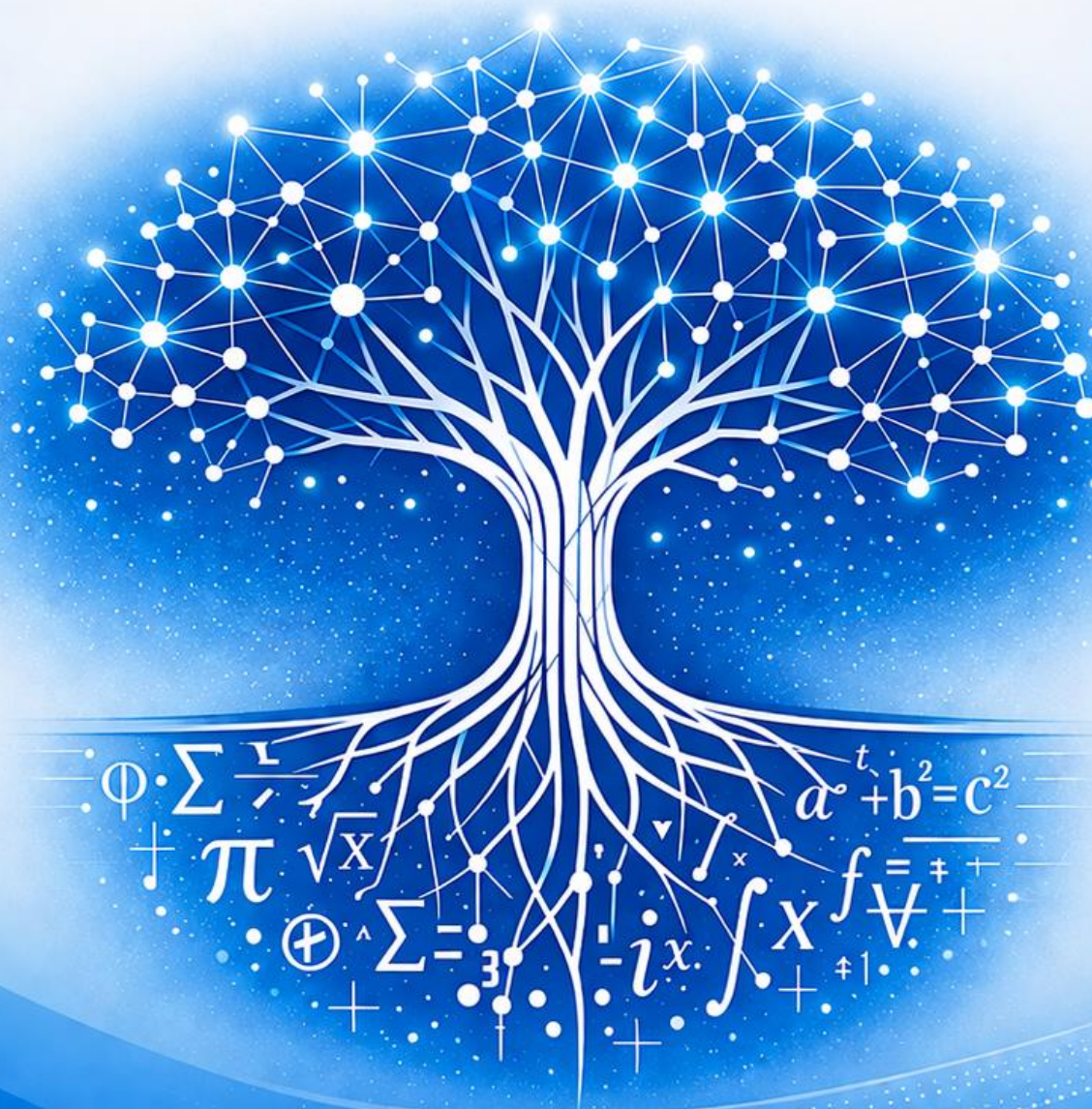


# III WORKSHOP MATEMÁTICA NA UMA

— *Das Raízes ao Futuro* —

Livro de Resumos



Organização: Departamento de Matemática - FCEE - Universidade da Madeira

2 e 3 de junho de 2026



**CDA** CENTRO DE  
DESENVOLVIMENTO  
ACADÉMICO





III *WORKSHOP* MATEMÁTICA NA UMA  
DAS RAÍZES AO FUTURO

---

**Livro de Resumos**

---

2 e 3 de junho de 2026  
Funchal, Portugal

## **Ficha Técnica**

### **Comissão Organizadora**

Ana Maria Abreu (CIMA)  
Ivo Sousa-Ferreira (CEAUL)  
Sandra Mendonça (CEAUL)  
Sónia Martins (CIE-UMa)

Departamento de Matemática  
Faculdade de Ciências Exatas e da Engenharia  
da Universidade da Madeira

### **Apoios**

Centro de Desenvolvimento Académico  
Faculdade de Ciências Exatas e da Engenharia  
Universidade da Madeira

### **Editores**

Ivo Sousa-Ferreira  
Ana Maria Abreu  
Sónia Martins  
Sandra Mendonça

### **ISBN**

978-989-34-0179-8

### **DOI**

[10.34640/univmadeira20263workshopmatematica](https://doi.org/10.34640/univmadeira20263workshopmatematica)

### **Capa**

Conteúdo visual desenvolvido com assistência criativa  
de OpenAI (2026)

### **Endereço**

Campus Universitário da Penteada  
9020-105 Funchal  
Madeira, Portugal  
Site: <http://matuma.uma.pt>  
Email: [matuma@mail.uma.pt](mailto:matuma@mail.uma.pt)



# Apresentação do *Workshop*

O Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências Exatas e da Engenharia da Universidade da Madeira (UMa), com o apoio do Centro de Desenvolvimento Académico, organiza o III *Workshop* Matemática na UMa, com o tema “Das Raízes ao Futuro”. Este encontro pretende apresentar uma viagem entre as raízes e o futuro da Matemática na UMa. Como tal, conta com a participação ativa de antigos e atuais membros docentes deste departamento, de alunos dos seus cursos e de potenciais futuros alunos e docentes.

A terceira edição deste *workshop* destina-se a professores de todos os graus de ensino, com especial ênfase nos que lecionam a disciplina de Matemática nos 2.º e 3.º Ciclos do Ensino Básico e no Ensino Secundário, bem como a professores do Ensino Superior da área da Matemática, a alunos do Ensino Superior e a investigadores, tendo sido validada pela Secretaria Regional de Educação, Ciência e Tecnologia da Região Autónoma da Madeira, para efeitos de progressão na carreira, para os grupos de recrutamento 230 e 500.

O presente livro compila os resumos apresentados neste evento pelos autores de comunicações orais ou de pósteres, a quem muito agradecemos.

Bom *Workshop*!

Funchal e UMa, maio de 2026

A Comissão Organizadora



# Intervenção na Sessão de Abertura

## Nota editorial

A Professora Doutora Elsa Fernandes, na qualidade de Secretária Regional de Educação, Ciência e Tecnologia da Região Autónoma da Madeira, participou na sessão de abertura do III *Workshop* Matemática na UMa. Atendendo ao significado institucional e académico da sua intervenção, bem como à sua ligação histórica ao Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências Exatas e da Engenharia da Universidade da Madeira, a Comissão Organizadora considerou oportuno incluir neste livro uma versão do discurso proferido na ocasião.

## Discurso de abertura

Exmo. Senhor Reitor da Universidade da Madeira,  
Exmas. Autoridades Académicas,  
Caros colegas, estudantes, antigos alunos e convidados,  
Minhas Senhoras e Meus Senhores,

É com enorme gosto que participo na abertura deste III *Workshop* Matemática na UMa – “Das Raízes ao Futuro”.

Faço-o enquanto Secretária Regional da Educação, Ciência e Tecnologia, mas também com a emoção de quem regressa a um espaço que fez parte da sua vida académica e profissional durante muitos anos.

Hoje, ao olhar para esta sala, não vejo apenas participantes num *workshop*. Vejo amigos, colegas, antigos alunos, futuros professores, investigadores e profissionais que fazem parte da história da Matemática na Universidade da Madeira. E, para quem dedicou a sua carreira à área do Ensino da Matemática, este encontro tem um significado muito especial.

O tema escolhido convida-nos a fazer algo que raramente temos tempo para fazer: parar e refletir.

Refletir sobre as nossas raízes, sobre o caminho percorrido e sobre aquilo que queremos construir para o futuro.

As raízes da Matemática na Universidade da Madeira são profundas.

São feitas do trabalho de gerações de docentes e investigadores que acreditaram que uma universidade jovem, numa região insular, podia afirmar-se através da qualidade do ensino, da formação de professores e da produção de conhecimento.

Mas são também feitas dos estudantes que passaram por estas salas de aula e que hoje se encontram em escolas, empresas, centros de investigação e instituições públicas, contribuindo para o desenvolvimento da nossa Região e do nosso país.

Ao longo da minha experiência na formação de professores, aprendi uma lição que considero fundamental: ensinar Matemática é muito mais do que transmitir conteúdos.

É despertar a curiosidade.

É desenvolver a capacidade de questionar.

É ajudar os alunos a compreender que errar faz parte do processo de aprender.

É mostrar que a Matemática não é apenas um conjunto de fórmulas ou procedimentos, mas uma forma de pensar e de interpretar o mundo.

Talvez por isso a Matemática continue a ser uma disciplina tão desafiante e, ao mesmo tempo, tão fascinante.

Porque nos ensina a procurar padrões, a resolver problemas, a construir argumentos e a tomar decisões fundamentadas.

Competências que hoje são indispensáveis numa sociedade cada vez mais complexa e tecnológica.

Quando falamos de inteligência artificial, ciência dos dados, inovação tecnológica ou transformação digital, estamos inevitavelmente a falar de Matemática.

Mas quando falamos de educação de qualidade, de pensamento crítico e de cidadania informada, também estamos a falar de Matemática.

Por isso, investir no ensino da Matemática é investir no futuro.

É preparar as novas gerações para enfrentar desafios que ainda nem conseguimos antecipar.

E é precisamente por isso que encontros como este são tão importantes.

Porque criam espaços de diálogo entre diferentes gerações.

Porque permitem revisitar a história sem perder de vista os desafios que temos pela frente.

Porque reforçam o sentimento de pertença a uma comunidade académica que continua viva, dinâmica e comprometida com o conhecimento.

Quero, por isso, felicitar todos os que contribuíram para a organização desta iniciativa e agradecer o trabalho que têm desenvolvido em prol da Matemática, da educação e da ciência.

E permitam-me terminar com uma ideia que me acompanha desde os tempos em que ensinava futuros professores.

Nenhum professor sabe exatamente até onde chega a influência do seu trabalho.

Muitas vezes, uma explicação, uma palavra de incentivo ou a confiança depositada num aluno produzem efeitos que só se tornam visíveis muitos anos depois.

As verdadeiras raízes da Matemática não estão apenas nos livros ou nas teorias.

Estão nas pessoas.

Nas relações que construímos.

Nos alunos que inspiramos.

E na capacidade que temos de transmitir às novas gerações o gosto por aprender e por descobrir.

Que este *workshop* seja, por isso, uma celebração dessas raízes e, simultaneamente, uma inspiração para o futuro que juntos continuaremos a construir.

Muito obrigada.

*Elza Fernandes*



# Edições Anteriores do *Workshop*

## A primeira edição

O *Workshop* Matemática na UMa pretende ser uma celebração da matemática na Universidade da Madeira.

A primeira edição deste encontro teve lugar no dia 13 de junho de 2016, tendo sido realizada em duas partes. A primeira, que decorreu na parte da manhã, destinou-se à partilha de conhecimentos pelos matemáticos da UMa, fomentando a criação de potenciais colaborações científicas.



Sessão de abertura da primeira edição do *Workshop* Matemática na UMa (Foto: GIRP).  
(Da esquerda para a direita: Maribel Gordon, Manuela Neves, Rita Sá Fernandes, José Carmo, Dinis Pestana, Teresa Gouveia e Ana Abreu).

A segunda parte, que ocorreu na parte da tarde, esteve reservada à celebração do sexagésimo aniversário da Professora Rita Sá Fernandes, atualmente docente aposentada, a quem foi atribuído o primeiro doutoramento pela UMa. Esta celebração contou com os testemunhos de oradores convidados, que acompanharam de perto o seu percurso: Professor Dinis Pestana (Professor Catedrático aposentado da Universidade de Lisboa), Professor José Carmo (Professor Catedrático da Universidade da Madeira) e Professora Manuela Neves (Professora Catedrática da Universidade de

Lisboa). A Professora Rita Sá Fernandes teve um papel relevante na Universidade da Madeira, quer na área de Probabilidades e Estatística, quer noutras atividades, como sejam a presidência do Departamento de Matemática, a presidência do Colégio Universitário e a presidência do Conselho Pedagógico Universitário.

## A segunda edição

A segunda edição realizou-se a 12 de junho de 2017 e teve como tema “A Matemática e as Outras Ciências, as Outras Ciências e a Matemática”. Assim, durante todo este dia, foi possível explorar a ligação da Matemática a outras Ciências e vice-versa, através da apresentação de comunicações orais de matemáticos, bem como de autores de outras áreas científicas. Além disso, a diversidade de temas apresentados fez com que este *workshop* fosse validado pela Secretaria Regional da Educação, para efeitos de progressão na carreira dos docentes de vários grupos de recrutamento.



Foto de grupo da segunda edição do *Workshop* Matemática na UMa.

A terceira edição esteve prevista para 2020, mas a pandemia de COVID-19 resultou no adiamento prolongado deste encontro. Passados 10 anos desde a primeira edição, é tempo de fazer um balanço do caminho percorrido, de conhecer a situação atual e de traçar metas para o futuro.

# Índice

<b>Apresentação do <i>Workshop</i></b>	<b>i</b>
<b>Intervenção na Sessão de Abertura</b>	<b>iii</b>
Nota editorial . . . . .	iii
Discurso de abertura . . . . .	iii
<b>Edições Anteriores do <i>Workshop</i></b>	<b>vii</b>
A primeira edição . . . . .	vii
A segunda edição . . . . .	viii
<b>Programa</b>	<b>1</b>
<b>Resumos das Comunicações Orais</b>	<b>3</b>
A distribuição BetaBoop ( <i>Sandra Mendonça</i> ) . . . . .	5
Implementação computacional em R da distribuição ECP com o <i>package</i> <i>ecpdist</i> ( <i>Ana Maria Abreu e Ivo Sousa-Ferreira</i> ) . . . . .	7
Previsão de séries cronológicas usando redes neuronais artificiais ( <i>Paulo</i> <i>S. A. Freitas</i> ) . . . . .	9
Implicações da perspetiva sociocultural na formação de professores de ma- temática para o uso de tecnologias ( <i>Sónia Martins</i> ) . . . . .	10
Literacia digital na era da IA: potencialidades da aprendizagem baseada em projetos no ensino de estatística ( <i>Caroline Dal Agnol e Sónia Martins</i> ) . . . . .	12
Matemática, ciência e tecnologia no processo RVCC: práticas contextuali- zadas para o desenvolvimento do raciocínio matemático em adultos ( <i>Fábio</i> <i>Gonçalves e Lénia Ferreira</i> ) . . . . .	14
O efeito da alteração do domínio de uma função no modelo de mudança de crenças AGM ( <i>Maurício Reis e Marco Garapa</i> ) . . . . .	16
Rumores de infidelidade, diagnósticos e dinossauros: níveis de credibilidade e mudança seletiva ( <i>Marco Garapa, Eduardo Fermé e Maurício Reis</i> ) . . . . .	17
Aproximação para o erro quadrático médio de uma família de estimadores ( <i>Sílvia Velosa</i> ) . . . . .	19

UMA abordagem ao estudo dos buracos negros na UMa ( <i>José Laurindo Sobrinho</i> ) . . . . .	20
Dinâmicas eco-evolutivas em tempo discreto: estabilidade, bifurcações e trajetórias de coadaptação ( <i>Rafael Luís</i> ) . . . . .	22
Optimização contrafactual em espaços Longitudinais: formulação e mitigação algorítmica da pobreza energética ( <i>Diogo Nuno Freitas e Eduardo Fermé</i> )	24
Plataforma interativa para o ensino de códigos de correção de erros ( <i>Zita Abreu, Raquel Pinto e Leandro Silva</i> ) . . . . .	26
<b>Resumos dos Pósteres</b>	<b>29</b>
Matemática por um canudo: atividade de modelação ( <i>Letícia Menezes, Antonela Nóbrega, Inês Reis, Tânia Rodrigues e Joana Silva</i> ) . . . . .	31
Robôs de todas as cores: práticas do pensamento computacional ( <i>Letícia Menezes, Antonela Nóbrega, Inês Reis, Tânia Rodrigues e Joana Silva</i> ) . . . . .	33
Dar sentido às funções: uma experiência de educação matemática crítica no 7.º ano ( <i>Petra Silva e Paula Cristina Lopes</i> ) . . . . .	36
Dobrar e explorar: o pensamento computacional na aprendizagem das progressões geométricas ( <i>Maria Beatriz Alves e Sónia Martins</i> ) . . . . .	38
Pensar sobre o pensar em matemática: o contributo dos recursos para o desenvolvimento da metacognição ( <i>Eduarda Aguiar e Sónia Martins</i> ) . . . . .	40
Colapso na editora matemática nacional: uma tarefa de resolução de problemas na aprendizagem das contagens ( <i>Inês Maria Abreu e Sónia Martins</i> ) .	42
Teoria de valores extremos na análise de dados automobilísticos: metodologias e aplicações ( <i>Rubina Mendonça e Délia Gouveia-Reis</i> ) . . . . .	44
Diversidade alpha: medidas e procedimentos em R ( <i>Laura Vieira, Analuce Canha-Gouveia e Délia Gouveia-Reis</i> ) . . . . .	45
Alternativas de Lehmann em análise de sobrevivência ( <i>Diana Coelho e Ana Maria Abreu</i> ) . . . . .	46
Modelo de riscos aditivos baseado na distribuição de Chen ( <i>Carolina Correia e Ivo Sousa-Ferreira</i> ) . . . . .	47
A cópula de Clayton na análise de acontecimentos recorrentes: uma abordagem com marginais Weibull ( <i>Sofia Ferreira, Ivo Sousa-Ferreira e Ana Maria Abreu</i> ) . . . . .	49
<b>Lista de Participantes</b>	<b>51</b>
<b>Índice de Autores</b>	<b>53</b>

# Programa

## Primeiro dia: 2 de junho

14:00 – 14:30	Receção dos participantes.
14:30 – 15:00	Sessão de abertura.
15:00 – 15:45	Sessão convidada: “As raízes do Departamento de Matemática da UMa” (Oradores: <i>José Manuel Castanheira</i> , <i>Rita Sá Fernandes</i> e <i>José Carmo</i> ; Moderadora: <i>Sandra Mendonça</i> ).
15:45 – 16:20	Intervalo.
16:20 – 16:40	A distribuição BetaBoop ( <i>Sandra Mendonça</i> ).
16:40 – 17:00	Implementação computacional em R da distribuição ECP com o <i>package</i> <i>ecpdist</i> ( <i>Ana Maria Abreu</i> e <i>Ivo Sousa-Ferreira</i> ).
17:00 – 17:20	Previsão de séries cronológicas usando redes neuronais artificiais ( <i>Paulo S. A. Freitas</i> ).
17:20 – 17:40	Implicações da perspetiva sociocultural na formação de professores de matemática para o uso de tecnologias ( <i>Sónia Martins</i> ).
17:40 – 18:00	Literacia digital na era da IA: potencialidades da aprendizagem baseada em projetos no ensino de estatística ( <i>Caroline Dal Agnol</i> e <i>Sónia Martins</i> ).

## Segundo dia: 3 de junho

09:30 – 09:50	Matemática, ciência e tecnologia no processo RVCC: práticas contextualizadas para o desenvolvimento do raciocínio matemático em adultos ( <i>Fábio Gonçalves</i> e <i>Lénia Ferreira</i> ).
09:50 – 10:10	O efeito da alteração do domínio de uma função no modelo de mudança de crenças AGM ( <i>Maurício Reis</i> e <i>Marco Garapa</i> ).
10:10 – 10:30	Rumores de infidelidade, diagnósticos e dinossauros: níveis de credibilidade e mudança seletiva ( <i>Marco Garapa</i> , <i>Eduardo Fermé</i> e <i>Maurício Reis</i> ).
10:30 – 10:50	Aproximação para o erro quadrático médio de uma família de estimadores ( <i>Sílvio Velosa</i> ).
11:00 – 11:10	Foto dos participantes no <i>Workshop</i> .

## Programa

---

11:10 – 11:30	Intervalo.
11:30 – 12:20	Sessão de pósteres.
12:20 – 12:40	UMA abordagem ao estudo dos buracos negros na UMA ( <i>José Laurindo Sobrinho</i> ).
12:40 – 13:00	Dinâmicas eco-evolutivas em tempo discreto: estabilidade, bifurcações e trajetórias de coadaptação ( <i>Rafael Luís</i> ).
13:00 – 14:30	Pausa para almoço.
14:30 – 14:50	Optimização contrafactual em espaços longitudinais: formulação e mitigação algorítmica da pobreza energética ( <i>Diogo Nuno Freitas e Eduardo Fermé</i> ).
14:50 – 15:10	Plataforma interativa para o ensino de códigos de correção de erros ( <i>Zita Abreu, Raquel Pinto e Leandro Silva</i> ).
15:10 – 15:40	Sessão surpresa: o futuro.
15:40 – 16:00	Sessão de encerramento.
19:30	Jantar.

# Resumos das Comunicações Orais



## A distribuição BetaBoop

Sandra Mendonça

*Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências Exatas e da Engenharia,  
Universidade da Madeira e*

*CEAUL – Centro de Estatística e Aplicações, Faculdade de Ciências,*

*Universidade de Lisboa, Portugal,*

*sandram@staff.uma.pt*

**Palavras-chave:** distribuição beta, distribuição BetaBoop.

### Resumo:

Escolher “ao acaso” um ponto  $x$  no segmento  $[0,1]$  é um ponto de partida muito simples para formalizar probabilidade contínua. O segmento fica assim dividido em duas partes, de tamanhos  $x$  e  $1 - x$ , e se pensarmos que em vez de fazer uma escolha ao acaso foram feitas  $n$ , a probabilidade de  $x$  ser o  $k$ -ésimo ponto ordenado dessa sequência é proporcional a  $x^{k-1}(1-x)^{n-k}$ . Como a probabilidade total tem que ser 1, a “lei” do que se chama  $k$ -ésima estatística ordinal ascendente é  $f(x) = \frac{x^{k-1}(1-x)^{n-k}}{\int_0^1 x^{k-1}(1-x)^{n-k} dx} \mathbb{I}_{(0,1)}(x)$ .

O denominador é a função Beta  $B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx$ ,  $p, q > 0$ , ou integral de Euler de primeira espécie, calculado em  $p = k$  e  $q = n + 1 - k$ , que são os *rank*s ascendente e descendente da  $k$ -ésima estatística ordinal. Recorde que  $B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ , em que  $\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx$ ,  $p > 0$  é a função gama ou integral de Euler de segunda espécie.

Podemos com toda a generalidade definir leis de probabilidade Beta, isto é uma família de funções densidade de probabilidade

$$f_{p,q}(x) = \frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{B(p, q)} \mathbb{I}_{(0,1)}(x), \quad p, q > 0,$$

muito versátil devido à extensa diversidade das suas formas. E, evidentemente, podemos considerar que as variáveis aleatórias  $X_{p,q}$  são as representantes padrão de  $Y_{p,q,\mu,\delta} = \mu + \delta X_{p,q}$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$  e  $\delta > 0$ .

Além do uso na modelação de aleatoriedade em suporte limitado a um segmento, a forma padrão pode ser usada para aleatorizar modelos discretos de contagem como a binomial e a binomial negativa, usando modelos hierárquicos, por exemplo  $W|P \sim \text{Binomial}(n, P)$ ,  $P \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$  — no caso mais simples,  $P \sim \text{Beta}(1, 1)$  vemos a Uniforme contínua (Beta(1,1)) transformar a Binomial na Uniforme Discreta.

Por outro lado, voltando ao ponto inicial de dividir o segmento  $[0,1]$  em dois pedaços e comprimentos  $x$  e  $1 - x$ , podemos recordar que  $x$  é a truncatura linear de  $-\ln(1-x)$ , e  $1-x$  é a truncatura linear de  $-\ln x$ . Nesta perspetiva, as densidades Beta seriam simplesmente uma aproximação linear de  $\frac{[-\ln(1-x)]^{p-1}(-\ln x)^{q-1}}{\int_0^1 [-\ln(1-x)]^{p-1}(-\ln x)^{q-1} dx} \times \mathbb{I}_{(0,1)}(x)$ , que parece intratável. Mas se formos menos radicais, podemos considerar  $\frac{x^{p-1}(-\ln x)^{\xi-1}}{\int_0^1 x^{p-1}(-\ln x)^{\xi-1} dx} \mathbb{I}_{(0,1)}(x) = \frac{p^\xi x^{p-1}(-\ln x)^{\xi-1}}{\Gamma(\xi)} \mathbb{I}_{(0,1)}(x)$ , ou  $\frac{[-\ln(1-x)]^{\theta-1}(1-x)^{q-1}}{\int_0^1 [-\ln(1-x)]^{\theta-1}(1-x)^{q-1} dx} \mathbb{I}_{(0,1)}(x) = \frac{q^\theta [-\ln(1-x)]^{\theta-1}(1-x)^{q-1}}{\Gamma(\theta)} \mathbb{I}_{(0,1)}(x)$ .

Ou, pelo contrário, muito mais ousados, e considerar densidades BetaBoop

$$f_{p,q,\theta,\xi}(x) = \frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}[-\ln(1-x)]^{\theta-1}(-\ln x)^{\xi-1}}{\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}[-\ln(1-x)]^{\theta-1}(-\ln x)^{\xi-1}dx} \mathbb{I}_{(0,1)}(x).$$

A função BetaBoop  $\beta(p, q, \theta, \xi) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}[-\ln(1-x)]^{\theta-1}(-\ln x)^{\xi-1}dx$  não existe para todos os valores  $p, q, \theta, \xi$ , mas em Brillhante *et al.* [1] mostra-se uma condição suficiente para aquele integral estar definido.

A distribuição Beta clássica, embora versátil, pode apresentar rigidez ao capturar comportamentos complexos nos limites do seu suporte. A família BetaBoop é uma generalização que introduz fatores logarítmicos que conferem mais peso e sensibilidade às extremidades do suporte da distribuição Beta. Proposta originalmente por Brillhante *et al.* em 2011 [2], a distribuição BetaBoop tem demonstrado utilidade em contextos variados (cf., por exemplo, [1, 3, 4]).

### Agradecimentos:

Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e a Tecnologia, I.P., no âmbito da Unidade de Investigação CEAUL, UID/00006/2025, DOI: <https://doi.org/10.54499/UID/00006/2025> e pela União Europeia – NextGenerationEU, UID/PRR/00006/2025, DOI: <https://doi.org/10.54499/UID/PRR/00006/2025>.

### Referências:

- [1] Brillhante, M.F., Gomes, M.I., Mendonça, S., Pestana, D. e Pestana, P. (2023). Generalized Beta models and population growth: so many routes to chaos. *Fractal and Fractional*, Vol. 7, No. 2, 194.
- [2] Brillhante, M.F., Gomes, M.I. e Pestana, D. (2011). BetaBoop brings in chaos, *CMSim — Chaotic Modeling and Simulation*, Vol. 1, pp. 39–50.
- [3] Brillhante, M.F. e Pestana, P. (2025). BetaBoop function, BetaBoop random variables, and extremal population growth. Em M. Lovric (Ed.), *International Encyclopedia of Statistical Science*. Springer Berlin Heidelberg, pp. 259–263.
- [4] Pestana, D., Mendonça, S. e Brillhante, M.F. (2026). The Beta distribution and beyond: multiplicative algebra, contraction and expansion. *Advances and New Perspectives in Statistics and Data Science*, Springer (aceite para publicação).

## Implementação computacional em R da distribuição ECP com o *package* `ecpdist`

Ana Maria Abreu

*Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências Exatas e da Engenharia,  
Universidade da Madeira e  
CIMA – Centro de Investigação em Matemática e Aplicações, Portugal,  
abreu@staff.uma.pt*

Ivo Sousa-Ferreira

*Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências Exatas e da Engenharia,  
Universidade da Madeira e  
CEAUL – Centro de Estatística e Aplicações, Faculdade de Ciências,  
Universidade de Lisboa, Portugal,  
ivo.ferreira@staff.uma.pt*

**Palavras-chave:** distribuição Chen-Poisson estendida, *package* `ecpdist`, *software* estatístico R.

### Resumo:

Recentemente, foi proposta a distribuição Chen-Poisson estendida (ECP) [3], através da composição das distribuições de Chen e de Poisson truncada em zero. Esta distribuição permite uma grande variedade de formas para a função de risco, sendo uma alternativa paramétrica flexível e adequada para a modelação de dados no contexto da Análise de Sobrevida.

Com o intuito de disponibilizar aos utilizadores uma ferramenta computacional acessível para a distribuição ECP, foi desenvolvido um *package* em R, denominado `ecpdist` [1]. Atualmente, na versão disponível no CRAN (*The Comprehensive R Archive Network*), este *package* permite obter as funções de distribuição, de sobrevivência, de densidade, de risco, de risco cumulativo, quantil e de vida residual média da distribuição ECP. A versão mais recente, disponível na plataforma *GitHub* (<https://github.com/abreu-uma/ecpdist>), engloba ainda a distribuição de Chen [2]. Será mostrado que estas várias funções podem ser facilmente representadas graficamente através de uma nova função genérica do R. Além disso, o *package* `ecpdist` permite gerar amostras pseudoaleatórias e calcular algumas medidas estatísticas, tais como medidas de forma (assimetria de Bowley e curtose de Moors), momentos de ordem  $k$  e momentos condicionais de ordem  $k$ . As funcionalidades do *package* serão apresentadas através de alguns exemplos.

### Agradecimentos:

O presente trabalho foi parcialmente suportado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e a Tecnologia, no âmbito da Unidade de Investigação CIMA, do grupo de Estatística, Processos Estocásticos e Aplicações, UID/04674/2025, DOI: <https://doi.org/10.54499/UID/04674/2025>; e no âmbito da Unidade de Investigação CEAUL, UID/00006/2025, DOI: <https://doi.org/10.54499/UID/00006/2025> e pela União Europeia – NextGenerationEU, UID/PRR/00006/2025, DOI: <https://doi.org/10.54499/UID/PRR/00006/2025>.

**Referências:**

- [1] Abreu, A.M. e Sousa-Ferreira, I. (2024). `ecpdist`: an R package for the extended Chen-Poisson lifetime distribution. *Package do R*, versão 0.2.1 . URL: <https://cran.r-project.org/web/packages/ecpdist/ecpdist.pdf>.
- [2] Chen, Z. (2000). A new two-parameter lifetime distribution with bathtub shape or increasing failure rate function. *Statistics & Probability Letters*, Vol. 49, No. 2, pp. 155–161.
- [3] Sousa-Ferreira, I., Abreu, A.M. e Rocha, C. (2023). The extended Chen-Poisson lifetime distribution. *REVSTAT-Statistical Journal*, Vol. 21, No. 2, pp. 173–196.

## Previsão de séries cronológicas usando redes neuronais artificiais

Paulo S. A. Freitas

*Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências Exatas e da Engenharia,  
Universidade da Madeira,  
paulo.freitas@staff.uma.pt*

**Palavras-chave:** séries cronológicas, previsão, redes neuronais.

### Resumo:

A previsão de séries cronológicas consiste na estimação de modelos para prever valores futuros com base em dados históricos. Esta temática tem uma aplicação muito ampla e prática no mundo real, sendo usada no apoio às decisões baseadas na evolução dos dados ao longo do tempo. O seu valor está em reduzir a incerteza e melhorar o planeamento. De entre as abordagens clássicas mais usuais, podemos destacar os métodos de alisamento exponencial (ES - *Exponential Smoothing*) e os modelos ARIMA (*AutoRegressive Integrated Moving Averages*). Após o aparecimento das redes neuronais artificiais e da sua aplicação muito significativa no mundo real, sobretudo em problemas complexos, onde as relações entre as variáveis não são lineares ou são difíceis de modelar com abordagens tradicionais, como reconhecimento de padrões e imagens, deteção de fraudes financeiras, processamento de linguagem natural, entre outros, a sua aplicação no contexto da previsão de séries cronológicas tem aumentado significativamente nos últimos anos. Dentro da classe das redes neuronais artificiais, salientamos particularmente as redes recorrentes pelo facto de lidarem com sequências de dados ordenados, permitindo estabelecer uma ligação entre a informação do passado e a do presente (persistência de informação). As redes conhecidas por LSTM (*Long Short Term Memory*) são um tipo muito especial de redes neuronais recorrentes, explicitamente concebidas para minimizar ou evitar o problema da dependência temporal a longo prazo. Outro tipo de redes recorrentes avançadas com características semelhantes às LSTM, mas com uma estrutura mais simples e direta, com menos componentes internas, são as redes GRU (*Gated Recurrent Units*), com a vantagem do seu treino ser computacionalmente mais eficiente. Neste trabalho, pretende-se apresentar não apenas uma descrição relativamente breve de como as redes neuronais artificiais podem ser usadas para fazer previsões a partir de dados do passado, como temperaturas, preços de ações, vendas mensais ou consumo de energia, com o objetivo de compreender o seu potencial na previsão, mas também analisar os principais limites e desafios associados a este tipo de problema.

## Implicações da perspetiva sociocultural na formação de professores de matemática para o uso de tecnologias

Sónia Martins

*Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências Exatas e da Engenharia,  
Universidade da Madeira e  
Centro de Investigação em Educação da Universidade da Madeira, Portugal,  
soniam@staff.uma.pt*

**Palavras-chave:** aprendizagem situada, didática da matemática, formação de professores, teoria da atividade.

### Resumo:

A integração de tecnologias digitais na formação inicial de professores de matemática exige enquadramentos teóricos que permitam compreender o seu papel na reconfiguração das práticas matemáticas escolares. Esta comunicação apresenta o quadro conceptual que sustenta o trabalho desenvolvido no âmbito de uma unidade curricular de didática da matemática, centrado na formação para um uso crítico, reflexivo e fundamentado das tecnologias, entendidas como elementos constitutivos da atividade de ensino e de aprendizagem.

O trabalho ancora-se na teoria da aprendizagem situada, que conceptualiza o conhecimento como emergente da participação em práticas socialmente organizadas e nas tecnologias como artefactos com potencial de acrescentar valor a essas práticas [4, 7, 8], e na teoria da atividade, na tradição cultural-histórica, que analisa a ação humana como mediada por artefactos em sistemas de atividade complexos [2]. Nesta perspetiva, as tecnologias são compreendidas como artefactos mediadores que participam na transformação das práticas e dos objetos da atividade, envolvendo relações entre sujeito, comunidade, regras e divisão de trabalho [3]. Desenvolvimentos recentes destas abordagens têm reforçado o seu potencial para analisar a integração de ferramentas digitais e agentes tecnológicos em contextos educativos contemporâneos [6, 1]. No âmbito da unidade curricular em análise, estes pressupostos são operacionalizados no design de atividades formativas nas quais os futuros professores são desafiados a equacionar o uso de tecnologias enquanto ferramentas epistemológicas, orientadas para a exploração, representação, comunicação e construção do conhecimento matemático.

A partir deste enquadramento, discute-se o potencial de modelos formativos que promovam uma apropriação crítica das tecnologias pelos futuros professores, articulando dimensões sociais, instrumentais e conceptuais do seu uso. Pretende-se, assim, contribuir para a reflexão sobre a formação de professores de matemática capazes de usar tecnologias para criar experiências centradas no aluno, transformando ferramentas técnicas em instrumentos de ensino com propósitos claramente definidos, reconhecendo simultaneamente as suas potencialidades e os desafios emergentes nos processos de construção do conhecimento matemático pelos alunos que as usam [5].

**Agradecimentos:**

Esta investigação foi desenvolvida no âmbito do Projeto UID/04083/2025, Centro de Investigação em Educação da Universidade da Madeira, financiado pela FCT – Fundação para a Ciência e a Tecnologia: <https://doi.org/10.54499/UID/04083/2025>.

**Referências:**

- [1] Affognon, A.D. (2026). Situated learning and the problem of scientific inference. *Frontiers Education*, Vol. 11, 1725228.
- [2] Engeström, Y. (2001). Expansive learning at work: toward an activity theoretical reconceptualization. *Journal of Educational Work*, Vol. 14, pp. 133–156.
- [3] Engeström, Y. e Sannino, A. (2010). Studies of expansive learning: foundations, findings and future challenges. *Educational Research Review*, Vol. 5, pp. 1-24.
- [4] Lave, J. e Wenger, E. (1991). *Situated Learning: Legitimate Peripheral Participation*. Cambridge University Press.
- [5] Martins, S. (2025). Do artefacto digital ao instrumento de ensino: uma trajetória na formação inicial de professores. Comunicação apresentada no *Encontro de Investigação em Educação Matemática EIEM 2025*, Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, SPIEM.
- [6] Stetsenko, A.P. (2023). Cultural-historical activity theory and its contemporary import: ideas emerging in context and time. *Cultural-Historical Psychology*, Vol. 19, No. 1, pp. 20–29.
- [7] Wenger, E. (2000). Communities of practice and social learning systems. *Organization*, Vol. 7, No. 2, pp. 225-246.
- [8] Wenger-Trayner, E. e Wenger-Trayner, B. (2020). *Learning to Make a Difference. Value Creation in Social Learning Spaces*, Cambridge University Press.

## Literacia digital na era da IA: potencialidades da aprendizagem baseada em projetos no ensino de estatística

Caroline Dal Agnol

*Escola Básica e Secundária Dr. Ângelo Augusto da Silva, Portugal,*  
*carolinedalagnol@gmail.com*

Sónia Martins

*Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências Exatas e da Engenharia,*  
*Universidade da Madeira e*  
*Centro de Investigação em Educação da Universidade da Madeira, Portugal,*  
*soniam@staff.uma.pt*

**Palavras-chave:** aprendizagem baseada em projetos, estatística, inteligência artificial, literacia digital.

### Resumo:

A presente investigação desenvolvida no âmbito da Prática de Ensino Supervisionada no Mestrado em Ensino de Matemática, teve como objetivo analisar de que forma a integração da Inteligência Artificial (IA) na metodologia de Aprendizagem Baseada em Projetos (ABP) [1] no ensino de Estatística pode potenciar o desenvolvimento da Literacia Digital em alunos do 10.º ano de escolaridade, numa escola da Região Autónoma da Madeira. Este estudo enquadra-se nas orientações do Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória (PASEO) [6], que preconiza a integração transversal das tecnologias digitais em todas as áreas do conhecimento, bem como o desenvolvimento de múltiplas literacias, incluindo a Literacia Digital, Matemática e Estatística. Neste âmbito, destaca-se a importância da utilização crítica e responsável das tecnologias, do domínio de ferramentas de informação e comunicação e da capacidade de manipular e criar com recurso a diferentes instrumentos tecnológicos, nomeadamente recursos de IA [2].

Os resultados da investigação [4, 5] evidenciam que a articulação entre ABP e IA pode favorecer um ambiente de aprendizagem propício ao desenvolvimento da Literacia Digital, ao promover o uso crítico, ético e informado de tecnologias na pesquisa, análise e interpretação de informação. Destaca-se ainda o papel central do professor na orientação do uso responsável da IA, assegurando práticas éticas, nomeadamente ao nível da privacidade e da validação da informação, de forma a fomentar o desenvolvimento de capacidades de avaliação críticas no uso da ferramenta [3]. Para além disso, a integração destas abordagens contribuiu para o desenvolvimento de competências transversais, como autonomia, pensamento crítico, comunicação e trabalho colaborativo, em consonância com o PASEO. Conclui-se que a prática envolvendo a metodologia ABP com uso de recursos de IA pode aprimorar habilidades relacionadas à Literacia Digital, alinhada com as orientações curriculares nacionais, desde que sustentada por uma completa planificação e por um feedback formativo docente contínuo, características bases da metodologia de ensino.

**Agradecimentos:**

A segunda autora desenvolve esta investigação no âmbito do Projeto UID/04083/2025, Centro de Investigação em Educação da Universidade da Madeira, financiado pela FCT – Fundação para a Ciência e a Tecnologia: <https://doi.org/10.54499/UID/04083/2025>.

**Referências:**

- [1] Amado, N. e Carreira, S. (2019). *Trabalho de Projeto*. Secretaria Regional da Educação e Cultura, Governo dos Açores.
- [2] Baskara, F.X.R. (2025). Conceptualizing digital literacy for the AI era: a framework for preparing students in an AI-driven world. *Data and Metadata*, Vol. 4, 530.
- [3] Borba, M.C. e Junior, V.R.B. (2023). O ChatGPT e educação matemática. *Educação, Matemática e Pesquisa*, Vol. 45, No. 3, pp. 142–156.
- [4] Dal Agnol, C. (2025). *Inteligência Artificial e Trabalho de Projeto como Suportes ao Desenvolvimento da Literacia Estatística e Digital de Alunos de 10.º ano*. Relatório de Prática de Ensino Supervisionada do Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Secundário, Universidade da Madeira.
- [5] Dal Agnol, C. e Martins, S. (2026). Inteligência artificial e aprendizagem baseada em projetos no ensino da matemática. Comunicação apresentada no XXI Colóquio do Centro de Investigação em Educação da Universidade da Madeira, *Aprender na Era Digital: Inovação Pedagógica e Inteligência Artificial*, 27 de Fevereiro, Funchal, Portugal.
- [6] Direção-Geral da Educação. (2017). *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória (PASEO)*. Ministério da Educação.

**Matemática, ciência e tecnologia no processo RVCC:  
práticas contextualizadas para o desenvolvimento  
do raciocínio matemático em adultos**

Fábio Gonçalves

*Instituto para a Qualificação, IP-RAM, Divisão de Encaminhamento e Qualificação,  
Centro Qualifica,  
fabio.jgoncalves@edu.madeira.gov.pt*

Lénia Ferreira

*Instituto para a Qualificação, IP-RAM, Divisão de Encaminhamento e Qualificação,  
Centro Qualifica,  
lenia.ferreira@edu.madeira.gov.pt*

**Palavras-chave:** reconhecimento, validação e certificação de competências; educação de adultos; práticas pedagógicas; matemática, ciência e tecnologia.

**Resumo:**

Portugal apresenta um dos níveis mais baixos de numeracia na União Europeia. De acordo com o estudo PIAAC, cerca de 40% dos adultos portugueses situam-se no Nível 1 ou abaixo em literacia numérica, valor que excede em 15% a média da OCDE [5]. Este cenário coloca desafios significativos aos processos de Reconhecimento, Validação e Certificação de Competências (RVCC), particularmente no domínio da Matemática, Ciência e Tecnologia (MCT).

O RVCC constitui um dispositivo central na valorização das aprendizagens ao longo da vida, permitindo reconhecer competências adquiridas em contextos formais, não formais e informais [1]. No domínio da MCT, um dos principais desafios prende-se com a perceção da matemática como abstrata e distante da realidade dos adultos, frequentemente associada a experiências escolares negativas. Torna-se, por isso, essencial desenvolver abordagens pedagógicas que promovam o desenvolvimento do raciocínio matemático, evidenciando a sua utilidade prática no quotidiano, como na gestão financeira pessoal, no cálculo de juros ou na análise de despesas familiares, em linha com perspetivas de aprendizagem significativa e contextualizada [2].

Com base na revisão de Gal [3] e nas orientações internacionais sobre reconhecimento de aprendizagens ao longo da vida [5, 4], discute-se o contributo destas práticas para o desenvolvimento do pensamento crítico, da literacia científica e da autonomia dos adultos. Pretende-se, assim, contribuir para o aprofundamento da educação matemática de adultos em contextos reais e para a melhoria das práticas no âmbito do RVCC-MCT.

**Agradecimentos:**



**Referências:**

- [1] Agência Nacional para a Qualificação e o Ensino Profissional (2021). Referencial de competências-chave para a educação e formação de adultos — nível básico.
- [2] Freire, P. (1970). *Pedagogia do Oprimido*. Paz e Terra, Rio de Janeiro.
- [3] Gal, I. (2024). Adult education in mathematics and numeracy: a scoping review of recent research. *ZDM Mathematics Education*, Vol. 56, pp. 293–305.
- [4] Meghnagi, M. e Tuccio, M. (2022). *The recognition of prior learning: Validating general competences*. OECD Social, Employment and Migration Working Papers, No. 270. OECD Publishing, Paris.
- [5] Organisation for Economic Co-operation and Development (2024). *Survey of Adult Skills 2023: Country Notes – Portugal*. OECD Publishing, Paris.

## O efeito da alteração do domínio de uma função no modelo de mudança de crenças AGM

Maurício Reis

*Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências Exatas e da Engenharia,  
Universidade da Madeira e  
CIMA – Centro de Investigação em Matemática e Aplicações, Portugal,  
m\_reis@staff.uma.pt*

Marco Garapa

*Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências Exatas e da Engenharia,  
Universidade da Madeira e  
CIMA – Centro de Investigação em Matemática e Aplicações, Portugal,  
mgarapa@staff.uma.pt*

**Palavras-chave:** lógica, mudança de crenças, modelo AGM, contração de intersecção parcial.

### Resumo:

O objetivo central da área conhecida como lógica da mudança de crenças (também designada por revisão de crenças) é estudar as modificações que podem ocorrer no estado de crenças de um agente racional aquando da receção de nova informação. Em 1985, Alchourrón, Gärdenfors e Makinson propuseram um modelo de mudança de crenças que é atualmente conhecido como o modelo AGM. Neste contexto cada crença de um agente é representada por uma fórmula e o estado de crenças do agente é modelado como um conjunto de fórmulas logicamente fechado, isto é, fechado para o operador de consequência lógica. No artigo original, os autores introduziram a classe dos operadores de *contração de intersecção parcial*. Estes operadores foram apresentados de duas formas diferentes, através de uma definição construtiva e também através da identificação de um conjunto de propriedades que as caracterizam de forma exata (os, assim chamados, *postulados AGM*).

Posteriormente, em 1991, Hansson adaptou a definição de contração de intersecção parcial ao contexto em que o estado de crenças de um agente é representado por um conjunto de fórmulas que não é necessariamente logicamente fechado — as chamadas bases de crenças. Obteve também uma caracterização destes operadores com base em postulados.

Nesta comunicação, introduzimos e estudamos uma nova classe de operadores, cuja definição resulta de uma pequena modificação no domínio de uma das funções usadas no processo de construção das *contrações de intersecção parcial*. Em particular, mostramos que esta classe contém estritamente a classe das *contrações de intersecção parcial* e também uma outra classe de operadores que, no contexto das bases de crenças, são (caraterizados por postulados) mais naturais, sendo mais flexíveis e expressivos do que as *contrações de intersecção parcial* propostas por Hansson.

### Agradecimentos:

O presente trabalho foi suportado pelo Centro de Investigação em Matemática e Aplicações (CIMA), através do projeto UID/04674/2025 da FCT, DOI: <https://doi.org/10.54499/UID/04674/2025>.

**Rumores de infidelidade, diagnósticos e dinossauros:  
níveis de credibilidade e mudança seletiva**

Marco Garapa

*Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências Exatas e da Engenharia,  
Universidade da Madeira e  
CIMA – Centro de Investigação em Matemática e Aplicações, Portugal,  
mgarapa@staff.uma.pt*

Eduardo Fermé

*Departamento de Engenharia Informática e Design de Media Interativos,  
Faculdade de Ciências Exatas e da Engenharia, Universidade da Madeira e  
NOVA Laboratory for Computer Science and Informatics (NOVA LINCS),  
eduardo.ferme@staff.uma.pt*

Maurício Reis

*Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências Exatas e da Engenharia,  
Universidade da Madeira e  
CIMA – Centro de Investigação em Matemática e Aplicações, Portugal,  
m\_reis@staff.uma.pt*

**Palavras-chave:** dois níveis de credibilidade limitada, revisão seletiva, contração seletiva, mudança de crenças não priorizada.

**Resumo:**

A área da mudança de crenças aborda o problema de como incorporar, de forma racional, nova informação no estado de crenças de um agente. Uma das contribuições fundamentais para este campo é o modelo AGM [1], proposto por Alchourrón, Gärdenfors e Makinson em 1985. No paradigma AGM, é dada primazia à nova informação, o que significa que a informação recebida é sempre aceite e totalmente incorporada no estado de crenças do agente — um princípio formalizado pelo postulado *success*. No entanto, esta suposição não é totalmente realista, uma vez que agentes racionais podem optar por rejeitar nova informação ou aceitar apenas partes dela, especialmente quando essa informação é considerada pouco fiável ou contradiz crenças fortemente enraizadas. Neste contexto, os operadores de revisão não priorizados constituem uma alternativa teórica relevante ao modelo AGM, ao não pressuporem a aceitação obrigatória da nova informação. Nesta apresentação, iremos abordar *operadores de mudança de crença não priorizada*, nomeadamente o operador de *dois níveis de credibilidade limitada* [2, 3, 6, 7], o operador de *revisão seletiva* [4] e o seu dual, o operador de *contração seletiva* [5].

**Agradecimentos:**

O presente trabalho foi parcialmente suportado por Centro de Investigação em Matemática e Aplicações (CIMA), através do projeto UID/04674/2025 da FCT, DOI: <https://doi.org/10.54499/UID/04674/2025> (Marco Garapa e Maurício Reis); e por *NOVA Laboratory for Computer Science and Informatics (NOVA LINCS)* através do projeto UID/04516/2025 da FCT.ID, DOI: <https://doi.org/10.54499/UID/04516/2025> (Eduardo Fermé).

**Referências:**

- [1] Alchourrón, C., Gärdenfors, P. e Makinson, D. (1985). On the logic of theory change: partial meet contraction and revision functions. *Journal of Symbolic Logic*, Vol. 50, pp. 510–530.
- [2] Bonanno, G. (2022). Filtered belief revision: syntax and semantics. *Journal of Logic, Language and Information*, Vol. 31, pp. 645–675.
- [3] Bonanno, G. (2019). Credible information, allowable information and belief revision - extended abstract. Em Moss, L.S. (Ed.), *Proceedings Seventeenth Conference on Theoretical Aspects of Rationality and Knowledge*, TARK 2019, Vol. 297, pp. 82–90, Toulouse, France.
- [4] Fermé, E.L. e Hansson, S.O. (1999). Selective revision. *Studia Logica*, Vol. 63, No. 3, pp. 331–342.
- [5] Garapa, M., Fermé, E. e Reis, M.D.L. (2026). Selective contraction. *Studia Logica*, (in press).
- [6] Garapa, M., Fermé, E. e Reis, M.D.L. (2025). Maps between different kinds of two-level credibility-limited revision operators. *ACM Transactions on Computational Logic*, Vol. 26, No. 3, pp. 1–33.
- [7] Garapa M. (2022). Two level credibility-limited revisions. *The Review Of Symbolic Logic*. Vol. 15, No. 2, pp. 388–408.

## Aproximação para o erro quadrático médio de uma família de estimadores

Sílvio Velosa

Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências Exatas e da Engenharia,  
Universidade da Madeira,  
silviov@staff.uma.pt

**Palavras-chave:** estatística  $t$  de Welch, expansão de Taylor, média generalizada, problema de Behrens-Fisher, Scheffé, viés.

### Resumo:

A estatística  $t$  de Welch, uma solução corrente do problema de Behrens-Fisher, normaliza a diferença entre as médias amostrais de duas amostras aleatórias normais dividindo esta pela raiz quadrada de um estimador centrado da variância da mesma diferença. O referido estimador pode exprimir-se também como média aritmética de um conjunto de estimadores jackknife do mesmo parâmetro [1, 2, 3, 4].

O presente trabalho considera uma família de médias generalizadas que inclui a média aritmética como caso particular. O objetivo é obter aproximações para o valor esperado e do erro quadrático médio desta família de estimadores, e estudar a sua variação com o índice  $m$  da média generalizada.

### Referências:

- [1] Ames, M.H. (1996). More on the means comparison with unequal variances problem. *Journal of Biopharmaceutical Statistics*, Vol. 6, pp. 177–183.
- [2] Oliveira, J.L.N. e Velosa, S.F. (2021). An identity between Welch’s approximate and Scheffé’s exact solutions to the Behrens-Fisher problem. *Estatística: Desafios Transversais às Ciências com Dados — Atas do XXIV Congresso da Sociedade Portuguesa de Estatística*, pp. 183–195.
- [3] Scheffé, H. (1943). On solutions of the Behrens-Fisher problem, based on the  $t$ -distribution. *The Annals of Mathematical Statistics*, Vol. 14, pp. 35–44.
- [4] Scheffé, H. (1944). A note on the Behrens-Fisher problem. *The Annals of Mathematical Statistics*, Vol. 15, pp. 430–432.

## UMA abordagem ao estudo dos buracos negros na UMA

José Laurindo Sobrinho

*Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências Exatas e da Engenharia,*

*Universidade da Madeira e*

*Grupo de Astronomia da Universidade da Madeira,*

*josens@staff.uma.pt*

**Palavras-chave:** buracos negros, cosmologia, matéria escura, ondas gravitacionais.

### Resumo:

Os buracos negros (BNs) são objetos previstos matematicamente pelas Leis da Física. A nível estrutural um BN é caracterizado por uma singularidade e um horizonte de eventos. A singularidade define uma região onde se concentra toda a massa do BN e onde deixam de ser aplicáveis as Leis da Física tal qual as conhecemos. O horizonte de eventos marca o ponto de não retorno: qualquer corpo que o atravesse não conseguirá vencer a barreira de potencial imposta pelo BN e voltar a sair para o espaço exterior. Contudo se tivermos em consideração a influência dos efeitos quânticos junto do horizonte de eventos verifica-se que os BNs evaporam mediante a emissão da chamada radiação de Hawking. Na prática esta emissão só é significativa para BNs extremamente pequenos ( $< 10^{-11}M_{\odot}$ ) e será tanto mais intensa quanto menor for a massa do BN, culminando numa explosão de raios- $\gamma$  [1].

Uma estrela com massa inicial superior a  $8M_{\odot}$  irá, na fase final da sua evolução, colapsar dando origem a um BN de massa estelar (BNE). O colapso gravitacional da região central de uma galáxia pode dar origem a um BN supermassivo (BNSM). São conhecidos atualmente diversos BNEs ( $\approx 3M_{\odot}$  a  $40M_{\odot}$ ) e BNSMs ( $> 10^6M_{\odot}$ ). Não foram identificados até a data quaisquer BNs com massa  $< 3M_{\odot}$  nem qualquer processo que os possa formar no Universo atual. Contudo no Universo primordial estiveram reunidas as condições necessárias para que se tenham formado BNs a partir do colapso de flutuações de densidade. A gama de massas destes BNs, ditos primordiais (BNPs), pode variar entre  $10^{-38}M_{\odot}$  e  $10^{18}M_{\odot}$  [2, 3]

No contexto da Teoria da Relatividade Geral o problema dos dois corpos não tem solução analítica a não ser que estejamos perante um sistema composto por dois (ou mais) BNs com carga elétrica do mesmo sinal cuja repulsão eletrostática equilibre a atração gravítica [4]. Este sistema, embora instável e de existência pouco provável no Universo, acaba por ser um verdadeiro laboratório para o aprofundamento do nosso conhecimento sobre BNs, sistemas binários de BNs e até mesmo sobre a Teoria do Caos [5]. Quando num sistema binário de BNs se dá a fusão dos mesmos é libertada uma grande quantidade de energia sob a forma de ondas gravitacionais [6].

O estudo dos BNPs é extremamente relevante no sentido em que estes podem constituir (pelo menos em parte) a solução para o problema da Matéria Escura a qual é responsável por cerca de 27% de toda a matéria/energia do Universo, são os únicos com massa suficientemente pequena para que a emissão de Hawking seja relevante e podem ser os responsáveis pelos eventos de ondas gravitacionais observados desde 2015.

Nesta comunicação, revemos o contributo do Grupo de Astronomia da UMa no estudo dos BNs [7] e exploramos perspetivas para trabalhos futuros. Os tópicos em destaque incluem:

- Sistemas binários de Buracos Negros;
- Detecção de Buracos Negros por radiação electromagnética;
- Buracos Negros Primordiais e Matéria Escura;
- Buracos Negros e Ondas Gravitacionais.

### Referências:

- [1] Sobrinho, J.L.G. e Augusto, P. (2014). Direct detection of black holes via electromagnetic radiation. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Vol. 441, No. 4, pp. 2878–2884.
- [2] Sobrinho, J.L.G., Augusto, P. e Gonçalves, A.L. (2016). New thresholds for primordial black hole formation during the QCD phase transition. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 463, No. 3, pp. 2348–2357.
- [3] Sobrinho, J.L.G. e Augusto, P. (2020). Stellar mass Primordial Black Holes as Cold Dark Matter. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society Letters*, Vol. 496, No. 1, pp. 60–66.
- [4] Sobrinho, J.L.G. e Nencka, H. (1996). Geometria do espaço-tempo de um par de buracos negros de Reissner-Nordstrom. 6º Encontro Nacional de Astronomia e Astrofísica (Univ. Évora).
- [5] Gonçalves, A.L. e Sobrinho, J.L.G. (2015). Null-Geodesics and chaos in the space-time of two extreme Reissner-Nordström black holes. Universidade da Madeira, (72 pp.).
- [6] Freitas, S.M.A. e Sobrinho, J.L.G. (2021). A list of 48 Binary Black Hole mergers. Estágios de Verão 2021 (39 pp.).
- [7] Publicações do Grupo de Astronomia da Universidade da Madeira: <https://astro.web.uma.pt/Grupo/Publicacoes/publicacoes.htm>.

**Dinâmicas eco-evolutivas em tempo discreto:  
estabilidade, bifurcações e trajetórias de coadaptação**

Rafael Luís

*Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências Exatas e da Engenharia,  
Universidade da Madeira e  
CAMGSD – Centro de Análise Matemática, Geometria e Sistemas Dinâmicos, IST,  
Universidade de Lisboa, Portugal,  
rafael.luis@staff.uma.pt*

**Palavras-chave:** sistemas dinâmicos discretos, dinâmica eco-evolutiva, estabilidade, bifurcações.

**Resumo:**

Nesta palestra, exploramos a modelação matemática de sistemas eco-evolutivos em tempo discreto [7], analisando a interação fundamental entre a dinâmica populacional e a evolução de traços fenotípicos. O foco recai sobre modelos determinísticos, tanto autónomos [2, 3, 5, 10, 11] como periódicos [6, 12], onde o acoplamento entre demografia e seleção é descrito por equações de diferenças [1].

A análise inicia-se com o estudo da estabilidade local de pontos de equilíbrios (pontos fixos) através do formalismo do Jacobiano e do mapeamento de valores próprios em relação ao círculo unitário (condições de estabilidade de Jury [8]). Discutimos as principais bifurcações [9] que governam estes sistemas, nomeadamente a *bifurcação transcritical* (associada ao limiar de persistência) e a *bifurcação de duplicação de período*, que marca a transição para regimes oscilatórios e caóticos, bem como a *bifurcação de Neimark–Sacker*, que corresponde à transição de equilíbrios eco-evolutivos estacionários para ciclos quase-periódicos, refletindo oscilações persistentes na abundância populacional e nos traços sob seleção.

No contexto de ambientes sazonais, introduzimos a análise de sistemas periódicos via composição de mapas e teoria de Floquet discreta. Por fim, interpretamos como a coexistência de múltiplos traços fenotípicos [4] influencia a robustez do sistema, criando *feedbacks* que podem estabilizar ou desestabilizar a coadaptação das espécies.

**Agradecimentos:**

O presente trabalho foi suportado pela Fundação para a Ciência e Tecnologia (FCT), Portugal, através do Projeto No. UID/4459/2025.

**Referências:**

- [1] Cushing, J. M. (2019). Difference equations as models of evolutionary population dynamics. *Journal of Biological Dynamics*, Vol. 13, No. 1, pp. 103–127.
- [2] D’Aniello, E., Elaydi, S., Kwessi, E., Luís, R. e Ryals, B. (2025). Global asymptotic stability and bifurcation of an evolutionary Beverton-Holt model. *Journal of Difference Equations and Applications*, Vol. 32, No. 5, pp. 546–584.

- [3] D’Aniello, E., Elaydi, S., Kwessi, E., Luís, R. e Ryals, B. (2025). Global dynamics and bifurcation of an evolutionary Beverton-Holt model with the Allee effect. *Symmetry*, Vol. 17, No.11, 1811.
- [4] D’Aniello, E., Elaydi, S., Kwessi, E., Luís, R. e Ryals, B. (2026). Global dynamics of a multi-trait evolutionary Beverton-Holt model. *preprint*.
- [5] Elaydi, S., Kang, Y. e Luís, R. (2022). The effects of evolution on the stability of competing species. *Journal of Biological Dynamics*, Vol. 16, No. 1, pp. 816–839.
- [6] Elaydi, S., Kang, Y. e Luís, R. (2024). Global asymptotic stability of evolutionary periodic Ricker competition models. *Journal of Difference Equations and Applications*, Vol. 30, pp. 1091–1116.
- [7] Elaydi, S.N. e Cushing, J.M. (2025). *Discrete Mathematical Models in Population Biology: Ecological, Epidemic, and Evolutionary Dynamics*. Springer Undergraduate Texts in Mathematics and Technology. Springer.
- [8] Jury, E.I. (1963). On the roots of a real polynomial inside the unit circle and a stability criterion for linear discrete systems. *IFAC Proceedings Volumes*, Vol. 1, No. 2, pp. 142 – 153, Em 2nd International IFAC Congress on Automatic and Remote Control: Theory, Basle, Switzerland.
- [9] Kuznetsov, Y. A. (2023). Elements of applied bifurcation theory. *Applied Mathematical Sciences*, Vol. 112. Springer, Cham, 4.<sup>a</sup> edição.
- [10] Luís, R. (2026). Stability and bifurcations in a discrete-time eco-evolutionary logistic model. *Mathematics*, Vol. 14, 928.
- [11] Luís, R. e Ryals, B. (2024). Invariant sets, global dynamics, and the Neimark–Sacker bifurcation in the evolutionary Ricker model. *Symmetry*, Vol. 16, No. 9, 1139.
- [12] Luís, R. e Ryals, B. (2026). Stability and bifurcations in the evolutionary periodic Ricker model. *preprint*.

## Optimização contrafactual em espaços longitudinais: formulação e mitigação algorítmica da pobreza energética

Diogo Nuno Freitas

*Departamento de Engenharia Informática e Design de Media Interativos,  
Faculdade de Ciências Exatas e da Engenharia, Universidade da Madeira e  
NOVA Laboratory for Computer Science and Informatics (NOVA LINCS),  
diogo.freitas@staff.uma.pt*

Eduardo Fermé

*Departamento de Engenharia Informática e Design de Media Interativos,  
Faculdade de Ciências Exatas e da Engenharia, Universidade da Madeira e  
NOVA Laboratory for Computer Science and Informatics (NOVA LINCS),  
eduardo.ferme@staff.uma.pt*

**Palavras-chave:** pobreza energética, aprendizagem automática, optimização não convexa, explicabilidade contrafactual, análise longitudinal, optimização multiobjectivo.

### Resumo:

A pobreza energética é um problema global que afeta a saúde e o bem-estar de milhões de pessoas. A maioria dos estudos analisa a pobreza energética através de indicadores estáticos e contemporâneos. Contudo, esta abordagem ignora as dependências temporais e as trajetórias socioeconómicas que moldam a vulnerabilidade das famílias e, por isso, limita a capacidade de agir antes que o problema surja.

Este trabalho introduz um modelo matemático para analisar e mitigar a pobreza energética. Abordámos o problema através da transição de uma fase de análise preditiva para uma fase de prescrição analítica. Neste sentido, o trabalho começa por formalizar o estado de pobreza energética através de um índice multidimensional que, utilizando um esquema de ponderação baseado na frequência, agrega múltiplos indicadores de privação.

Com o espaço de resultados estabelecido, a previsão é modelada como um problema de classificação num espaço de variáveis longitudinais de elevada dimensão. Para tal, aplicámos um método de agregação equilibrada (Balanced Bagging). Esta técnica permite que a fronteira de decisão gerada não sofra o enviesamento inerente à classe maioritária (neste caso, a dos não pobres energeticamente).

Na segunda fase deste trabalho, respeitante à prescrição analítica, formulámos a etapa como um problema de optimização multiobjectivo para gerar explicações contrafactuais. Procurámos o ponto admissível mais próximo no espaço de características que permita a alteração da classificação do modelo de “pobre” para “não pobre” energeticamente. A função objetivo do nosso problema de optimização minimiza três componentes: proximidade, validade e diversidade. A componente de proximidade penaliza as perturbações excessivas; para tal, minimiza uma função de distância construída sobre normas matemáticas para variáveis contínuas e distâncias discretas para variáveis categóricas. A validade utiliza uma função de perda aplicada à probabilidade prevista. Este mecanismo garante matematicamente a travessia da fronteira de decisão (transição de “pobre” para “não pobre” energeticamente). A

diversidade maximiza a distância espacial entre as várias soluções geradas, o que permite explorar a topologia global do espaço. Além disso, o espaço de soluções prevê a imutabilidade de características estáticas, como as variáveis demográficas. Simultaneamente, limitámos as restrições da perturbação das variáveis contínuas a uma vizinhança restrita: neste caso, confinámos o raio de perturbação a um limite de 5% em relação ao ponto original.

Dado que o modelo inclui variáveis discretas e contínuas, e que a linha que define as decisões é não linear, deparámo-nos com um problema de otimização não convexo. Para o resolver, utilizámos algoritmos genéticos, que permitem explorar o conjunto de soluções possíveis sem a necessidade de calcular gradientes.

No que toca ao modelo, este atingiu uma capacidade de discriminação avaliada com uma área sob a curva ROC (AUC) de 70,01%. Do ponto de vista da prescrição, a topologia das soluções revela que a travessia para o espaço de segurança ocorre tanto de forma isolada, no eixo do rendimento, como através de trajetórias compostas que combinam descidas nos preços da energia e reduções na taxa de desemprego. A resolução do problema de otimização mostrou também uma dependência temporal: as perturbações ótimas de norma mínima (inferiores a 5%) concentram-se predominantemente nos instantes de tempo mais recentes face ao momento da previsão (anos 6 e 7 da série longitudinal). Este trabalho sugere que a combinação de modelos de previsão com ferramentas de otimização permite desenhar políticas públicas personalizadas, focadas em prevenir o problema antes que ele se torne crónico.

#### **Agradecimentos:**

Este trabalho foi financiado pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia (FCT), Portugal, através do apoio financeiro ao *NOVA LINCS* (ref. UIDB/04516/2020 e UIDP/04516/2020).

## Plataforma interativa para o ensino de códigos de correção de erros

Zita Abreu

*Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências Exatas e da Engenharia,  
Universidade da Madeira e  
CIDMA – Centro de Investigação e Desenvolvimento em Matemática e Aplicações,  
Universidade de Aveiro, Portugal,  
zita.abreu@staff.uma.pt*

Raquel Pinto

*CIDMA – Centro de Investigação e Desenvolvimento em Matemática e Aplicações,  
Universidade de Aveiro, Portugal,  
raquel@ua.pt*

Leandro Silva

*Universidade de Aveiro, leandro.silva@ua.pt*

**Palavras-chave:** códigos de correção de erros, plataforma pedagógica, ensino interativo.

### Resumo:

A crescente utilização de sistemas digitais nas comunicações e no armazenamento de dados torna essencial garantir que a informação não se perde. Como os canais de transmissão são ruidosos e sujeitos a falhas, os códigos de correção de erros são fundamentais para assegurar a fiabilidade das comunicações modernas [2]. Este processo divide-se em três etapas: a codificação (onde se adiciona informação redundante), a transmissão e a receção (onde se verifica e corrige a mensagem). Códigos de correção de erros, como os códigos de Hamming e Reed-Solomon, desempenham um papel fundamental em diversas tecnologias, desde sistemas de comunicação por satélite e suportes óticos (como CDs e DVDs) até QR codes e comunicações sem fios de última geração, nomeadamente o 5G e o Wi-Fi [1, 3].

Nesta apresentação, damos a conhecer uma aplicação web educativa [4] concebida para facilitar o ensino destes conceitos através de uma interface visual e totalmente interativa. A ferramenta permite que os alunos explorem, de forma prática, códigos de repetição e de Hamming através de simuladores dinâmicos, jogos e questionários de autoavaliação. A plataforma funciona diretamente no navegador e utiliza rankings para motivar e acompanhar a aprendizagem de forma progressiva. O objetivo principal foi criar um recurso acessível que utilize tecnologias web para modernizar o ensino da teoria da informação. A plataforma procura ajudar os alunos a perceberem a utilidade prática da matemática no mundo real, tornando a sua aprendizagem muito mais apelativa e estimulante.

### Agradecimentos:

Este trabalho é suportado pelo CIDMA ao abrigo do Programa de Financiamento Plurianual de Unidades de I&D da Fundação para a Ciência e a Tecnologia (FCT), referências UID/04106/2025 (<https://doi.org/10.54499/UID/04106/2025>) e UID/PRR/04106/2025 (<https://doi.org/10.54499/UID/PRR/04106/2025>).

**Referências:**

- [1] Berlekamp, E.R. (2015). *Algebraic Coding Theory*. World Scientific.
- [2] Huffman, W.C. e Pless, V. (2003). *Fundamentals of Error-Correcting Codes*. Cambridge University Press.
- [3] MacKay, D.J. (2003). *Information Theory, Inference and Learning Algorithms*. Cambridge University Press.
- [4] Silva, L. (2025). *Códigos de Correção de Erros*. Obtido de: [https://leandrosilva2107.github.io/Site\\_Projeto](https://leandrosilva2107.github.io/Site_Projeto).



# Resumos dos Pósteres



## Matemática por um canudo: atividade de modelação

Letícia Menezes

*Mestranda em Ensino de Matemática no 3.º ciclo do Ensino Básico e no Secundário, Faculdade de Ciências Exatas e da Engenharia, Universidade da Madeira, 2134122@student.uma.pt*

Antonela Nóbrega

*Mestranda em Ensino de Matemática no 3.º ciclo do Ensino Básico e no Secundário, Faculdade de Ciências Exatas e da Engenharia, Universidade da Madeira, 2133622@student.uma.pt*

Inês Reis

*Mestranda em Ensino de Matemática no 3.º ciclo do Ensino Básico e no Secundário, Faculdade de Ciências Exatas e da Engenharia, Universidade da Madeira, 2119519@student.uma.pt*

Tânia Rodrigues

*Mestranda em Ensino de Matemática no 3.º ciclo do Ensino Básico e no Secundário, Faculdade de Ciências Exatas e da Engenharia, Universidade da Madeira, 2093421@student.uma.pt*

Joana Silva

*Mestranda em Ensino de Matemática no 3.º ciclo do Ensino Básico e no Secundário, Faculdade de Ciências Exatas e da Engenharia, Universidade da Madeira, 2038017@student.uma.pt*

**Palavras-chave:** didática da matemática, ensino secundário, funções, modelação matemática.

### Resumo:

A Modelação Matemática é um processo interativo entre o mundo estritamente matemático e o mundo real, no qual se estabelece uma articulação entre ambos [1] que serve o propósito de usar ferramentas conceptuais Matemáticas para compreender e explicar fenómenos reais. Este processo assume uma natureza cíclica e desenvolve-se em várias fases: identificação das variáveis; estabelecimento de relações entre as mesmas e criação de um modelo; teste desse modelo; interpretação dos resultados no contexto real; validação das conclusões; eventual aperfeiçoamento do modelo ou aceitação; e por fim, comunicação [2].

No contexto educativo, a modelação é uma atividade de ensino e aprendizagem matemática muito rica. Segundo [4], esta promove o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas, de competências sociais, permitindo que os alunos reconheçam e compreendam fenómenos do mundo real e ainda que despertem o seu interesse pela Matemática. De acordo com as Aprendizagens Essenciais de Matemática para o Ensino Secundário [3], o contacto dos alunos com a Modelação Matemática é importante para que estes possam adquirir capacidades de validação e de análise crítica que, por sua vez são muito significativas para o desenvolvimento de competências previstas no Perfil do Aluno à Saída da Escolaridade Obrigatória [5].

Além disso, permitem que os alunos percepcionem o contraste entre a natureza da matemática enquanto ciência e a sua componente experimental.

No âmbito da unidade curricular Didática da Matemática II do Mestrado em Ensino de Matemática no 3º Ciclo do Ensino Básico e no Secundário, foi proposta a realização de uma atividade experimental intitulada “Matemática por um canudo”, que consistiu em investigar a relação entre o comprimento de um cilindro oco e a largura da imagem observada através dele. O objetivo central desta atividade consistiu em modelar matematicamente esta relação.

Nesta comunicação serão analisados os contributos da tarefa “Matemática por um canudo” para a aprendizagem matemática, nomeadamente, para o conhecimento conceptual matemático de funções ao nível do ensino secundário e para o desenvolvimento de competências matemáticas transversais que o aluno adquire ao realizar tarefas desta natureza.

### **Agradecimentos:**

O presente trabalho foi realizado com o incentivo e orientação da docente da Unidade Curricular Didática da Matemática II, Professora Doutora Sónia Martins.

### **Referências:**

- [1] Blum, W. e Borromeo Ferri, R. (2009). Mathematical modelling: can it be taught and learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, Vol. 1, pp. 45–58.
- [2] Blum, W. (2002). ICMI Study 14: Applications and modelling in mathematics education - Discussion document. *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 51, pp. 149–171.
- [3] Carvalho e Silva, J., Rodrigues, A., Domingos, A., Albuquerque, C., Cruchinho, C., Martins, H., Almiro, J., Gabriel, L., Graça Martins, M. E., Santos, T., Filipe, N., Correia, P., Espadeiro, R. G. e Carreira, S. (2023). *Aprendizagens Essenciais do Ensino Secundário, Matemática A. 11.º ano*. Direção-Geral da Educação, Ministério da Educação.
- [4] Greefrath, G. e Vorhölter, K. (2016). *Teaching and learning mathematical modelling: Approaches and developments from German speaking countries*, ICME-13 Topical Surveys. Springer Open.
- [5] Martins, G., Gomes, C., Brocardo, J., Pedroso, J., Camilo, J., Silva, L. e Rodrigues, S. (2017). *Perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória*. Direção-Geral da Educação.

## Robôs de todas as cores: práticas do pensamento computacional

Letícia Menezes

*Mestranda em Ensino de Matemática no 3.º ciclo do Ensino Básico e no Secundário, Faculdade de Ciências Exatas e da Engenharia, Universidade da Madeira, 2134122@student.uma.pt*

Antonela Nóbrega

*Mestranda em Ensino de Matemática no 3.º ciclo do Ensino Básico e no Secundário, Faculdade de Ciências Exatas e da Engenharia, Universidade da Madeira, 2133622@student.uma.pt*

Inês Reis

*Mestranda em Ensino de Matemática no 3.º ciclo do Ensino Básico e no Secundário, Faculdade de Ciências Exatas e da Engenharia, Universidade da Madeira, 2119519@student.uma.pt*

Tânia Rodrigues

*Mestranda em Ensino de Matemática no 3.º ciclo do Ensino Básico e no Secundário, Faculdade de Ciências Exatas e da Engenharia, Universidade da Madeira, 2093421@student.uma.pt*

Joana Silva

*Mestranda em Ensino de Matemática no 3.º ciclo do Ensino Básico e no Secundário, Faculdade de Ciências Exatas e da Engenharia, Universidade da Madeira, 2038017@student.uma.pt*

**Palavras-chave:** didática da matemática, pensamento computacional, resolução de problemas, robótica.

### Resumo:

A adoção de metodologias ativas, nas quais o aluno colabora no processo de aprendizagem, são consideradas mais motivadoras e com contributos para uma crescente autoconfiança e autonomia dos envolvidos [4]. A inclusão de recursos tecnológicos, nomeadamente de robótica educativa, enquanto mediadora da aprendizagem matemática, representa contributos na implementação de metodologias dessa natureza [1].

O pensamento computacional, assumido por Wing [6] como uma capacidade fundamental para qualquer ser humano, assenta no desenvolvimento de práticas fundamentais, tais como, a abstração, a decomposição, o reconhecimento e criação de padrões, a análise e definição de algoritmos, bem como o desenvolvimento de hábitos de depuração e otimização de processos [6, 2]. Uma estratégia para introduzir o pensamento computacional no currículo educacional é integrá-lo numa disciplina escolar, podendo ser facilmente integrado na disciplina de Matemática, devido à relação entre o pensamento computacional, o raciocínio matemático e a resolução de problemas [4, 2, 3].

Apesar do desenvolvimento do pensamento computacional poder ser feito tendo por base abordagens não tecnológicas, a robótica tem sido apontada pelas orientações curriculares de matemática como uma ferramenta a incluir nas práticas matemáticas escolares, sendo que o seu uso, aliado a uma metodologia de resolução de problemas, apresenta contributos para a aprendizagem de conceitos matemáticos e do pensamento computacional [5].

Nesta comunicação em póster, analisamos uma tarefa matemática planificada nas aulas de Didática da Matemática II, no Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Secundário, especificamente desenhada para ser aplicada num contexto não formal de aprendizagem. A sua implementação ocorreu na Oficina de Ciência e Tecnologia, desenvolvida no âmbito das atividades do Festival do Livro e da Literatura da Madeira (Falemos), parceria do Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências Exatas e da Engenharia e do Arquivo e Biblioteca da Madeira.

Destinada a alunos de diferentes faixas etárias, a oficina baseou-se na história infantil “Meninos de todas as cores” de Luísa Ducla Soares, a partir da qual se procurou promover o pensamento computacional com recurso à programação de robôs e à resolução de problemas. Neste contexto, foi proposto às crianças e jovens participantes que criassem o seu próprio robô, utilizando o modelo LEGO Education SPIKE - Essencial, e que o programassem de forma a percorrer um labirinto de modo a encontrar um desafio matemático relacionado com o contexto da história. As soluções dos desafios remetiam para letras, que permitiam formar uma palavra relacionada com a história. Nesta comunicação analisaremos as características da tarefa, no que se refere ao potencial para a mobilização das práticas do pensamento computacional e de competências relevantes no ensino da matemática.

### **Agradecimentos:**

O presente trabalho foi realizado com o incentivo e orientação da docente da Unidade Curricular Didática da Matemática II Professora Doutora Sónia Martins. As autoras agradecem ao Arquivo e Biblioteca da Madeira a permissão para usar os dados recolhidos na implementação da oficina “Robôs de todas as cores”.

### **Referências:**

- [1] Cahyono, A.N., Asikin, M., Zahid, M.Z., Laksmiwati, P.A. e Miftahudin, M. (2021). The roboste [m] project: using robotics learning in a stem education model to help prospective mathematics teachers promote students’ 21st-century skills. *International Journal of Learning, Teaching and Educational Research*, Vol. 20, No. 7, pp. 85–99.
- [2] Canavarro, A.P., Mestre, C., Gomes, D., Santos, E., Santos, L., Brunheira, L., Vicente, M., Gouveia, M., J., Correia, P., Marques, P. e Espadeiro, G. (2021). *Aprendizagens Essenciais de Matemática do Ensino Básico*. Direção-Geral da Educação, Ministério da Educação.
- [3] Carvalho e Silva, J., Rodrigues, A., Domingos, A., Albuquerque, C., Cruchinho, C., Martins, H., Almiro, J., Gabriel, L., Graça Martins, M. E., Santos, T., Filipe,

- N., Correia, P., Espadeiro, R. G. e Carreira, S. (2023). *Aprendizagens Essenciais do Ensino Secundário, Matemática A. 11.º ano*. Direção-Geral da Educação, Ministério da Educação.
- [4] Ibáñez-Carrasco, M. e Henríquez-Rivas, C. (2026). Educational robotics in mathematics education: a systematic review. *European Journal of Science and Mathematics Education*, Vol. 14, No. 2, pp. 222–240.
- [5] Martins, S. e Santos, C. (2025). Artefactos de mediação semiótica e aprendizagem matemática: um robô em enfermarias COVID. Em Kot-Kotecki, A.F. e Fino, C.N. (Org.), *Lições da Pandemia*. pp. 390–402, CIE-UMa, Portugal.
- [6] Wing, J. M. (2021). Pensamento computacional. *Educação e Matemática*, Vol. 162, pp. 2–4.

## Dar sentido às funções: uma experiência de educação matemática crítica no 7.º ano

Petra Silva

*Mestranda em Ensino de Matemática no 3.º ciclo do Ensino Básico e no Secundário, Faculdade de Ciências Exatas e da Engenharia, Universidade da Madeira, 2046115@student.uma.pt*

Paula Cristina Lopes

*Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências Exatas e da Engenharia, Universidade da Madeira, crislopes@staff.uma.pt*

**Palavras-chave:** educação matemática crítica, ensino das funções, pensamento crítico, 3.º ciclo do ensino básico.

### Resumo:

A Educação Matemática Crítica (EMC), conforme defendida por Skovsmose [2], surgiu como uma resposta à crise da relevância da Matemática para os alunos, transformando-a num instrumento de leitura e de interpretação da realidade e não, somente, como um conhecimento técnico. A intervenção partiu da perspetiva de que a educação não deve formar, somente, profissionais competentes, mas também cidadãos capazes de pensar livremente, de questionar e de intervir de forma crítica na sua sociedade, tal como defendiam Skovsmose [2] e Freire [1].

Este trabalho tem como objetivo apresentar e refletir sobre uma experiência pedagógica de EMC no ensino das funções, desenvolvida numa turma do 7.º ano do 3.º Ciclo do Ensino Básico, durante o ano letivo 2025/2026. Inspirada na pedagogia libertadora de Freire [1] e nos conceitos-chave de Skovsmose [2], procurou-se aproximar a Matemática da realidade dos alunos, procurando transformar a sala de aula numa microssociedade democrática, tal como proposto por Skovsmose [2], onde os alunos investigam cenários reais, em vez de realizarem exercícios predeterminados e repetitivos, onde as suas opiniões livres e contextualizadas são privilegiadas.

A intervenção desenvolveu-se, ao longo de vinte e quatro aulas de quarenta e cinco minutos, através de tarefas investigativas baseadas em contextos do quotidiano dos alunos. Privilegiou-se o trabalho colaborativo, o debate em grande grupo e a análise de diferentes representações das funções, nomeadamente, diagramas de setas, tabelas, gráficos cartesianos e expressões algébricas, que os alunos podiam encontrar nas notícias, nas redes sociais, nos cafés, ou seja, na sociedade onde estão inseridos.

A análise em curso incide sobre as produções escritas dos alunos e, principalmente, as interações orais decorridas durante as atividades, procurando compreender de que forma a abordagem adotada influencia a participação e o discurso matemático dos alunos.

A sequência didática articulou os conteúdos com questões sociais relevantes para os alunos, introduzindo o conceito de função através de correspondências presentes no seu quotidiano, distinguindo uma função de uma não função, principalmente, em debates articulados com os alunos. A exploração das representações gráficas, com exemplos concretos realizados na sala de aula, sugere que a observação direta, por

parte dos alunos, parece ter favorecido uma evolução na aquisição de conhecimentos. Os dados observados sugerem que a utilização de funções presentes no dia a dia dos alunos aponta para benefícios na aprendizagem das funções de proporcionalidade direta, em que os alunos, de imediato, conseguiram-nas identificar e compreender. Estas atividades promoveram o diálogo autêntico, defendido por Freire [1], onde os alunos compreendiam a realidade, questionavam a escolha do domínio e expandiam os seus foregrounds limitados devido ao contexto socioeconómico em que estavam inseridos, tal como Skovsmose [2] argumentava.

Apesar de a análise dos dados ainda se encontrar em desenvolvimento, já é possível identificar sinais de um maior envolvimento dos alunos nas aulas, bem como de uma comunicação matemática mais consistente e de uma atitude mais crítica em relação aos temas abordados, o que reforça o potencial da Educação Matemática Crítica no ensino das funções no 7.º ano.

#### **Agradecimentos:**

O presente trabalho foi desenvolvido no âmbito da Unidade Curricular de Prática de Ensino Supervisionada, com a orientação da Professora Doutora Paula Cristina Reis Lopes, a quem muito agradeço toda a ajuda, disponibilidade e contributos ao longo de todo o processo. Agradeço também à escola onde a prática de ensino supervisionada foi realizada, na figura da sua presidente. De um modo especial, agradeço à professora cooperante e aos alunos pela colaboração e envolvimento na intervenção pedagógica.

#### **Referências:**

- [1] Freire, P. (2000). *Pedagogia do Oprimido*. Paz e Terra, Rio de Janeiro.
- [2] Skovsmose, O. (2023). *Critical Mathematics Education*. Springer.

## Dobrar e explorar: o pensamento computacional na aprendizagem das progressões geométricas

Maria Beatriz Alves

*Mestranda em Ensino de Matemática no 3.º ciclo do Ensino Básico e no Secundário, Faculdade de Ciências Exatas e da Engenharia, Universidade da Madeira, 2082720@student.uma.pt*

Sónia Martins

*Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências Exatas e da Engenharia, Universidade da Madeira e Centro de Investigação em Educação da Universidade da Madeira, Portugal, soniam@staff.uma.pt*

**Palavras-chave:** atividade exploratória, ensino secundário, pensamento computacional, progressões geométricas.

### Resumo:

As atividades investigativas ou de exploração são constituídas por perguntas abertas [4] e envolvem identificar padrões, formular e verificar conjecturas, assim como a justificação e demonstração das mesmas e, conseqüentemente, levam os alunos a refletir e a generalizar conceitos e procedimentos matemáticos [5, 6]. A distinção entre as tarefas de exploração e as de investigação reside no grau de desafio para o aluno. Uma mesma tarefa pode assumir-se como uma exploração se o aluno consegue, desde logo e sem muito planeamento, iniciar o seu trabalho. Caso contrário, a tarefa representará uma investigação, a qual implicará ao aluno elaborar uma estratégia de resolução e uma formulação específica das próprias questões a resolver [4]. Na presente comunicação discute-se a implementação de uma tarefa de cariz exploratório, desenvolvida no âmbito da Prática de Ensino Supervisionada (PES) do Mestrado em Ensino de Matemática no 3º Ciclo do Ensino Básico e no Secundário, visando o estudo das progressões geométricas numa aula de Matemática A do 11.º ano.

Tendo como base a análise da área de uma folha de papel dobrada  $n$  vezes em duas partes geometricamente iguais, o objetivo da tarefa era que os alunos analisassem as sucessões numéricas obtidas, conjecturando as regularidades observadas que permitiam escrever o termo geral de uma progressão geométrica. Também com a tarefa, pretendia-se visar o estudo da monotonia da sucessão, observando como o primeiro termo e a razão entre quaisquer dois termos influenciavam a sua monotonia.

Além da aprendizagem do conhecimento conceptual matemático relativo às progressões geométricas, a tarefa visava igualmente desenvolver as diferentes componentes do pensamento computacional, nomeadamente, a abstração, a decomposição, a identificação de regularidades, a formulação e análise de algoritmos, bem como a aquisição de estratégias de depuração e melhoria de processos [1, 2, 7]. Apesar das capacidades do pensamento computacional estarem associadas às Ciências da Computação, adotou-se uma estratégia de ensino visando o seu desenvolvimento na aula de matemática sem recurso à tecnologia [3].

Tendo por base os pressupostos anteriores, nesta comunicação discutem-se os resultados de uma investigação desenvolvida na PES com o objetivo de estudar como é desenvolvido o pensamento computacional de alunos de 11.º ano, quando envolvidos numa atividade exploratória visando a aprendizagem das progressões geométricas.

A investigação desenvolvida sugere que a implementação da tarefa contribuiu para a aprendizagem das progressões geométricas e para a mobilização de práticas do pensamento computacional e, de forma complementar, contribuiu para o desenvolvimento do pensamento crítico e criativo dos alunos e da sua comunicação matemática, na medida em que implicou observar, analisar e interpretar informação, estabelecendo critérios, desenvolver estratégias e algoritmos, bem como rever e discutir processos e resultados.

#### **Agradecimentos:**

A segunda autora desenvolve esta investigação no âmbito do Projeto UID/04083/2025, Centro de Investigação em Educação da Universidade da Madeira, financiado pela FCT – Fundação para a Ciência e a Tecnologia: <https://doi.org/10.54499/UID/04083/2025>. As autoras agradecem à Escola B+S Gonçalves Zarco, na pessoa da Professora Cooperante Carla Maria Melim Fernandes, responsável pela orientação da Prática de Ensino Supervisionada na escola.

#### **Referências:**

- [1] Canavarro, A.P., Mestre, C., Gomes, D., Santos, E., Santos, L., Brunheira, L., Vicente, M., Gouveia, M., J., Correia, P., Marques, P. e Espadeiro, G. (2021). *Aprendizagens Essenciais de Matemática no Ensino Básico*. Direção-Geral da Educação, Ministério da Educação.
- [2] Carvalho e Silva, J., Rodrigues, A., Domingos, A., Albuquerque, C., Cruchinho, C., Martins, H., Almiro, J., Gabriel, L., Graça Martins, M. E., Santos, T., Filipe, N., Correia, P., Espadeiro, R.G. e Carreira, S. (2023). *Aprendizagens Essenciais do Ensino Secundário, Matemática A. 11.º ano*. Direção-Geral da Educação, Ministério da Educação.
- [3] Espadeiro, R.G. (2021). O pensamento computacional no currículo de matemática. *Educação e Matemática*, No. 162, pp. 5–10.
- [4] Ponte, J.P. (2005). Gestão curricular em Matemática. Em GTI (Ed.), *O Professor e o Desenvolvimento Curricular*, pp. 11–34, APM, Lisboa.
- [5] Ponte, J.P., Brocardo, J. e Oliveira, H. (2003). *Investigações Matemáticas na Sala de Aula*, 1.ª Edição. Autêntica, Belo Horizonte.
- [6] Ponte, J.P., Segurado, M.I. e Oliveira, H.M. (1998). Tarefas de investigação em matemática: histórias da sala de aula. *Actas do VI Encontro de Investigação em Educação Matemática*, pp. 107–125, SPCE-SEM, Portalegre.
- [7] Wing, J.M. (2006). Computational thinking. *Communications of the ACM*, pp. 33–35.

## Pensar sobre o pensar em matemática: o contributo dos recursos para o desenvolvimento da metacognição

Eduarda Aguiar

*Mestranda em Ensino de Matemática no 3.º ciclo do Ensino Básico e no Secundário, Faculdade de Ciências Exatas e da Engenharia, Universidade da Madeira, 2093521@student.uma.pt*

Sónia Martins

*Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências Exatas e da Engenharia, Universidade da Madeira e Centro de Investigação em Educação da Universidade da Madeira, Portugal, soniam@staff.uma.pt*

**Palavras-chave:** ensino básico, equações, metacognição, recursos.

### Resumo:

O estudo da metacognição iniciou-se com os trabalhos de John H. Flavell, que a definiu como o conhecimento que o indivíduo possui sobre os seus próprios processos cognitivos, isto é, a consciência que possui sobre o seu próprio conhecimento [3]. Embora esta definição não seja consensual, as diferentes perspetivas apresentadas convergem na valorização do conhecimento da nossa própria cognição, bem como na capacidade de monitorizar e autorregular os nossos processos cognitivos [4]. Neste sentido, a metacognição assume um papel central no ensino da matemática, na medida em que permite a tomada de consciência dos alunos sobre os seus raciocínios, bem como a monitorização de estratégias que regulam a sua aprendizagem. A compreensão de conceitos matemáticos não depende apenas de competências de cálculo, mas também da capacidade de planear, monitorizar e avaliar o próprio raciocínio matemático, dimensões essenciais do processo metacognitivo [2]. Por outro lado, diversos estudos evidenciam que os recursos contribuem para melhorias significativas na aprendizagem e envolvimento dos estudantes, desde que integrados com orientação pedagógica adequada e com intencionalidade didática [1]. Assim, para além de proporcionarem uma experiência educativa mais significativa, a utilização de recursos didáticos na sala de aula pode favorecer a explicitação mental e verbal do raciocínio, a identificação de padrões e a reflexão sobre estratégias utilizadas, competências estas que compõem o processo metacognitivo.

Neste póster pretende-se analisar o papel dos recursos na aprendizagem de equações de 2.º grau, articulados com estratégias metacognitivas, por alunos do 9.º ano de escolaridade, numa experiência desenvolvida na Prática de Ensino Supervisionada no Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Secundário. Os resultados preliminares sugerem que a utilização intencional destes recursos contribuiu, tanto para a consolidação dos conceitos matemáticos, como para a promoção de uma maior consciência dos processos de pensamento envolvidos no estudo dos polinómios e equações do 2.º grau, revelando-se fundamentais para a compreensão da estrutura e aplicação dos casos notáveis e da resolução de equações de 2.º grau, completas e incompletas. Os recursos contribuíram ainda para o desenvolvimento de mecanismos metacognitivos nos alunos, que demonstraram

maior capacidade de justificar procedimentos, selecionar estratégias adequadas e reconhecer erros, tanto nas suas resoluções quanto nos seus resultados. Este trabalho pretende contribuir para a reflexão sobre práticas de ensino que integrem, de forma intencional, recursos diversificados visando simultaneamente a aprendizagem matemática e o desenvolvimento metacognitivo dos estudantes.

**Agradecimentos:**

A segunda autora desenvolve esta investigação no âmbito do Projeto UID/04083/2025, Centro de Investigação em Educação da Universidade da Madeira, financiado pela FCT – Fundação para a Ciência e a Tecnologia: <https://doi.org/10.54499/UID/04083/2025>. As autoras agradecem à Escola B+S Gonçalves Zarco, na pessoa da Professora Cooperante Ana Cláudia Durães, responsável pela orientação da Prática de Ensino Supervisionada na escola.

**Referências:**

- [1] Carbonneau, K., Marley, S.C., Selig, J.P. (2013). A meta-analysis of the efficacy of teaching mathematics with concrete manipulatives. *Journal of Educational Psychology*, Vol. 15, No. 2, pp. 380–400.
- [2] Fadillah, R. e Budiyo e Nurhasanah, F. (2021). The analysis of students' metacognition in solving math problems based on self-efficacy. *Journal of Physics Conference Series*, Vol. 1808, No. 1, 012062.
- [3] Flavell, J.H. (1976). Metacognitive aspects of problem solving. Em Resnick, L.B. (Ed.), *The Nature of Intelligence*, pp. 231-235, Lawrence Erlbaum, Hillsdale, NJ.
- [4] Gurat, M.G. e Medula Jr., C.T. (2016). Metacognitive strategy knowledge use through mathematical problem solving amongst pre-service teachers. *American Journal of Educational Research*, Vol. 4, No. 2, pp. 170-189.

## Colapso na editora matemática nacional: uma tarefa de resolução de problemas na aprendizagem das contagens

Inês Maria Abreu

*Mestranda em Ensino de Matemática no 3.º ciclo do Ensino Básico e no Secundário, Faculdade de Ciências Exatas e da Engenharia, Universidade da Madeira, 2093321@student.uma.pt*

Sónia Martins

*Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências Exatas e da Engenharia, Universidade da Madeira e Centro de Investigação em Educação da Universidade da Madeira, Portugal, soniam@staff.uma.pt*

**Palavras-chave:** comunicação matemática, contagens, resolução de problemas.

### Resumo:

As tarefas de resolução de problemas assumem um papel central na aprendizagem da Matemática, sendo frequentemente consideradas como a principal atividade matemática [3]. Um problema pode ser entendido como uma situação claramente definida para a qual se pretende uma solução, mas para a qual o resolvidor não dispõe de um procedimento imediato que conduza à resposta. Neste tipo de tarefas, os alunos são desafiados a mobilizar e articular conhecimentos, a formular e testar conjecturas, a estabelecer relações entre conceitos e a justificar os seus raciocínios, desenvolvendo o pensamento matemático em contextos significativos. Para além disso, a resolução e a formulação de problemas promovem a interação entre alunos, nomeadamente através da discussão, argumentação e partilha de estratégias, contribuindo para o desenvolvimento da comunicação matemática [2], competência considerada essencial pelas orientações curriculares [1].

A comunicação constitui um aspeto central na aprendizagem matemática, sendo essencial para a partilha de ideias e para a construção de significados [4]. Neste âmbito, pode assumir diferentes formas, nomeadamente oral, escrita e não verbal (gestual) [5], desempenhando um papel determinante na clarificação e consolidação do pensamento matemático.

Neste poster analisa-se uma atividade centrada na resolução de problemas e no desenvolvimento da comunicação matemática, implementada numa turma de 11.º ano no âmbito da Prática de Ensino Supervisionada. A tarefa “Colapso na Editora Matemática Nacional” consistiu na criação, por parte dos alunos, de situações-problema no domínio das contagens, integradas num enredo criativo. Posteriormente, os problemas elaborados foram distribuídos pelos diferentes grupos para serem resolvidos, sendo depois discutidos entre os grupos.

A implementação da atividade permitiu observar que os alunos recorreram a diferentes estratégias de resolução para o mesmo problema, evidenciaram criatividade na construção dos enredos das situações-problema e utilizaram diversas representações matemáticas para comunicar os seus raciocínios. Para além disso, a criação e justificação dos problemas contribuíram para a compreensão das características que distinguem problemas de arranjos e de combinações. A troca de problemas entre os

grupos revelou-se particularmente relevante para o desenvolvimento da comunicação matemática, na medida em que os alunos explicitaram os processos de formulação e de resolução, promovendo a argumentação e a partilha de estratégias.

Na atividade desenvolvida, ambas as formas de comunicação estiveram presentes de forma articulada no processo de criação de problemas por parte dos alunos. A comunicação oral revelou-se essencial na discussão em grupo e no processo de criação dos problemas. Já a comunicação escrita surgiu na formalização dos problemas criados e na apresentação das respetivas resoluções, exigindo a explicitação clara do raciocínio, o uso de diferentes representações, bem como o recurso a linguagem matemática precisa e estruturada. Conclui-se que a tarefa contribuiu para o desenvolvimento da capacidade de os alunos expressarem ideias matemáticas com clareza, recorrer a diferentes representações e reconhecer a importância da precisão na linguagem matemática, em consonância com as orientações curriculares e com os princípios da comunicação matemática.

### **Agradecimentos:**

A segunda autora desenvolve esta investigação no âmbito do Projeto UID/04083/2025, Centro de Investigação em Educação da Universidade da Madeira, financiado pela FCT – Fundação para a Ciência e a Tecnologia: <https://doi.org/10.54499/UID/04083/2025>. As autoras agradecem à Escola Básica e Secundária Gonçalves Zarco, na pessoa da Professora Cooperante Carla Maria Melim Fernandes, pela orientação e acompanhamento da Prática de Ensino Supervisionada na escola.

### **Referências:**

- [1] Carvalho e Silva, J., Rodrigues, A., Domingos, A., Albuquerque, C., Cruchinho, C., Martins, H., Almiro, J., Gabriel, L., Graça Martins, M. E., Santos, T., Filipe, N., Correia, P., Espadeiro, R. G. e Carreira, S. (2023). *Aprendizagens Essenciais do Ensino Secundário, Matemática A. 11.º ano*. Direção-Geral da Educação, Ministério da Educação.
- [2] Ferreira, R.T., Serrazina, L. e Caballero-Carrasco, A. (2023). A resolução de problemas e o ensino e a aprendizagem da matemática. Em Canavarro, A.P., Cabrita, I., Branco, N., Ferreira, R. e Neton, T. (Eds.), *Resolução de Problemas. Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática-EIEM 2023*, pp. 41-47, Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática, Aveiro, Portugal.
- [3] Liljedhal, P., Santos-Trigo, M., Malaspina, U. e Bruder, R. (2016). *Problem Solving in Mathematics Education*. Springer Open.
- [4] National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. NCTM.
- [5] Pimm, D. (2018). Sixty years (or so) of language data in mathematics education. Em Moschkovich, J.N., Wagner, D., Bose, A., Mendes, J.R. e Schütte, M. (Eds.), *Language and Communication in Mathematics Education: International Perspectives*, pp. 11–23. Springer.

## Teoria de valores extremos na análise de dados automobilísticos: metodologias e aplicações

Rubina Mendonça

Mestranda em Matemática, Estatística e Aplicações,  
Faculdade de Ciências Exatas e da Engenharia, Universidade da Madeira,  
2420397@student.uma.pt

Délia Gouveia-Reis

Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências Exatas e da Engenharia,  
Universidade da Madeira,  
delia.reis@staff.uma.pt

**Palavras-chave:** estatística de extremos, máximos por blocos, metodologia POT, dados automobilísticos.

### Resumo:

A aplicação da Teoria dos Valores Extremos, denotada por EVT, do inglês *Extreme Value Theory*, ocorre habitualmente através de duas metodologias fundamentais: a Metodologia dos Máximos por Blocos (BM) e a Metodologia POT, do inglês *Peaks-Over-Threshold*. Enquanto a Metodologia BM seleciona os eventos extremos dentro de um determinado intervalo ou bloco, a Metodologia POT considera todas as observações que excedem um determinado limiar. Na prática, a Metodologia POT é frequentemente considerada mais eficiente no aproveitamento da informação, embora a Metodologia BM seja valorizada pela sua simplicidade e robustez.

O foco deste estudo centra-se na análise de dados automobilísticos, no âmbito da utilização destas duas metodologias. As Metodologias BM e POT são aplicadas recorrendo a diversas Medidas de Segurança Substitutas (SSMs), tais como o PET (*post-encroachment time*), a desaceleração máxima e o TTC (*Time-to-Collision*), adaptando-se a contextos variados que incluem rotundas, autoestradas e cruzamentos sem sinalização. A investigação recente tem expandido o uso da EVT para cenários complexos, como manobras de ultrapassagem e a estimativa de risco para peões. No domínio da condução autónoma, as Metodologias BM e POT são aplicadas utilizando dados de sensores de alta resolução para realizar estimativas de risco em tempo real, permitindo que os veículos identifiquem perigos de forma imediata. A Metodologia BM é particularmente útil pela sua simplicidade e robustez em sistemas que exigem respostas rápidas, enquanto a Metodologia POT se destaca pela sua eficiência ao processar todo o histórico de dados que ultrapassa um limite de segurança. No que diz respeito à fiabilidade de componentes e à dinâmica de veículos, estas técnicas permitem prever falhas críticas ao analisar picos extremos de carga e tensão. Por último, na análise de fluxos de tráfego, a aplicação destas metodologias possibilita uma avaliação de segurança granular ao nível de corredores ou de toda a rede viária, transformando a monitorização contínua em estratégias proativas para prevenir acidentes.

## Diversidade alpha: medidas e procedimentos em R

Laura Vieira

*Mestranda em Matemática, Estatística e Aplicações,  
Faculdade de Ciências Exatas e da Engenharia, Universidade da Madeira,  
2070719@student.uma.pt*

Analuce Canha-Gouveia

*Departamento de Anatomía y Biología Celular, Facultad de Medicina, Universidad  
de Cantabria,  
analuce.canha@unican.es*

Délia Gouveia-Reis

*Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências Exatas e da Engenharia,  
Universidade da Madeira,  
delia.reis@staff.uma.pt*

**Palavras-chave:** diversidade alfa, microbioma, índice de Shannon, índice de Simpson, R, análise estatística.

### Resumo:

A diversidade alfa constitui uma medida fundamental na caracterização de comunidades microbianas, permitindo quantificar a riqueza e a distribuição relativa de abundâncias num dado local ou amostra. Medidas como os índices de Shannon, Simpson e estimadores de riqueza são amplamente utilizadas neste contexto, apresentando diferentes sensibilidades à riqueza, à equitabilidade e à dominância das espécies.

Neste estudo, apresenta-se uma abordagem computacional para o cálculo de medidas de diversidade alfa utilizando o *software* R. São descritos procedimentos básicos de tratamento de dados, bem como a implementação de métricas recorrendo a pacotes especializados. Adicionalmente, são exploradas formas simples de visualização e comparação entre amostras. Este trabalho tem carácter essencialmente didático e exploratório, visando sistematizar procedimentos simples e boas práticas para a implementação, visualização e interpretação de métricas de diversidade alfa em R.

## Alternativas de Lehmann em análise de sobrevivência

Diana Coelho

Mestranda em Matemática Estatística e Aplicações,  
Faculdade de Ciências Exatas e da Engenharia, Universidade da Madeira,  
2094021@student.uma.pt

Ana Maria Abreu

Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências Exatas e da Engenharia,  
Universidade da Madeira e  
CIMA – Centro de Investigação em Matemática e Aplicações, Portugal,  
abreu@staff.uma.pt

**Palavras-chave:** alternativas de Lehmann, distribuição exponencial exponenciada, distribuição de Weibull exponenciada.

### Resumo:

Ao longo dos anos, tem-se notado um interesse crescente em desenvolver distribuições de probabilidade mais flexíveis de maneira a colmatar algumas limitações inerentes às distribuições mais tradicionais (veja-se, por exemplo, em [1, 2, 3, 4]), cujas funções densidade e de risco, nem sempre conseguem reproduzir adequadamente a complexidade dos dados observados.

Neste trabalho, serão abordadas as alternativas de Lehmann que, através da introdução de um parâmetro no expoente da função de distribuição ou na função de sobrevivência, permitem obter distribuições de probabilidade com maior flexibilidade. Neste âmbito, serão apresentadas as consequências da aplicação deste método na distribuição exponencial e na distribuição de Weibull, evidenciando, analítica e graficamente, as alterações daí advindas nas correspondentes funções densidade e de risco.

### Agradecimentos:

O presente trabalho foi parcialmente suportado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e a Tecnologia, no âmbito da Unidade de Investigação CIMA, do grupo de Estatística, Processos Estocásticos e Aplicações, UID/04674/2025, DOI: <https://doi.org/10.54499/UID/04674/2025>.

### Referências:

- [1] Ahsanullah, M. e Al-Hussaini, E.K. (2015). *Exponentiated distributions*. Atlantis Press. ISBN 978-94-6239-078-2.
- [2] Elbatal, I. (2011). Exponentiated modified Weibull distribution. *Economic Quality Control*, Vol. 26, No. 2, pp. 189–200.
- [3] Gupta, R.C., Gupta, P.L. e Gupta, R. D. (1998). Modeling failure time data by Lehman alternatives. *Communications in Statistics – Theory and Methods*, Vol. 27, No. 4, pp. 887–904.
- [4] Nadarajah, S., Cordeiro, G.M. e Ortega, E.M.M. (2013). The exponentiated Weibull distribution: a survey. *Statistical Papers*, Vol. 54, pp. 839–877.

## Modelo de riscos aditivos baseado na distribuição de Chen

Carolina de Nóbrega Correia

Mestranda em Matemática Estatística e Aplicações,  
Faculdade de Ciências Exatas e da Engenharia, Universidade da Madeira,  
2144720@student.uma.pt

Ivo Sousa-Ferreira

Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências Exatas e da Engenharia,  
Universidade da Madeira e  
CEAUL – Centro de Estatística e Aplicações, Faculdade de Ciências,  
Universidade de Lisboa, Portugal,  
ivo.ferreira@staff.uma.pt

**Palavras-chave:** análise de sobrevivência, covariáveis, modelo de riscos aditivos, distribuição de Chen, regressão, *software* R.

### Resumo:

Em Análise de Sobrevivência, a classe de modelos de riscos proporcionais tem sido bastante utilizada para identificar os fatores de risco que afetam o tempo até à ocorrência de um acontecimento de interesse [1]. Um modelo pertencente a esta classe baseia-se no pressuposto de que as covariáveis exercem um efeito multiplicativo na função de risco. No entanto, em situações em que ocorre uma violação do pressuposto de proporcionalidade dos riscos, isto é, a razão dos riscos entre dois quaisquer indivíduos varia em função do tempo, a fiabilidade das estimativas dos coeficientes de regressão fica comprometida, sendo necessário recorrer a abordagens alternativas. Uma possibilidade consiste em considerar um modelo de riscos aditivos, caracterizado por uma função de risco na qual as covariáveis atuam de forma aditiva [3].

Na literatura há poucos trabalhos sobre modelos paramétricos de riscos aditivos [4, 5] e, na maioria deles, é adotada, por conveniência, uma distribuição bem conhecida para o tempo de vida (como a de Weibull ou a log-logística), sem que sejam consideradas outras possibilidades potencialmente mais adequadas para descrever os dados. Com o objetivo de avaliar a adequabilidade de distribuições menos usuais, mas com propriedades interessantes, propõe-se um modelo de riscos aditivos baseado na distribuição de Chen [2]. Esta distribuição destaca-se pela sua simplicidade, pois, com apenas dois parâmetros, a sua função de risco tem a capacidade de ser *bathhtub-shaped*. A inferência sobre os parâmetros do modelo é realizada através do método da máxima verosimilhança, na presença de dados censurados à direita. Para fins ilustrativos, apresenta-se uma aplicação a dados reais, discutindo-se a interpretação do efeito das covariáveis e a qualidade de ajustamento do novo modelo de regressão.

### Agradecimentos:

O presente trabalho foi parcialmente suportado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e a Tecnologia, no âmbito da Unidade de Investigação CEAUL, UID/00006/2025, DOI: <https://doi.org/10.54499/UID/00006/2025> e pela União Europeia – NextGenerationEU, UID/PRR/00006/2025, DOI: <https://doi.org/10.54499/UID/PRR/00006/2025>.

**Referências:**

- [1] Aalen, O.O., Borgan, Ø. e Gjessing, H.K. (2008). *Survival and Event History Analysis: A Process Point of View*. Springer, New York.
- [2] Chen, Z. (2000). A new two-parameter lifetime distribution with bathtub shape or increasing failure rate function. *Statistics & Probability Letters*, Vol. 49, No. 2, pp. 155–161.
- [3] Klein, J. P. e Moeschberger, M.L. (2003). Additive hazards regression models. Em *Survival Analysis Techniques for Censored and Truncated Data*, pp. 329–352, 2<sup>a</sup> Edição. Springer.
- [4] Rehman, H., Chandra, N., Emura, T. e Pandey, M. (2023). Estimation of the modified Weibull additive hazards regression model under competing risks. *Symmetry*, Vol. 15, No. 2, 485.
- [5] Voeltz, D., Hoyer, A., Forkel, A., Schwandt, A. e Kuß, O. (2024). A parametric additive hazard model for time-to-event analysis. *BMC Medical Research Methodology*, Vol. 24, 48.

**A cópula de Clayton na análise de acontecimentos recorrentes:  
uma abordagem com marginais Weibull**

Sofia Ferreira

*Mestranda em Matemática Estatística e Aplicações,  
Faculdade de Ciências Exatas e da Engenharia, Universidade da Madeira,  
2036502@student.uma.pt*

Ivo Sousa-Ferreira

*Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências Exatas e da Engenharia,  
Universidade da Madeira e  
CEAUL – Centro de Estatística e Aplicações, Faculdade de Ciências,  
Universidade de Lisboa, Portugal,  
ivo.ferreira@staff.uma.pt*

Ana Maria Abreu

*Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências Exatas e da Engenharia,  
Universidade da Madeira e  
CIMA – Centro de Investigação em Matemática e Aplicações, Portugal,  
abreu@staff.uma.pt*

**Palavras-chave:** análise de sobrevivência, acontecimentos recorrentes, cópulas arquimedianas, cópula de Clayton, distribuição de Weibull.

**Resumo:**

Os modelos de cópulas são amplamente utilizados em diversas áreas da Estatística [4], mas existem poucos estudos dedicados à sua aplicação na Análise de Acontecimentos Recorrentes (veja-se, por exemplo, [1]). Neste trabalho, considera-se a cópula de Clayton [2], pertencente à família de cópulas arquimedianas, para lidar com a dependência entre os tempos de recorrência pertencentes ao mesmo indivíduo [3]. A especificação das funções de distribuição marginais é feita sob o pressuposto de que os tempos de recorrência seguem uma distribuição de Weibull. A combinação da cópula de Clayton com marginais Weibull permite construir um modelo de sobrevivência que separa explicitamente a estrutura de dependência do comportamento marginal. A metodologia será aplicada a dados de acontecimentos recorrentes, salientando o seu potencial na modelação conjunta entre tempos de recorrência.

**Agradecimentos:**

O presente trabalho foi parcialmente suportado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e a Tecnologia, no âmbito da Unidade de Investigação CEAUL, UID/00006/2025, DOI: <https://doi.org/10.54499/UID/00006/2025> e pela União Europeia – NextGenerationEU, UID/PRR/00006/2025, DOI: <https://doi.org/10.54499/UID/PRR/00006/2025>; e no âmbito da Unidade de Investigação CIMA, do grupo de Estatística, Processos Estocásticos e Aplicações, UID/04674/2025, DOI: <https://doi.org/10.54499/UID/04674/2025>; e no

**Referências:**

- [1] Barthel, N., Geerdens, C., Czado, C. e Janssen, P. (2019). Dependence modeling for recurrent event times subject to right-censoring with D-vine copulas, *Biometrics*, Vol. 75, No. 2, pp. 439–451.
- [2] Clayton, D.G. (1978). A model for association in bivariate life tables and its application in epidemiological studies of familial tendency in chronic disease incidence. *Biometrika*, Vol. 65, No. 1, pp. 141–151.
- [3] Cook, R.J. e Lawless, J.F. (2007). *The Statistical Analysis of Recurrent Events*. Springer New York, NY. ISBN: 978-1-4419-2415-5.
- [4] Nelsen, R.B. (2006). *An Introduction to Copulas*. Springer New York, NY. ISBN: 978-0-387-28659-4.

# Lista de Participantes

1. Ana Carlota Patrício Abreu
2. Ana Luísa Amaro de Sousa
3. Ana Luísa da Silva Pereira
4. Ana Maria Cortesão Pais Figueira da Silva Abreu
5. Antonela Soraia Caldeira Nóbrega
6. Bruna Rogelia Capelo Rego
7. Carolina Patrícia de Nóbrega Correia
8. Caroline Dal Agnol
9. Catarina Leonor Pestana Vieira
10. Cláudia Rossana Velosa Pereira
11. Custódia Mercês Reis Rodrigues Drumond
12. Daniela Sofia Lima de Freitas Ferreira
13. Délia Canha Gouveia Reis
14. Diana Pereira Coelho
15. Diogo Nuno Teixeira Freitas
16. Eduarda Filipa Freitas Aguiar
17. Elci Alcione Almeida dos Santos
18. Ermelinda Maria Sardinha de Gouveia Duarte
19. Fábio José Rodriguez Gonçalves
20. Inês Almada Andrade
21. Inês Maria Ferreira Abreu
22. Inês Sousa dos Reis
23. Ivo Miguel Sousa Ferreira
24. Joana Sofia Teixeira Silva
25. Jorge Nélio Marques Ferreira
26. José Laurindo de Góis Nóbrega Sobrinho
27. José Manuel Cunha Leal Molarinho Carmo

28. José Manuel Nunes Castanheira da Costa
29. Laura Sofia Freitas Vieira
30. Lénia Raquel Aveiro Ferreira
31. Lourenço de Deus Costa
32. Luís André Furtado Freitas
33. Luís Elias Ribeiro Rodrigues
34. Luís Filipe Silva Camacho
35. Mafalda Catarina Romero Miguel
36. Marco Paulo Ferreirinha Garapa
37. Maria Beatriz dos Santos Alves
38. Maria Zita Fiqueli de Abreu
39. Mariana Letícia Roque Menezes
40. Maribel Gomes Gonçalves Gordon
41. Marisa Rodrigues Lucas
42. Maurício Duarte Luís Reis
43. Paulo Sérgio Abreu Freitas
44. Pedro Francisco Dinis Peso
45. Petra Sofia Nunes Silva
46. Rafael Domingos Garanito Luís
47. Regina Maria Fernandes Santos
48. Rita Maria César e Sá Fernandes
49. Rubina Carla Ferreira Mendonça
50. Sandra Maria Freitas Mendonça
51. Simão Silva Garanito
52. Sílvio Filipe Velosa
53. Sofia Isabel Gouveia Ferreira
54. Sónia Matilde Pinto Correia Martins
55. Tânia Andreia Silva Rodrigues
56. Vítor Hugo Dias Velosa

# Índice de Autores

Abreu A.M., 7, 46, 49

Abreu I.M., 42

Abreu Z., 26

Aguiar E., 40

Alves M.B., 38

Canha-Gouveia A., 45

Coelho D., 46

Correia C.N., 47

Dal Agnol C., 12

Fermé E., 17, 24

Ferreira L., 14

Ferreira S., 49

Freitas D.N., 24

Freitas P.S.A., 9

Garapa M., 16, 17

Gonçalves F., 14

Gouveia-Reis D., 44, 45

Lopes P.C., 36

Luís R., 22

Martins S., 10, 12, 38, 40, 42

Mendonça R., 44

Mendonça S., 5

Menezes L., 31, 33

Nóbrega A., 31, 33

Pinto R., 26

Reis I., 31, 33

Reis M., 16, 17

Rodrigues T., 31, 33

Silva J., 31, 33

Silva L., 26

Silva P., 36

Sobrinho J.L., 20

Sousa-Ferreira I., 7, 47, 49

Velosa S., 19

Vieira L., 45