



Universidade da Madeira



DEPARTAMENTO DE
Matemática

SA

VAS Geo
+ D
+ In

Geometria com o Sketchpad™ para o Ensino Secundário

UNIVERSIDADE DA MADEIRA
SECTOR DE DOCUMENTAÇÃO
E ARQUIVO

José Ricardo Teixeira Vasconcelos

*Dissertação para a obtenção do grau de
Mestre em Matemática para o Ensino*

*Funchal – Madeira
Maio de 2002*

Sumário

O principal objectivo desta Tese é a aplicação do software “*The Geometer`s Sketchpad*™” à Geometria do Ensino Secundário. Pretende-se a motivação dos alunos deste nível de ensino apresentando outra forma de aprender Geometria, facilitando a compreensão dos conceitos/noções e a construção, de forma simples, da verificação/constatação dos resultados. Assim, com o propósito de cobrir toda a Geometria ensinada presentemente no Ensino Secundário, temos neste trabalho, cinco capítulos, desde algumas notas históricas – aspecto relevante hoje em dia nas aulas do ensino básico e secundário, passando pela trigonometria plana, geometria no plano e no espaço e acabando com sugestivas aplicações para o Sketchpad™. A tese é complementada com doze apêndices que completam alguns assuntos/resultados.

-

Índice

Lista de Figuras	vi
Lista de Tabelas	xv
Lista de Fórmulas	xvi
Convenções, Notações e Símbolos	xviii
Prefácio	xxii
Agradecimentos	xxiv

Capítulo 1 – A Geometria: Notas Históricas

1.1 O mundo Grego	1
1.1.1 Das origens à Idade Áurea	1
1.1.2 Os três problemas clássicos da geometria grega	4
1.1.3 A Trigonometria	6
1.1.4 Da Idade Áurea à Idade Média	7
1.2 Idade Média e Renascimento	8
1.2.1 Da Idade Média ao Renascimento	8
1.2.2 O Renascimento	9
1.3 A Idade Moderna e Contemporânea	11

Capítulo 2 – Trigonometria no Plano Euclidiano

2.1 Definições gerais	22
2.2 Definições e relação entre razões trigonométricas	23
2.2.1 Razões trigonométricas num triângulo rectângulo	23
2.2.2 A Fórmula Fundamental da Trigonometria e outras	25
2.2.3 A Lei dos Senos	26
2.3 Ângulos e arcos	27
2.3.1 Os ângulos especiais: 30° , 45° e 60°	27
2.3.2 Ângulos e arcos generalizados	29
2.3.3 Medidas de amplitudes de ângulos e de arcos	30
2.3.4 Ângulos de amplitudes superiores a 360°	31
2.4 Trigonometria num referencial ortonormado	33
2.4.1 Coordenadas cartesianas e coordenadas polares	34
2.4.2 O círculo trigonométrico	35
2.4.3 Razões trigonométricas num referencial ortonormado	36
2.4.4 Razões trigonométricas no círculo trigonométrico	39
2.4.5 Conservação das fórmulas trigonométricas	43
2.4.6 Sinal das razões trigonométricas	44
2.4.7 Variação das razões trigonométricas	45
2.5 Funções trigonométricas	49
2.5.1 Estudo da função seno	50
2.5.2 Estudo da função co-seno	54
2.5.3 Estudo da função tangente	56
2.5.4 Estudo da função co-tangente	59
2.6 Redução ao 1º quadrante	61
2.6.1 Ângulos complementares	61
2.6.2 Ângulos que diferem de $\frac{\pi}{2}$	62
2.6.3 Ângulos suplementares	63
2.6.4 Ângulos que diferem de π	64

2.6.5	Ângulos cuja soma é $\frac{3\pi}{2}$	65
2.6.6	Ângulos que diferem de $\frac{3\pi}{2}$	66
2.6.7	Ângulos simétricos	67
2.7	Equações trigonométricas	68
2.7.1	Equações com o seno	69
2.7.2	Equações com o co-seno	72
2.7.3	Equações com a tangente	75
2.7.4	Equações com a co-tangente	77
2.8	Aplicações práticas	79
2.8.1	Definições e relação entre razões trigonométricas	79
2.8.2	Ângulos e arcos	91
2.8.3	Trigonometria num referencial ortonormado	96
2.8.4	Estudo das funções trigonométricas	100
2.8.5	Redução ao primeiro quadrante	103
2.8.6	Equações trigonométricas	107
2.9	Aplicações práticas no Sketchpad™	110
2.9.1	Definições e relação entre razões trigonométricas	110
2.9.2	Ângulos e arcos	113
2.9.3	Trigonometria num referencial ortonormado	114
2.9.4	Gráficos	115

Capítulo 3 – Geometria no Plano

3.1	Transformações geométricas	117
3.1.1	Definições	117
3.1.2	Isometrias no plano	120
3.1.3	Homotetias e semelhanças	125
3.2	Propriedades dos triângulos	127
3.2.1	Definições	127
3.2.2	Propriedades com demonstração	130
3.2.3	Congruências de triângulos	134
3.2.4	Semelhança de triângulos	136
3.2.5	O Teorema de Pitágoras	137
3.3	Polígonos	139
3.3.1	Definições	139
3.3.2	Construção de triângulos	142
3.3.3	Construção de polígonos regulares	142
3.3.4	Construção de polígonos estrelados	145
3.4	Cálculo vectorial	146
3.4.1	Operações com vectores	146
3.4.2	Vectores colineares	152
3.4.3	Ângulo de dois vectores	152
3.4.4	Vector como combinação linear de vectores	153
3.5	Geometria analítica no plano	155
3.5.1	A recta orientada e distância entre dois pontos da recta	155
3.5.2	Referenciais cartesianos ortogonais e monométricos	157
3.5.3	Conjuntos de pontos e condições	158
3.5.4	Distância entre dois pontos	163
3.5.5	Ponto médio de um segmento de recta	164

3.5.6	Mediatriz de um segmento de recta	165
3.5.7	Circunferência e círculo	166
3.5.8	Componentes e coordenadas de um vector numa base	168
3.5.9	Referenciais e vectores	169
3.5.10	Igualdade e operações com vectores escritos numa base	171
3.5.11	Colinearidade entre dois vectores	174
3.5.12	Norma, versor e co-senos directores	174
3.5.13	Projecção ortogonal de um vector sobre outro	176
3.5.14	Produto interno de dois vectores	176
3.5.15	Produto interno num referencial o. n.	180
3.5.16	Estudo da recta	181
3.5.17	Inclinação e declive de uma recta	190
3.5.18	Ângulo de duas rectas	191
3.5.19	Rectas paralelas	192
3.5.20	Rectas perpendiculares	193
3.6	Cónicas	194
3.6.1	Estudo da elipse	196
3.6.2	Estudo da hipérbole	203
3.6.3	Estudo da parábola	207
3.6.4	Sumário das propriedades das cónicas	211
3.7	Aplicações práticas	211
3.7.1	Transformações geométricas	212
3.7.2	Propriedades dos triângulos	215
3.7.3	Polígonos	218
3.7.4	Cálculo vectorial	221
3.7.5	Geometria Analítica	225
3.7.6	Cónicas	257
3.8	Aplicações práticas no Sketchpad™	261
3.8.1	Transformações geométricas	261
3.8.2	Construção de polígonos	262
3.8.3	Geometria Analítica	263
3.8.4	Cónicas	264
3.8.5	Outra construção	268

Capítulo 4 – Geometria no Espaço

4.1	Poliedros	270
4.1.1	Definições	270
4.1.2	Poliedros regulares	271
4.1.3	Poliedros arquimedianos	279
4.1.4	Outros poliedros (Prisma, Antiprismas e Pirâmides)	282
4.1.5	Poliedros duais e sólidos de Catalan	289
4.1.6	Sólidos compostos	292
4.1.7	Deltaedros	292
4.1.8	Não poliedros (Cilindro, Cone e Esfera)	293
4.2	Geometria Analítica no espaço	295
4.2.1	Referencial cartesiano	295
4.2.2	Conjuntos de pontos e condições	299
4.2.3	Distância entre dois pontos	302
4.2.4	Ponto médio e plano mediador de um segmento	304
4.2.5	Superfície esférica e esfera	307

4.2.6 Componentes e coordenadas de um vector	308
4.2.7 Norma, igualdade e operações com vectores.....	310
4.2.8 Vectores colineares	312
4.2.9 Produto interno num referencial o. n.	313
4.2.10 Vectores perpendiculares	313
4.2.11 Estudo da recta	314
4.2.12 Estudo do plano	318
4.2.13 Posições relativas de rectas, de planos e de rectas e planos	321
4.2.14 Intersecção de planos e de rectas com planos	324
4.3 Aplicações práticas	326
4.3.1 Poliedros	326
4.3.2 Geometria Analítica	338
4.4 Aplicações práticas no Sketchpad™	360
4.4.1 Poliedros	360
4.4.2 Geometria Analítica	361
Capítulo 5 – Outras Aplicações para o Sketchpad™	
5.1 Problemas antigos	363
5.2 Problemas do plano e do espaço	373
5.2.1 Cortes em sólidos	373
5.2.2 Geometria no plano	379
5.3 Aplicações à vida real e a outras ciências	385
Bibliografia e Referências	393
Apêndice I – Notas explicativas para “The Geometer’s Sketchpad™”	395
Apêndice II – Perspectiva Cavaleira	407
Apêndice III – Teorema de Tales	411
Apêndice IV – Dedução da fórmula da área de um triângulo	413
Apêndice V – Programa de Matemática do Ensino Secundário	414
Apêndice VI – Ficheiros Sketchpad™	417
Apêndice VII – Produto Externo	418
Apêndice VIII – Resolução de Sistemas de Equações	420
Apêndice IX – Matrizes e Determinantes	426
Apêndice X – Simetrias de Rotações de Poliedros	429
Apêndice XI – Poliedros Arquimedianos	432
Apêndice XII – Área da Superfície e Volume do Cone e da Esfera	437

Lista de Figuras

Capítulo 1

Figura 1.1 – Quadratura do círculo	5
Figura 1.2 – Duplicação do cubo	5
Figura 1.3 – Trisseção do ângulo	5
Figura 1.4 – Teorema de Desargues	14
Figura 1.5 – Geometria Descritiva de Monge	16
Figura 1.6 – Modelo da geometria de Lobatchevski	18
Figura 1.7 – Modelo da geometria de riemaniana	20

Capítulo 2

Figura 2.1 – Ângulo	22
Figura 2.2 – Elementos da circunferência	23
Figura 2.3 – Elementos do círculo	23
Figura 2.4 – Elementos dum triângulo rectângulo	24
Figura 2.5 e 2.6 – Alturas num triângulo escaleno	26 e 27
Figura 2.7 – Num triângulo equilátero dois triângulos rectângulos	29
Figura 2.8 – Triângulo isósceles rectângulo	30
Figura 2.9 – Ângulo nulo	31
Figura 2.10 – Ângulo de um giro	31
Figura 2.11 – Arco de circunferência igual ao seu raio	32
Figura 2.12 – Relógio de ponteiros e ângulos	33
Figura 2.13 – Referencial c. o. n. xOy	34
Figura 2.14 – Coordenadas polares	35
Figura 2.15 – Círculo de raio 1	36
Figura 2.16 – Coordenadas polares/cartesianas	37
Figura 2.17 – Ângulo/quadrante e as definições trigonométricas	38
Figura 2.18 – Ponto sobre o círculo trigonométrico	39
Figura 2.19 – Eixo das tangentes no círculo trigonométrico	40
Figura 2.20 – Ângulo do 2º quadrante e a sua tangente	41
Figura 2.21 – Ângulo do 3º quadrante e a sua tangente	41
Figura 2.22 – Eixo das co-tangentes no círculo trigonométrico	42
Figura 2.23 – Círculo trigonométrico e ângulo do 1º quadrante	43
Figura 2.24 – Sinal das coordenadas dum ponto e da razão trigonométrica no círculo	44
Figura 2.25 – Sinal, por quadrante, de cada razão trigonométrica	45
Figura 2.26 – Estudo da variação da razão seno no círculo trigonométrico	46
Figura 2.27 – Estudo da variação da razão co-seno no círculo trigonométrico	47
Figura 2.28 – Estudo da variação da razão tangente no círculo trigonométrico	48
Figura 2.29 – Estudo da variação da razão co-tangente no círculo trigonométrico	49
Figura 2.30 – Triângulo de base 2 e um dos lados 1	50
Figura 2.31 – Gráfico da função seno	52
Figura 2.32 – Círculo trigonométrico e $\text{sen}(-x) = -\text{sen } x$	54
Figura 2.33 – Gráfico da função co-seno	55
Figura 2.34 – Círculo trigonométrico e $\text{cos}(-x) = \text{cos } x$	56
Figura 2.35 – Gráfico da função tangente	57
Figura 2.36 – Círculo trigonométrico e $\text{tg}(-x) = -\text{tg } x$	59
Figura 2.37 – Gráfico da função co-tangente	60
Figura 2.38 – Círculo trigonométrico e redução ao 1º quadrante	61

Figura 2.39 – Ângulos complementares no círculo trigonométrico	62
Figura 2.40 – Ângulos que diferem de $\frac{\pi}{2}$ no círculo trigonométrico	63
Figura 2.41 – Ângulos suplementares no círculo trigonométrico	64
Figura 2.42 – Ângulos que diferem de π no círculo trigonométrico	65
Figura 2.43 – Ângulos cuja soma é $\frac{3\pi}{2}$ no círculo trigonométrico	66
Figura 2.44 – Ângulos que diferem de $\frac{3\pi}{2}$ no círculo trigonométrico	67
Figura 2.45 – Ângulos simétricos no círculo trigonométrico	68
Figura 2.46 – No círculo trigonométrico: $\text{sen } x = 0$	69
Figura 2.47 – No círculo trigonométrico: $\text{sen } x = 1$	70
Figura 2.48 – No círculo trigonométrico: $\text{sen } x = -1$	70
Figura 2.49 – No círculo trigonométrico: $\text{sen } x = 0.5$	71
Figura 2.50 – No círculo trigonométrico: $\text{sen } x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	72
Figura 2.51 – No círculo trigonométrico: $\text{cos } x = 0$	73
Figura 2.52 – No círculo trigonométrico: $\text{cos } x = 1$	73
Figura 2.53 – No círculo trigonométrico: $\text{cos } x = -1$	74
Figura 2.54 – No círculo trigonométrico: $\text{cos } x = \frac{\sqrt{3}}{2}$	74
Figura 2.55 – No círculo trigonométrico: $\text{cos } x = -0.5$	75
Figura 2.56 – No círculo trigonométrico: $\text{tg } x = 0$	76
Figura 2.57 – No círculo trigonométrico: $\text{tg } x = 1$	76
Figura 2.58 – No círculo trigonométrico: $\text{tg } x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$	77
Figura 2.59 – No círculo trigonométrico: $\text{cotg } x = 0$	78
Figura 2.60 – No círculo trigonométrico: $\text{cotg } x = -1$	78
Figura 2.61 – No círculo trigonométrico: $\text{cotg } x = \sqrt{3}$	79
Figura 2.62 – Escada encostada à parede	80
Figura 2.63 – Problema da escada do pintor no Sketchpad™	80
Figura 2.64 – Rectângulo	81
Figura 2.65 – Cubo	82
Figura 2.66 – Secção no cubo por um plano que contém duas suas diagonais	82
Figura 2.67 e 2.68 – Medida do lado dum triângulo equilátero inscrito numa circunferência .	83 e 84
Figura 2.69 e 2.70 – Medida do lado dum quadrado equilátero inscrito numa circunferência	84
Figura 2.71 – Pirâmide quadrangular regular	86
Figura 2.72 – Triângulo isósceles de altura h	87
Figura 2.73 – Rectângulo de base 1 e altura h	88
Figura 2.74 – Trapézio isósceles	89
Figura 2.75, 276 e 2.77 – Problema dos barcos e os triângulos não rectângulos	90 e 91
Figura 2.78 – Roleta das feiras populares	94
Figura 2.79, 2.80 e 2.81 – Representação de pontos em coordenadas polares	97 e 98
Figura 2.82 – Principais ângulos no círculo trigonométrico	99
Figura 2.83 – Losango de lado 1	100
Figura 2.84 – Projecção de um segmento de recta [AB]	102
Figura 2.85 – Ângulos nos 2º, 3º e 4º quadrantes	103
Figura 2.86 – Triângulo de lados 2 e 3	109

Figura 2.87 – Pentágono regular inscrito numa circunferência	112
Figura 2.88 – Ângulo de 15°	113
Figura 2.89 – Arco de circunferência de 65°	114

Capítulo 3

Figura 3.1 – Congruência de segmentos de recta, ângulos e triângulos	118
Figura 3.2 – Recta e direcção	119
Figura 3.3 – Segmento orientado, segmento orientado equipolente e vector livre	119
Figura 3.4 – Translação de um ponto	121
Figura 3.5 – Translação de um segmento de recta	121
Figura 3.6 – Translação de um triângulo	121
Figura 3.7 – Reflexão de um ponto e de um segmento de recta	122
Figura 3.8 – Rotação de um ponto	123
Figura 3.9 – Rotação de uma recta	123
Figura 3.10 – Reflexão deslizante de um ponto	124
Figura 3.11 – Reflexão deslizante de um triângulo	124
Figura 3.12, 3.13 e 3.14 – Homotetia de centro O e razão k	126 e 127
Figura 3.15 – Bissetriz, incentro e ângulo externo de um triângulo	128
Figura 3.16 – Classificação de triângulos quanto aos lados	128
Figura 3.17 – Classificação de triângulos quanto aos ângulos	128
Figura 3.18 – No triângulo: alturas/ortocentro; medianas/baricentro; mediatrizes/circuncentro .	129
Figura 3.19 – No triângulo, um ângulo externo é maior que o ângulo interno não adjacente	131
Figura 3.20 – Num triângulo, a lados congruentes opõem-se ângulos congruentes	132
Figura 3.21 – Num triângulo, ao maior lado opõe-se o maior ângulo	132
Figura 3.22 – Desigualdade triangular	133
Figura 3.23 – Ângulos alternos internos/alternados; ângulos internos do mesmo lado	133
Figura 3.24 – A soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é 180°	134
Figura 3.25 – Critério de congruência de triângulos: Lado – Ângulo – Lado	134
Figura 3.26 – Critério de congruência de triângulos: Ângulo – Lado – Ângulo	135
Figura 3.27 – Critério de congruência de triângulos: Lado – Lado – Lado	135
Figura 3.28 – Critério de congruência de triângulos: Lado – Ângulo – Ângulo	135
Figura 3.29 – Critério de semelhança de triângulos: Ângulo – Ângulo	136
Figura 3.30 – Critério de semelhança de triângulos: Lado – Ângulo – Lado	137
Figura 3.31 – Critério de semelhança de triângulos: Lado – Lado – Lado	137
Figura 3.32 – Teorema de Pitágoras	138
Figura 3.33 – Demonstração do Teorema de Pitágoras	139
Figura 3.34 – Linha poligonal e polígonos	140
Figura 3.35 – Pentágono convexo irregular	141
Figura 3.36 – Hexágono regular; estrela hexagonal e hexograma	141
Figura 3.37 – Construção dum triângulo dados os seus lados	143
Figura 3.38 – Construção dum triângulo rectângulo dada a hipotenusa e um cateto	143
Figura 3.39 – Construção dum eneágono regular convexo	144
Figura 3.40 – Construção dum heptágono regular conhecido o lado	145
Figura 3.41 – Construção dum pentágono estrelado e de um octógono estrelado regular	146
Figura 3.42 – Soma de um ponto com um vector	147
Figura 3.43 – Soma de vectores	147
Figura 3.44 – Regra do paralelogramo para somar vectores	148
Figura 3.45 – Soma de vectores paralelos	148
Figura 3.46 – A adição de vectores é comutativa	148
Figura 3.47 – A adição de vectores é associativa	149

Figura 3.48 – Adição de um vector com o vector nulo	149
Figura 3.49 – Adição de um vector com o seu simétrico	149
Figura 3.50 – Subtracção de um vector por outro	150
Figura 3.51 – Ponto médio de um segmento de recta	150
Figura 3.52 – Propriedade distributiva em relação à adição de vectores	151
Figura 3.53 – Propriedade distributiva em relação à adição de números reais	151
Figura 3.54 – Propriedade associativa da multiplicação de um número real por um vector	152
Figura 3.55 – Ângulo de dois vectores	153
Figura 3.56 – Combinação linear de dois vectores	153
Figura 3.57 – Vector do plano como combinação linear de dois outros vectores	155
Figura 3.58 – Recta orientada ou eixo	156
Figura 3.59 – Representação de pontos num referencial c. o. n.	157
Figura 3.60 – Recta vertical e horizontal num referencial c. o. n.	159
Figura 3.61 – Bissetriz dos quadrantes pares e ímpares	160
Figura 3.62 – Semi-recta e segmento de recta num referencial c. o. n.	161
Figura 3.63 – Semiplano fechado num referencial c. o. n.	161
Figura 3.64 – Semiplano aberto num referencial c. o. n.	162
Figura 3.65 – Semiplano num referencial c. o. n.: $y < -x$	162
Figura 3.66 – Distância entre dois pontos	164
Figura 3.67 – Coordenadas do ponto médio de um segmento de recta	165
Figura 3.68 – Mediatrix de um segmento de recta	166
Figura 3.69 – Recta secante, tangente e exterior a uma circunferência	167
Figura 3.70 – Círculo fechado num referencial c. o. n.	168
Figura 3.71 – Coordenadas e componentes de um vector numa base	169
Figura 3.72 – Referencial cartesiano ortogonal associado a uma base	170
Figura 3.73 – Coordenadas de ponto e de vector em referencial c. o. n. numa base	170
Figura 3.74 – Soma de dois vectores numa base o. n.	172
Figura 3.75 – Produto de um número real por um vector numa b. o. n.	172
Figura 3.76 – Soma de um ponto com um vector numa base o. n.	173
Figura 3.77 – Co-senos directores de um vector	175
Figura 3.78 – Projecção vectorial de um vector sobre outro	177
Figura 3.79 – Projecção da soma de dois vectores sobre outro	177
Figura 3.80 – Produto interno de dois vectores em relação ao ângulo entre os mesmos	178
Figura 3.81 – Equação vectorial da recta	181
Figura 3.82 e 3.83 – Equação vectorial duma semi-recta	182
Figura 3.84 – Equação vectorial da recta dados dois dos seus pontos	183
Figura 3.85 – Ordenada e abcissa na origem duma recta	187
Figura 3.86 – Equação reduzida da recta	189
Figura 3.87 e 3.88 – Família de rectas	189 e 190
Figura 3.89 – Inclinação duma recta	191
Figura 3.90 – Rectas paralelas têm a mesma inclinação e declive	191
Figura 3.91 – Posições relativas entre rectas	192
Figura 3.92 – Ângulo de duas rectas	193
Figura 3.93 – Cone recto	195
Figura 3.94 – Elipse, parábola e hipérbole como secções num cone por um plano secante	195
Figura 3.95 – Definição de elipse	196
Figura 3.96 – Elementos da elipse	196
Figura 3.97 – Elipse num referencial c. o. n. e as suas directrizes	197
Figura 3.98 – Elipse com o eixo maior sobre o eixo dos yy e as suas directrizes	200
Figura 3.99 e 3.100 – Elipse a partir duma circunferência	201

Figura 3.101 – Focos duma elipse conhecidos os eixos maior e menor	202
Figura 3.102 – Construção duma elipse conhecidos os eixos maior e menor	202
Figura 3.103 – Elementos da hipérbole	203
Figura 3.104 – Hipérbole com os focos sobre o eixo dos xx e as suas directrizes	205
Figura 3.105 – Hipérbole com os focos sobre o eixo dos yy e as suas directrizes	206
Figura 3.106 – Construção da hipérbole a partir da definição	208
Figura 3.107 – Elementos da parábola	209
Figura 3.108 – Parábola com o foco no semieixo positivo dos yy	209
Figura 3.109 – Construção da parábola conhecido o foco e a directriz	211
Figura 3.110 – Translação duma circunferência	213
Figura 3.111 – Reflexão num espelho (recta)	213
Figura 3.112 – Simetria de pontos	214
Figura 3.113 – Triângulo equilátero inscrito num quadrado	215
Figura 3.114 – Homotetia de razão 0.5	215
Figura 3.115 – Triângulo equilátero qualquer	216
Figura 3.116 – Triângulo equilátero de lado dado	217
Figura 3.117 e 3.118 – Triângulo: recta definida por pontos médios de 2 lados é paralela ao 3°.	218
Figura 3.119 – Construção dum pentágono regular inscrito numa circunferência	219
Figura 3.120 – Inscrição de hexágono regular em circunferência e comparação radiano/grau ...	220
Figura 3.121 – Construção dum decágono inscrito numa circunferência e suas estrelações	220
Figura 3.122 – Rectângulo dividido em quatro rectângulos geometricamente iguais	221
Figura 3.123 – Pentágono regular	222
Figura 3.124 – Os pontos médios dos lados dum quadrilátero definem um paralelogramo	223
Figura 3.125 – Triângulo e os pontos médios de dois dos seus lados	223
Figura 3.126 – Trapézio e os pontos médios dos seus lados	224
Figura 3.127 – Representação de pontos num referencial c. o. n.	226
Figura 3.128 – Semiplano fechado	231
Figura 3.129 – Semiplano aberto	231
Figura 3.130 – Mediatriz dum segmento de recta	232
Figura 3.131 – Circunferência num referencial c. o. n.	232
Figura 3.132 – Circunferência centrada na origem dum referencial c. o. n.	235
Figura 3.133 – Quadrado dividido em quatro partes geometricamente iguais	236
Figura 3.134 – Representação de vectores associados à b. o. n. canónica	237
Figura 3.135 – Rectângulo num referencial c. o. n.	238
Figura 3.136 – Translação dum rectângulo num referencial c. o. n.	238
Figura 3.137 – Triângulo e pontos médios de dois dos seus lados num referencial c. o. n.	241
Figura 3.138 – Vector num referencial c. o. n.	243
Figura 3.139 – Vector soma	244
Figura 3.140 – Triângulo num referencial c. o. n.	245
Figura 3.141 – Circulo trigonométrico num referencial c. o. n.	246
Figura 3.142 – Norma da soma de dois vectores	247
Figura 3.143 e 3.144 – Recta num referencial c. o. n.	249 e 251
Figura 3.145 – Família de rectas num referencial c. o. n.	252
Figura 3.146 – Recta secante a uma circunferência num referencial c. o. n.	254
Figura 3.147 – Num referencial c. o. n. um triângulo e os pontos médios dos seus lados	264
Figura 3.148 – Outra construção da elipse	266
Figura 3.149 – Outra construção da hipérbole	267
Figura 3.150 – Outra construção da parábola	269
Figura 3.151 – Construção das tangentes à circunferência por um ponto que lhe é exterior	269

Capítulo 4

Figura 4.1 – Planos secantes	271
Figura 4.2 – Prisma triangular	271
Figura 4.3 – Tetraedro e a sua planificação	272
Figura 4.4 – Cubo e a sua planificação	273
Figura 4.5 – Octaedro e a sua planificação	274
Figura 4.6 – Dodecaedro e a sua planificação	274
Figura 4.7 – Icosaedro e a sua planificação	275
Figura 4.8 – Pequeno dodecaedro estrelado	278
Figura 4.9 – Grande dodecaedro	278
Figura 4.10 – Grande dodecaedro estrelado	278
Figura 4.11 – Grande icosaedro estrelado	278
Figura 4.12 – Prisma hexagonal e antiprisma	280
Figura 4.13 – Vértices de poliedros arquimedianos	280
Figura 4.14 – Prisma recto e obliquo	284
Figura 4.15 – Três prismas rectos	284
Figura 4.16 – Antiprismas	285
Figura 4.17 – Pirâmides	287
Figura 4.18 – Pirâmides regulares	287
Figura 4.19 – Tronco de pirâmides	289
Figura 4.20 – Pirâmides “inscritas” no cubo	289
Figura 4.21 – Poliedros duais	291
Figura 4.22 – Sólidos compostos	291
Figura 4.23 e 4.24 – Deltaedros	292 e 293
Figura 4.25 – Cilindro	293
Figura 4.26 – Cone	294
Figura 4.27 – Esfera	295
Figura 4.28 – Referencial c. o. n. tridimensional	296
Figura 4.29 – Representação de pontos em referencial c. o. n. tridimensional	297
Figura 4.30 – Planos ortogonais aos eixos em referencial c. o. n. tridimensional	298
Figura 4.31 – Espaço dividido em oito octantes	298
Figura 4.32 – Simétrico de um ponto relativamente a outro ponto, a uma recta e a um plano	299
Figura 4.33 – Planos paralelos ao plano xOy	300
Figura 4.34 – Planos paralelos ao plano yOz	300
Figura 4.35 – Planos paralelos ao plano xOz	301
Figura 4.36 – Plano $y = x$	301
Figura 4.37 – Semiespaços	303
Figura 4.38 – Rectas paralelas aos eixos coordenados num referencial tridimensional	303
Figura 4.39 – Paralelepípedo num referencial tridimensional	304
Figura 4.40 – Ponto médio de um segmento de recta num referencial tridimensional	303
Figura 4.41 – Plano mediador	307
Figura 4.42 – Ponto da superfície esférica, ponto interior e ponto exterior à superfície	307
Figura 4.43 – Esfera	308
Figura 4.44 – Exterior da esfera	309
Figura 4.45 – Coordenadas e componentes de vector em b. o. n. em referencial tridimensional ..	310
Figura 4.46 – Planos estritamente paralelos e planos coincidentes	323
Figura 4.47 – Planos perpendiculares e planos oblíquos	323
Figura 4.48 – Rectas paralela em sentido lato e em sentido estrito a plano	323
Figura 4.49 – Recta concorrente e perpendicular a plano	324
Figura 4.50 – Intersecção de três planos	324

Figura 4.51 – Posições relativas de três planos	325
Figura 4.52 – Tetraedro inscrito num cubo	327
Figura 4.53 – Octaedro inscrito num cubo	328
Figura 4.54 – Pirâmide quadrangular	330
Figura 4.55 – O cubo e o stella octangula	331
Figura 4.56 – Ângulo diedro do stella octangula	331
Figura 4.57 – Octaedro inscrito num tetraedro	332
Figura 4.58 – Cubo centrado na origem dum referencial c. o. n. tridimensional	334
Figura 4.59 – Paralelepípedo em P. C. (30°, 50%)	334
Figura 4.60 – Planificação de parte dum paralelepípedo	335
Figura 4.61 – Perspectiva de um antiprisma quadrangular regular e a sua “planta”	336
Figura 4.62 – Cubo de diagonais da base nos eixos dos yy e xx em referencial tridimensional .	339
Figura 4.63 – Cubo que verifica a condição: $-2 \leq x \leq 2 \wedge -2 \leq y \leq 2 \wedge -2 \leq z \leq 2$	341
Figura 4.64 – Paralelepípedo de dimensões $2 \times 5 \times 3$ com vértice na origem dum referencial	342
Figura 4.65 – Plano mediador de segmentos de recta em referencial tridimensional	343
Figura 4.66 – Superfície esférica de centro (2, 2, 2) e raio 3	345
Figura 4.67 – Esfera de centro (2, 2, 2) e raio 3	346
Figura 4.68 – Paralelepípedo com arestas sobre os eixos xx, yy e zz dum referencial	350
Figura 4.69 – Pirâmide quadrangular regular com arestas da base sobre os eixos xx e yy	351
Figura 4.70 – Pontos em referencial c. o. n. tridimensional	362

Capítulo 5

Figura 5.1 – Quadrilátero convexo inscrito numa circunferência	364
Figura 5.2 – Centros de triângulos equiláteros de lado comum com triângulo é um equilátero ..	365
Figura 5.3 – Segmento de recta dividido em partes desiguais	367
Figura 5.4 – Construção dum segmento de recta a partir doutro	367
Figura 5.5 – Construção do rectângulo de ouro	369
Figura 5.6 – Rectângulo de ouro de altura igual ao segmento áureo da base	369
Figura 5.7 – Em pentágono regular de lado 1, a sua diagonal é o número de ouro Φ	369
Figura 5.8 – Área dum triângulo a partir dos seus lados e do seu perímetro	371
Figura 5.9 – Tetraedro	373
Figura 5.10 – Secção no tetraedro por um plano	374
Figura 5.11 – Cubo	374
Figura 5.12 – Prisma triangular	375
Figura 5.13 – Secção no prisma triangular por um plano	375
Figura 5.14 – Cubo em P. C. (30°, 50%)	376
Figura 5.15 e 3.16 – Num triângulo equilátero o seu centro é um terço da sua altura	376 e 377
Figura 5.17 – Secção num paralelepípedo por um plano	378
Figura 5.18 – Rectângulo de lado dobro do outro lado	380
Figura 5.19 – Recta tangente a uma circunferência num referencial c. o. n. xOy	381
Figura 5.20 – Semicírculo num referencial c. o. n. xOy	383
Figura 5.21 – Parte do círculo em referencial c. o. n. xOy	384
Figura 5.22 – Corpo a cair num plano inclinado a 30°	385
Figura 5.23 e 5.24 – Depósito cilíndrico	386
Figura 5.25, 5.26 e 5.27 – Triângulos cujos vértices são pontos a distâncias inacessíveis ..	388 e 389
Figura 5.28 – Árvore fractal	390
Figura 5.29 – Quadrados inscritos uns nos outros	391
Figura 5.30 – Locomotiva	392

Apêndice I

Figura I.1 – Janela principal do Sketchpad™	396
Figura I.2 – Menus File, Edit e Display	399
Figura I.3 – Menus Construct, Transform e Measure	401
Figura I.4 – Menus Graph, work e Help	404
Figura I.5 – Caixa de diálogo	404
Figura I.6 – Algumas opções do Menu Measure	404
Figura I.7 – Janela de rotinas e dum ficheiro script	405

Apêndice II

Figura II.1 – Projecção central dum quadrado	408
Figura II.2 – Projecção paralela dum quadrado	408
Figura II.3 – Projecção paralela ortogonal / projecção paralela obliqua	409
Figura II.4 – Perspectiva cavaleira dum cubo	410
Figura II.5 – Perspectiva cavaleira dum cubo de três modos diferentes	410

Apêndice III

Figura III.1 – Axioma de semelhança	411
Figura III.2 – Teorema de Tales	412

Apêndice IV

Figura IV.1 – Decomposição de um polígono	413
Figura IV.2 – Rectângulo de base b e altura h	413
Figura IV.3 – Paralelogramo de base b e altura h	413
Figura IV.4 – Triângulo de base b e altura h	413

Apêndice VII

Figura VII.1 – Produto externo	419
Figura VII.2 – Sentido do produto externo	419

Apêndice X

Figura X.1 – Eixos de rotação por centros de faces opostas e por vértices opostos do cubo	429
Figura X.2 – Eixos de rotação por vértices opostos e por centros de faces opostas do octaedro	430
Figura X.3 – Eixos de rotação por pontos médios de arestas opostas do cubo e do octaedro	430
Figura X.4 – Eixos de rotação por pontos médios de arestas e por vértice e centro do tetraedro	430

Apêndice XI

Figura XI.1 – Troncotetraedro ou tetraedro truncado	432
Figura XI.2 – Troncooctaedro ou octaedro truncado	432
Figura XI.3 – Troncoicosaedro ou icosaedro truncado	432
Figura XI.4 – Troncocubo ou cubo truncado	433
Figura XI.5 – Troncododecaedro ou dodecaedro truncado	433
Figura XI.6 – Rombicuboctaedro	433
Figura XI.7 – Cuboctaedro	434
Figura XI.8 – Icosidodecaedro	434
Figura XI.9 – Cubo achatado / rombo ou cuborrombo	434
Figura XI.10 – Dodecaedro achatado / rombo ou dodecaedrorrombo	435
Figura XI.11 – Troncocuboctaedro ou cuboctaedro truncado	435
Figura XI.12 – Troncoicosidodecaedro ou icosidodecaedro truncado	435
Figura XI.13 – Rombicosidodecaedro	436

Apêndice XII

Figura XII.1 – Trapezóide	438
Figura XII.2 – Cone gerado por um trapezóide	438
Figura XII.3 – Esfera gerada por um semicírculo	438

Lista de Tabelas

Capítulo 2

Tabela 2.1 – Valores das razões trigonométricas dos ângulos: 30°, 45° e 60°	30
Tabela 2.2 – Valores das razões trigonométricas dos ângulos: 0°, 90°, 180° e 270°	39
Tabela 2.3 – Variação das quatro razões trigonométricas principais	48
Tabela 2.4 – Seno de alguns ângulos internos dum triângulo	51
Tabela 2.5 – Variação do sinal da função seno	52
Tabela 2.6 – Monotonia e extremos da função seno	53
Tabela 2.7 – Variação do sinal da função co-seno	55
Tabela 2.8 – Monotonia e extremos da função co-seno	56
Tabela 2.9 – Variação do sinal da função tangente	58
Tabela 2.10 – Monotonia e extremos da função tangente	58
Tabela 2.11 – Resumo das reduções ao 1º quadrante	68
Tabela 2.12 – Soluções da equação: $\text{sen } x = 0.5$	70
Tabela 2.13 – Soluções da equação: $\text{sen } x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	72
Tabela 2.14 – Soluções da equação: $\text{cos } x = \frac{\sqrt{3}}{2}$	74
Tabela 2.15 – Soluções da equação: $\text{cos } x = -0.5$	75
Tabela 2.16 – Soluções gerais das equações trigonométricas	79
Tabela 2.17 – Razões trigonométricas dos principais ângulos	98
Tabela 2.18 – Soluções particulares da equação: $\text{sen } (2x) = \text{cos } x$	108

Capítulo 3

Tabela 3.1 – Condições que definem cada quadrante do plano cartesiano	162
Tabela 3.2 – Propriedades das cónicas	212
Tabela 3.3 – Vectores, componentes e coordenadas	236

Capítulo 4

Tabela 4.1 – Poliedros platónicos e a relação de Euler	275
Tabela 4.2 – Apenas 5 poliedros platónicos – relação de Euler	277
Tabela 4.3 – Os quatro poliedros regulares estrelados	279
Tabela 4.4 – Os treze poliedros semi-regulares ou arquimedianos	281
Tabela 4.5 – Prismas: relação entre o número de lados da base com as faces/arestas/vértices ...	284
Tabela 4.6 – Antiprismas: relação do número de lados da base com as faces/arestas/vértices	285
Tabela 4.7 – Pirâmides: relação entre o número de lados da base com as faces/arestas/vértices .	287
Tabela 4.8 – Poliedros duais	290
Tabela 4.9 – Condição e conjunto que define cada eixo num referencial Oxyz	302
Tabela 4.10 – Soluções dum sistema e interpretação geométrica respectiva	325
Tabela 4.11 – Área e volume de cada poliedro platónico	328

Lista de Fórmulas

Capítulo 2

2.1 – Seno de um ângulo	24
2.2 – Co-seno de um ângulo	24
2.3 – Tangente de um ângulo	24
2.4 – Co-secante de um ângulo	25
2.5 – Secante de um ângulo	25
2.6 – Co-tangente de um ângulo	25
2.7 – 2.9 – Fórmula fundamental da trigonometria	25
2.10 – Fórmula trigonométrica com a tangente	26
2.11 – Fórmula trigonométrica com a co-tangente	26
2.12 – 2.17 – Relações entre elementos de triângulo escaleno com o seno dos ângulos	26 e 27
2.18 – Lei dos Senos	27
2.19 – 2.28 – Razões trigonométricas de ângulos especiais, 30° , 45° e 60°	28 e 29
2.29 – 2.30 – Generalização de ângulos	33
2.31 – Solução da equação: $\sin x = 0$	51

Capítulo 3

3.1 – Distância de dois pontos no plano	163
3.2 – Coordenadas do ponto médio de um segmento no plano	165
3.3 – Equação da circunferência de centro na origem dum referencial e raio r	167
3.4 – Soma de um ponto com um vector	172
3.5 – Condição de colinearidade de dois vectores	174
3.6 – Versor de um vector	175
3.7 e 3.8 – Co-seno do ângulo de um vector com o vector da b. o. n.	175
3.10 – Projecção vectorial dum vector	176
3.11 – Produto interno ou escalar de dois vectores	176
3.12 – Projecção ortogonal dum vector sobre outro	178
3.13 – Produto interno é bilinear	179
3.14 – Produto interno de dois vectores pelas suas coordenadas	180
3.15, 3.16 e 3.17 – Equação vectorial da recta	181 e 183
3.18 – Equações paramétricas da recta	184
3.19 – Equação contínua da recta	184
3.20 – Equação geral da recta	185
3.21 – Equação reduzida da recta	185
3.22 – Declive ou coeficiente angular da recta	185
3.23 e 3.24 – Equações reduzidas da recta	187
3.25 – Declive por dois pontos distintos da recta	188
3.26 – Condição que define a elipse	197
3.27 e 3.28 – Equações da elipse	198
3.29 – Definição de hipérbole	204
3.30 – Equação da hipérbole	204
3.31 e 3.32 – Equação reduzida da hipérbole de focos sobre os eixos dos xx e yy	204 e 207
3.33 – Condição que define parábola	210
3.34 – Equação reduzida da parábola	210

Capítulo 4

4.1 – Relação de Euler	275
4.2 e 4.4 – Relações entre arestas/faces/vértices num poliedro	275 e 276

4.5 – Distância de dois pontos no espaço	302
4.6 – Equação vectorial da recta no espaço	314
4.7 – Equações paramétricas da recta no espaço	314
4.8, 4.9 e 4.10 – Equações reduzidas da recta no espaço	317 e 318
4.11 – Combinação linear de dois vectores	319
4.12 – Equação vectorial do plano	319
4.13 – Equações paramétricas do plano	319
4.14 – Equação cartesiana do plano	320
4.15 – Equação geral do plano	320
4.16 – Equação geral do plano referida a um ponto e a um vector normal	321
4.17 e 4.18 – Equação axial do plano	321
4.19 – Expressão para cálculo dum cateto num triângulo rectângulo	337

Capítulo 5

5.1 e 5.2 – Em triângulos semelhantes	364
5.3 e 5.4 – Divisão de um segmento de recta em média e extrema razão	366
5.5 – 5.12 – Área de um triângulo dada à custa dos seus lados e do seu perímetro	371 e 372

Convenções, Notações e Símbolos

Convenções

- Conjuntos denotam-se por letras maiúsculas do alfabeto latino: A, B, C, \dots ; o conjunto dos números reais por \mathbb{R} ; o conjunto dos números racionais por \mathbb{Q} ; o conjunto dos números inteiros por \mathbb{Z} ; o conjunto dos números naturais por \mathbb{N} . O conjunto de todos os vectores do plano por \mathcal{V} .
- Pontos denotam-se por letras maiúsculas do alfabeto latino: A, B, C, \dots
- Rectas denotam-se por letras minúsculas do alfabeto latino: s, r, t, \dots ou por dois pontos seguidos, por exemplo: AB - recta que passa pelo ponto A e pelo ponto B .
- Planos denotam-se por letras maiúsculas caligráficas: $\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}, \dots$ ou por três pontos seguidos, por exemplo: ABC - plano que passa pelos pontos A, B e C .
- Circunferências denotam-se por três pontos seguidos, por exemplo: ABC - circunferência que passa pelos pontos A, B e C , ou por uma letra maiúscula do alfabeto latino com um índice - normalmente do tipo C_1 .
- Ângulos denotam-se por letras minúsculas do alfabeto grego: $\alpha, \beta, \delta, \theta, \lambda, \dots$ ou por letras minúsculas do alfabeto latino: x, y, z, \dots ou pelo ponto que determina o vértice do ângulo (por exemplo: A), logo que não haja ambiguidade, ou ainda pelo símbolo “ \angle ” seguido de três pontos, por exemplo: $\angle AOB$ - ângulo definido pelos pontos A, O e B com vértice em O ou $\angle A$ - ângulo de vértice A .
- As arestas de poliedros que sejam invisíveis são representadas, nas figuras, a tracejado.
- Por defeito, não se escrevem, quando nos referimos a prismas rectos, convexos e regulares, as designações “recto”, “convexo” e “regular”.
- Por defeito, não se escrevem, quando nos referimos a pirâmides rectas e regulares, as designações “recta” e “regular”.
- Escreve-se, por exemplo, 2π em vez de 2π *radianos* ou de 2π *rad*.
- Escreve-se “*sen*” em vez de *seno* e $(\sin \alpha)^2 = \sin^2 \alpha$
- Escreve-se “*cos*” em vez de *co-seno* e $(\cos \alpha)^2 = \cos^2 \alpha$
- Escreve-se “*tg*” em vez de *tangente* e $(\tan \alpha)^2 = \tan^2 \alpha$
- Escreve-se “*cotg*” em vez de *co-tangente* e $(\cot \alpha)^2 = \cot^2 \alpha$
- Escreve-se “*cosec*” em vez de *co-secante* e $(\operatorname{cosec} \alpha)^2 = \operatorname{cosec}^2 \alpha$
- Escreve-se “*sec*” em vez de *secante* e $(\sec \alpha)^2 = \sec^2 \alpha$
- Escreve-se “*arccos*” em vez de *arcocoseno* (e o mesmo para as outras funções trigonométricas inversas)

- Funções ou aplicações denotam-se, normalmente, por letras minúsculas do alfabeto latino: f, g, h, ...

Notações

$[AB \dots]$... semi-recta de origem no ponto A e que passa pelo ponto B.

$[AB]$... segmento de recta com extremos os pontos A e B. Notamos, ainda, segmento de recta por uma letra minúscula do alfabeto latino: m, n, o, p, ...

$[A, B]$... segmento de recta orientado com origem no ponto A e extremidade no ponto B.

\overline{AB} ... comprimento do segmento de recta $[AB]$

$d(A, B)$... distância do ponto A ao ponto B.

$d(A, r)$... distância do ponto A à recta r.

\widehat{AOB} ou $m\angle AOB$... amplitude ou medida do ângulo AOB.

$\Delta[ABC]$... triângulo definido pelos pontos A, B e C.

$[ABC \dots Z \dots]$... linha poligonal aberta definida pelos pontos A, B, C, ..., e Z.

$[ABC \dots Z]$... polígono definido pelos pontos A, B, C, ..., e Z.

\vec{u} ou \overrightarrow{AB} ... vector u ou vector de origem no ponto A e extremo no ponto B.

(\vec{u}, \vec{v}) ... amplitude do ângulo formado pelos vectores \vec{u} e \vec{v} .

$\|\overrightarrow{AB}\| = \|B - A\| = \overline{AB}$... comprimento de um vector \overrightarrow{AB} .

$\text{vers } \vec{u}$... versor do vector \vec{u} .

$\text{proj}_{\vec{v}} \vec{u}$... projecção ortogonal do vector \vec{u} sobre o vector \vec{v} .

arco AB ... arco de circunferência de origem A e extremidade B.

arco ABC ... arco de circunferência de origem A e extremidade C passando pelo ponto B.

\widehat{AB} ou $m(\text{arco AB})$... amplitude ou medida do arco AB.

$[a, b]$... intervalo fechado de números reais de extremos a e b (incluindo-os), e $a < b$.

$]a, b[$... intervalo aberto de números reais de extremos a e b (excluindo-os), e $a < b$.

$[a, b[$... intervalo fechado à esquerda (inclui a) e aberto à direita (exclui b) de números reais de extremos a e b, e $a < b$.

$]a, b]$... intervalo aberto à esquerda (exclui a) e fechado à direita (inclui b) de números reais de extremos a e b, e $a < b$.

(a, b) ... par ordenado de números reais: $a, b \in \mathbb{R}$

o ... ponto no software “The Geometer’s Sketchpad™”. Quase todas as figuras, da tese, são realizadas neste software (atenção ao conflito que se cria na representação gráfica de funções:

“bolinha aberta” no gráfico representa uma “interrupção”; “bolinha cheia” significa inclusão (continuidade)).

sse ... abrevia “se e só se” ou “se e somente se” e traduz uma equivalência (\Leftrightarrow).

c. o. n. ... abrevia “cartesiano ortonormado”.

b. o. n. ... abrevia “base ortonormada”.

c. q. d. ... abrevia “como queríamos demonstrar”.

P.V. ... abrevia “Proposição Verdadeira”.

P.F. ... abrevia “Proposição Falsa”.

Símbolos

= igual a ...

\neq diferente de ...

\equiv idêntico a ... ou definido por ...

\cong geometricamente igual a ... ou congruente a ...

\sim semelhante a ...

\approx aproximadamente igual a ...

$<$ menor que

\leq menor ou igual a ...

$>$ maior que

\geq maior ou igual a ...

\in pertence

\notin não pertence

\subset contido em

\supset contém

\cup reunião de conjuntos

\cap intersecção de conjuntos

\vee lê-se “ou” e representa a operação *disjunção* de condições

\wedge lê-se “e” e representa a operação *conjunção* de condições

\Leftrightarrow lê-se “equivalente a ...”

\Rightarrow lê-se “implica que” e exprime uma implicação – usamos as palavras “se ... então ...”

\emptyset ou $\{ \}$ conjunto vazio

\parallel paralelo(a) a ... ou colinear com ...

\perp perpendicular a ...

Δ triângulo

\sphericalangle ângulo

\forall quantificador universal e lê-se “qualquer que seja ...”

\exists quantificador de existência e lê-se “existe pelo menos um ...”

$\exists!$ lê-se “existe um e só um ...”

O alfabeto grego:

maiúsculas	minúsculas		maiúsculas	minúsculas	
A	α alfa	B	β beta
Γ	γ gama	Δ	δ delta
E	ϵ epsilon	Z	ζ zeta
H	η eta	Θ	θ teta
I	ι iota	K	κ kapa
Λ	λ lambda	M	μ miú
N	ν niú	Ξ	ξ esi
O	\omicron omicron	Π	π pi
P	ρ ró	Σ	σ sigma
T	τ tau	Y	υ ípsilon
Φ	ϕ, φ fi	X	χ qui
Ψ	ψ psi	Ω	ω ómega

Prefácio

A presente Tese surge na sequência da motivação apresentada pelo Professor Pedro Augusto, no âmbito da cadeira de *Tópicos de Geometria* do 1º ano do curso de *Mestrado em Matemática para o Ensino*, na Universidade da Madeira, nos anos lectivos 1999/2001. A principal motivação foi dada aquando da apresentação do software de geometria dinâmica o “*The Geometer’s Sketchpad™*”. Pensei em levar à prática este software. Tinha de o levar para as salas de aula, não sabendo bem como. Concerteza tinha de pegar nos programas de Matemática e nos manuais, em particular nos temas relacionadas com a geometria, e ver o que poderia fazer com esta, para mim, nova ferramenta. Posteriormente, tendo a parte lectiva concluída e tendo a necessidade de realizar um trabalho de tese, no 2º ano do mestrado, surgiu a possibilidade de concretizar a vontade inicial.

Pretende-se então, neste trabalho, com base no Programa de Matemática para o Ensino Secundário, de Janeiro de 1997, com incidência nos temas relacionados com a geometria: no 10º Ano - Geometria no plano e no Espaço I e no 11º Ano - Geometria no Plano e no Espaço II, e, sobretudo, com o apoio deste software, formas ou maneiras de apresentação dos conteúdos que sejam, para além de diferentes e inovadoras, atractivas para os alunos e ao mesmo tempo lhes facilite a aprendizagem destes tópicos que são tão caros aos matemáticos e aos professores que ensinam matemática a este nível.

O corpo da Tese está dividido em cinco capítulos. O primeiro “A Geometria: Notas Históricas”, o segundo “Trigonometria no Plano Euclidiano”, o terceiro “Geometria Plana”, o quarto “Geometria no Espaço” e o último “Outras Aplicações para o Sketchpad™”.

No primeiro capítulo faz-se um breve resumo cronológico, com base nos livros de História da Matemática mencionados na Bibliografia, sobre a evolução da geometria. O objectivo, nesta primeira parte, é dar ao leitor uns quantos apontamentos/referências acerca da evolução da geometria ao longo dos séculos.

Nos três capítulos seguintes, seguimos o programa em vigor da disciplina de Matemática, para o Ensino Secundário, de forma tão fiel quanto possível. No entanto, sempre que considerámos necessário e adequado falámos de noções/conceitos que podem ser perfeitamente explorados, a este nível, em particular sobre a forma de actividade com a ferramenta que ora se trata. Um exemplo será, aquando do estudo da Trigonometria no Plano Euclidiano, as coordenadas polares, que não fazendo parte do programa estão, além das coordenadas cartesianas, disponíveis no *Sketchpad™*. Outro exemplo, ainda no primeiro capítulo, será o estudo da *Lei dos Senos*, que embora não estando prevista no programa actual, pelo menos de forma explícita, é um assunto que pode, no entanto, num futuro próximo integrar o programa devido à sua utilidade, pois, como se sabe, em

variadíssimas situações do mundo real surgem triângulos não rectângulos e, a sua resolução, exige o conhecimento desta lei. Outro exemplo ainda, é o estudo das transformações geométricas no plano, no capítulo da Geometria Plana. Pretendeu-se apresentar de forma sistematizada as transformações geométricas que podem ser trabalhadas ao nível do ensino secundário, de acordo também com alguns autores contemporâneos, nomeadamente A. J. Franco de Oliveira, Eduardo Veloso e Paulo Ventura Araújo (aliás esta exposição segue-os muito de perto – ver bibliografia), considerando mesmo a possibilidade de os alunos terem já tido contacto com algumas destas noções ao nível do ensino básico. Ainda, nesta secção, apresentámos algumas propriedades das transformações geométricas, que julgamos pertinentes e adequadas ao nível que se pretende trabalhar, sem qualquer demonstração, pois pretende-se que se faça uso do software *Sketchpad*TM.

Na penúltima e última secção dos capítulos 2, 3 e 4, chamadas de “Aplicações práticas” e “Aplicações práticas no SketchpadTM”, respectivamente, estão reunidos alguns exercícios/aplicações relativas ao mesmo capítulo. Estes exercícios/aplicações estão resolvidas, na maior parte das vezes, com recurso ao SketchpadTM e indicando, para alguns desses exercícios/aplicações, os passos sucessivos para a sua resolução no “*The Geometer’s Sketchpad*TM”. Os exercícios/aplicações propostos são retiradas na integra (nesse caso está indicado dentro de parênteses) ou adaptados (nesse caso está também indicado dentro de parênteses) de livros, das brochuras de Geometria para os 10º e 11º anos, editadas pelo Ministério de Educação – Departamento do Ensino Secundário ou dos manuais escolares editados (que estão mencionados na bibliografia) ou são da minha própria autoria (nesse caso não há qualquer indicação). Alguns exercícios foram deixados ao cuidado do leitor e neste caso está indicado dentro de parênteses: “exercício proposto”; e desses alguns estão resolvidos num ficheiro associado.

Criámos doze apêndices, para complementar assuntos/resultados. O Apêndice I, é sobre o “*The Geometer’s Sketchpad*TM” para que o leitor se possa introduzir e familiarizar com este software. No Apêndice VI faz-se uma “memória descritiva” para utilização do ficheiros GSP ou GSS, com animações ou rotinas, respectivamente, em complemento aos exercícios/aplicações, que juntamos, em anexo, numa disquete.

Nota-se que todas as figuras introduzidas no trabalho foram construídas com o *Sketchpad*TM, exceptuando os quatro poliedros regulares estrelados (poliedros de Kepler – Poissant) e os treze poliedros semi-regulares ou arquimedianos.

Porto Santo, Maio de 2002
José Ricardo Teixeira Vasconcelos

Agradecimentos

Seria injusto estabelecer uma hierarquia perante um grupo de pessoas que me possibilitaram, e muito me ajudaram, chegar até aqui.

Naturalmente que desde a primeira hora, do Curso de Mestrado em Matemática para o Ensino – Universidade da Madeira, tive o apoio fundamental da minha família. Quero agradecer a paciência da minha mulher e dos meus filhos, que sendo pequenos (Mara – 8 anos e João – 4 anos) não puderam ter o pai tão disponível quanto queriam e exigiam.

Não menos fundamental, mas naturalmente noutra linha de ajuda e de orientação, o Professor Doutor Pedro Manuel Augusto. Muito obrigado Professor por ter aceite na hora e de forma espontânea a proposta de trabalho que lhe fazia para a presente Tese. Deu-me, além dos seus ensinamentos, todo o apoio possível e necessário à realização deste trabalho. Não só prestando, sempre que solicitado, esclarecimentos pontualmente como dando preciosas sugestões e motivações para a concretização do mesmo.

Agradeço aos meus colegas, Fernando Caroto e Paulo Escórcio, com quem trabalho todos os dias na Escola Básica e Secundária Professor Dr. Francisco de Freitas Branco, Porto Santo, não só o seu apoio mas também por terem-me “libertado” de muitas, mas muitas, horas de trabalho na Escola – Muito obrigado.

Foram bastantes os colegas e amigos que deram, de uma forma ou de outra – com sugestões, emprestando material, adquirindo material, respondendo a dúvidas, etc., a sua colaboração. Não querendo destacar nomes em detrimento de outros, menciono os nomes de alguns colegas (Ana Cristina, Luís, Maria José, Zaida, ...) e amigos (Duarte Patrício, Graça Neves, Luís Freitas, Margarida Menezes, Miguel Vasconcelos, ...) e perdoem-me todos aqueles que não foram mencionados. Bem ajam!

Quero também agradecer à Comissão de Mestrado, Professora Doutora Margarida Faria, Professor Doutor José Carmo e Professor Doutor Pedro Augusto, e logo à Universidade da Madeira, por terem-me concedido apoio financeiro, pois sem ele teria sido muito mais difícil, senão impossível, a realização do Curso e desta Tese, a partir da Ilha de Porto Santo – Arquipélago da Madeira.

Capítulo 1 – A Geometria: Notas Históricas

1.1 O mundo Grego

*“Quando eu traço a meu prazer os movimentos dos corpos celestiais,
eu já não toco a terra com os meus pés:
eu estou na presença do próprio Zeus e alimento-me de ambrosia,
o manjar dos deuses.”*

PTOLOMEU [circa 85 – 165 d. C.]

1.1.1 Das origens à Idade Áurea

Conjecturas sobre as origens da matemática e da geometria¹, em particular, são necessariamente arriscadas, pois os primórdios da disciplina são mais antigos que a escrita. Foi somente nos últimos seis milénios, numa carreira que pode ter coberto centenas de milénios, que o homem se mostrou capaz de pôr os seus registos e pensamentos em forma de escrita. Para informações sobre a pré-história dependemos de interpretações baseadas nos poucos artefactos que restaram e da evidência fornecida pela moderna antropologia, a partir dos documentos que sobreviveram. Heródoto² e Aristóteles³ (circa 384 – 322 a. C.) não quiseram arriscar a propor origens mais antigas que a civilização egípcia, mas certamente que a geometria que tinham em mente tinha raízes mais antigas.

Heródoto defendia que a geometria teve origem no Egipto, pois acreditava que tinha surgido da necessidade prática de fazer novas medidas de terras após cada inundaçãõ anual no vale do rio. Aristóteles achava que a existência no Egipto de uma classe sacerdotal com lazeres é que tinha conduzido ao estudo da geometria. Podemos considerar as ideias de Heródoto e de Aristóteles como representando duas teorias opostas quanto às origens da matemática, e em particular da geometria. O facto dos geómetras egípcios serem às vezes chamados “estiradores de corda” ou “agrimensores” pode ser tomado como apoio de qualquer das duas teorias, pois cordas eram indiscutivelmente usadas tanto para traçar as bases de templos como para reorganizar as demarcações apagadas nas terras. Não poderemos contradizer com segurança nem Heródoto nem

¹ O termo “geometria” deriva do grego *geometrein*, que significa medição da terra: *geo* = terra, *metrein* = medir.

² Hérodoto foi um historiador grego que viveu no século V a. C..

Aristóteles quanto à motivação que produziu a matemática, mas parece claro que ambos subestimaram a idade do assunto.

O homem do neolítico pode ter tido pouco lazer e pouca necessidade de medir terras, porém os seus desenhos e figuras sugerem uma preocupação com relações espaciais que abriu caminho para a geometria. Os seus potes, tecidos e cestas mostram exemplos de congruências e de simetrias, que em essência são partes da geometria elementar. Além disso, sequências simples de desenhos sugerem uma espécie de teoria dos grupos. Para o período pré-histórico não há documentos, portanto é impossível acompanhar a evolução da matemática desde um desenho específico até um teorema familiar. Acredita-se que ao menos alguns dos antigos géometras trabalharam pela pura satisfação de fazer matemática, não como auxílio prático de mensuração. Mas há outras alternativas. Uma é que a geometria, como a contagem, tivesse origem em rituais primitivos. Os mais antigos resultados geométricos encontrados na Índia formam o que se chamou *os Sulvasutras* ou *regras de corda*, que datam de 500 a. C. aproximadamente. Tratavam-se de relações e de regras matemáticas simples, que aparentemente se aplicavam à construção de templos e de altares. Pensa-se usualmente que a motivação geométrica dos *estiradores de corda* no Egipto era mais prática do que as dos seus colegas na Índia.

Tenhamos em mente que a teoria da origem da geometria numa secularização de práticas rituais não está de modo nenhum provada. O desenvolvimento da geometria pode também ter sido estimulado por necessidades práticas de construção e demarcação de terras, ou por sentimentos estéticos em relação a configurações e ordem. Que os começos da matemática são mais antigos que as mais antigas civilizações é evidente. Ir além e identificar categoricamente uma origem determinada no espaço e no tempo, no entanto, é confundir conjectura com história.

É com os géometras gregos, começando com Tales de Mileto (circa 624 – 547 a. C.), que a geometria é estabelecida como teoria dedutiva. A intuição, a descoberta empírica e a experimentação têm lugar, mas é o raciocínio dedutivo, a demonstração ou a dedução a partir de hipóteses conhecidas ou admitidas que estabelece a veracidade das proposições geométricas. O trabalho de sistematização em geometria iniciado por Tales é continuado nos séculos posteriores, nomeadamente pelos pitagóricos. Pitágoras (circa 572 – 497 a. C.), após longas viagens pela Babilónia e Egipto, estabeleceu-se em Crotona, cidade grega no sul de Itália, por volta de 530 a. C., onde fundou um culto religioso e filosófico que cultivava a purificação do espírito através da música e da matemática. Não existem documentos matemáticos de produção pitagórica, nem é possível saber-se exactamente a quem atribuir a origem das descobertas matemáticas dos

³ Aristóteles não foi matemático, foi filósofo e biólogo, mas deu importantes contributos para a evolução da matemática.

pitagóricos na aritmética e na geometria, mas o essencial das suas contribuições geométricas consta nos *Elementos*, do matemático grego Hipócrates de Quios (circa 460 – 400 a. C.), escrito por volta de 400 a. C., também perdido para a história mas sistematizado nos livros I e IV de *Os Elementos* de Euclides (circa 323 – 285 a. C.). Estes são uma obra composta por 13 livros, publicada por volta de 300 a. C., e contêm uma grande parte dos assuntos de matemática elementar que os gregos anteriores a Euclides, o próprio Euclides e outros matemáticos seus contemporâneos, elaboraram. Estes são expostos de uma forma coerente e consistente que persistiu durante mais de vinte séculos. “*Os Elementos* são, a seguir à Bíblia, provavelmente, o livro mais reproduzido e estudado na história do mundo ocidental.” (Struik 1989).

Euclides, cuja biografia pouco se conhece, parece ter sido convidado para dirigir o Departamento de Matemática da Universidade de Alexandria, aberta no ano 300 a. C., onde fundou a escola de matemática de Alexandria. No que respeita à geometria, Euclides organiza as matérias de um modo sistemático a partir de primeiros princípios e definições, procedendo ao seu desenvolvimento por via dedutiva. Inaugurando assim, de maneira brilhante, o estudo metódico da geometria, que domina o mundo matemático durante mais de vinte séculos, o chamado *método axiomático*.

Os matemáticos gregos Eudóxio de Cnido (circa 408 – 355 a. C.) e Arquimedes de Siracusa (circa 287 – 212 a. C.), foram dois dos expoentes da Academia fundada pelo filósofo Platão⁴ (circa 429 – 347 a. C.) em Atenas no ano de 387 a. C.. Na *República*⁵ Platão expõe a sua concepção de matemática como “uma actividade mental mais valiosa do que mil olhares, pois só através dela a verdade pode ser apreendida”.

Eudóxio foi o mais célebre matemático e astrónomo do seu tempo e é talvez o primeiro matemático puro e investigador. Deu várias contribuições geométricas, entre as quais sobre a secção áurea (ver secção 5.1).

Arquimedes foi o mais famoso matemático e físico do período helenístico⁶ e de toda a antiguidade. Os seus escritos são, em regra, concisos, rigorosos nas demonstrações e plenos de originalidade. A sua obra prima é o tratado *Da esfera e do cilindro*. Arquimedes também é conhecido como grande inventor de engenhos mecânicos e de diversas máquinas de guerra que

⁴ Platão foi filósofo mas deu importantes contributos, de forma indirecta, à matemática, orientando e estimulando o estudo e a aprendizagem da disciplina na sua escola. Platão era o centro da actividade matemática da época e guiava e inspirava o seu desenvolvimento. Sobre as portas da sua Academia, em Atenas, lia-se: “Que ninguém que ignore a geometria entre aqui.” (Boyer 1996).

⁵ A *República* é uma obra filosófica escrita por Platão em 360 a. C..

⁶ O intervalo entre aproximadamente 800 a. C. e 800 d. C. é chamado Idade Talássica ou Idade do Mar. A primeira parte da Idade Talássica é chamada era Helénica e conseqüentemente, as culturas mais antigas (antes de 800 a. C.) são ditas pré-helénicas. Por outro lado, consideram-se dois grandes períodos no mundo grego, que cobre um intervalo de tempo entre 600 a. C. e 600 d. C., aproximadamente, separado por uma linha divisória definida pela morte de Alexandre-o-Grande, em 323 a. C.. A parte mais antiga chama-se Idade Helénica e a segunda chama-se Helenística ou Alexandrina.

permitiram a Siracusa resistir a um cerco pelo exército romano durante vários anos. Sabe-se que acabou por ser morto quando os Romanos tomaram a cidade de Siracusa. Arquimedes descreve como descobria os seus resultados em *O Método*, importante documento escrito e enviado na forma de carta, dirigida a Eratóstenes de Cirene (circa 276 – 194 a. C.), matemático, astrónomo, geógrafo, historiador, poeta e bibliotecário na Universidade de Alexandria. Os argumentos que utiliza (decomposição de superfícies e sólidos em ‘faixas’ ou ‘fatias’ de espessura infinitesimal) são precursores das técnicas sofisticadas do cálculo integral moderno. Outro grande matemático e astrónomo do período helenístico foi Apolónio de Perga (circa 262 – 190 a. C.), um quarto de século mais novo do que Arquimedes. Apolónio estudou e ensinou em Alexandria, tendo sido cognominado “*O Grande Geómetra*” pelo seu tratado sobre *Cónicas*, em oito volumes, a última obra prima da matemática grega.

A “Idade Áurea” da matemática grega decorre no período entre 300 a. C. e 200 a. C., aproximadamente, e é assim chamada sobretudo devido às obras de Euclides, Arquimedes e Apolónio. Este período fértil de produção matemática, na Grécia, declina a partir do terceiro século a. C., particularmente após a morte do rei Ptolomeu III, em 221 a. C., quando a agitação política e social leva à destruição parcial do museu/biblioteca de Alexandria.

1.1.2 Os três problemas clássicos da geometria grega

Foi no período helenístico que surgiram os *três problemas clássicos da geometria grega* que desafiaram durante muitos séculos a habilidade dos matemáticos, particularmente os géometras herdeiros da tradição grega. Pretendia-se resolver apenas com régua não graduada e compasso os seguintes problemas:

1. *Quadratura do círculo*: Dado um círculo C de raio r , determinar o lado a de um quadrado $[ABCD]$ de área igual à de C (Figura 1.1).

2. *Duplicação do cubo*: Dado um cubo de aresta a , determinar a aresta b de outro cubo com o dobro do volume (Figura 1.2).

3. *Trisseção do ângulo*: Dado um ângulo qualquer, $\angle AOB$, determinar um ângulo $\angle AOC$ com um terço da amplitude do ângulo $\angle AOB$ (Figura 1.3).

Foi apenas no século XIX que se demonstrou a impossibilidade da resolução destes três problemas nos termos enunciados. No entanto, a geometria desenvolveu-se grandemente, ao longo

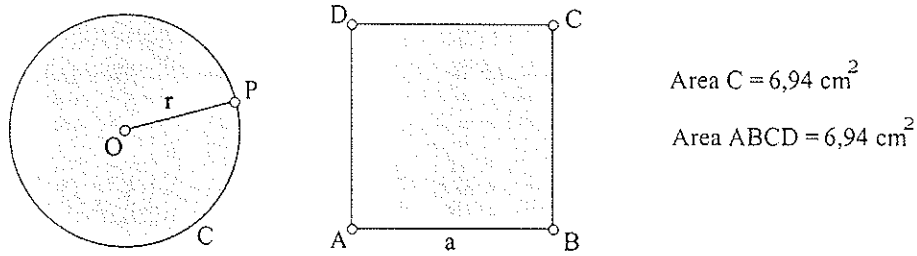


Figura 1.1: O círculo C de raio $r \equiv [OP]$ (esquerda), tem a mesma área que o quadrado $[ABCD]$ de lado $a \equiv [AB]$ (direita). Ver Apêndice VI, *Capítulo 1*, o ficheiro *Quadratura_Circulo.gss*.

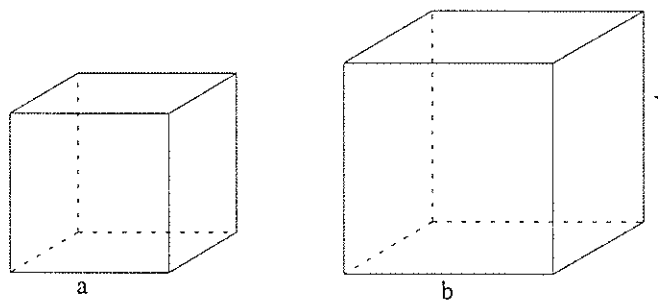


Figura 1.2: O cubo de aresta b (direita) tem o dobro do volume do cubo de aresta a (esquerda):
 $2a^3 = b^3 \Leftrightarrow b = \sqrt[3]{2} a$.

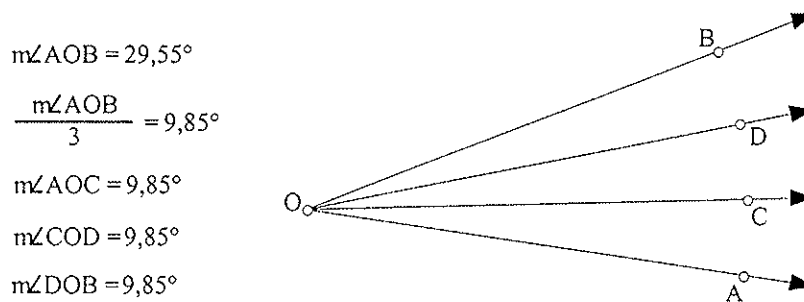


Figura 1.3: O $\angle AOC$ é um terço da amplitude do $\angle AOB$. Ver Apêndice VI, *Capítulo 1*, o ficheiro *Trissecção_Ângulo.gss*.

dos séculos, na sequência das tentativas de resolução destes problemas, levando, nomeadamente à descoberta das secções cónicas e de algumas curvas cúbicas.

“A importância destes problemas consiste no facto de eles não poderem ser resolvidos geometricamente pela construção de um número finito de linhas rectas e círculos senão por aproximação, constituindo um meio de alcançar novos campos da matemática.” (Struik 1989).

1.1.3 A Trigonometria

A Trigonometria⁷ é um ramo da matemática que teve origem na Grécia Antiga e que, inicialmente, se dedicava ao estudo das relações entre as medidas dos lados e dos ângulos dos triângulos. “A Trigonometria, como os outros ramos da matemática, não foi obra de um só homem ou nação. ... Dada a falta, no período pré-hilénico (antes de 800 a. C.), do conceito de medida de ângulo, um tal estudo seria, porventura, mais correctamente chamado ‘Trilaterometria’, ou medida de polígonos de três lados (triláteros), do que ‘trigonometria’, a medida de partes de um triângulo. Com os gregos, pela primeira vez, encontramos um estudo sistemático de relações entre ângulos (ou arcos) num círculo e os comprimentos das cordas que os subentendem (Figuras 2.1, 2.2 e 2.3). As propriedades das cordas, como medidas de ângulos ao centro ou inscritos no círculo (Figura 2.2), eram conhecidas dos gregos do tempo de Hipócrates e é provável que Eudóximo tenha usado razões e medidas de ângulos para determinar o tamanho da terra e as distâncias relativas do Sol e da Lua. Nas obras de Euclides não há trigonometria, no sentido estrito da palavra, mas há teoremas equivalentes a leis ou fórmulas trigonométricas específicas. Os astrónomos da antiguidade, como Aristarco de Samos (circa 310 – 230 a. C.) e Eratóstenes de Cirene⁸, tratavam problemas que indicavam a necessidade de relações mais sistematizadas entre ângulos e cordas.” (Boyer 1996). Durante cerca de dois séculos e meio, de Hipócrates a Eratóstenes, os matemáticos gregos estudaram as relações entre rectas e círculos e aplicaram-nas a uma variedade de problemas de astronomia, mas disso não resultou uma trigonometria sistemática. Presumivelmente na segunda metade do século II a. C., foi compilada a primeira tabela trigonométrica pelo astrónomo Hiparco de Nicéia, que assim passou a ser chamado “o pai da Trigonometria”⁹.

A obra mais influente e significativa de trigonometria da antiguidade foi a *Syntaxis Matemática* (“Síntese Matemática”), uma colecção de treze livros escrita pelo astrónomo Cláudio Ptolomeu (circa 85 – 165 d. C.), mais conhecido por Ptolomeu de Alexandria. Mais tarde na Arábia,

⁷ A origem da palavra “trigonometria” é grega: *trignos* = triângulo + *metrein* = medir, ou seja, significa “medir triângulos”.

⁸ Eratóstenes é hoje lembrado como sendo o matemático da antiguidade que deu uma melhor aproximação para o perímetro da Terra, cerca de 37 000 quilómetros. Sabe-se, hoje, que o perímetro médio da Terra é aproximadamente igual a 38 400 quilómetros. Eratóstenes observou que na cidade de Siena (hoje Assuan) do sul do Egipto, no dia do solstício de Verão, o Sol iluminava o fundo de um poço profundo, ou seja, o Sol estava no zénite (ponto da esfera celeste que relativamente a cada lugar da Terra, é encontrado pela vertical levantada desse lugar – o ponto mais elevado). No mesmo dia, em Alexandria, tomada como estando no mesmo meridiano a 800 km a norte de Siena, verificou que o Sol lançava uma sombra, a partir de uma coluna de altura conhecida, indicando

o ângulo do Sol com o zénite de 7,5°: $\frac{7,5^\circ}{800\text{km}} = \frac{360^\circ}{x} \Leftrightarrow x = 38\,400 \text{ km}$.

surgiu o costume de se chamar à obra de Ptolomeu, para a distinguir de outras, como o *Almagesto*¹⁰ (para significar “a maior”) e é, a partir de então, por esse nome conhecida. As obras de Ptolomeu, *Almagesto* e *Geografia*, dominam os estudos astronómicos durante muitos séculos, com inúmeras aplicações de geometria.

Menelau e Ptolomeu pertencem à chamada segunda escola de Alexandria, que vai desde o ano 30 d. C., em que o Egipto passou a propriedade pessoal do Imperador Romano, estabelecida a *pax romana*, até à conquista de Alexandria pelos árabes em 641 d. C., em plena Idade Média.

1.1.4 Da Idade Áurea à Idade Média

Nos três séculos seguintes são apenas dignos de menção pelas suas contribuições matemáticas Hiparco de Niceia (circa 180 – 125 a. C.), astrónomo e organizador de alguns resultados no ramo da trigonometria, e o geómetra e astrónomo Menelau de Alexandria já no final do primeiro século d. C..

Entre os anos de 250 e 350 d. C. assiste-se a um ressurgimento dos estudos matemáticos em Alexandria, com Herão de Alexandria (supõe-se ter vivido na segunda metade do século I), matemático, físico e comentador de *Os Elementos*, Diofanto de Alexandria (circa 250), que foi o maior algebrista grego e cuja principal obra é a *Aritmética*, e Papo de Alexandria (inícios do século IV), historiador e geómetra e outro comentador grego de *Os Elementos*. Merece também destaque Teão de Alexandria (circa 364 d. C.) que elaborou comentários e foi autor de uma edição de *Os Elementos*. Teão é pai de Hipátia de Alexandria – a primeira mulher matemática. Hipátia escreveu comentários sobre os trabalhos de Apolónio, Ptolomeu e Diofanto.

Merece ainda destaque Proclo (410 – 485) que estudou em Alexandria mas mudou-se para Atenas, tornando-se director da Academia. Proclo era mais filósofo que matemático, mas as suas observações são importantes para a história da geometria grega mais antiga. O seu comentário sobre o livro I de *Os Elementos*, de Euclides, contém valiosa informação sobre a história da geometria pré-euclidiana. O imperador Justiniano encerrou a Academia e outras escolas filosóficas em Atenas no ano 529, por julgar serem estas uma ameaça ao cristianismo. Esse ano marcou o início da “Idade Média”¹¹.

⁹ “Aristarco sabia que num dado círculo a razão do arco para a corda diminui quando o arco diminui de 180° para 0°, aproximando-se do limite 1. No entanto, parece que antes de Hiparco empreender a tarefa ninguém tinha tabulado valores correspondentes do arco e da corda para toda uma série de ângulos.” (Boyer 1996).

¹⁰ O termo “Almagesto” é uma contracção de Megiste Syntaxis (grande colecção) – ver <http://astro.if.ufrgs.br/antiga/antiga.htm>.

¹¹ Considera-se que a Idade Média começa no século VI d. C. e termina no século XV.

1.2 Idade Média e Renascimento

1.2.1 Da Idade Média ao Renascimento

Neste longo período, pouco fértil na produção matemática e científica, em geral, comparativamente às realizações matemáticas da Grécia antiga, a Índia deu uma grande contribuição à trigonometria, pois parece que, aqui nasceu a precursora da função trigonométrica moderna: *seno de um ângulo*. A trigonometria hindu era um instrumento útil e preciso para a astronomia. Mas foi através dos árabes, e não directamente dos hindus, que a função seno chegou à Europa. A astronomia árabe estava também particularmente interessada na trigonometria. Nos trabalhos de um dos maiores astrónomos árabes, Albatégnius (circa 850 – 929 d. C.), a trigonometria é já estudada com alguma profundidade e revelam que os matemáticos árabes não se limitavam a copiar, mas também contribuíram com novos resultados, através do seu domínio dos métodos gregos e orientais. “Al-Buzjani (circa 940 – 997/8 d. C.), ..., calculou tabelas de senos para intervalos de 15’, cujos valores eram calculados com oito decimais exactos, introduziu equivalentes da secante e da cosecante e fez construções geométricas usando um compasso de abertura fixa.” (Struik1989). Ainda no período medieval, a função tangente tornou-se conhecida. Nesta altura estávamos já em contacto mais imediato com a trigonometria moderna pois a função tangente dos árabes, ao contrário da função seno hindu, em geral, era dada para um círculo unitário. Arzaquiel (circa 1029 – 1087) editou as chamadas tabelas planetárias de Toledo (Espanha). As tabelas trigonométricas deste trabalho tiveram certa influência no desenvolvimento da trigonometria no Renascimento.

O italiano Leonardo de Pisa (1180 – 1250) foi o principal matemático do período medieval na Europa. Ficou mais conhecido por Fibonacci (filho de Bonaccio). Fibonacci era sobretudo um algebrista que ficou famoso pela série de números que tem o seu nome, *série de Fibonacci*: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... – na qual cada termo é a soma dos dois termos precedentes. Escreveu até 1202 a obra célebre *Liber Abaci* onde afirma que a aritmética e a geometria estão estreitamente ligadas e auxiliam-se mutuamente. Este livro trata mais de números do que de geometria. Mais tarde, em 1220, Fibonacci escreve um livro mais voltado para a geometria e trigonometria, *Pratica Geometriae*, que contém, entre outras coisas, uma prova de que as medianas de um triângulo dividem-se na razão de 2 para 1.

Com a criação das universidades europeias, nos fins do século XII e início do século XIII, como em Paris, Oxford e Cambridge, a filosofia e a ciência aristotélica são recuperadas e ensinadas

nas universidades. As obras de Euclides, Arquimedes, Apolónio e Ptolomeu vão sendo traduzidas progressivamente do árabe para o latim. A Europa saía assim, lentamente, da Idade Média e caminhava para uma evolução significativa, no período seguinte, no estudo da matemática.

1.2.2 O Renascimento

Com o Renascimento¹², a partir do ano de 1436, aproximadamente, recomeçou o estudo metódico da Geometria. O renascimento da matemática, e em particular da trigonometria, fica marcado com a obra *De triangulis omnimodis* - uma exposição sistemática dos métodos para resolver triângulos, do alemão Johannes Müller (1436 – 1476), mais conhecido por Regiomontano (forma latina da sua cidade natal: Königsberg – cidade da Baviera), provavelmente o matemático mais influente do século XV e cuja data de nascimento pode porventura servir para marcar o início da nova era. Esta obra marca a separação das disciplinas: trigonometria e astronomia. Regiomontano teve um papel activo na tradução e publicação de manuscritos clássicos de matemática. Regiomontano também se dedicou ao cálculo de tabelas trigonométricas e a problemas de construção geométrica. Foi um grande entusiasta da imprensa escrita¹³ e instala em sua casa uma impressora que facultava a outros matemáticos e escritores. Regiomontano morreu subitamente aos 40 anos.

O frade franciscano Luca Pacioli (1445 – 1509), italiano, escreveu o livro de matemática mais influente dos primeiros tempos da imprensa e do renascimento, sob o título *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalita*. O livro trata de assuntos desde a aritmética, álgebra, geometria à trigonometria. Pacioli publicou também o livro *De divina proportione*, contendo planos de construção de sólidos regulares desenhados por Leonardo da Vinci¹⁴.

Devemos ao polaco Nicolau Copérnico (1473 – 1543) serviços à matemática, em particular na área da trigonometria. Copérnico é mais conhecido como sendo o astrónomo que revolucionou a visão do mundo ao revelar que era a Terra a deslocar-se em torno do Sol e não ao contrário (o que Aristarco tentara sem sucesso) – teoria heliocêntrica do universo. Mas um seu aluno, Georg Joachim Rheticus (1514 – 1576), foi mais longe no estudo da trigonometria. Rheticus combinou as ideias de Regiomontano e de Copérnico, juntamente com as suas, no tratado mais elaborado de trigonometria escrito até então: *Opus palatinum de triangulis*. Neste tratado a trigonometria atingiu a maioridade.

¹² O Renascimento é considerado como o período iniciado por volta do início do século XV e que decorre até ao século XVI.

¹³ O primeiro livro impresso na Europa ocidental data de 1447.

¹⁴ O italiano Leonardo da Vinci (1452 – 1519), tendo estudado matemática com Pacioli, ficou conhecido por aplicar a matemática à ciência e à teoria da perspectiva.

O autor abandonou a tradicional consideração de funções relativas ao arco do círculo e em lugar disso concentrou-se nos triângulos rectângulos. Além disso as seis funções trigonométricas foram completamente utilizadas, calculando elaboradas tabelas de todas.

O português Pedro Nunes (1502 – 1587) estudou matemática e filosofia na Universidade de Lisboa e de Salamanca. Em 1529 é nomeado cosmógrafo do reino. Foi professor, primeiro na Universidade de Lisboa e depois na Universidade de Coimbra. Foi autor de algumas obras matemáticas que fizeram dele o matemático mais importante do séc. XVI na Península Ibérica. Pedro Nunes publica, no ano de 1554, a obra *De Erratis Orontii Finei* onde critica a falta de rigor algébrico utilizada pelo professor de matemática francês Orontii Finei, em Paris, na demonstração dos três problemas clássicos da geometria grega. A sua obra mais metódica e rigorosa é o *Livro de Algebra en Arithmetica y Geometria*, publicada em 1569.

O mais distinto matemático francês do século XVI, François Viète (1540 – 1603), escreveu diversos livros de trigonometria, álgebra e geometria. Com Viète a trigonometria passou a ser caracterizada por uma ênfase maior sobre generalidade e largueza de visão. Assim como Viète foi o verdadeiro fundador de uma álgebra literal também o podemos considerar o pai de uma abordagem analítica generalizada para a trigonometria. É claro que Viète partiu da obra dos seus predecessores. Viète considerava, como Regiomontano, a trigonometria um ramo independente da matemática e, como Rheticus, trabalhava em geral sem referência directa a meia cordas num círculo. Viète, na sua obra *Canon mathematicus*, preparou extensas tabelas de todas as seis funções de ângulos aproximados até ao arco de minuto e recomendou o uso de fracções decimais em vez de sexagesimais. Por esta altura aparecem identidades trigonométricas de vários tipos por toda a parte da Europa, o que teve como resultado uma redução na ênfase da computação na resolução de triângulos e o aumento da preocupação com relações funcionais analíticas (Boyer 1974). Viète observou uma conexão importante entre as suas fórmulas (para $\sin nx$ e $\cos nx$) e a resolução de equações cúbicas, ou seja, a trigonometria servia também de auxiliar para a resolução de problemas algébricos e aritméticos, ampliando assim o seu alcance. Viète também contribuiu para a geometria pura, concentrando-se em problemas originados pelas obras de Apolónio. Na sua obra *Varia responsa*, de 1600, publicou a sua solução de um problema célebre de Apolónio, que Regiomontano duvidava poder ser resolvido com régua e compasso: dadas três quaisquer circunferências, determinar uma circunferência que lhes seja tangente (ver Veloso 1998). Esta construção tornou-se numa das mais belas contribuições de Viète à Matemática. Mais tarde, parece que tais problemas vieram a atrair Descartes para a matemática.

1.3 A Idade Moderna e Contemporânea

Do século XVII em diante¹⁵ a matemática desenvolveu-se muito e depressa à sua própria custa e não devido à acção das forças económicas, sociais ou tecnológicas. Por exemplo, os grandes trabalhos do alemão Johann Kepler (1571 – 1630) permitiram ao homem uma outra visão sobre o universo e dar-lhe outro poder para explicar os fenómenos da astronomia de forma racional. Kepler foi matemático mas é mais conhecido como astrónomo pois deve-se a ele a descoberta das célebres leis sobre o movimento dos planetas que, em sua homenagem, são conhecidas por Leis de Kepler. Na sua obra *Astronomia Nova*, de 1609, publicou as duas primeiras. A 1ª Lei: “Os planetas descrevem órbitas em forma de elipses de que o sol é um dos focos”; e a 2ª Lei: “O raio vector que une o centro de um planeta com o do sol descreve áreas proporcionais aos tempos empregados para as descrever”. Em 1619, na obra *Harmonices Mundi* enuncia a 3ª Lei: “Os quadrados dos tempos de revolução dos planetas em torno do Sol são proporcionais aos cubos dos semieixos maiores das órbitas respectivas”. Kepler ocupou-se do cálculo de volumes na obra *Nova Esteriometria dos Barris de Vinho*, de 1615. Calculou volumes de sólidos obtidos por rotação de segmentos de secções cónicas em volta de um eixo no seu plano.

O italiano Bonaventura Cavalieri (1598 – 1647), escreveu sobre muitos aspectos da matemática pura e aplicada, desde a geometria (pensa-se que devemos-lhe o nome “Perspectiva Cavaleira” – Apêndice II), trigonometria, astronomia à óptica. No seu livro *Directorium universale uranometricum*, de 1632, entre outros assuntos tratou de tabelas de senos, tangentes e secantes. Cavalieri notabilizou-se pelo seu livro *Geometria indivisibilibus continuorum*, publicado em 1635, um dos mais influentes do período moderno ou do período seguinte à Renascença. Neste livro, Cavalieri estabeleceu uma fórmula simples de cálculo, o ponto gerando a recta e a recta gerando o plano através do movimento. Então, Cavalieri sem grandes preocupações com o rigor do seu processo, para calcular a área de uma superfície plana pensou como sendo formada por infinitos segmentos de recta paralelos entre si ou *indivisíveis rectilíneos* e para calcular o volume de um sólido geométrico considera-o como sendo composto de infinitas secções planas paralelas entre si ou *indivisíveis superficiais*. Estas ideias levaram-no ao principio com o seu nome, *Principio de Cavalieri*: “Se dois sólidos geométricos têm alturas iguais entre si e se as áreas das secções planas, A_1 e A_2 , feitas por planos paralelos às bases e a igual distância delas estão sempre numa razão

¹⁵ A Idade Moderna decorre entre os séculos XVI e XVII, e a Idade Contemporânea a partir daí.

constante, então os volumes dos dois sólidos geométricos, V_1 e V_2 , estão também nessa mesma razão, $\frac{A_1}{A_2} = \frac{V_1}{V_2}$ ”.

René Descartes (1596 – 1650) é o matemático e filósofo francês mais conhecido do século XVII. Mas existem outras figuras francesas que ficaram registadas na História da Geometria. Destacaremos, dessas individualidades, apenas quatro: Pierre de Fermat (1601 – 1665), Gilles Persone de Roberval (1602 – 1675), Girard Desargues (1591 – 1661) e Blaise Pascal (1623 – 1662). Descartes não foi verdadeiramente um matemático profissional, apesar de no seu tempo ter sido o melhor em termos de capacidade matemática. Descartes dedicou a sua vida à ciência e à filosofia. Basicamente, a grande e única obra deixada por Descartes à matemática foi *La Géométrie*, publicada em 1637. O grande mérito do seu livro consiste na criação da chamada *Geometria Analítica*. De facto, esta obra além de levar os seus contemporâneos ao conhecimento da geometria analítica, trouxe também uma nova matemática, que veio dar um novo e forte impulso ao pensamento quantitativo e lógico. *La Géométrie* não foi publicada, originalmente, como um tratado, mas sim como um de três apêndices do *Discours de la Méthode* – o discurso sobre o método para raciocinar bem e procurar a verdade nas ciências, onde Descartes expõe a sua concepção racionalista do estudo da natureza (Descartes como filósofo). Nesta obra, Descartes muda a visão da ciência buscando, por meio da dúvida sistemática, ideias claras e precisas de modo a facilitar as descobertas. *La Géométrie* é muitas vezes entendida como uma aplicação da álgebra à geometria ou como a tradução de operações algébricas em linguagem geométrica, introduzindo uma notação muito próxima da moderna. É, acima de tudo, apresentado em *La Géométrie* o nascimento de um novo método para tratar a geometria que permitiu inspirar gerações sucessivas de matemáticos e desenvolver a geometria.

Fermat estudou direito e foi juiz em Toulouse, também não sendo, portanto, um matemático profissional. Parece que dedicava os seus tempos de lazer à literatura clássica, incluindo a ciência e a matemática. Fermat veio dar grandes contributos à matemática, sendo cognominado como “O Príncipe dos Amadores em Matemática”. Escreve, parece que antes de 1637, um pequeno trabalho sobre geometria, publicado apenas em 1679, *Ad locos planos et solidos isagoge* – Introdução aos lugares planos e sólidos. Neste trabalho, Fermat apresenta os princípios fundamentais do método das coordenadas de forma mais clara do que como se apresenta no livro de Descartes, *La Géométrie*. Apresenta também a equação da recta – o que parece não acontecer de forma explícita na obra de Descartes, as equações das circunferências com centro na origem ou noutro ponto qualquer e das outras cónicas. Enquanto Descartes trata de problemas geométricos

apenas no plano, Fermat resolve algebricamente problemas geométricos no plano e no espaço, tornando-se no primeiro matemático a aplicar a geometria analítica ao espaço, a três dimensões.

O único matemático francês verdadeiramente profissional neste período, de entre os aqui apresentados, foi Roberval. Teve uma cátedra no Collège Royal durante cerca de 40 anos e produziu várias contribuições à geometria. Destacamos o primeiro esboço, datado de 1635, de um arco de uma sinusóide (curva que representa o gráfico da função seno – Figura 2.31), permitindo à trigonometria aproximar-se do seu tratamento funcional em detrimento do aspecto computacional.

Girard Desargues foi, antes de matemático, engenheiro e arquitecto militar em Lyon. Desargues deu uma nova interpretação à geometria, passando a tratar as questões geométricas de forma mais geral e apresentando ideias muito inovadoras para a sua época. Além de investigador, Desargues tratou de aplicar as suas novas ideias a questões práticas, nas artes e nas indústrias, referindo que a ciência tem também por função contribuir para a educação social dos povos. Exemplifica, dando ele próprio aulas gratuitas a artistas e trabalhadores, depois destes terminarem o seu dia de trabalho, sobre aplicações da geometria à perspectiva, à mecânica, à construção civil, etc. Desargues, em 1636, escreve um livro sobre perspectiva e no seu panfleto, sob o título *Brouillon – Project d'une atteinte aux évènements des rencontres d'un cone avec un plan* – Projecto de uma tentativa para relacionar os acontecimentos dos encontros de um cone com um plano, escrito em 1639, inicia a preparação do caminho para a *Geometria Projectiva*. Em 1643, Desargues enuncia o teorema designado presentemente como o teorema dos triângulos homólogos e conhecido por *Teorema de Desargues*: “Se dois triângulos $[ABC]$ e $[A'B'C']$, situados ou não no mesmo plano, são tais que as rectas AA' , BB' e CC' concorrem num mesmo ponto D , então os pontos de encontro dos pares de lados correspondentes BC e $B'C'$, CA e $C'A'$, AB e $A'B'$ são colineares” (Figura 1.4).

Pascal foi uma criança-prodígio e tornou-se discípulo de Desargues. Com 16 anos, em 1640, Pascal publicou um ensaio sobre as cónicas. Era apenas uma página impressa, mas o suficiente para se tornar numa das páginas mais fecundas da história da geometria. Continha uma proposição que diz respeito a um hexágono inscrito num círculo, conhecida a partir daí como o Teorema de Pascal. Inventou, aos 19 anos, a primeira máquina de calcular a fim de simplificar o trabalho de seu pai, Etienne Pascal, que também tinha inclinação pela matemática, embora fosse juiz-presidente do tribunal fiscal. Pascal escreve, em 1654, uma obra completa sobre cónicas que nunca veio a ser publicada, mas é referida por outros matemáticos que se lhe seguiram. Apenas em 1664, foi publicado um seu tratado sobre o “triângulo aritmético” formado por coeficientes binomiais, dando assim uma preciosa colaboração ao Cálculo Combinatório. O mérito de Pascal foi

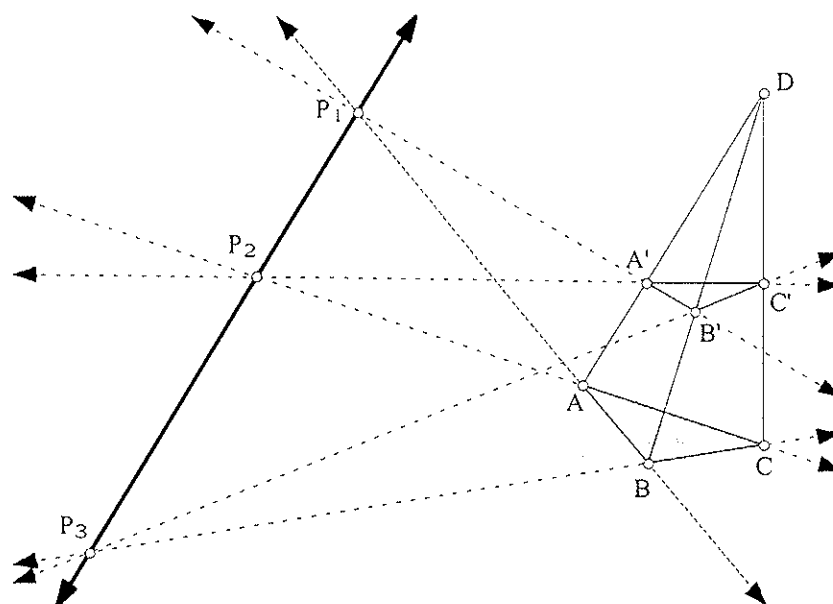


Figura 1.4: O Teorema de Desargues afirma que: “Se dois triângulos $[ABC]$ e $[A'B'C']$, situados ou não no mesmo plano, são tais que as rectas AA' , BB' e CC' concorrem num mesmo ponto D , então os pontos de encontro das rectas correspondentes aos pares de lados respectivos (AB e $A'B'$, CA e $C'A'$, BC e $B'C'$), são colineares”. P_1 , P_2 e P_3 são os pontos de encontro, respectivamente, dos lados correspondentes. Ver Apêndice VI, *Capítulo 1*, ficheiro *Teorema_Desargues.gss*

que, além de descobrir algumas novas propriedades do “triângulo aritmético”, divulgou-o e ligou-o ao estudo das probabilidades, tendo ficado conhecido por “Triângulo Aritmético de Pascal”. Pascal, além de matemático, foi também físico¹⁶, filósofo e teólogo.

No período, pós-renascença, foram muitos e bons os matemáticos que, além dos franceses referidos, deram grandes contributos ao desenvolvimento da Geometria. Vamos aqui dar pouco mais que a biografia de uns poucos que viveram nos séculos XVIII e XIX. O século XIX é considerado, até então, como o mais produtivo de sempre nos três principais ramos da matemática: geometria, análise e álgebra. Entretanto, a imaginação, o rigor, a abstracção e a generalidade continuam, promovendo mais realizações matemáticas. Considera-se, presentemente, que o século XX supera todos os outros.

*“O estudo dos trabalhos de Euler continuará a ser
a melhor escola para os diferentes campos da matemática
e nada os poderá substituir.”*
GAUSS [1777 – 1855]

¹⁶ Pascal tem o seu nome honrado na Física com uma unidade de pressão.

O suíço Léonard Euler (1707 – 1783) nasceu em Basileia e viveu entre a Academia de Sampetersburgo, na Rússia, e a Academia de Berlim, na Alemanha. Enquanto jovem, estudou além de matemática, medicina, astronomia, física, línguas orientais e teologia – por indicação de seu pai, que embora tendo conhecimentos de matemática era ministro religioso e queria que o seu filho seguisse o mesmo caminho. Euler foi o principal responsável pela linguagem e notação matemática que se utiliza hoje, mesmo ao nível universitário. Na sua obra, considerada o primeiro texto de geometria analítica, *Introductio in analysin infinitorum*, de 1748, trata de forma estritamente analítica as funções trigonométricas. O seno passa a ser visto como um número ou uma razão. As funções trigonométricas e suas inversas eram escritas e pensadas por Euler praticamente na forma como são tratadas hoje. As abreviaturas utilizadas na *Introductio in analysin infinitorum*, por Euler, em latim, *sin*, *cos*, *tang*, *cot*, *sec* e *cosec*, são muito próximas das actuais (aliás, idênticas aos termos usados na literatura matemática científica em inglês; apenas $\tan \equiv \text{tang}$). Também os três símbolos, para designar números¹⁷, e , π e i , que combinados com os dois inteiros mais “importantes”, 0 e 1, originou a célebre igualdade¹⁸, $e^{i\pi} + 1 = 0$, com os cinco números mais significativos de toda a matemática, que se deve a Euler. Na geometria, na álgebra, na trigonometria e na análise encontramos símbolos de Euler, bem como terminologia e ideias. Euler, mesmo perdendo uma vista aos 28 anos e ficando cego aos 59, foi o matemático mais produtivo do século XVIII. Na sua cegueira Euler continuou a pesquisar e a produzir com a ajuda dos seus filhos (casou duas vezes e teve treze filhos). Durante a sua vida escreveu 560 livros e artigos, dando contribuições a todos os campos da matemática existentes na sua época; à sua morte deixou muitos manuscritos que foram publicados, durante os 47 anos seguintes pela Academia de Sampetersburgo.

O francês Gaspard Monge (1746 – 1818) era filho de um pobre negociante. Pela influência de um tenente-coronel, que ficara bem impressionado com a inteligência do jovem, Monge foi autorizado a assistir a alguns cursos numa escola militar. As autoridades admiraram tanto as suas qualidades que veio a ser professor nessa mesma escola. Monge foi director de uma outra escola, a École Polytechnique (fundada em Paris, em 1794, tendo-se tornado na escola-modelo de todas as escolas militares e de engenharia dos inícios do século XIX) e era o líder científico do grupo de matemáticos que estavam ligados à mesma (a nata dos cientistas franceses de então). Monge

¹⁷ $e \approx 2.7182818284\dots$ é o número de Neper – nome pelo qual é mais conhecido o matemático escocês John Napier (1550 – 1617); $i = \sqrt{-1}$ é a unidade imaginária dos números complexos.

¹⁸ A igualdade $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ é válida para todos os ângulos, medidos em radianos, em particular para $\theta = \pi$. É a forma escolhida para representar números complexos trigonometricamente.

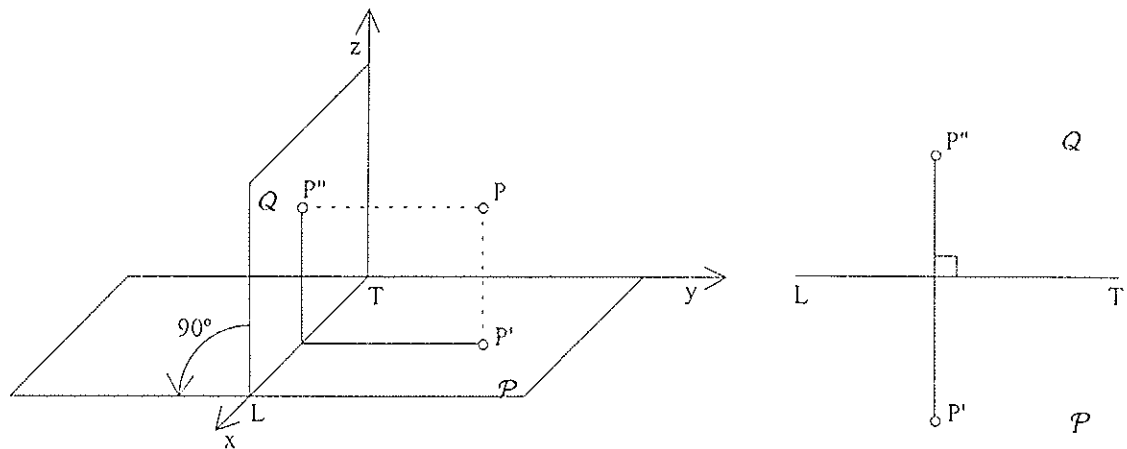


Figura 1.5: Geometria Descritiva de Monge. O ponto P do espaço é representado pelas suas projecções ortogonais P' e P'' sobre dois planos perpendiculares entre si, um horizontal \mathcal{P} , e outro vertical Q (esquerda); o plano Q é em seguida *rebatido* sobre \mathcal{P} por uma rotação de 90° em torno da intersecção, a linha de terra – LT (obtendo-se a projecção num plano à direita – rebatimento). As duas projecções P' e P'' do ponto P encontram-se sobre a *linha de referência* perpendicular a LT .

também trabalhou na École Normale de Paris (criada na mesma época que a École Polytechnique), ao lado de professores de matemática de alto nível, como Joseph Louis Lagrange (1736 – 1813), Pierre Simon de Laplace (1749 – 1827) e Adrien-Marie Legendre (1752 – 1833). Foram as suas aulas na École Normale entre 1794 – 1795 que conduziram à publicação da sua principal obra, *Géométrie descriptive*, o que veio a acontecer entre 1795 e 1799. O método da nova geometria descritiva ou método da dupla projecção consiste no seguinte: representamos cada ponto P do espaço pelas suas projecções ortogonais P' e P'' sobre dois planos perpendiculares entre si, um horizontal, \mathcal{P} , e outro vertical, Q (Figura 1.5); o segundo destes planos, Q , é em seguida *rebatido* sobre o primeiro por uma rotação de 90° em torno da sua intersecção, a chamada *Linha de Terra* (abrevia-se por LT); as duas projecções P' e P'' do ponto P encontram-se sobre uma mesma perpendicular à Linha de Terra, a chamada *linha de referência* do ponto P . A todo o ponto P do espaço corresponde um par único de projecções (P' , P''), a representação de P , e inversamente, a todo o par de projecções (P' , P''), situadas na mesma linha de referência, corresponde um único ponto P do espaço. Com esta correspondência biunívoca podemos deduzir, das representações planas dos objectos, conclusões acerca das características do objecto no espaço tridimensional.

Monge, na École Polytechnique, ministrou um curso sobre aplicação da análise à geometria. Consequentemente, publica, em 1809, *Application de l'analyse à la géométrie*, onde aplica o cálculo a curvas e a superfícies no espaço, sendo este o primeiro livro da história da

matemática sobre geometria diferencial. Monge não se interessou apenas por matemática pura e aplicada, podendo dizer-se que foi, de facto, um geómetra, mas também se interessou por química e física.

Karl Friederich Gauss (1777 – 1855) foi o mais precoce matemático que se conhece. Conta-se que aos doze anos já dominava a geometria euclidiana. Gauss foi o maior matemático da sua época e nunca precisou de deixar a sua Alemanha, nem sequer para uma viagem turística. Gauss não foi apenas matemático na Universidade de Gotinga, já que estudou e trabalhou também em astronomia, geodesia, cartografia, literatura clássica, filologia clássica, filosofia, física e colaborou na produção do primeiro telégrafo eléctrico. A sua primeira obra foi publicada em 1801, *Disquisitiones arithmeticae*, e em 1809 publicou uma obra sobre astronomia com os novos métodos de cálculo de órbitas, *Theoria motus corporum caelestium* – Teoria do Movimento dos Corpos Celestes (em torno do Sol, em secções cónicas). Em 1827, Gauss publicou a sua principal obra, que veio a ter um papel decisivo no desenvolvimento da geometria, *Disquisitiones generales circa superficies curvas*. Trata-se de um livro que contém a teoria das superfícies, abordada de uma forma muito diferente daquela de Monge. Gauss foi dos primeiros a conceber a existência das geometrias não euclidianas, por volta de 1816, baseando-se numa outra escolha de axiomas, mas nunca chegou a publicar algo sobre o assunto.

Apesar da representação gráfica dos números complexos ter sido inventada em 1797 por Caspar Wessel (1745 – 1818), Gauss, 30 anos depois, pegou no assunto a fim de dar uma melhor interpretação e visualização, no sentido de que cada ponto do plano correspondesse a um número complexo e inversamente. Para tal, como já nessa altura se sabia que os números reais (positivos, negativos e zero) podiam ser representados por pontos de uma recta e que os imaginários puros poderiam ser representados numa recta perpendicular ao eixo dos números reais, Wessel e Gauss deram o passo óbvio de pensar nas partes real e imaginária de um número complexo $a + bi$ como coordenadas rectangulares de pontos do plano \mathbb{R}^2 (ver secção 2.4.1). Deste modo, as antigas ideias sobre a não existência de números imaginários foram abandonadas. Gauss, ao contrário de outros, nunca teve um título de nobreza, mas por consenso a posteridade saudou-o como “O Príncipe dos Matemáticos”.

O russo Nicolai Ivanovitch Lobatchevski (1793 – 1856) foi o primeiro a desafiar a autoridade da geometria euclidiana, com dois mil anos, e a construir uma geometria não-euclidiana. Lobatchevski foi admitido, por unanimidade, em 1807, com catorze anos, na Universidade – Academia de Kazan aonde permaneceu ligado toda a sua vida. Primeiro como estudante, depois

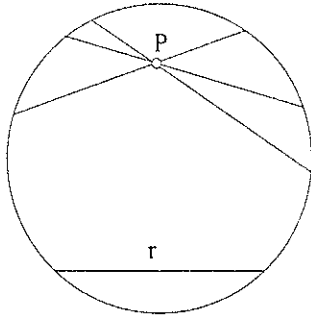


Figura 1.6: Um modelo para a geometria de Lobatchevski ou geometria hiperbólica: por um ponto P exterior a uma recta dada, r , passa um número infinito de rectas paralelas a r ; o “plano” é a circunferência e as “rectas” são cordas da mesma.

como assistente, professor e reitor. Com 23 anos era já professor da sua universidade e, além da cátedra de matemática, dava cursos de física e de astronomia. Nesta instituição foram-lhe ainda confiados outros encargos: bibliotecário, conservador do museu e responsável pela severa disciplina dos estudantes de Kazan, desde os das escolas elementares até aos universitários. Em 1827 foi nomeado reitor da Universidade. Lobatchevski foi dos primeiros a perceber que a construção da geometria de Euclides desmoronava-se ao considerarmos a sua aplicação ao planeta Terra e não à inexistente Terra plana, tal como ao resto do Universo. Em 1829, Lobatchevski publicou um artigo “*On the Principles of Geometry*”, que marca oficialmente o nascimento da geometria não-euclidiana. Lobatchevski substituiu o postulado euclidiano das paralelas¹⁹ por outro: “Por um ponto exterior a uma recta dada passa um número infinito de rectas paralelas à primeira”. Tomando como base este axioma e todos os postulados de Euclides (excepção feita, obviamente, ao das paralelas), Lobatchevski construiu uma geometria perfeitamente lógica e coerente. Por isso, é conhecido pelo “Copérnico da Geometria” por ter revolucionado e criado um novo ramo na geometria, a *geometria hiperbólica* e chamada presentemente *geometria de Lobatchevski* (Figura 1.6). O primeiro livro, *Novos Elementos de Geometria com Uma Teoria Completa das Paralelas*, de Lobatchevski apareceu em 1835-38, escrito em russo, mas poucos matemáticos tiveram conhecimento dele e muito menos compreenderam o seu alcance. Mesmo uma edição alemã, em 1840, *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallelinien*, mereceu pouca atenção, pouco mais que a de Gauss. Quase em simultâneo com Lobatchevski, o húngaro Janos Bolyai (1802 – 1860) teve, de forma independente, as mesmas ideias. Bolyai recebeu muito cedo boa educação geral e em particular em matemática – era filho de um professor de matemática, de física e de química, Farkas Wolfgang Bolyai (1775 – 1860), que fora colega de Gauss na Universidade de Gotinga. Diz-se que

¹⁹ O postulado euclidiano das paralelas diz o seguinte: “paralelas são duas rectas que estão no mesmo plano e que nunca se encontram”, ou de outro modo, “por um ponto exterior a uma recta dada passa uma, e uma só, recta paralela à primeira”.

Janos Bolyai aos treze anos já dominava o cálculo e a mecânica. Foi violinista – tendo dado concertos em Viena; estudou na escola de Engenharia Militar em Viena, foi oficial do exército e trabalhou como engenheiro militar durante parte da sua vida. A ideia de Bolyai era a mesma que ocorrera a Gauss e a Lobatchevski. Aceitou o postulado de Euclides como um axioma independente e descobriu que era possível construir uma outra geometria, assente no pressuposto que por um ponto do plano, exterior a uma recta dada, podemos traçar infinitas rectas que não intersectam a primeira. Um artigo de Bolyai sobre este assunto foi publicado como um apêndice, apenas em 1832, com o título *Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens*, de um tratado de seu pai. Tudo indica que as ideias de Lobatchevski e de Bolyai eram semelhantes, sendo no entanto os seus artigos diferentes e tendo surgido independentemente em Gotinga, Kazan e Budapeste.

O alemão Georg Friedrich Riemann (1826 – 1866) era filho de um pastor protestante. Estudou na Universidade de Gotinga, na qual trabalhava Gauss, e onde em 1851 obteve o grau de doutor. Em 1859, era já professor na mesma universidade. Riemann, em 1850, precisando de ganhar dinheiro, apresentava-se às provas para um lugar no Instituto Matemático da Universidade de Gotinga, perante representantes do corpo docente, entre os quais estava Gauss. Um dos assuntos que Riemann apresentou, numa das suas mais célebres conferências, tinha o título “*Sobre as hipóteses que estão nos fundamentos da geometria*”. Propunha uma visão global da geometria como um estudo de variedades de qualquer número de dimensões e em qualquer tipo de espaço. As suas geometrias eram também não-euclidianas, num sentido mais geral do que as de Lobatchevski. Gauss ficou profundamente admirado e entusiasmado com o trabalho do jovem. Riemann criou a chamada *geometria elíptica*, sendo um caso particular desta a *geometria esférica*. Um modelo possível para a geometria riemaniana – geometria esférica, consiste em tomar para “plano” a superfície esférica e para “rectas” os meridianos (circunferências máximas – intersecção de um plano com a esfera, em que o plano passa no centro da esfera) – Figura 1.7. Nesta geometria, por dois pontos passa uma e uma só circunferência máxima (recta), a não ser que os pontos sejam antípodas²⁰, por onde passam infinitas circunferências máximas. Em resumo, Euclides afirma que por um ponto exterior a uma recta passa uma só recta paralela à primeira; Lobatchevski e Bolyai constróem uma geometria que pode existir uma infinidade e Riemann constrói outra em que não existe nenhuma.

²⁰ Antípodas são pontos em locais *opostos* da esfera, como o Pólo Norte e o Pólo Sul sobre o sistema de coordenadas longitude-latidade na Terra.

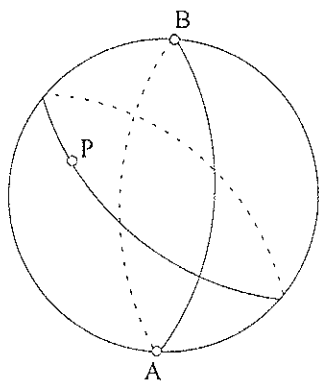


Figura 1.7: Geometria riemaniana ou geometria esférica: por um ponto P exterior à “recta” AB não passa nenhuma “recta” (círculo máximo, que inclui o centro da esfera) paralela a AB; o “plano” é a superfície esférica.

“Enquanto um ramo da ciência oferece uma abundância de problemas, ele está vivo.”

HILBERT [1862 – 1943]

Entre muitas figuras ilustres que viveram na transição do século XIX para o século XX, falaremos daquela que passou a tratar a geometria de uma forma mais formal: o alemão David Hilbert (1862 – 1943). Foi professor de grande reputação em Gotinga. Viajou entre várias localidades, particularmente para assistir a congressos internacionais de matemáticos, que se tornaram regulares a partir do início do século XX. Hilbert ficou célebre no 2º Congresso Internacional de Matemáticos, realizado em Paris, em 1900, ao propor 23 problemas²¹ para investigação, os quais ele acreditava deverem estar entre os que ocupariam a atenção dos matemáticos do século XX. Já em 1899, Hilbert publicou um pequeno livro sobre os fundamentos da geometria – *Grundlagen der Geometrie*, onde faz uma análise dos axiomas em que a geometria euclidiana se baseia e explica como a pesquisa axiomática moderna é capaz de melhorar as realizações dos gregos. Este livro, conseqüentemente, exerceu muita influência na formação das atitudes contemporâneas na matemática e no ensino da matemática. Com esta obra a geometria passa a ter um carácter mais formal, colocando-se ao lado, neste aspecto, da análise e da álgebra. Hilbert ficou ligado aos espaços vectoriais completos e munidos de um produto interno – Espaços de Hilbert. Basicamente, são extensões do conceito de espaço euclidiano obtidas passando do espaço ordinário, tridimensional, a um espaço a mais dimensões até a um número infinito. Hilbert foi um matemático de muitas facetas que contribuiu para, entre outros assuntos, a teoria dos números, a lógica matemática, as equações diferenciais e para a física-matemática.

²¹ Pode ver um resumo destes problemas em Struik, 1989, páginas 304 – 307.

Com o propósito de elaborar um tratado que abarcasse os três ramos tradicionais da matemática (análise, álgebra e geometria), formou-se, entre 1934 e 1935, de forma um pouco secreta e anónima, um grupo jovens matemáticos, licenciados pela Escola Normal Superior de Paris, cognominado *Nicolas Bourbaki*. Apresentou-se, pela primeira vez, como autor de um artigo numa sessão de 18 de Novembro de 1935, da Academia das Ciências de Paris, por intermédio do matemático Élie Cartan (1869 – 1951). Fazem parte deste grupo, entre outros, os matemáticos: Jean Delsarte (1903 – 1968) Henri Cartan (1904 –) (filho de Élie Cartan), Jean Dieudonné (1906 – 1992) e André Weil (1906 – 1998). O objectivo primordial do grupo era, nesta época e tendo em atenção o desenvolvimento exponencial da matemática no século XIX e inícios do século XX, construir uma matemática universalista, procedendo a um tratamento global. A intenção era a de expor todos os conceitos fundamentais de matemática e, portanto, captar toda a matemática que vale a pena numa grande obra em construção: *Éléments de mathématique*.

*“Assim começou todo o conhecimento humano,
com intuições, passando daqui a noções e acabando com ideias.”*

KANT²² [1724 – 1804]

²² Immanuel Kant (1724 – 1804) foi um filósofo alemão e é considerado o pensador mais influente dos tempos modernos – ver <http://www.antroposmoderno.com/biografias/Kant.html>.

Capítulo 2 - Trigonometria no Plano Euclidiano

2.1 Definições gerais

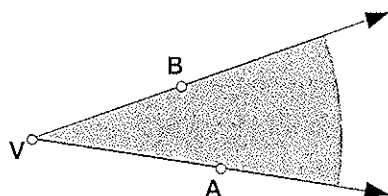


Figura 2.1: *Ângulo* é a abertura compreendida entre duas semi-rectas (os lados: $[VA$ e $[VB$) com a mesma origem (o vértice: V). Designamo-lo por $\angle AVB$ e a sua medida por $A\hat{V}B$.

Antes de entrarmos propriamente no estudo da trigonometria vamos apresentar algumas definições genéricas, básicas e necessárias na concretização das noções que vêm mais adiante.

Vamos começar por ver a definição de ângulo (ver Figura 2.1): *ângulo* é a “abertura” compreendida entre duas semi-rectas (os *lados do ângulo*) com a mesma origem (o *vértice*). Na Figura 2.2 podemos observar que a *circunferência* é o conjunto de todos os pontos do plano à mesma distância de um ponto dado, que se chama *centro* (A). Podemos constatar, também, as principais designações motivadas pela “ligação” do centro da circunferência a um ponto qualquer da circunferência e da “ligação” de pontos da circunferência. O *raio* (Figura 2.2) é o segmento de recta cujos extremos são o centro e um ponto qualquer da circunferência. A *corda* (Figura 2.2) é qualquer segmento de recta cujos extremos são dois pontos quaisquer da circunferência. O *diâmetro* é o segmento de recta que passa pelo centro e cujos extremos são dois pontos quaisquer da circunferência (ver Figura 2.2). O *arco de circunferência* ou simplesmente *arco* (Figura 2.2) é uma porção de circunferência compreendida entre dois dos seus pontos. Quando nada é dito opta-se sempre pelo *arco menor* compreendido entre os dois pontos. O *arco maior* é, naturalmente, a restante porção de circunferência compreendida entre os mesmos dois pontos. Chama-se *ângulo ao centro* (Figura 2.2) ao ângulo que tem vértice no centro da circunferência e cada lado contém um raio. Por último, a Figura 2.3 exhibe uma região do plano limitada por uma circunferência que se chama *círculo*.

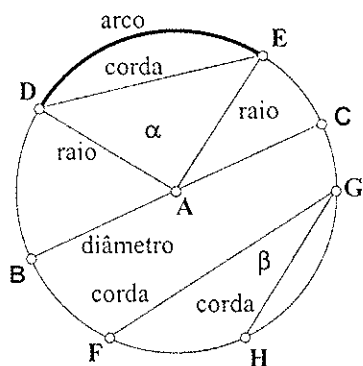
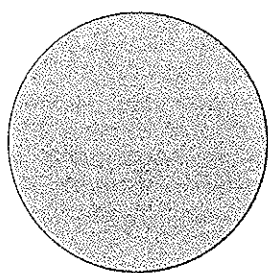
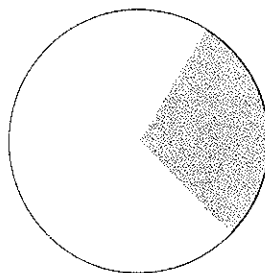


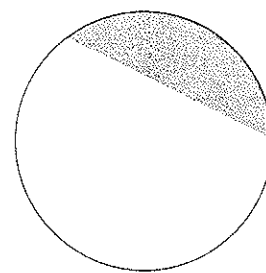
Figura 2. 2: *Circunferência* é o conjunto de todos os pontos do plano à mesma distância de um ponto dado – o seu *centro* (A). *Raio* é o segmento de recta cujos extremos são o centro e um ponto qualquer da circunferência ([AD]). *Corda* é qualquer segmento de recta cujos extremos são dois pontos quaisquer da circunferência ([DE]). *Diâmetro* (também corda) é o segmento de recta que passa pelo centro e cujos extremos são dois pontos quaisquer da circunferência ([BC]). *Arco* é uma porção de circunferência compreendida entre dois dos seus pontos (arco menor ED; arco maior DBE); por convenção, se nada é dito, opta-se sempre pelo arco menor. Chama-se *ângulo ao centro* ao ângulo α entre dois raios([AD] e [AE]). Chama-se *ângulo inscrito na circunferência* ao ângulo β que tem o vértice na circunferência e os lados contêm cordas ([FG] e [HG]).



CÍRCULO



SECTOR CIRCULAR



SEGMENTO CIRCULAR

Figura 2.3: *Círculo* é a região do plano limitada por uma circunferência. *Sector circular* é uma parte do círculo limitada por dois raios e pelo arco e pelo arco de circunferência compreendido entre esses raios. A parte menor é chamada *sector menor* e a parte maior é chamada *sector maior*. *Segmento circular* é uma parte do círculo limitada entre uma corda e o arco de circunferência por ela determinado.

2.2 Definições e relação entre razões trigonométricas

2.2.1 Razões trigonométricas num triângulo rectângulo

Apesar de começarmos por estudar um tipo especial de triângulos (rectângulos: com um ângulo recto e dois agudos), mostramos mais tarde (na secção 2. 4) que este estudo se generaliza a qualquer tipo de triângulo. Na Figura 2.4 temos as definições necessárias para o que se segue, dado

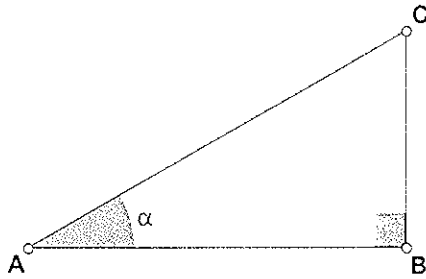


Figura 2.4: Num triângulo rectângulo [ABC], rectângulo em B: o lado [AC] é a *hipotenusa* (o lado maior); o lado [BC] é o *cateto oposto* relativamente ao ângulo α ou ao ângulo²³ em A; o lado [AB] é o *cateto adjacente* relativamente ao ângulo α .

um triângulo rectângulo a razão entre o comprimento do cateto oposto ao ângulo α e o comprimento da hipotenusa é chamada o *seno do ângulo α* , abreviadamente

$$\text{sen } \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \quad (2.1)$$

A razão entre o comprimento do cateto adjacente ao ângulo α e o comprimento da hipotenusa é chamada o *co-seno do ângulo α* , abreviadamente

$$\text{cos } \alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \quad (2.2)$$

A razão entre o comprimento do cateto oposto ao ângulo α e o comprimento do cateto adjacente ao ângulo α é chamada a *tangente do ângulo α* , abreviadamente

$$\text{tg } \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}}{\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}} = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha} \quad (2.3)$$

Sai de (2.1) e (2.2) que (ver Figura 2.4),

$$\text{sen } A = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \text{cos } C \Leftrightarrow \text{sen } A = \text{sen } C$$

e

$$\text{cos } A = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \text{sen } C \Leftrightarrow \text{cos } A = \text{sen } C.$$

Como, por construção do triângulo rectângulo, qualquer cateto é mais pequeno que a hipotenusa, resulta que as razões estabelecidas, seno e co-seno, têm sempre valores entre 0 e 1, ou iguais a 0 ou a 1. A tangente e a co-tangente (ver (2.6)) podem tomar um número qualquer positivo

ou o valor 0. Os valores aqui referidos dizem respeito apenas ao triângulo rectângulo, veremos à frente (secção 2.4.3) que, num círculo trigonométrico, os valores poderão ainda ser outros.

As razões inversas, ou recíprocas, das três razões apresentadas definem-se, respectivamente, como²⁴ (de (2.1) – (2.3))

$$\text{co-secante de } \alpha = \text{cosec } \alpha = \frac{1}{\text{sen } \alpha} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \quad (2.4)$$

$$\text{secante de } \alpha = \text{sec } \alpha = \frac{1}{\text{cos } \alpha} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \quad (2.5)$$

$$\text{co-tangente de } \alpha = \text{cotg } \alpha = \frac{1}{\text{tg } \alpha} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \quad (2.6)$$

2.2.2 A Fórmula Fundamental da Trigonometria e outras

O Teorema de Pitágoras²⁵ diz-nos que, num triângulo rectângulo temos:

$$H^2 = c_1^2 + c_2^2,$$

onde H é o comprimento da hipotenusa e c_1 , c_2 o comprimento dos catetos respectivos (Figura 2.4).

Assim, do triângulo da Figura 2.4 temos:

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2.$$

Dividindo ambos os membros por \overline{AC}^2 , sai:

$$\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2} + \frac{\overline{BC}^2}{\overline{AC}^2} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}\right)^2 + \left(\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}\right)^2 = 1$$

E, assim, de (2.1) e (2.2), deduzimos a designada *Fórmula Fundamental da Trigonometria*:

$$\cos^2 \alpha + \text{sen}^2 \alpha = 1 \quad (2.7)$$

Da fórmula (2.7), escrevemos:

$$\text{sen}^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \quad (2.8)$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \text{sen}^2 \alpha \quad (2.9)$$

Usando (2.3) e dividindo (2.7) por $\cos^2 \alpha$, vem

²³ Sempre que não houver possibilidade de ambiguidade, muitas vezes utiliza-se para caracterizar um ângulo numa figura, o próprio vértice (ver Convenções, Notações e Símbolos).

²⁴ As seis razões trigonométricas (2.1 – 2.6) foram introduzidas pelos Árabes.

²⁵ A demonstração deste teorema encontra-se na secção 3.2.5.

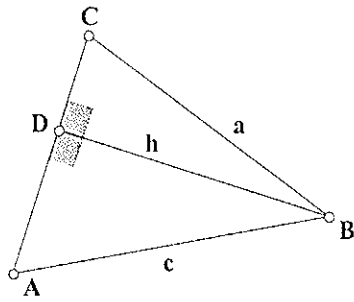


Figura 2.5: $[ABC]$ é um triângulo escaleno (isto é, com todos os lados diferentes) com altura $h = \overline{DB}$ relativamente ao lado $[AC]$. Por definição de altura, $[ABD]$ e $[BCD]$ são triângulos rectângulos (em D). Temos ainda: $a = \overline{BC}$ e $c = \overline{AB}$.

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad (2.10)$$

Por outro lado, usando (2.6) e dividindo (2.7) por $\operatorname{sen}^2 \alpha$, vem

$$\operatorname{cotg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \alpha} \quad (2.11)$$

2.2.3 A Lei dos Senos

Consideremos um triângulo $[ABC]$ qualquer (escaleno) e definamos a *altura* como na Figura 2.5. Há, assim, três alturas diferentes num triângulo. O segmento da altura define, no triângulo considerado, dois triângulos rectângulos. Agora vem, então, de (2.1):

$$\operatorname{sen} A = \frac{h}{c} \Leftrightarrow h = c \operatorname{sen} A \quad (2.12)$$

e

$$\operatorname{sen} C = \frac{h}{a} \Leftrightarrow h = a \operatorname{sen} C \quad (2.13)$$

De (2.12) e (2.13) vem:

$$c \operatorname{sen} A = a \operatorname{sen} C \Leftrightarrow \frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} \quad (2.14)$$

Consideremos agora, no mesmo triângulo $[ABC]$, a altura g relativamente ao lado $[BC]$ como na Figura 2.6. Temos agora que:

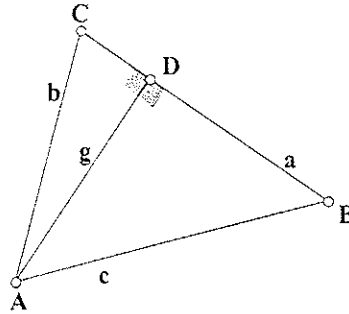


Figura 2.6: $[ABC]$ é um triângulo escaleno com altura $g = \overline{AD}$ relativamente ao lado $[BC]$. $[ABD]$ e $[ACD]$ são triângulos rectângulos em D (ver Figura 2.5). Temos ainda $b = \overline{AC}$.

$$\text{sen } B = \frac{g}{c} \Leftrightarrow g = c \text{ sen } B \quad (2.15)$$

e

$$\text{sen } C = \frac{g}{b} \Leftrightarrow g = b \text{ sen } C \quad (2.16)$$

De (2.15) e (2.16) vem:

$$c \text{ sen } B = b \text{ sen } C \Leftrightarrow \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C} \quad (2.17)$$

Das igualdades (2.14) e (2.17) e já que $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ e $c = \overline{AB}$, tiramos a relação:

$$\frac{\overline{BC}}{\text{sen } A} = \frac{\overline{AC}}{\text{sen } B} = \frac{\overline{AB}}{\text{sen } C} \quad (2.18)$$

que é chamada de *Lei dos Senos* ou *Analogia dos Senos* e é válida para qualquer triângulo $[ABC]$.

2.3 Ângulos e arcos

2.3.1 Os ângulos especiais: 30° , 45° e 60°

Consideremos o triângulo $[ABC]$, rectângulo em B (Figura 2.7) e fixemos a amplitude do ângulo α em 30° . Construamos o triângulo rectângulo $[ABC']$ simétrico²⁶ a $[ABC]$ relativamente a AB. Obtemos um triângulo $[ACC']$ que é equilátero, pois cada ângulo interno²⁷ mede 60° . Assim, como por construção B é o ponto médio²⁸ de $[CC']$, temos

²⁶ Ver secção 3.1 acerca das simetrias no plano.

²⁷ Ver secção 3.2 acerca das propriedades dos triângulos.

²⁸ Ponto médio de um segmento de recta é o ponto que divide o segmento de recta em dois segmentos de recta de igual comprimento.

$$\overline{BC} = \frac{1}{2} \overline{AC}$$

logo

$$\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\frac{1}{2} \overline{AC}}{\overline{AC}} = \frac{1}{2} \quad (2.19)$$

De (2.7) tiramos o co-seno de 30° :

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2 30^\circ + \operatorname{cos}^2 30^\circ = 1 &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \operatorname{cos}^2 30^\circ = 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \operatorname{cos}^2 30^\circ = 1 - \frac{1}{4} &\Leftrightarrow \operatorname{cos}^2 30^\circ = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \operatorname{cos} 30^\circ = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

ou seja (já que num triângulo²⁹ rectângulo se α é um seu ângulo, $0 \leq \operatorname{cos} \alpha \leq 1$),

$$\operatorname{cos} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (2.20)$$

De (2.3), (2.19) e (2.20), tiramos a tangente de 30° :

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (2.21)$$

Consideremos, agora, o triângulo isósceles $[ABC]$, rectângulo em B (Figura 2.8). Como os catetos \overline{AB} e \overline{BC} são iguais³⁰, é $\widehat{BAC} = 45^\circ = \widehat{ACB}$. Então temos,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$$

logo

$$\operatorname{sen} 45^\circ = \operatorname{cos} 45^\circ \quad (2.22)$$

De (2.7) e de (2.22) sai o seno e o coseno de 45° :

$$\operatorname{sen}^2 45^\circ + \operatorname{cos}^2 45^\circ = 1 \Leftrightarrow 2 \operatorname{sen}^2 45^\circ = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 45^\circ = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \operatorname{sen} 45^\circ = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ou seja (já que num triângulo rectângulo temos que, se α é um seu ângulo, $0 \leq \operatorname{cos} \alpha \leq 1$),

$$\operatorname{sen} 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2.23)$$

e portanto,

²⁹ Adiante, na secção 2.4.4, verificaremos que o co-seno assume valores positivos mas também negativos. Em geral, se α é um ângulo de amplitude qualquer temos que $-1 \leq \operatorname{cos} \alpha \leq 1$.

³⁰ Ver secção 3.3 acerca das propriedades dos triângulos.

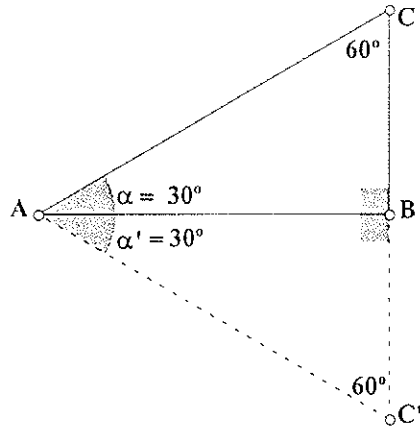


Figura 2.7: (i) Os triângulos rectângulos $[ABC]$ e $[ABC']$ são simétricos em relação a $[AB]$ (ver secção 3.1.2). Assim, $\alpha = \alpha'$ e $\hat{A}CB = \hat{A}C'B$. (ii) $[ACC']$ é um triângulo equilátero. O ângulo α é complementar de $\hat{A}CB$.

$$\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2.24)$$

De (2.3), (2.23) e (2.24) tiramos a tangente de 45° :

$$\text{tg } 45^\circ = 1 \quad (2.25)$$

Para obtermos as principais razões trigonométricas de 60° , basta notar na Figura 2.7 que, 60° é complementar³¹ de 30° .

Então,

$$\text{sen } 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (2.26)$$

$$\cos 60^\circ = \text{sen } 30^\circ = \frac{1}{2} \quad (2.27)$$

$$\text{tg } 60^\circ = \text{cotg } 30^\circ = \frac{1}{\text{tg}30^\circ} = \sqrt{3} \quad (2.28)$$

Na Tabela 2.1 resumimos os valores das razões trigonométricas dos ângulos especiais: 30° , 45° e 60° .

2.3.2 Ângulos e arcos generalizados

Quando se coloca a ponta de um compasso num ponto V, a outra ponta num ponto A e se

³¹ Ver secção 2.6.1 – Ângulos complementares.

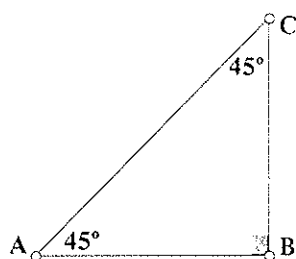


Figura 2.8: $[ABC]$ é um triângulo isósceles rectângulo em B.

Ângulo	30°	45°	60°
seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
co-seno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Tabela 2.1: Valores das principais razões trigonométricas dos ângulos de 30°, 45° e 60°.

faz girar o compasso em torno do ponto V, até um novo ponto B, construímos o arco de circunferência AB. Considerando as semi-rectas $[VA$ e $[VB$ obtém-se o *ângulo* $\angle AVB$ (Figura 2.1). Se o arco AB for descrito no sentido contrário ao do movimento dos ponteiros do relógio, o ângulo convencionam-se *positivo*, caso contrário, isto é, se o ângulo for descrito no sentido do movimento dos ponteiros do relógio, o ângulo convencionam-se *negativo*.

Ao ângulo ou arco formado pela semi-recta $[VA$ consigo própria, ou seja, sem se iniciar o “movimento”, chama-se *ângulo nulo* ou *arco nulo* (a amplitude é 0°) – Figura 2.9. Quando o ponto A completa uma circunferência, diz-se que a semi-recta $[VA$ gerou um *ângulo de um giro* (a amplitude é $+360^\circ$) – Figura 2.10. Se o ponto A continuar a deslocar-se, no mesmo sentido, vai desenhar arcos que excedem a circunferência ou o ângulo de um giro ($> +360^\circ$) – secção 2.3.4.

2.3.3 Medidas³² de amplitudes de ângulos e de arcos

Chama-se *sistema sexagesimal* ao sistema que tem por unidade de medida o *grau* (que habitualmente é representado por: $^\circ$). O grau tem por submúltiplos o *minuto* (representa-se por: $'$) e

³² A medida de uma grandeza, numa certa unidade, é o número de vezes que a unidade “cabe” nessa grandeza.



Figura 2.9: Ângulo nulo (0°): a semi-reta [VA não chega a “movimentar-se”.

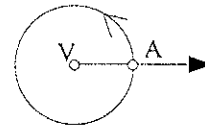


Figura 2.10: Ângulo de um giro ($+360^\circ$): a semi-reta [VA dá uma volta completa no sentido inverso ao dos ponteiros do relógio.

o *segundo* (representa-se por: "). É um sistema sexagesimal porque o grau corresponde a 60 minutos de arco ($1^\circ = 60'$) e o minuto a 60 segundos de arco ($1' = 60''$). Um grau é o ângulo, ou o arco, correspondente a $\frac{1}{360}$ do ângulo de um giro, ou de circunferência.

Chama-se *sistema circular* ao sistema de medida de amplitudes de ângulos e de arcos que tem como unidade o *radiano*. Um *radiano* é a amplitude do ângulo ao centro correspondente a um arco cujo comprimento é igual ao raio (Figura 2.11). Podemos medir, então, arcos e/ou ângulos em *rad* (*radianos*). O perímetro de uma circunferência, de raio r , é igual a $2\pi r$ e a medida, em radianos, do arco de circunferência é 2π rad. Ou seja, o raio “cabe” na circunferência 2π vezes. Assim, se a medida em graus, de um ângulo de um giro é 360° , vem:

$$2\pi \text{ rad} = 360^\circ.$$

Ou seja,

$$1 \text{ rad} = \frac{360^\circ}{2\pi} = 57.296^\circ \approx 57^\circ 17' 45''.$$

E também

$$1^\circ \approx 0.01745 \text{ rad}.$$

2.3.4 Ângulos de amplitude superior a 360°

Suponhamos que temos um relógio, como se ilustra na Figura 2.12, só com o ponteiro dos minutos. Se queremos saber quanto tempo passou até, por exemplo, o ponteiro estar no número 2 ou qual o ângulo descrito pelo ponteiro até atingir, por exemplo, o número 2, a resposta é ambígua, pois não há nenhum ponteiro para contabilizar as horas. Podem ter-se passado apenas alguns minutos como também muitas horas. Fazemos um esquema possível:

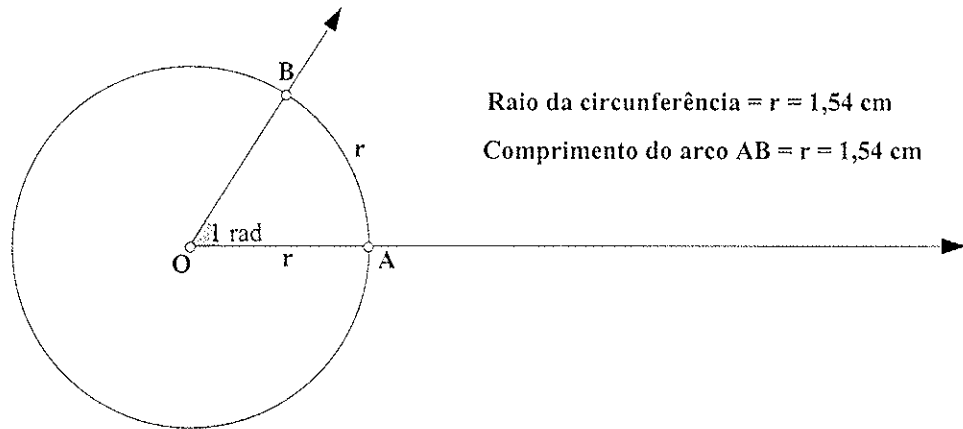


Figura 2.11: Circunferência de centro O e raio $r = \overline{OA}$. $m(\text{arco AB}) = \overline{OB} \Leftrightarrow m\angle AOB = 1 \text{ rad}$.

Passaram ...

- 10 minutos
- ou 1 hora e 10 minutos
- ou 2 horas e 10 minutos
- ou 3 horas e 10 minutos
- ou
- ou k horas e 10 minutos (em que k é um número inteiro: $k \in \mathbb{Z}$)

Para cada um destes tempos, o ponteiro descreveu um ângulo diferente, que depende do número de horas que tenha passado. Em cada hora completa passada o ponteiro deu uma volta inteira, isto é, descreveu um ângulo de -360° ou -2π radianos. Podemos, assim, estabelecer uma correspondência entre o tempo decorrido e a amplitude do ângulo descrito pelo ponteiro(Figura 2.12):

Tempo	ângulo (em graus)	ângulo (em radianos)
10 min	-60°	$-\frac{\pi}{3} \text{ rad}$
1 h 10 min	$-60^\circ - 360^\circ = -420^\circ$	$-\frac{\pi}{3} - 2\pi = -\frac{7\pi}{3} \text{ rad}$
2 h 10 min	$-60^\circ - 2 \times 360^\circ = -780^\circ$	$-\frac{\pi}{3} - 2 \times 2\pi = -\frac{13\pi}{3} \text{ rad}$
3 h 10 min	$-60^\circ - 3 \times 360^\circ = -1140^\circ$	$-\frac{\pi}{3} - 3 \times 2\pi = -\frac{19\pi}{3} \text{ rad}$
.....
k h 10 min	$-60^\circ - k \cdot 360^\circ$	$-\frac{\pi}{3} - 2k\pi$, com $k \in \mathbb{N}_0$.

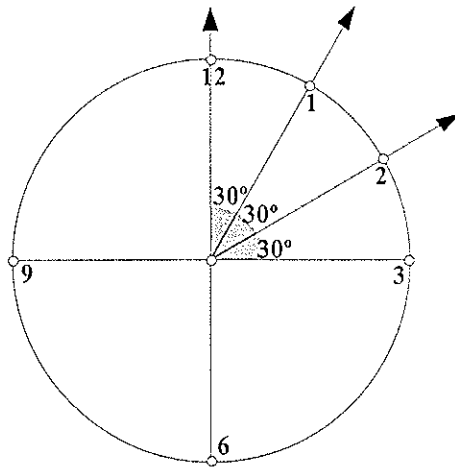


Figura 2.12: Relógio só com o ponteiro dos minutos. Quanto tempo passou desde que este se deslocou de “12” para “1” ou para “2”? A resposta é ambígua, já que não sabemos quantas voltas deu o ponteiro. Uma vez que existem 12 horas por uma volta do relógio (360°), a cada hora correspondem 30° (ângulos assinalados).

Não sabemos o número de voltas descritas pelo ponteiro, mas sabemos que o ângulo descrito é sempre do tipo:

$$-60^\circ - k 360^\circ, \quad k \in \mathbb{N}_0 \quad (2.29)$$

ou

$$-\frac{\pi}{3} - 2k\pi, \quad k \in \mathbb{N}_0. \quad (2.30)$$

Esta forma de escrever ângulos permite-nos trabalhar com medidas superiores a 360° ou 2π radianos. Notemos que, no caso mais geral, k pode tomar valores inteiros negativos ($k \in \mathbb{Z}$), que interpretamos como movimentos dos ponteiros no sentido inverso ao dos ponteiros do relógio.

2.4 Trigonometria num referencial ortonormado

A Trigonometria, com o auxílio de um referencial, permite ligar pontos, rectas e ângulos a números, condições e funções. Vamos fazer a generalização das razões trigonométricas para ângulos não agudos, isto é, para ângulos cujas amplitudes sejam iguais ou superiores a 90° (ou $\frac{\pi}{2}$ rad) e para ângulos cujas amplitudes sejam negativas.

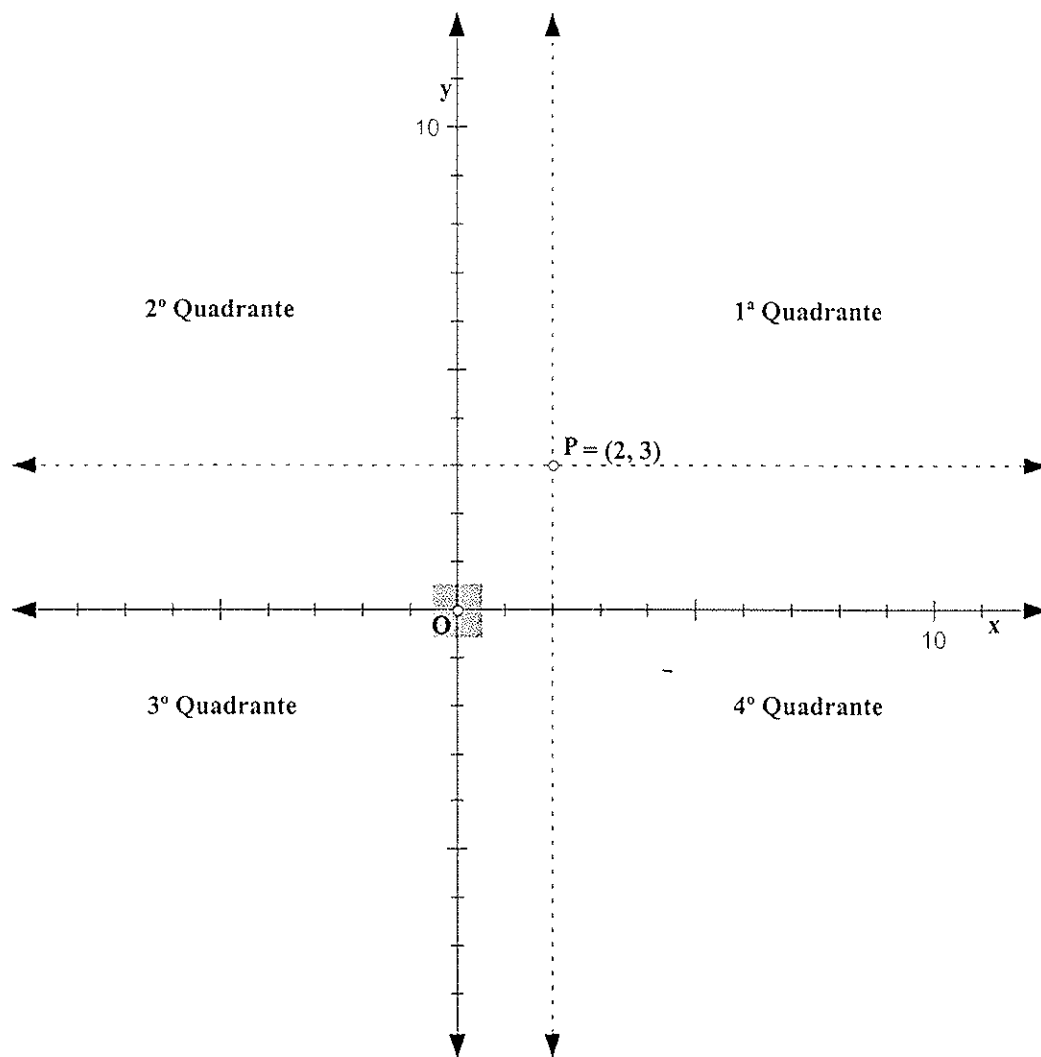


Figura 2.13: Referencial c. o. n. xOy . O sentido positivo do eixo dos xx é da esquerda para a direita e o dos yy de baixo para cima. Em O (origem do referencial) temos $x = 0$ e $y = 0$ (coordenadas $(0, 0)$). Os eixos xx e yy são ortogonais e dividem o plano em quatro quadrantes (assinalados na convenção usual). P tem coordenadas $(2, 3)$ com $x = 2$ e $y = 3$ as distâncias, respectivas, ao eixo dos yy e ao eixo dos xx .

2.4.1 Coordenadas cartesianas e coordenadas polares

Na Figura 2.13 representamos um ponto P nas suas *coordenadas cartesianas* ou *coordenadas rectangulares* que são $(2, 3)$. Para tal, usamos um referencial cartesiano³³ ortonormado

³³ O nome “referencial cartesiano” ou simplesmente “plano cartesiano” deve-se ao matemático francês René Descartes (ver secção 1.3). O referencial cartesiano é formado por dois eixos perpendiculares que se intersectam num ponto: a origem das coordenadas; O eixo horizontal é designado por eixo dos xx ou das abcissas e o eixo vertical é designado por eixo dos yy ou das ordenadas. Os eixos dividem o plano em quatro quadrantes. A parte positiva do eixo dos xx fica à direita da origem e a parte positiva do eixo dos yy fica acima da origem (Figura 2.13). Um referencial diz-se *ortonormado* se for ortogonal e monométrico, isto é, se os eixos são perpendiculares e a unidade de medida é a mesma para os dois eixos. Se a unidade de medida for diferente nos dois eixos o referencial diz-se *dimétrico*.

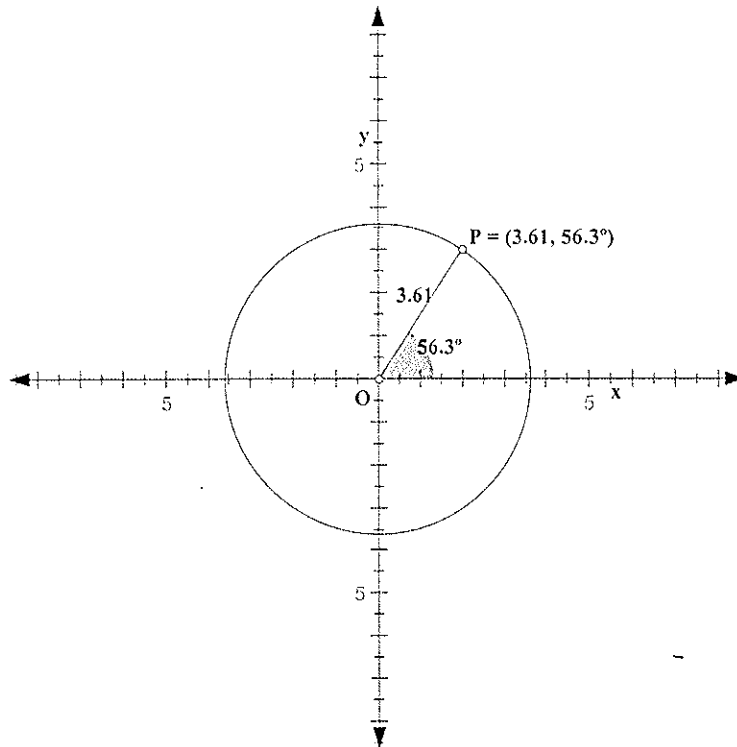


Figura 2.14: Referencial c. o. n. xOy . P tem coordenadas polares $(3.61, 56.3^\circ)$ em que $r = 3.61$ corresponde à sua distância à origem e $\theta = 56.3^\circ$ ao ângulo que faz $[OP]$ com o eixo dos xx (parte positiva).

(c. o. n.). Em geral, se as coordenadas cartesianas de um ponto são (x, y) , temos x como a *abscissa* – representa a distância do ponto ao eixo das ordenadas (ou dos yy) e y como a ordenada – a distância do ponto ao eixo das *abscissas* (ou dos xx). Outra forma de localizar o ponto, P , num referencial c. o. n., é através das suas *coordenadas polares* que são $(3.61, 56.3^\circ)$ – Figura 2.14. Em geral, num referencial c. o. n. xOy , se as coordenadas polares de um ponto são (r, θ) , temos r como a distância do ponto à origem do referencial e θ como a amplitude do ângulo entre o semieixo positivo Ox e a semi-recta $[OP]$.

2.4.2 O círculo trigonométrico

Consideremos o ponto T de coordenadas polares $(1, \frac{\pi}{8})$. Ora, T fica sobre uma circunferência de centro na origem do referencial e raio 1 e a amplitude do ângulo que faz a semi-recta $[OT]$ com o semieixo positivo Ox é a oitava parte de um ângulo raso (Figura 2.15). De (2.1) e (2.2) temos, respectivamente:

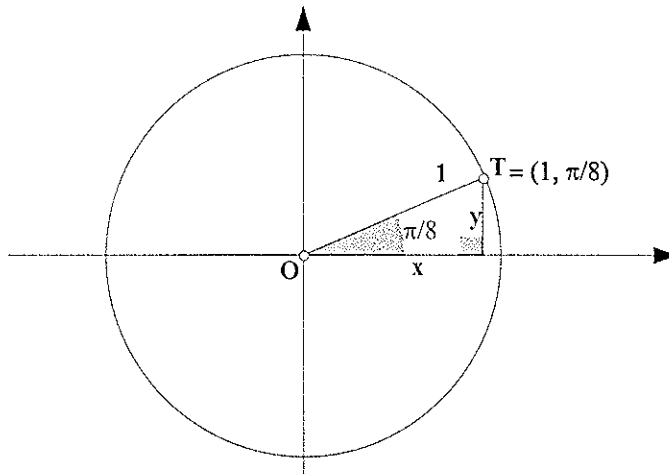


Figura 2.15: Círculo com centro na origem do referencial e raio 1. Triângulo rectângulo de catetos x e y , e hipotenusa 1 . O ângulo oposto ao cateto y mede $\frac{\pi}{8}$ rad.

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{8} = \frac{y}{1} \Leftrightarrow y = \operatorname{sen} \frac{\pi}{8}$$

e

$$\operatorname{cos} \frac{\pi}{8} = \frac{x}{1} \Leftrightarrow x = \operatorname{cos} \frac{\pi}{8}.$$

Assim resulta que as coordenadas cartesianas do ponto T são $(\operatorname{cos} \frac{\pi}{8}, \operatorname{sen} \frac{\pi}{8})$, ou, aproximadamente, $(0.92, 0.38)$. De uma forma geral, um ponto de coordenadas polares $(1, x)$ tem por coordenadas cartesianas $(\operatorname{cos} x, \operatorname{sen} x)$ – ver Figura 2.16 e secção 2.4.4. Ao círculo de raio 1 com centro na origem de um referencial cartesiano chama-se *círculo trigonométrico*. No círculo trigonométrico todos os ângulos são contados a partir do semieixo positivo Ox , no sentido dos ponteiros do relógio (negativos) ou directo (positivos). Para representar um ângulo basta, assim, desenhar uma semi-recta. No círculo trigonométrico todos os arcos têm origem no ponto de coordenadas polares $(1, 0)$. Para representar um arco marca-se, na circunferência trigonométrica, o ponto extremidade do arco de coordenadas polares $(1, x)$.

2.4.3 Razões trigonométricas num referencial ortonormado

Escolhendo um referencial c. o. n. xOy e definindo o ângulo α , dado um ponto P de coordenadas cartesianas (x, y) , seja qual for o quadrante onde este está situado (ver Figura 2.17),

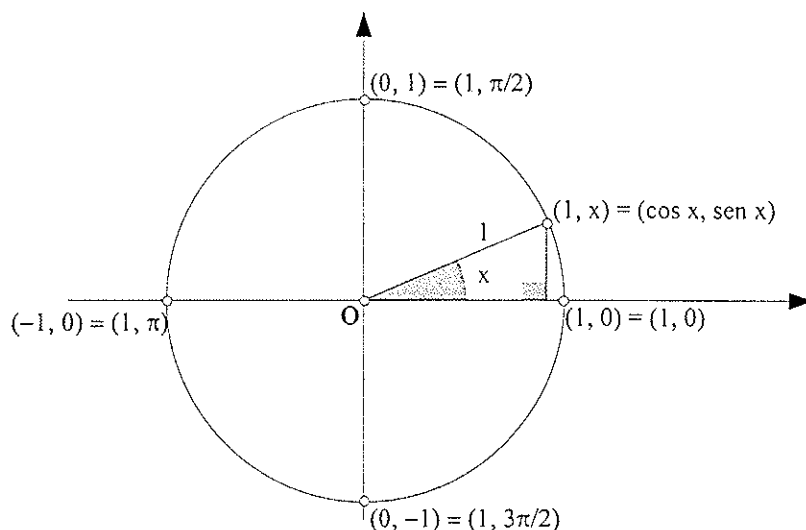


Figura 2.16: Num referencial c. o. n. um ponto de coordenadas polares $(1, x)$ tem as correspondentes coordenadas cartesianas: $(\cos x, \text{sen } x)$.

chama-se:

- Seno de α ao quociente: $\text{sen } \alpha = \frac{y}{\text{OP}}$;
- Co-seno de α ao quociente: $\text{cos } \alpha = \frac{x}{\text{OP}}$;
- Tangente de α ao quociente: $\text{tg } \alpha = \frac{y}{x}$, com $x \neq 0$;
- Co-tangente de α ao quociente: $\text{cotg } \alpha = \frac{x}{y}$, com $y \neq 0$.

Da Figura 2.17, se o ângulo α for agudo ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$) P situa-se no 1º quadrante e a definição de seno, de co-seno, da tangente e da co-tangente coincide com a dada anteriormente (ver fórmulas (2.1), (2.2), (2.3) e (2.6), respectivamente). Se P estiver sobre um dos eixos, a definição continua válida. De facto ($\alpha \in [0, 2\pi[$):

$$(\alpha = 90^\circ \Rightarrow) \text{sen } 90^\circ = \text{sen } \frac{\pi}{2} = \frac{y}{\text{OP}} = 1, \text{ visto que } y = \overline{\text{OP}};$$

$$(\alpha = 0^\circ \vee \alpha = 180^\circ \Rightarrow) \text{sen } 0^\circ = \text{sen } 0 \text{ rad} = \frac{0}{\text{OP}} = 0 = \text{sen } 180^\circ = \text{sen } \pi, \text{ visto ser } y = 0;$$

$$(\alpha = 270^\circ \Rightarrow) \text{sen } 270^\circ = \text{sen } \frac{3\pi}{2} = \frac{y}{\text{OP}} = -1, \text{ visto que } |y| = \overline{\text{OP}} \text{ e } y < 0;$$

$$(\alpha = 0^\circ \Rightarrow) \text{cos } 0^\circ = \text{cos } 0 \text{ rad} = \frac{x}{\text{OP}} = 1, \text{ visto que } x = \overline{\text{OP}};$$

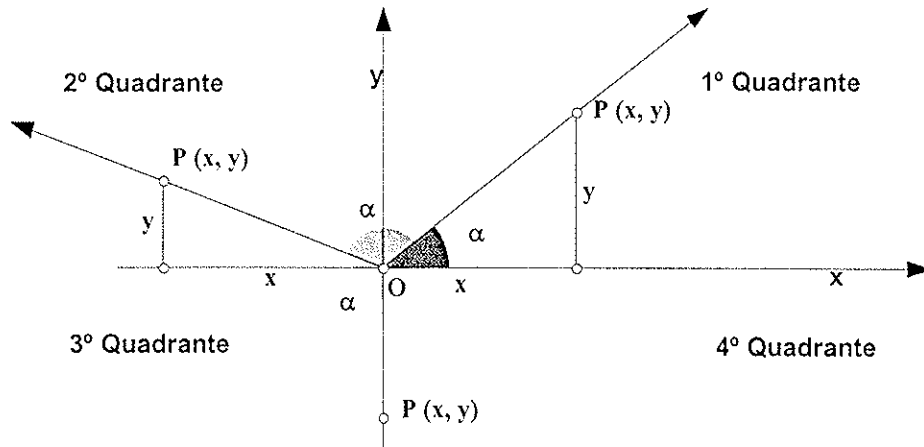


Figura 2.17: Referencial c. o. n. xOy . P é um ponto qualquer do plano (indicam-se três possíveis posições). As definições trigonométricas são independentes do quadrante onde P se encontra.

$$(\alpha = 90^\circ \vee \alpha = 270^\circ \Rightarrow) \cos 90^\circ = \cos \frac{\pi}{2} = \frac{x}{OP} = 0 = \cos 270^\circ = \cos \frac{3\pi}{2}, \text{ visto ser } x = 0;$$

$$(\alpha = 180^\circ \Rightarrow) \cos 180^\circ = \cos \pi = \frac{x}{OP} = -1, \text{ visto que } x = \overline{OP} \text{ e } |x| < 0;$$

Se P estiver sobre o eixo dos yy ($x = 0$; $\alpha = 90^\circ \vee \alpha = 270^\circ$), então vem $\frac{y}{x} = \frac{y}{0}$ e a tangente de 90°

$\left(\frac{\pi}{2} \text{ rad}\right)$, ou de 270° $\left(\frac{3\pi}{2} \text{ rad}\right)$ não está definida. Em geral, não têm tangente os ângulos da forma:

$$90^\circ + 180^\circ k \quad \text{ou} \quad \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}.$$

Por outro lado (de (6)), nesses pontos

$$\cotg 90^\circ = \cotg \frac{\pi}{2} = \cotg 270^\circ = \cotg \frac{3\pi}{2} = 0.$$

Se P estiver sobre o eixo dos xx ($y = 0$; $\alpha = 0^\circ \vee \alpha = 180^\circ$), então vem

$$\text{tg } \alpha = \frac{y}{x} = \frac{0}{x} = 0$$

Assim:

$$\text{tg } 0^\circ = \text{tg } 0 \text{ rad} = \text{tg } 180^\circ = \text{tg } \pi = 0$$

e em geral anula-se para

$$180^\circ k \quad \text{ou} \quad k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}.$$

Agora, de (2.6), a co-tangente não está definida em nenhum destes pontos. Apresentamos um resumo na Tabela 2.2.

Razões \ (°) (rad)	0° ou 360°	90°	180°	270°
	0 ou 2π	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
seno	0	1	0	-1
co-seno	1	0	-1	0
tangente	0	Nd	0	Nd
co-tangente	Nd	0	Nd	0

Tabela 2.2: Valores das quatro principais razões trigonométricas para os ângulos particulares $0, \frac{\pi}{2}, \pi$ e $\frac{3\pi}{2}$ (intervalo $[0, 2\pi[$). Nd quer dizer que a razão não está definida.

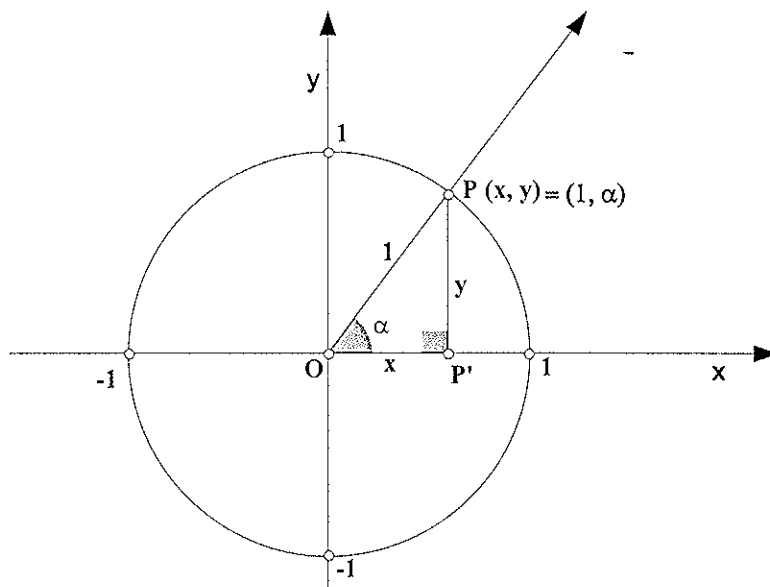


Figura 2.18: Referencial c. o. n. xOy . P é um ponto qualquer do plano sobre o círculo trigonométrico de coordenadas cartesianas (x, y) e polares $(1, \alpha)$. $[OPP']$ é um triângulo rectângulo em P' .

2.4.4 Razões trigonométricas no círculo trigonométrico

Para simplificar a visualização das razões trigonométricas, podemos considerar um ponto P tal que $\overline{OP} = 1$ e representar a circunferência trigonométrica como na secção 2.4.2. Consideremos então, num referencial c. o. n. xOy , que P tem coordenadas (x, y) – Figura 2.18. Fica definido um triângulo rectângulo $[OPP']$, de catetos $x = \overline{OP'}$, $y = \overline{P'P}$ e hipotenusa $\overline{OP} = 1$. Assim, a razão *seno* é dada por:

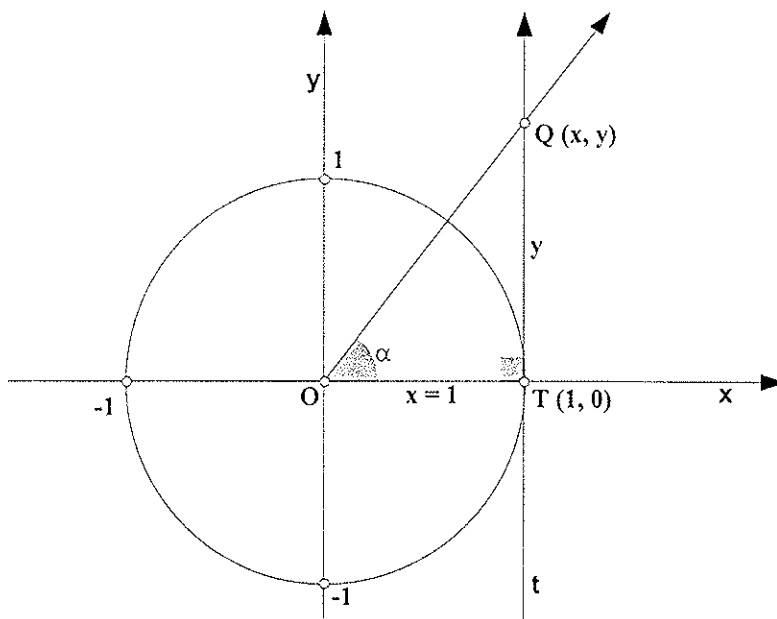


Figura 2.19: Referencial cartesiano c. o. n. xOy . Q é um ponto que resulta da intersecção da semi-recta do ângulo α com t , tangente à circunferência no ponto T de coordenadas $(1, 0)$ e paralela ao eixo dos yy – eixo das tangentes.

$$\text{sen } \alpha = \frac{\overline{P'P}}{\overline{OP}} = \frac{y}{1} \Leftrightarrow \text{sen } \alpha = y$$

ou seja, o seno é exactamente a medida da ordenada de P , por isso o eixo dos yy tem também a designação de *eixo dos senos*. A razão *co-seno* é dada da seguinte maneira:

$$\text{cos } \alpha = \frac{\overline{OP'}}{\overline{OP}} = \frac{x}{1} \Leftrightarrow \text{cos } \alpha = x$$

ou seja, o co-seno é exactamente a medida da abcissa de P . O eixo dos xx designa-se também por *eixo dos co-senos*.

O nome *tangente* deriva de definirmos esta razão, não só com o círculo unitário (em que temos $\text{tg } \alpha = \frac{y}{x}$) mas principalmente recorrendo à recta tangente à circunferência no ponto T de coordenadas $(1, 0)$ – Figura 2.19. Por construção, fica determinado um triângulo $[OTQ]$, rectângulo em T , de catetos $x = \overline{OT}$ e $y = \overline{TQ}$. Então, temos

$$\text{tg } \alpha = \frac{\overline{TQ}}{\overline{OT}} = \frac{y}{x} = \frac{y}{1} \Leftrightarrow \text{tg } \alpha = y.$$

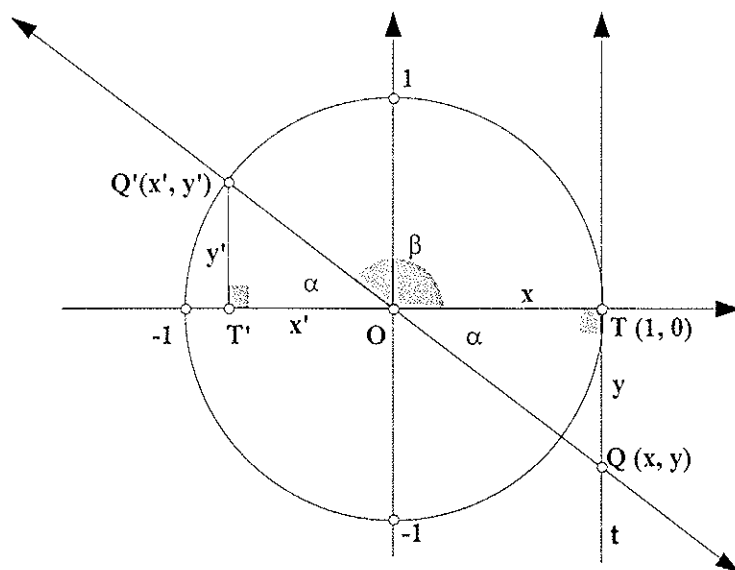


Figura 2.20: β é um ângulo do 2º quadrante. $\text{tg } \beta = \text{tg } \alpha = y (< 0)$.

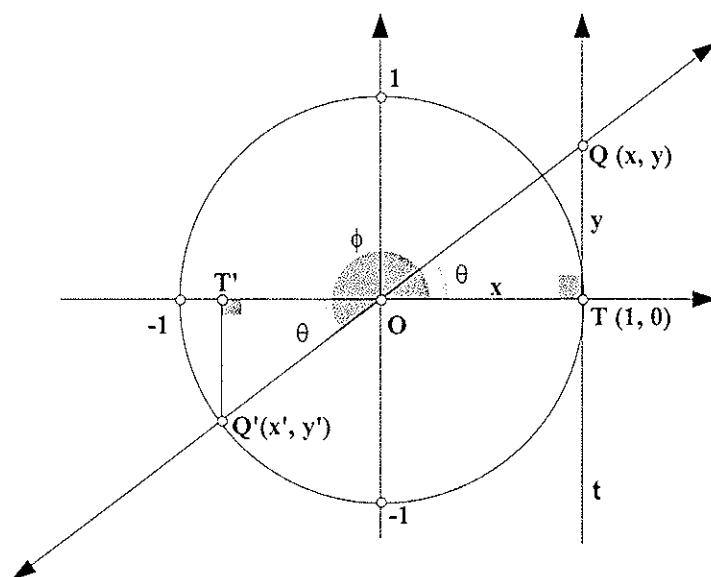


Figura 2.21: ϕ é um ângulo do 3º quadrante. $\text{tg } \phi = \text{tg } \theta = y (> 0)$.

Assim, o valor da tangente do ângulo α é exactamente a medida da ordenada y do ponto Q , que não está na circunferência. Por esta razão a recta t tem a designação de *eixo das tangentes*. Para determinar a tangente de um ângulo do 4º quadrante, faz-se da mesma maneira, mas nota-se que fica marcada para baixo do eixo Ox , ou seja, é negativa. Sendo o ângulo do 2º ou do 3º quadrante prolonga-se $[OP'$ (Figuras 2.20 e 2.21) até encontrar t . Assim, das Figuras 2.20 e 2.21, verifica-se que podemos construir dois triângulos rectângulos $[OTQ]$ e $[OT'Q']$, que são semelhantes, pois têm dois ângulos iguais (ou congruentes) dois a dois – secção 3.2, ou seja $\frac{y'}{x'} = \frac{y}{x}$. Logo escreve-se

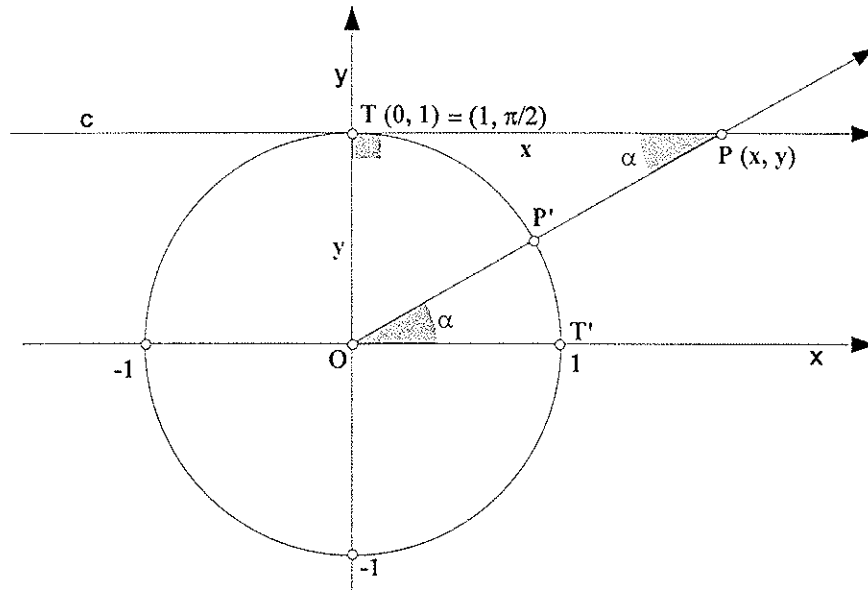


Figura 2.22: Referencial c. o. n. xOy . Dado α no círculo trigonométrico, P resulta da intersecção de $[OP'$ com c , recta tangente à circunferência no ponto $(0, 1) = (1, \pi/2)$ e paralela ao eixo dos xx – eixo das *co-tangentes*.

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha = \frac{y'}{x'} = \frac{y}{x} = (\text{ordenada de } Q) / 1 = \text{ordenada de } Q \Leftrightarrow \operatorname{tg} \beta = y \quad (y < 0)$$

e

$$\operatorname{tg} \phi = \operatorname{tg} \theta = \frac{y'}{x'} = \frac{y}{x} = (\text{ordenada de } Q) / 1 = \text{ordenada de } Q \Leftrightarrow \operatorname{tg} \phi = y \quad (y > 0)$$

Para definir a *co-tangente* a partir do círculo trigonométrico, procede-se como para a tangente, agora escolhendo para *eixo das co-tangentes* (c) a recta tangente à circunferência que passa no ponto T de coordenadas $(0, 1) = (1, \pi/2)$ – Figura 2.22. Por construção, obtemos um triângulo $[OTP]$, rectângulo em T, de catetos $x = \overline{TP}$ e $y = \overline{OT}$, com $\widehat{TPO} = \widehat{T'OP'}$. Assim, temos que

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{\overline{TP}}{\overline{OT}} = \frac{x}{y} = \frac{x}{1} \Leftrightarrow \operatorname{cotg} \alpha = x.$$

Logo, o valor da *co-tangente* do ângulo α é exactamente a medida da abcissa x do ponto P, exterior à circunferência trigonométrica.

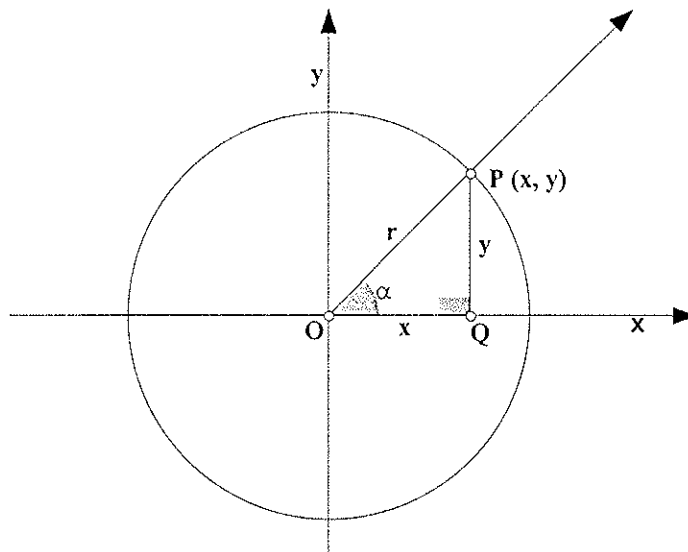


Figura 2.23: Referencial c. o. n. xOy. P é um ponto qualquer do plano sobre o círculo de raio r . [QPO] é um triângulo rectângulo em Q. α é um ângulo do 1º quadrante.

2.4.5 Conservação das fórmulas trigonométricas

As fórmulas estabelecidas, na secção 2.2.2 – para aplicação a triângulos rectângulos, continuam válidas e podem ser aplicadas a ângulos de amplitudes quaisquer. A título de exemplo vamos ver como se obtém a fórmula (2.7) – fórmula fundamental da trigonometria, considerando um ângulo α do 1º quadrante, como na Figura 2.23. Tendo em conta que o triângulo [QPO] é rectângulo, podemos escrever, pelo Teorema de Pitágoras,

$$r^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1, \quad (r > 0).$$

Mas como

$$\cos \alpha = \frac{x}{r} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{x^2}{r^2}$$

e

$$\sin \alpha = \frac{y}{r} \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{y^2}{r^2},$$

vem que

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1.$$

Vem também (2.3):

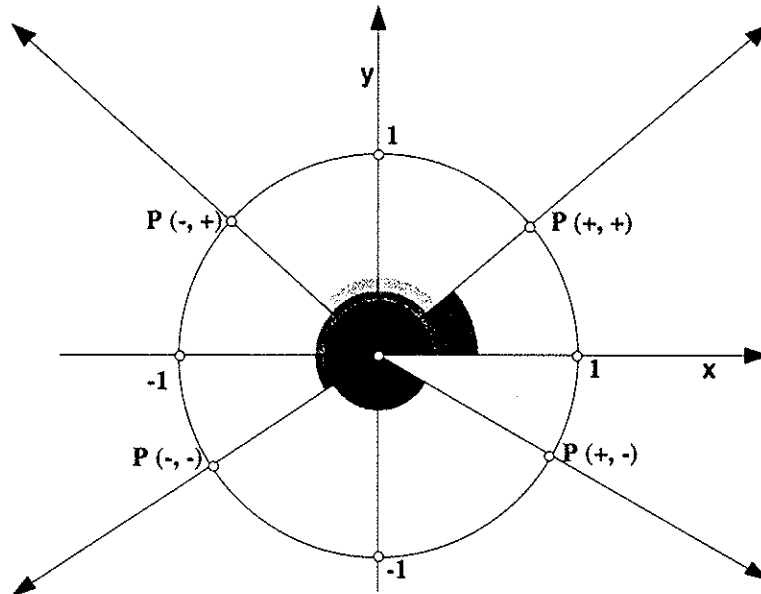


Figura 2.24: O sinal das coordenadas do ponto P, associado ao círculo trigonométrico, determina o sinal da razão trigonométrica respectiva.

$$\frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha} = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \frac{y}{x} = \text{tg } \alpha$$

ou, de outro modo

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha}.$$

Assim as fórmulas trigonométricas da secção 2.2.2 são válidas em geral e não somente para triângulos rectângulos.

2.4.6 Sinal das razões trigonométricas

O sinal de uma razão trigonométrica depende exclusivamente do sinal das coordenadas do ponto P associado ao círculo trigonométrico, como se depreende do estudo feito nas três secções anteriores (2.4.2 – 2.4.4) – Figura 2.24. Na Figura 2.25 apresentamos o estudo do sinal, por quadrante, para cada razão trigonométrica.

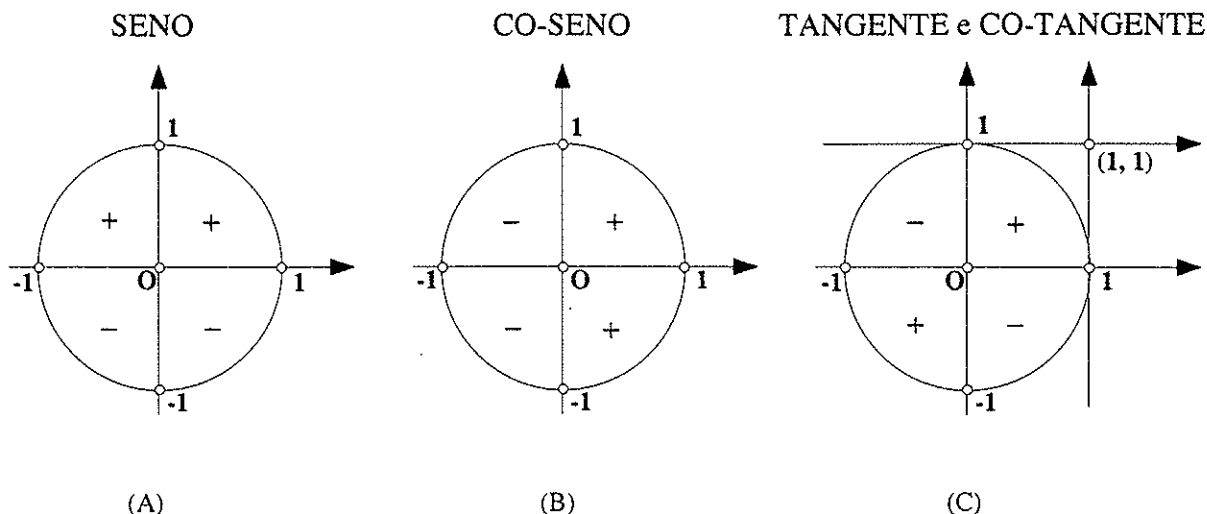


Figura 2.25: (A) – Sinal do seno. (B) – Sinal do co-seno. (C) – Sinal da tangente e da co-tangente.

2.4.7 Variação das razões trigonométricas

Na Figura 2.26 estudamos a variação da razão seno, graficamente (sobre o eixo dos yy). Tiramos, para os ângulos descritos pelas semi-rectas [OP (o ângulo α) e [OQ (o ângulo β), no 1º quadrante que, se

$$\beta > \alpha \Rightarrow \text{sen } \alpha > \text{sen } \beta$$

ou seja, o seno cresce neste quadrante. No 2º quadrante observamos que, se

$$\alpha > \beta \Rightarrow \text{sen } \alpha < \text{sen } \beta$$

portanto, o seno decresce no 2º quadrante. Temos no 3º quadrante,

$$\alpha < \beta \Rightarrow \text{sen } \alpha > \text{sen } \beta$$

ou seja, o seno decresce neste quadrante. Por último, no 4º quadrante vem que, se

$$\alpha > \beta \Rightarrow \text{sen } \alpha > \text{sen } \beta$$

e portanto o seno cresce no 4º quadrante.

O estudo da razão co-seno é feito no eixo dos xx . Vamos estudar a variação do co-seno de forma análoga ao estudo feito para o seno. Na Figura 2.27 considera-se, no círculo trigonométrico, os ângulos descritos pelas semi-rectas [OP (o ângulo α) e [OQ (o ângulo β). Assim, verificamos que, se

$$\beta > \alpha \Rightarrow \text{cos } \beta < \text{cos } \alpha$$

ou seja, o co-seno decresce no 1º quadrante. No 2º quadrante, temos que, se

$$\alpha > \beta \Rightarrow \text{cos } \alpha < \text{cos } \beta$$

portanto, o co-seno decresce neste quadrante. Para o 3º quadrante, observa-se,

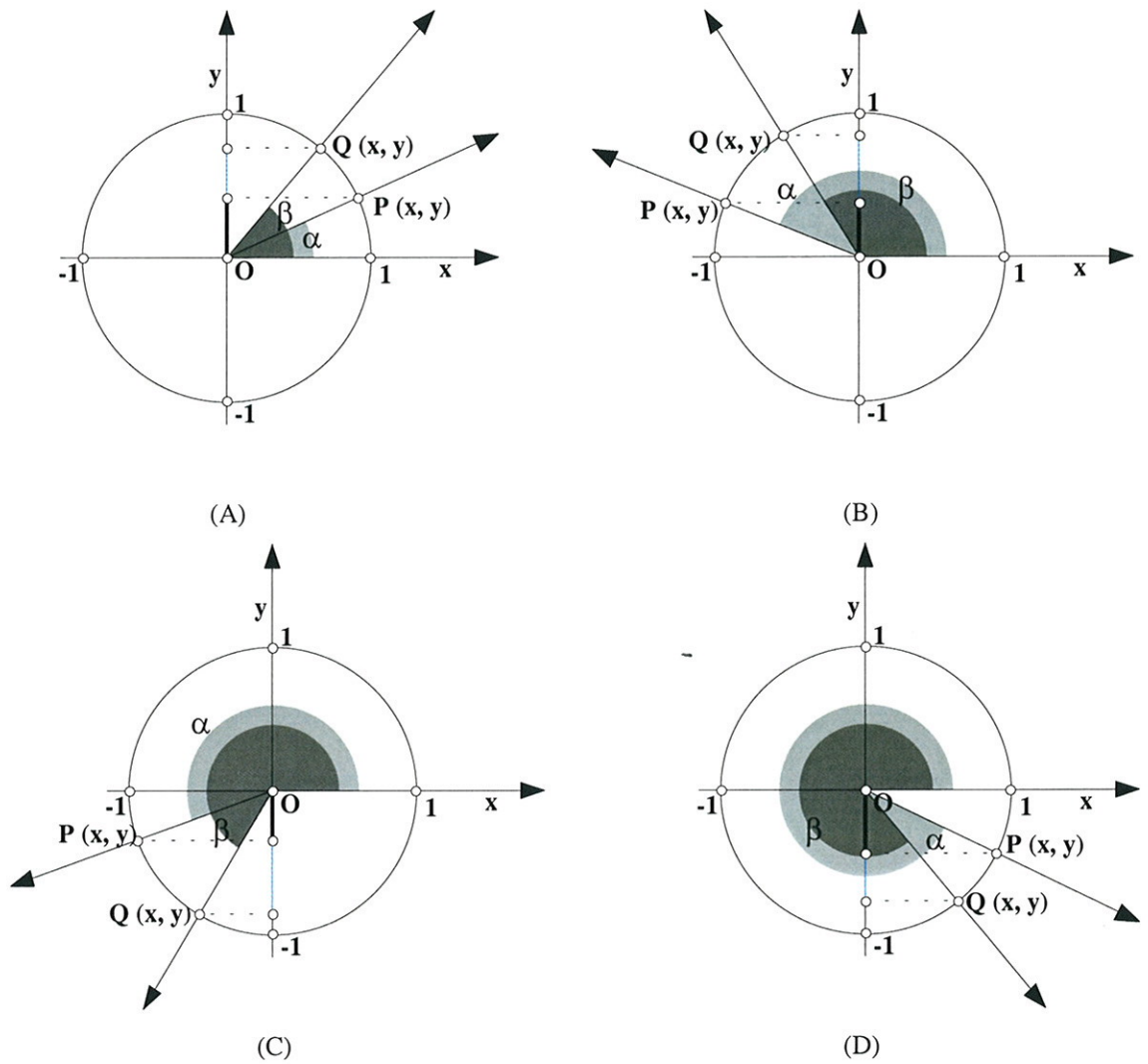


Figura 2.26: (A) – Estudo da variação do seno no 1º quadrante. (B) – Estudo da variação do seno no 2º quadrante. (C) – Estudo da variação do seno no 3º quadrante. (D) – Estudo da variação do seno no 4º quadrante.

$$\alpha < \beta \Rightarrow \cos \alpha < \cos \beta$$

ou seja, o co-seno cresce no 3º quadrante, e no 4º quadrante verifica-se que,

$$\alpha > \beta \Rightarrow \cos \alpha > \cos \beta$$

portanto, o co-seno cresce neste quadrante.

Estudemos, agora, a variação da razão tangente observando a Figura 2.28, no eixo das tangentes. Consideremos, como atrás, no círculo trigonométrico, os ângulos descritos pelas semi-rectas [OP (o ângulo α) e [OQ (o ângulo β). Observa-se no 1º quadrante que, se

$$\beta > \alpha \Rightarrow \operatorname{tg} \beta > \operatorname{tg} \alpha$$

ou seja, a tangente cresce no 1º quadrante. No 2º quadrante temos que, se

$$\alpha > \beta \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha > \operatorname{tg} \beta$$

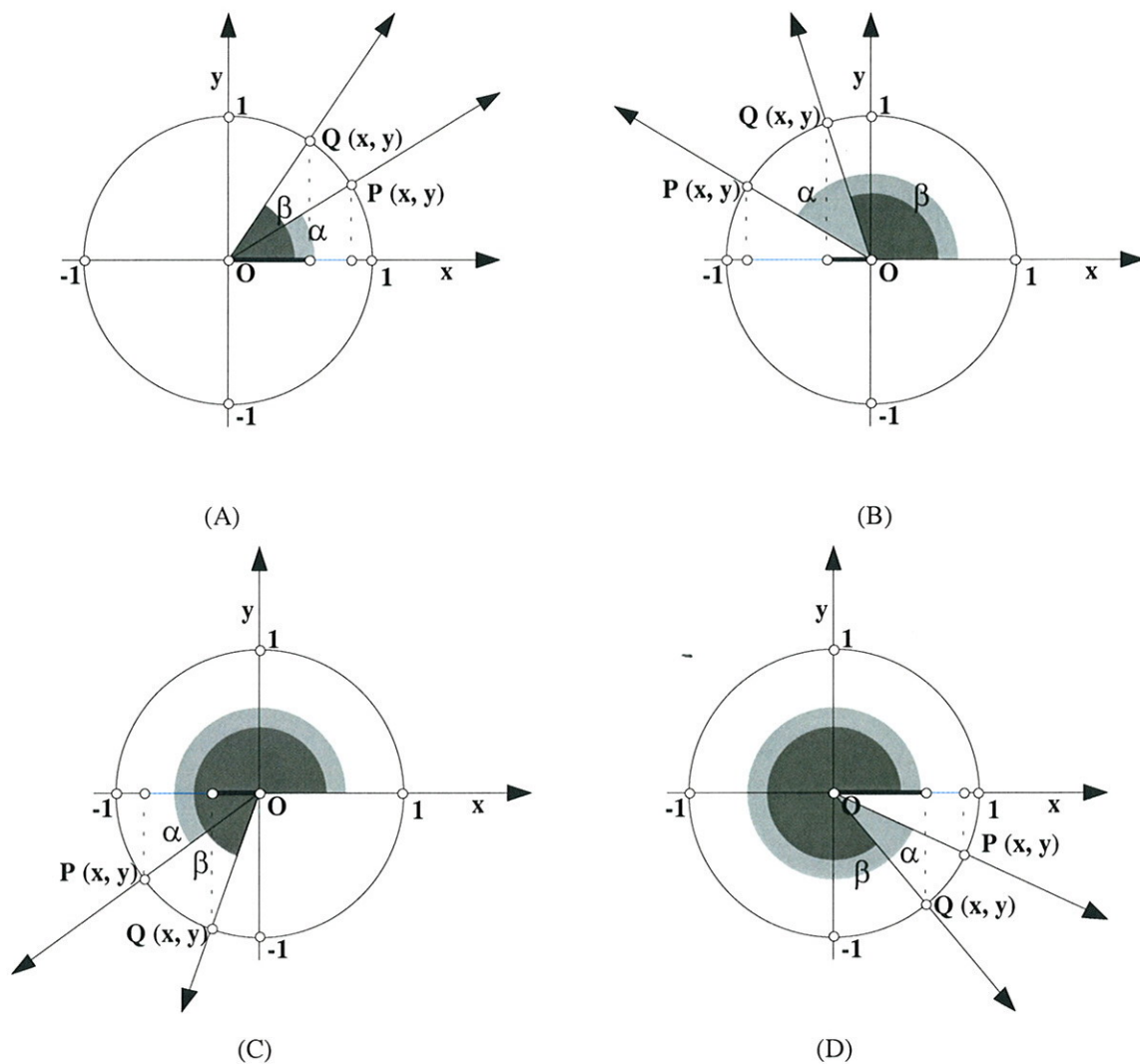


Figura 2.27: (A) – Variação do co-seno no 1º quadrante. (B) – Variação do co-seno no 2º quadrante. (C) – Variação do co-seno no 3º quadrante. (D) – Variação do co-seno no 4º quadrante.

logo a tangente é crescente neste quadrante. Podemos observar que, no 3º quadrante, temos

$$\beta > \alpha \Rightarrow \operatorname{tg} \beta > \operatorname{tg} \alpha$$

ou seja, a tangente cresce no 3º quadrante, e no 4º quadrante verifica-se que, se

$$\alpha > \beta \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha > \operatorname{tg} \beta$$

portanto, a tangente também cresce neste quadrante.

Por último, estudemos a variação da razão co-tangente, no eixo da co-tangente, observando a Figuras 2.29. Consideremos, no círculo trigonométrico, os ângulos descritos pelas semi-rectas [OP (o ângulo α) e [OQ (o ângulo β). Verifica-se, nos quatro quadrantes, que

$$\alpha > \beta \Rightarrow \operatorname{cotg} \alpha < \operatorname{cotg} \beta.$$

Significa que, em qualquer quadrante, a co-tangente é sempre decrescente. Na Tabela 2.3 resume-se o estudo feito para a variação das quatro principais razões trigonométricas.

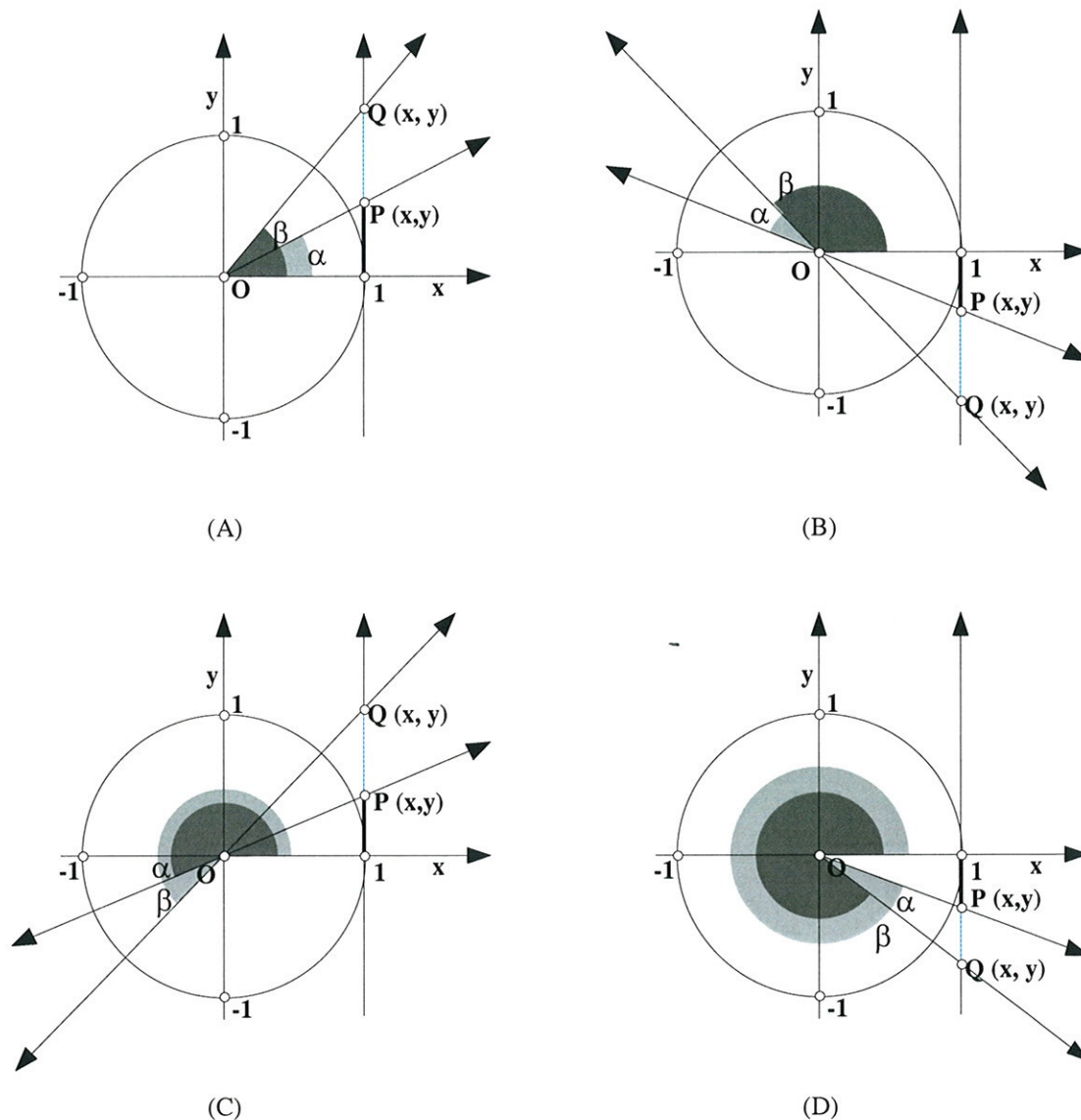


Figura 2.28: (A) –Variação da tangente no 1º quadrante. (B) – Variação da tangente no 2º quadrante. (C) – Variação da tangente no 3º quadrante. (D) – Variação da tangente no 4º quadrante.

Quadrantes	1º Quadrante	2º Quadrante	3º Quadrante	4º Quadrante
Razões				
Varição do seno	↗	↘	↘	↗
Varição do cosseno	↘	↘	↗	↗
Varição da tangente	↗	↗	↗	↗
Varição da co-tangente	↘	↘	↘	↘

Tabela 2.3: Estudo comparativo da variação das quatro principais razões trigonométricas conforme os quadrantes. O símbolo “↗” significa que a razão cresce no quadrante indicado e o símbolo “↘” significa que a razão decresce no quadrante indicado.

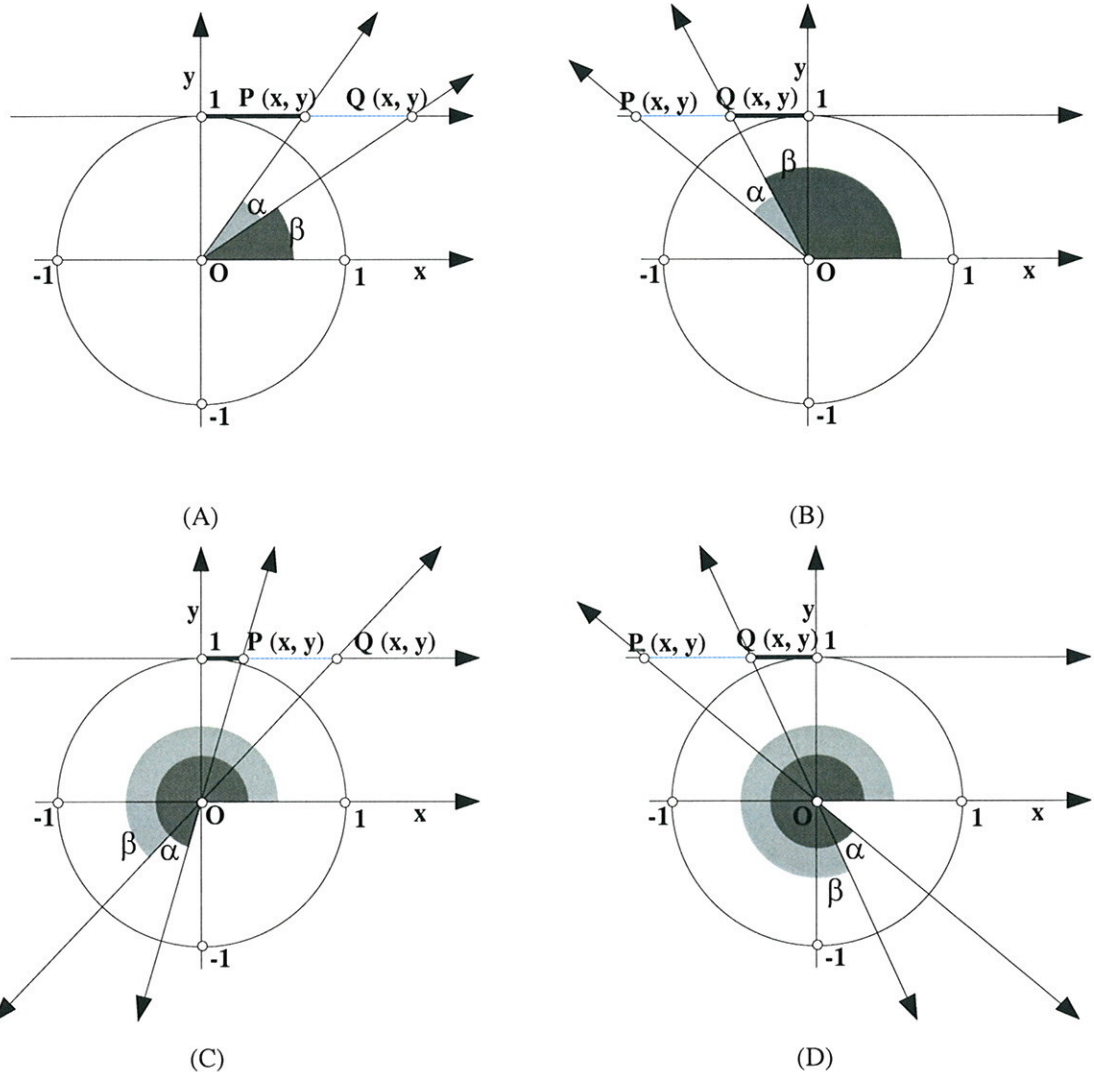


Figura 2.29: (A) – Variação da co-tangente no 1º quadrante. (B) – Variação da co-tangente no 2º quadrante. (C) – Variação da co-tangente no 3º quadrante. (D) – Variação da co-tangente no 4º quadrante. Nos quatro quadrantes verificamos que, $\alpha > \beta \Rightarrow \cotg \alpha < \cotg \beta$

2.5 Funções trigonométricas

Em vez de encarar as razões trigonométricas como relações entre lados e ângulos de triângulos, como foi feito até aqui, podemos estudar a variação destas razões em função dos ângulos ou dos arcos. A cada ângulo θ podemos associar o valor duma certa razão trigonométrica para θ .

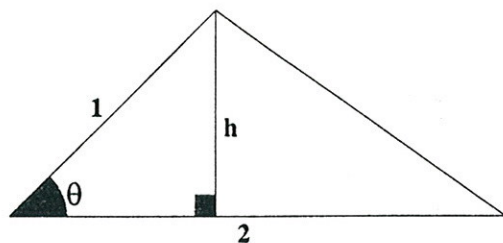


Figura 2.30: Triângulo de base 2 e um dos lados 1. O ângulo entre estes dois lados é θ . Podemos dividi-lo em dois triângulos rectângulos a partir da altura (h) relativamente à base (2).

Assim, estabelecemos uma correspondência unívoca, ou seja, uma função³⁴, que se vai designar por função trigonométrica³⁵.

2.5.1 Estudo da função seno

Suponhamos que num triângulo são conhecidas as medidas de dois lados (2 e 1 respectivamente – Figura 2.30). Vamos deduzir uma fórmula que dê a área A do triângulo em função do ângulo formado pelos dois lados dados. Para a calcular vamos admitir que a sua base mede 2. Uma vez que a altura do triângulo determina com a base dada um ângulo recto (Figura 2.30), temos

$$\text{sen } \theta = \frac{h}{1} \Leftrightarrow h = \text{sen } \theta.$$

Então³⁶

$$A = \frac{2\text{sen}\theta}{2} \Leftrightarrow A = \text{sen } \theta.$$

³⁴ Dá-se o nome de *função* ou *aplicação* a uma correspondência entre dois conjuntos, A e B , de tal modo que a cada elemento do primeiro conjunto, A , corresponde um e um só elemento $f(x)$ do segundo conjunto, B . Ao conjunto A chama-se *conjunto de partida* e ao conjunto B chama-se *conjunto de chegada*. Simbolicamente:

$$f: A \rightarrow B \\ x \mapsto f(x) = y$$

A variável x chama-se *variável independente* e é representada no eixo dos xx . A variável y chama-se *variável dependente* e é representada no eixo dos yy e escreve-se y ou $f(x)$. O *domínio da função* f é o conjunto de valores que toma a variável independente e representa-se por D_f . O *contradomínio* da função f é o conjunto dos valores que toma a variável dependente, e designa-se por D'_f ou CD_f . Aos elementos do domínio chamamos *objectos* e aos elementos do contradomínio chamamos *imagens*. Tem-se sempre $A = D_f$ e $D'_f \subseteq B$.

³⁵ Função trigonométrica é uma função que tem por conjunto de partida o conjunto de todas as amplitudes de ângulos (θ), designemos por \mathcal{A} , e por conjunto de chegada o conjunto dos números reais, \mathbb{R} . Por exemplo, a função g que a cada ângulo θ faz corresponder o seno de θ é uma função trigonométrica:

$$g: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\theta \mapsto g(\theta) = \text{sen } \theta$$

Esta abordagem da Trigonometria foi sugerida pela primeira vez por Johann Bernoulli (1667 – 1748) e desenvolvida mais tarde por Léonard Euler (ver secção 1.3).

³⁶ A fórmula que nos dá a área de um triângulo é dada por: $\text{Área} = \frac{bh}{2}$, onde b é a base e h a altura do triângulo (Apêndice IV).

θ	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{5}$	$\frac{4\pi}{5}$
sen θ	$\approx 0,588$	$\approx 0,951$	1	$\approx 0,951$	$\approx 0,588$

Tabela 2.4: Seno de alguns valores possíveis do ângulo interno de um triângulo, formado pelos lados com medida 1 e 2 (Figura 2.30).

Obtivemos, assim, uma expressão que nos permite calcular a área A do triângulo a partir da amplitude do ângulo entre os dois lados conhecidos. A cada valor de θ corresponde um e um só valor A da medida da área. Fica, assim, definida uma função, a *função trigonométrica seno* do conjunto de todas as amplitudes de ângulos (\mathcal{A}) para o conjunto dos números reais, \mathbb{R} :

$$A: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\theta \mapsto A(\theta) = \text{sen } \theta$$

Podemos, agora, atribuir valores a θ (Tabela 2.4) e verificar como se comporta a área A do triângulo. Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é π rad (secção 3.3), o ângulo θ só pode variar entre 0 e π . Observa-se, na Tabela 2.4, que há valores de ângulos diferentes que dão origem a triângulos com a mesma área, ou seja, a função seno não é injectiva³⁷.

Vamos agora encarar a função seno como a função f , real de variável real³⁸,

$$f: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = \text{sen } x.$$

Recorrendo às secções 2.3.1 (Tabela 2.1), 2.4.6 e 2.4.7, vamos representar graficamente a função seno no intervalo $[0, 2\pi[$ (Figura 2.31). Podemos continuar a fazer o estudo desta função para ângulos menores que 0 rad e maiores que 2π rad. Verificaríamos que se obtêm os mesmos valores que já obtivemos para os ângulos entre $[0, 2\pi[$, pois a curva do gráfico repete-se de 2π em 2π , ou seja, a função seno é *periódica*³⁹ de período 2π :

$$\text{sen}(x + 2\pi) = \text{sen } x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

O *domínio* da função seno é \mathbb{R} e o seu *contradomínio* é $[-1, 1]$. A função tem *zeros*⁴⁰ em 0, π , $-\pi$, 2π , -2π , 3π , -3π , ... A expressão geral de todos os zeros do seno é:

³⁷ Uma função f diz-se injectiva, num intervalo I do seu domínio, se para dois quaisquer valores diferentes desse intervalo as respectivas imagens são sempre diferentes. Simbolicamente escreve-se: $a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$, $\forall a, b \in I$.

³⁸ Chama-se função de variável real à função que tem por domínio um subconjunto de \mathbb{R} e por conjunto de chegada \mathbb{R} .

³⁹ Uma função f é *periódica* de período p quando as imagens se repetem de p em p , isto é, $f(x + p) = f(x)$, $\forall x \in D_f$. Uma função periódica é sempre não injectiva.

⁴⁰ Chama-se *zero* de uma função f , a todo o objecto que tem por imagem o valor zero, ou seja, o objecto a é zero de f sse $f(a) = 0$. Graficamente é a abcissa de um ponto onde o gráfico corta o eixo das abcissas (dos xx).

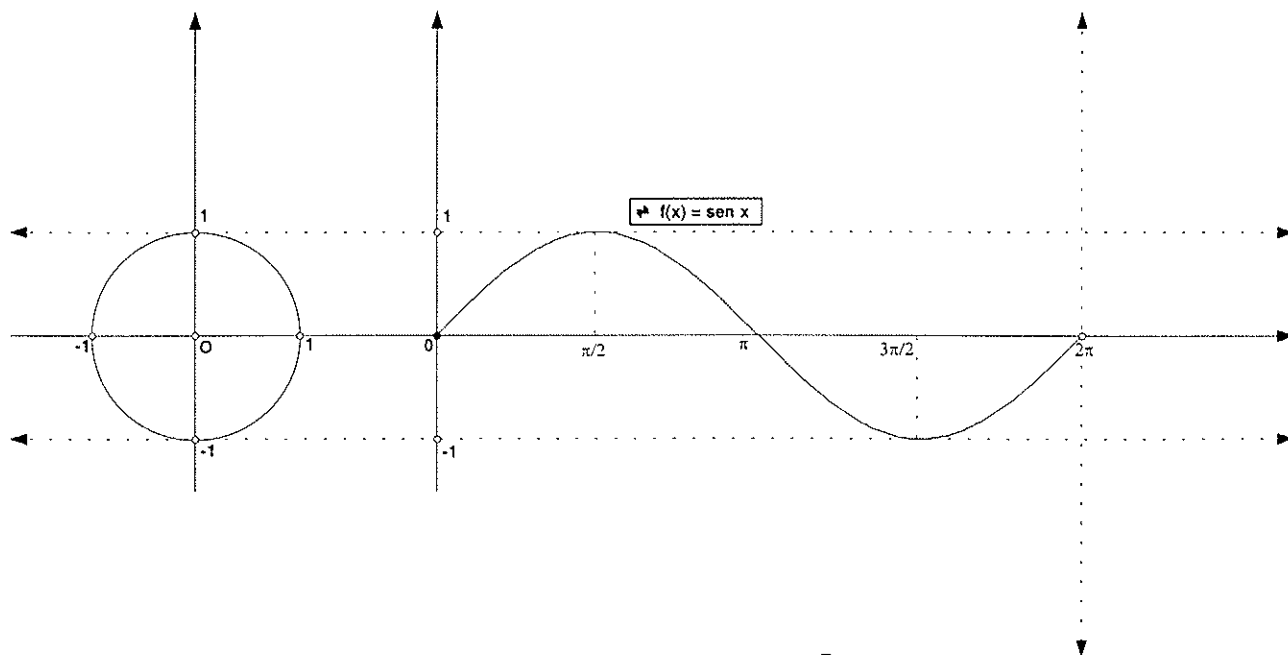


Figura 2.31: Gráfico da função seno, em $[0, 2\pi]$, representado a partir do círculo trigonométrico. A curva que representa o gráfico da função seno chama-se *sinusóide*. Verifica-se que a função seno varia entre -1 e 1 , inclusive. Simbolicamente escreve-se: $-1 \leq \text{sen } x \leq 1$. As imagens geométricas da função seno não se limitam ao que está representado na figura, elas prolongam-se indefinidamente para a direita e para a esquerda, reproduzindo periodicamente o troço do intervalo $[0, 2\pi]$.

x	...	-2π		$-\pi$		0		π		2π		3π	...
sen x	...	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+	0	...

Tabela 2.5: Variação do sinal da função seno num intervalo, $[-2\pi, 3\pi]$.

$$\text{sen } x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (2.31)$$

Podemos alongar o estudo já realizado da *variação do sinal*⁴¹, do seno no círculo trigonométrico (Figura 2.25 – (A)), a todo o domínio desta função traduzido pela Tabela 2.5. A expressão geral onde o seno é positivo é dada por:

$$\text{sen } x > 0 \Leftrightarrow x \in]0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi[, \quad k \in \mathbb{Z};$$

A expressão geral onde o seno é negativo é dada por:

$$\text{sen } x < 0 \Leftrightarrow x \in]\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi[, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

⁴¹ Uma *função é positiva* quando a variável dependente o for e *negativa* quando a variável dependente o for também.

x	...	$-\frac{5\pi}{2}$		$-\frac{3\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{2}$...
sen x	...	-1	↗	1	↘	-1	↗	1	↘	-1	↗	1	...
		Mín		Máx		Mín		Máx		Mín		Máx	

Tabela 2.6: Estudo dos intervalos de monotonia e dos extremos da função seno no intervalo

$\left[-\frac{5\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \right]$ (ver Tabela 2.3).

Os *intervalos de monotonia*⁴² e os *extremos*⁴³ estão representados na Tabela 2.6, aproveitando o estudo da Tabela 2.3. Verificamos que a função tem um máximo, 1, em $\frac{\pi}{2}$ e em todos os pontos que se obtêm somando-lhe algebricamente um número inteiro de períodos. A expressão geral dos pontos onde a função seno toma o valor máximo é dada por:

$$\text{sen } x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

A função tem um mínimo, -1, em $-\frac{\pi}{2}$ e em todos os pontos que se obtêm somando a este um número inteiro de períodos. A expressão geral dos pontos onde a função toma o valor mínimo é:

$$\text{sen } x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

⁴² Uma função é *monótona* num intervalo do domínio, se for *crecente* ou *decrescente* ou *constante* nesse intervalo. Uma função f diz-se *crecente* num intervalo I do domínio se as imagens variam no mesmo sentido dos objectos. Simbolicamente:

$$a > b \Rightarrow f(a) > f(b), \quad \forall a, b \in I.$$

Uma função f diz-se *decrescente* num intervalo I do domínio se as imagens variam no sentido contrário dos objectos. Simbolicamente:

$$a > b \Rightarrow f(a) < f(b), \quad \forall a, b \in I$$

e também

$$a < b \Rightarrow f(a) > f(b), \quad \forall a, b \in I.$$

Uma função f diz-se *constante* num intervalo I do domínio se todos os objectos tiverem a mesma imagem.

⁴³ Chamam-se extremos de uma função aos máximos e aos mínimos relativos da mesma. Em $I \subseteq D_f$, $f(a)$ é máximo sse $\forall x \in I, f(a) \geq f(x)$. O objecto a diz-se um *maximizante* da função f. O maior dos máximos diz-se *máximo absoluto* ou *supremo* (é o maior valor do contradomínio). Os outros máximos são designados por *máximos relativos*. Em $I \subseteq D_f$, $f(b)$ é mínimo sse $\forall x \in I, f(b) \leq f(x)$. O objecto b diz-se um *minimizante* da função f. O menor dos mínimos diz-se *mínimo absoluto* ou *ínfimo* (é o menor valor do contradomínio). Os outros mínimos dizem-se *mínimos relativos*.

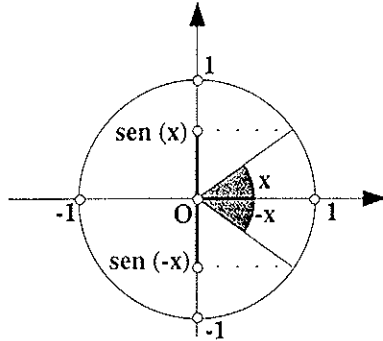


Figura 2.32: Comprovamos, no círculo trigonométrico, que: $\text{sen}(-x) = -\text{sen } x$ (função ímpar).

A função seno é uma função *ímpar*⁴⁴, isto é, ângulos simétricos têm senos simétricos (Figura 2.32):

$$\text{sen}(-x) = -\text{sen } x.$$

2.5.2 Estudo da função co-seno

Vamos agora tratar da função trigonométrica co-seno, g , como função real de variável real,

$$\begin{aligned} g: \mathcal{A} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto g(x) = \cos x. \end{aligned}$$

Tal como para o estudo da função seno, tendo em conta o estudo feito nas secções anteriores, 2.3.1 (Tabela 2.1), 2.4.6 e 2.4.7, para a razão trigonométrica co-seno, representamos o gráfico da função co-seno no intervalo $[0, 2\pi[$ (Figura 2.33). Verificamos, tal como para a função seno, que a curva do gráfico se repete de 2π em 2π , ou seja, a função co-seno é *periódica* de período 2π :

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

O *domínio* da função co-seno é \mathbb{R} e o seu *contradomínio* é o intervalo $[-1, 1]$. A função co-seno tem

zeros em $\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, -\frac{5\pi}{2}, \dots$. A expressão geral de todos os zeros desta função é dada

por:

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Apresenta-se a variação do sinal da função co-seno na Tabela 2.7. A expressão geral onde a função co-seno é positivo é dada por:

⁴⁴ Quanto à *paridade*, uma função f diz-se: *ímpar* se para qualquer ponto x do domínio se verifica: $f(-x) = -f(x)$ (graficamente, o gráfico da função ímpar é simétrico relativamente à origem); *par* se para qualquer ponto x do domínio se verifica: $f(-x) = f(x)$ (graficamente, o gráfico da função par é simétrico relativamente ao eixo das ordenadas).

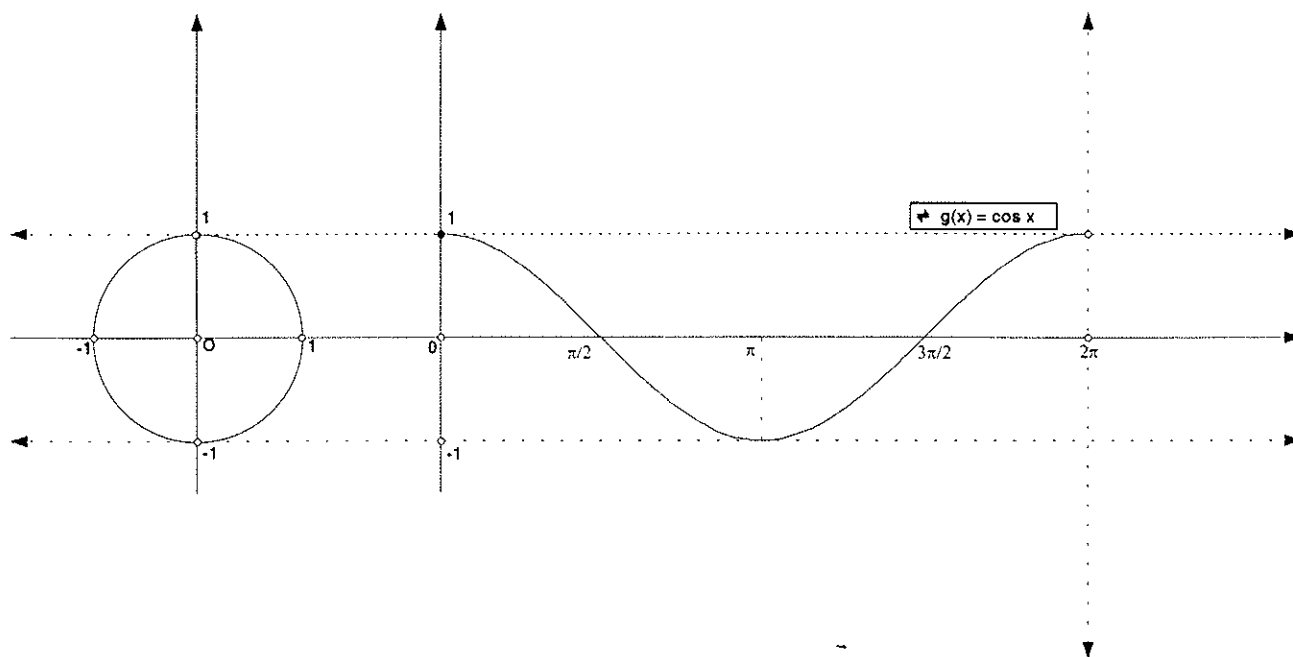


Figura 2.33: Gráfico da função co-seno em $[0, 2\pi[$. É também uma sinusóide, geometricamente igual à função seno, mas noutra posição relativamente à origem do referencial. Verifica-se que a função co-seno varia entre -1 e 1 , inclusive, e escreve-se: $-1 \leq \cos x \leq 1$. As imagens geométricas da função co-seno não se limitam ao que está representado na figura, elas prolongam-se indefinidamente para a direita e para a esquerda, reproduzindo periodicamente o troço do intervalo $[0, 2\pi[$.

x	...	$-\frac{5\pi}{2}$		$-\frac{3\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{2}$...
$\cos x$...	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+	0	...

Tabela 2.7: Variação do sinal da função co-seno em $\left[-\frac{5\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$ (ver Figura 2.25 – (B)).

$$\cos x > 0 \Leftrightarrow x \in \left] -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi[, k \in \mathbb{Z};$$

A expressão geral onde a função co-seno é negativa é dada por:

$$\cos x < 0 \Leftrightarrow x \in \left] \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi[, k \in \mathbb{Z}.$$

Apresentamos na Tabela 2.8, os *intervalos de monotonia* e os *extremos* no intervalo $[-2\pi, 3\pi]$ do domínio da função co-seno. Verificamos que a função tem um máximo, 1 , em 0 e em todos os pontos que se obtêm somando algebricamente um número inteiro de períodos. A expressão geral dos pontos onde a função co-seno toma o valor máximo é dada por:

$$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

x	...	-2π		$-\pi$		0		π		2π		3π	...
cos x	...	1		-1		1		-1		1		-1	...
		Máx	↘	Mín	↗	Máx	↘	Mín	↗	Máx	↘	Mín	

Tabela 2.8: Monotonia e extremos da função co-seno no intervalo de $[-2\pi, 3\pi]$ (ver Tabela 2.3).

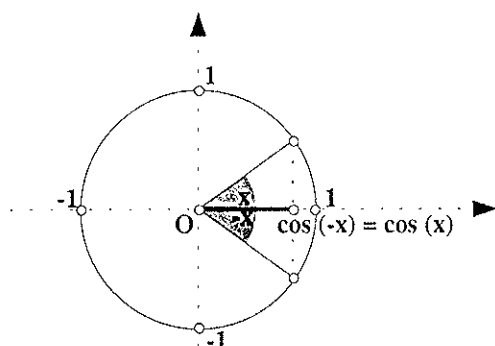


Figura 2.34: Comprova-se, no círculo trigonométrico, que: $\cos(-x) = \cos x$ (função par).

A função co-seno tem mínimo, -1 , em π e em todos os pontos que se obtêm somando a este um número inteiro de períodos. A expressão geral dos pontos onde a função toma o valor mínimo é:

$$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

A função co-seno é uma função *par*, isto é, ângulos simétricos têm co-senos iguais (Figura 2.34):

$$\cos(-x) = \cos x.$$

2.5.3 Estudo da função tangente

Vamos estudar a função trigonométrica tangente, h , função real de variável real,

$$\begin{aligned} h: \mathcal{A} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto h(x) = \operatorname{tg} x. \end{aligned}$$

Começemos por lembrar que existem ângulos que não têm tangente (ver secção 2.4.3), são todos os ângulos da forma:

$$\frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Assim, o *domínio* da função tangente é o conjunto:

$$D_h = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

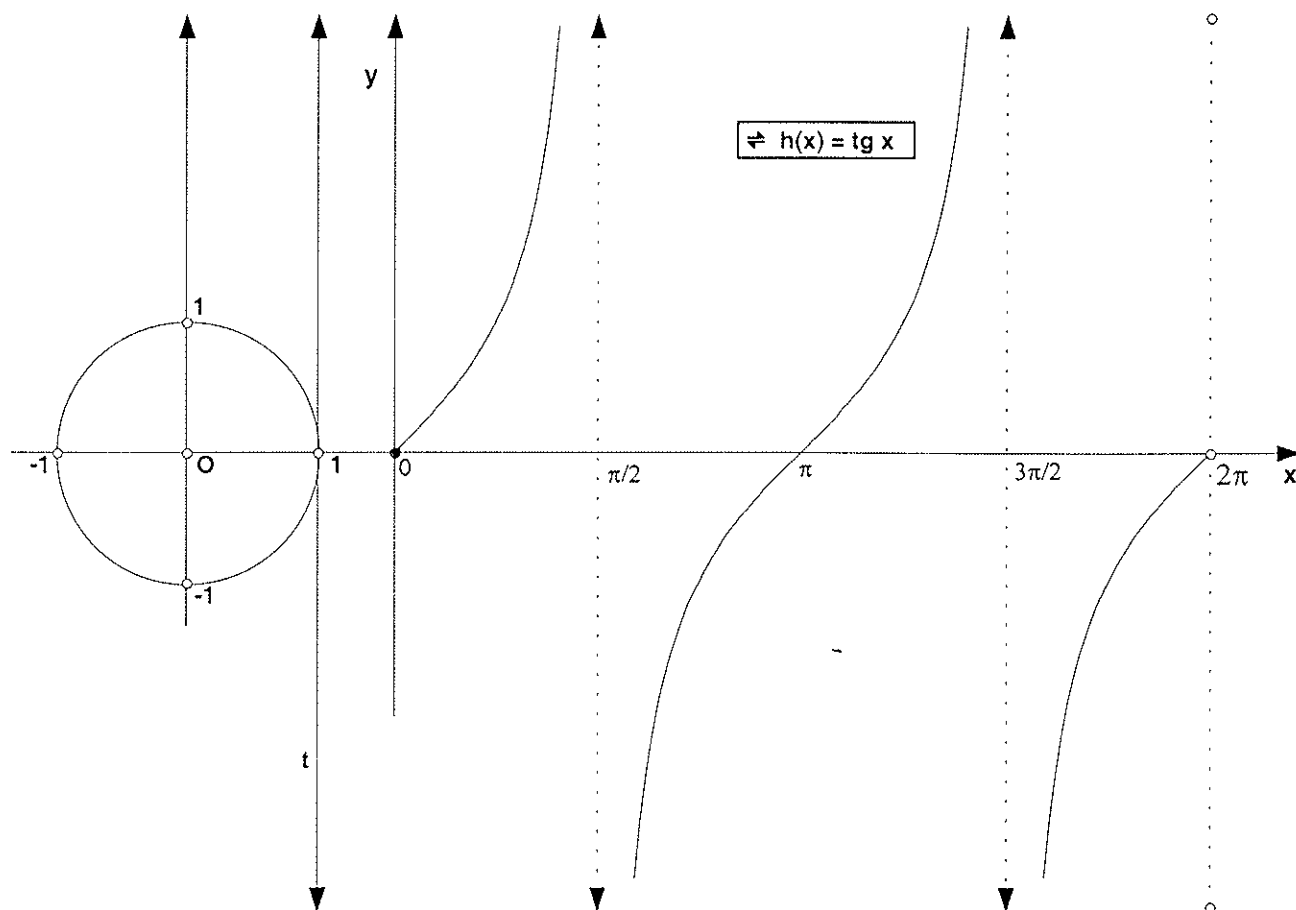


Figura 2.35: Gráfico da função tangente no intervalo $[0, 2\pi[$. A recta t paralela ao eixo dos yy e tangente ao círculo trigonométrico representa o eixo das tangentes. As rectas $x = \frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{3\pi}{2}$ são assíntotas verticais do gráfico da função.

Na Figura 2.35 representamos o gráfico da função tangente no intervalo $[0, 2\pi[$. Pelos pontos onde a função não está definida passa um recta vertical que se chama *assíntota*⁴⁵ *vertical* do gráfico. A expressão geral das equações das assíntotas é dada por:

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Verificamos, a partir da observação do gráfico (Figura 2.35), que a curva do gráfico se repete de π em π , ou seja, trata-se de uma função *periódica* de período π , isto é,

$$\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x, \quad \forall x \in D_h.$$

O *contradomínio* da função é \mathbb{R} . Esta função tem *zeros* em $0, \pi, -\pi, 2\pi, -2\pi, 3\pi, -3\pi, \dots$

⁴⁵ Assíntotas são rectas verticais, horizontais ou oblíquas em relação às quais o gráfico da função se vai aproximando sucessivamente sem nunca lhe tocar.

x	...	$-\frac{3\pi}{2}$		$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π	...
tg x	...	Nd	-	0	+	Nd	-	0	+	Nd	-	0	...

Tabela 2.9: Variação do sinal da função tangente em $\left[-\frac{3\pi}{2}, \pi\right]$. Nd quer dizer que a função não está definida.

x	...	$-\frac{5\pi}{2}$		$-\frac{3\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{2}$...
tg x	...	Nd	↗	Nd	↗	Nd	↗	Nd	↗	Nd	↗	Nd	...

Tabela 2.10: Monotonia da função tangente em $\left[-\frac{5\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$ (ver Tabela 2.3). Nd quer dizer que a função não está definida.

Escrevamos a expressão geral dos seus zeros:

$$\operatorname{tg} x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Na Tabela 2.9 mostra-se a *variação do sinal* da tangente (ver Figura 2.25 – (C)) ao domínio desta função. A expressão geral dos intervalos onde a tangente é positiva, correspondentes ao 1º e 3º quadrantes:

$$\operatorname{tg} x > 0 \Leftrightarrow x \in]0 + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[, \quad k \in \mathbb{Z};$$

A expressão geral dos intervalos onde a tangente é negativa, correspondentes ao 2º e 4º quadrantes:

$$\operatorname{tg} x < 0 \Leftrightarrow x \in]\frac{\pi}{2} + k\pi, \pi + k\pi[, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Apresentamos na Tabela 2.10 a *monotonia* da função tangente no intervalo $\left[-\frac{5\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$ do domínio.

Verificamos que a função não tem extremos e é sempre crescente nos intervalos onde está definida. No entanto não é crescente em todo o domínio porque há interrupções periódicas em que a função passa de valores positivos para valores negativos. A função tangente é uma função *ímpar*, isto é, a ângulos originais simétricos correspondem tangentes simétricas (Figura 2.36):

$$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x.$$

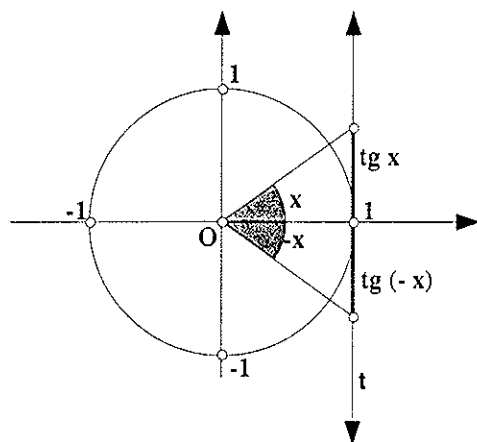


Figura 2.36: Representação do círculo trigonométrico e do eixo das tangentes, t. Podemos observar que se tem: $\text{tg}(-x) = -\text{tg} x$ (a função tangente é ímpar).

2.5.4 Estudo da função co-tangente

Por último, vamos estudar a função trigonométrica co-tangente, j , função real de variável real,

$$j: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto j(x) = \text{cotg} x.$$

O *domínio* da função co-tangente é o conjunto:

$$D_j = \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Na Figura 2.37 representamos o gráfico da função co-tangente no intervalo $[0, 2\pi[$. O gráfico tem *assíntotas verticais*:

$$x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Trata-se de uma função *periódica* de período π , isto é,

$$\text{cotg}(x + k\pi) = \text{cotg} x, \forall x \in D_j \text{ e } \forall k \in \mathbb{Z}.$$

O *contradomínio* da função é \mathbb{R} . A expressão geral dos seus zeros é dada por:

$$\text{cotg} x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Na Figura 2.25 – (C) vê-se a *variação do sinal* da co-tangente. A forma geral dos intervalos onde a co-tangente é positiva, correspondente aos 1º e 3º quadrantes, é:

$$\text{cotg} x > 0 \Leftrightarrow x \in]k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[, k \in \mathbb{Z};$$

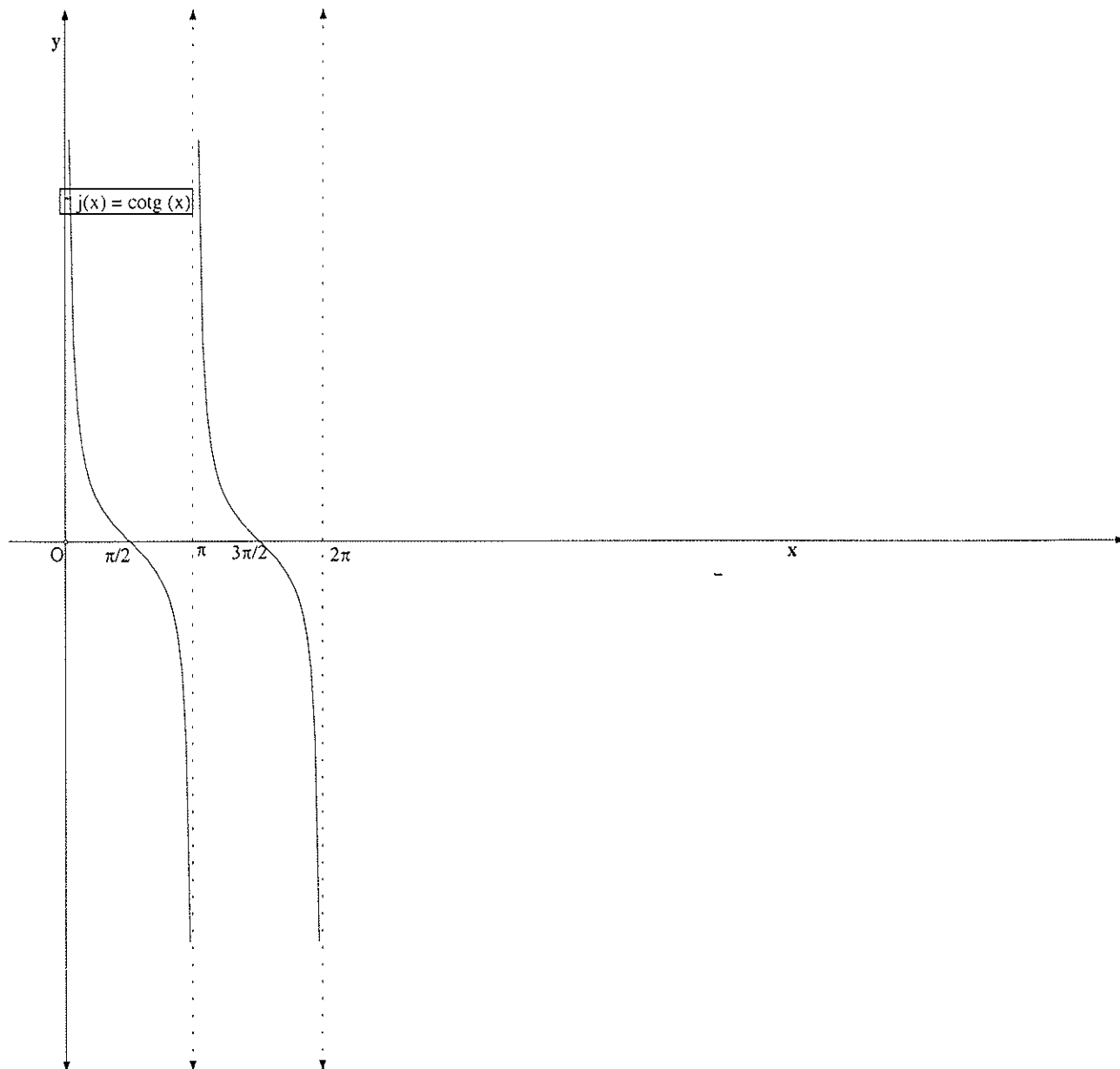


Figura 2.37: Gráfico da função co-tangente no intervalo $[0, 2\pi[$. As rectas $x = 0$, $x = \pi$ e $x = 2\pi$ são assímtotas verticais do gráfico da função (adaptado de Shaffer 1995).

A forma geral dos intervalos onde a co-tangente é negativa, correspondente aos 2º e 4º quadrantes, é:

$$\cotg x < 0 \Leftrightarrow x \in]\frac{\pi}{2} + k\pi, \pi + k\pi[, k \in \mathbb{Z}.$$

A função co-tangente não tem extremos e é sempre decrescente nos intervalos onde está definida, não é injectiva e é ímpar:

$$\cotg(-x) = -\cotg x.$$

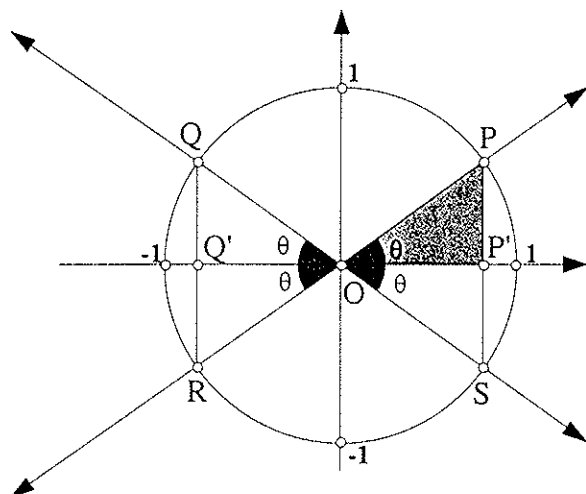


Figura 2.38: Os triângulos $\Delta[OPP']$, $\Delta[OQQ']$, $\Delta[ORQ']$ e $\Delta[OSP']$ são congruentes (ver secção 3.2). As coordenadas dos pontos P, Q, R e S são iguais, em módulo. O ângulo θ é o mesmo nos quatro quadrantes.

2.6 Redução ao 1º quadrante

Qualquer ângulo, no 2º, no 3º ou no 4º quadrante, tem, em valor absoluto, razões trigonométricas iguais a um ângulo do 1º quadrante – redução ao 1º quadrante. Da Figura 2.38, vemos que os lados adjacentes aos ângulos respectivos θ definem triângulos equipolentes (geometricamente iguais) ao $\Delta[OPP']$. Assim os pontos $P(x_p, y_p)$, $Q(x_q, y_q)$, $R(x_r, y_r)$ e $S(x_s, y_s)$ têm coordenadas iguais, em módulo ($|x_p| = |x_q| = |x_r| = |x_s|$; $|y_p| = |y_q| = |y_r| = |y_s|$). Existem várias maneiras de fazer a redução ao 1º quadrante que apresentamos nas secções 2.6.2 – 2.6.7. De seguida, contudo, começamos pelo estudo de ângulos complementares.

2.6.1 Ângulos complementares

Dois ângulos β e δ dizem-se complementares se a sua soma é $\frac{\pi}{2}$ ou 90° , ou seja,

$$\beta + \delta = \frac{\pi}{2} \text{ ou } \beta + \delta = 90^\circ.$$

Os ângulos α e $\frac{\pi}{2} - \alpha$ são complementares. Verifica-se que se dois ângulos são complementares, a razão trigonométrica de um deles é igual à co-razão do outro, isto é, temos que (Figura 2.39):

$$\text{sen} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \text{cos } \alpha$$

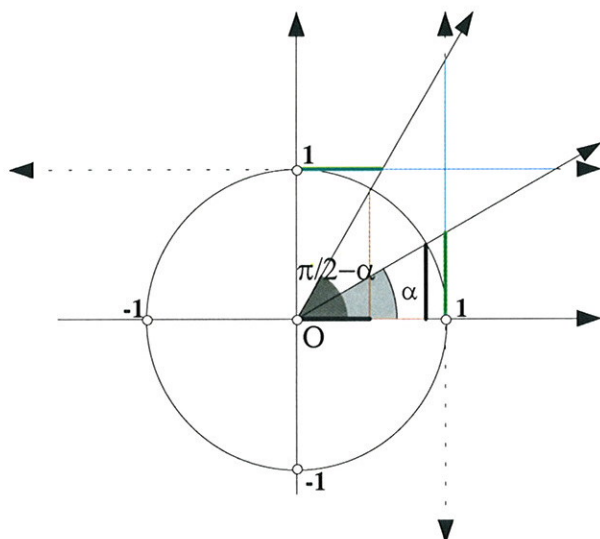


Figura 2.39: α e $\frac{\pi}{2} - \alpha$ são ângulos complementares. Apresentamos a comparação das razões trigonométricas destes ângulos, no círculo trigonométrico (seno, co-seno, tangente e co-tangente):

$$\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \cos \alpha \text{ (vermelho); } \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \operatorname{sen} \alpha \text{ (preto); } \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \operatorname{cotg} \alpha \text{ (azul);}$$

$$\operatorname{cotg} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \operatorname{tg} \alpha \text{ (verde).}$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \operatorname{sen} \alpha$$

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \operatorname{cotg} \alpha$$

$$\operatorname{cotg} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \operatorname{tg} \alpha$$

2.6.2 Ângulos que diferem de $\frac{\pi}{2}$

Aqui, os ângulos a representar no círculo trigonométrico são α e $\frac{\pi}{2} + \alpha$ (Figura 2.40).

Temos:

$$\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) = \cos \alpha$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) = -\operatorname{sen} \alpha$$

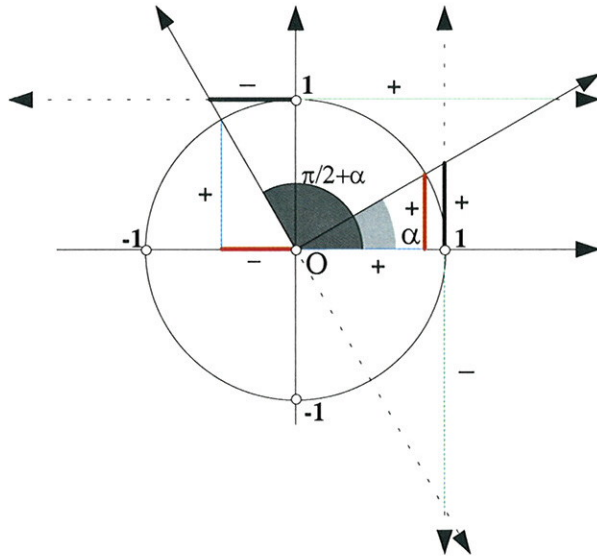


Figura 2.40: A diferença dos ângulos α e $\frac{\pi}{2} + \alpha$ é um ângulo recto. Comparação das razões trigonométricas destes ângulos, no círculo trigonométrico (seno, co-seno, tangente e co-tangente):

$$\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) = \cos \alpha \text{ (azul); } \cos \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) = -\operatorname{sen} \alpha \text{ (vermelho); } \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) = -\operatorname{cotg} \alpha \text{ (verde);}$$

$\operatorname{cotg} \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) = -\operatorname{tg} \alpha$ (preto). O sinal “+” significa que a razão trigonométrica do ângulo respectivo é positiva e o sinal “-” significa que a razão trigonométrica do ângulo respectivo é negativa.

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) = -\operatorname{cotg} \alpha$$

$$\operatorname{cotg} \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) = -\operatorname{tg} \alpha$$

2.6.3 Ângulos suplementares

Dois ângulos, α e β , dizem-se suplementares se a sua soma é π ou 180° , ou seja,

$$\alpha + \beta = \pi \Leftrightarrow \beta = \pi - \alpha.$$

Vamos representar os ângulos suplementares α e $\pi - \alpha$ no círculo trigonométrico conforme a Figura 2.41. Da Figura se dois ângulos são suplementares, os valores das razões trigonométricas de um deles são simétricas dos valores das razões trigonométricas do outro, excepto para o seno. De facto:

$$\operatorname{sen} (\pi - \alpha) = \operatorname{sen} \alpha$$

$$\operatorname{cos} (\pi - \alpha) = -\operatorname{cos} \alpha$$

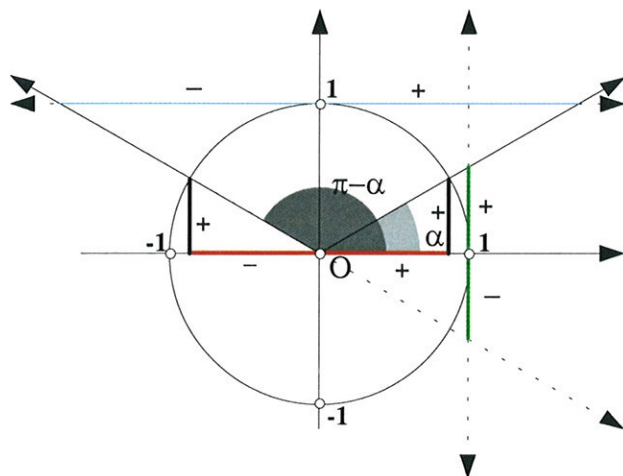


Figura 2.41: α e $\pi - \alpha$ são ângulos suplementares. Apresentamos, no círculo trigonométrico, a comparação das razões trigonométricas destes ângulos: $\text{sen}(\pi - \alpha) = \text{sen} \alpha$ (preto); $\text{cos}(\pi - \alpha) = -\text{cos} \alpha$ (vermelho); $\text{tg}(\pi - \alpha) = -\text{tg} \alpha$ (verde); $\text{cotg}(\pi - \alpha) = -\text{cotg} \alpha$ (azul). O sinal “+” significa que a razão trigonométrica do ângulo respectivo é positiva e o sinal “-” significa que a razão trigonométrica do ângulo respectivo é negativa.

$$\text{tg}(\pi - \alpha) = -\text{tg} \alpha$$

$$\text{cotg}(\pi - \alpha) = -\text{cotg} \alpha$$

2.6.4 Ângulos que diferem de π

Representemos no círculo trigonométrico os ângulos α e $\pi + \alpha$ (Figura 2.42). Se dois ângulos diferem de π , os valores das razões trigonométricas de um deles são simétricas dos valores das razões trigonométricas do outro (excepto para a tangente e a co-tangente). Tem-se (da Figura):

$$\text{sen}(\pi + \alpha) = -\text{sen} \alpha$$

$$\text{cos}(\pi + \alpha) = -\text{cos} \alpha$$

$$\text{tg}(\pi + \alpha) = \text{tg} \alpha$$

$$\text{cotg}(\pi + \alpha) = \text{cotg} \alpha$$

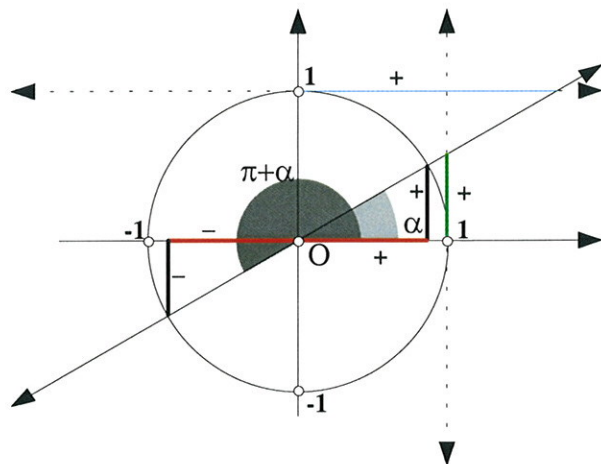


Figura 2.42: α e $\pi + \alpha$ são ângulos que diferem de π . Apresentamos, no círculo trigonométrico, a comparação das razões trigonométricas destes ângulos: $\text{sen}(\pi + \alpha) = -\text{sen} \alpha$ (preto); $\text{cos}(\pi + \alpha) = -\text{cos} \alpha$ (vermelho); $\text{tg}(\pi + \alpha) = \text{tg} \alpha$ (verde); $\text{cotg}(\pi + \alpha) = \text{cotg} \alpha$ (azul). “+” significa razão positiva e “-” significa razão negativa.

2.6.5 Ângulos cuja soma é $\frac{3\pi}{2}$

Representemos agora, no círculo trigonométrico, os ângulos α e $\frac{3\pi}{2} - \alpha$ (Figura 2.43).

Temos:

$$\text{sen} \left(\frac{3\pi}{2} - \alpha \right) = -\text{cos} \alpha$$

$$\text{cos} \left(\frac{3\pi}{2} - \alpha \right) = -\text{sen} \alpha$$

$$\text{tg} \left(\frac{3\pi}{2} - \alpha \right) = \text{cotg} \alpha$$

$$\text{cotg} \left(\frac{3\pi}{2} - \alpha \right) = \text{tg} \alpha$$

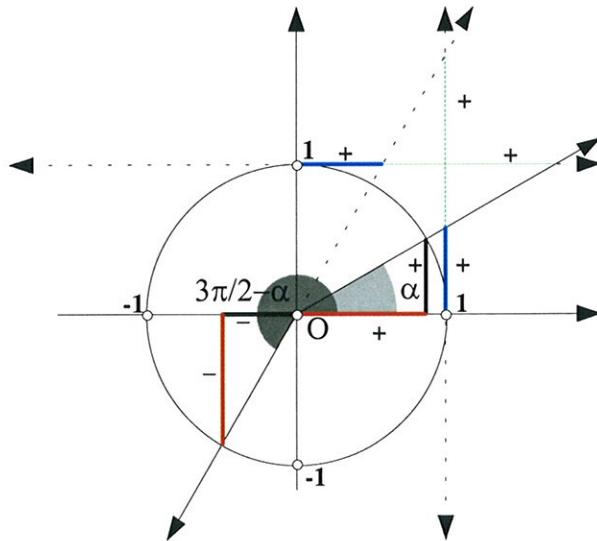


Figura 2.43: α e $\frac{3\pi}{2} - \alpha$ são ângulos cuja soma é $\frac{3\pi}{2}$. Apresentamos, no círculo trigonométrico, a

comparação das razões trigonométricas destes ângulos: $\text{sen} \left(\frac{3\pi}{2} - \alpha \right) = -\cos \alpha$ (vermelho);

$\cos \left(\frac{3\pi}{2} - \alpha \right) = -\text{sen} \alpha$ (preto); $\text{tg} \left(\frac{3\pi}{2} - \alpha \right) = \text{cotg} \alpha$ (verde); $\text{cotg} \left(\frac{3\pi}{2} - \alpha \right) = \text{tg} \alpha$ (azul). “+”

significa razão positiva e “-” significa razão negativa.

2.6.6 Ângulos que diferem de $\frac{3\pi}{2}$

Vamos representar, no círculo trigonométrico, os ângulos α e $\frac{3\pi}{2} + \alpha$. Como podemos verificar na Figura 2.44, passamos duma razão para a sua co-razão (que pode ser simétrica). É interessante comparar os resultados com os das secções 2.6.2 e 2.6.4, reparando que

$$\frac{3\pi}{2} + \alpha = \pi + \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right)$$

Temos pois:

$$\text{sen} \left(\frac{3\pi}{2} + \alpha \right) = -\cos \alpha$$

$$\cos \left(\frac{3\pi}{2} + \alpha \right) = \text{sen} \alpha$$

$$\text{tg} \left(\frac{3\pi}{2} + \alpha \right) = -\text{cotg} \alpha$$

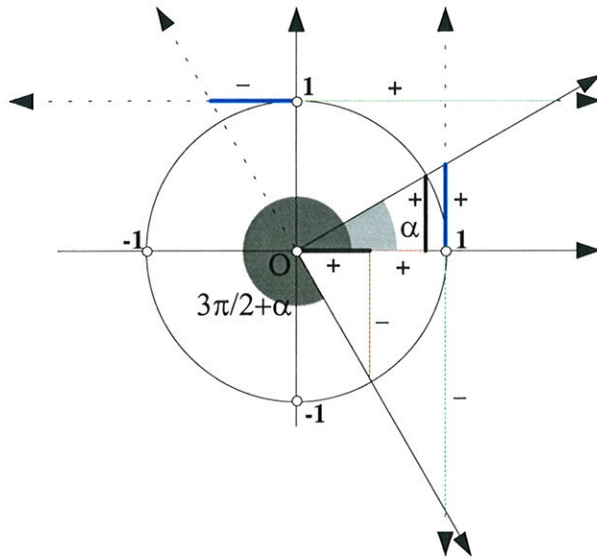


Figura 2.44: α e $\frac{3\pi}{2} + \alpha$ são ângulos que diferem de $\frac{3\pi}{2}$. Apresentamos a comparação das razões trigonométricas destes ângulos, no círculo trigonométrico (seno, co-seno, tangente e co-tangente):
 $\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos \alpha$ (vermelho); $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \text{sen } \alpha$ (preto); $\text{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\text{cotg } \alpha$ (verde);
 $\text{cotg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\text{tg } \alpha$ (azul). “+” significa razão positiva e “-” significa razão negativa.

$$\text{cotg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\text{tg } \alpha$$

2.6.7 Ângulos simétricos

Os ângulos a representar no círculo trigonométrico são α e $-\alpha$, conforme a Figura 2.45.

Temos:

$$\text{sen}(-\alpha) = -\text{sen } \alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\text{tg}(-\alpha) = -\text{tg } \alpha$$

$$\text{cotg}(-\alpha) = -\text{cotg } \alpha$$

Na Tabela 2.11 mostramos todos os resultados das secções 2.6.1 – 2.6.7.

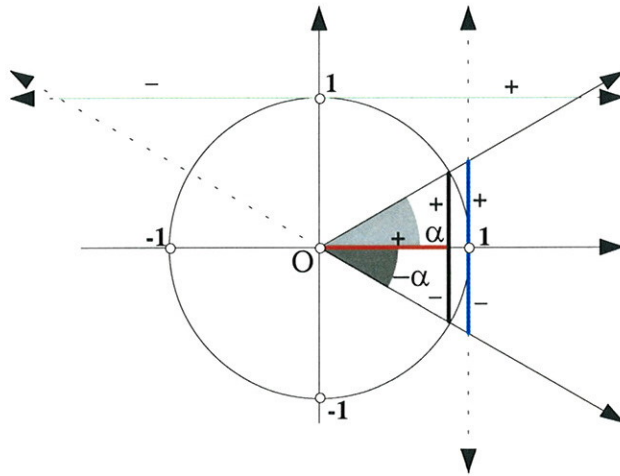


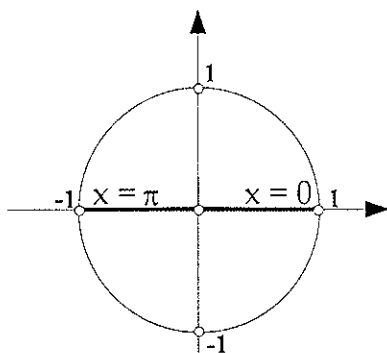
Figura 2.45: α e $-\alpha$ são ângulos simétricos. Apresentamos a comparação das razões trigonométricas destes ângulos, no círculo trigonométrico (seno, co-seno, tangente e co-tangente): $\text{sen}(-\alpha) = -\text{sen } \alpha$ (preto); $\text{cos}(-\alpha) = \text{cos } \alpha$ (vermelho); $\text{tg}(-\alpha) = -\text{tg } \alpha$ (azul); $\text{cotg}(-\alpha) = -\text{cotg } \alpha$ (verde). “+” significa razão positiva e “-” significa razão negativa, respectivamente.

ângulos \ razões	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$	$-\alpha$
sen	$\text{cos } \alpha$	$\text{cos } \alpha$	$\text{sen } \alpha$	$-\text{cos } \alpha$	$-\text{cos } \alpha$	$-\text{cos } \alpha$	$-\text{sen } \alpha$
cos	$\text{sen } \alpha$	$-\text{sen } \alpha$	$-\text{cos } \alpha$	$-\text{sen } \alpha$	$-\text{sen } \alpha$	$\text{sen } \alpha$	$\text{cos } \alpha$
tg	$\text{cotg } \alpha$	$-\text{cotg } \alpha$	$-\text{tg } \alpha$	$\text{cotg } \alpha$	$\text{cotg } \alpha$	$-\text{cotg } \alpha$	$-\text{tg } \alpha$
cotg	$\text{tg } \alpha$	$-\text{tg } \alpha$	$-\text{cotg } \alpha$	$\text{tg } \alpha$	$\text{tg } \alpha$	$-\text{tg } \alpha$	$-\text{cotg } \alpha$

Tabela 2.11: Resumo dos resultados apresentados nas secções 2.6.1 – 2.6.7.

2.7 Equações trigonométricas

Uma equação trigonométrica é uma equação que contém uma função trigonométrica. Para resolver uma equação trigonométrica procuram-se os valores do ângulo que, concretizados no lugar da variável, a transformam numa igualdade numérica verdadeira. A resolução de equações trigonométricas resume-se, em geral, em começar por identificar algumas soluções particulares e generalizar em seguida, indicando uma expressão geral das soluções a partir da periodicidade da função trigonométrica em causa.



$$\text{SEN } X = 0$$

Figura 2.46: O seno anula-se em $0, \pi, 2\pi, \dots, -\pi, -2\pi, \dots$ (todos os ângulos desta forma, $k\pi, k \in \mathbb{Z}$, estão assinalados).

2.7.1 Equações com o seno

Vamos começar por estudar alguns casos particulares. Estudemos todos os ângulos de amplitude x cujo seno é zero, isto é, queremos encontrar todas as soluções da equação trigonométrica:

$$\text{sen } x = 0.$$

Determinemos as soluções no círculo trigonométrico, isto é, descubramos quais os ângulos cujo seno é zero (Figura 2.46). Da Tabela 2.5 sabemos que o seno é nulo para $0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots, -\pi, -2\pi, \dots$, e podemos escrever (2.31):

$$\text{sen } x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Quanto à equação

$$\text{sen } x = 1$$

podemos, a partir do círculo trigonométrico (Figura 2.47), observar que são dadas por:

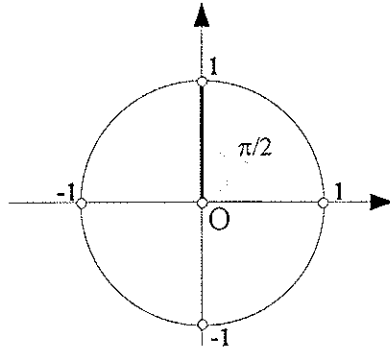
$$\text{sen } x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Para a equação (Figura 2.48)

$$\text{sen } x = -1$$

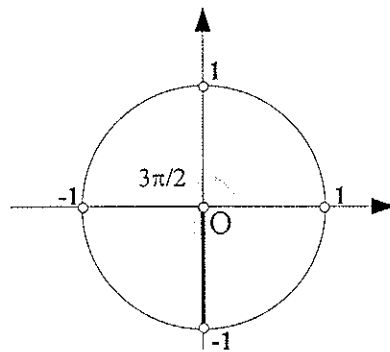
vem:

$$\text{sen } x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$



$$\text{SEN } X = 1$$

Figura 2.47: Os ângulos $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, são as soluções da equação $\text{sen } x = 1$.



$$\text{SEN } X = -1$$

Figura 2.48: Os ângulos $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ ou $270^\circ + k360^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$ são as soluções da equação $\text{sen } x = -1$.

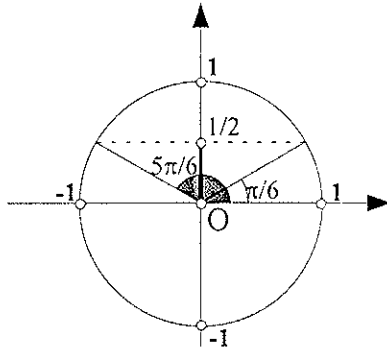
Quadrante	Uma solução	Família de soluções
1º quadrante	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
2º quadrante	$\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Tabela 2.12: Soluções da equação: $\text{sen } x = \frac{1}{2}$.

A equação

$$\text{sen } x = \frac{1}{2} > 0$$

tem soluções nos 1º e 2º quadrantes (Tabela 2.12), conforme se pode observar na Figura 2.49.



$$\text{SEN } X = \frac{1}{2}$$

Figura 2.49: Soluções da equação: $\text{sen } x = \frac{1}{2}$.

Podemos, então, escrever:

$$\text{sen } x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Por outro lado a equação

$$\text{sen } x = -\frac{\sqrt{2}}{2} < 0$$

tem soluções da equação nos 3º e 4º quadrantes (Tabela 2.13 e Figura 2.50).

Então:

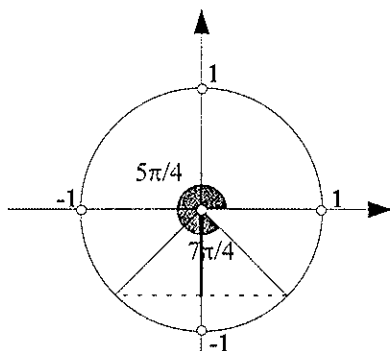
$$\text{sen } x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \vee x = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Generalizando, atendendo à periodicidade da função seno (secção 2.5.1), as equações que envolvem o seno têm solução da forma:

$$\text{sen } x = \text{sen } \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi \vee x = \pi - \alpha + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Quadrante	Uma solução	Família de soluções
4º quadrante	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
3º quadrante	$\pi - \frac{5\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}$ ou $\frac{7\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Tabela 2.13: Soluções da equação $\text{sen } x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.



$$\text{SEN } X = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Figura 2.50: A equação $\text{sen } x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ tem soluções: $x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \vee x = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

2.7.2 Equações com o co-seno

Vamos considerar alguns casos particulares. Começemos por resolver a equação

$$\cos x = 0$$

No círculo trigonométrico (Figura 2.51) observamos que o co-seno é nulo em $\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}$,

$\frac{5\pi}{2}, \dots$ ou seja, podemos escrever

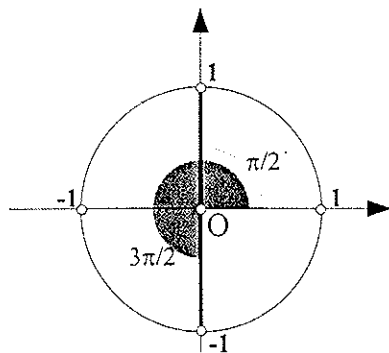
$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Quanto à equação

$$\cos x = 1$$

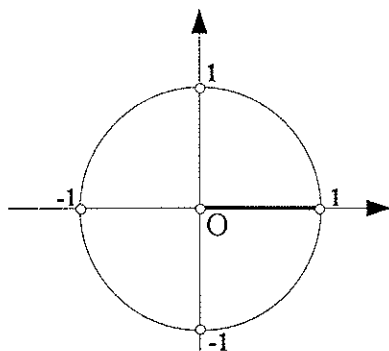
podem ser observadas no círculo trigonométrico (Figura 2.52) e são escritas:

$$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$



$$\cos X = 0$$

Figura 2.51: As soluções da equação: $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.



$$\cos X = 1$$

Figura 2.52: As soluções da equação $\cos x = 1$ são todos os ângulos da forma $2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Para a equação (Figura 2.53)

$$\cos x = -1$$

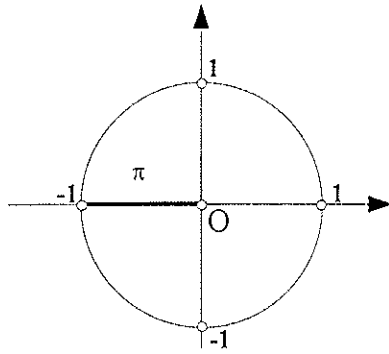
escrevemos:

$$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

A equação

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$$

tem soluções nos 1° e 4° quadrantes (Tabela 2.14), conforme se pode comprovar na Figura 2.54.



$$\cos x = -1$$

Figura 2.53: Soluções da equação: $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Quadrante	Uma solução	Família de soluções
1º quadrante	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
4º quadrante	$2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Tabela 2.14: Soluções da equação: $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

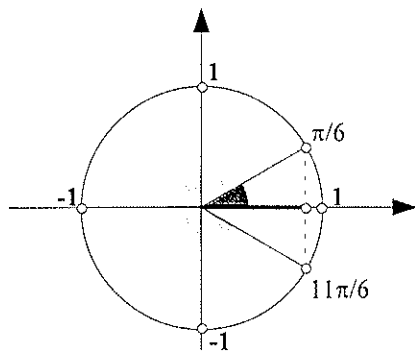


Figura 2.54: Soluções da equação: $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Assim escrevemos:

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

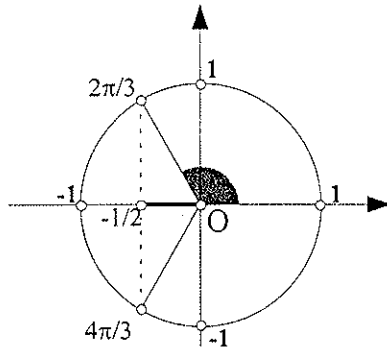
Para a equação

$$\cos x = -\frac{1}{2} < 0$$

as soluções estão nos 2º e 3º quadrantes (ver Tabela 2.15 e Figura 2.55).

Quadrante	Uma solução	Família de soluções
2º quadrante	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
3º quadrante	$2\pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Tabela 2.15: Soluções da equação: $\cos x = -\frac{1}{2}$.



$$\cos X = -\frac{1}{2}$$

Figura 2.55: As soluções da equação: $\cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Então:

$$\cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

De uma forma geral, atendendo à periodicidade da função co-seno (secção 2.5.2), as equações que envolvem o co-seno têm solução escrita na forma:

$$\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi \vee x = 2\pi - \alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

2.7.3 Equações com a tangente

Vamos estudar alguns casos particulares. Determinemos as soluções da equação

$$\operatorname{tg} x = 0.$$

A função tangente anula-se em $0, \pi, -\pi, 2\pi, -2\pi, 3\pi, -3\pi, \dots$ logo a expressão geral das soluções pode escrever-se na forma (Figura 2.56):

$$\operatorname{tg} x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

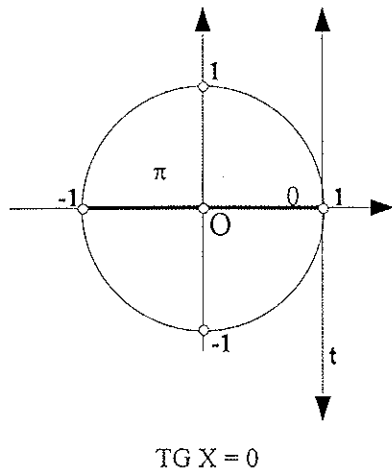


Figura 2.56: t é o eixo das tangentes. As soluções da equação: $\text{tg } x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

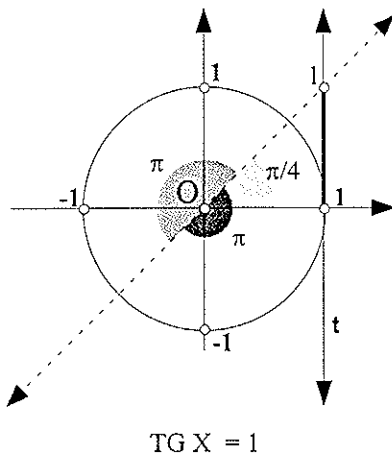


Figura 2.57: t é o eixo das tangentes. As soluções da equação: $\text{tg } x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

A equação

$$\text{tg } x = 1 > 0,$$

tem soluções nos 1º e 3º quadrantes, conforme se pode constatar na Figura 2.57. Escrevemos:

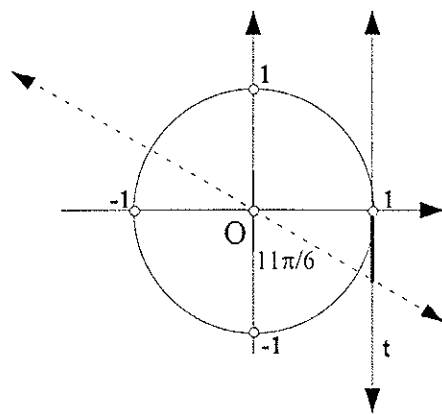
$$\text{tg } x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Para a equação

$$\text{tg } x = -\frac{\sqrt{3}}{3} < 0$$

as soluções estão nos 2º e 4º quadrantes, conforme se pode comprovar na Figura 2.58. Donde, se escrever:

$$\text{tg } x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow x = \frac{11\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$



$$\text{TG } X = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Figura 2.58: t é o eixo das tangentes. Soluções da equação: $\text{tg } x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow x = \frac{11\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

De forma geral, atendendo à periodicidade da função tangente (secção 2.5.3), as equações que envolvem a tangente têm solução escrita:

$$\text{tg } x = \text{tg } \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

2.7.4 Equações com a co-tangente

Vamos ver alguns casos particulares de equações com a co-tangente. Consideremos a equação

$$\text{cotg } x = 0.$$

Na Figura 2.59, podemos observar as suas soluções. Constatamos que algumas delas são $\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2},$

$\frac{3\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots$ e a sua expressão geral escreve-se:

$$\text{cotg } x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

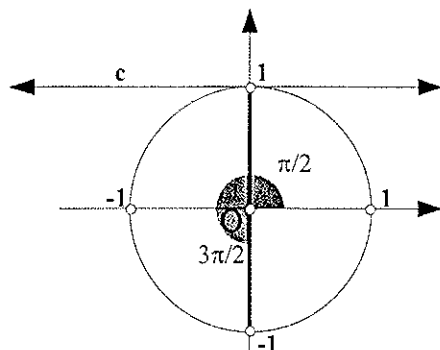
A equação

$$\text{cotg } x = -1 < 0$$

e logo as suas soluções estão nos 2º e 4º quadrantes, conforme se pode verificar na Figura 2.60.

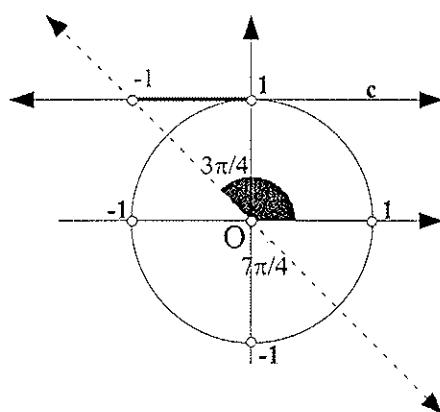
Donde:

$$\text{cotg } x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$



$$\text{COTG } X = 0$$

Figura 2.59: c é o eixo das co-tangentes. As soluções da equação: $\text{cotg } x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.



$$\text{COTG } X = -1$$

Figura 2.60: c é o eixo das co-tangentes. Soluções da equação $\text{cotg } x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Para a equação

$$\text{cotg } x = \sqrt{3} > 0$$

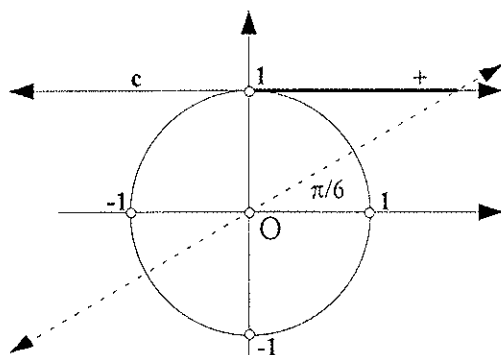
as soluções estão nos 1° e 3° quadrantes (Figura 2.61). Logo podemos escrever:

$$\text{cotg } x = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Como a função co-tangente tem periodicidade π (secção 2.5.4), as equações que envolvem a co-tangente têm solução genérica na forma:

$$\text{cotg } x = \text{cotg } \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Apresentamos na Tabela 2.16 as soluções gerais das equações que envolvem as funções trigonométricas estudadas nas secções 2.7.1 – 2.7.4.



$$\text{COTG } x = \sqrt{3}$$

Figura 2.61: Soluções da equação: $\text{cotg } x = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Equação	Solução geral
$\text{sen } x = \text{sen } \alpha$	$x = \alpha + 2k\pi \vee x = \pi - \alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\text{cos } x = \text{cos } \alpha$	$x = \alpha + 2k\pi \vee x = 2\pi - \alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\text{tg } x = \text{tg } \alpha$	$x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\text{cotg } x = \text{cotg } \alpha$	$x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Tabela 2.16: Soluções gerais das equações trigonométricas.

2.8 Aplicações práticas

2.8.1 Definições e relação entre razões trigonométricas

Exercício 1 – A escada do pintor (retirado da Brochura de Geometria⁴⁶ – 11º ano, Pág. 81).

Para maior segurança, a distância da base de uma escada de pintor à parede deve ser igual a um quarto do comprimento da escada. Qual é o ângulo de uma escada nesta posição com o chão? Será que depende do comprimento da escada?

Resolução: Vamos considerar, por exemplo, uma escada de 4 metros. Então a distância à parede seria de 1 metro. As Figuras 2.62 e 2.63 ilustram a situação. Uma forma de obter o ângulo pedido será, tendo em conta o triângulo rectângulo [ABC], calcular a razão: $\cos A = \frac{1}{4} = 0.25$

⁴⁶ Loureiro, C., Oliveira, A. F., Ralha, E., Bastos, R. (1998); Brochura de Geometria – 11º ano, 1ª Ed.; Ministério da Educação, Departamento de Ensino Secundário.

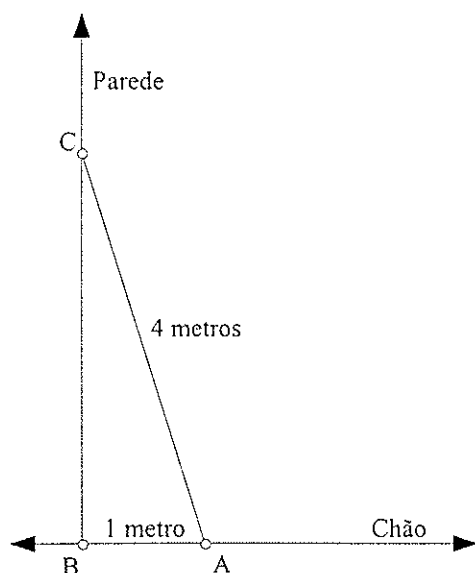


Figura 2.62: Escada de pintor, [AC], encostada à parede por forma que a sua base diste 1 m da parede e o seu comprimento seja 4 m.

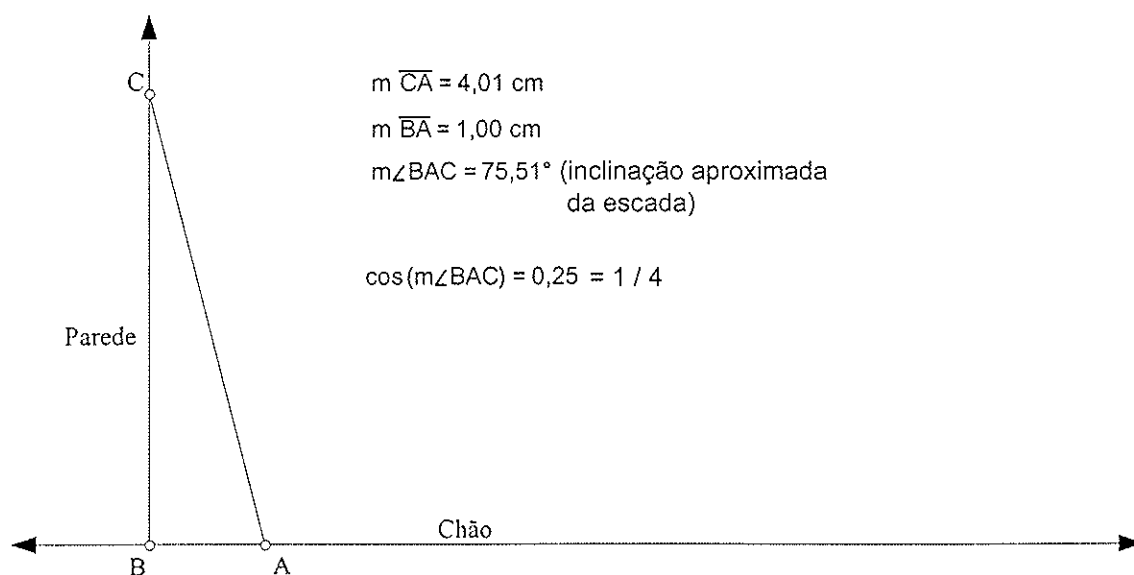


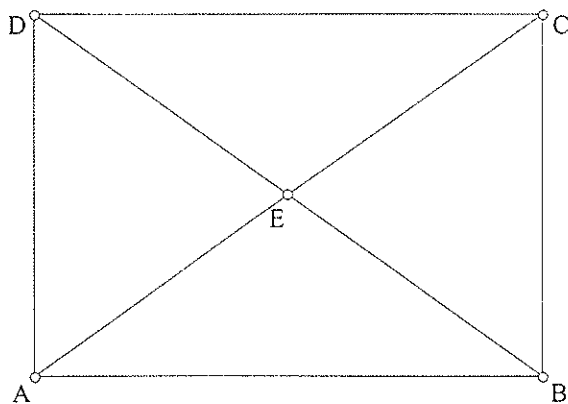
Figura 2.63: Medidas determinadas com o software “The Geometer’s Sketchpad”⁴⁷.

Para poder obtermos a medida do ângulo pedido, temos de consultar uma tabela trigonométrica ou então usar uma calculadora científica.

$$A = 75.522488^\circ \text{ ou } A = 75^\circ 31' 20''$$

ou ainda podemos utilizar um software de Geometria Dinâmica, como o “The Geometer’s Sketchpad”, e determinar uma bastante razoável aproximação do ângulo pedido (Figura 2.63).

⁴⁷ Na secção 2.9 damos, para alguns exercícios desta secção, uma lista de procedimentos para os concretizar no Sketchpad.



- $m\angle BEC = 70^\circ$
- $m\overline{AB} = 4 \text{ cm}$
- $m\overline{CB} = 3 \text{ cm}$
- $m\angle BDC = 35^\circ$
- $\tan(m\angle BDC) = 0,7$

Figura 2.64: Rectângulo nas condições do exercício 2.

A resposta à segunda questão é obviamente negativa, visto haver sempre uma relação de um quarto entre a hipotenusa e o cateto adjacente

$$\overline{AB} = \frac{\overline{AC}}{4}$$

ou seja

$$\cos A = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\frac{\overline{AC}}{4}}{\overline{AC}} = \frac{1}{4}$$

Exercício 2 – Ângulo das diagonais de um rectângulo (retirado da Brochura de Geometria – 11º ano, Pág. 82).

2.1 Constrói um rectângulo em que o ângulo das suas diagonais seja de 70° . Qual é a relação entre o comprimento e a largura do rectângulo?

Resolução: Vamos construir um rectângulo $[ABCD]$, de comprimento \overline{CD} e de largura \overline{BC} nas condições do enunciado (Figura 2.64).

$$\text{tg } D = \frac{\overline{BC}}{\overline{CD}} \Leftrightarrow \overline{BC} = \overline{CD} \text{ tg } 35^\circ$$

Nota que há muitos rectângulos cujas diagonais formam um ângulo de 70° . Constrói outros.

2.2 Qual é o ângulo das diagonais de um rectângulo em que o comprimento é o triplo da largura?

Resolução: Considere-se um rectângulo de largura a e de comprimento $3a$. Chamando α ao ângulo determinado pela diagonal e o comprimento, temos que a sua tangente é dada por:

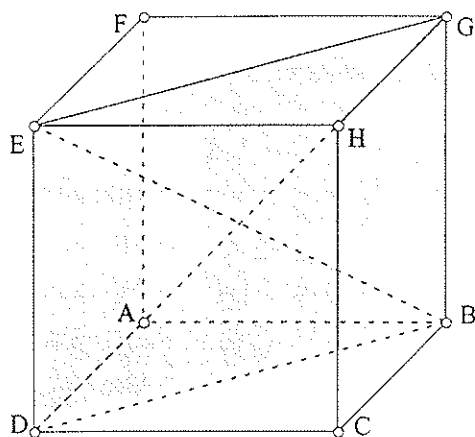


Figura 2.65: [ABCDEFGH] é um cubo.

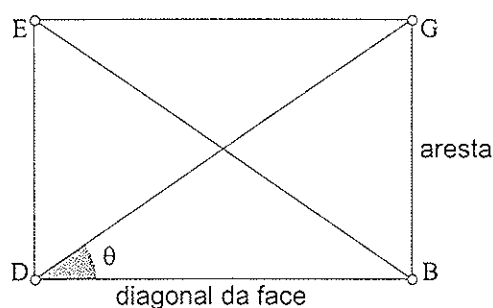


Figura 2.66: [BDEG] é um retângulo determinado pelo plano que secciona o cubo segundo as diagonais [EB] e [DG]. [DB] é a diagonal da face do cubo e [BG] é uma aresta do cubo (Figura 2.65).

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{3a} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}.$$

Ou seja, $\alpha \approx 18^\circ$. O que significa, que o ângulo das diagonais é aproximadamente 36° .

Exercício 3 – Ângulo das diagonais de um cubo (retirado da Brochura de Geometria – 11º ano, Pág. 83).

Qual é o ângulo de duas diagonais espaciais de um cubo?

Resolução: Considere-se o cubo [ABCDEFGH] como na Figura 2.65. Faça-se um corte no cubo segundo o plano definido pelas suas diagonais [HB] e [DF]. O corte determina no cubo uma secção rectangular [BDEG] (Figura 2.66). Temos um problema análogo ao do exercício 2, anterior. Se a aresta do cubo mede

$$a = \overline{DH},$$

a diagonal de uma face mede

$$\overline{DB}^2 = a^2 + a^2 \Leftrightarrow \overline{DB} = \sqrt{2} a.$$

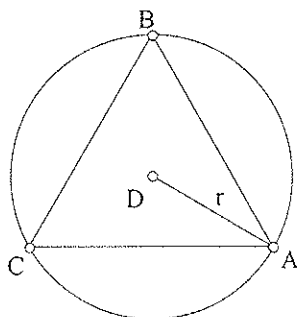


Figura 2.67: Triângulo equilátero [ABC] inscrito numa circunferência de centro D e raio r .

Neste rectângulo, chamando θ ao ângulo determinado pela diagonal e o lado [DB], temos que a tangente de θ é dada por:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{a}{\sqrt{2}a} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ou seja, $\theta \approx 35,26^\circ$. O que significa, que o ângulo das diagonais é aproximadamente $70,53^\circ$. Ou ainda, podemos escrever $70^\circ 31' 43''$.

Exercício 4 – Polígono regular (retirado da Brochura de Geometria – 11º ano, Pág. 84).

4.1 Quanto mede o lado de um triângulo equilátero inscrito numa circunferência de raio r ?

Resolução: Consideremos uma circunferência de raio r e o triângulo [ABC] equilátero nela inscrito (Figura 2.67). Uma das formas de relacionar a medida do lado do triângulo, digamos x , com o raio r da circunferência é fazendo uso de uma das ferramentas que dispomos: as razões trigonométricas. Assim temos necessidade de construir um triângulo rectângulo [CDN] dentro do triângulo equilátero (Figura 2.68). A razão trigonométrica adequada é o co-seno do ângulo NCD, que mede 30° , uma vez que um ângulo interno de um triângulo equilátero mede 60° .

$$\cos 30^\circ = \frac{\frac{x}{2}}{r} \Leftrightarrow x = 2r \cos 30^\circ \Leftrightarrow x = 2r \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{3} r.$$

4.2 E quanto mede o lado de um quadrado?

Resolução: Consideremos uma circunferência de centro O e raio r , e um quadrado [ABCD] nela inscrito (Figuras 2.69).

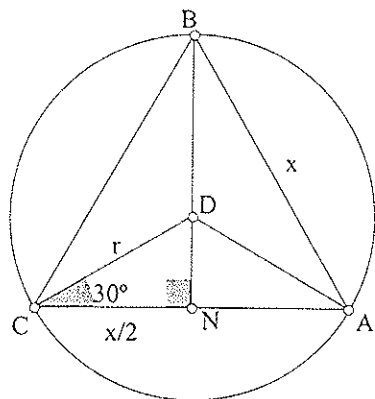


Figura 2.68: O triângulo [CDN] é retângulo. $\widehat{NCD} = 30^\circ$. $\overline{CN} = \frac{x}{2}$.

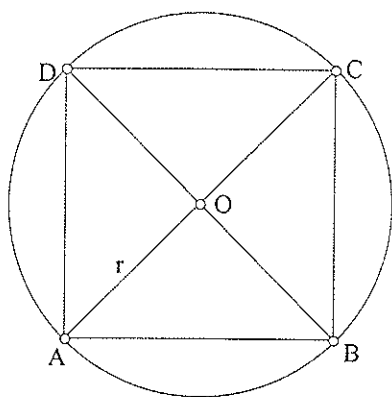


Figura 2.69: Quadrado [ABCD] inscrito numa circunferência de centro O e raio $r \equiv [AO]$.

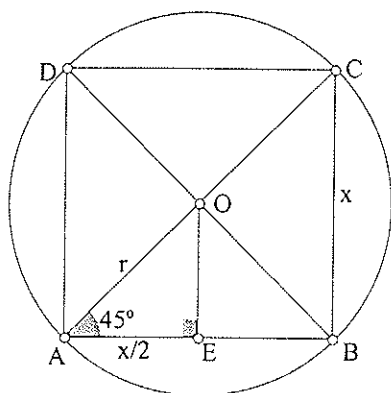


Figura 2.70: Quadrado [ABCD] inscrito numa circunferência de centro O e raio r . O triângulo [AEO] é retângulo em E. $\widehat{EAO} = 45^\circ$. $\overline{AE} = \frac{x}{2}$.

Como queremos, agora, relacionar a medida do lado do quadrado, digamos x , com o raio r de uma circunferência, vamos construir um triângulo retângulo, por exemplo, [AEO] (Figuras 2.70) e aplicar a razão trigonométrica mais adequada. Neste caso, para obtermos o valor pretendido,

vamos calcular o co-seno do ângulo EAO, que sabemos medir 45° , visto ser recto um ângulo interno do quadrado.

$$\cos 45^\circ = \frac{\frac{x}{2}}{r} \Leftrightarrow x = 2r \cos 45^\circ \Leftrightarrow x = 2r \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{2} r.$$

4.3 E de um pentágono regular?

Resolução: Consideremos um pentágono (ver Figura 2.87 na secção 2.9.1), de lado x , regular e inscrito numa circunferência de raio r .

Sabe-se que um ângulo interno do pentágono regular mede 108° . Usando o mesmo raciocínio que nos pontos anteriores temos:

$$\cos 54^\circ = \frac{\frac{x}{2}}{r} \Leftrightarrow x = 2r \cos 54^\circ.$$

4.4 E de um polígono de n lados?

Resolução: Consideremos um polígono regular de n lados, suponhamos que a medida do lado é x e que está inscrito numa circunferência de raio r . Sabe-se que a *amplitude de um ângulo interno de um polígono regular de n lados* pode ser escrita na forma:

$$180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$$

Utilizando o mesmo raciocínio que atrás temos:

$$\cos \left(180^\circ - \frac{360^\circ}{n}\right) = \frac{\frac{x}{2}}{r} \Leftrightarrow x = 2r \cos \left(180^\circ - \frac{360^\circ}{n}\right)$$

4.5 Quanto mede o apótema de um polígono regular de n lados inscrito numa circunferência de raio r ?

Resolução: O apótema é a distância do centro da circunferência que circunscreve o polígono regular ao seu lado (ver secção 3.3). Seja y essa distância. Agora, usando o seno:

$$\sin \left(180^\circ - \frac{360^\circ}{n}\right) = \frac{y}{r} \Leftrightarrow y = r \sin \left(180^\circ - \frac{360^\circ}{n}\right)$$

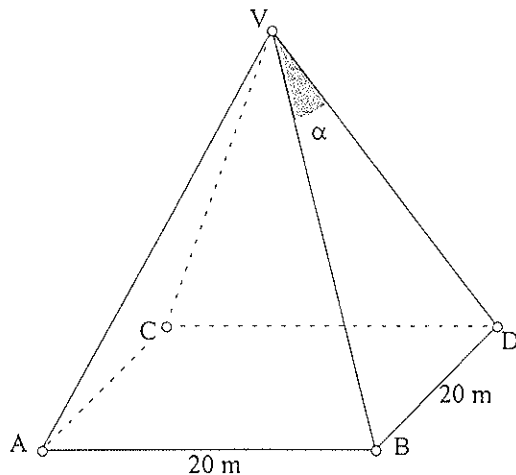


Figura 2.71: [ABCDV] é uma pirâmide regular quadrangular.

4.6 Qual é a área desse polígono? -

Resolução: A área de um polígono regular de n lados é dada pela expressão:

$$\text{Área} = \frac{P \cdot A_p}{2},$$

em que

P = perímetro do polígono

e

A_p = apótema do mesmo polígono.

Assim, sendo r o raio da circunferência que circunscreve o polígono regular de n lados e P o seu perímetro, a sua área pode ser obtida do seguinte modo:

$$\text{Área} = \frac{P \cdot r \cdot \sin\left(180^\circ - \frac{360^\circ}{n}\right)}{2}$$

Exercício 5 - Área da pirâmide

Resolução: Consideremos uma pirâmide, como na Figura 2.71, regular quadrangular, com base 20 metros de lado. Queremos exprimir a área total da pirâmide em função do ângulo BVD. A área da base da pirâmide é imediata:

$$\text{Área} = 20 \times 20 = 400 \text{ m}^2$$

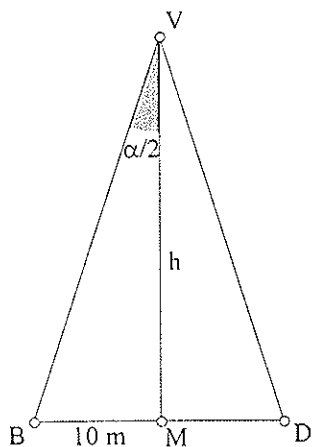


Figura 2.72: [BDV] é um triângulo isósceles de altura h .

A face lateral da pirâmide é um triângulo isósceles de altura, digamos h (Figura 2.72). Chamemos ao ângulo BVD, α . Então, sendo M o ponto médio do lado [BD] do triângulo, o ângulo BVM é $\frac{\alpha}{2}$.

Temos

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{10}{h} \Leftrightarrow h = \frac{10}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}$$

A área de uma face lateral é dada por:

$$\text{Área} = \frac{20h}{2} = 10h$$

Logo, a área das 4 faces:

$$\text{Área} = 4 \times 10h = 4 \times 10 \frac{10}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}$$

Finalmente, a área total da pirâmide:

$$\text{Área} = 400 + \frac{400}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}$$

Exercício 6: Seja α um ângulo agudo cujo seno é $\frac{1}{3}$. Descobrir as outras razões trigonométricas.

Resolução: Usando a fórmula fundamental da trigonometria, podemos escrever sucessivamente:

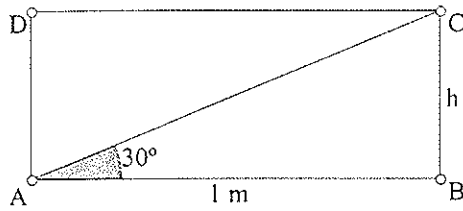


Figura 2.73: [ABCD] é um retângulo de base 1 metro e altura h.

$$\cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

ou seja

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Temos também

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

e

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{4}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$$

Exercício 7: Calcular a altura e a área de um retângulo de base 1 metro, sabendo que a diagonal faz um ângulo de 30° com a base.

Resolução: Temos (Figura 2.73) que

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{h}{1},$$

ou seja, a altura é

$$h = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ m};$$

A área do retângulo é dada por

$$\text{Área} = b h = 1 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ m}^2.$$

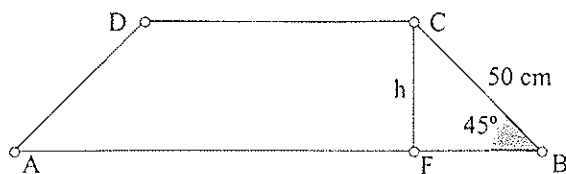


Figura 2.74: $[ABCD]$ é um trapézio isósceles. $\overline{FC} = h$ é a altura do trapézio. $\widehat{FBC} = 45^\circ$.
 $\overline{BC} = \overline{CD} = 50\text{cm}$.

Exercício 8: Calcular a altura de um trapézio isósceles, sabendo que o lado oblíquo mede 50 cm e faz um ângulo de 45° com a base.

Resolução: Para podermos determinar a altura do trapézio isósceles (Figura 2.74), temos de utilizar a razão trigonométrica seno:

$$\text{sen } 45^\circ = \frac{h}{50} \Leftrightarrow h = 50 \text{ sen } 45^\circ \Leftrightarrow h = \frac{50\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow h = 25\sqrt{2} \text{ cm.}$$

Exercício 9: Triângulos não rectângulos (retirado da Brochura de Geometria – 11º ano, Pág. 84).

Dois barcos A e B encontram-se a 5 milhas um do outro e observam um terceiro barco C em dificuldades. O barco A observa os outros dois segundo direcções que fazem um ângulo de 57° e o barco B observa os outros dois segundo um ângulo de 62° . Se o barco A se deslocar à velocidade de 25 milhas por hora e o barco B à velocidade de 20 milhas por hora, qual é que chega primeiro para socorrer o barco C?

Resolução: Na Figura 2.75 representamos um triângulo sugestivo. Aqui não é imediato tirar uma relação entre o lado conhecido e os ângulos dados (é óbvio que se tira a amplitude do terceiro ângulo interno: $180^\circ - (62^\circ + 57^\circ) = 61^\circ$) porque, simplesmente, não temos um triângulo rectângulo, nem um triângulo isósceles ou equilátero, dos quais facilmente se obtém um triângulo rectângulo. Temos, então, de construir triângulos rectângulos adequados à aplicação de uma razão trigonométrica. Nesta situação, a razão trigonométrica mais adequada será o seno porque envolve, nos dois triângulos rectângulos obtidos, um lado comum, h - altura do triângulo $[ABC]$ relativamente à base $[AC]$ (Figura 2.76). Assim, podemos escrever:

$$\text{sen } 57^\circ = \frac{h}{5} \Leftrightarrow h = 5 \times \text{sen } 57^\circ \text{ e } \text{sen } 61^\circ = \frac{h}{a} \Leftrightarrow h = a \times \text{sen } 61^\circ$$

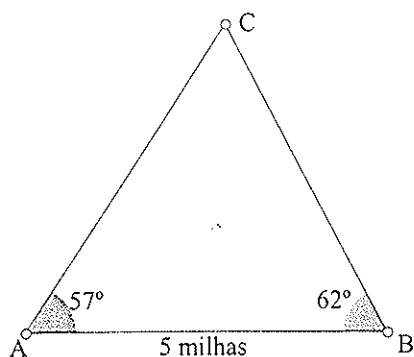


Figura 2.75: $[ABC]$ é um triângulo em que $m\angle BAC = 57^\circ$ e $m\angle ABC = 62^\circ$.

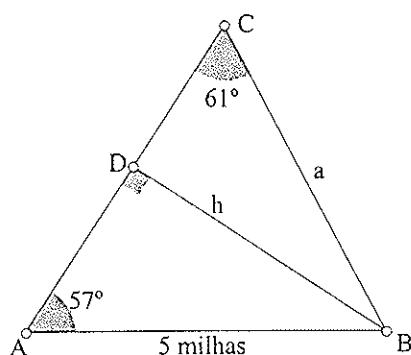


Figura 2.76: $\overline{BD} = h$ é a altura do triângulo $[ABC]$ relativamente à base $[AC]$. $\hat{B}AC = 57^\circ$. $\hat{B}CA = 61^\circ$. $\overline{BC} = a$.

Donde, como é a mesma altura h :

$$a \operatorname{sen} 61^\circ = 5 \operatorname{sen} 57^\circ \Leftrightarrow a = \frac{5 \operatorname{sen} 57^\circ}{\operatorname{sen} 61^\circ} \Leftrightarrow a \approx 4.794$$

Ficamos a saber que o barco B se encontra, aproximadamente, a 4.794 milhas do barco C. Precisamos, agora, de determinar a distância do barco A ao barco C. Vamos representar, no mesmo triângulo $[ABC]$, a altura g relativamente à base $[BC]$ (Figura 2.77). É a altura adequada para aplicarmos a razão trigonométrica seno e obtermos a distância pretendida.

Assim

$$\operatorname{sen} 62^\circ = \frac{g}{5} \Leftrightarrow g = 5 \operatorname{sen} 62^\circ \quad \text{e} \quad \operatorname{sen} 61^\circ = \frac{g}{b} \Leftrightarrow g = b \operatorname{sen} 61^\circ.$$

Como g é a altura comum, temos

$$b \operatorname{sen} 61^\circ = 5 \operatorname{sen} 62^\circ \Leftrightarrow b = \frac{5 \operatorname{sen} 62^\circ}{\operatorname{sen} 61^\circ} \Leftrightarrow b \approx 5.048$$

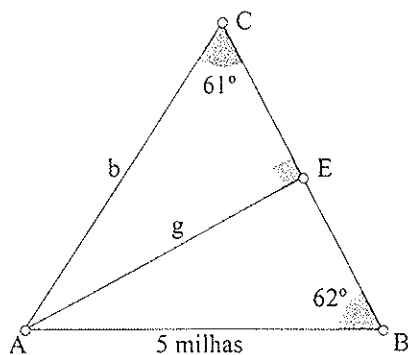


Figura 2.77: $\overline{AE} = g$ é a altura do triângulo $[ABC]$ relativamente à base $[BC]$. $\hat{A}BC = 62^\circ$ e $\hat{B}CA = 61^\circ$. $\overline{AC} = b$.

Logo o barco A encontra-se, aproximadamente, a 5.048 milhas do barco C. Como o barco A deslocava-se a uma velocidade de 25 milhas por hora, significa que se junta ao barco C em 0.202 horas ($\frac{5.048}{25} \approx 0.202$), ou seja pouco mais de 12 minutos ($0.202 \times 60 = 12.12$). O barco B desloca-se a uma velocidade de 20 milhas por hora, então está junto do barco C em 0.24 horas ($\frac{4.794}{20} \approx 0.24$), ou seja, quase 14 minutos e meio ($0.24 \times 60 = 14.4$). Assim, concluímos que, embora o barco B esteja mais próximo do barco C, o barco A chega primeiro porque é mais rápido.

2.8.2 Ângulos e arcos

Exercício 1 – Radiano (retirado da Brochura de Geometria – 11º ano, Pág. 87).

1.1 Uma circunferência tem 5 cm de raio. Qual é o comprimento da circunferência?

Resolução: O perímetro ou o comprimento de uma circunferência, de raio r , é dado por $2\pi r$.

Logo, o comprimento desta circunferência é 10π .

1.2 Qual é o comprimento de um arco de 180° de amplitude? E de 90° ? e de 30° ?

Resolução: Considerando uma circunferência de raio r , tendo em conta que

$$2\pi \text{ rad} = 360^\circ,$$

então

$$180^\circ = \pi \text{ rad}.$$

Logo, o comprimento do arco de

$$180^\circ = \pi r$$

Tem-se que,

$$90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ rad.}$$

Logo, o comprimento do arco de

$$90^\circ = \frac{\pi r}{2}$$

Temos ainda que,

$$30^\circ = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

Logo, o comprimento do arco de

$$30^\circ = \frac{\pi r}{6}$$

1.3 Qual é o comprimento de um arco de 52° de amplitude?

Resolução: Ora, podemos fazer:

$$\begin{array}{l} 180^\circ \quad \text{_____} \quad \pi \text{ rad} \\ 52^\circ \quad \text{_____} \quad x \\ x = \frac{52\pi}{180} \text{ rad} = \frac{13\pi}{45} \text{ rad} \end{array}$$

1.4 Qual é a amplitude de um arco que tem 12 cm de comprimento? E de 4 cm?

Resolução: O comprimento da circunferência em função do raio r : $2\pi r$ rad

Temos a relação:

(comprimento do arco em cm) _____ (radianos)

$$2\pi r \quad \text{_____} \quad 2\pi$$

$$12 \quad \text{_____} \quad x$$

$$x = \frac{12}{r} \text{ rad}$$

$$1 \quad \text{_____} \quad y$$

$$y = \frac{4}{r} \text{ rad.}$$

Exercício 2: O cão acorrentado (retirado de Matemática, Teoria e Prática, 11º Ano, Rumo – Pág. 11).

Um cão está amarrado a uma corrente com 4 metros de comprimento. Mantendo esticada a corrente e descrevendo um ângulo de $\frac{\pi}{3}$, qual a distância percorrida pelo cão?

Resolução: A distância percorrida pelo cão é o comprimento do arco de circunferência com 4 m de raio e cuja amplitude é $\frac{\pi}{3}$ rad. Ou seja, a distância é dada por

$$d = 4 \times \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow d \approx 4.19 \text{ metros}$$

Exercício 3: Como obter o ângulo formado por duas semi-rectas?

Resolução: Duas semi-rectas com a mesma origem definem uma infinidade de ângulos. Se α for a amplitude de um deles, as amplitudes de todos os ângulos definidos por essas semi-rectas são dadas pelas expressões:

$$\alpha + 360^\circ k, \text{ em que } k \in \mathbb{Z}$$

ou

$$\alpha + 2k\pi \text{ rad, em que } k \in \mathbb{Z}.$$

Exercício 4: Como obter a amplitude do arco de circunferência?

Resolução: Dois pontos sobre uma circunferência definem uma infinidade de arcos. Se α for a amplitude de um deles, as amplitudes de todos os arcos definidos por esses pontos são dadas pelas expressões:

$$\alpha + 360^\circ k, \text{ em que } k \in \mathbb{Z}$$

ou

$$\alpha + 2k\pi \text{ rad, em que } k \in \mathbb{Z}.$$

Exercício 5: A roleta. Consideremos uma roleta, como na Figura 2.78, utilizada em sorteios de feiras. Em cada sorteio, o ponteiro parte da posição 1 e inicia o movimento de rotação (podendo ser, ou no sentido do movimento dos ponteiros do relógio ou no sentido contrário). Sabendo que o ponteiro nunca pára entre dois números e o número premiado é o número determinado pela posição de paragem do ponteiro, diga:

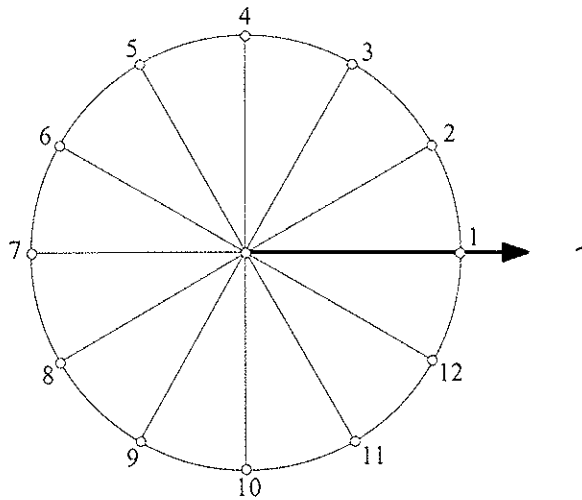


Figura 2.78: Roleta utilizada em sorteios de feiras populares. O ponteiro parte da posição 1 e inicia o movimento de rotação, podendo ser no sentido do movimento dos ponteiros do relógio ou no sentido contrário.

5.1 quais os números sorteados em dois sorteios consecutivos, se o ponteiro descreveu ângulos de amplitudes -1860° e 840° . Quantas voltas completas deu o ponteiro?

Resolução: Ora os números estão afastados uns dos outros 30° :

1º sorteio: o ponteiro descreveu o ângulo de -1860° , significa que rodou no sentido do movimento dos ponteiros do relógio (sentido negativo). Vejamos o número de voltas completas:

$$\frac{1860}{360} = 5,167,$$

temos então 5 voltas e mais alguma coisa. Podemos escrever:

$$-1860^\circ = -5 \times 360^\circ - 60^\circ.$$

Significa que o número sorteado foi o 11 e o ponteiro deu 5 voltas completas.

2º sorteio:

$$840^\circ = 2 \times 360^\circ + 120^\circ.$$

Significa assim que o número sorteado foi o número 5 e o ponteiro deu 2 voltas completas.

5.2 qual é a amplitude do ângulo que o ponteiro tem de descrever para sair o número 3? (indique em radianos).

Resolução: Terá de descrever um ângulo da família:

$$\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \text{ sendo } k \in \mathbb{Z}.$$

Exercício 6: O relógio (ver secção 2.3.4) (adaptado de Matemática, 11º Ano, Edições Contraponto – Pág. 161, 162).

6.1 O ângulo descrito pelo ponteiro dos minutos poderia ter sido de 3060° ? E de 2580° ?

Resolução: Para verificarmos se 3060° é a amplitude de um destes ângulos basta, utilizando a expressão (2.29), resolver a equação:

$$60 + k \cdot 360 = 3060 \Leftrightarrow 360k = 3000 \Leftrightarrow k = \frac{3000}{360} \Leftrightarrow k \approx 8.33$$

Como o número obtido não é inteiro, significa que 3060° não pode ser a amplitude de um ângulo descrito pelo ponteiro da situação mencionada. Analogamente para 2580° :

$$60 + k \cdot 360 = 2580 \Leftrightarrow 360k = 2520 \Leftrightarrow k = \frac{2520}{360} \Leftrightarrow k = 7$$

Como se obteve um número inteiro para k , concluímos que 2580° é a amplitude de um ângulo que pode ter sido descrito pelo ponteiro. Neste caso, o ponteiro teria dado 7 voltas inteiras, o que corresponde a ter decorrido um tempo de 7 horas e 10 minutos.

6.2 O ângulo descrito pelo ponteiro dos minutos poderá ser de $\frac{37\pi}{3}$ rad? E de $\frac{41\pi}{3}$ rad?

Resolução: De forma análoga ao que foi feito em graus, no ponto anterior, far-se-á em radianos. Para sabermos se $\frac{37\pi}{3}$ rad é a amplitude de um desses ângulos basta, utilizando a expressão (2.30), resolver a equação:

$$\frac{\pi}{3} + 2\pi k = \frac{37\pi}{3} \Leftrightarrow 2\pi k = 12\pi \Leftrightarrow k = \frac{12\pi}{2\pi} \Leftrightarrow k = 6$$

Como k é um número inteiro, significa que $\frac{37\pi}{3}$ rad é a amplitude de um ângulo que pode ser descrito pelo ponteiro. Neste caso, o ponteiro dará 6 voltas inteiras, o que corresponde a decorrer um tempo de 6 horas e 10 minutos. Da mesma maneira para de $\frac{41\pi}{3}$ rad:

$$\frac{\pi}{3} + 2\pi k = \frac{41\pi}{3} \Leftrightarrow 2\pi k = \frac{40\pi}{3} \Leftrightarrow k = \frac{\frac{40\pi}{3}}{2\pi} \Leftrightarrow k \approx 6.67$$

Assim, significa que $\frac{41\pi}{3}$ rad não poderá ser a amplitude de um ângulo descrito pelo ponteiro porque o número obtido não é inteiro.

2.8.3 Trigonometria num referencial ortonormado

Exercício 1: Representar num referencial, em coordenadas polares, os pontos (adaptado de Matemática, 11º Ano, Edições Contraponto – Pág. 194):

$$M(2, 30^\circ) \text{ e } N\left(6, -\frac{\pi}{4}\right)$$

Resolução: Para representar o ponto M a partir das suas coordenadas polares podemos começar por desenhar a semi-recta [OM que faz um ângulo de 30° com o semieixo positivo Ox, e depois, com um compasso, desenhar um arco de circunferência com 2 unidades de raio até intersectar a semi-recta já desenhada (Figura 2.79). O ponto pedido, M, é o ponto de intersecção do arco de circunferência com a semi-recta. Para representar o ponto N seguimos de maneira análoga ao anterior, notando apenas que a medida do ângulo está, neste caso, em radianos (Figura 2.79).

Exercício 2: Determinar as coordenadas cartesianas dos pontos (adaptado de Matemática, 11º Ano, Edições Contraponto – Pág. 195):

$$M(2, 30^\circ) \text{ e } N\left(6, \frac{\pi}{4}\right)$$

Resolução: Para determinar as coordenadas cartesianas dos pontos M e N, consideramos os triângulos [OMM'] e [ONN']. As coordenadas cartesianas dos pontos M e N são as medidas dos catetos dos triângulos dos triângulos rectângulos que têm por hipotenusa comprimentos 2 e 6 respectivamente (Figuras 2.80 e 2.81). Para M temos:

$$\cos 30^\circ = \frac{\overline{OM'}}{\overline{OM}} \Leftrightarrow \overline{OM'} = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \overline{OM'} = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \sqrt{3}$$

e

$$\sin 30^\circ = \frac{\overline{MM'}}{\overline{OM}} \Leftrightarrow \overline{MM'} = 2 \times \frac{1}{2} \Leftrightarrow \overline{MM'} = 1 \Leftrightarrow y = 1.$$

Logo, $M(\sqrt{3}, 1)$.

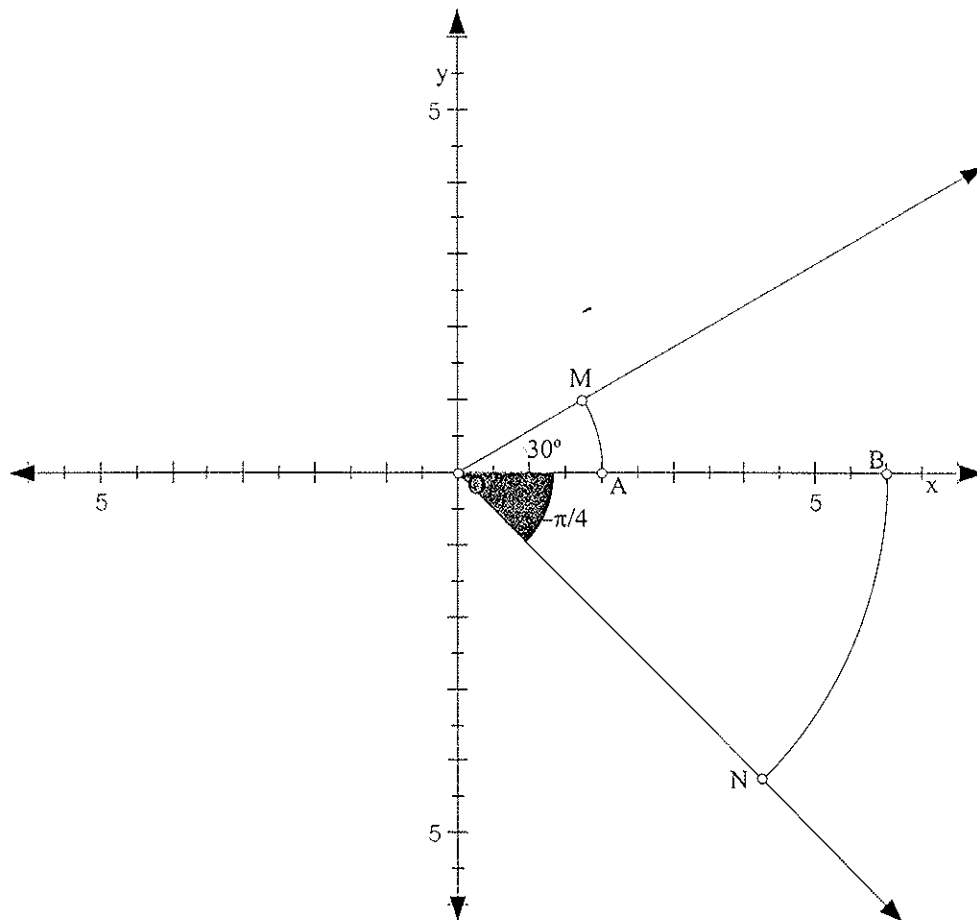


Figura 2.79: Representação em coordenadas polares dos pontos: $M(2, 30^\circ)$ e $N(6, -\frac{\pi}{4})$.

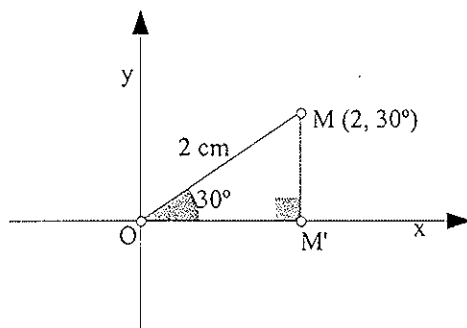


Figura 2.80: $M(2, 30^\circ)$. $[OM'M]$ é um triângulo rectângulo. $\overline{OM} = 2\text{cm}$ e $M'\hat{O}M = 30^\circ$.

Para N temos:

$$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\overline{ON'}}{\overline{ON}} \Leftrightarrow \overline{ON'} = 6 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \overline{ON'} = 3 \times \sqrt{2} \Leftrightarrow x = 3 \times \sqrt{2}$$

e

$$\text{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\overline{NN'}}{\overline{ON}} \Leftrightarrow \overline{NN'} = 6 \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Leftrightarrow \overline{NN'} = -3 \times \sqrt{2} \Leftrightarrow y = -3 \times \sqrt{2}.$$

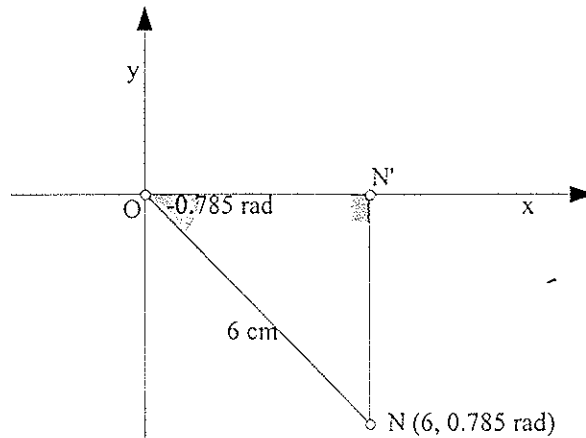


Figura 2.81: $N(6, -\frac{\pi}{4})$. $[ON'N]$ é um triângulo rectângulo. $\overline{ON} = 6\text{cm}$. $N'\hat{O}N = \frac{\pi}{4}$.

Portanto, $N(3\sqrt{2}, -3\sqrt{2})$.

Exercício 3: Roda gigante⁴⁸

Representa no círculo trigonométrico todos os ângulos mencionados na Tabela 2.17.

Resolução: Apresenta-se a Tabela 2.17 devidamente preenchida e na Figura 2.82 o círculo com a indicação dos principais ângulos entre 0° e 360° .

Quadrantes	1° Q.				2° Q.				3° Q.				4° Q.				
Graus	0	30	45	60	90	120	135	150	180	210	225	240	270	300	315	330	360
Radianos	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
Seno	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
Co-seno	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Tangente	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Nd	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Nd	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Tabela 2.17: Quadro com as três razões trigonométricas principais dos ângulos mais utilizados entre 0° e 360° . “Nd” quer dizer não definido.

⁴⁸ No Apêndice VI, *Capítulo 2 – Variação Razões Trig. gsp*, mostramos de forma animada, num Sketch, a variação das quatro razões trigonométricas: seno, co-seno, tangente e co-tangente.

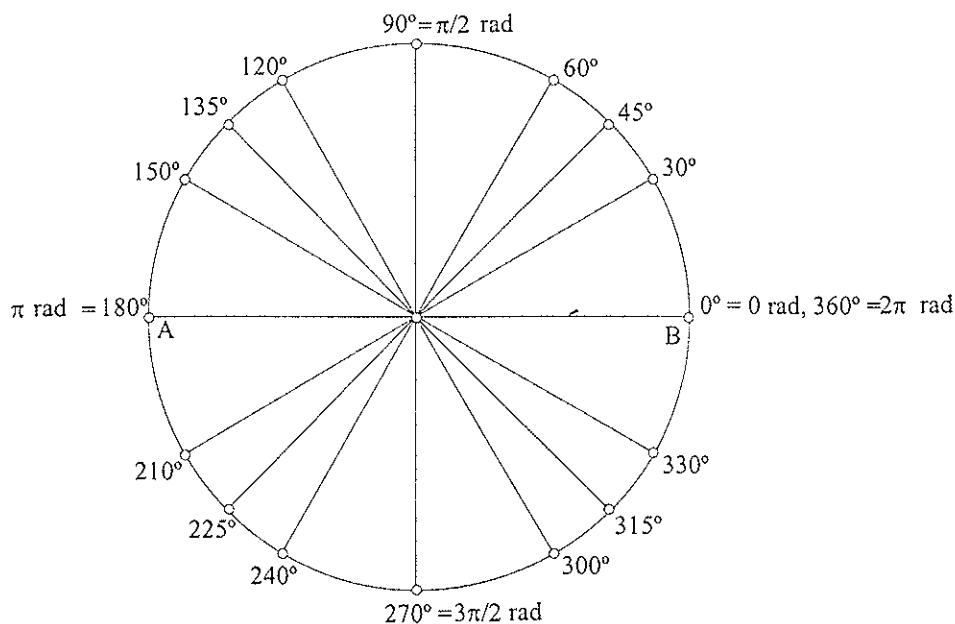


Figura 2.82: Círculo com a indicação dos principais ângulos entre 0° e 360° .

Exercício 4: Verifica a igualdade:

$$(\cos y - \operatorname{sen} y)^2 + 2 \operatorname{sen} y \cos y = 1.$$

Resolução: Pegando no 1° membro da igualdade e da fórmula fundamental da trigonometria vem

$$(\cos y - \operatorname{sen} y)^2 + 2 \operatorname{sen} y \cos y = \cos^2 y - 2 \operatorname{sen} y \cos y + \operatorname{sen}^2 y + 2 \operatorname{sen} y \cos y = 1,$$

e portanto o pretendido.

Exercício 5: Mostra que:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\cot \alpha + \cot \beta} = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta$$

Resolução: Como no exercício anterior, pegando no 1° membro da igualdade, temos sucessivamente

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\cot \alpha + \cot \beta} &= \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{1}{\operatorname{tg} \beta}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}} = \\ &= \frac{(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)(\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta)}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta} = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta, \end{aligned}$$

logo o que queríamos.

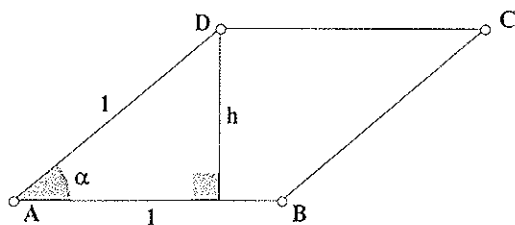


Figura 2.83: [ABCD] é um losango de lado 1. α é o ângulo entre dois lados consecutivos [AB] e [AD], e h a altura do losango.

2.8.4 Estudo das funções trigonométricas

Exercício 1 – Variação do seno (adaptado da Brochura de Geometria – 11º ano, Pág. 91) – ver no Apêndice VI, na pasta *Capitulo2 – Area_Losango.gsp* e *Função_seno.gsp*.

Tomando como unidade de comprimento o lado do losango e sendo α o ângulo entre dois lados consecutivos do losango, como na Figura 2.83, determina:

1.1 a variação da área do losango⁴⁹ em função do ângulo α .

Resolução: Da Figura 2.83, e sabendo que um losango é também um paralelogramo, considerando b a base do paralelogramo ($b = 1$) e h a sua altura, temos

$$\text{sen } \alpha = \frac{h}{1} \Leftrightarrow h = \text{sen } \alpha.$$

Portanto,

$$\text{Área} = 1 \text{ sen } \alpha \Leftrightarrow A = \text{sen } \alpha$$

1.2 o valor que se aproxima a área quando o ângulo é quase nulo. E quase raso.

Resolução: O valor da área do losango, tanto quando o ângulo é quase nulo (0°), como quando é quase raso (180°), tende para 0.

1.3 o losango que tem maior área.

Resolução: Trata-se de um losango em que tem o seu ângulo interno $\alpha = 90^\circ$, portanto é um quadrado de lado 1.

1.4 ângulos diferentes que dão origem à mesma área.

⁴⁹ A área do losango é dada pela fórmula: $\text{Área} = \frac{D \cdot d}{2}$, onde D é a diagonal maior e d é a diagonal menor; ou então, entendendo o losango como um paralelogramo qualquer, a sua área será dada pela fórmula: $A = b h$, onde b é a base e h a altura do paralelogramo.

Resolução: Por exemplo $\alpha = 45^\circ$ e $\alpha = 135^\circ$. A área do losango é simétrica relativamente ao ângulo recto.

1.5 no caso de existir, losangos diferentes com a mesma área.

Resolução: Aparentemente os losangos com os ângulos de, por exemplo, $\alpha = 45^\circ$ e $\alpha = 135^\circ$, são diferentes apesar de terem a mesma área, mas de facto não são diferentes. Portanto não existem losangos diferentes com a mesma área.

Exercício 2: Variação do co-seno (adaptado da Brochura de Geometria – 11º ano, Pág. 94) – Ver Apêndice VI, pasta *Capítulo2 – Variação_Co_seno.gsp* e *Função_Co_seno.gsp*.

Tomando como unidade de comprimento o do segmento de recta [AB], conforme representado na Figura 2.83, calcula:

2.1 a variação do comprimento da projecção em função da inclinação do segmento.

Resolução: Considerando o ângulo α definido pelo segmento de recta [AB] e o segmento de recta [AB''] ([AB] roda em torno do ponto A), como na Figura 2.84, temos, a partir do triângulo rectângulo [ACB''], a razão

$$\cos \alpha = \frac{\overline{AC}}{1} \Leftrightarrow \overline{AC} = \cos \alpha.$$

Chamando p ao comprimento da projecção de [AB''] sobre a recta A'B',

$$p = \overline{A'B''}$$

temos então que

$$p = \cos \alpha.$$

2.2 o valor do comprimento da projecção quando o ângulo é zero.

Resolução: Quando $\alpha = 0^\circ$, a projecção tem comprimento 1, ou seja,

$$p = 1.$$

2.3 a posição que corresponde a maior projecção. E a de menor projecção.

Resolução: A maior projecção, do segmento de recta [AB], é obtida quando $\alpha = 0^\circ$ ou $\alpha = 180^\circ$. A menor projecção, do segmento de recta [AB], é obtida quando o segmento roda 90° .

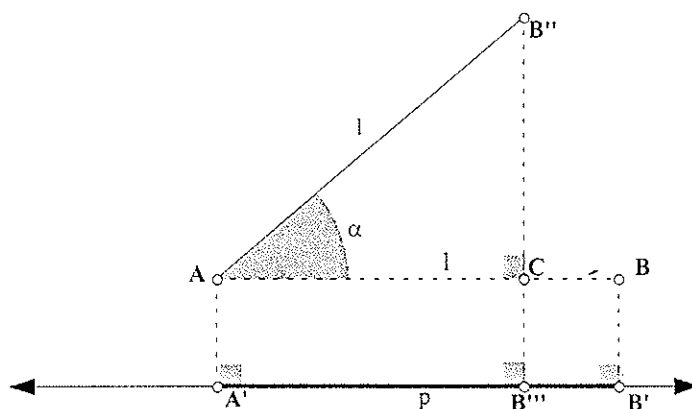


Figura 2.84: Sequência da projecção de um segmento de recta $[AB]$ ($\overline{AB} = 1$) sobre a recta $A'B'$. A projecção de $[AB]$ é o segmento de recta $[A'B']$, e a projecção de $[AB'']$ é o segmento de recta $[A'B''']$. α é o ângulo entre os segmentos de recta $[AB]$ e $[AB'']$ ($\overline{AB''} = 1$) obtido pela rotação, de centro em A de $[AB]$.

Exercício 3: Determina o co-seno do ângulo α do 4º quadrante cuja tangente é -5 .

Resolução: De (2.10) temos sucessivamente

$$25 + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{26} \Leftrightarrow \cos \alpha = \pm \sqrt{\frac{1}{26}}.$$

Mas como no 4º quadrante o co-seno é positivo, saí que

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{26}}{26}$$

Exercício 4: Sendo $\cos^2 x = 0.16$, em que x é um ângulo do 2º quadrante, determina as restantes razões trigonométricas de x .

Resolução: Ora, tem-se $\cos x = -0.4$ (o co-seno é negativo no 2º quadrante). De (2.7) tira-se:

$$\sin^2 x + 0.16 = 1 \Leftrightarrow \sin^2 x = 0.84$$

Significa que $\sin x \approx 0.917$ (o seno é positivo no 2º quadrante). Para tirar a tangente e a co-tangente, é imediato:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \approx \frac{0.917}{-0.4} = -2.29 \text{ (a tangente é negativa no 2º quadrante).}$$

$$\operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} \approx \frac{1}{-2.29} = -0.44 \text{ (a co-tangente é negativa no 2º quadrante).}$$

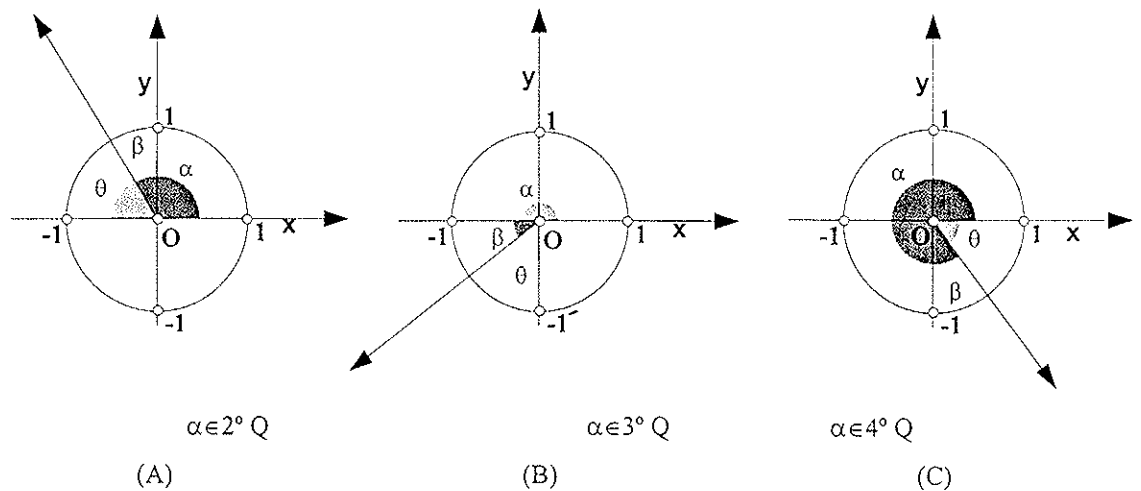


Figura 2.85: (A) $\alpha \in 2^\circ \text{ Q}$. (B) $\alpha \in 3^\circ \text{ Q}$. (C) $\alpha \in 4^\circ \text{ Q}$.

2.8.6 Redução ao primeiro quadrante

O cálculo de uma razão trigonométrica de um ângulo pode ser feito de duas maneiras, independentemente do quadrante em que se encontra o ângulo. Se α está no 2º quadrante, podemos escrever (Figura 2.85 – (A)):

$$\alpha = 90^\circ + \beta \text{ ou } \alpha = 180^\circ - \theta$$

ou ainda

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + \beta \text{ ou } \alpha = \pi - \theta$$

Se α está no 3º Quadrante (Figura 2.85 – (B)), escrevemos:

$$\alpha = 180^\circ + \beta \text{ ou } \alpha = 270^\circ - \theta$$

ou ainda

$$\alpha = \pi + \beta \text{ ou } \alpha = \frac{3\pi}{2} - \theta$$

Se α está no 4º Quadrante (Figura 2.85 – (C)), podemos simplesmente escrever:

$$\alpha = 270^\circ + \beta \text{ ou } \alpha = 360^\circ - \theta$$

ou ainda

$$\alpha = \frac{3\pi}{2} + \beta \text{ ou } \alpha = 2\pi - \theta.$$

Por outro lado, se o ângulo dado excede um ângulo giro ou é inferior a um ângulo giro, isto é, é maior que 360° ou 2π rad, ou menor que -360° ou -2π rad, os cálculos para redução ao 1º quadrante

podem ser efectuados sempre por mais de uma maneira, pois a periodicidade das razões trigonométricas permite, por um ou por outro caminho, calcular a razão pretendida.

Exercício 1: Calcular as razões trigonométricas dos ângulos respectivos:

$$1.1 \operatorname{sen}(135^\circ) = \operatorname{sen}(180^\circ - 45^\circ) = \operatorname{sen} 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$1.2 \operatorname{sen}(135^\circ) = \operatorname{sen}(90^\circ + 45^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$1.3 \cos(240^\circ) = \cos(180^\circ + 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$1.4 \cos(240^\circ) = \cos(270^\circ - 30^\circ) = -\operatorname{sen} 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$1.5 \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$1.6 \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$1.7 \operatorname{tg}\left(\frac{15\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\left(3\pi + \frac{3\pi}{4}\right) = \quad \left(\text{visto } \frac{15\pi}{4} = \frac{12\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = 3\pi + \frac{3\pi}{4}\right)$$

$$= \operatorname{tg} \frac{3\pi}{4} = \quad \left(\text{visto o período da tangente ser } \pi\right)$$

$$= \operatorname{tg}\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \quad \left(\text{visto } \frac{3\pi}{4} \in 2^\circ \text{ quadrante}\right)$$

$$= -\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} =$$

$$= -1$$

$$1.8 \cos(3810^\circ) = \cos(210^\circ + 10 \times 360^\circ) = \quad \left(\text{visto } 3810^\circ = 210^\circ + 10 \times 360^\circ\right)$$

$$= \cos(210^\circ) = \quad \left(\text{visto o período do co-seno ser } 360^\circ\right)$$

$$= \cos(180^\circ + 30^\circ) =$$

$$= -\cos(30^\circ) =$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Exercício 2 – Calcule o valor de cada uma das expressões:

$$2.1 \operatorname{sen}(1200^\circ) + 2 \cos(-945^\circ) - \operatorname{tg}(750^\circ) =$$

$$= \operatorname{sen}(3 \times 360^\circ + 120^\circ) + 2 \cos(-720^\circ - 225^\circ) - \operatorname{tg}(4 \times 180^\circ + 30^\circ) =$$

$$\begin{aligned}
&= \operatorname{sen}(120^\circ) + 2 \cos(-225^\circ) - \operatorname{tg}(30^\circ) = \\
&= \operatorname{sen}(180^\circ - 60^\circ) + 2 \cos(225^\circ) - \operatorname{tg}(30^\circ) = \\
&= \operatorname{sen} 60^\circ + 2 \cos(180^\circ + 45^\circ) - \operatorname{tg}(30^\circ) = \\
&= \operatorname{sen} 60^\circ - 2 \cos 45^\circ - \operatorname{tg} 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} - 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} = -\sqrt{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2.2 \quad &\frac{1}{2} \operatorname{tg}\left(\frac{19\pi}{4}\right) + \cos\left(-\frac{17\pi}{3}\right) - \operatorname{sen}\left(-\frac{41\pi}{6}\right) = \\
&= \frac{1}{2} \operatorname{tg}\left(\frac{19\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{17\pi}{3}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{41\pi}{6}\right) = \\
&= \frac{1}{2} \operatorname{tg}\left(\frac{16\pi}{4} + \frac{3\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{18\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{36\pi}{6} + \frac{5\pi}{6}\right) = \\
&= \frac{1}{2} \operatorname{tg}\left(4\pi + \frac{3\pi}{4}\right) + \cos\left(6\pi - \frac{\pi}{3}\right) + \operatorname{sen}\left(6\pi + \frac{5\pi}{6}\right) = \\
&= \frac{1}{2} \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{tg}\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + \cos \frac{\pi}{3} + \operatorname{sen}\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \\
&= -\frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{3} + \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Exercício 3 – Simplifique cada uma das expressões:

$$3.1 \operatorname{sen} \beta \cos\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$$

$$\begin{aligned}
\text{Resolução: } &\operatorname{sen} \beta \cos\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \operatorname{sen} \beta (-\operatorname{sen} \beta) - \left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)\right)^2 = \\
&= -\operatorname{sen}^2 \beta - \cos^2 \beta = -(\operatorname{sen}^2 \beta + \cos^2 \beta) = -1
\end{aligned}$$

$$3.2 \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}$$

$$\text{Resolução: } \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{\cos \alpha}{2 \operatorname{sen} \alpha} = \frac{1}{2} \operatorname{cotg} \alpha$$

$$3.3 \sin\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) - \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \cotg\left(-\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{tg}(-\pi - \alpha)$$

$$\text{Resolução: } \sin\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) - \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \cotg\left(-\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{tg}(-\pi - \alpha) =$$

$$= \cos \alpha - \sin \alpha + \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha = \cos \alpha - \sin \alpha$$

Tendo em conta que se tem:

$$\sin\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) = \cos \alpha, \quad \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \sin \alpha, \quad \cotg\left(-\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{tg} \alpha \quad \text{e} \quad \operatorname{tg}(-\pi - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

$$3.4 \sin(5\pi + \alpha) - \cos(-6\pi + \alpha) + \operatorname{tg}(7\pi + \alpha)$$

$$\text{Resolução: } \sin(5\pi + \alpha) - \cos(-6\pi + \alpha) + \operatorname{tg}(7\pi + \alpha) =$$

$$= \sin(4\pi + \pi + \alpha) - \cos \alpha + \operatorname{tg} \alpha =$$

$$= \sin(\pi + \alpha) - \cos \alpha + \operatorname{tg} \alpha =$$

$$= \sin(\pi + \alpha) - \cos \alpha + \operatorname{tg} \alpha =$$

$$= -\sin \alpha - \cos \alpha + \operatorname{tg} \alpha$$

Exercício 4: Sabendo que $\operatorname{tg}(2\pi - \beta) = -5$ e $\beta \in [\pi, 2\pi[$, calcule o valor da expressão:

$$3\sin(\pi - \beta) + 2\cos\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right) - \cotg(-3\pi - \beta).$$

Resolução: Temos

$$\operatorname{tg}(2\pi - \beta) = -5 \Leftrightarrow -\operatorname{tg} \beta = -5 \Leftrightarrow \operatorname{tg} \beta = 5$$

Sendo

$$\operatorname{tg} \beta = 5 \wedge \beta \in [\pi, 2\pi[$$

tiramos que

$$\beta \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$$

ou seja, $\beta \in 3^\circ$ quadrante. Simplificando a expressão dada, obtemos:

$$3\sin(\pi - \beta) + 2\cos\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right) - \cotg(-3\pi - \beta) = 3\sin \beta - 2\sin \beta - \cotg(-\beta) = \sin \beta + \cotg \beta.$$

Temos, então, de calcular $\sin \beta$ e $\cotg \beta$. Determinamos a co-tangente, tendo em consideração a fórmula (2.6) e que $\operatorname{tg} \beta = 5$:

$$\cotg \beta = \frac{1}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{1}{5}.$$

Para determinarmos o seno, consideramos a fórmula (2.11) e que $\cotg \beta = \frac{1}{5}$:

$$\begin{aligned} 1 + \cotg^2 \beta &= \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \beta} \Leftrightarrow 1 + \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \beta} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{25} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \beta} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 \beta = \frac{25}{26} \Leftrightarrow \operatorname{sen} \beta = \pm \sqrt{\frac{25}{26}} \end{aligned}$$

Mas como $\beta \in 3^\circ$ quadrante, saí que:

$$\operatorname{sen} \beta = -\sqrt{\frac{25}{26}} = -\frac{5\sqrt{26}}{26}$$

E portanto:

$$\operatorname{sen} \beta + \cotg \beta = -\frac{5\sqrt{26}}{26} + \frac{1}{5} = \frac{-25\sqrt{26} + 26}{130}$$

2.8.6 Equações trigonométricas

Exercício 1: Resolva as seguintes equações:

1.1 $\operatorname{sen}(2x) = \cos x \wedge x \in [-\pi, \pi]$

Resolução: Vamos começar por encontrar as soluções gerais da equação dada. Assim temos sucessivamente

$$\operatorname{sen}(2x) = \cos x \Leftrightarrow \operatorname{sen}(2x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow \quad (\text{visto que } \cos x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right))$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi \vee 2x = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x + x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee 2x - x = \pi - \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \vee x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Para obtermos todas as soluções da equação no intervalo dado devemos atribuir valores k nas expressões gerais e verificar quais as que pertencem ao intervalo $[-\pi, \pi]$ (Tabela 2.18).

$k = \dots$	$x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$	$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$
-2	$x = -\frac{7\pi}{6} \notin [-\pi, \pi]$	$x = -\frac{7\pi}{4} \notin [-\pi, \pi]$
-1	$x = -\frac{\pi}{2} \in [-\pi, \pi]$	$x = -\frac{3\pi}{2} \notin [-\pi, \pi]$
0	$x = \frac{\pi}{6} \in [-\pi, \pi]$	$x = \frac{\pi}{2} \in [-\pi, \pi]$
1	$x = \frac{5\pi}{6} \in [-\pi, \pi]$	$x = \frac{5\pi}{2} \notin [-\pi, \pi]$
2	$x = \frac{3\pi}{2} \notin [-\pi, \pi]$	$x = \frac{9\pi}{2} \notin [-\pi, \pi]$

Tabela 2.18: Soluções particulares da equação $\sin(2x) = \cos x$. Como nenhum dos ângulos obtidos para $k = -2$ e para $k = 2$ está no intervalo pedido, não será necessário experimentar para valores de k , em módulo, maior ou igual a 3.

Assim temos

$$\sin(2x) = \cos x \wedge x \in [-\pi, \pi] \Leftrightarrow x \in \left\{ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6} \right\}$$

$$\begin{aligned} 1.2 \quad \operatorname{tg}(3x) = -\operatorname{cotg} x &\Leftrightarrow \operatorname{tg}(3x) = \operatorname{cotg}(-x) \Leftrightarrow && \text{(visto que } \operatorname{cotg}(-x) = \operatorname{cotg} x) \\ \Leftrightarrow \operatorname{tg}(3x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - (-x)\right) &\Leftrightarrow && \text{(visto que } \operatorname{cotg}(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)) \\ \Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{2} + x + k\pi, k \in \mathbb{Z} &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1.3 \quad 2\cos(3x) = 1 &\Leftrightarrow \cos(3x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee 3x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \vee x = -\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

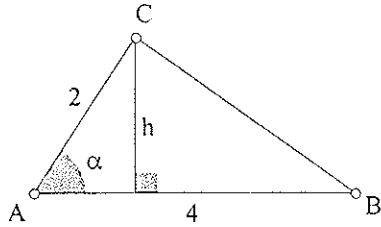


Figura 2.86: Triângulo [ABC] de lados 2 e 4. h é a altura do triângulo relativa ao lado [AB].

Exercício 2 – Tendo em atenção a Figura 2.86, diga (retirado de Matemática, 11º Ano, Edições Contraponto – Pág. 253):

2.1 Qual deve ser a medida do ângulo α para que a área do triângulo [ABC] seja 1? Quantas soluções encontrou?

Resolução: Sendo h a altura do triângulo [ABC] relativa ao lado [AB], podemos escrever

$$\text{sen } \alpha = \frac{h}{2} \Leftrightarrow h = 2 \text{ sen } \alpha$$

Como a área do triângulo [ABC] tem de ser 1 (ver Apêndice IV), podemos escrever a seguinte equação:

$$\frac{4 \times 2 \text{ sen } \alpha}{2} = 1 \Leftrightarrow \text{sen } \alpha = \frac{1}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha \approx 14.48^\circ + 360^\circ k \vee \alpha \approx 180^\circ - 14.48^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha \approx 14.48^\circ + 360^\circ k \vee \alpha \approx 165.52^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

Neste caso, como queremos conhecer um ângulo de um triângulo, interessa-nos apenas duas soluções da equação inicial:

$$\alpha \approx 14.48^\circ \text{ ou } \alpha \approx 165.52^\circ$$

2.2 E para que a área seja 4? Quantas soluções encontrou?

Resolução: Para que a área seja 4, podemos equacionar da seguinte forma:

$$\frac{4 \times 2 \text{ sen } \alpha}{2} = 4 \Leftrightarrow \text{sen } \alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = 90^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

Ou seja, como queremos conhecer um ângulo de um triângulo, temos neste caso uma única solução, $\alpha = 90^\circ$.

2.9 Aplicações práticas no Sketchpad™

2.9.1 Definições e relação entre razões trigonométricas

Exercício 1: A escada do pintor (ver exercício 1 da secção 2.8.1)

Damos uma lista de procedimentos para visualizar a actividade proposta no Sketchpad (Figuras 2.61 e 2.62):

- Num novo *Sketch*, construa um segmento de recta vertical [AB] (parede);
- Para obter o chão (recta perpendicular a AB):
 - Selecciono o segmento de recta [AB] e o ponto A e escolha no menu *Construct* a opção *Perpendicular Line*;
 - Selecciono a recta obtida e no menu *Construct* a opção *Point On Object* e dê um nome a este ponto, C;
 - Selecciono o segmento de recta [AB] e no menu *Construct* a opção *Point On Object* e dê um nome a este ponto, D;
 - Selecciono os pontos C e D, e no menu *Construct* a opção *Segment*;
 - Construção do segmento [CD] com 4 cm e do segmento [AC] com 1 cm:
 - Selecciono o segmento [CD] e no menu *Measure* a opção *Length*;
 - Selecciono o segmento [AC] e no menu *Measure* a opção *Length*;
 - Selecciono e arraste o ponto A e depois o ponto C até obter a medida pretendida;
- Para obter a medida do ângulo ACD:
 - Selecciono os pontos A, C e D e no menu *Measure* a opção *Angle*;
- Para obter o co-seno do ângulo ACD:
 - Selecciono no menu *Measure* a opção *Calculate*, e nesta a *Function co-seno*.

Exercício 2 – Ângulo das diagonais de um rectângulo (ver exercício 2 da secção 2.8.1)

Damos uma lista de procedimentos para visualizar e resolver o exercício 2.1 no Sketchpad (Figura 2.63):

- Num novo *Sketch*, construa dois segmentos de recta (diagonais do rectângulo) e atribua os nomes mais adequados- por exemplo [AB] e [CD];
- Selecciono os dois segmentos de recta e no menu *Construct* a opção *Point At Intersection* e dê um nome a este ponto, E;

- Selecciona os pontos A, B, C e D, e no menu *Construct* a opção *Segment* (obtem o rectângulo[ABCD]);
- Selecciona os pontos B, E e D, e no menu *Measure* a opção *Angle* (medida do ângulo BEC);
- Arraste, depois de seleccionar, os pontos necessários (os vértices do rectângulo) até obter o ângulo de 70° entre as diagonais (o ângulo BEC).

Exercício 3 – Ângulo das diagonais de um cubo (ver exercício 3 da secção 2.8.1)

Segue-se uma lista de procedimentos para obter o cubo da Figuras 2.65, no Sketchpad, utilizando a projecção cavaleira⁵⁰ do cubo, P(45°, 50%):

- Num novo *Sketch*, construa um segmento de recta [AB];
- Construa um ponto C no segmento [AB], utilizando no menu *Construct* a opção *Point On Object*.
- Aplique uma rotação ao ponto C de centro A e de ângulo 90°:
 - Selecciona o ponto A e no menu *Transform* a opção *Mark Center*;
 - Selecciona o ponto C e no menu *Transform* a opção *Rotate* e escreva 90° na caixa de diálogo que surge no seu ecran e, click *OK* (obtem o ponto C');
- Aplique uma rotação ao ponto A de centro C e de ângulo -90°:
 - Selecciona o ponto C e no menu *Transform* a opção *Mark Center*;
 - Selecciona o ponto A, no menu *Transform* a opção *Rotate* e escreva -90° na caixa de diálogo que surge no seu ecran e, click *OK* (obtem o ponto A');
 - Selecciona os pontos A, C, A' e C', e no menu *Construct* a opção *Segment* (obtem a face do cubo [ACA'C']);
- Marque a bissectriz do ângulo BCA':
 - Selecciona os pontos B, C e A', e no menu *Construct* a opção *Angle Bisector*;
- Determine o ponto médio de [AC]:
 - Selecciona o segmento [AC] e menu *Construct* a opção *Point At Midpoint* (chamemo-lhe D);
- Construa a circunferência de centro C e que passa pelo ponto atrás encontrado (raio \overline{CD}):
 - Selecciona o pontos C e depois o ponto D, e no menu *Construct* a opção *Circle By Center And Point*;

⁵⁰ Ver Apêndice II.

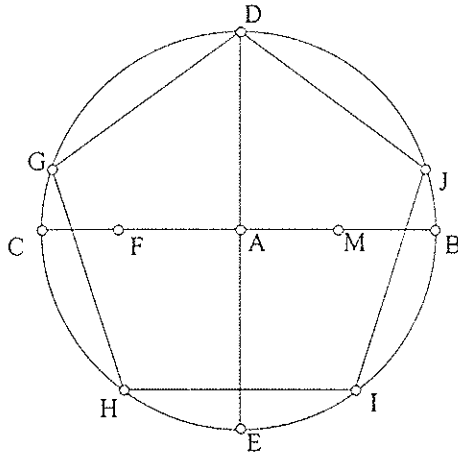


Figura 2.87: [DGHIJ] é um pentágono regular inscrito numa circunferência de centro A e raio \overline{AB} .

- Determine a intersecção, E, da bissetriz com a circunferência construídos atrás:
 - Selecciona a bissetriz e a circunferência, e no menu *Construct* a opção *Point At Intersection*;
- Construa a face do cubo paralela aquela construída anteriormente e que passa em E.
- Conclua o desenho das arestas visíveis e invisíveis do cubo e elimine os objectos desnecessários utilizando, depois de os seleccionar, no menu *Display* a opção *Hide Objects*;
- Se desejar, pode renomear os seus vértices e, em seguida, construa duas diagonais do cubo.

Exercício 4 - Polígono regular (ver exercício 4 da secção 2.8.1)

Para ajudar a resolver o exercício 4.3 da secção 2.8.1 vamos construir um pentágono regular [DGHIJ] inscrito numa circunferência (Figura 2.87):

- Num *Sketch* limpo, construa com a ferramenta respectiva uma circunferência de centro A e raio \overline{AB} ;
- Construa o diâmetro [BC];
- Selecciona a ferramenta semi-recta;
- Selecciona o ponto B e depois o ponto A e no menu *Construct* a opção *Ray*;
- Selecciona a semi-recta [BA e a circunferência, e no menu *Construct* a opção *Point At Intersection* (designa por ponto C);
- Selecciona os pontos A e C, e no menu *Construct* a opção *Segment*;
- Marque o ponto médio do raio [AB]: no menu *Construct* a opção *Point At Midpoint*, (ponto M);
- Determinar diâmetro [DE] perpendicular ao diâmetro [CB];

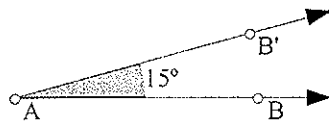


Figura 2.88: $m\angle BAB' = 15^\circ$.

- Construir uma circunferência centrada em M e raio \overline{MD} ;
- O ponto de intersecção da circunferência construída atrás com o diâmetro [BC] determina o ponto F;
- O lado do pentágono mede \overline{DF} ;
- Construir circunferências de raio \overline{DF} a partir, por exemplo do ponto D;
- O pentágono obtém-se unindo os pontos de intersecção das circunferências atrás construídas com a circunferência original.

2.9.2 Ângulos e arcos

Exercício 1: ângulo (ver exercício 3 da secção 2.8.2)

Num *Sketch* limpo, pode construir os ângulos que achar mais convenientes. Por exemplo, partindo da semi-recta origem [AB construir um ângulo de 15° (Figura 2.88).

- Selecciona a ferramenta semi-recta e construa a semi-recta AB (lado origem do ângulo);
- Selecciona o ponto A e no menu *Transform* a opção *Mark Center "A"* e depois o ponto B e no mesmo menu a opção *Rotate* (na janela de diálogo indique a amplitude que desejar: neste caso 15°);
- Selecciona o ponto A e depois o ponto B' e no menu *Construct* a opção *Ray* (lado extremidade do ângulo).

Exercício 2: arco (ver exercício 4 da secção 2.8.2)

No *Sketchpad*, pode construir os arcos que achar por bem. Por exemplo, construir um arco de 65° (Figura 2.89).

- Selecciona a ferramenta circunferência e construa a circunferência de raio \overline{AB} (B é ponto origem do arco);
- Selecciona o ponto A e no menu *Transform* a opção *Mark Center "A"* e depois o ponto B e no mesmo menu a opção *Rotate* (na janela de diálogo indique a amplitude que desejar: neste caso 65°);

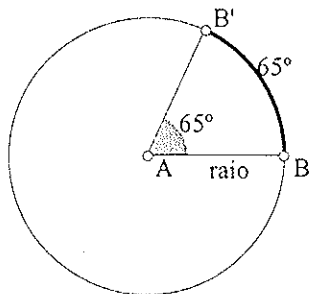


Figura 2.89: Arco de circunferência, BB' , de amplitude 65° : $m(\text{arco } BB') = 65^\circ$.

- Obteve o ponto B' (ponto extremidade do arco), e se quisermos, seleccionamos o ponto A e depois o ponto B' e no menu *Construct* a opção *Segment* para marcar o raio.

2.9.3 Trigonometria num referencial ortonormado

Exercício 1: Representamos num referencial cartesiano ortogonal, em coordenadas polares, os pontos (ver exercício 1 da secção 2.8.3 e Figura 2.79):

$$M(2, 30^\circ) \text{ e } N(6, -\frac{\pi}{4})$$

- Num Sketch novo, construa um referencial, utilizando no menu *Graph* a opção *Create Axes*.
- Para representar os pontos dados em coordenadas polares:
 - Selecciono no menu *Graph* a opção *Grid Form*, e na janela de diálogo que se abre a opção *Polar (r, theta)*;
 - Selecciono no menu *Graph* a opção *Plot Points ...*, e na janela de diálogo, entretanto aberta, introduza as coordenadas polares respectivas (escolha a unidade de ângulo pretendida - graus ou radianos, no menu *Display* e na opção *Preferences ...*);

Exercício 2: Roda gigante

Representamos, no círculo trigonométrico, todos os ângulos mencionados na Tabela 1.17 (ver exercício 3 da secção 2.8.3 e Figura 2.81):

- Num Sketch novo, construa um círculo trigonométrico:
 - Selecciono a ferramenta *Circunferência* e construa a circunferência de raio que considerar adequado (por exemplo diâmetro $\overline{AB} = 6 \text{ cm}$);
 - Selecciono o centro da circunferência e no menu *Transform* a opção *Mark Center "O"* e depois o ponto B e no mesmo menu a opção *Rotate* (escolha a unidade de ângulo pretendida -

graus ou radianos, no menu *Display* e na opção *Preferences ...*) e na janela de diálogo indique a amplitude que precisar: 30° , 45° , 60° , ..., 270° , 300° , ...;

- Obteve vários pontos. Se quisermos, seleccionamos os pontos que ficam no mesmo diâmetro e no menu *Construct* a opção *Segment* para representar o diâmetro;

- Com a ferramenta *Legendas* escreva o que achar mais pertinente (por exemplo a amplitude dos ângulos).

2.9.4 Gráficos

Exercício 1: Gráfico da função seno (Figura 2.31)

Agora, vamos apresentar os principais passos para a construção do gráfico da função seno no Sketchpad:

- Num *Sketch* novo, construímos um círculo trigonométrico por forma que o seu centro, O, seja o ponto de intersecção de duas semi-rectas ortogonais (uma na vertical). À direita do círculo construímos outra semi-recta vertical que determina, com a semi-recta horizontal, o ponto $(0, 0)$ – origem do referencial. Indica-se, com a ferramenta *Legenda*, os pontos $(\frac{\pi}{2}, 0)$, $(\pi, 0)$, $(\frac{3\pi}{2}, 0)$ e $(2\pi, 0)$;

- Seleccionando a circunferência e utilizando no menu *Construct* a opção *Point On Object*, construímos um ponto livre sobre o círculo trigonométrico. Marcamos o raio: segmento de recta determinado pelo ponto livre e o centro do círculo;

- Seleccionando o segmento de recta de extremos $(0, 0)$ e $(2\pi, 0)$, e utilizando no menu *Construct* a opção *Point On Object*. construi-se um ponto livre sobre o segmento de recta;

- Construímos uma recta vertical à qual pertence o ponto livre do segmento de recta de extremos $(0, 0)$ e $(2\pi, 0)$ – esta recta desloca-se livremente entre estes pontos;

- Construímos uma semi-recta horizontal com origem no ponto livre do círculo que intersecta a recta vertical livre num ponto. Seleccionando este último ponto, optamos no menu *Display* pela opção *Trace Point*;

- Seleccionando o ponto livre do círculo, o círculo, o segmento de recta de extremos $(0, 0)$ e $(2\pi, 0)$ e o ponto livre sobre este segmento de recta, clicamos no menu *Edit* e escolhemos na opção *Action Button* a alternativa *Animation ...*. Abre-se uma caixa de diálogo e opta-se (conforme for mais

adequado) neste caso: “*Point* (nome) - *once* – *around Circle* (nome) – *slowly*” e “*Point* (nome) *moves* - *once* - *along Segment* (nome) - *slowly*”.

Capítulo 3 - Geometria Plana

3.1 Transformações geométricas

Uma transformação geométrica é uma função que faz corresponder a cada ponto do plano (ou do espaço) um novo ponto do plano (ou do espaço); normalmente exigimos que a função seja *bijectiva*⁵¹ e que preserve as figuras geométricas no sentido de, por exemplo, a imagem de um triângulo ser ainda um triângulo, a de uma recta ser outra recta. Vamos estudar as transformações geométricas que preservam as distâncias – as *isometrias* no plano (as translações, as reflexões, as rotações e as reflexões deslizantes) e as que não preservam as distâncias – as *semelhanças* e as *homotetias* no plano.

3.1.1 Definições

Vamos começar por apresentar algumas noções que utilizaremos correntemente neste capítulo. A primeira noção é a de congruência ou geometricamente igual: se uma figura se deslocar rigidamente (isto é, sem alterar a forma nem as dimensões) de modo a sobrepor-se a outra então as figuras são *congruentes*. Por exemplo, dois ângulos, $\angle ABC$ e $\angle DEF$, dizem-se congruentes, e escrevemos $\angle ABC \cong \angle DEF$, se e só se tiverem a mesma amplitude ($\widehat{ABC} = \widehat{DEF}$). Dois segmentos de recta, $[AB]$ e $[CD]$, dizem-se congruentes, e escreve-se $[AB] \cong [CD]$, se e só se tiverem o mesmo comprimento (isto é, $\overline{AB} = \overline{CD}$). Dois triângulos dizem-se congruentes quando as seis medidas de um coincidem com as seis medidas do outro: os comprimentos dos três lados e as amplitudes dos três ângulos. Precisando, o $\Delta[ABC]$ é congruente com o $\Delta[DEF]$, e escreve-se $\Delta[ABC] \cong \Delta[DEF]$, se houver uma correspondência bijectiva entre os vértices de um e de outro (digamos: $A \leftrightarrow D, B \leftrightarrow E, C \leftrightarrow F$) de tal modo que os lados e os ângulos correspondentes são congruentes (ou seja $[AB] \cong [DE], [BC] \cong [EF], [CA] \cong [FD], \angle A \cong \angle D, \angle B \cong \angle E$ e $\angle C \cong \angle F$) – ver Figura 3.1. Nota-se que, quando escrevemos $\Delta[ABC] \cong \Delta[DEF]$ significa que não só os triângulos são congruentes, mas que o são através da correspondência bijectiva

⁵¹ Uma função f é bijectiva se cada ponto do plano ou do espaço é imagem de um e um só ponto do plano ou do espaço, ou de outra forma: se for, simultaneamente, injectiva (ver secção 2.5.1) e sobrejectiva. Uma aplicação, $f: A \rightarrow B$, diz-se sobrejectiva se o seu contradomínio, $f(A)$, é igual a B , ou de outro modo: se $\forall y \in B \exists x \in A: f(x) = y$.

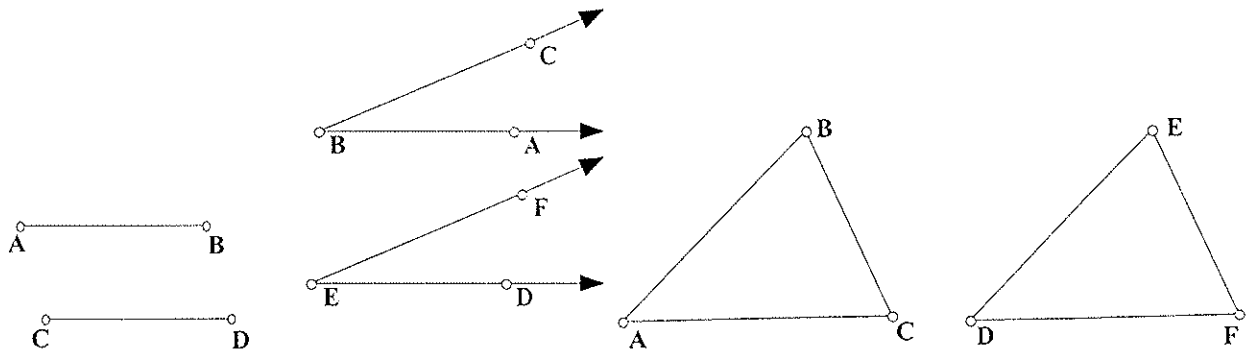


Figura 3.1: Os segmentos de recta $[AB]$ e $[CD]$ são congruentes (ou seja, $\overline{AB} = \overline{CD}$): $[AB] \cong [CD]$. Os ângulos $\angle ABC$ e $\angle DEF$ são congruentes (significa que, $\hat{A}BC = \hat{D}EF$): $\angle ABC \cong \angle DEF$. Os triângulos, $\Delta[ABC]$ e $\Delta[DEF]$, são congruentes (ou seja $[AB] \cong [DE]$, $[BC] \cong [EF]$, $[CA] \cong [FD]$, $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$ e $\angle C \cong \angle F$): $\Delta[ABC] \cong \Delta[DEF]$.

$$A \leftrightarrow D, \quad B \leftrightarrow E, \quad C \leftrightarrow F.$$

Assim, $\Delta[ABC] \cong \Delta[DEF]$ não significa o mesmo que $\Delta[ABC] \cong \Delta[EDF]$.

Diz-se que uma recta, r , e todas as que lhe são paralelas definem uma *direcção*. Por um ponto qualquer do plano passa uma infinidade de rectas, ou seja há uma infinidade de direcções. Por outro lado, qualquer ponto de uma recta pode “percorrê-la” de dois modos diferentes. A cada um dos modos de um ponto percorrer uma recta chama-se *sentido*. Assim, a cada direcção podemos associar dois sentidos que se dizem *contrários* ou *opostos* (ver Figura 3.2).

Um segmento de recta, $[AB]$, define uma direcção (a da recta suporte, AB) e um comprimento (o de $[AB]$, \overline{AB}). Atribuímos ao segmento de recta $[AB]$ um sentido se definirmos qual dos extremos do segmento de recta é a origem e qual é a extremidade. Tomando A para origem, B é a extremidade do segmento de recta, definindo-se, assim, o *segmento orientado* AB : $[A,B]$. Se B for a origem e A a extremidade, definimos o *segmento orientado* BA : $[B,A]$. Um *segmento orientado* fica caracterizado por: uma *origem*, uma *direcção*, um *sentido* e um *comprimento*. Num segmento orientado, se a origem coincide com a extremidade diz-se que o segmento orientado é nulo e representa-se por um ponto: por exemplo, $[A,A]$. O *segmento orientado nulo* tem direcção e sentido indeterminado, e o seu comprimento é igual a zero. Todos os segmentos orientados com a mesma direcção, o mesmo sentido e o mesmo comprimento dizem-se *equipolentes*. O conjunto de todos os segmentos orientados equipolentes é designado por *vector livre*. Um *vector* (quando dissermos simplesmente “vector” estaremos a abreviar “vector livre”) fica, então, definido quando se conhece: a *direcção*, o *sentido* e o *comprimento*. O vector do qual

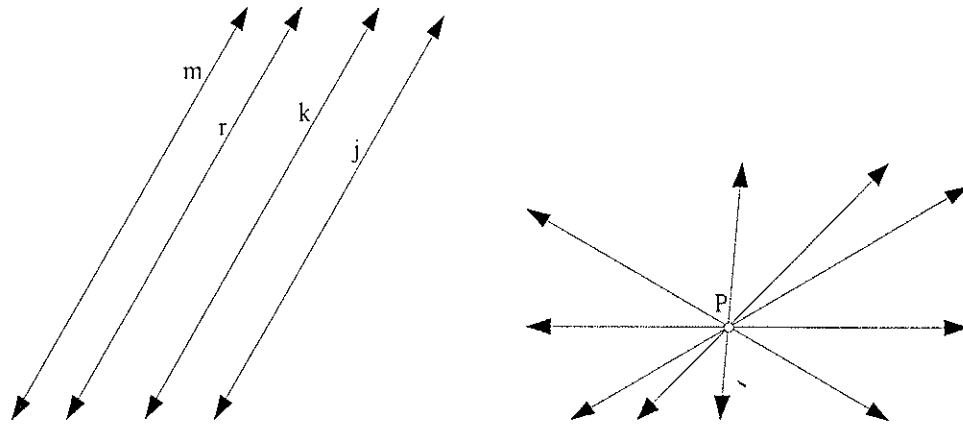


Figura 3.2: A recta r e todas as que lhe são paralelas (por exemplo: m , k e j) determinam uma direcção (esquerda). Pelo ponto P passa uma infinidade de rectas e cada uma determina uma direcção (direita).

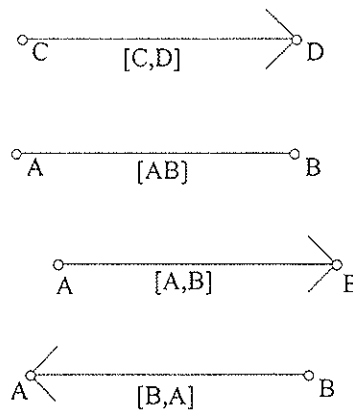


Figura 3.3: No segmento de recta $[AB]$ temos dois sentidos: de A para B e de B para A . $[A,B]$ é o segmento orientado de origem A e extremidade B . $[B,A]$ é o segmento orientado de origem B e extremidade A . Temos que $[A,B] \neq [B,A]$. Todos os segmentos orientados com a mesma direcção, o mesmo sentido e o mesmo comprimento, embora sendo diferentes ($[A,B] \neq [C,D]$), definem o mesmo vector livre: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Os segmentos orientados $[A,B]$ e $[C,D]$ são equipolentes por representarem o mesmo vector. \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{CD} e \overrightarrow{BA} são colineares e temos $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

$[A,B]$ é representante escrever-se-á simbolicamente por \overrightarrow{AB} , ou por uma letra minúscula com uma seta por cima, por exemplo, \vec{u} (ver Figura 3.3). Vamos representar por \mathcal{V} o conjunto de todos os vectores do plano.

À medida do comprimento de um vector \vec{u} chama-se *norma* e representa-se por $\|\vec{u}\|$. Dois vectores são *iguais* se tiverem a mesma direcção, o mesmo sentido e o mesmo comprimento, ou seja, se forem equipolentes. Ao vector que tem a mesma direcção, o mesmo comprimento e o sentido contrário ao de \vec{u} chamamos *vector simétrico* de \vec{u} e representamo-lo por $-\vec{u}$. Os segmentos orientados nulos definem o *vector nulo* que se representa por $\vec{0}$ (a direcção e o sentido

são indeterminados). Dois vectores dizem-se *colineares* se tiverem a mesma direcção ou se um deles for o vector nulo.

Na secção 2.3.2 vimos a noção de ângulo; aqui vamos notar que: o ângulo entre o vector \overline{AB} e ele próprio tem amplitude 0° ; entre \overline{AB} e o seu simétrico, $-\overline{AB}$, a amplitude é de 180° (ver adiante a secção 3.4.3).

3.1.2 Isometrias no plano

Uma *isometria* é uma aplicação f do conjunto dos pontos no conjunto dos pontos que preserva as distâncias, isto é, tal que para quaisquer pontos P, Q se tem

$$d(P, Q) = d(f(P), f(Q)).$$

Duas figuras F_1 e F_2 dizem-se *isométricas* ou *congruentes*, e escreve-se $F_1 \cong F_2$, sse existe uma isometria f que transforma F_1 em F_2 , isto é, tal que

$$f(F_1) = F_2.$$

Apresentamos os quatro tipos de isometrias no plano, partindo das mais simples. Primeiro as *translações*, seguindo-se as *reflexões*, as *rotações* e, por último, as *reflexões deslizantes* (mencionaremos, ainda, um caso particular das rotações: a *simetria central*, conhecida também por *meia volta*).

(i) Translações

A *translação* é definida por um vector (por exemplo, \overline{AB}). Cada ponto, C , do plano é enviado no único ponto, D , tal que $\overline{CD} = \overline{AB}$. Para encontrarmos o ponto D procede-se, na prática, como ilustrado na Figura 3.4. A translação de um segmento de recta $[PQ]$ associada ao vector \overline{AB} , é um segmento $[P'Q']$ tal que $[P'Q']$ é paralelo a $[PQ]$ (escreve-se $[P'Q'] \parallel [PQ]$) – ver Figura 3.5. A translação de um triângulo $\Delta[PQR]$, associada ao vector \overline{AB} , é um triângulo cujos vértices são as imagens, por \overline{AB} , P' , Q' e R' dos vértices P , Q e R do triângulo dado, respectivamente. Temos $\Delta[PQR] \cong \Delta[P'Q'R']$, ou seja, os triângulos têm os lados paralelos dois a dois (Figura 3.6). A translação de uma recta é uma recta paralela, ou ela própria se for paralela à direcção da translação. A translação de uma circunferência de centro O e raio r é a circunferência do mesmo raio com centro na imagem de O , pelo vector que define a translação. Como a translação é uma

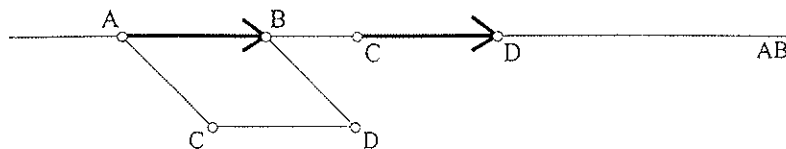


Figura 3.4: A translação do ponto C segundo o vector \overline{AB} é o ponto D: se D for colinear com A e B, D é o ponto de AB à direita de C tal que $[CD] \cong [AB]$ ($\overline{CD} = \overline{AB}$); se C não estiver na recta AB, D é o único ponto tal que $[ABDC]$ é um paralelogramo⁵², sendo a intersecção da recta paralela a AB por C com a recta paralela a AC por B.

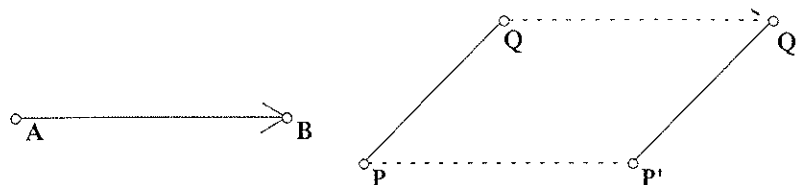


Figura 3.5: A translação de $[PQ]$, associada ao vector \overline{AB} , é um segmento de recta $[P'Q']$ tal que $[P'Q'] \parallel [PQ]$ e $\overline{AB} = \overline{PP'} = \overline{QQ'}$.

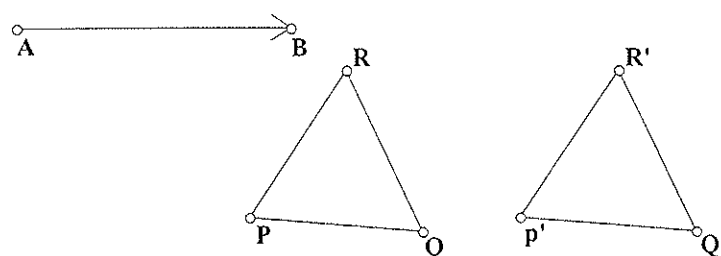


Figura 3.6: A translação do $\Delta[PQR]$, associada ao vector \overline{AB} , é um triângulo cujos vértices são as imagens P' , Q' e R' dos vértices do triângulo dado, P , Q e R respectivamente, e vem $\Delta[PQR] \cong \Delta[P'Q'R']$. Os triângulos têm os lados paralelos dois a dois e temos: $\overline{AB} = \overline{PP'} = \overline{QQ'} = \overline{RR'}$.

correspondência bijectiva, podemos dizer que a *inversa da translação* associada ao vector \overline{AB} é a translação associada ao vector \overline{BA} , ou seja $-\overline{AB}$ ($= \overline{BA}$). Uma translação cujo vector é nulo corresponde à *translação idêntica*. Uma translação diferente da identidade não tem *pontos fixos*, ou seja, não tem pontos que sejam enviados em si próprios. As *rectas fixas*⁵³ de uma translação associada a um vector \overline{AB} são as rectas paralelas a \overline{AB} .

⁵² Paralelogramo é um polígono (secção 3.3) com quatro lados, ou seja, um quadrilátero com os lados paralelos dois a dois.

⁵³ A respeito de uma transformação h , uma figura F diz-se *fixa* se $h(F) = F$.

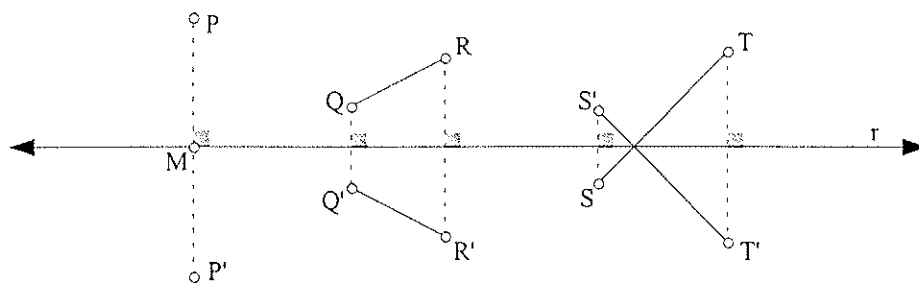


Figura 3.7: A reflexão do ponto P relativamente à recta r (espelho de reflexão) é o ponto P' (simétrico de P relativamente a r): r é a mediatriz do $[PP']$ ($r \perp [PP']$ e $r \cap [PP'] = \{M\}$, em que M é o ponto médio de $[PP']$). A reflexão de $[QR]$, relativamente à recta r é $[Q'R']$, e de $[ST]$ é $[S'T']$.

(ii) Reflexões (simetrias em relação a uma recta)

A *reflexão* ou *simetria axial* em relação a uma recta r envia cada ponto P no seu simétrico P' relativamente a r . Temos que: se $P \in r$, então P' coincide com P ; se $P \notin r$, P' é determinado pela condição de r ser a mediatriz do segmento de recta $[PP']$, isto é, r é perpendicular a $[PP']$ e passa no seu ponto médio (ver Figura 3.7). A reflexão é uma isometria, logo transforma cada figura numa figura congruente: por exemplo, para pontos Q, R do plano, tem-se $[QR] \cong [Q'R']$ (Figura 3.7). À recta r chama-se *eixo* ou *espelho de reflexão*. A reflexão é *involutiva*: se P' é a imagem de P por certa reflexão, então P é a imagem de P' pela mesma reflexão. Os únicos pontos fixos desta transformação, isto é, que são enviados em si próprios, são os do espelho r - invariante pontualmente. Já as rectas perpendiculares ao espelho de reflexão são invariantes globalmente, isto é, os seus pontos, excepto o que pertence ao espelho de reflexão, não são fixos. As rectas fixas, de uma reflexão, são as perpendiculares ao espelho r e a própria recta r .

(iii) Rotações

A *rotação* de centro O e amplitude α (que denotamos por: $(O; \alpha)$) envia o ponto P , diferente de O , no ponto P' tal que $[OP] \cong [OP']$, e tal que o ângulo $\angle POP'$ tem amplitude α ; envia também O em O (Figura 3.8). A *rotação inversa* da rotação de centro O e amplitude α é a rotação de centro O e de amplitude $-\alpha$. Se numa rotação tivermos $\alpha = 0^\circ$ (ou um múltiplo de 360°), obtemos a transformação *idêntica*. Uma rotação diferente da identidade tem como único ponto fixo o centro de rotação. Para determinar a imagem de uma recta t , t' , por uma rotação $(O; \alpha)$, procede-se do

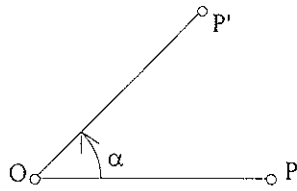


Figura 3.8: Rotação de centro O e amplitude α do ponto P no ponto P' : $[OP] \cong [OP']$ e α é a amplitude do ângulo $\angle POP'$;

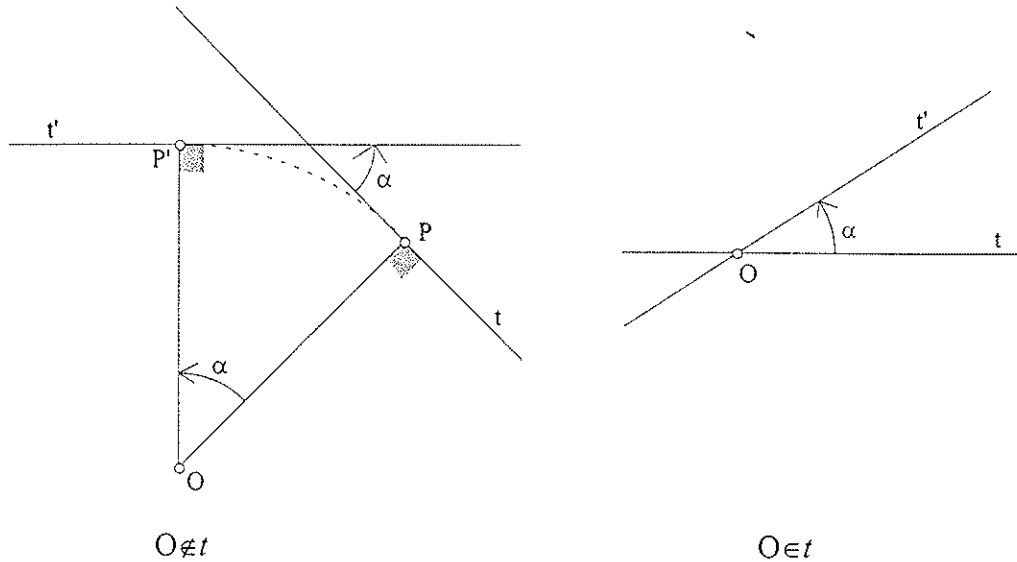


Figura 3.9: t' é a imagem de t pela rotação $(O; \alpha)$: rodamos a projecção ortogonal (P) de $O \notin t$ sobre t obtendo P' , t' é a perpendicular a OP' por P' . O ângulo de t para t' é igual à amplitude da rotação (α). No caso, $O \in t$, basta rodar t de α centrado em O .

seguinte modo: se $O \notin t$, basta rodar a projecção ortogonal P de O sobre t ; t' é então a perpendicular a OP' por P' . Note-se ainda que o ângulo de t para t' é igual à amplitude da rotação α (Figura 3.9). Se $O \in t$, t' passa em O fazendo um ângulo α com t (ver Figura 3.9).

(iv) Reflexões deslizantes

A *reflexão deslizante* é o produto⁵⁴ de uma reflexão em relação à recta r com uma translação na direcção de r efectuando-se primeiro a translação na direcção de r e depois a reflexão em relação à recta r – ver Figuras 3.10 e 3.11. A reflexão deslizante não tem pontos fixos e tem como única recta fixa o eixo de reflexão, ou seja, r é enviada em si mesma.

⁵⁴ O produto de duas transformações, h e j , tem o significado de composição de transformações: $h \circ j$. Como tanto a reflexão como a translação são bijectivas, tem-se sempre $h \circ j = j \circ h$ na reflexão deslizante e a ordem é irrelevante.

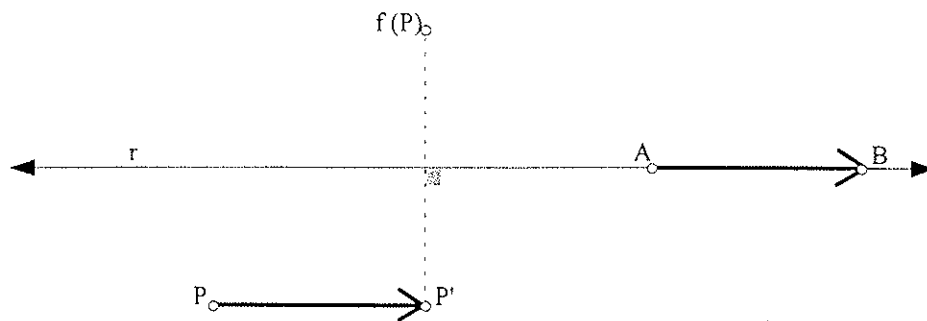


Figura 3.10: A reflexão deslizante f de P em relação a r e segundo \overline{AB} começa pela translação j segundo \overline{AB} (obtendo P' ; temos $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{AB}$), seguindo-se a reflexão h em relação a r , obtendo-se: $f(P) = h \circ j(P) = h(j(P))$.

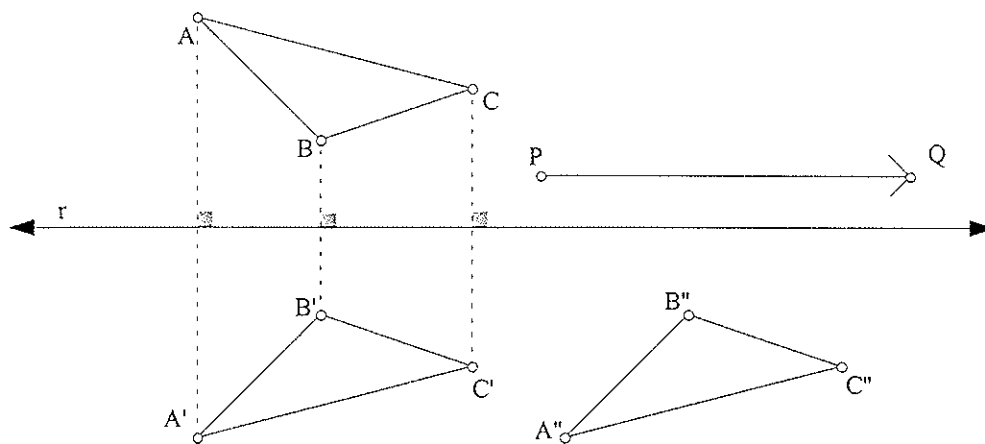


Figura 3.11: A reflexão deslizante transforma $\Delta[ABC]$ em $\Delta[A''B''C'']$; primeiro podemos operar a reflexão de eixo r , que transforma $\Delta[ABC]$ em $\Delta[A'B'C']$; depois, a translação definida pelo vector \overline{PQ} , paralelo a r , transforma $\Delta[A'B'C']$ em $\Delta[A''B''C'']$.

(v) Simetrias centrais

A *simetria central* é também uma isometria e é definida da seguinte forma: a imagem de P pela simetria de centro O é o ponto P' tal que P', O e P são colineares, e (se $P \neq O$) O é o ponto médio de $[PP']$; a imagem do centro de simetria O é o próprio ponto O , que é o único ponto fixo desta transformação. Tal como a reflexão, a simetria de centro O é involutiva. Nota-se ainda que, como para a translação, também a simetria central envia cada recta numa recta paralela (ou na mesma recta, caso ela passe no centro de simetria – rectas globalmente fixas). A simetria central é

um caso particular da rotação, pois não é mais do que uma rotação de centro O e de amplitude 180° : $(O; 180^\circ)$; por essa razão também se lhe chama *meia volta*.

3.1.3 Homotetias e semelhanças

Agora vamos estudar as transformações geométricas que não preservam as distâncias, alteram o tamanho das figuras mas mantêm a sua forma: as *transformações de homotetia* ou, ditas simplesmente, *homotetias* e as *transformações de semelhança* ou, simplesmente, *semelhanças*.

Uma aplicação, f , bijectiva, do plano no plano, diz-se uma *homotetia* de razão k (qualquer real não nulo) *sse* para quaisquer pontos P, Q do plano, vem

$$\overline{f(P)f(Q)} = k \overline{PQ}.$$

Com $|k| = 1$, temos uma isometria. Assim, as isometrias são homotetias de razão 1 ou -1 (o tamanho e as formas das figuras mantêm-se inalteráveis). Qualquer homotetia, f , envia pontos colineares em pontos colineares. A homotetia de *centro* O e *razão* k envia cada ponto P , do plano, no ponto P' , do plano, colinear com O e P , tal que

$$\overline{OP'} = k \overline{OP}.$$

O ponto O fica fixo e, se P não coincide com O e $k > 0$, os pontos P e P' pertencem à mesma semi-recta de origem O , enquanto que, se $k < 0$, pertencem a semi-rectas opostas (ver Figura 3.12). Repare-se que quando $k = -1$ a homotetia é idêntica à simetria central, ou seja, uma isometria, e quando $k = 1$ temos uma transformação idêntica. Se for $|k| > 1$ a homotetia é uma *dilatação*, *dilatação* ou *ampliação* e se for $|k| < 1$ é uma *contração* ou *redução*. Se fizéssemos a razão $k = 0$, a imagem de qualquer ponto seria o centro O da homotetia. Ao número real k – razão da homotetia – também se chama *factor* ou *constante da homotetia* (ver Figura 3.13).

Uma homotetia de razão $|k|$, transforma uma circunferência de raio r numa outra de raio $|k|r$ cujo centro é a imagem do centro da primeira. Por outro lado, quaisquer duas circunferências C_1 e C_2 de raios r_1 e r_2 , diferentes, estão relacionadas por duas homotetias, uma de razão positiva e outra de razão negativa. Se elas forem concêntricas, isto é, tiverem o mesmo centro, o centro comum é também o centro das duas homotetias. Caso tenham centros distintos, O_1 e O_2 , a razão das

homotetias que transformam uma na outra vale $\frac{r_2}{r_1}$ ou $-\frac{r_2}{r_1}$ (ver Figura 3.14).



Figura 3.12: A homotetia de centro O e razão $k = 2$ envia P em P_1 : $\overline{OP_1} = 2\overline{OP}$. A homotetia de centro O e razão $k = 2.5$ envia P em P_2 : $\overline{OP_2} = 2.5\overline{OP}$ e a de centro O e razão $k = -1.5$ envia P em P_3 : $\overline{OP_3} = -1.5\overline{OP}$.

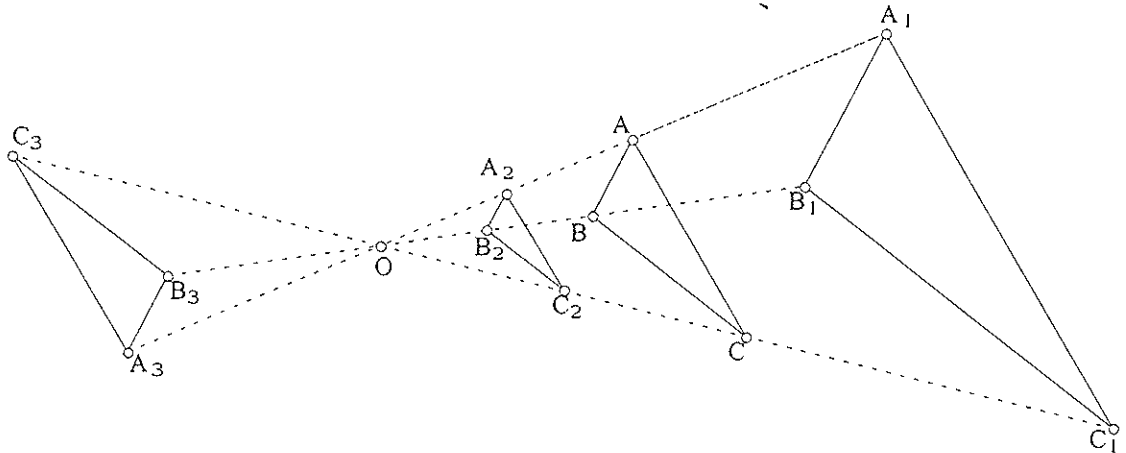


Figura 3.13: O $\Delta[ABC]$ é transformado por uma homotetia de centro O e razão $k = 2$ no $\Delta[A_1B_1C_1]$ (é uma ampliação): $\overline{OA_1} = 2\overline{OA}$, $\overline{OB_1} = 2\overline{OB}$, $\overline{OC_1} = 2\overline{OC}$. O $\Delta[ABC]$ é transformado por uma homotetia de centro O e razão $k = \frac{1}{2}$ no $\Delta[A_2B_2C_2]$ (trata-se de uma redução): $\overline{OA_2} = \frac{1}{2}\overline{OA}$, $\overline{OB_2} = \frac{1}{2}\overline{OB}$, $\overline{OC_2} = \frac{1}{2}\overline{OC}$. O $\Delta[ABC]$ é transformado pela homotetia de centro O e razão $k = -1$ no $\Delta[A_3B_3C_3]$ (é uma isometria): $\overline{OA_3} = -1\overline{OA}$, $\overline{OB_3} = -1\overline{OB}$, $\overline{OC_3} = -1\overline{OC}$.

Fazendo a composição de transformações de homotetia com isometrias obtemos as transformações de semelhança. Uma *semelhança* é uma aplicação bijectiva, f , do plano no plano, tal que para certo número real $k > 0$, para quaisquer pontos P, Q do plano, temos

$$\overline{f(P)f(Q)} = k\overline{PQ}.$$

Ao número $k > 0$, nestas condições, chama-se *razão de semelhança* de f . Qualquer semelhança f transforma pontos colineares em pontos colineares. Duas figuras F_1 e F_2 dizem-se semelhantes *sse* existe uma semelhança f que transforma F_1 em F_2 , isto é, tal que

$$f(F_1) = F_2.$$

e escreve-se

$$F_1 \sim F_2.$$

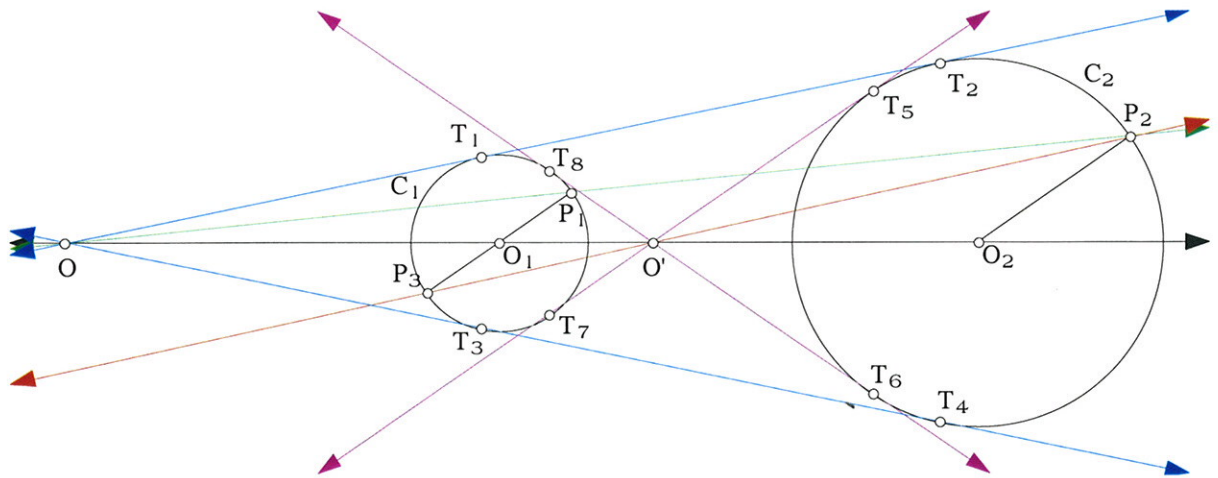


Figura 3.14: As circunferências C_1 e C_2 de centros distintos O_1 e O_2 , respectivamente, e raios $r_1 = \overline{O_1P_1} \neq \overline{O_2P_2} = r_2$ ($P_1 \in C_1$ e $P_2 \in C_2$), estão relacionadas por duas homotetias, uma de razão positiva e outra de razão negativa. Sendo P_1 e P_2 pontos exteriores à recta O_1O_2 , $\overline{O_1P_1}$ e $\overline{O_2P_2}$ paralelos e com o mesmo sentido, a intersecção das rectas O_1O_2 e P_1P_2 (verde) é o centro da homotetia positiva (ponto O) que transforma C_1 em C_2 ; sendo $\overline{O_1P_3}$ e $\overline{O_2P_2}$ paralelos mas com o sentido oposto, então a intersecção das rectas O_1O_2 e P_3P_2 (vermelha) é o centro da homotetia negativa (ponto O') que transforma C_1 em C_2 ; as razões das homotetias são: $\frac{r_2}{r_1}$ e $-\frac{r_2}{r_1}$, respectivamente. As tangentes comuns a C_1 e C_2 passam pelos centros das homotetias⁵⁵: da positiva quando C_1 e C_2 estão no mesmo lado da tangente (as rectas azuis T_1T_2 e T_3T_4); da negativa quando C_1 e C_2 estiverem em lados opostos da tangente (as rectas roxas T_7T_5 e T_8T_6).

3.2 Propriedades dos triângulos

3.2.1 Definições

O *triângulo* é uma figura (polígono) formada pela reunião de três segmentos de recta, digamos $[AB]$, $[BC]$ e $[CA]$, chamados *lados* do triângulo, em que os pontos do plano A , B e C (os *vértices*) são não colineares; esta figura fica perfeitamente determinada pelos seus vértices, e denota-se por $\Delta[ABC]$, sendo irrelevante a ordem das letras. Os ângulos definidos pelos vértices, $\angle ABC$, $\angle BAC$ e $\angle ACB$, dizem-se *ângulos internos* do triângulo $\Delta[ABC]$. Os *ângulos externos* de um triângulo são os suplementares adjacentes dos seus ângulos internos (Figura 3.15). Quanto aos

⁵⁵ A construção das tangentes a uma circunferência por um ponto que lhe é exterior é feita na secção 3.8.5.

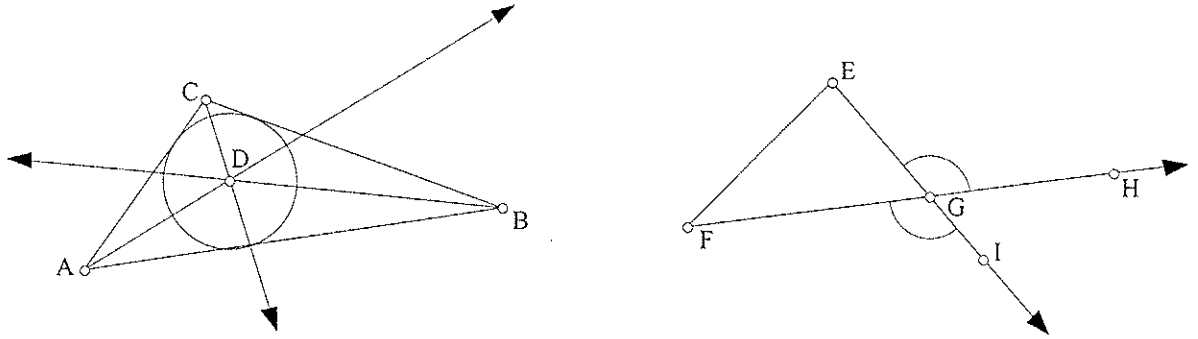


Figura 3.15: *Bissectriz* de um triângulo é a *bissectriz*⁵⁶ de qualquer dos seus três ângulos. O $\Delta[ABC]$ (à esquerda) tem três ângulos internos: $\angle ABC$, $\angle BCA$ e $\angle CAB$. $[AD]$, $[BD]$ e $[CD]$ são as bissectrizes dos ângulos internos do triângulo e D é o *incentro* (ponto de intersecção das bissectrizes e que é também o centro da circunferência inscrita no triângulo). Os ângulos $\angle HGE$ e $\angle FGI$ são externos ao $\Delta[EFG]$ (à direita). $\angle HGE$ e $\angle FGI$ são *ângulos verticalmente opostos* ($\widehat{HGE} = \widehat{FGI}$).

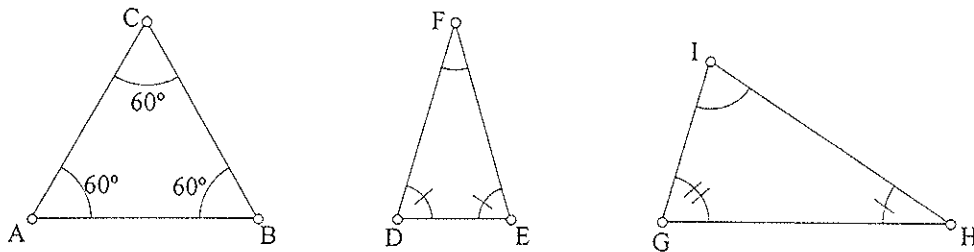


Figura 3.16: O $\Delta[ABC]$ é *equilátero*: $\widehat{ABC} = \widehat{BCA} = \widehat{CAB} = 60^\circ$; $\Delta[DEF]$ é *isósceles*: $\widehat{FDE} = \widehat{DEF}$ ($\angle D \cong \angle E$); $\Delta[GHI]$ é *escaleno*: ângulos e lados diferentes.

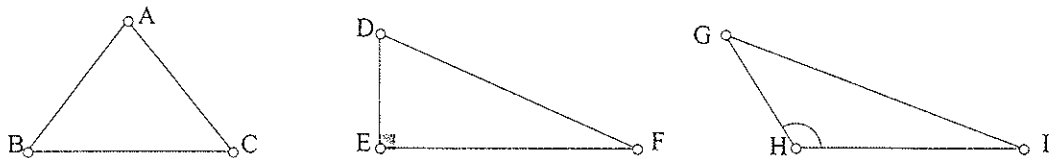


Figura 3.17: O $\Delta[ABC]$ é *acutângulo*: $\angle A$, $\angle B$ e $\angle C$ são ângulos agudos (amplitudes entre 0° e 90°). O $\Delta[DEF]$ é *rectângulo*: $\widehat{DEF} = 90^\circ$; $\Delta[GHI]$ é *obtusângulo* pois $\angle GHI$ é obtuso: $90^\circ < \widehat{GHI} < 180^\circ$.

lados / ângulos, um triângulo pode ser: *equilátero* se os três lados são iguais ou congruentes (logo os seus ângulos internos são iguais ou congruentes e valem 60° – a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° – propriedade (v), secção 3.2.2); *isósceles* se tem dois lados iguais ou congruentes (logo terá dois ângulos iguais ou congruentes) e *escaleno* se os três lados / ângulos são diferentes – ver Figura 3.16. Quanto à natureza dos ângulos (Figura 3.17), um triângulo pode ser: *acutângulo* se os três ângulos são agudos; *rectângulo* se tem um ângulo recto e *obtusângulo* se tem um ângulo

⁵⁶ A Bissectriz de um ângulo é uma semi-recta que divide o ângulo em dois ângulos congruentes.

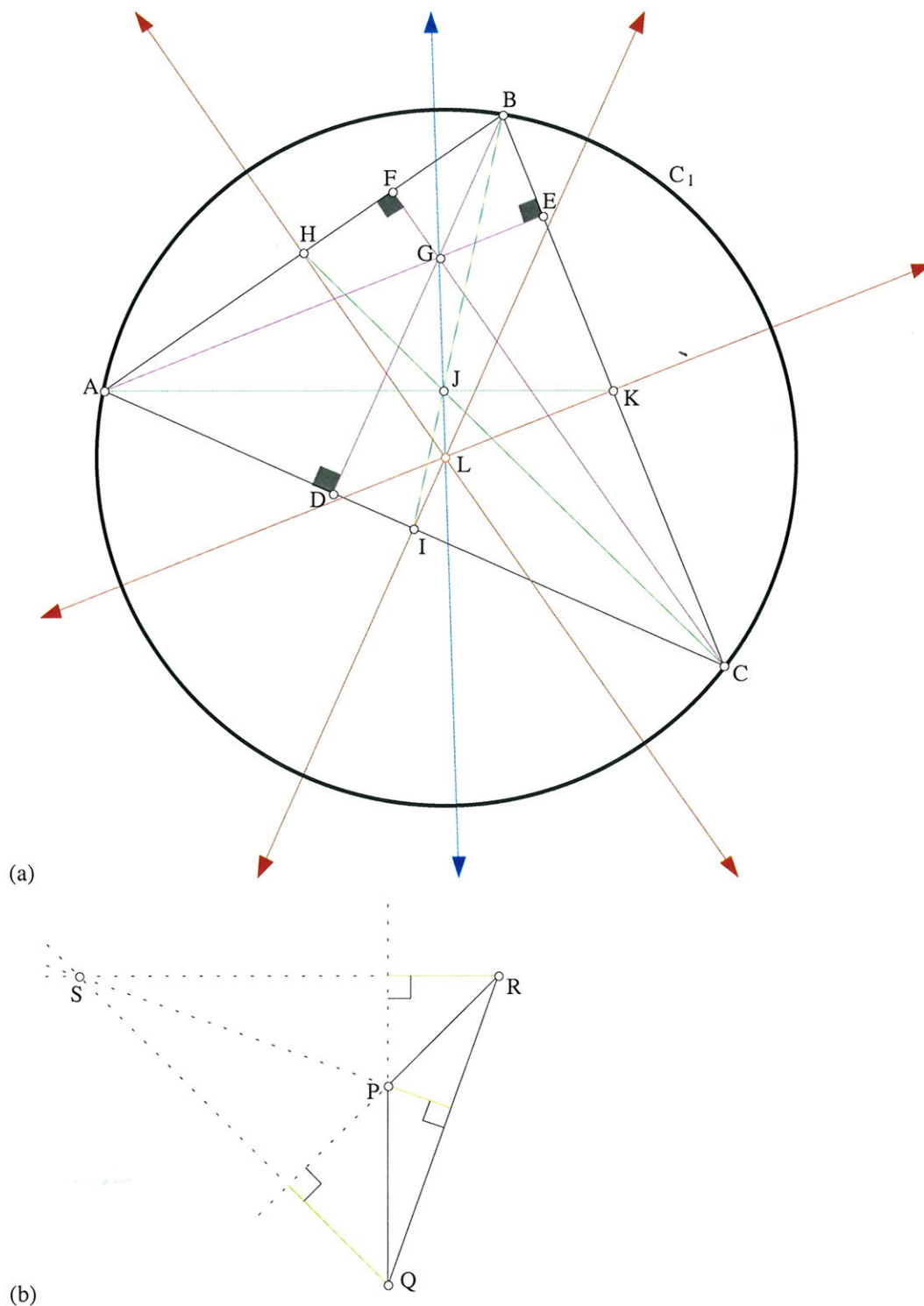


Figura 3.18: (a) No triângulo $[ABC]$, qualquer, temos que: $[AE]$, $[BD]$ e $[CF]$ são as *alturas* (roxo) e $[AE] \cap [BD] \cap [CF] = \{G\}$ que é o *ortocentro*; $[AK]$, $[BI]$ e $[CH]$ são as *medianas* (verde), com H , I , K os pontos médios de cada lado e $[AK] \cap [BI] \cap [CH] = \{J\}$ que é o *baricentro*; HL , KL e IL são as *mediatrizes* ou *eixos* (vermelho) de cada lado e $HL \cap KL \cap IL = \{L\}$ que é o *circuncentro* (este é o centro da circunferência C_1 em que o triângulo se inscreve); a recta GL é a *recta de Euler* e inclui o ortocentro, o baricentro e o circuncentro. (b) Alturas (amarelo) e o *ortocentro*, S , do triângulo $[PQR]$ que é obtusângulo. Ver a construção do *incentro* de um triângulo na Figura 3.15.

obtusos. Num triângulo rectângulo, ao lado maior chama-se *hipotenusa* e aos outros dois *catetos*. A *altura* de um triângulo é o segmento de recta da perpendicular baixada de um vértice sobre o lado oposto, ou seu prolongamento. O ponto de intersecção das três alturas ou do seu prolongamento, de um triângulo, chama-se *ortocentro* (Figura 3.18 – (a) e 3.18 – (b)). A mediana de um triângulo é o segmento de recta que une o vértice ao ponto médio do lado oposto. As três medianas de um triângulo encontram-se no ponto que se chama *baricentro* (ou centro de gravidade do triângulo). As três mediatrizes de um triângulo⁵⁷ encontram-se num ponto a que chamamos *circuncentro* e que é também o centro da circunferência em que o triângulo se inscreve. O ortocentro, o baricentro e o circuncentro de um triângulo são colineares e a recta que os contém chama-se *recta de Euler* (Figura 3.18 – (a)).

3.2.2 Propriedades com demonstração

(i) *Qualquer ângulo externo é maior que um ângulo interno não adjacente.*

Sem perda de generalidade, na Figura 3.19 – (a), verifiquemos que $\hat{B}AD > \hat{C}BA$ e que $\hat{B}AD > \hat{A}CB$. Basta mostrar a primeira desigualdade, já que $\angle BAD \cong \angle CAF$ (por serem ângulos verticalmente opostos), e um argumento análogo mostraria que $\hat{B}AD > \hat{A}CB$.

Seja M o ponto médio de [AB], e prolongue-se [CM] até um ponto G tal que

$$[CM] \cong [MG] \quad (\text{ver Figura 3.19 – (b)}).$$

Observa-se que G está do lado da recta AB contrário ao que contém C, e portanto D e G estão do mesmo lado da recta AB; e também se observa que G, M e B estão do mesmo lado da recta AD (visto, por construção, AD não intersectar [MB] nem [MG]). Concluimos assim que G está no interior do ângulo $\angle BAD$. Vemos, pelo critério LAL (secção 3.2.3) que

$$\Delta[BMC] \cong \Delta[AMG],$$

e portanto

$$\angle GAM \cong \angle CBA.$$

Como G é um ponto interior de $\angle BAD$, temos então que

$$\hat{B}AD = \hat{B}AG + \hat{G}AD > \hat{B}AG = \hat{C}BA \quad (\text{c. q. d.}).$$

⁵⁷ *Mediatriz* ou *eixo* de um triângulo é a recta perpendicular no ponto médio a um lado do triângulo.

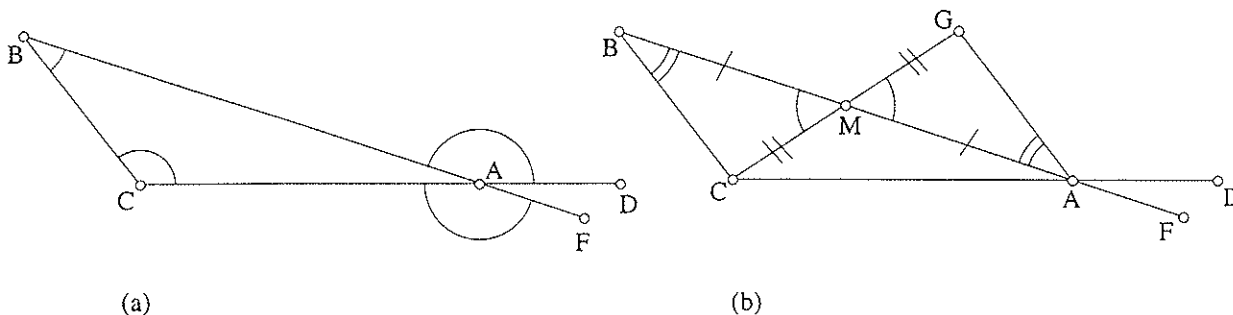


Figura 3.19: (a) O ângulo externo $\angle BAD$ do $\Delta[ABC]$ é maior que os ângulos internos não adjacentes: $\angle B$ e $\angle C$. (b) M é o ponto médio de $[AB]$ e G é tal que $[CM] \cong [MG]$. $\angle GAM \cong \angle CBA$ já que $\Delta[BMC] \cong \Delta[AMG]$. Ver texto para a demonstração.

(ii) Num qualquer triângulo $\Delta[ABC]$, se $[AB] \cong [AC]$ então $\angle B \cong \angle C$.

Mostra-se que a correspondência $A \mapsto A$, $B \mapsto C$ e $C \mapsto B$ entre o triângulo $\Delta[ABC]$ e ele mesmo está nas condições do critério LAL (secção 3.2.3) visto que, da hipótese

$$[AB] \cong [AC], [AC] \cong [AB] \text{ e } \angle A \cong \angle A,$$

logo

$$\Delta[ABC] \cong \Delta[ACB] \text{ (ver Figura 3.20).}$$

Donde

$$\angle B \cong \angle C,$$

por serem ângulos homólogos em triângulos congruentes. (c. q. d.).

(iii) Num qualquer triângulo $\Delta[ABC]$, tem-se $m(\angle A) > m(\angle B)$ se e só se⁵⁸ $\overline{BC} > \overline{AC}$.

Mostra-se pois: (\Leftarrow) Como por hipótese $\overline{BC} > \overline{AC}$ marquemos, no segmento $[BC]$, um ponto D tal que $[CD] \cong [CA]$ (Figura 3.21). Então uma vez que o triângulo $\Delta[ADC]$ é isósceles, temos

$$m(\angle BAC) = m(\angle A) > m(\angle DAC) = m(\angle ADC) > m(\angle B),$$

sendo a última desigualdade devido ao $\angle ADC$ ser um ângulo externo de $\Delta[ABD]$ e $\angle B$ lhe não ser adjacente (Propriedade (i)).

⁵⁸ Isto é, ao maior lado (caso exista) opõe-se o maior ângulo e vice-versa, e ao menor lado (caso exista) opõe-se o menor ângulo e vice-versa.

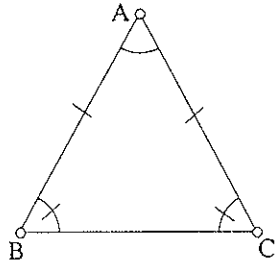


Figura 3.20: O $\Delta[ABC]$ é isósceles: $\angle B \cong \angle C$.

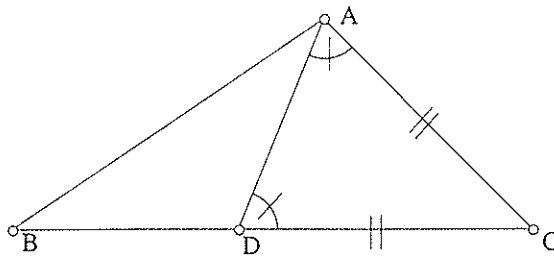


Figura 3.21: O $\Delta[ABC]$ é qualquer. $D \in [BC]$ tal que $[CD] \cong [CA]$, e portanto, o $\Delta[ADC]$ é isósceles.

(\Rightarrow) Se for $m(\angle A) > m(\angle B)$, não pode ser $[BC] \cong [AC]$, pois nesse caso, pela Propriedade (ii), ter-se-ia $\angle A \cong \angle B$; nem pode ser $\overline{BC} < \overline{AC}$, pois a implicação anterior daria $m(\angle A) < m(\angle B)$. A alternativa que resta é $\overline{BC} > \overline{AC}$. (c. q. d.).

(iv) (*Desigualdade Triangular*) Cada um dos lados de um triângulo é menor que a soma dos outros dois.

Isto é, se A, B e C forem quaisquer pontos do plano temos a desigualdade $\overline{AB} \leq \overline{AC} + \overline{CB}$, dando-se a igualdade quando os três pontos forem colineares. Com efeito, consideremos um ponto D na recta AB de forma a que B esteja entre A e D, e seja $[BD] \cong [BC]$ (Figura 3.22). Como $\Delta[DBC]$ é isósceles, temos

$$m(\angle ADC) = m(\angle BDC) = m(\angle BCD) < m(\angle ACD),$$

e a Propriedade (iii), aplicada ao $\Delta[ADC]$, dá

$$\overline{AC} < \overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BD} = \overline{AB} + \overline{BC},$$

ou seja,

$$\overline{AC} < \overline{AB} + \overline{BC}. \text{ (c. q. d.)}$$

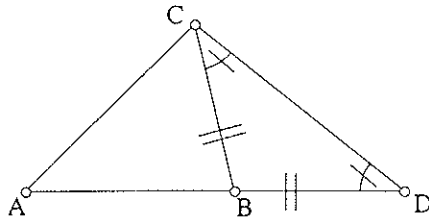


Figura 3.22: O $\Delta[ABC]$ é qualquer. $D \in AB$ tal que $[BC] \cong [BD]$, e portanto, o $\Delta[DBC]$ é isósceles.

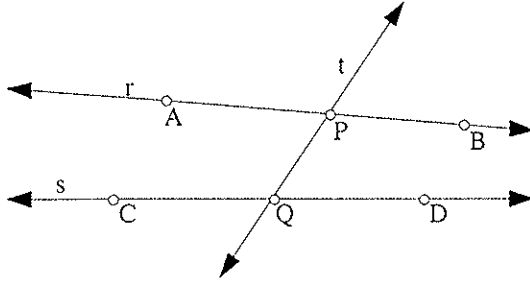


Figura 3.23: Os pares de ângulos: $\angle APQ$, $\angle DQP$ e $\angle BPQ$, $\angle CQP$ são ângulos *alternos internos* ou *alternados*; $\angle APQ$, $\angle CQP$ e $\angle BPQ$, $\angle DQP$ são ângulos *internos do mesmo lado de t*.

Antes de provar mais uma propriedade, necessitamos da definição que segue. Consideremos r, s duas rectas e t uma outra recta que intersecta r e s em pontos distintos P e Q (t é uma *transversal* a r e a s). Sejam ainda A, B pontos em r e C, D pontos em s conforme a Figura 3.23. Relativamente ao sistema de rectas r, s, t , os pares de ângulos:

- $\angle APQ$, $\angle DQP$ e $\angle BPQ$, $\angle CQP$ dizem-se *alternos internos* ou, simplesmente, *alternados*;
- $\angle APQ$, $\angle CQP$ e $\angle BPQ$, $\angle DQP$ dizem-se *internos do mesmo lado de t*.

(v) A soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é igual a 180° .

Sem perda de generalidade, da Figura 3.24, CD é a recta paralela a AB que passa por C ; e como “se uma recta intersectar duas rectas paralelas os ângulos alternados formados pelas intersecções são congruentes”⁵⁹, temos

$$\angle BAC \cong \angle ACF \text{ e } \angle ACF \cong \angle ECD \text{ (são verticalmente opostos)}$$

e

$$\angle ABC \cong \angle DCB.$$

Assim, vem

$$m(\angle BAC) + m(\angle ABC) + m(\angle BCA) = m(\angle ECD) + m(\angle DCB) + m(\angle BCA) = 180^\circ,$$

⁵⁹ Esta propriedade é a recíproca de outra: “Se uma recta r fizer com duas rectas r_1 e r_2 ângulos alternados congruentes, então r_1 e r_2 são paralelas” (Araújo 1999).

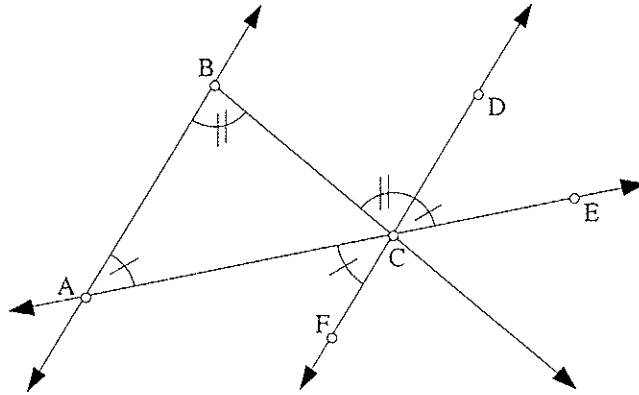


Figura 3.24: A recta AC intersecta duas rectas paralelas, AB e CD; os ângulos *alternados* formados são congruentes: $\angle BAC \cong \angle ACF$; a recta BC intersecta as rectas paralelas AB e CD: os ângulos *alternados* formados são congruentes: $\angle ABC \cong \angle DCB$.

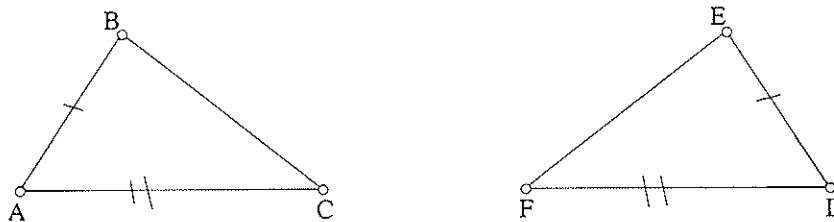


Figura 3.25: Temos $[AB] \cong [DE]$, $\angle A \cong \angle D$ e $[AC] \cong [DF]$, logo os triângulos são congruentes.

sendo a última igualdade devido à soma dos três ângulos ser um ângulo raso. (c. q. d.).

3.2.3 Congruência de triângulos

Vimos na secção 3.1.1 a noção de triângulo congruente. São quatro os critérios de congruência de triângulos cuja demonstração se encontra em Oliveira (1995) e Araújo (1999).

1º Critério: Lado – Ângulo – Lado (LAL)

Dados os triângulos $\Delta[ABC]$ e $\Delta[DEF]$, se $[AB] \cong [DE]$, $\angle A \cong \angle D$ e $[AC] \cong [DF]$, então $\Delta[ABC] \cong \Delta[DEF]$. (Figura 3.25)

2º Critério: Ângulo – Lado – Ângulo (ALA)

Dados os triângulos $\Delta[ABC]$ e $\Delta[DEF]$, se $\angle A \cong \angle D$, $[AB] \cong [DE]$ e $\angle B \cong \angle E$, então $\Delta[ABC] \cong \Delta[DEF]$. (Figura 3.26)

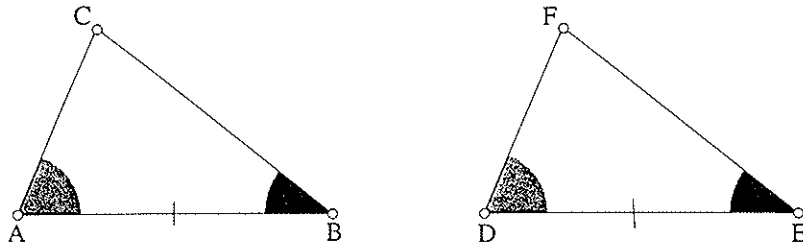


Figura 3.26: Como $\angle A \cong \angle D$, $[AB] \cong [DE]$ e $\angle B \cong \angle E$, então $\Delta[ABC] \cong \Delta[DEF]$.

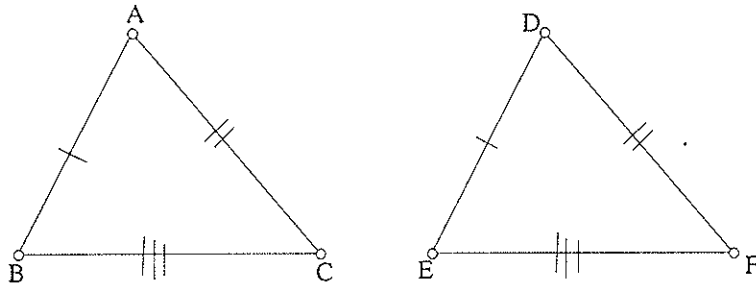


Figura 3.27: Temos $[AB] \cong [DE]$, $[AC] \cong [DF]$ e $[BC] \cong [EF]$, assim os triângulos são congruentes.

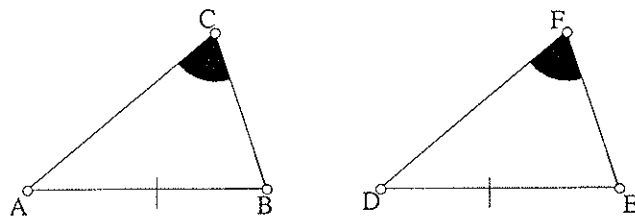


Figura 3.28: Visto ser $[AB] \cong [DE]$, $\angle B \cong \angle E$ e $\angle C \cong \angle F$, temos que $\Delta[ABC] \cong \Delta[DEF]$.

3º Critério: Lado – Lado – Lado (LLL)

Dados os triângulos $\Delta[ABC]$ e $\Delta[DEF]$, se $[AB] \cong [DE]$, $[AC] \cong [DF]$ e $[BC] \cong [EF]$, então $\Delta[ABC] \cong \Delta[DEF]$. (Figura 3.27)

4º Critério: Lado – Ângulo – Ângulo (LAA)

Dados os triângulos $\Delta[ABC]$ e $\Delta[DEF]$, se $[AB] \cong [DE]$, $\angle B \cong \angle E$ e $\angle C \cong \angle F$, então $\Delta[ABC] \cong \Delta[DEF]$. (Figura 3.28)

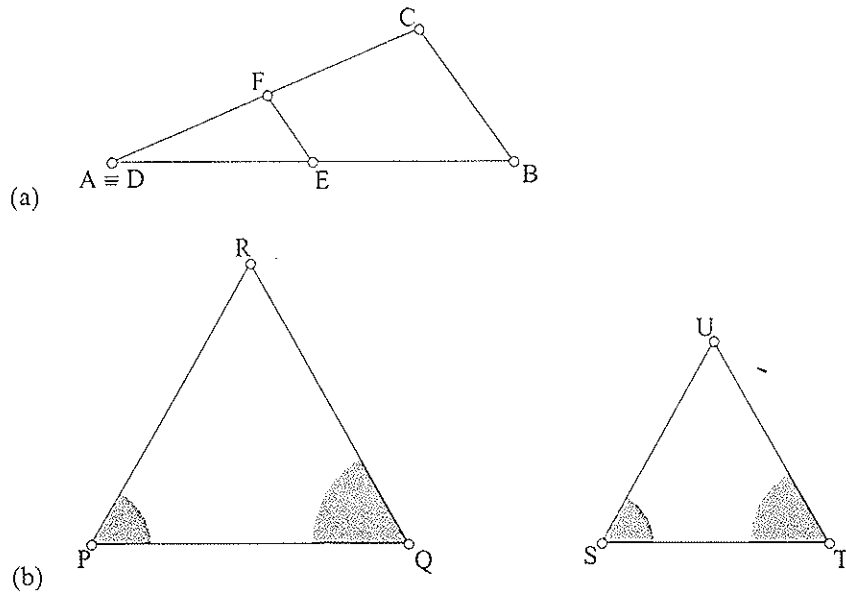


Figura 3.29: (a) $\Delta[ABC] \sim \Delta[DEF]$ e $k = \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{FD}} = 2$ (razão de semelhança), neste caso.
 (b) Nos $\Delta[PQR]$ e $\Delta[STU]$, como temos $\angle P \cong \angle S$ e $\angle Q \cong \angle T$, os triângulos são semelhantes: $\Delta[PQR] \sim \Delta[STU]$.

3.2.4 Semelhança de triângulos

Já na secção 3.1.3 vimos a noção de semelhança. Nesta secção interessa-nos estudar apenas a semelhança de triângulos. Diremos que dois triângulos $\Delta[ABC]$ e $\Delta[DEF]$ são *semelhantes* (através da correspondência bijectiva $A \leftrightarrow D$, $B \leftrightarrow E$, $C \leftrightarrow F$), e escrevemos $\Delta[ABC] \sim \Delta[DEF]$, sse os ângulos correspondentes forem congruentes (ou seja, $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$, $\angle C \cong \angle F$) e os lados correspondentes forem proporcionais. A razão entre lados correspondentes de triângulos semelhantes chamamos *razão de semelhança* (k) desses triângulos, isto é, $k = \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{FD}}$ (Figura 3.29 – (a)). Notamos que, tal como para a congruência de triângulos, ter $\Delta[ABC] \sim \Delta[DEF]$ não é o mesmo que ter $\Delta[ABC] \sim \Delta[EFD]$. Os critérios de semelhança de triângulos são três (demonstrados em Oliveira (1995) e Araújo (1999)).

1º Critério: Ângulo – Ângulo (AA)

Se dois ângulos de um triângulo são congruentes com dois ângulos de outro triângulo, respectivamente, então os triângulos são semelhantes. (Figura 3.29 – (b))

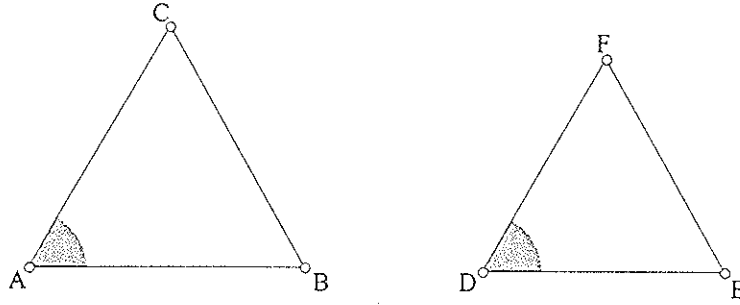


Figura 3.30: Nos $\Delta[ABC]$ e $\Delta[DEF]$, temos $\angle A \cong \angle D$ e $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$; assim, os triângulos são semelhantes: $\Delta[ABC] \sim \Delta[DEF]$.

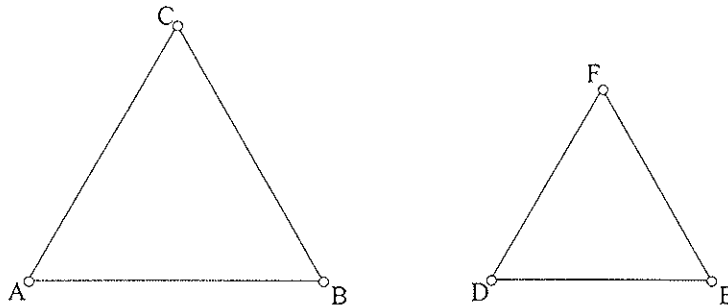


Figura 3.31: Nestes triângulos, $\Delta[ABC]$ e $\Delta[DEF]$, visto os lados correspondentes serem proporcionais: $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{FE}}$, temos que os triângulos são semelhantes: $\Delta[ABC] \sim \Delta[DEF]$.

2º Critério: Lado – Ângulo – Lado (LAL)

Se, em dois quaisquer triângulos, ângulos congruentes subentenderem lados proporcionais, então esses triângulos são semelhantes. (Figura 3.30)

3º Critério: Lado – Lado – Lado (LLL)

Se os comprimentos dos lados de um triângulo são proporcionais aos comprimentos dos lados de outro triângulo, respectivamente, então os triângulos são semelhantes. (Figura 3.31)

3.2.5 O Teorema de Pitágoras

O enunciado clássico do Teorema de Pitágoras é “num triângulo rectângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos”. As demonstrações mais populares do

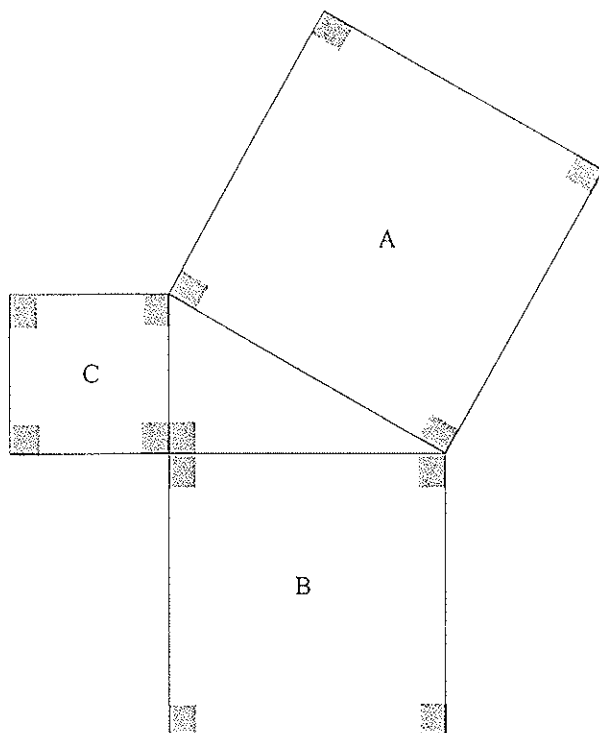


Figura 3.32: Área do quadrado A = Área do quadrado B + Área do quadrado C (Teorema de Pitágoras).

teorema de Pitágoras usam áreas. De facto, na interpretação de Euclides, o teorema é acerca de áreas e não de números. Pitágoras⁶⁰ terá observado que: a área do quadrado cujo lado é a hipotenusa de um triângulo rectângulo é a soma das áreas dos quadrados cujos lados são os catetos do mesmo triângulo (Figura 3.32).

Vamos dar seguidamente uma demonstração, de entre as muitas existentes, do teorema de Pitágoras. Dado um triângulo rectângulo de catetos a e b e hipotenusa c , constrói-se um quadrado de lado $a + b$, como se mostra na Figura 3.33. Constrói-se um quadrado menor de lado c a partir de três cópias do triângulo inicial ($c < a + b$ – Propriedade (iv)). Calcula-se agora a área do quadrado maior de dois modos diferentes:

$$\text{Área do quadrado maior} = (a + b)(a + b) = (a + b)^2$$

e também

$$\text{Área do quadrado maior} = \text{área do quadrado pequeno} + 4 \times \text{área do triângulo} = c^2 + 4 \frac{a \cdot b}{2}$$

⁶⁰ Pitágoras de Samos (séc. VI a. C.) – matemático grego nascido na ilha de Samos - é um dos nomes mais conhecidos dos estudantes do ensino secundário de todos os países, devido ao estudo, nas aulas de Matemática, deste teorema, cuja primeira demonstração lhe é atribuído o mérito de ter descoberto.

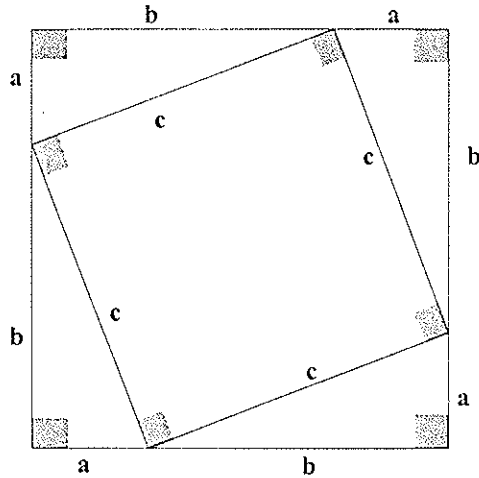


Figura 3.33: Quadrado de lado $a + b$, contendo no interior um quadrado de lado c e quatro triângulos rectângulos iguais com hipotenusa c e catetos a e b . Esta construção permite demonstrar o Teorema de Pitágoras.

(Apêndice IV). Igualando as expressões obtidas, tem-se

$$(a + b)^2 = 4 \left(\frac{1}{2} a b \right) + c^2 \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$$

o que é, ainda, equivalente a

$$c^2 = a^2 + b^2$$

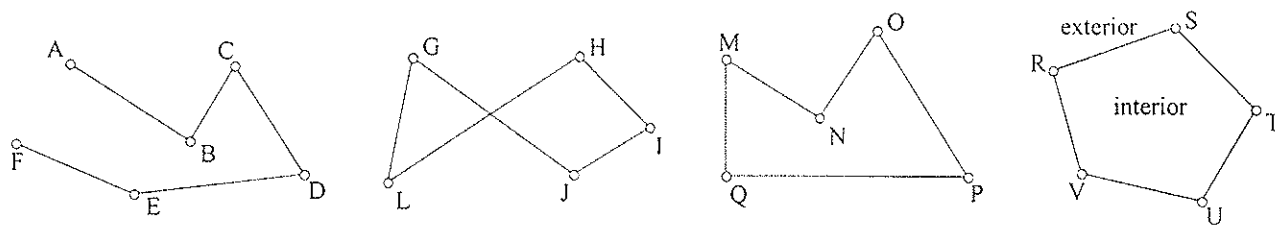
assim se concluindo a prova do teorema de Pitágoras.

3.3 Polígonos

Na secção 3.2 estudamos o triângulo, que é um polígono. Vamos agora, nesta secção, tratar dos polígonos em geral referindo algumas noções e propriedades. Deixamos para a secção 3.8 a construção de polígonos regulares com o “The Geometer’s Sketchpad”.

3.3.1 Definições

Ao conjunto de dois ou mais segmentos de recta do mesmo plano, unidos pelos extremos, chamamos *linha poligonal*. À linha poligonal fechada chamamos *polígono* e os segmentos de recta passam a chamar-se *lados*. Dois lados consecutivos definem um ângulo, donde o número de lados de um polígono é igual ao seu número de ângulos (internos ou externos). Um polígono pode ser: *entrecruzado* – se tiver pelo menos dois lados que se intersectam; *côncavo* – se o prolongamento de,



Linha poligonal aberta *Linha poligonal fechada (polígono entrecruzado)* *Polígono côncavo* *Polígono convexo*

Figura 3.34: Os vários tipos de linhas poligonais e polígonos. [ABCDEF] é uma linha poligonal aberta. [GLHIJ] é um polígono entrecruzado: os lados [GJ] e [LH] intersectam-se. [MNO PQ] é um polígono côncavo: ON ou MN passam no interior do polígono. [RSTUV] é um polígono convexo já que nenhum prolongamento dum lado intersecta o seu interior. O interior do polígono [RSTUV] é a região sombreada excluindo os seus lados e o exterior do polígono é o conjunto dos pontos que não são interiores ao polígono nem pertencem ao próprio polígono.

pelo menos, um lado intersecta o interior do polígono⁶¹; *convexo* – se nenhum prolongamento de um qualquer seu lado intersecta o interior do polígono (Figura 3.34).

Quanto ao número de lados (ou quanto ao número de ângulos internos) os polígonos classificam-se em: triângulos - 3 lados; quadriláteros - 4 lados; pentágonos - 5 lados; hexágonos - 6 lados; heptágonos - 7 lados; octógonos - 8 lados; eneágonos - 9 lados; decágonos - 10 lados; com qualquer outro número de lados diz-se, por exemplo, polígono de 13 lados.

Se o polígono tiver **todos** os lados e **todos** os ângulos congruentes diz-se *regular*. Caso contrário é *irregular*. Num polígono, o segmento de recta que une dois vértices não consecutivos chama-se *diagonal* (Figura 3.35). Os *ângulos externos* de um polígono são os suplementares adjacentes dos seus ângulos internos (Figura 3.36). Um polígono diz-se de ordem 3, 4, 5, etc. conforme tenha 3, 4, 5, etc. lados, respectivamente. Num polígono regular, de ordem 5 ou superior, chama-se *apótema* ao segmento de recta que une o centro do polígono ao ponto médio de qualquer lado (a que é perpendicular). Chama-se *ângulo ao centro*, de um polígono regular, ao ângulo determinado por dois seus vértices quaisquer e pelo centro do polígono – Figura 3.36.

Quando se prolongam os lados de um polígono convexo regular, com cinco ou mais lados, obtêm-se os chamados *polígonos estrelados regulares*. Note-se que se prolongarmos os lados de um triângulo ou se prolongarmos os lados de um quadrado (ou outro quadrilátero) observa-se que as rectas correspondentes não se encontram. Ora, no triângulo, as três rectas intersectam-se duas a

⁶¹ Chama-se *interior de um polígono* (Figura 3.34) ao conjunto dos pontos que estão entre os seus lados, não pertencendo aos mesmos, os quais se dizem *interiores ao polígono*. O *exterior de um polígono* é o conjunto dos pontos que não pertencem ao polígono nem são interiores ao mesmo.

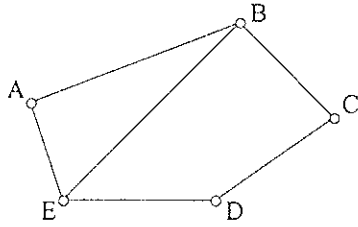


Figura 3.35: [ABCDE] é um pentágono convexo irregular de lados [AB], [BC], [CD], [DE] e [EA] e vértices: A, B, C, D e E. Tem 5 ângulos (internos): $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$ e $\angle E$. [EB] é uma diagonal do pentágono.

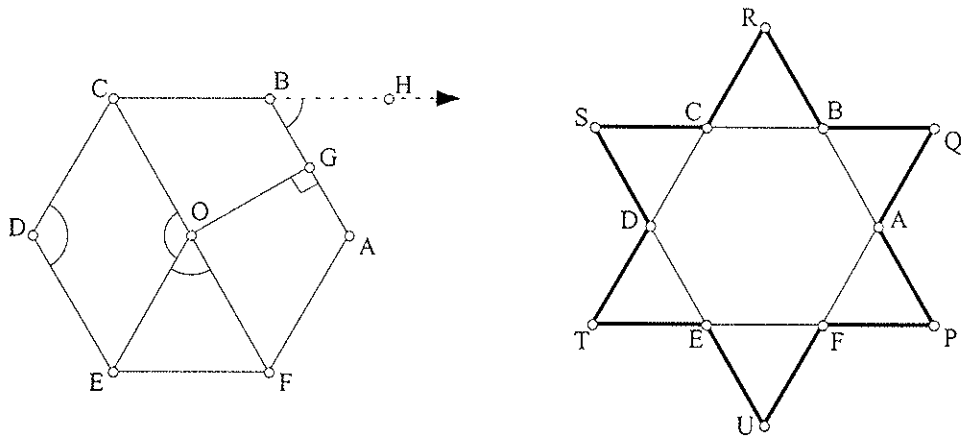


Figura 3.36: No hexágono regular [ABCDEF]: o ponto O é o centro do hexágono, G é o ponto médio do lado [AB] e [OG] é o apótema do hexágono ($[AB] \perp [OG]$); $\angle EOF$ e $\angle EOC$ são ângulos ao centro, $\angle CDE$ é um ângulo interno e $\angle ABH$ é um ângulo externo do hexágono (esquerda). Prolongando os lados do hexágono regular [ABCDEF] obtém-se um polígono estrelado regular – a estrela hexagonal [PAQBRCSDTEUF]. O *hexograma* é a figura tal qual está, isto é, com seis triângulos equiláteros acoplados a um hexágono (direita).

duas, para definirem os vértices do triângulo, e duas rectas não se podem encontrar em mais de um ponto. No caso de um quadrilátero, temos quatro rectas e cada recta corta duas outras e mais nenhuma. Ao prolongarem-se os lados de um pentágono obtemos um polígono estrelado pentagonal (a *estrela pentagonal*) e o *pentagrama*. Estas rectas não voltarão a encontrar-se, já que temos cinco rectas e, portanto, o número máximo de pontos de intersecção são dez (cinco pontos correspondem aos vértices do pentágono e os outros cinco são os vértices das pontas da estrela), o total de vértices do pentagrama – Figura 3.41. A partir do hexágono regular obtém-se a estrela de seis pontas (a *estrela hexagonal*) e o *hexograma* (Figura 3.36). Do heptágono regular obtemos a estrela de sete pontas, do octógono a estrela de oito pontas (Figura 3.41), e assim sucessivamente. A estrelação de muitos polígonos regulares não se fica por aqui, isto é, se prolongarmos ainda mais os lados da figura obtida na primeira estrela, até que se encontrem noutros pontos, observamos que se obtém,

muitas vezes, uma segunda estrela do polígono em causa (ver as duas estrelações do octógono na Figura 3.41). Procedendo de forma análoga poder-se-á obter uma terceira estrela. O processo repete-se sucessivamente até que, do prolongamento dos lados, não apareçam novos pontos de intersecção das rectas. Existe sempre um fim, uma vez que o número de pontos de intersecção de um número finito de rectas é finito (Soler 1990). Os polígonos estrelados (que são côncavos) são regulares ou irregulares conforme o polígono convexo que lhes deu origem for regular ou irregular.

3.3.2 Construção de triângulos

Notemos que, para construir um triângulo dados três lados, antes de mais nada, é preciso averiguar a possibilidade da sua construção. A condição que nos garante ou não a construção de um triângulo é dada pela desigualdade triangular (secção 3.2.2, Propriedade (iv)).

Vamos exemplificar duas possibilidades de construção de triângulos. A primeira, para qualquer triângulo, dados os seus três lados a , b e c . Aqui, começamos por construir a circunferência C_1 com centro A e raio $a = \overline{AB}$ (Figura 3.37). Centrando no ponto B , de C_1 , construímos C_2 de raio $b = \overline{BC}$. Novamente com centro em A , agora com raio $c = \overline{AC}$, construímos C_3 . O triângulo procurado obtêm-se unindo os pontos A , B e C , este um dos dois pontos de intersecção de C_2 com C_3 . Também obtemos o triângulo congruente $[ABD]$. A segunda, apenas para triângulos rectângulos, dada a hipotenusa h e um cateto c (Figura 3.38). A partir do ponto A construímos a circunferência C_1 de raio $h = \overline{AB}$. Com centro no ponto médio de h , (C), e raio \overline{AC} construímos C_2 . Por último, com centro A (ou B) construímos C_3 de raio $c = \overline{AD}$. O triângulo pretendido tem vértices A , B e um dos dois pontos (D ou E) resultantes da intersecção de C_2 com C_3 .

3.3.3 Construção de polígonos regulares

A construção de polígonos regulares faz-se, em geral, através de dois métodos distintos: desenho do polígono dada a circunferência circunscrita e desenho do polígono dado o lado.

O método de desenho de um polígono de n lados a partir da circunferência circunscrita não é mais do que a divisão da circunferência em n partes iguais (podem ser vistas várias construções em Cunha (1997)). Exemplificamos na Figura 3.39 o traçado do polígono regular com nove lados (eneágono). Construímos a circunferência C_1 de centro O e diâmetro $[AB]$. Divide-se $[AB]$ em nove partes iguais. Em geral, o processo de divisão de um segmento de recta em partes iguais é

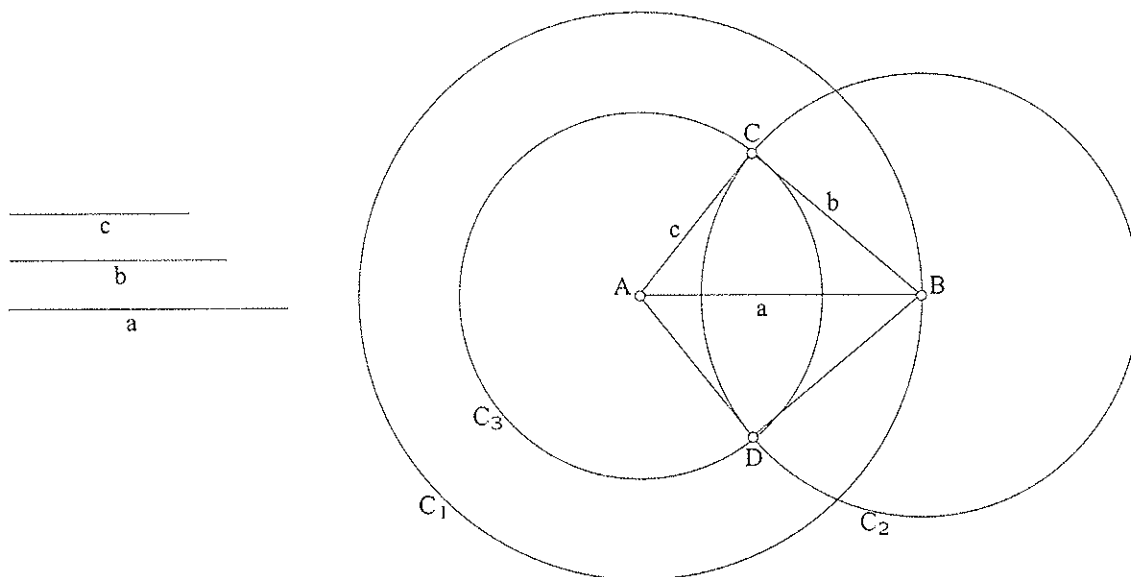


Figura 3.37: Triângulo [ABC] construído dados os seus lados a , b e c (da construção também se obtém outro triângulo congruente a [ABC], com um lado a comum: [ABD]) – ver no texto mais detalhes.

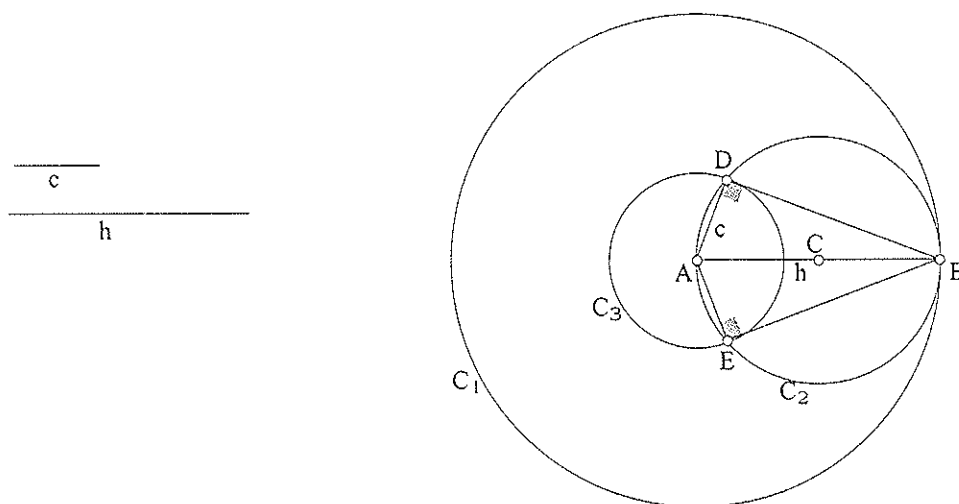


Figura 3.38: $\Delta[ABD]$ é rectângulo de hipotenusa h e cateto c como dados ($\Delta[ABE] \cong [ABD]$). O outro cateto é [DB] (ou [BE]). No texto dão-se mais detalhes de construção.

como se segue (neste caso, nove partes): pelo ponto A – extremo do segmento de recta (ou B), traça-se uma recta qualquer oblíqua a AB e, sobre ela, a partir do ponto A (ou B) marcam-se tantos segmentos de recta iguais, com comprimento qualquer, quantas as partes em que se quer dividir o segmento dado ($\overline{AQ_1} = \overline{Q_1Q_2} = \dots = \overline{Q_8Q_9}$). Une-se o último extremo do último segmento marcado sobre a recta oblíqua, Q_9 , com o ponto B. Traçam-se paralelas à recta Q_9B passando pelos restantes pontos marcados ($Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6, Q_7$ e Q_8). As intersecções destas rectas com o segmento de recta [AB], dividem-no em nove partes iguais ($\overline{AP_1} = \overline{P_1P_2} = \dots = \overline{P_8B}$). Com centro no ponto A e

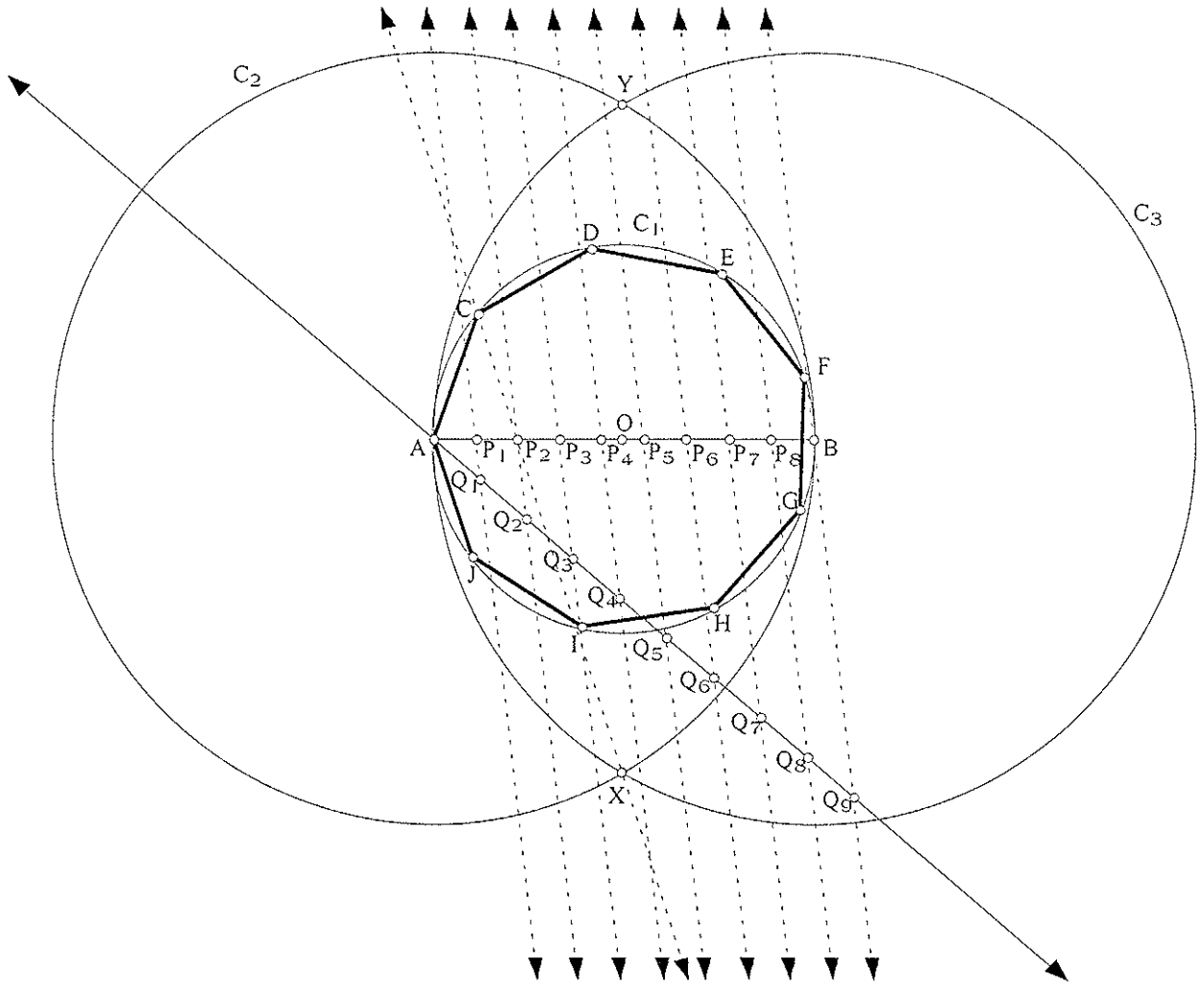


Figura 3.39: O polígono [ACDEFGHIJ] é um eneágono regular convexo.

depois no ponto B traçamos duas circunferências de raio igual ao diâmetro \overline{AB} , C_2 e C_3 . A intersecção destas define dois pontos, X e Y. Une-se o ponto X (ou Y) ao ponto P_2 do diâmetro, determinando a recta P_2X (ou P_2Y). A intersecção desta recta com a circunferência C_1 define o ponto C. Marcando, sobre a circunferência C_1 , pontos de tal modo que estejam à distância \overline{AC} e unindo-os obtemos o eneágono [ACDEFGHIJ].

Existem vários processos para construirmos polígonos regulares a partir do conhecimento de um lado (ver Cunha (1997)). Na Figura 3.40, exemplificamos o traçado do polígono regular com sete lados (heptágono) conhecido o lado [AB]. Considera-se uma circunferência de centro C e raio [CP] qualquer, e dividimo-la em tantas partes iguais quantos os lados do polígono que se pretende traçar (neste caso, sete: P_1, P_2, \dots, P_7) – a técnica é como a construção do eneágono anterior, inscrito numa circunferência. Unem-se os pontos da divisão com o centro C: $[P_1C], [P_2C], [P_3C], \dots, [P_7C]$. Traça-se sobre um dos lados do polígono inscrito na circunferência traçada, por exemplo $[P_1P_2]$, um

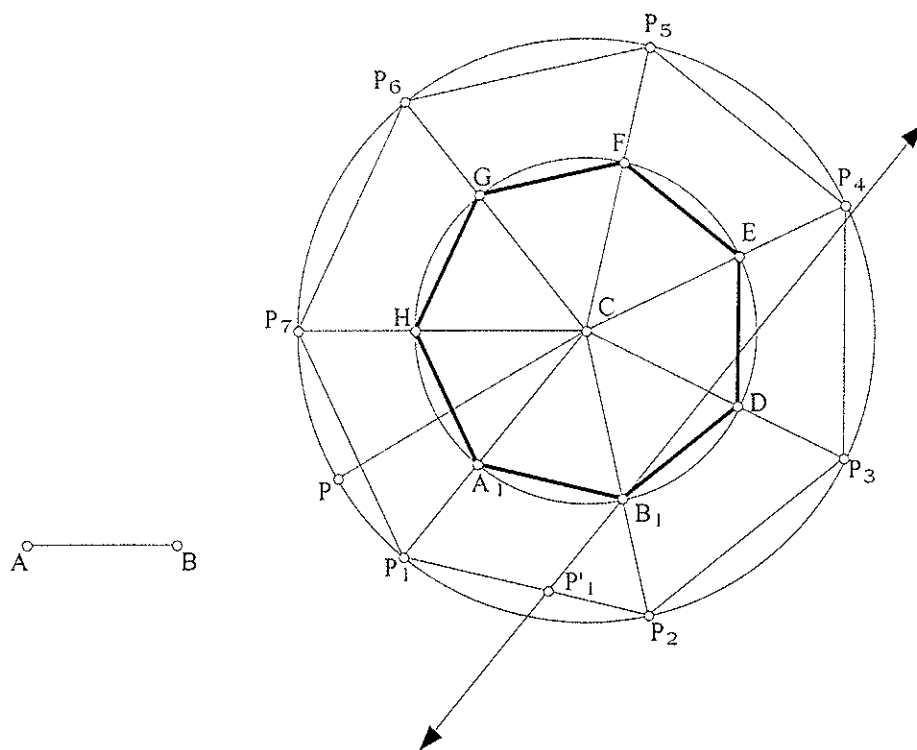


Figura 3.40: Construção do heptágono regular convexo $[A_1B_1DEFGH]$ conhecido o seu lado $[AB]$ (ver no texto detalhes da sua construção).

segmento $[P_1P'_1]$ congruente ao lado AB dado. Por P'_1 traçamos uma paralela ao raio $[P_1C]$ que intersecta $[CP_2]$ em B_1 . Com centro C e raio $[CB_1]$ traça-se outra circunferência e inscreve-se nela o polígono $[A_1B_1DEFGH]$ procurado, marcando os outros vértices sobre a circunferência, usando $[A_1B_1]$ como unidade.

3.3.4 Construção de polígonos estrelados

Vamos exemplificar a construção de dois polígonos estrelados regulares (o pentágono estrelado regular e o octógono estrelado regular), não a partir dos polígonos regulares com o mesmo nome, mas inscrevendo-os numa circunferência. Para traçarmos o pentágono estrelado regular $[P_1ZP_2YP_3XP_4TP_5W]$ dividimos a circunferência de centro O_1 e raio qualquer, onde o vamos inscrever, em cinco partes iguais, e unimos os cinco pontos alternadamente de dois em dois como se pode observar na Figura 3.41 – (a). Os vértices do octógono estrelado regular $[A_1B_2A_2B_3A_3B_4A_4B_5A_5B_6A_6B_7A_7B_8A_8B_1]$ são unidos alternadamente de três em três; está inscrito numa circunferência de centro O e raio qualquer, dividida em oito partes iguais, como se pode observar na Figura 3.41 – (b). Note-se, ainda, que nesta operação de estrelação do octógono foi

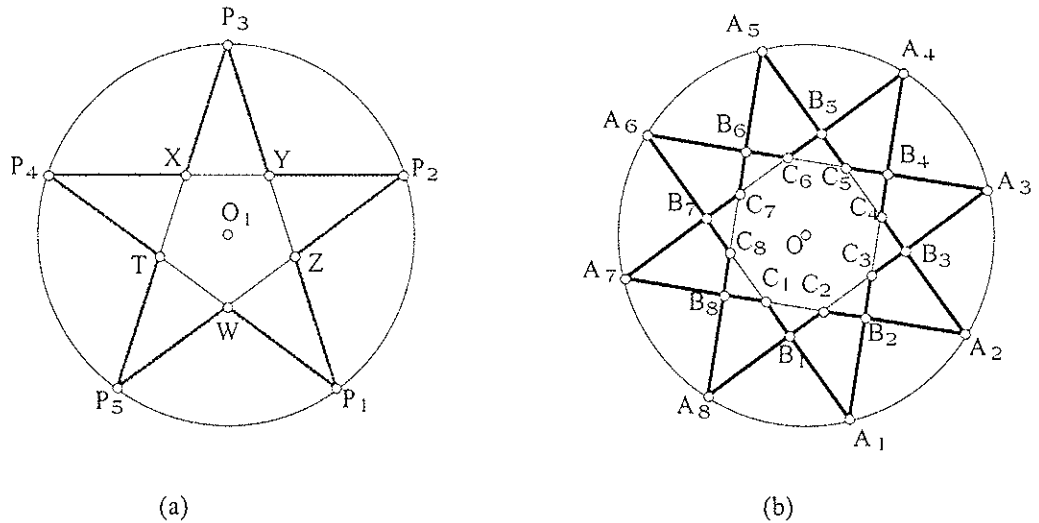


Figura 3.41: (a) O polígono côncavo entrecruzado $[P_1P_2P_3P_4P_5]$ é um pentagrama. O pentágono estrelado regular (polígono côncavo) é $[P_1ZP_2YP_3XP_4TP_5W]$ – a verde. (b) Temos a 2ª estrelação do octógono $[C_1C_2C_3C_4C_5C_6C_7C_8]$: $[A_1B_2A_2B_3A_3B_4A_4B_5A_5B_6A_6B_7A_7B_8A_8B_1]$ – a azul; e a vermelho a sua 1ª estrelação: $[B_1C_2B_2C_3B_3C_4B_4C_5B_5C_6B_6C_7B_7C_8B_8C_1]$.

obtida a segunda estrela. A primeira estrelação ficou definida pelo polígono estrelado $[B_1C_2B_2C_3B_3C_4B_4C_5B_5C_6B_6C_7B_7C_8B_8C_1]$ do octógono regular $[C_1C_2C_3C_4C_5C_6C_7C_8]$.

3.4 Cálculo vectorial

3.4.1 Operações com vectores

(i) Soma de um ponto com um vector (ver secção 3.1.1)

No dia-a-dia deparamos com setas, nos marcos das vias de trânsito, nos sinais de trânsito, na estrada, etc., que nos indicam as direcções a seguir para alcançarmos determinadas localidades (digamos pontos). Se partirmos de um ponto e percorrermos uma distância, segundo uma direcção e um sentido atingimos um outro ponto. Em geral, dados um vector \vec{v} e um ponto A, é sempre possível determinar um ponto B tal que $\overline{AB} = \vec{v}$. Ao ponto B chama-se *soma de A com \vec{v}* e escreve-se:

$$A + \vec{v} = B \quad (\text{ver Figura 3.42}).$$

Notemos que $A + \vec{v}$ é, portanto, a translação do ponto A associada ao vector \overline{AB} . Ou seja,

$$A + \overline{AB} = B,$$

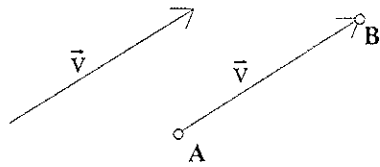


Figura 3.42: A soma do ponto A com o vector \vec{v} é o ponto B.

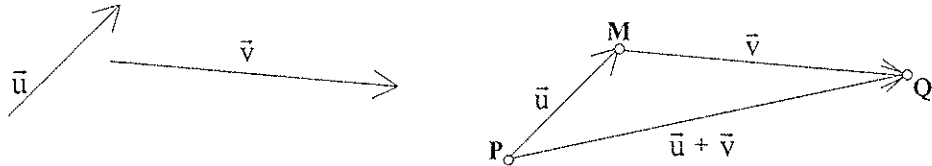


Figura 3.43: A soma do vector \vec{u} com o vector \vec{v} é o vector: $\vec{u} + \vec{v}$.

pelo que, usualmente se escreve (convenção): $\overline{AB} = B - A$, que significa que um vector pode ser escrito pela diferença de dois pontos: entre a extremidade e a origem do vector. Em particular, se $\vec{v} = \vec{0}$ (*vector nulo*), tem-se: $A + \vec{v} = A + \vec{0} = A$. Ou ainda $\overline{AA} = A - A = \vec{0}$.

O comprimento de um vector \overline{AB} é dado pela sua norma:

$$\|\overline{AB}\| = \|B - A\| = \overline{AB}.$$

(ii) Adição de vectores

Para adicionarmos dois quaisquer vectores, \vec{u} e \vec{v} , procede-se do seguinte modo (ver Figura 3.43): considera-se um ponto P qualquer do plano; determina-se $M = P + \vec{u}$; e determina-se $Q = M + \vec{v}$. Ao vector \overline{PQ} chama-se soma de \vec{u} com \vec{v} :

$$\overline{PQ} = \vec{u} + \vec{v}.$$

Notamos que o resultado da adição de dois vectores é independente do ponto do plano considerado.

Podemos somar dois quaisquer vectores, não paralelos, utilizando a *regra do paralelogramo* (ver Figura 3.44): a partir de um ponto qualquer do plano, P, traçam-se dois representantes dos vectores \vec{u} e \vec{v} . O vector soma, $\vec{u} + \vec{v}$, é representado pela diagonal do paralelogramo com origem P.

Para adicionarmos vectores paralelos, procedemos da seguinte forma: tomamos um representante do segundo, com origem na extremidade do primeiro, e o vector soma tem origem na origem da primeira parcela e extremidade na extremidade da segunda (Figura 3.45).

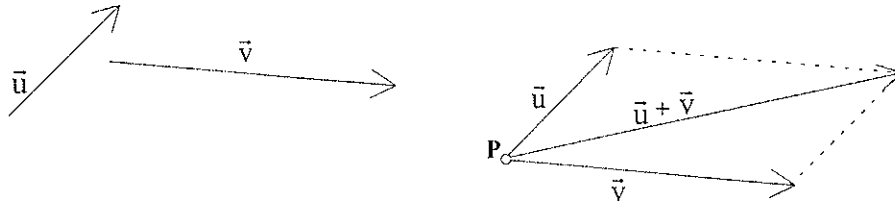


Figura 3.44: Regra do paralelogramo para somar dois vectores \vec{u} e \vec{v} : $\vec{u} + \vec{v}$, é a diagonal do paralelogramo.

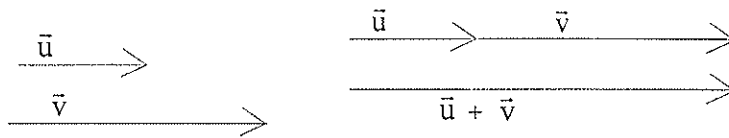


Figura 3.45: A soma de vectores paralelos: $\vec{u} + \vec{v}$.

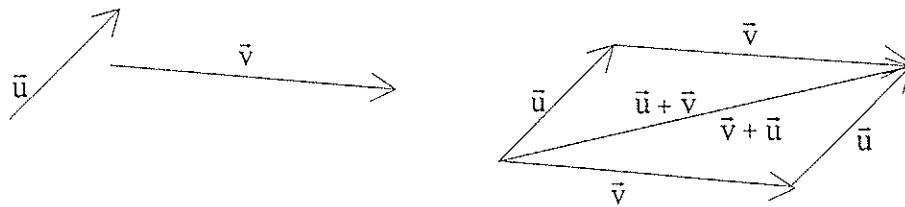


Figura 3.46: A adição de vectores é comutativa: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.

(iii) Propriedades da adição de vectores

Consideremos os vectores \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} do plano. A adição de vectores goza das seguintes propriedades:

- Norma da soma:

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|, \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V}.$$

Esta propriedade é consequência da desigualdade triangular (Propriedade (iv) – secção 3.2.2) – e. g. Figura 3.46.

- Propriedade comutativa:

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}, \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V} \quad (\text{Figura 3.46}).$$

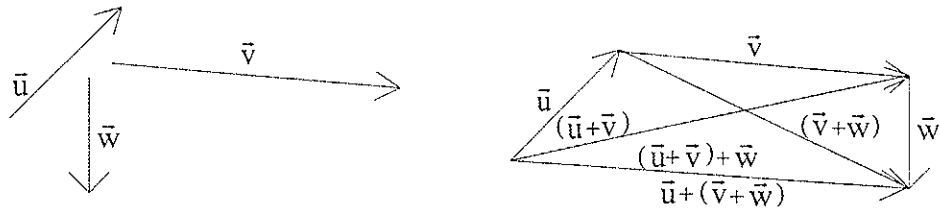


Figura 3.47: A adição de vectores é associativa: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$.

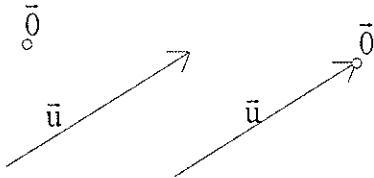


Figura 3.48: A adição de um vector \vec{u} com o vector nulo $\vec{0}$ é igual ao vector \vec{u} : $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u} = \vec{0} + \vec{u}$.

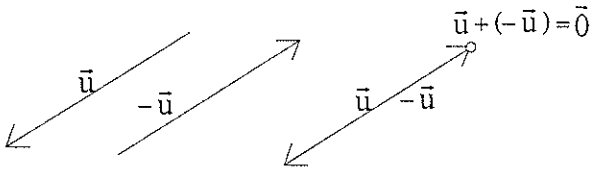


Figura 3.49: A adição de um vector \vec{u} com o seu simétrico $-\vec{u}$ é igual ao vector $\vec{0}$: $\vec{u} + (-\vec{u}) = -\vec{u} + \vec{u} = \vec{0}$.

- Propriedade associativa:

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}), \quad \forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathcal{V} \quad (\text{Figura 3.47}).$$

- Existência de elemento neutro:

$$\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}, \quad \forall \vec{u} \in \mathcal{V} \quad (\text{Figura 3.48}).$$

Diz-se que o vector nulo, $\vec{0}$, é o elemento neutro da adição de vectores.

- Existência de oposto (vector simétrico):

$$\forall \vec{u} \in \mathcal{V}, \exists \vec{s} \in \mathcal{V}: \vec{u} + \vec{s} = \vec{s} + \vec{u} = \vec{0} \quad (\text{Figura 3.49}).$$

Ao vector \vec{s} chama-se vector simétrico (veja secção 3.1.1) de \vec{u} : $\vec{s} = -\vec{u}$.

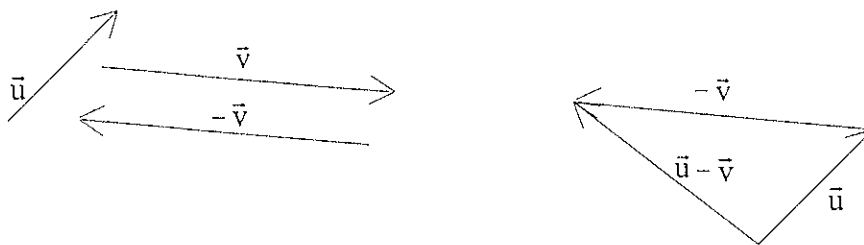


Figura 3.50: A subtração do vector \vec{u} pelo vector \vec{v} é o vector: $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$.

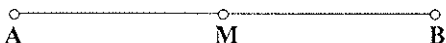


Figura 3.51: M é o ponto médio de [AB].

(iv) Subtração de vectores

Designa-se por *vector diferença*, entre os vectores \vec{u} e \vec{v} , ao vector que se obtém somando o vector \vec{u} com o simétrico do vector \vec{v} e representa-se por $\vec{u} - \vec{v}$ (Figura 3.50):

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$$

(v) Produto de um número real por um vector

Dado um segmento de recta [AB] e sendo M o seu ponto médio (Figura 3.51), a definição de ponto médio de um segmento de recta permite estabelecer:

$$\overline{AB} = 2 \overline{AM} \Leftrightarrow \overline{AM} = \frac{1}{2} \overline{AB} \text{ e } \overline{AB} = -2 \overline{MA} \Leftrightarrow \overline{MA} = -\frac{1}{2} \overline{AB}.$$

Estas relações são exemplos que estabelecem um vector como o produto de um número real por outro vector. Chama-se *produto de um número real k por um vector \vec{u}* , e representa-se por $k\vec{u}$, ao vector com as seguintes características:

- *direcção*: Se $k = 0$, é indeterminada;
Se $k \neq 0$, é a do vector \vec{u} .
- *sentido*: Se $k > 0$, é o do vector \vec{u} ;
Se $k = 0$, é indeterminado;
Se $k < 0$, é o contrário ao do vector \vec{u} .
- *comprimento*: $\|k\vec{u}\| = |k| \|\vec{u}\|$;

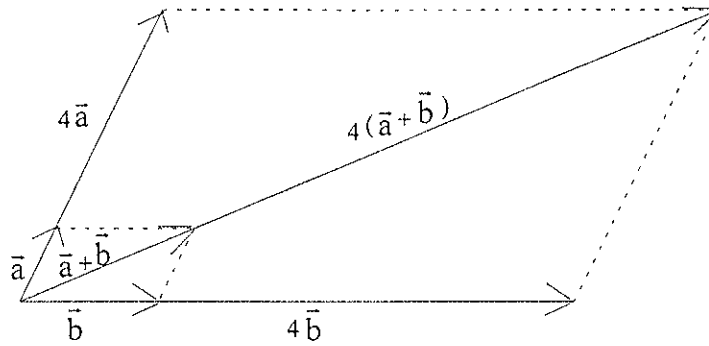


Figura 3.52: Propriedade distributiva (multiplicação de real por vector) em relação à adição de vectores com $k = 4$: $4(\vec{a} + \vec{b}) = 4\vec{a} + 4\vec{b}$

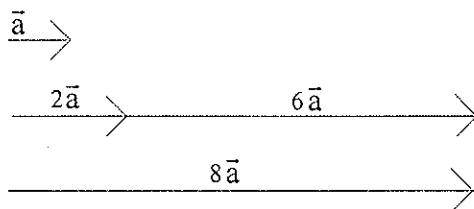


Figura 3.53: Propriedade distributiva em relação à adição de números reais (da multiplicação de real com vector) com $k = 2$ e $h = 6$: $(2 + 6)\vec{a} = 2\vec{a} + 6\vec{a} (= 8\vec{a})$.

Em consequência da definição vem:

$$k = 0 \vee \vec{u} = \vec{0} \Rightarrow k\vec{u} = \vec{0}, \forall \vec{u} \in \mathcal{V}.$$

Em particular, tem-se:

$$1\vec{u} = \vec{u} \text{ e } (-1)\vec{u} = -\vec{u}, \forall \vec{u} \in \mathcal{V}$$

(vi) Propriedades da multiplicação de um número real por um vector

Consideremos os vectores \vec{u} e \vec{v} do plano, k e h números reais. A multiplicação de um número real por um vector goza das seguintes propriedades:

- Propriedade distributiva em relação à adição de vectores:

$$k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}, \quad \forall k \in \mathbb{R}, \forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V} \quad (\text{Figura 3.52}).$$

- Propriedade distributiva em relação à adição de números reais:

$$(k + h)\vec{u} = k\vec{u} + h\vec{u}, \quad \forall k, h \in \mathbb{R}, \forall \vec{u} \in \mathcal{V} \quad (\text{Figura 3.53}).$$

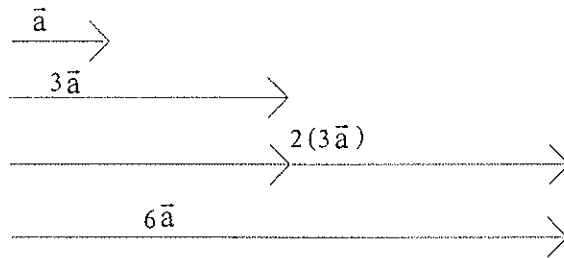


Figura 3.54: Propriedade associativa (da multiplicação de um número real por um vector) em que, neste caso, $k = 2$ e $h = 3$: $(2 \times 3) \bar{a} = 2(3 \bar{a}) (= 6 \bar{a})$.

- Propriedade associativa:

$$(k h) \bar{u} = k(h \bar{u}), \quad \forall k, h \in \mathbb{R}, \forall \bar{u} \in \mathcal{V} \quad (\text{Figura 3.54}).$$

3.4.2 Vectores colineares

Vimos na secção 3.1.1 que dois vectores são colineares se tiverem a mesma direcção ou se um deles for o vector nulo. Na secção anterior vimos que tomando um vector \bar{u} e um número real, diferente de zero, k , o vector $k\bar{u}$ é um vector com a direcção de \bar{u} . Assim, se $\bar{v} = k\bar{u}$ ($k \in \mathbb{R}$), então \bar{u} e \bar{v} têm a mesma direcção e são, portanto, colineares. Por outro lado, se $\bar{v} \neq \vec{0}$ e $\bar{u} \neq \vec{0}$ são colineares, existe um único número real k tal que $\bar{v} = k\bar{u}$. Podemos escrever, simbolicamente:

$$\forall \bar{v}, \bar{u} (\neq \vec{0}) \in \mathcal{V}, \bar{v} \text{ é colinear com } \bar{u} \Leftrightarrow \exists^1 k \in \mathbb{R} : \bar{v} = k\bar{u} \wedge \frac{\|\bar{v}\|}{\|\bar{u}\|} = |k|.$$

3.4.3 Ângulo de dois vectores

Tomemos, no plano, dois vectores não nulos, \bar{u} e \bar{v} , e um ponto P . Consideremos os pontos M e N tais que:

$$M = P + \bar{u} \quad \text{e} \quad N = P + \bar{v} \quad (\text{Figura 3.55}).$$

Ao ângulo MPN chama-se *ângulo dos vectores* \bar{u} e \bar{v} , ou seja, é o **menor** ângulo definido pelos seus representantes com a mesma origem P , \overline{PM} e \overline{PN} respectivamente (secção 2.3.2: noção de ângulo). Representamos a amplitude do ângulo entre os vectores \bar{u} e \bar{v} por $\left(\hat{\bar{u}}, \hat{\bar{v}} \right)$, e o seu valor

está no intervalo $[0^\circ, 180^\circ]$. O ângulo de dois vectores não é orientado, ou seja, $\left(\hat{\bar{u}}, \hat{\bar{v}} \right) = \left(\hat{\bar{v}}, \hat{\bar{u}} \right)$ e

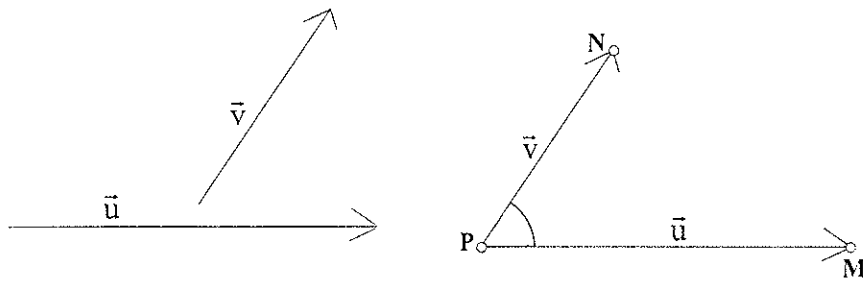


Figura 3.55: MPN é o ângulo formado entre o vector \vec{u} e o vector \vec{v} ; e temos sempre:

$$0^\circ \leq \widehat{MPN} \leq 180^\circ.$$

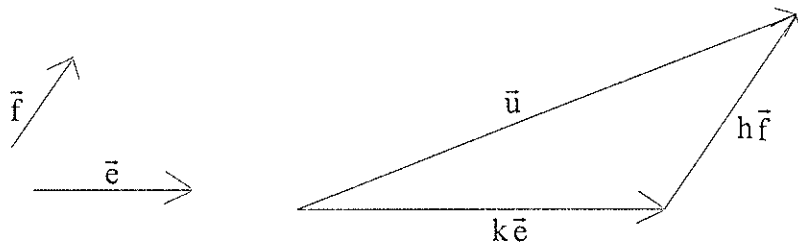


Figura 3.56: O vector \vec{u} escrito como combinação linear do vector \vec{e} com o vector \vec{f} :

$$\vec{u} = k\vec{e} + h\vec{f}, \text{ com } k, h \in \mathbb{R}.$$

convencionamos que se um dos vectores é o vector nulo então o ângulo entre os dois vectores considera-se indeterminado.

3.4.4 Combinação linear de um vector

Consideremos dois vectores \vec{e} e \vec{f} não colineares. Qualquer vector colinear com \vec{e} pode ser representado na forma $k\vec{e}$, com $k \in \mathbb{R}$, assim como qualquer vector colinear com \vec{f} pode ser representado na forma $h\vec{f}$, com $h \in \mathbb{R}$. Podemos sempre representar um vector qualquer \vec{u} do plano como soma de dois vectores, um colinear com \vec{e} e outro colinear com \vec{f} . Para isso basta determinar dois números reais, k e h , de tal modo que $\vec{u} = k\vec{e} + h\vec{f}$ (Figura 3.56). Assim, o vector \vec{u} está representado ou decomposto segundo as direcções dos vectores \vec{e} e \vec{f} . Diz-se que o vector \vec{u} escrito na forma

$$\vec{u} = k\vec{e} + h\vec{f},$$

com $k, h \in \mathbb{R}$, é uma *combinação linear* dos vectores \vec{e} e \vec{f} . Esta representação é única. Começemos por ver que qualquer vector do plano pode ser escrito como combinação linear dos vectores \vec{e} e \vec{f} não colineares. Seja \vec{u} um vector e O um ponto do plano. Determinemos os pontos E, F e U tal que:

$$E = O + \vec{e}, F = O + \vec{f} \text{ e } U = O + \vec{u} \quad (\text{Figura 3.57}).$$

Conduzindo pelo ponto U paralelas às rectas OF e OE obtemos nestas, respectivamente, pontos U' e U'' tal que

$$\overrightarrow{OU} = \overrightarrow{OU'} + \overrightarrow{OU''}$$

ou ainda,

$$\vec{u} = \overrightarrow{OU'} + \overrightarrow{OU''} \quad (\text{Figura 3.57}).$$

Como $\overrightarrow{OU'}$ é colinear com \vec{e} podemos escrever

$$\overrightarrow{OU'} = u_1 \vec{e},$$

com $u_1 \in \mathbb{R}$, e por $\overrightarrow{OU''}$ ser colinear com \vec{f} podemos também escrever

$$\overrightarrow{OU''} = u_2 \vec{f},$$

com $u_2 \in \mathbb{R}$. Temos então que

$$\vec{u} = u_1 \vec{e} + u_2 \vec{f}.$$

Mostremos agora que a combinação linear é única. Suponhamos que o vector \vec{u} também poderia ser escrito na forma:

$$\vec{u} = v_1 \vec{e} + v_2 \vec{f}, \quad v_1, v_2 \in \mathbb{R}.$$

Temos então

$$u_1 \vec{e} + u_2 \vec{f} = v_1 \vec{e} + v_2 \vec{f},$$

ou ainda

$$u_1 \vec{e} - v_1 \vec{e} = v_2 \vec{f} - u_2 \vec{f},$$

e, pela propriedade distributiva em relação à adição de números reais, temos

$$(u_1 - v_1) \vec{e} = (v_2 - u_2) \vec{f}.$$

i) Se $u_1 - v_1 \neq 0$, temos que

$$\vec{e} = \frac{v_2 - u_2}{u_1 - v_1} \vec{f},$$

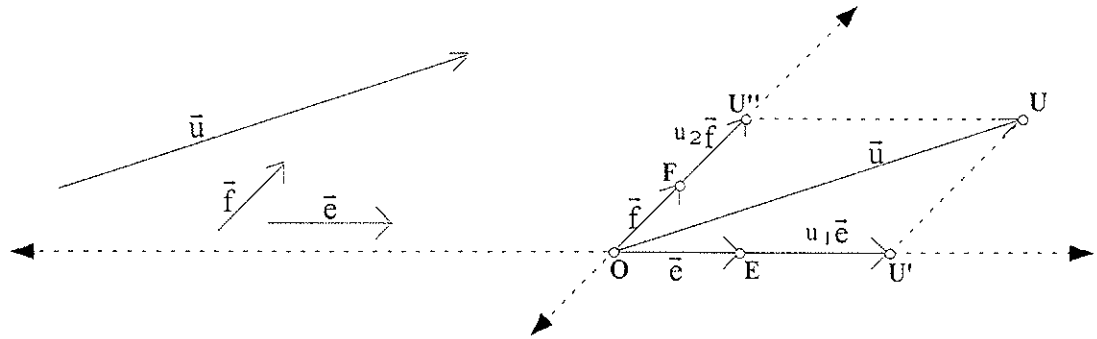


Figura 3.57: Podemos sempre escrever uma combinação linear única de um qualquer vector do plano \vec{u} com respeito a dois vectores quaisquer do plano não colineares, \vec{e} e \vec{f} : $E = O + \vec{e}$; $F = O + \vec{f}$; $\vec{u} = \overrightarrow{OU} + \overrightarrow{OU'} = u_1 \vec{e} + u_2 \vec{f}$, com $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$.

ou seja, \vec{e} e \vec{f} são colineares, o que contradiz a hipótese inicial de não colinearidade. Assim a única hipótese é ter

$$u_1 - v_1 = 0 \Leftrightarrow u_1 = v_1.$$

ii) Do mesmo modo, se $v_2 - u_2 \neq 0$ temos que

$$\vec{f} = \frac{u_1 - v_1}{v_2 - u_2} \vec{e},$$

e portanto \vec{e} e \vec{f} são colineares, o que contradiz a hipótese inicial. Logo, temos de ter

$$v_2 - u_2 = 0 \Leftrightarrow u_2 = v_2.$$

Mostrámos, assim, que qualquer vector do plano se pode escrever como combinação linear única de dois vectores não colineares \vec{e} e \vec{f} (Figura 3.71).

3.5 Geometria Analítica

3.5.1 A recta orientada e distância entre dois pontos da recta

Podemos representar geometricamente números reais num eixo ou recta orientada. Consideremos uma recta r e, sobre esta recta, um ponto O (Figura 3.58), a que designaremos por *origem*. O ponto O divide a recta r em duas semi-rectas que se designam: semi-recta positiva e semi-recta negativa. Tomemos para unidade de medida um comprimento U . Assim, podemos definir, em função de U , a posição de qualquer ponto da recta r . Se considerarmos na recta r um ponto P , a sua posição sobre r é dada por um número real x . Este número será positivo, negativo ou

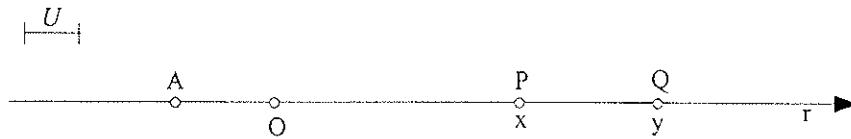


Figura 3.58: r é uma recta orientada ou eixo de origem O . U é a unidade de medida. Temos que: $d(P, O) = |x|$, $d(Q, O) = |y|$ e $d(P, Q) = |y - x| = |x - y|$. Numa representação deste tipo é usual convencionar a semi-recta $[OP$ como “positiva” (assinalada com uma seta) enquanto $[OA$ é a “negativa”.

nulo conforme P esteja situado na semi-recta positiva, negativa ou sobre o ponto O , respectivamente. Ao número real x associado ao ponto P , designa-se por *abscissa* do ponto P . Repare-se que, para cada ponto P , da recta, existe um único número real x que é a abscissa de P e, inversamente, a cada número real x corresponde um, e um só, ponto da recta r . Ora, fica assim estabelecida uma correspondência biunívoca (ou bijectiva) entre o conjunto dos números reais e o conjunto dos pontos de uma recta. Assim, podemos identificar um ponto de uma recta por um número real e em vez de dizermos *ponto de abscissa x* podemos dizer simplesmente *ponto x* .

A recta r pode ser percorrida em dois sentidos opostos. Um positivo, que é precisamente o sentido em que crescem as abscissas, e que assinalamos com uma seta, e outro negativo, sentido contrário ao positivo, sentido em que decrescem as abscissas. Uma recta nestas condições denomina-se por *recta orientada* ou *eixo*.

A distância entre um ponto P de abscissa x e o ponto O (a origem) é dada pelo módulo de x , (Figura 3.58) ou seja,

$$\overline{PO} = |x| \quad \text{ou} \quad d(P, O) = |x|.$$

Se considerarmos dois pontos P e Q quaisquer sobre a recta r , de abscissa x e y respectivamente, a distância entre os dois pontos é dada pelo módulo da diferença das respectivas abscissas (Figura 3.58), ou seja,

$$\overline{PQ} = |y - x| = |x - y| \quad \text{ou} \quad d(P, Q) = |y - x| = |x - y|.$$

Note-se que

$$\overline{PO} = |x - 0| = |x|.$$

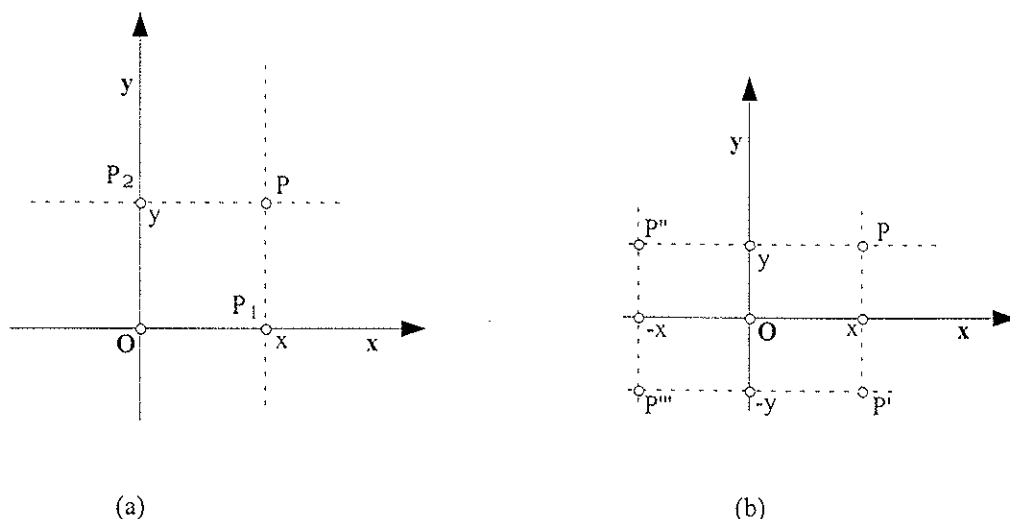


Figura 3.59: No referencial cartesiano e ortonormado (c. o. n.) xOy : (a) a recta PP_1 é paralela ao eixo dos yy e PP_2 é paralela ao eixo dos xx : P tem coordenadas (x, y) ; as coordenadas de P_1 são $(x, 0)$ e as de P_2 são $(0, y)$. (b) P' é simétrico de P em relação ao eixo xx ; P'' é simétrico de P em relação ao eixo yy ; P''' é simétrico de P em relação à origem do referencial.

3.5.2 Referenciais cartesianos ortogonais e monométricos

Já na secção 2.4.1 tratámos a noção de referencial cartesiano e ortonormado (c. o. n.). Tendo um sistema de eixos (referencial cartesiano) sobre o plano, este plano passa a chamar-se, por sua vez, *plano cartesiano*. Notemos que os referenciais cartesianos e ortonormados são os mais simples e cómodos, e aqui serão os únicos a ser utilizados. No entanto, existem outros tipos de referenciais cartesianos que, em função do estudo que se pretende levar a cabo, podemos considerar. Por exemplo, com os eixos não ortogonais, com unidades diferentes para cada eixo ou ainda pode ser preferível escolher sobre os eixos origens diferentes.

Considerando um ponto P qualquer do plano, este identifica-se por dois números reais (um par de números) que se obtém do seguinte modo: considera-se uma paralela ao eixo dos yy que contenha o ponto P ; esta intersectará o eixo dos xx num ponto P_1 , a que corresponde um número real x (Figura 3.59). Considerando uma outra recta que passe por P e seja paralela ao eixo dos xx esta, por sua vez, intersectará o eixo dos yy num ponto P_2 , a que corresponde um número real y . Ou seja, ao ponto P corresponde um par de números reais, que se escreve sob a forma (x, y) , em que x está sobre o eixo dos xx e é designado por *abscissa do ponto P* e y está sobre o eixo dos yy e é designado por *ordenada do ponto P* . Estes dois números assim obtidos designam-se por *coordenadas cartesianas do ponto P* e permitem localizar qualquer ponto no plano (Figura 3.59 – (a)). Assim sendo, cada ponto do plano fica bem definido por um, e um só, *par ordenado* de

números reais, isto é, pela indicação de dois números reais, diferentes ou iguais, numa ordem obrigatória (primeiro a abcissa e depois a ordenada). Reciprocamente, cada par ordenado de números reais representa um, e um só, ponto do plano (ou seja, se marcarmos sobre os respectivos eixos os pontos correspondentes a esses números e conduzirmos por esses pontos rectas paralelas aos eixos, o ponto de encontro dessas rectas é o ponto representado pelo par ordenado de números). Podemos dizer, então, que escolhido no plano um referencial cartesiano, fica estabelecida, pelo processo indicado, uma correspondência biunívoca entre os pontos do plano e os pares ordenados de números reais. Em consequência, podemos dizer, por exemplo, “ponto (a, b)” em vez de “o ponto representado pelo par (a, b)” e escrevemos $P(a, b)$ ou apenas (a, b).

O plano cartesiano pode representar-se por \mathbb{R}^2 escrevendo-se como $\{(x, y): x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}$, ou seja,

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y): x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}.$$

Num referencial c. o. n. xOy , o simétrico do ponto (x, y), em relação ao eixo dos xx , é o ponto (x, -y), relativamente ao eixo dos yy é o ponto (-x, y) e, em relação à origem do referencial, o ponto (-x, -y) (Figura 3.59 – (b)).

3.5.3 Conjuntos de pontos e condições

Num referencial c. o. n., o eixo dos xx é o conjunto dos pontos do plano que têm ordenada nula, ou seja, são os pontos da forma (x, 0). Do mesmo modo, o eixo dos yy é o conjunto dos pontos de abcissa nula, ou seja, os pontos da forma (0, y). O conjunto dos pontos do plano que têm por abcissa, por exemplo, 1, é a recta paralela ao eixo dos yy (recta vertical) e que intersecta o eixo dos xx no ponto (1, 0). Esta recta pode ser escrita através da condição $x = 1$. Em geral, a condição

$$x = a, \quad a \in \mathbb{R},$$

define uma *recta paralela ao eixo dos yy* ou *recta vertical* e que tem em comum com o eixo dos xx o ponto (a, 0). Do mesmo modo, o conjunto dos pontos do plano que têm ordenada 1 definem uma recta paralela ao eixo dos xx (recta horizontal) que intersecta o eixo dos yy no ponto (0, 1) e é escrita através da condição $y = 1$. De uma forma geral, a condição

$$y = b, \quad b \in \mathbb{R},$$

traduz uma *recta paralela ao eixo dos xx* ou, também chamada *recta horizontal*, que passa pelo ponto (0, b) – Figura 3.60.

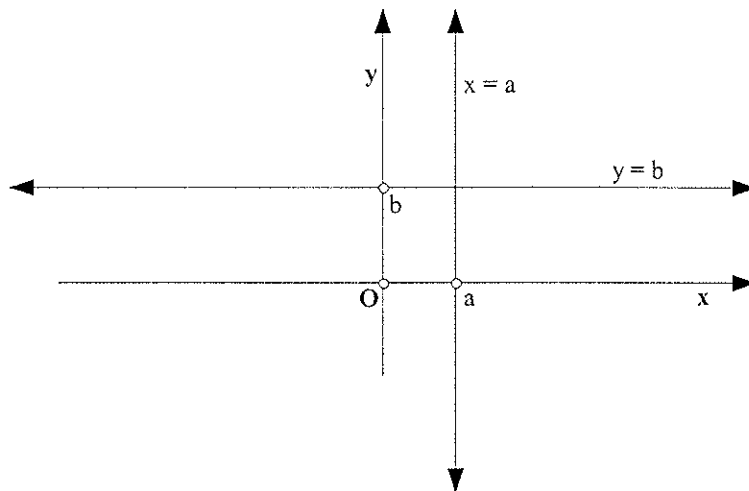


Figura 3.60: No referencial c. o. n. xOy , as condições $x = a$ e $y = b$ traduzem uma *recta vertical* e uma *recta horizontal*, respectivamente.

Consideremos agora os pontos que têm abscissa igual à ordenada. São, por exemplo, os pares ordenados $(0, 0)$; $(1, 1)$; $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. Observamos que em todos temos: $y = x$. Ora, o conjunto de todos os pontos que satisfazem esta condição define uma recta que bissecta os 1º e 3º quadrantes do referencial c. o. n.. Por esta razão, se chama *bissectriz dos quadrantes ímpares* à recta definida pela condição

$$y = x \quad (\text{Figura 3.61}).$$

Analogamente, o conjunto de todos os pontos da forma $(0, 0)$; $(1, -1)$; $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, em que a abscissa e a ordenada são simétricas ($y = -x$), determinam uma recta que bissecta o 2º e o 4º quadrantes. Por este motivo, chama-se *bissectriz dos quadrantes pares* à recta definida pela condição

$$y = -x \quad (\text{Figura 3.61}).$$

Podemos definir semi-rectas e segmentos de recta por condições. A condição:

$$y = \frac{3}{2} \wedge x \geq 1$$

representa os pontos do plano com ordenada $\frac{3}{2}$ e abscissa não inferior a 1, ou seja, representa uma semi-recta horizontal com origem no ponto $\left(1, \frac{3}{2}\right)$, incluindo-o, e que passa pelos pontos $(2, 1.5)$, $(2.5, 1.5)$, etc. (Figura 3.62). A condição:

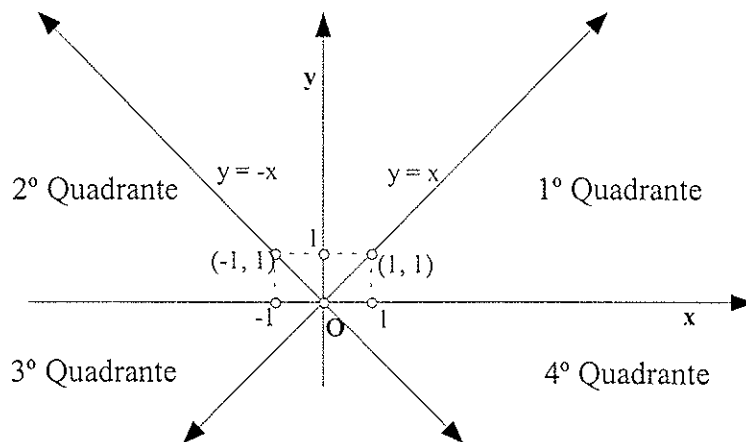


Figura 3.61: No referencial c. o. n. xOy , a recta $y = x$ é a *bissectriz dos quadrantes ímpares* e a recta $y = -x$ é a *bissectriz dos quadrantes pares*.

$$y = -1 \wedge -3 \leq x \leq 3 \Leftrightarrow y = -1 \wedge |x| \leq 3$$

representa os pontos do plano com ordenada -1 e abcissa entre -3 e 3 inclusive, ou seja representa um segmento de recta horizontal de extremos $(-3, -1)$ e $(3, -1)$ – veja a Figura 3.62. Ainda na Figura 3.46, pode observar o conjunto dos pontos do plano que têm ordenada simétrica da abcissa e cuja abcissa está entre -3 e -1 (representa o segmento de recta contido na bissectriz dos quadrantes pares) e uma condição, para definir este conjunto de pontos, é:

$$y = -x \wedge -3 < x < -1.$$

Vamos agora considerar o conjunto dos pontos do plano que tem por abcissa um número maior ou igual a 2 . Ora, alguns desse pontos são: $(2, 2)$; $(2, 0)$; $(2, -5)$; $(4, 4)$; $\left(\frac{7}{2}, \sqrt{5}\right)$; etc. Os pontos desta forma vão definir parte do plano cartesiano, o *semiplano* à direita da recta $x = 2$ incluindo os pontos desta (Figura 3.63). A condição que define esta região do plano é $x \geq 2$. Um semiplano nestas condições diz-se *semiplano fechado*. A condição $y > 2$ define o conjunto dos pontos com ordenada maior que 2 , tais como: $(2, 3)$; $(0, 17)$; $\left(-\sqrt{7}, \frac{5}{2}\right)$; $(-10, 2.1)$; etc. que são pontos do *semiplano aberto* acima da recta $y = 2$ (Figura 3.64). Na Figura 3.65, a condição $y < -x$ determina um semiplano abaixo da recta $y = -x$ (bissectriz dos quadrantes pares), não a incluindo. Assim, um semiplano pode ser fechado ou aberto, dependendo para isso, de conter ou não a recta que o delimita, que é o equivalente a termos na condição que o define, respectivamente, um dos símbolos: \leq , \geq ou $<$, $>$.

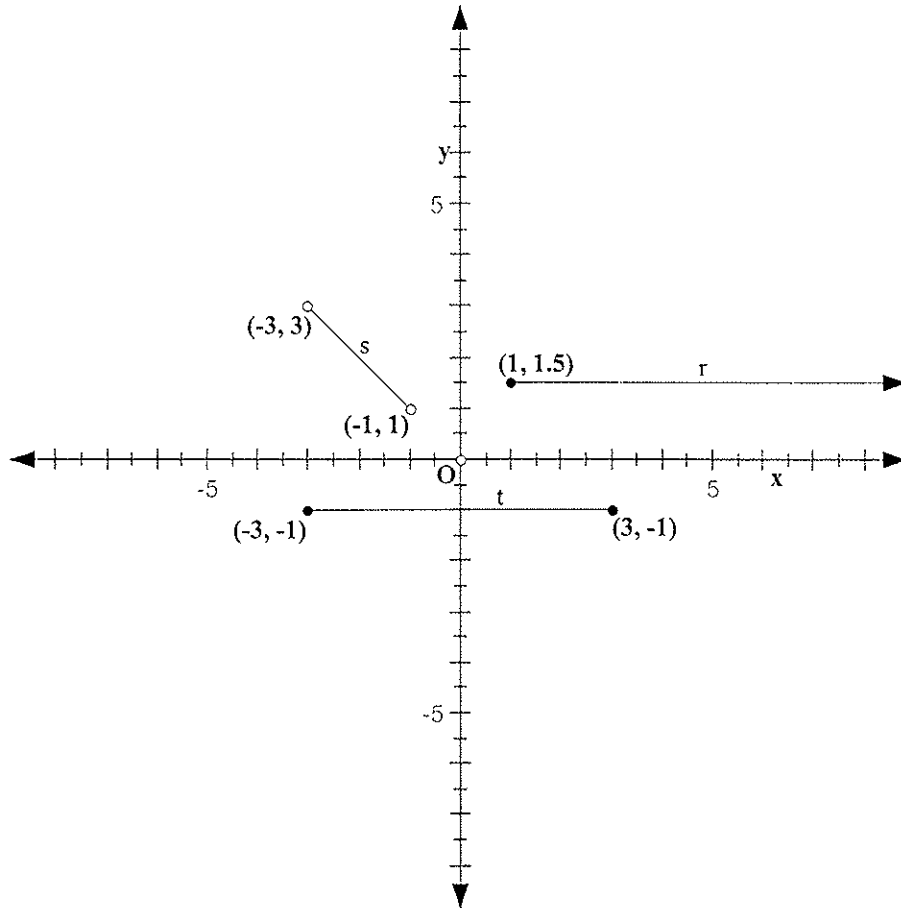


Figura 3.62: A semi-recta horizontal r com origem no ponto $(1, 1.5)$ e cujos pontos têm abscissa não inferior a 1 é definida pela condição: $y = \frac{3}{2} \wedge x \geq 1$; o segmento de recta horizontal t de extremos $(-3, -1)$ e $(3, -1)$ é definido por: $y = -1 \wedge |x| \leq 3$. O segmento de recta s contido na bissectriz dos quadrantes pares de extremos $(-3, 3)$ e $(-1, 1)$, não os incluindo, é definido por: $y = -x \wedge -3 < x < -1$.

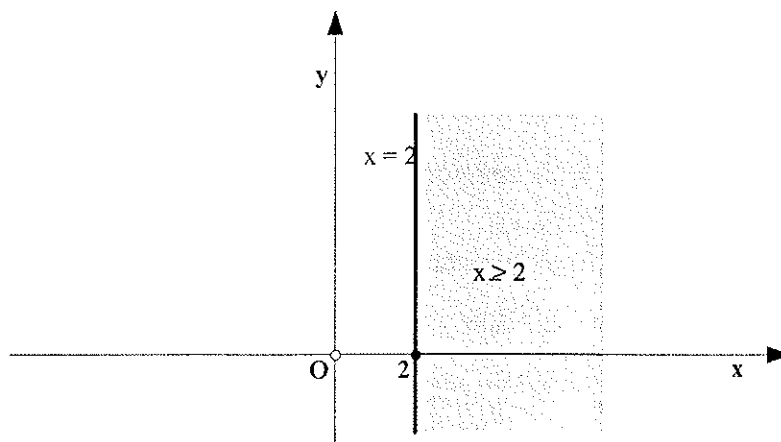


Figura 3.63: Num referencial c. o. n. xOy , o conjunto dos pontos à direita da recta vertical $x = 2$, incluindo-a, determinam o *semiplano fechado*: $x \geq 2$.

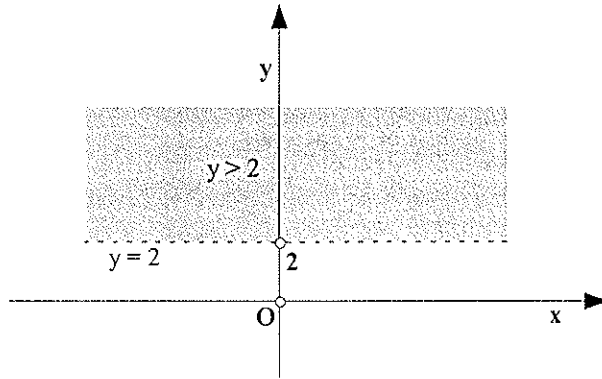


Figura 3.64: Num referencial c. o. n. xOy , o conjunto dos pontos acima da recta horizontal $y = 2$ (excluindo-a), determinam o *semiplano aberto*: $y > 2$.

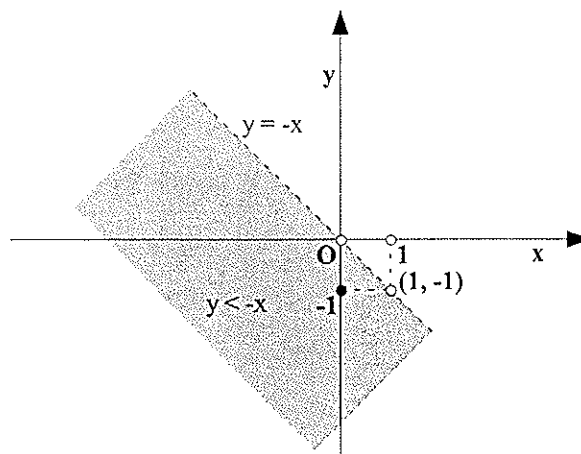


Figura 3.65: Num referencial c. o. n. xOy , o conjunto dos pontos abaixo da recta oblíqua $y = -x$, determinam o *semiplano aberto*: $y < -x$ (excluindo a recta fronteira).

Quadrantes	Condição
1º Quadrante	$x > 0 \wedge y > 0$
2º Quadrante	$x < 0 \wedge y > 0$
3º Quadrante	$x < 0 \wedge y < 0$
4º Quadrante	$x > 0 \wedge y < 0$

Tabela 3.1: Condições que definem cada um dos quatro quadrantes do plano cartesiano (ver na Figura 3.61).

Podemos definir através de uma condição cada um dos quatro quadrantes (Tabela 3.1), notando que cada quadrante resulta da intersecção de dois semiplanos, um acima ou abaixo da recta horizontal $y = 0$, com o outro à esquerda ou à direita da recta vertical $x = 0$.

Consideramos, até aqui, apenas rectas verticais, horizontais e as bissetrizes dos quadrantes pares e ímpares para definirmos semiplanos. É evidente que para definirmos semiplanos podemos considerar quaisquer rectas, incluindo naturalmente outras rectas oblíquas até agora não consideradas (ver secção 3.5.16).

3.5.4 Distância entre dois pontos

Como já vimos, a distância entre dois pontos de uma recta *paralela ao eixo xx* é dada pelo módulo da diferença das suas abcissas. Vamos agora ver como, conhecidas as coordenadas de dois pontos quaisquer do plano, P_1 e P_2 , se pode determinar a distância entre P_1 e P_2 . Consideremos então os pontos $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$. A *distância* entre os pontos P_1 e P_2 é dada pelo comprimento do segmento de recta $[P_1P_2]$, ou seja,

$$d(P_1, P_2) = \overline{P_1P_2}.$$

Se traçarmos uma paralela ao eixo dos xx passando pelo ponto P_2 e uma paralela ao eixo dos yy passando pelo ponto P_1 , obtemos um ponto Q de abcissa x_1 e ordenada y_2 , que resulta da intersecção destas duas rectas (Figura 3.66). Os pontos P_1 , P_2 e Q definem um triângulo rectângulo, cujos catetos são os segmentos de recta $[P_1Q]$ e $[QP_2]$, onde

$$\overline{P_1Q} = |y_2 - y_1| \quad \text{e} \quad \overline{QP_2} = |x_2 - x_1|$$

por estarem sobre rectas paralelas aos eixos coordenados. Sendo o triângulo rectângulo podemos aplicar o Teorema de Pitágoras, determinando o comprimento do segmento de recta pretendido:

$$\overline{P_1P_2}^2 = \overline{QP_2}^2 + \overline{P_1Q}^2,$$

ou seja,

$$\overline{P_1P_2} = \sqrt{\overline{QP_2}^2 + \overline{P_1Q}^2},$$

ou ainda,

$$\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (3.1)$$

visto termos $(|x_2 - x_1|)^2 = (x_2 - x_1)^2$ e $(|y_2 - y_1|)^2 = (y_2 - y_1)^2$. Note-se que, em particular, a distância de um ponto qualquer, $P(x, y)$, à origem do referencial, $O(0, 0)$, é:

$$\begin{aligned} d(P, O) = \overline{PO} &= \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow d(P, O) = \sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

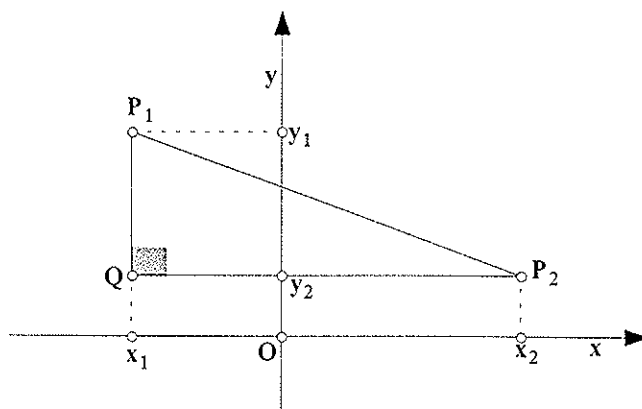


Figura 3.66: A distância entre os pontos P_1 e P_2 é dada pelo comprimento do segmento de recta $[P_1P_2]$, ou seja, $d(P_1, P_2) = \overline{P_1P_2}$. $[P_1QP_2]$ é um triângulo rectângulo em Q :

$$\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

3.5.5 Ponto médio de um segmento de recta

Já na secção 2.3.1 vimos a noção de ponto médio. Agora obtenhamos as suas coordenadas. Consideremos dois pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$, e designemos $M(x, y)$ o ponto médio do segmento de recta $[AB]$ (isto é, o ponto que divide o segmento de recta em duas partes iguais) – Figura 3.67. Conduzindo pelos pontos A , B e M rectas paralelas ao eixo dos yy estas vão intersectar o eixo dos xx nos pontos A' , B' e M' respectivamente. Conduzindo novamente por A , B e M rectas paralelas ao eixo dos xx , estas vão intersectar o eixo dos yy nos pontos A'' , B'' e M'' respectivamente. O Teorema de Tales⁶² garante-nos que, sendo

$$\overline{AM} = \overline{MB},$$

também é

$$\overline{A'M'} = \overline{M'B'} \quad \text{e} \quad \overline{A''M''} = \overline{M''B''},$$

já que AB e $A'B'$ são concorrentes em Q e $A''B''$ e AB são concorrentes em P . Atendendo a que as coordenadas dos pontos A' , B' e M' são $(x_1, 0)$, $(x_2, 0)$ e $(x, 0)$, respectivamente, e como $\overline{A'M'} = \overline{M'B'}$, temos que: $x - x_1 = x_2 - x$; ou seja,

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

⁶² Sobre o Teorema de Tales ver Apêndice III.

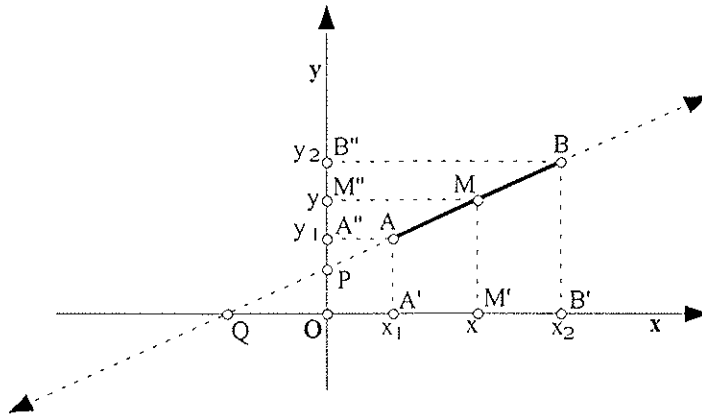


Figura 3.67: O ponto médio do segmento de recta $[AB]$, onde $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$, é

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

Analogamente tiramos que

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Assim, as coordenadas do ponto médio de um segmento de recta são dadas pela semi-soma das coordenadas homólogas dos extremos do segmento de recta, ou seja,

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right). \quad (3.2)$$

3.5.6 Mediatriz de um segmento de recta

Chama-se *mediatriz* de um segmento de recta $[AB]$ à recta perpendicular ao segmento de recta $[AB]$ e que passa pelo seu ponto médio. Todos os pontos da mediatriz de um segmento de recta $[AB]$ têm uma propriedade comum: são equidistantes dos extremos do segmento de recta, A e B. Assim, sendo m a mediatriz do segmento de recta $[AB]$, tem-se que

$$P \in m \Leftrightarrow \overline{AP} = \overline{BP}.$$

Consideremos, por exemplo, os pontos $A(2, 3)$ e $B(2, -1)$. A condição para definir a mediatriz do segmento de recta $[AB]$ é $y = 1$ (Figura 3.68). Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer da mediatriz de $[AB]$. Como a distância de A a P é a mesma que a de B a P temos que (de (3.1)):

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-(-1))^2}$$

elevando ambos os membros da equação ao quadrado e prosseguindo vem, sucessivamente:

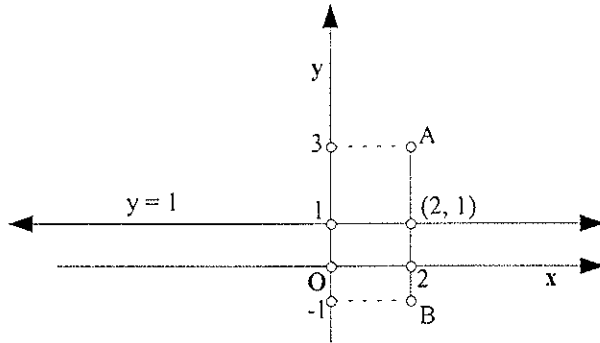


Figura 3.68: A mediatriz do segmento de recta $[AB]$, onde $A(2, 3)$ e $B(2, -1)$, é $y=1$.

$$\begin{aligned} (x-2)^2 + (y-3)^2 &= (x-2)^2 + (y-(-1))^2 \Leftrightarrow (y-3)^2 = (y+1)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow y^2 - 6y + 9 &= y^2 + 2y + 1 \Leftrightarrow -8y = -8 \Leftrightarrow y = 1. \quad (\text{Figura 3.68}). \end{aligned}$$

Consideremos agora os extremos do segmento de recta $[AB]$ quaisquer com coordenadas: $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$, e P um ponto qualquer da mediatriz m de coordenadas (x, y) . Temos, sucessivamente:

$$\begin{aligned} P \in m &\Leftrightarrow d(A, P) = d(B, P) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2} &= \sqrt{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 &= (x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 - 2xx_1 + x_1^2 + y^2 - 2yy_1 + y_1^2 &= x^2 - 2xx_2 + x_2^2 + y^2 - 2yy_2 + y_2^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2xx_2 - 2xx_1 + 2yy_2 - 2yy_1 + x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2x(x_2 - x_1) + 2y(y_2 - y_1) + x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2 &= 0. \end{aligned}$$

Temos, portanto, que uma equação da mediatriz do segmento $[AB]$ é:

$$2x(x_2 - x_1) + 2y(y_2 - y_1) + x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2 = 0,$$

e podemos verificá-la no caso particular anterior ($x_1 = x_2 = 2$; $y_1 = 3$; $y_2 = -1$):

$$2x(2 - 2) + 2y(-1 - 3) + 4 + 9 - 4 - 1 = 0 \Leftrightarrow -8y + 8 = 0 \Leftrightarrow y = 1.$$

3.5.7 Circunferência e círculo

Na secção 2.1 já se viu a noção de circunferência. Vamos agora ver uma condição para caracterizar a circunferência. Começemos por considerar, na Figura 3.69, uma circunferência de centro $C(4, 5)$ e raio $\overline{CR} = 3$. Ora todos os pontos que pertencem a esta circunferência estão à distância de três unidades do centro e, reciprocamente. Tomemos um ponto qualquer $P(x, y)$ sobre a

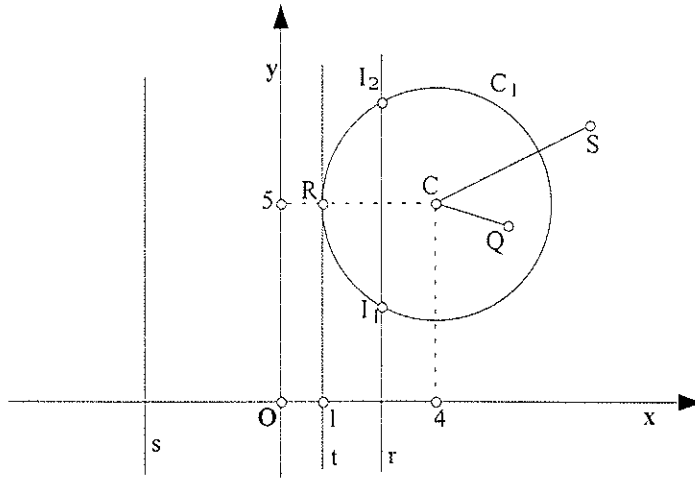


Figura 3.69: Circunferência C_1 de centro $C(4,5)$ e raio $\overline{CR} = 3$. O ponto R pertence à circunferência e o ponto Q pertence ao interior da circunferência: $\overline{CQ} < 3$. O ponto S pertence ao exterior da circunferência: $\overline{CS} > 3$. A recta r é secante à circunferência: $r \cap C_1 = \{I_1, I_2\}$. A recta t é tangente à circunferência: $t \cap C_1 = \{R\}$. A recta s é exterior à circunferência: $s \cap C_1 = \{\}$.

circunferência. Sendo $C(4, 5)$ o centro desta circunferência e $d(C, P) = 3$, podemos escrever (de (3.1)):

$$\sqrt{(x-4)^2 + (y-5)^2} = 3$$

elevando ambos os membros ao quadrado, vem a condição:

$$(x-4)^2 + (y-5)^2 = 3^2 = 9$$

que define a circunferência de centro $C(4, 5)$ e raio 3.

Em geral, se $P(x, y)$ é um ponto qualquer de uma circunferência de centro $C(a, b)$ e raio r , temos sucessivamente,

$$\begin{aligned} \overline{CP} = r &\Leftrightarrow \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2. \end{aligned}$$

Assim, a circunferência de centro $C(a, b)$ e raio r fica definida pela equação:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

Se a circunferência tiver centro na origem do referencial, $(0, 0)$, a sua equação toma a forma ($a = 0$, $b = 0$):

$$x^2 + y^2 = r^2. \quad (3.3)$$

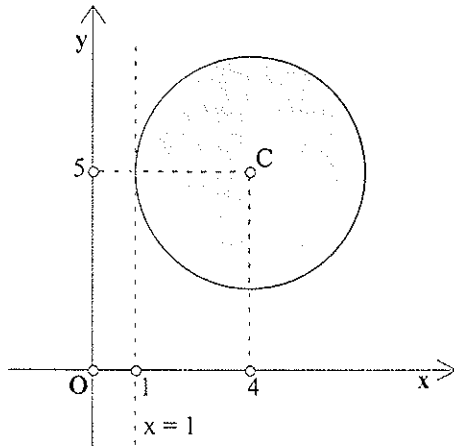


Figura 3.70: Círculo fechado de centro $C(4,5)$ e raio 3.

Apresentamos agora uma condição para representar o círculo (cf. secção 2.1). Vamos começar por estudar um círculo particular (Figura 3.70). Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer no círculo de centro $C(4, 5)$ e raio 3. Então, tem-se $\overline{CP} \leq 3$. Ou seja,

$$(x - 4)^2 + (y - 5)^2 \leq 3^2 = 9.$$

Em geral, um círculo de centro $C(a, b)$ e raio r é definido pela condição

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 \leq r^2.$$

Se nesta condição aparecer apenas o símbolo $<$ significa que temos o círculo sem a circunferência e por isso se diz *aberto*. Se aparecer o símbolo \leq significa que temos um *círculo fechado* pois inclui a circunferência. Quando mencionamos apenas a palavra *círculo*, referimo-nos ao círculo fechado. Caso contrário, dizemos *círculo aberto*.

3.5.8 Componentes e coordenadas de um vector numa base

Ao par ordenado (\vec{e}, \vec{f}) de vectores não colineares do plano damos o nome de *base* dos vectores do plano. Na secção 3.4.4 vimos que qualquer vector do plano, \vec{u} , pode ser representado como combinação linear de \vec{e} e \vec{f} , ou seja,

$$\vec{u} = u_1 \vec{e} + u_2 \vec{f},$$

onde u_1 e u_2 são números reais. Chamam-se a u_1 e u_2 *coordenadas* de \vec{u} na base (\vec{e}, \vec{f}) e a $u_1 \vec{e}$ e $u_2 \vec{f}$ as *componentes* do vector \vec{u} na mesma base (Figura 3.71).

Assim, fixada uma base, podemos estabelecer uma correspondência biunívoca entre o conjunto dos vectores do plano e o conjunto dos pares ordenados, (u_1, u_2) , de números reais. Além

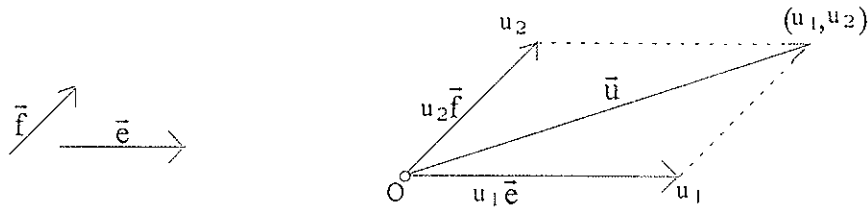


Figura 3.71: As coordenadas do vector \vec{u} com respeito à base (\vec{e}, \vec{f}) são: u_1 e u_2 , ou seja, $\vec{u}(u_1, u_2)$; as componentes de \vec{u} na mesma base são: $u_1 \vec{e}$ e $u_2 \vec{f}$. O é a origem, neste caso.

disso, podemos identificar um vector com um par ordenado de números reais, composto pelas suas coordenadas, podendo assim escrever: $\vec{u} = (u_1, u_2)$ ou $\vec{u}(u_1, u_2)$, dependendo-se que \vec{e} e \vec{f} saem ambos da origem.

Em particular, na base (\vec{e}, \vec{f}) temos:

$$\vec{e} = 1 \vec{e} + 0 \vec{f},$$

ou seja,

$$\vec{e}(1, 0) \text{ ou } \vec{e} = (1, 0).$$

E também

$$\vec{f} = 0 \vec{e} + 1 \vec{f},$$

ou seja,

$$\vec{f}(0, 1) \text{ ou } \vec{f} = (0, 1).$$

O vector nulo pode ser escrito na forma:

$$\vec{0} = 0 \vec{e} + 0 \vec{f}$$

e temos

$$\vec{0} = (0, 0) \text{ ou } \vec{0}(0, 0).$$

Uma base (\vec{e}, \vec{f}) de vectores de tal modo que \vec{e} e \vec{f} sejam perpendiculares entre si e $\|\vec{e}\| = \|\vec{f}\| = 1$ designa-se por *base ortonormada* e abreviadamente escreve-se b. o. n..

3.5.9 Referenciais e vectores

Consideremos uma base (\vec{e}, \vec{f}) e um referencial cartesiano xOy de modo que o sentido positivo do eixo dos xx seja o de \vec{e} e o sentido positivo do eixo dos yy seja o de \vec{f} (Figura 3.72). Obtemos, deste modo, um referencial cartesiano ortogonal e que passaremos a designar

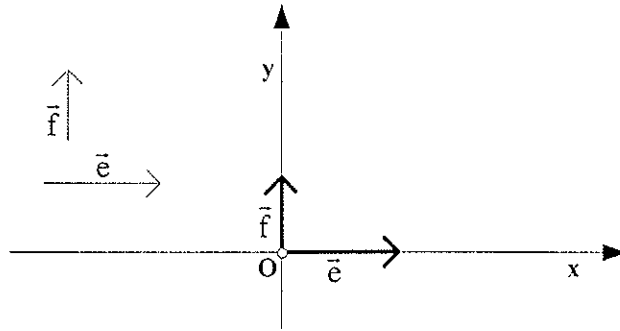


Figura 3.72: Referencial cartesiano ortogonal xOy associado à base (\bar{e}, \bar{f}) : escreve-se (O, \bar{e}, \bar{f}) .

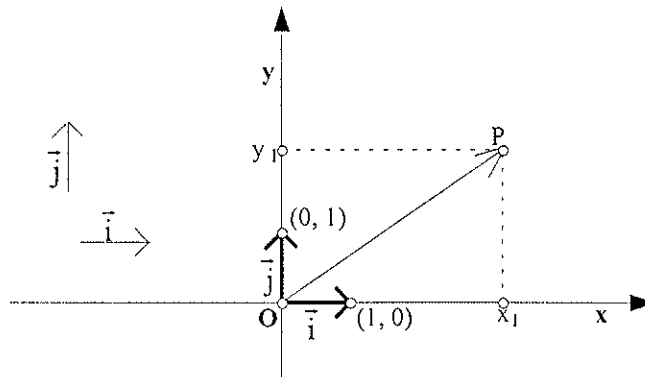


Figura 3.73: Referencial c. o. n. xOy associado à base ortonormada (\bar{i}, \bar{j}) : (O, \bar{i}, \bar{j}) . O ponto P tem coordenadas (x_1, y_1) , o vector \overline{OP} tem também coordenadas (x_1, y_1) e as suas componentes são: $x_1 \bar{i}$ e $y_1 \bar{j}$.

abreviadamente por (O, \bar{e}, \bar{f}) , o qual, por um lado, permite localizar qualquer ponto do plano (secção 3.4.2) e, por outro lado, definir vectores pelas suas coordenadas na base (\bar{e}, \bar{f}) . Se a base for ortonormada e as extremidades dos vectores \bar{e} e \bar{f} coincidirem com os pontos $(1, 0)$ e $(0, 1)$, respectivamente, designa-se por *base canónica* e representa-se por (\bar{i}, \bar{j}) . O referencial associado a esta base representa-se por (O, \bar{i}, \bar{j}) e diz-se também *ortonormado*. (já que é ortogonal e está normalizado) – (Figura 3.73). Daí a designação de referencial c. o. n. para o que normalmente utilizamos nas nossas representações. Ao ponto $P(x_1, y_1)$ corresponde o vector \overline{OP} , a que se chama *vector posição* de P , e cujas coordenadas, na base (\bar{i}, \bar{j}) , são também (x_1, y_1) . Podemos identificar também o vector \overline{OP} através das suas componentes: $\overline{OP} = x_1 \bar{i} + y_1 \bar{j}$. Daqui em diante, e se nada for dito em contrário, consideraremos sempre a base ortonormada e os referenciais ortonormados (como já vinha sendo feito com o referencial c. o. n.).

3.5.10 Igualdade e operações com vectores escritos numa base

Consideremos, na base (\vec{i}, \vec{j}) , os vectores \vec{u} e \vec{v} escritos na forma:

$$\vec{u} = u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j} \quad \text{e} \quad \vec{v} = v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j}.$$

(i) Igualdade de vectores

Os vectores \vec{u} e \vec{v} são iguais se e somente se as respectivas coordenadas são iguais, ou seja,

$$\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow (u_1, u_2) = (v_1, v_2) \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = v_1 \\ u_2 = v_2 \end{cases}$$

(ii) Adição e subtracção de vectores

A soma de dois vectores \vec{u} e \vec{v} efectua-se, utilizando as propriedades estudadas atrás na secção 3.4.1, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \vec{u} + \vec{v} &= (u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j}) + (v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j}) \Leftrightarrow \vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1) \vec{i} + (u_2 + v_2) \vec{j} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2), \end{aligned}$$

ou seja, para adicionar dois vectores adicionam-se as respectivas coordenadas (Figura 3.74). Para subtrair ao vector \vec{u} o vector \vec{v} , somamos ao vector \vec{u} o simétrico do vector \vec{v} :

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$$

Escrevendo cada um dos vectores pelas suas coordenadas, tem-se

$$\vec{u} - \vec{v} = (u_1, u_2) + (-(v_1, v_2)) \Leftrightarrow \vec{u} - \vec{v} = (u_1 - v_1, u_2 - v_2).$$

(iii) Produto de um número real por um vector

Seja k um número real. O produto do número k pelo vector \vec{u} , traduz-se pela multiplicação deste número pelas coordenadas do vector, ou seja (Figura 3.75):

$$k \vec{u} = k(u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j}) \Leftrightarrow k \vec{u} = (ku_1) \vec{i} + (ku_2) \vec{j} \Leftrightarrow k \vec{u} = (ku_1, ku_2).$$

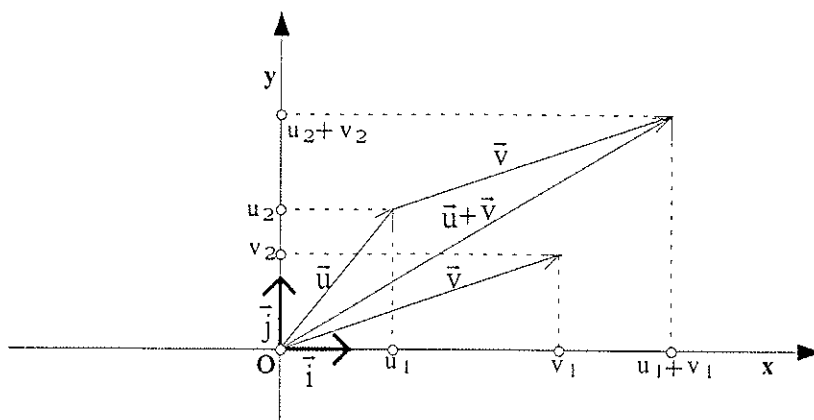


Figura 3.74: A soma de dois vectores $\vec{u}(u_1, u_2)$ e $\vec{v}(v_1, v_2)$, na base ortonormada (\vec{i}, \vec{j}) , é dada por:
 $\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$.

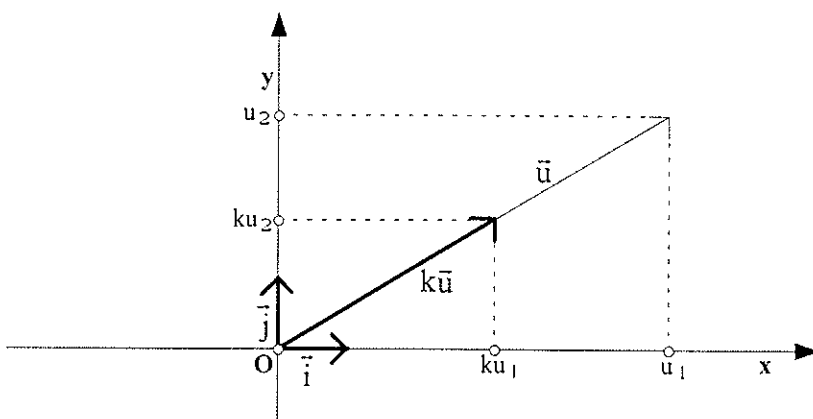


Figura 3.75: O produto de um número real k por um vector $\vec{u}(u_1, u_2)$, na base ortonormada (\vec{i}, \vec{j}) , é um vector : $k\vec{u} = (ku_1, ku_2)$. No caso desta representação, temos $0 < k < 1$.

(iv) Soma de um ponto com um vector

Seja, num referencial c. o. n. (O, \vec{i}, \vec{j}) , um ponto A de coordenadas (a_1, a_2) e o vector \vec{u} de coordenadas (u_1, u_2) . Como já se viu na secção 3.4.1, a soma de um ponto com um vector é um ponto. Então existe um ponto B tal que:

$$B = A + \vec{u}. \quad (3.4)$$

Podemos identificar o vector \overrightarrow{OA} por (a_1, a_2) e pretende-se identificar o vector \overrightarrow{OB} . Para tal, da igualdade (3.4) escreve-se (Figura 3.76):

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \vec{u}.$$

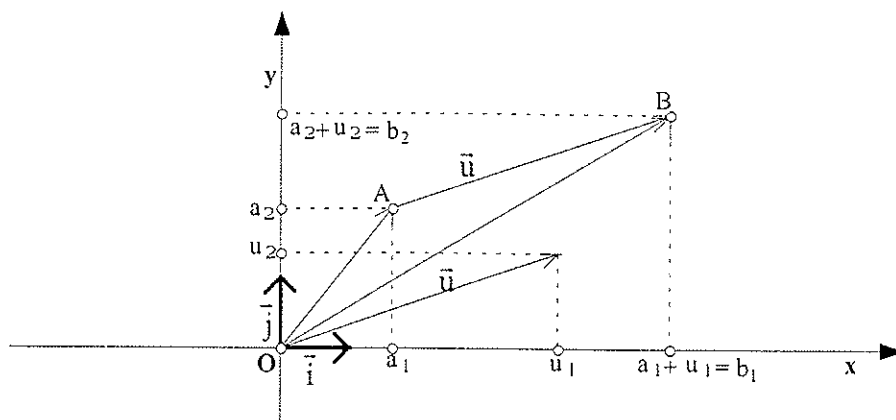


Figura 3.76: A soma de um ponto $A(a_1, a_2)$ com um vector $\vec{u}(u_1, u_2)$, na base ortonormada (\vec{i}, \vec{j}) , é um ponto B (note-se que: $\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{u}$) dado pelas coordenadas: $B = (a_1 + u_1, a_2 + u_2) = (b_1, b_2)$.

Representando cada um dos vectores do 2º membro pelas respectivas coordenadas, tem-se:

$$\vec{OB} = (a_1, a_2) + (u_1, u_2) \Leftrightarrow \vec{OB} = (a_1 + u_1, a_2 + u_2).$$

Donde

$$B = (a_1 + u_1, a_2 + u_2).$$

Assim, as coordenadas da soma de um ponto com um vector, são dadas pela soma das coordenadas respectivas do ponto com as do vector.

(v) Vector como diferença de dois pontos

Dados, num referencial c. o. n. (O, \vec{i}, \vec{j}) , os pontos $A(a_1, a_2)$ e $B(b_1, b_2)$, pretende-se determinar as coordenadas do vector \vec{AB} . Como já se viu na secção 3.4, um vector pode ser escrito pela diferença de dois pontos. Pensemos nos vectores $\vec{OA} = (a_1, a_2)$ e $\vec{OB} = (b_1, b_2)$. Podemos escrever (Figura 3.76):

$$\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB} \quad \text{ou} \quad A + \vec{AB} = B$$

vem:

$$\vec{AB} = B - A.$$

Substituindo os pontos A e B pelas suas coordenadas vem:

$$\vec{AB} = (b_1, b_2) - (a_1, a_2),$$

ou seja,

$$\vec{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2).$$

3.5.11 Colinearidade entre dois vectores

Sejam os vectores \vec{u} e \vec{v} , não nulos, representados pelas suas coordenadas na base (\vec{i}, \vec{j}) :

$$\vec{u} = (u_1, u_2) \text{ e } \vec{v} = (v_1, v_2).$$

Como já vimos na secção 3.4.2, estes dois vectores são colineares se existir um único número real k tal que $\vec{v} = k\vec{u}$. Representando, agora, os vectores pelas suas coordenadas e para um certo número real k temos sucessivamente:

$$\begin{aligned} (v_1, v_2) = k(u_1, u_2) &\Leftrightarrow (v_1, v_2) = (ku_1, ku_2) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = ku_1 \\ v_2 = ku_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{v_1}{u_1} \\ k = \frac{v_2}{u_2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{v_1}{u_1} = \frac{v_2}{u_2}, \end{aligned}$$

ou seja, dois vectores são colineares se as suas coordenadas são directamente proporcionais, ou ainda, poderemos exprimir a colinearidade dos dois vectores \vec{u} e \vec{v} , na forma:

$$v_1 u_2 = u_1 v_2. \quad (3.5)$$

3.5.12 Norma, versor e co-senos directores de um vector

Já vimos na secção 3.1.1 a noção de norma de um vector. Vamos agora considerar um vector \vec{u} escrito numa b. o. n. (\vec{i}, \vec{j}) ,

$$\vec{u} = u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j},$$

A norma de um vector \vec{u} escrito numa b. o. n. pode ser entendida como a medida da hipotenusa de um triângulo rectângulo de catetos u_1 e u_2 (Figura 3.77), dada por:

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

ou seja, a norma de um vector \vec{u} pode ser entendida também como a distância entre os extremos dum representante do vector \vec{u} . Chama-se *versor* de um vector, não nulo, \vec{u} ao vector com a direcção e o sentido do vector \vec{u} e norma igual a 1, e representamos por *vers* \vec{u} . Podemos escrever

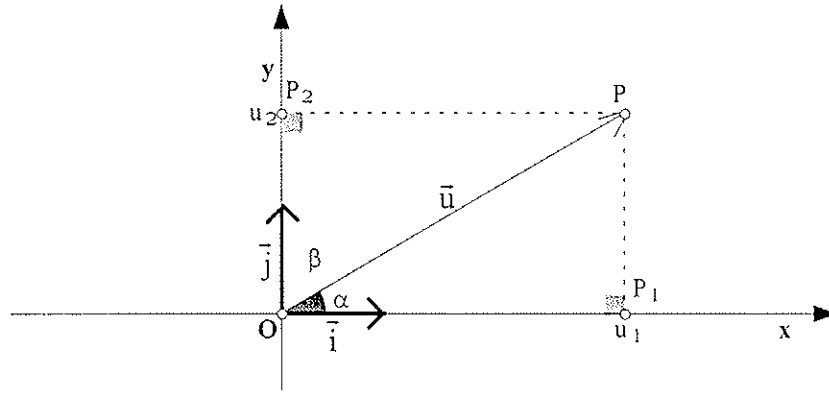


Figura 3.77: O triângulo $[OP_1P]$ é rectângulo em P_1 e tem catetos u_1 e u_2 . Na b. o. n. (\vec{i}, \vec{j}) , o vector $\vec{u}(u_1, u_2)$, forma com o vector \vec{i} um ângulo α e com o vector \vec{j} o ângulo β :

$$\cos \alpha = \cos \left(\vec{i}, \vec{u} \right) = \frac{u_1}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}}; \quad \cos \beta = \cos \left(\vec{u}, \vec{j} \right) = \frac{u_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}}.$$

$$\text{vers } \vec{u} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}.$$

Temos portanto

$$\text{vers } \vec{u} = \frac{u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j}}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}} \Leftrightarrow \text{vers } \vec{u} = \frac{u_1}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}} \vec{i} + \frac{u_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}} \vec{j}.$$

Ainda podemos escrever

$$\text{vers } \vec{u} = \left(\frac{u_1}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}}, \frac{u_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}} \right). \quad (3.6)$$

Ora o vector \vec{u} , sendo não nulo, forma com o vector \vec{i} um ângulo, α , e com o vector \vec{j} outro ângulo, β . Observando a Figura 3.77, a partir dos triângulos rectângulos $[OP_1P]$ e $[OP_2P]$ podemos determinar o co-seno de cada um desses ângulos, α e β (secção 2.1):

$$\cos \alpha = \frac{u_1}{\|\vec{u}\|} \Leftrightarrow \cos \left(\vec{i}, \vec{u} \right) = \frac{u_1}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}} \quad (3.7)$$

$$\cos \beta = \frac{u_2}{\|\vec{u}\|} \Leftrightarrow \cos \left(\vec{u}, \vec{j} \right) = \frac{u_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}} \quad (3.8)$$

que são designados por *co-senos directores* do vector \vec{u} . Note-se que as expressões encontradas, (3.7) e (3.8), são exactamente as coordenadas do vers \vec{u} na base (\vec{i}, \vec{j}) , da expressão (3.6). Ou seja,

podemos dizer que, numa b. o. n., os co-senos directores de um vector não nulo, são as coordenadas do versor desse vector.

3.5.13 Projecção ortogonal de um vector sobre outro

Consideremos os vectores \vec{u} e \vec{v} e seja P um ponto do plano. Definamos dois pontos, A e B, tais que:

$$A = P + \vec{u} \text{ e } B = P + \vec{v}.$$

A projecção ortogonal do ponto A sobre a recta PB é um ponto A' (Figura 3.78). Este determina um vector $\overrightarrow{PA'}$ sobre a recta PB. O vector $\overrightarrow{PA'}$ é designado por *projecção vectorial* de \vec{u} sobre o vector \vec{v} . Como $\overrightarrow{PA'}$ é colinear com \vec{v} , existe $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$\overrightarrow{PA'} = k \text{ vers } \vec{v}. \quad (3.9)$$

Ao número real k chama-se *projecção ortogonal* do vector \vec{u} sobre o vector \vec{v} e representa-se por $\text{proj}_{\vec{v}} \vec{u}$. Ou seja, k é a medida do comprimento do vector $\overrightarrow{PA'}$ em relação ao vers \vec{v} . Assim, como $\overrightarrow{PA'} = \|\overrightarrow{PA'}\| \text{ vers } \overrightarrow{PA'}$, vem (de (3.9)):

$$k \text{ vers } \vec{v} = \|\overrightarrow{PA'}\| \text{ vers } \overrightarrow{PA'},$$

mas como $\overrightarrow{PA'}$ é colinear com \vec{v} temos $\text{vers } \overrightarrow{PA'} = \text{vers } \vec{v}$, logo,

$$k \text{ vers } \vec{v} = \|\overrightarrow{PA'}\| \text{ vers } \vec{v}.$$

Donde se concluí

$$k = \|\overrightarrow{PA'}\|, \text{ ou seja, } \text{proj}_{\vec{v}} \vec{u} = \|\overrightarrow{PA'}\|.$$

Para quaisquer vectores do plano \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} , verifica-se que (Figura 3.79):

$$\text{proj}_{\vec{u}} (\vec{v} + \vec{w}) = \text{proj}_{\vec{u}} \vec{v} + \text{proj}_{\vec{u}} \vec{w} \quad (3.10)$$

3.5.14 Produto interno de dois vectores

O *produto interno* ou *produto escalar* de dois vectores \vec{u} e \vec{v} , não nulos, designado por $\vec{u} \cdot \vec{v}$ (lê-se: \vec{u} interno \vec{v}), é um número real que é dado por:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \left(\hat{\vec{u}, \vec{v}} \right). \quad (3.11)$$

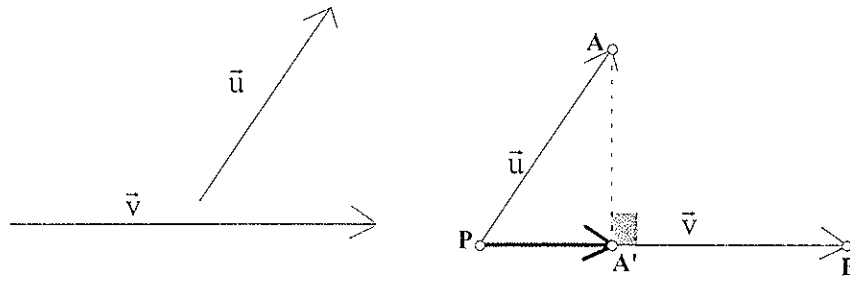


Figura 3.78: $\overline{PA'}$ é a projecção vectorial de \vec{u} sobre o vector \vec{v} . A projecção ortogonal do vector \vec{u} sobre o vector \vec{v} é: $\text{proj}_{\vec{v}} \vec{u} = \|\overline{PA'}\|$.

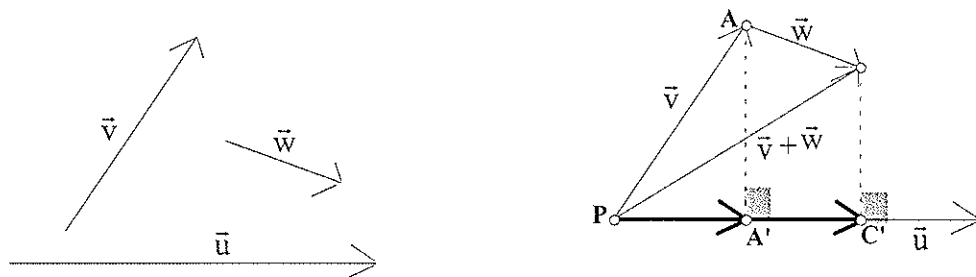


Figura 3.79: Para quaisquer três vectores \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} com $\text{proj}_{\vec{u}} \vec{v} = \|\overline{PA'}\|$, $\text{proj}_{\vec{u}} \vec{w} = \|\overline{A'C'}\|$ e $\text{proj}_{\vec{u}} (\vec{v} + \vec{w}) = \|\overline{PC'}\|$, temos: $\text{proj}_{\vec{u}} (\vec{v} + \vec{w}) = \text{proj}_{\vec{u}} \vec{v} + \text{proj}_{\vec{u}} \vec{w} \Leftrightarrow \|\overline{PA'}\| + \|\overline{A'C'}\| = \|\overline{PC'}\|$, já que $\overline{PA'}$ e $\overline{A'C'}$ são colineares e têm o mesmo sentido.

De 3.11 podemos tirar as seguintes propriedades (ver Figura 3.80):

- Se $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, então $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$;
- Se $(\hat{\vec{u}}, \hat{\vec{v}}) = 0^\circ$, temos que $\cos(\hat{\vec{u}}, \hat{\vec{v}}) = 1$, e logo $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$;
- Se $0^\circ < (\hat{\vec{u}}, \hat{\vec{v}}) < 90^\circ$, temos que $\cos(\hat{\vec{u}}, \hat{\vec{v}}) > 0$, e logo $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$;
- Se $(\hat{\vec{u}}, \hat{\vec{v}}) = 90^\circ$, $\cos(\hat{\vec{u}}, \hat{\vec{v}}) = 0$, e, portanto, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$;
- Se $90^\circ < (\hat{\vec{u}}, \hat{\vec{v}}) < 180^\circ$, vem que $\cos(\hat{\vec{u}}, \hat{\vec{v}}) < 0$, e logo $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$;
- Se $(\hat{\vec{u}}, \hat{\vec{v}}) = 180^\circ$, vem que $\cos(\hat{\vec{u}}, \hat{\vec{v}}) = -1$, e logo $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$.

Podemos dizer então que o produto interno varia entre $-\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$ e $\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$, ou seja:

$$-\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \leq \vec{u} \cdot \vec{v} \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|.$$

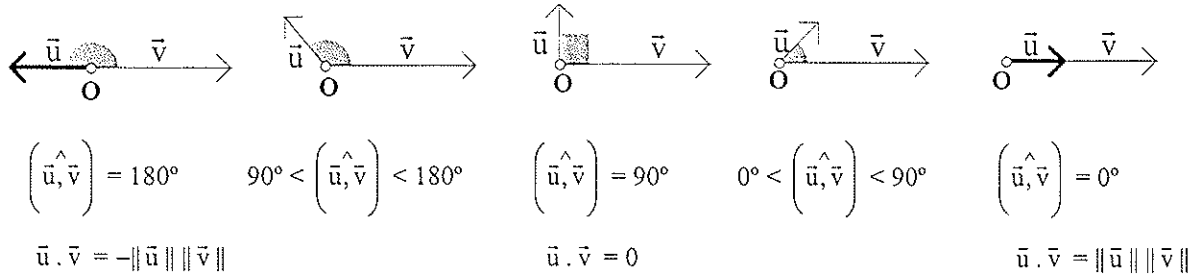


Figura 3.80: Em função do ângulo formado pelos vectores \vec{u} e \vec{v} , o produto interno, $\vec{u} \cdot \vec{v}$, varia entre: $-\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \leq \vec{u} \cdot \vec{v} \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$. Em particular vale 0 quando o ângulo é 90° (ao centro) e é negativo à direita e positivo à esquerda do centro.

Se $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$, a amplitude do ângulo definido pelos vectores \vec{u} e \vec{v} pode ser obtida pela expressão 3.11, depois do calculado $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

O produto interno de dois vectores, \vec{u} e \vec{v} , pode ser obtido a partir da projecção ortogonal de um vector, \vec{u} (ou \vec{v}), sobre o outro, \vec{v} (ou \vec{u}) já que a projecção ortogonal do vector \vec{u} (\vec{v}) sobre o vector \vec{v} (\vec{u}) é (Figura 3.78):

$$\text{proj}_{\vec{v}} \vec{u} = \|\vec{u}\| \cos \left(\hat{u}, \hat{v}\right) \quad \text{e} \quad \text{proj}_{\vec{u}} \vec{v} = \|\vec{v}\| \cos \left(\hat{u}, \hat{v}\right), \quad (3.12)$$

e portanto

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{v}\| \text{proj}_{\vec{v}} \vec{u} = \|\vec{u}\| \text{proj}_{\vec{u}} \vec{v}.$$

O produto interno de um vector, \vec{u} , por ele próprio é o quadrado da sua norma:

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{u} &= \|\vec{u}\| \|\vec{u}\| \cos \left(\hat{u}, \hat{u}\right) = \|\vec{u}\|^2 \cdot 1 = \|\vec{u}\|^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2, \quad \forall \vec{u} \in \mathcal{V}. \end{aligned}$$

O produto interno é comutativo; já que sendo a multiplicação de números reais comutativa e tomando \vec{u} e \vec{v} quaisquer, vem $\cos \left(\hat{u}, \hat{v}\right) = \cos \left(\hat{v}, \hat{u}\right)$, e portanto tiramos que:

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \left(\hat{u}, \hat{v}\right) = \|\vec{v}\| \|\vec{u}\| \cos \left(\hat{v}, \hat{u}\right) = \vec{v} \cdot \vec{u} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}, \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V}. \end{aligned}$$

O produto interno é distributivo em relação à adição de vectores: De facto, tomando três vectores quaisquer do plano \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} , calculemos:

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \|\vec{u}\| \|\vec{v} + \vec{w}\| \cos \left(\hat{u}, \hat{(\vec{v} + \vec{w})}\right).$$

Agora da propriedade distributiva da multiplicação relativamente à adição de números reais e de 3.10, 3.11 e 3.12 vem

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} &= \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) + \|\vec{u}\| \|\vec{w}\| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{w}}) = \\ &= \|\vec{u}\| \text{proj}_{\vec{u}} \vec{v} + \|\vec{u}\| \text{proj}_{\vec{u}} \vec{w} = \|\vec{u}\| (\text{proj}_{\vec{u}} \vec{v} + \text{proj}_{\vec{u}} \vec{w}) = \\ &= \|\vec{u}\| \text{proj}_{\vec{u}} (\vec{v} + \vec{w}) = \|\vec{u}\| \|\vec{v} + \vec{w}\| \cos(\widehat{\vec{u}, (\vec{v} + \vec{w})}),\end{aligned}$$

ou seja, concluímos que:

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}, \quad \forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathcal{V}.$$

O produto interno é bilinear, isto é, admite a propriedade associativa mista:

$$k(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (k\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k\vec{v}), \quad \forall k \in \mathbb{R}, \forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V}$$

De facto, começando por estudar a primeira igualdade: $k(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (k\vec{u}) \cdot \vec{v}$, sendo \vec{u} e \vec{v} dois vectores quaisquer do plano e k um número real, temos de (3.11)

$$k(\vec{u} \cdot \vec{v}) = k \left(\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \right) = k \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$$

e também

$$(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = \|k\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\widehat{k\vec{u}, \vec{v}}). \quad (3.13)$$

Vamos estudar 3.13 em função do valor de k . Se $k > 0$, $\cos(\widehat{k\vec{u}, \vec{v}}) = \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ porque $k\vec{u}$ e \vec{u} têm a mesma direcção e sentido, e $\|k\vec{u}\| = |k| \|\vec{u}\| = k \|\vec{u}\|$. Assim, neste caso, tem-se:

$$(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v}) \text{ de 3.11.}$$

Se $k = 0$, vem

$$k(\vec{u} \cdot \vec{v}) = 0 \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 0 \text{ e } (k\vec{u}) \cdot \vec{v} = (0\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{0} \cdot \vec{v} = 0$$

Donde, também temos

$$k(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (k\vec{u}) \cdot \vec{v}.$$

Por último, se $k < 0$, $\cos(\widehat{k\vec{u}, \vec{v}}) = -\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$, pois $k\vec{u}$ e \vec{u} têm a mesma direcção mas sentidos contrários e $\|k\vec{u}\| = |k| \|\vec{u}\| = -k \|\vec{u}\|$. Assim,

$$(k\bar{u}) \cdot \bar{v} = -k \|\bar{u}\| \|\bar{v}\| \left(-\cos\left(\widehat{\bar{u}, \bar{v}}\right) \right) = k(\bar{u} \cdot \bar{v}).$$

Portanto, em cada um dos três casos (que nos dá o caso geral, $k \in \mathbb{R}$), temos

$$k(\bar{u} \cdot \bar{v}) = (k\bar{u}) \cdot \bar{v}$$

Para verificarmos a segunda igualdade procederíamos de modo análogo.

3.5.15 Produto interno num referencial o. n.

Consideremos no referencial o. n. (O, \bar{i}, \bar{j}) os vectores \bar{u} e \bar{v} , escritos em função das suas componentes: $\bar{u} = u_1 \bar{i} + u_2 \bar{j}$ e $\bar{v} = v_1 \bar{i} + v_2 \bar{j}$. Aplicando as propriedades do produto interno estudadas na secção anterior, obtém-se uma expressão do produto interno em função das coordenadas dos vectores:

$$\begin{aligned} \bar{u} \cdot \bar{v} &= (u_1 \bar{i} + u_2 \bar{j}) \cdot (v_1 \bar{i} + v_2 \bar{j}) = (u_1 \bar{i} + u_2 \bar{j}) \cdot v_1 \bar{i} + (u_1 \bar{i} + u_2 \bar{j}) \cdot v_2 \bar{j} = \\ &= u_1 \bar{i} \cdot v_1 \bar{i} + u_2 \bar{j} \cdot v_1 \bar{i} + u_1 \bar{i} \cdot v_2 \bar{j} + u_2 \bar{j} \cdot v_2 \bar{j} = \\ &= u_1 v_1 (\bar{i} \cdot \bar{i}) + u_2 v_1 (\bar{j} \cdot \bar{i}) + u_1 v_2 (\bar{i} \cdot \bar{j}) + u_2 v_2 (\bar{j} \cdot \bar{j}). \end{aligned}$$

Atendendo a que $\bar{i} \cdot \bar{i} = 1$ e $\bar{j} \cdot \bar{j} = 1$, uma vez que $\|\bar{i}\| = \|\bar{j}\| = 1$ e $\cos\left(\widehat{\bar{i}, \bar{i}}\right) = \cos\left(\widehat{\bar{j}, \bar{j}}\right) = 1$ e que

$\bar{i} \cdot \bar{j} = \bar{j} \cdot \bar{i} = 0$ visto termos $\bar{i} \perp \bar{j} \Rightarrow \cos\left(\widehat{\bar{i}, \bar{j}}\right) = 0$, vem

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 \quad (3.14)$$

O que nos dá uma forma prática de calcular o produto interno de dois vectores, dadas as suas coordenadas. Além disso, sendo os vectores \bar{u} e \bar{v} dados, num referencial o. n. (O, \bar{i}, \bar{j}) , pelas suas coordenadas, $\bar{u} = (u_1, u_2)$ e $\bar{v} = (v_1, v_2)$, podemos calcular as seguintes quantidades:

- De (3.11), a amplitude do ângulo definido pelos vectores $\bar{u} \neq \bar{0}$ e $\bar{v} \neq \bar{0}$, pode ser obtida pela expressão:

$$\cos\left(\widehat{\bar{u}, \bar{v}}\right) = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2}{\|\bar{u}\| \|\bar{v}\|}.$$

- De (3.12), a projecção ortogonal do vector \bar{u} sobre o vector \bar{v} é

$$\text{proj}_{\bar{v}} \bar{u} = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2}{\|\bar{v}\|^2} \bar{v}.$$

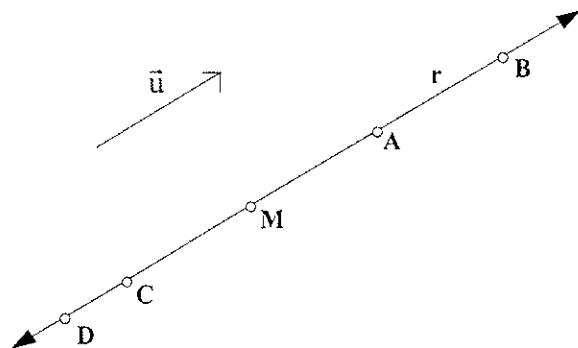


Figura 3.81: A recta r tem a direcção do vector \vec{u} : $A = M + \vec{u}$, $B = M + 2\vec{u}$, $C = M - \vec{u}$, $D = M - \frac{3}{2}\vec{u}$. A equação vectorial da recta é: $P = M + k\vec{u}$, $k \in \mathbb{R}$.

3.5.16 Estudo da recta

(i) Equação vectorial da recta

Podemos definir uma recta por um ponto e uma direcção. Suponhamos o problema: “Dado um ponto M e um vector \vec{u} não nulo, determinar uma condição a que devem satisfazer os pontos da recta r que passa por M e tem a direcção de \vec{u} ”. Para o resolvermos, basta adicionar a M um vector colinear com \vec{u} , $k\vec{u}$, obtendo assim, um ponto qualquer, P , de r (Figura 3.81):

$$P = M + k\vec{u}, \quad k \in \mathbb{R}. \quad (3.15)$$

Reciprocamente, para todo o ponto S da recta r existe um $k \in \mathbb{R}$ tal que $S = M + k\vec{u}$. Isto é, temos que $S = P$. Ou seja, os pontos P da recta r e só eles verificam a condição:

$$P = M + k\vec{u}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

A esta chama-se *equação vectorial* da recta r . A recta r fica, assim, definida pelo ponto M e pela direcção do vector \vec{u} , chamado *vector director* da recta. Se o ponto e o vector estão definidos num referencial c. o. n. pelas suas coordenadas,

$$M(x_0, y_0) \text{ e } \vec{u}(u_1, u_2)$$

e para $P(x, y)$, vem de (3.15):

$$(x, y) = (x_0, y_0) + k(u_1, u_2), \quad k \in \mathbb{R}, \quad (3.16)$$

que é outra forma de escrever a equação vectorial da recta r .

Se considerarmos $k \in \mathbb{R}_0^+$, em vez de $k \in \mathbb{R}$, então

$$P = M + k\vec{u}, \quad k \in \mathbb{R}_0^+,$$

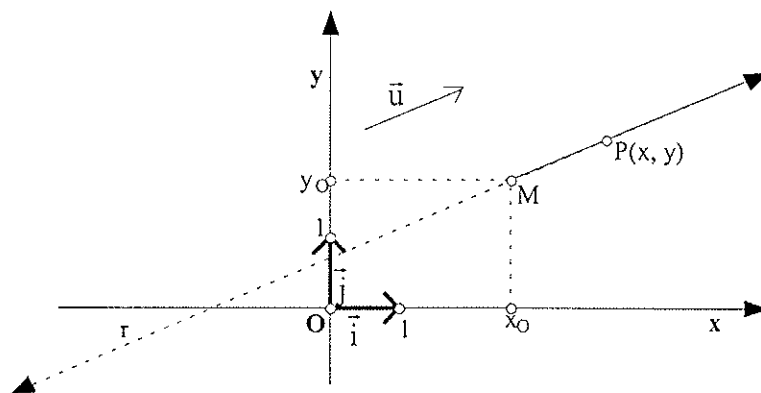


Figura 3.82: A semi-recta $[MP$ tem a direcção da recta r , e sentido do seu vector director \bar{u} . Vectorialmente a semi-recta é dada por: $(x, y) = (x_0, y_0) + k(u_1, u_2)$, $k \in \mathbb{R}_0^+$.

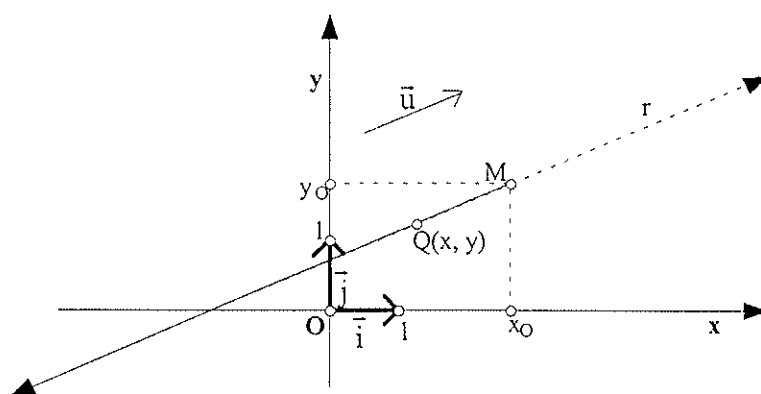


Figura 3.83: A semi-recta $[MQ$ tem a direcção da recta r , e sentido contrário ao do seu vector director \bar{u} . Vectorialmente, é definida por: $(x, y) = (x_0, y_0) + k(u_1, u_2)$, $k \in \mathbb{R}_0^-$.

ou

$$(x, y) = (x_0, y_0) + k(u_1, u_2), \quad k \in \mathbb{R}_0^+,$$

definem vectorialmente a *semi-recta* de origem M, com a direcção e sentido de \bar{u} (Figura 3.82). Para $k \in \mathbb{R}_0^-$, passamos a ter a semi-recta oposta da anterior, isto é, com origem em M, direcção do vector \bar{u} mas sentido contrário ao de \bar{u} (Figura 3.83):

$$Q = M + k\bar{u}, \quad k \in \mathbb{R}_0^-,$$

ou

$$(x, y) = (x_0, y_0) + k(u_1, u_2), \quad k \in \mathbb{R}_0^-.$$

Vamos agora estudar as rectas quando definidas por dois pontos. Se a recta r está definida por dois dos seus pontos $R(x_0, y_0)$ e $S(x_1, y_1)$, então a sua direcção é a do vector

$$\overrightarrow{RS} = S - R = (x_1, y_1) - (x_0, y_0) = (x_1 - x_0, y_1 - y_0).$$

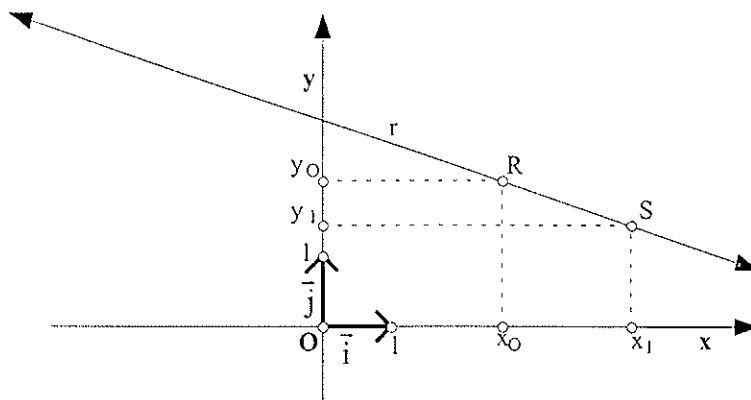


Figura 3.84: A recta r está definida por dois dos seus pontos: $R(x_0, y_0)$ e $S(x_1, y_1)$; tem a direcção do vector director $\overrightarrow{RS} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0)$ e a sua equação vectorial é:

$$(x, y) = (x_0, y_0) + k(x_1 - x_0, y_1 - y_0), \quad k \in \mathbb{R}.$$

Uma equação vectorial da recta será então⁶³

$$P = R + k\overrightarrow{RS}, \quad k \in \mathbb{R}, \quad (3.17)$$

ou

$$(x, y) = (x_0, y_0) + k(x_1 - x_0, y_1 - y_0), \quad k \in \mathbb{R},$$

conforme se pode observar na Figura 3.84. A semi-recta $[RS]$ define-se vectorialmente pela equação

$$(x, y) = (x_0, y_0) + k(x_1 - x_0, y_1 - y_0), \quad k \in \mathbb{R}_0^+.$$

Fazendo em 3.17, $k = 0$, vem $P = R + 0 \cdot \overrightarrow{RS} = R$; e $k = 1$ vem $P = R + 1 \cdot \overrightarrow{RS} = S$. Significa pois, que o segmento de recta $[RS]$ pode definir-se vectorialmente por

$$P = R + k\overrightarrow{RS}, \quad 0 \leq k \leq 1.$$

(ii) Equações paramétricas da recta

Da equação vectorial da recta (3.15) que passa por um ponto $M(x_0, y_0)$ e tem a direcção do vector $\bar{u}(u_1, u_2)$, podemos determinar as coordenadas (x, y) dos pontos da recta. Ou seja, sendo k um número real qualquer, temos sucessivamente

$$\begin{aligned} (x, y) &= (x_0, y_0) + k(u_1, u_2) \Leftrightarrow (x, y) = (x_0, y_0) + (ku_1, ku_2) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x, y) = (x_0 + ku_1, y_0 + ku_2), \end{aligned}$$

donde

⁶³ Note-se que também se poderia usar S em vez de R em (3.17), bem como qualquer outro ponto da recta.

$$\begin{cases} x = x_0 + ku_1 \\ y = y_0 + ku_2 \end{cases}, k \in \mathbb{R}. \quad (3.18)$$

A este sistema dá-se o nome de *representação paramétrica* ou *equações paramétricas* da recta que passa pelo ponto (x_0, y_0) e tem a direcção do vector \vec{u} , em que k é o *parâmetro*.

(iii) Equações cartesianas da recta: equação contínua, geral e reduzida

Vamos partir de 3.18 e tomar k um número real qualquer. Consideremos três casos.

1º caso: $u_1 \neq 0$ e $u_2 \neq 0$. Tem-se

$$\begin{cases} x = x_0 + ku_1 \\ y = y_0 + ku_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{x - x_0}{u_1} \\ k = \frac{y - y_0}{u_2} \end{cases},$$

donde vem

$$\frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2}, \quad (3.19)$$

que é a chamada *equação contínua* da recta (sempre oblíqua em relação aos eixos ordenados) e, u_1 e u_2 são os *parâmetros directores*.

2º caso: $u_1 = 0$. Temos

$$\begin{cases} x = x_0 + ku_1 \\ y = y_0 + ku_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 + ku_2 \end{cases}, k \in \mathbb{R}.$$

Todos os pontos da recta têm abcissa x_0 , pelo que a recta é paralela ao eixo dos yy , ou seja é uma recta vertical (secção 3.5.3) que pode definir-se pela *equação cartesiana*:

$$x = x_0.$$

3º caso: $u_2 = 0$. Substituindo, sai

$$\begin{cases} x = x_0 + ku_1 \\ y = y_0 + ku_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + ku_1 \\ y = y_0 \end{cases}, k \in \mathbb{R}.$$

Todos os pontos da recta têm a ordenada y_0 , ou seja, significa que a recta é paralela ao eixo dos xx . Trata-se de uma recta horizontal (secção 3.5.3) que fica definida pela *equação cartesiana*:

$$y = y_0.$$

De 3.19, tomando $u_1 \neq 0$ e $u_2 \neq 0$, obtemos as equações:

$$(x - x_0)u_2 = (y - y_0)u_1 \Leftrightarrow u_2x - u_2x_0 - u_1y + u_1y_0 = 0 \Leftrightarrow u_2x - u_1y + u_1y_0 - u_2x_0 = 0.$$

Fazendo $A = u_2$, $B = -u_1$ e $C = u_1y_0 - u_2x_0$ obtém-se uma equação cartesiana da recta:

$$Ax + By + C = 0, \quad A, B, C \in \mathbb{R} \quad (3.20)$$

a que se chama *equação geral* da recta, visto que qualquer recta do plano pode ser definida por uma equação desta forma logo que A e B não sejam simultaneamente nulos. Consideremos agora, dois casos:

1º caso: $B \neq 0$.

Então é possível a divisão de todos os termos da equação (3.20) por B e resolvendo em ordem a y vem sucessivamente:

$$Ax + By + C = 0 \Leftrightarrow \frac{A}{B}x + y + \frac{C}{B} = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

Representando $-\frac{C}{B}$ por b e $-\frac{A}{B}$ por m , obtém-se a equação:

$$y = mx + b, \quad (3.21)$$

a que se chama *equação reduzida* da recta definindo uma recta não vertical, que é horizontal quando $A = 0$ ($m = 0$). De (3.21), fazendo $x = 0$, vem $y = b$. Ora, b é a ordenada do ponto de abcissa zero e chama-se, por esta razão, *ordenada na origem*. A m dá-se o nome de *declive* ou *coeficiente angular* da recta:

$$m = -\frac{A}{B} \Leftrightarrow m = \frac{u_2}{u_1}. \quad (3.22)$$

2º caso: $A \neq 0$ e $B = 0$.

De (3.20), do mesmo modo, podemos resolver a equação em ordem a x :

$$Ax + By + C = 0 \Leftrightarrow Ax + C = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{C}{A}.$$

Logo, neste caso a equação (3.20), representa uma recta vertical. Concluimos assim que toda a equação da forma (3.20), com os coeficientes de x e de y não simultaneamente nulos, representa uma recta do plano cartesiano. Vamos ver agora que, reciprocamente, toda a recta do plano cartesiano pode ser definida por uma equação em x e y , com coeficientes de x e de y não simultaneamente nulos. Vamos considerar novamente dois casos:

1º caso: A recta dada não é vertical.

Supondo que a recta não é vertical, ela é definida por uma equação do tipo $y = mx + b$ (Silva 1970). Com efeito,

$$y = mx + b \Leftrightarrow -mx + y - b = 0 \Leftrightarrow mx - y + b = 0$$

que é do tipo de (3.20), em que $A = m$, $B = -1$ e $C = b$, sendo $B \neq 0$.

2º caso: A recta dada é vertical.

Como a recta considerada é vertical, então ela representa-se por uma equação da forma $x = a$, em que a é um número real. Ora, temos:

$$x = a \Leftrightarrow x - a = 0$$

que é do tipo (3.20) em que $A = 1$, $B = 0$ e $C = -a$, ou seja, $A \neq 0$. Logo, em qualquer um dos casos, a recta pode ser representada por uma equação na forma geral.

Note-se que da equação geral (3.20) tiramos imediatamente um vector director da recta: sendo $A = u_2$ e $B = -u_1$, temos portanto que o vector director é dado por: $(-B, A) = (u_1, u_2) = \vec{u}$. Por outro lado, tiramos também, um vector perpendicular à recta, o vector: $(A, B) = \vec{v}$. De facto, o vector $(A, B) = \vec{v}$ é perpendicular ao vector director $(-B, A) = \vec{u}$, visto que (de (3.14)):

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = (A, B) \cdot (-B, A) = -AB + BA = 0.$$

(iv) Equação axial da recta

Consideremos uma recta r oblíqua em relação aos eixos do referencial e a que não pertença a origem do referencial. Representemos por $A(a, 0)$ a sua intersecção com o eixo dos xx e representemos por $B(0, b)$ a sua intersecção com o eixo dos yy (Figura 3.85), com $a \neq 0$ e $b \neq 0$. Já vimos que b é a ordenada na origem. Do mesmo modo, a a chama-se abcissa na origem: ponto de intersecção da recta com o eixo dos xx . Vamos definir a recta r pela sua equação reduzida a partir dos pontos conhecidos, $A(a, 0)$ e $B(0, b)$. Com efeito, um vector director da recta é

$$\overline{AB} = B - A = (0, b) - (a, 0) = (-a, b),$$

e, então, o declive é (de (3.22)):

$$m = -\frac{b}{a}.$$

Assim a equação reduzida é (ver (3.21)):

$$y = -\frac{b}{a}x + b.$$

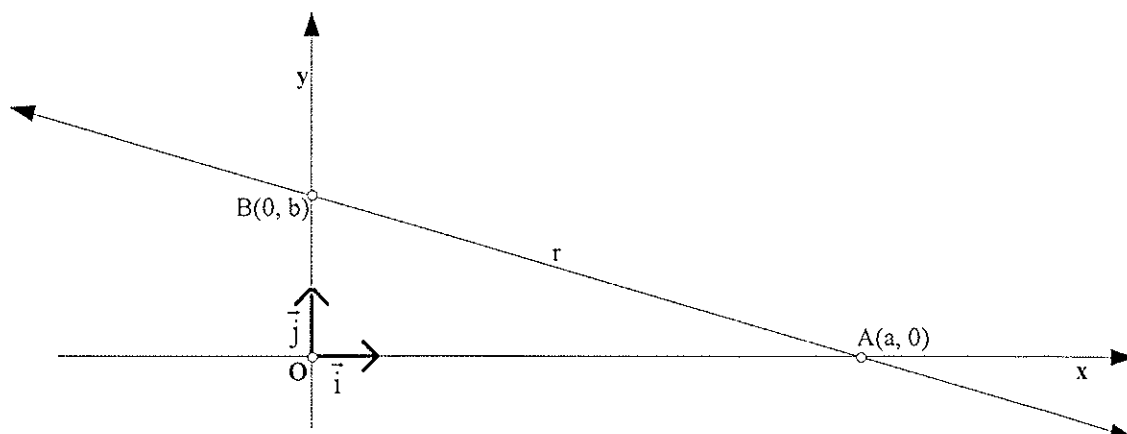


Figura 3.85: A recta r intersecta o eixo dos yy no ponto $B(0, b)$ e intersecta o eixo dos xx no ponto $A(a, 0)$; b é a ordenada na origem e a é a abcissa na origem.

Dividindo ambos os membros por b (visto que $b \neq 0$), vem

$$\frac{y}{b} = -\frac{x}{a} + 1,$$

ou seja, obtemos a equação

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

que se designa por *equação axial* da recta.

(v) Equação da recta que passa por um ponto dado e tem um declive dado

Consideremos o seguinte problema: “Dados um ponto $P_1(x_1, y_1)$ e um número real m , achar uma equação da recta que passa por P_1 e tem declive m ”. Claramente é uma equação do tipo (3.21) que está em causa. A condição do ponto P_1 pertencer à recta é traduzida pela igualdade

$$y_1 = mx_1 + b. \quad (3.23)$$

Podemos agora eliminar b , subtraindo ordenadamente (3.23) de (3.21) (que é $y = mx + b$):

$$y - y_1 = (mx + b) - (mx_1 + b) \Leftrightarrow y - y_1 = mx - mx_1$$

obtemos assim a equação:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Leftrightarrow y = mx + (y_1 - mx_1) \quad (3.24)$$

que equivale a (3.21) e resolve o problema, visto supormos conhecidos os valores de x_1, y_1 e de m . Note-se que a ordenada na origem vale:

$$y_1 - mx_1.$$

(vi) Outra definição de declive de uma recta

Da equação (3.24), considerando outro ponto $P_2(x_2, y_2)$ da mesma recta, temos que as suas coordenadas verificam também (3.24), ou seja, tem-se

$$y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1),$$

donde se pode tirar que

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \quad (3.25)$$

Esta fórmula dá o declive de uma recta conhecidos dois pontos distintos dessa recta, P_1 e P_2 . Aliás, tal não é surpresa, uma vez que de (3.22) temos $m = \frac{u_2}{u_1}$ com $\vec{u}(u_1, u_2)$ o vector director. Ora $\overline{P_1P_2}$

é um vector director e assim: $\overline{P_1P_2} = P_2 - P_1 = (x_2, y_2) - (x_1, y_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$, donde (3.25) resulta de (3.22) também. Notemos que a fórmula (3.25) se aplica mesmo no caso de se tratar de uma recta vertical. Com efeito, teremos para tal recta $x_1 = x_2$ e $y_1 \neq y_2$, donde da fórmula (3.25) se deduz que $m = \infty$. Podemos, portanto, definir declive (ou coeficiente angular) de uma recta como a razão entre a diferença das ordenadas de dois pontos distintos dessa recta e a diferença entre as abcissas desses pontos, tomados na mesma ordem.

(vii) Família de rectas

Vimos que qualquer recta do plano pode ser representada por uma equação do tipo (3.20), desde que os parâmetros A , B e C sejam substituídos adequadamente, isto é, desde que não sejam simultaneamente nulos. Ora, por exemplo, fazendo em (3.20), $A = 1$, $B = 1$ e $C = -2$, obtemos uma equação equivalente

$$y = -x + 2,$$

que representa uma única recta conforme se pode observar na Figura 3.86. Acontece, porém, que podem não ser fixados todos os parâmetros (A , B e C), ou seja, em vez de termos uma equação numérica passamos a ter uma equação literal⁶⁴, na medida em que esta depende de um ou mais parâmetros.

⁶⁴ Entende-se por *equação numérica* uma equação que contém apenas incógnitas, e por *equação literal* (ou paramétrica) aquela que, além das incógnitas, contém outras letras, que desempenham o papel de variáveis, e se designam por parâmetros, para se distinguirem das incógnitas. Substituindo o(s) parâmetro(s) por constantes numéricas, a equação literal transforma-se numa equação numérica.

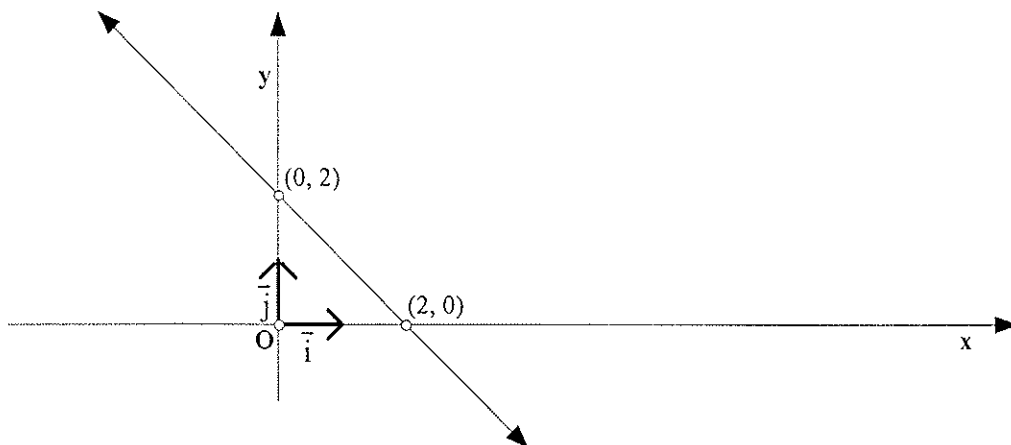


Figura 3.86: Recta de equação reduzida $y = -x + 2$: a ordenada na origem é 2 ($b = 2$) e o declive é -1 ($m = -1$).

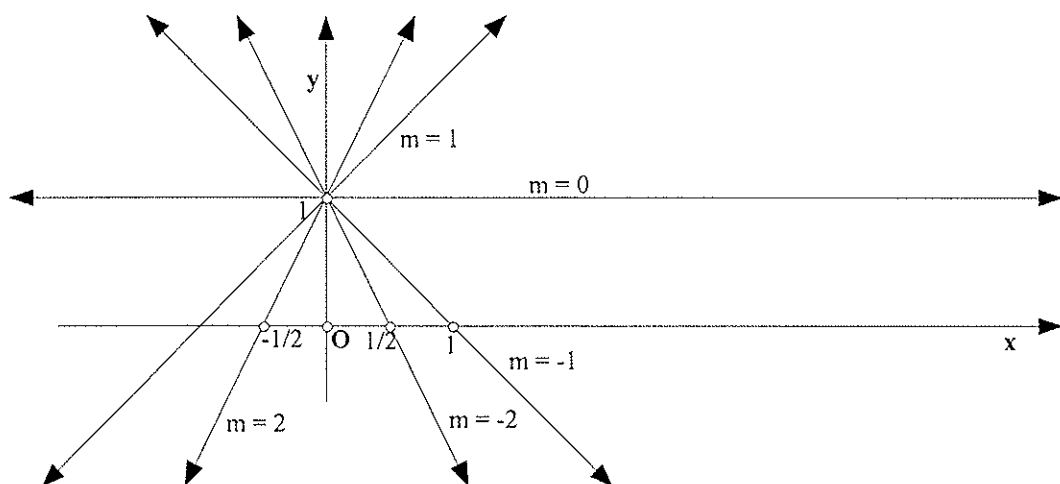


Figura 3.87: Família de rectas de parâmetro m na forma de equação reduzida $y = mx + 1$, $m \in \mathbb{R}$: a ordenada na origem é $b = 1$ e o declive m assume, neste caso, os valores do conjunto $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

Consideremos agora, por exemplo, a equação

$$y = mx + 1, \text{ com } m \in \mathbb{R}.$$

Temos para cada valor de m uma recta não vertical que passa pelo ponto $(0, 1)$, como se pode constatar na Figura 3.87. Assim, a existência de parâmetros numa equação de primeiro grau faz com que a equação passe a representar não uma recta individualizada, mas sim um conjunto de rectas a que chamamos *família de rectas*.

Consideremos ainda outro exemplo:

$$y = \frac{1}{2}x + b.$$

Neste caso, a equação depende do parâmetro b e representa a família das rectas com declive $\frac{1}{2}$.

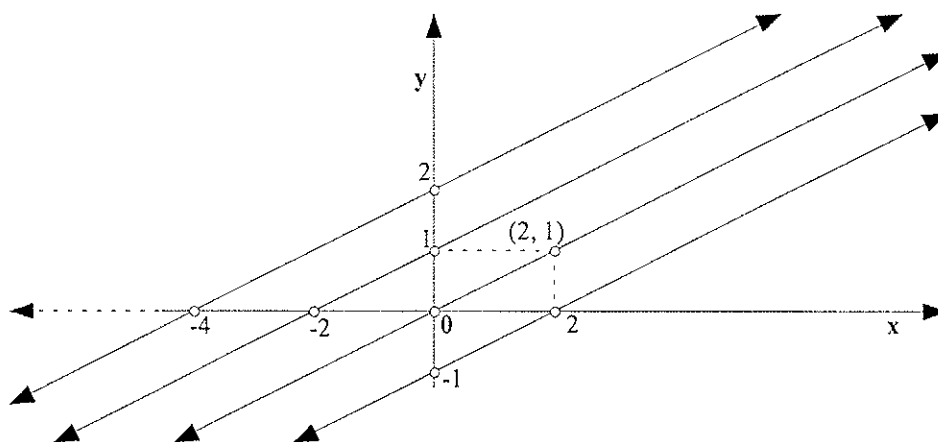


Figura 3.88: Família de rectas de ordenada na origem (parâmetro) $b \in \{-1, 0, 1, 2\}$: $y = \frac{1}{2}x + b$; o

declive vale $m = \frac{1}{2}$.

Note-se porém, que o número de elementos da família depende dos valores que o parâmetro pode tomar. Se considerarmos $b \in \{-1, 0, 1, 2\}$, teríamos, então, uma família de rectas com quatro elementos (Figura 3.88).

3.5.17 Inclinação e declive de uma recta

A *inclinação* de uma recta é o ângulo positivo α que a recta define com o eixo dos xx , considerando este para lado origem (Figura 3.89). É claro que duas rectas paralelas têm a mesma inclinação⁶⁵ (mesmo declive), pelo que usualmente consideramos também a inclinação de qualquer recta como sendo a inclinação da sua paralela que passa pela origem (Figura 3.90) e diz-se, neste caso, que a inclinação é o ângulo positivo α que a recta define com o semieixo positivo Ox . É evidente que quando uma recta é horizontal, ou seja, paralela ao eixo dos xx , a sua inclinação é igual a zero, enquanto que, quando uma recta é vertical, isto é, paralela ao eixo dos yy , a sua inclinação é igual a 90° . À tangente trigonométrica da inclinação de uma recta chama-se *coeficiente angular* ou *declive* da recta (ver secção 3.5.16 – (iii)) e denota-se, como é habitual, por m . Assim, se α for a inclinação da recta, teremos que,

$$m = \operatorname{tg} \alpha.$$

⁶⁵ É condição necessária e suficiente para que duas rectas sejam paralelas, que tenham o mesmo declive (ver secção 3.5.19).

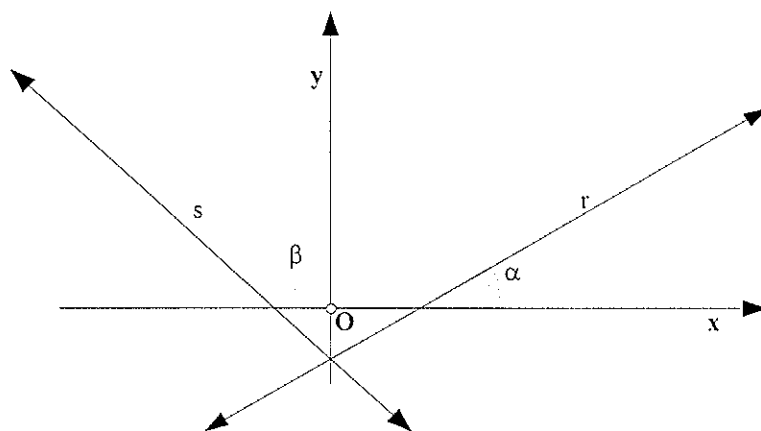


Figura 3.89: A *inclinação* da recta r é α e o seu declive é $m = \text{tg } \alpha$. Neste caso: $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ($m > 0$). A *inclinação* da recta s é β e o seu declive é $m = \text{tg } \beta$ ($90^\circ < \beta < 180^\circ$, $m < 0$).

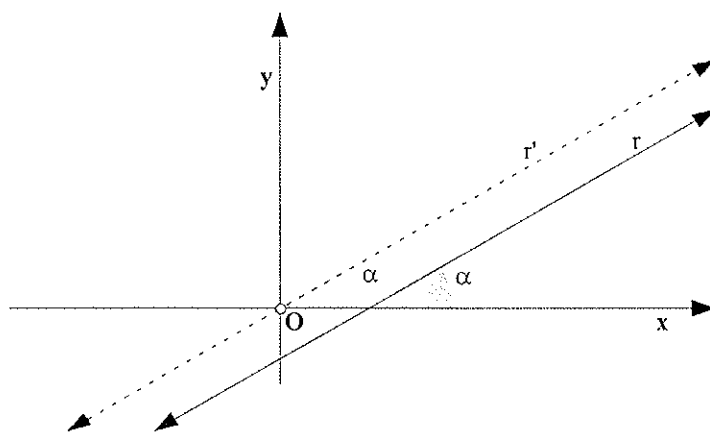


Figura 3.90: As rectas r e r' são paralelas, tendo a mesma *inclinação* e o mesmo declive:
 $m_r = m_{r'} = \text{tg } \alpha$.

Resulta que o declive de uma recta (como a tangente de um ângulo) assume valores entre $-\infty$ e $+\infty$, sendo nulo quando a recta é horizontal e infinito quando a recta é vertical. Note-se que, $\text{tg } 90^\circ$ apesar de não estar definida, para uma recta vertical escreve-se $m = \text{tg } 90^\circ = \infty$. Se a *inclinação* da recta é um ângulo agudo, o declive é positivo e se a *inclinação* da recta é um ângulo obtuso o declive é negativo (Figura 3.89).

3.5.18 Ângulo de duas rectas

Duas rectas dizem-se *concorrentes* se tiverem um ponto comum – em particular podem ser *perpendiculares*. E poderão ser *paralelas* (têm a mesma direcção): se não têm ponto comum, no plano, dizem-se *estritamente paralelas*; se têm todos os pontos comuns dizem-se *coincidentes* ou *paralelas em sentido lato* (Figura 3.91). Chama-se *ângulo de duas rectas* concorrentes ao *menor*

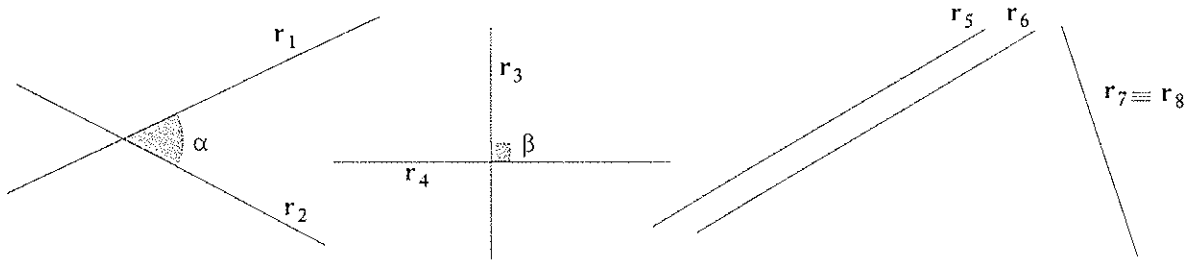


Figura 3.91: As rectas r_1 e r_2 são concorrentes e sendo $\alpha = \left(\hat{r}_1, \hat{r}_2 \right)$ tem-se sempre que: $0^\circ < \alpha < 90^\circ$

(é o *menor* ângulo); r_3 e r_4 são perpendiculares: $\left(\hat{r}_3, \hat{r}_4 \right) = \beta = 90^\circ$. r_5 e r_6 são estritamente paralelas,

enquanto r_7 e r_8 são paralelas em sentido lato, isto é, coincidentes ($r_7 \equiv r_8$): $\left(\hat{r}_5, \hat{r}_6 \right) = \left(\hat{r}_7, \hat{r}_8 \right) = 0^\circ$.

ângulo definido pelas mesmas. O ângulo entre duas rectas é sempre um ângulo cuja amplitude está entre 0° e 90° , inclusive. É claro que se as rectas forem paralelas o ângulo formado entre elas é de 0° e se forem perpendiculares o ângulo é de 90° . Na Figura 3.91 representamos as posições relativas entre duas rectas e os seus ângulos respectivos.

O cálculo da amplitude do ângulo de duas rectas é feito com base nos vectores directores das rectas recorrendo ao seu produto escalar. A escolha do sentido correcto dos vectores directores das rectas é decisiva na determinação da amplitude do ângulo definido pelas rectas⁶⁶ (Figura 3.92).

Se α for o ângulo definido pelas rectas r e s – denota-se por $\left(\hat{r}, \hat{s} \right)$ – e \vec{r} e \vec{s} forem os vectores directores das rectas respectivas, tem-se que (de (3.11)):

$$\cos \alpha = \left| \cos \left(\hat{\vec{r}}, \hat{\vec{s}} \right) \right| = \left| \frac{\vec{r} \cdot \vec{s}}{\|\vec{r}\| \|\vec{s}\|} \right| = \frac{|\vec{r} \cdot \vec{s}|}{\|\vec{r}\| \|\vec{s}\|} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{|\vec{r} \cdot \vec{s}|}{\|\vec{r}\| \|\vec{s}\|}.$$

3.5.19 Rectas paralelas

Duas rectas r e s são paralelas *sse* os vectores associados às suas direcções forem colineares. Assim se a recta r tiver vector director \vec{r} e a recta s tiver vector director \vec{s} , tem-se que

⁶⁶ Embora, formalmente, o cálculo do ângulo entre as rectas r e s se faça a partir de $\alpha = \arccos \left(\hat{\vec{r}}, \hat{\vec{s}} \right)$ com \vec{r} e \vec{s} os vectores directores quaisquer de cada recta. Como, para vectores não paralelos ou perpendiculares, existem duas situações (uma em $]0^\circ, 90^\circ[$ e outra em $]90^\circ, 180^\circ[$), escolhemos a que dá o menor valor de α , que é o resultado correcto.

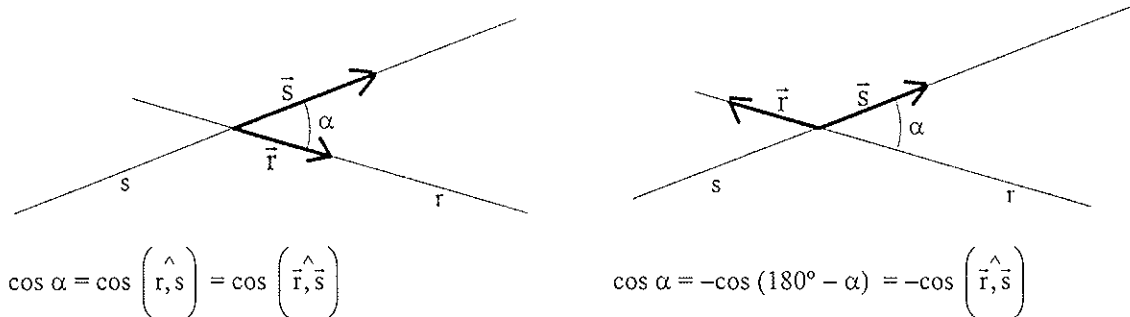


Figura 3.92: As rectas r e s são concorrentes e $\alpha = \left(\hat{r}, \hat{s} \right) = \left(\hat{\bar{r}}, \hat{\bar{s}} \right)$ – caso da esquerda. Repare-se que,

no caso da direita, $\left(\hat{\bar{r}}, \hat{\bar{s}} \right) \neq \alpha = \left(\hat{r}, \hat{s} \right)$. É $\left(\hat{\bar{r}}, \hat{\bar{s}} \right) = 180^\circ - \alpha$.

(secção 3.4.2):

$$r \parallel s \Leftrightarrow \exists^1 k \in \mathbb{R}: \bar{r} = k \bar{s}.$$

Ou seja, estando os vectores definidos pelas suas coordenadas num referencial c. o. n., $\bar{r} = (r_1, r_2)$ e $\bar{s} = (s_1, s_2)$ vem (secção 3.5.11; equação 3.5):

$$r \parallel s \Leftrightarrow r_1 s_2 = s_1 r_2.$$

Por outro lado, considerando as rectas paralelas r e s escritas na forma reduzida,

$$r: y = m_r x + b_r \quad \text{e} \quad s: y = m_s x + b_s.$$

sabemos da secção 3.5.17 que têm a mesma inclinação (e. g. Figura 3.90) e, conseqüentemente, o mesmo declive. De facto, se α_r é o ângulo de inclinação da recta r e α_s é o ângulo de inclinação da recta s , temos que $m_r = \text{tg } \alpha_r$ e $m_s = \text{tg } \alpha_s$. Como as rectas r e s têm a mesma inclinação resulta que $\alpha_r = \alpha_s$, e por conseguinte, $m_r = m_s$. Logo, podemos dizer que, duas rectas são paralelas *sse* têm o mesmo declive, ou seja, simbolicamente:

$$r \parallel s \Leftrightarrow m_r = m_s.$$

3.5.20 Rectas perpendiculares

Duas rectas perpendiculares, no plano, determinam quatro ângulos iguais a 90° (e. g. Figura 3.91). Com efeito, duas rectas r e s são perpendiculares *sse* os seus vectores directores associados \bar{r} e \bar{s} , respectivamente, o forem. Por outro lado, da secção 3.5.14, dois vectores são perpendiculares *sse* o seu produto interno é nulo, isto é,

$$r \perp s \Leftrightarrow \bar{r} \perp \bar{s} \Leftrightarrow \bar{r} \cdot \bar{s} = 0.$$

Sendo os vectores \bar{r} e \bar{s} dados pelas suas coordenadas num referencial c. o. n.,

$$\vec{r} = (r_1, r_2) \text{ e } \vec{s} = (s_1, s_2),$$

vem⁶⁷ (secção 3.5.15)

$$r \perp s \Leftrightarrow \vec{r} \perp \vec{s} \Leftrightarrow (r_1, r_2) \cdot (s_1, s_2) = r_1 s_1 + r_2 s_2 = 0.$$

Supondo que as rectas r e s não são paralelas aos eixos coordenados e que estão definidas pelas suas equações reduzidas:

$$r: y = m_r x + b_r \text{ e } s: y = m_s x + b_s,$$

temos que os seus vectores directores podem ser escritos na forma (de (3.22)):

$$\vec{r} = (1, m_r) \text{ e } \vec{s} = (1, m_s),$$

respectivamente. Então, vem

$$r \perp s \Leftrightarrow \vec{r} \perp \vec{s} \Leftrightarrow \vec{r} \cdot \vec{s} = 0 \Leftrightarrow (1, m_r) \cdot (1, m_s) = 1 + m_r m_s = 0 \Leftrightarrow m_s = -\frac{1}{m_r},$$

o que significa que duas rectas são perpendiculares sse o declive de uma é igual ao simétrico do inverso do da outra.

3.6 Cónicas

Nesta secção vamos fazer não só o estudo analítico das três cónicas: da elipse, da parábola e da hipérbole (considerando apenas, as situações em que os focos se encontram num mesmo eixo coordenado), mas também, para cada uma, pelo menos uma construção, de entre os vários métodos conhecidos (e. g., Veloso (1998); Cunha (1997)).

“Historicamente” os três tipos de cónicas eram obtidas através da secção (a partir de planos secantes), de cones rectos – Figura 3.93. Os diferentes tipos de cónicas eram obtidas de acordo com o ângulo que o plano secante faz com o eixo do cone. Sendo α o ângulo entre a geratriz⁶⁸ e o eixo do cone (o ângulo do cone é o dobro de α) e β o ângulo entre o plano secante e o eixo, temos que (Figura 3.94):

- se o plano secante faz com o eixo um ângulo entre α e 90° , ou seja, $\alpha < \beta \leq 90^\circ$, temos uma secção elíptica (caso $\beta = 90^\circ$, o plano secante é perpendicular ao eixo, e temos uma secção

⁶⁷ Indicamos uma regra prática para escrever um vector perpendicular a um vector dado: vectores perpendiculares ao vector de coordenadas $\vec{u} = (a, b)$ são todos os obtidos pela expressão $\vec{v} = [k(-b, a)]$, em que $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, já que:

$$(a, b) \cdot k(-b, a) = -k a b + k a b = 0 = \vec{u} \cdot \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v} \text{ (secção 3.5.14 e 3.5.15).}$$

Em particular, os vectores $(-b, a)$ e $(b, -a)$ são os dois vectores perpendiculares a (a, b) que têm a mesma norma que este.

⁶⁸ Geratriz é uma recta que roda em torno de outra recta (o eixo), formando com esta sempre o mesmo ângulo até completar uma revolução (volta completa), gerando uma *superfície cónica de revolução* – o ponto comum entre a geratriz e o eixo é o vértice – ver <http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2000/icm27/conicas.htm>.

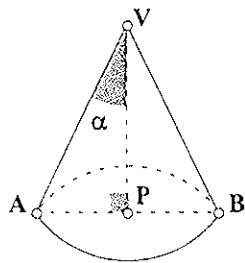


Figura 3.93: Cone recto definido por uma base circular, um vértice e um eixo perpendicular à base: V é o vértice do cone; P é o centro da base do cone. VP é o eixo do cone ($VP \perp AB$); VA e VB são geratrizes do cone. O ângulo do cone é 2α (abertura).

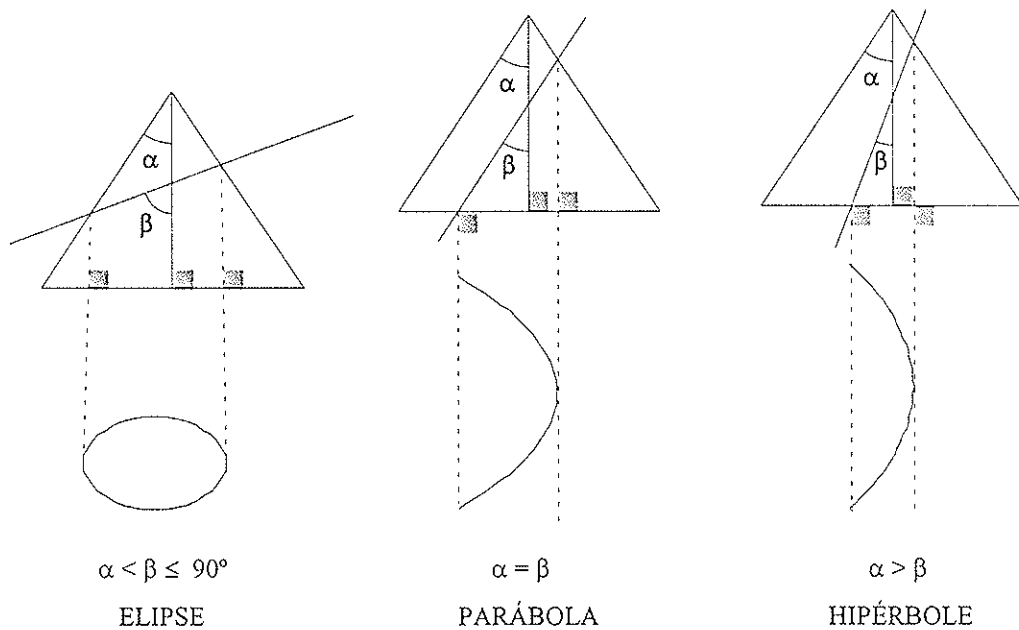


Figura 3.94: Elipse, parábola e hipérbole e a sua relação com os ângulos α e β : α é o ângulo entre a geratriz e o eixo do cone (cf. Figura 3.93) e β é o ângulo que o plano secante faz com o eixo do cone. Se $\alpha < \beta \leq 90^\circ$, a secção obtida é uma elipse ($\beta = 90^\circ$ – é uma circunferência); se $\alpha = \beta$, a secção obtida é uma parábola – note-se que a secção é paralela a uma e uma só geratriz; se $\alpha > \beta$, a secção obtida (paralela a duas geratrizes que não está no plano de representação) é uma hipérbole. Note-se que as cónicas representadas são as projecções (em planta) dos contornos das secções e não as próprias secções e, no caso da hipérbole, sempre definida por dois ramos, só temos um ramo (pois não representámos o cone duplo).

circular: a circunferência é um caso particular de uma elipse);

- se o plano secante faz com o eixo um ângulo igual a α , isto é, $\alpha = \beta$ (neste caso o plano é paralelo a uma e uma só geratriz) ficamos com uma secção parabólica;

- se o ângulo α for maior que β , (simbolicamente $\alpha > \beta$), temos uma secção hiperbólica (Cunha 1997), que é paralela a duas geratrizes do cone.

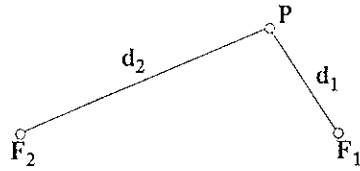


Figura 3.95: A elipse é o conjunto dos pontos do plano tais que, como P, sendo d_1 e d_2 a distância do foco F_1 a P e a distância do foco F_2 a P, respectivamente, temos: $d_1 + d_2 = \text{constante}$ ou $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \text{constante}$. Além disso, temos $d_1 + d_2 > \overline{F_1F_2}$.

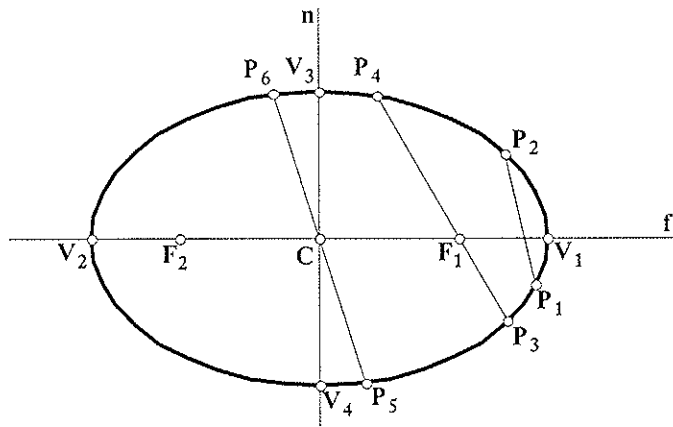


Figura 3.96: Os elementos de uma elipse (cf. Figura 3.95). As rectas f e n são designadas por *eixo focal* e *eixo normal*, respectivamente, e são também eixos de simetria da elipse. F_1 e F_2 são os *focos* da elipse e C é o seu *centro* ($\overline{CF_1} = \overline{CF_2}$); a $\overline{F_1F_2}$ chama-se *distância focal*; V_i , com $i = 1, 2, 3$ e 4 , são os *vértices*; $[V_1V_2]$ é o *eixo maior*; $[V_3V_4]$ é o *eixo menor*; $[P_1P_2]$ é uma *corda* – segmento que liga dois quaisquer pontos da elipse (distintos); $[P_3P_4]$ é uma *corda focal* (passa por foco); $[P_5P_6]$ é um *diâmetro* (cordas que passam por C).

3.6.1 Estudo da elipse

(i) Definição geométrica e outras definições

Define-se *elipse* como o lugar geométrico dos pontos do plano tais que a soma das suas distâncias a dois pontos fixos do plano, designados por focos da elipse, é sempre igual a um comprimento constante, maior que a distância entre os focos (Figura 3.95). Na Figura 3.96 temos as designações dos vários elementos da elipse.

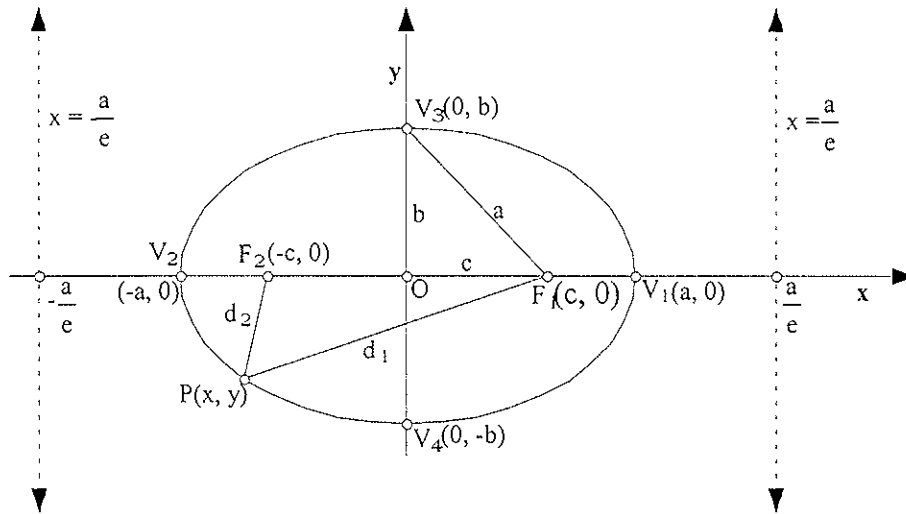


Figura 3.97: Uma elipse num referencial c. o. n.. Os *focos* têm coordenadas: $F_1(c, 0)$ e $F_2(-c, 0)$; a *distância focal* é $\overline{F_1F_2} = 2c$. Os *vértices* têm coordenadas: $V_1(a, 0)$, $V_2(-a, 0)$, $V_3(0, b)$ e $V_4(0, -b)$. O *eixo maior* é $[V_1V_2]$: $\overline{V_1V_2} = 2a$. O *eixo menor* é $[V_3V_4]$: $\overline{V_3V_4} = 2b$. Temos $d_1 + d_2 = \overline{F_1P} + \overline{F_2P} = 2a$ (definição de elipse). Pelo Teorema de Pitágoras, aplicado ao triângulo rectângulo em O, $[F_1OV_3]$, tem-se: $a^2 = b^2 + c^2$. As *directrizes* da elipse são as rectas: $x = \frac{a}{e}$ e $x = -\frac{a}{e}$, onde $e = \frac{c}{a}$ é a *excentricidade* da elipse ($0 \leq e < 1$).

(ii) Elipse com os focos sobre o eixo dos xx

Para deduzir uma equação que caracterize a elipse vamos começar por supor que os focos estão sobre o eixo das abcissas, simetricamente em relação à origem do referencial c. o. n. (ver Figura 3.97). Designando os focos por F_1 e F_2 e sendo $\overline{F_1F_2} = 2c$, tem-se as seguintes coordenadas para F_1 e F_2 : $F_1(c, 0)$ e $F_2(-c, 0)$. As distâncias entre um ponto qualquer do plano, que pertence à elipse, $P(x, y)$, e os focos são representadas por d_1 e d_2 , respectivamente, ou seja, temos $d_1 = \overline{F_1P}$ e $d_2 = \overline{F_2P}$. Ora, por definição de elipse (ver (i)), $d_1 + d_2$ é constante. Seja $2a$ essa constante. Temos: $d_1 + d_2 = 2a$. Assim, um ponto P pertence à elipse sse (Figura 3.95):

$$\begin{cases} d_1 + d_2 = 2a \\ 2a > 2c \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \overline{F_1P} + \overline{F_2P} = 2a \\ a > c \end{cases} \quad (3.26)$$

Assim, por 3.1 – secção 3.5.4 – vem que

$$d_1 = \overline{F_1P} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \quad \text{e} \quad d_2 = \overline{F_2P} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2},$$

donde, de (3.26), vem

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a.$$

Isolando um radical e elevando ambos os membros ao quadrado obtemos, sucessivamente:

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2 &= \left(2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x+c)^2+y^2 &= 4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} &= 4a^2-4cx+x^2-x^2+c^2-c^2 \Leftrightarrow a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a^2-cx. \end{aligned}$$

Voltando a elevar ambos os membros ao quadrado temos

$$\begin{aligned} a^2(x^2-2cx+c^2+y^2) &= a^4-2a^2cx+c^2x^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (a^2-c^2)x^2+a^2y^2 &= a^2(a^2-c^2). \quad (3.27) \end{aligned}$$

Ora, como $a > c$ (de (3.26)), tem-se $(a-c)(a+c) = a^2 - c^2 > 0$ (já que $a, c > 0$; com $c = 0$ é uma circunferência). Então, se pusermos $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, ou seja,

$$b^2 = a^2 - c^2,$$

b é um numero real positivo e a equação (3.27) pode ser escrita mais simplesmente

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Dividindo ambos os membros por a^2b^2 obtém-se

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (3.28)$$

que é a chamada *equação reduzida da elipse*. A elipse é simétrica em relação ao eixo dos xx , pois substituindo em (3.28), y por $(-y)$, obtém-se (3.28) outra vez. Também é simétrica em relação ao eixo dos yy , visto que substituindo em (3.28) x por $(-x)$ obtém-se (3.28) outra vez. Assim, a elipse é simétrica em relação à origem do referencial.

Chama-se excentricidade da elipse, e nota-se por e , ao quociente entre a semi-distância focal (c) e o semi-eixo maior (a):

$$e = \frac{c}{a}.$$

Como $a > c \geq 0$, dividindo as desigualdades por a temos, $0 \leq \frac{c}{a} < 1$, ou seja,

$$e \in [0, 1[\text{ (quando } e = 0 \Leftrightarrow c = 0 \text{ - temos uma circunferência).}$$

Designam-se por directrizes da elipse as rectas de equação:

$$x = \frac{a}{e} \quad \text{e} \quad x = -\frac{a}{e}.$$

Note-se que, como $0 \leq e < 1$, temos $\frac{1}{e} > 1$ e, multiplicando a desigualdade por a , vem: $\frac{a}{e} > a$.

Significa, então, que as directrizes são rectas verticais exteriores à elipse (Figura 3.97). Fazendo em particular, na equação (3.28), $b = a$, obtemos a equação:

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Ou seja, trata-se de uma circunferência de centro na origem do referencial e raio a . As circunferências são elipses com os semieixos, maior e menor, de comprimento a e, por conseguinte, com excentricidade (e distância focal) nula:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{0}{a} = 0.$$

(iii) Elipse com os focos sobre o eixo dos yy

Supondo que os focos da elipse encontram-se colocados no eixo das ordenadas, simetricamente em relação à origem do referencial, a sua representação será como a da Figura 3.98. Sendo os focos F_1 e F_2 , as suas coordenadas são dadas agora por $(0, c)$ e $(0, -c)$, respectivamente ($\overline{F_1F_2} = 2c$). Considerando um ponto qualquer $P(x, y)$ da elipse, então a soma das distâncias a que se encontra de F_1 e F_2 , ou seja, $d_1 + d_2$, é constante e é, neste caso, $2b$. Assim, o lugar geométrico da elipse é traduzido pela condição: $d_1 + d_2 = 2b$. Procedendo de forma semelhante à dedução da fórmula (3.28) em (ii), deduz-se a equação reduzida da elipse agora com os focos sobre o eixo dos yy ($a < b$):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Desta vez a excentricidade é dada por $e = \frac{c}{b}$ e as directrizes são dadas pelas condições

$$y = \frac{b}{e} \quad \text{e} \quad y = -\frac{b}{e}$$

(rectas horizontais fora da elipse) – Figura 3.98.

(iv) Elipse definida a partir de uma circunferência

A elipse também pode ser obtida a partir de uma circunferência, fazendo uma transformação afim numa das coordenadas e mantendo a outra invariante. Consideremos, então, uma circunferência de centro na origem de um referencial c. o. n. e com raio r – equação (3.3) –

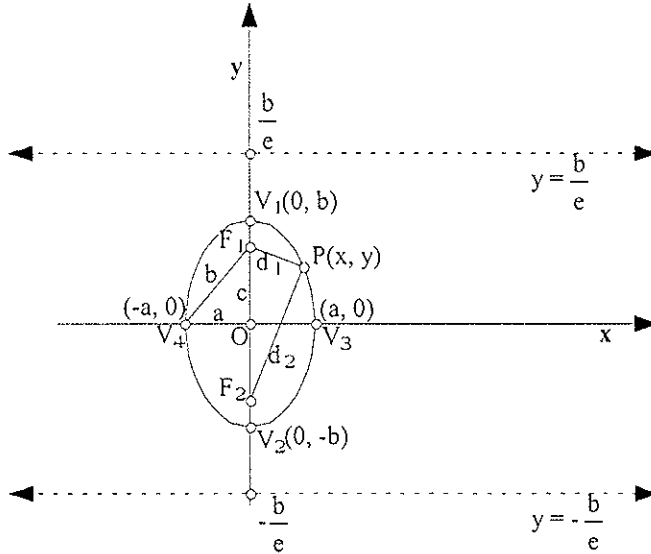


Figura 3.98: Uma elipse com o eixo maior sobre o eixo das ordenadas. Os *focos* têm coordenadas: $F_1(0, c)$ e $F_2(0, -c)$. A *distância focal* é $\overline{F_1F_2} = 2c$. Os *vértices* têm coordenadas: $V_1(0, b)$, $V_2(0, -b)$, $V_3(a, 0)$ e $V_4(-a, 0)$. O *eixo maior* é $[V_1V_2]$: $\overline{V_1V_2} = 2b$. O *eixo menor* é $[V_3V_4]$: $\overline{V_3V_4} = 2a$. Temos $d_1 + d_2 = \overline{F_1P} + \overline{F_2P} = 2b$. Pelo Teorema de Pitágoras, aplicado ao triângulo $[F_1OV_4]$, rectângulo em O , tem-se: $a^2 = b^2 - c^2$. As *directrizes* da elipse são as rectas de equação: $y = \frac{b}{e}$ e $y = -\frac{b}{e}$, em que a *excentricidade* da elipse é $e = \frac{c}{b}$ ($0 \leq e < 1$).

secção 3.5.7. Fazemos uma transformação afim das ordenadas⁶⁹ dos pontos da circunferência ($k > 0$):

$$\begin{cases} X = x \\ Y = ky \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{X}{k} \\ y = \frac{Y}{k} \end{cases}.$$

Substituindo em 3.3, obtemos:

$$X^2 + \left(\frac{Y}{k}\right)^2 = r^2.$$

Dividindo a equação pelo segundo membro, r^2 , sai a equação reduzida da elipse (Figura 3.99):

$$\frac{X^2}{r^2} + \frac{Y^2}{(rk)^2} = 1.$$

⁶⁹ Claro que o mesmo raciocínio se aplica às abcissas: $\begin{cases} X = kx \\ Y = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{X}{k} \\ y = Y \end{cases}$. E a equação reduzida da elipse é: $\frac{X^2}{(rk)^2} + \frac{Y^2}{r^2} = 1$

(Figura 3.100).

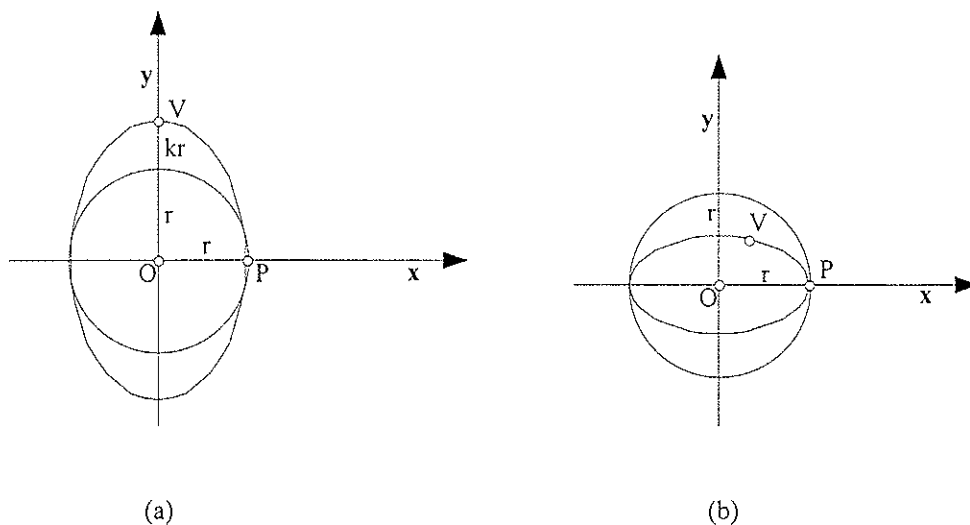


Figura 3.99: Elipse obtida a partir da circunferência de centro $O(0, 0)$ e raio $\overline{OP} = r$, por uma transformação afim das ordenadas dos pontos da circunferência (e. g. $\overline{OV} = k\overline{OP}$): (a) Com $k > 1$; (b) Com $0 < k < 1$ – obtemos uma elipse com o eixo maior segundo o eixo dos xx .

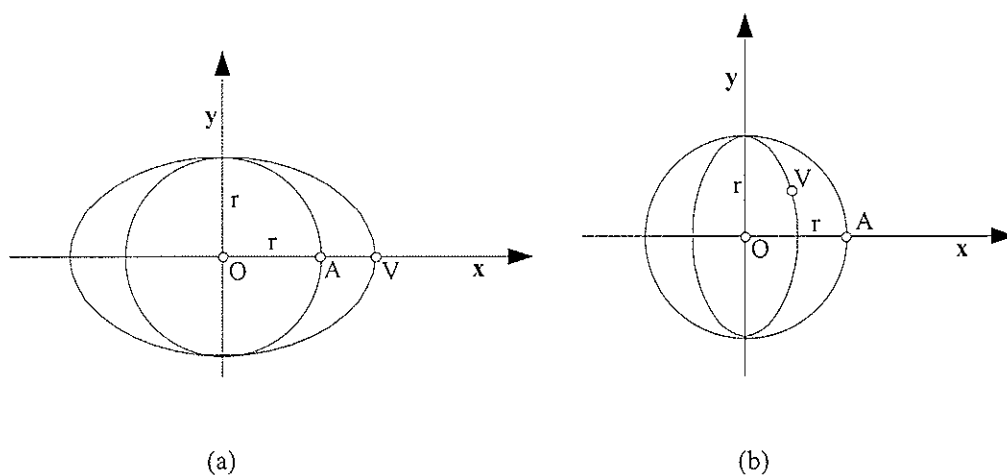


Figura 3.100: Elipse obtida a partir da circunferência de centro $O(0, 0)$ e raio $\overline{OA} = r$, por uma transformação afim das abcissas dos pontos da circunferência (e. g. $\overline{OV} = k\overline{OA}$): (a) Com $k > 1$; (b) Com $0 < k < 1$ – obtemos uma elipse com o eixo maior segundo o eixo dos yy .

Na Figura 3.100 temos a transformação afim das abcissas dos pontos duma circunferência de centro na origem de um referencial c. o. n. e raio r .

(v) Uma construção da elipse

Para determinar, com papel e lápis (e um compasso), os focos da elipse dados os eixos maior $[AB]$ e menor $[CD]$, toma-se para abertura do compasso metade do eixo maior (\overline{AO} com O o

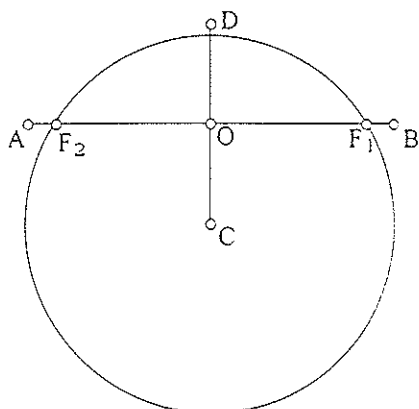


Figura 3.101: Determinação dos focos F_1 e F_2 da elipse dados os eixos maior [AB] e menor [CD] – colocados perpendicularmente e com o ponto médio comum O. Ver texto com os detalhes.

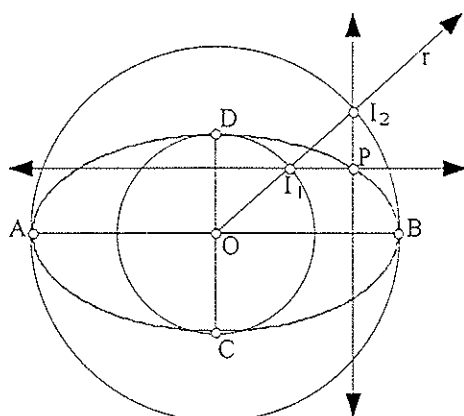


Figura 3.102: Construção da elipse conhecido o eixo maior [AB] e o eixo menor [CD]: Traçam-se duas *circunferências concêntricas*⁷⁰, no centro da elipse (O) cada uma passando por um par de vértices; constrói-se uma semi-recta r com origem também em O. Pela intersecção da semi-recta r com as circunferências, I_1 e I_2 , fazem-se passar perpendiculares aos eixos respectivos ([CD] e [AB]). O ponto de encontro destas perpendiculares é um ponto P da elipse. Determinamos depois outros pontos, com outras semi-rectas: tantos quantos os necessários para representar a elipse aproximada, à mão livre.

centro da elipse)⁷¹. Com centro numa extremidade (vértice) do eixo menor, por exemplo C, traçamos uma circunferência que intersecta o eixo maior [AB] determinando os pontos F_1 e F_2 – os focos – Figura 3.101. De facto, $\overline{CF_1} = \overline{CF_2} = \overline{AO}$ é o semi-eixo maior da elipse, já que temos $\overline{CF_1} + \overline{CF_2} = \text{constante}$ (ver (i) e (ii)). Constrói-se agora uma elipse utilizando o chamado *método das circunferências* (Figura 3.102).

⁷⁰ Duas circunferências dizem-se *concêntricas* quando têm o mesmo centro mas raios diferentes.

⁷¹ Veja as instruções para a construção da elipse no Sketchpad na secção 3.8.4.

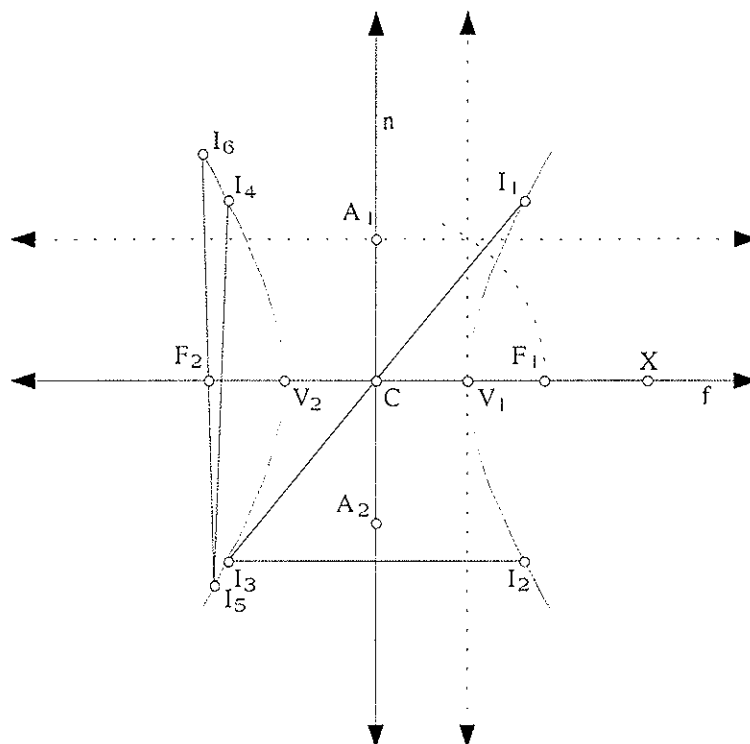


Figura 3.103: Os elementos de uma hipérbole (que tem sempre dois ramos - azul). As rectas f e n são designadas por *eixo focal* e *eixo normal*, respectivamente. F_1 e F_2 são os focos ($\overline{F_1F_2}$ é a *distância focal*), C é o *centro* e V_1 e V_2 são os *vértices* da hipérbole; $[V_1V_2]$ é o *eixo transversal* ou *eixo real* da hipérbole; $[A_1A_2]$ é o *eixo não transversal* ou *conjugado* ou *imaginário* ($\overline{A_1C} = \overline{CF_1}$); $[I_2I_3]$ e $[I_4I_5]$ são cordas (segmentos que unem quaisquer dois pontos da hipérbole); $[I_1I_3]$ é um diâmetro (cordas que incluem C). $[I_5I_6]$ é uma corda focal (passa por foco). X é um ponto sobre o eixo focal.

3.6.2 Estudo da hipérbole

(i) Definição geométrica e outras definições

Chama-se *hipérbole* ao lugar geométrico dos pontos P do plano tais que o módulo da diferença das distâncias de P a dois pontos fixos do plano, chamados *focos* da hipérbole, é sempre igual a uma constante positiva; esta é sempre menor que a distância entre os focos (Figura 3.104). Na Figura 3.103 temos as designações dos vários elementos de uma hipérbole.

(ii) Hipérbole com os focos sobre o eixo dos xx

Consideremos os focos da hipérbole sobre o eixo das abcissas e simetricamente colocados em relação à origem do referencial $c. o. n.$ – Figura 3.104. Sejam $F_1(c, 0)$ e $F_2(-c, 0)$ os focos da

hipérbole. Ora, $2c$ será a distância focal, ou seja, $\overline{F_1F_2} = 2c$. Tome-se um ponto qualquer $P(x, y)$ da hipérbole, e representemos por d_1 a distância de P a F_1 e por d_2 a distância de P a F_2 . Por definição, o módulo da diferença das distâncias a que P está dos focos, ou seja $|d_1 - d_2|$, é constante. Seja $2a$ essa constante. Assim, o lugar geométrico da hipérbole é traduzido por:

$$|d_1 - d_2| = 2a \quad \text{ou} \quad |\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = 2a,$$

ou de forma equivalente

$$d_1 - d_2 = \pm 2a \quad \text{ou} \quad \overline{PF_1} - \overline{PF_2} = \pm 2a. \quad (3.29)$$

Assim, podemos escrever de (3.1) que

$$d_1 = \overline{F_1P} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \quad \text{e} \quad d_2 = \overline{F_2P} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}.$$

Então de (3.29), vem que

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a,$$

Desembaraçando de radicais, desenvolvendo e reduzindo obtemos sucessivamente

$$\begin{aligned} & \left(\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right)^2 = \left(\pm 2a + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \right)^2 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow (x-c)^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow x^2 + c^2 - 4cx - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + c^2 \Leftrightarrow cx + a^2 = \pm a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow c^2x^2 + 2ca^2x + a^4 = a^2x^2 + 2ca^2x + a^2c^2 + a^2y^2 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow c^2x^2 + a^4 = a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2. \quad (3.30) \end{aligned}$$

Ora, como $a < c$ (visto que $0 < 2a < 2c$ de (i)), tem-se $(c+a)(c-a) = c^2 - a^2 > 0$. Então, se pusermos

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} \quad (\text{b será um numero real positivo}),$$

ou seja,

$$b^2 = c^2 - a^2 \Leftrightarrow c^2 = a^2 + b^2,$$

a equação (3.30) pode ser escrita da forma

$$a^2x^2 + b^2x^2 + a^4 = a^2x^2 + a^4 + a^2b^2 + a^2y^2 \Leftrightarrow b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2.$$

Dividindo ambos os membros por a^2b^2 , vem

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (3.31)$$

que é designada a *equação reduzida da hipérbole*.

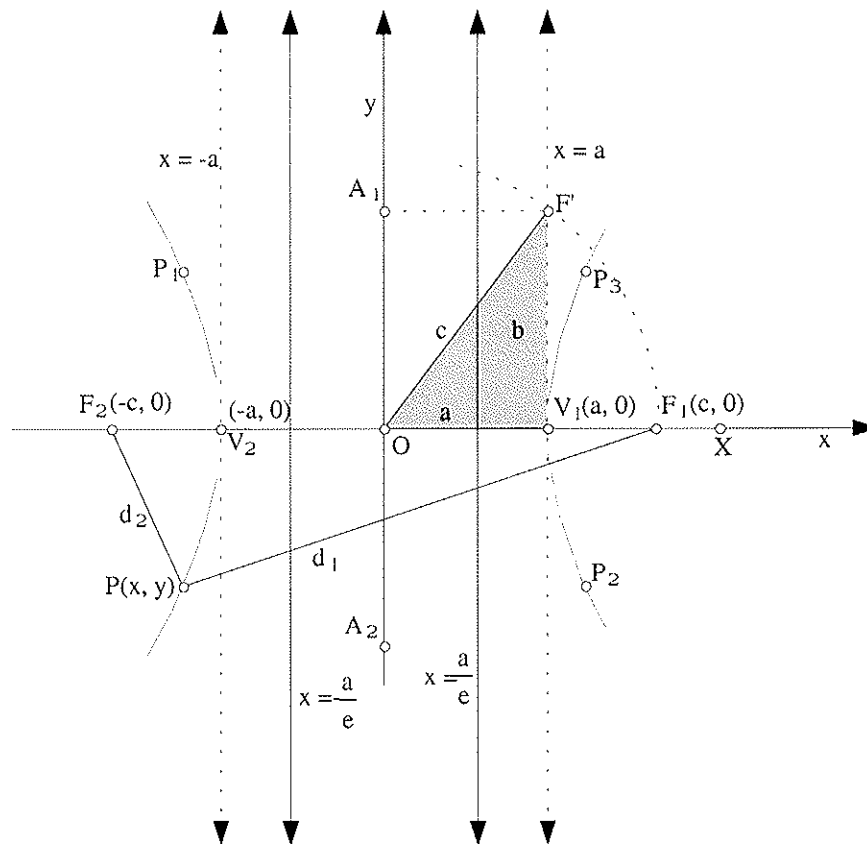


Figura 3.104: No referencial c. o. n. uma hipérbole (vermelho) tem os *focos* de coordenadas $F_1(c, 0)$ e $F_2(-c, 0)$. Assim, a *distância focal* é $\overline{F_1F_2} = 2c$. Os *vértices* têm coordenadas: $V_1(a, 0)$ e $V_2(-a, 0)$. Os pontos P , P_1 , P_2 e P_3 pertencem à hipérbole. O *eixo transverso* $[V_1V_2]$ tem $\overline{V_1V_2} = 2a$. O *eixo não transverso* $[A_1A_2]$ tem $\overline{A_1A_2} = 2b$. Temos $|d_1 - d_2| = |\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = 2a$. Do triângulo rectângulo em V_1 , $[F_1V_1O]$, tem-se: $c^2 = a^2 + b^2$. As rectas $x = -\frac{a}{e}$ e $x = \frac{a}{e}$ são as *directrizes* da hipérbole ($e = \frac{c}{a}$ é a *excentricidade*). X é um ponto sobre o eixo focal.

Observemos que, tal como a elipse, a hipérbole é simétrica em relação ao eixo dos xx , e em relação ao eixo dos yy , pois substituindo em 3.31, y por $(-y)$ e x por $(-x)$, respectivamente, obtém-se 3.31 na mesma. Assim, a hipérbole é simétrica em relação à origem do referencial.

Denomina-se *excentricidade* da hipérbole, e denota-se, como no caso da elipse, por e , ao quociente entre a semi-distância focal (c) e o semi-eixo transverso (a):

$$e = \frac{c}{a}.$$

Como $0 < a < c$, dividindo estas desigualdades por a , vem $\frac{c}{a} > 1$, ou seja,

$$e \in]1, +\infty[.$$

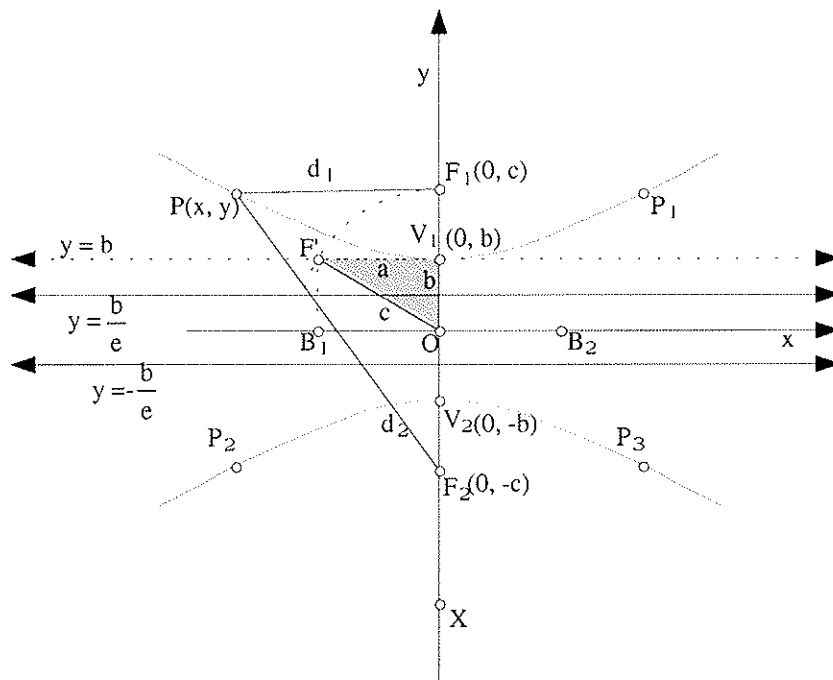


Figura 3.105: Uma hipérbole (vermelho) com os *focos* sobre os eixos das ordenadas, num referencial c. o. n., com coordenadas $F_1(0, c)$ e $F_2(0, -c)$. A *distância focal* é $\overline{F_1F_2} = 2c$. Os *vértices* têm coordenadas: $V_1(0, b)$ e $V_2(0, -b)$. P, P_1, P_2 e P_3 são pontos quaisquer da hipérbole. O *eixo transverso* $[V_1V_2]$ tem $\overline{V_1V_2} = 2b$. O *eixo não transverso* $[B_1B_2]$ tem $\overline{B_1B_2} = 2a$. Temos $|d_1 - d_2| = |\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = 2b$. Tem-se, do triângulo rectângulo em $V_1, [F_1V_1O]$, a relação: $c^2 = a^2 + b^2$. As rectas $y = \frac{b}{e}$ e $y = -\frac{b}{e}$ são as *directrizes* da hipérbole ($e = \frac{c}{b}$ é a *excentricidade*). X é um ponto sobre o eixo focal.

Designam-se directrizes da hipérbole às rectas de equação:

$$x = \frac{a}{e} \quad \text{e} \quad x = -\frac{a}{e}.$$

Desta vez, temos $e > 1$ ou $\frac{1}{e} < 1$ ou $\frac{a}{e} < a$, pelo que as directrizes estão sempre entre os dois ramos da hipérbole.

(iii) Hipérbole com os focos sobre o eixo dos yy

Consideremos, agora, que os focos se encontram no eixo das ordenadas e são simétricos em relação à origem do referencial c. o. n. – Figura 3.105. Sendo os focos representados por F_1 e F_2 , as suas coordenadas são dadas, neste caso, por $(0, c)$ e $(0, -c)$, respectivamente. Admitindo um ponto

$P(x, y)$ qualquer da hipérbole, e tomando por d_1 a distância de P a F_1 e por d_2 a distância de P a F_2 , o módulo da diferença das distâncias a que P está dos focos é constante. Seja $2b$ essa constante. Assim, o lugar geométrico da hipérbole é traduzido por:

$$|d_1 - d_2| = 2b \quad \text{ou} \quad |\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = 2b.$$

Fazendo um estudo análogo ao realizado para a hipérbole com os focos sobre o eixo dos xx , obtemos a equação reduzida da hipérbole ($c > b$):

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1. \quad (3.32)$$

Desta vez os vértices da hipérbole têm coordenadas $V_1(0, b)$ e $V_2(0, -b)$, a excentricidade é dada por $e = \frac{c}{b}$ e as directrizes são dadas pelas equações $y = \frac{b}{e}$ e $y = -\frac{b}{e}$.

Em particular, se fizermos $a = b$, em (3.31) ou (3.32) – equações reduzidas da hipérbole, estas ficam escritas na forma

$$x^2 - y^2 = a^2 \quad \text{ou} \quad y^2 - x^2 = a^2,$$

consoante os focos estejam no eixo das abcissas ou no eixo das ordenadas, respectivamente. A estas hipérbolés chamamos *hipérbolés equiláteras*., já que os eixos transversos e não transversos são iguais.

(iv) Uma construção da hipérbole⁷²

Da própria definição de hipérbole procedemos à construção desta cónica, conforme a Figura 3.106. Dados os focos, F_1 e F_2 , e os vértices, V_1 e V_2 , da hipérbole, o ponto C será o ponto médio de $[V_1V_2]$ e $[F_1F_2]$. Toma-se um ponto X arbitrário sobre o eixo focal e fora do segmento de recta $[V_1V_2]$. Deste modo será sempre $\overline{V_2X} - \overline{V_1X}$ constante (ou seja, $2a$). Procede-se como na Figura 3.106.

3.6.3 Estudo da parábola

(i) Definição geométrica e outras definições

Chama-se *parábola* ao lugar geométrico dos pontos do plano equidistantes dum dado ponto, chamado *foco*, e duma recta, chamada *directriz*, que não contém o foco. Na Figura 3.107,

⁷² Ver na secção 3.8.4 a construção da hipérbole no Sketchpad.

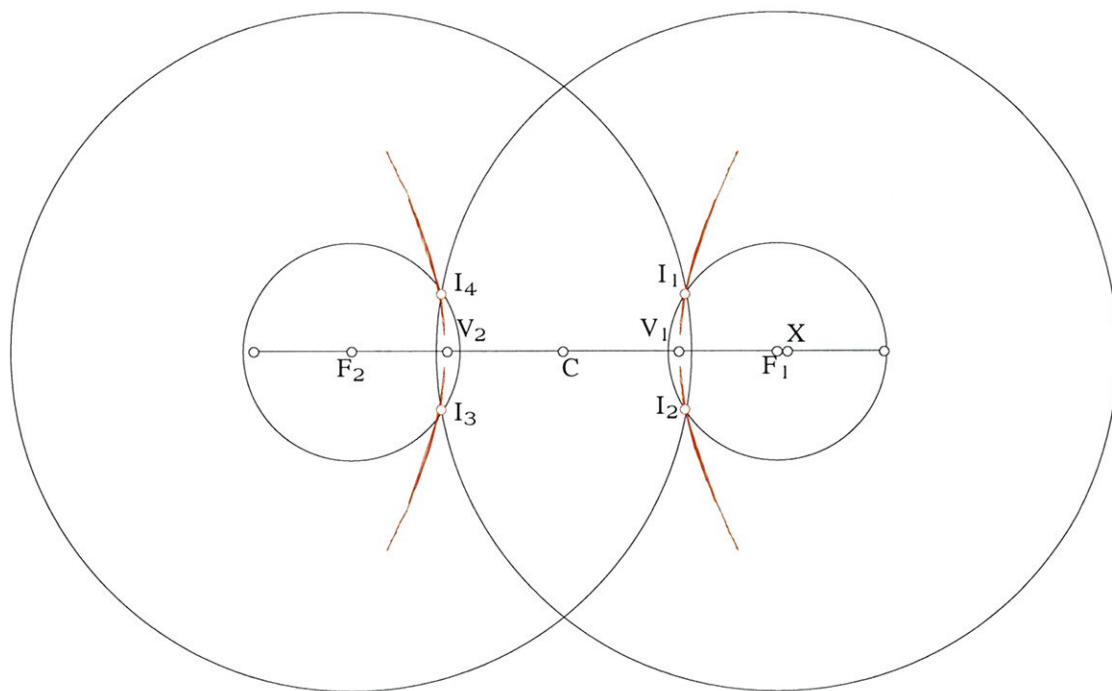


Figura 3.106: Construção da hipérbole (vermelho) a partir da sua definição; dados os focos F_1 e F_2 e os vértices V_1 e V_2 : C é o ponto médio de $[V_1V_2]$ e $[F_1F_2]$ (centro da hipérbole). Toma-se X , um ponto qualquer sobre o eixo focal mas fora do eixo transversal $[V_1V_2]$. Centramos circunferências em F_1 e F_2 com raios $\overline{V_1X}$ e $\overline{V_2X}$. Os pontos de intersecção das circunferências, duas a duas (maior com menor), são pontos da hipérbole como, por exemplo, I_1, I_2 (ramo esquerdo) e I_3, I_4 (ramo direito). Escolhendo mais pontos como X , teríamos um número suficiente de pontos sobre a hipérbole para a representar aproximadamente, à mão livre.

temos as designações dos vários elementos de uma parábola.

(ii) Parábola com a concavidade voltada para cima.

Fixando, num referencial $c. o. n.$, o foco F sobre o semi-eixo positivo dos yy , marquemos a directriz na horizontal (designemos por D o ponto de intersecção da directriz com o eixo dos yy), de tal modo que o eixo das abcissas seja a mediatriz do segmento de recta definido pelo foco e por D – Figura 3.108. Consideremos p , que se designa *parâmetro da parábola*, como sendo a distância entre o foco, F , e o ponto D , ou seja, a distância entre o foco e a directriz (p define uma parábola). Assim, F e D têm coordenadas $\left(0, \frac{p}{2}\right)$ e $\left(0, -\frac{p}{2}\right)$, respectivamente. A directriz é uma recta horizontal de equação $y = -\frac{p}{2}$, e o vértice da parábola coincide com a origem do referencial. Consideremos,

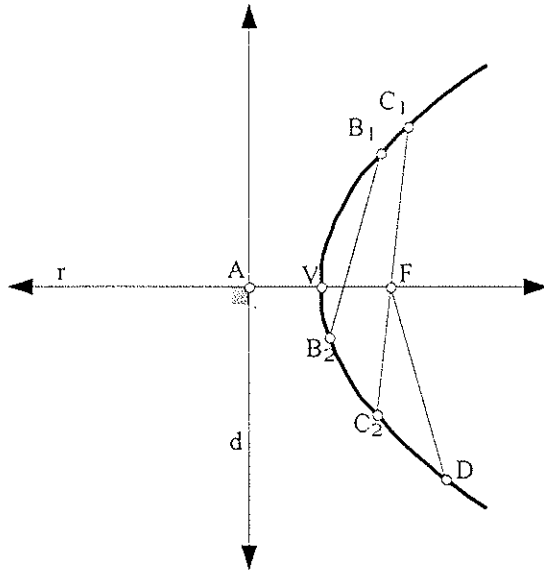


Figura 3.107: Os elementos de uma parábola. A recta d é a *directriz* e a recta r é o *eixo de simetria* ($d \perp r$), intersectam-se em A . F é o foco. V , ponto médio de $[AF]$, designa-se vértice da parábola. $[B_1B_2]$ é uma corda (segmento que une dois quaisquer pontos da parábola). $[C_1C_2]$ é uma corda focal. $[DF]$ é um raio focal.

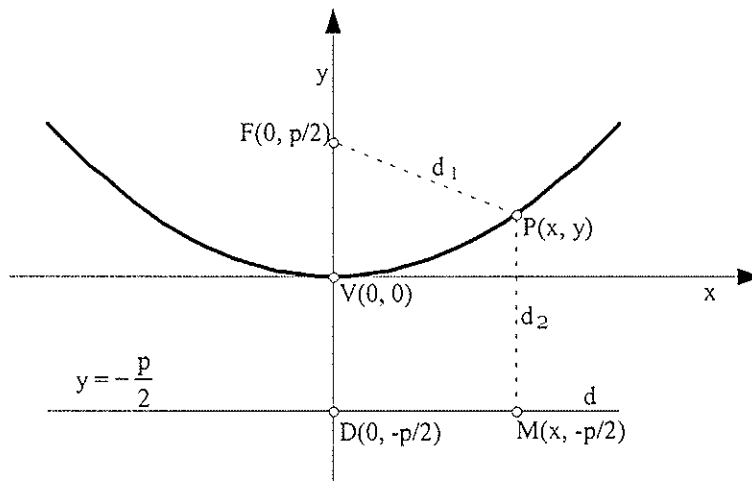


Figura 3.108: Parábola com o foco no semi-eixo positivo dos yy : $F\left(0, \frac{p}{2}\right)$. A directriz d é a recta horizontal $y = -\frac{p}{2}$. $D\left(0, -\frac{p}{2}\right)$ é a intersecção de d com o eixo dos yy . O vértice V da parábola é a origem do referencial c. o. n.. O eixo dos xx é a mediatriz de $[FD]$. O eixo dos yy é o eixo de simetria da parábola e esta escreve-se pela condição: $d_1 = \overline{PF} = \overline{PM} = d_2$.

um qualquer ponto $P(x, y)$ sobre a parábola e um ponto $M\left(x, -\frac{p}{2}\right)$ sobre a directriz. O lugar geométrico da parábola é traduzido pela condição

$$d_1 = d_2 \text{ ou } \overline{PM} = \overline{PF}, \quad (3.33)$$

sendo \overline{PM} a distância, na vertical, de dois pontos, ou seja,

$$\overline{PM} = \left| y + \frac{p}{2} \right|,$$

e \overline{PF} é a distância de dois pontos quaisquer do plano, ou seja, de (3.1):

$$\overline{PF} = \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{p}{2} \right)^2}.$$

Substituindo na igualdade (3.33), vem

$$\left| y + \frac{p}{2} \right| = \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{p}{2} \right)^2},$$

elevando ambos os membros ao quadrado fica:

$$y^2 + py + \frac{p^2}{4} = x^2 + y^2 - py + \frac{p^2}{4},$$

donde

$$x^2 = 2py \quad (3.34)$$

é a chamada equação *reduzida da parábola*.

Observe-se que a parábola é simétrica em relação ao eixo dos yy , uma vez que substituindo x por $(-x)$, obtém-se outra vez (3.34).

Chama-se excentricidade da parábola, e denota-se por e , à razão das distâncias de qualquer dos seus pontos ao foco e à directriz. Significa, portanto, que a excentricidade da parábola é sempre igual a 1, ou seja,

$$e = 1.$$

(iii) Uma construção da parábola⁷³

Tiramos da própria definição de parábola um processo de construção desta curva por pontos (Figura 3.109), uma vez que é constituída por todos aqueles que são equidistantes do foco F e da directriz d .

⁷³ Veja na secção 3.8.4 a construção no Sketchpad da parábola.

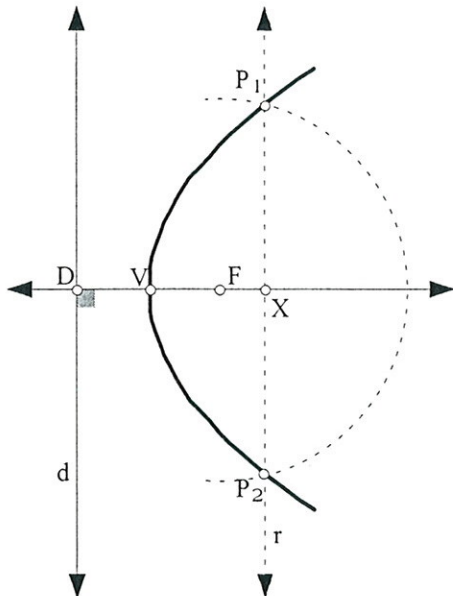


Figura 3.109: Construção de uma parábola, conhecido o foco F e a directriz d : determina-se o ponto D da directriz construindo a perpendicular a d que passa por F (a recta FD); o vértice V da parábola é o ponto médio do segmento de recta $[FD]$. Tomando um ponto qualquer X sobre a semi-recta $[VF]$, traça-se por X uma paralela, r , à recta d . Todos os pontos da recta r estão à distância⁷⁴ \overline{DX} da recta d . Representando, com centro em F e raio igual a \overline{DX} , um arco de circunferência até cortar a recta r em dois pontos P_1 e P_2 , estes pertencem à parábola. Repete-se o processo, marcando-se outros pontos na semi-recta $[VF]$, como X , obtendo, assim, mais pontos da parábola. Finalmente, unem-se todos os pontos da parábola à mão livre, obtendo uma parábola aproximada tão precisa quanto desejarmos.

3.6.4 Sumário das propriedades das cónicas

Sumariamos na Tabela 3.2 as principais características das três cónicas estudadas nas secções 3.6.1, 3.6.2 e 3.6.3.

3.7 Aplicações práticas

3.7.1 Transformações geométricas

Exercício 1: São dadas duas circunferências C_1 e C_2 , uma recta r e um número $d > 0$. Encontre uma recta paralela a r que intersecte C_1 e C_2 em pontos $P_1 \in C_1$ e $P_2 \in C_2$ tais que $\overline{P_1P_2} = d$

⁷⁴ Chama-se *distância de um ponto P a uma recta r* , e escreve-se $d(A, r)$, à distância do ponto P ao ponto de r mais próximo de P . Ora, o ponto de r mais próximo de P é o pé da perpendicular baixada de P sobre r , ou seja, é o ponto de intersecção da recta r com a perpendicular a r que passa pelo ponto P . A *distância entre duas rectas paralelas* é a distância de um ponto de uma delas à outra.

Propriedades Cónicas	Definição	Foco(s)	Vértice(s)	Directriz(es)	Excentricidade (e)	Simetria
<i>Elipse</i> $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$d_1 + d_2 = \text{constante}$ (Figura 3.97)	dois	quatro	$x = \pm \frac{a}{e}$	$[0, 1[$	dois eixos
<i>Hipérbole</i> $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$ d_1 - d_2 = \text{constante}$ (Figura 3.104)	dois	dois	$x = \pm \frac{a}{e}$	$]1, +\infty[$	dois eixos
<i>Parábola</i> $x^2 = 2py$	$d_1 = d_2$ (Figura 3.108)	um	um	$y = -\frac{p}{2}$	1	um eixo

Tabela 3.2: Propriedades das cónicas.

(Araújo 1999).

Resolução: Marquemos, na recta r , dois pontos A e B à distância d um do outro. Pode, então, dar-se dois casos: P_2 é a imagem de P_1 pela transformação associada a \overline{AB} , ou P_2 é a imagem de P_1 pela transformação associada a \overline{BA} .

1º Caso: P_2 , sendo a imagem de $P_1 \in C_1$, pertence à imagem C'_1 de C_1 pela translação associada a \overline{AB} , logo P_2 é um dos pontos de intersecção de C'_1 com C_2 (caso haja outro ponto de intersecção, ele conduz a outra solução do mesmo problema). Assim, e uma vez que é fácil determinar C'_1 (bastando construir o trasladado do centro de C_1 – Figura 3.110), posso determinar P_2 ; e uma solução do problema é a recta paralela a r que passa por P_2 . (O problema tem no máximo quatro soluções distintas).

2º Caso: Análogo, visto que P_2 é a imagem de P_1 pela translação associada a \overline{BA} .

Exercício 2: São dados dois pontos P e Q do mesmo lado da recta r . Encontre um ponto O em r de tal modo que a soma das distâncias de O a P e de O a Q seja a menor possível (Araújo 1999).

Resolução: Dado um qualquer ponto $M \in r$, e designando por P' a imagem de P pela reflexão de espelho r , temos $\overline{MP} = \overline{MP'}$ (Figura 3.111). Assim, minimizar a soma $\overline{MQ} + \overline{MP}$ ($M \in r$), é o mesmo que minimizar $\overline{MQ} + \overline{MP'}$ ($M \in r$). Se M não pertencer ao segmento de recta $[QP']$, a desigualdade triangular (Propriedade (iv) – secção 3.2), aplicada ao $\Delta[QMP']$, diz que

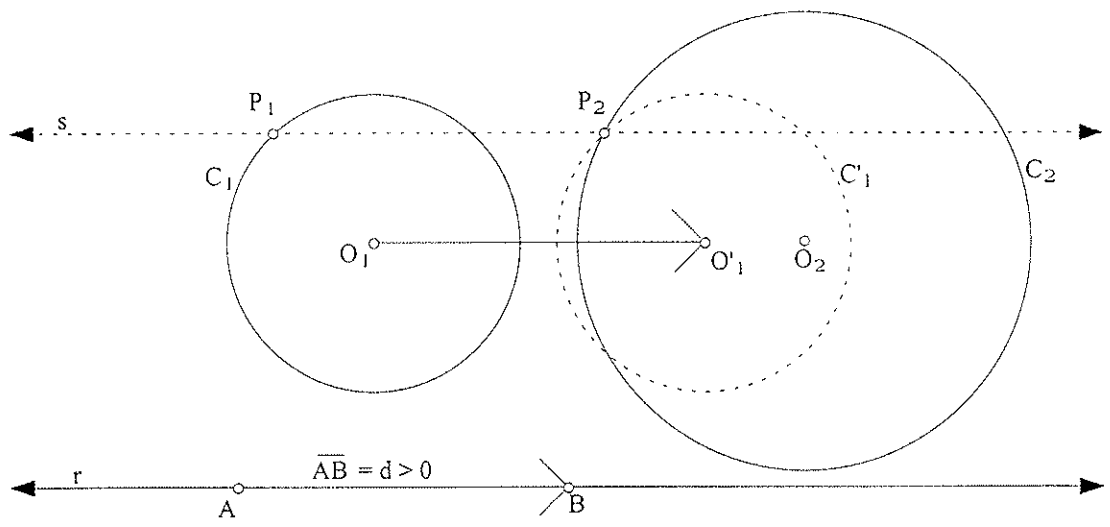


Figura 3.110: Em r estão marcados dois pontos A e B à distância d um do outro. A circunferência C_1' , de centro O'_1 , é a imagem de C_1 (com centro O_1) pela translação associada ao vector \overline{AB} . Em $s \parallel r$ temos: $P_1 \in C_1$ e a sua imagem $P_2 \in C_2 \cap C'_1$.

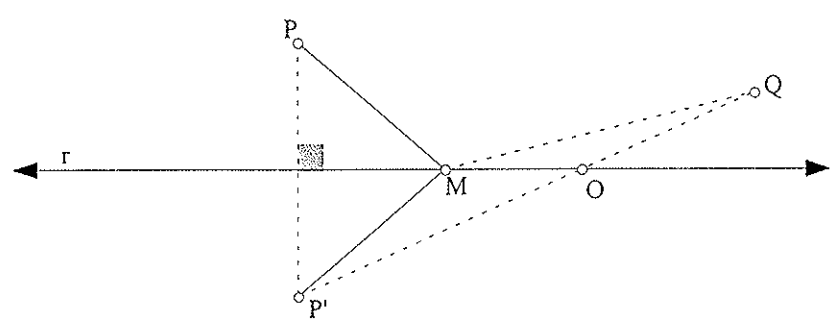


Figura 3.111: P e Q são dois pontos quaisquer do mesmo lado da recta r . $M \in r$ e P' é a imagem de P pela reflexão no espelho r . Temos: $\overline{MP} = \overline{MP'}$. O ponto O, de intersecção de $[QP']$ com r , é o ponto cuja soma das distâncias de O a P e de O a Q é a menor possível.

$$\overline{MQ} + \overline{MP'} > \overline{QP'}$$

e se M for a intersecção de $[QP']$ com r , temos

$$\overline{MQ} + \overline{MP'} = \overline{QP'}$$

Ou seja, o ponto O de intersecção de $[QP']$ com r é o que procurávamos.

Exercício 3: Dado um ponto O no interior do ângulo $\angle ABC$ (isto é, entre as semi-rectas com origem comum B: $[BA$ e $[BC)$, construa por O uma recta r que corte os lados do ângulo em

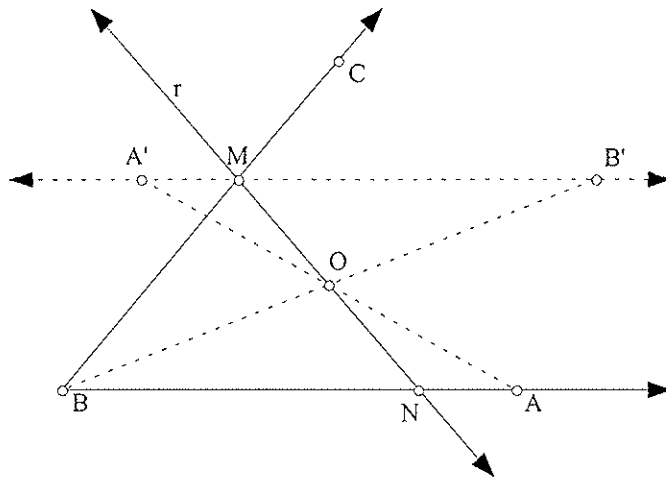


Figura 3.112: O é interior ao $\angle ABC$. A' e B' são as imagens de A e B , respectivamente, pela simetria de centro O . M é a intersecção da semi-recta $[BC$ com a recta $A'B'$. N é a imagem de M pela simetria de centro O . Os pontos M e N determinam r , e O é o ponto médio de $[MN]$.

pontos M e N tais que O seja o ponto médio de $[MN]$ (Araújo 1999).

Resolução: Construimos, através da simetria de centro O , A' e B' , a imagem de A e de B , respectivamente (Figura 3.112). M é a intersecção da semi-recta $[BC$ com a recta $A'B'$. N é a imagem de M pela simetria de centro O , obtendo-se, assim, o pretendido.

Exercício 4: São dados um quadrado $[ABCD]$ e um ponto X num dos seus lados. Inscreva em $[ABCD]$ um triângulo equilátero de que um dos vértices seja X (Araújo 1999).

Resolução: Podemos observar, na Figura 3.113, que pela rotação $(X; 60^\circ)$ do quadrado $[ABCD]$, obtém-se Z – ponto de intersecção com a sua imagem $[A'B'C'D']$. Pela rotação $(X; -60^\circ)$, Z é enviado em Y , e temos, assim, o triângulo equilátero $[XYZ]$ pedido.

Exercício 5: Dados três pontos P, Q, R numa circunferência C de centro O e raio $[OP]$, construa $X \in C$ de tal modo que $[QR]$ e $[PX]$ se intersectem no ponto médio de $[PX]$ (Araújo 1999).

Resolução: Os pontos médios das cordas $[PX]$, M , com $X \in C$, constituem a imagem de C pela homotetia de centro P e razão $\frac{1}{2}$; essa imagem é a circunferência C' de diâmetro $[OP]$. O ponto médio da corda procurada é pois uma das intersecções de C' com $[QR]$. Este problema pode não ter solução, ter um ou duas soluções. Na Figura 3.114 apresenta-se uma solução, mas podíamos referenciar uma segunda solução: o segmento de recta de extremo em P cujo ponto médio é o segundo ponto de intersecção de C' com $[QR]$.

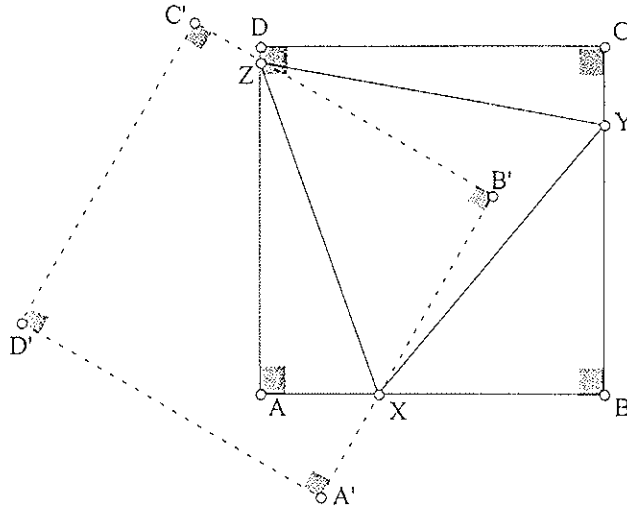


Figura 3.113: O quadrado [A'B'C'D'] é a imagem do quadrado [ABCD] pela rotação (X; 60°), intersectando-se em Z. Y é a imagem de Z pela rotação (X; -60°). O Δ[XYZ] é equilátero.

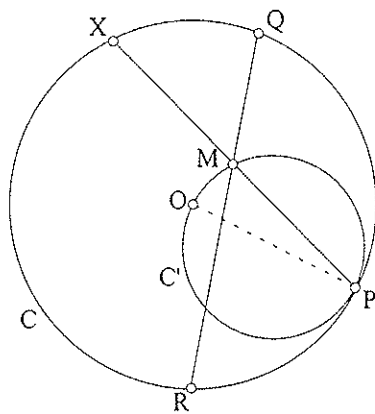


Figura 3.114: P, Q, R são pontos da circunferência C. Os pontos médios das cordas [PX], $X \in C$, estão na imagem C' – circunferência de diâmetro [OP], de C, pela homotetia de centro P e razão $\frac{1}{2}$. M é o ponto médio da corda [PX].

3.7.2 Propriedades dos triângulos

Exercício 1: Considera um qualquer triângulo Δ[ABC] equilátero, como na Figura 3.115.

1.1 Exprime a altura, h, do triângulo em função do comprimento, x, do seu lado.

Resolução: Na Figura 3.115, temos que a altura h, relativamente à base [AB], divide [AB] ao meio, isto é, M é o ponto médio de [AB]. Ora, como o triângulo [AMC] é rectângulo em M, temos pelo Teorema de Pitágoras:

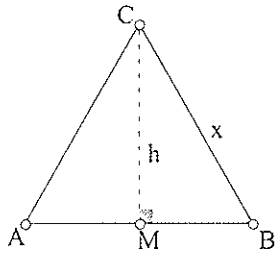


Figura 3.115: O $\Delta[ABC]$ é um triângulo equilátero qualquer. M é o ponto médio de $[AB]$ e h é a altura do triângulo relativamente à base $[AB]$. x é o comprimento do lado.

$$h^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = x^2 \Leftrightarrow h^2 = x^2 - \frac{x^2}{4} \Leftrightarrow h^2 = \frac{3x^2}{4} \Leftrightarrow h = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}|x|.$$

Ou seja, a expressão que exprime a altura, h , do triângulo como função do comprimento, $x > 0$, do seu lado é $h = \frac{\sqrt{3}}{2}x$.

1.2 Indica a expressão que define a área do triângulo.

Resolução: A área de um triângulo é dada por: $\text{Área} = \frac{b \cdot h}{2}$ (ver Apêndice IV). Neste

caso, a base $b = x$ e a altura $h = \frac{\sqrt{3}}{2}x$, logo $\text{Área}_{\text{triângulo}} = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$.

Exercício 2: Considerando o $\Delta[ABC]$ equilátero, mostre que, tendo os lados $\sqrt{3}$ m, o centro fica a meio metro de qualquer base (retirado de XEQMAT, Matemática, 10º Ano, Editorial o Livro – Pág. 9).

Resolução: Sendo o triângulo $\Delta[ABC]$ equilátero, o ortocentro, o baricentro, o circuncentro e o incentro coincidem (Figuras 3.15, 3.18 e 3.116). Vamos então traçar duas alturas que se cruzam no ponto O (ortocentro), $[AP]$ e $[BQ]$, e como são também bissetrizes, obtemos as amplitudes dos ângulos $\angle OBP$ e $\angle BOP$:

$$\widehat{OBP} = 30^\circ \text{ e } \widehat{BOP} = 60^\circ [= 180^\circ - (90^\circ + 30^\circ)].$$

Ora, temos que, o $\Delta[BOP]$ é metade de um triângulo equilátero (do $\Delta[OBC]$), logo \overline{OP} é metade de \overline{OB} e de \overline{OA} , ou seja, $\overline{OA} = 2\overline{OP}$. Logo, o centro O dista da base $[BC]$ $\frac{1}{3}$ da altura do triângulo

$$\Delta[ABC], [AP]: \overline{AP} = \overline{AO} + \overline{OP} = 2\overline{OP} + \overline{OP} = 3\overline{OP} \Leftrightarrow \overline{OP} = \frac{1}{3}\overline{AP}.$$

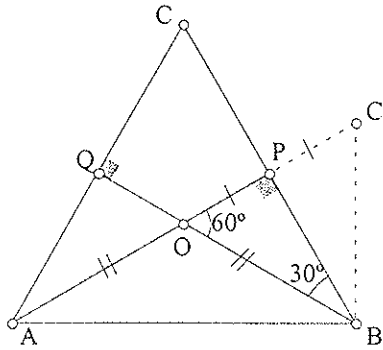


Figura 3.116: O triângulo [ABC] é equilátero. As suas alturas, [AP] e [BQ], intersectam-se no ponto O – o ortocentro do triângulo. Tendo os lados $\sqrt{3}$ metros, o centro O fica a meio metro de qualquer base: $\overline{OP} = \frac{1}{2}$ m.

Se o lado do $\Delta[ABC]$ mede $\sqrt{3}$ m, tem-se, pelo Teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo [APB] rectângulo em P, que:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{PB}^2 \Leftrightarrow (\sqrt{3})^2 = \overline{AP}^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \overline{AP}^2 = \frac{9}{4} \Leftrightarrow \overline{AP} = \frac{3}{2}.$$

Portanto,

$$\overline{OP} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} \Leftrightarrow \overline{OP} = \frac{1}{2}.$$

Logo, o centro ficará a meio metro da base (o mesmo raciocínio se faria para as outras duas bases).

Exercício 3: Mostre que, em qualquer triângulo, a recta que une os pontos médios de dois lados é paralela ao terceiro lado (Araújo 1999).

Resolução: Consideremos um triângulo $\Delta[ABC]$ qualquer. Pelo ponto médio Z pertencente ao lado [AB] façamos passar a paralela a BC, ZY (Figura 3.117). Vamos mostrar que Y é o ponto médio de [AC] e, além disso, temos que: $\overline{ZY} = \frac{1}{2} \overline{BC}$. Ora, tomando $X \in [BC]$ tal que $[ZX] \parallel [AC]$, obtemos um paralelogramo [ZXC Y], em que $[ZX] \cong [YC]$ e $[ZY] \cong [XC]$. Mas também, pelo 2º critério de congruência – ALA (secção 3.2), como é $\angle CBX \cong \angle AZY$, $[BZ] \cong [ZA]$ e também $\angle BZX \cong \angle BAC$, temos que $\Delta[AZY] \cong \Delta[ZBX]$. Assim $[AY] \cong [ZX] \cong [YC]$ e portanto, Y é o ponto médio de [AC]. Por outro lado, $[BX] \cong [ZY] \cong [XC]$ e logo $\overline{ZY} = \frac{1}{2} \overline{BC}$.

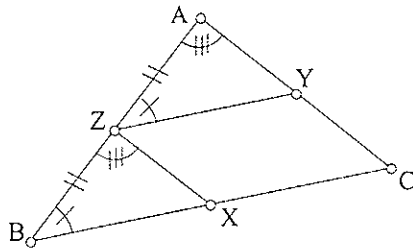


Figura 3.117: O triângulo $[ABC]$ é qualquer. Z é o ponto médio de $[AB]$ e ZY é paralela a BC .

Temos: $\Delta[AZY] \cong \Delta[ZBX]$. $[ZY] \parallel [AC]$ e $\overline{ZY} = \frac{1}{2} \overline{BC}$.

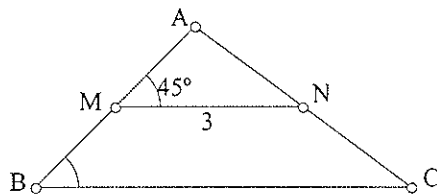


Figura 3.118: O triângulo $[ABC]$ é qualquer. M é o ponto médio de $[AB]$ e N é o ponto médio de

$[AC]$. É $\Delta[ABC] \sim \Delta[AMN]$, $[MN] \parallel [BC]$ e $\overline{MN} = \frac{1}{2} \overline{BC}$.

Exercício 4: Num triângulo qualquer $\Delta[ABC]$, sendo M e N os pontos médios de dois lados, $[AB]$ e $[AC]$ respectivamente, $\overline{MN} = 3$ e $\hat{NMA} = 45^\circ$, calcule \overline{BC} e \hat{B} (retirado de XEQMAT, Matemática, 10º Ano, Editorial o Livro – Pág. 10).

Resolução: Consideremos um triângulo $\Delta[ABC]$ qualquer nas condições do enunciado, como na Figura 3.118. Como $\overline{AM} = \frac{1}{2} \overline{AB}$ e $\overline{AN} = \frac{1}{2} \overline{AC}$, significa que $\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{AC}}$. Por outro lado é $\angle MAN \cong \angle BAC$. Assim, pelo 2º critério de semelhança de triângulos (LAL), temos que $\Delta[ABC] \sim \Delta[AMN]$ e a razão de semelhança é $\frac{1}{2}$. Ou seja, $\overline{MN} = \frac{1}{2} \overline{BC}$ e $MN \parallel BC$. Assim,

$$\overline{BC} = 2\overline{MN} = 6 \text{ e } \hat{ABC} = \hat{NMA} = 45^\circ.$$

3.7.3 Polígonos

(i) Construção de polígonos regulares

Exercício 1: Dada uma circunferência C_1 de centro O e diâmetro $[AB]$, inscreva nesta um pentágono regular.

Resolução: Construimos a circunferência C_1 de centro O e diâmetro $[AB]$ e construímos

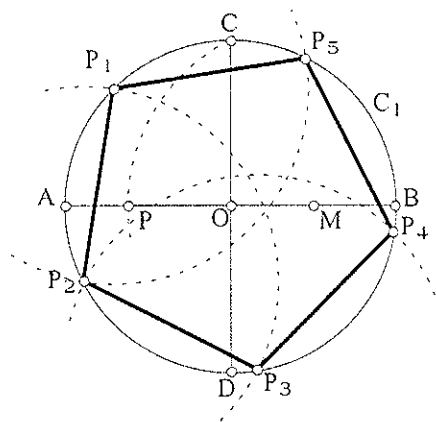


Figura 3.119: O pentágono $[P_1P_2P_3P_4P_5]$ está inscrito na circunferência C_1 de centro O e raio $[OA]$.

o diâmetro perpendicular a $[AB]$, $[CD]$ (Figura 3.119). Dividimos o raio $[OB]$ ao meio, determinando assim o ponto médio M . Fazendo centro em M e com raio $[MC]$, construímos o arco de circunferência CP (P é o ponto de intersecção do arco de circunferência com o raio $[OA]$). Marcamos sobre a circunferência C_1 pontos à distância \overline{CP} partindo, por exemplo, do ponto P_1 : P_2 , P_3 , P_4 e P_5 . Unindo-os obtém-se o polígono pretendido $[P_1P_2P_3P_4P_5]$.

Exercício 2: Inscreva numa circunferência um hexágono regular e compare o ângulo ao centro do hexágono com um radiano.

Resolução: Considerando uma circunferência de centro O e raio qualquer, por exemplo $[OA]$, dividimo-la em seis partes iguais, construindo de seguida o hexágono $[ABCDEF]$, como na Figura 3.120. Comparemos, em termos geométricos, o ângulo de um radiano com o ângulo ao centro de um hexágono regular inscrito na circunferência. Ora, sabemos que o ângulo ao centro de um hexágono regular vale 60° , e que o arco associado com a mesma amplitude, por exemplo o arco DE , é maior que a amplitude do arco cujo comprimento é igual ao raio da circunferência (por exemplo o arco DG). Ou seja, um ângulo com a amplitude de 1 rad ($D\hat{O}G$) é ligeiramente inferior a um ângulo ao centro de um hexágono:

$$1 \text{ rad} = D\hat{O}G < D\hat{O}E = A\hat{O}B = 60^\circ.$$

(ii) Construção de polígonos estrelados

Exercício: Mostre todas as estrelações possíveis do decágono.

Resolução: Vamos começar por construir uma circunferência de centro O e raio qualquer.

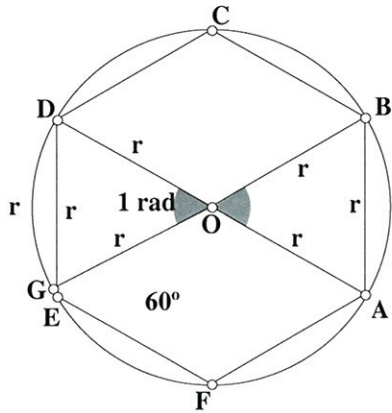


Figura 3.120: O hexágono [ABCDEF] está inscrito na circunferência de centro O. O comprimento do arco DG é igual ao raio r da circunferência. Um ângulo ao centro com a amplitude de 1 rad (como $\hat{DÔG}$) é um pouco inferior a um ângulo ao centro de um hexágono regular ($60^\circ = \hat{DÔE} = \hat{AÔB}$).

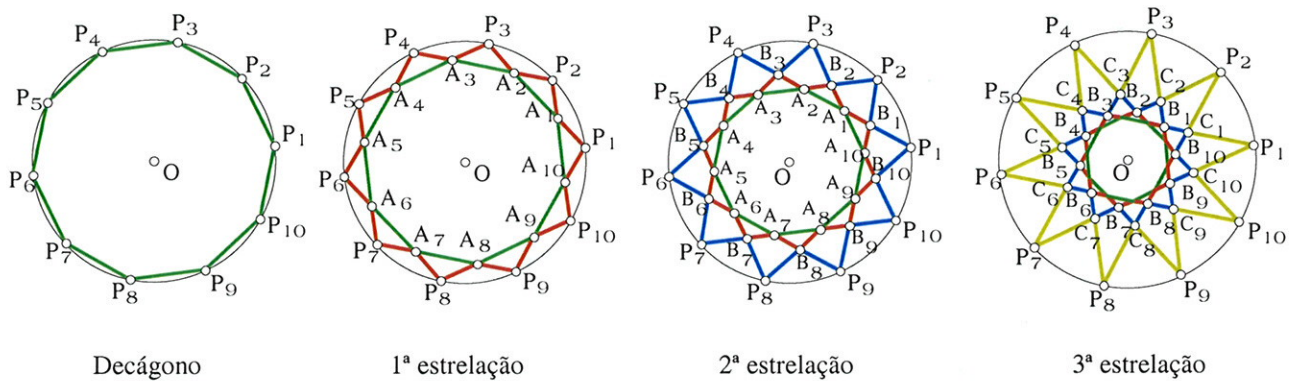


Figura 3.121: O decágono $[P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7P_8P_9P_{10}]$ (verde) está inscrito na circunferência de centro O. Decágono estrelado regular: 1ª estrelação $[P_1A_1P_2A_2P_3A_3P_4A_4P_5A_5P_6A_6P_7A_7P_8A_8P_9A_9P_{10}A_{10}]$ (vermelho) – obtém-se unindo os vértices de dois em dois; a 2ª estrelação obtém-se unindo os vértices de três em três – $[P_1B_1P_2B_2P_3B_3P_4B_4P_5B_5P_6B_6P_7B_7P_8B_8P_9B_9P_{10}B_{10}]$ (azul); a 3ª estrelação $[P_1C_1P_2C_2P_3C_3P_4C_4P_5C_5P_6C_6P_7C_7P_8C_8P_9C_9P_{10}C_{10}]$ (amarelo) – obtém-se unindo os vértices de quatro em quatro.

Dividimo-la em dez partes iguais marcando, para o efeito, dez pontos na circunferência, P_1, P_2, \dots, P_{10} (Figura 3.121). Unindo os pontos pela ordem em que estão na circunferência obtemos o decágono. Verifica-se que só podemos obter até à terceira estrelação, visto que, à medida que vamos prolongando os lados observamos, por exemplo partindo do lado $[P_1P_2]$ do decágono, que temos a recta P_1P_2 paralela a P_6P_7 . Para obtermos a *primeira estrela* unimos os pontos alternadamente, isto é, deixando um vértice entre dois. A *segunda estrela* é obtida “saltando” dois vértices, e obtemos a *terceira estrela* “saltando” três vértices. Ou seja, podemos ordenar os vértices do decágono estrelado regular, contando, os vértices representados na circunferência, da seguinte forma: o

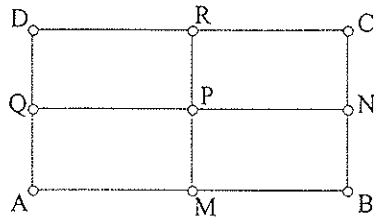


Figura 3.122: O rectângulo [ABCD] está dividido em quatro rectângulos iguais.

polígono regular – de um em um; a primeira estrela – de dois em dois; a segunda estrela – de três em três; a terceira estrela – de quatro em quatro.

3.7.4 Cálculo vectorial

(i) Operações com vectores

Exercício 1: Considere a Figura 3.122 que representa um rectângulo [ABCD] dividido em quatro rectângulos iguais. Utilizando as letras da figura, calcule:

1.1 $\overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QP}$; $\overrightarrow{C} + \overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{D} + \overrightarrow{PB}$; $\overrightarrow{R} - \overrightarrow{BC}$.

Resolução: $\overrightarrow{A} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{A} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{M}$.

$$\overrightarrow{C} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{C} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{D}$$

$$\overrightarrow{D} + \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{D} + \overrightarrow{DP} = \overrightarrow{P}$$

$$\overrightarrow{R} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{R} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{R} + \overrightarrow{RM} = \overrightarrow{M}.$$

1.2 $\overrightarrow{QP} + \overrightarrow{BN}$; $\frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + 2 \overrightarrow{AQ}$; $(\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{RN}) + \overrightarrow{RA}$; $2 \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{DP}$.

Resolução: $\overrightarrow{QP} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{QR}$

$$\frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + 2 \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MR} = \overrightarrow{AR}$$

$$(\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{RN}) + \overrightarrow{RA} = (\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NR}) + \overrightarrow{RA} = \overrightarrow{MR} + \overrightarrow{RA} = \overrightarrow{MA}$$

$$2 \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{DP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{PD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AP}.$$

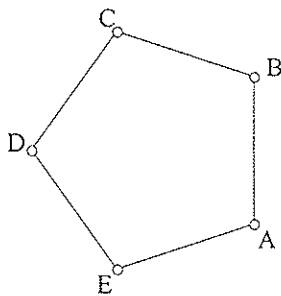


Figura 3.123: [ABCDE] é um pentágono regular.

Exercício 2: A Figura 3.123 representa um pentágono regular [ABCDE]. Justifique que $\frac{\overline{AD}}{\overline{AE}} \leq 2$ (retirado de Matemática, Teoria e Prática, 10º Ano, Rumo – Pág. 339).

Resolução: Observando a Figura 3.123 podemos ver que:

$$\overline{AE} + \overline{ED} = \overline{AD}.$$

Calculando a norma vem $\|\overline{AE} + \overline{ED}\| = \|\overline{AD}\|$. Por outro lado, sabemos pela propriedade (iv) – Desigualdade Triangular (secção 3.2), que $\|\overline{AE} + \overline{ED}\| \leq \|\overline{AE}\| + \|\overline{ED}\|$. Ou seja

$$\overline{AD} \leq \overline{AE} + \overline{ED}.$$

Mas como o pentágono é regular temos que $\overline{AE} = \overline{ED}$. Assim, podemos escrever

$$\overline{AD} \leq 2\overline{AE} \Leftrightarrow \frac{\overline{AD}}{\overline{AE}} \leq 2.$$

(ii) **Vectores colineares. Ângulo de dois vectores. Combinação linear de um vector.**

Exercício 1: Unindo os pontos médios de lados consecutivos de um quadrilátero qualquer, obtém-se um novo quadrilátero. Que características tem o quadrilátero obtido? (retirado da Brochura de Geometria, 10º Ano – Pág. 116, 117).

Resolução: Vamos começar por representar na Figura 3.124 um quadrilátero qualquer [ABCD] e marcar os pontos médios dos seus lados: M, N, P e Q do lado [AB], [BC], [CD] e [DA], respectivamente. Calculando os vectores \overline{MN} e \overline{QP} vamos ter:

$$\overline{MN} = \overline{MB} + \overline{BN} = \frac{1}{2} \overline{AB} + \frac{1}{2} \overline{BC} = \frac{1}{2} (\overline{AB} + \overline{BC}) = \frac{1}{2} \overline{AC}$$

$$\overline{QP} = \overline{QD} + \overline{DP} = \frac{1}{2} \overline{AD} + \frac{1}{2} \overline{DC} = \frac{1}{2} (\overline{AD} + \overline{DC}) = \frac{1}{2} \overline{AC}$$

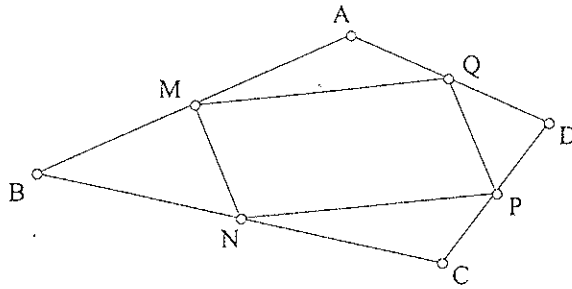


Figura 3.124: $[ABCD]$ é um quadrilátero. Os pontos médios dos seus lados respectivos M , N , P e Q definem um paralelogramo⁷⁵.

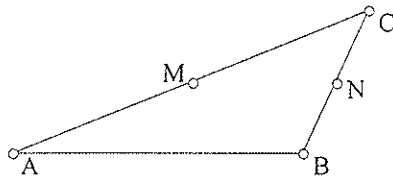


Figura 3.125: $[ABC]$ é um triângulo e, M e N são os pontos médios dos lados.

Ou seja, $\overline{MN} = \overline{QP}$. Concluimos que os vectores \overline{MN} e \overline{QP} são paralelos e com o mesmo comprimento. Da mesma forma se tira que os vectores \overline{MQ} e \overline{NP} são paralelos e com o mesmo comprimento. Donde se tem uma figura com os lados paralelos dois a dois – um paralelogramo.

Exercício 2: No triângulo $[ABC]$ qualquer (Figura 3.125), M e N são os pontos médios dos lados $[AC]$ e $[BC]$, respectivamente. Mostre que \overline{MN} é colinear com \overline{AB} e calcule k de modo que $\overline{AB} = k\overline{MN}$ (retirado de XEQMAT, Matemática, 10º Ano, Editorial o Livro – Pág. 77).

Resolução: (Ver Exercício 3 da secção 3.7.2) Vamos calcular o vector \overline{MN} :

$$\begin{aligned} \overline{MN} &= \overline{MC} + \overline{CN} = \frac{1}{2} \overline{AC} + \frac{1}{2} \overline{CB} = \frac{1}{2} (\overline{AC} + \overline{CB}) = \frac{1}{2} \overline{AB} \Leftrightarrow \overline{MN} = \frac{1}{2} \overline{AB} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \overline{AB} = 2\overline{MN}. \end{aligned}$$

Portanto, o vector \overline{MN} é colinear com o vector \overline{AB} e $k = 2$.

Exercício 3: Considere-se o trapézio $[ABCD]$, representado na Figura 3.126, de bases $[AB]$ e $[CD]$ e sejam M e N os pontos médios dos lados não paralelos, $[BC]$ e $[AD]$

⁷⁵ Ver Apêndice VI, pasta *Capítulo5 – Paralelogramo.gss*.

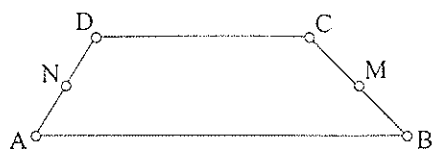


Figura 3.126: $[ABCD]$ é um trapézio e, M e N são os pontos médios dos lados $[BC]$ e $[AD]$, respectivamente.

respectivamente. Mostre que $\overline{MN} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{DC})$ (retirado de Matemática, Teoria e Prática, 10º Ano, Rumo – Pág. 344).

Resolução: Vamos começar por estabelecer: $\overline{AB} = \overline{AD} + \overline{DB}$ e $\overline{DC} = \overline{DB} + \overline{BC}$. Somando membro a membro as duas igualdades anteriores vem:

$$\overline{AB} + \overline{DC} = (\overline{AD} + \overline{DB}) + (\overline{DB} + \overline{BC}) \Leftrightarrow \overline{AB} + \overline{DC} = \overline{AD} + \overline{BC} + 2\overline{DB}$$

Como M e N são os pontos médios dos lados $[BC]$ e $[AD]$, temos

$$\overline{AD} = 2\overline{ND} \text{ e } \overline{BC} = 2\overline{BM}.$$

Substituindo as duas relações anteriores na igualdade acima temos

$$\begin{aligned} \overline{AB} + \overline{DC} &= 2\overline{ND} + 2\overline{BM} + 2\overline{DB} = 2(\overline{ND} + \overline{BM} + \overline{DB}) = 2(\overline{ND} + \overline{DB} + \overline{BM}) = \\ &= 2(\overline{ND} + \overline{DM}) = 2\overline{NM} \Leftrightarrow \overline{AB} + \overline{DC} = 2\overline{NM} \Leftrightarrow \overline{NM} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{DC}). \end{aligned}$$

Exercício 4: Utilizando as letras da Figura 3.122 (rectângulo $[ABCD]$ dividido em quatro rectângulos iguais) indique:

4.1 as amplitudes dos ângulos (pode resolver no Sketchpad): $\left(\overline{AB}, \widehat{\overline{BC}}\right)$; $\left(\overline{RC}, \widehat{\overline{MA}}\right)$; $\left(\overline{QN}, \widehat{\overline{MB}}\right)$; $\left(\overline{DC}, \widehat{\overline{AC}}\right)$ e de $\left(\overline{RC}, \widehat{\overline{MD}}\right)$.

$$\text{Resolução: } \left(\overline{AB}, \widehat{\overline{BC}}\right) = \left(\overline{AB}, \widehat{\overline{AD}}\right) = 90^\circ; \left(\overline{RC}, \widehat{\overline{MA}}\right) = \left(\overline{RC}, \widehat{\overline{RD}}\right) = 180^\circ;$$

$$\left(\overline{QN}, \widehat{\overline{MB}}\right) = \left(\overline{AB}, \widehat{\overline{AM}}\right) = 0^\circ.$$

A amplitude dos dois ângulos seguintes não pode ser determinada de forma imediata, mas pode ser determinada com a ajuda do Sketchpad ou recorrendo às razões trigonométricas. Optamos por recorrer ao Sketchpad:

$$\left(\widehat{\overline{DC}, \overline{AC}}\right) = \left(\widehat{\overline{AB}, \overline{AC}}\right) = 26,7^\circ \text{ e } \left(\widehat{\overline{RC}, \overline{MD}}\right) = \left(\widehat{\overline{MB}, \overline{MD}}\right) = 134,8^\circ.$$

4.2 como combinação linear de \overline{AM} e \overline{AQ} os vectores: \overline{AB} ; \overline{AC} ; \overline{CP} e \overline{QR} .

Resolução: $\overline{AB} = 2\overline{AM} + 0\overline{AQ} = 2\overline{AM}$; $\overline{AC} = 2\overline{AM} + 2\overline{AQ}$;

$\overline{CP} = -1\overline{AM} + (-1)\overline{AQ} = -\overline{AM} - \overline{AQ}$ e $\overline{QR} = 1\overline{AM} + 1\overline{AQ} = \overline{AM} + \overline{AQ}$.

Exercício 5: Sabendo que o ângulo entre os vectores \vec{u} e \vec{v} é de 60° , determine o ângulo formado pelos vectores: \vec{u} e $-\vec{v}$; $-2\vec{u}$ e $-\vec{v}$; $4\vec{u}$ e $5\vec{v}$.

Resolução: $\left(\widehat{\vec{u}, -\vec{v}}\right) = 120^\circ$; $\left(\widehat{-2\vec{u}, -\vec{v}}\right) = 60^\circ$ e $\left(\widehat{4\vec{u}, 5\vec{v}}\right) = 60^\circ$.

Exercício 6: Considere os seguinte vectores escritos como combinação linear de \vec{u} e \vec{v} :

$$\vec{a} = 2\vec{u} + 3\vec{v}, \vec{b} = 5\vec{u} + 4\vec{v} \text{ e } \vec{c} = \vec{u} + 3\vec{v}.$$

Determine:

6.1 $\vec{a} + \vec{b}$;

Resolução: $\vec{a} + \vec{b} = (2\vec{u} + 3\vec{v}) + (5\vec{u} + 4\vec{v}) = 7\vec{u} + 7\vec{v}$

6.2 $\vec{b} - 3\vec{c}$;

Resolução: $\vec{b} - 3\vec{c} = (5\vec{u} + 4\vec{v}) - 3(\vec{u} + 3\vec{v}) = 2\vec{u} - 5\vec{v}$

6.3 $3\vec{a} - (5\vec{c} - 2\vec{b})$;

Resolução: $3\vec{a} - (5\vec{c} - 2\vec{b}) = 3(2\vec{u} + 3\vec{v}) - [5(\vec{u} + 3\vec{v}) - 2(5\vec{u} + 4\vec{v})] = 11\vec{u} + 2\vec{v}$

3.7.5 Geometria analítica

(i) A recta orientada e distância entre dois pontos da recta.

Referenciais cartesianos ortogonais e monométricos.

Exercício 1: Determine as distâncias entre:

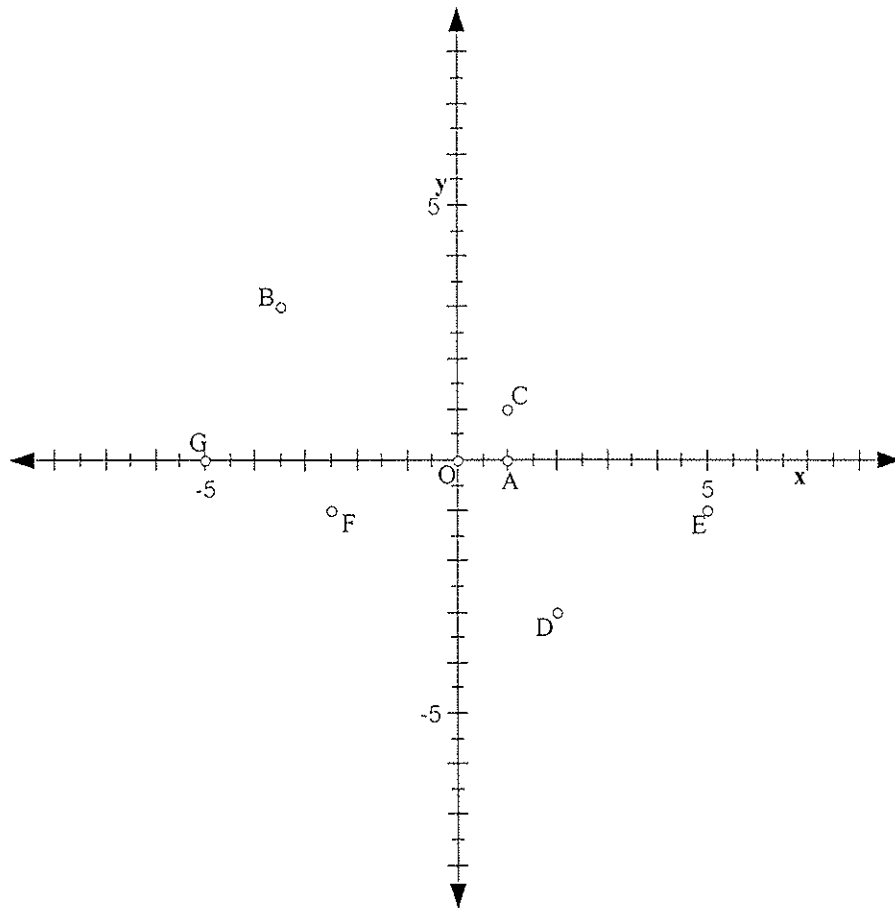


Figura 3.127: No referencial c. o. n. xOy estão representados os pontos A, B, C, D, E, F e G.

1.1 os pontos de abscissas 4 e 9;

Resolução: $|9 - 4| = |5| = 5$.

1.2 os pontos de abscissas -3 e -2 ;

Resolução: $|-2 - (-3)| = |-2 + 3| = |1| = 1$.

1.3 os pontos de abscissas $\sqrt{7}$ e -9 ;

Resolução: $|-9 - \sqrt{7}| = |-(9 + \sqrt{7})| = 9 + \sqrt{7}$.

Exercício 2: (Exercício proposto) Na Figura 3.127 está representado um referencial c. o. n. xOy . Identifique os pares ordenados correspondentes aos pontos nele representados.

Exercício 3: (Exercício proposto) Representa, num referencial c. o. n. os pontos: $A(2, 0)$, $B(-3, 1)$, $C\left(-\frac{1}{2}, -3\right)$, $D\left(4, -\frac{5}{2}\right)$ e $E(0, -2)$.

Exercício 4: Determine o simétrico de $P(-3, 5)$, de $Q\left(\frac{1}{2}, -3\right)$ e de $R(0, 4)$ em relação:

4.1 ao eixo dos xx .

Resolução: O simétrico dos três pontos em relação ao eixo das abcissas são, respectivamente: $P_1(-3, -5)$, $Q_1\left(\frac{1}{2}, 3\right)$ e $R_1(0, -4)$.

4.2 ao eixo dos yy .

Resolução: O simétrico de P , Q e R relativamente ao eixo das ordenadas são, respectivamente: $P_2(3, 5)$, $Q_2\left(-\frac{1}{2}, -3\right)$ e $R_2(0, 4)$.

4.3 à origem do referencial.

Resolução: O simétrico de P , Q e R relativamente ao ponto $(0, 0)$ serão os pontos, respectivamente: $P_3(3, -5)$, $Q_3\left(-\frac{1}{2}, 3\right)$ e $R_3(0, -4)$.

(ii) Conjuntos de pontos e condições

Exercício 1: (Exercício proposto) Indique a condição que traduz cada um dos conjuntos de pontos:

1.1 $(-4, a)$, com $a \in \mathbb{R}$;

1.2 $(b, 3)$, com $b \in \mathbb{R}$.

Exercício 2: (Exercício proposto) Indique, pelas suas coordenadas, três pontos que satisfaçam cada uma das condições:

2.1 $x = -\frac{3}{4}$;

2.2 $y = 2.5$;

2.3 $y = 2x + 3$.

Exercício 3: (Exercício proposto) Represente num referencial c. o. n. o conjunto dos pontos definido por cada uma das condições:

3.1 $x = 3 \wedge y \geq 3$;

3.2 $y = 2 \wedge |x| \leq 4$;

3.3 $y = x \wedge -1 \leq x \leq 3$;

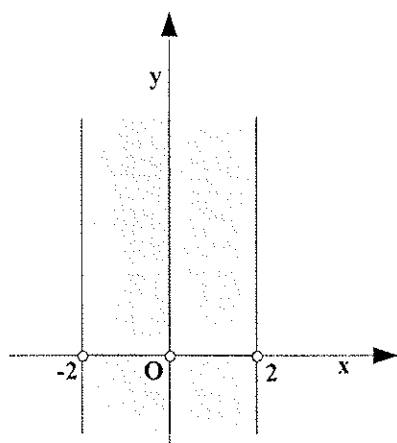
3.4 $y \leq -2 \vee y \geq 2$;

3.5 $x^2 = 9 \wedge |y| \leq 4$;

3.6 $|x| \leq 2 \vee |y| \leq 2$;

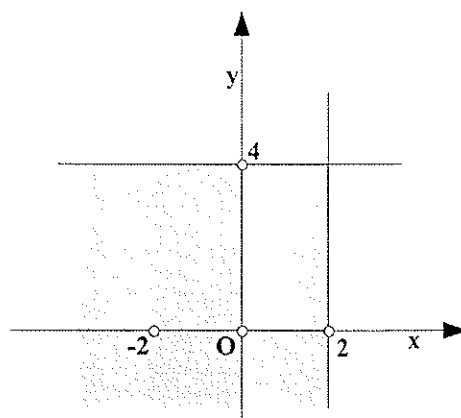
Exercício 4: Indique a condição que representa cada um dos conjuntos sombreados:

4.1



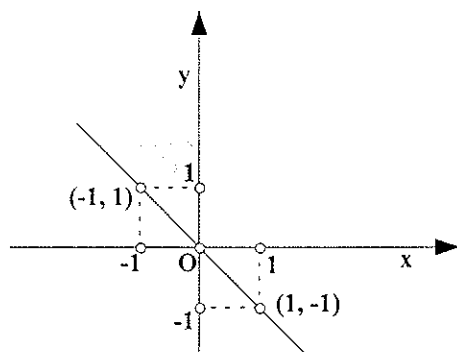
Resolução: $-2 \leq x \leq 2$

4.2



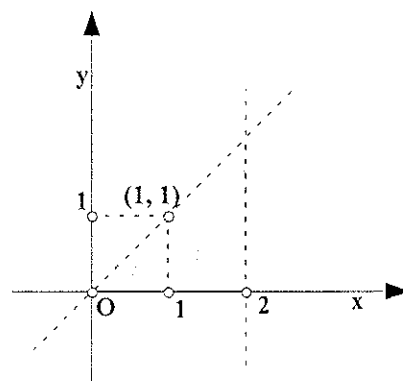
Resolução: $x \leq 2 \wedge y \leq 4$

4.3



Resolução: $(x \leq 0 \wedge y \geq x) \vee (x \geq 0 \wedge y \leq x)$

4.4



Resolução: $x < 2 \wedge y < x \wedge y \geq 0$

(iii) **Distância entre dois pontos. Ponto médio de um segmento de recta.**

Mediatriz de um segmento de recta.

Exercício 1: (Exercício proposto) Calcule a distância entre os pontos:

1.1 $A(-4, 2)$ e $B(1, 3)$;

1.2 $C(2, -3)$ e $D\left(\frac{1}{2}, -1\right)$.

Exercício 2: Considere num referencial c. o. n. os pontos: $A(-3, -3)$, $B(3, -2)$ e $O(0, 0)$. Classifique o triângulo $[ABO]$ quanto aos lados.

Resolução: Para o podermos fazer temos de calcular os comprimentos dos seus lados. De 3.1, vem:

$$\overline{AB} = d(A, B) = \sqrt{(3 - (-3))^2 + (-2 - (-3))^2} = \sqrt{(6)^2 + (1)^2} = \sqrt{36+1} = \sqrt{37}$$

$$\overline{AO} = d(A, O) = \sqrt{(0 - (-3))^2 + (0 - (-3))^2} = \sqrt{(3)^2 + (3)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$\overline{OB} = d(O, B) = \sqrt{(3 - 0)^2 + (-2 - 0)^2} = \sqrt{(3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

Como os comprimentos dos lados do triângulo $[ABO]$ são todos diferentes, podemos concluir que o triângulo é escaleno. Para confirmarmos os cálculos e termos o aspecto do triângulo $[ABO]$, podemos o representar geometricamente no Sketchpad.

Exercício 3: Considere num referencial c. o. n. os pontos: $A(-1, 2)$, $B(-4, 2)$ e $C(-4, -2)$ (ver a resolução deste exercício na secção 3.8.3).

3.1 Represente os pontos num referencial c. o. n.;

3.2 Determine o perímetro do triângulo $[ABC]$;

3.3 Calcule as coordenadas dos pontos médios dos lados do triângulo (chamemos M_1 , M_2 e M_3);

3.4 Mostre que o comprimento do segmento de recta definidos pelos pontos médios de dois lados quaisquer é metade do comprimento do terceiro lado do triângulo;

3.5 Calcule a razão entre o perímetro do triângulo $[ABC]$ e do triângulo definido pelos pontos médios dos lados do triângulo.

Exercício 4: Considere num referencial c. o. n. os pontos: $A(1, 3)$ e $B(3, 5)$.

4.1 Defina algebricamente o conjunto dos pontos equidistantes de A e de B .

Resolução: Trata-se da mediatriz do segmento de recta $[AB]$. Designemos por m . Seja $P(x,y) \in m$. Tem-se sucessivamente:

$$\begin{aligned} \overline{AP} = \overline{BP} &\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y-5)^2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-3)^2 = (x-3)^2 + (y-5)^2 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 10y + 25 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4y + 4x - 24 = 0 \Leftrightarrow y + x - 6 = 0.$$

Ou seja, a mediatriz do segmento de recta $[AB]$ é definida pela condição: $y + x - 6 = 0$.

4.2 O ponto $C(1, 5)$ pertence ao conjunto de pontos definido no ponto anterior? Justifique.

Resolução: O ponto C pertence à mediatriz de $[AB]$ sse as suas coordenadas verificam a equação que define a mediatriz. Substituindo na equação as coordenadas do ponto:

$$m: y + x - 6 = 0 \text{ e } C(1, 5)$$

$$5 + 1 - 6 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$$

obtivemos uma proposição⁷⁶ verdadeira (abreviadamente, P. V.), o que significa que $C \in m$.

4.3 Indique dois pontos que pertençam à mediatriz de $[AB]$.

Resolução: Para tal basta atribuir um valor qualquer a x (abscissa) e determinar o y (ordenada) correspondente. Ora

$$m: y + x - 6 = 0 \Leftrightarrow y = -x + 6.$$

Temos que, se

$$x = 0 \Rightarrow y = 6 \text{ ou seja, } (0, 6) \in m.$$

$$x = -1 \Rightarrow y = 7 \text{ ou seja, } (-1, 7) \in m.$$

4.4 Seja P um ponto qualquer do plano cartesiano. Interprete geometricamente:

4.4.1 $\overline{AP} \geq \overline{BP}$;

Resolução: Sendo P um ponto qualquer do plano e $\overline{AP} \geq \overline{BP}$, significa que o ponto P está mais afastado de A do que de B . Ou seja, o conjunto de pontos nestas condições determinam um semiplano a que pertence o ponto B , incluindo a mediatriz de $[AB]$. Na Figura 3.128 representamos a mediatriz de $[AB]$ (já conhecemos três dos seus pontos), bem como o semiplano referido.

4.4.2 $\overline{AP} < \overline{BP}$.

Resolução: Sendo P um ponto qualquer do plano e, agora, $\overline{AP} < \overline{BP}$, significa que o ponto

⁷⁶ Entende-se por proposição: enunciado susceptível de ser declarado verdadeiro ou não. Ou seja, a cada proposição pode ser atribuído um dos valores lógicos: Verdade ou Falsidade. Uma proposição é verdadeira sse a situação que a proposição exprime se verifica de facto. Por exemplo, a proposição seguinte, que exprime a comutatividade de uma operação binária indeterminada $*$: "Para todo o x e todo o y , $x * y = y * x$ "; é verdadeira nos grupos comutativos (em que o símbolo $*$ denota a operação de grupo) e é falsa nos grupos não comutativos (Oliveira 1991).

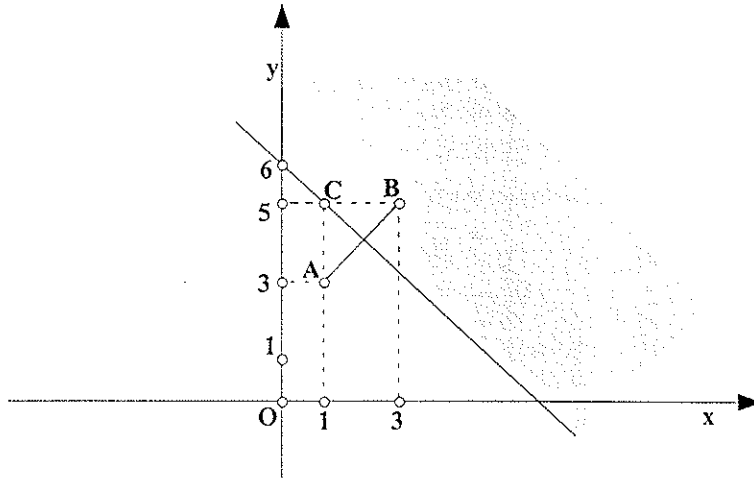


Figura 3.128: Semiplano fechado acima da mediatriz do segmento de recta [AB].

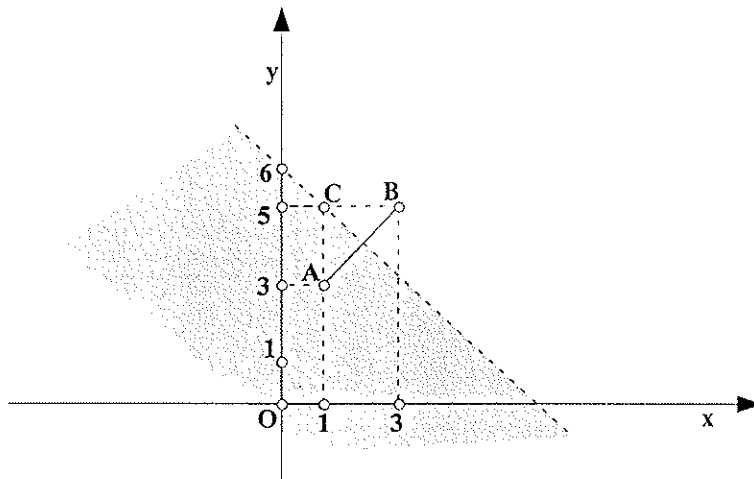


Figura 3.129: Semiplano aberto abaixo da mediatriz do segmento de recta [AB].

P está mais próximo de A do que de B. Ou seja, o conjunto de pontos nestas condições vão determinar um semiplano a que pertence o ponto A, mas não incluindo a mediatriz de [AB]. Representamos tal semiplano na Figura 3.129.

Exercício 5: De acordo com a Figura 3.130, determine as coordenadas de C sabendo que m é a mediatriz de [AB].

Resolução: C é da forma $(0, y)$ porque é um ponto que está no eixo das ordenadas, e como $C \in m$ temos sucessivamente:

$$\begin{aligned} \overline{AC} &= \overline{BC} \Leftrightarrow \sqrt{(0-0)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{(0-7)^2 + (y-0)^2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (y-4)^2 &= 49 + y^2 \Leftrightarrow y^2 - 8y + 16 = 49 + y^2 \Leftrightarrow -8y = 33 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

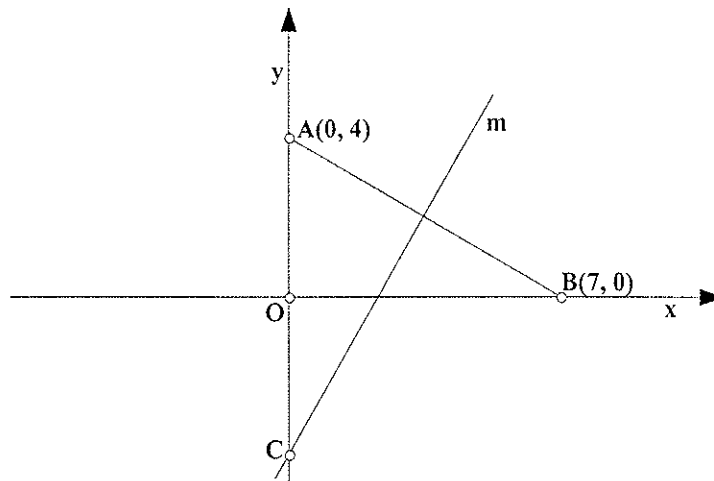


Figura 3.130: A mediatriz de $[AB]$ contém o ponto C.

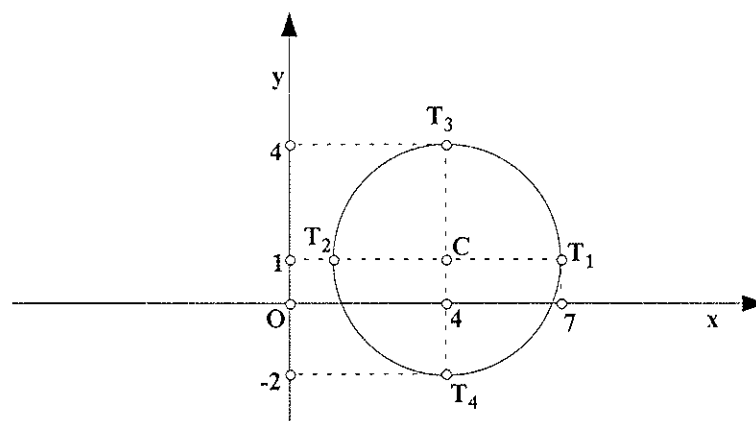


Figura 3.131: Circunferência de centro C e raio $\overline{CT_1}$.

$$\Leftrightarrow y = -\frac{33}{8}$$

As coordenadas de C são $\left(0, -\frac{33}{8}\right)$.

(iv) Circunferência e círculo

Exercício 1: Considere a representação da Figura 3.131, e indique:

1.1 uma equação da circunferência.

Resolução: Como $C(4, 1)$ e o raio $\overline{CT_1} = 3$, temos que uma equação da circunferência é:

$$(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 9$$

1.2 as coordenadas dos pontos de intersecção da circunferência com os eixos coordenados.

Resolução: Observa-se que a circunferência só intersecta o eixo dos xx. As coordenadas dos pontos de intersecção da circunferência com o eixo dos xx são as soluções do sistema:

$$\begin{aligned} \begin{cases} (x-4)^2 + (y-1)^2 = 9 \\ y = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (x-4)^2 + (0-1)^2 = 9 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-4)^2 = 8 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-4)^2 = 8 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x-4 = \pm\sqrt{8} \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 - 2\sqrt{2} \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 4 + 2\sqrt{2} \\ y = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Assim, as coordenadas dos pontos de intersecção da circunferência dada com o eixo dos xx são:

$$(4 - 2\sqrt{2}, 0) \text{ e } (4 + 2\sqrt{2}, 0).$$

Para obtermos as coordenadas dos pontos de intersecção da circunferência com o eixo dos yy resolvemos o sistema:

$$\begin{cases} (x-4)^2 + (y-1)^2 = 9 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (0-4)^2 + (y-1)^2 = 9 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y-1)^2 = -7 \\ x = 0 \end{cases}$$

obtemos, no sistema, uma equação do 2º grau impossível (isto é, não existem soluções reais), logo o sistema é impossível e, portanto, significa que a circunferência não intersecta o eixo dos yy, como se observou.

1.3 as equações das rectas tangentes, horizontais e verticais, à circunferência, interpretando geometricamente.

Resolução: Observando a Figura 3.131, verifica-se que as abcissas dos pontos de tangência da circunferência com as rectas verticais resultam de se somar ou subtrair 3 (valor do raio) à abcissa do centro da circunferência, obtendo-se 7 e 1, respectivamente. A ordenada é igual à ordenada do centro da circunferência. Assim temos, os pontos de tangência: $T_1(7, 1)$ e $T_2(1, 1)$; e as rectas verticais que são tangentes à circunferência: $x = 7$ e $x = 1$.

As ordenadas dos pontos de tangência da circunferência com as rectas horizontais resultam de se somar ou subtrair 3 (valor do raio) à ordenada do centro da circunferência, obtendo-se 4 e -2, respectivamente. A abcissa é igual à abcissa do centro da circunferência. Logo, os pontos de tangência são: $T_3(4, 4)$ e $T_4(4, -2)$; e as rectas tangentes horizontais são: $y = 4$ e $y = -2$.

Exercício 2: Considere a circunferência C_1 de equação: $x^2 + (y-1)^2 = 4$.

2.1 Represente geometricamente a circunferência C_1 .

Resolução: Trata-se de uma circunferência de centro $(0, 1)$ e raio 2, e deixamos ao cuidado do leitor a sua representação.

2.2 Apresente a equação de uma circunferência concêntrica com C_1 e que passa pelo ponto $(0, 6)$.

Resolução: O raio da circunferência concêntrica com C_1 e que passa pelo ponto dado é igual à distância de $(0, 1)$ a $(0, 6)$:

$$d((0, 1), (0, 6)) = |6 - 1| = 5.$$

Assim, uma equação da circunferência concêntrica com C_1 e raio 5 é:

$$x^2 + (y - 1)^2 = 25.$$

As circunferências concêntricas com C_1 têm equação da forma:

$$x^2 + (y - 1)^2 = r^2, \text{ com } r \in \mathbb{R} \setminus \{2\}.$$

Exercício 3: (retirado da Brochura de Geometria, 10º Ano – Pág. 107, 108).

3.1 Mostra que se o ponto $A(a, b)$, pertence à circunferência de centro na origem, o ponto de coordenadas (b, a) também pertence a essa circunferência.

Resolução: Consideremos uma circunferência de centro na origem e raio 3: $x^2 + y^2 = 9$. O ponto $P(2, \sqrt{5})$ pertence a esta circunferência, visto que substituindo a abcissa e a ordenada do ponto na equação da circunferência: $2^2 + (\sqrt{5})^2 = 9 \Leftrightarrow 9 = 9$, obtém-se uma proposição verdadeira. Pela mesma razão o ponto $P_1(\sqrt{5}, 2)$ também pertence a esta circunferência: $(\sqrt{5})^2 + 2^2 = 9 \Leftrightarrow 9 = 9$. Podemos assegurar que, em geral se o ponto (a, b) pertence a uma circunferência também o ponto (b, a) pertence a essa circunferência, visto que pela propriedade comutativa da adição de números reais se tem: $a^2 + b^2 = b^2 + a^2 \Leftrightarrow r^2 = r^2$.

3.2 Indica pelas suas coordenadas outros três pontos dessa circunferência que com o ponto $A(a, b)$ sejam vértices de um rectângulo.

Resolução: Estando uma circunferência centrada na origem, ela é simétrica relativamente aos eixos coordenados e às bissetrizes dos quadrantes pares e ímpares (Figura 3.132). Assim, tendo em conta a simetria, obtém-se as coordenadas dos pontos pedidos: $A(a, b)$, $(a, -b)$, $(-a, b)$ e $(-a, -b)$.

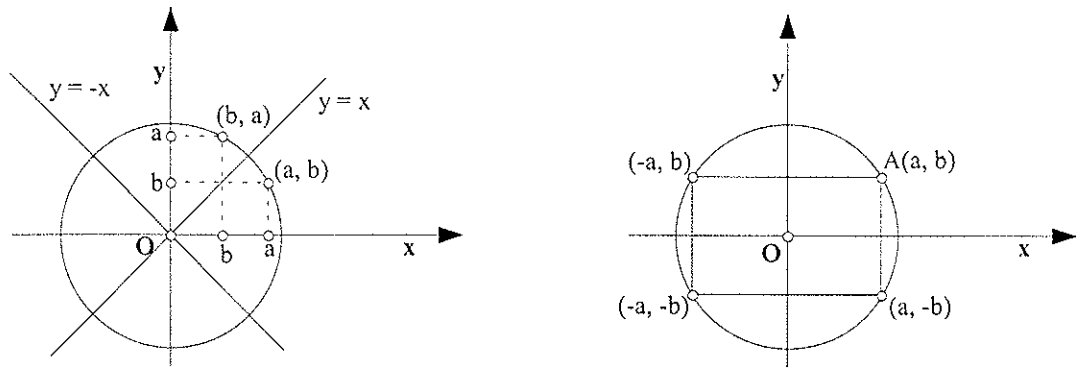
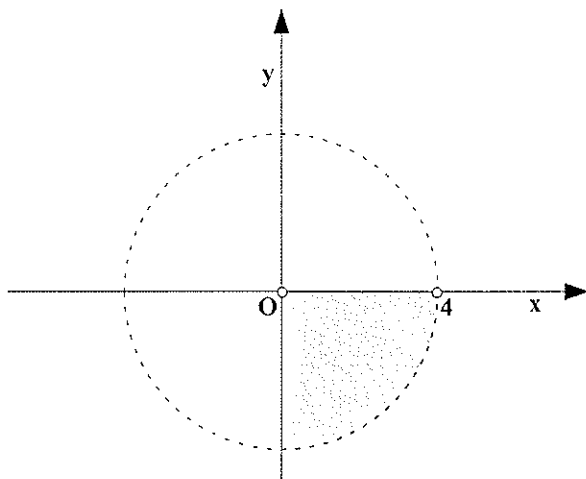


Figura 3.132: Uma circunferência centrada na origem tem eixos de simetria: os eixos coordenados e as bissetrizes dos quadrantes pares e ímpares (esquerda). Os pontos da circunferência (a, b) , $(a, -b)$, $(-a, b)$ e $(-a, -b)$ determinam os vértices dum rectângulo (direita).

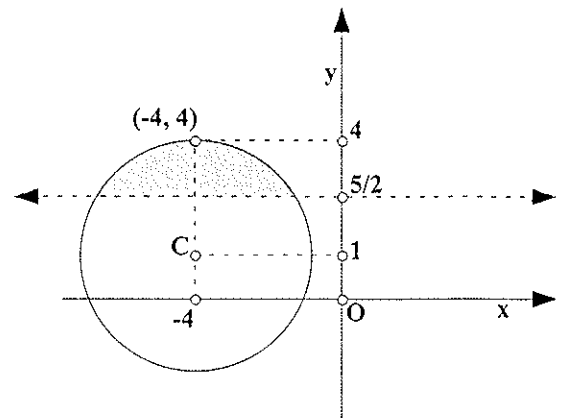
Exercício 4: Define analiticamente as regiões sombreadas:

4.1



Resolução: $x^2 + y^2 < 4^2 \wedge x \geq 0 \wedge y \leq 0$

4.2



Resolução: $(x + 4)^2 + (y - 1)^2 \leq 9 \wedge y > \frac{5}{2}$

(v) Componentes e coordenadas de um vector numa base. Referenciais e vectores.

Igualdade e operações com vectores escritos numa base.

Exercício 1: Considere o quadrado [ABCD], representado na Figura 3.133, dividido em quatro partes geometricamente iguais.

1.1 Indique dois vectores que constituem uma base.

Resolução: Serão dois vectores não colineares quaisquer, por exemplo, $(\overline{AM}, \overline{AR})$.

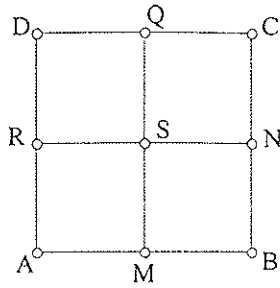


Figura 3.133: Quadrado [ABCD] dividido em quatro partes geometricamente iguais.

1.2 Na base $(\overline{AM}, \overline{RD})$ indique as coordenadas dos vectores: \overline{AB} , \overline{NC} , \overline{QA} e \overline{SB} .

Resolução: $\overline{AB} = 2\overline{AM} + 0\overline{RD}$, ou seja, $\overline{AB} = (2, 0)$.

$\overline{NC} = 0\overline{AM} + 1\overline{RD}$, donde $\overline{NC} = (0, 1)$.

$\overline{QA} = -1\overline{AM} - 2\overline{RD}$, donde $\overline{QA} = (-1, -2)$.

$\overline{SB} = 1\overline{AM} - 1\overline{RD}$, donde $\overline{SB} = (1, -1)$.

Exercício 2: A partir da Figura 3.134 identificar, para cada um dos vectores representados, as suas componentes e as suas coordenadas respectivas.

Resolução: Na tabela 3.3.

Vector	Componentes	Coordenadas
$\vec{a} = \frac{5}{2}\vec{i} + 0\vec{j}$	$\frac{5}{2}\vec{i}$ e $0\vec{j}$	$\left(\frac{5}{2}, 0\right)$
$\vec{b} = 0\vec{i} + 2\vec{j}$	$0\vec{i}$ e $2\vec{j}$	$(0, 2)$
$\vec{c} = 0\vec{i} - 4\vec{j}$	$0\vec{i}$ e $4\vec{j}$	$(0, -4)$
$\vec{d} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$	$3\vec{i}$ e $2\vec{j}$	$(3, 2)$
$\vec{e} = -3\vec{i} - 3\vec{j}$	$-3\vec{i}$ e $-3\vec{j}$	$(-3, -3)$

Tabela 3.3: Vectores, componentes e coordenadas respectivas de acordo com a Figura 3.134.

Exercício 3: Considere num referencial c. o. n., a base o. n. (\vec{e}, \vec{f}) e os vectores escritos na forma seguinte: $\vec{u} = \vec{e} + \vec{f}$ e $\vec{v} = -\vec{e} - 2\vec{f}$.

3.1 Mostre que os vectores \vec{u} e \vec{v} constituem uma base.

Resolução: Os vectores $\vec{u} = (1, 1)$ e $\vec{v} = (-1, -2)$ determinam uma base se não forem colineares. Pela condição de colinearidade entre dois vectores (de (3.5), secção 3.5.11), escrevemos $1 \times (-2) \neq 1 \times (-1)$, ou seja, os vectores \vec{u} e \vec{v} não são colineares e portanto (\vec{u}, \vec{v}) é uma base.

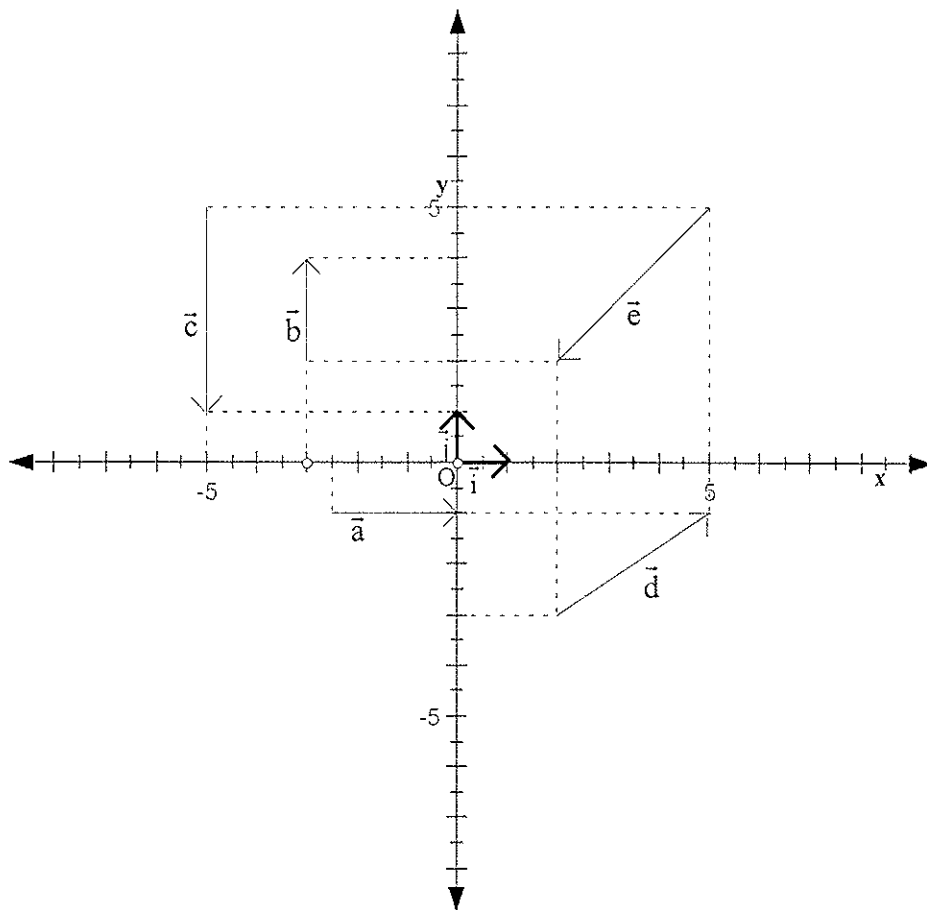


Figura 3.134: Referencial c. o. n. xOy associado à b. o. n. canónica (\vec{i}, \vec{j}) onde estão representados os vectores \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , \vec{d} e \vec{e} .

3.2 Escreva \vec{e} e \vec{f} na base (\vec{u}, \vec{v}) .

Resolução: Temos de resolver o sistema $\begin{cases} \vec{u} = \vec{e} + \vec{f} \\ \vec{v} = -\vec{e} - 2\vec{f} \end{cases}$ em ordem a \vec{e} e \vec{f} . Então teremos

sucessivamente:

$$\begin{cases} \vec{u} = \vec{e} + \vec{f} \\ \vec{v} = -\vec{e} - 2\vec{f} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{e} = \vec{u} - \vec{f} \\ \vec{v} = -(\vec{u} - \vec{f}) - 2\vec{f} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{e} = \vec{u} - \vec{f} \\ \vec{v} = -\vec{u} - \vec{f} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{e} = \vec{u} - (-\vec{u} - \vec{v}) \\ \vec{f} = -\vec{u} - \vec{v} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{e} = 2\vec{u} + \vec{v} \\ \vec{f} = -\vec{u} - \vec{v} \end{cases}$$

Portanto, os vectores \vec{e} e \vec{f} na base (\vec{u}, \vec{v}) , escrevem-se do seguinte modo:

$$\vec{e} = 2\vec{u} + \vec{v} \text{ e } \vec{f} = -\vec{u} - \vec{v}.$$

Exercício 4: Considere num referencial c. o. n. xOy o rectângulo $[ABCD]$, como é ilustrado na Figura 3.135. (adaptado de Matemática, Teoria e Prática, 10º Ano, Rumo – Pág. 373).

4.1 Represente o rectângulo que se obtém após a translação associada ao vector $\vec{a}(4, -1)$.

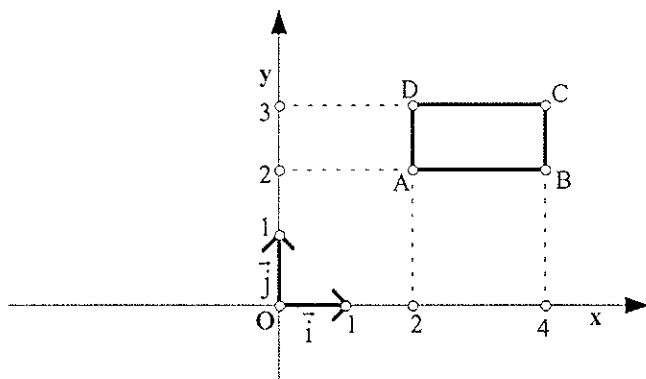


Figura 3.135: No referencial c. o. n. xOy está representado o rectângulo $[ABCD]$.

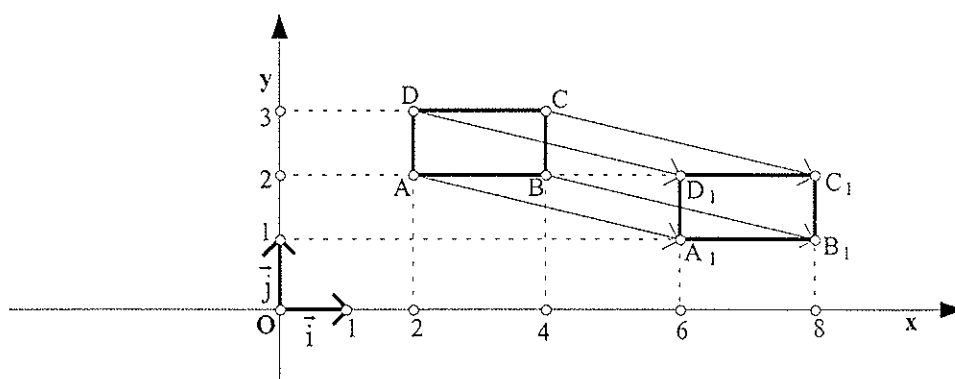


Figura 3.136: No referencial c. o. n. xOy está representada a translação do rectângulo $[ABCD]$ associada ao vector $\vec{a}(4, -1)$: o rectângulo $[A_1B_1C_1D_1]$.

Resolução: Genericamente a translação associada a um vector \vec{u} é uma aplicação que transforma cada ponto P no ponto P_1 tal que $P_1 = P + \vec{u}$. Assim temos:

Vértice de rectângulo	Imagem pela translação associada ao vector $\vec{a}(4, -1)$
$A(2, 2)$	$A_1 = A + \vec{a} = (6, 1)$
$B(4, 2)$	$B_1 = B + \vec{a} = (8, 1)$
$C(4, 3)$	$C_1 = C + \vec{a} = (8, 2)$
$D(2, 3)$	$D_1 = C + \vec{a} = (6, 2)$

Na Figura 3.136 temos a representação geométrica da translação do rectângulo $[ABCD]$ segundo o vector $\vec{a}(4, -1)$: o rectângulo $[A_1B_1C_1D_1]$.

4.2 Identifique as coordenadas de um vector que define a translação do rectângulo $[ABCD]$, que transforma A no ponto $(3, -2)$.

Resolução: Seja \vec{u} o vector que transforma o ponto A no ponto $(3, -2)$. Assim, temos:

$$(3, -2) = A + \vec{u} \Leftrightarrow (3, -2) = (2, 2) + \vec{u} \Leftrightarrow \vec{u} = (3, -2) - (2, 2) \Leftrightarrow \vec{u} = (1, -4).$$

Exercício 5: Calcule os números reais k e p de modo que sejam iguais os vectores:

$$\vec{a} = (k+3)\vec{i} + 2\vec{j} \text{ e } \vec{b} = (p+1)\vec{i} + (k-2)\vec{j}$$

Resolução: Podemos escrever os vectores através das suas coordenadas:

$$\vec{a} = (k+3, 2) \text{ e } \vec{b} = (p+1, k-2).$$

Assim, temos sucessivamente

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow (k+3, 2) = (p+1, k-2) \Leftrightarrow \begin{cases} k+3 = p+1 \\ 2 = k-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 6 \\ k = 4 \end{cases}$$

Exercício 6: Considere num referencial c. o. n., a base o. n. (\vec{e}, \vec{f}) e os vectores escritos nesta base por $\vec{r} = 3\vec{e} - \vec{f}$, $\vec{s} = -7\vec{e} + 5\vec{f}$, $\vec{u} = (4, 0)$ e $\vec{v} = (-6, 3)$. Calcule pelas suas coordenadas:

$$6.1 \vec{r} + \vec{s}; -3\vec{r} - \vec{s} + \vec{u}; \vec{s} + \frac{1}{2}\vec{u} - 3\vec{v}; \frac{1}{5}(\vec{u} - 5\vec{s}); 2\vec{r} + \vec{s} - \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v}).$$

Resolução: Começamos por escrever os vectores \vec{r} e \vec{s} pelas suas coordenadas:

$\vec{r} = (3, -1)$, $\vec{s} = (-7, 5)$. Determinemos então:

$$\vec{r} + \vec{s} = (-4, 4).$$

$$-3\vec{r} - \vec{s} + \vec{u} = -3(3, -1) - (-7, 5) + (4, 0) = (2, -2).$$

$$\vec{s} + \frac{1}{2}\vec{u} - 3\vec{v} = (-7, 5) + \frac{1}{2}(4, 0) - 3(-6, 3) = (13, -4).$$

$$\frac{1}{5}(\vec{u} - 5\vec{s}) = \frac{1}{5}\vec{u} - \vec{s} = \frac{1}{5}(4, 0) - (-7, 5) = \left(\frac{39}{5}, 5\right).$$

$$2\vec{r} + \vec{s} - \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v}) = 2(3, -1) + (-7, 5) - \frac{1}{2}(-2, 3) = \left(0, \frac{3}{2}\right).$$

6.2 $P + \vec{r}$ e $P - 2\vec{v}$, sendo $P(2, 1)$.

Resolução: $P + \vec{r} = (5, 0)$ e $P - 2\vec{v} = (14, -5)$.

Exercício 7: (Exercício proposto) Sendo $A(-1, 2)$, $B(0, 3)$ e $C(2, 6)$, calcula as coordenadas de: \overline{AB} ; \overline{BA} ; \overline{BC} ; $\overline{AB} + \overline{BC}$; $B + \overline{BA}$; e $D = A - \overline{BC}$.

(vi) Colinearidade entre dois vectores. Norma, versor e co-senos directores.

Exercício 1: Considere num referencial c. o. n., a base o. n. (\vec{e}, \vec{f}) e os vectores escritos, nesta base, pelas suas coordenadas: $\vec{a} = (4, 1)$, $\vec{b} = \left(-1, \frac{3}{2}\right)$ e $\vec{c} = (-8, -2)$.

1.1 Mostre que os vectores \vec{a} e \vec{c} são colineares.

Resolução: De (3.5) (secção 3.5.11) escrevemos: $\frac{4}{-8} = \frac{1}{-2} \Leftrightarrow \frac{1}{-2} = \frac{1}{-2}$ P. V.

Logo os vectores \vec{a} e \vec{c} são colineares.

1.2 Justifique que não são colineares os vectores \vec{a} e \vec{b} .

Resolução: De novamente (3.5), como $\frac{4}{-1} \neq \frac{1}{\frac{3}{2}}$ significa que os vectores \vec{a} e \vec{b} não são

colineares.

Exercício 2: Determine o valor do número real k de modo que:

2.1 sejam colineares os pontos $A(-2, 3)$, $B(3, 5)$ e $C(-1, k)$.

Resolução: A, B e C são colineares se cada par de vectores definidos com os três pontos, por exemplo \overline{AB} e \overline{AC} , o forem. Vamos começar, então, por determinar os vectores considerados:

$$\overline{AB} = B - A = (3, 5) - (-2, 3) = (5, 2) \text{ e } \overline{AC} = C - A = (-1, k) - (-2, 3) = (1, k - 3).$$

De (3.5) (secção 3.5.11) temos

$$\frac{5}{1} = \frac{2}{k-3} \Leftrightarrow 5k - 15 = 2 \Leftrightarrow k = \frac{17}{5}.$$

2.2 o vector $\vec{v}(2, k)$ tenha norma 10.

Resolução: Ora, temos sucessivamente:

$$\|\vec{v}\| = 10 \Leftrightarrow \sqrt{2^2 + k^2} = 10 \Leftrightarrow k^2 = 96 \Leftrightarrow k = \pm\sqrt{96}.$$

Exercício 3: Considere num referencial c. o. n., a b. o. n. (\vec{e}, \vec{f}) e o vector $\vec{r} = -\vec{e} - 2\vec{f}$. Determine pelas suas coordenadas, nesta base, um vector \vec{x} , colinear com \vec{r} e com o triplo do seu comprimento.

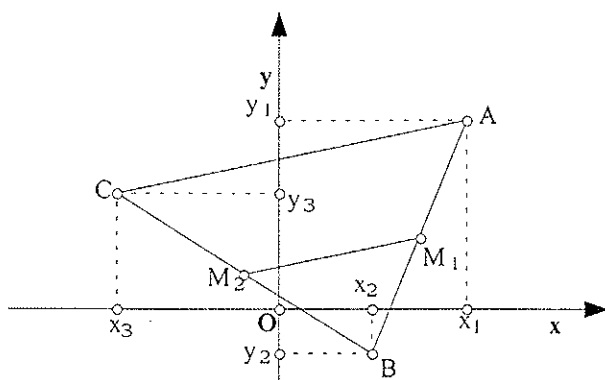


Figura 3.137: No referencial c. o. n. xOy está representado o triângulo $[ABC]$, M_1 é o ponto médio do lado $[AB]$ e M_2 o ponto médio do lado $[BC]$. $[M_1M_2] \parallel [AC]$ e $\overline{AC} = 2 \overline{M_1M_2}$.

Resolução: O vector \vec{x} será escrito na seguinte forma:

$$\vec{x} = 3\vec{r} \quad \text{ou} \quad \vec{x} = -3\vec{r},$$

ou seja,

$$\vec{x} = 3(-\vec{e} - 2\vec{f}) \quad \text{ou} \quad \vec{x} = -3(-\vec{e} - 2\vec{f}).$$

Donde

$$\vec{x} = (-3, -6) \quad \text{ou} \quad \vec{x} = (3, 6).$$

Exercício 4: Mostrar, num referencial c. o. n., que qualquer lado de um triângulo mede o dobro e é paralelo ao segmento de recta cujos extremos são os pontos médios dos outros dois lados do triângulo (retirado de Matemática, Teoria e Prática, 10º Ano, Rumo – Pág. 382).

Resolução⁷⁷: Suponhamos que os pontos $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$ são os vértices de um triângulo (Figura 3.137). Vamos determinar os pontos médios dos lados, por exemplo $[AB]$ e $[BC]$ (podemos escolher qualquer par de lados dos três lados do triângulo, pois os cálculos são análogos), respectivamente M_1 e M_2 :

$$M_1 = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right) \quad \text{e} \quad M_2 = \left(\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2} \right).$$

Calculemos agora $\overline{M_1M_2}$ e \overline{AC} :

$$\overline{M_1M_2} = M_2 - M_1 = \left(\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2} \right) - \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right) = \frac{1}{2}(x_3 - x_1, y_3 - y_1);$$

⁷⁷ Este exercício já foi resolvido nos exercícios 3 e 2 das secções 3.7.2 e 3.7.4 – (ii), respectivamente. O primeiro foi resolvido utilizando um critério de semelhança, o segundo de forma vectorial e agora vamos o resolver usando a Geometria Analítica.

$$\overline{AC} = C - A = (x_3, y_3) - (x_1, y_1) = (x_3 - x_1, y_3 - y_1).$$

Observamos assim que

$$\overline{M_1M_2} = \frac{1}{2} \overline{AC} \Leftrightarrow \overline{AC} = 2 \overline{M_1M_2}.$$

Ou seja, o lado [AC] do triângulo [ABC] é paralelo e mede o dobro de [M₁M₂].

Exercício 5: Considere num referencial c. o. n., a base o. n. (\vec{e} , \vec{f}) e os vectores \vec{a} e \vec{b} dados pelas suas coordenadas: $\vec{a} = (2, -2)$ e $\vec{b} = (0, -3)$. Determine a norma, o versor e também os co-senos directores de \vec{a} e \vec{b} .

Resolução: A norma de \vec{a} e de \vec{b} :

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2} \quad \text{e} \quad \|\vec{b}\| = \sqrt{0^2 + (-3)^2} = 3.$$

O versor de \vec{a} e de \vec{b} :

$$\text{vers } \vec{a} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \frac{2\vec{e} - 2\vec{f}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{f} \quad \text{ou} \quad \text{vers } \vec{a} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$\text{vers } \vec{b} = \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|} = \frac{0\vec{e} - 3\vec{f}}{3} = -\vec{f} \quad \text{ou} \quad \text{vers } \vec{b} = (0, -1).$$

Os co-senos directores do vector \vec{a} :

$$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{e}}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{e} \quad \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{f}}) = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

e do vector \vec{b} :

$$\cos(\widehat{\vec{b}, \vec{e}}) = 0 \quad \text{e} \quad \cos(\widehat{\vec{b}, \vec{f}}) = -1.$$

Exercício 6: Na base o. n. (\vec{e} , \vec{f}), dum referencial c. o. n., o vector \vec{a} é definido por:

$$\vec{a} = -2\vec{e} + 2\vec{f}.$$

Determine a amplitude do ângulo que \vec{a} faz com \vec{e} e com \vec{f} (Figura 3.138).

Resolução: Calculemos os co-senos directores do vector \vec{a} , para obtermos os ângulos pedidos. Começemos por calcular a norma de \vec{a} :

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}.$$

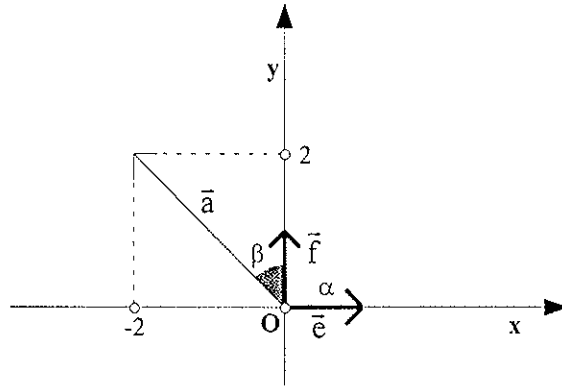


Figura 3.138: No referencial c. o. n. xOy está representado o vector \vec{a} de coordenadas $(-2, 2)$. O ângulos que \vec{a} faz com os vectores da base o. n. (\vec{e}, \vec{f}) , são α e β , respectivamente, e as suas amplitudes são: $\alpha = 135^\circ$ e $\beta = 45^\circ$.

O versor do vector \vec{a} :

$$\text{vers } \vec{a} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \frac{-2\vec{e} + 2\vec{f}}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{f} \quad \text{ou} \quad \text{vers } \vec{a} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Atendendo a que as coordenadas do versor são os co-senos directores, vem:

$$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{e}}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{e} \quad \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{f}}) = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

donde se tira que

$$(\widehat{\vec{a}, \vec{e}}) = 135^\circ \quad \text{e} \quad (\widehat{\vec{a}, \vec{f}}) = 45^\circ.$$

(vii) Projecção ortogonal de um vector sobre outro. Produto interno de dois vectores.

Produto interno num referencial o. n..

Exercício 1: Observe a Figura 3.139 e calcule as seguintes projecções ortogonais: $\text{proj}_{\vec{c}} \vec{a}$, $\text{proj}_{\vec{a}} \vec{b}$ e $\text{proj}_{-\vec{a}} \vec{a}$.

Resolução: Na Figura 3.139 verificamos que $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} \perp \vec{b}$, $\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\| = 8$ e $(\widehat{\vec{a}, \vec{c}}) = 45^\circ$. Temos (secção 3.5.13):

$$\text{proj}_{\vec{c}} \vec{a} = \|\vec{a}\| \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{c}}) = 8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2},$$

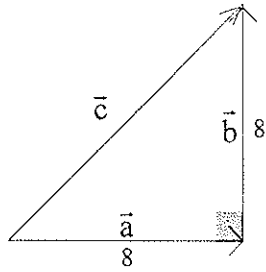


Figura 3.139: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} \perp \vec{b}$, $\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\| = 8$.

$$\text{proj}_{\vec{a}} \vec{b} = \|\vec{b}\| \cos(\widehat{\vec{b}, \vec{a}}) = 0,$$

$$\text{proj}_{-\vec{c}} \vec{a} = \|\vec{a}\| \cos(\widehat{\vec{a}, -\vec{c}}) = -4\sqrt{2}.$$

Exercício 2: Dois vetores \vec{u} e \vec{v} são tais que $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 2$ e $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4$. Calcule o ângulo entre os vetores \vec{u} e \vec{v} , e a projecção ortogonal do vector \vec{u} sobre o vector \vec{v} .

Resolução: De (3.11) temos:

$$\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \frac{4}{3 \times 2} \Leftrightarrow \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{2}{3},$$

o que significa que $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \approx 48,2^\circ$. A projecção ortogonal do vector \vec{u} sobre o vector \vec{v} é:

$$\text{proj}_{\vec{v}} \vec{u} = \|\vec{u}\| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 3 \times \frac{2}{3} \Leftrightarrow \text{proj}_{\vec{v}} \vec{u} = 2.$$

Exercício 3: Consideremos os vetores \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} tais que $\|\vec{u}\| = 3$, $\vec{v} = 2\vec{u}$ e $\vec{w} = -3\vec{u}$. Calcule: $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $\vec{u} \cdot \vec{w}$ e $\vec{v} \cdot \vec{w}$

Resolução: Temos (secção 3.5.14) que:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (2\vec{u}) = 2(\vec{u} \cdot \vec{u}) = 2\|\vec{u}\|^2 = 18; \quad \vec{u} \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot (-3\vec{u}) = -3(\vec{u} \cdot \vec{u}) = -3\|\vec{u}\|^2 = -27;$$

$$\text{e } \vec{v} \cdot \vec{w} = 2\vec{u} \cdot (-3\vec{u}) = (2(-3))(\vec{u} \cdot \vec{u}) = -6\|\vec{u}\|^2 = -54.$$

Exercício 4: Num referencial c. o. n., o triângulo [ABC] é definido pelos pontos A(-3, 1), B(1, -2) e C(0, 3) – Figura 3.140. Indique, em graus, a amplitude dos ângulos internos do triângulo

e do $\angle(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AB})$.

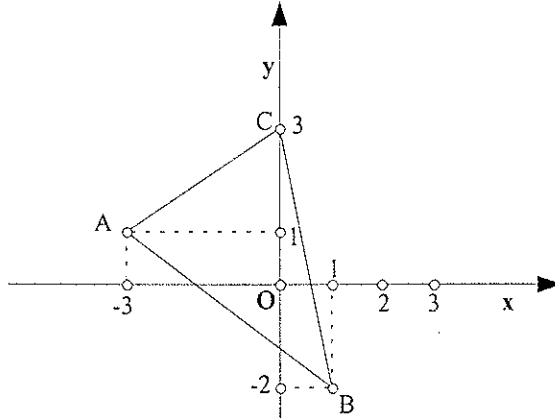


Figura 3.140: Triângulo [ABC] num referencial c. o. n. xOy.

Resolução: Começemos por calcular o co-seno de cada um dos ângulos internos do triângulo [ABC]: Como $\overline{AC} = C - A = (3, 2)$ e $\overline{AB} = B - A = (4, -3)$, temos:

$$\cos\left(\widehat{\overline{AC}, \overline{AB}}\right) = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{AB}}{\|\overline{AC}\| \|\overline{AB}\|} = \frac{(3, 2) \cdot (4, -3)}{\|(3, 2)\| \|(4, -3)\|} = \frac{12 - 6}{\sqrt{3^2 + 2^2} \sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{6}{5\sqrt{13}},$$

significa que $\left(\widehat{\overline{AC}, \overline{AB}}\right) \approx 70,5^\circ$. É $\overline{BA} = (-4, 3)$ e $\overline{BC} = (-1, 5)$, donde:

$$\cos\left(\widehat{\overline{BA}, \overline{BC}}\right) = \frac{\overline{BA} \cdot \overline{BC}}{\|\overline{BA}\| \|\overline{BC}\|} = \frac{(-4, 3) \cdot (-1, 5)}{\|(-4, 3)\| \|(-1, 5)\|} = \frac{19}{5\sqrt{26}},$$

o que significa que $\left(\widehat{\overline{BA}, \overline{BC}}\right) \approx 41,8^\circ$. O terceiro ângulo interno do triângulo pode ser determinado

tendo em conta a Propriedade (v) da secção 3.2.2:

$$\left(\widehat{\overline{CA}, \overline{CB}}\right) \approx 180^\circ - (70,5^\circ + 41,8^\circ) \Leftrightarrow \left(\widehat{\overline{CA}, \overline{CB}}\right) \approx 67,7^\circ.$$

Determinemos agora a amplitude do ângulo $\left(\widehat{\overline{BC}, \overline{AB}}\right)$:

$$\cos\left(\widehat{\overline{BC}, \overline{AB}}\right) = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{AB}}{\|\overline{BC}\| \|\overline{AB}\|} = \frac{(-1, 5) \cdot (4, -3)}{\|(-1, 5)\| \|(4, -3)\|} = \frac{-19}{5\sqrt{26}},$$

o que significa que $\left(\widehat{\overline{BC}, \overline{AB}}\right) \approx 138,2^\circ$.

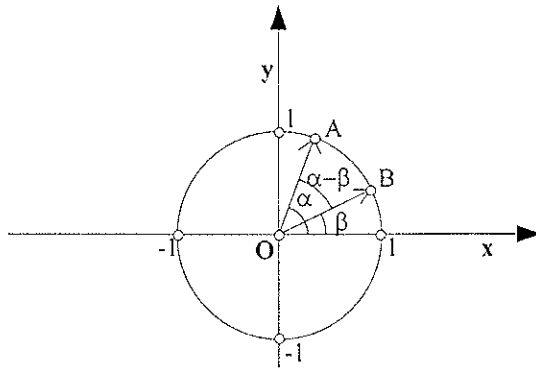


Figura 3.141: Círculo trigonométrico num referencial c. o. n. xOy:

$$\overline{OA} = (\cos\alpha, \text{sen}\alpha) \text{ e } \overline{OB} = (\cos\beta, \text{sen}\beta).$$

Exercício 5: Considere num referencial c. o. n., a base o. n. (\vec{e}, \vec{f}) e os vectores \vec{a} e \vec{b} dados pelas suas componentes: $\vec{a} = 2\vec{e} + 5\vec{f}$ e $\vec{b} = 3\vec{e} + x\vec{f}$. Que valor deve ter x para que os vectores \vec{a} e \vec{b} sejam perpendiculares.

Resolução: Os vectores \vec{a} e \vec{b} são perpendiculares se o produto interno entre eles for nulo, ou seja,

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow (2, 5) \cdot (3, x) = 0 \Leftrightarrow 6 + 5x = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{6}{5}.$$

Exercício 6: Sendo os vectores $\vec{a}(-1, 2)$ e $\vec{b}(k, -5)$ determina para que valores de k o ângulo de \vec{a} com \vec{b} é agudo.

Resolução: Tem de ser o produto interno, entre eles, positivo (visto que o co-seno de um ângulo agudo é positivo – secção 3.5.14), isto é,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} > 0 \Leftrightarrow (-1, 2) \cdot (k, -5) > 0 \Leftrightarrow -k - 10 > 0 \Leftrightarrow k < -10.$$

Exercício 7: Aplicando o produto escalar, obtenha o co-seno da diferença entre dois ângulos α e β : $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \text{sen}\alpha \text{sen}\beta$.

Resolução: Consideremos no círculo trigonométrico, de um referencial c. o. n., os ângulos α e β (Figura 3.141). Ora, podemos escrever (secção 2.4.4):

$$\overline{OA} = (\cos\alpha, \text{sen}\alpha) \text{ e } \overline{OB} = (\cos\beta, \text{sen}\beta).$$

Calculando:

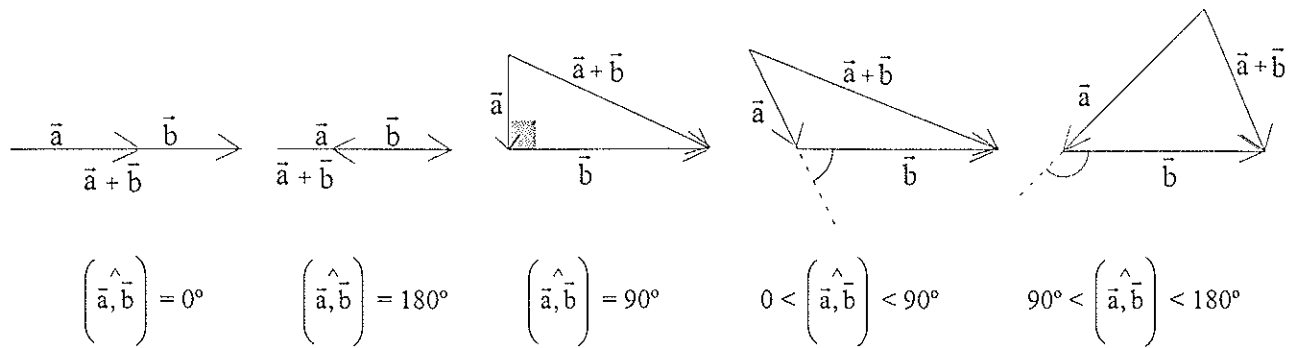


Figura 3.142: A norma de $\vec{a} + \vec{b}$ depende das normas de \vec{a} e de \vec{b} e do ângulo entre os dois vectores.

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}\right) = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{\|\overrightarrow{OA}\| \|\overrightarrow{OB}\|} \Leftrightarrow \cos(\alpha - \beta) = \frac{(\cos \alpha, \text{sen} \alpha) \cdot (\cos \beta, \text{sen} \beta)}{\|\overrightarrow{OA}\| \times \|\overrightarrow{OB}\|} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \text{sen} \alpha \text{sen} \beta,$$

uma vez que $\|\overrightarrow{OA}\| = \|\overrightarrow{OB}\| = 1$.

Exercício 8: A norma de $\vec{a} + \vec{b}$ depende da norma dos vectores \vec{a} e \vec{b} e do ângulo entre eles. Obtém uma fórmula que traduza essa relação de dependência.

Resolução: Na Figura 3.142 representamos as possíveis posições dos vectores \vec{a} e \vec{b} . Podemos, então, considerar cinco casos.

1º caso: $\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right) = 0^\circ$. Sendo o ângulo entre os vectores nulo, os vectores são colineares e

portanto $\|\vec{a} + \vec{b}\| = \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$.

2º caso: $\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right) = 180^\circ$. Neste caso, o ângulo entre os vectores é raso e os vectores também

são colineares, e assim supondo, sem perda de generalidade, que o vector \vec{a} é maior que \vec{b} , temos $\|\vec{a} + \vec{b}\| = \|\vec{a}\| - \|\vec{b}\|$.

3º caso: $\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right) = 90^\circ$. O ângulo entre os dois vectores é recto, e portanto, a relação entre as

normas é dada pelo Teorema de Pitágoras:

$$\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2.$$

4º caso: $0 < \left(\hat{\vec{a}}, \vec{b} \right) < 90^\circ$. Neste caso, sendo o ângulo entre os vectores agudo, por

observação da Figura 3.143 e relativamente à igualdade do caso anterior verificamos que necessitamos de adicionar, nesta, uma parcela positiva (ver caso seguinte).

5º caso: $90^\circ < \left(\hat{\vec{a}}, \vec{b} \right) < 180^\circ$. O ângulo entre os vectores é obtuso. Da Figura 3.142

verificamos que, relativamente à igualdade do 3º caso, é preciso acrescentar uma parcela “negativa”.

Tendo em conta as propriedades do produto interno (secção 3.5.14) vamos calcular então $\|\vec{a} + \vec{b}\|^2$:

$$\begin{aligned} \|\vec{a} + \vec{b}\|^2 &= (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + 2(\vec{a} \cdot \vec{b}) + \vec{b} \cdot \vec{b} = \\ &= \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 + 2\|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \left(\hat{\vec{a}}, \vec{b} \right). \end{aligned}$$

A parcela negativa ou a positiva (4º caso) é dada pelo co-seno do ângulo entre os vectores. Assim, obtivemos uma relação entre as normas (que verifica os cinco casos mencionados):

$$\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 + 2\|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \left(\hat{\vec{a}}, \vec{b} \right).$$

(viii) Estudo da recta. Inclinação e declive de uma recta. Ângulo de duas rectas. Rectas paralelas e rectas perpendiculares.

Exercício 1: Na Figura 3.143 está representada, num referencial c. o. n., a recta r .

1.1 Indique um vector director da recta r .

Resolução: Os pontos $A(2, 1)$ e $B(3, 4)$ são pontos da recta, então um vector director da recta r é \overline{AB} : $\overline{AB} = B - A = (3, 4) - (2, 1) = (1, 3)$

1.2 Apresente uma equação vectorial e a equação reduzida da recta r .

Resolução: Uma equação vectorial será, por exemplo,

$$P = A + k\overline{AB}, k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (x, y) = (2, 1) + k(1, 3), k \in \mathbb{R}.$$

Uma vez que já conhecemos um vector director da recta, $\overline{AB} = (1, 3)$, e o declive da recta r é igual

ao declive do vector director, \overline{AB} , temos que: $m_r = \frac{3}{1} \Leftrightarrow m_r = 3$.

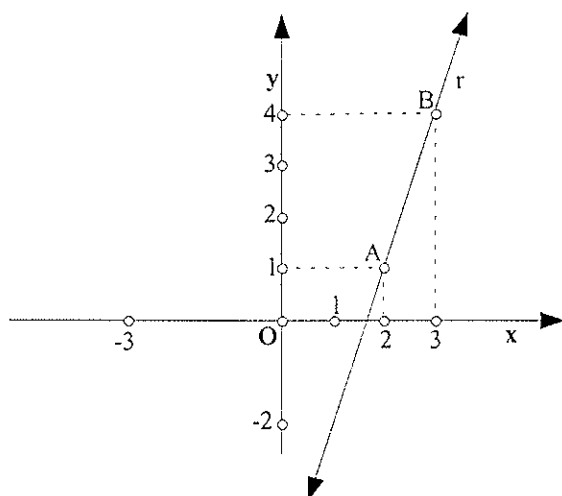


Figura 3.143: No referencial c. o. n. xOy está representada a recta r passando pelos pontos A e B.

Podemos, tendo em conta que $A \in r$, escrever uma equação cartesiana da recta

$$y - 1 = 3(x - 2),$$

donde a equação reduzida da recta r é

$$y = 3x - 5.$$

1.3 Determine condições para caracterizar: $[AB]$, $[AB$ e $[BA$.

Resolução: O segmento de recta $[AB]$ pode ficar definido por uma condição vectorial:

$$(x, y) = (2, 1) + k(1, 2), k \in [0, 1],$$

ou por uma condição na forma cartesiana:

$$y = 3x - 5 \wedge 2 \leq x \leq 3.$$

A semi-recta $[AB$ fica definida vectorialmente por:

$$(x, y) = (2, 1) + k(1, 2), k \in \mathbb{R}_0^+,$$

e na forma cartesiana por:

$$y = 3x - 5 \wedge x \geq 2.$$

E a semi-recta $[BA$, vectorialmente escreve-se:

$$(x, y) = (2, 1) + k(1, 2), k \leq 1$$

e na forma cartesiana por:

$$y = 3x - 5 \wedge x \leq 3.$$

1.4 Defina uma equação cartesiana da mediatriz do segmento de recta $[AB]$ e apresente um vector com a direcção da mediatriz.

Resolução: Seja m a mediatriz do segmento de recta $[AB]$. Temos que:

$$\begin{aligned}
P(x, y) \in m &\Leftrightarrow \overline{PA} = \overline{PB} \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 = (x-3)^2 + (y-4)^2 \Leftrightarrow -4x + 6x - 2y + 8y + 5 - 25 = 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow 2x + 6y - 20 = 0.
\end{aligned}$$

Ou seja, a mediatriz m é dada por: $x + 3y - 10 = 0$. O vector director da mediatriz do segmento de recta $[AB]$, obtido a partir duma equação cartesiana na forma geral, é $\vec{u} = (-B, A)$, neste caso:

$$\vec{u} = (-3, 1).$$

Exercício 2: A recta s é representada pela sua equação geral, dada por: $x - 2y + 5 = 0$.

2.1 Indique para a recta s os pontos de intersecção com os eixos coordenados.

Resolução: A intersecção de s com o eixo dos xx : faz-se $y = 0$ na sua equação, ou seja

$$x - 2 \cdot 0 + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -5.$$

E portanto o ponto de intersecção da recta s com o eixo dos xx , digamos I_1 , é $(-5, 0)$. Para obtermos a intersecção com o eixo dos yy faz-se, na equação da recta, $x = 0$:

$$0 - 2y + 5 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{5}{2}.$$

O ponto de intersecção, digamos I_2 , é $\left(0, \frac{5}{2}\right)$.

2.2 Escreva a equação axial e vectorial da recta s .

Resolução: Do ponto anterior, temos que a abscissa na origem da recta s é -5 e a ordenada na origem é $\frac{5}{2}$. Logo a equação axial de s é:

$$\frac{x}{-5} + \frac{y}{\frac{5}{2}} = 1.$$

Para obtermos a equação vectorial da recta s pensemos, por exemplo, nos seus dois pontos I_1 e I_2 , e no seu vector director:

$$\overline{I_1 I_2} = I_2 - I_1 = \left(5, \frac{5}{2}\right).$$

Assim, uma equação vectorial de s é:

$$P = I_1 + k \overline{I_1 I_2}, k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (x, y) = (-5, 0) + k \left(5, \frac{5}{2}\right), k \in \mathbb{R}.$$

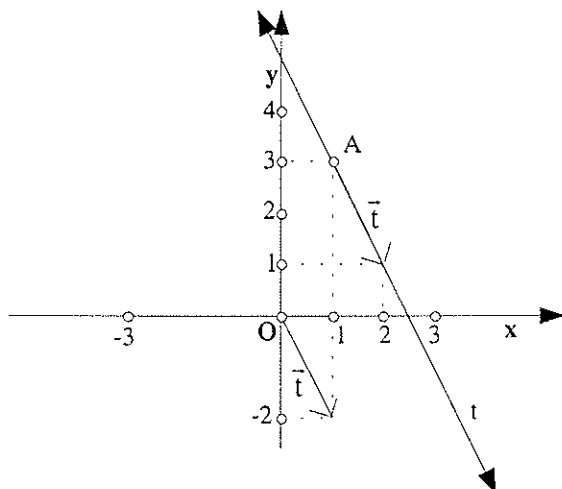


Figura 3.144: No referencial c. o. n. xOy temos a recta t passando pelo ponto A e com declive -2 (tem vector director $\vec{t} = (1, -2)$).

Exercício 3: Num referencial c. o. n. a recta t tem declive -2 e passa pelo ponto $A(1, 3)$.

3.1 Represente a recta t geometricamente.

Resolução: Como t tem declive -2 , um seu vector director é $\vec{t} = (1, -2)$. E uma vez que a recta passa em $A(1, 3)$, temos a representação da recta t na Figura 3.144.

3.2 Escreva a equação reduzida e a equação geral da recta t .

Resolução: Ora, sendo $m = -2$ a equação reduzida é do tipo: $y = -2x + b$. Como $A(1, 3) \in t$, temos:

$$3 = -2 \cdot 1 + b \Leftrightarrow b = 5.$$

Donde a equação reduzida de t é

$$y = -2x + 5.$$

Daqui, a equação geral da recta t sai imediatamente: $2x + y - 5 = 0$.

3.3 Indique as coordenadas do ponto da recta t de ordenada -4 .

Resolução: Fazendo $y = -4$, na equação geral da recta t obtemos: $2x - 4 - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{9}{2}$.

Logo o ponto da recta t com ordenada -4 é $\left(\frac{9}{2}, -4\right)$.

Exercício 4: Num referencial c. o. n. a recta r intersecta os dois eixos coordenados, passa pelo ponto $A(-2, 2)$ e não passa na origem do referencial. Indique uma equação da família de rectas que passe pelo ponto A , nestas condições.

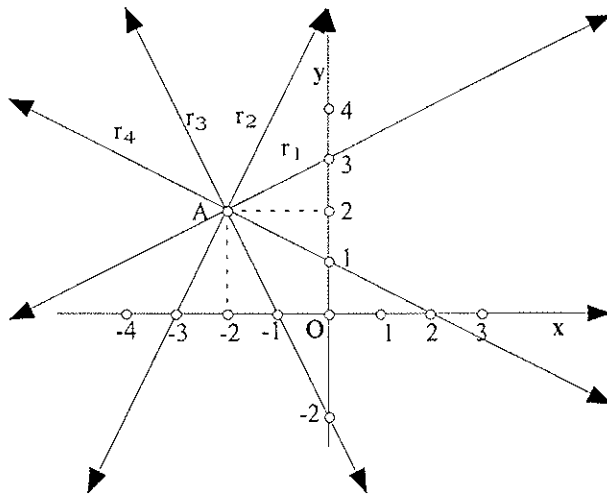


Figura 3.145: No referencial c. o. n. xOy temos a família das rectas r (r_i , $i = 1, 2, 3, 4, \dots$) passando pelo ponto A , intersectando os eixos coordenados e não passando na origem $O(0, 0)$ do referencial: $y = mx + b$, com $b \neq 0$ e $m \neq 0$.

Resolução: Ora, uma equação da família de rectas que passe pelo ponto A pode ser escrita na forma: $y = mx + b$. Mas como nenhuma das rectas da família passa pela origem, tem de ser $b \neq 0$ e como todas as rectas da família têm de intersectar ambos os eixos coordenados significa que nenhuma pode ser horizontal, logo $m \neq 0$. Assim, temos que a família das rectas, nestas condições, fica definida por (Figura 3.145): $y = mx + b$, com $b \neq 0$ e $m \neq 0$.

Exercício 5: A recta r está definida pela sua equação continua $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3}$. Defina uma equação da recta s , paralela à recta r e que tem ordenada na origem -3 .

Resolução: Tiramos de imediato o vector director de r , $\vec{r} = (2, 3)$. Donde, podemos escrever o seu declive $m_r = \frac{3}{2}$. A recta s pedida, paralela a r , tem o mesmo declive ($m_r = \frac{3}{2} = m_s$), portanto, a sua equação reduzida será: $y = \frac{3}{2}x - 3$.

Exercício 6: Num referencial c. o. n. considere as rectas r e s definidas, pela sua equação reduzida e pelas suas equações paramétricas, respectivamente:

$$r: y = -x + 5 \quad \text{e} \quad s: \begin{cases} x = 3k \\ y = 2 - 2k \end{cases}, k \in \mathbb{R}.$$

6.1 Justifique que as rectas r e s são rectas concorrentes.

Resolução: Basta verificar que os vectores directores das rectas, r e s , não são colineares. O vector director de r é $\vec{r} = (1, -1)$. Para determinarmos o vector director de s , vamos escrever a sua equação geral,

$$\begin{cases} x = 3k \\ y = 2 - 2k \end{cases}, k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{x}{3} \\ k = \frac{y-2}{-2} \end{cases}, k \in \mathbb{R},$$

vem, eliminando o parâmetro real k ,

$$\frac{x}{3} = \frac{y-2}{-2} \Leftrightarrow 2x + 3y - 6 = 0.$$

Donde o seu vector director é $\vec{s} = (3, -2)$. E os vectores directores, \vec{r} e \vec{s} , não são colineares, pois $\frac{1}{3} \neq \frac{-1}{-2}$.

6.2 Determine as coordenadas do ponto de intersecção, I , das duas rectas.

Resolução: Temos de resolver um sistema definido pelas suas equações:

$$\begin{cases} y = -x + 5 \\ 2x + 3y - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x + 5 \\ 2x - 3x + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -4 \\ x = 9 \end{cases}$$

Portanto, $I(9, -4)$.

Exercício 7: Num referencial c. o. n. considere a recta r e a circunferência C_1 definidas do seguinte modo:

$$r: x - 2y + 2 = 0 \quad \text{e} \quad C_1: x^2 + y^2 = 4.$$

Determine a posição relativa da recta r e da circunferência C_1 .

Resolução: Uma recta relativamente a uma circunferência pode ser: *secante* se tiver dois pontos em comum com a circunferência; *tangente* se tiver um ponto comum com a circunferência ou *exterior* à circunferência se não tiver ponto comum – Figura 3.69. Para determinarmos a posição relativa da recta r (que passa nos pontos, por exemplo, $(0, 1)$ e $(-2, 0)$) e da circunferência C_1 (de centro na origem do referencial e raio 2) – Figura 3.146, temos de resolver um sistema formado pelas suas equações:

$$\begin{cases} x - 2y + 2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y - 2 \\ (2y - 2)^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y - 2 \\ 5y^2 - 8y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y - 2 \\ y = 0 \vee y = \frac{8}{5} \end{cases} \Leftrightarrow$$

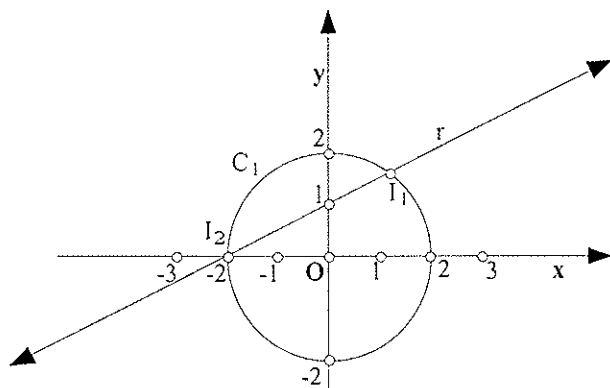


Figura 3.146: No referencial c. o. n. xOy , temos a circunferência C_1 de centro $(0, 0)$ e raio 2 e a recta r secante à circunferência C_1 : $r \cap C_1 = \{I_1, I_2\}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \frac{6}{5} \\ y = \frac{8}{5} \end{cases}.$$

Portanto a recta r é secante à circunferência C_1 e as coordenadas dos pontos de intersecção, I_1 e I_2 , são: $I_1(-2, 0)$ e $I_2\left(\frac{6}{5}, \frac{8}{5}\right)$.

Exercício 8: Dada a circunferência C_1 de equação: $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$.

8.1 Indique a posição dos pontos $A(4, -2)$ e $B(5, 0)$ relativamente à circunferência.

Resolução: Substituindo as coordenadas do ponto A na equação da circunferência:

$$(4 - 1)^2 + (-2 + 2)^2 = 9 \Leftrightarrow 9 = 9 \text{ P.V..}$$

Significa assim que $A \in C_1$ (Figura 3.69). Para determinar a posição de B relativamente à circunferência (de centro $C(1, -2)$ e raio 3) podemos, por exemplo, calcular a distância de B ao centro da circunferência C :

$$\overline{BC} = \sqrt{(1 - 5)^2 + (0 + 2)^2} = \sqrt{20} \approx 4.5$$

Como $\overline{BC} > 3$, significa que B é exterior a C_1 .

8.2 Escreva uma equação da recta tangente à circunferência que passa no ponto A .

Resolução: Basta determinar um vector perpendicular ao vector \overline{AC} :

$$\overline{AC} = C - A = (-3, 0).$$

Um vector perpendicular a \overline{AC} é, por exemplo, $\vec{u} = (0, 3)$. Como conhecemos um ponto da recta tangente, A, podemos escrever uma equação, por exemplo a equação vectorial, da recta pedida:

$$(x, y) = (4, -2) + k(0, 3), k \in \mathbb{R}.$$

Exercício 9: Escreva uma equação da recta r que tem inclinação 30° e que passa pelo ponto $A(-\sqrt{3}, -2)$. Faça a representação da recta r .

Resolução: Se a inclinação da recta r é 30° , significa que o seu declive é

$$m = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

donde uma sua equação, por exemplo a equação cartesiana, é

$$y + 2 = \frac{\sqrt{3}}{3}(x + \sqrt{3}),$$

daqui se escreve a sua equação reduzida:

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 1.$$

A representação de r fica ao cuidado do leitor.

Exercício 10: Considere a recta $r: y = -2x + 3$. Determine uma equação da recta s perpendicular à recta r e que passa pelo ponto $B(2, 3)$. Calcule as inclinações das rectas, r e s .

Resolução: Da equação reduzida da recta r , tiramos o seu declive,

$$m_r = -2.$$

Como a recta s é perpendicular a r significa que o seu declive é (secção 3.5.20)

$$m_s = \frac{1}{2}.$$

Assim, uma equação da recta s é

$$y - 3 = \frac{1}{2}(x - 2) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + 2.$$

A inclinação da recta r , α , é:

$$\operatorname{tg} \alpha = -2 \Rightarrow \alpha = 116,5^\circ.$$

E se β é a inclinação da recta s , temos

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{2} \Rightarrow \beta = 26,5^\circ.$$

Podemos dizer, então, que a relação entre as inclinações das rectas, r e s , é

$$\beta = \alpha - 90^\circ.$$

Exercício 11: Dados os pontos $A(-1, 2)$ e $B(3, 4)$, determine:

11.1 as coordenadas do ponto médio do segmento de recta $[AB]$.

Resolução: Se M o ponto médio de $[AB]$, temos:

$$M\left(\frac{-1+3}{2}, \frac{2+4}{2}\right) \text{ ou seja } M(1, 3).$$

11.2 a equação da mediatriz do segmento de recta $[AB]$, recorrendo ao produto interno.

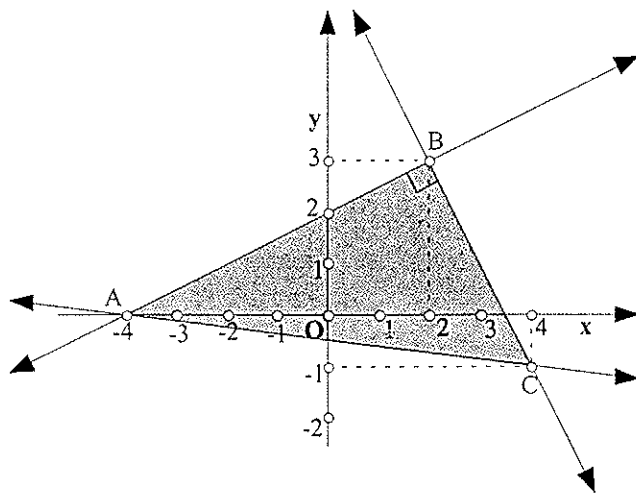
Resolução: Representando por m a mediatriz do segmento de recta $[AB]$ e por P um seu ponto qualquer, temos que:

$$\begin{aligned} P(x, y) \in m &\Leftrightarrow \overline{MP} \cdot \overline{AB} = 0 \Leftrightarrow (x-1, y-3) \cdot (4, 2) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4x - 4 + 2y - 6 = 0 \Leftrightarrow y = -2x + 5. \end{aligned}$$

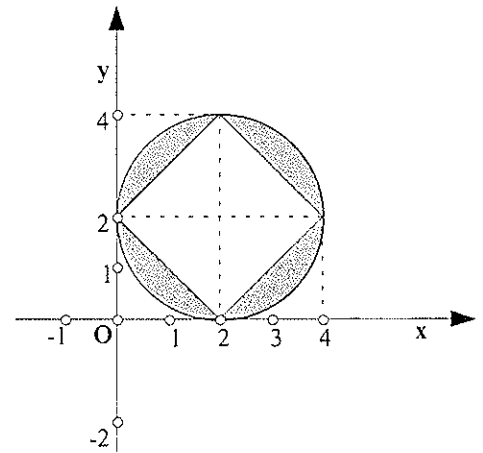
Portanto, a mediatriz do segmento $[AB]$, escrita na forma reduzida, é $y = -2x + 5$.

Exercício 12: Caracterize, por uma condição, cada um dos conjuntos sombreados.

12.1



12.2



12.1 – Resolução: Trata-se de um domínio triangular (triângulo $[ABC]$, rectângulo em B) limitado pelas rectas de equação:

$$AB: y = \frac{1}{2}x + 2; \quad AC: y = -\frac{1}{8}x - \frac{1}{2}; \quad \text{e } BC: y = -2x + 7;$$

Assim, a condição que define o domínio é:

$$y \leq \frac{1}{2}x + 2 \wedge y \geq -\frac{1}{8}x - \frac{1}{2} \wedge y \leq -2x + 7.$$

12.2 – Resolução: Os pontos do domínio pertencem ao círculo de equação:

$$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 \leq 4;$$

e ao exterior do quadrado, incluindo a fronteira: $y \geq x + 2 \vee y \leq x - 2 \vee y \geq -x + 6 \vee y \leq -x + 2$.

Ou seja, a condição que define a região sombreada é:

$$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 \leq 4 \wedge (y \geq x + 2 \vee y \leq x - 2 \vee y \geq -x + 6 \vee y \leq -x + 2).$$

Exercício 13: (Exercício proposto) Represente num referencial c. o. n. o conjunto dos pontos definido por cada uma das condições:

$$13.1 \quad y \geq \frac{1}{2}x + 1 \wedge y \leq \frac{1}{2}x + 3;$$

$$13.2 \quad x^2 + y^2 < 9 \wedge |x| \geq 1;$$

$$13.3 \quad y - 2x \leq 2 \wedge 0 \leq x \leq 4 \wedge 0 \leq y \leq 4 \wedge (x - 2)^2 + y^2 \geq 4;$$

3.7.6 Cónicas

(i) Elipse

Exercício 1: A equação $4x^2 + 25y^2 - 100 = 0$ define uma elipse. Determine a distância focal, as coordenadas dos focos, o comprimento dos eixos e os vértices.

Resolução: Vamos começar por escrever a equação da elipse na forma reduzida:

$$4x^2 + 25y^2 - 100 = 0 \Leftrightarrow \frac{4x^2}{100} + \frac{25y^2}{100} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

Comparando com a equação (3.27), temos que: $a^2 = 25$, ou seja, $a = 5$, $b^2 = 4$ ou $b = 2$. Como se tem $a > b$, trata-se de uma elipse com os focos sobre o eixo dos xx . Assim temos que:

$$25 = 4 + c^2 \Leftrightarrow c = \sqrt{21}.$$

Logo podemos escrever:

- a distância focal: $2c = 2\sqrt{21}$;

- as coordenadas dos focos: $(\sqrt{21}, 0)$ e $(-\sqrt{21}, 0)$;

- a excentricidade: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{21}}{5}$;

- a medida do eixo menor: $2b = 4$;

- a medida do eixo maior: $2a = 10$;
- as coordenadas dos vértices sobre o eixo dos xx: $(5, 0)$ e $(-5, 0)$;
- as coordenadas dos vértices sobre o eixo dos yy: $(0, 2)$ e $(0, -2)$;
- as directrizes: $x = \frac{a}{e} = \frac{25}{\sqrt{21}}$ e $x = -\frac{a}{e} = -\frac{25}{\sqrt{21}}$.

Exercício 2: Determine a equação reduzida da elipse, sabendo que a excentricidade é $\frac{2}{3}$ e os focos têm coordenadas $(\pm 4, 0)$.

Resolução: Tiramos de imediato que $c = 4$. Como $e = \frac{c}{a}$, podemos escrever $\frac{2}{3} = \frac{4}{a}$, donde $a = 6$. Assim, $b^2 = 36 - 16 = 20$. Logo a equação reduzida da elipse é: $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$.

Exercício 3: Dois dos vértices de uma elipse de centro na origem de um referencial c. o. n. são os pontos $A(5, 0)$ e $B(0, 7)$.

3.1 Escreva a equação reduzida da elipse.

Resolução: Como $\overline{AO} = 5$ e $\overline{BO} = 7$, significa que o eixo menor está sobre o eixo dos xx e, portanto, o eixo maior está sobre o eixo dos yy. O semi-eixo menor é $a = 5$ e o semi-eixo maior é $b = 7$. Assim, a equação reduzida sai imediatamente:

$$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{7^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{49} = 1.$$

3.2 Calcule a distância focal e a excentricidade da elipse.

Resolução: Temos $c^2 = 7^2 - 5^2$, donde $c = \sqrt{24}$. Portanto a distância focal é $2c = 2\sqrt{24}$ e a excentricidade é:

$$e = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{24}}{7} \approx 0.7.$$

(ii) Hipérbole

Exercício 1: Considere a hipérbole de equação $4x^2 - 9y^2 - 36 = 0$. Determine os eixos, os vértices, os focos, a distância focal, a excentricidade e as directrizes da hipérbole.

Resolução: Começemos por escrever a equação reduzida da hipérbole:

$$4x^2 - 9y^2 = 36 \Leftrightarrow \frac{4x^2}{36} - \frac{9y^2}{36} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1.$$

Comparando, agora, com a equação (3.31), temos que:

$$a^2 = 9 \Rightarrow a = 3 \text{ e } b^2 = 4 \Rightarrow b = 2.$$

Como $c^2 = 9 + 4$, vem $c = \sqrt{13}$. Assim podemos escrever:

- eixo transversal: $2a = 6$;
- eixo não transversal ou eixo conjugado: $2b = 4$;
- as coordenadas dos vértices: $(3, 0)$ e $(-3, 0)$;
- as coordenadas dos focos: $(\sqrt{13}, 0)$ e $(-\sqrt{13}, 0)$;
- a distância focal: $2c = 2\sqrt{13}$;
- a excentricidade: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{3}$;
- as directrizes são as rectas: $x = \frac{a}{e} = \frac{9}{\sqrt{13}}$ e $x = -\frac{a}{e} = -\frac{9}{\sqrt{13}}$.

Exercício 2: Determine a equação da hipérbole, na forma reduzida, que tem por focos os pontos $(0, \pm 5)$ e por vértices os pontos $(0, \pm 4)$.

Resolução: Conhecidas as coordenadas dos focos (sobre o eixo dos yy) e dos vértices, tiramos que a semi-distância focal é $c = 5$ e o semi-eixo transversal é $b = 4$, respectivamente. Portanto, tiramos que:

$$25 = a^2 + 16 \Leftrightarrow a^2 = 9.$$

De (3.32), escrevemos a equação reduzida da hipérbole: $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$.

(iii) Parábola

Exercício 1: Determine o foco e a directriz da parábola $x^2 = 8y$.

Resolução: Trata-se de uma parábola com a concavidade voltada para cima. Podemos tirar de imediato que: $2p = 8$ ou $p = 4$. Logo, como o foco tem coordenadas do tipo $F\left(0, \frac{p}{2}\right)$, temos que: $F(0, 2)$. A directriz é uma recta horizontal de equação na forma: $y = -\frac{p}{2}$, ou seja, $y = -2$.

Exercício 2: Obtenha a equação reduzida da parábola de vértice na origem dum referencial c. o. n. e cuja directriz é a recta $y = 3$.

Resolução: Sendo $y = 3$ a directriz, o foco da parábola é o ponto F de coordenadas $(0, -3)$ e, portanto, $\frac{p}{2} = 3$, ou seja, o parâmetro é $p = 6$. Como esta parábola tem a concavidade voltada para baixo, a sua equação reduzida é:

$$x^2 = -12y.$$

Exercício 3: Determine uma equação cartesiana do conjunto dos pontos que distam igualmente de $F(-3, 0)$ e da recta $x = 3$. Construa a figura correspondente.

Resolução: O conjunto dos pontos do plano que verificam esta condição determinam uma curva aberta – a parábola. Consideremos, então, um ponto $P(x, y)$, do plano, tal que esteja igualmente distanciado do ponto F e da recta vertical $x = 3$. Ora, a distância do ponto P ao ponto F é:

$$d(P, F) = \sqrt{(x+3)^2 + y^2},$$

e a distância do ponto P à recta vertical $x = 3$, a directriz r , é dada por:

$$d(P, r) = |x - 3|.$$

Donde, se pode escrever que

$$d(P, F) = d(P, r) \Leftrightarrow \sqrt{(x+3)^2 + y^2} = |x - 3|.$$

Elevando ambos os membros ao quadrado, desenvolvendo e simplificando:

$$x^2 + 6x + 9 + y^2 = x^2 - 6x + 9 \Leftrightarrow y^2 = -12x,$$

ou seja, obtivemos a equação reduzida duma parábola, aberta para a esquerda, de parâmetro $p = 6$, com o foco $F(-3, 0)$ e o vértice $V(0, 0)$. A construção da parábola fica ao cuidado do leitor.

Exercício 4: Obtenha o foco e a directriz da parábola com a equação reduzida: $y^2 = 16x$.

Resolução: Trata-se de uma parábola com a concavidade voltada para a direita. Da sua equação reduzida tiramos que: $2p = 16$ ou $p = 8$. Logo, como o foco se escreve na forma $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, temos $F(4, 0)$. A directriz é uma recta vertical do tipo $x = -\frac{p}{2}$, donde $x = -4$.

3.8 Aplicações práticas no Sketchpad™

3.8.1 Transformações geométricas

Exercício 1: (ver Exercício 1 da secção 3.7.1 – Figura 3.110)

Resolução: Vamos dar uma lista de procedimentos para a resolução do exercício no Sketchpad:

- Num Sketch novo, criamos duas circunferências C_1 e C_2 (utilizando a ferramenta circunferência), a recta r (usando a ferramenta recta) e nesta dois pontos A, B à distância d . Para construir a translação da circunferência C_1 associada a \overline{AB} , C'_1 , fazemos:

- Seleccionamos o ponto A e B (por esta ordem) e no menu *Transform* a opção *Mark Vector "A → B"*.

- Seleccionamos a circunferência C_1 e o seu o centro O_1 , e no mesmo menu a opção *Translate* (na janela de diálogo opta-se por *By Marked Vector*).

- Temos que $C_2 \cap C'_1 = \{P_2\}$ e s é paralela a r passando por P_2 . P_2 é a imagem de $P_1 \in C_1$ pela translação associada a \overline{AB} .

Exercício 2: (ver Exercício 2 da secção 3.7.1 – Figura 3.111)

Resolução: Lista de procedimentos para a resolução deste exercício no Sketchpad:

- Num Sketch novo, construímos uma recta r , $M \in r$ e dois pontos do mesmo lado de r , P e Q. Para obtermos P' pela reflexão no espelho r , fazemos:

- Seleccionamos a recta r e no menu *Transform* a opção *Mark Mirror "r"*.

- Seleccionamos o ponto P e no menu *Transform* a opção *Reflect*.

- O ponto O pretendido resulta da intersecção de $[P'Q]$ com r .

Exercício 3: (ver Exercício 3 da secção 3.7.1 – Figura 3.112)

Resolução: Este exercício pode ser resolvido no Sketchpad do seguinte modo:

- Num Sketch novo, construímos um ângulo $\angle ABC$ e o ponto O no seu interior. Para obtermos A' e B' fazemos uma simetria de centro O dos pontos A e B, respectivamente,

- Seleccionamos o ponto O e no menu *Transform* a opção *Mark Center "O"*.

- Seleccionamos o ponto A, no menu *Transform* a opção *Rotate*, e na janela de diálogo opta-se por *By 180°* e clicamos no botão OK. Da mesma forma para B.

- O ponto M é a intersecção de A'B' com [BC e N é a imagem de M pela simetria de centro O.

Exercício 4: (ver Exercício 4 da secção 3.7.1 – Figura 3.113)

Resolução: Para resolver o exercício no Sketchpad procede-se da seguinte forma:

- Num Sketch novo, construímos um quadrado [ABCD] e o ponto X num dos seus lados, por exemplo [AB]. Z obtém-se da intersecção do quadrado dado com a sua rotação de 60° e de centro X, (X; 60°), [A'B'C'D'],

- Seleccionamos o ponto X e no menu *Transform* a opção *Mark Center "X"*;

- Seleccionamos os pontos A, B, C e D, no menu *Transform* a opção *Rotate*, e na janela de diálogo, que se abre, opta-se por *By 60°* .

- Pela rotação (X; -60°), Z tem imagem Y, e assim o triângulo [XYZ] é equilátero.

3.8.2 Construção de polígonos

Exercício 1: (ver Exercício 1 da secção 3.7.3 (i) – Figura3.122)

Resolução: A construção do pentágono regular, no Sketchpad, faz-se do seguinte modo:

- Num Sketch novo, construímos a circunferência C_1 de centro O e diâmetro, qualquer, [AB] e construímos o diâmetro perpendicular a [AB], [CD]. Determinamos o ponto médio M do raio [OB]: Seleccionamos o segmento de recta [OB] e no menu *Construct* a opção *Point At Midpoint*;

- Com centro M e raio [MC], construímos o arco de circunferência CP.

- Marcamos sobre a circunferência C_1 um ponto P_1 : Seleccionamos a circunferência C_1 e no menu *Construct* a opção *Point on Object*;

- Seleccionamos o ponto P_1 e o raio [CP], e no menu *Construct* a opção *Circle By Center And Radius* - determinamos P_2 e P_5 . Analogamente determinamos P_3 e P_4 .

- Unindo os pontos determinados sobre C_1 obtém-se o polígono pretendido [$P_1P_2P_3P_4P_5$]: Seleccionando os pontos P_1, P_2, P_3, P_4 e P_5 (por esta ordem), e no menu *Construct* a opção *Segment*.

Exercício 2: (ver Exercício da secção 3.7.3 (ii) – Figura3.124)

Resolução: Para obtermos todas as estrelas do decágono, começamos por construir uma circunferência de centro O e raio qualquer. Dividimo-la em dez partes geometricamente iguais

marcando dez pontos na circunferência P_1, P_2, \dots, P_{10} , igualmente afastados. Em seguida fazemos sucessivamente:

- Seleccionamos a circunferência e no menu *Construct* a opção *Point on Object* (chamamos P_1 ao ponto obtido);

- Seleccionamos o ponto O e no menu *Transform* a opção *Mark Center "O"*;

- Seleccionamos o ponto P_1 , e no menu *Transform* a opção *Rotate*. Na janela de diálogo, que se abre, opta-se por *By 36°* – obtemos o ponto P_2 . Repetimos este procedimento por forma a obtermos todos os pontos P_3, P_4, \dots, P_{10} ;

- Seleccionamos todos os pontos, P_1, P_2, \dots, P_{10} por ordem em que estão na circunferência e no menu *Construct* a opção *Segment* (obtemos o decágono regular – a verde – [$P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7P_8P_9P_{10}$]);

- Para obtermos a 1ª estrela [$P_1A_1P_2A_2P_3A_3P_4A_4P_5A_5P_6A_6P_7A_7P_8A_8P_9A_9P_{10}A_{10}$] – a vermelho – unimos os pontos alternadamente ou de dois em dois: seleccionamos os pontos P_1, P_3, P_5, P_7 e P_9 , e no menu *Construct* a opção *Segment*; de seguida seleccionamos os pontos P_2, P_4, P_6, P_8 e P_{10} , e no menu *Construct* a opção *Segment*.

- Obtemos a 2ª estrelação: [$P_1B_1P_2B_2P_3B_3P_4B_4P_5B_5P_6B_6P_7B_7P_8B_8P_9B_9P_{10}B_{10}$] – a azul – e a 3ª estrelação [$P_1C_1P_2C_2P_3C_3P_4C_4P_5C_5P_6C_6P_7C_7P_8C_8P_9C_9P_{10}C_{10}$] – a amarelo – da mesma forma, agora, seleccionando os pontos de três em três e de quatro em quatro, respectivamente.

- Para os pormenores (pontos A_i, B_i e C_i com $i = 1, \dots, 10$, segmentos de recta vermelhos, azuis e amarelos) usamos os menus *Construct* (a opção *Point At Intersection*) e *Display* (*Line Style Thich* e *Color* – a gosto).

3.8.3 Geometria Analítica

Exercício 1: (ver Exercício 3 da secção 3.7.5 (iii) – Figura 3.147).

Resolução: Podemos resolver este exercício no Sketchpad do seguinte modo:

- Num Sketch novo e no menu *Graph* seleccionamos a opção *Create Axes*. Escolhemos a unidade mais adequada seleccionando e arrastando o ponto que define a unidade;

- No menu *Graph* seleccionamos a opção *Plot Points...* para representar no referencial $o, n.$ os pontos dados. Construimos o triângulo $[ABC]$, os pontos médios dos seus lados, M_1, M_2 e M_3 , e o triângulo $[M_1M_2M_3]$;

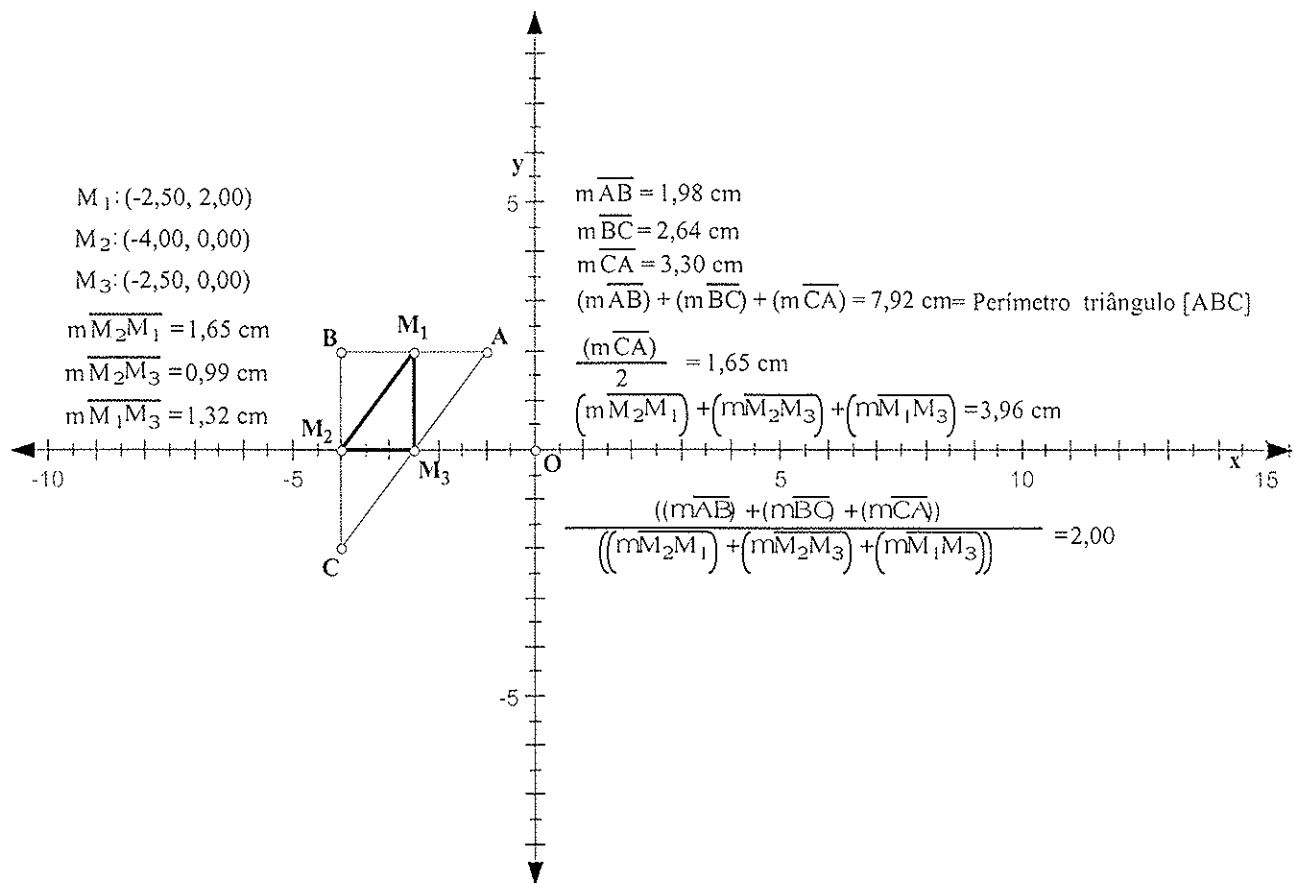


Figura 3.147: Os pontos $A(-1, 2)$, $B(-4, 2)$ e $C(-4, -2)$ determinam o triângulo $[ABC]$. M_1 , M_2 e M_3 são os pontos médios dos lados $[AB]$, $[BC]$ e $[AC]$, respectivamente, e definem o triângulo $[M_1M_2M_3]$.

- No menu *Measure* seleccionamos a opção *Length* para obter o comprimento dos lados dos triângulos;
- No menu *Measure* seleccionamos a opção *Coordinates* para determinar as coordenadas de M_1 , M_2 e de M_3 ;
- No menu *Measure* seleccionamos a opção *Calculate...* para determinar os perímetros dos triângulos e as razões pedidas no enunciado.

3.8.4 Cónicas

O próprio Sketchpad dispõe de ficheiros *.gss numa pasta “CONICS” (em $c:\text{sketch}\text{samples}\text{scripts}\text{conics}$) e também de um ficheiro muito completo, “3conics.gsp” (em $c:\text{sketch}\text{samples}\text{sketches}\text{trigconi}$), onde se podem ver as três cónicas. Além das construções que

se seguem, pode ver no Apêndice VI, na pasta *Capítulo3 – Cónicas*, os ficheiros *Elipse1.gsp* (onde encontra a elipse construída pelo método do jardineiro) e *Parábola1.gsp* (Soarez 2000).

(i) Uma construção da elipse – pelo método das circunferências (ver secção 3.6.1 – (v) e Apêndice VI, na pasta *Capítulo3 – Cónicas*, ficheiro *Elipse2.gsp*)

Num Sketch novo, construímos duas circunferências concêntricas (Figura 3.102) no centro da elipse, O, uma com diâmetro [AB] – o eixo maior, e outra com diâmetro [CD] – eixo menor da elipse. Construímos um ponto qualquer, I_1 , sobre a circunferência de diâmetro [CD] (seleccionando a circunferência e no menu *Construct* a opção *Point on Object*). Construímos a semi-recta [OI₁. A intersecção da semi-recta [OI₁ com a circunferência de diâmetro [AB], determina o ponto I_2 . Traçamos por I_1 uma recta paralela ao eixo maior, [AB], e por I_2 uma recta paralela ao eixo menor, [CD]. A intersecção destas rectas determinam o ponto P, da elipse. Seleccionamos o ponto P e no menu *Display* a opção *Trace Point*. Para obtermos a elipse movimentamos o ponto I_1 em torno da circunferência – Figura 3.102. Pretendendo, podemos nesta construção criar animação do seguinte modo: Seleccionando o ponto I_1 e a circunferência de diâmetro [CD] e no menu *Edit* a opção *Action Button* e depois na caixa que se abre a opção *Animation...*. Na caixa *Path Match* optamos, por exemplo, por *one way* e *normaly*, e clicamos no botão *Animate*. Obtemos, agora, um botão no canto superior esquerdo do ecrã: *Animate* (que pode ser formatado ao gosto do utilizador). Para animar a construção clicamos duas vezes sobre o botão *Animate*.

(ii) Uma segunda construção da elipse – Apêndice VI, pasta *Capítulo3 – Cónicas – Elipse3.gsp*

Vamos construir a elipse por outro processo no Sketchpad (ver <http://www.cl-gaia.rcts.pt>) – Figura 3.148. Num Sketch novo, construímos uma circunferência de centro A e raio [AB], qualquer, e nela um ponto C. Construímos o segmento de recta [AC], um ponto D no interior da circunferência e o segmento de recta [CD]. Depois, damos sucessivamente, os passos seguintes:

- Seleccionamos o segmento de recta [CD] e no menu *Construct* a opção *Point At Midpoint* e obtemos o ponto E;

- Seleccionamos o ponto E e o segmento de recta [CD], e no menu *Construct* a opção *Perpendicular Line* para obter a mediatriz de [CD];

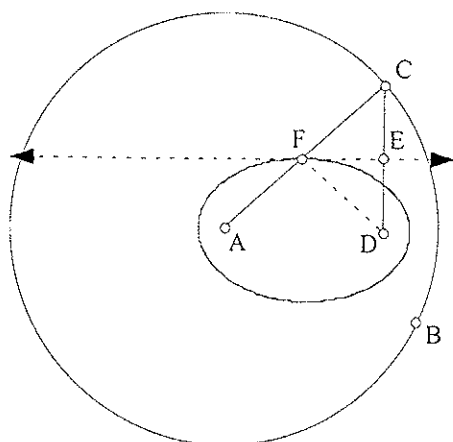


Figura 3.148: Uma construção da elipse.

- Construimos o ponto F de intersecção da mediatriz de [CD] com o raio [AC] e o segmento de recta [DF].
- Seleccionamos os pontos C e F e no menu *Construct* a opção *Locus*.

(iii) Uma construção da hipérbole – Apêndice VI, pasta *Capítulo3 – Cónicas – Hipérbole1.gsp*

Num Sketch novo, construímos a recta F_1F_2 – o eixo focal e os vértices V_1 e V_2 , da hipérbole ($\overline{V_1F_1} = \overline{V_2F_2}$). Construímos um ponto X, arbitrário, sobre o eixo focal e fora do segmento de recta $[V_1V_2]$, por exemplo, na semi recta $[V_1F_1]$ – Figura 3.106. Com centros em F_1 e F_2 , e raios respectivamente iguais a $\overline{V_1X}$ e $\overline{V_2X}$, construímos quatro circunferências. A intersecção das circunferências, duas a duas, determinam quatro pontos, I_1, I_2, I_3 e I_4 , que pertencem à hipérbole (I_1 e I_2 num ramo de hipérbole, e I_3 e I_4 noutra ramo de hipérbole). Seleccionamos os pontos I_1, I_2, I_3 e I_4 , e no menu *Display* a opção *Trace Point*. Para obter a hipérbole movimentamos livremente o ponto X na semi-recta $[V_1F_1]$.

(iv) Uma segunda construção da hipérbole – Apêndice VI, pasta *Capítulo3 – Cónicas – Hipérbole2.gsp*

Num Sketch novo, construímos uma circunferência de centro A e raio [AB], qualquer, e nela um ponto C – Figura 3.149. Construímos um ponto D no exterior da circunferência e o segmento de recta [CD]. Em seguida, damos os passos seguintes:

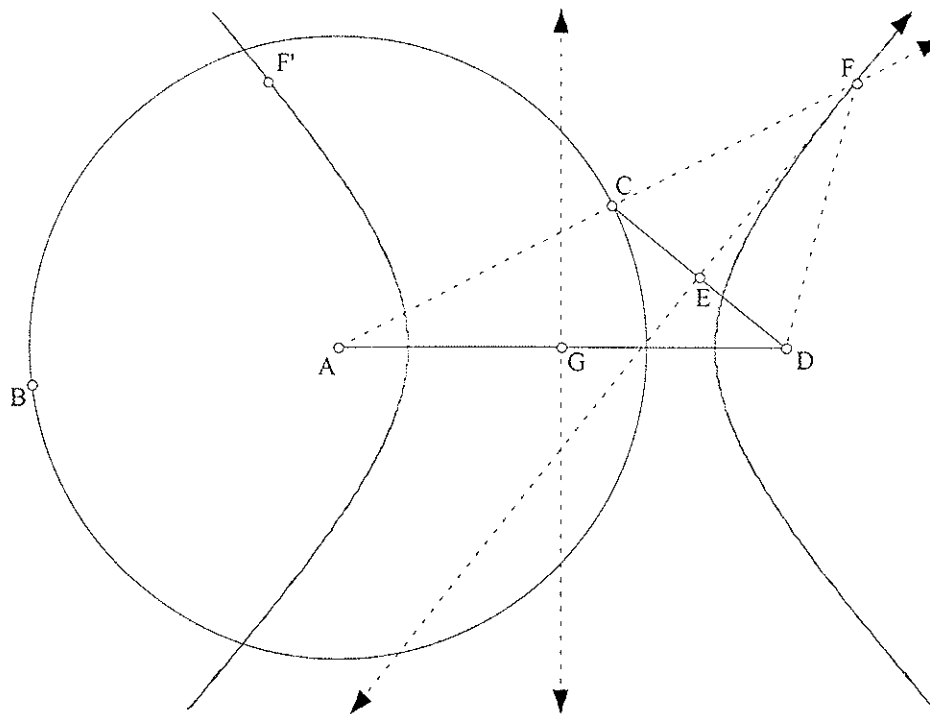


Figura 3.149: Construção da hipérbole.

- Seleccionamos o segmento de recta [CD] e no menu *Construct* a opção *Point At Midpoint* e obtemos o ponto E;
- Seleccionamos o ponto E e o segmento de recta [CD], e no menu *Construct* a opção *Perpendicular Line* para obter a mediatriz de [CD];
- Construimos o ponto, F, de intersecção da mediatriz de [CD] com a semi-recta [AC e o segmento de recta [DF];
- Seleccionamos os pontos C e F e no menu *Construct* a opção *Locus* para obter um dos ramos da hipérbole;
- Construimos o segmento de recta [AD], o seu ponto médio, G, e a sua mediatriz;
- Seleccionamos a mediatriz do segmento de recta [AD] e no menu *Transform* a opção *Mark Mirror*;
- Seleccionamos o ponto F e escolhemos a opção *Mark Mirror* do menu *Transform* – obtemos o ponto F’;
- Seleccionamos os pontos F’ e C e no menu *Construct* a opção *Locus* para obtermos o segundo ramo da hipérbole;

Movimentando livremente o ponto C sobre a circunferência, obtemos um traçado da hipérbole.

(v) **Uma construção da parábola** – Apêndice VI, pasta *Capítulo3 – Cónicas – Parábola2.gsp*

Construímos no Sketchpad a parábola da seguinte forma (Figura 3.109):

- Num Sketch novo, construímos o foco F , a directriz d , o ponto D da directriz mais próximo de F e o vértice V da parábola – ponto médio do segmento de recta $[FD]$.
- Construímos um ponto X , arbitrário, sobre a semi-recta $[VF$ e conduza-se por X uma paralela, r , à recta d .
- Construímos uma circunferência de centro em F e raio igual a \overline{DX} , que corta a recta r em pontos que pertencem à parábola, P_1 e P_2 .
- Seleccionamos os pontos P_1 e P_2 , e no menu *Display* a opção *Trace Point*. Para obter a parábola seleccionamos e movimente livremente o ponto X da semi-recta $[VF$.

(vi) **Uma segunda construção da parábola** – Apêndice VI, pasta *Capítulo3 – Cónicas – Parábola3.gsp*

Num Sketch novo (Figura 3.150), construímos uma recta AB , sobre a recta um ponto D e outro ponto C não pertencente à recta, quaisquer. Construímos o segmento de recta $[CD]$ e a sua mediatriz. Construímos o ponto, F , de intersecção da perpendicular a AB , que passa por D , com a mediatriz de $[CD]$. Para obtermos a parábola seleccionamos o ponto F , e no menu *Display* a opção *Trace Point* ou, simplesmente, para obtermos um seu esboço seleccionamos os pontos F e D e no menu *Construct* a opção *Locus*. Seleccionando e movimentando livremente o ponto D sobre a recta AB , ficamos com a parábola.

3.8.5 Outra construção

Exercício: Determinar as tangentes a uma circunferência centrada em A e raio $[AB]$, por um ponto exterior P (Figura 3.151) – Apêndice VI, pasta *Capítulo 3 – Tangente_Circunferencia.gss*

Resolução: Para resolver este exercício no Sketchpad (à mão, faz-se a construção de forma análoga) procede-se da seguinte forma:

- Num Sketch novo, construímos uma circunferência, C_1 , de centro A e raio $[AB]$, e um ponto P exterior;
- Construímos o ponto médio, M , do segmento de recta $[PA]$;

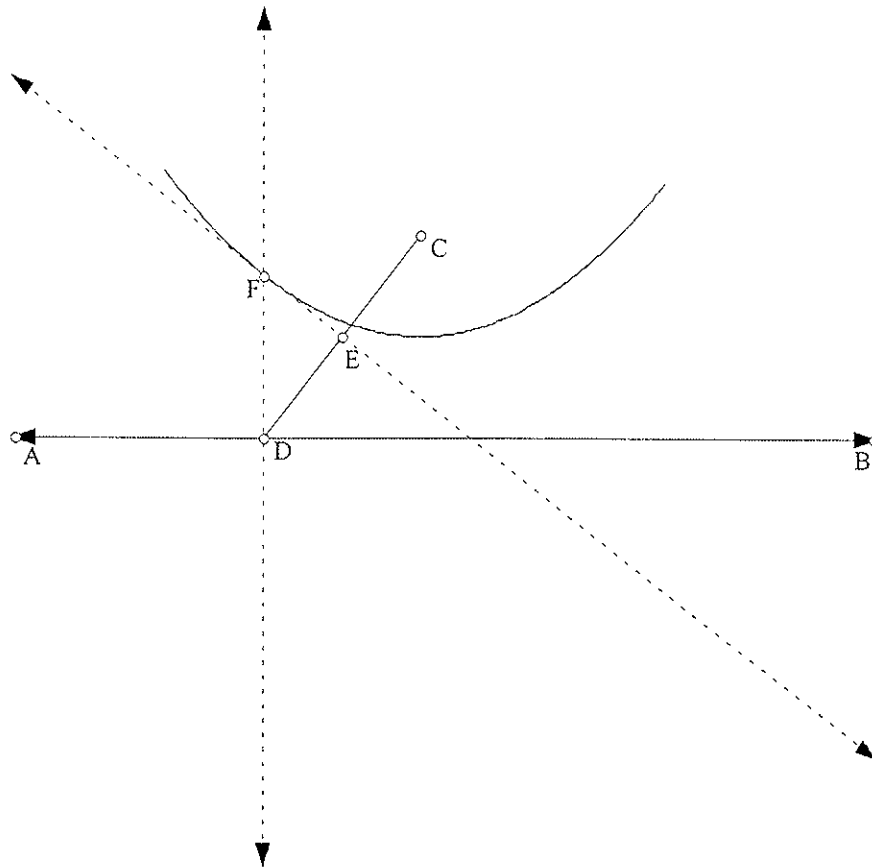


Figura 3.150: Construção da parábola.

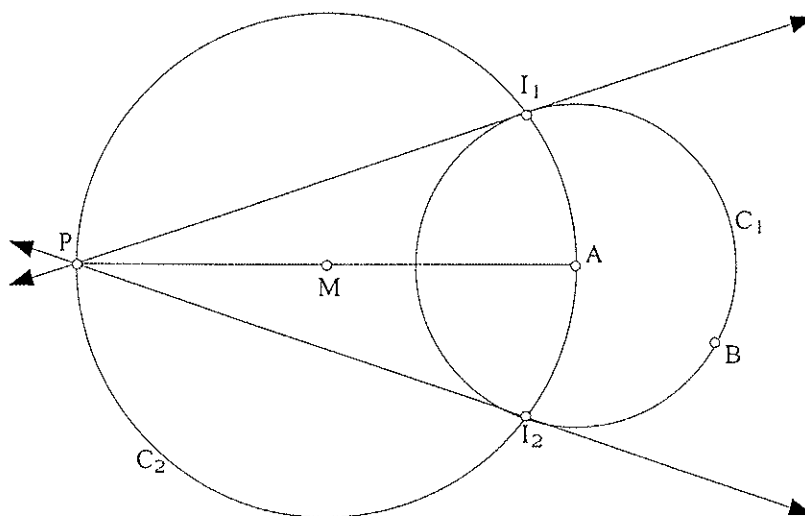


Figura 3.151: PI_1 e PI_2 são tangentes à circunferência C_1 , de centro A e raio $[AB]$, qualquer, por um ponto que lhe é exterior, P.

- Construimos a circunferência C_2 de centro M e raio \overline{AM} ;
- Da intersecção das circunferências, C_1 e C_2 , obtêm-se os pontos I_1 e I_2 ;
- As tangentes são as rectas PI_1 e PI_2 .

Capítulo 4 - Geometria No Espaço

4.1 Poliedros

4.1.1 Definições

Um *sólido geométrico* é uma porção fechada do espaço limitada por superfícies (planas ou curvas). Os sólidos diferenciam-se em *poliedros* e em *não poliedros*. Um *poliedro* (do grego: *poly* – muitas + *edros* – faces) é um sólido limitado por polígonos (figuras planas limitadas por segmentos de recta – secção 3.3). A estes polígonos chamamos *faces* do poliedro. Ao ângulo entre duas faces chama-se *diedro*⁷⁸ – ver Figura 4.1. Os lados dos polígonos são chamados *arestas* do poliedro (são os segmentos de recta que limitam as faces). Os vértices dos polígonos são também os *vértices do poliedro* (são os pontos de encontro de duas ou mais arestas). Chamamos *vértices equivalentes* ou *idênticos* àqueles onde concorre o mesmo número de arestas e chamamos *ordem do vértice* ao número de arestas que concorrem no vértice. Os vértices, as arestas e as faces de um poliedro dizem-se os *elementos do poliedro* – Figura 4.2 e estão relacionados pela Fórmula de Euler (secção 4.1.2). As faces que saem de um mesmo vértice definem um *ângulo poliédrico*. Chamamos ângulo poliédrico *triedro* se for definido por três faces, *quadraedro* se for definido por quatro faces, *pentaedro* se for definido por cinco faces, etc. Podemos dividir os poliedros em três grupos, conforme as semelhanças entre as faces: os *regulares* (secção 4.1.2), os *semi-regulares* (ou poliedros arquimedianos – secção 4.1.3) e os *irregulares* (em particular, os prismas, os antiprismas e as pirâmides – secção 4.1.4). Quanto à disposição das faces, um poliedro pode ser *côncavo*: se o plano que contém alguma das faces divide o poliedro em duas partes; ou *convexo*: se o plano que resulta do prolongamento de qualquer das suas faces não intersectar o interior do poliedro (ou seja, significa que os ângulos diedros formados por quaisquer duas faces consecutivas têm amplitude inferior a 180°). Os poliedros designam-se pelo número de faces que têm: 4 faces – *tetraedro*; 5 faces – *pentaedro*; 6 faces – *hexaedro*; 7 faces – *heptaedro*; 8 faces – *octaedro*; etc. Chama-se *base* de um poliedro à face na qual o poliedro assenta (Figura 4.2).

⁷⁸ Em geral, dados dois semiplanos com a mesma recta origem, *ângulo diedro* é cada uma das regiões do espaço determinadas pelos dois semiplanos (normalmente uma convexa e outra côncava). A recta de origem chama-se *aresta do diedro*. Considerando um plano perpendicular à aresta de um diedro, o *rectilíneo* desse diedro é o ângulo formado pelas duas semi-rectas de intersecção desse plano com os dois semiplanos. A amplitude desse rectilíneo é, por definição, a medida do ângulo diedro dos dois semiplanos.

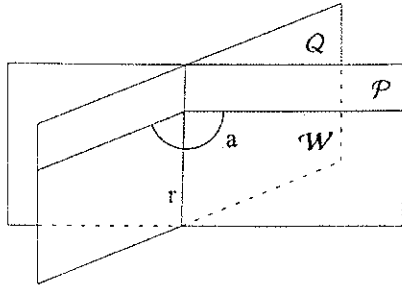


Figura 4.1: Dois planos secantes, \mathcal{P} e \mathcal{Q} , determinam no espaço quatro diedros, iguais dois a dois. A recta de intersecção, r , é a aresta dos diedros. O ângulo α , resultante da intersecção do diedro com um plano, \mathcal{W} , perpendicular à aresta, é o ângulo diedro ou o rectilíneo, cuja amplitude é a amplitude do diedro.

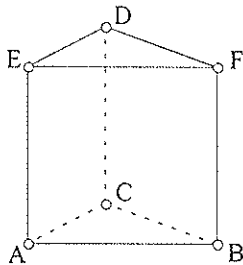


Figura 4.2: No poliedro convexo [ABCDEF] existem seis vértices: A, B, C, D, E e F; nove arestas: [AB], [AC], [AE], [BC], [BF], [CD], [DE], [DF], [EF]; cinco faces: [ABC], [DEF], [ABFE], [ACDE], [BCDF]. Relacionam-se pela Fórmula de Euler (secção 4.1.2). A face [ABC] é a *base inferior* e a face [DEF] é a *base superior* do prisma triangular [ABCDEF] (ver secção 4.1.4).

4.1.2 Poliedros regulares

Um poliedro diz-se *regular* se tiver em todas as faces polígonos regulares geometricamente iguais entre si (estamos a considerar que, por exemplo, o pentagrama é um polígono regular – veja a secção 3.3 do capítulo 3, pois a nossa noção de polígono engloba os polígonos entrecruzados, isto é, com os lados a poderem se intersectar) e cujos ângulos poliédricos são todos geometricamente iguais (ou seja, o número de faces que se encontram em cada vértice é sempre o mesmo). Podem-se classificar os nove poliedros regulares em: cinco *convexos* – o tetraedro (quatro faces), o hexaedro (seis faces), o octaedro (oito faces), o dodecaedro (doze faces) e o icosaedro (vinte faces); e quatro *estrelados* (os poliedros de Kepler – Poinsot⁷⁹) – o *pequeno dodecaedro estrelado*, o *grande dodecaedro estrelado*, o *grande dodecaedro* e o *icosaedro estrelado*.

⁷⁹ Johann Kepler (ver capítulo 1). Louis Poinsot (1777 – 1859) foi um matemático francês que durante muitos anos, foi também membro do quadro superior da instrução pública de França (Struik, 1989).

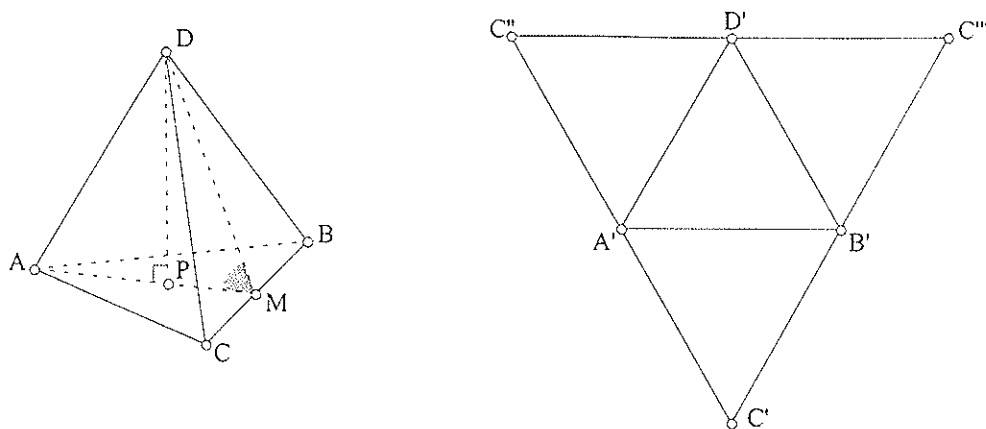


Figura 4.3: $[ABCD]$ é um tetraedro e a figura plana $[C''A'C'B'C'''D']$ a sua planificação. O ponto M é o ponto médio da aresta $[BC]$. O ângulo diedro do tetraedro, $\angle AMD$, mede $70^\circ 32'$, aproximadamente. \overline{PD} é a altura do tetraedro.

Os cinco poliedros regulares convexos são também designados por platônicos (por terem sido estudados e divulgados pela escola de Platão), pois têm todas as faces e ângulos entre as faces geometricamente iguais. Existem apenas cinco pelo que segue. Todo o ângulo poliédrico tem de ter um mínimo de três faces, para que se defina. Além disso, a soma dos ângulos internos de cada face, que se encontra num ângulo poliédrico, tem de ser *inferior* a 360° . Considerando os polígonos regulares (já que serão estes as faces de qualquer poliedro regular platónico), os que formam os cinco poliedros platónicos são os seguintes: os triângulos equiláteros - como cada ângulo interno é de 60° , podem existir em cada vértice 3, 4 ou 5 triângulos (temos o *tetraedro* se tivermos 3 triângulos em cada vértice: $3 \times 60^\circ = 180^\circ$; o *octaedro* se tivermos 4 triângulos em cada vértice: $4 \times 60^\circ = 240^\circ$; e temos o *icosaedro* se tivermos 5 triângulos em cada vértice: $5 \times 60^\circ = 300^\circ$, repare-se que $6 \times 60^\circ = 360^\circ$ não é inferior a 360°); os quadrados - como cada ângulo interno mede 90° só podemos ter 3 quadrados a formar o ângulo sólido ($3 \times 90^\circ = 270^\circ$ - obteremos o *cubo* ou *hexaedro*); e os pentágonos - como cada um dos seus ângulos internos tem amplitude de 108° , só poderemos ter 3 pentágonos em cada vértice ($3 \times 108^\circ = 324^\circ$ - teremos o *dodecaedro*). Adiante, no ponto (vi), depois de estudada a *relação de Euler*, formalizaremos a justificação da existência de apenas cinco poliedros regulares convexos.

(i) Tetraedro

O tetraedro é o poliedro platónico mais simples: tem 4 faces (que são triângulos equiláteros), 4 vértices e 6 arestas. O seu ângulo diedro mede aproximadamente $70^\circ 32'$ (Figura 4.3).

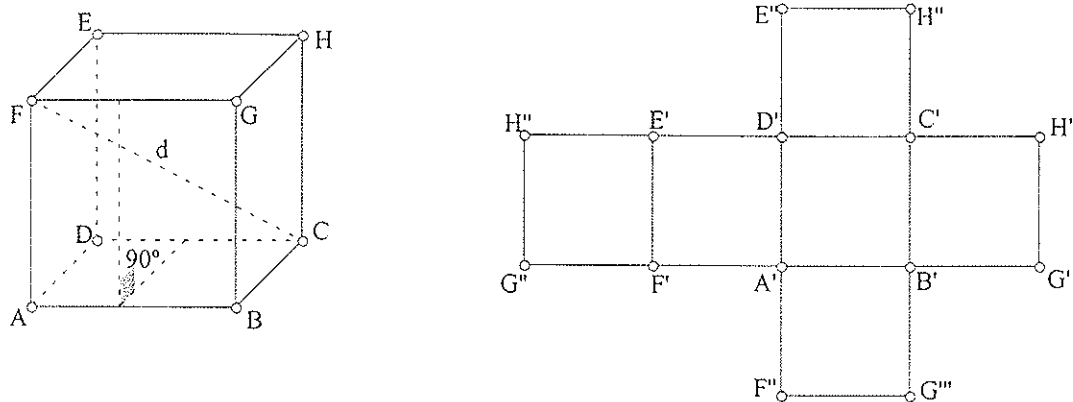


Figura 4.4: $[ABCDEFGH]$ é um cubo, $d \equiv [FC]$ é uma sua diagonal e a sua planificação é $[A'F''G'''B'G'H'C'H''E''D'E'H''G''F']$. O ângulo diedro do cubo mede 90° .

(ii) Hexaedro ou Cubo

Este poliedro é composto por 6 faces (que são quadrados geometricamente iguais), 8 vértices e 12 arestas. O ângulo diedro mede 90° (Figura 4.4). Chamamos *diagonal do cubo*, d , ao segmento de recta que une dois vértices não pertencentes à mesma face (Figura 4.4). Se a é a medida da aresta do cubo, temos que o comprimento da diagonal é dado por (exercício 5.1 da secção 4.3.1):

$$d = \sqrt{3} a.$$

Podemos calcular a área da superfície do cubo, de aresta a , facilmente, uma vez que as suas faces são seis quadrados geometricamente iguais. Como cada quadrado tem área a^2 vem:

$$\text{Área}_{\text{superfície do cubo}} = 6a^2.$$

O volume do cubo é dado pelo cubo do comprimento da aresta, a :

$$\text{Volume} = a^3.$$

(iii) Octaedro

O octaedro tem 8 faces que são triângulos equiláteros, 6 vértices e 12 arestas. Um ângulo diedro deste sólido mede: $\widehat{EMF} \approx 109^\circ 28'$ – Figura 4.5.

(iv) Dodecaedro

Este poliedro é composto por 12 faces que são pentágonos regulares, 20 vértices e 30 arestas. O ângulo diedro deste sólido mede, aproximadamente, $116^\circ 34'$ (Figura 4.6).

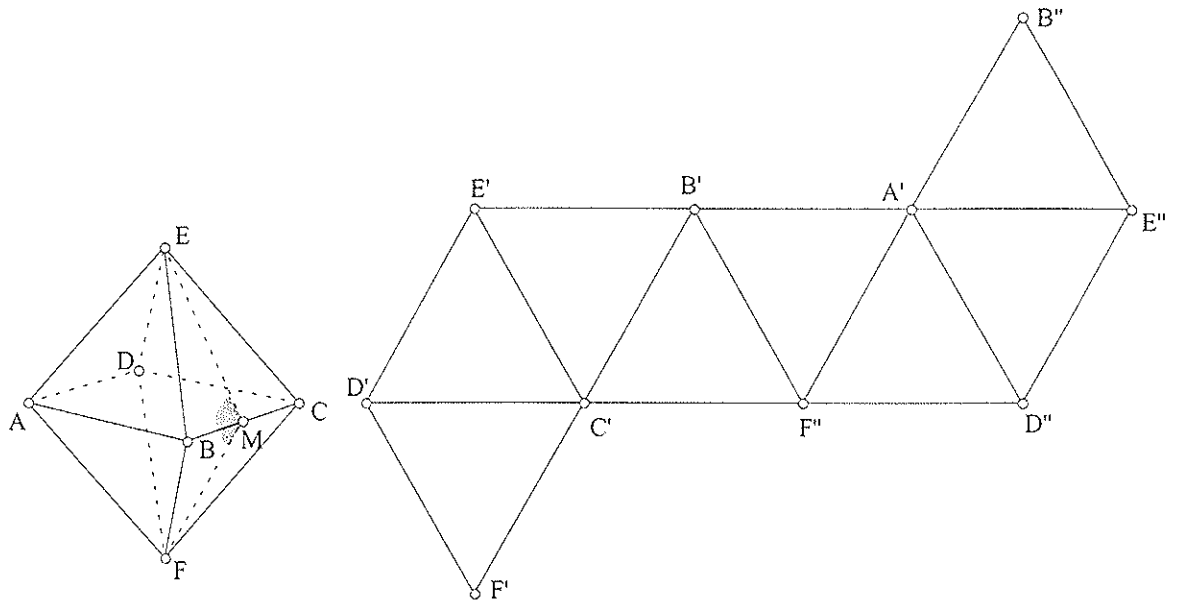


Figura 4.5: O octaedro [FABCDEF] e a sua planificação é [A'B'E'D'F'C'F''D''E''B'']. Um ângulo diedro do octaedro, por exemplo $\angle EMF$, mede $109^\circ 28'$, aproximadamente.

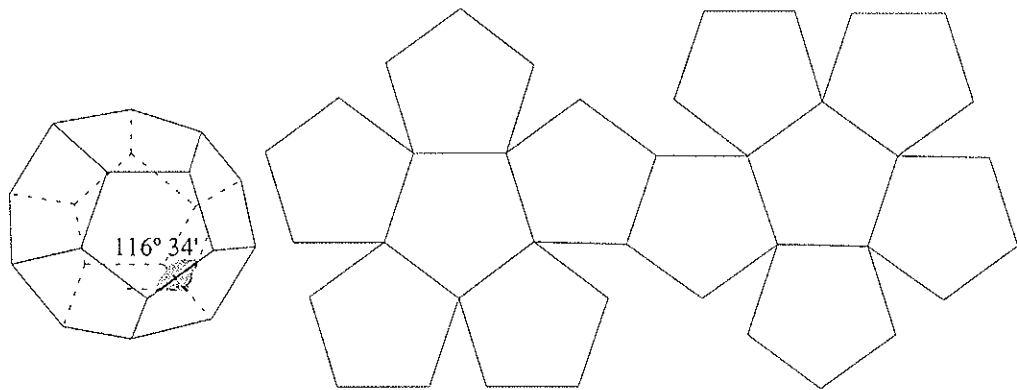


Figura 4.6: O dodecaedro e a sua planificação. Um ângulo diedro mede $116^\circ 34'$, aproximadamente.

(v) Icosaedro

O icosaedro é composto por 20 faces que são triângulos equiláteros, 12 vértices e 30 arestas. O ângulo diedro deste poliedro mede, aproximadamente, $138^\circ 11'$ (Figura 4.7).

(vi) A relação de Euler

Todos os poliedros regulares convexos (platônicos) verificam a relação seguinte: o número de faces (F) somado ao número de vértices (V) é igual ao número de arestas (A) somado de 2, ou seja,

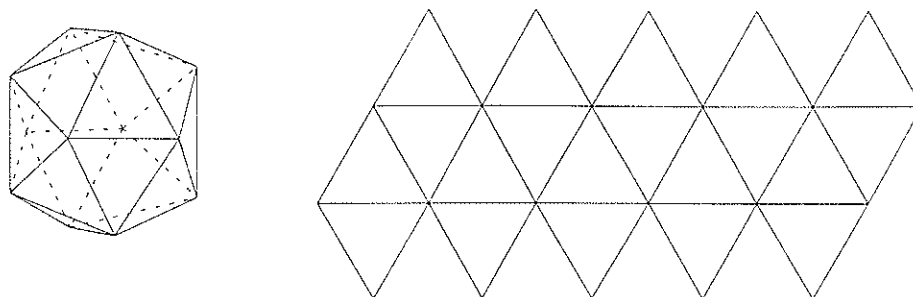


Figura 4.7: O icosaedro e a sua planificação.

Nome do Poliedro	Nº. de Faces (F)	Nº. de Vértices (V)	Nº. de Arestas (A)	F + V	A + 2
Tetraedro	4	4	6	8	8
Hexaedro	6	8	12	14	14
Octaedro	8	6	12	14	14
Dodecaedro	12	20	30	32	32
Icosaedro	20	12	30	32	32

Tabela 4.1: Os poliedros platónicos, regulares e convexos, verificam a relação de Euler: $F + V = A + 2$.

$$F + V = A + 2 \quad (4.1),$$

que se designa por *relação de Euler*⁸⁰ – Tabela 4.1.

A justificação da existência de apenas e só cinco poliedros regulares convexos (poliedros platónicos) pode ser feita da seguinte forma: Consideremos, num poliedro regular convexo, as seguintes designações (em tudo números inteiros):

n – é o número de arestas em cada face do poliedro;

A – é o número de arestas total do poliedro;

F – é o número de faces do poliedro;

r – é o número de arestas que se encontram em cada vértice do poliedro;

V – é o número de vértices do poliedro.

Cada face possui n arestas, $n \geq 3$ (são polígonos), e como cada aresta é comum a duas faces temos

$$A = \frac{nF}{2} \Leftrightarrow F = \frac{2A}{n} \quad (4.2)$$

⁸⁰ O matemático francês Adrien-Marie Legendre (1752 – 1833) demonstrou que a relação de Euler é válida para quaisquer poliedros convexos (mesmo irregulares). No entanto, sabe-se que esta relação é válida para uma classe mais alargada de poliedros (aqueles topologicamente idênticos a uma esfera) embora não se generalize a todo o tipo de poliedros. Por exemplo, o pequeno dodecaedro estrelado e o grande dodecaedro não verificam a relação de Euler, mas os outros dois poliedros regulares estrelados verificam-na: o grande dodecaedro estrelado e o grande icosaedro estrelado.

Cada ângulo poliédrico formado por todas as faces que têm em comum um vértice, possui r arestas, $r \geq 3$, e como cada aresta é limitada por dois vértices, temos:

$$A = \frac{rV}{2} \Leftrightarrow V = \frac{2A}{r} \quad (4.3)$$

Assim de (4.1) obtemos:

$$\frac{2A}{n} + \frac{2A}{r} = A + 2,$$

dividindo ambos os membros por $2A$ vem:

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{r} = \frac{1}{2} + \frac{1}{A}. \quad (4.4)$$

Se $n = 3$ (triângulo equilátero), de (4.4) temos

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{r} = \frac{1}{2} + \frac{1}{A} \Leftrightarrow \frac{1}{r} - \frac{1}{6} = \frac{1}{A}$$

e como $A > 0$, podemos concluir que

$$\frac{1}{r} > \frac{1}{6}$$

e logo

$$r < 6.$$

Ou seja, r só pode tomar os valores 3, 4 e 5.

Se $r = 3$, de (4.4) vem

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{A} \Leftrightarrow \frac{1}{n} - \frac{1}{6} = \frac{1}{A}$$

e novamente, como $A > 0$ podemos tirar que

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{6}$$

ou seja

$$n < 6.$$

Donde n só poderá tomar os valores 3, 4 e 5 ($n = 3$ é a mesma situação que a vista antes). Podemos obter o número de arestas, de faces e de vértices dos poliedros correspondentes substituindo os valores encontrados para n e r em (4.4), (4.2) e (4.3) respectivamente – Tabela 4.2.

Face (polígono)	Nº. de arestas p/ face (n)	Nº. de arestas p/ vértice (r)	Nº. de Arestas (A)	Nº. de Vértices (V)	Nº. de Faces (F)	Nome do Poliedro
Δ equilátero	3	3	6	4	4	Tetraedro
Quadrado	4	3	12	8	6	Hexaedro
Δ equilátero	3	4	12	6	8	Octaedro
Pentágono	5	3	30	20	12	Dodecaedro
Δ equilátero	3	5	30	12	20	Icosaedro

Tabela 4.2: Observamos que só podem existir 5 poliedros platônicos (regulares e convexos), tendo em consideração a definição destes, e ainda a relação de Euler: $F + V = A + 2$.

(vii) Os poliedros de Kepler – Poissant

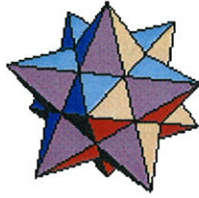
Os quatro e únicos poliedros regulares estrelados, não convexos, são habitualmente designados por poliedros de Kepler – Poissant, pois foram estes os primeiros matemáticos a investigá-los. Johann Kepler, em 1619, descobriu os dois primeiros poliedros: o pequeno dodecaedro estrelado e o grande dodecaedro estrelado (Figura 4.8 e 4.10). Cerca de dois séculos mais tarde, em 1810, Louis Poissant redescobriu-os e descobriu os outros dois: o grande dodecaedro e o grande icosaedro estrelado (Figura 4.9 e 4.11). Mas foi o matemático Cauchy⁸¹ quem mostrou, em 1813, que não havia outros poliedros regulares não convexos, para além dos encontrados por Kepler e Poissant.

O *pequeno dodecaedro estrelado* (Figura 4.8) tem 12 faces, 12 vértices e 30 arestas. Este poliedro estrelado obtém-se de um dodecaedro, “colando” nas suas doze faces outras tantas pirâmides⁸² pentagonais regulares, cujas faces fossem triângulos isósceles ou, utilizando um processo semelhante à obtenção de polígonos estrelados (secção 3.3), prolongando as faces do dodecaedro e considerando as suas intersecções obtemos o pequeno dodecaedro estrelado como a primeira estrelação do dodecaedro. Observe-se, na Figura 4.8, que as 12 faces do pequeno dodecaedro estrelado são pentagramas, as arestas são os lados das faces e os vértices estão nas extremidades das arestas (note que existem vértices, nos poliedros estrelados não convexos, que não são verdadeiros vértices, uma vez que são os vértices dos ângulos sólidos côncavos – no pequeno dodecaedro estrelado os “falsos” vértices coincidem com os vértices dos pentágonos das faces do dodecaedro).

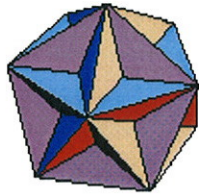
O *grande dodecaedro* tem 12 faces, 12 vértices e 30 arestas e é obtido, por sua vez, do

⁸¹ Augustin-Louis Cauchy (1789 – 1857), francês, foi um dos génios matemáticos do século XIX. Trabalhou em vários ramos da matemática: análise, teoria das permutações, probabilidades e física matemática.

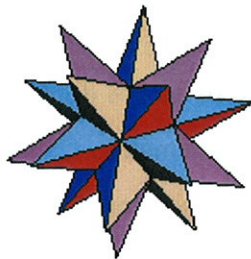
⁸² Ver secção 4.1.4.



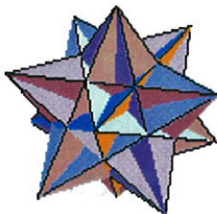
Figura⁸³ 4.8: *Pequeno dodecaedro estrelado* – cada face está identificada por uma cor e são pentagramas.



Figura⁸³ 4.9: *Grande dodecaedro* – segunda estrelação do dodecaedro – cada uma das faces está identificada por uma cor e são pentágonos.



Figura⁸³ 4.10: *Grande dodecaedro estrelado* – terceira estrelação do dodecaedro – cada uma das faces está identificada por uma cor e são pentagramas.



Figura⁸³ 4.11: *Grande icosaedro estrelado* – corresponde à 16ª estrelação do icosaedro – cada uma das faces está identificada por uma cor e são triângulos.

pequeno dodecaedro estrelado prolongando-se as suas faces (que são pentagramas), ou seja, realizando-se, agora, a segunda estrelação do dodecaedro. Cada uma das novas 12 faces são pentágonos regulares (Figura 4.8).

⁸³ Estas quatro figuras (4.8 – 4.11) são até aqui as únicas da tese, em que fazê-las com o Sketchpad se revelaria extremamente complicado (existem outras nestas circunstâncias, adiante no Apêndice XI para a representação dos poliedros arquimedianos). Assim foram retiradas de <http://combinatoria.matem.unam.mx/Conf%5CPPPslides.pdf>.

Poliedro estrelado (regular)	Faces	Nº. de FACES (F)	Nº. de Vértices (V)	Nº. de Arestas (A)
Pequeno dodecaedro estrelado	Pentagramas	12	12	30
Grande dodecaedro	Pentágonos	12	12	30
Grande dodecaedro estrelado	Pentagramas	12	20	30
Grande icosaedro estrelado	Triângulos	20	12	30

Tabela 4.3: Os quatro poliedros regulares estrelados. Observa-se que o pequeno dodecaedro estrelado e o grande dodecaedro não verificam a relação de Euler ($F + V - A = 2$), mas o grande dodecaedro estrelado e o grande icosaedro estrelado já a verificam. Isto deve-se ao facto de os poliedros terem de ser topologicamente equivalentes a uma esfera para verificarem a relação de Euler.

O *grande dodecaedro estrelado* tem 12 faces, 20 vértices e 30 arestas e é obtido fazendo a terceira estrelação do dodecaedro, ou seja, do prolongamento das faces do grande dodecaedro. Podemos verificar na Figura 4.9 que as 12 faces deste poliedro estrelado são também pentagramas.

O *grande icosaedro estrelado* tem 20 faces, 12 vértices e 30 arestas, e surge na 16ª estrelação das 59 estrelações possíveis do icosaedro – Figura 4.9. As faces deste poliedro estrelado são triângulos equiláteros e comparando as suas características com as do icosaedro verifica-se que ambos têm o mesmo número de faces, de vértices e de arestas.

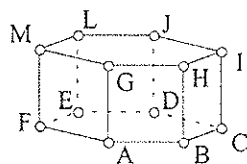
Na Tabela 4.3 sumariam-se os elementos de cada um dos quatro poliedros estrelados regulares.

4.1.3 Poliedros arquimedianos

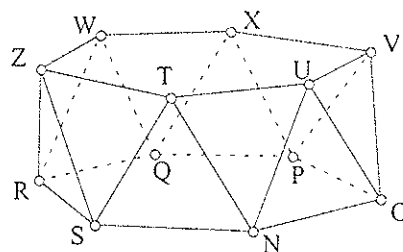
Nos poliedros arquimedianos⁸⁴ (ou semi-regulares) as faces são polígonos regulares, mas não têm de ser todas congruentes (ou seja, nesta classe de poliedros, podemos ter nas faces mais de um tipo de polígono regular, enquanto que nos poliedros platónicos as faces eram apenas de um tipo de polígono regular).

Os prismas e os antiprismas (ver secção 4.1.4) cujas faces laterais são polígonos regulares são poliedros arquimedianos – Figura 4.12. Mas, tirando estes tipos prismas e antiprismas, Kepler justificou que só haviam 13 poliedros arquimedianos. De facto não podem existir mais do que 13 vértices diferentes, ou seja, só é possível existir em 13 tipos de vértices e a cada um desses tipos de vértices corresponde um sólido arquimediano - Soler (1990). A notação para estes tipos de vértices serve para designar os diferentes sólidos. Na Figura 4.13 apresentam-se três tipos possíveis de

⁸⁴ Assim se chamam por terem sido estudados pela primeira vez pelo matemático e físico grego Arquimedes.



PRISMA HEXAGONAL
SEMI-REGULAR RECTO



ANTIPRISMA SEMI-REGULAR

Figura 4.12: Os prismas e antiprismas com faces de polígonos regulares são poliedros arquimedianos: [ABCDEFGHJKLM], à esquerda, é um prisma hexagonal semi-regular recto – as faces laterais são quadrados enquanto as bases são hexágonos; [NOPQRSTUVWXYZ], à direita, é um antiprisma semi-regular – as faces laterais são triângulos equiláteros (para se obter o antiprisma a partir do prisma da esquerda temos de ter o vértice de uma base oposto a um lado da outra base; isto obtém-se rodando uma das bases em relação à outra).

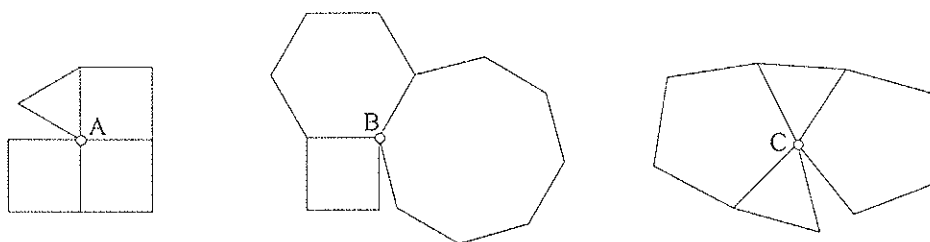


Figura 4.13: Os pontos A, B e C são vértices de três poliedros arquimedianos. O vértice A pertence a um rombicuboctaedro e é do tipo 3.4^3 , já que nele concorrem um triângulo e três quadrados. o vértice B é de um cuboctaedro truncado é do tipo 4.6.8 (quadrado, hexágono e octógono); o vértice C pertence a um icosidodecaedro e é do tipo $(3.5)^2$ (triângulo – pentágono – triângulo – pentágono).

vértices: 3.4^3 por exemplo, significa que no vértice concorre um triângulo equilátero e três quadrados – o sólido designa-se por *rombicuboctaedro*; 4.6.8 (significa que no vértice concorre um quadrado, um hexágono regular e um octógono regular) – este sólido toma o nome de *cuboctaedro truncado*; e $(3.5)^2$ (significa que concorrem no vértice dois triângulos equiláteros e dois pentágonos regulares, mas apresentam-se no vértice pela ordem seguinte: triângulo – pentágono – triângulo – pentágono), o sólido chama-se *icosidodecaedro*.

Podemos obter poliedros arquimedianos a partir dos poliedros platónicos por meio de cortes sucessivos ou truncaturas, seguidas de transformações convenientes. As truncaturas são feitas nas esquinas dos poliedros regulares por forma a se obterem poliedros que tenham todas as faces regulares. Para isso é preciso que os cortes, em torno dos vértices, sejam perpendiculares ao eixo de simetria de rotação que passa por esses vértices (ver Apêndice X). Cada vértice do poliedro original

Poliedros semi-regulares ou arquimedianos	Tipos de Vértices	Nº. de Faces (F)	Nº. de Vértices (V)	Nº. de Arestas (A)
1 – Poliedros com dois tipos de faces				
a) Ângulos poliédricos triedros				
Troncotetraedro (tetraedro truncado)	3.6 ²	8	12	18
Troncooctaedro (octaedro truncado)	4.6 ²	14	24	36
Troncoicosaedro (icosaedro truncado)	5.6 ²	32	60	90
Troncocubo (cubo truncado)	3.8 ²	14	24	36
Troncododecaedro (dodecaedro truncado)	3.10 ²	32	60	90
b) Ângulos poliédricos quadraedros				
Rombicuboctaedro	3.4 ³	26	24	48
Cuboctaedro	(3.4) ²	14	12	24
Icosidodecaedro	(3.5) ²	32	30	60
c) Ângulos poliédricos pentaedros				
Cubo achatado / rombo	3 ⁴ .4	38	24	60
Dodecaedro achatado / rombo	3 ⁴ .5	92	60	150
2 – Poliedros com três tipos de faces				
a) Ângulos poliédricos triedros				
Troncocuboctaedro (cuboctaedro truncado)	4.6.8	26	48	72
Troncoicosidodecaedro (icosidodecaedro truncado)	4.6.10	62	120	180
b) Ângulos poliédricos quadraedros				
Rombicosidodecaedro	3.4.5.4	62	60	120

Tabela 4.4: Os 13 poliedros semi-regulares ou arquimedianos, os seus tipos de vértices, o número de faces, de vértices e de arestas, respectivo (ver Apêndice XI com as suas representações). Observa-se que todos estes poliedros verificam a relação de Euler: $F + V - A = 2$.

transforma-se num polígono regular, menor ou maior conforme a distância do ponto da aresta onde o corte passa ao vértice. O polígono obtido tem um número de lados igual à ordem do vértice.

Partindo do tetraedro e do cubo, ou do octaedro (Figuras 4.3, 4.4 e 4.5), chegamos por truncaturas aos quatro seguintes arquimedianos: *tetraedro truncado*, *cubo truncado*, *octaedro truncado* e *cuboctaedro*. Se partirmos do icosaedro ou do dodecaedro, chegamos aos três seguintes arquimedianos: *icosaedro truncado*, *icosidodecaedro* e *dodecaedro truncado*. Os restantes seis arquimedianos (o *cuboctaedro truncado*, o *rombicuboctaedro*, o *icosidodecaedro truncado*, o *rombicosidodecaedro*, o *cubo achatado* e o *dodecaedro achatado*) não se conseguem obter directamente por truncaturas. Para os obtermos são necessárias fazerem-se transformações adequadas – Soler (1990). Ver no Apêndice XI ou em Veloso (1998) ou, ainda, em

<http://www.mat.uel.br>, assim como as suas respectivas planificações. Na Tabela 4.4 apresenta-se um sumário das propriedades dos treze poliedros arquimedianos.

4.1.4 Outros poliedros (*Prismas, Antiprismas e Pirâmides*)

Um *poliedro irregular* é um sólido geométrico em que as faces não são todas polígonos regulares, nem o número de faces que se encontram em cada vértice é sempre o mesmo. Os poliedros irregulares mais conhecidos são os prismas e as pirâmides. Contudo, além dos prismas e das pirâmides, vamos estudar, nesta secção, os antiprismas – ver <http://www.mat.uel.br>, <http://www.educ.fc.ul.pt> e <http://planeta.clix.pt>.

O número de faces, de vértices e de arestas dos prismas, dos antiprismas e das pirâmides depende do número de lados do polígono das suas bases, como veremos nas secções (i), (ii) e (iii) que se seguem. Em geral, se as bases são formadas por polígonos de n lados, temos os seguintes resultados:

- um prisma tem $n + 2$ faces, $2n$ vértices e $3n$ arestas;
- um antiprisma tem $2n + 2$ faces, $2n$ vértices e $4n$ arestas;
- uma pirâmide tem $n + 1$ faces, $n + 1$ vértices e $2n$ arestas.

Se porventura quisermos classificar o universo dos poliedros em função da base dos sólidos, podemos fazê-lo da seguinte maneira: sendo n , número natural, o número de lados do polígono das suas bases e considerando o critério “ter $n + 2$ faces, $2n$ vértices e $3n$ arestas”, separamos os prismas dos poliedros que não são prismas; considerando agora o critério “ter $2n + 2$ faces, $2n$ vértices e $4n$ arestas”, separamos os antiprismas dos poliedros que não são antiprismas; e por último, tendo em atenção o critério “ $n + 1$ faces, $n + 1$ vértices e $2n$ arestas”, separamos as pirâmides dos poliedros que não são pirâmides. Assim, utilizando estes três critérios e juntando as famílias estabelecidas, que não têm elementos comuns, dividimos o universo dos poliedros em quatro partes: os prismas, os antiprismas, as pirâmides e os poliedros que não pertencem às três primeiras famílias (Soler 1990).

(i) Prismas

Um *prisma* é um sólido geométrico que fica definido quando um feixe de rectas paralelas não complanares (isto é, não no mesmo plano) é cortado por dois planos paralelos entre si. Ou seja, um prisma é um sólido geométrico limitado por duas *bases* (situadas nos planos paralelos e que são

sempre *polígonos geometricamente iguais*) e várias *faces laterais* (que são *paralelogramos*). Quando os planos das bases não são paralelos diz-se que o sólido é um *tronco de prisma*.

Num prisma, o número de faces laterais é igual ao número de lados dos polígonos das bases, ou seja, é igual ao número de arestas de cada base. O polígono da base pode ser qualquer e se for convexo ou côncavo, regular ou irregular, diz-se o mesmo do prisma. A designação do polígono da base vai dar o nome ao prisma. Também conforme os polígonos das bases são triângulos, quadriláteros, pentágonos, etc. (Figura 4.14 e 4.15) o prisma designar-se-á *triangular*, *quadrangular*, *pentagonal*, etc.

Chama-se *prisma recto* a um prisma que tem as arestas laterais perpendiculares às bases e designa-se por *prisma oblíquo* o prisma em que as arestas laterais não são perpendiculares às bases. Na Figura 4.2 temos um prisma triangular recto irregular de bases [ABC] e [DEF].

Quando o polígono da base é regular e as faces laterais são quadrados o prisma é dito arquimediano, uma vez que será um sólido semi-regular (Figura 4.12). O prisma arquimediano de base quadrada é o *cubo* (prisma/poliedro platónico). Quando as bases e as faces laterais são rectangulares (as faces opostas são geometricamente iguais entre si, paralelas duas a duas e todos os ângulos diedros são rectos) obtemos um prisma, particularmente conhecido, que se designa por *paralelepípedo*.

Os principais elementos de um prisma são os seguintes:

- bases: formadas por polígonos;
- faces: definidas por paralelogramos;
- arestas das bases: os segmentos de recta dos lados do polígono;
- arestas laterais: os segmentos de recta geometricamente iguais e paralelos entre si, lados de paralelogramos que unem as bases;
- vértices: são os pontos de encontro das arestas;
- altura: é a distância entre os planos da base.

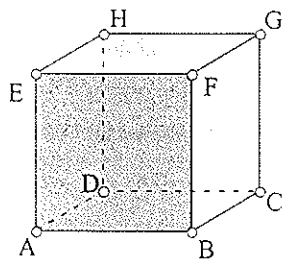
Podemos conhecer o número de faces, de arestas e de vértices de um prisma relacionados com o número de lados n (número natural qualquer maior que 2) da base, conforme indicado na Tabela 4.5.

A área lateral de um prisma é dada por

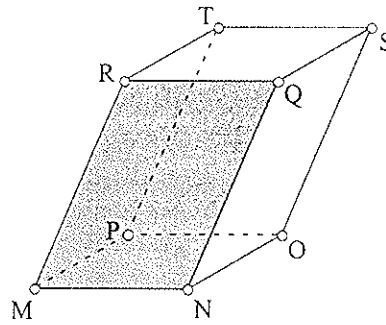
$$\text{Área lateral} = P_b h,$$

onde P_b é o perímetro de uma das bases do prisma e h é a altura do prisma.

A área total de um prisma é dada, por sua vez, por

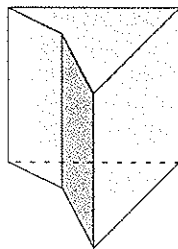


PRISMA RECTO

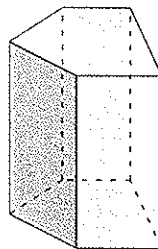


PRISMA OBLÍQUO

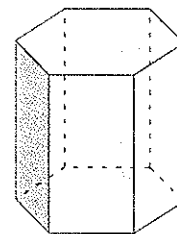
Figura 4.14: [ABCDHEFG] é um prisma recto pois tem as arestas laterais perpendiculares às bases, que são [ABCD] e [EFGH]. As faces laterais são rectângulos. [MNOPTQRS] é um prisma oblíquo por ter as arestas laterais não perpendiculares relativamente às bases. As faces laterais são paralelogramos.



PRISMA QUADRANGULAR
CÔNCAVO IRREGULAR



PRISMA
PENTAGONAL IRREGULAR



PRISMA
HEXAGONAL

Figura 4.15: Três prismas rectos.

Prismas	Base (n)	Nº. de Faces (n + 2)	Nº. de Vértices (2n)	Nº. de Arestas (3n)
Triangular	Triângulo (3)	$3 + 2 = 5$	$2 \times 3 = 6$	$3 \times 3 = 9$
Quadrangular	Quadrilátero (4)	$4 + 2 = 6$	$2 \times 4 = 8$	$3 \times 4 = 12$
Pentagonal	Pentágono (5)	$5 + 2 = 7$	$2 \times 5 = 10$	$3 \times 5 = 15$
.....

Tabela 4.5: Relação entre o número de lados n da base com o número de faces, arestas e vértices dos prismas. Verificam a relação de Euler (4.1): $(n + 2) + (2n) = 3n + 2$.

$$\text{Área}_{\text{total prisma}} = A_l + 2A_b,$$

onde A_l é a área lateral e A_b é a área de cada base.

Quanto ao cálculo do volume de um prisma, obtemo-lo através da fórmula

$$\text{Volume} = A_b h,$$

onde A_b é a área da base e h é a altura do prisma.

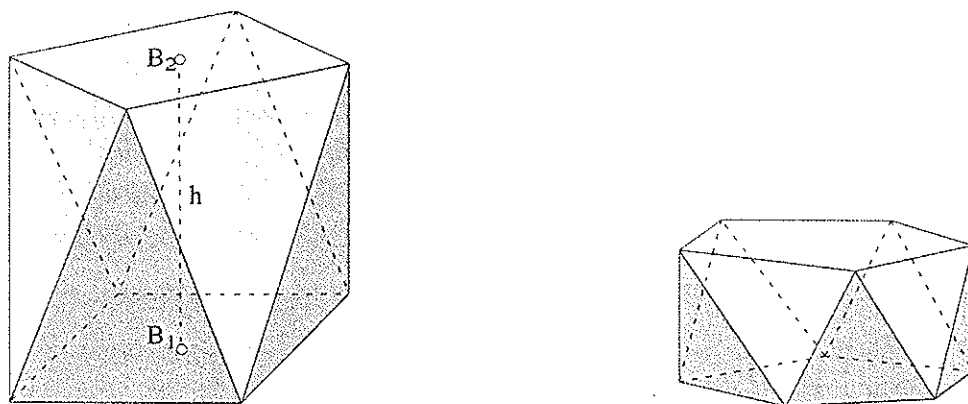


Figura 4.16: No antiprisma de base quadrada (esquerda), B_1 e B_2 são os centros das bases respectivas e a altura do antiprisma é o comprimento do segmento de recta $[B_1B_2] \equiv h, (\overline{B_1B_2})$. O antiprisma de base pentagonal (direita) é regular porque nas suas faces laterais estão triângulos equiláteros – poliedro semi-regular.

Antiprismas de base (n)	Nº. de FACES ($2n + 2$)	Nº. de Vértices ($2n$)	Nº. de Arestas ($4n$)
triangular (3)	$2 \times 3 + 2 = 8$	$2 \times 3 = 6$	$4 \times 3 = 12$
quadrada (4)	$2 \times 4 + 2 = 10$	$2 \times 4 = 8$	$4 \times 4 = 16$
pentagonal (5)	$2 \times 5 + 2 = 12$	$2 \times 5 = 10$	$4 \times 5 = 20$
.....

Tabela 4.6: Relação entre o número de lados (n) da base com o número de faces, arestas e vértices dos antiprismas. Verificam a relação de Euler (4.1): $(2n + 2) + (2n) = 4n + 2$.

(ii) Antiprismas

Designamos por *antiprisma* o sólido que resulta da ligação dos vértices de dois polígonos regulares de n lados, geometricamente iguais, situados em planos paralelos de modo que o segmento que liga os seus centros, h , é perpendicular a ambos (o comprimento de h é a *altura do antiprisma*), e de modo que cada vértice de uma base seja equidistante de dois vértices da outra base, ou seja, cada vértice de uma base opõe-se ao lado da outra base e três vértices determinam uma face lateral (Figura 4.16). Assim sendo, o antiprisma possui $2n$ faces laterais que são triângulos isósceles.

Podemos, também, definir o antiprisma como o sólido resultante da rotação de uma das bases de um prisma regular, até opor cada vértice de uma base ao ponto médio do lado da outra base, unindo três vértices que definem as faces laterais (triângulos isósceles).

Um antiprisma diz-se *regular* se todas as faces laterais forem triângulos equiláteros e neste caso temos um poliedro semi-regular (Figura 4.12).

O antiprisma regular de base triangular possui oito faces que são triângulos equiláteros, que é um poliedro platónico: o octaedro – Figura 4.5.

Na tabela 4.6 está feita a generalização para o cálculo do número de faces, de arestas e de vértices de um antiprisma em função do número de lados n da base.

Calculamos o volume de dois dos antiprismas regulares, do octaedro e do antiprisma quadrangular – veja-se o exercício 1 e 7, respectivamente, da secção 4.3.

(iii) Pirâmides

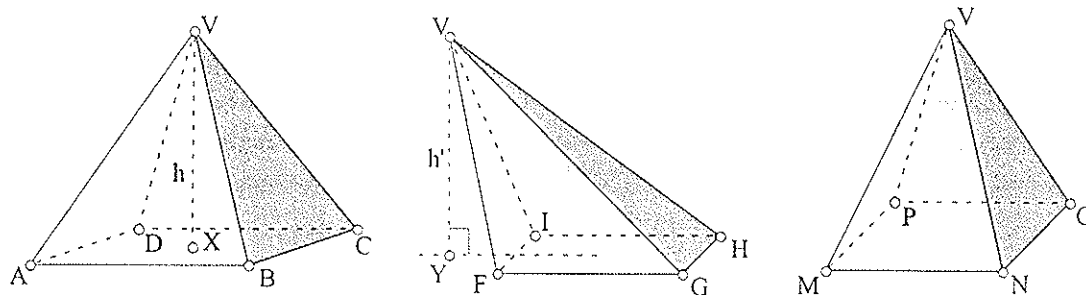
Uma *pirâmide* é um poliedro em que uma das faces é um polígono qualquer – a que se chama *base*, e as outras faces, as *faces laterais*, são triângulos que têm um vértice comum – chamado *vértice da pirâmide*.

Podemos ainda definir uma pirâmide como sendo um poliedro resultante da intersecção de um ângulo poliédrico por um plano inclinado às arestas. Ou ainda, a pirâmide pode ser vista como o resultado da ligação dos vértices de um polígono a um ponto fora do plano do mesmo.

Uma pirâmide diz-se *recta* se a projecção do vértice da pirâmide coincide com o centro do polígono da base (sendo ortogonal à mesma). Caso contrário, isto é, quando a projecção do vértice não coincide com o centro da base, diz-se que a pirâmide é *obliqua*. Uma pirâmide recta cuja base é um polígono (ir)regular diz-se uma *pirâmide (ir)regular* – Figura 4.17. Nas pirâmides rectas regulares as faces laterais são triângulos isósceles. Quando estas faces são triângulos equiláteros a pirâmide é *recta, regular e equilátera* (se tem por base também um triângulo equilátero, recuperamos um poliedro regular: o tetraedro – Figura 4.3).

A *altura* de uma pirâmide é a distância do vértice da pirâmide ao plano da base, ou seja, é o comprimento do segmento de recta baixado na perpendicular do vértice ao plano da base. Nas pirâmides rectas regulares, a altura de cada uma das faces laterais (ou seja, a altura do triângulo isósceles) chama-se *apótema da pirâmide*. E sendo a base um polígono regular de ordem 5 ou superior, tem um apótema que se chama *apótema da base* (Figura 4.18). As pirâmides chamam-se *triangulares, quadrangulares, pentagonais, etc.*, conforme o polígono da base seja um triângulo, um quadrilátero, um pentágono, etc.

Os principais elementos de uma pirâmide são os seguintes:

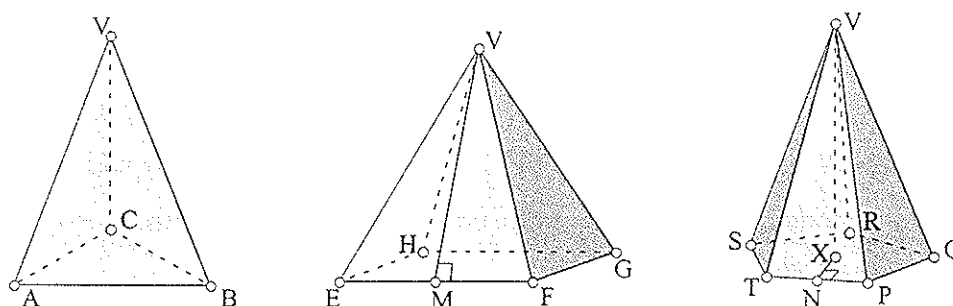


PIRÂMIDE RECTA

PIRÂMIDE OBLÍQUA

PIRÂMIDE REGULAR

Figura 4.17: A pirâmide [ABCDV] é recta uma vez que o vértice V projecta-se no centro da base [ABCD], X , e o comprimento do segmento de recta h , \overline{VX} , é a altura da pirâmide; a pirâmide [FGHIV] é oblíqua e o comprimento do segmento de recta h' , \overline{VY} , que resulta da projecção do vértice V sobre o plano da base, FGH , no ponto Y , é a sua altura; a pirâmide [MNOPV] é regular, visto que a base é o quadrado [MNOP].



PIRÂMIDE
TRIANGULAR

PIRÂMIDE
QUADRANGULAR

PIRÂMIDE
PENTAGONAL

Figura 4.18: Três pirâmides rectas regulares. Na pirâmide [EFGHV] o comprimento do segmento [MV] (a altura do triângulo isósceles [EFV]) é o apótema da pirâmide. Na pirâmide [QRSTPV], X é o centro do pentágono da base, N é o ponto médio do lado [TP] e o comprimento do segmento [NX] é o apótema da base (cf. Figura 3.36).

Pirâmide	Base (n)	Nº. de Faces ($n + 1$)	Nº. de Vértices ($n + 1$)	Nº. de Arestas ($2n$)
Triangular	Triângulo (3)	$3 + 1 = 4$	$3 + 1 = 4$	$2 \times 3 = 6$
Quadrangular	Quadrilátero (4)	$4 + 1 = 5$	$4 + 1 = 5$	$2 \times 4 = 8$
Pentagonal	Pentágono (5)	$5 + 1 = 6$	$5 + 1 = 6$	$2 \times 5 = 10$
.....

Tabela 4.7: Relação entre o número de lados n da base com o número de faces, arestas e vértices de pirâmides. Verificam a relação de Euler (4.1): $(n + 1) + (n + 1) = 2n + 2$.

- base: formada por um polígono;
- faces: definidas por triângulos;

- arestas da base: os segmentos de recta dos lados do polígono;
- arestas laterais: os segmentos de recta dos lados dos triângulos isósceles que não pertencem à base;
- vértices da base: os vértices do polígono da base;
- vértice da pirâmide: o ponto de encontro das arestas laterais.

Na Tabela 4.7 relaciona-se o número de faces, de arestas e de vértices de uma pirâmide com um número qualquer n (número natural maior que 2) de lados da base.

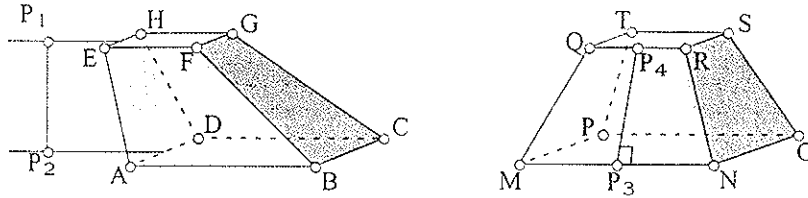
Se um plano qualquer intercepta todas as arestas laterais de uma pirâmide dada, este decompõe-na em dois sólidos, sendo um deles uma outra pirâmide e um outro sólido, que não é pirâmide, designado por *tronco de pirâmide*. Ou seja, o tronco de pirâmide é a porção de pirâmide compreendida entre a base da pirâmide e a secção determinada pelo plano que corta todas as arestas laterais. Um tronco de pirâmide diz-se *regular* se a pirâmide for regular recta e se o plano seccionante for paralelo ao plano da base da pirâmide (ou seja, o plano determina uma secção paralela à base). Ficamos, assim, com um tronco de pirâmide de bases paralelas. Neste caso, as faces laterais do tronco de pirâmide são trapézios isósceles e à sua altura chamamos *apótema do tronco de pirâmide*. A altura do tronco de pirâmide regular é a distância entre a base da pirâmide e a secção – Figura 4.19.

A *área lateral*, A_l , de uma pirâmide é a soma das áreas das faces laterais, que são triângulos isósceles. Sendo p o perímetro da base e a apótema da pirâmide, temos que: $A_l = \frac{p \cdot a}{2}$. A *área total* da pirâmide será dada pela soma da área lateral, A_l , com a área da base, A_b :

$$\text{Área total pirâmide} = A_l + A_b = \frac{p \cdot a}{2} + A_b.$$

Para se entender mais facilmente a definição do *volume de uma pirâmide*, imaginemos uma pirâmide recta quadrangular regular cuja base seja uma face de um cubo de aresta a , e cujo vértice seja o centro desse cubo – Figura 4.20. Dentro deste cabem seis pirâmides iguais à idealizada, isto é, cabem tantas quantas as faces do cubo. Assim o volume de cada uma das pirâmides é a sexta parte

do volume do cubo, ou seja, $\text{Volume} = \frac{a^3}{6} = \frac{a^2 \cdot a}{6} = \frac{A_b \cdot a}{6}$, onde A_b é a área da base (quadrada de lado a). Como a altura, h , de cada pirâmide é metade da aresta do cubo, ou seja, a aresta do



TRONCO DE PIRÂMIDE IRREGULAR TRONCO DE PIRÂMIDE REGULAR

Figura 4.19: [ABCDHEFG] é um tronco de pirâmide irregular e o comprimento do segmento de recta [P₁P₂] é a sua altura. [MNOPTQRS] é um tronco de pirâmide regular e o comprimento do segmento de recta [P₃P₄], altura do trapézio isósceles [MNRQ], é o apótema do tronco de pirâmide.

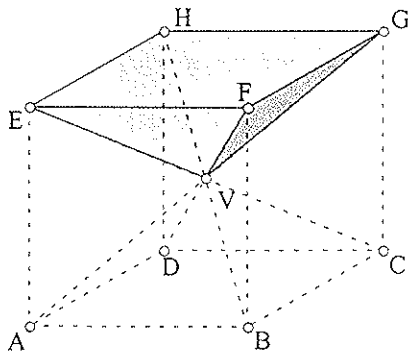


Figura 4.20: No cubo [ABCDHEFG] podem ser representadas seis pirâmides iguais com a base coincidente com as faces do cubo e o vértice no centro do cubo – uma das seis pirâmides é [EFGHV].

cubo vale $2h$, temos então que o volume da pirâmide pode ser escrito na forma:

$$\text{Volume} = \frac{A_b \cdot 2h}{6} \Leftrightarrow \text{Volume} = \frac{A_b \cdot h}{3},$$

e portanto, o volume de uma pirâmide é igual a um terço do produto da área da base pela sua altura.

4.1.5 Poliedros duais e sólidos de Catalan

Parece dever-se a Catalan⁸⁵ o primeiro estudo da dualidade nos poliedros, estudo esse publicado em 1865 e que apresenta uma lista dos duais dos poliedros arquimedianos.

Tendo em conta que qualquer sólido platónico ou arquimediano pode ser inscrito numa

⁸⁵ Eugène Charles Catalan (1814 – 1894), de origem belga, foi matemático e professor numa escola francesa de grande prestígio: a École Polytechnique.

Poliedro	Nº de vértices	Nº de arestas	Dual	Nº de faces	Nº de arestas
Tetraedro	4	6	Tetraedro	4	6
Cubo	8	12	Octaedro	8	12
Octaedro	6	12	Cubo	6	12
Dodecaedro	20	30	Icosaedro	20	30
Icosaedro	12	30	Dodecaedro	12	30

Tabela 4.8: Poliedros platónicos: duais.

esfera temos que, para um sólido platónico, se fizermos passar um plano tangente à superfície esférica em cada um dos vértices e tomarmos estes planos como os planos das faces de um novo poliedro, este será também um poliedro platónico – o seu *dual*. Partindo do tetraedro obtemos um novo tetraedro. Se partirmos de um cubo obtemos um octaedro e vice-versa. Se partimos de um dodecaedro obtemos um icosaedro e vice-versa (Figura 4.21). Deste modo diz-se que o tetraedro é dual de si próprio, ou autodual, que o cubo é dual do octaedro e vice-versa, e que o dodecaedro é dual do icosaedro e vice-versa – Soler (1990). Verifica-se, portanto, que o dual de um sólido platónico ainda é um poliedro regular convexo, também platónico.

Outra forma de obtermos o poliedro dual de um poliedro platónico é unindo os pontos centrais dos pares de faces adjacentes. Notemos que (Tabela 4.8):

- por cada vértice do poliedro inscrito aparece uma face do poliedro circunscrito;
- cada vértice do poliedro circunscrito corresponde a uma face do poliedro inscrito;
- por cada aresta do poliedro inscrito aparece uma aresta do sólido circunscrito e estas cruzam-se perpendicularmente. Podemos observar que existe um eixo de rotação comum aos poliedros, inscrito e circunscrito, que passa pelos pontos médios das respectivas arestas;
- o número de faces do poliedro inscrito corresponde ao número de vértices do poliedro circunscrito;
- o número de lados das faces de um sólido coincide com a ordem dos vértices (isto é, o número de arestas do sólido que concorrem no vértice), opostos à face respectiva, do outro sólido.

Na Tabela 4.8 indica-se os duais dos poliedros platónicos e suas relações.

Considerando agora cada um dos poliedros arquimedianos, se fizermos passar, como atrás, planos tangentes à superfície esférica, que o circunscribe, em cada um dos vértices e tomando estes planos como os planos das faces de um novo poliedro, obtemos, para cada, um poliedro dual que se chama *sólido de Catalan*. Verifica-se que as faces dos sólidos de Catalan não são polígonos

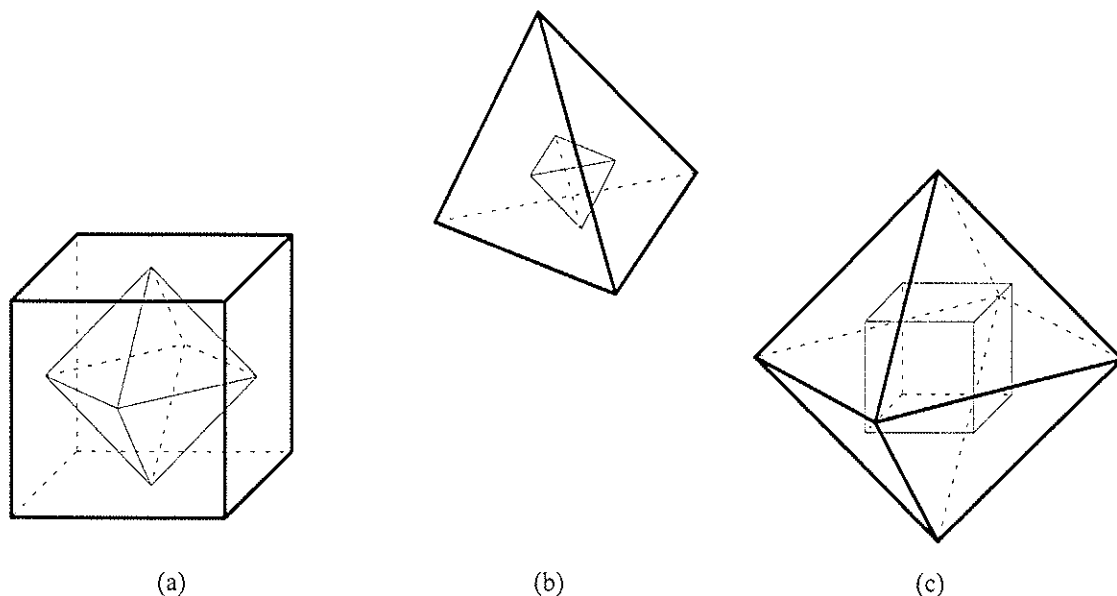


Figura 4.21: (a) – o poliedro dual do octaedro é o cubo e vice-versa (c). (b) – o tetraedro é dual de si próprio (autodual).

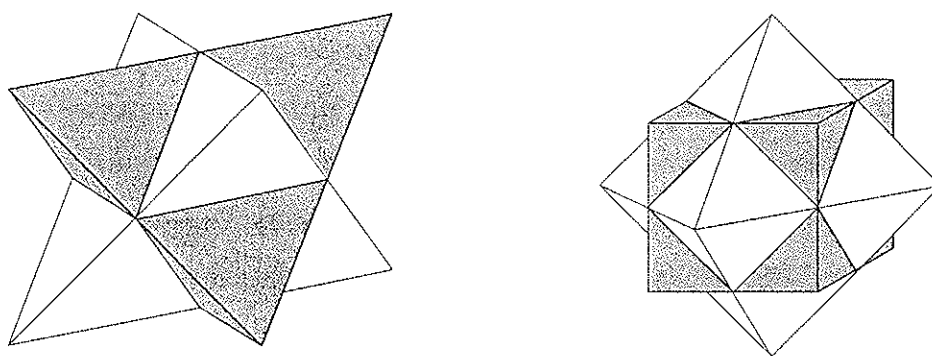
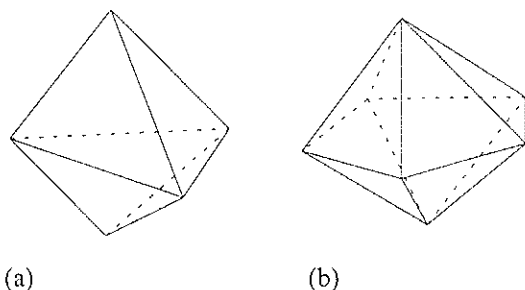


Figura 4.22: A *stella octangula* (esquerda) é um sólido composto obtido pela estrelação do octaedro ou o sólido composto por dois tetraedros duais. Outro sólido composto é o octaedro com o cubo – o seu dual (direita).

regulares, mas são todas congruentes e os vértices têm várias ordens. Assim, o dual de um poliedro arquimediano não é um poliedro desta mesma classe, ao contrário do que sucedia com os poliedros platônicos. Contudo, a relação de dualidade permite-nos assegurar que os sólidos de Catalan têm o mesmo número de arestas que os poliedros arquimedianos correspondentes, que o número de faces e o número de vértices, de cada par de duais, estão relacionados, e ainda que os polígonos das faces têm o mesmo número de lados que a ordem dos vértices do poliedro arquimediano correspondente – Soler (1990).



(a) (b)
Figura 4.23: Dois deltaedros: (a) – a bipirâmide triangular (6 faces), produzida pela “colagem” em duas faces de dois tetraedros; (b) – “colagem” de duas pirâmides pentagonais pelas bases com triângulos equiláteros por faces (10 faces).

4.1.6 Sólidos compostos

Os sólidos compostos estão, de alguma forma, ligados à dualidade e às estrelações. Por exemplo, a partir do dual de um poliedro platônico inscrito, se formos aumentando sucessivamente o seu tamanho, as suas arestas vão-se aproximando cada vez mais das arestas do poliedro circunscrito até se intersectarem perpendicularmente nos seus pontos médios – ao sólido assim obtido chamamos *sólido composto* (Figura 4.22). Ao sólido composto obtido pela estrelação do octaedro, ou de outra forma, o sólido composto por dois tetraedros duais designa-se por *stella octangula* (nome atribuído por Kepler). Um outro exemplo é o sólido composto por um octaedro e do seu dual – o cubo.

4.1.7 Deltaedros

Chamamos *deltaedros* aos poliedros convexos cujas faces são triângulos equiláteros. Foi demonstrado em 1947, por Hans Freudenthal e por Van der Waerden, que só existem oito poliedros convexos nestas condições. Destes oito poliedros já conhecemos três: o tetraedro, o octaedro e o icosaedro (Figuras 4.3, 4.5 e 4.7, respectivamente). Além destes três, obtemos outro deltaedro se unirmos dois tetraedros por uma face – formando uma bipirâmide triangular (Figura 4.23) com seis faces. Obtemos um outro deltaedro se unirmos pela base duas pirâmides rectas pentagonais, equiláteras (Figura 4.23) – dez faces. Os últimos três deltaedros têm 12, 14 e 16 faces – Figura 4.24 e Soler (1990).

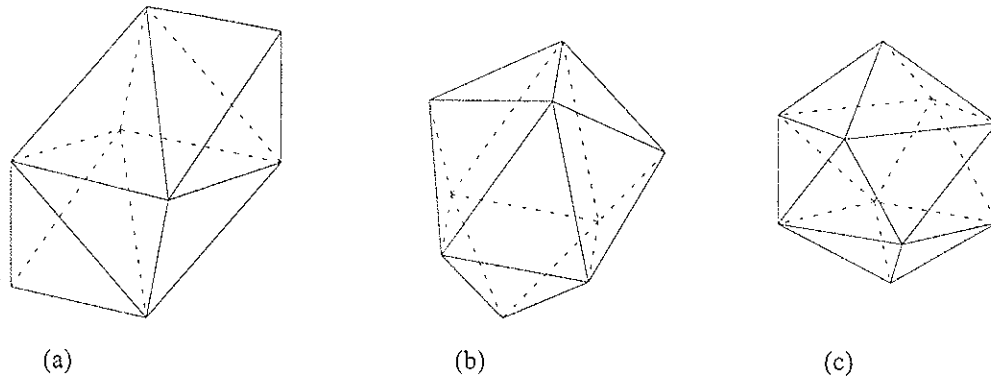


Figura 4.24: Três deltaedros: (a) – obtém-se ao juntar a cada uma das duas bases do antiprisma triangular regular (octaedro) um tetraedro (12 faces); (b) – obtém-se partindo de um prisma recto triangular semi-regular e juntando a cada face uma pirâmide recta quadrangular equilátera (14 faces); (c) – obtém-se juntando às bases de um antiprisma quadrangular semi-regular uma pirâmide quadrangular equilátera (16 faces).

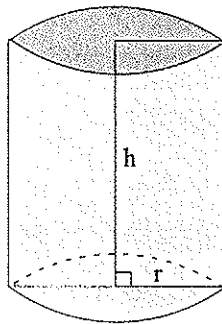


Figura 4.25: Cilindro de revolução ou cilindro circular recto, onde h (sobre o eixo de revolução gerador) é a altura e r é o raio do cilindro.

4.1.8 Não poliedros (Cilindro, Cone e Esfera)

Chamamos *não poliedros* aos sólidos limitados, no todo ou em parte, por superfícies curvas. De entre estes, são particularmente importantes os sólidos de revolução⁸⁶. Vamos aqui estudar os sólidos de revolução mais familiares: o cilindro, o cone e a esfera.

(i) Cilindro

O *cilindro de revolução* ou *cilindro circular recto* é o sólido gerado pela revolução

⁸⁶ Diz-se *sólido de revolução* ao sólido gerado por uma superfície plana girando em torno de um eixo que está situado no mesmo plano e que não corta a figura geratriz (figura que gira). O cilindro é obtido pela revolução completa de um rectângulo em torno de um eixo que contém um dos seus lados; O cone é obtido pela revolução completa de um triângulo rectângulo em torno de um eixo que contém um seu cateto; A esfera é gerada pela revolução completa de um semicírculo em torno de um eixo que contém um diâmetro (ver <http://www.mat.ucl.br/geometrica>).

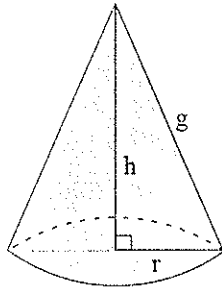


Figura 4.26: Cone de revolução, em que h (sobre o eixo de revolução gerador) é a altura, g o segmento de recta da geratriz e r é o raio do cone.

completa de um rectângulo em torno de um dos seus lados, isto é, o movimento de rotação em torno de um dos seus lados tem de perfazer pelo menos um ângulo giro. O lado em torno do qual gira o rectângulo é a *altura do cilindro*, h , e a recta que o contém designa-se por *eixo*. A recta que contém o lado oposto ao eixo chama-se *geratriz do cilindro*, já que durante o movimento de rotação gera a sua superfície lateral. Os outros dois lados do rectângulo gerador são os *raios do cilindro*, r , e geram os dois círculos que são as suas *bases*. Estas bases são perpendiculares ao eixo e paralelas entre si – Figura 4.25. A área total do cilindro é dada por:

$$\text{Área} = \text{Área}_{\text{lateral}} + 2 \text{Área}_{\text{base}} = P_b h + 2\pi r^2 = 2\pi r h + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r),$$

em que $P_b = 2\pi r$ é o perímetro da base do cilindro. O volume do cilindro, V , é dado pela fórmula:

$$\text{Volume} = \text{Área}_{\text{base}} h = \pi r^2 h.$$

(ii) Cone

O *cone de revolução* é o sólido gerado pela revolução completa de um triângulo rectângulo em torno de um dos seus catetos. O cateto em torno do qual gira o triângulo rectângulo é a *altura do cone*, h , e a recta que o contém designa-se por *eixo do cone*. A recta que contém a hipotenusa é a *geratriz do cone* (g) já que durante o movimento de rotação da hipotenusa é gerada a superfície lateral do cone. O outro cateto, do triângulo gerador do cone, é o *raio do cone*. O raio do cone, r , gera o círculo que é a *base* deste sólido, que está na perpendicular relativamente ao eixo do cone – Figura 4.26. Temos que a área total do cone é dada por (ver Apêndice XII):

$$\text{Área} = \text{Área}_{\text{lateral}} + \text{Área}_{\text{base}} = \frac{P_b}{2} g + \pi r^2 = \frac{2\pi r g}{2} + \pi r^2 = \pi r(g + r),$$

onde $P_b = 2\pi r$ é o perímetro da base e g é o comprimento do segmento de recta (geratriz do cone). O

volume do cone é obtido pela fórmula (ver Apêndice XII): $\text{Volume} = \frac{1}{3} \pi r^2 h$.

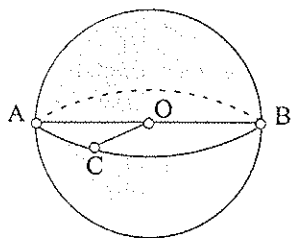


Figura 4.27: Esfera de centro O, de diâmetro [AB] (sobre o eixo de revolução gerador) e com raio [CO].

(iii) Esfera

A *esfera* é um sólido limitado por uma superfície que tem todos os pontos igualmente distanciados de um ponto interior chamado *centro*. A esfera é gerada pela revolução completa de um semicírculo em torno do *diâmetro* (que é o segmento de recta que une os extremos do semicírculo e que passa pelo centro da esfera). A superfície da esférica é gerada durante a rotação da semicircunferência. O *raio da esfera* é o segmento de recta cujos extremos são o centro e um ponto qualquer da superfície esférica (Figura 4.27). Designando por r o raio da esfera tem-se que a área da superfície esférica é dada por (ver Apêndice XII): $\text{Área} = 4\pi r^2$.

O volume da esfera é dado por (ver Apêndice XII): $\text{Volume} = \frac{4}{3}\pi r^3$.

4.2 Geometria analítica no espaço

4.2.1 Referencial cartesiano

Na secção 3.5 estudámos os referenciais cartesianos sobre o plano. Agora vamos ampliar esta noção ao espaço tridimensional usando, para tal, um referencial cartesiano designado por Oxyz. Têm-se, neste referencial cartesiano tridimensional, três eixos: o eixo Ox - eixo das abcissas ou eixo dos xx; o eixo Oy - eixo das ordenadas ou eixo dos yy; e o eixo Oz - eixo das cotas ou eixo dos zz. Os três eixos são perpendiculares dois a dois (por isso se diz referencial ortogonal) e vamos considerar, nos três eixos coordenados, a mesma unidade de comprimento (por esta razão se diz que o referencial é monométrico) – referencial cartesiano ortonormado (c. o. n.) tridimensional. O ponto de intersecção dos três eixos é o ponto O que se designa por *origem do referencial*. A parte positiva de cada um dos três eixos é indicada por uma seta (Figura 4.28). Como exemplo, marquemos num referencial c. o. n. tridimensional o ponto $A(5, -2, 3)$ – Figura 4.29. Para obtermos uma

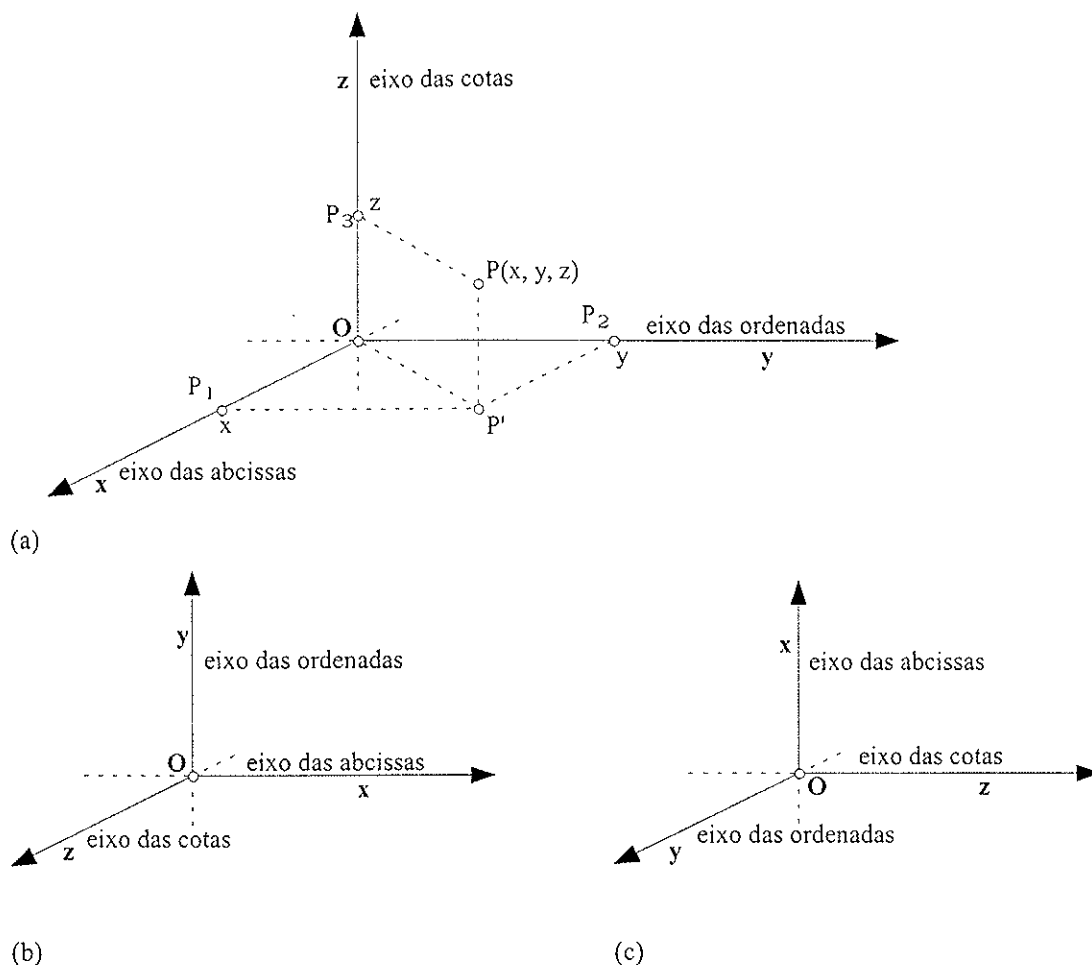


Figura 4.28: $Oxyz$ é um referencial cartesiano ortonormado (c. o. n.) tridimensional: (a) As coordenadas do ponto P são (x, y, z) e para o representar temos a recta P_1P' paralela ao eixo dos yy , a recta P_2P' paralela ao eixo dos xx , a recta PP' paralela ao eixo dos zz e a recta P_3P , paralela à recta $P'O$; as coordenadas de P_1 (abscissa de P) são $(x, 0, 0)$, as de P_2 (ordenada de P) são $(0, y, 0)$ e as de P_3 (cota de P) são $(0, 0, z)$; note-se que os três eixos devem estar sempre dispostos como nesta figura, (a), (b) ou (c), para que se trate de um referencial c. o. n. tridimensional direito (ver Apêndice VII).

representação sugestiva da posição do ponto no referencial c. o. n., do espaço, é conveniente começarmos por marcar as coordenadas do ponto nos respectivos eixos e, a partir daí, traçarmos paralelas aos eixos. Poderá ser vantajoso pensar que o ponto dado é um dos vértices do paralelepípedo com dimensões, neste caso, $5 \times 2 \times 3$.

Num referencial cartesiano no espaço, a cada ponto P corresponde um e um só terno ordenado de números reais que se escreve na forma (x, y, z) , a que se chamam coordenadas do ponto, onde a x e a y continuamos a chamar abscissa e ordenada, respectivamente, do ponto P e a z chamamos *cota* do ponto P (Figura 4.28). Ou seja, cada ponto do espaço fica bem definido por um e um só terno ordenado de números reais quaisquer, numa certa ordem (primeiro a abscissa,

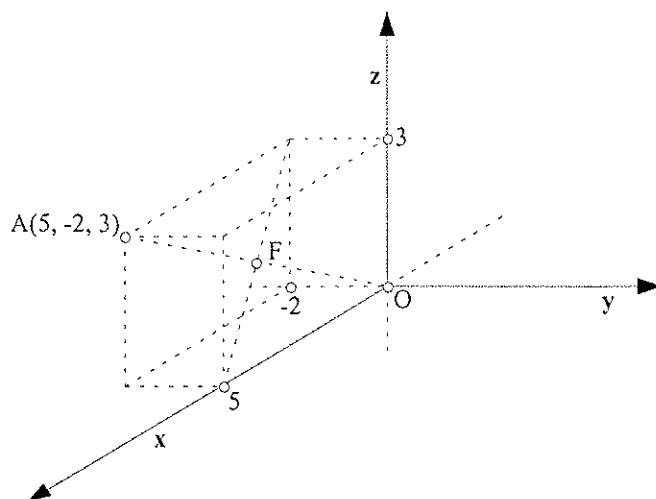


Figura 4.29: Representação, num referencial c. o. n. $Oxyz$, do ponto $A(5, -2, 3)$: começamos por marcar as coordenadas nos eixos respectivos e traçamos paralelas aos eixos e prolongamos os mesmos (se necessário) por forma a obtermos um paralelepípedo de dimensões $5 \times 2 \times 3$ – o ponto A é o vértice do paralelepípedo simétrico da origem do referencial, O , em relação ao centro, F , do paralelepípedo.

depois a ordenada e, por último, a cota). Reciprocamente, a cada terno ordenado de números reais quaisquer (x, y, z) corresponde um e um só ponto do espaço. Fica, deste modo, estabelecida uma correspondência biunívoca entre o conjunto dos pontos do espaço e o conjunto dos ternos ordenados de números reais, \mathbb{R}^3 . O espaço cartesiano pode ser então escrito, abreviadamente por \mathbb{R}^3 e também se escreve que

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z): x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge z \in \mathbb{R}\}.$$

Os três eixos coordenados definem três planos coordenados perpendiculares entre si. O plano xOy (sendo-lhe perpendicular o eixo Oz), o plano xOz (sendo, a este, o eixo Oy perpendicular) e o plano yOz (estando, relativamente a este plano, o eixo Ox na perpendicular) – Figura 4.30. O espaço tridimensional fica portanto dividido em oito regiões iguais que se designam por *octantes* (Figura 4.31). Chama-se *primeiro octante* àquele com pontos de coordenadas positivas.

Os pontos situados no eixo das abcissas, Ox , têm coordenadas do tipo $(x, 0, 0)$, com $x \in \mathbb{R}$. Os pontos situados no eixo das ordenadas, Oy , têm coordenadas do tipo $(0, y, 0)$, sendo $y \in \mathbb{R}$, e aqueles pontos situados no eixo das cotas, Oz , têm coordenadas na forma $(0, 0, z)$, em que $z \in \mathbb{R}$ (Figura 4.28).

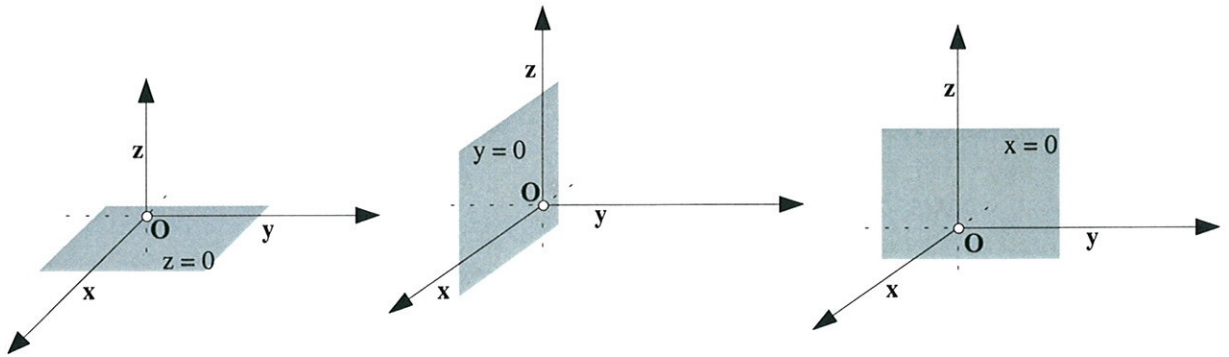


Figura 4.30: Planos, no referencial c. o. n. tridimensional: xOy de equação $z = 0$, xOz com equação $y = 0$, e yOz de equação $x = 0$. Respectivamente, cada plano é ortogonal ao eixo dos zz , ao eixo dos yy e ao eixo dos xx .

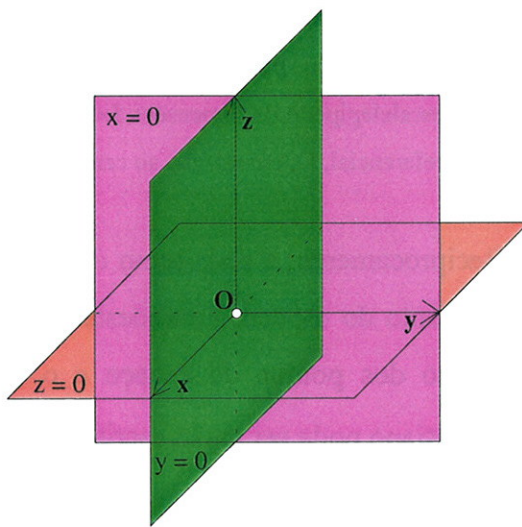


Figura 4.31: O espaço fica dividido pelos planos xOy (de equação $z = 0$, a vermelho), xOz (de equação $y = 0$, a verde) e yOz (de equação $x = 0$, a roxo) em oito regiões. A região com $x > 0$, $y > 0$ e $z > 0$ é o primeiro octante.

O simétrico de um ponto P_1 , do espaço, em relação a outro ponto Q do espaço, é o ponto P_2 tal que Q é o ponto médio do segmento de recta $[P_1P_2]$ (Figura 4.32 – (a)). O ponto P_3 é simétrico do ponto P_4 , relativamente à recta r , do espaço, se as rectas P_3P_4 e r são complanares, se P_3P_4 é perpendicular a r e se P_3 e P_4 são equidistantes de r (ou seja, r é a mediatriz do segmento de recta $[P_3P_4]$; Figura 4.32 – (b)). O ponto P_5 é simétrico do ponto P_6 , em relação ao plano \mathcal{P} , se P_5P_6 é perpendicular a \mathcal{P} , e P_5 e P_6 são equidistantes de \mathcal{P} (ou seja, \mathcal{P} é o plano mediador⁸⁷ do segmento de recta $[P_5P_6]$) – Figura 4.32 – (c).

⁸⁷ Ver a secção 4.2.4 sobre plano mediador.

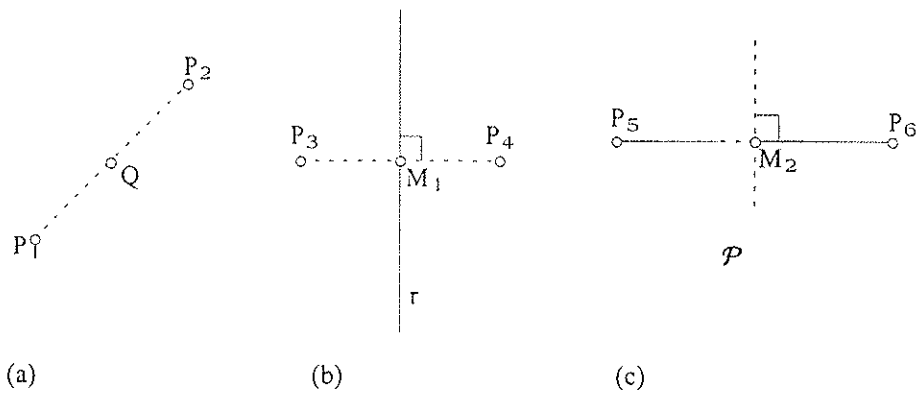


Figura 4.32: No espaço tridimensional: (a) – o simétrico do ponto P_1 é P_2 em relação ao ponto Q (ponto médio do segmento de recta $[P_1P_2]$); (b) – o simétrico do ponto P_3 é P_4 em relação à recta r (mediatriz do segmento de recta $[P_3P_4]$, do qual M_1 é o ponto médio); (c) – o simétrico do ponto P_5 é P_6 em relação ao plano \mathcal{P} (plano mediador do segmento de recta $[P_5P_6]$, do qual M_2 é o seu ponto médio).

4.2.2 Conjuntos de pontos e condições

Tal como para o plano, uma condição nas coordenadas x , y , z , ou em parte delas determina um conjunto de pontos do espaço. Observando, por exemplo, a Figura 4.30 ou 4.31, verificamos que o plano xOy pode ser representado pela condição $z = 0$, visto que os seus pontos podem ter abcissas e ordenadas quaisquer, mas a cota é nula. Verifica-se que num *plano paralelo ao plano xOy* todos os seus pontos têm sempre a mesma cota, portanto, a equação dum plano nestas condições é da forma:

$$z = c,$$

em que $c \in \mathbb{R}$ (Figura 4.33). Na Figura 4.30 observa-se que os pontos do plano yOz têm abcissa nula, a ordenada e a cota podem tomar qualquer valor real, ou seja, pode ser escrito pela condição $x = 0$. Os pontos que pertencem a um *plano paralelo ao plano yOz* têm sempre a mesma abcissa, sendo a ordenada e a cota quaisquer, tem-se então que as suas equações são do tipo:

$$x = c,$$

em que $c \in \mathbb{R}$ (Figura 4.34). No caso do plano xOz , da Figura 4.30 verifica-se que os seus pontos podem assumir para abcissa e cota um número real qualquer mas a ordenada é sempre nula, ou seja, é dado pela condição $y = 0$. Um *plano paralelo ao plano xOz* é definido pela equação:

$$y = c,$$

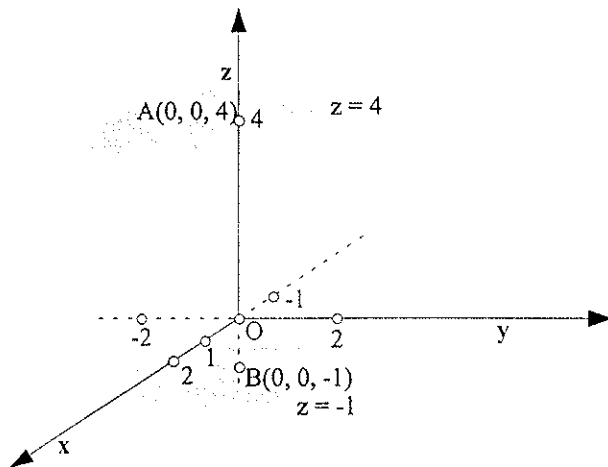


Figura 4.33: Dois planos paralelos ao plano xOy , em que todos os pontos têm cota igual a 4 e a -1 , respectivamente, contêm os pontos $A(0, 0, 4)$ e $B(0, 0, -1)$, por exemplo, respectivamente. A condição que traduz cada um dos planos é: $z = 4$ e $z = -1$, respectivamente.

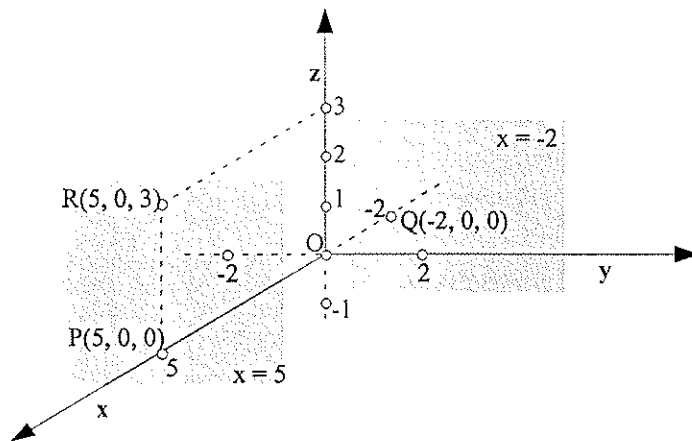


Figura 4.34: Planos paralelos ao plano yOz , em que todos os pontos têm abscissa 5 e -2 , respectivamente, contêm, por exemplo, os pontos $P(5, 0, 0)$, $R(5, 0, 3)$ e $Q(-2, 0, 0)$, respectivamente. A equação que traduz cada um dos planos é: $x = 5$ e $x = -2$, respectivamente.

em que $c \in \mathbb{R}$ (Figura 4.35), que representa o conjunto dos pontos do espaço com ordenada constante.

Tomando, para outro exemplo, a condição:

$$x = y,$$

esta, define o plano que contém a bissetriz do ângulo formado pelos eixos Ox e Oy , e o eixo das cotas, visto que a cota dos pontos deste plano pode ser qualquer número real – Figura 4.36.

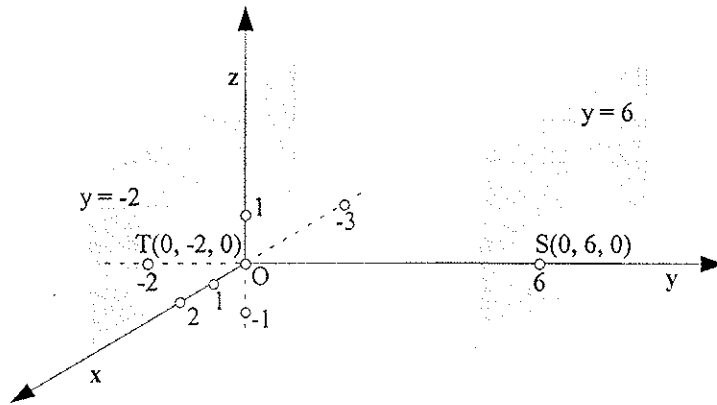


Figura 4.35: Planos paralelos ao plano xOz , em que todos os pontos têm ordenada igual a -2 e 6 , respectivamente, contêm, por exemplo, os pontos $T(0, -2, 0)$ e $S(0, 6, 0)$, respectivamente. A equação dos planos é: $y = -2$ e $y = 6$, respectivamente.

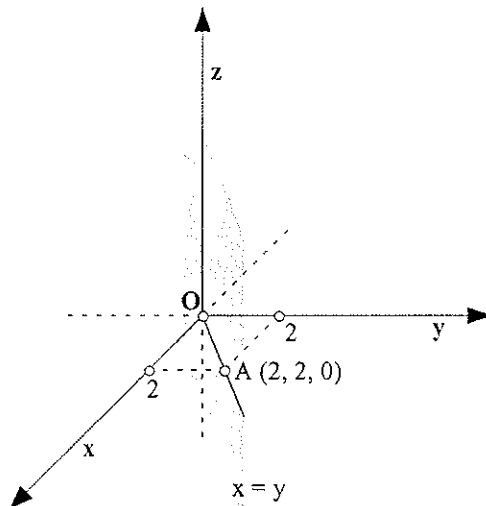


Figura 4.36: A condição $x = y$ define um plano que contém o eixo dos zz e a bissetriz do ângulo xOy . O ponto $A(2, 2, 0)$, por exemplo, pertence ao plano $x = y$.

Podemos entender cada uma das rectas que contém os eixos coordenados como resultante da intersecção de dois planos coordenados: o eixo dos xx é a intersecção dos planos xOy e xOz ; o eixo dos yy é a intersecção dos planos xOy e yOz ; e o eixo dos zz é a intersecção dos planos xOz e yOz . Tendo em conta que a intersecção de conjuntos de pontos corresponde à conjunção de condições, podemos estabelecer uma relação entre o eixo coordenado e a sua condição respectiva – ver Tabela 4.9.

Eixo coordenado	Condição	Conjunto
xx	$y = 0 \wedge z = 0$	$\{(x, 0, 0): x \in \mathbb{R}\}$
yy	$x = 0 \wedge z = 0$	$\{(0, y, 0): y \in \mathbb{R}\}$
zz	$x = 0 \wedge y = 0$	$\{(0, 0, z): z \in \mathbb{R}\}$

Tabela 4.9: Condição e conjunto de pontos que define cada eixo coordenado.

Consideremos agora, o plano $x = 1$ paralelo a yOz . Este divide o espaço em duas regiões, que se dizem *semiespaços*, o semiespaço “à frente” do plano $x = 1$ e o semiespaço “atrás” do mesmo plano $x = 1$ (Figura 4.37). No semiespaço à frente do plano os pontos têm todos abcissas superiores a 1, ou seja, a condição que define o semiespaço é

$$x > 1$$

e diz-se *semiespaço aberto*; no semiespaço atrás do plano os pontos têm todos abcissas inferiores a 1, ou seja, a condição que define este semiespaço é

$$x < 1$$

e diz-se *semiespaço aberto*; as regiões do espaço definidas pelas condições

$$x \geq 1 \text{ e } x \leq 1,$$

isto é, que incluem o plano $x = 1$, dizem-se *semiespaços fechados* à frente e atrás, respectivamente, do plano $x = 1$.

O mesmo se verifica para planos paralelos a xOz e a xOy (secção 4.3.2 – Exercício 4) e, em geral, para qualquer plano do espaço.

Observando a Figura 4.38, verifica-se que os planos definidos pelas equações $x = 3$ e $y = 1$, intersectam-se numa recta, r . Um ponto da recta r tem abcissa igual a 3 e ordenada igual a 1, por exemplo $P(3, 1, 0)$. Então, a recta r fica definida pela condição

$$x = 3 \wedge y = 1,$$

ou então pelo conjunto de pontos

$$\{(3, 1, z): z \in \mathbb{R}\}.$$

4.2.3 Distância entre dois pontos

Num referencial c. o. n. tridimensional, a *distância entre dois pontos*, P_1 e P_2 , de coordenadas (x_1, y_1, z_1) e (x_2, y_2, z_2) , respectivamente, é dada por (comparar com a equação 3.1):

$$\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (4.5)$$

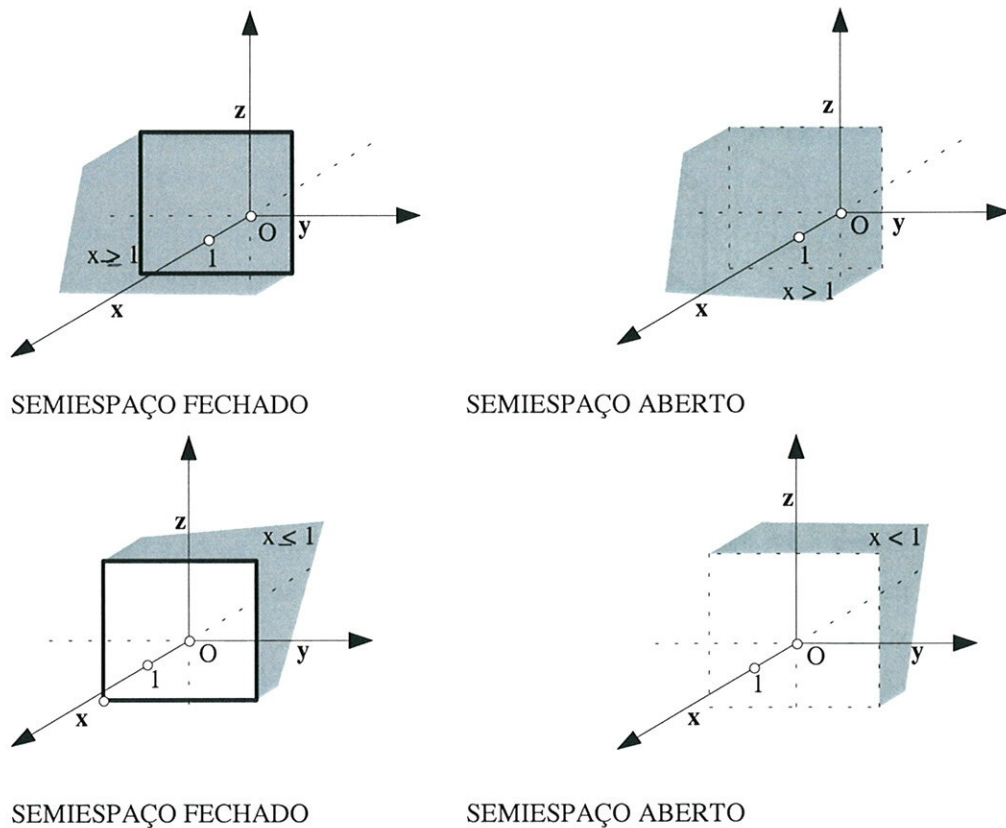


Figura 4.37: O plano $x = 1$ divide o espaço em duas regiões: o semiespaço “à frente” (fechado: $x \geq 1$; ou aberto: $x > 1$, conforme o plano pertença ou não à região) e o semiespaço “atrás” (fechado: $x \leq 1$; ou aberto: $x < 1$, da mesma forma).

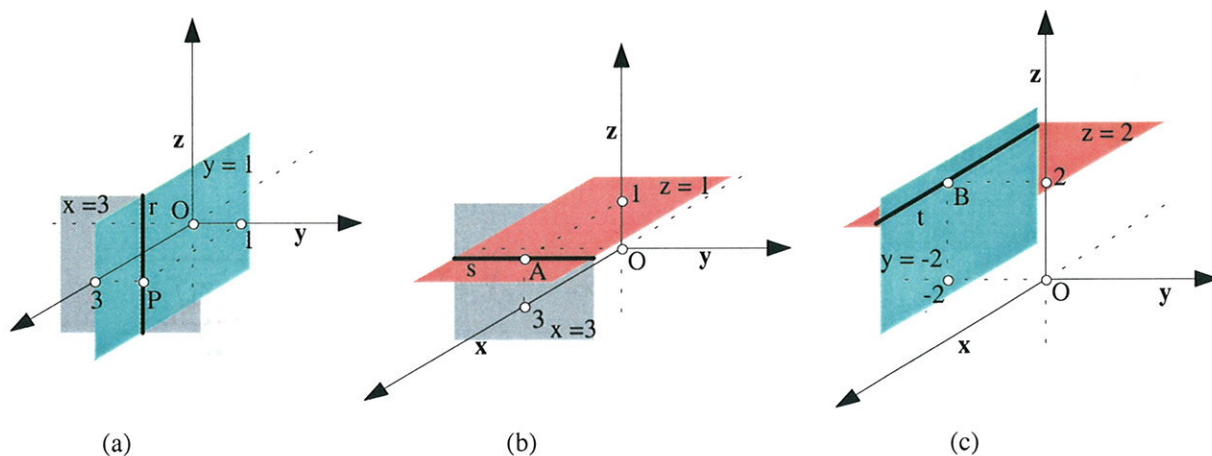


Figura 4.38: Rectas paralelas aos eixos coordenados: (a) – A recta r : $x = 3 \wedge y = 1$ (resulta da intersecção dos planos $x = 3$ (cinza) e $y = 1$ (azul)); um ponto da recta é $P(3, 1, 0)$. (b) – A recta s tem por condição: $x = 3 \wedge z = 1$ (resulta da intersecção dos planos $x = 3$ (cinza) e $z = 1$ (vermelho)); um seu ponto é $A(3, 0, 1)$. (c) – A recta t é definida pela condição: $y = -2 \wedge z = 2$ (intersecção dos planos $y = -2$ (azul) e $z = 2$ (vermelho)); um seu ponto é $B(0, -2, 2)$.

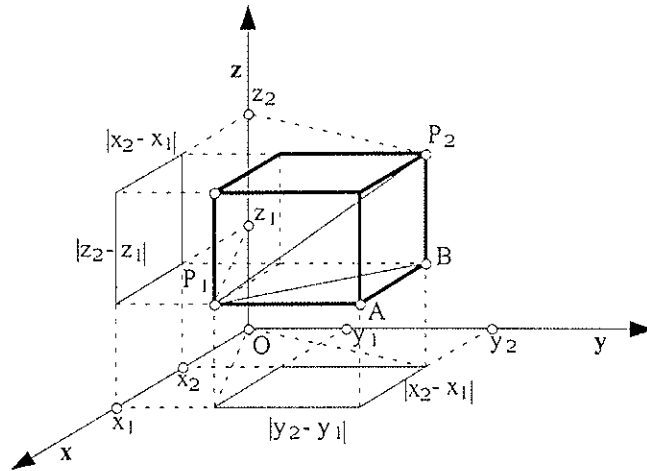


Figura 4.39: Paralelepípedo de diagonal $[P_1P_2]$ com $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$. As dimensões do paralelepípedo são: $|x_2 - x_1|$, $|y_2 - y_1|$ e $|z_2 - z_1|$, como se pode ver pelas suas projecções nos planos xOy e xOz .

Vejamos que de facto assim é: sem perda de generalidade, consideremos os pontos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$, no primeiro octante e representemos um paralelepípedo cuja diagonal espacial seja $[P_1P_2]$ – Figura 4.39. As dimensões do paralelepípedo representado são: $|x_2 - x_1|$, $|y_2 - y_1|$ e $|z_2 - z_1|$. Aplicando o Teorema de Pitágoras (secção 3.2.5) ao triângulo $[P_1AB]$, rectângulo em A, calculamos

$$\overline{P_1B}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

e ao triângulo $[P_1BP_2]$, rectângulo em B, uma vez que $[P_1P_2]$ é a hipotenusa do triângulo e também diagonal do paralelepípedo, vem:

$$d(P_1, P_2)^2 = \overline{P_1P_2}^2 = \overline{P_1B}^2 + \overline{P_2B}^2 = (x_2 - x_1)^2 + [(y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2].$$

Logo

$$d(P_1, P_2) = \overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Em particular, a distância de um ponto $P(x, y, z)$ à origem $O(0, 0, 0)$, do referencial c. o. n., é dada por

$$d(P, O) = \overline{PO} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

4.2.4 Ponto médio e plano mediador de um segmento

Num referencial c. o. n. tridimensional, o *ponto médio* de um segmento de recta de extremos A (x_1, y_1, z_1) e B (x_2, y_2, z_2) , é o ponto M de coordenadas:

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right).$$

De facto, da Figura 4.40, consideramos, sem perda de generalidade, os pontos A e B no primeiro octante. M é o ponto médio de [AB], M₁ é a projecção ortogonal de M sobre o plano ACD – paralelo ao plano xOy e que passa por A – e M₂ é a projecção ortogonal de M sobre o plano BCE – paralelo ao plano xOz e que passa por B. Ora, o ponto M₁ é o ponto médio do segmento de recta [AC], que está contido num plano paralelo ao plano xOy, logo as coordenadas de M₁ são (ver projecção M₃ em xOy – Figura 4.40):

$$\left(x_2 + \frac{x_1 - x_2}{2}, y_1 + \frac{y_2 - y_1}{2}, z_1\right) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, z_1\right).$$

Por outro lado, o ponto M₂ é o ponto médio do segmento de recta [BE], que está contido num plano paralelo ao plano xOz, logo as coordenadas de M₂, por analogia, são:

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, y_2, \frac{z_1 + z_2}{2}\right).$$

Como o ponto M tem a mesma abcissa e a mesma ordenada que o ponto M₁ e tem a mesma cota que o ponto M₂, significa que as suas coordenadas são

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right).$$

O *plano mediador*, \mathcal{P} , de um segmento de recta [AB] é o lugar geométrico dos pontos do espaço equidistantes dos extremos do segmento de recta, A e B. O plano mediador, \mathcal{P} , é perpendicular ao segmento de recta [AB], passando no seu ponto médio (Figura 4.41).

Consideremos, num referencial c. o. n. tridimensional, os pontos A(x₁, y₁, z₁) e B(x₂, y₂, z₂). Se P(x, y, z) é um ponto qualquer do plano mediador \mathcal{P} , podemos estabelecer que (Figura 4.41) da equação 4.5:

$$\begin{aligned} P \in \mathcal{P} &\Leftrightarrow \overline{AP} = \overline{BP} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2} = \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2} \end{aligned}$$

donde, elevando ambos os membros ao quadrado, temos

$$\begin{aligned} (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 &= (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 - 2xx_1 + x_1^2 + y^2 - 2yy_1 + y_1^2 + z^2 - 2zz_1 + z_1^2 &= x^2 - 2xx_2 + x_2^2 + y^2 - 2yy_2 + y_2^2 + z^2 - 2zz_2 \\ + + z_2^2 &\Leftrightarrow -2xx_1 + x_1^2 - 2yy_1 + y_1^2 - 2zz_1 + z_1^2 = -2xx_2 + x_2^2 - 2yy_2 + y_2^2 - 2zz_2 + z_2^2 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

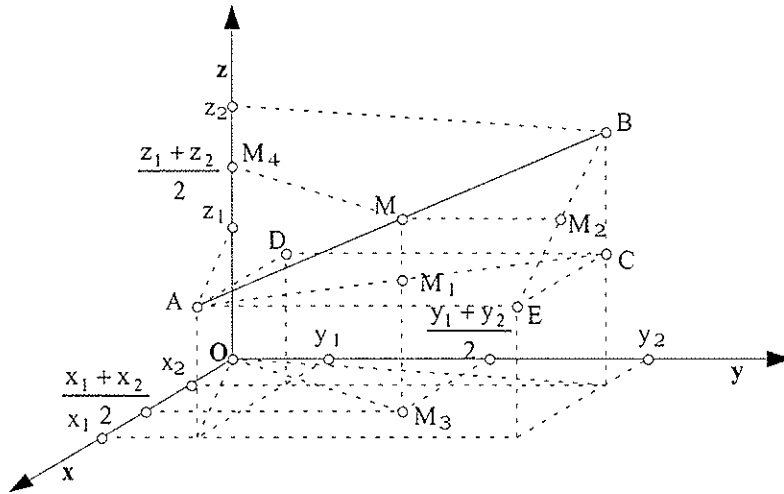


Figura 4.40: Referencial c. o. n. tridimensional: $M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$ é o ponto médio do segmento de recta $[AB]$, onde as coordenadas dos extremos são $A(x_1, y_1, z_1)$ e $B(x_2, y_2, z_2)$. M_1 é o ponto médio do segmento de recta $[AC]$. M_2 é o ponto médio do segmento de recta $[BE]$. O plano ACE é paralelo a xOy e o plano BCE é paralelo a xOz . M_3 é a projecção de M sobre xOy . M_4 é a projecção de M sobre o eixo dos zz .

$$\Leftrightarrow (2x_2 - 2x_1)x + (2y_2 - 2y_1)y + (2z_2 - 2z_1)z + x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 0$$

que é uma *equação do plano medidor* (secção 4.2.12) do segmento de recta $[AB]$.

Os pontos, $Q(x, y, z)$, do semiespaço definido pelo plano medidor do segmento de recta $[AB]$, que contém o ponto A , estão mais próximos de A do que de B , ou seja:

$$\overline{AQ} < \overline{BQ} \Leftrightarrow \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2} < \sqrt{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 + (z-z_2)^2}$$

elevando ambos os membros da desigualdade ao quadrado temos

$$(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2 < (x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 + (z-z_2)^2$$

desenvolvendo e simplificando a desigualdade, vem

$$(2x_2 - 2x_1)x + (2y_2 - 2y_1)y + (2z_2 - 2z_1)z + x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 < 0.$$

Por outro lado, os pontos, $R(x, y, z)$, do semiespaço definido pelo plano medidor do segmento de recta $[AB]$, que contém o ponto B , estão, por sua vez, mais próximos do ponto B do que de A , ou seja:

$$\overline{AR} > \overline{BR} \Leftrightarrow \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2} > \sqrt{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 + (z-z_2)^2},$$

donde, da mesma forma que atrás, elevando ambos os membros ao quadrado, desenvolvendo e simplificando a desigualdade, vem

$$(2x_2 - 2x_1)x + (2y_2 - 2y_1)y + (2z_2 - 2z_1)z + x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 > 0.$$

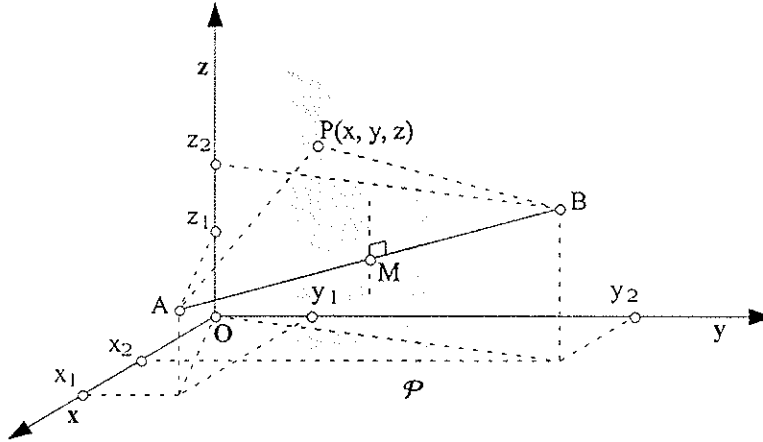


Figura 4.41: No referencial c. o. n. tridimensional, M é o ponto médio do segmento de recta $[AB]$, em que as coordenadas dos extremos são: $A(x_1, y_1, z_1)$ e $B(x_2, y_2, z_2)$, e $P(x, y, z)$ é um ponto qualquer no plano mediano \mathcal{P} , definido como o conjunto de pontos do espaço equidistantes de A e B . Este plano inclui o ponto M .

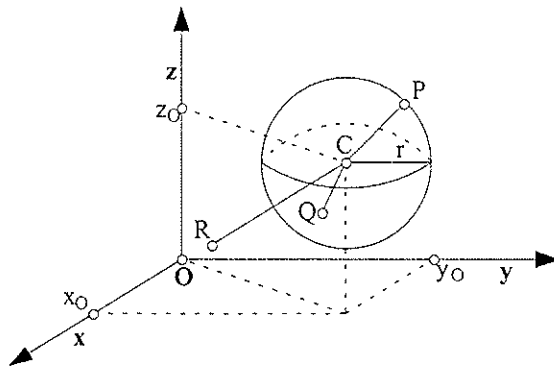


Figura 4.42: Num referencial c. o. n., tridimensional representamos uma superfície esférica de raio r e centro $C(x_0, y_0, z_0)$. O ponto P pertence à superfície esférica: $\overline{CP} = r$. O ponto Q pertence ao interior da superfície esférica: $\overline{CQ} < r$. O ponto R pertence ao exterior da superfície esférica: $\overline{CR} > r$.

4.2.5 Superfície esférica e esfera

A *superfície esférica* é o lugar geométrico dos pontos do espaço a uma distância fixa (o *raio*) de um ponto fixo (o *centro*). Seja $P(x, y, z)$ um ponto qualquer da superfície esférica de centro $C(x_0, y_0, z_0)$ e raio r . Temos que:

$$\overline{CP} = r \Leftrightarrow \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = r \Leftrightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2;$$

esta é uma *equação da superfície esférica* de centro $C(x_0, y_0, z_0)$ e raio r , num referencial c. o. n. tridimensional (Figura 4.42).

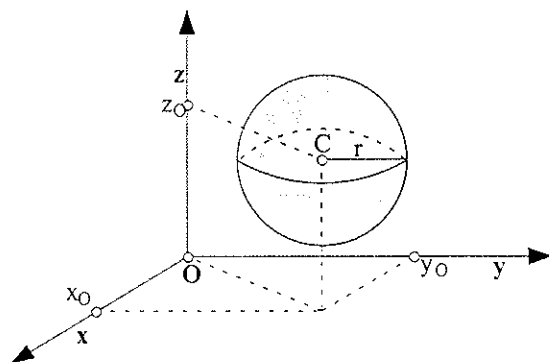


Figura 4.43: Uma esfera de centro $C(x_0, y_0, z_0)$ e raio r num referencial c. o. n. tridimensional.

Quanto à posição de um ponto arbitrário, do espaço, relativamente à superfície esférica temos (Figura 4.42):

- o ponto P pertence à superfície esférica, se a sua distância ao centro da superfície for igual ao raio da mesma, ou seja: $\overline{CP} = r$;
- o ponto Q pertence ao *interior da superfície esférica* se a sua distância ao centro da superfície é inferior ao raio da mesma, ou seja: $\overline{CQ} < r$;
- o ponto R pertence ao *exterior da superfície esférica* se a sua distância ao centro da superfície é superior ao raio da mesma, ou seja: $\overline{CR} > r$.

Por outro lado, temos que, a *esfera* é o conjunto dos pontos do espaço de uma superfície esférica e do seu interior. A esfera de centro $C(x_0, y_0, z_0)$ e de raio r é definida pela condição:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \leq r^2 \quad (\text{Figura 4.43}).$$

Chama-se *exterior da esfera*, de centro $C(x_0, y_0, z_0)$ e raio r , ao conjunto de todos os pontos do espaço exteriores à superfície esférica, definido pela condição:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 > r^2 \quad (\text{Figura 4.44}).$$

4.2.6 Componentes e coordenadas de um vector

As noções e as propriedades a apresentar nesta secção, num referencial c. o. n. tridimensional, são uma extensão do que foi visto para o referencial c. o. n. do plano, na secção 3.5. Neste caso, temos a mais uma coordenada (cota). Assim, consideremos num referencial c. o. n., $Oxyz$, tridimensional, três vectores unitários \vec{i} , \vec{j} e \vec{k} , orientados segundo os eixos coordenados

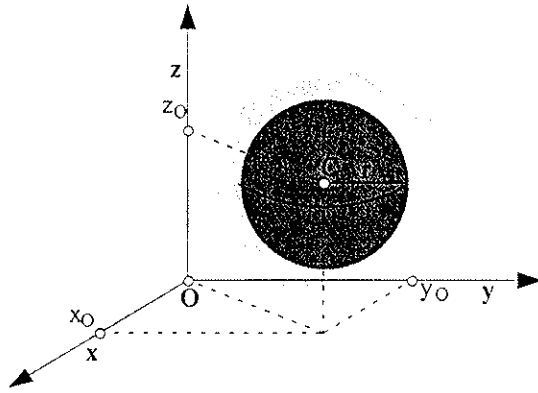


Figura 4.44: O exterior (cinzento) da esfera (vermelha) de centro $C(x_0, y_0, z_0)$ e raio r num referencial c. o. n. tridimensional.

dos xx , yy e zz , respectivamente, isto é, os vectores são perpendiculares dois a dois, têm a mesma direcção e o mesmo sentido que cada um dos eixos coordenados, respectivamente. Temos, então, que $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ é uma *base ortonormada* (b. o. n.) *canónica* e um referencial associado a esta base, que se representa por $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, que se diz também *referencial ortonormado*⁸⁸. Assim, se tivermos representado num referencial c. o. n., $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, um vector \vec{a} , o seu vector posição é um representante do vector com origem na origem do referencial, O , e extremidade no ponto A de tal modo que $\overline{OA} = \vec{a}$. Diz-se que as coordenadas do ponto A são também as coordenadas do vector \vec{a} . Se supusermos que as coordenadas do ponto A são (a_1, a_2, a_3) , temos que

$$\vec{a} = \overline{OA} = (a_1, a_2, a_3),$$

e também que

$$\vec{a} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}.$$

Chamamos *coordenadas do vector* \vec{a} aos números reais a_1, a_2 e a_3 , e diz-se que são a primeira, segunda e terceira coordenadas, respectivamente, do vector \vec{a} . Escreve-se, portanto, da mesma forma, ou seja,

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3).$$

A $a_1 \vec{i}$, $a_2 \vec{j}$ e $a_3 \vec{k}$ chamamos *componentes do vector* \vec{a} (Figura 4.45).

As coordenadas dos vectores, \vec{i} , \vec{j} e \vec{k} , da b. o. n. são:

$$\vec{i} = (1, 0, 0), \vec{j} = (0, 1, 0) \text{ e } \vec{k} = (0, 0, 1).$$

O vector nulo, que se representa por $\vec{0}$, escreve-se, em função das suas componentes, como

⁸⁸ Referencial ortonormado direito, como ao longo desta tese (Figura 4.28): $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$ (Apêndice VII).

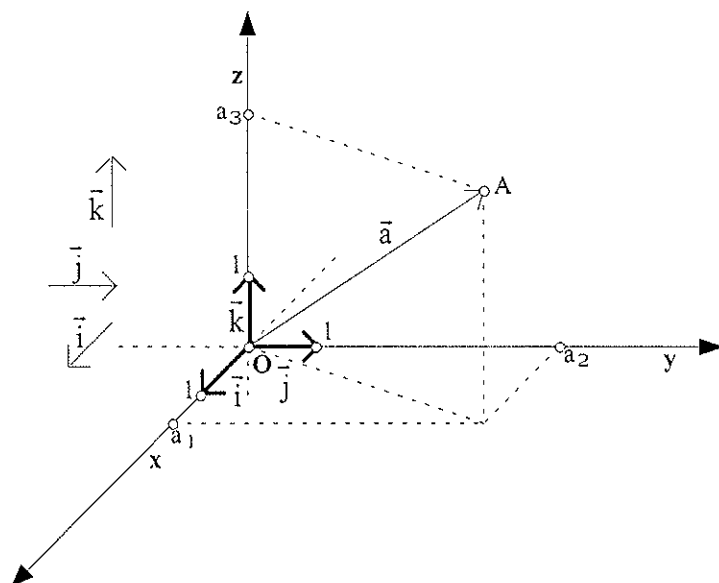


Figura 4.45: $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ é uma base ortonormada (b. o. n.) no referencial c. o. n. tridimensional $Oxyz$.

O ponto A tem coordenadas (a_1, a_2, a_3) , o vector $\overline{OA} = \vec{a} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}$ tem as mesmas coordenadas, ou seja, (a_1, a_2, a_3) , e as suas componentes são: $a_1 \vec{i}$, $a_2 \vec{j}$ e $a_3 \vec{k}$. As coordenadas dos vectores da b. o. n. são: \vec{i} $(1, 0, 0)$, \vec{j} $(0, 1, 0)$ e \vec{k} $(0, 0, 1)$.

$$\vec{0} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$$

e as suas coordenadas são

$$\vec{0} = (0, 0, 0).$$

Temos, por outro lado, que os vectores da forma $(\alpha, 0, 0)$, $(0, \beta, 0)$ e $(0, 0, \varphi)$, sendo α , β , e φ números reais quaisquer, representam famílias de vectores que são colineares com os eixos coordenados dos xx , yy e zz , respectivamente. Os vectores $(\alpha, \beta, 0)$, $(0, \beta, \varphi)$ e $(\alpha, 0, \varphi)$, com α , β , e φ números reais quaisquer, representam famílias de vectores com a direcção do plano coordenado xOy , yOz e xOz , respectivamente.

4.2.7 Norma, igualdade e operações com vectores

Consideremos num referencial c. o. n. $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, os vectores dados pelas suas coordenadas:

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \text{ e } \vec{v} = (v_1, v_2, v_3).$$

(i) Norma de um vector

A norma do vector \vec{u} é a distância entre os extremos de um representante do vector e pode ser dada por:

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

(ii) Igualdade de dois vectores

Dois vectores, \vec{u} e \vec{v} , são iguais se as coordenadas respectivas são iguais, ou seja,

$$\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow (u_1, u_2, u_3) = (v_1, v_2, v_3) \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = v_1 \\ u_2 = v_2 \\ u_3 = v_3 \end{cases}$$

(iii) Adição de vectores

A adição do vector \vec{u} com o vector \vec{v} é dada por

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1, u_2, u_3) + (v_1, v_2, v_3) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3).$$

(iv) Vector simétrico

O vector simétrico do vector \vec{u} é o vector $-\vec{u}$ e é obtido da seguinte forma:

$$-\vec{u} = -(u_1, u_2, u_3) = (-u_1, -u_2, -u_3)$$

(v) Subtracção de vectores

A subtracção do vector \vec{u} ao vector \vec{v} é

$$\vec{u} - \vec{v} = (u_1, u_2, u_3) - (v_1, v_2, v_3) = (u_1 - v_1, u_2 - v_2, u_3 - v_3).$$

(vi) Produto de um número real por um vector

O produto do número real α pelo vector \vec{u} é o vector dado por

$$\alpha \vec{u} = \alpha (u_1, u_2, u_3) = (\alpha u_1, \alpha u_2, \alpha u_3),$$

em que

$$\|\alpha \vec{u}\| = |\alpha| \cdot \|\vec{u}\|.$$

(vii) Soma de um ponto com um vector

Consideremos um ponto A de coordenadas (a_1, a_2, a_3) . A soma de um ponto A com um vector \vec{u} é um ponto B, extremidade do representante de \vec{u} com origem em A. Ou seja,

$$\begin{aligned} B = A + \vec{u} &= (a_1, a_2, a_3) + (u_1, u_2, u_3) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow B &= (a_1 + u_1, a_2 + u_2, a_3 + u_3) \end{aligned}$$

(viii) Vector como diferença de dois pontos

Consideremos dois pontos A e B de coordenadas (a_1, a_2, a_3) e (b_1, b_2, b_3) , respectivamente. A diferença entre o ponto B e o ponto A é o vector \overrightarrow{AB} , ou seja,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= B - A = (b_1, b_2, b_3) - (a_1, a_2, a_3) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} &= (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3) \end{aligned}$$

4.2.8 Vectores colineares

Dois vectores, \vec{u} e \vec{v} , são *colineares* ou *paralelos* se e só se têm a mesma direcção, ou seja, se existir um único número real α tal que $\vec{u} = \alpha \vec{v}$ (ver secção 3.5.11). Considerando, pois, num referencial c. o. n., os vectores, \vec{u} e \vec{v} , dados pelas suas coordenadas (u_1, u_2, u_3) e (v_1, v_2, v_3) , respectivamente, temos

$$\begin{aligned} \vec{u} = \alpha \vec{v} &\Leftrightarrow (u_1, u_2, u_3) = \alpha(v_1, v_2, v_3) \Leftrightarrow (u_1, u_2, u_3) = (\alpha v_1, \alpha v_2, \alpha v_3) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow u_1 &= \alpha v_1 \wedge u_2 = \alpha v_2 \wedge u_3 = \alpha v_3 \end{aligned}$$

donde, sendo $v_1 \neq 0$, $v_2 \neq 0$ e $v_3 \neq 0$, significa que

$$\vec{u} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow \frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2} = \frac{u_3}{v_3}.$$

Portanto, os vectores, \vec{u} e \vec{v} , são colineares se as suas coordenadas respectivas são directamente proporcionais.

4.2.9 Produto interno num referencial o. n.

Num referencial c. o. n. $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, consideremos os vectores dados pelas suas coordenadas:

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \text{ e } \vec{v} = (v_1, v_2, v_3).$$

Para obtermos uma expressão do produto interno em função das coordenadas dos vectores, vamos aplicar as propriedades do produto interno (ver secção 3.5.14) sucessivamente:

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= (u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j} + u_3 \vec{k}) \cdot (v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j} + v_3 \vec{k}) = \\ &= (u_1 \vec{i}) \cdot (v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j} + v_3 \vec{k}) + (u_2 \vec{j}) \cdot (v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j} + v_3 \vec{k}) + (u_3 \vec{k}) \cdot (v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j} + v_3 \vec{k}) = \\ &= (u_1 \vec{i}) \cdot (v_1 \vec{i}) + (u_1 \vec{i}) \cdot (v_2 \vec{j}) + (u_1 \vec{i}) \cdot (v_3 \vec{k}) + (u_2 \vec{j}) \cdot (v_1 \vec{i}) + (u_2 \vec{j}) \cdot (v_2 \vec{j}) + (u_2 \vec{j}) \cdot (v_3 \vec{k}) + \\ &\quad + (u_3 \vec{k}) \cdot (v_1 \vec{i}) + (u_3 \vec{k}) \cdot (v_2 \vec{j}) + (u_3 \vec{k}) \cdot (v_3 \vec{k}) = \\ &= (u_1 v_1)(\vec{i} \cdot \vec{i}) + (u_1 v_2)(\vec{i} \cdot \vec{j}) + (u_1 v_3)(\vec{i} \cdot \vec{k}) + (u_2 v_1)(\vec{j} \cdot \vec{i}) + (u_2 v_2)(\vec{j} \cdot \vec{j}) + (u_2 v_3)(\vec{j} \cdot \vec{k}) + \\ &\quad + (u_3 v_1)(\vec{k} \cdot \vec{i}) + (u_3 v_2)(\vec{k} \cdot \vec{j}) + (u_3 v_3)(\vec{k} \cdot \vec{k}) = \\ &= (u_1 v_1)1 + (u_1 v_2)0 + (u_1 v_3)0 + (u_2 v_1)0 + (u_2 v_2)1 + (u_2 v_3)0 + (u_3 v_1)0 + (u_3 v_2)0 + (u_3 v_3)1 = \\ &= u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3.$$

Da equação 3.11, a amplitude do ângulo definido pelos vectores \vec{u} e \vec{v} , com $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$, pode ser obtida pela expressão (comparar com a equação 3.14):

$$\cos(\hat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} \Leftrightarrow \cos(\hat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}.$$

4.2.10 Vectores perpendiculares

Como sabemos, dois vectores não nulos, \vec{u} e \vec{v} , são perpendiculares sse $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Assim, para determinarmos um vector \vec{v} perpendicular a um dado vector \vec{u} , temos de, em geral, resolver uma equação, tendo em atenção que o produto interno de dois vectores perpendiculares é nulo. Ou seja,

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0.$$

Suponhamos que queríamos determinar um vector perpendicular $\vec{r} = (x, y, z)$ ao vector \vec{s} de coordenadas $(1, 2, 3)$. Temos, então que

$$\vec{r} \perp \vec{s} \Leftrightarrow \vec{r} \cdot \vec{s} = 0.$$

Ou seja,

$$(x, y, z) \cdot (1, 2, 3) = 0 \Leftrightarrow x + 2y + 3z = 0 \Leftrightarrow x = -2y - 3z,$$

donde,

$$\vec{r} = (-2y - 3z, y, z), \text{ com } y, z \in \mathbb{R}.$$

4.2.11 Estudo da recta

(i) Equação vectorial e equações paramétricas da recta

Num referencial c. o. n. $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, sendo $P(x, y, z)$ um ponto qualquer tridimensional, dado um ponto $A(a_1, a_2, a_3)$ e um vector $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, definimos a *equação vectorial da recta* que passa no ponto A e tem a direcção do vector \vec{u} (que se designa por *vector director* da recta) do seguinte modo:

$$P = A + \alpha \vec{u}, \alpha \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + \alpha(u_1, u_2, u_3), \alpha \in \mathbb{R}. \quad (4.6)$$

Por outro lado, determinamos um ponto P , do espaço, colinear com dois pontos, A e B , a partir da condição: $P = A + \alpha \overline{AB}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, que é uma equação vectorial da recta AB . Da equação 4.6 podemos escrever sucessivamente:

$$(x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + (\alpha u_1, \alpha u_2, \alpha u_3), \alpha \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x, y, z) = (a_1 + \alpha u_1, a_2 + \alpha u_2, a_3 + \alpha u_3), \alpha \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a_1 + \alpha u_1 \\ y = a_2 + \alpha u_2, \alpha \in \mathbb{R} \\ z = a_3 + \alpha u_3 \end{cases} \quad (4.7)$$

a este sistema de equações chamamos *equações paramétricas* da recta.

(ii) Equações cartesianas da recta: contínua e reduzida

De 4.7, das equações paramétricas da recta, vamos obter outras equações da recta. Assim, supondo que $u_1 \neq 0$, $u_2 \neq 0$ e $u_3 \neq 0$, temos,

$$\begin{cases} \alpha = \frac{x - a_1}{u_1} \\ \alpha = \frac{y - a_2}{u_2} \\ \alpha = \frac{z - a_3}{u_3} \end{cases}$$

donde, eliminando o parâmetro α , sai

$$\frac{x - a_1}{u_1} = \frac{y - a_2}{u_2} = \frac{z - a_3}{u_3}$$

que é a chamada *equação contínua* da recta. Quando uma ou duas das coordenadas do vector director da recta, $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3)$, é nula, obtemos casos particulares. Conforme seja uma coordenada nula ou duas coordenadas nulas, do vector director, vamos obter posições particulares da recta relativamente aos planos coordenados e aos eixos coordenados, respectivamente. A partir do sistema 4.7, temos que:

- Se $u_1 = 0$, $u_2 \neq 0$ e $u_3 \neq 0$, vem

$$\begin{cases} x = a_1 \\ y = a_2 + \alpha u_2 \\ z = a_3 + \alpha u_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a_1 \\ \alpha = \frac{y - a_2}{u_2} \\ \alpha = \frac{z - a_3}{u_3} \end{cases}$$

donde

$$x = a_1 \wedge \frac{y - a_2}{u_2} = \frac{z - a_3}{u_3}$$

que é uma recta paralela ao plano yOz .

- Se $u_1 \neq 0$, $u_2 = 0$ e $u_3 \neq 0$, vem

$$\begin{cases} x = a_1 + \alpha u_1 \\ y = a_2 \\ z = a_3 + \alpha u_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{x - a_1}{u_1} \\ y = a_2 \\ \alpha = \frac{z - a_3}{u_3} \end{cases}$$

ou seja

$$y = a_2 \wedge \frac{x - a_1}{u_1} = \frac{z - a_3}{u_3}$$

que é uma recta paralela ao plano xOz.

- Se $u_1 \neq 0$, $u_2 \neq 0$ e $u_3 = 0$, temos

$$\begin{cases} x = a_1 + \alpha u_1 \\ y = a_2 + \alpha u_2 \\ z = a_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{x - a_1}{u_1} \\ \alpha = \frac{y - a_2}{u_2} \\ z = a_3 \end{cases}$$

donde

$$z = a_3 \wedge \frac{x - a_1}{u_1} = \frac{y - a_2}{u_2}$$

que é uma recta paralela ao plano xOy.

- Sendo $u_1 = u_2 = 0$ e $u_3 \neq 0$, fica

$$\begin{cases} x = a_1 \\ y = a_2 \\ z = a_3 + \alpha u_3 \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R},$$

ou seja

$$x = a_1 \wedge y = a_2$$

que é uma recta paralela ao eixo dos zz.

- Sendo $u_1 = u_3 = 0$ e $u_2 \neq 0$, vem

$$\begin{cases} x = a_1 \\ y = a_2 + \alpha u_2, \alpha \in \mathbb{R}, \\ z = a_3 \end{cases}$$

ou seja

$$x = a_1 \wedge z = a_3$$

que é uma recta paralela ao eixo dos yy.

- Se for $u_1 \neq 0$ e $u_2 = u_3 = 0$, ficamos com

$$\begin{cases} x = a_1 + \alpha u_1 \\ y = a_2 \\ z = a_3 \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R},$$

donde

$$y = a_2 \wedge z = a_3$$

que é uma recta paralela ao eixo dos xx.

Novamente de 4.7 e admitindo que $u_3 \neq 0$, temos sucessivamente

$$\begin{cases} x = a_1 + \alpha u_1 \\ y = a_2 + \alpha u_2 \\ \alpha = \frac{z - a_3}{u_3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a_1 + \frac{z - a_3}{u_3} u_1 \\ y = a_2 + \frac{z - a_3}{u_3} u_2 \\ \alpha = \frac{z - a_3}{u_3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{u_1}{u_3} z + \left(a_1 - a_3 \frac{u_1}{u_3} \right) \\ y = \frac{u_2}{u_3} z + \left(a_2 - a_3 \frac{u_2}{u_3} \right) \\ \alpha = \frac{z - a_3}{u_3} \end{cases}$$

Fazendo, $m = \frac{u_1}{u_3}$, $n = \frac{u_2}{u_3}$, $p = \left(a_1 - a_3 \frac{u_1}{u_3} \right)$ e $q = \left(a_2 - a_3 \frac{u_2}{u_3} \right)$, vem

$$\begin{cases} x = mz + p \\ y = nz + q \end{cases} \quad (4.8)$$

que se chamam as *equações reduzidas* da recta. Se fizermos no sistema 4.8, $z = 0$, então obtemos o ponto da recta cujas coordenadas são $(p, q, 0)$ e é o ponto de intersecção da recta com o plano xOy. Temos agora, além do vector director $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, um outro vector director da recta \vec{v} , dado por:

$$\vec{v} = \left(\frac{u_1}{u_3}, \frac{u_2}{u_3}, 1 \right) \Leftrightarrow \vec{v} = (m, n, 1),$$

pois verificamos que é $\vec{v} = u_3 \vec{u}$.

De forma análoga, admitindo agora em 4.7 que $u_2 \neq 0$, escrevemos outras equações reduzidas da recta:

$$\begin{cases} x = a_1 + \alpha u_1 \\ \alpha = \frac{y - a_2}{u_2} \\ z = a_3 + \alpha u_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{u_1}{u_2} y + \left(a_1 - a_2 \frac{u_1}{u_2} \right) \\ \alpha = \frac{y - a_2}{u_2} \\ z = \frac{u_3}{u_2} y + \left(a_3 - a_2 \frac{u_3}{u_2} \right) \end{cases},$$

fazendo agora, $m = \frac{u_1}{u_2}$, $n = \frac{u_3}{u_2}$, $p = \left(a_1 - a_2 \frac{u_1}{u_2} \right)$ e $q = \left(a_3 - a_2 \frac{u_3}{u_2} \right)$, vem

$$\begin{cases} x = my + p \\ z = ny + q \end{cases} \quad (4.9).$$

Nas equações reduzidas da recta 4.9, se fizermos $y = 0$, obtemos um ponto da recta cujas coordenadas são $(p, 0, q)$ e é o ponto de intersecção da recta com o plano xOz . Um outro vector director da recta \vec{r} , para além do vector director $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, é dado por:

$$\vec{r} = \left(\frac{u_1}{u_2}, 1, \frac{u_3}{u_2} \right) \Leftrightarrow \vec{r} = (m, 1, n),$$

pois verifica-se que $\vec{r} = u_2 \cdot \vec{u}$.

Supondo, por último, em 4.7 que $u_1 \neq 0$, escrevemos ainda outras equações reduzidas da recta:

$$\begin{cases} \alpha = \frac{x - a_1}{u_1} \\ y = a_2 + \alpha u_2 \\ z = a_3 + \alpha u_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{x - a_1}{u_1} \\ y = \frac{u_2}{u_1} x + \left(a_2 - a_1 \frac{u_2}{u_1} \right) \\ z = \frac{u_3}{u_1} x + \left(a_3 - a_1 \frac{u_3}{u_1} \right) \end{cases},$$

fazendo desta vez, $m = \frac{u_2}{u_1}$, $n = \frac{u_3}{u_1}$, $p = \left(a_2 - a_1 \frac{u_2}{u_1} \right)$ e $q = \left(a_3 - a_1 \frac{u_3}{u_1} \right)$, obtemos

$$\begin{cases} y = mx + p \\ z = nx + q \end{cases} \quad (4.10).$$

Fazendo $x = 0$, nas equações reduzidas da recta 4.10, obtemos um ponto da recta $(0, p, q)$ que é o ponto de intersecção da recta com o plano yOz . De 4.10 tiramos também outro vector director da recta, \vec{w} , além do vector director $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$:

$$\vec{w} = \left(1, \frac{u_2}{u_1}, \frac{u_3}{u_1} \right) \Leftrightarrow \vec{w} = (1, m, n).$$

pois temos que:

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \Leftrightarrow \vec{u} = u_1 \left(1, \frac{u_2}{u_1}, \frac{u_3}{u_1} \right) \Leftrightarrow \vec{u} = u_1 (1, m, n) \Leftrightarrow \vec{u} = u_1 \cdot \vec{w}.$$

4.2.12 Estudo do plano

No que se segue consideramos os pontos $A(a_1, a_2, a_3)$ e $P(x, y, z)$ do plano \mathcal{P} e os vectores $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ do mesmo plano, não nulos e não paralelos.

(i) Equação vectorial e equações paramétricas do plano

Vamos começar por definir um plano a partir de um ponto e duas direcções. Se colocarmos um representante de \vec{u} e de \vec{v} com origem num ponto A , do espaço, estes definem um plano \mathcal{P} , pois as rectas que contêm cada um dos vectores representantes são concorrentes no ponto A . Por outro lado, um ponto P qualquer do plano \mathcal{P} , define com o ponto A um vector \overrightarrow{AP} que pode ser escrito como combinação linear dos vectores \vec{u} e \vec{v} (ver secção 3.4.4):

$$\overrightarrow{AP} = \lambda \vec{u} + \rho \vec{v}, \text{ com } \lambda, \rho \in \mathbb{R}. \quad (4.11)$$

Como podemos escrever $P = A + \overrightarrow{AP}$, a condição 4.11 pode se escrever na forma:

$$P = A + \lambda \vec{u} + \rho \vec{v}, \text{ com } \lambda, \rho \in \mathbb{R},$$

que é a designada *equação vectorial* do plano \mathcal{P} . Esta pode-se escrever também com coordenadas:

$$(x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + \lambda(u_1, u_2, u_3) + \rho(v_1, v_2, v_3), \text{ com } \lambda, \rho \in \mathbb{R}, \quad (4.12)$$

Definamos, agora, um plano por três pontos não colineares, suponhamos A , B e C . Ora, três pontos definem três direcções: \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} e \overrightarrow{BC} . Como vimos, para definirmos um plano precisamos apenas de conhecer um ponto e duas direcções. Assim, a equação vectorial de um plano definido por três pontos, A , B e C , pode ser escrita

$$P = A + \lambda \overrightarrow{AB} + \rho \overrightarrow{BC}, \text{ com } \lambda, \rho \in \mathbb{R},$$

sendo P um ponto qualquer do plano.

A partir da equação 4.12 obtemos um sistema de equações dado por:

$$\begin{cases} x = a_1 + \lambda u_1 + \rho v_1 \\ y = a_2 + \lambda u_2 + \rho v_2 \\ z = a_3 + \lambda u_3 + \rho v_3 \end{cases}, \lambda, \rho \in \mathbb{R}, \quad (4.13)$$

que é designado pelo sistema das *equações paramétricas* do plano.

(ii) Equação cartesiana do plano

Outra forma de definir um plano é a partir de um ponto e de um *vector normal* ao plano, isto é, de um vector que é perpendicular a todos os vectores desse plano. Considerando o ponto A e um vector normal ao plano $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$, temos que o vector \overrightarrow{AP} (como qualquer outro do plano) é perpendicular ao vector \vec{n} . Então, temos:

$$\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} = 0.$$

Substituindo pelas coordenadas respectivas vem,

$$(x - a_1, y - a_2, z - a_3) \cdot (n_1, n_2, n_3) = 0$$

donde vem

$$n_1(x - a_1) + n_2(y - a_2) + n_3(z - a_3) = 0 \quad (4.14)$$

que é designada por *equação cartesiana* do plano.

(iii) Equação geral e equação axial do plano

A partir das equações paramétricas de um plano, 4.13, resolvendo a primeira e a segunda equação em ordem a λ e a ρ , respectivamente, e substituindo na terceira equação⁸⁹, vamos obter uma outra equação do plano:

$$\begin{cases} \lambda = \frac{x - a_1 - \rho v_1}{u_1} \\ y = a_2 + \frac{x - a_1 - \rho v_1}{u_1} u_2 + \rho v_2 \\ z = a_3 + \frac{x - a_1 - \rho v_1}{u_1} u_3 + \rho v_3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{x - a_1 - \rho v_1}{u_1} \\ \rho = \frac{u_1 y - u_2 x - u_1 a_2 - u_2 a_1}{u_1 v_2 - u_2 v_1} \\ z = a_3 + \frac{u_3}{u_1} x - \frac{u_3}{u_1} a_1 - \frac{u_3 v_1}{u_1} \cdot \frac{u_1 y - u_2 x - u_1 a_2 + u_2 a_1}{u_1 v_2 - u_2 v_1} + \frac{u_1 y - u_2 x - u_1 a_2 - u_2 a_1}{u_1 v_2 - u_2 v_1} v_3 \end{cases}$$

donde, simplificando e fazendo

$$a = u_2 v_3 - u_3 v_2, \quad b = u_3 v_1 - u_1 v_3, \quad c = u_1 v_2 - u_2 v_1 \quad e$$

$$d = -(a_1(u_2 v_3 - u_3 v_2) + a_2(u_3 v_1 - u_1 v_3) + a_3(u_1 v_2 - u_2 v_1))$$

na terceira equação do sistema, vem a equação

$$ax + by + cz + d = 0 \quad (4.15)$$

que é designada por *equação geral* do plano.

Em particular, caso seja $d = 0$, a equação 4.15 representa um plano que passa pela origem do referencial, uma vez que o ponto $(0, 0, 0)$ satisfaz a equação:

$$ax + by + cz = 0.$$

⁸⁹ Num sistema de equações, convencionamos que a ordem das equações é de cima para baixo, isto é, quando referimos a 1ª equação referimo-nos à de cima, a 2ª equação é a seguinte, a 3ª equação é a equação número três a contar de cima, e assim sucessivamente – ver Apêndice VIII.

Da equação 4.14, simplificando vem

$$n_1x + n_2y + n_3z + d = 0, \quad (4.16)$$

que é a chamada *equação geral do plano referida a um ponto e a um vector normal*, fazendo o termo independente $d = -n_1a_1 - n_2a_2 - n_3a_3$.

De 4.15, supondo que $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ e $d \neq 0$ e dividindo ambos os membros por $-d$, vem:

$$\frac{ax}{-d} + \frac{by}{-d} + \frac{cz}{-d} = 1,$$

donde podemos escrever

$$\frac{x}{\frac{-d}{a}} + \frac{y}{\frac{-d}{b}} + \frac{z}{\frac{-d}{c}} = 1. \quad (4.17)$$

Fazendo

$$\alpha = \frac{-d}{a}, \quad \beta = \frac{-d}{b} \quad \text{e} \quad \delta = \frac{-d}{c},$$

a equação 4.17 escreve-se na forma

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\delta} = 1 \quad (4.18)$$

que se designa por *equação axial* do plano. A partir desta podemos tirar directamente os pontos em que o plano intersecta os eixos coordenados. Assim, a intersecção do plano com o eixo dos: xx (fazendo $y = 0$ e $z = 0$) é

$$\frac{x}{\alpha} = 1 \Leftrightarrow x = \alpha,$$

ou seja, o ponto de intersecção é $(\alpha, 0, 0)$; yy ($x = 0$ e $z = 0$) e zz ($x = 0$ e $y = 0$), de forma análoga, são os pontos $(0, \beta, 0)$ e $(0, 0, \delta)$, respectivamente.

4.2.13 Posições relativas de rectas, de planos e de rectas e planos

(i) Posições relativas de rectas

Já nas secções 3.5.18, 3.5.19 e 3.5.20 estudamos as posições relativas entre rectas num mesmo plano. Agora, sendo r e s duas rectas não complanares, elas poderão ser *enviezadas* e *perpendiculares* ou *enviezadas* e *obliquas* (veja-se, num cubo, as várias posições relativas entre

rectas, notando que pode considerar a recta definida por uma aresta ou por uma diagonal de uma face ou, ainda, definida por uma diagonal do cubo – Figura 4.63 da secção 4.3.2).

Seja, num referencial c. o. n., $\vec{r} = (r_1, r_2, r_3)$ o vector director da recta r e $\vec{s} = (s_1, s_2, s_3)$ o vector director da recta s . As rectas r e s são *paralelas* se e só se os vectores directores respectivos, \vec{r} e \vec{s} , são colineares, ou seja, se existir um único número real α tal que $\vec{r} = \alpha \vec{s}$ (secção 4.2.8).

As rectas r e s são *perpendiculares* se e só se os vectores directores, \vec{r} e \vec{s} , respectivamente, são perpendiculares, isto é,

$$\begin{aligned} r \perp s &\Leftrightarrow \vec{r} \perp \vec{s} \Leftrightarrow \vec{r} \cdot \vec{s} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (r_1, r_2, r_3) \cdot (s_1, s_2, s_3) = 0 \Leftrightarrow r_1s_1 + r_2s_2 + r_3s_3 = 0 \end{aligned}$$

(ii) Posições relativas de planos

Dois planos, \mathcal{P} e \mathcal{Q} , no espaço, estão numa das duas seguintes posições: *paralelos* ou *concorrentes*. Sendo os planos, \mathcal{P} e \mathcal{Q} , paralelos, estes podem ainda ser: *estritamente paralelos* ou *coincidentes* (paralelismo em sentido lato) – Figura 4.46. Sendo os planos, \mathcal{P} e \mathcal{Q} , concorrentes, poderão ser: *perpendiculares* ou *obliquos* – Figura 4.47.

Consideremos, num referencial c. o. n., os planos \mathcal{P} e \mathcal{Q} de equações gerais (da forma 4.15):

$$\mathcal{P}: n_1x + n_2y + n_3z + d_1 = 0 \quad \text{e} \quad \mathcal{Q}: m_1x + m_2y + m_3z + d_2 = 0,$$

em que os seus vectores normais são $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ e $\vec{m} = (m_1, m_2, m_3)$, respectivamente (de 4.16). Temos então que os planos \mathcal{P} e \mathcal{Q} são paralelos se e só se os seus vectores normais forem paralelos, ou seja,

$$\mathcal{P} \parallel \mathcal{Q} \Leftrightarrow \vec{n} \parallel \vec{m} \Leftrightarrow \frac{n_1}{m_1} = \frac{n_2}{m_2} = \frac{n_3}{m_3},$$

por 3.5, supondo que $m_1 \neq 0$, $m_2 \neq 0$ e $m_3 \neq 0$. Os planos \mathcal{P} e \mathcal{Q} são perpendiculares se e só se o vector normal de um é perpendicular ao vector normal do outro, ou seja,

$$\mathcal{P} \perp \mathcal{Q} \Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{m} \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{m} = 0 \Leftrightarrow n_1m_1 + n_2m_2 + n_3m_3 = 0.$$

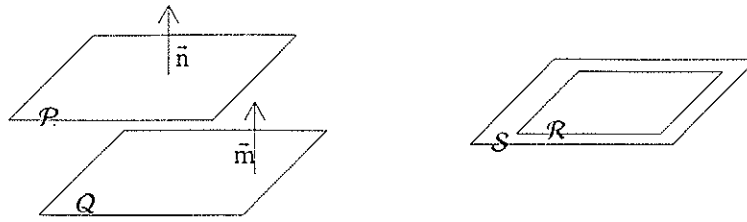


Figura 4.46: Os planos, \mathcal{P} e \mathcal{Q} (esquerda), são estritamente paralelos: $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q} = \{\}$; os vectores normais aos planos são \vec{n} e \vec{m} , respectivamente; temos: $\mathcal{P} \parallel \mathcal{Q} \Leftrightarrow \vec{n} \parallel \vec{m}$. À direita, os planos, \mathcal{R} e \mathcal{S} , são coincidentes (paralelos em sentido lato): $\mathcal{R} \cap \mathcal{S} = \mathcal{R} = \mathcal{S}$.

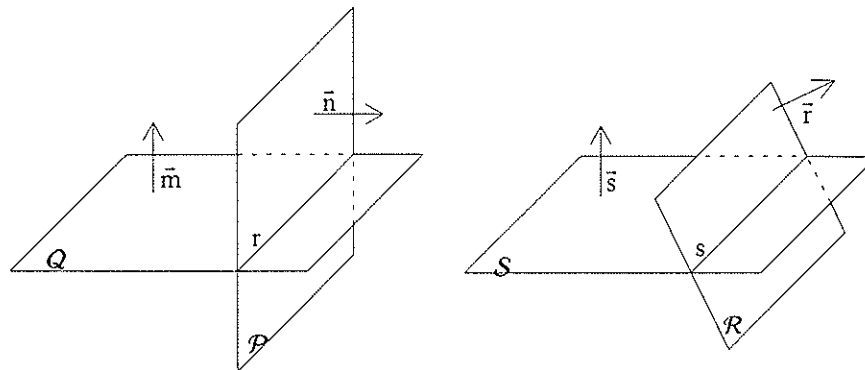


Figura 4.47: Os planos, \mathcal{P} e \mathcal{Q} (esquerda), são perpendiculares: $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q} = r$ (r é a recta comum aos planos). Os vectores normais aos planos são \vec{n} e \vec{m} , respectivamente, e temos: $\mathcal{P} \perp \mathcal{Q} \Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{m}$. À direita os planos, \mathcal{R} e \mathcal{S} , são oblíquos: $\mathcal{R} \cap \mathcal{S} = s$ (s é a recta de intersecção dos planos); os seus vectores normais, \vec{r} e \vec{s} , respectivamente, são oblíquos também, em relação um ao outro.

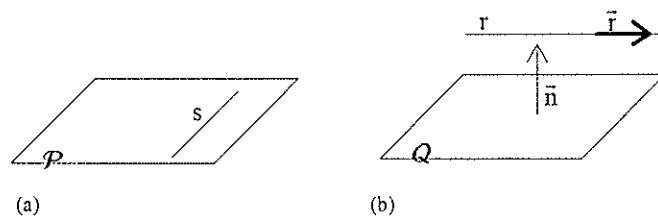


Figura 4.48: (a) A recta s é paralela ao plano \mathcal{P} em sentido lato ($s \subset \mathcal{P}$): $s \cap \mathcal{P} = s$. (b) A recta r é estritamente paralela ao plano \mathcal{Q} : $r \cap \mathcal{Q} = \emptyset$; o vector normal do plano \mathcal{Q} , \vec{n} , é perpendicular ao vector director da recta r , \vec{r} : $\vec{n} \perp \vec{r} \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{r} = 0$.

(iii) Posições relativas de rectas e de planos

No espaço, a posição de uma recta r relativamente a um plano \mathcal{P} pode ser uma de duas: ou *paralela* ou *concorrente*. Sendo a recta r paralela ao plano \mathcal{P} , ela poderá estar: *contida* no plano (paralelismo em sentido lato: $r \subset \mathcal{P}$) ou *estritamente paralela* ao plano – Figura 4.48. Sendo a recta r concorrente com o plano \mathcal{P} , ela poderá ser: *perpendicular* ou *obliqua* (Figura 4.49).

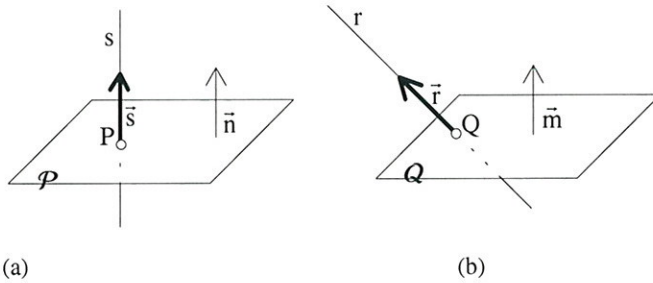


Figura 4.49: (a) A recta s é concorrente e perpendicular ao plano \mathcal{P} : $s \cap \mathcal{P} = \{P\}$; o vector normal do plano \mathcal{P} , \vec{n} , é paralelo ao vector director da recta s , \vec{s} , pois $\exists \lambda \in \mathbb{R}: \vec{n} = \lambda \vec{s}$. (b) A recta r é concorrente ao plano \mathcal{Q} : $r \cap \mathcal{Q} = \{Q\}$; o vector normal do plano \mathcal{Q} , \vec{m} , não é nem paralelo nem perpendicular ao vector director da recta r , \vec{r} .

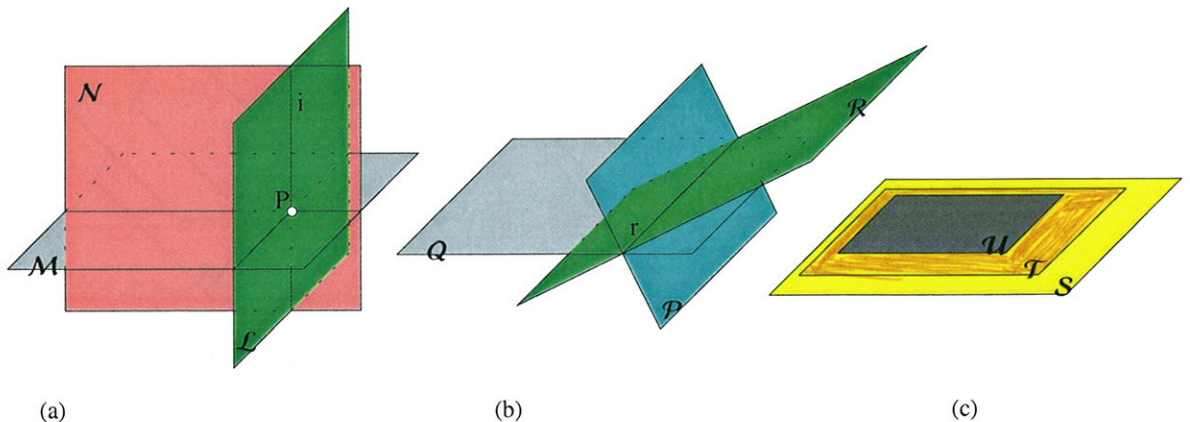


Figura 4.50: (a) A intersecção dos planos, \mathcal{L} (verde), \mathcal{M} (cinzento) e \mathcal{N} (vermelho), é um único ponto P : $\mathcal{L} \cap \mathcal{M} \cap \mathcal{N} = \{P\}$ (neste caso, o sistema definido pelas equações dos três planos é *possível e determinado*); a intersecção dos planos \mathcal{L} e \mathcal{N} , é a recta i : $\mathcal{L} \cap \mathcal{N} = i$; a intersecção do plano \mathcal{M} com a recta i é o ponto P : $\mathcal{M} \cap i = \{P\}$. (b) A intersecção dos planos, \mathcal{P} (azul), \mathcal{Q} (cinzento) e \mathcal{R} (verde), é uma recta r : $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q} \cap \mathcal{R} = r$ (neste caso, o sistema definido pelas equações dos três planos é *possível indeterminado*); a recta r é paralela, em sentido lato, a cada um dos planos, \mathcal{P} , \mathcal{Q} e \mathcal{R} (cf. Figura 4.48 – (a)). (c) Os planos \mathcal{S} (amarelo), \mathcal{T} (vermelho) e \mathcal{U} (cinzento) são coincidentes, ou seja, temos: $\mathcal{S} \cap \mathcal{T} \cap \mathcal{U} = \mathcal{S} = \mathcal{T} = \mathcal{U}$ (o sistema definido pelas equações destes três planos é *possível indeterminado*).

4.2.14 Intersecção de planos e de rectas com planos

No Apêndice VIII apresenta-se a resolução de sistemas de equações. Em termos geométricos, num referencial c. o. n., cada equação linear de tal sistema representa um plano (ver equação 4.15), por conseguinte a solução do sistema dá-nos o resultado da intersecção de três planos (ver Figuras 4.50 e 4.51 e Tabela 4.10), isto é, ao resolvermos o sistema ficamos a saber qual a posição dos três planos no espaço. Alternativamente, podemos interpretar uma das equações

Figura	Tipo de solução (Apêndice VIII)	Situação Geométrica	
		Três planos	Recta + plano
4.50 – (a)	Possível e determinado (solução é um ponto (a, b, c))	Intersecção de três planos no ponto (a, b, c)	Recta concorrente intersecta plano no ponto (a, b, c)
4.50 – (b)	Possível indeterminado (infinitas soluções)	Três planos intersectam-se numa recta	
4.50 – (c)		Três planos são coincidentes	
4.48 – (a)			Recta paralela ao plano em sentido lato
4.51	Impossível (sem solução)	Três planos não se intersectam mutuamente	
4.48 – (b)			Recta paralela ao plano em sentido estrito

Tabela 4.10: Soluções de um sistema de equações e sua interpretação geométrica (ver Apêndice VIII).

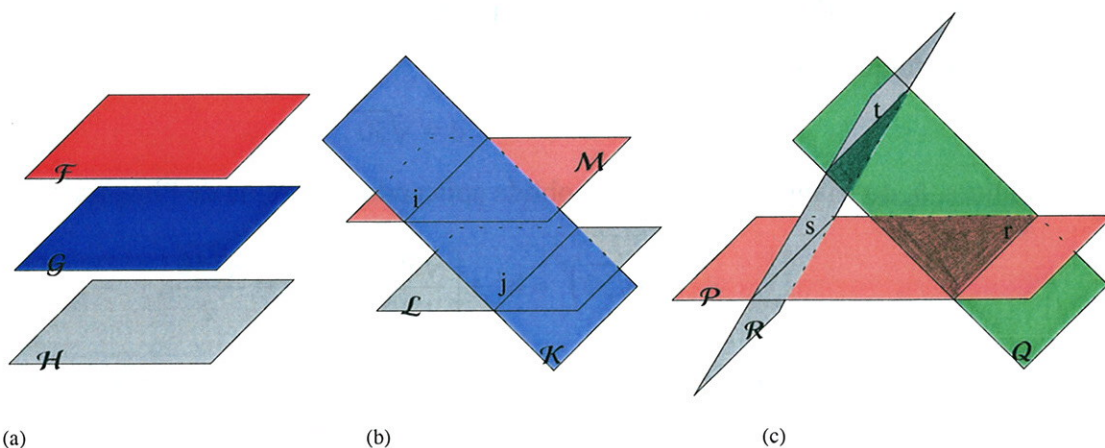


Figura 4.51: (a) Os planos \mathcal{F} (vermelho), \mathcal{G} (azul) e \mathcal{H} (cinzento) são estritamente paralelos, ou seja: $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \cap \mathcal{H} = \{\}$ (neste caso, o sistema definido pelas equações dos três planos é *impossível*). (b) O plano \mathcal{K} (azul) é oblíquo relativamente aos planos estritamente paralelos, \mathcal{L} (cinzento) e \mathcal{M} (vermelho): $\mathcal{K} \cap \mathcal{L} = j$; $\mathcal{K} \cap \mathcal{M} = i$; $\mathcal{L} \cap \mathcal{M} = \{\}$; $i \cap j = \{\}$; $\mathcal{K} \cap \mathcal{L} \cap \mathcal{M} = \{\}$ (caso em que o sistema definido pelas equações dos três planos, \mathcal{K} , \mathcal{L} e \mathcal{M} , é *impossível*); a recta i é estritamente paralela ao plano \mathcal{L} e a recta j é estritamente paralela ao plano \mathcal{M} . (c) Os planos \mathcal{P} (vermelho), \mathcal{Q} (verde) e \mathcal{R} (cinzento) intersectam-se dois a dois segundo rectas, r , s e t , estritamente paralelas, ou seja: $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q} = r$; $\mathcal{P} \cap \mathcal{R} = s$; $\mathcal{Q} \cap \mathcal{R} = t$; $r \cap s \cap t = \{\}$ (o sistema definido pelas equações destes três planos, \mathcal{P} , \mathcal{Q} e \mathcal{R} , é *impossível*); temos cada uma das rectas, r , s e t , paralela estritamente a um plano: $r \parallel \mathcal{R}$, $s \parallel \mathcal{Q}$ e $t \parallel \mathcal{P}$.

do sistema como a equação de um plano e as outras duas equações como as equações de uma recta, donde a resolução do sistema permite-nos concluir qual a posição da recta relativamente ao plano, no espaço. Na Tabela 4.10 e nas Figuras 4.50 e 4.51 apresentamos a situação geométrica, conforme o tipo de solução do sistema (Apêndice VIII).

4.3 Aplicações práticas

4.3.1 Poliedros

Exercício 1: Determine o volume do:

1.1 tetraedro regular inscrito num cubo [ABCDHEFG], de aresta 5 cm (Figura 4.52), por forma que as arestas do tetraedro coincidam com as diagonais das faces do cubo.

Resolução: O tetraedro não é mais do que uma pirâmide triangular regular equilátera, isto é, a base e as faces laterais são triângulos equiláteros, cujos lados são iguais à diagonal da face do cubo. Vamos então calcular o volume da pirâmide. Ora, a diagonal, d , da face do cubo, ou seja, a diagonal do quadrado é dada por:

$$d = \sqrt{50}.$$

A altura, h , do triângulo equilátero é obtida aplicando o teorema de Pitágoras:

$$(\sqrt{50})^2 = h^2 + \left(\frac{\sqrt{50}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow h = \frac{\sqrt{150}}{2}.$$

Podemos, assim, calcular a área da base da pirâmide, ou seja, a área do triângulo equilátero:

$$\text{Área}_{\text{base}} = \frac{d \times h}{2} = \frac{\sqrt{50} \times \sqrt{150}}{4} \approx 21,65 \text{ cm}^2.$$

Para determinarmos a altura, a , da pirâmide vamos aplicar novamente o teorema de Pitágoras, agora, a um triângulo rectângulo em que a hipotenusa é um lado de uma face, um cateto é $\frac{2}{3}$ da

altura do triângulo equilátero (isto é, $\frac{2}{3}h = \frac{\sqrt{150}}{3}$) e o outro cateto é a altura da pirâmide:

$$(\sqrt{50})^2 = a^2 + \left(\frac{\sqrt{150}}{3}\right)^2 \Leftrightarrow a = \frac{\sqrt{300}}{3}.$$

Significa, portanto, que o volume do tetraedro é dado por:

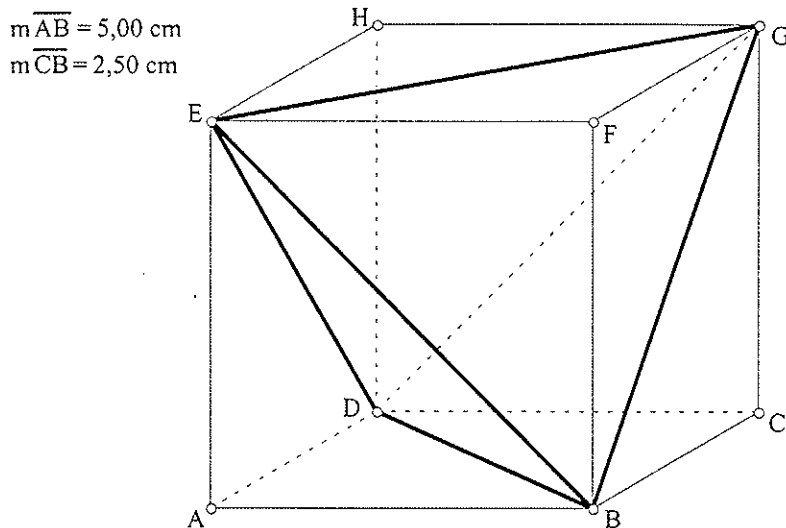


Figura 4.52: Tetraedro [BDEG] inscrito no cubo [ABCDHEFG] (representado em perspectiva cavaleira, PC(30°, 50%) – ver Apêndice II) de aresta 5 cm, de modo, que os seus vértices coincidam com 4 vértices do cubo.

$$\text{Volume} = \frac{1}{3} \text{Área}_{\text{base}} a = \frac{\sqrt{50} \times \sqrt{150} \times \sqrt{300}}{36} \approx 21,67 \text{ cm}^3,$$

ou seja, o volume do tetraedro é 21.67 cm^3 , aproximadamente.

1.2 octaedro regular [IJLMNO] inscrito num cubo [ABCDHEFG] (Figura 4.53), de aresta 5 cm, por forma a que os vértices do octaedro coincidam com os centros das faces do cubo.

Resolução: Neste caso, para obtermos o volume do octaedro [IJLMNO], vamos calcular o volume de duas pirâmides quadrangulares regulares, de bases comuns, [JLMNO] e [JLMNI], em que um lado do quadrado da base é, por exemplo, [JL] e a sua altura é metade da aresta do cubo – Figura 4.53. Apliquemos o teorema de Pitágoras ao triângulo rectângulo em que a hipotenusa, h , é um dos lados do quadrado da base e os catetos medem metade da aresta do cubo:

$$h = \sqrt{(2.5)^2 + (2.5)^2} = \sqrt{12.5}.$$

A área da base da pirâmide, ou seja, a área de um quadrado:

$$\text{Área}_{\text{base}} = \sqrt{12.5} \times \sqrt{12.5} = 12.5 \text{ cm}^2.$$

O volume da pirâmide, por exemplo [JLMNO], é dado por:

$$\text{Volume} = \frac{1}{3} \text{Área}_{\text{base}} a = \frac{12.5 \times 2.5}{3} \approx 10.42 \text{ cm}^3.$$

Donde, o volume do octaedro é:

$$\text{Volume} \approx 2 \times 10.42 \approx 20.84 \text{ cm}^3,$$

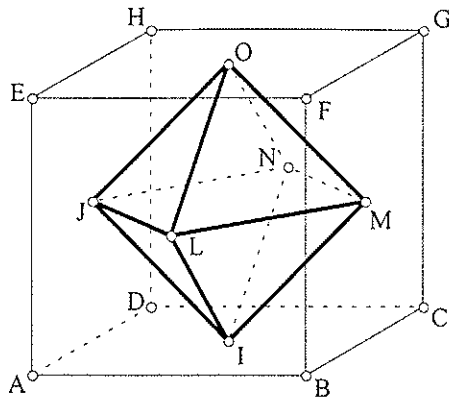


Figura 4.53: Octaedro [IJLMNO] inscrito no cubo [ABCDHEFG] (representado em perspectiva cavaleira – PC(30°, 50%)), por forma que os seus vértices coincidam com os centros das faces do cubo.

Nome do Poliedro	Área de uma face	Área total da superfície	Volume
Tetraedro	$\frac{\sqrt{3}}{4} a^2$	$\sqrt{3} a^2$	$\frac{\sqrt{2}}{12} a^3$
Hexaedro	a^2	$6a^2$	a^3
Octaedro	$\frac{\sqrt{3}}{4} a^2$	$2\sqrt{3} a^2$	$\frac{\sqrt{2}}{3} a^3$
Dodecaedro	$\frac{5}{4\text{tg}36^\circ} a^2$	$\frac{15}{\text{tg}36^\circ} a^2$	$7.6631 a^3$
Icosaedro	$\frac{\sqrt{3}}{4} a^2$	$5\sqrt{3} a^2$	$2.18 a^3$

Tabela 4.11: Áreas e volumes de cada um dos poliedros platónicos.

significa que o volume do octaedro é, aproximadamente, 20.84 cm^3 .

Exercício 2: Determine, para uma aresta a qualquer, a área de uma face, a área da superfície total e o volume de cada um dos poliedros platónicos.

Resolução: Apresentamos os resultados organizados na Tabela 4.11. Notamos que:

- a altura, h , do tetraedro, em função da aresta a , é dada por: $h = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} a$ (ver Figura 4.3).
- a área de qualquer polígono regular é dada por:

$$\text{Área} = \frac{P \cdot ap}{2},$$

em que P é o perímetro e ap é o *apótema* (distância do ponto médio dum lado ao centro do polígono) do polígono;

- o valor para o volume do dodecaedro é obtido de forma aproximada, tendo em conta que se considerou para *ângulo central* (isto é, o ângulo ao centro da esfera circunscrita ao dodecaedro a partir da aresta a), a amplitude de $41^\circ 49'$ (veja em www.mat.uel.br).

- o valor para o volume do icosaedro é obtido de forma aproximada, visto termos considerado para o ângulo central (o ângulo ao centro da esfera circunscrita ao icosaedro a partir da aresta a), a amplitude de $63^\circ 26'$ (veja em www.mat.uel.br e em www.mat-no-sec.org).

Exercício 3: (Exercício proposto) Determine, considerando a aresta de 5 cm, a área de uma face, a área da superfície total e o volume de cada um dos poliedros platónicos (tenha em conta o estudo feito e organizado na Tabela 4.11).

Exercício 4: Construa uma pirâmide, em perspectiva cavaleira – PC(30°, 50%), (ver o Apêndice II) quadrangular, cuja base tenha 49 cm^2 de área e cujo apótema tenha 10 cm. (em www.educ.fc.ul.pt).

Resolução: Na Figura 4.54 apresentamos a pirâmide pedida em perspectiva cavaleira PC(30°, 50%) e na secção 4.4 apresentamos os passos sucessivos para a sua construção no Sketchpad. Tendo em conta que o apótema é 10 cm, a altura da pirâmide é calculada por aplicação do Teorema de Pitágoras ao $\Delta[\text{POV}]$, rectângulo em O:

$$\overline{VP}^2 = \overline{VO}^2 + \overline{OP}^2 \Leftrightarrow \overline{VO}^2 = 10^2 - (3.5)^2 \Leftrightarrow \overline{VO} = \sqrt{87.75} \Leftrightarrow \overline{VO} \approx 9.4$$

Ou seja, a altura desta pirâmide é 9.4 cm, aproximadamente.

Exercício 5: Consideremos um cubo [ABCDHEFG] – Figura 4.55. (adaptado de “Uma actividade com o stella octangula” (Veloso 1998)).

5.1 Mostre que, tendo um cubo aresta a , a sua diagonal mede $\sqrt{3} a$.

Resolução: Ora, na Figura 4.55, $a \equiv [EA] \equiv [AB] \equiv [BC]$, etc., consideremos $d_1 \equiv [EB]$ a diagonal da face [ABFE] e $d_2 \equiv [EC]$ a diagonal do cubo. Aplicando o Teorema de Pitágoras duas vezes, aos triângulos [EAB] e [EBC], rectângulos em A e B, respectivamente, temos:

$$d_1^2 = a^2 + a^2 \Leftrightarrow d_1^2 = 2a^2$$

e

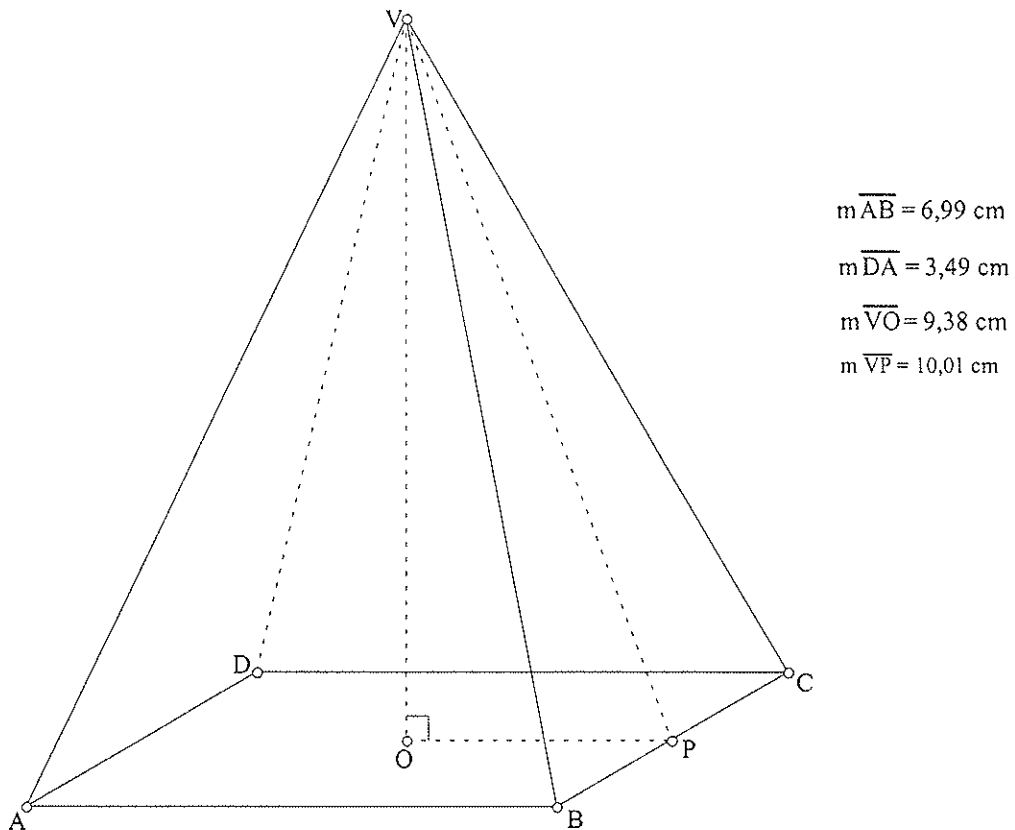


Figura 4.54: Pirâmide [ABCDV] em PC(30°, 50%) em que a base tem 49 cm² de área.

$$d_2^2 = d_1^2 + a^2 \Leftrightarrow d_2^2 = 2a^2 + a^2 \Leftrightarrow d_2^2 = 3a^2$$

donde

$$d_2 = \sqrt{3}a.$$

5.2 Construa o stella octangula utilizando os vértices do cubo e a perspectiva cavaleira – PC(30°, 50%).

Resolução: Mostramos na Figura 4.55 – direita, a construção pedida.

5.3 Qual é a medida do ângulo diedro que fazem duas faces adjacentes do stella octangula?

Resolução: O ângulo diedro entre duas faces do stella octangula é o mesmo que o ângulo diedro entre duas faces do tetraedro, que já se viu ser, aquando do estudo do tetraedro, aproximadamente, 70° 32'. No entanto, vejamos de forma mais detalhada como se obtém este valor. Para aí chegarmos vamos fazer um corte adequado no cubo [ABCDHEFG], segundo um plano BFH (sombreado na Figura 4.56 – esquerda). A intersecção deste plano com o tetraedro [BDEG],

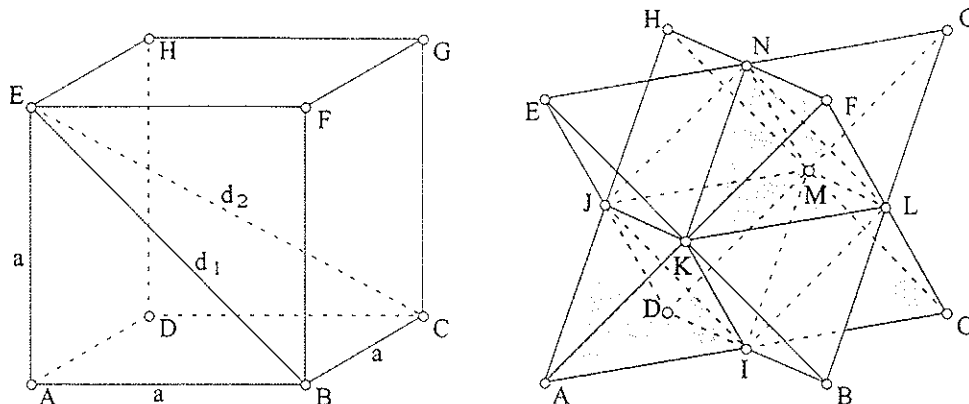


Figura 4.55: À esquerda o cubo [ABCDHEFG] em perspectiva cavaleira: PC(30°, 50%), d_1 a diagonal da face e d_2 a diagonal do cubo. À direita o stella octangula, resultante da inscrição neste cubo e I, J, K, L, M e N são os pontos de intersecção das diagonais das faces do cubo.

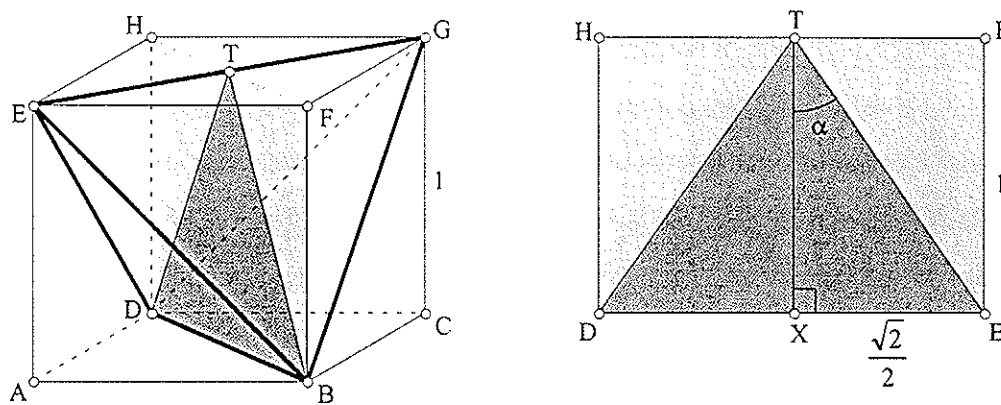


Figura 4.56: À esquerda o tetraedro [BDEG] está inscrito no cubo [ABCDHEFG] de aresta de comprimento 1. O cubo é cortado pelo plano BFH (sombreado) e determina no tetraedro uma secção triangular (sombreada com uma tonalidade mais escura) estando dois dos lados do triângulo assinalados com a cor vermelha. O ângulo diedro do stella octangula, definidos pelos lados do triângulo vermelhos, é 2α e $\text{tg } \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (à direita).

determina uma secção triangular [TDB] (onde T é o ponto de intersecção das diagonais dessa face) com dois lados assinalados na Figura 4.56 com a cor vermelha. Suponhamos, sem perda de generalidade, que o cubo tem aresta de comprimento 1. A diagonal da face mede $\sqrt{2}$. Portanto, no triângulo [TXB], rectângulo em X, o cateto [XB] mede $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Donde, sendo α o ângulo formado entre [TX e [TB, temos $\text{tg } \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Significa que α mede, aproximadamente, $35^\circ 15' 51''$ e portanto o ângulo diedro, 2α , do tetraedro, mede $70^\circ 32'$, aproximadamente.

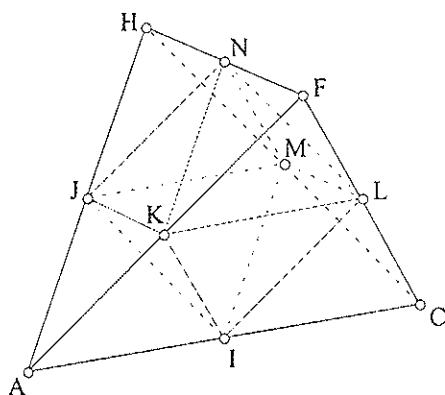


Figura 4.57: O volume do tetraedro [ACFH] é oito vezes o volume do tetraedro [FKLN]. O volume do octaedro [IJKLMN] (vermelho) é igual a quatro tetraedros pequenos do tipo [FKLN].

5.4 Se tomarmos para unidade de volume o volume do tetraedro [KLN], da Figura 4.55, onde K, L e N são os pontos médios das diagonais das faces do cubo, [AF], [CF] e [HF], respectivamente, qual é o volume do stella octangula? E do cubo dado?

Resolução: Ora, podemos ver o stella octangula como um sólido formado por um octaedro ao qual é acrescentado, a cada uma das suas oito faces, pequenos tetraedros regulares com a mesma aresta (Figura 4.55). Vejamos que o volume do tetraedro grande, formado pelo octaedro e por quatro tetraedros pequenos, vale oito tetraedros pequenos. Para isso basta observar a Figura 4.57 e verificar que se retirarmos ao tetraedro regular [ACFH], quatro tetraedros geometricamente iguais a [FKLN], ficamos com um sólido de oito faces com arestas todas geometricamente iguais – o octaedro [IJKLMN]. Como a aresta do tetraedro pequeno vale metade da aresta do tetraedro grande, significa que os volumes estão na proporção de um para oito⁹⁰, ou seja, o volume do tetraedro grande é igual ao de oito pequenos. Donde o volume do octaedro é igual a quatro tetraedros pequenos. Significa que no stella octangula “cabem” doze tetraedros pequenos [KLN] – quatro do octaedro e oito “colados” às faces. Ou seja, o volume do stella octangula, tomando para unidade de medida o volume do tetraedro [KLN], é 12.

O volume do cubo, tomando para unidade de medida também o volume do tetraedro [KLN], é 24. Assim, basta verificar, na Figura 4.55, que podemos juntar ao stella octangula doze tetraedros geometricamente iguais ao tetraedro [EFKN], não regulares, para obtermos o cubo e justificar que o tetraedro, não regular, [EFKN], tem o mesmo volume que o tetraedro [KLN]. Ora, o tetraedro [EFKN] é também uma pirâmide de base [EKN] que está no mesmo plano que a base [KLN], e são triângulos equiláteros com um lado comum (o lado [KN]). Donde as bases têm a

⁹⁰ Dados dois sólidos semelhantes, a razão entre os seus volumes é igual ao cubo da razão entre quaisquer das suas medidas lineares correspondentes.

mesma área. Notemos que o vértice, F, é comum às duas pirâmides (os tetraedros [EFKN] e [KLNF]), logo têm a mesma altura. Portanto, o volume de cada um dos doze tetraedros não regulares é igual ao volume do tetraedro regular [KLNF]. Donde o volume do cubo é 24, visto conter 12 tetraedros devido ao stella octangula e mais 12 tetraedros não regulares.

5.5 Escolha um referencial cartesiano conveniente e indique as coordenadas dos vértices do stella octangula, e as equações dos planos das faces e das rectas suportes das arestas.

Resolução: Suponhamos um referencial c. o. n. em que a origem do referencial O coincide com o centro do cubo, a direcção de cada um dos três eixos coordenados é a mesma que a de cada uma das direcções das três arestas concorrentes num vértice do cubo, respectivamente, e a unidade de medida é metade do comprimento da aresta do cubo, conforme indicado na Figura 4.58.

Tendo em atenção a Figura 4.55, sabemos que o stella octangula fica inscrito num cubo, coincidindo os seus vértices com os vértices do cubo. Assim, a partir do cubo da Figura 4.58, podemos escrever as coordenadas dos vértices do stella octangula:

$$A(1, -1, -1), B(1, 1, -1), C(-1, 1, -1), D(-1, -1, -1), \\ E(1, -1, 1), F(1, 1, 1), G(-1, 1, 1) \text{ e } H(-1, -1, 1).$$

Para obter as equações dos planos das faces do stella octangula notemos que, por exemplo, para o plano que contém a face EBG, o vector $\overline{OF} = (1, 1, 1)$ é normal ao plano e o ponto E de coordenadas (1, -1, 1) pertence-lhe, obviamente. Então, pela equação cartesiana do plano, (4.14), temos que

$$1(x - 1) + 1(y + 1) + 1(z - 1) = 0 \Leftrightarrow x + y + z = 1$$

é a equação cartesiana do plano EBG. Para obtermos as equações das rectas que contêm as arestas do stella octangula, reparemos, por exemplo, para o caso da recta BG: o vector director é

$$\overline{BG} = G - B = (-1, 1, 1) - (1, 1, -1) = (-2, 0, 2)$$

e, obviamente, B(1, 1, -1) pertence-lhe; uma equação cartesiana da recta BG é

$$y = 1 \wedge \frac{x - 1}{-2} = \frac{z + 1}{2} \Leftrightarrow y = 1 \wedge x = -z.$$

Exercício 6: “O problema da mosca” (adaptado do XEQMAT – 10º ano, de Yolanda Lima e Francelino Gomes, Editorial O Livro). Uma mosca está no ponto M sobre a aresta [BC] do paralelepípedo [ABCDHEFG], a 1 cm do vértice superior e desloca-se para um pingo de mel situado no centro O da base superior. Considere as dimensões indicadas no paralelepípedo que está

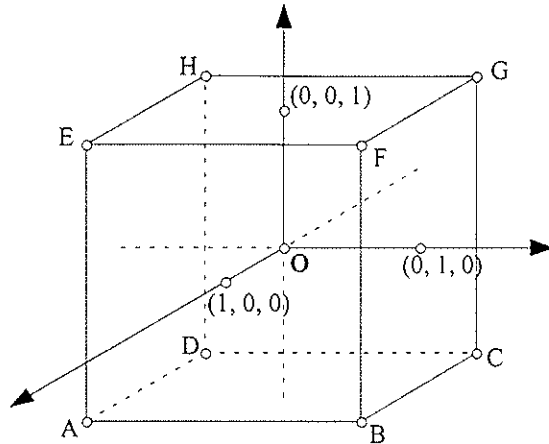


Figura 4.58: Cubo [ABCDHEFG] centrado na origem, O, do referencial c. o. n., em que a unidade de medida é metade do comprimento da aresta do cubo.

$$m\overline{AB} = 8,01 \text{ cm}$$

$$m\overline{EA} = 2,00 \text{ cm}$$

$$m\overline{CB} = 2,50 \text{ cm}$$

$$m\overline{MB} = 1,00 \text{ cm}$$

$$m\overline{PO} = 2,69 \text{ cm}$$

$$m\overline{PM} = 1,12 \text{ cm}$$

$$(m\overline{PO}) + (m\overline{PM}) = 3,81 \text{ cm}$$

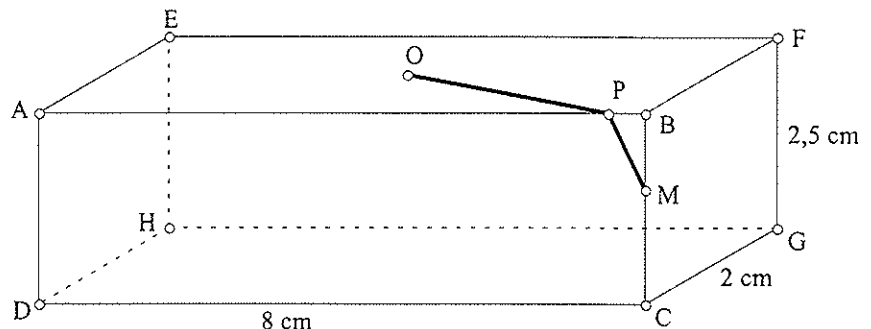


Figura 4.59: O paralelepípedo [ABCDHEFG] está representado em PC(30°, 50%) – perspectiva cavaleira, e nele estão representados o ponto O no centro da base superior, o ponto M a 1 cm do ponto B e os segmentos de recta [MP] e [PO].

representado, na Figura 4.59, em perspectiva cavaleira PC(30°, 50%). Calcule a menor distância que terá de percorrer a mosca para chegar ao pingo de mel. E determine a distância do ponto P, ponto de passagem da mosca sobre a aresta [AB], ao vértice B.

Resolução: Para encontrar a distância mais curta entre o ponto M e o ponto O, é conveniente fazermos a planificação do paralelepípedo – Figura 4.60. Suponhamos que a mosca passa por B e vai direita a O: ela percorreria, atendendo ao teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo $\Delta[BXO]$, rectângulo em X, uma distância de $1 + \sqrt{20}$ cm. Certamente não será a distância mais curta. Com efeito, novamente pelo teorema de Pitágoras, agora aplicado ao triângulo $\Delta[MXO]$, rectângulo em X, obtemos a distância mais curta entre M e O: $\overline{MO} = 5$ cm. Para determinar a distância de P a B, vamos aplicar o Teorema de Pitágoras aos triângulos $\Delta[OYP]$ e $\Delta[MBP]$, rectângulos em Y e em B, respectivamente:

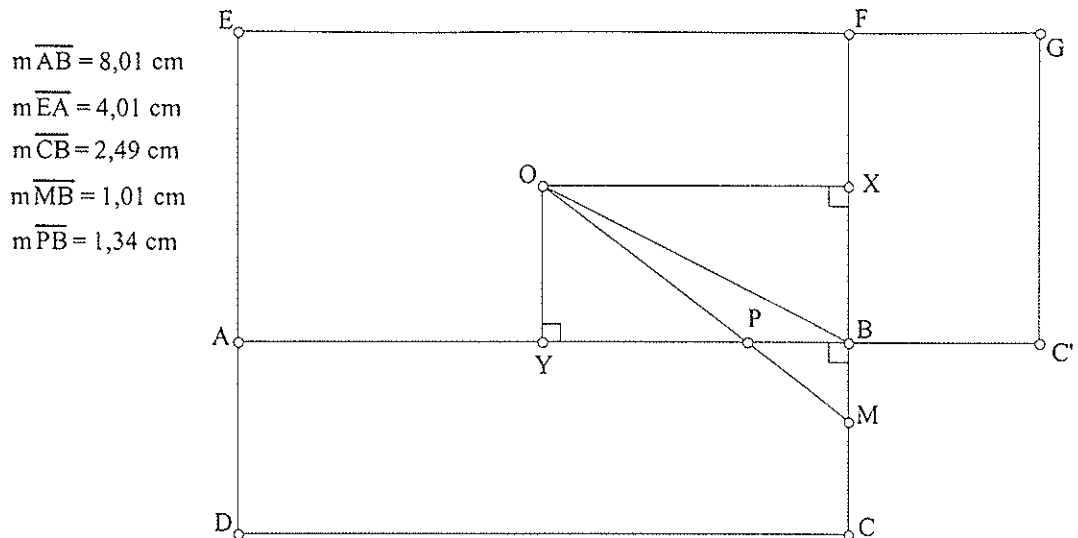


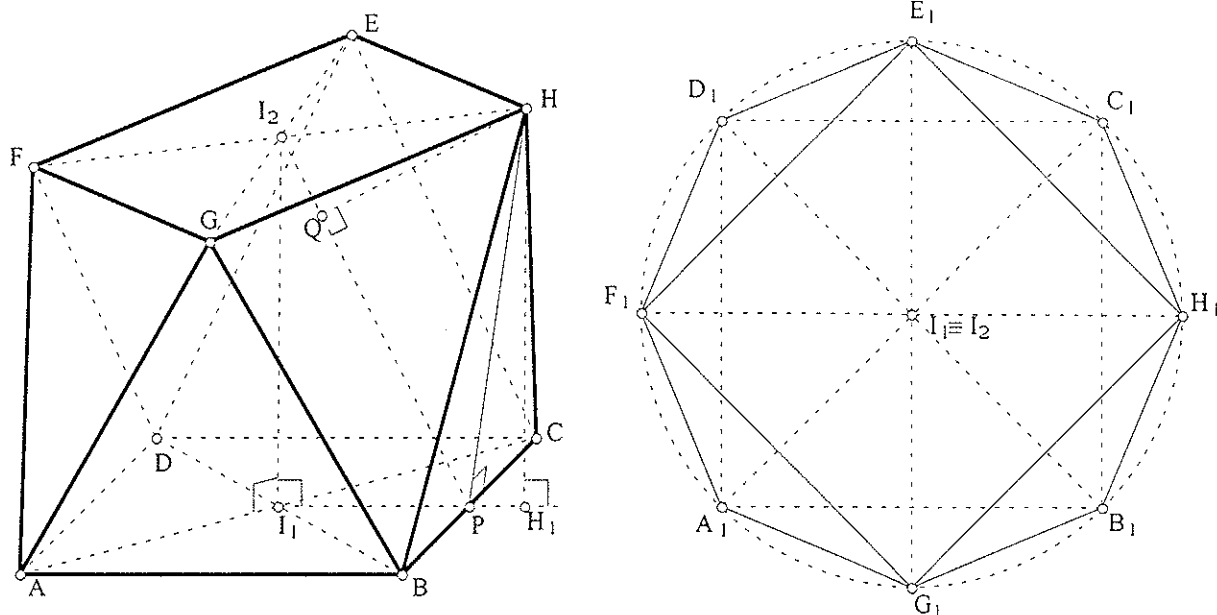
Figura 4.60: Parte da planificação do paralelepípedo [ABCDHEFG] representado na Figura 3.59, para percebermos qual o percurso mais curto do ponto M ao ponto O. Trata-se do comprimento do segmento de recta [MO], cuja intersecção com a aresta [AB] é o ponto P que se encontra a 1,3 cm, aproximadamente, do vértice B.

$$\begin{aligned} \begin{cases} (5 - \overline{PM})^2 = (4 - \overline{PB})^2 + 2^2 \\ \overline{PM}^2 = \overline{PB}^2 + 1^2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{PM}^2 = \overline{PB}^2 - 8\overline{PB} + 10\overline{PM} - 5 \\ \overline{PM} = \sqrt{\overline{PB}^2 + 1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\overline{PB} + 3 = 5\overline{PM} \\ \overline{PM} = \sqrt{\overline{PB}^2 + 1} \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (4\overline{PB} + 3)^2 = (5\sqrt{\overline{PB}^2 + 1})^2 \\ \overline{PM} = \sqrt{\overline{PB}^2 + 1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{PB} = \frac{4}{3} \\ \overline{PM} = \sqrt{\overline{PB}^2 + 1} \end{cases} \end{aligned}$$

Ou seja, $\overline{PB} \approx 1,3$ cm.

Exercício7: Calcule o volume e a área total de um antiprisma quadrangular regular de aresta 5 cm.

Resolução: Na Figura 4.61 representamos um antiprisma quadrangular regular [ABCDEFGH] e consideramos nele os pontos I_1 e I_2 – os centros das bases ($\overline{I_1I_2}$ é a sua altura). Vamos começar por decompor o antiprisma em nove pirâmides: quatro pirâmides geometricamente iguais de base triangular (triângulos isósceles) – $[GHI_2B]$, $[HEI_2C]$, $[EFI_2D]$ e $[FGI_2A]$; a pirâmide de base quadrada – $[ABCDI_2]$; e outras quatro pirâmides geometricamente iguais de base triangular (triângulos isósceles) – $[ABI_2G]$, $[BCI_2H]$, $[CDI_2E]$ e $[DAI_2F]$. Para determinar o volume das cinco primeiras pirâmides precisamos calcular a altura do antiprisma que é também a altura de cada uma dessas pirâmides. Para tal, vamos considerar os pontos: P o ponto médio da aresta [BC] e o ponto



(a) (b)
Figura 4.61: (a) Perspectiva dum antiprisma quadrangular regular, [ABCDEFGH], de aresta 5 cm e os pontos I_1 e I_2 são os centros das bases ($\overline{I_1I_2}$ é a sua altura). P é o ponto médio da aresta [BC] e H_1 é a projecção de H sobre o plano da base [ABCD]. $[QG] \perp [PI_2]$. (b) $[A_1G_1B_1H_1C_1E_1D_1F_1]$ é a vista de cima ou a "planta" do antiprisma [ABCDEFGH].

H_1 a projecção do vértice H sobre o plano da base [ABCD] (Figura 4.61). Como o $\Delta[ABC]$ é rectângulo em B, pelo Teorema de Pitágoras, a diagonal d do quadrado das bases é:

$$d^2 = 5^2 + 5^2 \Leftrightarrow d^2 = 2 \times 5^2 \Leftrightarrow d = 5\sqrt{2}.$$

Metade da diagonal do quadrado das bases será:

$$\frac{d}{2} = \frac{5}{2}\sqrt{2}.$$

Ora $\overline{PH_1} = \overline{I_1H_1} - \overline{I_1P} = \frac{5}{2}\sqrt{2} - \frac{5}{2} = \frac{5}{2}(\sqrt{2} - 1)$. Aplicando o Teorema de Pitágoras ao $\Delta[CPH]$, rectângulo em P, temos:

$$\overline{CH}^2 = \overline{PC}^2 + \overline{PH}^2 \Leftrightarrow 5^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \overline{PH}^2 \Leftrightarrow \overline{PH}^2 = 25 - \frac{25}{4} \Leftrightarrow \overline{PH} = \frac{5\sqrt{3}}{2},$$

ou seja, a altura dum triângulo equilátero de lado 5 cm, das faces laterais do antiprisma, é $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ cm.

Aplicando, agora, o Teorema de Pitágoras ao $\Delta[PHH_1]$, rectângulo em H_1 , temos:

$$\overline{PH}^2 = \overline{PH_1}^2 + \overline{H_1H}^2 \Leftrightarrow \left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}(\sqrt{2} - 1)\right)^2 + \overline{H_1H}^2 \Leftrightarrow \overline{H_1H}^2 = \left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}(\sqrt{2} - 1)\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{H_1H}^2 = \frac{75}{4} - \frac{75}{4} + \frac{25 \times 2\sqrt{2}}{4} \Leftrightarrow \overline{H_1H}^2 = \frac{25\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \overline{H_1H} = \frac{5\sqrt[4]{2}}{\sqrt{2}},$$

ou seja, a altura do antiprisma é $\overline{I_1I_2} = \overline{H_1H} = \frac{5\sqrt[4]{2}}{\sqrt{2}} \approx 4.2$ cm. A área do $\Delta[GHI_2]$ que é igual à do triângulo $\Delta[BCI_1]$ ($\Delta[GHI_2] \cong \Delta[BCI_1]$) é:

$$\text{Área} = \frac{\overline{BC} \times \overline{PI_1}}{2} = \frac{5 \times \frac{5}{2}}{2} = \frac{25}{4} \text{ cm}^2.$$

O volume da pirâmide triangular $[GHI_2B]$ é:

$$\text{Volume} = \frac{1}{3} \text{Área}_{\text{base}} \times \overline{I_1I_2} = \frac{1}{3} \times \frac{25}{4} \times \frac{5\sqrt[4]{2}}{\sqrt{2}} = \frac{125\sqrt[4]{2}}{12\sqrt{2}} \approx 8.8 \text{ cm}^3.$$

O volume da pirâmide de base quadrada $[ABCDI_2]$ é:

$$\text{Volume} = \frac{1}{3} \text{Área}_{\text{base}} \times \overline{I_1I_2} = \frac{1}{3} \times 5^2 \times \frac{5\sqrt[4]{2}}{\sqrt{2}} = \frac{125\sqrt[4]{2}}{3\sqrt{2}} \approx 35.04 \text{ cm}^3.$$

Para calcular o volume das quatro últimas consideramos o ponto Q sobre o segmento de recta $[PI_2]$ por forma a que $[QG]$ seja perpendicular a $[PI_2]$ (\overline{QG} é a altura dessas quatro pirâmides). Começamos por calcular o comprimento do segmento $[QG]$. Pelo Teorema de Pitágoras aplicado ao $\Delta[PI_1I_2]$, rectângulo em I_1 , temos:

$$\overline{PI_2}^2 = \overline{PI_1}^2 + \overline{I_1I_2}^2 \Leftrightarrow \overline{PI_2}^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{5\sqrt[4]{2}}{\sqrt{2}}\right)^2 \Leftrightarrow \overline{PI_2}^2 = \frac{25}{4} + \frac{25\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \overline{PI_2} = \frac{\sqrt{25 + 50\sqrt{2}}}{2}.$$

Agora o Teorema de Pitágoras aplicado ao $\Delta[PQH]$, rectângulo em Q, temos:

$$\begin{aligned} \overline{PH}^2 &= \overline{PQ}^2 + \overline{QH}^2 \Leftrightarrow \overline{PH}^2 = (\overline{PI_2} - \overline{QI_2})^2 + \overline{QH}^2 \Leftrightarrow \overline{PH}^2 = \overline{PI_2}^2 - 2\overline{PI_2}\overline{QI_2} + \overline{QI_2}^2 + \overline{QH}^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{25 + 50\sqrt{2}}}{2}\right)^2 - 2 \times \frac{\sqrt{25 + 50\sqrt{2}}}{2} \overline{QI_2} + \overline{QI_2}^2 + \overline{QH}^2. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras ao $\Delta[QHI_2]$, rectângulo em Q, temos:

$$\overline{I_2H}^2 = \overline{QI_2}^2 + \overline{QH}^2 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{2}\sqrt{2}\right)^2 = \overline{QI_2}^2 + \overline{QH}^2 \Leftrightarrow \overline{QI_2}^2 = \frac{50}{4} - \overline{QH}^2 \Leftrightarrow \overline{QI_2} = \sqrt{\frac{50}{4} - \overline{QH}^2}.$$

Substituindo $\overline{QI_2}$ em (4.19), vem:

$$\frac{75}{4} = \frac{25 + 50\sqrt{2}}{4} - \sqrt{25 + 50\sqrt{2}} \sqrt{\frac{50}{4} - \overline{QH}^2} + \left(\sqrt{\frac{50}{4} - \overline{QH}^2}\right)^2 + \overline{QH}^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{75}{4} - \frac{25 + 50\sqrt{2}}{4} = -\sqrt{25 + 50\sqrt{2}} \sqrt{\frac{50}{4} - \overline{QH}^2} + \frac{50}{4} - \overline{QH}^2 + \overline{QH}^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-50\sqrt{2}}{4} = -\sqrt{25 + 50\sqrt{2}} \sqrt{\frac{50}{4} - \overline{QH}^2} \Leftrightarrow \sqrt{(25 + 50\sqrt{2})\frac{50}{4} - (25 + 50\sqrt{2})\overline{QH}^2} = \frac{50\sqrt{2}}{4}$$

Elevando ambos os membros ao quadrado, vem:

$$(25 + 50\sqrt{2})\frac{50}{4} - (25 + 50\sqrt{2})\overline{QH}^2 = \frac{5000}{16} \Leftrightarrow (25 + 50\sqrt{2})\overline{QH}^2 = (25 + 50\sqrt{2})\frac{50}{4} - \frac{5000}{16} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (25 + 50\sqrt{2})\overline{QH}^2 = \frac{5000 + 10000\sqrt{2} - 5000}{16} = 625\sqrt{2} \Leftrightarrow \overline{QH} = \sqrt{\frac{625\sqrt{2}}{25 + 50\sqrt{2}}}$$

A área do $\Delta[BCI_2]$ é: $\text{Área} = \frac{\overline{BC} \times \overline{PI_2}}{2} = \frac{5 \times \sqrt{25 + 50\sqrt{2}}}{2} = \frac{5\sqrt{25 + 50\sqrt{2}}}{4} \approx 12.2 \text{ cm}^2$.

O volume da pirâmide triangular $[BCI_2H]$ é dado por:

$$\text{Volume} = \frac{1}{3} \text{Área}_{\text{base}} \times \overline{QH} = \frac{1}{3} \times \frac{5\sqrt{25 + 50\sqrt{2}}}{4} \times \sqrt{\frac{625\sqrt{2}}{25 + 50\sqrt{2}}} \approx 12.4 \text{ cm}^3$$

Donde, o volume do antiprisma quadrangular regular dado é:

$$\text{Volume} = 4 \times \text{Volume}_{[GHI_2B]} + \text{Volume}_{[ABCDI_2]} + 4 \times \text{Volume}_{[BCI_2H]} \approx 4 \times 8.8 + 35.04 + 4 \times 12.4 \approx 119.84 \text{ cm}^3$$

A área de um triângulo equilátero, $\Delta[BCH]$, da face lateral do antiprisma é:

$$\text{Área} = \frac{\overline{BC} \times \overline{PH}}{2} = \frac{5 \times \frac{5\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{25\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2$$

Logo, a área total do sólido dado é:

$$\text{Área} = 8 \times \text{Área}_{\text{triângulo equilátero}} + 2 \times \text{Área}_{\text{quadrado}} = 8 \times \frac{25}{4} \sqrt{3} + 2 \times 25 = 50\sqrt{3} + 50 \approx 136.6 \text{ cm}^2$$

4.3.2 Geometria Analítica

Exercício 1: Indica as coordenadas dos vértices do cubo representado na Figura 4.62, cujos eixos dos xx e dos yy contêm as diagonais da base e cuja aresta tem 4 cm de comprimento (Retirado de XEQMAT – 10º ano, Eitorial O Livro – Pág. 61).

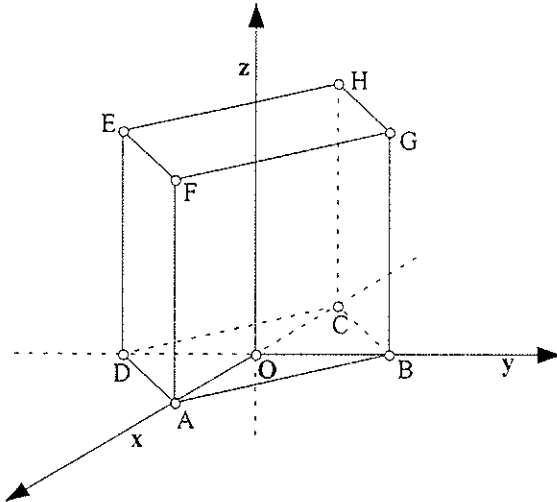


Figura 4.62: O cubo [ABCDHEFG] tem as diagonais da base [ABCD] sobre os eixos dos xx e dos yy e as suas arestas medem 4 cm.

Resolução: Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo [AOB], rectângulo em O, de catetos iguais ($\overline{AO} = \overline{OB}$) tem-se:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{OB}^2 \Leftrightarrow 2\overline{AO}^2 = 16 \Leftrightarrow \overline{AO} = 2\sqrt{2},$$

ou seja, significa que as coordenadas dos vértices são:

$$A(2\sqrt{2}, 0, 0), B(0, 2\sqrt{2}, 0), C(-2\sqrt{2}, 0, 0), D(0, -2\sqrt{2}, 0),$$

$$E(0, -2\sqrt{2}, 4), F(2\sqrt{2}, 0, 4), G(0, 2\sqrt{2}, 4) \text{ e } H(-2\sqrt{2}, 0, 4),$$

Exercício 2: (Exercício proposto) Representa, num referencial c. o. n. tridimensional, os pontos seguintes:

$$A(2, 3, -1), B(3, -1, 2), C(0, 3, 1), D(2, -3, 0), E(-2, 0, 2) \text{ e } F(-2, -2, 2).$$

Exercício 3: Dados os planos de equações (Adaptado de Matemática – 1ºVol, 10º ano, Teoria e Prática, Rumo – Pág. 281):

$$\mathcal{P}: x = 5; \quad \mathcal{Q}: y = 3; \quad \mathcal{W}: z = -2.$$

3.1 Identifique a posição de cada um dos pontos: $A(-5, 3, -2)$, $B(5, 2, -2)$ e $C(-5, 3, -1)$, em relação a cada um dos planos dados.

Resolução: Sendo $A(-5, 3, -2)$, verifica-se que: $A \in \mathcal{Q}$ (pois A tem ordenada 3), $A \notin \mathcal{P}$ (a abcissa de A é diferente de 5) e também $A \in \mathcal{W}$ (A tem cota -2). Da mesma forma se conclui que: $B \in \mathcal{P}$ e $B \in \mathcal{W}$, mas $B \notin \mathcal{Q}$ e $C \notin \mathcal{P}$, $C \notin \mathcal{Q}$ e $C \notin \mathcal{W}$.

3.2 Dado o ponto $D(2 + 3k, k + 4, 3)$, $k \in \mathbb{R}$. Determine k de modo que $D \in Q$. Para o valor de k determinado, $D \in \mathcal{P}$? Justifique.

Resolução: Para que $D \in Q$, tem de ser:

$$k + 4 = 3 \Leftrightarrow k = -1.$$

Sendo $k = -1$, vem que o ponto D tem coordenadas $(-1, 3, 3)$. Logo, $D \notin \mathcal{P}$.

Exercício 4: Considere, em \mathbb{R}^3 , a condição (Adaptado de Matemática – 1º Vol, 10º ano, Teoria e Prática, Rumo – Pág. 286):

$$-2 \leq x \leq 2 \wedge -2 \leq y \leq 2 \wedge -2 \leq z \leq 2$$

4.1 Identifique o sólido geométrico representado pela condição e represente-o geometricamente utilizando a perspectiva cavaleira, PC(45°, 75%).

Resolução: Trata-se da intersecção de seis semiespaços: o semiespaço fechado à frente do plano $x = -2$ com o semiespaço fechado atrás do plano $x = 2$ determina, portanto, uma região do espaço entre os planos $x = -2$ e $x = 2$; o semiespaço fechado à direita do plano $y = -2$ com o semiespaço fechado à esquerda do plano $y = 2$ determina a região do espaço entre os planos $y = -2$ e $y = 2$; o semiespaço fechado acima do plano $z = -2$ com o semiespaço fechado abaixo do plano $z = 2$ define a região do espaço entre os planos $z = -2$ e $z = 2$. Ou seja, a condição representa um cubo – Figura 4.63.

4.2 Identifique as coordenadas dos vértices do sólido.

Resolução: As coordenadas do vértice do cubo são:

$$A(2, -2, -2), B(2, 2, -2), C(-2, 2, -2), D(-2, -2, -2), \\ E(-2, -2, 2), F(-2, 2, 2), G(2, 2, 2) \text{ e } H(2, -2, 2).$$

4.3 Exiba as equações dos planos que contém as faces do sólido.

Resolução: São os planos: $x = -2$, $x = 2$, $y = -2$, $y = 2$, $z = -2$ e $z = 2$.

4.4 Indique uma condição que defina a recta que contém uma aresta paralela ao plano xOy e uma outra aresta paralela ao eixo dos zz do sólido.

Resolução: A recta que contém uma aresta paralela a xOy , por exemplo $[FG]$, é dada pela condição:

$$x = 2 \wedge z = 2.$$

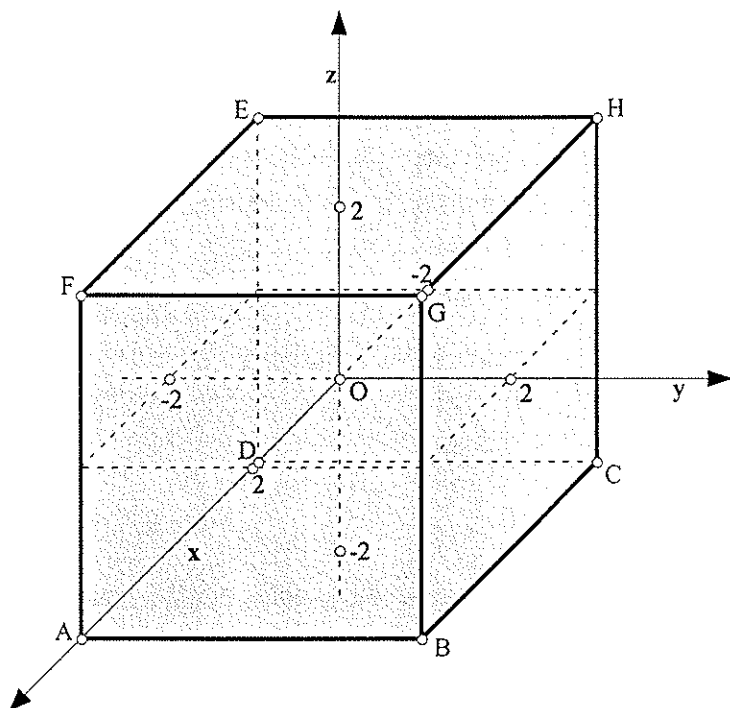


Figura 4.63: O cubo [ABCDHEFG] está em perspectiva cavaleira, PC(45°, 75%), de modo a verificar a condição: $-2 \leq x \leq 2 \wedge -2 \leq y \leq 2 \wedge -2 \leq z \leq 2$. A recta AB é enviezada e perpendicular à recta FE. A recta BC é enviezada e oblíqua relativamente à recta GD.

A recta que contém uma aresta paralela ao eixo zz, por exemplo [CH], é dada pela condição:

$$x = -2 \wedge y = 2.$$

Exercício 5.1: Represente geometricamente, num referencial c. o. n., tridimensional, utilizando a perspectiva cavaleira PC(45°, 75%), o paralelepípedo com as características seguintes (Adaptado de Matemática – 1ºVol, 10º ano, Teoria e Prática, Rumo – Pág. 293):

- um dos vértices está na origem do referencial;
- as coordenadas dos vértices são todas não negativas;
- as dimensões são 2, 5 e 3.

Indique as coordenadas de todos os vértices do paralelepípedo.

Resolução: Na Figura 4.64, pode observar o sólido pedido (fica como exercício indicar as coordenadas dos seus vértices).

5.2 Calcular o comprimento da diagonal do paralelepípedo.

Resolução: Uma diagonal é por exemplo o segmento de recta [AF]. Para calcular o seu comprimento podemos determinar a distância entre os extremos do segmento, tendo em conta que

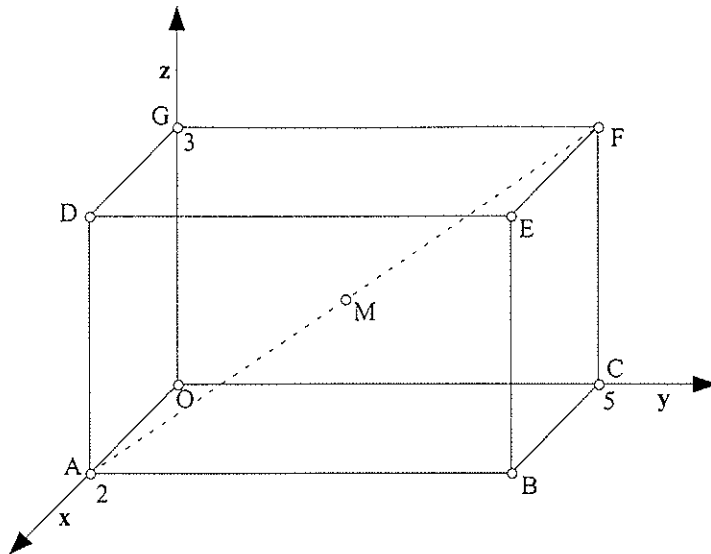


Figura 4.64: Paralelepípedo [ABCOGDEF] em perspectiva cavaleira PC(45°, 75%), de dimensões: 2×5×3.

as suas coordenadas são A(2, 0, 0) e F(0, 5, 3):

$$\overline{AF} = \sqrt{(0-2)^2 + (5-0)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{38}$$

5.3 Determine as coordenadas do ponto médio da diagonal do paralelepípedo ou o centro de gravidade do paralelepípedo.

Resolução: O ponto médio, M, da diagonal do paralelepípedo, [AF] (Figura 4.64), é dado por:

$$M\left(\frac{2+0}{2}, \frac{0+5}{2}, \frac{0+3}{2}\right),$$

ou seja,

$$M\left(1, \frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right).$$

Exercício 6: Considere os seguintes pares de pontos (Retirado de Matemática – 1ºVol, 10º ano, Teoria e Prática, Rumo – Pág. 293):

$$A_1(1, 0, 0) \text{ e } A_2(0, 1, 0); B_1(2, 0, 0) \text{ e } B_2(0, 2, 0); C_1(-2, 0, 0) \text{ e } C_2(0, -2, 0).$$

Justifique que os segmentos de recta [A₁A₂], [B₁B₂] e [C₁C₂], admitem o mesmo plano mediador, o plano de equação y = x, que representa o plano bissector do primeiro octante. Interprete geometricamente.

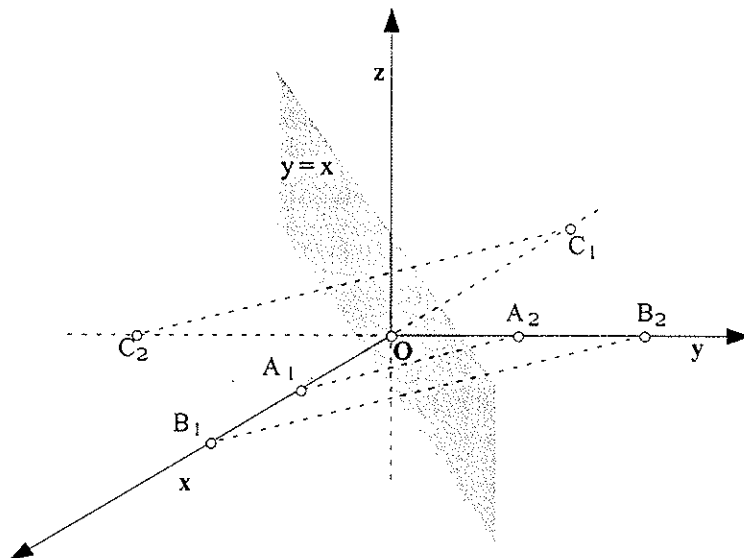


Figura 4.65: Plano mediador dos segmentos de recta $[A_1A_2]$, $[B_1B_2]$ e $[C_1C_2]$: $y = x$.

Resolução: Seja $P(x, y, z)$ um ponto qualquer do espaço e \mathcal{P} o plano mediador.

Considerando o plano mediador \mathcal{P} do segmento de recta $[A_1A_2]$, temos:

$$\begin{aligned} P \in \mathcal{P} &\Leftrightarrow \overline{A_1P} = \overline{A_2P} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-1)^2 + (z-0)^2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 = x^2 + y^2 - 2y + 1 \Leftrightarrow y = x \end{aligned}$$

Consideremos, agora, o plano mediador \mathcal{P} do segmento de recta $[B_1B_2]$, assim:

$$\begin{aligned} P \in \mathcal{P} &\Leftrightarrow \overline{B_1P} = \overline{B_2P} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-2)^2 + (z-0)^2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 = x^2 + y^2 - 4y + 4 \Leftrightarrow y = x \end{aligned}$$

Por último, consideremos o plano mediador \mathcal{P} do segmento de recta $[C_1C_2]$, temos:

$$\begin{aligned} P \in \mathcal{P} &\Leftrightarrow \overline{C_1P} = \overline{C_2P} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} = \sqrt{(x-0)^2 + (y+2)^2 + (z-0)^2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 + y^2 = x^2 + y^2 + 4y + 4 \Leftrightarrow y = x \end{aligned}$$

Portanto, de facto, o plano de equação $y = x$ é o plano mediador dos segmentos de recta $[A_1A_2]$, $[B_1B_2]$ e $[C_1C_2]$. Na Figura 4.65 temos a interpretação geométrica.

Exercício 7: Indique uma equação da superfície esférica de (Adaptado de Matemática – 1ºVol, 10º ano, Teoria e Prática, Rumo – Pág. 303):

7.1 centro $C(0, -2, 5)$ e passando pelo ponto $A(-2, 0, -2)$.

Resolução: Em primeiro lugar temos de calcular o raio r da superfície esférica:

$$r = \overline{CA} = \sqrt{(-2-0)^2 + (0-(-2))^2 + (-2-5)^2} = \sqrt{57}$$

Uma equação da superfície esférica de centro $C(0, -2, 5)$ e raio $\sqrt{57}$, escreve-se na forma:

$$(x-0)^2 + (y-(-2))^2 + (z-5)^2 = (\sqrt{57})^2 \Leftrightarrow x^2 + (y+2)^2 + (z-5)^2 = 57.$$

7.2 diâmetro $[AB]$, em que $A(-2, -3, -2)$ e $B(0, -1, 3)$.

Resolução: Se o diâmetro da superfície esférica é $[AB]$, então o centro da superfície esférica é o ponto médio do segmento de recta $[AB]$, dado por:

$$C = \left(\frac{-2+0}{2}, \frac{-3-1}{2}, \frac{-2+3}{2} \right) = \left(-1, -2, \frac{1}{2} \right),$$

e o raio r desta superfície esférica é dado, por exemplo, por:

$$r = \frac{1}{2} \overline{AB} = \frac{1}{2} \sqrt{(0-(-2))^2 + (-1-(-3))^2 + (3-(-2))^2} = \frac{\sqrt{33}}{2}.$$

Então, uma equação da superfície esférica de centro $\left(-1, -2, \frac{1}{2}\right)$ e raio $\frac{\sqrt{33}}{2}$, escreve-se do seguinte modo:

$$(x+1)^2 + (y+2)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{33}{4}.$$

Exercício 8: Num referencial c. o. n., tridimensional, uma superfície esférica tem equação (Retirado de Matemática – 1ºVol, 10º ano, Teoria e Prática, Rumo – Pág. 304):

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 9.$$

8.1 Indique as coordenadas do centro, C , e o valor do raio.

Resolução: O centro tem coordenadas: $C(2, 2, 2)$ e o raio é 3.

8.2 Represente geometricamente a superfície esférica e indique a posição, relativamente a esta superfície, do ponto $A(1, 8, 3)$.

Resolução: Na Figura 4.66, temos a superfície esférica de equação

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 9.$$

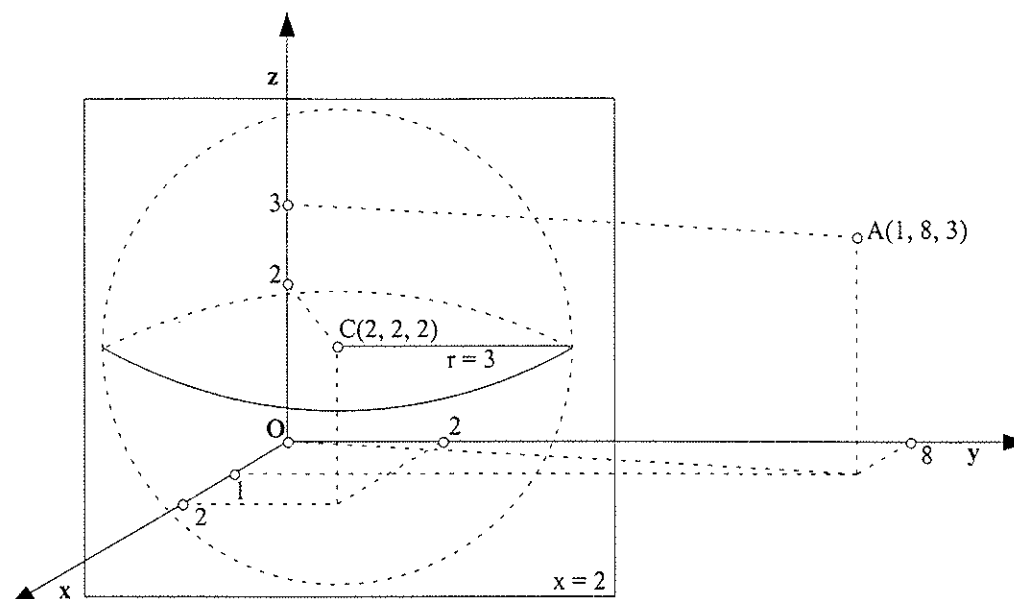


Figura 4.66: Superfície esférica de centro $C(2, 2, 2)$ e raio 3. O ponto $A(1, 8, 3)$ é exterior à superfície. A intersecção da superfície esférica com o plano de equação $x = 2$ é uma circunferência de raio 3 e centro $(2, 2, 2)$ contida nesse plano.

Para sabermos a posição do ponto A relativamente à superfície esférica vamos calcular a distância entre o ponto A e o centro, C, da superfície esférica:

$$\overline{CA} = \sqrt{(1-2)^2 + (8-2)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{38}$$

Como $\sqrt{38} > 3$, ou seja, $\overline{CA} > r$, concluímos que o ponto A é exterior a esta superfície esférica.

8.3 Represente, analítica e geometricamente, a intersecção da superfície esférica com o plano de equação $x = 2$.

Resolução: Para determinarmos a intersecção da superfície esférica com o plano, escrevemos e trabalhamos a condição:

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 9 \wedge x = 2 \Leftrightarrow (y-2)^2 + (z-2)^2 = 9,$$

ou seja, trata-se de uma circunferência de centro $(2, 2, 2)$ e raio 3 contida no plano $x = 2$. Temos na Figura 4.66, a representação geométrica da superfície esférica e do plano.

Exercício 9: Descreva o conjunto de pontos do espaço que satisfazem a condição:

$$x^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 \leq 9 \wedge z \geq -1$$

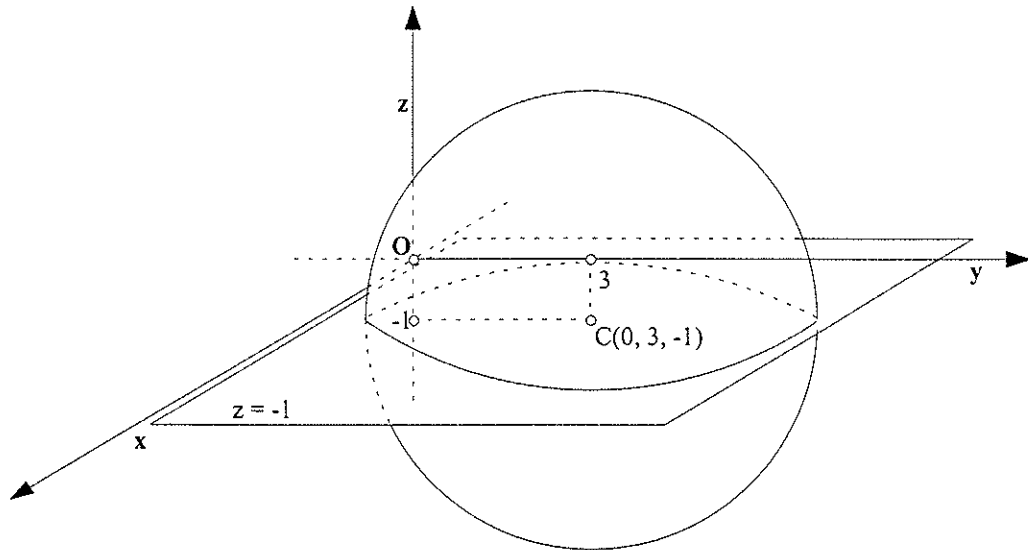


Figura 4.67: Esfera de centro $C(0, 3, -1)$ e raio 3. A intersecção da esfera com o semiespaço acima do plano de equação $z = -1$ é uma semiesfera de centro $(0, 3, -1)$ e raio 3 situada acima do plano de equação $z = -1$.

Resolução: A condição $x^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2 \leq 9$ representa uma esfera de raio 3 e centro $C(0, 3, -1)$; a condição $z \geq -1$ determina um semiespaço fechado acima do plano $z = -1$. Portanto, a condição $x^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2 \leq 9 \wedge z \geq -1$, representa a intersecção dos dois conjuntos de pontos, isto é, a intersecção da esfera de centro $C(0, 3, -1)$ e raio 3 com o semiespaço fechado superior ao plano $z = -1$, da qual resulta a semiesfera de centro $C(0, 3, -1)$ e raio 3 situada acima do plano $z = -1$ (Figura 4.67)

Exercício 10: Num referencial c. o. n., o tetraedro $[ABCD]$ tem por vértices os pontos:

$$A(-2, 1, 3), B(1, -3, 4), C(0, 1, 1), D(-1, 0, 2),$$

10.1 Averigúe se o tetraedro é regular.

Resolução: Para que o tetraedro seja regular as arestas têm de ser todas iguais. Calculemos os comprimentos das arestas:

$$\overline{AB} = \sqrt{(1+2)^2 + (-3-1)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{26}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(0-2)^2 + (1-1)^2 + (1-3)^2} = 2\sqrt{2}$$

Como há pelo menos duas arestas diferentes ($\overline{AB} \neq \overline{AC}$), significa que a face $[ABC]$ não é um triângulo equilátero, e portanto o tetraedro não poderá ser regular.

10.2 Mostre que os pontos B e D, pertencem ao plano mediador de [AC].

Resolução: Para que os pontos B e D sejam pontos do plano mediador de [AC] tem de se verificar que: $\overline{AB} = \overline{CB}$ e $\overline{AD} = \overline{CD}$.

$$\overline{AB} = \sqrt{26} \text{ e } \overline{CB} = \sqrt{(1-0)^2 + (-3-1)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{26};$$

$$\overline{AD} = \sqrt{(-1+2)^2 + (0-1)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{3} \text{ e } \overline{CD} = \sqrt{(-1-0)^2 + (0-1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{3};$$

como queríamos.

10.3 Escreva uma equação do plano mediador de [AC].

Resolução: Sendo P(x, y, z) um ponto qualquer do plano mediador de [AC], tem de ser:

$$\overline{AP} = \overline{CP} \Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2}$$

donde

$$\begin{aligned} (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 &= (x)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x - z + 3 = 0, \end{aligned}$$

é uma equação do plano mediador de [AC].

Exercício 11: Num referencial o. n. (O, \vec{i} , \vec{j} , \vec{k}), consideremos os vectores:

$$\vec{a} = (-2p, -q + 3, 6p) \text{ e } \vec{b} = (-1, 2, 3), \quad p, q \in \mathbb{R}.$$

11.1 Determine, se possível, p e q de modo que:

(i) $\vec{a} = \vec{b}$.

Resolução:

$$\begin{aligned} \vec{a} = \vec{b} &\Leftrightarrow (-2p, -q + 3, 6p) = (-1, 2, 3) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -2p = -1 \wedge -q + 3 = 2 \wedge 6p = 3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow p = \frac{1}{2} \wedge q = 1 \wedge p = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$p = \frac{1}{2} \text{ e } q = 1.$$

(ii) $\vec{a} \parallel Ox$

Resolução: Em geral,

$$\vec{a} \parallel Ox \text{ se } \vec{a} = (\alpha, 0, 0), \alpha \in \mathbb{R}.$$

Sendo $\vec{a} = (-2p, -q + 3, 6p)$, então

$$-q + 3 = 0 \wedge 6p = 0 \Leftrightarrow q = 3 \wedge p = 0.$$

Donde $\vec{a} = (0, 0, 0)$.

(iii) $\vec{a} \parallel yOz$

Resolução: Em geral tem-se que

$$\vec{a} \parallel yOz \text{ se } \vec{a} = (0, \alpha, \beta), \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Sendo $\vec{a} = (-2p, -q + 3, 6p)$, então tem de ser

$$-2p = 0 \Leftrightarrow p = 0.$$

Donde $\vec{a} = (0, -q + 3, 0)$, com $q \in \mathbb{R}$. Temos, portanto, uma infinidade de soluções. Fazendo, por exemplo,

$$q = 0, \text{ temos: } \vec{a} = (0, 3, 0);$$

$$q = 5, \text{ temos: } \vec{a} = (0, -2, 0).$$

11.2 Determine um vector colinear e com o mesmo sentido que \vec{b} de norma 2.

Resolução: Comecemos por determinar a norma do vector \vec{b} :

$$\|\vec{b}\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}.$$

Suponhamos ser \vec{c} tal vector. Como tem de ser $\vec{c} \parallel \vec{b}$, existe um número real α tal que $\vec{c} = \alpha \vec{b}$. Por outro lado, tem de ser $\|\vec{c}\| = 2$. Ou seja, temos

$$\vec{c} = \alpha \vec{b} \wedge \|\vec{c}\| = 2,$$

donde sai sucessivamente

$$\vec{c} = \alpha \vec{b} \wedge \|\alpha \vec{b}\| = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \vec{c} = \alpha \vec{b} \wedge |\alpha| \cdot \|\vec{b}\| = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \vec{c} = \alpha \vec{b} \wedge |\alpha| = \frac{2}{\|\vec{b}\|} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \vec{c} = \alpha \vec{b} \wedge |\alpha| = \frac{2}{\sqrt{14}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \vec{c} = \alpha \vec{b} \wedge \left(\alpha = \frac{2}{\sqrt{14}} \vee \alpha = -\frac{2}{\sqrt{14}} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\vec{c} = \alpha \vec{b} \wedge \alpha = \frac{\sqrt{14}}{7} \right) \vee \left(\vec{c} = \alpha \vec{b} \wedge \alpha = -\frac{\sqrt{14}}{7} \right)$$

Como o vector \vec{c} tem de ter o mesmo sentido que \vec{b} , significa que a solução é dada por:

$$\vec{c} = \frac{\sqrt{14}}{7} (-1, 2, 3) \Leftrightarrow \vec{c} = \left(-\frac{\sqrt{14}}{7}, \frac{2\sqrt{14}}{7}, \frac{3\sqrt{14}}{7} \right).$$

Exercício 12: Considere num referencial o. n. $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, os vectores:

$$\vec{a} = \vec{i} \text{ e } \vec{b} = \vec{i} + \vec{j}.$$

12.1 Determine o produto interno de \vec{a} com \vec{b} .

Resolução: Podemos escrever ambos os vectores em termos das suas coordenadas:

$$\vec{a} = (1, 0, 0) \text{ e } \vec{b} = (1, 1, 0),$$

e calculamos o produto interno a partir das suas coordenadas

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (1, 0, 0) \cdot (1, 1, 0) = 1 + 0 + 0 = 1.$$

12.2 Determine a amplitude do ângulo formado pelos dois vectores.

Resolução: A partir da definição de produto interno, e tendo em conta que

$$\|\vec{a}\| = 1 \text{ e } \|\vec{b}\| = \sqrt{2},$$

obtemos a amplitude do ângulo:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) \Leftrightarrow \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{1}{1\sqrt{2}} \Leftrightarrow \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \end{aligned}$$

assim, como é $0^\circ \leq \widehat{\vec{a}, \vec{b}} \leq 180^\circ$, temos que

$$\widehat{\vec{a}, \vec{b}} = 45^\circ.$$

Exercício 13: A Figura 4.68 representa um paralelepípedo rectângulo, [ABCOGDEF], com três arestas contidas nos eixos coordenados e situado no primeiro octante. O ponto médio de [BF] é W.

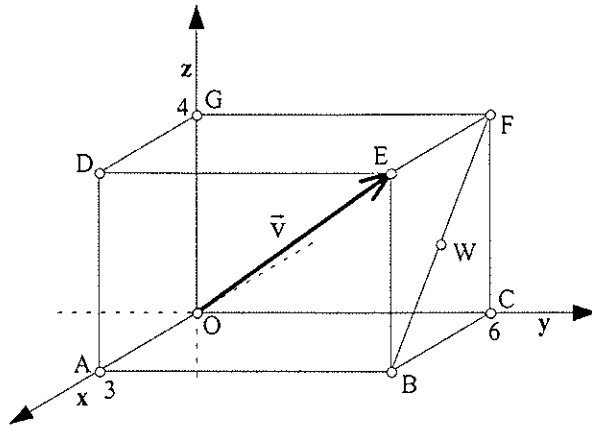


Figura 4.68: Paralelepípedo rectângulo, [ABCOGDEF], com arestas contidas nos eixos coordenados dos xx , yy e zz . W é o ponto médio de [BF].

13.1 Quais são as coordenadas de $\vec{v} + \overrightarrow{DW}$?

Resolução: $\vec{v} = \overrightarrow{OE} = E - O = (3, 6, 4) - (0, 0, 0) = (3, 6, 4)$;

Calculemos o ponto médio W de [BF]. Temos que: $B(3, 6, 0)$, $F(6, 6, 4)$ e

$$W\left(\frac{3+6}{2}, \frac{6+6}{2}, \frac{0+4}{2}\right) = \left(\frac{9}{2}, 6, 2\right).$$

Donde: $\vec{v} + \overrightarrow{DW} = (3, 6, 4) + \left(\frac{3}{2}, 6, 2\right) = \left(\frac{9}{2}, 12, 6\right)$.

13.2 Será \vec{v} perpendicular a \overrightarrow{FW} ?

Resolução: Ora, $\overrightarrow{FW} = W - F = \left(\frac{3}{2}, 6, 2\right) - (6, 6, 4) = \left(\frac{3}{2}, 0, -2\right)$, e o produto interno dos

dois vectores é:

$$\vec{v} \cdot \overrightarrow{FW} = (3, 6, 4) \cdot \left(\frac{3}{2}, 0, -2\right) = \frac{9}{2} + 0 - 8 = -\frac{7}{2}$$

Significa, portanto, que os vectores \vec{v} e \overrightarrow{FW} não são perpendiculares.

13.3 Qual é o ângulo de \vec{v} com o eixo dos xx ?

Resolução: Calcular o ângulo pedido é o mesmo que calcular o ângulo formado entre os vectores \vec{v} e \overrightarrow{OA} : $\vec{v} = \left(\frac{9}{2}, 12, 6\right)$ e $\overrightarrow{OA} = (3, 0, 0)$; Assim, temos:

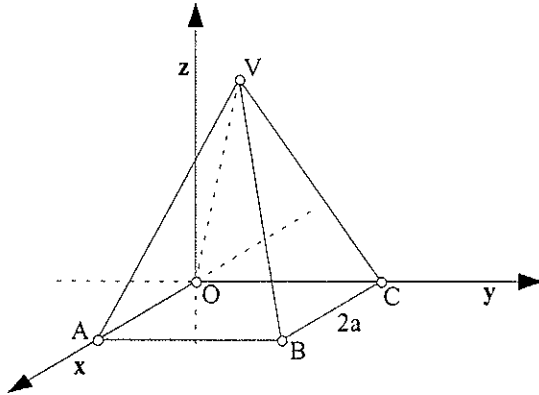


Figura 4.69: Pirâmide quadrangular regular [ABCOV] com arestas da base contidas nos eixos coordenados, $[OA] \subset Ox$ e $[OC] \subset Oy$, e a aresta tem comprimento $2a$. O vértice V tem coordenadas $(a, a, 4a)$.

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 + 12^2 + 6^2} = \frac{\sqrt{801}}{2} \text{ e } \|\overline{OA}\| = 3$$

$$\cos\left(\vec{v}, \widehat{\overline{OA}}\right) = \frac{\frac{9}{2} \times 3 + 12 \times 0 + 6 \times 0}{\|\vec{v}\| \|\overline{OA}\|} = \frac{\frac{9}{2} \times 3}{\frac{\sqrt{801}}{2} \times 3} = \frac{9}{\sqrt{801}} \approx 0,63 \Rightarrow \left(\vec{v}, \widehat{\overline{OA}}\right) \approx 50,7^\circ.$$

Ou seja, o ângulo entre o vector \vec{v} e o eixo dos xx é, aproximadamente, $50,7^\circ$.

Exercício 14: A Figura 4.69 representa uma pirâmide quadrangular regular num referencial o. n., com $[OA] \subset Ox$ e $[OC] \subset Oy$. Seja $2a$ a medida da aresta da base. Se a altura for dupla da aresta da base, que ângulo faz uma aresta lateral com a diagonal da base concorrente com ela?

Resolução: Para determinarmos o ângulo pedido basta calcular o ângulo entre os vectores \overline{AC} e \overline{AV} :

$$\overline{AC} = C - A = (0, 2a, 0) - (2a, 0, 0) = (-2a, 2a, 0)$$

$$\overline{AV} = V - A = (a, a, 4a) - (2a, 0, 0) = (-a, a, 4a)$$

donde

$$\cos\left(\overline{AC}, \widehat{\overline{AV}}\right) = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{AV}}{\|\overline{AC}\| \times \|\overline{AV}\|} = \frac{2a^2 + 2a^2}{\sqrt{4a^2 + 4a^2} \sqrt{a^2 + a^2 + 16a^2}} = \frac{4a^2}{\sqrt{8a^2} \sqrt{18a^2}} = \frac{4a^2}{12a^2} = \frac{1}{3},$$

e portanto

$$\left(\overline{AC}, \widehat{\overline{AV}}\right) \approx 70,53^\circ.$$

Exercício 15: Determine, num referencial o. n. tridimensional, as coordenadas de um vector \vec{u} perpendicular ao vector $\vec{v} = (1, -4, 2)$.

Resolução: Para obtermos o vector pretendido, $\vec{u}(x, y, z)$, vamos partir da condição de perpendicularidade:

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow (x, y, z) \cdot (1, -4, 2) = 0$$

donde sai a equação

$$x - 4y + 2z = 0$$

que é indeterminada, pois admite uma infinidade de soluções. Para determinarmos soluções particulares, atribuímos valores a duas das incógnitas e determinamos o valor da terceira. Tomando, por exemplo, $x = 6$ e $y = 2$, vem $z = 1$. Portanto, o vector $\vec{u} = (6, 2, 1)$ é perpendicular ao vector \vec{v} .

Exercício 16: Obtém as equações cartesianas de uma recta s que passe na origem e seja perpendicular à recta r de equações:

$$r: x - 3 = \frac{y - 2}{-4} = \frac{z + 1}{3}$$

Resolução: Precisamos de conhecer um vector director, \vec{s} , da recta pedida s . Como o vector director da recta r é o vector $\vec{r} = (1, -4, 3)$, tem de ser

$$\vec{s} \perp \vec{r} \Leftrightarrow \vec{s} \cdot \vec{r} = 0 \Leftrightarrow (x, y, z) \cdot (1, -4, 3) = 0 \Leftrightarrow x - 4y + 3z = 0$$

Fazendo na equação, por exemplo, $x = -2$ e $y = 1$, vem $z = 2$. Ou seja, um vector director da recta s é $\vec{s} = (-2, 1, 2)$. Donde, as equações cartesianas da recta s são:

$$\frac{x - 0}{-2} = \frac{y - 0}{1} = \frac{z - 0}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{-2} = y = \frac{z}{2}$$

Exercício 17: Determine um vector \vec{w} que seja perpendicular simultaneamente ao vector $\vec{u}(1, 2, -3)$ e ao vector $\vec{v} = (2, 5, 1)$.

Resolução: Tendo em atenção que os dois vectores, \vec{u} e \vec{v} , não são paralelos, para determinar um vector nas condições pedidas temos de resolver um sistema de equações:

$$\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{w} = 0 \\ \vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1, 2, -3) \cdot (x, y, z) = 0 \\ (2, 5, 1) \cdot (x, y, z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ 2x + 5y + z = 0 \end{cases}$$

Como o sistema tem três incógnitas e duas equações, ele é indeterminado ou impossível⁹¹. Resolvendo em ordem a uma das incógnitas, ficamos

⁹¹ Ver Apêndice VIII.

$$\begin{cases} x = 17z \\ y = -7z \end{cases}$$

Significa, assim, que qualquer vector cujas coordenadas verifiquem as condições é perpendicular aos vectores dados, isto é, todos os vectores do tipo $(17z, -7z, z)$, com $z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, são perpendiculares aos vectores \vec{u} e \vec{v} . Apesar de serem infinitos os vectores desta forma, estes são todos paralelos. Portanto, só há uma direcção perpendicular a duas direcções dadas não paralelas. Para obter um vector particular, perpendicular aos vectores \vec{u} e \vec{v} , concretizamos a incógnita z , ou seja, fazendo, por exemplo, $z = 1$, ficamos com: $\vec{w} (17, -7, 1)$.

Exercício 18: Considere, num referencial o. n., três pontos:

$$A(2, 4, 5), B(-2, 1, 1) \text{ e } C(7, 2, -1)$$

18.1 Verifique que os pontos não são colineares.

Resolução: Supondo que os pontos A, B e C são colineares, significa que os vectores \overline{AB} e \overline{BC} são colineares, ou seja existe um único α tal que $\overline{AB} = \alpha \overline{BC}$. Donde, temos

$$(-4, -3, -4) = \alpha (9, 1, -2) \Leftrightarrow \begin{cases} 9\alpha = -4 \\ \alpha = -3 \\ -2\alpha = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\frac{4}{9} \\ \alpha = -3 \\ \alpha = 2 \end{cases}$$

que é um sistema impossível, logo os pontos A, B e C não são colineares.

18.2 Defina as equações paramétricas do plano que contém os três pontos.

Resolução: Vamos começar por escrever a equação vectorial do plano ABC. Consideremos um ponto genérico $P(x, y, z)$ do plano ABC, assim

$$P = A + \alpha \overline{AB} + \beta \overline{BC}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x, y, z) = (2, 4, 5) + \alpha(-4, -3, -4) + \beta(9, 1, -2).$$

Donde se escrevem as equações paramétricas do plano que contém os pontos A, B e C:

$$\begin{cases} x = 2 - 4\alpha + 9\beta \\ y = 4 - 3\alpha + \beta \\ z = 5 - 4\alpha - 2\beta \end{cases}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

18.3 Indique outros pontos que pertencem ao plano ao plano definido em 18.2.

Resolução: Obtemos dois pontos, por exemplo, do plano ABC atribuindo valores a α e β :

$$\alpha = 1 \text{ e } \beta = 2: (x, y, z) = (16, 3, -3);$$

$$\alpha = 3 \text{ e } \beta = 0: (x, y, z) = (-10, -2, -7).$$

Exercício 19: Determine uma equação cartesiana do plano que passa em $A(3, 2, 0)$ e contém a recta $r: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+2}{1}$.

Resolução: Seja $\vec{r} = (2, 3, 1)$ um representante do vector director da recta r e seja \overline{AB} outro vector com origem em A e extremidade sobre a recta. Consideremos o ponto $B(0, 1, -2)$, da recta r . Temos que, $\overline{AB} = (-3, -1, -2)$. Podemos então, considerando um ponto P qualquer do plano, escrever a equação vectorial:

$$\begin{aligned}
 P &= A + \alpha \vec{r} + \beta \overline{AB}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow (x, y, z) = (3, 2, 0) + \alpha(2, 3, 1) + \beta(-3, -1, -2), \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + 2\alpha - 3\beta \\ y = 2 + 3\alpha - \beta \\ z = \alpha - 2\beta \end{cases}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + 2(z + 2\beta) - 3\beta \\ y = 2 + 3(z + 2\beta) - \beta \\ z + 2\beta = \alpha \end{cases}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 - 2z = \beta \\ y = 2 + 3z + 5\beta \\ z + 2\beta = \alpha \end{cases}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 - 2z = \beta \\ y = 2 + 3z + 5(x - 3 - 2z) \\ z + 2\beta = \alpha \end{cases}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 - 2z = \beta \\ y = 5x - 7z - 13 \\ z + 2\beta = \alpha \end{cases}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

Donde a equação cartesiana do plano pedido é: $5x - y - 7z - 13 = 0$.

Exercício 20: Indique a posição de cada um dos pares de rectas:

20.1 $r: (x, y, z) = (0, 1, 0) + \lambda(1, 1, 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e $s: (x, y, z) = (1, 1, 1) + \varphi(2, 2, 2)$, $\varphi \in \mathbb{R}$.

Resolução: O vector director da recta r é $\vec{r} = (1, 1, 1)$ e da recta s é $\vec{s} = (2, 2, 2)$. Como podemos escrever $\vec{s} = 2\vec{r}$, significa que $\vec{s} \parallel \vec{r}$. Verificamos que o ponto $(0, 1, 0)$ da recta r , não pertence à recta s :

$$(0, 1, 0) = (1, 1, 1) + \varphi(2, 2, 2) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 1 + 2\varphi \\ 1 = 1 + 2\varphi \\ 0 = 1 + 2\varphi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi = -\frac{1}{2} \\ \varphi = 0 \\ \varphi = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

visto obtermos um sistema impossível. Logo, as rectas, r e s , são estritamente paralelas.

$$20.2 \ a: \begin{cases} \frac{x+1}{1} = \frac{y-0}{1} \\ z=1 \end{cases} \text{ e } b: \begin{cases} x = -1 \\ \frac{y+1}{1} = \frac{z-0}{1} \end{cases}$$

Resolução: Os vectores directores das rectas, a e b , são $\vec{a} = (1, 1, 0)$ e $\vec{b} = (0, 1, 1)$, respectivamente. Verifica-se que nenhum vector se escreve à custa do outro, o que significa que os vectores \vec{a} e \vec{b} não são paralelos e portanto as rectas, a e b , também não são paralelas.

Como $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \neq 0$, significa que os vectores directores não são perpendiculares e, logo, também as rectas, a e b , não são perpendiculares.

Vejamos se as rectas serão concorrentes, resolvendo o sistema formado pelas equações:

$$\begin{cases} x+1=y \\ z=1 \\ x=-1 \\ y+1=z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ z=1 \\ x=-1 \\ y=0 \end{cases}$$

Como obtivemos uma solução para o sistema, significa que as rectas são concorrentes num ponto. O ponto de intersecção é: $(-1, 0, 1)$.

Exercício 21: Justifique que os planos \mathcal{P} e \mathcal{Q} , de equações

$$\mathcal{P}: x + y = 1 \quad \text{e} \quad \mathcal{Q}: x - z = 2$$

não são paralelos nem perpendiculares. Determine um ponto e um vector director da recta de intersecção dos dois planos.

Resolução: O vector normal a cada um dos planos é

$$\vec{n} = (1, 1, 0) \quad \text{e} \quad \vec{m} = (1, 0, -1),$$

respectivamente. Como os vectores, \vec{n} e \vec{m} , não se escrevem à custa um do outro, significa que não são paralelos, e portanto os planos, \mathcal{P} e \mathcal{Q} , também não são paralelos. Como

$$\vec{n} \cdot \vec{m} = (1, 1, 0) \cdot (1, 0, -1) = 1 \neq 0,$$

os vectores, \vec{n} e \vec{m} , não são perpendiculares, e logo também os planos, \mathcal{P} e \mathcal{Q} , não são perpendiculares. Assim, concluímos que, os planos são oblíquos e intersectam-se segundo a recta definida pelo sistema de equações:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - z = 2 \end{cases}$$

Para conhecermos um ponto e um vector director da recta de intersecção, vamos transformar o sistema resolvendo as duas equações em ordem à variável comum, neste caso x:

$$\begin{cases} x = -y + 1 \\ x = z + 2 \end{cases}$$

Igualando as expressões obtidas, escrevemos as equações cartesianas da recta de intersecção, na forma que nos dá um ponto e um seu vector director:

$$x = -y + 1 = z + 2 \Leftrightarrow \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{1}$$

Ou seja, um ponto da recta é $(0, 1, -2)$ e um vector director é $(1, -1, 1)$.

Exercício 22: Resolva e classifique, cada um dos sistemas, utilizando o método:

$$\text{22.1 de Gauss} \begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{3} + z - 12 = 0 \\ \frac{x}{3} - \frac{y}{4} + \frac{z}{3} = 6 \\ -\frac{x}{3} + y - \frac{z}{2} = -7 \end{cases}$$

Resolução: Em primeiro lugar escrevemos o sistema na forma canónica:

$$\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{3} + z - 12 = 0 \\ \frac{x}{3} - \frac{y}{4} + \frac{z}{3} = 6 \\ -\frac{x}{3} + y - \frac{z}{2} = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y + 6z = 72 \\ 4x - 3y + 4z = 72 \\ -2x + 6y - 3z = -42 \end{cases}$$

Escrevemos a matriz completa do sistema:

$$\begin{cases} 3x - 2y + 6z = 72 \\ 4x - 3y + 4z = 72 \\ -2x + 6y - 3z = -42 \end{cases} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 6 & 72 \\ 4 & -3 & 4 & 72 \\ -2 & 6 & -3 & -42 \end{array} \right]$$

Escrevemos a matriz triangular:

$$\begin{aligned} & \begin{matrix} (-4) \\ + \rightarrow (3) \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 6 & 72 \\ 4 & -3 & 4 & 72 \\ -2 & 6 & -3 & -42 \end{array} \right] \rightarrow \begin{matrix} (2) \\ + \rightarrow (3) \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 6 & 72 \\ 0 & -1 & -12 & -72 \\ -2 & 6 & -3 & -42 \end{array} \right] \rightarrow \begin{matrix} (14) \\ + \rightarrow (3) \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 6 & 72 \\ 0 & -1 & -12 & -72 \\ 0 & 14 & 3 & 18 \end{array} \right] \rightarrow \\ & \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 6 & 72 \\ 0 & -1 & -12 & -72 \\ 0 & 0 & 165 & -990 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Escrevemos o sistema e vamos o resolver por substituição.

$$\begin{cases} 3x - 2y + 6z = 72 \\ -y - 12z = -72 \\ 165z = -990 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y + 6(6) = 72 \\ -y - 12(6) = -72 \\ z = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 0 + 36 = 72 \\ y = 0 \\ z = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12 \\ y = 0 \\ z = 6 \end{cases}$$

O sistema diz-se possível e determinado por admitir uma só solução, o terno ordenado (12, 0, 6).

$$22.2 \text{ misto } \begin{cases} x + 5y - z = -2 \\ 2x - 2y = 6 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Resolução: Multiplicando os dois membros da 2ª equação por $\left(-\frac{1}{2}\right)$ e adicionando à 3ª

equação, temos:

$$\begin{array}{r} -x + y = -3 \\ \underline{x - y = 1} \\ 0x + 0y = -2 \end{array}$$

Ou seja,

$$\begin{cases} x + 5y - z = -2 \\ 2x - 2y = 6 \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 5y - z = -2 \\ 2x - 2y = 6 \\ 0x - 0y = -2 \end{cases}$$

Obtivemos no sistema uma equação impossível, logo o sistema é impossível e não admite solução, isto é, o conjunto solução é vazio.

$$22.3 \text{ misto } \begin{cases} 3x + 3y + 3z = 3 \\ 2x + 2y + 2z = 2 \\ x - 4y = 3 \end{cases}$$

Resolução: Multiplicando os dois membros da 1ª equação por $\left(-\frac{1}{3}\right)$, multiplicando os

dois membros da 2ª equação por $\left(\frac{1}{2}\right)$ e adicionando os resultados ordenadamente, temos:

$$\begin{array}{r} -x - y - z = -1 \\ \underline{x + y + z = 1} \\ 0x + 0y + 0z = 0 \end{array}$$

Ou seja, temos que

$$\begin{cases} 3x + 3y + 3z = 3 \\ 2x + 2y + 2z = 2 \\ x - 4y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 3y + 3z = 3 \\ 0x + 0y + 0z = 0 \\ x - 4y = 3 \end{cases}$$

Donde obtivemos, no sistema, uma equação possível e indeterminada. Assim, podemos escrever

$$\begin{cases} 3x + 3y + 3z = 3 \\ 0x + 0y + 0z = 0 \\ x - 4y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 4y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (4y + 3) + y + z = 1 \\ x = 4y + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -5y - 2 \\ x = 4y + 3 \end{cases}$$

Significa, que o sistema inicial tem solução do tipo: $(4y + 3, y, -5y - 2)$, $y \in \mathbb{R}$. Donde, tem solução indeterminada, e é portanto um sistema possível indeterminado.

Exercício 23: Os sistema que se seguem são possíveis e indeterminados. Resolva e identifique geometricamente qual é a posição dos planos cujas equações formam o sistema. Apresente a solução genérica do sistema e uma solução particular.

$$23.1 \begin{cases} x - y + 2z - 1 = 0 \\ 3x - 3y + 6z = 3 \\ -2x + 2y - 4z = -2 \end{cases}$$

Resolução: Vem sucessivamente:

$$\begin{cases} x - y + 2z - 1 = 0 \\ 3x - 3y + 6z = 3 \\ -2x + 2y - 4z = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y - 2z + 1 \\ 3y - 6z + 3 - 3y + 6z = 3 \\ -2y + 4z - 2 + 2y - 4z = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y - 2z + 1 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

O sistema reduz-se a uma equação. Geometricamente corresponderá à situação em que os três planos são coincidentes. A solução genérica é do tipo

$$(y - 2z + 1, y, z), \quad y, z \in \mathbb{R}.$$

Atribuindo valores a y e a z obtemos soluções particulares. Por exemplo, $y = 1$ e $z = 1$: $(-1, 1, 1)$.

$$23.2 \begin{cases} -2x + y - 5z = 4 \\ 3x - y + 2z = -1 \\ -4x + y + z = -2 \end{cases}$$

Resolução: Vem sucessivamente que:

$$\begin{cases} y = 2x + 5z + 4 \\ 3x - 2x - 5z - 4 + 2z = -1 \\ -4x + 2x + 5z + 4 + z = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 5z + 4 \\ x - 3z = 3 \\ -2x + 6z = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 6z + 6 + 5z + 4 \\ x = 3z + 3 \\ -6z - 6 + 6z = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 11z + 10 \\ x = 3z + 3 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

O sistema é indeterminado. Geometricamente corresponde à situação em que os três planos são distintos mas intersectam-se numa recta:

$$\begin{cases} z = \frac{y-10}{11} \\ z = \frac{x-3}{3} \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x-3}{3} = \frac{y-10}{11} = z$$

A solução genérica é do tipo: $(3z + 3, 11z + 10, z)$, $z \in \mathbb{R}$. Obtemos uma solução particular fazendo, por exemplo, $z = 0$: $(3, 10, 0)$.

Exercício 24: Os sistema que se seguem são impossíveis. Resolva e identifique geometricamente qual a posição dos planos cujas equações formam o sistema.

$$24.1 \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 3 \\ z = 0 \end{cases}$$

Resolução: Temos sucessivamente

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 3 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 3 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - y \\ 2 - 2y + 2y = 3 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - y \\ 2 = 3 \\ z = 0 \end{cases}$$

O sistema é impossível. Geometricamente corresponde à situação em que dois planos são paralelos (pois observa-se nas duas primeiras equações do sistema dado, os planos respectivos são paralelos, visto terem vectores normais paralelos: as suas coordenadas são $(1, 1, 1)$ e $(2, 2, 2)$, respectivamente) e o terceiro intersecta os outros dois ($z = 0$ é o plano xOy).

$$24.2 \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 3x + 3y + 3z = 3 \\ -3x - 3y - 3z = 5 \end{cases}$$

Resolução: Temos

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 3x + 3y + 3z = 3 \\ -3x - 3y - 3z = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - y - z \\ 6 - 3y - 3z + 3y + 3z = 3 \\ -6 + 3y + 3z - 3y - 3z = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - y - z \\ 6 = 3 \\ -6 = 5 \end{cases}$$

O sistema é impossível. Geometricamente corresponde à situação em que os três planos são estritamente paralelos (têm vectores normais (1, 1, 1), (3, 3, 3) e (-3, -3, -3), respectivamente, ou seja, os vectores normais são paralelos).

4.4 Aplicações práticas no Sketchpad™

4.4.1 Poliedros

Veja alguns ficheiros GSP na pasta *Cortes no Cubo*, da pasta *Capitulo4 – Apêndice VI*, onde são mostrados vários cortes por diferentes planos no cubo, determinando as correspondentes secções.

Exercício: (ver Exercício 4 da secção 4.3.1 – Figura 4.54, e na pasta *Capitulo4 – do Apêndice VI*, o ficheiro *Exercicio4.gsp*)

Resolução: Podemos resolver, este exercício, no Sketchpad da seguinte maneira: Num Sketch novo e tendo em conta que queremos fazer uma PC(30°, 50%), ou seja, uma perspectiva cavaleira de parâmetros 30° e 50%, construímos um quadrilátero [ABCD] – a base da pirâmide, de modo que os lados paralelos [AB] e [CD] estejam em verdadeira grandeza, medindo, portanto, 7 cm e os lados paralelos [AD] e [BC], com 50% de redução relativamente à verdadeira grandeza, medem 3,5 cm e formam um ângulo com a amplitude de 30° com os lados em verdadeira grandeza:

- Com a ferramenta “segmento de recta” construímos o segmento de recta [AB];
- Seleccionamos o segmento de recta [AB] e no menu *Measure* a opção *Length*. Até obtermos o comprimento pretendido (7 cm) clicamos sobre um dos extremos do segmento de recta, por exemplo B, e arrastamos;
- Seleccionamos o ponto A e no menu *Transform* a opção *Mark Center “A”*;
- Seleccionamos o ponto B, no menu *Transform* a opção *Rotate*, e na janela de diálogo opta-se por *By 30°* e clicamos no botão OK;
- Obtemos um ponto B’. Seleccionado-o e ao ponto A, no menu *Construct* seleccionamos a opção *Segment* para obtermos o segmento de recta [AB’]. Nele, construímos um ponto D a 3,5 cm do ponto A;

- Seleccionamos os pontos A e D e no menu *Construct* a opção *Segment* para construirmos o segmento de recta [AD];

- Seleccionamos o segmento de recta [AB'] e o ponto B' e no menu *Display* a opção *Hide Objects*;

- No menu *Construct* e com a opção *Parallel Line* concluimos a construção do quadrilátero [ABCD].

Construímos as diagonais do quadrilátero [ABCD] e obtemos, através da intersecção destas, o seu ponto central, O. Por O, construímos uma recta perpendicular a [AB], e nela marcamos um ponto V (o vértice da pirâmide) a 9.37 cm, aproximadamente, de O (a altura da pirâmide). Unindo o ponto V, por segmentos de recta, aos vértices do quadrilátero [ABCD] (a base da pirâmide) e eliminando o que não interessa, obtemos a pirâmide pretendida.

4.4.2 Geometria Analítica

Exercício: Representa, num referencial c. o. n. tridimensional, os pontos seguintes:

A(2, 3, -1), B(3, -1, 2), C(0, 3, 1), D(2, -3, 0), E(-2, 0, 2) e F(-2, -2, 2).

Resolução: No Sketchpad, vamos utilizar a perspectiva cavaleira, PC(30.56°; 75%) para representarmos um referencial c. o. n., tridimensional, e nele marcarmos os pontos pedidos – ver Figura 4.70 e na pasta *Capitulo4* – do Apêndice VI, o ficheiro *Exercicio.gsp*. Num Sketch novo, construímos os eixos coordenados, dos xx, yy e zz (usando a ferramenta “semi-recta”), de modo que o eixo dos yy e dos zz fiquem em verdadeira grandeza e o eixo dos xx fique com 75% de redução relativamente à verdadeira grandeza. A origem, O, do referencial é o ponto comum aos eixos. Depois de marcarmos a mesma unidade de medida (que acharmos adequada) em cada eixo, marcamos alguns pontos (os necessários) sobre os eixos e vamos representar o ponto dado, A(2, 3, -1), do seguinte modo:

- Construímos pelo ponto (2, 0, 0) uma recta auxiliar paralela ao eixo dos yy: seleccionamos o ponto 2, sobre o eixo dos xx – a abcissa de A, e o eixo dos yy e no menu *Construct* a opção *Parallel Line*;

- Analogamente, construímos pelo ponto (0, 3, 0) uma recta auxiliar paralela ao eixo dos xx: seleccionamos o ponto 3, sobre o eixo dos yy – a ordenada de A, e o eixo dos xx e no menu *Construct* a opção *Parallel Line*;

- Seleccionamos as duas rectas, atrás construídas, e no menu *Construct* a opção *Point At Intersection* – obtemos o ponto de coordenadas (2, 3, 0);

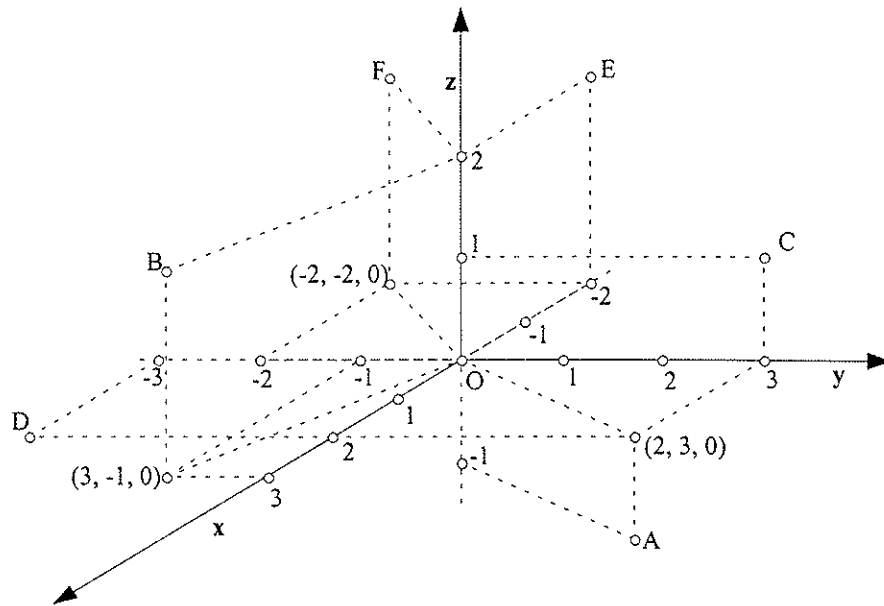


Figura 4.70: Referencial c. o. n., tridimensional, em perspectiva cavaleira PC(30.56°, 75%) e os pontos: A(2, 3, -1), B(3, -1, 2), C(0, 3, 1), D(2, -3, 0), E(-2, 0, 2) e F(-2, -2, 2).

- Construimos pelo ponto (2, 3, 0) uma recta auxiliar paralela ao eixo dos zz: seleccionamos o ponto (2, 3, 0) – do plano xOy, e o eixo dos zz e no menu *Construct* a opção *Parallel Line*;

- Construimos um segmento de recta com extremos definidos pelo ponto (2, 3, 0) e pela origem do referencial – no menu *Construct* a opção *Segment*;

- Construimos pelo ponto (0, 0, -1) uma recta auxiliar paralela ao segmento de recta atrás construído: seleccionamos o ponto -1, sobre o eixo dos zz – a cota de A, e o referido segmento de recta e no menu *Construct* a opção *Parallel Line*; a intersecção desta recta auxiliar com a recta auxiliar paralela ao eixo dos zz, que passa em (2, 3, 0), determina o ponto A(2, 3, -1);

- Utilizando, novamente, no menu *Construct* a opção *Segment*, construimos os segmentos de recta definidos pelos pontos extremos: (2, 3, 0) e (2, 0, 0), (2, 3, 0) e (0, 3, 0), (2, 3, 0) e (2, 3, -1), e ainda entre os pontos (0, 0, -1) e (2, 3, -1);

- Eliminamos as rectas auxiliares seleccionando-as e no menu *Display* a opção *Hide*;

Para os restante pontos dados procede-se de modo análogo.

Capítulo 5 - Outras Aplicações para o Sketchpad™

Neste capítulo apresentaremos algumas aplicações que, ou são resolvidas formalmente, ou são apresentadas e tratadas num ficheiro GSP ou GSS, através de animações - *animations* ou rotinas - *scripts*, respectivamente, ou ambas as coisas, isto é, resolvidas formalmente e apresentadas num ficheiro, conforme consideremos mais adequado a essa aplicação. Estes ficheiros encontram-se no Apêndice VI, na pasta *Capitulo5*, e o nome do(s) ficheiro(s) segue em itálico à frente do título de cada aplicação.

5.1 Problemas antigos

Vamos trabalhar, nesta secção, algumas aplicações/problemas que motivaram e interessaram os matemáticos ao longo dos tempos.

Aplicação 1 – O Teorema de Ptolomeu (Oliveira 1991) – *Teorema_Ptolomeu.gss*

“Se [ABCD] é um quadrilátero (convexo) inscrito numa circunferência então a soma dos produtos dos seus lados opostos é igual ao produto das suas diagonais.” (Figura 5.1)

Resolução: Tendo em consideração a Figura 5.1, o teorema afirma que

$$\overline{AB} \times \overline{CD} + \overline{BC} \times \overline{DA} = \overline{AC} \times \overline{BD}.$$

Ora, vamos marcar um ponto P na diagonal [BD] do quadrilátero[ABCD], de modo que o ângulo $\angle DAP$ seja igual ao ângulo $\angle BAC$. Portanto, o ângulo $\angle DAC$ é igual ao ângulo $\angle BAP$ e também resulta que o ângulo $\angle ACD$ é igual ao ângulo $\angle ABP$ (porque são ângulos inscritos num mesmo arco de circunferência). Assim o triângulo [ACD] é semelhante ao triângulo [PAB]⁹² (pelo critério de semelhança AA, visto de um para o outro terem dois ângulos iguais). Assim temos

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{CD}} \Leftrightarrow \overline{AB} \times \overline{CD} = \overline{AC} \times \overline{BP} \quad (5.1)$$

Por outro lado, o ângulo $\angle ADB$ é igual ao ângulo $\angle ACB$ e portanto o triângulo [ADP] é semelhante ao triângulo [ACB] (pelo critério de semelhança AA, visto terem, de um para o outro, dois ângulos iguais). Temos então,

⁹² Ver a noção de triângulos semelhantes e os critérios de semelhança de triângulos na secção 3.2.

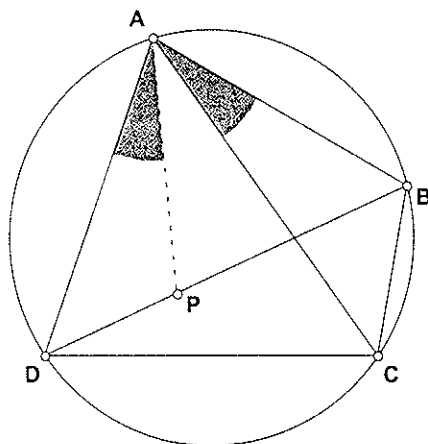


Figura 5.1: $[ABCD]$ é um quadrilátero convexo (isto é, o prolongamento de um qualquer seu lado não intersecta o interior do polígono) inscrito na circunferência.

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DP}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \overline{AD} \times \overline{BC} = \overline{AC} \times \overline{DP} \quad (5.2)$$

De (5.1) e (5.2), e somando membro a membro:

$$\overline{AB} \times \overline{CD} + \overline{BC} \times \overline{DA} = \overline{AC} \times \overline{BP} + \overline{AC} \times \overline{DP} = \overline{AC} \times (\overline{BP} + \overline{DP}) = \overline{AC} \times \overline{BD}$$

ou seja

$$\overline{AB} \times \overline{CD} + \overline{BC} \times \overline{DA} = \overline{AC} \times \overline{BD}$$

assim se concluindo a prova do Teorema de Ptolomeu.

Aplicação 2 – O problema de Napoleão (Dalcín 2000) – *Problema_Napoleao.gss*

“Se $[ABC]$ é um triângulo qualquer, e exteriores a ele, construindo os triângulos equiláteros $[ABC']$, $[BCA']$ e $[CAB']$, conforme a Figura 5.2, os centros desses três triângulos são vértices de um triângulo equilátero.”

Resolução: Começemos por provar que as circunferências circunscritas aos triângulos equiláteros $[ABC']$, $[BCA']$ e $[CAB']$ passam por um mesmo ponto: Sejam A_1 , B_1 e C_1 os centros dos triângulos⁹³ equiláteros $[BCA']$, $[CAB']$ e $[ABC']$, respectivamente, como se pode observar na Figura 5.2. As circunferências ABC' e BCA' intersectam-se nos pontos O e B . Como

$$m\angle AC'B = 60^\circ,$$

temos que

$$m\angle AOB = 120^\circ,$$

⁹³ O centro de um triângulo é o ponto de encontro das mediatrizes ou eixos dos seus lados - o *circuncentro*.

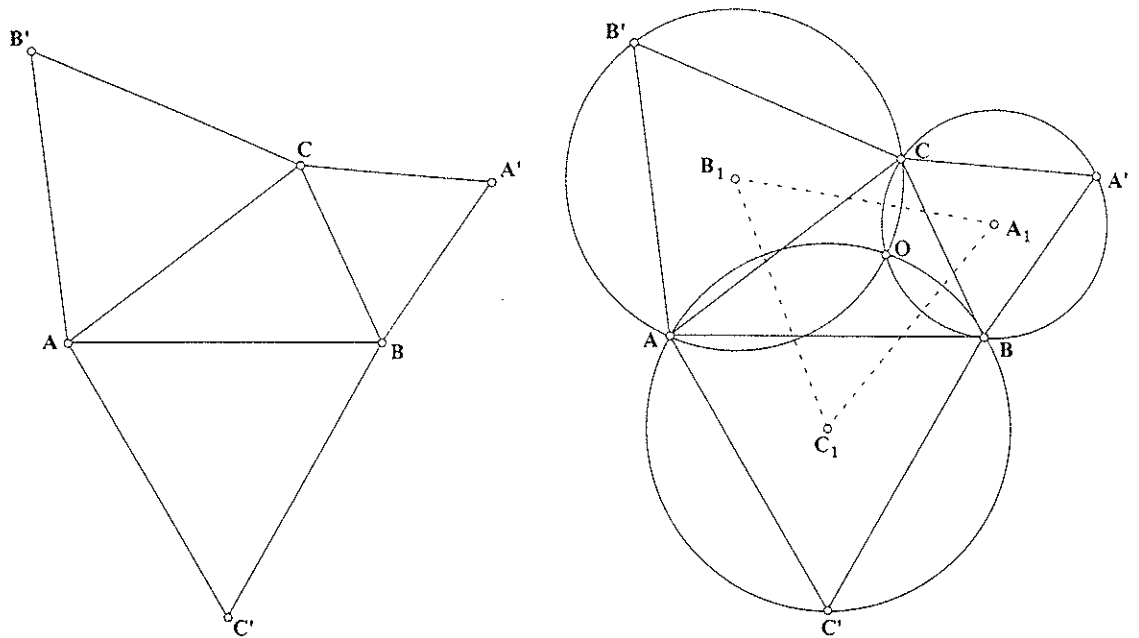


Figura 5.2: $\Delta[ABC]$ é qualquer. $\Delta[ABC']$, $\Delta[BCA']$ e $\Delta[CAB']$ são equiláteros. $\Delta[A_1B_1C_1]$ é equilátero.

pois são ângulos opostos de um quadrilátero inscrito numa circunferência. Do mesmo modo, como

$$m\angle BA'C = 60^\circ,$$

temos também

$$m\angle BOC = 120^\circ.$$

Logo,

$$m\angle AOC = 120^\circ,$$

e como

$$m\angle AB'C = 60^\circ,$$

o quadrilátero $[AOCB']$ é inscrito e portanto, O pertence à circunferência ACB' . Ora, como

$$\overline{AB_1} = \overline{B_1O} \text{ e } \overline{AC_1} = \overline{C_1O},$$

por serem raios, recta B_1C_1 é mediatriz do segmento $[AO]$, e portanto

$$m\angle AB_1C_1 = m\angle C_1B_1O.$$

Analogamente a recta B_1A_1 é mediatriz do segmento $[CO]$, e portanto

$$m\angle OB_1A_1 = m\angle A_1B_1C.$$

Como

$$m\angle AB_1C = 120^\circ,$$

por ser um ângulo ao centro com o mesmo arco correspondente do ângulo inscrito de 60° , vem sucessivamente:

$$2 m\angle C_1B_1O + 2 m\angle OB_1A_1 = m\angle AB_1C \Leftrightarrow 2 (m\angle C_1B_1O + m\angle OB_1A_1) = 120^\circ \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow m\angle C_1B_1A_1 = 60^\circ.$$

Da mesma forma, mostramos que

$$m\angle B_1A_1C_1 = 60^\circ,$$

e concluímos assim, ser o triângulo $[A_1B_1C_1]$ equilátero.

Aplicação 3 – O número de Ouro (Araújo 1999)

3.1 Dado um segmento de recta $[AB]$, determine $C \in [AB]$ tal que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} \quad (5.3)$$

Resolução: Ora, o ponto C tem de ser tal que divida o segmento de recta dado, $[AB]$, em dois segmentos de recta desiguais, e de modo que o todo esteja para o maior, $[AC]$, assim como este esteja para o segmento de recta menor, $[CB]$ – ver Figura 5.3. Fazendo, conforme indicado na Figura 5.3,

$$a = \overline{AB}, \quad b = \overline{AC} \quad \text{e} \quad x = \frac{b}{a},$$

vem, de (5.3), que

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a-b} \Leftrightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{b}{a} \Leftrightarrow \frac{1-\frac{b}{a}}{\frac{b}{a}} = \frac{b}{a}$$

ou seja,

$$\frac{1-x}{x} = x \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Neste caso, apenas interessa a solução positiva,

$$x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Concluímos que

$$\frac{b}{a} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow b = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} a \Leftrightarrow b = \frac{1}{2} (\sqrt{5}a - a) \quad (5.4)$$

Assim, para encontrar o ponto C basta construir um segmento de recta de comprimento b , nas condições indicadas em (5.4): multiplicamos o comprimento dado, a , por $\sqrt{5}$ e subtraímos a ao segmento de recta obtido; obtemos um novo segmento de recta, que dividimos em duas partes

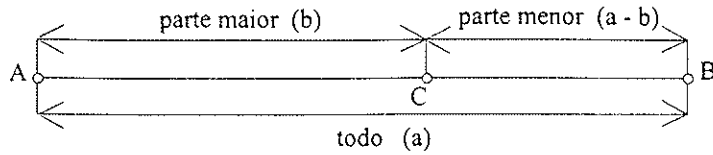


Figura 5.3: Um segmento de recta $[AB]$ pode ser dividido em duas partes desiguais de uma infinidade de maneiras por um ponto C . Nesta representação temos: $a = \overline{AB}$ (o todo) e $b = \overline{AC}$ (a parte maior).

$$\begin{aligned}
 m\overline{AB} &= 10,00 \text{ cm} \\
 (m\overline{AB}) \cdot \sqrt{5} &= 22,37 \text{ cm} \\
 ((m\overline{AB}) \cdot \sqrt{5}) - (m\overline{AB}) &= 12,36 \text{ cm} \\
 \frac{(((m\overline{AB}) \cdot \sqrt{5}) - (m\overline{AB}))}{2} &= 6,18 \text{ cm} = m\overline{AC}
 \end{aligned}$$

Figura 5.4: Construimos um segmento de recta $[AC]$ a partir de um segmento de recta dado $[AB]$ tal

que: $\overline{AB} = a = 10 \text{ cm}$; $\overline{AC} = b = \frac{1}{2}(\sqrt{5}a - a) = \frac{10\sqrt{5} - 10}{2} \approx 6,18 \text{ cm}$ e $\overline{CB} \approx 3,82 \text{ cm}$.

iguais; cada uma dessas partes tem o comprimento b desejado.

Na Figura 5.4, exemplificamos a construção, considerando um segmento de recta $[AB]$ tal que $\overline{AB} = a = 10 \text{ cm}$. A parte maior e a parte menor medem respectivamente, $\overline{AC} = b = 6,18 \text{ cm}$ e $\overline{CB} = 3,82 \text{ cm}$. Com efeito, temos que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{10}{6,18} = 1,618 = \frac{6,18}{3,82} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$$

Ou seja, ficamos com o segmento de recta $[AB]$ dividido em média e extrema razão.

Diz-se que o ponto C divide o segmento de recta $[AB]$ em *média e extrema razão*⁹⁴ e designa-se por *ponto de ouro*. À divisão de um segmento de recta, $[AB]$, pelo ponto de ouro chama-se *divisão áurea*. Feita a divisão, ao segmento de recta maior, $[AC]$, chama-se *segmento áureo*, e ao segmento de recta menor, $[CB]$, chamamos *complemento áureo*. Na divisão áurea, a razão entre o todo e o segmento de recta maior é expressa por um número irracional, chamado *número de ouro*⁹⁵, que se representa pela letra grega maiúscula Φ e é

⁹⁴ Dividir um segmento de recta, $[AB]$, em *média e extrema razão* é dividi-lo em duas partes, $[AC]$ e $[CB]$ (em que $C \in [AB]$), tais que o todo, $[AB]$, está para a parte maior, $[AC]$, assim como a parte maior está para a parte menor, $[CB]$. Notamos que, o motivo para a designação “média e extrema razão”, deve-se ao facto de a parte maior ser uma média entre o todo e a parte menor; e a razão é extrema porque não existe outra solução da qual resulte a igualdade entre as razões dos segmentos: é para o ponto C uma posição extrema. (Tahan 1976)

⁹⁵ Este número despertou o interesse e a curiosidade de muitos artistas e matemáticos ao longo dos séculos e foi utilizado, entre outros, por pintores, escultores e arquitectos. O número de ouro, Φ , verifica, curiosamente, as seguintes propriedades: $1 + \Phi = \Phi^2$ e $\Phi - 1 = \Phi$.

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Na prática usamos, para este número, uma aproximação

$$\Phi \approx 1.618.$$

3.2 O rectângulo de Ouro: Dado um segmento de recta [AB], construir um rectângulo em que a sua altura é o comprimento áureo da sua base [AB] – *Rectangulo_ouro.gss*

Resolução: Para construirmos um rectângulo áureo, dado um segmento de recta [AB], partimos de (5.4). Observando que num triângulo rectângulo de catetos a e $\frac{1}{2}a$, temos a hipotenusa $\frac{1}{2}\sqrt{5}a$. Assim, de acordo com a Figura 5.5, procedemos do seguinte modo: Por um dos extremos do segmento de recta dado, por exemplo B, construímos uma perpendicular ao segmento de recta e marca-se, nela, metade do segmento de recta [AB] a partir de B, determinando o ponto P. Construímos o segmento de recta [AP]. Com centro em P e raio \overline{PB} traçamos um arco de circunferência que vai intersectar [AP] no ponto M. [AM] é o segmento áureo, que pode ser transportado para o segmento de recta dado, bastando para isso, centrar em A e com raio \overline{AM} descrever um arco de circunferência até intersectar [AB], digamos, no ponto C. Portanto, o ponto C é o ponto de ouro, [AC] é o segmento áureo e o rectângulo [ACDE] ([CD] \cong [AB]) é o *rectângulo de ouro*.

Quando a razão entre os lados diferentes de um rectângulo é Φ , designamos, neste caso, o rectângulo por *rectângulo áureo*⁹⁶ ou *rectângulo de ouro*. Exemplifica-se uma construção deste rectângulo (observe a Figura 5.6) quando a altura do rectângulo for o segmento áureo da base ou quando o rectângulo tem dimensões Φ por 1.

⁹⁶ Foi considerado, desde a Grécia antiga, como o rectângulo mais harmonioso (particularmente estético, a proporção divina, com o máximo de equilíbrio).

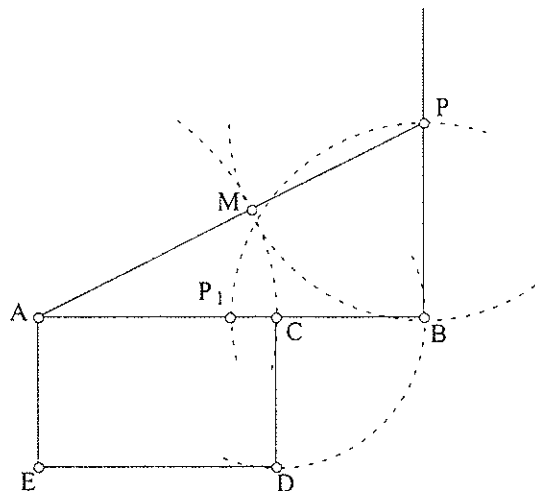


Figura 5.5: Construção do rectângulo de ouro [ACDE] a partir de um dado segmento de recta [AB]:

P_1 é o ponto médio de [AB]; [BP] é perpendicular a [AB] e $\overline{BP} = \frac{1}{2} \overline{AB}$; Com centro em P e raio \overline{PB} traçamos um arco de circunferência que vai intersectar [AP] no ponto M; Com centro em A e raio \overline{AM} descreve-se um arco de circunferência até intersectar [AB] no ponto C – o ponto de ouro de [AB].

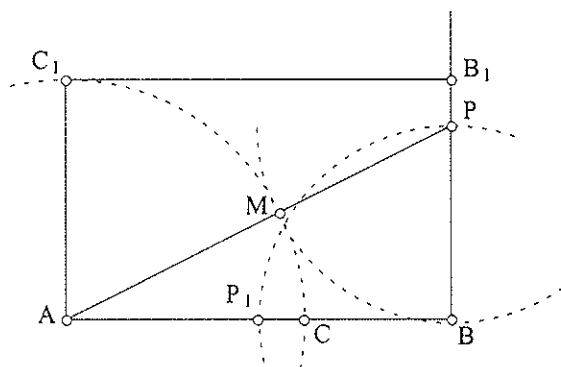


Figura 5.6: Construção do rectângulo de ouro [ABB₁C₁] como na Figura 5.5, mas agora a altura do rectângulo, $\overline{AC_1}$, é o comprimento do segmento áureo da base [AB]: $\overline{AC_1} = \overline{AC}$.

3.3 O número de Ouro no pentágono regular: Verificar que num pentágono regular de lado 1, o comprimento da diagonal é igual ao número de ouro.

Resolução: Consideremos um pentágono [ABCDE] regular de modo que $\overline{AB} = 1$, como na Figura 5.7. Ora, cada diagonal é paralela ao lado oposto. Por exemplo, o polígono [ACDE] é um trapézio⁹⁷ isósceles e, portanto, $AC \parallel DE$. Designando por F a intersecção das diagonais [AC] e [BE],

⁹⁷ *Trapézio* é um quadrilátero que tem dois lados paralelos (a *base maior* e a *base menor*) e outros dois quaisquer. Se o trapézio admitir um ângulo recto, o trapézio diz-se *rectângulo*. Se os dois lados não paralelos do trapézio são geometricamente iguais o trapézio chama-se *isósceles* (no trapézio isósceles [ACDE] da Figura 5.7, a base maior é [AC] e a base menor é [DE]). Se os dois lados não paralelos do trapézio não forem geometricamente iguais o trapézio diz-se *escaleno*.

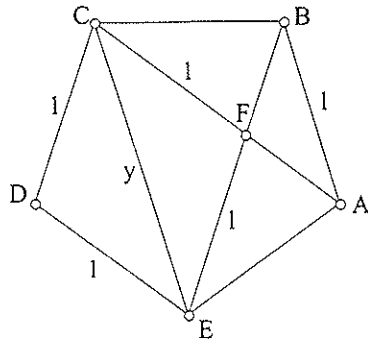


Figura 5.7: No pentágono [ABCDE], regular, de lado 1, a diagonal é $\Phi \approx 1.618$.

observamos que [CDEF] é um paralelogramo ($AC \parallel DE$ e $BE \parallel CD$), e como [CD] é geometricamente igual a [DE], todos os lados do polígono [CDEF] têm comprimento igual a 1. Considerando y o comprimento das diagonais do pentágono [ABCDE], temos, por exemplo, $y = \overline{AC} = \overline{CE} = \overline{BE}$. Notando que o $\Delta[ABF]$ é semelhante ao $\Delta[CEF]$ (veja seção 3.2.4), obtemos

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CF}}{\overline{AF}},$$

ou seja,

$$\frac{y}{1} = \frac{1}{y-1},$$

donde vem

$$y^2 - y = 1 \Leftrightarrow y^2 - y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Ou seja, a única solução positiva é

$$y = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi.$$

Aplicação 4 – Demonstração por Herão⁹⁸ (Dalcín 1998) – *Area_triangulo_HERAO.gss*

“A área de um triângulo, de lados a , b e c , é dada por

$$\text{Área} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

em que p é metade do perímetro do triângulo.”

Resolução: Começemos por observar, a partir da Figura 5.8, que no triângulo [ABC] está construído o incentro do triângulo, I, os raios [IE], [IF] e [ID] (raio r) da circunferência inscrita no

⁹⁸ Herão de Alexandria (circa 100 d. C.) viveu na cidade de Alexandria, foi engenheiro e matemático.

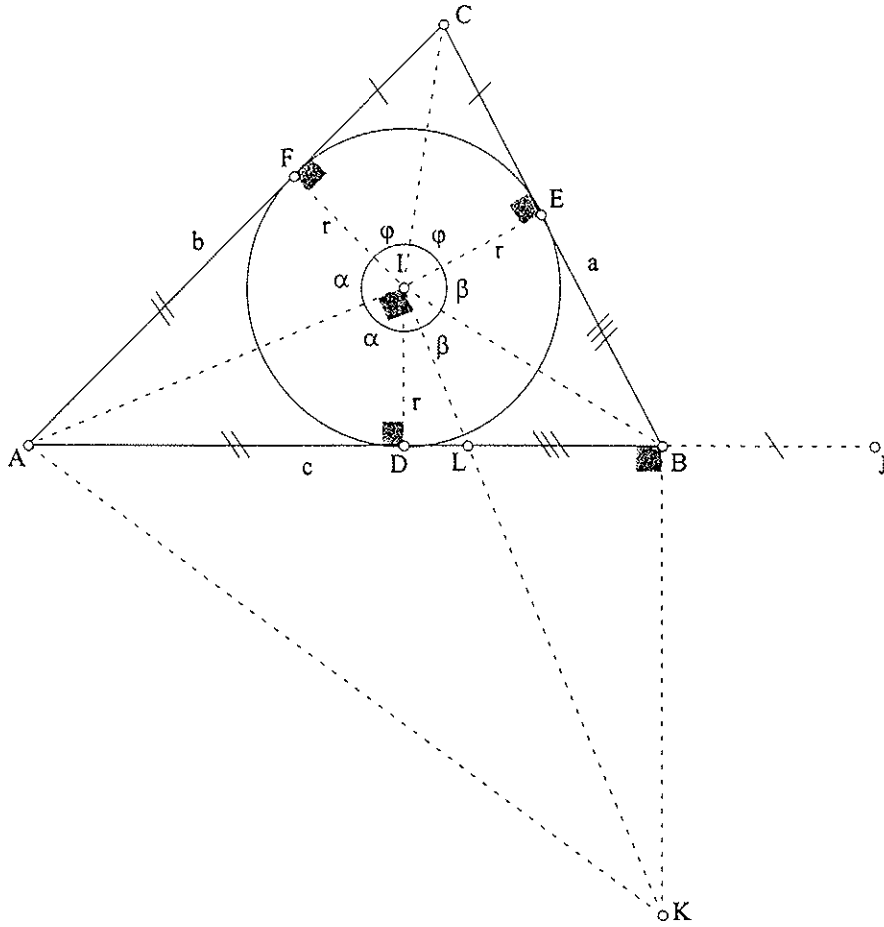


Figura 5.8: Triângulo $[ABC]$ qualquer e $[BC] \equiv a$, $[AC] \equiv b$ e $[AB] \equiv c$. I é o incentro do $\Delta[ABC]$. J é um ponto da semi-recta $[AB]$ tal que $\overline{BJ} = \overline{CE}$. K é o ponto de intersecção da recta perpendicular a AB , passando por B , com a recta perpendicular a AI , passando por I . L é o ponto de intersecção de $[KI]$ com $[AB]$. Circunferência de centro I e raio $r = \overline{ID} = \overline{IE} = \overline{IF}$.

$\Delta[ABC]$ perpendiculares ao lado $[BC] \equiv a$, $[AC] \equiv b$ e $[AB] \equiv c$, respectivamente. Consideremos P o perímetro do $\Delta[ABC]$ e p metade do perímetro do $\Delta[ABC]$. Temos, então que

$$\begin{aligned} \text{Área}_{\Delta[ABC]} &= \text{Área}_{\Delta[ABI]} + \text{Área}_{\Delta[IBC]} + \text{Área}_{\Delta[AIC]} = \frac{\overline{AB} \times r}{2} + \frac{\overline{BC} \times r}{2} + \frac{\overline{AC} \times r}{2} = \\ &= \frac{r}{2} (\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC}) = \frac{r}{2} \times P = rp. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Como $\Delta[ADI] \cong \Delta[AIF]$, $\Delta[DBI] \cong \Delta[IBE]$ e $\Delta[FIC] \cong \Delta[IEC]$, temos, respectivamente, que $\overline{AD} = \overline{AF}$, $\overline{DB} = \overline{BE}$ e $\overline{CE} = \overline{CF}$. Seja J o ponto da semi-recta $[AB]$ tal que $\overline{BJ} = \overline{CE}$. Assim

$$\overline{AJ} = \frac{\overline{AD} + \overline{AF}}{2} + \frac{\overline{BD} + \overline{BE}}{2} + \frac{\overline{CE} + \overline{CF}}{2} = \frac{\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA}}{2} = p. \quad (5.6)$$

Então, podemos escrever

$$p - c = \overline{AJ} - \overline{AB} = \overline{BJ}, \quad p - b = \overline{AJ} - \overline{AC} = \overline{DB} \quad \text{e} \quad p - a = \overline{AJ} - \overline{BC} = \overline{AD}. \quad (5.7)$$

Seja K o ponto construído como indicado na Figura 5.8 (é o ponto de intersecção da recta perpendicular a AB, passando por B, com a recta perpendicular a AI, passando por I). O quadrilátero [AKBI] é inscritível numa circunferência de diâmetro [AK]; logo

$$\hat{AIB} + \hat{AKB} = 180^\circ \quad (5.8)$$

(por serem ângulos opostos dum quadrilátero inscrito numa circunferência) e, como

$$2\alpha + 2\beta + 2\varphi = 360^\circ \Leftrightarrow 2(\alpha + \beta + \varphi) = 360^\circ \Leftrightarrow \alpha + \beta + \varphi = 180^\circ,$$

(veja a Figura 5.8) temos

$$\hat{AIB} + \hat{CIE} = 180^\circ, \quad (5.9)$$

donde, de 5.8 e 5.9, vem $\hat{AKB} = \hat{CIE} = \varphi$. Por outro lado $\hat{ABK} = \hat{I\hat{E}C} = 90^\circ$. Então temos, pelo critério de semelhança de triângulos AA (ver secção 3.2.4), que $\Delta[CIE] \approx \Delta[AKB]$, o que implica

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BK}} = \frac{\overline{CE}}{r} = \frac{\overline{BJ}}{r} \Leftrightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{BJ}} = \frac{\overline{BK}}{r}. \quad (5.10)$$

No $\Delta[ALI]$, rectângulo em I, temos

$$\begin{aligned} (\overline{AD} + \overline{DL})^2 &= \overline{AI}^2 + \overline{IL}^2 = (\overline{AD}^2 + r^2) + (r^2 + \overline{DL}^2) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \overline{AD}^2 + 2\overline{AD}\overline{DL} + \overline{DL}^2 &= \overline{AD}^2 + 2r^2 + \overline{DL}^2 \Leftrightarrow r^2 = \overline{AD}\overline{DL} \end{aligned} \quad (5.11)$$

e visto serem $\hat{IDL} = \hat{LBK} = 90^\circ$ e os ângulos $\angle DLI$ e $\angle BLK$ verticalmente opostos, pelo critério de semelhança de triângulos AA, temos

$$\frac{\overline{BK}}{\overline{LB}} = \frac{r}{\overline{DL}} \Leftrightarrow \frac{\overline{BK}}{r} = \frac{\overline{LB}}{\overline{DL}}. \quad (5.12)$$

De 5.10 e 5.12 tem-se $\frac{\overline{AB}}{\overline{BJ}} = \frac{\overline{LB}}{\overline{DL}}$, o que implica $\frac{\overline{AB} + \overline{BJ}}{\overline{BJ}} = \frac{\overline{LB} + \overline{DL}}{\overline{DL}}$, ou ainda, podemos

escrever, $\frac{\overline{AJ}}{\overline{BJ}} \frac{\overline{AJ}}{\overline{AJ}} = \frac{\overline{DB}}{\overline{DL}} \frac{\overline{AD}}{\overline{AD}}$, que juntamente com 5.11 leva a

$$\overline{AJ}^2 r^2 = \overline{BJ} \overline{AJ} \overline{BD} \overline{AD}.$$

Usando as igualdades 5.6 e 5.7, obtemos

$$p^2 r^2 = (p - c)p(p - b)(p - a)$$

donde, pela igualdade mostrada em 5.5, sai a fórmula desejada, ou seja,

$$r p = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}.$$

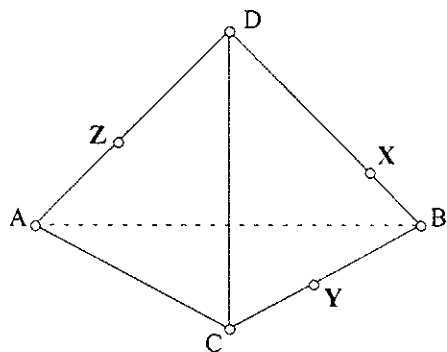


Figura 5.9: No tetraedro [ABCD] estão três pontos, X, Y e Z, sobre três das suas arestas.

5.2 Problemas do plano e do espaço

Nesta secção vamos resolver alguns problemas geométricos no plano e no espaço, nomeadamente problemas envolvendo medidas lineares, áreas e volumes.

5.2.1 Cortes em sólidos

Já vimos na secção 4.3 o resultado de um corte, por um plano, num cubo (ver também no Apêndice VI, na pasta *Capitulo4*, a pasta *Cortes no Cubo*). Aqui propomo-nos apresentar e resolver mais alguns exercícios envolvendo cortes por planos em sólidos e representação da secção obtida.

Exercício 1: Constrói as secções resultantes da intersecção dos sólidos com os planos:

1.1 do tetraedro [ABCD] com o plano XYZ, conforme indicado na Figura 5.9. (Adaptado de XEQMAT, 10º ano, Editorial O Livro – Pág. 35)

Resolução: Ora conhecemos três pontos, X, Y e Z, no tetraedro, do plano de corte. Para desenharmos a secção no tetraedro determinada pelo corte do plano XYZ procedemos da seguinte forma (Figura 5.10): começamos por construir a recta XY, que está no plano da face BCD; esta intersecta a recta DC, que é comum aos planos das faces do tetredro, ACD e BCD, no ponto P; a intersecção da recta ZP com a aresta [AC], do tetraedro, determina o ponto W; a secção pedida é o polígono [WYXZ].

1.2 (Exercício proposto) do cubo [ABCDEFGH] com o plano PQR, em que cada um dos pontos, P, Q e R, está sobre uma aresta diferente, como indicado na Figura 5.11. (Adaptado de MAT – 1ºVol, 10º ano, Lisboa Editora – Pág. 189)

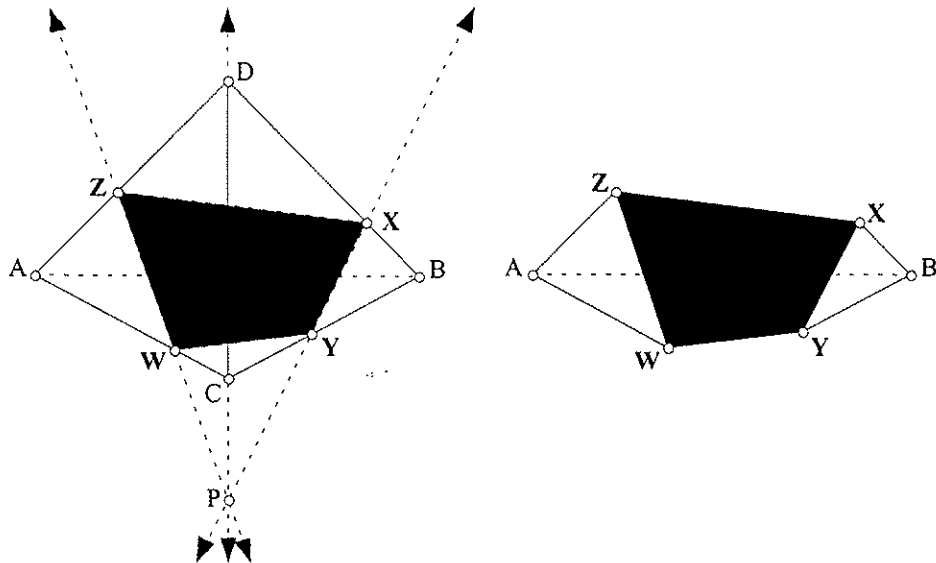


Figura 5.10: A intersecção do plano XYZ com o tetraedro [ABCD] determina a secção, que é um polígono, [WYXZ]. Para tal construímos em primeiro lugar a recta XY que intersecta a recta DC no ponto P, e a intersecção da recta ZP com a aresta [AC], do tetraedro, determina o ponto W.

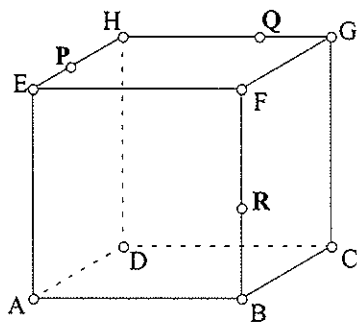


Figura 5.11: Cubo [ABCDEFGH] e os três pontos, P, Q e R, sobre três arestas, [EH], [GH] e [BF], respectivamente.

1.3 do prisma [ABCDEF] com o plano IJK, em que o ponto K pertence à face ABC, como pode observar na Figura 5.12. (Adaptado de MAT – 1ºVol, 10º ano, Lisboa Editora – Pág. 189)

Resolução: Para determinar a intersecção do plano IJK com o prisma [ABCDEF] começamos por construir uma recta paralela à recta IJ passando no ponto K que intersecta a aresta [AB] no ponto P e a aresta [BC] no ponto Q (Figura 5.13). A secção definida pela intersecção do plano IJK com o prisma é então o polígono [PQJI].

Exercício 2: Observa, na Figura 5.14, o cubo representado em PC(30°, 50%), no qual os pontos P, Q, R e I são os pontos médios das arestas em que estão assinalados (Adaptado de MAT – 1ºVol, 10º ano, Lisboa Editora – Pág. 61).

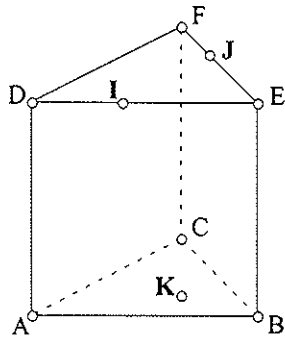


Figura 5.12: Prisma [ABCDEF] e os pontos, I e J sobre a aresta e K está na face ABC.

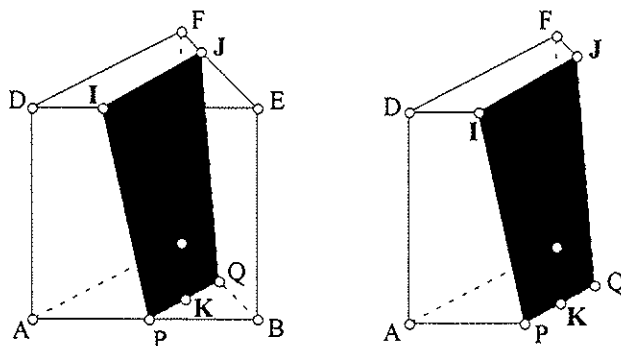


Figura 5.13: A intersecção do plano IJK com o prisma [ABCDEF] é a secção definida pelo polígono [PQJI]. Para tal construímos uma recta paralela à recta IJ passando pelo ponto K que intersecta a aresta [AB] no ponto P e a aresta [CB] no ponto Q.

2.1 Sabendo que a aresta do cubo mede 4 cm, determine o perímetro e a área do triângulo [PQR].

Resolução: Como pode observar na Figura 5.14, para de terminar o lado deste triângulo, $\Delta[PQR]$, equilátero, basta aplicar o teorema de Pitágoras ao $\Delta[PFR]$, rectângulo em F:

$$\overline{PR}^2 = \overline{PF}^2 + \overline{FR}^2 \Leftrightarrow \overline{PR}^2 = 2^2 + 2^2 \Leftrightarrow \overline{PR} = \sqrt{8} \Leftrightarrow \overline{PR} \approx 2.83 \text{ cm}$$

Donde o perímetro do $\Delta[PQR]$ é: $\overline{PR} + \overline{RQ} + \overline{PQ} \approx 8.5 \text{ cm}$.

Para determinarmos a área do $\Delta[PQR]$, podemos fazer em primeiro lugar a sua planificação (Figura 5.15). Começamos então por determinar uma sua altura, [SR]. Para tal aplicamos o Teorema de Pitágoras ao $\Delta[SQR]$, rectângulo em H:

$$\overline{QR}^2 = \overline{SR}^2 + \overline{SQ}^2 \Leftrightarrow (2.83)^2 = \overline{SR}^2 + (1.42)^2 \Leftrightarrow \overline{SR} = \sqrt{6} \Leftrightarrow \overline{SR} \approx 2.45 \text{ cm}$$

Donde, a área do $\Delta[PQR]$ é dada por:

$$\text{Área} = \frac{2.83 \times 2.45}{2} \approx 3.5 \text{ cm}^2.$$

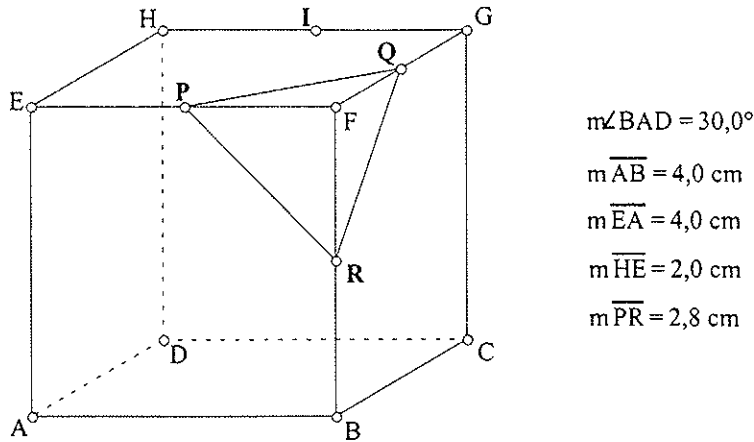


Figura 5.14: Cubo [ABCDEFGH] em PC(30°, 50%). P, Q, R e I são os pontos médios das arestas onde estão assinalados.

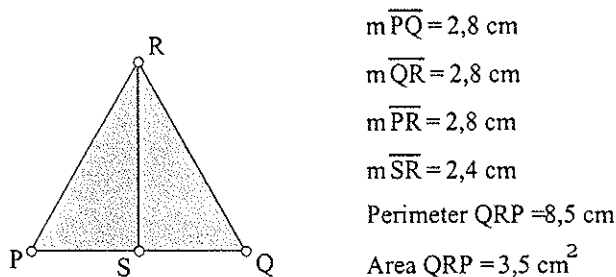


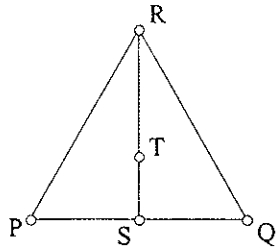
Figura 5.15: Triângulo equilátero [PQR] e [SR] é a sua altura.

2.2 (Exercício proposto) Desenhe a secção determinada no cubo por um plano paralelo ao plano PQR e passando em I (Ver no Apêndice VI, na pasta *Capitulo4* a pasta *Cortes no Cubo*).

2.3 Determine o volume da pirâmide triangular, cuja base é o triângulo equilátero [PQR] e o ponto F o seu vértice.

Resolução: Para obtermos o volume desta pirâmide, vamos começar por calcular a sua altura, uma vez que já conhecemos a área da sua base (obtida em 2.1). Ora, o vértice F da pirâmide [PQRF] projecta-se, na sua base, no ponto T (Figura 5.16) – o centro do triângulo equilátero [PQR] (que, neste caso, por ser um triângulo especial, terá quatro nomes: baricentro; ortocentro; circuncentro; e incentro; pode observar isso mesmo no ficheiro *totaltri.gsp* que o Sketchpad disponibiliza). O ponto T está a $\frac{1}{3}$ da base, relativamente à altura do triângulo, ou seja, $\overline{ST} \approx 0,8$

cm. Assim, aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo [STF], rectângulo em T, vem a altura da pirâmide, [TF]. Antes porém, temos de calcular a hipotenusa [SF] do triângulo [STF]. Esta sai,



$$m\overline{PQ} = 2,8 \text{ cm}$$

$$m\overline{SR} = 2,4 \text{ cm}$$

$$m\overline{ST} = 0,8 \text{ cm}$$

Figura 5.16: No triângulo equilátero [PQR], [SR] é a sua altura e $\overline{ST} = \frac{1}{3}\overline{SR}$.

também por aplicação do teorema de Pitágoras, agora aplicado ao triângulo [PSF], rectângulo em S:

$$\overline{PF}^2 = \overline{PS}^2 + \overline{SF}^2 \Leftrightarrow (2)^2 = (1.4)^2 + \overline{SF}^2 \Leftrightarrow \overline{SF} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \overline{SF} \approx 1.42 \text{ cm}$$

Logo,

$$\overline{SF}^2 = \overline{ST}^2 + \overline{TF}^2 \Leftrightarrow (1.42)^2 = (0.8)^2 + \overline{TF}^2 \Leftrightarrow \overline{TF} = \sqrt{1.36} \Leftrightarrow \overline{TF} \approx 1.17 \text{ cm}$$

Donde, o volume da pirâmide [PQRF] (ver secção 4.1.4) é:

$$\text{Volume} = \frac{1}{3} \text{Área}_{\text{base}} h \approx \frac{1}{3} \times 3.5 \times 1.17 \approx 1.4 \text{ cm}^3.$$

Exercício 3: A Figura 5.17 representa um paralelepípedo [ABCDEFGH] seccionado pelo plano IEH que o divide em dois sólidos diferentes. Sendo $\overline{AD} = 9 \text{ cm}$, $\overline{AB} = 3\overline{AI}$, $\overline{AE} = 2\overline{AI}$ e sabendo que o volume do sólido menor (prisma triangular recto [AIEDJH]) é 49 cm^3 , determine (Adaptado de MAT – 1ºVol, 10º ano, Lisboa Editora – Pág. 63):

3.1 o valor de \overline{AI} ;

Resolução: Ora, o sólido menor é [AIEDJH] e é um prisma triangular recto de base [AIE].

Assim, como $\text{Volume}_{\text{prisma}} = \text{Área}_{\text{base}} \times \text{altura}$ (ver secção 4.1.4), temos sucessivamente

$$\text{Volume}_{\text{prisma [AIEDJH]}} = \frac{\overline{AI} \times \overline{AE}}{2} \times 9 \Leftrightarrow \text{Volume}_{\text{prisma [AIEDJH]}} = \frac{\overline{AI} \times 2\overline{AI}}{2} \times 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{Volume}_{\text{prisma [AIEDJH]}} = 9\overline{AI}^2.$$

Por outro lado, sabemos que, $\text{Volume}_{\text{prisma [AIEDJH]}} = 49 \text{ cm}^3$, logo vem

$$9\overline{AI}^2 = 49 \Leftrightarrow \overline{AI}^2 = \frac{49}{9} \Leftrightarrow \overline{AI} = \sqrt{\frac{49}{9}} \vee \overline{AI} = -\sqrt{\frac{49}{9}} \Leftrightarrow \overline{AI} = \frac{7}{3} \vee \overline{AI} = -\frac{7}{3}$$

Neste caso interessa-nos apenas a raiz positiva: $\overline{AI} = \frac{7}{3} \text{ cm}$, ou, na forma decimal com

aproximação à segunda casa decimal: $\overline{AI} \approx 2.33 \text{ cm}$.

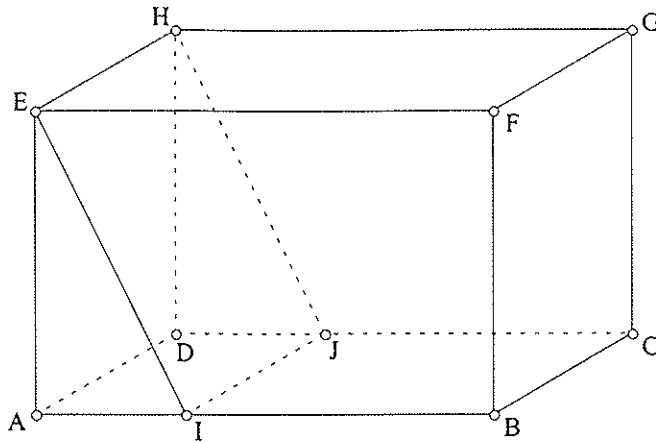


Figura 5.17: Paralelepípedo [ABJIEHGF] seccionado pelo plano ABCD.

3.2 a área da secção definida no paralelepípedo [ABCDEFGH] pelo plano IEH.

Resolução: Como se pode observar na Figura 5.17, trata-se de um rectângulo [EHJI], do qual já conhecemos uma dimensão ($\overline{EH} = 9$ cm). Para determinarmos a segunda dimensão, o lado \overline{EI} , vamos aplicar o teorema de Pitágoras ao $\Delta[AIE]$, rectângulo em A:

$$\overline{EI}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{AI}^2 \Leftrightarrow \overline{EI}^2 = \left(2 \times \frac{7}{3}\right)^2 + \left(\frac{7}{3}\right)^2 \Leftrightarrow \overline{EI}^2 = \frac{245}{9} \Leftrightarrow \overline{EI} = \frac{\sqrt{245}}{3} \Leftrightarrow \overline{EI} \approx 5.22 \text{ cm}$$

Donde a área do rectângulo [EHJI]:

$$\text{Área} = \overline{EI} \times \overline{EH} = \frac{\sqrt{245}}{3} \times 9 = 3 \times 7\sqrt{5} \approx 46.96 \text{ cm}^2.$$

Portanto, a área do rectângulo [EHJI] é, aproximadamente, 46.96 cm^2 .

3.3 o volume do sólido maior obtido pelo corte (prisma quadrangular recto [IBFEJCGH]).

Resolução: Tendo em atenção a Figura 5.17, vamos calcular o volume do sólido pedido por dois processos.

1º Processo: Subtraímos ao volume do paralelepípedo [ABCDEFGH] o volume do prisma triangular recto [AIEDJH] dado.

Como

$$\text{Volume}_{\text{paralelepípedo}} = \overline{AB} \overline{AD} \overline{AE} = 3 \times \frac{7}{3} \times 9 \times 2 \times \frac{7}{3} = 294 \text{ cm}^3.$$

temos que

$$\text{Volume}_{\text{prisma quadrangular}} = \text{Volume}_{\text{paralelepípedo}} - \text{Volume}_{\text{prisma [AIEDJH]}} = 294 - 49 = 245 \text{ cm}^3.$$

2º Processo: o sólido pedido é um prisma recto cuja base é o trapézio [EFBI].

Neste caso o volume do prisma pode ser calculado directamente pela sua fórmula, tendo em atenção que a base é a área de um trapézio cuja base maior é [EF] e a base menor é [IB]:

$$\text{Volume}_{\text{prisma}} = \frac{\overline{EF} + \overline{IB}}{2} \times \overline{FB} \times \overline{FG} \Leftrightarrow \text{Volume}_{\text{prisma}} = \frac{7 + 2 \times \frac{7}{3}}{2} \times 2 \times \frac{7}{3} \times 9 \Leftrightarrow \text{Volume}_{\text{prisma}} = 245 \text{ cm}^3.$$

Portanto, o volume do prisma pedido é 245 cm³.

5.2.2 Geometria no plano

Aqui faremos mais algumas aplicações com vectores, além dos exercícios já estudadas na secção 3.7 acerca deste assunto. Pode o leitor experimentar, no ficheiro *vectors.gsp* (do Sketchpad, em `sketch\samples\sketches\analytic`), operar com dois vectores, observando inclusivamente as suas coordenadas.

Exercício 1. [ABCD] é um rectângulo tal que $\overline{AB} = 2\overline{AD}$. Seja o ponto O centro de [ABCD]. E é o simétrico de A em relação a D, F é o simétrico de A em relação a B. Mostrar que C é o ponto médio de [EF]. (Adaptado do programa de Matemática do Ensino Secundário – DES, Ministério da Educação) – *Rectangulo.gsp*

Resolução: Vamos fazer esta verificação por dois processos (ver Figura 5.18).

1º Processo: Mostramos que $\overline{AE} + \overline{AF} = 2\overline{AC}$ e deduzimos que C é o ponto médio de [EF].

Construímos um ponto G tal que $G = E + \overline{AF}$ e, também, $G = F + \overline{AE}$. Assim [AEGF] é rectângulo. Temos, por construção e uma vez que $\overline{AF} = \overline{EG}$, que

$$\overline{AE} + \overline{AF} = \overline{AE} + \overline{EG} = \overline{AG}.$$

Por outro lado, temos que

$$\overline{AE} + \overline{AF} = 2\overline{AD} + 2\overline{AB} = 2(\overline{AD} + \overline{AB}) = 2(\overline{AD} + \overline{DC}) = 2\overline{AC}.$$

Donde

$$\overline{AG} = 2\overline{AC} \Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{1}{2} \overline{AG}$$

Significa, portanto, que C é o ponto médio de [AG] e logo ponto médio de [EF], pois C é o centro do rectângulo [AFGE].

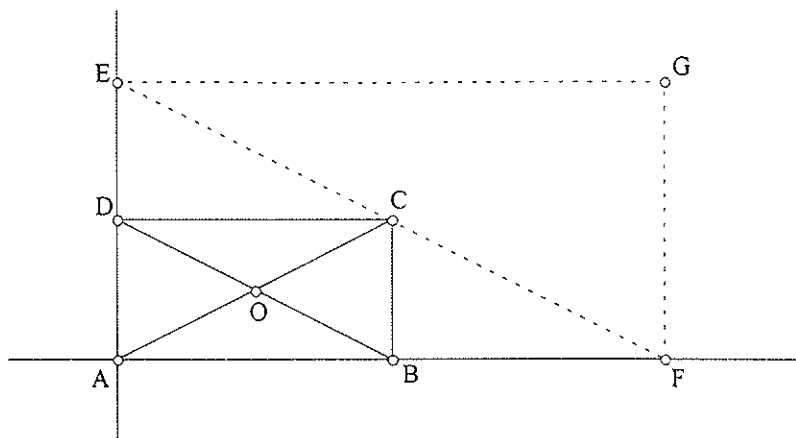


Figura 5.18: $[ABCD]$ é um rectângulo tal que $\overline{AB} = 2\overline{AD}$. O é o centro de $[ABCD]$. O ponto E é o simétrico de A em relação a D , e o ponto F é o simétrico de A em relação a B .

2º Processo: Consideremos \overline{AD} para unidade de comprimento, $\vec{i} = \frac{1}{2}\overline{AB}$ e $\vec{j} = \overline{AD}$.

Vamos determinar as coordenadas dos pontos A, B, C, D, E e F no referencial $(A; \vec{i}, \vec{j})$. Ora, temos:

$$A(0, 0), B(2, 0), C(2, 1), D(0, 1), E(0, 2) \text{ e } F(4, 0)$$

e o ponto médio, M , de $[EF]$ é por (3.3):

$$M\left(\frac{4+0}{2}, \frac{2+0}{2}\right),$$

donde

$$M(2,1).$$

Ou seja, temos $C = M$.

Exercício 2. Determinar analiticamente a recta t que é tangente à circunferência de equação $(x - 5)^2 + y^2 = 5^2$ no ponto de abscissa 8 e de ordenada positiva. (Adaptado do livro Geometria Analítica Plana de J. Sebastião e Silva) – *Recta_tangente.gsp*

Resolução: Sabendo que a recta tangente à circunferência é perpendicular ao raio no ponto de tangência, fazemos $x = 8$, na equação da circunferência dada:

$$(8 - 5)^2 + y^2 = 5^2 \Leftrightarrow 9 + y^2 = 25 \Leftrightarrow y^2 = 16 \Leftrightarrow y = \pm 4$$

Donde o ponto de tangência é $T(8, 4)$ – ver Figura 5.19. Por outro lado, o centro da circunferência é o ponto $C(5, 0)$. Logo a recta TC que une estes dois pontos, T e C , tem, por 3.22, declive:

$$m_{TC} = \frac{4-0}{8-5} = \frac{4}{3}.$$

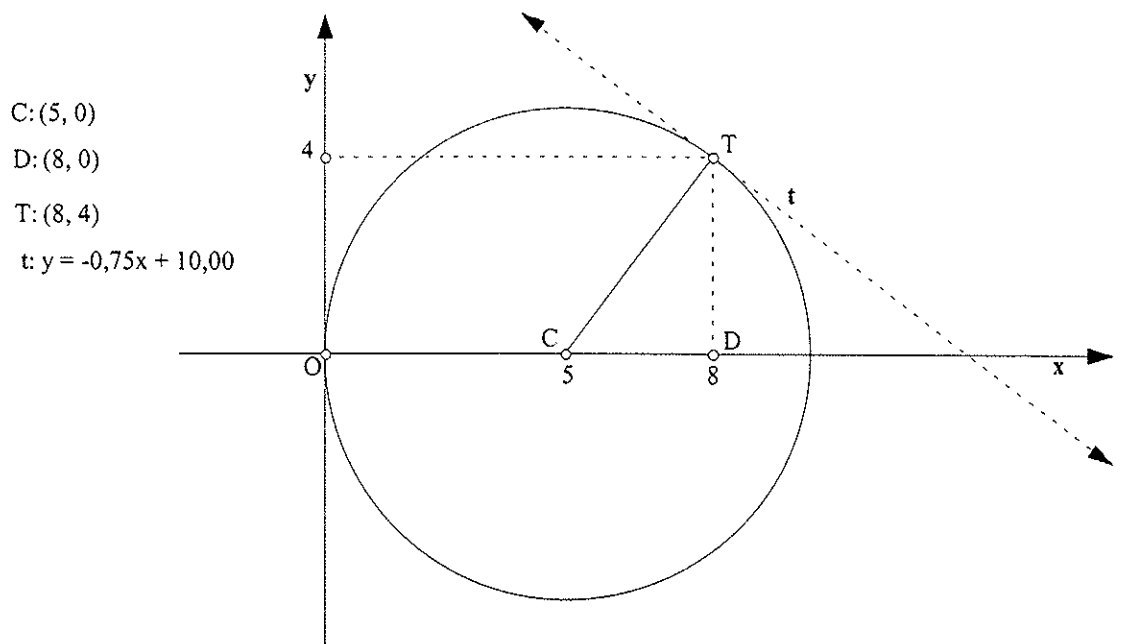


Figura 5.19: Recta t tangente à circunferência $(x - 5)^2 + y^2 = 5^2$ no ponto de abscissa 8 e ordenada positiva.

Então, como a recta tangente pedida é perpendicular a TC , o seu declive m_t será:

$$m_t = -\frac{1}{m_{TC}} = -\frac{3}{4},$$

e como esta recta contém o ponto T , temos que a sua equação é dada por:

$$y - 4 = -\frac{3}{4}(x - 8) \Leftrightarrow y = -\frac{3}{4}x + 10.$$

Exercício 3. Num quadrilátero $[ABCD]$, os pontos médios dos lados são M , N , P e Q . Qual é a razão entre a área do paralelogramo $[MNPQ]$ e a área do quadrilátero $[ABCD]$. (Adaptado da Brochura de Geometria – 10º ano, do DES – Ministério da Educação, Pág 118) – *Paralelogramo1.gss*

Resolução: Ver a demonstração na Brochura de Geometria – 10º ano, do DES – Ministério da Educação, Pág 118.

Exercício 4. A que condições tem que obedecer o quadrilátero $[ABCD]$ para que o paralelogramo que se obtém unindo os pontos médios dos seus lados (ver Exercício 1 da secção 3.7.4 – (ii)) seja:

- um rectângulo;

- um losango;
- um quadrado.

(Adaptado da Brochura de Geometria – 10º ano, do DES – Ministério da Educação, Pág 119) – *Paralelogramo.gss*

Resolução: Para que seja um rectângulo o quadrilátero é tal que os pontos médios dos seus lados têm que estar sobre uma circunferência cujo centro é o centro do rectângulo; para que seja um losango o quadrilátero tem de ser um rectângulo; para que seja um quadrado o quadrilátero tem de ser um quadrado.

Exercício 5. Mostra que o baricentro, de um triângulo [ABC], divide cada mediana em dois segmentos de recta tais que o comprimento de um é o dobro do comprimento do outro. (Adaptado da Brochura de Geometria – 10º ano, do DES – Ministério da Educação, Pág 119) – *Baricentro.gss*

Resolução: Ver a demonstração na Brochura de Geometria – 10º ano, do DES – Ministério da Educação, Pág 119.

Exercício 6. Considera o referencial c. o. n., xOy, da Figura 5.20. (Adaptado de MAT – 1ºVol, 10º ano, Lisboa Editora – Pág. 199) – *Exercicio6.gsp*

6.1 Escreve uma equação da circunferência de centro C e raio \overline{AC} .

Resolução: Ora, os pontos têm coordenadas: C(5, -5) e A(5, -10); donde $\overline{AC} = 5$. Logo a equação da circunferência pedida é

$$(x - 5)^2 + (y + 5)^2 = 5^2 \Leftrightarrow (x - 5)^2 + (y + 5)^2 = 25$$

6.2 Determina uma condição da zona sombreada.

Resolução: Trata-se da região do plano dentro do círculo, de centro C e raio \overline{AC} , e à direita da recta vertical AB, não a incluindo:

$$(x - 5)^2 + (y + 5)^2 \leq 25 \wedge x > 5.$$

Exercício 7. Na Figura 5.21, está representado um referencial c. o. n., xOy, em que [AB] é um diâmetro da circunferência de centro C, paralelo ao eixo dos xx. (Adaptado de MAT – 1ºVol, 10º ano, Lisboa Editora – Pág. 201) – *Exercicio7.gsp*

7.1 Escreve uma equação da circunferência.

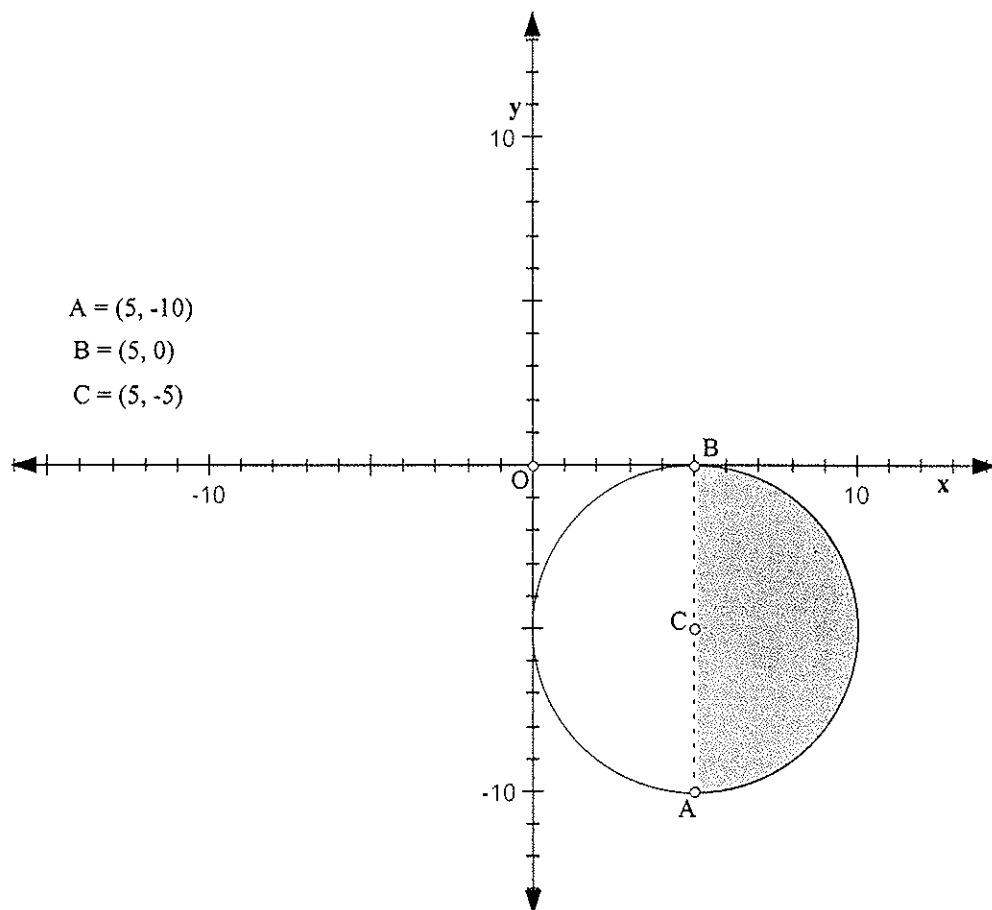


Figura 5.20: Referencial c. o. n. xOy . Está sombreado (cinzento) o semicírculo, de centro C e raio \overline{AC} .

Resolução: Ora, os pontos C e A têm coordenadas: $C(4, 4)$, $A(0, 4)$; donde o raio $\overline{AC} = 4$. Logo a equação da circunferência pedida é:

$$(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 16.$$

7.2 Determina uma condição que represente a zona sombreada (cinzento).

Resolução: Começemos por escrever as equações das rectas AD e BD . Como conhecemos dois pontos da recta AD , $A(0, 4)$ e $D(4, 0)$, podemos escrever o seu declive, tendo em atenção 3.22, que é dado por: $m_{AD} = \frac{4-0}{0-4} = -1$. Da Figura 5.21, podemos escrever a ordenada na origem desta recta: $b = 4$. Donde, por 3.21, temos a equação reduzida da recta AD : $y = -x + 4$.

Da mesma forma obtemos a equação reduzida da recta BD : Sendo $B(8, 4)$ e $D(4, 0)$, temos que $m_{BD} = \frac{4-8}{0-4} = 1$; a ordenada na origem da recta BD é $b = -4$; e portanto a sua equação reduzida é $y = x - 4$.

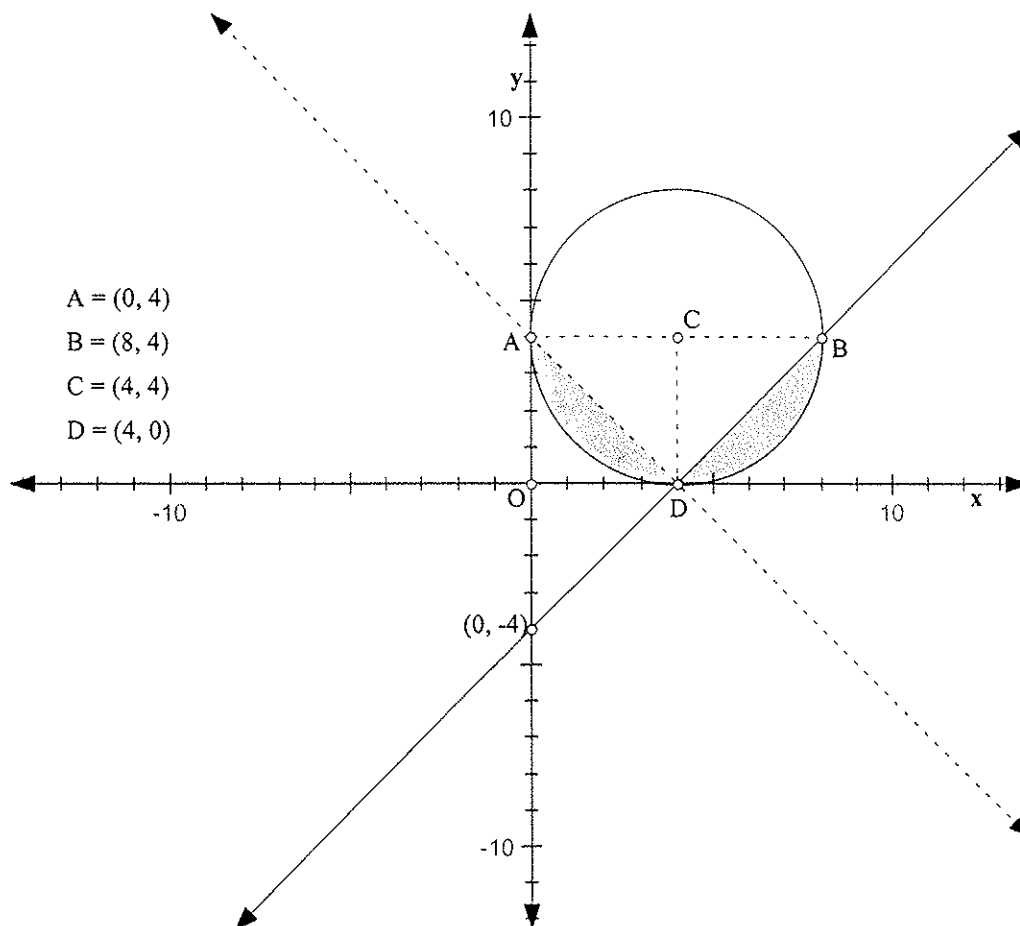


Figura 5.21: Referencial c. o. n. xOy. Região do plano no círculo, de centro C e diâmetro \overline{AB} , e abaixo das rectas DB e DA (não incluindo esta).

No ponto anterior, 7.1, escrevemos a equação da circunferência de centro C e raio \overline{AC} . Assim, a região sombreada é definida pela condição:

$$[(x - 4)^2 + (y - 4)^2 \leq 16 \wedge y < -x + 4] \vee [(x - 4)^2 + (y - 4)^2 \leq 16 \wedge y \leq x - 4].$$

7.3 Calcule a área da zona sombreada, considerando uma aproximação a menos de uma centésima.

Resolução: A área do segmento circular [DB], indicado na Figura 5.21, é obtida calculando a diferença entre a área do sector circular⁹⁹ [CDB] e a área do triângulo [CDB]. Ora, a área do sector circular [CDB] é dada por:

$$\text{Área} = \frac{90^\circ}{360^\circ} \times \pi \times 4^2 \approx 12.56 \text{ cm}^2.$$

⁹⁹ Se α é a amplitude do ângulo do sector menor (veja a Figura 2.3) e está escrito em radianos, a área do sector circular é dada por: $\text{Área} = \frac{\alpha}{2} r^2$; Se α está escrito em graus, a área do sector circular é dada por: $\text{Área} = \frac{\alpha}{360^\circ} \pi r^2$.

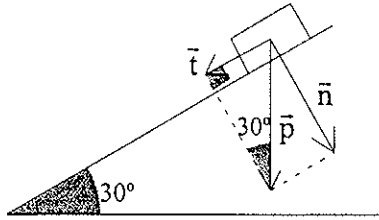


Figura 5.22: Um corpo, que pesa 2 kg, $\|\vec{p}\| = 2$, cai num plano inclinado de 30° . A força \vec{n} é perpendicular ao plano e a força \vec{t} tem a direcção da queda do corpo. $\vec{p} = \vec{n} + \vec{t}$ e $\vec{n} \perp \vec{t}$.

A área do triângulo [CDB] é $\text{Área} = \frac{4 \times 4}{2} = 8 \text{ cm}^2$. Assim, a área do segmento circular [DB] é dada por: $\text{Área} \approx 12.56 - 8 \approx 4.56 \text{ cm}^2$. Como a área da zona sombreada é a área de dois sectores circulares iguais, o sector circular [AD] e [DB], temos:

$$\text{Área}_{\text{zona sombreada}} \approx 2 \times 4.56 \approx 9.12 \text{ cm}^2.$$

5.3 Aplicações à vida real e a outras ciências

Nesta secção vamos trabalhar algumas aplicações/problemas, apresentando a sua resolução para o Sketchpad. O leitor pode explorar ficheiros *.GSS que o próprio Sketchpad dispõe para construção de fractais (em: `\sketch\samples\scripts\fractals`).

Aplicação 1 – Na Figura 5.22, observamos um corpo que pesa 2 kg a cair num plano inclinado a 30° . Decompõe o vector peso, \vec{p} , como soma das forças \vec{n} e \vec{t} , uma perpendicular ao plano e outra com a direcção da queda do corpo, e calcule o valor de cada uma delas. (Adaptado de MAT – 1ºVol, 10º ano, Lisboa Editora – Pág. 202)

Resolução: Por observação da Figura 5.22, como $\vec{p} = \vec{n} + \vec{t}$ e $\vec{n} \perp \vec{t}$, podemos escrever:

$$\cos 30^\circ = \frac{\|\vec{n}\|}{\|\vec{p}\|} \Leftrightarrow \cos 30^\circ = \frac{\|\vec{n}\|}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\|\vec{n}\|}{2} \Leftrightarrow \|\vec{n}\| = \sqrt{3}$$

e

$$\sin 30^\circ = \frac{\|\vec{t}\|}{\|\vec{p}\|} \Leftrightarrow \sin 30^\circ = \frac{\|\vec{t}\|}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{\|\vec{t}\|}{2} \Leftrightarrow \|\vec{t}\| = 1.$$

Donde, significa que a força \vec{t} tem a intensidade de 1 kg e a força \vec{n} tem a intensidade de $\sqrt{3}$ kg.

$$d(C, A) = r = 1.25 \text{ m}$$

$$d(B, D) = 0.5 \text{ m}$$

$$d(B, E) = 3.5 \text{ m}$$

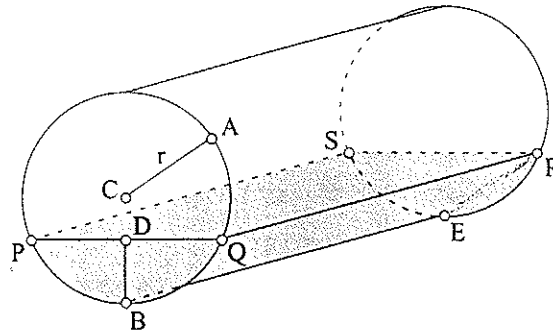
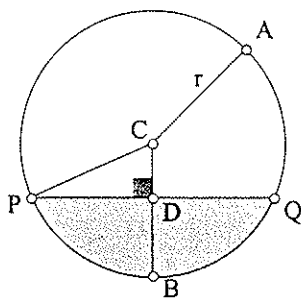


Figura 5.23: Depósito cilíndrico com raio $r = \overline{CA} = 1.25 \text{ m}$, a sua altura é $\overline{BE} = 3.5 \text{ m}$ e a altura do gasóleo é $\overline{BD} = 0.5 \text{ m}$.



$$d(C, A) = r = 1.25 \text{ m}$$

$$d(B, D) = 0.5 \text{ m}$$

Figura 5.24: Base do depósito cilíndrico. [PDC] é um triângulo rectângulo em D.

Aplicação 2 – Um agricultor tem no campo um depósito cilíndrico parcialmente cheio com gasóleo. Pretende retirar do local esse depósito, mas, por causa do peso, tem primeiro que remover o gasóleo do seu interior. Acontece que não sabe quantos litros lá estão. Apenas dispõe dos dados junto à Figura 5.23. (Adaptado de <http://www.ticensino.com/>)

2.1 Identifique a secção determinada pelo corte do plano definido pela tona do gasóleo no depósito cilíndrico e determine a sua área.

Resolução: A secção é rectangular, o rectângulo [PQRS]. Para calcularmos a área deste rectângulo temos, antes de mais, de calcular o comprimento da corda [PQ]. Podemos pensar no triângulo [PDC], rectângulo em D – Figura 5.24. Conhecemos a hipotenusa [PC],

$$\overline{PC} = r = 1.25 \text{ m} \text{ e } \overline{CD} = r - \overline{BD} = 1.25 - 0.5 = 0.75 \text{ m.}$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo [PDC], vem

$$\overline{PC}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{PD}^2 \Leftrightarrow (1.25)^2 = (0.75)^2 + \overline{PD}^2 \Leftrightarrow \overline{PD} = \sqrt{1.5625 - 0.5625} \Leftrightarrow \overline{PD} = 1.$$

Donde a área do rectângulo é:

$$\text{Área}_{\text{rectângulo}} = \overline{PQ} \times \overline{QR} = 2\overline{PD} \times \overline{BE} = 2 \times 1 \times 3.5 = 7 \text{ m}^2.$$

Ou seja, a área da secção obtida é de 7 m^2 .

2.2 Calcule a área do segmento circular [PQ].

Resolução: A partir da Figura 5.24, observamos que a área do segmento circular [PQ], é obtida calculando a diferença entre a área do sector circular [CPQ] e a área do triângulo [CPQ]. Para obtermos a área do sector circular [CPQ], temos de calcular a medida do ângulo PCQ. Começemos por calcular a medida do ângulo PCD:

$$\text{sen}(\widehat{PCD}) = \frac{\overline{PD}}{\overline{PC}} \Leftrightarrow \text{sen}(\widehat{PCD}) = \frac{1}{1.25} \Leftrightarrow \text{sen}(\widehat{PCD}) = 0.8,$$

significa que

$$(\widehat{PCD}) \approx 53.1^\circ, \text{ ou seja, } (\widehat{PCQ}) \approx 106.3^\circ.$$

Assim, a área do sector circular [CPQ] é dada por:

$$\text{Área} = \frac{106.3^\circ}{360^\circ} \times \pi \times (1.25)^2 \approx 1.449 \text{ m}^2.$$

A área do triângulo [CPQ] é

$$\text{Área} = \frac{\overline{PQ} \times \overline{DC}}{2} = \frac{2 \times 0.75}{2} = 0.75 \text{ m}^2.$$

E portanto, a área do segmento circular [PQ] é

$$\text{Área} \approx 1.449 - 0.75 \approx 0.699 \text{ m}^2.$$

2.3 Quantas vasilhas de 10 litros tem que utilizar na recolha do gasóleo?

Resolução: Vamos começar por calcular o volume ocupado pelo gasóleo no cilindro, que é, aproximadamente, o volume do sólido [PQBSRE], que é uma parte do cilindro – Figura 5.23. Assim vamos aplicar a fórmula: Volume = Área_b h; em que a área da base é a área do segmento circular [PQ] e a altura é \overline{BE} :

$$\text{Volume} = 0.699 \times 3.5 \Leftrightarrow \text{Volume} = 2.4465 \text{ m}^3.$$

Tendo em conta que 1 m³ equivale a 1000 litros, significa que temos cerca de 2446.5 litros de gasóleo. Portanto, o agricultor necessita de 245 vasilhas de 10 litros para recolher o gasóleo.

Aplicação 3 – Lei dos senos e Lei dos co-senos¹⁰⁰ (Araújo 1999) – *Lei_Senos.gss* e *Lei_Co_senos.gss*.

¹⁰⁰ A Lei dos co-senos diz: Em qualquer triângulo, o quadrado de cada lado é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados, menos o dobro do produto desses dois lados e do co-seno do ângulo por eles formado. Ou seja, de acordo com o triângulo [ABC], representado na Figura 5.25, são válidas as fórmulas:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha, \quad b^2 = c^2 + a^2 - 2ac \cdot \cos\beta \quad \text{e} \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\varphi.$$

A Lei dos senos (secção 2.2) e a Lei dos co-senos tem aplicações em variadas situações práticas, particularmente na medição de altitudes e de distâncias entre pontos inacessíveis.

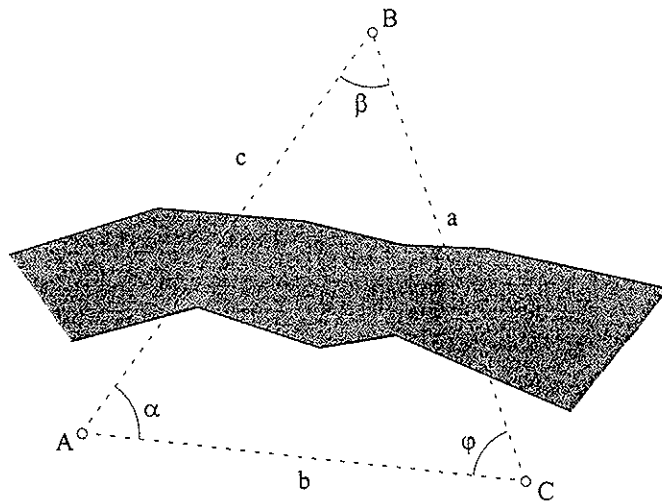


Figura 5.25: No triângulo [ABC], os pontos A e B estão a uma distância inacessível; temos que: $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$, $\alpha = \angle BAC$, $\beta = \angle CBA$ e $\varphi = \angle ACB$.

3.1 Medir a distância entre um ponto acessível A e um ponto inacessível B (Figura 5.25)

Resolução: Imaginemos que os pontos A e B estão, por exemplo, em margens opostas de um rio (como na Figura 5.25) que não podemos atravessar. Escolhemos um ponto C, acessível a partir de A, ou seja, na mesma margem que A. Ficamos assim com um $\Delta[ABC]$, em que

$$a = \overline{BC}, b = \overline{AC}, c = \overline{AB}, \alpha = \angle BAC, \beta = \angle CBA \text{ e } \varphi = \angle ACB.$$

Medimos [AC], e usamos um instrumento empregue em *Topografia* para medir ângulos horizontais ou verticais (o *Teodolito*), estando o observador colocado num vértice, e sendo visíveis os outros dois pontos que definem o ângulo. Neste caso, medimos α e φ ; e o terceiro ângulo, β , é dado por: $\beta = 180^\circ - (\alpha + \varphi)$. Pela Lei dos Senos, de (2.18), a distância procurada é

$$c = \frac{b \operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{b \operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}(\alpha + \varphi)}$$

3.2 Medir a distância entre pontos A e B, ambos inacessíveis, como na Figura 5.26.

Resolução: Os pontos A e B estão na margem oposta àquela onde nos encontramos (veja Figura 5.26). Escolhendo um ponto acessível C, usando o instrumento de medida adequado, o Teodolito, podemos medir: $\alpha = \angle BAC$, $\beta = \angle CBA$ e $\varphi = \angle ACB$, e pela Lei dos senos, aplicada ao $\Delta[ABC]$, calculamos $b = \overline{AC}$ e $a = \overline{BC}$:

$$b = \frac{a \operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha} \text{ e } c = \frac{b \operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta}.$$

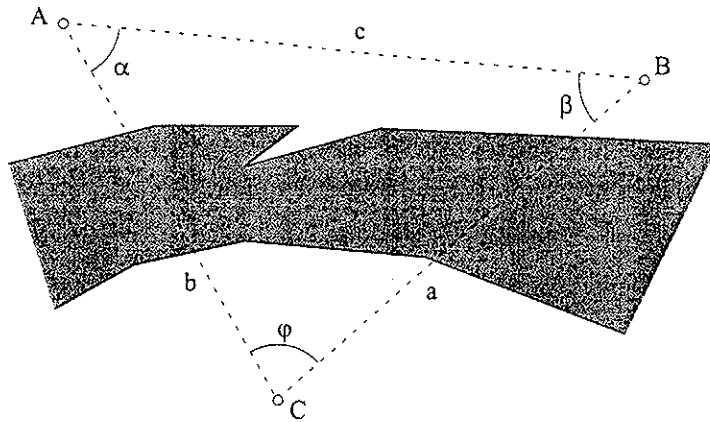


Figura 5.26: No triângulo [ABC], representando pontos a distâncias inacessíveis, temos que:
 $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$, $\alpha = \angle BAC$, $\beta = \angle CBA$ e $\varphi = \angle ACB$.

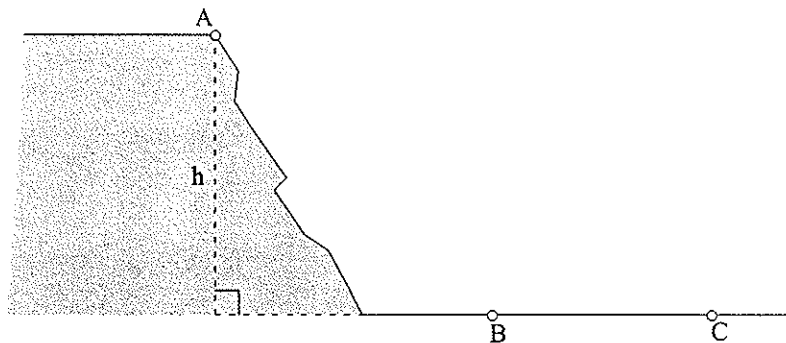


Figura 5.27: A é um ponto que está no cimo de uma escarpa sobre a planície BC. h é a altura do ponto A relativamente a BC.

Donde, pela Lei dos co-senos aplicada ao $\Delta[ABC]$, a distância procurada é:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi}.$$

3.3 (Exercício proposto) Diga como deve proceder um observador colocado na planície BC para calcular a altura, relativamente a BC, do ponto A situado no topo de uma escarpa, como representamos na Figura 5.27. Note-se que o ponto A é visível mas inacessível e o pé da perpendicular baixada de A sobre a planície BC está também inacessível.

Resolução: Sugerimos a aplicação da Lei dos senos ou da lei dos co-senos e do Teorema de Pitágoras a dois triângulos rectângulos adequados.

Aplicação 4 – A Árvore Fractal (Soarez, Lopes e Martins, 2000) – *Arvore_Fractal.gss*.

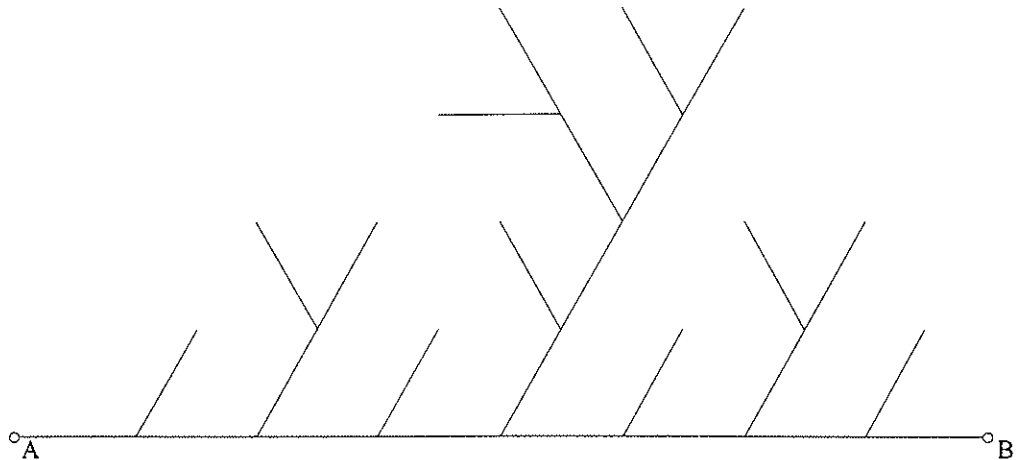


Figura 5.28: Árvore fractal de 2 passos, a partir dos pontos A e B.

Resolução: Abrindo um novo Sketch (*New Sketch*) e uma nova script (*New Script*), no menu File, colocados lado a lado, clicamos no botão *REC* para começar a gravar. Tomamos consecutivamente os seguintes procedimentos:

- Utilizando a ferramenta *segmento de recta* construímos um segmento de recta horizontal [AB];
- Seleccionamos o segmento de recta [AB] e no menu *Construct* a opção *Point At Midpoint*, para construirmos o ponto médio de [AB], C;
- Seleccionamos o ponto C e depois o ponto A e no menu *Construct* a opção *Circle By Center And Point*, para construirmos uma circunferência de centro C e raio \overline{CA} ;
- Seleccionamos o ponto C e no menu *Transform* a opção *Mark Center "C"*;
- Seleccionamos o ponto B e no menu *Transform* a opção *Rotate*, e escrevemos 60° na caixa de diálogo que se abre, para rodarmos 60° o ponto B;
- Chamemos D ao novo ponto ($\widehat{BCD} = 60^\circ$);
- Seleccionamos o ponto C e depois o ponto D e no menu *Construct* a opção *Segment*, para construirmos o segmento de recta [CD];
- Seleccionamos o ponto A e depois o ponto C e no *Script* clicamos no botão *LOOP*;
- Seleccionamos o ponto C e depois o ponto D e no *Script* clicamos no botão *LOOP*;
- Seleccionamos o ponto C e depois o ponto B e no *Script* clicamos no botão *LOOP*;
- Seleccionamos todos os pontos e a circunferência e no menu *Display* a opção *Hide Objects*, para esconder os objectos.
- No *Script* clicamos no botão *STOP* para parar a gravação.

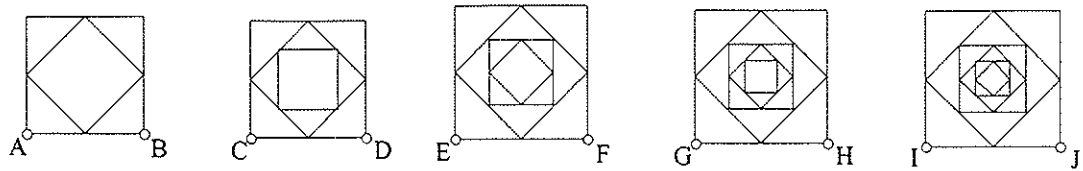


Figura 5.29: Quadrados inscritos uns nos outros. Com o quadrado exterior de lado: [AB] – 1 passo de recursão; [CD] – 2 passos de recursão; [EF] – 3 passos de recursão; [GH] – 4 passos de recursão; [IJ] – 5 passos de recursão.

Abrindo um novo Sketch, no menu File, construindo dois pontos e seleccionando-os, e clicando *PLAY* no Script, e optando por uma recursão de 2 passos, na caixa de diálogo que se abre, obtemos uma figura semelhante à Figura 5.28.

Aplicação 5 – Quadrados inscritos uns nos outros (Retirado de MATEMÁTICA – 1ºVol, 10º ano, Rumo – Pág. 182) – *Quadrados_Inscritos.gss*.

Resolução: Abrindo um novo Sketch (*New Sketch*) e uma nova script (*New Script*), no menu File, clicamos no botão *REC* para começar a gravar. Tomamos os seguintes procedimentos:

- Utilizando a ferramenta *segmento de recta* construímos um segmento de recta horizontal [AB];
- Seleccionamos o ponto B e no menu *Transform* a opção *Mark Center "B"*;
- Seleccionamos o ponto A e no menu *Transform* a opção *Rotate*, e escrevemos -90° na caixa de diálogo, para rodarmos -90° o ponto A;
- Seleccionamos o ponto A e no menu *Transform* a opção *Mark Center "A"*;
- Seleccionamos o ponto B e no menu *Transform* a opção *Rotate*, e escrevemos 90° na caixa de diálogo, para rodarmos 90° o ponto B;
- Seleccionamos o segmento de recta [AB] e no menu *Construct* a opção *Point At Midpoint*, para construirmos o ponto médio de [AB], E;
- Seleccionamos o segmento de recta [BC] e no menu *Construct* a opção *Point At Midpoint*, para construirmos o ponto médio de [BC], F;
- Seleccionamos o segmento de recta [CD] e no menu *Construct* a opção *Point At Midpoint*, para construirmos o ponto médio de [CD], G;
- Seleccionamos o segmento de recta [DA] e no menu *Construct* a opção *Point At Midpoint*, para construirmos o ponto médio de [DA], H;
- Seleccionamos o ponto E e depois o ponto F e no *Script* clicamos no botão *LOOP*;
- Seleccionamos todos os pontos e no menu *Display* a opção *Hide Points*;

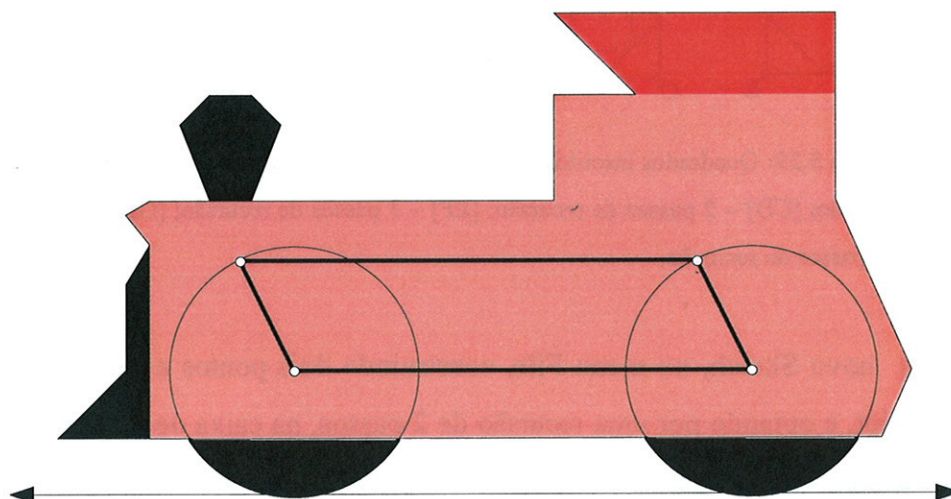


Figura 5.30: Locomotiva. Veja o ficheiro *Maquina.gsp* na pasta *Capitulo 5* do Apêndice VI.

- No *Script* clicamos no botão *STOP* para parar a gravação.

Abrindo um novo Sketch, no menu File, podemos obter uma sequência de quadrados inscritos uns nos outros, como a apresentada na Figura 5.29, construindo dois pontos, seleccionando-os, clicando *PLAY* no Script, e optando por recursões sucessivas de 1 a 5 passos, na caixa de diálogo.

Aplicação 6 (Exercício proposto) – Locomotiva (retirado dos apontamentos da cadeira “Tópicos de Geometria”, do Professor Pedro Augusto, na Universidade da Madeira – 2000) – *Maquina.gsp*

Construa uma máquina “animada” com um paralelogramo de forma a que a rotação de lados opostos faça rodar um par de circunferências (ou, equivalentemente, um ponto sobre a circunferência) como se de uma locomotiva se tratassem – Figura 5.30.

Bibliografia / Referências

Bibliografia

- Araújo, P. V. (1999); Curso de Geometria; 2ª Ed.; Gradiva
- Boyer, C. B. (1996); História da Matemática; Gomide, E. F. (1974); 12ª Reimpressão; Editora Edgard Blücher LTDA
- Câmara, A. M. (1997); Matemática – Teoria e Prática – 10º Ano; Edições Rumo
- Câmara, A. M. (1998); Matemática – Teoria e Prática – 11º Ano; Edições Rumo
- Câmara, A. M. (1997); Matemática – Teoria e Prática – 12º Ano, 1º Volume; 2ª Ed.; Edições Rumo
- Durão, E. G., Baldaque, M. N. (1999); MAT 8 – 8º ANO – 1º Volume; Texto Editora
- Lima, Y., Gomes, F.; XEQMAT – Matemática 10º; Editorial O Livro
- Lima, Y., Gomes, F.; XEQMAT – Matemática 11º; Editorial O Livro
- Lima, Y., Gomes, F.; XEQMAT – Matemática 12º; 1ª Ed.; Editorial O Livro
- Lopes, A. V., et al.; Matemática 11 (Vol. 1) ; Edições Contraponto
- Loureiro, C., Oliveira, A. F., Ralha, E., Bastos, R. (1998); Brochura de Geometria – 11º ano, 1ª Ed.; Ministério da Educação, Departamento de Ensino Secundário
- Neves, M. A. F., Faria, M. L. M.; MATEMÁTICA 8º ANO; Porto Editora
- Neves, M. A. F., et al.; 10º matemática, 1º e 2º volume; Porto Editora
- Neves, M. A. F., et al.; 11º matemática; Porto Editora
- Neves, M. A. F., et al.; 12º matemática; Porto Editora
- Oliveira, A. J. F. de (1995), Geometria Euclidiana; Universidade Aberta
- Oliveira, A. J. F. de (1997), Transformações Geométricas; Universidade Aberta
- Santos, J. M. S. (1999); A utilização de Computadores no Ensino/Aprendizagem da Matemática e da Física-Química; Núcleo de Estágio de Matemática da Escola Secundária de Barcelos 98/99
- Silva, J. S. (1970); Geometria Analítica Plana – 7º Ano dos Liceus; 2ª Ed.; Empresa Literária Fluminense, L.DA
- Silva, J. S. (1975); Compêndio de Matemática – 3º Volume; Curso complementar do Ensino Secundário; Edição GEP
- Soler, G. G., Galvés, A. S. (1990); Poliedros; Editorial Síntesis
- Struik, D. J. (1987); História Concisa das Matemáticas; Guerreiro, J. C. S. (1989); 1ª Ed.; Gradiva
- Veloso, E. (1998); Geometria: temas actuais: materiais para professores; 1ª Ed.; Instituto de Inovação Educacional

Referências

- Cunha, L. V. (1997); “Desenho Técnico”; 10ª Ed; Fundação Calouste Gulbenkian; p. 137 – 141; p. 154 – 166; p. 177, 178; p. 232 – 236.
- Dalcín, M. (1998), Revista do Professor de Matemática – Sociedade Brasileira de Matemática, nº 36, p. 3 – 5
- Dalcín, M. (2000), Revista do Professor de Matemática – Sociedade Brasileira de Matemática, nº 42, p. 28 – 30
- Ferreira, J. C. (1987); “Introdução à Análise Matemática”; Fundação Calouste Gulbenkian; p. 543.
- Ferreira, M. A. M.; Amaral, I. (1996); “Matemática – Primitivas e Integrais”; 5ª Ed.; Edições Silabo; p. 159 – 171.
- Magalhães, L. T. (1998); “Álgebra Linear como Introdução a Matemática Aplicada”; 8ª Ed.; Texto Editora; p. 217 – 220.
- Marques, S. M. (1991); in Galeria de Matemáticos; Direcção J. M. E.(eds); A. A. F. D. L. (pub); p. 70 – 74
- Monteiro, A. J. A. (1980); “Álgebra Linear e Geometria Analítica”; Edição da Associação dos Estudantes da Faculdade de Ciências de Lisboa; p. 127 – 135
- Oliveira, A. J. F. de (1991), Lógica e Aritmética; Gradiva; p. 12, 13
- Oliveira, A. J. F. de (1991), Apontamentos para o curso de História da Matemática, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, p. 128
- Roe, J. (1993); “Elementary Geometry”; Oxford Univ. Press, p. 16 -18
- Santos, F. B. (1997); “Sebenta de Matemática Gerais – Álgebra Linear”; 11ª Ed.; Plátano Editora; p. 35 – 69; p. 165 – 181.
- Shaffer, D. (1995); “Exploring Trigonometry with The Geometer’s Sketchpad”; Key Curriculum Press.
- Soarez, L., Lopes, P. C., Martins, S. C. (2000); Sebenta; Sketchpad na aula de Matemática; Centro de Investigação em Didáctica da Matemática da Universidade da Madeira, p. 20
- Tahan, M. (1976); “As Maravilhas da Matemática”; 4ª Ed.; Bloch Editores S. A.; p. 35 – 69; p. 227 – 249.
- “The Geometer’s Sketchpad” (1995), User Guide and Reference Manual – Windows Version 3; Key Curriculum Press.

Apêndice I – Notas explicativas para "The Geometer's Sketchpad™"

Neste apêndice, não pretendemos elaborar e substituir o manual do "The Geometer's Sketchpad" (versão 3.10, 1997), explicando detalhadamente os seus menus, as suas ferramentas e, enfim, todo o leque de opções que dispõe para elaborarmos/resolvermos exercícios/aplicações de forma dinâmica, em geometria, para o ensino secundário (ou outro nível de ensino). Vamos aqui apresentar, apenas, de forma sumária este software. Apresentaremos cada uma das ferramentas, algumas das opções/comandos de cada um dos menus, daremos algumas indicações sobre como criar animações em ficheiros do tipo *.GSP (designados por *Sketch*) e como elaborar rotinas em ficheiros do tipo *.GSS (designados por *Scripts*).

Recomendamos vivamente ao leitor que vá, a cada passo, experimentando afim de se familiarizar (o grau de familiarização será, certamente, directamente proporcional ao tempo que lhe dedicar) ao software. A propósito, para sua recreação, notamos que o próprio software dispõe de alguns ficheiros GSP (por exemplo o ficheiro *Readme.gsp*) e GSS, que ilustram variadas situações, contidos em directórios. O primeiro directório disponível, *samples*, contém outros três directórios: *presentn*, *scripts* e *sketches*; e cada um contém ficheiros ou ainda outros directórios, que deverão ser também, evidentemente, devidamente explorados.

(i) A janela principal

Ao acedermos a este software o primeiro écran que obtemos é uma janela principal como o apresentado na Figura I.1: Na primeira linha temos, do lado esquerdo, o nome do programa e, do lado direito, os botões para minimizar/maximizar a janela principal e o botão para fechar o programa; Na segunda linha temos a barra dos menus; Na terceira linha, do lado esquerdo, temos a indicação do número do Sketch aberto (poderá ser o nome de um ficheiro já anteriormente guardado – notamos que podem estar abertas uma ou mais janelas em cada sessão de trabalho), do lado direito os botões para minimizar/maximizar a janela de trabalho do Sketch ou do ficheiro, e o botão para fechar o Sketch ou o ficheiro; A coluna do lado esquerdo, na janela de trabalho, é a barra de ferramentas; O fundo branco é onde se realiza o trabalho; Do lado direito desta janela temos um elevador; Na última linha, o programa dá-nos informações acerca do que estamos a fazer: de qual o

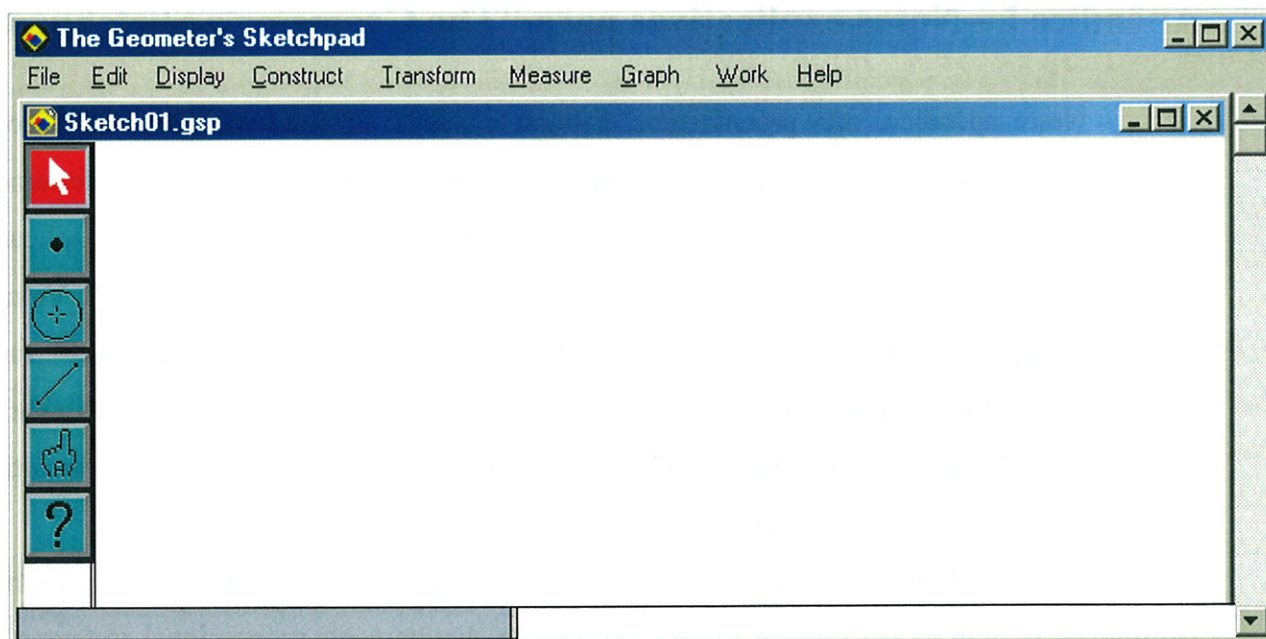



Figura I.1: Janela principal do “The Geometer’s Sketchpad”.


botão seleccionado da barra de ferramentas; quando utilizamos uma das ferramentas; quando percorremos a janela de trabalho com o rato, identifica os objectos; etc.


(ii) A barra de ferramentas


A barra de ferramentas é composta por seis botões, dois dos quais têm três alternativas cada. Vamos descrever cada uma das dez ferramentas.


Botão seta e *translação*:  – esta ferramenta, chamar-se-á simplesmente, daqui em diante, por *seta* – é o primeiro botão da barra de ferramentas e serve, quando seleccionada (apresenta-se, no fundo branco, na forma de seta negra), para seleccionar individualmente objectos e movê-los, em qualquer direcção, clicando sobre eles (aproximamos o cursor do objecto a seleccionar até aparecer uma seta negra na horizontal e com sentido da direita para a esquerda) e arrastando o rato: ponto, circunferência, segmento de recta, recta e semi-recta. Serve também para, quando queremos, seleccionar em simultâneo um conjunto de objectos e arrastá-los. Para tal, mantemos pressionada a tecla “shift” e em simultâneo com a seta vamos seleccionando os objectos pretendidos: pontos, pontos e rectas, segmentos de recta, etc.; ou clicando o rato sobre um ponto conveniente abrimos uma janela rectangular, tracejada, por forma a abranger os objectos pretendidos. Em seguida, clicando e mantendo o clique sobre um dos objectos seleccionados, arrastamos o rato a gosto.

Mantendo o rato clicado sobre o botão “seta” obtemos três opções para este botão, a seta e


translação (acabado de ver), a seta e *rotação* e a seta e *dilação*:  – obtemos uma das alternativas mantendo o rato clicado sobre o botão “seta”, deslocando o rato para a direita e só o largamos quando estivermos sobre o botão pretendido. O botão seta e rotação e o botão seta e dilação servem para, depois de seleccionado um ponto para centro de transformação, em *Mark Center* do menu *Transform* (secção (iii)), rodar ou dilatar objectos, previamente seleccionados no sketch, por arrastamento destes com o rato.


Botão *ponto*:  – esta ferramenta quando seleccionada (apresenta-se, no fundo branco, na forma de cruz) serve apenas para criar pontos, bastando para tal clicar no rato no local, da janela branca, pretendido.

Botão *circunferência*:  – ferramenta que quando seleccionada (apresenta-se, no fundo branco, na forma de circunferência com uma cruz ao centro) serve para construirmos circunferências com centro no ponto que quisermos e raio, por arrastamento do rato, pretendido. Usando o botão seta, podemos alterar o centro e o raio, clicando sobre o centro ou sobre o ponto da circunferência e arrastando-o.


Botão *segmento de recta*:  – esta ferramenta quando seleccionada (apresenta-se, no fundo branco, na forma de xis) serve para criar segmentos de recta. Para construirmos um segmento de recta basta escolher um ponto extremidade, na janela branca do sketch, clicar sobre o rato e arrastá-lo até um outro ponto, também à nossa escolha, extremidade do segmento de recta. Com o botão seta podemos o transformar na sua dimensão e/ou na sua direcção seleccionando e movendo qualquer um dos seus pontos extremos.


Mantendo o rato clicado sobre o botão “segmento de recta” obtemos três opções para este


botão, o segmento de recta (já visto atrás), a semi-recta e a recta:  – ficamos com uma das alternativas mantendo o rato clicado sobre o botão “segmento de recta”, deslocamos o rato para a direita e só o largamos quando estivermos sobre o botão pretendido.

Botão *semi-recta*:  – esta ferramenta se seleccionada (apresenta-se, no fundo branco, na forma de xis) serve para criar semi-rectas. Para criarmos um destes objectos escolhemos um ponto origem clicando sobre o rato, na janela branca do sketch, e mantendo o rato clicado arrastamo-lo até a direcção pretendida. Com o botão seta podemos transformar a semi-recta na sua

origem e/ou na sua direcção seleccionando e movendo o ponto origem e/ou o ponto que define a sua direcção.

Botão *recta*:  – quando seleccionado (apresenta-se, no fundo branco, também na forma de xis) serve para criar rectas. Num sketch, obtemos estes objectos, e podemos sempre os transformar, de forma análoga aos objectos rectilíneos precedentes.

Botão *mão*:  – esta ferramenta quando seleccionada (apresenta-se, no fundo branco, na forma de mão como indicador apontado) serve para legendar os objectos criados. Caso se pretenda, podemos ver legendados os objectos automaticamente de acordo com a ordem da sua criação. Podemos, no entanto, alterar o nome dos objectos, mediante um clique duplo sobre a legenda automaticamente criada. Será apresentada, então, uma caixa de diálogo e aí podemos escolher e escrever um nome a gosto. Esta ferramenta também permite escrever texto: para isso basta ter o botão “mão” seleccionado, deslocar o cursor para a zona da janela branca onde gostaria de escrever, clicar e manter o rato pressionado arrastando-o na direcção que considerar mais adequada. Vai obter um rectângulo – a sua janela de texto, onde pode escrever o texto que achar conveniente.

Botão *interrogação*:  – com esta ferramenta (que se apresenta, no fundo branco, na forma de caixa com o símbolo de interrogação) quando aproximamos o cursor de um objecto, entretanto criado no sketch, e clicamos sobre o rato obtemos informações acerca desse objecto.

(iii) Menus

Neste software temos nove menus principais e oito submenus – ver Figuras I.2, I.3 e I.4. Para accionar um dos menus, basta deslocar o cursor até o menu pretendido e clicar sobre ele, ficando o nome deste centrado num fundo rectangular. As diferentes opções, em cada menu, só estão activadas quando estiverem a negrito. Na Figura I.2 temos, da esquerda para a direita, o menu *File*, *Edit* e *Display*. No menu *File*, destacamos os comandos de criação: *New Sketch* – cria um novo sketch; *New Script* – cria um novo script; e o comando *Open...* que permite abrir sketch e scripts guardados. No menu *Edit* encontramos além das opções habituais de: desfazer (*Undo*) e refazer (*Redo*) operações; cortar (*Cut*), copiar (*Copy*) e colar (*Paste*) objectos; as opções: *Select All* – selecciona todos os objectos, de acordo com a ferramenta activa; *Select Parents* – selecciona todos

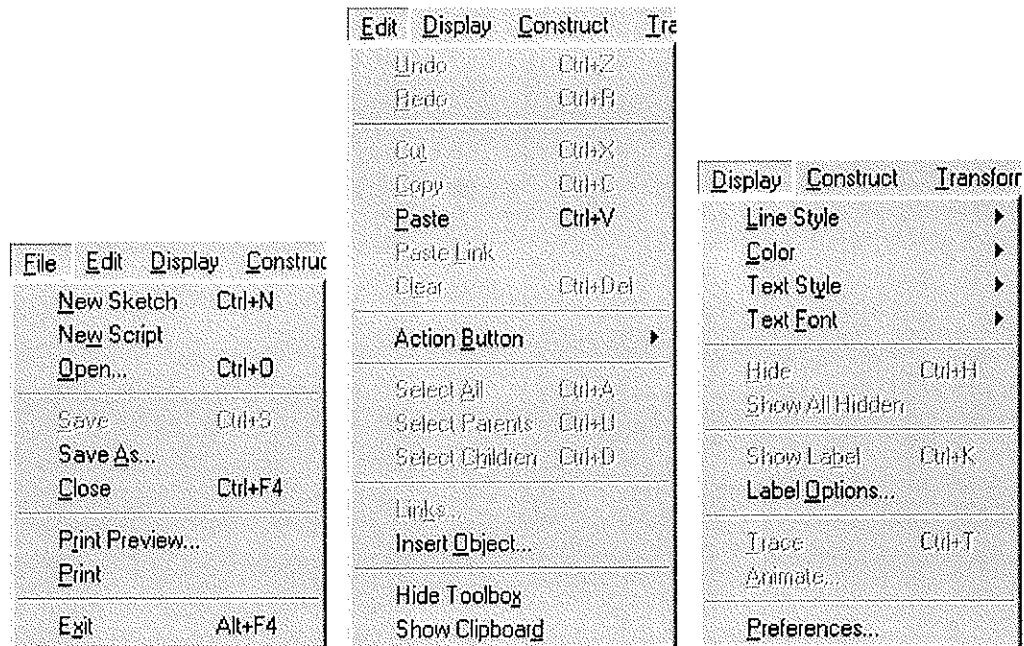


Figura 1.2: Menus File, Edit e Display.

os pais (objecto ou objectos que dão origem a outro objecto) dos objectos seleccionados; *Select Children* – selecciona todos os filhos (objecto ou objectos que tiveram origem a partir de um ou mais objectos) dos objectos seleccionados; destacamos, neste menu, o comando *Action Button* que tem num menu associado as opções: *Movement...* – cria um botão que permite deslocar, mediante dois cliques sucessivos no botão com o rato, a diversas velocidades, um primeiro ponto para um segundo ponto seleccionados por essa ordem; *Animation...* – cria um botão para animar uma construção no sketch, através de dois cliques no botão respectivo com o rato (por exemplo, permite animar até dez pontos em simultâneo sobre um segmento de recta ou sobre uma circunferência, depois de devidamente seleccionados; podemos escolher a velocidade e a direcção do movimento dos pontos) e para parar a animação basta um clique no rato; *Hide/Show* – cria dois botões, um para esconder e outro para mostrar objectos; *Sequence* – cria um botão para accionar, por meio de dois cliques no botão respectivo com o rato, uma sequência de botões pela ordem que previamente seleccionamos, sendo necessário entretanto um clique, com o rato, para as diferentes passagens; para parar a animação faz-se um clique com o rato em qualquer lado do ecrã; *Do Button* – executa uma acção associada a um único botão previamente seleccionados. Podemos sempre que acharmos adequado, com a ferramenta mão, mudar o nome de um botão.

A partir das opções disponibilizadas pelo menu Display podemos realizar formatações na janela de trabalho, para isso utilizamos os submenus das opções *Line Style* (*Thick* – traço grosso, *Thin* – traço fino e *Dashed* – tracejado), *Color*, *Text Style* e *Text Font*. Destacamos, ainda neste

menu, os comandos: *Relabel Objects...* – que permite alterar as legendas dos objectos seleccionados (em alternativa podemos usar a ferramenta mão); *Trace Objects* – opção que se aplica a todos os objectos e permite a um ou mais objectos, quando seleccionado ou quando seleccionados, respectivamente, e a opção activada, deixar rasto; *Animate...* – nesta opção obtemos o mesmo efeito que o comando “Animation...” do menu Edit, exceptuando a criação do botão associado; e *Preferences...* – opção que permite quando seleccionada, numa caixa de diálogo que se abre, alterar estilos, definir unidades, entre as disponibilizadas, para distâncias e ângulos, o grau de precisão, etc.

Na Figura I.3 temos, da esquerda para a direita, o menu *Construct, Transform e Measure*. O menu fundamental do Sketchpad é o menu Construct. Neste, temos os comandos seguintes: *Point On Object* – cria um ponto, que se pode movimentar, sobre qualquer objecto previamente seleccionado (esse é o objecto pai do objecto ponto – filho); *Point At Intersection* – cria ponto na intersecção de dois objectos previamente seleccionados; *Point At Midpoint* – cria o ponto de um segmento de recta depois de seleccionado; *Segment* ou *Ray* ou *Line* – este comando activa-se em função da opção seleccionada na barra de ferramentas dos objectos rectilíneos, ou seja, dados dois pontos este comando permite construir um segmento de recta, uma semi-recta ou uma recta; *Perpendicular Line/Parallel Line* – quando seleccionamos um objecto rectilíneo (segmento de recta, semi-recta ou recta) e um ponto que lhe é exterior, estes comandos permitem construir uma recta perpendicular e paralela, respectivamente, ao objecto rectilíneo pelo ponto seleccionado; *Angle Bisector* – seleccionando três pontos previamente, este comando permite a construção da bissetriz do ângulo definido (conforme a ordem de selecção) por esses três pontos; *Circle By Center And Point/Circle By Center And Radius* – estes comandos permitem a construção de circunferências, o primeiro activa-se se seleccionarmos dois pontos previamente (em que o primeiro ponto é o centro e o segundo ponto determina, com o primeiro, o raio da circunferência), e utilizamos o segundo comando quando temos um ponto seleccionado (o centro da circunferência) e um segmento de recta (o raio da circunferência), ou inversamente; *Arc On Circle* – seleccionando uma circunferência e dois pontos nessa circunferência, este comando constrói um arco de circunferência definido pelos pontos (conforme a ordem de selecção dos pontos); *Arc By Three Points* – seleccionando três pontos não colineares, o comando constrói um arco de circunferência definido pelos três pontos (conforme a sua ordem de selecção); *Interior* – este comando é activado conforme os objectos seleccionados e permite sombrear áreas delimitadas por esses objectos, obtidos, por exemplo, por três ou mais pontos (de acordo com a ordem de selecção – polígonos) e/ou circunferências

Construct	Transform	Measure	Graph
Point On Object			
Point At Intersection		Ctrl+I	
Point At Midpoint		Ctrl+M	
Segment		Ctrl+L	
Perpendicular Line			
Parallel Line			
Angle Bisector			
Circle By Center And Point			
Circle By Center And Radius			
Arc On Circle			
Arc Through Three Points			
Interior		Ctrl+P	
Locus			
Construction Help...			

Transform	Measure	Graph
Translate...		
Rotate...		
Dilate...		
Reflect		
Mark Center	Ctrl+F	
Mark Minor	Ctrl+G	
Mark Vector		
Mark Distance		
Mark Angle		
Mark Ratio		
Define Transform...		

Measure	Graph	Work
Distance		
Length		
Slope		
Radius		
Circumference		
Area		
Perimeter		
Angle		
Arc Angle		
Arc Length		
Ratio		
Coordinates		
Equation		
Calculate...	Ctrl+=	
Tabulate		
Add Entry		

Figura I.3: Menus *Construct*, *Transform* e *Measure*.

(pode para o sombreado, na opção *Color* do menu *Display*, escolher a cor que mais lhe agradar); *Locus* – este comando permite construir o lugar geométrico determinado por um objecto (ponto, segmento de recta, etc.), para tal temos, antes de aplicar o comando, de seleccionar, em primeiro lugar, o objecto que vai determinar o lugar geométrico, seguido do objecto livre e, por último, o pai desse objecto livre (utilizando a ferramenta “interrogação” e com um duplo clique sobre o lugar geométrico traçado, temos acesso a uma caixa de diálogo, “Locus X Information”, onde podemos alterar o número de pontos e optar entre uma representação gráfica contínua ou discreta, no caso do objecto que determina o lugar geométrico ser um ponto).

Com os comandos do menu *Transform* (Figura I.3) podemos fazer transformações em objectos. Temos as seguintes opções: *Translate...* – permite fazer translações, depois do objecto a ser transformado estar seleccionado, de uma de três formas a escolher numa caixa de diálogo que se abre: “By Marked Vector” – definimos previamente um vector, (usando para tal a opção, deste menu, *Mark Vector* tendo em atenção a ordem com que seleccionamos os pontos que determinam o vector e/ou a opção *Mark Rectangular Vector*), “By Polar Vector” – define-se um vector atribuindo-lhe uma direcção (um ângulo, que pode ser previamente marcado usando a opção, deste menu, *Mark Angle* tendo em atenção a ordem com que seleccionamos os pontos que determinam o ângulo) e uma distância (que pode ser seleccionada, na janela de trabalho, previamente utilizando a opção, deste menu, *Mark Distance*), e “By Rectangular Vector” – definimos um vector indicando a componente horizontal e vertical (podendo ser uma das componentes seleccionada, na janela de trabalho, previamente utilizando a opção *Mark Distance* e nesse caso temos de definir na caixa de

diálogo a outra componente do vector); *Rotate...* – permite fazer rotações, mas antes temos de definir o centro de transformação com o comando *Mark Center* e o ângulo de rotação, indicando-o na caixa de diálogo ou pelo uso do comando *Mark Angle*; *Dilate...* – permite fazer homotetias (isometrias, ampliações ou reduções) sendo necessário, neste caso, depois de marcar o centro da homotetia com o comando *Mark Center*, explicitar a razão, introduzindo-a na caixa de diálogo (Figura II.5) ou por razão entre dois segmentos de recta, previamente construídos, usando do comando *Mark Ratio*; *Reflect* – permite fazer a reflexão de um objecto em torno de uma direcção (objecto rectilíneo – eixo de simetria ou espelho) previamente seleccionada por utilização do comando *Mark Mirror*; *Define Transform...* – permite fazer a composição de transformações, sendo que, para tal, temos de seleccionar os objectos previamente e de acordo com a ordem pela qual são transformados, sendo criado, no menu, um item relativo a cada transformação pretendida e um outro item para remover a transformação, “*Remove Transform...*”.

No menu *Measure* (Figura I.3) temos a possibilidade de, estando os objectos respectivos seleccionados, fazer medidas e cálculos, sendo estes apresentados no lado esquerdo da janela de trabalho. Podemos, no entanto, mover esses resultados para qualquer lado da janela de trabalho e formatá-los. Neste menu temos disponível as seguintes opções: *Distance* – permite calcular a distância entre dois pontos ou entre um ponto e um objecto rectilíneo; *Lenght* – permite calcular o comprimento de um ou mais segmentos de recta seleccionados; *Slope* – permite calcular o declive de um ou mais objectos rectilíneos seleccionados; *Radius* – permite calcular o raio de circunferências, de círculos, de arcos, de arcos segmentos ou de sectores; *Circumference* – permite calcular o perímetro de uma ou mais circunferências ou de círculos (Figura I.6); *Area* – permite calcular a área de uma ou mais circunferências, de círculos, de polígonos, de arcos segmentos ou de sectores (Figura I.6); *Perimeter* – permite calcular perímetros de polígonos, de arcos segmentos ou de sectores (Figura I.6); *Angle* – permite calcular o ângulo definido por três pontos seleccionados ordenadamente (ponto, vértice, ponto); *ArcAngle/ArcLenght* – permite calcular o ângulo e o comprimento, respectivamente, de um ou mais arcos, de arcos segmentos ou de sectores (ver a Figura I.6); *Ratio* – permite calcular a razão do comprimento de dois segmentos; *Coordinates/Equation* – obtemos as coordenadas de um ou mais pontos e as equações de uma ou mais rectas ou circunferências, respectivamente (relativamente ao sistema de eixos coordenados que o software, automaticamente, dispõe); *Calculate...* – permite trabalhar com uma calculadora, na qual, entre muitas possibilidades de calculo, podemos trabalhar com as medidas obtidas dos objectos na janela de trabalho, para tal, damos um clique com o rato sobre elas.

Na Figura I.4 temos, da esquerda para a direita, o menu *Graph*, *Work* e *Help*. No menu *Graph* temos os comandos seguintes: *Creat Axes/Hide Axes* – cria e apaga, respectivamente, de forma automática um sistema de coordenadas com origem no centro da janela de trabalho; podemos criar, num sketch novo, um sistema de eixos a partir de um ponto, seleccionando-o e utilizando a opção deste menu *Define Origin*, ou a partir de uma circunferência, seleccionando-a e utilizando a opção deste menu *Define Unit Circle*, ou a partir de um segmento de recta, seleccionando-o e utilizando a opção deste menu *Define Unit Length*, ou ainda, a partir de um ponto e de um segmento de recta, seleccionando-os e utilizando a opção deste menu *Define Axes* (o sistema de coordenadas pode ser, sempre que quisermos, modificado na origem do referencial e na unidade de medida bastando seleccionar os pontos respectivos e arrastá-los com o rato, sendo todos os dados, nesse sketch, modificados de acordo com as alterações feitas); *Plot Measurement...* – se seleccionarmos uma medida cria uma recta (paralela ao eixo dos xx ou paralela ao eixo dos yy, por opção feita na caixa de diálogo que se abre, após considerar este comando e se tivermos considerado em *Grid Form*, deste menu, a opção *Rectangular (x, y)*) ou um círculo ou uma semi-recta com origem na origem do referencial (por opção feita na caixa de diálogo que se abre, após considerar este comando e se tivermos considerado em *Grid Form*, deste menu, a opção *Polar (r, theta)*), se seleccionarmos duas medidas cria um ponto (cujas coordenadas são a primeira e segunda medidas, por ordem de selecção); *Plot Points...* – permite marcar pontos, pelas suas coordenadas, através duma caixa de diálogo que se abre; *Coordinate Form* – permite optar entre coordenadas na forma cartesiana ou polar; *Equation Form* – permite optar entre equações na forma reduzida ou na forma cartesiana da recta e entre equações na forma cartesiana (obtendo o centro e o raio) ou na forma geral da circunferência.

No menu *Work* temos a possibilidade de trabalhar com rotinas (scripts - ficheiros GSS) utilizando o comando *Make Script*, com vista a, e sempre que se pretenda, repetir uma construção idealizada (podemos, em alternativa, abrir um novo script no menu *File* – ver Figura I.7, e gravarmos a construção). Para tal, feita e “arrumada” a construção que se pretende ver repetida, num sketch, temos de seleccionar todos os objectos da construção e optar pelo comando, deste menu, *Make Script*. Abre-se automaticamente uma janela, semelhante à da Figura I.7, com os passos sucessivamente dados na construção, aparecendo numa barra, com o fundo negro, os objectos necessários para implementar a construção. Com efeito, quando abrimos uma rotina, anteriormente guardada, estão destacados no fundo negro, os objectos geométricos ordenados e necessários para executar o script. Quando queremos a executar de forma animada, os objectos geométricos têm de

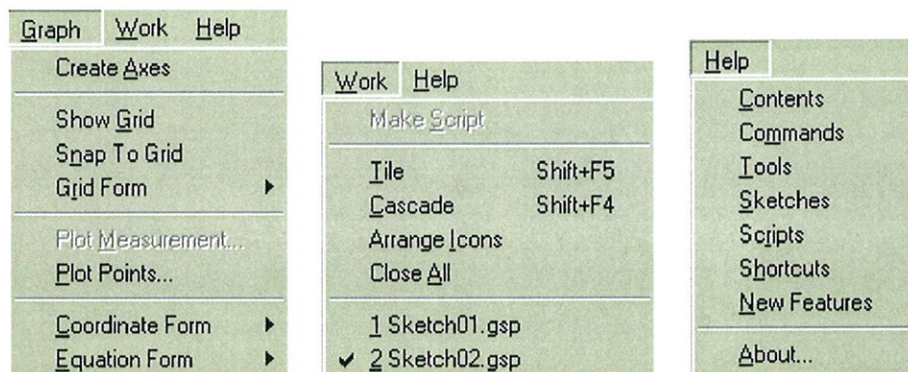


Figura I.4: Menus Graph, Work e Help.

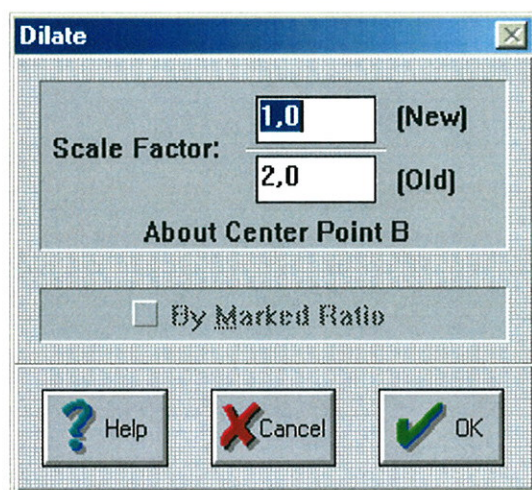


Figura I.5: Caixa de diálogo que é accionada quando se opta pelo comando “Dilate...” do menu “Transform”. A razão é assinalada na primeira linha (New) e na segunda linha (Old), significando que, neste caso, relativamente ao centro de homotetia B a figura, previamente seleccionada, vai sofrer uma

redução de razão $\frac{1}{2}$.

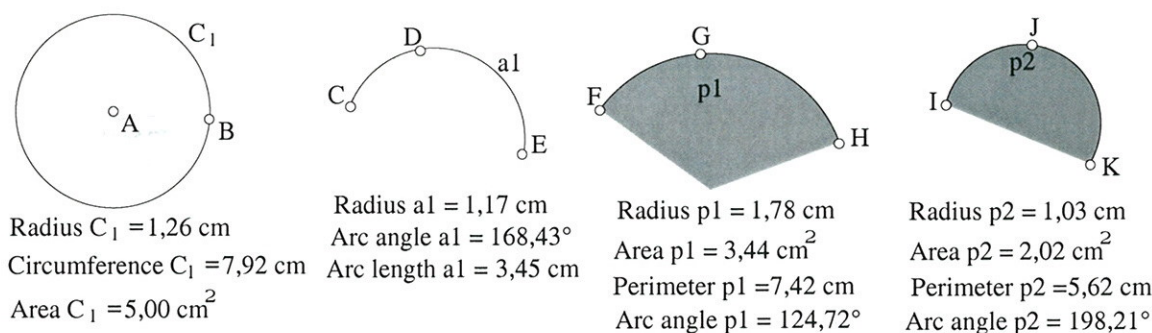


Figura I.6: O raio \overline{AB} da circunferência C_1 , de centro A, é 1.26 cm, do arco CDE, a_1 , é 1.17 cm, do sector p_1 (com arco FGH) é 1.78 cm e do arco segmento p_2 (de arco IJK) é 1.03 cm. O perímetro de C_1 é 7.92 cm e a sua área de 5 cm². A área do sector p_1 é 3.44 cm² e o seu perímetro é de 7.42 cm. A área do arco segmento p_2 é 2.02 cm² e o seu perímetro é 5.62 cm. O ângulo do arco a_1 é 168.43°, do sector p_1 é 124.72° e do arco segmento p_2 é 198.21°. O comprimento do arco a_1 é 3.45 cm.

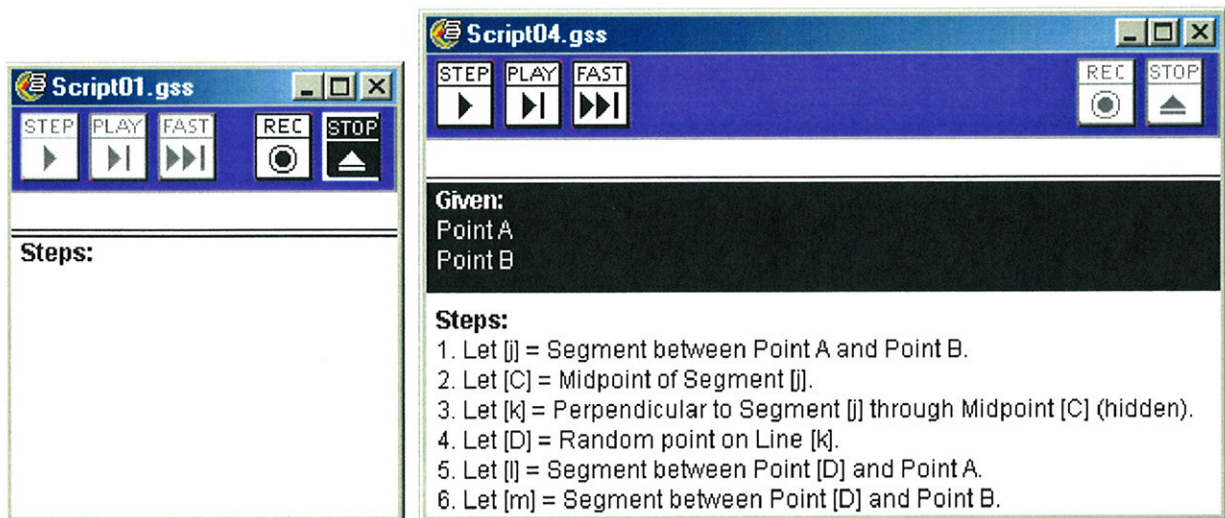


Figura I.7: À esquerda uma janela de rotinas – ficheiro “Script01.gss”. À direita o ficheiro “Script04.gss” com uma construção idealizada. Na barra com o fundo negro, estão indicados os objectos necessários para executar a construção. Na barra branca, acima da barra com o fundo negro, podemos escrever comentários.

estar previamente construídos e seleccionados, de acordo com a ordem indicada (num sketch de preferencia novo), carregamos no botão “PLAY” (ou “STEP” – construção passo a passo; ou “FAST” – construção imediata) do ficheiro GSS respectivo.

Por vezes dá jeito, por ser mais expedito, clicarmos na tecla direita do rato e ficamos com algumas opções do menu Display (Line Style, Color, Text Style, Text Font e Label Options...), algumas opções, em função dos objectos seleccionados, dos menus Construct, Transform, Measure e Graph, e ainda a opção Make Script.

(iv) Rotinas recursivas

Neste software temos também a possibilidade de trabalhar com rotinas recursivas, isto é, de idealizar construções e repeti-las tantas vezes quantas queiramos, indicando o número de passos de recursão (por exemplo, figuras fractais).

Para construirmos uma rotina recursiva temos de, antes de mais, abrir uma janela de trabalho, Sketch, e o gravador de rotinas, scripts. Clicando com o rato, no botão de gravação *REC*, damos inicio à gravação. Supondo gravado os passos que originou certa construção a partir de um conjunto de objectos O , pretendesse que seja repetida a construção, a um conjunto de objectos O' congruente com O , isto é, com os mesmos tipos de objectos. Para tal, basta seleccionar

ordenadamente os objectos O' e clicar, com o rato, no botão *LOOP*. Terminada a tarefa idealizada, carregamos em *STOP* para parar a gravação.

Para executarmos a rotina, devemos de abrir um novo Sketch, nele construímos os objectos que são necessários à implementação da rotina (assinalados no fundo negro) e estando seleccionados, clicamos no botão *PLAY* e, na caixa de diálogo que se abre, indicamos o número de passos de recursão, *Depth of Recursion*, que pretendemos ver executados (ver secção 5.3).

Apêndice II – Perspectiva Cavaleira

Não se sabe ao certo qual a origem do nome “cavaleira”, mas uma das possíveis origens deve-se aos trabalhos realizados, no domínio da geometria, pelo matemático italiano Bonaventura Cavalieri (secção 1.3).

Afim de percebermos melhor a perspectiva cavaleira, vamos ver antes dois tipos de projecções, a *projecção cónica* ou *central* e a *projecção cilíndrica* ou *paralela*.

Começemos por estudar projecção cónica ou central. Com efeito, consideremos uma figura plana, por exemplo um quadrado $[ABCD]$, um ponto V de onde se observa o quadrado considerado e um plano \mathcal{P} . Passemos pelos vértices do quadrado raios visuais com origem em V e determinemos as intersecções destes raios com o plano \mathcal{P} (Figura II.1): A' , B' , C' e D' , que definem um novo quadrado. Chamamos ao ponto V *ponto de vista* ou *centro de projecção*, ao plano \mathcal{P} – *plano de projecção*, aos raios visuais *linhas projectantes* e ao quadrado $[A'B'C'D']$ *projecção* ou *vista* do quadrado $[ABCD]$. As projecções do quadrado $[ABCD]$, representadas na Figura II.1, são maior e menor, respectivamente, do que a verdadeira grandeza, porque o primeiro encontra-se aquém do plano de projecção e o segundo encontra-se além do plano de projecção, \mathcal{P} . Caso o quadrado estivesse assente no plano \mathcal{P} , a sua projecção coincidiria com ele próprio e representaria, assim, o quadrado em verdadeira grandeza.

Na projecção cilíndrica ou paralela o ponto de vista encontra-se infinitamente afastado do objecto a projectar e do plano de projecção. Neste caso, os raios visuais sairão dum ponto no infinito, ou seja, as linhas projectantes serão paralelas – Figura II.2. Neste tipo de projecção as dimensões da projecção são sempre iguais às do objecto, quer este se encontre aquém quer além ou coincida com o plano de projecção.

A projecção cilíndrica ou paralela pode ser *ortogonal* ou *obliqua* conforme as projectantes sejam perpendiculares ou obliquas ao plano de projecção. Temos na Figura II.3 a comparação entre as formas de obter uma projecção cilíndrica ortogonal e uma projecção cilíndrica obliqua: quando se usam projectantes normais ao plano de projecção (neste caso, segundo a direcção do vector \vec{n}), executamos uma projecção cilíndrica ortogonal e obtemos uma vista ou projecção ortogonal; quando se usam projectantes obliquas ao plano de projecção (neste caso, segundo a direcção do vector \vec{r}), executamos uma projecção cilíndrica obliqua e obtemos uma perspectiva cavaleira.

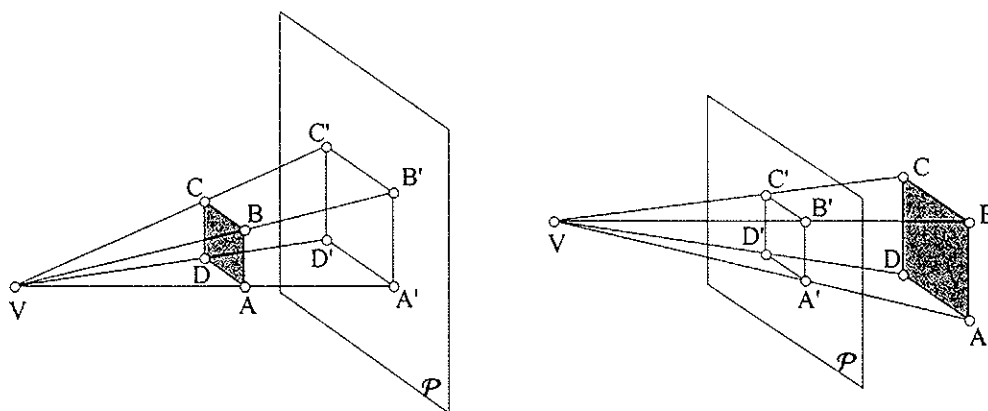


Figura II.1: Projecção central de um quadrado [ABCD] situado entre o ponto de vista V e o plano de projecção \mathcal{P} : [A'B'C'D'] (à esquerda); projecção central de um quadrado [ABCD] situado além do plano de projecção \mathcal{P} : [A'B'C'D'] (à direita).

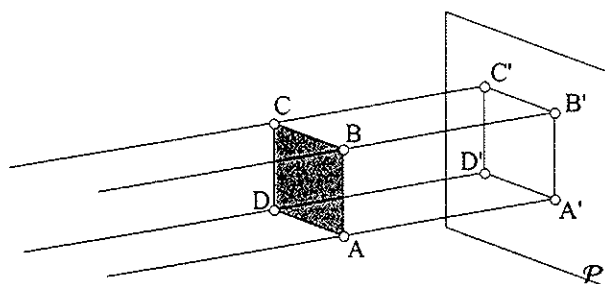


Figura II.2: Projecção paralela de um quadrado [ABCD] situado entre o ponto de vista V e o plano de projecção \mathcal{P} : [A'B'C'D']

A *perspectiva cavaleira* é, portanto, uma projecção cilíndrica oblíqua sobre um plano paralelo a uma das faces principais do objecto. A face paralela ao plano de projecção vem sempre representada em verdadeira grandeza, qualquer que seja a direcção das projectantes oblíquas consideradas. Apenas o ângulo que as linhas perpendiculares ao plano de projecção fazem na perspectiva com a horizontal bem como a redução das dimensões marcadas sobre essas mesmas linhas variam com a direcção das projectantes oblíquas.

O ângulo das linhas perpendiculares ao plano de projecção, do objecto, com a horizontal designa-se por *ângulo de fuga* e está representado por \mathcal{P} na Figura II.4, onde temos a representação de um cubo [ABCDEFGH]. A redução dos comprimentos marcados segundo direcções perpendiculares ao plano de projecção, do objecto, é dada pelo coeficiente de redução k . Utilizando as letras da Figura II.4, temos, por exemplo, $k = \frac{\overline{FG}}{\overline{EF}} \times 100\%$, onde \overline{FG} representa o comprimento marcado segundo uma direcção oblíqua e \overline{EF} representa o mesmo comprimento marcado

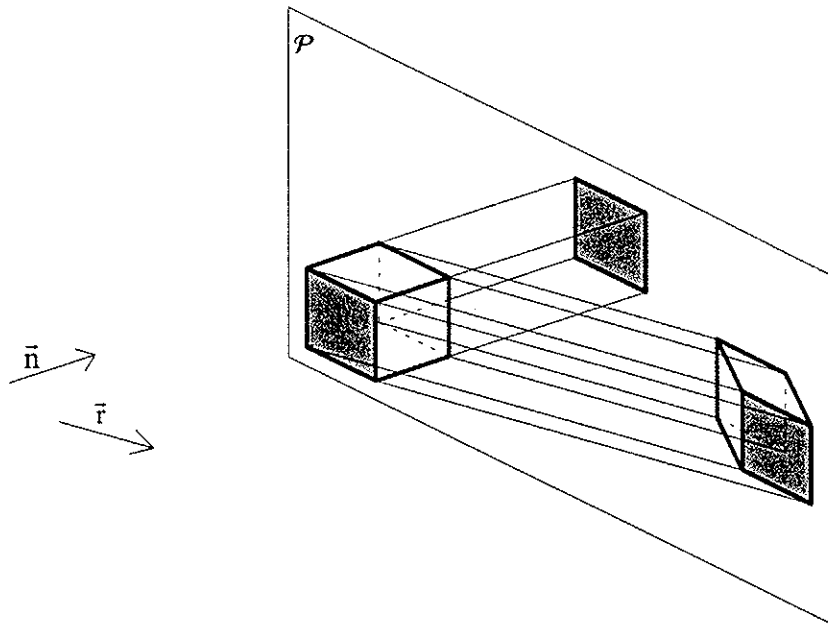


Figura II.3: Comparação entre as formas de obter uma projecção paralela ortogonal (as projectantes têm a direcção do vector \vec{n} , perpendicular ao plano de projecção \mathcal{P}) e uma projecção paralela oblíqua (as projectantes têm a direcção do vector \vec{r} , oblíqua relativamente ao plano de projecção \mathcal{P}) da qual resulta a perspectiva cavaleira.

paralelamente ao bordo da folha. A notação utilizada para designar a perspectiva cavaleira de parâmetros α e k , costuma ser $PC(\alpha, k\%)$. Representamos, na Figura II.5, um cubo $[ABCDEFGH]$, utilizando três tipos de perspectiva cavaleira, $PC(30^\circ, 50\%)$, $PC(30^\circ, 75\%)$ e $PC(45^\circ, 50\%)$, contudo e para além do gosto pessoal, os parâmetros mais correntemente utilizados são os indicados na terceira perspectiva Figura II.5 – (c), com $\alpha = 30^\circ$ e $k = 50\%$.

Podemos, em resumo, apresentar as principais características da perspectiva cavaleira:

- os segmentos de recta e figuras paralelas ao plano de projecção (o plano do papel) são representados em verdadeira grandeza; as figuras congruentes, situadas em planos diferentes mas paralelos ao plano do papel, têm representações congruentes;
- os segmentos de recta perpendiculares ao plano do papel são representados por segmentos de recta oblíquos (fazendo ângulos de 30° , ou outros, com o bordo do papel), e têm o seu comprimento reduzido (redução de 50%, ou outra).
- os segmentos de recta paralelos e as rectas paralelas são representados por segmentos de recta paralelos e por rectas paralelas;
- conservam-se os pontos médios dos segmentos de recta e os baricentros das figuras;

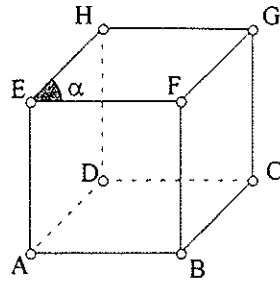


Figura II.4: Representação em perspectiva cavaleira, do cubo [ABCDEFGH], com parâmetros: α – o ângulo das linhas perpendiculares ao plano de projecção, do objecto, com a horizontal; e k – a percentagem, por exemplo, $\frac{\overline{FG}}{\overline{EF}} \times 100\%$.

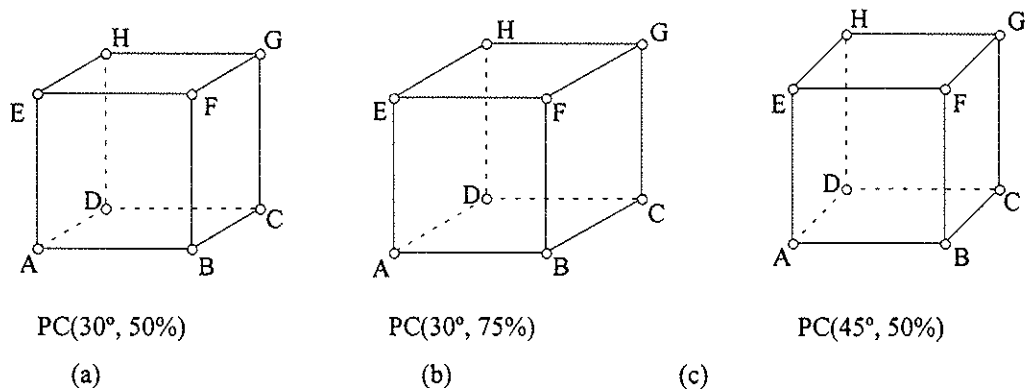


Figura II.5: Representação dum cubo [ABCDEFGH] de três modos diferentes utilizando a perspectiva cavaleira: (a) – PC(30°, 50%); (b) – PC(30°, 75%); e (c) – PC(45°, 50%).

- como convenção, traçam-se a cheio as linhas visíveis e a tracejado as linhas invisíveis, para o observador.

Apesar de não ser a melhor perspectiva, no sentido de não aproximar o melhor possível a representação no papel à realidade visual ou à realidade formada pela máquina fotográfica que é traduzida pela fotografia (essa melhor aproximação à realidade da visão é dada através da perspectiva cónica ou rigorosa – ver Cunha (1997)), é no entanto a mais comumente aceite por ser aquela que mais se aproxima da inteligência que fazemos dos objectos e pela sua fácil e rápida representação.

Apêndice III – Teorema de Tales (e.g. Roe 1993)

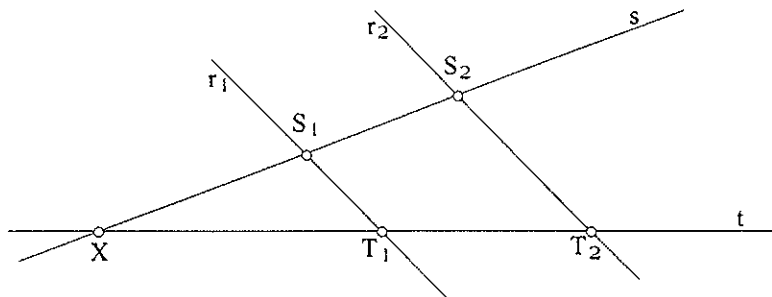


Figura III.1: O Axioma de semelhança.

Começamos por apresentar, observando a Figura III.1, o *Axioma de Semelhança*: “Sejam r_1 e r_2 duas rectas paralelas no plano, e s e t outras duas rectas que intersectam as rectas paralelas nos pontos S_1 , S_2 , T_1 e T_2 , respectivamente, e que se intersectam no ponto X . Então é $\frac{\overline{XT_1}}{\overline{XT_2}} = \frac{\overline{XS_1}}{\overline{XS_2}}$.”; e

o *reciproco do Axioma de Semelhança*: “Sejam s e t duas rectas concorrentes no ponto X , e sejam S_1 e S_2 os pontos de s , e T_1 e T_2 pontos de t , não coincidentes com X . Se $\frac{\overline{XS_1}}{\overline{XS_2}} = \frac{\overline{XT_1}}{\overline{XT_2}}$, as rectas S_1T_1 e S_2T_2 são paralelas”.

O enunciado clássico do *Teorema de Tales* diz o seguinte: “Sejam r_1 , r_2 e r_3 três rectas dum plano, e s e t duas outras rectas do mesmo plano, não paralelas a nenhuma das rectas r_i , e que intersectam as rectas r_i nos pontos P_i e Q_i , respectivamente, para $i = 1, 2, 3$. Temos que:

- Se as rectas, r_1 , r_2 e r_3 , são paralelas, então $\frac{\overline{P_1P_2}}{\overline{P_2P_3}} = \frac{\overline{Q_1Q_2}}{\overline{Q_2Q_3}}$.

- Reciprocamente, se as restas r_1 e r_2 são paralelas, e $\frac{\overline{P_1P_2}}{\overline{P_2P_3}} = \frac{\overline{Q_1Q_2}}{\overline{Q_2Q_3}}$, então a recta r_3 é

paralela a r_1 e r_2 .” (Figura III.2).

Mostra-se, começando por admitir que as três rectas, r_1 , r_2 e r_3 , são paralelas e considerando uma recta k definida pelos pontos P_1 e Q_3 . A recta k não é paralela à recta r_1 (visto que se cruzam mas não são coincidentes), portanto não é também paralela a r_2 (por transitividade), portanto a recta k intersecta r_2 , digamos no ponto M . Logo aplicando o Axioma de Semelhança duas vezes, temos:

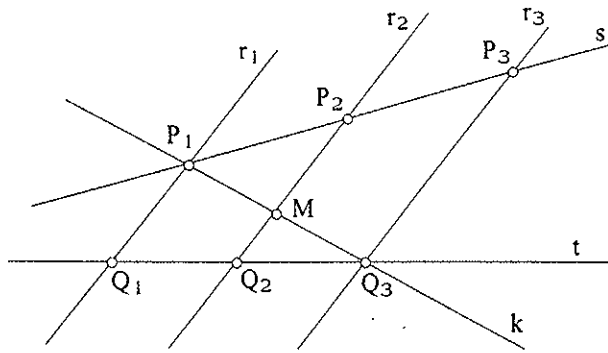


Figura III.2: Teorema de Tales

$$\frac{\overline{Q_1Q_2}}{\overline{Q_2Q_3}} = \frac{\overline{P_1M}}{\overline{MQ_3}} = \frac{\overline{P_1P_2}}{\overline{P_2P_3}}.$$

O recíproco demonstra-se de forma análoga, usando o recíproco do Axioma de Semelhança. (c. q. d.)

Apêndice IV - Dedução da fórmula da área de um triângulo (e.g. Araújo 1999)

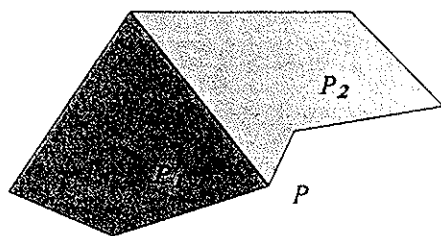


Figura IV.1: P é um polígono decomposto em dois, P_1 e P_2 .
 área $P = \text{área } P_1 + \text{área } P_2$.

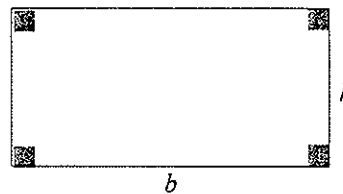


Figura IV.2: Rectângulo de base b e altura h .
 A área do rectângulo é $b h$.

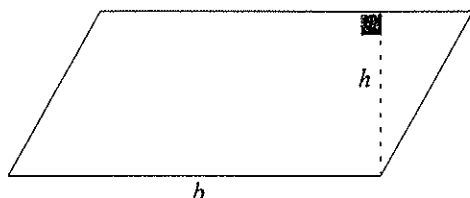


Figura IV.3: Paralelogramo de base b e altura h .
 A área do paralelogramo é $b h$.

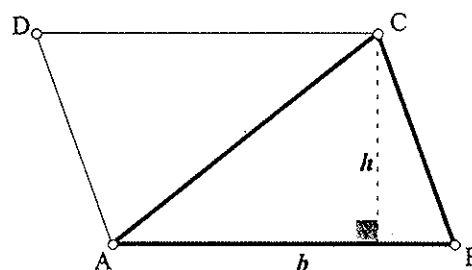


Figura IV.4: $\Delta[ABC]$ é qualquer de base b e altura h .
 $[ABCD]$ é um paralelogramo e a sua área é igual à soma das áreas dos $\Delta[ABC]$ e $\Delta[ADC]$

Antes da dedução da fórmula da área de um triângulo qualquer, vamos começar por admitir que se um polígono P for decomposto em outros dois, P_1 e P_2 , então a área P é a soma das áreas de P_1 e P_2 (Figura IV.1), que a área de um rectângulo¹⁰¹ de base b e altura h é igual ao produto $b h$ (Figura IV.2) e ainda que a área de um paralelogramo de base b e altura h é igual a $b h$ (ver Figura IV.3), ou seja, é igual à área do rectângulo com a mesma base e a mesma altura.

Consideremos, então, o triângulo $\Delta[ABC]$, como na Figura IV.4. A área do paralelogramo $[ABCD]$, da Figura IV.4, é a soma das áreas dos dois triângulos congruentes¹⁰²: $\Delta[ABC]$ e $\Delta[ADC]$. Assim

$$\text{área } ([ABCD]) = b h \text{ e } \text{área } ([ABCD]) = 2 \text{ área } (\Delta[ABC]).$$

Logo

$$\text{área } (\Delta[ABC]) = b h \Leftrightarrow \text{área } (\Delta[ABC]) = \frac{b h}{2}.$$

¹⁰¹ Pelo tradicional *Axioma 15 (normalização da área)* da geometria euclidiana que diz: "a área de um rectângulo de lados a e b é $a b$." (Roe 1993).

¹⁰² Ver a noção de congruência na secção 3.1.

Apêndice V – Programa de Matemática do Ensino Secundário

Apresentamos o quadro resumo, da distribuição dos temas em cada ano, do programa¹⁰³ de Matemática presentemente em vigor. Salientamos o facto de actualmente se dedicar no ensino da Geometria, aos nossos jovens estudantes, cerca de 39% da carga lectiva anual para os 10º e 11º anos, o que representa cerca de 26% do total dos tempos de leccionação nos 3 anos do ensino secundário.

10º ANO

1. Geometria no Plano e no Espaço I

- Resolução de problemas de Geometria no plano e no espaço
- O método cartesiano para estudar Geometria no plano e no espaço
- Vectores livres no plano e no espaço
- Estudo vectorial da recta no plano e no espaço
- Equação reduzida da recta no plano

2. Funções e Gráficos – Generalidades. Funções polinomiais. Função módulo.

- Gráfico cartesiano de uma função em referencial ortogonal
- Definição de função, gráfico e representação gráfica de uma função
- Estudo intuitivo de propriedades das: Funções quadráticas; referência à parábola; função módulo; funções definidas por 2 ou mais ramos; funções polinomiais (graus 3 e 4)
- Equações e inequações do 2º grau; inequações com módulos
- Decomposição de polinómios

3. Estatística

- Objecto e história
- Recenseamento e sondagem
- População e amostra
- Estatística Descritiva e Estatística Indutiva
- Organização e interpretação de caracteres estatísticos (qualitativos e quantitativos)
- Medidas de localização de uma amostra

¹⁰³ Programa de Matemática do Ensino Secundário (10º, 11º e 12º anos), de Janeiro 1997, do Departamento do Ensino Secundário – Ministério da Educação.

- Medidas de dispersão
- Diagramas de “extremos e quartis”
- Referências a distribuições bidimensionais

11º ANO

1. Geometria no Plano e no Espaço II

- Resolução de problemas envolvendo triângulos
- Ângulo e arco generalizados
- Funções seno, co-seno e tangente; definição e variação (estudo no círculo trigonométrico)
- Equações trigonométricas elementares
- Produto escalar de dois vectores no plano e no espaço
- Conjuntos definidos por condições
- Equação cartesiana de planos
- Intersecção de planos e resolução de sistemas; Equações cartesianas da recta no espaço
- Paralelismo e perpendicularidade de rectas e planos (interpretação vectorial)

2. *Introdução ao Cálculo Diferencial I - Funções Racionais e com Radicais. Taxa de variação/Derivada*

- Estudo de propriedades das funções racionais do tipo $f(x) = a+b/(cx+d)$; Referência à hipérbole
- Aproximação experimental da noção de limite
- Operações com funções: soma, diferença, produto, quociente, composição
- Noção de taxa média de variação; noção de taxa de variação; interpretação geométrica e física
- Determinação da derivada em casos simples; aplicações
- Inversão de funções; funções com radicais quadráticos e cúbicos

3. *Sucessões*

- Introdução ao conceito de sucessão
- A sucessão como função de variável natural; sucessões monótonas; sucessões limitadas; Progressões aritméticas e geométricas
- Estudo intuitivo de $(1+1/n)^n$ e a primeira definição de e

- Limites: Infinitamente grandes e infinitésimos; limites de sucessões e convergência; determinação de limites

12º ANO

1. *Probabilidades e Combinatória*

- Introdução ao cálculo de probabilidades
- Distribuição de frequências relativas e distribuição de probabilidades
- Definição axiomática de Probabilidades (caso finito) e propriedades; definição de probabilidade condicionada e sua verificação da axiomática
- Combinatória: Técnicas de contagem; permutações, arranjos com e sem repetição; pares de um conjunto e combinações sem repetição; Propriedades; Triângulo de Pascal; Binómio de Newton
- Aplicações ao cálculo de probabilidades; Acontecimentos independentes

2. *Introdução ao Cálculo Diferencial II*

- Função exponencial e função logarítmica de bases maiores que 1; Regras operatórias de exponenciais e logaritmos; Aplicações concretas
- Limite de uma função segundo Heine; Propriedades operatórias sobre limites; Limites notáveis; Indeterminações; Assíntotas
- Continuidade: Teorema de Bolzano-Cauchy e aplicações numéricas
- Funções deriváveis; Regras de derivação e derivadas de funções elementares; Segunda definição do número e ; segundas derivadas e concavidade
- Estudo de funções em casos simples
- Problemas de optimização

3. *Trigonometria e números complexos*

- Funções seno, co-seno e tangente; estudo de propriedades; cálculo de derivadas
- Introdução histórica dos números complexos, através dos problemas da resolubilidade algébrica
- Complexos na forma algébrica e na forma trigonométrica
- Operações
- Domínios planos e condições em variável complexa

Apêndice VI – Ficheiros Sketchpad™

Os exercícios/actividades/aplicações trabalhadas no Sketchpad estão organizadas em pastas por capítulo respectivo, contidas numa disquete que juntamos em anexo. Em cada pasta, além de outras pastas, os ficheiros estão organizados por tipo (*.gss e *.gsp).

O utilizador deve, depois de abrir o ficheiro *GSP* ou *GSS*, clicar no botão de maximização da janela do Sketch. Caso trabalhe com um ficheiro *GSP*, deve ler e seguir o texto que, em geral, o acompanha. Caso trabalhe com um ficheiro *GSS*, deve começar por ler os comentários que se fazem a seu propósito na barra de comentários, em seguida deve construir e seleccionar os objectos geométricos necessários à execução do Script (indicados na barra com o fundo negro – tendo em atenção que é importante a ordem pela qual seleccionamos os objectos), num novo Sketch (abrindo para o efeito, no menu File, a *New Sketch*). Para executar um ficheiro *GSS*, pode optar por um de três botões: *STEP* – executa a construção passo a passo, tendo de o clicar sucessivamente; *PLAY* – permite fazer a construção de forma pausada mas animada; *FAST* – a construção é feita instantaneamente. Depois de feita a construção pode e **deve sempre** arrastar objectos geométricos adequados (pontos, rectas, segmentos de recta, ...) por forma a perceber melhor a sua construção e o seu objectivo.

Apêndice VII – Produto Externo (e.g. Magalhães 1998)

Produto externo de dois vectores é um vector ortogonal ao plano dos dois vectores dados e de comprimento igual à área do paralelogramo definido pelos dois vectores dados (Figura VII.1). Assim, dados dois vectores de \mathbb{R}^3 , $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, chama-se *produto externo* de \vec{u} com \vec{v} ao vector de \mathbb{R}^3 :

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1).$$

O produto externo em \mathbb{R}^3 admite as seguintes propriedades:

- Antissimetria: $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$;
- Ortogonalidade: $\vec{u} \times \vec{v}$ é ortogonal a \vec{u} e a \vec{v} ;
- Medida de áreas: $\|\vec{u} \times \vec{v}\|$ é igual à área do paralelogramo que tem como dois dos lados os vectores \vec{u} e \vec{v} (Figura VII.1). Em particular,

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \sqrt{\|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \theta,$$

onde θ é o ângulo entre os vectores \vec{u} e \vec{v} , definido pelo produto interno usual em \mathbb{R}^3 ,

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} \quad \text{ou} \quad \theta = \arccos \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}.$$

O sentido do vector que resulta do produto externo de dois vectores, não nulos, pode ser obtido a partir da orientação relativa de entre os três vectores coordenados unitários, $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ e $\vec{k} = (0, 0, 1)$. Verifica-se que $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$, e pode-se concluir que a orientação relativa do terno ordenado $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v})$ é idêntica à do terno $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Ou seja, $\vec{u} \times \vec{v}$ aponta na direcção do observador que vê a rotação do vector \vec{u} para o vector \vec{v} , pelo menor ângulo possível, no mesmo sentido em que do ponto $(0, 0, k)$ se observa a rotação de \vec{i} para \vec{j} (Figura VII.2) – este é o sentido contrário ao dos ponteiros do relógio.

Vejamos dois exemplos de cálculo do produto externo:

Exemplo 1. Temos que:

(a) $\vec{i} \times \vec{j} = (1, 0, 0) \times (0, 1, 0) = (0 - 0, 0 - 0, 1 - 0) = (0, 0, 1) = \vec{k}$.

(b) $\vec{k} \times \vec{i} = (0, 0, 1) \times (1, 0, 0) = (0, 0 - (-1), 0) = (0, 1, 0) = \vec{j}$.

(c) $\vec{i} \times \vec{k} = (1, 0, 0) \times (0, 0, 1) = (0, 0 - 1, 0) = (0, -1, 0) = -\vec{j}$.

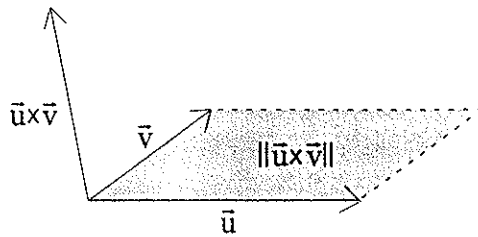


Figura VII.1: Produto externo.

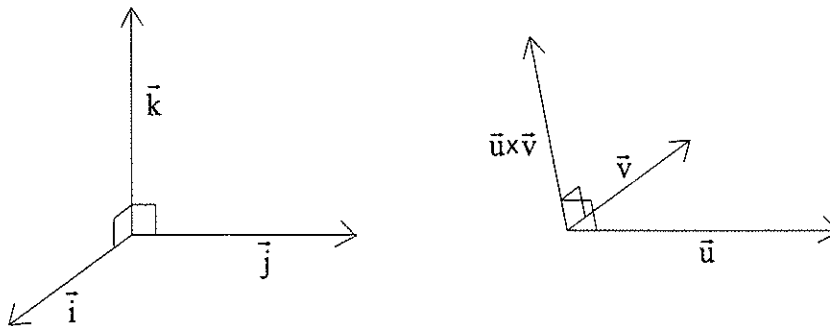


Figura VII.2: Sentido do produto externo.

Exemplo 2. Com $\vec{u} = -\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{v} = \vec{j} + \vec{k}$ e $\vec{w} = \vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$, calcule os vectores seguintes:

(a) $\vec{u} \times \vec{v}$

Resolução: Começamos por calcular \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} :

$$\vec{u} = -\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k} = -(1, 0, 0) + 3(0, 1, 0) + (0, 0, 1) = (-1, 3, 1);$$

$$\vec{v} = \vec{j} + \vec{k} = (0, 1, 0) + (0, 0, 1) = (0, 1, 1);$$

$$\vec{w} = \vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k} = (1, 0, 0) - 4(0, 1, 0) + (0, 0, 1) = (1, -4, 1);$$

Então, temos que:

$$\vec{u} \times \vec{v} = (-1, 3, 1) \times (0, 1, 1) = (3 - 1, 0 - (-1), 0 - 0) = (2, 1, 0).$$

(b) $\vec{v} \times \vec{w}$

Resolução: $\vec{v} \times \vec{w} = (0, 1, 1) \times (1, -4, 1) = (1 - (-4), 1 - 0, 0 - 1) = (5, 1, -1).$

(c) $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$

Resolução: $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (-1, 3, 1) \times (5, 1, -1) = (3 - 1, 5 - 1, -1 - 15) = (-4, 4, -16).$

Apêndice VIII – Resolução de Sistemas de Equações

Existem quatro métodos principais de resolução de sistemas de três equações lineares a três incógnitas¹⁰⁴: (i) o método de substituição; (ii) o método da adição ordenada ou de redução; (iii) o método misto; (iv) o método de Gauss. Todos os métodos consistem na eliminação, numa das equações, de duas incógnitas a fim de se encontrar o valor da terceira incógnita.

Um sistema de três equações lineares a três incógnitas é uma conjunção de três equações do primeiro grau com três incógnitas. Os sistemas, na sua *forma canónica*, são do tipo:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \wedge a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \wedge a_3x + b_3y + c_3z = d_3,$$

em que $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2$ e c_3 são os *coeficientes* das *incógnitas* ou *variáveis*, x, y e z , e d_1, d_2 e d_3 são os *termos independentes*, sendo todos estes parâmetros números reais.

Quanto à classificação dos sistemas esta faz-se de acordo com o número de soluções do sistema. Assim, um sistema diz-se *possível e determinado* se tiver uma única solução – um terno ordenado (a, b, c) . Um sistema diz-se *possível indeterminado* quando tem um número infinito de soluções. Quando o sistema não admite solução este diz-se *sistema impossível*.

(i) Os métodos de substituição, da adição ordenada e o misto

O *método de substituição* consiste em resolver uma das equações do sistema em ordem a uma das incógnitas e substituímos na outra equação ou nas outras equações, esta incógnita pela expressão obtida, obtendo um sistema equivalente ao primeiro – ou seja, trata-se da aplicação do designado *princípio da substituição*¹⁰⁵. Resolvemos, a título de exemplo, pelo método de substituição, o sistema na forma canónica, de três equações lineares em três incógnitas, seguinte:

¹⁰⁴ Esses métodos podem ser generalizados a um qualquer número de equações de um sistema.

¹⁰⁵ Princípio da substituição: se num sistema de equações resolvermos uma das equações em ordem a uma das incógnitas e substituímos na(s) outra(s) equação(ões) essa incógnita pela expressão obtida, obteremos um sistema equivalente ao dado.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 2y + 5z = 15 \\ 2x + 3y - z = -6 \end{cases}$$

Começamos por resolver a 1ª equação do sistema em ordem a x (podia ser em ordem a uma outra qualquer incógnita), e fazemos a substituição na 2ª e 3ª equações, obtendo estas duas equações em y e em z:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 2y + 5z = 15 \\ 2x + 3y - z = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - y - z \\ (1 - y - z) - 2y + 5z = 15 \\ 2(1 - y - z) + 3y - z = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - y - z \\ -3y + 4z = 14 \\ y - 3z = -8 \end{cases}$$

Resolvendo a 3ª equação, por exemplo, em ordem a y e fazendo a substituição na 2ª equação, obtemos esta equação em z, cujo valor determinamos e substituímos nas 1ª e 3ª equações:

$$\begin{cases} x = 1 - y - z \\ -3(-8 + 3z) + 4z = 14 \\ y = -8 + 3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - y - z \\ -5z = -10 \\ y = -8 + 3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - y - 2 \\ z = 2 \\ y = -8 + 3(2) \end{cases}$$

Encontrado o valor da incógnita y, vamos o substituir na 1ª equação e determinar, assim, os valores das três incógnitas, que podem ser escritas pela ordem natural, x, y e z:

$$\begin{cases} x = 1 + 2 - 2 \\ z = 2 \\ y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = 2 \end{cases}$$

Sendo a solução dum sistema, de três equações a três incógnitas, dada por um terno ordenado do tipo (x, y, z), obtivemos, para o sistema dado, a solução (1, -2, 2). Neste caso, o sistema diz-se *possível e determinado*.

(ii) Método da adição ordenada ou de redução

Este método permite-nos substituir uma das equações do sistema pela que se obtém do resultado de adicionarmos, membro a membro, essa equação com uma das outras (adicionamos duas equações de tal modo que a incógnita a eliminar apareça, em ambas as equações, com coeficientes simétricos, para isso podemos multiplicar uma das equações ou ambas as equações por números reais, não nulos, adequados), obtendo um sistema equivalente ao inicial – significa que tem

por base o chamado *princípio da adição ordenada*¹⁰⁶. Exemplifiquemos, este método, resolvendo o

sistema de três equações lineares em três incógnitas seguinte:
$$\begin{cases} x + 2y + z - 6 = 0 \\ 2y = 5 - 5z \\ 5z = -6 - 2y \end{cases}$$

Começamos por escrever o sistema na forma canónica:
$$\begin{cases} x + 2y + z = 6 \\ 2y + 5z = 5 \\ 2y + 5z = -6 \end{cases}$$

Agora multiplicamos os dois membros da 2ª equação por -1 e adicionamos ordenadamente com a 3ª equação, vem:

$$\begin{array}{r} -2y - 5z = -5 \\ \underline{2y + 5z = -6} \\ 0y + 0z = -11 \end{array}$$

Temos então o sistema equivalente:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 6 \\ 0y + 0z = -11 \\ 2y + 5z = -6 \end{cases}$$

Obtivemos um sistema em que a 2ª equação é impossível, donde o sistema não admite solução e logo é *impossível*.

(iii) Método misto

Este método resulta da aplicação simultânea dos métodos de substituição e de redução. Exemplifiquemos a resolução dum sistema, de três equações do primeiro grau a três incógnitas, dado na forma canónica, pelo método misto:

$$\begin{cases} x + 3y + 5z = 2 \\ 2x - 2y - 2z = 4 \\ 3x + 2y + 4z = 5 \end{cases} \quad (\text{VIII.1})$$

Começamos por eliminar, por exemplo, a incógnita x na 2ª e 3ª equações. Para tal, multiplicamos os dois membros da 1ª equação por -2 e adicionamos ordenadamente com a 2ª equação e multiplicamos os dois membros da 1ª equação por -3 e adicionamos ordenadamente com a 3ª equação:

¹⁰⁶ Princípio da adição ordenada: se num sistema de equações substituirmos uma equação pela que se obtém adicionando ordenadamente, membro a membro, essa equação com uma das outras equações, obteremos um sistema equivalente ao dado.

$$\begin{array}{rcl}
 -2x - 6y - 10z = -4 & & -3x - 9y - 15z = -6 \\
 \underline{2x - 2y - 2z = 4} & \text{e} & \underline{3x + 2y + 4z = 5} \\
 -8y - 12z = 0 & & -7y - 11z = -1
 \end{array}$$

Substituindo as duas últimas equações do sistema dado pelas duas equações obtidas nas somas e simplificando-as, obtemos o sistema equivalente:

$$\begin{cases} x + 3y + 5z = 2 \\ -8y - 12z = 0 \\ -7y - 11z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y + 5z = 2 \\ 2y + 3z = 0 \\ 7y + 11z = 1 \end{cases} \quad (\text{VIII.2})$$

Agora, eliminamos a incógnita y (podia ser a incógnita z) deste sistema, multiplicando os dois membros da 2ª equação por 7, multiplicando os dois membros da 3ª equação por -2 e adicionamos os resultados ordenadamente:

$$\begin{array}{r}
 14y + 21z = 0 \\
 \underline{-14y - 22z = -2} \\
 -z = -2
 \end{array}$$

Substituindo a 3ª equação do sistema (VIII.2) pela soma obtida, vem o sistema equivalente. Simplificando a 3ª equação deste sistema, determinamos z . Aplicando o método de substituição, substituímos z da 2ª equação, pelo seu valor e determinamos, assim, y . Substituindo, agora, z e y da 1ª equação, pelos seus valores respectivos determinamos x :

$$\begin{cases} x + 3y + 5z = 2 \\ 2y + 3z = 0 \\ -z = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y + 5(2) = 2 \\ 2y + 3(2) = 0 \\ z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3(-3) + 5(2) = 2 \\ y = -3 \\ z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \\ z = 2 \end{cases}$$

Donde, a solução do sistema dado é o terno ordenado $(1, -3, 2)$ e, portanto, o sistema é *possível e determinado*.

(iv) O método de Gauss

O método adoptado para resolver o sistema (VIII.1) também se pode designar por *método de Gauss*. Vamos agora apresentar o método de Gauss mas usando a notação matricial (Apêndice IX). Consideremos o sistema de três equações do primeiro grau com três incógnitas, seguinte:

$$\begin{cases} 2x + y + z - 1 = 0 \\ 4x + y + 2 = 0 \\ -2x + 2y + z - 7 = 0 \end{cases}$$

Começamos por escrever o sistema na forma canônica e, seguidamente, escrevemos a *matriz completa do sistema*. Ou seja, organizamos a matriz com apenas os coeficientes das incógnitas, na primeira parte da matriz, e, separado por um traço vertical, os termos independentes. Os coeficientes de cada equação formam uma *linha* da matriz e os coeficientes de cada incógnita formam uma *coluna* da matriz.

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ 4x + y = -2 \\ -2x + 2y + z = 7 \end{cases} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 1 & 7 \end{array} \right]$$

Agora pretende-se transformar a matriz quadrada – a primeira parte da matriz completa do sistema, ou seja, não considerando a coluna dos termos independentes – numa *matriz triangular* (Apêndice IX). Assim, temos que anular todos os elementos abaixo da diagonal principal desta matriz, mas nenhum elemento da diagonal pode ser zero. Para isso, fazemos uma escolha conveniente para o elemento da primeira linha e primeira coluna, elemento esse diferente de zero (podemos, se necessário, trocar linhas entre si), o *pivot*. Utilizando o pivot, reduzimos a zero, através de *transformações elementares* (Apêndice IX), todos os elementos abaixo do pivot. Neste caso, o pivot é 2, multiplicamos a 1ª linha por –2 e adicionamos à 2ª linha, substituindo esta pelo resultado obtido:

$$\begin{array}{l} (-2) \\ + \rightarrow \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 1 & 7 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 & 7 \end{array} \right]$$

Adicionamos a 1ª linha com a 3ª linha e substitui-se esta pelo resultado obtido.

$$\begin{array}{l} \downarrow \\ + \rightarrow \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 & 7 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 2 & 8 \end{array} \right]$$

Toma-se agora –1 como pivot, multiplicamos a 2ª linha por 3 e adicionamos à 3ª linha, substituindo esta pelo resultado que se obtém.

$$\begin{array}{l} (3) \\ + \rightarrow \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 2 & 8 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{array} \right]$$

Obtivemos a matriz triangular dentro da matriz completa do sistema, bastando agora escrever o sistema e resolve-lo por substituição.

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ -y - 2z = -4 \\ -4z = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + (1) = 1 \\ -y - 2(1) = -4 \\ z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + (2) + (1) = 1 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

Assim, a solução do sistema dado é o terno ordenado $(-1, 2, 1)$ e, logo, é um *sistema possível e determinado*.

Obtivemos a matriz triangular dentro da matriz completa do sistema, bastando agora escrever o sistema e resolve-lo por substituição.

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ -y - 2z = -4 \\ -4z = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + (1) = 1 \\ -y - 2(1) = -4 \\ z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + (2) + (1) = 1 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

Assim, a solução do sistema dado é o terno ordenado $(-1, 2, 1)$ e, logo, é um *sistema possível e determinado*.

Apêndice IX – Matrizes e Determinantes (e. g. Santos 1997)

O estudo das matrizes iniciou-se com os trabalhos do inglês Arthur Cayley¹⁰⁷. Uma *matriz* não é mais que um quadro de números, devidamente organizado, em linhas e em colunas. Por exemplo, ao quadro $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$ chama-se *matriz rectangular* do tipo (2×3), isto é, a matriz tem 2 linhas e 3 colunas, em que na 1ª linha temos os elementos a , b , e c , na 2ª linha os elementos d , e e f , na 1ª coluna os elementos a e d , na 2ª coluna os elementos b e e , e na 3ª coluna os elementos c e f . (Monteiro 1980).

Genericamente representam-se os elementos de uma matriz por uma letra minúscula afectada de dois índices, o primeiro representativo da linha e o segundo representativo da coluna: a_{ij} – representa o elemento da linha i e da coluna j . Na matriz acima temos, por exemplo, que: $a_{21} = d$ – é o elemento da 2ª linha e 1ª coluna; $a_{13} = c$ – é o elemento da 1ª linha e 3ª coluna. Em geral uma matriz A ($m \times n$) representa-se na forma:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Quando o número de linhas é igual ao número de colunas, $m = n$, a matriz A designa-se por *matriz quadrada* ou *matriz de ordem n* :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Uma matriz B de 3ª ordem é, por exemplo,

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Numa matriz quadrada de ordem n chamamos *diagonal principal* à diagonal constituída pelos elementos a_{11} , a_{22} , ..., a_{nn} , e chamamos *diagonal secundária* à diagonal constituída pelos elementos a_{1n} , a_{2n-1} , ..., a_{n1} . Na matriz B de 3ª ordem acima, os elementos da diagonal principal são: 2, 5 e 3; e

¹⁰⁷ Arthur Cayley (1821 – 1895) foi advogado de profissão, mas a partir dos seus 29 anos dedica-se ao estudo da matemática, produzindo cerca de um milhar de memórias sobre álgebra e análise.

os elementos da diagonal secundária são: 1, 5 e 4. *Matriz triangular superior* é uma matriz quadrada em que são nulos todos os elementos abaixo da diagonal principal. Uma matriz triangular superior de 3ª ordem, por exemplo, escreve-se na forma:

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matriz triangular inferior é uma matriz quadrada em que são nulos todos os elementos acima da diagonal principal. Uma matriz triangular inferior de 3ª ordem é por exemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Chamam-se *transformações elementares* numa matriz às transformações que se podem efectuar na matriz de um sistema para obter a matriz de um sistema equivalente, e são as seguintes: trocar a ordem das linhas; multiplicar todos os elementos de uma linha pelo mesmo número diferente de zero; substituir uma linha pela sua soma com outra linha da matriz.

Determinante de uma matriz de ordem n é o somatório dos seus termos. O termo de um determinante de ordem n é o produto de n elementos da matriz quadrada de tal forma que nesse produto entre um e um só elemento de cada linha e de cada coluna. Consideremos uma matriz A , quadrada, de 2ª ordem:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Representa-se o determinante da matriz A por $\det A$ ou $|A|$. O valor do determinante de 2ª ordem é dado por:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

ou seja, multiplicam-se os elementos da diagonal principal e subtrai-se-lhe o produto dos elementos da diagonal secundária. Para a matriz D de 2ª ordem, por exemplo:

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

o seu determinante é:

$$|D| = 2 \times 1 - 3 \times (-3) = 11.$$

Consideremos agora uma matriz quadrada, A , de 3ª ordem:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

O valor do determinante de 3ª ordem é obtido do seguinte modo:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

A *regra de Sarrus*¹⁰⁸ é uma regra prática para o cálculo de determinantes de 3ª ordem: “Os termos positivos são o produto dos elementos da diagonal principal e os produtos dos elementos que formam os triângulos de bases paralelas à diagonal principal. Os termos negativos são o produto dos elementos da diagonal secundária e os produtos dos elementos que formam os triângulos de bases paralelas à diagonal secundária”. Exemplifiquemos o cálculo do determinante duma matriz E de 3ª ordem:

$$E = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

então,

$$\begin{aligned} |E| &= \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times 5 \times 3 + (-1) \times 4 \times 1 + 0 \times 3 \times (-2) - 0 \times 5 \times 1 - (-1) \times 3 \times 3 - 2 \times 4 \times (-2) = \\ &= 30 - 4 + 0 - 0 + 9 + 16 = 51. \end{aligned}$$

Algumas propriedades dos determinantes:

- Se um determinante tem uma fila (linha ou coluna) de elementos todos nulos, o determinante é nulo;
- Se multiplicarmos ou dividirmos uma fila por um número diferente de zero o determinante vem multiplicado ou dividido por esse número;
- Se uma matriz é triangular o valor do seu determinante é igual ao seu termo principal;
- Se num determinante duas filas paralelas são iguais ou proporcionais, o determinante é nulo.

¹⁰⁸ Pierre Sarrus (1798 – 1861) foi um matemático francês, professor na Faculdade das Ciências de Strasbourg. Foi premiado, em 1848, pela Academia Francesa das Ciências pela autoria de um trabalho acerca dos integrais múltiplos. É, no entanto, mais conhecido devido à sua célebre regra e aos seus trabalho em Álgebra Linear – ver <http://chronomath.iirem.univ-mrs.fr/chronomath/Sarrus.html>.

Apêndice X – Simetrias de Rotações de Poliedros

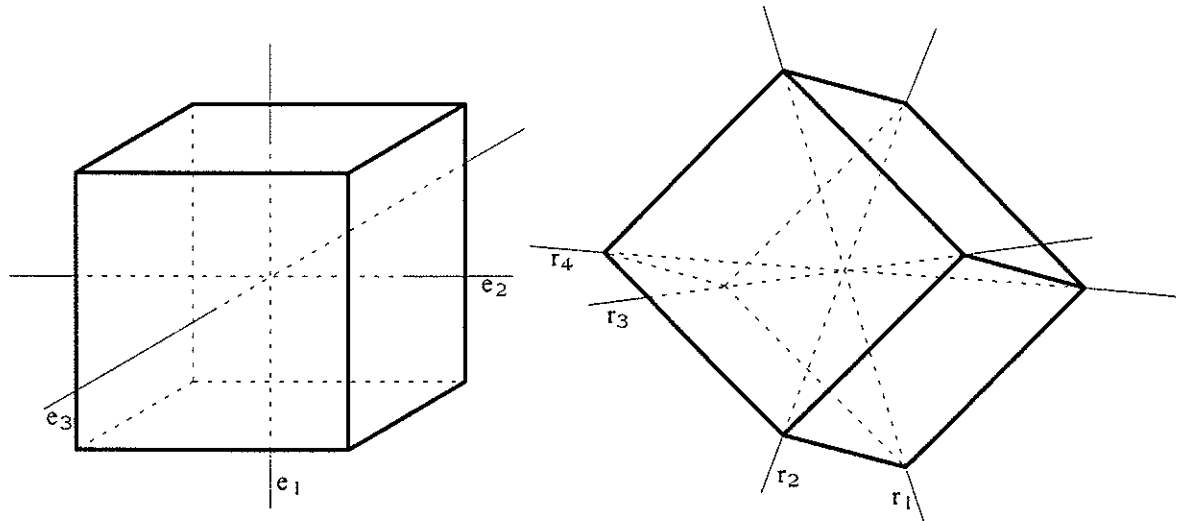


Figura X.1: À esquerda temos três eixos de rotação do cubo, e_1 , e_2 e e_3 , de ordem 4, que passam pelos centros de duas faces opostas. À direita temos quatro eixos de rotação do cubo, r_1 , r_2 , r_3 e r_4 , de ordem 3, pois passam por dois vértices opostos.

A noção de simetria é estritamente geométrica e absolutamente precisa (Soler 1990). Um corpo, com uma configuração espacial é simétrico com respeito a um dado plano \mathcal{P} se se transforma em si mesmo por uma reflexão em \mathcal{P} . Um plano de simetria não é mais que um espelho. Um plano de simetria de um poliedro é um espelho tal que uma parte do poliedro se reflita exactamente na outra parte.

Uma figura tem simetria rotacional em torno de um eixo e se se transforma em si mesma por todas as rotações em torno de e . Um eixo de rotação de um poliedro é uma recta que quando se gira o poliedro em torno desta, antes de dar uma volta completa, o poliedro apresenta sempre o mesmo aspecto que na posição inicial. Por exemplo, um eixo de rotação do cubo é a recta que passa pelos centros de duas faces opostas (Figura X.1). A ordem deste eixo é 4, pois rodamos 4 vezes (neste caso, cada de 90°) e ainda obtemos a posição inicial. De outra forma, dizemos que a ordem deste eixo é 4 porque o cubo apresenta 4 vezes o mesmo aspecto quando se o gira por uma volta completa (note-se que a posição do observador com respeito ao cubo, tem que ser a mesma enquanto o cubo gira uma volta completa em torno do eixo). Há outro tipo de eixo de rotação, que passa por vértices opostos do cubo: são quatro eixos de ordem 3 (Figura X.1).

A ordem dos eixos de rotação, nos poliedros platónicos, coincide com o número de lados do polígono da face e no caso de passar por dois vértices opostos coincide com a ordem dos vértices

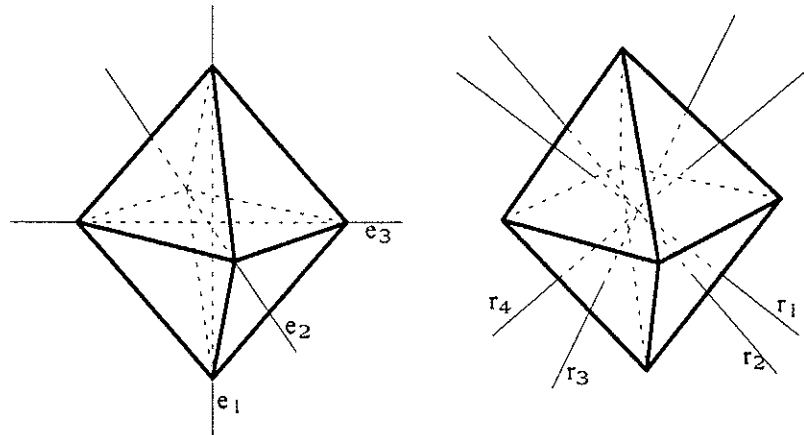


Figura X.2: À esquerda temos três eixos de rotação do octaedro, e_1 , e_2 e e_3 , de ordem 4, que passam pelos vértices opostos. À direita temos quatro eixos de rotação do octaedro, r_1 , r_2 , r_3 e r_4 , de ordem 3, que passam pelos centros de duas faces opostas.

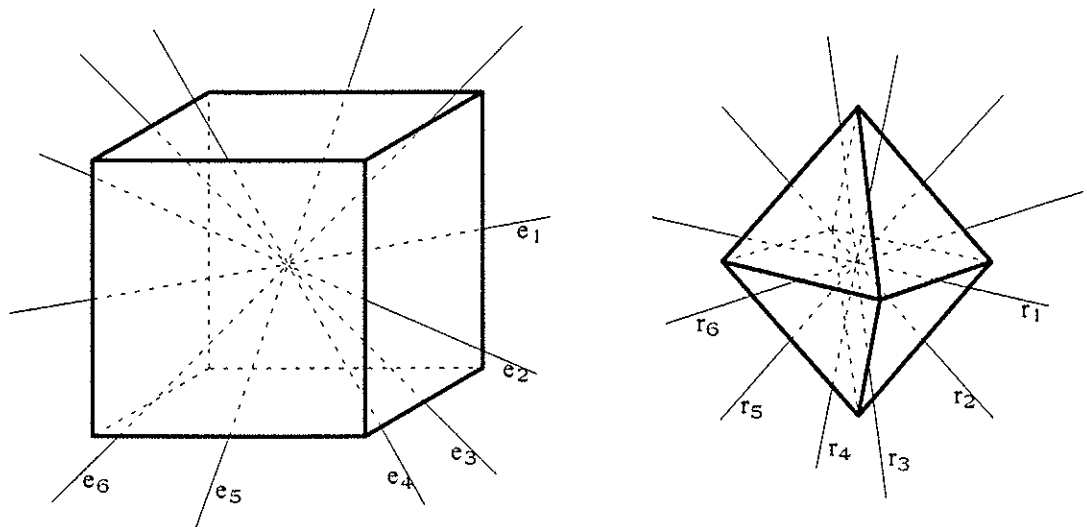


Figura X.3: Os pontos médios de arestas opostas definem também eixos de rotação: no cubo temos seis eixos de rotação, e_1 , e_2 , e_3 , e_4 , e_5 e e_6 , de ordem 2 (à esquerda); no octaedro temos seis eixos de rotação, r_1 , r_2 , r_3 , r_4 , r_5 e r_6 , de ordem 2 (à direita).

(isto é, com o número de arestas que nele concorrem). No entanto, esta propriedade não se verifica em geral para outros poliedros, nomeadamente para os poliedros arquimedianos. O octaedro tem três eixos de rotação de ordem 4, um por cada par de vértices opostos (Figura X.2). Cada um é perpendicular a um plano de simetria do octaedro. O octaedro tem ainda outro tipo de eixo de rotação – que passa pelos centros das faces opostas. São quatro os eixos deste tipo e são de ordem 3 (Figura X.2).

Temos ainda um terceiro tipo de eixo de rotação, no cubo e no octaedro, que passa pelos pontos médios de arestas opostas (Figura X.3). Na Figura X.3 pode ver que há seis destes eixos de

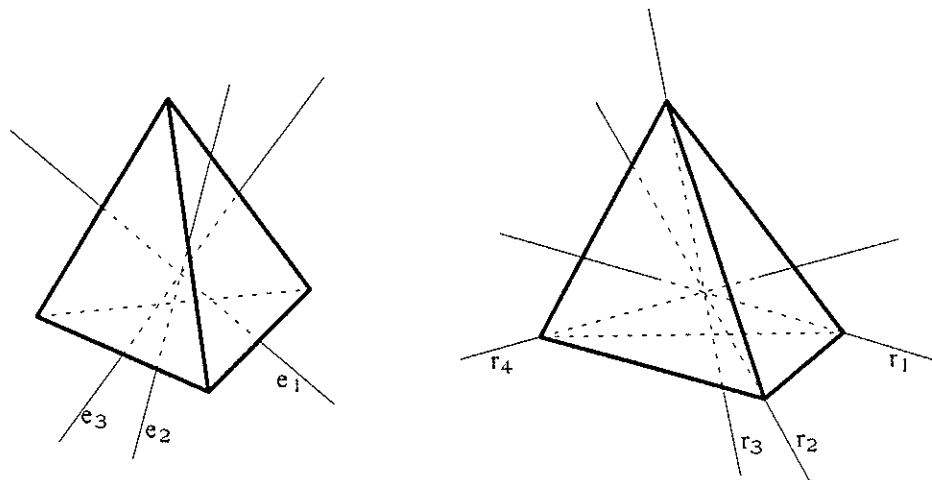


Figura X.4: À esquerda temos três eixos de rotação do tetraedro, e_1 , e_2 , e e_3 , de ordem 2, que passam pelos pontos médios das arestas. À direita temos quatro eixos de rotação do tetraedro, r_1 , r_2 , r_3 , e r_4 , de ordem 3, e que passam por um vértice e pelo centro da face oposta.

rotação, no caso do cubo e do octaedro, e são de ordem 2.

O tetraedro tem três eixos de rotação, de ordem 2, que passam pelos pontos médios das arestas (Figura X.4). Tem também quatro eixos de rotação de ordem 3, que passam por um vértice do tetraedro e pelo centro da face que se lhe opõe (Figura X.4).

Apêndice XI – Poliedros Arquimedianos

Mostra-se neste apêndice, nas Figuras XI.1 – XI.13, os 13 poliedros arquimedianos¹⁰⁹ (ou semi-regulares) e vamos o fazer de acordo com os tipos de faces, como na Tabela 4.4.

1. *Poliedros com dois tipos de faces.*

a) ângulos poliédricos triedros:

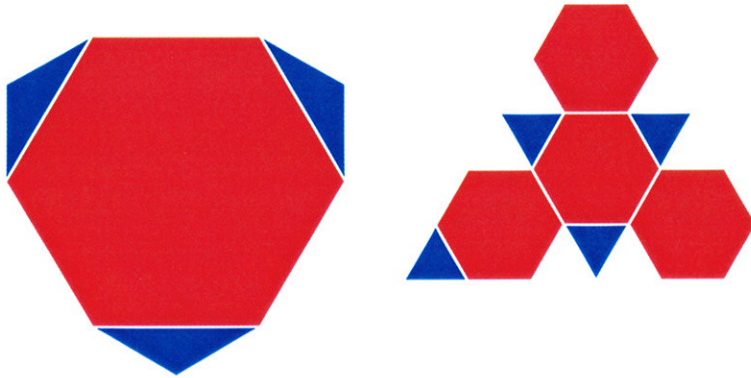


Figura XI.1: Troncotetraedro ou tetraedro truncado – 8 faces. Tipo de vértices: 3.6^2 .

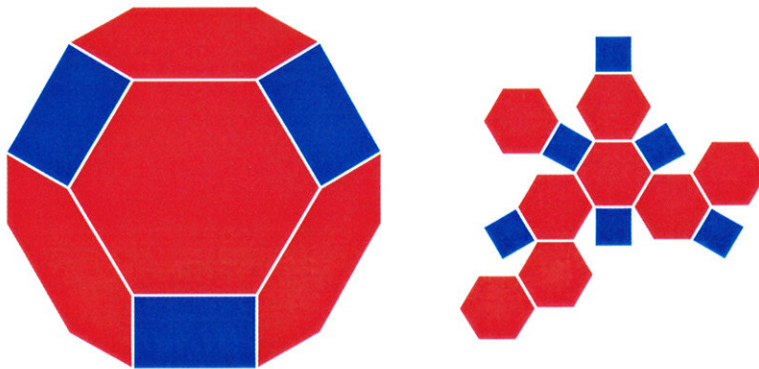


Figura XI.2: Troncooctaedro ou octaedro truncado – 14 faces. Tipo de vértices: 4.6^2 .

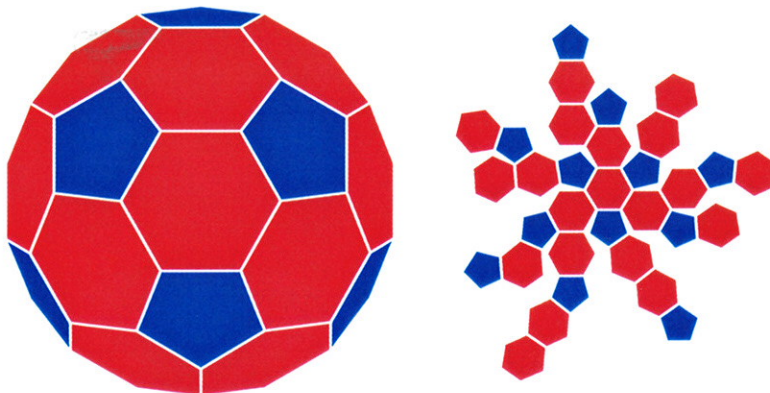


Figura XI.3: Troncoicosaedro ou icosaedro truncado – 32 faces. Tipo de vértices: 5.6^2 .

¹⁰⁹ Neste apêndice temos a segunda e última exceção à representação das figuras na tese, pois neste caso também se revelaria muito difícil representar estes poliedros no Sketchpad. Assim, os 13 poliedros arquimedianos foram retirados do software Poly que pode ver e fazer o seu download em <http://www.peda.com/poly/welcome.html>.

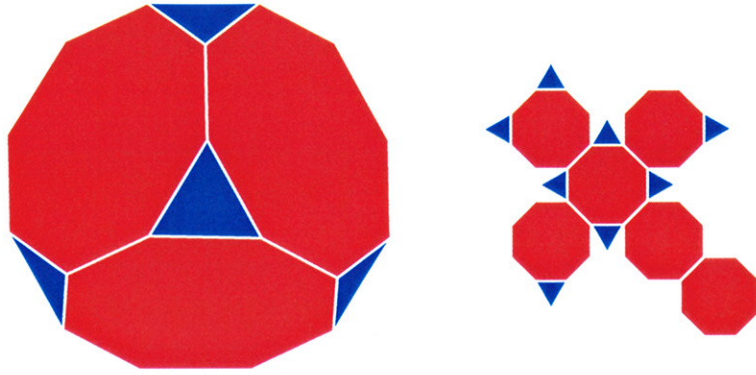


Figura XI.4: Troncocubo ou cubo truncado – 14 faces. Tipo de vértices: 3.8^2 .

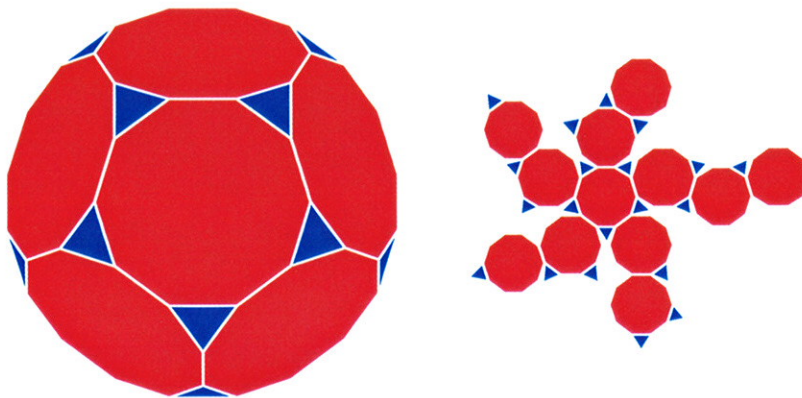


Figura XI.5: Troncododecaedro ou dodecaedro truncado – 32 faces. Tipo de vértices: 3.10^2 .

b) *ângulos poliédricos quadraedros:*

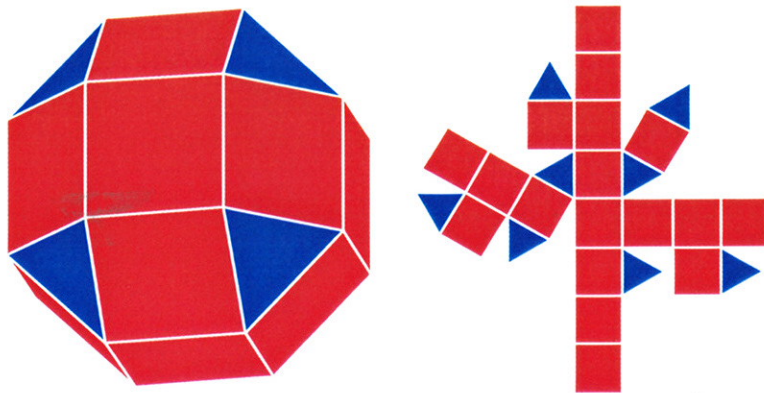


Figura XI.6: Rombicuboctaedro – 26 faces. Tipo de vértices: 3.4^3 .

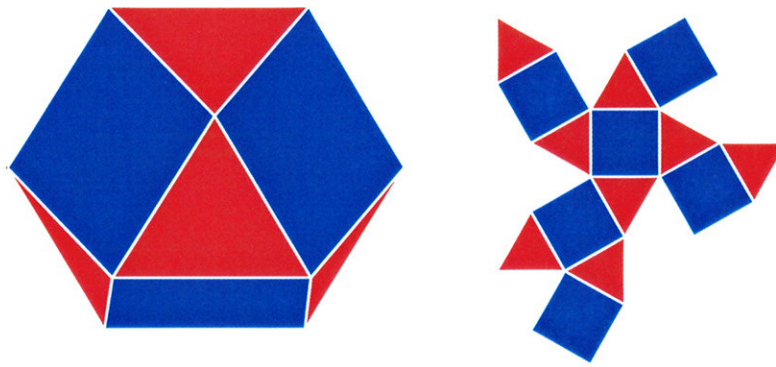


Figura XI.7: Cuboctaedro – 14 faces. Tipo de vértices: $(3.4)^2$.

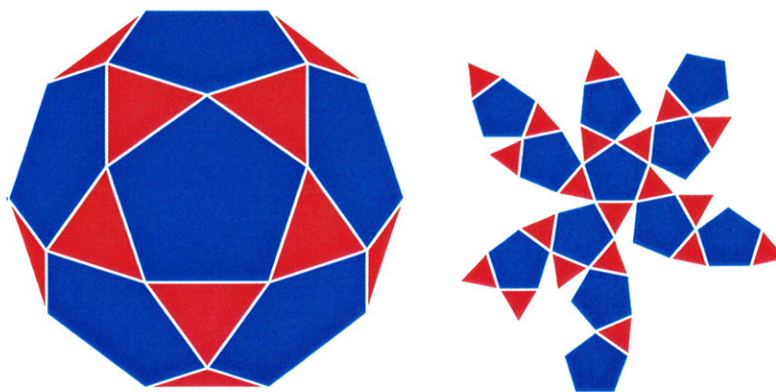


Figura XI.8: Icosidodecaedro – 32 faces. Tipo de vértices: $(3.5)^2$.

c) ângulos poliédricos pentaedros:

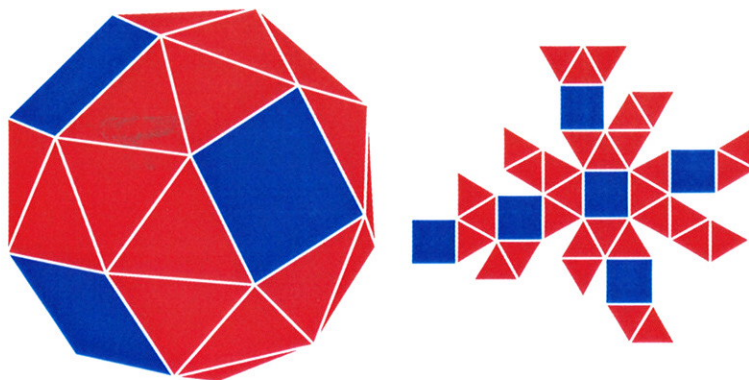
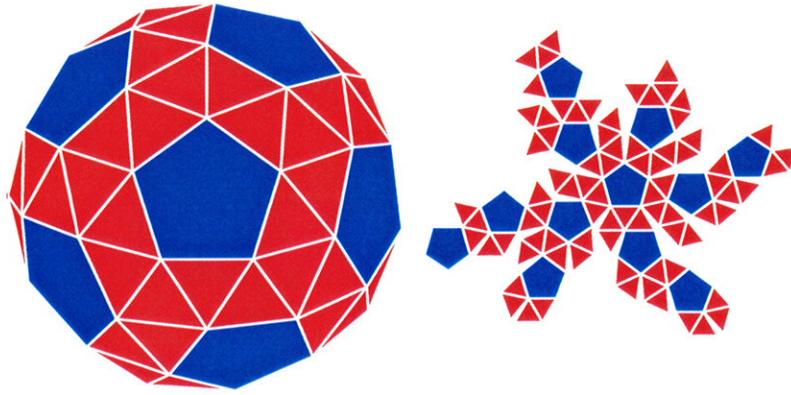


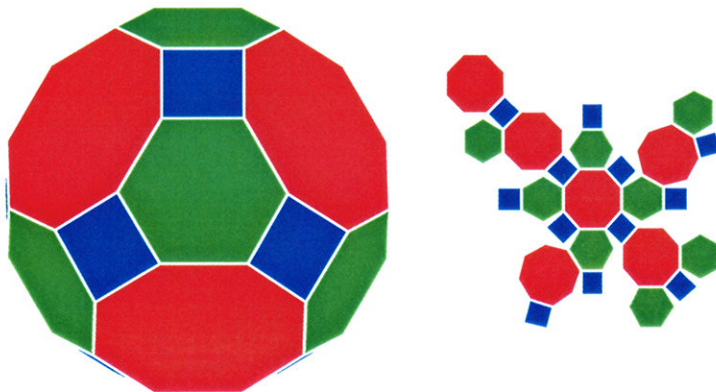
Figura XI.9: Cubo achatado / rombo ou cuborrombo (snub-cubo) – 38 faces. Tipo de vértices: $3^4.4$.



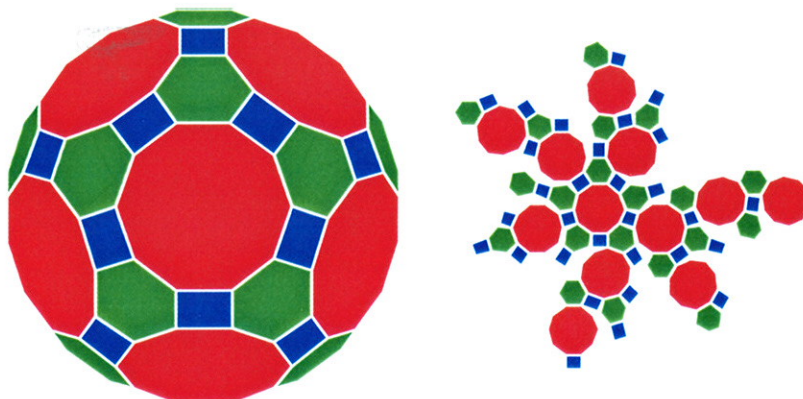
FiguraXI.10: Dodecaedro achatado / rombo ou dodecaedrorrombo (snub-dodecaedro) – 92 faces. Tipo de vértices: $3^4.5$.

2. Poliedros com três tipos de faces.

a) ângulos poliédricos triedros:

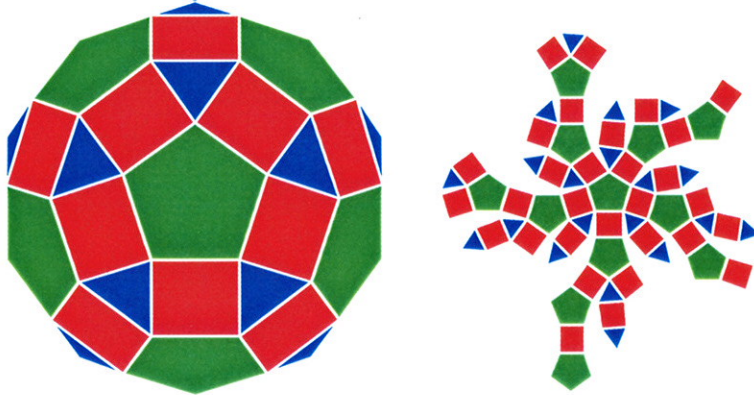


FiguraXI.11: Troncocuboctaedro ou cuboctaedro truncado – 26 faces. Tipo de vértices: 4.6.8.



FiguraXI.12: Troncoicosidodecaedro ou icosidodecaedro truncado – 62 faces. Tipo de vértices: 4.6.10.

a) ângulos poliédricos quadraedros:



FiguraXI.13: Rombicosidodecaedro – 62 faces. Tipo de vértices: 3.4.5.4.

Apêndice XII – Área da Superfície e Volume do Cone e da Esfera (e. g. Ferreira 1996)

O trapezóide está definido por uma porção contínua e não negativa do gráfico de $y = f(x)$, pelo eixo das abcissas e por segmentos de recta situados sobre as rectas $x = a$ e $x = b$ (Figura XII.1). O trapezóide representado na Figura XII.1, ao rodar em torno do eixo dos xx , gera um sólido de revolução. Consideremos, pois, a porção sombreada (cinzento) desse trapezóide, com uma base de comprimento dx . Sendo dx muito pequeno, ela será aproximadamente um rectângulo que, ao rodar em torno do eixo dos xx , gera um cilindro de raio da base $f(x)$ e altura dx . O seu volume será $\pi[f(x)]^2 dx$. O volume do sólido de que falamos deverá ser a soma de todos estes volumes infinitesimais de $x = a$ até $x = b$. Então, o volume de tal trapezóide é dado pelo integral¹¹⁰:

$$\text{Volume} = \int_a^b \pi[f(x)]^2 dx \Leftrightarrow \text{Volume} = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

O integral que dá a área lateral de um sólido, gerado pela rotação de um trapezóide, é dado por:

$$\text{Área} = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx,$$

que corresponde, de modo intuitivo, à soma das áreas laterais de cilindros de áreas laterais infinitesimais, de raio da base $f(x)$ (e o seu perímetro é $2\pi f(x)$) e a altura $\sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$ (comprimento infinitesimal de linha), entre a e b .

O cone pode ser gerado por um trapezóide como indicado na Figura XII.2. Considerando, então, o cone de revolução de altura h e raio da base r (Figura XII.2), temos que $f(x) = \frac{r}{h}x$, e portanto o seu volume será:

$$\text{Volume} = \pi \int_0^h \left[\frac{r}{h}x \right]^2 dx = \frac{\pi r^2}{h^2} \int_0^h x^2 dx = \frac{\pi r^2}{h^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^h = \frac{\pi r^2}{h^2} \frac{h^3}{3} = \frac{1}{3} \pi r^2 h,$$

e como $f'(x) = \frac{r}{h}$, a sua área lateral será dada por:

$$\text{Área} = 2\pi \int_a^b \frac{r}{h} x \sqrt{1 + \frac{r^2}{h^2}} dx = 2\pi \frac{r}{h} \sqrt{1 + \frac{r^2}{h^2}} \int_a^b x dx = 2\pi \frac{r}{h} \sqrt{\frac{h^2 + r^2}{h^2}} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^h.$$

¹¹⁰ Trata-se do integral que pode ser calculado pela *regra de Barrow*: “Sendo f uma função contínua num intervalo $[a, b]$ e F uma primitiva qualquer de f no mesmo intervalo, tem-se $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ ” (Ferreira 1987).

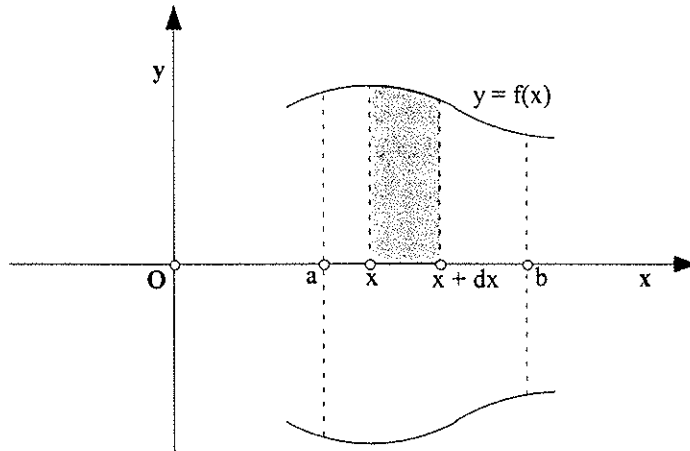


Figura XII.1: Gráfico de uma função $f(x)$. Trapezóide assinalado a cinzento.

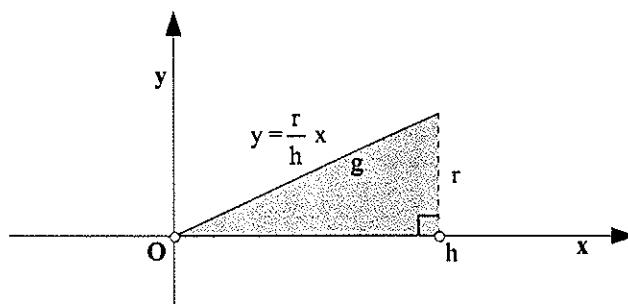


Figura XII.2: Cone de altura h e raio da base r : pode ser gerado por um trapezóide cujo gráfico é traduzido pela função $f(x) = \frac{r}{h}x$; a sua superfície lateral é obtida pela rotação em torno do eixo das abscissas do triângulo de catetos h e r e hipotenusa g – a geratriz do cone.

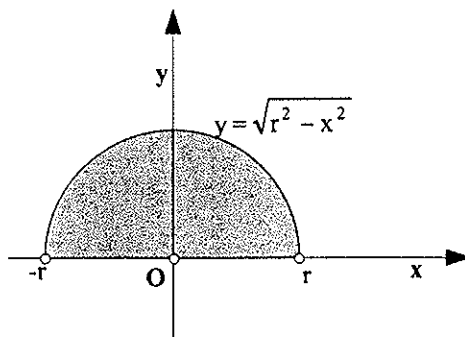


Figura XII.3: Esfera de raio r : pode ser gerada por um semicírculo de centro na origem do referencial que roda em torno do eixo dos xx e cujo gráfico é traduzido pela função $y = \sqrt{r^2 - x^2}$; a sua superfície é obtida pela rotação em torno do eixo das abscissas de uma semicircunferência de centro na origem.

Donde, aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo rectângulo de catetos h e r e hipotenusa g (*geratriz do cone*): $g^2 = h^2 + r^2$; vem

$$\text{Área} = 2\pi \frac{r}{h} \sqrt{\frac{g^2}{h^2} \frac{h^2}{2}} = 2\pi \frac{r}{h} \frac{g}{h} \frac{h^2}{2} = \pi r g.$$

A esfera pode ser gerada por um semicírculo de centro na origem do referencial O e raio r (Figura XII.3). Assim, neste caso, fazendo $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, o seu volume é dado por:

$$\begin{aligned} \text{Volume} &= \pi \int_{-r}^r (\sqrt{r^2 - x^2})^2 dx = \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx = \pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-r}^r = \pi \left(r^3 - \frac{r^3}{3} - \left(-r^3 + \frac{r^3}{3} \right) \right) = \\ &= \pi \left(2r^3 - \frac{2r^3}{3} \right) = \frac{4}{3} \pi r^3. \end{aligned}$$

Como temos $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$, a área da superfície esférica é:

$$\begin{aligned} \text{Área} &= 2\pi \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}} \right)^2} dx = 2\pi \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx = \\ &= 2\pi \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}} dx = 2\pi \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx = 2\pi \int_{-r}^r r dx = 2\pi r [x]_{-r}^r = 2\pi r (r - (-r)) = \\ &= 4\pi r^2. \end{aligned}$$