



Os Problemas da Matemática
O seu papel na Matemática e
nas aulas de Matemática

TESE DE DOUTORAMENTO

Ida Maria Faria de Lira Gonçalves
DOUTORAMENTO EM MATEMÁTICA - ENSINO DA MATEMÁTICA



UNIVERSIDADE da MADEIRA
A Nossa Universidade
www.uma.pt

Setembro | 2011

Os Problemas da Matemática
O seu papel na Matemática e
nas aulas de Matemática

TESE DE DOUTORAMENTO

Ida Maria Faria de Lira Gonçalves

DOUTORAMENTO EM MATEMÁTICA - ENSINO DA MATEMÁTICA

ORIENTAÇÃO

Elsa Maria dos Santos Fernandes

CO-ORIENTAÇÃO

Jorge Nuno Silva

Salientando a importância do ensino da parte histórica da Matemática opinou Felix Klein (1849-1925), um dos mais insígnis didactas na matéria: O professor que ensina a Matemática desligada de sua parte histórica comete verdadeiro atentado contra a Ciência e contra a cultura em geral.

(Tahan, 1973, p. 9)

RESUMO

A integração da História da Matemática no ensino da Matemática é defendida há muito tempo e em vários países. Embora a discussão sobre os “prós” e “contras” dessa integração seja de longa data, a tendência nos últimos anos tem sido a procura de uma base teórica e de uma metodologia que alicercessem essa integração. Uma das formas apontadas na literatura para a integrar na sala de aula é através de problemas históricos, tendo sido esta também a forma adoptada neste estudo.

Esta investigação tem como objectivo caracterizar a aprendizagem da Matemática quando mediada por problemas históricos. Para tal, foram formuladas as seguintes questões: (1) Que aspectos do ambiente de aprendizagem ajudam na aprendizagem da Matemática quando são usados problemas históricos? (2) De que forma os problemas históricos actuam como artefactos mediadores da aprendizagem da Matemática? (3) Como é que o uso dos problemas históricos na sala de aula contribui para promover a aprendizagem da Matemática? (4) Quais as contradições ocorridas quando são utilizados problemas históricos nas aulas de Matemática?

Nesta investigação, de natureza qualitativa, foi adoptado o paradigma interpretativo e os dados foram recolhidos através de uma observação participante completa. Atendendo aos objectivos do estudo, e tomando o sistema de actividade da sala de aula como a unidade de análise, foram recolhidos dados, em algumas aulas de Matemática e de Estudo Acompanhado de Matemática de uma turma do 8º ano, entre Setembro de 2006 e Maio de 2007. Os dados foram analisados à luz da Teoria da Actividade, na perspectiva de Engeström (1987), tendo sido seguido o esquema metodológico proposto por Mwanza (2002).

Os resultados deste estudo mostram que os problemas históricos, quando usados como um artefacto mediador, num ambiente de aprendizagem devidamente apoiado pela orientação e questionamento da professora, ajudam os alunos a compreender os conteúdos leccionados, além de desempenharem um importante papel de motivação.

Palavras-chave: História da Matemática, Educação Matemática, Resolução de problemas, Problemas históricos, Teoria da Actividade, Artefactos mediadores.

ABSTRACT

The integration of History of Mathematics in teaching of mathematics is advocated for a long time in various countries. Although the discussion about the “pros” and “cons” of such integration is a long one, the main trend, in recent years, has been the search for a theoretical basis and a methodology that rule this integration. One of the ways identified in the literature to incorporate it in the classroom is through historical problems, having been also the form adopted in this study.

This research aims to characterize the learning of mathematics when mediated by historical problems. To this end, the following issues were raised: (1) What aspects of the learning environment help in learning of mathematics when historical problems are used? (2) How do historical problems act as mediating artifacts of learning of mathematics? (3) How does the use of historical problems in the classroom contribute to promote the learning of mathematics? (4) What contradictions occur when historical problems are used in math classes?

In this research, qualitative in nature, it was adopted the interpretative paradigm and the data were collected through a complete participant observation. With regard to the objectives of the study, and taking the classroom activity system as the unit of analysis, data were collected in some Math lessons and Math Study Accompanied in a 8th grade class, between September 2006 and May 2007. The data were analyzed in under the viewpoint of Activity Theory in the perspective of Engeström (1987) and were followed by the methodological scheme proposed by Mwanza (2002).

The results of this study show that historical problems, when used as a mediating artifact, in an environment of learning duly supported by guideline and questioning of the teacher, help students to understand the content of the studies involved and, in addition, play an important motivational role.

Keywords: History of Mathematics, Mathematics Education, Problem solving, Historical problems, Activity Theory, Mediating artifacts.

AGRADECIMENTOS

Concretizar a actividade de escrever esta tese foi um sistema de actividade muito complexo que contou com a ajuda de vários mediadores. Quero aqui registar os meus sinceros agradecimentos a cada um deles.

Ao Professor Jorge Nuno que se empenhou em ajudar-me a iniciar esta jornada. Muito obrigada por tudo o que me tem ensinado desde que foi meu professor e orientador no Mestrado, por me ter inculcido o gosto pela História da Matemática e, principalmente, por nunca ter deixado de acreditar em mim.

À Professora Elsa Fernandes que, mesmo não me conhecendo, aceitou juntar-se a nós neste projecto. Muito obrigada pelas preciosas sugestões e valiosos comentários dados ao longo da realização desta tese, que muito contribuíram para incrementar a minha *Zona de Desenvolvimento Potencial*.

Aos alunos do 8º B, *sujeitos* no sistema de actividade em análise e participantes desta investigação, por terem sido uma daquelas turmas que deixa saudades.

Ao Ministério da Educação, por me ter concedido a licença sabática, sem a qual não teria conseguido concluir este trabalho.

Ao meu marido, João, que me incentivou a realizar este doutoramento e que soube compreender a minha dedicação à realização do mesmo.

Ao meu filho, Rodrigo, que não compreendia por que tinha que ir para o Infantário sabendo que a mãe ficava em casa.

Aos meus pais que sempre apoiaram os meus estudos, não havendo palavras suficientes para lhes agradecer.

A Deus, pela força de vontade com que sempre me assistiu e que me impediu de desistir.

ÍNDICE

RESUMO	iii
AGRADECIMENTOS	v
ÍNDICE DE FIGURAS	x
ÍNDICE DE TABELAS	xii
LISTA DE ABREVIATURAS	xiii
1. INTRODUÇÃO	1
1.1. Origem e motivação do estudo	1
1.2. Pertinência e questões do estudo	3
1.3. A estrutura da tese	9
2. ESTUDAR O PASSADO PARA ENSINAR NO PRESENTE	13
2.1. Matemática no Egito	14
2.2. Matemática na Mesopotâmia	17
2.3. Matemática na Grécia	22
2.4. Matemática na China	24
2.5. Matemática na Índia	26
2.6. Matemática na Civilização Islâmica	29
2.7. Matemática na Europa Medieval	31
3. REVISÃO DA LITERATURA	35
3.1. Teoria da Actividade (TA)	36
3.1.1. Fundamentos da Teoria da Actividade	37
3.1.2. As três gerações	39
3.1.3. Princípios da Teoria da Actividade	46
3.2. A História da Matemática e o ensino da Matemática	62
3.2.1. Benefícios, Objecções e Dificuldades	63
3.2.2. Avaliação da eficácia da integração da História no ensino da Matemática	76
3.2.3. De que forma a História pode ser integrada no ensino da Matemática?	79
3.2.4. A História da Matemática como artefacto mediador no ensino da Matemática	89

3.2.5.	Classificação das fontes	94
3.2.6.	O papel da História no ensino da Matemática em Portugal	107
3.2.7.	Considerações finais.....	112
4.	METODOLOGIA	115
4.1.	Opções metodológicas.....	115
4.1.1.	Paradigma do estudo	116
4.1.2.	Design do estudo	118
4.1.3.	A Teoria de Actividade num contexto escolar	122
4.2.	Participantes	124
4.2.1.	A Escola	124
4.2.2.	A Turma	125
4.2.3.	A professora/investigadora.....	130
4.3.	Recolha dos dados - Quando, Onde e Como?.....	132
4.4.	Tratamento e análise dos dados.....	134
4.4.1.	Operacionalizando a Teoria da Actividade	135
5.	ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS	145
5.1.	Compreendendo o Teorema de Pitágoras através da história.....	147
5.1.1.	Sumariando.....	164
5.2.	Analisando sequências com história.....	166
5.2.1.	Sumariando.....	183
5.3.	Resolvendo problemas históricos através de equações	184
5.3.1.	Sumariando.....	193
5.4.	Relacionando o Teorema de Pitágoras, as equações e a história.....	194
5.4.1.	Sumariando.....	205
5.5.	Síntese dos resultados.....	206
5.5.1.	Características do ambiente de aprendizagem.....	206
5.5.2.	O papel de mediação desempenhado pelos problemas históricos	209
5.5.3.	Contributo dos problemas históricos para a aprendizagem da Matemática	210

5.5.4.	Dificuldades e constrangimentos encontrados quando são utilizados problemas históricos	213
6.	CONCLUSÕES.....	215
6.1.	Conclusões do estudo.....	215
6.1.1.	A sala de aula como um sistema de actividade	215
6.1.2.	Os problemas históricos como artefactos mediadores da aprendizagem da Matemática.....	220
6.1.3.	O uso dos problemas históricos: uma mais-valia para a aprendizagem da Matemática.....	221
6.1.4.	As contradições que surgem quando são utilizados problemas históricos na aula de Matemática.....	223
6.2.	Implicações e recomendações decorrentes desta investigação.....	224
6.3.	Reflexões sobre a metodologia	226
6.3.1.	O uso da Teoria da Actividade	227
6.3.2.	Limitações do estudo.....	227
6.4.	Reflexão final	229
7.	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	233
	ANEXOS.....	247
	ANEXO A.1 - MATEMÁTICA NO EGIPTO.....	249
	ANEXO A.2 - MATEMÁTICA NA MESOPOTÂMIA.....	281
	ANEXO A.3 - MATEMÁTICA NA GRÉCIA	311
	ANEXO A.4 - MATEMÁTICA NA CHINA	352
	ANEXO A.5 - MATEMÁTICA NA ÍNDIA.....	385
	ANEXO A.6 - MATEMÁTICA NA CIVILIZAÇÃO ISLÂMICA.....	407
	ANEXO A.7 - MATEMÁTICA NA EUROPA MEDIEVAL	417
	ANEXO B – REGULAMENTO INTERNO DA TURMA	451
	ANEXO C.1 - FICHA DE TRABALHO Nº 1.....	453
	ANEXO C.2 - FICHA DE TRABALHO Nº 2.....	456
	ANEXO C.3 - FICHA DE TRABALHO Nº 3.....	459
	ANEXO C.4 - FICHA DE TRABALHO EA.....	461

ANEXO C.5 - FICHA DE TRABALHO Nº 4.....	462
ANEXO C.6 - FICHA DE TRABALHO Nº 5.....	466
ANEXO C.7 - FICHA DE TRABALHO Nº 6.....	468
ANEXO C.8 - FICHA DE TRABALHO Nº 7.....	471

ÍNDICE DE FIGURAS

Fig. 1 – Modelo de acção mediada de Vygotsky e a sua reformulação mais comum.....	39
Fig. 2 – Modelo hierárquico da actividade	41
Fig. 3 – A estrutura de um sistema de actividade humano	43
Fig. 4 – Dois sistemas de actividade em interacção como modelo	45
Fig. 5 – Quatro níveis de contradições dentro do sistema de actividade humana	48
Fig. 6 – A Zona de Desenvolvimento Potencial (ZDP).....	54
Fig. 7 – Ciclo de aprendizagem expansiva	56
Fig. 8 – Origem do símbolo da raiz quadrada	83
Fig. 9 – Fontes a utilizar quando a História.....	95
Fig. 10 – Idade dos alunos da turma.....	126
Fig. 11 – Nº de avaliações inferiores a 3 no ano anterior	126
Fig. 12 – Número de irmãos	127
Fig. 13 – Idade dos pais	127
Fig. 14 – Habilitações literárias dos pais	128
Fig. 15 – Idade das mães	128
Fig. 16 – Habilitações literárias das mães	129
Fig. 17 – Disciplinas com mais dificuldades.....	129
Fig. 18 – Disciplinas preferidas.....	130
Fig. 19 – Sistema de Actividade de Engeström/Modelo dos Oito Passos.....	140
Fig. 20 – Resposta do A	178
Fig. 21 – Resposta da N.....	178
Fig. 22 – Resposta do Da.....	179
Fig. 23 – Resposta do H	179
Fig. 24 – Resposta do He.....	179
Fig. 25 – Resposta do T	180
Fig. 26 – Resposta do L.....	181

Fig. 27 – Resposta do R.....	181
Fig. 28 – Resposta do B.....	181
Fig. 29 – Resposta da M.....	181
Fig. 30 – Sistema de Actividade de Engeström aplicado	216
Fig. 31 – Parte do papiro de Rhind.....	250
Fig. 32 – Ilustração do problema 50 do papiro de Rhind	275
Fig. 33 – Ilustração do problema 52 do papiro de Rhind	276
Fig. 34 – Pirâmide truncada.....	277
Fig. 35 – Modelo da corda de treze nós.....	279
Fig. 36 – Placa YBC 7289	287
Fig. 37 – Quadrado representado na placa YBC 7289.	288
Fig. 38 – Área de um trapézio	304
Fig. 39 – Plimpton 322	306
Fig. 40 – Demonstração da fórmula da diferença de quadrados	309
Fig. 41 – Aplicação do Teorema de Pitágoras.....	310
Fig. 42 – Determinação da altura da pirâmide de Quéops.....	318
Fig. 43 – Ilustração de dois triângulos semelhantes	320
Fig. 44 – Ilustração de dois triângulos congruentes	321
Fig. 45 – Números triangulares	323
Fig. 46 – Números quadrados.....	323
Fig. 47 – Números pentagonais	324
Fig. 48 – 5^2 como a soma dos 5 primeiros naturais ímpares	325
Fig. 49 – Números quadrados como soma de dois números triangulares	325
Fig. 50 – Demonstração do Teorema de Pitágoras.....	327
Fig. 51 – O quadrado de lado d tem o dobro da área do quadrado de lado l	329
Fig. 52 – O quinto postulado de Euclides.....	332
Fig. 53 – Demonstração do Teorema de Pitágoras.....	333
Fig. 54 – Versão geométrica da fórmula	334
Fig. 55 – Lúnulas de Hipócrates.....	350
Fig. 56 – Os símbolos utilizados pelos chineses	357
Fig. 57 – Ilustração do problema 20.....	370
Fig. 58 – Diagrama de Yang Hui (séc. XIII) do Triângulo de Pascal	372
Fig. 59 – Demonstração geométrica para o triângulo de lados (3, 4, 5).....	378

Fig. 60 – Quadrado inscrito num triângulo rectângulo.....	381
Fig. 61 – Círculo inscrito num triângulo rectângulo	382
Fig. 62 – Outra forma de representar um círculo inscrito num triângulo.....	382
Fig. 63 – Determinação da altura e distância de uma ilha.....	384
Fig. 64 – Demonstração do Teorema de Pitágoras.....	402
Fig. 65 – Desenvolvimento dos algarismos modernos.....	405
Fig. 66 – Primeira demonstração geométrica de al-Kwarizmi	409
Fig. 67 – Segunda demonstração geométrica de al-Kwarizmi	410
Fig. 68 – Demonstração geométrica de Abu-Kamil.....	412
Fig. 69 – Generalização do Teorema de Pitágoras	414
Fig. 70 – Algoritmo da multiplicação usado por Fibonacci	425
Fig. 71 – O problema dos coelhos de Fibonacci.....	433
Fig. 72 – Ilusão geométrica	435
Fig. 73 – Ilusão geométrica	436
Fig. 74 – Missing Square.....	436

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 1 – The Activity-Oriented Design Method (AODM).....	138
Tabela 2 – Modelo dos Oito Passos.....	139
Tabela 3 – Notação da Actividade.....	141
Tabela 4 – Exemplos de questões de investigação gerais	142
Tabela 5 – Resposta dada pela maioria dos alunos da turma	168
Tabela 6 – Resposta dada por um aluno	169
Tabela 7 – Símbolos usados na numeração egípcia	250
Tabela 8 – Tabela de $2 \div n$	259
Tabela 9 – Problema 79 do papiro de Rhind	272
Tabela 10 – Símbolos usados no sistema de numeração Ático	312
Tabela 11 – Símbolos usados no sistema de numeração Jónico	313
Tabela 12 – Duas representações possíveis para os números de 1 a 9	358

LISTA DE ABREVIATURAS

APM – Associação dos Professores de Matemática

AODM – *Activity-Oriented Design Method*

CHAT – Teoria da Actividade Histórico-Cultural

CNEB – Currículo Nacional do Ensino Básico

DEB – Departamento da Educação Básica

DGIDC – Direcção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular

ESM – *Educational Studies in Mathematics*

ESU – *European Summer University (on the History and Epistemology in Mathematics Education)*

FLM – *For the Learning of Mathematics*

ICME – *International Congress on Mathematical Education*

ICMI – *International Commission on Mathematical Instruction*

GTHEM – Grupo de Trabalho sobre História e ensino da Matemática

MAA – *Mathematical Association of America*

MT – *Mathematics Teachers*

NCTM – *National Council for the Teaching of Mathematics*

NPMEB – Novo Programa de Matemática para o Ensino Básico

SBHMat – Sociedade Brasileira de História da Matemática

SNHM – Seminário Nacional de História da Matemática

SPM – Sociedade Portuguesa de Matemática

TA – Teoria da Actividade

TSG – *Topic Study Group*

ZDM – *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*

ZDP – Zona de Desenvolvimento Potencial

1. INTRODUÇÃO

Depois de cinco anos de estudo, reflexões, encontros e desencontros, finalmente, neste trabalho, materializo a investigação por mim concretizada, no âmbito da aprendizagem da Matemática.

Neste capítulo introdutório, começo por dar a conhecer a origem e motivação do estudo, prossigo com a justificação da pertinência do estudo e com a apresentação das questões que nortearam esta investigação e finalizo fazendo referência à estrutura da tese.

1.1. Origem e motivação do estudo

Já muito se escreveu e discutiu sobre o insucesso na disciplina de Matemática e muitas justificações para o facto têm sido apontadas. Das variadíssimas razões mencionadas, destaco a que mais se relaciona com este trabalho porque, de certa forma, esteve na origem da minha vontade de fazer esta investigação. É uma ideia amplamente defendida, e que também partilho, que um ensino da Matemática que não explicita a origem e as finalidades dos conceitos leccionados contribui significativamente para esse insucesso. Como refere Furinghetti, citando Thomas, “factos matemáticos, sem alguma compreensão sobre por que são do modo que são, são quase impossíveis de aprender”¹ (Thomas, 2002, p. 46 apud Furinghetti, 2007, p. 133).

O insucesso dos alunos nesta disciplina tem sido tema de muitos debates e conferências e a procura de estratégias para o minimizar tem sido uma constante. No entanto, este não é um problema de fácil resolução pelo que se tem questionado: Será que o insucesso a Matemática é um problema possível, impossível ou indeterminado? (Ponte, 1988).

A procura de uma solução para este problema tem incentivado os professores a diversificarem as abordagens metodológicas e a utilizarem diversos recursos para ajudar os alunos a ultrapassarem as dificuldades encontradas. Geralmente, quando pensamos em recursos no ensino da Matemática, surge-nos logo a ideia das calculadoras gráficas ou materiais didácticos, ou a panóplia de softwares existentes para ensinar Matemática ou ainda os cada vez mais disseminados quadros interactivos. No entanto, há outros recursos que também podem desempenhar, eficientemente, o papel de artefacto mediador no ensino

¹ A tradução de todas as palavras ou expressões são da minha responsabilidade.

da Matemática, como é o caso da História da Matemática, tendo sido este o recurso utilizado na presente investigação.

A História da Matemática é um dos pontos referidos nas orientações metodológicas do Programa de Matemática para o 3º ciclo (ME, 1991), em vigor quando esta investigação teve início. Segundo este documento, a História da Matemática pode contribuir para aumentar o interesse por um determinado tema ao fornecer informações sobre a sua origem e percurso, relacionando-o com problemas que o Homem tenta resolver. A presença de uma perspectiva histórica humaniza o estudo da Matemática “como ciência que se constrói” (ME, 1991, p. 196) e constitui “ainda um bom exercício de pesquisa e documentação” (idem). Por sua vez, o Currículo Nacional do Ensino Básico - CEB (DEB, 2001) estabelece que todos os alunos devem ter, ao longo da educação básica, oportunidades de contactar com aspectos da história, do desenvolvimento e da utilização da Matemática.

Em 2007 foi feito um reajustamento do Programa de Matemática para o ensino básico, em vigor desde o início dos anos noventa (1990 para o 1.º ciclo e 1991 para os 2.º e 3.º ciclos) e, segundo este Novo Programa (NPMEB), e no que concerne à História da Matemática, um dos objectivos gerais que o ensino da Matemática deve ter em vista, nos três ciclos da escolaridade básica, é que os alunos:

“devem ser capazes de [...] mostrar conhecimento da História da Matemática e ter apreço pelo seu contributo para a cultura e para o desenvolvimento da sociedade contemporânea [...] A História da Matemática pode evidenciar o desenvolvimento de determinadas ideias matemáticas, apresentando-a como uma ciência viva e em evolução.”

(DGIDC, 2007, p. 6)

O meu interesse pela História da Matemática surgiu quando frequentei uma cadeira que abordava este tema no Mestrado, realizado em 1999/2001, na Universidade da Madeira, que se intitulava “Tópicos de História e Teoria dos Números”. Até então, os meus conhecimentos sobre a História da Matemática eram muito exíguos. Na verdade, na minha Licenciatura (em Matemática, Ramo Ensino) não frequentei nenhuma cadeira relacionada com este tema e os tópicos abordados na cadeira acima referida despertaram o meu interesse para esse mundo, para mim pouco conhecido até então.

Também foi nessa altura que surgiu o meu interesse pela resolução de problemas, com a realização da dissertação de Mestrado intitulada: “Como resolver problemas de Matemática”. Nos cinco anos subsequentes apliquei, na minha prática lectiva, o que tinha aprendido sobre resolução de problemas. No entanto, o meu interesse sobre História da Matemática manteve-se um tanto ou quanto adormecido pois, talvez por insegurança, não costumava integrar a História da Matemática nas minhas aulas.

Ao longo desse tempo, amadureci a ideia de aprofundar esta e outras áreas relacionadas com a Didáctica da Matemática, pois era minha intenção aprofundar os meus conhecimentos sobre didáctica com o objectivo de tentar melhorar a minha prática pedagógica para, de alguma forma, poder contribuir para a diminuição do insucesso escolar dos meus alunos nesta disciplina tão temida.

Quando surgiu a oportunidade de realizar este doutoramento, ficou desde logo evidente que o melhor tema a trabalhar seria relacionado com a História da Matemática. Desta forma, teria a oportunidade de aprofundar um tema que não conhecia muito bem mas que me suscitava muito interesse e que poderia ser útil para a minha prática pedagógica.

Para levar a cabo a tarefa a que me propus, foi necessário realizar uma intensa pesquisa bibliográfica com o intuito de colmatar as minhas lacunas no âmbito da História da Matemática. Assim, para poder integrar a História da Matemática nas minhas aulas, de forma correcta e coerente, tive que investigar a importância dos problemas da Matemática ao longo da História e qual o seu papel no ensino da Matemática desde as civilizações antigas.

Essa pesquisa bibliográfica deu origem a uma compilação de ideias e conteúdos matemáticos, relativos às diversas civilizações, que me parecem relevantes para quem tem a pretensão de integrar a História da Matemática na sala de aula. Por questões de espaço, os resultados desta pesquisa bibliográfica serão apresentados em anexo a esta tese.

1.2. Pertinência e questões do estudo

Esta investigação tem como objectivo caracterizar a aprendizagem da Matemática quando mediada por problemas da História da Matemática. Assim, neste estudo, será analisada a relação que se estabelece entre a História da Matemática e a Educação Matemática, quando a primeira assume o papel de artefacto mediador dentro da sala de

aula. Não pretendo olhar para a História da Matemática enquanto ciência, mas como uma possibilidade didáctica a ser utilizada nas aulas de Matemática.

A integração da História da Matemática no ensino da Matemática é, de facto, defendida há muito tempo e em vários países, sendo de realçar: José Monteiro da Rocha (Estatuto da Universidade Portuguesa), 1772; Lagrange, na década de 1790; Abel, na década de 1820; De Morgan, 1865; Beltrami, 1871; Glaisher, 1890; Cajori, 1896; Schubert, 1898; Poincaré, 1908; Barwell, 1913; Miller, 1916; Sanford, 1930; Vygotski, 1931; Mathematical Association of America (MAA), 1935; Klein, 1914/1945; Ministério Britânico da Educação, 1958; Kline, 1973; Lakatos, 1976; Leake, 1983. Também, em 1969, o NCTM (*National Council for the Teaching of Mathematics*) dedicou o Livro do 31º ano à História da Matemática como ferramenta de ensino.

Nas duas últimas décadas do século passado e início deste século, aumentou consideravelmente o número de Congressos, Seminários e Encontros realizados a nível mundial, que se tem vindo a reflectir num aumento significativo de artigos e capítulos de livros dedicados a este tema.

Assim, existe uma grande quantidade de literatura sobre a integração da História no ensino da Matemática que pode ser encontrada em vários jornais, como por exemplo, *Educational Studies in Mathematics* (ESM), *For the Learning of Mathematics* (FLM), *Mathematics Teachers* (MT) e *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* (ZDM), e em Actas de Congressos e Encontros, bem como em livros especialmente dedicados a este assunto, sendo o mais abrangente e completo um estudo da *International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI), subordinado ao tema “O papel da História da Matemática no ensino e aprendizagem da Matemática”, que foi editado com o título *History in Mathematics Education: The ICMI Study*, em 2000, por Fauvel e van Maanen.

É com base nesses documentos que, no terceiro capítulo, será feita uma revisão bibliográfica, onde serão analisados os principais benefícios da integração da História no ensino da Matemática, assim como as objecções e dificuldades apontadas pela maioria dos autores que se debruçaram sobre este tema.

Apesar da discussão sobre os “prós” e “contras” da integração da História no ensino da Matemática ser de longa data, a tendência nos últimos anos tem sido a procura de uma base teórica e de uma metodologia para fazer esta integração. Assim, a questão que se nos coloca é: “De que forma essa integração pode ser feita?”.

A procura de estratégias motivadoras para as aulas de Matemática recorrendo à História tem-se deslocado, nas últimas duas décadas, de um plano meramente externo ao conteúdo do ensino, para outro em que essa motivação aparece vinculada e produzida no acto cognitivo da solução de um problema.

Uma das formas apontadas na literatura para integrar a História da Matemática na sala de aula é através de problemas históricos (Swetz, 1995a; Tzanakis e Arcavi, 2000; Liu, 2003). Esta foi também a forma adoptada neste estudo pois, aliando a História da Matemática ao meu gosto pelos problemas e sua resolução, surgiu a simbiose: Problemas históricos da Matemática.

A concepção de que a Matemática pode ser desenvolvida pelo aluno, mediante a resolução de problemas históricos e através da apreciação e análise das soluções apresentadas a esses problemas no passado, começou a difundir-se mais expressivamente a partir do 5º Congresso Internacional de Educação Matemática (5º ICME, Adelaide, 1984). Essa proposta baseia-se no pressuposto de que se a resolução de um problema representa, por si só, uma actividade altamente motivadora, então o facto de esse problema estar relacionado com a história aumentará, quase que automaticamente, o seu potencial motivador.

Liu (2003) salienta que “em contraste com a abordagem de contar histórias para atrair o interesse dos alunos e melhorar as suas atitudes, o uso de problemas históricos na aula tem a vantagem de melhorar as atitudes dos alunos relativamente à Matemática, bem como melhorar a sua compreensão da Matemática” (p. 417).

Frank Swetz é um grande apologista da “utilização” de problemas históricos no ensino da Matemática e essa ideia é defendida no seu livro *Learning Activities from the History of Mathematics*, editado em 1994. Além disso, Swetz tem escrito inúmeros artigos defendendo o seu ponto de vista, nalguns dos quais também apresenta vários problemas/actividades que poderão ser utilizados pelos professores na sala de aula.

Swetz (1995b) reitera a sua opinião ao afirmar que “problemas históricos e resolução de problemas, como um tópico por si só, podem ser o foco de uma aula” (p. 33). Passada mais de uma década, Swetz (2007) continua crente nas suas ideias e no 5th *European Summer University* (ESU5, Praga, 2007) defendeu o seu ponto de vista, alegando que, desde a antiguidade, os registos escritos do ensino da matemática incluíram, quase sempre, problemas para o leitor resolver. De facto, se analisarmos as civilizações antigas, verificamos que a instrução matemática era geralmente composta por uma lista de

problemas, a que se seguiam as soluções, sendo o *papiro de Rhind* e o *Nove Capítulos de Arte Matemática* exemplos bastante ilustrativos desse facto. Ora, isto revela que o ensino da Matemática estava muito relacionado com a resolução de problemas e que, obviamente, tais problemas, como fonte primária de ensino, foram cuidadosamente escolhidos pelos seus autores, tanto para serem úteis como para demonstrarem o estado da sua arte matemática.

Este autor acrescenta ainda que essas colecções de problemas não estão limitadas a sociedades antigas, mas têm aparecido regularmente ao longo da História da Matemática. Nos livros de Matemática, milhares de problemas têm sido acumulados e aguardam para serem utilizados na sala de aula (Swetz, 2007).

Swetz salienta também que o uso de problemas históricos não só ajuda a demonstrar estratégias de resolução de problemas e desenvolver capacidades matemáticas, como também transmite uma sensação de continuidade das preocupações matemáticas ao longo dos tempos, uma vez que o mesmo problema ou tipo de problemas pode ser muitas vezes encontrado e apreciado em diversas sociedades, em diferentes épocas. Além disso, ilustra a evolução dos processos de resolução, pois a forma como resolvemos um problema pode beneficiar da comparação com o processo de resolução original e fornece *insights* históricos e culturais dos povos e dos tempos a que se referem.

Ainda na perspectiva de Swetz (2004b), os professores de Matemática devem participar na procura e implementação de problemas históricos na sala de aula dado que é uma experiência gratificante e enriquecedora.

Haverhals e Roscoe (2010) vêm reiterar a importância dos problemas históricos, afirmando que, neste processo, “a função do professor é a de facilitador e a este compete a apresentação confiante dos problemas” (p. 344). Acrescentam que “o aluno aprende Matemática através da resolução de problemas, construindo activamente o conhecimento através da investigação” (idem).

É interessante notar que Krantz, autor de um livro (entre muitos outros) sobre técnicas de resolução de problemas, “*Techniques of Problem Solving*”, publicou, em 2010, um livro relacionado com a resolução de problemas e a História da Matemática, intitulado *An Episodic History of Mathematics: Mathematical Culture through Problem Solving*. O aparecimento deste livro vem realçar ainda mais a utilidade dos problemas históricos para desenvolver a capacidade de resolução de problemas.

A resolução de problemas tem ocupado um lugar de destaque nas orientações dos documentos oficiais. No Programa de Matemática do 3º ciclo, esta é considerada um “eixo organizador do ensino da Matemática” (ME, 1991, p. 194). No Currículo Nacional do Ensino Básico, podemos ler que:

“A resolução de problemas constitui, em matemática, um contexto universal de aprendizagem e deve, por isso, estar sempre presente, associada ao raciocínio e à comunicação e integrada naturalmente nas diversas actividades.”

(DEB, 2001, p. 68)

Importa destacar a distinção feita, neste documento, entre problema e exercício:

“Os problemas são situações não rotineiras que constituem desafios para os alunos e em que, frequentemente, podem ser utilizadas várias estratégias e métodos de resolução – e não exercícios, geralmente de resolução mecânica e repetitiva, em que apenas se aplica um algoritmo que conduz directamente à solução.”

(DEB, 2001, p. 68)

O NPMEB vem reiterar a importância dada à resolução de problemas, sendo esta uma das capacidades transversais mais destacada:

“A Resolução de problemas é vista neste programa como uma capacidade matemática fundamental, considerando-se que os alunos devem adquirir desembaraço a lidar com problemas matemáticos e também com problemas relativos a contextos do seu dia-a-dia e de outros domínios do saber.”

(DGIDC, 2007, p. 8)

O raciocínio e a comunicação matemática são outras capacidades transversais realçadas neste programa, o que não se verificou no programa anterior uma vez que não lhes foi dada tanta ênfase.

Apesar da diversidade de literatura existente sobre a integração da História no ensino da Matemática, apenas uma parte muito pequena dessa literatura aborda uma verdadeira pesquisa empírica sobre a integração da História da Matemática no ensino da Matemática. A maioria dos artigos encontrados fazem referência a uma variedade de argumentos, quer a favor quer questionadores, do “uso” da História na Educação

Matemática e dão alguns exemplos de como a “usar”. Lamentavelmente, e segundo Jankvist (2009c), “esses argumentos parecem ser apenas baseados em experiências de ensino pessoais dos autores ou em especulações sobre os possíveis benefícios, e só raramente se baseiam em dados empíricos para apoiar as suas alegações” (p. 68).

Em 2001, Gulikers e Blom realizaram uma pesquisa, bastante profunda, de artigos publicados no *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* (ZDM) sobre a utilização da História na Educação Matemática. Como conclusão, escreveram:

“Muitas publicações relatam a experiência de um professor em particular, e não é claro se e como essas experiências (geralmente positivas) podem ser transferidas para outros professores, classes e tipos de escolas.”

(Gulikers e Blom, 2001, p. 223)

Lit et al (2001) acrescentam que “o uso da História da Matemática no ensino da Matemática é amplamente reconhecido. No entanto, até à data, a sua eficácia ainda não foi sistematicamente avaliada” (p. 17).

Alguns anos depois, Siu (2007) aborda também esta questão afirmando que “artigos sobre a importância e o papel da História da Matemática na aprendizagem e o ensino da Matemática superam de longe os que se referem à avaliação da eficácia deste argumento” (p. 269).

No 10º *International Congress on Mathematical Education* (ICME10), realizado em 2004, mais precisamente no âmbito do TSG17 (*Topic Study Group 17*), Siu e Tzanakis (2004) já tinham feito uma declaração semelhante, argumentando que “ficou claro que bastante foi dito a um nível ‘propagandístico’, a retórica tem servido o seu propósito” (p. vi) e, portanto, alegaram que o que era necessário fazer eram investigações empíricas sobre a eficácia do “uso” da História.

Com este trabalho, pretendo realizar uma investigação com base empírica onde a História da Matemática é integrada na sala de aula, com o propósito de poder concluir sobre a eficácia resultante desta integração para a aprendizagem da Matemática.

Com este propósito, foi formulado o seguinte problema de investigação: “Caracterizar a aprendizagem da Matemática quando mediada por problemas da História da Matemática”. Este problema, amplamente definido, foi particularizado em diversas

questões norteadoras desta investigação. Estas questões foram reformuladas ao longo do trabalho e, da análise dos dados, emergiu a formulação final, como a seguir se apresenta:

1. Que aspectos do ambiente de aprendizagem ajudam na aprendizagem da Matemática quando são usados problemas históricos?
2. De que forma os problemas históricos actuam como artefactos mediadores da aprendizagem da Matemática?
3. Como é que o uso dos problemas históricos na sala de aula contribui para promover a aprendizagem da Matemática?
 - 3.1. De que forma os problemas históricos da Matemática ajudam os alunos a compreender os conteúdos matemáticos?
 - 3.2. Como é que os problemas históricos ajudam a desenvolver a capacidade de resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação matemática?
4. Quais as contradições ocorridas quando são utilizados problemas históricos nas aulas de Matemática?

1.3. A estrutura da tese

Esta tese é composta por seis capítulos (incluindo a Introdução), as referências bibliográficas e um conjunto de anexos.

Os capítulos

No segundo capítulo, apresento as principais ideias que resultaram da pesquisa bibliográfica sobre a História da Matemática, salientando a importância dos problemas da Matemática ao longo da História e fazendo referência ao seu papel no ensino da Matemática já desde as civilizações antigas.

O terceiro capítulo, relativo à revisão da literatura, está dividido em duas partes. Na primeira parte, é feita uma abordagem à Teoria da Actividade (TA), tendo sido esta a fundamentação teórica seguida nesta investigação. Inicialmente, são apresentados os fundamentos desta teoria, depois são abordadas as três gerações ao longo das quais se desenvolveu; de seguida, são apresentados os seus principais princípios e, finalmente, é dado destaque a conceitos fundamentais como as Contradições, a Zona de

Desenvolvimento Potencial (ZDP), o Ciclo de Aprendizagem Expansiva e os Artefactos mediadores.

Na segunda parte deste capítulo, são apresentados os principais resultados da revisão da literatura feita sobre a integração da História da Matemática no ensino da Matemática. Inicialmente, são referidos os benefícios que advêm desta integração, assim como as objecções e dificuldades encontradas. Depois, é discutida a avaliação da eficácia desta integração e, de seguida, são apresentadas algumas formas de fazer essa integração. Posteriormente, e tendo em conta a Teoria da Actividade, é dada ênfase à História da Matemática como artefacto mediador no ensino da Matemática. A seguir, é feita uma classificação das fontes a serem utilizadas para fazer essa integração e, finalmente, é abordado o papel da História da Matemática no ensino da Matemática em Portugal.

O quarto capítulo é dedicado à metodologia utilizada nesta investigação. A princípio justificam-se as opções metodológicas adoptadas a que se segue a caracterização do contexto e dos participantes envolvidos nesta investigação. De seguida, são indicados os procedimentos utilizados na recolha dos dados, assim como no tratamento e análise dos mesmos.

No quinto capítulo, é feita a análise e discussão dos dados obtidos no contexto escolar, tendo por base a fundamentação teórica adoptada nesta investigação. Aqui, os dados recolhidos nas aulas observadas são apresentados por temas matemáticos e, a seguir a cada tema, é apresentada uma síntese com as principais ideias que emergiram da análise dos episódios descritos. Depois de feita a análise, serão apresentados os resultados que emergiram da mesma.

No sexto e último capítulo, são apresentadas as conclusões que podem ser inferidas da análise apresentada no capítulo precedente estabelecendo, sempre que possível, um paralelo com os resultados encontrados na revisão da literatura feita no terceiro capítulo. Depois, são indicadas as limitações encontradas na realização desta investigação, assim como as implicações e recomendações que daqui podem advir. A finalizar, são apresentadas algumas reflexões feitas pela investigadora, decorrentes da realização deste trabalho de investigação.

Os anexos

O anexo A é composto por um conjunto de textos relacionados com a História da Matemática nas diversas civilizações, dedicados à História da Matemática no Egipto, Mesopotâmia, Grécia, China, Índia, Civilização Islâmica e Europa Medieval.

Inicialmente, a ideia era dividir a tese em duas partes, sendo uma delas dedicada à História da Matemática e a outra ao seu enquadramento teórico. Porém, devido ao limite de páginas imposto pelo novo Regulamento do 3º Ciclo em Matemática, da Universidade da Madeira, houve necessidade de reformular a tese, optando por apresentar esta parte, que foi de extrema importância para a realização deste trabalho de investigação, em anexo.

O anexo B contém o Regulamento Interno da turma que participou nesta investigação. Este regulamento foi elaborado no início do ano lectivo e fazia parte do Projecto Curricular desta turma. Aí constam as regras, explicitamente estabelecidas, a serem seguidas e cumpridas durante o ano lectivo.

O anexo C contém as fichas de trabalho, elaboradas com recurso à História da Matemática, e que foram utilizadas como artefactos mediadores nas aulas analisadas.

2. ESTUDAR O PASSADO PARA ENSINAR NO PRESENTE

Como o título deste capítulo sugere, é importante estudar o passado da Matemática, ou a Matemática do passado, para a podermos ensinar, actualmente, aos nossos alunos. Se o professor não conhecer a origem e evolução dos conceitos e conteúdos que ensina, não saberá responder a questões que os alunos colocam, do tipo: “E porque é que é assim?” ou “Quem inventou isto?”.

Para poder desenvolver este trabalho de investigação e integrar a História da Matemática nas minhas aulas tive que realizar uma intensa pesquisa bibliográfica, recorrendo a bibliografia dedicada à História da Matemática. Serão apresentados em anexo a este trabalho os conteúdos que me parecem mais relevantes para a prática pedagógica de qualquer professor de Matemática e, em especial, daqueles que pretendam integrar a História da Matemática nas suas aulas.

Assim, encontra-se no anexo A uma breve introdução à História da Matemática nas várias civilizações antigas, nomeadamente, Egipto, Babilónia, Grécia, China, civilizações árabe e islâmica e Europa Medieval. Neste anexo, será feita uma abordagem ao sistema de numeração utilizado em cada civilização, serão apresentados problemas de algumas das obras mais importantes de cada época e discutida a sua resolução e, além disso, será feita referência aos matemáticos que mais se destacaram e ao seu contributo para o desenvolvimento da Matemática.

Neste capítulo, será dada uma visão geral da Matemática nas várias civilizações mencionadas e, uma vez que neste trabalho de investigação a História da Matemática foi integrada na sala de aula através da resolução de problemas históricos, entendo ser pertinente fazer uma abordagem ao papel dos problemas ao longo da História da Matemática, analisando de que forma e com que objectivos eram utilizados. Será que eram utilizados com fins meramente práticos? Ou será que também desempenhavam um papel pedagógico e recreativo?

Todas as referências feitas no presente capítulo a alguns matemáticos e respectivas obras, assim como todos os conteúdos matemáticos que aqui serão focados, de forma superficial, poderão ser aprofundados no anexo A.

2.1. Matemática no Egito

O documento que melhor nos dá a conhecer a Matemática egípcia é o papiro de Rhind (1650 a.C.), que contém uma série de tabelas e 87 problemas com as respectivas soluções. É interessante notar as palavras de abertura do papiro de Rhind, escritas por Ahmes, e que revelam uma procura da Sabedoria, característica dos povos orientais:

“Método correcto de calcular. O acesso ao conhecimento de tudo que existe e de todos os segredos obscuros.”

(Gillings, 1982, p. 45)

O conteúdo do papiro inclui cálculos com números inteiros e fracções unitárias, e problemas. Estes dizem respeito à distribuição de broas de pão ou de canecas de cerveja por trabalhadores, cálculo da quantidade de cereais necessária para obter uma certa quantidade de pão ou de cerveja, determinação de áreas de campos e de volumes de celeiros.

Conhece-se muito pouco sobre a intenção do papiro. Se há indicações de que poderia ser um documento com intenções pedagógicas ou mesmo um simples caderno de um aluno, para outros historiadores representa um guia das matemáticas do antigo Egito, pois é o melhor texto de Matemática da época.

Surge então a questão: a quem seria destinado o papiro? Uma das ideias mais consensuais é que se destinava à iniciação dos escribas na arte do cálculo; teria uma função análoga à de um manual escolar (van der Warden, 1954 apud Estrada, 2000a).

Uma vez que os papiros egípcios são compostos por problemas, e pelas suas resoluções, alguns dos quais elementares, supõe-se que eles tinham intenções puramente pedagógicas e que eram basicamente destinados ao ensino dos funcionários do estado, os escribas. A partir destes papiros temos acesso apenas a uma matemática elementar, com conteúdos muito semelhantes a alguns que são leccionados, actualmente, no ensino básico e secundário, sobre cálculo e geometria. A Matemática era recordada e ensinada através de problemas que eram dados como exemplos para serem imitados. Muitos dos problemas pareciam ter as suas origens na prática dos escribas, contudo, alguns pareciam destinados a dar aos jovens escribas uma oportunidade para mostrarem as suas proezas nos cálculos difíceis e complicados.

Além de não ser clara a dimensão com que os matemáticos egípcios desenvolveram a sua ciência para lá do necessário no seu trabalho diário, também não sabemos nada sobre

como os seus métodos foram descobertos. Além disso, não se sabe se os egípcios tinham, ou não, conhecimentos matemáticos mais avançados; no entanto, os monumentos por eles construídos levam a pensar que, na realidade, os arquitectos eram possuidores de conhecimentos não revelados nos papiros.

Geralmente, é colocada a questão da existência de elementos científicos na Matemática egípcia. As opiniões não são consensuais uma vez que, normalmente, não é dada a justificação dos métodos usados na resolução dos problemas, sendo apenas apresentada a solução. Por outro lado, podemos perguntar se conhecemos tal Matemática no seu todo, já que os documentos que possuímos são escassos. Há historiadores que a consideram bastante rudimentar e primitiva, sem quaisquer elementos científicos; outros, contudo, exprimem opiniões mais favoráveis à existência de uma matemática mais científica e sofisticada.

Em Estrada (2000a, p. 54-55), podemos encontrar algumas dessas opiniões:

“Não sabemos [...] como os escribas egípcios descobriram os métodos que usaram. Se eles simplesmente fizeram uma suposição correcta, então podíamos dizer que não tinham uma matemática científica. Mas se eles usaram alguma forma de argumento [...] eu penso que se deve concluir que a sua matemática tinha um suporte científico.”

(Katz, 1996, em APM (Actas do HEM), 1, p. 51)

“Um estudo cuidadoso do papiro de Rhind convenceu-me que este trabalho não é uma mera colecção de problemas práticos especialmente úteis para medir terras e que os egípcios não eram uma nação de lojistas interessados apenas naquilo que podiam utilizar. [...] eu creio que eles estudaram matemática pelo seu próprio gosto.”

(A. B. Chace in Fauvel and Gray, 1987, p. 22)

“Todos os textos disponíveis evidenciam para uma matemática egípcia de objectivos muito limitados, embora com alguma sofisticação dentro desses limites.”

(Struik, 1997, p. 56)

“Na aritmética [da matemática egípcia], as soluções repetidas dos problemas do tipo ‘aha’ pelo mesmo processo evidencia a existência de algumas generalizações, embora nunca fossem explicitamente descritas ou provadas. Além disso, muitos dos problemas do papiro de Rhind sugerem que os egípcios também desenvolveram interesses de natureza teórica ou recreativa.”

(Bunt, Jones e Bedient, 1988, p. 37)

“A verdade é que as matemáticas egípcias permaneceram num nível demasiado baixo para contribuírem com alguma coisa de valor. As dificuldades de cálculo com um tão rudimentar sistema de numeração e métodos primitivos impediram qualquer avanço ou interesse em desenvolver a ciência pelo seu próprio gosto.”

(G. J. Toomer in Fauvel and Gray, 1987, p. 24)

Olhando, de um modo geral, para os manuscritos egípcios, verificamos que não passam de colecções de problemas aparentemente práticos. O ensino da arte de calcular parece ser o mais importante nos problemas. Tudo é apresentado com números específicos, e em lado algum encontramos um esboço do que possa ser chamado teorema ou uma regra geral de cálculo. Se o critério para uma matemática científica é a existência do conceito de prova, os egípcios restringiram-se à “aritmética aplicada”. Talvez a melhor explicação da razão pela qual os egípcios nunca ultrapassaram um nível relativamente primário é o facto de eles terem uma ideia natural, mas infeliz, de apenas admitirem fracções unitárias; assim, até um simples cálculo se torna lento e laborioso.

Uma análise dos antigos cálculos egípcios² mostra que, apesar da sua pobre notação, os egípcios atingiram bastante eficiência nas técnicas da aritmética. Considerando as dificuldades que os alunos actualmente têm em fazer cálculos com fracções, mesmo em notação simples e moderna, é admirável a paciência e a persistência destas pessoas, que sabiam como trabalhar com problemas tão complicados há 4000 anos.

Como refere Estrada (2000a), “há problemas que se podem classificar de práticos, numa sociedade que vive da agricultura, e em que a moeda de troca são os bens. Há outros com um carácter menos prático, que apontam para um gosto da Matemática por si própria; parecem questões meramente levantadas para o exercício do cálculo ou diversão” (p. 26).

O problema 79 do papiro de Rhind (ver anexo A.1) é um exemplo bastante ilustrativo do carácter recreativo de alguns problemas do papiro de Rhind, ao invés do tipo de problemas puramente práticos, defendido por alguns historiadores como sendo o limite da Matemática egípcia.

² Por exemplo, os problemas 31 e 33 do papiro de Rhind (ver anexo A.1).

2.2. Matemática na Mesopotâmia

A Matemática do Antigo Egipto, contrariamente à opinião muito popular, nunca atingiu o nível alcançado pela Matemática babilónica.

(Eves, 1969, p. 36)

No âmbito da Matemática babilónica, somos muito menos afortunados do que relativamente à Matemática egípcia. Dado que o modo de escrita em placas de argila, utilizado pelos babilónios, desencoraja a compilação de longos tratados, não há nada entre os registos babilónicos que seja comparável ao papiro de Rhind. No entanto, algumas centenas de placas com conteúdo matemático foram encontradas, embora muitas delas estivessem em mau estado de conservação.

A grande maioria destas (cerca de dois terços) é da Antiga Babilónia. É através desta rica fonte de material original que agora sabemos que, excepto para determinadas regras geométricas, a Matemática babilónica ultrapassou a Matemática dos egípcios. Embora a Matemática babilónica também tivesse fortes raízes empíricas que estão claramente presentes na maioria das placas que foram traduzidas, parece ter havido a tendência para uma expressão mais teórica.

É possível encontrar centenas de placas babilónicas contendo tabelas, quer se trate de tabuadas, de tabelas de inversos, tabelas relacionadas com ternos pitagóricos (muito antes de Pitágoras ter reclamado a descoberta do seu famoso teorema), ou tabelas descrevendo a resolução do que hoje designamos por problemas de Matemática, normalmente agrupados de modo que uma dada placa contém problemas do mesmo tipo, por vezes sequenciados numa complexidade crescente (Neugebauer, 1969).

Depois de uma análise da Matemática babilónica, podemos concluir que os antigos babilónios foram incansáveis construtores de tabelas, calculadores de alta habilidade e, definitivamente, mais fortes na álgebra do que na geometria. E ficamos, certamente, impressionados com a complexidade e a diversidade dos problemas por eles considerados.

A actividade matemática dos escribas babilónicos parece ter nascido das necessidades do dia-a-dia. Do conteúdo dessas placas pensa-se que, por volta de 2500 a. C., já existiam escolas de escribas, cujo objectivo era a preparação dos jovens para as diferentes tarefas exigidas por uma burocracia complexa.

No entanto, no contexto escolar dos escribas, as pessoas tornavam-se interessadas na matéria para o seu próprio prazer, aprofundando os problemas e as técnicas para além

do que era estritamente prático. O objectivo era tornar-se um matemático virtuoso, capaz de resolver problemas impressionantes e complexos.

Podemos considerar, então, que a Matemática dos babilónios não era exclusivamente focada em aplicações práticas. Os babilónios mostraram o início de um interesse teórico em problemas de Matemática.

Tal como os egípcios, os escribas babilónicos sabiam resolver equações lineares. Também conseguiam resolver uma variedade de problemas que conduziam a equações do 2º grau. Muitos destes problemas eram bastante artificiais e parece que existiam apenas como um modo dos escribas demonstrarem as suas proezas. A maior mestria dos escribas babilónicos na resolução de equações revela-se nas equações quadráticas. Podemos dizer que os escribas da Antiga Babilónia resolviam qualquer equação do 2º grau completa, por processos que correspondem à aplicação da nossa fórmula resolvente.

Acresce dizer que os babilónios podem reivindicar prioridade em várias descobertas, sendo a mais notável a do Teorema de Pitágoras, geralmente atribuída a escolas matemáticas posteriores. A geometria babilónica, tal como a dos egípcios, era dedicada, maioritariamente, às medições e os babilónios tinham fórmulas para aproximações de áreas e volumes de várias figuras e sólidos.

Um aspecto interessante da matemática babilónica é a ocorrência de problemas que nem pretendem ser práticos, mas, ao contrário, têm um aspecto recreativo. Eram problemas lúdicos que, normalmente, conduziam a uma equação quadrática.

Todos os problemas que aparecem nas placas babilónicas estão expressos retoricamente, ou seja, com frases em linguagem corrente, sem notação simbólica. Algumas das placas contêm as respostas ou até mesmo as soluções completas, mas há muito poucas que explicam como foi descoberto o processo por detrás dos métodos ensinados ou demonstrados. Isto torna difícil compreender a forma de pensamento seguido pelo escriba na resolução dos problemas. No entanto, quando interpretados à luz dos actuais conceitos e símbolos algébricos, os cálculos adquirem algum sentido.

Essa interpretação levou alguns historiadores da Matemática a defenderem que os babilónios tinham desenvolvido uma “álgebra babilónica”. Esta álgebra tem sido considerada diferente da nossa moderna álgebra elementar, principalmente pela sua falta de representações simbólicas.

Muitos dos problemas da Matemática da Babilónia levantam-nos algumas interrogações. Durante décadas ouvimos os historiadores dizerem que a Matemática se iniciou na Grécia Antiga e que outras culturas anteriores em torno do Mediterrâneo, os egípcios e os povos da Mesopotâmia, possuíam uma Matemática essencialmente prática, virada para a resolução de problemas do dia-a-dia, nomeadamente, o cálculo de áreas de terrenos e de volumes de recipientes, a partilha de bens, etc. No entanto, é difícil entrever a aplicação prática da Matemática contida em determinados problemas, como por exemplo:

Exemplo 1 (Problema 19 da placa YBC 4652): *“Encontrei uma pedra, [mas] não a pesei; [depois] pesei 6 vezes [o seu peso], adicionei 2 gin³, [e] adicionei um terço de um sétimo [deste peso total] multiplicado por 24, pesei [tudo]: 1 mina⁴. Qual era o [peso] original da pedra?”*

Um segundo problema, contido noutra placa de problemas, sensivelmente da mesma época, cerca de 1.700 a. C., constitui um exemplo mais elaborado:

Exemplo 2: *“Somei 7 vezes o lado do meu quadrado a 11 vezes a sua área e é 6;15.”*

Qual a situação da vida real em que queremos conhecer a altura de uma pedra, e para tal, em vez de a medir directamente, imaginamos 6 pedras iguais, juntamos duas unidades, dividimos a altura obtida por 3, depois por 7 e multiplicamos por 24? O mesmo se passa no segundo problema. Qual a situação prática na qual é necessário somar 7 vezes o lado do quadrado a 11 vezes a sua área? Estes problemas não são casos isolados. Pelo contrário, estas questões poder-se-iam colocar em relação a muitos outros problemas contidos em placas provenientes da Mesopotâmia que chegaram até nós, envolvendo situações artificiais que só aparentemente se destinavam a aplicações práticas.

Por outro lado, o modo como os problemas aparecem sequenciados indicia uma preocupação não com cada problema em si, mas com métodos gerais de resolução. Trata-se, como afirma Neugebauer (1969), do desenvolvimento de procedimentos puramente algébricos.

Para este arqueólogo alemão, as relações algébricas constituem o centro do principal interesse dos problemas babilónicos. Assim, por exemplo, a solução de um

³ 1 gin = 1/60 mina

⁴ 1 mina ≈ 0,5 kg (=571,2 g)

problema que propõe calcular a profundidade de um canal e o número de trabalhadores necessários para tal trabalho conduz a um resultado pouco realista de um número fraccionário de trabalhadores. Para o escriba que redigiu este problema, é claro que o método de resolução era mais importante do que o resultado.

Quando analisamos, por exemplo, as instruções do escriba para resolver um problema que pode ser traduzido por uma equação do tipo $ax^2 + bx = c$, notamos que é inegável o carácter pedagógico dos problemas babilónicos. De facto, não restringem os seus exemplos apenas a números tais que $\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + ac}$ seja um número inteiro, mas, na maioria das vezes, impõem igualmente que a divisão final por a seja exacta (ver anexo A.2).

Muitas das indicações de resolução dadas pelos escribas babilónicos são um conjunto de instruções, cuidadosamente sequenciadas, conduzindo o leitor à resolução do problema.

Um professor de Matemática reconhece, facilmente, nos exemplos apresentados anteriormente, artefactos comumente associados às aulas de Matemática: tabuadas, sequências de problemas do mesmo tipo de complexidade crescente, situações que só aparentemente são da vida real, listas de instruções de procedimentos a seguir, ou o cuidado em apresentar casos em que a resolução dos problemas pode ser efectuada por processos que divergem do habitual.

Podem ainda apontar-se outras características associadas a uma abordagem “pedagógica”, por exemplo, a utilização de números “simples”, a selecção de situações com uma e uma só solução, ou a escolha de problemas visando destacar alguma particularidade matemática.

Há placas que contêm dezenas e mesmo centenas de enunciados, alguns com as soluções, outros não. Em determinadas colecções, os enunciados são apresentados de forma abreviada, devido ao seu carácter repetitivo, onde apenas é alterado o valor das dimensões. Parece óbvio que tais colecções eram usadas para ensinar métodos matemáticos (Neugebauer e Sachs, 1986 apud Estrada, 2000b).

Além de Neugebauer, outros historiadores da Matemática têm realçado o cunho didáctico de muitos textos de Matemática da Babilónia e têm-nos relacionado com as escolas de escribas. Hoyrup é um desses historiadores e defende que:

“diversos tipos de evidência sugerem que a unificação e a coerência [da matemática da Mesopotâmia] não correspondem efectivamente a necessidades práticas administrativas. Pelo contrário, [...] parecem ser o produto das escolas onde os futuros funcionários eram treinados, e onde as técnicas que eles iam aplicar eram também desenvolvidas.”

(1994, p. 4)

Também Katz partilha da mesma opinião, ao afirmar que:

“a finalidade de resolver vários problemas não é determinar a solução, mas aprender vários métodos de reduzir problemas complicados noutros mais simples. Podemos especular, portanto, que as placas matemáticas em geral, [...], eram usadas para treinar as mentes dos futuros líderes do país.”

(1998, p. 39)

Ainda segundo Katz (1998), “o que era importante era que os alunos desenvolvessem capacidades na resolução de problemas” (p. 39). Geralmente, quando os alunos nos perguntam para que serve a Matemática, dizemos-lhes que um dos principais objectivos de estudar Matemática é para “treinar a mente” e desenvolver o raciocínio. Parece que esta resposta não é nova e já os babilónios de há 4000 anos deviam responder a mesma coisa!

É ainda de salientar que alguns dos erros cometidos pelos escribas babilónicos são, também, cometidos actualmente pelos nossos alunos. Um exemplo disso é a incorrecta aplicação da fórmula $A = \frac{B+b}{2} \times h$, para determinar a área de um trapézio, considerando, incorrectamente, h o valor de um dos lados não perpendicular às bases. Este facto deveria levar os professores de Matemática a prever esta falha, geralmente cometida pelos alunos, e a tentar arranjar estratégias para a evitar.

Analisando a Matemática babilónica de um ponto de vista pedagógico, podemos ainda encontrar ideias para ensinar Matemática nas nossas escolas. Um exemplo disso é o ensino da resolução de equações do 2º grau através da “geometria do recorta e cola”, como podemos ver em (Radford e Guérette, 2000). Inspirados pela pesquisa histórica, estes autores desenvolveram, com êxito, uma sequência de ensino em sala de aula em que, através de “geometria do recorta e cola”, os alunos redescobrem a fórmula para a resolução de equações do 2º grau.

2.3. Matemática na Grécia

“[...] a ciência dos números. Abriu-a Tales de Mileto; continuaram-na Pitágoras e Platão, que proclamou a sua importância, escrevendo à porta da sua Escola: aqui não entra quem não for geómetra; desenvolveu-a Eudoxo de Cnido; fizeram-na brilhar com esplendor Euclides, Arquimedes, Apolónio, Diofanto e Papo; aplicaram-na com engenho Hiparco, Herão e Ptolomeu.”

(Teixeira, 1934, s/p)

No que respeita à Matemática grega, supõe-se que os gregos terão encontrado no Egito e na Mesopotâmia os elementos de base para a sua astronomia e geometria. Segundo alguns autores, o conhecimento dessas duas civilizações terá sido essencial para o desenvolvimento da Matemática grega.

De acordo com a história, alguns dos grandes matemáticos gregos viajaram pelo Egito e pela Mesopotâmia e sabe-se também que os gregos estabeleceram contactos comerciais com estas duas civilizações; no entanto, como salienta Sá (2000), “não está provado que, em virtude desses contactos, a Matemática grega tenha evoluído a partir das matemáticas orientais” (p. 226), pois “apesar das inquestionáveis influências do Egito e da Babilónia nas mentes gregas, a matemática produzida pelos gregos difere radicalmente daquela que a precedeu” (Kline, 1982, p. 42, apud Almeida, 2007, p. 43).

Na antiga Babilónia e Egito, a Matemática tinha sido cultivada, principalmente, como uma ferramenta para uma imediata aplicação prática ou, então, como parte do conhecimento acessível apenas a uma classe privilegiada de escribas. Já o interesse dos gregos pela Matemática não se alicerçou no seu carácter utilitário. Pelo contrário, os gregos encaravam a Matemática como uma actividade intelectual que integrava elementos tanto de natureza estética como religiosa.

Os gregos trouxeram uma nova concepção para a Matemática, passando esta a ser uma ciência dedutiva fundamentada com provas, em oposição ao que aconteceu com as civilizações anteriores, que utilizaram os conhecimentos adquiridos através de raciocínios por analogia, pela experimentação e generalização a partir de exemplos.

Pela primeira vez, em Matemática, assim como noutros campos, os Homens começaram a fazer perguntas fundamentais, tais como, “Por que são iguais os ângulos da base de um triângulo isósceles?” ou “Por que razão um círculo é bissectado pelo seu diâmetro?” Os processos empíricos do antigo Oriente, suficientes para responder à questão

“Como”, já não bastavam para responder a estas perguntas mais científicas do “Porquê”.

Um equívoco que se comete, com frequência, é pensar que a Matemática grega tratava apenas da geometria e, em particular, que os *Elementos* de Euclides (ver anexo A.3) abordavam apenas temas relacionados com geometria. Na verdade, há muito de aritmética e álgebra em vários dos livros dos *Elementos*. O que é verdade – e isso explica, pelo menos em parte, a origem do equívoco – é que a Matemática grega, na época em que Euclides compôs a sua obra ou Pitágoras fundou a sua escola, era toda ela geometrizada.

A famosa inscrição que Platão colocou sobre a sua varanda, “*Que aqui não entre quem não souber geometria*”, vem também reforçar a ideia de que a Matemática grega se resumia à geometria. Essa ideia tornou-se tão enraizada que, até cerca de 100 anos atrás, os matemáticos costumavam ser chamados de “geómetras”.

Para os pitagóricos, a geometria estava intimamente ligada à aritmética, e interessaram-se, especialmente, pelas relações geométricas que podiam ser traduzidas através de uma expressão aritmética.

Tal como a geometria egípcia, a geometria dos pitagóricos também se debruçava muito sobre áreas e a Pitágoras é atribuído o importante teorema segundo o qual o quadrado sobre a hipotenusa de um triângulo rectângulo é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados. “Provavelmente, ele aprendeu com os egípcios a verdade do teorema no caso especial em que os lados são 3, 4, 5, respectivamente”, assim o realça Cajori (1909, p. 23).

Ainda relativamente aos *Elementos* de Euclides, esta obra reúne quase todo o conhecimento matemático daquele tempo e pensa-se que foi escrita por volta de 300 a.C. Para compilar os *Elementos*, Euclides baseou-se na experiência e descobertas dos seus antecessores dos três séculos precedentes. Embora grande parte do seu conteúdo tivesse sido extraído de fontes anteriores, Euclides mostrou o seu génio ao apresentar de maneira lógica e racional, podemos até dizer didáctica, todo o conhecimento matemático acumulado pelos seus antecessores.

Não sabemos se Euclides escreveu os *Elementos* para uso no ensino, ou apenas para reunir o conhecimento matemático da época. De qualquer modo, e apesar da pouca preocupação pedagógica dos gregos, Euclides alcançou os dois objectivos e os *Elementos* foram muito usados no ensino da Matemática por mais de 2000 anos.

2.4. Matemática na China

A China pertence, juntamente com a Babilónia e o Egipto, às civilizações mais antigas do mundo. No entanto, diferentemente do que aconteceu com as outras civilizações, a cultura chinesa pôde desenvolver-se de forma quase ininterrupta durante vários milénios. Por conseguinte, não é surpresa que muito possa ser dito sobre as descobertas matemáticas feitas pelos chineses e que, em alguns casos, a Matemática chinesa foi muito além da de outras civilizações, incluindo a Ocidental.

O primeiro verdadeiro Tratado de Matemática, que sobreviveu até ao nosso tempo, é o clássico *Nove Capítulos de Arte Matemática* (ver anexo A.4) que, juntamente com os comentários de Liu Hui, pode ser visto como o fundamento da Matemática chinesa.

De acordo com Shen e outros (1999), “é o primeiro tratado chinês especificamente sobre Matemática e na influência no desenvolvimento da Matemática é comparável apenas aos *Elementos* de Euclides” (p. vii). Assim como este último é, muitas vezes, considerado a base do ramo Ocidental da Matemática, o *Nove Capítulos* é considerado a pedra angular da Matemática chinesa. Onde a tradição euclidiana se baseia em teoremas seguidos de prova, o *Nove Capítulos* fornece regras aritméticas com foco em aplicações práticas, compiladas em forma de pergunta e resposta. Mas é de referir que as regras aritméticas foram escritas em palavras, não na notação algébrica a que estamos acostumados nos dias de hoje.

Este livro pode ser comparado aos *Elementos* por ser uma organização de conhecimento matemático, acumulado pelos chineses, até meados do terceiro século. O *Nove Capítulos* tinha o objectivo de ser, não um trabalho teórico ao estilo grego, mas um manual prático, com problemas que os trabalhadores do Estado eram susceptíveis de encontrar, como por exemplo, medição de terras cultivadas, construção de diques e canais, capacidades de espigueiros, taxas de câmbio e tributação de géneros alimentícios. Assim, os capítulos têm títulos como “Medição do campo”, “Distribuição pela proporção” e “Impostos justos”.

Ao contrário dos gregos, que tinham um talento único para a geometria e desenvolveram este tema como um sistema dedutivo abstracto, os chineses preocuparam-se com algumas questões geométricas, mas sempre de forma empírica, não demonstrativa. Tudo o que podemos encontrar nos manuais da antiga Matemática chinesa, no âmbito da geometria, são problemas práticos ligados à vida quotidiana, que envolvem o cálculo das áreas de todos os tipos de formas e volumes de vários navios e barragens. A Matemática

chinesa foi profundamente algébrica, portanto, as figuras geométricas serviram apenas para converter a informação numérica na forma algébrica.

Além de problemas que pretendem ser práticos, aparecem também problemas sem utilidade prática, colocados por diversão ou para desenvolver a capacidade de resolução de problemas.

Do ponto de vista pedagógico, os capítulos do *Nove Capítulos de Arte Matemática* estão bem estruturados (Shen et al, 1999). No início do capítulo, as perguntas são simples e fáceis, mas tornam-se mais complexas e difíceis com o desenvolvimento do capítulo (o que também acontece noutros Manuais, como por exemplo, no do *Mestre Sun*). Além disso, alguns problemas são resolvidos por mais do que uma maneira, para enfatizar alguns aspectos da solução. Se necessário, são usadas figuras para tornar as relações visíveis, sendo esta uma estratégia de resolução de problemas que, actualmente, aconselhamos aos nossos alunos.

Particularmente, os comentários de Liu Hui são instrutivos. “Compreender por analogia e relacionar conhecimento antigo com novas ideias’ é outro método pedagógico importante para uma aprendizagem activa e para uma eficaz consolidação de conhecimentos e, é claro, que Liu teve plena consciência do valor de tais ligações” (Shen et al, 1999, p. 308).

É de realçar ainda que em todos os problemas do capítulo IX do *Nove Capítulos*, as respostas são números racionais. Como todos os problemas envolvem triângulos rectângulos, acontece que, como nos textos babilónicos, os problemas são feitos de modo que todos os triângulos rectângulos tenham as medidas dos lados racionais. Isto mostra que os problemas não tinham apenas aplicações práticas, o que nos leva a crer que eram inventados com o propósito de treinar a regra e de desafiar a argúcia de quem os resolvia.

Note-se que um dos maiores objectivos da Matemática chinesa foi a proficiência na resolução de problemas e a manipulação algébrica. Actualmente, é possível usar simbolismo moderno para escrever cada um dos problemas propostos nos textos chineses e dar uma solução algébrica, mas temos que ter sempre em mente que nem os chineses, nem outros povos antigos, usavam o simbolismo que nos permite resolver estes problemas com pouco esforço. Todos os seus problemas e soluções eram escritos em palavras. Mesmo assim, os escribas não hesitaram em apresentar problemas com soluções difíceis de

calcular, talvez porque queriam convencer os seus alunos que um completo domínio desses métodos permitiria a resolução mesmo dos problemas difíceis.

Relativamente ao contributo da Matemática chinesa para o actual ensino da Matemática, é de salientar que nas obras chinesas encontramos um manancial de problemas que podemos utilizar nas nossas salas de aula. Os conteúdos abordados pelos antigos chineses correspondem, essencialmente, aos actuais conteúdos programáticos para o 3º Ciclo. Por isso, não é de admirar que uma adaptação de um desses problemas tenha saído numa Prova de Aferição (ver anexo A.4). Infelizmente, os autores dos manuais escolares ainda não se aperceberam do tesouro que a Matemática chinesa (assim como a de outras civilizações antigas) encerra.

Outro aspecto que, na minha opinião, merece ser mencionado é o facto de que os chineses também utilizavam cores diferentes (vermelho e preto) para distinguir os números positivos dos negativos, tal como fazemos nas nossas aulas, quando começamos a ensinar a adição de números inteiros relativos, embora a nossa atribuição das cores seja inversa à deles.

Este é apenas um exemplo de um método antigo que é muito útil nas nossas salas de aula. Ao analisar a História da Matemática, encontramos muitos outros, como por exemplo, o método da falsa posição. Um outro seria determinar o m. d. c. de dois números, pelo chamado “Algoritmo de Euclides”, como os chineses o faziam.

Por fim, é de acrescentar que na Matemática chinesa há muitos problemas que, embora em contextos da vida real, são recheados com dados tão inadequados à situação que os afastam de qualquer intencionalidade prática, enquanto outros, aparentemente lúdicos, colocam questões do foro da Análise Combinatória ou do âmbito da Teoria dos Números. Alguns desses problemas estão, hoje, catalogados como “recreações matemáticas” e têm despertado a curiosidade de diversos matemáticos ao longo dos tempos.

2.5. Matemática na Índia

Por causa da falta de registos originais muito pouco é conhecido sobre o desenvolvimento da antiga Matemática indiana. É provável que, numa primeira fase, a

Matemática indiana tenha sido directamente influenciada e inspirada pela Matemática grega e, numa fase posterior, afectada por tradições chinesas.

O grau de influência da Matemática grega, babilónica e chinesa sobre a Matemática indiana é ainda um assunto que suscita dúvidas, mas há grande evidência de que foi bastante considerável. Por isso, a questão de que métodos foram desenvolvidos originalmente pelos próprios indianos tem sido objecto de muita conjectura.

Ao contrário dos gregos, os indianos deram pouca importância às demonstrações e, por vezes, havia apenas uma figura que ilustrava o problema e o comentário do autor restringia-se unicamente à palavra “*Vê*”.

Como assinala Eves (1969), “os indianos foram hábeis aritméticos e deram contribuições importantes à álgebra” (p. 185) que era “uma álgebra inteiramente numérica, menos rigorosa do que a álgebra geométrica dos gregos, mas mais simples e de aplicação mais fácil” (Teixeira, 1934, s/p).

No período de 400 a 1200, os indianos desenvolveram uma Matemática superior à dos gregos, excepto na geometria. E, contrariamente aos gregos, dissociaram a álgebra da geometria, conforme salienta Teixeira, através da seguinte comparação,

“Na Grécia, a Álgebra caminhava pela mão de sua mãe, a Geometria, que solícita e rígida, a não deixava correr, com receio de que caísse. Na Índia, a filha desprendeuse da mãe e fugiu-lhe, mas dirigia-a um como instinto vidente, e por isso não caiu. Este instinto vidente, o génio, tinham-no também os matemáticos gregos, mesmo em maior grau do que os matemáticos índios, mas aqueles eram severos na lógica e por isso não desprendiam a quantidade discreta da quantidade contínua.”

(1934, s/p)

Quando comparamos a Matemática desenvolvida pelos indianos com a Matemática de outras civilizações anteriores, apercebemo-nos da grande diferença entre a concepção da Matemática do ponto de vista dos indianos e dos gregos; enquanto a Matemática grega foi por excelência geométrica, a indiana foi, em primeiro lugar, aritmética. Os indianos trabalharam com números, os gregos com formas.

O simbolismo numérico, a ciência dos números e a álgebra atingiram, na Índia, uma perfeição muito maior do que aquela que tinham, anteriormente, chegado os gregos. Por outro lado, pensa-se que havia pouca ou nenhuma geometria na Índia que não tivesse tido origem na Grécia. Possivelmente, a trigonometria dos indianos pode ser mencionada como uma excepção, embora esta se tenha baseado mais na aritmética do que na geometria.

Os indianos trabalharam com fracções e usaram um sistema decimal posicional com o zero. Além disso, admitiram números negativos e irracionais e reconheceram que uma equação quadrática (com respostas reais) tem duas raízes. Generalizaram a solução algébrica das equações quadráticas pelo método familiar de completar o quadrado e trabalharam com equações indeterminadas, tendo desenvolvido um método para resolver a *equação de Pell* (ver anexo A.5). Além disso, tinham métodos para calcular raízes quadradas e cúbicas e sabiam como somar progressões aritméticas e geométricas. Além da álgebra, revelaram interesse por alguns aspectos de combinatória.

Também introduziram os primeiros rudimentos da álgebra: abreviaturas e símbolos das operações. No entanto, como não tinham um simbolismo algébrico tão desenvolvido como o nosso, os problemas eram colocados em verso, de uma forma poética. Essa forma de colocar os problemas é bem visível nos trabalhos dos matemáticos indianos, principalmente, “[...] Baskara, que a [a álgebra] personificou poeticamente em uma mulher formosa, *Lilavati*, a quem propõe em verso problemas desta ciência, que ela resolve por meio de regras enunciadas também em verso” (Teixeira, 1934, s/p). Certamente que essa característica atraía os leitores e dava um aspecto recreativo à Matemática.

Os problemas enunciados de forma brincalhona revelam um interesse pelo aspecto lúdico da Matemática. Conforme salienta Eves (1969), a respeito de um problema de Aryabhata, “este problema também ilustra a prática indiana de vestir os problemas aritméticos com um traje poético” (p. 185). Isto acontecia porque os manuais escolares eram escritos em verso e porque os problemas eram, frequentemente, usados de forma recreativa, para diversão social. Nada melhor para mostrar o carácter recreativo da Matemática indiana do que as seguintes palavras de Bramagupta:

“Estes problemas são propostos simplesmente para diversão; o homem sábio pode inventar mil outros, ou pode resolver os problemas dos outros pelas regras dadas aqui. Como o sol eclipsa as estrelas pelo seu brilho, então o homem com sabedoria eclipsará a fama de outros em reuniões do povo ao propor problemas algébricos e, ainda mais, ao resolvê-los.”

Conforme salienta Struik (1987), “isto confirma o facto da Matemática no Oriente ter há muito evoluído da sua função puramente utilitária, se é que alguma vez tenha sido a única” (p. 66). Passados 150 anos, Alcuino de York, no Ocidente, escreveu *Problemas para estimular os jovens* (ver anexo A.7) que, devido ao carácter lúdico dos problemas propostos, mostravam que também não tinham quaisquer propósitos utilitários. O mesmo

acontece com os problemas propostos na *Antologia Grega* (ver anexo A.3), que não é mais do que uma compilação de problemas recreativos, do género dos propostos, quase três séculos depois, por Alcuino.

Do ponto de vista didáctico, os problemas apresentados na Matemática indiana parecem-me muito úteis, na medida em que a sua vertente lúdica poderá incitar à sua resolução. Penso que um aluno se sentirá mais motivado para resolver um problema colocado desta forma do que para resolver uma equação colocada de forma abstracta, em que se pede para calcular o x , que para ele não representa nada.

2.6. Matemática na Civilização Islâmica

No que concerne à aritmética, os árabes basearam-se nas descobertas dos indianos e pouco contribuíram para o seu desenvolvimento, conforme o destaca Vasconcellos:

“Baskara, o último dos grandes matemáticos da Índia antiga, resolveu problemas que necessitavam de grandes habilidades de cálculo, abrindo novos caminhos e apresentando novas ideias que os Árabes (que certamente, devem ter conhecido a obra de Baskara, logo que a mesma foi publicada) não souberam depois utilizar convenientemente, nem desenvolver.”

(Vasconcellos, 2009, p. 412)

O papel desempenhado pelos árabes relativamente à geometria foi mais de preservação do que de descoberta, pois foram eles que traduziram os grandes clássicos gregos, “não deixando cair a tradição grega” (Santos et al, 2008 (Vol VII), p. 16). No entanto, destaque-se que “os árabes não se limitaram a copiar, contribuindo com novos olhares e novas aplicações do excelente trabalho grego” (idem).

As maiores contribuições dos matemáticos árabes verificaram-se no campo da álgebra geométrica. Para provar as suas regras, os árabes também usaram demonstrações geométricas; inspirados pelos *Elementos* de Euclides, pareciam acreditar que um argumento teria que ser geométrico para que fosse convincente.

A álgebra dos antigos árabes estava, ainda, numa fase primitiva de retórica, caracterizada pela total ausência de símbolos matemáticos, em que os cálculos eram efectuados por meio de palavras (até mesmo os números eram escritos por palavras em vez de apresentados como símbolos).

Os árabes também usaram as regras da *falsa posição* e da *dupla falsa posição*, para resolver certos problemas de álgebra de uma forma aritmética. Além disso, calcularam raízes quadradas e cúbicas, trabalharam com frações e usaram a *regra de três*. Esta regra, tal como muitos outros aspectos da aritmética elementar, parece ter tido origem no trabalho dos indianos.

Foi a partir do trabalho de al-Kwarizmi (ver anexo A.6) que os europeus ocidentais começaram a aprender álgebra. Não parece provável que o seu conhecimento de técnicas algébricas tenha a influência de Diofanto (ver anexo A.3), cuja *Aritmética* não foi traduzida até o final do século X. Além disso, a álgebra de Diofanto tem um carácter totalmente diferente, estando principalmente preocupada com a Teoria dos Números.

Ao compararmos a solução das equações quadráticas de al-Kwarizmi com as soluções dadas por Euclides, é notório o progresso e a evolução das antigas práticas matemáticas para métodos mais gerais e mais fáceis de aplicar. Nos *Elementos* de Euclides, a geometria sobrepunha-se à álgebra, revestindo todos os conteúdos algébricos; com al-Kwarizmi, a álgebra ganha mais protagonismo e as explicações geométricas passam a desempenhar apenas um papel auxiliador do raciocínio algébrico.

Por outro lado, a justificação geométrica de al-Kwarizmi para a resolução das equações quadráticas mostra a sua herança babilónica; a descrição de um dos seus métodos corresponde à descrição dada pelos babilónios para a solução da equação $x^2 + \frac{4}{3}x = \frac{11}{12}$.

Mas, apesar da descrição geométrica de al-Kwarizmi parecer ter sido baseada em fontes babilónicas, há diferenças substanciais. A primeira delas está relacionada com o facto de que os babilónios estavam interessados em encontrar os lados dos quadrados enquanto al-Kwarizmi pretendia encontrar números que satisfizessem determinadas condições. A segunda diferença e, na minha opinião, a mais relevante, é que os babilónios usavam truques engenhosos, que variavam de problema para problema, o que não acontece com al-Kwarizmi, que sistematiza as equações quadráticas em seis tipos padrão, resolvendo cada tipo de acordo com regras específicas.

Em suma, apesar das equações quadráticas já terem sido consideradas em civilizações anteriores, é no trabalho dos algebristas árabes que se encontra uma abordagem mais sistemática e generalizada, que visa compreender não só estes tipos específicos de equações, mas a estrutura fundamental dos procedimentos algébricos e do raciocínio.

Quando comparada com a Matemática indiana, é notória a ausência da vertente recreativa na Matemática dos árabes, aspecto tão característico na Matemática dos seus antecessores.

Outro aspecto que é de ressaltar na Matemática árabe é a falta de utilidade prática, o que é salientado por Katz (1998) ao referir que “embora al-Kwarizmi tivesse prometido no seu prefácio que iria escrever sobre o que era ‘útil’, muito poucos dos seus problemas que conduzem a equações quadráticas lidam com qualquer ideia ‘prática’” (p. 249). Muitos dos seus problemas, semelhantes a alguns propostos por Diofanto, começam com “Dividi 10 em duas partes”. Há poucos problemas que abordam a divisão de dinheiro entre um certo número de homens, mas, mesmo esses, não têm sentido prático. Na verdade, um desses problemas traduz-se pela equação $x^2 + x = \frac{3}{4}$, onde x representa o número de homens, mas a sua solução é $x = \frac{1}{2}$, o que contradiz qualquer intenção prática.

Podemos concluir que al-Kwarizmi estava interessado em ensinar os seus leitores a resolverem problemas matemáticos, em especial a resolver equações quadráticas, mas não conseguia imaginar problemas da vida real que envolvessem tais equações. Parece que, neste aspecto, não houve alterações desde os tempos dos babilónios.

É de salientar ainda que a Álgebra de Abu-Kamil detém um lugar especialmente importante no desenvolvimento da Matemática no Ocidente, através da sua influência sobre as obras de Fibonacci. Quando Fibonacci escreveu o seu *Liber Abaci* (1202), baseou-se muito no trabalho de Abu-Kamil, reproduzindo 29 dos seus problemas com pouca ou nenhuma alteração. Porém, Fibonacci não deve ser considerado um plagiador, pois os métodos de Abu-Kamil estavam tão divulgados nessa altura que qualquer matemático tinha a liberdade de usar os seus resultados.

Actualmente, sabe-se que muitas das ideias que antes se pensava terem sido descobertas pelos brilhantes matemáticos europeus dos séculos XVI, XVII e XVIII foram, afinal, desenvolvidas por matemáticos árabes, cerca de quatro séculos antes.

2.7. Matemática na Europa Medieval

Na Idade Média, chegou à Europa, vinda do Oriente, a notação posicional e o zero, enquanto da Grécia veio a Geometria bem como a Filosofia e a preocupação com os fundamentos.

Nesta época, o corpo de conhecimentos cresceu de forma significativa e a Matemática deixou de ter um carácter essencialmente prático, passando a ser abordada de forma mais teórica e abstracta.

Na Península Ibérica, concentraram-se muitos estudiosos, incluindo árabes e judeus, que fizeram traduções muito importantes. Estas eram, geralmente, realizadas em duas fases: primeiro de árabe para espanhol e depois de espanhol para latim.

Estas traduções do árabe para latim permitiram que o Ocidente tomasse contacto com importantíssimos manuscritos, quer de autores árabes, quer gregos, como Euclides e Arquimedes, que, desde o século V, eram inacessíveis. Por exemplo, os célebres *Elementos* de Euclides entraram na Europa apenas no século XII, através de uma tradução do árabe.

Foi uma época de muita imitação e compilação e “muitos estudiosos nesta época sentiram a necessidade de reunir, nas páginas de um livro volumoso, todas as informações conhecidas num determinado campo. Havia um compêndio sistemático, ou ‘*summa*’ para cada interesse e gosto” (Burton, 2006, p. 308).

Na idade Média, “havia uma valorização e fomentação da cultura popular, em que os mestres se dirigiam aos seus alunos de forma informal. Para além do conteúdo ser apresentado de forma espirituosa, também se praticava nas escolas dos monges o lúdico para estimular o engenho das crianças. Note-se que um dos sentidos derivados de *ludus* é escola; e de escola – *scholé* - é lazer” (Lauand, s/d, apud Henriques e Almeida, 2004, p. 147).

Os textos de Matemática incluem problemas desde os tempos mais remotos, problemas que vão sendo adaptados, ou não, às necessidades das sociedades. O mesmo problema aparece em textos de diferentes períodos da história, desde o Antigo Egipto até aos nossos dias. A maioria das aritméticas da Europa Medieval e da época renascentista incluem versões de problemas lúdicos (alguns deles já muito antigos) e muitos manuais escolares actuais apresentam, também, versões desses mesmos problemas.

Os enunciados dos problemas das obras da Idade Média traduzem bem a cultura popular da época. A Matemática conhecida na época era apresentada e ensinada de modo atraente e bem-humorado, privilegiando o desenvolvimento da inteligência dos alunos, e não a resolução rotineira de exercícios. Também já contemplavam a ideia, hoje muito difundida, de usar situações do quotidiano como motivadores da aprendizagem.

Agora, a questão que se impõe é que ênfase se tem dado ou se deveria dar ao uso do lúdico com fim pedagógico. Se já em tempos remotos havia educadores conceituados que preconizavam a utilização de situações lúdicas e divertidas no ensino e, em particular, no ensino de Matemática, interrogamo-nos que desenvolvimento haveria desde então até aos nossos dias e que vantagens poderiam advir de um ensino que valorizasse mais o aspecto lúdico da Matemática.

Alcuino de York, que foi um grande pedagogo, tinha como lema “deve-se ensinar divertindo”, opinião também defendida por John Allen Paulos:

“Se os programas de Matemática do ensino básico, secundário e universitário ensinasse estes aspectos divertidos da Matemática, o que poderia ser complementado com a recomendação de livros especializados de divulgação, suponho que o analfabetismo matemático não estaria tão generalizado como presentemente está.”

(Paulos, 1988, p. 110 apud Henriques e Almeida, 2004, p. 148)

Do ponto de vista pedagógico, acresce comentar ainda os benefícios que se poderiam obter em mostrar aos alunos como os problemas eram resolvidos quando não havia simbologia algébrica, através, por exemplo, da *regra da dupla falsa posição*. Assim, se os alunos analisassem e discutissem a resolução original de alguns problemas históricos, como é o caso do problema das duas torres, proposto por Fibonacci (ver anexo A.7), “veriam que é mais ‘económico’ resolver o problema usando uma simples equação algébrica, o que Fibonacci não pôde usar” (Grugnetti, 2000b, p. 29). Isto levaria a uma reflexão sobre as razões que impediram Fibonacci de utilizar notação algébrica, conduzindo, assim, a uma abordagem ao desenvolvimento dos símbolos algébricos.

Deste modo, como salienta Grugnetti (2000b), “um exemplo histórico pode dar aos alunos a oportunidade de comparar os procedimentos aritméticos e algébricos” (p. 29) e ajudá-los a ter consciência que a nossa álgebra, de que eles tanto se queixam, facilita, geralmente, a resolução dos problemas. Por outro lado, também mostra aos alunos que revelam muitas dificuldades na álgebra, nomeadamente, na resolução de equações, que existem métodos alternativos, considerados por muitos destes alunos, mais fáceis.

3. REVISÃO DA LITERATURA

Este capítulo está dividido em duas partes: na primeira parte, será feita uma abordagem à Teoria da Actividade (TA), tendo sido esta a fundamentação teórica seguida nesta investigação. Na segunda parte, serão apresentadas as principais ideias que resultaram da revisão da literatura feita sobre a integração da História da Matemática no ensino da Matemática.

Assim, na primeira parte, começo por apresentar os fundamentos da Teoria da Actividade e, depois, faço uma abordagem às três gerações ao longo das quais se desenvolveu. De seguida, menciono os seus principais princípios e finalizo dando destaque a conceitos fundamentais desta teoria como as Contradições, a Zona de Desenvolvimento Potencial (ZDP), o Ciclo de Aprendizagem Expansiva e os Artefactos mediadores.

No início da segunda parte deste capítulo, refiro os benefícios que advêm da integração da História da Matemática no ensino da Matemática, assim como as objecções e dificuldades encontradas. Depois, é discutida a avaliação da eficácia desta integração e, de seguida, são apresentadas algumas formas de fazer essa integração. Posteriormente, e tendo em conta a Teoria da Actividade, é dada ênfase à História da Matemática como artefacto mediador no ensino da Matemática. A seguir, é feita uma classificação das fontes a serem utilizadas para fazer essa integração e, finalmente, é abordado o papel da História da Matemática no ensino da Matemática em Portugal.

3.1. Teoria da Actividade (TA)

“Toda a prática educativa traz em si uma teoria do conhecimento. Esta é uma afirmação incontestável e mais incontestável ainda quando se refere à prática educativa escolar.”

(Darsie, 1999 apud Neves e Damiani, 2006, p. 2)

Atendendo a esta afirmação, senti necessidade de encontrar um referencial teórico que me fornecesse ferramentas para pensar sobre a aprendizagem da Matemática, quando mediada por problemas clássicos da História da Matemática. Com a ajuda da minha orientadora, encontrei na Teoria da Actividade (TA) os fundamentos teóricos que procurava, mais concretamente nas reformulações contemporâneas desta teoria, feitas por Yrjö Engeström.

Como o objecto de investigação ocorre num contexto escolar, onde múltiplas práticas sociais são estabelecidas por meio de um sistema de actividade amplo e complexo, achámos por bem reflectir sobre tais actividades à luz da Teoria da Actividade, cujo foco está nas interacções humanas mediadas por instrumentos diversos. Essa escolha justifica-se em função desta ser uma teoria que visa, conforme Damiani (2002), explicar, de forma holística, os processos de desenvolvimento e aprendizagem nos seres humanos, explicando-os por meio da mediação exercida por factores sociais, culturais e históricos. Além disso, Wells (1998 apud Quevedo, 2005) qualifica a Teoria da Actividade como a abordagem mais adequada para tratar os fenómenos humanos, especialmente os que estão ligados à educação.

O próprio Engeström (1991) é claro quanto à importância da Teoria da Actividade nos contextos de prática escolar, ao referir que “a aprendizagem escolar é, obviamente, um sistema de actividade colectivo e relativamente duradouro” (p. 249). Engeström e Miettinen (1999) esclarecem que a Teoria da Actividade é uma abordagem multidisciplinar cuja unidade de análise é o sistema de actividade colectiva, orientada para o objecto e mediada por artefactos, fazendo a ligação entre o sujeito e o contexto social.

No que respeita ao processo de ensino e aprendizagem da Matemática, mediado pelos problemas históricos da Matemática, a Teoria da Actividade apresenta-se como uma ferramenta descritiva que enfoca dialecticamente o indivíduo e a estrutura social em que está inserido, sendo o sistema de actividade a sua unidade básica de análise. Assim,

pretendo compreender a dinâmica do sistema de actividade em análise, no sentido de perceber o nível de aprendizagem que se estabelece nesse contexto.

Apoiada nas perspectivas de Engeström, entendo como uma necessidade do professor agir com intencionalidade no momento da elaboração de uma actividade de ensino da Matemática e penso que, neste caso em concreto, essa intencionalidade ocorreu ao serem utilizados os problemas da História da Matemática como artefactos mediadores.

3.1.1. Fundamentos da Teoria da Actividade

Os principais fundamentos da Teoria da Actividade também designada por Teoria da Actividade Histórico-Cultural (CHAT) desenvolveram-se a partir dos anos 20/30 do século passado, encontrando os seus alicerces nas ideias dos investigadores russos, Vygotsky, Luria e Leontiev; na filosofia pragmática de John Dewey e de Wittgenstein; nas ideias da filosofia clássica alemã (de Kant e Hegel); nos trabalhos filosóficos e sociológicos de Karl Marx e nas ideias de Friedrich Engels.

Entre 1920 e 1930, influenciado por Marx e Engels, Vygotsky deu um grande contributo ao que hoje chamamos Teoria da Actividade, fornecendo os seus conceitos fundamentais. Na época, muito se estudava sobre o comportamentalismo, onde se resumia a psicologia humana a uma sequência de cadeias que envolviam estímulo e resposta e, segundo Vygotsky (1978), as funções mentais humanas devem ser vistas como o resultado de uma actividade mediada pela vida social do indivíduo e pelas suas interacções culturais com o ambiente através da utilização de ferramentas/artefactos.

Vygotsky formalizou a ideia da mediação, onde um indivíduo nunca actua directamente (ou meramente pelos seus reflexos) no ambiente. O relacionamento entre um agente e os objectos no ambiente são mediados pela cultura, ferramentas e os signos⁵.

Para Leontiev (1981), a actividade, cuja expressão maior é o trabalho, é a principal mediação nas relações que os sujeitos estabelecem com o mundo, o que está explícito ao afirmar que “só através de uma relação com outras pessoas o homem se relaciona com a própria natureza, o que significa que o trabalho aparece desde o início como um processo mediado por ferramentas (em sentido amplo) e, ao mesmo tempo, mediado socialmente” (Leontiev, 1981, p. 208).

Engeström (1999b) também deu ênfase ao papel da mediação ao afirmar que “a mediação não é um mero conceito psicológico pois constitui uma ideia que derruba os

⁵ No ponto 3.1.3. será feita uma abordagem a estes conceitos.

muros cartesianos que isolam a mente e o pensamento humanos da cultura e da sociedade” (p. 29).

Nesta perspectiva os seres humanos controlam o seu comportamento a partir de fora, criando e utilizando uma diversidade de artefactos, e não a partir de dentro, com base em mecanismos de natureza biológica. Isto significa que os artefactos têm um papel insubstituível no desenvolvimento e na evolução cultural dos seres humanos. Os artefactos são social e culturalmente construídos e têm efeitos transformadores no funcionamento da mente do sujeito e no contexto envolvente.

O processo de mediação, através do qual ocorre a aprendizagem, estabelece a ligação entre a estrutura social e a estrutura pessoal construída pelo sujeito.

Para Leffa (2006), o objectivo desta teoria é “situar a acção humana dentro do contexto em que ela ocorre, determinando os elementos que fazem parte deste contexto e identificando as relações que se estabelecem entre eles” (p. 37).

Segundo esta teoria, uma actividade é formada por um sujeito (ou grupo) que possui uma forma de agir direccionada a um objecto. A motivação do sujeito (ou grupo) está na transformação do objecto com vista a um resultado. Uma actividade pode ser realizada por diversas acções e tendo como base diversos motivos. Os diversos motivos da actividade dão à acção um sentido pessoal, diferente para cada actor no contexto da actividade a ser realizada. Os objectos podem ser algo concreto (como um programa) ou algo mais abstracto (como uma ideia).

Enquanto Vygotsky forneceu os conceitos básicos desta teoria, outros pesquisadores tiveram um papel fundamental na sua estruturação, como por exemplo, Alexei Leontiev, que, com base nas teorias de Vygotsky, descreveu vários elementos de fundamental importância, estruturando-os organizadamente.

A Teoria da Actividade evoluiu por meio de três gerações de investigação. A terceira geração emergente desta teoria, explorada por Engeström, utiliza dois sistemas de actividade interagindo como a sua unidade mínima de análise, convidando-nos a concentrar os esforços de investigação sobre os desafios e as possibilidades da aprendizagem inter-organizacional.

Engeström (1999b) considera também que esta teoria não configura uma teoria fechada e artificial, pois tem que reflectir a complexidade, a mobilidade, a riqueza, as contradições e a instabilidade das sociedades contemporâneas. Assim sendo, o desafio

central da Teoria da Actividade é o de compreender as relações dialécticas entre o indivíduo e a estrutura social.

A Teoria da Actividade, a partir da perspectiva histórico - cultural vygotskiana e suas actualizações, enaltece a importância da aprendizagem através da acção e das interacções com o meio sócio - cultural, possibilitando o desenvolvimento das pessoas e da própria actividade.

3.1.2. As três gerações

Segundo Engeström (2001), o processo de evolução da Teoria da Actividade pode ser descrito ao longo de três gerações.

A primeira geração

A primeira geração estava centrada nos estudos de Vygotsky, que envolviam temas relacionados com processos intelectuais, consciência, linguagem, actividade, desenvolvimento humano, aprendizagem, entre outros. Nessa fase, foi criado o conceito de mediação, ideia central nos pressupostos da Teoria da Actividade, que se representa pelo conhecido modelo triangular de Vygotsky, segundo o qual a interpretação do comportamento humano, com base na conexão directa condicionada entre o estímulo (E) e a resposta (R), pressuposta pelo behaviorismo, foi ultrapassada pela noção de indivíduo situado no meio em que vive. Esta ideia de mediação cultural das acções é, geralmente, expressa pela tríade, sujeito, objecto e artefacto mediador. O modelo de Vygotsky e a sua reformulação estão representados na figura 1:

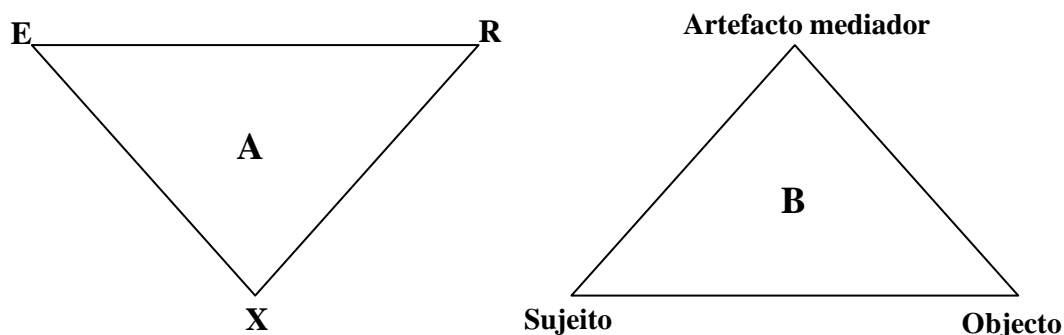


Fig. 1 – Modelo de acção mediada de Vygotsky e a sua reformulação mais comum (Engeström, 2001, p. 134)

Para Engeström,

“[...] a inserção de artefactos culturais nas acções humanas foi revolucionária, na medida em que essa unidade básica de análise superou a divisão entre o indivíduo cartesiano e a estrutura intocável da sociedade. O indivíduo não podia mais ser entendido sem o seu meio cultural.”

(2001, p. 134)

De acordo com Engeström a limitação dessa primeira geração da Teoria da Actividade está na unidade de análise focada no indivíduo, deixando de ter em conta o contexto em que ele se insere. Estas limitações foram superadas por Leontiev quando demonstrou a existência de diferenças entre uma acção individual e uma actividade colectiva, iniciando assim a segunda geração da Teoria da Actividade.

A segunda geração

A segunda geração da Teoria da Actividade que, para Engeström, se concretizou no desenvolvimento da ideia de mediação por Leontiev (1978), apresenta avanços em relação à primeira. Este teórico propunha que, para entender uma acção, é preciso compreender o motivo por trás da actividade na qual está inserida, ou seja, é preciso compreender a *actividade* que a direcciona.

O aparecimento do que Leontiev denomina *actividade* ocorreu quando o ser humano passou a viver em sociedade, com a consequente divisão de trabalho. Por causa dessa divisão, a ligação entre uma necessidade e a satisfação da mesma deixou de ser directa, como o é para os animais. Tal ligação passou a ocorrer por meio de resultados parciais, alcançados por diferentes participantes da actividade de trabalho colectivo, utilizando diferentes ferramentas. Assim, as necessidades passaram a ser satisfeitas por meio de acções colectivas de um grupo em interacção social.

Para Leontiev (1978), a actividade humana não existe a não ser na forma de *acções* ou conjunto de acções. Ao utilizar o conceito de actividade, portanto, estamos a lidar com uma abstracção, que somente pode ser definida desde o ponto de vista da sua relação com um motivo (material ou ideal), que é o que lhe dá a direcção. Na prática, a actividade não pode ser directamente percebida, já que o que se percebe são somente as acções que a compõem. É importante ter em atenção o facto de que cada tipo de acção pode compor diferentes tipos de actividade e cada actividade pode ser levada a cabo por meio de diferentes acções.

Leontiev denomina de *operações* os métodos para realizar diferentes acções. As acções são relacionadas com os objectivos e as operações com as condições. Por exemplo, se tivermos o objectivo de fazer uma multiplicação (acção), poderemos recorrer a diferentes procedimentos (operações) para fazê-lo, como usar o algoritmo da multiplicação, transformar a multiplicação em adições, usar alguma técnica de cálculo mental, etc.

A distinção entre actividade, acção e operação torna-se assim, a base do modelo para a Teoria da Actividade, na qual a actividade consiste numa hierarquia de acções direccionadas a metas usadas para concretizar um objecto (um motivo). Leontiev (1978) propôs três níveis de estrutura para uma actividade, conforme demonstrado na figura 2:

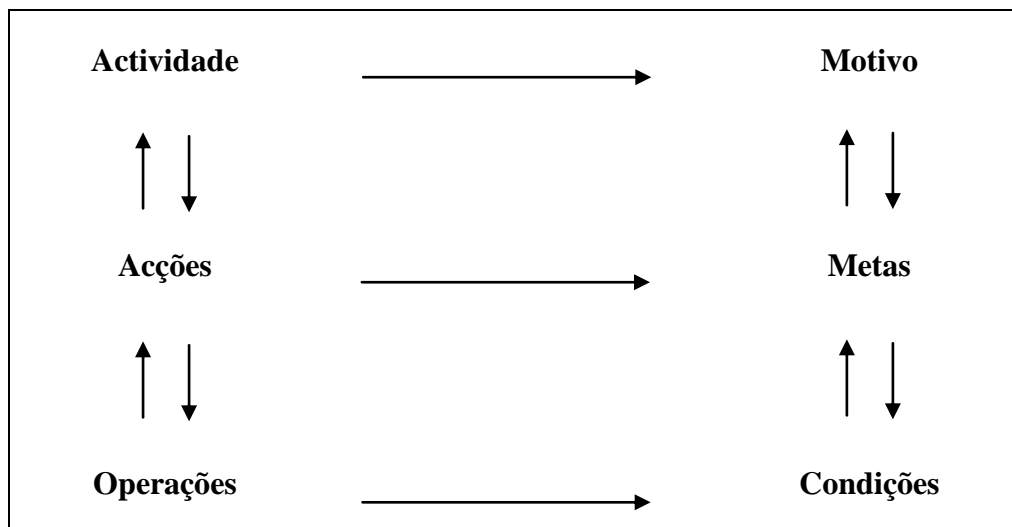


Fig. 2 – Modelo hierárquico da actividade

No primeiro nível, a actividade colectiva é orientada para o objecto (motivo); no segundo, as acções do indivíduo ou do grupo são orientadas por metas e revelam as etapas para a realização da actividade; no terceiro, as operações automáticas são orientadas pelas condições instrumentais da actividade.

O motivo é o que leva uma pessoa ou grupo de pessoas à execução de uma actividade. Por isso, as actividades estão ligadas a uma ou mais acções, as quais satisfazem algumas metas no plano racional. Para que essas acções sejam executadas são necessárias uma ou mais operações, que são tarefas automatizadas, já internalizadas, que não dependem do plano racional, porém necessitam das condições necessárias para que

aconteçam. Para ilustrar o modelo hierárquico, Leontiev usa o conhecido exemplo de uma pessoa que aprende a conduzir um carro, que a seguir se transcreve⁶:

“Initially every operation, such as shifting gears, is formed as an action subordinated specifically to this goal and has its own conscious 'orientation basis'. Subsequently this action is included in another action, which has a complex operational composition in the action, for example, changing the speed of the car. Now shifting gears becomes one of the methods for attaining the goal, the operation that effects the change in speed, and shifting gears now ceased to be accomplished as a specific goal-oriented process: Its goal is not isolated. For the consciousness of the driver, shifting gears in normal circumstances is as if it did not exist. He does something else: He moves the car from a place, climbs steep grades, drives the car fast, stops at a given place, etc. Actually this operation [of shifting gears] may, as is known, be removed entirely from the activity of the driver and be carried out automatically. Generally, the fate of the operation sooner or later becomes the function of the machine.”

(Leontiev, 1978, p. 66)

Uma vez que esta pesquisa se baseia na aprendizagem da Matemática, vou ilustrar este modelo com o exemplo da resolução de um problema através de uma equação. Embora um problema possa ser resolvido de diversas formas, aqui destaca-se a tradução do problema através de uma equação. Resolver o problema é a actividade, que implica acções racionais, neste caso, traduzir o problema por meio de uma equação. Quando o aluno estiver familiarizado com a resolução de equações, ou seja, quando esta acção estiver internalizada, torna-se uma operação, pois o aluno não sente necessidade de pensar no momento de a resolver, fá-lo de forma automática. Acontece da mesma forma entre as actividades e as acções; o aluno, após internalizar a actividade que consiste em traduzir um problema através de uma equação, já não a entende como um actividade, mas sim como uma acção e quando tiver que usar equações para resolver um problema, não terá grandes dificuldades.

Embora o conceito de sujeito e divisão do trabalho seja atribuído a Leontiev, o autor não focou os papéis e as responsabilidades dos indivíduos envolvidos na actividade nem encontrou uma forma representativa desta importante estrutura.

Inspirado pelo conceito de mediação de Vygotsky e também pela noção de actividade de Leontiev, Engeström (1987) expandiu a representação original do comportamento humano mediado, mostrado na figura 1, e desenvolveu uma nova versão

⁶ Dada a extensão da citação, optei por não fazer a tradução.

do modelo mediado da actividade humana, na forma ilustrada pela figura 3, que mostra um sistema de actividade criado pela expansão do triângulo vygotkiano básico, que reflecte ambas as características da natureza humana, ou seja, o nível social e a colaboração.

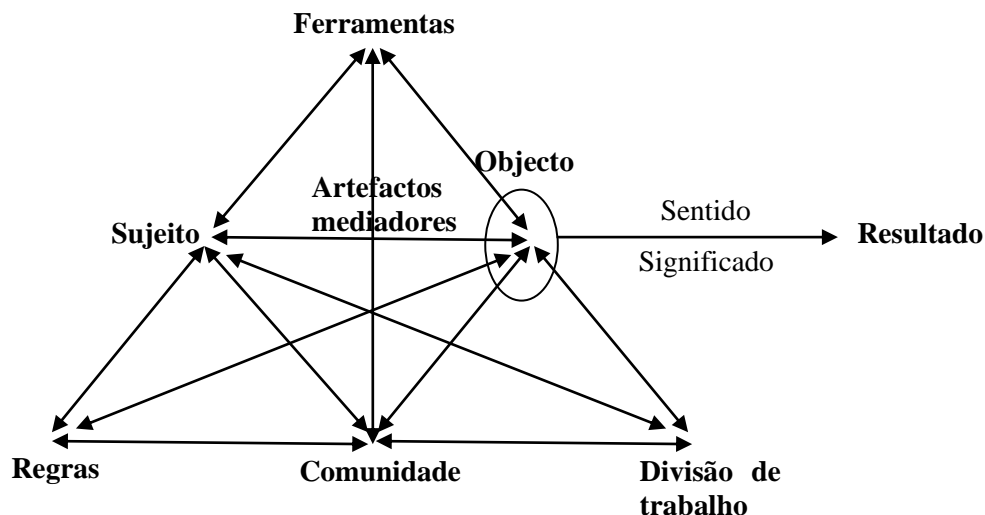


Fig. 3 – A estrutura de um sistema de actividade humano
(Engeström, 1987, p. 78 apud Engeström, 2001, p. 135)

A figura sugere uma forma de superar a limitação da primeira geração da teoria pela adição do nível macro, do colectivo (a comunidade em que a actividade ocorre, com as suas regras e divisão de trabalho), ao nível micro, do actor ou agente individual, operando com ferramentas.

O conceito de actividade compreende o sistema completo da prática humana, o qual incorpora: participantes (sujeitos), objectivos (objectos), relações de mediação (ferramentas, regras e divisão do trabalho) e o ambiente particular (comunidade) em que decorre a actividade.

O modelo elaborado por Engeström sugere a possibilidade de análise de várias relações dentro da estrutura triangular da actividade; no entanto, a tarefa principal é sempre entender o todo e não as suas conexões separadas (Engeström, 1987). Os componentes do modelo são descritos a seguir:

- **Objecto:** o objecto é parte integrante da actividade e representa a intenção que motiva (quer seja material, física ou mental) o objectivo para o qual a actividade está direccionada. O objecto é mediado por ferramentas físicas ou simbólicas, externas ou internas, que o moldam e o transformam em resultados ou produtos.

- **Sujeito:** o sujeito de qualquer actividade é o indivíduo ou grupo de indivíduos envolvidos na actividade e que age(m) orientado(s) pelo objecto ou motivo. O relacionamento do sujeito com o objecto ou motivo da actividade ocorre pelo uso de ferramentas.
- **Ferramentas ou artefactos mediadores:** as ferramentas são os recursos usados para transformar o objecto e para se chegar a um resultado. Podem ser conceptuais (com influência sobre o comportamento) e físicas (ligadas à manipulação de objectos). As ferramentas alteram e são, por sua vez, alteradas pela actividade, uma vez que medeiam as relações entre o sujeito e o objecto. As ferramentas físicas ou materiais são usadas para manipular o(s) objecto(s); as ferramentas psicológicas são usadas para influenciar o comportamento.
- **Comunidade:** a comunidade é o elemento que congrega um número alargado e variado de indivíduos mais ou menos organizados, enquadrados e mais ou menos unidos, que partilham ou estão interessados no mesmo objecto.
- **Regras:** as regras referem-se a todo o tipo de normas, convenções e regulamentos, mais ou menos flexíveis, que especificam e regulam, explícita e implicitamente, os procedimentos correctos previstos e as interacções aceitáveis entre os participantes dentro do sistema de actividade para que o objecto se possa reflectir nos resultados. São as regras que medeiam as relações entre os sujeitos e a comunidade.
- **Divisão de trabalho:** a divisão do trabalho consiste na distribuição de tarefas entre os membros da comunidade, assegurando que os participantes compreendam os seus papéis e, através deles, possam conhecer o seu campo de acção, particularmente nas suas relações com os outros, com os artefactos e com o objecto.

Ao analisar o esquema apresentado na figura 3, Engeström (2001) explica que “o triângulo superior [cujos vértices são as ferramentas (ou artefactos mediadores), o sujeito e o objecto] pode ser visto como ‘a ponta do *iceberg*’ representando acções individuais e de grupo inseridas num sistema de actividade colectivo” (p. 134). Os mediadores sociais menos visíveis da actividade – regras, comunidade e divisão do trabalho – são mostrados na parte inferior do modelo. O autor refere ainda que “o objecto é mostrado com a ajuda de uma figura oval, indicando que acções orientadas para o objecto são sempre, explícita ou implicitamente, caracterizadas por ambiguidade, surpresa, interpretação, busca de sentido e potencial para mudanças”. Entre os componentes do sistema, existem transformações contínuas. O sistema de actividade reconstrói-se incessantemente.

A terceira geração

Baseado na crítica de que essa versão não conseguia explicar o que ocorre quando diferentes sistemas de actividade interagem e entram em confronto, Engeström (2001) formulou uma nova proposta, que entende constituir a terceira geração da Teoria da Actividade.

Este autor reconhece que “à medida que a Teoria da Actividade atinge uma dimensão internacional, questões de diversidade e de diálogo entre diferentes culturas ou perspectivas tornaram-se desafios cada vez maiores” (p. 135). Acrescenta ainda que “a terceira geração da Teoria da Actividade precisa desenvolver ferramentas conceptuais para compreender o diálogo, as múltiplas perspectivas e as redes de sistemas de actividade em interacção” (p. 135).

Nesta terceira geração, proposta pelo próprio Engeström a partir dos anos 70, o modelo triangular de Vygotsky é expandido e deve incluir, no mínimo, dois sistemas de actividade em interacção. Nestes, o objecto move-se de um estado inicial de “material-em-bruto” para um objecto colectivamente significativo construído pelo sistema de actividade, relação essa que está esquematizada na figura 4:

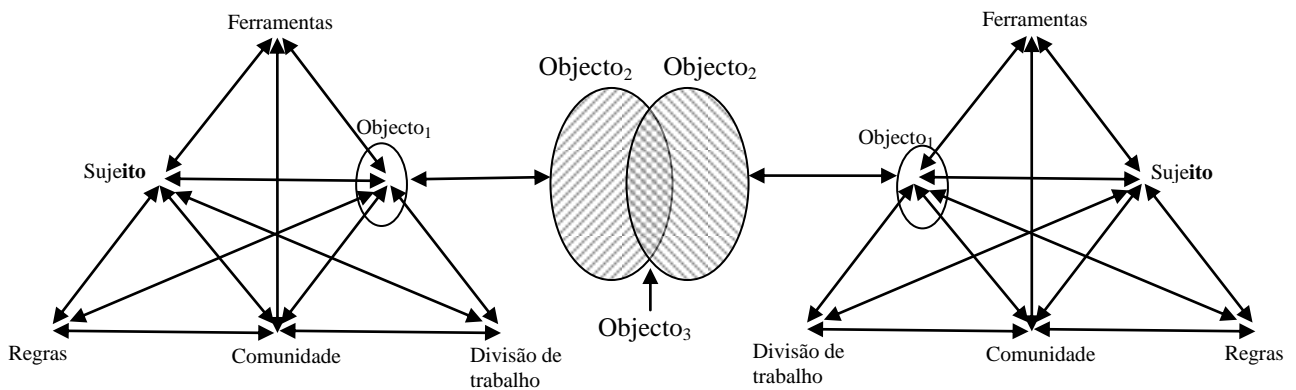


Fig. 4 – Dois sistemas de actividade em interacção como modelo mínimo para a terceira geração de Teoria da Actividade (Engeström, 2001, p. 136)

Engeström (2001) explica que cada sistema de actividade tem o seu Objecto 1, que se transforma num Objecto 2, construído pelo sistema de actividade e que tem um significado colectivo. O Objecto 3 é resultado da interacção entre os dois sistemas de actividade, na qual as acções são reformuladas e revistas, à medida que as pessoas agem. Ou seja, existe um movimento de construção e reconstrução conjunta, entre os sistemas de

actividade, permeado pelas contradições que permitem ao objecto se reformular e se transformar num novo objecto.

Desta maneira, podemos notar o poder de representação e a evolução da Teoria da Actividade, desde os conceitos centrados na ideia de mediação de Vygotsky, passando pelo desenvolvimento gráfico implementado na segunda geração por Engeström, inspirado pelos trabalhos de Leontiev baseados na divisão do trabalho, até à aceitação mundial pela comunidade de investigadores.

Engeström (1999b) sublinha que poderá ser preferível olhar para a sociedade mais como uma rede de sistemas de actividade que se sobrepõem e que se inter-relacionam uns com os outros e menos como uma pirâmide de estruturas rígidas que dependem de um único e isolado centro de poder.

Tendo em conta o exposto, considero a educação escolar como um sistema de actividade, permeado pelas diversas actividades desenvolvidas na escola, que interage com os diversos sistemas de actividade que a permeiam.

3.1.3. Princípios da Teoria da Actividade

De modo a caracterizar a terceira geração da Teoria da Actividade, Engeström (2001) sistematizou e reelaborou algumas das ideias estabelecidas pelas gerações anteriores, resumindo a “terceira geração da Teoria da Actividade” em cinco princípios a serem considerados quando se estudam sistemas de actividade na sua dinâmica interna e nas suas inter-relações:

- O **primeiro princípio** considera que a principal unidade de análise é um sistema de actividade colectivo, mediado por artefactos e orientado para objectos, em relação com outros sistemas de actividade. As acções individuais e em grupo são relativamente independentes, mas estão subordinados a unidades de análise e só podem ser compreendidas quando interpretadas no contexto de todos os sistemas de actividade.
- O **segundo princípio** consiste na multiplicidade de vozes de um sistema de actividade. Isto significa que a divisão do trabalho numa actividade cria posições diferentes para os participantes e envolve agentes com diferentes pontos de vista, interesses e culturas. Esta multiplicidade de vozes permite vislumbrar fontes de problemas e práticas de negociação.

- O **terceiro princípio** está relacionado com o carácter histórico dos sistemas de actividade, entendendo que estes tomam forma e se transformam durante longos períodos de tempo. Os seus problemas e potencialidades só podem ser compreendidos tendo em conta a sua própria história. A história propriamente dita deve ser estudada como história local da actividade e dos seus objectos e como história das ideias teóricas e das ferramentas que formaram a actividade.
- O **quarto princípio** enfatiza o papel central das contradições que se acumulam nos sistemas de actividade, como fontes de mudança e de desenvolvimento. As contradições não significam problemas ou conflitos, referem-se a tensões geradas e vividas em (e entre) sistemas de actividade. As actividades são entendidas como sistemas abertos, e quando é introduzido um novo elemento exterior ao sistema (por exemplo, uma nova tecnologia ou um novo objecto) pode, muitas vezes, provocar contradições. Tais contradições geram perturbações mas também possibilitam acções inovadoras de mudança.
- O **quinto princípio** estabelece a possibilidade de transformações expansivas nos sistemas de actividade, geradas a partir de esforços colectivos e deliberados para ultrapassar as contradições acumuladas. Quando as contradições de um sistema de actividade são agravadas, alguns participantes individuais começam a questionar e a desviarem-se das normas estabelecidas. Em alguns casos, isso conduz a um novo objectivo colectivo e a um novo esforço de colaboração para produzir uma mudança. Uma transformação expansiva surge quando o objecto e o motivo da actividade são reconceptualizados para adoptarem um horizonte de possibilidades mais amplo do que no modo anterior da actividade. Um ciclo completo de transformação/aprendizagem expansiva pode ser comparado a uma viagem colectiva pela Zona de Desenvolvimento Potencial (ZDP)⁷.

Dada a importância do quarto e quinto princípio para a análise que vou desenvolver no quinto capítulo, por fornecerem pressupostos que ajudam a entender a actividade humana como um sistema próprio, com ferramentas, regras e divisão de trabalho, e que são de grande utilidade quando pretendemos analisar um sistema de actividade em contexto escolar, entendo ser pertinente abordar, com algum detalhe, estes dois princípios. Por uma questão de sequencialidade, começarei por abordar as contradições, de seguida analisarei o conceito de ZDP e finalizarei com a noção de ciclo de aprendizagem expansiva.

⁷ Daqui em diante, utilizarei, por vezes, a sigla ZDP para me referir à Zona de Desenvolvimento Potencial.

Contradições

A Teoria da Actividade explica como um indivíduo (ou grupos de indivíduos) interage de forma a aprender com a experiência e está baseada em conceitos vygotskianos de identificação e explicação de “padrões” e “contradições”. A ideia de contradição foi primeiramente traduzida por Evald Hyenkov como sendo o que potencialmente desestabiliza os componentes do sistema de actividade. As contradições são um indício de riqueza e de mobilidade do sistema de actividade.

O estudo da actividade humana é crucial para a identificação de mudanças e contradições no contexto em que é desenvolvida a actividade. As contradições servem de suporte ao surgimento de novo conhecimento (aprendizagem) relacionado com a actividade em causa.

Nesta teoria, para Engeström (1987) apresentam-se quatro níveis de contradição distintos e quando um indivíduo detecta uma contradição, gera uma actividade. A contradição não é a aprendizagem em si, e sim a percepção de que o indivíduo precisa aprender. Na figura 5 estão esquematizados esses quatro níveis de contradições:

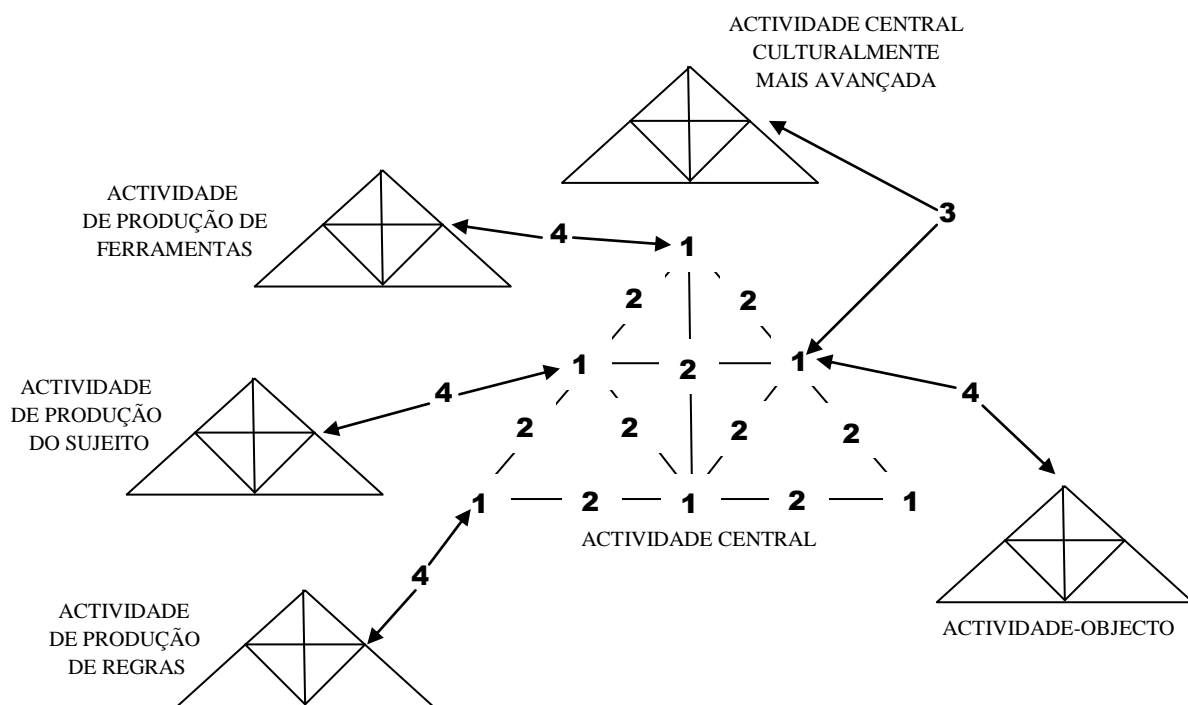


Fig. 5 – Quatro níveis de contradições dentro do sistema de actividade humana (Engeström, 1987)

As contradições mostram a capacidade de uma actividade para se desenvolver; elas revelam os lugares no sistema de actividade capazes de se expandirem. Engeström (1987)

indica uma forma de identificar as contradições a partir da análise dos elementos dos diagramas. Ele classifica-as nas quatro ordens seguintes:

- As contradições de **primeira ordem** (ou primárias) reflectem a característica da formação socioeconómica, e revelam o conflito interno entre o valor de troca e o valor de uso em cada canto ou vértice do triângulo da actividade (Engeström, 1987). Estas encontram-se num elemento interno de uma dada actividade e ocorrem quando é possível isolar o problema ocorrido, diagnosticando que elemento (objecto, ferramenta, regra social, etc.) da actividade lhe deu origem.
- As contradições de **segunda ordem** (ou secundárias) estão entre os cantos do triângulo (correspondem às regras e divisão de trabalho), ocorrem entre os componentes do sistema de actividade e aparecem quando um factor novo surge num dos componentes do sistema. Em muitos casos, os problemas internos não podem ser isolados, e estão relacionados com a interacção entre dois ou mais elementos da actividade.
- As contradições de **terceira ordem** (ou terciárias), por sua vez, ocorrem quando representantes de uma cultura (por exemplo, professores) introduzem o objecto e motivo de um outro sistema de actividade culturalmente mais avançado no sistema de actividade vigente (Engeström, 1987). Engeström dá o exemplo da criança que frequenta a escola primária para brincar com os seus colegas (motivo dominante), mas os seus pais e o professor tentam fazê-lo estudar seriamente (motivo culturalmente mais avançado). Correspondem a problemas que podem limitar o desenvolvimento da actividade actual em relação a uma actividade hipotética culturalmente mais desenvolvida.
- Por fim, as contradições de **quarta ordem** (ou quaternárias) ocorrem entre o sistema de actividade central e os sistemas de actividade circunvizinhos na rede de sistemas e emergem da interacção da actividade central com as actividades periféricas. As actividades circunvizinhas incluem, em primeiro lugar, as actividades nas quais os objectos e os produtos (ou resultados) da actividade central estão fixados (actividades-objecto). Em segundo lugar, incluem as actividades que produzem as ferramentas-chave para a actividade central (actividades de produção de ferramentas). Em terceiro lugar, incluem as actividades como aprendizagem e escolarização do sujeito (actividades de produção do sujeito). Em quarto lugar, incluem as actividades de administração e legislação (actividades de produção de

regras) (Engeström, 1987). A maioria das contradições ocorre nesta situação, onde normalmente uma dada actividade fica dependente de um resultado construído por outra.

Em suma, no percurso em direcção ao objecto da actividade, o sujeito (indivíduo, grupo, organização, comunidade) encontra ou é exposto a uma variedade de factores mediadores (ferramentas, divisão de trabalho, divisões de conhecimento, normas sociais, regras organizacionais), que podem criar “contradições” no caminho original entre ele e o objecto da sua actividade. As contradições dão origem ao ciclo de aprendizagem expansiva e mudam o objecto da actividade e a sua relação com os factores mediadores, e tal mudança pode criar outras “contradições” e assim por diante. Além disso, outros sistemas de actividade estão concomitantemente em operação e também interagem entre si, podendo fornecer outras “contradições”, outras modificações do objecto e novos ciclos de aprendizagem expansiva.

Zona de Desenvolvimento Potencial (ZDP)

Nas teorias vygotskianas predomina o conceito de Zona de Desenvolvimento Potencial, que teve enorme influência nos meios educacionais europeus e norte-americanos a partir da década de 60 do século passado. Este aspecto, particularmente importante da teoria de Vygotsky, consiste na ideia da existência de uma área potencial de desenvolvimento cognitivo, definida como:

“A distância entre o nível de desenvolvimento actual determinado pela capacidade de resolver problemas individualmente e o nível de desenvolvimento potencial determinado através da resolução de problemas sob a orientação de adultos ou em colaboração com pares mais capazes.”

(Vygotsky, 1978, p. 86)

O sentido geral desta “zona” é que, em determinado momento do seu desenvolvimento, uma criança consegue resolver um certo conjunto de problemas apenas sob a orientação de adultos e em colaboração com colegas mais experientes, mas não consegue fazê-lo de forma independente.

O conceito de ZDP ocupa um papel central no trabalho de Vygotsky, especificamente na forma como o autor apresenta a relação entre aprendizagem e desenvolvimento. A aprendizagem interage com o desenvolvimento, produzindo estas zonas de desenvolvimento potencial que se referem à distância entre o que o indivíduo faz

sozinho e o que é capaz de fazer com a intervenção do outro. Na troca com o outro e consigo mesmo, ele consolida conhecimentos, papéis e funções sociais. Trata-se de um processo que caminha do plano social para o individual interno – há um diálogo entre o exterior e o interior do indivíduo.

Vygotsky (1978) afirma que o processo de desenvolvimento não coincide com o processo de aprendizagem. Pelo contrário, existe uma assintonia entre o processo de desenvolvimento e o processo de aprendizagem, que o precede. Dessa assintonia decorre a ZPD que é, essencialmente, uma área de dissonância cognitiva que corresponde ao potencial do aprendiz (Fino, 2001).

De tudo isto se depreende que, para Vygotsky, não é suficiente ter todo o aparato biológico da espécie para realizar uma tarefa se o indivíduo não participa em ambientes e práticas específicas que propiciem esta aprendizagem. Não podemos pensar que a criança vai se desenvolver com o tempo, pois esta não tem, por si só, instrumentos para percorrer, sozinha, o caminho do desenvolvimento, que dependerá das suas aprendizagens mediante as experiências a que foi exposta.

Este autor refere que aquilo que a criança é capaz de fazer com o auxílio de outros pode ser, de algum modo, mais indicativo do seu desenvolvimento mental do que aquilo que consegue fazer sozinha. Tendo em conta isto, Vygotsky sugere que o desenvolvimento seja medido não através de um nível de desempenho actual mas através de uma diferença (“a distância”) entre dois indicadores de desempenho: (1) um indicador de resolução de problemas independente e autónomo e (2) um indicador de resolução de problemas numa situação em que o indivíduo tem o suporte de outras pessoas (Kaptelinin e Nardi, 2006).

Outra ideia importante, referida por Vygotsky (1978), é a da imitação. Ao afirmar que “uma pessoa só é capaz de imitar o que está ao alcance do seu nível actual de desenvolvimento” (p. 88) quer dizer, implicitamente, que uma completa compreensão do conceito de ZPD deve resultar na reavaliação do papel da imitação na aprendizagem. E cita, como exemplo, o seguinte:

“Se uma criança tem dificuldade com um problema de aritmética e o professor o resolve no quadro, a criança pode compreender a solução depressa. Mas se o professor resolver um problema usando altas matemáticas, esta será incapaz de compreender a solução, independentemente do número de vezes que imite o professor.”

(Vygotsky, 1978, p. 88)

Vygotsky afirma ainda que são ineficazes, em termos de desenvolvimento, as aprendizagens orientadas para níveis de desenvolvimento que já foram atingidos, porque não apontam para um novo estágio no processo de desenvolvimento. A consideração da ZDP possibilita a proposta de “boas aprendizagens”, que são as que conduzem a um avanço no desenvolvimento (Vygotsky, 1978).

“O que é a zona de desenvolvimento potencial hoje será o real nível de desenvolvimento de amanhã, isto é, o que uma criança pode fazer com assistência hoje será capaz de fazer sozinha amanhã” (Vygotsky, 1978, p. 87).

Ora, nesta óptica, a ZDP pode ser um conceito poderoso na investigação do desenvolvimento pois fornece aos psicólogos e educadores uma ferramenta através da qual pode ser compreendido o curso interno do desenvolvimento, e que o uso desse conceito pode permitir a tomada em consideração dos ciclos e processos de maturação que já estão completos, além dos que estão em estado de formação. Assim, a ZDP permite delinear o futuro imediato da criança e o seu estado dinâmico de desenvolvimento (Vygotsky, 1978).

Quanto ao “professor vygotskiano”, Freitas (2000) explica que é aquele que, detendo mais experiência, funciona intervindo e mediando a relação do aluno com o conhecimento. Ele está sempre, no seu esforço pedagógico, procurando criar Zonas de Desenvolvimento Potencial, isto é, actuando como elemento de intervenção e de ajuda. Na ZDP, o professor actua de forma explícita, interferindo no desenvolvimento dos alunos, provocando avanços que não ocorreriam espontaneamente. Vygotsky, dessa forma, resgata a importância da escola e do papel do professor como agentes indispensáveis do processo de ensino e aprendizagem.

O professor pode interferir no processo de aprendizagem do aluno e contribuir para a transmissão do conhecimento acumulado historicamente pela Humanidade. É nesse sentido que as ideias de Vygotsky sobre a Educação representam uma abordagem da transmissão cultural, tanto quanto do desenvolvimento.

Facilmente se compreende que as implicações que a Zona de Desenvolvimento Potencial acarreta, nomeadamente em termos de práticas pedagógicas, são enormes. Efectivamente, a definição de ZDP de Vygotsky, que acima se transcreve, impõe, de alguma maneira, que o professor se assuma enquanto mediador entre a criança ou o jovem que aprende e o conhecimento, bem como entre este e os seus pares.

Na perspectiva de Vygotsky, exercer a função de professor (considerando uma ZDP) implica assistir o aluno proporcionando-lhe apoio e recursos, de modo que ele seja capaz de aplicar um nível de conhecimento mais elevado do que seria possível sem ajuda.

De tudo isto resulta, obviamente, a necessidade de adequação das experiências de aprendizagem aos sujeitos, mas também a vantagem de instituir práticas fundadas no trabalho colaborativo, além de que, embora partindo de realidades familiares aos alunos, as situações de aprendizagem devem configurar problemas a resolver que se vão sucessivamente complexificando. Se assim não acontecer, não se verifica qualquer evolução; não há aprendizagem e, conseqüentemente, o desenvolvimento cognitivo também fica comprometido.

É sobre a noção Zona de Desenvolvimento Potencial que tem sido focado o essencial da onda de interesse contemporâneo sobre os pontos de vista de Vygotsky (Wertsch, 1993), nomeadamente nas suas implicações com a educação.

Meira e Lerman (2001) usaram a ZDP como uma ferramenta para analisar ambientes de ensino e aprendizagem na escola e referem que muitos autores, entre eles, Newman e Holzman (1993) criticaram a noção de ZDP entendida como um campo, uma espécie de espaço físico que a criança possui e que o adulto (professor) tem de encontrar para ser capaz de ensinar com sucesso. Desta forma, estes autores preferem apresentar a ZPD como um espaço simbólico, emergente da aprendizagem realizada em interações dialógicas.

Reflectindo sobre o conceito de Zona de Desenvolvimento Potencial e constatando que, nos últimos anos, se assistiu ao ressurgimento da aplicação deste conceito de ZDP, sobretudo nos EUA, Engeström (1987) considera que nenhuma das novas interpretações que têm surgido fazem justiça à concepção de Vygotsky sobre a ZDP.

Caracterizando a actividade de aprendizagem como uma viagem ao longo da ZDP, Engeström (1987) apresenta uma reformulação deste conceito (embora a considere provisória).

Considerando, por exemplo, a sala de aula, que contém zonas de desenvolvimento potencial não apenas no sentido original de Vygotsky, como a diferença entre o que uma pessoa (aluno) pode fazer sozinha e o que pode fazer com ajuda, mas também, em termos mais amplos, uma ZPD pode ser considerada, segundo Engeström (1987), como a “distância entre as acções quotidianas dos indivíduos e a historicamente nova forma de

actividade social que pode ser gerada colectivamente como uma solução para a dupla ligação potencialmente incorporada nas acções quotidianas” (s/p).

Este autor refere ainda que “desenvolver historicamente novas formas de actividade implica uma prática pedagógica que segue os alunos nas suas actividades vividas fora da sala de aula. Também implica a necessidade de formar uma verdadeira actividade de aprendizagem expansiva dentro e entre os alunos” (s/p).

Assim, para este autor, a tarefa educacional possui um duplo objectivo: desenvolver a actividade de aprendizagem e desenvolver novas formas da actividade central – o trabalho (nos primeiros anos de escolaridade, a actividade de aprendizagem é considerada, em si mesma, a actividade central).

Engeström representou a Zona de Desenvolvimento Potencial através do esquema da figura 6.

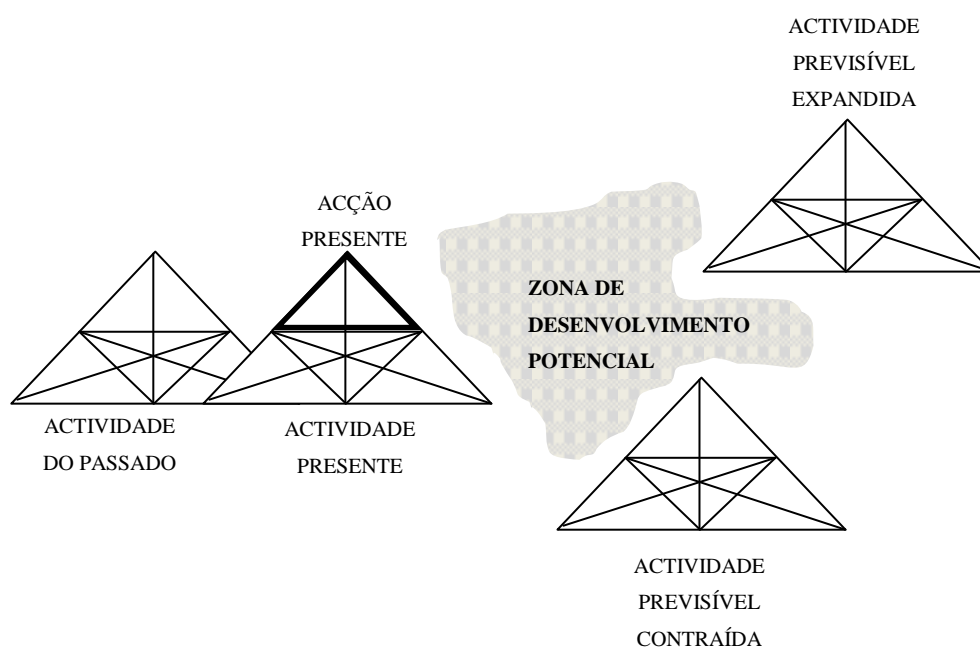


Fig. 6 – A Zona de Desenvolvimento Potencial (ZDP)
(Engeström, 1999a, p. 67)

No esquema representado nesta figura, a ZDP de um sistema de actividade colectiva corresponde à zona cinzenta entre triângulos de diferentes sistemas de actividade que representam o passado, o presente e os futuros alternativos da actividade de trabalho sob escrutínio.

Vejamos, de seguida, o conceito de ciclo de aprendizagem expansiva, comparado, por Engeström, a uma viagem colectiva pela Zona de Desenvolvimento Potencial.

Ciclo de aprendizagem expansiva

A Teoria da Actividade propõe uma diversidade de instrumentos heurísticos que parecem úteis para se obter um conhecimento profundo acerca do sistema de actividade que é a sala de aula. É o caso dos ciclos expansivos e dos processos de internalização e de externalização que lhe são inerentes, que podem contribuir para que se compreendam as mudanças, as inovações, as resistências e o que, em geral, é menos previsível.

Os ciclos expansivos permitem-nos compreender a evolução dos sistemas de actividade (por exemplo, salas de aula, escolas, centros de saúde, hospitais, sociedades), através da identificação de períodos de tempo marcados pela inovação, a transformação e a mudança e outros pela reprodução cultural e/ou pela aprendizagem das inovações produzidas naqueles. Os conceitos de internalização e de externalização são fundamentais para a compreensão dos ciclos expansivos (Cole & Engeström, 1993; Engeström, 1987).

Enquanto que, através da internalização, as pessoas se limitam a reproduzir a cultura, a externalização permite-lhes criar e transformar as realidades. Assim, num sistema de actividade, o início de um ciclo expansivo é fundamentalmente baseado na internalização, na socialização e no desenvolvimento das aprendizagens para que aqueles que ainda não sabem se venham a tornar elementos competentes da actividade à medida que ela vai evoluindo normalmente. A externalização começa a surgir com inovações pontuais de iniciativa individual. À medida que as tensões, contradições e rupturas da actividade se tornam mais evidentes e exigentes, a internalização começa a tomar a forma de auto-reflexão crítica e a externalização, ou seja, a procura de soluções, vai sendo mais frequente. O processo de externalização atinge o seu auge quando surge e é posto em prática um novo modelo de actividade. Uma vez estabilizado este novo modelo, o processo de internalização das suas formas e meios volta a ser a forma predominante de aprendizagem e de desenvolvimento.

A internalização dos meios culturais era, no passado, o principal foco de atenção dos teóricos da Teoria da Actividade. A externalização, isto é, a construção transformadora de novos instrumentos e formas de actividade individual e colectiva, passou também a ocupar um lugar central na investigação realizada no âmbito dos sistemas de actividade.

O ciclo de aprendizagem expansiva aparece como uma abordagem participativa, cujo objectivo é revelar as necessidades e possibilidades para o desenvolvimento de uma actividade, não em relação a um objectivo estandardizado, definido à priori, mas pela construção conjunta da ZDP dessa actividade. Engeström (2001) propõe que o conceito de

aprendizagem expansiva, desenvolvida no enquadramento conceptual da Teoria da Actividade, seja examinado com a ajuda de quatro questões que, aliás, podem ser úteis para analisar qualquer teoria de aprendizagem:

- **Quem aprende?** Quem são os sujeitos da aprendizagem, como são definidos e localizados?
- **Por que aprendem?** O que os faz fazerem o esforço para aprender?
- **O que aprendem?** Quais são os conteúdos e os resultados da aprendizagem?
- **Como aprendem?** Quais são as acções chave do processo de aprendizagem?

Para Engeström (1999c), o processo que envolve o ciclo de aprendizagem expansiva é uma contínua construção e resolução de tensões e contradições num sistema de actividade. Nessa perspectiva, desenvolver quer dizer, então, resolver ou transformar as contradições existentes no sistema de actividade, resultando, assim, numa mudança no sistema: a construção de um novo objecto e motivo.

A figura 7 mostra os passos importantes do chamado ciclo de aprendizagem expansiva.

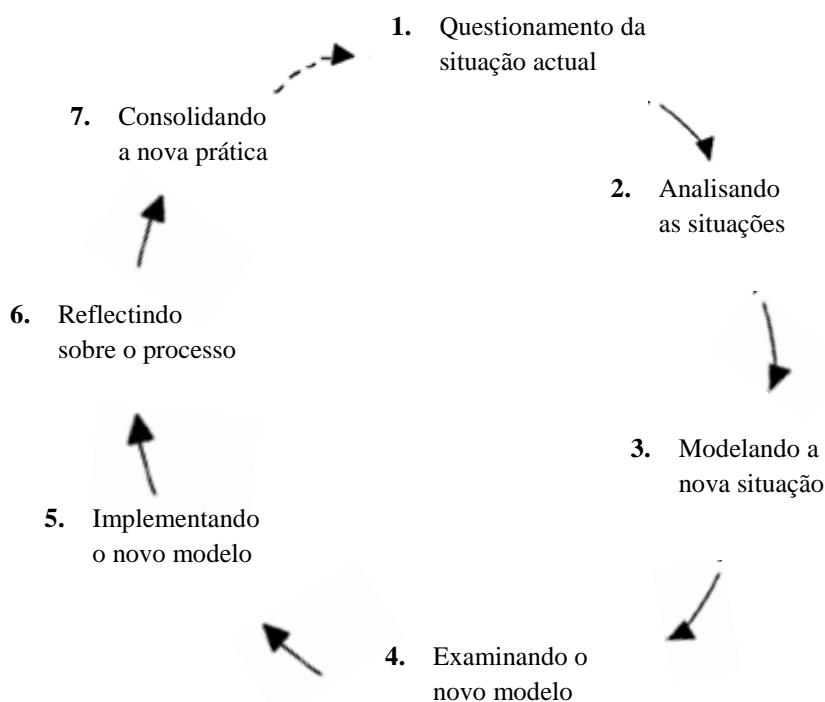


Fig. 7 – Ciclo de aprendizagem expansiva
(Engeström, 1999c, p. 384)

O ciclo, conforme Engeström (1999c), inicia-se com o sujeito questionando uma determinada prática e expandindo-a gradualmente para o desenvolvimento de uma nova prática. O seu ponto de partida caracteriza-se pela abstracção, que, no decorrer do processo, converte-se num sistema concreto de múltiplas manifestações e constantes desenvolvimentos. Ainda de acordo com este autor, a ascensão do abstracto para o concreto é alcançada pelas acções de aprendizagem, que, juntas, formam um ciclo expansivo.

Para o Engeström, a sequência ideal de acções de um ciclo expansivo caracteriza-se por sete etapas:

1. ***Questionamento da situação actual*** – questionamento, crítica ou rejeição de alguns aspectos da prática corrente.
2. ***Análise histórica das contradições/ análise empírica actual*** – análise da situação que envolve transformações mentais, discursivas ou práticas da situação em questão, para descobrir causas ou mecanismos exploratórios.
3. ***Modelagem da nova situação*** – construção de um modelo da nova ideia que explique e ofereça uma solução para a situação-problema.
4. ***Exame do novo modelo*** – experimentação do modelo, no intuito de perceber a sua dinâmica, potencialidades e limitações.
5. ***Implementação do novo modelo*** - com a descoberta das possíveis limitações e potencialidades do modelo, segue-se para a concretização do mesmo por meio da sua aplicação prática, visando salientar a dinâmica mais adequada para cada situação.
6. ***Reflexão sobre o processo*** – avaliação do novo processo.
7. ***Consolidação de nova prática*** – estabelecimento de uma nova forma de prática do indivíduo na comunidade.

Mudança e movimentos são processos contínuos num sistema de actividade, decorrentes de crises e rupturas que resultam em transformações qualitativas e inovações no sistema colectivo. Ainda de acordo com Engeström (1987), “a resolução das contradições leva ao desenvolvimento da actividade e as tensões e contradições internas de um sistema são a força motriz de mudanças e desenvolvimento das actividades humanas” (p. 82).

Artefactos mediadores

Como já foi referido anteriormente, o conceito de mediação esteve na origem da Teoria da Actividade e desempenha um papel central nesta abordagem. A noção de acção mediada por artefactos foi formalizada, pela primeira vez, por Vygotsky (1978).

Segundo este autor, a relação do indivíduo com o mundo não ocorre de forma directa, mas através da mediação. No processo de mediação, a relação entre os indivíduos e entre estes e o mundo que os cerca ocorre pelo contacto com os denominados artefactos mediadores, ferramentas auxiliares da actividade humana, que funcionam como um elemento intermediário numa relação. Esses artefactos permitem ao indivíduo agir sobre os factores sociais, culturais e históricos, ao mesmo tempo em que sofre as suas acções. É nesse sentido que o processo de mediação tem um importante papel, onde a relação estímulo-resposta é substituída por uma relação mais complexa, mediada.

Vygotsky definiu dois tipos de artefactos mediadores: os artefactos físicos e os artefactos psicológicos (signos). Os artefactos físicos serviriam de condutores da influência intelectual humana para o alcance de determinado objectivo numa actividade, possuindo orientação externa. Os signos influenciariam a formação da mente e do comportamento do indivíduo, sendo instrumentos de orientação interna.

Na maior parte da literatura subsequente, os signos foram interpretados como signos linguísticos, devido à grande importância dada por Vygotsky à linguagem. No entanto, o próprio Vygotsky sugeriu uma lista de exemplos possíveis de ferramentas psicológicas e os seus sistemas complexos: linguagem; vários sistemas de contagem; técnicas de mnemónicas; sistemas de símbolos algébricos; obras de arte; textos; esquemas, diagramas, mapas e desenhos mecânicos; todos os tipos de sinais convencionais; etc. (Vygotsky, 1981 apud Bussi e Mariotti, 2008).

Como podemos constatar, algumas sugestões desta lista estão relacionadas com a Matemática e, portanto, são relevantes para o campo da Educação Matemática. Este facto não é de estranhar se pensarmos na natureza particular dos objectos matemáticos que requerem uma representação externa.

No entanto, para Engeström, a noção de mediação não se limita à relação dos sujeitos com os objectos através da utilização de artefactos. Não podemos esquecer que, na sua perspectiva, um sistema de actividade é um todo sistémico, onde existem mediações múltiplas, no sentido em que todos os elementos se relacionam entre si. Assim, a relação entre o sujeito e o objecto é mediada por “ferramentas e signos”, a relação entre o sujeito e

a comunidade é mediada por “regras” e a relação entre o objecto e a comunidade é mediada pela “divisão do trabalho”.

Estas três classes de mediadores devem ser entendidas de uma forma geral. Assim, uma ferramenta pode ser qualquer coisa usada no processo de transformação, incluindo tanto ferramentas materiais como ferramentas “para pensar”. As regras abrangem as normas explícitas e implícitas, convenções e relações sociais dentro de uma comunidade. A divisão do trabalho refere-se à organização explícita e implícita de uma comunidade em relação ao processo de transformação do objecto no resultado. Cada um dos termos mediadores é historicamente formado e aberto ao desenvolvimento futuro.

Engeström (1999c) esclarece que considera inapropriada uma classificação que separe os artefactos, por um lado, em externos ou práticos e, por outro, em internos ou cognitivos, pois estas funções e usos estão em fluxo e transformação constante à medida que a actividade se desenvolve. Para este autor, uma representação interna torna-se externalizada através do discurso, do gesto, da escrita, da manipulação do ambiente material; e vice-versa, os processos externos tornam-se internalizados. Congelar ou dividir estes processos é uma base pobre para a compreensão dos diferentes artefactos.

Como alternativa, sugere que a diferenciação seja estabelecida com base nas diferentes formas de utilização dos artefactos. Por isso, sugere a classificação dos artefactos nas quatro categorias seguintes:

- **Artefactos o quê (*What artifacts*)** – para identificar e descrever objectos;
- **Artefactos como (*How artifacts*)** – para guiar e dirigir os processos e procedimentos sobre, no interior de ou entre objectos;
- **Artefactos porquê (*Why artifacts*)** - para diagnosticar e explicar as propriedades e comportamento dos objectos;
- **Artefactos para onde (*Where to artifacts*)** – para antever o estado futuro ou desenvolvimento potencial dos objectos, incluindo instituições e sistemas sociais.

Mas, a verdade, é que têm sido atribuídas diversas interpretações à palavra artefacto. Existem muitos termos que se referem a artefactos concebidos para uma utilização específica e com um objectivo específico, sendo os mais comuns, ferramentas e instrumentos. E a tradução inglesa de *Mind in Society* (Vygotsky, 1978), veio contribuir ainda mais para esta ambiguidade, uma vez que, nesta tradução, a palavra ferramenta (*tool*) é usada em vez da palavra artefacto (*artifact*).

Recentemente, Bussi e Mariotti (2008) analisaram a noção de artefacto mediador num contexto de sala de aula de Matemática, e começam o artigo (ou melhor, capítulo de um livro) reiterando que:

“A ideia do artefacto é muito geral e engloba vários tipos de objectos produzidos pelo homem através dos tempos: sons e gestos; utensílios e acessórios; formas de linguagem natural orais e escritas; textos e livros; instrumentos musicais; instrumentos científicos; ferramentas de tecnologias da informação e comunicação.”

(Bussi e Mariotti, 2008, p. 746)

Neste capítulo, Bussi e Mariotti abordam o processo de *mediação semiótica* e referem que têm como objectivo dar uma definição precisa de *artefacto de mediação semiótica* e analisar a sua aplicação em pesquisas realizadas na sala de aula de Matemática.

Do exposto pelas autoras, concluímos que o processo de mediação semiótica desenvolve-se em dois níveis diferentes:

- O aluno usa o artefacto, de acordo com determinadas regras de utilização, a fim de atingir o objectivo da tarefa. Ao fazê-lo, o artefacto pode funcionar como um mediador semiótico;
- O professor usa o artefacto e os signos provenientes do seu uso em actividades específicas, de acordo com uma motivação educacional específica, para que os alunos atinjam significados matematicamente consistentes. O significado matemático relacionado com o artefacto, torna-se acessível ao aluno, à medida que o usa, mas a construção de significados é compatível com a orientação do professor, enquanto são organizadas actividades específicas, que visam a construção/desenvolvimento de significados matematicamente reconhecíveis e aceitáveis. (Mariotti, 2006)

As autoras sintetizam o complexo processo de *mediação semiótica*, referindo que, em termos de mediação, este pode ser expresso da seguinte forma: “o professor actua como mediador usando o artefacto para mediar o conteúdo matemático para os alunos”, e acrescentam que, no ponto de vista delas, “o professor usa o artefacto como uma ferramenta de mediação semiótica”. (Bussi e Mariotti, 2008, p. 754)

Acrescentam, ainda, que não se referem apenas ao acto concreto da utilização de uma ferramenta para realizar uma tarefa, em vez disso, referem-se ao facto de que novos

significados, relacionados com a utilização efectiva de uma ferramenta, podem ser gerados e evoluir, sob a orientação do perito (neste contexto, o professor). Assim, qualquer artefacto vai ser referido como *ferramenta de mediação semiótica* enquanto é (ou é concebida para ser) intencionalmente usado pelo professor para mediar um conteúdo matemático por meio de uma intervenção didáctica planeada. Na verdade, a utilização do artefacto tem de ser plenamente integrada nas actividades de sala de aula, ou seja, a utilização do artefacto tem de ser “orquestrada” (Bussi e Mariotti, 2008). Neste contexto, “orquestração” refere-se à coordenação das diferentes vozes que são ouvidas durante as discussões na sala de aula.

Penso que esta interpretação de artefacto mediador é muito adequada ao contexto de sala de aula. Na verdade, nas aulas investigadas, parece ter havido uma *mediação semiótica*, uma vez que os artefactos foram previamente seleccionados e adaptados, e a sua integração na sala de aula foi, por mim, mediada.

3.2. A História da Matemática e o ensino da Matemática

A história [da Matemática] é apresentada como um artefacto subtil para o ensino e para a reflexão sobre o ensino.

(Radford et al, 2007, p. 109)

Procurando estabelecer uma apresentação acerca dos pressupostos teóricos que envolvem a relação entre a História da Matemática e a prática pedagógica desenvolvida nas aulas de Matemática, procedi a uma revisão bibliográfica tendo por base estudos feitos, artigos publicados em jornais e revistas, comunicações, actas de congressos, livros, capítulos de livros, teses e dissertações, desenvolvidos tanto a nível internacional como nacional.

Como indicado no capítulo introdutório, existe uma variedade de publicações sobre a História em Educação Matemática. Tendo em conta a literatura analisada, farei uma síntese dos benefícios, objecções, dificuldades e modos de integrar a História no ensino da Matemática mais referidos pelos autores analisados, e que me parecem mais relevantes.

No entanto, não é minha pretensão fazer um estudo exaustivo deste assunto, pois tal pode ser encontrado, por exemplo, em (Gulikers e Blom, 2001) e em (Antónia, 2001), obviamente referente à literatura disponível até à data. É de notar que este último artigo/trabalho é escrito em inglês por uma portuguesa, o que costuma acontecer com frequência e vem agravar ainda mais a falta de material sobre este tema escrito em língua portuguesa!

Em língua portuguesa podemos encontrar algumas teses/dissertações feitas por investigadores brasileiros que também abordam este assunto e, em particular, é de salientar um artigo produzido para o I Seminário Nacional de História da Matemática, realizado no Recife, em 1995, que foi posteriormente publicado pela revista de educação Zetetiké, onde Miguel (1997), ao analisar as razões apontadas por vários autores para se utilizar ou não a História da Matemática no ensino, enumerou doze argumentos reforçadores das potencialidades pedagógicas da História da Matemática e quatro argumentos questionadores, refutando, de forma convincente, cada um destes últimos, mostrando as grandes possibilidades pedagógicas que a História oferece.

Em Jankvist (2009a) também podemos encontrar uma análise bastante detalhada e mais actualizada da literatura existente relacionada com a integração da História no ensino da Matemática.

Recentemente, têm surgido mais artigos sobre pesquisas empíricas, onde se procura analisar e avaliar a eficácia da integração da História na Educação Matemática. O trabalho de Jankvist exemplifica bem essa tendência.

No seguimento deste trabalho, também farei referência às conclusões tiradas em alguns desses estudos.

3.2.1. Benefícios, Objecções e Dificuldades

Benefícios

A integração da História da Matemática no ensino da Matemática tem sido defendida por diversos autores e muitos documentos a orientar nesse sentido têm sido produzidos. É com base nesses documentos que farei a seguinte síntese, abordando os principais benefícios da integração da História no ensino da Matemática, referidos pela maioria dos autores que se debruçaram sobre este tema.

Assim, os argumentos mais frequentemente referidos pelos apologistas da integração da História no ensino da Matemática são os seguintes:

1. A História aumenta a motivação dos alunos e desenvolve uma atitude positiva face à Matemática:

- “A História ajuda a aumentar a motivação para a aprendizagem [da Matemática].” (Fauvel, 1991, p. 4)
- “A História contribui para ilustrar e tornar mais interessante o ensino da Matemática.” (Struik, 1980 apud Vianna, 1998, p. 72)
- “A História proporciona uma ótima maneira de conseguir que os alunos se interessem pela Matemática.” (Rickey, 1995, p. 123)
- “Torna-se cada vez mais difícil motivar os alunos para uma ciência cristalizada. Não é sem razão que a história vem aparecendo como um elemento motivador de grande importância.” (D’Ambrosio, 2000, p. 29)
- “[Aumenta] a predisposição afectiva para a Matemática.” (Tzanakis e Arcavi, 2000, p. 203)
- “A História pode ajudar a aumentar a motivação e ajuda a desenvolver uma atitude positiva em relação à aprendizagem.” (Liu, 2003, p. 416)

2. A História é um instrumento que possibilita a desmistificação da Matemática:

- “A História dá à Matemática um rosto humano.” (Fauvel, 1991, p. 4)
- “Os alunos pensam que a Matemática é fechada, morta, sem emoção e já toda descoberta.” (Bidwell, 1993, p. 461 apud Haverhals e Roscoe, 2010, p. 339)
- “A História ajudar-nos-á a humanizar a Matemática, mostrando aos nossos alunos o aspecto afectivo de fazer Matemática.” (Avital, 1995, p. 3)
- “A História serve para mostrar que a Matemática que se estuda nas escolas é uma das muitas formas de Matemática desenvolvidas pela humanidade.” (D’Ambrosio, s/d, s/p)
- “Só a História da Matemática pode contribuir para anular a sensação de que a matemática é uma coisa pronta e acabada.” (Vianna, 1998, p. 67)
- “Observando a evolução histórica de um conceito, os alunos perceberão que a Matemática não é fixa e definitiva.” (Grugnetti, 2000b, p. 30)
- “A Matemática é um esforço humano que já dura há mais de quatro mil anos; é parte do nosso património cultural; é um tema muito útil, bonito e próspero.” (Siu, 2000a, p. 3)
- “A História revela as facetas humanas do conhecimento matemático.” (Liu, 2003, p. 416)

Esta ideia já tinha sido defendida por Bento de Jesus Caraça ao escrever no Prefácio do seu livro, *Conceitos Fundamentais da Matemática*, que:

“ou se olha para ela [Matemática] tal como vem exposta nos livros de ensino, como coisa criada, e o aspecto é o de um todo harmonioso, onde os capítulos se encadeiam em ordem, sem contradições. Ou se procura [...] assistir à maneira como foi sendo elaborada e descobrem-se hesitações, dúvidas, contradições, [...]”

(Caraça, 1951, p. viii)

3. A História é uma fonte para a selecção de problemas a serem incorporados nas aulas de Matemática:

- “A História da Matemática fornece milhares de problemas úteis e interessantes, problemas que são matemática e pedagogicamente ricos e

que, pela sua natureza histórica, possuem um apelo intelectual adicional para os alunos”. (Swetz, 1994, p. 2)

- “Usando problemas antigos, os alunos podem comparar as suas estratégias com as originais.” (Grugnetti, 2000b, p. 30)
- “A História da Matemática fornece um vasto reservatório de questões relevantes, problemas e exposições que podem ser muito valiosas, tanto em termos do seu conteúdo como do seu potencial para motivar, interessar e engajar o aluno.” (Tzanakis e Arcavi, 2000, p. 204)

4. A História ajuda a compreender a origem e o desenvolvimento de conceitos matemáticos:

- “A História, ao mostrar aos alunos como os conceitos se desenvolveram, ajuda a sua compreensão.” (Fauvel, 1991, p. 4)
- “A História pode ajudar-nos a melhorar o nosso ensino, tentando acompanhar o processo de criação da matemática.” (Avital, 1995, p. 11)
- “Serve para destacar que essa matemática teve a sua origem nas culturas da Antiguidade mediterrânea e se desenvolveu ao longo da Idade Média e somente a partir do século XVII se organizou como um corpo de conhecimentos, com um estilo próprio.” (D’Ambrosio, s/d)
- “A História contribui para satisfazer o nosso desejo de saber como os conceitos da matemática se originaram e desenvolveram.” (Struik, 1980 apud Vianna, 1998, p. 72)
- “A História auxilia a compreensão de muitos conceitos, nomeadamente ao explicar a origem de certas ideias e procedimentos.” (Wilson e Chauvot, 2000, p. 642)

5. A História suscita oportunidades para a investigação/pesquisa:

- “A História suscita oportunidades para a investigação em Matemática.” (Fauvel, 1991, p. 4)
- “A História contribui para o ensino e para a pesquisa mediante o estudo dos autores clássicos, o que vem a ser uma satisfação em si mesmo.” (Struik, 1980 apud Vianna, 1998, p. 72)

- “Pode ajudar-nos a criar na sala de aula um clima de pesquisa e investigação e não apenas de transmissão de conhecimentos.” (Avital, 1995, p. 11)
- “Os alunos podem ser colocados no papel de arqueólogos matemáticos e serem conduzidos às descobertas.” (Swetz, 1995b, p. 29)

6. A História ajuda a compreender as dificuldades dos alunos através da análise do desenvolvimento da Matemática:

- “Os obstáculos ao desenvolvimento do passado ajudam a explicar o que os alunos de hoje acham difícil.” (Fauvel, 1991, p. 4)
- “O desenvolvimento histórico pode nos [aos professores] ensinar sobre possíveis dificuldades de aprendizagem. [...] eu acredito que podemos conjecturar que os alunos do ensino secundário enfrentam dificuldades de aprendizagem em áreas semelhantes às que encontramos no desenvolvimento histórico.” (Avital, 1995, p. 4)
- “Um professor que tem conhecimento da História da Matemática antecipará as dificuldades dos alunos em áreas nas quais, historicamente, muito trabalho foi necessário para ultrapassar dificuldades significativas. Assim, o professor pode estar preparado com estratégias de ensino apropriadas para essas situações; algumas delas bem podem estar de acordo com os desenvolvimentos históricos e ajudarão os alunos a superar esses obstáculos.” (Katz et al, 2000, p. 153).
- “Uma análise histórica e epistemológica permite aos professores entenderem por que um determinado conceito é tão difícil para os alunos (...) e pode ajudar na aproximação didáctica e seu desenvolvimento.” (Grugnetti, 2000b, p. 30)
- “Obstáculos do passado no desenvolvimento da Matemática podem ajudar a explicar as dificuldades que os alunos encontram actualmente.” (Liu, 2003, p. 416)

7. A História enriquece o repertório pedagógico e o conhecimento matemático dos professores:

- “Ler fontes antigas dá uma melhor visão da essência do que a Matemática é e melhora as capacidades didáticas de cada um como professor.” (Barbin, 1996 apud Gulikers e Blom, 2001, p. 227)
- “Um olhar sobre os 'métodos antigos' pode ajudar professores e alunos a avaliar os seus métodos, deixando por algum tempo de ‘apenas fazer matemática’ para pensar e falar sobre o que estão a fazer e, em seguida, voltar atrás para fazer, mas agora fazê-lo mais deliberadamente.” (Maanen, 1997, p. 39)
- “[Enriquece e melhora] o “background” didático dos professores e o seu repertório pedagógico.” (Tzanakis e Arcavi, 2000, p. 203)
- “A História da Matemática pode ser um recurso útil para a compreensão dos processos de formação do pensamento matemático, e para explorar o caminho pelo qual tal compreensão pode ser usada no planeamento das actividades em sala de aula.” (Radford, 2000, p. 143)
- “A História fornece aos professores um guia para o ensino.” (Liu, 2003, p. 416)

8. A História mostra o desenvolvimento cultural e humano da Matemática:

- “Ajuda a desenvolver uma abordagem multicultural.” (Fauvel, 1991, p. 4)
- “Serve para situar a Matemática como uma manifestação cultural de todos os povos em todos os tempos, como a linguagem, os costumes, os valores, as crenças e os hábitos, e como tal diversificada nas suas origens e na sua evolução.” (D’Ambrosio, s/d)
- “[Possibilita] a apreciação da Matemática como um empreendimento cultural e humano.” (Tzanakis e Arcavi, 2000, p. 203)

9. A História mostra a relação da Matemática com as outras ciências:

- “Oferece oportunidades de trabalho interdisciplinar com outros professores ou disciplinas.” (Fauvel, 1991, p. 4)
- “Contribui para entendermos a nossa herança cultural através das relações da Matemática com as outras ciências, em particular a Física e a

Astronomia; e também com as artes, a religião, a filosofia e as técnicas artesanais.” (Struik, 1980 apud Vianna, 1998, p. 72)

- “A História ajuda a estabelecer conexões, dentro da Matemática e com outras disciplinas.” (Wilson e Chauvot, 2000, p. 642)

Agora, depois de apontar nove razões para integrar a História da Matemática na sala de aula, estou tentada a apontar mais uma obtendo, assim, “Os dez mandamentos da integração da História no ensino da Matemática”. Penso que existe um benefício importante, implícito nos benefícios já referidos, mas que pode ser realçado com o seguinte enunciado:

10. A História permite desenvolver “as” três capacidades transversais: Resolução de problemas, Raciocínio e Comunicação matemática (RRC):

- “A História é uma fonte de problemas interessantes que permitem desenvolver a capacidade de resolução de problemas.” (Wilson e Chauvot, 2000, p. 642)
- “Os problemas históricos podem ajudar a desenvolver o raciocínio matemático dos alunos.” (Liu, 2003, p. 416)

O Novo Programa de Matemática para o Ensino Básico (NPMEB) foi homologado em Dezembro de 2007 e entrou em vigor em Portugal no ano lectivo 2010/2011 (embora algumas escolas já o tivessem implementado facultativamente no ano lectivo anterior). De acordo com este programa, as três principais capacidades transversais a toda a aprendizagem da Matemática são: a Resolução de problemas, o Raciocínio matemático e a Comunicação matemática, como consta no seguinte excerto do referido programa:

“O programa assume a necessidade de se indicarem [...] três capacidades transversais a toda a aprendizagem da Matemática – a Resolução de problemas, o Raciocínio matemático e a Comunicação matemática – que devem merecer uma atenção permanente no ensino.”

(DGIDC, 2007, p. 1)

E acrescenta, ainda, que:

“Desenvolver a capacidade de resolução de problemas e promover o raciocínio e a comunicação matemáticos, para além de constituírem objectivos de aprendizagem centrais neste programa, constituem também importantes orientações metodológicas para estruturar as actividades a realizar em aula.”

(DGIDC, 2007, p. 9)

Ora, na História da Matemática podemos encontrar tarefas e actividades, além dos problemas já referidos no ponto três, que são indicadas para o desenvolvimento destas capacidades e que escasseiam nos livros didácticos, mesmo nos elaborados de acordo com este novo programa, pois continua a haver predominância de exercícios repetitivos e a inserção da História da Matemática continua a aparecer como actividade introdutória de um capítulo ou como apêndice no fim do capítulo.

Objecções

Muitos matemáticos e historiadores da Matemática apontaram, em diversas ocasiões, problemas resultantes ou associados ao uso da História da Matemática e destacaram algumas objecções ao seu uso como recurso didáctico. Não é meu objectivo refutá-las, nem mesmo analisá-las pormenorizadamente, pois creio que ao analisarmos os benefícios do uso da História da Matemática podemos, claramente, contrapor algumas das objecções mencionadas. Conjugando o completíssimo rol de objecções apresentado por Tzanakis e Arcavi (2000), por Siu (2007) e também por Ho (2008), obtemos a seguinte lista:

1. História não é Matemática.
2. O passado da Matemática não é significativo para a compreensão da Matemática actual.
3. O caminho histórico é mais árduo para os estudantes que o caminho lógico.
4. Os alunos podem ter um sentido errado do passado o que impossibilita a contextualização histórica da Matemática caso não tenham uma educação mais ampla na história em geral.
5. Muitos alunos não gostam de História e implicitamente não irão gostar de História da Matemática, ou então não a acharão menos chata do que a Matemática.
6. Progresso em Matemática é tornar a abordagem dos problemas difíceis numa rotina, então por que se preocupar em olhar para trás?

7. A História é susceptível de incitar ao chauvinismo cultural e ao nacionalismo paroquial.
8. É difícil fazer qualquer ligação com o contexto dos dias de hoje.
9. A principal ênfase deve estar em dotar os alunos com habilidades de rotina (e eles já têm problemas com isso), então por que incomodar-se usando a História?
10. Não há fé no uso da História da Matemática no ensino de Matemática.
11. O tempo dispendido no estudo da História da Matemática deveria ser utilizado para aprender mais Matemática.
12. Ausência na criança do sentido de progresso histórico.
13. Falta de formação dos professores.
14. Falta de recursos.
15. Falta de tempo.
16. Falta de métodos de avaliação.

Tzanakis e Arcavi atribuem duas naturezas às objecções: a filosófica e a prática, integrando os últimos quatro argumentos nas objecções de natureza prática.

De facto, algumas das objecções de natureza filosófica não são mais do que meras desculpas para não integrar a História no ensino da Matemática (1, 4, 7, 10, 12) e outras advêm da sua incorrecta integração (2, 3, 5, 6, 8, 9, 11).

Dificuldades

O que os autores classificam de “objecções práticas” são, no meu entender, e também de Brito et al (2009), dificuldades que se colocam na integração da História da Matemática na sala de aula. Farei uma abordagem a cada uma destas dificuldades por pensar que são, de facto, os grandes entraves à integração da História da Matemática no ensino desta disciplina.

- **Falta de formação dos professores:**

A falta de preparação da maioria dos professores que não tiveram, quer na sua formação inicial quer na formação contínua, oportunidades de estudar a História da Matemática e de analisar as possibilidades de inserção desta história nas suas práticas pedagógicas, constitui um dos maiores entraves à integração da História no ensino da Matemática.

Esta falha na formação dos professores conduz a uma falta de experiência/conhecimentos do professor ao nível da História da Matemática e, na verdade, é necessário que o professor tenha conhecimentos não apenas históricos, mas também interdisciplinares. E, inevitavelmente, a falta de perícia conduz a uma falta de confiança que é ainda mais incapacitante.

D'Ambrosio (s/d) refere que “não é necessário que o professor seja um especialista para introduzir História da Matemática nos seus cursos. [...] Basta colocar aqui e ali algumas reflexões. Isto pode gerar muito interesse nas aulas de Matemática”. Mas é preciso ser prudente com a introdução da História da Matemática de uma forma ocasional, como sugere D'Ambrosio. Penso que isto é válido para aqueles professores que conseguem tornar engraçado os comentários sobre a História da Matemática porque, caso contrário, será um comentário “seco”, despropositado e os alunos poderão não encontrar o mínimo interesse e, aí sim, será uma perda de tempo que não serviu para motivar os alunos nem para aprenderem Matemática.

É de salientar que as opiniões relativamente à formação de professores são divergentes: há quem defenda a existência de uma disciplina exclusivamente dedicada à “História da Matemática” e há os apologistas da integração da História da Matemática, de uma forma dispersa, pelas várias disciplinas do curso.

Mas, para que a integração da História no ensino da Matemática seja eficaz, parece-me imprescindível que nos cursos de Licenciatura (Mestrado) em Matemática, além do estudo da História da Matemática disseminado nas disciplinas do currículo, haja uma disciplina específica para que o (futuro) professor conheça a ideia e a abordagem desta metodologia e, futuramente, a coloque na sua prática docente de maneira que, ao ser utilizada, possa contribuir, de facto, no ensino e aprendizagem. Esta ideia é também defendida por D'Ambrosio, numa entrevista analisada em (Balestri, 2008).

Costa (s/d) refere, ainda, outras duas pesquisas (Souto, 1997; Zuin, 2003) que apontam a falta de preparação dos docentes. Para Souto (1997), os professores que afirmam fazer uso da História da Matemática nas suas aulas ainda o fazem de maneira inconsistente. Zuin (2003) concluiu que os professores que participaram na sua investigação, e afirmaram realizar abordagens históricas, demonstraram não recorrer a fontes confiáveis, baseando-se em *sites* da WEB ou apenas nas poucas informações apresentadas nos manuais adoptados.

Esta falta de uma adequada formação dos professores para lançar mão dos recursos didáticos da História da Matemática, é ainda agravada por outra dificuldade que é a:

- **Falta de recursos:**

Embora haja uma grande quantidade de textos de História da Matemática é difícil encontrar textos que abordem uma História da Matemática do ponto de vista didático. Byers (1982) refere que “é provavelmente mais difícil escrever uma boa história para usar nas aulas de Matemática do que, digamos, a história da matemática Babilónica” (p. 62). De facto, é fácil encontrar textos sobre a Matemática da Babilónia, do Egipto, da China, da Grécia, mas textos sobre a integração “desta” Matemática na sala de aula não se encontram com tanta facilidade e, infelizmente, passados quase trinta anos, a afirmação de Byers ainda continua válida. E se é difícil encontrar recursos didáticos escritos em inglês, estes ainda são mais escassos em língua portuguesa.

Os professores deparam-se com a quase inexistência de material bibliográfico com sugestões de actividades que possam utilizar nas suas aulas e isto decorre do facto de que nem todo o texto sobre História da Matemática tem potencialidades pedagógicas para o ensino da Matemática pois, “para poderem ser pedagogicamente úteis, é necessário que histórias da matemática sejam escritas sob o ponto de vista do educador matemático” (Miguel, 1993, p. 109 apud Brito et al, 2009, p. 10).

Outro aspecto que carece especial atenção é a ineficácia dos dados históricos inseridos nos manuais escolares que, na sua maioria, usam a História como mero instrumento ilustrativo. Geralmente, os conteúdos relacionados com a História restringem-se a citações de datas e nomes, sem qualquer indicação para o professor de como a História poderia ser utilizada na construção de conceitos matemáticos por parte dos seus alunos.

Nos manuais escolares, adoptados em Portugal, é bastante notória essa lacuna, conforme salienta Silva (2010), “quando olhamos para a sala de aula, sobretudo para os actuais manuais escolares mais utilizados, vemos que a História da Matemática desempenha um papel muito marginal, reduzido a umas quantas biografias (Pitágoras, Euclides e pouco mais)” (s/p). Verificamos que a História da Matemática não tem direito a um lugar próprio. A maioria das notas históricas é vista como um extra (tanto pelos alunos como pelos professores) o que significa que podem ser omitidas.

Além disso, há ainda outra agravante que é a presença de dados históricos incorrectos nalguns manuais. Thomaidis e Tzanakis (2009) alertam para este facto, após

uma análise ao livro de Matemática do 7º ano, adoptado por todas as escolas da Grécia⁸. Dessa análise, estes investigadores concluem que a utilização da História da Matemática nos manuais oficiais é “questionável devido aos graves erros históricos, imprecisões ou omissões” (p. 139).

E se os professores não têm uma boa formação em História da Matemática não têm capacidade para detectar e corrigir estes erros, conforme o sugerem Haverhals & Roscoe (2010), ao afirmarem que “temos a impressão que desde que o professor não possua formação em História da Matemática, poderá estar mal preparado para avaliar a precisão das fontes” (p. 352).

Actualmente, com as novas tecnologias, temos um recurso muito poderoso e “perigoso”, que é a Internet, e que não deve ser desprezado pelos professores interessados em integrar a História da Matemática nas suas aulas, devido à grande quantidade de informações disponíveis e também pela facilidade com que é possível obtê-las. Porém, deve ser utilizada com muita cautela, havendo a preocupação de procurar fontes confiáveis.

- **Falta de tempo:**

A falta de tempo pode ser interpretada sob dois pontos de vista: falta de tempo para cumprir os programas quando os professores argumentam que não há tempo suficiente na sala de aula para a aprendizagem da Matemática como ela é, muito menos quando se pretende ensinar a História da Matemática; e a falta de tempo dos professores para elaborar, testar e avaliar actividades pedagógicas que utilizem a História da Matemática para a construção de conceitos matemáticos que conduzam a uma aprendizagem efectiva.

A maioria dos professores quando questionados sobre a não integração da História nas suas aulas apontam a questão da falta de tempo, referindo que já têm um horário sobrecarregado e que não têm tempo para pesquisar e elaborar actividades com recurso à História da Matemática. Esta falta de tempo é agravada, como já foi referido anteriormente, com a falta de materiais “prontos a usar” que possam ser implementados pelos professores com pouca ou nenhuma modificação e, além disso, existe a falta de formação nesta área, pois sem formação/conhecimentos ainda será necessário despende mais tempo para elaborar este tipo de materiais.

⁸ Na Grécia, há apenas um manual (por disciplina) para cada ano do ensino básico ou secundário, imposto pela regulamentação do estado.

Para Gulikers e Blom (2001) esta objecção é relativa, pois o material uma vez produzido pode ser utilizado ano após ano e, além disso, ainda influenciará positivamente a qualidade do ensino e da aprendizagem.

A outra justificação para a falta de tempo deve-se ao facto de os currículos de Matemática dos Ensinos Básico e Secundário serem tão extensos que raramente deixam espaço para temas adicionais ou aprofundamento dos temas existentes. Os professores sentem-se pressionados para cumprir os programas, devido à realização de Exames Nacionais, e não estão dispostos a arriscar com medo que o desempenho dos alunos nos exames seja prejudicado.

Mas esta falta de tempo só existe se a História da Matemática não for devidamente integrada; se em vez do professor aproveitar a História para leccionar os conteúdos do currículo ainda o sobrecarregar com coisas supérfluas, como fotos e episódios da vida de alguns matemáticos, que em nada contribuem para uma efectiva aprendizagem dos conteúdos a serem leccionados.

Avital (1995) tenta responder a esta questão, referindo que os professores podem perguntar ‘onde vão arranjar tempo para ensinar história’ e que a melhor resposta é que não é necessário qualquer tempo extra. Para este autor, basta dar um problema histórico directamente relacionado com o tema que se está a ensinar, dizendo de onde ele vem, e pedir aos alunos para pesquisarem sobre a sua história. No entanto, para Fried (2001), a solução apresentada por Avital não é de todo solução para esta questão uma vez que apenas retira o problema da falta de tempo do professor e o transfere para os alunos.

Liu (2003) também arrisca dar uma resposta a esta questão referindo que “ensinar História da Matemática é ensinar, também, a própria matemática. A História da Matemática é melhor quando tratada como parte da aula e não como uma actividade ‘extra’” (p. 419).

Ora, esta dificuldade pode ser colmatada se substituirmos um problema comum, por outro, relacionado com o mesmo conteúdo didáctico, mas com um contexto histórico. Recorrendo a problemas históricos o professor não necessita de adicionar mais conteúdos mas apenas “ensinar o antigo de uma maneira nova” (Swetz, 1994). Portanto, neste caso, o professor não é obrigado a encontrar tempo extra para conteúdos extra, num programa já sobrecarregado, e os alunos não são forçados a encontrar tempo extra para trabalho de casa extra. Ora esta ideia é o centro da abordagem de (Swetz, 1994, 1995b) e será analisada

mais detalhadamente quando forem abordados os modos de integrar a História no ensino da Matemática.

Avital (1995) acrescenta ainda que “a história pode acompanhar o currículo tópico a tópico. Algumas abordagens aos problemas históricos não só enriquecem o ensino, como mostram maneiras pedagogicamente melhores do que as mais modernas” (p. 7). Por outras palavras, a abordagem histórica pode ser bem sucedida uma vez que para cada tópico no currículo podemos encontrar um problema histórico, uma ideia ou uma figura relevante.

O cerne de toda esta questão está na diferença entre **usar** e **integrar** a História no ensino da matemática. É muito frequente vermos a palavra “usar” na literatura relacionada com este tema. Temos, por exemplo, “O uso da História da Matemática no ensino”, “Usando a História na Educação Matemática”, “Usando a História para ensinar Matemática”, “O uso da História no ensino da Matemática”, “O ABCD de usar a História da Matemática na sala de aula”, “Usando problemas da História da Matemática na sala de aula”. E muito raramente surge a palavra “integrar”.

Esta ideia foi defendida por Siu e Tzanakis (2004) ao afirmarem que “é mesmo discutível se a frase ‘usando História da Matemática’ deve ser usada! A palavra ‘integrar’ pode ser melhor, e a palavra ‘permeando’ é ainda melhor” (p. vii).

Para realçar esta diferença, Siu (2007) escreveu um artigo intitulado “Não, eu não uso História da Matemática nas minhas aulas. Porquê?”, e a resposta que dá a esta questão é, precisamente, “Não, eu não uso História da Matemática nas minhas aulas. Eu deixo-a permeiar as minhas aulas”, onde, como é evidente, “permeiar” denota uma maior profundidade que a palavra “integrar”.

- **Falta de métodos de avaliação:**

Muitos professores argumentam que não há nenhuma maneira objectiva e consistente de integrar qualquer componente histórica na avaliação dos alunos, e se não é considerada na avaliação, então os alunos não a valorizam nem prestam atenção.

Para Haverhals e Roscoe (2010), para resolver esta dificuldade “o truque consiste em fazer perguntas de avaliação que usem as capacidades desenvolvidas no decurso da utilização da História da Matemática” (p. 349). Ora, isto está de acordo com o décimo benefício que referi anteriormente, pois, se aproveitarmos a História da Matemática para desenvolver capacidades transversais nos alunos, deverão ser também essas capacidades

objecto de avaliação e não apenas os conteúdos que, muitas vezes, os alunos decoram sem perceberem o que estão a estudar.

Além disso, em vez de avaliarmos através de questões “abstractas” (do tipo ‘resolve a equação...’, ‘determina o valor da expressão numérica...’ ou ‘calcula o valor da potência...’), podemos utilizar os problemas escritos em linguagem corrente, muito frequentes na História da Matemática e que geralmente, têm um carácter lúdico que pode motivar os alunos para a sua resolução. No entanto, os problemas históricos, bastante diferentes dos habituais exercícios, requerem que os alunos pensem profundamente sobre os conceitos que estão a aprender e, por isso, estes acham estes problemas difíceis, mas isso acontece porque não estão habituados a trabalhar desta maneira, porque o que acontece, por exemplo, em relação às equações, é que os professores dedicam muitas aulas à resolução repetitiva de equações e apenas uma ou duas aulas aos problemas propriamente ditos. Depois, nos exames nacionais, constatamos que a maior dificuldade dos alunos reside na interpretação das questões.

Esta dificuldade dissipa-se se houver uma correcta integração da História no ensino da Matemática, ou seja, se esta ‘permeiar’ as aulas através dos problemas históricos, que podem ser utilizados para leccionar qualquer conteúdo existente no programa e que são adequados para desenvolver as três principais capacidades transversais, nomeadamente, a resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação matemática. Outra componente a ser avaliada poderá ser a realização e trabalhos de pesquisa recorrendo à História da Matemática, pois existe uma infinidade de temas interessantes que os alunos podem investigar.

Assim, a dificuldade em avaliar a componente histórica, depende essencialmente do modo como esta é “usada” na sala de aula, pois quando é usada e não integrada, como é o caso, por exemplo, da sua utilização através de notas históricas, é obviamente mais difícil de avaliar.

3.2.2. Avaliação da eficácia da integração da História no ensino da Matemática

A relevância da História da Matemática no ensino desta disciplina tem sido alvo de inúmeras discussões no campo da Educação Matemática, e observamos que, apesar das objecções e dificuldades levantadas, as pesquisas vêm realçando, cada vez mais, as potencialidades da integração da História no processo de ensino e de aprendizagem da

Matemática. Mas, recentemente, uma importante discussão tem surgido neste contexto, que consiste em perceber a eficácia (ou não) da integração da História da Matemática na sala de aula.

Na lista de objecções apresentada anteriormente não referi a que me parece mais relevante e que é a 16ª objecção, apresentada por Siu (2007) na sua lista dos factores desfavoráveis, na forma de uma questão muito pertinente: “Há qualquer evidência empírica de que os alunos aprendem melhor quando a História da Matemática é utilizada na sala de aula?” (p. 269).

Liu (2003) já tinha colocado uma questão semelhante e constatado que era difícil responder a esta pergunta para quem defendia a importância de incluir a História no currículo da Matemática. Este autor alega, ainda, que não tem conhecimento de algum estudo empírico que indique que a História da Matemática ajuda os alunos a terem melhor desempenho nos testes tradicionais. O autor refere que “embora o estudo da História da Matemática possa melhorar as atitudes dos alunos relativamente à Matemática, a articulação entre atitude e aprendizagem não é linear nem simples” (p. 420).

Esta afirmação do autor tem por base dois estudos que são por ele referidos. Um deles foi feito por McBride e Rollins (1977) que compararam duas turmas de álgebra no ensino universitário tendo concluído que houve uma significativa melhoria na atitude dos alunos relativamente à Matemática, quando a História da Matemática foi incluída. No outro estudo, Philippou e Christou (1998), também concluíram que as atitudes e o modo de ver a Matemática dos futuros professores sofreu uma mudança radical depois de eles terem frequentado dois cursos baseados na História da Matemática.

Em (Lit et al, 2001) é relatada uma das primeiras experiências consistentes da integração da História no ensino da Matemática. Embora o resultado não tenha sido tão promissor como era esperado, este estudo serviu para os investigadores obterem informações sobre como os alunos aprendem Matemática e como gostam de o fazer. Quanto ao resultado, os investigadores concluíram que o grupo de alunos que teve contacto com a História da Matemática achou o processo de aprendizagem mais agradável, embora o resultado cognitivo deste grupo de alunos não tenha revelado uma melhoria. Os autores tentam explicar este facto, apontando que poderá haver uma falha entre o que é ensinado e o que é avaliado.

De facto, quando integramos devidamente a História no ensino da Matemática, além de trabalhar os conteúdos, um dos grandes objectivos é o desenvolvimento de

capacidades transversais, como por exemplo, a da resolução de problemas. Ora, estas capacidades não se desenvolvem numa semana, e se calhar nem sequer num mês; como tal, os resultados (positivos) que se anseiam não surgirão de imediato, mas certamente irão aparecer a médio e longo prazo. Temos que ser pacientes, persistentes e, sobretudo, não desistir!

Recentemente, Jankvist tem se debruçado muito sobre esta problemática e, numa pesquisa empírica que realizou, aponta que se a História integrar o currículo da Matemática como um objectivo (*'goal'*), os alunos do Ensino Básico são capazes de participar em verdadeiras discussões históricas de maneiras que se conectam ao conteúdo matemático (Jankvist, 2009a).

Apesar do aumento de estudos empíricos relacionadas com este tema, as conclusões tiradas ainda não são suficientes para satisfazer os estudiosos desta área e, recentemente, Kjeldsen (2010) (no Resumo do artigo apresentado no ESU6⁹), defende que a questão de se saber se a história beneficia a aprendizagem dos alunos ainda não foi exaustivamente investigada.

Haverhals e Roscoe (2010) analisaram e refutaram quinze dos factores desfavoráveis apresentados por Siu (2007). Quanto ao décimo sexto factor, referido anteriormente, os autores não souberam como refutar esta objecção devido, de facto, à falta de pesquisa e conclusões válidas que permitam responder, fidedignamente, a esta questão, pelo que alegaram:

“Ao último factor desfavorável, (16), os autores não podem responder. Que seja do nosso conhecimento, não há nenhuma evidência empírica convincente de que os alunos aprendem melhor quando a História da Matemática é usada na sala de aula” (Haverhals e Roscoe, 2010, p. 353).

Nos Congressos e Encontros realizados nos últimos anos, tem-se verificado um aumento de artigos que divulgam pesquisas empíricas onde se tenta mostrar (algumas vezes, prematuramente) a eficácia da integração da História no ensino da Matemática e, certamente, este será um tema em debate nos próximos eventos relacionados com a História e a Educação Matemática.

⁹ 6th European Summer University on the History and Epistemology in Mathematics Education (ESU6), realizado em Julho de 2010, em Viena.

3.2.3. De que forma a História pode ser integrada no ensino da Matemática?

“Há tantas maneiras diferentes de integrar a História da Matemática na sala de aula como há professores.”

(Siu, 2000b, p. 242)

A discussão sobre os “prós” e “contras” da integração da História no ensino da Matemática é de longa data. No entanto, a tendência nos últimos anos tem sido a procura de uma base teórica e de uma metodologia para fazer esta integração.

Depois de ter explicitado os benefícios, objecções e dificuldades que se colocam na integração da História no ensino da Matemática, parece evidente que a maioria dos autores analisados defende amplamente a sua integração no ensino da Matemática, apesar das objecções e dificuldades levantadas. Então, resta agora dar resposta à questão: “De que forma essa integração pode ser feita?”.

Tzanakis e Arcavi (2000, p. 214) apresentam a seguinte lista de ideias e exemplos com o intuito de responder a esta questão:

1. Notas históricas
2. Projectos de investigação com base em textos da História
3. Fontes primárias
4. Fichas de trabalho
5. Pacotes históricos
6. Tirar proveito dos erros, concepções alternativas, mudanças de perspectiva, revisão dos pressupostos implícitos, argumentos intuitivos
7. Problemas históricos
8. Instrumentos mecânicos
9. Actividades de matemática experiencial
10. Dramatizações
11. Filmes e outros meios visuais
12. Experiências no exterior
13. A Internet

No entanto, é preciso ter prudência ao considerar esta extensa lista, pois é importante tentar conciliar o uso da História da Matemática com uma das dificuldades mencionadas anteriormente, relacionada com a falta de tempo e, neste sentido, não me parecem exequíveis algumas das sugestões apresentadas. Como foi referido, este é um dos

argumentos geralmente utilizado pelos professores por não integrarem a História no ensino da Matemática e que, muitos deles, para resolverem este problema, transferem-no para os alunos, dando à História da Matemática uma conotação de trabalho extra. É isso que se verificará se forem utilizadas algumas das sugestões apresentadas.

Por outro lado, também é importante a diversificação de estratégias de ensino, e as orientações do Novo Programa de Matemática, tendo por base o Currículo Nacional, enfatizam essa necessidade:

“o aluno deve ter diversos tipos de experiências matemáticas, nomeadamente resolvendo problemas, realizando actividades de investigação, desenvolvendo projectos, participando em jogos e ainda resolvendo exercícios que proporcionem uma prática compreensiva de procedimentos. Por isso, o professor deve propor aos alunos a realização de diferentes tipos de tarefas, [...]”

(DGIDC, 2007, p. 8)

É evidente que alguns dos exemplos dados serão introduzidos apenas esporadicamente na sala de aula (ou fora dela), mas será que, desse modo, conduzem a uma aprendizagem efectiva da Matemática ou servem apenas para sobrecarregar ainda mais um currículo já sobrelotado?

Certamente, o objectivo dos autores é aumentar a motivação dos alunos através da utilização de algumas destas estratégias, que ao mesmo tempo, servem também para diversificar os métodos de ensino.

Algumas destas sugestões são frequentemente mencionadas por vários autores, especialmente a integração de notas históricas com o intuito de motivar os alunos, desmistificando a Matemática; a utilização de fontes primárias e a resolução de problemas históricos como forma de desenvolver a capacidade de resolver problemas. Esta última estratégia já foi referida no capítulo introdutório, por ter sido a adoptada no presente estudo. Devido à importância atribuída às outras duas estratégias, será feita uma análise a cada uma delas.

Notas históricas

No que respeita à introdução de notas históricas, diversos autores têm alertado para o perigo de se fazer uma história episódica referindo que notas históricas em livros escolares são, muitas vezes, pequenas histórias, isoladas, por vezes enganadoras e mais

entretenimentos que verdades. Um facto isolado, descontextualizado, geralmente dá uma impressão falsa do que está a ser estudado.

Rickey (1995), em resposta à questão colocada no início deste subcapítulo, refere que essa integração “precisa ser muito estritamente ligada ao material que está a ser discutido na aula. Comentários históricos gerais são agradáveis, mas insuficientes” (p. 124).

Ao considerar o aspecto motivacional da História da Matemática, referindo que há muitos professores que a utilizam com esse propósito, Byers (1982) defende que curiosidades e notas biográficas avivam as aulas. Humaniza e ‘desmistifica’ a Matemática, na medida em que mostra que essa Matemática é um produto do trabalho árduo e de muitos avanços e recuos, ajudando a aliviar o receio que muitos alunos sentem por esta disciplina.

Silva (2010), manifesta a mesma opinião que Byers ao propor que “as anedotas e as histórias de matemáticos sejam mais exploradas nos manuais escolares e na sala de aula. O lado humano da Matemática precisa de entrar na sala de aula e não serão as anedotas que irão trazer menos seriedade à disciplina, pelo contrário” (s/p).

Ora, esta é a forma encontrada pelos autores dos manuais escolares para introduzirem (e não integrarem) a História no ensino da Matemática. Geralmente, no fim do capítulo aparecem as “notas ou curiosidades históricas” onde é feita referência à vida e obra de algum matemático relacionado com o tema do capítulo em questão e são abordadas algumas curiosidades. É visto por professores e alunos como um extra e como os primeiros estão sempre “atrasados” no cumprimento do programa, simplesmente ignoram essas páginas.

Foram feitos alguns estudos onde foi analisada a integração da História da Matemática nalguns manuais escolares de Matemática, utilizados no Brasil. Não tenho conhecimento de algum estudo semelhante feito em Portugal, mas pelo que tenho visto nos manuais que tenho utilizado, estou convicta que as conclusões seriam análogas. Das ilações tiradas pelos autores dessas pesquisas depreende-se que estes não são muito favoráveis à introdução da História apenas como factor motivador, principalmente do modo como é feito nos manuais e manifestam as suas preocupações do seguinte modo:

“Há o perigo de se ficar na superficialidade da história da matemática como meras curiosidades sem nenhuma implicação no tratamento dos conteúdos matemáticos em si” (Brolezzi, 1991, p. 1).

Vianna (1995) salienta que “essa história que tem estado presente na maioria dos livros didáticos de Matemática não tem relação directa com o conteúdo que os alunos devem aprender; quando ela é usada como motivação pode facilmente ser substituída por algum outro tema da moda, como futebol, [...]” (p. 124).

Peters (2005) acrescenta, ainda, que “os textos originais que aparecem nos livros são sempre fragmentados e aparecem mais para informar (ilustrar) que para formar” (p. 106).

Vianna (1995) apresenta um estudo onde foi analisada a “utilização” da História da Matemática nos livros didáticos, tendo concluído que em 40% das vezes que a História aparece nos livros didáticos, surge como um factor motivacional; em 44% tem um carácter apenas informativo; somente em 6% das vezes serve de estratégia didáctica e surge integrada no processo de ensino/aprendizagem apenas em 10% do total. É evidente a forte predominância do carácter motivacional e informativo em detrimento dos outros dois.

Como a maioria dos professores segue fielmente os manuais escolares, é óbvio que a abordagem que dará à História da Matemática será a que encontrar nos livros, pelo que se depreende que utilizará a História apenas como factor motivador e informativo, através de curiosidades e notas históricas.

Do exposto podemos concluir que a utilização estritamente motivacional da História da Matemática tem se revelado uma fraqueza metodológica. Embora seja verosímil que os alunos gostam muito deste tipo de apresentação, por lhes parecer divertido, estabelece apenas um sentimento momentâneo e não lhes proporciona uma verdadeira aprendizagem da Matemática.

Outro problema que se coloca é que a integração da História sob este aspecto, além de sobrecarregar um currículo já extenso, conduz a uma das dificuldades referida anteriormente que é a falta de métodos de avaliação. De facto, não é fácil encontrar uma maneira coerente e consistente de avaliar a aprendizagem dos alunos quando a História da Matemática é integrada como mero elemento motivador.

Fontes primárias

Laubenbacher e Pengelley são grandes defensores da utilização de fontes originais e nos seus artigos (Laubenbacher e Pengelley, 1992, 1994, 1996) essa ideia está bem explícita. Estes autores alegam que “através de uma adequada selecção e organização das fontes, os alunos podem apreciar, imediatamente e a longo prazo, avanços na clareza,

elegância e sofisticação dos conceitos, técnicas e notações, [...]” (1996, p. 257). Salientam, ainda, que “nenhum outro método mostra tão claramente a evolução do rigor e abstracção matemática” (idem).

O estudo dos textos originais é essencial para entendermos a origem dos conceitos e a sua evolução. Nada melhor do que exemplificar e um bom exemplo disto é a explicação da origem da palavra “raiz quadrada” e do seu símbolo ($\sqrt{\quad}$), questão muitas vezes colocada pelos alunos e que, provavelmente, muitos serão os professores do ensino básico que não saberão responder. Ora, se recorrermos ao livro de Leonardo de Pisa, o *Liber Abaci*, de 1202, encontraremos, na página 3, o seguinte texto escrito em latim: “*radix quadratum 16 aequalis 4*”, que traduzido para português é: “o lado do quadrado 16 é igual a 4”. Daqui podemos constatar que a palavra *radix* não tem nada a ver com raiz, pois a tradução correcta de *radix* é lado. Segundo Agnaldo Ricieri, trata-se de um “aportuguesamento bobo”.

Quanto à origem do símbolo $\sqrt{\quad}$, o que aconteceu, de facto, foi que à medida que se foram fazendo cópias deste livro, a palavra *radix* foi sofrendo abreviações até chegar ao actual símbolo que não é mais do que um alongamento ou variação da letra *r*, como nos mostra a seguinte figura:

The figure shows four stages of the symbol's evolution, each followed by an equals sign and the number 3:

- radix 9 = 3
- ra9 = 3
- r9 = 3
- $\sqrt{9}$ = 3

Fig. 8 – Origem do símbolo da raiz quadrada
(Extraído de Ricieri, s/d)

Certamente, se os alunos tivessem conhecimento disto, não teriam tanta dificuldade em resolver problemas sobre áreas e lados de quadrados pois, para eles, a noção de raiz quadrada é muito abstracta e é muito difícil compreenderem que quando querem determinar o lado de um quadrado conhecida a sua área, esse lado seja obtido através da raiz quadrada do valor da área.

Muitos outros exemplos poderiam ser dados, e não resisto a apresentar mais dois. Um deles permite responder à questão que muitos alunos colocam, quando começam a trabalhar com as equações, e que tem a ver com o uso preferencial da letra *x* e não outra

qualquer letra do alfabeto. O que a maior parte dos professores responde é que “É assim...”, ou que “É uma convenção, toda a gente usa o x .” É óbvio que estas respostas não satisfazem os alunos. Seguramente, seria mais significativo se nos baseássemos na seguinte explicação:

“Para representar a incógnita nesse tratado de álgebra [Tratado sobre demonstrações de problemas de Álgebra], Khayyam utiliza o termo árabe Chay, que significa ‘coisa’; essa palavra, grafada Xay nas obras científicas espanholas, foi progressivamente substituída pela sua inicial x , que se tornou o símbolo universal do desconhecido.”

(Maalouf, 1991, p. 43 apud Peters, 2005, p.10)

Penso que o facto de os alunos terem conhecimento disto ajuda-os a dar significado àquela letra que aparece no meio de tantos números.

Outro exemplo, que também me parece pertinente, está relacionado com a origem do símbolo utilizado para representar o número π . É frequente aparecer nos manuais comentários sobre o número de casas decimais do π e até são propostos trabalhos de pesquisa relacionados com este tema. No entanto, pouca referência é feita à razão de ser desta letra. Certamente, seria vantajoso dar aos alunos uma explicação do género:

“O símbolo usado para designar a constante obtida pela razão entre a medida do perímetro de uma circunferência e o seu diâmetro é a letra grega π , inicial da palavra ‘perímetros’, escrita em grego: περιμετροξ.”

(Bigode, 1994, p. 32 apud Bortoletto, 2008, p. 16)

Deste modo, a História da Matemática ajuda na contextualização e, conseqüentemente, na procura de significação para o conhecimento matemático. Assim, a História pode ajudar a superar o “mar de falta de significação” que inunda as salas de aula.

Jahnke (2000) também defende o uso de fontes originais argumentando que a utilização de textos originais em fichas de trabalho, cuidadosamente elaboradas e implementadas em actividades interdisciplinares, é uma abordagem mais profunda e mais exigente para integrar a História da Matemática no ensino da Matemática do que o uso de notas históricas.

Salienta que embora “o estudo de fontes originais seja o [método] mais exigente e o que consome mais tempo, [...] é uma actividade gratificante e que aprofunda substancialmente a compreensão matemática” (Jahnke, 2000, p. 291).

É de realçar que os autores que defendem o uso de fontes originais salientam a importância da adequada selecção e organização das fontes, assim como de uma cuidada elaboração dos materiais a utilizar na sala de aula, pois, se não houver esta preocupação, verificar-se-á uma das objecções colocadas por muitos investigadores/professores quando referem que o uso de fontes originais só vai confundir ainda mais os alunos e, além disso, o dispêndio de tempo ainda será maior.

Além destas estratégias amplamente defendidas na literatura, um professor de Matemática pode lançar mão de algumas outras que também podem contribuir para a aprendizagem da Matemática. Por exemplo, tendo em conta que as orientações curriculares têm dado grande ênfase às actividades extracurriculares podemos, mais uma vez, recorrer à História para encontrar materiais/recursos para tais actividades. Um exemplo poderá ser a dinamização do Problema da Semana/Mês, proposto pelo professor da disciplina ou através de um Clube de Matemática. O professor à procura de problemas encontrará na História da Matemática um manancial de problemas recreativos, ideais para este fim. Falo por experiência própria, uma vez que no ano lectivo 2009/2010, em colaboração com as colegas do meu grupo disciplinar, dinamizámos o problema do Mês e os problemas seleccionados foram problemas clássicos (aqueles que atravessaram diversas épocas e regiões apenas com pequenas variações de quantidades e personagens).

Concluí que estes problemas, apesar de serem clássicos, eram desconhecidos da maioria dos alunos (e até de algumas professoras). No entanto, houve muito interesse por parte dos alunos na sua resolução e, de facto, este tipo de problemas adequa-se muito bem ao “Problema do Mês”, pois apresenta-se de uma forma lúdica e a sua resolução apela ao raciocínio e à capacidade de resolver problemas.

Ora, este facto já tinha sido constatado por Swetz (2004b) ao referir que os professores que gostam de propor um Problema da Semana ou do Mês chegarão à conclusão que os problemas históricos desempenham muito bem a tarefa.

Outra actividade extracurricular que pode ser desenvolvida com a ajuda da História da Matemática é a realização de Jogos.

Segundo Neto e Silva (2004), “o acto de jogar muito cedo acompanhou a civilização. [...] Existem jogos há dezenas de séculos, sendo provavelmente responsáveis pelas primeiras actividades estritamente mentais que o Homem inventou (ou descobriu)” (p. 11). Jogar jogos antigos pode ser de grande ajuda para que os alunos desenvolvam e analisem criticamente estratégias vencedoras, indo, também, ao encontro das orientações

do Novo Programa, que valoriza a realização de jogos. O Currículo Nacional do Ensino Básico (CNEB), (Competências Específicas – Matemática), é também bastante explícito quanto ao valor pedagógico dos jogos, ao referir que:

“O jogo é um tipo de actividade que alia raciocínio, estratégia e reflexão com desafio e competição de uma forma lúdica muito rica. [...] Há jogos em todas as culturas e a matemática desenvolveu muito conhecimento a partir deles.”

(DEB, 2001, p. 68)

Outra forma de, ocasionalmente, “usar” a História da Matemática no ensino é através de projectos de investigação com base na História e, conforme consta em (DGIDC, 2007), “a organização em grupo é especialmente adequada no desenvolvimento de pequenos projectos que possibilitam uma divisão de tarefas pelos diversos alunos, [...], como num estudo sobre História da Matemática” (p. 10).

Na História encontram-se muitos temas interessantíssimos e poderá ser solicitado aos alunos que realizem trabalhos de pesquisa (dentro e fora da sala, dependendo do tempo disponível). É também uma forma de diversificar os métodos de trabalho, pois permite a realização de trabalhos de grupo, além de proporcionar outras formas de avaliação. No entanto, é importante que o professor esteja ciente que, geralmente, esta forma de integrar (neste caso, usar) a História, apesar de motivar os alunos, poderá não conduzir a uma efectiva aprendizagem dos conteúdos a serem leccionados.

Penso que o mesmo acontece com algumas das abordagens propostas por Tzanakis e Arcavi (2000), nomeadamente, as últimas seis. As sugestões números 4, 5 e 6 estão, implicitamente, relacionadas com a integração da História da Matemática através das fontes originais e dos problemas históricos.

Embora a sugestão número 5, referente aos pacotes históricos, ou melhor dizendo, sequências didácticas, esteja intimamente relacionada com as fontes originais e com os problemas históricos, há autores que defendem, especificamente, a integração da história através desta abordagem.

Para Bruckheimer e Arcavi (2000) ‘pacotes históricos’ (ou ‘acontecimentos’ históricos) são um conjunto de materiais estritamente focados num pequeno tópico, directamente relacionados com o currículo. Além disso, devem ser construídos, sempre que possível, a partir de pequenos fragmentos de fontes primárias e mesmo que sejam feitos para serem orientados pelo professor, baseiam-se, principalmente, na participação activa dos alunos.

Esta é a ideia principal subjacente ao artigo de Radford e Guérette (2000), “*Equações do Segundo Grau na sala de aula: Uma abordagem Babilónica*”, no qual é apresentada uma sequência didáctica com o propósito de conduzir os alunos a reinventarem a fórmula geral para resolver equações quadráticas.

Swetz (1994) revela que a sua estratégia preferida para integrar a História no ensino da Matemática, é através do uso de actividades baseadas na história. Essas actividades podem ser realizadas pela turma, como um todo; direccionadas para pequenos grupos, podendo haver várias actividades em simultâneo distribuídas pelos diversos grupos; ou como actividades individuais, realizadas por cada aluno, tanto na aula como em casa. Ora, estas actividades podem, obviamente, ser guiadas pelo professor, mas o objectivo é que os alunos tenham uma participação mais activa no processo de ensino e aprendizagem, através da realização de tarefas de aprendizagem. Para Swetz (1994), “os termos *tarefa de aprendizagem e actividade de aprendizagem* implicam que a aprendizagem terá lugar fazendo - uma tarefa deve ser realizada ou uma actividade conduzida” (p. 125).

Se analisarmos o NPMEB, constatamos que também recomenda a realização de actividades, interpretadas como um conjunto de tarefas a serem realizadas pelos alunos, cujas orientações metodológicas são análogas às sugeridas por Swetz, pois dão muita ênfase ao papel activo do aluno, cabendo ao professor o papel de guia.

Outra versão destes ‘pacotes históricos’ poderá ser sequências de problemas históricos relacionados com um determinado tema, como por exemplo, o Teorema de Pitágoras. O professor pode fazer uma ‘compilação’ de problemas que apareceram em diferentes épocas e culturas, relacionados com o conteúdo que está a leccionar. Deste modo, proporciona aos alunos a resolução de problemas e de exercícios, permitindo que estes treinem determinados problemas que deixam de o ser ao tornarem-se repetitivos. Geralmente, a rotina também é necessária para que os alunos consigam assimilar os conteúdos leccionados, e penso que esta é uma boa forma de proporcionar aos alunos a resolução de exercícios de modo a reforçar e clarificar o conceito que está a ser ensinado.

Este método sugerido por Swetz (2004b) foi também o “método” que utilizei para integrar a História da Matemática em algumas das minhas aulas, que serão analisadas no quinto capítulo.

Fried (2001) resume os vários modos de integrar a História afirmando que há duas estratégias básicas para o fazer. A primeira envolve, por exemplo, a introdução de episódios históricos, pequenas biografias, problemas isolados; ao que ele chama a

“estratégia da adição”, uma vez que esta não altera o currículo, apenas o aumenta. Refere ainda que esta é uma estratégia muito passiva.

A segunda estratégia muda, efectivamente, a forma como o material é apresentado, por exemplo, a explicação de uma técnica ou ideia usando a sua evolução histórica. Para Fried, esta é a “estratégia da acomodação”, uma vez que através dela é possível encaixar ou acomodar o currículo às circunstâncias históricas ou a um modelo histórico.

Siu e Tzanakis (2004) fazem uma comparação curiosa ao aludirem que “o uso da História da Matemática na sala de aula tem sido comparado a um aperitivo, um prato principal ou uma sobremesa, que corresponde, respectivamente, à motivação, ao conteúdo ou ao enriquecimento” (p. vi-vii). E acrescentam que, contrariamente ao que acontece na gastronomia, a História da Matemática não deve ser integrada no ensino de uma forma compartimentada pois, segundo os autores, o que deve ser feito é uma integração e não o uso da História no ensino da Matemática, como já foi mencionado anteriormente.

Ultimamente, têm surgido diferentes ideias e interpretações de como a História da Matemática deve ser integrada na sala de aula, que podem ser consideradas caminhos complementares para fazer esta integração.

Uma dessas interpretações é dada por Wilson e Chauvot (2000), no artigo, “*Who? How? What? A Strategy for Using History to Teach Mathematics*”. As autoras argumentam que uma maneira de incluir, com sucesso, a História no ensino da Matemática – sem que o professor sinta a necessidade de tornar-se um especialista em História – é usar uma estratégia em que os professores tentam que os seus alunos pensem e vejam como a História responde às três questões seguintes: ‘Quem constrói a Matemática?’; ‘Como se desenvolve a Matemática?’ e ‘O que é a Matemática?’. As autoras terminam o artigo desenvolvendo a ideia de a História dá-nos diferentes respostas a estas questões, dependendo da época, do lugar e do contexto que estamos a considerar.

Outra abordagem, ainda mais recente, é a proposta por Jankvist (2009a, 2009b, 2009c). Nos seus artigos, o autor tem reflectido sobre os argumentos a favor e contra a integração da História na Educação Matemática (os ‘*whys*’ na sua terminologia) e os esquemas metodológicos (‘*hows*’), introduzindo dois interessantes critérios de classificação. Para classificar o porquê, este investigador distingue entre os argumentos que se referem à História como uma ferramenta (*tool*) para auxiliar a aprendizagem e o ensino da Matemática e os que se referem à História como uma meta (*goal*). Quanto aos modos de utilizar a História estes são classificados em três categorias principais de

abordagens: abordagens de iluminação, módulos de abordagens e abordagens baseadas na história.

Este investigador revela a preocupação em obter dados empíricos sobre a eficácia da “utilização” da História no ensino e refere que o objectivo do seu artigo é:

“auxiliar na análise de usos concretos da História na aprendizagem e ensino da Matemática [...] e fornecer respostas para a 16ª objecção ao uso da História na lista de Siu (2007): ‘há qualquer evidência empírica de que os alunos aprendem melhor quando a história da matemática é utilizada na sala de aula?’”

(Jankvist, 2009b, p. 256)

Apesar da crescente importância dada à integração da História no ensino da Matemática e ao grande número de estudos dedicados a este tema, “esta não pode ser considerada como uma panaceia para todas as questões pedagógicas no ensino da Matemática” (Siu e Tzanakis, 2004, p. vii).

O sucesso da sua integração no ensino da Matemática depende, em grande parte, do modo como é feita. O processo de ensino e aprendizagem é uma actividade muito complexa, que envolve muitos agentes e é mediada por diversos factores; como tal, é muito difícil encontrar uma “fórmula” que seja eficaz em todos os casos onde é aplicada.

Creio que não existe um único método de ensino que possa resolver todos os problemas de aprendizagem da Matemática. Ao identificar os pontos fortes e as limitações das abordagens mencionadas, cada professor, tendo em conta o contexto em que está a trabalhar, é que terá que fazer as opções e adaptações que achar mais adequadas, de modo a que os diversos métodos se completem e complementem uns aos outros. Além disso, professores diferentes têm estilos e crenças diferentes, e as preferências sobre os tópicos históricos também diferem, daí a razão de ser da frase de Siu com que iniciei este subcapítulo: “Há tantas maneiras diferentes de integrar a História da Matemática na sala de aula como há professores” (Siu, 2000b, p. 242).

3.2.4. A História da Matemática como artefacto mediador no ensino da Matemática

Finalizo, dando a “minha” resposta à questão apresentada no título: “De que forma a História pode ser integrada no ensino da Matemática?”.

Não obstante as abordagens referidas anteriormente, o fundamental é que a História da Matemática tenha o papel de artefacto mediador no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, opinião também defendida por Furinghetti (2004) ao afirmar precisamente que vê “a História da Matemática como um artefacto que pode ser introduzido na sala de aula como um mediador no processo de ensino/aprendizagem” (p. 1).

A autora salienta que, no cenário internacional, há pouca evidência de actividades em que a História da Matemática *‘per se’* seja introduzida no ensino da Matemática, e refere que encontrou dois trabalhos onde a História da Matemática não foi integrada apenas para humanizar o ensino da Matemática, como geralmente acontece, mas considera estes trabalhos exemplos do uso da História da Matemática para promover a aquisição pelos alunos de competências e capacidades úteis, também para outras disciplinas escolares.

Após analisar estes trabalhos, Furinghetti (2004) conclui que se ensinar Matemática for concebido como uma oportunidade para participar num projecto educacional, no qual os alunos adquirem a capacidade de trabalhar em grupo, perseguindo os objectivos através da exploração dos meios de aprendizagem disponíveis, então a actividade em questão revela-se proveitosa.

Outros investigadores também atribuem à História da Matemática o papel de artefacto mediador, como é o caso de Demattè. Bagni, Furinghetti & Spagnolo (s/d) referem que Demattè “considera a História da Matemática como um artefacto para usar na sala de aula como um mediador do conhecimento matemático” (p. 9). É de salientar que Demattè é um acérrimo defensor de que o uso de fontes originais é a maneira mais eficiente de integrar a História no ensino da Matemática.

No entanto, convém salientar que há outros autores que também fazem referência ao termo “ferramenta”, mas não aprofundam este conceito nem fazem referência à Teoria da Actividade.

Dois desses autores, que também abordam este termo, são Wilson e Chauvot (2000) e argumentam que integrar a História no currículo de Matemática é uma forma inteligente de ensinar Matemática; pois, em vez de se tornar uma tarefa adicional, deve ser uma ferramenta para um ensino eficaz.

Da mesma forma, Jankvist (2009a) vê a História como uma ferramenta pedagógica que pode dar novas perspectivas e *insights* sobre materiais a utilizar e pode mesmo servir

como um guia para as dificuldades que os alunos podem encontrar à medida que aprendem um determinado conteúdo.

Recentemente, alguns investigadores têm analisado a integração da História no ensino da Matemática na perspectiva da Teoria da Actividade, dando ênfase ao conceito de *mediação semiótica* e considerando os artefactos como *artefactos de mediação semiótica* (conceitos já abordados no ponto 3.1.3). Da pesquisa bibliográfica que realizei, concluí que os investigadores que mais se debruçam sobre a integração destas duas abordagens (História da Matemática e Teoria da Actividade) no ensino da Matemática, são Bussi e Mariotti (apesar dos estudos de Mariotti estarem mais relacionados com a integração de ferramentas das TIC, como por exemplo, o *Cabri*).

Bussi e Mariotti (2008) apresentam dois exemplos de *ferramentas de mediação semiótica*, com o objectivo de ilustrar e clarificar esta noção teórica: o ábaco e o *Cabri*.

Relativamente ao ábaco, este é considerado um artefacto cultural¹⁰, pois a sua origem está intimamente ligada à história da contagem e teve um importante papel na História da Matemática. A integração do ábaco no ensino da Matemática tem grande valor didáctico pois proporciona a reconstrução histórica da evolução do seu uso na notação decimal posicional dos números.

As autoras concluem, referindo que “a escolha de um determinado artefacto é determinada segundo a análise do seu *potencial semiótico*. A História é uma fonte rica de sugestões e o exemplo do ábaco não é um caso isolado” (Bussi e Mariotti, 2008, p. 758).

Quando afirmam que o ábaco não é um caso isolado, referem-se, por exemplo, a outros três estudos em que Bussi participou. Um deles é apresentado em (Bussi et al, 1999). Neste estudo de investigação, o enquadramento teórico segue a tendência vygotskiana, com ênfase na construção social do conhecimento e na mediação semiótica através de artefactos culturais: a dimensão social consubstancia-se no recurso à 'discussão matemática', orquestrada pelo professor. Neste exemplo, os artefactos culturais são representados por “engrenagens” (por exemplo, rodas com ‘dentes’, correntes, parafusos), figuras e teorias (ou seja, a geometria de Euclides e a cinemática de Herão).

Na conclusão, as autoras referem que têm provas de que “dada uma sequência apropriada de tarefas e uma adequada orientação do professor, a maioria dos alunos de uma turma do 4º ano, pode produzir declarações gerais, abstractas e condicionais sobre movimentos no âmbito da experiência das ‘engrenagens’ e tomar parte na construção de

¹⁰ Para (Bussi e Boni, 2003, p. 15) são exemplos de artefactos culturais a régua, o ábaco e dispositivos para desenhar curvas, uma vez que têm acompanhado ou antecipado o desenvolvimento teórico da Matemática.

provas como justificações dentro de uma teoria” (Bussi et al, 1999, p. 83). As autoras acrescentam que estes dados foram confirmados noutras turmas do 4º ano e também com alunos do 6º ano. E afirmam que “as características especiais no âmbito da experiência das “engrenagens” (e a exploração eficaz guiada pelo professor) são responsáveis por este sucesso”.

Outro estudo é o exposto em (Bussi e Boni, 2003), onde é analisada a utilização de dois artefactos culturais: o compasso e também o ábaco.

Bussi e Boni (2003) relatam que a análise em questão foi inserida numa abordagem vygotskiana que lhes permitiu serem mais precisas sobre a qualidade das interações sociais (tarefas individuais e de grupo, discussões orquestrados pelo professor), realizadas sob a orientação do professor.

Outro estudo é o realizado por (Bussi, Mariotti e Ferri, 2005), no qual é utilizado o “vidro de Durer”, que é um instrumento usado para desenhar em perspectiva. As autoras mencionam que o quadro teórico seguido baseia-se nos trabalhos de Vygotsky e Bachtin, com elementos adicionais provenientes de estudiosos da Teoria da Actividade, como por exemplo, Engeström e Wartofsky.

Dando continuidade ao seu trabalho, Bussi (2009) apresenta dois exemplos onde artefactos físicos (a que Bussi chama artefactos históricos ou culturais) foram introduzidos no ensino da Matemática, para encorajar alunos do ensino básico e secundário a praticar a ‘demonstração’. No primeiro exemplo, são usadas duas rodas com ‘dentes’, ligadas entre si, onde o movimento rotativo de uma provoca o movimento em sentido contrário da outra; no outro exemplo, são usados dispositivos mecânicos na representação e construção de parábolas.

Bussi (2009) explica que o enquadramento teórico de fundo, apresentado nestes exemplos, “baseia-se na Teoria da Actividade (Vygotsky, 1978), que destaca o uso de signos num contexto social e faz parte de um quadro bem mais amplo do pensamento matemático onde os artefactos e os signos estão em primeiro plano” (p. 151).

Continua, dando novamente destaque à ideia de *mediação semiótica*, referindo que esta ideia foi:

“introduzida por Vygotsky (1978), a fim de capturar um tipo específico de actividade em sala de aula: os processos de longo prazo, começados e controlados pelo professor, que visam ajudar os alunos a aprenderem significados matemáticos e procedimentos através de tarefas adequadas que requerem o uso de determinados artefactos.”

Bussi (2009, p. 151)

Acrescenta que para descrever o processo desenvolvido nestes exemplos, diria que *o professor usa o artefacto como uma ferramenta de mediação semiótica*, ideia já defendida em (Bussi e Mariotti, 2008).

Em jeito de conclusão, a autora refere que estes dois exemplos mostram que os professores podem introduzir, com êxito, artefactos físicos nas salas de aula de Matemática, como instrumentos de mediação semiótica, e acrescenta, ainda, que os professores podem mediar o conteúdo matemático bem como o processo de demonstração matemática.

Bussi também esclarece que “usa a palavra artefacto de uma forma muito geral para abranger formas de linguagem orais e escritas; textos; ferramentas físicas usadas durante a história da aritmética (ábaco, calculadoras mecânicas, etc.) e da geometria (régua, compasso etc.); ferramentas de TIC; manipuláveis, etc.” (Bussi, 2009, p. 152).

Apesar dos artefactos usados nestes exemplos levarem a pensar que a integração da História no ensino da Matemática é feita através de “ferramentas” físicas, se tivermos em conta a anterior definição de artefacto dada por Bussi, podemos constatar que, para esta autora, esses artefactos também poderiam ser, por exemplo, documentos originais ou problemas históricos, uma vez que Bussi esclarece que a palavra artefacto pode englobar formas de linguagem orais e escritas e textos.

Bussi e Bazzini (2003), no artigo intitulado “*Research, practice and theory in didactics of Mathematics: towards dialogue between different fields*”, analisaram alguns casos onde o diálogo entre especialistas de diferentes domínios foi bem sucedido e outros onde esse diálogo falhou. Os resultados desses diálogos foram discutidos, tendo por base os estudos efectuados pelos autores, dentro do paradigma da pesquisa em Educação Matemática italiana.

As autoras referem dois exemplos de projectos, baseados no diálogo entre a teoria e a prática, que são considerados casos de sucesso. Um desses projectos consiste numa abordagem para a reflexão teórica em geometria e o segundo exemplo está relacionado com a resolução de problemas algébricos. Estes projectos começaram a partir do início dos anos noventa, desenvolvidos independentemente por equipas de investigadores de algumas universidades italianas, dos quais se destaca Bussi e Mariotti.

Bussi e Bazzini (2003) destacam que a introdução de fontes históricas na sala de aula de Matemática é uma prática comum, pelo menos num pequeno grupo de pesquisadores e profissionais em Educação Matemática, salientando que o que estes

projectos têm de original são o maior foco na dimensão teórica da Matemática (principalmente no desenvolvimento de teoremas e provas) e a análise de tais experiências num quadro teórico, baseado nas ideias de Vygotsky, onde cada um dos elementos é colocado em relação com os outros.

As autoras relatam que os resultados das experiências de ensino desenvolvidas nestes projectos foram surpreendentes, se comparados com a alegação geral sobre a dificuldade (ou impossibilidade) de lidar com a dimensão teórica da Matemática, pois a maioria dos alunos conseguiu produzir conjecturas e construir as provas.

Naturalmente que as conclusões tiradas nestes estudos são ainda muito incipientes, sendo necessários mais estudos neste âmbito para se concluir sobre a verdadeira eficácia da integração da História no ensino da Matemática, quando aquela assume o papel de artefacto mediador no processo de ensino e aprendizagem desta disciplina.

Espero que este trabalho de investigação dê algum contributo neste âmbito. Para tal, no quinto capítulo, farei a análise dos dados obtidos em algumas das minhas aulas de Matemática, onde foi feita a integração da História através de fichas de trabalho elaboradas com recurso à História (com sequências de problemas históricos). Estes problemas desempenharam o papel de artefactos mediadores, e foram resolvidos pelos alunos sob a minha orientação. Estes dados serão analisados à luz da Teoria da Actividade, com o objectivo de investigar a relevância dos problemas históricos como artefactos mediadores na aprendizagem da Matemática.

3.2.5. Classificação das fontes

Para integrar a História no ensino da Matemática, o professor tem, necessariamente, que recorrer a fontes. Tzanakis e Arcavi (2000, p. 212) referem que essas fontes podem ser classificadas em três tipos:

- Fontes primárias (excertos dos documentos matemáticos originais);
- Fontes secundárias (livros com histórias narrativas, interpretativas, reconstruções), mais concretamente, os típicos livros de História da Matemática;
- Fontes didácticas (material adaptado para usar na sala de aula, elaborado com base nas fontes primárias e secundárias).

Infelizmente, as fontes didácticas são, dos três tipos, as que existem em menor quantidade e as que fazem mais falta aos professores.

O seguinte diagrama ilustra os três tipos de fontes e as possíveis relações entre elas.

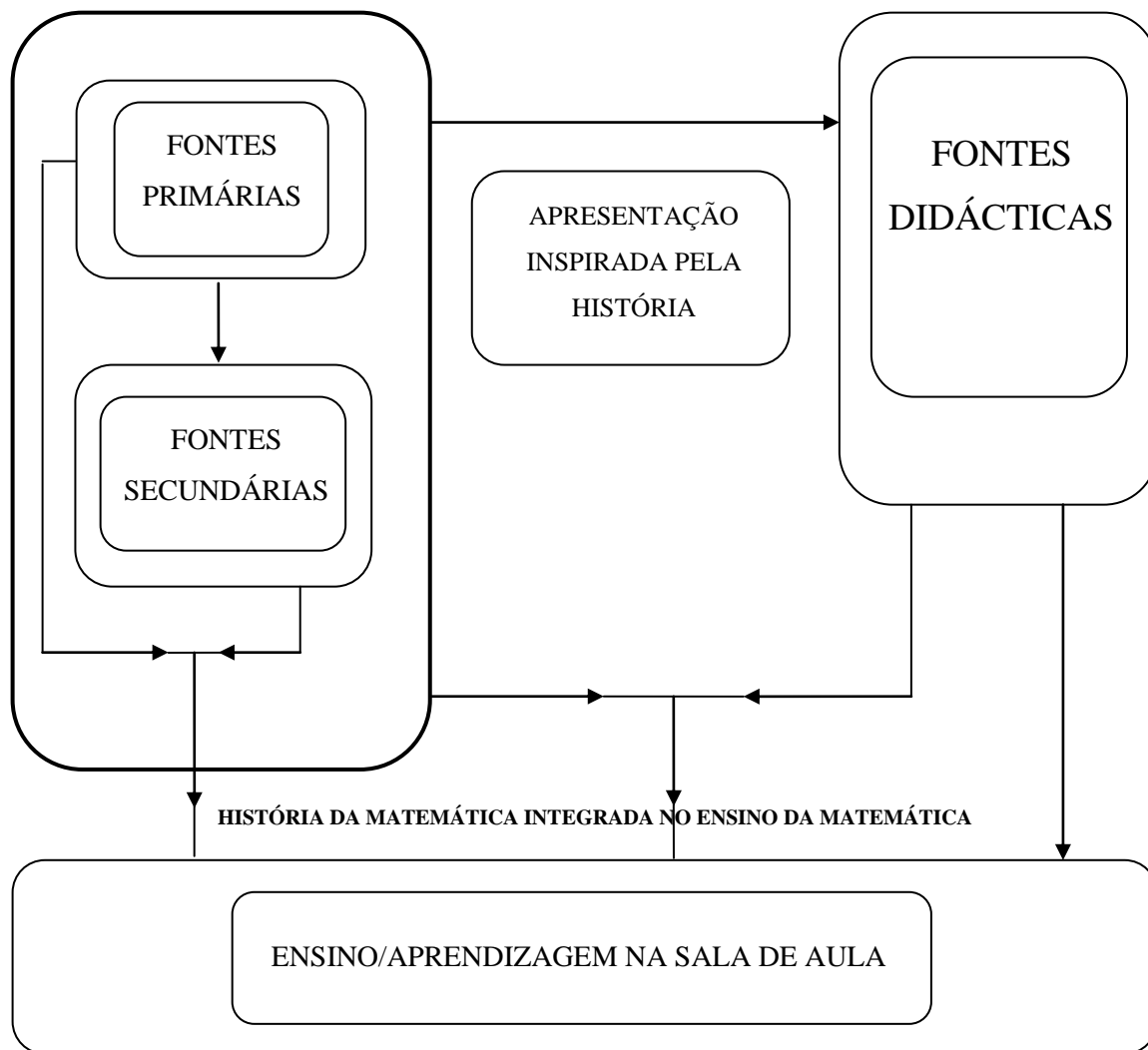


Fig. 9 – Fontes a utilizar quando a História da Matemática é integrada no ensino da Matemática
(Tzanakis e Arcavi, 2000, p. 213)

Vejamos alguns exemplos dessas fontes¹¹:

Fontes primárias

A quantidade de fontes primárias é vasta e diversificada, no entanto, abordarei algumas fontes primárias cujo conteúdo possa ser adaptado e, posteriormente, leccionado aos alunos do 3º ciclo, uma vez que este trabalho de investigação incidiu sobre este nível de ensino.

¹¹ Uma análise mais detalhada destas fontes encontra-se no anexo A.

Papiro de Rhind

O documento que melhor nos dá a conhecer a Matemática egípcia é o papiro de Rhind, escrito pelo escriba Ahmes, por volta de 1650 a. C. Uma análise detalhada de muitos problemas deste papiro pode ser consultada no anexo A.1.

Placas Babilónicas

O nosso conhecimento sobre a Matemática da antiga Mesopotâmia (Babilónia) tem como fonte diversas placas de argila gravadas em escrita cuneiforme. Dada a sua extensão, não existe uma única placa que contenha toda a Matemática da Babilónia, como acontece com o papiro de Rhind que representa quase toda a Matemática do Egito. A maior parte das placas que chegaram aos nossos dias datam de um período entre 2000 a 1600 a. C.

Uma análise algo pormenorizada da Matemática da Babilónia encontra-se no anexo A.2, onde são apresentados e analisados alguns dos problemas das diversas placas babilónicas.

Os Elementos de Euclides

Os Elementos é uma das obras mais importantes da cultura ocidental e foi escrita, por volta 300 a. C., por Euclides. É uma compilação e sistematização do conhecimento matemático da época clássica e é a evidência mais antiga de um conjunto sistemático de definições, axiomas, postulados e proposições, muitos dos quais são apresentados no anexo A.3.

Nove Capítulos da Arte Matemática

Esta obra é o maior legado da Matemática chinesa, tendo sido utilizada como manual de ensino, não apenas na China, mas também nos países e regiões vizinhas.

Foram feitos vários comentários a este livro, sendo um dos mais importantes o comentário feito por Liu Hui, em 263, no qual Liu forneceu a justificação matemática para as regras e soluções dos problemas apresentados no *Nove Capítulos*, alguns dos quais são analisados no anexo A.4.

A Aritmética de Diofanto

A *Aritmética* foi escrita por Diofanto de Alexandria, pensa-se que no terceiro século da nossa era. Conjectura-se que o número total de livros desta obra era treze, mas

apenas seis desses livros chegaram até nós. A *Aritmética* é um tratamento analítico da Teoria dos Números, em que a maioria dos seus problemas conduz a equações do primeiro e do segundo grau e também são abordados problemas que conduzem a equações do 2º grau indeterminadas. Notória é a falta de métodos gerais e a aplicação repetitiva de procedimentos engenhosos criados para as necessidades de cada um dos problemas em particular.

No anexo A.3, encontram-se alguns exemplos de problemas desta obra.

Antologia Grega

Esta Antologia é uma das nossas melhores fontes de problemas de álgebra da Grécia antiga e é composta por 46 enigmas aritméticos, supostamente compilados por Metrodorus, cerca de 500 d. C. Os problemas, aparentemente destinados a recreação, são do género de alguns colocados por Platão e muito semelhantes a alguns problemas do papiro de Rhind.

Existe um epigrama nesta Antologia que é famoso por dar a conhecer alguns detalhes da vida de Diofanto (ver anexo A.3) e ao qual alguns manuais escolares fazem referência.

Problemas para estimular os jovens de Alcuino de York

Propositions ad acuendos juvenes (Problemas para Estimular os Jovens) foi escrito por Alcuino de York, no séc. VIII. É um conjunto notável de problemas recreativos, do género da *Antologia Grega*.

Esta colecção tem 53 problemas, que se tornaram clássicos, e muitos escritores medievais utilizaram este tipo de problemas nas suas obras, como por exemplo, ben Ezra (c. 1140), Fibonacci (1202), Jordanus Nemorarius (c. 1225), entre outros.

Alguns destes problemas são apresentados no anexo A.7.

Lilavati de Baskara

O *Lilavati* foi escrito, em 1150, por *Baskara*. Neste livro, a aritmética é apresentada como uma agradável actividade lúdica e os problemas são formulados de uma forma muito peculiar.

É um livro útil, que poderá ser utilizado actualmente nas aulas de Matemática, pois a maioria dos problemas estão relacionados com alguns conteúdos leccionados no ensino

Básico e Secundário. Além disso, o enunciado “espirituoso” da maioria dos seus problemas pode motivar os alunos para a sua resolução, como pode ser constatado no anexo A.5.

O *Liber Abaci* de Fibonacci

Em 1202, Fibonacci escreveu a sua obra mais célebre, o *Liber Abaci* (o Livro do Ábaco ou do Cálculo). Este livro contém não apenas as regras para o cálculo com os numerais hindu-árabes, mas também diversos problemas que incluem questões muito úteis aos mercadores, como o cálculo de juros, taxas de câmbio e conversão de pesos e medidas.

Também são propostos vários problemas com carácter recreativo, muitos deles semelhantes a problemas que já tinham aparecido em obras anteriores, como por exemplo, no papiro de Rhind. Foi no capítulo XII deste livro que Fibonacci propôs e resolveu o famoso problema dos coelhos, que originou a conhecida sucessão de Fibonacci (ver anexo A.7).

Fontes secundárias

Consideremos agora, de uma forma geral, alguns livros de História da Matemática, que constituem fontes secundárias, pois analisam as fontes primárias e podem ser utilizados pelos professores para elaborarem material didáctico a ser utilizado na sala de aula.

O primeiro livro que ostentou um título de História da Matemática foi escrito por **Johann Christoph Heilbronner**, em 1742. A sua obra, *Historia Matheseos Universae*, continha uma valiosa relação de manuscritos e uma lista dos últimos livros impressos.

Mas, para Loria (1946), a primeira “verdadeira e própria História da Matemática” é, sem dúvida, a *Histoire des Mathématiques* de **Jean Étienne Montucla**, editada pela primeira vez em 1758. Smith (1923, Vol. II) já tinha defendido esta ideia ao referir que “sendo Montucla um erudito, escreveu em estilo abrangente, de modo que quase não foi superado pelas Histórias posteriores” (p. 540).

Também para Struik (1987), este é “o livro mais antigo de História da Matemática (além de Proclo) que é mais do que um catálogo” (p. 4).

Num novo contexto, a partir do século XIX, a História da Matemática passa a ter uma abordagem diferente, tendo em vista a sua utilização didáctica. Um exemplo desta

nova abordagem foi dado pelo Padre **Pietro Franchini**, matemático italiano, que se dedicava, entre outras coisas, ao ensino da Matemática. A sua obra **Saggio sulla Storia delle matematiche corredato di scelte notizie biografiche ad uso della gioventù**, de 1821, estabelece uma concepção vinculadora da História da Matemática com o ensino da Matemática. Posteriormente, esta relação entre História da Matemática e ensino da Matemática será retomada por outros autores.

Entre 1880 e 1908, foram publicados os quatro volumes da monumental obra de **Moritz Benedict Cantor**, intitulada *Vorlesunger über Geschichte der Mathematik*. Cantor segue o modelo clássico de Montucla, utilizando um critério rigorosamente cronológico na elaboração desta obra. Segundo Struik (1987), esta obra “cobre a História da Matemática até 1799; é antiquada em alguns aspectos (especialmente na matemática Oriental), mas continua a ser um bom livro para uma primeira orientação” (p. 3).

Em 1888 é editado, pela primeira vez, *A Short Account of the History of Mathematics*, de **Rouse Ball**. Este é um livro de fácil leitura, mas o seu conteúdo não vai além de meados do século XIX.

Em 1894, **Florian Cajori**, professor de História da Matemática da Universidade da Califórnia, publicou a primeira edição de *A History of Mathematics*. Passados dois anos, em 1896, publicou um livro direccionado para o ensino, com o sugestivo título: *A History of Elementary Mathematics, with Hints on Methods of Teaching*, onde podemos ler no seu Prefácio:

“Com a esperança de ser de alguma ajuda para os professores, preparei este livro e complementei a minha narrativa com ocasionais sugestões sobre os métodos de ensino. Sem dúvida, o leitor imaginativo elaborará muitas lições úteis a partir do estudo da História da Matemática que não estão directamente referidas no texto.”

(Cajori, 1986, p. v)

David Eugene Smith publicou, em 1923, a sua *History of Mathematics* em dois volumes. No volume I, é apresentada uma pesquisa sobre o desenvolvimento da Matemática por períodos cronológicos; no volume II, é feita uma discussão sobre a evolução de certos tópicos importantes. (Smith, 1958)

O autor esclarece que um texto meramente cronológico não é didacticamente aconselhável, sendo necessárias outras abordagens diferentes, optando pela abordagem

“Por Assunto”, o que marca uma nova fase na produção de livros sobre História da Matemática.

Smith toma para si a tarefa de escrever um livro dedicado ao professor de Matemática, o que está explícito no Prefácio da 2ª edição deste livro, onde refere que o escreveu com o propósito de:

“fornecer a professores e alunos um livro utilizável sobre a História da Matemática [...]. Embora vários livros sobre este tema estejam disponíveis, o autor acha que um livro escrito de um ponto de vista um pouco diferente será útil para aqueles que estão começando a estudar este assunto.”

(Smith, 1958, p. iii)

Smith também escreveu, em 1929, a inigualável antologia de trabalhos matemáticos, *A Source Book in Mathematics*, na qual apresenta a evolução da Matemática através do recurso aos escritos originais de autores de diversos períodos.

Actualmente, há muitos tipos de livros sobre História da Matemática (cronologia, por assunto, biografias etc), e cada tipo tem a sua utilização didáctica específica. Mas há certo consenso de que, para uso em sala de aula, no ensino básico principalmente, os livros por assunto são mais adequados; e essa é a linha iniciada por Smith.

Para contrariar a dimensão dos livros de História da Matemática existentes, **Struik** publicou, em 1948, um livro sintético intitulado *A Concise History of Mathematics*, onde podemos ler, na Introdução da 4ª edição, que:

“[...] é possível condensar esta história num livro com duzentas a trezentas páginas submetendo-nos a uma disciplina rigorosa, esboçando o desenrolar de algumas ideias principais e minimizando a referência a outros desenvolvimentos.”

(Struik, 1987, p.1)

Este é um dos poucos livros de História da Matemática que está traduzido em Português, com o título *História Concisa das Matemáticas*.

Um “excelente livro para usar na sala de aula”, segundo Struik (1987, p. 2), é *An Introduction to the History of Mathematics*, de **Howard Eves**, publicado em 1953. Esta obra tornou-se uma referência obrigatória no nosso tempo, no que se refere à História da Matemática, pois este tipo de livro:

“difere em muito das muitas histórias da matemática existentes por não se tratar primordialmente de um trabalho de prateleira para consulta, mas sim de uma tentativa de introduzir a História da Matemática aos alunos [futuros professores de Matemática]. Assim, há muitos expedientes pedagógicos visando ajudar, motivar e envolver o aluno.”

(Eves, 2002, p. 17 apud Gomes, 2005, p. 56)

Uma das formas que Eves encontrou para “motivar e envolver” o aluno foi através da proposta de muitos problemas, no final de cada capítulo, pois, segundo ele,

“uma inovação importante no tratamento é a inclusão dos problemas. [...] Considera-se que ao discutir alguns desses problemas na aula, e trabalhando outros como trabalhos de casa, o curso tornar-se-á mais concreto e significativo para o aluno, e a compreensão de uma série de conceitos historicamente importantes ficará consolidada.”

(Eves, 1969, p. 2)

Carl Benjamin Boyer publica, em 1968, *A History of Mathematics*. No Prefácio à primeira edição, faz alguns comentários sobre os livros de História da Matemática já publicados. Refere que os dois volumes de Smith tinham falta de problemas diversificados, salienta também que a *History of Mathematics*, de Cajori, continuava a ser um trabalho de referência muito útil, mas não estava adaptado para o uso na sala de aula. Destaca ainda que o livro mais bem sucedido e apropriado era *An Introduction to the History of Mathematics*, de Howard Eves, afirmando que o tinha usado com considerável satisfação desde que apareceu em 1953.

Em 2005, na 6ª edição do seu livro *The History of Mathematics. An Introduction*, editado pela primeira vez em 1985, **Burton** refere que:

“apesar da admirável sabedoria e muitas vezes clara apresentação destes trabalhos [obras mais actuais], estes não estão especialmente bem adaptados para a sala de aula. (Talvez a mais notável excepção seja o conhecido An Introduction to the History of Mathematics, de Howard Eves).”

(Burton, 2005, p. x)

Mais recentemente, surgiu o livro publicado pela primeira vez, em 1993, por **Victor Katz**, intitulado *A History of Mathematics: An Introduction*.

Este livro fornece uma visão do mundo da Matemática, expondo de uma forma harmoniosa a Matemática das civilizações antigas, o início da Matemática moderna e a História da Matemática mais recente. Os problemas são tirados das suas fontes originais, auxiliando os alunos a compreenderem como os matemáticos nas diversas épocas e lugares resolveram problemas matemáticos.

Felizmente, este livro foi editado em português, em 2010, com o título *História da Matemática* e será, certamente, uma mais-valia para o ensino da História da Matemática em Portugal. Esta primeira edição na nossa língua foi revista pelo Professor Jorge Nuno Silva.

Na verdade, em Língua Portuguesa escasseiam as obras relacionadas com a História da Matemática, sendo de destacar o livro de **Francisco Gomes Teixeira**, publicado em 1934, com o título *História das Matemáticas em Portugal*¹².

Como refere o título, não se trata de um livro sobre a História da Matemática de um modo geral, mas apenas a respeitante a Portugal. Numa nota de rodapé da página 8, podemos ler:

“Para o estudo desenvolvido da história das Matemáticas entre os Gregos, Hindus e Árabes, não é felizmente necessário em Portugal recorrer-se a livros estrangeiros, porque temos para isso em língua portuguesa um manual excelente, intitulado História das Matemáticas na Antiguidade, de que é autor o Sr. Fernando de Vasconcellos.”

(Teixeira, 1934, p. 8 apud Oliveira, 2009, p. v)

Em 2009, foi revista e coordenada pelo Professor Augusto Franco de Oliveira, a 2ª edição do livro referido anteriormente, *História das Matemáticas na Antiguidade*, editado pela primeira vez, em 1925, por Fernando de Almeida e Vasconcellos.

Um bom livro, escrito em Português, para quem está a iniciar estudos nesta área é *História da Matemática*, de **Maria Fernanda Estrada** e outros autores, publicado em 2000. Esta obra, composta por doze textos é, nas palavras dos seus autores, “uma introdução básica à História da Matemática, destinada a complementar a formação de futuros professores de Matemática, ou de outros leitores que tenham gosto e interesse pelo assunto” (Estrada et al, 2000, p. 18).

¹²Uma versão digital desta obra está disponível no seguinte endereço:
<http://www.mat.uc.pt/~jaimecs/livrogt/livrogt.html>.

Infelizmente, não há muita literatura escrita em português (salvo algumas traduções feitas principalmente pelos brasileiros), e isso é notório num dos capítulos do “*History in Mathematics education. The ICMI Study*”, destinado a indicar “*Bibliography for further work in the area*”, no qual é feita referência à bibliografia da China, Dinamarca, Holanda, Inglaterra, França, Alemanha, Grécia e Itália mas não é feita nenhuma referência à bibliografia de Portugal.

Fontes didácticas

Embora, actualmente, não faltem fontes secundárias, o mesmo não se pode ainda afirmar das fontes didácticas. Estas fontes são muito importantes para que a integração da História da Matemática no ensino seja bem sucedida, mas o processo de transformar as fontes originais (e secundárias também) em fontes didácticas é exigente e demorado e, por isso, os professores continuam a alegar que carecem de recursos.

E, apesar de já começar a haver alguma literatura disponível neste sentido, os professores têm dificuldade em encontrar actividades baseadas na História da Matemática que sirvam na perfeição para as suas aulas, tendo sempre que fazer as adaptações adequadas para as necessidades, interesses e dificuldades dos seus alunos.

Indico a seguir alguns livros que, na minha opinião, estão muito bem adaptados para fins didácticos, não sendo, por isso, necessário o professor fazer muitas adaptações para poder utilizar as actividades propostas nas suas aulas.

- ***Learning Activities from the History of Mathematics***, de Frank Swetz, editado em 1994.

Este livro contém duas secções principais: biografias de vinte e três matemáticos importantes abrangendo muitos séculos e culturas, acompanhadas de questões; e tarefas de aprendizagem baseadas na História da Matemática que fornecem vinte e um tratamentos aprofundados de uma variedade de problemas históricos, adequados para alunos do ensino Básico e Secundário. Além disso, num dos capítulos, intitulado “*Problems, problems, problems*”, Swetz apresenta uma selecção de 131 problemas históricos, de várias épocas e culturas. É um livro de grande utilidade para qualquer professor interessado em integrar a História nas suas aulas.

- *Historical modules for the teaching and learning of mathematics*, disponível em CD, editado em 2004 por V. Katz e K. Michalowicz.

O objectivo dos autores ao desenvolver este CD foi demonstrar aos professores do ensino Secundário como usar o material da História da Matemática no ensino de inúmeros tópicos do currículo. Desenvolvido por professores deste ciclo de ensino que trabalharam em colaboração com investigadores, o CD contém onze módulos que lidam com ideias históricas que podem ser utilizadas directamente na sala de aula.

Os módulos são: Trigonometria, Exponenciais e logaritmos; Funções; Demonstrações geométricas; Comprimentos, áreas e volumes; Números negativos; Combinatória; Estatística; Equações lineares; Polinómios; e um módulo especial relacionado com o trabalho de Arquimedes.

Cada módulo contém muitas actividades planeadas para serem usadas na aula com o mínimo de preparação adicional dos professores. Uma determinada actividade contém instruções para o professor, bem como páginas para distribuir aos alunos.

As páginas do aluno podem discutir os antecedentes históricos do tópico em questão e conduzir os alunos através do desenvolvimento histórico, proporcionam exercícios e actividades de enriquecimento adicionais e fornecem imagens e esboços biográficos de matemáticos. Também fornecem referências para estudos adicionais, incluindo materiais impressos e electrónicos.

- *História da Matemática em Atividades Didáticas*, de Brito, A. J. et al, editado, pela primeira vez, em 2005.

Segundo os autores, o objectivo deste livro é ajudar no trabalho de sala de aula do professor de Matemática, do ensino Básico e Secundário. O livro contém três capítulos com actividades de ensino que foram elaboradas e testadas em sala de aula. Estas actividades, elaboradas a partir da História da Matemática, pretendem ajudar os alunos a construir e perceber conceitos que historicamente são considerados entraves no ensino da Matemática. Por isso, os autores debruçam-se sobre três tópicos distintos da Matemática: Geometria, Trigonometria e Números Irracionais, todos de fundamental importância para o ensino e aprendizagem desta disciplina, devido ao facto de tais tópicos estarem entre aqueles nos quais professores e alunos têm maior dificuldade de desenvolver o processo de ensino e aprendizagem com sucesso.

- ***Fare mathematica con i documenti storici.*** [*Doing mathematics with historical documents*], editado em 2006, por Adriano Demattè com a colaboração de Fulvia Furinghetti.

Este livro (Demattè, 2006) é uma antologia de documentos dirigida aos alunos do ensino Básico e Secundário (12-18 anos). É o resultado de dois anos de trabalho de cinco professores, que consideraram, no seu potencial educativo, a História da Matemática e a utilização das fontes originais na sala de aula.

O título do livro sugere que se faça Matemática com documentos históricos, e não apenas “leituras”, o que pode ser feito através da interpretação de textos e da resolução de problemas e exercícios.

Segundo Demattè, a História da Matemática oferece muitas oportunidades para se fazer matemática e melhorar a capacidade dos alunos para resolver problemas. Mas, infelizmente, os professores raramente têm os recursos didácticos para utilizar este tipo de actividades.

Na tentativa de remediar esta situação, foi desenvolvido um esforço colectivo de professores e investigadores, com a coordenação de Demattè, com o objectivo de produzir um conjunto de actividades baseadas na História, que pudessem ser incluídas diariamente na sala de aula. A integração destas actividades no currículo pretende promover formas alternativas de ensino, baseado no trabalho com excertos históricos e exercícios escolhidos para reforçar (ou às vezes até introduzir) competências matemáticas. O resultado desse trabalho está exposto neste livro, que se revela uma mais-valia para os professores interessados em integrar a História nas suas aulas.

Também existe uma versão deste livro para os professores, onde as actividades são acompanhadas com uma espécie de guião para o professor.

- ***História da matemática na sala de aula,*** de Helder Pinto, editado em 2009.

Este livro apresenta uma variedade de tópicos da História da Matemática e a sua aplicação directa no contexto escolar. O livro contém fichas de trabalho com perguntas acessíveis e adequadas para as capacidades e o conhecimento dos alunos do ensino Secundário. Este livro pretende ser uma ferramenta de trabalho útil para professores do ensino Secundário, dando-lhes exemplos concretos e práticos de como aplicar a História da Matemática em sala de aula, e não só, pois existem também algumas actividades para

serem realizadas fora da sala de aula, como por exemplo, determinar a altura dos edifícios pelo método usado no antigo Egipto.

Este livro é muito “bem-vindo” pois vem colmatar algumas das lacunas existentes em Portugal relativamente a este tema.

Artigos

Também os jornais e revistas para professores, como *The Mathematics Teacher* do National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) e a Revista Educação e Matemática da APM, entre muitos outros, disponibilizam aos professores exemplos e sugestões de actividades e investigações, inspiradas na História, para usar na sala de aula. Além disso, há capítulos de livros que também contribuem neste sentido. Dos muitos artigos e capítulos disponíveis, apenas a título de exemplo, destaco os seguintes:

- Swetz (1995b), no capítulo “Using Problems from the History of Mathematics in Classroom Instruction”, do livro *Learn from the Masters*, apresenta uma sequência de problemas históricos que se resolvem usando o Teorema de Pitágoras e que apareceram em diferentes épocas e culturas. Também apresenta sequências de problemas que conduzem a sistemas indeterminados. Além disso, coloca um conjunto de problemas para o leitor resolver.
- Swetz (2000), no capítulo “Problem solving from the history of Mathematics”, do livro *Using History to Teach Mathematics: an International Perspective*, apresenta problemas semelhantes aos apresentados no capítulo acima referido, e acrescenta alguns problemas com carácter recreativo, sendo alguns deles do livro de Alcuino.
- Ernest (1998), no seu artigo “The History of Mathematics in the Classroom”, apresenta várias actividades que lidam com diferentes áreas da Matemática, como fracções, o Triângulo de Pascal, música e quadrados mágicos.

WEB

Existe uma grande diversidade de sites onde se pode encontrar actividades desenvolvidas a partir da História da Matemática, com o objectivo de serem utilizadas no ensino da Matemática. Refiro apenas duas, tendo como critério de selecção a quantidade de problemas históricos disponibilizados nos mesmos.

- Uma revista on-line da Associação Americana de Matemática, editada por Victor Katz e Frank Swetz, intitulada *Convergence*, disponível em:

<http://convergence.mathdl.org>

Neste site estão disponíveis, além de muitas coisas interessantes sobre História da Matemática, um conjunto de problemas históricos, num item denominado “Problemas de outros tempos”, dinamizado por Frank Swetz (Swetz, 2004a).

- Em língua portuguesa temos um site semelhante, intitulado “*História da Matemática. História dos Problemas*”. É uma excelente e completíssima fonte de problemas históricos, elaborado e mantido por Maria João Lagarto, onde é possível encontrar a tradução de obras, muitas vezes completas, com inúmeros problemas históricos, de várias épocas e diversos autores. Está disponível em:

<http://www.malhatlantica.pt/mathis/>

3.2.6. O papel da História no ensino da Matemática em Portugal

Penso que não posso dizer que em Portugal não tem sido desenvolvido trabalho relacionado com a integração da História no ensino da Matemática, o que posso afirmar é que se existe documentação neste âmbito, é de muito difícil acesso. Este facto já foi constatado, há quase dez anos, em (Antónia, 2001) e, infelizmente, o problema persiste. A autora começa o seu artigo referindo que “apesar das grandes dificuldades no acesso a algumas informações sobre a História da Matemática e a sua integração no ensino da Matemática em Portugal [...]” (p.1) e conclui, reiterando que, “tivemos grandes dificuldades e limitações em termos de acesso a documentos relacionados com as realidades de escola Portuguesa e reformas em curso na Educação Matemática” (p. 40).

Apesar da escassez de artigos e publicações (que sejam do meu conhecimento) sobre a integração da História no ensino da Matemática existem, em Portugal, algumas organizações que têm desempenhado um papel fundamental na divulgação e na formação de professores no que concerne a esta temática. Um exemplo é o Grupo de Trabalho sobre História e ensino da Matemática (GTHEM), que está associado à Associação dos Professores de Matemática (APM), e que faculta a todos os membros desta associação informações e documentação sobre a História da Matemática e a sua integração na sala de aula. Essa documentação inclui biografias de matemáticos, súmulas históricas de temas específicos da Matemática ou de certos períodos da História da Matemática, e ainda algumas actividades para a sala de aula.

A Sociedade Portuguesa de Matemática (SPM) também tem contribuído para esta divulgação, organizando anualmente (salvo raras exceções) o Seminário Nacional de História da Matemática (SNHM). Este Seminário foi fundado em 1988 e, desde meados dos anos 90, passou a constituir uma secção da Sociedade Portuguesa de Matemática. Para além dos Encontros Nacionais, desde 1993 têm-se realizado Encontros Luso-Brasileiros de História da Matemática, organizados em colaboração com a Sociedade Brasileira de História da Matemática (SBHMat), com uma periodicidade de três a quatro anos, tendo-se realizado o último em 2007.

Uma das publicações da Associação dos Professores de Matemática é a revista *Educação Matemática*, onde podemos encontrar algumas sugestões interessantes de tarefas para a sala de aula que seguem uma abordagem histórica. Um exemplo que me chamou especial atenção pelo facto de dizer respeito à minha terra natal, a Madeira, é o artigo “*Materiais para a aula de Matemática. Contas antigas na Ilha da Madeira*”, onde é sugerida uma actividade para uma aula, especialmente do 1º ou 2º ciclo, em que os alunos estudam representações numéricas e técnicas computacionais utilizadas pelos antigos pescadores e merceeiros da ilha da Madeira. De facto, isto é uma interessante actividade pedagógica baseada no património matemático local (Relva, 1993 apud Antónia, 2001).

A preocupação de integrar a História no ensino da Matemática não é nova em Portugal, pois há já muitas décadas, ou mesmo séculos, que essa ideia se verifica como podemos constatar nos Estatutos da Universidade de Coimbra de 1772, escritos por José Monteiro da Rocha, ao sugerir, a propósito do ensino da Álgebra, que:

“Para facilitar melhor a entrada nela, [...] principiará o Professor [...] dando uma ideia circunstanciada do seu objecto, e dos meios, que aplica para conseguir o fim, que se propõe. Mostrando a sua origem, e progressos, e fazendo um resumo da história da mesma Álgebra pelas épocas mais notáveis dela.”

(Silva, 2010, s/p)

Costa (2007) (no Resumo do artigo apresentado no ESU5) deu a conhecer uma análise feita aos métodos de ensino e aos livros de J. Vicente Gonçalves (1896-1985), notável matemático e professor português, da primeira metade do século XX. Dessa análise, a investigadora concluiu que Vicente Gonçalves introduziu uma dimensão histórica no processo de ensino e aprendizagem da Matemática nos seus cursos; sendo de salientar que isto ocorreu antes da “História da Matemática” tornar-se uma disciplina formal nos currículos portugueses, o que só aconteceu a partir de 1972. Este matemático

escreveu vários livros didáticos de Matemática para o ensino secundário e universitário, que têm sido (e alguns ainda são) usados por muitos alunos. A autora constatou que a dimensão histórica era introduzida nos seus cursos de diversas maneiras, nomeadamente:

- através de breves notas históricas: sobre matemáticos, sobre a introdução das notações e seus autores, sobre a criação e a evolução dos símbolos matemáticos, etc;
- através da introdução de novos conceitos;
- como ferramenta pedagógica;
- como um conteúdo: referindo-se a alguns factos históricos;
- como recurso de exercícios/problemas (baseados ou adaptados de antigos textos matemáticos).

Também Caraça (1951), fez alusão à importância da História da Matemática no ensino, como já foi anteriormente referido.

Silva (1994, 1997) analisou a presença da História da Matemática nos Novos Programas de Matemática em Portugal, relativamente aos programas que entraram em vigor para o ensino Básico e Secundário em 1991 e 1997, respectivamente. De um modo análogo, também farei uma breve análise às orientações sobre a integração da História no ensino da Matemática, emanadas pelo Novo Programa de Matemática para o Ensino Básico (NPMEB).

Num outro artigo, Silva (1995) refere que “a História da Matemática aparece desde há alguns anos nos textos oficiais portugueses que tratam dos programas do Ensino Básico e Secundário. Contudo, aparece de uma forma bastante desconexa, [...]” (s/p). Acrescenta que pouco ou nada tem sido feito para que a História da Matemática seja levada à prática e aponta que “a bibliografia que deveria suportar actividades de História da Matemática é extremamente reduzida e as instituições responsáveis pouco fizeram para alterar esta situação” (idem).

Relativamente às orientações do NPMEB, é sugerido que os alunos devem contactar com aspectos da História da Matemática e pode ler-se que:

“Na História da Matemática devem salientar-se o contributo de diversos povos e civilizações para o desenvolvimento desta ciência, a sua relação com os grandes problemas científicos e técnicos de cada época, o seu contributo para o progresso da sociedade, e a sua própria evolução em termos de notações, representações e conceitos, [...]”

(DGIDC, 2007, p. 10)

Relativamente a um tema em particular, são muito escassas as alusões, sendo de destacar a seguinte:

“O caso de π , pela sua relevância matemática e histórica, merece igualmente uma referência especial. [...]. O problema histórico dos incomensuráveis entre os pitagóricos permite perspectivar os números irracionais como grandezas incomensuráveis.”

(DGIDC, 2007, p. 49)

Quando comparadas às orientações do Programa anterior (o de 1991) e mesmo às recomendações do Currículo Nacional para o Ensino Básico, de 2001, é notório que as referências à História da Matemática sofreram um decréscimo, o que vem contrariar a crescente corrente de pesquisas e artigos publicados internacionalmente que apelam à integração da História no ensino da Matemática.

Relativamente ao Novo Programa de Matemática do Ensino Básico, a Associação de Professores de Matemática (APM), emitiu um parecer, onde se pode ler, no que respeita à História da Matemática:

“Sendo um tema de reconhecida importância, não se percebe a razão da quase total ausência de referências concretas em todos os ciclos. Era importante conhecer os argumentos que levaram a essa opção.”

(APM, 2007, s/p)

Depois, continuam sugerindo que:

“Parece que a coluna das ‘Notas’ poderia facilmente integrar chamadas de atenção para o aproveitamento pedagógico dos temas históricos, uma das formas possíveis de tornar a matemática significativa para os nossos alunos.”

(idem)

Também é de salientar que não está subjacente neste Programa a integração da História no ensino, mas sim a sua utilização, pois esta é vista como algo complementar, ao ser referido que, em relação às orientações metodológicas:

“há outras que assumem igualmente um papel importante e que dizem respeito às representações, à exploração de conexões, ao uso de recursos, à valorização do cálculo mental, da História da Matemática e do papel da Matemática no mundo actual, bem como às diferentes formas de trabalho na sala de aula.”

(DGIDC, 2007, p. 9)

Esta falta de protagonismo dado à História da Matemática está bem patente na bibliografia e recursos aconselhados pelos autores do Programa, onde aparece apenas a indicação de dois endereços electrónicos, onde se pode ler num deles: “Sítio sobre história da Matemática, com cerca de 1300 biografias de matemáticos célebres, dezenas de artigos sobre a história da Matemática e os seus vários tópicos e história e propriedades de 60 curvas especiais” e no outro: “Arquivo de endereços da Internet com materiais diversos (actividades, software, planos de aula, etc.) que abarcam os diferentes tópicos matemáticos e a história da Matemática” (DGIDC, 2007, p. 72).

Também é de salientar que não se encontra nenhuma referência à introdução da História da Matemática nos manuais escolares, como acontece com as directrizes dos documentos oficiais da Grécia:

“Os grandes momentos históricos que, passo a passo, determinaram o desenvolvimento da Matemática devem ser incluídos nos livros escolares de Matemática, para que o aluno se aperceba da origem das ideias, que é um pré-requisito para apreender cada assunto.”

(Pedagogical Institute of Greece, 2002
apud Thomaidis e Tzanakis, 2009, p. 140)

E acrescentam, ainda, que:

“Não é necessário que as notas históricas sejam exibidas separadamente no final de cada capítulo. (Se necessário), elas podem também ser (brevemente) apresentadas, nas partes intermédias do texto.”

(idem)

Tendo em conta as ténues orientações dos nossos documentos oficiais, o que poderão os professores fazer para mudar esta situação?

Embora nos anteriores documentos oficiais houvesse mais referências à introdução da História no ensino da Matemática, na realidade, essas orientações não eram seguidas pela maioria dos professores pelas diversos óbices já apontados anteriormente, também

salientadas por Silva (1995), “a bibliografia é escassíssima, a formação de professores é escassíssima, só sobram os manuais escolares – e alguns deles, poucas ou nenhuma referências fazem à História da Matemática” (s/p).

E agora que nem o documento oficial para o ensino da Matemática no ensino básico em Portugal se preocupa em valorizar essa integração, quem quererá saber da História da Matemática?

Relativamente aos programas por ele analisados, Silva (1995) conclui afirmando que “penso que a História da Matemática tem um papel muito relevante a desempenhar na melhoria do ensino da Matemática, correndo-se o risco grave de ser esquecida daqui a uns anos por ter sido introduzida nos textos oficiais de forma inconsequente” (s/p). E agora, o que pensará este estudioso da História no ensino da Matemática em Portugal, ao aperceber-se que, neste Novo Programa, a História não foi introduzida de forma inconsequente; na verdade, ficou praticamente esquecida!

É de lamentar o pouco valor que é dado à importância da integração da História no ensino da Matemática, pois estou convicta que a História da Matemática pode ajudar os professores e os alunos a enfrentarem os desafios colocados pelas orientações do NPMEB. Em particular, pode estimular e desenvolver as três capacidades transversais mais focadas neste programa, nomeadamente, a capacidade de resolver problemas, o raciocínio matemático e a comunicação matemática, tendo em conta o que foi exposto anteriormente.

3.2.7. Considerações finais

Do exposto podemos concluir que há vários factores que contribuem para que a História da Matemática não seja, efectivamente, integrada na sala de aula. Penso que uma das principais razões para esta realidade é, fundamentalmente, a falta de preparação dos professores no sentido de os habilitar a trabalhar com a História da Matemática, não de forma isolada, como motivação, mas com uma história que faça parte integral do processo de ensino e aprendizagem desta disciplina. Nas licenciaturas (agora mestrados) de Matemática para o Ensino temos muitas cadeiras teóricas, com conteúdos que nunca teremos oportunidade de abordar quando trabalhamos com alunos do ensino Básico, e mesmo Secundário. No entanto, muitas vezes não temos uma “verdadeira” cadeira de História da Matemática, direccionada para o tipo de alunos com quem vamos trabalhar e que nos ponha mais à vontade com este tema. Falo por experiência própria, pois na minha

Licenciatura não a tive, embora, actualmente, muitas Universidades já ofereçam essa possibilidade. No meu caso, tive uma cadeira de História da Matemática no Mestrado, e é daí que veio o meu interesse por esta temática, ao ter conhecimento deste tesouro “escondido” que é, muitas vezes, desconhecido por muitos professores.

Uma maneira de tentar resolver esta lacuna será através da formação contínua, proporcionando Acções de Formação que permitam que os professores tenham contacto com aspectos da História da Matemática relevantes para o ensino e se apercebam dos benefícios que daí podem advir e, ao mesmo tempo, se sintam mais à vontade e confiantes para utilizar a História da Matemática nas suas aulas.

Outra razão, que vem complementar esta, é o tipo de conteúdos históricos que aparece nos livros didácticos que, por não contribuírem para uma consistente aprendizagem da Matemática, são, muitas vezes, ignorados pelos professores (e alunos).

Também deve haver o cuidado de se evitar as incorrecções e contradições que algumas vezes surgem nos manuais e que geralmente advêm do exposto por Grugnetti (2000a), “um dos riscos de introduzir a História da Matemática na Educação Matemática é o anacronismo que consiste em atribuir a um autor conhecimentos que ele nunca teve” (p. 78).

Ora, isto vem reafirmar a importância dos autores dos manuais escolares incorporarem contextualizações históricas fundamentadas em autores reconhecidos no campo da História da Matemática e que estejam atentos às pesquisas desenvolvidas nesta área.

Apesar de não ter analisado, pormenorizadamente, os manuais de Matemática adoptados para o ensino básico para este ano lectivo (2010/2011), elaborados de acordo com o NPMEB, penso que isto não se verifica uma vez que estes foram certificados por uma Comissão Científica e, como tal, é de supor que os elementos destas Comissões estiveram atentos a este facto.

Embora a maioria dos professores que lecciona Matemática no Ensino Básico não tenha competências e/ou conhecimentos para avaliar a precisão dos conteúdos históricos constantes nos manuais, poderá opinar sobre a utilidade, sob o ponto de vista pedagógico, das referências feitas à História da Matemática. E tal opinião poderia ser manifestada através da avaliação dos manuais que é feita quando os professores escolhem os manuais a adoptar na respectiva escola; para tal, deveria haver um item que avaliasse o interesse e a pertinência dos aspectos relacionados com a História da Matemática no sentido de

contribuírem para uma melhor aprendizagem da Matemática. Penso que se isto fosse feito, os autores dos manuais teriam mais cuidado na selecção dos conteúdos relacionados com a História da Matemática a introduzir nos mesmos.

Além da falta de formação e do fraco contributo dos manuais neste sentido, os professores não têm tempo para pesquisar e arranjar os seus próprios materiais, o que é ainda agravado com a falta de literatura, especialmente, em língua portuguesa.

Penso que ainda há um longo caminho (ou melhor, um trilho sinuoso e cheio de obstáculos) a percorrer para que haja uma efectiva integração da História no ensino da Matemática. Mas se houver empenho de professores, investigadores, Ministério da Educação, alunos, autores dos manuais, etc., esse trilho poderá transformar-se numa auto-estrada que nos levará a uma melhor aprendizagem da Matemática.

4. METODOLOGIA

A metodologia consiste na explicação minuciosa e rigorosa de toda a acção desenvolvida durante a realização de um trabalho de investigação. Consiste, assim, na explicação do tipo de investigação adoptado, dos instrumentos utilizados na recolha dos dados, das formas de tratamento e análise dos dados e, ainda, na caracterização dos participantes e do contexto em que ocorre.

Assim, neste capítulo, apresentarei os aspectos que fazem parte do quadro metodológico desta investigação. Começarei por justificar a escolha metodológica, a seguir farei uma caracterização dos participantes e descreverei o contexto em que a investigação ocorreu. Também serão descritos os procedimentos e instrumentos de recolha dos dados utilizados, assim como os procedimentos para o tratamento e análise desses mesmos dados.

Nesta investigação, de natureza qualitativa, foi adoptado o paradigma interpretativo e os dados foram recolhidos através de uma observação participante completa.

Os dados foram analisados à luz da Teoria da Actividade, na perspectiva de Engeström (1987) e, para operacionalizar esta teoria, adoptei o esquema metodológico proposto por Mwanza (2001, 2002), ou seja, o Método Orientado da Actividade (*Activity-Oriented Design Method* (AODM)).

4.1. Opções metodológicas

A Educação Matemática tem, na perspectiva de Fiorentini e Lorenzato (2006), uma problemática específica e as suas próprias questões de investigação. Estes autores acrescentam, ainda, que é a natureza do objecto de estudo que define qual a melhor abordagem metodológica a ser seguida ou construída pelo investigador, embora acrescentem que esta área de estudos “não possui uma metodologia única de investigação nem uma teoria claramente configurada” (p. 4).

Uma vez que a Educação, e em particular a Educação Matemática, é uma prática social, faz todo o sentido que se opte pelo trabalho de campo, realizando uma investigação qualitativa, de modo a compreendermos essa prática. No trabalho de campo, a atenção do investigador é orientada pelas questões de investigação.

Quando este tipo de investigação ocorre em contextos de educação é frequentemente designada por *naturalista*. Isto significa, como referem Bogdan e Biklen (1994), “que o investigador frequenta os locais em que naturalmente se verificam os fenómenos nos quais está interessado, incidindo os dados recolhidos nos comportamentos naturais das pessoas” (p. 17).

A investigação qualitativa em educação adopta várias formas e é conduzida em diversos contextos (Bogdan e Biklen, 1994). Ainda para estes autores, numa investigação desta natureza, os dados recolhidos são ricos em pormenores e de complexo tratamento estatístico, pelo que têm que ser analisados de forma indutiva; estes dados são recolhidos no seu ambiente natural e o investigador está mais preocupado com o processo do que com os resultados.

Relativamente ao que tem sido feito em Portugal no âmbito da investigação em Educação Matemática, esta começou a ganhar maior relevo em meados da década de 80 e tem-se dedicado, basicamente, a três áreas fundamentais: o currículo, a aprendizagem dos alunos e o estudo das concepções e práticas dos professores de Matemática.

Num período inicial, foram muito usadas as abordagens quantitativas mas há já muito tempo que a investigação no nosso país passou a assumir um carácter predominantemente qualitativo, usando, preferencialmente, a abordagem dos estudos de caso. Novas abordagens têm sido experimentadas como as etnografias e as narrativas, sendo, na opinião de Ponte (2008), desejável que se diversifiquem, ainda mais, as abordagens e as ferramentas utilizadas na investigação.

4.1.1. Paradigma do estudo

Toda a investigação, quer seja quantitativa ou qualitativa, é baseada em alguma suposição fundamental sobre que métodos de investigação são válidos. Neste sentido, distinguem-se três paradigmas fundamentais: o *interpretativo*, o *positivista* e o *crítico*.

O paradigma *interpretativo* defende que o estudo do Homem deve ter em conta que o ser humano não é passivo, mas que interpreta o mundo em que vive continuamente, ou seja, a actividade humana é fundamentalmente uma experiência social em que cada um vai constantemente elaborando significado. Os estudiosos que se dedicam a esse tipo de investigação afirmam que o Homem é diferente dos objectos e, por isso, o seu estudo necessita de uma metodologia que considere essas diferenças. Esse ponto de vista

encaminha os estudos que têm como objecto os seres humanos para os métodos qualitativos, cujos objectivos de estudo se dirigem, sobretudo, a questões de conteúdo, mais do que de processo, valorizando a compreensão e a explicação.

Conforme salientam Bogdan e Biklen (1994), perante um paradigma interpretativo, em vez de se ter, à partida, um conjunto de hipóteses a testar, procura-se, acima de tudo, compreender o comportamento dos participantes no seu contexto.

Por outro lado, o paradigma *positivista* trabalha com os métodos quantitativos, adoptando uma orientação que aceita o comportamento humano como sendo resultado de forças, factores, estruturas internas e externas que actuam sobre as pessoas, gerando determinados resultados. Esta perspectiva pressupõe uma causalidade temporal, estabelecendo uma relação de causa e efeito. Para quem defende esta perspectiva, essas forças ou factores podem ser estudados, não somente pelo método experimental, mas também por levantamentos amostrais. Esta perspectiva assume que a realidade pode ser objectivamente conhecida e pode ser descrita por propriedades mensuráveis que são independentes do investigador e dos seus instrumentos.

Finalmente, o paradigma *crítico* assume que a realidade é historicamente constituída e que é produzida e reproduzida pelas pessoas. Porém, as pessoas podem agir conscientemente modificando as circunstâncias económicas e sociais. Dá ênfase à oposição, aos conflitos e contradições da sociedade contemporânea.

Note-se, no entanto, que esta distinção epistemológica é realizada filosoficamente, pois, na prática da investigação social, estas distinções não possuem limites claros.

A presente investigação, de carácter qualitativo, foi conduzida sobre a égide de um paradigma interpretativo.

Segundo Ludke e André (1986), o que vai determinar a escolha da metodologia é a natureza do problema. Estas autoras defendem que para estudar com rigor científico uma realidade complexa, como é a escola, o investigador necessitará de recorrer a uma abordagem qualitativa.

Os procedimentos utilizados numa investigação são variados, mas, quando ocorrem em contexto escolar, destacam-se o estudo de caso, a etnografia, a observação participante e a investigação-acção.

4.1.2. *Design do estudo*

Estudo de caso *versus* observação participante e etnografia

No âmbito de um paradigma interpretativo, o estudo de caso é um estudo naturalista que visa conhecer o “como” e os “porquês” (Yin, 2005) de um acontecimento ou situação bem definida, que constituirá *o caso*. Nesta situação, o investigador não tem controlo sobre os acontecimentos, e não pode, nem pretende, manipular as causas que originam o comportamento dos participantes.

Segundo Ludke e André (1986), “o caso é sempre bem delimitado, devendo ter os seus contornos claramente definidos no desenvolver do estudo” (p. 17).

“Os estudos de caso são particularmente úteis quando se pretende compreender determinados indivíduos, determinado problema ou uma situação particular, em grande profundidade” (Patton, 1990, p. 54 apud Leonor, 2000, p. 193).

Convém distinguir algumas formas de investigação que às vezes se confundem, nomeadamente, o estudo de caso, a etnografia e a observação participante.

Yin (2005) faz uma distinção entre estes três métodos de investigação. A etnografia pode ser vista como um estudo de caso intenso e prolongado, que se preocupa com a reconstituição de aspectos particulares da cultura de um grupo social ou comunidade. Na opinião de Yin (2005), a etnografia requer uma observação detalhada e estadias longas do investigador no local a ser estudado. Por sua vez, a observação participante pode não ser tão demorada, mas também exige uma permanência relativamente longa no campo de investigação. O estudo de caso, por seu lado, é uma forma de investigação que não depende necessariamente de dados etnográficos ou da observação participante, pois nem sempre requer a presença do investigador num local determinado, podendo mesmo ser realizado, por exemplo, através do telefone ou da Internet. Além disso, o estudo de caso pode utilizar dados qualitativos e quantitativos, enquanto a etnografia e a observação participante usam unicamente dados qualitativos.

Por esta razão, Ludke e André (1986) alertam que o uso da nomenclatura *investigação etnográfica* deve ser feito de maneira adequada. De acordo com as referidas autoras, a sua utilização inapropriada ocorre pelo facto de o termo etnografia se ter distanciado do seu sentido próprio no processo de adaptação para o âmbito da educação, sofrendo deturpações. Um estudo relacionado com as questões educacionais que se baseie

na etnografia deve ter o cuidado em reflectir sobre o processo de ensino e aprendizagem, situando-o dentro de um contexto sociocultural mais amplo. Deve, pois, haver a preocupação em não limitar a investigação apenas ao ambiente escolar, mas, acima de tudo, promover uma relação entre o que se aprende na escola e o que se passa fora dela.

Observador participante ou participante observador?

Ponte (2006) classifica a *observação participante* como um “parente próximo dos estudos de caso” (p. 11), em que se procura conhecer os processos, dinâmicas e perspectivas dos intervenientes numa dada situação mas em que não há a preocupação, como nos estudos de caso, em caracterizar o seu carácter único e em delimitá-la como caso.

Observação participante é um tipo de estudo naturalista em que o investigador frequenta os locais onde os fenómenos ocorrem de forma natural e a colecta de dados ocorre num contexto em que as pessoas agem normalmente.

Dependendo do grau de implicação do investigador na vida do grupo que está a estudar, a observação participante pode, segundo Adler e Adler (1987), ser dividida em três tipos, nomeadamente, a *periférica*, a *activa* e a *completa*.

A *observação participante periférica* é utilizada nos casos em que os investigadores consideram necessário um certo grau de envolvimento na actividade do grupo que estudam, indispensável para compreenderem essa actividade, mas sem serem, no entanto, admitidos no meio dessa actividade.

Neste caso, os investigadores não assumem um papel de relevo na situação em estudo e limitam intencionalmente o seu envolvimento nas actividades do grupo pois, conforme refere Lapassade (2001, s/p), “alguns investigadores acreditam que demasiado envolvimento pode bloqueá-los de qualquer possibilidade de análise”.

Por sua vez, a *observação participante activa* é escolhida pelos investigadores que pretendem adquirir um certo estatuto no grupo em estudo, desempenhando um papel activo nesse mesmo grupo, mas mantendo sempre uma certa distância. Podemos dizer que estão com “um pé dentro e outro fora”.

No entanto, Lapassade (2001) ressalta que poderão surgir conflitos, principalmente quando essa observação participante activa ocorre em contextos de ensino. O observador participante deparar-se-á com o dilema: como praticar uma participação activa sem “participar” nas mudanças nem as provocar? Numa escola, o observador participante

activo pode introduzir outros valores na situação que estuda ao apresentar, por exemplo, o seu modo de acção “permissiva” ou um modelo pedagógico alternativo, que são formas de intervenção susceptíveis de alterar a situação.

Finalmente, na perspectiva de Adler e Adler (1987), “a *observação participante completa* exige um maior compromisso do investigador. Em vez de experimentar um mero envolvimento participativo, o observador participante completo imerge plenamente no grupo como um ‘nativo’” (p. 67).

Ainda de acordo com estes autores e, contrariamente aos dois papéis vistos anteriormente, a observação participante completa pode ser subdividida em duas subcategorias distintas: a “*oportunista*” e a “*convertida*”.

Na observação participante completa que acontece por oportunidade, o investigador já faz parte do grupo que irá estudar e beneficia da oportunidade que lhe é dada pelo estatuto que tem dentro desse grupo. Por outro lado, quando esta se dá por conversão, representa uma forma de cumprir uma recomendação etnometodológica, segundo a qual o investigador deve tornar-se o fenómeno que estuda.

Ora, na presente investigação, o meu papel de professora/investigadora revela as características de uma *observação participante completa* uma vez que eu fazia parte (como professora) do grupo (turma) que investiguei e, além disso, tem carácter *oportunista* porque eu já era professora destes alunos quando decidi encetar esta investigação; digamos que aproveitei a oportunidade que me surgiu.

A oposição entre o interno e o externo surge em praticamente todos os trabalhos contemporâneos relacionados com a observação participante, mas não está suficientemente sistematizada. Para esclarecer este ponto, Lapassade (2001) propôs uma nova forma de articular os papéis dos observadores-participantes. Para tal, faz a distinção entre *observador participante interno* e *observador participante externo*. Os observadores participantes externos vêm de fora e por tempo limitado (o tempo da investigação), solicitam a entrada e ficam alguns meses em tempo parcial; por outro lado, os observadores participantes internos estudam uma situação de que já faziam, e de que continuarão a fazer, parte. São, portanto, “actores” no grupo no qual já têm o seu lugar, no meio que vão estudar ou na instituição onde exercem funções.

Tendo em conta o exposto, parece óbvio que nesta investigação desempenhei o papel de *observadora participante interna*.

São tantas as definições que resultam das diversas situações e contextos a ter em conta: observação participante, observação participante periférica, observação participante activa, observação participante completa, observação participante completa oportunista, observação participante completa convertida, observador participante interno e observador participante externo.

Acho que todas estas variantes para classificar o investigador e o tipo de investigação poderiam ser integradas, de um modo sintético, apenas em duas categorias: a observação-participação e a participação-observação.

Assim, quando o investigador apenas se integra no grupo a partir do momento em que se inicia o processo de investigação, estaríamos perante uma observação-participação, variando o grau de intervenção (participação), podendo mesmo ser nula. Se, pelo contrário, o observador fizer parte integrante de um grupo e aproveitar essa situação para o observar, estaríamos numa situação de participação-observação. Num contexto de ensino, a participação-observação corresponderia à situação em que o professor investiga a aprendizagem dos seus próprios alunos, pois, mais do que observar, participa. Para que se dê uma mudança/melhoria nas aprendizagens dos alunos, o professor/investigador também terá que alterar as suas práticas e métodos de ensino.

Participação-observação *versus* Investigação-acção

Outra distinção que importa salientar é entre a observação participante completa, ou seja, entre a participação-observação e a investigação-acção.

Embora a investigação-acção possa ser considerada uma técnica especial de recolha de dados, também pode ser vista como uma modalidade de investigação em que o participante da acção é o investigador da sua própria prática e, ao mesmo tempo, o investigador é um participante que intervém no rumo da acção, orientado pelas suas questões de investigação.

Alguns estudiosos são de opinião que, no caso da investigação em contexto escolar, os professores devem ser os investigadores da sua própria prática. Quando isso acontece, estamos perante uma investigação-acção, cujos objectivos são, na opinião de Fiorentini e Lorenzato (2006), “a melhoria das práticas pedagógicas dos professores, o desenvolvimento curricular centrado na escola, o desenvolvimento de um grupo auto-reflexivo na escola e a melhoria das condições de trabalho pedagógico e investigativo” (p. 113).

De facto, num contexto de *investigação-acção* realizam-se trabalhos de intervenção em que as problemáticas e as decisões relativas ao desenvolvimento da investigação são partilhadas pelo investigador e pelos outros participantes e onde não se verifica o descomprometimento do investigador em relação ao objecto de estudo.

Apesar das semelhanças entre a *investigação-acção* e a observação participante completa (*participação-acção*), existe, na minha opinião, uma diferença fulcral: enquanto na primeira, o foco da investigação são as práticas do professor (que também é o investigador), na segunda, a investigação centra-se nas práticas dos alunos, envolvendo, apenas de forma implícita, as práticas do professor.

4.1.3. A Teoria de Actividade num contexto escolar

Nas doudas palavras de D'Ambrósio (2000), “sendo a investigação o elo entre a teoria e a prática, parte-se para a prática, e portanto far-se-á investigação, fundamentando-se numa teoria que, naturalmente, inclui princípios metodológicos que contemplam uma prática” (p. 81).

Goetz e LeCompte admitem, no entanto, que essa teoria pode ser escolhida no decurso da investigação, não sendo necessário começar a investigação tendo já decidido qual a teoria a utilizar na análise dos dados. Assim, estes autores defendem que no quadro de um paradigma interpretativo, começa-se por um conjunto empírico de dados e procura-se encontrar uma teoria que se lhe ajuste (Goetz e LeCompte, 1984 apud L. Santos, 2000). De facto, foi o que aconteceu nesta investigação, pois, inicialmente, ainda não tinha em mente que fundamentação teórica deveria utilizar para analisar os dados recolhidos, mas, à medida que a investigação foi decorrendo e sob a orientação da minha orientadora, encontrei na Teoria da Actividade a fundamentação teórica que me pareceu adequada para interpretar os dados recolhidos na minha investigação.

Com base nos princípios teóricos apresentados no ponto 3.1, podemos considerar a educação escolar como um sistema de actividade. O sistema de actividade escolar é formado por diversas actividades, entre elas a aula dada pelo professor que, por meio de regras, divisão de trabalho e artefactos mediadores, tem como objectivo que os sujeitos, neste caso, os alunos, aprendam Matemática.

Num contexto escolar, há a interacção entre diversos sistemas de actividade, em função dos diferentes agentes que actuam nesse contexto. De uma forma mais explícita,

observamos a interacção entre os sistemas de actividade da Direcção da escola e a sua equipa pedagógica, dos professores que actuam em diferentes disciplinas e dos alunos dos diferentes níveis de ensino. De uma forma indirecta, mas não menos importante nesse contexto, em função de também interferirem nas práticas pedagógicas, temos os sistemas de actividades da família, das políticas educacionais e, ainda, dos autores dos manuais escolares. Todos esses sistemas de actividades se inter-relacionam, no sentido de atingirem um objectivo comum.

O quadro teórico da Teoria da Actividade usa a actividade como a unidade básica para o estudo das práticas humanas e destaca a ideia de que a relação entre o sujeito e o objecto não é directa, mas sim mediada através da utilização de um artefacto. Além disso, o professor também desempenha um importante papel de mediador, pois considera-se que, através da mediação, o aluno é capaz de realizar tarefas que sozinho não conseguiria, concepção já descrita anteriormente como a Zona de Desenvolvimento Potencial (ZDP).

Nesta investigação, o principal sistema de actividade em estudo são as aulas de Matemática de uma turma do 8º ano, cujo objectivo é a aprendizagem da Matemática, através da resolução de fichas de trabalho elaboradas com recurso à História da Matemática, que, aqui, desempenham o papel de artefactos mediadores (ferramentas).

Na perspectiva de Zurita e Nussban (2007), a Teoria da Actividade “incorpora uma abordagem qualitativa que oferece uma lente diferente para analisar um processo de aprendizagem e os seus resultados, centrando-se sobre as actividades em que as pessoas estão envolvidas” (p. 215).

Jonassen e Rohrer-Murphy (1999) defendem que a Teoria da Actividade exige uma abordagem qualitativa para análise, o que se verifica na presente investigação, que, como já referi, se desenvolveu mediante uma abordagem qualitativa.

Kuutti (1996) define a Teoria da Actividade como “um quadro filosófico e interdisciplinar para estudar formas diferentes de práticas humanas como processos de desenvolvimento” (p. 25), o que se enquadra muito bem num contexto de sala de aula.

Da revisão da literatura feita concluí que são muitos os estudos que utilizam a Teoria da Actividade para analisar contextos de ensino em que, na maioria deles, o artefacto mediador é o computador (ou melhor, as Tecnologias da Educação e Informação (TIC)). Dos trabalhos encontrados destaco os seguintes: (Engeström et al, 2002a), (Lim e

Hung, 2003), (Basharina, 2007), (Murphy e Manzanares, 2008) e (Demiraslan e Usluel, 2008).

Relativamente ao ensino da Matemática, em particular, também encontrei alguns estudos, dos quais destaco: (Jones, 2000), (Piteira e Matos, 2000), (Hardman, 2005), (Ho, 2007) e (Jaworski e Potari, 2009).

4.2. Participantes

Uma vez que o quadro teórico de análise adoptado neste estudo é a Teoria da Actividade, cuja unidade de análise é o sistema de actividade da sala de aula, que interage com outros sistemas de actividade, como por exemplo a família, parece-me de toda a importância e pertinência perceber o meio socioeconómico das famílias destes alunos e o meio em que a escola se insere.

Assim, será feita uma caracterização não só da turma mas também do seu meio familiar. Além disso, e com base do Projecto Educativo da Escola, procederei à caracterização da Escola e do meio em que está inserida.

4.2.1. A Escola

A Escola EB 2/3 de Nicolau Nasoni situa-se na freguesia de Campanhã, na cidade do Porto, e começou a funcionar no ano lectivo 1992/1993.

É a escola sede do Agrupamento de Escolas das Antas que integra mais três estabelecimentos de ensino: uma escola do 1º Ciclo, uma escola do 1º Ciclo com Jardim-de-infância e um Jardim-de-infância.

No ano lectivo de 2006/2007 frequentam este agrupamento 1088 alunos, com a seguinte distribuição: 76 são crianças dos Jardim-de-infância, 511 são alunos do 1º ciclo, 233 são alunos do 2º ciclo e 207 alunos frequentam o 3º ciclo.

Destes alunos, há 91 com necessidades educativas especiais (dos quais 49 são deficientes auditivos e 10 integram a Unidade Especializada de Currículos Alternativos). Neste âmbito, o agrupamento tem merecido reconhecimento pelo trabalho que desenvolve ao nível da integração das crianças com deficiência auditiva.

Dos 440 alunos que frequentam o 2º e 3º ciclo, 61 frequentam Cursos de Educação e Formação, nomeadamente, de Acompanhamento de Crianças, de Cozinha e de Operador

de Informática (Tipo II – equivalentes ao 9º ano) e de Jardinagem (Tipo I – equivalente ao 6º ano).

O agrupamento tem um corpo docente composto por 109 professores, dos quais 9 são do Ensino Especial. Neste agrupamento trabalham 35 funcionários (28 auxiliares da acção educativa e 7 administrativos).

O nível socioeconómico dos agregados familiares dos alunos e o respectivo rendimento *per capita* é muito diversificado, variando, como é óbvio, em função do estrato profissional dos pais. Ora, isso indicia diferentes níveis de envolvimento dos pais no acompanhamento dos filhos, assim como expectativas escolares diferenciadas.

Tomando como referência o ano lectivo de 2006/2007, verifica-se que 32% dos pais dos alunos deste agrupamento são empregados de comércio e serviços, 10% são mães domésticas e 9% pertence ao pessoal dos serviços pessoais e domésticos. Há, ainda, 11% de desempregados.

É de salientar, ainda, o facto de 47% dos pais (e mães) terem apenas o 4.º ou o 6.º ano de escolaridade e 6.8% não saberem ler nem escrever ou saberem ler e escrever mas não terem concluído o 4º ano de escolaridade.

Neste quadro, e tendo em conta o número de alunos apoiados pelos Serviços de Acção Social Escolar, verifica-se que 34% dos alunos do ensino básico beneficiaram deste serviço social, dos quais 30% são do escalão A e 4% do escalão B.

4.2.2. A Turma

Composição e nível etário

A turma¹³ é composta por 23 alunos, dos quais 15 são rapazes e 8 são raparigas.

As suas idades estão compreendidas entre os 12 e os 15 anos. Há um aluno com 15 anos e outro com 14 anos e as idades dos restantes alunos variam entre os 12 e os 13 anos (ver figura 10).

¹³ A caracterização da turma teve por base as respostas dadas pelos alunos a um questionário, realizado no início do ano lectivo, no âmbito do Projecto Curricular de Turma.

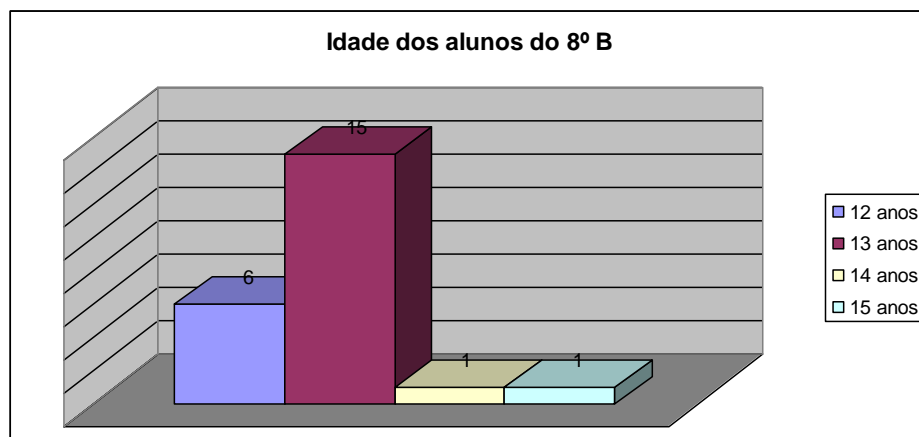


Fig. 10 – Idade dos alunos da turma

Percursos escolar dos Alunos

Ao longo do percurso escolar, vinte alunos desta turma nunca repetiram o ano. Os outros três alunos ficaram retidos uma vez, um deles no 7º ano e os outros dois no 1º ciclo.

No ano lectivo anterior, treze alunos progrediram de ano sem nenhuma avaliação inferior a três; e os restantes tiveram entre uma e quatro avaliações inferiores a três (ver figura 11).

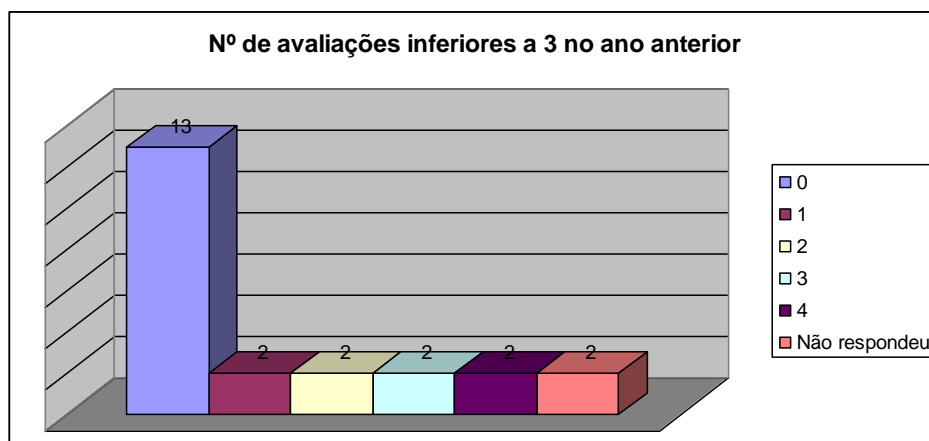


Fig. 11 – Nº de avaliações inferiores a 3 no ano anterior

Enquadramento Socioeconómico

Quanto ao apoio dos Serviços de Acção Social Escolar (SASE), há seis alunos com escalão A e os restantes alunos da turma não beneficiaram deste apoio.

De um modo geral, os alunos vivem com os pais e o(s) irmão(s), excepto dois alunos que vivem com os avós. Há cinco alunos que vivem apenas com a mãe e o(s) irmão(s) pois os pais estão separados/divorciados.

A maioria dos alunos pertence a famílias pouco numerosas; treze alunos têm apenas um irmão e sete são filhos únicos (ver figura 12).

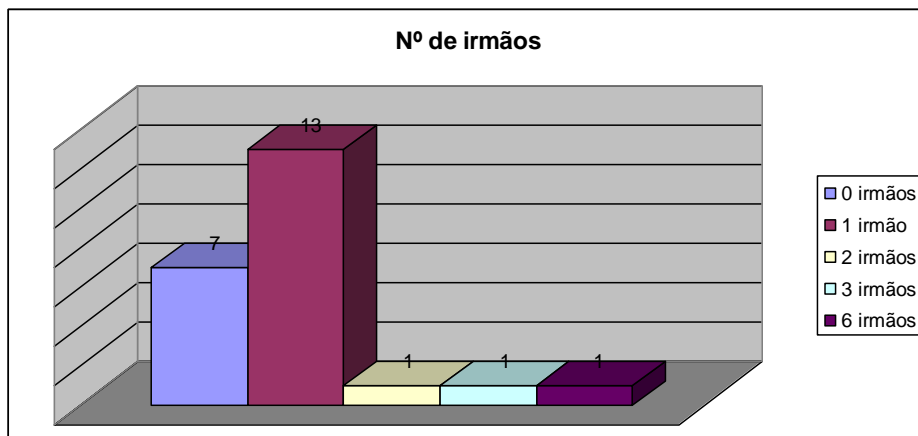


Fig. 12 – Número de irmãos

A idade dos pais oscila entre os 31 e os 51 anos, situando-se a maioria entre os 33 e os 45 anos (ver figura 13).

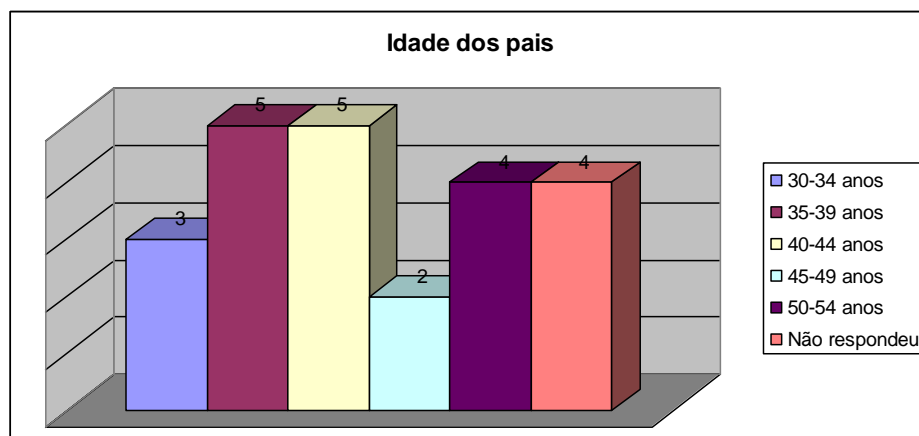


Fig. 13 – Idade dos pais

Quanto às habilitações literárias dos pais, três têm apenas o 4º ano, três não concluíram o 9º ano, cinco têm o 9º ano, quatro têm o 12º ano e quatro são licenciados (ver figura 14).

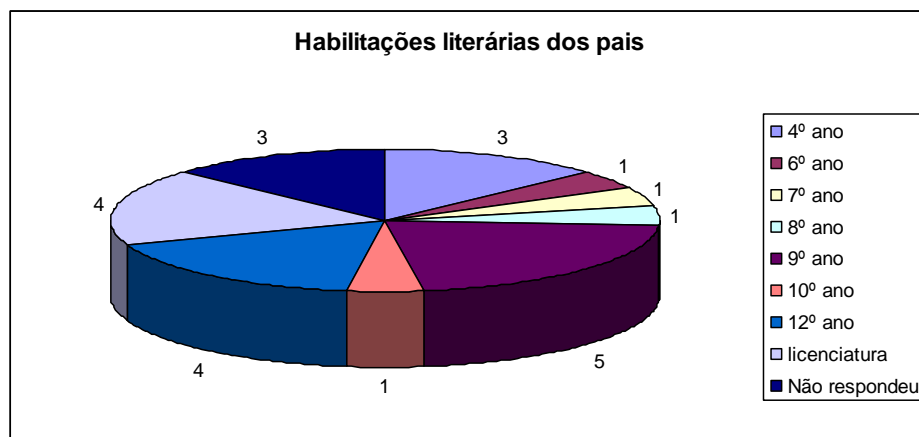


Fig. 14 – Habilitações literárias dos pais

As suas profissões são variadas, passando por cozeiro e cozinheiro a engenheiro, arquitecto e médico, entre muitas outras. Um pai está desempregado.

A idade das mães oscila entre os 30 e os 46 anos (ver figura 15).

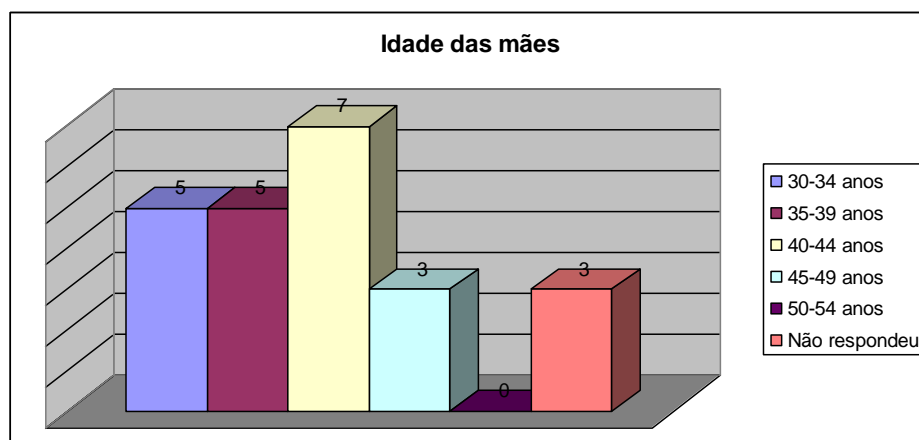


Fig. 15 – Idade das mães

Quanto às habilitações literárias das mães, sete têm apenas o 4º ano, quatro não concluíram o 9º ano, duas têm o 11º ano, duas têm o 12º ano e há cinco mães licenciadas (ver figura 16).

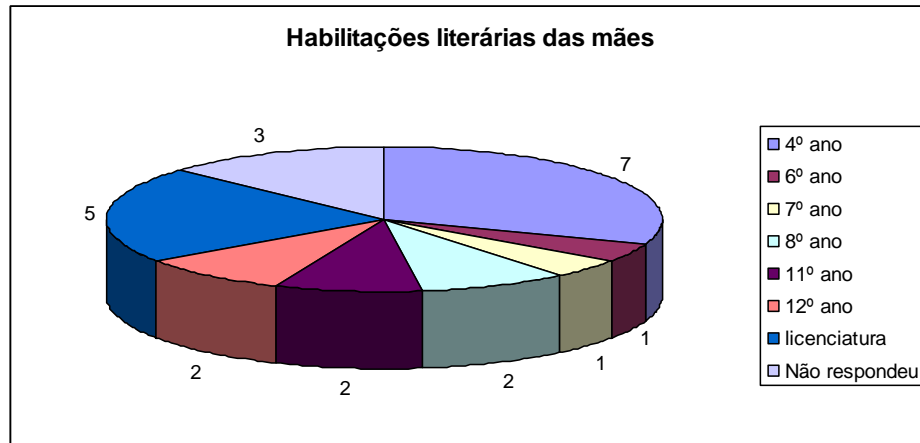


Fig. 16 – Habilitações literárias das mães

As suas profissões também são bastante variadas, passando por empregada de limpeza e empregada de cozinha a professora e enfermeira, entre muitas outras. Duas mães estão desempregadas, uma mãe é doméstica e uma é estudante.

Expectativas, motivações e interesses dos alunos

As disciplinas em que a maioria dos alunos diz sentir mais dificuldades são: Língua Portuguesa, Francês e Físico-Química (ver figura 17).



Fig. 17 – Disciplinas com mais dificuldades

As disciplinas preferidas são: Educação Física, Matemática e Inglês (ver figura 18).

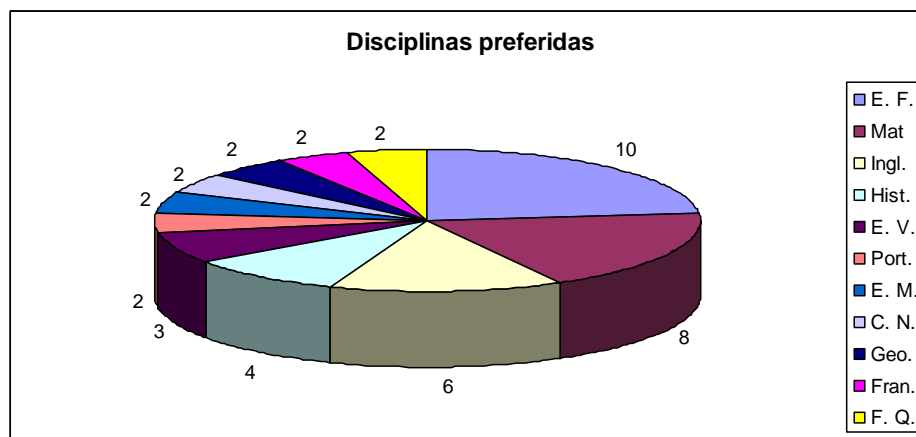


Fig. 18 – Disciplinas preferidas

Relativamente às perspectivas para o futuro, as profissões que gostariam de ter são variadas e muitos alunos não responderam, pois alguns não sabem e outros estão indecisos. As profissões desejadas reveladas pelas raparigas são: advogada, cantora/representadora, jornalista, educadora de infância e professora de Educação Física. Quanto aos rapazes, as profissões que gostariam de ter são: biólogo, futebolista, arquitecto, engenheiro informático e cartoonista de Banda Desenhada.

4.2.3. A professora/investigadora

Concluí a minha licenciatura em Matemática (Ramo Ensino), na Universidade da Madeira, no ano lectivo 1997/1998, pelo que o ano lectivo 2006/2007 foi o meu nono ano de docência, e o segundo ano a leccionar nesta Escola a cujo quadro pertença.

Neste ano lectivo, além desta turma de 8º ano, leccionei a disciplina de Matemática a três Cursos de Educação e Formação (CEF) que dão equivalência ao 9º ano, nomeadamente, os cursos de Acompanhamento de Crianças, de Cozinha e de Operador de Informática.

Além de leccionar Matemática a estas quatro turmas também desempenhei o cargo de Directora de Turma dos alunos envolvidos na investigação.

Acresce mencionar que já tinha leccionado Matemática à referida turma no ano lectivo anterior.

O duplo papel de professora/investigadora

Ser professor/investigador representa uma opção profissional. Na opinião de Fiorentini e Lorenzato (2006), essa é uma opção exigente pois requer “envolvimento,

tempo para dedicar-se a esse tipo de empreendimento, paixão, investimento intelectual e emocional e, além disso, muita disciplina e cuidado na colecta e tratamento da informação” (p. 77).

Desempenhar este duplo papel tem os seus prós e contras. Mas, da minha experiência, considero que pesam mais os prós do que os contras.

Por um lado, o facto de haver uma grande proximidade na relação entre o investigador e os participantes no estudo, neste caso, os alunos, pode ser considerado como uma vantagem, uma vez que existe um maior e diversificado conhecimento mútuo dos intervenientes na investigação. Além disso, o investigador não é considerado um elemento perturbador ou estranho no ambiente. Neste sentido, sou da mesma opinião que Bogdan e Biklen (1994) quando defendem que a investigação em educação pode tirar partido da relação de proximidade existente entre o investigador e o objecto de estudo.

Ainda segundo estes autores, há benefícios em desempenhar este duplo papel uma vez que os professores, ao agirem como investigadores, além de realizarem o seu trabalho também se observam a si próprios, param e distanciam-se dos conflitos imediatos, são capazes de alargar as suas perspectivas sobre o que acontece.

Muitas vezes, o termo professor-investigador aparece associado ao de investigação-acção; mas, mesmo que não se trate de um projecto de investigação-acção, o professor, ao desempenhar o papel de observador participante (ou melhor, de participante observador), irá, certamente, tentar melhorar as suas práticas.

Por outro lado, há dificuldades que surgem, ou, como lhe chamaria Engeström, contradições. Assim, quando os professores, no papel de investigadores, recorrem a uma abordagem qualitativa devem ser muito rigorosos e devem estar bastante atentos e observadores na recolha dos dados, no sentido de reconhecerem os seus próprios pontos de vista e de neutralizarem as imagens e ideias estereotipadas que podem ter em relação a alguns alunos (Bogdan e Biklen, 1994).

Uma investigação qualitativa já encerra, em si, um certo grau de subjectividade. Nos casos em que o professor desempenha também o papel de investigador, o aspecto subjectivo pode ser aumentado. O facto de o investigador estar intimamente relacionado com o grupo que vai investigar pode condicionar bastante a objectividade necessária ao processo de investigação, pelo que é necessário muito rigor e imparcialidade na recolha dos dados. É principalmente por esta razão que, muitas vezes, este duplo papel é alvo de críticas.

4.3. Recolha dos dados - Quando, Onde e Como?

Para Bogdan e Biklen (1994), “a palavra ‘Investigação’ enfatiza a recolha e a análise sistemáticas dos dados” (p. 283).

Atendendo aos objectivos do estudo e tomando o sistema de actividade da sala de aula como a unidade de análise, foram recolhidos dados em dez aulas (de 90 minutos) de Matemática e duas aulas (de 45 minutos) de Estudo Acompanhado de Matemática de uma turma do 8º ano, entre finais de Setembro de 2006 e meados de Maio de 2007.

Os alunos do 8º ano têm duas aulas de Matemática, de 90 minutos cada, por semana. Além disso, nesta escola, a área curricular não disciplinar de Estudo Acompanhado é atribuída, separadamente, aos professores de Matemática e Língua Portuguesa (45 minutos a cada um). Estas aulas são de frequência obrigatória e objectivo é que sejam usadas, quer pelos professores de Língua Portuguesa, quer pelos professores de Matemática, para aprofundar os conteúdos leccionados, assim como para colmatar lacunas manifestadas por alguns alunos.

As aulas desenvolveram-se em salas de aula da Escola EB 2-3 Nicolau Nasoni. Note-se que eram salas comuns a qualquer disciplina, sem computadores nem materiais didácticos específicos da Matemática.

Os alunos trabalhavam, geralmente, aos pares ou em grupos de três. No início da aula, era entregue uma ficha de trabalho, por mim elaborada com recurso à História da Matemática.

Após algumas explicações introdutórias, era indicado que exercícios deveriam ser, inicialmente, resolvidos. Os alunos tentavam resolvê-los, aos pares, enquanto eu circulava pela sala a tirar dúvidas e a ajudar os alunos que revelavam mais dificuldades.

Era dado algum tempo para a resolução dos exercícios indicados e, passado algum tempo, procedia-se à sua correcção no quadro, para o que era solicitado um aluno para o fazer. Quando não havia voluntários, eu indicava um aluno para ir ao quadro corrigir o exercício. Muito raramente é que não havia um voluntário, ou até vários; estes alunos eram muito participativos e, às vezes, até havia conflitos para irem ao quadro (o que não acontece em muitas turmas!).

Depois de corrigido o exercício no quadro, eu explicava-o para o grande grupo (turma), pois, geralmente, havia alunos que não tinham conseguido resolver o exercício (ou

estava incorrecto), ou porque tinham dificuldades ou porque não estavam a trabalhar como deveriam.

Neste momento, era feita a discussão do método utilizado e dos resultados obtidos e, às vezes, o exercício era resolvido por outro método, caso algum aluno o tivesse resolvido de um modo diferente.

É de notar que, por vezes, os alunos mais trabalhadores e com mais conhecimentos, faziam mais exercícios do que os indicados, pois despachavam-se mais depressa do que a maioria do grande grupo. Para não ficarem à espera, perguntavam-me se podiam avançar, ao que eu respondia afirmativamente.

As técnicas utilizadas nesta investigação para a recolha dos dados foram a observação e a análise documental. Estas técnicas, juntamente com a entrevista, são alguns dos procedimentos mais utilizados em estudos que seguem um paradigma interpretativo.

A observação é uma das técnicas mais antigas de recolha de dados. No caso dos estudos interpretativos, a observação assume uma natureza fundamentalmente naturalista, ou seja, ocorre no contexto natural onde se desenrolam os fenómenos em estudo e acontece em interacção com os participantes.

Para proceder à recolha dos dados utilizei uma câmara de vídeo, colocada num canto da sala, de modo a não perturbar o normal funcionamento da aula. No entanto, uma das limitações que senti foi a falta de, pelo menos, mais uma câmara; infelizmente, não me foi possível utilizar mais câmaras.

Quando se realiza uma investigação desta natureza é necessário ter em conta algumas questões de ética. Assim, a realização destas filmagens foi feita com o conhecimento e autorização do Conselho Executivo e, também, com autorização, por escrito, dos Encarregados de Educação. Uma vez que eu, como Directora de Turma destes alunos, tinha reuniões, pelo menos trimestrais, com os seus Encarregados de Educação, tive a possibilidade de explicar, presencialmente, o trabalho de investigação que estava a desenvolver, justificando, assim, a utilização da câmara de vídeo.

Também foi dado a conhecer, tanto em Reunião de Departamento, como em Conselho de Turma, o meu projecto e os meus propósitos com esta investigação.

Após cada aula observada, visionei a gravação vídeo e fiz a transcrição integral da aula filmada. Além das aulas filmadas, também serviram de dados as notas que apontava

no meu diário de campo. No entanto, devido ao meu duplo papel de professora/investigadora não me era possível tirar apontamentos durante as aulas. Todavia, essa limitação era minimizada pelo conhecimento que tinha dos alunos uma vez que já tinha sido professora deles no ano lectivo anterior.

Essas notas eram tiradas no final da aula ou, geralmente, quando chegava a casa, pois como os intervalos eram de apenas 10 minutos (e ainda tinha que arrumar a câmara de vídeo) nem sempre era possível apontar tudo quanto gostaria no final da aula; só o podia fazer quando não tinha aula a seguir.

Além disso, também seleccionei e fotocopiei algumas respostas dadas pelos alunos no caderno ou na ficha de trabalho, mas, infelizmente, não tantas quanto gostaria (ou deveria). Uma vez que os exercícios eram corrigidos ao longo da aula, os alunos tinham tendência a corrigir/alterar as suas respostas e, nem sempre, se mostravam muito receptivos a ceder os seus apontamentos para fotocopiar.

Faço minhas as palavras de Fernandes (2004), quando desabafa que “uma recolha de dados deste tipo deixa-nos com a sensação de que não temos informação suficiente” (p. 191).

4.4. Tratamento e análise dos dados

A análise dos dados implica interpretar e dar sentido a todo o material de que se dispõe a partir da recolha de dados (Bogdan e Biklen, 1994). Como afirmam estes autores, a análise é um processo de redução de dados e pressupõe diversas actividades, como organizar e subdividir os dados, sintetizá-los, procurar padrões, descobrir o que é importante e o que se vai dar a conhecer aos outros.

Como refere L. Santos (2000), a recolha e a análise dos dados podem ser relacionadas de maneiras diferentes. Numa delas, o modelo sequencial, recolhem-se em primeiro lugar os dados que serão analisados numa fase posterior. Num modelo interactivo, claramente de aplicação mais complexa do que o anterior, mas na opinião de Bogdan e Biklen (1994), mais eficiente e eficaz, a recolha dos dados e a análise desenvolvem-se em simultâneo. No entanto, segundo estes mesmos autores, os investigadores nunca utilizam o modelo sequencial no seu estado mais puro pois a reflexão, sobre o que se vai descobrindo enquanto se está no campo, faz parte de todos os estudos qualitativos.

Nesta investigação utilizei o modelo sequencial, pois, devido à minha inexperiência, quando comecei a recolher os dados ainda não possuía um quadro de referência teórico bem definido e, por isso, a análise dos dados foi feita numa fase posterior à sua recolha. Todavia, enquanto estive no campo de investigação a recolher os dados reflecti sempre sobre o que ia acontecendo, embora o fizesse do ponto de vista de uma professora e não de uma investigadora.

Assim, finda a recolha dos dados, seguiu-se a sua análise, ou seja, a organização e sistematização dos dados recolhidos, quer através do visionamento dos vídeos e respectivas transcrições, quer através das notas de campo e dos registos escritos dos alunos, com o objectivo de melhor os compreender e, finalmente, poder dar a conhecer o que encontrei e as conclusões a que cheguei.

No entanto, para quem é principiante nestas andanças, como eu, a ideia de analisar os dados era assustadora e, às vezes, sentia-me incapaz de o fazer; por isso, foi uma tarefa sucessivamente adiada. Mas, ao mesmo tempo, pensava que o mais difícil era começar! Além disso, sentia-me aliviada ao me aperceber que não era a única a ter esta sensação de incapacidade, pois, conforme relatam Bogdan e Biklen,

“Para quem nunca empreendeu uma tarefa destas, a análise afigura-se monstruosa, sendo o seu primeiro impulso evitá-la, continuando a recolha de dados no campo de investigação, quando já a devia ter terminado. A ansiedade aumenta: ‘Não consegui encontrar nada de jeito’, [...]”

(1994, p. 205)

Tenho consciência que a análise dos dados teria sido mais fácil e mais eficaz se tivesse sido feita em simultâneo com a sua recolha. Uma vez que pouca ou nenhuma análise foi feita aquando a recolha dos dados, quando terminei de os recolher senti uma sensação de vazio e perguntei a mim mesma: “E agora, o que é que eu faço?”, estado de alma muito bem descrito por Bogdan e Biklen (1994).

4.4.1. Operacionalizando a Teoria da Actividade

Depois de ter decidido que a análise dos dados seria feita com base nos pressupostos teóricos da Teoria da Actividade, deparei-me com um problema ao aperceber-me que, conforme constata Nardi (1996), não há um método padrão para colocar as ideias

da Teoria da Actividade em prática. Também de acordo com Jonassen e Rohrer-Murphy (1999), a Teoria da Actividade não é uma metodologia mas um quadro teórico para analisar e compreender as actividades humanas, tendo em conta o contexto em que as actividades são realizadas.

Esta lacuna metodológica da Teoria da Actividade também é apontada por Hardman (2008), que defende que esta teoria não está operacionalizada para estudar um sistema de actividade num contexto de ensino, acrescentando que sentiu necessidade de desenvolver uma linguagem de descrição da Teoria da Actividade com a qual pudesse investigar as observações da sala de aula.

Para Kaptelinin (1996), a falta de um método padrão para aplicar a Teoria da Actividade poderá ser atribuída ao facto de que há vários princípios básicos da Teoria da Actividade nos quais uma análise da actividade se pode basear. Como resultado, os princípios da Teoria da Actividade têm sido interpretados e aplicados de diferentes formas em diversos contextos, servindo como fundamentação para a elaboração de outras teorias.

De facto, uma das maiores dificuldades para os investigadores que, como eu, começam a trabalhar com a Teoria da Actividade é encontrar um conjunto de procedimentos definidos para serem aplicados na sua investigação, uma vez que a Teoria da Actividade concebe uma estrutura conceptual, mas não fornece uma metodologia definida.

Embora esta teoria não apresente uma estrutura prévia de análise, têm sido desenvolvidos alguns princípios no sentido de fornecer um guia prático de procedimentos (“roteiro”) a seguir quando esta é utilizada.

São vários os autores que se têm dedicado à elaboração de tais “roteiros”, dos quais se destacam Kaptelinin (1996), Jonassen e Rohrer-Murphy (1999), Mwanza (2001) e Hardman (2008).

Depois de ter analisado algumas propostas, em especial as dos autores referidos, optei por seguir a metodologia proposta por Mwanza. Embora o modelo de Hardman estivesse mais direccionado para um contexto escolar, tendo o seu projecto sido aplicado num ambiente de sala de aula, não me pareceu ser o que melhor se adequava ao que pretendo com a presente investigação.

Mwanza (2001), investigadora na área da *Human Computer Interaction* (HCI) propôs uma metodologia em que o modelo triangular do sistema de actividade, proposto por Engeström, foi usado como um modelo que captura e unifica os conceitos da Teoria da

Actividade que são relevantes para análise das práticas de trabalho. Conforme ela própria refere, “o modelo triangular ofereceu um ponto de partida útil para interpretar e aplicar as ideias da Teoria da Actividade em relação à análise das práticas de trabalho numa organização” (2001, s/p).

Mwanza acreditou que usando este modelo para investigar a actividade humana iria colocar o seu estudo num contexto sociocultural da comunidade ao mesmo tempo em que daria atenção aos aspectos relacionados com a mediação das actividades por meio de ferramentas, regras e divisão do trabalho.

Método Orientado ao desenvolvimento da Actividade (*Activity-Oriented Design Method* (AODM))

O Método Orientado ao desenvolvimento da Actividade (*Activity-Oriented Design Method* (AODM)) foi descrito, pela primeira vez, em Mwanza (2001) e aperfeiçoado em Mwanza (2002). Tal metodologia pode ser desenvolvida através de seis fases e quatro ferramentas metodológicas, que têm como objectivo apoiar os processos de recolha de dados e a sua análise com base na Teoria da Actividade. Na tabela seguinte apresentam-se, de forma resumida, essas quatro ferramentas:

MÉTODO ORIENTADO AO DESENVOLVIMENTO DA ACTIVIDADE ACTIVITY-ORIENTED DESIGN METHOD (AODM)	
FERRAMENTAS	DESCRIÇÃO
Modelo dos Oito Passos	O Modelo dos Oito Passos operacionaliza o modelo triangular da actividade de Engeström, traduzindo os vários componentes da actividade em estudo, através de oito questões.
Notação da Actividade	A Notação da Actividade é reforçada por três orientações operacionais que facilitam: <ul style="list-style-type: none"> • As abstracções durante a análise, permitindo a decomposição do sistema de actividade principal em triângulos de subactividade. • A redução da complexidade cognitiva ao analisar um sistema de actividade decomposto em triângulos de subactividade. Estes triângulos menores partilham o objecto do sistema de actividade principal. • A análise das relações dentro e entre os vários componentes do sistema de actividade principal com o objectivo de identificar contradições. • A formulação de perguntas de investigação com base nos triângulos de subactividade.
Formular questões de investigação	A técnica de formular questões de investigação operacionaliza os triângulos de subactividade resultantes do processo de decomposição, com o objectivo de ajudar na recolha dos dados e na sua análise duma perspectiva da Teoria da Actividade.
Mapeamento de processos operacionais	A técnica de mapeamento de processos operacionais ajuda a compreender a estrutura de execução do AODM, tornando os processos operacionais, os componentes e as suas relações explícitos, melhorando e facilitando, assim, o seu uso.

Tabela 1 – The Activity-Oriented Design Method (AODM)

Extraído de (Mwanza, 2002, p. 189)

Estas quatro ferramentas podem ser aplicadas iterativamente num processo composto por seis etapas, que a seguir se descreve:

Etapa 1: Interpretar a situação a ser estudada em termos da Teoria da Actividade

O estudo começa pela interpretação dos vários componentes do modelo triangular da actividade que representa a situação que está a ser investigada. Nesta etapa, é usado o Modelo dos Oito Passos para dar suporte ao processo de traduzir o modelo triangular do sistema de actividade para uma situação em que possa ser inicialmente examinado. Este modelo incorpora questões abertas, baseadas nesses componentes, concebidas para facilitar a interpretação da situação a ser analisada. O Modelo dos Oito Passos está representado na tabela seguinte:

MODELO DOS OITO PASSOS		
IDENTIFICAR:		QUESTÕES:
Passo 1	Actividade de interesse	Em que tipo de actividade estou interessado?
Passo 2	Objecto ou Objectivo	Por que razão se realiza esta actividade?
Passo 3	Sujeitos	Quem está envolvido na realização desta actividade?
Passo 4	Instrumentos	Por que meios os sujeitos realizam esta actividade?
Passo 5	Regras e Regulamentos	Existem normas culturais, regras ou regulamentos que regem o desenvolvimento desta actividade?
Passo 6	Divisão do Trabalho	Quem é responsável por quê, quando exercem esta actividade e como estão distribuídas as funções?
Passo 7	Comunidade	Em que ambiente se realiza esta actividade?
Passo 8	Resultados	Qual é o resultado esperado com a realização desta actividade?

Tabela 2 – Modelo dos Oito Passos
Extraído de (Mwanza, 2002, p. 128)

Estas perguntas podem ser representadas, de forma esquemática, no modelo triangular da actividade, como se mostra na seguinte figura:

Em que tipo de actividade estou interessado?

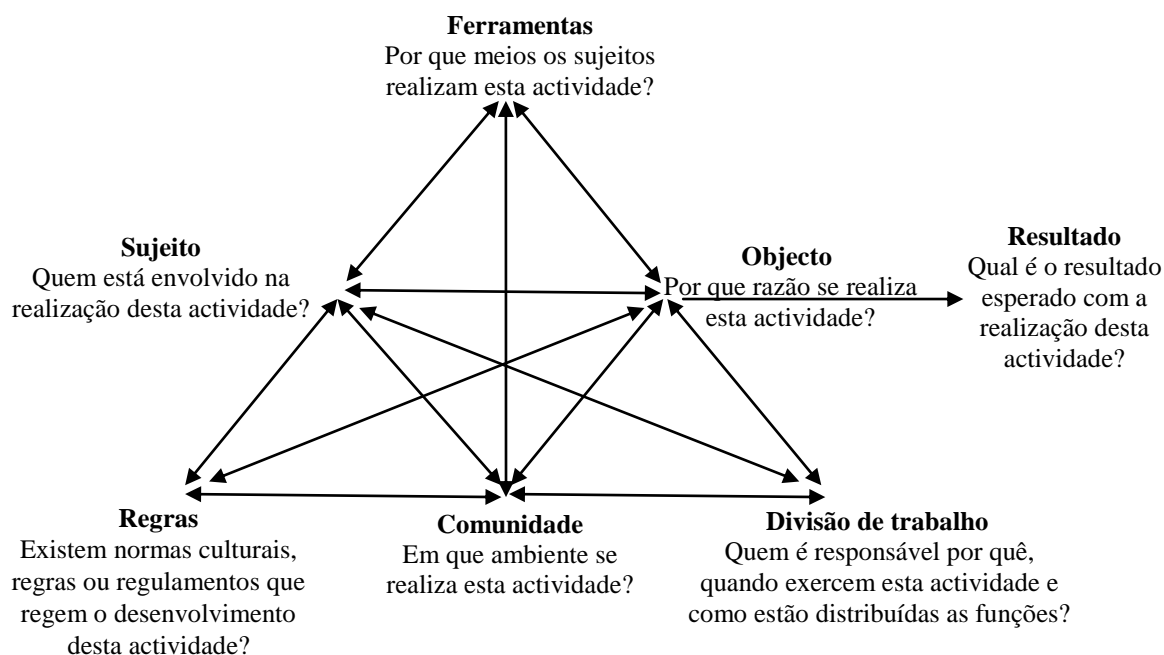


Fig. 19 – Sistema de Actividade de Engeström/Modelo dos Oito Passos

Etapa 2: Modelar a situação em estudo

As respostas obtidas na 1ª etapa são agora usadas para modelar a situação em estudo, tendo como objectivo construir o modelo triangular do sistema de actividade. Este processo permitirá ao investigador adquirir um conhecimento básico sobre a situação, além de permitir interpretar e verificar a exactidão dos dados recolhidos.

Tal proposta é necessária para que seja feito um mapeamento da situação que está sob investigação e que um sistema de actividade seja produzido. “Tal conduta ajuda a identificar áreas a serem focadas durante a investigação e também decidir que recursos serão necessários durante a análise” (Mwanza, 2001, s/p).

Etapa 3: Decompor a situação

O sistema de actividade produzido na etapa anterior pode ser bastante complexo uma vez que incorpora as subactividades que, juntas, compõem o sistema de actividade principal em análise.

Assim, conforme aponta Mwanza (2002), esta ferramenta da AODM não consegue capturar informações detalhadas sobre as relações existentes entre os vários componentes

do triângulo de actividade, o que representa uma limitação deste modelo. E, para que seja possível tirar conclusões significativas da análise dos dados, é necessário compreender as relações existentes dentro e entre os diferentes componentes do sistema de actividade.

Daqui surge a necessidade de introduzir uma nova ferramenta que ajude na decomposição do sistema de actividade principal em subactividades menores. É então desenvolvida uma ferramenta metodológica adicional, a *Notação de Actividade*, representada na tabela 3:

ACTORES	MEDIADOR	OBJECTO
Sujeitos	Ferramentas	Objecto
Sujeitos	Regras	Objecto
Sujeitos	Divisão do trabalho	Objecto
Comunidade	Ferramentas	Objecto
Comunidade	Regras	Objecto
Comunidade	Divisão do trabalho	Objecto

Tabela 3 – Notação da Actividade
Extraído de (Mwanza, 2002, p. 152)

Nas palavras de Mwanza (2001), três “regras de ouro” orientam a *Notação da Actividade*. Segundo essas regras, cada combinação dos elementos na *Notação da Actividade* deve conter:

- (1) um *Actor*, representado pelo *Sujeito* ou pela *Comunidade*;
- (2) um *Mediador*, representado pelas *Ferramentas*, *Regras* ou *Divisão do trabalho*;
- (3) um *Objecto*, no qual a actividade é focada.

Cada representação dentro da *Notação da Actividade* representa um triângulo de subactividade completo. Por exemplo, a representação do subsistema *Sujeitos/Regras/Objecto* pode ser analisada em termos de aplicação das *Regras* e quais as suas implicações nos *Sujeitos*, na realização dos *Objectivos*.

Mesmo que a introdução da técnica de decomposição do sistema de actividade, através da *Notação da Actividade*, ajude a reduzir a sua complexidade, esta decomposição não fornece orientação sobre como analisar as relações nas várias subactividades de um

sistema de actividade. Para colmatar esta lacuna, Mwanza desenvolveu uma terceira ferramenta, tendo como propósito a formulação de perguntas de investigação com base nas várias combinações da *Notação da Actividade*.

Etapa 4: Formular questões de investigação

Nesta etapa, são formuladas questões de investigação com base nos sistemas de subactividade, ou componentes, que resultaram da decomposição feita na etapa anterior. Estas questões, que podem ser gerais ou específicas a uma determinada situação, poderão ser usadas para apoiar na recolha dos dados e na respectiva análise. Na tabela seguinte, apresentam-se alguns exemplos de perguntas:

SEIS QUESTÕES DE INVESTIGAÇÃO GERAIS

- ✓ Que *ferramentas* os *sujeitos* usam para atingir o seu *objectivo* e como são usadas?
- ✓ Que *regras* afectam o modo de os *sujeitos* atingirem os seus *objectivos* e como afectam?
- ✓ Como é que a *divisão de trabalho* influencia o modo de os *sujeitos* atingirem os seus *objectivos*?
- ✓ Como é que as *ferramentas* afectam o modo de a *comunidade* atingir o seu *objectivo*?
- ✓ Que *regras* afectam o modo de a *comunidade* satisfazer o seu *objectivo* e como o afectam?
- ✓ Como é que a *divisão de trabalho* afecta o modo de a *comunidade* atingir o seu *objectivo*?

Tabela 4 – Exemplos de questões de investigação gerais

Extraído de (Mwanza, 2002, p. 155)

Etapa 5: Conduzir uma investigação detalhada

Uma investigação rigorosa é conduzida a partir das questões geradas na etapa anterior. Tais perguntas servem para direccionar o que procurar e orientam o que buscar durante a observação e o que perguntar nos questionários e entrevistas.

Além de ajudar no processo de recolha de dados, as questões formuladas na etapa 4 também podem ser usadas para orientar o que procurar durante a análise dos dados, ajudando a dar sentido aos dados recolhidos. “Durante a análise dos dados, o AODM

centra-se na identificação de possíveis contradições¹⁴ nas relações dentro e entre as várias subactividades que existem no sistema de actividade principal” (Mwanza, 2002, p. 192).

Engeström (1987) enfatiza a importância das contradições para ajudar a entender como um sistema de actividade funciona e, nesta investigação, os dados serão analisados, também, em termos de *contradições* pois parece-me uma das melhores maneiras de perceber e dar sentido ao que acontece dentro e entre os sistemas de actividade.

Mwanza acrescenta, ainda, que esta metodologia não tem como objectivo encontrar ou prever possíveis soluções para as contradições identificadas, mas, em vez disso, pretende compreender, de uma perspectiva histórica cultural e social, por que meios essas contradições se desenvolveram.

Depois de reunidos e analisados os dados, a próxima e última etapa consiste em interpretar e dar a conhecer as conclusões.

Etapa 6: Interpretar e comunicar as conclusões

Embora as ferramentas do AODM apresentadas permitam ao investigador adquirir uma compreensão das situações investigadas, metodologicamente ainda não está claro de que modo as várias técnicas se interligam. Para resolver esse problema, Mwanza (2002) concebeu uma quarta ferramenta, o *Diagrama para Mapeamento de Processos Operacionais*. Esta ferramenta apresenta os resultados da etapa 4 em forma de esquema, com indicações visuais claras das perguntas de investigação formuladas, bem como as áreas de contradição que se tornaram aparentes, facilitando a compreensão do processo, bem como dos resultados.

Os procedimentos descritos, no início deste capítulo, deram origem aos dados que serão analisados e discutidos no próximo capítulo, através dos métodos acima mencionados.

¹⁴ A noção de *contradições* foi analisada na secção 3.1.3.

5. ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS

A análise dos dados será feita à luz da Teoria da Actividade de Engeström (1987), seguindo, de forma adaptada, o esquema metodológico sugerido por Mwanza (2001, 2002).

As questões previstas no Modelo dos Oito Passos, proposto por Mwanza, servirão de suporte à análise dos dados:

1. Em que tipo de actividade estou interessada?
2. Por que razão se realiza esta actividade?
3. Quem está envolvido na realização desta actividade?
4. Por que meios os *sujeitos* realizam esta actividade?
5. Existem normas culturais, *regras* ou regulamentos que regem o desenvolvimento desta actividade?
6. Quem é responsável por quê, quando exercem esta actividade e como estão distribuídas as funções?
7. Em que ambiente se realiza esta actividade?
8. Qual é o *resultado* esperado com a realização desta actividade?

Como já foi referido, esta investigação tem como objectivo caracterizar a aprendizagem da Matemática quando mediada por problemas históricos da Matemática e pelo questionamento da professora.

De acordo com o exposto na secção 3.1.2, importa salientar a interpretação dada por Leontiev à noção de actividade. Leontiev explica que uma actividade é uma série de acções e operações, com um motivo e um objectivo (Leontiev, 1978). Por que faço isto? É o motivo. Para que o faço? É o objectivo. Como atingir esse objectivo? Realizando acções, que requerem operações. Uma actividade tem uma eficácia e um sentido, sendo eficaz quando as operações permitem chegar ao resultado pretendido. O sentido da actividade, segundo este autor, depende da relação entre o motivo e o objectivo. Quando ambos coincidem, trata-se de uma actividade; caso contrário, é apenas uma acção. Leontiev dá o seguinte exemplo: Ler um livro para preparar um exame, é uma acção e não uma actividade, pois o motivo (o exame) não coincide com o objectivo da acção (conhecer o conteúdo do livro). Ler o livro por interesse pelo conteúdo (motivo), trata-

se de uma actividade. Esta distinção entre acção e actividade é interessante por destacar as eventuais discrepâncias entre os resultados de uma acção e o seu motivo real.

Na aprendizagem da Matemática e, em especial, nas aulas observadas nesta investigação importa ressaltar esta distinção.

Os alunos que participaram nesta actividade, a princípio fizeram-no por obrigação, uma vez que tinham que frequentar as aulas de Matemática para não serem penalizados ao nível da assiduidade. Depois, uma vez que tinham que estar na sala, iam participando nas actividades propostas; alguns deles faziam-no porque até gostam de aprender mas, a maioria deles, era movido pelo objectivo de tirar positiva na disciplina e/ou não serem castigados pelos pais. Os primeiros estavam, de facto, envolvidos numa actividade; para os outros, tratava-se apenas de uma acção.

Na perspectiva de Leontiev, o sujeito age por meio de intenções, por acções planeadas. Então, no acto educativo, o professor, agindo como mediador, deve planear as suas actividades de tal forma que os seus alunos possam sentir-se envolvidos. Assim, se o professor conseguir trabalhar o processo de ensino e aprendizagem desta maneira estará realizando uma actividade de aprendizagem, caso contrário, é apenas uma actividade de ensino. Importa salientar que, para o professor, será sempre uma actividade de ensino.

Neste caso, o acto de planear desempenhado pelo professor envolve, também, o desenvolvimento de estratégias que possam motivar o aluno, que o envolva no processo de ensino e aprendizagem.

Na situação em análise, a estratégia utilizada pela professora com o objectivo de motivar os alunos foi a integração da História da Matemática na sala de aula, através dos problemas históricos, dando mais ênfase ao papel activo dos alunos em detrimento do papel expositivo da professora. De facto, as fichas de trabalho com os problemas históricos e a realização das actividades em pares ou em grupo suscitaram interesse nos alunos e, com o passar das aulas, o motivo inicial foi-se transformando e foram surgindo outros motivos.

A professora constatou que muitos dos alunos que, no início do ano, participavam nas tarefas propostas por obrigação, começaram a apreciar o tipo de tarefa proposto e o seu envolvimento na realização das mesmas aumentou. Frequentemente, alguns desses alunos perguntavam, no início da aula, “Professora, hoje vamos fazer mais uma daquelas fichas?” Além disso, alguns alunos que nas aulas “tradicionais” não

participavam activamente na realização das tarefas propostas nem se voluntariavam para ir ao quadro, começaram a fazê-lo. Ora, isto é indiciador de que os alunos não trabalhavam na aula de Matemática apenas para terem bons resultados nos testes e/ou para satisfazerem as vontades dos pais. Na verdade, demonstra interesse e gosto em aprender os conteúdos leccionados através de uma participação eficaz e empenhada na resolução dos problemas propostos nas fichas de trabalho.

Para estes alunos, o objectivo da acção transformou-se no motivo e, por isso, a acção transformou-se em actividade.

Para proceder à análise e discussão dos dados pareceu-nos mais vantajoso e coerente fazer uma abordagem por tópicos matemáticos. Assim, os episódios apresentados serão seleccionados e organizados de acordo com o conteúdo matemático a que dizem respeito, o que poderá, muitas vezes, não corresponder à ordem cronológica em que aconteceram.

Os conteúdos matemáticos abordados nas aulas analisadas foram, de um modo geral, Teorema de Pitágoras, Sequências e Equações e problemas. Note-se, no entanto, que os conteúdos matemáticos não são estanques e, por isso, nalgumas situações ocorrerá a interligação de dois ou mais conteúdos, além do surgimento pontual de outros conteúdos.

5.1. Compreendendo o Teorema de Pitágoras através da história

Neste ano lectivo, seguindo a planificação anual para o 8º ano, elaborada pelos professores de Matemática, o primeiro tema a leccionar foi o Teorema de Pitágoras.

Este tema foi introduzido com a demonstração “tradicional” deste teorema, em que é pedido aos alunos para compararem a área do quadrado construído sobre a hipotenusa de um triângulo rectângulo com a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos, recorrendo a uma folha quadriculada. Depois, foram propostos alguns exercícios de aplicação directa.

No início da aula foi entregue aos alunos a ficha de trabalho nº 1 (ver anexo C.1), ao que se seguiu uma pequena introdução sobre o que era pretendido com esta ficha de trabalho e uma abordagem aos documentos históricos referidos na mesma. Os alunos sentiram alguma curiosidade e, em vez de começarem a resolver o primeiro

problema, como costuma acontecer, estiveram a analisar, de forma superficial, o resto da ficha. Deste breve contacto com a ficha, surgiram algumas questões e constatações:

[1] **M:** Estes documentos (papiros) existem mesmo?

[2] **Prof:** Existem e estão em Museus; o papiro do Cairo chama-se assim porque está no Museu do Cairo, as placas têm um número de série e uma sigla que representa o local onde estão arquivadas. Por exemplo, BM significa que está no British Museum (Museu Britânico), VAT indica que está no Museu de Berlim, AO representa o Museu do Louvre,

Depois, outro aluno disse, muito admirado:

[3] **Da:** Então, não foi o Pitágoras que inventou o Teorema de Pitágoras?!

[4] **Prof:** Pitágoras foi quem o demonstrou pela primeira vez, mas não foi o primeiro a usá-lo, pois os egípcios e os babilónios já o tinham usado cerca de 1000 anos antes de Pitágoras!

[5] **T:** Então, não devia chamar-se Teorema de Pitágoras!

O comentário feito em [5] foi muito perspicaz e permite chamar a atenção para o facto de que os alunos aprendem um teorema ou um conceito matemático e pensam que o nome vem de quem o inventou. Geralmente é o que acontece, mas, este caso, é excepção, pois há evidências históricas de que a relação $h^2 = c^2 + c^2$ já era conhecida dos egípcios e dos babilónios, muito antes de Pitágoras.

Note-se que este comentário tem toda a razão de ser, sendo mesmo corroborado por alguns estudiosos, como por exemplo, Heath, que defende que “o Teorema do triângulo rectângulo é um melhor nome do que o Teorema de Pitágoras, porque nada no registo do seu tempo relaciona Pitágoras com o Teorema” (1981, vol. 1, p. 144-147 apud Lumpkin, 1997, p. 13).

É importante que os alunos tenham conhecimento destes factos históricos, o que lhes proporciona uma visão da Matemática como uma ciência em evolução e não como “uma coisa pronta e acabada” (Vianna, 1998, p. 67).

Depois, outro aluno perguntou:

[6] **M:** O Leonardo de Pisa não é aquele da sequência 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...?

[7] **Prof:** É a famosa sequência dos coelhos.

[8] **M:** Dos coelhos? - perguntou, admirado.

[9] **Prof:** Numa das próximas aulas iremos falar nessa sequência.

[10] **M:** Ele disse que havíamos de encontrar sempre estes números na natureza.

Este aluno é muito curioso e costuma ler bastante e ver muita televisão, onde aprende sobre vários assuntos. Muitos professores queixam-se, em Conselho de Turma, que ele é “inoportuno”, pois interrompe as aulas com perguntas que, às vezes, não têm a ver com a aula. Por acaso, esta opinião não é partilhada pela professora de Matemática.

No entanto, a professora tinha aqui uma boa oportunidade para falar da concha do caracol e da divina proporção, entre muitas outras coisas, mas, com receio de “perder tempo”, não aproveitou essa oportunidade e continuou a resolução da ficha de trabalho, ignorando o comentário feito em [10]. A professora deparou-se com um dilema e não aprofundou a ideia lançada pelo aluno (adiando para uma aula posterior) porque, se o fizesse, não conseguiria concluir a ficha de trabalho que tinha planeado para aquela aula, correndo o risco de “atrasar-se”, ainda mais, no cumprimento da planificação. Esta planificação foi elaborada, no início do ano lectivo, pela professora e pelos restantes colegas do grupo disciplinar (inserido no Departamento de Matemática) e deveria ser cumprida ao longo do ano. Além disso, também podia ter falado mais um pouco sobre esta sequência, mas, pelas mesmas razões, cortou a conversa com a resposta dada em [9] (referindo-se à ficha de trabalho sobre as sequências que seria resolvida numa das aulas seguintes).

Depois destas considerações iniciais, os alunos, trabalhando aos pares ou em grupos de três, iniciaram a resolução da ficha, resolvendo a seguinte questão (questão 1 do anexo acima referido):

“Uma vara de 10 cúbitos tem a sua base afastada 6 cúbitos. Determina a sua nova altura e a distância que o cimo da vara baixou.” (Papiro do Cairo)

A resolução deste problema suscitou muitas dúvidas pois os alunos revelam imensas dificuldades na interpretação dos problemas. Estas dificuldades surgem, provavelmente, porque os alunos não estão habituados a resolver este tipo de problemas, em que têm que os traduzir da linguagem corrente para a linguagem matemática. Note-se que, nos manuais do 8º ano, as questões relacionadas com o Teorema de Pitágoras são colocadas de uma forma directa pois, geralmente, já vêm acompanhadas da figura.

Devido às dificuldades manifestadas pelos alunos, a professora sugeriu que fizessem uma figura, mas, mesmo assim, muitos alunos não conseguiram representar

este problema através de uma figura. Dado que a maioria dos alunos estava com esta dificuldade, a professora fez um triângulo no quadro para o representar.

Logo que viram o triângulo desenhado, praticamente todos os alunos conseguiram calcular o cateto. Mas, alguns responderam de forma incompleta, pois diziam apenas que a nova altura seria 8 cúbitos e não diziam que a vara baixou 2 cúbitos.

Alguns alunos comentaram: “A figura ajudou muito. Sem a figura, não teria conseguido resolver o problema!” De facto, depois de desenhada a figura, o que inicialmente era um problema passou a ser um simples exercício de aplicação do Teorema de Pitágoras.

Desenhar uma figura é uma estratégia bastante útil para a resolução de muitos problemas. A professora aproveitou este momento para alertar para a importância desta estratégia, referindo que, em muitos casos, depois de representar correctamente o problema através de uma figura adequada, este transforma-se num elemento de exercício, como aconteceu neste caso.

Nesta situação, ressalta o conceito de Zona de Desenvolvimento Potencial (ZDP), abordado na secção 3.1.3. A ajuda dada pela professora ao sugerir a representação dos problemas através de uma figura contribuiu para despoletar a Zona de Desenvolvimento Potencial dos alunos, ajudando-os, assim, a resolverem o que, inicialmente, era um problema. Muitos deles, sem esta dica, não teriam conseguido resolver o problema, mas bastou uma pequena ajuda para que o conseguissem perceber e resolver. Claro que houve alunos para os quais essa ajuda não foi suficiente e é aí que se notam as diferentes Zonas de Desenvolvimento Potencial de cada aluno.

[11] **T:** Estes exercícios são mais difíceis do que os que aparecem no livro. – desabafou um aluno.

Uma das maiores dificuldades reveladas pelos alunos prende-se com a interpretação dos problemas. Muitos dos problemas históricos propostos nestas fichas de trabalho constituíram um desafio para os alunos, na medida em que estes revelaram mais dificuldades em os interpretar e resolver do que os tradicionais exercícios de aplicação directa.

Depois, por comparação com as questões já resolvidas, os alunos foram conseguindo resolver a ficha. Aqui, está presente o conceito de imitação, referido por Vygotsky (1978). Segundo este autor, “uma pessoa só é capaz de imitar o que está ao alcance do seu nível actual de desenvolvimento” (p. 88). Nesta situação, os alunos, por imitação, foram capazes de resolver os problemas idênticos aos resolvidos sob orientação da professora, quando se mantinha o mesmo grau de dificuldade.

À medida que a professora se apercebia que praticamente todos os grupos/pares já tinham resolvido um determinado exercício, perguntava se alguém queria ir ao quadro corrigir. Dos vários alunos que se voluntariavam, a professora seleccionava um, seguindo alguns critérios. Um desses critérios consistia em evitar que o mesmo aluno fosse ao quadro mais do que uma vez na mesma aula; outro, baseava-se em escolher o aluno que costumava revelar mais dificuldades ou o aluno menos participativo e, outro critério, embora menos utilizado, dizia respeito a escolher o primeiro aluno a colocar o dedo no ar.

Em relação às questões 9, 10 e 11, os alunos acharam os nomes *Gou* e *Gu* engraçados e resolveram-nas sem dificuldades, e alguns deles até disseram:

[12] **Alunos:** Isto é sempre a mesma coisa!

Este comentário mostra que a ficha de trabalho não está bem elaborada, uma vez que está repetitiva, tornando-se aborrecida e desmotivante para os alunos, o que representa um obstáculo à sua resolução. A professora apercebeu-se deste problema no decorrer da aula, pela reacção e comentários dos alunos e, nas suas notas de campo (no papel de investigadora), pode ler-se: “Devo fazer as próximas fichas de trabalho mais pequenas, e com problemas mais variados, porque torna-se aborrecido a resolução de tantos exercícios análogos”.

Entretanto, a aula terminou e a conclusão da resolução da ficha ficou para a aula seguinte.

Na aula seguinte, os alunos começaram a resolver o problema que se segue (problema 13 do anexo C.1):

“Se a base de um triângulo rectângulo é 12, descubra os números inteiros que são a sua altura e hipotenusa.” (*Lilavati* de Baskara)

Mas, para o resolver, a maioria dos alunos dizia que faltavam dados.

[13] **N:** Para aplicar o Teorema de Pitágoras temos que conhecer dois lados do triângulo e, neste caso, só sabemos que um cateto é 12!

[14] **Prof:** Tens razão! Isso significa que temos que pensar antes de aplicar o Teorema de Pitágoras. Este problema tem que ser resolvido por tentativa e erro. Temos que experimentar valores até encontrar o pretendido e até pode haver mais do que uma solução.

A afirmação feita em [14] “assassinou a tarefa”! A professora deveria ter deixado os alunos chegarem, sozinhos, à conclusão de que o problema só poderia ser resolvido por tentativas. Além disso, também não deveria ter dito que o problema poderia ter mais do que uma solução. Uma característica importante deste problema é, precisamente, a possibilidade de haver mais do que uma resposta e teria sido interessante verificar se os alunos obtinham respostas diferentes e se apercebiam que, embora diferentes, estavam correctas. Mais uma vez, a professora sentiu-se pressionada para cumprir a planificação e foi essa tensão que a levou a agir assim.

Ao andar pela sala, a professora ouviu a seguinte discussão entre um grupo de alunos que tentava resolver este problema:

[15] **A:** Pode ser o 5 e o 7 ou o 3 e o 9. Há muitas respostas!

[16] **N:** Não pode ser! A hipotenusa é que é a soma dos outros dois lados e o 12 não é a hipotenusa, é um cateto.

[17] **H:** Estão a pensar mal, porque tem que ser ao quadrado!

[18] **Prof:** Muito bem!

E, olhando para os outros dois alunos, a professora alertou:

[19] **Prof:** Vocês têm que ter cuidado. Estão a cometer um erro muito frequente, pois esqueceram-se que a hipotenusa e os catetos têm que estar elevados ao quadrado!

Apesar da observação feita em [16] já ter contribuído para a resolução do problema, ainda estava errada, pois estes alunos, assim como muitos outros, esqueceram-se que quando aplicamos o Teorema de Pitágoras estamos a falar de áreas e, por isso, as medidas dos catetos e da hipotenusa têm de estar elevadas ao quadrado, constatação muito bem-feita pelo aluno H em [17].

Os comentários [16] e [17] mostram que estes alunos estavam a dar dicas, corrigindo a resposta errada dada em [15]. Os alunos que deram as respostas em [15] e [16], sozinhos, provavelmente não teriam conseguido resolver o problema mas, com a ajuda do colega mais capaz, ficaram no caminho certo para conseguirem chegar à solução correcta.

Os alunos, em interacção uns com os outros, são capazes de realizar tarefas que, individualmente, seriam incapazes de fazer. Nesta situação, é bem visível o papel desempenhado entre os pares no despoletar das Zonas de Desenvolvimento Potencial dos alunos com mais dificuldades.

Outro grupo de alunos chamou a professora para dizer que já sabiam a resposta e, ao chegar junto deles, a professora viu que estavam a cometer o mesmo erro. Então, a professora dirigiu-se para o quadro e alertou para toda a turma:

[20] **Prof:** O que diz o Teorema de Pitágoras?

[21] **H:** $h^2 = c^2 + c^2$

[22] **Prof:** Isto significa que tanto a hipotenusa, como os catetos, têm que estar elevados ao quadrado. Estão a perceber qual é o erro que muitos de vocês estão a cometer?

[23] **F:** Eu também estava a pensar da mesma maneira, mas já percebi o que está mal!

Depois, a professora desenhou um triângulo no quadro e escreveu 12 na base, dizendo:

[24] **Prof:** 12 ao quadrado é igual a ...

[25] **Da:** 144.

[26] **Prof:** Agora têm que descobrir quais são os valores possíveis para o outro cateto e para a hipotenusa.

Agora que os alunos tinham percebido o que era pretendido, gerou-se uma interessante actividade de carácter exploratório à volta deste problema. Este despertou interesse nos alunos e, com a ajuda da calculadora, tentavam encontrar números que satisfizessem a condição. Nesta situação, é evidente o papel de mediação desempenhado pelos problemas históricos, uma vez que contribuíram para motivar os alunos que demonstraram interesse na resolução dos problemas propostos. Se tivessem sido propostos problemas rotineiros de aplicação do Teorema de Pitágoras, muito provavelmente, não teriam exercido este papel mediador e motivador da aprendizagem.

Passado pouco tempo, o J. queria responder para toda a turma, mas a professora pediu-lhe que esperasse e dirigiu-se para ele, para que lhe dissesse baixinho:

[27] **J:** Se o outro cateto for $5,5^2 = 25$, se somarmos ao 144 dá 169 que é 13 ao quadrado!

[28] **Prof:** Muito bem! Será que não há mais nenhuma solução? Pensem nisso! [referindo-se ao J e ao seu colega].

A professora ia circulando pelos grupos, observando as suas resoluções. No entanto, apercebeu-se que a maioria dos alunos não tinha arranjado uma estratégia para

o resolver, escolhendo números de uma forma aleatória. Assim, não seria muito fácil chegarem à resposta.

Num dos grupos, uma aluna propunha uma estratégia à colega:

[29] **An:** Já sei! E se fizermos com os números seguidos. Primeiro, somamos 1^2 , depois 2^2 e vamos vendo quando é que o resultado dá o quadrado de um número.

[30] **F:** E como é que eu sei que o resultado é um número ao quadrado?

[31] **An:** Fazes a raiz quadrada, como a professora ensinou no ano passado.

Uma aluna solicitou a ajuda da professora:

[32] **V:** Isto é muito confuso. Já experimentei muitos números e nunca dá!

[33] **Prof:** Se calhar não arranjaste a melhor maneira para escolher os números...

Como a professora se apercebeu que os alunos não estavam a ser organizados na resolução deste problema, alertou para o grande grupo:

[34] **Prof:** Se vocês escolherem números à sorte podem demorar muito a encontrar a resposta e até podem não a encontrar. Também podem descobrir a resposta logo à primeira, mas isso é pouco provável.

A professora aproveitou esta ocasião para abordar mais uma estratégia de resolução de problemas. Salientou que, antes de começarem a fazer cálculos “à sorte”, teriam que pensar na melhor maneira de fazerem esses cálculos. Alertou para a importância de arranjarem uma maneira organizada de experimentarem os números, para não os repetirem nem se esquecerem de algum.

Depois desta sugestão, a pouco e pouco, os alunos foram concluindo que se somassem 5^2 , obteriam o quadrado de um número. E, à medida que iam chegando a essa solução, a professora questionava se não haveria mais nenhuma solução.

Mas, como nenhum grupo estava a conseguir encontrar outra solução (o próximo número a adicionar seria 9^2 , a seguir 16^2 e depois 35^2)¹⁵ a professora disse para continuarem esta procura em casa.

De seguida, a professora solicitou aos alunos para começarem a resolver a questão seguinte (questão 14 do anexo C.1):

“Se o quadrado da hipotenusa é 85, descobre os números inteiros que são os outros lados.”
(Lilavati de Baskara)

¹⁵ É possível encontrar todos os ternos pitagóricos usando a seguinte regra, proposta por Euclides no Livro X dos seus *Elementos*: “Suponha que m e n são inteiros positivos, com $m < n$, então $(2mn, n^2 - m^2, n^2 + m^2)$ é um terno pitagórico” (ver anexo A.3).

Foi dado algum tempo para que os alunos tentassem resolver este problema enquanto a professora circulava pela sala, tirando dúvidas e observando as resoluções dos alunos.

Constatou, satisfeita, que a maioria dos alunos não estava a experimentar números à sorte, como no exercício anterior, mas tentavam resolvê-lo de uma forma sistemática e organizada. Por exemplo, num dos grupos, os alunos começaram por escrever os quadrados dos números de 1 a 10 e, depois, faziam somas de modo a obter 85. Quando a professora se aproximou, um aluno deste grupo deu a seguinte resposta:

[35] **N:** 4 mais 81 dá 85.

E um colega de outro grupo próximo ouviu a resposta do N e acrescentou:

[36] **Da:** 36 mais 49 também dá 85.

[37] **Prof:** As duas respostas estão correctas! Será que há mais alguma?

[38] **C:** Não pode ser 1 mais 84?! – disse um aluno de outro grupo ao lado.

[39] **Prof:** Há algum número que ao quadrado dê 84?

[40] **C:** Não.

[41] **Prof:** É por isso que não pode ser o 84. Percebeste por que razão os números têm que estar elevados ao quadrado?

[42] **C:** Porque é o que diz o Teorema de Pitágoras: $h^2 = c^2 + c^2$.

No problema 13, a professora teve a oportunidade de chamar a atenção para a importância da organização na resolução de um problema, e os alunos tiveram isso em conta ao resolverem o problema 14. Estas duas questões permitiram que os alunos trabalhassem ao nível do desenvolvimento do raciocínio matemático, como é sugerido no Novo Programa de Matemática, pois a promoção do raciocínio constitui um objectivo central da aprendizagem para além de constituir uma importante orientação metodológica (DGIDC, 2007).

Geralmente, é pedido aos alunos que resolvam exercícios de aplicação directa do Teorema de Pitágoras, em que são conhecidos dois lados do triângulo rectângulo e é-lhes pedido para determinar o terceiro lado. Quando os problemas são colocados da forma apresentada nos problemas anteriores, os alunos não os conseguem resolver de forma automática pois apercebem-se que faltam dois lados e, por isso, não podem aplicar directamente o Teorema de Pitágoras. Perante esta situação têm que pensar (raciocinar) para encontrar uma forma de descobrir os dois lados que faltam, o que terá que ser feito por tentativas, podendo haver mais do que uma solução.

Olhando para as duas questões acima referidas, importa salientar que a sua ordem não foi muito bem escolhida. Teria sido mais coerente que a professora, ao elaborar a ficha, tivesse tido em conta o grau de dificuldade das questões e tivesse invertido a ordem. Provavelmente, se os alunos tivessem começado a resolver a questão 14 não teriam tido tantas dificuldades como tiveram no problema anterior e, por isso, esta inversão na ordem das questões representou um obstáculo à compreensão matemática dos alunos.

Esta dificuldade encontrada ultrapassa o contexto da sala de aula e envolve outros sistemas de actividade que intervêm no processo de ensino e de aprendizagem como as editoras dos manuais. Geralmente, os manuais escolares não fazem uma correcta integração da História da Matemática e, por isso, a professora teve necessidade de elaborar as fichas de trabalho com os problemas históricos. Mas, na elaboração das mesmas, deparou-se com dificuldades resultantes da falta de recursos e fontes donde tirar os problemas, além de falta de tempo para as fazer, o que conduziu a algumas falhas detectadas aquando a realização das mesmas, como a acima referida e o facto de os exercícios propostos serem repetitivos.

Os seguintes problemas da ficha podiam ser resolvidos com a ajuda de uma figura e os alunos lembraram-se dessa estratégia, que tinha sido abordada na aula anterior.

O problema 17 do mesmo anexo, com o seguinte enunciado:

“Num determinado chão estão dois postes, que estão afastados 12 pés. O poste mais pequeno tem de altura 35 pés e, o maior, 40 pés. Procura-se, se o poste maior cair sobre o mais pequeno, em que parte (do poste maior) tocará no mais pequeno.” (Liber Abaci de Fibonacci),

levantou muitas dúvidas e os alunos não estavam a conseguir interpretá-lo e representá-lo através de uma figura.

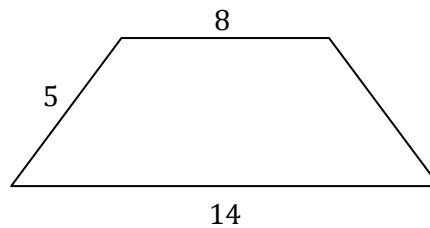
A professora teve que fazer uma figura no quadro para o explicar, o que até é aceitável pois é um problema relativamente difícil, tendo em conta que se trata de alunos de 12/13 anos.

Uma vez que este problema exigia uma maior capacidade de abstracção e raciocínio, os alunos tiveram dificuldade em resolvê-lo, mesmo comparando com a resolução dos problemas anteriores. Isto significa que os alunos não foram capazes de,

através da imitação, resolver um problema com um grau de dificuldade maior, talvez porque estivesse fora do alcance do seu desenvolvimento.

Ainda relativamente a este tema, a professora solicitou aos alunos que resolvessem o seguinte problema que se encontrava no manual:

Determina a área do trapézio isósceles representado na figura:



A fórmula para determinar a área de um trapézio já tinha sido abordada numa das aulas anteriores. Ao contrário do que seria de esperar, os alunos que costumam revelar mais dificuldades a Matemática não manifestaram dúvidas para calcular esta área. Este problema suscitou mais dúvidas aos ‘melhores’ alunos que solicitaram a ajuda da professora, dizendo que não sabiam qual era a altura.

Na verdade, o que aconteceu foi que alguns alunos começaram logo a aplicar a fórmula sem terem em atenção que o valor 5 do lado do trapézio não correspondia à sua altura, uma vez que esta tem que ser perpendicular às bases. Assim, não recorreram ao Teorema de Pitágoras para determinar a altura e a resposta, incorrecta, dada por muitos foi:

$$\frac{14 + 8}{2} \times 5 = 55.$$

Perante este erro comum e as dificuldades dos alunos que se aperceberam que não conheciam a altura, a professora encetou o seguinte questionamento:

- [43] **Prof:** C, qual é a altura do trapézio? – perguntou dirigindo-se a um aluno que tinha considerado que a altura era 5.
- [44] **C:** É 5.
- [45] **Prof:** Concordam com a resposta do C?
- [46] **M:** Não.
- [47] **Prof:** Porquê?
- [48] **M:** Porque a altura tem que ser perpendicular à base.
- [49] **Prof:** Então, qual é a altura?

[50] **T:** Temos que calcular!

[51] **Prof:** Como?

[52] **J:** Fazendo o Teorema de Pitágoras.

[53] **Prof:** Mas quais são as medidas que se conhece do triângulo rectângulo?

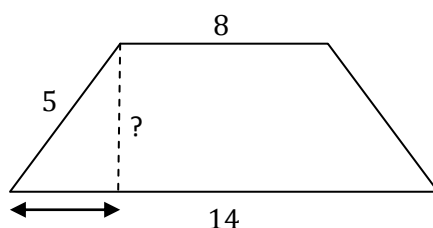
[54] **J:** A hipotenusa é 5.

[55] **Prof:** E o cateto?

[56] **J:** Também não sabemos!

[57] **Prof:** De certeza que não sabemos?

De seguida, a professora dirigiu-se ao quadro e, considerando o trapézio, realçou o triângulo como podemos ver na figura seguinte:



[58] **Prof:** Agora têm que descobrir quanto mede a base do triângulo.

[59] **M:** Ah! Já sei! É a diferença entre as duas bases do trapézio.

[60] **Prof:** Então é 6?

[61] **H:** Não, tem que ser metade para cada lado.

[62] **Prof:** Muito bem! Mas têm que ter em atenção que nem sempre é metade para cada lado. Só é assim porque o trapézio é isósceles.

[63] **T:** Eu não tinha conseguido chegar lá sozinho, mas o triângulo ajudou muito!

Depois de se aperceberem que 5 não era a altura e que a podiam calcular aplicando o Teorema de Pitágoras, os alunos não tiveram dificuldades em determinar o cateto que correspondia à altura e, de seguida, substituíram-no correctamente na fórmula da área do trapézio.

É interessante notar que os egípcios e os babilónios também cometiam o mesmo erro para determinar a área de um trapézio, como podemos ver no problema 52 do papiro de Rhind e na Placa babilónica YBC 7290 (ver anexos A.1 e A.2). Ora, um professor que tem conhecimento disto pode antever e compreender as dificuldades sentidas pelos alunos.

Relacionado com o Teorema de Pitágoras estão os ternos pitagóricos. Na ficha de trabalho nº 2 (ver anexo C.2) propõem-se uma interessante abordagem histórica deste tema.

Na aula em que foi trabalhada esta ficha, a professora começou por fazer uma introdução sobre o sistema de numeração babilónico. Mas, antes de ter explicado que os números eram escritos em base 60, um aluno fez a seguinte observação:

[64] **T:** Para escrever 1000, nunca mais acabavam!

Depois, a professora explicou que os números eram escritos em base 60 e, por isso, para escrever 1000 não era necessário usar muitos símbolos.

[65] **M:** É como a numeração romana!

[66] **Prof:** Na numeração romana existem mais símbolos; nesta numeração só há dois símbolos e a posição que ocupam é importante!

Na primeira questão, os alunos conseguiram, sem dificuldades, escrever os números 12, 35 e 47 em numeração babilónica. Mas, como já era previsível, revelaram mais dificuldades para escrever 85. Em notação sexagesimal, 85 teria que ser representado como $60 + 25$ e o símbolo usado pelos babilónios para representar 60 unidades era o mesmo que para representar uma unidade, sendo, por isso, expectável que gerasse muita confusão.

De seguida, os alunos começaram a preencher a tabela da Placa Plimpton (de que a seguir se apresentam as primeiras linhas).

b	$\left(\frac{c}{b}\right)^2$	c	a	#
120	0.9834028	119	169	1
3456	0.9491586	3367	4825	2
4800		4601	6649	3
13500		12709		4

Conseguiram preencher, sem grandes dificuldades, a segunda coluna, mas não estavam a conseguir chegar à relação entre as 1ª, 3ª e 4ª colunas.

A professora circulou pela sala enquanto os alunos iam trabalhando nesta tarefa e apercebeu-se das dificuldades sentidas por quase todos os alunos. A maior parte dos alunos fazia contas com as quatro operações elementares e nenhum aluno estava a conseguir ver a relação pretendida. Então, impaciente, a professora perguntou:

[67] **Prof:** Estas letras a , b e c não vos fazem lembrar nada?

[68] **H:** Fazem lembrar os ternos pitagóricos.

[69] **Di:** Os lados de um triângulo rectângulo. – respondeu outro aluno ao mesmo tempo.

[70] **J:** Então, para calcular os espaços em branco, temos que determinar a hipotenusa ou um cateto?!

[71] **Prof:** Exactamente!

A professora tinha planificado concluir a resolução da ficha naquela aula e, na sua ansiedade para que os alunos não demorassem muito a resolver o problema, em vez de dar ajudas subtis, ajudou demais com o comentário feito em [67], “assassinando a tarefa”. Esta situação é representativa dos conflitos sentidos pela professora na condução da realização das tarefas, uma vez que enfrentava o dilema entre dar mais tempo para os alunos resolverem as questões, correndo o risco de não concluir a ficha como tinha planeado ou, por outro lado, dar alguns “empurrões” para que os alunos resolvessem a ficha mais rapidamente.

Dado isto, todos os alunos foram capazes de preencher a tabela, porque deixaram de ter um problema e passaram a ter um simples exercício de aplicação do Teorema de Pitágoras.

Mais uma vez, a professora excedeu-se na sugestão feita. Era óbvio que ao fazer a pergunta em [67], tiraria aos alunos a oportunidade de descobrirem esta relação.

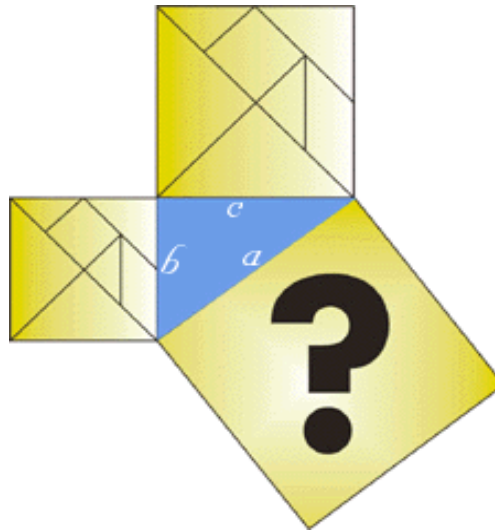
A professora estava ansiosa pelo facto dos alunos estarem a demorar muito tempo na resolução desta tarefa, mas este “problema” poderia ter sido contornado se a professora tivesse proposto aos alunos para concluírem a tarefa em casa.

Se a professora não se tivesse precipitado e tivesse dado mais algum tempo para os alunos a tentarem resolver (na sala ou em casa), muito provavelmente, alguns alunos teriam acabado por descobrir que se tratava dos lados de um triângulo rectângulo.

O que era um problema interessante passou a ser um mero exercício de aplicação directa do Teorema de Pitágoras. Com esta pergunta tendenciosa, a professora tirou aos alunos a possibilidade de sentirem a alegria da descoberta e de experimentarem a sensação que Arquimedes deve ter sentido quando proferiu a sua famosa exclamação, “Eureka! Eureka!”.

Na ficha de trabalho nº 3 (ver anexo C.3), que apelava ao uso do *Tangram*, era proposta a seguinte actividade:

“Constrói dois Tangrams, como está representado na figura, e coloca-os no quadrado sobre a hipotenusa para demonstrar a expressão $b^2 + c^2 = a^2$. ”



A professora disse aos alunos para resolverem esta tarefa em casa e a entregarem para avaliação. Apenas dois alunos entregaram mas não acertaram; usaram um triângulo isósceles mas o quadrado construído sobre a hipotenusa não possuía as dimensões correctas de modo a respeitar o Teorema de Pitágoras.

O J, um dos alunos com melhor desempenho na aula de Matemática, não entregou e disse:

[72] **J:** Eu tentei fazer para um triângulo de lados 3, 4 e 5, mas não consegui!

Este aluno é bastante esforçado e empenhado e esta resposta foi reveladora de um certo sentimento de frustração pelo facto de não ter conseguido resolver esta tarefa.

A professora tinha consciência que esta tarefa, em que se pretendia que os alunos demonstrassem o Teorema de Pitágoras usando dois *Tangrams*, era difícil para alunos do 8º ano. O comentário e a reacção deste aluno e o facto de nenhum outro aluno ter conseguido fazer esta demonstração é um indício de que esta actividade poderia estar fora do alcance do desenvolvimento de alunos do 8º ano e, além disso, os alunos nunca tinham feito nada parecido em que se pudessem basear e imitar.

Passadas algumas aulas, aquando a realização da ficha de trabalho nº 5 (ver anexo C.6), foi proposta aos alunos a seguinte tarefa, que também conduzia à demonstração do Teorema de Pitágoras¹⁶.

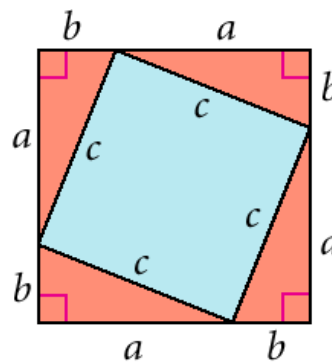
¹⁶Esta demonstração é uma adaptação da prova mais antiga deste Teorema que aparece na *Aritmética Clássica do Gnómon* (c. séc. III a. C.) (ver anexo A.4). No séc. XII, Baskara II também deu uma demonstração semelhante, famosa por ter apenas a figura e a palavra “Vê” (ver anexo A.5).

Considera a expressão: $(a + b)^2 - 4 \frac{ab}{2}$.

a) Simplifica a expressão dada.

b) O que representa a expressão relativamente à figura ao lado?

c) Usa a expressão para demonstrar o Teorema de Pitágoras.



Relativamente à primeira alínea, a professora ficou desiludida ao ver vários alunos fazerem $(a + b)^2 = a^2 + b^2$, depois de terem resolvido vários exercícios sobre casos notáveis e depois de a professora ter chamado à atenção para não cometerem este erro, muito frequente, que consiste em não considerar o dobro do produto dos dois termos.

A professora tomou consciência que, apesar das inúmeras advertências feitas, os alunos ainda não tinham compreendido o caso notável e continuavam a cometer este erro. Deparou-se com um obstáculo pois estava a sentir-se incapaz de fazer com que os alunos compreendessem este conteúdo. Na tentativa de ultrapassar esta situação, a professora arranjou outra estratégia para explicar o caso notável que consistiu em fazer a demonstração geométrica. No entanto, acabou de fazer a demonstração com a sensação que esta estratégia não surtiria o efeito desejado. Depois, alertou, novamente, para o facto de que $(a + b)^2 \neq a^2 + b^2$ e deu um exemplo concreto, com números.

Feita esta chamada de atenção, a professora foi solicitada pelos vários grupos devido às diversas dúvidas que iam surgindo. Muitos alunos estavam com dificuldade em reparar que $4 \frac{ab}{2} = 2ab$.

Passado algum tempo, alguns grupos começaram a chegar à conclusão que a expressão simplificada era igual a $a^2 + b^2$.

No que concerne à alínea b), alguns alunos conseguiram perceber logo que representava o quadrado de lado c ; no entanto, outros alunos tiveram muita dificuldade em chegar a essa conclusão.

Uma vez que vários grupos estavam a chamar a professora para tirar as mesmas dúvidas, a professora optou por fazer os esclarecimentos, no quadro, para o grande grupo. Para tal, orientou o seguinte questionamento:

[73] **Prof:** O que representa a expressão $(a + b)^2$?

[74] **A:** A área do quadrado grande, de lado $a + b$.

[75] **Prof:** E o que representa a expressão $4\frac{ab}{2}$?

[76] **M:** $\frac{ab}{2}$ representa a área de um triângulo, como são 4 triângulos, então aparece $4\frac{ab}{2}$.

[77] **Prof:** Muito bem! E a expressão $(a + b)^2 - 4\frac{ab}{2}$, o que representa?

[78] **M:** Representa o que sobra, que é o quadrado de lado c .

A professora voltou a explicar, pausadamente, para toda a turma pois sabia que ainda havia alunos que não tinham conseguido chegar a esta conclusão. Há alunos que têm muitas dificuldades em resolver exercícios de interpretação e aplicação de conhecimentos e, a maioria deles, revela imensas dificuldades em relacionar geometria e álgebra.

A questão c) suscitou muitas dificuldades. Os alunos sabiam que o Teorema de Pitágoras diz que $h^2 = c^2 + c^2$, mas tiveram dificuldades em relacionar isto com os dados da figura.

Depois de dar algum tempo para que os alunos, aos pares/grupo, conseguissem chegar a essa relação, a professora procedeu à sua resolução e discussão, em grande grupo, mesmo tendo a noção que muitos alunos ainda não tinham conseguido relacionar a figura com o Teorema de Pitágoras. Para tal, conduziu o seguinte diálogo:

[79] **Prof:** Qual é a área do quadrado de lado c ?

[80] **Alunos:** c^2 . – responderam os alunos em coro.

[81] **Prof:** Então, se considerarem um triângulo rectângulo de catetos a e b e hipotenusa c , e se aplicarem o Teorema de Pitágoras, o que obtêm?

[82] **C:** $c^2 = a^2 + b^2$.

[83] **Prof:** A que é igual a expressão $(a + b)^2 - 4\frac{ab}{2}$?

[84] **He:** $a^2 + b^2$.

[85] **Prof:** E o que representa em relação à figura?

[86] **He:** Representa a área do quadrado de lado c , como o M já disse.

[87] **Prof:** E essa área, qual é?

[88] **A:** c^2 .

[89] **Prof:** Logo ...

[90] **A:** $c^2 = a^2 + b^2$.

[91] **Prof:** E acabaram de provar o Teorema de Pitágoras!

A professora conduziu o diálogo de uma forma que levou, quase de imediato, às respostas pretendidas, não deixando aos alunos grande margem de descoberta autónoma. Estes não tiveram a oportunidade de discutir as resoluções nem descobrir as

soluções devido à excessiva orientação da professora. Esta actuação da professora está de acordo com uma natural tendência de ajudar os alunos quando têm dificuldades em vez de os questionar e orientar na descoberta dos conhecimentos. O papel de transmissor de conhecimentos parece estar, na percepção da maioria dos docentes e também dos alunos, intrínseco à actuação de professor, o que reduz as possibilidades de os alunos construírem activamente os seus próprios conhecimentos.

5.1.1. Sumariando

Nestas aulas há evidência de que os alunos que, inicialmente, participavam nas actividades propostas por obrigação começaram a alterar a sua postura perante estas aulas e, na verdade, perante a própria Matemática.

De facto, os alunos começaram por ir às aulas para não terem falta e para terem positiva à disciplina, mas, com o desenrolar das actividades propostas pela professora, com recurso aos problemas históricos da Matemática, estes começaram a interessar-se pela aprendizagem do Teorema de Pitágoras, participando de forma activa e motivada nas actividades propostas. Podemos considerar, por isso, que o motivo inicial foi-se transformando e outros motivos foram surgindo. Assim, nesta situação, o motivo e o objectivo passaram a ser o mesmo e, na perspectiva de Leontiev, pode dizer-se que os alunos estavam envolvidos numa actividade e não apenas numa acção.

Pelo exposto anteriormente, depreende-se que o resultado esperado pelos alunos com a realização desta actividade era aprender a aplicar o Teorema de Pitágoras para resolver problemas, e em especial problemas históricos da Matemática e também satisfazer alguma curiosidade sobre a História da Matemática, contrariamente ao resultado esperado no início da realização desta actividade que era apenas tirar positiva à disciplina para transitar de ano.

As *regras* regulam as acções do *sujeito* com vista a atingir o *objecto* e medeiam as relações do *sujeito* com os outros participantes na actividade. A percepção que os alunos tinham das aulas de Matemática, de uma forma geral, e com esta professora, em particular e a postura que foram demonstrando perante esta disciplina são consideradas regras pois estes factores influenciaram, de forma implícita, a sua maneira de actuar na actividade em questão.

A professora, neste ano lectivo, actuava de forma diferente da do ano anterior. Agora, apelava a uma maior participação dos alunos e evitava as aulas expositivas em

que debitava a matéria e os alunos eram “receptores” e não construtores do conhecimento. Houve uma mudança de regras em relação ao processo de ensino/aprendizagem da Matemática e à forma de actuar da professora. Os alunos, com o decorrer das aulas, foram tomando consciência desta mudança e, alguns deles, que no ano anterior não tinham oportunidade de participar, começaram a sentir-se mais à vontade para o fazer.

O contacto dos alunos com estes problemas e a sua história permitiu-lhes tomar consciência de que a Matemática é uma ciência muito antiga e em constante evolução. Aperceberam-se que já os povos de há quatro mil anos aplicavam o Teorema de Pitágoras para resolver problemas, o que tornou os problemas propostos mais aliciantes pois este facto contribuiu para desmistificar e humanizar a Matemática.

Além das fichas de trabalho com os problemas históricos que desempenharam um papel de mediação no processo de ensino e aprendizagem do Teorema de Pitágoras, na medida em que despertaram o interesse dos alunos como aconteceu com o problema 13, o questionamento da professora também foi de crucial importância para o sucesso da realização desta actividade pois contribuiu para atenuar as dificuldades sentidas pelos alunos.

Nos episódios analisados há evidência de que este papel de orientação e questionamento da professora revelou-se essencial para despoletar as Zonas de Desenvolvimento Potencial dos alunos, que com a ajuda da professora foram capazes de resolver problemas e situações que sem essa ajuda não teriam conseguido.

Note-se também que a professora foi a responsável por determinar o ritmo da actividade, orientando e ajudando na realização das tarefas propostas e conduzindo a discussão final aquando a correcção dos problemas no quadro.

O tipo de aulas em que prevaleceu os trabalhos em grupo ou aos pares e em que foi dada mais ênfase ao papel activo dos alunos, em detrimento das aulas expositivas, também conduziu a aprendizagens mais significativas.

Os alunos, trabalhando em grupo, ajudavam-se uns aos outros e os alunos com mais dificuldades podiam beneficiar da ajuda dos colegas mais capazes. Neste sentido, é de salientar a importância do trabalho colaborativo dado que a realização de actividades de forma colectiva (pares/grupos) não só aumenta o potencial de acção, como também abre uma Zona de Desenvolvimento Potencial para a aprendizagem e transformação individual (Engeström, 1987).

Das aulas analisadas constata-se que, em interacção com a professora e com os colegas, os alunos imitam o que os outros fazem e, por isso, são capazes de resolver questões análogas às já resolvidas. No entanto, quando o grau de dificuldade e/ou a capacidade de abstracção aumentam, os alunos revelam mais dificuldades para resolver os problemas e, nessas situações, a capacidade de imitar já não é suficiente para os ajudar a resolver as questões.

É de referir que nas aulas em análise surgiram conflitos e tensões, sentidas especialmente pela professora. Essas tensões estão, geralmente, relacionadas com a pressão para cumprir a planificação elaborada no início do ano lectivo. O receio de não conseguir cumprir esta planificação condicionava a actuação da professora que, muitas vezes, não dava tempo suficiente para que os alunos conseguissem resolver, sozinhos ou em grupo, as tarefas propostas e, outras vezes, dava sugestões demasiado evidentes, com a intenção de fazer avançar a resolução da tarefa em questão.

No entanto, com o decorrer das aulas, a professora, ao constatar que os alunos gostavam de trabalhar em grupo e de serem eles próprios a chegarem aos resultados, começou a controlar a sua tendência para sugerir as respostas e foi-se habituando a dar mais tempo para que os alunos tentassem chegar à solução dos problemas sem a sua ajuda. Na verdade, a professora sabia que, apesar de pôr em risco o cumprimento da planificação, as aprendizagens seriam, certamente, mas significativas.

A professora deparou-se com outro conflito que se prende com as fichas de trabalho por ela elaboradas. No decorrer das aulas em que foram utilizadas, a professora constatou, pela reacção e comentário dos alunos, que as fichas não estavam bem elaboradas porque continham questões repetitivas. Por isso, ao elaborar as fichas de trabalho seguintes, teve esse facto em atenção e tentou diversificar o tipo de questões propostas.

5.2. Analisando sequências com história

Neste ano lectivo, as “Sequências” faziam parte dos conteúdos a leccionar no 8º ano¹⁷, sendo tratadas ao longo de vários capítulos.

Para introduzir este tema é comum encontrar-se nos manuais a “sequência de Fibonacci”. Mas, muitas vezes, aparece mais a título informativo do que exploratório.

¹⁷ A partir do ano lectivo 2010/2011, segundo as orientações do NPMEB, as Sequências passaram a fazer parte dos conteúdos a leccionar no 7º ano.

Para que os alunos pudessem explorar esta sequência, a professora, numa aula de Estudo Acompanhado, propôs a seguinte adaptação do “problema dos coelhos”, proposto por Fibonacci:

“Um par de coelhos não se reproduz enquanto não tiver dois meses. Mas, assim que um par tiver dois meses, irá reproduzir um novo par de coelhos em cada mês. Se começares com um par de coelhos recém-nascidos, quantos pares irás ter no início de cada mês seguinte?”(Liber Abaci)

A professora começou por fazer referência a uma aula anterior em que o M tinha falado nesta sequência:

- [1] **Prof:** Lembram-se do M ter falado na sequência de Fibonacci numa aula anterior?
- [2] **T:** Que a professora disse que era a sequência dos coelhos?
- [3] **Prof:** Exactamente!
- [4] **M:** É 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... - repetiu novamente o aluno que já a tinha referido numa aula anterior, mas que não sabia que estava relacionada com coelhos.
- [5] **Prof:** Sabes como se obtêm esses números?
- [6] **M:** Não. Vi isto num livro.
- [7] **Prof:** Vamos ver donde vêm esses números.

A professora distribuiu uma ficha de trabalho (ver anexo C.4) com o enunciado do problema e uma tabela para ajudar na procura da solução.

Os alunos começaram a ler o problema e colocaram muitas dúvidas pois não estavam a conseguir interpretá-lo. Então, a professora explicou-o no quadro, para o grande grupo, usando as primeiras linhas da tabela. Deste modo, os alunos começaram a perceber como funcionava a sequência e foram preenchendo o resto da tabela, esquematizando, sempre, com o desenho dos coelhos (que representavam por bolas, para melhor e mais rápida representação). Esta explicação da professora serviu para despoletar as Zonas de Desenvolvimento Potencial dos alunos que, sem esta explicação, não conseguiam começar a resolver o problema.

Para surpresa da professora, pouco depois de ter iniciado a tarefa, um aluno disse:

- [8] **H:** Já sei como é que se descobre quais são os números!
A professora aproximou-se dele e pediu-lhe que lhe explicasse, baixinho, o seu raciocínio.
- [9] **Prof:** Explica-me como é, mas não digas aos teus colegas para que eles também consigam descobrir.
- [10] **H:** Cada número é a soma dos dois números anteriores. – sussurrou o aluno, todo entusiasmado com a sua descoberta, exemplificando com números:

[11] **H:** Ora, $2 = 1 + 1$; $3 = 2 + 1$; $5 = 3 + 2$; $8 = 5 + 3$.







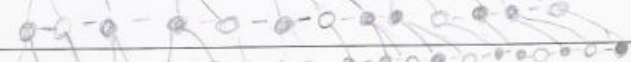

[12] **Prof:** És uma cabecinha pensadora! Agora continua a tabela e verifica se dá certo para as restantes linhas.

A professora ficou admirada com a rapidez com que o aluno descobriu a regra de formação desta sequência, o que demonstrava um bom raciocínio.

É de realçar que os melhores alunos da turma tiveram dificuldade em chegar a esta conclusão. Um dos melhores alunos estava a ficar frustrado e irritado por ver que o colega, que “nem é tão bom aluno como ele”, já tinha chegado à regra e ele ainda não. Fazia várias tentativas, concentrava-se demasiado nas diferenças entre os termos, mas não se apercebia que essa diferença correspondia ao termo anterior.

Foi interessante notar o entusiasmo com que os alunos resolveram esta tarefa, num clima de competição saudável para ver quem chegava primeiro à solução. Mais uma vez, é notório o papel mediador dos problemas históricos na aprendizagem da Matemática pois, ao aumentarem a motivação dos alunos, conduziram, certamente, a aprendizagens mais significativas.

Na tabela 5 está representada a esquematização usada pela maioria dos alunos, que segue o esquema já apresentado na tabela e que foi o usado pela professora na explicação inicial.

MÊS	PARES DE COELHOS	TOTAL DE PARES
1		1
2		2
3		3
4		5
5		8
6		13
7		21
8		34
9		55
10		89

244

Tabela 5 – Resposta dada pela maioria dos alunos da turma

O facto de o aluno que preencheu esta tabela não ter representado os “coelhos” nos 9º e 10º meses e ter indicado, correctamente, o total de pares de coelhos significa que já tinha compreendido a regra de formação dos termos desta sequência. No entanto, “saltou” o 11º mês pois o 144 representa o total de pares de coelhos no 12º mês.

Mas a maioria dos alunos preencheu a tabela até ao fim e, mesmo assim, alguns deles não conseguiram descobrir a regra de formação da sequência. Além disso, os alunos menos organizados e concentrados enganavam-se, com frequência, nas últimas linhas da tabela, à medida que o número aumentava.

Mas, um aluno, muito desmotivado e pouco trabalhador nas aulas de Matemática, resolveu este problema de uma forma muito interessante, representada na tabela seguinte:













MÊS	PARES DE COELHOS	TOTAL DE PARES
1		1
2		1
3		2
4		3
5		5
6		8
7		13
8		21
9		34
10		55
	 Casal novo	89
	 Casal adulto	144

Tabela 6 – Resposta dada por um aluno

Este aluno começou por pintar a preto as bolas correspondentes ao número de coelhos da linha anterior (que representavam um casal adulto), e representou com bola branca o número de coelhos da linha “anterior à anterior” (que correspondia aos coelhos que tinham nascido). E, a partir desta esquematização, conseguiu chegar mais rapidamente à regra de formação. Foi uma forma muito inteligente de esquematizar o problema e reveladora de um bom raciocínio e de uma boa comunicação matemática.

A esquematização apresentada na tabela e explicada, inicialmente, pela professora não conduzia tão facilmente à descoberta da regra de formação e, com o aumento das linhas, tornava-se cada vez mais confusa.

Foi notório o interesse e motivação que este problema despertou e a professora sabia que se tivesse começado logo a completar a tabela no quadro, sem lhes dar tempo para a preencherem sozinhos, o aluno referido anteriormente (e não só) provavelmente nem a teria copiado do quadro e nunca teria percebido o que era a sucessão de Fibonacci! Assim, não só percebeu como até ensinou alguma coisa à professora!

É de salientar que, geralmente, não são os alunos que costumam revelar melhor desempenho a Matemática os que melhor conseguem resolver este tipo de problemas. Este género de problemas, que apelam mais ao raciocínio do que aos conhecimentos matemáticos, quando despertam o interesse dos alunos mais desmotivados, mostram que esses alunos, que “pensam não saber nada de Matemática”, possuem um bom raciocínio mas que, infelizmente, não é aproveitado. Quando se interessam pelos problemas e os conseguem resolver, sentem que afinal não são tão maus a Matemática como pensavam e começam a olhar para a disciplina de uma maneira mais receptiva.

Importa salientar que este problema, pela sua natureza, proporciona uma excelente oportunidade para desenvolver as capacidades de raciocinar e de comunicar matematicamente. Os alunos revelam muitas dificuldades na resolução de problemas que apelem a estas capacidades transversais, principalmente, a da comunicação matemática. Provavelmente, essas dificuldades advêm da falta de estímulo para resolverem problemas que apelem a esta capacidade. É muito comum ouvirmos os alunos dizerem: “Eu sei como se faz, mas não sei explicar”.

Na verdade, na História da Matemática existe uma diversidade de problemas óptimos para estimular e desenvolver estas capacidades, além da capacidade de resolver problemas.

Na aula de Matemática seguinte, a professora começou por abordar as sequências dos números triangulares e dos números quadrados, fazendo referência a Pitágoras e aos números figurados.

Representou essas sequências com “pontinhos”, o que ajudou os alunos a perceberem como encontrar os termos seguintes de cada uma das sequências. Um aluno

tímido e pouco participativo foi um dos primeiros a indicar alguns termos da sequência dos números triangulares. Depois, a professora perguntou:

[13] **Prof:** Conseguem encontrar alguma relação entre estas duas sequências?

Depois de algum silêncio, a professora reformulou a pergunta:

[14] **Prof:** Conseguimos obter a sequência dos números quadrados a partir da sequência dos números triangulares?

Depois de algum tempo, um aluno disse:

[15] **Da:** Dois números triangulares dão um número quadrado.

[16] **Prof:** Se somarmos 1 com 6 dá um número quadrado?

[17] **Da:** Não! Têm que ser dois números seguidos.

[18] **Prof:** É mais correcto dizer consecutivos, em vez de seguidos.

[19] **T:** Ah! Já percebi! Se somar 1 com 3 dá 4, que é um número quadrado!

[20] **N:** Ou 3 com 6 dá 9 que também é um número quadrado!

Depois de terem chegado a esta conclusão, uma aluna disse:

[21] **V:** Stôra, escreva essa regra.

[22] **Prof:** Como?

[23] **V:** Ah, desculpe, professora.

A professora não gostava que a tratassem por “Stôra” e os alunos sabiam disso. Esta aluna, distraída, usou essa expressão e foi corrigida pela professora, numa demonstração de desagrado. Nesta turma, havia regras bem estabelecidas e a professora empenhava-se em fazê-las cumprir, demonstrando poder e estatuto.

Nesta situação, a professora optou por abordar estas sequências para o grande grupo, em vez de ter pedido aos alunos para descobrirem, sozinhos ou em grupo, os termos seguintes destas sequências. Para tal, conduziu este questionamento não deixando muito espaço para a descoberta. Procedeu desta forma porque o seu objectivo era fazer apenas uma introdução a estas sequências que seriam necessárias para a resolução da ficha de trabalho que tencionava dar a seguir.

De seguida, a professora entregou a ficha de trabalho nº 4 (ver anexo C.5) e reparou que alguns alunos começaram logo a preencher o Triângulo de Pascal sem, primeiro, terem lido as instruções nem terem ouvido os esclarecimentos prestados pela professora. Estes alunos, em vez de somarem os dois números anteriores (como estava indicado no enunciado), usaram as sequências para preencherem a segunda e terceira diagonais, mas nas diagonais seguintes já não conseguiram encontrar uma regra que lhes permitisse descobrir quais eram os números. Porém, os alunos que leram as instruções ou ouviram a professora preencheram-no correctamente.

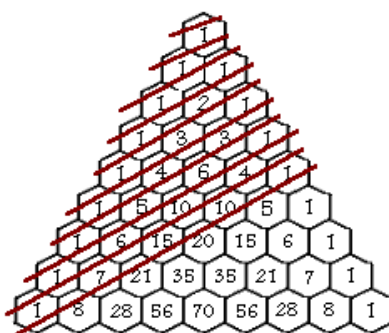
Este episódio descreve bem um erro frequentemente cometido pelos alunos que consiste em começarem a resolver uma determinada questão, sem antes lerem com atenção o enunciado. Muitas dificuldades manifestadas pelos alunos na resolução dos problemas deve-se a esta falha, pois, às vezes, na questão são indicadas sugestões que facilitam a sua resolução (como aconteceu neste exercício), e só os alunos mais distraídos e precipitados é que não se apercebem disso.

Aquando a resolução desta questão, a professora apercebeu-se que tinha perdido uma oportunidade de pôr os alunos a pensar; em vez de ter dado as instruções de construção deste triângulo, deveria ter deixado que os alunos as descobrissem a partir das linhas do triângulo que já estavam preenchidas.

A segunda questão desta ficha de trabalho consiste no seguinte:

“No Triângulo de Pascal podemos encontrar:

- a. a sequência dos números naturais. Explica como.*
- b. a sequência dos números triangulares. Explica como.*
- c. a sequência dos números quadrados. Explica como.*
- d. a sucessão de Fibonacci. Explica como (Sugestão: considera a seguinte figura).”*



As duas primeiras questões não suscitaram grandes dúvidas pois os alunos facilmente as encontraram na segunda e terceira diagonais. Já na alínea *c*, os alunos revelaram mais dificuldades. Mesmo depois de, no início da aula, a professora ter abordado a relação entre os números triangulares e os números quadrados, poucos alunos conseguiram responder a esta questão.

A dificuldade em imitar a resposta por comparação com o que já tinha sido explicado significa que os alunos não tinham percebido a explicação da professora ou, então, esta questão não estava ao alcance do seu nível de desenvolvimento. Dadas estas

dificuldades, a professora teve que voltar a lembrar e explicar que “a soma de dois números triangulares consecutivos é igual a um número quadrado”.

A questão da alínea *d* causou ainda mais dúvidas. Mesmo tendo sido apresentada a figura com a sugestão para auxiliar na sua resolução, nenhum aluno estava a conseguir resolvê-la. Então, a professora acabou por lhes dizer:

[24] **Prof:** Pode ser necessário fazer alguma operação para encontrar a sucessão de Fibonacci, assim como fizeram para encontrar a sequência dos números quadrados.

Dada esta dica, uma aluna começou logo a somar e a encontrar os números da sucessão de Fibonacci, apoiando-se nas linhas diagonais representadas na figura.

Ao circular pela sala, a professora observou que alguns alunos, mais distraídos e menos interessados, em vez de estarem a resolver a questão 2, estavam a resolver a questão 7 (em que era pedido para pintar os números ímpares no Triângulo de Pascal). Realmente, é muito mais fácil pintar do que pensar! Então, a professora disse-lhes para resolverem a questão 2, pois a 7 ficaria para trabalho de casa.

Entretanto acabou a aula e a questão 2 também ficou para terminar em casa, pois ainda havia muitos alunos que não tinham conseguido resolver a alínea *2d*.

Na aula seguinte, a professora começou por lembrar como se tinham obtido os números do Triângulo de Pascal, dizendo que cada número correspondia à soma dos dois números anteriores, e um aluno disse:

[25] **C:** Só agora é que percebi isso!

Depois, a professora verificou quem tinha feito os trabalhos de casa e constatou que muitos alunos não tinham feito a questão *2d*. Uns disseram que não tinham conseguido porque era muito difícil, outros mostraram-se comprometidos, o que levou a professora a pensar que nem tinham tentado, e outros disseram que se tinham esquecido.

Quanto ao exercício 7, a maioria dos alunos resolveu porque acharam que era fácil e engraçado. E note-se que alguns alunos já o tinham resolvido, indevidamente, na aula anterior.

Na questão 3a)¹⁸ os alunos calcularam, com facilidade, a soma das seis primeiras linhas, mas a conclusão a que a maioria chegou não era a pretendida. Depois de a

¹⁸ “Calcula a soma de cada uma das seis primeiras linhas do triângulo de Pascal. Que conclusões podes tirar? Verifica se a conclusão é válida para outras linhas do triângulo.”

professora ter dado tempo para que os alunos conseguissem resolver esta questão e a questão 3b)¹⁹, procedeu à correcção e discussão no quadro, para toda a turma:

[26] **Prof:** A que conclusão chegaram? Quem quer responder?

[27] **An:** Temos que multiplicar por 2 para obter a linha seguinte. – respondeu a aluna depois de ter levantado o dedo no ar.

A professora apercebeu-se que muitos alunos concordaram com esta resposta e, então, retorquiu:

[28] **Prof:** E se eu quisesse calcular a soma dos números da linha 1000? Nunca mais acabavam os cálculos!

[29] **Prof:** Como é que podemos calcular a soma dos números da linha 15 sem fazer muitos cálculos?

Depois de algum silêncio, a professora perguntou novamente:

[30] **Prof:** Que relação existe entre os números 1, 2, 4, 8, 16, 32, ...?

[31] **An:** Cada número é o dobro do anterior. – respondeu novamente a aluna.

[32] **Prof:** Certo. Mas estes números não vos fazem lembrar nada?

Como a professora estava a ver que todos tinham chegado à mesma conclusão e ninguém estava a pensar nas potências, perguntou directamente:

[33] **Prof:** Se pensarem nas potências, o que é que representam estes números?

[34] **J:** São potências de 2; $2 = 2^1$, $4 = 2^2$, $8 = 2^3$, ...

[35] **Prof:** E o 1? Também pode ser escrito como uma potência de 2?

[36] **V:** É 2^1 .

[37] **M:** Não, isso é igual a 2! 1 é igual a 2^0 .

[38] **Prof:** Muito bem! Então qual será a soma dos números da linha 15?

[39] **J:** 2^{14} .

[40] **Prof:** A primeira linha é considerada a linha 1 ou a linha 0?

[41] **M:** Deve ser a linha 0, porque $2^0 = 1$.

[42] **J:** Ah! Já percebi! Então é 2^{15} .

[43] **Prof:** Conseguiram acompanhar o raciocínio dos vossos colegas?

A questão colocada em [33] resulta de um dilema sentido pela professora: ou dava mais tempo para que os alunos chegassem, sozinhos, à resposta, mas corria o risco de ficar atrasada no cumprimento da planificação ou, por outro lado, dava uma ajuda para que os alunos não demorassem muito tempo a resolver a questão, sendo esta a opção tomada.

¹⁹ “Escreve uma fórmula que permita calcular a soma dos números de cada linha. Qual é a soma dos números da 15ª linha?”

Esta questão permitiu lembrar as potências e, em especial a potência de expoente nulo (leccionado anteriormente), que os alunos, geralmente, teimam em dizer que é igual a 0 ou a 2, e têm muita dificuldade em compreender que $2^0 = 1$.

Como a professora viu pela cara dos alunos que não estavam muito esclarecidos, explicou, novamente, para toda a turma. De seguida, alertou:

[44] **Prof:** Agora falta arranjar uma fórmula geradora desta sequência.

Enquanto os alunos tentavam encontrar esta fórmula, a professora circulou pela sala e reparou que muitos alunos, em vez de escreverem 2^n , escreveram n^2 . Foi um erro frequente, provavelmente devido ao facto de já terem analisado a sequência n^2 . Aqui, o factor imitação estava presente mas não conduziu à resposta correcta, porque os alunos não se aperceberam da diferença entre estas duas potências.

A professora explicou, individualmente, por que razão não podia ser n^2 . Depois, procedeu à correcção em grande grupo.

[45] **Prof:** Reparem que o 15 pode ser substituído por um número qualquer: pode ser 2^3 se estivermos a falar da linha 3, pode ser 2^4 se estivermos a falar da linha 4; depende do número da linha.

[46] **An:** A fórmula é 2^x .

[47] **J:** Ou 2^l , l de linha.

[48] **Prof:** Qualquer uma das respostas está correcta, e também costumamos usar 2^n .

Passando ao exercício 7, que tinha ficado para trabalho de casa, a professora começou com uma abordagem aos fractais e constatou que os alunos tinham gostado de pintar o Triângulo de Pascal (em casa ou em aulas anteriores) e que, facilmente, verificaram que correspondia ao fractal representado.

Entretanto, um aluno comentou:

[49] **M:** Fica sempre um número em branco!

[50] **Prof:** E por que será que isso acontece?

O comentário deste aluno levou a professora a pensar que era oportuno abordar a paridade dos números.

Depois de algum silêncio, a professora questionou:

[51] **Prof:** Que números estão em cima?

Como nenhum aluno estava a reparar na paridade dos números, a professora perguntou directamente:

- [52] **Prof:** São pares ou ímpares?
 [53] **M:** São ímpares.
 [54] **Prof:** E se somarmos dois números ímpares ...?
 [55] **M:** Dá um número par. – disse o aluno com ar de satisfação, constatando:
 [56] **M:** Ah! Agora já percebi por que fica sempre um número em branco!
 Depois, outro aluno que não ouviu a resposta do M, também respondeu:
 [57] **T:** A soma de dois números ímpares é um número par.
 [58] **Prof:** Ouviram o que o T disse? – perguntou a professora para a turma que não estava a acompanhar este diálogo.
 [59] **Prof:** A soma de dois números ímpares é ...?
 [60] **Alunos:** É par. – responderam em coro.
 [61] **Prof:** E a soma de dois números pares?
 [62] **Alunos:** É um número ímpar.
 [63] **Prof:** Asneira! Estão a ver como estão desatentos; respondem sem pensar!

É interessante notar que o comentário feito em [49] proporcionou a exploração de um tema em que a professora nunca tinha reparado antes. De facto, havia uma razão para que ficasse sempre um número em branco.

A questão [61] foi colocada, propositadamente, porque a professora notou que os alunos estavam distraídos e não estavam a acompanhar esta interacção com atenção. Foi notório que a resposta [62] foi dada sem pensar. A professora estava convencida que estes alunos sabiam que “a soma de dois números pares dá um número par” mas deixaram-se levar pelo trocadilho das palavras, devido à distração.

Numa aula de Estudo Acompanhado, a professora colocou o “problema das pombas”, de Alcuino de York (ver anexo A.7), que tem o seguinte enunciado:

“Há uma escada com 100 degraus. Uma pomba posou no primeiro degrau, duas pombas no segundo, três no terceiro, quatro no quarto, cinco no quinto e, assim sucessivamente, até ao centésimo. Quantas pombas havia ao todo?” (Problemas para estimular os Jovens)

Para resolver este problema os alunos não tiveram dificuldade em concluir que o número de pombas correspondia à soma:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + 98 + 99 + 100.$$

Dado este somatório, era inevitável falar do episódio de Gauss, segundo o qual a sua professora da escola primária, para entreter os alunos, mandou fazer esta soma,

pensando que teria largos momentos de tranquilidade. Mas, para sua surpresa, passado pouco tempo, o pequeno Gauss conseguiu encontrar a resposta!

Depois de apresentar esta situação, a professora perguntou:

[64] **Prof:** Como terá o pequeno Gauss encontrado a resposta tão depressa? E não se esqueçam que no tempo do Gauss não usavam calculadoras!

[65] **Da:** Professora, vamos ver se nesta turma há algum Gauss!

Apesar do aluno que fez este comentário ser pouco empenhado, tinha um bom raciocínio e esforçou-se muito para conseguir ser o Gauss da turma.

E, por incrível que pareça, havia dois “pequenos Gauss” na turma, pois dois alunos começaram a adicionar o 1 com 100, 2 com 99, 3 com 98, etc., mas tiveram dificuldade em chegar ao resultado; no entanto, foi um bom começo!

É de salientar que este problema e esta curiosidade da vida de Gauss despertaram o interesse dos alunos, mesmo dos mais desmotivados e, na verdade, os alunos que tiveram a ideia de adicionar o primeiro termo com o último eram alunos que costumavam revelar algumas dificuldades e desinteresse.

Esta situação é ilustrativa do papel de mediação exercido pelos problemas históricos, na medida em que despertaram o interesse dos alunos, o que contribuiu para um maior envolvimento na resolução do problema em questão e, conseqüentemente, para uma aprendizagem mais significativa.

No teste, a professora colocou uma questão que apelava ao raciocínio e à comunicação matemática dos alunos. Algumas das respostas obtidas estão a seguir representadas:

5. Um matemático famoso, Pitágoras, descobriu uma maneira de calcular o quadrado de um número:

$$1^2 = 1$$

$$2^2 = 1 + 3 = 4$$

$$3^2 = 1 + 3 + 5 = 9$$

$$4^2 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16$$
~~$$5^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$$~~

a) Calcula por este processo o valor de 5^2 e de 6^2 .

$$5^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 \quad 5^2 = 25$$

$$6^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36 \quad 6^2 = 36$$

b) A que é igual a soma dos 100 primeiros números naturais ímpares? Explica o teu raciocínio.

R: O soma dos 100 primeiros números ímpares $100 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + \dots$ é igual a $100^2 = 100^2 = 1 + 3 + 5 + \dots + 199 = 10000$.

R: $100^2 = 100 \times 100 = 10000$. Cálculos

$100^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + \dots + 199 = 10000$

R: Os primeiros números ímpares

ou outra possibilidade de raciocínio resultado é $100^2 = 100 \times 100 = 10000$

Fig. 20 – Resposta do A

Este aluno é pouco participativo nas aulas e tem muita falta de confiança em si próprio. A professora ficou agradavelmente surpreendida quando viu que ele tinha conseguido responder correctamente à questão 6b). Apesar de a explicação não estar muito completa, a professora não o penalizou para o incentivar.

b) A que é igual a soma dos 100 primeiros números naturais ímpares? Explica o teu raciocínio.

É igual a 100^2 , por exemplo $3^2 = 1 + 3 + 5$ têm 3 números ímpares logo 100^2 vai ter 100 números ímpares

Fig. 21 – Resposta da N

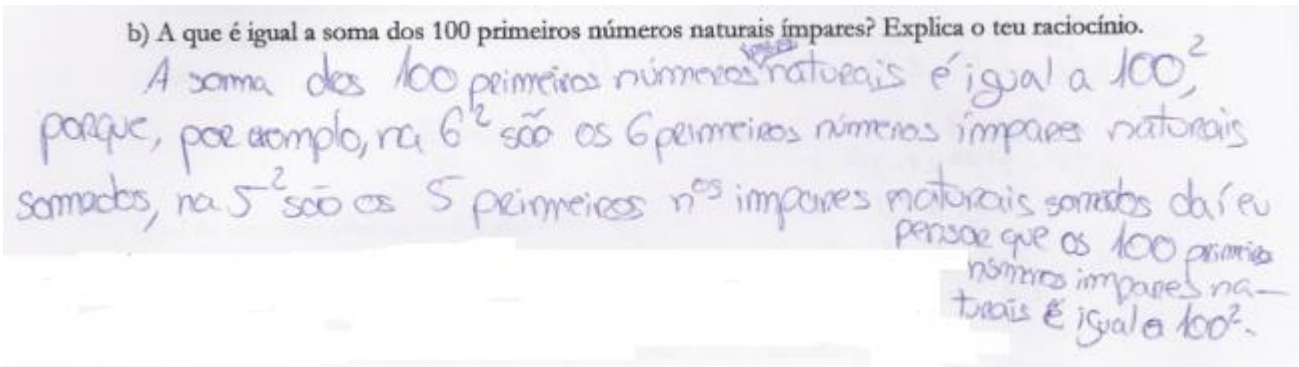


Fig. 22 – Resposta do Da

Estas duas respostas estão muito claras e exemplificam a capacidade de comunicar matematicamente destes dois alunos.

A resposta a seguir apresentada foi dada por um aluno que tinha um bom raciocínio mas que era muito “apressado” a fazer as coisas.

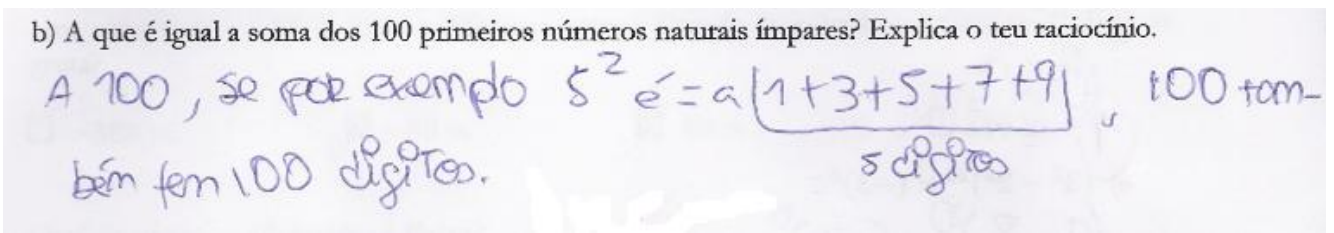


Fig. 23 – Resposta do H

Apesar de ter respondido 100 em vez de 100^2 , nota-se, pelo exemplo dado, que foi por engano (ou pressa) que não elevou o 100 ao quadrado. Quando a professora entregou o teste, o aluno referiu que se tinha enganado.

É interessante notar que alguns alunos se lembraram da soma feita por Gauss, abordada na aula acima mencionada e deram as seguintes respostas:

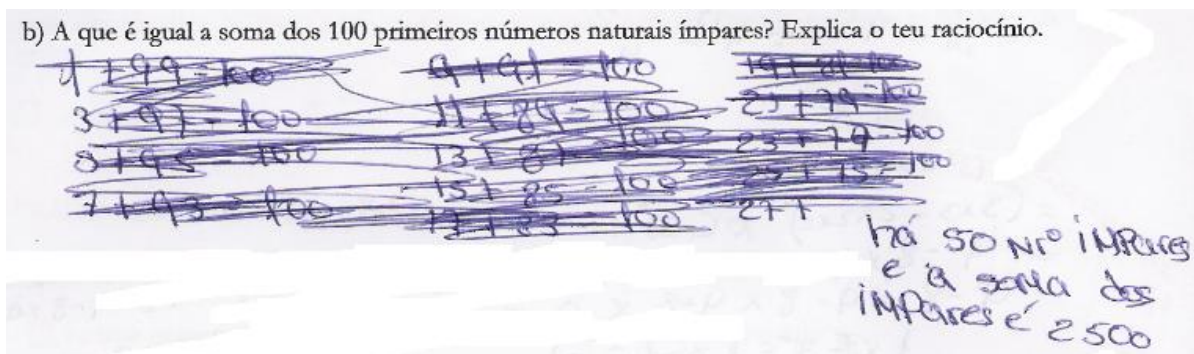


Fig. 24 – Resposta do He

Apesar de o aluno ter riscado a resposta, é visível que utilizou o processo, também utilizado por Gauss, de somar o primeiro termo com o último, o segundo com o penúltimo e assim sucessivamente.

Outro aluno que também se lembrou deste processo, deu a seguinte resposta:

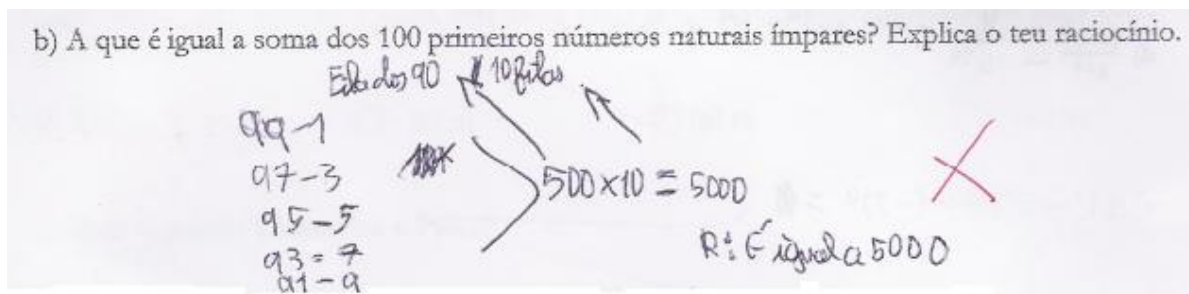


Fig. 25 – Resposta do T

Embora estes dois alunos não tenham chegado à resposta correcta, porque não tiveram em conta que se tratava do somatório apenas dos números ímpares, nota-se que se lembraram do que foi falado nas aulas e tentaram imitar o mesmo processo de somar uma sequência de números.

Por outro lado, e infelizmente, concentraram o seu pensamento nesta abordagem de Gauss e não se aperceberam que a resposta poderia ser encontrada se olhassem, com atenção, para os exemplos dados.

Ainda no âmbito do estudo das “Sequências”, numa aula de Estudo Acompanhado, foi pedido aos alunos para resolverem o seguinte problema, retirado de uma Prova de Aferição de Matemática (2002) e que, de certa forma, fazia lembrar o Triângulo de Pascal, já estudado numa ficha de trabalho:

“Observa o seguinte triângulo formado por números.

Linha 1										1							
Linha 2									1	2	1						
Linha 3									1	2	3	2	1				
Linha 4									1	2	3	4	3	2	1		
Linha 5									1	2	3	4	5	4	3	2	1

Na 3.^a linha deste triângulo numérico há 5 números e na 4.^a linha há 7 números. Quantos números há na 112.^a linha? Explica como chegaste à tua resposta.”

Foi interessante notar que os alunos chegaram à resposta por vários caminhos. De seguida, apresento algumas das respostas dadas.

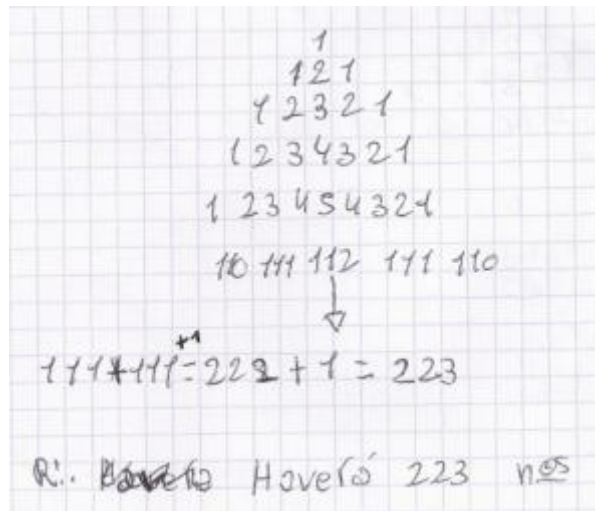


Fig. 26 – Resposta do L

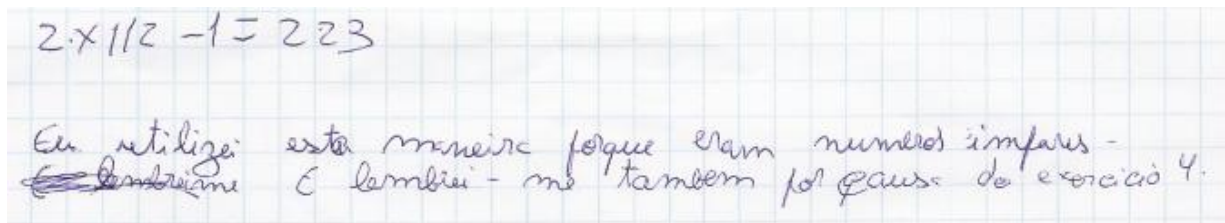


Fig. 27 – Resposta do R

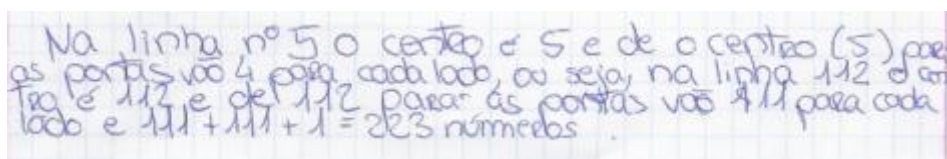


Fig. 28 – Resposta do B

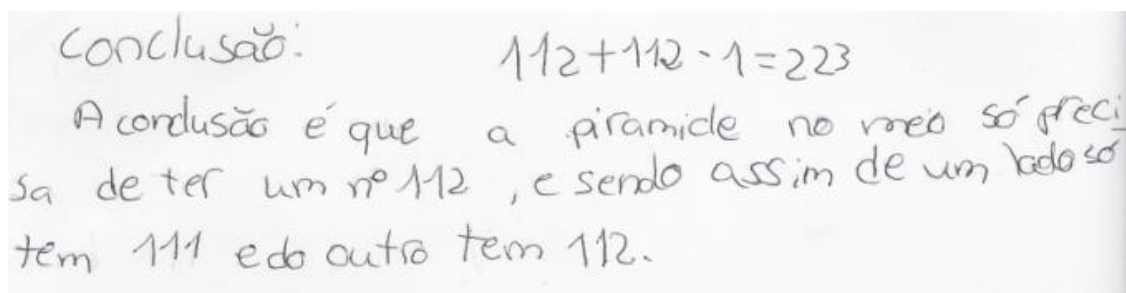


Fig. 29 – Resposta da M

O exercício 4, mencionado pelo aluno R, abordava o termo geral da sequência dos números ímpares, ou seja, $2n - 1$. De facto, a sequência formada pela quantidade de números em cada linha deste triângulo corresponde, exactamente, à sequência dos números ímpares, como o aluno observou, de forma perspicaz.

É de notar que, implicitamente, está presente a ideia da imitação. Neste caso, o facto de o aluno ter usado o termo geral da sequência dos números ímpares para resolver este problema mostra que essa sequência tinha ficado bem compreendida e que foi capaz de aplicar um conhecimento aprendido anteriormente numa situação nova. De um modo geral, os alunos têm muitas dificuldades em aplicar os conhecimentos em novas situações e, por isso, a professora achou interessante o facto de o aluno o ter feito.

Na resolução deste exercício estão contempladas duas importantes capacidades transversais, nomeadamente, o raciocínio e a comunicação matemática. Das respostas dadas depreende-se que os alunos usaram diversos argumentos para justificarem o seu raciocínio, ou seja, para comunicarem matematicamente. Esta é uma capacidade em que os alunos revelam muitas dificuldades e, por isso, é importante que lhes sejam propostos exercícios deste género para desenvolverem essa capacidade.

No final da aula, quando a professora se dirigia para a sala de professores, encontrou o L e o R, no corredor, com a ficha de trabalho na mão.

[66] **Prof:** O que fazem com a ficha de Matemática no intervalo?!

[67] **R:** Estamos a comparar as respostas; ele está a explicar-me como fez e eu explico-lhe o que fiz.

A professora ficou agradavelmente surpreendida com a atitude destes alunos (que não são muito empenhados nem estudiosos) que demonstra o entusiasmo com que alguns alunos resolveram este tipo de questões. Decerto que se fosse um simples exercício, estes alunos não estariam a comparar o resultado no intervalo, pois os exercícios rotineiros não têm o mesmo carácter de desafio nem o poder de motivar os alunos.

Este é mais um exemplo de como este tipo de problemas, que apelam ao raciocínio, têm o poder de motivar os alunos e despertar o seu interesse para a realização das tarefas propostas nas aulas de Matemática (ou Estudo Acompanhado).

5.2.1. Sumariando

Da análise dos episódios acima apresentados há evidência que os problemas históricos da Matemática, ao serem utilizados como artefactos mediadores da aprendizagem das Sequências, contribuíram para motivar os alunos, como podemos ver em diversas situações das quais se destaca a situação em que o aluno desmotivado e pouco trabalhador resolveu o problema dos coelhos de Fibonacci de uma forma muito inteligente e interessante. Certamente que se o problema não tivesse sido colocado desta maneira e não lhe tivesse despertado interesse, este aluno nem o teria tentado resolver.

Além disso, se a professora tivesse procedido como no ano anterior, e não tivesse dado tempo para que os alunos o tentassem resolver, é muito provável que este aluno (e não só) nem tivesse copiado a resolução para o caderno. Por isso, esta mudança de regras na forma de actuar da professora foi de extrema importância para a melhoria das aprendizagens dos alunos.

Outra situação que exemplifica o papel motivador dos problemas utilizados nestas aulas é a dos alunos que estão a comparar, no intervalo, as resoluções de um problema que tinham feito na aula.

Inicialmente, o objectivo da maioria destes alunos era apenas tirar positiva nesta disciplina mas, devido ao tipo de actividades propostas e ao tipo de aulas, em que se apelava mais à descoberta e ao trabalho em grupo, o objectivo transformou-se em motivo, e os alunos começaram a participar nas aulas com gosto e com vontade de aprender como descobrir os termos de uma sequência ou como determinar a expressão geral de uma sequência, conhecidos alguns termos.

A análise anterior leva-nos a constatar que os problemas históricos ajudaram os alunos a desenvolverem a capacidade de resolução de problemas, geralmente associada a outras duas capacidades transversais, o raciocínio e a comunicação matemática. Os problemas analisados não correspondem a exercícios de aplicação directa, pelo que os alunos tiveram que encontrar estratégias para os resolver, o que os levou a pensar e não a agir automaticamente. Na História da Matemática podemos encontrar imensos problemas interessantes e motivadores que promovem estas três capacidades transversais.

Nos episódios analisados o questionamento da professora foi essencial para a resolução de muitos problemas, ajudando a despoletar as Zonas de Desenvolvimento Potencial dos alunos. De uma forma geral, este questionamento ajudou na compreensão

dos problemas e fez com que muitos alunos começassem a tentar resolver o problema, o que não teria acontecido se a professora não tivesse prestado estes esclarecimentos iniciais.

Outro conceito da Teoria da Actividade que também pode ser observado nas situações descritas é o da imitação. Por exemplo, no problema colocado no teste em que dois alunos aplicaram a ideia de somatório de Gauss, abordada numa aula anterior, é bem notório que estes alunos estavam a imitar uma ideia aprendida anteriormente, tentando aplicá-la numa situação nova.

É de referir também que a professora enfrentou tensões e dilemas como exemplificado nas situações em que dá ajudas a mais com o intuito de fazer avançar a resolução do problema para não “perder muito tempo” e conseguir cumprir a planificação. Isto acontece nas situações descritas, por exemplo, em [33] e [52]. Há também outras situações em que a professora, pela mesma razão, não dá tempo suficiente para que os alunos consigam resolver o problema e procede logo à sua discussão e correcção no quadro, para o grande grupo.

Apesar do esforço feito para evitar estas situações, é necessário ter em conta que a professora está perante uma estratégia de ensino diferente, uma vez que estava habituada a aulas com carácter mais expositivo, onde os alunos não desempenhavam um papel tão activo. Por isso, precisa de tempo para se adaptar a este novo papel de mediadora e não de transmissora de conhecimentos, o que acontece de forma gradual.

5.3. Resolvendo problemas históricos através de equações

No 7º ano os alunos aprenderam a resolver equações, incluindo as equações com parênteses. No entanto, as equações com denominadores só fazem parte dos conteúdos a leccionar no 8º ano.

Segundo as orientações dos documentos oficiais, a resolução de equações deverá estar estreitamente ligada à resolução de problemas. Recorrendo à História da Matemática encontramos uma diversidade de interessantes problemas que podem ser traduzidos por uma equação. Nalguns manuais escolares encontramos alguns destes problemas, no fim do capítulo, como actividades complementares. No entanto, o que geralmente acontece é que o professor “passa à frente” porque “não tem tempo” e os alunos nem os tentam resolver porque estes problemas são catalogados de “muito difíceis”.

Com o objectivo de treinar a resolução de problemas que podem ser traduzidos através de equações, a professora elaborou uma ficha de trabalho com diversos problemas, colocados ao longo da História da Matemática que, quando traduzidos para a linguagem matemática, originam uma equação com denominadores (anexo C.7).

Ao lerem o seguinte problema (questão 1 do anexo C.7):

“A quantidade e a sua $\frac{1}{4}$ adicionadas dão 15. Qual é a quantidade?” (Papiro de Rhind),

alguns alunos perguntaram, admirados:

[1] **V:** A quantidade?

[2] **Prof:** O que será a quantidade?

[3] **M:** x .

[4] **Prof:** Porque não se sabe quanto é.

[5] **D:** E a sua $\frac{1}{4}$?!?

[6] **Prof:** $\frac{1}{4}$ de quê?

[7] **D:** De x .

[8] **J:** Então fica $x + \frac{1}{4}x = 15$.

De seguida, os alunos resolveram a equação obtida sem grandes dificuldades.

Um problema histórico que aparece muito frequentemente nos manuais escolares é o problema sobre a idade de Diofanto. Este problema é original da *Antologia Grega* (Paton, 1918) e é o problema 3 da ficha de trabalho utilizada nesta aula.

“Neste túmulo repousa Diofanto.

Ah, que grande prodígio!

O túmulo diz cientificamente a exacta medida de sua vida.

- Deus concedeu-lhe ser menino pela sexta parte da sua vida, e somando uma duodécima parte a isto, cobriu-lhe as faces de pêlos;

Ele acendeu-lhe a lâmpada nupcial após uma sétima parte, e cinco anos após o seu casamento concedeu-lhe um filho.

Ai! Infeliz criança tardia; depois de chegar à medida de metade da vida de seu pai, o destino frio o levou.

Depois de se consolar da sua dor durante quatro anos com a ciência dos números, terminou com a sua vida.

Quantos anos viveu Diofanto?”

A sua interpretação suscitou muitas dúvidas:

[9] **J:** O que é um duodécimo? – perguntou um aluno após ter colocado o dedo no ar para intervir.

[10] **Prof:** Quem é que sabe?

Foram dadas várias respostas (5, 20, 10, 40, 100, ...) mas não a correcta.

[11] **Prof:** É $\frac{1}{12}$; a décima parte é $\frac{1}{10}$ e $\frac{1}{100}$ é a centésima parte...

As várias respostas dadas demonstram que os alunos não faziam a mínima ideia do que era um duodécimo, nem tinham noção de que se tratava de uma fracção.

Ao circular pela sala, a professora apercebeu-se que a maioria dos alunos (a trabalhar aos pares) estava com problemas em encontrar o que colocar no segundo membro da equação. Alguns deles só indicavam o primeiro membro, ignorando o segundo. Num dos grupos, a professora presenciou um aluno a dizer para o colega:

[12] **A:** Mas para ser equação tem que ter igual a qualquer coisa!

[13] **N:** Ah! Pois é. Mas é igual a quê?

O comentário feito em [12] serviu para chamar a atenção do colega para o erro que estava a cometer ao não considerar o 2º membro da equação. Esta situação mostra que o trabalho cooperativo entre pares contribui para despoletar as Zonas de Desenvolvimento Potencial dos colegas menos capazes, pois esta pequena ajuda serviu para que o colega se apercebesse do erro cometido e tentasse corrigi-lo.

Passando por outro grupo, ao ver a resolução de uma aluna, a professora perguntou:

[14] **Prof:** Isto é uma equação?

[15] **V:** É.

[16] **Prof:** Para ser equação o que é que tem que ter?

[17] **V:** x e igual.

[18] **Prof:** Onde está o igual?

Como este erro estava a ser muito frequente, a professora alertou para toda a turma:

[19] **Prof:** Não se esqueçam que para ser uma equação tem que ter igual a qualquer coisa!

Relativamente a este problema, a professora perguntou:

[20] **Prof:** Este problema já apareceu num lugar! Lembram-se?

Depois de algum silêncio:

[21] **Prof:** Apareceu no livro de Matemática do ano passado. Lembras-te M?

A professora dirigiu esta pergunta ao M porque este aluno é muito curioso e foi o único que, no ano anterior, tentou resolver o problema e pediu ajuda à professora.

[22] **M:** Ah! Já me lembro.

[23] **Prof:** Este problema costuma aparecer em muitos livros do 7º ano, no capítulo das equações, só que, muitas vezes, não é resolvido!

Depois de esclarecidas as diversas dúvidas que foram surgindo, os alunos conseguiram, na sua maioria, traduzir este problema para a equação $\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x$, e, depois, começaram a resolvê-la.

Porém, ainda surgiram algumas dúvidas para resolver esta equação. A professora, observando algumas resoluções, reparou que os alunos não estavam a considerar o denominador do termo do 2º membro. Então, alertou para toda a turma:

[24] **Prof:** Estou a ver que muita gente se esquece de arranjar denominadores para o que está no 2º membro! Temos que arranjar o mesmo denominador para tudo!

Além disso, alguns alunos estavam com dificuldade em encontrar o m. m. c. dos denominadores:

[25] **C:** Professora qual é o número que é múltiplo de 6, 12, 7 e 2?

[26] **Prof:** Tens que determinar o...

[27] **T:** mínimo múltiplo comum.

[28] **C:** E como é? Faça com o traço ou da maneira que faziam antigamente?

No comentário [28] o aluno usa o termo “traço” para se referir à decomposição em factores primos. Ora isto é representativo da falta de rigor na linguagem matemática e na utilização de conceitos matemáticos manifestada por muitos alunos.

Neste episódio, a professora foi interrompida por um aluno que não pediu autorização para responder, em [27]. Na pergunta feita em [28], o aluno queria saber se, para determinar o m. m. c., tinha que fazer a decomposição em factores (que ele associa ao “traço”) ou se usava o *algoritmo de Euclides* (que corresponde à maneira que faziam antigamente (ver anexoA.3)).

Uma vez que os alunos costumam fazer muita confusão para distinguir o m. m. c. do m. d. c. (depois de terem feito a decomposição em factores), a professora, quando ensinou este conteúdo, fez uma abordagem ao *algoritmo de Euclides*. Os alunos, na sua maioria, compreenderam o *algoritmo de Euclides* e, quando queriam determinar o m. d. c. entre dois números, optavam por usar este método em vez da decomposição em factores primos. Diziam que, assim, não confundiam o m. m. c. com o m. d. c. Isto

mostra que, nalgumas situações, os alunos revelam menos dificuldades quando usam os métodos antigos em vez dos actuais.

Nesta situação, também está presente o papel de mediação exercido pelos problemas históricos e que contribui para a aprendizagem dos conteúdos leccionados, uma vez que proporciona aos alunos métodos de resolução alternativos aos ensinados actualmente e que, às vezes, são mais fáceis de compreender.

Neste caso, o aluno colocou esta questão porque não sabia se devia calcular o m. m. c. ou o m. d. c. Esclarecida esta dúvida, os alunos continuaram a resolver a equação. Depois de resolver este problema, um dos alunos com melhor desempenho na aula de Matemática constatou que:

[29] **J:** 84 é o valor do denominador!

[30] **Prof:** Por acaso! Não quer dizer que seja sempre assim.

O que o aluno queria dizer era que a solução, 84, era igual ao m. m. c. dos denominadores, o que também representa uma falta de rigor na utilização de conceitos matemáticos.

[31] **Prof:** O Diofanto viveu quantos anos?

[32] **Alunos:** 84. – responderam vários alunos em simultâneo.

[33] **Prof:** É das poucas coisas que sabemos sobre Diofanto; não há nenhum documento que nos diga quando ele nasceu ou morreu. Este documento (Antologia Grega) é o único que nos dá uma pista sobre a idade dele.

[34] **T:** Foi a professora que fez isto tudo?

[35] **Prof:** Este problema existe mesmo; não fui eu que o inventei!

O comentário feito em [34] mostra que os alunos têm dificuldade em compreender e aceitar que estes problemas sejam tão antigos. Alguns alunos pensaram que tinha sido a professora a inventá-los e que a “história” dos documentos antigos não é verdadeira.

Os problemas/exercícios²⁰ seguintes não suscitaram tantas dúvidas uma vez que eram análogos ao problema 3. À medida que a professora se apercebia que a maioria dos alunos já tinha resolvido um determinado exercício, solicitava que alguém o fosse

²⁰ Uma vez que os problemas propostos na ficha utilizada eram muito idênticos, à medida que os alunos foram resolvendo a ficha, os problemas propostos deixaram de ser considerados problemas (porque os alunos já conheciam uma estratégia para os resolver) e passaram a representar exercícios de aplicação das regras da resolução de equações com denominadores.

corrigir e, muitas vezes, eram os próprios alunos que se voluntariavam para ir ao quadro.

[36] **Di:** Professora, posso ir ao quadro corrigir o problema 6?

A professora ficou agradavelmente surpreendida pois não se lembrava de este aluno se ter oferecido para ir ao quadro desde que era seu aluno (ou seja, desde o 7º ano). E é de salientar que conseguiu resolver o exercício correctamente.

Na verdade, a mãe deste aluno, em conversas com a professora (no papel de Directora de Turma), costumava dizer que ele precisava de algo que lhe despertasse o interesse, como de facto foi constatado.

De facto, os problemas colocados desta maneira, com enunciados curiosos e, por vezes, engraçados, despertam o interesse dos alunos. Depois de ultrapassadas as dificuldades de interpretação sentidas na resolução dos primeiros problemas, a professora constatou que os alunos se sentiram mais motivados para os resolver do que se fosse pedida a resolução automática e repetitiva de equações, colocadas de uma forma abstracta, com letras, números e sinais, que não significam nada para os alunos. Mais uma vez, esta situação é ilustrativa da mediação exercida pelos problemas históricos.

Depois de resolver mais alguns problemas desta ficha, o J. manifestou-se, novamente, dizendo que:

[37] **J:** Professora, há muitas coincidências; a maioria dos denominadores vai dar o resultado!

[38] **Prof:** É curioso que isso aconteça!

[39] **D:** Mas não é uma regra porque há outros exercícios onde não acontece!

[40] **M:** Por isso, temos que resolver na mesma.

Entretanto, ao ouvir o toque de saída, um aluno disse, muito admirado:

[41] **T:** Já acabou a aula?

O comentário feito em [41] mostra o entusiasmo dos alunos na resolução destes problemas. Geralmente, não é este tipo de comentário que um professor de Matemática costuma ouvir na aula; é mais comum ouvir comentários do género: “Esta aula nunca mais acaba!”.

Na sequência do episódio descrito em [37-40], a professora foi para casa a pensar naquelas coincidências. Seria mesmo por acaso ou haveria uma razão para acontecerem?

Entretanto, a professora debruçou-se sobre o assunto e, depois de pesquisar em alguns livros sobre História da Matemática, descobriu uma justificação para o que tinha pensado ser uma coincidência.

Na aula seguinte, a professora retomou o comentário que o aluno tinha feito na aula anterior e aproveitou para ensinar aos alunos de que forma as equações eram resolvidas antigamente.

[42] **Prof:** Quero chamar à atenção para uma coisa: lembrem-se de terem dito na última aula que em, muitos casos, o resultado era igual ao denominador e eu disse que era coincidência?

[43] **Da:** A professora inventou uma nova regra?

[44] **Prof:** Isso tem a ver com a maneira como resolviam as equações antigamente. Não as resolviam como as resolvemos agora. Em vez de resolverem a equação como fazemos actualmente, resolviam-na por tentativas, ou seja, substituíam o x por valores, e se não desse certo, faziam uma regra de três simples.

De seguida, a professora exemplificou no quadro através da resolução do seguinte problema (problema 5 do anexo C.7):

“Um oitavo de uma coluna está enterrada no lodo, a terça parte na água, a quarta no musgo e 7 hastas são visíveis no ar. Qual é o comprimento desta coluna?” (Mahavira)

Note-se que os alunos já tinham resolvido este problema, aos pares, usando o método actual de resolver equações.

Depois de escrever no quadro a equação $\frac{x}{8} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} + 7 = x$, que traduz este problema, a professora perguntou:

[45] **Prof:** Que número acham que, antigamente, escolhiam para o x ?

[46] **T:** O 1.

[47] **Prof:** Às vezes escolhiam o 1, mas, neste caso, o 1 não dá jeito porque não é divisível por 8, 3 ou 4. Então, escolhiam um número que fosse divisível por 8, 3 e 4. Qual é o número que é divisível por 8, 3 e 4?

[48] **A:** 24.

[49] **Prof:** Que relação existe entre o 24 e os denominadores?

[50] **A:** É o m. m. c. (8, 3, 4).

De seguida, a professora fez, em interacção com os alunos, a verificação no quadro, substituindo o x por 24 e todos concluíram que o 24 era, de facto, a solução da equação.

Depois de verem esta maneira de resolver as equações, alguns alunos manifestaram-se, dizendo: “Assim é mais fácil!”. De facto, os alunos que não entendem a resolução de equações pelo método algébrico, acharam este método o “máximo”, pois era uma alternativa a um método que lhes parecia muito difícil. Deste modo, os problemas históricos actuam como artefactos mediadores da aprendizagem das equações, ao proporcionarem um método alternativo ao método algébrico, considerado mais fácil por alguns alunos.

[51] **Prof:** Mas, se repararem, nem sempre o resultado é igual ao m. m. c. entre os denominadores. Por exemplo, no problema 1 isso não acontece. Quando isso não acontece, é necessário fazer mais contas: faz-se uma regra de três simples. Como viram, no problema 1, o denominador (ou melhor, o m. m. c. dos denominadores) é 4 e o resultado é 12.

Note-se que os alunos já tinham resolvido o problema 1 através da resolução da equação: $x + \frac{x}{4} = 15$. Para resolver esta equação método antigo, a professora orientou o seguinte questionamento:

[52] **Prof:** Qual seria o número a colocar no lugar do x ?

[53] **N:** O 4.

Depois de fazer, em interacção com os alunos, os cálculos no quadro, a professora disse:

[54] **Prof:** Como dá 5 e devia dar 15, então (os egípcios) faziam uma regra de três simples.

[55] **T:** 5 está para 15, ...

Depois de fazerem os cálculos, os alunos concluíram que a solução era 12. Constataram que, de facto, a solução obtida resolvendo a equação desta maneira era igual à solução que tinham obtido quando resolveram a equação da maneira como lhes foi ensinada.

É interessante notar que este método permitiu aplicar outros conceitos matemáticos como a regra de três simples, em que, de um modo geral, os alunos não costumam revelar dificuldades.

Mas, alguns alunos ainda tinham dúvidas sobre o número que deviam escolher para fazer a substituição.

[56] **T:** E se, em vez do 4, pusesse 3?!

[57] **Prof:** Não convém porque os valores do denominador não são divisores de 3; assim tinhas que trabalhar com fracções. Se no denominador só aparecer um número, substituis por esse número; se aparecerem vários números, substituis pelo m. m. c. desses números.

[58] **Prof:** Era esta a maneira que usavam antigamente para resolver as equações. Chama-se a **regra da falsa posição**²¹. O que acham desta maneira de resolver as equações?

Surgiram várias respostas, umas favoráveis à utilização desta nova regra, outras não. Foi interessante notar a divergência de opiniões, sendo de salientar que os alunos que costumavam revelar mais dificuldades na resolução algébrica das equações foram os que opinaram mais favoravelmente. Este facto é compreensível uma vez que os alunos que já sabiam resolver pelo método actual acharam que esta nova regra só vinha complicar e, como já tinham compreendido a resolução das equações, não se mostraram tão receptivos para a aprendizagem desta nova regra. Por outro lado, os alunos que revelavam mais dificuldades para resolver uma equação pelo método ensinado actualmente acharam que este método vinha resolver o seu problema pois representava uma alternativa a um método que lhes parecia muito complicado. Além disso, para resolver uma equação por este método é necessário utilizar a regra de três simples e, geralmente, a maioria dos alunos, mesmo os que têm mais dificuldades a Matemática, consegue aplicá-la sem dificuldades.

Muito provavelmente, se não tivesse sido ensinado este método, os alunos com mais dificuldades na resolução das equações nem sequer teriam tentado resolver estes problemas porque, depois de os traduzir para uma equação, “empatavam” e não conseguiam concluir a resolução do problema, o que é deveras desmotivante.

Depois disto, os alunos continuaram a resolver a ficha de trabalho. À medida que os problemas iam sendo resolvidos, a sua correcção era feita no quadro, por um aluno que se voluntariava.

O aluno Di ofereceu-se, novamente, para ir ao quadro fazer o exercício 9 (já na aula anterior tinha ido resolver o exercício 6).

²¹ A *regra da falsa posição* aplica-se na resolução de equações do tipo $ax = b$. Esta regra já não é válida para resolver equações que não estejam nesta forma (ou seja, que não traduzam situações de proporcionalidade directa).

- [59] **Prof:** Já repararam que as equações dos problemas 12 e 13 são praticamente iguais? A única diferença é que num somamos 9 e no outro somamos 15. Porque é que acham que isto acontecia?
- [60] **A:** Era o mesmo autor.
- [61] **T:** Não, um era o Leonardo de Pisa e o outro era o Paolo Dagomari.
- [62] **V:** Eram irmãos!
- [63] **Prof:** Não, era porque copiavam os problemas uns dos outros! O mesmo problema aparecia em épocas diferentes apenas com pequenas alterações.
- [64] **H:** Plágio!

De facto, durante a realização da ficha de trabalho, a professora apercebeu-se que os problemas eram um bocado repetitivos e que a ficha era muito grande. Nas notas de campo, a professora (no papel de investigadora) escreveu: “Devo fazer as próximas fichas de trabalho mais pequenas porque torna-se aborrecido resolver tantos exercícios parecidos”.

5.3.1. Sumariando

Da análise dos dados é possível constatar que estes alunos, na sua maioria, aprenderam a resolver problemas que se podem traduzir por equações e os problemas históricos desempenharam um importante papel de mediação nesse processo, assim como o questionamento e orientação feito pela professora aquando a resolução da ficha de trabalho.

Através dos problemas históricos, os alunos tiveram a oportunidade de conhecer a maneira como as equações eram resolvidas antigamente (através da *regra da falsa posição*) e puderam comparar esse método com o que lhes foi ensinado. Isto conduziu a opiniões divergentes, pois alguns alunos acharam a *regra da falsa posição* mais fácil, outros, nem por isso, e permitiu que os alunos reflectissem sobre as vantagens da Álgebra, a que alguns alunos têm aversão.

Além de permitir a comparação entre os métodos (antigo e actual), a apreciação e análise das soluções apresentadas, no passado, aos problemas históricos ajudaram os alunos que tinham muitas dificuldades na resolução de equações a contornarem essas dificuldades. Agora, tinham a oportunidade de resolver uma equação pelo método usado antigamente (a *regra da falsa posição*), que para estes alunos era mais fácil do que o método algébrico. Este facto, também é representativo do papel de mediação desempenhado pelos problemas históricos na aprendizagem das equações, ao

contribuírem para melhorar a compreensão das equações, proporcionando métodos de resolução alternativos.

Nos episódios analisados, encontramos situações em que foi evidente o papel motivador destes problemas, como por exemplo, quando um aluno outrora desinteressado se mostrou mais participativo na resolução dos exercícios e até se ofereceu para ir ao quadro.

Pelo exposto podemos inferir que os problemas históricos desempenharam um duplo papel pois, além de ajudarem os alunos a compreenderem os conteúdos leccionados, também desempenharam um papel fundamental de motivação.

A imitação também esteve presente nos episódios analisados, pois os alunos, após terem resolvido um determinado problema, mostraram-se capazes de resolver outros problemas análogos.

Há situações que evidenciam que o trabalho cooperativo entre pares contribuiu para despoletar as Zonas de Desenvolvimento Potencial dos colegas menos capazes, pois, por exemplo, um comentário ou chamada de atenção feita por um colega com mais conhecimentos matemáticos contribuiu para que um aluno com mais dificuldades se apercebesse do erro cometido e tentasse corrigi-lo, como se verificou em [12-13].

Importa, ainda, destacar o papel mediador do questionamento realizado pela professora. Este questionamento foi essencial para ajudar os alunos na procura de soluções para os problemas propostos e contribuiu, mais uma vez, para o despoletar das Zonas de Desenvolvimento Potencial dos alunos.

No entanto, a professora confrontou-se com algumas dificuldades na integração destes problemas nas suas aulas, como se pode ver pelo seu desconhecimento inicial da *regra da falsa posição*. Esta dificuldade está relacionada com a falta de formação dos professores no âmbito da História da Matemática e é um dos óbices à integração da História da Matemática apontado na literatura.

5.4. Relacionando o Teorema de Pitágoras, as equações e a história

Para consolidação de conhecimentos e uma vez que os alunos devem aprender a estabelecer conexões entre diferentes temas do programa, a professora elaborou uma ficha de trabalho onde os alunos tinham que aplicar conteúdos trabalhados

anteriormente, em especial o Teorema de Pitágoras, as equações e os casos notáveis (quadrado do binómio).

No início da aula, a professora entregou a ficha de trabalho nº 7 (ver anexo C.8) para ser resolvida aos pares, ou em grupos de três. Os alunos começaram a ver a ficha e, pouco depois, surgiram as seguintes questões:

- [1] **N:** A questão 5 não saiu num teste?
- [2] **Prof:** Saiu esta questão no primeiro teste, de forma adaptada, e era igual a uma questão que já tinha saído numa prova de aferição.
- [3] **F:** Professora, como é o Teorema de Pitágoras? Já não me lembro!

O comentário feito em [3] é denunciador do grande esquecimento dos alunos. Depois de terem realizado vários exercícios de aplicação directa do Teorema de Pitágoras e diversos problemas que envolviam este teorema, há sempre alunos que o esquecem! O rápido esquecimento dos conteúdos ou regras matemáticas leccionadas representa uma lacuna muito observada e que, muitas vezes, conduz ao insucesso nesta disciplina.

- [4] **Prof:** Quem é que se lembra?
- [5] **A:** $h^2 = c^2 + c^2$.
- [6] **F:** Professora, faça um exemplo.
- [7] **H:** Vem para o teste?

Esta última questão revela que muitos alunos só dão importância ao que vai sair no teste. Pensam que se não sair no teste, não vale a pena prestar atenção. Além disso, também costumam questionar a importância de aprender Matemática, sendo frequente ouvi-los perguntar: “Para quê estudar Matemática?”.

Ora, este tipo de questões desvalorizam a importância da aprendizagem da Matemática *per se*, onde importa a aquisição de conhecimentos e o desenvolvimento de capacidades transversais como a capacidade de resolver problemas, o raciocínio e a comunicação matemática, úteis não só para esta disciplina como também para todo o processo de aprendizagem escolar e, até mesmo, para a resolução de problemas práticos do dia-a-dia.

- [8] **Prof:** Sim e vocês têm que se habituar porque no exame de 9º ano vem a matéria do ano todo e também do 7º e do 8º.
- [9] **Prof:** Nesta ficha de trabalho vamos relembrar duas coisas: o Teorema de Pitágoras e os casos notáveis.

O comentário feito em [8] mostra a preocupação da professora com o exame de conclusão de ciclo, onde costumam ser avaliados conteúdos leccionados não só no 9º ano, como muitos alunos pensam, mas também no 7º e no 8º ano. Tendo isto em conta, a professora preocupa-se em relacionar a matéria dada, podendo sair em qualquer teste de avaliação realizado ao longo do ano.

De seguida a professora leu, em voz alta, o enunciado do seguinte problema (questão 1 do anexo C.8):

“Uma vara descaiu 2 cúbitos quando a sua base se moveu 6 cúbitos, determina a sua altura inicial.” (Papiro do Cairo)

Depois, perguntou:

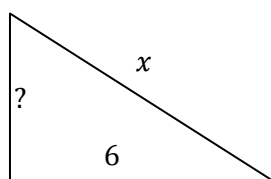
[10] **Prof:** O que é que têm que fazer primeiro?

[11] **Je:** Uma figura.

[12] **Ma:** É um triângulo.

Aqui, os alunos lembraram-se de uma estratégia de resolução de problemas abordada no início do ano lectivo, quando resolveram problemas sobre o Teorema de Pitágoras.

Como era o primeiro problema deste género, e os alunos, após uma primeira leitura, estavam a levantar muitas questões, a professora optou por colocar os dados na figura, no quadro, em interacção com os alunos.



Este problema é muito semelhante ao problema 1 da ficha de trabalho 1, mas, neste caso, os alunos tinham que desenvolver o quadrado do binómio, o que não era necessário nos problemas da ficha 1.

[13] **Prof:** O que devo colocar no lugar de “?”?

[14] **M:** y

[15] **Prof:** Não convém misturar letras.

Depois sucederam-se várias respostas: x^2 , $x + 2$, 2 , $x - 2$, ...

[16] **Prof:** Qual é a altura da vara?

- [17] **A:** x
[18] **Prof:** E se a vara desceu 2 cúbitos, então fica...?
[19] **A:** $x - 2$
[20] **Prof:** Muito bem. E, agora, o que é que vamos aplicar?
[21] **A:** O Teorema de Pitágoras.
[22] **Prof:** Qual é a hipotenusa?
[23] **A:** x
[24] **Prof:** O que diz o Teorema de Pitágoras?
[25] **A:** $h^2 = c^2 + c^2$. Neste caso, fica: $x^2 = (x - 2)^2 + 6^2$.
[26] **F:** Tem que ficar sempre ao quadrado?
[27] **Prof:** Sim, porque o Teorema de Pitágoras refere-se às áreas dos quadrados construídos sobre os lados do triângulo rectângulo.

Depois, os alunos simplificaram a equação. Enquanto a professora circulava pela sala tirando dúvidas, observou a seguinte discussão entre alunos de grupos vizinhos:

- [28] **He:** M, como é que fica $(x - 2)^2$?
[29] **M:** $(x - 2)(x + 2)$
[30] **A:** $x(x - 2)$
[31] **J:** Não, estão a fazer mal. Fica $(x - 2)(x - 2)$.
[32] **He:** E, agora, como é que faço?
[33] **J:** Agora multiplicas ou, então, aplicas o caso notável.
[34] **He:** Mas é isso do caso notável que eu não percebo!

Neste episódio, é evidente o papel desempenhado pelos pares mais capazes no despoletar das Zonas de Desenvolvimento Potencial dos colegas com mais dificuldades. Em [28] estamos perante uma situação em que é o próprio aluno que tem dificuldades a pedir ajuda ao M, um colega com bom desempenho nas aulas de Matemática. A chamada de atenção, feita em [31], também serviu para alertar os colegas para o erro cometido, incentivando-os a encontrar a resposta correcta.

A professora apercebeu-se que o caso notável estava esquecido e que, para alguns alunos, nunca tinha ficado percebido e interveio, dizendo:

- [35] **Prof:** Estou a ver que há muita gente que já não se lembra disto!

Como viu que vários grupos estavam com as mesmas dificuldades, lembrou o caso notável, mais uma vez, para toda a turma.

- [36] **Prof:** Lembram-se de eu ter feito uma figura quando comecei a explicar esta matéria?

[37] **T:** Lembro-me, mas dá muito trabalho andar sempre a fazer a figura!

[38] **Prof:** Pois é, mas é melhor ter trabalho e fazer certo, do que fazer à pressa e ficar errado. Por isso, aconselho aos que têm dificuldade em perceber isto que façam sempre uma figura.

De seguida, a professora utilizou o conhecimento das áreas e fez a seguinte figura, colocando os valores com a ajuda dos alunos:

	x	-2
x	x^2	$-2x$
-2	$-2x$	$+4$

[39] **Prof:** Relativamente a este quadrado, o que representa $(x - 2)^2$?

[40] **Di:** Representa a área.

[41] **Prof:** Tendo em conta que a área do quadrado grande é igual à soma das áreas dos quadrados pequenos e dos dois rectângulos, a que é igual $(x - 2)^2$?

[42] **N:** É igual a $x^2 - 4x + 4$.

[43] **Prof:** Estão a ver, obtém-se o mesmo resultado que se obteria aplicando o caso notável.

[44] **He:** Assim parece mais fácil.

[45] **Prof:** Por isso, o que eu aconselho é que quem já percebeu o caso notável, aplica-o, porque é mais rápido, mas quem ainda faz muita confusão, é melhor usar a figura.

Apesar de a professora ter dado esta justificação geométrica quando introduziu os casos notáveis, os alunos evitavam usá-la porque achavam que dava muito trabalho estar sempre a fazer a figura. Mas, dado que as dúvidas persistiam, a professora achou que seria vantajoso aconselhar os alunos com mais dificuldades a utilizarem esta representação para não errarem no desenvolvimento do caso notável.

Muitos alunos costumam ter dificuldades em dar significado à “manipulação de símbolos” quando trabalham com a álgebra. Neste caso, a utilização da geometria, que dá um sentido concreto aos símbolos, pode ajudar os alunos a superarem este obstáculo.

Utilizar os métodos antigos ajuda, muitas vezes, na compreensão dos conteúdos leccionados, como é ilustrado no comentário feito em [44]. É compreensível que este método seja mais fácil para os alunos, dado que a aplicação directa da fórmula do quadrado do binómio exige uma maior capacidade de abstracção, pouco revelada pela maioria dos alunos do 8º ano. Aqui, está presente mais um exemplo do papel mediador da História da Matemática, na medida em que proporciona processos de resolução alternativos, considerados, por alguns alunos, mais fáceis do que os ensinados actualmente.

De seguida, a professora constatou que, depois de aplicar o caso notável, muitos alunos não sabiam o que fazer. Então, esclareceu:

- [46] **Prof:** Têm termos em x , x^2 e termos independentes; aconselho a que passem tudo para o primeiro membro e coloquem igual a 0.
[47] **A:** Mas não demos equações do 2º grau!
[48] **Prof:** Tenham cuidado, x^2 e $-x^2$ desaparecem; se tivessem o mesmo sinal é que ficava $2x^2$. Por isso, a equação não ficou do 2º grau, porque cortámos os termos em x^2 .

Depois de ter dado algum tempo para que os alunos “simplificassem” a equação, a professora questionou:

- [49] **Prof:** O que obtiveram?
[50] **Alunos:** $4x - 40 = 0$. - responderam alguns alunos ao mesmo tempo.
[51] **Prof:** A, $4x - 40 = 0$ é uma equação do 1º ou do 2º grau?
[52] **A:** É do 1º grau, porque não tem x^2 .
[53] **Prof:** Estão a ver de quantas coisas estamos a falar neste problema: Teorema de Pitágoras, casos notáveis e equações. Agora façam o exercício 2.
[54] **A:** O problema 2 é como o 1º?
[55] **Prof:** É. Está toda a gente a conseguir fazer o problema 2?
[56] **A:** É fácil.

Aqui, está presente o conceito de imitação, defendido por Vygotsky. Uma vez que o problema 2 (ver anexo C.8) era idêntico ao primeiro, foi resolvido sem causar grandes dúvidas, sendo mesmo considerado fácil, como podemos constatar pelo comentário feito em [56].

Uma aluna pediu ajuda à professora, pois o exercício 2 não estava a ficar correcto. Ao ajudá-la, a professora reparou que ela tinha cometido o erro tão usual que é fazer $10^2 = 20!$

[57] **Prof:** 10^2 é 20?!

[58] **A:** Ah! É 100!

Multiplicar a base pelo expoente de uma potência é um erro frequentemente cometido. Às vezes esta falha é cometida por distração mas, geralmente, acontece porque os alunos não compreendem o conceito de potência. Mas errar um cálculo simples como este é suficiente para que os alunos não consigam encontrar a solução correcta.

[59] **Prof:** Quem quer ir ao quadro resolver o exercício 2?

Vários alunos quiseram ir ao quadro e a professora escolheu um aluno de entre os voluntários. Os alunos mostraram-se muito participativos na resolução desta ficha de trabalho.

[60] **Da:** Professora, posso ir ao quadro fazer o exercício 3?

Entretanto, a professora andava pelos lugares a tirar dúvidas e a ajudar aqueles que não estavam a conseguir fazer. À medida que os problemas iam sendo feitos, um aluno ia ao quadro fazer a correcção.

Devido à semelhança dos problemas, um aluno desabafou:

[61] **A:** Professora, isto não é tudo a mesma coisa?!”

[62] **Prof:** Depois de estar a figura feita, é tudo a mesma coisa; mas antes de fazer a figura, não são todos iguais!

O comentário [61] mostra que, apesar de a professora ter-se apercebido, aquando a resolução das fichas de trabalho anteriores, que deveria evitar fazer fichas de trabalho com exercícios repetitivos (tendo mesmo escrito isso nas suas notas de campo), parece que não foi capaz de diversificar os exercícios propostos. No entanto, é importante notar que, à excepção dos três primeiros problemas desta ficha, os restantes problemas só eram semelhantes depois de esquematizados através da figura. Na verdade, cada

problema tinha um enunciado com características especiais, o que causou algumas dificuldades de interpretação.

O seguinte problema (questão 6 do anexo C.8) era totalmente diferente dos anteriores:

“Para resolver o problema de encontrar dois números cuja soma seja 20 e a soma dos seus quadrados 208, Diofanto não designava os números por x e y , mas como $10 + x$ e $10 - x$.

a) Mostra que a soma das expressões utilizadas por Diofanto é igual a 20.

b) Encontra os números que satisfazem o problema, procedendo como Diofanto.”

Um aluno, depressa constatou que:

[63] **Da:** $10 + x + 10 - x = 20$.

[64] **Prof:** O Diofanto tinha uma maneira diferente da usada actualmente para resolver este problema; em vez de usar duas letras, usava apenas uma.

Para resolver este problema, a professora escreveu no quadro, com a ajuda dos alunos, a seguinte equação:

$$(10 + x)^2 + (10 - x)^2 = 208 \quad (1)$$

[65] **Prof:** No 9º ano, vocês irão aprender a resolver estes problemas através de sistemas de equações. Isto, feito com matéria de 9º ano, ficava do seguinte modo:

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ x^2 + y^2 = 208 \end{cases}$$

[66] **Prof:** É um sistema com duas equações a duas incógnitas. Qual vos parece ser a maneira mais fácil?

A questão colocada, pela professora, em [66] não fazia muito sentido uma vez que os alunos ainda não tinham aprendido a resolver sistemas de equações. Qualquer resposta dada seria muito subjectiva uma vez que os alunos não conheciam o grau de dificuldade da resolução dos sistemas.

A simplificação da equação em (1) conduziu a uma equação do 2º grau incompleta, que os alunos já tinham aprendido a resolver. Entretanto, terminou a aula e a conclusão da resolução deste problema ficou para trabalho de casa.

Na aula seguinte, foi feita a correcção do trabalho de casa e os alunos retomaram a ficha no problema 7:

“Diz-me, depressa, calculador inteligente, quais são as quantidades cuja diferença é oito e a diferença dos seus quadrados é 400.” (Lilavati de Baskara)

[67] **Prof:** O problema 7 é parecido com o 6. Os dois problemas representam uma maneira de resolver sistemas de equações, usada tanto por Diofanto como por Baskara.

Como se apercebeu que os alunos estavam com dificuldades em resolver este problema, a professora começou por relembrar o problema 6, resolvido na aula anterior.

[68] **Prof:** A que é igual $10 + x + 10 - x$?

[69] **T:** $20x$ – disse, erradamente, um aluno

[70] **Prof:** Que relação existe entre o 10 e o 20?

[71] **An:** Metade.

[72] **Prof:** Então, no exercício 7, em vez de usar 8 o que é que devo usar?

Depois de algum silêncio, a professora, que já estava impaciente e preocupada com a demora, perguntou directamente:

[73] **Prof:** Quanto é metade de 8?

[74] **Alunos:** 4. – responderam vários alunos.

A questão feita em [73] foi directa demais, mas a professora queria avançar na resolução do problema, pois tencionava concluir a resolução da ficha naquela aula. Muitas vezes, os alunos bloqueiam na resolução de um problema e uma pequena sugestão da professora é suficiente para fazer avançar a sua resolução. Apesar de a professora já ter reflectido sobre as ajudas excessivas e directas demais, e ter concluído que deveria controlar-se e evitar este tipo de ajuda, muitas vezes, a tentação de ajudar sobrepõe-se à vontade de não o fazer e, por força do hábito e pela pressão sentida para cumprir a planificação, a professora acaba por fornecer essas ajudas.

De seguida, a professora explicou porque deveria ser $x + 4$ e $x - 4$ e não $4 + x$ e $4 - x$ como no exercício anterior, uma vez que, agora, tratava-se de uma subtracção e não de uma adição.

[75] **Prof:** A diferença dos seus quadrados é 400. Como é que ponho isto em equação?

[76] **J:** $(x + 4)^2 - (x - 4)^2 = 400$.

[77] **Prof:** Muito bem. E, agora, como é que fica $(x + 4)^2$?

[78] **J:** Eu, sozinho, não tinha conseguido chegar lá. – referiu o melhor aluno da turma.

[79] **Prof:** Mesmo comparando com o exercício 6, não conseguiste?

[80] **J:** Não.

O comentário feito em [78] revela que se trata de um problema difícil para estes alunos, pois, mesmo comparando com o problema anterior, que era análogo, nem o melhor aluno da turma estava a conseguir resolvê-lo, por imitação. Isto leva a concluir que este problema poderá estar fora do alcance do desenvolvimento de alunos do 8º ano. Na verdade, o método actual pelo qual este tipo de problemas são resolvidos, ou seja, os sistemas de equações, só faz parte dos conteúdos a leccionar no 9º ano, o que poderá justificar as dificuldades sentidas pelos alunos.

Uma aluna chamou a professora porque ainda lhe estava a fazer confusão aplicar o caso notável e a professora explicou-lhe individualmente. Depois, disse-lhe que se não conseguisse aplicar o caso notável podia fazer $(x + 4)^2 = (x + 4)(x + 4)$ e utilizar a propriedade distributiva ou, então, utilizar a figura, como já tinha sido explicado anteriormente.

Ao circular pela sala, a professora reparou que alguns alunos estavam a desenhar a figura para determinar $(x + 4)^2$, como tinha sido aconselhado.

[81] **Prof:** Já conseguiram acabar o exercício 7 ou ainda não?

[82] **H:** Já.

[83] **F:** Já está feito!

[84] **T:** Professora, dá 25?

[85] **Prof:** Dá.

[86] **T:** Yes!

[87] **Prof:** Mas, cuidado, agora têm que determinar os números.

[88] **Prof:** Esta matéria é muito importante para o 9º ano, não a podem esquecer!

[89] **M:** Agora somamos 4 ao 25 e tiramos 4 ao 25.

[90] **Prof:** Quais são os números? É o 25? – perguntou para toda a turma, ignorando, propositadamente, o comentário correcto feito pelo M.

[91] **Alunos:** Não, é $25 + 4$ e $25 - 4$. – responderam alguns alunos em simultâneo.

[92] **V:** Professora, que números são esses? – perguntou a aluna que estava com dúvidas sobre o caso notável e, por isso, se atrasou na resolução deste problema.

[93] **Prof:** O x é 25 mas a resposta é $x + 4$ e $x - 4$.

[94] **V:** Mas a diferença não é 8!

[95] **Prof:** Quanto é $29 - 21$, não é 8?

[96] **V:** É.

A resolução dos problemas 6 e 7 pelos métodos de Diofanto e Baskara, respectivamente, proporcionaram aos alunos a oportunidade de conhecer o método pelo

qual, antigamente, estes problemas eram resolvidos. Porém, nesta situação, os alunos não puderam estabelecer comparações uma vez que a resolução dos sistemas é um conteúdo leccionado apenas no 9º ano.

No fim da aula a professora (no papel de investigadora) escreveu nas suas notas de campo: “Penso que a resolução destes problemas pelo método proposto por Diofanto e Baskara teria sido mais interessante e produtiva se os alunos já tivessem aprendido a resolver sistemas pelos métodos actuais. Nesse caso, os alunos poderiam ter comparado as duas estratégias, o que, aqui, não foi possível”. Nesta situação, parece que a integração da História da Matemática não foi introduzida de forma adequada, tendo contribuído mais para complicar do que para facilitar.

Depois, os alunos prosseguiram com a resolução da ficha e é de referir que a F. ofereceu-se para ir ao quadro resolver o problema 9. Ia com a folha da colega na mão, mas, depois, reconheceu que não estava a agir bem e pediu à professora para a ajudar.

Esta aluna revela muitas dificuldades e é pouco participativa, mas, no entanto, mesmo não tendo conseguido resolver o problema, queria ir ao quadro e para tal levava a resolução da colega. Esta situação é indiciadora do carácter motivador destes problemas, pois, caso não lhe tivessem despertado interesse, ela não teria demonstrado qualquer vontade de ir ao quadro. Esta situação é ilustrativa do papel de mediação exercido pelos problemas históricos, uma vez que suscitaram o interesse desta aluna para a participação nas actividades propostas.

[97] **Di:** Coitado do M. que já está aqui há meia hora a chamar a professora! – disse o colega de carteira do M.

[98] **Prof:** Por causa do exercício 10? Já to explico, M.

Apesar do esforço e preocupação da professora em atender a todas as solicitações, por vezes, aconteciam situações como esta. A professora teve dificuldades em prestar um ensino individualizado e diferenciado nesta turma, devido à sua dimensão e heterogeneidade, onde há alunos muito competentes e outros que revelam muitas dificuldades e são muito pouco autónomos, necessitando, com frequência, de ajuda.

Além disso, sempre que surgia um problema novo, suscitava dúvidas mesmo nos alunos mais capazes e mais independentes, como aconteceu na situação acima descrita, relativamente ao problema 10.

5.4.1. Sumariando

Nos episódios analisados há situações indiciadoras do importante papel de motivação desempenhado pelos problemas históricos na aprendizagem da Matemática, como é ilustrado pela situação em que a aluna, mesmo não tendo conseguido resolver o problema, mostrou-se interessada em ir corrigi-lo ao quando.

Além de ter contribuído para aumentar a motivação, o recurso à História da Matemática ajudou os alunos a compreenderem os conteúdos leccionados como nos mostra a situação em que a professora usou a representação geométrica, muito utilizada pelos babilónios, para explicar como calcular o quadrado do binómio. O comentário feito em [44] mostra que, para alguns alunos, a utilização da figura ajudou a simplificar a aplicação deste caso notável.

Estas duas situações são bastante representativas do papel de mediação desempenhado pelos problemas históricos (ou pela História da Matemática, de uma forma mais geral) na aprendizagem dos conteúdos leccionados, pois, além de terem contribuído para melhorar a compreensão, também aumentaram a motivação e interesse dos alunos, promovendo a participação e envolvimento nas actividades propostas.

Importa referir, ainda, que nas situações acima descritas, os alunos tiveram a oportunidade de utilizar uma estratégia de resolução de problemas, já abordada em aulas anteriores e que consiste na elaboração de uma figura para representar os problemas, o que contribuiu para o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas.

Considerando o importante conceito da Teoria da Actividade que é a Zona de Desenvolvimento Potencial, constatamos que, mais uma vez, o papel mediador da professora, através do questionamento e orientação das tarefas propostas, ajudou a despoletar as Zonas de Desenvolvimento Potencial dos alunos, permitindo que estes conseguissem resolver problemas que, sem essa ajuda, não teriam conseguido. Por exemplo, uma situação ilustrativa verifica-se na resolução do primeiro problema, quando a professora começa por o representar através de uma figura. Depois desta ajuda os alunos conseguiram concluir a resolução do problema e, além disso, foram capazes de resolver os dois problemas seguintes, que eram análogos. Se a professora não tivesse dado este incentivo, muitos alunos não o teriam resolvido e ter-se-iam limitado a copiar a resolução do quadro.

Também é de destacar o papel desempenhado pelos pares mais capazes no desenvolvimento destas zonas, como podemos constatar em algumas situações analisadas, das quais destaco a descrita em [28-34].

A importância da imitação também está presente nestes episódios, uma vez que os alunos resolviam, sem grandes dificuldades, problemas análogos a outros já resolvidos. No entanto, também se encontram situações em que a imitação não foi suficiente para que os alunos conseguissem resolver o problema devido ao aumento do grau de dificuldade ou à originalidade do enunciado, tendo sido necessária a ajuda da professora para dissipar as dificuldades encontradas na interpretação do problema.

O facto de, nestas aulas, os alunos desempenharem um papel mais activo, onde tentavam resolver, sozinhos ou em grupo, os problemas propostos, conduziu a aulas muito participadas em que diversos alunos solicitavam a ajuda da professora para esclarecer dúvidas que iam surgindo. Por isso, algumas vezes aconteciam situações em que a professora não tinha a oportunidade de atender a todas as solicitações, como aconteceu no episódio descrito em [97-98]. Note-se que não eram apenas os alunos com mais dificuldades que solicitavam a sua ajuda; muitas vezes, eram os alunos mais competentes os que mais questionavam a professora.

5.5. Síntese dos resultados

Tendo por base a análise feita, anteriormente, ao conjunto de episódios relacionados com os diversos conteúdos leccionados, há aspectos que se repetem, não sendo específicos de um determinado conteúdo, mas transversais e comuns a toda a aprendizagem da Matemática quando mediada pelos problemas históricos.

Dessa análise, emergiram os seguintes aspectos:

5.5.1. *Características do ambiente de aprendizagem*

O ambiente de aprendizagem em que ocorreram as aulas analisadas foi favorável à aprendizagem dos conteúdos leccionados, de diversas formas. O contexto de sala de aula em que os problemas históricos foram usados proporcionou boas oportunidades para promover e reforçar a aprendizagem dos conteúdos, permitindo interacções entre os alunos, que geralmente trabalhavam aos pares ou em grupos de três, e entre estes e a professora.

Na maioria das situações, a professora agiu como um elemento mediador na construção do conhecimento, orientando e questionando os alunos durante a resolução das actividades propostas. A professora desempenhou o papel de facilitadora e coordenadora das actividades na sala de aula, permitindo que os diferentes grupos desenvolvessem as suas ideias de forma autónoma, fornecendo ajuda só quando solicitada, fazendo perguntas e usando sugestões e dicas como a forma mais comum de ajudar.

Às vezes, os papéis também se inverteram e foram os alunos, trabalhando em grupo, que desempenharam este papel de mediação, relativamente aos colegas. Assim, os alunos desempenharam diferentes papéis na sala de aula, que se iam alterando consoante a sua contribuição para a resolução de uma tarefa dentro do seu grupo. Nestas aulas, contrariamente ao que acontecera no ano lectivo anterior, os alunos desempenharam um papel mais activo na construção do seu conhecimento, em detrimento do papel expositivo da professora. Em cada aula analisada, os alunos tiveram a oportunidade de considerar diversos problemas e partilhar os processos de resolução utilizados, havendo a possibilidade de discutirem, em grande grupo, e sob orientação da professora, o processo de resolução dos problemas propostos.

Os alunos, em interacção uns com os outros, com alunos mais capazes ou com a professora, foram, muitas vezes, capazes de, individualmente, realizar tarefas que eram incapazes de fazer sem ajuda. Este contraste entre desempenho assistido e não assistido identifica a relação entre desenvolvimento e aprendizagem, a que Vygotsky (1978) chama Zona de Desenvolvimento Potencial. Nas aulas analisadas, há evidência de que os alunos, trabalhando juntos em pequenos grupos, colaborando e interagindo uns com os outros (alguns mais capazes do que outros) e com a professora, estabeleceram uma consciencialização e compreensão dos conteúdos leccionados como resultado do uso dos problemas históricos.

Além deste importante conceito da Teoria da Actividade, da análise também se destaca um outro conceito, igualmente importante num contexto de sala de aula, que é o da imitação. Em diversas situações, os alunos foram capazes de resolver os problemas propostos porque eram análogos a outros já resolvidos. Assim, por imitação, comparando e utilizando processos de resolução já usados e explicados pelo professor, os alunos conseguiram aplicar conhecimentos anteriores a novas situações. No entanto, quando os problemas apresentavam características diferentes dos já resolvidos ou o grau

de dificuldade aumentava, os alunos tinham dificuldade em transpor os conhecimentos ou processos de resolução para outras situações. Isto acontecia porque, como defende Vygotsky (1978), as pessoas, os alunos em particular, só conseguem imitar o que está ao alcance do seu nível de desenvolvimento.

Outro factor importante a ter em conta num contexto de aprendizagem são as regras que se estabelecem, implícita ou explicitamente, e que têm que ser cumpridas para que os objectivos possam ser alcançados.

As regras que mediarão a relação entre a professora e os alunos foram construídas em conjunto, sendo algumas implícitas e sugeridas, outras específicas e claramente definidas, mais concretamente, através da elaboração de um Regulamento Interno da Turma. Estas regras restringiram acções e interacções dentro da sala de aula. Era esperado que todos os elementos colaborassem, interagindo socialmente de forma adequada, expressando e partilhando ideias, aceitando as ideias dos outros e acatando as ordens da professora.

Acresce ainda referir que a percepção que os alunos tinham das aulas de Matemática, de uma forma geral, e com esta professora, em particular, e a postura que mantinham perante a disciplina de Matemática também são consideradas regras, pois estes factores influenciaram, de forma implícita, a sua maneira de actuar nas aulas.

A professora, neste ano lectivo, actuava de forma diferente da do ano anterior. Agora, apelava a uma maior participação dos alunos e evitava as aulas expositivas em que debitava a matéria e os alunos eram “receptores” e não construtores do conhecimento. Os alunos, com o decorrer das aulas, foram tomando consciência desta mudança e, alguns deles, que no ano anterior não tinham oportunidade de participar, começaram a sentir-se mais à vontade para o fazer. Verificou-se, portanto, uma mudança de regras em relação à Matemática e à forma de actuar da professora.

Pelo exposto, não se deve ver a melhoria das aprendizagens dos alunos como resultado apenas da mediação exercida pelos problemas históricos, mas resultante da interacção entre estes e muitas características do ambiente de aprendizagem, em especial o papel de mediação desempenhado pela professora através do seu questionamento e orientação.

5.5.2. *O papel de mediação desempenhado pelos problemas históricos*

A análise dos dados mostra que os problemas históricos desempenharam um importante papel de mediação na aprendizagem da Matemática, ao contribuírem para aumentar a motivação dos alunos na participação das actividades propostas. A utilização destes problemas históricos conduziu a uma mudança de atitude dos alunos perante as aulas de Matemática e perante a própria Matemática.

No início do ano, os alunos frequentavam as aulas de Matemática por obrigação e o objectivo que pretendiam alcançar era ter positiva à disciplina. No entanto, com o decorrer das aulas, e devido ao tipo de actividades planeadas e propostas pela professora, esta postura dos alunos perante as aulas de Matemática foi-se alterando e os alunos começaram a interessar-se, realmente, pela compreensão dos conteúdos leccionados.

São várias as situações que mostram evidência do envolvimento e interesse revelados pelos alunos na resolução das fichas de trabalho propostas, como pode ser exemplificado pela situação descrita e analisada em 5.3., do aluno, outrora desmotivado e pouco participativo, que se voluntariou, mais do que uma vez, para ir ao quadro corrigir um determinado problema. Também os comentários feitos pelos alunos, mostrando espanto pelo facto de a aula já estar a acabar, são ilustrativos do seu envolvimento e interesse.

Da análise dos dados, há ainda a salientar que o uso de problemas históricos deu a conhecer aos alunos um outro método de resolver equações, nomeadamente, a *regra da falsa posição*. Os alunos tiveram a oportunidade de ver como os problemas eram resolvidos antes do uso das equações e puderam comparar este processo de resolução com o que lhes foi ensinado. Por um lado, os alunos que já as sabiam resolver pelo método algébrico não apreciaram este método, achando que só servia para complicar, pois achavam que o simbolismo veio facilitar a resolução de equações. Por outro lado, os alunos que têm muitas dificuldades na álgebra viram, nesta regra, uma possibilidade para ultrapassar as suas dificuldades na resolução de equações. Desta forma, os problemas históricos actuaram como artefactos mediadores da aprendizagem das equações, na medida em que proporcionaram aos alunos um método alternativo ao método algébrico que, para alguns alunos, é mais fácil de compreender.

O mesmo papel de mediação foi exercido pela História da Matemática, quando os alunos tomaram conhecimento que o máximo divisor comum poderia ser

determinado pelo *Algoritmo de Euclides*, evitando, assim, a confusão que costumam fazer entre o que escolher para determinar o mínimo múltiplo comum e o máximo divisor comum, depois de feita a decomposição em factores.

Além disso, o papel mediador desempenhado pelos problemas históricos, ou de uma forma mais geral, pela História da Matemática, também é ilustrado na situação, descrita nos episódios analisados em 5.4, em que a professora recorre à representação geométrica para obter o desenvolvimento do quadrado do binómio, método muito usado antigamente, especialmente pelos babilónios. Na verdade, os alunos costumam ter dificuldades em dar significado aos símbolos quando começam a trabalhar com a álgebra. Neste caso, a utilização da geometria, que atribui um significado concreto aos símbolos, ajudou alguns alunos a superarem este obstáculo.

5.5.3. Contributo dos problemas históricos para a aprendizagem da Matemática

O seu contributo para a compreensão dos conteúdos leccionados

Além do importante papel de mediação dos problemas históricos que contribuiu para aumentar a motivação e a predisposição para a aprendizagem da Matemática, nos episódios descritos anteriormente, há evidência que estes também contribuíram, de forma significativa, para uma melhoria na compreensão dos conteúdos leccionados.

No conjunto de episódios analisado em 5.1., podemos constatar que o uso das fichas de trabalho com os problemas históricos ajudou os alunos a compreenderem o Teorema de Pitágoras e a aprenderem a aplicá-lo para resolverem problemas que, depois de esquematizados numa figura, se transformavam em simples exercícios de aplicação directa deste teorema. Com a resolução destes problemas, os alunos familiarizaram-se com a aplicação do Teorema de Pitágoras e aperceberam-se que o mesmo pode ser utilizado para resolver uma variedade de problemas que, à partida, não pareciam estar relacionados com este conteúdo matemático.

Nos episódios analisados em 5.2., é evidente o contributo dos problemas históricos para a compreensão das sequências. Com os problemas históricos apresentados, os alunos tiveram a oportunidade de trabalhar com várias sequências, apresentadas com enunciados curiosos e interessantes, descobrindo a lei de formação e os termos seguintes das sequências apresentadas.

Relativamente ao terceiro conjunto de episódios, descrito em 5.3., também há evidência que os problemas apresentados contribuíram para a compreensão da resolução de equações e, em especial, para a aprendizagem da resolução de problemas que podem ser resolvidos através de uma equação. Uma das maiores dificuldades manifestadas pelos alunos revela-se na interpretação de problemas escritos em linguagem corrente e na sua tradução para a linguagem matemática, ou seja, para uma equação. Ora, na História de Matemática, podemos encontrar um manancial de problemas propícios para serem resolvidos através de uma equação. Na ficha de trabalho resolvida nestas aulas, a professora seleccionou e apresentou um conjunto de problemas que permitiram aos alunos treinarem a tradução da linguagem corrente para a matemática e, posteriormente, proporcionaram a resolução rotineira de equações. Assim, com os problemas históricos, os alunos tiveram a oportunidade de resolver problemas que se traduzem por equações, além de treinarem a resolução destas.

No início da resolução desta ficha de trabalho, os alunos revelaram imensas dificuldades na interpretação dos problemas. Estas dificuldades advinham de alguns termos que apareciam nos enunciados com os quais os alunos não estavam familiarizados. Além disso, a expressão obtida por muitos alunos não correspondia a uma equação, pois, de uma forma geral, não escreviam o segundo membro. Mas, à medida que foram resolvendo os problemas propostos, as dificuldades foram-se dissipando e os alunos mostraram-se cada vez mais envolvidos na resolução dos mesmos.

Tendo em conta o último conjunto de episódios, descritos e analisados no ponto 5.4., é possível inferir que, com os problemas históricos, os alunos tiveram a oportunidade de aplicar e relacionar vários conteúdos leccionados ao longo do ano, especialmente, o Teorema de Pitágoras, a resolução de equações e os casos notáveis.

Do mesmo modo que se verificou na análise dos episódios do ponto 5.3., com os problemas históricos analisados em 5.4. os alunos também tiveram a oportunidade de os traduzir para equações e, além disso, tiveram que recorrer a uma figura para ajudar na interpretação dos problemas, como já tinha acontecido nos episódios analisados em 5.1.

O seu contributo para o desenvolvimento das capacidades transversais

A análise dos dados mostra que os alunos, através da resolução dos problemas históricos, desenvolveram competências ao nível da resolução de problemas, do

raciocínio matemático e também, embora de forma menos evidente, da comunicação matemática.

Relativamente à capacidade de resolução de problemas, são várias as situações em que os alunos tiveram oportunidade de aprender e aplicar algumas estratégias muito úteis à resolução dos mesmos, em especial a representação do problema através de uma figura. A professora deu muita ênfase à utilização desta estratégia e, com o decorrer das aulas, os alunos habituaram-se a fazer uso da mesma, o que em muito contribuiu para a resolução de muitos problemas. Outra estratégia, também salientada pela professora e que os alunos aprenderam a utilizar, foi a importância da organização para a resolução de alguns problemas. Nalguns casos, se os alunos não forem metódicos e organizados, andam à volta do problema e não conseguem encontrar uma solução, como aconteceu num problema analisado em 5.1., que tinha que ser resolvido por tentativas e que tinha mais do que uma solução. É também de salientar que, com a resolução deste tipo de problemas, os alunos adquiriram destreza na interpretação de um problema escrito em linguagem corrente e na sua tradução para a linguagem matemática, mais concretamente, para uma equação. Esta é uma forma de resolver muitos problemas de matemática e, geralmente, os alunos revelam muitas dificuldades na resolução deste tipo de problemas.

Assim, a análise dos dados parece sugerir que os alunos tiveram uma evolução na adopção de estratégias adequadas à resolução de problemas. Associado à resolução de problemas, está o raciocínio matemático. Também são diversas as situações que mostram que os problemas históricos são propícios para o desenvolvimento desta capacidade transversal. Embora o raciocínio estivesse sempre implícito na resolução das fichas de trabalho propostas nas aulas analisadas, são os problemas históricos relacionados com as “Sequências”, analisados em 5.2., que mais apelam ao raciocínio, sendo bastante adequados para o desenvolvimento desta capacidade.

A comunicação matemática é outra capacidade transversal que, nalgumas situações, está intimamente relacionada com as anteriores. Quando é pedido aos alunos para justificarem a resposta, explicando o processo de resolução, torna-se necessário que eles comuniquem matematicamente. No entanto, os alunos revelam imensas dificuldades em expressarem o seu raciocínio e é comum ouvi-los dizer: “Eu sei como se faz, mas não sei explicar!”. Apesar de, na História da Matemática, se encontrarem muitos problemas adequados ao desenvolvimento desta capacidade, nos episódios

analisados não há muita evidência do contributo dos problemas históricos para o desenvolvimento da mesma.

Do exposto anteriormente, tornou-se evidente que a compreensão dos conceitos leccionados e a capacidade dos alunos aplicarem os seus conhecimentos, assim como a capacidade de raciocinar e resolver problemas, foram reforçadas pela utilização dos problemas históricos. Daqui se depreende que o aumento da motivação e da predisposição para aprender Matemática, que resultou do papel de mediação exercido pelos problemas históricos, conduziu a aprendizagens mais significativas, devido ao maior envolvimento dos alunos na resolução das actividades propostas na sala de aula.

5.5.4. Dificuldades e constrangimentos encontrados quando são utilizados problemas históricos

Da análise dos dados, não é possível inferir que a utilização dos problemas históricos tenha causado constrangimentos ou dificuldades aos alunos, no sentido de estes sentirem necessidade de alterar as suas práticas e atitudes. Provavelmente, esta necessidade de mudança poderá ter ocorrido, mas os dados recolhidos não nos mostram evidência disso.

Podemos supor que a falta de episódios, nos dados recolhidos, que nos permitam atestar a existência dessa vontade de mudar e melhorar por parte dos alunos se deve à forma como os dados foram recolhidos. Nas aulas observadas, foi utilizada apenas uma câmara de filmar, o que não permitiu recolher informações sobre os diálogos que ocorreram entre os elementos dos diversos grupos aquando a realização das actividades propostas, além do facto de a investigadora também ser a professora da turma. Ora, a forma como os dados foram recolhidos constituiu uma limitação metodológica, que será abordada no capítulo que se segue.

Assim, tendo em conta os dados analisados, apenas é possível detectar dificuldades e constrangimentos sentidos pela professora. Nos episódios analisados, são diversas as situações em que a professora se depara com constrangimentos e dificuldades para integrar a História da Matemática nas suas aulas, através dos problemas históricos.

A situação mais verificada, e que causou alguma tensão na professora, está relacionada com o tempo necessário para a resolução destes problemas, que apelam ao raciocínio e à capacidade de resolver problemas, o que implicava um maior dispêndio

de tempo para a resolução dos mesmos quando comparado com o necessário para resolver exercícios de aplicação directa.

Nas situações em que os alunos demoravam a chegar à resposta, a professora tinha tendência em dar ajudas e sugestões, por vezes, demasiado directas, com o intuito de fazer avançar a resolução do problema em questão. Isto acontecia porque a professora se sentia pressionada pela obrigação de ter que cumprir a planificação, previamente elaborada com os colegas do grupo disciplinar. No entanto, ao analisar os dados, a professora tomou consciência que deveria ter evitado este tipo de sugestões tão evidentes que, muitas vezes, “assassinam a tarefa”, impedindo os alunos de chegarem, sozinhos, à solução.

Outra dificuldade com que a professora se deparou, foi a forma como as fichas foram, por ela, elaboradas. Na análise feita, é possível encontrar comentários dos alunos, referindo que os problemas propostos eram repetitivos, o que tornava a sua resolução monótona e aborrecida. Assim, a professora apercebeu-se desta falha na selecção dos problemas propostos nas fichas e, na realização das fichas de trabalho seguintes, tentou não voltar a cometer o mesmo “erro”, chegando mesmo a registar este facto nas suas notas de campo (no papel de investigadora).

No entanto, em algumas das fichas utilizadas posteriormente, a professora voltou a colocar conjuntos de problemas análogos. Fê-lo porque apesar de, por um lado, achar que deveria diversificar mais os problemas propostos nas fichas para evitar a falta de interesse dos alunos, por outro lado, também lhe parecia importante que os alunos tivessem a oportunidade de consolidar os conhecimentos adquiridos, o que só pode ser feito com a resolução de problemas que lhes permita aplicar esses conhecimentos.

A professora deparou-se, ainda, com mais um obstáculo à utilização dos problemas históricos nas suas aulas. Este obstáculo revelou-se no desconhecimento manifestado, inicialmente, em relação à *regra da falsa posição*. Esta situação, analisada em 5.3., mostra evidência da necessidade sentida pela professora de pesquisar e aprender mais sobre História da Matemática e é reveladora de uma vontade de mudar para melhor concretizar o seu objectivo de integrar a História da Matemática nas suas aulas.

6. CONCLUSÕES

Este capítulo relata as conclusões deste estudo, que teve como objectivo caracterizar a aprendizagem da Matemática, por alunos de uma turma do 8º ano de escolaridade, quando mediada por problemas históricos da Matemática. O desenvolvimento das conclusões do estudo terá por base os seguintes temas: (1) A sala de aula como um sistema de actividade; (2) Os problemas históricos como artefactos mediadores da aprendizagem da Matemática; (3) O uso dos problemas históricos: uma mais-valia para a aprendizagem da Matemática; (4) As contradições que surgem quando são utilizados problemas históricos na aula de Matemática.

De seguida, serão discutidas as implicações e recomendações decorrentes desta investigação e, depois, serão apresentadas algumas reflexões sobre a metodologia usada, destacando-se a escolha do quadro teórico da Teoria da Actividade e onde serão apontadas algumas limitações encontradas.

Para finalizar, farei uma reflexão sobre a minha própria experiência enquanto investigadora.

6.1. Conclusões do estudo

Tendo em conta os resultados emergentes da análise dos dados, apresentados no capítulo anterior, e tendo por base a literatura revista no terceiro capítulo, julgo estar em condições de responder às questões que nortearam esta investigação. Assim, a seguir apresento as conclusões deste estudo, que serão desenvolvidas no âmbito de cada um dos seguintes temas:

6.1.1. *A sala de aula como um sistema de actividade*

De acordo com Engeström (1987), na estrutura de uma actividade podem ser identificados *sujeitos* que agem sobre *objectos*, num processo de transformações recíprocas até atingirem certos *resultados*.

Da análise feita no capítulo anterior, temos evidência que a sala de aula representa um sistema de actividade. Na verdade, para Engeström (1991), “a aprendizagem escolar é, obviamente, um sistema de actividade colectivo e relativamente duradouro” (p. 249).

Essa análise permite a identificação dos componentes desse sistema de actividade, que poderá ser esquematizado pelo seguinte modelo triangular:

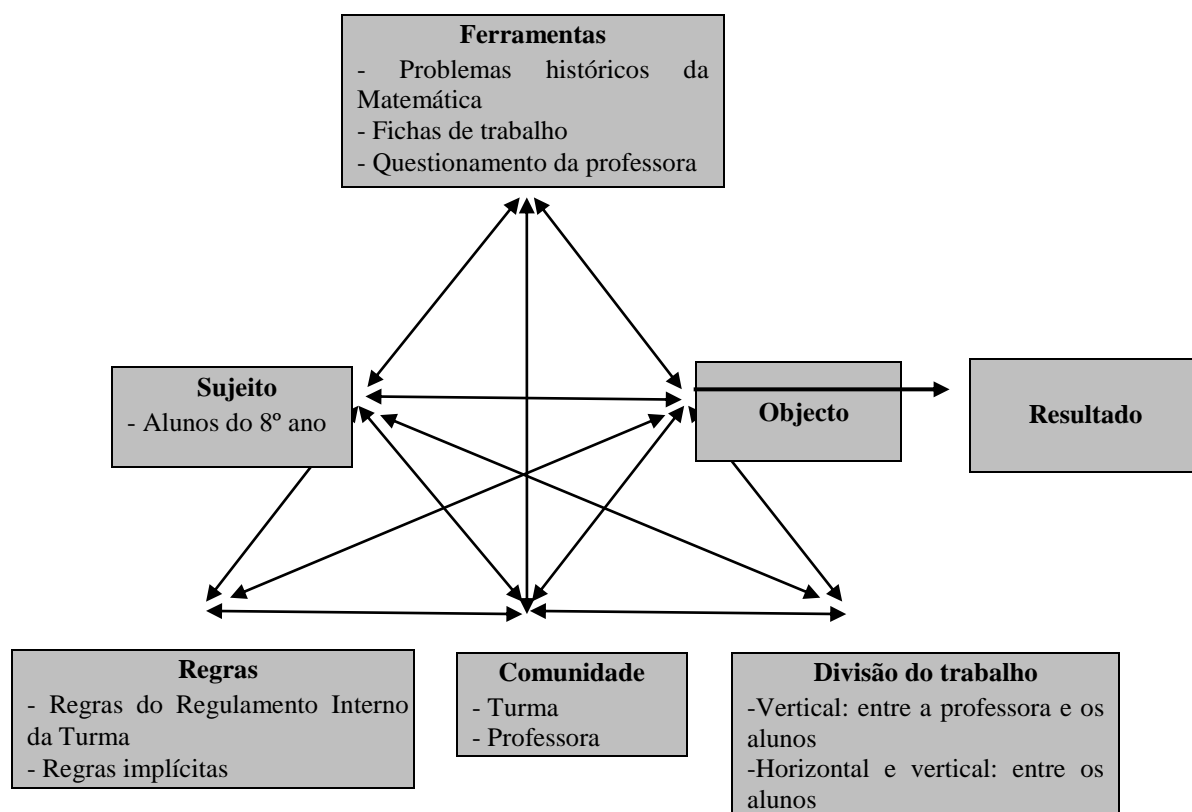


Fig. 30 – Sistema de Actividade de Engeström aplicado ao sistema de actividade de uma sala de aula

Pelo exposto no capítulo anterior, estamos perante um sistema de actividade composto pelos seguintes elementos:

O *sujeito* refere-se ao indivíduo ou grupo cujo ponto de vista é considerado na análise. Na situação aqui descrita, o *sujeito* é colectivo e corresponde aos alunos de uma turma do 8º ano.

O *objecto* é o que motiva a realização da actividade e é mediado por *ferramentas* que o transformam em *resultados*. O sistema de actividade em análise teve como *objecto* alguns conteúdos leccionados no 8º ano de escolaridade, nomeadamente, o Teorema de Pitágoras, as sequências e as equações.

A **comunidade** refere-se a todos os participantes de um sistema de actividade que compartilham o mesmo *objecto* e que, geralmente, estão organizados para se encontrarem num lugar e tempo comuns. Na situação aqui analisada, faziam parte da *comunidade* a professora e os alunos da referida turma. Importa salientar que, embora a *comunidade* da sala de aula incluía apenas a professora e os seus alunos, esta *comunidade* faz parte e interage com outras *comunidades* mais amplas que também exercem influência sobre o *objecto*, nomeadamente, a família, a escola no seu todo, o Ministério da Educação e, até mesmo, as editoras, cuja elaboração dos manuais também influencia a actividade realizada na sala de aula.

A **divisão do trabalho** envolve a divisão de tarefas entre os membros da *comunidade*, bem como as divisões de poder e de estatuto, e pode ser feita de forma vertical ou horizontal. A dimensão horizontal refere-se às negociações de responsabilidades e de tarefas básicas entre os membros da *comunidade*. A dimensão vertical, por sua vez, é definida por relações de autoridade e poder. Nos episódios analisados, é mais evidente a predominância da *divisão do trabalho* na sua dimensão vertical, entre a professora e os alunos, uma vez que a professora foi a responsável por determinar o ritmo da actividade, orientando e ajudando na realização das tarefas propostas e conduzindo a discussão final aquando da correcção dos problemas no quadro.

Mas, dado que os alunos resolveram as fichas de trabalho aos pares (grupos) houve, entre eles, uma *divisão do trabalho* horizontal, com partilha de conhecimentos e habilidades. Por outro lado, também se verificou uma *divisão do trabalho* vertical, onde os melhores alunos dominavam, muitas vezes, o grupo, liderando na procura da solução para os problemas propostos e alertando os colegas do grupo quando estes cometiam algum erro.

Analisando os episódios descritos do ponto de vista da Teoria da Actividade, ressalta o conceito de Zona de Desenvolvimento Potencial (ZDP), descrita por Hung e Wong (2000) como “uma zona através da qual um indivíduo mais capaz pode ajudar um aprendiz com menor capacidade a realizar uma tarefa a um nível de potencial mais alto que ele ou ela não seria capaz de fazer individualmente” (p. 35).

O conceito de Zona de Desenvolvimento Potencial, de Vygotsky, afigura-se de extrema importância para a análise e compreensão de situações de aprendizagem, uma

vez que está muito relacionado com o papel mediador do professor, tendo sido destacada, pelo próprio Vygotsky, a importância do papel do professor no processo de ensino e aprendizagem.

Vygotsky destaca o papel da actividade docente no sentido de que o professor apresenta os conhecimentos e indaga o aluno sobre eles, estimulando a criança a pensar. Desse modo, a tendência do aluno, quando não tiver a ajuda do professor, será imitar o seu raciocínio. Esta situação destaca o papel da imitação, uma vez que as crianças imitam uma variedade de acções que vão para lá dos limites das suas capacidades. Imitando, as crianças são capazes de fazer muito mais, em actividade colectiva e sob a orientação de adultos. A aprendizagem humana pressupõe, para Vygotsky, uma específica natureza social, sendo um processo através do qual a criança cresce dentro da vida intelectual dos que a rodeiam.

Além da mediação exercida pelo professor, o papel de entreajuda desempenhado pelos colegas mais capazes, quando os alunos trabalham em grupo, também contribui para despoletar as Zonas de Desenvolvimento Potencial dos colegas com mais dificuldades.

As *regras* regulam as acções do *sujeito* com vista a atingir o *objecto* e medeiam as relações do *sujeito* com os outros participantes na actividade, podendo ser estabelecidas de forma explícita ou implícita.

No sistema de actividade em análise, as regras comportamentais foram estabelecidas de forma explícita através de um Regulamento Interno da Turma (ver anexo B), elaborado, no início do ano lectivo, pelos alunos e a professora (no papel de Directora de Turma). Nos episódios analisados, os alunos cumpriram, de uma maneira geral, estas regras e, por isso, o seu incumprimento não prejudicou a sua aprendizagem.

Os resultados também evidenciam a existência de regras tácitas, que nem sempre são explicitadas, mas que todos os participantes reconhecem como legítimas. No caso apresentado, podemos dizer que dentre as regras implícitas, a mais evidente é a que define a assimetria institucional entre a professora e os alunos. O modo como a professora orienta a aula, exercendo uma postura mais ou menos permissiva, controlando o grau de participação dos alunos, constitui uma regra tácita, pois todos os alunos a conhecem sem que tivesse que ser estipulada pela professora.

No entanto, neste ano lectivo, houve uma alteração destas regras (quando comparado com o ano anterior em que professora de Matemática era a mesma) que contribuiu, de forma positiva, para a aprendizagem da Matemática. Nas aulas analisadas, os alunos tinham oportunidade de participar mais activamente na construção dos seus conhecimentos, o que proporcionou que estes se sentissem mais confiantes e com à vontade para participar nas aulas. A realização das actividades aos pares, ou em pequenos grupos, em detrimento das aulas expositivas, centralizadas na professora, estimulou a interacção e cooperação entre os alunos, tendo conduzido a uma maior envolvência destes na realização das tarefas propostas, assim como a um aumento da motivação e interesse.

As *ferramentas ou artefactos* (materiais ou conceptuais) são os recursos usados para transformar o *objecto* e para se chegar a um *resultado*. Elas alteram a actividade e são, por sua vez, alteradas pela actividade, uma vez que medeiam as relações entre o *sujeito* e o *objecto*. Na maioria dos estudos em Educação Matemática que envolvem a Teoria da Actividade, os *artefactos* são os computadores (ou melhor, as tecnologias da informação e comunicação) ou materiais manipuláveis, como compassos ou calculadoras. Na situação em análise, os resultados evidenciam que esse papel de mediação foi desempenhado pelos problemas históricos da Matemática, pela forma como as fichas de trabalho estavam estruturadas e pelo questionamento da professora.

Combinando o papel de mediação exercido pelos problemas históricos com a mediação resultante do questionamento e orientação da professora, parece que estamos perante uma situação a que Bussi e Mariotti (2008) chamam *mediação semiótica*. Segundo estas autoras, em termos de mediação, “o professor actua como mediador usando o artefacto para mediar o conteúdo matemático para os alunos” (p. 754), e acrescentam, ainda, que “o professor usa o artefacto como uma ferramenta de mediação semiótica” (idem).

Desta forma, qualquer artefacto, ao ser propositadamente usado pelo professor para mediar um conteúdo matemático por meio de uma intervenção didáctica planeada, será, na perspectiva destas autoras, designado por *ferramenta de mediação semiótica*. Ora, os artefactos utilizados neste estudo também podem ser interpretados neste sentido. Assim, as fichas de trabalho com os problemas históricos, elaboradas pela professora e,

posteriormente, utilizadas na sala de aula, sob a orientação da mesma, desempenharam o papel de *ferramentas de mediação semiótica*.

As autoras defendem que a utilização do artefacto tem de ser completamente integrada nas actividades de sala de aula, ou seja, a utilização do artefacto tem de ser “orquestrada” (Bussi e Mariotti, 2008, p. 754). Aqui, “orquestração” está relacionada com a coordenação das diferentes opiniões e manifestações que surgem durante as discussões na sala de aula e, dos resultados obtidos, constatamos que corresponde, de facto, ao papel desempenhado pela professora.

No sistema de actividade em análise, os dados mostram que os alunos (*sujeitos*), através da resolução dos problemas históricos da Matemática e do questionamento da professora (*artefactos mediadores*), agiram sobre os *objectos* de modo a atingirem os *resultados*. Esses *resultados* variaram conforme o *objecto* em questão. Mas, de uma forma geral, o *resultado* esperado consistia em aprender a interpretar os problemas históricos, traduzindo-os através de uma figura ou de uma equação, para, depois, aplicar o Teorema de Pitágoras ou resolver a equação. Relativamente às Sequências, o *resultado* esperado era aprender a interpretar os problemas e a raciocinar para determinar a lei de formação e os termos de uma sequência.

6.1.2. Os problemas históricos como artefactos mediadores da aprendizagem da Matemática

A Teoria da Actividade atribui importância central ao conceito de mediação. Este conceito esteve na origem da Teoria da Actividade e a noção de acção mediada por artefactos foi formalizada, pela primeira vez, por Vygotsky (1978). Segundo Vygotsky, a relação do indivíduo com o mundo não ocorre de forma directa, mas através da mediação. No processo de mediação, a relação entre os indivíduos e entre estes e o mundo que os cerca ocorre pelo contacto com os artefactos mediadores, ferramentas auxiliares da actividade humana, que funcionam como um elemento intermediário numa relação. Esses artefactos permitem ao indivíduo agir sobre os factores sociais, culturais e históricos, ao mesmo tempo em que sofre as suas acções.

No contexto desta investigação, há evidência que os problemas históricos desempenharam o papel de artefacto mediador da aprendizagem da Matemática. Os resultados obtidos mostram que esse papel de mediação contribuiu para aumentar a

motivação dos alunos na participação das actividades propostas pois, conforme também foi constatado por Rickey (1995), “a História proporcionou uma óptima maneira de conseguir que os alunos se interessassem pela Matemática” (p. 123).

Este carácter motivador da integração da História da Matemática (neste caso, através dos problemas históricos) na sala de aula corresponde ao benefício mais amplamente defendido na literatura analisada, segundo o qual *a História aumenta a motivação dos alunos e desenvolve uma atitude positiva face à Matemática*.

Uma razão para esta mudança de atitude face à Matemática está relacionada com um outro benefício que advém da integração da História da Matemática na sala de aula, que refere que *a História é um instrumento que possibilita a desmistificação da Matemática*. A História da Matemática serve para mostrar aos alunos que, como refere Siu (2000a), “a Matemática é um esforço humano que já dura há mais de quatro mil anos e faz parte do nosso património cultural” (p. 3). E, como acrescenta Grugnetti (2000b), “observando a evolução histórica de um conceito, os alunos perceberão que a Matemática não é fixa e definitiva” (p. 30).

Os resultados deste estudo corroboram as ideias de Swetz (1994), quando salienta que “a História da Matemática fornece milhares de problemas úteis e interessantes, problemas que são matemática e pedagogicamente ricos e que, pela sua natureza histórica, possuem um apelo intelectual adicional para os alunos” (p. 2).

Os resultados também nos mostram que os problemas históricos actuaram como artefactos mediadores da aprendizagem na medida em que permitiram que os alunos tomassem conhecimento de métodos de resolução usados antigamente e que alguns alunos acharam mais fáceis do que os métodos algébricos que lhes foram ensinados. Este facto representa mais um benefício, também apontado no capítulo da revisão da literatura e defendido por vários autores, dos quais destaco Grugnetti (2000), ao referir que “usando problemas antigos, os alunos podem comparar as suas estratégias com as originais” (p. 30).

6.1.3. O uso dos problemas históricos: uma mais-valia para a aprendizagem da Matemática

Os resultados decorrentes da análise dos dados levam-nos a concluir que os problemas históricos contribuem para melhorar, significativamente, a aprendizagem da Matemática.

Conforme constata Fauvel (1991), “a História, ao mostrar aos alunos como os conceitos se desenvolveram, ajuda a sua compreensão” (p. 4). Além disso, “pode ajudar [os professores] a criarem na sala de aula um clima de pesquisa e investigação e não apenas de transmissão de conhecimentos” (Avital, 1995, p. 11), o que, certamente, irá contribuir para uma maior compreensão dos conteúdos leccionados.

Os resultados obtidos também evidenciam que a resolução de problemas históricos ajuda a desenvolver a capacidade de resolver problemas, o raciocínio matemático dos alunos e, embora de forma menos evidente, a comunicação matemática, três capacidades transversais muito defendidas nas orientações do Novo Programa de Matemática para o Ensino Básico e que corresponde ao 10º benefício mencionado em 3.2.1.

Este benefício, que advém da integração da História na sala de aula de Matemática, é destacado por Wilson e Chauvot (2000) quando afirmam que “a História é uma fonte de problemas interessantes que permitem desenvolver a capacidade de resolução de problemas” (p. 642) e por Liu (2003), ao salientar que “os problemas históricos podem ajudar a desenvolver o raciocínio matemático dos alunos” (p. 416).

Pelo exposto anteriormente, podemos inferir que os problemas históricos desempenharam um duplo papel pois, além de desempenharem um papel fundamental de motivação também ajudaram os alunos a compreender os conteúdos leccionados. Neste sentido, os dados levam a crer que, conforme refere Liu (2003), “o uso de problemas históricos na aula tem a vantagem de melhorar as atitudes dos alunos relativamente à Matemática, bem como melhorar a sua compreensão da Matemática” (p. 417).

Os resultados deste estudo vêm, então, contrapor algumas das objecções à integração da História da Matemática na sala de aula encontradas na literatura. Os resultados obtidos permitem-nos refutar, principalmente, as seguintes: (1) O passado da Matemática não é significativo para a compreensão da Matemática actual; (2) O caminho histórico é mais árduo para os estudantes que o caminho lógico e (3) O tempo dispendido no estudo da História da Matemática deveria ser utilizado para aprender mais Matemática.

6.1.4. As contradições que surgem quando são utilizados problemas históricos na aula de Matemática

Para Engeström (2001), o quarto princípio da Teoria da Actividade diz respeito ao papel das contradições, ou tensões, como fontes de mudança e desenvolvimento. Note-se que o termo *contradição* não deve ser entendido como problema, conflito ou obstáculo. Em vez disso, na perspectiva de Kuutti (1996), “a Teoria da Actividade usa o termo *contradição* para indicar um desajuste dentro dos elementos, entre eles, entre diferentes actividades ou entre diferentes fases de desenvolvimento de uma única actividade” (p. 34). Ainda segundo este autor, as contradições “geram perturbações e conflitos, mas também tentativas inovadoras para alterar a actividade” (idem).

As contradições desempenham um papel importante pois são a força motriz da mudança nos sistemas de actividade. Para entender a mudança, quer a nível individual, quer a nível do sistema, é necessária uma análise das contradições entre os elementos dos sistemas de actividade e entre sistemas de actividade.

As contradições desempenham um papel importante num contexto de sala de aula pois, conforme argumenta Núñez (2009), “as contradições são um conceito poderoso para os investigadores educacionais e uma nova forma conceptual para descrever os conflitos que ocorrem dentro dos sistemas de actividade, definidos como micro contextos de aprendizagem, como as salas de aula de Matemática” (p. 13).

A análise dos dados não mostra evidências da existência de contradições sentidas pelos alunos (*sujeitos*), provavelmente devido ao tipo de dados que foram recolhidos. Porém, há diversas evidências das dificuldades e constrangimentos sentidos pela professora (como membro da *comunidade*). Na perspectiva de Engeström, essas dificuldades representam contradições uma vez que estimularam a vontade de alterar a sua prática pedagógica.

Uma das contradições sentidas pela professora foi a dificuldade em conciliar o tempo dado a cada tarefa com o cumprimento da planificação para cada aula, o que, por diversas vezes, a levou a dar sugestões demasiado evidentes com o intuito de diminuir o tempo de realização da tarefa em questão. Foi através do visionamento dos vídeos e análise dos dados que a professora reflectiu sobre a sua prática e tomou consciência que estas ajudas excessivas deveriam ser evitadas. Essa tomada de consciência provocará, certamente, uma mudança na sua forma de actuar na sala de aula.

No capítulo da revisão da literatura, além dos benefícios que advêm da integração da História da Matemática na sala de aula, também são apontados alguns obstáculos e dificuldades que se colocam a quem pretende fazer esta integração. É de salientar que esta dificuldade, relacionada com a falta de tempo, é uma das mais mencionadas na literatura revista.

Outra contradição sentida pela professora adveio da falta de recursos que ajudem à integração da História da Matemática na sala de aula. Devido à fraca integração da História da Matemática nos manuais, a professora teve necessidade de elaborar as fichas a utilizar nas aulas. Para o fazer, deparou-se com obstáculos e dificuldades. A falta de recursos e de tempo para as elaborar resultou nalgumas falhas, como, por exemplo, o carácter repetitivo dos problemas propostos. Perante os comentários dos alunos, reclamando do facto de os problemas serem repetitivos, a professora apercebeu-se que, no futuro, deveria diversificar o tipo de problemas propostos nas fichas de trabalho, aumentando, assim, a motivação dos alunos.

A falta de formação da professora, no que concerne à História da Matemática, também representou uma contradição. Os resultados evidenciam que a professora se confrontou com algumas dificuldades na integração dos problemas históricos nas suas aulas, como se pode ver pelo seu desconhecimento inicial da *regra da falsa posição*.

Esta dificuldade está relacionada com a falta de formação dos professores no âmbito da História da Matemática e é um dos óbices à integração da História da Matemática apontado na literatura. Para ultrapassar esta dificuldade, a professora sentiu necessidade de recorrer a pesquisa bibliográfica para conseguir elaborar as fichas de trabalho utilizadas e, também, para conseguir leccionar os conteúdos programáticos através dos problemas históricos, fazendo uma correcta integração e contextualização dos mesmos.

As contradições geram melhorias e, a partir destas contradições, é possível fazer algumas recomendações e tirar conclusões/implicações para acções futuras.

6.2. Implicações e recomendações decorrentes desta investigação

A investigação realizada aponta resultados claramente favoráveis à introdução dos problemas históricos como artefactos mediadores da aprendizagem da Matemática,

desde que devidamente enquadrados e planificados. Com base nas conclusões inferidas deste estudo, parece-me oportuno referir algumas implicações e tecer algumas recomendações decorrentes dessas conclusões.

Tendo em vista a obtenção de conclusões que venham corroborar as obtidas neste estudo, parece-me necessária a realização de mais investigação para explorar a integração da História da Matemática no ensino da Matemática, dado que, em Portugal, muito pouco tem sido feito neste âmbito.

Além disso, o que também poderia ser investigado nesta área é como os professores integram a História da Matemática nas suas aulas, analisando as dificuldades sentidas, quer ao nível da formação quer ao nível da escassez de recursos, no sentido de se encontrarem possíveis respostas que venham colmatar estas lacunas.

Apesar do objectivo deste estudo não ter sido a caracterização do ensino da Matemática na perspectiva da professora, foi inevitável tirar algumas conclusões sobre as dificuldades sentidas pela professora ao integrar a História nas suas aulas. Assim, tendo em conta a minha experiência enquanto professora que tentou integrar a História da Matemática na sua prática lectiva, sinto-me em posição de poder destacar algumas implicações deste estudo, nomeadamente, ao nível da formação de professores e ao nível da elaboração dos manuais.

Ao nível da formação de professores, e tendo em conta a minha própria experiência, considero que muito há a fazer no sentido de proporcionar aos professores de Matemática, tanto aos que já exercem como aos que estão em formação, conhecimentos sólidos e pedagogicamente eficazes no âmbito da História da Matemática.

É, pois, aconselhável que os professores tenham acesso a formação nesta área para que possam integrar, de forma correcta e confiante, a História da Matemática nas suas aulas. Se os professores não tiverem conhecimentos neste campo da Matemática não se sentirão à vontade para recorrer a este recurso tão motivador, tanto para os alunos como para os professores, e útil, do ponto de vista pedagógico.

No que concerne a elaboração dos manuais, também muito há a alterar na forma como a História tem sido introduzida neste recurso muito utilizado nas aulas. Os manuais escolares atribuem um carácter acessório à História da Matemática, pois esta não é integrada ao longo do desenvolvimento dos conteúdos, por exemplo, através da introdução de problemas históricos. O que geralmente se verifica é que as ténues

abordagens à História são feitas no fim do capítulo, como um conteúdo a ser abordado “se houver tempo”. Mas, como o tempo é uma coisa que escasseia nas aulas de Matemática, os professores acabam por “saltar” estas páginas que são vistas, tanto por estes como pelos alunos, como coisas supérfluas.

Devido a esta lacuna na elaboração dos manuais, tive necessidade de recorrer a diversas fontes da História da Matemática para elaborar as fichas de trabalho que serviram de artefactos mediadores no estudo aqui analisado. Mas, para isso, foi necessário dedicar tempo para a pesquisa dos problemas a utilizar e posterior elaboração das fichas de trabalho.

Mas o que geralmente acontece é que os professores já estão sobrecarregados com as diversas tarefas que lhes compete fazer e, muito certamente, não se mostrarão disponíveis para dedicar ainda mais do seu tempo à elaboração destes recursos. Por isso, para que os professores possam integrar, mais facilmente, a História da Matemática nas suas aulas, torna-se premente que os autores dos manuais escolares ajudem a facilitar esta tarefa, fazendo uma integração mais útil e eficaz da História da Matemática.

Importa ainda referir que, para que a História da Matemática seja integrada eficazmente na sala de aula e para que seja possível propor aos alunos actividades que proporcionem o desenvolvimento das capacidades transversais, seria ideal um aumento da carga horária semanal para esta disciplina.

Apesar da História da Matemática não ter sido introduzida como um conteúdo extra pois, conforme refere Swetz (1994), recorrendo a problemas históricos, o professor não necessita de adicionar mais conteúdos mas apenas ensinar o antigo de uma maneira nova, uma das dificuldades sentidas foi a falta de tempo. A professora teve dificuldade em conciliar o tempo dado a cada tarefa com o cumprimento da planificação porque, integrar a História da Matemática através dos problemas históricos, requer que os alunos tenham tempo para pensarem e discutirem a resolução dos problemas propostos.

6.3. Reflexões sobre a metodologia

Apesar de a metodologia utilizada não ser objecto de investigação, importa deixar aqui algumas reflexões sobre a metodologia adoptada, reflectindo, em especial

sobre o quadro teórico que norteou esta investigação e dando a conhecer algumas limitações com que me deparei durante a realização da mesma.

6.3.1. O uso da Teoria da Actividade

Por tudo aquilo que aprendi e que aqui tentei transmitir sobre a Teoria da Actividade, e tendo consciência que apenas aflorei alguns dos múltiplos conceitos que dão corpo a esta complexa abordagem, penso que é inegável a sua riqueza e o seu potencial, quer como referencial teórico, quer como manancial de propostas metodológicas a desenvolver no campo da investigação educacional.

Esta teoria revelou-se uma ferramenta analítica muito útil para explorar as interacções e relações complexas num sistema de actividade como a sala de aula. Crawford e Hasan (2006) referem que “a principal razão para usar a Teoria da Actividade [...] é que ela fornece uma estrutura bem desenvolvida para a análise da dinâmica complexa do ambiente que está a ser investigado” (p. 53).

O uso do quadro teórico da Teoria da Actividade permitiu-me descrever e interpretar o modo como os alunos interagiram, entre si e com a professora, no seu contexto habitual de sala de aula, usando os problemas históricos como artefactos mediadores, tendo em vista a aquisição e compreensão dos conteúdos leccionados.

6.3.2. Limitações do estudo

Uma limitação ou dificuldade encontrada foi o facto de a Teoria da Actividade não ter sido considerada desde o início da realização desta investigação. Se o tivesse feito, os seus princípios teriam orientado todo o processo, desde a formulação das questões de investigação aos métodos de recolha de dados. Assim, esta poderosa ferramenta só foi utilizada no momento da análise dos dados, o que conduziu a algumas limitações e dificuldades na realização dessa análise, relacionadas essencialmente com a quantidade e qualidade dos dados recolhidos.

Mas reconheço que isto aconteceu porque, no início deste estudo, eu estava mais interessada em aprender sobre a História da Matemática do que sobre as teorias da aprendizagem. Assim, só quando chegou o momento em que tive mesmo que fazer a análise, depois de ter adiado, sucessivamente, esta tarefa, é que senti necessidade de encontrar uma teoria que me permitisse reflectir sobre a aprendizagem e, posteriormente, analisar os dados.

Note-se que apesar de já ter realizado o Mestrado na área do Ensino da Matemática, a respectiva dissertação incidiu mais sobre a Matemática do que sobre o Ensino. Assim, no início da presente tese, comecei por fazer um trabalho análogo ao que fiz aquando da realização do Mestrado e, como tal, comecei por fazer pesquisa bibliográfica que fui aplicando nas aulas. Posteriormente é que senti necessidade de encontrar uma teoria que me permitisse fazer a análise dos dados obtidos, como já foi referido.

Outra limitação encontrada na realização deste estudo foi o facto de ter sido considerado um número elevado de alunos (os 23 alunos da turma), não tendo sido possível, por isso, analisar pormenorizadamente o desempenho individual de cada um ou as discussões ocorridas em cada grupo. Por esta razão, os episódios analisados centraram-se, essencialmente, nas discussões ocorridas em grande grupo, sob orientação e questionamento da professora.

Esta lacuna na recolha dos dados advém, principalmente, de três factores. Um deles deve-se ao facto dos dados terem sido recolhidos através de apenas uma câmara de filmar. Outro advém da minha falta de conhecimento do enquadramento teórico e dos seus princípios metodológicos. Um outro está relacionado com o facto de a investigadora ser, também, a professora da turma, o que condicionou a recolha de dados no decurso da aula, visto que tive que desempenhar um papel mais participante e menos observador.

De facto, desempenhar o duplo papel de professora/investigadora teve os seus “prós e contras”. Por um lado, o facto de haver uma grande proximidade na minha relação com estes alunos, dado que já os conhecia desde o ano anterior e que também era a Directora de Turma, constituiu uma vantagem, uma vez que existiu, entre nós, um maior conhecimento e cumplicidade e, além disso, a minha presença não causou perturbação ou estranheza na sala de aula.

Por outro lado, deparei-me com algumas dificuldades. Uma delas foi, como referi anteriormente, limitações ao nível da recolha dos dados, pois, quem conhece o ambiente de uma sala de aula, reconhece que é impossível, uma só pessoa, observar em profundidade um grande número de alunos durante uma aula e, além disso, orientar o desenvolvimento dessa aula. Além disso, tive que ter muito cuidado na recolha desses dados, tentando fazê-lo da forma mais rigorosa e imparcial possível, para não aumentar o aspecto subjectivo que, geralmente, está subjacente a uma pesquisa qualitativa.

Penso que um estudo desta natureza produz efeitos a médio e longo prazo e, por isso, os resultados seriam mais claros e evidentes se este estudo se tivesse prolongado.

Inicialmente, o meu objectivo era dar continuidade a esta turma e dar seguimento a este estudo no ano seguinte, ou seja, no 9º ano, e assim verificar se a continuação desta abordagem contribuía para aprendizagens mais significativas. Devido a questões pessoais, nomeadamente, licença de maternidade, não me foi atribuída esta turma no ano seguinte e, por isso, infelizmente não me foi possível dar continuidade a este projecto.

6.4. Reflexão final

Na parte final deste estudo, é tempo de um breve balanço pessoal. A realização de um doutoramento em Matemática, em especial na área do ensino da Matemática, revela-se, forçosamente, numa experiência única e enriquecedora para o professor. A realização de uma investigação desta natureza fomenta a reflexão acerca das suas práticas lectivas, essencialmente as de cariz metodológico, impulsionando o seu desenvolvimento integral enquanto agente educativo.

Não posso deixar de analisar a minha prática de doutoranda à luz da Teoria da Actividade. A realização deste doutoramento representa um sistema de actividade em que eu, como doutoranda, representei o *sujeito*, inserido numa *comunidade* que, além de mim, envolvia os orientadores e a turma analisada. O *objectivo* inicial desta actividade era a obtenção do grau de doutor mas, no decurso deste estudo, este *objectivo* foi-se transformando no motivo da acção, que passou a ser a caracterização da aprendizagem da Matemática quando mediada por problemas históricos da Matemática e o *resultado* esperado com a realização desta actividade foi a escrita da tese.

Esta actividade também foi mediada por *regras*, como o cumprimento de um prazo para entregar a tese, e pela *divisão do trabalho*, essencialmente, entre mim e os orientadores. Os *artefactos mediadores* desta actividade foram a bibliografia consultada sobre a História da Matemática e sobre a Teoria da Actividade. A revisão da literatura feita, inicialmente, foi importante para a elaboração das fichas de trabalho e para incrementar o meu conhecimento sobre a História da Matemática. Além disso, a literatura analisada sobre a integração da História da Matemática na sala de aula também foi de extrema importância, pois ajudou-me a ter consciência das vantagens e

desvantagens desta prática, assim como, a ter ideias de como a integrar nas minhas aulas. É de salientar também que a literatura analisada sobre a Teoria da Actividade desempenhou um importante papel de mediação na realização deste doutoramento, uma vez que me deu a conhecer um quadro teórico que me orientou e guiou na análise realizada.

Neste contexto, é também de salientar o papel exercido pelos orientadores que, com os seus comentários e sugestões, ajudaram a despoletar a minha Zona de Desenvolvimento Potencial. Esta orientação ajudou-me a ultrapassar os obstáculos e dificuldades que foram surgindo, tendo conseguido concluir a escrita desta tese, o que muito dificilmente teria acontecido sem essa ajuda.

A realização desta actividade foi uma experiência muito gratificante, mas durante a sua realização deparei-me com *contradições* que me fizeram reflectir sobre a minha própria prática docente, conduzindo a uma mudança na minha identidade como professora. Esta experiência fez-me repensar a minha maneira de ensinar Matemática e aprendi a valorizar o papel que a História da Matemática pode ter no ensino desta disciplina. Espero que a minha investigação proporcione aos professores, e a todos os interessados no ensino da Matemática, informação sobre o potencial do uso da História da Matemática, em particular dos problemas históricos, para melhorar a aprendizagem matemática e que isso possa contribuir para futuras investigações neste âmbito.

Tenho consciência que a realização deste doutoramento, apesar de ter transformado toda a minha maneira de ver o ensino da Matemática e, conseqüentemente, a minha forma de actuar como professora de Matemática, não trará grandes mudanças em relação aos níveis de ensino com que irei trabalhar. No entanto, os meus colegas da Escola Básica a cujo quadro pertenço, perguntam-me, constantemente, “Para o ano (depois da licença sabática) ainda vens para aqui?”, pois pensam que a realização deste doutoramento me catapultará para a Universidade. Quando digo que as expectativas de ir para o ensino universitário são fracas, mostram-se decepcionados e dão a entender que não vale a pena o esforço de tirar um doutoramento para continuar numa Escola Básica. Provavelmente, até têm razão, mas, o que eles não sabem, é que a principal razão que me levou a fazer este doutoramento é o pensamento, muito bem traduzido por Paulo Coelho, “*É justamente a possibilidade de realizar um sonho que torna a vida interessante*”.

Nunca hei-de esquecer uma conversa que tive com um Professor da UTAD sobre a realização deste doutoramento e as consequências que traria para a minha profissão, em que, a dada altura, lhe disse: *“É como se estivesse a subir uma montanha para, no fim, ficar a contemplar a vista!”*, ao que ele me respondeu: *“Mas pode estar certa que verá a paisagem com outros olhos!”*. De facto, tenho que reconhecer que tinha toda a razão pois, depois de uma escalada desta altitude, a nossa maneira de ver o que nos rodeia e, em particular, o ensino da Matemática, muda significativamente.

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Adler, A. & Adler, (1987). *Membership Roles in Field Research*. Sage Publications, U.S.A.
- Al-Kwarizmi, M. (1831). *The Algebra of Mohammed ben Musa*. Frederic Rosen Trad. London: Oriental Translation Fund.
- Almeida, F. B. (2007). *Sistemas de Numeração Precusores do Sistema Indo-Árabe*. Tese de Mestrado. Porto: FCUP.
- Antónia, R. (2001). Integrating History of Mathematics into the Mathematics Classroom. *Centro de Matemática da Universidade do Porto. Preprint, 2001-25*. Acedido em 26 de Outubro, 2010, de <http://cmupp.fc.upp.pt/cmup/v2/frames/publications.htm>
- APM (2007). *Parecer da APM sobre o Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB)*. Acedido em 26 de Junho, 2010, de http://www.apm.pt/files/_Parecer_PMEB_APM_470523a69e366.pdf
- Avital, S. (1995). History of Mathematics Can Help Improve Instruction and Learning. In F. Swetz et al (Eds.), *Learn from the Masters* (pp. 3-12). Washington, DC: Mathematical Association of America.
- Bachet, C-G. (1884). *Problèmes plaisants & délectables qui se font par les nombres*. 5^e édition revue, simplifiée et augmentée par A. Labosne. Paris: Gauthier-Villars. Acedido em 24 de Abril, 2009. Versão digital disponível na Internet em: <http://cnum.cnam.fr/CGI/fpage.cgi?8PY45/14/100/246/0/0>
- Bagni, G. T., Furinghetti, F. & Spagnolo, F. (s/d). History and epistemology in mathematics education. In Cannizzato, L., Pesci A., Robutti, O. (Eds.), (in via di pubblicazione), *Italian research in Mathematics Education 2000-2003* (pp. 1-21). Acedido em 3 de Dezembro, 2010, de <http://www.syllogismos.it/history/lcme10-cap6.PDF>
- Balestri, R. D. (2008). *A participação da História da Matemática na formação inicial de professores de Matemática na ótica de professores e pesquisadores*. Tese de mestrado. Universidade Estadual de Londrina.
- Ball, W. W. R. (1893). *A Short Account of the History of Mathematics*. London, New York: Macmillan.
- Basharina, O. K. (2007). An activity theory perspective on student-reported contradictions in international telecollaboration. *Language Learning & Technology*, 11(2), 82-103.
- Bogdan, R. & Biklen, S. K. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

- Bortoletto, A. R. S. (2008). *Reflexões relativas às definições do Número π (π) e à presença da sua História em livros didáticos de Matemática do ensino fundamental*. Tese de Mestrado. São Paulo: Universidade Metodista de Piracicaba.
- Brandenburg, R. & Nevenzeely, K. (2007). *The Nine Chapters on the History of Chinese Mathematics*. Acedido em 18 de Janeiro, 2011, de http://www.astro.rug.nl/~nevenzeel/Study/PGvdW_t=9C_HCM_a=RB,KN.pdf
- Brito, A. J. et al. (2009). *História da Matemática em atividades didáticas*. 2ª ed. Editora Livraria da Física.
- Brolezzi, A. C. (1991). *A Arte de Contar: Uma introdução ao estudo do valor didático da História da Matemática*. Dissertação de Mestrado. São Paulo: Faculdade de Educação da USP.
- Bruckheimer, M. & Arcavi, A. (2000). Mathematics and its History: An Educational Partnership. In V. Katz (Ed.), *Using history to teach mathematics. An international perspective* (pp. 135-146). Washington, DC: Mathematical Association of America.
- Bunt, L. N. H., Jones, S. & Bedient, J. D. (1988). *The historical roots of elementary mathematics*. New York: Dover Publications.
- Burkholder, J. (1993). Alcuin of York's Propositiones ad acuendos juvenes: Introduction, commentary and translation. An Electronic Bulletin for the *History and Philosophy of Science and Technology* 1(2). Acedido em 2 de Março, 2007, de <http://ftpp.metalab.unc.edu/pub/academic/history/marshall/science/host/host1-2.doc>
- Burton, D. M. (2006). *The History of Mathematics. An Introduction*. 6th ed. New York: McGraw-Hill.
- Bussi, M. G. B. (2009). Historical Artefacts, Semiotic Mediation and Teaching Proof. In G. Hanna et al. (Eds.), *Explanation and Proof in Mathematics: Philosophical and Educational Perspectives* (pp. 151-167). Springer.
- Bussi, M. G. B. et al. (1999). Early Approach to Theoretical Thinking: Gears in Primary School. *Educational Studies in Mathematics* 39(1-3), 67-87.
- Bussi M. G. B. & Bazzini, L. (2003). Research, Practice and Theory in Didactics of Mathematics: towards Dialogue between Different Fields. *Educational Studies in Mathematics* 54, 203–223.
- Bussi, M. G. B. & Boni, M. (2003). Instruments for Semiotic Mediation in Primary School Classrooms. *For the Learning of Mathematics* 23(2), 15-22.
- Bussi, M. G. B., Mariotti, M. A., & Ferri, F. (2005). Semiotic mediation in the primary school: Dürer's glass. In H. Hoffmann, J. Lenhard, & F. Seeger (Eds.), *Activity and sign - grounding mathematics education* (pp. 77–90). New York: Springer.

- Bussi M. G. B. & Mariotti, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artefacts and signs after a Vygotskian Perspective. In English L. et al. (Eds.), *Handbook of International research in mathematics education* (pp. 746-783). Taylor & Francis Group, LLC, Philadelphia (PA).
- Byers, V. (1982). Why study the history of mathematics? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* 13(1), 59-66.
- Cajori, F. (1896). *A History of Elementary Mathematics, with Hints on Methods of Teaching*. London: Macmillan Company. Acedido em 4 de Abril, 2009. Versão digital disponível na Internet em:
<http://www.archive.org/stream/ahistoryelement00cajogoog#page/n52/mode/1up>
- Cajori, F. (1909). *A History of Mathematics*. London: Macmillan Company.
- Caraça, B. J. (1951). *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Lisboa: Biblioteca Cosmos.
- Chabert, J. L. et al. (1999). Methods of False Position. In Chabert, J. L. et al (Eds.), *A History of Algorithms: From the Pebble to the Microchip* (pp. 83-112). New York: Springer Verlag.
- Chace, A. B. (1979). *The Rhind Mathematical Papyrus*. Washington, DC: Mathematical Association of America.
- Cole, M. & Engeström, Y. (1993). A cultural-historical approach to distributed cognition. In G. Salomon (Ed.), *Distributed cognitions: Psychological and educational considerations* (pp. 1-46). New York, NY: Cambridge University Press.
- Colebrooke, H. T. & Banerji, H. C. (1993). *Colebrooke's translation of the Lilavati*. (With Notes by Haran Chandra Banerji). 2nd ed. Asian Educational Services.
- Costa, C. (2007). *Introducing a historical dimension into teaching: A portuguese example – J. Vicente Gonçalves*. Acedido em 10 de Outubro, 2010, de
<http://www.clab.edc.uoc.gr/hpm/esu5-proposalsabs.pdf>
- Costa, M. J. (2000). A Matemática na China. In Universidade Aberta (Ed.), *História da Matemática* (pp. 107-218). Lisboa: Universidade Aberta.
- Costa, R. A. (s/d). *O “Teorema de Pitágoras” em livros didáticos de Matemática* (pp. 1-12). Acedido em 13 de Julho, 2010, de
http://www.senept.cefetmg.br/galerias/Arquivos_senept/anais/terca_tema1/TerxaTema1Artigo16.pdf
- Crawford, K & Hasan, H. (2006). Demonstrations of the activity theory framework for research in information systems. *Australian journal of information systems* 13(2), 49-68.
- D'Ambrósio, U. (2000). *Educação Matemática: da teoria à prática*. 16^a ed. Campinas - SP: Papyrus.

- Damiani, M. (2002). Apresentação do texto de Yrjo Engeström. In Engeström, Y. *Aprendizagem por expansão na prática: em busca de uma reconceitualização a partir da teoria da atividade*. Tradução de Daniela Vilas Boas e Magda Damiani. Caderno Educação 19, 31- 64. Pelotas: FAE/Ufpel.
- DEB (2001). Currículo Nacional do Ensino Básico. Competências essenciais. Lisboa: Departamento da Educação Básica. Ministério da Educação.
- Demattè, A. (Ed.). (2006). *Fare matematica con i documenti storici – una raccolta per la scuola secondaria di primo e secondo grado*. Volume per gli studenti. Editore Provincia Autonoma di Trento – IPRASE del Trentino.
- Demiraslan, Y. & Usluel, Y. K. (2008). ICT integration processes in Turkish schools: Using activity theory to study issues and contradictions. *Australasian Journal of Educational Technology* 24(4), 458-474.
- DGIDC (2007). Programa de Matemática para o Ensino Básico. Lisboa: Direcção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular, Ministério da Educação.
- Engeström, Y. (1987). *Learning by expanding: An activity-theoretical approach to developmental research*. Helsinki: Orienta-Konsultit. Acedido em 24 de Agosto, 2010, de <http://lhc.ucsd.edu/mca/Paper/Engeström/expanding/toc.htm>
- Engeström, Y. (1991). *Non scolae sed vitae discimus: toward overcoming the encapsulation of school learning*. *Learning and instruction* 1, 243-259.
- Engeström, Y. (1999a). Expansive Visibilization of Work: An Activity-Theoretical Perspective. *Computer Supported Cooperative Work* 8, 63-93.
- Engeström, Y. (1999b). Activity theory and individual and social transformation. In Engeström, Y., Miettinen, R. & Punamäki, R. (Eds.), *Perspectives on activity theory* (pp. 19-38). New York: Cambridge University Press.
- Engeström, Y. (1999c). Innovative learning in work teams. Analyzing cycles of knowledge creation in practice. In Engeström, Y., Miettinen, R. & Punamäki, R. (Eds.), *Perspectives on activity theory* (pp. 377-404). New York: Cambridge University Press.
- Engeström, Y. (2001). Expansive Learning at Work: Toward an activity theoretical reconceptualization. *Journal of Education and Work* 14(1), 133-156.
- Engeström, Y. & Miettinen, R. (1999). Introduction. In Engeström, Y., Miettinen, R. & Punamäki, R. (Eds.), *Perspectives on activity theory* (pp. 1-16). New York: Cambridge University Press.
- Engeström, Y., Engeström, R. & Suntuo, A. (2002a). From Paralyzing Myths to Expansive Action: Building computer-supported knowledge work into the curriculum from below. In Gerry Stahl (Ed.), *Proceedings of the Conference on Computer Support for Collaborative Learning: Foundations for a CSCL Community* (pp. 318-324). Boulder: Colorado.

- Ernest, P. (1998). The History of Mathematics in the Classroom. *Mathematics in School* 27 (4), 25-31.
- Estrada, M. F. et al. (2000). *História da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.
- Estrada, M. F. (2000a). A Matemática no Antigo Egito. In Universidade Aberta (Ed.), *História da Matemática* (pp. 19-60). Lisboa: Universidade Aberta.
- Estrada, M. F. (2000b). A Matemática na Mesopotâmia. In Universidade Aberta (Ed.), *História da Matemática* (pp. 61-105). Lisboa: Universidade Aberta.
- Estrada, M. F. (2000c). A Matemática na Civilização Islâmica. In Universidade Aberta (Ed.), *História da Matemática* (pp. 405-444). Lisboa: Universidade Aberta.
- Euclides. (1855). *Elementos de Euclides. Dos seis primeiros livros, do undécimo e duodécimo*. Versão latina de Frederico Commandino. Coimbra: Imprensa da Universidade. Acedido em 5 de Setembro, 2008, de <http://www.mat.uc.pt/~jaimecs/euclid/elem.html>
- Eves, H. (1969). *An Introduction to the History of Mathematics*. 3rd ed. New York: Holt, Rinehart and Winston, Inc.
- Fauvel, J. (1991). Using history in mathematics education. *For the Learning of Mathematics* 11(2), 3-6.
- Fauvel, J. & van Maanen, J. (2000) (Eds.). *History in Mathematics Education: The ICMI Study*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Fernandes, E. (2004). *Aprender Matemática para Viver e Trabalhar no Nosso Mundo*. Tese de Doutoramento. Lisboa: Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.
- Fino, C. N. (2001). Vygotsky e a Zona de Desenvolvimento Potencial (ZDP): três implicações pedagógicas. *Revista Portuguesa de Educação* 14(2), 273-291. Braga: Instituto de Educação e Psicologia, Universidade do Minho. Acedido em 5 de Setembro, 2010, de <http://www3.uma.pt/carlosfino/publicacoes/11.pdf>
- Fiorentini, D. & Lorenzato, S (2006). *Investigação em educação matemática percursos teóricos e metodológicos*. Campinas: Autores Associados.
- Freitas, M. T. de A. (2000). As apropriações do pensamento de Vygotsky no Brasil: um tema em debate. *Revista da Psicologia da Educação* 10(11), 9-28.
- Fried, M. N. (2001). Can Mathematics Education and History of Mathematics Coexist? *Science & Education* 10, 391-408.
- Furinghetti, F. (2004). History and mathematics education: A look around the world with particular reference to Italy. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education* 3(1-2), 1-20.

- Furinghetti, F. (2007). Teacher education through the history of mathematics. *Educational Studies in Mathematics* 66(2), 31–143.
- Gillings, R. J. (1982). *Mathematics in the Time of the Pharaohs*. New York: Dover Publications.
- Gomes, E. B. (2005). *A História da Matemática como Metodologia de ensino da Matemática. Perspectivas epistemológicas e evolução de conceitos*. Tese de Mestrado. Belém: Universidade Federal do Pará.
- Grugnetti, L. (2000a). Ancient problems for the development of strategic thinking. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education: The ICMI Study* (pp. 78 – 81). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Grugnetti, L. (2000b). The history of mathematics and its influence on pedagogical problems. In V. Katz (Ed.), *Using history to teach mathematics: An international perspective* (pp. 29-35). Washington, DC: The Mathematical Association of America.
- Gulikers, I. & Blom, K. A. (2001). ‘A historical angle’, a survey of recent literature on the use and value of history in geometrical education. *Educational Studies in Mathematics* 47, 223-258.
- Hardman, J. (2005). An exploratory case study of computer use in a primary school mathematics classroom: New technology, new pedagogy? *Perspectives in Education* 23(4), 99-111.
- Hardman, J. (2008). Researching pedagogy: an Activity Theory approach. *Journal of Education* 45, 65-95.
- Haverhals, N. & Roscoe, M. (2010). The history of mathematics as a pedagogical tool: Teaching the integral of the secant via Mercator’s projection. *The Montana Mathematics Enthusiast* 7(2-3), 339-368.
- Heath, T. L. (1964). *Diophantus of Alexandria. A study in the History of Greek Algebra*. 2th ed. New York: Dover Publications.
- Henriques, H. C. & Almeida, C. (2004). O lúdico nas aritméticas do século XVI. História do ensino da matemática em Portugal. In *Actas do XIII Encontro de Investigação em Educação Matemática* (pp. 141-148). Portugal: Beja.
- Ho, K. F. (2007) *An activity theoretic framework to study mathematics classrooms practices*. In AARE 2006 International Education Research Conference, Adelaide. Acedido em 3 de Março, 2011, de <http://www.aare.edu.au/06pap/ho06345.pdf>
- Ho, W. K. (2008). Using history of mathematics in teaching and learning of mathematics in Singapore. In *Proceedings of the 1st Raffles International Conference on Education 1*, 1-38.

- Hoyrup, J. (1994). *In Measure, Number, and Weight: Studies in Mathematics and Culture*. New York: SUNY.
- Hoyrup, J. (2003). Bronze Age formal science? With additional remarks on the historiography of distant mathematics. In *Proceedings for the Conference "Foundations of the Formal Sciences IV, the History of the Concept of the Formal Sciences"*. London: College Publications.
- Hung, D. W. L. & Wong, A. F. L. (2000). Activity Theory as a Framework for Project Work in Learning Environments. *Educational Technology* 40(2), 33-37.
- Jahnke, H. N. (2000). The use of original sources in the mathematics classroom. In J. Fauvel, & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education, the ICMI study* (pp. 291–328). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Jankvist, U. K. (2009a). *Using history as a "goal" in Mathematics Education*. PhD Thesis. Denmark: Roskilde University.
- Jankvist, U. T. (2009b). A characterization of the “whys” and “hows” of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics* 71(3), 235 – 261.
- Jankvist, U. T. (2009c). On empirical research in the field of using history in mathematics education. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 12 (1), 67-101.
- Jaworski, B. & Potari, D. (2009). Bridging the macro-and micro-divide: using an activity theory model to capture sociocultural complexity in mathematics teaching and its development. *Educational Studies in Mathematics* 72, 219–236.
- Jonassen, D. H. & Rohrer-Murphy, L. (1999). Activity Theory as a Framework for Designing Constructivist Learning Environments. *Educational Technology, Research and Development* 47(1), 61-79.
- Jones, K. (2000). The Mediation of Mathematical Learning through the use of Pedagogical Tools: a sociocultural analysis. Invited paper presented at the conference on *Social Constructivism, Socioculturalism, and Social Practice Theory: relevance and rationalisations in mathematics education*. Norway.
- Kaptelinin, V. (1996). Activity Theory: Implications for Human- Computer Interaction. In Nardi, B. A. (Ed.), *Context and consciousness: activity theory and human-computer interaction* (pp. 103-116). Cambridge, MA: MIT Press.
- Kaptelinin, V. & Nardi, B. A. (2006). Activity theory in a nutshell. *Acting with Technology: Activity theory and interaction design* (pp. 29-72). Cambridge, MA: MIT Press.
- Katz, V. (1998). *A History of Mathematics: An Introduction*. 2nd ed. Reading, MA: Addison-Wesley.

- Katz, V. (Ed.). (2000). *Using History to Teach Mathematics: an International Perspective*. Washington, DC: Mathematical Association of America.
- Katz, V. et al. (2000). The role of historical analysis in predicting and interpreting students' difficulties in mathematics. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education: The ICMI Study* (pp. 149-153). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Kjeldsen, T. H. (2010). *Does History have a significant role to play for the learning of mathematics? Multiple perspective approach to history, development of mathematical discourse, and the learning of mathematics*. Acedido em 20 de Outubro, 2010, de <http://edc.uoc.gr/~tzanakis/ESU6-ListOfContributions+Abs.doc>.
- Krantz, S. G. (2010). *An Episodic History of Mathematics: Mathematical Culture through Problem Solving*. MAA.
- Kuutti, K. (1996). Activity Theory as a potencial framework for human-computer interaction research. In B. A. Nardi (Ed.), *Context and Consciousness: Activity theory and human computer interaction* (pp. 17 – 44). Cambridge: MIT Press.
- Lagarto, M. J. (s/d). *História da Matemática. História dos problemas*. Acedido em 20 de Maio, 2006, de <http://www.malhatlantica.pt/mathis/>
- Lapassade, G. (2001). *L' observation participante*. Acedido em 14 de Março, 2011, de <http://www.vadeker.net/corpus/lapassade/ethngr1.htm#3>
- Lauand, Luiz Jean. *Bom humor e brincar em S. Tomás de Aquino*. Acedido em 15 de Fevereiro, 2011, de <http://orbita.starmedia.com/~oadamastor/aquinas.htm>
- Laubenbacher, R. C. & Pengelley, D. J. (1992). Great Problems of Mathematics: A Course Based on Original Sources. *American Mathematical Monthly* 99, 313-317.
- Laubenbacher, R. C. & Pengelley, D. J. (1994). Recovering Motivation in Mathematics: Teaching with Original Sources. *UME Trends* 6. Acedido em 2 de Julho, 2010, de <http://www.math.nmsu.edu/~history/ume.html>
- Laubenbacher, R. C. & Pengelley, D. J. (1996). Mathematical masterpieces: teaching with original sources. In R. Calinger (Ed.), *Vita mathematica: Historical research and integration with teaching* (pp. 257-260). Washington. DC: The Mathematical Association of America.
- Leffa, V. J. (2006). Transdisciplinaridade no ensino de línguas: a perspectiva das Teorias da Complexidade. *Revista Brasileira de Linguística Aplicada* 6(1), 27- 49.
- Leontiev, A. N. (1978). *Activity, Consciousness and Personality*. Englewood Cliffs: Prentice - Hall. Acedido em 10 de Setembro, 2010, de <http://lhc.ucsd.edu/mca/Paper/leontev/index.html>
- Leontiev, A. N. (1981). *Problems of the development of mind*. Moscow: Progress Publishers.

- Lim, C. P., & Hung, W. L. (2003). An activity theory approach to research of ICT integration in Singapore schools. *Computers and Education*, 41(1), 49-63.
- Lit, C. K., Siu, M. K., & Wong, N. Y. (2001). The use of history in the teaching of mathematics: Theory, practice, and evaluation of effectiveness. *Educational Journal* 29(1), 17-31.
- Liu, P-H. (2003). Do teachers need to incorporate the history of mathematics in their teaching? *Mathematics Teacher* 96(6), 416-421.
- Loomis, E. S. (1968). *The Pythagorean Proposition*. Washington, DC: NCTM.
- Lucas, M. E. (1893). *Récréation Méthématiques*. Paris: Gauthier-Villars et Fils.
- Ludke, M. & André, M. (1986). *Pesquisa em Educação: Abordagens Qualitativas*. São Paulo: EPU.
- Lumpkin, B. (1997). *The Mathematical Legacy Of Ancient Egypt - A Response To Robert Palter* (pp. 1-27). Unpublished manuscript. Acedido em 17 de Dezembro, 2010, de <http://www.ethnomath.org/resources/lumpkin1997.pdf#search=%22%22berlin%20mathematical%20papyrus%22%20number%22>
- Mariotti, M. A. (2006). New artifacts and the mediation of mathematical meanings. In *Proceedings of the 17th ICMI Study, Technology Revisited* (pp. 1-9).
- ME (1991). *Organização Curricular e Programas. Ensino Básico 3º Ciclo*. Lisboa: Direcção Geral do Ensino Básico e Secundário, Ministério da Educação, vol I.
- Meira, L. & Lerman S. (2001). The zone of proximal development as a symbolic space. *Social Science Research Papers* 1(13).
- Miguel, A. (1997). As potencialidades pedagógicas da história da matemática em questão: argumentos reforçadores e argumentos questionadores. *Zetetiké* 5(8), 73-129.
- Morgado, J. (1992). *Teoria dos números: uma visita muito breve ao reino de sua majestade, a rainha da Matemática* (pp. 3-28). Fundação Calouste Gulbenkian.
- Murphy, E. & Rodriguez-Manzanares, M. A. (2008). Using activity theory and its principle of contradictions to guide research in educational technology. *Australasian Journal of Educational Technology* 24(4), 442-457.
- Mwanza, D. (2001). Where Theory meets Practice: A Case for an Activity Theory based Methodology to guide Computer System Design. In *Proceedings of INTERACT' 2001: Eighth IFIP TC 13 International Conference on Human-Computer Interaction*.
- Mwanza, D. (2002). *Towards an Activity-Oriented Design Method for HCI Research and Practice*. PhD Thesis. United Kingdom: The Open University.

- Nardi, B. A. (1996). *Context and consciousness: activity theory and human-computer interaction*. Cambridge, MA: MIT Press.
- National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- Neto, J. P. & Silva, J. N. (2004). *Jogos Matemáticos, Jogos Abstractos*. Lisboa: Gradiva, RBA 2008.
- Neugebauer, O. (1969). *The Exact Sciences in Antiquity*. New York: Dover Publications.
- Neves, R. A. & Damiani, M. F. (2006). Vygotsky e as teorias da aprendizagem. *UNIrevista* 1(2), 1-10.
- Núñez, I. (2009). Activity Theory and the Utilisation of the Activity System according to the Mathematics Educational Community. *Educate Special Issue*, 7-20.
- Oliveira, G. L. D. de. (2009). "A" história da matemática no currículo escolar: que História é essa? Comunicação Científica apresentada no X Encontro Gaúcho de Educação Matemática. Acedido em 23 de Novembro, 2010, de http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/cd_egem/fscommand/CC/CC_18.pdf
- Paton, W. R. (1918). *The Greek Anthology* (Vol. 5, pp. 25-107). London: William Heinemann. Acedido em 2 de Julho, 2006, de <http://www.scribd.com/doc/31403686/Greek-Anthology-V>
- Peters, J. R. (2005). *A História da matemática no ensino fundamental. Uma análise de livros didáticos e artigos sobre história*. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.
- Pinto, H. (2009). *História da Matemática na Sala de Aula*. 1ª ed. Lisboa: Associação Ludus.
- Piteira, G. e Matos, J.F. (2000) Ambientes dinâmicos de Geometria como artefactos mediadores para a Aprendizagem da Geometria. Em M. J. Saraiva, M. I. Coelho & J. M. Matos (Org), *Ensino e Aprendizagem da Geometria*. SPCE. Lisboa. Acedido em 30 de Novembro, 2010, de <http://www.spce.org.pt/sem/GP.pdf>
- Ponte, J. P. (1988). Matemática, insucesso e mudança: Problema possível, impossível ou indeterminado? *Revista Aprender* 6.
- Ponte, J. P. (2006). *Estudos de caso em educação matemática*. Acedido em 10 de Junho, 2010, de [http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/06Ponte%20\(Estudo%20caso\).pdf](http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/06Ponte%20(Estudo%20caso).pdf)
- Ponte, J. P. (2008). *Para um balanço do percurso da Didáctica da Matemática em Portugal (1980-1998)*. Acedido em 10 de Março, 2011, de <http://www.spce.org.pt/sem/SDP.pdf>

- Quevedo, A. G. (2005). *Atividade, contradições e ciclo expansivo de aprendizagem no engajamento de alunos em um curso online*. Tese de doutorado. S. Paulo: Universidade Católica.
- Radford, L. (2000). Introduction. Historical formation and student understanding of mathematics. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education: The ICMI Study* (pp. 143-148). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Radford, L. & Guérette, G. (2000). Second Degree Equations in the Classroom: the Babylonian Approach. In V. Katz (Ed.), *Using history to teach mathematics. An international perspective* (pp. 69-75). Washington, DC: Mathematical Association of America.
- Radford, L., Furinghetti, F. & Katz, V. (2007). Introduction. The topos of meaning or the encounter between past and present. *Educational Studies in Mathematics* 66, 107–110.
- Ricieri, A. (s/d). *Descomplicando a Matemática*. Acedido em 15 de Janeiro, 2008, de: <http://www.youtube.com/watch?v=rMk039KvynU&feature=related>
- Rickey, V. F. (1995). My favorite ways of using history in teaching calculus. In F. Swetz et al (Eds.), *Learn from the masters* (pp. 123-134). Washington, DC: Mathematical Association of America.
- Robins, G. & Shute, C. (1998). *The Rhind Mathematical Papyrus. An ancient Egyptian text*. London: British Museum Press.
- Robson, E. (2007). Mesopotamian mathematics. In V. Katz (Ed.), *The mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India, and Islam: a sourcebook* (pp. 57-186). Princeton: Princeton University Press.
- Sá, Carlos (2000). A Matemática na Grécia Antiga. In Universidade Aberta (Ed.), *História da Matemática* (pp. 219-367). Lisboa: Universidade Aberta.
- Santos, L. (2000). *A prática lectiva como actividades de resolução de problemas: um estudo com três professores do ensino secundário*. Tese de Doutoramento. Lisboa: Universidade de Lisboa. Acedido em 3 de Março, 2011, de <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/msantos/tese/index.htm>
- Santos, C. P., Neto, J. P. & Silva, J. N. (2007). *Jogos do Mundo*, em dez volumes. Visão/Público.
- Santos, C. P., Neto, J. P. & Silva, J. N. (2008). *Jogos com História*, em dez volumes. Visão/Público.
- Shen, K., Crossley, J. N. & Lun, A. W. (1999). *The Nine Chapters on the Mathematical Art: Companion and Commentary*. Oxford, New York: Oxford University Press.

- Sigler, L. E. (2002). *Fibonacci's Liber abaci: a translation into modern English of Leonardo Pisano's Book of calculation*. New York: Springer Verlag.
- Silva, J. C. e (1994). *History of mathematics in the classroom: Hopes, uncertainties and dangers*. Paper presented at the Meeting of the HPM. Blumenau, Brazil. Acedido em 25 de Abril, 2009, de <http://www.mat.uc.pt/~jaimecs/pessoal/hpm.html>
- Silva, J. C. e (1995). *A História da Matemática e o ensino da Matemática*. Acedido em 25 de Abril, 2009, de <http://www.mat.uc.pt/~jaimecs/pessoal/histmatprogr1.html>
- Silva, J. C. e (1997). *A História da Matemática nos Novos Programas de Matemática em Portugal*. Paper apresentado no II Encontro Luso-Brasileiro de História da Matemática. Acedido em 25 de Abril, 2009, de <http://www.mat.uc.pt/~jaimecs/pessoal/histmatprogr2.html>
- Silva, J. C. e (2010). *Vamos levar a emoção da História da Matemática para dentro da sala de aula!* Resumo do Paper apresentado no Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática (HTEM 5). Recife, Brasil. Acedido em 25 de Outubro, 2010, de <http://www.mat.uc.pt/~jaimecs/pessoal/sessoes.html#realizadas>
- Silva, M. do C. (2000). A Matemática na Índia Medieval. In Estrada et al (Ed.), *História da Matemática* (pp. 369-401). Lisboa: Universidade Aberta.
- Singh, (1985). The So-called Fibonacci numbers in ancient and medieval India. *Historia Mathematica* 12(3), 229-244.
- Singmaster, D. (2004). *Sources in recreational mathematics. An annotated bibliography*. Acedido em 23 de Maio, 2008, de <http://www.gotham-corpp.com/sources.htm>
- Singmaster, D. (2008). De Viribus Quantitatis by Luca Pacioli: The First Recreational Mathematics Book. In Demaine, E. D. et al (Eds.), *A lifetime of puzzles: a collection of puzzles in honor of Martin Gardner's 90th birthday* (pp. 77-122). Editora A. K. Peters.
- Siu, M. K. (2000a). The ABCD of using history of mathematics in the (undergraduate classroom). In V. Katz (Ed.), *Using history to teach mathematics: An international perspective* (pp. 3-9). Washington, DC: The Mathematical Association of America.
- Siu, M. K. (2000b). Historical support for particular subjects. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education: The ICMI Study* (pp. 241-290). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Siu, M. K. (2007). No, I don't use history of mathematics in my class. Why? In F. Furinghetti, S. Kaijser, & C. Tzanakis (Eds.), *Proceedings HPM2004 & ESU4* (revised edition, 268-277). Uppsala: Uppsala Universitet.
- Siu, M. K. & Tzanakis, C. (2004). History of mathematics in classroom teaching – Appetizer? main course? or dessert?. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 3(1-2), v-x.

- Smith, D. E. (1923). *History of Mathematics. (Special topics of Elementary mathematics)*. Vol. II. New York: Dover Publications.
- Smith, D. E. (1929). *A Source Book in Mathematics*. 1ª ed. New York: McGraw-Hill Book Company.
- Smith, D. E. (1958). *History of Mathematics. (General survey of the history of Elementary mathematics)*. Vol. I. New York: Dover Publications.
- Struik, D. J. (1987). *A Concise History of Mathematics*. 4th ed. New York: Dover Publications.
- Swetz, F. J. (1994). *Learning Activities from the History of Mathematics*. Portland, Maine: Weston Walch Publisher.
- Swetz, F. J. et al (Eds.). (1995a). *Learn from the Masters*. Washington, DC: Mathematical Association of America.
- Swetz, F. J. (1995b). Using Problems from the History of Mathematics in Classroom Instruction. In F. Swetz et al (Eds.), *Learn from the Masters* (pp. 25-38). Washington, DC: Mathematical Association of America.
- Swetz, F. J. (2000). Problem solving from the history of Mathematics. In Katz, V. J. (Ed.), *Using History to Teach Mathematics: an International Perspective* (pp. 59-65). Washington, DC: Mathematical Association of America.
- Swetz, F. J. (Ed.). (2004a). Problems from another Time. *Convergence*. Acedido em 12 de Outubro, 2010, de <http://mathdl.maa.org/mathDL/46/?pa=content&sa=browseNode&browseTypeId=12>
- Swetz, F. J. (2004b). Using Problems from the History of Mathematics, *Loci*, DOI. Acedido em 12 de Outubro, 2010, de <http://mathdl.maa.org/mathDL/46/?pa=content&sa=viewDocument&nodeId=2055&bodyId=2418>
- Swetz, F. J. (2007). *Historical problems: a valuable resource for mathematics classroom instruction*. Acedido em 10 de Outubro, 2009, de <http://www.clab.edc.uoc.gr/hpm/esu5-proposalsabs.pdf>
- Swift, J. D. (1956). Diophantus of Alexandria. *The American Mathematical Monthly*, 63(3), 163-170.
- Tahan, M. (1973). *As maravilhas da Matemática*. 2ª ed. Rio de Janeiro: Editora Bloch.
- Tahan, M. (2001). *O homem que calculava*. Acedido em 22 de Abril, 2009, de http://www.cdb.br/prof/arquivos/17272_20080312114624.pdf

- Teixeira, F. G. (1934). *História das Matemáticas em Portugal*. Acedido em 2 de Março, 2010. Versão digital disponível na Internet em: <http://www.mat.uc.pt/~jaimecs/livrogt/livrogt.html>
- Thomaidis, Y. & Tzanakis, C. (2009). The implementation of the History of Mathematics in the new curriculum and textbooks in Greek Secondary education. *Proceedings of CERME 6, Working Group 15: The role of history in mathematics education: theory and research*, 139-151.
- Thureau-Dangin, F. (1938). *Textes Mathématiques Babyloniens*. Leiden : EJ Brill.
- Tzanakis, C. & Arcavi, A. (2000). Integrating history of mathematics in the classroom: an analytic survey. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education. The ICMI Study* (pp. 201–240). Dordrecht: Kluwer Academic.
- van Maanen, J. (1997). New maths may profit from old methods. *For the Learning of Mathematics* 17(2), 39–46.
- Vasconcellos, F. A. L. (2009). *História das Matemáticas na Antiguidade*. 2ª edição revista e coordenada por Augusto J. Franco de Oliveira. Lisboa: Associação Ludus.
- Vianna, C. R. (1995). *Matemática e História: Algumas Relações e Implicações Pedagógicas*. Dissertação de Mestrado. São Paulo: Faculdade de Educação, USP.
- Vianna, C. R. (1998). Usos Didáticos para a História da Matemática. In Fernando Raul Neto (Ed.), *Anais do I Seminário Nacional de História da Matemática* (pp. 65-79). Recife, PE.
- Vygotsky, L. S. (1978). Interaction between learning and development. In M. Cole, V. John-Steiner & E. Souberman (Eds.), *Mind in society - the development of higher psychological processes* (pp. 79-91). Cambridge: Harvard University.
- Wertsch, J. (1993). “Foreword”. In L. S. Vygotsky & A. R. Luria (Eds.), *Studies on the History of Behavior: Ape, Primitive, and Child* (pp. ix - xiii). Hillsdale NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Wilson, S. & Chauvot, J. B. (2000). Who? How? What? A Strategy for Using History to Teach Mathematics. *Mathematics Teacher* 93(8), 642-645.
- Yin, R. K. (2005). *Estudo de Caso – Planejamento e Métodos* (pp. 19-77) 3ª ed. Porto Alegre: Editora Bookman.
- Zurita, G. & Nussbaum, M. (2007). Conceptual framework based on activity theory for mobile CSCL. *British Journal of Educational Technology*, 38(2), 211-235.

ANEXOS

ANEXO A.1 - MATEMÁTICA NO EGIPTO

Grande parte dos nossos conhecimentos da Matemática egípcia provém de dois papiros: o papiro de Rhind (1650 a.C.) e o papiro de Moscovo (1850 a.C.). No entanto, há mais três documentos de Matemática egípcia com alguma importância: o papiro de Kahun, o papiro de Berlim e o Rolo de Couro.

O papiro de Moscovo tem este nome porque se encontra, actualmente, em Moscovo, mas não se conhece onde foi descoberto. Este papiro data de cerca de 1850 a. C. e contém 25 problemas, mas devido ao seu estado de degradação é impossível interpretar muitos deles.

O papiro de Kahun corresponde a fragmentos de diversos papiros encontrados em Kahun, no Egipto, e pensa-se que data de cerca de 1800 a. C. Esses fragmentos foram restaurados e traduzidos por F. L. Griffith; no entanto, o seu estado de conservação só permitiu que alguns fossem decifrados, mas não há dúvida que sete dos fragmentos contêm textos relacionados com a Matemática, contendo aplicações dos métodos aritméticos descritos no papiro de Rhind.

O papiro de Berlim foi comprado pelo escocês Alexander Henry Rhind, em Luxor. Encontrava-se em muito mau estado e só foi analisado e restaurado cerca de 50 anos mais tarde. Data, aproximadamente, de 1800 a.C. e encontra-se no Museu Staatliche, em Berlim.

O Rolo de Couro foi comprado, em 1858, por Rhind (ao mesmo tempo que comprou o papiro de Rhind e o de Berlim). Contém uma tabela, em duplicado, com 26 somas de frações unitárias, mas, devido ao seu estado de degradação, ficou por analisar durante mais de 60 anos.

Há ainda outro papiro, mais recente, que é o papiro do Cairo. Este papiro data, provavelmente, do século III a.C. e está escrito em demótico. Contém 22 fragmentos que, juntos, dariam um papiro com 2 metros de comprimento por 35 cm de largura. Este papiro contém 40 problemas, alguns dos quais revelam uma forte influência de textos babilónios, nomeadamente os problemas que envolvem o Teorema de Pitágoras.

Dada a importância do papiro de Rhind, será feita uma análise mais detalhada do mesmo. Este papiro está escrito em hierático, da direita para a esquerda e tem 32 cm de largura por 513 cm de comprimento. É datado de cerca de 1650 a.C., embora no texto seja referido que foi copiado de um manuscrito, de cerca de 200 anos antes. Este papiro tem o nome de A. H. Rhind que, em 1858, o trouxe de Luxor, no Egipto, e o vendeu ao Museu Britânico, onde está exposto (ver figura 31). É também designado por papiro de Ahmes, o escriba egípcio que o copiou.

Os problemas deste papiro foram numerados de 1 a 87 pelo editor alemão A. A. Eisenlohr, em 1877; no original não há qualquer numeração. Além de incluir a solução para muitos problemas práticos, alguns dos quais incluem conceitos geométricos, contém um conjunto de problemas que não têm importância prática. Ficamos com a impressão que o autor colocou os problemas a si próprio e resolveu-os por diversão.



Fig. 31 – Parte do papiro de Rhind

(Paul James Cowie, http://www.archaeowiki.org/Image:Rhind_Mathematical_Papyrus.jpg)

Antes de procedermos à análise dos papiros, especialmente do papiro de Rhind, será feita uma breve análise da numeração egípcia e das operações aritméticas realizadas pelos egípcios.

NUMERAÇÃO EGÍPCIA

A notação numérica usada pelos egípcios era muito simples. Eles usavam símbolos para 1, 10, 100, ..., 10 000 000. A tabela 7 mostra os símbolos utilizados e o que representavam:

Valor	Hieróglifo	Descrição
$10^0=1$		Corda simples ou bastão
$10^1=10$	∩	Calcanhar
$10^2=100$	∞	Espiral de corda
$10^3=1\ 000$	⋈	Flor de lótus
$10^4=10\ 000$	☞	Dedo indicador
$10^5=100\ 000$	𐍎 ou 𐍏	Girino ou Sapo
$10^6=1\ 000\ 000$	𐍑	Homem com as mãos erguidas
$10^7=10\ 000\ 000$	☼	Sol

Tabela 7 – Símbolos usados na numeração egípcia

Os números de 2 a 9 eram representados por dois, três, ... nove bastões, como se segue:

$$2 = \text{II}, 3 = \text{III}, \dots, 9 = \begin{array}{c} \text{III} \\ \text{III} \\ \text{III} \end{array}$$

As dezenas, centenas, e por aí adiante, eram tratados do mesmo modo. Por exemplo:

$$30 = \text{nnn}$$

$$500 = \begin{array}{c} \text{☉☉} \\ \text{☉☉☉} \end{array}$$

Estes símbolos eram, muitas vezes, combinados para representar outros números. Por exemplo, 4622 era representado do seguinte modo:

$$4622 = 4 \times 10^3 + 6 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 2 \times 10^0 = \begin{array}{c} \text{☉☉☉☉} \\ \text{☉☉☉☉} \\ \text{☉☉☉☉} \\ \text{☉☉☉☉} \end{array} \text{☉☉☉☉☉☉☉☉☉☉nnn}$$

Nesta numeração é possível notar que:

1. Faltava um símbolo para o zero. Por exemplo, para escrever 504, o que, actualmente, não poderíamos fazer sem o zero, os egípcios escreviam $\begin{array}{c} \text{☉☉☉☉} \\ \text{☉III} \end{array}$.
2. Os números eram escritos em base 10. Um símbolo substitui 10 símbolos da numeração precedente.
3. Como os antigos egípcios apenas tinham símbolos para as potências de 10, de 10^0 até 10^7 , o maior número que podiam representar era

$$9 \times 10^7 + 9 \times 10^6 + 9 \times 10^5 + 9 \times 10^4 + 9 \times 10^3 + 9 \times 10^2 + 9 \times 10^1 + 9 \times 10^0 = 99\,999\,999.$$

OPERAÇÕES ARITMÉTICAS

Adição e subtracção

Em escrita hieroglífica, a adição não causa qualquer dificuldade. Até é mais simples que no nosso sistema. Não há combinações como $8 + 5 = 13$ para decorar. Uma vez que os egípcios sabiam que 10 bastões podem ser substituídos por ☉ , 10 símbolos ☉ serão substituídos por ☉ , e assim sucessivamente, eles contavam os símbolos nos dois números que queriam adicionar. Assim, escreveriam a soma

e

directamente como

Tendo contado 10 , escreviam e depois acrescentavam os três que sobravam sem terem que saber que 8 mais 5 é 13 ou sem terem que pensar: “Escrevo 3 e vai 1 (ou 10)”.

Relativamente à subtracção, os egípcios usavam o facto de esta ser o inverso da adição. Assim, se queriam calcular $13 - 5$, pensavam: “O que é necessário juntar ao 5 para obter 13?”

Qualquer problema de subtracção, como $13 - 5 = ?$, dá o resultado (soma) de uma adição e uma das parcelas e pergunta pela outra parcela. Assim, $13 - 5 = ?$ significa que $13 = 5 + ?$. Matematicamente, a adição é uma operação fundamental.

Multiplicação

O método egípcio da multiplicação é bastante diferente do nosso. Os egípcios usavam duas operações para multiplicar: duplicar e adicionar.

Exemplo 1: Calcule 22×44 .

Para fazer esta multiplicação eles pensavam do seguinte modo: começavam por escrever os números 1 e 44, depois duplicavam cada número e escreviam os resultados debaixo dos números originais. Continuavam até o próximo número, do lado esquerdo, exceder 22. Nesta altura, começavam a procurar, no lado esquerdo, quais os números que somados dariam 22. Cada vez que somavam um número, para obter 22, colocavam uma barra no número correspondente, na coluna da direita. Para perfazer 22, escolhiam o 16, o 4 e o 2, uma vez que $16 + 4 + 2 = 22$. Depois, adicionavam os valores correspondentes do lado direito destes números. O resultado é $88 + 176 + 704 = 968$. Logo, $22 \times 44 = 968$.

1	44
2	88 /
4	176 /
8	352
<u>16</u>	<u>704 /</u>
22	968

Estas somas eram facilmente feitas pelos escribas egípcios em virtude de uma propriedade especial da série: 1, 2, 4, 8, 16, 32,

Qualquer número inteiro pode ser expresso, de uma forma única, como a soma de alguns termos desta sucessão. Assim, por exemplo, $19 = 1 + 2 + 16$ e $52 = 4 + 16 + 32$. Não sabemos se os egípcios tinham ou não conhecimento explícito disto mas certamente que o usaram, como fazem os modernos programadores de computadores.

Excepcionalmente, os egípcios, às vezes, multiplicavam um número directamente por 10 em vez de adicionarem duas vezes o número e oito vezes o número. Isto era facilmente feito na sua notação; apenas substituíam \mid por \cap , \cap por ⌢ , e assim por diante.

Exemplo 2: Calcule 14×80 .

$$\begin{array}{r}
 1 \qquad 80 \\
 10 \qquad 800 / \\
 2 \qquad 160 \\
 \underline{4} \qquad 320 / \\
 14 \qquad 1120
 \end{array}$$

Outras abordagens para multiplicar também eram utilizadas. Por exemplo, para multiplicar por 5, os egípcios ocasionalmente começavam por multiplicar por 10 e depois dividiam por 2.

Exemplo 3: Calcule 16×16 .

$$\begin{array}{r}
 1 \qquad 16 / \\
 10 \qquad 160 / \\
 \underline{5} \qquad 80 / \\
 16 \qquad 256
 \end{array}$$

Calcular metade de um número é considerada uma operação fundamental da aritmética que é feita mentalmente.

O método usado pelos egípcios é, muitas vezes, confundido com um procedimento semelhante chamado **Multiplicação Russa**. No método russo, os dois factores são escritos, e depois um é duplicado enquanto o outro é dividido por 2. Este método era, às vezes, chamado método da duplicação e mediação, em alguns textos aritméticos mais antigos. Também é conhecido por multiplicação camponesa, por ser usado por camponeses russos. Uma óbvia vantagem deste processo é que torna desnecessária a memorização das tabuadas. Vejamos como ficaria o exemplo visto anteriormente:

22	44
11	88 /
5	176 /
2	352
1	704 /
968	

Neste processo, o número duplicado (na coluna da direita) é assinalado de cada vez que, na coluna da esquerda (coluna das metades), está um número ímpar. Repare que quando dá um resto, esse resto é ignorado. Por exemplo, $11 : 2$, dá 5 e sobra 1; este resto é ignorado. Note-se que os números marcados são idênticos aos números assinalados no método egípcio analisado anteriormente. Por que funciona este método?

Vejamos um modo diferente de fazer a mesma multiplicação escrevendo 22 em notação binária.

$$\begin{aligned} 22 &= 10110_2 = 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = \\ &= 1 \times 16 + 0 \times 8 + 1 \times 4 + 1 \times 2 + 0 \times 1 \end{aligned}$$

Então, para multiplicar 22 por 44, podemos fazer o seguinte:

$$[(44 \times 1) \times 16] + [(44 \times 0) \times 8] + [(44 \times 1) \times 4] + [(44 \times 1) \times 2] + [(44 \times 0) \times 1]$$

O que pode ser escrito como:

$$44 \times 16 + 44 \times 4 + 44 \times 2$$

Repare-se que isto corresponde, exactamente, aos cálculos efectuados pelos egípcios.

Agora olhemos para a operação feita anteriormente e acrescentemos algumas colunas. Na 2ª coluna vamos colocar os restos obtidos na divisão do número correspondente por 2:

22	0	44	(44 × 1)
11	1	88	(44 × 2)
5	1	176	(44 × 4)
2	0	352	(44 × 8)
1	1	704	(44 × 16)

Agora, para encontrar a solução, tudo o que precisamos é multiplicar os valores da 2ª coluna pelos da 3ª e adicionar todos esses valores.

O que fazemos na Multiplicação Russa é ignorar a 2ª coluna (e a 4ª) e cortar as linhas que têm números pares na 1ª coluna porque estas terão 0 na 2ª coluna e, portanto, não afectarão o resultado final.

Divisão

A divisão egípcia pode ser descrita como uma multiplicação na ordem inversa - onde o divisor é duplicado repetidamente até o dividendo ser obtido. Este processo tem a vantagem pedagógica de não parecer uma nova operação.

Em vez de dizerem: “Calcule $45 \div 9$ ”, um egípcio dizia: “Calcule com 9 até chegar ao 45”. Começamos a multiplicar o 9, como se segue:


$$\begin{array}{r} 1 \qquad 9 / \\ 2 \qquad 18 \\ \hline 4 \qquad 36 / \\ 5 \qquad 45 \end{array}$$

Disto segue que $(1 + 4) \times 9 = 45$, ou $45 \div 9 = 5$.

Actualmente, a divisão é definida como sendo o inverso da multiplicação. Por outras palavras, em qualquer problema de divisão é dado um produto e um dos seus factores. O problema consiste em encontrar o outro factor. Assim, mesmo hoje em dia, ensinamos que $45 \div 9 = ?$ significa $? \times 9 = 45$.

FRACÇÕES E DIVISÕES

Se o resto da divisão não era zero, as fracções eram introduzidas. As fracções também eram usadas nos sistemas egípcios de pesos e medidas.

Há uma diferença notável entre as fracções egípcias e as que usamos actualmente. O nosso sistema admite qualquer número no numerador, enquanto os egípcios usavam apenas fracções com numerador 1, à excepção de $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$. Chamaremos às fracções com numerador 1, *fracções unitárias*. Para escrever tais fracções, os egípcios apenas escreviam por cima do denominador o símbolo , que representa uma boca aberta. Por exemplo,

$$\frac{\text{☉}}{\text{III}} = \frac{1}{3} \quad |$$

Os egípcios tinham símbolos especiais para algumas fracções, como por exemplo,

$$\frac{\text{☉}}{\text{II}} = \frac{1}{2} \quad | \quad \frac{\text{☉}}{\text{II}} = \frac{2}{3} \quad | \quad \frac{\text{☉}}{\text{II}} = \frac{3}{4}$$

Quando os resultados não podiam ser expressos por fracções unitárias, eles escreviam o resultado como a soma de diferentes fracções unitárias. Por exemplo, os egípcios poderiam escrever $\frac{1}{3} + \frac{1}{2}$ para representar $\frac{5}{6}$.

Uma vez que no papiro de Rhind é dada muita importância à representação de uma fracção como a soma de fracções unitárias, será feita uma análise, algo pormenorizada, destas representações.

Uma fracção pode ser representada como a soma de fracções unitárias de várias maneiras. Por exemplo,

$$\frac{6}{7} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{14} + \frac{1}{28}.$$

É verdade que $\frac{6}{7}$ também podia ser escrito na forma

$$\frac{6}{7} = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7},$$

mas os egípcios devem ter achado isto absurdo e contraditório e, por isso, não permitiam tais representações. Aos seus olhos, havia uma e uma só parte que poderia ser a sétima parte de qualquer coisa. Provavelmente, os antigos escribas encontraram a soma de fracções unitárias equivalente a $\frac{6}{7}$ seguindo a divisão convencional de 6 por 7, a seguir representada e que, à primeira vista, não parece muito fácil.

$\frac{1}{2}$	$3 + \frac{1}{2} /$
$\frac{1}{4}$	$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} /$
$\frac{1}{7}$	1
$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{2} /$
$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{4} /$
$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{14} + \frac{1}{28}$	6

A questão mal esclarecida de como os egípcios encontraram a representação das suas fracções unitárias tem estimulado vários matemáticos a estudar o problema.

Com o objectivo de acompanhar o processo egípcio mais facilmente, geralmente será utilizada uma nova notação para as fracções unitárias. Por exemplo, a fracção $\frac{1}{12}$ será representada por $\overline{12}$, e, em geral, $\frac{1}{n}$ por \overline{n} . A fracção $\frac{2}{3}$, será representada por $\overline{3}$.

Vejam alguns exemplos, incluindo alguns do papiro de Rhind, que nos mostram como os egípcios faziam divisões que não tinham um quociente inteiro.

Exemplo 1 (Problema 24²² do papiro de Rhind): Para resolver este problema, a dada altura o escriba tem que dividir 19 por 8 (ou seja, calcular com 8 até obter 19).

$$\begin{array}{r}
 1 \qquad 8 \\
 2 \qquad 16 / \\
 \bar{2} \qquad 4 \\
 \bar{4} \qquad 2 / \\
 \hline
 \bar{8} \qquad 1 / \\
 \hline
 19
 \end{array}$$

O total dos números da coluna da direita, nas linhas assinaladas, é 19. Evidentemente,

$$2 \times 8 + \bar{4} \times 8 + \bar{8} \times 8 = (2 + \bar{4} + \bar{8}) \times 8 = 19;$$

logo, $19 \div 8 = 2 + \bar{4} + \bar{8}$, o que pode ser facilmente confirmado usando a notação convencional e a multiplicação.

Além de fazer uma divisão multiplicando sucessivamente por $\bar{2}, \bar{4}, \bar{8}, \dots$, os egípcios também usavam a sequência $\bar{3}, \bar{3}, \bar{6}, \dots$, quando isso era mais conveniente. Neste caso, é de referir que eles primeiro multiplicavam por dois terços, e depois por um terço.

Exemplo 2: Calcula $20 \div 24$ (calcula com 24 até obteres 20).

$$\begin{array}{r}
 1 \qquad 24 \\
 \bar{3} \qquad 16 / \\
 \bar{3} \qquad 8 \\
 \hline
 \bar{6} \qquad 4 / \\
 \hline
 20
 \end{array}$$

Logo, $20 \div 24 = \bar{3} + \bar{6} \left(= \frac{2}{3} + \frac{1}{6} \right)$.

Nos exemplos anteriores, as divisões puderam ser feitas com uma das duas séries

$$\bar{2}, \bar{4}, \bar{8}, \bar{16}, \dots, \quad \text{ou} \quad \bar{3}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{12}, \dots$$

Contudo, nem todas as divisões podem ser feitas usando apenas metades e terços. Por essa razão, outros métodos eram, por vezes, usados.

Exemplo 3: Calcula $11 \div 15$.

$$\begin{array}{r}
 1 \qquad 15 \\
 \bar{3} \qquad 10 / \\
 \hline
 \bar{15} \qquad 1 / \\
 \hline
 11
 \end{array}$$

²² A numeração dos problemas do papiro de Rhind, aqui utilizada, é a que aparece em (Chace, 1979).

logo, $11 \div 15 = \overline{3} + \overline{15}$.

Depois da segunda linha esperávamos

$$\begin{array}{r} \overline{3} \qquad 5 \\ \overline{6} \qquad 2 \overline{2} / \\ \text{etc.} \end{array}$$

Contudo, encontrámos,

$$\overline{15} \qquad 1,$$

o que se justifica pelo facto de precisarmos apenas de 1 que é a décima quinta parte de 15.

Exemplo 4: Calcula $9 \div 24$.

$$\begin{array}{r} 1 \qquad 24 \\ \overline{3} \qquad 16 \\ \overline{3} \qquad 8 / \\ \overline{24} \qquad 1 / \end{array}$$

Logo, $9 \div 24 = \overline{3} + \overline{24}$.

Dos métodos de multiplicação e divisão descritos anteriormente, parece que a aritmética egípcia era essencialmente aditiva. Ou seja, a principal operação aritmética era a adição. A subtracção era reduzida à adição. A multiplicação era feita através da duplicação e da adição. Para dividir, os egípcios dividiam por dois ou duplicavam, e depois adicionavam.

Tabela de $2 \div n$

Quem pensa que já viu tudo sobre a divisão dos egípcios está enganado. Os egípcios sabiam fazer divisões onde tanto o divisor como o dividendo eram números fraccionários. Para as fazer mais rapidamente, eles construíram tabelas. No **papiro de Rhind** encontramos uma tabela para a escrita de fracções do tipo $2 \div n$ como uma soma de fracções unitárias (ver tabela 8). O numerador é sempre 2 e os denominadores são os números ímpares de 3 a 101. Não há denominadores pares, pela óbvia razão de que se m é par, $\frac{2}{m} = \frac{2}{2n} = \frac{1}{n}$, com n inteiro, e $\frac{1}{n}$ já é uma fracção unitária.

$2 \div 3 = \overline{2} + \overline{6}$	$2 \div 53 = \overline{30} + \overline{318} + \overline{795}$
$2 \div 5 = \overline{3} + \overline{15}$	$2 \div 55 = \overline{30} + \overline{330}$
$2 \div 7 = \overline{4} + \overline{28}$	$2 \div 57 = \overline{38} + \overline{114}$
$2 \div 9 = \overline{6} + \overline{18}$	$2 \div 59 = \overline{36} + \overline{236} + \overline{531}$
$2 \div 11 = \overline{6} + \overline{66}$	$2 \div 61 = \overline{40} + \overline{244} + \overline{488} + \overline{610}$
$2 \div 13 = \overline{8} + \overline{52} + \overline{104}$	$2 \div 63 = \overline{42} + \overline{126}$
$2 \div 15 = \overline{10} + \overline{30}$	$2 \div 65 = \overline{39} + \overline{195}$
$2 \div 17 = \overline{12} + \overline{51} + \overline{68}$	$2 \div 67 = \overline{40} + \overline{335} + \overline{536}$
$2 \div 19 = \overline{12} + \overline{76} + \overline{114}$	$2 \div 69 = \overline{46} + \overline{138}$
$2 \div 21 = \overline{14} + \overline{42}$	$2 \div 71 = \overline{40} + \overline{568} + \overline{710}$
$2 \div 23 = \overline{12} + \overline{276}$	$2 \div 73 = \overline{60} + \overline{219} + \overline{292} + \overline{365}$
$2 \div 25 = \overline{15} + \overline{75}$	$2 \div 75 = \overline{50} + \overline{150}$
$2 \div 27 = \overline{18} + \overline{54}$	$2 \div 77 = \overline{44} + \overline{308}$
$2 \div 29 = \overline{24} + \overline{58} + \overline{174} + \overline{232}$	$2 \div 79 = \overline{60} + \overline{237} + \overline{316} + \overline{790}$
$2 \div 31 = \overline{20} + \overline{124} + \overline{155}$	$2 \div 81 = \overline{54} + \overline{162}$
$2 \div 33 = \overline{22} + \overline{66}$	$2 \div 83 = \overline{60} + \overline{332} + \overline{415} + \overline{498}$
$2 \div 35 = \overline{30} + \overline{42}$	$2 \div 85 = \overline{51} + \overline{255}$
$2 \div 37 = \overline{24} + \overline{111} + \overline{296}$	$2 \div 87 = \overline{58} + \overline{174}$
$2 \div 39 = \overline{26} + \overline{78}$	$2 \div 89 = \overline{60} + \overline{356} + \overline{534} + \overline{890}$
$2 \div 41 = \overline{24} + \overline{246} + \overline{328}$	$2 \div 91 = \overline{70} + \overline{130}$
$2 \div 43 = \overline{42} + \overline{86} + \overline{129} + \overline{301}$	$2 \div 93 = \overline{62} + \overline{186}$
$2 \div 45 = \overline{30} + \overline{90}$	$2 \div 95 = \overline{60} + \overline{380} + \overline{570}$
$2 \div 47 = \overline{30} + \overline{141} + \overline{470}$	$2 \div 97 = \overline{56} + \overline{679} + \overline{776}$
$2 \div 49 = \overline{28} + \overline{196}$	$2 \div 99 = \overline{66} + \overline{198}$
$2 \div 51 = \overline{34} + \overline{102}$	$2 \div 101 = \overline{101} + \overline{202} + \overline{303} + \overline{606}$

Tabela 8 – Tabela de $2 \div n$

No papiro é explicado como algumas das representações são obtidas e os matemáticos têm procurado explicações para os casos em que o escriba não apresenta essa explanação. A representação mais simples seria $\overline{n} + \overline{n}$, mas ao escrever uma soma de fracções unitárias, os egípcios nunca repetiam uma fracção unitária, como já foi referido anteriormente.

Da análise da tabela, conclui-se que fracções do tipo $2/n$, cujo denominador é divisível por 3, seguem todas a regra geral

$$\frac{2}{3k} = \frac{1}{2k} + \frac{1}{6k}.$$

Um exemplo do uso desta regra é $\frac{2}{15}$ (o caso para $k = 5$), que é apresentado como

$$\frac{2}{15} = \frac{1}{10} + \frac{1}{30}.$$

Desde que apareceu a primeira tradução do papiro, os matemáticos têm tentado explicar qual teria sido o método utilizado pelos escribas para construir esta tabela. Por exemplo, uma das questões que se coloca é a razão do escriba ter escolhido, das muitas representações possíveis, a seguinte representação para $\frac{2}{19}$:

$$\frac{2}{19} = \frac{1}{12} + \frac{1}{76} + \frac{1}{114}$$

em vez de, por exemplo,

$$\frac{2}{19} = \frac{1}{12} + \frac{1}{57} + \frac{1}{228}$$

Nenhuma regra definitiva foi descoberta que permita obter todos os resultados da tabela.

A última entrada na tabela, que é $2 \div 101$, é apresentada como

$$\frac{2}{101} = \frac{1}{101} + \frac{1}{202} + \frac{1}{303} + \frac{1}{606}$$

Esta é a única representação possível de $\frac{2}{101}$ em não mais do que quatro fracções unitárias com todos os denominadores menores que 1000; e é um caso particular para a fórmula geral

$$\frac{2}{n} = \frac{1 + \bar{2} + \bar{3} + \bar{6}}{n} = \bar{n} + \overline{2n} + \overline{3n} + \overline{6n}.$$

Usando esta fórmula é possível construir uma nova tabela $2 \div n$ constituída apenas por expressões com quatro fracções:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} &= \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{18} \\ \frac{2}{5} &= \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{30} \\ \frac{2}{7} &= \frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{21} + \frac{1}{42} \\ \frac{2}{9} &= \frac{1}{9} + \frac{1}{18} + \frac{1}{27} + \frac{1}{54} \end{aligned}$$

Embora o escriba, presumivelmente, desconhecesse esta regra, jamais aceitaria estes valores para a tabela (excepto no último caso, $\frac{2}{101}$), porque havia muitas outras formas mais simples de representar em somas de fracções unitárias. Para as mentes modernas parece que o escriba seguiu certos princípios ao construir esta tabela. Note-se que:

1. Os denominadores pequenos eram preferidos, com nenhum superior a 1000.
2. Quanto menos frações unitárias, melhor; e nunca havia mais do que quatro.
3. Denominadores pares eram preferidos aos ímpares, principalmente para o primeiro termo.
4. Os menores denominadores apareciam primeiro, e não havia dois iguais.
5. Um primeiro denominador pequeno podia ser aumentado se o tamanho dos outros denominadores fosse, por isso, reduzido (por exemplo,

$$\frac{2}{31} = \frac{1}{20} + \frac{1}{124} + \frac{1}{155} \text{ era preferível a } \frac{2}{31} = \frac{1}{18} + \frac{1}{186} + \frac{1}{279}.$$

E, de facto, seguiu-os, pois segundo Robins e Shute (1998), no início da tabela há uma instrução para que a decomposição seja apresentada como soma de não mais de quatro frações, colocadas por ordem decrescente, sendo o denominador da menor inferior a 1000.

Também é de notar que, para cada caso, é dada uma única decomposição e não há erros no cálculo da tabela, o que talvez se justifique pelo hábito, quase sistemático, que os escribas tinham de verificar os cálculos.

Vejamos alguns exemplos que nos sugerem que a tabela $2 \div n$ era usada como uma ajuda de cálculo.

Exemplo 1: Multiplica $2 \frac{1}{4}$ por $1 \frac{2}{7}$.

$$\begin{array}{r} 1 \\ 2 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1 \frac{2}{7} \\ 3 \frac{4}{28} \end{array} / \text{ (aqui usamos o facto de que duplicando } 1 \frac{2}{7} \text{ dá } 3 + 2 \div 7, \text{ o que os matemáticos egípcios escreveriam como } 3 \frac{4}{28} \text{)}$$

$$\begin{array}{r} \frac{2}{4} \\ \frac{4}{4} \end{array} \quad \begin{array}{r} \frac{2}{4} \frac{4}{8} \frac{14}{28} \\ \frac{4}{8} \frac{8}{28} \end{array} /$$

$$2 \frac{1}{4} \quad 3 \frac{2}{8} \frac{8}{14} \text{ (os egípcios sabiam que } 2 \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{n} \text{)}$$

Exemplo 2: Divide $18 \frac{4}{28}$ por $1 \frac{7}{7}$.

$$\begin{array}{r} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \\ 16 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1 \frac{7}{7} \\ 2 \frac{4}{28} \\ 4 \frac{2}{14} \\ 9 \frac{7}{7} \\ 18 \frac{4}{28} \end{array} / \text{ (aqui usamos o facto de que } 2 \times \frac{7}{7} = 2 \div 7 \text{ e que a tabela indica que } 2 \div 7 = \frac{4}{28} \text{)}$$

$$\text{ (usando novamente a tabela).}$$

Logo, o quociente é 16.

Destes exemplos, apercebemo-nos de que a tabela $2 \div n$ era usada na duplicação de fracções, um processo necessário tanto na multiplicação como na divisão.

Vejam os um problema mais difícil:

Exemplo 3 (Problema 33 do papiro de Rhind): Para resolver este problema o escriba divide 37 por $1 \frac{2}{3} \frac{2}{7}$.

Usando as regras da divisão egípcia, os cálculos começam:

1	$1 \frac{2}{3} \frac{2}{7}$
2	$4 \frac{2}{3} \frac{4}{28}$
4	$8 \frac{2}{3} \frac{4}{14}$
8	$18 \frac{2}{3} \frac{4}{7}$
16	$36 \frac{2}{3} \frac{4}{28}$

Agora a soma $36 \frac{2}{3} \frac{4}{28}$ está perto de 37. Mas quanto é que falta? Ou como diriam os escribas, “o que falta para 1?” Em notação moderna, é necessário arranjar uma fracção x de modo que:

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{28} + x = 1;$$

ou, colocando o problema de outro modo, pretendemos encontrar um numerador y que satisfaça a equação

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{28} + \frac{y}{84} = 1,$$

onde o denominador 84 é simplesmente o *m.m.c.* (3,4,28). Multiplicando os dois membros da equação por 84 obtemos $56 + 21 + 3 + y = 84$, e portanto, $y = 4$. Por isso, o que falta adicionar a $\frac{2}{3} \frac{4}{28}$ para obter 1 é $\frac{4}{84}$, ou seja, $\frac{1}{21}$. O próximo passo consiste em determinar por quanto devemos multiplicar $1 \frac{2}{3} \frac{2}{7}$ para obter o pretendido $\frac{1}{21}$. Isto equivale a resolver a seguinte equação:

$$z(1 + \frac{2}{3} + \frac{2}{7}) = \frac{1}{21}.$$

Multiplicando por 42 obtemos $97z = 2$, ou seja, $z = \frac{2}{97}$, que segundo a tabela equivale a $\frac{56}{56} + \frac{679}{679} + \frac{776}{776}$. Portanto, o cálculo completo é o seguinte:

$$\begin{array}{r}
 1 \qquad 1 \overline{3} \overline{2} \overline{7} \\
 2 \qquad 4 \overline{3} \overline{4} \overline{28} \\
 4 \qquad 8 \overline{3} \overline{2} \overline{14} \\
 8 \qquad 18 \overline{3} \overline{7} \\
 16 \qquad 36 \overline{3} \overline{4} \overline{28} / \\
 \hline
 \overline{56} + \overline{679} + \overline{776} \qquad \overline{21} / \\
 16 + \overline{56} + \overline{679} + \overline{776} \qquad 37
 \end{array}$$

O resultado de dividir 37 por $1 \overline{3} \overline{2} \overline{7}$ é $16 + \overline{56} + \overline{679} + \overline{776}$.

Problemas de Complementação

O papiro de Rhind contém muitos problemas de complementação, como por exemplo, o problema 33 acima referido. Estes problemas começam com uma soma de fracções unitárias e procuram outras fracções unitárias para serem adicionadas, de modo a obter a unidade.

O **problema 22**, por exemplo, pede para completar $\frac{2}{3} + \frac{1}{30}$ até obter a soma 1. Em notação moderna, o escriba efectua os cálculos começando por seleccionar um número N e fracções unitárias $\frac{1}{n_1}, \dots, \frac{1}{n_k}$ de modo a satisfazer a equação

$$\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{30} + \frac{1}{n_1} + \dots + \frac{1}{n_k}\right)N = N.$$

Desta igualdade concluímos que a soma das fracções é igual a 1. Considerando $N = 30$ (é o valor mais conveniente, uma vez que é o *m.m.c.* dos denominadores), o escriba concluiu que

$$\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{30}\right)30 = 20 + 1 = 21,$$

que é 9 unidades inferior ao desejado 30. Mas

$$\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{10}\right)30 = 6 + 3 = 9.$$

Adicionando estas duas equações, obtemos

$$\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{30} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10}\right)30 = 30$$

e a complementação desejada é

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{30} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} = 1.$$

PROBLEMAS “ALGÉBRICOS”

A maioria das fontes da matemática antiga está relacionada com a solução de problemas, aos quais são aplicadas várias técnicas matemáticas. O estudo desses problemas conduz a vários métodos de resolver o que conhecemos hoje por equações lineares.

Não nos podemos esquecer que, antigamente, não era usado o simbolismo para as operações ou incógnitas que usamos actualmente, embora já houvesse algum simbolismo na Matemática egípcia. Gillings (1982) mostra que o papiro de Rhind contém os começos da utilização de símbolos. Os egípcios usaram a palavra *heap* (variavelmente transliterado como *aha* e *hau*) para a quantidade desconhecida, assim como *cosa* foi usada na Itália dos séculos XV- XVI. Alguns símbolos foram usados para a adição e para a subtracção: representavam a adição por um par de pés caminhando de um número para o outro, da direita para a esquerda (direcção normal da escrita egípcia). Representavam a subtracção por um par de pés a afastar-se do número, andando da esquerda para a direita (na direcção oposta à da escrita egípcia). Em (Chace, 1979, p. 99) estes símbolos estão representados no problema 29 do papiro de Rhind.

Apesar destes indícios de simbologia, os escribas resolviam os problemas usando apenas técnicas verbais.

Embora a maior parte da Matemática egípcia fosse aritmética, com uma origem prática para lidar com questões relacionadas com a força do pão e da cerveja, com misturas de alimentos para o gado e aves domésticas e com o armazenamento de grãos, além de ter aplicações às medições de figuras geométricas, podemos ver os precursores de muitos tópicos actualmente incluídos na álgebra do ensino básico e secundário. Isto é particularmente verdade para os *aha* problemas. *Aha* significa “*montão*” ou “*quantidade*”. De facto, muitos dos problemas presentes nos papiros egípcios, exigem nada mais do que uma simples equação linear e, geralmente, são resolvidos pelo método, mais tarde conhecido na Europa, como a *regra da falsa posição*.

O papiro de Rhind contém vários problemas deste tipo. Muitos são simples e directos, outros são bastante complicados. Vejamos um dos simples:

Exemplo 1 (Problema 34 do papiro de Rhind): “*A quantidade, a sua metade e a sua quarta parte adicionadas dão 10. Qual é a quantidade?*”

Traduzido na nossa notação, corresponde à equação

$$x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x = 10.$$

Neste caso, o escriba foi instruído para resolver esta equação como nós o faríamos: dividir 10 por $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$. Para o fazer, o escriba multiplicou $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ até obter 10, concluindo que a resposta é $5 + \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{14}$.

O problema 31 do papiro de Rhind é bastante mais difícil que o anterior:

Exemplo 2 (Problema 31 do papiro de Rhind): “A quantidade e a sua $\frac{2}{3}$, a sua $\frac{1}{2}$ e a sua $\frac{1}{7}$ adicionadas dão 33. Qual é a quantidade?”

Isto é o mesmo que pedir para encontrar x tal que $x + 2/3x + 1/2x + 1/7x = 33$. Conceptualmente, o problema não é difícil, mas, aritmeticamente, é desafiador. Os problemas 30 a 34 do papiro de Rhind (incluindo o problema 33, já analisado anteriormente) foram, provavelmente, colocados para demonstrar métodos de divisão pois o escriba resolveu-os através de uma divisão. Neste caso, o escriba resolveu o problema dividindo 33 por $1 + 2/3 + 1/2 + 1/7$.

A resposta dada pelo escriba é $x = 14 + \frac{1}{4} + \frac{1}{56} + \frac{1}{97} + \frac{1}{194} + \frac{1}{388} + \frac{1}{679} + \frac{1}{776}$ (ou, em notação moderna, $14 \frac{28}{97}$) e está correcta. Sugere-se aos corajosos a resolução deste problema usando o método egípcio; brevemente se aperceberão do árduo trabalho desenvolvido pelos egípcios!

É de realçar que, tanto este problema como o problema 33 (entre muitos outros), são apresentados numa forma puramente abstracta, sem nenhuma referência a quantidades reais tais como áreas ou pães. De facto, seria difícil encontrar um problema da vida real relacionado com este problema. O escriba está apenas a mostrar que a sua técnica funciona para qualquer divisão, não interessa a dificuldade.

O problema 35, por outro lado, tem uma orientação prática, pois pede para encontrar o tamanho de uma pá que precisa de deitar $3 \frac{1}{3}$ vezes para encher uma medida de 1 *héqat*²³.

Exemplo 3 (Problema 35 do papiro de Rhind): “Fui três vezes à medida de *héqat*, a minha $1/3$ foi-me adicionada, [e regressei], enchendo a medida de *héqat*. O que é, o que diz isto?”

O escriba resolve a equação, que seria escrita, actualmente, como $3 \frac{1}{3}x = 1$, dividindo 1 por $3 \frac{1}{3}$. Ele escreve a solução $\frac{1}{5} \frac{1}{10}$ e faz a verificação.

Muitas vezes, contudo, os problemas no papiro de Rhind são resolvidos por um método bastante diferente. Vejamos um exemplo em que isso acontece:

Exemplo 4 (Problema 26 do papiro de Rhind): “A quantidade e a sua quarta parte adicionadas dão 15. Qual é a quantidade?”

²³ 1 *héqat* \approx 4,8 litros

Em vez de dividir 15 por $1\frac{1}{4}$, o escriba faz o seguinte: ele assume que a quantidade é 4. (Porquê 4? Porque é fácil calcular a quarta parte de 4.) Se considerarmos 4 e adicionarmos a sua quarta parte, obtemos $4 + 1 = 5$. Então, queremos 15, mas temos apenas 5; precisamos multiplicar o que temos (ou seja, 5) por 3 para obtermos o que queremos (ou seja, 15). Então, também multiplicamos por 3 a nossa suposição. A nossa suposição era 4, portanto a resposta é $3 \times 4 = 12$.

Este método é conhecido pelo **método da falsa posição**: supomos uma resposta que esperamos que seja realmente a resposta correcta, mas que torne os cálculos fáceis. Depois, usamos os resultados incorrectos dessa suposição para encontrar o número pelo qual devemos multiplicar a nossa suposição de modo a obter a resposta correcta.

Esta regra era usada para resolver equações lineares. A incógnita x era chamada de “*aha*”. Nesta regra assumimos um valor falso para “*aha*”, depois o resultado é comparado com o resultado que se procura e, usando proporções, chega-se à resposta correcta.

Os símbolos tornam isto mais fácil de compreender. A equação que queremos resolver é do tipo $Ax = B$. Se multiplicarmos x por um factor, obtemos kx , e vemos que

$$A(kx) = k(Ax) = kB.$$

O papiro de Rhind tem muitos problemas semelhantes, todos resolvidos usando o método da falsa posição, nomeadamente, os problemas 24 a 29, 35 a 38, 40 e 76. O procedimento passo-a-passo que o escriba seguiu pode ser considerado como um algoritmo para resolver equações lineares deste tipo. Embora não haja discussão de como o algoritmo foi descoberto ou porque funciona, é evidente que os escribas egípcios compreendiam a ideia base duma relação linear entre duas quantidades – que uma multiplicação da primeira quantidade implicava a mesma multiplicação da segunda quantidade.

De facto, todas as fontes egípcias revelam um sentido das relações proporcionais altamente desenvolvido, pois o raciocínio proporcional foi amplamente utilizado para resolver problemas usando o método da falsa posição.

Noutros papiros egípcios também são resolvidos problemas que podem ser traduzidos por equações lineares e, analogamente ao que acontece no papiro de Rhind, também são utilizados os dois métodos já referidos: a divisão e o método da falsa posição.

Por exemplo, para resolver o problema 19 do papiro de Moscovo é usada a técnica da divisão:

Exemplo 5 (Problema 19 do papiro de Moscovo): “*Método de calcular uma pilha. $1 + \frac{1}{2}$ vezes junto com 4, deu 10. Qual é esta pilha?*”

Em notação moderna, a equação é, simplesmente, $1\frac{1}{2}x + 4 = 10$. O escriba procede do mesmo modo que fazemos hoje em dia: primeiro subtrai 4 de 10 e obtém 6, depois multiplica 6 por $\frac{2}{3}$ (o inverso de $1\frac{1}{2}$) para obter 4 como a solução.

No fragmento LV, 3 do papiro de Kahun, encontra-se a resolução da equação $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x = 5$. O problema que originou esta equação é o seguinte:

Exemplo 6 (Problema do papiro de Kahun): “Metade e um quarto são retirados e ficam 5. Que número diz isto?”

A equação que traduz este problema é $x - \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x\right) = 5$.

A resolução apresentada no papiro é: “O que fica depois de $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$ ser retirado de 1? Resultado $\frac{1}{4}$. O que fica é $\frac{1}{4}$ se o número fosse 1. Então o que fica é $4 \times \frac{1}{4} = 1$, se o número fosse $4 \times 1 = 4$. E o que fica é $5 \times 1 = 5$, se o número fosse $5 \times 4 = 20$. Por isso, o número que diz isto é 20.”

Desde a antiguidade, o método da falsa posição foi utilizado para resolver problemas traduzidos por equações lineares, incluindo alguns bastante complicados. Estes variam desde problemas práticos a problemas mais lúdicos, com um sabor recreativo.

Os egípcios anteciparam, pelo menos de um modo elementar, um método favorito da Idade Média. Desde que os árabes o aprenderam, este tornou-se uma proeminente característica dos textos matemáticos Europeus desde o *Liber Abaci* (1202), de Fibonacci, às aritméticas do séc. XVI. É de assinalar que também aparece nas aritméticas (Práticas) portuguesas do séc. XVI.

O método da falsa posição manteve-se em uso quase até ao século XX, tendo sido ensinado aos alunos americanos até aos últimos anos do século XIX. Provavelmente, nenhum destes alunos soube que os egípcios tinham usado o mesmo método, muitos séculos antes.

Mas os egípcios não resolviam apenas equações lineares, pois no papiro de Berlim aparece, pela primeira vez, uma equação do 2º grau, resolvida pelo método da falsa posição.

Exemplo 7 (Problema do papiro de Berlim): “É-te dito ... a área de um quadrado de 100 [cúbitos quadrados] é igual à de dois quadrados mais pequenos. O lado de um dos quadrados é $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ o lado o outro. Diz-me quais são os lados dos dois quadrados desconhecidos.”

A resolução apresentada pelo escriba é a seguinte: “Toma sempre o quadrado de lado 1. Então, o lado do outro é $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$. Multiplica-os por $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$. Dá $\frac{1}{2} + \frac{1}{16}$, área do

quadrado pequeno. Depois, juntos, estes quadrados têm uma área de $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16}$. Tira a raiz quadrada de $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16}$. Que é $1 + \frac{1}{4}$. Tira a raiz quadrada de 100 cúbitos. Que é 10. Divide estes 10 por $1 + \frac{1}{4}$. Dá 8, o lado de um quadrado. Calcula $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ de 8. Dá 6, o lado do outro quadrado.”

Na nossa notação, este problema poderia traduzir-se pelo seguinte sistema, em que x e y representam as medidas dos quadrados mais pequenos:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ x = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)y \end{cases}$$

Supondo que $y = 1$ e $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$, então

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)^2 + 1 = 1 \bar{2} \bar{16}.$$

Ora, como $x^2 + y^2$ deve ser 100, e não $1 \bar{2} \bar{16}$. Então, representando por k a razão entre o valor correcto dos lados e o valor assumido, ter-se-ia:

$$x = k \times 1 \text{ e } y = k \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right).$$

Donde:

$$x^2 + y^2 = k^2 + k^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)^2 = k^2 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16}\right)$$

$k^2 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16}\right)$ deve ser igual a 100, o que implica que

$$k \sqrt{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16}} = 10 \text{ ou } k \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = 10.$$

Daqui constatamos que o valor de k é o quociente de 10 por $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)$, que é 8, e que coincide com o valor do lado do quadrado menor. A determinação do lado do outro quadrado é imediata.

Este problema exemplifica a resolução de uma equação do 2º grau pelo método da falsa posição que, muitos séculos depois, também foi utilizado por Diofanto de Alexandria (c. 250 d. C.).

Note-se que os lados dos quadrados menores são 8 e 6 cúbitos. Uma vez que o lado do quadrado grande é 10 cúbitos, os valores dos lados correspondem a um múltiplo do terno pitagórico (3, 4, 5). A solução para um problema semelhante, do mesmo papiro, conduz a dois quadrados de lados 12 e 16 cúbitos. A soma das áreas é igual ao quadrado de lado 20 cúbitos, que corresponde, novamente, a um múltiplo do terno pitagórico (3, 4, 5).

No papiro do Cairo aparece um problema que está relacionado com as medidas de panos de velas de navios e que também envolve uma equação do 2º grau.

Exemplo 8 (Problema 7 do papiro do Cairo): “*Se te é dito: Faz uma vela de pano para o barco, e se te é dito: Dá 1000 cúbitos de pano para uma vela [quadrada], a altura da vela estando [na razão] de 1 para 1 ½ da largura, eis como debes fazer.*”

PROGRESSÕES ARITMÉTICAS E GEOMÉTRICAS

Segundo Lumpkin (1997), Griffith refere que o papiro de Kahun “foi maravilhosamente escrito em colunas e ainda contém a frase mais tentadora, multiplica por 1/2 até o infinito...” (p. 11), o que faz lembrar o famoso paradoxo de Zenão. Infelizmente, o papiro está danificado e não sabemos o que o matemático egípcio encontrou ao deixar que n aumentasse indefinidamente na sequência $\left(\frac{1}{2}\right)^n$. Sabemos que a sequência 1/2, 1/4, 1/8, 1/16... 1/64 foi de grande interesse para os egípcios que usaram essas frações, conhecidas como “olho de Horus”, para medir o grão. O método egípcio da multiplicação deu aos escribas uma poderosa ferramenta para o cálculo e revela alguns dos seus *insights* sobre temas como as progressões.

Lumpkin (1997) refere ainda que, depois de Curtis (1978, p. 896) ter estudado o método egípcio, concluiu que “os antigos egípcios foram mestres em progressões geométricas e construíram todo o seu sistema das operações aritméticas básicas em torno delas” (p. 12).

A facilidade dos egípcios com as progressões aritméticas é ilustrada na resolução do seguinte problema:

Exemplo 1 (Problema 64 do papiro de Rhind): “*Se te digo, divide 10 héqat de cevada por 10 homens, de tal maneira que a diferença entre cada homem e o seu vizinho seja, em héqats de cereal, 1/8, qual é a parte que cabe a cada homem?*”

É visível neste problema, assim como em problemas semelhantes ao longo do papiro, que as partes estão em progressão aritmética.

Ahmes soluciona o problema usando o equivalente à fórmula moderna para a soma de uma progressão aritmética. O método de Ahmes também tem o mérito de tornar a derivação desta fórmula mais intuitiva. Ele determina a distribuição média e, em seguida, adiciona-lhe o produto da diferença comum por metade do número de diferenças. Isto dá-lhe a última, ou a maior parte, e as outras partes são encontradas por subtração da diferença comum.

Concretamente, temos que a distribuição média é de 1 *héqat*. A maior parte pode ser encontrada adicionando $\frac{1}{8}$ à média da distribuição, metade do número de vezes das diferenças. Contudo, uma vez que há um número ímpar de diferenças (9), o escriba, em vez disso, adicionou metade da diferença comum $\left(\frac{1}{16}\right)$, num total de 9 vezes e obteve

$1\frac{9}{16}$, ou seja, $1\frac{1}{2}\frac{1}{16}$ como a maior divisão. Terminou o problema subtraindo $\frac{1}{8}$ a este valor, 9 vezes, para conseguir cada parte.

Na nossa notação, este problema também poderia ser traduzido pela seguinte equação:

$$x + x + \frac{1}{8} + x + \frac{2}{8} + x + \frac{3}{8} + x + \frac{4}{8} + x + \frac{5}{8} + x + \frac{6}{8} + x + \frac{7}{8} + x + \frac{8}{8} + x + \frac{9}{8} = 10$$

Resolvendo esta equação, obteríamos:

$$10x + \frac{45}{8} = 10 \Leftrightarrow x = 1 - \frac{45}{80} \Leftrightarrow x = 1 - \frac{9}{16}$$

Ora, x representa, nesta equação, a menor parte; se a menor parte corresponde a $1 - \frac{9}{16}$, a maior parte será $1 + \frac{9}{16}$ (pois é o que corresponde a $1 - \frac{9}{16} + 9 \times \frac{1}{8}$) e foi o valor encontrado pelo escriba.

Estes valores podem ser, facilmente, verificados usando a fórmula para o cálculo da soma de uma progressão aritmética:

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}.$$

Neste caso, temos:

$$S_n = \frac{10\left(1 - \frac{9}{16} + 1 + \frac{9}{16}\right)}{2} \Leftrightarrow S_n = 10$$

Em vez de termos resolvido a equação, poderíamos ter chegado ao valor $1 - \frac{9}{16}$ usando esta fórmula:

$$10 = \frac{10\left(x + x + \frac{9}{8}\right)}{2} \Leftrightarrow 20 = 20x + \frac{90}{8} \Leftrightarrow x = 1 - \frac{9}{16}$$

Os egípcios usavam o método da falsa posição para resolver outros problemas além dos típicos *aha* problemas. Embora estivessem familiarizados com as progressões aritméticas, o problema 40 do papiro de Rhind poderia ter sido resolvido usando a noção de progressão, mas não foi o procedimento utilizado pelo escriba:

Exemplo 2 (Problema 40 do papiro de Rhind): “Divide 100 pães por 5 homens de tal modo que as partes recebidas estejam em progressão aritmética e que $\frac{1}{7}$ da soma das três partes maiores seja igual à soma das duas partes menores. Qual é a diferença entre as partes?”

Este problema envolve a ideia de progressão aritmética e é semelhante a um tipo de problemas que apareceu séculos depois sobre sociedades ou heranças.

Comparemos uma resolução actual, usando a noção de progressão aritmética, com a resolução dada pelo escriba.

Na resolução actual, o 1º termo seria representado por x e a razão da progressão por r . Os termos, escritos por ordem crescente, seriam: $x + 4r$; $x + 3r$; $x + 2r$; $x + r$; x .

O problema é traduzido pelo seguinte sistema:

$$\begin{cases} \frac{1}{7}(x + 4r + x + 3r + x + 2r) = x + r + x \\ (x + 4r) + (x + 3r) + (x + 2r) + (x + r) + x = 100 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 11x = 2r \\ 5x + 10r = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1\frac{2}{3} \\ r = 9\frac{1}{6} \end{cases}$$

O escriba para resolver este problema usou, mais uma vez, o método da falsa posição, assumindo que o 1º termo da progressão é 1 e que a razão é $5\frac{1}{2}$.

No entanto, ao adicionar as partes assim calculadas, obtém-se 60, e não 100, como é o pretendido. Então, tantas vezes quanto 60 é multiplicado para dar 100, cada termo da progressão deve ser multiplicado pelo mesmo. O factor de correcção é $\frac{100}{60}$ ou $\frac{5}{3}$ e as partilhas desejadas são: $1\frac{2}{3}$, $10\frac{5}{6}$, 20 , $29\frac{1}{6}$ e $38\frac{1}{3}$.

Uma possível conjectura sobre o raciocínio do escriba é que, como $100 = 60 + 40$, ou seja, $100 = 60 + \frac{2}{3} \times 60 = \left(1 + \frac{2}{3}\right) 60$, o escriba deve ter-se apercebido que para obter as partilhas correctas as deveria multiplicar por $\left(1 + \frac{2}{3}\right)$, e é exactamente o que ele faz.

Note-se que assumir que o 1º termo da progressão é 1 parece natural; mas a suposição de que a razão é $5\frac{1}{2}$ já parece mais enigmática. Será o valor $5\frac{1}{2}$ apenas uma escolha de sorte? O tradutor do papiro de Rhind, Arnold Chace, acha que não. Ele sugere um método que Ahmes poderia ter usado para localizar esse valor. Chace acredita que os egípcios experimentaram com várias diferenças comuns, começando com 1, 2 e assim por diante. Para o primeiro termo, era geralmente usado e assumido o valor 1. Vejamos as seguintes progressões:

Progressão	Soma dos dois menores – $\frac{1}{7}$ (soma dos três maiores)	Resultado
1, 2, 3, 4, 5, ...	$3 - 1\frac{5}{7}$	$1\frac{2}{7}$
1, 3, 5, 7, 9, ...	$4 - 3$	1
1, 4, 7, 10, 13, ...	$5 - 4\frac{2}{7}$	$\frac{5}{7}$

De cada vez que a razão aumenta 1 unidade, há uma diminuição de $\frac{2}{7}$ na diferença entre a soma dos dois termos menores e $\frac{1}{7}$ da soma dos três maiores. Quanto deve ser aumentada a razão para que as duas somas sejam iguais? Divida $1\frac{2}{7}$ por $\frac{2}{7}$ para obter $4\frac{1}{2}$. Adicione $4\frac{1}{2}$ a 1 para obter a razão da progressão $5\frac{1}{2}$.

(Chace, 1979, p. 12)

O problema 79 é extremamente conciso e contém um curioso conjunto de dados, que parece indicar uma familiaridade com a soma de uma progressão geométrica. Consta apenas de duas colunas, como se apresenta na tabela 9:

Exemplo 3 (Problema 79 do papiro de Rhind):

Coluna 1		Coluna 2	
1	2801	Casas	7
2	5602	Gatos	49
4	11204	Ratos	343
Total	19607	Espigas de trigo	2401
		Medidas de cereal	16807
		Total	19607

Tabela 9 – Problema 79 do papiro de Rhind

No original, na linha referente ao trigo há um erro, pois aparece o número 2301 e não 2401; pensa-se que isso se deve a um erro do escriba Ahmes quando copiou o papiro.

Na coluna 2, temos o somatório de $7, 7^2, 7^3, 7^4$ e 7^5 , ou seja, é o somatório dos termos de uma progressão geométrica de razão 7.

Na coluna 1, a soma da mesma série é dada como 7×2801 , com a multiplicação efectuada pelo método habitual de duplicação. Mas de onde vem o 2801? Que propriedade supõe esta multiplicação?

Somando sucessivamente os termos da progressão tem-se:

$$S_1 = 7$$

$$S_2 = 7 + 7 \times 7 = 7 \times (1 + 7) = 56 = 7 \times (1 + S_1)$$

$$S_3 = 7 \times (1 + 7 + 7 \times 7) = 7 \times (1 + 56) = 399 = 7 \times (1 + S_2)$$

Analogamente se obtém:

$$S_4 = 7 \times (1 + 399) = 2800 = 7 \times (1 + S_3)$$

$$S_5 = 7 \times (1 + 2800) = 7 \times (1 + S_4) = 7 \times 2801 = 19607$$

Ora, esta multiplicação de 2801 por 7 é o que o escriba faz na coluna 1, o que parece indicar que conhecia a propriedade geral das progressões geométricas, em que o 1º termo é igual à razão e que podemos traduzir por

$$S_{n+1} = r \times (1 + S_n), \forall n \in \mathbb{IN}$$

A aplicação desta propriedade seria assim uma espécie de verificação dos cálculos efectuados na coluna 2.

No entanto, não há qualquer evidência concreta de que os egípcios tivessem conhecimento desta fórmula. Uma interpretação mais plausível do que se pretendia é algo do tipo: “Em cada uma de sete casas há sete gatos. Cada gato mata sete ratos. Cada rato teria comido sete espigas de trigo; e cada espiga de trigo podia render sete medidas de cereal, se tivesse sido semeada. Quanto grão foi, assim, salvo?” Ou podemos colocar a questão doutro modo, “Casas, gatos, ratos, espigas de trigo e medidas de cereal, quantos deles havia ao todo?” (Burton, 2006, p. 50)

GEOMETRIA

A geometria egípcia pode ser descrita muito rapidamente. O que tem sido encontrado nos manuscritos egípcios consiste num conjunto de problemas onde é determinada a inclinação entre uma recta e um plano, ou são calculadas áreas e volumes de figuras e sólidos.

Vinte e seis dos 112 problemas dos papiros de Moscovo e de Rhind são geométricos. A maioria destes problemas teve origem na procura de fórmulas necessárias para o cálculo de áreas de terras e volumes de celeiros. A solução destes problemas procedia de acordo com instruções aritméticas definidas, algumas das quais estão correctas e outras não. Os egípcios sabiam que o volume de um cilindro é o produto da área da base pelo comprimento da altura e também sabiam que a área de qualquer triângulo é dada pelo produto de metade da base pela altura.

Não há registo de teoremas ou de provas; a principal preocupação dos egípcios parecia ser a obtenção de um resultado útil. Algumas das suas fórmulas estavam apenas aproximadamente correctas, mas deram resultados aceitáveis para as necessidades práticas do dia-a-dia.

Na grande dedicatória inscrita, de cerca de 100 a. C., no Templo de Horus, em Edfu, há referência a numerosos terrenos quadriláteros que foram oferecidos ao templo. Para cada um deles, as áreas eram obtidas através do produto das médias de dois pares de lados opostos, ou seja, usando a fórmula

$$A = \frac{1}{4}(a + c)(b + d),$$

onde a, b, c e d são os comprimentos de lados consecutivos. A fórmula está, obviamente, incorrecta. Isto dá uma resposta relativamente precisa quando o terreno é aproximadamente rectangular. O que é interessante é que a mesma fórmula incorrecta para a área de um quadrilátero já tinha aparecido muitos anos antes na Antiga Babilónia.

Os problemas geométricos do papiro de Rhind são os problemas numerados de 41 a 60, e estão relacionados com as quantidades de grão armazenadas em celeiros de forma rectangular ou cilíndrica. Talvez a melhor “descoberta” dos egípcios na geometria bidimensional foi o seu método para encontrar a área de um círculo, que aparece no Problema 50 do papiro de Rhind. Relativamente à geometria tridimensional, a sua melhor proeza foi, sem dúvida, o cálculo do volume de uma pirâmide truncada, como já foi referido.

Exemplo 1 (Problema 50 do papiro de Rhind): “Um campo circular tem 9 *khet*²⁴ de diâmetro. Qual é a sua área?”

Resolução:

“Tira 1/9 do diâmetro do seu diâmetro, isto é 1 *khet*. O resto é 8 *khet*. Multiplica 8 por 8; o que faz 64. Por isso, contém 64 *setat*²⁵ de terra.”

Ao analisarmos esta resolução concluímos que este método refere-se ao uso da fórmula $A = \left(d - \frac{1}{9}d\right)^2$, com $d = 9$. A derivação desta fórmula pode ser imaginada como se segue (ver figura 32).

²⁴ 1 *khet* = 100 côvados (cúbitos)

1 côvado \approx 52,5 cm

²⁵ 1 *setat* = 1 *khet*²

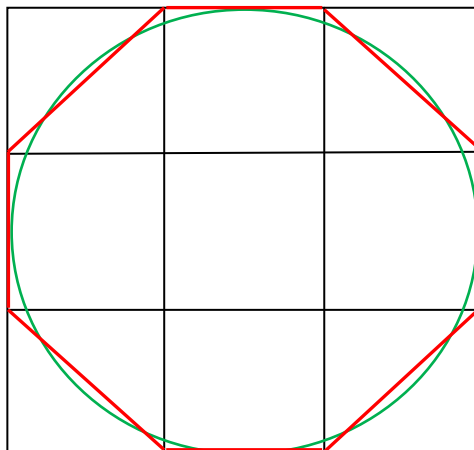


Fig. 32 – Ilustração do problema 50 do papiro de Rhind

Suponhamos que o lado do quadrado é d . Então a sua área é d^2 . O quadrado pode ser dividido em nove quadrados menores, como mostra a figura 32. A área de cada um desses quadrados é $\frac{1}{9}d^2$. A área do círculo é igual a, aproximadamente, sete quadrados, ou seja, $7 \cdot \frac{1}{9}d^2$, que é equivalente a $\frac{63}{81}d^2$. Se considerarmos $\frac{64}{81}d^2$ em vez de $\frac{63}{81}d^2$, não nos desviamos muito do resultado, e $\frac{64}{81}d^2$ tem a vantagem de ser um quadrado perfeito, $\left(\frac{8}{9}d\right)^2$. Isto pode ser escrito como $\left(d - \frac{1}{9}d\right)^2$, o resultado pretendido.

A fórmula que utilizamos para calcular a área do círculo é πr^2 , onde r é o raio. Como $r = \frac{1}{2}d$, temos que a área do círculo é igual a

$$\pi \left(\frac{1}{2}d\right)^2 = \frac{1}{4}\pi d^2$$

Considerando $\frac{1}{4}\pi d^2 = \frac{64}{81}d^2$ temos que $\frac{1}{4}\pi = \frac{64}{81}$. Daí, o algoritmo egípcio é equivalente, para a aproximação $\pi = \frac{256}{81} = 3.1605 \dots$, que não é um mau valor uma vez que não está longe do valor que usamos actualmente, 3.14 Contudo, temos que ter em mente que o método egípcio não usava a ideia de uma constante como π .

O problema 52 do papiro de Rhind pede para calcular a área de um trapézio (descrito como um triângulo truncado):

Exemplo 2 (Problema 52 do papiro de Rhind): “Supõe que te é dito, qual é a área de um triângulo truncado de terra com 20 khet²⁶ de lado, 6 khet na base, e 4 khet na linha de corte?”

²⁶ 1 khet = 100 côvados (cúbitos)
1 côvado \approx 52,5 cm

A figura seguinte representa o quadrilátero em questão:

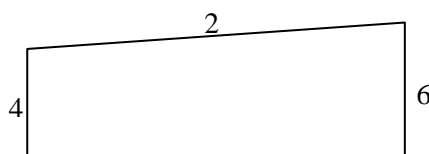


Fig. 33 – Ilustração do problema 52 do papiro de Rhind

O cálculo é determinado incorrectamente usando, implicitamente, a fórmula

$$A = \frac{1}{2}(b + b')h.$$

Será que o autor do papiro pensava que a área de um trapézio era metade da soma dos comprimentos dos lados paralelos a multiplicar pelo lado oblíquo, ou será que pretendia que o lado oblíquo fosse perpendicular aos lados paralelos? No último caso, ele estaria correcto.

Não obstante as magníficas pirâmides que os antigos egípcios nos legaram, não se encontra nos documentos de Matemática egípcia, qualquer determinação do volume de uma pirâmide. Apenas se encontra a determinação do volume de um tronco de pirâmide.

A existência, no papiro de Moscovo, de um exemplo numérico da fórmula correcta para calcular o volume de uma pirâmide truncada é notável. Nenhum outro exemplo, incontestavelmente genuíno, desta fórmula foi encontrado na antiga matemática oriental e várias conjecturas têm sido formuladas para explicar como poderia ter sido descoberta. E. T. Bell apropriadamente se refere a este antigo exemplo egípcio como a “maior pirâmide egípcia”. Há também quem lhe chame a *pérola* da geometria egípcia. É o problema 14 deste papiro e diz o seguinte:

Exemplo 3 (Problema 14 do papiro de Moscovo): “Método de calcular uma pirâmide truncada. Se te disserem uma pirâmide de 6 ellen²⁷ de altura, 4 ellen de base por 2 do cimo.”

Resolução:

Calcula o quadrado de 4; resultado 16.

Dobra o 4; resultado 8.

Calcula o quadrado de 2; resultado 4.

Adiciona juntamente 16 com 8 com 4.

Resultado 28.

Calcula 1/3 de 6; 2.

Multiplica por 28; resultado 56.

Olha! É isso, 56! Achaste-o correctamente.”

²⁷ 1 ellen = 1 côvado

A figura seguinte representa um tronco de pirâmide recta, de base quadrada, correspondente a este enunciado.

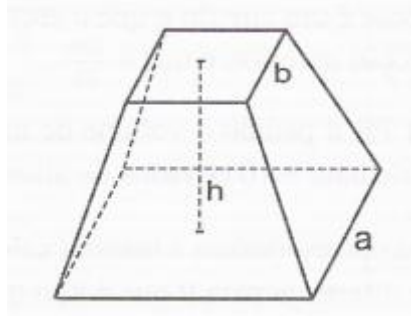
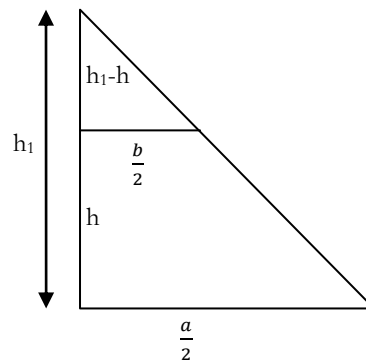


Fig. 34 – Pirâmide truncada

Usando a semelhança de triângulos podemos deduzir a fórmula que nos permite calcular o volume do tronco de uma pirâmide.

Consideremos o seguinte triângulo, que corresponde a um corte feito na pirâmide, onde h_1 corresponde à altura da pirâmide, h é a altura do tronco da pirâmide, a corresponde ao lado do quadrado da base e b corresponde ao lado do quadrado do topo da pirâmide truncada.



Temos a seguinte relação:

$$\frac{h_1-h}{\frac{b}{2}} = \frac{h_1}{\frac{a}{2}} \quad (1)$$

Supondo que V_1 corresponde ao volume da pirâmide e V_2 corresponde ao volume da pirâmide que foi retirada, temos:

$$V_1 = \frac{1}{3}a^2h_1 \quad \text{e} \quad V_2 = \frac{1}{3}b^2(h_1 - h).$$

O volume da pirâmide truncada será:

$$V = V_1 - V_2 = \frac{1}{3}a^2h_1 - \frac{1}{3}b^2(h_1 - h) \quad (2)$$

Resolvendo a expressão (1) em ordem a h_1 , obtemos:

$$h_1 = \frac{ah}{a-b}$$

Substituindo em (2), temos:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}a^2 \left(\frac{ah}{a-b} \right) - \frac{1}{3}b^2 \left(\frac{ah}{a-b} - h \right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow V &= \frac{1}{3} \left(\frac{a^3h}{a-b} - b^2 \left(\frac{ah - ah + bh}{a-b} \right) \right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow V &= \frac{1}{3} \left(\frac{a^3h}{a-b} - \frac{b^3h}{a-b} \right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow V &= \frac{1}{3}h \left(\frac{a^3 - b^3}{a-b} \right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow V &= \frac{1}{3}h \frac{(a-b)(a^2 + ab + b^2)}{a-b} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow V &= \frac{1}{3}h(a^2 + ab + b^2) \quad // \end{aligned}$$

Obtivemos, assim, a fórmula que nos permite calcular o volume de uma pirâmide truncada.

Ora, os cálculos efectuados pelo escriba correspondem, exactamente, à aplicação desta fórmula. Os historiadores questionam-se como terão os escribas egípcios chegado a este conhecimento.

Uma conjectura explicativa seria a de terem utilizado uma decomposição do tronco da pirâmide, feita por planos verticais, passando pelos lados do quadrado do topo. Mas, em cada canto, obteriam uma pirâmide quadrangular em que o lado da base é $\frac{a-b}{2}$. E a questão surge novamente: “Será que sabiam determinar correctamente o volume de uma pirâmide”? E como teriam lá chegado?

Para o volume de uma pirâmide, já a explicação seria mais fácil; talvez comparando o volume de uma pirâmide e o volume de um prisma com a mesma base e a mesma altura. Para tal, bastaria arranjar recipientes ocios, das respectivas formas, e comparar os seus conteúdos, com água ou areia, como fazemos, actualmente, para ensinar aos nossos alunos as fórmulas dos volumes.

A verdade é que, qualquer que tenha sido o caminho seguido para obter este resultado, ele está correcto.

Teorema de Pitágoras

Acredita-se que já era do conhecimento dos egípcios, de há mais de 1000 anos antes dos pitagóricos, que o uso dos comprimentos 3, 4 e 5, ou comprimentos que têm a razão 3, 4 e 5, formam triângulos rectângulos.

Os antigos egípcios usavam uma corda com treze nós, igualmente espaçados, para determinar um ângulo recto e, do mesmo modo, determinar a perpendicular a uma dada recta. A corda de treze nós ficava dividida em doze partes iguais, como podemos ver na figura 35. Um homem A segurava os dois nós extremos (o 1º e o 13º); um segundo homem, B, segurava o 4º nó; e um terceiro homem, C, segurava o 8º nó. Afastavam-se, então, de forma que a corda ficasse bem esticada. Quando isso acontecia, tinha-se formado um triângulo rectângulo e, conseqüentemente, também um ângulo recto.

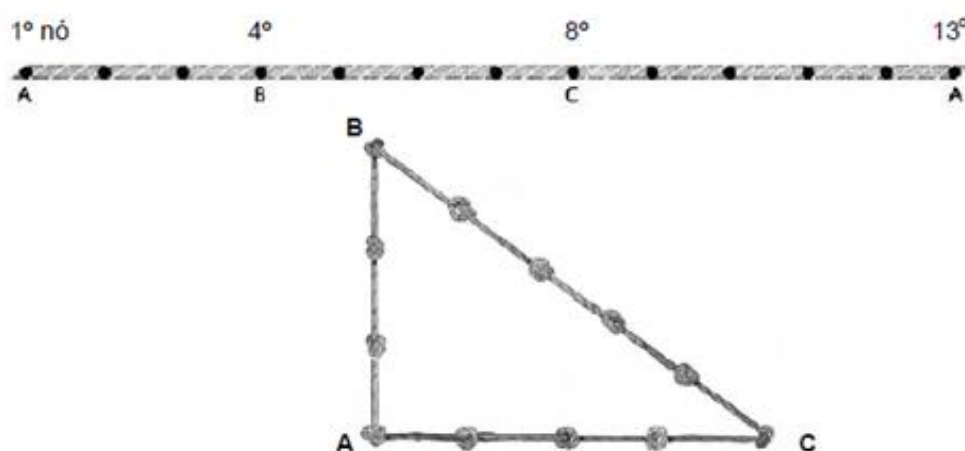


Fig. 35 – Modelo da corda de treze nós

Efectivamente, esta técnica permite construir um triângulo cujos lados medem 3, 4 e 5, referentes à unidade de comprimento definida por dois nós consecutivos.

Embora soubessem construir triângulos rectângulos, não se acredita que soubessem que a área do quadrado sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados sobre os catetos.

Estes conhecimentos permitiam resolver certo tipo de problemas práticos tais como o das marcações das propriedades do antigo Egipto que as cheias do Nilo modificavam e faziam desaparecer todos os anos.

No entanto, há quem defenda que “contradizendo histórias repetidas e aparentemente infundadas, nenhuma prova documental foi encontrada mostrando que os egípcios tinham conhecimento, ainda que de um caso particular, do Teorema de Pitágoras” (Eves, 1969, p. 40).

Mas os historiadores não são unânimes a este respeito e há opiniões que contrariam a opinião defendida por Eves.

Em (Lumpkin, 1997) podemos encontrar algumas dessas opiniões. Por exemplo, Robins e Shute (1985) após terem realizado um estudo intitulado “*Mathematical Bases of Ancient Egyptian Architecture and Graphic Art*”, referem que “é difícil fazer este

estudo e ainda manter a crença de que os egípcios não sabiam nada sobre o teorema do triângulo rectângulo, de que $c^2 = a^2 + b^2$ ” (p. 12).

Lumpkin acrescenta, ainda, a opinião defendida por (Heath, 1981, vol. 1): “Penso que o teorema do triângulo rectângulo é um melhor nome do que o Teorema de Pitágoras, porque nada no registo do seu tempo relaciona Pitágoras com o teorema” (p. 144-147). A autora salienta também a referência feita por Li e Du (1987): “Além disso, outras culturas - babilónica, chinesa e indiana, têm registos que remetem o seu uso do teorema para uma época anterior a Pitágoras” (p. 28-32).

Mas, não há certezas, tudo o que temos são opiniões e suposições e mantém-se a questão: “Será que os antigos egípcios sabiam o teorema do triângulo rectângulo?” Para responder a esta questão, Lumpkin remete para os dois problemas no papiro de Berlim, já mencionados anteriormente. Estes problemas pedem os comprimentos dos lados de dois quadrados, tal que a soma das áreas destes quadrados seja igual à área dada de um terceiro quadrado. É também dada a relação entre os lados dos dois quadrados pequenos. As soluções obtidas correspondem a quadrados de lados 6, 8, 10 cúbitos e 12, 16, 20 cúbitos que, em ambos os casos, são múltiplos do terno pitagórico (3, 4, 5). A menos que se acredite que o teorema do triângulo rectângulo saiu da cabeça de alguma múmia, podemos supor que a descoberta deste teorema foi precedida de experimentação geométrica. Estes problemas do papiro de Berlim sugerem este tipo de experimentação geométrica.

Além disso, ao avaliarmos a utilização da corda de treze nós, fica claro que os egípcios sabiam que um triângulo de lados 3, 4 e 5 possui um ângulo recto. No entanto, de acordo com Boyer (1996), acredita-se que a primeira demonstração geral desta relação foi dada por Pitágoras ou um dos seus discípulos, no século VI a.C.

ANEXO A.2 - MATEMÁTICA NA MESOPOTÂMIA

Na falta de papiros e com pouco acesso à pedra adequada para a escrita, os antigos babilônios valeram-se, principalmente, da argila como um meio de escrita. A inscrição era gravada em barro húmido, com estiletos em forma de cunha. Como a palavra latina para cunha é *cuneus*, o estilo de escrita resultante ficou conhecido como escrita cuneiforme. O barro era cozido ou seco ao sol, obtendo-se uma dureza que resultou num registo permanente.

Segundo Burton (2006), “estima-se que hoje existam pelo menos 400 000 placas de argila babilônicas, geralmente do tamanho de uma mão, dispersas pelos Museus de vários países. Destas, cerca de 400 placas ou fragmentos de placas foram identificadas como tendo conteúdo matemático” (p. 22).

A maior parte do que sabemos sobre a Matemática desenvolvida na Mesopotâmia é relativamente novo. Esta Matemática é geralmente chamada Matemática babilônica, mas deve ser esclarecido que a expressão Matemática babilônica é usada apenas por conveniência, e que outros povos além dos babilônios, como os Sumérios, Acádios, Caldeus, Assírios e outros povos antigos que habitavam a região da Mesopotâmia são subentendidos quando usamos esta expressão.

Devemos o nosso conhecimento da Matemática da Antiga Babilônia à interpretação e decifração de muitas dessas placas matemáticas por alguns estudiosos. O enigma das inscrições foi descodificado, em 1847, por Rawlinson, que aperfeiçoou uma chave anteriormente sugerida por Grotefend. No entanto, a maioria dos nossos conhecimentos sobre o conteúdo dessas placas matemáticas não é anterior a 1935 e é, em grande parte, devido às notáveis descobertas de Otto Neugebauer e F. Thureau-Dangin.

As placas com conteúdo matemático dizem respeito, principalmente, a três grandes períodos bastante separados no tempo. Para Neugebauer, esses períodos são:

- Período antigo (c. 1990-1600 a. C.), que costuma ser designado por Antiga Babilônia;
- Neo-assírio (c. 700 a. C.);
- Neo-babilônico e selêucida (c. 600 a. C. até à era cristã).

Hoyrup (2003) distingue-as em três grupos:

- Placas com tabelas: tabelas de recíprocos e de multiplicações e (quadrados, etc.); tabelas de conversões metrológicas e tabelas de constantes.
- Placas, pequenas, com trabalhos de Matemática, normalmente circulares ou quadradas.
- Placas com problemas matemáticos.

Por sua vez, Robson (2007) divide os problemas das placas, provenientes do 2.º milénio a.C., em três tipos, de acordo com os tópicos da Matemática envolvidos na sua resolução:

- 1. Geométricos:** problemas sobre forma, áreas de figuras planas, propriedades do triângulo rectângulo (teorema de Pitágoras) e volume de sólidos.
- 2. Álgebra geométrica:** Cerca de metade dos problemas contidos nas placas são puramente aritméticos (ou algébricos) e geométricos, e dizem respeito, normalmente a problemas sobre áreas ou volumes que envolvem a descoberta de incógnitas através de processos que envolvem “completar quadrados”; conduzindo, muitas vezes, à resolução do que actualmente consideramos equações do 1.º ou 2.º grau.
- 3. Problemas práticos:** Muitos destes problemas envolvem a utilização de constantes que aparecem nas tabelas de constantes e não são fornecidas nas próprias placas. Geralmente correspondem a trabalhos sobre construções; volumes de objectos cilíndricos; preços de bens e comércio; heranças e divisões de propriedades.

Muitas destas placas encontram-se, actualmente, em diversos museus de todo o mundo e a sua designação depende da colecção a que pertencem. Geralmente, estas placas são referenciadas por uma sigla, que indica o local onde estão arquivadas e o respectivo número nessas colecções. Por exemplo:

- BM 13901 – Museu Britânico (*British Museum*).
- VAT 8389 – Museu de Berlim.
- AO 8862 – Museu do Louvre.
- Str. 368 – Universidade de Estrasburgo.
- YBC 7289 – Colecção babilónica da Universidade de Yale, nos E.U.A (*Yale Babylonian Collection*).

Há algum tempo, foi revelado que as grandes colecções babilónicas nos Museus Britânico e do Louvre, nas Universidades da Pensilvânia, da Columbia e de Yale continham muitas placas cuneiformes invulgares que não estavam decifradas.

Os estudos exaustivos de Otto Neugebauer, concretizados na década de 1930, revelaram que se tratava de tabelas e textos matemáticos e, portanto, foi encontrada uma chave para a interpretação do seu conteúdo. Principalmente, por meio da decifração, tradução e interpretação deste estudioso, foi impulsionada uma visão inteiramente nova sobre o contributo dos babilónios para o desenvolvimento da matemática antiga.

Posteriormente, na década de 1980, outros historiadores se juntaram nesta tarefa, nomeadamente, Jens Hoyrup e Eleanor Robson. Além de possuírem formação matemática, estes historiadores conhecem as línguas antigas em que os textos estão escritos e, assim, procuram integrá-los no contexto cultural em que foram escritos.

Esses últimos estudos conduziram a uma reinterpretação dos conteúdos dos procedimentos utilizados na “álgebra” da Antiga Babilónia. Mais concretamente, foi

evidenciado que as operações envolvidas não podiam ser operações com números, mas operações concretas sobre figuras geométricas, ainda que de carácter intuitivo.

A chave para os avanços feitos pelos babilónios parece ter sido o seu sistema numérico notavelmente fácil. A escala de numeração babilónica não era decimal, mas sexagesimal (base 60). A notação sexagesimal permitiu que o cálculo com fracções fosse tão fácil como com números inteiros e levou a uma “álgebra” bastante desenvolvida. Isso era impossível para os egípcios, para quem as operações com fracções podiam envolver muitas fracções unitárias, tornando uma simples divisão num problema difícil.

Os babilónios foram os únicos a utilizar, ainda que parcialmente, um sistema de numeração posicional, antes dos gregos. A grande vantagem de um sistema de numeração posicional em relação a outros sistemas (como por exemplo, o dos egípcios) é que um conjunto limitado de símbolos é suficiente para expressar números, não importa quão grandes ou pequenos sejam.

As desvantagens da numeração egípcia são óbvias. Representar, mesmo números pequenos, pode exigir muitos símbolos (por exemplo, para representar 999, eram necessários 27 hieróglifos); e para cada nova potência de 10, um novo símbolo tinha de ser inventado.

SISTEMA DE NUMERAÇÃO POSICIONAL SEXAGESIMAL


Para perceber a aritmética babilónica, é necessário compreender o seu sistema de numeração.

Os babilónios usavam um sistema sexagesimal posicional incompleto. Um sistema sexagesimal completo necessitava de um símbolo para o zero e para outros 59 dígitos. Contudo, os babilónios não tinham um símbolo para o zero e os outros 59 dígitos eram escritos como combinações de dois símbolos diferentes:

$$\nabla = 1 \quad \text{e} \quad \triangleleft = 10.$$

Os babilónios usavam o princípio da adição na representação cuneiforme.

Note-se que, devido ao uso de uma notação sexagesimal, o símbolo que representava a unidade podia ser usado até nove vezes enquanto o símbolo que representava as dezenas podia ser usado, no máximo, cinco vezes.

É interessante notar que a escrita era, muitas vezes, simplificada usando um símbolo para a subtração. O símbolo que representava a subtração era .

Como exemplos de números escritos utilizando esses símbolos, temos:

$$25 = 2 \times 10 + 5 = \langle\langle \triangleright\triangleright\triangleright\triangleright$$

$$38 = 40 - 2 = \langle\langle\langle\langle \triangleright\triangleright$$

Este sistema de numeração é, no entanto, um misto em que, apesar de números superiores ou iguais a 60 serem escritos em conformidade com o princípio posicional, os números menores que 60 eram escritos por um sistema de agrupamento simples, de base 10. Como ilustração de um número superior a 60, escrito neste sistema de numeração, temos:





$$524\ 551 = 2 \times 60^3 + 25 \times 60^2 + 42 \times 60^1 + 31 = \triangleright\triangleright\langle\langle\langle\langle \triangleright\triangleright\triangleright\triangleright \langle\langle\langle\langle \triangleright\triangleright\triangleright\triangleright \langle\langle\langle\langle \triangleright$$

Este sistema de numeração posicional sofreu, até cerca de 300 a.C., a falta de um símbolo para o zero. A notação posicional babilônica prestou-se a interpretações dúbias pois, devido à falta do zero, não havia nenhuma maneira de distinguir entre os números $1 \times 60 + 24 = 84$ e $1 \times 60^2 + 0 \times 60 + 24 = 3624$, uma vez que cada um deles era representado, em escrita cuneiforme, por:




A ambiguidade resultante nas placas de argila existentes é, muitas vezes, resolvida apenas por um estudo cuidadoso do contexto.

Às vezes, um espaço era usado para indicar que um lugar sexagesimal estava em falta, mas essa regra não foi estritamente aplicada uma vez que poderia gerar confusão. Alguém, ao copiar uma placa, poderia não observar o espaço vazio e colocar os símbolos mais próximos, alterando, assim, o valor do número. (Apenas num sistema posicional a existência de um espaço vazio deve ser especificada e, por isso, os egípcios não tiveram este problema.)

A partir de 300 a.C. foi introduzido um outro símbolo,   ou  , que representava um espaço reservado dentro de um número, indicando, assim, um espaço vazio entre dois dígitos. Com isso, o número 84 era facilmente distinguido do 3624, sendo este último representado por



Outra ambiguidade do sistema sexagesimal posicional resulta da falta de uma vírgula sexagesimal e, portanto, da indicação do valor absoluto do número. Podemos

dizer que, para os babilónios, a vírgula sexagesimal tinha o carácter de uma vírgula flutuante. Assim, , podia representar 20 ou 20×60 ou $\frac{20}{60}$ ou $\frac{20}{60^2}$, etc.

Para colmatar esta lacuna, vamos usar uma convenção, introduzida por Neugebauer, que consiste em utilizar um ponto e vírgula para separar números inteiros de fracções, enquanto todos os outros lugares sexagesimais serão separados, entre si, por vírgulas. Com a presente convenção, 25,0,3; 30 e 25,0; 3,30 representarão, respectivamente,

$$25 \times 60^2 + 0 \times 60 + 3 + \frac{30}{60} = 90\,003\frac{1}{2}$$

e

$$25 \times 60 + 0 + \frac{3}{60} + \frac{30}{60^2} = 1\,500\frac{7}{120}.$$

Note-se que nem o ponto e vírgula, nem a vírgula, tinham qualquer equivalência nos textos cuneiformes originais.

Tendo em conta o exposto, podemos concluir que os babilónios da antiguidade nunca alcançaram um sistema posicional absoluto. A sua representação numérica expressava a ordem relativa dos dígitos, e apenas o contexto é que decidia a magnitude de um número escrito na forma sexagesimal; mas, devido à grandeza da base, era geralmente evidente o valor pretendido.

Segundo Burton (2006), o uso da notação sexagesimal babilónica foi confirmado por duas placas encontradas, em 1854, em Senkerah, pelo geólogo inglês W. K. Loftus. Estas placas, que datam provavelmente do período de Hammurabi (2000 a.C.), dão os quadrados de todos os números inteiros até 59 e os cubos dos números inteiros até 32.

Na placa dos quadrados lê-se, facilmente, até 7^2 ou 49. A seguir, onde esperávamos encontrar 64, o que aparece é 14; a única coisa que faz sentido é considerar que 1 vale 60. A seguir a 8^2 , o valor de 9^2 é representado por 121, implicando novamente que o dígito esquerdo deve representar 60. O mesmo esquema é seguido por toda a tabela até chegarmos à última entrada, que é 581; que só pode significar $581 = 58 \times 60 + 1 = 3481 = 59^2$.

A questão de como se originou o sistema sexagesimal foi levantada há muito e tem recebido diferentes respostas ao longo dos tempos.

Segundo Teão de Alexandria (séc. IV d. C.), 60 foi de entre todos os números o mais conveniente uma vez que é o menor número com mais divisores e, conseqüentemente, pode ser mais facilmente manipulado. O ponto de vista de Teão parecia estar relacionado com o facto de 60 ter um grande número de divisores próprios, nomeadamente, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20 e 30 e, assim, algumas fracções úteis poderiam ser representadas convenientemente; como é o caso de $1/2$, $1/3$ e $1/4$ que poderiam ser representadas do seguinte modo:

$$\frac{1}{2} = \frac{30}{60} = 0; 30;$$

$$\frac{1}{3} = \frac{20}{60} = 0; 20;$$

$$\frac{1}{4} = \frac{15}{60} = 0; 15$$

Uma outra teoria atribui uma origem “natural” para o sistema sexagesimal; de acordo com esta teoria os antigos babilónios tinham notado que o ano tinha 360 dias e, por isso, a base 360 teria sido escolhida, inicialmente, e depois reduzida para 60. No entanto, talvez a explicação mais satisfatória seja que a base 60 evoluiu da fusão entre dois povos dos quais um tinha adoptado o sistema decimal, enquanto o outro trouxera consigo um sistema de base 6, que oferecia a vantagem de ser divisível por 2 e por 3. (A origem do sistema decimal não é lógica, mas anatómica; os seres humanos tinham um ábaco natural - os seus dedos das mãos e dos pés.)

OPERAÇÕES NO SISTEMA SEXAGESIMAL

As operações neste sistema realizam-se de um modo completamente análogo às nossas e este sistema tem ainda uma grande vantagem sobre o nosso sistema decimal. Segundo Estrada (2000b, p. 72), essa vantagem consiste no seguinte:

Sabemos que $60 = 2^2 \times 3 \times 5$ e $10 = 2 \times 5$. O facto de $10 = 2 \times 5$ significa, como se sabe, que, na base 10, todas as fracções cujos denominadores sejam do tipo $2^\alpha \times 5^\beta$, com α e $\beta \in \mathbb{N}_0$, são redutíveis a fracções decimais e, portanto, representáveis por dízimas finitas. Consideremos os seguintes exemplos:

$$\frac{7}{2^2} = \frac{7 \times 5^2}{2^2 \times 5^2} = \frac{175}{100} = 1,75$$

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \times 2}{5 \times 2} = \frac{6}{10} = 0,6$$

$$\frac{11}{2 \times 5^2} = \frac{11 \times 2}{2^2 \times 5^2} = \frac{22}{100} = 0,22$$

Todas as outras fracções que não estejam nestas condições, correspondem a dízimas infinitas periódicas, como por exemplo: $\frac{1}{3} = 0, (3)$ ou $\frac{5}{6} = 0,8(3)$, etc.

Analogamente, como $60 = 2^2 \times 3 \times 5$, significa que, na base 60, todas as fracções cujos denominadores sejam do tipo $2^\alpha \times 3^\beta \times 5^\gamma$, com α, β e $\gamma \in \mathbb{N}_0$, são representáveis por expansões sexagesimais finitas.

Assim, as fracções $\frac{1}{3}$ e $\frac{5}{6}$ que, na base 10, são representáveis por dízimas infinitas periódicas, são representáveis por expansões sexagesimais finitas na base 60.

Para facilitar a multiplicação, muitas vezes era usada a fórmula

$$ab = \frac{(a + b)^2 - a^2 - b^2}{2}.$$

Mas, ainda melhor é a seguinte fórmula

$$ab = \frac{(a + b)^2 - (a - b)^2}{4},$$

que mostra que uma tabela de quadrados era tudo o que os escribas babilónicos necessitavam para multiplicar números. Depois de encontrarem, na tabela, a diferença dos dois quadrados, bastava calcularem um quarto dessa diferença.

A divisão é um processo mais difícil e os babilónios não tinham um algoritmo para a divisão, como os egípcios que utilizavam o método da duplicação. Em vez disso, baseavam o seu método no facto de que a dividido por b é o mesmo que a multiplicado pelo recíproco de b ; ou seja, $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$. Portanto, tudo o que era necessário para dividir era uma tabela de inversos. Assim, depois de terem encontrado, na tabela (ou por cálculo), o recíproco do divisor, precisavam apenas de multiplicá-lo pelo dividendo.

Os babilónios deram algumas aproximações interessantes para as raízes quadradas de números que não eram quadrados perfeitos, como $\frac{17}{12}$ para $\sqrt{2}$ e $\frac{17}{24}$ para $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Supõe-se que os babilónios poderão ter usado a seguinte fórmula de aproximação

$$\sqrt{a^2 + h} \approx a + \frac{h}{2a}.$$

Uma notável aproximação para $\sqrt{2}$ é dada na placa YBC 7289, de cerca de 1600 a. C., representada na seguinte figura:

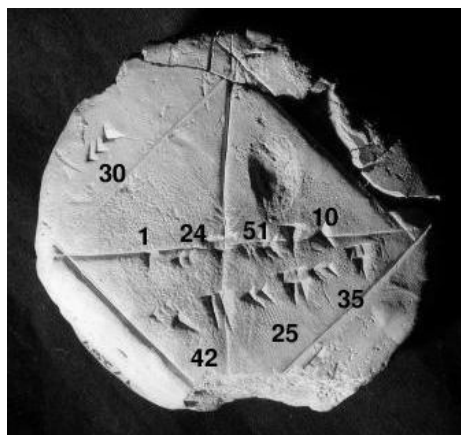


Fig. 36 – Placa YBC 7289

(Bill Casselman, <http://www.math.ubc.ca/~cass/Euclid/ybc/ybc.html>)

A figura seguinte esquematiza o quadrado representado nesta placa:

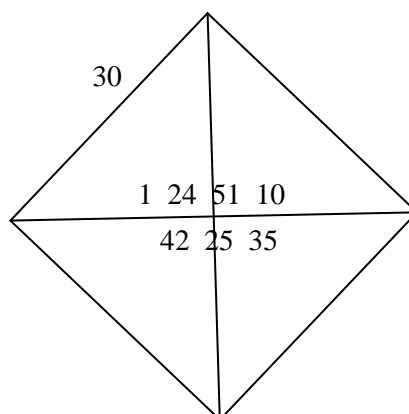


Fig. 37 – Quadrado representado na placa YBC 7289.

Tendo em conta que os números babilónicos são ambíguos, por não haver indicação sobre onde termina a parte inteira e começa a parte fraccionária, vamos supor que o primeiro número é 1; 24, 51, 10. Convertendo-o para o nosso sistema decimal, obtemos 1,414212963, considerando 9 casas decimais. Calculando $30 \times (1; 24, 51, 10)$, obtemos 42; 25,35, que corresponde ao segundo número.

Assim, o número 1; 24, 51, 10 seria um valor aproximado para $\sqrt{2}$ e 42; 25,35 corresponderia ao valor da diagonal do quadrado. Uma vez que $\sqrt{2} = 1,414213562$ (com 9 c. d.), o valor aqui obtido é uma admirável aproximação para $\sqrt{2}$.

Além disto, isto mostra uma boa compreensão do Teorema de Pitágoras, o que será analisado posteriormente.

Agora, coloca-se a questão de como os babilónios terão encontrado esta extraordinária aproximação para $\sqrt{2}$. Muitas são as conjecturas que têm surgido, sendo uma delas a proposta por Neugebauer e que a seguir é descrita.

Segundo Neugebauer, os babilónios começariam por obter valores aproximados de \sqrt{n} , por defeito e por excesso. Se o primeiro valor aproximado a_0 fosse um valor aproximado por excesso, teríamos $a_0 > \sqrt{n}$; um valor aproximado por defeito seria $b_0 = \frac{n}{a_0}$.

A partir destes dois primeiros valores seriam obtidos outros, utilizando o algoritmo:

$$a_k = \frac{a_{k-1} + b_{k-1}}{2} \quad \text{e} \quad b_k = \frac{n}{a_k}$$

onde, para cada iteração (a_k, b_k) , para todo $k = 1, 2, 3, \dots$, o valor de b_k representa uma maior aproximação de \sqrt{n} .

O erro da aproximação é dado por $E = |b_k^2 - n|$. Se o valor de E for menor do que a precisão ε pretendida, então o valor de b_k será o valor aproximado para a raiz quadrada. No caso de $\sqrt{2}$, o valor inicial de a_0 seria $\frac{3}{2}$.

Neugebauer afirma que a sua conjectura, embora impossível de confirmar, explica o resultado obtido, neste caso, para $\sqrt{2}$, e ainda o valor aproximado de $\sqrt{28,20}$ encontrado noutro texto.

É de referir ainda que existe um grande número de placas do terceiro século a.C. que fazem uso explícito das regras dos sinais na multiplicação.

RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES

Distintas das placas que continham tabelas são as placas que lidam com problemas algébricos e geométricos. Devido ao conteúdo dos textos destes dois tipos de placas, é comum categorizá-los em textos-tabelas e textos-problemas. Estes últimos geralmente apresentam uma sequência de problemas numéricos, intimamente relacionados, juntamente com os cálculos pertinentes e as respostas; muitas vezes, o texto termina com as palavras “*Tal é o processo*”. Embora nenhum deles apresente as regras gerais, a coerência com que os problemas foram tratados sugere que os babilônios (ao contrário dos egípcios) tinham algum tipo de abordagem teórica da Matemática. Os problemas, muitas vezes, parecem ser exercícios intelectuais, em vez de tratados sobre levantamentos topográficos ou contabilidade, e evidenciam um interesse abstracto em relações numéricas.

A álgebra que era praticada pelos babilônios caracterizava-se pela aparente falta de fórmulas, as técnicas empregues para a solução de equações do primeiro e segundo grau eram basicamente discursivas.

Equações do 1º grau

Há poucas equações lineares nos textos babilónicos que sobreviveram e poucos apresentam um algoritmo de resolução. Vejamos, por exemplo, o seguinte problema:

Exemplo 1 (Placa BM 13200²⁸): “*Encontrei duas pedras iguais de massa desconhecida. Quando subtraí 3 minas²⁹, restaram 17 minas. Qual é a massa de uma das pedras?*”

²⁸ Os problemas das placas babilónicas, aqui apresentados, foram retirados de (Lagarto, s/d).

²⁹ 1 mina = 571,2 g

Este problema corresponde, em notação moderna, à equação $2x - 3 = 17$. Vejamos a “receita” utilizada pelo escriba para o resolver: “...some 3 com 17 e divida o resultado por 2...”.

Este método corresponde, exactamente, ao nosso método, mas em vez de ser resolvido através de uma fórmula é resolvido de forma discursiva.

Geralmente, para resolver equações lineares do tipo $ax = b$, eram consultadas tabelas. Os escribas consultavam a tabela de recíprocos para encontrar $1/a$ e, em seguida, multiplicavam o número encontrado na tabela por b . Um exemplo de um problema que aplica este processo é o seguinte:

Exemplo 2: “Suponha que $2/3$ de $2/3$ de uma certa quantidade de cevada é tomado, 100 unidades de cevada são adicionadas e a quantidade original é recuperada. Qual é a quantidade de cevada?”

A solução dada pelo escriba é: calcula 0; 40 vezes 0; 40 para obter 0; 26, 40. Depois subtrai isso a 1; 00 para obter 0; 33, 20. Procura o recíproco de 0; 33, 20 numa tabela para obter 1; 48. Multiplica 1; 48 por 1,40 para obter a resposta, 3,0.

Para melhor entendermos os cálculos indicados pelo escriba vamos traduzi-los na nossa notação algébrica, usando o nosso sistema numérico, o que também já foi feito no enunciado. Temos de resolver a equação

$$\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} x + 100 = x$$

que é equivalente, como o escriba sabia, a resolver a equação $(1 - \frac{4}{9})x = 100$. Por isso, o escriba calculou $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3}$ e subtraiu o resultado a 1 para obter $1 - \frac{4}{9}$. Depois, procurou na tabela o valor de $\frac{1}{1 - \frac{4}{9}}$ e, portanto, x foi encontrado multiplicando o valor encontrado na tabela por 100, dando 180 (o que corresponde a 1; 48 vezes 1, 40 que dá 3, 0, no sistema sexagesimal).

Na placa YBC 4652 aparecem vários problemas, todos semelhantes, cujo objectivo é descobrir o peso “original” de uma pedra, dando origem a equações do 1º grau. Vejamos o seguinte exemplo:

Exemplo 3 (Placa YBC 4652): “Encontrei uma pedra, mas não a pesei. Depois somei-lhe a sétima parte do seu peso e depois a décima primeira parte deste novo peso. Pesei o total: 1 mina³⁰. Qual era o peso original da pedra?”

³⁰ 1 mina = 60 gin

Podemos traduzir este problema pela equação $\left(x + \frac{x}{7}\right) + \frac{1}{11}\left(x + \frac{x}{7}\right) = 60$. O escriba apenas apresenta a resposta que, neste caso, é $48 + \frac{1}{8}$ [gin]. Talvez os procedimentos para encontrar as soluções para estes problemas se encontrem em placas que ainda não foram descobertas (Katz, 1998).

Os outros problemas desta placa, pelo menos todos os que se conseguem interpretar, começam da mesma forma “*encontrei uma pedra, [mas] não a pesei*”, seguindo-se um enunciado resolúvel actualmente através de uma equação do 1º grau. Problemas semelhantes, que podem ser resolvidos através de equações do 1º grau, podem ser encontrados em textos matemáticos egípcios sensivelmente da mesma época (Chace, 1979).

Por outro lado, mais detalhes eram dados para a solução de sistemas de duas equações lineares com duas incógnitas. E um dos métodos usado, fazendo uma sugestão conveniente e depois ajustando-a, mostra que os babilónios também compreendiam a linearidade. O primeiro problema da VAT 8520 é um exemplo deste tipo de problemas, além de todos os problemas encontrados nas placas VAT 8389 e VAT 8391, que remontam à primeira dinastia babilónica (cerca de 1900 a.C.).

Os problemas das placas VAT 8389 e VAT 8391 dizem respeito à produção de cereal em dois campos. Se designarmos a como a produção por unidade de área do primeiro campo e x como a área do primeiro campo, b como a produção por unidade de área do segundo campo e y como a área do segundo campo, a maioria dos problemas destas placas pode ser formulada, usando a notação moderna, do seguinte modo:

$$\begin{cases} ax \pm by = c \\ x \pm y = d \end{cases}$$

Vejamos o primeiro problema da VAT 8389, que contém apenas quatro problemas, todos resolvidos pelo método da falsa posição.

Exemplo 4 (Problema 1 da Placa VAT 8389): “*Um de dois campos rende $\frac{2}{3}$ sila³¹ per sar³², o outro campo rende $\frac{1}{2}$ sila per sar. O primeiro campo rende mais 500 sila do que o segundo campo; a área dos dois campos juntos é de 1800 sar. Qual é a área de cada campo?*”

É fácil traduzir este problema num sistema de duas equações, com x e y representando as duas áreas desconhecidas:

³¹ 1 sila = 1dm³

³² 1 sar = 36 m²

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}y = 500 \\ x + y = 1800 \end{cases}$$

Uma solução moderna consistirá em resolver a segunda equação em ordem a x e substituir o resultado na primeira equação. Mas o escriba babilónico fez a suposição inicial de que x e y eram ambos iguais a 900. Depois, determinou que $\frac{2}{3} \times 900 - \frac{1}{2} \times 900 = 150$. A diferença entre o pretendido 500 e o calculado 150 é 350. Para ajustar as respostas, o escriba, provavelmente, percebeu que cada unidade que é aumentada ao valor de x e diminuída ao valor de y dá um aumento, na “função” $\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}y$, de $\frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{7}{6}$. Então, o escriba precisava apenas resolver a equação $\frac{7}{6}z = 350$ para obter o aumento necessário, $z = 300$. Adicionando 300 a 900 dá 1200 para x e subtraindo dá 600 para y , obtendo, assim, as respostas correctas.

Vejam a resolução dada pelo escriba para resolver, de um modo geral, um problema deste tipo, traduzido pelo sistema:

$$\begin{cases} ax - by = c \\ x + y = d \end{cases}$$

Os cálculos indicam que para encontrar x e y , o escriba começa por considerar uma solução falsa: neste caso, $x_0 = y_0 = \frac{x+y}{2}$. Em seguida, calcula a produção de cada campo (a que chama “falso grão”), que é, na nossa notação, ax_0 e by_0 .

De seguida, o escriba calcula o excesso de produção do primeiro campo sobre o segundo: $ax_0 - by_0$. Seja c_0 o excesso. A seguir calcula a produção que falta para satisfazer as condições do problema. Na nossa notação, a produção que falta é representada por $c - c_0$.

Depois disso, o escriba calcula $a + b$. Esta quantidade é precisamente a produção excedentária do primeiro campo sobre o segundo quando adicionamos uma unidade de área ao primeiro campo e subtraímos uma unidade de área ao segundo campo.

Para compensar a produção em falta, $c - c_0$, temos que igualar o excesso $a + b$ a $c - c_0$, um problema que pode ser resolvido por meio da proporcionalidade, um campo de estudo em que os antigos matemáticos pré-gregos se destacaram. De facto, para que o excesso $a + b$ seja igual a $c - c_0$ temos que multiplicar $a + b$ pelo número de unidades da área a ser adicionado a x_0 . A quantidade resultante deve, então, ser igual a $c - c_0$.

O escriba sabe que o número de unidades da área a ser adicionado a x_0 , que podemos designar por z , é obtida multiplicando o inverso de $a + b$ por $c - c_0$. O número z , assim obtido pelo escriba, é adicionado ao primeiro campo e subtraído ao segundo campo, obtendo-se, assim, as áreas reais dos campos que são, por conseguinte, $x_0 + z$ e $y_0 - z$, respectivamente.

Note-se que

$$z = \frac{c - c_0}{a + b} \Leftrightarrow z = \frac{ax - by - (ax_0 - by_0)}{a + b},$$

donde, após algumas simplificações, se obtém

$$z = \frac{x - y}{2}.$$

Além disso, considerámos

$$x_0 = y_0 = \frac{x + y}{2}.$$

Assim, de facto,

$$x_0 + z = \frac{x + y}{2} + \frac{x - y}{2} = x$$

e

$$y_0 - z = \frac{x + y}{2} - \frac{x - y}{2} = y.$$

Este é um procedimento claramente aritmético. A resolução inscrita na placa permite-nos ver que consiste num método aritmético de falsa posição: o escriba começa por atribuir um valor numérico às quantidades procurados (isto é, as áreas dos campos), que é reconhecido como sendo falso, *à priori*. Usando os valores falsos e os dados indicados no enunciado do problema, o escriba obtém novos dados. Os novos dados (aqui o “falso grão”), podem depois ser compensados para, finalmente, conduzirem a uma solução correcta.

Este método da falsa posição é usado para resolver muitos dos problemas das placas babilónicas (por exemplo, das placas Str. 368, VAT 7535 e VAT 7532, além das placas acima mencionadas).

Segundo Eves (1969), há muitos problemas na Matemática babilónica que conduzem a sistemas de equações simultâneas, havendo um exemplo de um problema que dá origem a um sistema de dez equações com dez incógnitas!

Equações do 2º grau

É na resolução de equações quadráticas que os escribas babilónicos revelaram a sua maior perícia. Existem dezenas de placas que indicam que os babilónios de 2000 a.C. estavam familiarizados com a nossa fórmula para resolver equações quadráticas, denominada fórmula resolvente.

Na Placa BM 13901 encontram-se 21 problemas que dão origem a equações do 2º grau ou a sistemas de equações, em que uma das equações é do 2º grau, e outros três problemas que estão ilegíveis. O objectivo dos problemas é sempre descobrir o lado de um quadrado.

Os escribas apoiavam-se frequentemente em vocabulário e noções geométricas para formular os seus problemas. À incógnita chamavam lado e à sua elevação à potência 2, chamavam quadrado; tradição perpetuada até hoje. Quando se tratava de resolver sistemas de duas incógnitas, a uma chamavam comprimento e à outra, largura.

Vejam os o primeiro problema desta placa que é um exemplo da "álgebra babilónica":

Exemplo 5 (Problema 1 da Placa BM 13901): "Adicionei a área e o lado do meu quadrado, obtive 0;45."

Em notação moderna, poderíamos expressar o conteúdo deste problema através da seguinte equação:

$$x^2 + x = \frac{45}{60}.$$

Os escribas babilónicos apresentaram a solução deste problema, onde os detalhes são descritos por instruções verbais, da seguinte forma:

"Tu porás 1, a unidade. Tu fraccionarás em 2 e obterás 0;30. Multiplicarás 0;30 por 0;30 e obterás 0;15. Adicionarás 0;15 a 0;45 e obterás 1. Este é o quadrado de 1. De 1 subtrairás 0;30, que quadraste, e obterás 0;30 que é o lado do quadrado."

A solução apresentada pelo escriba está correcta, mas o que está explícito são os cálculos indispensáveis para chegar ao resultado; não há um único comentário sobre o processo adoptado.

Convertendo estas etapas em notação algébrica moderna, temos que:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0;45} - \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x &= \sqrt{0;15 + 0;45} - 0;30 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x &= \sqrt{1} - 0;30 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x &= 1 - 0;30 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x &= 0;30 \end{aligned}$$

Assim, as instruções do escriba babilónico conduzem-nos a uma fórmula, equivalente à nossa conhecida regra

$$x = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2},$$

para resolver a equação quadrática, $x^2 + bx = c$, em que o coeficiente de x é 1, e b e c são positivos mas não necessariamente inteiros. Embora o escriba babilónico não dispusesse de uma fórmula algébrica, as instruções destes exemplos concretos são tão sistemáticas que nos levam a crer que estes problemas foram destinados para ilustrar uma técnica geral, equivalente à nossa fórmula resolvente.

Agora impõe-se-nos a questão de como terá o escriba chegado a esta resolução?

Thureau-Dangin (1938) dá, às instruções do escriba, a interpretação algébrica que a seguir se apresenta:

Partindo da equação $x^2 + x = c$, o processo indicado pelo escriba conduz à equação

$$x^2 + x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = c + \left(\frac{1}{2}\right)^2,$$

que é equivalente a

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = c + \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

Donde,

$$x + \frac{1}{2} = \sqrt{c + \left(\frac{1}{2}\right)^2} \Leftrightarrow x = \sqrt{c + \left(\frac{1}{2}\right)^2} - \frac{1}{2}.$$

Sob este ponto de vista, o método indicado corresponderia ao que consta em muitos dos nossos manuais escolares (principalmente do 9º ano), relativamente à resolução das equações do 2º grau sem a aplicação da fórmula resolvente. O pretendido é a transformação do 1º membro da equação num quadrado, procedimento em que os alunos costumam revelar muitas dificuldades. O método corresponderia então a “completar o quadrado”, do ponto de vista algébrico.

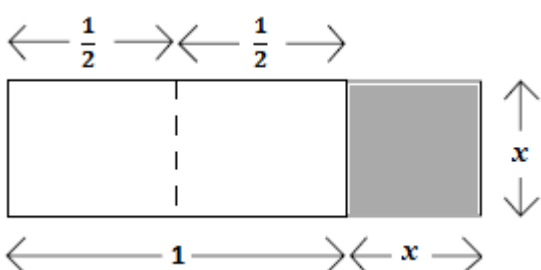
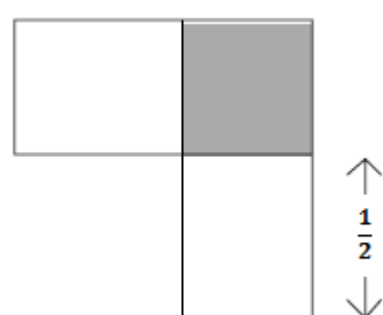
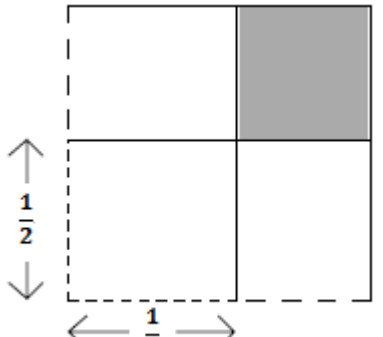
Não obstante esta interpretação, de acordo com alguns historiadores, os matemáticos babilónicos tinham conhecimento da fórmula. No entanto, não foram capazes de a expressar como tal, uma vez que não tinham símbolos para o fazer.

O argumento principal que apoia a ideia de uma álgebra babilónica é, portanto, a possibilidade de traduzir os problemas e cálculos babilónicos num simbolismo aritmético - algébrico moderno. No entanto, este é um argumento cuja validade não é suportada pela evidência histórica.

Há, no entanto, uma interpretação completamente diferente deste tipo de problema. De facto, durante os últimos anos, Hoyrup tem estudado os problemas das placas babilónicas, bem como os termos nelas utilizados. E, para Hoyrup, a “álgebra babilónica” não pode ter sido aritmética, mas deve ter sido organizada na base de uma geometria não dedutiva “ingénua”. Esta geometria consiste numa “geometria de recortar e colar”, na qual cálculos aritméticos complicados resultam da interpretação clássica correspondente a transformações geométricas simples.

Após fazer uma análise rigorosa, tendo em conta o contexto da Antiga Babilónia, Hoyrup (2003) concluiu que:

1. a equação corresponde à adição de duas áreas: a área de um quadrado de lado desconhecido x e a área de um rectângulo de lados x e 1;
2. as instruções do escriba estão relacionadas com operações concretas na “geometria do recorta e cola”, que se podem traduzir do seguinte modo:

Interpretação de Hoyrup	Interpretação geométrica
<ul style="list-style-type: none"> • dividir ao meio o rectângulo que se adicionou ao quadrado; 	
<ul style="list-style-type: none"> • deslocar uma das partes para formar um gnómon; 	
<ul style="list-style-type: none"> • completar o quadrado pela junção de outro quadrado; 	
<ul style="list-style-type: none"> • determinar o lado do quadrado maior e, finalmente, o lado do quadrado desconhecido. 	

Neste caso, também se “completa o quadrado”, mas do ponto de vista geométrico.

Esta interpretação geométrica é bastante diferente da interpretação clássica, que vê tais problemas como problemas que lidam com números cujas soluções são baseadas no

raciocínio aritmético (ou algébrico). Assim, enquanto para Neugebauer os conceitos geométricos desempenham apenas um papel secundário na álgebra babilónica, para Hoyrup, a “geometria do recorta e cola”, é a base em que tais problemas foram colocados e resolvidos. A nova interpretação da álgebra babilónica leva-nos a uma reavaliação do papel da aritmética e da geometria no aparecimento da álgebra.

Mas, esta nova interpretação da álgebra Babilónia, relacionada especialmente com os problemas cuja tradução no nosso simbolismo moderno podem ser vistos como equações de segundo grau, não exclui a existência de uma corrente numérica na álgebra babilónica. De facto, há muitos problemas, especialmente os relacionados com o comércio babilónico, que não se prestam a uma interpretação geométrica. Este também é o caso de certos problemas que se resolvem através de equações do primeiro grau, como já foi analisado anteriormente.

O problema 2 da mesma tabela é semelhante ao primeiro mas, neste caso, obtemos uma equação do tipo $x^2 - bx = c$. Para resolver esta equação, as instruções do escriba coincidem com a aplicação da seguinte fórmula:

$$x = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} + \frac{b}{2}.$$

É de notar que, tanto neste problema como no anterior, a solução indicada é a raiz positiva das duas raízes da equação quadrática e a única que faz sentido na resolução de problemas “reais”. De facto, os problemas que deram origem a estas equações estavam, geralmente, relacionados com áreas, em que x representava o lado do quadrado e, como tal, não fazia sentido que fosse negativo.

O problema 3 da referida placa traduz-se por uma equação quadrática do tipo $ax^2 + bx = c$. Mas, neste caso, o escriba babilónico não o resolveu como Al-Kwarizmi o faria, reduzindo o coeficiente do termo em x^2 à unidade. Para resolver este problema, o escriba babilónico multiplicou ambos os membros da equação pelo coeficiente em x^2 , como também Diofanto de Alexandria procederia mais tarde. Assim, obteve uma equação do tipo $(ax)^2 + abx = ac$, que é resolvida considerando como incógnita $y = ax$. Este é, seguramente, um dos primeiros casos registados em que é feita uma mudança de variável!

Segundo Hoyrup, o problema 23 da mesma placa (BM 13901), traduzido pela equação $x^2 + 4x = 0; 41,40$, é do tipo do problema 1, analisado anteriormente, e podia ter sido resolvido de uma forma análoga. Contudo, ele é colocado quase no fim da placa, entre os problemas mais difíceis. Talvez, a dificuldade estivesse na maneira de o resolver, podendo pensar-se que pertenceria a um conjunto de problemas curiosos ou difíceis que os agrimensores poriam, uns aos outros, como desafios.

Uma prova usada pelo matemático árabe Al-Kwarizmi para resolver um problema traduzido pela equação $x^2 + 10x = 39$ tem semelhanças evidentes com a interpretação geométrica de Hoyrup para o problema 23 da placa BM 13901.

Katz (1998) também observa que as demonstrações geométricas de Al-Kwarizmi parecem ser, de facto, muito semelhantes aos argumentos geométricos babilónicos, a partir dos quais nasceram os algoritmos algébricos.

É impressionante notar que, quase três mil anos depois, o processo utilizado por Fibonacci para resolver uma equação quadrática é ainda o usado pelo escriba babilónico!

Os escribas babilónicos não hesitaram em propor problemas equivalentes a sistemas de equações com duas incógnitas, que podem ser traduzidos pelos seguintes sistemas:

$$\begin{cases} x \pm y = a \\ xy = b \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x \pm y = a \\ x^2 + y^2 = b \end{cases}$$

O enunciado que deu origem ao primeiro sistema é do tipo:

Dado o semi-perímetro $x + y = a$ e a área $xy = b$ de um rectângulo, determine o comprimento x e a largura y .

Segundo Katz, o facto de muitos problemas, que conduzem a equações do 2º grau, serem dados sob a forma do primeiro sistema apresentado, sugere que os escribas babilónicos investigavam a relação entre o perímetro e a área de uma superfície rectangular e acrescenta, ainda, que:

“Parece que antigamente muitos acreditavam que a área de um terreno dependia somente de seu perímetro. Há várias histórias que indicam que os que sabiam que isso não era verdade se aproveitavam dos que nisso acreditavam.”

(Katz, 1998, p. 36)

A título de exemplo, vejamos o seguinte problema:

Exemplo 8 (Problema da Placa YBC 4663): *“Descobre um rectângulo, cujo semi-perímetro é 6,5 e a área $7,5^{33}$.”*

As indicações dadas pelo escriba para resolver este problema são as seguintes:

“Calcula metade da soma do comprimento e da largura: 3,25, eleva ao quadrado: 10,5625; subtrai a área: 3,0625; determina a raiz quadrada: 1,75; adiciona à semi-soma e obténs 5, subtrai à semi-soma e obténs 1,5.”

³³ Neste caso, as quantidades são apresentadas no nosso sistema de numeração decimal.

Este problema pode ser traduzido pelo seguinte sistema de duas equações:

$$\begin{cases} x + y = 6,5 \\ xy = 7,5 \end{cases},$$

onde x representa o comprimento, y representa a largura, 6,5 é a soma (S) e 7,5 é o produto (P). Resolvendo este sistema obtemos uma equação do 2º grau: $x^2 - 6,5x + 7,5 = 0$, ou seja, $x^2 - Sx + P = 0$ (ou ainda, $x^2 - ax + b = 0$).

Uma vez que a equação obtida é do tipo da do problema 2 da Placa BM 13901, não é de admirar que as instruções do escriba, para a resolução deste problema, sejam equivalentes à aplicação da fórmula resolvente.

No entanto, os babilónios não procediam como nós o fazemos actualmente, ou seja, não transformavam este sistema numa equação do 2º grau.

Para resolver um problema deste tipo, os babilónios tinham em conta a seguinte identidade:

$$\left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - xy \quad (1)$$

e usavam, sistematicamente, o método a seguir descrito:

Instruções do escriba	Interpretação algébrica
Toma metade de a :	$\frac{a}{2} = \frac{x+y}{2}$
Quadra o resultado:	$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$
Subtrai b do resultado obtido:	$\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - xy = \left(\frac{x-y}{2}\right)^2$
Toma a raiz quadrada do resultado obtido:	$\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} = \frac{x-y}{2}$
Soma o resultado obtido a metade de a :	$\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} = \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2} = x$

O resultado obtido é um dos números desejados e o outro é a diferença deste para a :

$$a - x = (x + y) - x = y.$$

Note-se que os números procurados são

$$\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

e

$$a - \left(\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\right) = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2},$$

o que corresponde às soluções dadas pela nossa fórmula resolvente.

É interessante notar que a identidade (1), em que os babilónios se basearam, apareceu, posteriormente, como a Proposição 5 do Livro II dos *Elementos* de Euclides.

Este problema de encontrar dois números, conhecidos a sua soma e o seu produto foi também proposto, alguns séculos mais tarde, por Diofanto (c. 250 d. C.) e será analisado no anexo correspondente à Matemática na Grécia (anexo A.3).

Mas isto ainda não é tudo, pois os escribas eram capazes de resolver problemas ainda mais complicados, onde era necessário utilizar artifícios de cálculo engenhosos; e faziam ainda, como já foi referido, mudanças de variável.

Ignoramos quais as situações práticas que poderiam conduzir os babilónios a colocarem tais problemas e que procedimentos intelectuais teriam elaborado para os resolver.

Geralmente, os métodos apresentados para resolver as equações correspondem, exactamente, aos nossos métodos, mas em vez de serem indicados através de regras são indicados de forma discursiva.

O carácter repetitivo dos exemplos ilustrados nas placas leva-nos a pensar que o objectivo a atingir é didáctico; é a aprendizagem das técnicas de resolução que é visada.

Equações de grau superior ao 2º

Por volta de 2000 a.C. a aritmética babilónica tinha evoluído para uma álgebra retórica bem desenvolvida. Não só foram resolvidas equações quadráticas, tanto pela substituição numa fórmula geral como pelo método de completar o quadrado, como também foram discutidas algumas equações cúbicas e biquadradas. Os babilónios

resolviam certas equações e sistemas do 3º grau, desde que, por eliminação, fosse possível obter uma equação do tipo $x^3 + x^2 = a$.

Se os problemas que envolviam a área de rectângulos conduziam a equações quadráticas, então, os problemas relacionados com o volume originavam equações cúbicas. A placa BM 85200 contém 36 problemas deste tipo, e representa a primeira tentativa conhecida para propor e resolver equações cúbicas.

Naturalmente, os babilónios não chegaram a uma fórmula geral para a resolução de equações cúbicas. Isso também não seria encontrado durante mais de três mil anos.

Foi encontrada uma tabela onde, para além de serem fornecidos os quadrados e os cubos dos inteiros de 1 a 30, também aparece a combinação $n^3 + n^2$ para esse intervalo. Nalgumas placas babilónicas são apresentados alguns problemas, que conduzem a equações cúbicas da forma $x^3 + x^2 = a$. Estes problemas podem ser resolvidos usando os valores da referida tabela para $n^3 + n^2$, ou por interpolação, caso o valor de a não apareça na tabela.

Vejamos como os babilónios resolveriam uma equação cúbica do tipo

$$ax^3 + bx^2 = c.$$

Embora nos tempos babilónicos não houvesse nada parecido com uma representação simbólica, os babilónios sabiam trabalhar com exemplos numéricos de equações cúbicas, usando regras que indicam que eles tinham o conceito de um problema típico de um determinado tipo e um método comum para o resolver. Por exemplo, para resolver esta equação, eles começariam por multiplicar a equação por a^2 , e depois dividiam-na por b^3 , para obter:

$$\left(\frac{ax}{b}\right)^3 + \left(\frac{ax}{b}\right)^2 = \frac{ca^2}{b^3}.$$

Fazendo $y = \frac{ax}{b}$, esta mudança de variável conduz à equação

$$y^3 + y^2 = \frac{ca^2}{b^3},$$

que agora pode ser resolvida por observação na tabela $n^3 + n^2$ do valor de n que satisfaz a equação $n^3 + n^2 = \frac{ca^2}{b^3}$. Depois de encontrada uma solução para y , o valor de x é, facilmente, encontrado pois $x = \frac{by}{a}$. É de ressaltar, novamente, que tudo isto foi feito sem notação algébrica e mostra uma notável profundidade de compreensão.

O problema 22 da placa BM 85200, de cerca de 1800 a.C., pode ser traduzido pelo seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} xyz + xy = \frac{7}{6} \\ y = \frac{2x}{3} \\ z = 12x \end{cases} .$$

A resolução deste sistema conduz à equação cúbica $48x^3 + 4x^2 = 7$. As instruções do escriba sugerem o processo explicado anteriormente, conduzindo à equação:

$$(12x)^3 + (12x)^2 = 252.$$

Agora, baseando-se na tabela, o escriba atribui logo o valor 6 a $12x$. A partir daqui é fácil chegar aos valores para x , y e z , nomeadamente, $\frac{1}{2}$, 20 e 6.

Existem algumas placas da colecção de Yale, de cerca de 1600 a.C., que apresentam centenas de problemas semelhantes (200 apenas numa placa), sem soluções, organizados por ordem sistemática. Apenas algumas placas foram preservados e, portanto, podemos supor que deve ter havido milhares de problemas originalmente.

Estes problemas envolvem sistemas de equações que, na sua resolução, alguns deles conduzem a uma equação biquadrada. Como exemplo temos:

$$\begin{cases} xy = 600 \\ 150(x - y) - (x + y)^2 = -1000 \end{cases} .$$

Note-se também que este problema representa um extraordinário exemplo de uma equação com um número negativo no 2º membro. O conceito de um número negativo, sem estar a representar uma subtracção, não era usual, mesmo na Europa, 2500 anos mais tarde.

Uma outra ilustração de alguns problemas, presentes nas mesmas placas, pode ser traduzida por um sistema de equações da forma:

$$\begin{cases} xy = a \\ \frac{bx^2}{y} + \frac{cy^2}{x} + d = 0 \end{cases} ,$$

que conduz a uma equação do sexto grau em x , mas que é quadrática em x^3 .

PROGRESSÕES

Neugebauer encontrou dois interessantes problemas sobre progressões numa placa da colecção do Louvre, de cerca de 300 a.C. Num deles encontramos a seguinte igualdade:

$$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^9 = 2^9 + 2^9 - 1,$$

e o outro estabelece que

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 10^2 = \left(1 \times \frac{1}{3} + 10 \times \frac{2}{3}\right) \times 55 = 385.$$

Agora questionámo-nos se os babilónios estavam familiarizados com as fórmulas

$$\sum_{i=0}^n r^i = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$$

e

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{2n+1}{3} \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

A primeira delas era conhecida dos gregos contemporâneos, e Arquimedes encontrou praticamente o equivalente da segunda.

Em conexão com a tabela onde aparece valores de $n^3 + n^2$, Neugebauer considerou que os babilónios também podem ter observado, para vários valores de n , a relação

$$\sum_{i=1}^n i^3 = \left(\sum_{i=1}^n i\right)^2.$$

GEOMETRIA

Segundo Neugebauer (1969), “comparado com as componentes algébrica e numérica da Matemática babilónica, o papel da geometria é bastante insignificante” (p. 44).

A característica principal da geometria babilónica é o seu carácter algébrico. Os problemas mais intrincados, que são colocados com uma terminologia geométrica, são, essencialmente, problemas de álgebra, como vimos anteriormente.

A geometria propriamente dita está intimamente ligada à prática dos agrimensores. De numerosos exemplos concretos, conclui-se que os babilónios, de 2000 a 1600 a.C., devem ter sido familiarizados com as regras gerais para calcular a área de

um rectângulo, as áreas de triângulos rectângulos e isósceles (e talvez do triângulo, em geral) e a área de um trapézio com um lado perpendicular aos lados paralelos (trapézio rectângulo).

Relativamente ao cálculo da área de um trapézio, temos o seguinte exemplo, contido na Placa YBC 7290:

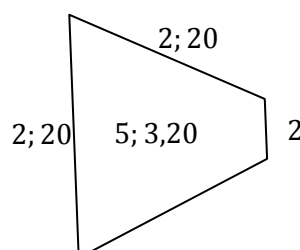


Fig. 38 – Área de um trapézio

Parece que o número inscrito no interior do trapézio representa a área, que poderá ter sido obtida pela fórmula:

$$5;3,20 = 2;20 \times \frac{2;20 + 2}{2}$$

Ora, esta área estaria correcta se estivéssemos a considerar um trapézio rectângulo, o que não é o caso.

O volume de um cilindro era obtido através do produto da base pela altura e as regras para calcular o volume de um paralelepípedo rectangular e, mais genericamente, o volume de um certo prisma com base trapezoidal especial também eram do conhecimento dos babilónios. No entanto, nenhuma placa foi encontrada que mostrasse o cálculo de uma pirâmide, mas, como no caso dos egípcios, parece razoável assumir que os babilónios tivessem conhecimento da fórmula correcta.

Essa suposição é ainda mais convincente porque existe uma placa que dá a fórmula correcta para o volume de uma pirâmide truncada, onde h é a altura e a e b são os comprimentos dos lados das bases quadradas (superior e inferior):

$$V = \left[\left(\frac{a+b}{2} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{a-b}{2} \right)^2 \right] h.$$

Após alguns cálculos, podemos constatar que esta fórmula é equivalente à fórmula do papiro de Moscovo, já analisada anteriormente:

$$V = \frac{h}{3} (a^2 + ab + b^2).$$

Tanto com uma fórmula como com outra, a fórmula para o volume de uma pirâmide “completa”, pode ser facilmente obtida, fazendo $b = 0$.

Por outro lado, há placas onde o volume de uma pirâmide truncada é calculado pela fórmula

$$V = \frac{1}{2}(a^2 + b^2)h,$$

uma simples mas incorrecta generalização da regra para a área de um trapézio.

Para a maioria dos fins práticos, esta fórmula babilónica era, provavelmente, suficiente, uma vez que os resultados obtidos com esta fórmula não diferiam muito dos correctos.

O perímetro de um círculo foi considerado igual a três vezes o diâmetro e a área como um duodécimo do quadrado do perímetro, ou seja, a área do círculo era calculada através de um processo equivalente à aplicação da fórmula

$$A = \frac{1}{12}P^2, \text{ onde } P \text{ é o perímetro da circunferência.}$$

Quando comparada com a fórmula utilizada actualmente, conclui-se que os babilónios consideravam $\pi = 3$. De facto, considerando $\pi r^2 = \frac{1}{12}(2\pi r)^2$, obtemos $\pi = 3$.

No entanto, há um placa descoberta em 1936, que mostra que os babilónios usaram $3\frac{1}{8}$ como uma estimativa para π .

Os babilónios também sabiam que lados correspondentes de dois triângulos rectângulos semelhantes são proporcionais, que a perpendicular através do vértice de um triângulo isósceles bissecta a base, e que um ângulo inscrito num semicírculo é um ângulo recto.

O Teorema de Pitágoras também era conhecido dos babilónios, o que a seguir será analisado com algum detalhe.

Plimpton 322

Talvez a mais notável placa babilónica, até agora analisada, é a placa conhecida como Plimpton 322, que data de cerca de 1700 a. C. e cujo nome deriva do facto desta placa ter o número 322 da colecção Plimpton, da Universidade de Columbia, em Nova Iorque. A Plimpton 322 está representada na figura seguinte:



Fig. 39 – Plimpton 322

(Autor desconhecido, <http://www.math.ubc.ca/~cass/courses/m446-03/pl322/pl322.html>)

Esta placa contém três colunas, essencialmente completas, e uma quarta coluna, parcialmente incompleta. Outras colunas, à esquerda, foram provavelmente partidas.

Os números representados no seguinte quadro que, por conveniência, estão reproduzidos na nossa notação decimal, representam o que consta nesta placa babilônica, com algumas correções feitas recentemente pelos estudiosos e com uma conjecturada quinta coluna, à esquerda.

As colunas serão numeradas de I a V, para facilitar a análise do conteúdo da tabela.

Antes de interpretar o conteúdo da tabela, é de notar que um terno pitagórico é constituído por três números inteiros que podem ser os lados de um triângulo rectângulo. Assim, um terno pitagórico é um terno de números inteiros (a, b, c) tais que $a^2 + b^2 = c^2$.

I (a)	II ($\frac{c^2}{a^2}$)	III (b)	IV (c)	V
120	1,9834028	119	169	1
3456	1,9491586	3367	4825	2
4800	1,9188021	4601	6649	3
13500	1,8862479	12709	18541	4
72	1,8150077	65	97	5
360	1,7851929	319	481	6
2700	1,7199837	2291	3541	7
960	1,6845877	799	1249	8
600	1,6426694	481	769	9
6480	1,5861226	4961	8161	10
60	1,5625	45	75	11
2400	1,4894168	1679	2929	12
240	1,4500174	161	289	13
2700	1,4302388	1771	3229	14
90	1,3871605	56	106	15

É evidente que a coluna V serve apenas para numerar as linhas. As colunas III e IV parecem, à primeira vista, bastante aleatórias, mas o seu título pode ser traduzido por “largura” e “diagonal”. De facto, depois de analisadas, não é difícil concluir que os números dessas colunas, com quatro excepções infelizes, constituem a hipotenusa e o cateto de um triângulo rectângulo, ou seja, dois dos três números de um terno pitagórico. É fácil subtrair o quadrado dos números da coluna III dos quadrados dos respectivos números da coluna IV. Em cada caso, obtém-se um quadrado perfeito, cuja raiz quadrada está indicada na reconstruída coluna I. Finalmente, a coluna II representa $\frac{c^2}{a^2}$.

Naturalmente, surge a questão sobre como os babilónios teriam derivado os números a , b e c que satisfazem a equação $a^2 + b^2 = c^2$. Os valores envolvidos na Plimpton 322 são tão grandes que não poderiam ter sido obtidos simplesmente por adivinhação; usando métodos de tentativa e erro, os babilónios teriam que ter experimentado muitas soluções, mais simples, antes destas. Se os escribas babilónicos possuíam um método claramente perceptível para resolver a “equação de Pitágoras”, qual terá sido? Um indício é encontrado na coluna II. Esta contém uma lista dos valores $\frac{c^2}{a^2}$, o que sugere que a relação $a^2 + b^2 = c^2$ foi reduzida a

$$\left(\frac{c}{a}\right)^2 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 = 1.$$

Considerando $u = \frac{c}{a}$ e $v = \frac{b}{a}$, obtemos

$$u^2 - v^2 = 1.$$

O problema consiste agora em construir triângulos rectângulos, cujos lados tenham comprimentos racionais, $1, u$ e v , onde $u^2 - v^2 = 1$. No entanto, a etapa crítica está em reconhecer que esta última equação pode ser expressa como

$$(u + v)(u - v) = 1.$$

Uma vez que todos os números em questão são racionais, e se o produto de dois é 1, então eles são recíprocos. Ou seja, um número deve ser do tipo $\frac{m}{n}$ e o outro $\frac{n}{m}$, onde m e n são números inteiros. Então, fazendo

$$u + v = \frac{m}{n} \quad e \quad u - v = \frac{n}{m},$$

obtemos, por adição, que

$$u = \frac{1}{2} \left(\frac{m}{n} + \frac{n}{m} \right)$$

e, por subtracção, que

$$v = \frac{1}{2} \left(\frac{m}{n} - \frac{n}{m} \right).$$

Consequentemente,

$$u = \frac{m^2 + n^2}{2mn}, \quad v = \frac{m^2 - n^2}{2mn}.$$

Mas $b = av$ e $c = au$; se agora fizermos $a = 2mn$, de modo a obter uma solução de números inteiros, obtemos que

$$a = 2mn, \quad b = m^2 - n^2, \quad c = m^2 + n^2.$$

Estas são fórmulas bem conhecidas para encontrar triângulos rectângulos com os lados inteiros e foram usadas no tempo de Diofanto (c. 250 d. C.).

Por exemplo, considerando $m = 12$ e $n = 5$, obtemos $a = 120$, $b = 119$ e $c = 169$, que, de facto, é o que observamos na primeira linha da tabela. Todos os valores da tabela podem ser obtidos através desta relação, à excepção da linha 11. Aqui, a escolha $m = 2$ e $n = 1$, conduz a $x = 4$, $y = 3$ e $z = 5$, e cada um destes valores têm que ser multiplicados por 15 para se obter os valores da tabela.

Para chegar a estas fórmulas, além da habilidade de adicionar e subtrair fracções, era necessário conhecer a fórmula algébrica $u^2 - v^2 = (u + v)(u - v)$. Esta pode ter sido descoberta tendo em conta a seguinte figura:

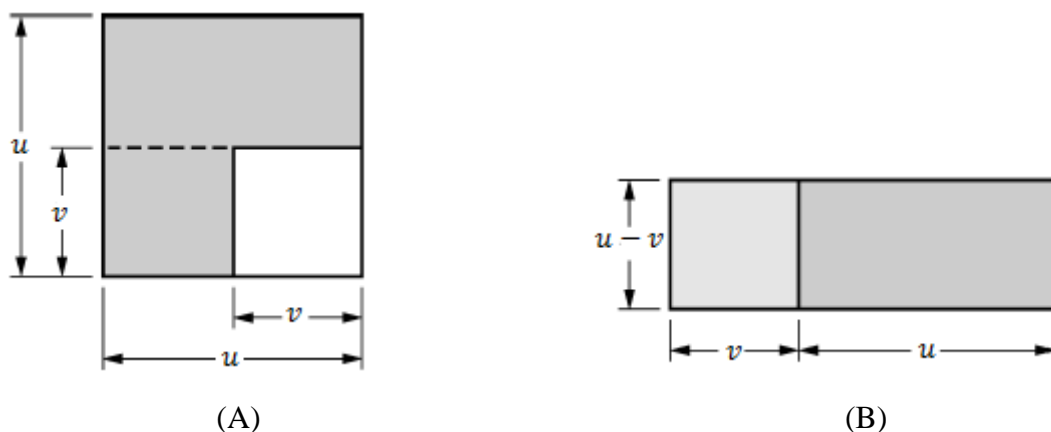


Fig. 40 – Demonstração da fórmula da diferença de quadrados

A área $u^2 - v^2$ pode ter sido dissecada como mostra a figura (A), e depois rearranjada como podemos ver na figura (B), ou seja, como um retângulo com comprimento $u + v$ e largura $u - v$. Deste modo, obtemos a igualdade acima referida, $u^2 - v^2 = (u + v)(u - v)$.

A análise da Plimpton 322 mostra o exame cuidadoso a que algumas das placas matemáticas babilónicas tiveram que ser submetidas.

Tenha, ou não, este método sido o usado pelo escriba babilónico para escrever a Plimpton 322, o facto é que o escriba estava bem ciente da relação a que, actualmente, chamamos Teorema de Pitágoras.

Burton (2006), ao referir-se à Plimpton 322, afirma que “a análise deste grupo extraordinário de figuras estabelece, para além de qualquer dúvida, que o chamado Teorema de Pitágoras era conhecido dos escribas babilónicos mais de mil anos antes de Pitágoras ter nascido” (p. 73).

Uso do Teorema de Pitágoras pelos babilónios

Há problemas nas placas da Antiga Babilónia que fazem uso explicitamente geométrico do Teorema de Pitágoras. Por exemplo, na placa BM 85196 podemos encontrar o seguinte problema:

Exemplo 1 (Placa BM 85196): *Uma escada de comprimento 0;30 [está numa posição erecta contra uma parede]. A extremidade superior descaiu uma distância 0;6. Até que ponto a extremidade inferior se moveu [da parede]?*

A resposta é dada correctamente com o auxílio do Teorema de Pitágoras, sendo este um dos primeiros problemas envolvendo este teorema.

Um conjunto de placas com grande interesse matemático foi descoberto pelos franceses, em Susa, em 1936. Nestas placas, encontra-se outro exemplo babilónico da utilização do Teorema de Pitágoras, um bocado mais intricado que o anterior, onde é calculado o

raio r de um círculo que circunscreve um triângulo isósceles de lados, 50, 50 e 60, o que está representado na figura 41:

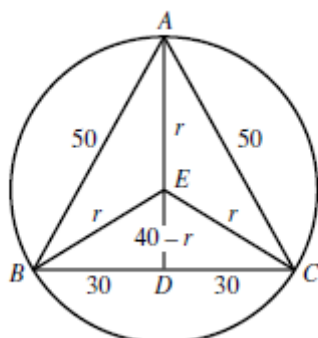


Fig. 41 – Aplicação do Teorema de Pitágoras

Na solução apresentada, o Teorema de Pitágoras é usado, inicialmente, com o triângulo retângulo [ADB] para obter $\overline{AD} = 40$. Porque $r = \overline{AE}$, temos, então, $\overline{ED} = 40 - r$. Uma segunda aplicação do Teorema de Pitágoras, desta vez para o triângulo [EDB], leva à equação

$$r^2 = 30^2 + (40 - r)^2,$$

donde se obtém $r = \frac{2500}{80}$, ou $r = 31;15$.

Como já foi analisado anteriormente, o problema da placa YBC 7289 que dá uma notável aproximação para a $\sqrt{2}$, também mostra que os babilônios conheciam o Teorema de Pitágoras.

Um outro problema geométrico contido numa placa escavada perto de Bagdade, em 1962, diz respeito a um retângulo de que é dada a área e a diagonal, com a seguir se apresenta:

Exemplo1: *Se te perguntarem sobre um rectângulo como segue: 1;15 é a diagonal e 0;45 é a área, qual é o comprimento e a largura?*

Pelas instruções do escriba para a sua resolução é evidente a aplicação do Teorema de Pitágoras.

ANEXO A.3 - MATEMÁTICA NA GRÉCIA

Com o objectivo de dar uma visão geral sobre a Matemática desenvolvida pelos gregos, encetarei este tema com a análise do sistema de numeração grego, ao que se seguirá uma breve referência às operações aritméticas por eles realizadas.

Contrariamente ao que foi feito para as duas civilizações já analisadas, Egipto e Babilónia, a Matemática grega não será analisada por temas, pois seria praticamente toda integrada no tema “Geometria”. Neste caso, entendi ser mais coerente proceder a uma apresentação por autor, dada a quantidade de autores gregos que contribuíram, de forma diversificada, para o desenvolvimento desta ciência.

Dado o grande número de matemáticos gregos que merecem referência e uma vez que não pretendo, com este trabalho, fazer um estudo exaustivo da História da Matemática, seleccionarei os autores a abordar tendo como critério o seu contributo ao nível dos conteúdos matemáticos que fazem parte do programa actualmente leccionado aos alunos do 3º ciclo.

SISTEMA DE NUMERAÇÃO

Ao longo da sua história, os gregos utilizaram dois sistemas de numeração distintos, um mais antigo, o Ático, no qual arranjavam os números por ordem e os agrupavam, tal como no sistema romano, e um posterior, mais erudito, o Jónico, um sistema de numeração alfabético que apareceu por volta do séc. V a.C. Ambos os sistemas eram decimais.

Sistema Ático

Este sistema de símbolos numéricos foi utilizado pelos gregos desde cerca de 450 a 85 a.C. Neste sistema, as letras iniciais das palavras para 5 e para as potências de 10, até 10^4 , são usadas para representar os números correspondentes. O número 1 é representado por um traço vertical, constituindo a única excepção em que não se recorreu à primeira letra do nome do próprio número para o representar. Assim,

□	representa a letra inicial do <i>penta</i> , que significa “cinco”,
△	representa a letra inicial do <i>deka</i> , que significa “dez”,
Η	representa a letra inicial do <i>hekatón</i> , que significa “cem”,
Χ	representa a letra inicial do <i>kilo</i> , que significa “mil”,
Μ	representa a letra inicial da <i>myriad</i> , que significa “dez mil”.

A título de exemplo, a sequência $\times \text{H H H } \triangle \triangle ||||$, representa o número 1324.

Uma vez que não é um sistema posicional, a ordem dos símbolos é irrelevante para um eventual cálculo do número representado, pois o valor está ligado aos próprios símbolos não dependendo da posição que estes tomam na sequência. Assim, para se obter o

número em questão bastará somar os valores que cada um deles simboliza. Contudo, e de um modo geral, foi adoptada a convenção de ordenar os símbolos por ordem decrescente do seu valor da esquerda para a direita, o que faz todo o sentido uma vez que corresponde à forma de escrita grega.

No entanto, deparamo-nos com uma dificuldade, pois, se recorrermos à base dez, num sistema de numeração que é aditivo, serão necessários vários caracteres para expressar determinadas quantidades como, por exemplo, o caso de 9999 que requereria 36 símbolos (como acontecia no sistema egípcio). Esta situação constituía efectivamente um obstáculo que, engenhosamente, foi superado pelos gregos.

A letra que denota 5 foi combinada com outras letras para obter símbolos intermediários para 50, 500, 5000 e 50000, com o objectivo de encurtar a representação numérica. Recorreu-se, aqui, a um princípio multiplicativo. Numa notação quase estenográfica, o Γ do cinco é também associado às letras das potências de 10: um pequeno Δ inscrito no Γ designará 50, e assim por diante, como podemos ver na tabela seguinte:

1	5	10	50	100	500	1000	5000	10 000	50 000
	Γ	Δ	Γ^{Δ}	H	Γ^{H}	X	Γ^{X}	M	Γ^{M}

Tabela 10 – Símbolos usados no sistema de numeração Ático

De uma forma resumida, podemos dizer que “no sistema ático, para quintuplicar o valor de uma das letras-numerais Δ , H, X e M bastava colocá-la no interior da letra Γ ” (Ifrah, 1997, p. 384 apud Almeida, 2007, p. 53).

Assim, os números foram obtidos numa base aditiva, onde cada símbolo não aparecia mais de quatro vezes. Um exemplo deste sistema de numeração é:

$$\text{MM}\Gamma^{\text{X}}\text{XXX}\Gamma^{\Delta}\Delta\Delta\Delta|| = 20\,000 + 5000 + 3000 + 50 + 40 + 2 = 28\,092.$$

Sistema Jónico

Por algum motivo desconhecido, por volta do século V a.C., os gregos de Jónia desenvolveram um sistema numérico cifrado, com um amplo conjunto de símbolos para ser memorizado. Atribuíram a cada número as 24 letras do alfabeto grego, às quais

adicionaram mais três letras fenícias obsoletas (o *vau* (ou *digamma*) para 6, o *koppa* para 90 e o *sampi* para 900), daí também ser conhecido por sistema alfabético.

Mas, conforme salienta Cajori (1909), “esta mudança foi decididamente para pior, pois os antigos números Áticos eram menos pesados na memória, na medida em que continham menos símbolos e eram melhor adaptados para mostrar analogias nas operações numéricas” (p. 73-74).

A tabela seguinte mostra como as letras do alfabeto (incluindo os três caracteres especiais) foram organizadas para serem usadas como números:

1	α	alpha	10	ι	iota	100	ρ	rho
2	β	beta	20	κ	kappa	200	σ	sigma
3	γ	gamma	30	λ	lambda	300	τ	tau
4	δ	delta	40	μ	mu	400	υ	upsilon
5	ε	epsilon	50	ν	nu	500	φ	phi
6	ς	vau* ³⁴	60	ξ	xi	600	χ	chi
7	ζ	zeta	70	ο	omicron	700	ψ	psi
8	η	eta	80	π	pi	800	ω	omega
9	θ	theta	90	Ϟ	koppa*	900	Ϡ	sampi*

Tabela 11 – Símbolos usados no sistema de numeração Jônico

Neste sistema todos os números, entre 1 e 999, poderiam ser representados, no máximo, por três símbolos.

O princípio é mostrado por $\psi\pi\delta = 700 + 80 + 4 = 784$.

Este sistema numérico é compacto mas, aparentemente, tem o grande inconveniente de não permitir que números superiores a 999 sejam expressos. E é de notar ainda que os gregos não tinham um símbolo para o zero. Para superar este problema, foram criados símbolos compostos.

Assim, para representar números maiores que 999 utilizavam o esquema que passo a explicar:

Os números entre 1000 e 9000 eram formados adicionando um *iota* (**ι**) sobrescrito ou subscrito antes dos símbolos de 1 a 9³⁵. Assim, o símbolo ^ιη ou _ιη, representaria 8 000, ou seja, indicava que o número 8 (**η**) tinha que ser multiplicado por 1 000.

³⁴ **vau*, *koppa* e *sampi* são caracteres que caíram em desuso.

³⁵ Para abreviar a escrita, muitas vezes é utilizado um acento ou uma vírgula antes dos símbolos das unidades para indicar que esse número será multiplicado por 1000. No presente trabalho, utilizarei o acento.

Para indicar as dezenas de milhar foi usada uma nova letra, M, da palavra miríade (ou seja, “dez mil”). A letra M colocada ao lado ou abaixo dos símbolos de um número de 1 a 9999 representava esse número multiplicado por 10 000, como por exemplo:

$$\delta M \text{ ou } \overset{\delta}{M} = 40\,000,$$

$$\rho\nu M, \text{ ou } \overset{\rho\nu}{M} = 1\,500\,000.$$

Com estas convenções, os gregos escreveram, por exemplo, ζροεΜ'εωοε = 71 755 875.

Para expressar um número ainda maior, usaram-se potências de 10 000. Para tal, a dupla miríade MM foi introduzida para representar $10\,000^2$ e assim por diante.

Os símbolos organizavam-se sempre na mesma ordem, do maior múltiplo de 10, à esquerda, para o menor, à direita; por isso, se o contexto fosse claro, o acento para representar os milhares podia ser suprimido.


Isto mostrava indícios de uma sistema posicional, pois a mesma letra para os milhares e as unidades, como no número

$$\epsilon\sigma\mu\epsilon = 5245,$$

dava um lugar de valor posicional à letra da esquerda.

Para distinguir um número de uma palavra, os gregos colocavam um acento no fim do número ou uma linha horizontal por cima dele; assim, o número 3208 podia ser representado

$$\acute{\gamma}\sigma\eta' \quad \text{ou} \quad \overline{\gamma\sigma\eta}.$$

Considerando que no alfabeto grego necessitamos apenas de uma única letra para representar, por exemplo, o 900, os egípcios tinham mais trabalho, pois tinham que usar o símbolo  nove vezes. Mas, embora o sistema grego, como um todo, proporcionasse muita economia de escrita, exigia o domínio de numerosos sinais.

Este problema poderia ter sido resolvido se os gregos tivessem adoptado um sistema numérico posicional, facto que não deixa de ser surpreendente, uma vez que os babilónios já o tinham feito. Perante isto, coloca-se muitas vezes a questão: “Porque é que a ciência dos números babilónicos não afectou o pensamento grego por um processo de difusão?” Não há respostas concretas, podemos apenas conjecturar que houve, possivelmente, conhecimento do sistema de numeração babilónico entre os filósofos gregos mas estes não tiveram a percepção das possibilidades e vantagens de tal sistema numérico.

ARITMÉTICA

Analisemos, de forma breve, como os gregos realizavam as operações aritméticas, começando por referir de que modo representavam as fracções.

Fracções

Para escrever uma fracção, os gregos começavam por escrever o numerador marcado com um acento (à direita) e, depois, o denominador marcado com dois acentos e escrito duas vezes. Assim, $\iota\delta' \lambda\zeta'' \lambda\zeta'' = \frac{14}{37}$.

No caso das fracções unitárias, o α foi suprimido e o denominador foi escrito apenas uma vez. Assim, $\nu\varepsilon'' = \frac{1}{55}$.

Multiplicação

Os matemáticos gregos raramente se referem ao cálculo com numerais alfabéticos. A adição, subtracção e mesmo a multiplicação foram, provavelmente, realizadas com o ábaco. Conforme salienta Cajori (1909), “segundo a tradição, Pitágoras, que viajou no Egipto e, talvez, na Índia, foi o primeiro a introduzir este instrumento valioso na Grécia” (p. 73). No entanto, não possuímos nenhuma informação específica do aspecto do ábaco grego ou de que modo foi usado.

No sistema alfabético grego, a multiplicação era realizada começando com a ordem mais elevada de cada factor e formando uma soma dos produtos parciais. Calculemos, por exemplo, 27×42 :

$$\begin{array}{r}
 \kappa \zeta \\
 \hline
 \mu \beta \\
 \omega \mu \\
 \hline
 \sigma\pi \iota\delta \\
 \hline
 \alpha\pi \nu\delta = \alpha\rho\lambda\delta
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 27 \\
 \times 42 \\
 \hline
 800 \ 40 \\
 \hline
 280 \ 14 \\
 \hline
 1080 \ 54 = 1134
 \end{array}$$

A ideia de multiplicar números constituídos por mais de uma letra correspondia a escrever cada factor como uma soma de números representados por uma única letra. Assim, aplicando o que actualmente chamamos propriedade distributiva, os gregos começavam por calcular 20×40 , depois 20×2 , em seguida, 7×40 e, finalmente, 7×2 . Este método, chamado multiplicação grega, em notação moderna corresponde a:

$$\begin{aligned}
 27 \times 42 &= (20 + 7)(40 + 2) \\
 &= 20 \times 40 + 20 \times 2 + 7 \times 40 + 7 \times 2 \\
 &= 1134.
 \end{aligned}$$

Note-se que os gregos tinham 27 símbolos que se multiplicavam entre si, perfazendo um total de 729 respostas diferentes. Certamente que se socorriam de elaboradas tabelas de multiplicação e não é de admirar que só os matemáticos mais hábeis se aventurassem a fazer tais operações.

No comentário de Teão de Alexandria sobre o *Almagesto*, encontram-se as divisões. Como já era de esperar, o processo é longo e tedioso.

Já vimos que noutras civilizações era, geralmente, conhecido um processo para extrair a raiz quadrada. Aqui, não é excepção e Arquimedes (c. 287 - 212 a. C.), na sua obra *Medida do Círculo*, apresenta um grande número de raízes quadradas. Ele afirma, por exemplo, que

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780},$$

mas não dá nenhuma pista sobre o método utilizado para obter estas aproximações.

Não é improvável que os antigos matemáticos gregos tenham encontrado a raiz quadrada apenas por tentativas. Eutócio, um comentador grego do século VI, diz que o método de extracção foi dado por Herão, Papo, Teão e outros comentadores do *Almagesto*. O método de Teão é o único método antigo conhecido por nós e é o mesmo que se usa actualmente, com a excepção de que são utilizadas fracções sexagesimais no lugar das nossas casas decimais.

Ainda relacionado com o simbolismo aritmético, é de mencionar o “contador de areia” (*Arenarius*), um ensaio realizado por Arquimedes. Com ele, Arquimedes mostra que as pessoas estão erradas ao pensarem que a areia não pode ser contada, ou que, podendo ser contada, o número não pode ser expresso por símbolos aritméticos.

Assim, já no século III a. C., os gregos tinham reconhecido claramente duas ideias importantes: uma delas é que a sucessão de números inteiros era susceptível de ser prolongada indefinidamente como o sugere o “contador de areia” de Arquimedes; e a outra é que não só era possível operar com quaisquer números dados, como também referir-se aos números em geral e formular e provar teoremas sobre eles.

Deste modo, estabeleceram as bases da Teoria dos Números, sendo aqui de referir, por exemplo, as investigações dos pitagóricos sobre os números figurados e ainda, as investigações sobre os números primos, designadamente, o teorema de Euclides sobre a existência de um número infinito de números primos e o crivo de Eratóstenes para a obtenção de números primos (que ainda hoje é utilizado nas nossas salas de aula).

ALGUNS DOS GRANDES MATEMÁTICOS GREGOS

Praticamente não existem fontes primárias sobre a antiga Matemática grega, ao contrário do que aconteceu com a Matemática egípcia e babilônica, que nos legaram os seus papiros e placas de argila e, por isso, somos obrigados a confiar em relatos escritos várias centenas de anos após os documentos originais. Dependemos, assim, de fragmentos e cópias de cópias, muitas vezes, distorcidas do documento original. Por conseguinte, o início da história grega está cheio de mitos, lendas e “estórias” duvidosas, preservadas por escritores que viveram séculos depois dos acontecimentos em questão.

Eudêmio de Rodes (séc. IV a. C.), um aluno de Aristóteles, escreveu uma obra aparentemente completa, intitulada *Histórias da Geometria e da Astronomia*, que está perdida. Esta era bem conhecida de Proclo (c. 410 - 485 a. C.), que, na sua obra *Comentários ao Primeiro Livro dos Elementos* de Euclides, dá um breve relato da mesma, a que costumamos chamar Resumo Eudemiano. Este Resumo, que descreve muito sucintamente o desenvolvimento da geometria grega desde os primeiros tempos a Euclides, constitui a nossa informação mais fiável da Matemática dessa época, e, nesta análise, será muitas vezes feita referência ao mesmo.

Tales de Mileto

Tales de Mileto (c. 640 - 550 a. C) pertence à lista dos “sete sábios” e é geralmente intitulado o “pai da geometria” ou o “primeiro matemático”, sendo-lhe atribuída a introdução do estudo de geometria na Grécia. Embora não saibamos ao certo que proposições lhe são directamente imputáveis, parece claro que Tales foi o primeiro matemático a introduzir demonstrações lógicas, baseadas no raciocínio dedutivo e não na experiência e intuição, para dar suporte a um argumento. Este método foi inteiramente novo para o desenvolvimento harmonioso de teoremas demonstrados rigorosamente e, posteriormente, foi considerado uma característica da matemática grega.

Proclo, no seu *Comentários ao Primeiro Livro dos Elementos* de Euclides, afirma que: “Tales foi o primeiro a ir ao Egipto e trazer essa aprendizagem [geometria] para a Grécia. Ele próprio descobriu muitas proposições e revelou, aos seus sucessores, os princípios subjacentes a muitas outras” (Burton, 2006, p.89).

Medições usando Geometria

Várias histórias têm surgido com o propósito de ilustrar o interesse de Tales no Egipto. Segundo a lenda, o seu feito mais espectacular enquanto esteve no Egipto foi a medição indirecta da altura da Grande Pirâmide (Pirâmide de Quéops) através da sua sombra. Existem duas versões desta história, uma em que se descreve um método muito simples de medição, e outra, em que é descrito um método mais complexo.

A versão mais antiga, defendida por Diógenes Laércio, é que Tales terá observado o comprimento da sombra da pirâmide à hora do dia em que a sombra de um

objecto é igual à sua altura. Nesse momento, a altura de uma pirâmide também é igual ao comprimento da sua sombra.

Plutarco (séc. I d. C.) refere-se ao segundo método, ao escrever no *Banquete dos Sete Sábios*:

“Embora ele [o rei do Egito] admire você [Tales] por outras coisas, ele gostou, particularmente, da maneira como você mediu a altura da pirâmide sem qualquer dificuldade ou instrumento; para tal, colocando apenas o seu bordão na extremidade da sombra que a pirâmide projecta, você formou, pelo impacto dos raios do sol, dois triângulos e então mostrou que a altura da pirâmide está para a altura do bordão na mesma relação que as suas respectivas sombras.”

Ora esta versão depende do caso de semelhança de triângulos segundo o qual os lados de triângulos equiláteros são proporcionais. Tales, tendo concebido dois triângulos semelhantes, argumentou que a altura da pirâmide (h) está para a altura do bordão (h') assim como o comprimento da sombra da pirâmide (s) está para o comprimento da sombra do bordão (s'):

$$\frac{h}{h'} = \frac{s}{s'}$$

Já era do conhecimento de Tales que o comprimento de cada lado da base da pirâmide era 230,38 metros e que o seu bordão tinha 1,83 metros de altura. Posto isto, foi apenas necessário medir a sombra da pirâmide (a distância entre a extremidade da sombra e o centro da base da pirâmide) e a sombra do seu bordão. Constatou que a distância da extremidade da sombra da pirâmide à borda da base era de 104,31 metros e que a sombra do bordão media 2,74 metros. Na figura 42 estão esquematizados estes dados:

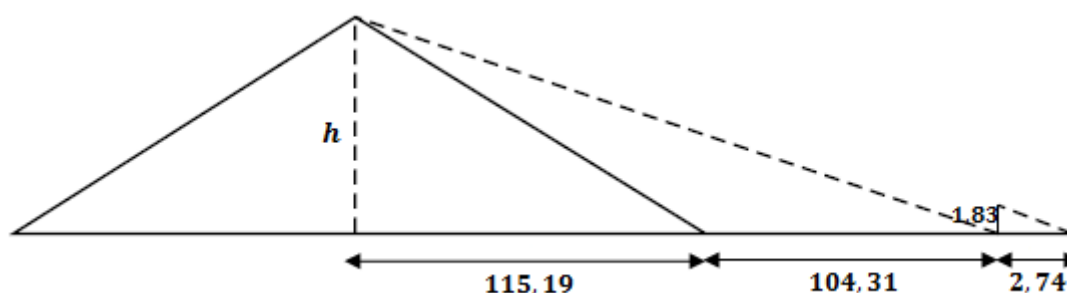


Fig. 42 – Determinação da altura da pirâmide de Quéops
(as medidas estão em metros)

Com as dimensões correspondentes a três termos da proporção, Tales conseguia calcular o quarto termo, que correspondia à altura da pirâmide:

$$h = \frac{sh'}{s'} = \frac{(115,19 + 104,31) \times 1,83}{2,74} \approx 146,6 \text{ metros}^{36}.$$

³⁶ Actualmente, devido à erosão e a uma ligeira inclinação, a pirâmide tem apenas 137,16 metros de altura.

Esta solução pressupõe um conhecimento das proporções mas o papiro de Rhind mostra-nos que já os egípcios conheciam as proporções.

Eudémio, no seu Resumo, atribui a Tales a invenção de teoremas sobre a igualdade de ângulos verticais, a igualdade dos ângulos na base de um triângulo isósceles, a bissecção de um círculo por qualquer diâmetro e a congruência de dois triângulos com um lado e os dois ângulos adjacentes iguais (caso ALA).

Deste modo, Tales foi o primeiro a aplicar a geometria teórica para usos práticos. O teorema de que todos os ângulos inscritos num semicírculo são ângulos rectos é atribuído por alguns autores antigos a Tales, por outros a Pitágoras, embora esse resultado já tivesse sido reconhecido pelos babilónios cerca de 1400 anos antes. Tales teve, sem dúvida, conhecimento de outros teoremas, não registados pelos antigos. Tem sido conjecturado que ele sabia que a soma dos três ângulos de um triângulo é igual a dois ângulos rectos e que os lados de triângulos equiláteros são proporcionais, o que, como já vimos, está subjacente ao processo de determinação da altura de uma pirâmide.

Muito provavelmente, os egípcios devem ter feito uso dos teoremas acima referidos, em algumas das suas construções encontradas no papiro de Rhind, mas foi deixado para o filósofo grego dar a conhecer estas verdades, que outros viram, mas não formularam em palavras.

Podemos dizer que Tales criou a geometria das linhas, de forma essencialmente abstracta, enquanto os egípcios estudaram apenas a geometria das superfícies e os rudimentos da geometria dos sólidos, de forma empírica.

Mas as aplicações práticas da geometria atribuídas a Tales não ficam por aqui, pois é provável que Tales também tenha aplicado a congruência de triângulos para medir a distância de um navio à costa.

O modo como terá usado o seu conhecimento de geometria para o efeito tem sido alvo de diversas conjecturas ao longo dos tempos, uma vez que não existe nenhum registo claro sobre os métodos por ele utilizados. Por isso, as explicações que a seguir se apresentam correspondem a duas conjecturas.

Segundo uma delas, apresentada por Proclo, Tales utilizou o critério de congruências segundo o qual dois triângulos são congruentes se tiverem, de um para o outro, um lado e os dois ângulos adjacentes a esse lado iguais (caso ALA).

A hipótese mais provável é que Tales, observando o navio do topo de uma torre de vigia (digamos de altura h) usou a proporcionalidade dos lados de dois triângulos rectângulos semelhantes (ver figura 43). Tales precisava apenas de um instrumento simples, com duas “pernas” a formar um ângulo recto, para que pudesse marcar o ponto E, onde a linha de visão (do observador que está em C) com o navio corta a “perna” paralela ao chão. Isto forma dois triângulos semelhantes: os triângulos $[ACB]$ e $[DCE]$.



Fig. 43 – Ilustração de dois triângulos semelhantes

Pelas propriedades dos triângulos semelhantes, obtemos

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AD} + \overline{DC}}{\overline{DC}},$$

Donde,

$$\overline{AB} = \frac{\overline{DE} \cdot (\overline{AD} + \overline{DC})}{\overline{DC}}.$$

Note-se que os comprimentos dos segmentos de recta $[CD]$ e $[DE]$ podem ser directamente medidos por se tratar de comprimentos pequenos. A altura da torre, $[DA]$, também poderia ser medida, por exemplo, com a ajuda de uma corda esticada. Temos aqui um processo rápido e eficiente que permite determinar a distância de qualquer navio à costa.

A única objecção a esta conjectura é que não é necessário aplicar o critério de congruência de triângulos em que os triângulos têm, de um para o outro, um lado e os ângulos adjacentes a esse lado iguais, como Proclo referiu.

Segundo uma outra conjectura, para encontrar a distância de um ponto A, em terra firme (marcado, por exemplo, com uma estaca fixa no chão), ao navio que se encontra no ponto B, medimos a partir de A e ao longo de uma linha recta perpendicular a $[AB]$ um comprimento arbitrário \overline{AC} e, de seguida, determinamos o ponto médio de $[AC]$, nomeadamente, D (ver figura 44). Depois, construímos o segmento de recta $[CE]$ de modo que seja perpendicular a $[AC]$ e que os pontos B, D e E, estejam todos alinhados entre si.

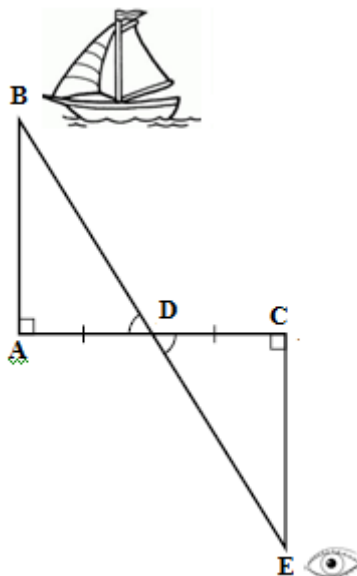


Fig. 44 – Ilustração de dois triângulos congruentes

É evidente que $\overline{CE} = \overline{AB}$ e para que se possa determinar o comprimento de $[AB]$ basta medir o comprimento de $[CE]$ que, apesar de poder ser muito grande, é mensurável porque se encontra em terra.

Esta conjectura utiliza, de facto, o critério de congruência de triângulos (caso ALA) referido por Proclo, mas conduz a uma outra objecção. Parece pouco credível que, para determinar a distância do navio, o observador tenha que construir e medir, em terra, um enorme triângulo; e, por isso, este método não tem grande valor prático. É mais provável que, em vez do triângulo congruente $[ECD]$, tenha sido construído um triângulo menor, semelhante ao triângulo $[BAD]$.

Foi também com Tales que se iniciou o estudo da Astronomia científica. Entre os seus contemporâneos, Tales foi mais famoso como astrónomo do que como matemático. Diz-se que ficou muito conhecido pela previsão de um eclipse solar em 585 a.C., não se sabendo se previu o dia da ocorrência ou simplesmente o ano.

Muitas são as histórias que se contam sobre ele e, de acordo com Platão, numa certa noite, Tales caminhava olhando para o céu. Olhou tão atentamente para as estrelas que caiu numa vala. Uma mulher que o observava, exclamou: “Como pode dizer o que está acontecendo no céu quando não consegue ver o que está debaixo dos seus pés?” Este episódio da vida de Tales foi, muitas vezes, citado na Antiguidade para ilustrar a natureza “lunática” dos estudiosos.

Pitágoras

Da vida de Pitágoras quase nada pode ser afirmado com certeza, já que ele foi alvo de muitas histórias sobre as suas viagens, poderes milagrosos e sobre os seus ensinamentos. Sabe-se que nasceu na Ilha de Samos, mas não sabemos ao certo quando,

apontando as melhores estimativas para uma data entre 580 e 569 a. C., e que morreu em 497 a. C.

De acordo com alguns relatos, Pitágoras terá viajado pelo Egito, onde se encontrou com Tales, e também pela Mesopotâmia. Depois regressou a Samos mas, insatisfeito com o poder político, partiu para Crotona (sul da Itália) onde, por volta de 530 a.C., fundou uma sociedade secreta, mais tarde conhecida como os pitagóricos, cujo principal objectivo era o estudo da Matemática e da Filosofia.

Para os pitagóricos, a ciência era constituída por quatro disciplinas fundamentais: aritmética, geometria, astronomia e música. No entanto, atribuíam maior importância à aritmética do que às restantes, uma vez que para eles, o princípio essencial de que são constituídas todas as coisas é o *número*, ou seja, as relações matemáticas. Assim, para os pitagóricos, a Matemática apresentava-se como instrumento de compreensão do real. Em última análise, “*tudo é número*”.

Dado o interesse dos pitagóricos pelos números, não é de admirar que tenham estudado as propriedades dos números inteiros positivos, o que pode ser considerado como os primeiros passos no desenvolvimento da Teoria dos Números.

Assim, o estudo dos números de uma forma abstracta começou na Grécia, no século VI a.C., com Pitágoras e os pitagóricos.

Números figurados

Uma vez que o ensino de Pitágoras foi inteiramente oral e por causa do costume dos pitagóricos de atribuírem todas as descobertas ao venerado fundador, é agora difícil saber quais as descobertas matemáticas que devem ser creditados ao próprio Pitágoras, e quais pertencem a outros membros da fraternidade.

Apesar de não ter sido preservado nenhum documento que testemunhe as primeiras reflexões de carácter aritmético dos pitagóricos, existem algumas fontes de informação sobre a sua tradição aritmética da autoria de filósofos que viveram muitos séculos depois, nomeadamente, Nicómano de Gerasa (séc. I d. C.) e Teão de Esmirna (séc. II d. C.).

Nestes textos encontramos um dos aspectos mais interessantes da aritmética pitagórica, o estudo dos *números figurados* (ou poligonais).

Estes números, considerados como o número de pontos de certas configurações geométricas, foram classificados como triangulares, quadrados, pentagonais, e assim por diante, de acordo com as formas obtidas pela disposição dos pontos.

Os números representados desta maneira, estabeleciam ligações entre a aritmética e a geometria, as quais certamente despertavam a atenção dos pitagóricos.

Como foi referido por Nicómano, na sua *Introdução Aritmética*, o próprio Pitágoras estava, pelo menos, familiarizado com os números triangulares e muito provavelmente com os números quadrados, e os outros números poligonais foram estudados pelos seus seguidores.

Consideremos a sucessão dos números naturais, 1, 2, 3, 4, 5, etc., e consideremos o primeiro termo, a soma dos dois primeiros, a soma dos três primeiros, etc.; obtêm-se os números 1, 3, 6, 10, 15, etc..

Estes números dizem-se números triangulares porque cada um deles representa um número de pontos que pode ser organizado uniformemente num triângulo equilátero, como nos mostra a figura 45.

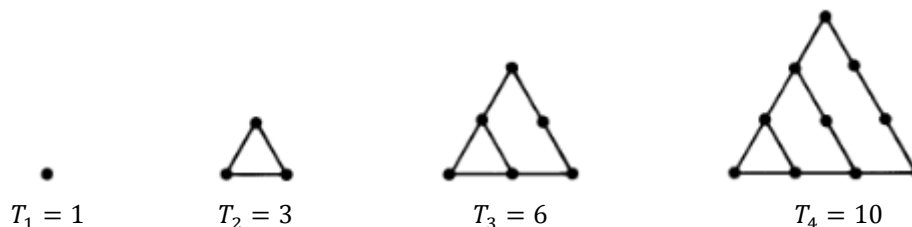


Fig. 45 – Números triangulares

Recorde-se que a soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética é igual ao produto do número de termos, n , pela semi-soma dos termos extremos.

Assim, o número triangular de ordem n , T_n , é dado por:

$$T_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Consideremos agora a sucessão dos números naturais ímpares, 1, 3, 5, 7, 9, etc., progressão aritmética de razão 2, cujo termo geral é $2n - 1$ e consideremos também o 1º termo, a soma dos dois primeiros termos, a soma dos três primeiros termos, etc.; obtemos os números 1, 4, 9, 16, 25, etc.

Estes números dizem-se números quadrangulares ou quadrados, porque a disposição dos pontos representativos destes números forma um quadrado, como podemos ver na figura 46:

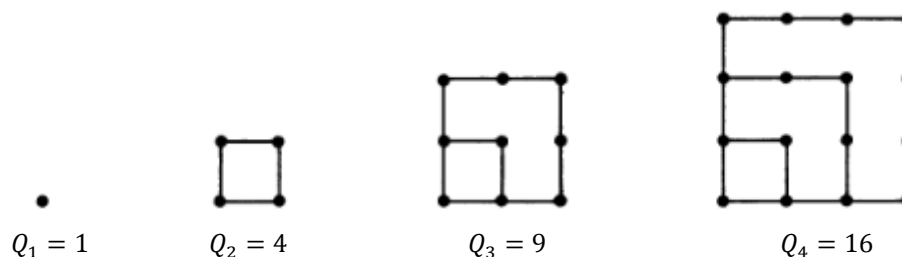


Fig. 46 – Números quadrados

O número quadrangular de ordem n é, evidentemente, $Q_n = n^2$.

Consideremos agora a progressão aritmética de razão 3, de termo geral igual a $3n - 2$, 1, 4, 7, 10, 13, etc.

Tomando o 1º termo, a soma dos dois primeiros termos, a soma dos três primeiros, etc., obtêm-se os números 1, 5, 12, 22, 35, etc.; que são chamados números pentagonais, como estão representados na figura seguinte:

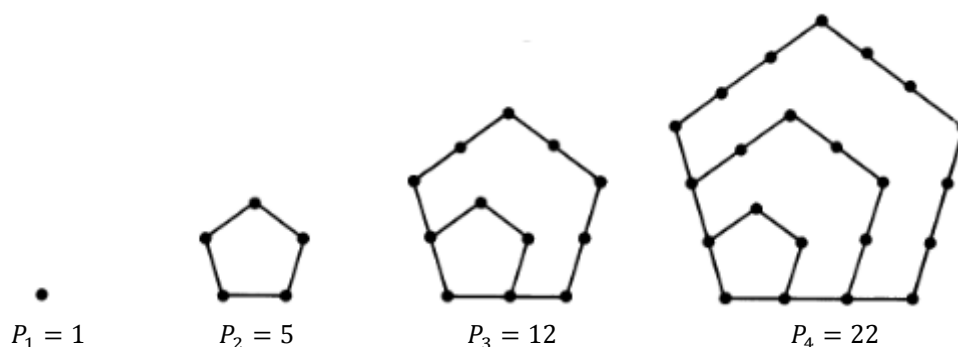


Fig. 47 – Números pentagonais

O número pentagonal de ordem n é dado por

$$P_n = 1 + 4 + 7 + \dots + (3n - 2) = \frac{n(3n - 1)}{2}.$$

Analogamente se podem obter os números hexagonais, heptagonais, octogonais, etc. Mostra-se que o número m -gonal de ordem n , quer dizer, o número correspondente a um polígono de m ângulos, de ordem n , é

$$P_n^{(m)} = \frac{1}{2}n[2 + (n - 1)(m - 2)]$$

Por exemplo, o 6º número pentagonal, isto é, o número 5-gonal de ordem 6, é

$$P_6^{(5)} = \frac{1}{2} \times 6 \times (2 + 5 \times 3) = 51,$$

número que coincide com o obtido, fazendo $n = 6$, em

$$P_n = \frac{n(3n - 1)}{2}.$$

Muitas regras interessantes sobre os números figurados podem ser estabelecidas de forma puramente geométrica. Uma delas é que “a soma de qualquer número de inteiros ímpares consecutivos, começando em 1, é um quadrado perfeito”. A figura 48 mostra, de forma explícita, essa regra:

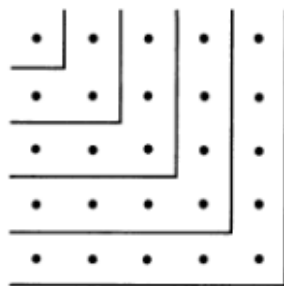


Fig. 48 – 5^2 como a soma dos 5 primeiros naturais ímpares

Esta regra também pode ser facilmente estabelecida de forma algébrica, uma vez que

$$Q_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = \frac{n[1 + (2n - 1)]}{2} = n^2.$$

Outra regra que merece ser salientada é que “a soma de dois números triangulares consecutivos é um número quadrado”. Isso pode ser confirmado geometricamente, separando os pontos com uma barra, como se pode ver na figura seguinte.

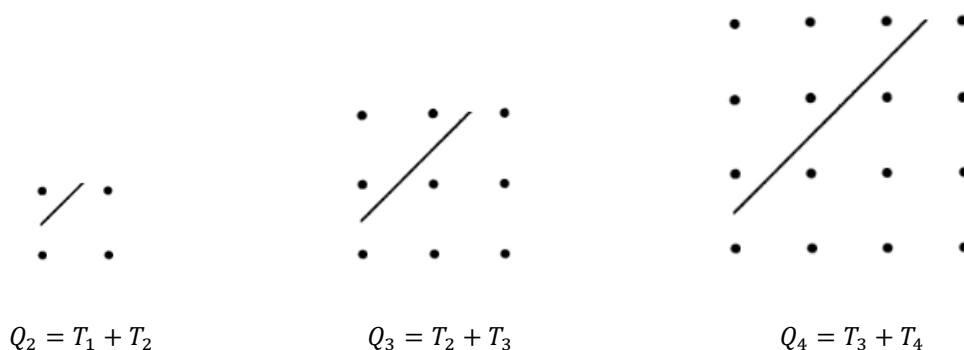


Fig. 49 – Números quadrados como soma de dois números triangulares

Também se prova, sem dificuldades, este resultado usando um argumento algébrico.

Note-se que

$$1 + 3 = 4 = 2^2, \quad 3 + 6 = 9 = 3^2, \\ 6 + 10 = 16 = 4^2, \quad 10 + 15 = 25 = 5^2, \text{ etc.}$$

De um modo geral, temos

$$T_{n-1} + T_n = \frac{(n - 1)n}{2} + \frac{n(n + 1)}{2} = \frac{n^2 - n + n^2 + n}{2} = n^2 = Q_n.$$

Números amigos

Um outro exemplo do contributo dos pitagóricos para a Teoria dos Números é o estudo dos *números amigos* (ou *amigáveis*).

Dois números dizem-se amigos se cada um deles é a soma dos divisores próprios do outro. Por exemplo, 284 e 220, que constituem o par atribuído a Pitágoras, são *amigos*, uma vez que os divisores próprios de 220 são 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110, e a sua soma é 284; por outro lado, os divisores próprios de 284 são 1, 2, 4, 71, 142 e a sua soma é 220.

Também foi com os pitagóricos que começou a ser atribuído um certo misticismo aos números, tendo este par de números alcançado uma aura mística. Além disso, havia a superstição de que dois talismãs tendo estes números selariam uma amizade perfeita entre quem os usasse. Os números vieram a desempenhar um papel importante na magia, feitiço, astrologia e nos signos do Horóscopo.

Curiosamente, parece que nenhum novo par de números amigos foi descoberto até Pierre de Fermat ter encontrado, em 1636, o par 17 296 e 18 416.

Números perfeitos, deficientes e abundantes

Outros números que também têm conexões místicas essenciais para especulações relacionadas com a numerologia, e que às vezes também são atribuídos aos pitagóricos, são os *números perfeitos, deficientes e abundantes*.

Um número é *perfeito* se for igual à soma dos seus divisores próprios; é *deficiente* se exceder a soma dos seus divisores próprios e é *abundante* se for menor que a soma dos seus divisores próprios.

Até 1952, conheciam-se apenas 12 números perfeitos, todos números pares, dos quais os três primeiros são 6, 28 e 496.

A última proposição do Livro IX dos *Elementos* de Euclides, que será oportunamente analisada, mostra como encontrar *números perfeitos*.

Prova geométrica do Teorema de Pitágoras

É de referir aqui as alusões de Burton (2006) ao mencionar que “embora a tradição seja unânime em atribuir o chamado Teorema de Pitágoras ao grande professor, já vimos que os babilónios conheciam o resultado para certos triângulos específicos, pelo menos, mil anos antes de Pitágoras, mas a primeira prova geral deste teorema, provavelmente foi dada por Pitágoras” (p. 107).

Uma vez que nenhum dos vários escritores gregos que lhe atribuiu o teorema viveu nos cinco séculos posteriores a ele, há pouca evidência convincente para corroborar a crença geral de que o mestre, ou até mesmo um de seus discípulos mais próximos, tenha dado a primeira demonstração rigorosa desta propriedade característica dos triângulos rectângulos.

O método de prova utilizado originalmente pelos pitagóricos tem sido um tema favorito de muitas conjecturas. Pensa-se que se foram usados os métodos do Livro II dos *Elementos* de Euclides; provavelmente foi seguido um tipo de prova, envolvendo dissecções, como a seguir se explica.

Um quadrado grande de lado $a + b$ é dividido em dois quadrados menores de lados a e b e dois rectângulos iguais com lados a e b ; cada um destes dois rectângulos pode ser dividido em dois triângulos rectângulos iguais ao desenharmos a diagonal c . Os quatro triângulos podem ser organizados dentro de outro quadrado de lado $a + b$, conforme mostra a segunda figura.

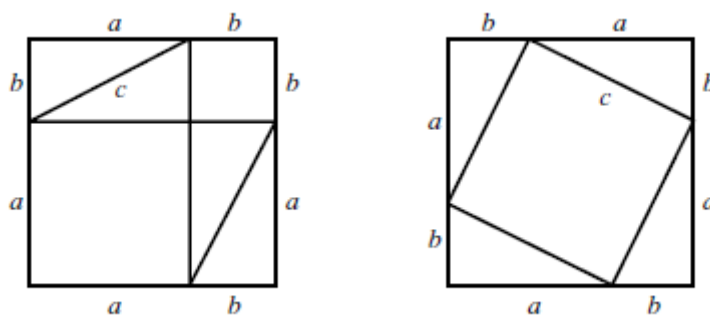


Fig. 50 – Demonstração do Teorema de Pitágoras

Agora a área do mesmo quadrado pode ser representada de duas maneiras: como a soma das áreas de dois quadrados e dois rectângulos

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab;$$

e como a soma das áreas de um quadrado e quatro triângulos,

$$(a + b)^2 = c^2 + 4\left(\frac{ab}{2}\right).$$

Quando os quatro triângulos são retirados do quadrado maior em cada figura, as áreas resultantes são iguais; ou, equivalentemente, $c^2 = a^2 + b^2$. Portanto, o quadrado em c é igual à soma dos quadrados em a e b .

Conforme realça Burton (2006), “tais provas através da adição de áreas são tão simples que talvez já tivessem sido feitas anterior e independentemente por outras culturas; no entanto, nenhum registo do Teorema de Pitágoras aparece em qualquer dos documentos sobreviventes do antigo Egipto)” (p. 108).

Na verdade, a civilização chinesa da mesma época, que se tinha desenvolvido completamente isolada das civilizações grega e babilónica, tinha uma prova genuína, possivelmente muito mais antiga da que acabámos de referir. Esta prova, que será oportunamente analisada no anexo dedicado à Matemática na China (anexo A.4), encontra-se no mais antigo texto chinês conhecido, relacionado com matemática, intitulado *A Aritmética Clássica do Gnomón*.

O Teorema de Pitágoras tem suscitado o interesse de muitos estudiosos e matemáticos através dos séculos, e centenas de demonstrações têm sido desenvolvidas. Em (Loomis, 1968) podemos encontrar 370 demonstrações.

Uma das demonstrações mais famosas é a apresentada na Proposição 47 do Livro I dos *Elementos* de Euclides (a analisar posteriormente).

Ternos pitagóricos

A descoberta geométrica de que os lados de um triângulo estavam relacionados por uma lei exprimível em números, conduziu, naturalmente, a um problema aritmético, que consiste em encontrar todos os inteiros, x , y e z , que podem representar os catetos e a hipotenusa de um triângulo retângulo. Um terno de números deste tipo é conhecido como um terno pitagórico e, como já vimos, uma análise da Plimpton 322 mostra-nos que os antigos babilônios já sabiam como calcular esses ternos.

É atribuída a Pitágoras uma solução parcial do problema, expressa pelos números

$$x = 2n + 1, \quad y = 2n^2 + 2n, \quad z = 2n^2 + 2n + 1,$$

onde $n \geq 1$ é um inteiro arbitrário.

No entanto, esta regra não permite obter todos os ternos pitagóricos; foi preciso esperar até Euclides escrever os seus *Elementos* para aparecer uma solução completa para este problema. No Livro X dos *Elementos*, Euclides apresenta a seguinte solução:

$$x = 2mn, \quad y = m^2 - n^2, \quad z = m^2 + n^2,$$

onde m e n são inteiros positivos, com $m > n$.

Os incomensuráveis

O feito mais importante dos pitagóricos, na sua influência sobre a evolução do conceito de número, foi, sem dúvida, a descoberta dos números “irracionais”.

Uma vez que, para eles, todos os comprimentos podiam ser contados, assumiram que podíamos encontrar uma medida que permitisse contar tanto o lado como a diagonal de um quadrado. Por outras palavras, deveria haver um comprimento tal que o lado e a diagonal fossem múltiplos inteiros desse comprimento. Infelizmente, acabaram por descobrir que isso não é verdade. O lado e a diagonal de um quadrado são incomensuráveis; ou seja, não admitem uma medida em comum.

Esta descoberta, por volta de 430 a. C., obrigou os pitagóricos a repensarem a sua filosofia de que “*tudo é número*” e levou os matemáticos gregos a desenvolverem outras novas teorias, pois, embora esta descoberta não tivesse perturbado o desenvolvimento da aritmética, gerou novos campos de investigação na geometria.

A mais antiga prova conhecida que lida com segmentos de recta incomensuráveis corresponde, no seu essencial, à prova moderna da irracionalidade de $\sqrt{2}$. Esta é a prova da incomensurabilidade da diagonal de um quadrado com o seu lado e encontra-se no Livro X dos *Elementos de Euclides*.

Contudo, uma referência numa das obras de Aristóteles esclarece que a prova já era conhecida muito antes do tempo de Euclides. Certas passagens nos *Segundos Analíticos* de Aristóteles têm sido interpretadas como se referissem que se o lado e a diagonal de um quadrado fossem comensuráveis, então números pares seriam iguais a números ímpares.

Como acontecia na maioria das demonstrações mais clássicas, o método de argumento era indirecto. Assim, presumiu-se a negação da conclusão pretendida, tendo-se obtido uma contradição. Ora, isto assemelha-se a uma demonstração por *redução ao absurdo*.

Considere-se um quadrado de lado l e diagonal d , e, de seguida, desenhe-se um quadrado de lado d , que, obviamente, terá o dobro da área do quadrado de lado l , como é fácil concluir por observação da figura 51 (basta contar o número de triângulos de cada quadrado):

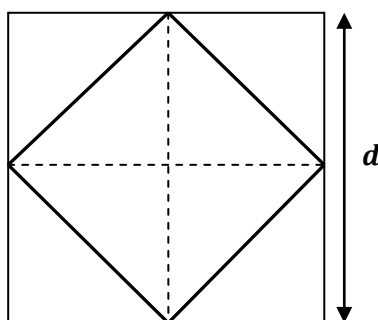


Fig. 51 – O quadrado de lado d tem o dobro da área do quadrado de lado l

A partir desta figura, e tendo em conta as áreas dos dois quadrados, poderá ser demonstrada a incomensurabilidade entre o lado e a diagonal do quadrado. No entanto, por uma questão de brevidade, apresentarei na nossa linguagem algébrica, a prova da irracionalidade de $\sqrt{2}$.

Seja $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, em que m e n são números primos entre si.

Daqui, temos que

$$m^2 = 2n^2,$$

donde resulta que m^2 é um número par, e, portanto, m também o é; como $\frac{m}{n}$ é uma fracção irredutível, então n terá que ser ímpar.

Mas, se m é par, segue-se que m^2 é divisível por 4, e, portanto, n^2 será divisível por 2, e, por isso, n será par.

Assim, a hipótese inicial de que $\sqrt{2}$ é comensurável (ou seja, pode ser representada na forma de fracção), conduz à impossibilidade de um número n ser, ao mesmo tempo, par e ímpar.

Os pitagóricos não foram os primeiros a considerar o valor numérico de $\sqrt{2}$ (comprimento da diagonal de um quadrado de lado 1), pois, como já foi referido, a placa babilónica YBC 7289 contém uma figura que representa um quadrado com a sua diagonal, onde é dada uma aproximação para o valor de $\sqrt{2}$. Mas, note-se que foram os gregos os primeiros a reconhecer, formalmente, que não é possível encontrar um valor “exacto” para a $\sqrt{2}$.

Aqui, é bem notória a diferença entre estas duas civilizações e a preferência dada pelos gregos a conceitos abstractos; enquanto os babilónios determinaram aproximações para o valor de $\sqrt{2}$, os gregos foram mais longe e provaram que se tratava de um número irracional.

Euclides

Tal como acontece com outros grandes matemáticos da Grécia antiga, sabemos muito pouco sobre a vida de Euclides. É certo que fundou uma escola e ensinou em Alexandria e, segundo Proclo, viveu durante o reinado de Ptolomeu I, o que significa que desenvolveu o seu trabalho na primeira metade do século III a.C.

Euclides escreveu várias obras científicas, sendo a mais famosa *Os Elementos*, que é o mais antigo tratado grego sobre Matemática que chegou até nós na sua totalidade. Exposições sistemáticas de geometria já tinham aparecido na Grécia, no século V a.C., mas não foram preservadas, pela razão óbvia de que todas foram suplantadas pelos *Elementos* de Euclides. O prestígio dos *Elementos* era tão grande no mundo antigo que Euclides raramente era referido pelo nome, mas sim pela alcunha “*O escritor dos Elementos*” ou, às vezes, simplesmente, “*O Geómetra*”.

“Este livro maravilhoso”, escreveu Sir Thomas Heath, “com todas as suas imperfeições, que são na verdade suficientemente ligeiras quando temos em conta a data em que ele apareceu, é e continuará a ser o maior livro matemático de todos os tempos” (Burton, 2006, p. 161).

Poucos livros têm sido mais importantes para o pensamento e a educação do mundo Ocidental que *Os Elementos* de Euclides. Dificilmente qualquer outro livro, excepto a Bíblia, foi mais amplamente distribuído ou estudado. Mais de mil edições dos *Elementos* apareceram desde a primeira versão impressa em 1482; e, antes disso, cópias do manuscrito dominaram grande parte do ensino da Matemática na Europa. Infelizmente, não foi encontrada nenhuma cópia do trabalho que remonte ao tempo de Euclides.

Das várias edições que foram surgindo, uma das melhores versões, senão a melhor, é a tradução inglesa de Thomas L. Heath (1908) que a enriqueceu, de forma considerável, com uma excelente introdução, além de inúmeros, valiosos e esclarecedores comentários.

Felizmente, também existe uma tradução portuguesa (dos Livros I-VI, XI e XII), feita por João Chrysostomo de Faria e Sousa de Vasoconcellos e Sá, a partir da versão latina de Frederico Commandino (1506 - 1575), publicada pela Universidade de Coimbra em 1855. As 48 proposições do Livro I estão disponíveis no seguinte endereço: <http://www.mat.uc.pt/~jaimecs/euclid/elem>

Os treze livros da obra podem ser comparados a capítulos de um livro que possuem o seguinte conteúdo:

- **Livro I:** Definições, axiomas e postulados; os três casos de congruência de triângulos; teoria das paralelas; relações entre áreas de paralelogramos, triângulos e quadrados e o Teorema de Pitágoras (que é a Proposição 47).
- **Livro II:** Trata o que usualmente se designa por álgebra geométrica ou geometria das áreas, num total de 14 proposições.
- **Livro III:** Consiste em trinta e nove proposições contendo muitos dos teoremas conhecidos sobre ângulos, círculos, cordas, secantes e tangentes.
- **Livro IV:** Construção de alguns polígonos regulares, bem como a sua inscrição e circunscricção num círculo.
- **Livro V:** Teoria das proporções de Eudoxo, na sua forma puramente geométrica.
- **Livro VI:** Aplicação dos resultados do Livro V à geometria plana, tratando, particularmente, da semelhança de figuras.
- **Livros VII, VIII e IX:** Livros consagrados à Teoria de Números.
- **Livro X:** Versa sobre as grandezas irracionais. É o Livro mais extenso deste conjunto e é, muitas vezes, considerado o mais difícil.

Os livros XI, XII e XIII são conhecidos pelo nome de *livros estereométricos*, por neles serem consideradas figuras da geometria tridimensional.

- **Livros XI:** É dedicado ao paralelismo e à perpendicularidade de rectas e planos, e ao estudo de ângulos de sólidos e de prismas.
- **Livro XII:** Estabelece razões entre áreas de figuras planas e entre volumes de sólidos, por um método que mais tarde passou a ser designado por *método de exaustão*.
- **Livro XIII:** Trata do estudo dos cinco poliedros regulares, actualmente também conhecidos por *sólidos platónicos*.

Livro I dos *Elementos* de Euclides

Sem comentário introdutório e de forma abrupta, o primeiro livro dos *Elementos* começa com uma lista de 23 definições. Estas incluem, por exemplo, que um ponto é “*o que não tem partes*”, e que uma linha é “*comprimento sem largura*”.

Euclides, em seguida, estabelece os dez princípios do raciocínio em que se basearam as provas nos *Elementos*, introduzindo-os da seguinte forma:

Postulados

1. Pode ser traçada uma linha recta de qualquer ponto para qualquer outro ponto.
2. Uma linha recta finita pode ser produzida continuamente numa linha.
3. Um círculo pode ser descrito com quaisquer centro e distância.
4. Todos os ângulos rectos são iguais entre si.
5. Se uma linha recta incidir em duas linhas rectas e fizer os ângulos internos do mesmo lado menores do que dois ângulos rectos, então as duas linhas rectas, se prolongadas indefinidamente, encontram-se do lado em que estão os ângulos menores do que dois ângulos rectos.

Para além dos postulados (específicos à matéria em questão), Euclides utilizou princípios de ordem geral, as Noções Comuns.

Noções comuns

1. Coisas que são iguais à mesma coisa também são iguais entre si.
2. Se iguais forem adicionados a iguais, as totalidades são iguais.
3. Se iguais forem subtraídas de iguais, os restantes são iguais.
4. Coisas que coincidem uma com a outra são iguais entre si.
5. O todo é maior do que a parte.

O quinto postulado, mais conhecido como o *postulado das paralelas*, tornou-se uma das declarações mais famosas e controversas na História da Matemática.

O que este postulado tem de notável é que faz uma declaração sobre a extensão inteira de uma linha recta, uma região que não conhecemos e que está fora do alcance de uma eventual observação, como está esquematizado na figura 52:

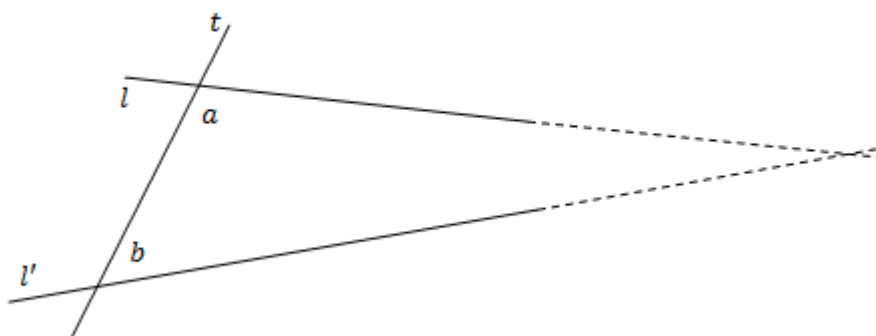


Fig. 52 – O quinto postulado de Euclides

São muitas as proposições dos *Elementos* que merecem referência, no entanto, e devido à sua extensão, cingir-me-ei apenas às proposições mais “famosas”.

Demonstração do Teorema de Pitágoras

Como já tive oportunidade de referir, a Proposição 47 do Livro I, é justamente a demonstração do Teorema de Pitágoras. Embora poucas das proposições e demonstrações dos *Elementos* tenham sido descobertas pelo próprio Euclides, esta prova do Teorema de Pitágoras é geralmente atribuída ao próprio.

Elementos I, 47³⁷: *Em todo o triângulo rectângulo, o quadrado feito sobre o lado oposto ao ângulo recto, é igual aos quadrados formados sobre os outros lados, que fazem o mesmo ângulo recto.*

Considere-se o triângulo $[ABC]$, rectângulo em A, e seja H o pé da altura relativa a A. Depois de construídos os quadrados sobre os lados do triângulo, prolongue-se a altura AH, como está representado na figura 53.

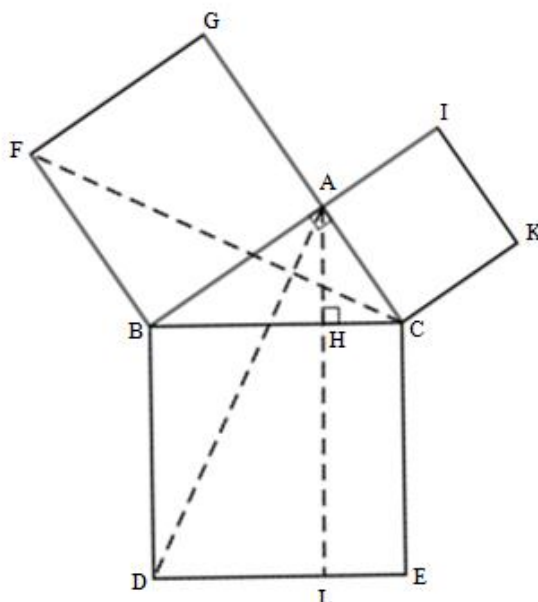


Fig. 53 – Demonstração do Teorema de Pitágoras

Os triângulos $[FBC]$ e $[ABD]$ são congruentes, uma vez que $\overline{BF} = \overline{BA}$ e $\overline{BC} = \overline{BD}$ e tanto $\angle FBC$ como $\angle ABD$ são iguais à soma da amplitude do $\angle ABC$ com um ângulo recto.

Tendo em conta que a área de um paralelogramo é o dobro da área de um triângulo com a mesma base e compreendido entre as mesmas paralelas, temos que a área do quadrado $[ABFG]$ é o dobro da área do triângulo $[FBC]$ e a área do rectângulo $[BDLH]$ é o dobro da área do triângulo $[ABD]$.

Devido à congruência dos triângulos, concluímos que a área do quadrado $[ABFG]$ é igual à área do rectângulo $[BDLH]$.

³⁷ As proposições e problemas apresentados neste anexo foram retirados de (Euclides, 1855).

Provamos, de modo análogo, que os triângulos $[KCB]$ e $[ACE]$ também são congruentes e, portanto, a área do quadrado $[ACKI]$ é igual à área do rectângulo $[CELH]$.

Concluimos, deste modo, que a soma das áreas dos dois quadrados é igual à soma das áreas dos dois rectângulos, ou seja, a área do quadrado $[BDEC]$.

Euclides demonstrou, assim, o Teorema de Pitágoras, sem fazer uso das proporções, uma vez que o conceito de semelhança só foi abordado nos Livros V e VI e, supostamente, Euclides quis apresentar esta proposição tão cedo quanto possível.

Livro II dos *Elementos*

Este livro poderia ser chamado um *Tratado sobre álgebra geométrica*, porque é algébrico na substância mas geométrico no tratamento. Problemas algébricos são totalmente expressos em linguagem geométrica e resolvidos por métodos geométricos. Para colmatar a falta de um simbolismo algébrico adequado, Euclides utilizou segmentos de recta para representar números.

Elementos II, 4: *Se uma linha recta for cortada ao acaso, então o quadrado sobre o todo é igual aos quadrados sobre os segmentos e duas vezes o rectângulo contido pelos segmentos.*

Ora, esta proposição admite uma interpretação algébrica, pois pode ser interpretada como a expressão da fórmula do quadrado do binómio:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Geometricamente, a sua representação será a seguinte:

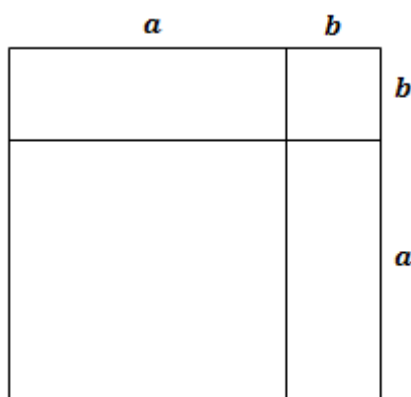


Fig. 54 – Versão geométrica da fórmula para o quadrado de uma soma

Livro VI dos *Elementos*

O Livro VI aplica a teoria das proporções à semelhança de figuras planas. Aqui, voltamos ao Teorema de Pitágoras e à secção de ouro, mas, agora, como teoremas respeitantes a razões de grandezas, que correspondem às Proposições 31 e 30, respectivamente.

É de particular interesse a Proposição 27 que corresponde ao teorema que contém o primeiro problema de maximização que chegou até nós, com a prova de que o quadrado é, de todos os rectângulos de um dado perímetro, o que tem área máxima.

Livros VII, VIII e IX - Teoria dos Números

Apesar desta obra se intitular *Os Elementos de Geometria*, o seu conteúdo vai muito além da geometria. Três dos livros dos *Elementos* (nomeadamente, VII, VIII e IX), contendo um total de 102 proposições, são dedicados à aritmética, ou melhor dizendo, à Teoria dos Números. Estas proposições lidam principalmente com a natureza e as propriedades dos chamados “números naturais” ou “inteiros positivos”.

Ao longo destes três livros, Euclides mostrou-se particularmente interessado em questões relacionadas com a divisibilidade e dedicou especial atenção aos números primos.

Nestes livros, é bem notório que Euclides se baseou em conhecimentos anteriores, uma vez que grande parte do conteúdo destes três livros de aritmética pode ser atribuído aos pitagóricos. No entanto, embora muitos dos resultados já fossem conhecidos há muito tempo, nem sempre foram demonstrados rigorosamente.

Relativamente ao Livro VII é de destacar a Proposição 2, onde Euclides aplica um algoritmo para encontrar o máximo divisor comum entre dois números que não sejam primos entre si. Mais tarde, este algoritmo ficou conhecido como sendo o *algoritmo* de Euclides. Apesar de o algoritmo ter ficado com o seu nome, há evidências históricas de que este método já era conhecido, pelo menos um século antes de Euclides.

Elementos VII, 2: Encontrar a maior medida comum entre dois números que não sejam primos entre si.

O algoritmo de Euclides é baseado no princípio de que o *m. d. c.* de dois números não muda se o menor número for subtraído ao maior. Por exemplo, *m. d. c.* (252, 105) = 21 e, fazendo $252 - 105 = 147$, temos ainda que o *m. d. c.* (147, 105) = 21. Como o maior dos dois números é reduzido, a repetição deste processo irá gerar sucessivamente números menores, até obtermos dois números iguais. Esse número que aparecerá repetido será o *m. d. c.*

De uma forma esquemática, costumamos representar este processo do seguinte modo:

$$(252, 105) \rightarrow (147, 105) \rightarrow (105, 42) \rightarrow (63, 42) \rightarrow (42, 21) \rightarrow (21, 21)$$

Depois de se fazer várias subtracções sucessivas, concluímos que o *m. d. c.* $(252, 105) = 21$.

A seguinte proposição é um dos resultados mais interessantes dos livros aritméticos dos *Elementos*. O seu interesse advém do facto de que esta proposição, juntamente com a proposição 20 do Livro IX, revela o modo como os antigos gregos tratavam questões relacionadas com o *infinito*.

Elementos VII, 31: *Qualquer número composto é medido por algum número primo.*

Com esta proposição, Euclides prova que qualquer número natural composto é divisível por algum primo. A prova desta proposição é feita por recorrência, sendo este o mais antigo registo conhecido de uma prova formal, deste tipo.

No livro IX, o último dos livros sobre Teoria dos Números, muitos teoremas conhecidos podem ser encontrados. Destes, o mais célebre é a seguinte proposição:

Elementos IX, 20: *Os números primos são mais do que qualquer quantidade dada de números primos.*

Isto corresponde à conhecida afirmação de que *há uma infinidade de números primos*.

Outra proposição a destacar do Livro IX é a 14 que contém uma versão parcial do *Teorema Fundamental da Aritmética*. Segundo esta proposição, nenhum número primo divide o produto de outros números primos, como a seguir se apresenta:

Elementos IX, 14: *Se um número é o menor que é medido por números primos, então ele não é medido por nenhum outro primo excepto aqueles que o mediam desde o princípio.*

Aqui, Euclides prova que os números primos só podem ser decompostos de uma única maneira, ou seja, que “*qualquer número inteiro maior que 1 pode ser escrito como um produto de números primos em exactamente uma maneira*”, o que corresponde ao enunciado actual do *Teorema Fundamental da Aritmética*.

Destaque-se, ainda, a seguinte proposição que dá uma derivação da fórmula para encontrar a soma dos números em progressão geométrica:

Elementos IX, 35: *Se tantos números quantos se queira estiverem em proporção continuada, e se se subtrai ao segundo e ao último o primeiro, então o excesso do segundo está para o primeiro como o excesso do último está para a soma de todos antes dele.*

Com efeito, este resultado determina a soma de uma progressão geométrica. Se representarmos a sequência de números em “proporção continuada” por $a + ar +$

$ar^2 + \dots + ar^{n-1} + ar^n$ e a soma de “todos antes dele [o último]³⁸” por S_n (uma vez que há n termos antes de ar^n), a proposição de Euclides afirma que:

$$(ar^n - a):S_n = (ar - a):a.$$

A forma actual para esta soma é:

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}.$$

A proposição seguinte, e última do livro IX, estabelece um critério para encontrar *números perfeitos*, onde mais uma vez se nota a herança dos pitagóricos.

Elementos IX, 36: *Se tantos números quantos se queira começando a partir da unidade forem dispostos continuamente numa proporção duplicada até que a soma de todos resulte num número primo, e se a soma multiplicada pelo último origina algum número, então o produto será um número perfeito.*

Por outras palavras, esta proposição refere que se a soma de qualquer número de termos da sequência $1, 2, 2^2, \dots, 2^n$ for um número primo, então o produto dessa soma por 2^n , é um número perfeito.

Esta proposição escrita na nossa notação seria:

Se $2^{n+1} - 1 (= 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n)$ é um número primo, então $2^n(2^{n+1} - 1)$ é um número perfeito.

Note-se que os números *perfeitos* obtidos pela fórmula de Euclides são sempre números pares e Euler mostrou que qualquer número perfeito par é, realmente, desta forma. A existência ou não de números perfeitos ímpares é um dos célebres problemas não resolvidos na Teoria dos Números. No entanto, sabe-se que não há nenhum número perfeito ímpar que tenha menos de 36 dígitos!

Como acontecera com outros matemáticos, também são contadas “histórias” sobre Euclides. Uma delas é relatada por Proclo, e refere que o rei Ptolemeu uma vez perguntou a Euclides se não havia uma maneira mais curta para aprender geometria do que através dos *Elementos*, à qual Euclides respondeu que não há “nenhuma caminho *real* para a geometria”, sugerindo, assim, que a Matemática não faz acepção de pessoas. Uma outra história diz respeito a um jovem que começou a estudar geometria com Euclides e perguntou, depois de passar pelo primeiro teorema, “mas o que vou ganhar por aprender estas coisas?” Depois de insistir que vale a pena adquirir o conhecimento por si próprio, Euclides chamou o seu servo e disse: “Dá a este homem uma moeda, uma vez que ele deve obter lucro pelo que aprende”.

³⁸ Note-se que $S_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1}$.

Depois da morte de Euclides, a Teoria dos Números não teve quaisquer desenvolvimentos durante 400 anos, pois a Geometria monopolizou a atenção de todos os matemáticos gregos. Depois de Euclides, apenas dois matemáticos gregos são conhecidos por terem realizado um trabalho aritmético digno de referência, nomeadamente, Eratóstenes e Diofanto.

Arquimedes

Um dos maiores matemáticos de todos os tempos e certamente o maior da Antiguidade, considerado o maior génio criativo do mundo antigo, foi Arquimedes. Nasceu em Siracusa, por volta de 287 a.C. e morreu, em 212 a.C., durante a pilhagem romana de Siracusa.

Hoje conhecemos muito pouco sobre a sua obra, já que muitos dos documentos originais foram destruídos. Também conhecemos poucos detalhes da sua vida, embora várias histórias fantasiosas tenham surgido sobre ele, como aquela em que ele sai da banheira, nu, gritando “*Eureka! Eureka!*” (“Encontrei! Encontrei!”).

Arquimedes fez descobertas importantes em Geometria, Matemática e Física, tendo descoberto o *princípio da alavanca* e, por isso, é-lhe atribuída a frase: “*Dêem-me uma alavanca e um ponto de apoio e eu moverei o mundo*”.

Estimativas para o valor de π

Das suas várias descobertas no campo da Geometria, saliente-se o método para calcular o número π , utilizando séries, que é a proposição mais importante da sua obra *Medida do Círculo*.

Note-se que Arquimedes não utilizava o símbolo π ; de facto, este símbolo não foi utilizado por ele nem por qualquer outro matemático grego. Tiveram que passar quase 2000 anos, até que, em 1706, o escritor inglês William Jones o introduziu no seu livro *Uma nova introdução para a Matemática*, onde foi dado um valor correcto para π , com 100 casas decimais. No entanto, só em 1748, quando Leonhard Euler o usou no seu famoso *Introductio in Analysin Infinitorum*, é que este símbolo foi adoptado definitivamente para representar a razão entre o perímetro de uma circunferência e o seu diâmetro, “sem dúvida porque é a primeira letra da palavra grega *perímetros*” (Burton, 2006, p. 202) que se escreve $\pi\epsilon\rho\mu\epsilon\tau\rho\zeta$, usando o alfabeto grego.

O processo que Arquimedes usou para a obtenção de um valor aproximado para π foi baseado no seguinte facto: o perímetro de um círculo situa-se entre os perímetros dos polígonos regulares inscritos e circunscritos de n lados, e à medida que n aumenta, a diferença entre o perímetro do círculo e os outros dois perímetros torna-se cada vez menor.³⁹

Este resultado constitui também o primeiro caso conhecido do cálculo da soma de uma série infinita.

³⁹ Este processo não será aqui explicado, mas pode ser encontrado, em português, em Pinto (2009, p. 62-73).

Para calcular uma aproximação adequada para π , Arquimedes inscreveu e circunscreveu, sucessivamente, polígonos regulares de 6, 12, 24, 48 e 96 lados, dentro e fora do círculo, tendo chegado ao seguinte enquadramento

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}.$$

A aproximação $\frac{22}{7}$ é, muitas vezes, chamada de *valor de Arquimedes para π* .

Como $\frac{22}{7} - \pi < 0,002$ e, além disso, é muito simples efectuar cálculos com esta fracção, na maioria dos casos, na Antiguidade, esta aproximação para π era suficientemente boa.⁴⁰

Eratóstenes

Outro matemático grego, nascido em Cirene, e cujo trabalho em Teoria dos Números continua a ser estudado, é Eratóstenes (c. 276 – c. 194 a.C.). Eratóstenes foi considerado um dos homens mais cultos do seu tempo. Trabalhou em Matemática, Astronomia, Geografia, História, além de ter sido filósofo e poeta. Escreveu algumas obras, nomeadamente, *O Bem e o Mal*, *Medida da Terra*, *Comédia*, *Cronologia*, *Constelações e Duplicação do Cubo*.

A convite do rei do Egipto, Ptolomeu III, deslocou-se para Alexandria para ser tutor do seu filho e director da Biblioteca da Universidade de Alexandria.

O seu principal contributo, como matemático, foi ter encontrado uma solução do problema de Delos, sobre a duplicação do cubo, e a invenção de um método para encontrar números primos que, ainda hoje, ensinamos aos nossos alunos.

Crivo de Eratóstenes

É conhecido que *se um inteiro $n > 1$ não é divisível por um primo $p \leq \sqrt{n}$, então n é necessariamente um número primo*.

Eratóstenes usou este facto como a base de uma técnica inteligente, chamada *crivo de Eratóstenes*, para encontrar todos os primos menores do que um determinado inteiro n .

Seguindo o esquema proposto por Eratóstenes, começamos por escrever os inteiros de 2 até n por ordem crescente e, em seguida, eliminamos sistematicamente todos os números compostos (que têm mais de dois divisores), riscando todos os múltiplos $2p$, $3p$, $4p$,... dos primos $p \leq \sqrt{n}$. Os inteiros que restam, depois destas supressões, são os primos x , tais que, $3 \leq x \leq n$.

Do processo de construção do *Crivo de Eratóstenes*, resulta um processo de verificar se um dado inteiro é primo. Dispondo de uma lista de números primos até 100,

⁴⁰ Talvez devido a esse facto, também está a ser utilizado este valor para π no manual de Matemática para o 5º ano, da Porto Editora, elaborado de acordo com o Novo Programa de Matemática para o Ensino Básico.

podemos verificar se um inteiro não maior que 1002 é primo, pois, se um tal inteiro for composto, terá algum divisor primo menor que 100.

O *Crivo de Eratóstenes*, determinando todos os primos não maiores que um dado n , serve também para construir uma tabela de factores primos de números que não excedem n , muito útil na decomposição de um número em factores primos.

Medição da terra

Eratóstenes também é conhecido por ter concebido um método prático para o cálculo do meridiano da Terra, baseado nas estimativas do arco do círculo máximo de Alexandria a Assuão.

Apesar desta não ter sido a primeira nem a última estimativa para o perímetro da terra, feita na Antiguidade, Eratóstenes obteve um valor muito mais preciso do que todas as estimativas anteriores. E o que é mais extraordinário sobre o método por ele utilizado é a sua simplicidade.

Herão

Outro estudioso da Matemática Aplicada é Herão de Alexandria. Não havia consenso sobre a data em que viveu, surgindo datas que variavam de 150 a.C. até 250 d.C., mas, há algumas décadas, colocaram-no na segunda metade do século I d.C.

As suas obras sobre temas de Matemática e Física são tão numerosos e variadas que é costume descrevê-lo como um escritor enciclopédico nestes domínios e também é, por vezes, apelidado *o Mecânico*.

Há razões que suportam a tese de que ele era um egípcio com formação grega. De qualquer forma, os seus trabalhos que, muitas vezes, visam a utilidade prática ao invés da perfeição teórica, mostram uma mistura curiosa de grego e Oriental.

A sua obra mais importante é a *Métrica*, composta por três livros. Na proposição 8 do primeiro volume, Herão demonstra que a área de um triângulo de lados a, b e c e semiperímetro s é dada pela seguinte fórmula:

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

Esta igualdade é conhecida como *fórmula de Herão*; no entanto, há quem defenda que foi descoberta por Arquimedes.

É interessante notar que, tal como os egípcios, Herão também dava preferência às fracções unitárias, como podemos ver na aproximação de $\sqrt{63}$ por

$$7 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}.$$

É de salientar, ainda, que a fórmula apresentada por Herão para o volume de uma pirâmide quadrangular truncada pode, facilmente, ser reduzida à que apareceu no papiro de Moscovo.

Diofanto

Como já acontecera com Herão (e não só), Diofanto é outro matemático cujo período em que viveu é incerto. Embora haja alguma evidência ténue que ele possa ter sido um contemporâneo, ou quase contemporâneo, de Herão, a maioria dos historiadores tende a colocá-lo no terceiro século da nossa era, pois, depois de compararem referências que lhe são feitas por vários autores que não viveram no seu tempo, supõem que terá vivido por volta do ano 250 da nossa era.

Uma das melhores fontes de informação acerca de problemas de álgebra da antiga Grécia é uma colecção conhecida pelo nome de *Antologia Grega* ou *Antologia Palatina*, constituída por 46 problemas numéricos, apresentados sob a forma epigramática, coligidos, por alturas do ano 500 da nossa era, pelo gramático Metrodorus.

Como o problema 126 dessa Antologia⁴¹ é relativo à vida de Diofanto, é natural recorrer ao mesmo para obter informações sobre a vida deste matemático grego. O problema apresenta-se do seguinte modo:

“Neste túmulo repousa Diofanto.

Ah, que grande prodígio!

O túmulo diz cientificamente a medida de sua vida.

Deus concedeu-lhe ser menino pela sexta parte da sua vida, e somando uma duodécima parte a isto, cobriu-lhe as faces de penugem.

Ele acendeu-lhe a lâmpada nupcial após uma sétima parte, e cinco anos após o seu casamento concedeu-lhe um filho.

Ai! Infeliz criança tardia; depois de chegar à medida de metade da vida de seu pai, o destino frio o levou.

Depois de consolar a sua dor com a ciência dos números durante quatro anos terminou a sua vida.”

Representando por x a idade que Diofanto tinha quando morreu, tem-se a equação

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x,$$

cuja solução é $x = 84$.

Assim, ficámos a saber que Diofanto passou 14 anos na infância, 7 na juventude, mais 12 como celibatário, tendo, portanto, 33 anos, quando casou. Nasceu-lhe um filho,

⁴¹ A numeração dos problemas da *Antologia Grega*, aqui utilizada, é a que consta em (Paton, 1918).

quando tinha 38 anos. Quando tinha 80 anos, morreu-lhe o filho que, então, tinha 42 anos. E, de tudo isto, concluímos que Diofanto morreu aos oitenta e quatro anos.

No entanto, a partir deste problema ficamos a saber com que idade Diofanto morreu, mas continuamos sem saber em que ano ou mesmo em que século.

Diofanto escreveu três obras: a *Aritmética*, *Números Poligonais* e *Porismas* (que se perdeu). A *Aritmética* é, sem dúvida, a sua obra mais importante e, conforme refere Burton (2006), “pode ser descrita como o tratado mais antigo dedicado à álgebra” (p. 221). Conjectura-se que, inicialmente, era composta por treze livros, de que hoje apenas se conhecem seis.

Tal como o papiro de Rhind, a *Aritmética* contém uma variedade de problemas, 189 no total, e as suas soluções. Parece que o seu objectivo era ensinar o método de resolução de determinados problemas em que era necessário encontrar números racionais que satisfizessem determinadas condições.

Os Livros da *Aritmética* podem ser resumidos como se segue:

- **Livro I:** Sistemas de equações determinadas que envolvem equações lineares ou quadráticas;
- **Livro II-V:** Equações e sistemas de equações, a maioria das quais são de 2º grau indeterminadas;
- **Livro VI:** Equações envolvendo triângulos rectângulos e um problema que conduz a uma equação cúbica (Proposição 17).

Como a maior parte das equações propostas e resolvidas por Diofanto são indeterminadas, às equações deste tipo, de coeficientes inteiros em que se procura alguma solução inteira ou racional, costumamos chamar *Equações Diofantinas*.

Na *Aritmética* é impressionante a falta de métodos gerais e a aplicação repetida de procedimentos engenhosos, elaborados para as necessidades de cada problema em particular. Os seus métodos variam de caso para caso, e não há sinal de uma teoria sistemática. Cada questão necessita a sua própria técnica especial, que muitas vezes já não serve para os problemas mais estreitamente relacionados.

Por isso, não é de estranhar que Hankel tenha afirmado que “é, portanto, difícil para um moderno, depois de estudar 100 soluções diofantinas, resolver a 101ª” (Hankel, 1874, p. 165 apud Cajori, 1909, p. 89).

Note-se que Diofanto admitia apenas soluções racionais positivas; para ele as soluções irracionais eram “impossíveis”, e ficou, na maioria dos casos, satisfeito com apenas uma resposta para um dado problema (sendo indiferente se a solução era inteira ou racional).

Acrescente-se que Diofanto não tinha nenhum conceito de quantidades negativas, embora tivesse usado a subtracção como uma operação. Assim, no problema 2 do Livro V, Diofanto descreve a equação $4x + 20 = 4$ como “absurda”, porque conduziria à solução “impossível”, $x = -4$. Como refere, “o 4 deveria ser um número maior que 20”.

Para poder multiplicar expressões algébricas que envolviam subtracções, indicou as regras para multiplicar com o menos: “*um menos multiplicado por um menos dá um mais, e um menos multiplicado por um mais dá um menos*”, mas entenda-se que Diofanto não está a lidar com números negativos, pois estes não existiam para ele.

Antes de passarmos à análise de alguns problemas da *Aritmética*, convém discutir a maior inovação de Diofanto na resolução de equações, a sua introdução de simbolismo. Como já vimos, os egípcios e os babilónios escreviam as equações e as respectivas soluções por palavras, ou seja, tínhamos uma álgebra retórica, onde os resultados eram alcançados pelo argumento verbal, sem recurso a símbolos ou abreviaturas de qualquer tipo. É com Diofanto que aparece o primeiro uso sistemático dos símbolos algébricos. Diofanto usava um sinal especial para a incógnita, para o menos e para os recíprocos e para cada potência da incógnita havia um símbolo especial. Note-se que os símbolos eram mais abreviaturas do que símbolos algébricos, no nosso sentido. Essas abreviaturas deram origem à chamada “álgebra sincopada” que pode ser considerada um estádio intermédio entre a retórica e a álgebra simbólica.

Problemas da *Aritmética*

Vejamos agora alguns problemas típicos da *Aritmética*, pois exemplos bem seleccionados desta obra dizem mais sobre a criatividade dos métodos de Diofanto do que qualquer resumo.

Aritmética I, 17: *Encontrar quatro números de modo que quando três deles são somados, a sua soma é um dos quatro números indicados.*

A condição necessária, imposta por Diofanto, é: *Um terço da soma dos quatro números tem de ser maior do que qualquer um deles.*

Sejam as somas obtidas 20, 22, 24 e 27.

Seja x a soma dos quatro números. Então, os números são

$$x - 20, \quad x - 22, \quad x - 24 \quad e \quad x - 27.$$

(A origem destas expressões para representar os quatro números deve-se ao facto de que, por exemplo, se $(1) + (2) + (3) = 20$, então quando adicionarmos (4) aos dois membros da equação, obtemos $x = (1) + (2) + (3) + (4) = 20 + (4)$, ou seja, $(4) = x - 20$.)

Daqui obtemos que

$$(x - 20) + (x - 22) + (x - 24) + (x - 27) = x,$$

donde $4x - 93 = x$ ou $x = 31$.

Os números pedidos são 11, 9, 7 e 4.

Note-se que o objectivo da condição necessária era, neste caso, evitar o surgimento de números negativos.

O seguinte problema não é apresentado apenas pela criatividade da sua resolução mas, principalmente, por pertencer a um tipo de problemas muito comum na Matemática babilónica.

Aritmética I, 27: *Encontrar dois números tais que a sua soma e o seu produto sejam dois números conhecidos.*

A condição necessária apresentada por Diofanto é: *o quadrado de metade da soma dos números deve exceder o produto por um número quadrado.*

Neste problema, a soma dos números é 20 e o produto é 96.

Este problema é da forma $x + y = a$, $xy = b$, que, como já vimos, corresponde a um tipo de problemas resolvido pelos babilónios. Três outros tipos de problemas babilónicos aparecem nos problemas seguintes: I-28, I-29 e I-30, respectivamente, $x + y = a$, $x^2 + y^2 = b$; $x + y = a$, $x^2 - y^2 = b$ e $x - y = a$, $xy = b$.

A solução de Diofanto para este problema, assim como para os outros, é estritamente algébrica, ao contrário da solução babilónica, que era essencialmente geométrica.

Nomeadamente, ele considera as duas incógnitas como $10 + z$ e $10 - z$, obtendo a equação $100 - z^2 = 96$ e, portanto, $z = 2$. Logo, os números pretendidos são 12 e 8.

O método de Diofanto, aplicado a qualquer sistema deste tipo, pode ser traduzido na nossa fórmula

$$x = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} \quad e \quad y = \frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}.$$

A condição por ele imposta é necessária para assegurar que a solução é racional.

É interessante notar que as respostas para os problemas I-28, I-29 e I-30 também são 12 e 8, o que nos faz lembrar a prática comum entre os babilónios de obterem a mesma solução para um conjunto de problemas relacionados.

De tudo isto, surge-nos naturalmente a questão, também colocada por Katz (1998), “Será que Diofanto [...] teve acesso a material babilónico?” (p. 177). Ora esta é uma questão para a qual não temos resposta e, apesar de ser notória a falta de metodologia geométrica nos procedimentos de Diofanto, Katz alega que “talvez por esta altura os métodos algébricos babilónicos, despojados das suas origens geométricas, fossem conhecidos no mundo grego” (p. 177).

Swift (1956) reforça a ideia de Katz ao dizer que “a abordagem algébrica na *Aritmética* é babilónica. A generalização e a abstracção são gregas” (p. 166). Esta

opinião também é defendida por Struik (1987) que, ao comparar Diofanto com Herão, refere que “o toque Oriental é ainda mais forte na *Aritmética* de Diofanto” (p. 58).

No Livro IV, Diofanto começa a usar uma nova técnica, uma técnica remanescente da “falsa posição” usada pelos egípcios e pelos babilônios.

Aritmética IV, 8: Adicionar o mesmo número a um cubo e ao seu lado e fazer a primeira soma igual ao cubo da segunda.

Este problema é traduzido pela equação $x^3 + y = (x + y)^3$. Diofanto começa assumindo que $x = 2y$. Assim,

$$8y^3 + y = (3y)^3 = 27y^3 \Leftrightarrow y = 19y^3 \Leftrightarrow 19y^2 = 1.$$

Mas, Diofanto escreve, “19 não é um quadrado”, e depois continua, de forma imaginativa e engenhosa, à procura de um quadrado para substituir o 19. Depois de alguns cálculos, acaba por concluir que a suposição deve ser, então, $x = 7y$. Faz, novamente, os cálculos acima apresentados mas, agora, com $x = 7y$. Finalmente, conclui que y , o número adicionado, é $\frac{1}{13}$, e o cubo pretendido tem lado $\frac{7}{13}$.

Ora, apesar da resolução apresentada por Diofanto ter um grau de dificuldade que nada tem a ver com a dificuldade dos problemas resolvidos pelos egípcios e pelos babilônios, o que é de notar é que o princípio em que se baseou corresponde, exactamente, à ideia de “falsa posição”, já usada cerca de dois mil anos antes.

Aritmética II, 8: Dividir um dado número quadrado em dois quadrados.

Seja 16 o quadrado dado.

Deixe que um dos quadrados pretendidos seja x^2 . Então, $16 - x^2$ deve ser igual a um quadrado.

Aqui, Diofanto procurou escolher um exemplo particular de um quadrado perfeito, que deveria ser da forma $(mx - 4)^2$, onde m pode ser qualquer inteiro e 4 é a raiz quadrada de 16; neste caso, escolheu o número $(2x - 4)^2$, mas também poderia ter escolhido, por exemplo, $(3x - 4)^2$.

Agora tem-se $16 - x^2 = (2x - 4)^2$, ou seja, $5x^2 = 16x$ cuja solução positiva é $x = \frac{16}{5}$.

Assim, um dos quadrados será $\frac{256}{25}$, e o outro, $16 - \frac{256}{25} = \frac{144}{25}$.

Este é um dos problemas mais famosos da *Aritmética*, por ter sido à margem deste problema que Fermat escreveu a sua famosa nota, na qual enunciou o que actualmente é conhecido como “*O último Teorema de Fermat*”. Na nota pode ler-se:

“É impossível separar um cubo em dois cubos, ou um biquadrado em dois biquadrados, ou de um modo geral ‘qualquer potência excepto o quadrado em duas potências com o mesmo expoente’. Eu descobri uma verdadeiramente maravilhosa prova disto mas, no entanto, a margem não é grande o suficiente para conter.”

(Heath, 1964, p. 144-145)

Aritmética VI, 19: Encontrar um triângulo tal que a sua área adicionada a um dos seus lados dá um quadrado e o seu perímetro é um cubo.

Usando a fórmula para os triângulos rectângulos atribuída a Pitágoras, Diofanto considera os lados

$$2x + 1, \quad 2x^2 + 2x, \quad 2x^2 + 2x + 1.$$

O perímetro do triângulo será

$$4x^2 + 6x + 2 = 2(2x + 1)(x + 1)$$

e tem que ser igual a um cubo. É difícil transformar um quadrado num cubo, e Diofanto, notando o factor $x + 1$ na expressão para o perímetro, dividiu os três lados do triângulo por $x + 1$ e obteve, agora, o triângulo com lados

$$\frac{2x + 1}{x + 1}, \quad 2x, \quad \frac{2x^2 + 2x + 1}{x + 1}.$$

Esse novo triângulo terá perímetro $= 2(2x + 1)$ e área $= \frac{2x^2 + x}{x + 1}$.

Uma vez que a área mais um lado tem que ser um quadrado, temos que

$$\frac{2x^2 + x}{x + 1} + \frac{2x + 1}{x + 1} = \frac{(2x + 1)(x + 1)}{x + 1} = 2x + 1,$$

donde $2x + 1$ é um quadrado e $2(2x + 1)$ é um cubo. Portanto temos que encontrar um cubo que é o dobro de um quadrado. A escolha óbvia é $2(2x + 1) = 8$, donde se obtém $x = \frac{3}{2}$. Assim, o triângulo pretendido tem lados $\frac{8}{5}$, 3 e $\frac{17}{5}$.

Segundo Struik (1987), a *Aritmética* de Diofanto, “é um dos mais fascinantes tratados preservados da Antiguidade Greco-Romana” (p. 58). Morgado (1992) acrescenta ainda que “pelos problemas que põe, pelos métodos de resolução que usa, pelas questões que tem motivado, a *Aritmética* de Diofanto aparece, aos olhos dos

interessados em Teoria dos Números, como um trabalho altamente original e fortemente estimulante” (p. 15).

Dada a complexidade de muitos dos seus problemas, o professor interessado em “usar” problemas desta obra nas suas aulas, terá que fazer uma cuidada análise e selecção dos mesmos. A simplicidade do enunciado de alguns problemas da *Aritmética* é, muitas vezes, enganadora, conduzindo a problemas de difícil resolução.

Equações diofantinas na Grécia, Índia e China

O problema do gado de Arquimedes

Diofanto não foi o primeiro a propor ou resolver problemas que conduzem a sistemas indeterminados com equações do segundo grau. Muito antes do seu tempo, eram propostos problemas aritméticos, apresentados de uma forma poética, que representavam um tipo comum de recreação matemática.

Talvez o mais difícil deles, uma vez que conduz a números excessivamente grandes, é o famoso “*problema do gado*” de Arquimedes, que pode ser traduzido, em notação moderna, do seguinte modo:

Se W, X, Y e Z indicar o número de touros brancos, pretos, manchados e castanhos, e se w, x, y e z indicar o número de vacas com as cores correspondentes, então o seguinte sistema traduz as relações entre o número de touros,

$$\begin{cases} W = \frac{5}{6}X + Z \\ X = \frac{9}{20}Y + Z, \\ Y = \frac{13}{42}W + Z \end{cases}$$

e as relações entre o número de vacas são traduzidas no seguinte sistema,

$$\begin{cases} w = \frac{7}{12}(X + x) \\ x = \frac{9}{20}(Y + y) \\ y = \frac{11}{30}(Z + z) \\ z = \frac{13}{42}(W + w) \end{cases};$$

e tem-se, ainda, que $W + X$ é um número quadrado e $Y + Z$ é um número triangular. Quando reduzido a uma única equação, o problema “resume-se” a resolver a equação

$$x^2 - 4\,729\,494y^2 = 1,$$

onde os menores valores de x e y que satisfazem a equação têm 46 e 41 dígitos, respectivamente.

Este problema conduziu ao que mais tarde ficou, impropriamente⁴², conhecido como a *equação de Pell*.

Acrescente-se ainda que entre os problemas indeterminados que Diofanto incluiu na sua *Aritmética*, alguns também conduziram a este tipo de equações, como, por exemplo, $x^2 - 30y^2 = 1$ e $x^2 - 26y^2 = 1$. A menor solução inteira e positiva da primeira equação é $x = 11$ e $y = 2$ e a menor solução inteira e positiva da segunda é $x = 51$ e $y = 10$.

Este tipo de problemas, que envolve equações diofantinas, tem uma longa história, tendo já aparecido na literatura chinesa no século I, no que é o exemplo mais antigo que conhecemos do chamado Teorema Chinês dos Restos (que será abordado quando a Matemática chinesa for analisada).

Hipatia

Hipatia (c. 355 – 415 d. C.) é a primeira mulher matemática a ser mencionada na História da Matemática e, por isso, não posso deixar de a mencionar aqui.

Era filha de Teão de Alexandria, e teve uma boa educação em Matemática e Filosofia, dada por seu pai. Foi uma eminente e respeitada professora em Alexandria, tendo-se distinguido em Matemática, Medicina e Filosofia e é referida por ter escrito comentários sobre a *Aritmética* de Diofanto e sobre as *Secções Cônicas* de Apolônio.

Embora não haja certezas quanto à data em que nasceu, é certo que foi assassinada, barbaramente, por uma multidão de fanáticos cristãos, em Março de 415.

E, com a sua morte, também terminou a tradição da Matemática grega de Alexandria.

É inconcebível falar na Matemática grega sem fazer referência aos três famosos problemas e, por isso, não querendo me alongar muito, farei uma breve alusão aos mesmos.

⁴² Segundo uma ideia equivocada de Euler, o matemático John Pell (1611–1685) teria sido o autor do método de solução deste tipo de equação. No entanto, o autor dessa solução foi, na verdade, Brouncker. Embora o erro histórico tenha sido há muito reconhecido, o nome de Pell continua a ser associado a esta equação.

OS TRÊS PROBLEMAS FAMOSOS

Curiosamente, a maioria da geometria desenvolvida pelos gregos teve origem nas sucessivas tentativas de resolver os três, agora famosos, problemas de construção.

Os problemas que, muito provavelmente, têm sido objecto de mais discussões e investigações do que quaisquer outros problemas de Matemática, são:

1. A duplicação do cubo, ou seja, construir a aresta de um cubo com o dobro do volume de um determinado cubo.
2. A quadratura do círculo, ou seja, construir um quadrado com área igual à de um determinado círculo.
3. A trissecção do ângulo, ou seja, dividir um ângulo dado arbitrariamente em três partes iguais.

A fama destes problemas adveio do facto de que eles não podem ser resolvidos apenas com régua (não graduada) e compasso. A intensa procura de soluções para estes três problemas influenciou profundamente a geometria grega e levou a muitas descobertas importantes, tais como as secções cónicas, muitas curvas quadráticas e cúbicas e várias curvas transcendentais.

Só no século XIX, mais de 2000 anos depois dos problemas terem sido concebidos, é que se mostrou que era impossível fazer estas três construções, usando apenas régua e compasso.

A duplicação do cubo

Tem-se conjecturado sobre a origem deste problema. Há quem defenda que remonta aos pitagóricos que foram bem sucedidos na resolução do problema da duplicação do quadrado, pois conseguiram mostrar que se sobre a diagonal de um dado quadrado for construído um novo quadrado, então o novo quadrado tem exactamente o dobro da área do quadrado original.

Depois desta conquista, seria natural estender o problema a três dimensões, surgindo, assim, o problema da duplicação do cubo.

O primeiro verdadeiro progresso na resolução deste problema foi feito por Hipócrates de Quios (c. 470 - c. 410 a. C.), ao mostrar que este problema pode ser reduzido a encontrar, entre uma determinada linha e outra linha com o dobro do comprimento, dois meios proporcionais. (Ou seja, duas linhas são inseridas entre as linhas dadas de modo que as quatro estejam em proporção geométrica.)

Na nossa notação, se a e $2a$ são as duas linhas dadas e x e y são os meios proporcionais que podem ser inseridos entre elas, então, os comprimentos a, x, y e $2a$ estão em progressão geométrica, o que equivale a

$$a : x = x : y = y : 2a.$$

As duas primeiras razões implicam que $x^2 = ay$. Do segundo para de razões, obtemos que $y^2 = 2ax$.

Combinando estas duas equações, obtemos

$$x^4 = a^2 y^2 = 2a^3 x,$$

donde se obtém $x^3 = 2a^3$.

Por outras palavras, o cubo de aresta x terá o dobro do volume de um dado cubo de aresta a .

No entanto, Hipócrates não conseguiu construir os dois meios proporcionais usando apenas os instrumentos permitidos.

A quadratura do círculo

Provavelmente, nenhum outro problema tem exercido uma maior, ou mais duradoura, atracção do que o de construir um quadrado com área igual à de um dado círculo.

Os egípcios foram os pioneiros na resolução de um problema deste género pois, por volta de 1800 a.C., “resolveram” o problema, tomando o lado do quadrado igual a $8/9$ do diâmetro do círculo dado. Desde então, milhares de pessoas têm-se debruçado sobre o problema, apesar de actualmente se saber que tal construção é impossível apenas com régua e compasso.

Foi novamente Hipócrates quem fez progressos na resolução deste problema. Na tentativa de quadrar o círculo, Hipócrates conseguiu quadrar, usando apenas os instrumentos permitidos, certas figuras curvilíneas chamadas *lúnulas* (figuras em forma de lua delimitadas por dois arcos circulares com raios diferentes).

Mais especificamente, ele mostrou que duas *lúnulas* poderiam ser desenhadas de modo que a soma das suas áreas fosse igual à área de um dado triângulo. Para fazer esta demonstração, Hipócrates desenhou um triângulo isósceles $[ABC]$, e depois construiu três semicírculos, como nos mostra a figura 55:

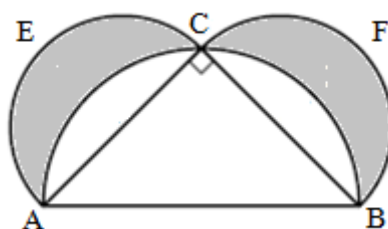


Fig. 55 – Lúnulas de Hipócrates

Tendo mostrado que a *lúnula* podia ser “quadrada”, Hipócrates tentou, infrutiferamente, quadrar o círculo por um argumento semelhante.

É de referir que é costume encontrar-se problemas relacionados com o cálculo de áreas de *lúnulas* em alguns manuais escolares, e há mesmo manuais (do ensino secundário), em que é pedida esta demonstração.

A trissecção do ângulo

Embora Hipócrates tenha feito progressos em dois destes três problemas, não conseguiu nenhuma proeza com a trissecção do ângulo.

A bissecção de um ângulo, com apenas régua e compasso, é uma das construções geométricas mais fáceis de se fazer, e nada fazia supor que dividir um ângulo em três partes iguais, sob restrições semelhantes, seria impossível, apesar de alguns ângulos poderem ser trissectados, como é o caso do ângulo recto. Na verdade, já os pitagóricos tinham dividido um ângulo recto em três partes iguais. Mas o problema geral, embora seja fácil na aparência, transcendeu o poder da geometria elementar.

Durante 2000 anos os matemáticos procuraram, em vão, trissectar um ângulo arbitrário e, só em 1837, é que foi dada uma prova rigorosa da impossibilidade de trissectar um ângulo arbitrário, usando apenas régua e compasso.

No entanto, se as restrições impostas pelos gregos forem retiradas, existem várias maneiras de dividir um ângulo em três partes iguais.

ANEXO A.4 - MATEMÁTICA NA CHINA

Ao contrário da Matemática egípcia e babilónica, na Matemática chinesa é mais difícil fazer uma análise por temas, devido à diversidade de fontes existentes e ao facto de que algumas delas abordam vários conteúdos.

Por isso, para analisar a Matemática chinesa, confrontei-me com a questão: faço uma abordagem por obra ou por conteúdo? Mas, depois de ponderar, achei mais vantajoso apresentar os conhecimentos dos chineses por tema e não por obra.

Como, ao longo desta análise, algumas obras são diversas vezes referidas, achei oportuno começar por fazer uma breve descrição das obras mais importantes da Matemática chinesa às quais, no decorrer desta análise, será feita referência. Assim, os conteúdos matemáticos aqui referidos de uma forma sucinta serão oportunamente desenvolvidos.

AS OBRAS MAIS IMPORTANTES

Existem muitas obras matemáticas que merecem destaque devido à sua importância no desenvolvimento de algum tópico em especial. Para uma melhor contextualização temporal, serão apresentadas em dois grupos: um primeiro grupo com as mais antigas e, outro grupo, com algumas obras de uma época mais recente, surgidas por volta do século XIII.

Relativamente às obras mais antigas, estas fazem parte de uma compilação a que foi dado o nome *Os Dez Manuais de Matemática*. Esta obra tornou-se num manual de Matemática *standard* e evitou que dez livros, entre eles, o extraordinário *Nove Capítulos*, se tivessem, eventualmente, perdido.

A seguir se descrevem sete dos dez livros pertencentes ao *Os Dez Manuais de Matemática*:

☞ **Zhoubi suanjing (Zhou Shadow Gauge Manual) A Aritmética Clássica do Gnómon e os Caminhos Circulares do Céu**

O primeiro trabalho chinês com conteúdo matemático, de autoria desconhecida, é a *Aritmética Clássica do Gnómon e os Caminhos Circulares do Céu*, cujo principal conteúdo são cálculos astronómicos. A data de composição é incerta e supõe-se que a versão que chegou até nós foi escrita por volta de 300 a.C., embora certas partes possam basear-se num texto que na época já tinha várias centenas de anos. Alguns estudiosos especulam que os conhecimentos matemáticos nele contidos possam recuar até 1000 a.C. No início do livro, que é considerado a sua parte mais antiga, há uma discussão das propriedades do triângulo rectângulo, sendo considerado o livro mais antigo a apresentar uma “demonstração” do, actualmente denominado, **Teorema de Pitágoras**.

☞ **Jiuzhang suanshu (Nine Chapters on the Mathematical Art) *Nove Capítulos de Arte Matemática ou Aritmética em Nove Secções***⁴³

Esta obra influenciou toda a Matemática chinesa, tendo sido utilizada como manual de ensino. Como o título indica, o *Nove Capítulos* é constituído por nove secções (ou capítulos) distintos, com um total de 246 problemas que, na sua maioria, são problemas práticos do dia-a-dia; e também são apresentadas as soluções para os problemas propostos. O livro é de autor desconhecido, como era comum na antiga China.

Sabemos que representa o esforço colectivo de muitas mentes matemáticas, ao longo de vários séculos, mas não se sabe ao certo quando foi compilado pela primeira vez (100 anos antes de Cristo?, séc. III a. C.?). Segundo Burton (2006), “a primeira data concreta que pode ser associada a um trabalho chinês, nomeadamente, o *Nove Capítulos de Arte Matemática*, é 150 a. C.” (p. 27).

No entanto, pensa-se que cópias originais foram destruídas na famosa queima dos livros de 213 a. C. Fragmentos da colecção foram mais tarde recuperados, organizados e melhorados por alguns matemáticos antes de ter recebido a sua forma final.

O texto, tal como chegou até nós, é um comentário feito por *Liu Hui*, em 263 d. C. Liu deu verificações teóricas de cada um dos problemas, fornecendo a justificação das regras e explicando os métodos usados, ao mesmo tempo que o melhorou e expandiu extensivamente com as suas próprias contribuições.

Vejamos o título de cada capítulo e uma breve descrição do seu conteúdo:

Capítulo I – *Medição de campos*: cálculo da área de terrenos de diversas formas e cálculos que envolvem fracções.

Capítulo II - *Milho-miúdo e arroz*: percentagens e proporções sobre diversos tipos de bens.

Capítulo III - *Distribuição por proporções*: problemas sobre distribuição, alguns dos quais resolvidos pela regra de três simples e outros que conduzem a progressões aritméticas e geométricas.

Capítulo IV - *Largura pequena*: problemas em que se muda as dimensões de campos mantendo a sua área. Adição de fracções unitárias e extracção de raízes quadradas e cúbicas e a sua aplicação a círculos e esferas.

Capítulo V - *Consultas sobre construções*: determinação do volume de diferentes construções e montes de cereais e do número de trabalhadores necessários para completar uma determinada tarefa.

Capítulo VI - *Impostos justos*: cálculo de como distribuir o cereal e o trabalho, taxas a distribuir a diferentes sectores da população e questões sobre percursos.

Capítulo VII - *Excesso e deficiência*: uso do método da falsa posição e da dupla falsa posição para resolver diferentes tipos de problemas.

Capítulo VIII - *Tabelas rectangulares*: resolução de sistemas de equações lineares. Indica a regra para o cálculo com números positivos e negativos.

⁴³ Por uma questão de brevidade será, muitas vezes, referido apenas como *Nove Capítulos*.

Capítulo IX - Triângulos rectângulos: introduz a regra *Gougu*, versão chinesa do Teorema de Pitágoras. Propõe problemas relacionados com triângulos rectângulos em que é usada a semelhança de triângulos. Além disso, são discutidos métodos gerais para a resolução de equações quadráticas.

Sobre o nono capítulo, Shen e os outros autores (1999) escreveram que “este capítulo poderia ter sido chamado ‘Teorema de Pitágoras’ se tivesse sido escrito no Ocidente” (p. 439).

☞ **Haidao suanjing (Sea Island Mathematical Manual) Manual de Matemática da Ilha do Mar**

Além de escrever um comentário sobre o *Nove Capítulos*, *Liu Hui* também escreveu, na mesma altura, o *Manual de Matemática da Ilha do Mar*. Este Manual contém apenas nove problemas práticos, e parece ter sido feito para complementar a última secção do *Nove Capítulos de Arte Matemática*. No século VII, durante a dinastia Tang, foi separado do *Nove Capítulos* para tornar-se um trabalho de Matemática independente.

Os problemas deste Manual estão relacionados com a determinação da distância e a altura de uma ilha, uma colina, uma cidade; da largura de um rio; da profundidade de um lago; etc. O nome do Manual deve-se ao primeiro problema, que está relacionado com a determinação da distância e altura de uma ilha.

O estilo de escrita é análogo ao do *Nove Capítulos*: problema, solução, método. É de notar que o grau de dificuldade dos problemas ia aumentando ao longo do Manual.

☞ **Sunzi suanjing (Master Sun's Mathematical Manual) Manual de Matemática de Sun Zi ou Manual de Matemática do Mestre Sun**

Esta obra é composta por três livros (capítulos) e foi escrita, provavelmente, no fim do século III, por **Sun Zi**. Constitui um tratado, minuciosamente elaborado, em cujo prefácio o autor atribui a origem de todas as coisas materiais e intelectuais à *ciência dos números ou do cálculo*.

Este Manual trata, principalmente, dos métodos das operações aritméticas e contém o exemplo mais antigo do que hoje chamamos **Problema Chinês dos Restos**.

☞ **Xiahou Yang suanjing (Xiahou Yang's Mathematical Manual) Manual de Matemática de Yang Xiahou**

Este livro é referido pelo livro seguinte (Zhang Quijiang) e, portanto, é de uma data anterior; por isso, supõe-se que foi escrito, por **Xiahou Yang**, no século IV. No entanto, alguns problemas deste livro devem ter sido adicionados mais tarde, devido ao seu contexto socioeconómico.

Este Manual contém três capítulos no estilo habitual de problemas e soluções. O primeiro capítulo contém 19 problemas, o segundo contém 29 problemas e o capítulo

final contém 44 problemas. Uma ideia significativa que aparece no texto diz respeito à representação de números em notação decimal.

☞ **Zhang Quijian suanjing (Zhang Quijian's Mathematical Manual) Manual de Matemática de Zhang Quijian**

Sobre o autor deste Manual, pouco mais se sabe do que o nome. **Zhang Quijian** terá escrito o seu livro, por volta de 475, e este é composto por três capítulos: o primeiro capítulo contém 32 problemas, o segundo, 22 e o terceiro, 38 problemas.

Um testemunho das habilidades algébricas dos escribas chineses é fornecido pelo conteúdo deste Manual. Neste livro, que também contém material interessante sobre progressões e resolução de equações, aparece, pela primeira vez, um dos mais famosos problemas em equações indeterminadas - **o problema das “cem aves”**.

No prefácio, Zhang refere que: “na aprendizagem da aritmética, não estamos preocupados com as dificuldades da multiplicação e da divisão, mas estamos preocupados com as dificuldades em considerar fracções” (Mikami, p. 39, apud Brandenburg e Nevenzeel, 2007, p. 56). Daqui se depreende que, no Manual, apareceria uma grande quantidade de fracções.

☞ **A Continuação da Matemática Antiga**

Este livro foi escrito por **Wang Xiaotong**, por volta de 625. É composto por 20 problemas, entre os quais um muito interessante que lida com equações cúbicas.

Falta referir mais três obras que correspondem a importantes trabalhos matemáticos posteriores.

☞ **Tratado de Matemática em Nove Secções⁴⁴**

O século XIII é considerado como o ponto mais alto no desenvolvimento da Matemática tradicional chinesa. Um dos matemáticos mais importante desta época foi **Qin Jiushao** (c. 1202–1261), que publicou, em 1247, o seu famoso *Tratado de Matemática em Nove Secções*.

Este é o livro mais antigo da Matemática chinesa que contém um símbolo circular para o zero.

Além disso, é neste livro que aparecem, pela primeira vez na Matemática chinesa, equações de grau superior a 3.

☞ **Análise detalhada das Regras Aritméticas no Nove Capítulos**

⁴⁴ Não confundir com *Nove Capítulos de Arte Matemática*, também conhecido por *Aritmética em Nove Secções*.

Esta obra não é mais do que um comentário ao *Nove Capítulos de Arte Matemática*, feita por **Yang Hui**, por volta de 1261. Nesta obra, Hui reorganiza todo o texto do *Nove Capítulos* e explica os últimos cinco capítulos.

O destaque desta obra está num diagrama que corresponde ao chamado **Triângulo de Pascal** que, segundo Yang Hui, foi extraído de um manual do século XI, da autoria de Jian Xian.

☞ Precioso Espelho dos Quatro Elementos

O último dos notáveis matemáticos do século XIII, **Zhu Shijie**, compôs dois tratados, sendo um deles, o *Precioso Espelho dos Quatro Elementos*, escrito em 1303.

Este é composto por 288 problemas, alguns dos quais envolvem a extracção de raízes. Um dos seus maiores contributos foi a adaptação do método de Qin para resolver equações polinomiais num procedimento para resolver sistemas de equações.

Este trabalho, perdido e depois recuperado, mostra o auge do desenvolvimento atingido pelos matemáticos chineses no campo da Álgebra.

Depois de descritas as obras, ainda que de forma sucinta (à excepção do *Nove Capítulos de Arte Matemática*), podemos então passar à análise da Matemática chinesa, por temas, como foi feito para as duas civilizações já analisadas, o Egipto e a Babilónia.

Mas, antes de mais, comecemos por conhecer o sistema de numeração utilizado pelos chineses.

SISTEMA DE NUMERAÇÃO

De acordo com antigos ossos do oráculo, de há mais de 3000 anos, os chineses usaram, desde o início, um tipo de notação decimal. Por exemplo, sobre os ossos do oráculo, 656 foi escrito como seis centenas, cinco dezenas, seis. Onde o símbolo para o 6 e o símbolo para o 100 eram combinados num único símbolo e, da mesma forma, para o 5 e o 10. Ora, este é considerado um sistema de agrupamento multiplicativo de base 10.

De um modo geral, num sistema de agrupamento multiplicativo, depois de uma base b ter sido seleccionada, são adoptados símbolos para $1, 2, \dots, b - 1$, e um segundo conjunto de símbolos para b, b^2, b^3, \dots . Os símbolos dos dois conjuntos são utilizados de forma multiplicativa para mostrar quantas unidades de cada potência de b são necessárias.

Assim, no caso da base 10, além de um símbolo para cada um dos primeiros nove números, são necessários mais símbolos para designar as potências de 10. Se designarmos os primeiros nove números pelos símbolos usuais, e representarmos 10, 100 e 1000 por a, b, c , num sistema de agrupamento multiplicativo teríamos, por exemplo, $5625 = 5c6b2a5$.

Usando os símbolos utilizados pelos chineses, a seguir se representam os símbolos dos dois grupos básicos e do número 5625, escritos verticalmente.

		Example: 5625	
1	一	10	十
2	二	10^2	百
3	三	10^3	千
4	四		
5	五		
6	六		
7	七		
8	八		
9	九		

Fig. 56 – Os símbolos utilizados pelos chineses e o número 5625 escrito nessa época

Mais tarde, por exigências impostas pelo desenvolvimento do comércio, da administração e da ciência, foi desenvolvido um sistema numérico de valor posicional, de base 10.

Os números eram representados por pequenos bastões de bambu ou marfim. Para facilitar a sua representação, eram utilizados os chamados *quadros de contagem*, que não eram mais do que tabelas, com linhas e colunas.

Um número era formado, numa linha, com as unidades colocadas na coluna mais à direita, as dezenas na próxima coluna à esquerda das unidades, as centenas na coluna adjacente à esquerda, etc.

Note-se que, contrariando a orientação que usavam para escrever, estes símbolos eram registados da esquerda para a direita, como actualmente é feito na escrita ocidental.

A propriedade mais significativa de representar números desta forma é que correspondia a um sistema de valor posicional. Assim, um bastão na coluna mais à direita representava 1, enquanto um bastão na coluna adjacente, à esquerda, representava 10, etc.

Os números de 1 a 9 tinham que ser formados a partir dos bastões e verificou-se que o fizeram de duas maneiras diferentes. Na tabela 12 encontram-se essas duas possíveis representações:

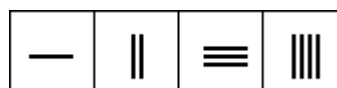
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Unidades Centenas Dezenas de milhar ...						┐	┑	┒	┓
Dezenas Milhares Centenas de milhar ...	—	=	≡	≣	≤	┘	┙	┚	┛

Tabela 12 – Duas representações possíveis para os números de 1 a 9

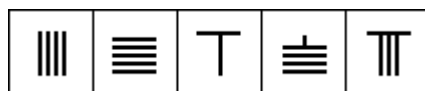
O maior problema dessa notação era que poderia gerar confusão. O que representava, por exemplo, ||| ? Poderia ser 3, ou 21 ou 12, ou até mesmo 111. Se os bastões se movessem ligeiramente ao longo da linha, levariam à representação de um número que não era o pretendido.

Mas os chineses encontraram uma maneira inteligente de evitar este problema. Usaram, alternadamente, os dois padrões de números representados no quadro acima. Para representar um algarismo numa posição ímpar (unidades, centenas, dezenas de milhar, etc.), usaram os símbolos representados na linha superior, que agrupavam maioritariamente traços verticais e que tinham a designação de *hengs*. Para representar um algarismo numa posição par (dezenas, milhares, centenas de milhar, etc.), os chineses usaram os símbolos representados na linha inferior, que se designavam por *tsungs* e que se obtiveram dos primeiros, passando os traços verticais a horizontais e vice-versa.

Assim, por exemplo, 1234 seria representado por:



e 45698 por:



Não houve necessidade de um símbolo para o zero pois, para o representar, era simplesmente deixado um espaço vazio. Além disso, as formas alternadas dos números também ajudavam a mostrar se havia, ou não, um espaço em branco. Por exemplo, 60390 seria representado como:



No *Manual de Matemática do Mestre Sun*, do século III, consta uma cantilena que serve de mnemónica para fixar este código:

*“As unidades são verticais, as dezenas são horizontais.
As centenas de pé, os milhares sentados.
Assim os milhares e as dezenas parecem o mesmo.
As dezenas de milhar e as centenas são parecidas.”*

(Joseph, 1991 apud Costa, 2000, p. 116)

Numa fase posterior, a partir da Dinastia Sung (960-1126), foi introduzido um símbolo circular para representar o zero. Este símbolo apareceu, pela primeira vez, no livro de Qin Jiushao (1247), como já foi mencionado anteriormente. No entanto, admite-se que a introdução desse símbolo tenha tido influência hindu.

Este sistema de contagem, com bastões, continuou em uso até à sua eventual substituição, no século XVI ou XVII.

ARITMÉTICA

Para realizar operações aritméticas, os chineses colocavam os números envolvidos nas diferentes linhas do *quadro de contagem* e, depois, faziam as manipulações apropriadas.

Por exemplo, para adicionar 6 com 9, isto é, \top e IIII , juntavam os dois bastões horizontais, obtendo 10, enquanto os verticais perfaziam 5.

A adição e subtracção de números com vários algarismos eram, geralmente, feitas da esquerda para a direita.

Para multiplicar, os *calculadores* também tinham que memorizar as regras básicas da multiplicação, como nós, mas, depois, o processo era efectuado da esquerda para a direita, com as adições sendo feitas após cada multiplicação.

A divisão era feita de modo análogo à multiplicação, e tendo em conta que é a operação inversa da multiplicação.

No *Manual de Matemática de Xiahou Yang*, é mostrado que, para multiplicar um número por 10, 100, 1000 ou 10000 bastava deslocar os bastões 1, 2, 3 ou 4 casas para a esquerda. Já, para dividir pelos mesmos valores, bastava deslocar os bastões o mesmo número de casas para a direita. O facto mais significativo desta explicação é que, já naquela época, não só o conceito de potências positivas de 10 estava claro, mas também as fracções decimais como potências negativas de 10.

Os chineses também trabalhavam com fracções, expressando-as como o fazemos actualmente. Na verdade, para calcularem com fracções, utilizavam as mesmas regras que usamos hoje em dia, incluindo a nossa noção de denominadores comuns.

Também era do seu conhecimento a regra para simplificar fracções, correspondente a achar o máximo divisor comum (m.d.c.) entre o numerador e o denominador. Para tal, utilizavam um algoritmo equivalente ao “Algoritmo de Euclides”, como se pode ver pela seguinte regra apresentada no *Nove Capítulos de Arte Matemática*:

“A regra para reduzir fracções: se (o denominador e o numerador) podem ser reduzidos para metade, divide-os por 2. Caso contrário, considera o numerador e o denominador e subtrai o número menor do maior. Repete o processo para obter o máximo divisor comum (m.d.c.). Depois, divide a fracção pelo m. d. c. encontrado.”

Os números negativos também eram usados nos *quadros de contagem* e, para distinguir os números positivos dos negativos, eram usados bastões vermelhos e pretos, respectivamente.

As manipulações nos quadros de contagem foram, eventualmente, alargadas a outros procedimentos, tais como resolver sistemas de equações lineares e encontrar soluções numéricas de equações polinomiais.

ÁLGEBRA

Como na Matemática do Egipto, muitos problemas da Matemática chinesa eram resolvidos pela *regra da falsa posição*. Além desta, os chineses também utilizaram a *regra da dupla falsa posição*.

Os antigos chineses foram claramente talentosos na aritmética, mas as suas realizações algébricas são surpreendentes; conseguiam resolver sistemas pelo “método de eliminação Gaussiano”, tendo resolvido sistemas de equações, tanto determinados como indeterminados.

Esta conquista é ainda mais admirável quando comparada com o desenvolvimento da Matemática noutras regiões. Os gregos, os hindus e os árabes também discutiram sistemas de equações lineares, mas o mundo, além dos chineses, teve que esperar cerca de 2 000 anos até Gauss, em 1826, ter publicado a sua solução para o método que ficou com o seu nome.

Equações do 1º grau

O Capítulo VII do *Nove Capítulos*, intitulado “Excesso e deficiência”, explica como resolver equações lineares do tipo $ax + b = 0$.

Vejamos em que consiste esse método, usando a nossa notação.

Consideremos dois pares (x_i, y_i) , tais que

$$ax_1 + b = y_1 \quad e \quad ax_2 + b = y_2.$$

Subtraindo a segunda equação da primeira, obtemos:

$$a = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

e, eliminando o termo em a , vem:

$$b = \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2 - x_1}.$$

Como $x = -\frac{b}{a}$, se dividirmos estas duas igualdades, obtemos

$$x = -\frac{b}{a} = \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{y_1 - y_2}. \quad (1)$$

Deste modo, partindo de duas conjecturas para x , conseguimos calcular o seu valor exacto.

Este método é o chamado *método do excesso e da deficiência*, mais tarde conhecido por *regra da dupla falsa posição*. Este método, que é parecido com o dos babilónios, começa por “adivinhar” soluções possíveis e finaliza, ajustando a suposição, para obter a solução correcta, e mostra que os chineses também entendiam o conceito de uma relação linear.

Esta regra voltou a aparecer, primeiro no mundo Islâmico e depois na Europa Ocidental, mais de mil anos mais tarde, tendo sido bastante utilizada por Fibonacci, no seu *Liber Abaci*. De facto, Fibonacci foi o primeiro matemático europeu a descrever este método, chamando-lhe o método do *elchataym*.

No capítulo VII, depois da explicação da regra, são propostos problemas para a aplicar, como por exemplo, o lugar de encontro de dois cavalos que viajam a velocidades diferentes, o número de diferentes coisas obtidas tendo em conta uma certa quantia de dinheiro e o capital e os juros de um empréstimo.

Sistemas de equações

Os chineses também se interessaram por sistemas de equações lineares e usaram dois algoritmos básicos para os resolver. O primeiro método, usado principalmente para resolver problemas que actualmente traduzimos por sistemas de duas equações com duas incógnitas, é a já referida *regra da dupla falsa posição*.

Para exemplificar a aplicação desta regra, consideremos o seguinte problema:

Exemplo 1 (Problema 7 do Capítulo VII⁴⁵): “O preço de 1 *mu*⁴⁶ de terreno bom é 300 moedas; o preço de 7 *mu* de terreno mau é 500. Uma pessoa compra 1 *qing*⁴⁷; o preço foi 10000 moedas. Diz: que quantidade de terreno bom e mau comprou?”

Este problema pode ser traduzido pelo seguinte sistema de duas equações com duas incógnitas:

$$\begin{cases} x + y = 100 \\ 300x + \frac{500}{7}y = 10000 \end{cases}$$

A regra chinesa para a resolução do problema é a seguinte: “Supõe que há 20 *mu* de terra boa e 80 de terra má. Então, o excesso é $1714 \frac{2}{7}$. Se há 10 *mu* de terra boa e 90 de terra má, a deficiência é $571 \frac{3}{7}$ ”.

A resolução, como explica o autor chinês, consiste em multiplicar 20 por $571 \frac{3}{7}$, 10 por $1714 \frac{2}{7}$, adicionar os produtos e, finalmente, dividir o resultado obtido pela soma de $1714 \frac{2}{7}$ e $571 \frac{3}{7}$. O resultado, $12 \frac{1}{2}$ *mu*, é a quantidade de terra boa. A quantidade de terra má, $87 \frac{1}{2}$ *mu* é, então, facilmente encontrada.

No entanto, como era costume, o autor chinês não explicou como chegou a este algoritmo.

Note-se que se escrevermos a primeira equação em ordem a y e a substituímos na segunda equação, obtemos uma equação linear em x . Logo, o algoritmo indicado pelo autor chinês, corresponde à aplicação da *regra da dupla falsa posição* acima explicada. Neste caso, a fórmula aplicada foi a seguinte

$$x = \frac{y_1x_2 + y_2x_1}{y_1 + y_2}$$

onde y_1 é o excesso determinado pela suposição x_1 e y_2 é a deficiência determinada pela suposição x_2 .

A diferença entre os sinais desta relação e os sinais da relação apresentada em (1), advém do facto de, neste caso, y_2 representar uma deficiência.

Uma conjectura de como este algoritmo foi encontrado começa por reparar que a mudança do valor correcto, mas desconhecido, x , para o valor suposto 20, envolve uma mudança no valor da “função” $300x + \frac{500}{7}y$ de $1714 \frac{2}{7}$, enquanto que a mudança de 10

⁴⁵ A numeração dos problemas do *Nove Capítulos de Arte Matemática*, utilizada neste trabalho, é a que consta em (Shen et al, 1999).

⁴⁶ 1 *mu* = 0,06 *ha*

⁴⁷ 1 *qing* = 100 *mu*

para x envolve uma mudança no valor da função de $571 \frac{3}{7}$. Uma vez que a linearidade implica que a razão de cada par de mudanças é igual, derivamos a proporção

$$\frac{20 - x}{1714 \frac{2}{7}} = \frac{x - 10}{571 \frac{3}{7}}$$

ou, no caso geral,

$$\frac{x_1 - x}{y_1} = \frac{x - x_2}{y_2}$$

donde se deriva a solução para x .

Cada um dos 20 problemas do capítulo VII é resolvido por uma ou outra modificação deste algoritmo do “excesso e deficiência”. Por exemplo, duas suposições diferentes podem ambas originar um excesso. Em todo o caso, o autor deu uma explicação para a resolução apropriada que, na nossa fórmula, corresponde a uma mudança nos sinais.

O capítulo VIII descreve um segundo método de resolver sistemas de equações lineares, a que chamavam *método das matrizes rectangulares*, novamente através da apresentação de vários exemplos com pequenas diferenças. Neste caso, contudo, os métodos modernos não são mais simples. De facto, o procedimento usado pelos chineses para encontrar as soluções é virtualmente idêntico ao método de eliminação Gaussiano e é apresentado na forma matricial.

Neste capítulo, são apresentados vários problemas que conduzem a sistemas de equações lineares, chegando a aparecer sistemas com cinco equações a cinco incógnitas. O problema 13 deste capítulo considera, ainda, um sistema indeterminado, com 5 equações e 6 incógnitas, que aqui será analisado.

Resolver sistemas de equações lineares com matrizes, requer números negativos. Por isso, neste capítulo, o autor deu as regras para adicionar e subtrair números positivos e negativos.

Além de sistemas de equações lineares, também foram discutidos métodos para extrair raízes quadradas e raízes cúbicas.

Para ilustrar a aplicação do *método das matrizes rectangulares*, consideremos o primeiro problema deste capítulo:

Exemplo 2 (Problema 1 do Capítulo VIII): “A ceifa de 3 molhos de cereal superior, 2 molhos de cereal médio e um molho de cereal inferior é 39 cestos. A ceifa (de outro campo) de 2 molhos de cereal superior, 3 molhos de cereal médio e 1 molho de cereal inferior é 34 cestos. (De um terceiro campo) a ceifa de 1 molho de cereal superior, 2 molhos de cereal médio e 3 molhos de cereal inferior é 26 cestos. Qual é a ceifa de cereal superior, médio e inferior?”

As relações do problema são equivalentes a um sistema de três equações lineares em três incógnitas x , y e z , nomeadamente,

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 2x + 3y + z = 34 \\ x + 2y + 3z = 26 \end{cases}$$

No entanto, as equações não foram escritas desta maneira, sendo o algoritmo para a resolução o seguinte: “Coloca o 3, 2 e 1 molhos das três classes e os 39 cestos de cereal à direita. Coloca as outras condições no meio e à esquerda”. Este arranjo é apresentado no diagrama:

$$\begin{array}{r} 1 \quad 2 \quad 3 \\ 2 \quad 3 \quad 2 \\ 3 \quad 1 \quad 1 \\ 26 \quad 34 \quad 39 \end{array}$$

O texto continua: “Com a primeira classe na coluna da direita multiplica a coluna do meio e subtrai”. Isto significa multiplicar a coluna do meio por 3 e depois subtrair um múltiplo da coluna da direita (neste caso, 2) de modo que o primeiro número da coluna do meio seja 0. A mesma operação é, então, feita em relação à coluna da esquerda. O resultado é o seguinte:

$$\begin{array}{r} 1 \quad 0 \quad 3 \quad 0 \quad 0 \quad 3 \\ 2 \quad 5 \quad 2 \quad 4 \quad 5 \quad 2 \\ 3 \quad 1 \quad 1 \quad 8 \quad 1 \quad 1 \\ 26 \quad 24 \quad 39 \quad 39 \quad 24 \quad 39 \end{array}$$

“Depois com o que resta da segunda classe da coluna do meio, subtrai directamente”.

Ou seja, realiza a mesma operação usando a coluna do meio e a coluna da esquerda (multiplica a coluna da esquerda por 5 e a do meio por 4 e depois subtrai a coluna do meio à coluna da esquerda). O resultado é:

$$\begin{array}{r} 0 \quad 0 \quad 3 \\ 0 \quad 5 \quad 2 \\ 36 \quad 1 \quad 1 \\ 99 \quad 24 \quad 39 \end{array}$$

Como este diagrama é equivalente ao sistema $\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 5y + z = 24 \\ 36z = 99 \end{cases}$

o autor agora explica como resolver este sistema pelo que chamamos hoje “método da substituição”, começando com $z = \frac{99}{36} = 2\frac{3}{4}$.

Infelizmente, como é normal em todas as fontes, não explicam porque razão este algoritmo funciona ou como foi derivado. Podemos apenas supor que os chineses

descobriram que subtraindo múltiplos de equações de outras equações obtém-se um novo sistema com as mesmas soluções que o original.

Podemos querer saber o que acontecia quando estes cálculos com as matrizes conduziam a quantidades negativas. Uma breve análise do problema 3, do mesmo capítulo, mostra que isso não era uma limitação.

Exemplo 3 (Problema 3 do Capítulo VIII): “A ceifa de 2 molhos de cereal superior, 3 molhos de cereal médio e 4 molhos do pior cereal não são suficientes para fazer um cesto inteiro. Se juntarmos aos 2 molhos de cereal superior 1 molho de cereal médio, aos 3 molhos de cereal médio 1 molho do pior cereal e aos 4 molhos do pior cereal 1 molho do melhor, então cada ceifa é de exactamente um cesto. Quantos cestos é que cada um dos molhos dos três tipos de cereal contém?”

Este problema pode ser traduzido pelo sistema:

$$\begin{cases} 2x + y &= 1 \\ 3y + z &= 1 \\ x + 4z &= 1 \end{cases}$$

De facto, o autor deu as regras para adicionar e subtrair números positivos e negativos:

“Para a subtracção – com os mesmos sinais subtrai um do outro; com sinais diferentes adiciona um ao outro; positivo subtraído de nada dá negativo, negativo subtraído de nada dá positivo. Para a adição – com sinais diferentes subtrai um do outro; com os mesmo sinais adiciona um ao outro; positivo e nada dá positivo; negativo e nada dá negativo.”

Resolvendo este sistema, obtemos a solução:
$$\begin{cases} x = \frac{9}{25} \\ y = \frac{7}{25} \\ z = \frac{4}{25} \end{cases}$$

Problemas indeterminados

Como exemplo de um problema com uma dificuldade diferente, consideremos o problema 13, ainda do capítulo VIII, traduzido por um sistema de cinco equações com seis incógnitas:

$$\begin{cases} 2x + y = s \\ 3y + z = s \\ 4z + u = s \\ 5u + v = s \\ x + 6v = s \end{cases}$$

Resolvendo este sistema pelo método matricial, obtemos a equação $v = 76s/721$. Se $s = 721$, então $v = 76$. Esta é a única resposta dada.

Infelizmente, não é conhecido se os chineses consideraram outras possibilidades para s ou, ainda, se consideraram as implicações de um número infinito de soluções.

Problema das cem aves

Este problema aparece, pela primeira vez, no *Manual Aritmético de Zhang Quijian* (c. 475). Este problema é famoso devido à sua transmissão a outras sociedades, tendo aparecido várias versões do mesmo em textos posteriores da Índia, do mundo Islâmico e da Europa.

O problema original de Zhang é como se segue:

Exemplo 4 (Problema 38 do Capítulo III do Manual Aritmético de Zhang Quijian⁴⁸): “Um galo custa 5 qian, uma galinha custa 3 qian e 3 frangos custam 1 qian. Com 100 qian compramos 100 destas aves. Quantos galos, galinhas e frangos compramos?”

Este problema pode ser traduzido pelo seguinte sistema de equações, onde x representa o número de galos, y o número de galinhas e z o número de frangos:

$$\begin{cases} 5x + 3y + \frac{1}{3}z = 100 \\ x + y + z = 100 \end{cases}$$

Este sistema é indeterminado pois temos duas equações e três incógnitas. Eliminando uma das incógnitas, chegamos a uma equação linear com duas incógnitas. Especificamente, uma vez que $z = 100 - x - y$, temos:

$$5x + 3y + \frac{1}{3}(100 - x - y) = 1000 \Leftrightarrow 7x + 4y = 100.$$

Esta equação tem a solução geral

$$\begin{cases} x = 4t \\ y = 25 - 7t \\ z = 75 + 3t \end{cases}$$

O próprio Zhang deu três respostas: 4 galos, 18 galinhas, 78 frangos; 8 galos, 11 galinhas, 81 frangos; e 12 galos, 4 galinhas, 84 frangos; mas deu apenas algumas dicas sobre o método utilizado, nomeadamente, “*auumente os galos cada vez por 4, diminua as galinhas cada vez por 7, e auumente os frangos cada vez por 3*”. Ou seja, ele notou que alterando os valores desta forma, preservava tanto o custo como o número total de aves. De facto, a sua descrição está de acordo com o sistema obtido anteriormente e as suas respostas são as únicas em que os três valores são positivos. Ora vejamos, neste contexto deve-se escolher t a satisfazer, simultaneamente, as condições:

⁴⁸ Os problemas das obras da Matemática chinesa, apresentados neste anexo, foram retirados de (Lagarto, s/d).

$$4t > 0, \quad 25 - 7t > 0 \quad e \quad 75 + 3t > 0.$$

Das duas últimas obtemos $-25 < t < \frac{25}{7}$. Uma vez que, pela primeira condição, t deve ter um valor positivo, podemos concluir que $t = 1, 2, 3$, chegando, precisamente, aos valores obtidos por Zhang.

Contudo, não há certezas se este foi o método utilizado por Zhang.

Teorema Chinês dos Restos

Um dos problemas proposto no terceiro capítulo do *Manual de Matemática do Mestre Sun* é o seguinte:

Exemplo 5 (Problema 37 do Capítulo III do Manual de Matemática do Mestre Sun):

“Uma mulher estava a lavar pratos num rio, quando um oficial cuja função era supervisionar as águas, lhe perguntou: 'Por que existem tantos pratos aqui?' - 'Porque houve festa em casa', respondeu a mulher. Depois o oficial perguntou o número de convidados. 'Não sei', disse a mulher, 'quantos convidados lá estiveram; por cada dois foi usado um prato para arroz; por cada três um prato para caldo; e por cada quatro um prato para carne; e havia 65 pratos no total'.”

Para encontrar a resposta, Sun Zi dá a seguinte regra: “multiplicar os 65 pratos por 12, obtendo 780. Dividir por 13, e assim obtemos a resposta”.

Isso pode ser facilmente verificado:

Seja N o número de convidados, então

$$\frac{N}{2} + \frac{N}{3} + \frac{N}{4} = 65 \Leftrightarrow 6N + 4N + 3N = 12 \times 65.$$

Após este exemplo, aparece imediatamente o seguinte problema, que é considerado o mais antigo problema de Análise Indeterminada.

Exemplo 6 (Problema 38 do Capítulo III do Manual de Matemática do Mestre Sun):

“Há um número de objectos desconhecido. Quando contados 3 a 3, sobram 2; quando contados 5 a 5, sobram 3, e quando contados 7 a 7, sobram 2. Quantos objectos há?”

Assim, estamos à procura de um número inteiro N que satisfaça, simultaneamente, as três equações:

$$N = 3x + 2,$$

$$N = 5y + 3,$$

$$N = 7z + 2,$$

onde x, y e z são inteiros.

Actualmente, e tendo em conta a Teoria dos Números, diremos que se trata de um problema de congruências, podendo ser colocado do seguinte modo:

$$\begin{aligned} N &\equiv 2(\text{mod}3), \\ N &\equiv 3(\text{mod}5), \\ N &\equiv 2(\text{mod}7). \end{aligned}$$

A resposta dada é 23 e Sun Zi apresenta o método de resolução: Se contados 3 a 3 sobram 2, põe 140; se contados 5 a 5 sobram 3, põe 63; se contados 7 a 7 sobram 2, põe 30. Adicionando estes números temos 233; subtrai-lhe 210 e obténs 23.

Agora queremos saber como Sun Zi terá chegado a esta resolução. Felizmente, Sun está disposto a explicar:

“Por cada unidade que sobra quando contamos 3 a 3, põe 70. Por cada unidade que sobra quando contamos 5 a 5, põe 21. E, por cada unidade que sobra quando contamos 7 a 7, põe 15. Se a soma desses números é superior ou igual a 106, subtrai 105 disto e obterás a resposta.”

Segundo Katz (1998), parece que Sun Zi reparou que:

$$70 \equiv 1(\text{mod}3) \equiv 0(\text{mod}5) \equiv 0(\text{mod}7),$$

$$21 \equiv 1(\text{mod}5) \equiv 0(\text{mod}3) \equiv 0(\text{mod}7),$$

$$15 \equiv 1(\text{mod}7) \equiv 0(\text{mod}3) \equiv 0(\text{mod}5).$$

Daí, $2 \times 70 + 3 \times 21 + 2 \times 15 = 233$ satisfaz a congruência pretendida. Uma vez que qualquer múltiplo de 105 é divisível por 3, 5 e 7, temos que subtrair 105, duas vezes, de modo a obter o menor valor positivo.

Como este problema é o único deste tipo apresentado por Sun Zi, não sabemos se ele desenvolveu um método geral para encontrar inteiros congruentes com módulo m_i mas congruentes com 0 módulo m_j , $j \neq i$, para os inteiros dados $m_1, m_2, m_3, \dots, m_k$, que é a parte mais difícil da resolução completa.

Neste problema, em particular, os números são fáceis de encontrar por tentativas, e é importante notar que:

$$\begin{aligned} 70 &= \frac{3 \times 5 \times 7}{3} \times 2, \\ 21 &= \frac{3 \times 5 \times 7}{5} \times 1, \\ 15 &= \frac{3 \times 5 \times 7}{7} \times 1. \end{aligned}$$

De facto, Sun Zi podia ter resolvido este problema por “tentativa e erro”, porque os números não são muito grandes. Mas, para fazer o calendário e determinar o ano, o monge Yi Xing (séc. VIII) resolveu a seguinte congruência:

$$1110343y = 44820 \pmod{(60 \times 3040)} = 49107 \pmod{89773},$$

onde y é o número de anos que passaram desde o Grande Ciclo. Neste caso, não é muito aconselhável resolver esta congruência por “tentativa e erro” e, certamente, não terá sido esse o método utilizado por Yi Xing.

O problema aqui analisado aparece, actualmente, nos livros sobre Teoria dos Números como o *Problema Chinês dos Restos* e é resolvido pelo chamado *Teorema Chinês dos Restos*. Este tema também foi estudado por Diofanto de Alexandria (c. 250 d. C.) e, posteriormente, por Fibonacci (c. 1202). Mas, só com Euler (1743) e Gauss (1801) é que os estudos europeus sobre o *Problema dos Restos* terão atingido o seu apogeu (Libbretch, 1973, apud Costa, 2000).

Equações do 2º grau

Estas equações foram a principal área de estudo dos antigos babilónios e também aparecem nas fontes chinesas. Nas duas civilizações, a metodologia das soluções era baseada em ideias geométricas, ou seja, usavam quadrados e rectângulos em vez de quadrados aritméticos e produtos.

Os problemas que envolvem o Teorema de Pitágoras conduzem, muitas vezes, a equações quadráticas e, por isso, o capítulo IX do *Nove Capítulos* tem muitos problemas que podem ser traduzidos por equações quadráticas.

Um exemplo de um problema deste capítulo, que usa a semelhança de triângulos e que também conduz a uma equação quadrática, é o problema 20:

Exemplo 7 (Problema 20 do Capítulo IX): “Uma cidade cercada por uma muralha quadrada de dimensões desconhecidas, tem quatro portas; uma porta ao meio de cada lado da muralha. Uma árvore encontra-se a 20 pu⁴⁹ da porta norte [no exterior da vila]. Para sair da vila temos de andar 14 pu a partir da porta sul seguindo 1775 pu para oeste até se conseguir ver a árvore. Quais são as dimensões da muralha da cidade?”

A figura seguinte ilustra os dados mencionados no problema:

⁴⁹ 1 mu = 240 pu = 0,067 ha

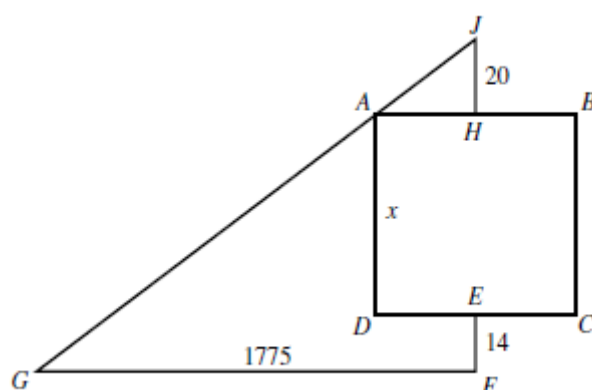


Fig. 57 – Ilustração do problema 20

Desenhar a figura é, neste caso, uma importante estratégia para resolver o problema. Tendo por base a figura acima apresentada, vejamos como chegar à equação que traduz este problema.

Os triângulos [JHA] e [JFG] são semelhantes, logo $\frac{JH}{HA} = \frac{JF}{FG}$, donde,

$$\begin{aligned} \frac{20}{\frac{x}{2}} &= \frac{20 + x + 14}{1775} \Leftrightarrow \frac{x}{2}(34 + x) = 20 \times 1775 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 + 34x = 71000 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x = 250 \end{aligned}$$

Infelizmente, o autor chinês apenas apresenta a solução $x = 250$, sem indicar qualquer método. No entanto, supõe-se que o método utilizado para resolver esta equação quadrática seja semelhante ao algoritmo que utilizavam para determinar a raiz quadrada. Este algoritmo tem origem geométrica e consiste num procedimento recursivo, onde cada etapa dá uma melhor aproximação para a resposta correcta.

A maioria dos problemas do *Nove Capítulos*, relacionados com equações do 2º grau, é daqueles que, actualmente, traduzimos por sistemas de duas equações com duas incógnitas. Um exemplo desses problemas é o seguinte:

Exemplo 8 (Problema 11 do Capítulo IX): “A altura de uma porta é 6 chih e 8 cun⁵⁰ mais do que a largura. A diagonal é 1 zhang. Quais são as dimensões da porta?”

O problema é traduzido pelo seguinte sistema:

$$\begin{cases} x - y = 6,8 \\ x^2 + y^2 = 100 \end{cases}$$

⁵⁰ 1 zhang = 10 chih
1 chih = 10 cun

Segundo Katz (1998), a solução chinesa parece ter-se baseado na ‘demonstração’ chinesa do Teorema de Pitágoras (que será analisada posteriormente).

Reescrevendo o sistema na forma genérica

$$\begin{cases} x - y = d \\ x^2 + y^2 = c^2 \end{cases}$$

a figura 59 (representada na página 377), usada nessa demonstração, mostra que

$$(x + y)^2 = 4xy + (x - y)^2 \quad (1)$$

e ainda que

$$c^2 = 2xy + (x - y)^2,$$

o que é equivalente a

$$4xy = 2c^2 - 2(x - y)^2.$$

Conjugando esta equação com a equação representada em (1), obtemos que

$$(x + y)^2 = 2c^2 - (x - y)^2,$$

ou seja,

$$x + y = \sqrt{2c^2 - (x - y)^2},$$

donde se obtém, finalmente, a igualdade

$$\frac{x + y}{2} = \sqrt{\frac{c^2}{2} - \left(\frac{d}{2}\right)^2}.$$

Daqui, o autor determina que $x + y = 12,4$ e, depois, combinando isto com $x - y = 68$, obtém a solução $x = 9,6$ e $y = 2,8$.

Contudo, esta obra contém poucos outros problemas que possam ser traduzidos por sistemas de equações lineares e quadráticas; são as fontes babilônicas que contêm a maioria dos exemplos de equações quadráticas dos tempos antigos.

Note-se, no entanto, que “o método utilizado pelos chineses para resolver equações quadráticas é completamente diferente do utilizado pelos babilônios. Estes desenvolveram, essencialmente, uma fórmula que apenas podia ser aplicada a estas equações. Os chineses desenvolveram um algoritmo numérico que, posteriormente, generalizaram para equações de qualquer grau” (Katz, 1998, p. 206).

Equações de grau superior ao 2º

Equações cúbicas ocorreram no trabalho de Wang Xiaotong no início do século VII. No *Nove Capítulos* podemos ver como uma raiz cúbica é transformada numa equação do terceiro grau, resolvida numericamente. Wang, no entanto, é o primeiro a considerar, explicitamente, equações cúbicas. Mas, como de costume, não apresenta nenhum método de resolução a não ser uma enigmática referência para a resolver de acordo com a regra da extracção da raiz cúbica, analogamente ao que foi feito no *Nove Capítulos*.

Triângulo de Pascal

Em meados do século XI, Jian Xian, num trabalho que se perdeu, generalizou os procedimentos para encontrar as raízes quadradas e cúbicas, analisados no *Nove Capítulos*, para raízes mais elevadas, usando um arranjo triangular de números. Além disso, também generalizou e melhorou o método em uso para resolver equações polinomiais de qualquer grau.

Os métodos de Jian Xian foram analisados no livro de Yang Hui, intitulado *Análise detalhada das Regras Aritméticas no Nove Capítulos* (1261). O diagrama utilizado por Hui, intitulado “a fonte do método de extracção de raízes”, está representado na figura 58:

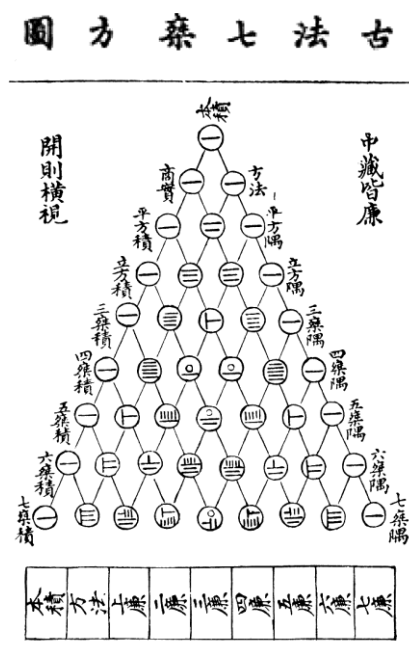


Fig. 58 – Diagrama de Yang Hui (séc. XIII) do Triângulo de Pascal
http://en.wikipedia.org/wiki/File:Yanghui_triangle.gif

Este arranjo triangular veio, posteriormente, a ser conhecido no Ocidente como “Triângulo de Pascal”. Este triângulo aritmético é uma tabela numérica infinita, em “forma triangular”, onde a n -ésima linha do triângulo indica os sucessivos coeficientes na expansão binomial de $(x + 1)^n$, como a seguir se representa:

$(x + y)^0$				1						Linha 0	
$(x + y)^1$			1			1				Linha 1	
$(x + y)^2$		1		2		1				Linha 2	
$(x + y)^3$		1		3		3		1		Linha 3	
$(x + y)^4$	1		4		6		4		1	Linha 4	
$(x + y)^5$	1	5		10		10		5		1	Linha 5
										

Assim, o chamado Triângulo de Pascal (assim como o chamado Teorema de Pitágoras) é, na realidade, o produto de uma cultura Oriental muito anterior a Pascal.

No seguinte excerto de Eves, esse facto está bastante claro; no entanto, Eves cometeu uma incorrecção. Ora vejamos:

“Pascal não foi o inventor do triângulo aritmético, porque um tal triângulo já tinha aparecido numa série de obras anteriores, sendo a referência mais antiga conhecida, um trabalho de 1303, de Zhu Shijie. Por causa do desenvolvimento feito por Pascal a muitas das propriedades do triângulo [...], este ficou conhecido como Triângulo de Pascal.”

(Eves, 1969, p. 262)

Note-se que Eves refere-se ao *Precioso Espelho dos Quatro Elementos* como sendo a referência mais antiga onde o Triângulo de Pascal apareceu. No entanto, pelo exposto anteriormente, constata-se que a afirmação de Eves não corresponde à verdade.

De facto, o triângulo foi redescoberto, por volta de 1261, pelo matemático chinês Yang Hui e, quase 500 anos depois, várias das suas propriedades foram estudadas pelo francês Blaise Pascal.

Na verdade, Zhu Shijie, no *Precioso Espelho*, apresenta um diagrama para potências de expoente não superior a 8, que não é mais do que um prolongamento do já referido diagrama *fonte de extrair raízes*; contudo, tem a honestidade de reconhecer que não é o seu criador, revelando que o recuperou de antigos cálculos (Costa, 2000), o que vem contradizer as palavras de Eves.

Como já foi referido, as primeiras equações de grau superior a 3 apareceram no *Tratado de Matemática em Nove Secções*. Um notável exemplo é a equação:

$$-x^4 + 736200x^2 - 40642560000 = 0.$$

Um outro problema deste Tratado pode ser traduzido por uma equação de grau 10!

O problema em questão, e que a seguir se apresenta, parece ter sido baseado no problema 20 do Capítulo IX do *Nove Capítulos*, analisado anteriormente, em que

apenas é alterada a forma da cidade. No entanto, essa alteração aumenta drasticamente o grau de dificuldade do problema.

Exemplo 9 (Problema do Tratado de Matemática em Nove Secções): “*Há uma cidade circular de diâmetro desconhecido, rodeada por uma muralha com quatro portas. Uma árvore está 3 li a Norte do portão Norte. Se alguém andar 9 li para Leste do portão Sul, a árvore torna-se visível. Encontre o diâmetro da cidade.*”

Considerando x^2 o diâmetro da cidade, Qin chegou à seguinte equação:

$$x^{10} + 15x^8 + 72x^6 - 864x^4 - 11664x^2 - 34992 = 0.$$

Depois de a resolver, Qin concluiu, correctamente, que o diâmetro (x^2) da cidade era 9 li.

Progressões

No *Manual de Matemática de Zhang Quijian* aparecem problemas com um enunciado semelhante a alguns problemas do Capítulo III do *Nove Capítulos de Arte Matemática*, relacionados com a tecelagem de têxteis e que representam progressões. Mas, o que há de especial nestes problemas, é que Zhang os resolveu de uma maneira geral, que pode ser entendida como uma fórmula. Vejamos um problema e a resolução indicada por Zhang.

Exemplo 10 (Problema 23 do Manual de Matemática de Zhang Quijian): *Há uma mulher insatisfeita que tece 5 chi no primeiro dia, e o seu trabalho diminui (a mesma quantidade) dia após dia, até tecer 1 chi no último dia. Descubra a quantidade que tece num mês.*

Nota: Um mês tem 30 dias

Para resolver este problema, Zhang dá a seguinte regra: “*Adiciona os montantes tecidos nos primeiro e último dias e toma a metade da soma. Em seguida, multiplica o número de dias de tecelagem, quando chegamos à resposta.*”

Isto dá-nos a soma de uma progressão aritmética como o produto de metade da soma dos primeiro e último termos pelo número de termos, que corresponde, exactamente, à fórmula usada presentemente.

No Capítulo III dos *Nove Capítulos*, também já tinham aparecido problemas relacionados com progressões, tanto aritméticas, como geométricas. Vejamos o próximo exemplo que está relacionado com uma progressão geométrica:

Exemplo 11 (Problema 4 do Capítulo III dos Nove Capítulos): *Uma tecedeira, melhorando a técnica de dia para dia, dobra todos os dias a quantidade produzida no dia anterior. Em cinco dias produz 5 chi de tecido. Quanto é que produz num dia?*

No **Precioso Espelho** são também encontradas regras para as somas de pilhas de bolas arranjadas de modo a formarem triângulos, pirâmides, cones e, assim, por diante. Entre as várias séries que são discutidas, destacam-se as seguintes:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$1 + 3 + 6 + 10 + \dots + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6},$$

$$1 + 4 + 10 + 20 + \dots + \frac{n(n+1)(n+2)}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24},$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Seguindo o costume chinês, de apresentar os conhecimentos sem justificação, não são dadas provas teóricas destas regras.

GEOMETRIA

A geometria surgiu da agrimensura, necessária quando terras férteis tinham de ser divididas, e ainda das observações astronómicas.

Apesar do poder da Matemática chinesa ter-se revelado na aritmética e na álgebra, a geometria não foi negligenciada. Embora a geometria chinesa não tivesse as bases axiomáticas que a geometria grega tinha, os chineses encontraram notáveis aproximações para π , determinaram a área e o volume de muitas figuras e sólidos geométricos e estavam familiarizados com o Teorema de Pitágoras.

Estimativas para π

Os historiadores da Matemática têm dedicado especial atenção às tentativas das civilizações antigas para encontrarem um valor aproximado para a relação entre o perímetro do círculo e o seu diâmetro (ou seja, o número π). Talvez exista este interesse porque parece que o aumento na precisão dos resultados permite “medir” a capacidade Matemática de uma dada civilização.

Como já tinham feito os matemáticos de outras civilizações antigas, os chineses também tentaram calcular um valor, tão exacto quanto possível, para essa relação. E, como foram consideravelmente mais avançados no cálculo aritmético do que os seus contemporâneos Ocidentais, não é surpreendente que tenham obtido valores notavelmente mais precisos para π . Nos textos da era pré-cristã, geralmente era usado o valor 3 como uma aproximação para π , mas, a partir do século I, os matemáticos

chineses procuraram melhores estimativas. Liu Xin (cerca de 23) utilizou 3,1547 e Zhang Heng (78–139) usou $\sqrt{10}$, cuja aproximação decimal é 3,1622; ou a fracção 92/29, cuja aproximação decimal é 3,1724.

Posteriormente, matemáticos do século III obtiveram aproximações mais precisas ao considerarem a razão entre o perímetro de um polígono regular inscrito e o diâmetro da circunferência que delimita o polígono. Liu Hui, no seu comentário sobre os *Nove Capítulos de Arte Matemática*, na tentativa de encontrar um valor mais preciso para π , utilizou um método semelhante ao de Arquimedes⁵¹. Com este método de “cortar o círculo”, Liu usou um polígono de 384 lados e obteve o seguinte enquadramento: $3,141024 < \pi < 3,142904$ e, com um polígono de 3072 lados, encontrou o seu melhor valor de π , ou seja, 3,14159.

No século V, o brilhante matemático e astrónomo Zu Chongzhi (430–501) melhorou significativamente a precisão na determinação de π , tendo descoberto que $3,1415926 < \pi < 3,1415927$. A partir deste intervalo, indicou a fracção 22/7 como um valor “impreciso” de π e 355/113 como o valor “rigoroso”. Este último valor para π é correcto para seis casas decimais. A maioria do trabalho de Zu Chongzhi está perdido, portanto, não se sabe como encontrou estes valores. Note-se que se foi utilizado o método da divisão do círculo de Liu, deveria ter usado um polígono com 24576 lados.

Comparáveis aproximações racionais não foram alcançadas no mundo Ocidental até o século XVI, quando o engenheiro holandês, Adriaan Anthonizoon (1527–1607), encontrou, novamente, a razão 355/113.

Nenhuma fracção com denominador menor que 113 dá uma melhor aproximação para π ; na verdade, 355/113 é uma estimativa racional tão boa que ninguém encontrou uma melhor até ter sido encontrado o valor 52163/16604.

Usando o método de Arquimedes com polígonos de 2^{62} lados, o incansável Ludolph van Ceulen (1540-1610) indicou, correctamente, o valor de π com 35 casas decimais. (Esta proeza computacional foi considerada tão extraordinária que todos os 35 dígitos deste número, designado por “número de Ludolphine”, foram esculpidos na sua lápide). Esta foi uma das últimas grandes tentativas para encontrar um valor aproximado de π pelo método do perímetro; daí em diante, e com o desenvolvimento da Análise, prevaleceram as técnicas de cálculo.

Áreas e Volumes

No capítulo I do *Nove Capítulos* são dadas regras, algumas correctas, outras não, para calcular a área de rectângulos, triângulos, trapezóides e segmentos de círculos.

O Capítulo IV do mesmo trabalho dá os volumes para prismas, cilindros, pirâmides truncadas, pirâmides, cones truncados e cones. Todas as fórmulas estão correctas se usarmos o valor correcto para π .

⁵¹ O método de Arquimedes pode ser analisado em (Pinto, 2009, p. 62-73).

Por exemplo, a área de um círculo é dada por $\frac{3}{4}d^2$, onde d é o diâmetro; o resultado estaria correcto se o valor de π fosse 3.

A fórmula correcta para o volume de uma pirâmide truncada, que já era conhecida dos egípcios, tendo aparecido no papiro de Moscovo, também aparece no *Nove Capítulos*.

Contudo, o volume da esfera é incorrecto, pois a regra apresentada corresponde a:

$$V = \frac{16}{9}r^3.$$

Liu Hui observa que a fórmula está errada e, honestamente, admite que não sabe a solução; nos seus comentários sobre o *Nove Capítulos*, tem a humildade de acrescentar: “vamos deixar o problema para quem pode dizer a verdade” (Shen et al, 1999, p. 229).

Mas, não ter conseguido determinar, correctamente, o volume da esfera é uma das suas únicas limitações. Ao considerar o próximo tópico da geometria, o Teorema de Pitágoras ou a Regra do *Gougu*, a sua contribuição para um dos mais importantes campos de aplicação desta regra, a agrimensura, é enorme. A regra do *Gougu* já tinha sido usada na *Aritmética Clássica do Gnómon* mas, sendo um aspecto tão importante da Matemática, também é contemplada no *Nove Capítulos*, onde várias aplicações práticas são dadas.

Teorema de Pitágoras

Demonstração do Teorema de Pitágoras

Ao longo dos séculos, têm surgido várias demonstrações deste teorema. Na verdade, admite-se que um diagrama da *Aritmética Clássica do Gnómon* represente a prova mais antiga, conhecida actualmente, deste teorema. Nesta obra aparece o diagrama da figura 59, acompanhado do seguinte comentário:

“Seja um rectângulo com 3 unidades de largura e 4 de comprimento. A diagonal entre dois vértices terá 5 unidades de comprimento. Desenhado um quadrado nessa diagonal, circunscrevam-se-lhe meios rectângulos iguais ao rectângulo inicial, de modo a obter um quadrado. Assim, os [quatro] meios rectângulos exteriores, de largura 3, comprimento 4 e diagonal 5, formam, no conjunto, dois rectângulos [de área 24]; então, o resto da área [quando esta é subtraída da área do quadrado exterior, 49] é 25.”

(Costa, 2000, p. 123)

Os chineses denominavam o cateto horizontal (ou menor) por *kou* e o cateto vertical (ou maior) por *ku*, daí este enunciado ser conhecido por Teorema do *kou ku* (também escrito *Gougu*) ou, ainda, Teorema dos ângulos rectos.

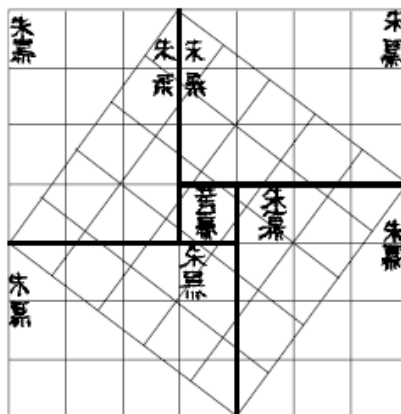


Fig. 59 – Demonstração geométrica para o triângulo de lados (3, 4, 5).

Ilustração original de Zhoubi (c. 300 a. C.)

(http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Chinese_pythagoras.jpg)

Apesar do comentário e do diagrama serem dados para o caso particular do triângulo de lados (3, 4, 5), nas últimas duas linhas encontra-se uma prova bastante generalizada. Se representarmos a largura por a , o comprimento por b , e a diagonal por c , então o argumento é o seguinte:

$$(a + b)^2 - 2ab = c^2;$$

uma vez que $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$, obtemos imediatamente a relação

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Olhando para isto geometricamente, o argumento depende apenas da decomposição do quadrado maior de duas maneiras diferentes: primeiro, como o quadrado de lado a mais o quadrado de lado b mais duas vezes o rectângulo ab , e segundo, como o quadrado de lado c mais duas vezes o rectângulo ab . De novo, o resultado aparece imediatamente.

Será que este argumento pode ser considerado uma prova? De acordo com os critérios actuais, seria necessário provar que, tanto o “quadrado” de lado c , como o “quadrado” de lado $a + b$ são, de facto, quadrados. Para os antigos chineses, assim como para a maioria dos nossos alunos, isso era óbvio.

Aplicações do Teorema de Pitágoras

Ainda mais detalhes sobre este teorema são encontrados no capítulo IX do *Nove Capítulos de Arte Matemática*. Neste capítulo há 24 problemas, todos baseados em

triângulos rectângulos. Os primeiros treze problemas são resolvidos usando aplicações do Teorema de Pitágoras. Dois problemas estudam o que nós agora chamamos ternos pitagóricos, enquanto os restantes nove problemas usam a semelhança de triângulos.

Vejamos alguns exemplos ilustrativos, começando com os mais simples, cuja resolução depende apenas da aplicação directa do teorema e de uma figura; e, por isso, não será feita referência à resolução dos mesmos:

Exemplo 12 (Problema 6 do Capítulo IX): “Dada uma cana no centro de um pequeno lago quadrado de 1 zhang⁵² de lado, a qual está 1 chih⁵³ acima da água. Quando é puxada para a margem, a sua parte de cima fica rente à tona da água. Diz: qual é a profundidade da água e o comprimento da cana.”

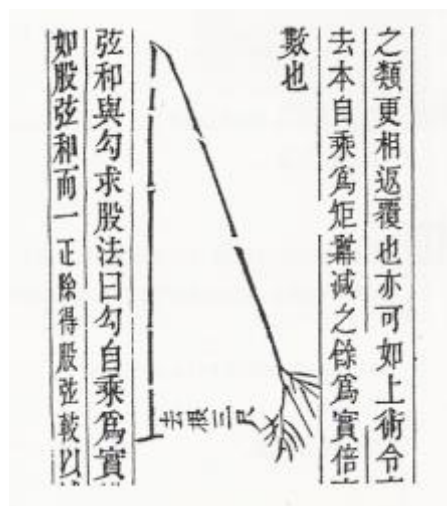
Exemplo 13 (Problema 7 do Capítulo IX): “Há uma corda pendurada do topo de uma árvore com 3 chih desta caídos no chão. Quando é esticada, de tal forma que a sua ponta toca o chão, chega a uma distância de 8 chih da base da árvore. Qual é o comprimento da corda?”

Exemplo 14 (Problema 13 do Capítulo IX): “Há um bambu com 1 zhang de altura, partiu-se e a parte de cima toca o chão a 3 chih da base do bambu. Qual é a altura da quebra?”

É de referir que uma adaptação deste problema saiu na Prova de Aferição de Matemática, do 3º Ciclo, em 2002, como a seguir se apresenta:

O seguinte problema é adaptado do livro chinês *Nove Capítulos de Arte Matemática*, do séc. I a. C.

Um bambu partiu-se, a uma altura do chão de 2,275 m, e a parte de cima, ao cair, tocou o chão, a uma distância de 1,5 m da base do bambu. Qual era a altura do bambu, antes de se ter partido? Resolve o problema e apresenta todos os cálculos que efectuares.



Prova de Aferição de Matemática, 2002 – 3º Ciclo E.B.

⁵² 1 zhang = 10 chih

⁵³ 1 chih = 23 cm

Enquanto estes problemas são simples aplicações do Teorema de Pitágoras, outros problemas, mais complexos e imaginativos, também foram considerados, como é o caso do seguinte:

Exemplo 15 (Problema 5 do Capítulo IX): *“Uma árvore de 2 zhang de altura tem de perímetro 3 chih. Existe uma videira que se enrola sete vezes à volta da árvore e chega ao seu topo. Qual é o comprimento da videira?”*

O autor chinês indica a resposta, 2 zhang e 9 chih, e apresenta o seguinte método de resolução: *“Multiplica o perímetro por 7 voltas como o gu, deixa a altura da árvore ser o gou. Encontra a hipotenusa como o comprimento da videira.”*

Em (Shen et al, 1999, p. 467), podemos analisar a solução comentada por Liu, que consiste no seguinte:

“Obtém o comprimento da videira de acordo com o perímetro e a altura da árvore. A videira chega ao topo da árvore. Experimenta com um fio enrolado numa caneta. Estica o fio e observa. Cada circuito (volta) dá um triângulo rectângulo, com o segmento (altura da árvore) como o gu, o perímetro como o gou e o comprimento da videira como a hipotenusa. Multiplicar o perímetro por 7 voltas significa juntar todos os gou apenas num gou (grande). Neste caso, o gou é, inesperadamente, maior que o gu; por isso, no Método, foi considerado, inversamente, a altura da árvore como o gou e o perímetro como o gu. É óbvio que a soma dos quadrados sobre o gou e o gu é o quadrado da hipotenusa.”

Os seguintes dois problemas, ainda do Capítulo IX, também merecem ser comentados.

Exemplo 16 (Problema 15 do Capítulo IX): *“Dado um triângulo rectângulo de kou [largura] 5 e ku [altura] 12, indique o lado do maior quadrado inscrito.”*

É interessante referir que este problema, proposto há mais de 2000 anos, na China, apareceu (de forma generalizada), em 1985, na secção das “Reflexões para o Leitor” da Revista *Mathematics Teacher*, com o seguinte enunciado:

Dado um triângulo rectângulo com catetos a e b e hipotenusa c , qual é o comprimento x do lado do maior quadrado inscrito utilizando o ângulo recto como um dos seus vértices?

Este enunciado pode ser esquematizado na seguinte figura:

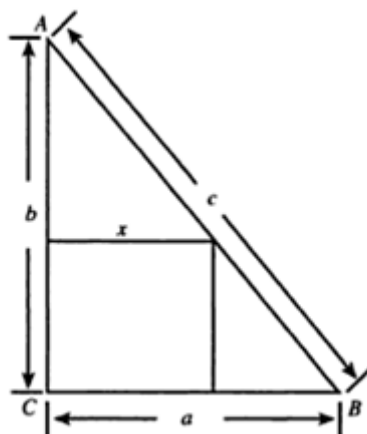


Fig. 60 – Quadrado inscrito num triângulo rectângulo

Relacionando a área do triângulo dado com a área das regiões que o compõem, nomeadamente, os dois triângulos e o quadrado de lado x , obtém-se a seguinte igualdade

$$\frac{ab}{2} = x^2 + \frac{x(b-x)}{2} + \frac{(a-x)x}{2},$$

donde não é difícil concluir que o lado do quadrado inscrito corresponde ao produto dos catetos dividido pela sua soma,

$$x = \frac{ab}{a+b}.$$

Analisemos, agora, o problema que se seguiu no nono capítulo do *Nove Capítulos*, com um enunciado muito semelhante ao anterior, mas que é muito mais difícil de resolver. Este interessantíssimo problema também apareceu em numerosos trabalhos matemáticos ao longo dos tempos.

Exemplo 17 (Problema 16 do Capítulo IX): “Dado um triângulo rectângulo de *ku* [largura] 6 e *ku* [altura] 8, localize o maior círculo que pode ser inscrito neste triângulo.”

A figura 61, associada a este problema, sugere que a solução envolve as áreas das regiões que compõem o triângulo, ou seja, o rectângulo [DOEC] e quatro triângulos rectângulos pequenos ([ADO], [AOE], [BEO], [BOF]), em que há dois pares de triângulos semelhantes.

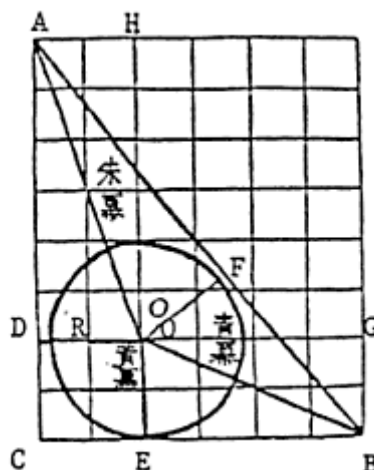


Fig. 61 – Círculo inscrito num triângulo rectângulo

Ora vejamos a solução dada pelos chineses para resolver este problema.

Consideremos $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$ e $\overline{CA} = b$. Então, $2 \times \text{área}\Delta[ABC] = ab$ ou

$$ab = 4 \times \text{área}\Delta[ADO] + 4 \times \text{área}\Delta[BEO] + 2 \times \text{área rect.}[DOEC].$$

Estas regiões podem ser, engenhosamente, reorganizadas e terão área igual a

área rect.[AHEC] + área rect.[DGBC] + área rect.[AHOD] + área rect.[GBEO].

Assim, $ab = br + ar + cr$ e $r = \frac{ab}{a+b+c}$.

Muitos problemas do mesmo género são engenhosos na sua concepção e requerem uma verdadeira percepção e raciocínio matemático da parte de quem os resolve. Muitas vezes, para delinear uma estratégia de resolução, o uso de uma figura é mais do que uma sugestão, é mesmo imperativo.

Mas, matemáticos posteriores descobriram que o problema podia ser mais facilmente resolvido, usando os três triângulos que se formam quando juntamos o centro do triângulo dado com os seus vértices, como mostra a figura 62:

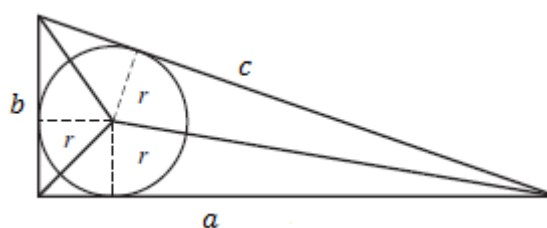


Fig. 62 – Outra forma de representar um círculo inscrito num triângulo

Isso conduziria directamente à equação:

$$\frac{ab}{2} = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2},$$

cuja solução representa o raio do círculo pretendido,

$$r = \frac{ab}{a + b + c},$$

exactamente igual ao resultado obtido pelos antigos chineses.

Semelhança de triângulos

Além de nove problemas do Capítulo IX do *Nove Capítulos*, a semelhança de triângulos também foi utilizada, por Liu, para resolver os problemas do *Manual de Matemática da Ilha do Mar* que, como já foi referido, estão relacionados com a determinação de distâncias a pontos inacessíveis.

Ao contrário da técnica de Tales para encontrar a distância de um navio à costa, os problemas de Liu Hui requerem, geralmente, duas observações e às vezes três ou quatro. Todos os problemas são resolvidos pelo chamado *método das diferenças duplas*. Para os problemas mais fáceis apenas duas observações são necessárias e, os mais difíceis, exigem quatro observações.

Consideremos o primeiro problema deste *Manual*:

Exemplo 18 (Problema 1 do Manual de Matemática da Ilha do Mar): “*Há uma ilha no mar que está a ser medida. Dois postes, com 30 pés⁵⁴ de altura cada um, estão erguidos sobre o mesmo nível, afastados 1000 passos, de modo que o poste traseiro está em linha recta com a ilha e com o primeiro poste. Se um homem recua 123 passos do primeiro poste, o ponto mais alto da ilha é apenas visível através da parte superior do poste quando é visto do nível do solo. Se recuar 127 passos do poste traseiro, o cume da ilha é apenas visível através da parte superior do poste quando visto do nível do solo. É necessário encontrar a altura da ilha e a distância em relação ao poste mais próximo.*”

A resposta de Liu é que a altura da ilha é 1255 passos e a distância ao primeiro poste é 30750 passos, e também indica o método de resolução:

“*Multiplique a distância entre os postes pela altura de um poste como dividendo. Considere a diferença da distância dos pontos de observação como divisor e divida. Adicionando ao quociente a altura de um poste, obtém a altura da ilha. Para encontrar a distância da ilha ao primeiro poste, multiplique a distância entre os dois postes pela distância recuada [do primeiro poste] como dividendo. Considere a diferença da distância dos pontos de observação como divisor. Divida para obter a distância entre a ilha e o primeiro poste.*”

⁵⁴ 1 passo = 6 pés

A seguinte figura esquematiza, de um modo geral, este problema:

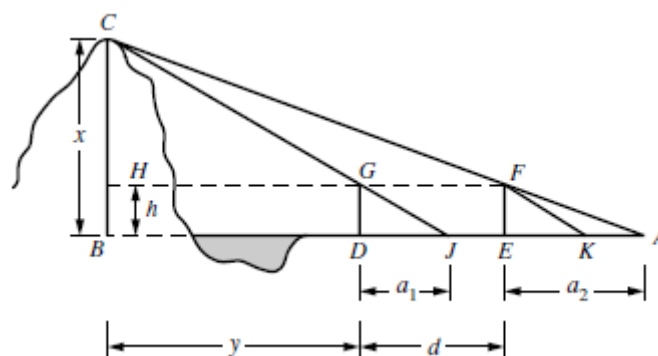


Fig. 63 – Determinação da altura e distância de uma ilha

As regras enunciadas para calcular as incógnitas necessárias envolvem o reconhecimento de que os lados correspondentes de triângulos semelhantes são proporcionais. O problema é geométrico, mas a solução é algébrica e a explicação da solução de Liu Hui, usando a notação moderna, funciona do seguinte modo:

Seja $\overline{EK} = \overline{DJ}$, de forma que \overline{FK} seja paralela a \overline{GJ} . Tendo em conta que os triângulos $[CHG]$ e $[FEK]$ são semelhantes, assim como os triângulos $[CGF]$ e $[FKA]$, temos as proporções

$$\frac{\overline{CH}}{\overline{FE}} = \frac{\overline{HG}}{\overline{EK}} = \frac{\overline{CG}}{\overline{FK}} = \frac{\overline{GF}}{\overline{AK}}$$

Agora, se $\overline{CB} = x$, $\overline{BD} = y$, $\overline{DE} = d$, $\overline{GD} = \overline{FE} = h$, $\overline{DJ} = \overline{EK} = a_1$, e $\overline{EA} = a_2$, então estas proporções correspondem a

$$\frac{x - h}{h} = \frac{y}{a_1} = \frac{d}{a_2 - a_1},$$

donde podemos obter as distâncias pretendidas:

$$x = \frac{hd}{a_2 - a_1} + h \quad (1)$$

e

$$y = \frac{a_1 d}{a_2 - a_1} \quad (2).$$

Ora, estas fórmulas traduzem o método explicado por Liu.

Considerando os dados deste problema, em particular, temos que:

$$h = 5, \quad d = 1000, \quad a_1 = 123 \quad \text{e} \quad a_2 = 127.$$

Substituindo em (1) e (2), obtemos $x = 1255$ passos e $y = 30750$ passos, que correspondem à altura da ilha e à sua distância ao primeiro poste, respectivamente.

Os outros oito problemas do Manual também lidam com a determinação de distâncias, em que as soluções são sempre baseadas nas propriedades de triângulos rectângulos semelhantes.

ANEXO A.5 - MATEMÁTICA NA ÍNDIA

Os primeiros registos de Matemática na Índia encontram-se em vários *Sulbasutras*, escritos provavelmente entre 800 a.C. e 500 a.C. e que se transmitiram oralmente durante muito tempo. Os *Sulbasutras* tratam dos conhecimentos teóricos necessários para a construção de altares e estão escritos em versos, registando conhecimentos matemáticos de idade desconhecida, mas certamente bem anteriores à época em que foram escritos.

Também é de mencionar o *Manuscrito de Bakshali*, que representa uma fonte importante para o conhecimento da Matemática indiana. Este manuscrito, de conteúdo matemático, foi encontrado em 1881, em péssimo estado, próximo a uma aldeia indiana chamada Bakshali. Supõe-se que data do século VII d.C.

Além do conhecimento matemático contido nos já referidos *Sulbasutras* e no *Manuscrito de Bakshali*, o nosso conhecimento da Matemática indiana advém, principalmente, das obras de alguns matemáticos indianos cujos nomes ficaram para a história do desenvolvimento da Matemática, dos quais se destacam Aryabhata I, Bramagupta e Baskara II.

MATEMÁTICOS INDIANOS MAIS IMPORTANTES

Aryabhata I

Aryabhata nasceu na Índia em 476 d. C. e morreu em 550 d. C. É também conhecido por Aryabhata I⁵⁵, ou “*Aryabhata, o mais velho*”, para o distinguir de outro matemático indiano, como o mesmo nome, que nasceu cerca de 400 anos mais tarde.

Aryabhata foi um poeta, matemático e astrónomo e escreveu, em 499, *Aryabhatiya*. Esta obra, escrita em verso, era essencialmente sobre Astronomia, mas o terceiro capítulo era dedicado à Matemática. Aqui, Aryabhata investigou a soma aritmética e série geométrica, tentou resolver equações indeterminadas quadráticas e lineares, deu uma boa aproximação de π e elaborou uma tabela de senos dos ângulos no primeiro quadrante, útil para os seus cálculos astronómicos.

Bramagupta

Bramagupta nasceu em 598 d. C. e morreu por volta de 665 d. C., tendo sido o mais proeminente matemático indiano do século VII. Viveu e trabalhou no centro astronómico de Ujein, na Índia Central. Em 628, escreveu a sua *Brahmasphuta Siddhanta* (Sistema Astronómico Correcto Segundo Brahma), uma obra de 21 capítulos sobre Astronomia, excepto os capítulos 12 e 18 que lidam com a Matemática.

Bramagupta, que viveu mais de um século depois de Aryabhata, baseou grande parte do seu trabalho nos resultados obtidos pelo seu antecessor.

⁵⁵ No presente trabalho, usarei a designação Aryabhata para me referir a Aryabhata I.

Este matemático explicitou as regras para somar, subtrair, multiplicar e dividir números positivos e negativos. Também desenvolveu uma regra aceitável para a obtenção de duas raízes de uma equação quadrática, mesmo nos casos em que um delas é negativa. Além disso, generalizou a *fórmula de Herão* para determinar a área de um quadrilátero e iniciou o estudo da *equação de Pell*, resolvida mais tarde por Baskara II.

Muitos dos seus problemas tinham carácter recreativo, dado que “Bramagupta, como outros matemáticos, amava a Matemática pelos seus próprios méritos e apreciava o valor lúdico de questões matemáticas” (Morgado, 1992, p. 9).

Mahavira

Mahavira viveu no século IX e era do Sul da Índia. Escreveu sobre Matemática elementar, tendo contribuído para a solução das equações quadráticas e equações indeterminadas e a sua obra mais importante é *Ganita-Sâra-Sangraha (Compêndio do Cálculo Essencial)*.

Também se dedicou ao estudo da combinatória tendo fornecido a fórmula correcta para o número de combinações de n objectos tomados k a k :

$$C_k^n = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!},$$

onde $k!$ significa o produto de todos os números inteiros positivos até k .

Escreveu sobre vários assuntos, e, tal como era costume na Índia, os seus problemas eram apresentados com enunciados muito peculiares como é o caso dos seguintes problemas:

Exemplo (Mahavira⁵⁶): “*Uma noite, num mês da estação da Primavera, uma certa jovem senhora, [...], ternamente contente com o seu marido no [...] o chão de uma grande mansão, branco como a lua, situado num agradável jardim com árvores inclinadas com o peso dos ramos de flores e frutos, com o doce som de papagaios, cucos e abelhas que estavam todos intoxicados com o mel obtido a partir das flores daquele lugar. Depois, numa discussão surgida entre o marido e a sua mulher, o colar da senhora, feito de pérolas, quebrou-se e caiu ao chão. Um terço das pérolas do colar alcançou a criada que ali se encontrava; um sexto caiu na cama; metade do que sobrou [repete metade do que sobrou, ao todo, seis vezes] caiu por todo o lado; e sobraram 1161 pérolas [...]. Dá a medida [numérica] das pérolas [nesse colar].*”

Este problema é apresentado num extenso enunciado e revela um grande cariz sexual, o que era comum em muitos problemas propostos pelos indianos.

O seguinte problema merece destaque, não tanto pelo enunciado, mas por representar um problema que apareceu em diversas civilizações:

⁵⁶ Os problemas da Matemática indiana, apresentados neste anexo, foram retirados de (Lagarto, s/d).

Exemplo (Mahavira): “De uma colecção de mangas, o rei tirou um sexto, a rainha um quinto do restante, e as três princesas principais um quarto, um terço e metade dos restos sucessivos, e a criança mais pequena tirou as três mangas que sobravam. Ó tu que és inteligente em problema com fracções, indica a medida da colecção de mangas.”

Este é um dos clássicos problemas de que apareceu várias versões ao longo dos tempos, e que se pode resolver por *análise retrógrada*, ou seja, do fim para o princípio.

Baskara II

Baskara II (1114–1185) foi o matemático indiano mais importante do século XII. Tal como aconteceu com Aryabhata, também houve outro matemático com o mesmo nome, contemporâneo de Bramagupta e, por isso, costumam ser distinguidos por Baskara I e II⁵⁷.

O seu trabalho mais famoso é o *Siddhânta Siromani* (Diadema de um sistema astronómico), escrito em 1150. *Siddhânta Siromani* está organizado em quatro partes, sendo as duas primeiras relacionadas com a Matemática, *Lilavati* (A bela) e *Vijaganita* (Extracção de raízes), que lidam com a aritmética e a álgebra, respectivamente. As outras duas partes da sua obra estão relacionadas com a Astronomia.

Baskara foi famoso tanto como astrólogo como matemático. Existe uma lenda segundo a qual Baskara tinha feito uma previsão astrológica do dia e da hora do casamento da sua filha, *Lilavati*. Quando se aproximava a hora para este acontecimento, a jovem curvou-se sobre um relógio de água, e uma pérola da sua grinalda de noiva caiu e, por acaso, interrompeu o fluxo da água. Então, o momento propício passou sem que alguém se tivesse apercebido, e *Lilavati* nunca se casou. Para a consolar, Baskara prometeu dar o seu nome a um livro que, segundo ele, “permanecerá através dos tempos”.

De facto, é notório que a primeira parte da sua obra é uma homenagem à sua filha, pois muitos dos seus problemas fantasiosos são propostos sob a forma de perguntas dirigidas a ela, ou de uma forma geral, a uma jovem donzela. Vejamos, por exemplo, os dois problemas seguintes:

Exemplo (Baskara⁵⁸): “Amável e querida *Lilavati* de olhos doces como os do terno e delicado enho, diz-me quais são os números que resultam da multiplicação de 135 por 12.”

Exemplo (Baskara): “A quinta parte de um enxame de abelhas pousa numa flor de *kadamba*, uma terça parte numa flor de *silinda*, o triplo da diferença entre estes dois números voa sobre uma flor de *kutaja*, e uma abelha adeja sozinha, no ar, atraída pelo perfume dum *jasmim* e dum *pandanus*. Diz-me, **bonita donzela**, qual é o número de abelhas?”

⁵⁷ No presente trabalho, usarei a designação Baskara para me referir a Baskara II.

⁵⁸ Os problemas de *Lilavati* apresentados neste trabalho encontram-se em (Colebrooke & Banerji, 1993)

Baskara trabalhou em muitos aspectos da álgebra e da astronomia, tendo chamado à álgebra a arte dos raciocínios perfeitos. Entre muitas outras coisas, investigou as soluções das equações quadráticas e resolveu equações lineares diofantinas pelo método conhecido como o “*pulverizador*”, tendo usado esse método para dar algumas soluções da *equação de Pell*.

Embora de uma época mais recente, ao falarmos da Matemática e dos matemáticos indianos não podemos deixar de referir o matemático indiano mais brilhante dos tempos modernos, **Srinivasa Ramanujan** (1887-1920), que possuía a capacidade incrível de ver rápida e profundamente intrincadas relações de números. Ramanujan foi “descoberto” pelo notável matemático inglês Hardy (1877-1947), em 1913, que se empenhou em levá-lo para estudar na Universidade de Cambridge.

Sobre Ramanujan conta-se que, certo dia, Hardy foi visitá-lo ao hospital (onde se encontrava doente, tendo morrido aos 33 anos, de tuberculose) e mencionou que tinha vindo num táxi com o número 1729, “um número aborrecido”, acrescentou Hardy. “De modo algum”, respondeu Ramanujan. “É, na realidade, um número muito interessante pois é o menor número inteiro que pode ser decomposto de duas maneiras diferentes numa soma de dois cubos”.

Na verdade,

$$1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3.$$

ÁLGEBRA

Regra de três

Bramagupta e Baskara foram os primeiros a usar a expressão “*regra de três*”, apesar de esta relação já ter sido usada nas civilizações anteriores. Durante séculos, a regra foi muito usada pelos comerciantes e na aplicação da *regra da falsa posição*, mas de uma forma mecânica, sem justificação; a sua conexão com as proporções só foi reconhecida no final do século XIV.

Bramagupta enunciou esta regra do seguinte modo:

“Na regra de três, o argumento, o resultado e o requisito são os nomes dos termos. O primeiro e o último termo devem ser semelhantes. O requisito multiplicado pelo resultado e dividido pelo argumento, é o produto.”

A título de exemplo vejamos o seguinte problema dado por Baskara:

Exemplo (Baskara): *“Se duas palas e meia de açafão são adquiridas por três sétimos de uma niska, quantas palas de açafão serão comprados por nove niskas?”*

Aqui, $\frac{3}{7}$ e 9 correspondem à mesma quantidade, são, então, o argumento e o requisito, e $\frac{5}{2}$ é o resultado. A resposta, ou produto, é dada por

$$\frac{9 \times \frac{5}{2}}{\frac{3}{7}} = 52 \frac{1}{2}.$$

Este problema também pode ser visto como uma simples aplicação das proporções,

$$x : 9 = \frac{5}{2} : \frac{3}{7}.$$

Vejamos um problema proposto por Aryabhata, que parece envolver esta regra, mas que tem um enunciado curioso:

Exemplo (Aryabhata): “Se uma escrava de 16 anos custa 32 *niskas*, quanto custa uma com 20 anos?”

A resposta dada por Aryabhata é peculiar; resolve este problema pela proporção inversa, afirmando que o valor das criaturas vivas (escravos e animais) é regulado pela sua idade, sendo os mais velhos os mais baratos.

O carácter deste problema é mais recreativo do que utilitário, e parece que tinha como objectivo desafiar o raciocínio e a perspicácia de quem o tentasse resolver.

Muito espaço foi dedicado à *regra de três* pelos primeiros escritores europeus, e a natureza mecânica da regra podia ser observada nos versos poéticos e nos esquemas que eram, muitas vezes, usados para a explicar.

Resolução de equações determinadas

Os indianos foram aritméticos talentosos tendo também contribuído, de forma significativa, para o desenvolvimento da álgebra. Muitos dos problemas aritméticos foram resolvidos pela *regra da falsa posição*. Um outro método favorito dos indianos foi o *método do retorno (ou da inversão)*, onde se trabalha para trás, partindo de uma determinada informação. Além disso, resolveram equações quadráticas por um método semelhante ao que usamos actualmente.

Método da falsa posição

Na Matemática indiana, a *regra da falsa posição* era geralmente dada através de exemplos numéricos e o primeiro enunciado desta regra, dado explicitamente, apareceu no século XII, no trabalho de Baskara, mais concretamente, no terceiro capítulo do seu

Lilavati. A esta regra Baskara chamou *karma*, que significa “cálculo com um dado número”.

Por outro lado, relativamente à *regra da dupla falsa posição*, “a única evidência conhecida do uso da *regra da dupla falsa posição* na Matemática indiana vem de um manuscrito em latim do século XIV”, assim o realça Chabert (1999, p. 97).

A *regra da falsa posição* enunciada por Baskara é semelhante ao método da “suposição” de Diofanto. Analisemos, então, o primeiro exemplo do *Lilavati* onde ela é aplicada:

Exemplo (Baskara): “Qual é o número que multiplicado por cinco, e tendo a terça parte do produto subtraída, o resto é dividido por dez; e um terço, e metade e um quarto da quantidade original é adicionado, dá setenta menos dois?”

Baskara indica a seguinte solução:

“Coloca 3; isto, multiplicado por 5, é 15; menos a sua terça parte, é 10; dividido por 10, dá 1. Adicionado a um terço, metade e um quarto do suposto número 3, ou seja, $\frac{3}{3}, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}$, a soma é $\frac{17}{4}$. Por isto divide o número dado 68 multiplicado pelo número suposto 3; o quociente é 48.”

E acrescentou, ainda, “a resposta é a mesma com qualquer outro número assumido, como um, etc.”.

A tradução deste exemplo para a nossa linguagem algébrica ajudar-nos-á a ver o tipo de problemas em que era usada a *regra da falsa posição*. Assim, este problema pode ser traduzido pela equação:

$$\frac{1}{10} \left[5x - \frac{1}{3} \times 5x \right] + \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x = 70 - 2.$$

Temos uma equação em que os termos com incógnita estão no 1º membro e, no 2º membro, temos apenas os termos independentes, que representam a “quantidade dada”.

Aqui, Baskara tomou 3 como o valor suposto e obteve o resultado $\frac{17}{4}$, correspondendo ao valor do 2º membro da nossa equação. Usando uma regra de três simples, facilmente se compreende as restantes instruções dadas por Baskara, que se traduzem por:

$$x = (3 \times 68) \div \frac{17}{4}.$$

Nos outros exemplos, Baskara escolheu 1 para a falsa suposição.

Método da inversão (ou do retorno)

No entanto, o método favorito dos indianos, para resolver muitos dos problemas aritméticos, era o *método da inversão*, onde se trabalha do fim do problema para o princípio, substituindo cada operação pela sua inversa, e que é descrito por Aryabhata do seguinte modo:

“Multiplicação torna-se divisão, divisão torna-se multiplicação; o que foi ganho torna-se perda, o que se perdeu, ganha-se; inversão.”

Muito diferente do estilo lacónico desta citação é o seguinte problema de Aryabhata, que ilustra o método:

Exemplo (Aryabhata): *“Linda donzela de olhos cintilantes, se conheces o método do retorno diz-me: qual é o número que, multiplicado por 3, acrescido de $\frac{3}{4}$ deste produto, dividido por 7, diminuído de $\frac{1}{3}$ do quociente, elevado ao quadrado, diminuído de 52, acrescido de 8 e dividido por 10, dá como resultado o número 2?”*

Pelo método da inversão, começamos com o número 2 e trabalhamos para trás. Assim,

$$\begin{aligned}(2 \times 10 - 8)^2 + 52 &= 196, \\ \sqrt{196} &= 14, \\ \frac{14 \times \frac{3}{2} \times 7 \times \frac{4}{7}}{3} &= 28,\end{aligned}$$

que é a resposta. Note-se que onde as instruções do problema nos pedem para dividir por 10, multiplicamos por 10, onde nos pedem para adicionar 8, subtraímos 8, onde fomos informados para extrair a raiz quadrada, elevamos ao quadrado, e assim por diante.

Na verdade, estas instruções correspondem ao que fazemos para resolver o problema pelos métodos modernos. Assim, se representarmos o número pretendido por x , temos

$$\frac{\sqrt{\left(\frac{2}{3} \times \frac{7}{4} \times 3x\right)^2 - 52 + 8}}{10} = 2.$$

Para resolver esta equação, começamos por multiplicar ambos os membros por 10, em seguida, subtraímos 8 a cada membro, depois, elevamos ambos os membros ao quadrado, e assim por diante.

Regra indiana para resolver equações quadráticas

A regra apresentada por Bramagupta para resolver a equação $ax^2 + bx = c$, corresponde exactamente à fórmula

$$x = \frac{\sqrt{4ac + b^2} - b}{2a}.$$

Como exemplo, Bramagupta apresenta a solução da equação $x^2 - 10x = -9$, mas dá apenas uma solução, o 9. Embora houvesse outra solução positiva, Bramagupta não fez qualquer referência a esta segunda solução.

Baskara⁵⁹, por outro lado, considera as duas soluções da equação quadrática. A sua técnica básica consiste em completar o quadrado. Concretamente, ele adiciona um número apropriado (geralmente é $\left(\frac{b}{2}\right)^2$) a ambos os membros da equação de modo que o 1º membro seja um quadrado perfeito: $(rx - s)^2 = d$. Depois, resolve a equação $rx - s = \sqrt{d}$, em ordem a x . Mas, a grande diferença relativamente a Bramagupta, é que Baskara nota que se $\sqrt{d} < s$, então há dois valores para x , nomeadamente

$$\frac{s + \sqrt{d}}{r} \quad e \quad \frac{s - \sqrt{d}}{r}.$$

Contudo, acrescentou que “isto funciona em alguns casos”. Vejamos alguns exemplos para perceber o que queria dizer com isto.

Como exemplo de uma equação que tem duas raízes positivas, Baskara propõe o seguinte problema:

Exemplo (Baskara): “A oitava parte de um bando de macacos, elevada ao quadrado, salta num bosque, deliciados com o seu desporto. Os 12 macacos restantes podem ser vistos sobre uma colina, tagarelando uns com os outros. Qual o total de macacos?”

Baskara escreve o equivalente à equação

$$\left(\frac{x}{8}\right)^2 + 12 = x,$$

Depois, multiplica por 64 e obtém a equação $x^2 - 64x = -768$. Adicionando 32^2 (note-se que 32 é metade de 64) a cada membro, obtém $x^2 - 64x + 1024 = 256$. Fazendo a raiz quadrada, obtém $x - 32 = 16$. Depois, observa que, neste caso, $\sqrt{256} < 32$, pelo que a equação terá duas soluções, nomeadamente, 48 e 16.

⁵⁹Não é por acaso que, no Brasil, a nossa fórmula resolvente é conhecida por fórmula de Baskara.

Baskara também propôs o seguinte problema:

Exemplo (Baskara): “A quinta parte de um bando de macacos menos 3, elevada ao quadrado, refugiou-se numa caverna. Era ainda possível ver um macaco em cima de um ramo. Qual o total de macacos?”

Este problema pode ser traduzido pela equação

$$\left(\frac{x}{5} - 3\right)^2 + 1 = x \Leftrightarrow x^2 - 55x = -250,$$

cujas soluções são 50 e 5. No entanto, a solução $x = 5$ é descartada, não por ser negativa, mas porque $\left(\frac{x}{5} - 3\right)$ seria, então, negativo.

Baskara salienta que: “mas a segunda [raiz], neste caso não será considerada; porque é incongruente. As pessoas não aprovam um número negativo”. Realmente, não faz sentido subtrair três macacos a apenas um.

No caso das equações quadráticas que têm uma solução positiva e outra negativa, Baskara indicou apenas a solução positiva. Além disso, nunca deu exemplos de equações quadráticas que tivessem duas raízes negativas ou nenhuma raiz, nem deu exemplos de equações quadráticas com raízes irracionais. Em todos os exemplos de Baskara, a raiz quadrada correspondia a um número racional.

A primeira descrição da regra geral para achar as raízes da equação do 2º grau parece ter sido encontrada num trabalho de Sridhara (c. 870 – c. 930 d. C.), que não foi preservado. Segundo Baskara e outros autores indianos, a regra consiste no seguinte:

“Multiplicar ambos os membros da equação por um número igual a quatro vezes o [coeficiente do] quadrado e juntar a ambos o número igual ao quadrado [do coeficiente] da quantidade desconhecida [Então extrair a raiz quadrada].”

Seja a equação $ax^2 + bx = c$. Multiplicando ambos os membros por $4a$, vem

$$4a^2x^2 + 4abx = 4ac.$$

Somando, a ambos os membros, o quadrado do coeficiente da quantidade desconhecida, tem-se

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 + 4ac.$$

ou seja

$$(2ax + b)^2 = b^2 + 4ac;$$

extraindo a raiz quadrada, temos que

$$2ax + b = \sqrt{b^2 + 4ac}.$$

(Note-se que a raiz negativa não era considerada.)

E agora trata-se de uma equação do primeiro grau, donde facilmente se obtém

$$x = \frac{\sqrt{b^2 + 4ac} - b}{2a}.$$

Resolução de equações indeterminadas

Os indianos mostraram uma notável capacidade na resolução de problemas de análise indeterminada e talvez foram os primeiros a conceber métodos gerais neste ramo da Matemática.

O maior contributo de Aryabhata e Bramagupta foi no estudo de equações indeterminadas, o assunto favorito de Diofanto. Embora eles tivessem repetido muitos dos problemas de Diofanto, a abordagem foi diferente. Onde Diofanto procurou resolver equações em números racionais, os matemáticos indianos admitiram como soluções apenas números inteiros positivos. Mas, ao contrário de Diofanto, que se limitou a procurar apenas uma solução racional para uma equação indeterminada, os indianos esforçaram-se para encontrar todas as possíveis soluções inteiras.

Equações indeterminadas do 1º grau

É interessante notar que a equação do 2º grau indeterminada, $x^2 + y^2 = z^2$, recebeu atenção antes da equação indeterminada de 1º grau, $ax + by = c$, onde a, b , e c são números inteiros. A razão parece óbvia e prende-se com o importante significado geométrico da equação de Pitágoras.

Embora a teoria necessária para resolver a equação $ax + by = c$ se encontre nos *Elementos* de Euclides, não aparece nas obras existentes de escritores gregos posteriores. É de estranhar que sendo uma equação indeterminada não tenha merecido a atenção de Diofanto. Na perspectiva de Burton (2006), “possivelmente Diofanto terá considerado a equação muito trivial para ser incluída na sua *Aritmética*” (p. 227). Quem acabou por fazer o estudo completo desta equação foi o matemático francês Bachet (1581-1638).

As primeiras tentativas para resolver a equação indeterminada $ax + by = c$ por um método geral foram feitas na Índia, começando no século V, nos trabalhos dos matemáticos indianos Aryabhata e Bramagupta.

No decurso das suas investigações, Aryabhata deparou-se com situações em que precisava resolver equações deste tipo e, por isso, desenvolveu um método para as resolver.

A ideia base do método proposto por Aryabhata consistia em transformar, sucessivamente, a equação inicial numa mais simples, com coeficientes menores, para que fosse mais fácil encontrar uma solução particular. Este processo era feito recorrendo ao algoritmo de Euclides.

Este método de resolver equações diofantinas era conhecido dos indianos como o *método do pulverizador* porque “dizimava” o problema, reduzindo os coeficientes para números cada vez menores, “pulverizando”, assim, a dificuldade do problema.

Embora Aryabhata, aparentemente, tivesse encontrado um método para encontrar as soluções da equação linear diofantina $ax + by = c$, Bramagupta foi o primeiro a dar, explicitamente, a solução geral desta equação. Para que essa equação tenha soluções inteiras, o máximo divisor comum de a e b deve dividir c ⁶⁰; e Bramagupta sabia que se a e b são primos entre si ($m.d.c.(a, b) = 1$), todas as soluções da equação são dadas por

$$x = x_0 + kb; \quad y = y_0 - ka,$$

onde k é um número inteiro arbitrário e (x_0, y_0) uma solução inteira particular.

Obtemos, assim, todas as soluções inteiras da equação linear diofantina. Neste aspecto, Bramagupta foi mais além que Diofanto, que se tinha contentado em dar apenas uma solução particular de uma equação indeterminada. Por isso, na opinião de Struik (1987), é “incorrecto chamar às equações lineares indeterminadas equações diofantinas” (p. 66).

Note-se, porém, que quando a e b não são primos entre si, podemos proceder de duas maneiras diferentes: ou dividimos todos os membros da equação pelo $m.d.c.(a, b)$, obtendo uma outra equação equivalente, em que os coeficientes de x e y são, agora, primos entre si; ou, então, a expressão que conduz à solução geral é ligeiramente alterada, passando a ser:

$$x = x_0 + k \frac{b}{m.d.c.(a, b)}; \quad y = y_0 - k \frac{a}{m.d.c.(a, b)},$$

onde k é um número inteiro e (x_0, y_0) é uma solução particular de $ax + by = c$, e temos que dividir a e b pelo $m.d.c.(a, b)$ que, neste caso, é diferente de 1.

Vejamos o seguinte problema do *Lilavati*, que será resolvido para exemplificar o método acima referido.

Exemplo 3 (Baskara): “Diz rapidamente, matemático, o que é o multiplicador pelo qual 221 sendo multiplicado, e 65 adicionado ao produto, a soma dividida por 195 torna-se esgotada [deixa sem restante]?”

Na nossa actual notação, o problema é equivalente a encontrar números inteiros, x e y , que satisfaçam a equação linear diofantina

⁶⁰ Baskara (e outros autores) mencionou esta condição, mas Bramagupta não o fez.

$$221y + 65 = 195x \quad \text{ou} \quad 195x - 221y = 65.$$

Aplicando o *algoritmo* de Euclides para a obtenção do *m. d. c.* (195, 221), encontramos que

$$\begin{aligned} 221 &= 1 \times 195 + 26, \\ 195 &= 7 \times 26 + 13, \\ 26 &= 2 \times 13, \end{aligned}$$

donde *m. d. c.* (195, 221) = 13. Como $13|65$, existe uma solução da nossa equação. Para obter 13 como uma combinação linear de 195 e 221, trabalhamos para trás, através dos cálculos anteriores:

$$13 = 195 - 7 \times 26 = 195 - 7(221 - 195) = 8 \times 195 + (-7) \times 221.$$

Multiplicando esta igualdade por 5, obtemos

$$65 = 40 \times 195 + 35 \times (-221),$$

então, $x = 40$ e $y = 35$ fornece uma solução para a equação diofantina em questão.

Todas as outras soluções são expressas por

$$x = 40 + \left(\frac{-221}{13}\right)t = 40 - 17t \quad e \quad y = 35 - \left(\frac{195}{13}\right)t = 35 - 15t,$$

para qualquer número inteiro t .

Em *Lilavati*, Baskara chegou aos valores 6 e 5 para x e y , respectivamente, e notou que havia muitas soluções; a equação, acrescentou ele, é também satisfeita para $x = 57$ e $y = 50$.

O seguinte problema de Mahavira também pode ser traduzido por uma equação deste tipo:

Exemplo (Mahavira): “*Havia 63 pilhas iguais de bananas e 7 bananas. Todas as bananas foram divididas igualmente entre 23 viajantes. Qual é o número de bananas em cada pilha?*”

A resolução deste problema equivale a encontrar o(s) valor(es) de x da equação diofantina $63x + 7 = 23y$.

O conhecido *problema das 100 aves*, que apareceu pela primeira vez, na China, no *Manual Aritmético de Zhang Quijian* (c. 475), também aparece nos trabalhos de

Mahavira e Baskara. A versão apresentada, tanto por Mahavira como por Baskara, é a seguinte:

Exemplo (Mahavira e Baskara): “*Os pombos são vendidos na razão de 5 por 3 moedas, os grous à razão de 7 por 5 moedas, os cisnes à razão de 9 por 7 e os pavões à razão de 3 por 9. A um certo homem foi dito para trazer 100 animais por 100 moedas para entretenimento do filho do rei, e assim o fez. Quanto deu por cada [tipo de pássaros que compra]?*”

Mahavira deu uma solução bastante complexa para este problema. Por outro lado, Baskara mostrou, explicitamente, por que razão o problema tem várias soluções. Traduziu o problema através do equivalente ao seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} 3x + 5y + 7z + 9w = 100 \\ 5x + 7y + 9z + 3w = 100 \end{cases}$$

e resolveu cada equação em ordem a x , depois, igualando as duas equações, obteve $y = 50 - 2z - 9w$. Considerando 4, um valor arbitrário para w , reduziu a equação à forma standard das equações indeterminadas, $y + 2z = 14$, para a qual a solução é $z = t, y = 14 - 2t$, com t arbitrário. Daqui, obteve que $x = t - 2$. Depois, considerando $t = 3$, Baskara determinou que $x = 1, y = 8, z = 3$ e $w = 4$, e assim, havia 5 pombos, 56 grous, 27 cisnes e 12 pavões, cujo preço era, respectivamente, 3, 40, 21 e 36.

Baskara notou, ainda, que outras escolhas para t dão valores diferentes para a solução. Assim, conforme refere Baskara, “através de suposições, poderá ser obtida uma variedade de respostas”.

Um problema do mesmo género também aparece no *Manuscrito de Bakshali*.

Exemplo (Manuscrito de Bakshali): “*Vinte homens, mulheres e crianças ganharam, entre eles, vinte moedas. Cada homem ganhou três moedas, cada mulher uma moeda e meia e cada criança meia moeda. Quantos homens, mulheres e crianças havia?*”

Os indianos também resolveram problemas semelhantes ao *Problema Chinês dos Restos*, como podemos ver no seguinte exemplo:

Exemplo (Bramagupta e Baskara): “*Qual é o número que dividido por 6 deixa um resto de 5, dividido por 5 deixa um resto de 4, dividido por 4 deixa um resto de 3 e dividido por 3 deixa um resto de 2?*”

Um problema destes já tinha aparecido na Matemática chinesa, tendo aparecido pela primeira vez no *Manual de Matemática do Mestre Sun*, e é de grande interesse devido à sua importância na actual Teoria dos Números.

Bramagupta, para o resolver, generalizou o *método do pulverizador* de Aryabhata a problemas em que existem vários restos.

O seguinte problema de Bramagupta, assenta na mesma ideia mas está colocado mais ao estilo dos indianos:

Exemplo (Bramagupta): “Uma mulher vai ao mercado, um cavalo pisa-lhe o cesto e parte-lhe os ovos. O dono oferece-se para lhe pagar os estragos e pergunta-lhe quantos ovos é que ela tinha. Ela não se lembra do número exacto, mas quando os tirou dois a dois não sobrou nenhum ovo. O mesmo aconteceu quando os tirou três a três, quatro a quatro, cinco a cinco e seis a seis, mas depois tirou-os sete a sete e sobrou um. Qual é o menor número de ovos que ela poderia ter tido?”

Equações indeterminadas do 2º grau

Os indianos dedicaram um esforço considerável para resolver equações quadráticas indeterminadas, em particular, a “*equação de Pell*”, $x^2 = 1 + ay^2$, e, de um modo geral, $x^2 = c + ay^2$, onde a é um inteiro não quadrado.

Na sua *Aritmética*, Diofanto foi frequentemente conduzido a casos especiais desta equação. Por exemplo, no Problema 28 do Livro II, Diofanto igualou $9 + 9y^2$ a um quadrado, x^2 , considerando $x = 3y - 4$. Mas é Bramagupta quem tenta, pela primeira vez, resolver esta equação com alguma generalização.

Bramagupta disse que uma pessoa que conseguisse, dentro de um ano, resolver a equação $x^2 = 1 + 92y^2$, seria um bom matemático; naquele tempo, ele deve, pelo menos, ter sido um aritmético eficiente, porque a menor solução, em inteiros positivos, é $x = 1151$, $y = 120$.

No entanto, o processo dado por Baskara, conhecido por *método cíclico*, era mais fácil de seguir. No seu *Lilavati*, Baskara encontrou soluções específicas de $x^2 = 1 + ay^2$, para os cinco casos $a = 8, 11, 32, 61$ e 67 . No caso de $x^2 = 1 + 61y^2$, por exemplo, as respostas que foram dadas, $x = 1\ 776\ 319\ 049$ e $y = 22\ 615\ 390$, eram a menor solução positiva, o que é de admirar, face à grandeza destes números e de terem sido encontrados no século XII.

A partir de uma solução, pode ser facilmente obtido um número infinito de soluções inteiras usando uma regra descoberta por Bramagupta e que corresponde ao seguinte:

Se p e q são um conjunto de valores de x e y satisfazendo a equação $x^2 = 1 + ay^2$ e p' e q' são o mesmo ou outro conjunto, então $x = pp' + aqq'$ e $y = pq' + p'q$ dão uma outra solução. Assim, a solução $x = 17$, $y = 6$ de $x^2 = 1 + 8y^2$ leva a um segundo par de valores, $x = 577$, $y = 204$, que satisfazem a equação.

O método para resolver a *equação de Pell* pode ser considerado o ponto alto da Matemática indiana medieval. No entanto, os trabalhos dos indianos sobre as equações

indeterminadas chegaram demasiado tarde à Europa Ocidental para que pudessem ter exercido qualquer influência benéfica.

GEOMETRIA

O forte dos indianos não era certamente a geometria. Não se encontram demonstrações rigorosas na Matemática indiana; a sua geometria foi, principalmente, empírica e estava geralmente relacionada com a medição. Os antigos *Sulbasutras* mostram que os antigos indianos aplicaram a geometria para a construção de altares e que, para tal, fizeram uso do Teorema de Pitágoras.

Ao referir-se à geometria presente nos trabalhos de Aryabhata e Bramagupta, Vasconcellos opina que

“De pouca importância e até erróneas, por vezes, são as proposições que se encontram nos dois matemáticos Índios, relativas à Geometria, da qual, como dos outros capítulos da Matemática, se ocuparam, apenas, ao que parece, na parte que lhes podia servir para os seus trabalhos de Astronomia.”

(Vasconcellos, 2009, p. 404)

Estimativas para π e $\sqrt{2}$

Nos *Sulbasutras* indianos também foi resolvido o problema da quadratura do círculo, que estava relacionado com a construção de um altar quadrado com a mesma área que um outro circular. A partir de uma elaborada construção geométrica, a solução apresentada indica que

$$l = \left(1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{8 \times 29} - \frac{1}{8 \times 29 \times 6} + \frac{1}{8 \times 29 \times 6 \times 8}\right) d,$$

onde l representa o lado do altar pretendido e d corresponde ao diâmetro do altar conhecido. Isto conduz à seguinte aproximação,

$$\pi = \left(1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{8 \times 29} - \frac{1}{8 \times 29 \times 6} + \frac{1}{8 \times 29 \times 6 \times 8}\right)^2 = 18(3 - 2\sqrt{2}),$$

o que equivale a considerar $\pi \approx 3.088$.

Entre os versos contidos na obra de Aryabhata, há um que diz o seguinte:

“Junte 4 a 100, multiplique por 8, junte ainda 62000; ter-se-á assim para um diâmetro de duas miríades, o comprimento aproximado da circunferência para o diâmetro.”

Ora isto equivale a dizer que

$$\pi = \frac{\text{perímetro}}{\text{diâmetro}} \approx \frac{8(100 + 4) + 62000}{20000} = \frac{62832}{20000} = 3,1416,$$

que representa uma aproximação muito boa, correspondendo a uma aproximação para π com origem grega.

Para esta relação Bramagupta indica $\sqrt{10}$, cujo valor é, por defeito, 3,1622, menos exacto que o valor apresentado no papiro de Rhind. Apesar de Bramagupta ter baseado o seu trabalho nos resultados obtidos pelo seu antecessor Aryabhata, ao considerar esta aproximação para o valor de π , revelou algum retrocesso.

Mas, na verdade, embora os indianos tivessem encontrado boas aproximações para π , usavam frequentemente $\pi = 3$ e $\pi = \sqrt{10}$.

Este aspecto é salientado por Struik (1987), ao referir que “o curioso facto destes resultados [aproximações de $\sqrt{2}$ e π] dos *Sulbasutras* não ocorrerem em trabalhos indianos posteriores mostra que não podemos falar em continuidade da tradição na Matemática indiana que era tão típica na Matemática egípcia e babilónica; esta ausência de continuidade pode, realmente, dever-se ao facto da Índia ser tão grande como é” (p. 32).

Nos *Sulbasutras* indianos encontramos também um problema relacionado com a construção de um altar com o dobro do tamanho de um outro já conhecido, que conduz à seguinte aproximação para a $\sqrt{2}$,

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \times 4} - \frac{1}{3 \times 4 \times 34} = \frac{17}{12} - \frac{1}{12 \times 34}.$$

Na tentativa de explicar o método utilizado para obter este resultado, Katz (1998, p. 28) sugere que se for considerada a aproximação

$$\sqrt{a^2 - b} \approx a - \frac{1}{2} \times \frac{1}{a} \times b,$$

tomando $a = \frac{17}{12}$, obtemos a aproximação dada pelos indianos. Assim,

$$\sqrt{2} = \sqrt{\left(\frac{17}{12}\right)^2 - \frac{1}{144}} \approx \frac{17}{12} - \frac{1}{2} \times \frac{12}{17} \times \frac{1}{144} = \frac{17}{12} - \frac{1}{12 \times 34}.$$

É interessante notar o uso de fracções unitárias, o que nos leva a conjecturar alguma influência babilónica, e, além disso, saliente-se que a expressão está correcta para cinco casas decimais, o que corresponde a uma notável aproximação.

No entanto, não é esta a interpretação dada por Vasconcellos (2009). Para este autor, a obtenção deste valor prova que os indianos estavam à vontade com o cálculo de raízes e sabiam desenvolver o quadrado do binómio, $(a + b)^2$. Consultando uma tabela de quadrados, facilmente era estabelecida a igualdade

$$2 = \frac{289 - 1}{144} = \frac{17^2 - 1}{12^2},$$

e, portanto,

$$2 \times 12^2 = 17^2 - 1 < 17^2 - \frac{2 \times 17}{34} + \frac{1}{34^2}.$$

Donde,

$$2 \times 12^2 < \left(17 - \frac{1}{34}\right)^2,$$

e, assim,

$$\sqrt{2} < \frac{17}{12} - \frac{1}{12 \times 34} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \times 4} - \frac{1}{3 \times 4 \times 34}.$$

Qual terá sido, de facto, o método utilizado pelos indianos, continua a ser uma questão sem resposta, apenas alvo de conjecturas.

Áreas e volumes

Muitas incorrecções aparecem nas fórmulas de áreas e volumes dos indianos. Por exemplo, Aryabhata dá o volume de uma pirâmide como metade do produto da base pela altura e o volume de uma esfera como $r^3\sqrt{\pi^3}$, o que, nas palavras de Vasconcellos (2009), “denota fracos conhecimentos geométricos” (p. 404).

A aritmética de Bramagupta, entre outras coisas, compreende também problemas de medida de áreas e volumes. Todavia, nos problemas de medida de áreas comete vários erros. Assim, para calcular a área de um triângulo equilátero (de lado igual a 12), em vez de calcular metade do produto de um lado pela altura, calcula metade do produto de dois lados (e indica 72 como a área de um tal triângulo).

Diz, ainda, que a área do triângulo isósceles, de lados 10, 13, 13, é $5 \times 13 = 65$.

A área do triângulo escaleno, de lados 13, 14, 15, é calculada erradamente, como se fosse o produto de metade do lado 14 pela semi-soma dos outros dois:

$$7 \times \frac{13 + 15}{2} = 98.$$

Não obstante estes erros, a ele se deve um resultado geométrico notável que diz respeito à área dos quadriláteros cíclicos. Estes são poliedros de quatro lados, cujos vértices estão sobre uma circunferência.

Bramagupta (e também Mahavira) generalizou a fórmula de Herão para a área de um triângulo conhecidos os três lados, considerando que a área do quadrilátero cíclico de lados a, b, c e d e semiperímetro s , é:

$$A = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}.$$

Esta fórmula é exacta apenas para os trapézios isósceles e os quadriláteros inscritos de diagonais rectangulares que correspondem, provavelmente, às figuras que os indianos utilizaram para a determinação da soma dos senos e co-senos de dois arcos.

Demonstração e aplicações do Teorema de Pitágoras

Nos *Sulbasutras* indianos é utilizado o Teorema de Pitágoras e são dados exemplos de ternos pitagóricos, como por exemplo, (5,12,13), (8,15,17), (7,24,25) e (12, 35, 37). Até aparece uma construção que mostra um quadrado igual à soma de dois quadrados dados, o que usa explicitamente o Teorema de Pitágoras.

Baskara, no seu *Vijaganita*, demonstrou o Teorema de Pitágoras, através de uma decomposição de figuras, em que o quadrado sobre a hipotenusa é cortado em quatro triângulos, cada um congruente com o triângulo dado, mais um quadrado de lado igual à diferença dos catetos do triângulo dado, conforme indicado na figura 64.

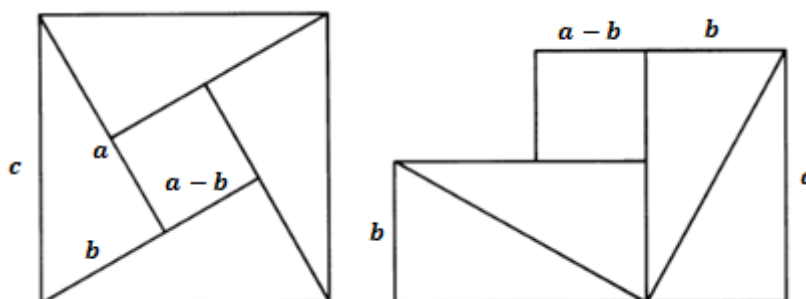


Fig. 64 – Demonstração do Teorema de Pitágoras

Depois, é fácil reorganizar as peças para obter a soma dos quadrados sobre os dois catetos. Baskara desenhou a figura e não apresentou outras explicações além da palavra “Vê!”

Um pouco de álgebra, no entanto, fornece uma prova. Para tal, seja c a hipotenusa e a e b os catetos do triângulo,

$$c^2 = 4 \times \frac{ab}{2} + (a-b)^2 = a^2 + b^2.$$

Relembre-se que esta demonstração já tinha sido dada pelos chineses.

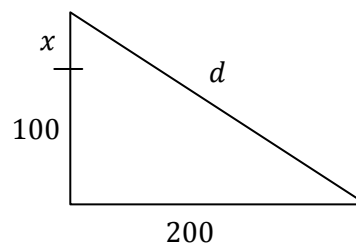
Consideremos os seguintes exemplos, cuja resolução utiliza o Teorema de Pitágoras, e que são enunciados, como era costume, de uma forma brincalhona. Um desses exemplos é o problema dos macacos de Baskara:

Exemplo (Baskara): “Havia uma palmeira de 100 cúbitos⁶¹ de altura e havia um poço a uma distância de 200 cúbitos da árvore. Estavam dois macacos no cimo da árvore. Um deles desceu da árvore e foi até ao poço. O outro pulou para cima e saltou para o poço seguindo a hipotenusa. Se os dois percorreram a mesma distância, descobre o comprimento do pulo do macaco.”

Este problema é idêntico ao problema proposto por Bramagupta, cinco séculos antes, sobre dois ascetas:

Exemplo (Bramagupta): “Dois ascetas que viviam no cimo de um penhasco de 100 de altura, cuja base estava a uma distância de 200 da vila mais próxima. Um desceu o penhasco e andou até à vila. O outro, sendo um feiticeiro, primeiro voou até uma certa altura x acima do penhasco, e dessa altura voou em linha recta até à vila. A distância percorrida pelos dois foi igual. Encontra a altura que subiu o segundo eremita.”

Os problemas podem ser ilustrados pela seguinte figura:



Pelo Teorema de Pitágoras, temos que:

$$d = \sqrt{(x + 100)^2 + 200^2}.$$

Como a distância percorrida pelos dois foi igual, concluímos que $d + x = 300$, donde se obtém:

$$\sqrt{(x + 100)^2 + 200^2} + x = 300 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x + 100)^2 + 200^2} = 300 - x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x + 100)^2 + 200^2 = (300 - x)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x + 100)^2 + 200^2 = (300 - x)^2 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x = 50.$$

⁶¹ 1 cúbito = 52,4 cm

Esta equação, à primeira vista, parecia ser quadrática, mas, depois de simplificada, acabou por ser linear.

Verificação:

$$\sqrt{(50 + 100)^2 + 200^2} = 300 - 50 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{62500} = 250 \text{ P.V.,}$$

donde se conclui que 50 é solução da equação.

De um modo geral, sendo h a altura do penhasco e mh a distância da base à vila, a resolução deste problema equivale a resolver a equação

$$h + mh = x + \sqrt{m^2h^2 + (h + x)^2},$$

ou seja,

$$x = \frac{mh}{m + 2},$$

fórmula que Bramagupta achou correctamente, considerando $h = 100$ e $m = 2$.

Um outro problema que também envolve o Teorema de Pitágoras é o *problema do bambu partido*, que, como já foi referido, ocorreu pela primeira vez no *Nove Capítulos de Arte Matemática*. Muito provavelmente, Baskara baseou-se nesse problema ao propor o seguinte no seu *Lilavati*:

Exemplo (Baskara): “*Um bambu medindo 32 cúbitos partiu-se por acção do vento. A sua extremidade tocou o chão a 16 cúbitos da base do bambu. Diz, matemático, o comprimento dos dois segmentos do bambu.*”

Este problema parece conduzir a uma equação quadrática, mas pode ser reduzido a uma equação linear, como também aconteceu com o problema acima analisado.

Baskara representou o culminar do apogeu da Matemática indiana, pois, conforme salienta Vasconcellos (2009), “a partir de Baskara, nada mais se conhece na Matemática [indiana] que mereça ser referido, caindo deste então esta ciência, entre eles [os indianos], numa lamentável e desoladora inferioridade” (p. 412).

O SISTEMA DE NUMERAÇÃO HINDU-ÁRABE

Além de tudo o que já foi referido e que revela a importância da Matemática indiana, é de salientar, conforme assinala Silva (2000), “a audácia que tiveram ao criar um sistema numérico que com o decorrer dos séculos foi evoluindo para o nosso actual sistema de numeração posicional decimal – o sistema hindu-árabe” (p. 398).

O contributo mais conhecido da Matemática indiana é, sem dúvida, o sistema de numeração utilizado em quase todo o mundo, cujo nome advém do facto de ter sido, supostamente, inventado pelos indianos (hindus) e adoptado e divulgado pelos árabes.

O sistema decimal é bastante antigo, assim como os sistemas posicionais; mas a sua combinação apareceu na China e, depois, na Índia, onde, com o decorrer do tempo, se impôs sobre os sistemas não posicionais mais antigos.

Este sistema relaciona três componentes importantes, cuja origem nem sempre é clara, nomeadamente, os próprios dígitos de 1 a 9, a noção de valor posicional e o uso do zero.

Relativamente aos nove símbolos do nosso sistema de numeração, estes tiveram origem no sistema de escrita Brahmi, na Índia, e datam de meados do século III a. C. Depois, foram surgindo várias transformações no seu aspecto, ao longo do seu trajecto até aos nossos dias, alterações que resultaram de uma viagem no espaço e no tempo durante vários séculos, passando por várias civilizações e culminando o seu percurso na Europa, por intermédio dos Árabes. Todo esse processo de transformação pode ser analisado na figura 65:

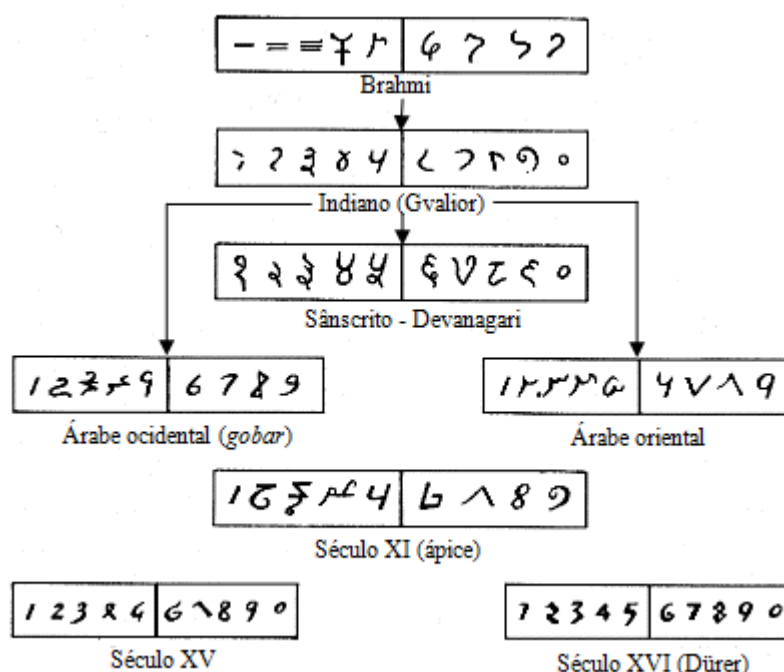


Fig. 65 – Desenvolvimento dos algarismos modernos
Adaptado de (Katz, 1998, p. 231)

Contudo, mais importante que os símbolos em si, é a noção de valor posicional. Sabemos que os babilônios já tinham usado um sistema posicional, mas com base 60. Por outro lado, os antigos chineses tinham um sistema multiplicativo de base 10. Na Índia, além dos símbolos para representar os números de 1 a 9, também tinham símbolos para representar os números de 10 a 90. Os números maiores eram representados, tal como acontecia na China, combinando um símbolo dos nove primeiros algarismos com um símbolo para 100 ou 1000. Disto se conclui que, no início da nossa era, os indianos, tal como os chineses, usaram um sistema multiplicativo. De facto, Aryabhata usava vários nomes para as diferentes potências de 10.

Por volta do ano 600, os indianos deixaram de utilizar os símbolos para os números maiores que 9 e começaram a usar apenas os nove primeiros algarismos e a noção de valor posicional. A primeira ocorrência indiana encontra-se num placa do ano 595, onde a data 346 está escrita no sistema posicional decimal, segundo Struik (1987).

No entanto, estes nove símbolos não contemplavam o zero. Um símbolo para o zero aparece no Manuscrito de Bakshali (que se pensa que seja do século VII d. C.), no qual os números foram escritos usando o sistema de numeração posicional e um ponto para representar o zero.

Não sabemos o que levou os indianos do século VII a deixarem de usar o sistema multiplicativo e a adoptarem o sistema posicional, com um símbolo para o zero. Todavia, conjectura-se que a verdadeira origem deste sistema na Índia tenha as suas raízes no *quadro de contagem* dos chineses.

Independentemente da sua origem, estamos certos que um sistema posicional decimal completamente desenvolvido existiu na Índia, por volta do século VIII.

ANEXO A.6 - MATEMÁTICA NA CIVILIZAÇÃO ISLÂMICA

Para analisar a Matemática desta civilização, pareceu-me mais conveniente apresentar os contributos de cada autor, por não achar muito adequado, neste caso, fazer generalizações por tema, como fiz para outras civilizações já analisadas.

Assim sendo, os autores são apresentados por ordem cronológica e é feita referência aos seus contributos mais importantes para o desenvolvimento da Matemática.

MATEMÁTICOS ÁRABES MAIS IMPORTANTES

Al-Kwarizmi

O mais ilustre dos matemáticos árabes foi Muhammad ibn-Musa al-Kwarizmi (c. 780 – 850). Foi, em grande parte, através do seu trabalho que a Europa se familiarizou com o sistema de numeração hindu-árabe e com a abordagem algébrica para a Matemática.

A primeira obra árabe sobre aritmética, que se conhece, é a de al-Kwarizmi, que foi seguida por uma série de outras aritméticas árabes, de autores posteriores. Estas aritméticas geralmente explicavam as regras para efectuar determinados cálculos, influenciadas pelos algoritmos indianos.

A sua obra consiste, principalmente, em dois livros, sendo um sobre aritmética e outro sobre álgebra. Relativamente à aritmética, al-Kwarizmi compilou um pequeno tratado com um título que se pode traduzir por *O Livro da Adição e da Subtracção de acordo com o Cálculo dos Hindus*. É a obra mais antiga, em árabe, que explica o uso do sistema numérico decimal hindu. Apesar de al-Kwarizmi mencionar apenas “nove letras” (isto é, os símbolos para os dígitos de 1 a 9) a serem usadas para escrever números, também fez uso do zero, referindo que:

“Quando nada sobrar [na subtracção], colocar um pequeno círculo para que o lugar não fique vazio, mas o círculo deve ocupar esse espaço.”

Este livro de al-Kwarizmi introduziu a palavra “algoritmo” no vocabulário da Matemática. A origem desta palavra prende-se com uma tradução latina da obra de al-Kwarizmi que se inicia com as palavras *“Dixit Algorizmi...”* (Disse al-Kwarizmi...). Durante muito tempo, “algoritmo” significou a arte da computação com os algarismos hindu-árabes. Actualmente, o termo “algoritmo” é usado quando nos referimos a qualquer método de cálculo que segue um conjunto de regras estabelecidas.

Al-Kwarizmi também foi autor do *Tratado de Hisab al-jabr wal-muqabala*, o primeiro trabalho sistemático conhecido sobre álgebra. Nesta obra, são explicadas as quatro operações elementares e são resolvidas equações lineares e quadráticas, sendo estas últimas resolvidas tanto de forma aritmética como geométrica.

A palavra “álgebra” deriva do termo *al-jabr*, que faz parte deste título e que significa *restauração*. Assim, por *al-jabr*, entende-se a operação de somar um número ou expressão algébrica a ambos os membros de uma equação, para eliminar termos negativos. Por sua vez, a palavra *al-muqabala* foi traduzida como *redução* para designar o processo de eliminar termos positivos subtraindo a mesma quantidade a ambos os membros da equação.

Por exemplo, na equação

$$6x^2 - 4x + 1 = 5x^2 + 3,$$

a *restauração* conduz a

$$6x^2 + 1 = 5x^2 + 4x + 3$$

e a *redução* leva à escrita da equação na forma

$$x^2 = 4x + 2.$$

Esta obra tornou-se conhecida na Europa através de traduções latinas e fez da palavra *al-jabr* ou álgebra, sinónimo da ciência das equações. Mas, desde meados do século XIX, a palavra álgebra passou a ter um significado muito mais amplo.

Ao lidar com as equações quadráticas, al-Kwarizmi, dividiu-as em seis tipos fundamentais:

- (1) Quadrados iguais a raízes: $ax^2 = bx$,
- (2) Quadrados iguais a números: $ax^2 = c$,
- (3) Raízes iguais a números: $bx = c$,
- (4) Quadrados e raízes iguais a números: $ax^2 + bx = c$,
- (5) Quadrados e números iguais a raízes: $ax^2 + c = bx$,
- (6) Raízes e números iguais a quadrados: $bx + c = ax^2$.

A razão para esta classificação em seis tipos de equações é que os matemáticos árabes, ao contrário dos indianos, não lidavam com números negativos. Para eles, tanto os coeficientes como as soluções tinham de ser positivos.

Assim, todos os problemas eram reduzidos a um destes tipos padrão e resolvidos de acordo com algumas regras gerais. As soluções de al-Kwarizmi para os três primeiros casos eram simples, sendo apenas de notar que 0 não era considerado solução do primeiro caso.

As suas regras para as equações completas eram bem mais interessantes e al-Kwarizmi provou a veracidade das suas fórmulas algébricas para resolver estas equações usando demonstrações geométricas. Sem qualquer formalismo algébrico, nem mesmo a álgebra sincopada de Diofanto, os exemplos discutidos na sua *Álgebra* foram $x^2 + 10x = 39$, $x^2 + 21 = 10x$ e $3x + 4 = x^2$. Estes três exemplos (principalmente, a equação $x^2 + 10x = 39$) reapareceram, frequentemente, nos textos árabes e cristãos posteriores.

Ilustremos a demonstração usada para a equação $x^2 + 10x = 39$, que foi feita por dois métodos diferentes. O problema que deu origem a esta equação é:

Exemplo (al-Kwarizmi): “Qual é o quadrado que, quando aumentado de dez das suas raízes, perfaz trinta e nove?”

A primeira solução geométrica é explicada da seguinte forma. Dada a equação $x^2 + 10x = 39$, construir um quadrado [ABCD], com lados de comprimento x , para representar x^2 . Depois, é preciso adicionar $10x$ ao x^2 . Para tal, $10x$ é dividido em quatro partes, cada parte representando um rectângulo de área $\frac{10}{4}x$ e, em seguida, juntam-se esses quatro rectângulos aos quatro lados do quadrado, como nos mostra a figura seguinte:

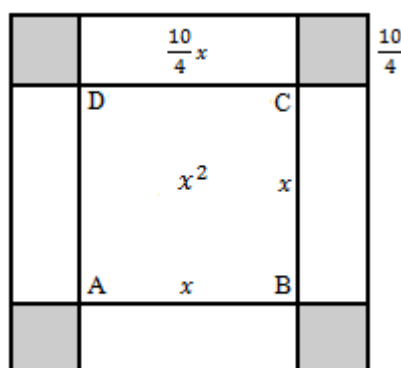


Fig. 66 – Primeira demonstração geométrica de al-Kwarizmi para a solução da equação $x^2 + 10x = 39$

Isso produz uma figura de área $x^2 + 10x = x^2 + 4\left(\frac{10}{4}x\right)$. Para transformar esta figura num quadrado maior, de lados $x + \frac{10}{2}$, temos de acrescentar quatro pequenos quadrados nos cantos, cada um com uma área igual a $\left(\frac{10}{4}\right)^2$. Ou seja, para “completar o quadrado”, adicionamos $4\left(\frac{10}{4}\right)^2 = \left(\frac{10}{2}\right)^2$. Então, temos

$$\left(x + \frac{10}{2}\right)^2 = (x^2 + 10x) + 4\left(\frac{10}{4}\right)^2 = 39 + \left(\frac{10}{2}\right)^2 = 39 + 25 = 64.$$

Assim, o lado do quadrado deve ser $x + \frac{10}{2} = 8$, donde se obtém que $x = 3$.

De uma forma geral, a equação quadrática $x^2 + px = q$ é resolvida por este método de “completação do quadrado”, adicionando quatro quadrados, cada um com área $\left(\frac{p}{4}\right)^2$, à figura que representa $x^2 + px$, para obter

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = x^2 + px + 4\left(\frac{p}{4}\right)^2 = q + \left(\frac{p}{2}\right)^2,$$

donde se obtém a solução

$$x = \sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2} - \frac{p}{2}.$$

Relativamente ao segundo método de resolução da mesma equação, al-Kwarizmi parte de uma figura composta por um quadrado de lado x e dois rectângulos, cada um com comprimento x e largura $\frac{10}{2}$, como nos mostra a figura 67. Uma vez que a área de cada rectângulo é $\left(\frac{10}{2}\right)x$, a área de toda a figura é $x^2 + 2\left(\frac{10}{2}\right)x$. Para completar esta figura, a fim de formar um quadrado, é necessário adicionar um novo quadrado, de área $\left(\frac{10}{2}\right)^2$.

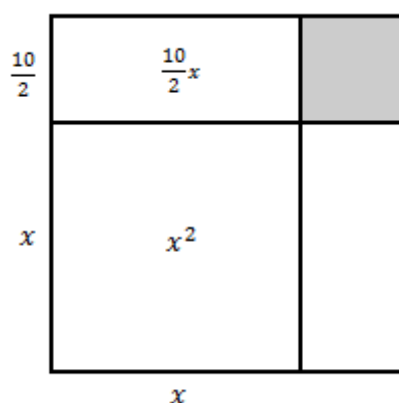


Fig. 67 – Segunda demonstração geométrica de al-Kwarizmi para a solução da equação $x^2 + 10x = 39$

A área do quadrado completo é $\left(x + \frac{10}{2}\right)^2$ e, conseqüentemente,

$$\left(x + \frac{10}{2}\right)^2 = x^2 + 2\left(\frac{10}{2}\right)x + \left(\frac{10}{2}\right)^2 = 39 + 25 = 64.$$

O lado deste quadrado é, então, $x + \frac{10}{2} = 8$, donde se obtém $x = 3$.

Para resolver a equação geral $x^2 + px = q$ desta maneira, um quadrado de lado $\frac{p}{2}$ é adicionado à figura que representa $x^2 + 2\left(\frac{p}{2}\right)x$, fazendo assim,

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = x^2 + 2\left(\frac{p}{2}\right)x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = q + \left(\frac{p}{2}\right)^2.$$

Isto conduz, como anteriormente, à solução

$$x = \sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2} - \frac{p}{2}.$$

Note-se que, embora os árabes tivessem reconhecido a existência de duas soluções de uma equação quadrática (algo nunca feito por Euclides nem pelos babilônios), apresentavam apenas as positivas. Nas obras de al-Kwarizmi e de outros matemáticos árabes, os números negativos eram evitados. Como já vimos na análise da Matemática indiana foi Baskara (século XII) o primeiro a considerar a existência e legitimidade de raízes negativas numa equação quadrática. Os europeus admitiram-nas apenas a partir do século XVI ou XVII.

Abu-Kamil

Abu-Kamil (c. 850 – 930), muitas vezes apelidado “*O calculador do Egipto*”, foi o segundo dos grandes escritores árabes sobre álgebra. Pouco se sabe sobre a sua vida além de que é, aparentemente, de ascendência egípcia e que escreveu no período que se seguiu a al-Kwarizmi.

Escreveu um tratado sobre álgebra que era, essencialmente, um comentário sobre o trabalho de al-Kwarizmi. Em parte por essa razão e em parte devido ao seu próprio mérito, o livro teve grande popularidade no mundo muçulmano. Este tratado, com 69 problemas, era muito mais extenso que o de al-Kwarizmi que tinha apenas 40.

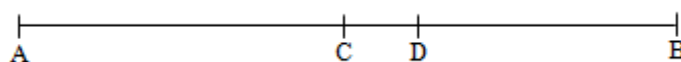
Como seria de esperar de um comentário, Abu-Kamil utilizou muitos dos problemas que al-Kwarizmi tinha explicado, não hesitando, no entanto, em acrescentar outros métodos de solução além dos apresentados pelo seu antecessor.

Vejamos um exemplo em que Abu-Kamil não só se baseou no trabalho de al-Kwarizmi mas também no de Euclides. No entanto, saliente-se que não se limitou a copiar o trabalho dos seus antecessores tendo dado um cunho pessoal e inovador à resolução da equação $x^2 + 21 = 10x$.

Para resolver esta equação, Abu-Kamil baseou-se numa proposição do livro II dos *Elementos* de Euclides, mais concretamente na seguinte proposição:

Elementos II, 5: Se uma linha recta é cortada em partes iguais e desiguais e, em seguida, o rectângulo contido pelas partes desiguais juntas (em linha recta), mais o quadrado da diferença entre as partes (iguais e desiguais), é igual ao quadrado sobre metade (da linha recta).

Considere-se um segmento de recta [AB] em que C é o seu ponto médio e D é arbitrário no segmento [CB].



Usando a nossa simbologia, esta proposição pode ser traduzida por

$$\overline{AD} \times \overline{DB} + \overline{CD}^2 = \overline{CB}^2.{}^{62}$$

A descrição de Abu-Kamil começa com a seguinte afirmação:

“Tudo será explicado e considerado. Toma o número que é somado ao quadrado, ou seja, 21, e que é maior que o quadrado.”

A figura seguinte esquematiza o método utilizado por Abu-Kamil:

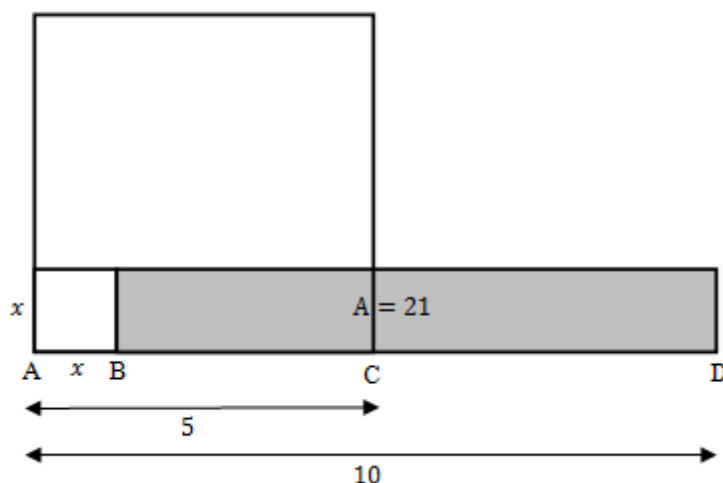


Fig. 68 – Demonstração geométrica de Abu-Kamil para a solução da equação $x^2 + 21 = 10x$

Como $x^2 + 21 = 10x$, então o lado [AD] do retângulo tem comprimento 10. De seguida, constrói-se o quadrado de lado [AC], em que C é o ponto médio de [AD]. Assim, $\overline{AC} = 5$.

Tendo em conta o resultado de Euclides, temos, neste caso, que:

$$\overline{AB} \times \overline{BD} + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2$$

Sabemos que $\overline{AC}^2 = 25$ e $\overline{AB} \times \overline{BD} = 21$. Assim, $\overline{BC}^2 = 25 - 21 = 4$, donde se conclui que $\overline{BC} = 2$.

Como $x = \overline{AC} - \overline{BC}$, temos que $x = 5 - 2 = 3$. (Note-se que a medida x da figura foi marcada de forma aleatória.)

Conforme é salientado em (Santos et al, 2008 (Vol. VII)), “este exemplo é excelente para mostrar o processo de avanço na exploração científica em que é fundamental partir do conhecimento já existente, mantendo a mente aberta a novas aplicações, refinamentos e eventuais críticas” (p. 20).

⁶² Considerando $\overline{AC} = \overline{CB} = a$ e $\overline{CD} = b$, esta proposição pode ser interpretada pela identidade algébrica: $(a + b)(a - b) + b^2 = a^2$.

A introdução de soluções irracionais para algumas equações quadráticas é outro aspecto em que Abu-Kamil se baseou no trabalho de al-Kwarizmi.

Tabit ibn-Qurra

Outro proeminente matemático árabe foi Tabit ibn-Qurra (c.830 – 901). Foi um matemático de diversos talentos, tendo-se distinguido como médico e tradutor, tendo traduzido e escrito perto de 150 obras. Fez excelentes traduções da maior parte das obras matemáticas gregas, incluindo as obras de Arquimedes, Apolónio, Nicómano de Gerasa, Proclo e o *Almagesto* de Ptolomeu, sendo-lhe também atribuída a primeira tradução completa dos *Elementos* de Euclides para o árabe.

Os *números amigos*, já estudados pelos pitagóricos, também mereceram a sua atenção tendo escrito um livro dedicado a este tema, intitulado *O Livro sobre a determinação de números amigos*. Este livro é geralmente considerado como a primeira obra de matemática, completamente original, escrita em árabe. A obra contém 10 proposições, incluindo uma sobre a construção de pares de *números amigos* (isto é, pares de números em que cada um deles é igual à soma dos divisores próprios do outro).

A regra dada por Tabit ibn-Qurra é a seguinte:

Se $p = 3 \times 2^n - 1$, $q = 3 \times 2^{n-1} - 1$ e $r = 9 \times 2^{2n-1} - 1$ são números primos, então $M = 2^n pq$ e $N = 2^n r$ formam um par de *números amigos*.

O exemplo clássico é constituído pelos números 220 e 284 que, usando esta fórmula, se obtêm para $n = 2$. De facto, se $n = 2$, então $p = 11$, $q = 5$ e $r = 71$; donde se obtêm $220 = 2^2 \times 5 \times 11$ e $284 = 2^2 \times 71$.

Apesar de outros matemáticos árabes terem estudado o resultado de ibn-Qurra, só no fim do século XIII é que al-Farisi, outro matemático árabe, encontrou outro par de *números amigos*, nomeadamente, $17\,296 = 2^4 \times 23 \times 47$ e $18\,416 = 2^4 \times 1151$. Este par também foi “redescoberto” por Fermat, quase quatro séculos depois.

Durante muitos séculos não se descobriram outros pares de números amigos, em grande parte porque, infelizmente, só se conhecem três valores de n (nomeadamente, 2, 4 e 7), para os quais a proposição de ibn-Qurra fornece pares de *números amigos*.

Tabit ibn-Qurra ainda contribuiu para a geometria ao dar uma generalização do Teorema de Pitágoras que se aplica a qualquer triângulo, mesmo que não seja rectângulo. A relação por ele criada é a seguinte:

“Se do vértice A do triângulo $[ABC]$ são desenhados dois segmentos de recta $[AB']$ e $[AC']$ formando com a base do triângulo dois ângulos $AB'B$ e $AC'C$, respectivamente, os dois iguais ao ângulo BAC , então a soma dos quadrados de lados $[AB]$ e $[AC]$ é igual ao rectângulo $(BB' + CC') \times BC$.”

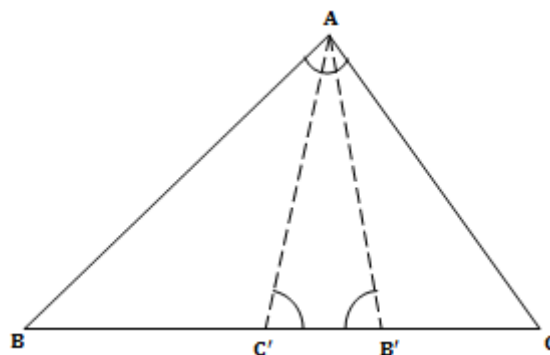


Fig. 69 – Generalização do Teorema de Pitágoras

Al-Karagi e as-Samaw'al

Al-Karagi (953 – 1029) foi um notável matemático que exerceu a sua actividade no século X. Também é conhecido por al-Karki, mas pouco se sabe sobre a sua vida além de que viveu em Bagdade, por volta do ano 1000, e que fundou uma escola de álgebra que prosperou durante centenas de anos.

O seu trabalho mais importante é sobre álgebra e intitula-se *O Maravilhoso*. A importância deste trabalho deve-se ao facto de ser a mais antiga obra com uma análise detalhada da álgebra dos polinómios. Al-Karagi defendia a ideia de que “os monómios são infinitos” e, por isso, estudou as propriedades das sequências

$$x, x^2, x^3, \dots \quad e \quad \frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}, \dots,$$

tendo observado, nomeadamente, que cada potência se podia obter da anterior multiplicando por x ou por $\frac{1}{x}$, respectivamente.

Trabalhou com expressões com a incógnita, monómios e polinómios, de um modo análogo ao das quatro operações aritméticas.

Para multiplicar monómios era necessário usar a lei dos expoentes e, em essência, al-Karagi utilizava essa regra; no entanto, como o produto de, por exemplo, um quadrado e um cubo era expresso em palavras como um *quadrado-cubo*, a propriedade numérica de adicionar os expoentes não era facilmente observada, e só mais tarde é que foi constatada e formulada.

Além disso, as dificuldades em operar com números negativos, tê-lo-ão impedido de generalizar os seus métodos para o caso da divisão de polinómios.

Al-Karagi não deu apenas regras para obter o quadrado da soma ou a diferença de quadrados, também incluiu no seu trabalho vários resultados sobre expansões binomiais. Depois de observar o padrão de formação dos coeficientes no desenvolvimento de $(a + b)^3$ e $(a + b)^4$, deduziu, de forma notável, a regra para a expansão

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k,$$

referindo que

$$C_n^k = C_{n-1}^{n-k} C_{n-1}^k.$$

Para encontrar os valores destes coeficientes baseou-se num arranjo triangular que mais tarde ficou conhecido por Triângulo de Pascal (e que já era conhecido dos chineses).

Al-Karagi não se limitou a operar com polinómios; considerou ainda algumas séries aritméticas, tendo sido o primeiro matemático árabe a provar teoremas sobre a soma dos quadrados e cubos dos primeiros n números naturais, expressando-as da seguinte forma

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \left(\frac{2n+1}{3}\right)(1+2+3+\dots+n)$$

e

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1+2+3+\dots+n)^2.$$

É de referir que Al-Karagi fez estas demonstrações usando as duas componentes básicas de uma demonstração por indução. Começou por verificar que a proposição era verdadeira para $n = 1$, e depois provou que, sendo verdadeira para $n = k$, também o era para $n = k + 1$.

Por tudo isto, al-Karagi é visto, por muitos, como o primeiro matemático a separar completamente a álgebra das operações geométricas e a substituí-las pelo tipo de operações aritméticas que estão hoje no centro da álgebra.

Cerca de 100 anos mais tarde, as-Samaw'al (nascido em 1130), que foi um importante membro da escola fundada por al-Karagi, deu continuidade e desenvolveu o trabalho de al-Karagi, na obra *O Livro Brilhante do Cálculo*. Por exemplo, é nesta obra que as-Samaw'al explicita a chamada *regra dos sinais*, para os casos mais complicados, o que lhe permitiu generalizar os processos aritméticos às operações com polinómios, incluindo a divisão.

Além disso, baseado numa disposição especial por ele concebida em que as diferentes potências são colocadas num quadro, conseguiu formular, de forma retórica, a regra de multiplicação de potências equivalente à regra que usamos actualmente, $x^m \times x^n = x^{m+n}$.

As-Samaw'al foi o primeiro matemático a dar uma descrição precisa da nova abordagem da álgebra, quando escreveu que estava interessado em “operar com incógnitas usando todas as ferramentas aritméticas, da mesma forma que o aritmético opera com o conhecido [os números]”.

Omar Khayyam

Um dos estudiosos árabes que também merece destaque é Omar Khayyam (1048 – 1123), embora, fora do mundo islâmico, seja mais conhecido pela sua poesia do que pelas suas descobertas matemáticas. É-lhe atribuído um conjunto de poemas, os *Ruba'iat*, onde ele elogia o prazer dos sentidos, publicado em centenas de edições.

O mais influente dos seus trabalhos matemáticos intitula-se *Tratado sobre as Demonstrações dos Problemas de al-jabr e al-muqabala*, que contribuiu consideravelmente para o desenvolvimento da álgebra. Enquanto al-Kwarizmi estudou equações lineares e quadráticas, Khayyam construiu as soluções de todos os tipos de equações cúbicas pelo uso da intersecção de secções cónicas.

As equações cúbicas surgiram a partir da análise de problemas como a construção de um heptágono regular ou o problema de Arquimedes, de cortar uma esfera em duas partes, conhecida a razão.

Khayyam classificou, de forma sistemática, as equações cúbicas e concluiu que uma raiz destas equações era obtida como a abcissa de um ponto de intersecção de um círculo com uma parábola ou de duas parábolas. Khayyam rejeitou raízes negativas e, geralmente, não indicava todas as soluções positivas.

Na resolução das equações algébricas, Khayyam admite que as soluções podem ser dadas de forma aritmética ou através de construções geométricas e defende que, quando se trata de equações em que entram cubos, as soluções só podem ser dadas por meio das secções cónicas.

Parece que tinha como objectivo obter uma solução numérica para as equações do 3º grau, usando um algoritmo como al-Kwarizmi tinha feito para as equações do 2º grau. No entanto, admite o seu insucesso, ao referir que: “a demonstração destas formas para o caso em que o objecto do problema é um número absoluto não é possível nem para nós, nem para nenhum daqueles que foram mestres nesta ciência. Pode ser que um daqueles que vier depois de nós a realize” (Youschkevitch, 1976, p. 96 apud Estrada, 2000c, p. 431).

E, de facto, foi preciso esperar quatro séculos, para que tal profecia se realizasse. Não obstante este fracasso, deve-se a Omar Khayyam a construção de uma teoria de resolução geométrica de equações cúbicas que é considerada uma das maiores descobertas da Matemática árabe.

Apesar do seu método de solução ter sido essencialmente gráfico e geométrico e, portanto, não ter avançado técnicas algébricas *per se*, abriu a porta para outros estudos destas equações, pelo que se considera que Khayyam deu um passo importante na teoria das equações.

A ele também é atribuído um *Comentário sobre os postulados problemáticos do livro de Euclides*, que se debruça, entre outras coisas, sobre o postulado das linhas paralelas. Khayyam aceitou a verdade do 5º Postulado de Euclides, mas visto que era menos óbvio que muitas das outras proposições, necessitaria de prova.

ANEXO A.7 - MATEMÁTICA NA EUROPA MEDIEVAL

Dada a diversidade de obras e matemáticos que surgiram nesta época, farei referência a apenas alguns matemáticos tendo em conta o valor pedagógico das suas obras para o actual ensino da Matemática a alunos do Ensino Básico.

ALGUNS DOS MATEMÁTICOS MAIS IMPORTANTES

Alcuino de York

Alcuino (735 – 804) foi um dos matemáticos mais notáveis da sua época. Em 781, foi convidado por Carlos Magno para dirigir a escola do palácio, onde ficou, até 796, com o cargo de conselheiro educacional, tendo sido o responsável pela maior reforma na educação no império Carolíngio.

É-lhe ainda atribuída a autoria de uma das mais antigas recolhas de problemas recreativos, intitulada *Problemas para estimular os jovens* (*Propositiones ad Acuendos Juvenes*). Os 53 problemas desta colecção influenciaram escritores de livros didácticos durante mais mil anos. A colecção de Alcuino é o primeiro conjunto notável de problemas recreativos, depois da *Antologia Grega*.

As provas que nos levam a pensar que Alcuino foi o autor desta compilação vêm de uma carta, enviada a Carlos Magno, em que Alcuino afirma: “*Enviei a Vossa Excelência [...] alguns problemas aritméticos simples para diversão*”.

O lema pedagógico de Alcuino era que “*deve-se ensinar divertindo*”. Naquela época, o lúdico e o jocoso tinham, além do carácter motivacional uma outra função pedagógica: aguçar a inteligência dos jovens. “Estes problemas, e as suas soluções, servem como provas valiosas do estado da Educação Matemática na época”, conforme salienta Burkholder (1993, s/p).

Embora alguns dos problemas da sua obra fossem resolvidos através de cálculos elaborados, muitos deles eram simples. Os problemas aqui propostos não exigiam outros conhecimentos além de algumas fórmulas de áreas usadas na medição de terrenos, a capacidade para resolver equações lineares e realizar as quatro operações fundamentais com números inteiros. A extracção de raízes não é necessária para resolver qualquer problema e as fracções quase nunca ocorrem. Para a maioria dos problemas, o que era necessário era raciocínio e uma boa dose de lógica.

Infelizmente, algumas das soluções apresentadas por Alcuino não estão correctas; alguns erros são simples falhas de cálculo, outros são mesmo erros de raciocínio.

Muitos problemas não têm qualquer valor prático imediato e, portanto, são claramente concebidos como exercícios puramente matemáticos.

Alcuino, e muitos outros mestres da sua época, ensinavam por meio de alguns enigmas e brincadeiras como as que seguem:

Exemplo (Problema 14 de Alcuino⁶³): *“Quantas pegadas no seu último sulco deixa um boi que esteve a lavrar todo o dia?”*

Este problema (ou melhor, adivinha) é simples e até é engraçado. É fácil concluir que o boi não deixa nenhuma pegada, pois estas são apagadas pelo arado, que passa depois.

Outra questão, um pouco diferente, é o problema seguinte:

Exemplo (Problema 43 de Alcuino): *“Um certo homem tem 300 porcos. Ordenou que todos fossem abatidos em três dias, mas com um número ímpar morto em cada dia. Qual o número de porcos mortos em cada dia?”*

A particularidade deste problema está na sua resposta. O problema não tem solução pois a soma de três números ímpares nunca perfaz 300 (que é par).

Apesar de ser uma compilação de problemas, Alcuino não deixa de incluir problemas originais. Assim, aqui aparecem, pela primeira vez, sete tipos de problemas, além de outros dois tipos que nunca tinham aparecido nas aritméticas do Ocidente.

Dos problemas inéditos, começemos por destacar um famoso problema de lógica, que pertence a uma classe de problemas conhecida como o “problema das travessias”, de que a seguir se apresenta um exemplo:

Exemplo (Problema 18 de Alcuino): *“Um certo homem precisa atravessar um lobo, uma cabra e um molho de couves para a outra margem do rio. No entanto, ele só encontrou um barco que podia levar dois destes [ao mesmo tempo]. Então, que regra tem de usar para os levar para a outra margem de forma que a cabra não coma a couve e o lobo não coma a cabra?”*

Alcuino propõe mais três problemas deste tipo (Problemas 17, 19 e 20). O mais divulgado é, sem dúvida, o acima apresentado que, ainda hoje, é utilizado nas nossas escolas e que se encontra em alguns manuais escolares. No entanto, muitas outras versões, além das apresentadas por Alcuino, têm surgido ao longo dos tempos, como é o caso de uma versão conhecida como o “problema dos canibais e dos missionários”.

O seguinte problema representa outro tipo de problemas, originalmente proposto por Alcuino:

⁶³ Os problemas propostos por Alcuino de York, apresentados neste anexo, encontram-se em (Burkholder, 1993).

Exemplo (Problema 12 de Alcuino): *“Um certo pai morreu e deixou como herança para os seus três filhos 30 vasilhas de vidro, das quais 10 estavam cheias de óleo, outras 10 meias cheias, enquanto as outras 10 estavam vazias. Deixe-o dividir, ao que pode, o óleo e os frascos de tal forma que cada um dos três filhos receba uma parte igual dos bens, tanto do óleo como das vasilhas.”*

Há ainda a destacar outra classe de problemas conhecida pelo “problema do jipe” ou a “travessia do deserto”:

Exemplo (Problema 52 de Alcuino): *“Um certo chefe de família ordenou que 90 modia de cereal fossem levados de uma casa para outra a 30 léguas de distância. Dado que esta carga de cereal pode ser transportada por um camelo em três viagens, e que o camelo come uma modium por légua. Diz, aquele que quer, quantas modia sobraram?”*

A solução apresentada por Alcuino apresenta um erro e contradiz o enunciado porque propõe uma quarta viagem. Além disso, a estratégia usada por Alcuino não conduz a uma solução otimizada. Essa solução será dada por Pacioli, e será, oportunamente, analisada.

O seguinte problema merece destaque por ser um dos que apareceram, pela primeira vez, na Europa:

Exemplo (Problema 26 de Alcuino): *“Há um terreno com 150 pés de comprimento. Numa extremidade está um cão, na outra, uma lebre. O cão avança para caçar a lebre. Mas enquanto o cão avança nove pés por salto, a lebre anda apenas sete. Diz, aquele que quer, quantos pés e quantos saltos o cão faz na perseguição da lebre até esta ser apanhada?”*

Pelo que se sabe, as primeiras versões deste problema, conhecido pelo “problema das perseguições” ou “dos carteiros” apareceram, no capítulo VI do *Nove Capítulos de Arte Matemática*, como a seguir se exemplifica:

Exemplo (Cap. VI do Nove Capítulos): *“Um bom caminhante cobre 100 bu, enquanto um mau caminhante 60 bu. Suponha que o último vai à frente do primeiro 100 bu e que este o apanha. Diz: em quantos bu irão os dois lado a lado?”*

O seguinte problema é interessante porque está relacionado com uma “estória” que se conta sobre Gauss:

Exemplo (Problema 42 de Alcuino): *“Há uma escada com 100 degraus. Uma pomba posou no primeiro degrau; duas pombas no segundo, três no terceiro; quatro no quarto, cinco no quinto e assim sucessivamente, até ao centésimo. Deixe-o dizer, ao que pode, quantas pombas havia ao todo?”*

Este problema envolve a noção de progressão aritmética e é muito semelhante ao suposto problema proposto pela professora de Gauss. Conta-se que a professora de Matemática de Gauss (1777-1855) pediu à turma para adicionar os números de 1 a 100, com o objectivo de os entreter. Mas, depressa, o pequeno Gauss encontrou a resposta correcta, 5050, o que deixou a professora deslumbrada.

O segredo utilizado por Gauss para responder tão depressa foi que ele percebeu que, adicionando os valores mais altos e os mais baixos correspondentes, se obtém um simples problema de multiplicação. Assim,

$$\begin{aligned} 1 + 100 &= 101; \\ 2 + 99 &= 101; \\ 3 + 98 &= 101; \\ &\dots \\ 49 + 52 &= 101; \\ 50 + 51 &= 101. \end{aligned}$$

A partir daqui é evidente que só é preciso multiplicar a soma constante, 101, por 50, o número de somas. Desta forma, rapidamente se chega à resposta correcta, 5050.

A solução apresentada por Alcuino era ligeiramente diferente, pois adicionou a pomba do 1º degrau com as 99 pombas do penúltimo degrau, obtendo 100; depois fez o mesmo com o segundo e 98º degraus, obtendo novamente 100. Por fim, teve que adicionar, ainda, as pombas do 50º e do 100º degrau. Obteve, também, 5050.

Podemos ver que, com apenas uma ligeira modificação, o conceito acima descrito foi o mesmo utilizado por Gauss, mil anos depois. Isto leva-nos a supor que talvez o jovem Gauss não fosse tão inteligente como se pensa!

Há muitas evidências de que os problemas propostos nesta colecção procuravam apenas aguçar as mentes dos seus leitores, em vez de servir como um manual para os problemas do quotidiano. Exemplos notórios desse objectivo são os problemas 13 e 41, que estão relacionados com as progressões geométricas. O primeiro destes está colocado da seguinte maneira:

Exemplo (Problema 13 de Alcuino): *“Um certo rei ordenou ao seu servo que reunisse um exército de 30 cidades da seguinte forma: deveria trazer consigo tantos homens [de cada cidade sucessiva] como os que tinha levado. Assim, [o servo] foi à primeira cidade, sozinho; foi com outra pessoa à cidade seguinte; três pessoas foram à terceira cidade. Deixe-o dizer, ao que é capaz, quantas pessoas foram reunidas das 30 cidades?”*

Esta solução pode ser modelada matematicamente pela relação

$$N = 2^c,$$

onde c representa cada cidade sucessiva, N , o número de soldados reunidos em cada cidade. Assim, o número total de soldados convocados seria dado por

$$\sum_{c=1}^{c=30} 2^c.$$

Ora, este resultado representava um exército que ia muito além dos recursos até mesmo dos impérios mais ricos.

Alcuino só apresenta a solução até a 15ª cidade. Não tentou somar os números, nem esperava que algum dos seus alunos o conseguisse fazer. É evidente que, neste caso, o mais importante não é a solução, mas sim o processo de resolução.

É, no entanto, de destacar que Alcuino desconhecia a fórmula para a soma de uma progressão geométrica, o que teria evitado a soma de todas estas potências, ao que ele nem sequer fez referência.

Além dos problemas originais, Alcuino apresenta problemas que já tinham aparecido em obras anteriores, alguns deles muito antigos. Um desses é o “problema das cem aves” que, como já foi referido, apareceu, pela primeira vez, na China, no século V, e posteriormente, nas obras dos matemáticos indianos e árabes.

Outro velho conhecido é o “problema da cisterna” ou “das torneiras”, que já tinha sido encontrado na *Metrica* de Herão e no *Nove Capítulos de Arte Matemática* (Capítulo VI); posteriormente, apareceu na *Antologia Grega* (século V) e, depois, nas obras dos matemáticos indianos (incluindo o *Manuscrito de Bakshali*).

Muitos dos problemas mostram que a colecção foi compilada, principalmente, a partir de fontes romanas. O problema que, devido à sua singularidade, dá o testemunho mais evidente da origem romana é um que está relacionado com um testamento. O problema é idêntico a um romano, excepto que as razões escolhidas são diferentes.

Exemplo (Problema 35 de Alcuino): *“Um certo pai morreu deixando para trás crianças, uma mulher grávida e 960 solidi dos seus bens. [No leito de morte] estipulou que se nascesse um filho, então o filho deveria receber três quartos da herança, ou seja, nove duodécimos. A mãe deveria receber a quarta parte [dos bens], ou seja, três duodécimos. No entanto, se nascesse uma filha, esta deveria receber sete duodécimos, e a mãe, cinco duodécimos. Mas, aconteceu que ela deu à luz dois gémeos – um rapaz e uma rapariga. Quanto é que a mãe, o filho e a filha receberam?”*

Este problema é, sem dúvida, de origem romana. A solução dada por Alcuino está incorrecta.

Este tipo de problemas requer mais lógica do que habilidades aritméticas.

Os problemas seguintes mostram, nas suas soluções incorrectas, as lacunas da época em questões de geometria, denunciando o desconhecimento dos resultados dos matemáticos gregos.

Nesta colecção de problemas, a área de terrenos triangulares e quadrangulares é determinada pelas mesmas fórmulas de aproximação utilizadas pelos egípcios⁶⁴ e por outros matemáticos posteriores.

Exemplo (Problema 24 de Alcuino): “*Há um campo com 30 perticae⁶⁵ num dos lados, 30 perticae no outro e 18 perticae na frente. Deixe-o dizer, ao que pode, quantos aripenni contém esse campo?*”

Alcuino apresenta a seguinte solução: “*Adicionando dois comprimentos do campo faz 60. Retirando metade dos 60 faz 30. Porque há 18 perticae na frente, tire metade destes, fazendo 9. Fazendo nove vezes 30 faz 270. Então, [...]*”.

Note-se que, no cálculo da área do triângulo, a medida da altura relativa a um dos lados foi substituída, incorrectamente, pela média das medidas dos outros dois lados, erro também cometido por matemáticos posteriores, como por exemplo, Bramagupta.

Apesar de Herão (século I d. C.) ter encontrado um fórmula que permite, de forma correcta, determinar a área de qualquer triângulo, sem ser necessário recorrer à sua altura (que em termos práticos pode ser uma tarefa difícil), esta não se generalizou e, raramente, foi utilizada por matemáticos posteriores.

Exemplo (Problema 25 de Alcuino): “*Há um campo redondo contendo 400 perticae na sua circunferência. Diz-me, quantos aripenni contém esse campo?*”

Alcuino resolveu este problema do seguinte modo: “*Um quarto deste campo, o qual contém 400 perticae, é 100. Se multiplicar [100] por 100, obtém 10000, os quais tem de dividir em 12 partes. A duodécima parte de 10 000 é 833, os quais de nono fraccionados em doze partes dão 69. Estes aripenni estão incluídos no campo.*”

Usando a nossa notação, da resolução dada por Alcuino se depreende que a área do círculo seria dada por

$$\left(\frac{2\pi r}{4}\right)^2 = \frac{\pi}{4} \cdot \pi r^2,$$

que equivale a considerar π aproximadamente igual a 4, o que representa uma aproximação bastante grosseira e muito pior que muitas outras encontradas anteriormente.

⁶⁴ À excepção de um problema do papiro do Cairo, que foi calculado correctamente, usando a nossa fórmula actual.

⁶⁵ Da solução apresentada (com erros), podemos deduzir que um *aripennum* é igual a 144 *perticae*.

Os progressos nos textos geométricos, na Idade Média, só se iniciaram no século X, com Gerberto (que se tornou o Papa Silvestre II).

Esta colecção contém problemas interessantes por si só e ajuda-nos a perceber, principalmente, o método de ensino da Matemática na época de Carlos Magno.

Ao analisar os problemas aqui apresentados, conclui-se que o objectivo de Alcuino era apenas inculcar, nos seus alunos (ou leitores), vários métodos de resolução, relativamente simples. Isso era feito com a apresentação de vários problemas do mesmo género, o que representava uma preocupação didáctica. No entanto, é de notar que os problemas estão colocados de forma aleatória; não há uma sequência lógica na apresentação dos problemas, pois estes não estão dispostos de acordo com um determinado tema nem por grau de dificuldade.

Na opinião de Burkholder (1993, s/p), “não se deve concluir que os problemas aqui colocados, e as suas soluções, são indicativos do estado geral da Matemática durante os séculos VIII e IX”. Este autor acrescenta, ainda, que há evidências (por exemplo, o problema 43) de que estes problemas foram utilizados, principalmente, para fins didácticos, e que, por isso, argumentar que esta colecção de problemas é um exemplo do estado pobre da Matemática daquela época não corresponde à verdade.

Leonardo de Pisa (Fibonacci)

O maior matemático da Idade Média foi Leonardo de Pisa, mais conhecido por Fibonacci (uma contracção de *filius Bonaccio*, “filho de Bonaccio”). Fibonacci nasceu em Pisa, por volta de 1175 e foi educado no norte de África, onde o seu pai trabalhava como alfandegário. A ocupação do pai cedo lhe despertou o interesse pela aritmética e as subsequentes viagens ao Egipto, Sicília, Grécia, e Síria proporcionaram-lhe o contacto com práticas matemáticas orientais e árabes. Rapidamente reconheceu as grandes vantagens do sistema decimal hindu-árabe, com a sua notação posicional e o símbolo zero, sobre o sistema romano ainda usado no seu país. Depois de regressar a Pisa, Fibonacci escreveu, em 1202, o seu famoso *Liber Abaci* (*O Livro do Ábaco*), no qual explicou as virtudes deste sistema numérico.

A Fibonacci são atribuídas mais três obras: *Practica Geometriae* (publicada em 1220), *Flos* (publicada em 1225), e *Liber Quadratorum* (publicada por volta de 1225). Embora o *Liber Abaci* contenha alguns problemas relacionados com equações diofantinas, o *Liber Quadratorum* é inteiramente dedicado a equações diofantinas do segundo grau, sendo considerado um brilhante e original trabalho em análise indeterminada, que o marcou como o matemático mais extraordinário, neste domínio, entre Diofanto e Fermat.

Mas, a sua obra mais importante foi, sem dúvida, o *Liber Abaci*. Este trabalho é dedicado à Álgebra elementar e à Aritmética e, embora fosse, essencialmente, uma investigação independente, mostra a influência da Álgebra de Abu-Kamil (que, por sua vez, já tinha sofrido a influência do trabalho de al-Kwarizmi). Além disso, alguns dos

problemas propostos por Fibonacci resultaram de uma adaptação de problemas do papiro de Rhind.

Constata-se que, no conteúdo matemático, o seu trabalho não ultrapassa o trabalho dos seus antecessores árabes. Mas, Fibonacci, longe de ser um plagiador, deu uma nova abordagem ao antigo conhecimento e promoveu-o de forma independente. Muitas das suas demonstrações foram originais e, em alguns casos, os seus resultados também foram originais. Por isso, Burton (2006) reconhece que “o trabalho de Fibonacci indica uma combinação de génio inventivo com um profundo conhecimento dos escritores anteriores sobre Matemática” (p. 284).

Neste trabalho, Fibonacci revela-se um defensor acérrimo da notação hindu-árabe e, com as suas ilustrações e explicações, contribuiu muito para a introdução desses números na Europa. Dos quinze capítulos da obra, os sete primeiros são dedicados à introdução desses algarismos com a respectiva notação posicional e às quatro operações aritméticas (com números inteiros e fracções), recorrendo a algoritmos semelhantes aos que usamos nos nossos dias.

Os capítulos seguintes estão relacionados com problemas que envolvem conversão da moeda e sociedades, ou seja, tratam de questões típicas da actividade comercial. Por fim, aparecem a resolução de equações lineares e quadráticas e extracção de raízes quadradas e cúbicas.

Também são propostos vários problemas com carácter recreativo (especialmente no capítulo XII), alguns deles semelhantes a problemas que já tinham aparecido em obras anteriores, como por exemplo, no papiro de Rhind.

Neste livro, que utilizava uma álgebra retórica, muitos dos problemas eram resolvidos pela *regra da falsa* e da *dupla falsa posição*.

Fibonacci, tal como os matemáticos árabes, reconheceu que uma equação quadrática pode ser satisfeita por dois valores; mas, geralmente, não admitia as soluções negativas.

O *Liber Abaci* contém praticamente todo o conhecimento aritmético do tempo de Fibonacci. Como obra-prima Matemática da Idade Média, serviu de inspiração a autores posteriores durante séculos, tendo sido largamente copiado e imitado. Curiosamente, embora o *Liber Abaci* tenha sido amplamente divulgado em manuscrito, não foi impresso, na Itália, até 1857, nem foi traduzido, para o inglês, até 2002.

Fracções

Bramagupta (século VII d. C.) e Baskara (século XII d. C.), ao escreverem fracções, tinham o hábito de colocar o numerador acima do denominador, sem qualquer linha de separação. Os árabes começaram por copiar a notação dos indianos, mas, mais tarde, melhoraram-na, inserindo uma barra horizontal entre os dois números. Fibonacci seguiu a prática árabe no *Liber Abaci*. Ele habitualmente colocava a parte fraccionária de um número misto antes da parte inteira, com justaposição, para indicar a sua adição.

Fibonacci introduziu um tipo de fracção contínua ascendente, a que chamou *fractiones gradibus* (“fracções em escada”). Por exemplo, a sua notação $\frac{3}{10} \frac{1}{10} 5$, correspondia a

$$5 + \frac{1}{10} + \frac{3}{10 \cdot 10}$$

Da mesma maneira, a expressão $\frac{1}{3} \frac{3}{5} \frac{9}{10}$, significava

$$\frac{9}{10} + \frac{3}{10 \cdot 5} + \frac{1}{10 \cdot 5 \cdot 3}$$

Note-se que, por influência árabe, Fibonacci escrevia os números da direita para a esquerda.

Multiplicação

O primeiro capítulo do *Liber Abaci* começa com a frase:

“Estes são os nove números indianos: 9 8 7 6 5 4 3 2 1. Com estes nove números e com o sinal 0... qualquer número pode ser escrito.”

Ao introduzir a numeração hindu-árabe, Fibonacci destaca a simplicidade dos cálculos com estes números, contrariamente aos complicados cálculos com a numeração romana. Se tentarmos multiplicar, por exemplo, MCCXXXVIII por XLVI, logo nos aperceberemos da sorte que temos por não termos estudado Matemática antes do século XVI⁶⁶.

Para a multiplicação, Fibonacci utilizou um algoritmo análogo ao nosso, mas em disposição de tabuleiro de xadrez. Por exemplo, para multiplicar 756 por 4293, multiplicava cada um de 6, 5 e 7 por 4293 e, depois, somava os resultados em diagonal, como nos mostra a seguinte figura:

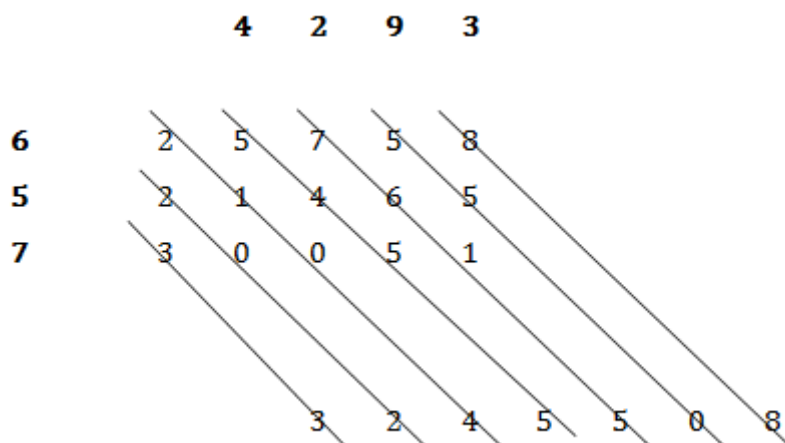


Fig. 70 – Algoritmo da multiplicação usado por Fibonacci

⁶⁶ Em Portugal, o sistema de numeração hindu-árabe só foi introduzido no século XVI, por Gaspar Nicolas.

Método da falsa posição

Os egípcios anteciparam, pelo menos de uma forma elementar, um método favorito da Idade Média, a *regra da falsa posição*. Os matemáticos da Europa Medieval aprenderam este método com os árabes, tendo-se tornado uma característica proeminente dos textos de Matemática, desde o *Liber Abaci* até às aritméticas do século XVI. Mas, com o desenvolvimento do simbolismo algébrico, a regra foi desaparecendo das obras mais avançadas.

Vejam os seguinte exemplo, que Fibonacci resolveu usando este método:

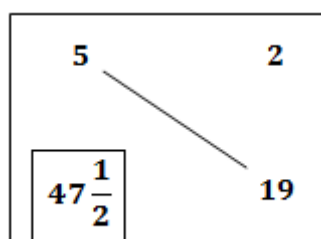
Exemplo (Problema do Capítulo XII do *Liber Abaci*⁶⁷): “Um certo homem compra ovos, à razão de 7 por 1 denário e vende-os a uma razão de 5 por 1 denário e assim faz um lucro de 19 denários. A pergunta é: quanto dinheiro investiu?”

Algebricamente, este problema seria expresso pela equação

$$\frac{7x}{5} - x = 19.$$

Fibonacci começa por supor que o homem investiu 5 denários, com os quais comprou 35 ovos que, depois, vendeu por 7 denários; tendo um lucro de 2 denários pelos 5 denários investidos. (No nosso simbolismo, isto equivale a $\frac{7}{5} \times 5 - 5 = 2$).

Continuando na sua álgebra retórica, Fibonacci refere, “mas 2 devia ser 19” (ou seja, 2 está para 19 como 5 está para o número procurado) e apresenta o seguinte diagrama:



Depois, as suas instruções equivalem a usar as proporções ou a regra de três, obtendo, assim,

$$x = (5 \times 19) \div 2 = 47 \frac{1}{2}.$$

É de salientar que o número escolhido por Fibonacci para a incógnita não foi escolhido arbitrariamente; quando o coeficiente da incógnita é uma fracção, o número escolhido para a suposição é o denominador da fracção, pela razão óbvia de evitar os cálculos com fracções.

Outro problema resolvido também pela *regra da falsa posição* é de um tipo conhecido como “o caracol e o muro”, e tem o seguinte enunciado:

⁶⁷ Os problemas do *Liber Abaci*, utilizados neste trabalho, encontram-se em (Sigler, 2002).

Exemplo (Problema do Capítulo XII do *Liber Abaci*): “Um poço tem 50 metros de profundidade. Um leão, que está no fundo, começa a subir, sendo que, em cada dia, sobe $\frac{1}{7}$ de metro mas escorrega para baixo $\frac{1}{9}$ de metro em cada noite. Quantos dias demorará o leão a escapar?”

Fibonacci resolve incorrectamente este problema, o que era comum acontecer nessa altura, pois não costumavam ter em conta a diferença entre o dia e a noite.

A resposta apresentada no *Liber Abaci* é 1575 dias, pois Fibonacci limitou-se a resolver o equivalente à equação

$$\frac{1}{7}x - \frac{1}{9}x = 50.$$

No entanto, passados 1571 dias, a distância a que o leão está da saída é $50 - 1571 \times \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9}\right) = 0,126 \dots$

Como $\frac{1}{7} = 0,142 \dots$, no próximo dia (no 1572º dia) o leão sairá do poço.

Pensa-se que a primeira versão deste problema surgiu no *Manuscrito de Bakshali*.

Método da dupla falsa posição

Muitas vezes é necessário fazer duas suposições, observando o erro gerado por cada uma. A este método Fibonacci chamava o Método de *Elchataym*, também conhecido por *regra da dupla falsa posição*, já explicada quando analisei a Matemática chinesa.

O capítulo XIII do *Liber Abaci* é dedicado a este método e tem o interessante título: “Aqui começa o Capítulo XIII sobre o Método de *Elchataym* e como com ele quase todos os problemas de Matemática são resolvidos”.

Neste capítulo, Fibonacci resolve, utilizando este método, um grande número de problemas, alguns já resolvidos, por outros métodos, em capítulos anteriores.

Vejamos, então, dois problemas deste capítulo. O primeiro aparece em alguns manuais escolares actuais e, actualmente, para o resolvermos, aplicamos o Teorema de Pitágoras e, depois, resolvemos uma equação. O segundo problema é um clássico, conhecido por “a Maria e as maçãs”, cuja melhor estratégia de resolução é do fim para o princípio.

Exemplo (Problema do Capítulo XII I do *Liber Abaci*): “Dois pássaros começam a voar do topo de duas torres que distam 50 pés; uma torre tem 30 pés de altura, e a outra, 40 pés de altura. Começando ao mesmo tempo e voando à mesma velocidade, as aves chegam, ao mesmo momento, a uma fonte que está entre as bases das torres. A que distância está a fonte de cada torre?”

Fibonacci supõe que a distância da torre mais alta à fonte é 10 pés, e utiliza, implicitamente, o Teorema de Pitágoras.

Na nossa notação, o procedimento de Fibonacci pode ser descrito como:

$$10^2 + 40^2 = 100 + 1600 = 1700$$

e

$$(50 - 10)^2 + 30^2 = 40^2 + 30^2 = 1600 + 900 = 2500.$$

Depois, Fibonacci diz “esta soma e a anterior diferem por 800”. Acrescentado que é necessário afastar a fonte da torre mais alta. Assim, faz outra suposição, considerando agora que a distância da torre mais alta à fonte é 15 *pés*.

Agora as suas indicações traduzem-se por:

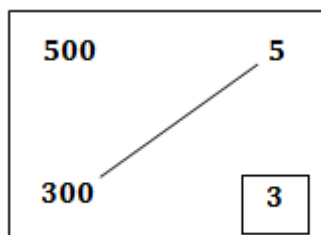
$$15^2 + 40^2 = 225 + 1600 = 1825$$

e

$$35^2 + 30^2 = 1225 + 900 = 2125.$$

Então, Fibonacci diz “as duas somas diferem por 300”. E acrescenta, ainda, que “pelos 5 pés que aumentámos à distância entre a torre mais alta e a fonte, ficámos mais próximo do valor correcto por 500; quanto temos ainda que aumentar à distância entre a torre mais alta e a fonte com vista a melhorar esta aproximação em 300?”

Esta explicação é acompanhada pelo seguinte diagrama:



E a sua última frase pode ser escrita como:

$$(5 \times 300) \div 500 = 3;$$

$$3 + 15 = 18.$$

Donde conclui que a distância da torre mais alta à fonte é de 18 pés e da mais baixa é, consequentemente, de 32 pés.

À primeira vista, ficamos com a ideia que Fibonacci foi o primeiro a colocar este tipo de problemas, que serviu de inspiração para muitos outros autores que deram versões semelhantes, como é o caso de Luca Pacioli que, por sua vez, inspirou Calandri (na obra de 1491) e o matemático português Gaspar Nicolas (na obra de 1519, mais adiante referida), que deram exactamente a mesma versão do problema.

No entanto, Singmaster (2004) refere que este tipo de problemas, mas com um enunciado diferente, já tinham sido propostos por Baskara I (629 d. C.) e muitos outros autores que o sucederam e antecederam Fibonacci.

Exemplo (Problema de Baskara I): *“Um falcão está sentado numa parede de altura a e um rato está a uma distância d da base da parede. O rato tenta chegar ao seu buraco, que está na parede, directamente por baixo do falcão. O falcão desce, à mesma velocidade que o rato, e apanha-o quando chega ao chão.”*

Portanto, a ideia base deste problema é a mesma que a do problema das duas torres de Fibonacci só que, neste caso, a altura de uma das torres é 0.

De facto, Mahavira também coloca vários problemas deste género mas, geralmente, pede também a distância (igual) da parte superior de cada “torre” (montanha, pilhar) para a “fonte”.

Exemplo (Problema do Capítulo XII e XIII do *Liber Abaci*): *“Um certo mercador, negociando em Lucca, duplicou o seu dinheiro e depois gastou 12 denários. Em seguida, saiu e foi para Florença; aí também duplicou o seu dinheiro e gastou 12 denários. Regressando a Pisa, aí duplicou o seu dinheiro e gastou, novamente, 12 denários, e nada sobrou. Quanto dinheiro tinha no início?”*

Aqui, Fibonacci procede de modo análogo ao anterior, começando por supor que o mercador tinha 12 denários e, depois, alterando a suposição para 11 denários. Continua a resolução e obtém a resposta, $10\frac{1}{2}$ denários.

Acrescenta, ainda, “ou da multiplicação do primeiro erro pela segunda suposição, nomeadamente $132 [12 \times 11]$, subtrai o 48 que resulta de multiplicar o segundo erro pela primeira suposição $[4 \times 12]$ deixando 84 que, dividido pela diferença dos erros, dá $10\frac{1}{2}$ ”.

Ora, esta explicação está de acordo com a conhecida fórmula:

$$x = \frac{y_1x_2 - y_2x_1}{y_1 - y_2}.$$

Alguns problemas que merecem destaque

O *Liber Abaci* contém uma grande colecção de problemas e, principalmente no capítulo XII, aparecem problemas muito diversos, com carácter recreativo. Há um problema que é de interesse histórico, porque foi dado, com algumas diferenças, por Ahmes, 3000 anos antes:

Exemplo (Problema do Cap. XII do *Liber Abaci*): *“Há sete velhas mulheres na estrada para Roma; cada mulher tem sete mulas; cada mula carrega sete sacos; cada saco contém sete pães; e com cada pão estão sete facas; e cada faca está colocada em sete bainhas. Quantos há, ao todo, na estrada para Roma?”*

As semelhanças entre a versão apresentada no papiro de Rhind e a apresentada por Fibonacci são evidentes, até a razão é a mesma. Isto leva a crer que, realmente, Fibonacci se baseou no trabalho de Ahmes.

Por outro lado, Fibonacci apresenta outra versão deste problema, agora muito semelhante a uma que tinha aparecido no *Manual Aritmético do Mestre Sun*, do século III. Neste caso, as razões diferem mas o contexto é o mesmo:

Exemplo (Problema do *Manual Aritmético do Mestre Sun*): “Vemos 9 aterros; cada aterro tem 9 árvores, cada árvore tem 9 ramos, cada ramo tem 9 ninhos, cada ninho tem 9 pássaros, cada pássaro tem 9 filhotes, cada filhote tem 9 penas, cada pena tem 9 cores. Quantos há de cada?”

Exemplo (Problema do Cap. XII do *Liber Abaci*): “Existe uma árvore com 100 ramos, cada ramo tem 100 ninhos, cada ninho tem 100 ovos, cada ovo tem 100 pássaros. Quantos ramos, árvores, ovos e pássaros existem?”

A versão mais conhecida deste problema é uma cantilena irlandesa conhecida por “A caminho de St. Ives”:

“Quando ia para St. Ives
Encontrei um homem com sete mulheres,
Cada mulher tinha sete sacos,
Cada saco tinha sete gatos,
Cada gato tinha sete gatinhos.
Quantos iam para St. Ives?”

O seguinte problema também merece destaque pois a sua resolução não é tão simples e óbvia como parece.

Exemplo (Problema do Cap. XII do *Liber Abaci*): “Há dois homens, o primeiro dos quais tem 3 pães e, o outro, 2 pães, deram um passeio até uma certa fonte, e um soldado passou por eles; convidaram-no a juntar-se a eles, e ele sentou-se e comeu com eles, e quando acabaram de comer o pão todo o soldado partiu deixando, pela sua parte, 5 besantes. Deste, o primeiro tirou 3 besantes, pois tinha 3 pães; o outro tirou os outros dois besantes, pois tinha 2 pães. Procura-se saber se a divisão foi ou não justa.”

Fibonacci começa por referir que é comum pensar-se que a divisão está correcta, porque cada um recebeu um *besante* por cada pão que tinha, mas isso é falso porque os três juntos comeram 5 pães. Assim, cada um tirou $1\frac{2}{3}$ dos pães; o soldado comeu $1\frac{1}{3}$, ou seja, $\frac{4}{3}$ dos pães do que tinha 3 pães. E dos pães do outro (que tinha apenas 2), comeu

apenas $\frac{1}{3}$ de um pão. Por conseguinte, o primeiro homem ficou com 4 *besantes* e o outro com 1 *besante*.

Uma versão deste interessantíssimo problema aparece na obra de Malba Tahan, *O homem que calculava*. A resolução é claramente apresentada em forma de diálogo (o que acontece em quase todo o livro), de que a seguir se apresenta um excerto:

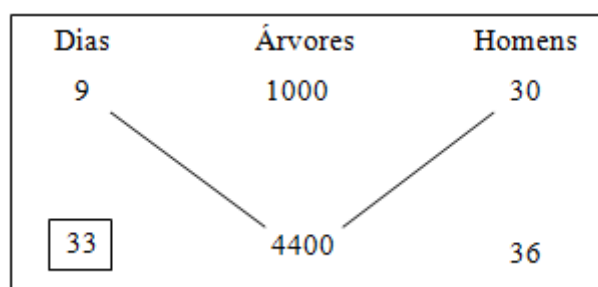
*“...E dirigindo-se ao Homem que Calculava disse-lhe:
- Vais receber pelos 5 pães, 5 moedas!
E voltando-se para mim, ajuntou:
- E tu, ó bagdáli, pelos 3 pães, vais receber 3 moedas!
Com grande surpresa, o calculista objetou respeitoso:
- Perdão, ó cheique. A divisão, feita desse modo, pode ser muito simples, mas não é matematicamente certa! Se eu dei 5 pães devo receber 7 moedas; o meu companheiro bagdali, que deu 3 pães, deve receber apenas uma moeda.
- Pelo nome de Maomé! – interveio o vizir Ibrahim, interessado vivamente pelo caso. – Como justificar, ó estrangeiro, tão disparatada forma de pagar 8 pães com 8 moedas? Se contribuístes com 5 pães, por que exiges 7 moedas? Se o teu amigo contribuiu com 3 pães, por que afirmas que ele deve receber uma única moeda?
O Homem que Calculava aproximou-se do prestigioso ministro e assim falou:
- Vou provar-vos, ó Vizir, que a divisão das 8 moedas, pela forma por mim proposta, é matematicamente certa. Quando durante a viagem, tínhamos fome, eu tirava um pão da caixa em que estavam guardados e repartia-o em três pedaços, comendo cada um de nós, um desses pedaços. Se eu dei 5 pães, dei é claro, 15 pedaços; se o meu companheiro deu 3 pães, contribuiu com 9 pedaços. Houve, assim, um total de 24 pedaços, cabendo, portanto, 8 pedaços para cada um. Dos 15 pedaços que dei, comi 8; dei na realidade, 7; o meu companheiro deu, como disse, 9 pedaços, e, comeu também, 8; logo, deu apenas 1. Os 7 pedaços que eu dei e que o bagdáli forneceu formaram os 8 que couberam ao cheique Salém Nasair. Logo, é justo que eu receba 7 moedas e o meu companheiro, apenas uma.”*

(Tahan, 2001, s/p)

O seguinte problema é semelhante a alguns problemas que, por vezes, encontramos no âmbito da Matemática Recreativa. Para o resolver Fibonacci utilizou a *regra de cinco*, mais conhecida por *regra de três composta*. Esta regra não é muito utilizada actualmente; por isso, os problemas que a envolvem adquirem um certo aspecto de puzzle e são muito utilizados com fins lúdicos. Um exemplo muito conhecido envolve torneiras: “Três torneiras enchem uma piscina em 10 horas. Quantas horas levarão 10 torneiras para encher 2 piscinas?”.

Exemplo (Problema do Cap. IX do *Liber Abaci*): “Um certo rei mandou 30 homens para o seu pomar plantar árvores, onde eles plantam 1000 árvores em 9 dias, e é perguntado em quantos dias 36 homens plantarão 4400 árvores?”

Este problema é resolvido pela “regra de cinco”. As instruções de Fibonacci são acompanhadas do seguinte diagrama:



Fibonacci continua, indicando que é para multiplicar 30 homens por 4400 árvores, e o seu produto por 9 dias, e, depois, dividir o total pelo produto de 36 homens por 1000 árvores. O quociente será 33 que é o número de dias em que 36 homens plantarão 4400 árvores.

No entanto, a resolução deste tipo de problemas nem sempre é tão simples e a sua dificuldade está em distinguir as grandezas directamente proporcionais das que são inversamente proporcionais.

O seguinte problema pertence a um tipo de problemas muito frequente no *Liber Abaci* e que se tornou um clássico que ainda hoje aparece nos nossos manuais escolares.

Exemplo (Problema do Cap. IX do *Liber Abaci*): “Dois homens, que tinham denários, encontram uma bolsa com denários. O primeiro homem diz para o segundo: ‘Se ficar com os denários da bolsa, então com os denários que tenho terei três vezes tanto como tu’. O outro homem responde, ‘E se ficar com os denários da bolsa com os meus denários, então terei quatro vezes tanto como tu’. Procura-se, quantos denários tem cada homem, e quantos denários havia na bolsa?”

Adivinhar um número pensado

No Capítulo XII, Fibonacci também propõe problemas de adivinhação. Um dos exemplos, feito apenas com cálculos, é muito simples e causa um efeito espectacular. O truque consiste basicamente no seguinte:

Pede-se a alguém para pensar num número qualquer, e dizemos-lhe para duplicar o número em que pensou, ou triplicar, ou multiplicar ou dividir por qualquer número. A seguir, pedimos-lhe para dividir o resultado obtido pelo número em que pensou inicialmente. Depois disto, pedimos-lhe, ainda, para adicionar e/ou subtrair diversos números à nossa escolha.

O espectacular deste truque é que, sem lhe perguntamos nada, conseguimos adivinhar o resultado obtido!

Como conseguimos adivinhar o resultado? Muito simples: pensamos no número 1 e, a partir deste número, também fazemos todas as operações que lhe pedirmos para fazer. Assim, os resultados obtidos serão iguais.

O problema dos coelhos e a sucessão de Fibonacci

Fibonacci colocou o seguinte problema, que lhe deu grande fama, relacionado com o número de descendentes de um par de coelhos.

Exemplo (Problema do Cap. XII do *Liber Abaci*): “Um homem colocou um par de coelhos num local cercado por todos os lados por uma parede. Quantos pares de coelhos podem ser gerados a partir desse par ao fim de um ano, sabendo que, por mês, cada par gera um novo par, que se torna produtivo no segundo mês de vida?”

Supõe-se que nenhum dos coelhos morre. No primeiro mês, existe apenas o par inicial. No segundo mês, este ficou mais maduro mas sem estar ainda na fase reprodutiva. No terceiro mês, nasceu outro par. No quarto mês, o par inicial teve outro par, enquanto os seus primeiros filhos cresciam. No quinto mês, tanto o par inicial como os seus primeiros filhos, já em fase reprodutiva, tiveram dois novos pares de coelhos, e assim sucessivamente. A seguinte figura esquematiza este problema:

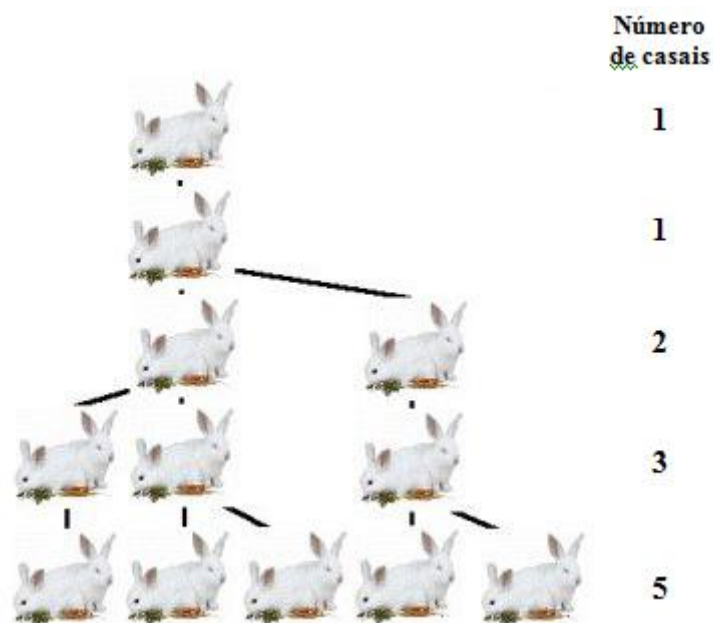


Fig. 71 – O problema dos coelhos de Fibonacci

(http://campusvirtual.unex.es/calae/epistemowikia/index.php?title=Numero_aureo)

Continuando este esquema, obteríamos a sequência

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, ...

Olhando, atentamente, apercebemo-nos que cada termo é obtido pela soma dos dois anteriores. Assim, ao fim de um ano, o par inicial pode gerar 377 pares de coelhos (note-se que os dois primeiros termos da sequência correspondem, ainda, ao par inicial de coelhos, por isso não devem ser considerados).

Se deixarmos F_n denotar o n ésimo número desta sequência, podemos escrever esta famosa sequência da seguinte forma:

$$\begin{aligned} 2 &= 1 + 1 \text{ ou } F_3 = F_1 + F_2, \\ 3 &= 1 + 2 \text{ ou } F_4 = F_2 + F_3, \\ 5 &= 2 + 3 \text{ ou } F_5 = F_3 + F_4, \\ 8 &= 3 + 5 \text{ ou } F_6 = F_4 + F_5. \end{aligned}$$

Não é difícil deduzir a regra geral:

$$F_1 = F_2 = 1, F_n = F_{n-2} + F_{n-1}, \text{ para } n \geq 3.$$

Esta sequência foi denominada de “Sucessão de Fibonacci”, no século XIX, pelo matemático francês Edouard Lucas (1842–1891). Ao contrário do que se possa pensar, parece que não foi Fibonacci quem inventou esta sequência pois, segundo alguns autores, esta já era conhecida dos matemáticos indianos; no entanto, foi Fibonacci quem a introduziu no Ocidente através do *Liber Abaci*. Esta alegação tem por base a seguinte afirmação de Singh:

“O que são geralmente referidos como os números de Fibonacci e o método para a sua formação foram dados por Virahanka (entre 600 e 800 d. C.), Gopala (antes de 1135 d. C.) e Hemacandra (c. 1150 d. C.), tudo antes de Fibonacci (c. 1202 d. C.)”.

(Singh, 1985, p. 229)

Apesar dos estudiosos não estarem de acordo na data da origem desta sequência, concordam que já era conhecida na Índia, antes de Fibonacci.

Algumas propriedades dos números de Fibonacci

Os números de Fibonacci têm inúmeras propriedades. Uma das mais simples, reconhecida por Edouard Lucas, é que a soma dos primeiros n números de Fibonacci é igual a $F_{n+2} - 1$. Por exemplo, quando adicionamos os sete primeiros números de Fibonacci, temos

$$1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 = 33 = 34 - 1 = F_9 - 1.$$

Será que acontece sempre isto? Ora vejamos a seguinte relação:

$$\begin{aligned}
 F_1 &= F_3 - F_2, \\
 F_2 &= F_4 - F_3, \\
 F_3 &= F_5 - F_4, \\
 &\dots \\
 F_{n-1} &= F_{n+1} - F_n, \\
 F_n &= F_{n+2} - F_{n+1}.
 \end{aligned}$$

Quando estas equações são adicionadas, o lado esquerdo dá a soma dos primeiros n números de Fibonacci, e, no lado direito, os termos são cancelados aos pares, ficando apenas $F_{n+2} - F_2$. Não esquecendo que $F_2 = 1$, obtemos:

$$F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_{n-1} + F_n = F_{n+2} - F_2 = F_{n+2} - 1.$$

Outra propriedade interessante (que não será aqui demonstrada) é a seguinte:

$$F_{2k}^2 = F_{2k-1}F_{2k+1} - 1.$$

Esta identidade é a base de uma conhecida ilusão geométrica na qual um quadrado 8×8 pode ser decomposto em partes que, aparentemente, se combinam para formar um retângulo 5×13 .

Para fazer isso, o quadrado é dividido em quatro partes, como mostra a figura da esquerda e, depois, as peças são reorganizadas, conforme indicado na figura da direita.

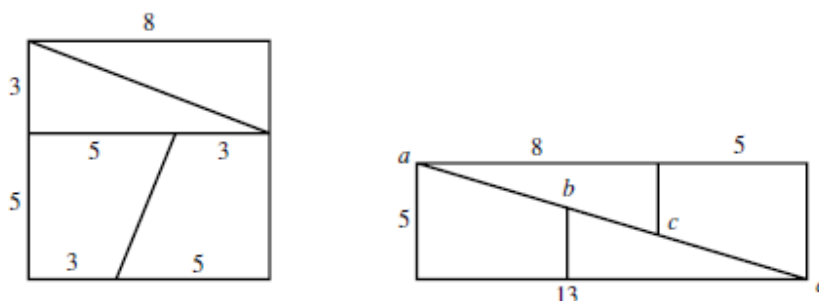


Fig. 72 – Ilusão geométrica

A área do quadrado é $8^2 = 64$, enquanto o retângulo, que parece ser constituído pelas mesmas partes, tem uma área $5 \times 13 = 65$, e, portanto, aparentemente a área foi aumentada de uma unidade.

O quebra-cabeças é fácil de explicar. Os pontos a, b, c e d não estão todos sobre a diagonal do retângulo, mas, em vez disso, são os vértices de um paralelogramo cuja área é exactamente igual à unidade extra de área.

Esta construção é válida para qualquer quadrado cujos lados sejam iguais ao número de Fibonacci F_{2k} . Quando o quadrado é decomposto como mostra a seguinte figura, as peças podem ser reorganizadas para construir um retângulo com um “buraco” na forma de um estreito paralelogramo (que está representado de forma exagerada).

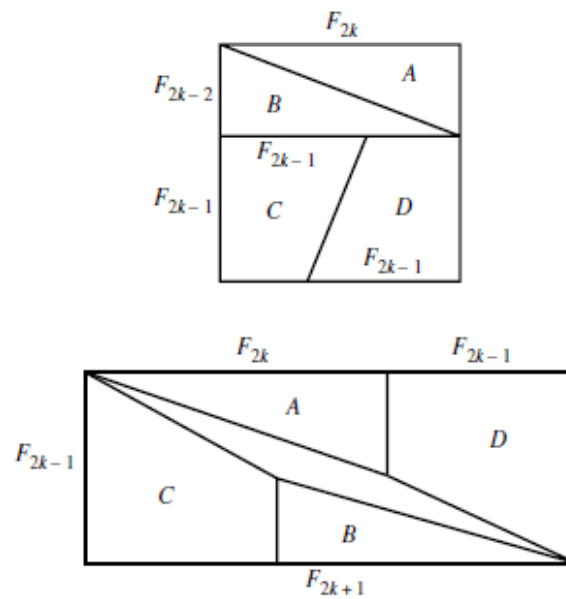


Fig. 73 – Ilusão geométrica

A identidade $F_{2k-1}F_{2k+1} - 1 = F_{2k}^2$ pode ser interpretada como a área do rectângulo menos a área do paralelogramo que é exactamente igual à área do quadrado original. Quando F_{2k} é razoavelmente grande (por exemplo, $F_{2k} = 144$, e, portanto, $F_{2k-2} = 55$), o “buraco” é tão estreito que se torna quase imperceptível.

Esta ideia está na base de um conhecido puzzle, denominado “Missing square”.

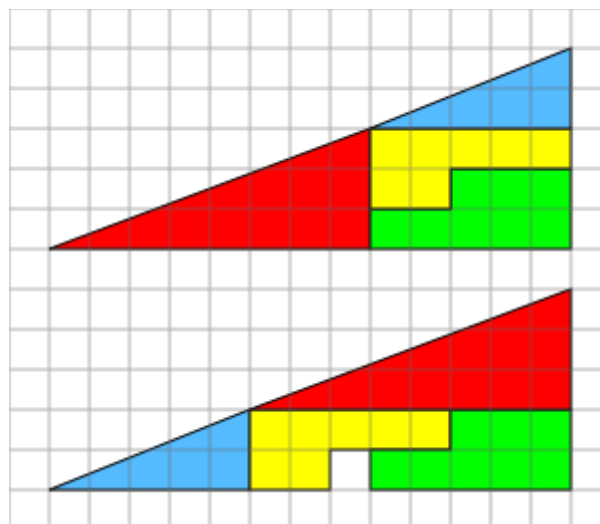


Fig. 74 – Missing Square

(http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Wedge_paradox.png)

Outra propriedade dos números de Fibonacci, que não pode deixar de ser mencionada, é a sua relação com o “número de ouro”, já estudada pelos gregos. Começemos por formar a sequência formada pela razão entre dois números de Fibonacci consecutivos:

$$u_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}, \quad n \geq 1.$$

Alguns dos primeiros termos são:

$$\begin{array}{ll} u_1 = \frac{1}{1} = 1; & u_5 = \frac{8}{5} = 1,60; \\ u_2 = \frac{2}{1} = 2; & u_6 = \frac{13}{8} = 1,625; \\ u_3 = \frac{3}{2} = 1,5; & u_7 = \frac{21}{13} = 1,615 \dots; \\ u_4 = \frac{5}{3} = 1,6\overline{6}; & u_8 = \frac{34}{21} = 1,619 \dots \end{array}$$

À medida que o índice aumenta, a sequência parece tender para um número entre 1,61 e 1,62. Vamos supor que realmente existe um valor limite, φ . Para qualquer $n \geq 1$, temos

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{F_n + F_{n-1}}{F_n} = 1 + \frac{F_{n-1}}{F_n},$$

o que, tendo em conta a nossa definição de u_n , pode ser substituído por

$$u_n = 1 + \frac{1}{u_{n-1}}.$$

À medida que n aumenta, o 1º e o 2º membros desta equação vão ficando cada vez mais perto de φ e $1 + \frac{1}{\varphi}$, respectivamente, de modo que a equação se vai aproximando

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi} \Leftrightarrow \varphi^2 - \varphi - 1 = 0, (\varphi \neq 0).$$

E a única raiz positiva desta equação quadrática é

$$\varphi = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) = 1,618033989 \dots$$

o chamado “número de ouro” ou “proporção áurea”. Assim, a sequência formada pelas razões de dois números de Fibonacci consecutivos dá uma aproximação da proporção áurea e, quanto mais longe formos, melhor será a aproximação.

Normalmente, representa-se o número de ouro pela letra grega φ (Fi) em homenagem a Fídias, o famoso arquitecto e escultor grego que utilizava a razão áurea nas suas obras.

Nicolas Chuquet

O mais brilhante matemático francês do século XV foi Nicolas Chuquet (1445-c.1488), que nasceu em Paris, mas viveu e praticou medicina em Lyon. Em 1484, escreveu uma *Aritmética* intitulada *Triparty en la science des nombres*, que não foi impressa até o século XIX. O seu trabalho foi muito avançado, para a altura, não tendo exercido grande influência sobre os seus contemporâneos (nem em épocas posteriores).

Esta obra estava dividida em três partes; a primeira parte era dedicada ao cálculo com números racionais, a segunda, aos números irracionais e a terceira, à teoria de equações.

Chuquet reconheceu os expoentes inteiros positivos e negativos e usou uma álgebra algo sincopada, usando, por exemplo, uma notação original para escrever raízes. Assim, a sua notação para $\sqrt{5}$ era R^25 e $\sqrt[3]{10}$ era R^310 . Também introduziu uma nova notação para escrever os expoentes de potências de variáveis; por exemplo, escrevia $3^1, 7^2$ e 4^3 para representar $3x^1, 7x^2$ e $4x^3$, respectivamente.

Chuquet também escreveu *l'Appendice au Triparty*, onde apresenta uma série de problemas que ilustram as aplicações da *Triparty* e onde, nas soluções de diversos problemas, aparecem números negativos e o zero. Estes problemas foram compilados de obras anteriores, revelando grande influência de autores italianos, principalmente de Fibonacci, pois muitos dos problemas são semelhantes aos que se encontram no *Liber Abaci*.

A seguir se apresentam alguns desses problemas:

Exemplo (Problema 31 do *Appendice au Triparty*⁶⁸): “Um mercador esteve em três feiras, na primeira, duplicou o seu dinheiro e gastou 5 moedas de ouro; na segunda, triplicou o seu dinheiro e gastou 9 moedas de ouro e, na terceira, quadruplicou o seu dinheiro e gastou 12 moedas de ouro. No final, ficou com 8 moedas de ouro. Quantas moedas tinha no início?”

Exemplo (Problema 51 do *Appendice au Triparty*): “Um carpinteiro concorda em trabalhar na condição de que lhe são pagos 2 écus por cada dia de trabalho, enquanto que, por cada dia em que não trabalhar, terá que pagar 3 écus. Ao fim de trinta dias descobre que pagou exactamente tanto como o que recebeu. Quantos dias é que trabalhou?”

⁶⁸ Os problemas do *Appendice au Triparty*, aqui apresentados, foram retirados de (Lagarto, s/d).

Embora o problema seguinte já fosse conhecido no tempo de Fibonacci, não foi incluída nenhuma versão no seu *Liber Abaci*. Trata-se do clássico “problema de Josephus” (ou “problema dos sobreviventes”) que apareceu, pela primeira vez, em manuscritos europeus do século IX.

A versão clássica deste problema é apresentada da seguinte forma: “*Num barco viajam 30 marinheiros, dos quais 15 são piratas. Uma tempestade obriga a que seja necessário atirar, borda fora, 15 deles. O capitão preparava-se para tirar à sorte quem havia de saltar, quando um marinheiro sugeriu colocar os 30 em círculo, contar de...*”

Este problema foi muito popular na Europa Medieval e Renascentista, tendo aparecido, sob muitas versões, nas obras de ben-Ezra (c. 1150), Tartaglia (1499-1557), no *De Viribus Quantitatis* de Pacioli (c. 1500) e nas obras dos portugueses Gaspar Nicolas (1519) e Bento Fernandes (1555).

Uma das versões apresentada por Chuquet tem o seguinte enunciado:

Exemplo (Problema do *Appendice au Triparty*): “*Joseph durante o saque à cidade de Josapata pelo Imperador Vespasiano, escondeu-se num celeiro com outros 40 Judeus que estavam determinados, para não caírem nas mãos dos Romanos, a cometer suicídio. Não querendo abandonar a vida, propôs que formassem um círculo e que a terceira pessoa, contando no círculo à volta, morresse, pela ordem que fossem seleccionados. Por outras palavras, a contagem era: um, dois, três e o terceiro morria, quatro, cinco, seis, e o sexto morria, e assim sucessivamente. Onde é que ele, e o seu companheiro, que queriam viver, se devem colocar, para assegurar que eram os dois últimos a serem escolhidos?*”

Luca Pacioli

Luca Pacioli nasceu em Burgo, por volta de 1445 e morreu em Roma, por volta de 1517, tendo ingressado na Ordem dos Franciscanos em 1470 (daí a designação habitual de Frei Luca). Ensinou Matemática em várias cidades italianas.

A sua principal obra, *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita*, foi impressa em 1494. Este extenso trabalho (com 616 páginas), compilado, durante 20 anos, a partir de várias fontes, pretendia ser um resumo da Aritmética, Álgebra e Geometria do seu tempo. É o primeiro trabalho abrangente que surgiu após o *Liber Abaci*, mas contém pouco de importante que não possa ser encontrado na obra de Fibonacci, o que revela o pouco progresso da Matemática da Europa Medieval durante quase 300 anos.

O avanço revelado pela *Suma* em relação ao *Liber Abaci* está relacionado com a utilização de uma notação simbólica mais significativa pois foi Pacioli quem introduziu, pela primeira vez, os símbolos na álgebra.

Embora tenha pouca originalidade, a *Suma* teve grande importância por ser uma boa compilação da Matemática Elementar; circulou muito pela Europa, tendo influenciado, de forma significativa, os matemáticos dos séculos seguintes, como é o caso do português Gaspar Nicolas.

Esta obra apresenta alguns problemas pouco comuns, incluindo também jogos de azar, dos quais se destaca um dos primeiros problemas que pode ser considerado uma questão da teoria das probabilidades e que diz respeito à divisão justa dos ganhos entre dois jogadores quando o jogo é interrompido antes da sua conclusão. O problema é colocado por Pacioli, da seguinte forma:

Exemplo (Suma de Pacioli): *“Uma equipa joga à bola, onde um total de 60 pontos são necessários para ganhar o jogo e o prémio são 22 ducados. Por algum incidente, não podem terminar o jogo, e uma equipa tem 50 pontos e, a outra, 30. Qual a parte do prémio que pertence a cada equipa?”*

Conforme nota Burton (2006), “a forma do problema sugere que é de origem árabe, embora não esteja contido no *Liber Abaci* de Fibonacci, que trouxe muitos enigmas árabes para o Ocidente” (p. 445). Burton assegura, ainda, que a questão não é original de Pacioli, tendo já aparecido em manuscritos matemáticos italianos, de 1380.

A resposta de Pacioli para este “problema dos pontos” é que o prémio deve ser dividido na proporção 5:3, que corresponde à razão entre os pontos já marcados.

No entanto, Cardano (numa obra de 1539) constatou que a resposta dada por Pacioli estava errada e propôs uma solução alternativa, igualmente incorrecta. Posteriormente, Tartaglia (numa obra de 1556) apresentou outra solução, também errada.

O “problema dos pontos” ou do “jogo interrompido”, como também é conhecido, apareceu em muitos textos de aritmética até ao século XVI. Este problema é tão difícil que a sua solução (a proporção correcta é 7:1) dada por Pascal, em 1654, é considerado um avanço decisivo na história da teoria das probabilidades.

Muitos outros problemas interessantes e reveladores de um carácter lúdico aparecem neste trabalho de Pacioli, dos quais se destaca o seguinte:

Exemplo (Suma de Pacioli): *“Um rato está no topo de uma árvore de álamo de 60 metros de altura e um gato está no chão ao pé do tronco da árvore. O rato desce $\frac{1}{2}$ de um pé em cada dia e, à noite, sobe $\frac{1}{6}$ de um pé. O gato sobe 1 pé num dia e desliza $\frac{1}{4}$ de um pé em cada noite. A árvore cresce $\frac{1}{4}$ de um pé entre o gato e o rato em cada dia e encolhe $\frac{1}{8}$ de um pé em cada noite. Quanto tempo o gato vai levar para alcançar o rato?”*

Este problema é uma mistura de dois problemas muito conhecidos: o do “caracol e o muro” e o “problemas das perseguições”. Fibonacci também já tinha proposto um

problema semelhante (que envolvia duas serpentes) mas, Pacioli, para complicar ainda mais, acrescenta mais uma condição: a árvore também cresce e encolhe.

Este enunciado mostra bem a falta de utilidade prática deste problema, tendo sido colocado apenas por diversão e para desafiar a mente de quem o tentar resolver.

Uma outra obra sua, *De Divina Proportione*, foi muito popularizada por conter vários desenhos de Leonardo da Vinci. Foi publicada em 1509 e dedica-se, principalmente, à razão de ouro (que já foi referida quando analisámos a sucessão de Fibonacci).

Além destas duas, Pacioli escreveu mais duas obras pouco usuais em Matemática. Uma delas era um livro dedicado ao Xadrez, o *De Ludo Scacchorum* que, segundo Santos e outros (2007, Vol. VII), “nunca foi publicado e, até há poucos meses, julgava-se perdido” (p. 13).

A outra obra, que durante cerca de 500 anos só existiu em manuscrito, é o *De Viribus Quantitatis*, um livro de Matemática Recreativa escrito por volta de 1500⁶⁹. Em 1998, Periani Marioni⁷⁰ transcreveu este manuscrito, que pode ser considerada a primeira edição impressa deste trabalho.

O *De Viribus Quantitatis* que, segundo Singmaster (2008), significa *O Poder dos Números*, é uma colecção de jogos e recreações matemáticas que tinha como objectivo ensinar Matemática e evitar o aborrecimento de exercícios repetitivos que, normalmente, apelam mais à paciência do que ao raciocínio.

Pela mesma razão, outros autores, antes dele, fizeram o mesmo (como por exemplo, Fibonacci ou Calandri). Mas, nos outros “*trattati d’abbaco*” (tratados do ábaco, que eram, na verdade, livros de aritmética) os problemas recreativos eram colocados esporadicamente no texto, apenas para dar uma pausa à mente. Isto não acontecia no manuscrito de Pacioli que era uma apresentação sistemática de problemas recreativos e, por isso, é considerado um verdadeiro tratado sobre o tema.

Apesar de não ter sido publicado, há evidências de que serviu de inspiração para outros trabalhos posteriores. Um trabalho muito popular em Matemática Recreativa é o *Problemes plaisants et delectables de Bachet* (a que, a seguir, será feita uma breve referência), que foi muitas vezes referido como o primeiro trabalho sobre aritmética recreativa. Este trabalho de Bachet é, de facto, o primeiro livro sobre este tema a ser impresso e publicado, mas a proeza de produzir a primeira colecção de problemas lúdicos pertence, na verdade, a Pacioli.

Pacioli não reclama originalidade, referindo que esta obra é uma colecção, o que nos leva a pensar que alguns dos problemas e jogos já vêm de outros trabalhos (como, de facto, acontece). Além disso, como o próprio refere, alguns problemas foram inventados pelos seus alunos, incentivados por ele.

Note-se que a *Antologia Grega* e os *Problemas para estimular os Jovens* de Alcuino também foram trabalhos dedicados à Matemática Recreativa, mas foram

⁶⁹ As fotografias das suas páginas, com alguns comentários, encontram-se em: <http://digilander.libero.it/maior2000/>

⁷⁰ Luca Pacioli, *De Viribus quantitatis*, Mitelo, Ente Raccolta Vinciana, 1998.

coleções pequenas (46 e 53 problemas, respectivamente), não tendo nada a ver com a dimensão e aprofundamento do trabalho de Pacioli. Por isso, Singmaster (2008) defende que o *De Viribus Quantitatis* “é o primeiro trabalho dedicado à Matemática recreativa – só que nunca foi publicado” (p. 89).

Este trabalho está dividido em três partes:

- Parte I – contém 81 recreações aritméticas⁷¹;
- Parte II – contém 134 problemas geométricos e topológicos;
- Parte III – contém centenas de provérbios, poemas, adivinhas e truques de magia. É aqui que aparecem as primeiras referências a truques de cartas.

Apesar de nem tudo ser original, é nesta obra que aparecem, pela primeira vez, alguns dos problemas e puzzles que se tornaram clássicos.

Começemos por analisar alguns dos problemas originalmente colocados por Pacioli.

Aqui, aparece, pela primeira vez, o “jogo de uma pilha”. Este jogo é parecido com o NIM, excepto que se realiza com apenas uma pilha e há um limite na quantidade que podemos jogar.

No problema aqui proposto, os jogadores podem adicionar um número (digamos de feijões), entre 1 e 6, e ganha o primeiro a chegar a 30 feijões.

Este problema pode ser considerado o precursor de todos os jogos NIM.

Também foi Pacioli o primeiro a propor uma versão impossível do conhecido “problema das vasilhas”.

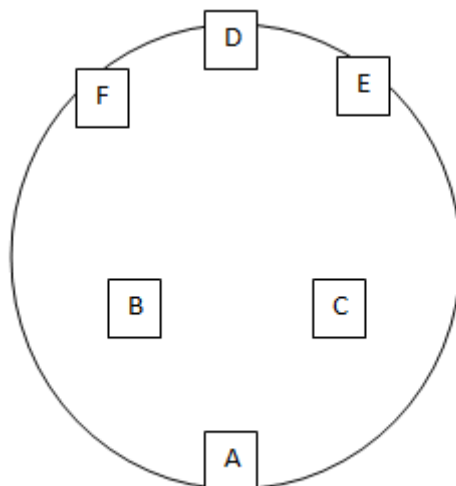
Dada uma garrafa de capacidade A cheia de vinho, dividi-la ao meio usando garrafas de capacidade B e C .

Pacioli propôs vários problemas deste tipo, que não têm solução, como é o caso em que $(A, B, C) = (10, 6, 4)$ e sugeriu que esses problemas fossem dados aos idiotas, para se entreterem!

Não posso deixar de referir o seguinte problema que, apesar de não ser tão conhecido e popular como a maioria dos problemas apresentados, é-me muito familiar. Descobri-o quando realizei a minha tese de mestrado e, a partir de então, costumo propô-lo aos meus alunos, não imaginando que já tinha mais de 500 anos!

Exemplo (Problema do *De Viribus Quantitatis*): “Ligar os castelos A , B e C , com as respectivas fontes, D , E e F , descrevendo três caminhos que não se cruzam.”

⁷¹ Mas, segundo Singmaster (2008, p. 93), nesta parte, estão indexadas 120 recreações matemáticas.



Este problema é daqueles que se resolve por *insight*. Quem o consegue resolver, sente o mesmo que Arquimedes deve ter sentido quando proferiu a sua famosa exclamação, “Eureka! Eureka!”.

Na parte III do seu trabalho, dedicada às adivinhas e truques, aparece, pela primeira vez no Ocidente, o conhecido truque denominado “Adivinhação Binária”, com o seguinte enunciado:

Exemplo (Problema do *De Viribus Quantitatis*): “Encontrar uma moeda pensada entre 16.”

É um truque muito simples e produz um óptimo resultado.

Consideremos os quatro cartões com números, a seguir representados:

1	3
5	7
9	11
13	15

2	3
6	7
10	11
14	15

4	5
6	7
12	13
14	15

8	9
10	11
12	13
14	15

Apresenta-se estes cartões a alguém; pede-se para pensar num número entre 1 e 15 e que diga, apenas, em que cartões aparece esse número. A partir daí, consegue-se adivinhar o número em questão.

O título do truque é sugestivo pois denuncia a sua base de funcionamento. Assim, escrevem-se os números naturais, entre 1 e 15, em notação binária. Por exemplo, 9 em notação binária representa-se por 1001, ou seja, $1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$. Os números entre 1 e 15, em notação binária, representam-se do seguinte modo:

1 = 0001	2 = 0010	3 = 0011	4 = 0100
5 = 0101	6 = 0110	7 = 0111	8 = 1000
9 = 1001	10 = 1010	11 = 1011	12 = 1100
13 = 1101	14 = 1110	15 = 1111	

Se compararmos, atentamente, os números de cada cartão com a sua representação em notação binária, veremos que os números do primeiro cartão são os ímpares, ou seja, os que, em notação binária, terminam em 1. No segundo cartão, estão os números cujo segundo (da direita para a esquerda) dígito binário é 1, e assim sucessivamente. Ora, tendo em conta isto, basta ao “mágico” somar os números do canto superior esquerdo dos cartões indicados pelo participante. Note-se que, em cada cartão, os números estão por ordem crescente.

Este truque pode ser generalizado para n cartões, em que o número pensado tem de estar entre 1 e $2^n - 1$.

Há quem diga que esta ideia já era conhecida no Japão, no século XIV ou antes, embora não haja certezas.

Pacioli apresentou muitos outros problemas simples de adivinhação, alguns deles baseados no Teorema Chinês dos Restos.

É também nesta parte do *De Viribus* que aparece a primeira adivinha do género: “*Dois pais e dois filhos fazem apenas três pessoas. Como é possível?*”. Se pensarmos que os pais também são filhos, chegaremos à resposta.

Mas, nem tudo são ideias novas e há aqui alguns problemas inspirados em trabalhos alheios. Na verdade, ao analisar os problemas propostos no *De Viribus*, ficamos com a ideia que Pacioli aproveitou algumas das ideias já apresentadas, principalmente, por Alcuino. Ora vejamos que assim é.

Pacioli deu vários exemplos de problemas do tipo “três ímpares fazem um par”, que são problemas impossíveis. Como já vimos, Alcuino já tinha proposto um problema deste género, nomeadamente, o problema 43 da sua colecção.

Num dos exemplos de Pacioli é pedido para distribuir 20 porcos por 5 pocilgas, com um número ímpar em cada uma.

Uma outra versão proposta por Pacioli tem o aspecto de um jogo, e é colocada da seguinte maneira:

Exemplo (Problema do *De Viribus Quantitatis*): “*Coloca quatro pilhas, cada uma com 1, 3, 5, 7 e 9 ducats. Pede a uma pessoa para tirar 30 ducats de 5 pilhas. Se o conseguir fazer, ganhará os 100 ducats.*”

Outro problema, que também era original de Alcuino, é o “problema do jipe”. Pacioli apresenta quatro exemplos, encontrando a melhor solução para cada um deles.

Exemplo (Problema do *De Viribus Quantitatis*): *“Como transportar o maior número possível de 90 maçãs de Sansepulcro para Perugia, que distam 30 milhas, sabendo que como uma maçã por cada milha que percorro e só posso levar 30 maçãs de cada vez.”*

Esta é, exactamente, a mesma versão de Alcuino. Mas, ao contrário de Alcuino que deu uma solução incorrecta, Pacioli dá a melhor solução.

Na solução dada por Alcuino, o camelo leva 30 medidas de cereal por 20 milhas, deixa 10 e regressa, sem comer na viagem de regresso. Faz o mesmo mais duas vezes. Fica com 30 medidas que têm que ser transportadas por 10 milhas, sobrando 20 medidas.

Para obter a solução óptima, o camelo leva 30 medidas de cereal por 10 milhas, deixa 20 e regressa, sem comer na viagem de regresso. Faz o mesmo mais duas vezes. Fica com 60 medidas que têm que ser transportadas por 20 milhas. Depois, leva 30 medidas por 15 milhas, em duas viagens, deixando 30 medidas de cereal. Finalmente, leva as 30 medidas, pelas 5 milhas restantes, e chega ao fim da viagem com 25 medidas de cereal.

Outro problema análogo:

Exemplo (Problema do *De Viribus Quantitatis*): *“Como transportar o maior número possível de 100 pérolas por 10 milhas, sabendo que só posso levar 10 pérolas de cada vez e que perco uma pérola por cada milha que percorro.”*

Novamente, Pacioli apresenta a melhor solução. Começa com dez viagens de duas milhas, ficando com 80 pérolas a 8 milhas do destino. Depois, faz oito viagens de oito milhas, levando 10 pérolas em cada viagem e, assim, chega com 16 milhas ao destino.

Outro problema proposto por Pacioli é do tipo “a Maria e as maçãs”. Embora este tipo de problemas não tivesse aparecido no trabalho de Alcuino, já era conhecido.

Exemplo (Problema do *De Viribus Quantitatis*): *“O patrão manda um criado apanhar maçãs. Este assim faz mas é assaltado, e roubam-lhe metade das maçãs que trazia mais uma maçã. Depois ainda foi assaltado mais duas vezes. Em cada assalto tiraram-lhe metade das maçãs que trazia mais uma maçã. Chegou a casa com uma maçã. Quantas maçãs colheu?”*

Como já foi referido, a melhor estratégia para resolver este problema é do fim para o princípio. Assim, se o criado ficou com apenas uma maçã, antes do último assalto teria

4 maçãs. E antes do segundo assalto, devia ter 10 maçãs e antes do primeiro, teria 22 maçãs.

E como já era de esperar, aqui também apareceu o conhecidíssimo problema da travessia do rio, também introduzido por Alcuino. Pacioli apresentou um problema que envolve três maridos ciumentos e três mulheres e acrescentou que se o problema envolvesse quatro ou cinco casais seria necessário um barco maior (que pudesse transportar três pessoas).

Gaspar Nicolas

O primeiro livro de Matemática, editado em Portugal em 1519, foi o *Tratado da Pratica D'Arismetica*, de Gaspar Nicolas. Este Tratado mereceu grande aceitação em Portugal e, por isso, foi reeditado em 1519, 1530, 1541, 1559, 1590, 1592, 1594, 1607, 1613, 1679 e 1716. As suas onze edições mostram o seu valor e a duradoura influência que exerceu no ensino da Matemática em Portugal.

Os portugueses renderam-se ao mérito deste livro pois constituía um excelente manual de aritmética prática, com os conteúdos expostos de uma forma muito clara e simples, sem enfadonhas teorias.

Conforme o próprio Gaspar Nicolas refere, foram utilizados alguns problemas propostos por Pacioli; mas, a verdade é que também Pacioli aproveitou alguns problemas de obras de autores que o antecederam, nomeadamente, de Fibonacci. De facto, Pacioli retomou as doutrinas de Fibonacci, ampliou-as e divulgou-as. Por sua vez, Gaspar Nicolas dedicou-se ao estudo dos problemas utilizados por Pacioli e a ele se devem as primeiras referências, em Portugal, sobre este matemático italiano. Só há a lamentar que Gaspar Nicolas só tenha valorizado a Aritmética e não tenha aproveitado também a parte relativa à Álgebra, presente no trabalho de Pacioli, para a dar a conhecer aos portugueses.

Este trabalho tratava essencialmente de Aritmética, que era fundamental para a prática comercial. Inclui uma introdução à numeração árabe e aqui são ensinadas regras para somar, subtrair, multiplicar e dividir números inteiros e fraccionários, para extrair raízes quadradas (com uma breve referência às raízes cúbicas) de inteiros e para somar algumas progressões. São resolvidos muitos problemas, para o que são utilizadas a regra de três, a *regra da falsa posição*, etc.

Gaspar Nicolas apresentava as soluções e a sua verificação, sem deduzir os métodos utilizados. Não eram fornecidas quaisquer propriedades dos números ou operações, pois o objectivo era a mecanização da resolução dos problemas.

Mas, para além de problemas de natureza comercial, com utilidade prática, continha alguns que são do tipo quebra-cabeças, o que faz ressaltar o carácter lúdico.

Este tipo de problemas está também presente noutras aritméticas do século XVI, nomeadamente, na obra de Ruy Mendes (*Pratica Darismética*, que teve uma única

edição em 1540), e no livro de Bento Fernandes (*Tratado da Arte de Arismética*, editado em 1555).

É notório que estes matemáticos se basearam nas obras dos seus antecessores, tendo todos eles valorizado o aspecto lúdico no ensino da Matemática; no entanto, poucos foram os contributos originais. Conforme salientam Henriques e Almeida (2004), “quer Ruy Mendes quer Bento Fernandes utilizam o mesmo tipo de problemas que Gaspar Nicolas, mas também este não revela grandes inovações. Todos eles incluíram problemas lúdicos, presentes em obras anteriores, com manifesta influência das obras medievais onde o lúdico tinha uma importância fundamental” (p. 145).

Vejamos alguns problemas (clássicos) que apareceram, de forma ligeiramente modificada, em algumas aritméticas e nos quais é notório o carácter lúdico (e a pouca originalidade):

Exemplo (Problema de Gaspar Nicolas⁷²): *“Um homem vai de uma cidade para outra em 6 dias e outro vem em contrário e da outra cidade para aquela donde partiu o outro em 8 dias. Ora eu demando, em quantos dias se encontraram estes homens no caminho e a quantas horas, sendo o dia de 15 horas?”*

Existem inúmeras versões deste “problema das perseguições” que, normalmente, envolve duas personagens, variando a direcção e o sentido em que se deslocam.

Um problema deste género apareceu, pela primeira vez na Europa, na colecção de Alcuino, correspondendo ao problema 26 (analisado anteriormente), tendo também aparecido na *Suma* de Pacioli.

Também Bento Fernandes apresenta uma versão do mesmo, muito análoga à de Alcuino:

Exemplo (Problema de Bento Fernandes): *“Uma raposa vai diante de um galgo 100 braças e, cada vez que a raposa faz 4 braças, o galgo faz 5. Pergunto, a quantas braças se juntarão ambos?”*

Outro problema existente no livro de Gaspar Nicolas é do clássico tipo “a Maria e as maçãs”, apresentado com um enunciado muito interessante:

Exemplo (Problema de Gaspar Nicolas): *“Digo que um homem entrou numa Igreja e não sabemos quanto dinheiro levava. Disse ao primeiro santo que lhe dobrasse o dinheiro que levava e lhe daria 12 reais e o santo lho dobrou. Deu-lhe 12 reais e ficou-lhe ainda dinheiro. E dirigiu-se ao outro santo que lhe dobrasse o dinheiro com que ficou e que lhe daria 12 reais. O santo lho dobrou e o homem deu-lhe 12 reais e ficou-lhe ainda dinheiro. E dirigiu-se ao outro santo que lhe dobrasse o dinheiro com que*

⁷² Os problemas de Gaspar Nicolas e de outros autores portugueses da Europa Medieval, aqui apresentados, foram retirados de (Lagarto, s/d).

ficou e que lhe daria 12 reais. O santo lho dobrou e o homem deu-lhe 12 reais e não lhe ficou nada. Ora eu pergunto: quanto dinheiro levava este homem?”

Este problema corresponde à categoria de problemas que se resolvem do fim para o princípio. Como já vimos, também foi proposto por Fibonacci e por Pacioli, no seu *De Viribus* e a primeira versão deste problema apareceu na China, no *Nove Capítulos de Arte Matemática*.

Uma adaptação deste problema, feita por Bento Fernandes, é apresentada da seguinte forma:

Exemplo (Problema de Bento Fernandes): *“Um gentil-homem anda de amores com uma dama e não pode haver dela seu desejo. E a dama lhe pede 9 maçãs do jardim d’el-rei e que aceitará o seu serviço. E o gentil-homem se foi ao jardim e achou nele 3 portas e em cada porta está um porteiro e o primeiro porteiro lhe disse que entrasse, porém, que lhe havia de dar a metade de todas as maçãs que trouxesse e mais 2 maçãs. O segundo porteiro lhe disse que entrasse e que lhe havia de dar a metade das maçãs que trouxesse e mais 3 maçãs. O terceiro porteiro lhe disse também que entrasse e que lhe havia de dar a metade das maçãs que trouxesse menos 4 maçãs. Pergunto: quantas maçãs há-de trazer este gentil-homem do jardim para que lhe fiquem as ditas 9 maçãs, nem mais nem menos, dando a cada porteiro segundo o que cada um lhe pediu?”*

Gaspar Nicolas apresenta uma versão muito interessante de um tipo de problemas conhecido pelo “problema das torneiras”, mas em que o contexto é completamente alterado; neste caso, está relacionado com a navegação, bem a propósito no início do século XVI!

Exemplo (Problema de Gaspar Nicolas): *“Uma nau vai daqui de Lisboa à ilha da Madeira com três velas que tem, desta maneira: com a primeira vela vai à ilha em três dias, com a vela mais pequena e com a outra vela maior vai à dita ilha em dois dias e com a outra vela maior vai à ilha num dia. Ora eu pergunto, desferindo todas as velas e sendo o mar e o vento todo da mesma maneira, em quantos dias estará esta nau na dita ilha?”*

Além de mostrar que a contextualização dos problemas de Matemática não é uma moda recente, este problema dá que pensar! Sendo a distância de Lisboa à Madeira cerca de 520 milhas náuticas (1 852 metros), seria possível a uma nau percorrer aquela distância em 24 horas, ainda por cima com uma só vela? Para tal, teria que atingir uma velocidade constante superior a 20 nós (20 milhas por hora).

Deixo a resposta aos especialistas de navegação à vela, mas parece que estamos diante de uma contradição. Pelo enunciado contextualizado, parece que o autor ambicionava representar uma situação da vida real, mas, ao mesmo tempo, as próprias condições do enunciado são pouco realistas.

Na Europa, uma das primeiras versões deste tipo de problema, em que o contexto é totalmente diferente das clássicas torneiras ou bicas que deitam água, foi a seguinte versão, incluída no *Liber Abaci*:

Exemplo (Problema do *Liber Abaci*): “Um leão come uma ovelha em 4 horas; um leopardo comê-la-á em 5 horas e um urso, em 6 horas. Se se der uma ovelha aos três, quanto tempo demorarão a devorarem-na?”

Bachet de Méziriac

Poeta e matemático da Academia Francesa, Claude-Gaspar Bachet, senhor de Méziriac (1581-1638), publicou, em 1612, um trabalho sobre enigmas matemáticos e truques que serviram de base para quase todos os livros posteriores sobre recreações matemáticas, intitulado *Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres*.

Bachet publicou, em 1621, a sua tradução, para latim, da *Aritmética* de Diofanto. Esta tradução ganhou fama porque foi nas suas margens que Fermat escreveu o seu “Último Teorema”.

Este autor também é lembrado como um colecionador de quebra-cabeças matemáticos, dos quais se destacam, os conhecidos problemas de travessia do rio, quebra-cabeças sobre medições e pesagens e truques com números. Além disso, também abordou os quadrados mágicos, tendo mesmo inventado um método para os construir.

Dos muitos problemas que poderiam ser destacados, saliento o seguinte:

Exemplo (Bachet⁷³): “Encontrar o menor número de pesos que podem ser usados numa balança para pesar qualquer número inteiro de libras, de 1 a 40, inclusive, se os pesos podem ser colocados em qualquer um dos pratos da balança.”

Este problema já tinha sido proposto no *Liber Abaci* e no *De Viribus*, com uma ligeira diferença; tanto Fibonacci como Pacioi indicaram que estas pesagens tinham que ser feitas com apenas quatro pesos.

Bachet constatou que:

o primeiro peso tem que ser 1,
 o segundo = $1 \times 2 + 1 = 3$,
 o terceiro = $(1 + 3) \times 2 + 1 = 9$,
 o quarto = $(1 + 3 + 9) \times 2 + 1 = 27$,
 o quinto = $(1 + 3 + 9 + 27) \times 2 + 1 = 81$, etc.

⁷³ Os problemas deste autor, apresentados neste anexo, foram retirados de (Bachet, 1884).

Estamos perante a progressão geométrica

$$1, 3, 3^2, \dots, 3^{n-1}, 3^n.$$

Seja S a soma dos primeiros n termos da progressão, então temos:

$$S = \frac{3^n - 1}{2},$$

donde $3^n = 2S + 1$.

Por conseguinte, os pesos que satisfazem a propriedade enunciada são os da progressão

$$1, 3, 3^2, \dots, 3^{n-1}, 3^n.$$

Neste caso, podemos usar apenas 4 pesos: 1, 3, 9 e 27 libras, pois $\frac{3^4-1}{2} = 40$.

Se tivéssemos um quinto peso, o de 81 libras, já poderíamos pesar qualquer quantidade inteira entre 1 e 121 ($= \frac{3^5-1}{2}$).

Note-se que se os pesos só pudessem ser colocados num dos pratos da balança, a solução seria obtida com sucessivas potências de dois.

ANEXO B – REGULAMENTO INTERNO DA TURMA

Regulamento Interno de Turma, elaborado pelo 8ºB, que se compromete a seguir as regras definidas e a responsabilizar-se pelos seus actos, recebendo com um “sorriso” a sanção aplicada.

Os alunos da turma:

- | | |
|-----------|-----------|
| 1. _____ | 2. _____ |
| 3. _____ | 4. _____ |
| 5. _____ | 6. _____ |
| 7. _____ | 8. _____ |
| 9. _____ | 10. _____ |
| 11. _____ | 12. _____ |
| 13. _____ | 14. _____ |
| 15. _____ | 16. _____ |
| 17. _____ | 18. _____ |
| 19. _____ | 20. _____ |
| 21. _____ | 22. _____ |
| 23. _____ | 24. _____ |

Directora de Turma: _____

Contumil, 28 de Setembro de 2006

ESCOLA EB-2,3 NICOLAU NASONI

Ano lectivo: 2006/2007

**REGULAMENTO INTERNO
DA TURMA 8ºB**

“Educai as crianças e não será preciso punir os homens.”

Pitágoras

REGRAS A CUMPRIR DENTRO DA SALA DE AULA

- 1ª – Entrar na sala de aula de modo organizado e sentar-se no lugar.
- 2ª – Não mascar pastilha elástica, gomas, rebuçados, etc. (Só é permitido beber água).
- 3ª – Não usar boné, chapéu, gorro, pala, etc.
- 4ª – Sentar-se correctamente na cadeira.
- 5ª – Trazer sempre o material necessário (incluindo a caderneta) e mantê-lo organizado.
- 6ª – Ouvir atentamente as matérias leccionadas e fazer os respectivos registos sempre que o professor o pedir.
- 7ª – Participar activamente nas aulas, realizando as tarefas propostas pelo professor.
- 8ª – Pedir autorização para se levantar do lugar, quando pretender colocar o lixo no caixote, afiar um lápis, etc.
- 9ª – Realizar os trabalhos de casa e apresentá-los na aula.
- 10ª – Ouvir e respeitar a opinião dos outros.
- 11ª – Não perturbar o funcionamento da aula, distraindo os colegas.
- 12ª – Participar nas aulas, pedindo a palavra e respondendo quando o professor autorizar.
- 13ª – Não danificar o material escolar (riscar mesas, paredes, cadeiras).
- 14ª – Não deitar o lixo para o chão e deixar a sala arrumada.
- 15ª - Ter o telemóvel desligado durante a aula.
- 16ª – Só tratar os colegas pelo nome próprio.
- 17ª – Respeitar o professor, os colegas, os funcionários e outras pessoas que entrem na sala de aula.

PENALIZAÇÕES PARA QUEM NÃO CUMPRIR AS REGRAS

- Sanção 1:** Quando infringir a 1ª regra, o aluno deverá sair e entrar novamente.
- Sanção 2:** Quando infringir as 2ª, 3ª, 4ª, 5ª, 6ª, 7ª e 8ª regras, o aluno deverá copiar 25 vezes a regra, que duplica se o aluno não o fizer.
- Sanção 3:** Quando infringir as 9ª e 10ª regras, o aluno deverá levar um recado na caderneta, a ser assinado pelo Encarregado de Educação.
- Nota:** Relativamente à 9ª regra, fica ao critério de cada professor mandar recado ao primeiro ou terceiro incumprimento.
- Sanção 4:** Quando infringir a 11ª regra, o aluno deverá levar um recado na caderneta e, em caso de maior gravidade, será marcada falta disciplinar.
- Sanção 5:** Quando infringir a 12ª regra, o aluno, durante aquela aula, não pode participar mais.
- Sanção 6:** Quando infringir as 13ª e 14ª regras, o aluno deverá limpar a sala de aula.
- Sanção 7:** Quando infringir a 15ª regra, o aluno deverá entregar o telemóvel ao professor e levará recado na caderneta. Se o problema persistir, o professor entregará o telemóvel à Directora de Turma.
- Sanção 8:** Quando infringir a 16ª regra, o aluno deverá pedir desculpa ao colega e escrever 50 vezes a respectiva regra.
- Sanção 9:** Quando infringir a 17ª regra, o aluno deverá pedir desculpa e, mediante a gravidade do acto, poderá ser marcada uma falta disciplinar.

ANEXO C.1 - FICHA DE TRABALHO Nº 1

Escola EB-2/3 Nicolau Nasoni

Ano lectivo: 2006/2007

**MATEMÁTICA – Ficha de trabalho nº 1**

Nome: _____

Nº: ____ Turma: ____ Ano: ____ Data: _____

A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E O TEOREMA DE PITÁGORAS**HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NO EGIPTO****Papiro do Cairo**

O papiro do Cairo encontra-se no museu do Cairo e data, provavelmente, do século III a. C. Contém 22 fragmentos que, combinados, dão um papiro que deveria ter 2 metros de comprimento por 35 cm de largura. O papiro contém 40 problemas, dos quais podemos salientar os seguintes:

1. Uma vara de 10 cúbitos tem a sua base afastada 6 cúbitos. Determina a sua nova altura e a distância que o cimo da vara baixou.
2. Uma vara quando está direita tem 10 cúbitos, a sua base é afastada 8 cúbitos. Determina a sua nova altura e a distância que o cimo da vara baixou.
3. Uma vara quando está direita tem 10 cúbitos. O seu cimo baixa 2 cúbitos. Determina o número de cúbitos que a sua base se afastou.
4. Uma vara quando está direita tem 14,5 cúbitos. O seu cimo baixa 4 cúbitos. Determina o número de cúbitos que a sua base se afastou.

Nota: 1 cúbito \approx 50 cm.

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NA BABILÓNIA**Placa BM 34568**

Pensa-se que esta placa data do período que vai do séc. IV a. C. ao séc. I a. C. e é proveniente da Babilónia. Contém 19 problemas alguns dos quais são sobre “comprimento, largura e diagonal”.

5. 4 de comprimento, 3 de largura. Qual é a diagonal?

Placa VAT 6598 e BM 9695

A placa VAT 6598 está partida e, por isso, não se consegue ler a maior parte dos problemas. Esta placa provém de Sipar, perto de Bagdade, e data do período que vai de 2000 a 1700 a. C. A placa completa deveria ter 25 problemas, mas apenas 19 foram recuperados, dos quais onze são sobre construção de paredes e casas e oito sobre o Teorema de Pitágoras.

6. Um portão, de altura 40 e largura 10. Qual é a diagonal?
7. Se um portão tem 40 de altura e a diagonal é 41,25, qual é a largura?
8. A largura é 10, a diagonal 41,25, qual é a altura?

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NA CHINA

Nove Capítulos de Arte Matemática

Os *Nove Capítulos* influenciaram toda a matemática chinesa, tendo sido utilizado como manual de ensino. Contém 246 problemas e está dividido em nove capítulos, daí o seu nome. Sabemos que representa o esforço colectivo de muitas mentes matemáticas, ao longo de vários séculos, mas não se sabe ao certo quando foi compilado pela primeira vez, embora se pense que foi por volta do séc. II a. C.

Os problemas do capítulo IX dizem respeito à aplicação da regra *Gougu*, versão chinesa do Teorema de Pitágoras, de que se apresentam alguns exemplos:

9. Dado um triângulo rectângulo, os comprimentos dos seus *gou* e *gu* são, respectivamente, 3 *chi* e 4 *chi*. Diz: qual é o comprimento da sua hipotenusa?
10. Dado um triângulo rectângulo, os comprimentos da sua hipotenusa e do seu *gou* são, respectivamente, 5 *chi* e 3 *chi*. Diz: qual é o comprimento do seu *gu*?
11. Dado um triângulo rectângulo, os comprimentos do seu *gu* e hipotenusa são, respectivamente, 4 *chi* e 5 *chi*. Diz: qual é o comprimento do seu *gou*?

Notas:

1. *Gou* e *gu* representam os catetos.
2. *Chi* é uma medida de comprimento chinesa que equivale a, aproximadamente, 23 cm.

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NA ÍNDIA

Lilavati de Baskara II

Baskara nasceu em 1114, na Índia, e morreu, provavelmente, em 1185. Baskara escreveu o *Siddhânta Siromani*, em 1150. O seu manuscrito está dividido em diversas partes das quais se destaca *Lilavati* (A Bela). O seu livro foi usado em toda a Índia, tendo substituído a maior parte dos textos que eram utilizados até então.

- 12.** Descubra a hipotenusa se a base é 3 e a altura 4.
Se a hipotenusa e a base são 5 e 3, respectivamente, qual é o comprimento da altura?
Se a hipotenusa e a altura são 5 e 4, respectivamente, qual é a sua base?
- 13.** Se a base de um triângulo rectângulo é 12, descubra os números inteiros que são a sua altura e hipotenusa.
- 14.** Se o quadrado da hipotenusa é 85 descubra os números inteiros que são os outros lados.

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NA EUROPA OCIDENTAL

Abraham bar Hiyya

Abraham bar Hiyya, foi um matemático e astrónomo judeu que viveu em Espanha, no séc. XII.

- 15.** Qual é o comprimento do lado de um losango, se uma diagonal é 16 e a outra 12?

Liber Abaci

Leonardo de Pisa nasceu em Pisa, por volta de 1175. Viajou pelo Mediterrâneo (Egipto, Síria, Grécia, Sicília, Provença), encontrando-se com estudiosos islâmicos em cada um dos locais que visitava e adquirindo, assim, o conhecimento matemático do mundo árabe. Leonardo assinava *Fillius Bonacci* (filho de *Bonnacio*) e, por isso, também é conhecido por Fibonacci. O seu livro mais conhecido, *Liber Abaci* (Livro de Cálculo), foi escrito em 1202.

- 16.** Há um poste inclinado de encontro a uma certa torre, tendo 20 «pés» de comprimento; a base do poste está separada da torre 12 «pés». Procura-se, quantos pés o fim do poste está abaixo do topo da torre.
- 17.** Num determinado chão estão dois postes, que estão afastados 12 «pés». O poste mais pequeno tem de altura 35 «pés» e o maior 40 «pés». Procura-se, se o poste maior cair sobre o mais pequeno, então em que parte (do poste maior) tocará no mais pequeno.

BOM TRABALHO!
A prof. Ida Gonçalves

ANEXO C.2 - FICHA DE TRABALHO Nº 2

Escola EB-2/3 Nicolau Nasoni

Ano lectivo: 2006/2007



MATEMÁTICA – Ficha de trabalho nº 2

Nome: _____

Nº: ____ Turma: ____ Ano: ____ Data: _____

NUMERAÇÃO BABILÓNICA

Os **abilónios** foram um povo da Antiguidade que viveu no Médio Oriente. Escreviam os símbolos numéricos com caracteres cuneiformes, ou seja, em forma de cunha, gravados em placas de argila que, depois, eram cozidas.

Tinham um símbolo diferente para a unidade e para a dezena e o número 60 escrevia-se exactamente como o 1, o que para nós é muito confuso. Por exemplo, 61 escreve-se como 2. Pensa-se que os babilónios sabiam distinguir o número a que se referia de acordo com o contexto do problema.

O sistema de numeração babilónico, cuneiforme, utilizava dois símbolos para representar os números:



- representa 1



- representa 10

A representação era feita do seguinte modo:



= 1



= 2



= 3, ...

Os babilónios usavam o princípio da adição na representação cuneiforme.

A partir de dez, vinha, por exemplo:



= 11

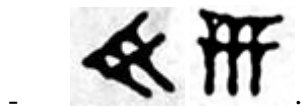
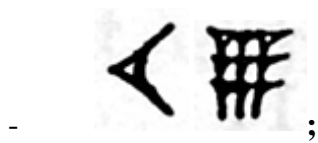


= 23, ...

1. Representa em numeração babilónica os seguintes números:

- 12;
- 35;
- 47;
- 85

2. Escreve na nossa numeração os seguintes numerais babilónicos:



Plimpton 322

Uma das mais conhecidas placas babilónicas é a chamada Plimpton 322, que data de cerca de 1700 a. C. e cujo nome deriva do facto de esta placa ter o número 322 da colecção Plimpton, da Universidade de Colúmbia, em Nova Iorque.

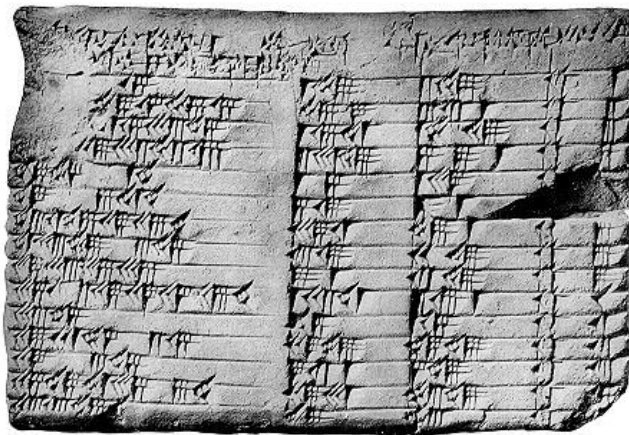


Fig. 1 – Plimpton 322

A tabela seguinte traduz o que está escrito na Placa Plimpton:

b	$\left(\frac{c}{b}\right)^2$	c	a	#
120	0.9834028	119	169	1
3456	0.9491586	3367	4825	2
4800		4601	6649	3
13500		12709		4
72		65	97	5
360		319	481	6
2700			3541	7
960		799	1249	8
600		481	769	9
		4961	8161	10
60		45	75	11
		1679	2929	12
240		161	289	13
2700		1771		14
90			106	15

1. Completa a 2ª coluna (arredonda com 7 c. d.).
2. Compara as 1ª, 3ª e 4ª colunas. Consegues tirar alguma conclusão?
3. Completa os espaços em branco.

BOM TRABALHO!
A prof. Ida Gonçalves

ANEXO C.3 - FICHA DE TRABALHO Nº 3

Escola EB-2/3 Nicolau Nasoni

Ano lectivo: 2006/2007

**MATEMÁTICA – Ficha de trabalho nº 3**

Nome: _____

Nº: ____ Turma: ____ Ano: ____ Data: _____

TANGRAM

O Tangram é um antigo jogo chinês formado por sete peças: um quadrado, um paralelogramo e cinco triângulos (dois grandes, dois pequenos e um médio), formando um quebra-cabeças.

A publicação mais antiga com figuras do Tangram é chinesa e data de 1813, embora nessa data o jogo já fosse muito popular. Existem muitas lendas sobre a origem deste puzzle, sendo uma delas a seguinte:

Conta-se que um dia, na China, há 4000 anos, o Imperador Tan partiu o seu espelho quadrado quando o deixou cair ao chão. O espelho partiu-se em sete bocados. Tan, apesar de um pouco aborrecido com a perda do espelho, descobriu uma forma de se entreter construindo figuras e mais figuras usando sempre as sete peças, sem as sobrepor.

Este puzzle possibilita a construção de diversas figuras; actualmente existem cerca de 16000 figuras distintas que se podem construir com todas as peças do Tangram.

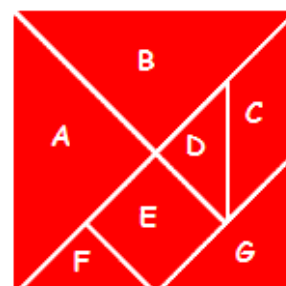
1. Constrói um Tangram, em cartolina.
2. Com todas as peças do Tangram constrói cada uma das seguintes letras.



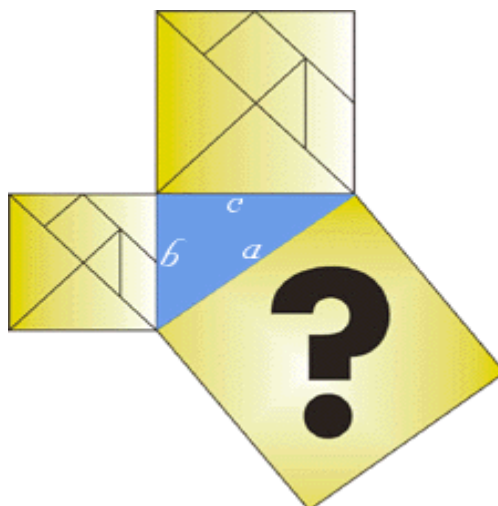
3. Estas duas letras são geometricamente iguais, semelhantes ou equivalentes?

4. De entre as sete peças que constituem o Tangram, indica:

- a. dois polígonos geometricamente iguais;
- b. dois polígonos semelhantes não geometricamente iguais;
- c. três polígonos equivalentes.



5. Os triângulos A e F são semelhantes? Qual a razão de semelhança do triângulo pequeno para o maior? E qual é a razão entre as suas áreas?
6. Indica a área dos seguintes polígonos, tomando para unidade a área do triângulo F:
- quadrado;
 - triângulo médio;
 - paralelogramo;
 - triângulo maior;
 - quadrado formado por todas as peças.
7. Qual é o perímetro do triângulo F se o perímetro do triângulo A for 48 cm?
8. Qual é a área do triângulo A se a área do triângulo F for 6 cm^2 ?
9. Qual é a área do quadrado E se o quadrado grande, formado por todas as peças, tiver 32 cm de perímetro?
10. Qual é a área de C se a área do quadrado formado por todas as peças for 196 cm^2 ?
11. **Demonstração do Teorema de Pitágoras:** Constrói dois Tangrams como está representado na figura e coloca-os no quadrado sobre a hipotenusa para demonstrar a expressão $b^2 + c^2 = a^2$.



12. Utiliza a tua imaginação para criar figuras usando as sete peças do Tangram.
- Sugestão:** Cada aluno poderá construir uma letra do alfabeto para que toda a turma possa elaborar um cartaz alusivo ao Natal.

BOM TRABALHO!
A prof. Ida Gonçalves

ANEXO C.4 - FICHA DE TRABALHO EA

Escola EB-2/3 Nicolau Nasoni

Ano lectivo: 2006/2007

**ESTUDO ACOMPANHADO DE MATEMÁTICA**

Nome: _____

Nº: ____ Turma: ____ Ano: ____ Data: _____






SUCESSÃO DE FIBONACCI

Nesta actividade vais resolver um problema colocado há mais de 800 anos, por Fibonacci.

“Um par de coelhos não se reproduz enquanto não tiver dois meses. Mas, logo que um par tenha dois meses, irá reproduzir um novo par de coelhos em cada mês.

Se começares com um par de coelhos recém-nascidos, quantos pares irás ter no início de cada mês seguinte?”

Completa a tabela seguinte:

MÊS	PARES DE COELHOS	TOTAL DE PARES
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		



Casal novo



Casal adulto

ANEXO C.5 - FICHA DE TRABALHO Nº 4

Escola EB-2/3 Nicolau Nasoni

Ano lectivo: 2006/2007

**MATEMÁTICA – Ficha de trabalho nº 4**

Nome: _____

Nº: ____ Turma: ____ Ano: ____ Data: _____

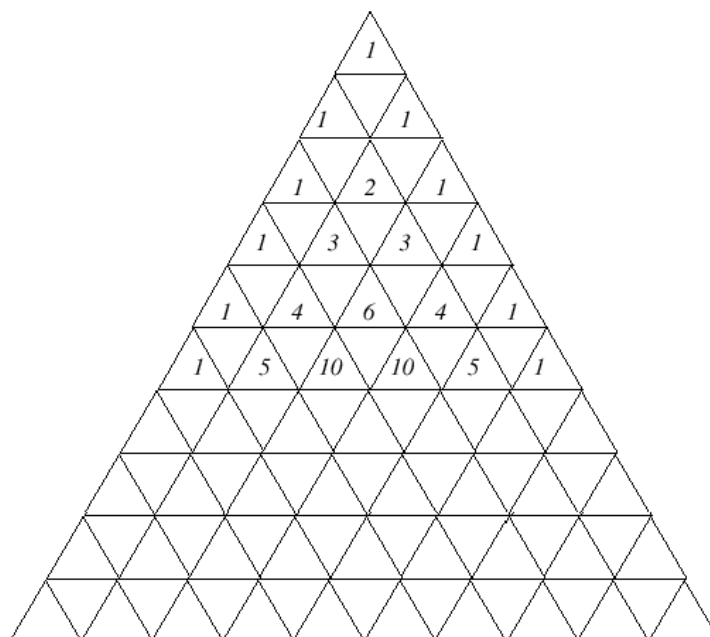
O TRIÂNGULO DE PASCAL E AS SEQUÊNCIAS

Existe um notável arranjo triangular de números conhecido dos matemáticos desde há muitos séculos. Referido, pela primeira vez, em textos indianos do século III a. C. surgiu mais tarde em obras do matemático árabe al-Khayyam (1048-1123), do chinês Yang Hui (1238-1298) e do italiano Tartaglia (1499-1557). No entanto, foi o estudo exhaustivo deste triângulo numérico feito pelo matemático francês Blaise Pascal (1623-1662) que fez com que o seu nome lhe ficasse associado.

O Triângulo de Pascal é formado por um conjunto de números, dispostos de forma triangular, que verificam as seguintes propriedades:

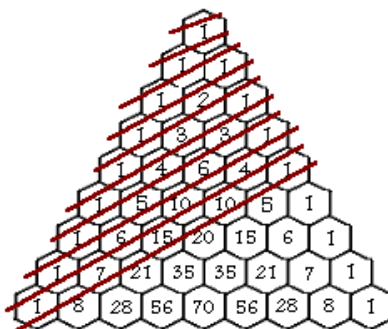
- o primeiro número é 1;
- os números na extremidade de cada linha são 1;
- cada um dos restantes números é igual à soma dos dois números imediatamente acima.

2. Completa o seguinte Triângulo de Pascal:



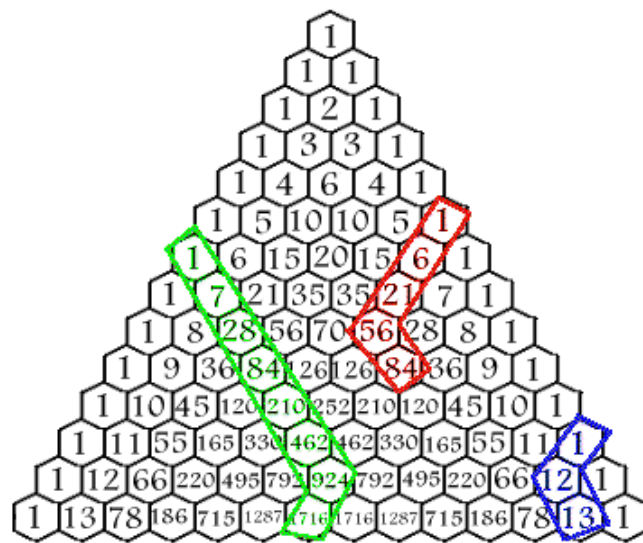
3. No Triângulo de Pascal podemos encontrar:

- a sequência dos números naturais. Explica como.
- a sequência dos números triangulares. Explica como.
- a sequência dos números quadrados. Explica como. (Sugestão: concentra-te na 3ª diagonal.)
- a sucessão de Fibonacci. Explica como. (Sugestão: considera a seguinte figura:)



No Triângulo de Pascal também podemos observar alguns padrões:

Padrão do Stick de Hóquei



6. Que relação encontras entre os números que se encontram em cada Stick de Hóquei? Consegues desenhar mais Sticks onde se mantenha essa relação?

Triângulo de Sierpinski

No início do século XX o matemático polaco Waclav Sierpinski (1882-1969) estudou uma figura geométrica que ficou conhecida por Triângulo de Sierpinski e que é um exemplo muito conhecido de um fractal. Esse fractal obtém-se do seguinte modo:

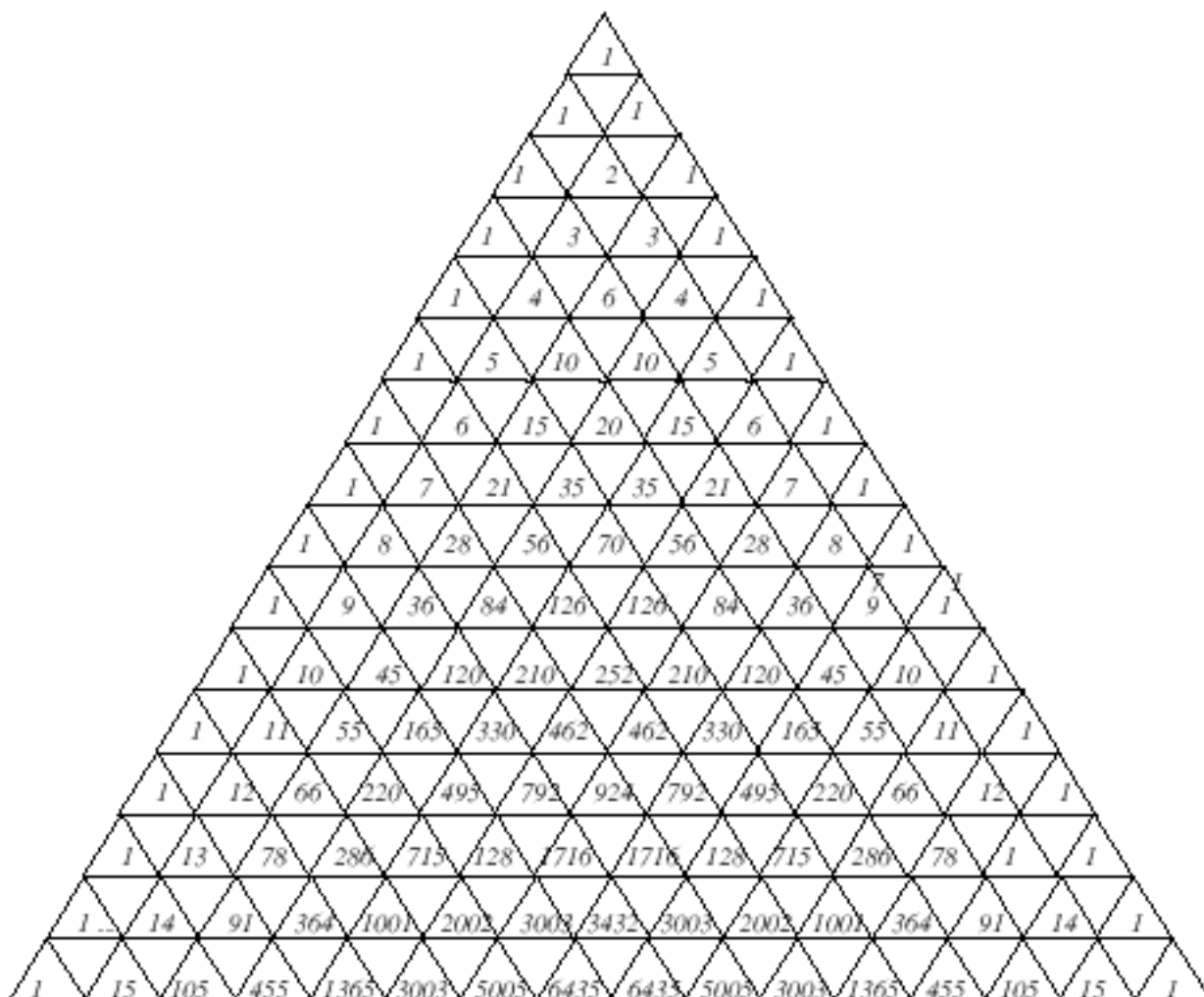
Passo 1 – Une-se os pontos médios dos lados do triângulo (equilátero) e retira-se o triângulo médio;

Passo 2 – Aplica-se o Passo 1 a cada um dos 3 triângulos resultantes;

Passo 3 – Repete-se o processo até ao infinito (ou seja, até que não haja mais espaço no triângulo para continuar).



7. Considera o seguinte Triângulo de Pascal. Pinta os triângulos que têm um número ímpar. O que descobriste?



BOM TRABALHO!
A prof. Ida Gonçalves

ANEXO C.6 - FICHA DE TRABALHO Nº 5

Escola EB-2/3 Nicolau Nasoni

Ano lectivo: 2006/2007

**MATEMÁTICA – Ficha de trabalho nº 5**

Nome: _____

Nº: _____ Turma: _____ Ano: _____ Data: _____

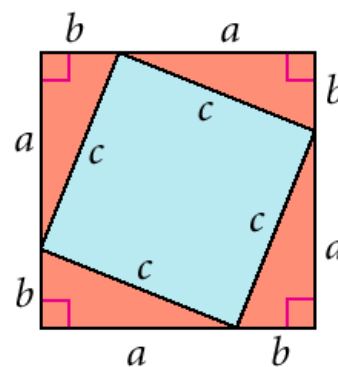
MONÓMIOS E POLINÓMIOS**DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS**

1. Considera a expressão: $(a + b)^2 - 4 \frac{ab}{2}$.

1.1. Simplifica a expressão dada.

1.2. O que representa a expressão relativamente à figura ao lado?

1.3. Usa a expressão para demonstrar o Teorema de Pitágoras.

**AINDA O TRIÂNGULO DE PASCAL**

2. Observa a relação que existe entre o Triângulo de Pascal e as potências de um binómio.

							$(a+b)^0 = 1$
		1					$(a+b)^1 = 1a+1b$
		1	2	1			$(a+b)^2 = 1a^2+2ab+1b^2$
		1	3	3	1		$(a+b)^3 = 1a^3+3a^2b+3ab^2+1b^3$
		1	4	6	4	1	$(a+b)^4 =$
		1	5	10	10	5	$(a+b)^5 =$
		1	6	15	20	15	$(a+b)^6 =$

2.1. Que conclusões?

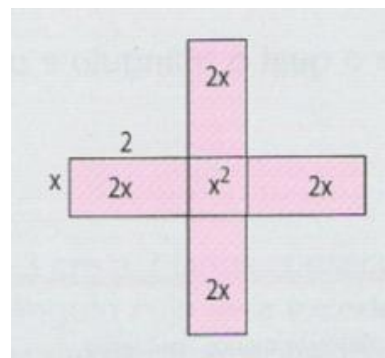
2.2. Determina $(a+b)^4$, $(a+b)^5$ e $(a+b)^6$.

A RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES COM AL-KWARIZMI

Al-Kwarizmi foi um matemático árabe que viveu no séc. IX. Com espantosa habilidade e imaginação, inventou um processo para resolver certas equações do 2º grau.

3. Considera, por exemplo, a equação $x^2 + 8x = 84$.

Al-Kwarizmi construiu um quadrado de lado x e, a par dos lados do quadrado, quatro rectângulos, cada um com $2x$ de área.

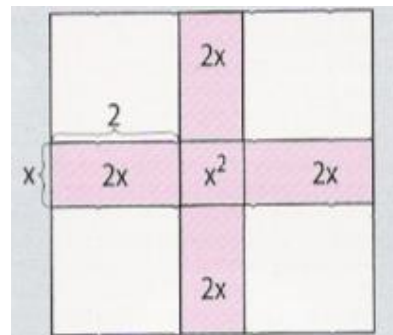


A área desta figura é $x^2 + 8x$ ($8x = 2x + 2x + 2x + 2x$) e deve ser igual a 84.

Seguidamente, construiu um quadrado como se vê na figura seguinte.

A área da parte não sombreada é 16 (quatro quadrados de lado 2).

A área total deste quadrado é $x^2 + 8x + 16$, isto é, $x^2 + 8x + 16 = 100$.



Então, o lado deste quadrado é 10.

3.1. Qual deve ser, neste caso, o valor de x ?

3.2. Al-Kwarizmi não sabia tudo! Se fizeres $x = -14$ na equação dada, que observas?

3.3. Usando o processo de al-Kwarizmi, descobre soluções para as equações:

3.3.1. $x^2 + 4x = 32$

3.3.2 $x^2 + 12x = 28$.

BOM TRABALHO!
A prof. Ida Gonçalves

ANEXO C.7 - FICHA DE TRABALHO Nº 6

Escola EB-2/3 Nicolau Nasoni

Ano lectivo: 2006/2007

**MATEMÁTICA – Ficha de trabalho nº 6**

Nome: _____

Nº: ____ Turma: ____ Ano: ____ Data: _____

EQUAÇÕES**HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NO EGIPTO****Papiro de Rhind**

O papiro de Rhind tem 32 cm de largura por 513 cm de comprimento e contém 87 problemas. É datado de cerca de 1650 a.C., embora o texto diga que foi copiado de um manuscrito, de cerca de 200 anos antes.

O papiro tem o nome do escocês Alexander Henry Rhind que o comprou, por volta de 1850, no Egipto. É também conhecido por papiro de Ahmes, o escriba egípcio que o copiou. Encontra-se, actualmente, no Museu Britânico.

1. A quantidade e a sua $\frac{1}{4}$ adicionadas dão 15. Qual é a quantidade?
2. A quantidade, a sua $\frac{1}{2}$ e a sua $\frac{1}{4}$ adicionadas dão 10. Qual é a quantidade?

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA GREGA***Antologia Grega***

A *Antologia Grega* é uma colecção de epigramas (breves composições poéticas) recolhidas no século V d.C. O livro XIV contém problemas aritméticos, oráculos e enigmas.

3. Neste túmulo repousa Diofanto.
Ah, que grande prodígio!
O túmulo diz cientificamente a exacta medida de sua vida.
- Deus concedeu-lhe ser menino pela sexta parte da sua vida, e somando uma duodécima parte a isto, cobriu-lhe as faces de pelos;
Ele acendeu-lhe a lâmpada nupcial após uma sétima parte, e cinco anos após o seu casamento concedeu-lhe um filho.
Ai! Infeliz criança tardia; depois de chegar à medida de metade da vida de seu pai, o destino frio o levou.
Depois de se consolar da sua dor durante quatro anos com a ciência dos números, terminou a sua vida.
Quantos anos viveu Diofanto?

4. Demochares viveu um quarto da sua vida como um menino, durante a quinta parte como um jovem homem e durante um terço como um homem, e quando chegou à cinzena velhice viveu mais treze anos. Quantos anos viveu *Demochares*?

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NA ÍNDIA

***Ganita-Sâra-Sangraha* de Mahavira**

Mahavira escreveu, no século IX, o tratado *Ganita-Sâra-Sangraha* (Compêndio do Cálculo Essencial), que está dividido em 9 capítulos.

5. Um oitavo de uma coluna está enterrada no lodo, a terça parte na água, a quarta no musgo e 7 hastas são visíveis no ar. Qual é o comprimento desta coluna?

***Lilavati* de Baskara II**

6. ... o colar do pescoço da esposa partiu-se. Um terço das pérolas caiu no chão, um quinto foram para debaixo da cama. A esposa apanhou um sexto e o seu amado, um décimo. Seis pérolas ficaram no fio original. Descobre o número total de pérolas no colar.
7. Ó amigo! Um sexto das abelhas de um enxame entraram numa flor de *patali*, um terço foram para uma árvore *kadamba*, um quarto voaram para a árvore de mango e um quinto foram para uma árvore resplandecente com flores de *campaka*. A trigésima parte foi para uma linda cama de lótus a brilhar com os raios de Sol. Se apenas uma abelha estiver a vaguear, quantas abelhas havia no enxame?

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA ÁRABE

Anania de Shirak

Anania de Shirak, nasceu na Arménia, no século VII. Um dos problemas por ele propostos é o seguinte:

8. O meu pai contou-me a seguinte história: Durante a famosa guerra entre os Arménios e os Persas, o príncipe *Zaurak Kamsarakan* levou a cabo numerosos actos heróicos. Três vezes, num único mês, atacou as tropas Persas. Na primeira vez, derrotou metade do exército Persa. Na segunda vez, perseguindo o seu objectivo, esmagou um quarto dos soldados. Na terceira vez, destruiu onze avos do exército Persa. Os Persas que sobreviveram, duzentos e oitenta, fugiram para *Nakhichevan*. E assim, deste resto, descobre quantos soldados Persas havia antes do massacre.

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NA ÉPOCA MEDIEVAL (EUROPA)

Alcuino de York

Alcuino de York nasceu na Grã-bretanha, em 735, e morreu em 804. É-lhe atribuída a autoria de uma das mais antigas recolhas de problemas recreativos, intitulada *Propositiones ad Acuendos Juvenes* (Problemas para Estimular os Jovens). Esta colecção tem 53 problemas que se tornaram clássicos.

9. Um certo rapaz dirigiu-se a seu pai, dizendo: “Saudações, pai”. O pai respondeu: “Que passes bem, meu filho, e que vivas três vezes o dobro dos teus anos. Depois, adicionando um dos meus, viverás até aos 100 anos”. Quantos anos tinha o rapaz naquela altura?

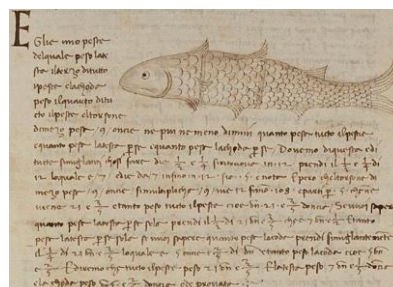
Liber Abaci de Leonardo de Pisa

10. Há uma árvore, cuja $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{3}$ estão debaixo do solo; e são 21 *palmi*. Perguntamos pela altura da árvore.
11. Também se te disserem que quando $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{3}$ de uma árvore é adicionado ao comprimento da árvore o resultado é 38. Qual é o comprimento da árvore?
12. A base de uma certa taça pesa um terço da taça inteira; o cimo pesa um quarto, o resto pesa 15 *pounds*. Procura-se, qual é o peso de toda a taça.

Paolo Dagomari

Paolo Dagomari nasceu na Itália, em 1281 (1288?), e faleceu em 1367 (1368?). Também é conhecido por Paolo Dell'abaco. É-lhe atribuído o Tratado de Cálculo - *Trattato di tutta l'arte dell'abacho* (de cerca de 1339).

13. Há um peixe nadando num lago. A sua cabeça pesa um terço de todo o corpo. O seu tronco pesa um quarto do seu corpo e a sua cauda pesa 9 onças. Qual é o peso do peixe?



BOM TRABALHO!
A prof. Ida Gonçalves

ANEXO C.8 - FICHA DE TRABALHO Nº 7

Escola EB-2/3 Nicolau Nasoni

Ano lectivo: 2006/2007



MATEMÁTICA – Ficha de trabalho nº 7

Nome: _____

Nº: ____ Turma: ____ Ano: ____ Data: _____

O TEOREMA DE PITÁGORAS E AS EQUAÇÕES

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NO EGÍPTO

Papiro de Cairo

1. Uma vara descaiu 2 cúbitos quando a sua base se moveu 6 cúbitos, determina a sua altura inicial.
2. Uma vara descaiu 4 cúbitos quando a sua base se moveu 10 cúbitos, determina a altura da vara.

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NA BABILÓNIA

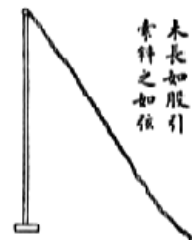
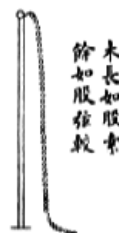
Placa BM 34568

3. Uma cana está encostada a uma parede. Se desce [na parte de cima] 3 “metros” a [parte de baixo] desliza 9 “metros”. Qual é o comprimento da cana, qual é a altura da parede?

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NA CHINA

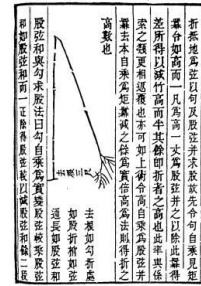
Nove Capítulos de Arte Matemática

4. Há uma corda pendurada do topo de uma árvore com 3 *chi* desta caídos no chão. Quando é esticada, de tal forma que a sua ponta toca o chão, chega a uma distância de 8 *chi* da base da árvore. Qual é o comprimento da corda?



5. Há um bambu com 1 *zhang* de altura, partiu-se e a parte de cima toca o chão a 3 *chih* da base do bambu. Qual é a altura da quebra?

Notas: 1 *chih* = 10 *cun*, 1 *zhang* = 10 *chih*



HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NA GRÉCIA

Diofanto

Diofanto (c. 250 d. C.) escreveu um livro, *Aritmética*, onde apresentava uma coleção de 189 problemas. Ele resolvia os problemas que envolviam vários números desconhecidos expressando engenhosamente todas as quantidades desconhecidas, quando possível, em termos de apenas uma.

6. Para resolver o problema de encontrar dois números cuja soma seja 20 e a soma dos seus quadrados 208, Diofanto não designava os números por x e y , mas como $10 + x$ e $10 - x$.
- Mostra que a soma das expressões utilizadas por Diofanto é igual a 20.
 - Encontra os números que satisfazem o problema, procedendo como Diofanto.

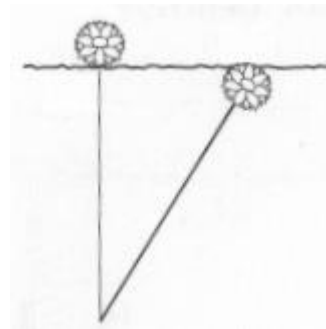
HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NA ÍNDIA

Lilavati de Baskara II

7. Diz-me, depressa, calculador inteligente, quais são as quantidades cuja diferença é oito e a diferença dos seus quadrados é 400.
8. Se um bambu medindo 32 cúbitos e estando em pé se partisse, num local, por acção do vento, e a sua extremidade encontrasse o chão a 16 cúbitos da base do bambu. Diz, matemático, a quantos cúbitos da raiz é que ele se partiu?
9. O buraco de uma cobra está na base de um pilar que tem 9 cúbitos de altura. Um pavão está empoleirado no seu cume. Vendo uma cobra, a uma distância igual ao triplo da altura do pilar, a deslizar para o seu buraco, precipita-se obliquamente sobre a cobra. Diz depressa, a quantos cúbitos do buraco da cobra é que eles se encontram, se ambos percorrem uma distância igual?

10. Num certo lago, repleto de gansos rosados, podia-se ver, o topo de um rebento de lótus um *span* acima da superfície da água. Forçado pelo vento, avançou gradualmente e foi submerso pela água a uma distância de dois cúbitos. Calcula, depressa, matemático, a profundidade da água.

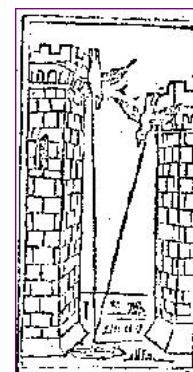
Nota: 1 *span* = $\frac{1}{2}$ cúbito.



HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NA ÉPOCA MEDIEVAL (EUROPA)

Liber Abaci

11. Dois pássaros começam a voar do topo de duas torres a 50 “pés” de distância, uma tem 30 “pés” de altura, a outra “40 pés” de altura, começando ao mesmo tempo e voando à mesma velocidade. Chegam ao centro de uma fonte entre as duas torres ao mesmo tempo. A que distância está a fonte de cada uma das torres?

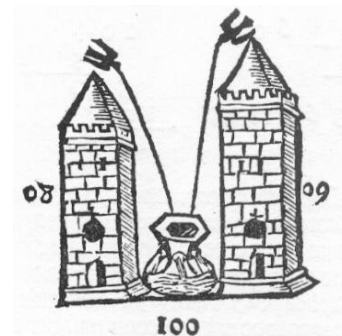


HISTÓRIA DA MATEMÁTICA EM PORTUGAL

Gaspar Nicolas

No *Tratado da Pratica D'Arismetica*, do português Gaspar Nicolas, publicado em 1519, aparece o seguinte problema:

12. São duas torres, uma de 90 braças e outra de 80 e estão arredadas uma da outra, 100 braças. E entre ambas as torres está uma fonte em tal lugar que duas aves iguais a voar vêm beber àquela fonte, e cada uma das torres tem sua ave em cima, e partem ambas ao mesmo tempo e chegam ambas ao mesmo tempo à fonte. Demando quanto está a fonte arredada de cada torre?



BOM TRABALHO!
A prof. Ida Gonçalves