b), o que permitiu passar do valor máximo do nível dos lóbulos secundários de -23,2 dB (figura 4.40a) para -24,9 dB (figura 4.40b).

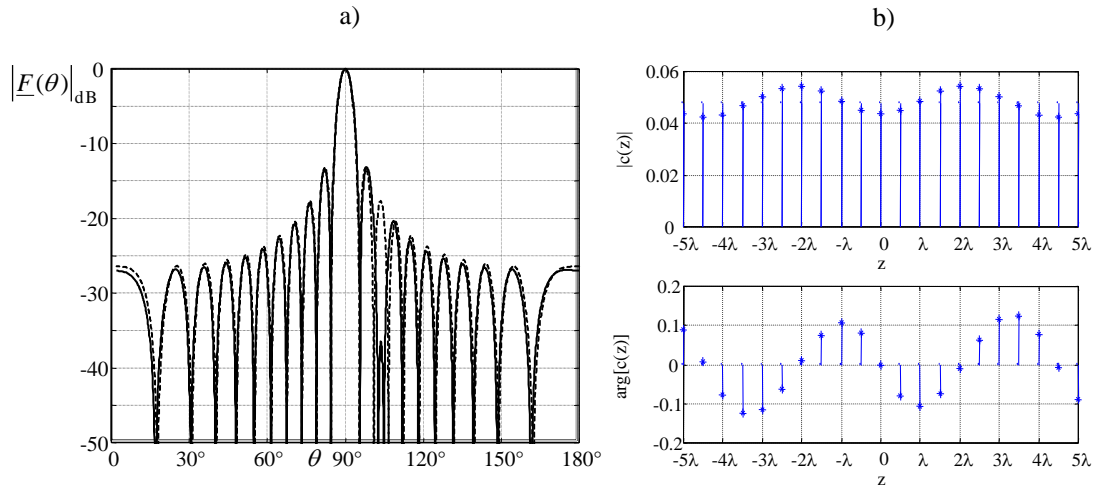


Fig. 4.39 - Geração de um nulo em $\theta_0=102.71^\circ$ num factor de agrupamento seno cardinal: a) factor de agrupamento com nulo (a traço contínuo) e factor de agrupamento da função $\text{sen}(N\pi u/2)/[N\text{sen}(\pi u/2)]$; b) distribuição de corrente obtida pela técnica desenvolvida (*) e referente ao seno cardinal (.).

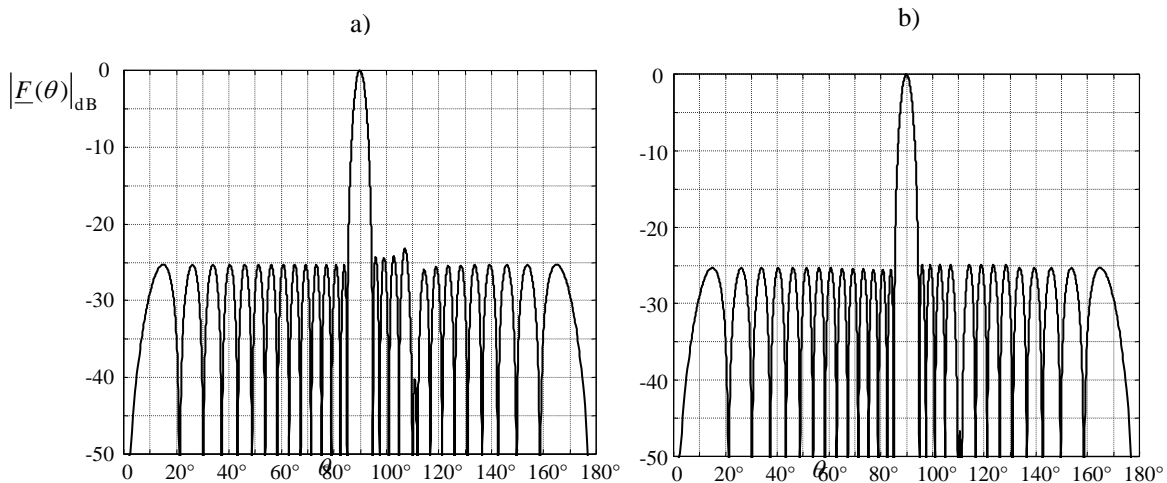


Fig. 4.40 - Geração de um nulo em $\theta_0=110^\circ$ num agrupamento de Tschebyscheff: a) só utilizando a expressão (4.105); b) alterando o valor das amostras laterais.

Consideremos agora o problema da geração de vários nulos. A inserção de vários nulos usando o mesmo processo já se torna mais difícil, porque normalmente estes não estão em posições equiespaçadas de um valor igual ao do obtido pelo teorema da amostragem. Só neste caso poder-se-ia impor amostras nulas na direcção das várias interferências. No entanto, viu-se anteriormente que inserir uma amostra nula pela técnica apresentada consiste em somar uma função tipo seno cardinal periódica ao factor de agrupamento original, posicionada na direcção da interferência e de sinal oposto ao valor deste nessa direcção. Sendo assim, a técnica utilizando a amostragem equiespaçada pode ser empregue desde que se altere o factor de agrupamento original, somando-o com as amostras dos senos cardinais resultantes da cada nulo a inserir.

As direcções dos nulos a inserir estão nas posições $\beta_z = \beta_{z1}, \beta_{z2}, \dots, \beta_{zK}$, com $\beta_{zk} = \beta \cos(\theta_k)$. Como em geral não se consegue ter, pela aplicação do teorema da amostragem, amostras nas

direcções dos vários nulos, não se pode utilizar a relação (4.105) para cada nulo. Em substituição amostra-se a função referente a cada nulo, dada por

$$g(\beta_z) = \alpha_k g_0(\beta_z - \beta_{zk}) = \frac{\alpha_k}{N} \frac{\text{sen}\left[\frac{Nd}{2}(\beta_z - \beta_{zk})\right]}{\text{sen}\left[\frac{d}{2}(\beta_z - \beta_{zk})\right]} \quad (4.106)$$

em que os valores de α_k são calculados de modo a impor nulos nas direcções pretendidas, determinados pelo seguinte sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_K \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & g_0(\beta_{z1} - \beta_{z2}) & \dots & g_0(\beta_{z1} - \beta_{zK}) \\ g_0(\beta_{z2} - \beta_{z1}) & 1 & \dots & g_0(\beta_{z2} - \beta_{zK}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_0(\beta_{zK} - \beta_{z1}) & g_0(\beta_{zK} - \beta_{z2}) & \dots & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \underline{F}(\beta_{z1}) \\ \underline{F}(\beta_{z2}) \\ \dots \\ \underline{F}(\beta_{zK}) \end{bmatrix} \quad (4.107)$$

sendo $\underline{F}(\beta_{zk})$ o valor do factor de agrupamento original na direcção do nulo. Após somar as amostras de cada uma das funções (4.106) ao factor de agrupamento original, a distribuição de corrente e o respectivo factor de agrupamento são obtidos pelo método da Relação de Fourier.

A menos do processo de cálculo, esta técnica é semelhante à de Steyskal [29]. Contudo, como aqui se lida com amostras, pode-se corrigir o factor de agrupamento gerado, da mesma forma como foi feito para a inserção de um nulo, tendo o cuidado de impor uma em cada nulo. Contudo, nem sempre os resultados foram satisfatórios.

Uma forma mais eficiente mostrou ser a utilização dos extremos dos lóbulos secundários como pontos de interpolação, como é sugerido em [28] ou [30]. Perde-se, porém, alguma da facilidade do processo anterior, porque neste caso há que determinar todos os extremos dos lóbulos. Esta técnica consiste, assim, em utilizar a técnica da interpolação, sendo o procedimento de inserção de nulos o apresentado na secção 1.12 e com uma só correcção dos lóbulos secundários.

Vejamos a aplicação da técnica desenvolvida a um agrupamento de Tschebyscheff de 41 elementos, $d=0,5\lambda$, $SLL=30$ dB, para gerar um nulo de banda larga impondo nulos em $\theta=102^\circ$, $103,5^\circ$, 105° e $106,5^\circ$. A figura 4.41 mostra o resultado em que apenas se corrigiu os lóbulos secundários no lado direito do gráfico. Como se pode constatar, consegue-se praticamente recuperar o nível original dos lóbulos secundários.

Embora os exemplos apresentados tenham incidido em factores agrupamentos tipo lóbulo, a técnica desenvolvida pode ser aplicada a qualquer caso. Nesse sentido, consideremos a geração de nulos no factor de agrupamento da figura 4.33, inserindo-os em $\theta=40^\circ$, 84° , 85° , 86° e 150° . Corrigindo os três lóbulos secundários mais elevados, o novo factor de agrupamento e a respectiva distribuição de corrente são os da figura 4.42.

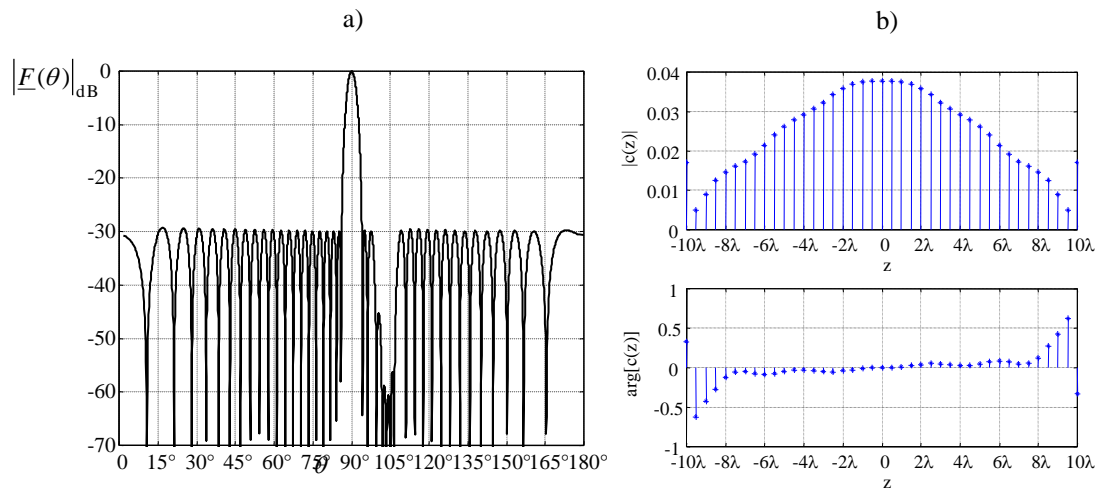


Fig. 4.41 - Geração de um nulo de banda larga num agrupamento de Tschebyscheff: a) factor de agrupamento com nulos em $\theta=102^\circ$, $103,5^\circ$, 105° e $106,5^\circ$; b) distribuição de corrente.

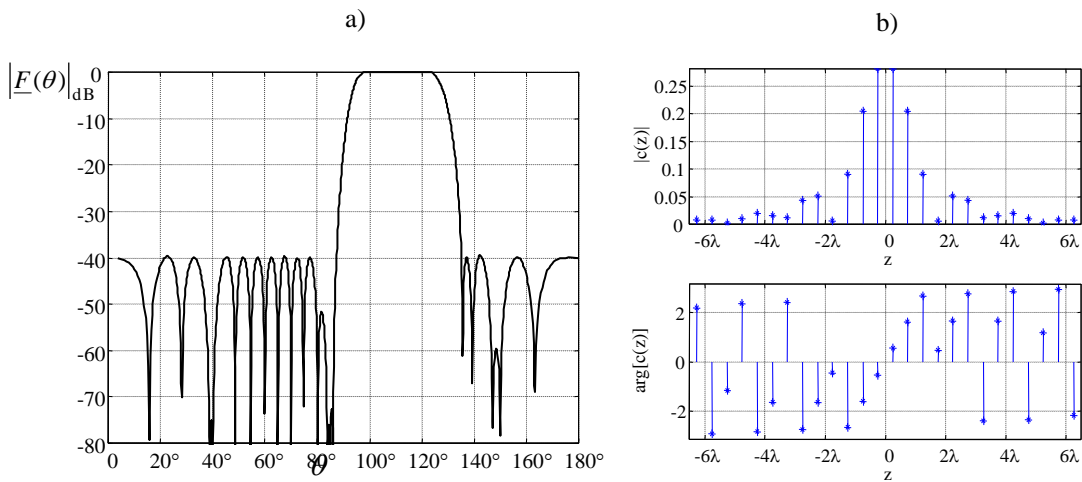


Fig. 4.42 - Geração de nulos num factor de agrupamento tipo pedestal: a) factor de agrupamento com nulos em $\theta=40^\circ$, 84° , 85° , 86° e 150° ; b) distribuição de corrente.

No contexto da geração de nulos de banda larga, Orchard, Elliot e Sten [31] apresentam um método que permite gerar factores de agrupamento do tipo $\text{cosec}(\theta)$ com duas zonas de níveis de lóbulos secundários, tendo a mais próxima da zona do feixe principal níveis mais baixos. O método é iterativo e apesar de terem surgido outros com o mesmo objectivo, como [32], [33], [34], [35] para melhorar as características da corrente e [36] que só utiliza a fase da mesma, todos eles continuam a ser iterativos.

A técnica da interpolação polinomial permite realizar um agrupamento análogo. Nessa ordem de ideias, em primeiro lugar obtém-se um factor de agrupamento do tipo $\text{cosec}(\theta)$, segundo o desenvolvimento da secção 4.4.4, com os níveis dos lóbulos secundários iguais ao nível mais elevado dos valores especificados para os mesmos e com o *ripple* pretendido para a zona da co-secante. Como a técnica desenvolvida para sintetizar este tipo de agrupamento lida com os extremos da função na zona dos lóbulos secundários, esta encontra-se numa forma

apropriada para uma pesagem diferente dos lóbulos. Assim, começa-se por manter a mesma posição das amostras desses lóbulos e diminuiu-se o seu valor para o nível pretendido. Caso seja necessário, faz-se uma correcção dos lóbulos secundários cujo nível tenha sido alterado ou que ainda não tenham o valor desejado, deslocando a amostra para a posição do extremo do lóbulo a corrigir e impondo o valor desejado.

Esta forma de se gerar um nulo de banda larga é diferente da anterior, pois não se impõe, no factor de agrupamento, vários zeros próximos para baixar o nível dos lóbulos secundários na zona do nulo. O que se faz agora é baixar efectivamente o nível dos lóbulos alterando o valor do seu extremo. Por outro lado, consegue-se níveis praticamente iguais nessa zona.

Como exemplo, consideremos o apresentado em [31] para um agrupamento de 16 elementos e $d=\lambda/2$. O diagrama de potência é dado por $\text{cosec}^2(\theta-\pi/2)\cos(\theta-\pi/2)$ para $100^\circ \leq \theta \leq 140^\circ$, com os quatro lóbulos mais próximos do feixe principal com um nível de -30 dB e os restantes com -20 dB. Visto que aqui se lida com o diagrama de tensão, e não o de potência, o factor de agrupamento é dado por $\text{cosec}(\theta-\pi/2)\sqrt{\cos(\theta-\pi/2)}$ ou, na variável β_z , por $-(\beta/\beta_z)[1-(\beta/\beta_z)^2]^{1/4}$ para $\beta\cos(7\pi/9) \leq \beta_z \leq \beta\cos(5\pi/9)$. Aplicando a técnica desenvolvida, a figura 4.43 mostra o resultado para uma amplitude de *ripple* de $\pm 0,1$ dB. Embora o factor de agrupamento seja muito semelhante ao determinado em [31], o método aí apresentado tem mais algumas potencialidades no controlo do diagrama, principalmente por permitir um maior número de extremos na zona da co-secante, o que faz com que, nalguns casos, o diagrama esteja mais dentro das especificações do que o sintetizado pela técnica da secção 4.4.4. De qualquer forma, chega à mesma solução que em [37] sem ter que recorrer a métodos iterativos, ou seja, quando o factor de agrupamento é uma função real.

Este modo de se gerar nulos de banda larga pode ser aplicado a qualquer tipo de factor de agrupamento, isto é, gera-se o nulo de banda larga por diminuição dos lóbulos secundários correspondentes à zona do mesmo.

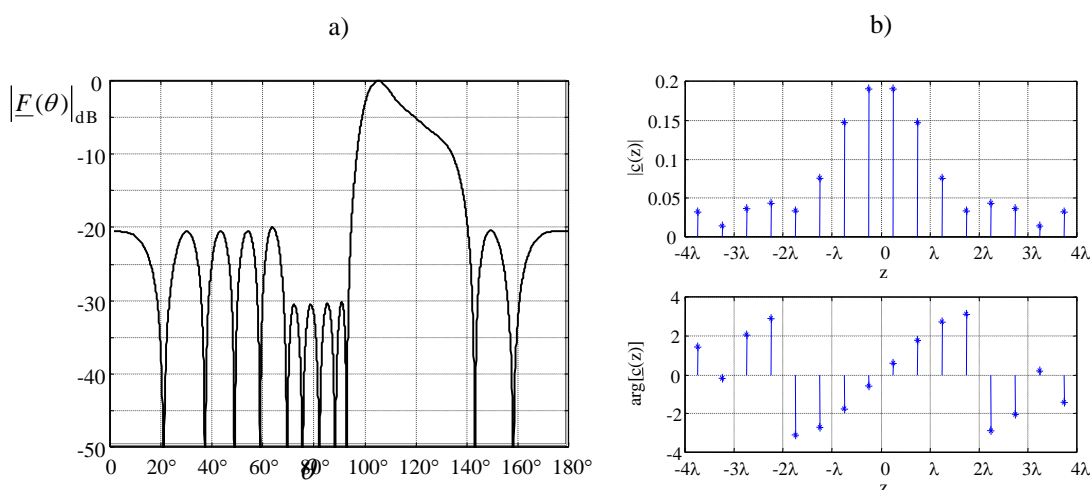


Fig. 4.43 - Geração de um nulo de banda larga no factor de agrupamento tipo $\text{cosec}(\theta)$: a) factor de agrupamento; b) distribuição de corrente.

Para finalizar este assunto, falta abordar o problema da distância entre elementos. A técnica desenvolvida pode ser empregue, sem qualquer alteração, a qualquer agrupamento

cuja distância entre elementos seja de $d \leq \lambda/2$. Para distâncias superiores a aplicação da técnica depende, uma vez que a janela visível cai fora do intervalo $-\pi/d \leq \beta_z \leq \pi/d$. Se os nulos estiverem dentro desse intervalo, a abordagem anterior continua a ser válida. Se algum cair fora desse intervalo, poderia parecer que utilizar o dobro desse intervalo para o factor de agrupamento e impor os nulos desejados resolveria o problema. No entanto, aplicando a transformada de Fourier, a distribuição de corrente passaria a ter o dobro do número de elementos, o que não é pretendido. Uma forma de continuar a aplicar a abordagem apresentada é considerar a periodicidade do factor de agrupamento e impor os nulos dentro do intervalo indicado acima, mas que coincida com os nulos a impor fora do mesmo. Sendo assim, o valor de β_{z_0} que controla a posição de um nulo, para valores entre elementos de $\lambda/2 < d < \lambda$, é dado por

$$\beta_{z_0} = \begin{cases} \beta \cos(\theta_0) + \frac{2\pi}{d} & \text{para } \beta \cos(\theta_0) < -\frac{\pi}{d} \\ \beta \cos(\theta_0) - \frac{2\pi}{d} & \text{para } \beta \cos(\theta_0) > \frac{\pi}{d} \end{cases} \quad (4.108)$$

Para outros valores de d o procedimento é similar, tendo sido empregue o intervalo indicado apenas para não inserir na análise lóbulos secundários de amplitude igual ao principal [38]. Com a posição do nulo, dada por (4.108), aplica-se a técnica anterior de inserção de nulos. Repare-se que agora surgirão dois nulos, um dentro do período do factor de agrupamento e outro no segundo período ainda dentro da janela visível.

Como exemplo, consideremos que se pretende inserir um nulo em $\theta_0=150^\circ$ num agrupamento de Tschebyscheff com $SLL=30$ dB, $d=0,8\lambda$ e $N=21$ elementos. Este nulo corresponde a um em $\beta_z=-5,44/\lambda$, estando fora do intervalo de um período do factor de agrupamento, que é de $-3,93/\lambda \leq \beta_z \leq 3,93/\lambda$. Utilizando a primeira expressão de (4.108) tem-se que $\beta_{z_0}=2,413/\lambda$ ($\theta=67,42^\circ$). Aplica-se o que foi exposto e utilizando a distribuição de corrente esboça-se o factor de agrupamento num intervalo que englobe a janela visível. A figura 4.44 mostra o resultado.

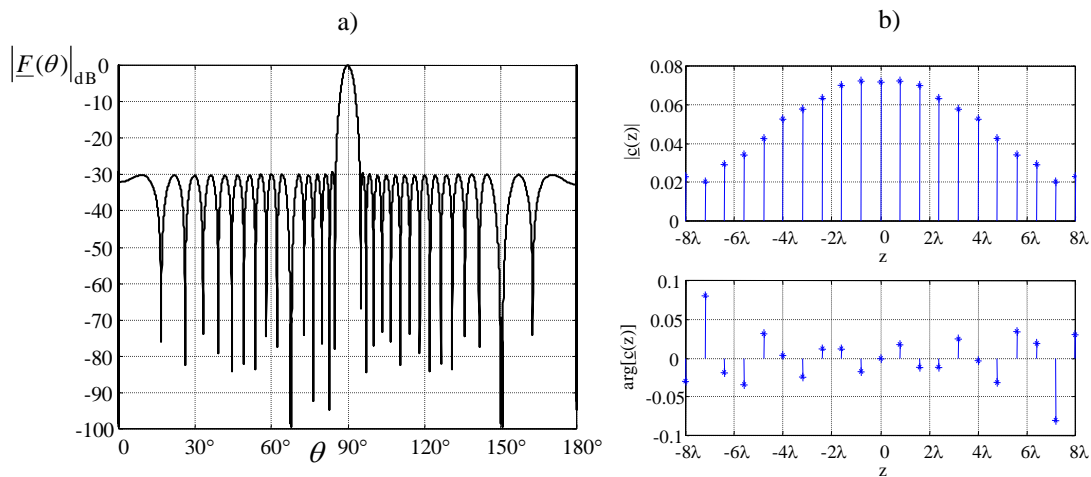


Fig. 4.44 - Geração de um nulo em $\theta=150^\circ$ num agrupamento de Tschebyscheff com elementos distanciados de $4/5$ do comprimento de onda: a) factor de agrupamento; b) distribuição de corrente.

4.5 - Aproximação Polinomial

Com a técnica de interpolação polinomial desenvolvida neste trabalho é bastante atraente gerar factores de agrupamento que passem por um determinado conjunto de pontos. O número de pontos empregues é igual ao número de elementos da fonte, sendo mais geral do que a amostragem realizada pelo teorema da amostragem. No entanto, como normalmente o que interessa no processo de síntese são certas características do factor de agrupamento, como a largura do feixe principal, o nível dos lóbulos secundários, nulos em certas direcções, e como nem sempre é possível obter, à partida, as posições dos pontos de amostragem que conduzem aos melhores resultados, outra forma de aproximação por um polinómio é através dos mínimos quadrados. Esta situação pode ocorrer, por exemplo, quando se define um número de amostras superior ao grau do polinómio, não sendo, em geral, provável que este passe por todos os pontos.

Uma situação interessante é quando o polinómio continua a passar por um determinado conjunto de pontos, mas a aproximação aos restantes é segundo o mínimo erro quadrático médio. Esta abordagem lida com um problema de optimização com solução analítica.

4.5.1 - Técnica de Aproximação

A técnica de aproximação polinomial consiste em definir a aproximação de um conjunto de pontos por um polinómio, como foi referido anteriormente, e na substituição da devida mudança de variável para aplicação em antenas. Para utilizar as facilidades da análise matricial, definamos as grandezas de interesse na forma vectorial.

O polinómio de grau $N-1$ pode ser definido por

$$P(x) = \sum_{n=0}^{N-1} c_n x^n = XC \quad (4.109)$$

em que $X=[1, x, x^2, \dots, x^{N-1}]$ e $C=[c_0, c_1, c_2, \dots, c_{N-1}]^T$, com T a representar a transposta. O problema consiste em minimizar a diferença, segundo os mínimos quadráticos, entre o polinómio $P(x)$ em M pontos, $M \geq N$, e o valor da função nesses pontos, que se pretende aproximar, $f(x)$, ou seja,

$$\sum_{m=0}^{M-1} |X_m C - y_m|^2 = \min. \quad (4.110)$$

sendo $X_m=[1, x_m, x_m^2, \dots, x_m^{N-1}]$ e $y_m=f(x_m)$. Por outro lado, o polinómio deve passar por K pontos da função $f(x)$, $K < N$, o que dá

$$SC = Y \quad (4.111)$$

com $S=[X_{01}^T, X_{02}^T, \dots, X_{0K}^T]^T$, $Y=[y_{01}, y_{02}, \dots, y_{0K}]^T$ e $y_{0m}=f(x_{0m})$. O problema consiste, então, em

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && \sum_{m=0}^{M-1} |X_m C - y_m|^2 = \sum_{m=0}^{M-1} (X_m C - y_m)(X_m C - y_m)^* \\ &\text{sujeito à condição} && SC = Y \end{aligned} \quad (4.112)$$

com * a representar complexo conjugado. A forma de resolver este problema é transformá-lo num sem restrições através do método dos multiplicadores de Lagrange. Como as variáveis podem ser complexas, a aplicação do método consiste em maximizar a expressão

$$\sum_{m=0}^{M-1} (X_m C - y_m)(X_m C - y_m)^* + \lambda(SC - Y) + \lambda^*(SC - Y)^* \quad (4.113)$$

em que $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_K]$ são os multiplicadores de Lagrange. Depois calcula-se a derivada parcial desta expressão em relação a C^* (ou C) e iguala-se a zero, dando

$$AC - B + S^+ \lambda^+ = 0 \quad (4.114)$$

com $^+$ a representar a transposta conjugada e a matriz A e o vector B são definidos por

$$A = \begin{bmatrix} M & \sum_{m=0}^{M-1} x_m & \dots & \sum_{m=0}^{M-1} x_m^{N-1} \\ \sum_{m=0}^{M-1} x_m^* & \sum_{m=0}^{M-1} x_m x_m^* & \dots & \sum_{m=0}^{M-1} x_m^{N-1} x_m^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{m=0}^{M-1} (x_m^{N-1})^* & \sum_{m=0}^{M-1} x_m (x_m^{N-1})^* & \dots & \sum_{m=0}^{M-1} x_m^{N-1} (x_m^{N-1})^* \end{bmatrix} \quad (4.115)$$

$$B = \left[\sum_{m=0}^{M-1} y_m \quad \sum_{m=0}^{M-1} y_m x_m^* \quad \dots \quad \sum_{m=0}^{M-1} y_m (x_m^{N-1})^* \right]^T$$

Resolvendo (4.114) em ordem a C retira-se que

$$C = A^{-1}(B - S^+ \lambda^+) \quad (4.116)$$

Substituindo este resultado em (4.111) e resolvendo em ordem a λ obtém-se

$$\lambda^+ = (SA^{-1}S^+)(SA^{-1}B - Y) \quad (4.117)$$

Finalmente, a solução do problema é

$$C = A^{-1}[B - S^+(SA^{-1}S^+)(SA^{-1}B - Y)] \quad (4.118)$$

Para aplicar a antenas, da mesma forma que se obteve as relações (4.84), tem-se que

$$\begin{aligned} \underline{F}(\beta_z) &= e^{-j\beta_z \frac{N-1}{2}d} P(x) \\ x &= e^{j\beta_z d} \\ x_n &= e^{j\beta_{zn}d} \\ x_{0n} &= e^{j\beta_{z0n}d} \\ y_n &= \underline{F}(\beta_{zn}) e^{j\beta_{zn} \frac{N-1}{2}d} \\ y_{0n} &= \underline{F}(\beta_{z0n}) e^{j\beta_{z0n} \frac{N-1}{2}d} \end{aligned} \quad (4.119)$$

Com estas mudanças de variável e sendo a solução (4.118) o vector que corresponde aos coeficientes do polinómio é também a distribuição de corrente. O factor de agrupamento pode ser obtido quer pela primeira expressão de (4.119) quer pelo método da Relação de Fourier. O segundo processo é bastante mais rápido devido ao recurso à FFT.

4.5.2 - Geração de Nulos

A técnica anterior tem uma aplicação evidente que é a geração de nulos no factor de agrupamento. A sua utilização neste contexto tem a vantagem de que para impor os nulos não é necessário procurar as amostras mais próximas das posições desses nulos, como acontece com a técnica da interpolação polinomial.

A forma de gerar nulos consiste, em primeiro lugar, em amostrar o factor de agrupamento original com um número de pontos igual ou superior ao número de elementos da antena. Por facilidade pode-se impor $M=N$ e espaçamento equidistante. É de notar que o polinómio gerado não passa por esses pontos, mas estes serão aproximados segundo os mínimos quadrados. Define-se, assim, os pontos β_n , $n=0,1,\dots,M-1$, e o valor da função nesses pontos é $\underline{F}(\beta_n)$. Sendo a posição dos nulos dada por $\theta=\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_K$, define-se os valores de $\beta_{z01}, \beta_{z02}, \dots, \beta_{z0K}$, respectivamente, em que $\beta_{z0n}=\beta\cos(\theta_n)$. Nesses pontos tem-se que $\underline{F}(\beta_{z0n})=0$. Após aplicar as relações (4.119) a distribuição de corrente é dada pela equação (4.118). O factor de agrupamento é obtido como foi referido anteriormente.

Comprovou-se que a técnica da interpolação polinomial tinha a facilidade de permitir rectificar o nível dos lóbulos secundários. Para isso, bastava alterar o valor dos $N-K$ extremos do factor de agrupamento, contendo os nulos, para os valores desejados mantendo a mesma posição dos pontos. O mesmo acontece com a técnica da aproximação polinomial. Como esta técnica contém uma relação de restrições, dado por (4.111), em que o polinómio tem que passar por esses pontos, além dos nulos pode-se incluir no vector S todos os pontos por onde se pretende que passe o polinómio e cujo seu valor é incluído em Y . Se esses pontos forem os $N-K$ extremos do factor de agrupamento que pretendemos que sejam alterados, consegue-se bons resultados na síntese do agrupamento.

Pelo que foi dito, se for pretendido, pode-se realizar um segundo passo no sentido de melhorar algumas características do factor de agrupamento sintetizado, como o nível dos lóbulos. Este passo é igual ao da técnica da interpolação polinomial. Por conseguinte, define-se os valores de $\beta_{z0(K+1)}, \beta_{z0(K+2)}, \dots, \beta_{z1(N-K)}$, como sendo as posições dos pontos por onde se pretende que também passe o factor de agrupamento, que são os extremos do mesmo. Nesses pontos os valores de $\underline{F}(\beta_{z0n})$ são os do factor de agrupamento original.

Como exemplo consideremos o apresentado na figura 4.40, em que $N=41$, $d=\lambda/2$, $SLL=30$ dB e nulos em $\theta=102^\circ, 103,5^\circ, 105^\circ$ e $106,5^\circ$. Para se obter resultados análogos aos conseguidos com a técnica de interpolação polinomial, com a técnica de aproximação polinomial foi necessário corrigir um maior número de lóbulos secundários. Contudo, com um algoritmo de pesquisa de extremos, o trabalho será praticamente o mesmo. A figura 4.45 mostra o resultado obtido por esta técnica, com correcção dos níveis dos lóbulos secundários.

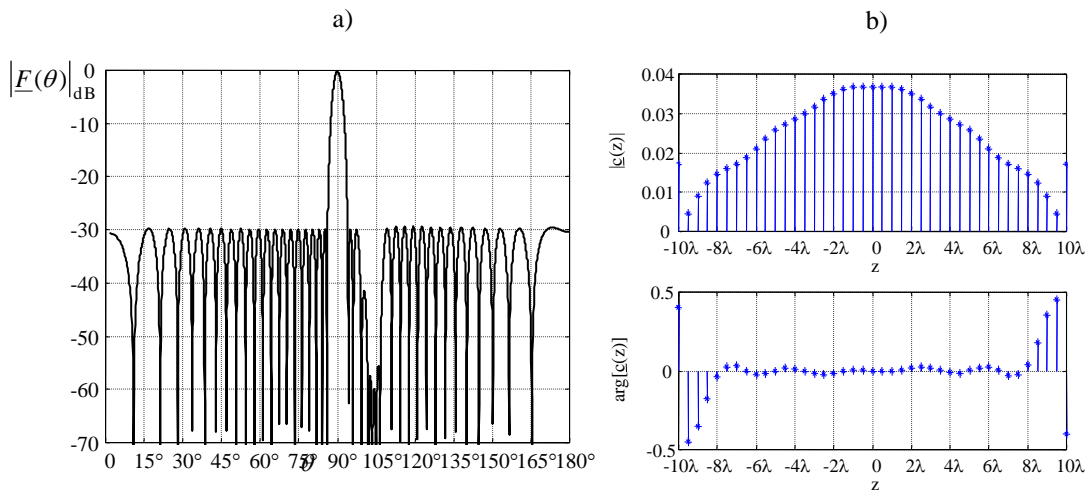


Fig. 4.45 - Geração de um nulo de banda larga num agrupamento de Tschebyscheff utilizando a técnica da aproximação polinomial: a) factor de agrupamento; b) distribuição de corrente.

Viu-se que a geração de nulos pela técnica da aproximação polinomial pode conduzir a resultados semelhantes aos da técnica da interpolação polinomial. Não tendo em conta a rectificação dos níveis dos lóbulos secundários esta técnica conduz a resultados ligeiramente inferiores, mas tem a vantagem de ser mais simples.

4.6 - Interpolação do Factor de Agrupamento com Agrupamentos Contínuos

Toda a abordagem de interpolação efectuada até aqui tem incidido nos agrupamentos discretos. De facto, como o processo de interpolação lida com polinómios, a sua aplicação a distribuições discretas de corrente é linear. A amostragem do factor de agrupamento deixa de ser realizada apenas em pontos equidistantes, como sucede no teorema da amostragem.

Para distribuições contínuas de corrente também pode ser interessante fazer com que o factor de agrupamento passe por determinados pontos. Mais uma vez pretende-se realizar a amostragem não uniforme do factor de agrupamento.

Para distribuições discretas escolheu-se N pontos do factor de agrupamento dentro de um período da função. Para distribuições contínuas é necessário arranjar um processo directo que permita fazer passar o factor de agrupamento por um conjunto de pontos, equidistantes ou não. Na literatura, esta ideia foi tida por White [39] lidando com os métodos polinomiais utilizados em filtros digitais. O método consiste em gerar o factor de agrupamento como o produto de um polinómio, $P(u)$, com uma função analítica fixa, $G(u)$, ou seja, $F(u)=P(u)G(u)$. $P(u)$ é de ordem N e é obtido por interpolação de Lagrange, de modo a que o factor de agrupamento passe por um conjunto de pontos dentro de um dado intervalo. A função $G(u)$ deve ser tal que ao multiplicá-la pelo polinómio produz-se uma função realizável como diagrama de radiação de uma distribuição de corrente contínua. A função escolhida foi aquela cuja distribuição de corrente é um co-seno elevado a um expoente.

Seguidamente será desenvolvida uma técnica que permite efectivamente realizar a amostragem não uniforme do factor de agrupamento. Com alguns exemplos ver-se-á a possibilidade da aplicação da técnica de interpolação na síntese de agrupamentos.

4.6.1 - Interpolação Não Uniforme

Para pensarmos numa técnica de interpolação aplicada a agrupamentos contínuos vejamos o que acontece com o processo de interpolação referente ao teorema da amostragem, visto que o agrupamento deve ser limitado. Tendo em conta esse teorema, a expressão da distribuição de corrente é a apresentada em (2.15), sendo

$$\underline{c}(z) = \frac{1}{L} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{F}\left[\frac{2\pi}{L}(k+\tau)\right] e^{-j\frac{2\pi}{L}(k+\tau)z}, \quad -\frac{L}{2} \leq z \leq \frac{L}{2} \quad (4.120)$$

Substituindo essa expressão em (2.1) obtém-se o respectivo factor de agrupamento,

$$\underline{F}(\beta_z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{F}\left[\frac{2\pi}{L}(k+\tau)\right] \frac{\text{sen}\left\{\frac{L}{2}\left[\beta_z - \frac{2\pi}{L}(k+\tau)\right]\right\}}{\frac{L}{2}\left[\beta_z - \frac{2\pi}{L}(k+\tau)\right]} \quad (4.121)$$

ou seja, não é mais do que a soma de cada uma das amostras multiplicada por uma função seno cardinal deslocada. Reportando-nos à figura 2.5, e como é do conhecimento do processamento de sinal, cada amostra está nos zeros de todas as outras funções seno que não a própria, ou melhor dizendo, as funções seno cardinal são ortogonais entre si.

Se as amostras não estiverem em pontos equidistantes, não se pode aplicar a expressão (4.121). No entanto, observemos outra interpretação do teorema da amostragem, elucidada pela figura 2.5c). O processo de interpolação do teorema da amostragem e apresentado nessa figura pode ser visto como cada função de Dirac a convoluir com a função seno cardinal. No outro lado da transformada isso corresponde a multiplicar a transformada de cada Dirac deslocado, que é uma cissóide, com a transformada do seno cardinal, que é a função pedestal. Sendo assim, a distribuição de corrente determinada por (4.120) não é mais do que a soma de pedestais, cuja amplitude de cada um deles é a da amostra do factor de agrupamento, multiplicados pelas cissóides.

A ideia do parágrafo anterior pode ser empregue para obter-se a interpolação não uniforme do factor de agrupamento com distribuições discretas. A distribuição contínua é uma soma de M cissóides, referentes a cada amostra $\underline{F}(\beta_{zk})$ posicionada em β_{zk} ,

$$\underline{c}(z) = \sum_{k=1}^M a_k e^{-j\beta_{zk}z}, \quad -\frac{L}{2} \leq z \leq \frac{L}{2} \quad (4.122)$$

O factor de agrupamento correspondente a esta distribuição é dado por

$$\underline{F}(\beta_z) = L \sum_{k=1}^M a_k \frac{\text{sen}\left[\frac{L}{2}(\beta_z - \beta_{zk})\right]}{\frac{L}{2}(\beta_z - \beta_{zk})} \quad (4.123)$$

Geralmente, como no teorema da amostragem, M pode ser infinito. Ao contrário do apresentado em (4.120), a_k em geral é diferente de $\underline{F}(\beta_{zk})$, uma vez que o factor de agrupamento em cada posição da amostra deve-se à contribuição de todas as funções seno cardinal.

Comparando as duas expressões definidas, (4.122) e (4.123), com as obtidas pelo teorema da amostragem vê-se que elas são respectivamente iguais quando os pontos estão equiespaçados.

Comparando a técnica de interpolação com a interpolação referente ao teorema da amostragem, se no caso equidistante as amostras forem nulas nos pontos de amostragem, o somatório (4.120) é truncado para a última amostra não nula e o número de termos é igual ao número de amostras não nulas. Entretanto, todo o intervalo da variável β_z fica especificado com um número finito de termos do somatório. O mesmo não acontece para a amostragem não uniforme. Para este caso, o número de termos não fica limitado ao número de amostras não nulas e o intervalo da variável só fica completamente especificado com um número infinito de pontos.

Existe, então, o problema da obtenção das incógnitas a_k . Vejamos uma forma de as obter, baseada na expressão do factor de agrupamento.

Para que o factor de agrupamento passe pelo ponto β_{zi} com o valor $\underline{F}(\beta_{zi})$ impõe-se que

$$L \sum_{k=1}^M a_k \frac{\text{sen} \left[\frac{L}{2} (\beta_{zi} - \beta_{zk}) \right]}{\frac{L}{2} (\beta_{zi} - \beta_{zk})} = \underline{F}(\beta_{zi}) \quad (4.124)$$

de modo que considerando M pontos distintos chega-se a um sistema de M equações. Para o determinar, na prática o valor de M deve ser finito. Considerando a seguinte representação:

$$A = [a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_M]$$

$$B = L \begin{bmatrix} 1 & \frac{\text{sen} \left[\frac{L}{2} (\beta_{z1} - \beta_{z2}) \right]}{\frac{L}{2} (\beta_{z1} - \beta_{z2})} & \dots & \frac{\text{sen} \left[\frac{L}{2} (\beta_{z1} - \beta_{zM}) \right]}{\frac{L}{2} (\beta_{z1} - \beta_{zM})} \\ \frac{\text{sen} \left[\frac{L}{2} (\beta_{z2} - \beta_{z1}) \right]}{\frac{L}{2} (\beta_{z2} - \beta_{z1})} & 1 & \dots & \frac{\text{sen} \left[\frac{L}{2} (\beta_{z2} - \beta_{zM}) \right]}{\frac{L}{2} (\beta_{z2} - \beta_{zM})} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\text{sen} \left[\frac{L}{2} (\beta_{zM} - \beta_{z1}) \right]}{\frac{L}{2} (\beta_{zM} - \beta_{z1})} & \frac{\text{sen} \left[\frac{L}{2} (\beta_{zM} - \beta_{z2}) \right]}{\frac{L}{2} (\beta_{zM} - \beta_{z2})} & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (4.125)$$

$$F = [\underline{F}(\beta_{z1}) \quad \underline{F}(\beta_{z2}) \quad \dots \quad \underline{F}(\beta_{zM})]^T$$

a solução é obtida pela equação

$$A = B^{-1}F \quad (4.126)$$

Substituindo os valores de a_k em (4.123) calcula-se o factor de agrupamento. A distribuição respectiva pode ser determinada por (4.122) ou através do método da Relação de Fourier.

Como era de esperar, escolhendo pontos equidistantes, o vector A é igual ao das amostras multiplicado por L e os resultados são iguais aos obtidos pelo teorema da amostragem.

4.6.2 - Exemplos de Aplicação da Técnica de Interpolação

Nos agrupamentos discretos, devido à periodicidade do factor de agrupamento, era fácil impor um número finito de amostras não equidistantes para síntese de um dado agrupamento. Para um agrupamento contínuo, mesmo o teorema da amostragem tem, teoricamente, um número infinito de amostras. No entanto, como se viu na secção anterior, se elas forem nulas nos pontos de amostragem tem-se uma série truncada, cujo cálculo pode ser facilmente realizado.

Na amostragem não uniforme constatou-se que, mesmo com amostras nulas nos pontos de amostragem, a série que dá a distribuição de corrente ou o factor de agrupamento pode não ser truncada para um valor finito. Isto traduz-se, nalguns casos, numa dificuldade da sua aplicação na síntese de agrupamentos. Como em termos de cálculo a série deve ser finita, o factor de agrupamento será especificado dentro de um certo intervalo, não havendo controlo do mesmo fora desse intervalo. No entanto, como o factor de agrupamento tem maior importância dentro da janela visível, a especificação das amostras será realizada em torno da origem.

Consideremos que se pretende obter o agrupamento de Taylor através da técnica de interpolação, supondo o exemplo apresentado na figura 4.15, com $L=2$, $K=11$ e $SLL=30$ dB. Como pontos de interpolação utiliza-se a amostra na origem com amplitude unitária e os restantes são os zeros do factor de agrupamento, com os K primeiros zeros determinados pela expressão (4.26) e os restantes pontos equidistantes, como no teorema da amostragem. A figura 4.46 indica o resultado para $M=101$. Como se pode comprovar pela figura, a diferença de resultados é inferior à conseguida pela técnica da secção 4.3.1.2. Quanto maior for M menor é essa diferença.

Como se constatou pelo exemplo anterior, nalguns casos é suficiente especificar um pequeno número de amostras por onde se pretenda que passe o factor de agrupamento e o processo de interpolação constrói o resto da função.

No contexto dos agrupamentos de Taylor, Elliot [40] apresenta um factor de agrupamento com lóbulos assimétricos, gerado através de um método iterativo. Consideremos a técnica da interpolação para obter esse exemplo, em que $\bar{n}=8$, $SLL=20$ dB, excepto três dos lóbulos mais próximos do centro de um lado da função que têm -30 dB. Para o realizar recorre-se, mais uma vez, à função definida em (4.26), com $SLL=20$ dB e $K=9$ e aplica-se a técnica de interpolação com $M=32$ pontos, definidos pelo teorema da amostragem com este número de pontos. Depois determina-se a posição dos extremos dos lóbulos secundários que se pretende estarem a -30 dB e desloca-se as três amostras mais próximas para as posições desejadas. A figura 4.47 mostra o factor de agrupamento assim calculado.

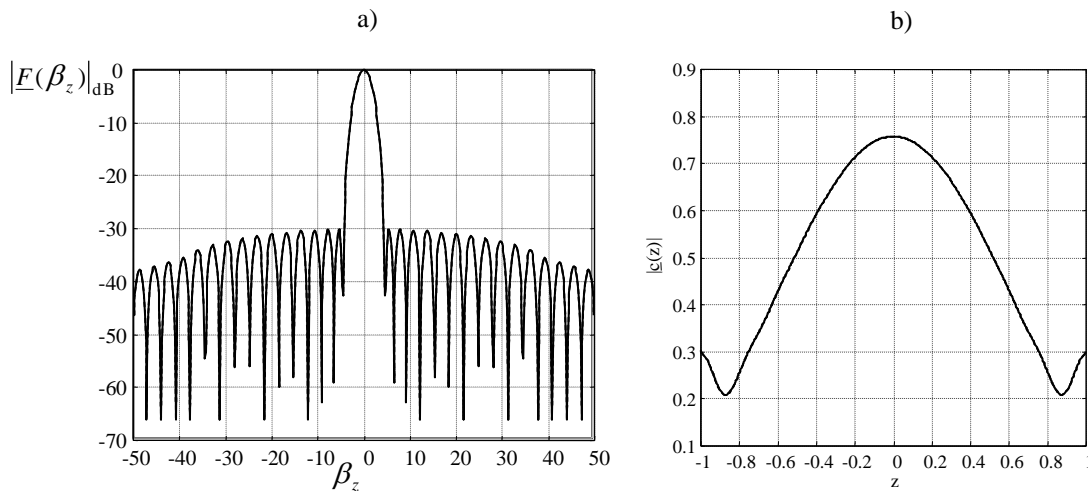


Fig. 4.46 - Aplicação da técnica de interpolação para obter o agrupamento de Taylor: a) factor de agrupamento; b) distribuição de corrente.

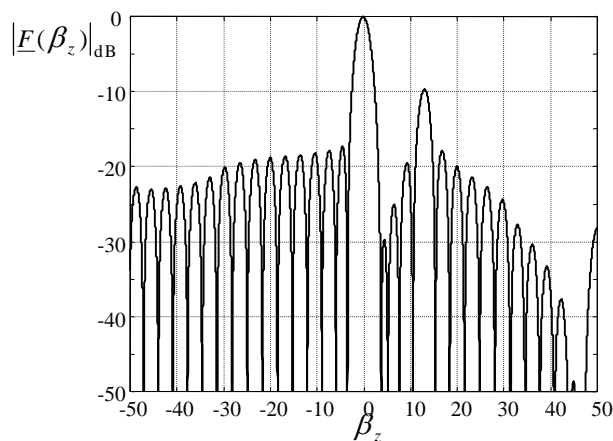


Fig. 4.47 - Obtenção do agrupamento de Taylor com níveis de lóbulos diferentes.

Como se pode ver pela figura 4.47, os lóbulos secundários não têm os níveis pretendidos, incluindo os mais baixos. Uma forma de melhorar os resultados obtidos é fazendo uma correcção desses três lóbulos a -30 dB, como foi efectuado nos agrupamentos discretos, através do deslocamento da posição das amostras para os seus extremos. Todavia, continua-se a verificar que o primeiro lóbulo secundário a -20 dB, do lado direito, é demasiado elevado e os restantes decaem bruscamente. Isto pode ser resolvido deslocando todas as amostras do lado direito desse lóbulo para a esquerda e as do lado esquerdo, até à origem, para a direita. Neste caso o deslocamento foi de 15% da distância entre amostras. A figura 4.48 mostra o resultado. Esta forma de gerar um factor de agrupamento assimétrico é mais simples e conduz a melhores resultados do que a técnica da secção 4.3.1.5.

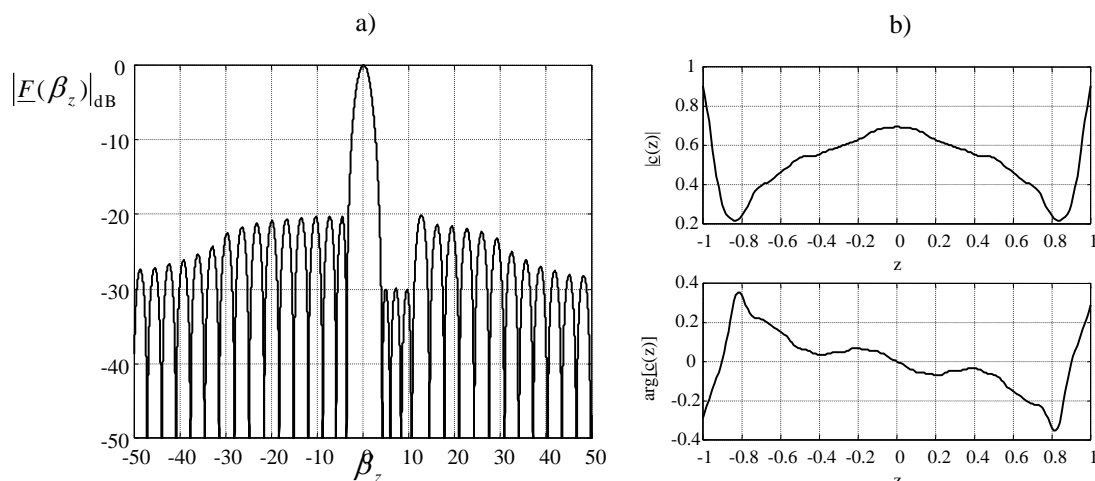


Fig. 4.48 - Obtenção do agrupamento de Taylor com níveis de lóbulos diferentes após correcção da posição das amostras: a) factor de agrupamento; b) respectiva distribuição de corrente.

Uma situação já analisada nos agrupamentos discretos, e onde a aplicação da técnica de interpolação se torna atraente, é a geração de nulos no factor de agrupamento. Quer para nulos de banda larga quer para de banda estreita, a aplicação desta técnica, com uma escolha conveniente da posição das amostras, pode conduzir a bons resultados.

Consideremos um outro exemplo, em que se pretende gerar nulos em $\theta=30^\circ$, $112,5^\circ$ e 130° no factor de agrupamento da figura 4.3, ou seja, para um factor de agrupamento tipo pedestal com $L=10\lambda$.

A técnica de interpolação pode ser empregue supondo um número elevado de pontos. Contudo, como quanto maior for M mais tempo de processamento é necessário, convém que o número de pontos utilizados não seja muito elevado. Também se notou que para valores de M de algumas centenas, a distribuição de corrente após inserção dos nulos diferia pouco da original, mas continha uma pequena oscilação, mais concentrada nos extremos da distribuição, dependente do comportamento do factor de agrupamento nas zonas mais afastadas da origem. A informação dos nulos estava muito nesta ondulação em torno de um valor médio, o que tornava um agrupamento fisicamente mais difícil de ser realizado. Por outro lado, para valores de M pequenos o factor de agrupamento decai mais rapidamente. Como o que nos interessa é o factor de agrupamento dentro da janela visível, pode-se especificar um valor de M que evite a ondulação na distribuição de corrente.

Para o exemplo em causa, escolhendo $M=25$ pontos, a figura 4.49 mostra o resultado. Tendo a função original um nível máximo de lóbulos secundários de 28,2 dB, bastou corrigir um lóbulo para manter esse nível.

A técnica de interpolação apresentada permite corrigir, caso seja pretendido, os níveis dos lóbulos secundários, de modo a terem valores praticamente iguais dentro da janela visível. Nesse sentido, determina-se os extremos dos mesmos e impõe-se a posição desejada para as amostras.

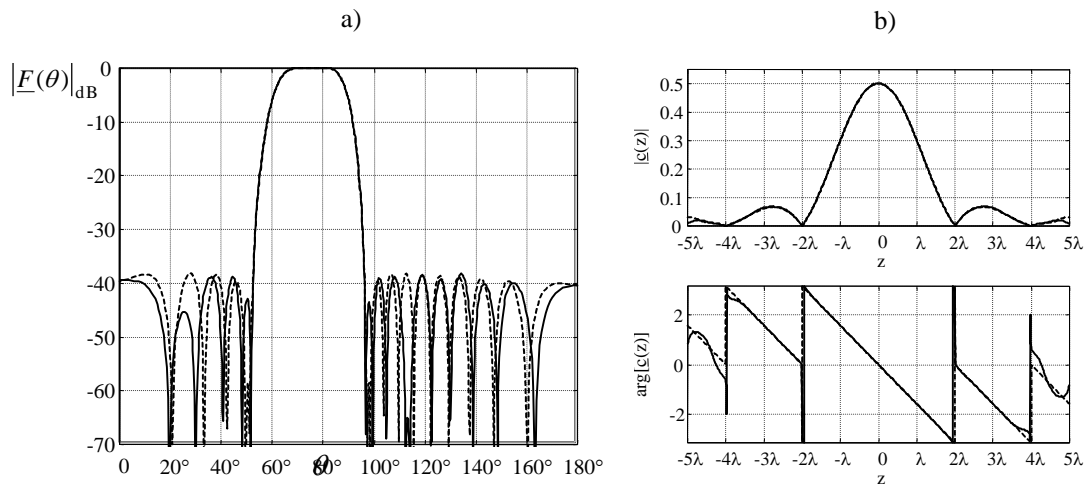


Fig. 4.49 - Geração de nulos num factor de agrupamento tipo pedestal: a) factor de agrupamento original (a tracejado) e final (a traço contínuo); b) distribuição de corrente original (a tracejado) e final (traço contínuo).

A técnica de interpolação desenvolvida mostrou ter potencialidades acrescidas sobre o teorema da amostragem na síntese de agrupamentos. Estas advêm da amostragem não uniforme do factor de agrupamento que permite outro tipo de controlo do mesmo.

Comparando com as distribuições discretas, agora a escolha de todos os pontos pode ser mais complicada, uma vez que não é possível especificar todo o domínio da variável, já que é infinito. No entanto, com alguns exemplos comprovou-se como a técnica pode ser empregue para gerar um factor de agrupamento que apresente algumas características desejadas.

4.7 - Sumário

Foram desenvolvidas várias técnicas que utilizam, com vantagem, as potencialidades do método da Relação de Fourier. Essas técnicas são gerais, tendo sido apresentados exemplos com o objectivo de demonstrar a aplicabilidade das mesmas nalguns casos mais conhecidos da síntese de agrupamentos.

Verificou-se que a aplicação dessas técnicas permitia não só obter alguns agrupamentos tradicionais de uma forma mais simples e rápida, mas também chegar a soluções normalmente conseguidas apenas pelos processos iterativos.

A possibilidade de combinação das várias técnicas permite realizar agrupamentos que aproximem a solução desejada segundo um dado critério de erro e com algumas características. Um exemplo é a geração de factores de agrupamento com *equiripple* impondo, ao mesmo tempo, nulos na função.

Referências

- [1] Gottlieb, D e Shu, C-W., “On the Gibbs Phenomenon and Its Resolution”, SIAM Review, vol. 39, Nº 4, pág. 644-668, Dezembro 1997.
- [2] Johnson, R. C., “Antenna Engineering Handbook”, McGraw-Hill, 3ª ed., 1993.
- [3] Milne, K., “Synthesis of Power Radiation Patterns for Linear Array Antennas”, IEE Proceedings, vol. 134, Pt. H, Nº 3, pág. 285-296, Junho 1987.
- [4] Taylor, T. T., “Design of Line-Source Antennas for Narrow beam width and low Side Lobes”, IRE Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-3, Nº 1, pág. 16-28, Janeiro 1955.
- [5] van der Maas, G. J., “A Simplified Calculation for Dolph-Tschebyscheff Arrays”, Journal of Applied Physics, vol. 25, Nº 1, pág. 121-124, Janeiro 1954.
- [6] Barçilon, V. e Temes, G. C., “Optimum Impulse Response and the van der Maas Function”, IEEE Transactions on Circuit Theory, vol. CT-19, Nº 4, pág. 336-342, Julho 1972.
- [7] Ersoy, O. K., “Fourier-Related Transforms, Fast Algorithms and Applications”, Prentice Hall, 1997.
- [8] Gradshteyn, I. S. e Ryzhik, I. M., “Table of Integrals, Series, and Products”, Academic Press, 1994.
- [9] Grilo, F. C. V., Casimiro, A. M. E. S. e Lopes, J. A. C., "Teoria Vectorial de Sinal", AEFEP, 1990.
- [10] Rhodes, D. R., “On the Taylor Distribution”, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-20, Nº 2, pág. 143-145, Março 1972.
- [11] Balanis C. A., "Antenna Theory, Analysis and Design", John Wiley & Sons, 2ª ed., 1997.
- [12] Hansen, R. C., “Phased Array Antennas”, John Wiley & Sons, 1998.
- [13] Collin, R. E. e Zucker, F. J., "Antenna Theory", McGraw-Hill, 1969.
- [14] Hyneman, R. F., “A Technique for the Synthesis of Line-Source Antenna Patterns Having Specified Sidelobe Behaviour”, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-16, Nº 4, pág. 430-435, Julho 1968.
- [15] Elliot, R. S., “Design of Line Source Antennas for Narrow Beamwidth and Asymmetric Low Sidelobes”, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-23, pág. 100-107, Janeiro 1975.
- [16] Stutzman, W. L., “Sidelobe Control of Antenna Patterns”, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-20, pág. 102-104, Janeiro 1972.
- [17] Elliot, R. S., “Design of Line-Source Antennas for Sum Patterns with Sidelobes of Individually Arbitrary Heights”, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-24, pág. 76-83, Janeiro 1976.
- [18] Trastoy, A. e Ares, F., “Phase-Only Control of Antenna Sum Patterns”, Millenium Conference on Antennas & Propagation, Davos, Switzerland, pág. 132, Abril 2000.
- [19] Collin, R. E., "Antennas and Radio Wave Propagation", McGraw-Hill, 1985.
- [20] Chuang, C. e Couch, L. W., “The Design of Narrow Beamwidth and Asymmetric Sidelobe Array Antenna Patterns Using Analytic Signal Concept”, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 39, Nº 10, pág. 1530-1532, Outubro 1991.
- [21] McNamara, D. A., "Direct Synthesis of Optimum Difference Patterns For Discrete Linear Arrays Using Zolotarev Distributions", IEE Proceedings-H, vol. 140, Nº 6, pág. 495-500, Dezembro 1993.

- [22] McNamara, D. A., "Performance of Zolotarev and modified-Zolotarev difference pattern array distributions", IEE Proceedings-Microwave Antennas Propagation, vol. 141, Nº 1, pág. 37-44, Fevereiro 1994.
- [23] Mathews, J. H., "Numerical Methods for Mathematics, Science, and Engineering", Prentice Hall International Editions, 2ª Ed., 1992.
- [24] Ma, M. T., "Application of Bernstein Polynomials and Interpolation Theory to Linear Array Synthesis", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-12, pág. 668-677, Novembro 1964.
- [25] Shpak, D. J. e Antoniou, A., "A Flexible Optimization Method for the Pattern Synthesis of Equispaced Linear Arrays with Equiphasic Excitation", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-40, Nº 10, pág. 1113-1120, Outubro 1992.
- [26] Bagchi, S. e Mitra, S. K., "The Nonuniform Discrete Fourier Transform and Its Applications in Filter Design: Part I - 1-D", IEEE Transactions on Circuits and Systems-II: Analog and Digital Signal Processing, vol. 43, Nº 6, pág. 422-433, Junho 1996.
- [27] Oppenheim, A. V. e Schaffer, R. W., "Discrete-Time Signal Processing", Englewood Cliffs, Prentice Hall, 1989.
- [28] Bagchi, S. e Mitra, S. K., "The Nonuniform Discrete Fourier Transform and Its Applications in Signal Processing", Kluwer Academic Publishers, 1999.
- [29] Steyskal, H., "Synthesis of Antenna Patterns with Prescribed Nulls", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-30, Nº 2, pág. 273-279, Março 1982.
- [30] Wu, L., Zielinski, A. e Bird, J. S., "A Point-Matching Method for Array Pattern", IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, vol. 43, Nº 5, pág. 773-780, Setembro 1996.
- [31] Orchard, H. J., Elliot, R. S. e Sten, G. J., "Optimising the Synthesis of Shaped Beam Antenna Patterns", IEE Proceedings, vol. 132, Pt. H, Nº 1, pág. 63-68, Fevereiro 1985.
- [32] Buckley, M. J., "Synthesis of Shaped Beam Antenna Patterns Using Implicitly Constrained Current Elements", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 44, Nº 2, pág. 192-197, Fevereiro 1996.
- [33] Rodrigues, J. A. e Ares, F., "Synthesis of Shaped Beam Antenna Patterns With Null-Filling in the Sidelobe Region", Electronic Letters, vol. 33, Nº 24, pág. 2004-2005, Novembro 1997.
- [34] Markus, L., "Optimization of Synthesised Array Excitations Using Array Polynome Complex Root Swapping and Genetic Algorithms", IEE Proceedings on Microwave Antennas Propagation, vol 145, Nº 6, pág 460-464, Dezembro 1998.
- [35] Rodriguez-Gonzalez, J. A., Ares-Pena, F. e Moreno-Piquero, E., "Linear Array Pattern Synthesis Optimising the Array Element Excitations Using the Simulated Annealing Technique", Millennium Conference on Antennas & Propagation, Davos, Switzerland, pág. 205, Abril 2000.
- [36] Hu, J.-L., Chan, C.-H. e Lin, S.-M., "Synthesis of Shaped-Beam pattern for Mobile Antenna", IEEE Antennas and Propagation International Symposium (AP/URSI 99), Orlando, pág. 1596-1599, Julho 1999.
- [37] Rodriguez, J. A. e Ares, F., "Extension of the Orchard-Elliot Method to Pure-Real Nonsymmetrical-Shaped Patterns", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 45, Nº 8, pág. 1317-1318, Agosto 1997.
- [38] Ng, B. P., Er, M. H. e Kot, A. C. C., "A New Limit on Inter-Element Spacing for Linear Array", IEEE Antennas and Propagation Magazine, vol. 40, Nº 4, pág. 22-29, Agosto 1998.
- [39] White, W. D., "A Flexible Synthesis Procedure for Line Source Antennas", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. , pág. 857-859, Novembro 1976.
- [40] Elliot, Robert S., "Antenna Theory and Design", Prentice-Hall, 1981.

Conclusões

5.1 - Introdução

Pretende-se neste capítulo delinear as contribuições deste trabalho para o avanço da análise e síntese de agrupamentos, destacando-se os aspectos de originalidade e relevância dos resultados alcançados.

No final, mostrar-se-ão possibilidades de continuidade da investigação em futuros desenvolvimentos, mostrando, nalguns casos, que formas de abordagem podem ser utilizadas.

5.2 - Resumo

Numa situação de campo distante, quando cada elemento de uma dada distribuição de fontes pode ser obtido por uma translação de uma fonte de referência, o factor de agrupamento e a distribuição de fontes relacionam-se pela transformada de Fourier tridimensional, afectada de uma constante. Designada por Relação de Fourier, esta teoria abre novas possibilidades na análise e síntese de agrupamentos.

Neste trabalho, a Relação de Fourier foi aplicada a agrupamentos contínuos e discretos com elementos equidistantes a uma dimensão espacial. Nesse sentido, foram determinadas expressões para análise e síntese desses agrupamentos. Como a ferramenta base é a transformada de Fourier, uma parte da teoria do processamento de sinal teve um papel importante na compreensão e demonstração de aplicações e resultados, sendo de salientar o teorema da amostragem e as propriedades da transformada de Fourier. O método assim desenvolvido foi designado por método da Relação de Fourier.

Após a apresentação do método, que serviu de base a toda a elaboração deste trabalho, demonstrou-se como alguns métodos determinísticos tradicionais podem ser considerados como casos particulares da Relação de Fourier. Para mais, mesmo com as especificidades próprias de cada um deles, comprovou-se que o método da Relação de Fourier, ainda nesses e noutros casos, permite simplificar a análise e síntese, tornando mais rápido e eficiente o próprio método.

Foram, também, criados algoritmos, de modo a permitir o uso sistemático da FFT no contexto deste trabalho. Com esse intuito, houve a necessidade de resolver o problema da determinação do número de pontos a utilizar para a FFT. Baseado nalguns conceitos da teoria do processamento de sinal, nomeadamente nos limites do espectro, foi desenvolvida uma técnica com esse objectivo, sendo o erro cometido na aproximação o parâmetro de interesse. Os exemplos apresentados serviram para validar a unificação e simplificação que existe quando se utiliza o método da Relação de Fourier.

Algumas técnicas aplicadas no projecto de filtros podem também ser empregues na síntese de agrupamentos. Uma delas é a técnica das janelas que foi aqui utilizada para limitação da distribuição de fontes. Embora seja vasto o rol de janelas que podem realizar esse objectivo, optou-se apenas por aquelas que continham parâmetros de controlo, como foram as janelas de Taylor, para distribuições contínuas, e de Tschebyscheff e Kaiser, para distribuições discretas de fontes. Com estas conseguiu-se algum controlo do factor de agrupamento final.

A técnica da multiplicação de funções, apresentada no capítulo dos novos procedimentos na síntese de agrupamentos, recorre a algumas características da Relação de Fourier para simplificar, ainda mais, a obtenção de alguns dos agrupamentos tradicionais mais usados ou só realizados por métodos iterativos. A técnica baseia-se no facto de que qualquer multiplicação no factor de agrupamento corresponde a uma convolução na distribuição de fontes. Foram enunciadas as vantagens e desvantagens das técnicas aí desenvolvidas face a outras com o mesmo objectivo.

Com a técnica da interpolação polinomial, para distribuições discretas, foi generalizada a amostragem do factor de agrupamento, ou seja, ela permite realizar uma amostragem não uniforme do mesmo. Com esta técnica, o factor de agrupamento pode passar por qualquer conjunto de pontos distintos, quer sejam ou não equidistantes. A forma de determinar o conjunto de pontos de interpolação, de modo a realizar os objectivos desejados, foi exemplificada através de algumas aplicações no processo de síntese de agrupamentos.

Quando apenas se pretende que o factor de agrupamento passe por um conjunto limitado de pontos e os restantes sejam aproximados pelos mínimos quadrados, a técnica de aproximação polinomial mostra-se mais atraente. A utilização de alguns exemplos de síntese demonstraram as potencialidades desta técnica.

Para agrupamentos contínuos, também foi obtida uma técnica que realiza a amostragem não uniforme do factor de agrupamento. A geração de nulos no factor de agrupamento é um exemplo de aplicação da mesma, podendo ser, no entanto, empregue quando se pretende impor valores determinados em pontos concretos do factor de agrupamento.

5.3 - Conclusões

Muito do trabalho recentemente desenvolvido na síntese de agrupamentos passa por utilizar métodos iterativos para obtenção da solução. Esses métodos, embora consigam dar as respostas desejadas dentro de certas condições, podem padecer de uma teoria que desenvolva o conhecimento e apresente uma visão mais alargada e simples da realidade.

O método e técnicas aqui desenvolvidos pretendem ir mais longe porque vão aos fundamentos e retiram dos mesmos as suas potencialidades inerentes.

Para entender melhor as possibilidades do método da Relação de Fourier, vejamos o exemplo da síntese de Tschebyscheff. O cálculo das correntes do agrupamento foi motivo de vários artigos em revistas da especialidade. Um dos últimos trabalhos publicados, a que o autor teve acesso, foi em 1994 [1], que, como se observa, foi há relativamente pouco tempo. Através do método da Relação de Fourier não só essa distribuição foi determinada de uma forma muito mais simples e rápida do que nos processos anteriores, devido ao recurso da FFT e do teorema da amostragem adaptados a este trabalho, como também ela é obtida de uma

forma coerente. De facto, se a relação entre o factor de agrupamento e a distribuição de corrente é uma transformada de Fourier, afectada de uma constante, será natural aplicar essa transformada para realizar o cálculo das correntes. Em qualquer situação do feixe principal, dos parâmetros do agrupamento e de mudança de variável, não é necessário outro método de cálculo senão este.

Nos agrupamentos de Taylor não é preciso recorrer ao método de Woodward, ou outro, para se determinar a distribuição de corrente. Mais uma vez, basta aplicar o método da Relação de Fourier, onde as propriedades da transformada desempenham um papel essencial.

O que foi dito aplica-se a qualquer agrupamento contínuo ou discreto, dentro das condições do teorema da pequena translação referente à Relação de Fourier. Sempre que se dispõe do factor de agrupamento, em qualquer das suas formas, a distribuição de fontes é determinada pelo método da Relação de Fourier. O mesmo sucede com a análise, em que se dispondo da distribuição de fontes a aplicação da transformada inversa fornece o factor de agrupamento. Com isto deixa de ser necessário qualquer outro método para realizar a análise e síntese, desde que as condições do problema sejam as da Relação de Fourier.

Dois métodos que continuam a serem referidos por muitos autores para o problema da síntese de agrupamentos são o método de Fourier e o método de Woodward. Ficou demonstrado que eles são apenas casos particulares da Relação de Fourier. O primeiro consiste na síntese de um agrupamento de modo a que a aproximação seja a dos mínimos quadrados. Obviamente trata-se da aplicação directa da Relação de Fourier ao factor de agrupamento, sendo a distribuição de fontes truncada pela janela rectangular. O segundo emprega o teorema da amostragem para truncar a distribuição de fontes. Os resultados são diferentes devido ao fenómeno de *aliasing* inerente no segundo caso. Além destas duas formas a serem utilizadas no problema de síntese, a limitação da distribuição de fontes através de uma janela, além da rectangular, permitiu fornecer bons resultados com as janelas apresentadas neste trabalho.

Nem sempre é possível o recurso a fórmulas exactas para definir o factor de agrupamento ou a distribuição de corrente. Mesmo que se disponha de uma função bem conhecida, o cálculo exacto da transformada de Fourier pode não ser fácil. O recurso à FFT para realizar o cálculo computacional demonstrou ser eficiente em qualquer problema onde se pode aplicar a Relação de Fourier. Neste caso, é importante o controlo do erro produzido para que os resultados sejam efectivamente uma aproximação aos valores exactos. O erro de truncamento de uma função é controlado considerando o ponto a partir do qual se pretende desprezar a função. O erro devido ao efeito de *aliasing* é controlado pela técnica desenvolvida baseada nos limites do espectro. A determinação do erro quadrático médio para uma série de problemas concretos provou que o parâmetro de controlo, utilizado nesta técnica, é um bom indicador do erro cometido. O número de pontos da FFT pode, assim, ser calculado com base no erro permitido para a aproximação.

Agrupamentos como o de Taylor simétrico e assimétrico, Villeneuve simétrico e assimétrico, de Bayliss e de Zolotarev, podem ser obtidos de uma forma bem mais simples quando se recorre às características da Relação de Fourier. A aplicação da técnica da multiplicação de funções não pretendeu ser exaustiva, tendo apenas como objectivo ver em que medida o recurso ao método da Relação de Fourier pode abrir novas perspectivas no problema da síntese de agrupamentos.

Pela técnica da interpolação polinomial concluiu-se que as mudanças de variável utilizadas em agrupamentos como o de Tschebyscheff e Zolotarev são casos particulares aplicáveis a funções simétricas em relação à origem. Uma mudança de variável mais geral permitiu lidar com qualquer tipo de função.

A generalização do processo de amostragem é um passo indispensável para o problema da síntese. Com efeito, com ele pode-se fazer com que o factor de agrupamento passe em qualquer ponto desejado. Anteriormente, com o teorema da amostragem só se podia impor pontos equidistantes, embora com qualquer valor da função. Pelo método da colocação das raízes no círculo unitário de Schelkunoff pode-se ter qualquer posição, mas só se pode impor valores nulos para a função. A técnica da interpolação polinomial desenvolvida neste trabalho veio colmatar esta lacuna, permitindo colocar um ponto do factor de agrupamento em qualquer posição e com qualquer valor. Com esta técnica, o número de pontos que se pode controlar é igual ao número de elementos da distribuição de fontes.

Uma das aplicações onde a técnica de interpolação pode ser eficaz é na obtenção de factores de agrupamento com *equiripple*. Para isso foi determinada uma forma de colocação dos pontos, baseada nos zeros e máximos dos polinómios de Tschebyscheff, para controlo do nível dos lóbulos secundários e do *ripple* da zona do feixe. Outra aplicação da técnica de interpolação é na geração de nulos no factor de agrupamento. A vantagem desta técnica face a outras consiste na sua simplicidade e no facto de se poder corrigir níveis ou valores da função que tenham sido alterados após a inserção dos nulos.

5.4 - Trabalhos Futuros

Em todo o decorrer deste trabalho, lidou-se com um dimensão espacial, optando-se por escolher o eixo dos ZZ por simplicidade e coerência com o ângulo θ . Pela Relação de Fourier retira-se que apenas com uma distribuição tridimensional de fontes se pode controlar o factor de agrupamento em cada direcção do espaço [2]. Um dos futuros trabalhos de continuação deste é a generalização do método desenvolvido às três dimensões espaciais. A teoria de base é a mesma, mas a elaboração de algumas das técnicas apresentadas exige um cuidado acrescido. Por exemplo, os agrupamentos circulares requerem uma definição da transformada de Fourier a duas dimensões, podendo-se, porém, trabalhar a uma dimensão com auxílio da transformada de Hankel.

Os métodos de síntese de diagramas de potência, utilizados por alguns autores, têm alguma vantagem face aos métodos de síntese de tensão, pelo facto destes últimos, normalmente, não utilizarem a fase do factor de agrupamento. Apesar de não ser uma limitação dos diagramas de tensão, existe uma dificuldade em encontrar uma técnica capaz de usar a informação de fase, de forma eficiente e fundamentada, o que ainda não se conseguiu a não ser por métodos iterativos [3]. O método da Relação de Fourier pode mostrar-se importante para esse estudo. Na realidade, alguns autores verificaram que a utilização de factores de agrupamento sem a informação de fase origina, para o mesmo módulo da função, zeros no plano complexo que podem ser iguais [4]. Daqui a limitação do uso apenas do módulo do factor de agrupamento. Uma sugestão de abordagem do problema poderá ser a obtenção da relação que existe entre o processo de interpolação, desenvolvido neste trabalho, e a representação das raízes do factor de agrupamento no plano complexo. Já é do conhecimento que as posições dos zeros do factor de agrupamento correspondem a raízes no círculo de Schelkunoff, ou seja, pontos bem determinados para aplicação da interpolação polinomial. Também foi demonstrado em [5] que

Conclusões

supondo $\theta_n = \arccos\{\ln[r_n/(j\beta d)]\}$, sendo r_n a raiz n do factor de agrupamento, a parte real de θ_n indica a posição de um nulo no diagrama de potência e a parte imaginária representa se esse nulo é efectivamente um zero ou se é um extremo inferior do *ripple* na zona do feixe do diagrama. Passando para a variável de interesse deste trabalho, tem-se que $\beta_{zn} = \ln[r_n/(jd)]$. Deste modo, a posição dos extremos inferiores do *ripple* na zona do feixe do factor de agrupamento é dada pela parte real de β_{zn} e o valor da função nesse ponto depende da parte imaginária de β_{zn} . No entanto, falta arranjar uma forma eficiente de se obter os valores de β_{zn} que permitam sintetizar um agrupamento com as características desejadas, sem que se tenha de enveredar por técnicas iterativas. Esta abordagem ficará, igualmente, para futuros desenvolvimentos.

O método desenvolvido não pode ser aplicado directamente em situações fora das condições da Relação de Fourier. Por exemplo, para aplicar esta teoria a um agrupamento discreto as fontes devem ser paralelas, pois só assim cada elemento é obtido por translação de uma fonte de referência. Contudo, este problema pode ser transformado num outro, em que cada fonte é decomposta nas três direcções espaciais [6]. A Relação de Fourier é, nesse caso, utilizada para cada um das direcções e o resultado será a soma vectorial dos três campos obtidos. Esta ideia pode ser a base do estudo de agrupamentos não paralelos, como são as antenas curvas.

Referências

- [1] Safaai-Jazi, A., "A New Formulation for the Design of Chebyshev Arrays", IEEE Transactions on Antenna and Propagation, vol. 42, N° 3, pág. 439-443, Março 1994.
- [2] Casimiro, A. M. E. S., "A Relação Básica da Radiação", Tese de Doutoramento, Universidade do Porto, FEUP, 1990.
- [3] Milne, K., "Synthesis of Power Radiation Patterns for Linear Array Antennas", IEE Proceedings, vol. 134, Pt. H, N° 3, pág. 285-296, Junho 1987.
- [4] Elliot, R. S. e Stern, G. J., "A New Technique for Shaped Beam Synthesis of Equispaced Arrays", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-32, N° 10, pág. 1129-1133, Outubro 1984.
- [5] Markus, L., "Optimization of Synthesised Array Excitations Using Array Polynome Complex Root Swapping and Genetic Algorithms", IEE Proceedings on Microwave Antennas Propagation, vol 145, N° 6, pág 460-464, Dezembro 1998.
- [6] Casimiro, A. M. E. S. e Azevedo, J. A. R., "The Small Translation of No Parallel Sources", PIERS (Progress In Electromagnetics Research Symposium), Jet Propulsion Laboratory, California Institute of Technology, Pasadena, California, USA, Julho 1993.

Apêndices

Apêndice A - Algoritmos das funções *fftcont* e *fftdisc*

```
function [Uz,z]=fftcont(uBz,TF,tau,sigma)
% Calcula a FFT de uma função contínua.
```

```
P=length(uBz);
```

```
if round(P/2)==P/2
```

```
    Bz=-P*TF/2:TF:(P-2)*TF/2;
```

```
    z=-pi/TF+sigma*2*pi/(P*TF):2*pi/(P*TF):(P-2)*pi/(P*TF)+sigma*2*pi/(P*TF);
```

```
    uBz=uBz.*exp(-j*Bz*sigma*2*pi/(P*TF));
```

```
    uBz=fftshift(uBz);
```

```
else
```

```
    Bz=-(P-1)*TF/2:TF:(P-1)*TF/2;
```

```
    z=-(P-1)*pi/(P*TF)+sigma*2*pi/(P*TF):2*pi/(P*TF):(P-1)*pi/(P*TF)+sigma*2*pi/(P*TF);
```

```
    uBz=uBz.*exp(-j*Bz*sigma*2*pi/(P*TF));
```

```
    uBz=[uBz((P-1)/2+1:P) uBz(1:(P-1)/2)];
```

```
end
```

```
Uz=fftshift(fft(uBz)).*exp(-j*tau*TF*z)*TF;
```

-----//-----

```
function [Uz,z]=fftdisc(uBz,d,tau,sigma)
% Calcula a FFT de uma função discreta.
```

```
P=length(uBz);
```

```
if round(P/2)==P/2
```

```
    Bz=-pi/d:2*pi/(P*d):(P-2)*pi/(P*d);
```

```
    z=-P*d/2+sigma*d:d:(P-2)*d/2+sigma*d;
```

```
    uBz=uBz.*exp(-j*Bz*sigma*d);
```

```
    uBz=fftshift(uBz);
```

```
else
```

```
    Bz=-(P-1)*pi/(P*d):2*pi/(P*d):(P-1)*pi/(P*d);
```

```
    z=-(P-1)*d/2+sigma*d:d:(P-1)*d/2+sigma*d;
```

```
    uBz=uBz.*exp(-j*Bz*sigma*d);
```

```
    uBz=[uBz((P-1)/2+1:P) uBz(1:(P-1)/2)];
```

```
end
```

```
Uz=fftshift(fft(uBz)).*exp(-j*tau*z*2*pi/(P*d))*2*pi/P;
```

Apêndice B - Algoritmos das funções *ifftcont* e *ifftdisc*

```

function [uBz,Bz]=ifftcont(Uz,Tc,sigma)
% Calcula a FFT inversa de uma função contínua.

P=length(Uz);

if round(P/2)==P/2
    Bz=-pi/Tc:2*pi/(P*Tc):(P-2)*pi/(P*Tc);
    Uz=fftshift(Uz);
else
    Bz=-(P-1)*pi/(P*Tc):2*pi/(P*Tc):(P-1)*pi/(P*Tc);
    Uz=[Uz((P-1)/2+1:P) Uz(1:(P-1)/2)];
end

uBz=fftshift(iff(Uz)).*exp(j*Bz*sigma*Tc)*Tc*P/(2*pi);
-----//-----
function [uBz,Bz]=ifftdisc(Uz,d,sigma,flag)
% Calcula a FFT inversa de uma função discreta.

P=length(Uz);

if round(P/2)==P/2
    Bz=-pi/d:2*pi/(P*d):(P-2)*pi/(P*d);
    Uz=fftshift(Uz);
else
    Bz=-(P-1)*pi/(P*d):2*pi/(P*d):(P-1)*pi/(P*d);
    Uz=[Uz((P-1)/2+1:P) Uz(1:(P-1)/2)];
end
uBz=fftshift(iff(Uz)).*exp(j*Bz*sigma*d)*P/(2*pi);

f=strcmp(flag,'s')|strcmp(flag,'S');
if f==1
    I=round(d);
    if (2*I-1)*.5==d
        I=I-1;
    end
    uBz0=uBz;
    if round(P/2)==P/2
        Bz=-pi*(2*I+1)/d:2*pi/(P*d):pi*(2*I+1)/d-2*pi/(P*d);
    else
        Bz=-(pi*(2*I+1)/d-pi/(P*d)):2*pi/(P*d):(pi*(2*I+1)/d-pi/(P*d));
    end
    for i=1:I
        uBz=[uBz0*exp(-j*2*pi*i*sigma) uBz uBz0*exp(j*2*pi*i*sigma)];
    end
end
end

```

Apêndice C1 - Algoritmo para Síntese de um Agrupamento Contínuo

```

% entrada de dados
P=1024;
TF=.1;
tau=0;

% amostras do factor de agrupamento e FFT
if round(P/2)==P/2
    Bz=-P*TF/2:TF:(P-2)*TF/2;
else
    Bz=-(P-1)*TF/2:TF:(P-1)*TF/2;
end

beta=2*pi;
B0=beta*cos(4*pi/9);
Nel=fix(B0/TF);
Bz1=-Nel*TF:TF:-TF;
Bz2=0:TF:Nel*TF;
FBz=[cos(Bz2*pi/(2*B0)) zeros(1,P-(2*Nel+1)) cos(Bz1*pi/(2*B0))];
FBz=fftshift(FBz);

[Uz,z]=fftcont(FBz,TF,tau,0);
cz=Uz/(2*pi);

% fórmula directa
czd=(1/(2*pi))*(B0*pi*cos(B0*z)./(pi^2/4-B0^2*z.^2));

% factor de agrupamento
subplot(1,1,1), plot(Bz,FBz)
axis([-beta beta 0 1])
pause

% distribuição de corrente
subplot(2,1,1), plot(z,20*log10(abs(cz)),z,20*log10(abs(czd)),':')
axis([-40 40 -80 0])
grid
subplot(2,1,2), plot(z,abs(cz),z,abs(czd),':')
axis([-40 40 0 max(abs(cz))*1.1])
grid

```

Apêndice C2 - Algoritmo para a Síntese de Taylor

```

% entrada de dados
L=2;
nb=8;
SLL=25;
P=1024;
tau=1e-8;

S=L;
TF=2*pi/S;

% amostras do factor de agrupamento e FFT
if round(P/2)==P/2
    Bz=-P*TF/2:TF:(P-2)*TF/2;
else
    Bz=-(P-1)*TF/2:TF:(P-1)*TF/2;
end

A=(1/pi)*acosh(10^(SLL/20));
m=1:nb-1;
um=nb*sqrt(A^2+(m-.5).^2)/sqrt(A^2+(nb-.5)^2);
Bzm=(2*pi/L)*um;

FBzA=sin(L*(Bz+tau*TF)/2)./(L*(Bz+tau*TF)/2);
FBzB=ones(1,length(Bz));
FBzC=ones(1,length(Bz));
for m=1:nb-1
    FBzB=FBzB.*(1-((Bz+tau*TF).^2)/(Bzm(m))^2);
    FBzC=FBzC.*(1-((Bz+tau*TF).^2)/(m*2*pi/L)^2);
end
FBz=FBzA.*FBzB./FBzC;

[Uz,z]=fftcont(FBz,TF,tau,0);
cz=Uz/(2*pi);

% cálculo pela fórmula
for m=1:nb-1
    FBzT(m)=1;
    for n=1:nb-1
        FBzT(m)=FBzT(m)*(1-m^2/um(n)^2);
    end
    FBzT(m)=FBzT(m)*(gamma(nb)^2/(gamma(nb+m)*gamma(nb-m)));
end
czT=1;
for m=1:nb-1

```

```

    czT=czT+2*FBzT(m)*cos(2*pi*m*z/L);
end
czT=czT/L;

% factor de agrupamento
Bz=-10*2*pi/L:1/100:10*2*pi/L;
FBzA=sin(L*Bz/2)/(L*Bz/2);
FBzB=ones(1,length(Bz));
FBzC=ones(1,length(Bz));
for m=1:nb-1
    FBzB=FBzB.*(1-(Bz.^2)/(Bzm(m))^2);
    FBzC=FBzC.*(1-(Bz.^2)/(m*2*pi/L)^2);
end
FBz=FBzA.*FBzB./FBzC;
subplot(1,1,1), plot(Bz,20*log10(abs(FBz)))
axis([-10*2*pi/L 10*2*pi/L -50 0])
grid
pause

%distribuição de corrente
subplot(2,1,1), plot(z,abs(cz),z,abs(czT),':')
xlabel('z')
ylabel('|c(z)|')
grid on
subplot(2,1,2), plot(z,angle(cz),z,angle(czT),':')
xlabel('z')
ylabel('arg[c(z)]')
grid on

```

Apêndice C3 - Algoritmo para a Síntese de Bayliss

```

% entrada de dados
L=2;
nb=10;
A=1.6413; %SLL=30;
aux=zeros(1,nb-1);
aux(1)=2.0708^2;
aux(2)=2.6275^2;
aux(3)=3.4314^2;
aux(4)=4.3276^2;
aux(5)=A^2+5^2;
aux(6)=A^2+6^2;
aux(7)=A^2+7^2;
aux(8)=A^2+8^2;
aux(9)=A^2+9^2;
P=1024;
tau=1/2+1e-8;

S=L;
TF=2*pi/S;

% amostras do factor de agrupamento e FFT
if round(P/2)==P/2
    Bz=-P*TF/2:TF:(P-2)*TF/2;
else
    Bz=-(P-1)*TF/2:TF:(P-1)*TF/2;
end

um=zeros(1,nb-1);
for m=1:nb-1
    um(m)=(nb+.5)*sqrt(aux(m))/sqrt(A^2+nb^2);
end
Bzm=(2*pi/L)*um;

FBzA=(L/2)*(Bz+tau*TF).*cos(L*(Bz+tau*TF)/2);
FBzB=ones(1,length(Bz));
FBzC=ones(1,length(Bz));
for m=1:nb-1
    FBzB=FBzB.*(1-((Bz+tau*TF).^2)/(Bzm(m))^2);
end
for m=0:nb-1;
    FBzC=FBzC.*(1-((Bz+tau*TF).^2)/(2*pi*(m+1/2)/L)^2);
end
FBz=FBzA.*FBzB./FBzC;

```

Apêndices

```

[Uz,z]=fftcont(FBz,TF,tau,0);
cz=Uz/(2*pi);

% cálculo pela fórmula
FBzT=ones(1,nb);
FBzTA=ones(1,nb);
FBzTB=ones(1,nb);
for m=0:nb-1
    for n=1:nb-1
        FBzTA(m+1)=FBzTA(m+1)*(1-(m+.5)^2/um(n)^2);
    end
    for n=0:nb-1
        if n~=m
            FBzTB(m+1)=FBzTB(m+1)*(1-(m+.5).^2/(n+.5)^2);
        end
    end
    FBzT(m+1)=(pi^2*(-1)^m*(m+.5)^2/2)*FBzTA(m+1)/FBzTB(m+1);
end
czB=0;
for m=0:nb-1
    czB=czB+(2/(j*L))*FBzT(m+1)*sin(2*pi*(m+.5)*z/L);
end

% factor de agrupamento
Bz=-10*2*pi/L:1/100:10*2*pi/L;
FBzA=(L/2)*Bz.*cos(L*Bz/2);
FBzB=ones(1,length(Bz));
FBzC=ones(1,length(Bz));
for m=1:nb-1
    FBzB=FBzB.*(1-(Bz.^2)/(Bzm(m))^2);
end
for m=0:nb-1;
    FBzC=FBzC.*(1-(Bz.^2)/(2*pi*(m+1/2)/L)^2);
end
FBz=FBzA.*FBzB./FBzC;
subplot(1,1,1), plot(Bz,20*log10(abs(FBz)/max(abs(FBz))))
axis([-10*2*pi/L 10*2*pi/L -50 0])
grid on
pause

% distribuição de corrente
subplot(2,1,1), plot(z,abs(cz),z,abs(czB),':')
xlabel('z')
ylabel('|c(z)|')
axis([-L/2 L/2 0 2])
subplot(2,1,2), plot(z,angle(cz),z,angle(czB),':')
xlabel('z')
ylabel('arg[c(z)]')
axis([-L/2 L/2 -pi pi])

```

Apêndice C4 - Algoritmo para Síntese de um Agrupamento Discreto

```

% entrada de dados
P=1024;
d=.6;
tau=0;
sigma=.5;

% amostras do factor de agrupamento e FFT
beta=2*pi;
Nel1=ceil(P*d*cos(4*pi/9));
Nel2=fix(P*d*cos(pi/3));
if round(P/2)==P/2
    Bz=-pi/d:2*pi/(P*d):(P-2)*pi/(P*d);
    FBz=[zeros(1,P/2+Nel1) ones(1,Nel2-Nel1+1) zeros(1,(P-2)/2-Nel2)];
else
    Bz=-(P-1)*pi/(P*d):2*pi/(P*d):(P-1)*pi/(P*d);
    FBz=[zeros(1,(P-1)/2+Nel1) ones(1,Nel2-Nel1+1) zeros(1,(P-1)/2-Nel2)];
end

[Uz,z]=fftdisc(FBz,d,tau,sigma);
cz=Uz/(2*pi);

% fórmula directa
czd=0;
if round(P/2)==P/2
    n=-P/2:(P-2)/2;
else
    n=-(P-1)/2:(P-1)/2;
end
czd(n+P/2+1)=(1/pi)*exp(-j*(n+sigma)*d*(beta*cos(pi/3)+beta*cos(4*pi/9))/2).*(
sin((beta*cos(pi/3)-beta*cos(4*pi/9))*(n+sigma)*d/2)./(n+sigma));

% distribuição de corrente
subplot(2,1,1), stem(z,abs(cz),'.')
axis([-10 10 0 .2])
xlabel('z')
ylabel('|c(z)|')
grid on
subplot(2,1,2), stem(z,angle(cz),'.')
axis([-10 10 -pi pi])
xlabel('z')
ylabel('arg[c(z)]')
grid on

```

Apêndice C5 - Algoritmo para a Síntese de Tschebyscheff com $x=x_0\cos(Bz*d/2)$

```

% entrada de dados
N=9;
SLL=30;
P=16;
d=.561;
tau=0;
if round(N/2)==N/2
    sigma=1/2;
else
    sigma=0;
end

% amostras do factor de agrupamento e FFT
if round(P/2)==P/2
    Bz=-pi/d:2*pi/(P*d):(P-2)*pi/(P*d);
else
    Bz=-(P-1)*pi/(P*d):2*pi/(P*d):(P-1)*pi/(P*d);
end

beta=2*pi;
Bzd=beta*cos(pi/3);
x0=cosh(acosh(10^(SLL/20))/(N-1));
FBz=cos((N-1)*acos(x0*cos((Bz+tau*2*pi/(P*d)-Bzd)*d/2)));

[Uz,z]=fftdisc(FBz,d,tau,sigma);
cz=Uz/(2*pi);

% factor de agrupamento
Bz=-beta/pi/200:beta;
FBz=cos((N-1)*acos(x0*cos((Bz-Bzd)*d/2)));
subplot(1,1,1), plot(Bz,20*log10(abs(FBz)))
axis([-beta beta -40 40])
pause

% distribuição de corrente
subplot(2,1,1), stem(z,abs(cz),'.')
xlabel('z')
ylabel('|c(z)|')
axis([-P*d/2 P*d/2 0 max(abs(cz))])
subplot(2,1,2), stem(z,angle(cz),'.')
xlabel('z')
ylabel('arg[c(z)]')
axis([-P*d/2 P*d/2 -pi pi])

```

Apêndice C6 - Algoritmo para a Síntese de Tschebyscheff com $x=w\cos(Bz*d)+h$

```

% entrada de dados
N=7;
SLL=20;
P=16;
d=1/24;
tau=0;
sigma=0;

% aplicação da FFT
if round(P/2)==P/2
    Bz=-pi/d:2*pi/(P*d):(P-2)*pi/(P*d);
else
    Bz=-(P-1)*pi/(P*d):2*pi/(P*d):(P-1)*pi/(P*d);
end

beta=2*pi;
x0=cosh(2*acosh(10^(SLL/20))/(N-1));
w=(1+x0)/(1-cos(beta*d));
h=-(1+x0*cos(beta*d))/(1-cos(beta*d));
FBz=cos(((N-1)/2)*acos(w*cos((Bz+tau*2*pi/(P*d))*d)+h));

[Uz,z]=fftdisc(FBz,d,tau,sigma);
cz=Uz/(2*pi);

% factor de agrupamento
Bz=-pi/d:pi/200:pi/d;
fBz=cos(((N-1)/2)*acos(w*cos(Bz*d)+h));
subplot(1,1,1), plot(Bz,20*log10(abs(fBz)))
axis([-beta beta -40 40])
grid on
pause

% distribuição de corrente
subplot(2,1,1), stem(z,abs(cz),'.')
xlabel('z')
ylabel('|c(z)|')
axis([-P*d/2 P*d/2 0 max(abs(cz))])
grid on
subplot(2,1,2), stem(z,angle(cz),'.')
xlabel('z')
ylabel('arg[c(z)]')
axis([-P*d/2 P*d/2 -pi pi])
grid on

```

Apêndice C7 - Algoritmo para a Síntese de Gegenbauer

```

% entrada de dados
N=11;
SLL=25;
P=11;
d=.6;
tau=0;
if round(N/2)==N/2
    sigma=1/2;
else
    sigma=0;
end

% amostras dos factores de agrupamento e FFT
if round(P/2)==P/2
    Bz=-pi/d:2*pi/(P*d):(P-2)*pi/(P*d);
else
    Bz=-(P-1)*pi/(P*d):2*pi/(P*d):(P-1)*pi/(P*d);
end

x01=cosh(acosh(10^(SLL/20))/(N-1));
t1=.5;
x02=1.056;
t2=1;
x03=1.045;
beta=2*pi;
x=x01*cos((Bz+tau*2*pi/(P*d))*d/2);
FBz1=cos((N-1)*acos(x));
FBz1=FBz1/cos((N-1)*acos(x01));

x=x02*cos((Bz+tau*2*pi/(P*d))*d/2);
FBz2=0;
FBz2max=0;
for m=0:fix((N-1)/2)
    FBz2=FBz2+((-1)^m)*gamma(N-1+t1-m)*((2*x).^(N-1-2*m))/
        (gamma(t1)*gamma(m+1)*gamma(N-1-2*m+1));
    FBz2max=FBz2max+((-1)^m)*gamma(N-1+t1-m)*((2*x02).^(N-1-2*m))/
        (gamma(t1)*gamma(m+1)*gamma(N-1-2*m+1));
end
FBz2=FBz2/FBz2max;

x=x03*cos((Bz+tau*2*pi/(P*d))*d/2);
FBz3=0;
FBz3max=0;
for m=0:fix((N-1)/2)

```

Apêndices

```

FBz3=FBz3+((-1)^m)*gamma(N-1+t2-m)*((2*x).^(N-1-2*m))/
      (gamma(t2)*gamma(m+1)*gamma(N-1-2*m+1));
FBz3max=FBz3max+((-1)^m)*gamma(N-1+t2-m)*((2*x03).^(N-1-2*m))/
      (gamma(t2)*gamma(m+1)*gamma(N-1-2*m+1));
end
FBz3=FBz3/FBz3max;

[Uz,z]=fftdisc(FBz1,d,tau,sigma);
cz1=Uz/(2*pi);
[Uz,z]=fftdisc(FBz2,d,tau,sigma);
cz2=Uz/(2*pi);
[Uz,z]=fftdisc(FBz3,d,tau,sigma);
cz3=Uz/(2*pi);

% factor de agrupamento
Bz=-beta:pi/200:beta;

x=x01*cos(Bz*d/2);
FBz1=cos((N-1)*acos(x01*cos(Bz*d/2)));
FBz1=FBz1/cos((N-1)*acos(x01));

x=x02*cos(Bz*d/2);
FBz2=0;
FBz2max=0;
for m=0:fix((N-1)/2)
    FBz2=FBz2+((-1)^m)*gamma(N-1+t1-m)*((2*x).^(N-1-2*m))/
          (gamma(t1)*gamma(m+1)*gamma(N-1-2*m+1));
    FBz2max=FBz2max+((-1)^m)*gamma(N-1+t1-m)*((2*x02).^(N-1-2*m))/
          (gamma(t1)*gamma(m+1)*gamma(N-1-2*m+1));
end
FBz2=FBz2/FBz2max;

x=x03*cos(Bz*d/2);
FBz3=0;
FBz3max=0;
for m=0:fix((N-1)/2)
    FBz3=FBz3+((-1)^m)*gamma(N-1+t2-m)*((2*x).^(N-1-2*m))/
          (gamma(t2)*gamma(m+1)*gamma(N-1-2*m+1));
    FBz3max=FBz3max+((-1)^m)*gamma(N-1+t2-m)*((2*x03).^(N-1-2*m))/
          (gamma(t2)*gamma(m+1)*gamma(N-1-2*m+1));
end
FBz3=FBz3/FBz3max;

% factor de agrupamento
subplot(1,1,1),
plot(Bz,20*log10(abs(FBz1)),Bz,20*log10(abs(FBz2)),':',Bz,20*log10(abs(FBz3)),'--')
axis([-beta beta -40 0])
grid on
pause

```

```
% distribuição de corrente
subplot(2,1,1), stem(z,abs(cz1))
xlabel('z')
ylabel('|c(z)|')
axis([-4 4 0 max(abs(cz1))*1.1])
grid on
hold on
subplot(2,1,1), stem(z,abs(cz2),'*')
hold on
subplot(2,1,1), stem(z,abs(cz3),'s')
hold off

subplot(2,1,2), stem(z,abs(cz1))
xlabel('z')
ylabel('arg[c(z)]')
axis([-4 4 -pi pi])
grid on
hold on
subplot(2,1,2), stem(z,abs(cz2),'*')
hold on
subplot(2,1,2), stem(z,abs(cz3),'s')
hold off
```

Apêndice C8 - Algoritmo para a Síntese de Zolotarev

```

global SLL
global n

% entrada de dados
N=20;
SLL=30;
P=N;
d=.5;
sigma=1/2;

% amostras do factor de agrupamento e FFT
if round(P/2)~=P/2
    Bz=-pi/d:2*pi/(P*d):(P-2)*pi/(P*d);
else
    Bz=-(P-1)*pi/(P*d):2*pi/(P*d):(P-1)*pi/(P*d);
end

beta=2*pi;
x0=1; % ou
% x0=1/sin(beta*d/2);
n=N/2-1;

k=fzero('x2zolot',.99999);
x=x0*sin(Bz*d/2);
x(fix(P/2)+1)=0;

K=ellipke(k^2);
kl=sqrt(1-k^2);
Kl=ellipke(kl^2);
q=exp(-pi*Kl/K);
ql=exp(-pi*K/Kl);
M=-K/(2*n+1);
x3=ellipj(-M,k^2);
[sn,cn,dn]=ellipj(M,k^2);
x1=kl*x3/dn;

I=find((x(:)>=0)&(x(:)<=x1));
xI=x(I);
t=xI*cn./(sqrt(1-xI.^2)*kl*sn);
phi=ellipticf(t,(kl*ones(1,length(xI))).^2);
aux=zeros(1,length(xI));
r=1;
term=1;
while max(abs(term))>1e-10
    term=((-1)^r*q^(2*r)/(r*(1-q^(2*r))))*sin(r*pi*M/K)*sinh(r*pi*phi/K);

```

Apêndices

```

    aux=aux+term;
    r=r+1;
end
hMphik=pi/2-atan(tan(pi*M/(2*K))*tanh(pi*phi/(2*K)))+2*aux;
FBzA=cos((2*n+1)*hMphik);

I=find((x(:)>x1)&(x(:)<=x3));
xII=x(I);
p=(1/k)*sqrt((sn^2-xII.^2)./(sn^2*(1-xII.^2)));
s=ellipticf(p,(k*ones(1,length(xII))).^2);
aux=zeros(1,length(xII));
r=1;
term=1;
while max(abs(term))>1e-10
    term=(q^r/(r*(1-q^(2*r))))*sin(r*pi*M/K)*sin(r*pi*s/K);
    aux=aux+term;
    r=r+1;
end
fMsk=4*aux;
FBzB=cos(n*pi)*cosh((n+1/2)*fMsk);

I=find(x(:)>x3);
if round(P/2)==P/2
    xIII=[x(I) x0];
else
    xIII=x(I);
end
r1=(sn/cn)*(sqrt(1-xIII.^2)./xIII);
phi=ellipticf(r1,(k1*ones(1,length(xIII))).^2);
aux=zeros(1,length(xIII));
r=1;
term=1;
while max(abs(term))>1e-10
    term=(ql^(2*r)/(r*(1-ql^(2*r))))*sinh(r*pi*M/K1)*sin(r*pi*phi/K1);
    aux=aux+term;
    r=r+1;
end
gMphik=-pi*M*phi/(K*K1)+2*atan(tan(pi*phi/(2*K1))/tanh(pi*M/(2*K1)))-4*aux;
FBzC=cos((n+1/2)*gMphik);

FBzAn=-fliplr(FBzA(2:length(FBzA)));
FBzBn=-fliplr(FBzB);
FBzCn=-fliplr(FBzC);
if round(P/2)==P/2
    FBz=[FBzCn FBzBn FBzAn FBzA FBzB FBzC(1:length(FBzC)-1)];
else
    FBz=[FBzCn FBzBn FBzAn FBzA FBzB FBzC];
end
[U,z]=fftdisc(FBz,d,0,sigma);

```

Apêndices

```

cz=Uz/(2*pi);

% factor de agrupamento
Bz=-pi/d:pi/100:pi/d;
FBz=0;
for i=-P/2:P/2-1
    FBz=FBz+cz*(i+P/2+1)*exp(j*Bz*d*(2*i+1)/2);
end

subplot(1,1,1), plot(Bz,20*log10(abs(FBz)))
axis([-pi/d pi/d -20 40])
grid on
pause

% distribuição de corrente
subplot(2,1,1), stem(z,abs(cz),'.')
xlabel('z')
ylabel('|c(z)|')
grid on
subplot(2,1,2), stem(z,angle(cz),'.')
xlabel('z')
ylabel('arg[c(z)]')
grid on

-----//-----

function y=x2zolot(k);
global SLL
global n

b=10^(SLL/20);
K=ellipke(k^2);
kl=sqrt(1-k^2);
Kl=ellipke(kl^2);
q=exp(-pi*Kl/K);
M=-K/(2*n+1);
x3=ellipj(-M,k^2);
[sn,cn,dn]=ellipj(M,k^2);
x2=x3*sqrt(1-cn*jacobizeta(M,k^2)/(sn*dn));
p=(1/k)*sqrt((sn^2-x2.^2)./(sn^2*(1-x2.^2)));
s=ellipticf(p,k.^2);
aux2=0;
for r=1:100
    aux2=aux2+(q^r/(r*(1-q^(2*r))))*sin(r*pi*M/K)*sin(r*pi*s/K);
end
fMsk=4*aux2;
y=abs(cos(n*pi)*cosh((n+1/2)*fMsk))-b;

```

Apêndice C9 - Algoritmo para a Síntese de Villeneuve

```

N=41;
SLL=25;
nb=6;
P=64;
d=.5;
tau=.1;
if round(N/2)==N/2
    sigma=1/2;
else
    sigma=0;
end

% amostras do factor de agrupamento e FFT
if round(P/2)==P/2
    Bz=-pi/d:2*pi/(P*d):(P-2)*pi/(P*d);
else
    Bz=-(P-1)*pi/(P*d):2*pi/(P*d):(P-1)*pi/(P*d);
end

beta=2*pi;
x0=cosh(acosh(10^(SLL/20))/(N-1));
m=1:nb-1;
Bzm=nb*2*pi*acos((1/x0)*cos((2*m-1)*pi/(2*(N-1))))/
    (d*N*acos((1/x0)*cos((2*nb-1)*pi/(2*(N-1)))));

FBzA=sin(N*d*(Bz+tau*2*pi/(P*d))/2)./sin(d*(Bz+tau*2*pi/(P*d))/2);
FBzB=ones(1,length(Bz));
FBzC=ones(1,length(Bz));
for m=1:nb-1
    FBzB=FBzB.*sin(d*(Bz+tau*2*pi/(P*d)-Bzm(m))/2).*
        sin(d*(Bz+tau*2*pi/(P*d)+Bzm(m))/2);
    FBzC=FBzC.*sin(d*(Bz+tau*2*pi/(P*d)-2*pi*m/(N*d))/2).*
        sin(d*(Bz+tau*2*pi/(P*d)+2*pi*m/(N*d))/2);
end
FBz=FBzA.*FBzB./FBzC;

[Uz,z]=fftdisc(FBz,d,tau,sigma);
cz=Uz/(2*pi);

% cálculo pela fórmula
FBz1=zeros(1,nb);
FBz1A=1;
FBz1B=1;
for q=1:nb-1

```

Apêndices

```

FBz1A=FBz1A*(sin(Bzm(q)*d/2))^2;
FBz1B=FBz1B*(sin(q*pi/N))^2;
end
FBz1(1)=N*FBz1A/FBz1B;
for m=1:nb-1
    FBz1A=1;
    FBz1B=1;
    for q=1:nb-1
        FBz1A=FBz1A*sin(m*pi/N-Bzm(q)*d/2)*sin(m*pi/N+Bzm(q)*d/2);
        if q~=m
            FBz1B=FBz1B*sin((m-q)*pi/N)*sin((m+q)*pi/N);
        end
    end
    FBz1(m+1)=N*((-1)^m)*FBz1A/(sin(m*pi/N)*sin(2*m*pi/N)*FBz1B);
end
if round(N/2)==N/2
    M=N/2;
    cz1=zeros(1,2*M);
    for p=-M+1:M
        for m=1:nb-1
            cz1(p+M)=cz1(p+M)+FBz1(m+1)*cos(2*pi*(p-1/2)*m/N);
        end
        cz1(p+M)=(FBz1(1)+2*cz1(p+M))/N;
    end
    z1=-M*d+d/2:d:(M-1)*d+d/2;
else
    M=(N-1)/2;
    cz1=zeros(1,2*M+1);
    for p=-M:M
        for m=1:nb-1
            cz1(p+M+1)=cz1(p+M+1)+FBz1(m+1)*cos(2*pi*p*m/N);
        end
        cz1(p+M+1)=(FBz1(1)+2*cz1(p+M+1))/N;
    end
    z1=-M*d:d:M*d;
end

% factor de agrupamento
Bz=-beta:.01:beta;
FBzA=sin(N*d*Bz/2)./sin(d*Bz/2);
FBzB=ones(1,length(Bz));
FBzC=ones(1,length(Bz));
for m=1:nb-1
    FBzB=FBzB.*sin(d*(Bz-Bzm(m))/2).*sin(d*(Bz+Bzm(m))/2);
    FBzC=FBzC.*sin(d*(Bz-2*pi*m/(N*d))/2).*sin(d*(Bz+2*pi*m/(N*d))/2);
end
FBz=FBzA.*FBzB./FBzC;
subplot(1,1,1), plot(Bz,20*log10(abs(FBz)/max(abs(FBz))))
axis([-beta beta -50 0])

```

```
grid
pause

% distribuição de corrente
subplot(2,1,1), stem(z,abs(cz),'.')
xlabel('z')
ylabel('|c(z)|')
axis([-10 10 0 2.5])
grid on
subplot(2,1,2), stem(z,angle(cz),'.')
xlabel('z')
ylabel('arg[c(z)]')
axis([-10 10 -pi pi])
grid on
```

Apêndice C10 - Algoritmo para Análise de um Agrupamento Contínuo

```

% entrada de dados
L=1;
P=1024;
Tc=.1;
sigma=.5;

% amostras da distribuição de corrente e FFT inversa
if round(P/2)==P/2
    z=-P*Tc/2+sigma*Tc:Tc:(P-2)*Tc/2+sigma*Tc;
else
    z=-(P-1)*Tc/2+sigma*Tc:Tc:(P-1)*Tc/2+sigma*Tc;
end

Nel1=fix((L-sigma*Tc)/Tc);
x1=Tc*sigma:Tc:(Nel1+sigma)*Tc;
Nel2=fix((L+sigma*Tc)/Tc);
x2=(-Nel2+sigma)*Tc:Tc:(-1+sigma)*Tc;
cz=[(-(1/L)*x1+2).*exp(-j*10*(x1-pi/20)) zeros(1,P-(Nel1+Nel2+1)) ((1/L)*x2+2).*
    exp(-j*10*(x2-pi/20))];
cz=fftshift(cz);

[uBz,Bz]=ifftcont(cz,Tc,sigma);
FBz=uBz*2*pi;

% fórmula directa
FBzd=j*L*(sin((Bz-10)*L/2)./((Bz-10)*L/2)).^2+2*j*sin((Bz-10)*L)./(Bz-10);

% factor de agrupamento
subplot(2,1,1), plot(Bz,20*log10(abs(FBz)),Bz,20*log10(abs(FBzd)),':')
axis([-30 30 -50 10])
grid
subplot(2,1,2), plot(Bz,angle(FBz),Bz,angle(FBzd),':')
axis([-30 30 -pi pi])
grid

```

Apêndice C11 - Algoritmo para Análise de um Agrupamento Discreto

```

% entrada de dados
P=1024;
d=.6;
sigma=0;

% correntes e FFT inversa
if round(P/2)==P/2
    z=-P*d/2+sigma*d:d:(P-2)*d/2+sigma*d;
else
    z=-(P-1)*d/2+sigma*d:d:(P-1)*d/2+sigma*d;
end

c0=8.6964e-2;
c1=8.7556e-2-j*7.0271e-5;
c2=8.0915e-2+j*7.6383e-4;
c3=7.3089e-2+j*3.5872e-4;
c4=6.2324e-2+j*5.9001e-4;
c5=5.2538e-2+j*7.2686e-4;
c6=3.7824e-2+j*1.1156e-3;
c7=2.8887e-2-j*4.9986e-4;
c8=2.0709e-2+j*1.6623e-3;
c9=1.2677e-2+j*4.8930e-4;

cz=[c0 c1 c2 c3 c4 c5 c6 c7 c8 c9 zeros(1,P-19) conj(c9) conj(c8) conj(c7) conj(c6) conj(c5)
conj(c4) conj(c3) conj(c2) conj(c1)];
cz=fftshift(cz);

[uBz,Bz]=ifftdisc(cz,d,sigma,'s');
FBz=uBz*2*pi;

% distribuição de corrente
subplot(2,1,1), stem(z,abs(cz),'.')
xlabel('z')
ylabel('|c(z)|')
axis([-10*d 10*d 0 max(abs(cz))*1.1])
grid on
subplot(2,1,2), stem(z,angle(cz),'.')
xlabel('z')
ylabel('arg[c(z)]')
axis([-10*d 10*d -pi pi])
grid on
pause

```

Apêndices

```
% factor de agrupamento
subplot(2,1,1), plot(Bz,20*log10(abs(FBz)))
axis([Bz(1) Bz(length(Bz)) -60 0])
grid on
subplot(2,1,2), plot(Bz,angle(FBz))
axis([Bz(1) Bz(length(Bz)) -pi pi])
grid on

pause
subplot(2,1,1), plot(180*acos(Bz/(2*pi))/pi,20*log10(abs(FBz)))
axis([0 180 -60 0])
grid on
subplot(2,1,2), plot(180*acos(Bz/(2*pi))/pi,angle(FBz))
axis([0 180 -pi pi])
grid on
```

Apêndice C12 - Algoritmo para Análise de um Agrupamento Não Equidistante

```

% entrada de dados
P=65536;
Tc=.001;

% corrente e FFT inversa
if round(P/2)==P/2
    z=-P*Tc/2:Tc:(P-2)*Tc/2;
else
    z=-(P-1)*Tc/2:Tc:(P-1)*Tc/2;
end

cz=zeros(1,P);
cz(1)=1;
cz(.382/Tc+1)=1;
cz(.8363/Tc+1)=1;
cz(1.302/Tc+1)=1;
cz(1.722/Tc+1)=1;
cz(2.355/Tc+1)=1;
cz(3.093/Tc+1)=1;
cz(3.843/Tc+1)=.515;
cz(P-.382/Tc+1)=1;
cz(P-.8363/Tc+1)=1;
cz(P-1.302/Tc+1)=1;
cz(P-1.722/Tc+1)=1;
cz(P-2.355/Tc+1)=1;
cz(P-3.093/Tc+1)=1;
cz(P-3.843/Tc+1)=.515;

cz=fftshift(cz);

[uBz,Bz]=ifftcont(cz,Tc,0);
FBz=uBz*2*pi/Tc;

% cálculo pela soma directa
FBzd=.515*exp(j*3.843*Bz)+exp(j*3.093*Bz)+exp(j*2.355*Bz)+exp(j*1.722*Bz)+
exp(j*1.302*Bz)+exp(j*.8363*Bz)+exp(j*.382*Bz)+1+exp(-j*.382*Bz)+exp(-j*.8363*Bz)+
exp(-j*1.302*Bz)+exp(-j*1.722*Bz)+exp(-j*2.355*Bz)+exp(-j*3.093*Bz)+
.515*exp(-j*3.843*Bz);

% gráfico da distribuição de corrente
subplot(1,1,1), stem(z,abs(cz),'.')
xlabel('z')
ylabel('c(z)')

```

Apêndices

```
axis([-4 4 0 1.1])
grid on

pause
% gráfico do factor de agrupamento
subplot(2,1,1),
plot(Bz,20*log10(abs(FBz)/max(abs(FBz))),Bz,20*log10(abs(FBzd)/max(abs(FBzd))),'-')
axis([-2*pi 2*pi -40 0])
grid on
subplot(2,1,2), plot(Bz,angle(FBz),Bz,angle(FBzd),'-')
axis([-2*pi 2*pi -pi-.5 pi+.5])
grid on
```

Apêndice D - Algoritmo da função *jacobizeta*

```

function z=jacobizeta(u,m)

% jacobizeta(phi,m) calcula o "Jacobi zeta function "
% segundo o processo apresentado em "Handbook of Mathematical Functions, Abramowitz e
Stegun" (pág. 578)

if length(u)~=length(m)
    error('Os vectores não têm o mesmo comprimento')
end

phi=asin(u);
for p=1:length(m)
    a(1)=1;
    b(1)=sqrt(1-m(p));
    c(1)=sqrt(m(p));
    i=0;
    erro=c(1);
    while erro>1e-10
        i=i+1;
        a(i+1)=(a(i)+b(i))/2;
        b(i+1)=sqrt(a(i)*b(i));
        c(i+1)=(a(i)-b(i))/2;
        erro=c(i+1);
    end
    N=i;
    Fi(N+1)=2^N*a(N+1)*ellipticf(u(p),m(p));
    z(p)=0;
    for i=N:-1:1
        z(p)=z(p)+c(i+1)*sin(Fi(i+1));
        Fi(i)=(asin(c(i+1)*sin(Fi(i+1))/a(i+1))+Fi(i+1))/2;
    end
end
end

```

Apêndice E - Algoritmo da função *ellipticf*

```

function u=ellipticf(x,m)

% ellipticf(phi,m) calcula o "elliptic integral of the first kind"
% F(phi,m)=integral de 0 a phi de (1-m*sen(theta)^2)^(-1/2)dtheta
% segundo o processo apresentado em "Handbook of Mathematical Functions, Abramowitz e
Stegun"

if length(x)~=length(m)
    error('Os vectores não têm o mesmo comprimento')
end

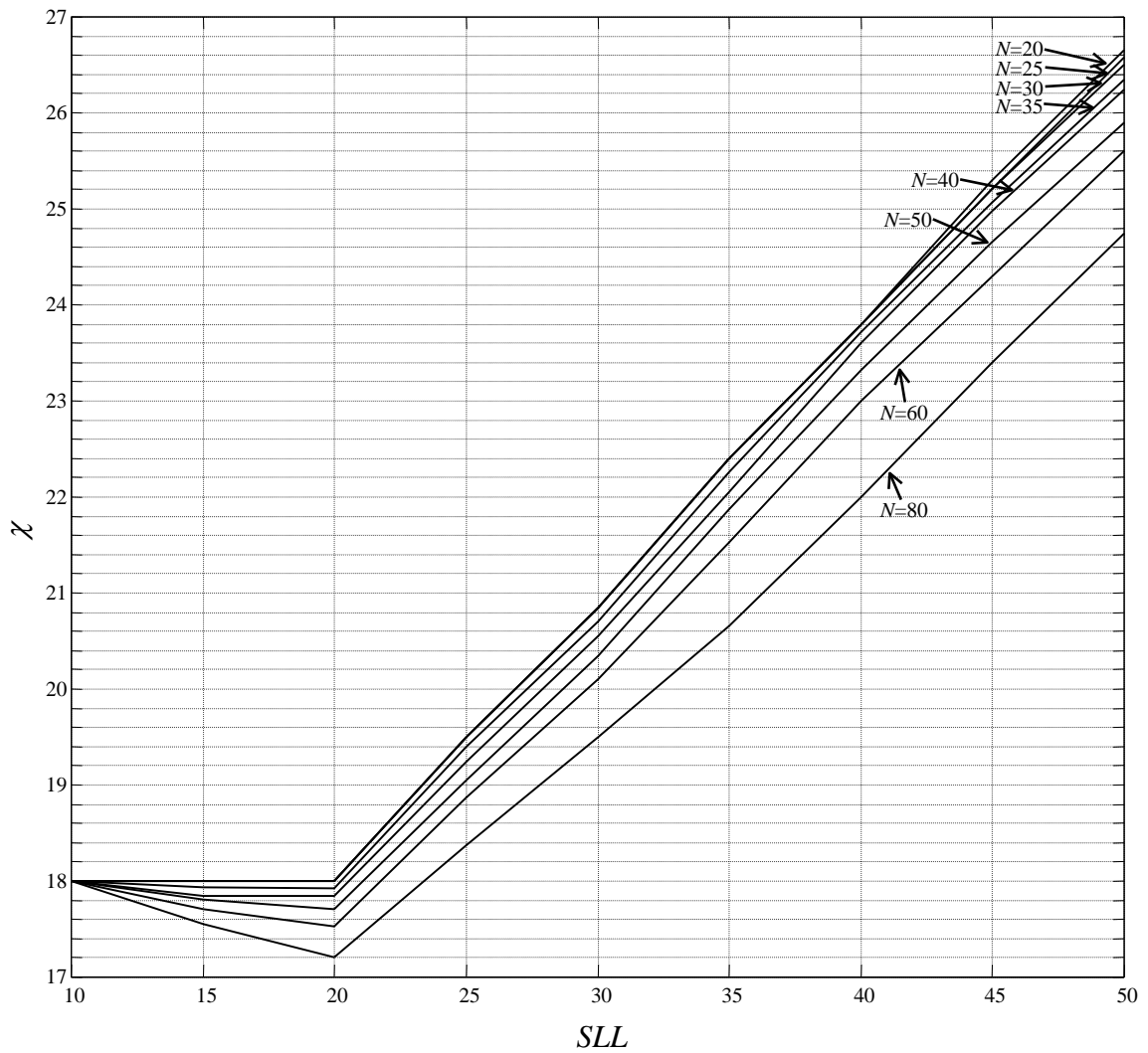
phi=asin(x);
senAlfa(1,:)=sqrt(m);
Fi(1,:)=phi;
for p=1:length(m)
    i=0;
    erro=1-senAlfa(1,p);
    if senAlfa(1,p)>1e-10;
        while erro>1e-10
            i=i+1;
            cosAlfa(i+1,p)=2/(1+senAlfa(i,p))-1;
            senAlfa(i+1,p)=sqrt(1-cosAlfa(i+1,p)^2);
            erro=1-senAlfa(i+1,p);
            Fi(i+1,p)=(asin(senAlfa(i,p)*sin(Fi(i,p)))+Fi(i,p))/2;
        end
        aux=1;
        for k=2:i+1
            aux=aux*senAlfa(k,p);
        end
        u(p)=sqrt((1/senAlfa(1,p))*aux)*log(tan(pi/4+Fi(i+1,p)/2));
    else
        u(p)=phi(p);
    end
end
end

```

Apêndice F1 - Curvas para o Parâmetro C2 da Técnica Alternativa ao Método de Zolotarev

$$\chi = C_2 SLL$$

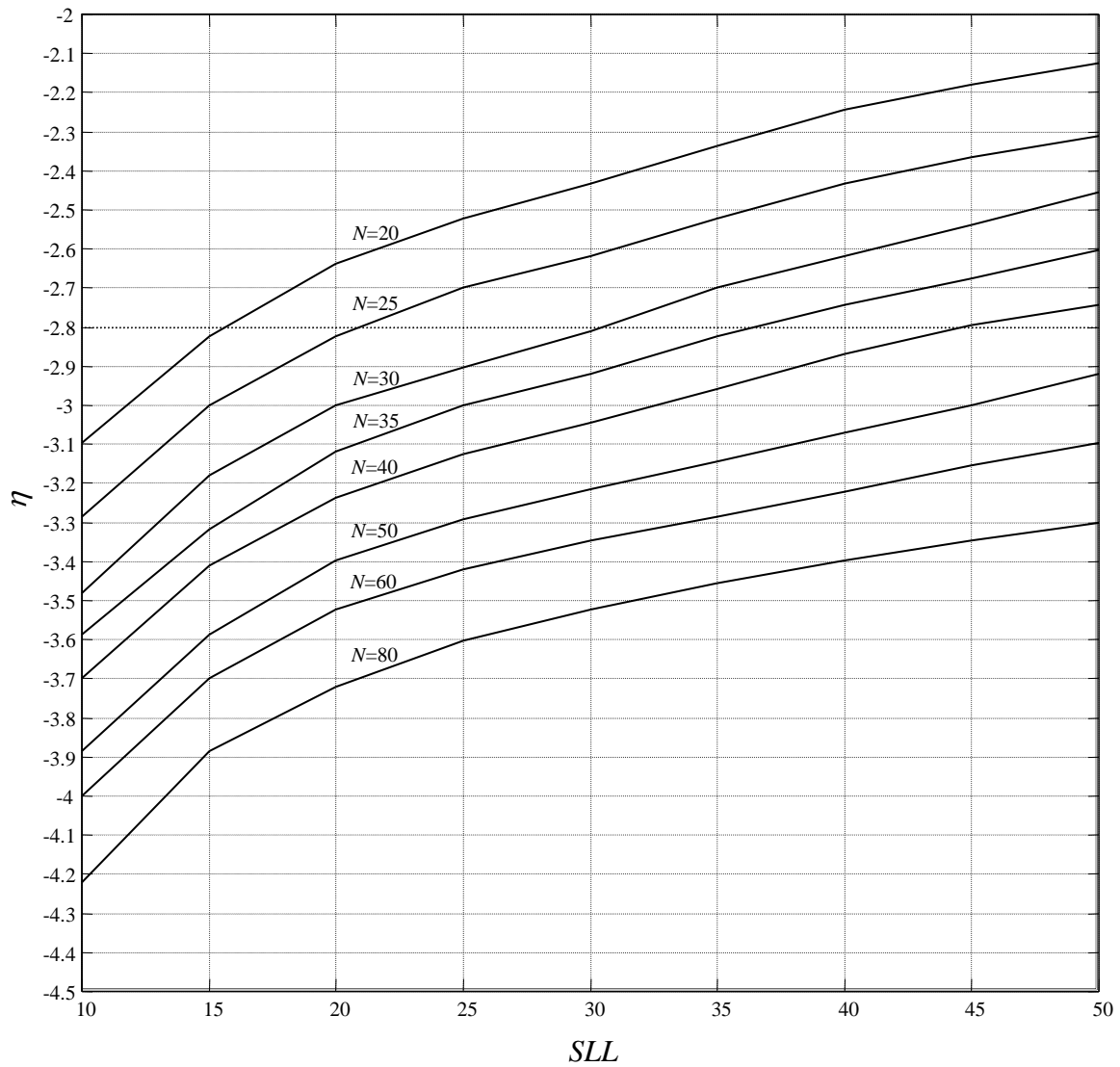
$$C_2 = \frac{\chi}{SLL}$$



Apêndice F2 - Curvas para o Parâmetro C3 da Técnica Alternativa ao Método de Zolotarev

$$\eta = \log_{10} (C_3 - 1)$$

$$C_3 = 10^\eta + 1$$



Bibliografia

- Abromowitz, M. e Stegun, I. A., "Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables", Dover Publications, 1972. {15, 16, 17, 87, 102}
- Applebaum, S. P., "Adaptive Arrays", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-24, N° 5, pág. 585-598, Setembro 1976. {30, 32}
- Autrey, S. W., "Approximate Synthesis of Nonseparable Design Responses for Rectangular Arrays", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-35, N° 8, pág 907-912, Agosto 1987. {79}
- Bagchi, S. e Mitra, S. K., "The Nonuniform Discrete Fourier Transform and Its Applications in Filter Design: Part I - 1-D", IEEE Transactions on Circuits and Systems-II: Analog and Digital Signal Processing, vol. 43, N° 6, pág. 422-433, Junho 1996. {164, 165}
- Bagchi, S. e Mitra, S. K., "The Nonuniform Discrete Fourier Transform and Its Applications in Signal Processing", Kluwer Academic Publishers, 1999. {34, 168, 177}
- Balanis C. A., "Antenna Theory, Analysis and Design", John Wiley & Sons, 2ª ed., 1997. {3, 4, 7, 9, 11, 14, 26, 52, 71, 79, 130}
- Barcilon, V. e Temes, G. C., "Optimum Impulse Response and the van der Maas Function", IEEE Transactions on Circuit Theory, vol. CT-19, N° 4, pág. 336-342, Julho 1972. {126}
- Bar-Ness, Y e Haimovich, A., "Synthesis of Random Antenna Array Patterns with Prescribed Nulls", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-32, N° 12, pág. 1298-1307, Dezembro 1984. {30}
- Bracewell, R. N. "The Fourier Transform and Its Applications", MacGraw-Hill, 1986. {41}
- Bresler, A. D., "A New Algorithm for Calculating the Current Distributions of Dolph-Chebyshev Arrays", IEEE Transactions on Antennas and Propagation", vol. AP-28, N° 6, pág 951-952, Novembro 1980. {11}
- Brigham, E. O., "The Fast Fourier Transform and Its Applications", Prentice Hall, 1988. {79, 81}
- Brown, J. L., "On the Determination of Excitation Coefficients for a Tschebyscheff Pattern", IRE Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-10, pág 215-216, Março 1962. {11, 13}
- Bucci, O. M., Franceschetti, G. e D'Elia, G., "Fast Analysis of Large Antennas - A New Computacional Philosophy", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-28, N° 3, pág 306-310, Maio 1980. {41, 79}
- Buckley, M. J., "Synthesis of Shaped Beam Antenna Patterns Using Implicitly Constrained Current Elements", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 44, N° 2, pág. 192-197, Fevereiro 1996. {178}
- Casimiro, A. M. E. S., "A Relação Básica da Radiação", Tese de Doutoramento, Universidade do Porto, FEUP, 1990. {1, 5, 6, 11, 41, 50, 61, 196}
- Casimiro, A. M. E. S. e Azevedo, J. A. R., "The Small Translation of No Parallel Sources", PIERS (Progress In Electromagnetics Research Symposium), Jet Propulsion Laboratory, California Institute of Technology, Pasadena, California, USA, Julho 1993. {197}
- Casimiro, A. M. E. S., Azevedo, J. A. R. e Grilo, A. J. V., "FFT for Radiation Pattern Analysis and Synthesis", IEEE Pacific Rim 1995 Conference on Communications, Computers and Signal Processing, Vitoria, Canadá, Maio 1994. {79}

Bibliografia

- Cátedra, M. F., Torres, R. P. Basterrechea, J. e Gago, E., "The CG-FFT Method, Application of Signal Processing Techniques to Electromagnetics", Artech-House, 1995. {79}
- Chuang, C. e Couch, L. W., "The Design of Narrow Beamwidth and Asymmetric Sidelobe Array Antenna Patterns Using Analytic Signal Concept", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 39, N° 10, pág. 1530-1532, Outubro 1991. {147, 149}
- Chung, Y. C. e Haupt, R. L., "Optimum Amplitude and Phase Control for an Adaptive Linear Array using a Genetic Algorithm", IEEE Antennas and Propagation International Symposium (AP/URSI 99), pág. 1424-1427, Orlando, Julho 1999. {30}
- Cohen, H., "Mathematics for Scientists and Engineers", Prentice-Hall International, 1992. {65}
- Collin, R. E. e Zucker, F. J., "Antenna Theory", Mc Graw-Hill, 1969. {1, 7, 13, 27, 130}
- Collin, R. E., "Antennas and Radio Wave Propagation", McGraw-Hill, 1985. {2, 7, 11, 13, 41, 60, 101, 147}
- Cooley, J. W., Lewis, P. A. W. e Welch, P. D., "Application of the Fast Fourier Transform to Computation of the Fourier Integrals, Fourier Series and Convolution Integrals", IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics, vol. AU-15, N° 2, pág 79-84, Junho 1967. {79}
- Dawoud, M. M., e Hassan, M A., "Design of Superdirective Endfire Antenna Arrays", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 37, N° 6, pág. 796-800, Junho 1989. {65}
- Diderich, R., "Calculating Chebyshev Shading Coefficients via the Discrete Fourier Transform", Proceedings of the IEEE Letters, vol. 62, N° 10, pág. 1395-1396, Outubro 1974. {15}
- Drabowitch, S., Pappiarnik, A., Griffiths, H. Encinas, J. e Smith B. L., "Modern Antennas", Chapman & Hall, 1998. {27, 41}
- Drane, C. J., "Derivation of Excitation Coefficients for Chebyshev Arrays", Proc. IEE, vol. 110, N° 10, pág 1755-1758, Outubro 1963. {14}
- Drane, C. J., "Dolph-Chebyshev Excitation Coefficient Approximation", IEEE Transactions on Antennas and Propagation", vol. AP-12, pág 781-782, Novembro 1964. {11}
- Einarsson, O., "Optimization of Planar Arrays", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-27, N° 1, pág 86-92, Janeiro 1979. {79}
- El-Azhary, I., Afifi, M. S. e Excell, P. S., "A Simple Algorithm for Sidelobe Cancellation in Partially Adaptive Linear Array", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 36, N° 10, pág. 1484-1486, Outubro 1988. {32}
- El-Khamy, S. E., "Sidelobes Reduction and Steerable Nulling of Antenna Arrays Using Neural Networks", IEEE Antennas and Propagation International Symposium (AP/URSI 99), pág. 2600-2603, Orlando, Julho 1999. {30}
- Elliot, D. F. e Rao, K. R., "Fast Transforms - Algorithms, Analyses, Applications", Academic Press, 1982. {26}
- Elliot, R. S., "An Approximation to Chebyshev Distributions", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-11, pág 707-709, Novembro 1963. {11, 14}
- Elliot, R. S., "Design of Line Source Antennas for Narrow Beamwidth and Assymmetric Low Sidelobes", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-23, pág. 100-107, Janeiro 1975. {18, 41, 134}
- Elliot, R. S., "Design of Line Source Antennas for Sum Patterns with Sidelobes of Individually Arbitrary Heights", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-24, pág. 76-83, Janeiro 1976. {18, 30, 139}

Bibliografia

- Elliot, R. S., "Design of Line Source Antennas for Difference Patterns with Sidelobes of Individually Arbitrary Heights", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-24, N° 3, pág. 310-316, Maio 1976. {18, 30}
- Elliot, R. S., "Antenna Theory and Design", Prentice-Hall, 1981. {11, 13, 18, 20, 21, 22, 61, 187}
- Elliot, R. S. e Stern, G. J., "A New Technique for Shaped Beam Synthesis of Equispaced Arrays", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-32, N° 10, pág. 1129-1133, Outubro 1984. {30, 57, 196}
- Er, M. H., "Linear Antenna Array Pattern Synthesis with Prescribed Broad Nulls", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 38, N° 9, pág. 1496-1498, Setembro 1990. {30}
- Ersoy, O. K., "Fourier-Related Transforms, Fast Algorithms and Applications", Prentice Hall, 1997. {126}
- Evans, J. E., "Synthesis of Equiripple Sector Antenna Patterns", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, pág. 347-353, Maio 1976. {29}
- Fourikis, N., "Phased Array-Based Systems and Applications", John Wiley & Sons, 1997. {7}
- Gabriel, W. F., "Adaptive Arrays – An Introduction", Proceedings of the IEEE, vol. 64, N° 2, pág. 239-272, Fevereiro 1976. {30}
- Gabriel, W. F., "Using Spectral Estimation Techniques in Adaptive Processing Antenna Systems", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-34, N° 3, pág. 291-300, Março 1986. {30}
- Gaushell, D. J., "Synthesis of Linear Antenna Arrays Using Z Transforms", IEEE Transactions on Antenna and Propagation, vol. AP-19, N° 1, pág. 75-80, Janeiro 1971. {9, 31}
- Giusto, R. e Vincenti, P., "Phase-Only Optimization for Generation of Wide Deterministic Nulls in the Radiation Patterns of Phased Arrays", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-31, N° 5, pág. 814-817, Setembro 1983. {30}
- Godara, L. C., "Application of Antenna Arrays to Mobile Communications, Part II: Beam-Forming and Direction-of-Arrival Considerations", Proceedings of the IEEE, vol. 85, N° 8, pág. 1195-1245, Agosto 1997. {30}
- Goto, N., "A Synthesis of Array Antennas for High Directivity and Low Sidelobes", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-20, N° 4, pág. 427-431, Julho 1972. {65}
- Gottlieb, D e Shu, C-W., "On the Gibbs Phenomenon and Its Resolution", SIAM Review, vol. 39, N° 4, pág. 644-668, Dezembro 1997. {114}
- Gradshteyn, I. S. e Ryzhik, I. M., "Table of Integrals, Series, and Products", Academic Press, 1994. {126}
- Grilo, F. C. V., Casimiro, A. M. E. S. e Lopes, J. A. C., "Teoria Vectorial de Sinal", AEFEP, 1990. {81, 127}
- Grilo, F. C. V. e Casimiro, A. M. E. S., "Application of the Fourier Transform to Short Antennas", AGARD Electromagnetic Eave propagation Panel on ELF/VLF/LF Radio Propagation and Systems Aspects", Bruxelas, Bélgica, Setembro 1992. {41}
- Hamming, R. W., "Digital Filters", Prentice-Hall International Editions, 1989. {26, 75}
- Hansen, R. C., "Array Pattern Control and Synthesis", Proceedings of the IEEE, vol. 80, N° 1, pág. 141-151, Janeiro 1992. {9, 24, 72}
- Hansen, R. C., "Phased Array Antennas", John Wiley & Sons, 1998. {7, 14, 20, 130, 147}
- Harris, F. J., "On the Use of Windows for Harmonic Analysis with the Discrete Fourier Transform", Proceedings of the IEEE, vol. 66, N° 1, pág. 51-83, Janeiro 1978. {26, 74}

Bibliografia

- Haupt, R. L., "Phase-Only Adaptive Nulling with a Genetic Algorithm", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 45, Nº 6, pág. 1009-1015, Junho 1997. {30}
- Helms, H. D., "Nonrecursive Digital Filters: Design Methods for Achieving Specifications on Frequency Response", IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics, vol. AU-16, Nº 3, pág. 336-342, Setembro 1968. {15}
- Hu, J.-L., Chan, C.-H. e Lin, S.-M., "Synthesis of Shaped-Beam pattern for Mobile Antenna", IEEE Antennas and Propagation International Symposium (AP/URSI 99), Orlando, pág. 1596-1599, Julho 1999. {30, 178}
- Hyneman, R. F., "A Technique For the Synthesis of Line-Source Antenna Patterns Having Specified Sidelobe Behaviour", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-16, Nº 4, pág. 430-435, Julho 1968. {18, 41, 133, 139}
- Ibrahim, H. M., "Null Steering by Real-Weight Control – A Method of Decoupling the Weights", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-39, Nº 11, pág. 1648-1650, Novembro 1991. {30}
- Ismail, T. H. e Dawoud, M. M., "Null Steering in Phased Arrays by Controlling the Element Positions", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-39, Nº 11, pág. 1561-1566, Novembro 1991. {30}
- Jin, J. M. e Volakis, J. L., "Scattering and Radiation Analysis of Three-Dimensional cavity Arrays Via a Hybrid Finite-element Method", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 41, Nº 11, pág 1580-1585, Novembro 1993. {79}
- Johnson, D. H. e Dudgeon, D. E., "Array Signal Processing – Concepts and Techniques", Prentice Hall Signal Processing Series, 1993. {34, 41}
- Johnson, R. C., "Antenna Engineering Handbook", McGraw-Hill, 3ª ed., 1993. {26, 117}
- Jordan, E. C., "Electromagnetic Waves and Radiating Systems", Prentice-Hall, 2ª ed., 1968. {3, 11, 13, 41}
- Jun, T., Yingning, P. e Xiqin, W., "Application of Conjugate Gradient Algorithm to Adaptive Beamforming", IEEE Antennas and Propagation International Symposium (AP/URSI 99), pág. 1460-1463, Orlando, Julho 1999. {30}
- Kraus, J. D., "Electromagnetics", McGraw-Hill, 1984. {60}
- Kraus, J. D., "Antennas", MacGraw-Hill, 2ª ed., 1988. {11}
- Kummer, W. H., "Basic Array Theory", Proceedings of the IEEE, vol. 80, Nº 1, pág. 127-140, Janeiro 1992. {9}
- Levret, H. e Boyd, S., "Antenna Array Pattern Synthesis via Convex Optimization", IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 45, Nº 3, pág. 526-531, Março 1997. {30}
- Lo, Y. T. e Dee, S. W., "Antenna Handbook: Theory Application and Design", New York, Van Nostrand Reinhold, 1988. {11, 13, 14, 21}
- Ma, M. T., "Application of Bernstein Polynomials and Interpolation Theory to Linear Array Synthesis", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-12, pág. 668-677, Novembro 1964. {156}
- Mailloux, R. J., "Phased Array Antenna Handbook", Artech House, 1994. {4, 7, 9, 11, 14, 20, 22, 30, 65}
- Markus, L., "Optimization of Synthesised Array Excitations Using Array Polynome Complex Root Swapping and Genetic Algorithms", IEE Proceedings on Microwave Antennas Propagation, vol 145, Nº 6, pág 460-464, Dezembro 1998. {178, 196}
- Mathews, J. H., "Numerical Methods for Mathematics, Science, and Engineering", Prentice Hall International Editions, 2ª Ed., 1992. {155}
- MATLAB 5.2, "Using MATLAB", The Matworks, Inc. 1998. {91}

Bibliografia

- Mayhan, J. T., "Nulling Limitations for a Multiple-Beam Antenna", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-24, N° 6, pág. 769-779, Novembro 1976. {41}
- McClellan, J. H, Parks, T. W. e Rabiner L. R., "A Computer Program for Designing Optimum FIR Linear Phase Digital Filters", IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics, vol. AU-21, N° 6, pág. 506-526, Dezembro 1973. {28}
- McNamara, D, A., "Excitations Providing Maximum Directivity for Difference Arrays of Discrete Elements", Electronics Letters, vol. 23, N° 15, pág. 780-781, Julho 1987. {26}
- McNamara, D, A., "Maximisation of Normalised Boresight Slope of a Difference Array of Discrete Elements", Electronics Letters, vol. 23, N° 21, pág. 1158-1160, Outubro 1987. {26}
- McNamara, D, A., "Generalised Villeneuve \bar{n} Distribution", IEE Proceedings, vol. 136, Pt. H, N° 3, pág. 245-249, Junho 1989. {24, 57}
- McNamara, D, A., "Direct Synthesis of Optimum Difference Patterns for Discrete Linear Arrays Using Zolotarev Distributions", IEE Proceedings-H, vol. 140, N° 6, pág. 495-500, Dezembro 1993. {15, 102, 151, 174}
- McNamara, D, A., "Performance of Zolotarev and Modified-Zolotarev Difference Pattern Array Distributions", IEE Proceedings-Microwave Antennas Propagation, vol. 141, N° 1, pág. 37-44, Fevereiro 1994. {25, 154}
- Meyer, A., "The Use of the Convolution Theorem and the Generalized Sampling Theorem in Evaluating Arbitrary Arrays", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 14, pág 503-505, Julho 1966. {41}
- Milne, K., "Synthesis of Power Radiation Patterns for Linear Array Antennas", IEE Proceedings, vol. 134, Pt. H, N° 3, pág. 285-296, Junho 1987. {27, 122, 196}
- Ng, T. S., "Generalized Array Pattern Synthesis Using the Projection Matrix", IEE Proceedings, vol. 132, Pt. H, N° 1, pág. 44-46, Fevereiro 1985. {33}
- Ng, T. S., "Array Pattern Synthesis by the Method of Alternating Orthogonal Projections: the General Case", IEE Proceedings, vol. 132, Pt H., N° 7, pág. 451-454, Dezembro 1985. {30}
- Ng, B. P., Er, M. H. e Kot, C., "A Flexible Array Synthesis Method Using Quadratic Programming", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 41, N° 11, pág. 1541-1550, Novembro 1993. {30}
- Ng, B. P., Er, M. H. e Kot, C., "Linear Array Geometry Synthesis with Minimum Sidelobe Level and Null Control", IEE Proceedings on Microwave Antennas Propagation, vol. 141, N° 3, pág. 162-166, Junho 1994. {30}
- Ng, B. P., Er, M. H. e Kot, A. C. C., "A New Limit on Inter-Element Spacing for Linear Array", IEEE Antennas and Propagation Magazine, vol. 40, N° 4, pág. 22-29, Agosto 1998. {180}
- Nuttall, A. H., "Generation of Dolph-Chebyshev Weights via a Fast Fourier Transform", Proceedings of the IEEE Letters, vol. 62, N° 10, pág. 1396, Outubro 1974. {15}
- Nuttall, A. H., "Some Windows with Very Good Sidelobe Behavior", IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, vol. ASSP-29, N° 1, pág. 84-91, Fevereiro 1981. {26}
- Ohnishi, K. e Milton, R. T., "A New Optimization Technique for Adaptive Antenna Arrays", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 41, N° 5, pág. 525-532, Maio 1993. {30}
- Olen, C. A. e Compton, R. T., "A Numerical Pattern Synthesis Algorithm for Arrays", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 38, N° 10, pág. 1666-1676, Outubro 1990. {30}
- Oppenheim, A. V. e Shafer, R. W., "Digital Signal Processing", Prentice-Hall International Editions, 1975. {26}

Bibliografia

- Oppenheim, A. V., Willsky, A. S. and Young, I. T., "Signals and Systems", Prentice Hall International Editions, 1983. {41, 43}
- Oppenheim, A. V. e Shafer, R. W., "Discrete-Time Signal Processing", Prentice-Hall International Editions, 1989. {26, 164}
- Orchard, H. J., Elliot, R. S. e Sten, G. J., "Optimising the Synthesis of Shaped Beam Antenna Patterns", IEE Proceedings, vol. 132, Pt. H, Nº 1, pág. 63-68, Fevereiro 1985. {30, 109, 178, 179}
- Papoulis, A., "The Fourier Integral and Its Applications", McGraw-Hill, 1987. {50}
- Parks, T. W. e McClellan, J. H., "Chebyshev Approximation for Nonrecursive Digital Filters with Linear Phase", IEEE Transactions on Circuit Theory, vol. CT-19, Nº 2, pág. 189-194, Março 1972. {26, 28}
- Picazo, J. J. G., "Síntesis de Diagramas de Radiación de Arrays Lineales Equiespaciados de Haz Conformado Mediante el Uso de Ventanas de Corriente", 3º Simpósio de Electrónica e Telecomunicações, pág. A.2.1-3, Porto, 1988. {27}
- Rabiner, L. R., Gold, B. e McGonegal, C. A., "An Approach to the Approximation Problem for Nonrecursive Digital Filters", IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics, vol. AU-18, Nº 2, pág. 83-106, Junho 1970. {26}
- Rabiner, L. R., McClellan, J. H. e Parks, T. W., "FIR Digital Filter Design Techniques Using Weighted Chebyshev Approximation", Proceedings of the IEEE Transactions, vol. 63, Nº 4, pág. 595-610, Abril 1975. {28}
- Rabiner, L. R. e Gold, B., "Theory and Application of Digital Signal Processing", Prentice-Hall, 1975. {26, 74}
- Rahmat-Sammi, Y. e Cheung, R. L., "Nonuniform Sampling Techniques for Antenna Applications", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-35, Nº 3, pág. 268-279, Março 1987. {41}
- Ramos, A. C., "Uso da FFT em Estruturas Radiantes Unidimensionais", Dissertação de Mestrado, Universidade do Algarve, Faro, Janeiro 1998. {79}
- Rhodes, D. R., "On the Taylor Distribution", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-20, Nº 2, pág. 143-145, Março 1972. {18, 128, 130, 133}
- Rhodes, D. R., "A General Theory of Sampling Synthesis", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-21, Nº 2, pág. 176-181, Março 1973. {9}
- Richie, J. E. e Kritikos, H. N., "Linear Program Synthesis for Direct Broadcast Satellite Phased Arrays", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 36, Nº 3, pág. 345-348, Março 1988. {9}
- Rodriguez, J. A. e Ares, F., "Extension of the Orchard-Elliot Method to Pure-Real Nonsymmetrical-Shaped Patterns", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 45, Nº 8, pág. 1317-1318, Agosto 1997. {179}
- Rodrigues, J. A. e Ares, F., "Synthesis of Shaped Beam Antenna Patterns with Null-Filling in the Sidelobe Region", Electronics Letters, vol. 33, Nº 24, pág. 2004-2005, Novembro 1997. {30, 178}
- Rodriguez-Gonzalez, J. A., Ares-Pena, F. e Moreno-Piquero, E., "Linear Array Pattern Synthesis Optimising the Array Element Excitations Using the Simulated Annealing Technique", Millenium Conference on Antennas & Propagation, Davos, Switzerland, pág. 205, Abril 2000. {178}
- Safaai-Jazi, A., "A New Formulation for the Design of Chebyshev Arrays", IEEE Transactions on Antenna and Propagation, vol. 42, Nº 3, pág. 439-443, Março 1994. {11, 12, 194}
- Safaai-Jazi, A., "Modified Chebyshev Arrays", IEEE Proceedings on Microwave Antennas Propagation, vol. 145, Nº 1, pág. 45-48, Fevereiro 1998. {64}

Bibliografia

- Sandrin, W. A., Glott, C. R. e Hague, D. S., "Design of Arrays with Unequal Spacing and Partially Uniform Amplitude Taper", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-17, pág 642-644, Setembro 1969. {111}
- Schelkunoff, S. A. e Friis, T. H., "Antenna Theory and Practice" John Wiley & Sons, 1966. {7}
- Shore, R. A., "Nulling at Symmetric Pattern Location with Phase-Only Optimization Weight Control", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-32, Nº 5, pág. 530-533, Maio 1984. {30}
- Shpak, D. J. e Antoniou, A., "A Generalized Reméz Method for the Design of FIR Digital Filters", IEEE Transactions on Circuits and Systems, vol. 37, Nº 2, pág. 161-174, Fevereiro 1990. {28}
- Shpak, D. J. e Antoniou, A., "A Flexible Optimization Method for the Pattern Synthesis of Equispaced Linear Arrays with Equiphasic Excitation", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-40, Nº 10, pág. 1113-1120, Outubro 1992. {30, 156}
- Shpak, D. J., "A Method for the Optimal Pattern Synthesis of Linear Arrays with Prescribed Nulls", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-44, Nº 3, pág 286-294, Março 1996. {30, 109}
- Silver, S., "Microwave Antenna Theory and Design", McGraw-Hill Book Company, 1949. {1, 3}
- Skolnik, M. I., "Introduction to Radar Systems", McGraw-Hill, 1980. {7, 9, 52}
- Stegen, R. J., "Excitation Coefficients and Beamwidths of Tschebyscheff Arrays", Proceedings of the IRE, vol. 41, pág 1671-1674, Novembro 1953. {14}
- Steyskal, H., "Synthesis of Antenna Patterns with Prescribed Nulls", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-30, Nº 2, pág. 273-279, Março 1982. {31, 32, 175, 177}
- Steyskal, H., "Wide-Band Nulling Performance Versus Number of Pattern Constraints for an Array Antenna", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-31, Nº 1, pág. 159-163, Janeiro 1983. {31}
- Steyskal, H., "Simple Method for Pattern Nulling by Phase Perturbation", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-31, Nº 1, pág. 163-166, Janeiro 1983. {30}
- Steyskal, H., Shore, R. A. e Haupt, R. L., "Methods for Null Control and Their Effects on the Radiation Pattern", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-34, Nº 3, pág. 404-409, Março 1986. {32}
- Stutzman, W. L., "Synthesis of Shaped-Beam Radiation Patterns using the Iterative Sampling Method", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-19, Nº 1, pág. 36-41, Janeiro 1971. {41}
- Stutzman, W. L., "Sidelobe Control of Antenna Patterns", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-20, pág. 102-104, Janeiro 1972. {30, 139}
- Stutzman, W. L. and Thiele, G. A., "Antenna Theory and Design", John Wiley & Sons, 1981. {2, 3, 4, 9, 11, 20}
- Suzuki, Y. e Chiba, T., "An Algorithm for Pattern Synthesis Improvement", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-34, Nº 6, pág. 825-829, Junho 1986. {30}
- Taylor, T. T., "Design of Line-Source Antennas for Narrow beam width and low Side Lobes", IRE Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-3, Nº 1, pág. 16-28, Janeiro 1955. {18, 41, 125}
- Trastoy, A. e Ares, Francisco., "Linear Array Pattern Synthesis with Minimum Sidelobe Level and Null Control", International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications (ICEAA 97), pág. 457-460, Turin, Setembro 1997. {30}
- Trastoy, A. e Ares, F., "Phase-Only Control of Antenna Sum Patterns", Millennium Conference on Antennas & Propagation, Davos, Switzerland, pág. 132, Abril 2000. {139}
- Tsao, S. H. e Mittra, R., "A Spectral-Iteration Approach for Analysing Scattering from Frequency Selective Surfaces", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-30, Nº 2, pág 303-308, Março 1982. {79}

Bibliografia

- Tseng, C-Y. e Griffiths, L. J., "A Unified Approach to the Design of Linear Constraints in Minimum Variance Adaptive Beamformers", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 40, Nº 12, pág. 1533-1542, Dezembro 1992. {30}
- Tseng, F. I., "Design of Array and Line-Source Antennas for Taylor Patterns with a Null", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-27, Nº 4, pág. 474-479, Julho 1979. {31}
- van der Maas, G. J., "A Simplified Calculation for Dolph-Tschebyscheff Arrays", Journal of Applied Physics, vol. 25, Nº 1, pág. 121-124, Janeiro 1954. {11, 14, 125}
- Villeneuve, A. T., "Taylor Patterns for Discrete Arrays", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-32, Nº 10, pág. 1089-1093, Outubro 1984. {22, 25}
- Vu, T. B., "Pattern Nulling in Difference Pattern by Amplitude Control", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-33, Nº 6, pág. 669-671, Junho 1985. {30}
- Walter, C. H., "Travelling Wave Antenna", Dover Publications, New York, 1965. {2}
- Werner, D. H., e Ferraro, A. J., "Cosine Pattern Synthesis for Single and Multiple Main Beam Uniformly Spaced Linear Arrays", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 37, Nº 11, pág. 1480-1484, Novembro 1989. {9}
- White, W. D., "A Flexible Synthesis Procedure for Line Source Antennas", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-24, pág. 857-859, Novembro 1976. {30, 184}
- Wolff, E. A., "Antenna Analysis", Artech House, 1988. {7, 11}
- Woodward, P. M. e Lawson, J. D., "The Theoretical Precision with Which an Arbitrary Radiation-Pattern May Be Obtained From a Source of Finite Size", Journal IEE, vol. 95, Nº 37, pág. 363-370, Setembro 1948. {9, 52}
- Wu, L., Zielinski, A. e Bird, J. S., "A Point-Matching Method for Array Pattern", IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, vol. 43, Nº 5, pág. 773-780, Setembro 1996. {177}
- Wu, R., Bao, Z. e Ma, Y., "Control of Peak Sidelobe Level in Adaptive Arrays", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 44, Nº 10, pág. 1341-1347, Outubro 1996. {30}

Índice Remissivo

A

- Abertura, 1, 2, 7, 27, 41, 54
- Agrupamento
 - adaptativo, 30
 - anti-simétrico, 15, 20, 26
 - assimétrico, 134, 136-138, 147-150, 187, 188, 195
 - Bayliss, 20, 95, 141-144, 150, 195
 - binomial, 60
 - equidistante, 43, 91, 104, 106, 107, 193
 - linear, 17, 32, 42, 44, 67, 175
 - não equidistante, 91, 110, 111
 - simétrico, 12, 14, 25, 29, 111, 145, 147, 159, 167, 195
 - superdirectivo, 13, 101
 - Taylor, 24, 26, 31, 67, 72, 95, 129, 130, 133, 134, 139, 140, 145, 187-189, 195
 - tridimensional, 196
 - Tschebyscheff, 10, 11, 26, 60, 64, 75, 99, 101, 102, 149, 175-178, 180, 184, 196
 - uniforme, 9, 10, 18, 20, 32, 52, 56, 71, 175
 - Villeneuve, 25, 145, 146, 150, 195
- Algoritmo
 - técnica FFT, 92, 93, 97
 - técnica FFT inversa, 105, 108
- Aliasing*, 46, 54, 79, 81, 94, 95, 111, 149
- Amostragem da distribuição de corrente, 44, 45, 96, 110
- Amostragem do factor de agrupamento, 46, 47, 57, 68, 82, 96, 184
- Amostragem não uniforme, 34, 168, 184-186, 194
- Amplitude do factor de agrupamento, 8, 117
- Análise matricial, 30, 33, 181
- Antenas
 - agrupamento de, 1, 7, 27, 45, 91, 158, 197
 - análise/síntese, 1, 4, 65, 155
 - comprimento, 27
 - distância entre, 7, 13
 - método aplicado em, 26, 27, 156
 - nulos, 34, 35
 - número, 61, 83
 - Transformada de Fourier, 41, 79
- Aproximação de funções, 81, 88, 91, 92, 105, 113, 181
- Aproximação do diagrama de radiação, 3, 5
- Aproximação do factor de agrupamento, 71, 75, 118, 155
- Atraso, 43, 61, 70, 99

C

- Cálculo
 - analítico, 104
 - numérico, 16, 111
 - Campo distante, 2, 6, 193
 - Campo eléctrico, 3, 5
 - Círculo unitário, 8, 9, 196
 - Cissóide, 185
 - Coefficientes do polinómio, 9, 18, 21, 35, 66, 183
 - Coefficientes do agrupamento, 10, 11, 13, 14, 30, 35, 155
 - Comprimento de onda, 13, 14, 31, 101, 107, 180
 - Controlar
 - distribuição de corrente, 30
 - factor de agrupamento, 9, 118, 196, 168
 - níveis dos lóbulos secundários, 9, 26, 72, 73, 142, 144, 147, 151
 - posição das amostras, 9, 155, 158, 168
 - Convolução, 7, 31, 41, 50, 52, 54, 56, 59, 64, 71, 97, 114, 117, 125-128, 131, 141, 175, 194
 - Corrigir níveis, 175, 177, 179, 183, 189, 196
 - Co-senos directores, 7
 - Critério de erro, 27, 30, 31, 70, 117, 155, 190
- ## D
- Decaimento dos lóbulos secundários, 24-26, 126, 128, 150, 154
 - Descontinuidades, 3, 70, 103, 114, 128, 133
 - Diagrama de potência, 27, 117, 122, 156, 179, 196, 197
 - Diagrama de radiação do elemento, 5
 - Diagrama de tensão, 27, 122, 179, 196
 - Directividade, 26, 65, 130, 132, 134, 139, 147, 149, 151, 154
 - Distribuição de corrente
 - binomial, 26, 60
 - co-seno ao quadrado, 26, 59
 - co-seno elevado, 26, 59, 184
 - co-seno limitado, 26, 94
 - co-seno num pedestal, 26, 27
 - gaussiana, 26
 - Taylor: ver Agrupamento de Taylor
 - triangular, 26
 - tridimensional, 6, 193, 196
 - Tschebyscheff: ver Agrupamento de Tschebyscheff
 - uniforme, 9, 26

Índice Remissivo

- Villeneuve: ver Agrupamento de Villeneuve
Dualidade, 104
- E**
Energia, 74, 83-90, 126
Envolvente, 41, 81, 86, 126-130, 133, 144, 147, 148, 154
Equiripple, 26, 29, 113, 133, 156, 161, 164, 170, 190, 196
Erro
amostragem, 68, 79, 84, 85, 111, 195
computador, 95, 99
critério de: ver Critério de erro
factor de agrupamento, 71, 106, 110, 111
FFT, 80, 81
limites do espectro, 81-91, 193
quadrático médio, 3, 5, 9, 31, 32, 50, 71, 73, 85-90, 181, 195
truncamento, 81, 95, 195
Espectro
espacial, 54, 67, 81, 84, 88, 95
frequencial, 81
limites, 81, 83-90, 111, 193, 195
Extremos
distribuição de corrente, 26, 32, 94, 125, 127-130, 133, 137, 154, 189
factor de agrupamento, 165, 174, 177-179, 183, 187, 189, 197
função, 18, 28, 35, 161, 170
- F**
Factor de agrupamento
anti-simétrico, 15, 20
co-secante, 117, 170, 172, 178, 179
pedestal, 29, 84, 98, 115, 116, 161-170, 178, 189, 190
seno cardinal, 18, 71, 175, 176, 185
tipo lóbulo, 177
Fase
distribuição de corrente, 9, 30, 31, 54, 95, 178
factor de agrupamento, 27, 57, 64, 196
progressiva, 3, 5, 8, 20, 57, 58, 60
rotação de, 43, 135
Fenómeno Gibbs, 27, 114
Ferramenta computacional, 111
FFT (*Fast Fourier Transform*), 15, 79
expressões, 91
número de pontos, 80
Filtros, 15, 26, 27, 29, 30, 70, 113, 156, 161, 164, 184, 194
Fluxograma, 92, 97, 105, 107
FNBW (*first null beamwidth*), 130, 136, 137, 149
Fonte radiante, 1, 5-7
Função
arco tangente, 141, 150, 173
bessel, 72, 74, 126
elíptica, 15, 16, 154
gamma, 65
gaussiana, 125-127, 130, 144
- van der Maas, 125-134, 140-145, 150
- G**
Geração de nulos, 30-35, 113, 168, 174-184, 189, 190, 194, 196
Grau do polinómio, 8, 11-13, 60, 64, 66, 158, 181
- H**
HPBW (*half power beamwidth*), 130, 136, 137, 139, 149
- I**
Interpolação de Lagrange, 28, 35, 155, 156, 168, 184
Interpolação não uniforme, 167, 185
Interpolação polinomial, 28, 113, 155 (ver também Técnica de interpolação polinomial)
- J**
Janela visível, 3, 7, 27, 42, 43, 50, 53, 55, 92, 94, 99, 100, 107, 109, 111, 180, 187, 189
Janela
Hamming, 27
Kaiser, 74, 75, 120-124, 194
rectangular contínua, 26, 50, 52-54, 71, 114-118, 127, 128, 195
rectangular discreta, 26, 50, 55-57, 73, 81, 114, 120-124, 161, 195
Taylor, 27, 72, 73, 115-119, 194
Taylor de 1 parâmetro, 71, 72, 115-118
triangular, 27
Tschebyscheff, 15, 27, 75, 76, 120-124, 194
- L**
Largura do feixe, 61, 101, 130, 132, 133, 139, 144, 147, 149, 181
Limites do espectro: ver Espectro
- M**
MATLAB, 91, 92, 94, 102, 109
Método
adaptativo, 30, 32
Bayliss, 20, 69, 140
determinístico, 30
Elliot, 57, 135-132
filtros, 26
Fourier, 1, 2, 4, 9, 54, 71, 79
iterativo, 1, 26, 28-30, 139, 179, 196
janelas, 26
McNamara, 15, 151, 154, 187, 194
Relação de Fourier, definição, 49
Schelkunoff, 7, 11, 57, 196
Taylor, 18, 67, 125, 130, 132, 144
transformada de Fourier, 1, 50
Tschebyscheff, 10, 58
Villeneuve, 22, 69, 70, 144
Woodward, 9, 10, 19, 26, 41, 52-57, 67, 79, 114, 130, 195
Zolotarev, 66

Índice Remissivo

- Minimização, 32
Mudança de variável
 cossóide, 167
 co-seno, 11, 13-15, 58, 63
 seno, 17, 18, 66, 156
Multiplicação de funções, 7, 113, 125, 138, 154, 172
Multiplicadores de Lagrange, 34, 182
- N**
Nulo de banda estreita, 174, 189
Nulo de banda larga, 32, 174, 177-179, 184, 189
- P**
Polinómios
 Gegenbauer, 65, 66, 101, 102
 Legendre, 65, 101, 102
 trigonométrico, 101, 155, 156, 160
 Tschebyscheff, 11, 12, 18, 22, 23, 25, 27, 58, 61, 64, 65, 145, 150, 161-165, 170-172, 196
 Zolotarev, 15-18, 25, 66, 67, 154
Processamento de sinal, 15, 26, 27, 34, 41, 74, 79, 133, 156, 168, 175, 185, 193
Propriedades
 convolução, 7, 97
 derivação, 82
 FFT, 42, 91, 104
 função periódica, 41, 97
 mudança de escala, 7, 94, 126, 127
 translação, 43, 61, 97, 135, 163
- R**
Raízes, 7-9, 11, 12, 30, 57, 196
Relação de Fourier
 condições de aplicação, 6
 definição, 6, 7
Ripple, 118, 162-164, 167, 170, 178, 179, 196, 197
- S**
Série de Fourier, 2, 4, 14, 22, 26, 27, 42, 52
Simetria de meia onda, 133, 158, 159
Síntese
 Bayliss, 20-22, 69, 96, 140, 143, 144
 Fourier, 3, 9, 41, 52, 54, 57, 71, 115
 Gegenbauer, 101, 155
 McNamara, 25
 Schelkunoff, 7, 57
 Taylor, 18, 22, 31, 67, 69, 95, 125, 131, 132, 144
 Tschebyscheff, 10, 15, 57, 58, 62, 99-101, 155, 194
 Villeneuve, 22, 24, 103, 144, 147, 148, 151
 Woodward, 54
 Zolotarev, 66, 102, 103, 150-155, 172-174
Sidelobe level (SLL), 12, 61
- T**
Técnica
 aproximação polinomial, 181-184, 194
 FFT, 93-95, 98, 103, 115, 117, 122, 128
 FFT inversa, 106, 111
 interpolação polinomial, 155, 161, 162, 166-175, 178, 181, 183, 190, 194, 196
 janelas, 27, 70, 113, 122, 194
 limitação espacial de fontes, 113, 118, 120, 161
 multiplicação de funções, 125, 194, 195
Técnicas alternativas
 método de Bayliss, 140
 método de McNamara, 150
 método de Taylor, 125, 144
 método de Villeneuve, 144
 método de Zolotarev, 150
Teorema da amostragem
 adaptado, 45-47, 91, 95, 96, 113, 125, 156, 160, 193-196
 antenas, 41
 aproximação polinomial, 181
 geração de nulos, 175, 176
 interpolação polinomial, 155, 168-170, 185-187, 190
 síntese de Bayliss, 142
 síntese de Schelkunoff, 57
 síntese de Taylor, 67, 130, 131, 133
 síntese de Tschebyscheff, 64
 síntese de Woodward, 52, 54, 56, 119
 síntese de Zolotarev, 66, 151
Teorema da pequena translação, 5, 6, 195
Teorema de Parseval, 31, 83, 126
Transformada
 Hankel, 196
 Hilbert, 147
 espacial de Fourier, 7
 temporal de Fourier, 7
 Z, 9, 31, 168
Transformada de Fourier
 expressões, 5
 discreta, 1, 15, 34, 49, 80, 81, 91, 104, 168
 discreta não uniforme, 34
 método da: ver Método da transformada de Fourier
 relação entre, 1, 2, 6
Trem de Diracs, 44-46, 49, 52, 54, 56, 65, 58, 81, 91, 97, 104, 175
Triângulo de Pascal, 61
- V**
Vantagem, 65, 72, 107, 113, 129, 130, 137, 154, 158, 168, 174, 183, 184, 190, 196