# A Aprendizagem da Geometria: Critérios de Paralelismo e Perpendicularidade entre Planos, e entre Retas e Planos.

RELATÓRIO DE MESTRADO

**Ana Sofia Fernandes Duarte Lopes**

MESTRADO EM ENSINO DA MATEMÁTICA NO 3º CICLO DO ENSINO BÁSICO E SECUNDÁRIO

ORIENTAÇÃO
Elsa Maria dos Santos Fernandes

UNIVERSIDADE da MADEIRA

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA ENGENHARIA

# A Aprendizagem da Geometria: Critérios de Paralelismo e Perpendicularidade entre Planos, e entre Retas e Planos.

Ana Sofia Fernandes Duarte Lopes

**Orientadora**
Doutora Elsa Maria dos Santos Fernandes

Relatório da atividade
profissional no âmbito
do Mestrado em Ensino da
Matemática
do 3.º Ciclo e Secundário
da Universidade da Madeira.

Funchal, 2012

**Resumo**

O estudo aqui apresentado teve como objetivo compreender como é que os alunos aprendem Geometria. Para melhor estudar este problema, o mesmo foi dissecado em três questões: (a) Qual o papel dos materiais manipuláveis na estruturação do pensamento geométrico dos alunos? (b) Como comunicam as ideias geométricas? (c) Como é que os modelos concretos facilitam a passagem do concreto para o abstrato? Analisou-se o trabalho de uma turma do oitavo ano de escolaridade em torno da realização de duas tarefas que compreendiam a dedução dos critérios de paralelismo e perpendicularidade entre planos, e entre retas e planos, e a resolução de problemas realistas com base nesses critérios. A investigação realizada foi de natureza qualitativa e os dados foram recolhidos pela investigadora através de registos audiovisuais, com câmara e vídeo, do trabalho dos alunos. A análise dos dados fez-se com base nas questões acima apresentadas. Das conclusões que advêm do estudo destaca-se o papel essencial dos materiais manipuláveis, e dos modelos concretos, na construção e concetualização do conhecimento geométrico dos alunos. De referir ainda a importância das atividades de natureza exploratória e investigativa, as quais incidiram sobre problemas abertos, onde as descobertas feitas foram mais convincentes e surpreendentes e a explicação lógica das mesmas permitiram matematizar a realidade.

Palavras – chave: geometria, aprendizagem, materiais manipuláveis, raciocínio dedutivo, resolução de problemas.

## Abstract

The study here presented aimed to understand how students learn geometry. To better study this problem, it was divided into three questions: (a) What is the role of manipulative materials in the structuring of students' geometric thinking? (b) How do they communicate geometric ideas? (c) How do concrete models facilitate the transition from concrete to abstract? The work of an eighth grade class was analyzed on what the performance of two tasks which included the deduction of the criteria of parallelism and perpendicularity between plans and between lines and planes, and the resolution of realistic problems based on these criteria was concerned. The investigation was qualitative and data were collected by the researcher through audiovisual recordings with video and camera of the students' work. Data analysis was made based on the questions stated above. Among the study's conclusions, we highlight the essential role of manipulative materials and concrete models, construction and conceptualization of the geometrical knowledge of the students. Note also the importance of the exploratory and investigative activities, which focused on open problems, where the findings were more surprising and convincing and logical explanation of these allowed mathematizing reality.


Key - words: geometry, learning, manipulative materials, deductive reasoning, problem solving.

**Agradecimentos**

Aos meus alunos pelo empenho revelado apesar das dificuldades sentidas.

À Doutora Elsa Fernandes, o meu reconhecimento pelo seu competente apoio e pelo seu incentivo que foi o melhor antídoto para qualquer desânimo que pudesse ter sabotado este projeto em que me envolvi.

À Mestre Paula Lopes pela cooperação na planificação e condução das tarefas.

Aos meus pais pela assistência prestada na realização deste relatório e pelo apoio moral.

Aos professores Jordão Freitas e Rui Caetano pelo apoio incondicional em termos logísticos.

À D. Filipa pela sua incansável disponibilidade em me apoiar a nível audiovisual.

À Maria e à Mariana pelo amparo nas alturas mais difíceis.

E, por fim, mas não menos importante, ao Nuno e ao António pelas horas intermináveis que passaram sem mim e pelo incentivo que me deram para chegar até aqui.

# Índice

**Índice de Figuras**

## Introdução

O tema que escolhi desenvolver – “A Aprendizagem da Geometria” – justifica-se no encontro entre a minha preferência pessoal e as necessidades detetadas no decurso da minha atividade letiva, na qual se tornou notória uma generalizada incapacidade dos alunos em lidar, de forma concetualmente rigorosa e metodologicamente pertinente, com as diversas vertentes da noção de espaço. Foi com este ponto de partida que formulei o problema que iria guiar-me no decurso das minhas pesquisas e experiências: “compreender como é que os alunos aprendem Geometria”. Mais especificamente, o meu estudo incidiu sobre três aspetos: o papel dos materiais manipuláveis na estruturação do pensamento geométrico dos alunos, a forma como os alunos comunicam as ideias geométricas e importância dos modelos concretos na passagem do concreto para o abstrato. Pareceu-me que, se alcançasse esta pretensão, muitos obstáculos enfrentados neste domínio letivo acabariam por dissipar-se. A minha perceção, assente numa já relativamente longa experiência de lecionação, deixa-me prever que aqueles obstáculos são gerados principalmente por um sistema lógico incompreensível para os alunos até ao momento em que o consigam relacionar com o ambiente que os rodeia.

Por isso, nada melhor do que promover estas tentativas no universo de uma turma do oitavo ano cujas generalizadas dificuldades de aprendizagem permitiriam um mais adequado enquadramento para criar e compreender esta experiência. Assim sendo, determinei como tópico específico deste estudo os “critérios de paralelismo e perpendicularidade entre retas e planos e entre planos”. Pareceram-me estes, por serem primeiros na nossa lide com objetos do espaço, os mais pertinentes para um primeiro esforço de concetualização. Dadas as limitações que esta experiência enfrentava, derivadas sobretudo dos sintomas de indiferença e impreparação da turma considerada, escolhi um itinerário conduzido por “estratégias de investigação de natureza qualitativa”. Só assim se afigurava possível fazer o transporte entre impressões essencialmente erráticas e os esforços de construção racional que a matéria requeria.

O estudo que realizei dividiu-se em diferentes momentos. Iniciou-se com a pesquisa bibliográfica, a partir da qual interiorizei o que defendem os investigadores relativamente ao ensino e à aprendizagem da Geometria.

Num segundo momento, estabeleci o tipo de estudo que realizei e caraterizei, descritivamente, a turma com que trabalhei. Com base nas ideias criadas a partir da pesquisa bibliográfica, escolhi e planifiquei as propostas de trabalho a aplicar na sala de aula e defini o meu problema de investigação.

O trabalho dos alunos foi o terceiro momento do meu estudo. Durante o mesmo, efetuei a recolha de dados e, por razões que são apresentadas mais à frente neste relatório, reformulei a planificação inicial consoante o *feedback* que obtinha das atividades realizadas pelos alunos.

Os dois últimos momentos foram a análise dos dados recolhidos em conformidade com o problema de investigação definido e, consequentemente, a formulação de conclusões.

Sendo este um relatório da atividade profissional, fez todo o sentido que se iniciasse com a reflexão sobre a minha experiência profissional. Abordei aspetos da prática letiva, dentro e fora da sala de aula, e da prática de formação.

# 1. Experiência Profissional

Neste ponto do meu relatório, descrevi sucintamente o meu trabalho como docente ao longo de doze anos. Posso aqui afirmar que tudo o que fiz e farei como professora se rege pela ideia de que “As práticas profissionais dos professores de Matemática são certamente um dos fatores que mais influenciam a qualidade do ensino e da aprendizagem dos alunos (Ponte, J.P.; Serrazina, L.; 2004, p.12).” Segundo Ponte & Serrazina (2004), um professor que opte por práticas diversificadas que requeiram um conhecimento profissional aprofundado e uma preparação exigente contribui positivamente para a melhoria do processo de ensino e aprendizagem da disciplina.

Fiz referência à prática letiva e profissional, à prática letiva extra – aula e à prática de formação. Na prática letiva e profissional abordei a forma de preparação das aulas, o tipo de tarefas propostas e o modo de trabalho com os alunos, a utilização de diversos tipos de materiais, as práticas de avaliação e a colaboração com colegas. Quanto à prática letiva extra – aula, incidi sobre o meu trabalho fora da aula curricular normal, mais especificamente sobre a prática como diretora de turma e como participante em projetos de índole diversa. Por fim, na prática de formação fiz uma breve descrição das formações em que participei e como estas influenciaram a minha prática como professora.

## 1.1 Prática Letiva e Profissional

Na minha prática letiva sempre tive consciência do que estava estabelecido no Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB) e no Currículo Nacional do Ensino Básico, agora revogado. A sua execução é que nem sempre foi fácil devido às inúmeras condicionantes com que me deparei na sala de aula (predisposição dos alunos para aprender, comportamento dos alunos, aspeto físico da sala, materiais disponíveis na escola) ou fora dela (falta de colaboração com os colegas, apoio dos órgãos de gestão). Por vezes, senti algum desânimo relativamente à profissão e à procura de *ideias* novas para aplicar na sala de aula. Procurava aplicar o que aprendia nas ações de formação, mas muito esporadicamente, pois sentia-me insegura e sozinha. Exceção feita ao ano de estágio na Escola Secundária e Artística António Arroio, em Lisboa, onde tive o apoio incondicional da professora Rita Bastos, que se tornou a minha maior referência como professora. Assisti a todas as suas aulas onde aprendi muito sobre o que é ser professor e como ser professor e sobre vários temas da disciplina, principalmente sobre Geometria. Foi a partir desta altura que esta se tornou a área que mais interesse me desperta dentro da Matemática.

Até finalizar o ensino secundário, sempre tive uma aprendizagem muito centrada nos Números e Operações, na Álgebra e na Estatística. A Geometria era lecionada apelando essencialmente à sua parte algébrica. Com o ingresso no ensino superior, comecei a ter outra visão da Geometria, mas foi no ano de estágio que percebi a sua *beleza* como forma de *explicação* daquilo que nos rodeia. Aí percebi também como este aspeto da Matemática é essencial na Matemática Escolar. Aliás, ainda hoje fico *deslumbrada* com o que aprendo sobre esta área da Matemática. É este conhecimento e gosto que pretendo transmitir aos meus alunos quando ensino Geometria.

A partir do momento em que integrei o projeto "Construindo o Êxito em Matemática" (CEM), as dificuldades que sentia foram-se desvanecendo porque tenho um grupo de professores com quem posso discutir todos os assuntos relativos à prática letiva e profissional, durante as sessões de formação e na plataforma digital do projeto, e em alguns momentos, mais particularmente nas aulas partilhadas com as formadoras, tenho ajuda na sala de aula. É pena que aqueles sejam escassos! Sinto que estou a aprender com quem sabe mais e melhor do que eu sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática. Nestes últimos dois anos a minha prática letiva e profissional mudou!

Devo aqui elucidar que o projeto CEM, promovido pelo Centro de Competências das Ciências Exatas e da Engenharia da Universidade da Madeira em colaboração com a Secretaria Regional de Educação e Cultura e a Direção Regional de Educação da Região Autónoma da Madeira, tem os seguintes objetivos: promover um aprofundamento dos conhecimentos matemático, didático e curricular dos professores do terceiro ciclo envolvidos no projeto de formação; promover o desenvolvimento de novas práticas pedagógicas que envolvam o aluno na realização das tarefas e na construção de materiais; favorecer a realização de experiências de desenvolvimento curricular em Matemática que contemplem a planificação de aulas, a sua condução e reflexão por parte dos professores envolvidos, apoiados pelos pares e formadores, tendo por base o Novo Programa de Matemática do Ensino Básico; promover o desenvolvimento de práticas pedagógicas inovadoras; criar dinâmicas de trabalho colaborativo entre os professores do terceiro ciclo (intra e inter escolas).

Relativamente ao tipo de tarefas que proponho aos alunos, confesso que até ser formanda do CEM me cingi quase na totalidade às tarefas propostas pelo manual adotado, as quais eram maioritariamente resolução de exercícios. Com a introdução do novo programa da disciplina, os manuais alargaram o tipo de tarefas propostas indo ao encontro do que está legislado. Assim, procuro conciliar as tarefas propostas pelas formadoras do projeto CEM com as do manual adotado fazendo a sua adequação à turma em que vão ser aplicadas. Procuro aplicar tarefas de exploração e investigação que envolvam a resolução de problemas e impliquem a realização de relatórios escritos. Tais tarefas, maioritariamente realizadas em grupo, recorrem a diversos materiais didáticos: materiais manipuláveis, tecnologias (calculadoras e computadores), material de desenho (régua, esquadro, transferidor e compasso), fichas de trabalho e o material mais tradicional (quadro, giz, caderno diário). Como complemento, proponho a realização de alguns exercícios rotineiros que considero serem importantes para a assimilação dos conceitos. Confesso que também faço algumas aulas mais expositivas, principalmente quando me sinto menos à vontade sobre o assunto, mas este tipo de aula é cada vez mais raro na minha prática letiva.

Quanto à avaliação do desempenho dos alunos, considero que sou muito pragmática. Faço o registo diário do mesmo, principalmente ao nível das atitudes (civismo, responsabilidade, organização). Crio as minhas próprias grelhas de registo e estabeleço escalas. Relativamente à avaliação das aprendizagens integro-a num critério que denomino de *participação*, quando a faço em ambiente de sala de aula, e utilizo também os testes de avaliação. Com participação no projeto CEM e com a frequência da disciplina de Didática da Matemática IV, onde estudei as “Normas para a Avaliação das Aprendizagens” e instrumentos de avaliação diversificados, julgo ter ficado melhor preparada neste campo mas pretendo continuar a atualizar-me. Procuro e procurarei incluir novos instrumentos de avaliação (relatórios escritos e projetos; ainda não apliquei um teste em duas fases mas já o fiz no estágio), bem como avaliar as aprendizagens segundo os critérios que estão estabelecidos nas normas. Sei que não é possível fazer tudo de uma vez, estou a alterar a minha forma de avaliar os alunos aos poucos.

Esta minha mudança de atitude está condicionada pelo que é definido no grupo disciplinar. Sei que também faço parte dele e que tenho o direito de dar a minha opinião. Mas, infelizmente, a maioria dos professores de Matemática ainda está presa à ideia do professor expositivo, da realização de exercícios rotineiros como forma de aprender e dos testes de avaliação como o grande instrumento de avaliação das aprendizagens. Sinto-me uma voz divergente e isolada no meio de tudo isto. Não é fácil influenciar as práticas dos meus colegas mas não desisto. Até que essa mudança aconteça, tento adequar o que faço ao que é "institucionalizado" no grupo de professores.

Entre 2002 e 2010 trabalhei em colaboração com uma colega de grupo, quer na planificação das atividades quer na elaboração dos testes de avaliação e de instrumentos de avaliação. Durante este tempo senti que tinha sempre alguém que me podia ajudar em qualquer situação. Com o encerramento da escola onde lecionávamos em 2010 e com a ida para escolas e ciclos diferentes, senti-me desamparada. Quase dois anos depois ainda sinto que me falta *um braço direito*. Na escola onde estou o grupo disciplinar é fechado. Vejo que há trabalho colaborativo entre professores que já se conhecem há muito tempo mas não deixam outros professores colaborar. Além disso, pelo que observo, não estão abertos a novas formas de trabalhar na sala de aula e não é isso que quero na minha prática letiva. A relativa impossibilidade de trabalhar em cooperação é colmatada em parte pelo projeto CEM.

## 1.2 Prática Letiva Extra – Aula

Durante alguns anos, tive outras funções além da docência. Nos anos letivos 2000/2001 e de 2007 a 2010 fui diretora de turma, cargo que não me desperta muito interesse pelas burocracias inerentes e pela dificuldade que por vezes sinto em lidar com os conflitos próprios dos adolescentes, quer com outros quer consigo próprios. Mas ao longo do tempo fui melhorando a minha forma de lidar com os alunos, ajudando-os e aconselhando-os sobre os mais diversos assuntos.

De 2002 a 2007 fiz parte da Equipa Multidisciplinar onde, além das aulas de apoio pedagógico acrescido, de apoio a alunos com necessidades educativas especiais e de substituição, fui co – autora de três projetos: *Escolhas, Aulas de Substituição e Escola*

*Ativa*. O projeto “Escolhas” (2003/2004) foi o que precedeu o agora em vigor na Região Autónoma da Madeira, Educação para a Sexualidade e Afetos. O projeto “Aulas de Substituição” (2003/2004) foi uma ideia original dos membros da Equipa Multidisciplinar com o objetivo de tornar as aulas de substituição mais produtivas. O projeto “Escola Ativa” (2005 a 2007) tinha como objetivo desenvolver atividades lúdicas sobre temas variados, com toda a comunidade escolar.

Sei que uma Escola não se faz só de aulas. É importante existirem projetos que mostrem aos alunos aspetos da vida quotidiana além daqueles que ficam a conhecer na sala de aula. Mas o que mais me satisfaz profissionalmente é que os alunos *façam* Matemática.

### 1.3 Prática de Formação

Sempre foi meu apanágio participar em formações que fossem uma mais-valia para a minha prática letiva e para a minha participação na vida da escola. Assim, participei em formações sobre temas diversos. Novas tecnologias (Powerpoint, Multimédia na sala de aula, Flash, Moodle, Quadros Interativos), ambientes de geometria dinâmica (Cabri – Géometre, Geometer Sketchpad, Geogebra), aula de Matemática (TI 83, A Matemática e o Jogo, Na Matemática com a Resolução de Problemas, Materiais na Aula de Matemática, Construindo o Êxito em Matemática, Apresentação dos Manuais Escolares), áreas disciplinares não curriculares (Estudo Acompanhado e Área de Projeto), temas da adolescência (Prevenção das Toxicodependências e A Sexualidade na Adolescência) e, por fim, sobre outros temas também relacionados com a vivência na Escola (A Relação Pedagógica com os Alunos, Grelhas de Avaliação, Primeiros Socorros, Educar a Voz).

Como se pode ver, as formações que fiz abrangem uma diversidade de temas. Todas estas formações foram importantes para a construção de um conhecimento profissional mais aprofundado e para uma melhor e mais exigente preparação como professora. No meu dia-a-dia profissional há sempre um reflexo daquilo que aprendi nas ações de formações que realizei e também da minha formação inicial que considero ter sido o maior e mais importante contributo para a minha habilitação enquanto professora.

# 2. Aprender Geometria: porquê e como?

O tema que escolhi desenvolver no relatório final de mestrado é a Geometria dado ser o tema da matemática escolar que mais interesse me desperta pela sua *explicação* do que nos rodeia, como já referi anteriormente. Além disso, sempre que lecionei este tema senti que os alunos têm dificuldades, principalmente ao nível da concetualização. Assim, o meu grande desafio é conseguir que ultrapassem essas dificuldades.

Previamente às atividades em sala de aula, fiz uma pesquisa bibliográfica sobre o processo de ensino e aprendizagem da Geometria. São os resultados dessa pesquisa que apresento aqui. Escrevi sobre o que defendem vários autores/investigadores relativamente à Geometria na Matemática Escolar, ao processo de ensino e aprendizagem da Geometria, ao raciocínio geométrico dos alunos, aos recursos materiais a utilizar (materiais manipuláveis, tecnologias – ambientes de geometria dinâmica), ao ambiente de trabalho em sala de aula e ao papel do professor.

## 2.1 Geometria na Matemática Escolar

Para Freudenthal (1973), personalidade que maior influência teve no regresso da Geometria enquanto tema fundamental à matemática escolar (Veloso, 1998), Geometria é a compreensão do espaço. Em termos de educação matemática, é o conhecimento do espaço onde a criança vive, respira e se move. O espaço que o aluno tem de aprender a conhecer, explorar, conquistar, para viver, respirar e mover-se melhor nele.

Para Veloso (1998) é a área da matemática que mais se presta à matematização da realidade. A matematização da realidade tem duas vertentes: i) formação de conceitos a partir de explorações de situações e problemas da realidade; ii) formalização dos aspetos matemáticos envolvidos nas situações (Ponte, Matos e Abrantes, 1998, Costa, 2000).

Para Abrantes (1999) a Geometria é um campo privilegiado para a realização de descobertas e resolução de problemas.

## 2.2 Ensinar e Aprender Geometria

O estudo da Geometria tem um papel fundamental e insubstituível na formação dos alunos, visando a competência matemática. O sentido espacial, forma como se perceciona o mundo que nos rodeia e a capacidade de interpretar, modificar e antecipar transformações de objetos, é essencial na aprendizagem da Geometria, a qual envolve um conjunto de capacidades (Lucas *et al.*, 2008). Para Veloso (1998) os conceitos e objetos geométricos devem ser estudados de um ponto de vista experimental (no sentido da matemática e não da física[1]) e intuitivo. Os alunos devem reconhecer as inúmeras aplicabilidades da Geometria e todos os seus aspetos devem ter a mesma importância. Nas experiências realizadas os alunos devem investigar, formular e validar conjeturas. Precisam, para isso, que lhes sejam dadas oportunidades e tempo. O autor recusa que a formalização seja o ponto de partida na aprendizagem da Geometria. Defende a utilização das novas tecnologias e de materiais manipuláveis como auxílio para a realização de tarefas de investigação e para a construção de conceitos, a utilização de modelos concretos na concetualização dos conceitos geométricos, a apresentação da história da Geometria (não apenas da Geometria Euclidiana) e encoraja o reconhecimento do pensamento e raciocínio visual como forma de pensamento matemático e de resolução de problemas.

[1] Os alunos devem proceder "como os matemáticos nas suas investigações, formulando conjeturas e tentando justificá-las" (Veloso, 1998, p.26)

Considera também que o ensino secundário é o nível adequado à formalização da geometria. Para o National Council of Teachers of Mathematics, os problemas apresentados devem levar à compreensão das conexões entre os conceitos matemáticos e a sua aplicabilidade no mundo real (NCTM, trad. 2001).

Para Abrantes (1999), aprender matemática é “fazer” matemática. Os alunos fazem matemática quando realizam atividades de natureza exploratória e investigativa, as quais devem incidir sobre problemas abertos. Com esta forma de trabalhar, as descobertas feitas são mais convincentes e surpreendentes e a explicação lógica das mesmas permitem matematizar a realidade (no sentido já referido atrás). A Geometria é um imenso campo de escolha de tarefas exploratórias que não necessitam de um grande número de pré-requisitos e que relacionam a matemática com a realidade. Os problemas apresentados aos alunos devem ser de vários tipos: visualização e representação; construção e lugares geométricos; transformações geométricas; forma e dimensão; conexões com outros domínios da matemática. As atividades investigativas em Geometria são aplicáveis a todos os níveis de ensino e a diversos níveis de desenvolvimento. Aquelas exigem tempo e persistência e devem compreender aspetos essenciais da natureza matemática: formular e resolver problemas, fazer conjeturas, testar, validar e refutar conjeturas, procurar generalizações, comunicar descobertas e justificações, discutir o papel das definições, compreender a natureza e o valor da demonstração matemática.

O NCTM identificou a Geometria como uma das doze componentes essenciais da matemática para o século XXI. Este organismo considera que o estudo da Geometria deve envolver a resolução criativa de problemas, assim como focar-se na investigação e utilização de ideias geométricas e relações. Os alunos devem ser desafiados a analisar os seus processos de pensamento e as suas justificações usando, para isso, o vocabulário correto. As definições, para que sejam significativas, devem desenvolver-se a partir de experiências onde os alunos descobrem relações e desenvolvem o sentido espacial, ao construírem, desenharem, medirem, visualizarem, compararem e transformarem figuras geométricas. Este tipo de experiências também permite que as relações entre figuras sejam compreendidas. Na aprendizagem da Geometria, os alunos devem entender a sua função no ambiente em que vivem. No ensino básico, o ensino da Geometria deve ser informal e recorrer ao raciocínio espacial com a utilização de modelos concretos, levando a que os alunos entendam os conceitos de um mundo a três dimensões. Mais concretamente, os alunos devem realizar trabalho individual e/ou em grupo, em que exploram ou investigam situações/problemas a duas ou três dimensões recorrendo à construção e à utilização de modelos (perspetiva da realidade), a materiais manipuláveis e ao uso de tecnologia. Desta forma, desenvolvem competências de visualização espacial, usam raciocínio indutivo e dedutivo e relatam as conclusões com confiança e convicção. Além disso, os alunos divertem-se (NCTM, trad. 2001).

Para Ponte (1999), a Geometria deve ser abordada o mais cedo possível fundamentalmente através do trabalho investigativo e da experimentação. As tarefas apresentadas devem remeter para a visualização, apelar à conexão da Geometria com outras áreas da matemática e realçar a aplicabilidade da matemática noutras áreas como as artes visuais, a arquitetura, a astronomia, etc. Este autor também apresenta alguns problemas relativos ao ensino da Geometria: deve ser para todos ou para aqueles que pretendem ingressar no ensino superior? Devem ensinar-se novos assuntos ou assuntos desde há muito valorizados? Deve valorizar-se a autonomia do professor ou seguir o que está definido no currículo? Estas questões são ainda pontos de discórdia entre os investigadores.

Freudenthal (1973) considera que a matemática deve estar o mais próximo possível da realidade quando é para ser ensinada – "o que está longe do nosso mundo foge da nossa memória" (p. 405). A Geometria é uma das melhores oportunidades para matematizar a realidade e só assim é significativa para os alunos. É uma oportunidade para fazer descobertas, baseando-se nas formas do espaço envolvente. No ensino da Geometria não resulta a construção de um sistema lógico tal como existe noutros temas da matemática. Mas, para alguns investigadores, Geometria é matemática e necessita de "fundações" mais sólidas do que aquelas a que nos referimos quando consideramos Geometria como a "ciência do espaço". Necessita de um sistema dedutivo. Para Freudenthal nem todos os alunos conseguem criar/perceber tal sistema dedutivo e este não lhes pode ser imposto pelo professor. Portanto, é preciso inovar quando se ensina Geometria! Assim, Freudenthal (1973) considera que o ensino da Geometria deve começar pelo espaço e não pelo plano, porque o espaço e os seus sólidos é muito mais concreto do que o plano e as suas figuras. O espaço é mais intuitivo e proporciona a realização de atividades mais criativas. O plano tem "menos espaço" para uma análise lógica. "As figuras são desenhadas, os sólidos são construídos" (p.413). A ideia subjacente no espaço é *encaixar*. Esta ideia só é válida no plano no caso das pavimentações. Quando o aluno perguntar *Porque é que encaixa?* está preparado para formalizar os seus conhecimentos geométricos. Até lá tem de continuar a experimentar.

No seguimento das ideias de Freudenthal, Gravenmeijer (1998) afirma que a educação em Geometria pode ser abordada construindo o conhecimento informal dos estudantes em torno dos aspetos geométricos de situações realistas. Leher e outros (1998) consideram que experiências como olhar, andar, desenhar, construir e manipular são um trampolim para a Geometria (Costa, 2000). Estas ideias respeitam a teoria de ensino da Educação Matemática Realista (EMR), abordagem desenvolvida na Holanda, em que o estudante tem a oportunidade de reinventar a matemática explorando tarefas que se refiram a situações problemáticas do dia-a-dia e que envolvam um grande número de processos de solução. Assim, o estudante constrói o seu conhecimento e reforça a sua capacidade de refletir. Os defensores da EMR acham-na motivante para os alunos dada a sua coerência e ligação entre as diversas áreas da matemática e entre a matemática e a realidade. Além disso, consideram-na um veículo para construir hábitos de pensamento. Esta abordagem por reinvenção propõe uma rotura radical com o currículo da Geometria tradicional euclidiana (Gravenmeijer, 1998, Costa, 2000).

Depois de analisar todas estas ideias e o Programa de Matemática para o Ensino Básico (PMEB), mais especialmente o programa para o 3º ciclo, pois é aquele onde estou a trabalhar, o qual reflete tudo o que foi dito atrás, concluo que a melhor abordagem no ensino da Geometria inclui a resolução de problemas geométricos e de tarefas exploratórias e investigativas em que os alunos tenham a oportunidade de matematizar o mundo em que vivem com o objetivo de o compreenderem melhor. O papel central deve ser dado aos alunos para que sejam estes a construírem o seu próprio conhecimento.

### 2.3 Raciocínio Geométrico dos Alunos

O modelo de van Hiele (1984), criado por dois professores holandeses do ensino básico, Dina e Pierre, discípulos de Freudenthal, identifica cinco níveis de compreensão na aprendizagem da Geometria (Veloso, 1998). Baseia-se na experiência exigindo, por isso, períodos mais ou menos longos de aprendizagem. Os níveis são sequenciais e têm uma linguagem e simbolismos próprios. No parecer do NCTM, o que é implícito num nível é explícito no seguinte (NCTM, trad. 2001). O modelo de van Hiele recorre à seguinte sequência: Nível 0 – <u>Visualização</u>; Nível 1 – <u>Análise</u>; Nível 2 – <u>Dedução informal</u>; Nível 3 – <u>Dedução</u>; Nível 4 – <u>Rigor</u>. O aluno começa por avaliar a figura pela sua aparência (nível 0) e no nível seguinte (nível 1) avalia os elementos que constituem a figura assim como as propriedades de um grupo de figuras. Quando se encontra no nível 2 relaciona, de forma lógica, as propriedades que já tinha descoberto. No final do terceiro ciclo os alunos devem encontrar-se no nível 2 do modelo de van Hiele. Já no ensino secundário, devem demonstrar teoremas de forma dedutiva (nível 3) e, por fim, estabelecer teoremas em diferentes sistemas de postulados (nível 4) (NCTM, trad. 2001).

Com o objetivo de promover a evolução do aluno para o nível seguinte, os van Hiele também definiram fases de aprendizagem dentro de cada nível. Estas fornecem ao professor um plano de organização da(s) aula(s) para o ensino da Geometria. As fases são: Colocação de questões (os alunos discutem e desenvolvem questões sobre o tópico a estudar); Orientação direcionada (alunos exploram atividades sequenciais selecionadas); Explicitação (alunos expressam pontos de vista sobre tópicos inerentes às investigações); Orientação Livre (as tarefas estão divididas em vários passos, os alunos descobrem como as resolver); Integração (os alunos revêm o que aprenderam e assimilam). Um aluno pode passar por cada fase mais do que uma vez antes de evoluir para o nível seguinte (NCTM, trad. 2001).

## 2.4 Recursos Materiais

O PMEB (2007) recomenda, para o ensino da Geometria, a utilização de materiais manipuláveis e de *software* de Geometria Dinâmica com o objetivo de desenvolver a intuição geométrica, a capacidade de visualização e uma relação mais afetiva com a Matemática. A utilização destes recursos deve ser complementada com tarefas rotineiras como, por exemplo, a utilização de fórmulas para calcular áreas e volumes após a dedução das fórmulas pelos alunos.

### 2.4.1 Materiais manipuláveis.

O NCTM define materiais manipuláveis como ferramentas multissensoriais de aprendizagem que proporcionam aos alunos uma forma de comunicarem e trocarem ideias, através da modelação ou representação concreta de conceitos. Têm um papel importante na aquisição e construção de conceitos matemáticos em todos os níveis de ensino (APM, 1988, Almiro, 2004). O aluno tem que mexer nos materiais, interpretar as suas caraterísticas, descobrir padrões e relações e resolver problemas com a sua ajuda (Almiro, 2004).

A utilização de materiais manipuláveis produz maior rendimento dos alunos do que a sua não utilização, em todas as idades e em todos os níveis de ensino (Serrazina, 1990, Almiro, 2004). Uma situação de aprendizagem com materiais manipuláveis é um processo ativo de construção do conhecimento, com significado (Vale, 1999, Almiro, 2004). Os resultados negativos que por vezes se verificam no uso de materiais manipuláveis podem ser resultado da distância entre o material que se está a utilizar e as relações matemáticas que é nossa intenção que eles representem (Hiebert e Carpenter, 1992, Almiro, 2004). Segundo Gravenmeijer (1991) trabalhar com materiais manipuláveis não prepara para trabalhar sem eles. Há assim um problema na transição das ideias que surgem quando se usam materiais manipuláveis para as ideias em termos de relações e conceitos matemáticos (Almiro, 2004).

A Geometria é um campo propício à utilização de materiais manipuláveis, porque é indispensável a concretização de situações para ajudar os alunos na compreensão de problemas e conceitos. A construção, manipulação e transformação de figuras através de tentativas nos materiais manipuláveis facilita a passagem do concreto para o abstrato e o aluno constrói um conhecimento matemático mais sólido e duradoiro. (Almiro, 2004).

Para Freudenthal (1973) o grande objetivo do uso de materiais manipuláveis no ensino da Geometria deve ser a ação pensada dos alunos. Mãos e cérebro a trabalharem em conjunto para responderem à questão de como um objeto é feito. Mas aqueles não garantem, por si só, a assimilação de conceitos. O professor tem de colocar questões, após a exploração, para que os alunos relacionem a matemática com os materiais usados para representar os conceitos (NCTM, trad. 2001).

### 2.4.2 Tecnologias.

Para o NCTM, os alunos devem ter à sua disposição em todas as aulas meios tecnológicos como calculadoras e computadores que poderão utilizar na realização das atividades que desenvolvem, quer individualmente quer em grupo. Aquele organismo considera que as tecnologias são úteis para o desenvolvimento e resolução de questões, para a verificação de hipóteses e para a validação do pensamento de cada aluno (NCTM, trad. 2001). Para Ponte (1995), as vantagens da utilização de tecnologias no processo de ensino e aprendizagem são: i) relativização das competências de cálculo e da simples manipulação simbólica; ii) reforço do papel da linguagem gráfica e de novas formas de representação; iii) atenção redobrada às capacidades intelectuais de ordem mais elevada; iv) crescendo de interesse pela realização de projetos e atividades de modelação, investigação e exploração; v) possibilidade de envolver os alunos em atividades matemáticas intensas e significativas, favorecendo o desenvolvimento de atitudes positivas em relação à disciplina (Almiro, 2004). As novas tecnologias proporcionam o desenvolvimento de um novo estilo de atividades em que os alunos são encorajados a desenvolver a sua autonomia, independência e iniciativa e em que o professor já não é aquele que sabe tudo, mas sim um companheiro mais experiente e mais entusiasta (APM, 1998, Almiro, 2004).

O computador, por exemplo, propicia o aumento da capacidade de aquisição e compreensão de conceitos, criando espaço para refletir (Lesh, 1990, Coelho & Saraiva, 2000). De Corte (1992) refere que os computadores só são úteis se estiverem integrados em ambientes de aprendizagem poderosos. Estes são definidos pelo mesmo autor como aqueles que permitem o desenvolvimento das capacidades num determinado domínio (competência), a aquisição de processos de aprendizagem para se adquirir determinadas competências (aquisição) e a aplicação de métodos de ensino e estratégias adequadas para promover os processos de aprendizagem e desenvolvimento (intervenção) (Coelho & Saraiva, 2000).

*Ambientes de geometria dinâmica*

Um Ambiente de Geometria Dinâmica (AGD) é um *software* que permite construir e manipular figuras geométricas no ecrã do computador (Coelho & Saraiva, 2000). A caraterística que distingue um AGD de outro *software* é a possibilidade de arrastar (dragging). “ (…) permite ao utilizador, depois de uma construção ser feita, mover livremente certos elementos de um desenho e observar os outros elementos a responder dinamicamente às condições alteradas” (Costa, 2000, p.163). Esta é a caraterística mais importante da Geometria Dinâmica - Geometria que, embora derivada de Euclides, tem um certo número de caraterísticas distintas, sem paralelo na Geometria Euclidiana-.

Os AGD “libertam-nos de tarefas mecânicas e rotineiras, de construção, medição e cálculos, deixando espaço para um trabalho dinâmico e ativo na Geometria” (Laborde, 1998, Piteira & Matos, 2000, p. 61). Para Veloso (2002), os AGD podem intervir na renovação do ensino da Geometria, fornecendo uma ferramenta onde, usando a intuição, os alunos exploram situações problemáticas de caráter geométrico, desenvolvem investigações, formulam conjeturas e verificam a sua veracidade. Este autor diz ainda que “(…)os programas de geometria dinâmica contribuem para que o ensino da geometria constitua uma verdadeira experiência matemática para os alunos(…)” (Veloso, 2002, p. 6). No entanto, Laborde (1993) refere que, após o trabalho num AGD, é necessário estabelecer relações entre o que se fez e a Geometria apreendida (Coelho & Saraiva, 2000).

Faço agora referência à diferença entre desenho e figura. Assim, “A figura é o significado, a representação mental, enquanto o desenho não é mais que a respetiva representação externa, o significante” (Laborde e Laborde, 1992, Coelho & Saraiva, 2000, p.37).

O NCTM considera que os programas de geometria dinâmica criam um ambiente propício à investigação das propriedades e relações geométricas [observando regularidades enquanto se processa a manipulação direta (Coelho & Saraiva, 2000)], permitem fazer conjeturas e explorar outras figuras para verificação do raciocínio, possibilitam a construção de formas em duas e três dimensões, em perspetivas diferentes, e a sua exploração desenvolvendo o sentido espacial. Considera ainda que as experiências que o professor realizar com os alunos devem sensibilizá-los para verem o mundo à sua volta de uma forma mais significativa e interessante (NCTM, trad, 1998). Villiers (1998) defende que as atividades de experimentação devem fazer-se em AGD onde a prova pode ser vista como uma forma de explicação em vez de verificação (Costa, 2000).

Uma caraterística comum a todos os programas de geometria dinâmica é que os desenhos podem ser construídos ligando todos os seus elementos (Goldenberg & Cuoco, 1998, Olive, 2000). Olive (2000) acrescenta a esta ideia que, depois de construídos, os desenhos podem ser transformadas por arrastamento de qualquer uma das suas partes. Proporcionar às crianças um meio onde possam realizar transformações dinâmicas, representando a forma como se relacionam com o seu mundo, é altamente capacitante. O modelo de van Hiele não considera estas transformações dinâmicas (Olive, 2000).

Ao falarmos de AGD temos, obrigatoriamente, de falar em visualização – capacidade de utilizar a informação visual – uma das ferramentas utilizadas na resolução de problemas geométricos. A manipulação e transformação de desenhos num AGD permitem uma mais fácil visualização das propriedades e relações geométricas (Laborde, 1993, Coelho & Saraiva, 2000). Todas as abordagens de educação em Geometria valorizam a componente visual para a compreensão cognitiva dos alunos (Costa, 2000). Além disso, a utilização dos AGD permite minorar os obstáculos dos desenhos feitos à mão na compreensão das figuras que representam. Evita-se, assim, que caraterísticas irrelevantes possam ser tomadas como propriedades, que posições padronizadas (horizontal / vertical) possam provocar confusão entre as representações externa e interna, dificuldades que podem incapacitar os alunos para compreender um desenho de diferentes maneiras (Yerushalmy & Chazan, 1993, Coelho & Saraiva, 2000). Para Schwartz (1993) os AGD funcionam como “espelhos intelectuais” onde os alunos experimentam as suas ideias manipulando e têm um *feedback* visual que lhes permite verificar uma propriedade ou relação (Coelho & Saraiva, 2000).

A um nível mais elevado, os AGD devem proporcionar aos alunos a investigação de fenómenos interessantes, o que só é possível realizar após um longo período de trabalho com o *software*, quer por parte dos alunos, quer dos professores. Além disso, há a necessidade de uma prova formal cuja elaboração pode ser auxiliada por um AGD (Olive, 2000). Para Olive (2000) as geometrias não euclidianas também devem ser exploradas, visual e teoricamente, e os AGD são um recurso importante na medida em que permitem a visualização de propriedades que sem os mesmos seriam impossíveis de visualizar.

## 2.5 O Ambiente de Trabalho na Sala de Aula

O NCTM propõe que os ambientes de trabalho em sala de aula sejam caraterizados pela interação dos alunos contribuindo assim para a assimilação dos conceitos – grupos de trabalho cooperativos. Desta forma, aqueles são obrigados a defender os seus pontos de vista relativamente aos desafios propostos pelo professor e pelos seus colegas. Além disso, proporciona-lhes a oportunidade de desenvolver competências sociais e de comunicação enquanto interagem com os colegas. Os grupos de trabalho cooperativos devem ser heterogéneos, formados por três a cinco alunos e podem manter-se ao longo de tempo. Os seus elementos devem trabalhar em conjunto para um objetivo comum e devem usar uma linguagem própria para a comunicação matemática, oral e escrita, a qual é indispensável na aprendizagem da matemática. Os alunos que compreendem os conceitos discutidos são responsáveis por explicá-los a quem não percebeu (NCTM, trad.2001).

## 2.6 Papel do Professor

Para o NCTM, o tradicional papel do professor deve mudar. A figura autoritária e divulgadora de informação deve passar a ser uma figura facilitadora da aprendizagem e orientadora das decisões dos alunos (NCTM, trad. 2001). Em Almiro (2004) estão mencionadas ideias de vários autores sobre o novo papel do professor. Todas elas se baseiam numa ideia central: o professor precisa de refletir sobre as suas práticas pedagógicas. Para Serrazina (1999) a reflexão sobre as propostas curriculares e as práticas levam a uma alteração efetiva do ensino, das crenças e do próprio conhecimento do professor (Almiro, 2004). O professor que não reflete perde de vista as metas e os objetivos para os quais trabalha (Zeichner, 1993, Almiro, 2004). Segundo Zeichner (1993) as atitudes de um professor reflexivo são: i) ouvir mais do que uma opinião; ii) admitir que está errado mesmo quando acreditava que estava certo; iii) questionar-se constantemente porque é que os alunos estão a fazer o que estão a fazer; iv) ponderar as consequências das suas ações; v) refletir sobre consequências inesperadas; vi) questionar-se sobre se o que está a fazer dá resultados. Ser um professor reflexivo não é fácil mas cada um tem de decidir se a sua ação deve ser dirigida por outros ou se, pelo contrário, o seu ensino deve ser dirigido de forma a atingir as metas para as quais trabalha (Almiro, 2004).

O trabalho colaborativo entre professores leva a uma mudança das escolas e a uma melhoria na qualidade da educação (Hoyle & John, 1995, Almiro, 2004). Quando os professores discutem com os seus colegas sobre que tarefas devem propor aos seus alunos, os seus dilemas e os seus conflitos, há uma efetiva melhoria na qualidade educativa (Serrazina, 1989, Almiro, 2004).

Nos dias de hoje exige-se que o professor tenha uma ação mais esclarecida e interveniente. Para cada situação deve ter opiniões fundamentadas. Tem ainda responsabilidades acrescidas na seleção criativa das tarefas e no seu ajustamento, na produção de materiais e na avaliação. A sua ação é moldada e orientada pelo currículo, que ele traduz e transforma, na medida em que, entre outros aspetos, decide o tipo de tarefas a realizar pelos alunos, a sua sequência, duração e avaliação, em que escolhe os materiais e as estratégias de ensino e pondera os conteúdos. O professor é assim o último árbitro na aplicação do currículo (Gimeno, 2000, Almiro, 2004).

O professor, após refletir, decide então como irá transmitir os conteúdos. Esta decisão deve basear-se na resposta a várias questões que o professor coloca a si próprio.

“Será a utilização de materiais manipuláveis adequada? Será o uso da tecnologia adequado? Será um contexto de aprendizagem em colaboração apropriado?” (NCTM, trad.2001). A resposta a estas questões é específica de cada momento do processo de ensino e aprendizagem.

Quando o professor decide usar materiais manipuláveis nas suas aulas tem de se sentir à vontade para os manusear. Só assim a sua utilização com os alunos será a adequada e promoverá a assimilação de conceitos matemáticos. Deve ainda prestar muita atenção ao modo como os alunos conduzem a tarefa. As aulas onde se utilizam materiais manipuláveis são um desafio para o professor na medida em que há muito mais barulho e é necessário mais espaço e mais organização (Vale, 1999, Almiro, 2004).

A utilização de novas tecnologias, nomeadamente de computadores, na sala de aula é um desafio à atividade do professor. Este tem de preparar as tarefas, conduzir a aula, gerir o tempo, acompanhar os grupos, lidar com as descobertas não previstas dos alunos, conjugar o trabalho dos alunos com o computador e sem ele e sistematizar coletivamente os resultados obtidos com o computador (Canavarro, 1994, Almiro, 2004).

Por fim, o trabalho cooperativo exige ao professor o fomento da comunicação entre os elementos do grupo e entre o grupo e a turma, o apoio aos alunos durante a realização das atividades, nomeadamente na compreensão de relações entre conceitos, ou nos procedimentos e abordagens por eles efetuados.

# 3. Metodologia

Concluída a pesquisa bibliográfica, foi altura de planificar o trabalho em sala de aula, isto é, a investigação que fiz no âmbito da aplicação de duas tarefas inseridas no tema matemático “Geometria”. Antes de descrever essa planificação, fiz referência ao tipo de estudo que desenvolvi, suas caraterísticas, e apresentei uma caraterização descritiva da turma com que trabalhei.

## 3.1 Natureza do Estudo a Realizar

Nas investigações realizadas no âmbito das Ciências Sociais e Humanas, em particular nas Ciências da Educação, é impossível separar os pensamentos das emoções. A subjetividade e os valores são válidos e devem refletir-se na forma como se aborda a investigação – investigação **de natureza qualitativa** (Garnica, 1996).

Foi este o tipo de investigação que fiz. O ambiente de sala de aula foi a minha fonte para a recolha de dados, realizada através de uma observação participante, com o objetivo de encontrar semelhanças com o que estudei na teoria. Os dados foram predominantemente descritivos, acentuando mais o processo do que o produto. Pretendia saber como é que os alunos interpretaram as diversas situações que lhes foram apresentadas e que significado é que tiveram para eles.

## 3.2 Caraterização da Turma

A investigação que realizei teve como intervenientes os alunos da turma oito do oitavo ano da Escola Básica e Secundária Gonçalves Zarco, situada no concelho do

Funchal. Esta é uma turma de Percursos Curriculares Alternativos (PCA). Este tipo de oferta educativa, homologada pelo Despacho Normativo n.º 1/2006, de 6 de Janeiro, destina-se a alunos até aos 15 anos de idade, inclusive, que se encontrem em alguma das seguintes situações: insucesso escolar repetido; problemas de integração na comunidade escolar; ameaça de risco de marginalização, de exclusão social ou abandono escolar; dificuldades condicionantes da aprendizagem (forte desmotivação, elevado índice de absentismo, baixa auto - estima e falta de expetativas relativamente à aprendizagem e ao futuro, bem como o desencontro entre a cultura escolar e a sua cultura de origem).

A maioria dos problemas acima referidos pode efetivamente ser referenciada à turma 8.º 8. Com base nas informações dos Projetos Curriculares de Turma das duas turmas às quais pertenciam estes alunos no ano letivo anterior, uma das quais lecionava, e nas informações emanadas das reuniões semanais do Conselho de Turma durante este ano letivo, apresento aqui uma caraterização geral relativamente às atitudes e ao desempenho cognitivo.

Nenhum dos alunos da turma tem hábitos e métodos de trabalho, demonstra interesse e empenho nas tarefas escolares. Muitas vezes, recusam-se a cumpri-las. Quando realizam as tarefas propostas, são pouco autónomos e revelam dificuldades de concentração e atenção. Não são responsáveis por nada do que diga respeito à sua vida escolar, por exemplo, na realização dos trabalhos de casa, no estudo em casa e até mesmo na realização de trabalhos das diferentes disciplinas. As suas aspirações profissionais são baixas, reflexo da baixa auto - estima. Para agravar a situação, não cumprem, em muitas aulas, as regras de comportamento estabelecidas e, por vezes, têm comportamentos que revelam falta de respeito pelo corpo docente, pelos técnicos de ação educativa e mesmo pelos próprios colegas.

Quanto ao desempenho cognitivo, começo por frisar que sete dos dezasseis alunos da turma são acompanhados pelos serviços de Educação Especial. A um destes alunos foram diagnosticadas dificuldades de aprendizagem e problemas emocionais. Aos restantes foi diagnosticado défice cognitivo. Dois dos alunos com défice cognitivo têm um Currículo Específico Individual[2] (CEI). Os restantes alunos têm direito a adequações ao nível do trabalho em sala de aula e na avaliação. O desempenho na disciplina de Matemática, e como se pode antever pelo que já foi escrito, é negativo. Os alunos revelam muitas dificuldades na compreensão dos conceitos e processos e em raciocinar e analisar. São pouco autónomos na resolução de problemas, nomeadamente na escolha de estratégias de resolução. Não são capazes de verificar e interpretar os resultados e de generalizar as soluções. Ao nível da comunicação, expressam as suas ideias, oralmente ou por escrito, de uma forma muito simples e sem cuidado no vocabulário e símbolos usados. Revelam também dificuldades em compreender, interpretar e avaliar ideias apresentadas de forma escrita e oral. Mostram mais facilidade quando as ideias são apresentadas visualmente e/ou quando as apresentam de forma visual. Demonstram algum interesse em analisar situações com o objetivo de identificar propriedades e estruturas comuns, apesar das dificuldades que sentem. São pouco perseverantes e confiantes nas tarefas que realizam, principalmente quando estas exigem justificação dos procedimentos utilizados.

## 3.3 Trabalho em Sala de Aula

Quanto ao trabalho em sala de aula, comecei por descrever como escolhi as propostas de trabalho a apresentar aos alunos. Posteriormente, apresentei as tarefas, e a sua planificação, e as alterações à planificação inicial resultado da reflexão que fiz, em

[2] O currículo é adaptado ao seu nível de conhecimento. No caso da Matemática, ao 2º ano de escolaridade.

conjunto com a Mestre Paula Cristina Lopes, minha formadora do CEM, e com a Doutora Elsa Fernandes, minha orientadora de mestrado.

### 3.3.1 Escolha das propostas de trabalho.

Durante a escolha das tarefas procurei, em primeiro lugar, seguir as *ideias* decorrentes da pesquisa bibliográfica que fiz, as quais apresento muito sucintamente.

A aquisição e formação dos conceitos devem ser feitas a partir da exploração de situações e problemas da realidade e da formalização dos aspetos matemáticos envolvidos – matematização da realidade (Ponte, Matos e Abrantes, 1998, Costa, 2000).

Como refere Abrantes (1999), aprender matemática é *fazer* matemática e os alunos fazem matemática quando realizam atividades de natureza exploratória e investigativa que incidam sobre problemas abertos. Desta forma, as descobertas serão mais convincentes e a sua explicação lógica permite matematizar a realidade.

O ensino da Geometria no ensino básico deve recorrer ao raciocínio espacial com a utilização de modelos concretos levando a que os alunos entendam os conceitos de um mundo a três dimensões. É aconselhável o uso, por exemplo, de materiais manipuláveis (NCTM, trad. 2001) para atingir esse objetivo.

A conjugação destas *ideias* com a proposta de trabalho apresentadas pelas formadoras do projeto CEM, com as tarefas disponibilizadas pelos professores das turmas piloto do oitavo ano no ano letivo 2009/2010 e com a minha experiência profissional levou à seleção das tarefas a aplicar na sala de aula.

As tarefas que propus aos alunos do 8.º 8 inserem-se no tema Geometria e no tópico Sólidos Geométricos do oitavo ano de escolaridade. Mais concretamente, trabalhei os critérios de paralelismo e perpendicularidade entre retas e planos, e entre planos.

Escolhi este subtópico pela dificuldade que senti, em anos anteriores, em preparar tarefas que levassem os alunos a compreender os critérios e a utilizá-los na resolução de situações problemáticas do dia-a-dia. É esta a minha oportunidade de o conseguir fazer!

### 3.3.2 Planificação das tarefas.

A primeira tarefa que apliquei na sala de aula é uma adaptação da proposta de trabalho apresentada pelo projeto CEM. O primeiro contacto que tive com ela foi nas reuniões de formação. Nestas fiz a resolução da tarefa do ponto de vista do aluno, trabalhando cooperativamente com os meus colegas e com as formadoras. Autonomamente voltei a realizar a atividade e, simultaneamente, a fazer algumas alterações à sequência da proposta inicial tendo em conta as caraterísticas da turma com que trabalhei. O realizar novamente a tarefa foi também uma forma de me familiarizar mais eficazmente com os materiais manipuláveis envolvidos na sua execução.

Quando já me senti à vontade com a tarefa, fiz a sua descrição escrita, agora do ponto de vista do professor. Referi o que pretendia fazer e o que esperava que os alunos fizessem. Aquela descrição foi feita com o auxílio do powerpoint (PPT) fornecido pelas formadoras do projeto CEM, ao qual fiz algumas alterações (Anexo I – Primeira Tarefa em Powerpoint).

A tarefa é composta por quatro situações realistas. Em qualquer uma das situações, foi-lhes facultado o material necessário para que pudessem criar um modelo das mesmas. Com a manipulação do material fornecido, e em turma, deviam desenvolver procedimentos que lhes permitisse construir e concetualizar as noções geométricas envolvidas. Aqueles procedimentos deviam ser registados por cada um dos grupos de trabalho[3]. Por fim, far-se-ia o paralelismo entre cada situação explorada e os aspetos matemáticos envolvidos na mesma para que os alunos deduzissem os critérios de paralelismo e perpendicularidade entre retas e planos, e entre planos.

Na primeira situação pretendia-se que os alunos investigassem como é que se pode utilizar o nível de bolha para garantir que uma ripa de madeira está paralela ao chão. Desejava que os alunos deduzissem o critério de paralelismo entre reta e plano. Para que deduzissem o critério de perpendicularidade entre reta e plano, seria apresentada a segunda situação onde, com recurso a dois esquadros, os alunos tinham de investigar como é que se podia garantir que um suporte estava perpendicular ao solo. Utilizando o fio-de-prumo e com o objetivo de deduzir o critério de perpendicularidade entre dois planos, os alunos deviam verificar, na terceira situação, se o quadro da sala de aula estava perpendicular ao chão. Na quarta e última situação, tinham de garantir que o tampo de uma mesa estava paralelo ao chão utilizando, para isso, o nível de bolha. O objetivo era deduzir o critério de paralelismo entre planos.

Na segunda tarefa a implementar, a qual é a cópia integral da tarefa proposta pelos professores das turmas piloto do oitavo ano no ano letivo 2009/2010, foram apresentados aos alunos quatro problemas da vida corrente. Os alunos, que já tinham deduzido os critérios de paralelismo e perpendicularidade na primeira tarefa avançada, deviam, em grupo e por escrito, descrever os procedimentos adequados à resolução dos problemas enunciados e fundamentar matematicamente as soluções encontradas.

Para elaborar os planos de aula, analisei as Metas de Aprendizagem para o 3º Ciclo do Ensino Básico, reanalisei o PMEB e utilizei a estrutura de plano de aula que uso para a

[3] Os quatro grupos de trabalho foram definidos por mim com base no princípio da heterogeneidade. São formados por três ou quatro alunos e já trabalham cooperativamente desde o início do segundo período. Designei um aluno de cada grupo como representante do mesmo.

planificação das aulas partilhadas no projeto CEM. Esta estrutura resultou da combinação entre o que já fazia antes de integrar o CEM e o que aprendi como formanda do projeto.

Para definir o que pretendia avaliar em termos cognitivos, reli as Normas para a Avaliação das Aprendizagens (já as tinha estudado quando frequentei a disciplina Didática da Matemática IV) e reconsiderei a investigação que fiz sobre o processo de ensino e aprendizagem da Geometria. Relativamente às atitudes e valores, avaliei o que foi definido pela escola para as turmas de PCA.

Com base no que li na literatura sobre aprendizagem da Geometria e também com base nas minhas necessidades como professora escrevi o seguinte problema de investigação: compreender como é que os alunos aprendem Geometria..

Para melhor poder estudar este problema, dissequei-o nas seguintes questões:

a) Qual o papel dos materiais manipuláveis na estruturação do pensamento geométrico dos alunos?

b) Como comunicam as ideias geométricas?

c) Como é que os modelos concretos facilitam a passagem do concreto para o abstrato?

### 3.3.3 Reformulações da planificação inicial.[4]

Após ter lecionado a primeira aula (Anexo II – Plano de Aula – parte 1), onde pretendia que os alunos deduzissem os critérios de paralelismo e perpendicularidade entre reta e plano, e depois de discutir informalmente alguns aspetos sobre a mesma com a Mestre Paula Cristina Lopes que esteve comigo na sala no âmbito do Projeto CEM,

[4] Por limite de páginas deste relatório, os anexos relativos aos planos de aula serão disponibilizados apenas na versão digital.

concluí que aquela metodologia de trabalho não daria resultado com aquela turma. Apesar de lhes ter sido pedido para representar e analisar, através de modelos concretos, situações problemáticas do dia-a-dia, o facto de não estarem diretamente implicados nas mesmas fez com que não se interessassem e, mais grave ainda, que perturbassem a aula com comportamentos incorretos. Expus o sucedido à Doutora Elsa Fernandes que me sugeriu lecionar a aula fora da sala para que os alunos pudessem encarar os problemas apresentados como sendo realmente “os seus problemas”. Foi o que fiz. Transformei o “problema da turma do João” no problema do 8.º8 (Anexo III – Plano de Aula – 1.ª reformulação).

Tive que transportar tudo o que foi realizado fora da sala para dentro da mesma e de uma forma apelativa para *aqueles* alunos. Criei um jogo cujo objetivo era, a partir da visualização de excertos da aula anterior e de questões colocadas por mim, analisar as atividades desenvolvidos fora da sala de aula e deduzir os critérios de paralelismo e perpendicularidade (Anexo IV – Plano de Aula – 2.ª reformulação).

Faltava observar se os alunos tinham compreendido os conceitos e se eram capazes de descrever os procedimentos utilizados para encontrar a solução de situações problemáticas semelhantes às que eles próprios tinham resolvido. Apresentei quatro problemas realistas em que cada um dos grupos devia propor, por escrito, uma solução. Não resultou! Não foram capazes de relacionar o que tinham feito com os problemas que lhes foram apresentados nem com os critérios estudados, os quais eu pensava que os alunos tinham compreendido. Refleti sobre a aula e cheguei à conclusão que o problema estava na linguagem utilizada. Pareceu-me que, visualmente, os alunos perceberam os critérios. Não foram foi capazes de utilizar esse conhecimento na resolução das situações apresentadas. Na minha perspetiva, não entenderam a linguagem utilizada na apresentação dos problemas nem a dos registos escritos que fizeram no caderno diário na aula anterior

(Anexo V – Critérios de Paralelismo e Perpendicularidade: resumo). Tive que voltar a reformular a minha planificação inicial (Anexo VI – Plano de Aula – resolução de problemas).

Criei um documento com os desenhos que representam cada um dos critérios onde, individualmente e por palavras próprias, descreveram com base nos desenhos apresentados, no conhecimento já adquirido nas aulas anteriores e usando linguagem matemática, o que tinham de fazer para garantir que os critérios se verificavam (Anexo VII – Critérios de Paralelismo e Perpendicularidade: alunos). Após as conclusões individuais, criámos uma conclusão da turma. Além disso, simplifiquei a linguagem da tarefa que apresentei (Anexo VIII – Segunda Tarefa).

# 4. Análise do Trabalho Realizado em Sala de Aula

Apresento aqui a análise do trabalho realizado em sala de aula. Comecei por refletir sobre o cumprimento dos objetivos que defini para cada aula e, posteriormente, foquei a minha atenção no problema de investigação.

Como se pode observar pela leitura da parte deste relatório referente às reformulações que fiz à planificação inicial, nenhum dos objetivos definidos para a primeira aula foram cumpridos pelos motivos que já descrevi. Quanto à segunda aula, os alunos conseguiram resolver problemas reais utilizando materiais manipuláveis. Na aula número três, os alunos tiveram algumas dificuldades em relacionar os procedimentos da vida corrente com os critérios de paralelismo e perpendicularidade e não conseguiram deduzir os critérios. Os objetivos definidos para a última aula, a qual se prolongou por mais uma aula em virtude das dificuldades reveladas pelos alunos, foram atingidos. Os alunos foram capazes de deduzir os critérios de paralelismo e perpendicularidade e resolver problemas do dia-a-dia com base nos critérios deduzidos.

Quanto ao meu problema de investigação, compreender como é que os alunos aprendem Geometria, apoiei o meu estudo na reflexão sobre as questões em que o dissequei para, finalmente, retirar algumas conclusões gerais.

## 4.1 Os Materiais no Estudo da Geometria

Com o objetivo de estudar o papel dos materiais manipuláveis na estruturação do pensamento geométrico dos alunos, analisei como é os materiais manipuláveis ajudaram os alunos, a partir da exploração de situações realistas/reais, a representar, compreender e resolver os problemas concretos apresentados e a construir e a compreender os conceitos matemáticos subjacentes a esses problemas.

Note-se que alguns dos materiais usados não são usuais numa aula de matemática. É o caso do nível de bolha e do fio-de-prumo. Mas foram aqueles que se afiguraram mais pertinentes no estudo dos critérios de paralelismo e perpendicularidade dada a sua ligação com a realidade.

Os problemas que surgiram foram:

- Como verificar se uma superfície está no plano horizontal?
- Como garantir que a ripa está paralela ao chão/solo?
- Como garantir que o suporte está perpendicular ao solo?
- Como verificar se o quadro e a parede estão perpendiculares ao chão?
- Como verificar se o tampo da mesa está paralelo ao chão?

**Como verificar se uma superfície está na horizontal?**

A maioria dos alunos sabia, visualmente, o que significa uma superfície estar no plano horizontal. No entanto, não utilizava os termos corretos para o identificar nem usava corretamente o nível de bolha para o verificar.

A discussão sobre o conceito de plano horizontal e do procedimento correto para verificar se uma superfície estava na horizontal proporcionou à maioria dos alunos da turma mexer no nível de bolha, interpretar as suas caraterísticas, e utilizá-lo para resolver o problema. O conceito de plano horizontal tornou-se significativo.

Mas tal só foi possível com a orientação dada pelas professoras e nem todos os alunos o conseguiram da mesma forma.

Estes aspetos podem ser observados nos excertos seguintes.

**Prof.**: "Para que é que os pedreiros o usam?" (referindo-me ao nível de bolha)

**L.**: "Para ver se está à superfície (colocou a mão em cima de uma mesa), solo. Ao mesmo nível."

**D.A.:** "Para ver se está direito, professora!"

A **prof. C.** interveio, dizendo que não tinha percebido o que significava o chão estar direito.

**T.**: "É *tar* plano."

**Prof. C.**:"E o que é estar plano?"

**T.**: "É estar direito."

**Prof. C.** O chão de uma descida está direito?"

**M.**: "Sim."

**R.** e **N.**: "Não."

A **M.** mudou a sua resposta. A **prof. C.** voltou a insistir sobre o que era estar direito. Os três alunos responderam que era quando estava plano.

**Prof. C.:** "Uma descida não é plana?"

Aqueles três alunos responderam que sim. Como os alunos não estavam a perceber a diferença entre plano e horizontal, a **prof. C.** pegou no caixote do lixo da sala e inclinou-o.

**Prof. C.**: "As suas faces estão planas?"

**N.** e **R.**: "Sim."

**M.**:"…se a gente *pôr* o nível já *nã tá* plano, porque a bolha fica para trás."

**R.**: "Não *tá* plano, *tá* plano mas não está paralelo ao chão."

**F.**:“O **D.** e a **R.** agarraram na …ripa e eu tive que medir…medir não, ver a bolha onde é que estava no chão…”

**Prof. C.**: “Onde é que essa bolha tinha que estar quando o nível estava colocado no chão?”

**F.**: “No meio.”

**Prof.**: “Porquê?”

**F.** (deslocando a mão num plano horizontal): “Para ver se estava inclinado. Inclinado …reto.”

**Prof.**: “E o que é ser reto?”

**F.**: “Sei lá, reto…plano…reto”

A **prof. C** colocou a ripa numa posição oblíqua ao tampo da mesa e perguntou se estava plana.

**L.C.**: “Sim, está nivelada...não, está a descer.”

**Prof.**: “Querem dizer plana ou lisa?”

**L.C.** e **D.A.:** “É o mesmo, a ripa é plana e lisa.”

A **prof. C** colocou o nível sobre a ripa e perguntou se estava plana. Responderam que não, que estava a descer. Perguntei então o que queriam dizer quando referiam que estava plano. A **R.** disse que plano era quando estava na horizontal e liso era quando não tinha buracos. Então, a **prof. C.** perguntou se o nível servia para ver se estava plano ou na horizontal. Quase todos responderam “na horizontal.” mas alguns ainda disseram “plano” Concluí para toda a turma que o nível serve para verificar se uma superfície está na horizontal.

**Prof.**: "Como é que o pedreiro utiliza o nível para verificar se o chão está direito?" (usando a ideia que o **D.A.** referiu).

**R.** (colocando o nível no chão): "A gente mete assim e se aquilo (a bolha) estiver ali entre aquelas duas risquinhas, está!"

Perante esta confusão entre "direito"," plano", "ao mesmo nível" e "horizontal", eu e a **prof. C**. encontrámos uma estratégia para que os alunos, a partir da utilização correta do nível de bolha, conseguissem construir e compreender o conceito de plano horizontal.

A **prof. C.** perguntou à turma se o ecrã de um dos computadores portáteis presentes na sala estava plano (o plano que continha o ecrã do computador e o plano que continha o tampo da mesa sobre a qual estava o computador estavam oblíquos).

**L.** e **F.:** "Sim!"

**Prof. C.**: "Então, o nível serve para verificar que o ecrã do computador está plano."

**Prof.**: "Vamos verificar se isso é verdade."

**Prof. C.**: "Como é que se usa o nível para o verificar?"

Coloquei o nível paralelamente ao lado de maior comprimento do ecrã.

**A.**: "É ao contrário!"

Então coloquei o nível perpendicularmente ao lado de maior comprimento do ecrã.

**Prof.**: "Quem quer verificar qual é a posição da bolha?"

O **R.N.** ofereceu-se e concluiu que não estava direito.

**Prof. C.**: "O que é estar direito?"

**R.N.** e **A.:** "A bolinha tinha de estar a meio".

A **prof. C**. recordou que tinham dito, que o ecrã era plano.

**T.**: "Tinha de estar tudo para baixo."

**R.**: “…tem que estar paralelo.”

**Prof.**: “A quê?”

Depois de alguma hesitação, aquelas duas alunas responderam “ Ao chão.”

**Prof.** (coloquei o nível sobre a mesa): “Vamos experimentar numa mesa.”

**F.**: “*Tá* a meio!”

**Prof.**: “Os pedreiros usam o nível apenas numa posição?”

**F.** e **R.N.**: “Não!”

**Prof.**: “Então como é que fazem?”

Aqueles dois alunos colocaram o nível na vertical, ao que indiquei que o nível tem de estar na horizontal e voltei a colocá-lo nessa posição.

**Prof.**: “Para onde é que ele vai olhar?”

Responderam que tinha de olhar para a bolha. Eu própria olhei para a bolha e disse que estava entre as marcações.

**Prof.**: “Chega para podermos dizer que o tampo da mesa está “direito”?”

Responderam que não mas não justificaram.

**Prof.** (levantei a mesa paralelamente à posição do nível): “A bolha continua entre as marcações. O tampo da mesa está paralelo ao chão?”

Responderam que não.

**Prof.**: Posso colocar o nível apenas numa posição?”

Voltaram a responderam que não mas sem sugerir outro procedimento.

**Prof.**: “Temos de colocar o nível noutra posição, concorrente com a primeira, e verificar qual é a posição da bolha.”

Como a mesa ainda estava levantada, logo a posição da bolha não era a mesma, conclui que o tempo da mesa não estava paralelo ao chão.

**Como garantir que a ripa está paralela ao chão/solo?**

Tal como aconteceu no conceito de plano horizontal, também aqui os alunos sabiam, visualmente, o que significava a ripa estar paralela ao solo e até tinham a noção de que tinham de encontrar no plano do chão uma reta paralela à reta representada pela ripa. Compreenderam, com a orientação das professoras, qual o procedimento correto, utilizando o nível de bolha, para garantir que a ripa estava paralela ao chão. Contudo, alguns alunos utilizaram os termos errados ao referirem-se à posição relativa entre a ripa e o solo. Esta análise baseou-se nos excertos abaixo apresentados.

**Prof.**: “Para o jogo do Limbo, a ripa tem de estar paralela ao solo.”

Pedi ao **D.** e à **R.** para colocarem a ripa paralelamente ao chão.

**D.** e **R.** (movimentaram a ripa): “Está paralela ao chão.”

O **D.** fez um gesto com a mão para referir a distância entre a ripa e o chão.

**Prof.** : “O que é que me garante que a ripa está paralela ao chão?”

O **D.** pegou na ripa, colocou no chão e voltou a levantá-la.

**T.** (num tom de voz baixo): “Porque ela é assim.” (Fez um tímido gesto com a mão indicando que a ripa estava na horizontal.)

No entanto, utilizavam incorretamente o nível de bolha para garantir que a ripa estava paralela ao chão.

**Prof.**: “Quem sabe usar o nível para garantir que a ripa está paralela ao chão?”

Após alguns instantes de espera, o **F.** ofereceu-se. Começou por colocar o nível em cima da ripa. Os colegas que estavam a segurar na ripa movimentaram-na até que a bolha central estivesse entre as marcações.

**Prof.**: “Não é necessário colocar o nível noutro sítio?”

O **F.** colocou o nível em várias posições, no plano que continha a ripa e num plano perpendicular a este, mas nunca o colocou sobre o chão. Os colegas disseram que não eram aquelas as posições corretas do nível mas não apresentaram ideias sobre qual seria o “outro sítio” onde colocar o nível.

**Prof.**: “Já verificaram qual é a posição da bolha quando o nível está no chão?”

O **F.** colocou o nível no chão. Como observei que não sabia o que fazer, pedi para verificar a posição da bolha.

**Prof.**: “O que tenho de fazer a seguir para garantir que a ripa está paralela ao chão?”

**F.** (colocou o nível sobre a ripa): “Tem que ficar igual ao chão.”

O **F.**, com a ajuda do **D.** e da **R.**, colocou a ripa paralelamente ao chão.

**Prof. C.**: “O que é que tem de estar na horizontal?”.

**N.** e **T.**“A ripa.”

**Prof.**: “Qual a posição da ripa relativamente ao solo?”

**T.**: “Horizontal.”

**R.**: “Paralela!”

Quando a estrutura já estava segura, pedi para verificarem se a ripa estava paralela ao solo. O **D.A.** coloca o nível sobre a terra e verificámos que a bolha está desviada para a direita. Após tentarem colocar a terra num plano horizontal para que a bolha ficasse entre as duas marcações, o **F.** coloca o nível em cima da ripa e verifica que a bolha está na mesma posição do que quando o nível estava colocado no chão.

**Prof.**: “A ripa está paralela ao solo?”

**Turma**: “Sim!”

**Como garantir que o suporte está perpendicular ao solo?**

A maioria dos alunos não conseguiu utilizar os esquadros para solucionar o problema e, mesmo após terem observado como deviam proceder, não foram capazes de o fazer novamente. A utilização dos esquadros não ajudou os alunos na compreensão e execução do procedimento correto para solucionar o problema apesar de ser o mais adequado para estabelecer a relação com o conceito matemático subjacente ao problema – critério de paralelismo entre reta e plano. Foi necessário criar um procedimento alternativo, usando o nível de bolha ou o fio-de-prumo, que levou os alunos a compreender o conceito de reta perpendicular ao plano e a resolver o problema apresentado. Estas situações são observáveis nos seguintes excertos das aulas.

**Prof.**: "Qual deve ser a posição relativa entre os suportes e o solo?"

**R.**: "Perpendiculares."

**Prof.**: "Investiguem como é que, com o recurso a dois esquadros, podemos garantir que os suportes estão perpendiculares ao chão."

O suporte foi representado pela ripa e o tampo de uma mesa representou o solo.

**Prof.**: "São mesmo necessários dois esquadros?"

**A.**: "Sim…não, basta um."

**R.**: "Se estiver a 90º já é perpendicular."

O **N.**, depois de alguma confusão, colocou o primeiro esquadro na posição correta. O **A.** comentou que o outro deveria ser colocado ao contrário. A **R.** disse que não era preciso. O **A.** levantou-se e colocou o segundo esquadro no lado oposto ao lado da ripa onde estava adjacente o primeiro esquadro.

**Prof.**: "Os esquadros, nesta posição, garantem que o suporte está perpendicular ao chão?"

Uns alunos responderam sim, outros alunos responderam não.

**Prof.**: "Observem o que vou fazer."

Desloquei o suporte e os esquadros de modo a que ficassem oblíquos relativamente ao tampo da mesa.

**Prof.**: "O suporte continua a ser perpendicular ao tampo da mesa?"

Responderam que não e a **R.** colocou o suporte e os esquadros na posição inicial. Então disse que tinha de criar uma estrutura que não se "mexesse" e perguntei se a posição do segundo esquadro deveria ser a que o **A.** tinha sugerido. Depois de vários alunos terem experimentado colocar apenas um esquadro e terem tentado colocar o segundo esquadro noutra posição, o **D.** colocou-o na posição correta (as retas representadas pelas linhas de contacto dos dois esquadros com o tampo da mesa eram concorrentes). Pedi aos colegas que se levantassem para verificarem a posição dos esquadros e perguntei qual era a posição relativa das retas representadas pelas linhas de contacto dos dois esquadros com o tampo da mesa. A **T.** respondeu corretamente: perpendiculares. Resumi o que tínhamos feito e disse que bastava que as retas representadas pelas linhas de contacto dos dois esquadros com o tampo da mesa fossem oblíquas. Perguntei se era suficiente para dizer que o suporte estava perpendicular ao tampo da mesa e acrescentei que não conseguia mover aquela "estrutura" sem alterar a posição relativa dos objetos. Responderam afirmativamente.

Na segunda vez que trabalhámos o problema, comecei por apresentar os dois suportes.

**Prof.**: "Para que servem?"

**T.**: "Para suportes."

**Prof.**: "Qual terá de ser a posição dos suportes relativamente à terra?

**N.**: "Estar direito."

**R.N.**: "Plano."

**T.**: "Perpendicular".

Pergunto qual o material que devemos usar.

Apenas o **N.** responde "O nível."

**Prof.**: "Como é que vamos verificar que o suporte fica perpendicular ao solo?"

**L.**: "Enfiando no chão."

**Prof.**: "Como é que garanto que está perpendicular ao solo?"

Dado que não obtive resposta, disse que levaria dois esquadros pois poderiam ser precisos.

Peço ajuda a três alunos e deslocamo-nos para a terra. O **F.** enfia o suporte na terra, fazendo alguma pressão.

**Prof.**: "O suporte está perpendicular ao solo?"

**N.**: "Não."

**L.**: "Na vertical."

**Prof.**: "Como é que posso garantir que o suporte está perpendicular ao solo?"

O **L.** mostra o nível. Pergunto à turma se podemos garantir que o suporte está perpendicular ao solo com o nível. Depois de algumas dúvidas, eu própria disse que não, o **A.** diz "também". O **L.** diz que pode ser com a madeira, o **A.** contesta e aponta para os esquadros que tenho na mão e chama-lhes "transformador". Acabei por ser eu a dizer o nome correto – esquadro.

**Prof.**: "Devemos usar um ou dois esquadros?"

**N.**: "Um."

**A.**: "Dois."

Peço ao **A.** para ir executar o procedimento que permitirá verificar que o suporte é perpendicular ao solo. Apesar de ter dito que eram necessários dois esquadros, coloca só um.

**Prof.**: “Está na posição correta?”

**A.**: “Sim.”

Inclino o suporte e o esquadro numa direção oblíqua ao plano que contém o esquadro.

**Prof.**: “Não está na posição correta.”

**A.** (coloca o suporte na vertical): “Então ponha direito, vai ver como *tá*!”

Peço que desloque o esquadro juntamente com o suporte.

**Prof.**: “Está perpendicular?”

Entretanto a **R.** junta-se ao grupo e com a ajuda do **N.** coloca os dois esquadros na posição correta (um lado de cada esquadro adjacente ao suporte, e adjacentes entre si, e o outro lado de cada esquadro adjacente ao solo e concorrentes entre si). Como alguns alunos estavam distraídos, tento repetir o procedimento executado pela **R.**. Não o consigo fazer na perfeição.

**Prof.**: “Porque é que eu não consigo colocar os esquadros corretamente? Porque a terra não está no plano…”

**N.**: “Horizontal.”

A **prof. C.** sugere que se use o nível, e uma das suas bolhas laterais, para garantir que o suporte está perpendicular à terra. Foi o que fizemos. Colocámos uma das faces de área intermédia do nível adjacente ao suporte (considerando o nível como um paralelepípedo) e verificámos a posição de uma das suas bolhas laterais. Deslocámos o suporte até que aquela bolha estivesse entre as duas marcações. Quando o suporte estava na posição correta, o **L.** usou o martelo para que o suporte ficasse bem seguro na terra. Quando o **L.** terminou, verifiquei, com a ajuda do **N.**, se o suporte continuava perpendicular ao chão. Como, com a pressão exercida pelo martelo, o suporte se deslocou, foi necessário colocá-lo novamente na posição correta. Fizemos isso colocando terra no “ponto de contacto” do suporte com o solo e verificando sempre a posição da bolha lateral do nível.

Na mesma aula, e depois dos alunos terem utilizado o fio-de-prumo para verificar se o quadro estava perpendicular ao solo, surgiu uma situação em que foi necessário verificar se o “varão” (parte perpendicular ao corrimão da varanda) da rampa do jardim estava perpendicular ao chão. Apenas o **R.N.** se desloca para junto da rampa para o verificar. Usa um suporte e coloca-o obliquamente ao “varão” e ao chão. Os restantes alunos não se mostram interessados em fazê-lo. Eu e a **prof. C.** insistimos para que o fizessem.

**Prof.**: “Como é que posso verificar se o “varão” está perpendicular ao chão?”

O **L.** tira-me o nível das mãos ao dirigir-se para junto do varão.

**R.N.**: “Não é com o nível, é com a ripa!”

**A.**: “É com o nível … ou com os esquadros.”

**Prof. C.:** “Não se pode usar o fio-de-prumo?”

O **D.A.** pega no fio-de-prumo e dirige-se para junto do varão, onde já estava o **L.** com o nível e o **A.** com os esquadros. O **A.** coloca um esquadro adjacente ao “varão”

**A.**: “Isto tem aqui qualquer coisa que *tá* a descer.”

O **L.** tenta colocar a face de área intermédia do nível adjacente ao varão mas não consegue.

**L.**: “O chão está levantado!”

Experimenta no “varão” da varanda paralela àquela onde tinha colocado o nível inicialmente mas, mais uma vez não consegue.

**L.**: “*Tá* tudo torto!”

Então, a **prof. C.** diz que quando se quer verificar que “uma coisa” está perpendicular, na vertical, pode-se usar o fio-de-prumo porque a gravidade faz sempre com que o fio do fio-de-prumo seja perpendicular ao plano horizontal. Depois, a **prof. C.** encosta o bloco ao "varão", deixa o peso deslizar e comenta que o "varão" não está na perpendicular porque o peso, à medida que desliza, afasta-se do varão.

**Como verificar se o quadro e a parede estão perpendiculares ao chão?**

Os alunos não sabiam, inicialmente, que material utilizar e quando chegaram à conclusão que seria o fio-de-prumo não sabiam como o utilizar. Na situação em que se pretendia verificar se o quadro estava perpendicular ao chão, a dificuldade esteve na utilização correta do material. Não foram capazes de interpretar as caraterísticas do fio-de-prumo. Mesmo após a minha explicação, quando tentaram executar o procedimento correto para verificar que a parede estava perpendicular ao chão, ainda foi necessário chamar a atenção para alguns pormenores – o peso do fio-de-prumo tinha de deslizar sobre a parede. Conseguiram perceber que, como a distância entre o peso e a parede era sempre a mesma, a parede estava perpendicular ao chão. Também perceberam que como a distância entre o peso e o quadro não era sempre a mesma, o quadro não estava perpendicular ao chão.

Vejamos o que aconteceu e que comprovam o que acabei de referir.

**Prof.**: "Vão jogar ao jogo do limbo em equipas e cada equipa terá a respetiva pontuação. Essa pontuação será registada no quadro. É preciso verificar se o quadro está perpendicular ao chão para ser possível escrever."

O **N.** dirige-se à mesa onde estava o material e pega no fio-de-prumo.

**N.**: "Para que é que serve?"

Eu e a **prof. C.** aproveitámos a questão e colocamo-la à turma. Alguns alunos tentam perceber qual deveria ser a posição correta do fio-de-prumo.

**Prof.**: ”Conhecem aquele instrumento? Quem é que o costuma usar?”

Ninguém sabia o nome do instrumento, mas o **R.N.** sabia que é usado pelos pedreiros. Insisto no nome do instrumento e o **L.** responde “Pião!”. Tive que ser eu a identificá-lo corretamente, fio-de-prumo.

**R.N.**: “É para ver se os blocos *está* direitos.”.

**Prof.**: “E o que é estar direito?”

**F.**: “Para ver se está alinhado!”

**Prof.**: “E o que é estar alinhado?”

**L.**: “É estar de forma correta.”

**Prof.**: “E que forma correta é essa?”.

**L.** (movimentando a mão na vertical): “Perpendicular.”

Entretanto, o **N.** e o **D.A.** colocam o peso do fio-de-prumo na parte de trás do quadro e o bloco na parte da frente do quadro, seguros pelo fio do fio-de-prumo.

**Prof.**: “Ninguém sabe utilizar o fio-de-prumo?”

O **R.N.**, o **F.** e o **A.** juntam-se aos colegas. O **A.** pega no fio-de-prumo e coloca o bloco na parte de trás do quadro.

**Prof.**: “Porque é que o bloco tem de estar atrás do quadro?”

**T.**: “Ele não está a fazer nada!”

**R.N.**: “Eles não me deixam usar, posso usar?”

Pedi para que deixassem o **R.N.** experimentar. O **F.** não ficou muito satisfeito por não ter conseguido terminar o que estava a fazer com o **A.** e o **N.** e saiu do local sempre a referir-se à “cordinha”. A **T.** respondeu-lhe dizendo “Ele sabe!”

O **R.N.** colocou o bloco adjacente ao quadro mas com uma parte do fio já esticada, o que fazia com que o peso ficasse muito perto da parte inferior do quadro.

**Prof. C.**: “O que estás a fazer?”

**R.N.**: “A ver se está reto.”

Sugeri-lhe que se colocasse em cima do banco, o que fez (o quadro estava, de propósito, perpendicular a um banco do jardim).

**Prof.**: “Nada se mexe?”

Então o **R.N.** deslocou o bloco para a esquerda e para a direita, dizendo oralmente o que estava a fazer.

**Prof.**: “O bloco tem de se movimentar de um lado para o outro? Será o bloco que se mexe?”

Alguns responderam timidamente “Acho que sim!” O **A.** pede para que eu explique como se faz.

Coloco-me em cima do banco de jardim e começo por dizer como é que designei as duas partes do fio-de-prumo. “Bloco”, à parte cilíndrica de madeira e “peso” à parte de metal.

**Prof.**: “Como é que se faz para verificar se o quadro está perpendicular ao chão?”

**D.** e **N.**: “Põem-se em cima.”

Iniciei o procedimento ao mesmo tempo que o explicava oralmente. Encostei o bloco ao quadro e o peso ao bloco.

**F.**: “A seguir a professora vai largando.”

Faço o peso deslizar pelo quadro.

**Prof.**: “O que podemos concluir?”

**R.**: “*Tá* perpendicular ao chão.”

**Prof.**: “O que é que tenho de verificar quando o peso está a deslizar?”

**N.**: “Se está em linha reta.”

Peço para se colocarem junto ao quadro para observarem o peso a deslizar pelo quadro mas ninguém o faz.

**Prof.**: "O que é que tem que acontecer ao peso quando desliza no quadro?"

**A.**: "Tem que ir sempre direitinho, não pode abanar."

**Prof.**: "O que significa "não pode abanar"?"

**R.N.**: "Mexer."

**Prof.**: "Desviar."

Resumi a ideia dizendo que, quando o peso desliza pelo quadro, a distância entre o peso e o quadro tem de ser sempre a mesma.

**A.**: "Até abaixo!"

Peço ao **F.** que se coloque junto ao quadro para verificar a distância entre o peso e o quadro.

**Prof.**: "Parece-me que não é!"

Após duas tentativas, o **F.** chega à conclusão que o quadro não é perpendicular ao solo. O **R.N.** quis experimentar. Colocou-se ao lado do quadro e eu fiz deslizar o peso pelo quadro.

**Prof.**: "A distância entre o peso e o quadro é sempre a mesma?"

**R.**: "Sim …(o peso aproxima-se da parte inferior do quadro) não!"

A distância entre o peso e o quadro aumentava. Concluímos então que o quadro não era perpendicular ao chão.

O **D.**, o **A.** e o **R.N.** dirigiram-se à parede exterior do bloco de aulas B para verificar se aquela estava perpendicular ao chão. Depois de alguma confusão para colocar corretamente o fio-de-prumo, colocaram o bloco corretamente mas o fio do fio-de-prumo estava perpendicular ao chão, ou seja, não observaram o peso a deslizar pela parede.

**D.** e **A.**: "Está perpendicular ao chão."

**Prof.**: "Não vi nada a mexer?"

**A.**: “Por não mexer é que está certo.”

**Prof.**: “Ainda não vi como é que o peso desliza.”

Puxaram o peso para cima até ficar junto ao bloco e deixaram-no deslizar pela parede. Pedi aos restantes alunos que se colocassem numa posição que lhes permitisse ver o que os colegas estavam a fazer.

**Prof.**: “A parede está perpendicular ao chão? Porquê?”

Disseram que sim, mas não conseguiram explicar. Tive que dizer que podíamos afirmar que a parede estava perpendicular ao chão porque a distância entre o peso e a parede era sempre a mesma.

**Como verificar se o tampo da mesa está paralelo ao chão?**

Tal como aconteceu com os conceitos já trabalhados, os alunos também sabiam, visualmente, o que significava duas superfícies estarem paralelas. Como foi a última situação a ser analisada, os alunos já estavam familiarizados com o material.

O facto de já terem utilizado o nível de bolha para verificar se uma superfície estava no plano horizontal, facilitou a compreensão e execução do procedimento correto para verificar que o tampo da mesa estava paralelo ao chão. Sabiam que para verificar que o tampo da mesa estava paralelo ao chão, a posição da bolha quando o nível estava colocado sobre o tampo da mesa tinha de ser a mesma do que quando o nível estava sobre o chão em duas posições concorrentes.

Observem-se os seguintes excertos das aulas.

**Prof.**: “Têm de descobrir um local em que o chão esteja na horizontal e em que o tampo da mesa fique paralelo ao chão.”

O **D.** coloca o nível sobre o tampo da mesa.

**D.**: “Está paralelo, a bolha está a meio.”

**Prof.**: "Será que o chão está na horizontal?"

Seguindo a sugestão da **R.**, o **D.** coloca o nível no chão mas apenas numa posição.

**D.**: "*Tá* professora, *tá* no meio."

**Prof.**: "Chega verificar a posição da bolha apenas numa posição?"

O **D.** coloca o nível em várias posições mas não chega a nenhuma conclusão. A **R.** coloca o nível no chão em duas posições concorrentes e diz duas vezes, referindo-se a cada uma das posições do nível, "*Tá* a meio."

**Prof.**: "O que fizeram?"

**R.**: "A *gente vimos* se *tava* na horizontal."

Após verificarem que o chão estava num plano horizontal, o **D.** colocou o nível sobre a mesa e concluiu o que se pretendia.

Como já referi, visualmente, a maioria dos alunos sabia o que significavam os conceitos estudados. Contudo, em muitas situações, não utilizaram os termos corretos para os identificar.

Os alunos conseguiram interpretar as caraterísticas dos materiais utilizados, através da sua manipulação, e utilizá-los na execução dos procedimentos corretos na resolução dos problemas apresentados. Mas tal só foi possível com a orientação dada pelas professoras e nem todos os alunos o conseguiram da mesma forma.

Os materiais permitiram que os alunos atribuíssem um significado aos conceitos estudados, resolvessem os problemas colocados e, consequentemente, estruturassem o seu pensamento geométrico.

## 4.2 Comunicação Matemática

Os alunos exprimiram e confrontaram as suas ideias através da comunicação. Interagiram com os colegas e com as professoras presentes. A colocação de questões durante a realização das tarefas tinha como objetivo o desenvolvimento da capacidade de comunicação oral. Os momentos em que os alunos elaboraram pequenos textos pretendiam fomentar a comunicação escrita.

Analisei como é que os alunos comunicaram oralmente a interpretação que fizeram dos conceitos e dos problemas e dos procedimentos usados para resolver os problemas. Apreciei também como é interpretaram e descreveram os critérios de paralelismo e perpendicularidade. Comentei ainda como é que descreveram os procedimentos usados na resolução dos problemas apresentados e os fundamentos matemáticos para as soluções encontradas.

**Como é que os alunos comunicaram oralmente a interpretação que fizeram dos conceitos e dos problemas?**

A maioria dos alunos da turma não conseguiu, inicialmente, expressar oralmente a interpretação que fez dos conceitos e dos problemas. Quando o tentaram fazer, baseando-se na representação da situação através de um modelo concreto, tiveram muita dificuldade em utilizar os termos corretos e em construir frases com sentido. Só conseguiram comunicar oralmente o que estavam a pensar através das questões que coloquei.

Estes aspetos podem ser observados nos excertos das aulas que já descrevi e nos que passo a descrever.

**Prof.**: "O que queríamos provar nesta situação?"

**R.**: "Se aquilo *tava* perpendicular ao solo."

**Prof.**: "Aquilo, o quê?"

**A.**: "Se o pauzinho…"

**Prof.**: "Têm de usar os nomes corretos."

**R.**: "A reta."

**D.**: "Se a vara *tava* perpendicular ao solo."

**Prof.**: "Se o suporte estava perpendicular ao solo."

**Prof.**: "O que queríamos verificar na primeira parte da situação?"

**T.** (depois de perguntar o nome do material que tinham utilizado): "Se o fio-de-prumo *tava* paralelo ao quadro."

**D.** (depois de confundir mais uma vez paralelo com perpendicular): "Queríamos verificar se o quadro estava perpendicular ao solo."

**Prof.**: "A que conclusão chegámos?"

Começaram por dizer que tínhamos concluído que a reta estava perpendicular ao chão ou que o quadro estava perpendicular ao chão. Voltei a relembrar o procedimento efetuado (deixar o peso deslizar sobre o quadro) e só aí se lembraram que tínhamos verificado que o quadro não estava perpendicular ao chão porque a distância entre o peso e o quadro aumentava.

Referindo-me à segunda parte da terceira situação, perguntei o que provámos.

**D.**: "Que a parede estava perpendicular ao chão?"

**Prof.**: "Porquê?

**D.**: "Porque o fio-de-prumo não aumentou a distância."

Na última situação analisada, voltei a colocar a mesma questão.

**Prof.**: "O que queríamos provar naquela situação?"

**T.**: "Que o tampo da mesa era paralelo ao chão."

**Prof.**: "Como é que encontrámos um local em que o chão estava no plano horizontal?"

Os alunos referiram várias situações (colocar o nível no chão e sobre a mesa e verificar a posição da bolha nas duas posições, colocar o nível adjacente a um pé da mesa, "medir" com o nível…) mas nenhuma delas era a resposta pretendida.

Para conseguirem explicar como é que tínhamos provado que o tampo da mesa estava paralelo ao chão, "dissequei" a questão inicial em várias questões mais diretas.

**Prof.**: "Onde colocámos o nível? Em quantas posições? Qual era a posição relativa da retas representadas pelo nível nessas duas posições? Quando olhámos para a bolha do nível, o que é que verificámos? O que é que provámos?"

Os alunos responderam corretamente às questões colocadas.

**Como é que os alunos comunicaram oralmente os procedimentos usados para resolver os problemas?**

Quando lhes foi pedido que explicassem e justificassem oralmente o que tinham feito, apenas uma aluna o conseguia fazer corretamente, a **R.**. Os restantes não conseguiram explicar, ou usaram uma linguagem pouco cuidada, ou tentaram explicar mas com muitas hesitações e incorreções ou explicaram corretamente mas usaram os termos errados. Vejamos alguns exemplos do que acabei de referir.

**L.**: "A professora mandou eles *pôr* o nível de cima da madeira para ver se era reto e *nã tava* reto."

**D.A.**: "Metemos no solo o nivelador…nível para ver se estava perpendicular … paralelo."

**Prof.**: "Então posso dizer que o suporte é perpendicular ao solo? Se sim, porquê?"

**D.**: "Porque os ângulos dos esquadros *tava* direito, porque *tava* tudo direito, tudo alinhado."

**Prof.**: "Quero saber se o suporte estava perpendicular à terra?"

**A.**: "Os dois esquadros …perpendicular ao solo."

**Prof. C.**: "O que vão escrever? O que é que fizeram?"

**R.**: "Fizemos…tenho que pensar."

**M.**: "Primeiro vimos se o chão estava direito…"

**N.**: "… com o nível".

A **prof. C.** insistiu no que era estar direito.

**R.**: "Nivelado."

**Prof. C.**: "E o que é estar nivelado?"

**R.**: "Paralelo."

**Prof. C.**: "Paralelo a quê?"

**R.**: "À ripa, não é?"

Depois da **R.** ter feito o registo escrito, pedi-lhe que explicasse ao **N.** e à **M.** o que tinha escrito.

**R.**: "O pedreiro verifica se o chão está paralelo se a bolha estiver no meio quando o nível está no chão. Para a ripa ficar paralela ao chão temos de colocar o nível sobre a ripa e se a bolha estiver na mesma posição do que quando o nível está no chão, a ripa está paralela ao chão. Se não estiver, a ripa já não está paralela ao chão. Quando o pedreiro coloca o nível no chão, coloca-o em duas posições concorrentes.

**Prof.**: "A ripa está paralela ao chão?"

**R.**: "Porque quando nós pusemos o nível no chão, a bolha ficou numa posição e quando metemos o nível aí na ripa, ficou na mesma posição do que no chão."

**R.**: "Colocámos o nível no solo para ver a posição da bolha e depois colocámos o nível na ripa para ver se a bolha estava na mesma posição do que no chão. Assim a *gente* via se *tava* paralelo."

**Como é que os alunos interpretaram e descreveram os critérios de paralelismo e perpendicularidade?**

Inicialmente, os alunos não conseguiram deduzir os critérios de paralelismo e perpendicularidade através da análise dos procedimentos realizados para encontrar as soluções dos problemas reais que resolveram.

Apresentei os diferentes critérios fazendo a associação com os modelos concretos construídos mas continuaram a não entender o que se estava a trabalhar.

Optei então por apresentar os desenhos representativos dos critérios e pedir-lhes para, por suas palavras, responderem a quatro questões. Estas tinham como objetivo a dedução dos critérios.

Numa primeira fase, recusaram realizar a tarefa. Fi-los entender que apenas queria saber o que tinham aprendido.

Numa segunda fase, disseram que não sabiam fazer. Usei então uma linguagem mais simples para explicar a tarefa.

Por fim, todos fizeram o que pedi, muito apoiados por mim, apesar de alguns se terem “servido” do trabalho dos colegas mais empenhados.

Como se pode observar pela leitura das respostas dadas por alguns alunos, a linguagem utilizada é muito simples. Mas foi desta forma que conseguiram expressar, oralmente e por escrito, o que eram, para eles, os critérios de paralelismo e perpendicularidade.

O resultado foi o que abaixo se apresenta.

Como é que podemos garantir que uma reta é paralela a um plano?

**T.**: “Tenho que arranjar uma reta no plano, que seja paralela *a* [à] reta inicial.”

**A.**: “Temos que arranjar duas retas, 1ª reta é a reta principal que tem de ficar paralela ao plano, e assim arranjamos mais uma reta para pôr no plano que seja paralela *a* [à] reta principal.”

**N.**: “Queremos garantir que a reta inicial *e* [é] paralela ao plano e fomos ao plano e encontrámos uma reta paralela *a* [à] reta inicial.”

**D.**: “Temos que arranjar uma reta e um plano depois temos que arranjar outra reta sobre o plano que seja paralela *a* [à] reta principal.”

*Figura 1*: Critérios de paralelismo entre reta e plano descrito por alguns alunos

Como é que podemos garantir que uma reta é perpendicular a um plano?

**T.**: “Tenho que arranjar duas retas concorrentes no plano, e perpendiculares *a* [à] reta inicial.”

**A.**: “para que uma reta seja perpendicular a um plano é preciso que crie um ângulo reto com duas retas concorrentes do plano.”

*Figura 2*: Critério de perpendicularidade entre reta e plano descrito por alguns alunos

Como é que podemos garantir que dois planos são perpendiculares?

**F.** “para saber se dois planos são perpendiculares é necessário verificar se a reta é perpendicular ao outro plano.”

**N.**: “Queremos garantir que o plano azul *e* [é] perpendicular ao outro plano e fomos ao outro plano e *encontramos* [encontrámos] uma reta perpendicular ao outro plano”

**D.**: “temos que arranjar uma reta no plano B e que essa reta seja perpendicular ao plano A[,] assim garantiu-se que dois planos são perpendiculares.”

*Figura 3*: Critério de perpendicularidade entre planos descrito por alguns alunos

Como é que podemos garantir que dois planos são paralelos?

**R.**: “Num dos planos tem duas retas concorrentes essas retas são paralelas ao plano logo os planos são *paralelas* [paralelos].”

**T.**: “No plano a tem duas retas concorrentes as retas são paralelas ao plano b”

**D.**: “Temos que arranjar duas retas que estejam oblíquas no plano A e que essas retas estejam paralelas ao plano B e assim garantimos que dois planos são paralelos.”

*Figura 4*: Critério de paralelismo entre planos descrito por alguns alunos

Em turma, registámos no quadro a resposta às quatro questões anteriores, respetivamente.

“Temos que arranjar uma reta no plano que seja paralela à reta inicial.”

“Temos que arranjar duas retas concorrentes no plano que sejam perpendiculares à reta inicial.”

“Temos que arranjar uma reta num plano que seja perpendicular ao outro plano.”

“Temos que arranjar duas retas concorrentes num plano e que sejam paralelas ao outro plano.”

*Figura 5*: Critérios de paralelismo e perpendicularidade deduzidos em turma

**Como é que os alunos descreveram os procedimentos usados na resolução dos problemas apresentados e os fundamentos matemáticos para as soluções encontradas?**

Os textos escritos dos diferentes grupos de trabalho foram heterogéneos, quer ao nível da descrição dos procedimentos, quer ao da sua fundamentação matemática.

Quanto aos procedimentos, houve quem não os descrevesse, quem os descrevesse mas de forma muito incompleta, quem os descrevesse usando uma construção frásica muito confusa e quem os descrevesse corretamente.

O primeiro momento de elaboração de um texto ocorreu na primeira aula. Pedi aos alunos que descrevessem o procedimento efetuado para garantir que a ripa estava paralela ao chão. Para que os grupos escrevessem o que apresento a seguir, foi necessário insistir na realização da tarefa pedida e motivar os alunos levando-os a confiar nas suas capacidades.

“A **R.** e o **D.** seguraram na ripa e depois queriam ver se o chão e a ripa estavam na horizontal e, sim, viram que estavam.”

*Figura 6*: Descrição feita pelo grupo do **A.**

“A professora começou por a **R.** e o **D.** agarrarem no pau, mas só que eles tinham que tê-lo de forma correta, e depois o **F.** usou o nível para dizer onde é que estava a bolha. Estava no meio portanto era plano, logo de seguida o **F.** de novo utilizou o nível para meter na ripa e ver se estava no mesmo sítio do que no chão”

*Figura 7*: Descrição pelo grupo do **L.**

“O **F.** começou por pôr o nivelador no chão para ver a bolha se estava entre as marcações. Depois meteu o nível em cima da ripa, para ver se a bolha estava na mesma posição. a ripa é paralela ao chão. O nível serve para verificar se uma superfície está na horizontal.”

*Figura 8*: Descrição feita pelo grupo do **D.**

| |
|---|
| “Nos colocamos o nível no chão em 2 posições concorrentes, para ver se estava na horizontal. Depois pegamos na ripa para ver se a bolha estava na mesma posição que o chão. Logo vimos que a ripa estava paralela ao chão, porque a bolha estava na mesma posição, do que quando estava no chão.” |

*Figura 9*: Descrição feita pelo grupo da **R.**

O segundo momento de elaboração de textos aconteceu na última aula onde foi pedido que apresentassem os procedimentos necessários à resolução de quatro problemas realistas e fundamentassem matematicamente as soluções encontradas. Também aqui a descrição dos procedimentos foi heterogénea assim como a sua fundamentação matemática. Apesar disso, notei uma evolução positiva relativamente ao primeiro momento, principalmente ao nível da predisposição dos alunos em realizarem a tarefa proposta, e também nos próprios textos. De uma forma geral, todos os grupos descreveram o que lhes foi pedido. Contudo, uns fizeram-no melhor que os outros.

Apresento em anexo (Anexo IX – Resolução de Problemas: alunos) o que considerei serem os textos que representam, globalmente, o trabalho final de cada grupo referente à segunda tarefa.

Estes alunos revelaram grandes dificuldades ao nível da comunicação matemática, mais especificamente, na tradução de relações da linguagem natural para a linguagem matemática e em exprimir processos e ideias, oralmente e por escrito, utilizando vocabulário próprio. Conseguiram, no entanto, ultrapassar algumas dessas dificuldades muito devido à minha insistência e orientação.

## 4.3 Do Concreto ao Abstrato

Analisei como é que os modelos concretos construídos pelos alunos os ajudaram a deduzir os critérios de paralelismo e perpendicularidade entre retas e planos, e entre planos. A concretização de situações, recorrendo aos materiais manipuláveis, foi indispensável na compreensão dos problemas e dos conceitos geométricos. Os alunos conseguiram, após uma orientação direcionada, associar o material utilizado aos entes matemáticos primitivos que representavam.

Mas, como já referi atrás, não foi fácil para os alunos deduzir os critérios de paralelismo e perpendicularidade através da análise dos procedimentos realizados para encontrar as soluções dos problemas. Apresento abaixo algumas situações que corroboram as conclusões que acabei de referir.

Na primeira situação que analisámos (suporte perpendicular ao solo), quando perguntei que entes matemáticos primitivos representavam o suporte, os lados dos esquadros colocados sobre o solo e o solo, a **R.** respondeu corretamente, à exceção das retas representadas pelas linhas de contacto dos esquadros com o solo, as quais foram referidas, depois de algumas respostas erradas (referiam a posição relativa entre elas), pelo **D.**.

Na segunda situação analisada (ripa paralela ao solo), senti que não tinham percebido a questão “Que ente matemático primitivo representam as linhas de contacto do nível com o solo e com a ripa?”. Voltei a explicá-la e a **R.** respondeu “Reta.” A questão que deveria levar os alunos a concluir que, quando o nível estava sobre a terra estávamos a representar uma reta contida num plano, apenas foi respondida pela **R.** e após alguma hesitação. Parece-me que os restantes alunos não a perceberam talvez pela sua extensão.

Esta situação repetiu-se quando pretendia que me dissessem que a posição relativa das retas representadas pelas linhas de contacto do nível com o solo e com a ripa era estritamente paralelas.

Na análise da segunda parte da terceira situação (parede perpendicular ao chão), coloquei uma questão relativa aos entres matemáticos representados pelos materiais e pelas superfícies utilizadas. O **D.** referiu que o fio do fio-de-prumo representava uma reta e o chão um plano. Quanto ao ente matemático representado pela parede, houve quem tivesse respondido superfície, reta, etc. e acabou por ser a **L.C.** a responder corretamente “Plano.” Quando perguntei a que plano pertencia a reta representada pelo fio do fio-de-prumo, a **M.** disse “Ao plano da parede.” A **T.** respondeu corretamente, e após ter sido colocada a questão à turma, que a reta representada pelo fio do fio-de-prumo estava perpendicular ao plano do chão. Acrescentei que é a massa do peso, “peso do peso”, que faz com que o fio fique perpendicular ao chão.

Na análise da última situação (tampo da mesa paralelo ao chão), os alunos compreenderam facilmente que o tampo da mesa e o chão representavam dois planos.

À pergunta “Como é que posso provar que uma reta é perpendicular a um plano?”, o **D.** disse que era necessário o nível de bolha. Pedi que pensassem no abstrato, que não pensassem no material que usaram nas atividades que realizaram no jardim. Só deviam referir retas e planos e podiam observar a imagem do que tinham feito no jardim. Conseguiam perceber que tinham de existir duas retas concorrentes no plano, que essas retas tinham de ser perpendiculares à reta dada mas não conseguiam concluir que estas duas condições eram suficientes para garantir que a reta dada estava perpendicular ao solo. Fui eu a fazê-lo. Durante a minha explicação, o desinteresse era tanto que o **D.** disse

“Ninguém consegue explicar isso, passe à frente.” Quando perguntei se tinham percebido, disseram que sim apenas para que não lhes perguntasse mais nada.

Perguntei como é que podíamos provar que uma reta estava paralela a um plano. Ninguém quis, ou não sabia, responder! Voltei a fazer referência ao modelo que tinham construído. A **L.C.** disse que tínhamos colocado o nível sobre a ripa e o **D.** acrescentou “Para ver se era paralelo.”

Como a grande maioria da turma estava desmotivada, concluí, fazendo sempre referência ao modelo utilizado, que para garantir que uma reta é paralela a um plano temos de encontrar no plano uma reta paralela à reta dada. Tive ajuda do **D.** e da **L.C.**.

Nenhum aluno conseguia dizer como é que se pode provar que dois planos são perpendiculares. Então, dirigi-me à parede do fundo da sala e perguntei como é que podíamos provar que a parede estava perpendicular ao chão, mais concretamente, o que é que teríamos de encontrar no plano da parede. Referiram o fio do fio-de-prumo. Então perguntei qual é o ente matemático representado pelo fio do fio-de-prumo. Responderam imediatamente “Reta.” Continuei perguntando qual era a posição relativa entre essa reta e o plano do chão. Sem pensarem muito, responderam que teriam de ser perpendiculares. Apesar de terem interpretado corretamente o modelo, não perceberam que estavam a deduzir o critério.

Quando perguntei como é que podemos provar que dois planos são paralelos, o **D.** começou a responder mas com referências ao material que tinham usado e ao modelo que tinham construído. Então, dirigi-me ao centro da sala e com recurso ao tampo de uma mesa, e expliquei que temos de arranjar num dos planos duas retas concorrentes paralelas a uma reta do outro plano, ou seja, paralelas ao outro plano.

A passagem do concreto para o abstrato não foi uma tarefa fácil! Especialmente para estes alunos, dadas as suas dificuldades de aprendizagem. A construção de modelos concretos foi essencial. Mas foi necessária uma orientação muito específica para conseguirem desenvolver esta capacidade.

# 5. Conclusões Finais

São muitos os investigadores que se debruçaram e debruçam sobre a Geometria no contexto escolar. O estudo das ideias por eles defendidas permite ao leitor criar a sua conceção sobre o processo de ensino e aprendizagem da Geometria. Foi o que sucedeu comigo! Como resultado da pesquisa bibliográfica que realizei, percebi que a Geometria tem um papel fundamental e insubstituível na formação dos alunos dado ser, essencialmente, o conhecimento do espaço envolvente. É, dos temas matemáticos escolares, aquele que mais se presta à matematização da realidade sendo, por isso, um campo privilegiado para a realização de descobertas que permitam o conhecimento das aplicabilidades da Geometria. As tarefas propostas pelo professor devem ser criativas, recorrer às novas tecnologias e aos materiais manipuláveis e levar à compreensão das conexões entre conceitos. Só assim estes serão significativos. O trabalho cooperativo permite a interação entre os alunos, o desenvolvimento de competências sociais e comunicativas e contribui para a assimilação dos conceitos. Neste tipo de trabalho o professor assume um papel de facilitador e orientador da aprendizagem dos alunos. Para que tudo o que deve envolver o ensino e a aprendizagem da matemática, mais concretamente da Geometria, dê resultados positivos o professor deve refletir sobre como deve fazer e sobre o que fez.

A experiência que desenvolvi em sala de aula no âmbito do estudo do meu problema de investigação – “compreender como é que os alunos aprendem geometria” – confirmam globalmente as ideias que acabei de apresentar. Passo a apresentar as minhas conclusões em consonância com as questões estudadas.

**a) Qual o papel dos materiais manipuláveis na estruturação do pensamento geométrico dos alunos?**

Os alunos identificavam e representavam visualmente as diferentes posições relativas entre retas e planos, e entre planos. Os materiais manipuláveis usados na construção de modelos concretos representativos das situações problemáticas apresentadas, permitiram aos alunos executar e compreender os procedimentos corretos na resolução das mesmas. Para isso, tiveram que mexer nos materiais e interpretar as suas caraterísticas. Como refere Freudenthal (1973), mãos e cérebro trabalharam em conjunto.

Mas tal só foi possível com a orientação dada pelas professoras e nem todos os alunos o conseguiram da mesma forma. Após a exploração dos materiais foi necessário colocar questões para que os alunos relacionassem a matemática com os materiais usados para representar os conceitos, tal como é sugerido pelo NCTM (trad.2001).

Os materiais permitiram que os alunos atribuíssem um significado aos conceitos e problemas estudados e, consequentemente, estruturassem o seu pensamento geométrico. Foi um processo ativo de construção do conhecimento (Vale.1999, Almiro,2004)!

**b) Como comunicam as ideias geométricas?**

A linguagem utilizada para comunicarem matematicamente, oralmente e por escrito, é o maior problema destes alunos. Não sabem como expressar-se mesmo que tenham compreendido os conceitos e os processos. Contudo, notei uma evolução positiva entre a primeira e a última atividade que realizaram. Como está definido no PMEB (2007), os alunos conseguiram, apesar de usarem uma linguagem com algumas falhas ao nível do vocabulário matemático, “comunicar oralmente e por escrito, recorrendo à linguagem natural e à linguagem matemática, interpretando, expressando e discutindo resultados, processos e ideias matemáticos” (p.62). Concretamente, apresentaram a interpretação que fizeram de tudo o que foi estudado, as soluções dos problemas propostos e a respetiva fundamentação matemática.

**c) Como é que os modelos concretos facilitam a passagem do concreto para o abstrato?**

Os modelos concretos foram essenciais na passagem do concreto para o abstrato. Tal como defende Freudenthal (1973), os alunos só estão preparados para formalizar os seus conhecimentos geométricos quando os conseguem construir no concreto. Mas não garantiram, por si só a assimilação dos conceitos como é expresso pelo NCTM. Foi necessária a orientação do professor para que aquela fosse significativa (NCTM, trad.2001).

A concretização das situações, principalmente de situações reais como foi o caso deste estudo, permitiu aos alunos “fazer” matemática no sentido definido por Abrantes (1999) e compreender as conexões entre os conceitos matemáticos e a sua aplicabilidade no mundo real tal como é invocado pelo NCTM (trad.2001).

O contacto com os materiais e a sua manipulação facilitaram a passagem do concreto para o abstrato e contribuíram para a construção de um conhecimento mais sólido e duradoiro (Almiro, 2004). Tenho a certeza que se tivesse analisado este tópico do PMEB apenas no abstrato, o conhecimento adquirido pelos alunos, se é que o chegariam a adquirir, seria efémero.

**Concluindo**, os alunos aprendem Geometria quando lhes conseguem atribuir significado. Foi essencial o encontro entre a matemática escolar e a cultura de origem – “o que está longe do nosso mundo foge da nossa memória” (Freudenthal, 1973, p.405). Com a realização de atividades de natureza exploratória e investigativa que incidiram sobre problemas abertos (Abrantes, 1999), os alunos foram desafiados a analisar os seus processos de pensamento e as justificações desenvolvendo, assim, o sentido espacial (NCTM, trad.2001).

Os materiais manipuláveis, como ferramentas multissensoriais de aprendizagem que são, proporcionaram aos alunos uma forma de comunicar e trocar ideias através da modelação e da representação concreta de conceitos (NCTM, trad.2001).

Já aguardava o surgir de muitos obstáculos, tanto ao nível das capacidades cognitivas dos alunos como da sua predisposição para o trabalho. Mas o que aconteceu ultrapassou as minhas expetativas. Estes alunos têm dificuldades extremas ao nível das competências matemáticas, o que exigiu de mim uma dedicação completa ao trabalho desenvolvido por cada um deles, na medida das minhas possibilidades, com o propósito de as ultrapassar.

O fruto desta dedicação foi muito positivo! Os alunos recompensaram-me com o seu empenho, interesse e dedicação e fizeram um enorme esforço para ultrapassar as suas dificuldades, o que nem sempre conseguiram. O facto de terem sido eles o “centro das atenções”, fê-los sentirem-se valorizados, o que nem sempre acontece na Escola nem em casa, e levou a que desenvolvêssemos uma relação professor-aluno que, para muitos docentes, demora anos a estabelecer.

Foi árduo o caminho que percorri mas compensador. Aprendi muito sobre Geometria e sobre o seu ensino. Tornou-me uma professora mais atenta, dedicada e preocupada com a aprendizagem dos seus alunos. É mais um marco importante da minha vida profissional.

Sinto-me feliz!

## Referências

Abrantes, P. (1999). Investigações em Geometria na Sala de Aula. Em E. Veloso, H. Fonseca, J.P. Ponte & P. Abrantes. *Ensino da Geometria no Virar do Milénio.* Lisboa: Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. [DEFCUL].

Almiro, J. (2005). *O professor e o desenvolvimento curricular.* Lisboa: Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. [DEFCUL].

Coelho, M. & Saraiva, M. (2000). Tecnologias no Ensino/Aprendizagem da Geometria. Em Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação. *2000 – Fundão – Ensino e Aprendizagem da Geometria.* Fundão: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Costa, C. (2000). Visualização, veículo para a educação em geometria. Em Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação. *2000 – Fundão – Ensino e Aprendizagem da Geometria.* Fundão: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Coutinho, C.P. (2008, janeiro a abril). A qualidade da investigação educativa de natureza qualitativa: questões relativas à fidelidade e validade. *Educação Unisinos*, volume 12, número 1, pp. 5 – 15.

Fernandes, E. Gouveia, A. Lopes, P.C. Martins, S. (2012). *Proposta de trabalho “Festa de Carnaval”*. Funchal. Construindo o Êxito em Matemática.

Fidalgo, F. Louçano, P. Magro, F. (2011). *PI8 MATEMÁTICA 8.ºANO*. Edições ASA.

Garnica, A. (1996). Algumas notas sobre Pesquisa Qualitativa e Fenomenologia. Em Departamento de Educação da Universidade Estadual Paulista. *Paradigmas de Interpretação da Realidade* (pp.109 – 122). Botucatu, SP: UNESP.

Guimarães, H., Abrantes, P., Precatado, A., Lopes, A., Baeta, A., Ferreira, E., …Teixeira, P. (1998). *Matemática 2001 – Recomendações para o Ensino e Aprendizagem da Matemática (relatório preliminar)*.

Lucas, A. Ribeiro, A. Cosme, C. Rodrigues, C. Gomes, H. Ferraz, L. Menezes, L. Silva, M. Novo, S. (2008). *O Ensino e a Aprendizagem da Geometria.* Viseu. Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores dos primeiro e segundo ciclos.

Olive, J. (2000).Implications of Using Dynamic Geometry Tecnnology for Teaching and Lerning. Em Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação. *2000 – Fundão – Ensino e Aprendizagem da Geometria.* Fundão: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Piteira, G. & Matos, J.F. (2000). Ambientes Dinâmicos de Geometria como Artefactos Mediadores para a Aprendizagem da Geometria. Em Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação. *2000 – Fundão – Ensino e Aprendizagem da Geometria.* Fundão: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Ponte, J.P. (1999). Encontro sobre ensino e aprendizagem da geometria. *Educação e Matemática*, número 52, pp 7 – 8.

Ponte, J.P. & Serrazina, L. (2004). As práticas dos professores de Matemática em Portugal. *Educação e Matemática*, número 80, pp 8 – 12.

Ponte, J.; Serrazina, L.; Guimarães, H.; Brenda, A.; Guimarães, F.; Sousa, H.; Menezes, L.; Martins, M.; Oliveira, P. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Ministério da Educação – DGIDC.

Professores das turmas piloto do 8.º ano de escolaridade. Ano letivo 2009/10. (2010) *Sólidos Geométricos – Proposta de sequência de tarefas para o 8º ano - 3.º ciclo*. Ministério da Educação – DGIDC.

The Nacional Council of Teachers of Mathematics, Inc. [NCTM]. (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*.

The Nacional Council of Teachers of Mathematics, Inc. [NCTM]. (1992). *Geometry in the Midle Grades.*

Veloso, E. (1998). *Geometria: TEMAS ATUAIS. Materiais para Professores.* Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

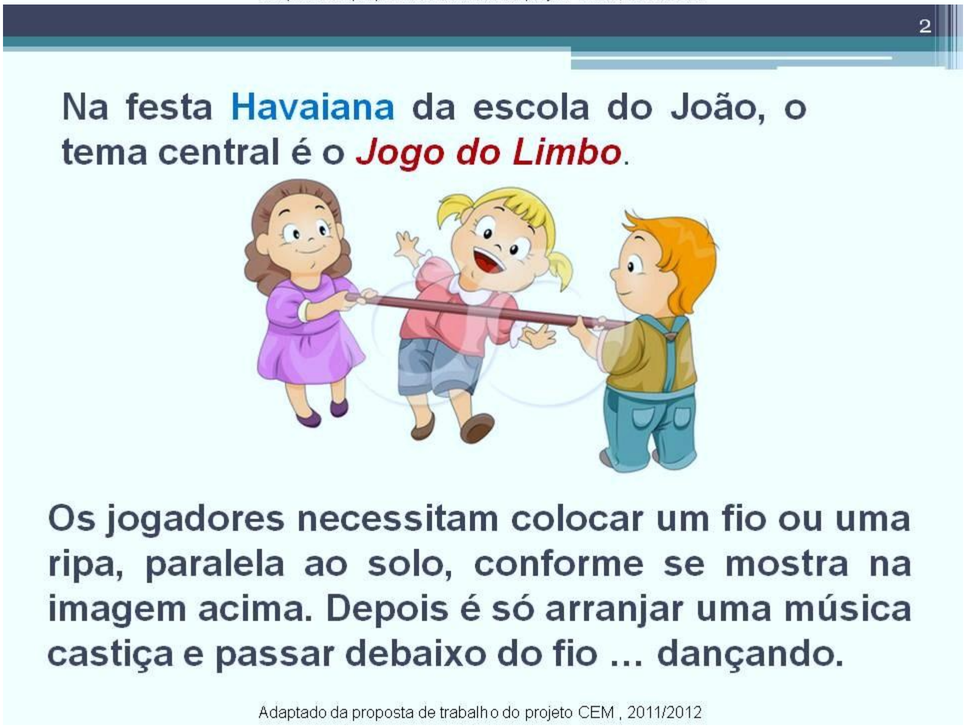
Veloso, E. (2002). Cabri, Cinderella e Sketchpad. *Educação e Matemática*, número 570, pp 5 – 9.

Sítios:

Metas de Aprendizagem. Disponível em: http://www.metasdeaprendizagem.min-edu.pt/ensino-basico/metas-de-aprendizagem/metas/?area=7&level=6. Consultado a 27 de abril de 2012.

# Anexos

## Anexo I – Primeira Tarefa em Powerpoint

3

SITUAÇÃO 1

**Investiga como se pode utilizar o nível de bolha para garantir que a ripa esteja paralela ao chão.**

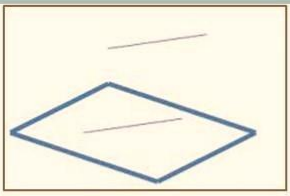

Adaptado da proposta de trabalho do projeto CEM , 2011/2012

4

**Com o teu grupo de trabalho, regista as conclusões a que chegaram.**

Adaptado da proposta de trabalho do projeto CEM , 2011/2012

5



**CRITÉRIO DE PARALELISMO ENTRE RETA E PLANO**

***Se num plano** (chão) **existir uma reta** (nível ) **paralela a uma reta dada** (ripa)**, então a reta dada** (ripa) **e o plano** (chão) **são paralelos.***

Adaptado da proposta de trabalho do projeto CEM , 2011/2012

6

A Ana, sugeriu que, para jogar ao Limbo, poderiam ser criados dois suportes para colocar a ripa, em vez de serem dois jogadores a segurar.

À medida que a RIPA descer, os pontos atribuídos à equipa, aumentam…

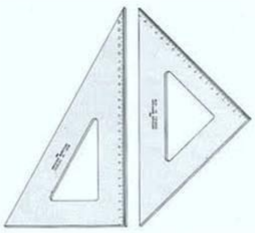

Adaptado da proposta de trabalho do projeto CEM , 2011/2012

7

Qual deverá ser a posição relativa dos suportes usados e do solo?

SITUAÇÃO 2

Investiga como é que, com recurso a dois esquadros, garantes que cada um dos suportes está perpendicular ao solo.



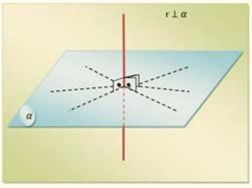
Adaptado da proposta de trabalho do projeto CEM, 2011/2012

8

Com o teu grupo de trabalho, regista as conclusões a que chegaram.

Adaptado da proposta de trabalho do projeto CEM, 2011/2012

9



**CRITÉRIO DE PERPENDICULARIDADE ENTRE RETA E PLANO**

**Se uma reta** (suporte) **é perpendicular a duas retas concorrentes** (esquadros ) **de um plano** (solo)**, então a reta** (suporte) **é perpendicular ao plano** (solo)**.**

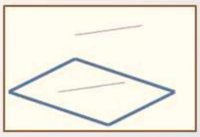
Adaptado da proposta de trabalho do projeto CEM , 2011/2012

10

***CRITÉRIOS DE PARALELISMO E PERPENDICULARIDADE ENTRE RETAS E PLANOS***

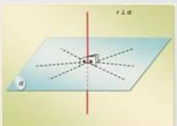
**CRITÉRIO DE PARALELISMO ENTRE RETA E PLANO**

*Se num plano existir uma reta paralela a uma reta dada, então a reta dada e o plano são paralelos.*



**CRITÉRIO DE PERPENDICULARIDADE ENTRE RETA E PLANO**

*Se uma reta é perpendicular a duas retas concorrentes de um plano, então a reta é perpendicular ao plano.*



Adaptado da proposta de trabalho do projeto CEM , 2011/2012

11

**Para registar a pontuação de várias equipas no jogo do Limbo, o professor de educação física sugeriu que fosse levado para o pátio um quadro branco.**

**No pátio pediu a dois alunos que segurassem no quadro, de modo que fosse perpendicular ao chão, para ser afixado. Um deles respondeu:**

***– Se eu tivesse um fio-de-prumo, seria bem mais fácil…***

Adaptado da proposta de trabalho do projeto CEM , 2011/2012

12

**SITUAÇÃO 3**

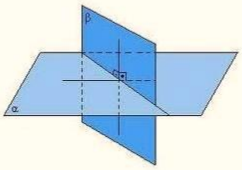
**Procura utilizar este instrumento para verificar se, por exemplo, o <u>quadro</u> da tua sala está <u>perpendicular</u> ao <u>chão</u>.**

13

**Com o teu grupo de trabalho, regista as conclusões a que chegaram.**

Adaptado da proposta de trabalho do projeto CEM , 2011/2012

14



**CRITÉRIO DE PERPENDICULARIDADE ENTRE PLANOS**

***Se num plano** (quadro ) **existir uma reta** (fio do fio de prumo) **perpendicular a outro plano** (chão), **então os planos** (quadro e chão) **são perpendiculares.***

Adaptado da proposta de trabalho do projeto CEM , 2011/2012

15

**Para a festa Havaiana foi preciso colocar mesas no pátio da escola, para ser servido o lanche.**

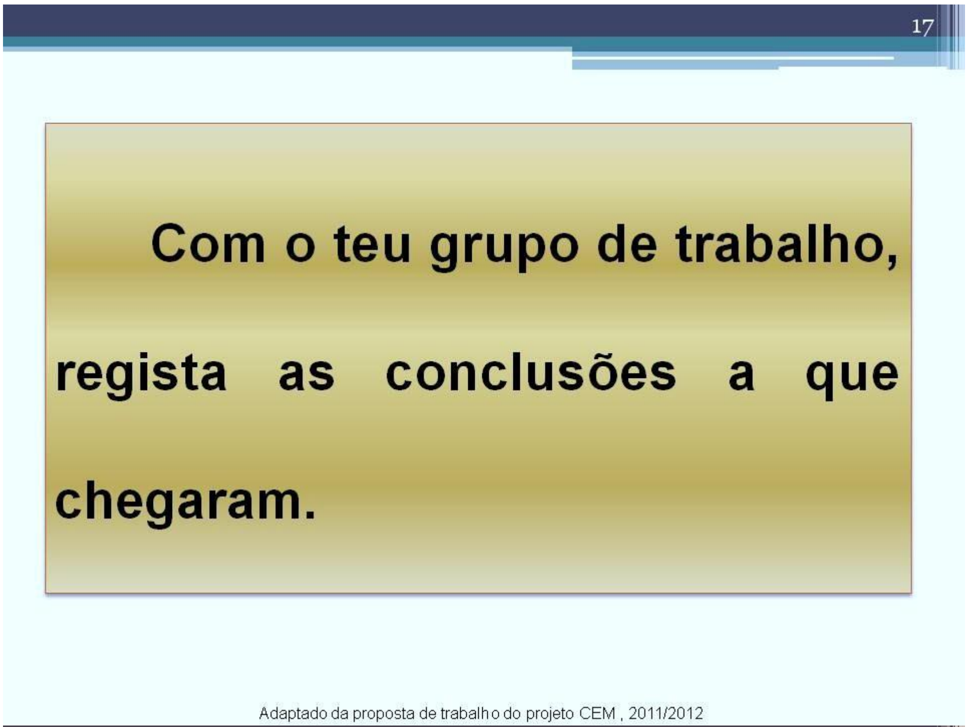
Adaptado da proposta de trabalho do projeto CEM , 2011/2012

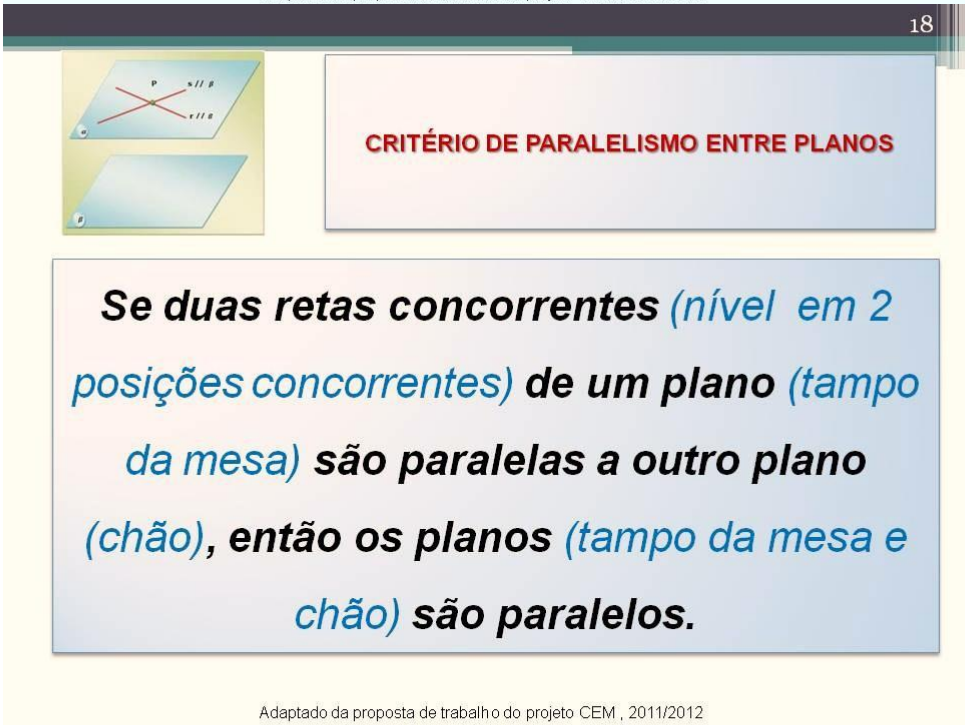
16

**SITUAÇÃO 4**

**Investiga como se pode utilizar o nível de bolha, para garantir que o tampo de uma mesa está numa posição paralela ao chão.**


Adaptado da proposta de trabalho do projeto CEM , 2011/2012


17
Com o teu grupo de trabalho, regista as conclusões a que chegaram.
Adaptado da proposta de trabalho do projeto CEM , 2011/2012

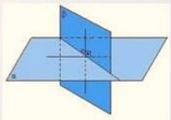

18
CRITÉRIO DE PARALELISMO ENTRE PLANOS
Se duas retas concorrentes (nível em 2 posições concorrentes) de um plano (tampo da mesa) são paralelas a outro plano (chão), então os planos (tampo da mesa e chão) são paralelos.
Adaptado da proposta de trabalho do projeto CEM , 2011/2012

19

## CRITÉRIOS DE PARALELISMO E PERPENDICULARIDADE ENTRE PLANOS

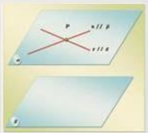
**CRITÉRIO DE PERPENDICULARIDADE ENTRE PLANOS**

*Se num plano existir uma reta perpendicular a outro plano, então os planos são perpendiculares.*



**CRITÉRIO DE PARALELISMO ENTRE PLANOS**

*Se duas retas concorrentes de um plano são paralelas a outro plano, então os planos são paralelos.*



Adaptado da proposta de trabalho do projeto CEM , 2011/2012

20

# BIBLIOGRAFIA:

Ponte, J.; Serrazina, L.; Guimarães, H.; Brenda, A.; Guimarães, F.; Sousa, H.; Menezes, L.; Martins, M.; Oliveira, P. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Ministério da Educação – DGIDC.

Fernandes, E. Gouveia, A. Lopes, P.C. Martins, S. (2012). *Proposta de trabalho "Festa de Carnaval"*. Funchal. Construindo o Êxito em Matemática.

21

Construindo o êxito em matemática CEM

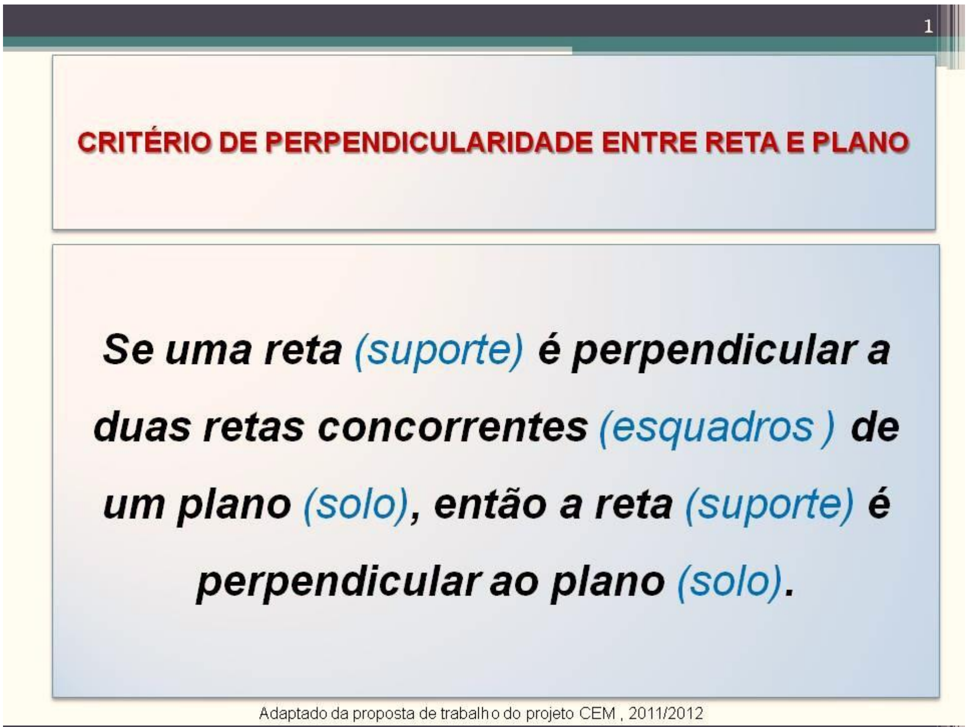
# SÍTIOS DAS IMAGENS:

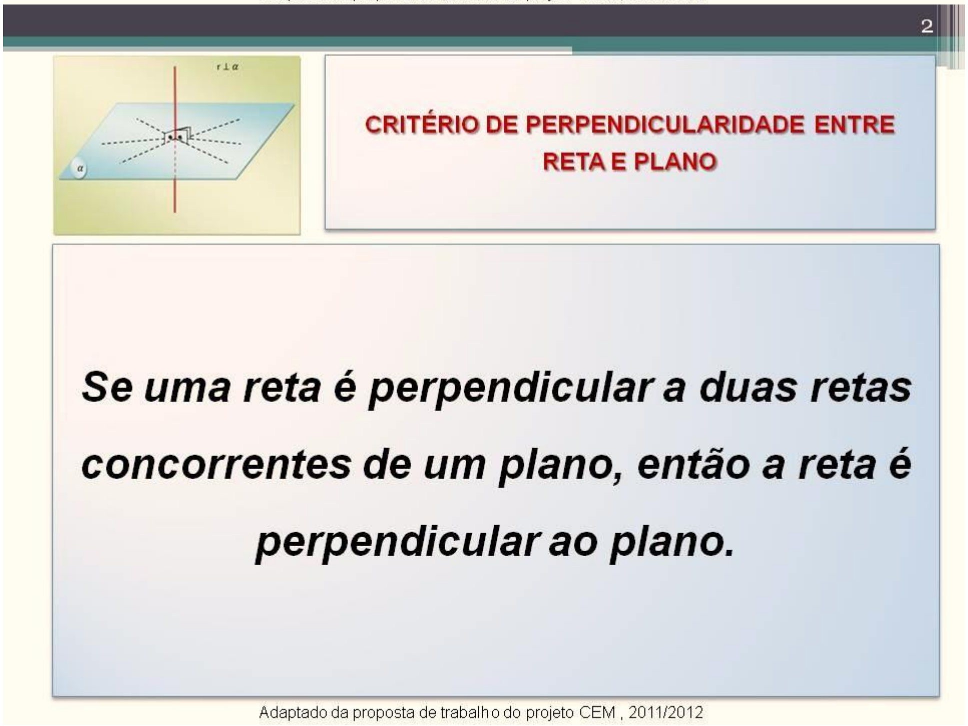
- http://t2.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcShd25d_Hq09YlmzzmCx5OT0hOVYXg8df_PGfW6AwuESAuTwFEw_w
- http://www.bibliaonline.net/estudos/imagens/2/prumo_10.gif
- http://www.dutramaquinas.com.br/imagens/produto/grande/33412_nivel_de_bolha_com_transferidor_de_angulos_40_cm__70w.jpg
- http://t2.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcQpNhoQ6ceeZi2oGVTlSUq4Dw2B0y-Kt_MzXe56dB8Im2syW_6Clw
- http://www.iped.com.br/sie/uploads/22271.jpg
- http://www.culturamix.com/wp-content/gallery/mascaras-carnaval/carnaval-mascara-2.gif

22

- http://www.4patas.net/residencia/detalles/mesa_redonda_con_faldon_vitaplus/id:223/
- http://www.clipartof.com/portfolio/bnpdesignstudio/illustration/kids-playing-limbo-1050092.html
- http://www.picturesof.net/pages/090321-174670-445052.html
- http://www.google.pt/search?q=imagens+de+uma+festa+havaiana&hl=pt-PT&rlz=1G1ASUS_PT-PTPT479&prmd=imvns&tbm=isch&tbo=u&source=univ&sa=X&ei=dhCAT_L8Hcav8QPp2-2pBg&ved=0CCwQsAQ&biw=1024&bih=632

**Anexo V – Critérios de Paralelismo e Perpendicularidade: resumo**



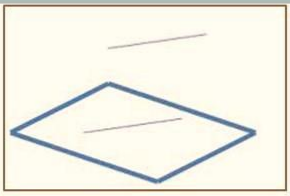
3

**CRITÉRIO DE PARALELISMO ENTRE RETA E PLANO**

***Se num plano*** *(solo)* ***existir uma reta*** *(nível )* ***paralela a uma reta dada*** *(ripa)*, ***então a reta dada*** *(ripa)* ***e o plano*** *(chão)* ***são paralelos.***

Adaptado da proposta de trabalho do projeto CEM , 2011/2012

4



**CRITÉRIO DE PARALELISMO ENTRE RETA E PLANO**

***Se num plano existir uma reta paralela a uma reta dada, então a reta dada e o plano são paralelos.***

Adaptado da proposta de trabalho do projeto CEM , 2011/2012

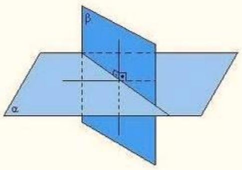
5

**CRITÉRIO DE PERPENDICULARIDADE ENTRE PLANOS**

**Se num plano** (parede ) **existir uma reta** (fio do fio de prumo) **perpendicular a outro plano** (chão)**, então os planos** (parede e chão) **são perpendiculares.**

Adaptado da proposta de trabalho do projeto CEM , 2011/2012

6



**CRITÉRIO DE PERPENDICULARIDADE ENTRE PLANOS**

**Se num plano existir uma reta perpendicular a outro plano , então os planos são perpendiculares.**

Adaptado da proposta de trabalho do projeto CEM , 2011/2012

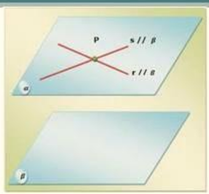
7

## CRITÉRIO DE PARALELISMO ENTRE PLANOS

**Se duas retas concorrentes** *(nível em 2 posições concorrentes)* **de um plano** *(chão)* **são paralelas a outro plano** *(tampo da mesa)*, **então os planos** *(tampo da mesa e chão)* **são paralelos.**

Adaptado da proposta de trabalho do projeto CEM , 2011/2012

8



## CRITÉRIO DE PARALELISMO ENTRE PLANOS

***Se duas retas concorrentes de um plano são paralelas a outro plano, então os planos são paralelos.***

Adaptado da proposta de trabalho do projeto CEM , 2011/2012

9

# BIBLIOGRAFIA:

Ponte, J.; Serrazina, L.; Guimarães, H.; Brenda, A.; Guimarães, F.; Sousa, H.; Menezes, L.; Martins, M.; Oliveira, P. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Ministério da Educação – DGIDC.

Fernandes, E. Gouveia, A. Lopes, P.C. Martins, S. (2012). *Proposta de trabalho “Festa de Carnaval”*. Funchal. Construindo o Êxito em Matemática.

10

# SÍTIOS DAS IMAGENS:

- http://t2.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcShd25d_Hq09YlmzzmCx5OT0hOVYXg8df_PGfW6AwuESAuTwFEw_w
- http://www.bibliaonline.net/estudos/imagens/2/prumo_10.gif
- http://www.dutramaquinas.com.br/imagens/produto/grande/33412_nivel_de_bolha_com_transferidor_de_angulos_40_cm__70w.jpg
- http://t2.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcQpNhoQ6ceeZi2oGVTlSUq4Dw2B0y-Kt_MzXe56dB8lm2syW_6Clw
- http://www.iped.com.br/sie/uploads/22271.jpg
- http://www.culturamix.com/wp-content/gallery/mascaras-carnaval/carnaval-mascara-2.gif

11

- http://www.4patas.net/residencia/detalles/mesa_redonda_con_faldon_vitaplus/id:223/
- http://www.clipartof.com/portfolio/bnpdesignstudio/illustration/kids-playing-limbo-1050092.html
- http://www.picturesof.net/pages/090321-174670-445052.html
- http://www.google.pt/search?q=imagens+de+uma+festa+havaiana&hl=pt-PT&rlz=1G1ASUS_PT-PTPT479&prmd=imvns&tbm=isch&tbo=u&source=univ&sa=X&ei=dhCAT_L8Hcav8QPp2-2pBg&ved=0CCwQsAQ&biw=1024&bih=632

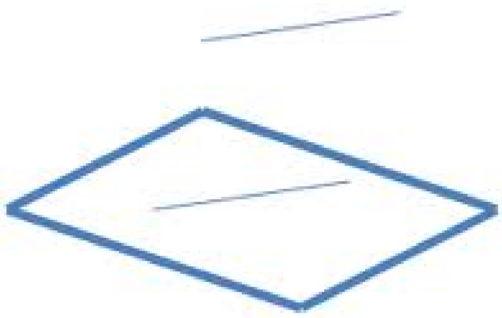
**Anexo VII – Critérios de Paralelismo e Perpendicularidade: alunos**

**NOME:** ______________________________________________

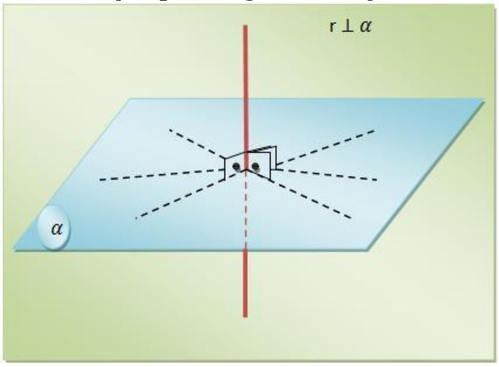
## CRITÉRIOS DE PARALELISMO E PERPENDICULARIDADE

### ENTRE RETAS E PLANOS

*Como é que podes garantir que* ***uma reta é paralela a um plano****?*

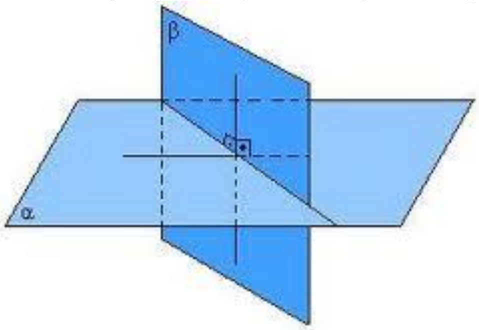


*Como é que podes garantir que* ***uma reta é perpendicular a um plano****?*

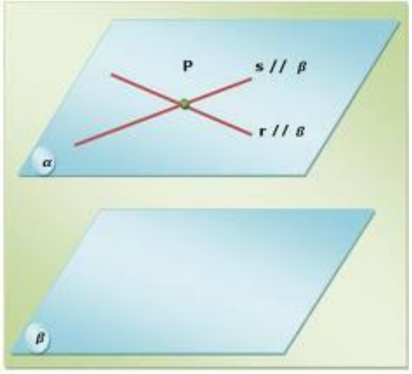



### ENTRE PLANOS

*Como é que podes garantir que* ***dois planos são perpendiculares****?*




*Como é que podes garantir que* ***dois planos são paralelos****?*



**Anexo VIII – Segunda Tarefa**

**REGIÃO AUTÓNOMA DA MADEIRA**
GOVERNO REGIONAL
**SECRETARIA REGIONAL DA EDUCAÇÃO E RECURSOS HUMANOS**
**ECOLA BÁSICA E SECUNDÁRIA GONÇALVES ZARCO**
**MATEMÁTICA - 8º ANO**
**Resolução de Problemas**
Critérios de Paralelismo e Perpendicularidade entre Retas e Planos, e entre Planos

Nesta tarefa, ser-vos-ão apresentados quatro **problemas** da vida corrente. Deverão apresentar, por escrito, uma **solução** para cada um deles relacionando-a com os **critérios de paralelismo e perpendicularidade** que estudaram.

Na folha onde irão escrever as soluções apresentadas, **não se esqueçam** de indicar o nome de cada elemento do grupo e a data de entrega à professora.

**PROBLEMA 1**: O Sr. Francisco quer colocar um corrimão numa rampa.

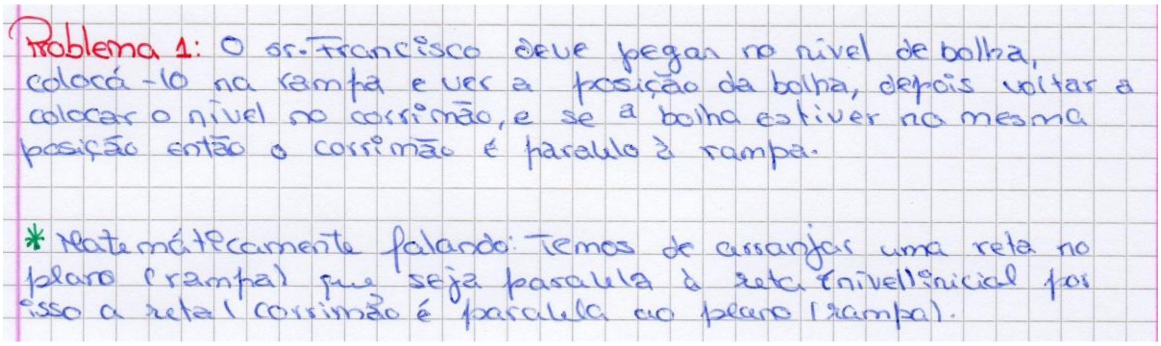
O que deve fazer para que o corrimão fique paralelo à rampa?

**PROBLEMA 2**: O Sr. Manuel está a instalar um poste, para segurar uma antena, num terraço. Para ter a certeza que o poste fica perpendicular ao terraço, o que deve fazer?

**PROBLEMA 3**: A D. Graciete quer colocar um teto falso na sua sala de estar, mas quer ter a certeza que fica paralelo ao chão. O que deve fazer?

**PROBLEMA 4**: A D. Cremilde quer colocar uma divisória de madeira no seu jardim para evitar que os gatos lhe estraguem as rosas. O que deve fazer para ter a certeza que a divisória vai ficar perpendicular ao chão?

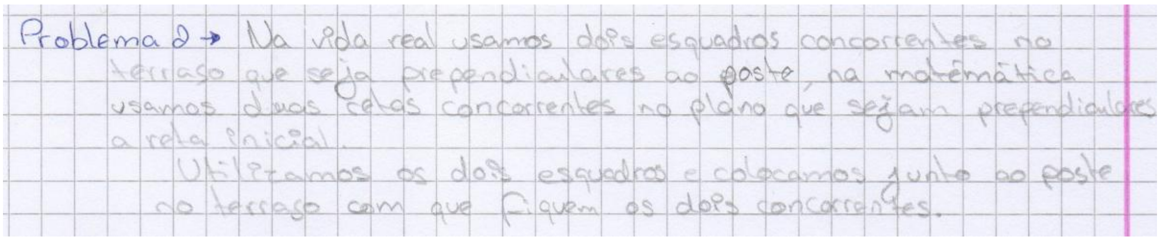
## Anexo IX – Resolução de Problemas: alunos



Problema 1: O sr. Francisco deve pegar no nível de bolha, colocá-lo na rampa e ver a posição da bolha, depois voltar a colocar o nível no corrimão, e se a bolha estiver na mesma posição então o corrimão é paralelo à rampa.

* Matemáticamente falando: Temos de arranjar uma reta no plano (rampa) que seja paralela à reta (nível) inicial por isso a reta (corrimão) é paralela ao plano (rampa).

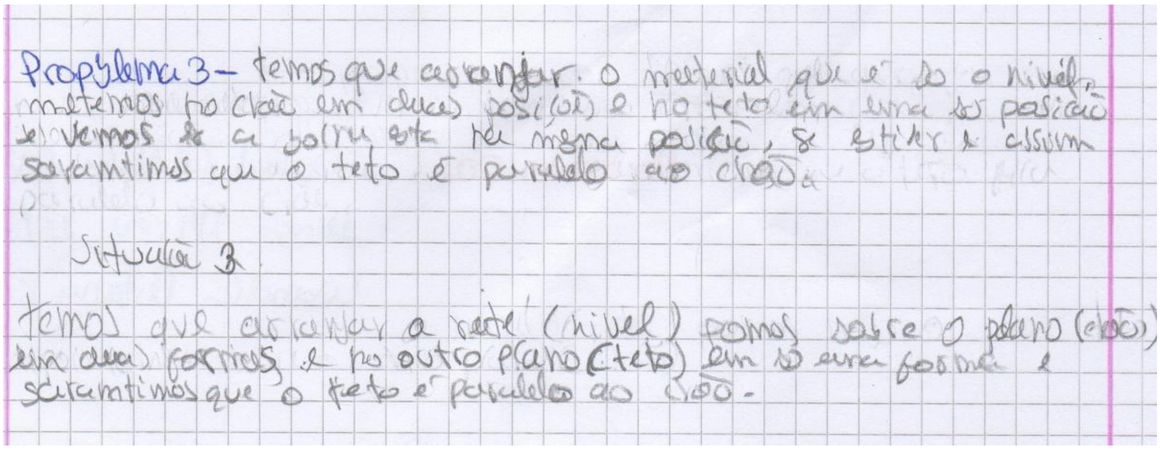
*Figura 10*: Resolução do problema 1 apresentada pelo grupo da R.



Problema 2 → Na vida real usamos dois esquadros concorrentes no terraço que seja prependiculares ao poste, na matemática usamos duas retas concorrentes no plano que sejam prependiculares a reta inicial.

Utilizamos os dois esquadros e colocamos junto ao poste no terraço com que fiquem os dois concorrentes.

*Figura 11*: Resolução do problema 2 apresentada pelo grupo do A.

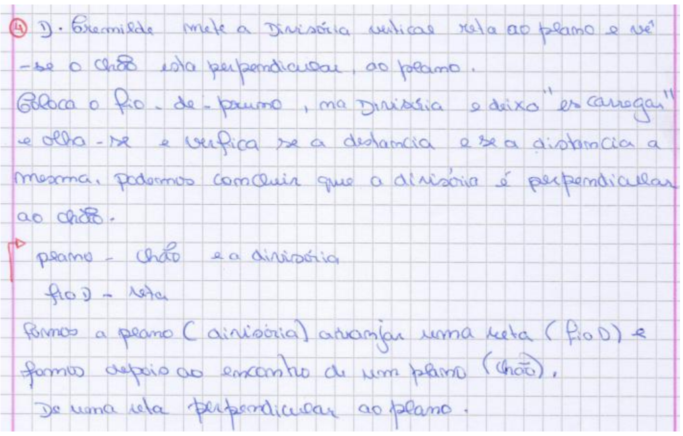


Propblema 3 – temos que arranjar o material que é so o nível, metemos no chão em duas posições e no teto em uma so posição se vemos se a bolha esta na mesma posição, se estiver e assim garantimos que o teto é paralelo ao chão.

Situação 3

Temos que arranjar a reta (nível) pomos sobre o plano (chão) em duas formas e no outro plano (teto) em só uma forma e garantimos que o teto é paralelo ao chão.

*Figura 12*: Resolução do problema 3 apresentada pelo grupo do D.



4 D. Ermelinda mete a Divisória vertical reta ao plano e vê-se o chão esta perpendicular ao plano.

Coloca o fio-de-prumo, na Divisória e deixo "escorregar" e olha-se e verifica se a distancia e se a distancia a mesma, podemos concluir que a divisória é perpendicular ao chão.

plano – chão e a divisória

fio D – reta

Temos o plano (divisória) arranjar uma reta (fio D) e fomos depois ao encontro de um plano (chão).

De uma reta perpendicular ao plano.

*Figura 13*: Resolução do problema 4 apresentada pelo grupo do L.

## Anexo X – Autorização dos Encarregados de Educação

**Escola Básica e Secundária Gonçalves Zarco**

**AUTORIZAÇÃO**

Eu, _____________________________________________, (Encarregado(a) de Educação) autorizo a professora Ana Sofia Lopes a filmar e tirar fotografias do(a) aluno(a) _____________________________________________ do 8°8 durante as aulas de Matemática no âmbito do projeto “Ensinar e Aprender Geometria”, tese de mestrado da professora Ana Sofia Lopes, assim como o uso posterior destes materiais para a realização e apresentação do trabalho académico (**uso exclusivo para o meio académico**).

Funchal, 20 de abril de 2012.

Assinatura: _____________________________________

(professora Ana Sofia Lopes)

Assinatura: ________________________________

(Presidente do Conselho Executivo)