

DM

**Modelos Matemáticos Discretos
Aplicados à Dinâmica de Populações**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Patrícia Marlene Teixeira Nóbrega de Freitas

MESTRADO EM MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E APLICAÇÕES



UNIVERSIDADE da MADEIRA

A Nossa Universidade

www.uma.pt

novembro | 2019

Modelos Matemáticos Discretos Aplicados à Dinâmica de Populações

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Patrícia Marlene Teixeira Nóbrega de Freitas

MESTRADO EM MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E APLICAÇÕES

ORIENTADOR

Rafael Domingos Garanito Luís

Resumo

As equações de diferenças usualmente descrevem a evolução de um certo fenómeno ao longo de um determinado período de tempo. Matematicamente escrevemos $x_{n+1} = f_n(x_n)$, onde o tamanho da geração $n + 1$, dado por x_{n+1} , é obtido em função do tamanho da população em n , dado por x_n . Neste trabalho faz-se um estudo qualitativo da teoria das equações de diferenças e sua aplicação à dinâmica populacional, estudando a evolução das populações ao longo de um período de tempo. Nestes modelos a variável de estudo x_n representa o tamanho ou densidade da população (ou crescimento populacional) podendo a variável ser afetada por diversos fatores tais como variações do meio ambiente, mudanças na taxa de sobrevivência ou na taxa de reprodução, aparecimento de doenças, interações competitivas, relações de predador-presa, entre outros, limitando o crescimento da população.

Nas equações de diferenças é usada uma modelagem de tempo discreto, relacionado com a estrutura dos dados populacionais. Nesta modelagem existem duas abordagens distintas: (i) os modelos autónomos, onde a evolução é prevista sem considerar mudanças ao longo do tempo e (ii) os modelos não autónomos, dependentes das mudanças ao longo do tempo.

Assim, o objetivo deste trabalho é apresentar em resumo os resultados da teoria de estabilidade de equações de diferenças e aplicar ao estudo de alguns modelos, em particular à dinâmica populacional, em ambos os casos, modelos autónomos e modelos não autónomos.

Palavras-Chave

Equações de diferenças; Pontos fixos; Órbitas; Periodicidade; Estabilidade; Bifurcação.

Abstract

The difference equations usually describe an evolution of a certain phenomenon over a certain period of time. Mathematically we write $x_{n+1} = f_n(x_n)$, where the size of generation $n + 1$, given by x_{n+1} , is used as a function of population size in n , given by x_n . In this paper, a qualitative study of the theory of difference equations is given and its application to population dynamics, studying the evolution of populations over a period of time. In these models, the variable x_n represents the population size or density (or population growth) which may be affected by various factors, such as changes in the environment, changes in reproduction rates or reproduction rates, disease display, competitive interactions, predator-prey relationships, among others, limiting population growth.

In the difference equations a discrete time model is used, related to the population data structure. In this kind of models there are two distinct approaches: (i) autonomous models where evolution is predicted without considering changes over time and (ii) non-autonomous models, dependent on changes over time.

Thus, the objective of this work is to present a summary of the results of the theory of stability of differences equations and to apply it in some models, in particular to population dynamics.

Key Words

Differences equations; Fixed points; Orbits; Periodicity; Stability; Bifurcation.

Agradecimentos

Ao Professor Doutor Rafael Luís, meu orientador, por todo o apoio e orientação indispensáveis na realização deste trabalho.

A toda a minha família, especialmente à minha mãe pelo incansável apoio no meu dia a dia para conciliação do trabalho com os estudos.

Aos meus colegas de mestrado por toda a ajuda e companheirismo ao longo destes dois anos.

Aos meus amigos e colegas de trabalho pelo incentivo e apoio demonstrados, por me lembrarem constantemente da prioridade em terminar esta dissertação apesar do pouco tempo disponível.

A todos os meus professores, fundamentais no percurso académico e na minha formação profissional.

Índice

1.	Introdução Teórica à Estabilidade dos Pontos Fixos	1
1.1.	Órbitas e Pontos de Equilíbrio	1
1.2.	Estabilidade e Diagramas em Teia de aranha	5
1.3.	Órbitas e Pontos periódicos	12
1.4.	A equação Logística e a Bifurcação	15
1.4.1.	Pontos de equilíbrio (Pontos Fixos de $F\mu$)	15
1.4.2.	Ciclos de período dois (2-ciclo)	16
1.4.3.	Ciclos de período quatro e superiores	17
1.4.4.	Bifurcação e Diagramas de Bifurcação	18
2.	Modelos Autônomos Aplicados à Dinâmica de Populações	22
2.1.	Modelos populacionais	22
2.2.	Modelo de Ricker	23
2.3.	Modelo de Beverton-Holt	26
2.4.	Caso de estudo	27
2.5.	Modelo de Pielou	29
2.6.	Modelo de Crescimento de Gompertz	29
2.7.	Efeito de Allee	32
2.7.1.	Modelo de Beverton-Holt com efeito de Allee	32
2.7.2.	Modelo de Ricker com efeito de Allee	34
2.7.3.	Modelo Polinomial com efeito de Allee	38
2.7.4.	Modelo Logístico com efeito de Allee	40
3.	Modelos Não Autônomos Aplicados à Dinâmica de Populações	45
3.1.	Sistemas Periódicos	45
3.2.	Modelo de Ricker Periódico	48
3.3.	Modelo de Beverton-Holt periódico	49
3.4.	Modelo Polinomial com efeito de Allee periódico	51
3.5.	Envolvência (“Enveloping”)	55
3.5.1.	Envolvência em modelos periódicos	56
3.5.2.	Aplicações	59
3.5.2.1.	Modelo de Ricker	59
3.5.2.2.	Modelo de Beverton-Holt generalizado	60

3.5.2.3.	Modelos Mistos	62
3.5.2.3.1.	Modelo de Beverton-Holt agindo com o modelo de Ricker	62
3.5.2.3.2.	Modelo Exponencial e modelo Racional	64
3.5.2.3.3.	Modelo Quadrático	65
3.5.2.3.4.	Modelo de Beverton-Holt com Colheita.....	66
3.6.	Atenuância e Ressonância (“Attenuance and Resonance”).....	67
3.6.1.	A Equação de Beverton-Holt.....	67
3.6.2.	Nem atenuância nem ressonância.....	68
3.6.3.	Uma extensão: Funções monótonas	69
3.6.4.	A perda de atenuância: Ressonância	70
	Conclusão	72
	Bibliografia.....	73
	Índice Remissivo	76

Lista de Figuras

FIGURA 1.1 - Pontos fixos da função $f(x) = x^2 - 4x + 6$.	3
FIGURA 1.2 - Eventual ponto de equilíbrio $\frac{1}{4}$ da equação ilustrada no EXEMPLO 1.3 .	5
FIGURA 1.3 - Ilustração de um ponto fixo estável.	6
FIGURA 1.4 - Ilustração de um ponto fixo instável.	6
FIGURA 1.5 - Ilustração de um ponto fixo assintoticamente estável.	7
FIGURA 1.6 - Estabilidade: analogia com uma bola.	7
FIGURA 1.7 - Diagrama de Cobweb para a função $f(x) = x^2$.	9
FIGURA 1.8 - Diagrama de Cobweb para $f(x) = \frac{3x}{1+9x}$.	11
FIGURA 1.9 - Diagrama de Cobweb para $f(x) = 9x^3 + 3x^2 + x$.	11
FIGURA 1.10 - Identificação de pontos fixos e de pontos periódicos da função $f(x) = 3.4x(1 - x)$.	13
FIGURA 1.11 - Ilustração do diagrama de bifurcação da equação logística.	21
FIGURA 2.1 - Quando $0 < p \leq 2$, o ponto fixo $x^* = p$ do modelo de Ricker é assintoticamente estável.	24
FIGURA 2.2 - Quando $p > 2$, o ponto fixo $x^* = p$ do modelo de Ricker é instável.	25
FIGURA 2.3 - Estudo da estabilidade dos pontos fixos do modelo de Beverton-Holt quando $K = 2$ e $r = 1.5 > 1$, concluímos que $x^* = K$ é globalmente assintoticamente estável.	27
FIGURA 2.4 - A curva de Ricker (linha sólida) e a curva de Beverton-Holt (linha tracejada) adaptadas aos dados populacionais de (a) Salmão e (b) Anchoвета.	28
FIGURA 2.5 - Curvas hipotéticas para 4 populações A, B, C, D.	28
FIGURA 2.6 - Identificação dos pontos fixos de f e f^2 , com $f(x) = x(1 - 1.8 \ln(x))$.	30
FIGURA 2.7 - Estabilidade do ponto fixo positivo do modelo de crescimento de Gompertz quando $r = 1.8 < 2$.	31
FIGURA 2.8 - Instabilidade do ponto fixo positivo do modelo de crescimento de Gompertz quando $r = 2.2 > 2$.	31
FIGURA 2.9 - Representação gráfica do fator de crescimento, $r(x) = \frac{4x}{1+2x^2}$.	33
FIGURA 2.10 - Fixando o valor de $b = 2$ no modelo de Beverton-Holt com efeito de Allee e variando o valor do parâmetro r , temos em (a) $r = 2$, em (b) $r = \sqrt{8}$ e em (c) $r = 4$.	34
FIGURA 2.11 - Assumindo $p = 0.8 < 1$ e $x_0 = 0.75$, concluímos que o ponto $x^* = 0$ é um ponto fixo globalmente assintoticamente estável do modelo de Ricker com efeito de Allee.	35
FIGURA 2.12 - Assumindo $p = 1$ e (a) $x_0 = 0.40 < 1$ temos que o ponto $x^* = 0$ é um ponto fixo assintoticamente estável; (b) $x_0 = 1.52 > 1$ temos que o ponto fixo $x^* = 1$ é semi-estável à direita.	36
FIGURA 2.13 - Os pontos fixos do modelo de Ricker com efeito de Allee para $p = 1.5$ são $x^* = 0$, $x^* = A = 0.3$ e $x^* = K = 2.36$.	37
FIGURA 2.14 - Em (a) verificamos que $x^* = 0$ é um ponto fixo localmente assintoticamente estável quando $0 < x < A$; em (b) concluímos que $x^* = K$ é um ponto fixo localmente assintoticamente estável quando $A < x < K$.	38

FIGURA 2.15 - Estudo da estabilidade dos pontos fixos do modelo polinomial com efeito de Allee quando $k = 4$ e $\mu = 5 < k \left(\frac{k}{k-1}\right)^{k-1} = 9.48148 \dots$. Assumindo $x_0 = 0.83$, concluímos que $x^* = 0$ é globalmente assintoticamente estável.	40
FIGURA 2.16 - Estudo da estabilidade dos pontos fixos do modelo polinomial com efeito de Allee quando $k = 4$ e $\mu = 9.48148 = k \left(\frac{k}{k-1}\right)^{k-1}$. Assumindo $x_0 = 0.83$, concluímos que $x^* = \frac{k}{k-1}$ é localmente assintoticamente estável à direita.	41
FIGURA 2.17 - Estudo da estabilidade dos pontos fixos quando $k = 4$ e $\mu = 10 > k \left(\frac{k}{k-1}\right)^{k-1} = 9.48148$. Assumindo $x_0 = 0.73$, concluímos que $x^* = A$ é instável e $x^* = K$ é localmente assintoticamente estável.	41
FIGURA 2.18 - Estudo da estabilidade dos pontos fixos do modelo logístico com efeito de Allee quando $k = 2$ e $\mu = 3 < k \left(\frac{k}{k-1}\right)^{k-1} = 4$. Assumindo $x_0 = 0.70$, concluímos que $x^* = 0$ é globalmente assintoticamente estável.	43
FIGURA 2.19 - Estudo da estabilidade dos pontos fixos do modelo logístico com efeito de Allee quando $k = 2$ e $\mu = 4 = k \left(\frac{k}{k-1}\right)^{k-1}$. Assumindo $x_0 = 0.70$, concluímos que $x^* = \frac{k-1}{k} = \frac{1}{2}$ é localmente assintoticamente estável à direita.	43
FIGURA 2.20 - Estudo da estabilidade dos pontos fixos do modelo logístico com efeito de Allee quando $k = 2$ e $\mu = 5 > k \left(\frac{k}{k-1}\right)^{k-1} = 4$. Assumindo $x_0 = 0.47$, concluímos que $x^* = A$ é instável e $x^* = K$ é localmente assintoticamente estável.	44
FIGURA 3.1 - Ciclo completo do EXEMPLO 3.1	47
FIGURA 3.2 - Região S de estabilidade global, no espaço dos parâmetros r_0Or_1 , para o modelo de Ricker 2-periódico.	50
FIGURA 3.3 - Região de estabilidade local, no espaço de parâmetros $\mu_0O\mu_1$, onde os pontos fixos de $f_1 \circ f_2$ são localmente assintoticamente estáveis e as funções são dadas por $f_i(x) = \mu_i x^2(1 - x)$, $i = 0, 2$	54
FIGURA 3.4 - Regiões de estabilidade local no espaço de parâmetros da equação 2-periódica quando $k = 3$ (a) e $k = 4$ (b).	55
FIGURA 3.5 - Este exemplo mostra que a composição de modelos populacionais pode não ser um modelo populacional.	58
FIGURA 3.6 - Uma ilustração da “envolvência individual” (curvas mais finas) e da “envolvência composta” (curva a negrito) numa família de funções de Ricker.	60
FIGURA 3.7 - Este exemplo mostra que não existe estabilidade global no modelo de Beverton-Holt 2-periódico, quando $\mu_0 = 1.1$, $\mu_1 = 7$, $c_0 = 7.5$, $c_1 = 2.3$	62

Lista de Tabelas

TABELA 1.1 - Sequência produzida pelo processo de dupla bifurcação [5].....	17
TABELA 1.2 - Os principais tipos de bifurcações para pontos fixos não hiperbólicos em funções unidimensionais [10].....	19

Introdução

Este trabalho foi elaborado no âmbito da dissertação do 2.º ano do Mestrado em Matemática, Estatística e Aplicações. O tema proposto foi Modelos Matemáticos Discretos Aplicados à Dinâmica de Populações.

O objetivo deste trabalho é apresentar em resumo alguns resultados da teoria de estabilidade de equações de diferenças (ou sistemas dinâmicos discretos) e aplicar ao estudo de alguns modelos, em particular à dinâmica populacional. Não é objetivo desta dissertação apresentar as demonstrações dos teoremas expostos, visto que estas podem ser consultados na bibliografia que se apresenta no final deste trabalho.

Um dos conceitos matemáticos de um sistema dinâmico é baseado no simples facto de que existem certas regras que governam as nossas leis naturais. Essas regras, em geral, podem ser descritas por modelos matemáticos discretos.

Na dinâmica populacional, e do ponto de vista matemático, existem duas principais estratégias de modelagens: (i) a abordagem de tempo contínuo usada na teoria das equações diferenciais e (ii) a abordagem de tempo discreto usada nas equações de diferenças, a qual está mais relacionada com a estrutura dos dados de uma população. Neste trabalho apenas será referenciada a abordagem de tempo discreto.

Assim, um Sistema Dinâmico Discreto, ou equação de diferenças, é toda a relação que cumpra a regra $x_{n+1} = f_n(x_n)$, $n \in \mathbb{Z}^+$, onde $x \in X$ e X é um espaço topológico qualquer. Existem duas abordagens diferentes para o tempo discreto: (i) o modelo autónomo onde a dinâmica do sistema é dada pela mesma função. Este tipo de sistemas prevêem a evolução sem considerar mudanças ao longo do tempo. Por outras palavras, a equação que gera o sistema tem parâmetros constantes, (ii) o modelo não autónomo, isto é, equações de diferenças cujo lado direito depende explicitamente da mudança ao longo do tempo. Consequentemente, influências sazonais, efeitos externos e outros mecanismos são permitidos nos modelos não-autónomos. Em concreto, a sequência de parâmetros constantes são substituídas por sequências de parâmetros dependentes do tempo.

No primeiro capítulo apresentamos toda a teoria necessária para o desenvolvimento do segundo e terceiro capítulos. Começamos pela apresentação de definições importantíssimas tais como ponto fixo, estabilidade, entre outros. Seguidamente apresentamos diversos teoremas que serão utilizados nos capítulos seguintes. Toda esta teoria pode ser encontrada tanto na bibliografia apresentada como na tese de mestrado de Rafael Luís [1].

No segundo capítulo estudamos diversos modelos autónomos aplicados à dinâmica de populações tais como o modelo de Ricker, o modelo de Beverton-Holt, entre outros. Damos a conhecer o conceito de efeito de Allee e alguns modelos modificados para o efeito.

Por fim, no terceiro capítulo estudamos alguns modelos periódicos. Introduzimos conceitos como a envolvência, atenuância e ressonância, conceitos recentes e ainda em desenvolvimento. A informação relativa a este último capítulo pode ser encontrada de forma mais detalhada no livro de Rafael Luís [2] bem como nas outras referências apresentadas.

Refira-se que, na sua generalidade, a informação que consta neste capítulo não está disponível em Português, visto ser matéria de estudo recente e como tal ainda não consta nas obras em Português.

1. Introdução Teórica à Estabilidade dos Pontos Fixos

Neste primeiro capítulo são apresentados os conceitos essenciais para o estudo qualitativo das equações de diferenças de primeira ordem bem como a estabilidade das soluções constantes.

Assim, na secção 1.1., introduzimos o conceito de órbitas e pontos de equilíbrio, começando pela apresentação de um sistema dinâmico discreto seguido da introdução de um teorema fundamental neste domínio, o teorema do ponto fixo.

Na secção 1.2 damos a conhecer o conceito de estabilidade aliada aos pontos fixos de uma equação de diferenças de primeira ordem e o Diagrama de Cobweb, uma ferramenta que permite-nos visualizar órbitas e detetar a natureza da estabilidade de pontos fixos. Introduzimos também o conceito de pontos fixos hiperbólicos e damos a conhecer os teoremas que nos ajudam a concluir a sua estabilidade.

Na secção 1.3 definimos pontos periódicos, órbitas e a sua estabilidade.

Por último, introduzimos o conceito de bifurcação e de ciclos k -periódicos, aplicando o exemplo à equação logística.

1.1. Órbitas e Pontos de Equilíbrio

As equações de diferenças usualmente descrevem a evolução de um certo fenómeno ao longo de um determinado período de tempo. Isto é, por exemplo, ao assumir que uma certa população tem gerações discretas, o tamanho da geração $n + 1$, dado por x_{n+1} é obtido em função do tamanho da população em n , x_n . Esta relação pode ser expressa numa equação de diferenças da seguinte forma:

$$x_{n+1} = f(x_n).$$

A equação anterior é um exemplo de uma equação de diferenças de primeira ordem.

Assim, um Sistema Dinâmico Discreto, ou equação de diferenças, é toda a relação que cumpra a regra $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \in \mathbb{Z}^+$, onde $x \in X$ e X é um espaço topológico¹ qualquer.

Considerando uma população inicial, x_0 , e aplicando de forma sucessiva a função f , determinamos uma sequência de estados:

$$x_0, f(x_0), f(f(x_0)) = f^2(x_0), f(f(f(x_0))) = f^3(x_0), \dots$$

¹ Seja X um conjunto. Topologia em X é uma família τ de subconjuntos de X com as seguintes propriedades:

- (a) \emptyset e X pertencem a τ ;
- (b) A união de uma família arbitrária de membros de τ pertence a τ ;
- (c) A intersecção de uma família finita de membros de τ pertence a τ ;

Os membros de τ são chamados de abertos. O par (X, τ) é chamado de espaço topológico.

Esta sequência de estados dá-nos as iteradas de x_0 por f , isto é, $f(x_0)$ é chamado de primeira iterada de x_0 por f ; $f^2(x_0)$ é chamado de segunda iterada de x_0 por f .

Generalizando, $f^n(x_0)$ é a n -ésima iterada de x_0 por f .

DEFINIÇÃO 1.1 (Órbita): Ao conjunto de todas as iteradas da função f no ponto x_0 chamamos órbita de x_0 e representamos por $O(x_0) = \{f^n(x_0) : \forall n \in \mathbb{Z}_0^+\}$.

NOTA: Este procedimento iterativo é um exemplo de um sistema dinâmico discreto.

OBSERVAÇÃO 1.1: As equações de diferenças e os sistemas dinâmicos discretos representam dois lados da mesma moeda. Equações de diferenças são referidas como a análise teórica e os sistemas dinâmicos discretos como aspetos topológicos e geométricos.

DEFINIÇÃO 1.2 (Ponto Fixo ou Ponto de Equilíbrio de f): Dado um subconjunto $I \subseteq \mathbb{R}$ e uma função $f: I \rightarrow I$, então $x^* \in I$ é dito ser um ponto fixo (estado estacionário, ou ainda, ponto de equilíbrio) de f se $f(x^*) = x^*$.

Por outras palavras, x^* é um ponto que ao ser iterado vai permanecer invariante, independentemente do número de iteradas aplicadas.

OBSERVAÇÃO 1.2: No sistema cartesiano, são considerados os valores de x_n no eixo das abcissas e x_{n+1} no eixo das ordenadas. De seguida, representamos graficamente a equação $x_{n+1} = f(x_n)$. Um ponto fixo da função f será um ponto onde $x_{n+1} = f(x_n)$ intersesta a bissetriz dos quadrantes ímpares, ($y = x$), que nas variáveis apresentadas será expressa por $x_{n+1} = x_n$.

EXEMPLO 1.1

Seja $f(x) = x^2 - 4x + 6$. Na **FIGURA 1.1** está representada a função f e os seus respetivos pontos de equilíbrio. Analiticamente, os pontos de equilíbrio são as soluções da equação $f(x^*) = x^*$:

$$x^{*2} - 4x^* + 6 = x^* \Leftrightarrow x^{*2} - 5x^* + 6 = 0$$

Aplicando a fórmula resolvente, com $a = 6$, $b = 8$ e $c = -3$ vem:

$$x^* = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \times 1 \times 6}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x_1^* = 2 \vee x_2^* = 3.$$

EXEMPLO 1.2

O ponto fixo associado ao modelo discreto afim, é a solução da equação $x^* = ax^* + b$, ou seja, $x^* = \frac{b}{1-a}$, com $a \neq 1$. No caso $a = 1$, surgem duas possibilidades:

- 1) Se $a = 1$ e $b \neq 0$, não existe ponto fixo, é o caso em que as funções $f(x) = ax + b$ e a bissetriz dos quadrantes ímpares não se intersestam em nenhum ponto;

- 2) Se $a = 1$ e $b = 0$, as retas são coincidentes, ou seja, todos os pontos satisfazem a definição de ponto fixo.

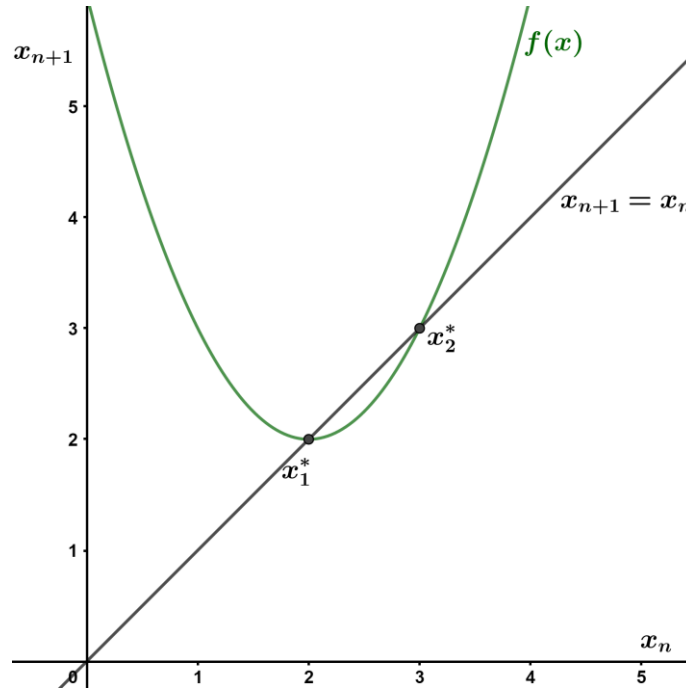


FIGURA 1.1 - Pontos fixos da função $f(x) = x^2 - 4x + 6$.

OBSERVAÇÃO 1.3: Considerando a relação da forma $x_{n+1} = f(x_n)$ onde f é uma função real que admite x^* como ponto fixo (ou seja, $f(x^*) = x^*$), então, se $x_0 = x^*$, a órbita de x_0 será $\{x^*, x^*, x^*, \dots\}$.

Dada a definição de ponto fixo, estamos agora em condições de introduzir um dos principais objetivos da teoria de estabilidade de sistemas dinâmicos discretos. Trata-se do estudo do comportamento das órbitas na vizinhança de pontos fixos. Por outras palavras, é o estudo do comportamento das soluções de equações de diferenças quando os pontos iniciais encontram-se suficientemente próximos dos pontos fixos.

É possível que numa equação de diferenças uma solução não seja um ponto de equilíbrio mas pode chegar a sê-lo após um número elevado mas finito de iterações. Ou seja, um estado de não equilíbrio pode chegar a ser um estado de equilíbrio num tempo finito. Isto leva-nos à seguinte definição:

DEFINIÇÃO 1.3 (Eventual Ponto Fixo): Um ponto x , pertencente ao domínio de f , é um eventual ponto fixo da função f se existe um inteiro positivo k e um ponto fixo x^* de f tal que $f^k(x) = x^*$, mas $f^{k-1}(x) \neq x^*$.

EXEMPLO 1.3

Consideremos a equação $x_{n+1} = f(x_n)$, onde

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2(1-x), & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}.$$

Os pontos fixos desta equação são obtidos resolvendo $f(x^*) = x^*$. Neste caso particular, obtemos duas soluções, $x^* = 0$ ou $x^* = \frac{2}{3}$. Para encontrarmos um eventual ponto de equilíbrio, consideremos $x_0 = \frac{1}{4}$. Para este valor inicial temos que:

$$x_1 = f(x_0) = f\left(\frac{1}{4}\right) = 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2};$$

$$x_2 = f(x_1) = f(0.5) = 2 \times 0.5 = 1;$$

$$x_3 = f(x_2) = f(1) = 2 \times (1 - 1) = 0 = x^*.$$

Então, $\frac{1}{4}$ é um eventual ponto de equilíbrio, pois a sua órbita converge para o ponto de equilíbrio $x^* = 0$ após ser iterado três vezes ($k = 3$). Notemos que

$$f^{k-1}(x_0) = f^2(x_0) = 2 \times 0.5 = 1 \neq x^*.$$

Esta situação é exemplificada na **FIGURA 1.2**, com $x_0 = \frac{1}{4}$.

Refira-se ainda que, pontos da forma $\frac{1}{2^j}, j \geq 1$, representam uma família de eventuais pontos de equilíbrio uma vez que se $x_0 = \frac{1}{2^j}, x_1 = \frac{2}{2^j}, x_2 = \frac{2^2}{2^j}, \dots, x_j = 1$ e $x_{j+1} = 0$.

OBSERVAÇÃO 1.4: É importante referir que nem todas as funções têm pontos fixos, como por exemplo a função $f(x) = \ln x$.

Em seguida vamos apresentar um importante resultado nesta área. Antes, observe-se que:

Seja $f: I \rightarrow I$ uma função contínua, onde $I = [a, b]$. Se definirmos $g(x) = f(x) - x$ resulta que $g(a) = f(a) - a \geq 0$ e $g(b) = f(b) - b \leq 0$. Como $g(a) \times g(b) \leq 0$, resulta pelo teorema de Bolzano que $\exists x \in [a, b]: g(x) = 0$. Consequentemente

$$f(x) - x = 0 \Leftrightarrow f(x) = x,$$

ou seja, f possui um ponto fixo.

Resumindo:

TEOREMA 1.1: Seja $f: I \rightarrow I$ uma função contínua, onde $I = [a, b]$ é um intervalo fechado em \mathbb{R} . Então, f tem um ponto fixo.

OBSERVAÇÃO 1.5: No caso de termos $f: I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(I) \supset I$. Então, f tem um ponto fixo em I .

EXEMPLO 1.4

Seja $f(x) = x^2 - 4x + 3$, $x \in [0,4]$ e defina-se $g(x) = f(x) - x = x^2 - 5x + 3$. Temos que, $g(0) = 3$ e $g(4) = 16 - 20 + 3 = -1$. Como $g(0) \times g(4) < 0$, pelo teorema de Bolzano, $\exists x \in]0,4[$: $g(x) = 0$ e conseqüentemente $f(x) = x$. Logo f tem um ponto fixo em $]0,4[$ (como foi determinado no **EXEMPLO 1.1**).

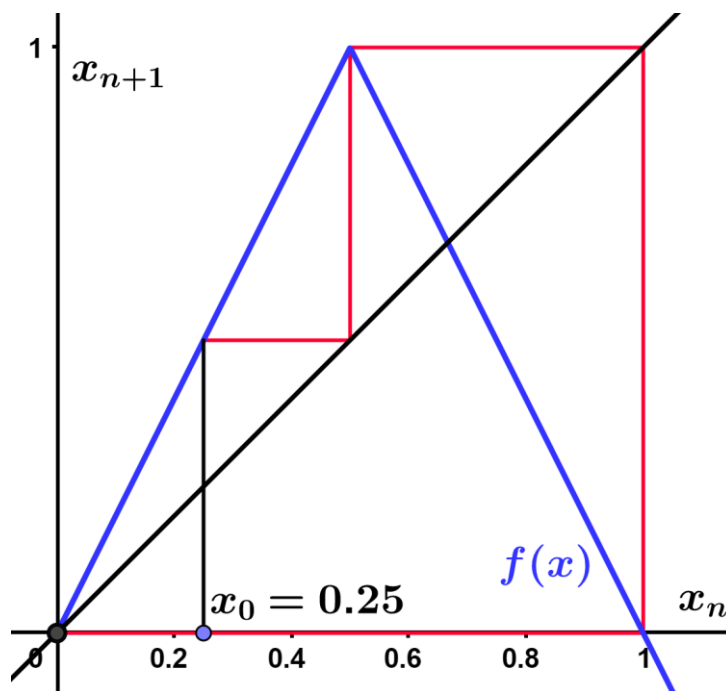


FIGURA 1.2 - Eventual ponto de equilíbrio $\frac{1}{4}$ da equação ilustrada no **EXEMPLO 1.3**.

1.2. Estabilidade e Diagramas em Teia de aranha

Nesta secção vamos apresentar o conceito de estabilidade e resultados que ajudam no seu estudo. Introduzimos também o conceito de diagrama em teia de aranha, uma ferramenta gráfica que ajuda-nos a investigar a estabilidade dos pontos fixos.

Assim sendo, começamos por apresentar a definição de estabilidade local.

DEFINIÇÃO 1.4 (Estabilidade Local): Dado uma função $f: I \rightarrow I$, onde I é um intervalo de números reais, e x^* um ponto fixo de f , então x^* é:

- 1) Localmente estável se para todo o $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que para todo $x_0 \in I$ com $|x_0 - x^*| < \delta$ temos $|f^n(x_0) - x^*| < \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}$. Caso contrário, x^* é instável;
- 2) Atrator se existe $\eta > 0$ tal que $|x_0 - x^*| < \eta$ implica $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x_0) = x^*$;
- 3) Localmente assintoticamente estável se for simultaneamente estável e atrator. Caso em 2) $\eta = \infty$, então x^* é globalmente assintoticamente estável.

Na **FIGURA 1.3** visualiza-se um exemplo de um ponto fixo estável.

A **FIGURA 1.4** mostra que considerando um ponto inicial x_0 , na vizinhança δ de x^* , a sua órbita afasta-se da vizinhança ε de x^* após uma certa ordem, pelo que x^* é instável.

A **FIGURA 1.5** representa um exemplo de ponto fixo assintoticamente estável, isto é, qualquer ponto inicial escolhido dentro do intervalo $[x^* - \eta, x^* + \eta]$, após uma certa ordem converge para o ponto de equilíbrio x^* , então x^* é um ponto fixo assintoticamente estável.

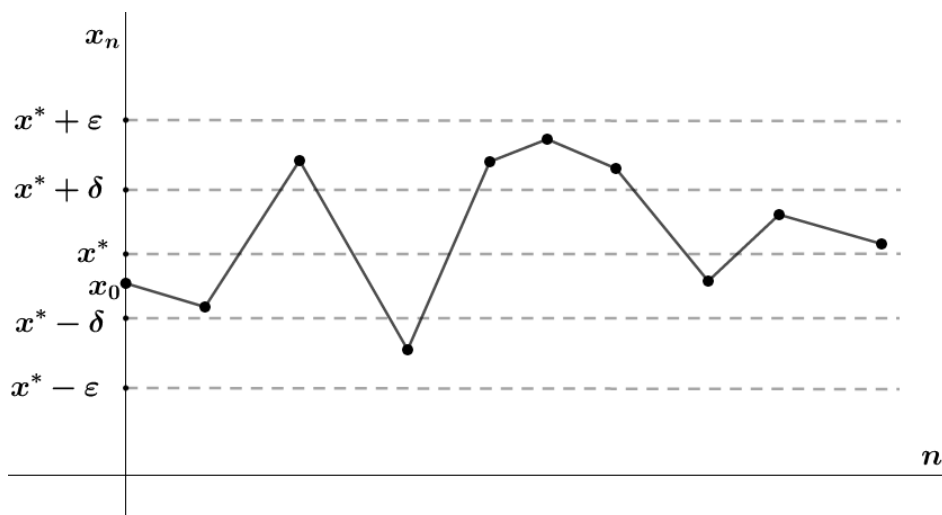


FIGURA 1.3 - Ilustração de um ponto fixo estável.

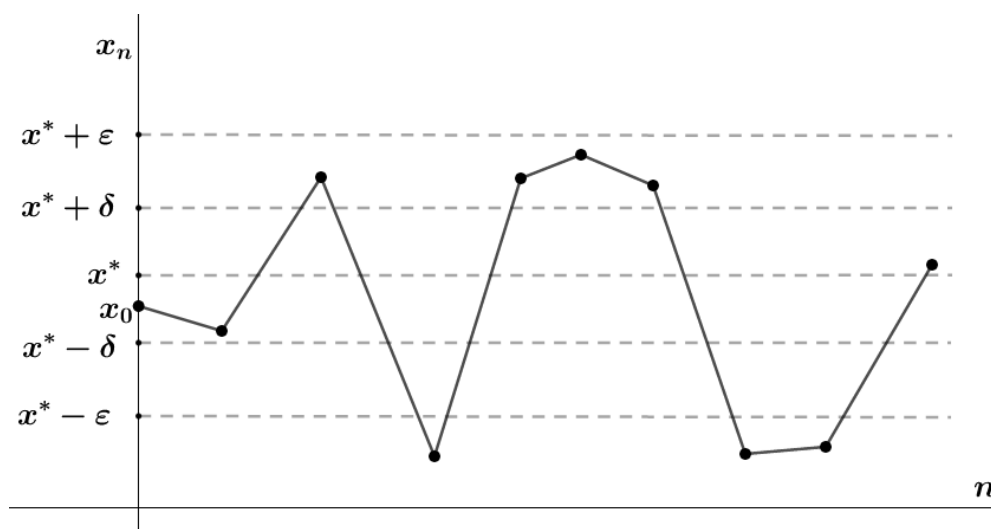


FIGURA 1.4 - Ilustração de um ponto fixo instável.

Para melhor compreender o conceito de estabilidade, podemos fazer a analogia com uma bola. As bolas representadas na **FIGURA 1.6** são alusivas a um estado de equilíbrio. A primeira bola está numa posição instável, pois quando afastada ligeiramente da sua posição de equilíbrio não voltará à mesma. A segunda bola está numa posição estável, pois quando afastada ligeiramente da sua posição de equilíbrio, a ela voltará.

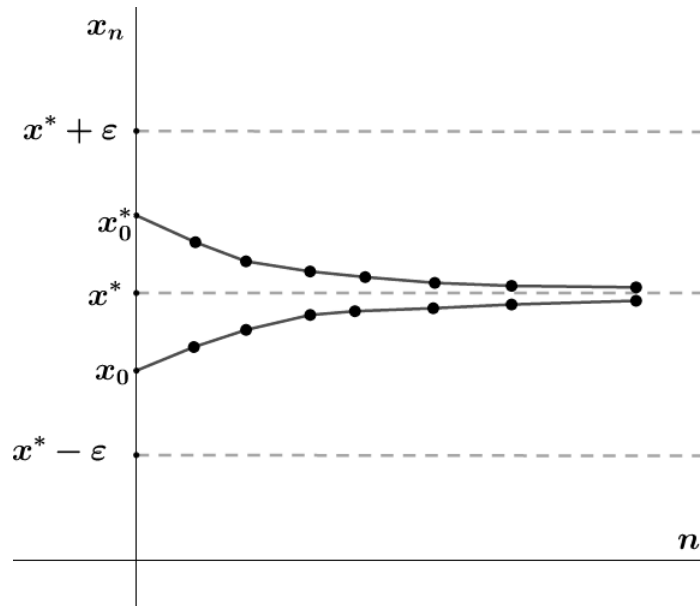


FIGURA 1.5 - Ilustração de um ponto fixo assintoticamente estável.

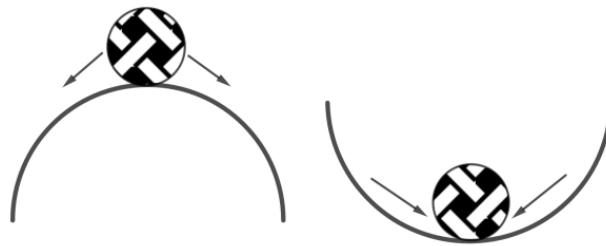


FIGURA 1.6 – Estabilidade: analogia com uma bola.

Não sendo uma tarefa fácil determinar, a partir da **DEFINIÇÃO 1.4**, a estabilidade de um ponto de equilíbrio, podemos recorrer a técnicas gráficas para facilitar essa tarefa. Para nos ajudar a compreender o comportamento de uma solução na vizinhança dos pontos de equilíbrio de uma equação, podemos utilizar o gráfico em forma de “teia de aranha”, também conhecido como diagrama de degraus ou diagrama de Cobweb.

O diagrama de Cobweb é uma ferramenta importante no estudo da estabilidade das equações, pois permite-nos visualizar órbitas e detetar a dinâmica na vizinhança dos pontos fixos.

Para criar um diagrama de Cobweb, o primeiro passo é representar o gráfico da função f no plano (x_n, x_{n+1}) . No mesmo gráfico deve ser representada a bissetriz dos quadrantes ímpares, $x_n = x_{n+1}$. Posteriormente, indicamos um qualquer valor inicial, x_0 , no eixo das abcissas. A partir do ponto x_0 , traça-se uma linha vertical até se encontrar o gráfico de f , no ponto $(x_0, f(x_0))$ que irá corresponder ao $x_1 = f(x_0)$. O próximo passo será encontrar o ponto (x_1, x_1) . Para tal traçamos uma reta horizontal, paralela ao eixo O_x até encontrarmos a reta $x_n = x_{n+1}$. De seguida, voltamos a traçar uma linha vertical, a partir do último ponto encontrado até voltar a encontrar a função f , determinando o ponto (x_1, x_2) . Continuando este

processo, podemos visualizar todos os pontos na órbita de x_0 , ou seja, o conjunto $\{x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^n(x_0), \dots\}$.

EXEMPLO 1.5

Seja a equação $x_{n+1} = f(x_n)$, onde $f(x) = x^2$. Os pontos fixos desta equação são $x^* = 0$ ou $x^* = 1$.

Selecionando, por exemplo, o valor inicial $x_0 = \frac{3}{4}$, encontramos x_1 desenhando uma linha vertical a partir do ponto $x_0 = \frac{3}{4}$ até interseção com a função $f(x) = x^2$, ou seja, $x_1 = f\left(\frac{3}{4}\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$. Seguidamente é necessário achar o ponto (x_1, x_1) . Para tal basta traçar uma linha horizontal a partir do ponto $(x_0, x_1) = \left(\frac{3}{4}, \frac{9}{16}\right)$ até interseção com a bissetriz dos quadrantes ímpares, $y = x$, no ponto $(x_1, x_1) = \left(\frac{9}{16}, \frac{9}{16}\right)$. De seguida, voltamos a traçar uma linha vertical a partir desse ponto até interseção com a função f , teremos o ponto $(x_1, x_2) = \left(\frac{9}{16}, \frac{81}{256}\right)$. Continuando este processo, podemos visualizar a localização dos valores de $x_n, \forall n > 0$, conforme ilustrado na **FIGURA 1.7**.

Antes de apresentarmos um resultado simples mas poderoso na teoria de estabilidade dos pontos fixos, é necessário introduzir alguns conceitos, como é o caso da semi-estabilidade e dos pontos fixos hiperbólicos.

Podem surgir pontos de equilíbrio semi-estáveis, ou seja, o ponto de equilíbrio pode ser estável à esquerda (ou à direita) e ser instável à direita (ou à esquerda). A **DEFINIÇÃO 1.5** apresenta este conceito.

DEFINIÇÃO 1.5 (Semi-estabilidade): Diz-se que um ponto de equilíbrio, x^* , da equação $x_{n+1} = f(x_n)$ é semi-estável:

- a) À direita, se $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: x_0 > x^*, x_0 - x^* < \delta \Rightarrow x_n - x^* < \varepsilon$;
- b) À esquerda, se $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: x_0 < x^*, x^* - x_0 < \delta \Rightarrow x^* - x_n < \varepsilon$.

Para conhecermos a estabilidade local dos pontos fixos (ou pontos de equilíbrio) devemos dividi-los em dois tipos: **hiperbólicos** e **não hiperbólicos**. Assim, um ponto fixo x^* da função f , sendo f diferenciável, é hiperbólico se $|f'(x^*)| \neq 1$, caso contrário é não hiperbólico.

A estabilidade dos pontos fixos hiperbólicos resume-se às alíneas a) e b) do **TEOREMA 1.2**.

O critério de estabilidade para pontos fixos não hiperbólicos é mais complexo, antes de apresentá-lo é necessário introduzir a noção de derivada de Schwartz. Esta denota-se por Sf e é definida da seguinte maneira:

$$Sf(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(x)}{f'(x)} \right)^2.$$

Em particular, quando $f'(x^*) = -1$, temos $Sf(x^*) = -f'''(x^*) - \frac{3}{2} [f''(x^*)]^2$.

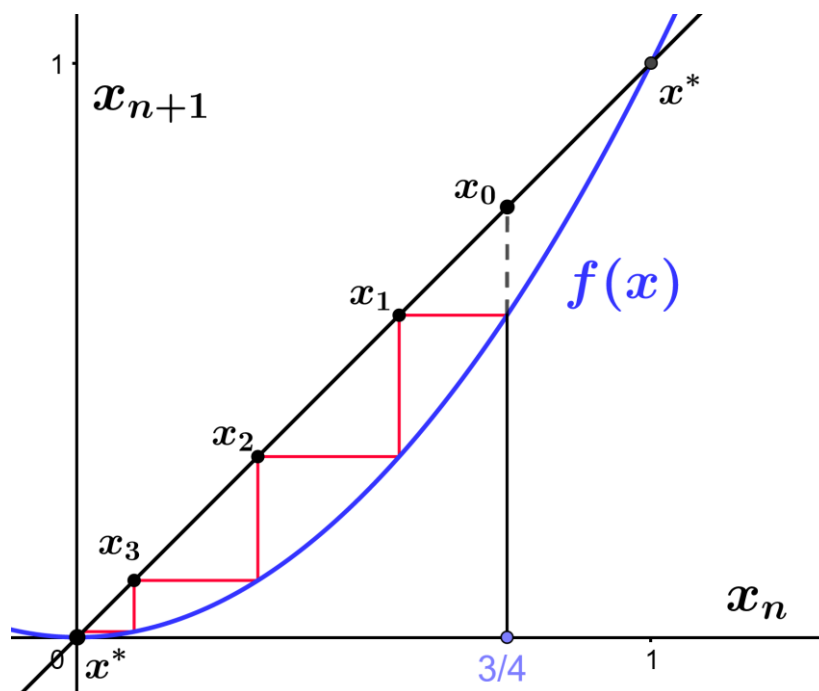


FIGURA 1.7 - Diagrama de Cobweb para a função $f(x) = x^2$.

NOTA: No livro [3] podemos visualizar uma classificação completa de pontos fixos hiperbólicos.

OBSERVAÇÃO 1.6: Notemos que se $f'(x^*) = -1$ e $g = f \circ f$, então temos $Sf(x^*) = \frac{1}{2}g'''(x^*)$ e $g''(x^*) = 0$.

TEOREMA 1.2 (Estabilidade) [3]: Seja x^* , ponto de equilíbrio da equação $x_{n+1} = f(x_n)$, com f continuamente diferenciável no ponto x^* . Então:

- a) Se $|f'(x^*)| < 1$, x^* é assintoticamente estável;
- b) Se $|f'(x^*)| > 1$, x^* é instável;
- c) Se $f'(x^*) = 1$, existem quatro casos distintos:
 1. Se $f'''(x^*) > 0$, x^* é instável, mas semi-estável à esquerda;
 2. Se $f'''(x^*) < 0$, x^* é instável, mas semi-estável à direita;
 3. Se $f'''(x^*) = 0$, existem dois casos a considerar:
 - i. Se $f'''(x^*) > 0$, x^* é instável;
 - ii. Se $f'''(x^*) < 0$, x^* é localmente assintoticamente estável.
- d) Se $f'(x^*) = -1$, então existem dois casos:
 1. Se $Sf(x^*) < 0$, x^* é localmente assintoticamente estável;
 2. Se $Sf(x^*) > 0$, x^* é instável.

EXEMPLO 1.6

Vamos determinar a estabilidade dos pontos de equilíbrio da equação $x_{n+1} = \frac{3x_n}{1+9x_n}$. Seja $x_{n+1} = f(x_n)$ com $f(x) = \frac{3x}{1+9x}$.

Os pontos de equilíbrio da equação são $x^* = 0$ ou $x^* = \frac{2}{9}$. Como $f'(x) = \frac{3}{(1+9x)^2}$, temos que $f'(0) = 3 > 1$, e portanto, pela alínea b) do **TEOREMA 1.2**, $x^* = 0$ é um ponto de equilíbrio instável. Para o ponto fixo positivo resulta $\left|f'\left(\frac{2}{9}\right)\right| = \frac{1}{3} < 1$. Assim, pela alínea a) do **TEOREMA 1.2**, $x^* = \frac{2}{9}$ é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável.

A dinâmica na vizinhança dos pontos fixos de f está resumida na **FIGURA 1.8**, onde, qualquer que seja o ponto inicial escolhido, a sua órbita aproxima-se de $x^* = \frac{2}{9}$. Note-se que, no caso de $x^* = 0$, a órbita de um ponto próximo deste afasta-se.

EXEMPLO 1.7

Vamos determinar a estabilidade e semi-estabilidade dos pontos de equilíbrio da equação $x_{n+1} = 9x_n^3 + 3x_n^2 + x_n$. Seja $x_{n+1} = f(x_n)$, com $f(x) = 9x^3 + 3x^2 + x$. Os pontos de equilíbrio da equação são -1 e 0 . Como $f'(x) = 27x^2 + 6x + 1$, então $f'(-1) = 27 - 6 + 1 = 22 > 1$, pelo que $x^* = -1$ é instável. Temos que $f'(0) = 1$ e $f''(x) = 54x + 6$ pelo que $f''(0) = 6 \neq 0$, então pela alínea c) do **TEOREMA 1.2**, o ponto de equilíbrio $x^* = 0$ é instável. No entanto, este ponto fixo apresenta semi-estabilidade à esquerda uma vez que $f'(0) = 1$ e $f''(0) = 6 > 0$.

A **FIGURA 1.9** ilustra a instabilidade do ponto $x^* = 0$ à direita e a semi-estabilidade à esquerda.

O **TEOREMA 1.2** dá-nos garantias da estabilidade local. W. Coppel propôs o seguinte resultado que em certos casos estabelece a estabilidade global de pontos fixos:

TEOREMA 1.3 [4]: Seja $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ e $f: I \rightarrow I$ uma função contínua. Se a equação $f(f(x)) = x$ não tiver raízes à exceção das raízes possíveis de $f(x) = x$, então é garantido que todas as órbitas da função f convergem para um ponto fixo.

Este teorema não é suficiente para garantir a estabilidade global. No entanto se o ponto fixo for único, então ele é globalmente estável.

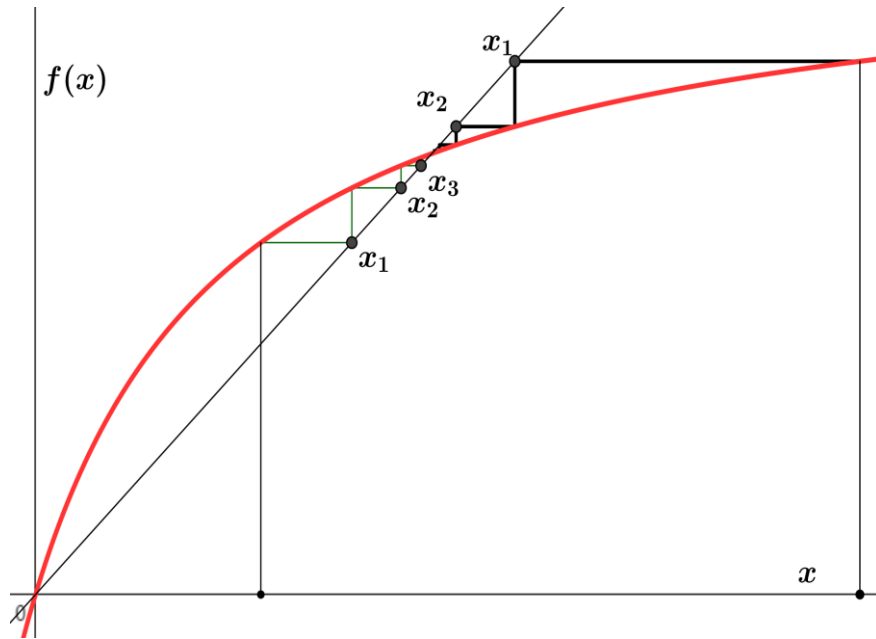


FIGURA 1.8 - Diagrama de Cobweb para $f(x) = \frac{3x}{1+9x}$.

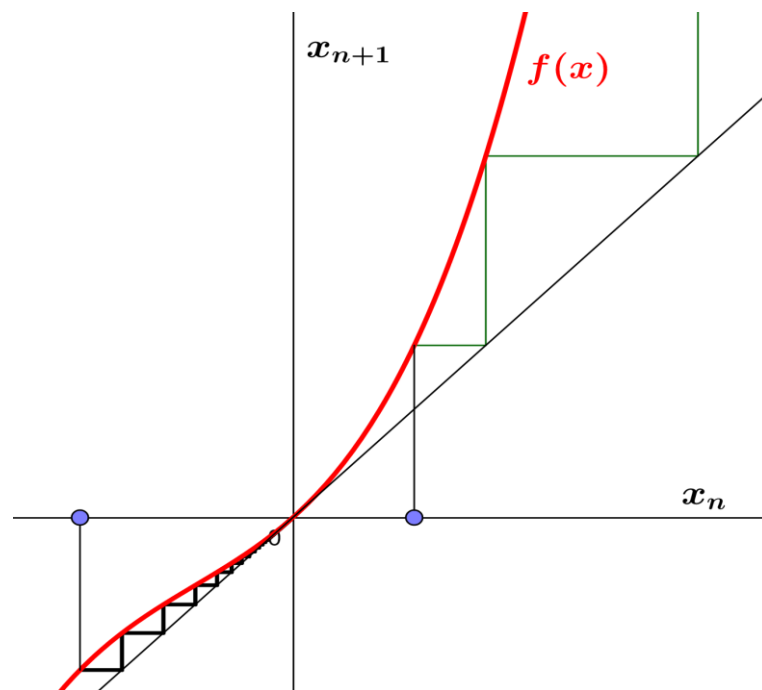


FIGURA 1.9 - Diagrama de Cobweb para $f(x) = 9x^3 + 3x^2 + x$.

EXEMPLO 1.8

Consideremos o modelo de Ricker dado por $x_{n+1} = x_n e^{p-x_n}$, $p > 0$. Seja $f(x) = x e^{p-x}$. A função f tem dois pontos fixos, a origem que é instável e $x^* = p$ que é assintoticamente estável quando $0 < p \leq 2$ (no capítulo 2, secção 2.2, esta condição é apresentada em detalhe).

Da igualdade $f(f(x)) = x$ resulta $f(x)e^{p-f(x)} = x$, ou seja, $x e^{p-x} \times e^{p-x e^{p-x}} = x$. Simplificando vem $x = 0 \vee 2p - x - x e^{p-x} = 0$. Claramente que $x^* = p$ é solução da segunda equação.

É possível verificar que a equação $2p - x - x e^{p-x} = 0$ não tem mais nenhuma solução para além de $x^* = p$, sempre que $0 < p \leq 2$, como se ilustra na secção 2.2.

Assim, $x^* = p$ é o único ponto fixo da função f em $x > 0$. Pelo **TEOREMA 1.3**, $x^* = p$ é globalmente assintoticamente estável sempre que $x > 0$.

1.3. Órbitas e Pontos periódicos

Vamos começar esta secção com a definição de ponto periódico e ponto eventualmente periódico.

DEFINIÇÃO 1.6 (Ponto periódico e ponto eventualmente periódico): Consideremos b , um ponto pertencente ao domínio da função $f(x)$. Dizemos que:

- a) b é um ponto periódico de período k da equação $x_{n+1} = f(x_n)$, se dado um inteiro positivo k , temos que $f^k(b) = b$, ou seja, b é um ponto k -periódico se é um ponto fixo (ou ponto de equilíbrio) da função f^k .

Chama-se k -ciclo à órbita periódica do ponto b ,

$$O^+(b) = \{b, f(b), f^2(b), \dots, f^{k-1}(b)\}.$$

- b) b é um ponto eventualmente k -periódico se, dado um inteiro positivo, m , temos que $f^m(b)$ é um ponto k -periódico, isto é, se $f^{k+m}(b) = f^m(b)$.

Notemos que se $k = 1$, então $f(f^m(b)) = f^m(b)$ e b é um eventual ponto fixo. Já se $m = 0$, então b é k -periódico, $f^k(b) = b$.

Em termos gráficos, um ponto k -periódico é a abcissa do ponto onde o gráfico de f^k e a bissetriz dos quadrantes ímpares ($y = x$) se interseitam.

EXEMPLO 1.9

Na **FIGURA 1.10** podemos observar os pontos fixos de f e f^2 da equação $x_{n+1} = f(x_n)$, onde $f(x) = 3.4x(1 - x)$. Verificamos que f^2 tem 4 pontos fixos e 2 destes são também pontos fixos de f . Os dois pontos de f^2 que não são pontos fixos de f formam um 2-ciclo (ciclo de período $k = 2$), mais concretamente o conjunto $\{0.45196, 0.84215\}$.

Apresentada a definição de ponto k -periódico, podemos determinar se as órbitas desses pontos são ou não estáveis.

DEFINIÇÃO 1.7 (Estabilidade de um ponto k -periódico): Consideremos b um ponto k -periódico de f . Dizemos que b é:

1. Estável, se for ponto fixo estável de f^k ;
2. Assintoticamente Estável, se for ponto fixo assintoticamente estável de f^k ;
3. Instável, se for ponto fixo instável de f^k .

OBSERVAÇÃO 1.7: Se $x_0 = b$, então a estabilidade do ponto b determina a estabilidade de todos os pontos do k -ciclo,

$$\{x_0 = b, x_1 = f(b), x_2 = f^2(b), \dots, x_{k-1} = f^{k-1}(b)\}.$$

Assim, para estudar a estabilidade de um ponto k -periódico da equação $x_{n+1} = f(x_n)$, basta estudarmos a estabilidade do ponto de equilíbrio da equação $x_{n+1} = g(x_n)$ e aplicar o **TEOREMA 1.2** à função $g = f^k$.

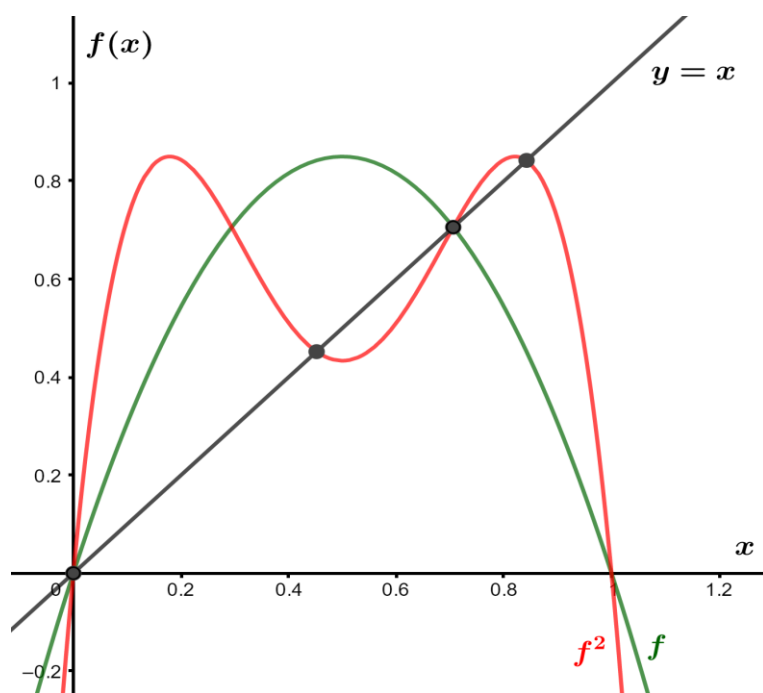


FIGURA 1.10 - Identificação de pontos fixos e de pontos periódicos da função $f(x) = 3.4x(1 - x)$.

TEOREMA 1.4 (Estabilidade do ciclo) [4]: Seja $O(b) = \{b = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{k-1}\}$ um k -ciclo de f , sendo f uma função contínua e diferenciável em b . Então o k -ciclo $O(b)$ é:

- 1) Assintoticamente estável, se $|f'(x_0) \times f'(x_1) \times \dots \times f'(x_{k-1})| < 1$;
- 2) Instável, se $|f'(x_0) \times f'(x_1) \times \dots \times f'(x_{k-1})| > 1$.

OBSERVAÇÃO 1.8: Quando $|f'(x_0) \times f'(x_1) \times \dots \times f'(x_{k-1})| = 1$ aplicamos as alíneas c) e d) do **TEOREMA 1.2** à função $g(x) = f^k(x)$ em $x = x_0$.

EXEMPLO 1.10

Consideremos a função $f(x) = 5x(1 - x)$, $x \in [0,1]$. Vamos calcular o 2-ciclo e estudar a sua estabilidade.

A equação apresentada tem 4 raízes, duas dessas raízes correspondem aos pontos de equilíbrio de f , são elas os pontos 0 e $\frac{4}{5}$. As outras duas raízes correspondem aos pontos de equilíbrio de f^2 que não são pontos fixos de f .

Para encontrarmos o ciclo de período 2, é necessário resolver a equação $f^2(x) = x$. Daqui resulta

$$5f(x)(1 - f(x)) - x = 0 \Leftrightarrow 5^2x(1 - x)(1 - 5x(1 - x)) - x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee -5^3x^3 + 250x^2 - 150x + 5^2 - 1 = 0.$$

Sabemos que $\frac{4}{5}$ é raiz do polinómio $-5^3x^3 + 250x^2 - 150x + 5^2 - 1 = 0$ (por ser ponto fixo de f). Então podemos aplicar a regra de Ruffini para fatorizar o polinómio, como se ilustra em seguida:

$\frac{4}{5}$	-125	250	-150	24
		-100	120	-24
	-125	150	-30	0

Assim,

$$x_1 = 0 \vee \left(x - \frac{4}{5}\right)(-125x^2 + 150x - 30) = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 0 \vee x_2 = \frac{4}{5} \vee x_3 = \frac{-150 - \sqrt{7500}}{-250} \vee x_4 = \frac{-150 + \sqrt{7500}}{-250}.$$

O nosso 2-ciclo é dado por

$$\{x_3, x_4\} = \left\{ \frac{-150 - \sqrt{7500}}{-250}, \frac{-150 + \sqrt{7500}}{-250} \right\}.$$

Sabendo que $f'(x) = 5 - 10x$, temos que

$$|f'(x_3)f'(x_4)| = \left| \left(5 - 10 \times \frac{-150 - \sqrt{7500}}{-250}\right) \times \left(5 - 10 \times \frac{-150 + \sqrt{7500}}{-250}\right) \right|$$

$$= \left| 25 - \frac{2}{5}(-150) + \frac{22500 - 7500}{625} \right| = 109 > 1,$$

pelo **TEOREMA 1.4**, o 2-ciclo $\{x_3, x_4\}$ é instável.

1.4. A equação Logística e a Bifurcação

Para terminar este capítulo, vamos estudar a equação logística em detalhe. O estudo desta equação esteve na base do desenvolvimento da teoria moderna dos sistemas dinâmicos discretos. Apesar de ser um modelo não linear simples, poderá apresentar comportamentos dinâmicos muito complicados.

A equação de diferenças logística surge através da iteração da função logística $F_\mu(x) = \mu x(1 - x)$ e é representada pela equação $x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n)$, onde $x \in [0,1]$ e $\mu \in]0,4[$.

1.4.1. Pontos de equilíbrio (Pontos Fixos de F_μ)

Para encontrar os pontos de equilíbrio de F_μ resolvemos a equação:

$$F_\mu(x^*) = x^* \Leftrightarrow \mu x^*(1 - x^*) = x^* \Leftrightarrow x^*((\mu - 1) - \mu x^*) = 0 \Leftrightarrow x^*_1 = 0 \vee x^*_2 = \frac{\mu - 1}{\mu}.$$

Vamos analisar a estabilidade dos dois pontos de equilíbrio em separado.

Analisando o ponto fixo $x^*_1 = 0$, observamos que $F'_\mu(0) = \mu$, pois $F'_\mu(x) = [\mu x - \mu x^2]' = \mu - 2\mu x$. Aplicando o **TEOREMA 1.2** chegamos às seguintes conclusões:

- 1) x^*_1 é assintoticamente estável se $0 < \mu < 1$;
- 2) x^*_1 é instável se $\mu > 1$.

O caso em que $\mu = 1$ merece especial atenção, pois $F'_\mu(0) = 1$ e $F''_\mu(0) = -2 \neq 0$.² Concluimos que x^*_1 é instável, mas semi-estável à direita. Assim, x^*_1 é assintoticamente estável quando $0 < \mu \leq 1$.

Estudando agora o ponto fixo $x^*_2 = \frac{\mu - 1}{\mu}$, com $\mu > 1$, observamos que $F'_\mu\left(\frac{\mu - 1}{\mu}\right) = \mu - 2\mu + 2 = 2 - \mu$. Aplicando o **TEOREMA 1.2** chegamos às seguintes conclusões:

- 1) x^*_2 é assintoticamente estável se $|2 - \mu| < 1$, de onde resulta que $1 < \mu < 3$;
- 2) Quando $\mu = 3$, temos $F'_3(x^*_2) = -1$, que pela definição de ponto fixo hiperbólico, x^*_2 é um ponto não hiperbólico. A derivada de Schwartz,

$$Sf'_3(x^*_2) = -f'''(x^*_2) - \frac{3}{2}[f''(x^*_2)]^2 = 0 - \frac{3}{2}[-6]^2 = -\frac{3}{2} * 36 = -54 < 0,$$

logo, o ponto de equilíbrio $x^*_2 = \frac{2}{3}$ é assintoticamente estável;

- 3) O ponto fixo x^*_2 é instável para $\mu > 3$.

² Pois $F''_\mu(x) = [\mu - 2\mu x]' = -2\mu$.

Resumindo:

- a) x^*_2 é assintoticamente estável para $1 < \mu \leq 3$;
- b) x^*_2 é instável para $\mu > 3$.

1.4.2. Ciclos de período dois (2-ciclo)

Para encontrarmos o 2-ciclo é necessário resolver a equação

$$\begin{aligned} F_\mu^2(x) = x &\Leftrightarrow \mu^2 x(1-x)[1-\mu x(1-x)] - x = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee \mu^2(1-x)[1-\mu x(1-x)] - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee -\mu^3 x^3 + 2\mu^3 x^2 + (-\mu^2 - \mu^3)x + (\mu^2 - 1) = 0. \end{aligned}$$

Sabemos que $\frac{\mu-1}{\mu}$ é raiz do polinómio $-\mu^3 x^3 + 2\mu^3 x^2 + (-\mu^2 - \mu^3)x + (\mu^2 - 1)$ (por ser ponto fixo de f). Então podemos aplicar a regra de Ruffini para fatorizar o polinómio.

$\frac{\mu-1}{\mu}$	$-\mu^3$	$2\mu^3$	$(-\mu^2 - \mu^3)$	$(\mu^2 - 1)$
	$-\mu^3$	$-\mu^3 + \mu^2$	$\mu^3 - \mu$	$-\mu^2 + 1$
	$-\mu^3$	$\mu^3 + \mu^2$	$-\mu^2 - \mu$	0

De onde resulta $x = 0 \vee \left(x - \frac{\mu-1}{\mu}\right) (-\mu^3 x^2 + (\mu^3 + \mu^2)x + (-\mu^2 - \mu)) = 0$.

Assim, os pontos fixos de F_μ^2 , que não são pontos fixos de F_μ , são:

$$\bar{x}_0 = \frac{(\mu+1) - \sqrt{(\mu+1)(\mu-3)}}{2\mu} \text{ e } \bar{x}_1 = \frac{(\mu+1) + \sqrt{(\mu+1)(\mu-3)}}{2\mu}.$$

Notemos que se $0 < \mu < 3$, então \bar{x}_0 e $\bar{x}_1 \notin \mathbb{R}$. No caso de $\mu \geq 3$, então $\sqrt{(\mu+1)(\mu-3)} \in \mathbb{R}$. Quando $\mu = 3$, temos $\bar{x}_0 = \bar{x}_1$, pelo que chegamos à conclusão que não é possível obter um ciclo de período 2. Portanto, o ciclo de período 2 $\{\bar{x}_0, \bar{x}_1\}$ só existe para $\mu > 3$.

Pelo **TEOREMA 1.4**, este 2-ciclo é assintoticamente estável se

$$|F'_\mu(\bar{x}_0)F'_\mu(\bar{x}_1)| < 1,$$

ou seja,

$$-1 < -\mu^2 + 2\mu + 4 < 1.$$

Daqui resulta que o 2-ciclo é assintoticamente estável quando $3 < \mu < 1 + \sqrt{6}$. Para $\mu = 1 + \sqrt{6}$ temos que $|F'_\mu(\bar{x}_0)F'_\mu(\bar{x}_1)| = -1$ e pelo **TEOREMA 1.2** concluimos que $Sf_\mu^2(\bar{x}_0) < 0$ e

$Sf_{\mu}^2(\bar{x}_1) < 0$, o que implica que o ciclo de período 2 é assintoticamente estável. O ciclo torna-se instável para $\mu > 1 + \sqrt{6}$.

Resumindo:

- a) Para $3 < \mu \leq 1 + \sqrt{6}$, o 2-ciclo $\{\bar{x}_0, \bar{x}_1\}$ é assintoticamente estável;
- b) Para $\mu > 1 + \sqrt{6}$, o 2-ciclo $\{\bar{x}_0, \bar{x}_1\}$ é instável.

1.4.3. Ciclos de período quatro e superiores

Uma vez que resolver a equação $F_{\mu}^4(x^*) = x^*$ implica resolver uma equação polinomial de grau 12, o que é impossível analiticamente, voltamo-nos para a análise gráfica e numérica para nos ajudar a encontrar outros ciclos.

Existe um ciclo de período 4 quando $\mu > 1 + \sqrt{6}$. Este é assintoticamente estável quando $1 + \sqrt{6} < \mu \leq 3.54409$. O ciclo perde a sua estabilidade quando $\mu > 3.54409$.

A história de duplicação de período repete-se quando $\mu > 3.54409$, o 2²-ciclo bifurca tornando-se instável e aparece um ciclo estável de período 2³.

Este processo de dupla bifurcação continua indefinidamente e produz uma sequência de números $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$.

TABELA 1.1 - Sequência produzida pelo processo de dupla bifurcação [5].

n	μ_n	$\mu_n - \mu_{n-1}$	$\frac{\mu_n - \mu_{n-1}}{\mu_{n+1} - \mu_n}$
1	3	-	-
2	3.449489...	0.449489...	-
3	3.544090...	0.094601...	4.751419...
4	3.564407...	0.020317...	4.656248...
5	3.568759...	0.0043521...	4.668321...
6	3.569692...	0.00093219...	4.668683...
7	3.569891...	0.00019964...	4.669354...

Da **TABELA 1.1** podemos observar o seguinte:

1. A sequência $\{\mu_n\}$ parece tender para um número específico, $\mu_{\infty} \approx 3.570$.
2. O tamanho da diferença $(\mu_n - \mu_{n-1})$, depois de sucessivos valores de μ_i torna-se mais estreito, aproximando-se de 0.

3. A razão $\frac{\mu_n - \mu_{n-1}}{\mu_{n+1} - \mu_n}$ aproxima-se de uma constante designada de **constante de Feigenbaum**³, $\delta \approx 4.669201609$.

Em geral, uma órbita de período 2^k é formada por 2^k pontos fixos de f^k que são assintoticamente estáveis.

A sequência de duplicação de período e em particular a universalidade da constante de Feigenbaum, fazem parte do minucioso estudo elaborado por M. Feigenbaum sobre a renormalização na década de 70 do século XX, antes mesmo da era digital. De entre os seus trabalhos destacamos os artigos [6], [7] e [8].

1.4.4. Bifurcação e Diagramas de Bifurcação

DEFINIÇÃO 1.8 (Bifurcação): Uma bifurcação é uma mudança qualitativa na dinâmica de uma equação do tipo $x_{n+1} = f(x_n)$ em relação à variação de um parâmetro. O valor onde ocorre uma mudança de comportamento qualitativo do sistema é denominado ponto de bifurcação.

Existem quatro espécies de bifurcações típicas das equações de diferenças de 1.^a ordem. De acordo com [9] temos:

- 1) Bifurcação transcritical;
- 2) Bifurcação de duplicação de período;
- 3) Bifurcação sela-nó / “saddle-node”;
- 4) Bifurcação forquilha / “pitchfork”.

O primeiro caso (Bifurcação transcritical) ocorre se, próximo do ponto de bifurcação (x^*, μ^*) , a função possui duas curvas de pontos fixos no plano (μ, x) que passem no ponto de bifurcação e que posicionem-se em ambos os lados da linha $\mu = \mu^*$. Esta bifurcação tem a forma normal $x_{n+1} = x_n \pm \mu x_n \pm x_n^2$ e é caracterizada por uma mudança de estabilidade no ponto de bifurcação.

A Bifurcação de duplicação de período ocorre se, próximo de um ponto de bifurcação (x^*, μ^*) , a função possui uma única curva de pontos fixos no plano (μ, x) , enquanto a segunda iterada f^2 sofre uma bifurcação “pitchfork” no ponto de bifurcação, isto é, um ponto de equilíbrio estável torna-se instável e origina um 2-ciclo estável.

A Bifurcação sela-nó / “saddle-node” ocorre se, próximo de um ponto de bifurcação (x^*, μ^*) , a função possui uma única curva de pontos fixos no plano (μ, x) que passe no ponto de bifurcação e posicione-se num dos lados da linha $\mu = \mu^*$. Esta bifurcação tem a forma normal $x_{n+1} = x_n \pm \mu \pm x_n^2$.

Uma Bifurcação forquilha / “pitchfork” ocorre se, próximo do ponto de bifurcação (x^*, μ^*) , a função possua duas curvas de pontos fixos no plano (μ, x) passando ambas no ponto de bifurcação e uma delas posicione-se nos dois lados da linha $\mu = \mu^*$. Esta bifurcação tem a

³ É a razão que determina o limite de cada intervalo de bifurcação, entre cada duplicação de período, de uma função a um parâmetro.

forma normal $x_{n+1} = x_n \pm \mu x_n \pm \alpha x_n^3$, onde para $\alpha > 0$ é supercrítica e para $\alpha < 0$ é subcrítica.

Os quatro tipos de bifurcações aqui apresentados são resumidos na **TABELA 1.2**.

TABELA 1.2 - Os principais tipos de bifurcações para pontos fixos não hiperbólicos em funções unidimensionais [10].

Tipo de Bifurcação em x^*	$f'(x^*)$	$\frac{\partial f}{\partial \mu}(x^*)$	$f''(x^*)$	$\frac{\partial^2 f}{\partial \mu \partial x}(x^*)$	$f'''(x^*)$	$Sf(x^*)$
“Saddle-node”	1	$\neq 0$	$\neq 0$	-	-	-
Transcrítica	1	0	$\neq 0$	$\neq 0$	-	-
“Pitchfork”	1	0	0	$\neq 0$	$\neq 0$	-
Duplicação de Período	-1	-	-	$\neq 0$	-	$\neq 0$

DEFINIÇÃO 1.9 (Diagrama de Bifurcação): Um diagrama de bifurcação é um gráfico que mostra soluções de equilíbrio, órbitas periódicas e suas estabilidades em relação a um parâmetro.

No diagrama de bifurcação da equação logística, o eixo horizontal representa os valores do parâmetro μ e o eixo vertical as iterações $F_\mu^k(x_0)$ de um ponto inicial específico x_0 . O diagrama representa o limite de x_n quando o parâmetro μ admite um determinado valor.

Para $\mu \leq 1$, verificamos que a função tende para o ponto fixo $x_1^* = 0$, independentemente do valor inicial x_0 . Para $1 < \mu \leq 3$, a função tende para o ponto fixo $x_2^* = \frac{\mu-1}{\mu}$. Já quando $\mu = 3$, o ponto fixo assintoticamente estável torna-se instável e dá origem a uma órbita de período 2, o que acontece na bifurcação de duplicação de período, então, a função oscila entre dois valores quando $3 < \mu < 1 + \sqrt{6}$. A partir deste ponto, os cálculos são feitos por métodos numéricos, e ao fazermos esses cálculos, verificamos que o cenário de bifurcação de duplicação de período continua. Assim, para valores de μ ligeiramente superiores a $1 + \sqrt{6}$ é originado um ciclo de período 4 que posteriormente dará origem a um ciclo de período 8, 16, etc. Também aparecem ciclos de ordem ímpar e eventualmente uma situação caótica. Esta descrição pode ser verificada pelo teorema de Sharkovsky.

O teorema de Sharkovsky foi estabelecido inicialmente por A. N. Sharkovsky, em 1964 [11], posteriormente foi traduzido para Inglês por J. Tolosa, em 1995 [12]. Este resultado tem desempenhado um papel de extrema importância na dinâmica a uma dimensão.

Para apresentar o referido teorema, é necessário introduzir a ordem dos inteiros positivos de Sharkovsky, a ordem é denotada por \triangleright e definida da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 &3 \triangleright 5 \triangleright 7 \triangleright 9 \triangleright \dots \triangleright (2m + 1) * 2^0 \triangleright \dots \\
 &3 * 2 \triangleright 5 * 2 \triangleright 7 * 2 \triangleright 9 * 2 \triangleright \dots \triangleright (2m + 1) * 2^1 \triangleright \dots \\
 &3 * 2^n \triangleright 5 * 2^n \triangleright 7 * 2^n \triangleright 9 * 2^n \triangleright \dots \triangleright (2m + 1) * 2^n \triangleright \dots \\
 &\dots \triangleright 2^n \triangleright 2^{n-1} \triangleright \dots \triangleright 2^3 \triangleright 2^1 \triangleright 2^0.
 \end{aligned}$$

Podemos agora introduzir um teorema muito importante para o estudo da dinâmica de uma função unidimensional. Este teorema só é válido a uma dimensão, sendo que ainda não foi provado para dimensões superiores.

TEOREMA 1.5 (Teorema de Sharkovsky) [12]: Seja $f: I \rightarrow I$ uma função contínua que possui uma órbita periódica de período k . Então, para qualquer inteiro positivo ℓ que precede k na ordem de Sharkovsky, isto é, $k \triangleright \ell$, existe uma órbita periódica de período ℓ .

Por outras palavras, se f possui uma órbita de período k e se $k \triangleright \ell$, então f possui uma órbita de período ℓ .

Outro teorema muito conhecido e fundamental para o estudo a uma dimensão é o teorema denominado “Período 3 implica caos” (ou em inglês, “Period three implies chaos”). O teorema foi introduzido por Tien-yien e James A. Yorke [13] e é uma consequência direta do **TEOREMA 1.5**.

TEOREMA 1.6 (Período 3 implica caos): Seja $f: I \rightarrow I$ uma função contínua que possui uma órbita de período 3. Então f possui órbitas de todos os períodos, pois 3 é o maior número na ordem de Sharkovsky.

Podemos então afirmar pelo **TEOREMA 1.5** que uma função que apresente um ponto periódico x de ordem 3, isto é, $f^3(x) = f \circ f \circ f(x) = x$, apresenta pontos periódicos de qualquer ordem.

No caso da logística, quando $\mu \in (0,4)$, a equação possui um 3-ciclo. Segundo A. J. Fidélis e L. C. Martins em [14], a zona de período 3 ocorre quando:

$$1 + \sqrt{8} < \mu \leq 1 + \sqrt{\frac{11}{3} + (A - B)^{\frac{1}{3}} + (A + B)^{\frac{1}{3}}}$$

onde $A = \frac{1915}{54}$ e $B = \frac{5\sqrt{201}}{2}$ (numericamente, $3.8284271 < \mu \leq 3.8414990$).

Assim, de acordo com o teorema de Sharkovsky, a equação logística possui ciclos de todas as ordens. Pelo **TEOREMA 1.6** apresenta caos. Esta situação está ilustrada no diagrama de bifurcação, na **FIGURA 1.11**.

Este aspeto de natureza caótica da equação logística, como se visualiza na **FIGURA 1.11**, representa sensibilidade às condições iniciais. Ou seja, a possibilidade de estados tão próximos quanto se queira sofrerem evoluções muito diferentes. Nestes casos não podemos utilizar soluções numéricas com total confiança, pois existem erros de cálculo pelo meio, os

quais podem produzir soluções bastante diferentes. Daí, em certas regiões do parâmetro, torna-se impossível escrever o ciclo.

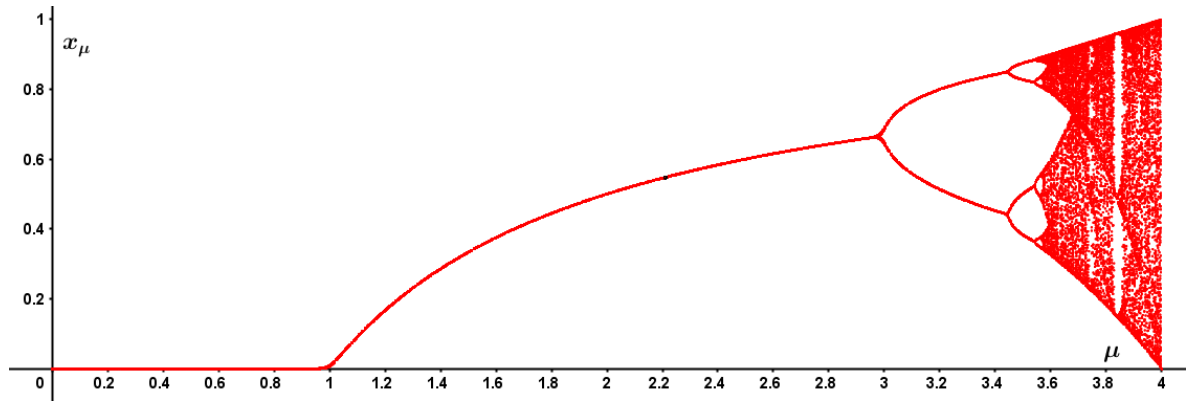


FIGURA 1.11 - Ilustração do diagrama de bifurcação da equação logística.

2. Modelos Autónomos Aplicados à Dinâmica de Populações

Neste capítulo serão apresentados vários modelos autónomos aplicados à dinâmica de populações. O principal objetivo é aplicar alguma da teoria apresentada no capítulo 1.

Primeiramente introduzimos o conceito de modelo populacional, de seguida introduzimos o modelo de Ricker, um modelo aplicado à pesca, o modelo de Beverton-Holt que também é um modelo aplicado à pesca, seguido do modelo de Pielou e do modelo de crescimento de Gompertz.

Posteriormente damos a conhecer o conceito de efeito de Allee e alguns modelos modificados por este efeito, tais como o modelo de Beverton-Holt, o modelo de Ricker, o modelo Polinomial e para finalizar, o modelo Logístico, sendo este último um caso particular do modelo Polinomial.

2.1. Modelos populacionais

Um modelo populacional é um modelo matemático que se aplica à dinâmica de uma ou mais populações, isto é, é um modelo que nos permite estudar a evolução das populações ao longo de um período de tempo. Habitualmente a variável resposta, ou seja, a variável de estudo é a densidade (“tamanho”) da população (ou crescimento populacional). Esta variável pode ser afetada por diversos fatores, desde a fecundidade, as catástrofes naturais, a competição, etc.

OBSERVAÇÃO 2.1: Não existe um consenso em relação à definição de modelo populacional, no entanto, alguns autores tendem a definir modelo populacional como podemos ver na seguinte definição.

DEFINIÇÃO 2.1 (Modelo Populacional) [3]: Uma função, f , contínua definida em $[0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, é um modelo populacional se:

- $f(0) = 0$ e f tem um único ponto fixo x^* no intervalo positivo;
- $f(x) > x$ para $0 < x < x^*$ e $f(x) < x$ para $x > x^*$;
- $f'(x_m) = 0$ e $x_m \leq x^*$, então $f'(x) > 0$ para $0 \leq x < x_m$ e $f'(x) < 0$ para $x > x_m$ e $f(x) > 0$.

EXEMPLO 2.1

Consideremos o modelo logístico, onde a função é dada por $f(x) = \mu x(1 - x)$, $\mu > 2$, $x \in [0, 1]$. Claramente $f(0) = 0$ e $x^* = \frac{\mu-1}{\mu}$ é o único ponto fixo positivo de f .

Quando $\mu > 1$, temos que $f(x) > x$, $\forall x \in \left]0, \frac{\mu-1}{\mu}\right[$ e $f(x) < x$, $\forall x \in \left]\frac{\mu-1}{\mu}, 1\right[$. Sabemos que $f'(x) = 0$ quando $x = \frac{1}{2}$. Tem-se que $\frac{1}{2} < \frac{\mu-1}{\mu}$ quando $\mu > 2$. Assim, para $\mu > 2$ verifica-se que $x_m \leq x^*$ e f é crescente em $0 < x < \frac{1}{2}$ e decrescente quando $\frac{1}{2} < x < 1$.

Concluimos que a equação logística é um modelo populacional em conformidade com a **DEFINIÇÃO 2.1**.

O teorema seguinte garante que o ponto fixo de um modelo populacional no intervalo positivo da função f é globalmente assintoticamente estável.

TEOREMA 2.1 [15]: O ponto fixo do modelo populacional é globalmente assintoticamente estável em $(0, \infty)$, se e só se o modelo não tiver um 2-ciclo.

Para detetar a existência de 2-ciclos num modelo, podemos representar graficamente $y = f(f(x))$ e a reta $y = x$, sendo que quaisquer pontos de interseção entre estas duas funções representam ciclos de período 2. Assim, se existir outros pontos de interseção para além dos pontos de equilíbrio de f , então o ponto fixo não é globalmente estável.

2.2. Modelo de Ricker

O modelo de Ricker é um modelo aplicado à pesca. Este modelo integra os fatores ambientais para a limitação do crescimento populacional, prevendo uma convalescença decrescente ao longo do tempo, isto é, o número de descendentes em x_{n+1} será inferior ao número de adultos em x_n .

Este modelo é definido pela seguinte expressão matemática:

$$x_{n+1} = x_n e^{p-x_n}, \text{ com } x_n \geq 0 \text{ e } p > 0,$$

onde x_n representa a densidade da população no período de tempo n e p representa a capacidade de suporte da população (“Carrying Capacity” [16]).

O crescimento na maioria das populações é limitado por fatores tais como variações do meio ambiente, mudanças na taxa de sobrevivência ou na taxa de reprodução, aparecimento de doenças, interações competitivas, relações de predador-presa, etc. Estes fatores influenciam as populações em relação ao seu tamanho e são referidos como dependentes da densidade. Temos dependência da densidade quando a nossa equação de diferenças é não linear. O tamanho a que uma população tenderá a retornar em resposta a estes fatores é conhecido como capacidade de suporte (capacidade de carga ou “carrying capacity”).

Dada a equação de diferenças que representa o modelo de Ricker, temos que $f(x) = xe^{p-x}$. Os pontos fixos de f são $x^* = 0$ ou $x^* = p$.

Vamos estudar a estabilidade dos dois pontos fixos em separado. Para isso calculamos a primeira derivada da função f em cada ponto fixo e aplicamos o **TEOREMA 1.2**.

Uma vez que $f'(x) = (xe^{p-x})' = e^{p-x}(1-x)$, temos que para $x^* = 0$, $|f'(0)| = |e^p| > 1$, para todo $p > 0$, logo $x^* = 0$ é um ponto fixo instável.

Para $x^* = p$, $p > 0$ temos que $|f'(p)| = |e^0(1-p)| = |1-p|$. Neste caso surgem três situações:

- 1) Se $|1 - p| > 1$, o que acontece quando $p > 2$, pelo **TEOREMA 1.2**, $x^* = p$ é um ponto fixo instável (ver **FIGURA 2.2**).
- 2) Se $|1 - p| < 1$, o que acontece quando $0 < p < 2$, pelo **TEOREMA 1.2**, $x^* = p$ é um ponto fixo assintoticamente estável (ver **FIGURA 2.1**).
- 3) Se $|1 - p| = 1$, o que acontece quando $p = 2$, temos $f'(2) = -1$. Pelo **TEOREMA 1.2** é necessário calcular a derivada de Schwartz neste ponto. Assim,

$$Sf(2) = -f'''(2) - \frac{3}{2}[f''(2)]^2 = -1 < 0,$$

logo $x^* = p$ é um ponto fixo assintoticamente estável.⁴

OBSERVAÇÃO 2.2: No caso de $p = 2$ é possível visualizar a convergência gráfica, embora esta seja muito lenta.

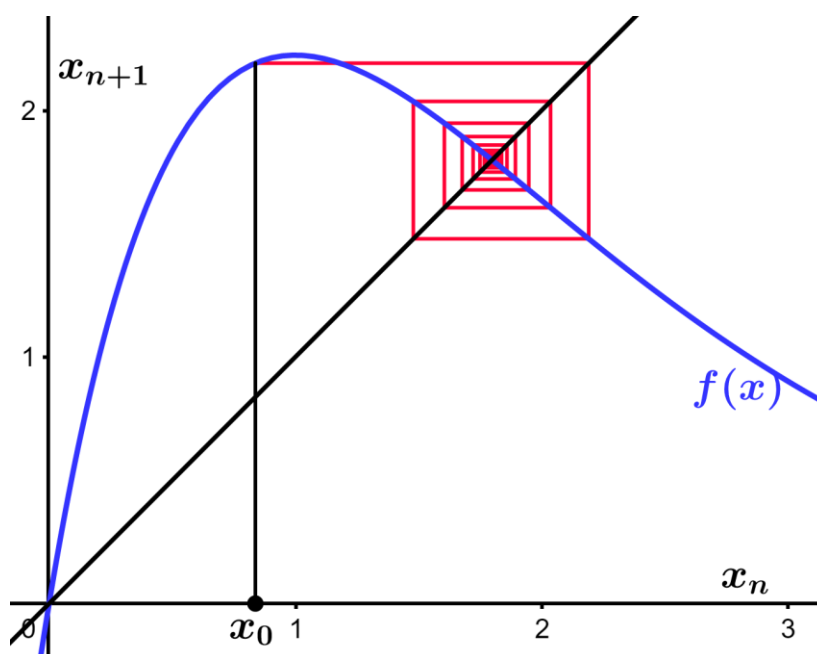


FIGURA 2.1 - Quando $0 < p \leq 2$, o ponto fixo $x^* = p$ do modelo de Ricker é assintoticamente estável.

Vamos estudar a estabilidade global dos pontos fixos. Para isso e conforme descrito no **TEOREMA 1.3** é necessário calcular as raízes da equação $f(f(x)) = x$ e ver se esta equação não tem raízes, à exceção das possíveis raízes de $f(x) = x$.

Temos que

$$\begin{aligned} f(f(x)) = x &\Leftrightarrow f(xe^{p-x}) = x \Leftrightarrow xe^{p-x} * e^{p-xe^{p-x}} = x \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee e^{p-x} * e^{p-xe^{p-x}} - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee e^{2p-x(1+e^{p-x})} = 1 \end{aligned}$$

⁴ $f''(x) = (-2 + x)e^{p-x}$, logo $f''(2) = 0$; $f'''(x) = (3 - x)e^{p-x}$, logo $f'''(2) = 1$.

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee 2p - x(1 + e^{p-x}) = 0.$$

Seja $g(x) = 2p - x - xe^{p-x}$. Vamos verificar que se $0 < p \leq 2$, então $x = p$ é a única solução de $g(x)$. De facto, sob esta condição no parâmetro, g é estritamente decrescente e portanto só tem um único zero.

Seja $h(x) = g'(x) = -1 + e^{p-x}(x - 1)$. Tem-se que $h'(x) = (2 - x)e^{p-x}$ e portanto h tem um único ponto crítico em $x = 2$. Note-se que $h'(x) > 0$ para $x < 2$ e $h'(x) < 0$ para $x > 2$.

Observando a concavidade de h , constata-se que $h''(2) < 0$. Assim, $x = 2$ é um máximo absoluto de h . Como $h(2) = e^{p-2} - 1$, temos $h(2) \leq 0$ sempre que $0 < p \leq 2$.

Isto estabelece que $h(x) = g'(x) < 0$ (só se tem $h(x) = 0$ quando $x = 2$ e $p = 2$). Assim a função $g(x)$ é estritamente decrescente sempre que $0 < p \leq 2$. Portanto, a função f não pode ter pontos periódicos de período 2.

Concluimos que $f(f(x)) = x$ não tem raízes à exceção das raízes $x = 0$ e $x = p$ quando $0 < p \leq 2$ e pelo **TEOREMA 1.3** temos que todas as órbitas da função $f(x)$ convergem para um ponto fixo. Uma vez que $x^* = 0$ é um ponto fixo instável e $x^* = p$ é o único ponto fixo na linha real positiva, concluimos que todas as órbitas convergem para o ponto fixo $x^* = p$, logo a condição de estabilidade local do ponto $x^* = p$ implica estabilidade global na parte positiva da linha real. Em termos matemáticos, isto significa que, toda a órbita que comece em $x_0 > 0$ converge para $x^* = p$ quando $0 < p \leq 2$.

Se continuarmos a aumentar o valor do parâmetro p para além de 2, irão ocorrer **duplicações de período**, levando a uma dinâmica aperiódica intitulada caos (ilustrado na **FIGURA 2.2**).

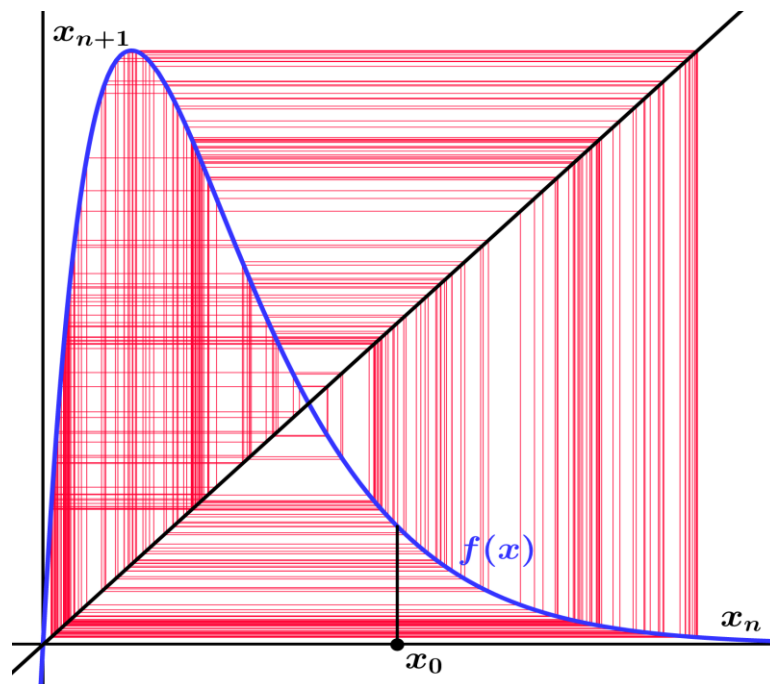


FIGURA 2.2 - Quando $p > 2$, o ponto fixo $x^* = p$ do modelo de Ricker é instável.

OBSERVAÇÃO 2.3: Aperiódica significa que nenhum valor se repete 2 vezes. O conceito de caos também é caracterizado pela dependência das condições iniciais, isto é, duas condições iniciais próximas afastam-se com o tempo, sendo impossível prever o comportamento assintótico de uma solução num regime caótico.

2.3. Modelo de Beverton-Holt

O modelo de Beverton-Holt descreve a convescência dependente da densidade de uma população com recursos limitados em que estes não são compartilhados igualmente. Neste modelo é assumido que o número de descendentes por cabeça é inversamente proporcional à função de crescimento linear do número de adultos.

Tal como o **Modelo de Ricker**, o Modelo de Beverton-Holt também é um modelo aplicado à pesca. Este é dado por $x_{n+1} = \frac{rKx_n}{K+(r-1)x_n}$, onde $x_n \geq 0$ representa a densidade populacional no ano n , $K > 0$ é a capacidade de suporte da população e $r > 1$ representa a taxa de crescimento da população.

A função associada ao modelo é $f(x) = \frac{rKx}{K+(r-1)x}$.

Os pontos fixos da função f são $x^* = 0$ ou $x^* = K$. É fácil verificar que f é uma função crescente com $f(x) > x$, $\forall x \in]0, K[$ e $f(x) < x$, para todo $x > K$. Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{rK}{(r-1)}$, resulta que a sequência $\{x_n\}$ é monótona e limitada, logo convergente. Vamos determinar esse valor de convergência.

Para tal, vamos estudar a estabilidade dos pontos fixos. Sabemos que $f'(x) = \frac{K^2r}{(K+(r-1)x)^2}$.

Assim, $f'(0) = \frac{rK^2}{K^2} = r > 1$. Pelo **TEOREMA 1.2** resulta que o ponto fixo $x^* = 0$ é sempre instável.

Para o ponto $x^* = K$, temos que $f'(K) = \frac{r}{r^2} = \frac{1}{r}$. Para que o ponto fixo $x^* = K$ seja localmente assintoticamente estável é necessário que $\frac{1}{r} < 1$. Logo o ponto fixo $x^* = K$ é sempre estável.

Pela estabilidade local, concluímos que a sequência $\{x_n\}$ só pode convergir para $x^* = K$, sendo que este ponto fixo é globalmente assintoticamente estável em \mathbb{R}^+ . Esta afirmação é também verificada pelo facto da equação $f(f(x)) = x$ não ter soluções para além de $x^* = 0$ ou $x^* = K$. Com efeito, de $f(f(x)) = x$ resulta $\frac{Kr^2x}{K+(r^2-1)x} = x$, ou seja, $\frac{(r^2-1)(K-x)x}{K+(r^2-1)x} = 0$.

Daqui resulta apenas as soluções 0 e K . Na **FIGURA 2.3** é ilustrado a estabilidade global do ponto fixo $x^* = K$.

OBSERVAÇÃO 2.4: O caso em que $r = 1$ pode ser estudado inspecionando a função e percebendo que qualquer ponto é um ponto fixo. É fácil de verificar que quando $r = 1$ temos $f(x) = \frac{Kx}{K} = x$, coincidindo com a reta $y = x$.

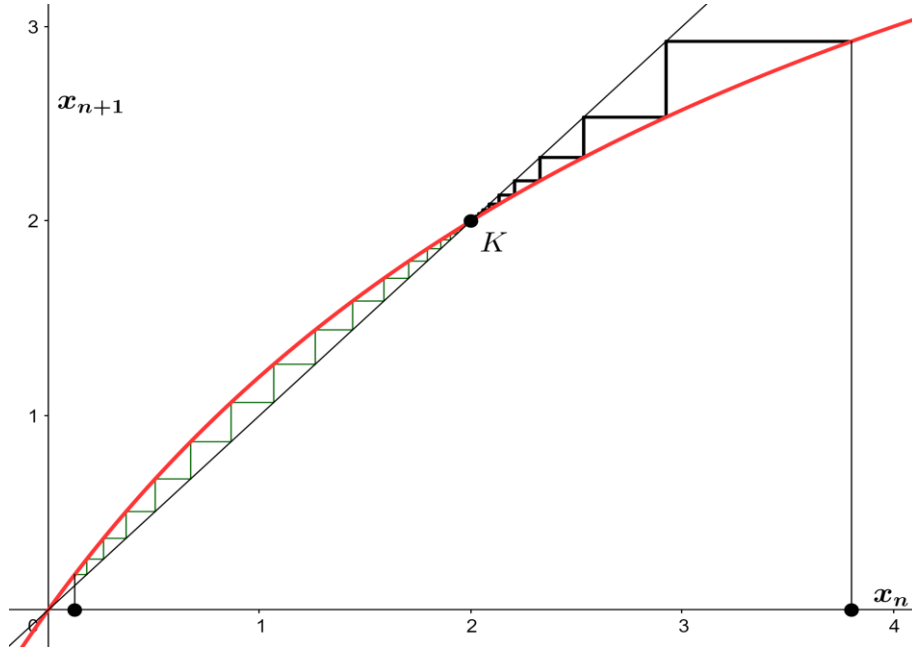
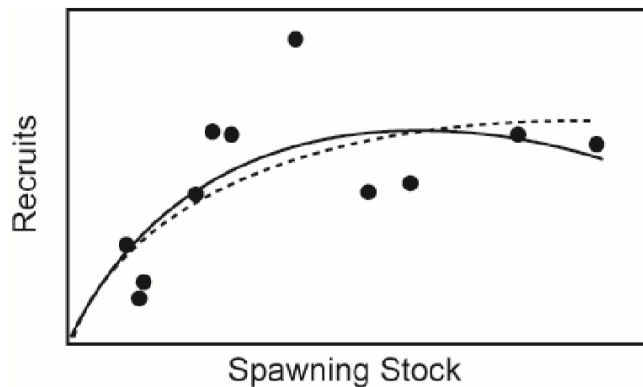


FIGURA 2.3 - Estudo da estabilidade dos pontos fixos do modelo de Beverton-Holt quando $K = 2$ e $r = 1.5 > 1$, concluímos que $x^* = K$ é globalmente assintoticamente estável.

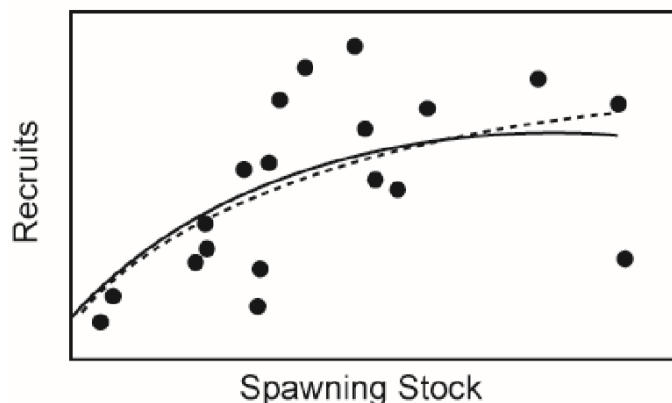
2.4. Caso de estudo

Podemos colocar uma questão: Qual destes modelos, modelo de Ricker ou modelo de Beverton-Holt, adapta-se melhor a dados reais?

De acordo com Saber N. Elaydi em [3], a **FIGURA 2.4** mostra incerteza e inconclusividade na resposta. Por exemplo, embora haja um bom ajuste das curvas aos dados populacionais de uma espécie de Salmão, os dados da população de Anchovetas mostra uma variação considerável sobre as curvas hipotéticas de ações de convallescença (ver pág.58 de [3]).



(a)



(b)

FIGURA 2.4 - A curva de Ricker (linha sólida) e a curva de Beverton-Holt (linha tracejada) adaptadas aos dados populacionais de (a) Salmão e (b) Anchoвета.

Notemos que em qualquer um dos modelos a derivada da função no ponto $x = 0$ indica quanto íngreme é a curva. Na função de Beverton-Holt $f'(0) = r$ e na função de Ricker, $f'(0) = e^p$. Quanto maior o valor de r ou p , maior a resposta "compensatória" esperada da população às mudanças de densidade e maior a colheita.

A **FIGURA 2.5** mostra o gráfico de 4 populações. A *População_A* tem a resposta compensatória mais forte, enquanto que a *População_D* tem a mais fraca indicando a tendência da população extinguir-se. Assim, a *População_D* requer interferência imediata para prevenir a extinção da espécie.

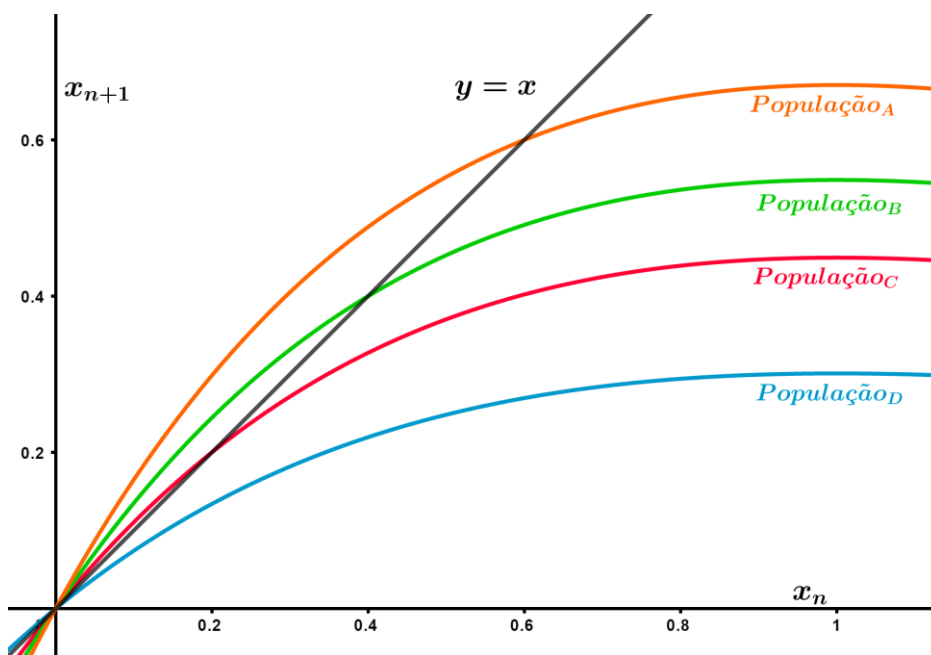


FIGURA 2.5 - Curvas hipotéticas para 4 populações A, B, C, D.

2.5. Modelo de Pielou

O modelo de Pielou é um caso particular do modelo de Beverton-Holt sendo representado matematicamente pela equação

$$x_{n+1} = \frac{\alpha x_n}{1 + \beta x_n},$$

onde x_n representa a densidade da população no período n , $\alpha > 0$ representa a capacidade de suporte e $\beta > 1$ representa a taxa de crescimento da população. A função f que caracteriza a equação é definida por $f(x) = \frac{\alpha x}{1 + \beta x}$ e os pontos fixos são

$$x^* = 0 \vee x^* = \frac{\alpha - 1}{\beta}.$$

Para estudar a estabilidade local dos dois pontos fixos, sabemos que

$$f'(x) = \frac{\alpha(1 + \beta x) - [\alpha x \times \beta]}{[1 + \beta x]^2} = \frac{\alpha}{[1 + \beta x]^2}.$$

Assim, para $x^* = 0$ vem

$$f'(0) = \alpha \text{ e } f'\left(\frac{\alpha-1}{\beta}\right) = \frac{1}{\alpha},$$

pelo que,

$$|f'(0)| < 1 \Leftrightarrow \alpha < 1 \text{ e } \left|f'\left(\frac{\alpha-1}{\beta}\right)\right| < 1 \Leftrightarrow \alpha > 1.$$

Quando $\alpha = 1$ vem $f''(x) = \frac{-2\beta}{[1 + \beta x]^3}$. Assim $f''(0) = -2\beta < 0$. Concluimos que $x^* = 0$ é um ponto fixo instável, mas semi-estável à direita.

Assim, $x^* = 0$ é estável se $\alpha \in (0,1]$ e instável para $\alpha > 1$ e $x^* = \frac{\alpha-1}{\beta}$ é estável para $\alpha > 1$ e instável caso contrário.

A estabilidade global é verificada pelo facto de $f(f(x)) = x$ resultar $\frac{\frac{\alpha^2 x}{1 + \beta x}}{1 + \beta \frac{\alpha x}{1 + \beta x}} = x$, ou seja, $\alpha^2 = 1 + \beta(1 + \alpha)x$ de onde resulta apenas as soluções 0 e $\frac{\alpha-1}{\beta}$, precisamente os pontos fixos da equação.

2.6. Modelo de Crescimento de Gompertz

O modelo de crescimento de Gompertz é um caso especial da função logística generalizada. Foi inicialmente desenvolvido para descrever a mortalidade humana. Mais tarde foi modificado para ser aplicado à biologia e aos detalhes populacionais [17]. Este modelo pode ser expresso matematicamente pela seguinte equação:

$$x_{n+1} = x_n(1 - r \ln x_n), \quad r > 0, \quad x \in \left[0, \frac{1}{e^r}\right].$$

Para esta equação, $f(x) = x(1 - r \ln x)$. Assim, os pontos fixos de f são $x^* = 0 \vee x^* = 1$.

Sabendo que $f'(x) = 1 - r(\ln x + 1)$, temos que $|f'(0)| = |1 - [r \ln 0 + r]| = \infty$, pelo que $x^* = 0$ não é assintoticamente estável, e $|f'(1)| = |1 - r|$, pelo que $x^* = 1$ é assintoticamente estável quando $1 - r < 1$, o que acontece quando $0 < r < 2$. Quando $r = 2$, temos $f'(1) = -1$ e $Sf = -\frac{3}{2}r^2 - r < 0$, logo $x^* = 1$ é localmente assintoticamente estável. Para $r > 2$, $f'(1) = 1$ e $f''(1) = -r < 0$, logo $x^* = 1$ é instável, mas semi-estável à direita.

Resumindo, o ponto fixo $x^* = 0$ é sempre instável e o ponto fixo $x^* = 1$ é assintoticamente estável quando $0 < r \leq 2$.

Para o estudo da estabilidade global e dada a dificuldade em manipular a equação algebricamente, é possível constatar graficamente que $f(f(x)) = x$ não tem soluções para além dos pontos fixos de f quando $r \leq 2$ (ver **FIGURA 2.6** para um caso). Assim, neste caso, o ponto fixo positivo é globalmente assintoticamente estável pelo **TEOREMA 1.3**. A **FIGURA 2.7** e a **FIGURA 2.8** ilustram estabilidade, para $r < 2$ e instabilidade $r > 2$, respetivamente.

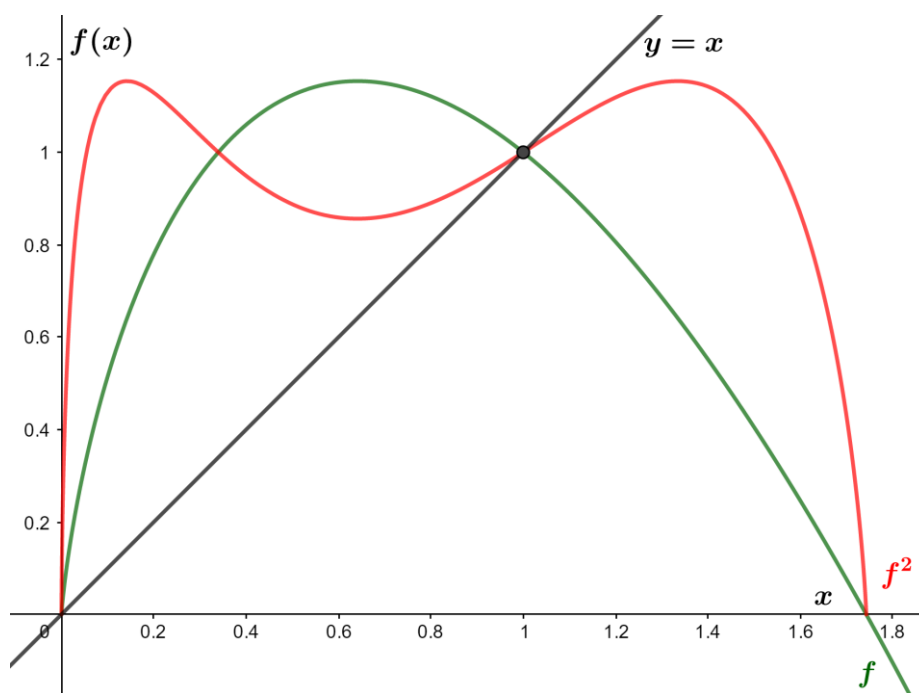


FIGURA 2.6 - Identificação dos pontos fixos de f e f^2 , com $f(x) = x(1 - 1.8 \ln(x))$.

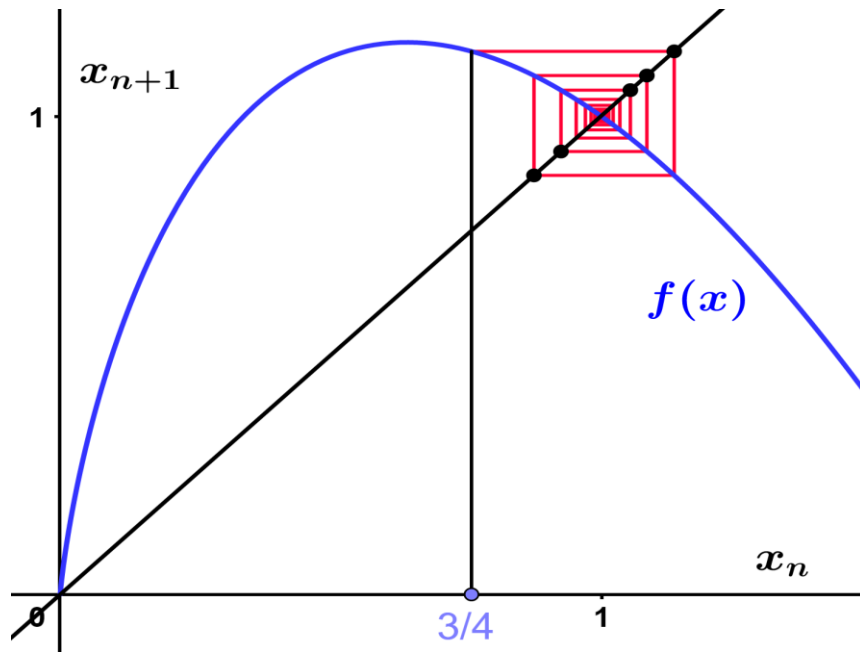


FIGURA 2.7 - Estabilidade do ponto fixo positivo do modelo de crescimento de Gompertz quando $r = 1.8 < 2$.

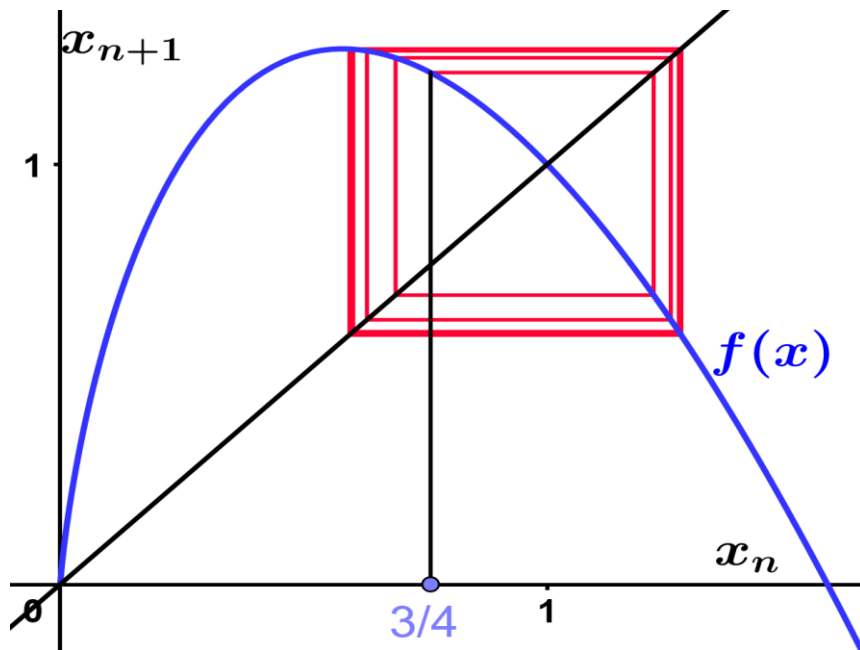


FIGURA 2.8 - Instabilidade do ponto fixo positivo do modelo de crescimento de Gompertz quando $r = 2.2 > 2$.

2.7. Efeito de Allee

Os modelos discretos com dinâmica populacional, em geral, consideram o fator de crescimento como uma função decrescente do tamanho (densidade) da população, justificada pela competição intraespecífica (competição por espaço e nutrientes).

Ora, se uma população é muito pequena, não há razão para que ocorra a competição intraespecífica, por isso, é razoável considerar, para densidades populacionais muito pequenas, o fator crescimento como uma função crescente da densidade populacional. Este mecanismo é conhecido como **Efeito de Allee**.

No artigo [18] o efeito de Allee é definido como um fenómeno no qual a aptidão individual aumenta com o aumento da densidade, isto é, ao contrário da dinâmica clássica onde temos uma dependência negativa relativamente à densidade (a aptidão diminui com o aumento da densidade), o efeito de Allee produz uma dependência positiva (a aptidão aumenta com o aumento da densidade).

Em [19] podemos encontrar a descrição de vários cenários que causam o efeito de Allee em animais e plantas tais como parasitismo, competição intraespecífica, características do solo, polinização, hibridização, etc.

Segundo [18], qualquer função f cujo gráfico passe pela origem e permaneça abaixo da diagonal próximo de zero e depois cruze a diagonal duas vezes, dará origem ao efeito de Allee. O primeiro cruzamento designa-se por limite de Allee (A) e o segundo por capacidade de suporte (K).

Considerando a equação $x_{n+1} = f(x_n)$, onde x_n representa o tamanho da população na geração n e admitindo que f tem a solução de equilíbrio trivial $x^* = 0$ e pelo menos uma não trivial $x^* = K$, a condição para que uma população apresente efeito de Allee é $f(x) > f'(0)x$, para valores suficientemente pequenos de x .

O efeito de Allee é chamado forte se $0 \leq f'(0) < 1$, neste caso existe pelo menos um ponto de equilíbrio entre $x^* = 0$ e $x^* = K$. Se $f'(0) > 1$, então o efeito de Allee é chamado de fraco, sendo que, uma população que apresenta um efeito de Allee fraco apresenta um **fator de crescimento pequeno** para densidades populacionais baixas, ou seja, a população cresce mais lentamente quando o número de indivíduos é pequeno. No caso do efeito de Allee forte, é introduzido um limiar populacional abaixo do qual a população irá à extinção (A).

Vamos agora estudar alguns modelos modificados pelo efeito de Allee.

2.7.1. Modelo de Beverton-Holt com efeito de Allee

Um modelo que considera a dinâmica de uma população que apresenta efeito de Allee pode ser dado pela seguinte equação $x_{n+1} = f(x_n)$, onde $f(x) = \frac{rx^2}{1+bx^2}$, r e b são constantes positivas. Ou ainda $x_{n+1} = x_n r(x_n)$, onde $r(x) = \frac{rx}{1+bx^2}$ é o fator de crescimento dependente da densidade populacional x .

Representando graficamente o fator de crescimento, verificamos que este cresce até um máximo (efeito de Allee) e depois decresce aproximando-se de zero (efeito da competição intraespecífica). Analisando este fator, podem ocorrer três situações:

- 1) Se $|r(x)| > 1$, x_n cresce com as gerações sucessivas;
- 2) Se $|r(x)| < 1$, x_n decresce com as gerações sucessivas;
- 3) Se $|r(x)| = 1$, x_n é constante.

Os pontos de equilíbrio são encontrados resolvendo a equação

$$\frac{rx^{*2}}{1+bx^{*2}} = x^* \Leftrightarrow x^* = 0 \vee \frac{rx^*}{1+bx^{*2}} = 1$$

$$\Leftrightarrow x^* = 0 \vee x^* = \frac{r \pm \sqrt{r^2 - 4b}}{2b}.$$

Concluimos que os pontos fixos da equação dependem diretamente dos valores de r e b , sendo que:

- 1) Se $r^2 < 4b$, existe um único ponto de equilíbrio que é trivial, $x_1^* = 0$;
- 2) Se $r^2 = 4b$, existem dois pontos de equilíbrio,

$$x_1^* = 0 \text{ e } x_2^* = \frac{r}{2b};$$

- 3) Se $r^2 > 4b$, existem três pontos de equilíbrio,

$$x_1^* = 0, x_2^* = \frac{r - \sqrt{r^2 - 4b}}{2b} \text{ e } x_3^* = \frac{r + \sqrt{r^2 - 4b}}{2b}.$$

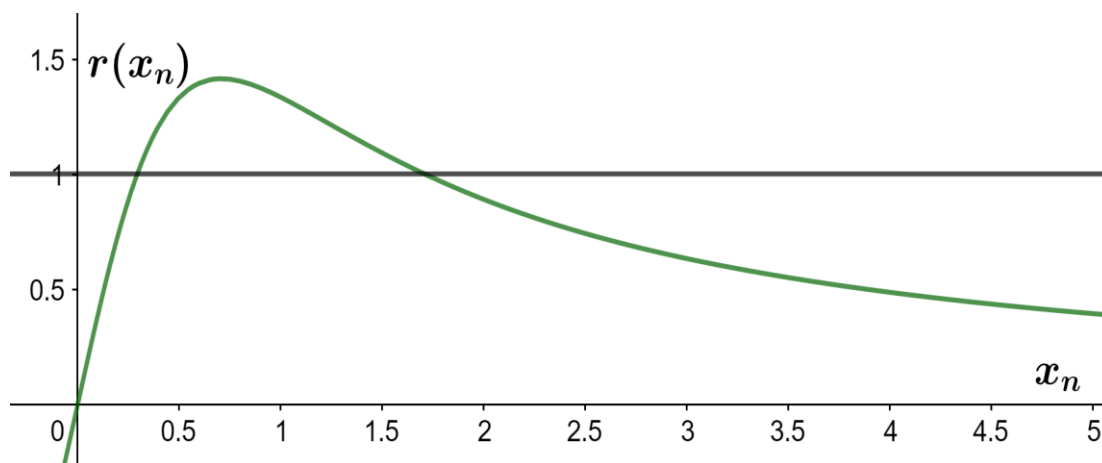


FIGURA 2.9 - Representação gráfica do fator de crescimento, $r(x) = \frac{4x}{1+2x^2}$.

Concluindo o cálculo dos pontos fixos, podemos agora estudar as suas estabilidades, sabendo que $f'(x) = \frac{2rx}{(1+bx^2)^2}$.

Caso $r^2 < 4b$, a desigualdade $\frac{rx^2}{(1+bx^2)} < x$ é satisfeita para todo $x > 0$, ou seja, o gráfico de f está abaixo da diagonal $y = x$, sendo que qualquer sucessão de iterações de f tende para zero. Neste caso a origem é globalmente assintoticamente estável.

Se $r^2 > 4b$, então a desigualdade $\frac{rx^2}{(1+bx^2)} > x$ é satisfeita quando $x_2^* < x < x_3^*$, onde x_2^* e x_3^* são os pontos fixos não nulos calculados anteriormente para $r^2 > 4b$. Sendo que x_2^* é instável e x_3^* é localmente assintoticamente estável.

Quando $r^2 = 4b$, x_2^* e x_3^* coincidem e o gráfico de f tangencia a reta diagonal $y = x$. Neste caso, $x_2^* = x_3^* = \frac{r}{2b}$ sendo este um ponto fixo estável, pois $f'(\frac{r}{2b}) = b < 1$.

A **FIGURA 2.10** ilustra estas três situações, sendo que em (a) temos o caso $r^2 < 4b$, em (b) o caso $r^2 = 4b$ e em (c) o caso $r^2 > 4b$.

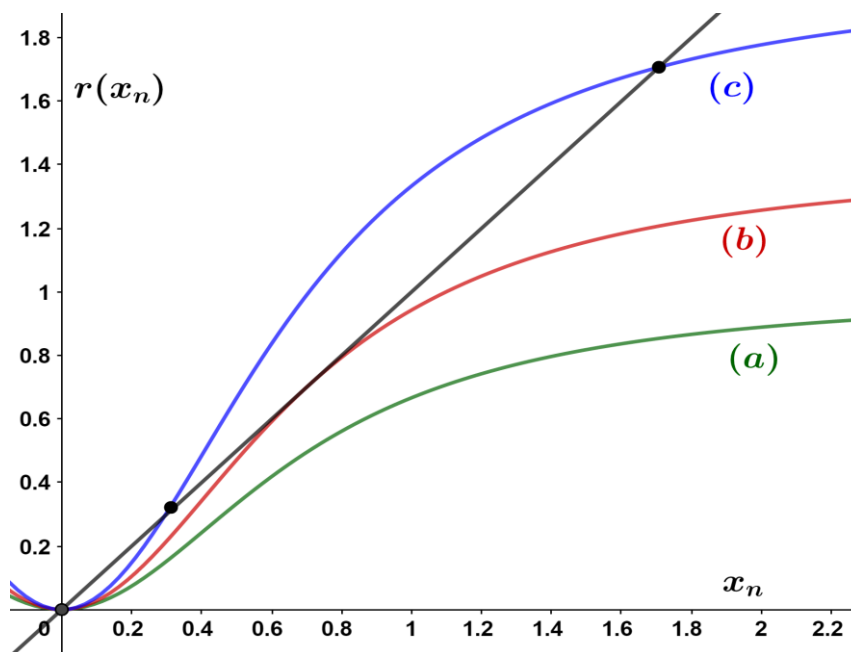


FIGURA 2.10 - Fixando o valor de $b = 2$ no modelo de Beverton-Holt com efeito de Allee e variando o valor do parâmetro r , temos em (a) $r = 2$, em (b) $r = \sqrt{8}$ e em (c) $r = 4$.

2.7.2. Modelo de Ricker com efeito de Allee

A equação $x_{n+1} = x_n^2 e^{p-x_n}$, onde $x_n \geq 0$ é a densidade da população e $p > 0$ é a capacidade de suporte, representa o modelo de Ricker modificado com o efeito de Allee (também conhecido por modelo exponencial).

Os pontos fixos são dados pelas soluções da equação $x^{*2} e^{p-x^*} = x^* \Leftrightarrow x^* = 0 \vee x^* e^{p-x^*} = 1$, sendo que $x^* e^{p-x^*} = 1$ não tem solução se $p < 1$ e tem exatamente uma solução quando $p = 1$ que é $x^* = 1$. Para $p > 1$, a equação $x^{*2} e^{p-x^*} = x^*$ tem duas soluções, $x^* = A$, sendo

A o ponto limite de densidade populacional e $x^* = K > 1$, sendo K a capacidade de suporte da população.

Para o estudo da estabilidade destes pontos fixos é necessário considerar três casos:

- 1) Quando $p < 1$, a origem é o único ponto fixo em \mathbb{R}_0^+ , sendo globalmente assintoticamente estável (ver **FIGURA 2.11**);
- 2) Quando $p = 1$, a origem é um ponto fixo localmente assintoticamente estável, pois $f'(0) = 0$ e a sua bacia de atração⁵ é representada pelo conjunto $[0, 1[\cup]A_r, +\infty[$, onde A_r representa a pré-imagem à direita de 1, isto é, a maior solução da equação $x^* e^{p-x^*} = 1$, dada por ≈ 3.51286 . O ponto fixo $x^* = 1$ é semi-estável à direita, pois $f'(1) = 1$ e $f''(1) = -1 < 0$, (**TEOREMA 1.2**), a sua bacia de atração é representada pelo conjunto $[1, A_r]$ (ver **FIGURA 2.12**);
- 3) Quando $p > 1$, a origem é um ponto fixo localmente assintoticamente estável e a sua bacia de atração é o conjunto $[0, A_r[\cup]A_r, +\infty[$, onde A_r é a pré-imagem à direita de 1.

Para determinar a estabilidade dos outros dois pontos de equilíbrio, calculamos a primeira derivada da função f , $f'(x) = x(2-x)e^{p-x}$, para os valores não triviais temos $f'(x) = \frac{(2-x)}{x} f(x)$. Temos que $|f'(A)| = |2-A|$ que é superior a 1 quando $0 < A < 1$, sendo que pelo **TEOREMA 1.2** $x^* = A$ será um ponto fixo instável. Para o ponto fixo $x^* = K > 1$, temos que $|f'(K)| = |2-K|$, pelo **TEOREMA 1.2** temos que $x^* = K$ é um ponto fixo localmente assintoticamente estável quando $1 < K < 3$. Considerando este caso, a bacia de atração de $x^* = K$ é $]A, A_r[$ (ver **FIGURA 2.13**).

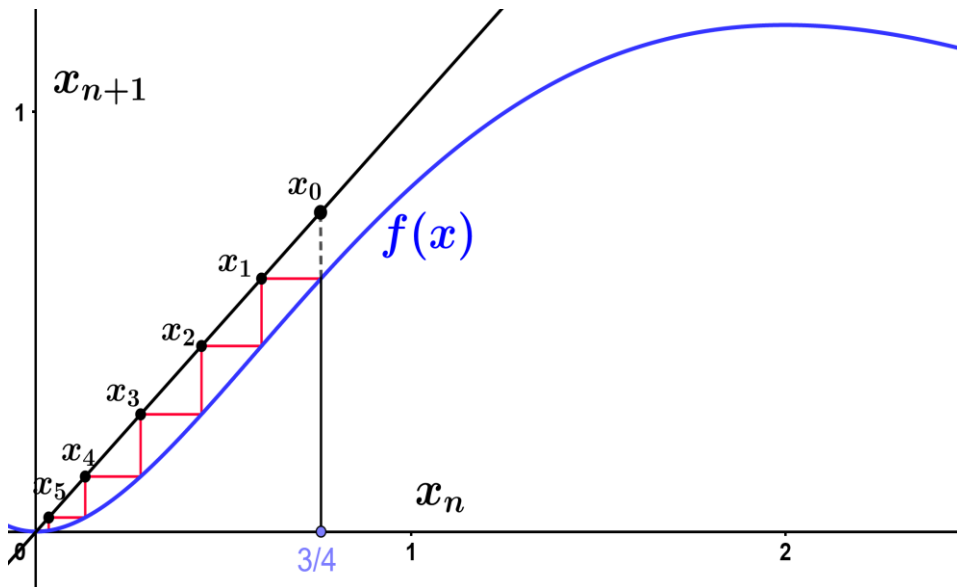
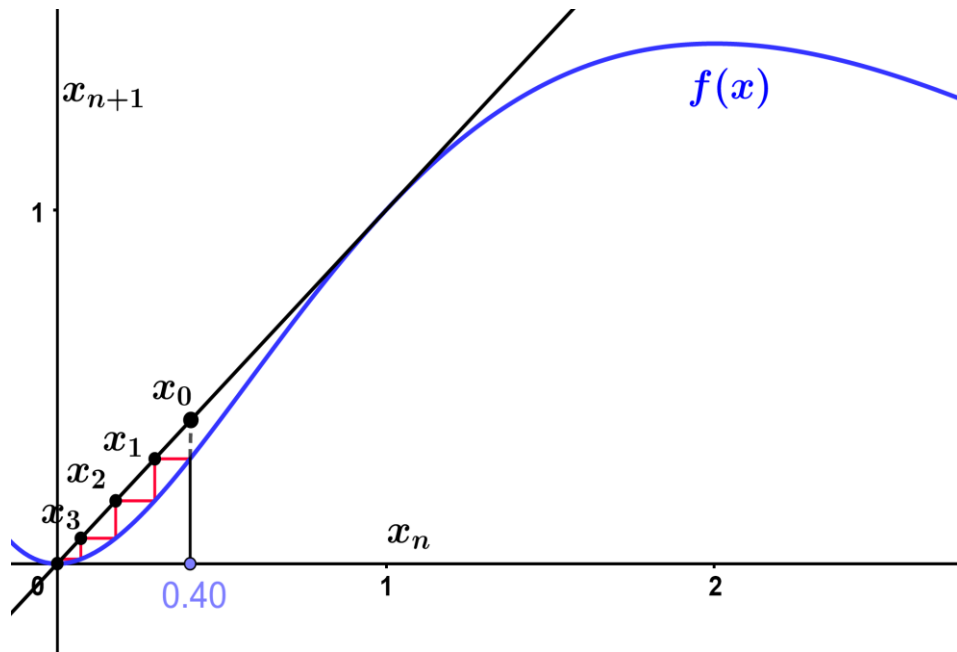
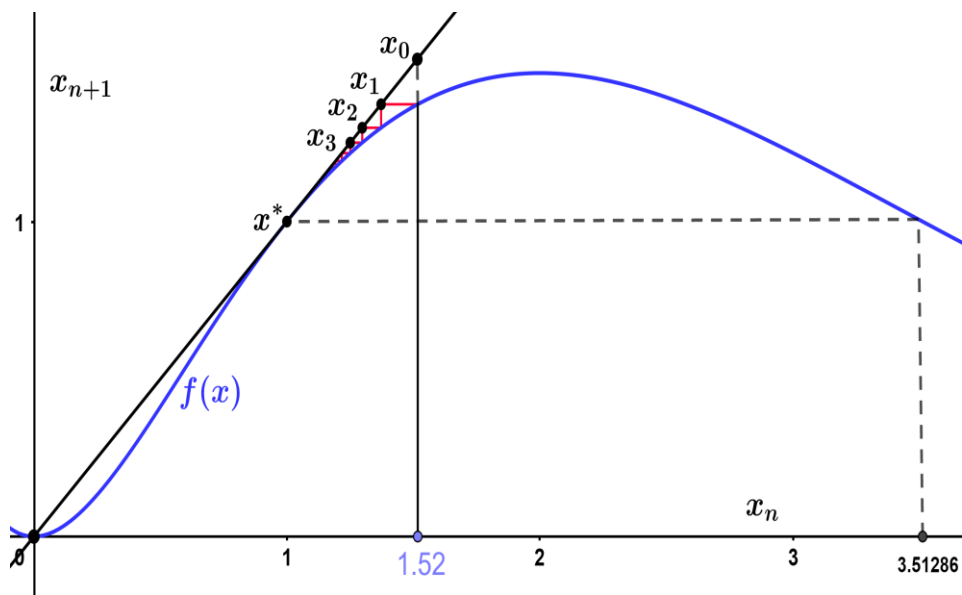


FIGURA 2.11 - Assumindo $p = 0.8 < 1$ e $x_0 = 0.75$, concluímos que o ponto $x^* = 0$ é um ponto fixo globalmente assintoticamente estável do modelo de Ricker com efeito de Allee.

⁵ O conjunto maximal que é atraído para um atrator M é designado de bacia de atração de M. [1]



(a)



(b)

FIGURA 2.12 - Assumindo $p = 1$ e (a) $x_0 = 0.40 < 1$ temos que o ponto $x^* = 0$ é um ponto fixo assintoticamente estável; (b) $x_0 = 1.52 > 1$ temos que o ponto fixo $x^* = 1$ é semi-estável à direita.

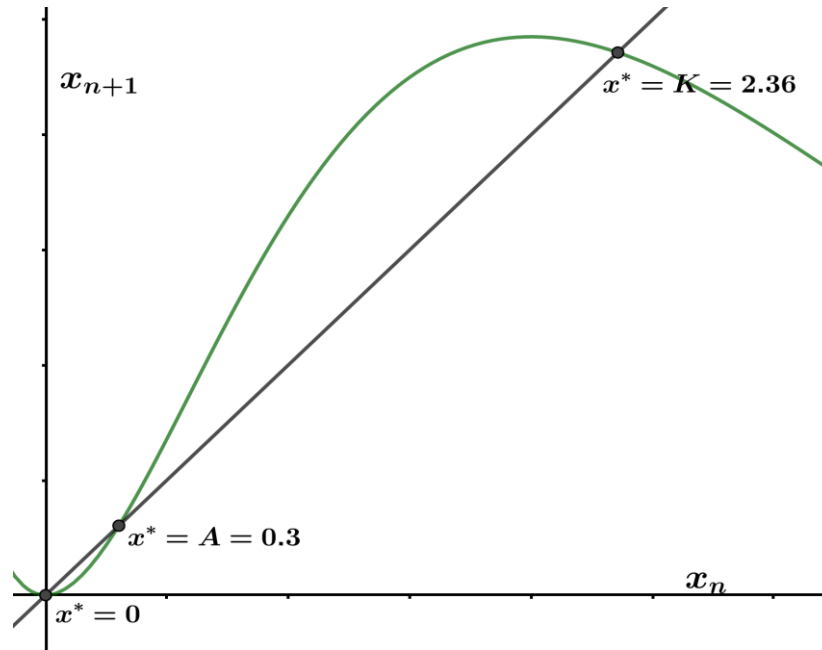
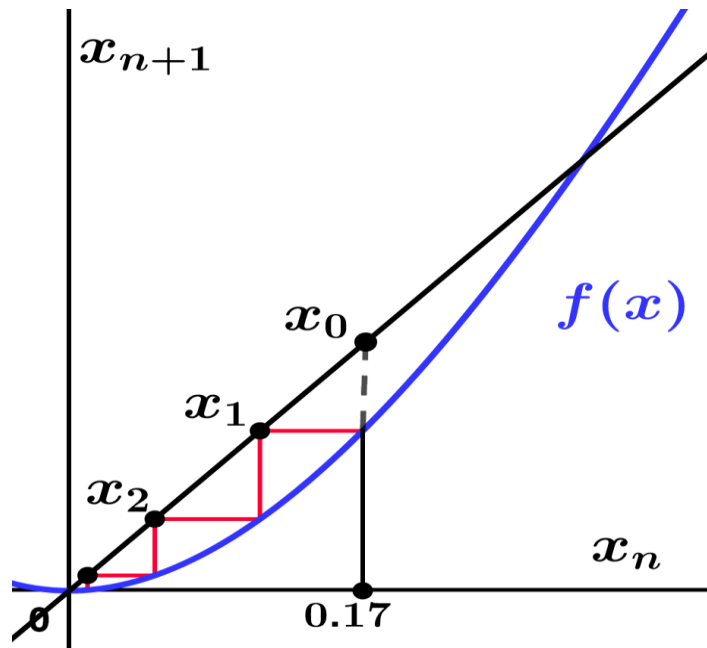
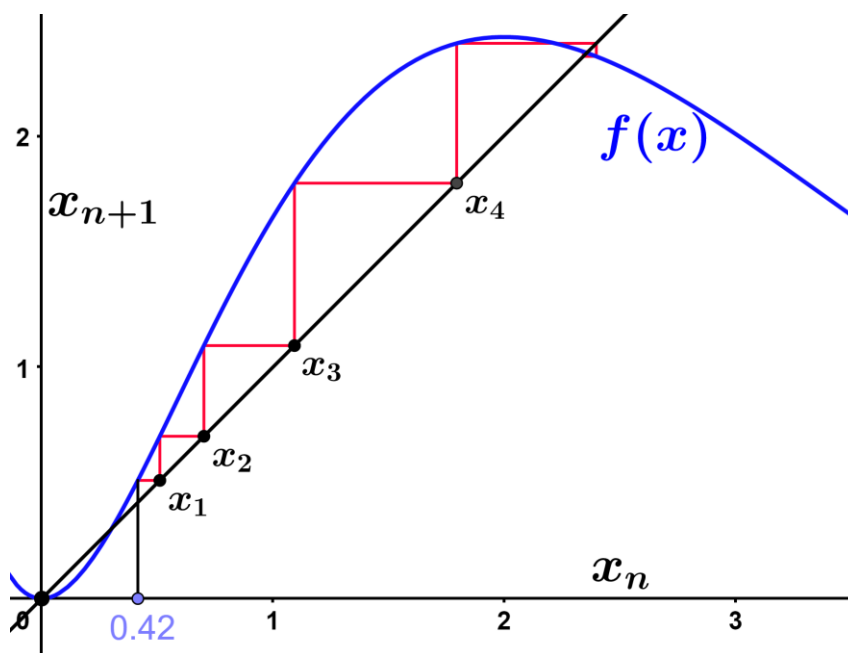


FIGURA 2.13 - Os pontos fixos do modelo de Ricker com efeito de Allee para $p = 1.5$ são $x^* = 0$, $x^* = A = 0.3$ e $x^* = K = 2.36$.

O caso em que $p > 1$ apresenta três pontos fixos, a origem, $x^* = A$ e $x^* = K > 1$. Vamos calcular numericamente o valor de A e de K para o caso em que $p = 1.5$.



(a)



(b)

FIGURA 2.14 - Em (a) verificamos que $x^* = 0$ é um ponto fixo localmente assintoticamente estável quando $0 < x < A$; em (b) concluímos que $x^* = K$ é um ponto fixo localmente assintoticamente estável quando $A < x < K$ para o modelo de Ricker com efeito de Allee.

Para estudar a estabilidade no caso de $p > 1$, vamos assumir $p = 1.5$ e vamos considerar duas condições iniciais distintas, assim a **FIGURA 2.14** representa (a) $x^* = 0 < x_0 = 0.17 < x^* = A$; (b) $x^* = A < x_0 = 0.42 < K$.

2.7.3. Modelo Polinomial com efeito de Allee

Consideremos a equação de diferenças $x_{n+1} = \mu_n x_n^{k_n} (1 - x_n)$, onde $x_n \in [0, 1]$, $\mu > 0$ e $k_n = 2, 3, 4, \dots$ para qualquer inteiro não negativo n . Para esta equação temos que $f(x) = \mu x^k (1 - x)$.

O estudo detalhado deste modelo pode ser consultado em [20].

OBSERVAÇÃO 2.5: Quando $\mu_n = \mu$ e $k_n = 1$ para todo n , a equação $x_{n+1} = \mu x_n^{k_n} (1 - x_n)$ corresponde à equação logística estudada na secção 1.4.

Para garantir que x_n pertence ao intervalo unitário $I = [0, 1]$ (caso contrário as órbitas divergem), consideramos a hipótese **H** sobre os parâmetros dada por

$$H: \mu_n \leq \left(\frac{k_n + 1}{k_n} \right)^{k_n} (k_n + 1), n = 0, 1, 2, \dots$$

H garante que todas as órbitas de f são limitadas.

Supondo isto, vamos estudar a estabilidade dos pontos fixos da função f . Já sabemos que para determinar os seus pontos fixos é necessário resolver a equação $\mu x^{*k}(1-x^*) = x^*$, que eliminando a solução trivial $x^* = 0$, vem $\mu x^{*k-1}(1-x^*) = 1 \Leftrightarrow \ln(\mu) = -(k-1)\ln(x) - \ln(1-x)$.

Consideremos $g(x) = -(k-1)\ln(x) - \ln(1-x)$. Sabemos que $g(x) > 0, \forall x \in (0,1)$ e que g é convexo no intervalo unitário, atingindo o seu mínimo em $g(c_g)$, onde $c_g = \frac{k-1}{k}$ é o único ponto crítico de g no intervalo unitário.

Seja O_μ a bacia de atração imediata da origem:

- 1) Se $g(c_g) > \ln(\mu)$, então $\ln(\mu) = -(k-1)\ln(x) - \ln(1-x)$ não apresenta soluções, sendo $x^* = 0$ o único ponto fixo da função f quando $\mu < k\left(\frac{k}{k-1}\right)^{k-1}$. Este ponto é globalmente assintoticamente estável, dado ser o único ponto fixo no intervalo unitário $I = [0,1]$. Isto acontece porque na origem $f'(0) = 0$, conseqüentemente $O_\mu = [0,1]$.
- 2) Se $g(c_g) = \ln(\mu)$, então $\ln(\mu) = -(k-1)\ln(x) - \ln(1-x)$ apresenta uma única solução, $x^* = \frac{k-1}{k} = c_g$, conseqüentemente a função f tem um único ponto fixo positivo quando $\mu = k\left(\frac{k}{k-1}\right)^{k-1}$. Notemos que $|f'(x^*)| = 1$ e $|f''(x^*)| = -k^2 < 0$, pelo **TEOREMA 1.2** concluímos que $x^* = \frac{k-1}{k} = c_g$ é um ponto fixo instável, mas semi-estável à direita. A sua bacia de atração imediata é dada pelo conjunto $[x^*, \max f^{-1}(\{x^*\})]$ de $f^{-1}(\{x^*\})$ é a pré-imagem de $\{x^*\}$. A bacia de atração da origem é dada por $O_\mu = I \setminus [x^*, \max f^{-1}(\{x^*\})]$.
- 3) Se $g(c_g) < \ln(\mu)$, então $\ln(\mu) = -(k-1)\ln(x) - \ln(1-x)$ apresenta duas soluções positivas. Conseqüentemente a função f tem dois pontos fixos quando $\mu > k\left(\frac{k}{k-1}\right)^{k-1}$. O ponto fixo de menor valor é denotado por A_μ e é conhecido como ponto fixo de Allee, sendo um ponto fixo sempre instável. O ponto fixo de maior valor é denotado por K_μ e é conhecido como a capacidade de suporte do modelo, sendo um ponto fixo localmente assintoticamente estável no intervalo $(A_\mu, \max f^{-1}(\{A_\mu\}))$ se $|k - \mu K_\mu^k| < 1$. A bacia de atração imediata da origem é dada por $O_\mu = [0, A_\mu) \cup (\max f^{-1}(\{A_\mu\}), 1]$.

OBSERVAÇÃO 2.6: Notemos que a sequência $a_k = \left(\frac{k+1}{k}\right)^k (k+1)$ que é usada para definir a hipótese sobre os parâmetro H , vai aumentando para $k = 2,3,4, \dots$.

Estas ideias podem ser resumidas no seguinte teorema:

TEOREMA 2.2: Seja $f(x) = \mu x^k(1-x), k = 2,3,4, \dots$, então podemos escrever as seguintes conclusões:

- 1) Se $\mu < k\left(\frac{k}{k-1}\right)^{k-1}$, então $x^* = 0$ é o único ponto fixo de f e é globalmente assintoticamente estável, sendo a sua bacia de atração o intervalo unitário $I = [0,1]$ (ver **FIGURA 2.15**).

- 2) Se $\mu = k \left(\frac{k}{k-1}\right)^{k-1}$, então f tem dois pontos fixos, a origem e ponto fixo $x^* = \frac{k-1}{k}$, sendo este segundo ponto fixo localmente assintoticamente estável à direita e a sua bacia de atração $[x^*, \max f^{-1}(\{x^*\})]$. A bacia de atração da origem é dada por $O_\mu = I \setminus [x^*, \max f^{-1}(\{x^*\})]$ (ver FIGURA 2.16).
- 3) Se $\mu > k \left(\frac{k}{k-1}\right)^{k-1}$, então f tem três pontos fixos, a origem, o ponto fixo limite A_μ e a capacidade de suporte K_μ , sendo que $A_\mu < K_\mu$. O ponto fixo limite é sempre instável e se $|k - \mu K_\mu^k| < 1$, a capacidade de suporte é localmente assintoticamente estável com bacia de atração $(A_\mu, \max f^{-1}(\{A_\mu\}))$. A bacia de atração da origem é dada por $O_\mu = I \setminus [A_\mu, \max f^{-1}(\{A_\mu\})]$ (ver FIGURA 2.17).

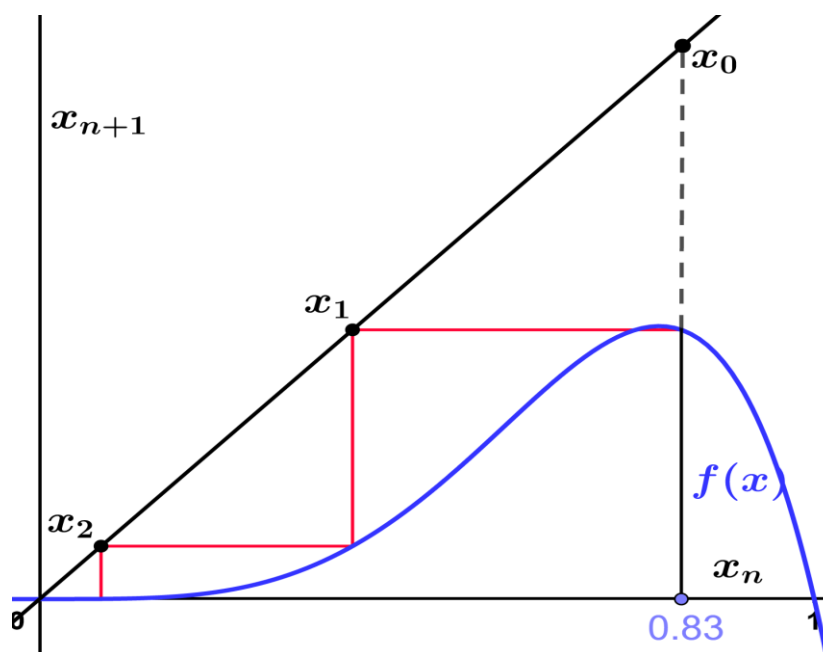


FIGURA 2.15 - Estudo da estabilidade dos pontos fixos do modelo polinomial com efeito de Allee quando $k = 4$ e $\mu = 5 < k \left(\frac{k}{k-1}\right)^{k-1} = 9.48148 \dots$. Assumindo $x_0 = 0.83$, concluímos que $x^* = 0$ é globalmente assintoticamente estável.

2.7.4. Modelo Logístico com efeito de Allee

O modelo logístico com efeito de Allee é um caso particular do modelo polinomial com efeito de Allee quando $k = 2$. A função associada a este modelo é dada por $f(x) = \mu x^2(1 - x)$.

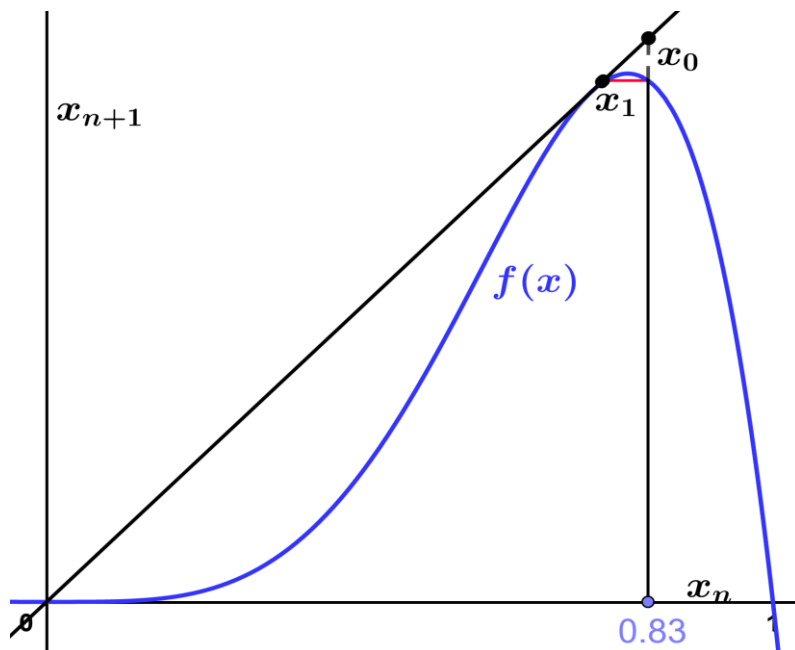


FIGURA 2.16 - Estudo da estabilidade dos pontos fixos do modelo polinomial com efeito de Allee quando $k = 4$ e $\mu = 9.48148 = k \left(\frac{k}{k-1} \right)^{k-1}$. Assumindo $x_0 = 0.83$, concluímos que $x^* = \frac{k}{k-1}$ é localmente assintoticamente estável à direita.

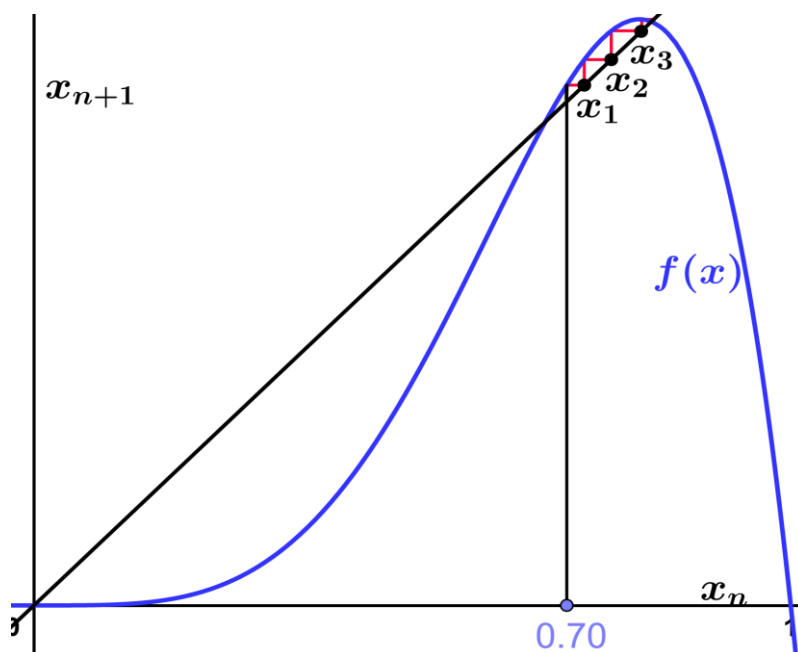


FIGURA 2.17 - Estudo da estabilidade dos pontos fixos quando $k = 4$ e $\mu = 10 > k \left(\frac{k}{k-1} \right)^{k-1} = 9.48148$. Assumindo $x_0 = 0.73$, concluímos que $x^* = A$ é instável e $x^* = K$ é localmente assintoticamente estável.

As conclusões que chegamos são retiradas do **TEOREMA 2.2** :

- 1) Se $\mu < 4$, a origem é o único ponto fixo no intervalo unitário sendo globalmente assintoticamente estável (ver **FIGURA 2.18**).
- 2) Se $\mu = 4$, existem dois pontos fixos, a origem e $x^* = \frac{k-1}{k} = \frac{1}{2}$. A bacia de atração da origem é $O_4 = \left[0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}, 1\right]$, enquanto que a bacia do ponto fixo positivo é $\left[\frac{1}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{4}\right]$. O ponto $x^* = \frac{1}{2}$ é semi-estável à direita (ver **FIGURA 2.19**).
- 3) Se $\mu > 4$, então f tem três pontos fixos, a origem, o ponto limite $A_\mu = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{\mu-4}{\mu}}\right)$ e a capacidade de suporte $K_\mu = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{\mu-4}{\mu}}\right)$. Quando $\mu > 4$ temos

$$|f'(A_\mu)| = 3 + \frac{\mu}{2} \left(-1 + \sqrt{\frac{\mu-4}{\mu}}\right) > 1,$$

consequentemente A_μ é um ponto fixo instável. Similarmente vemos

$$|f'(K_\mu)| = 3 - \frac{\mu}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{\mu-4}{\mu}}\right) < 1 \text{ se } 4 < \mu < \frac{16}{3}.$$

Quando $\mu = \frac{16}{3}$ temos que $f'(K_\mu) = -1$ e $Sf(K_\mu) < 0$, pelo **TEOREMA 1.2** segue-se que o ponto fixo K_μ é assintoticamente estável, portanto, o ponto fixo $x^* = K_\mu$ é localmente assintoticamente estável quando $4 < \mu \leq \frac{16}{3}$ e a sua bacia de atração é o conjunto $(A_\mu, \max f^{-1}(\{A_\mu\}))$. A bacia de atração da origem é dada por $O_\mu = [0, A_\mu) \cup (\max f^{-1}(\{A_\mu\}), 1]$ (ver **FIGURA 2.20**).

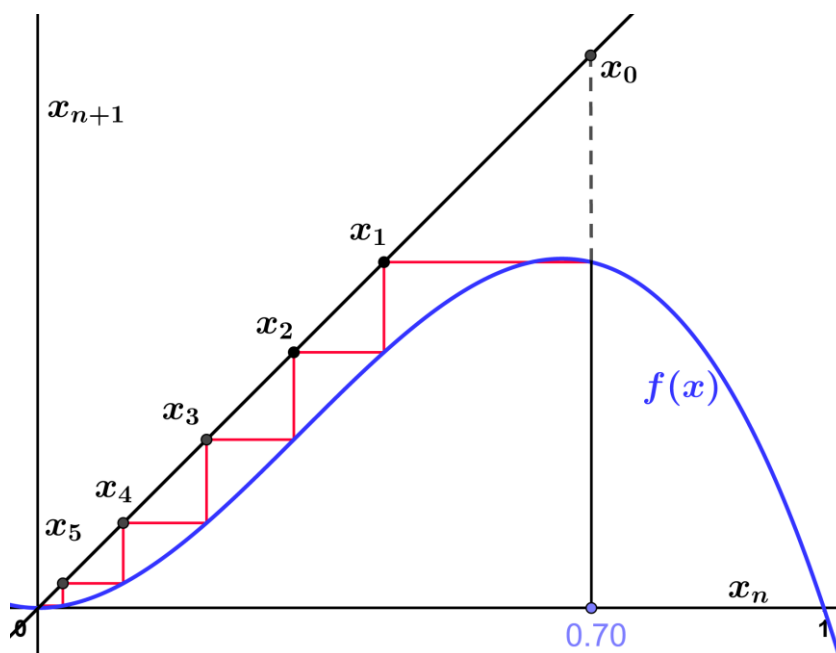


FIGURA 2.18 - Estudo da estabilidade dos pontos fixos do modelo logístico com efeito de Allee quando $k = 2$ e $\mu = 3 < k \left(\frac{k}{k-1}\right)^{k-1} = 4$. Assumindo $x_0 = 0.70$, concluímos que $x^* = 0$ é globalmente assintoticamente estável.

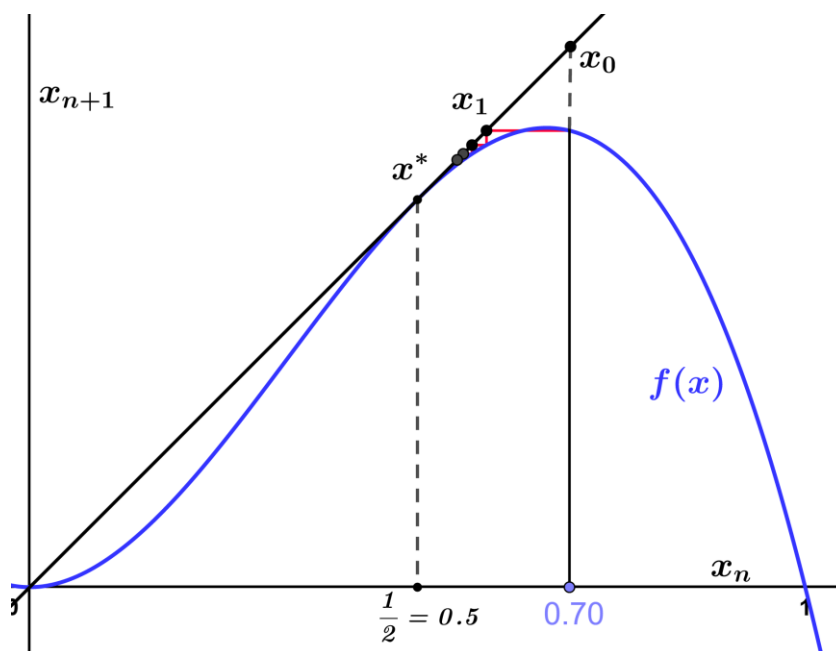


FIGURA 2.19 - Estudo da estabilidade dos pontos fixos do modelo logístico com efeito de Allee quando $k = 2$ e $\mu = 4 = k \left(\frac{k}{k-1}\right)^{k-1}$. Assumindo $x_0 = 0.70$, concluímos que $x^* = \frac{k-1}{k} = \frac{1}{2}$ é localmente assintoticamente estável à direita.

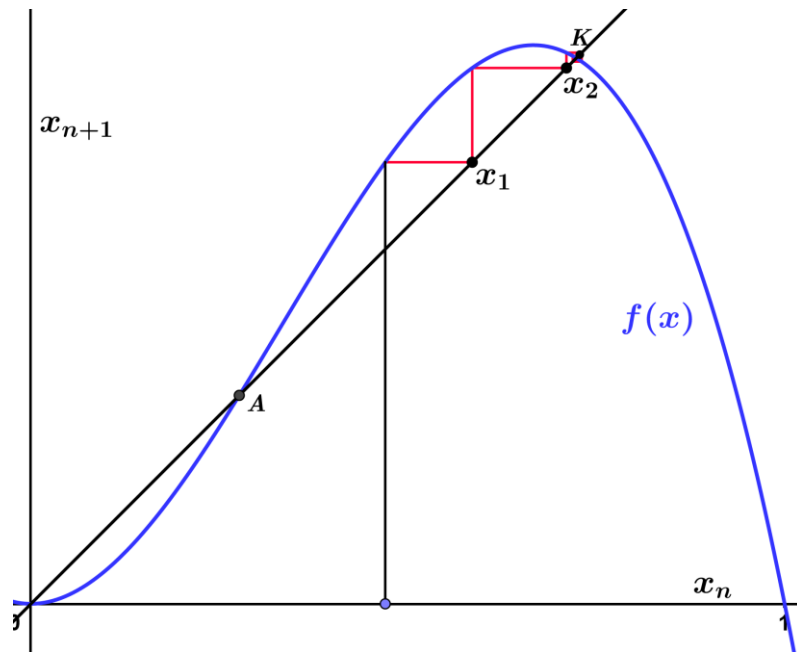


FIGURA 2.20 - Estudo da estabilidade dos pontos fixos do modelo logístico com efeito de Allee quando $k = 2$ e $\mu = 5 > k \left(\frac{k}{k-1}\right)^{k-1} = 4$. Assumindo $x_0 = 0.47$, concluímos que $x^* = A$ é instável e $x^* = K$ é localmente assintoticamente estável.

3. Modelos Não Autônomos Aplicados à Dinâmica de Populações

Neste capítulo vão ser apresentados vários modelos não autônomos (mais precisamente periódicos), aplicados à dinâmica de populações.

O estudo analítico das equações associadas a estes modelos é em geral complexo, havendo casos em que se torna impossível encontrar explicitamente os pontos fixos dado a complexidade dos cálculos.

Primeiramente vamos introduzir os conceitos teóricos necessários para o desenvolvimento deste capítulo. De seguida, vamos introduzir modelos periódicos tais como o modelo de Ricker, o modelo de Beverton-Holt e o modelo Logístico.

Posteriormente, apresentamos o conceito de envolvimento e mostramos a sua aplicação em modelos tais como Ricker, o modelo de Beverton-Holt, e ainda em modelos mistos tais como Beverton-Holt agindo com o modelo de Ricker, o modelo exponencial com o modelo Racional, de entre outros.

Por último, introduzimos os conceitos de atenuância e ressonância e aplicamos a alguns modelos periódicos.

3.1. Sistemas Periódicos

Vamos agora introduzir a teoria relativa aos sistemas periódicos. Dizemos que uma equação de diferenças é não autônoma se segue a regra $x_{n+1} = f_n(x_n)$, $n \in \mathbb{Z}^+$, onde $x \in X$ e X é um espaço topológico.

Neste caso, a órbita do ponto x_0 é gerada pela sequência de composição das funções f_0, f_1, f_2, \dots .

Mais explicitamente temos:

$$\begin{aligned} x_1 &= f_0(x_0), \\ x_2 &= f_1(x_1) = f_1 \circ f_0(x_0), \\ &\vdots \\ x_{n+1} &= f_n \circ f_{n-1} \circ \dots \circ f_1 \circ f_0(x_0), \\ &\vdots \end{aligned}$$

Assim, podemos considerar três casos:

- 1) Se $f_0 = f_1 = f_2 = \dots$, o sistema é dito autônomo (já estudado no capítulo 1);
- 2) Se em geral a sequência de funções é diferente, o sistema é dito não-autônomo;
- 3) Se a sequência de funções é periódica, isto é, $f_{n+p} = f_n$, para todo o $n = 0, 1, 2, \dots$ e $p > 1$, sendo p um inteiro positivo, o sistema diz-se não-autônomo periódico.

No terceiro caso, falamos de equações de diferenças não autônomas periódicas, onde p é o período minimal da equação $x_{n+1} = f_n(x_n)$ e $X = \mathbb{R}$.

DEFINIÇÃO 3.1 (Ciclo r -periódico): Um conjunto ordenado de pontos $C_r = \{\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{r-1}\}$ é um ciclo r -periódico em X se

$$f_{(i+nr) \bmod p}(\bar{x}_i) = \bar{x}_{(i+1) \bmod r}, n \in \mathbb{Z}^+.$$

Em particular,

$$f_i(\bar{x}_i) = \bar{x}_{i+1}, 0 \leq i \leq r-2, \text{ e } f_t(\bar{x}_{t \bmod r}) = \bar{x}_{t+1 \bmod r}, r-1 \leq t \leq p-1.$$

Notemos que um ciclo r -periódico C_r em X gera um ciclo s -periódico em

$$X * Y \quad (Y = \{f_0, f_1, \dots, f_p\})$$

da forma

$$\hat{C}_s = \{(\bar{x}_0 \bmod r, f_0 \bmod p), (\bar{x}_1 \bmod r, f_1 \bmod p), \dots, (\bar{x}_{(s-1) \bmod r}, f_{(s-1) \bmod p})\},$$

onde $s = mmc[r, p]$ é o mínimo múltiplo comum entre r e p .

Para distinguir estes dois ciclos, o ciclo r -periódico C_r em X é chamado de ciclo r -geométrico (ou simplesmente ciclo r -periódico quando não há confusão), e o ciclo s -periódico \hat{C}_s em $X * Y$ é chamado de ciclo s -completo. É de notar que existem três possibilidades, $r < p$, $r = p$ ou $r > p$.

EXEMPLO 3.1

Seja $x_{n+1} = f_n(x_n)$, onde $X = \mathbb{R}$ e a sequência de funções pertence ao conjunto $Y = \{f_0, f_1, f_2, f_3, f_4\}$, com $f_{n+5} = f_n$ para todo o n . Claramente $p = 5$.

Consideremos que o conjunto $C_3 = \{\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2\}$ é um 3-ciclo da equação, isto é,

$$f_{(i+3n) \bmod 5}(\bar{x}_i) = \bar{x}_{(i+1) \bmod 3}, \text{ para todo o } n.$$

Neste caso o 3-ciclo C_3 gera um ciclo de período 15 (completo) no conjunto $X \times Y$. Na **FIGURA 3.1** ilustramos este ciclo completo.

Definimos o operador de composição Φ como sendo $\Phi_n^i = f_{n+i-1} \circ \dots \circ f_{i+1} \circ f_i$. Quando $i = 0$ escrevemos Φ_n^0 como Φ_n .

Como consequência das observações anteriores, segue-se que o ciclo s -completo \hat{C}_s é um ponto fixo do operador composição Φ_s^i , por outras palavras, $\Phi_s^i(\bar{x}_i \bmod r) = \bar{x}_i \bmod r$.

Se a sequência de funções $\{f_i\}$, $i \geq 0$ é uma família de funções definidas por um parâmetro, então por [21] $\bar{x}_i \bmod p$ é um ponto fixo de Φ_p .

Em [22], Elaydi e Sacker demostram que, em geral, quando temos um ciclo r -geométrico com $r \leq p$, o seguinte teorema é válido:

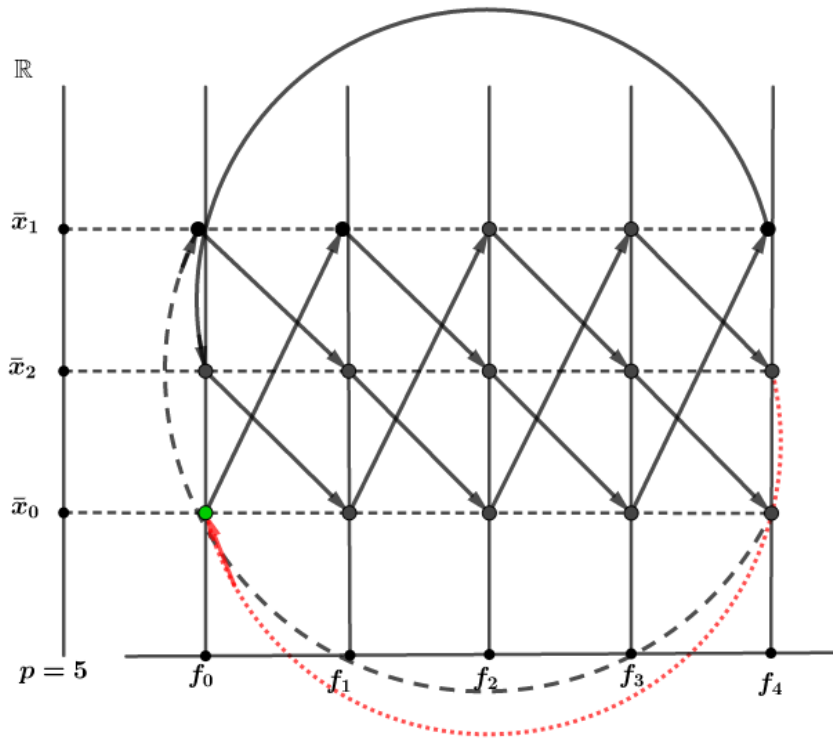


FIGURA 3.1 - Ciclo completo do **EXEMPLO 3.1**.

TEOREMA 3.1 [23]: Assumindo que X é um espaço métrico conexo e que cada $f_i \in Y$ é uma função contínua em X . Seja $C_r = \{\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{r-1}\}$ um ciclo r -geométrico da equação $x_{n+1} = f_n(x_n)$. Se C_r é globalmente assintoticamente estável, então $r|p$, isto é, r divide p .

OBSERVAÇÃO 3.1: Considerando o **EXEMPLO 3.1** em que o 15-ciclo é globalmente assintoticamente estável (ver **FIGURA 3.1**), temos que $p = 5$ e $r = 15$. Logo $r|p$, ou seja $15|5$.

O próximo teorema mostra como construir um sistema dinâmico dado dois inteiros positivos r e p com $r|p$.

TEOREMA 3.2 [23]: Dado dois inteiros positivos r e p com $r|p$, então existe um sistema dinâmico não-autônomo com período mínimo p e que tem um ciclo r -geométrico globalmente assintoticamente estável com período mínimo r .

LEMA 3.1: Seja C_r um ciclo r -periódico da equação p -periódica $x_{n+1} = f_n(x_n)$ e $s = \min[r, p]$ o mínimo múltiplo comum entre r e p . Então, a órbita de \hat{C}_s intersesta cada fibra \mathcal{F}_i , $i = 0, 1, \dots, p - 1$ em exatamente $\ell = s/p$ pontos e cada um destes pontos é periódico sob o produto enviesado com período s .

OBSERVAÇÃO 3.2: No **EXEMPLO 3.1**, constata-se que a órbita de C_{15} intersesta cada fibra em exatamente 3 pontos (ver **FIGURA 3.1**) e $3 = \frac{15}{5}$.

3.2. Modelo de Ricker Periódico

Considerando a equação de diferenças periódica $x_{n+1} = R_n(x_n)$, onde $R_n(x)$ representa a densidade da população e é dada por $R_n(x) = xe^{r_n-x}$, $n = 0,1,2, \dots, x \geq 0$, e $r_n > 0$, $n = 0,1,2, \dots$, é a sequência de capacidades de suporte individuais.

A condição de estabilidade local para cada função individual $R_i(x)$ é dada por $0 < r_i \leq 2$, $i = 0,1,2, \dots$, conforme estudado na secção 2.2.

Para que o modelo seja periódico temos que exigir que este apresente uma periodicidade p , e por isso, temos que assumir que $R_{n+p} = R_n$ para todo $n = 0,1,2, \dots$, isto é, a sequência de parâmetros satisfaz $r_n = r_{n \bmod p}$, para todo n . Mais especificamente temos:

$$\begin{aligned} r_0 &= r_p = r_{2p} = \dots \\ r_1 &= r_{1+p} = r_{1+2p} = \dots \\ r_2 &= r_{2+p} = r_{2+2p} = \dots \\ &\vdots \\ r_{p-1} &= r_{2p-1} = r_{3p-1} = \dots \end{aligned}$$

Sabemos que o operador de composição $\Phi_p(x) = R_{p-1} \circ \dots \circ R_1 \circ R_0(x)$ é contínuo em \mathbb{R}_0^+ , porque se trata da composição de funções contínuas em \mathbb{R}_0^+ .

Em [24] demonstra-se que a função Φ_p tem um ponto fixo globalmente assintoticamente estável quando $0 < r_n \leq 2, n = 0,1,2, \dots$. Como a sequência de funções é injetiva relativamente aos parâmetros, em [21] está mostrado que o ponto fixo globalmente assintoticamente estável de Φ_p gera um ciclo p -periódico globalmente assintoticamente estável da forma $\{\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{p-1}\}$, onde

$$\bar{x}_1 = R_0(\bar{x}_0), \bar{x}_2 = R_1(\bar{x}_1), \dots, \bar{x}_{p-1} = R_{p-2}(\bar{x}_{p-2}), \bar{x}_p = \bar{x}_0.$$

Pela regra da cadeia sabe-se que $\Phi'_p(\bar{x}_0) = R'_{p-1}(\bar{x}_{p-1})R'_{p-2}(\bar{x}_{p-2}) \dots R'_1(\bar{x}_1)R'_0(\bar{x}_0)$. Como $R'_i(x) = (1-x)e^{r_i-x}$ e sabendo que a dinâmica das órbitas periódicas é dada por

$$\bar{x}_{i+1} = \bar{x}_i e^{r_i - \bar{x}_i}, \quad i = 0,1,2, \dots, p-1,$$

a condição de estabilidade da órbita periódica é dada por $\prod_{i=0}^{p-1} |1 - \bar{x}_i| < 1$.

Para se observar este facto, de $\left| \left(\Phi_p(\bar{x}_0) \right)' \right| < 1$ resulta

$$\left| (1 - \bar{x}_0)e^{r_0 - \bar{x}_0} \times (1 - \bar{x}_1)e^{r_1 - \bar{x}_1} \times \dots \times (1 - \bar{x}_{p-1})e^{r_{p-1} - \bar{x}_{p-1}} \right| < 1,$$

ou seja,

$$\left| (1 - \bar{x}_0) \times (1 - \bar{x}_1) \times \dots \times (1 - \bar{x}_{p-1}) e^{\sum_{i=0}^{p-1} r_i - \sum_{i=0}^{p-1} \bar{x}_i} \right| < 1.$$

Mas pelo facto de $\{\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{p-1}\}$ ser um p -ciclo globalmente assintoticamente estável, resulta $\bar{x}_0 = \Phi_p(\bar{x}_0)$, ou seja,

$$\begin{aligned} \bar{x}_0 &= \bar{x}_{p-1} e^{r_{p-1} - \bar{x}_{p-1}} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \bar{x}_0 = \bar{x}_{p-2} e^{r_{p-2} - \bar{x}_{p-2}} e^{r_{p-1} - \bar{x}_{p-1}} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \bar{x}_0 = \bar{x}_0 e^{\sum_{i=0}^{p-1} r_i - \sum_{i=0}^{p-1} \bar{x}_i} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 = e^{\sum_{i=0}^{p-1} r_i - \sum_{i=0}^{p-1} \bar{x}_i} \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{p-1} r_i = \sum_{i=0}^{p-1} \bar{x}_i. \end{aligned}$$

Sendo assim, a condição de estabilidade é $\prod_{i=0}^{p-1} |1 - \bar{x}_i| < 1$.

OBSERVAÇÃO 3.3: A condição de estabilidade global obtida por R. Sacker em [24] relativamente aos parâmetros é dada por $0 < r_n \leq 2, n = 0, \dots, p - 1$. Esta condição de estabilidade pode ser ampliada no espaço de parâmetros como se pode observar na **FIGURA 3.2** na região S (ver [9] para mais detalhes). Em [25], Eduardo Liz, demonstrou esta observação para $p = 2$, utilizando o **TEOREMA 3.3**.

TEOREMA 3.3 [26]: Seja $a \geq 0, b > a$ e $g: (a, b) \rightarrow [a, b]$ uma função contínua com um único ponto fixo x^* tal que $(g(x) - x)(x - x^*) < 0$ para todo $x \neq x^*$. Assumimos que existem pontos $a \leq c < x^* < d \leq b$ tal que a restrição de g para (c, d) tem no máximo um ponto de viragem e sempre que fizer sentido, $g(x) \leq g(c)$ para todo o $x \leq c$, e $g(x) \geq g(d)$ para todo o $x \geq d$. Se g decresce no ponto x^* , assumimos adicionalmente que $Sg(x) < 0$ para todo o $x \in (c, d)$ exceto no maior ponto crítico de g e $-1 < g'(x^*) < 0$. Então o ponto fixo x^* é globalmente estável.

OBSERVAÇÃO 3.4: Permanece por mostrar a estabilidade global para $p \geq 3$.

Em suma temos:

- 1) A origem é um ponto fixo instável;
- 2) A equação de diferenças periódica característica do modelo de Ricker tem um ciclo p -periódico globalmente assintoticamente estável sempre que $r_n \in (0, 2]$ para todo n ;
- 3) Em termos de relação entre os pontos fixos individuais e os pontos da órbita periódica, concluimos que em média a população obterá uma capacidade de suporte igual à média da capacidade de suporte individual, isto é,

$$\frac{r_0 + r_1 + \dots + r_{p-1}}{p} = \frac{\bar{x}_0 + \bar{x}_1 + \dots + \bar{x}_{p-1}}{p}$$

(na secção 3.6.2 este tema será abordado com mais detalhe).

3.3. Modelo de Beverton-Holt periódico

Consideremos a equação de diferenças $x_{n+1} = B_n(x_n)$, onde $B_n(x)$ representa a densidade da população dada por $B_n(x) = \frac{rK_n x}{K_n + (r+1)x}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, $x \geq 0$, e onde $r > 1$ é a taxa de crescimento da população e $K_n > 0$ é a capacidade de suporte individual.

As condições para a estabilidade de cada função individual B_n já foram estabelecidas na apresentação do modelo de Beverton-Holt (ver seção 2.3).

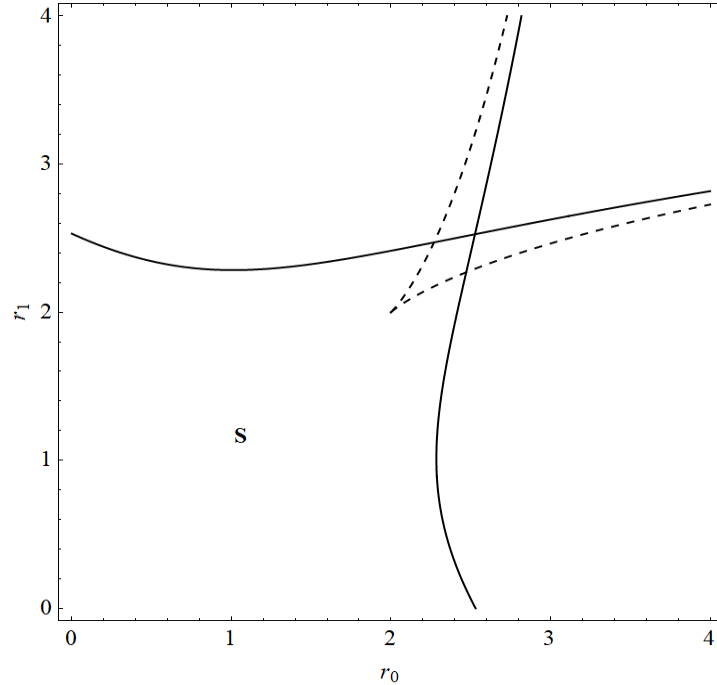


FIGURA 3.2 - Região S de estabilidade global, no espaço dos parâmetros r_0 e r_1 , para o modelo de Ricker 2-periódico.

Tal como no modelo de Ricker, para que haja periodicidade é necessário considerar que $K_{n+p} = K_n$ para todo o n e $p > 1$. Sabemos que cada função individual é monótona e ainda que a composição de funções monótonas é monótona. Assim,

$$\Phi_p = B_{p-1} \circ B_{p-2} \circ \dots \circ B_1 \circ B_0(x)$$

é uma função monótona com órbitas limitadas, pois $B_n(x) < \frac{r}{r-1} K_n$ para todo o n .

A função Φ_p gera um ciclo p -periódico globalmente assintoticamente estável da forma

$$\{\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{p-1}\},$$

onde

$$\bar{x}_1 = B_0(\bar{x}_0), \bar{x}_2 = B_1(\bar{x}_1), \dots, \bar{x}_{p-1} = B_{p-2}(\bar{x}_{p-2}), \bar{x}_p = \bar{x}_0.$$

Em [22], Elaydi e Sacker calculam uma solução para a equação de Beverton-Holt periódica. Assim, após duas iterações temos

$$\bar{x}_2 = B_1(\bar{x}_1) = B_1 \circ B_0(\bar{x}_0) = \frac{\mu^2 K_1 K_0 \bar{x}_0}{K_1 K_0 + (\mu - 1) M_1 \bar{x}_0}$$

e indutivamente, após p iterações obtemos

$$\bar{x}_p = B_{p-1} \circ B_{p-2} \circ \dots \circ B_0(\bar{x}_0) = \frac{\mu^p K_{p-1} K_{p-2} \dots K_0 \bar{x}_0}{K_{p-1} K_{p-2} \dots K_0 + (\mu - 1) M_{p-1} \bar{x}_0},$$

onde M_n satisfaz a equação de diferenças linear de primeira ordem:

$$M_{n+1} = K_{n+1} M_n + \mu^{n+1} K_n K_{n-1} \dots K_0, \quad M_0 = 1.$$

Portanto,

$$M_{p-1} = \prod_{j=0}^{p-2} K_{j+1} + \sum_{m=0}^{p-2} \left(\prod_{i=m+1}^{p-2} K_{i+1} \right) \mu^{m+1} K_m K_{m-1} \dots K_0.$$

Dado $L_{p-1} = K_{p-1} K_{p-2} \dots K_0$, finalmente obtemos a função composta Φ_p dada por

$$\Phi_p(\bar{x}) \doteq B_{p-1} \circ B_{p-2} \circ \dots \circ B_0(\bar{x}_0) = \frac{\mu^p L_{p-1} \bar{x}_0}{L_{p-1} + (\mu - 1) M_{p-1} \bar{x}_0}.$$

Concluimos que a equação $x_{n+1} = \Phi_p(x_n)$ tem um único ponto fixo positivo dado por $x^* = \frac{\mu^p - 1}{\mu - 1} \frac{L_{p-1}}{M_{p-1}}$, que é globalmente assintoticamente estável com respeito a condições iniciais positivas. Pelo **TEOREMA 3.1** sabemos que x^* tem período mínimo p ou r , onde $r|p$.

Também se conclui que a média da capacidade individual de suporte é inferior à média de números no ciclo p -periódico, isto é, $\frac{K_0 + K_1 + \dots + K_{p-1}}{p} < \frac{\bar{x}_0 + \bar{x}_1 + \dots + \bar{x}_{p-1}}{p}$ [27] e [28]. De uma forma geral, percebemos que ao forçar o sistema a ser periódico, com flutuações na capacidade de suporte individual, pode ser benéfico para a população, uma vez que em média, a população obterá uma capacidade de suporte superior à média da capacidade de suporte individual.

Resumindo:

- 1) $\Phi_p(x)$ assume dois pontos fixos, a origem e $x^* = K_\Phi^*$;
- 2) O ponto fixo $x^* = K_\Phi^*$ é globalmente assintoticamente estável e gera uma órbita p -periódica da forma $\{\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{p-1}\}$.

3.4. Modelo Polinomial com efeito de Allee periódico

Vamos começar este exemplo com a introdução de um lema aplicado às equações de diferenças não autónomas da forma $x_{n+1} = \mu x_n^k (1 - x_n)$, quando $k = 2$.

LEMA 3.2 (secção 2.7.3): Considere-se a equação de diferenças não autónoma dada por

$$x_{n+1} = \mu_n x_n^2 (1 - x_n),$$

onde

$$x_n \in [0,1], \mu_n \in \left(0, \frac{27}{4}\right], \text{ para } n = 0,1,2, \dots$$

e O_μ a bacia de atração imediata da origem. Então

$$4 \leq \mu_1 \leq \mu_2 \leq \frac{27}{4} \Rightarrow O_4 \supseteq O_{\mu_1} \supseteq O_{\frac{27}{4}},$$

onde O_4 é dada por

$$O_4 = \left[0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}, 1\right] \text{ e } O_{\frac{27}{4}} = \left[0, \frac{9-\sqrt{33}}{18}\right) \cup \left(\max f^{-1}\left(\left\{A_{\frac{27}{4}}\right\}\right), 1\right),$$

e

$$\max f^{-1}\left(\left\{A_{\frac{27}{4}}\right\}\right) \approx 0.97162 \text{ (ver [29] para mais detalhes).}$$

Vamos estudar o caso em que a equação $x_{n+1} = \mu x_n^{k_n}(1 - x_n)$ é p -periódica, isto é, $f_{n+p} = f_n$ para todo $n = 0,1,2, \dots$. A dinâmica desta equação é determinada pelo operador de composição de funções $\Phi_p = f_{p-1} \circ \dots \circ f_1 \circ f_0$.

Da hipótese **H**, assumida no Modelo Polinomial com efeito de Allee, resulta que $\Phi_p(I) \subseteq I$ com $\Phi_p(0) = 0$ e $\Phi_p(1) = 0$. Consequentemente, o operador de composição Φ_p tem um ponto fixo no intervalo unitário. Pelo **TEOREMA 1.2**, temos que $x^* = 0$ é um ponto fixo localmente assintoticamente estável de Φ_p , pois, $|\Phi_p'(0)| = 0 < 1$.

Caso $|\Phi_p(x)| < x$, para todo $x \in (0,1)$, $x^* = 0$ é o único ponto fixo do operador de composição Φ_p no intervalo unitário, sendo globalmente assintoticamente estável e a sua bacia de atração é o intervalo unitário. Este é o caso onde a estabilidade local implica a estabilidade global, pois todas as órbitas de $x_0 \in I$ irão convergir para a origem.

Considerando C_{Φ_p} como o conjunto dos pontos críticos de Φ_p , ou seja, o conjunto que contém todas as soluções no intervalo unitário das p equações $\Phi_i(x) = c_i$, $i = 0,1, \dots, p-1$, onde c_i é o ponto crítico da função f_i , então $\Phi_p(x) < x$, para todo $x \in (0,1)$ se $\Phi_p(c_{\Phi_p}) < c_{\Phi_p}$, onde $c_{\Phi_p} \in C_{\Phi_p}$.

Caso $|\Phi_p(x)| > x$ para algum $x \in (0,1)$, o operador de composição Φ_p tem mais do que um ponto fixo. Pelo **TEOREMA 1.3** sabemos que qualquer órbita converge para um ponto fixo se e só se a equação $\Phi_p \circ \Phi_p(x) = x$ não tem solução com a exceção dos pontos fixos de Φ_p . Notemos que não é possível, em geral, dizer muito sobre o número de pontos fixos de Φ_p uma vez que temos vários cenários. Contudo, todas estas funções f_i têm um ponto fixo de Allee A_i e assumindo $A_m = \min \{A_0, A_1, \dots, A_{p-1}\}$ e $A_M = \max \{A_0, A_1, \dots, A_{p-1}\}$, então podemos mostrar que o menor dos pontos fixos positivos de Φ_p , A_{Φ_p} , posiciona-se entre A_m e A_M , sendo um ponto fixo instável. Perante este cenário, a bacia de atração imediata da origem é $\cup_{i \geq 1} J_i$ onde $J_i \subset I$ e $\Phi_p(J_i) \subset [0, A_{\Phi_p})$.

Se x^* é um ponto fixo não trivial de Φ_p , então

$$\bar{C} = \{\bar{x}_0 = x^*, \bar{x}_1 = f_0(\bar{x}_0), \bar{x}_2 = f_1(\bar{x}_1), \dots, \bar{x}_{p-1} = f_{p-2}(\bar{x}_{p-2})\}$$

é um ciclo periódico da equação

$$x_{n+1} = \mu x_n^{k_n}(1 - x_n).$$

Isto acontece porque cada ponto fixo da função composta Φ_p , à exceção de $x^* = 0$, gera uma órbita periódica na equação $x_{n+1} = \mu x_n^{k_n}(1 - x_n)$. O ciclo \bar{C} é localmente assintoticamente estável quando $|\Phi'_p(x^*)| = |\prod_{i=0}^{p-1} f'_i(\bar{x}_i)| < 1$.

Vamos estudar apenas os casos onde é possível visualizar a região de estabilidade dos pontos fixos da função composta Φ_p , que são os casos onde $p = 2$ e $k = 2, 3, 4$, isto é, vamos estudar a dinâmica do sistema quando a sequência de funções é 2-periódica e dada por

$$f_{n \bmod(2)}(x) = \mu_{n \bmod(2)} x^k(1 - x), k = 2, 3, 4.$$

Começando pelo caso em que $k = 2$ e seguindo as técnicas implementadas em [30], podemos encontrar a região de estabilidade local dos pontos fixos da função composta $\Phi_2 = f_1 \circ f_0$, calculando a fronteira quando $|\Phi'_2(x^*)| = 1$. Isto acontece quando

$$\begin{cases} f_1(f_0(x^*)) = x^* \\ f'_1(f_0(x^*))f'_0(x^*) = 1 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} f_1(f_0(x^*)) = x^* \\ f'_1(f_0(x^*))f'_0(x^*) = -1 \end{cases}$$

Localizando, no espaço de parâmetros, as curvas onde as duas equações anteriores são satisfeitas, encontramos a região onde a estabilidade do ponto fixo de Φ_2 ocorre. A **FIGURA 3.3** representa a região de estabilidade local, no espaço de parâmetros $\mu_0 O \mu_1$.

Se os parâmetros μ_0 e μ_1 pertencem à região O , então a origem é um ponto fixo globalmente assintoticamente estável. Quando os parâmetros atravessam a linha tracejada, da região O para a região S , ocorre uma bifurcação sela-nó. O ponto fixo $x^* = 0$ torna-se instável e aparece um novo ponto de fixo estável de Φ_2 . Este ponto fixo é um ciclo 2-periódico da equação $x_{n+1} = \mu x_n^{k_n}(1 - x_n)$. Agora, se os parâmetros atravessarem a linha tracejada da região S para a região R , ocorrerá uma bifurcação sela-nó. O ciclo 2-periódico torna-se instável e aparece um novo ciclo 2-periódico localmente assintoticamente estável.

Quando os parâmetros cruzam a linha contínua da região S para a região A_i , $i = 1, 2, 3$ ocorre uma duplicação de período. O 2-ciclo torna-se instável e aparece um 4-ciclo localmente assintoticamente estável.

Para uma estrutura geral de bifurcação numa equação de diferenças periódica a uma dimensão temos como referência o trabalho em [9].

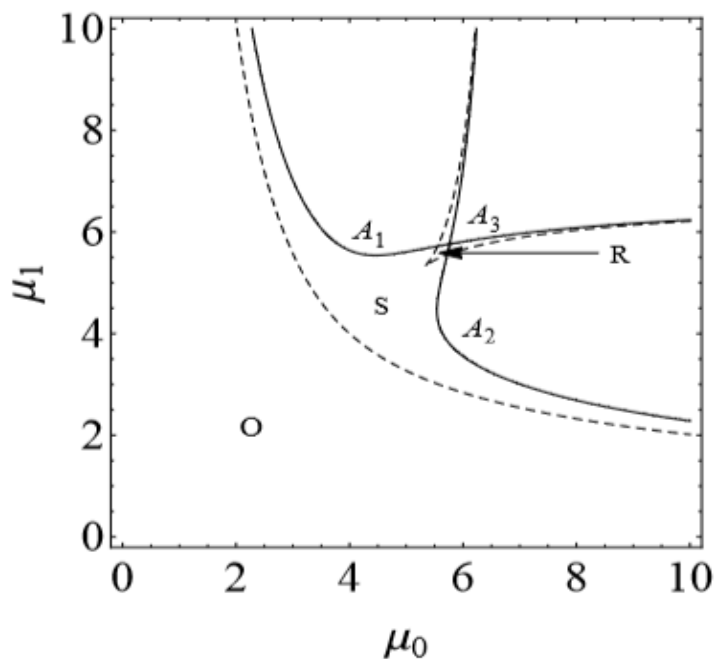
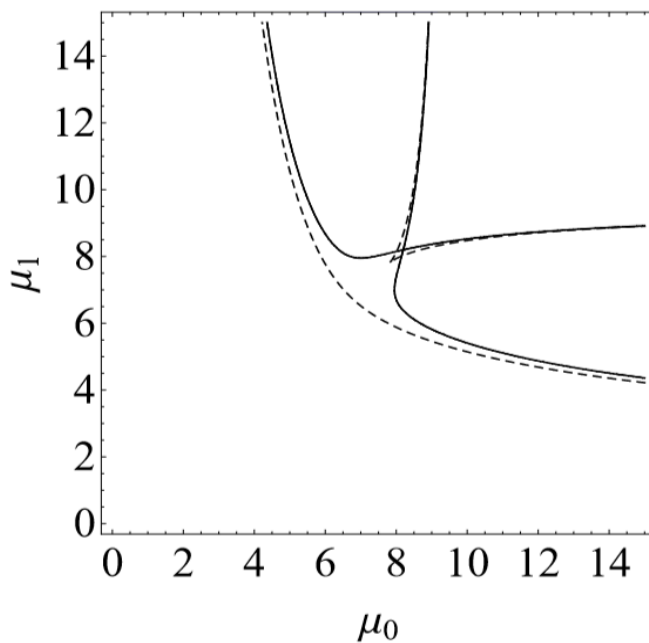
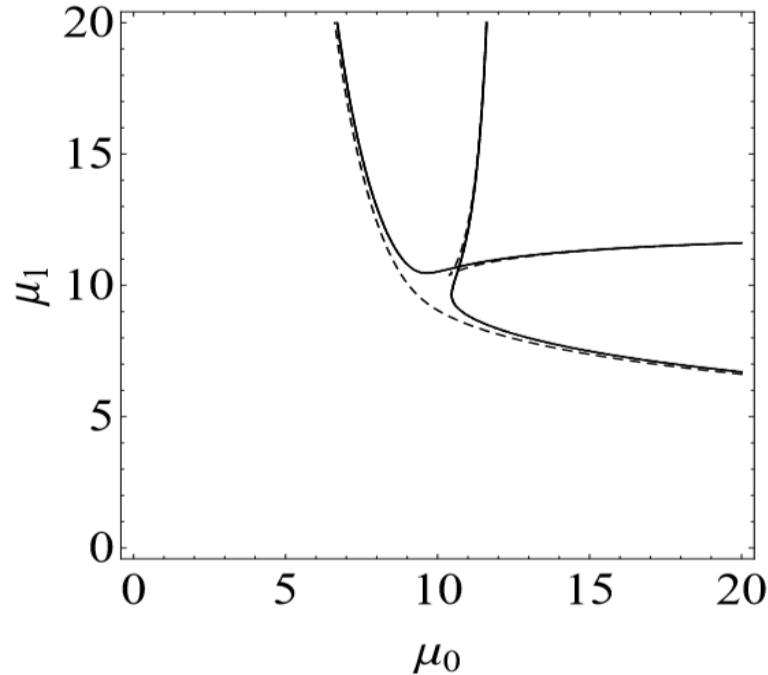


FIGURA 3.3 - Região de estabilidade local, no espaço de parâmetros $\mu_0 O \mu_1$, onde os pontos fixos de $f_1 \circ f_2$ são localmente assintoticamente estáveis e as funções são dadas por $f_i(x) = \mu_i x^2(1 - x)$, $i = 0, 2$.

As conclusões para os casos em que $k = 3$ e $k = 4$ são similares ao caso em que $k = 2$ (ver **FIGURA 3.4**).



(a)



(b)

FIGURA 3.4 - Regiões de estabilidade local no espaço de parâmetros da equação 2-periódica quando $k = 3$ (a) e $k = 4$ (b).

3.5. Envolvência (“Enveloping”)

Um conceito alternativo para se estudar a estabilidade global em modelos autônomos, é o conceito de envolvência (“enveloping”). Em vários artigos científicos, P. Cull e os seus colaboradores apresentam uma teoria que afirma que envolvência implica estabilidade global para certos modelos autônomos. O conceito de envolvência é o seguinte:

DEFINIÇÃO 3.2 (Envolvência [15]): Uma função $h(x)$ envolve uma função $f(x)$ se e só se:

- (i) $h(x) > f(x)$, $\forall x \in (0, x^* = 1)$;
- (ii) $h(x) < f(x)$ para $x > x^* = 1$ tal que $h(x) > 0$ e $f(x) > 0$;

Em consequência da **DEFINIÇÃO 3.2** e do **TEOREMA 2.1** surge o seguinte resultado:

TEOREMA 3.4 [15]: Se $f(x)$ é envolvido por $g(x)$ e $g(x)$ é globalmente assintoticamente estável, então $f(x)$ é globalmente assintoticamente estável.

A função de envolvência cria uma regra central que é apresentada em [31] pelo teorema que se segue.

TEOREMA 3.5: Seja $h(x)$ uma função monótona decrescente que é positiva em $(0, x_h > 1)$ de modo que $h(h(x)) = x$. Assumindo que $f(x)$ é uma função contínua, temos:

- (i) $h(x) > f(x)$ em $(0, 1)$;
- (ii) $h(x) < f(x)$ em $(1, x_h)$;

- (iii) $f(x) > x$ em $(0,1)$;
- (iv) $f(x) < x$ em $(1, \infty)$;
- (v) $f(x) > 0$ sempre que $x > 1$

Então, para todo $x > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = 1$.

O **TEOREMA 3.5** mostra a importância da função de envoltória na estabilidade global, o desafio passa por encontrar uma envoltória apropriada. Para isso, a transformação de Möbius pode ajudar.

TEOREMA 3.6 [31]: Se $f(x)$ é envolvido por uma função linear fracionária da forma $h(x) = \frac{1-\alpha x}{\alpha-(2\alpha-1)x}$, $\alpha \in [0,1)$, então $f(x)$ é globalmente estável.

OBSERVAÇÃO 3.5: Em [32] são estudadas funções de envoltória para modelos da forma $x_{n+1} = x_n + f(x_n)$ e para tal é usado a derivada de Schwartz da função f , os seus resultados são baseados na seguinte proposição.

PROPOSIÇÃO 3.1: Seja f um modelo populacional e suponhamos que f é uma função de classe C^3 que tem no máximo um ponto crítico x_c . Se $|f'(x^*)| \leq 1$ e $Sf(x) < 0, \forall x \neq x_c$, então x^* é um ponto fixo globalmente assintoticamente estável de f , onde Sf é a derivada de Schwartz de f dada por

$$Sf(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(x)}{f'(x)} \right)^2.$$

3.5.1. Envoltória em modelos periódicos

Na dinâmica de populações é comum trabalhar com famílias de funções definidas por parâmetros. Se estamos a trabalhar com um certo modelo populacional, podemos sempre redimensionar o ponto fixo positivo para $x^* = 1$. Perante este cenário, uma família de funções terá o mesmo ponto fixo positivo. Considerando esta ideia, podemos formular uma hipótese.

HIPÓTESE 1: Seja $F = \{f_0, f_1, f_2, \dots\}$ um conjunto de modelos populacionais (de classe C^1) tal que $f_i(1) = 1, \forall i = 0,1,2, \dots$. Onde a composição

$$\Phi_p(x) = f_{p-1} \circ \dots \circ f_1 \circ f_0(x)$$

é contínua no subconjunto dos números reais não negativos. Assumindo ainda, por forma a garantir a periodicidade da equação $x_{n+1} = f_n(x_n)$, que as funções de F são de período p , isto é, $f_{n+p} = f_n, \forall n \in \mathbb{R}_0^+$.

OBSERVAÇÃO 3.6: A composição de modelos populacionais nem sempre é um modelo populacional, isto vai depender das funções individuais.

EXEMPLO 3.2

Em [33], R. Luís e E. Rodrigues dão como exemplo as funções

$$f_0(x) = \begin{cases} 4x & \text{se } 0 \leq x < 0.6 \\ -3.5x + 4.5 & \text{se } 0.6 \leq x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

e

$$f_1(x) = \begin{cases} 3x & \text{se } 0 \leq x < 0.5 \\ -x + 2 & \text{se } 0.5 \leq x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{se } x > 1 \end{cases}.$$

Na **FIGURA 3.5** podemos observar o gráfico da função $\Phi_2 = f_1 \circ f_0(x)$. Claramente que Φ_2 não é um modelo populacional, uma vez que apresenta mais do que um ponto fixo positivo.

Este exemplo motivou a seguinte proposição:

PROPOSIÇÃO 3.2 [33]: Sob a **HIPÓTESE 1** a função composta $\Phi_p(x)$ é crescente em $(0, c_\Phi)$, para um determinado $c_\Phi > 0$. Além disso, existe $x_\Phi < x_\Phi^*$ tal que

$$\Phi_p(x) > f_i(x), \forall x \in (0, x_\Phi), i \in \{0, 1, \dots, p-1\} \text{ com } \Phi_p(x_\Phi^*) = x_\Phi^*.$$

A apresentação de uma segunda hipótese carece da introdução de um exemplo. Em [33] está mostrado que a “envolvência individual” não implica a “envolvência periódica”.

EXEMPLO 3.3

Dado $f_0(x) = xe^{1.5(1-x)}$ e $f_1(x) = xe^{1.2(1-x)}$ e assumindo que $f_{n+2} = f_n, \forall n \in \mathbb{R}_0^+$, concluímos que $f_0, f_1 \in F$ e $x_{n+1} = f_n(x_n)$ é uma equação de diferenças 2-periódica.

As funções f_0 e f_1 são envolvidas pela função $g(x) = xe^{2(1-x)}$, sendo $g(x)$ um modelo populacional globalmente assintoticamente estável uma vez que está envolvida pela função fracionária decrescente $h(x) = 2 - x$. Pelo **TEOREMA 3.4**, podemos concluir que as funções individuais $f_i(x), i = 0, 1$ são globalmente estáveis já que são envolvidas por $g(x)$.

Para estudar a dinâmica da equação de diferenças 2-periódica, estudamos a dinâmica da função

$$\Phi_2(x) = f_1 \circ f_0(x) = xe^{2.7-1.5x-1.2xe^{1.5(1-x)}}.$$

Representado o gráfico de $\Phi_2(x)$ podemos concluir que existe um valor positivo $a < 1 = x_\Phi^*$ tal que

$$\Phi_2(x) > xe^{2(1-x)}, \forall x \in (0, a) \text{ e } \Phi_2(x) < xe^{2(1-x)}, \forall x \in (a, 1).$$

Contudo, $\Phi_2(x)$ não é envolvida por $g(x)$ (recorde-se que as funções individuais f_0 e f_1 o são). Consequentemente, não podemos concluir a estabilidade de $\Phi_2(x)$ através da envolvência individual $g(x)$. No entanto, $\Phi_2(x)$ é envolvida por $h(x) = 2 - x$ e consequentemente é globalmente estável (ver **TEOREMA 3.6**).

Para encontrar uma certa classe de funções onde a envolvência individual implica a envolvência periódica e considerando os exemplos anteriores, temos que garantir: (i) que a

composição de modelos populacionais é um modelo populacional e (ii) que a envoltória individual é também uma envoltória para a função composta, isto é, temos que garantir que a função composta tem exatamente dois pontos fixos, a origem e um ponto fixo positivo x_{Φ}^* , e que $\Phi_p(x) > x$ se $x \in (0, x_{\Phi}^*)$ e $\Phi_p(x) < x$ se $x > x_{\Phi}^*$, e então existe uma envoltória para uma sequência de funções individuais f_i que envolvem a função composta. Estas observações motivam a apresentação da segunda hipótese.

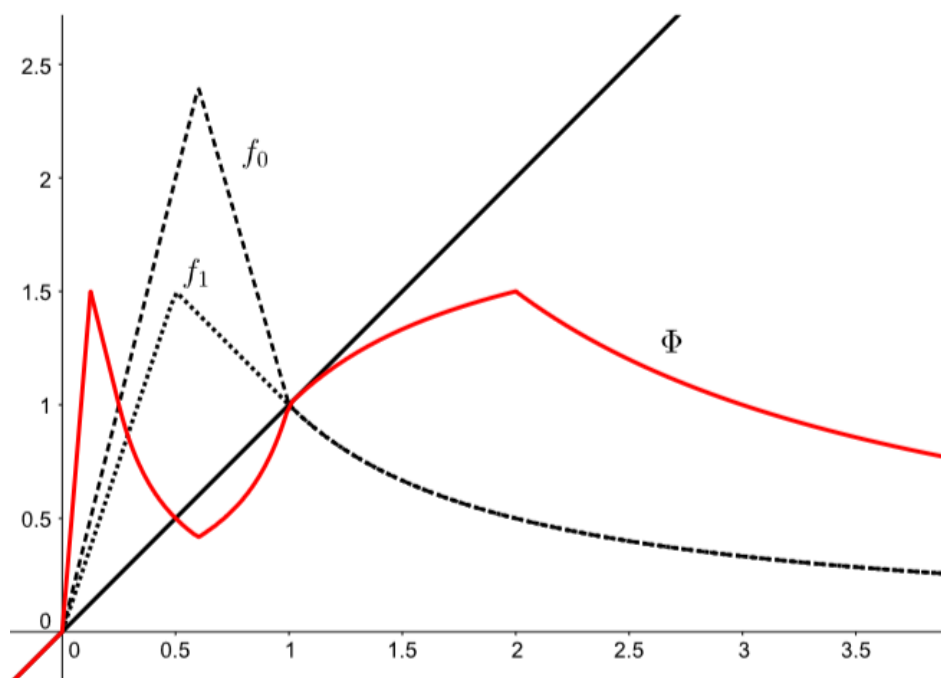


FIGURA 3.5 - Este exemplo mostra que a composição de modelos populacionais pode não ser um modelo populacional.

HIPÓTESE 2: Existe uma envoltória h , decrescente, tal que $h(x)$ envolve todas as funções no conjunto F e $h \circ h(x) = x$.

A seguinte proposição pode ajudar-nos na construção de uma envoltória.

PROPOSIÇÃO 3.3: Seja h uma envoltória de um modelo populacional f nas condições da **HIPÓTESE 2**. Considerando o gráfico de f e a curva S_f , obtida pela simetria do gráfico de f com respeito à diagonal $y = x$, temos que o gráfico de h posiciona-se entre o gráfico de f e a curva S_f , à exceção do ponto fixo $x^* = 1$.

Estamos agora aptos a apresentar o seguinte resultado:

TEOREMA 3.7: Sob a **HIPÓTESE 1** e **HIPÓTESE 2**, a função composta $\Phi_p(x)$ é um modelo populacional globalmente assintoticamente estável.

Será benéfico, em certos casos considerar o seguinte corolário:

COROLÁRIO 3.1: Se f_0, f_1, \dots, f_{p-1} são modelos populacionais e se a função composta Φ_p não é um modelo populacional, então não pode existir uma envolvência h nas condições da **HIPÓTESE 2** tal que h envolva todos os modelos populacionais individuais.

3.5.2. Aplicações

3.5.2.1. Modelo de Ricker

Consideremos a equação de diferenças periódica $x_{n+1} = R_n(x_n)$, onde a sequência $R_n(x)$ é dada por

$$R_n(x) = xe^{r_n(1-x)}, \quad r_n > 0, n = 0, 1, 2, \dots$$

A condição de estabilidade local é $0 < r_n \leq 2$, $n \in \{0, 1, \dots\}$ para cada modelo populacional individual $R_i(x)$. Esta implica estabilidade global de $R_i(x)$, uma vez que as funções individuais $R_n(x)$, $n \in \{0, 1, \dots\}$ são envolvidas por $h(x) = 2 - x$, que é uma função fracionária decrescente com $\alpha = 1/2$ (ver **TEOREMA 3.6**). Por outras palavras, $x^* = 1$ é um ponto fixo globalmente assintoticamente estável de $R_n(x)$, $n \in \{0, 1, \dots\}$. Notemos que $h \circ h(x) = x$, portanto a **HIPÓTESE 2** é satisfeita.

Por forma a haver periodicidade, exigimos que

$$R_{n+p} = R_n, \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots,$$

isto é, a sequência de parâmetros satisfaz a condição $r_n = r_{n \bmod p}$, para todo o valor de n . Sabemos que a função composta

$$\Phi_p(x) = R_{p-1} \circ \dots \circ R_1 \circ R_0(x)$$

é contínua em \mathbb{R}_0^+ . Consequentemente, a **HIPÓTESE 1** é satisfeita. Do **TEOREMA 3.7** segue-se que $\Phi_p(x)$ é um modelo populacional globalmente assintoticamente estável, isto é, a equação de diferenças p -periódica de Ricker é globalmente estável sempre que

$$r_n \in (0, 2], \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Concluimos assim que nesta família de modelos populacionais, envolvência individual implica envolvência periódica.

Na **FIGURA 3.6** é representado um exemplo concreto onde $r_0 = 1.8$, $r_1 = 1.2$ e $r_2 = 0.5$. A função composta $\Phi_3 = R_2 \circ R_1 \circ R_0$ é representada pela curva sólida. A linha tracejada representa a função envolvente enquanto que as outras linhas representam os modelos populacionais individuais. Neste caso envolvência individual implica envolvência periódica e consequentemente a estabilidade global do ponto fixo positivo da equação periódica.

Notemos que $\prod_{i=0}^{p-1} |1 - r_i| < 1$ é a condição de estabilidade para o ponto fixo $x^* = 1$ perante a função composta Φ_p .

OBSERVAÇÃO 3.7: Em [24] é usado um método diferente para mostrar a estabilidade global do modelo do tipo de Ricker dado por $x_{n+1} = x_n e^{r_n - x_n}$ na região do parâmetro $0 < r_n \leq 2$, $n = 0, 1, 2, \dots, p - 1$.

3.5.2.2. Modelo de Beverton-Holt generalizado

Seja $x_{n+1} = B_n(x_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, onde a função B_n é dada por $B_n = \frac{\mu_n x}{1 + (\mu_n - 1)x^{c_n}}$.

Vamos assumir que $\mu_n > 1$ e $0 < c_n \leq 2$, para todo $n = 0, 1, 2, \dots$.

A função individual populacional $B_n(x)$ tem dois pontos fixos, a origem e um ponto fixo positivo dado por $x^* = 1$. A origem é um ponto fixo instável pois

$$|B'_n(0)| = \mu_n > 1, \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots$$

A condição de estabilidade local do ponto fixo positivo é dada por

$$\mu_n(c_n - 2) \leq c_n, \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots$$

Esta condição implica estabilidade global uma vez que cada função individual $B_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ é envolvida por $h(x) = \frac{1}{x}$, que é uma função fracionária decrescente com $h \circ h(x) = x$. Consequentemente a **HIPÓTESE 2** é satisfeita.

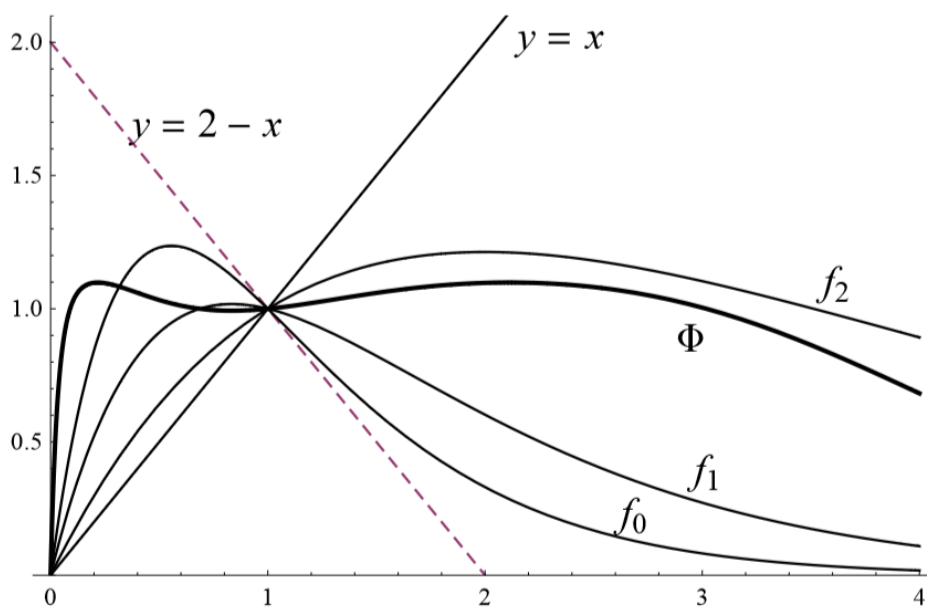


FIGURA 3.6 - Uma ilustração da “envolvência individual” (curvas mais finas) e da “envolvência composta” (curva a negrito) numa família de funções de Ricker.

Vamos assumir agora a periodicidade da função B_n tomando como regras $\mu_{n+q} = \mu_n$ e $c_{n+r} = c_n$, para qualquer $q, r = 1, 2, 3, \dots$. Isto implica que $B_{n+p} = B_n$, onde $p = mmc(q, r)$.

Pelo facto de $\mu_n > 1$, para todo n , segue-se que $1 + (\mu_n - 1)x^{c_n} > 0$, para $x \in \mathbb{R}^+$. Consequentemente, a função composta do modelo de Beverton-Holt é bem definida e daí é garantida a continuidade da função composta, logo, a **HIPÓTESE 1** é satisfeita. Pelo **TEOREMA 3.7** temos que

$$\Phi_p(x) = B_{p-1} \circ \dots \circ B_1 \circ B_0(x)$$

é um modelo populacional globalmente assintoticamente estável. Assim, a equação p -periódica de Beverton-Holt

$$x_{n+1} = B_n(x_n), B_{n+p} = B_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

é globalmente estável quando

$$\mu_n > 1 \text{ e } 0 < c_n \leq 2.$$

Notemos que a condição de estabilidade do ponto fixo positivo de Φ_p é dada por

$$\prod_{i=0}^{p-1} |1 + (\mu_i - 1)(1 - c_i)| < \prod_{i=0}^{p-1} \mu_i.$$

OBSERVAÇÃO 3.8: Quando $c_n = 1$, temos o modelo de Beverton-Holt clássico estudado na secção 3.3.

Por forma a ter um estudo completo deste modelo, temos que estudar os casos onde $c_n > 2$ para todo n por um possível caso de mistura nos parâmetros c_n , isto é, alguns dos parâmetros são inferiores ou iguais a 2 e outros são maiores que 2. Perante este cenário, a envolveria individual é dada por

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } c_n \leq 2 \\ \frac{c_n - 1 - (c_n - 2)x}{c_n - 2 - (c_n - 3)x} & \text{se } c_n > 2 \end{cases}.$$

Em certos casos é possível encontrar uma envolveria comum para todas as p funções individuais e consequentemente a estabilidade global da equação periódica. Contudo, isto não é um caso geral, como mostramos no **EXEMPLO 3.4**.

EXEMPLO 3.4

Seja $\mu_0 = 1.1, \mu_1 = 7, c_0 = 7.5, c_1 = 2.3$, então as funções individuais são dadas por

$$f_0(x) = \frac{1.1x}{1+0.1x^{0.5}} \text{ e } f_1(x) = \frac{7x}{1+6x^{2.3}}.$$

As funções f_0 e f_1 são modelos populacionais globalmente assintoticamente estáveis com respeito ao ponto fixo positivo já que estas funções são envolvidas por

$$h_0(x) = \frac{6.5-5.5x}{5.5-4.5x} \text{ e } h_1(x) = \frac{1.3-0.3x}{0.3+0.7x}$$

respetivamente. Na **FIGURA 3.7** podemos ver que neste caso não é possível encontrar uma envoltência decrescente que envolva simultaneamente os modelos populacionais individuais f_0 e f_1 .

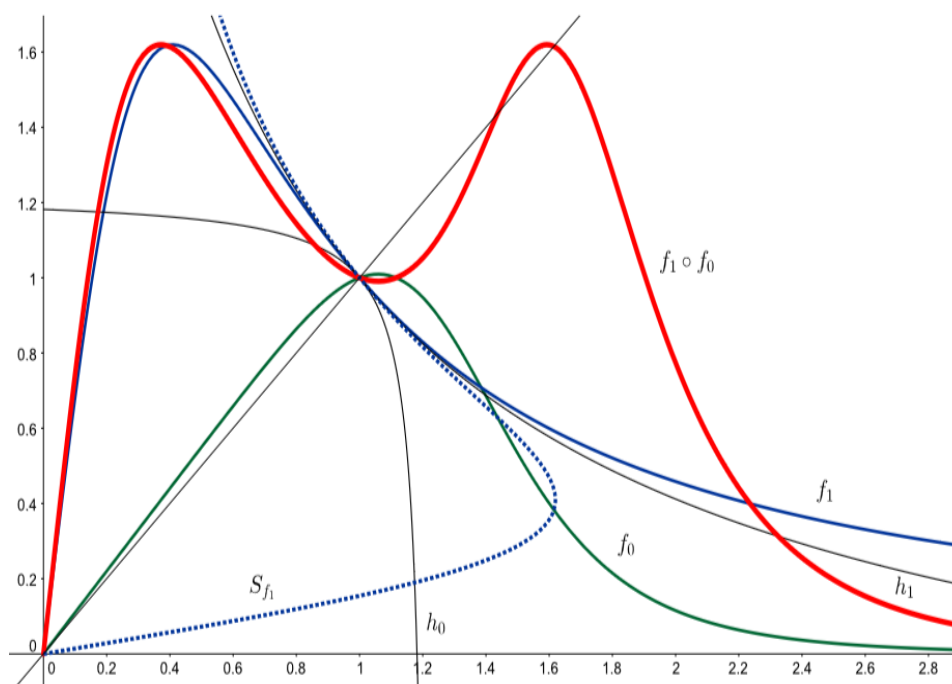


FIGURA 3.7 - Este exemplo mostra que não existe estabilidade global no modelo de Beverton-Holt 2-periódico, quando $\mu_0 = 1.1$, $\mu_1 = 7$, $c_0 = 7.5$, $c_1 = 2.3$.

Como é claramente verificado na **FIGURA 3.7**, a função composta $\Phi_2(x) = f_1 \circ f_0(x)$ apresenta três pontos fixos (e conseqüentemente não pode ser globalmente estável), pelo que Φ_2 não é um modelo populacional. Do **COROLÁRIO 3.1** concluímos que não pode existir uma envoltência decrescente h , com $h \circ h(x) = x$, tal que h envolve simultaneamente f_0 e f_1 .

Notemos que, se esta envoltência existisse, então pela **PROPOSIÇÃO 3.3** ela posicionava-se entre os gráficos de f_0 e f_1 e as respetivas curvas S_{f_0} e S_{f_1} obtidas de f_0 e f_1 fazendo o simétrico com respeito à diagonal $y = x$. Como é claramente visível na **FIGURA 3.7**, existe um intervalo $]a, b[\subset]1.5, 1.6[$ onde não se verifica envoltência.

3.5.2.3. MODELOS MISTOS

3.5.2.3.1. Modelo de Beverton-Holt agindo com o modelo de Ricker

Consideremos que a seqüência de funções é dada por

$$f_n(x) = \begin{cases} xe^{r_n(1-x)}, & \text{se } n \text{ é par} \\ \frac{\mu_n x}{1 + (\mu_n - 1)x^{c_n}}, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

onde $0 < r_n \leq 2$, $\mu_n > 1$ e $0 < c_n \leq 1$, para todo n .

É necessário assumir a periodicidade dos parâmetros, isto é,

$$r_{n+q} = r_n, \mu_{n+r} = \mu_n \text{ e } c_{n+s} = c_n,$$

para algum inteiro positivo q, r e s . Consequentemente, a equação $x_{n+1} = f_n(x_n)$ é p -periódica com $p = mmc(q, r, s)$. Claramente, $f_n(x) \in F$ e consequentemente a **HIPÓTESE 1** é satisfeita.

Agora, da secção do **Modelo de Ricker**, temos que a sequência de funções $f_{2n}(x)$, $n = 0, 1, \dots$ é envolvida pela função decrescente $h(x) = 2 - x$.

Verificamos que

$$f_{2n+1}(x) = \frac{\mu_{2n+1}x}{1 + (\mu_{2n+1} - 1)x^{c_{2n+1}}}, \mu_n > 1 \text{ e } 0 < c_n \leq 1, n = 1, 3, 5, \dots$$

é igualmente envolvida por $h(x) = 2 - x$. Temos que

$$f_{2n+1}(1) = h(1),$$

onde h é decrescente e $f_{2n+1}(x)$ é crescente já que

$$f_{2n+1}'(x) = \frac{\mu_{2n+1} + \mu_{2n+1}(\mu_{2n+1} - 1)(1 - c_{2n})x^{c_{2n+1}}}{(1 + (\mu_{2n+1} - 1)x^{c_{2n+1}})^2} > 0,$$

logo, a **HIPÓTESE 2** é satisfeita. Do **TEOREMA 3.7** segue-se que

$$\Phi_p(x) = f_{p-1} \circ \dots \circ f_1 \circ f_0(x)$$

é um modelo populacional globalmente assintoticamente estável, pelo que a equação de diferenças p -periódica $x_{n+1} = f_n(x_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ é globalmente estável.

Por fim determinamos a condição de estabilidade perante o operador de composição, que é dado por $|\Phi_p'(1)| < 1$, com

$$\Phi_p'(1) = \begin{cases} \prod_{n=0}^{\frac{p}{2}-1} \frac{(1 - r_{2n})(\mu_{2n+1} - (\mu_{2n+1} - 1)c_{2n+1})}{\mu_{2n+1}} & \text{se } p \text{ é par} \\ (1 - r_{p-1}) \prod_{n=0}^{\frac{p}{2}-1} \frac{(1 - r_{2n})(\mu_{2n+1} - (\mu_{2n+1} - 1)c_{2n+1})}{\mu_{2n+1}} & \text{se } p \text{ é ímpar} \end{cases}$$

OBSERVAÇÃO 3.9 : Notemos que uma abordagem semelhante pode ser feita no caso de considerarmos a sequência de Beverton-Holt quando n é par e a sequência do modelo de Ricker quando n é ímpar.

3.5.2.3.2. Modelo Exponencial e modelo Racional

Consideremos a equação de diferenças não autónoma dada por

$$x_{n+1} = \frac{(1 + a_n e^{b_n})x_n}{1 + a_n e^{b_n x_n}},$$

onde $0 < b_n \leq 2$ e $a_n > 0$, para todo $n = 0, 1, 2, \dots$, definida pela função

$$f_n(x) = \frac{(1 + a_n e^{b_n})x_n}{1 + a_n e^{b_n x_n}}.$$

A condição de estabilidade no ponto fixo $x^* = 1$ é dada por

$$a_n(b_n - 2)e^{b_n} \leq 2$$

e implica estabilidade global uma vez que cada função f_n é envolvida por

$$h(x) = 2 - x \text{ em } \mathbb{R}_0^+.$$

Notemos que o ponto fixo $x^* = 1$ é estável quando $|f'(1)| < 1$. Como

$$f'(x) = \frac{(1 + ae^b)(1 + ae^{bx}) - (1 + ae^b)abe^{bx}}{(1 + ae^{bx})^2}$$

temos que

$$|f'(1)| = \left| \frac{(1 + ae^b)^2 - (1 + ae^b)abe^b}{(1 + ae^b)^2} \right| = \left| 1 - \frac{abe^b}{(1 + ae^b)} \right|.$$

Para $|f'(1)| < 1$ vem

$$1 - \frac{abe^b}{(1 + ae^b)} < 1 \vee 1 - \frac{abe^b}{(1 + ae^b)} > -1,$$

de onde sai que

$$\frac{abe^b}{(1 + ae^b)} > 0 \vee \frac{abe^b}{(1 + ae^b)} < 2.$$

Isto é equivalente a

$$0 < abe^b < 2(1 + ae^b),$$

ou seja,

$$a(b - 2)e^b < 2.$$

Seja

$$a_{n+q} = a_n e b_{n+r} = b_n, \text{ para todo } n = 0, 1, 2, \dots$$

Então a sequência de funções é p -periódica, onde $p = mmc(q, r)$, isto é, a equação de diferenças não autônoma $x_{n+1} = f_n(x_n)$ é p -periódica. Claramente, a função composta $\Phi_p(x)$ é contínua em \mathbb{R}_0^+ pois

$$1 + a_n e^{b_n x_n} \neq 0, \text{ para todo } n = 0, 1, 2, \dots$$

Sob a **HIPÓTESE 1** e a **HIPÓTESE 2** resulta, pelo **TEOREMA 3.7** que a equação de diferenças $x_{n+1} = \frac{(1+a_n e^{b_n})x_n}{1+a_n e^{b_n x_n}}$ apresenta estabilidade global.

3.5.2.3.3. Modelo Quadrático

Seja

$$x_{n+1} = L_n(x_n),$$

onde

$$L_n(x) = x(1 + \mu_n(1 - x)), x \in I_n = \left[0, 1 + \frac{1}{\mu_n}\right], \text{ para todo } n = 0, 1, 2, \dots$$

A condição para a estabilidade local para cada modelo populacional individual $L_n(x)$, $n \in \{0, 1, \dots, p - 1\}$ é $0 < \mu_i \leq 2$. A função fracionária $h(x) = \frac{4-3x}{3-2x}$ envolve cada função

$$L_n(x), n \in \{0, 1, \dots, p - 1\}.$$

Assim $L_n(x)$ é um modelo populacional globalmente assintoticamente estável. Note-se que

$$h \circ h(x) = x,$$

pelo que a **HIPÓTESE 2** é satisfeita.

Vamos agora assumir a periodicidade da equação de diferenças fazendo

$$L_{n+p} = L_n, \text{ para todo } n = 0, 1, 2, \dots,$$

isto é, a sequência de parâmetros é p -periódica. Por forma a garantir a continuidade do operador de composição, vamos construir o intervalo J da seguinte forma:

Seja J um intervalo dado por

$$J = \bigcap_{n=0}^{p-1} \left[0, 1 + \frac{1}{\mu_n}\right],$$

o intervalo J é definido como

$$J = \bigcap_{i=0}^{p-1} L_n(J).$$

Concluimos que $J \supseteq [0,1]$, $\Phi_p(1) = 1$ e $\Phi_p(x)$ é contínuo para todo $x \in J$, logo a **HIPÓTESE 1** é satisfeita. Do **TEOREMA 3.7** temos que

$$\Phi_p(x) = L_{p-1} \circ \dots \circ L_1 \circ L_0(x), \quad x \in J$$

é um modelo populacional globalmente assintoticamente estável quando

$$0 < \mu_n \leq 2, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Consequentemente, $x^* = 1$ é um ponto fixo globalmente estável da equação de diferenças p -periódica $x_{n+1} = L_n(x_n)$.

3.5.2.3.4. Modelo de Beverton-Holt com Colheita

Consideremos a equação de diferenças $x_{n+1} = f_n(x_n)$, onde a sequência de funções f_n é dada por

$$f_n(x) = \frac{r_n x}{1 + (r_n - 1)x} - c_n x(1 - x), \quad r_n > 1, \quad 0 < c_n < 1, \quad \text{para todo } n.$$

Neste modelo, vamos considerar x no intervalo

$$\mathcal{J}_n = \left[0, \frac{(r_n - 2)\sqrt{c_n} - \sqrt{r_n(r_n(4 + c_n) - 4)}}{2(r_n - 1)\sqrt{c_n}} \right].$$

Claramente, $f_n(x)$ é um modelo populacional para todo $x \in \mathcal{J}_n$. Além disso, o ponto fixo de extinção é instável já que $f_n'(0) = r_n + c_n > 1$, para todo $n = 0, 1, 2, \dots$. A condição de estabilidade local para $x^* = 1$ é dada por

$$0 < c_n < \frac{1 + r_n}{r_n}, \quad \text{para todo } n.$$

A função fracionária $h(x) = \frac{11-8x}{8-5x}$ envolve cada função individual $f_n(x)$, $n = 0, 1, 1, \dots$ e assim $f_n(x)$ é um modelo populacional globalmente assintoticamente estável para todo x pertencente ao intervalo definido \mathcal{J}_n e $0 < c_n < \frac{1+r_n}{r_n}$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Notemos que $h \circ h(x) = x$ e que portanto a **HIPÓTESE 2** é satisfeita.

Vamos agora assumir a periodicidade dos parâmetros fazendo

$$r_{n+q} = r_n \text{ e } c_{n+r} = c_n, \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots$$

Consequentemente, a sequência de funções é p -periódica, onde $p = mmc(q, r)$. Definindo o intervalo J da seguinte forma

$$J = \bigcap_{n=0}^{p-1} f_n(J), \text{ onde } J = \bigcap_{n=0}^{p-1} J_n.$$

A **HIPÓTESE 1** e a **HIPÓTESE 2** são satisfeitas, segue pelo **TEOREMA 3.7** que $\Phi_p(x) = f_{p-1} \circ \dots \circ f_1 \circ f_0(x)$, $x \in J$ é um modelo populacional globalmente assintoticamente estável quando $0 < c_n < \frac{1+r_n}{r_n}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, isto é, $x^* = 1$ é um ponto fixo globalmente estável da equação de diferenças p -periódica de Beverton-Holt com colheita.

Em termos de conclusão, se a sequência de modelos populacionais é envolvida por uma função decrescente comum h tal que $h \circ h(x) = x$, então a equação periódica é globalmente estável com respeito ao ponto fixo positivo.

3.6. Atenuância e Ressonância (“Attenuance and Resonance”)

Vamos estudar a atenuância e a ressonância em alguns modelos periódicos, isto é, vamos comparar a média das capacidades de suporte (“carrying capacities”) com a média do ciclo periódico.

DEFINIÇÃO 3.3 (Atenuância e Ressonância): Diz-se que um sistema periódico globalmente assintoticamente estável é atenuante se a média dos membros de um ciclo periódico é inferior à média dos pontos fixos das funções individuais. Caso contrário, o sistema diz-se ressonante.

EXEMPLO 3.5

Sejam x_0^* e x_1^* , pontos fixos globalmente assintoticamente estáveis de f_0 e f_1 , respetivamente. Sabemos que $\{\bar{x}_0, \bar{x}_1\}$ é um 2-ciclo globalmente assintoticamente estável de $x_{n+1} = f_n(x_n)$. Então se $\frac{\bar{x}_0 + \bar{x}_1}{2} < \frac{x_0^* + x_1^*}{2}$, a equação é atenuante e se $\frac{\bar{x}_0 + \bar{x}_1}{2} > \frac{x_0^* + x_1^*}{2}$, a equação é ressonante. Quando $\frac{\bar{x}_0 + \bar{x}_1}{2} = \frac{x_0^* + x_1^*}{2}$, a equação não é atenuante nem ressonante.

3.6.1. A Equação de Beverton-Holt

Em [28] é admitido que uma equação de Beverton-Holt p -periódica não autónoma com uma variação periódica da capacidade de suporte deve ser atenuante. Isto significa que se $C_p = \{\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{p-1}\}$ é um ciclo p -periódico globalmente assintoticamente estável, e K_i , $0 \leq i \leq p - 1$ representam as capacidades de suporte individuais, então

$$\frac{1}{p} \sum_{i=0}^{p-1} \bar{x}_i < \frac{1}{p} \sum_{i=0}^{p-1} K_i.$$

Como o ciclo periódico C_p é globalmente assintoticamente estável em $(0, \infty)$, concluímos que para qualquer densidade populacional inicial x_0 , a média de tempo da densidade populacional x_n é eventualmente menor que a média das capacidades de suporte, i.e.,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} x_i < \frac{1}{p} \sum_{i=0}^{p-1} K_i.$$

A relação anterior dá uma justificação para o uso da palavra atenuante para descrever o fenómeno em que uma flutuação periódica da capacidade de suporte da equação de Beverton-Holt tem um efeito lesivo na população. Esta conjectura foi primeiramente provada por Elaydi e Sacker em [23] e [34] e independentemente por Kocic [35] e Kon [36], entre outros. O seguinte teorema sumariza estas descobertas.

TEOREMA 3.8 [34]: Consideremos a equação de Beverton-Holt p -periódica

$$x_{n+1} = \frac{\mu K_n x_n}{K_n + (\mu - 1)x_n}, \quad n \in \mathbb{Z}^+,$$

onde

$$\mu > 1, \quad K_{n+p} = K_n, \quad \text{e} \quad K_n > 0.$$

Então $x_{n+1} = \frac{\mu K_n x_n}{K_n + (\mu - 1)x_n}, n \in \mathbb{Z}^+$ tem um ciclo p -periódico globalmente assintoticamente estável atenuante.

Kocic [35], utilizou a desigualdade de Jensen⁶ chegando ao seguinte resultado mais geral.

TEOREMA 3.9 [35]: Assumindo $\mu > 1$ e $\{K_n\}$ uma sequência limitada de números positivos

$$0 < \alpha < K_n < \beta < \infty.$$

Então, para toda a solução positiva $\{x_n\}$ de $x_{n+1} = \frac{\mu K_n x_n}{K_n + (\mu - 1)x_n}$ temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \bar{x}_i \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} K_i.$$

3.6.2. Nem atenuância nem ressonância

Sacker [24] mostra que não ocorre nem atenuância nem ressonância quando a função de Ricker dada por $R(x) = xe^{r-x}$ é forçada periodicamente.

⁶ A desigualdade de Jensen [40] afirma que, dada uma função $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável, temos que:

1. Se $f''(x) \geq 0$ (função convexa) em todo o intervalo (a, b) , então $\frac{f(x_1)+f(x_2)+\dots+f(x_n)}{n} \geq f\left(\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}\right)$, para quaisquer $x_1, x_2, x_n \in (a, b)$;
2. Se $f''(x) \leq 0$ (função côncava) em todo o intervalo (a, b) , então $\frac{f(x_1)+f(x_2)+\dots+f(x_n)}{n} \leq f\left(\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}\right)$, para quaisquer $x_1, x_2, x_n \in (a, b)$.

Consideremos o sistema k -periódico

$$x_{n+1} = x_n e^{r_n - x_n}, \quad r_{n+p} = r_n, \quad n \in \mathbb{Z}^+.$$

Se $0 < r_n \leq 2$, a equação anterior tem um ciclo p -periódico globalmente assintoticamente estável [24].

Seja $C_p = \{\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{p-1}\}$ esse único ciclo p -periódico. Então

$$\begin{aligned} \bar{x}_0 &= \bar{x}_k = \bar{x}_{p-1} e^{r_{p-1} - \bar{x}_{p-1}} \\ &= \bar{x}_{p-2} e^{r_{p-2} - \bar{x}_{p-2}} e^{r_{p-1} - \bar{x}_{p-1}}, \end{aligned}$$

E por iteração obtemos

$$\bar{x}_0 = \bar{x}_0 e^{\sum_{i=0}^{p-1} r_i - \sum_{i=0}^{p-1} \bar{x}_i}.$$

Daqui decorre que

$$\frac{1}{p} \sum_{i=0}^{p-1} r_i = \frac{1}{p} \sum_{i=0}^{p-1} \bar{x}_i,$$

Isto é, não existe nem atenuância nem ressonância.

3.6.3. Uma extensão: Funções monótonas

Usando uma extensão às funções monótonas, Kon [36] considerou uma equação de diferenças p -periódica da forma

$$x_{n+1} = g(x_n/K_n)x_n, \quad n \in \mathbb{Z}^+,$$

Onde $K_{n+p} = K_n$, $K_n > 0$, $x_0 \in [0, \infty)$ e $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ é uma função contínua que cumpre com as seguintes propriedades:

- $g(1) = 1$.
- $g(x) > 1$ para todo $x \in (0, 1)$.
- $g(x) < 1$ para todo $x \in (1, \infty)$.

TEOREMA 3.10 [36]: Seja $C_r = \{\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{r-1}\}$ um ciclo r -periódico positivo de $x_{n+1} = g(x_n/K_n)x_n$ tal que $K_i \neq K_{i+1}$ para algum $0 \leq i \leq p-1$. Assuindo que $zg(z)$ é estritamente côncava num intervalo (a, b) , $0 < a < b$ contendo todos os pontos $\frac{\bar{x}_i}{K_i} \in (a, b)$, $1 \leq i \leq rp$, concluímos que o ciclo C_r é atenuante.

O **TEOREMA 3.10** fornece uma prova alternativa da atenuância da equação de Beverton-Holt periódica dada por $x_{n+1} = \frac{\mu K_n x_n}{K_n + (\mu-1)x_n}$.

Consideremos a equação em [36] dada por

$$x_{n+1} = \left(\frac{x_n}{K_n}\right)^{\alpha-1}, \quad 0 < \alpha < 1,$$

Onde $K_{n+p} = K_n$, $n \in \mathbb{Z}^+$, e $K_i \neq K_{i+1}$ para algum $i \in \mathbb{Z}^+$. As funções satisfazem a hipótese do **TEOREMA 3.10**. Consequentemente, $x_{n+1} = \left(\frac{x_n}{K_n}\right)^{\alpha-1}$ tem um ciclo p -periódico globalmente assintoticamente estável que é atenuante.

3.6.4. A perda de atenuância: Ressonância

Considerando a equação de Beverton-Holt periódica $x_{n+1} = \frac{\mu K_n x_n}{K_n + (\mu-1)x_n}$ onde ambos os parâmetros μ_n e K_n são periódicos de período comum p . Esta equação pode ser atenuante ou ressonante. De facto, quando $p = 2$, Elaydi e Sacker [34] demostram que

$$\bar{x} = \bar{K} + \sigma \frac{K_0 - K_1}{2} - \Delta \frac{(\mu_0 - 1)(\mu_1 - 1)}{2(\mu_0 \mu_1 - 1)} (K_0 - K_1)^2,$$

onde

$$\bar{x} = \frac{\bar{x}_0 + \bar{x}_1}{2} \text{ e } \bar{K} = \frac{K_0 + K_1}{2},$$

$$\sigma = \frac{\mu_1 - \mu_0}{\mu_0 \mu_1 - 1}, \quad 0 \leq |\sigma| < 1,$$

e

$$\Delta = \frac{\mu_0(\mu_1^2 - 1)K_0 + \mu_1(\mu_0^2 - 1)K_1}{\mu_0(\mu_1 - 1)^2 K_0^2 + (\mu_0 - 1)(\mu_1 - 1)(\mu_0 \mu_1 + 1)K_0 K_1 + \mu_1(\mu_0 - 1)^2 K_1^2} > 0.$$

Segue-se que a atenuância está presente se $(\mu_1 - \mu_0)(K_0 - K_1) < 0$ (fora de fase) ou se a soma algébrica dos últimos dois termos de

$$\bar{x} = \bar{K} + \sigma \frac{K_0 - K_1}{2} - \Delta \frac{(\mu_0 - 1)(\mu_1 - 1)}{2(\mu_0 \mu_1 - 1)} (K_0 - K_1)^2$$

é negativa. Por outro lado, a ressonância está presente se a soma algébrica dos últimos dois termos de

$$\bar{x} = \bar{K} + \sigma \frac{K_0 - K_1}{2} - \Delta \frac{(\mu_0 - 1)(\mu_1 - 1)}{2(\mu_0 \mu_1 - 1)} (K_0 - K_1)^2$$

é positiva.

Notemos que se $\mu_0 = \mu_1 = \mu$ com $p = 2$, então temos

$$\frac{1}{p} \sum_{i=0}^{p-1} \bar{x}_i = \frac{1}{p} \sum_{i=0}^{p-1} K_i - \frac{\mu(K_0 + K_1)(K_1 - K_0)^2}{2[\mu K_0^2 + (\mu^2 + 1)K_0 K_1 + \mu K_1^2]}$$

Que dá-nos uma expressão exata para as diferenças nas médias.

OBSERVAÇÃO 3.10: Agora para $\mu_0 = 4$, $\mu_1 = 2$, $K_0 = 11$, e $K_1 = 7$, temos ressonância visto que

$$\frac{1}{2} \sum_{i=0}^1 \bar{x}_i \approx 9.23 \text{ e } \frac{1}{2} \sum_{i=0}^1 K_i = 9.$$

Por outro lado, podemos verificar que para $\mu_0 = 2$, $\mu_1 = 4$, $K_0 = 11$, e $K_1 = 7$, temos atenuância como pode ser visto a partir da relação

$$\bar{x} = \bar{K} + \sigma \frac{K_0 - K_1}{2} - \Delta \frac{(\mu_0 - 1)(\mu_1 - 1)}{2(\mu_0\mu_1 - 1)} (K_0 - K_1)^2.$$

Conclusão

Este trabalho teve por base a apresentação de modelos discretos autónomos e não autónomos aplicados à dinâmica de populações. A necessidade de redigir um trabalho como este surge da dificuldade em se encontrar bibliografia em língua portuguesa sobre os modelos discretos não autónomos.

Toda a teoria e resultados descritos constam nos livros e artigos apresentados na bibliografia.

Julgamos que os objetivos foram cumpridos por este trabalho apresentar de forma sintetizada a teoria e alguns resultados recentes, em língua portuguesa, de um tema em constante evolução, podendo esta informação ser utilizada para o ensino e iniciação à investigação.

O resultado final superou as nossas expectativas por compilar toda esta informação em três capítulos onde abordamos vários conteúdos da teoria de estabilidade que são relevantes não só para a biologia, mas para diversas áreas de estudo e investigação que utilizem modelos como os aqui apresentados.

Bibliografia

- [1] R. Luís, *Equações de diferenças e aplicações*, Universidade da Madeira, Funchal, 2006.
- [2] R. Luís, *Nonautonomous Periodic Difference Equations with applications in Populations Dynamics and Economics*, LAMBERT Academic Publishing, 2017.
- [3] S. Elaydi, *Discrete Chaos: With Applications in Science and Engineering*, 2nd ed., Boca Raton: Chapman and Hall/CRC, 2008.
- [4] W. A. Coppel, "The solution of equations by iteration," *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, pp. 41-43, 1955.
- [5] S. Elaydi, *An Introduction to Difference Equations*, 3rd ed., Springer, 2005.
- [6] M. Feigenbaum, "Quantitative universality for a class of nonlinear transformations," *Journal of Statistical Physics*, vol. 19 n.º1, pp. 25-52, 1978.
- [7] M. Feigenbaum, "The Universal Metric Properties of Nonlinear Transformations," *Journal of Statistical Physics*, vol. 21 n.º6, pp. 669-706, 1979.
- [8] M. Feigenbaum, "Universal Behavior in Nonlinear Systems 7 (1-3)," *Los Alamos Science*, pp. 4-27, 1980.
- [9] S. Elaydi, R. Luís e H. Oliveira, "Local bifurcation in one-dimensional nonautonomous periodic difference equations," *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 23 n.º03, p. 1350049, 2013.
- [10] R. Luís e S. Mendonça, "A note on the bifurcation point of a Randomized Fibonacci model," *Chaotic Modeling and Simulation (CMSIM) 4*, pp. 445-458, 2016.
- [11] A. N. Sharkovsky, Coexistence of cycles of a continuous map of the line into itself (in russian), *Ukranian Math J.*, 1964, pp. 16:61-71.
- [12] A. N. Sharkovsky, "Coexistence of cycles of a continuous map of the line into itself (translation to English by J.Tolosa)," *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 5 n.º5, pp. 1263-1273, 1995.
- [13] T. Y. Li e J. A. Yorke, "Period Three implies Chaos," *The American Mathematical Monthly*, vol. 65 n.º7, pp. 985-992, 1975.
- [14] A. J. Fidélis e L. C. Martins, "Algebraic orbits on period-3 window for the logistic map," *Nonlinear Dynamics · October 2014*, 2014.
- [15] P. Cull, K. Walsh e J. Wherry, "Stability and instability in one dimensional population models," *Sciential Mathematical Japonical online*, pp. 29-48, 2008.

- [16] “Biology dictionary,” [Online]. Available: <https://biologydictionary.net/carrying-capacity/>. [Acedido em 26 07 2019].
- [17] “Wikipedia,” [Online]. Available: https://en.wikipedia.org/wiki/Gompertz_function. [Acedido em 31 julho 2019].
- [18] S. Elaydi e R. Sacker, “Population models with Allee effect: a new model,” *Journal of Biological Dynamics*, vol. 4 n.º4, pp. 397-408, 2009.
- [19] P. Stephens e W. Sutherland, “Vertebrate mating systems, Allee effects and conservation,” *World scientific publishing*, pp. 186-213, 2000.
- [20] R. Luís e S. Mendonça, “A Stochastic study for a generalized Logistic model,” *Revstat Statistic Journal*, 2019.
- [21] S. Elaydi, R. Luis e H. Oliveira, “Towards a Theory of periodic difference equations and its application to population biology,” em *Dynamics, Games and Science I*, a. A. A. P. a. D. A. R. Mauricio Matos Peixoto, Ed., DYNA, 2008, pp. 287-321.
- [22] S. Elaydi e R. Sacker, “Periodic difference equations, population biology and Cushing - Henson conjectures 201 (1-2),” *Mathematical Biosciences*, pp. 195-207, 2006.
- [23] S. Elaydi e R. Sacker, “Global stability of periodic orbits of nonautonomous difference equations and populations biology,” *Journal of Difference Equations*, vol. 208 n.º1, pp. 258-273, 2005.
- [24] R. Sacker, “A note on a periodic Ricker map,” *Journal of Difference Equations and Applications*, vol. 13 n.º1, pp. 89-92, 2007.
- [25] E. Liz, “On the global stability of periodic Ricker maps,” *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, pp. 1-8, 2016.
- [26] H. A. El-Morshedy e V. J. López, “Global attractors for difference equations dominated by one-dimensional maps,” *Journal of Difference Equations and Applications*, vol. 14 n.º4, pp. 391-410, 2008.
- [27] J. Cushing e S. Henson, “Global dynamics of some periodically forced, monotone difference equations,” *Journal of Difference equations and Applications*, vol. 7 n.º6, pp. 859-872, 2001.
- [28] J. Cushing e S. Henson, “A periodically forced Beverton - Holt equation,” *Journal of Difference equations and Applications*, vol. 8 n.º12, pp. 1119-1120, 2002.
- [29] R. Luís, “On the stability of 1D discrete dynamical systems: applications to population dynamics,” em *Proceedings of the 2nd International conference on Mathematical Applications 2019 (ICMA 19)*, Azores, 2019.
- [30] R. Luís, S. Elaydi e H. Oliveira, “Non-autonomus periodic systems with Alle effects,”

Journal of Difference Equations and Applications, vol. 16 n.º10, pp. 1179-1196, 2010.

- [31] P. Cull, "Population models: Stability in one dimension.," *Bulletin of mathematical biology*, pp. 69(3):989-1017, Abril 2007.
- [32] E. Liz, "Local stability implies global stability in some one-dimensional discrete single-species models," *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series B*, vol. 7 n.º1, pp. 191-199, 2007.
- [33] R. Luís e E. Rodrigues, "A survey on the enveloping method of some one-dimensional non-autonomous discrete periodic population models," *Journal of Mathematical Sciences: Advances and Applications* (39), pp. 63-87, 2017.
- [34] S. Elaydi e R. Sacker, "Nonautonomous Beverton-Holt equations and the Cushing-Henson conjectures 11 (4-5)," *Journal of Difference Equations and Applications*, pp. 337-346, 2005.
- [35] V. Kocic, "A note on the nonautonomous Beverton-Holt model," *Journal of Difference Equations and Applications* 11(4-5), pp. 415-422, 2005.
- [36] R. Kon, "A note on attenuant cycles of population models with periodic carrying capacity," *Journal of Difference Equations and Applications* 10(8), pp. 791-793, 2004.
- [37] R. Devaney, *An Introduction to chaotic Dynamical Systems*, Benjamin, Redwood city, 1986.
- [38] J. Franke e A. Yakubu, "Globally attracting attenuant versus resonant cycles in periodic compensatory Leslie models," *Math. Biosci.* 204(1), pp. 1-20, 2006.
- [39] J. Franke e A. Yakubu, "Using a signature function to determine resonant and attenuant 2-cycles in the Smith-Slatkin population model," *Journal of Difference Equations and Applications* 13(4), pp. 289-308, 2007.
- [40] "Wikipedia," [Online]. Available: https://en.wikipedia.org/wiki/Jensen%27s_inequality. [Acedido em 05 11 2019].

Índice Remissivo

A

Atenuância, 67, 68, 70

B

Bacia de atração, 35, 39, 52
Beverton-Holt, 26, 32, 49, 60, 62, 66, 67
Bifurcação, 17, 18

C

Caos, 20, 25, 26
Capacidade de suporte, 23, 32
Ciclo, viii, 12, 16, 17, 46, 47
Competição intraespecífica, 32, 33
Composição de funções, 45, 50
Constante de Feigenbaum, 18

D

Derivada de Schwartz, 9, 56
Desigualdade de Jensen, 68
Diagrama de Bifurcação, vii, 19, 21
Diagrama de Cobweb, 7, 8
Diagrama em teia de aranha, 5
Dinâmica de populações, 22, 45

E

Efeito de Allee, 32, 34, 38, 40, 51
Envolvência, 55, 56
Envolvência individual, 57, 59
Equação de diferenças, x, 1
Espaço de parâmetros, 49, 53
Estabilidade, 5, 7, 8, 9, 13
Eventual ponto fixo, 3

F

Fator de crescimento, 32, 33
Função fracionária, 60, 65, 66
Função individual, 48, 50
Funções monótonas, 69

G

Gompertz, 29

I

Iteradas, 2

L

Limite de Allee, 32

M

Modelo exponencial, 34
Modelo Logístico, 15, 40
Modelo populacional, 22, 56
Modelos Autônomos, 22
Modelos não autônomos, 45

O

Operador de composição, 46, 48, 52
Órbita, 2, 18
Órbita periódica, 12

P

Pielou, 29
Ponto Fixo, 2
Ponto periódico, 12, 20
Pontos fixos hiperbólicos, 8, 9

R

Regra da cadeia, 48
Regra de Ruffini, 14, 16
Ressonância, 67, 68, 70
Ricker, 23, 34, 48, 59

S

Sequência de funções, 46, 48, 58, 66
Sharkovsky, 19, 20
Sistema dinâmico, x, 1, 47

T

Teorema de Bolzano, 4, 5
Transformação de Möbius, 56

W

W. Coppel, 10