UNIVERSIDADE da MADEIRA

Ultradistribuições Exponenciais

Maribel Gomes Gonçalves Gordon

Tese submetida à Universidade da Madeira com vista
à obtenção do grau de Doutor em Matemática,
na especialidade de Análise Matemática

Funchal - Portugal
Maio 2003

UNIVERSIDADE da MADEIRA

Ultradistribuições Exponenciais

Maribel Gomes Gonçalves Gordon

Orientador: *Professor Doutor Luís Camilo do Canto de Loura*

Tese submetida à Universidade da Madeira com vista
à obtenção do grau de Doutor em Matemática,
na especialidade de Análise Matemática

Esta investigação foi co-financiada pelo Ministério de Educação e FSE no âmbito do III Quadro comunitário de Apoio, programa PRODEP III

Funchal - Portugal
Maio 2003

Agradecimentos

Gostaria de começar por agradecer ao Professor Doutor *Luís Loura* a quem devo a orientação científica deste projecto. Os seus comentários e sugestões foram determinantes para a realização desta tese.

Ao Professor Doutor *Ludwig Streit*, que me lançou no mundo da investigação.

Ao Professor Doutor *José Carmo*, pelos esclarecimentos "Lógicos" e pelo apoio prestado.

Ao Professor Doutor *José Castanheira da Costa*, pela disponibilidade permanente e frutuosa troca de ideias.

À Professora Doutora *Rita Vasconcelo*s, pela amizade, confiança atribuída e apoio profissional.

À Professora Doutora *Margarida Faria,* pela amizade e constante encorajamento.

Aos meus colegas e amigos: *Custódia Drumond, Teresa Gouveia, Ana Abreu, Sandra Mendonça, Glória Cravo, Elci Alcione, José Luís Silva, Elias Rodrigues, Leonel Nóbrega e Eduardo Fermé,* pelas sugestões, incentivos e amizade incondicional.

À *Valentina Freitas,* pelos conselhos linguísticos.

À *Maria José Encarnação* e à *Anita Ferraz,* pelo apoio e amizade.

Ao Departamento de Matemática e Engenharias da Universidade da Madeira, pela dispensa de serviço concedida e por todo o apoio prestado, o que tornou possível a elaboração desta tese.

Ao Centro de Ciências Matemáticas da Universidade da Madeira, em especial, ao projecto de Financiamento Plurianual do C.C.M. e ao projecto Sapiens: Infinite Dimensional Analysis and Applications, referência: POCTI/2001/MAT/40706, pelos financiamentos cedidos.

Ao Ministério de Educação e ao Fundo Social Europeu no âmbito do III Quadro Comunitário de Apoio, pelo programa PRODEP III, através do qual obtive apoio financeiro para a bibliografia e para as viagens que possibilitaram os contactos indispensáveis a este trabalho.

Ao meu esposo, *Sérgio Gordon*, por todo o amor, carinho, apoio e compreensão que foram um marco muito importante nesta fase da nossa vida.

Ao meu amado filho *Daniel,* que sempre tentou compreender as minhas ausências exigidas por esta investigação e por todos os gestos de carinho e amor que me fortaleceram cada dia.

Aos meus queridos Pais, pela vida, amor e coragem que sempre me transmitiram.

Finalmente um muito obrigado aos meus irmãos que estiveram sempre presentes.

Índice

Resumo

O propósito principal desta tese é a extensão do espaço $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ das distribuições temperadas de Schwartz, usando o mesmo método de dualidade utilizado por Laurent Schwartz na sua Teoria das Distribuições (ver [Sch66]). Neste sentido, construímos um espaço de ultradistribuições exponenciais, $\mathfrak{X}'$, que é fechado para os operadores de derivação, translação complexa e transformação de Fourier. Para além destes operadores serem lineares e contínuos de $\mathfrak{X}'$ em $\mathfrak{X}'$, a translação complexa e a transformação de Fourier definem um isomorfismo vectorial e topológico neste espaço de ultradistribuições o que, como sabemos, generaliza o belo resultado de Schwartz para as distribuições temperadas.

Estudamos as propriedades topológicas de $\mathfrak{X}'$ e demonstramos que o espaço $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ está contido com injecção canónica contínua e densa no nosso espaço de ultradistribuições exponenciais. A construção do espaço $\mathfrak{X}'$ baseia-se na estruturação de um espaço de funções teste $\mathfrak{X}$, que se injecta canónica, contínua e densamente em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Este espaço $\mathfrak{X}$ é um limite projectivo maximal de um espectro projectivo, constituído por espaços localmente convexos; definimos $\mathfrak{X}'$ como sendo o dual forte de $\mathfrak{X}$. Por fim, identificamos algumas ultradistribuições de $\mathfrak{X}'$, obtemos algumas séries de multipolos convergentes neste espaço e vemos que estas séries têm grande aplicabilidade na resolução de equações diferenciais ordinárias.

Palavras Chave

Distribuição

Ultradistribuição

Transformação de Fourier

Série de multipolos

Abstract

The main intention of this thesis is the extension of the space $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ of Schwartz tempered distributions, using the same duality method used by Laurent Schwartz in his Distribution Theory. In this sense, we construct a space of exponential ultradistributions, $\mathfrak{X}'$, closed for the derivative operators, for complex translations and for Fourier transform. These operators are linear and continuous of $\mathfrak{X}'$ in $\mathfrak{X}'$; the complex translations and the Fourier transform define a vectorial and topological isomorphism in our space of ultradistributions, that generalizes the beautiful result of Schwartz for tempered distributions.

We study the topological properties of $\mathfrak{X}'$ and we prove that the space $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ is contained with continuous and dense injection in our space of exponential ultradistributions. The construction of $\mathfrak{X}'$ is based on the construction of a space of test functions $\mathfrak{X}$, that is embedded canonical, continuous and densely in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. This space $\mathfrak{X}$ is a maximal projective limit of a projective specter, of locally convex spaces; we define $\mathfrak{X}'$ as the strong dual of $\mathfrak{X}$. Finally, we identify some ultradistributions of $\mathfrak{X}'$, we get some convergent multipole series in this space and we see that these series have great applicability in the solution of ordinary differential equations.

Keywords

Distribution
Ultradistribution
Fourier transform
Multipole serie

Notação

Salvo menção contrária, todo o espaço vectorial considerado neste trabalho será complexo.

O símbolo/ A expressão	Designa/ Abrevia
e.v.	Espaço vectorial
e.v.t.	Espaço vectorial topológico
e.l.c.	Espaço localmente convexo
s.f.v.	Sistema fundamental de vizinhanças
$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais incluindo o zero
$\mathbb{N}_1$	$\mathbb{N} \setminus \{0\}$
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$\mathbb{R}^+$	Conjunto dos números reais positivos
$\mathbb{R}^-$	Conjunto dos números reais negativos
$\mathbb{C}$	Conjunto dos números complexos
$\mathbb{K}$	$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
E'	Dual topológico do espaço E
$\langle \cdot, \cdot \rangle_{E',E}$	Produto de dualidade entre E' e E
$C(k)$, $k \in \mathbb{R}$	Maior inteiro que não excede o número k
D_x^m, $m \in \mathbb{N}$	Derivada de ordem m em relação à variável x
$\mathcal{E}(\mathbb{R}) = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$	Espaço das funções indefinidamente diferenciáveis
$\mathcal{D}(\mathbb{R})$	Espaço das funções de $\mathcal{E}(\mathbb{R}) = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ com suporte compacto
$\hat{x}$, $\hat{\xi}$	Variáveis mudas (convenção de Russel)
$\mathcal{S}(\mathbb{R})$	Espaço das funções teste de Schwartz
$\rho_{l,m}(\varphi)$	$\left\| \hat{x}^l D_x^m \varphi \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$, com $l, m \in \mathbb{N}$ (Semi-normas definidas em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$)
$\hookrightarrow$	Injecção contínua
$\overset{d}{\hookrightarrow}$	Injecção contínua e densa
$\mathcal{S}'(\mathbb{R})$	Espaço das distribuições temperadas de Schwartz
$\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$	Espaço das funções contínuas e limitadas em $\mathbb{R}$ que convergem para zero no infinito
$L^p(\mathbb{R})$, $p \in [1, +\infty[$	Espaço das classes de equivalência de funções mensuráveis de módulo p integrável em $\mathbb{R}$
$(\cdot, \cdot)$	Produto interno definido em $L^2(\mathbb{R})$

O símbolo/ A expressão	Designa/ Abrevia
$L^{\infty}(\mathbb{R})$	Espaço das classes de equivalência de funções mensuráveis e essencialmente limitadas em $\mathbb{R}$
$\left\|\cdot\right\|_{L^q(\mathbb{R})}$	Norma em $L^q(\mathbb{R})$, com $q \in [1, +\infty]$
$\mathcal{F}$	Transformação de Fourier
δ_a, $a \in \mathbb{R}$	Distribuição de Dirac no ponto a
$\tau_a \varphi$	$\varphi(\hat{x} - a)$ (Operador translação)
$*$	Produto de convolução
$\otimes$	Produto tensorial
$\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathbb{R})$	Espaço vectorial de todos os polinómios complexos definidos em $\mathbb{R}$
$\mathcal{C}_{e^+}(\mathbb{R})$	Espaço das funções contínuas de crescimento exponencial em $\mathbb{R}$
$\mathcal{A}_{e^+}(\mathbb{R})$	Espaço das funções analíticas de crescimento exponencial em $\mathbb{R}$
$\mathcal{A}_{e^+}(\mathbb{C})$	Espaço das funções inteiras de crescimento exponencial em $\mathbb{C}$
$\mathcal{C}_{e^+,\infty}(\mathbb{R})$	Espaço das funções de crescimento exponencial lento em $\mathbb{R}$
$\mathcal{A}_{e^+,\infty}(\mathbb{R})$	Espaço das funções analíticas de crescimento exponencial lento em $\mathbb{R}$
$\mathcal{A}_{e^+,\infty}(\mathbb{C})$	Espaço das funções inteiras de crescimento exponencial lento em $\mathbb{C}$
$\mathcal{C}_{e^-}(\mathbb{R})$	Espaço das funções contínuas de decrescimento exponencial em $\mathbb{R}$
$\mathcal{G}_a(\mathbb{R})$	Espaço das funções ψ contínuas tal que $\psi = p \cdot \exp(-a\hat{x}^2)$ com $p \in \mathcal{P}$ e $a \in \mathbb{R}^+$
$H_n(x)$	$(-1)^n \exp(x^2)\, D_x^n(\exp(-x^2))$ (Polinómio de Hermite de ordem n)
$\psi_n(x)$	$(2^n n! \sqrt{\pi})^{-1/2} \exp(-x^2/2)\, H_n(x)$ (Função de Hermite de ordem n)
$\mathcal{H}$	Conjunto das funções de Hermite

O símbolo/ A expressão	Designa/ Abrevia
$\operatorname{span}\mathcal{H}$	Espaço gerado pelas funções de Hermite
$\operatorname{Ker} f$	Núcleo da aplicação f
$\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$	Espaço das funções de decrescimento exponencial rápido em $\mathbb{R}$
$\nu_{k_1,m_1}(\varphi)$	$\left\Vert \mathrm{e}^{k_1\vert\hat{x}\vert} D_x^{m_1}\varphi\right\Vert_{L^\infty(\mathbb{R})}$, com $k_1, m_1 \in \mathbb{N}$ (Semi-normas definidas em $\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$)
$\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$	$\{\varphi \in \mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R}) \wedge \mathcal{F}\varphi \in \mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})\}$
$\eta_{k_1,m_1}(\varphi)$	$\nu_{k_1,m_1}(\varphi) + \sup_{\xi\in\mathbb{R}} \left\vert \mathrm{e}^{k_1\vert\xi\vert} D_\xi^{m_1}(\mathcal{F}\varphi(\xi))\right\vert$, com $k_1, m_1 \in \mathbb{N}$ (Semi-normas definidas em $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$)
$\mathfrak{X}_0'(\mathbb{R})$	Espaço de Distribuições generalizadas (dual forte de $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$)
$\beta(\mathfrak{X}_0', \mathfrak{X}_0)$	Topologia forte em $\mathfrak{X}_0'(\mathbb{R})$
$\sigma(\mathfrak{X}_0', \mathfrak{X}_0)$	Topologia fraca em $\mathfrak{X}_0'(\mathbb{R})$
$\mathfrak{X}_r$	$\left\{\begin{array}{l}\varphi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \mid \varphi \text{ é inteira}, \quad \forall b, y \in \mathbb{R} \quad \vert b\vert \le r \wedge \vert y\vert \le r \\ \mathrm{e}^{b\hat{x}} \cdot \tau_{iy}\varphi \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R}) \ \wedge \ \forall k_1, m_1 \in \mathbb{N} \quad \eta^r_{k_1,m_1}(\varphi) < \infty\end{array}\right\}$
$\eta^r_{k_1,m_1}(\varphi)$	$\sup_{b,y\in[-r,r]} \eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi\right)$, com $k_1, m_1 \in \mathbb{N}$ (Semi-normas definidas em $\mathfrak{X}_r$)
$\mathfrak{X}$	$\bigcap_{r\in\mathbb{N}} \mathfrak{X}_r$
$\underleftarrow{\lim} I_r^{-1}(\mathfrak{X}_r)$	limite projectivo da família $(\mathfrak{X}_r)_{r\in\mathbb{N}}$ relativo à família de aplicações $(I_r)_{r\in\mathbb{N}}$
$\mathfrak{X}'$	Espaço de Ultradistribuições Exponenciais (dual forte de $\mathfrak{X}$)
$\beta(\mathfrak{X}', \mathfrak{X})$	Topologia forte em $\mathfrak{X}'$
$\sigma(\mathfrak{X}', \mathfrak{X})$	Topologia fraca em $\mathfrak{X}'$
$\blacksquare$	Fim de demonstração

Capítulo 1

Introdução

The most exciting phrase to hear in science, the one that heralds new discoveries, is not "Eureka!" but "That's funny..."

Isaac Asimov

Ao longo dos tempos muitas têm sido as contribuições importantes para a criação das distribuições, entre as quais se destaca as dos investigadores Heaviside, Dirac, Leray e Sobolev (cf. [Hea93, Dir27, Ler34, Sob36]). No entanto, o primeiro grande estudo metódico e desenvolvido desta teoria deveu-se ao matemático francês Laurent Schwartz, em 1950 (cf. [Sch66])[1], sob o título: "Théorie des Distributions".

Devido aos profundos conhecimentos prévios de Análise Funcional que são exigidos para a compreensão da Teoria das Distribuições desenvolvida por Schwartz, surgiram mais tarde outras estruturações das distribuições, onde se requeriam menos conhecimentos preliminares[2]. De entre estas, distingue-se o elegante trabalho de Sebastião e Silva (ver [SeS55c]), que se baseia numa pequena, simples e intuitiva axiomática, onde as distribuições são vistas como derivadas generalizadas de funções contínuas usuais. Ficam assim justificadas as denominações "função generalizada" e "derivada generalizada", anteriormente usadas para designar distribuição.

Em condições mais gerais do que as exigidas na análise clássica, as distribuições deram sentido à derivação e, deste modo, contribuíram grandiosamente para a justificação de alguns cálculos simbólicos[3], até então efectuados empiricamente, na sua grande maioria por físicos e engenheiros. Surgiu por isso uma nova definição de derivada, o que causou um amplo e crescente interesse nesta área, essencialmente na teoria das equações diferenciais.

Mas, como em todas as áreas científicas, a Teoria das Distribuições também tem as suas limitações. Como exemplo, refira-se que as séries de multipolos, ou seja, entes do

[1] Este tratado apareceu inicialmente em dois volumes e foi publicado em 1950-51 na colecção: Actualités Scientifiques et Industrielles, n^{os} 1091 e 1122.

[2] Ver também [AMS73, Lig58, Mar63].

[3] Nomeadamente, justificou-se por completo o uso da, até então, chamada função de Dirac, introduzida por Heaviside (cf. [Hea93]) e extremamente utilizada por Dirac na mecânica quântica (cf. [Dir27]).

tipo $\sum_{j\geq 0} b_j\delta^{(j)}$, onde b_j é uma sucessão de números complexos e δ é a distribuição de Dirac, nem sempre são convergentes no espaço das distribuições $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$; só o são no caso trivial em que apenas um número finito de b_j é não nulo. Dada a grande importância e utilidade destas séries na teoria quântica dos campos, sentiu-se a necessidade de estender o espaço das distribuições.

Outro tipo de situação face à qual a teoria das distribuições se mostra insuficiente, consiste na impossibilidade de efectuar a translação segundo o vector ia, com $a \in \mathbb{R}$, de uma qualquer distribuição. Estas translações são úteis para a resolução do seguinte problema de Cauchy (onde $\omega \in \mathbb{C}$):

$$\begin{cases} u'(t) - \omega D u(t) = 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

num espaço E de funções, cuja solução é, como se sabe,

$$u(t) = u_0(\hat{x} + \omega t) = \tau_{-\omega t} u_0.$$

A solução de um problema tão simples como este envolve, no caso de ω não ser real, uma translação complexa.

Neste sentido, muitos foram os matemáticos que generalizaram o conceito de distribuição. G. Köthe, em 1952 (ver [Köt52]), definiu as distribuições de fronteira ou as "Randverteilungen" como funções analíticas no complementar de uma curva simples e fechada de $\mathbb{C}$. Mostrou também que estas distribuições se identificavam, sob certas condições, com um grupo de distribuições de Schwartz. Um ano mais tarde, Tillmann (cf. [Til53]) generaliza essas distribuições de fronteira a $\mathbb{C}^n$. Em 1956, Ehrenpreis (cf. [Ehr56]) define, por dualidade, a transformação de Fourier $\mathcal{F}$ em todo o espaço $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$; o espaço $\mathcal{F}(\mathcal{D}'(\mathbb{R}))$ não é constituído por distribuições, mas contém estritamente o espaço $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ das distribuições temperadas de Laurent Schwartz.

Em 1958, com a publicação do artigo "Les fonctions analytiques comme ultra-distributions dans le calcul opérationnel", surge o conceito de ultradistribuição, da autoria do matemático Sebastião e Silva (veja-se [SeS58a]). Neste trabalho, apresenta-se os espaços de ultradistribuições temperadas e de tipo exponencial sobre $\mathbb{R}$, que contêm os seus respectivos espaços homónimos de distribuições. Tal como Köthe, Sebastião e Silva manteve o cuidado de representar os novos entes em termos de funções analíticas, o que conferiu à sua teoria uma vasta flexibilidade. Assim, o matemático português não só esclareceu as questões da translação complexa e da convergência das séries de multipolos, como também obteve uma generalização do magnífico resultado para as distribuições temperadas de Schwartz, que se resume da seguinte forma: a transformação de Fourier prolonga-se num isomorfismo vectorial e topológico do espaço das ultradistribuições de crescimento exponencial em si mesmo.

A teoria das hiperfunções de Sato, que aparece em 1959 (cf. [Sat59]), embora também use a representação por funções holomorfas e generalize o conceito de distribuição, revela-se insuficiente no estudo das séries de multipolos. Como já tivemos oportunidade de referir, esta questão foi solucionada por Sebastião e Silva em [SeS58a].

No ano de 1963, António de Sousa Menezes (ver [Men64, Men67]) construiu, por via axiomática, os espaços das ultradistribuições de ordem finita ou infinita e com crescimento arbitrário sobre um aberto não vazio de $\mathbb{R}$. Estas ultradistribuições foram definidas como sendo as translatadas complexas formais de distribuições.

É desta forma que, em 1967, surge uma vez mais o nome de Sebastião e Silva (cf. [SeS67]) associado ao estudo das ultradistribuições temperadas, onde retoma a análise das séries de multipolos. É no seu artigo "Les séries de multipôles des physiciens et la théorie des ultradistributions", que através da transformação de Stieltjes e das translações complexas, constrói novamente o espaço das ultradistribuições temperadas. Generaliza também as noções de limite no infinito e de integral em $\mathbb{R}$ para uma ultradistribuição temperada.

Aproveitando diversos temas sugeridos por Sebastião e Silva nos seus trabalhos referidos em [SeS58a, SeS67], o matemático J. Silva Oliveira, em 1983 (cf. [SO83]), introduz uma noção de produto de certo tipo de funções inteiras por ultradistribuições de suporte compacto e estende esta mesma definição a espaços de ultradistribuições mais amplos, também por ele construídos.

Tendo em consideração a teoria de António de Sousa Menezes e seguindo algumas perspectivas de investigação lançadas por Sebastião e Silva em [SeS67], Luísa Ribeiro, em 1990 (cf. [Rib90]), introduziu uma definição de limite para uma ultradistribuição num ponto e no infinito. Generalizou assim, as correspondentes noções já existentes para o caso das distribuições devidas respectivamente a S. Lojasiewicz em [Loj57] (limite num ponto) e a Sebastião e Silva em [SeS63] (limite no infinito).

Luís Loura, em 1993 (cf. [Lou03]), construiu um espaço de funções teste que está contido com injecção canónica contínua e densa no espaço $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ das funções indefinidamente diferenciáveis de suporte compacto. Tal como Schwartz, Luís Loura utilizou o método de dualidade obtendo, por isso, um espaço de distribuições generalizadas que, ao contrário de Sebastião e Silva e de J. Silva Oliveira, contém o espaço das distribuições $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ e consequentemente o espaço $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ das distribuições temperadas. Apesar de não ter obtido uma generalização da transformação de Fourier no seu espaço de distribuições generalizadas, Luís Loura demonstrou um teorema de estrutura neste espaço. Note-se que grande parte das teorias existentes até então não foram feitas por dualidade.

Com vista à generalização do operador transformação de Fourier, Luís Loura e Francisco Viegas, no artigo "Hermitean ultradistributions" de 1998 (cf. [LV98]), introduziram o espaço das ultradistribuições hermiteanas utilizando exactamente o mesmo argumento de dualidade usado por Schwartz na sua Teoria de Distribuições (ver [Sch66]). Embora este espaço de ultradistribuições de Hermite contenha o espaço das distribuições temperadas de Schwartz, não se relaciona com o espaço das distribuições $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ e nem ao menos estão definidas as translações reais. A transformação de Fourier define aqui um isomorfismo vectorial e topológico.

Usando o método de dualidade, o presente trabalho de investigação tem como objectivo estender o espaço $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ das distribuições temperadas de Schwartz, de forma a obter um espaço de ultradistribuições, onde se conserve a invariância dos operadores[4] determinados em $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, nomeadamente se verifique o isomorfismo vectorial e topológico da transformação de Fourier neste espaço e se dê sentido às translações

[4] A saber, os operadores de derivação, translação real e tranformação de Fourier.

complexas. Repare-se que, pelo facto das distribuições temperadas de Schwartz serem derivadas de funções contínuas com crescimento polinomial lento[5], o processo mais natural para construir um tal espaço de ultradistribuições, $\mathfrak{X}'$, que contenha como subespaço próprio o espaço $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, é exigir que ele seja o dual de um espaço das funções teste, digamos $\mathfrak{X}$, onde, para além de se ter um decrescimento mais rápido do que o polinomial[6], se tenha ainda a inclusão canónica contínua e densa de $\mathfrak{X}$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Façamos então uma breve alusão ao conteúdo deste trabalho.

No capítulo 2, recordamos algumas noções básicas e resultados essenciais das teorias dos espaços vectoriais topológicos, das distribuições temperadas de Schwartz e da transformação de Fourier.

O capítulo 3, por sua vez, é dedicado ao estudo das funções de crescimento exponencial. No parágrafo 3.1, provamos a invariância do espaço vectorial das funções contínuas de crescimento exponencial para os operadores de translação real e produto por funções do mesmo espaço. Analisamos na secção 3.2 as funções analíticas de crescimento exponencial em $\mathbb{R}$, as funções inteiras de crescimento exponencial em $\mathbb{C}$ e apresentamos ainda um teorema que nos garante o crescimento exponencial em $\mathbb{C}$, de uma função inteira (este resultado deve-se a Sebastião e Silva (cf. [SeS58a, SeS67]) e foi também demonstrado por J. Silva Oliveira (ver [SO83])). Na última secção deste capítulo, introduzimos as funções de crescimento exponencial lento e obtemos também aqui a invariância para o produto e para as translações reais, com a particularidade deste espaço ser fechado para a derivação.

O capítulo 4 trata das funções de decrescimento exponencial. Desta forma, na secção 4.1, estuda-se o espaço das funções contínuas de decrescimento exponencial, onde se descreve algumas das suas propriedades vectoriais, e nomeadamente se prova que este espaço é fechado para a translação real e para o produto por funções contínuas de crescimento exponencial. No subcapítulo 4.2 introduz-se o espaço[7] $\mathcal{G}_a(\mathbb{R})$, com $a > 0$. Vê-se também que $\mathcal{G}_{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$ é denso em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, facto este que se reveste de grande importância, pois nele assenta a prova da densidade do nosso futuro espaço de funções teste $\mathfrak{X}$ no espaço $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. No parágrafo 4.3, constrói-se o espaço $\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$ das funções de decrescimento exponencial rápido, onde se mostra que é fechado para a translação real, para a derivação e também para o produto por funções de crescimento exponencial lento. Contudo, $\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$ não é fechado para a transformada de Fourier. É ainda nesta secção que se mune este espaço com uma estrutura de espaço vectorial topológico e analisa-se as respectivas propriedades topológicas.

É no capítulo 5 que construímos o espaço $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$, que pode ser chamado de "pré-espaço" de funções teste, pois o seu dual topológico apenas verifica os dois primeiros requisitos atrás mencionados. Uma vez que $\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$ não é fechado para a transformada de Fourier, o espaço $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$ é, deste modo, constituído pelas funções de decrescimento exponencial rápido, cujas transformadas de Fourier obedecem também a

[5] Este facto impossibilita, por exemplo, a existência de solução não nula em $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ da equação diferencial $u' - u = 0$.

[6] Como veremos, o decrescimento exponencial é o que mais nos convém.

[7] $\mathcal{G}_a(\mathbb{R})$ é o espaço das funções contínuas em $\mathbb{R}$ que resultam do produto de polinómios por exponenciais do tipo $\exp\left(-a\hat{x}^2\right)$, com $a > 0$.

esta propriedade. Tal como o espaço $\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$, na secção 5.1 mostra-se que $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$ é fechado para as translações reais, para a derivação e para os produtos por polinómios e por funções do mesmo espaço. É importante salientar que, embora $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$ não seja fechado para o produto por exponenciais, é-o para a transformação de Fourier. Ainda neste parágrafo reconhecemos que toda a função deste espaço é prolongável a $\mathbb{C}$ como função inteira, concedendo-nos assim uma grande maleabilidade. O subcapítulo 5.2 diz respeito ao estudo das características topológicas deste espaço. A continuidade dos operadores definidos em $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$ é também aqui analisada. Para além disto, e como seria de esperar, $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$ está contido, com injecção canónica contínua e densa, no espaço $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ de Laurent Schwartz.

Ao longo do capítulo 6, estudamos o dual forte de $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$, isto é, o espaço de distribuições generalizadas $\mathfrak{X}_0'(\mathbb{R})$. Naturalmente que $\mathfrak{X}_0'(\mathbb{R})$ é invariante para a generalização natural dos operadores definidos em $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$, que continuam a ser lineares e contínuos de $\mathfrak{X}_0'(\mathbb{R})$ em $\mathfrak{X}_0'(\mathbb{R})$. O resultado de Schwartz para as distribuições temperadas é também aqui generalizado, ou seja, a transformação de Fourier prolonga-se num isomorfismo vectorial e topológico de $\mathfrak{X}_0'(\mathbb{R})$ em si mesmo. Verificamos também que, para além de $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$ se injectar canónica, contínua e densamente em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, também se injecta, da mesma forma, no seu dual $\mathfrak{X}_0'(\mathbb{R})$, o que nos garante a injecção canónica contínua e densa do espaço $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ das distribuições temperadas de Schwartz em $\mathfrak{X}_0'(\mathbb{R})$. São ainda identificadas algumas distribuições de $\mathfrak{X}_0'(\mathbb{R})$ e é dada uma condição suficiente para que as séries de multipolos sejam convergentes neste espaço de distribuições generalizadas.

Como já referimos, as translações complexas não estão definidas no espaço $\mathfrak{X}_0'(\mathbb{R})$. Por forma a ultrapassar esta limitação, estendemos este espaço a um espaço de ultradistribuições, $\mathfrak{X}'$. Assim, no capítulo 7, estruturamos um espaço de funções teste $\mathfrak{X}$, contido com injecção canónica contínua em $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$ e, por conseguinte em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, sendo a inclusão neste último espaço densa. Temos ainda que $\mathfrak{X}$ é um limite projectivo maximal de um espectro projectivo, $(\mathfrak{X}_r)_{r\in\mathbb{N}}$, constituído por espaços localmente convexos, contidos com injecção canónica contínua uns nos outros. O espaço $\mathfrak{X}$ é fechado para os operadores de translação complexa, derivação, transformação de Fourier, produto por polinómios e produto por exponenciais. Todos estes operadores são lineares e contínuos em $\mathfrak{X}$; em especial a transformação de Fourier continua a definir um isomorfismo vectorial e topológico neste espaço.

Finalmente, no capítulo 8, constrói-se por dualidade o espaço de ultradistribuições exponenciais[8] $\mathfrak{X}'$ e verifica-se que, neste espaço, se conserva a invariância para os operadores de translação complexa, derivação, produto por polinómios, produto por exponenciais e transformação de Fourier, que foram previamente definidos em $\mathfrak{X}$. Mantêm-se, por transposição, a linearidade e a continuidade destes operadores em $\mathfrak{X}'$. Generaliza-se assim, o operador transformação de Fourier que se prolonga num isomorfismo vectorial e topológico de $\mathfrak{X}'$ em si mesmo. No subcapítulo 8.3, tal como acontecia em $\mathfrak{X}_0'(\mathbb{R})$, prova-se que toda a função contínua de crescimento exponencial em $\mathbb{R}$ se identifica com uma ultradistribuição exponencial de $\mathfrak{X}'$. Além disso, obtêm-se algumas séries de mul-

[8] É importante frisar que não se deve confundir as ultradistribuições exponencias de $\mathfrak{X}'$ com as ultradistribuições de crescimento exponencial de Sebastião e Silva.

tipolos convergentes e demonstra-se que o espaço $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ se injecta canónica, contínua e densamente em $\mathfrak{X}'$.

Embora ainda não esteja provado, pensamos que o nosso espaço de ultradistribuições exponenciais $\mathfrak{X}'$ contém o espaço das ultradistribuições de crescimento exponencial de Sebastião e Silva (este último espaço também desenvolvido por J. Silva Oliveira). Seja como for, no nosso caso, usamos o método de dualidade que, para além de ser diferente do do matemático português Sebastião e Silva, nos confere grande maleabilidade.

Apresentamos no capítulo 9 alguns exemplos de ultradistribuições exponenciais com representação em série de multipolos convergente em $\mathfrak{X}'$ e mostramos como é possível resolver equações diferenciais ordinárias neste espaço, utilizando séries de multipolos. Terminamos o capítulo, com algumas observações e reflexões, a nosso ver, de carácter pertinente.

Capítulo 2

Preliminares

The last thing one knows when writing a book is what to put first.

Blaise Pascal

Este capítulo tem como principal objectivo apresentar os conceitos e resultados fundamentais[1] das teorias dos espaços vectoriais topológicos, das distribuições temperadas de Schwartz e da transformação de Fourier. Procuramos assim, contribuir para uma mais fácil leitura e compreensão dos assuntos abordados ao longo desta dissertação. Na sua generalidade, estas noções podem ser encontradas em alguns dos volumes indicados na Bibliografia, tais como: [Bou87, CF90, Gue90, HP94, RR73, RS75, Sch66, Sch70, Vie90].

2.1 Espaços vectoriais topológicos

Neste parágrafo introdutório recordaremos as noções necessárias para definir espaço vectorial topológico, localmente convexo, tonelado, Montel, Fréchet e bornológico. Caracterizaremos também as vizinhanças num espaço vectorial topológico e apresentaremos alguns resultados úteis ao estudo das características topológicas dos espaços anteriores.

Comecemos por definir conjuntos convexo, equilibrado, absolutamente convexo e absorvente:

Definição 2.1.1 *Consideremos E um espaço vectorial (e.v.) sobre o corpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}$=$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) e seja A um subconjunto de E. Se*

$$\forall x, y \in E \quad \forall t \in [0,1] \quad x, y \in A \Rightarrow tx + (1-t)\,y \in A,$$

[1] Optaremos apenas por demonstrar alguns dos resultados enunciados pela sua pertinência e sempre que se justifique no âmbito do presente trabalho.

então dizemos que A é ***convexo****.*
O conjunto A é dito ***equilibrado*** *se, e só se,*

$$\forall x \in A \quad \forall \lambda \in I\!\!K \quad |\lambda| \leq 1 \Rightarrow \lambda x \in A.$$

Diremos que A é ***absolutamente convexo*** *se for simultaneamente convexo e equilibrado.*
Por último, o conjunto A é chamado ***absorvente*** *se*

$$\forall x \in E \quad \exists \lambda > 0 \quad \forall \mu \in I\!\!K \quad |\mu| \geq \lambda \Rightarrow x \in \mu A.$$

Diremos ainda que um subconjunto A de E ***absorve*** *um outro subconjunto B de E sse*

$$\exists \lambda > 0 \quad \forall \mu \in I\!\!K \quad |\mu| \geq \lambda \Rightarrow B \subset \mu A.$$

Apresentaremos agora os conceitos de espaço vectorial topológico e de espaço localmente convexo:

Definição 2.1.2 *Seja E um e.v. sobre o corpo $I\!\!K$, munido com uma topologia τ. Dizemos que τ é* ***compatível com a estrutura vectorial*** *se as operações algébricas*

$$+ \ : E \times E \longrightarrow E \quad e \quad \cdot \ : I\!\!K \times E \longrightarrow E$$

são aplicações contínuas[2]*. A um espaço vectorial munido com uma topologia compatível chamamos* ***espaço vectorial topológico*** *(e.v.t.).*

Definição 2.1.3 *Seja E um e.v.t.. Diz-se que E é um* ***espaço localmente convexo*** *(e.l.c.) se todo o ponto de E possuir um sistema fundamental de vizinhanças (s.f.v.) convexas.*

Caracterização das vizinhanças num e.v.t.

Teorema 2.1.4 *Sejam E um e.v.t. e $a \in E$. Consideremos o conjunto das vizinhanças de a e designemo-lo por $\mathcal{V}_a$. Temos que:*

1. $$\mathcal{V}_a = \mathcal{V}_0 + a,$$

   onde

   $$\mathcal{V}_0 = \{V \subset E : V \, \text{é vizinhança de } 0\}\,;$$

[2] Note-se que a topologia considerada em $\mathbb{K}$ é a topologia usual. Os espaços $\mathbb{K} \times E$ e $E \times E$ estão munidos com as respectivas topologias produto.

2.

$$V \in \mathcal{V}_0 \wedge V \subset U \Rightarrow U \in \mathcal{V}_0;$$

3.

$$V_1, V_2, \ldots V_n \in \mathcal{V}_0 \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} V_i \in \mathcal{V}_0;$$

4.

$$V \in \mathcal{V}_0 \Rightarrow \exists W \in \mathcal{V}_0 \quad W + W \subset V;$$

5.

$$V \in \mathcal{V}_0 \wedge \lambda \neq 0 \Rightarrow \lambda V \in \mathcal{V}_0;$$

6. *Se $V \in \mathcal{V}_0$, então V é absorvente;*

7. *Existe uma base de vizinhanças de zero equilibradas.*

Demonstração: Veja-se por exemplo Robertson & Robertson [RR73, Cap. I]. ∎

Estabeleceremos em seguida as noções de espaço tonelado, de Montel, de Fréchet e bornológico:

Definição 2.1.5 *Consideremos E um e.l.c. e separado. Dizemos que E é* ***tonelado*** *sse todo o subconjunto de E absolutamente convexo, fechado e absorvente é vizinhança de zero.*

Definição 2.1.6 *Um espaço tonelado E diz-se de* ***Montel*** *se todo o subconjunto fechado e limitado for compacto, ou ainda, se todo o subconjunto limitado for relativamente compacto*[3]*.*

Definição 2.1.7 *A um espaço localmente convexo E, que seja completo e metrizável chamamos espaço de* ***Fréchet****.*

Definição 2.1.8 *Diremos que um e.l.c. E é* ***bornológico ou de Mackey*** *se, e só se, todo o subconjunto de E absolutamente convexo que absorva qualquer limitado for vizinhança de zero.*

[3]Recorde-se que um subconjunto de um espaço topológico separado é relativamente compacto se, e só se, estiver contido num subconjunto compacto, ou ainda, se a sua aderência for compacta.

Representaremos por E' o **dual topológico** do espaço E, ou seja, o conjunto dos funcionais lineares e contínuos sobre E, isto é, $f \in E'$ se, e só se,

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x &\longmapsto \langle f, x \rangle_{E',E} \, , \end{aligned}$$

é linear e contínua, onde $\langle \cdot, \cdot \rangle_{E',E}$ denota o **produto de dualidade** entre $f \in E'$ e $x \in E$ (ou seja, $\langle f, x \rangle_{E',E}$ é o valor do funcional f no vector x).

Definição 2.1.9 *Diz-se que um e.l.c. separado E é **semi-reflexivo** se $E = E''$ como espaço vectorial, ou seja, sse existir um isomorfismo vectorial entre E e E''. Se, para além disto, a topologia de E coincidir com a topologia forte do seu bidual E'', então dizemos que E é **reflexivo.***

Apresentaremos agora alguns resultados importantes relacionados com os espaços acima definidos.

Proposição 2.1.10 *Sejam E e F dois e.v.t. e $T : E \longrightarrow F$ linear. Então T é contínua se, e só se, T é contínua no ponto zero.*

Demonstração: Ver J. S. Guerreiro [Gue90]. ■

Proposição 2.1.11 *Um e.v.t. é localmente convexo sse for semi-normável, ou seja, sse a sua topologia puder ser definida à custa de uma família de semi-normas.*

Demonstração: Cf. Schwartz [Sch70, Corol. 2, p. 265]. ■

Proposição 2.1.12 *Sejam $\left(E, (p_j)_{j \in J}\right)$ e $\left(F, (q_i)_{i \in I}\right)$ dois espaços semi-normados, $T : E \longrightarrow F$ linear. Então são equivalentes as seguintes condições:*
i) T é lipschitziana;
ii) T é uniformemente contínua;
iii) T é contínua;
iv) T é contínua no ponto zero;
v)

$$\forall x \in E \quad \forall i \in I \quad \exists j \in J \quad \exists c \geq 0 \quad q_i \left(T \left(x\right)\right) \leq c p_j \left(x\right).$$

Demonstração: Cf. Schwartz [Sch70, Teor. T.2, XVIII, 6; 2]. ■

Teorema 2.1.13 *Um espaço semi-normado separado é metrizável se, e só se, existir uma família de semi-normas contável que origine a topologia.*

Demonstração: Ver por exemplo Robertson & Robertson [RR73, Cap. I]. ■

Teorema 2.1.14 *Sejam E um espaço metrizável e A um subconjunto de E. Então A é relativamente compacto se, e só se, de toda a sucessão de elementos de A, se puder extrair uma subsucessão convergente em E.*

Demonstração: Veja-se por exemplo Schwartz [Sch70, Teor. T.2, VIII, 2; 5]. ∎

Teorema 2.1.15 *Todo o espaço de Fréchet é tonelado.*

Demonstração: Ver Robertson & Robertson [RR73, Cap. IV, Teor. 2]. ∎

Proposição 2.1.16 *Se E é um espaço localmente convexo e metrizável, então é bornológico. Em particular, todo o espaço de Fréchet é bornológico.*

Demonstração: Cf. Robertson & Robertson [RR73, Cap. V, Prop. 8]. ∎

Teorema 2.1.17 *Seja E um espaço de Montel. Então E é reflexivo e o seu dual topológico E', munido da topologia forte, é também de Montel. Além disso, temos que sobre toda a parte fracamente limitada de E, as topologias inicial e fraca coincidem; sobre toda a parte fracamente limitada de E', as topologias forte e fraca coincidem. Mais ainda, toda a sucessão fracamente convergente em E, é convergente para a topologia definida inicialmente em E e toda a sucessão de E' fracamente convergente, é fortemente convergente.*

Demonstração: Ver Schwartz [Sch70, Teor. T.2, XXI, 6; 1]. ∎

Observação 2.1.18 *É importante frisar que pelo facto das topologias inicial e fraca de um espaço de Montel E induzirem a mesma topologia sobre as partes limitadas e terem as mesmas sucessões convergentes em E, não se pode deduzir que as topologias coincidam em E.*

Proposição 2.1.19 *Seja E um espaço bornológico separado. Então o seu dual topológico E' é completo para a topologia forte $\beta(E', E)$. Em particular, o dual de um espaço metrizável é completo para a topologia forte.*

Demonstração: Ver por exemplo Robertson & Robertson [RR73, Cap. VI, Prop. 1, Corol. 1]. ∎

2.2 Distribuições temperadas. Transformação de Fourier

Este subcapítulo tem como principal propósito recapitular as características fundamentais do espaço de Schwartz e do seu dual, assim como a transformação de Fourier e propriedades essenciais desta.

Comecemos por definir uma função de decrescimento polinomial rápido:

Definição 2.2.1 *Uma função φ complexa e contínua em $I\!R$ diz-se de* ***decrescimento polinomial*** *se para todo o $l \in I\!N$,* $\lim_{|x|\to+\infty} \left|x^l \varphi(x)\right| = 0.$

Ao longo deste trabalho e quando haja vantagem em explicitar a variável de uma determinada função f, recorreremos a uma convenção de Russel, que consiste em colocar um acento circunflexo sobre a variável, indicando assim que se trata de uma variável muda. Assim, quando for conveniente, usaremos como notação alternativa para f, símbolos do tipo $f(\hat{x})$, $f\left(\hat{\xi}\right)$, etc., reservando o símbolo $f(x)$ para designar o valor de f no ponto x do seu domínio.

Utilizaremos também o símbolo D_x^m, com $m \in \mathbb{N}$, para designar a derivada parcial ou total (desde que seja explícito no contexto em que se insere e quando não haja possibilidade de equívoco) de ordem m em relação à variável x.

Nesta dissertação e salvo menção contrária, $\mathcal{E}(\mathbb{R}) = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ designará o espaço vectorial de todas as funções complexas definidas em $\mathbb{R}$ e que são indefinidamente diferenciáveis. A topologia considerada habitualmente em $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ é a da convergência uniforme da função e de cada uma das suas derivadas em todos os compactos de $\mathbb{R}$, isto é, a topologia proveniente da seguinte família de semi-normas:

$$|\varphi|_{K,m} = \|D_x^m \varphi\|_{L^\infty(K)} \quad (K \text{ compacto de } \mathbb{R} \text{ e } m \in \mathbb{N}).$$

Definição 2.2.2 *Seja $\varphi \in \mathcal{E}(I\!R)$. Diz-se que φ é de* ***decrescimento polinomial rápido*** *ou simplesmente de* ***decrescimento rápido*** *se todas as derivadas forem de decrescimento polinomial, isto é,*

$$\forall l, m \in I\!N \quad \lim_{|x|\to+\infty} \left|x^l D_x^m \varphi(x)\right| = 0.$$

Vamos agora relembrar o espaço das funções teste de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, isto é, o conjunto das funções indefinidamente diferenciáveis de decrescimento rápido:

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \left\{\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}) \mid \forall l, m \in \mathbb{N} \quad \lim_{|x|\to+\infty} \left|x^l D_x^m \varphi(x)\right| = 0\right\}.$$

Vamos de seguida dotar o espaço de Schwartz com uma estrutura de espaço vectorial topológico. Para cada $l, m \in \mathbb{N}$ definamos a seguinte família de semi-normas:

$$\rho_{l,m}(\varphi) = |\varphi|_{l,m} = \sup_{r \le m} \sup_{x \in \mathbb{R}} (1 + |x|)^l \left|D_x^r \varphi(x)\right|.$$

Verifica-se facilmente que $\left(\rho_{l,m}\right)_{l,m\in\mathbb{N}}$ é uma família filtrante de semi-normas em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ e por isso a topologia proveniente desta família de semi-normas é localmente convexa (ver proposição 2.1.11). A topologia de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ pode ser definida por outras famílias de semi-normas, tais como:

$$\left\|\hat{x}^l D_x^m \varphi\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \quad (l, m \in \mathbb{N}) \tag{2.1}$$

$$\left\|\hat{x}^{2l} D_x^m \varphi\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \quad (l, m \in \mathbb{N}) \tag{2.2}$$

$$\left\|D_x^m \left(\hat{x}^l \varphi\right)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \quad (l, m \in \mathbb{N}) \tag{2.3}$$

$$\left\|\hat{x}^l D_x^m \varphi\right\|_{L^1(\mathbb{R})} \quad (l, m \in \mathbb{N}) \tag{2.4}$$

$$\left\|D_x^m \left(\hat{x}^l \varphi\right)\right\|_{L^1(\mathbb{R})} \quad (l, m \in \mathbb{N}) \tag{2.5}$$

Repare-se que os sistemas de semi-normas (2.1) a (2.5) não são filtrantes. É sempre possível filtrá-los, bastando para isso, por exemplo, juntar os supremos de sub-famílias finitas. Neste trabalho usar-se-á preferencialmente a família definida em (2.1).

Seguidamente, expomos um resultado muito útil, onde se garante a convergência de uma sucessão no espaço de Schwartz, desde que esta seja limitada em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ e que convirja em $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ para um elemento deste último espaço.

Lema 2.2.3 *Seja $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão limitada em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ e seja $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$. Então, se $\varphi_n \to \varphi$ em $\mathcal{E}(\mathbb{R})$, tem-se $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ e $\varphi_n \to \varphi$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.*

Demonstração: Veja-se por exemplo Schwartz [Sch66]. ■

Na proposição seguinte, que apresentaremos sem demonstração, constatamos que o espaço das funções teste de Schwartz é de Montel e de Fréchet, logo por maioria de razão, é tonelado e bornológico (cf. proposição 2.1.16).

Proposição 2.2.4 *O espaço $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ é de Fréchet e de Montel.*

Demonstração: Ver Schwartz [Sch66]. ■

Consideremos agora o dual topológico de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, que notaremos por $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ (espaço das distribuições temperadas). Observemos que $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ é um espaço vectorial topológico localmente convexo, completo, mas que não é de Fréchet, pois não é metrizável, visto não possuir alguma base contável de vizinhanças. Tendo em conta que $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ é um espaço de Montel (cf. teorema 2.2.4), temos igualmente que $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ munido da topologia forte, é de Montel (ver teorema 2.1.17) e, por conseguinte, é tonelado. Assim, podemos afirmar que em $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ há identidade entre os subconjuntos limitados e os relativamente compactos. Verificamos também, que tanto $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ como $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ são reflexivos.

Designemos, como é usual, por $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ o subespaço vectorial de $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ constituído pelas funções de suporte compacto. Schwartz, em [Sch66], introduziu em $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ uma topologia conveniente de espaço localmente convexo e mostrou que $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ está contido, com injecção canónica contínua e densa, em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ e este, por sua vez, está contido também com injecção canónica contínua e densa em $\mathcal{E}(\mathbb{R})$.

Outro resultado, não menos importante, de Schwartz [Sch66] é o de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ estar contido com injecção canónica contínua e densa em $L^p(\mathbb{R})$, para todo o $p \in [1, +\infty[$. Portanto, se representarmos por $\overset{d}{\hookrightarrow}$ a injecção canónica contínua e densa, temos em particular que

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) \overset{d}{\hookrightarrow} L^1(\mathbb{R}).$$

Assim, podemos pensar na restrição a $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ do operador transformação de Fourier $\mathcal{F}$ definido por:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) &\longrightarrow L^\infty(\mathbb{R}) \\ f &\longmapsto \mathcal{F}f, \end{aligned}$$

com

$$\mathcal{F}f(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-ix\xi} f(x)\, dx. \tag{2.6}$$

Com base no teorema de Riemann-Lebesgue, podemos afirmar que o operador $\mathcal{F}$ definido por (2.6) é linear e contínuo de $L^1(\mathbb{R})$ no espaço de Banach $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ (espaço das funções complexas contínuas e limitadas em $\mathbb{R}$, que convergem para zero no infinito). Consequentemente, $\mathcal{F}$ é do mesmo modo, linear e contínuo de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ em $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$. Mais ainda, $\mathcal{F}$ mantém-se linear e contínuo de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ (ver [Sch66]).

Assim, é-nos permitido estender a $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ o operador $\mathcal{F}$ definido em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ por (2.6), utilizando o processo de transposição.

Deste modo, fixando φ em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, resulta que[4] para todo o $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}\varphi, \psi \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} &= \langle \mathcal{F}\varphi, \psi \rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \psi(\xi)\, \mathcal{F}\varphi(\xi)\, d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} \psi(\xi) \left(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-ix\xi} \varphi(x)\, dx \right) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \left(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-ix\xi} \psi(\xi)\, d\xi \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, \mathcal{F}\psi(x)\, dx \\ &= \langle \varphi, \mathcal{F}\psi \rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} \end{aligned}$$

o que equivale a afirmar que

$$\langle \mathcal{F}\varphi, \psi \rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \langle \varphi, \mathcal{F}\psi \rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} \ , \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \forall \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

[4] Note-se que $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ é denso em $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ e que $\mathcal{S}'(\mathbb{R}) \overset{d}{\hookrightarrow} \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ pois $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \overset{d}{\hookrightarrow} \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Esta última igualdade sugere-nos definir $\mathcal{F}$ em $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ por:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \\ T &\longmapsto \mathcal{F}T, \end{aligned}$$

com

$$\langle \mathcal{F}T, \varphi \rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \langle T, \mathcal{F}\varphi \rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} \ . \tag{2.7}$$

Em consequência, a aplicação $\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ definida por (2.7) é linear e contínua (ver Schwartz [Sch66] e Viegas [Vie90]).

O teorema que se segue mostra-nos ainda mais.

Teorema 2.2.5 *O operador $\mathcal{F}$ definido, para todo o $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ e todo o $\xi \in \mathbb{R}$, por*

$$\mathcal{F}\varphi(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} \varphi(x)\, dx \tag{2.8}$$

é um isomorfismo vectorial e topológico de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Tem-se ainda,

$$\mathcal{F}^{-1} = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}_{-1}, \ \textit{onde } \mathcal{F}_{-1}\varphi(\xi) = \mathcal{F}\varphi(-\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}\varphi(x)\, dx.$$

Demonstração: Cf. Schwartz [Sch66] e Viegas [Vie90]. ■

Atendendo ao teorema anterior e por transposição, temos o seguinte corolário:

Corolário 2.2.6 *O operador $\mathcal{F}$ definido, para todo o T em $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ e todo o φ em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, por*

$$\langle \mathcal{F}T, \varphi \rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \langle T, \mathcal{F}\varphi \rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} \tag{2.9}$$

é um isomorfismo vectorial e topológico de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ em $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Verifica-se também que

$$\mathcal{F}^{-1} = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}_{-1},$$

onde $\mathcal{F}_{-1}T$ é definido por

$$\langle \mathcal{F}_{-1}T, \varphi \rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \langle T, \mathcal{F}_{-1}\varphi \rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} \ .$$

Demonstração: Cf. Schwartz [Sch66] e Viegas [Vie90]. ■

O **produto de convolução** de duas **funções** f e g localmente integráveis em $\mathbb{R}$ designa uma função que se expressa da seguinte forma:

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, g(x-t)\, dt \tag{2.10}$$

sempre que o integral (2.10) exista para quase todo o x em $\mathbb{R}$.

Recordaremos agora, sem grandes preocupações de rigor e sem explicitar os cálculos, como podemos definir o **produto de convolução** de duas **distribuições.** Assim sendo, dadas duas distribuições T e R, uma delas com suporte compacto, o seu produto de convolução é dado por:

$$\langle T * R, \varphi \rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \langle T_\zeta \otimes R_\sigma, \varphi(\zeta + \sigma) \rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} \tag{2.11}$$

onde $\otimes$ representa o **produto tensorial:**

$$\langle T_\zeta \otimes R_\sigma, \varphi(\zeta + \sigma) \rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \int_{\mathbb{R}^2} T(\zeta)\, R(\sigma)\, \varphi(\zeta + \sigma)\, d\zeta d\sigma \tag{2.12}$$

Recordemos ainda que, para todo o m em $\mathbb{N}$ e todo o a em $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
D_x^m (T * R) &= D_x^m T * R = T * D_x^m R && (2.13)\\
\tau_a (T * R) &= \tau_a T * R = T * \tau_a R && (2.14)\\
\mathrm{e}^{a\hat{x}} (T * R) &= \left(\mathrm{e}^{a\hat{x}} T\right) * \left(\mathrm{e}^{a\hat{x}} R\right) && (2.15)\\
\delta * R &= R \text{ (fórmula de Dirac)} && (2.16)\\
\delta^{(m)} * R &= D_x^m R && (2.17)\\
\delta_a * R &= \tau_a \delta * R = \tau_a R && (2.18)
\end{aligned}$$

Note-se que as propriedades (2.13) a (2.15) são válidas no quadro geral do produto de convolução, sempre que todas as convoluções envolvidas façam sentido.

Estabeleceremos de seguida algumas propriedades de $\mathcal{F}$ em $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, que se encontram provadas em Viegas [Vie90]:

Proposição 2.2.7 *Consideremos a transformação de Fourier $\mathcal{F}$ definida em $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ por (2.9) e sejam $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, $R \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ e $R_1 \in \mathcal{F}(\mathcal{E}'(\mathbb{R}))$. Então para todo o $m \in \mathbb{N}$ e para todo o $a \in \mathbb{R}$, tem-se:*

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(D_x^m T) &= \left(i\hat{\xi}\right)^m \mathcal{F}T && (2.19)\\
D_\xi^m (\mathcal{F}T) &= \mathcal{F}\left[(-i\hat{x})^m T\right] && (2.20)\\
\mathcal{F}(\tau_a T) &= e^{-ia\hat{\xi}} \mathcal{F}T && (2.21)\\
\mathcal{F}\left(e^{ia\hat{x}} T\right) &= \tau_a (\mathcal{F}T) && (2.22)\\
\mathcal{F}(T * R) &= \mathcal{F}(T)\, \mathcal{F}(R) && (2.23)\\
\mathcal{F}(T \cdot R_1) &= \frac{1}{2\pi} \left[\mathcal{F}(T) * \mathcal{F}(R_1)\right] && (2.24)\\
\mathcal{F}\delta &= 1 && (2.25)\\
\mathcal{F}1 &= 2\pi\delta && (2.26)
\end{aligned}$$

Observação 2.2.8 *As propriedades (2.19) a (2.24) referidas na proposição 2.2.7, são obviamente válidas no espaço das funções teste de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, pois como já referimos anteriormente $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ e $\mathcal{F}$ é um isomorfismo de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.*

Corolário 2.2.9 *Se T é uma distribuição temperada, então*

$$\mathcal{F}\left(\mathcal{F}T\right) = 2\pi T\left(-\hat{\xi}\right),$$

onde se define

$$\left\langle T\left(-\hat{\xi}\right), \varphi\right\rangle = \left\langle T, \varphi\left(-\hat{\xi}\right)\right\rangle.$$

Demonstração: Fixemos T em $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ qualquer.

Tendo em conta a definição do operador $\mathcal{F}$ em $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ (cf. (2.9)) podemos afirmar que

$$\left\langle \mathcal{F}\left(\mathcal{F}T\right), \varphi\right\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \left\langle T, \mathcal{F}\left(\mathcal{F}\varphi\right)\right\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} \tag{2.27}$$

O teorema 2.2.5 assevera-nos que

$$\mathcal{F}^{-1} = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}_{-1},$$

pelo que

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{F}\varphi\left(\hat{x}\right)\right](\xi) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}_{-1}\left(\mathcal{F}\varphi\left(\hat{x}\right)\right)(\xi) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\left(\mathcal{F}\varphi\left(\hat{x}\right)\right)(-\xi)$$

e por isso

$$\mathcal{F}\left(\mathcal{F}\varphi\left(\hat{x}\right)\right)(-\xi) = 2\pi\varphi\left(\xi\right),$$

levando-nos imediatamente a concluir que

$$\mathcal{F}\left(\mathcal{F}\varphi\right)(\xi) = 2\pi\varphi\left(-\xi\right).$$

Aplicando este resultado à igualdade (2.27), obtemos

$$\left\langle \mathcal{F}\left(\mathcal{F}T\right), \varphi\right\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = 2\pi\left\langle T, \varphi\left(-\hat{\xi}\right)\right\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}.$$

Por outro lado, atendendo à definição da distribuição $T\left(-\hat{\xi}\right)$, temos

$$\left\langle T, \varphi\left(-\hat{\xi}\right)\right\rangle = \left\langle T\left(-\hat{\xi}\right), \varphi\right\rangle,$$

donde resulta, tal como pretendíamos,

$$\mathcal{F}\left(\mathcal{F}T\right) = 2\pi T\left(-\hat{\xi}\right).$$

■

Corolário 2.2.10 *Suponhamos que p é um polinómio de grau n, complexo, definido em $I\!R$ e seja $T \in \mathcal{S}'(I\!R)$. Então*

$$\mathcal{F}(pT) = \sum_{j \leq n} c_j \ i^j D_\xi^j [\mathcal{F}(T)],$$

onde $j \in \{0, \ldots, n\}$, c_j são os coeficientes complexos de p e i é a unidade imaginária.

Demonstração: Tomemos T em $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ arbitrário e p um polinómio de grau n, complexo, definido em $\mathbb{R}$, então

$$p(x) = \sum_{j \leq n} c_j x^j, \quad \text{com } c_j \in \mathbb{C}, \ \forall j \in \{0, \ldots, n\}.$$

Tendo em conta a proposição 2.2.7, vem

$$\begin{aligned}
& \mathcal{F}(pT) \\
\underset{\text{propriedade (2.24)}}{=} & \frac{1}{2\pi}\left(\mathcal{F}\left[\sum_{j \leq n} c_j \hat{x}^j\right] * \mathcal{F}T\right) \\
= & \frac{1}{2\pi}\left(\sum_{j \leq n} c_j \mathcal{F}\left(\hat{x}^j\right) * \mathcal{F}(T)\right) \\
= & \frac{1}{2\pi}\left(\sum_{j \leq n} c_j \ i^j \mathcal{F}\left[(-i\hat{x})^j \cdot 1\right] * \mathcal{F}(T)\right) \\
= & \frac{1}{2\pi}\left(\sum_{j \leq n} c_j \ i^j D_\xi^j [\mathcal{F}(1)] * \mathcal{F}(T)\right).
\end{aligned}$$

Pela propriedade (2.26) e pelas propriedades do produto de convolução temos

$$\begin{aligned}
& \mathcal{F}(pT) \\
= & \sum_{j \leq n} c_j \ i^j D_\xi^j (\delta) * \mathcal{F}(T) \\
= & \sum_{j \leq n} c_j \ i^j D_\xi^j (\mathcal{F}(T)),
\end{aligned}$$

obtendo assim, o pretendido. ■

Capítulo 3

Espaços de funções de crescimento exponencial

Neste capítulo abordaremos, do ponto de vista vectorial, o estudo de alguns espaços de funções, nomeadamente o das funções de crescimento exponencial e o das funções de crescimento exponencial lento.

3.1 Funções de crescimento exponencial

Nesta secção estudaremos as funções contínuas de crescimento exponencial e provaremos que este espaço é fechado tanto para a translação real como para o produto por funções do mesmo espaço.

Comecemos por expor a definição de função de crescimento exponencial:

Definição 3.1.1 *Seja $f : I\!\!R \longrightarrow \mathbb{C}$ contínua. Diz-se que f é de* ***crescimento exponencial*** *se, e só se,*

$$\exists \alpha, \beta > 0 \quad \forall x \in I\!\!R \quad |f(x)| \leq \alpha \ e^{\beta|x|} \tag{3.1}$$

O conjunto constituído por todas as funções contínuas de crescimento exponencial será notado por $\mathcal{C}_{e^+}(I\!\!R)$.

Expomos de seguida alguns exemplos de funções de crescimento exponencial:

Exemplo 3.1.2 *As exponenciais pertencem a $\mathcal{C}_{e^+}(I\!\!R)$, pois, sendo $z_0 = a + bi$ um número complexo qualquer, temos que*

$$|e^{z_0 x}| = \left|e^{ax} e^{bix}\right| = |e^{ax}| \leq e^{|a||x|} \leq e^{(|a|+1)|x|}$$

e logo a condição (3.1) é verificada com $\alpha = 1$ e $\beta = |a| + 1$.

Designando por $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathrm{I\!R})$ o espaço vectorial de todos os polinómios complexos definidos em $\mathrm{I\!R}$, temos que:

Exemplo 3.1.3 *Os polinómios são elementos do conjunto $\mathcal{C}_{e^+}(\mathrm{I\!R})$.*
Com efeito, seja $p \in \mathcal{P}$ arbitrário[1] *e designemos por n o grau de p. Atendendo a que*

$$\forall j \in \mathrm{I\!N} \quad \left|x^j\right| \le e^{j|x|}$$

tem-se

$$\begin{aligned} |p(x)| &= \left|\sum_{j\le n} c_j x^j\right| \\ &\le \sum_{j\le n} |c_j| \ e^{j|x|} \\ &\le \sum_{j\le n} |c_j| \ e^{n|x|} \\ &\le \sum_{j\le n} |c_j| \ e^{(n+1)|x|}, \end{aligned}$$

pelo que (3.1) é válida com $\alpha = \sum_{j\le n} |c_j|$ e $\beta = n+1$, isto é, o polinómio p é uma função de crescimento exponencial.

Exemplo 3.1.4 *Qualquer função contínua majorada por uma função de $\mathcal{C}_{e^+}(\mathrm{I\!R})$ ainda pertence a $\mathcal{C}_{e^+}(\mathrm{I\!R})$. Em particular, toda a função f contínua e limitada é de crescimento exponencial.*

Passemos agora a descrever as propriedades vectoriais das funções de crescimento exponencial.

Proposição 3.1.5 *$\mathcal{C}_{e^+}(\mathrm{I\!R})$ é um e.v. sobre $\mathbb{C}$.*

Demonstração: Uma vez que $\mathcal{C}_{e^+}(\mathrm{I\!R})$ é um subconjunto do conjunto das funções contínuas em $\mathrm{I\!R}$ e que este último é um e.v. sobre $\mathbb{C}$, basta provar que $\mathcal{C}_{e^+}(\mathrm{I\!R})$ é um subespaço vectorial do conjunto das funções contínuas em $\mathrm{I\!R}$.

Como $f \equiv 0 \in \mathcal{C}_{e^+}(\mathrm{I\!R})$ então $\mathcal{C}_{e^+}(\mathrm{I\!R}) \neq \varnothing$.

Sejam $f_1, f_2 \in \mathcal{C}_{e^+}(\mathrm{I\!R})$ arbitrários, logo

$$\exists \alpha_1, \beta_1 > 0 \quad \forall x \in \mathrm{I\!R} \quad |f_1(x)| \le \alpha_1 \ \mathrm{e}^{\beta_1|x|} \tag{3.2}$$

e

$$\exists \alpha_2, \beta_2 > 0 \quad \forall x \in \mathrm{I\!R} \quad |f_2(x)| \le \alpha_2 \ \mathrm{e}^{\beta_2|x|} \tag{3.3}$$

[1] Exclui-se o caso do polinómio p ser nulo, pois se assim for, então é óbvio que $p \in \mathcal{C}_{e^+}(\mathrm{I\!R})$.

Fixando $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{C}$ quaisquer, tais que[2] $\gamma_1 \neq 0 \vee \gamma_2 \neq 0$ resulta por (3.2) e (3.3) que

$$\begin{aligned} & \left|\left(\gamma_1 f_1 + \gamma_2 f_2\right)(x)\right| \\ \leq\ & \left|\gamma_1\right| \left|f_1(x)\right| + \left|\gamma_2\right| \left|f_2(x)\right| \\ \leq\ & \left|\gamma_1\right| \alpha_1 \ \mathrm{e}^{\beta_1 |x|} + \left|\gamma_2\right| \alpha_2 \ \mathrm{e}^{\beta_2 |x|}. \end{aligned}$$

Tomemos agora, $A = \max\left\{\left|\gamma_1\right| \alpha_1, \left|\gamma_2\right| \alpha_2\right\}$ e $B = \max\left\{\beta_1, \beta_2\right\}$, então

$$\begin{aligned} & \left|\gamma_1\right| \alpha_1 \ \mathrm{e}^{\beta_1 |x|} + \left|\gamma_2\right| \alpha_2 \ \mathrm{e}^{\beta_2 |x|} \\ \leq\ & A \ \mathrm{e}^{B|x|} + A \ \mathrm{e}^{B|x|} \\ =\ & 2A \ \mathrm{e}^{B|x|}. \end{aligned}$$

E por conseguinte, para $\alpha = 2A$ e $\beta = B$, tem-se a condição (3.1), donde $\mathcal{C}_{e^+}(\mathbb{R})$ é um e.v. sobre $\mathbb{C}$. ■

No percurso deste trabalho, usaremos o símbolo τ_a, onde a é um número real qualquer, para designar o operador translação real segundo o vector a, definido por:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \tau_a f(x) = f(x - a) \tag{3.4}$$

Proposição 3.1.6 *O espaço das funções contínuas de crescimento exponencial é fechado para a translação.*

Demonstração: Sejam $f \in \mathcal{C}_{e^+}(\mathbb{R})$ e $a \in \mathbb{R}$ arbitrários. Tem-se imediatamente que $\tau_a f = f(\hat{x} - a)$ é contínua em $\mathbb{R}$, pois f o é.

Atendendo a que $x - a \in \mathbb{R}$ e que $f \in \mathcal{C}_{e^+}(\mathbb{R})$ então

$$\exists \alpha_1, \beta_1 > 0 \quad \left|f(x-a)\right| \leq \alpha_1 \ \mathrm{e}^{\beta_1 |x-a|},$$

ou seja,

$$\left|\tau_a f(x)\right| \leq \alpha_1 \ \mathrm{e}^{\beta_1 |a|} \mathrm{e}^{\beta_1 |x|},$$

consequentemente a condição (3.1) é válida para $\alpha = \alpha_1 \ \mathrm{e}^{\beta_1 |a|}$ e $\beta = \beta_1$, pelo que $\tau_a f \in \mathcal{C}_{e^+}(\mathbb{R})$, o que significa que $\mathcal{C}_{e^+}(\mathbb{R})$ é invariante por translação. ■

Teorema 3.1.7 *$\mathcal{C}_{e^+}(\mathbb{R})$ é fechado para o produto.*

Demonstração: Sejam $f_1, f_2 \in \mathcal{C}_{e^+}(\mathbb{R})$ arbitrárias. Por um lado, temos que o produto de f_1 por f_2 é uma função contínua em $\mathbb{R}$, porque ambas o são, e por outro

$$\exists \alpha_1, \beta_1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \left|f_1(x)\right| \leq \alpha_1 \ \mathrm{e}^{\beta_1 |x|} \tag{3.5}$$

[2] Note-se que, se ambas as constantes γ_1 e γ_2 forem iguais a zero, obtém-se a função identicamente nula, que é obviamente de crescimento exponencial.

e

$$\exists \alpha_2, \beta_2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad |f_2(x)| \leq \alpha_2 \ \mathrm{e}^{\beta_2 |x|} \tag{3.6}$$

Ora,

$$\begin{aligned} & |f_1(x) f_2(x)| \\ \underset{\text{por (3.5) e (3.6)}}{\leq} \quad & \alpha_1 \ \mathrm{e}^{\beta_1 |x|} \alpha_2 \ \mathrm{e}^{\beta_2 |x|} \\ = \quad & \alpha_1 \alpha_2 \ \mathrm{e}^{(\beta_1 + \beta_2)|x|} \end{aligned}$$

e portanto

$$\exists \alpha = \alpha_1 \alpha_2 > 0 \quad \exists \beta = \beta_1 + \beta_2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad |(f_1 \cdot f_2)(x)| \leq \alpha \ \mathrm{e}^{\beta |x|},$$

isto é, $f_1 \cdot f_2 \in \mathcal{C}_{e^+}(\mathbb{R})$. ■

3.2 Funções analíticas de crescimento exponencial

Estudaremos, neste subcapítulo, as funções analíticas de crescimento exponencial em $\mathbb{R}$ e as funções inteiras de crescimento exponencial em $\mathbb{C}$; apresentaremos também um resultado que nos garante o crescimento exponencial em $\mathbb{C}$ de uma função inteira.

O conjunto constituído por todas as funções analíticas de crescimento exponencial em $\mathbb{R}$ será representado por $\mathcal{A}_{e^+}(\mathbb{R})$:

$$\mathcal{A}_{e^+}(\mathbb{R}) = \{ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ é analítica em } \mathbb{R} \wedge f \in \mathcal{C}_{e^+}(\mathbb{R}) \} \tag{3.7}$$

Observação 3.2.1 *Repare-se que, se f é uma função analítica em $\mathbb{R}$, f é prolongável a $\mathbb{C}$ como uma função inteira, sendo este prolongamento único. Por esta razão, em tudo o que se segue identificaremos a função f com o seu (único) prolongamento analítico a $\mathbb{C}$, o que em particular nos permite escrever:*

$$\mathcal{A}_{e^+}(\mathbb{R}) \ = \ \left\{ f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \mid f \ \text{é inteira} \wedge \exists \alpha, \beta > 0 \ \forall z \in \mathbb{C}, \mathrm{Im}(z) = 0 \quad |f(z)| \leq \alpha \ e^{\beta |z|} \right\} \tag{3.8}$$

Proposição 3.2.2 *$\mathcal{A}_{e^+}(\mathbb{R})$ é um e.v. sobre o corpo dos complexos.*

Demonstração: Com base no facto de que $\mathcal{A}_{e^+}(\mathbb{R})$ é a intersecção de dois espaços vectoriais, a saber, o espaço $\mathcal{C}_{e^+}(\mathbb{R})$ (cf. proposição 3.1.5) e o espaço das funções analíticas em $\mathbb{R}$ com valores em $\mathbb{C}$, então é imediato afirmar que $\mathcal{A}_{e^+}(\mathbb{R})$ é um espaço vectorial complexo. ■

Seguidamente são feitas algumas observações sobre o crescimento exponencial em $\mathbb{R}$ e em $\mathbb{C}$.

Observação 3.2.3 *Facilmente se prova que o espaço $\mathcal{A}_{e^+}(\mathbb{R})$ é fechado para o produto e para as translações.*

Observação 3.2.4 *É importante não confundir o espaço $\mathcal{A}_{e^+}(\mathbb{R})$ com o espaço das funções inteiras de crescimento exponencial em $\mathbb{C}$, que designaremos por $\mathcal{A}_{e^+}(\mathbb{C})$:*

$$\mathcal{A}_{e^+}(\mathbb{C}) = \left\{ f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ é inteira} \wedge \exists \alpha, \beta > 0 \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad |f(z)| \leq \alpha \; e^{\beta |z|} \right\} \tag{3.9}$$

Observação 3.2.5 *Obviamente tem-se*

$$\mathcal{A}_{e^+}(\mathbb{C}) \subset \mathcal{A}_{e^+}(\mathbb{R}),$$

sendo esta inclusão estrita, pois por exemplo a função $e^{-\hat{z}^2}$ pertence a $\mathcal{A}_{e^+}(\mathbb{R})$ e não pertence a $\mathcal{A}_{e^+}(\mathbb{C})$.
Com efeito, se $z = x + yi$ então

$$\left| e^{-z^2} \right| = \left| e^{-x^2+y^2} \right|$$

e como

$$\begin{aligned} & (|x|+1)^2 \geq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 \geq -2|x| - 1 \\ \Leftrightarrow \quad & e^{-x^2+y^2} \leq e^{y^2+1} \; e^{2|x|}, \end{aligned}$$

resulta

$$\left| e^{-z^2} \right| \leq e^{y^2+1} \; e^{2|x|},$$

o que implica a condição (3.8) com $\alpha = \exp(y^2+1) = e$ (pois $\operatorname{Im}(z) = y = 0$) e $\beta = 2$, ou seja, $e^{-\hat{z}^2}$ é analítica de crescimento exponencial em $\mathbb{R}$. No entanto é evidente que uma majoração do tipo

$$\left| e^{-z^2} \right| \leq \alpha \; e^{\beta |z|},$$

é falsa, isto é, $e^{-\hat{z}^2}$ não tem crescimento exponencial em $\mathbb{C}$.

Observação 3.2.6 *Naturalmente que o espaço $\mathcal{A}_{e^+}(\mathbb{C})$ é fechado para o produto e para as translações complexas.*

O teorema que se segue (ver Sebastião e Silva [SeS58a, SeS67] ou J. Silva Oliveira [SO83]), dá-nos uma condição necessária e suficiente para que uma função inteira seja de crescimento exponencial em $\mathbb{C}$:

Teorema 3.2.7 *Uma função inteira f é de crescimento exponencial em $\mathbb{C}$ se, e só se,*

$$\exists L > 0 \quad \forall j \in I\!N_1 \quad \sqrt[j]{j!\,|a_j|} \leq L,$$

onde a_j são os coeficientes do desenvolvimento em série de potências de f no ponto zero.

Demonstração: $(\Rightarrow)$ Suponhamos em primeiro lugar, que $f \in \mathcal{A}_{e^+}(\mathbb{C})$. Logo podemos afirmar que

$$\exists \alpha, \beta > 0 \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad |f(z)| \leq \alpha \ \mathrm{e}^{\beta|z|} \tag{3.10}$$

Uma vez que f é inteira, então

$$\exists \left(a_j\right)_{j \in I\!N} \in \mathbb{C}^{I\!N} \quad f(z) = \sum_{j \geq 0} a_j z^j$$

e aplicando a fórmula integral de Cauchy para as derivadas, tem-se

$$a_j = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z^{j+1}} dz,$$

onde γ é uma circunferência centrada na origem de raio $R > 0$ e orientada no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio.

Podemos parametrizar a curva γ do seguinte modo

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \theta &\longmapsto R \ \mathrm{e}^{i\theta}. \end{aligned}$$

Resulta pois,

$$\begin{aligned} |a_j| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \left| \frac{f(z)}{z^{j+1}} \right| |dz| \\ &\underset{\text{por } (3.10)}{\leq} \frac{\alpha}{2\pi} \int_\gamma \frac{\mathrm{e}^{\beta|z|}}{|z|^{j+1}} |dz| \\ &= \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{\beta R}}{R^{j+1}} R d\theta \\ &= \frac{\alpha \mathrm{e}^{\beta R}}{2\pi R^j} 2\pi \\ &= \frac{\alpha \mathrm{e}^{\beta R}}{R^j}, \end{aligned}$$

o que significa que

$$\forall R > 0 \quad |a_j| \leq \frac{\alpha \mathrm{e}^{\beta R}}{R^j},$$

e em particular,

$$\forall j \in \mathbb{N}_1 \quad |a_j| \leq \frac{\alpha e^{\beta j}}{j^j},$$

o que implica

$$\forall j \in \mathbb{N}_1 \quad \sqrt[j]{j!\,|a_j|} \leq \sqrt[j]{\frac{j!\alpha\ e^{\beta j}}{j^j}} \tag{3.11}$$

Por outro lado, podemos observar que

$$\begin{aligned} & \lim_{j\to+\infty} \frac{(j+1)!\alpha\ e^{\beta j+\beta}}{(j+1)^{j+1}} \frac{j^j}{j!\alpha\ e^{\beta j}} \\ = & \lim_{j\to+\infty} e^{\beta} \left(\frac{j}{j+1}\right)^j = e^{\beta-1}, \end{aligned}$$

pelo que,

$$\lim_{j\to+\infty} \sqrt[j]{\frac{j!\alpha\ e^{\beta j}}{j^j}} = e^{\beta-1},$$

ou seja, a sucessão $\left(\sqrt[j]{\frac{j!\alpha\ e^{\beta j}}{j^j}}\right)_{j\in\ \mathbb{N}_1}$ é convergente, logo limitada. Garantindo-nos assim, por (3.11), que a sucessão $\left(\sqrt[j]{j!\,|a_j|}\right)_{j\in\ \mathbb{N}_1}$ é de igual modo limitada.

($\Leftarrow$) Reciprocamente, suponhamos que $f = \sum_{j=0}^{+\infty} a_j \hat{z}^j$ é inteira e que $\left(\sqrt[j]{j!\,|a_j|}\right)_{j\in\mathbb{N}_1}$ é limitada. Então existem constantes positivas $L_0 = \max\{|a_0|, 1\}$ e L tais que

$$\forall j \geq 0 \quad |a_j| \leq L_0 \frac{L^j}{j!}.$$

Deste modo

$$|f(z)| = \left|\sum_{j=0}^{+\infty} a_j z^j\right| \leq \sum_{j=0}^{+\infty} |a_j| \left|z^j\right| \leq \sum_{j=0}^{+\infty} L_0 \frac{L^j}{j!} |z|^j = L_0\ e^{L|z|},$$

e portanto, para todo o $z \in \mathbb{C}$,

$$|f(z)| \leq \alpha\ e^{\beta|z|}, \text{ com } \alpha = L_0 \text{ e } \beta = L,$$

isto é, f é de crescimento exponencial. ∎

3.3 Funções de crescimento exponencial lento

Nesta secção faremos um estudo similar ao efectuado anteriormente, só que agora será para as funções complexas de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ em $\mathbb{R}$ e de crescimento exponencial lento. À semelhança do que aconteceu no espaço das funções de crescimento exponencial, também aqui teremos a invariância para o produto e para as translações e, como é natural, obteremos um espaço fechado para a derivação.

Iniciaremos esta secção, como não podia deixar de ser, com a noção de função de crescimento exponencial lento:

Definição 3.3.1 *Tome-se $f \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$. Diz-se que f é de* ***crescimento exponencial lento*** *se todas as derivadas de f forem de crescimento exponencial, isto é, se para todo o natural m, $D_x^m f \in \mathcal{C}_{e^+}(\mathbb{R})$, ou ainda,*

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad \exists \alpha_m, \beta_m > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad |D_x^m f(x)| \leq \alpha_m \ e^{\beta_m |x|} \tag{3.12}$$

O conjunto formado por todas as funções de crescimento exponencial lento será denotado por $\mathcal{C}_{e^+,\infty}(\mathbb{R})$.

Seguem-se dois exemplos:

Exemplo 3.3.2 *As exponenciais são funções de crescimento exponencial lento.*
Basta ter em atenção que as exponenciais são funções de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ em $\mathbb{R}$ e atender aos exemplos 3.1.2, 3.1.3, ao teorema 3.1.7 e ter em consideração que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \forall m \in \mathbb{N}, D_x^m(e^{zx}) = z^m e^{zx}.$$

Exemplo 3.3.3 *Evidentemente que qualquer polinómio pertence ao conjunto $\mathcal{C}_{e^+,\infty}(\mathbb{R})$.*
É suficiente recordar que a derivada de qualquer ordem de um polinómio é sempre um polinómio e que todo o polinómio pertence a $\mathcal{C}_{e^+}(\mathbb{R})$ (cf. exemplo 3.1.3).

Mostremos agora que o espaço das funções de crescimento exponencial lento é um e.v. fechado para a translação real, para o produto e para a derivação.

Proposição 3.3.4 *$\mathcal{C}_{e^+,\infty}(\mathbb{R})$ é um e.v. sobre $\mathbb{C}$.*

Demonstração: Verifiquemos que $\mathcal{C}_{e^+,\infty}(\mathbb{R})$ é um subespaço vectorial do espaço das funções de crescimento exponencial.

Tem-se $\mathcal{C}_{e^+,\infty}(\mathbb{R}) \neq \varnothing$, pois $f \equiv 0$ é uma função de crescimento exponencial lento.

Sejam f_1 e f_2 em $\mathcal{C}_{e^+,\infty}(\mathbb{R})$ e γ_1, γ_2 em $\mathbb{C}$ quaisquer, com $\gamma_1 \neq 0 \vee \gamma_2 \neq 0$; para todo o $m \in \mathbb{N}$ obtemos

$$D_x^m(\gamma_1 f_1 + \gamma_2 f_2) = \gamma_1 D_x^m f_1 + \gamma_2 D_x^m f_2,$$

mas $f_1, f_2 \in \mathcal{C}_{e^+,\infty}(\mathbb{R})$ donde

$$D_x^m f_1 \in \mathcal{C}_{e^+}(\mathbb{R}) \wedge D_x^m f_2 \in \mathcal{C}_{e^+}(\mathbb{R})$$

e como $\mathcal{C}_{e^+}(\mathbb{R})$ é um e.v. (cf. proposição 3.1.5), temos por conseguinte que

$$\gamma_1 D_x^m f_1 + \gamma_2 D_x^m f_2 \in \mathcal{C}_{e^+}(\mathbb{R}),$$

ou seja, a função $\gamma_1 f_1 + \gamma_2 f_2$ é de crescimento exponencial lento. ∎

Proposição 3.3.5 *O espaço vectorial das funções de crescimento exponencial lento é invariante para as translações.*

Demonstração: Tomemos $a \in \mathbb{R}$ e $f \in \mathcal{C}_{e^+,\infty}(\mathbb{R})$ quaisquer.

Por um lado sabemos pela definição de $\mathcal{C}_{e^+,\infty}(\mathbb{R})$ que $f \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$ e logo $\tau_a f = f(\hat{x} - a)$ também é indefinidamente diferenciável em $\mathbb{R}$; por outro lado temos que

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad D_x^m f \in \mathcal{C}_{e^+}(\mathbb{R}).$$

Assim, e em virtude da proposição 3.1.6 conclui-se que

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad \tau_a(D_x^m f) \in \mathcal{C}_{e^+}(\mathbb{R}).$$

Recorde-se que queríamos verificar que

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad D_x^m(\tau_a f) \in \mathcal{C}_{e^+}(\mathbb{R}),$$

ora, isto é imediato pois, para todo o m natural

$$\tau_a(D_x^m f) = D_x^m(\tau_a f).$$

∎

Proposição 3.3.6 *O conjunto das funções de crescimento exponencial lento é fechado para a derivação.*

Demonstração: Tomemos $f \in \mathcal{C}_{e^+,\infty}(\mathbb{R})$ arbitrária. Temos que $f \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$, pelo que $\forall l \in \mathbb{N}$, $D_x^l f$ é da mesma forma de classe $\mathcal{C}^\infty$ em $\mathbb{R}$.

Sejam $l, m \in \mathbb{N}$ quaisquer.

Dado que f é de crescimento exponencial lento, então $D_x^{m+l} f$ é uma função de crescimento exponencial, ou seja,

$$D_x^m\left(D_x^l f\right) = D_x^{m+l} f \in \mathcal{C}_{e^+}(\mathbb{R})$$

e atendendo à arbitrariedade de l e m em $\mathbb{N}$, obtemos o resultado desejado. ∎

Teorema 3.3.7 *$\mathcal{C}_{e^+,\infty}(I\!R)$ é fechado para o produto.*

Demonstração: Sejam f_1 e f_2 duas funções arbitrárias de $\mathcal{C}_{e^+,\infty}(\mathbb{R})$. É óbvio que $f_1 \cdot f_2 \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$, pois tanto f_1 como f_2 são indefinidamente diferenciáveis.

Fixemos m em $\mathbb{N}$. Recorrendo a uma das fórmulas de Leibniz para a derivação do produto temos,

$$\begin{aligned} & D_x^m \left(f_1(x) f_2(x)\right) \\ = & \sum_{l \leq m} \binom{m}{l} D_x^l f_1(x) D_x^{m-l} f_2(x). \end{aligned}$$

Como f_1 e f_2 são funções de crescimento exponencial lento, então $D_x^l f_1$ e $D_x^{m-l} f_2$ pertencem ao espaço $\mathcal{C}_{e^+}(\mathbb{R})$, o que implica pelo teorema 3.1.7 que

$$D_x^l f_1 \cdot D_x^{m-l} f_2 \in \mathcal{C}_{e^+}(\mathbb{R})$$

e dado que $\mathcal{C}_{e^+}(\mathbb{R})$ é um espaço vectorial (cf. proposição 3.1.5), obtém-se que

$$D_x^m (f_1 \cdot f_2) \in \mathcal{C}_{e^+}(\mathbb{R}), \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Da arbitrariedade de f_1 e f_2 em $\mathcal{C}_{e^+,\infty}(\mathbb{R})$, conclui-se o pretendido. ■

Terminamos esta secção com uma pequena observação que nos garante o crescimento exponencial lento das funções do espaço $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ de Schwartz.

Observação 3.3.8 *O espaço $\mathcal{S}(I\!R)$ de Schwartz está contido no espaço das funções de crescimento exponencial lento.*
Sem dúvida, se f é uma função qualquer do espaço $\mathcal{S}(I\!R)$ então, em particular, para todo o m em $I\!N$,

$$\exists c_m > 0 \quad \forall x \in I\!R \quad |D_x^m f(x)| \leq c_m,$$

e logo

$$\forall m \in I\!N \quad \exists \alpha_m = c_m > 0 \quad \exists \beta_m = 1 > 0 \quad \forall x \in I\!R \quad |D_x^m f(x)| \leq \alpha_m \; e^{\beta_m |x|}$$

ou seja, $f \in \mathcal{C}_{e^+,\infty}(I\!R)$.

Capítulo 4

Espaços de funções de decrescimento exponencial

Este capítulo dá-nos a conhecer as funções de decrescimento exponencial, merecendo especial destaque o estudo das funções de decrescimento exponencial rápido, pois é baseado neste espaço que construiremos posteriormente, por via da dualidade, o nosso espaço de distribuições generalizadas que conterá as distribuições temperadas de Schwartz.

4.1 Funções de decrescimento exponencial

4.1.1 Estrutura vectorial

Neste subcapítulo iremos centrar a nossa atenção nas funções contínuas de decrescimento exponencial, bem como em algumas das suas propriedades. Estudaremos, nomeadamente, os seus multiplicadores e a invariância para a translação.

Iniciamos com a noção de função de decrescimento exponencial:

Definição 4.1.1 *Seja $\varphi : I\!R \longrightarrow \mathbb{C}$ contínua. Diz-se que φ é de* ***decrescimento exponencial*** *se*

$$\forall k \in I\!R \quad \exists c_k > 0 \quad \forall x \in I\!R \quad |\varphi(x)| \leq c_k \; e^{-k|x|} \tag{4.1}$$

Utilizar-se-á a notação $\mathcal{C}_{e^-}(I\!R)$ para designar o conjunto formado por todas as funções contínuas de decrescimento exponencial.

Apresentamos em seguida duas condições equivalentes à condição (4.1).

Observação 4.1.2 *Note-se que a definição anterior é equivalente a*

$$\varphi \text{ é contínua e } \forall k \in I\!R \quad \lim_{|x| \to +\infty} e^{k|x|}\varphi(x) = 0.$$

Sem dúvida, se φ é uma função de decrescimento exponencial e k é um elemento arbitrário de $I\!R$, atendendo a que $\varphi \in \mathcal{C}_{e^-}(I\!R)$ resulta que existe uma constante positiva c_{k+1}, tal que, para todo o x em $I\!R$,

$$\begin{aligned} & |\varphi(x)| \leq c_{k+1}\ e^{-(k+1)|x|} \\ \Leftrightarrow\quad & \left|e^{k|x|}\varphi(x)\right| \leq c_{k+1}\ e^{-|x|}. \end{aligned}$$

Como

$$\lim_{|x|\to+\infty} c_{k+1}\ e^{-|x|} = 0,$$

então

$$\lim_{|x|\to+\infty} \left|e^{k|x|}\varphi(x)\right| = 0,$$

pelo que

$$\lim_{|x|\to+\infty} e^{k|x|}\varphi(x) = 0.$$

Reciprocamente, suponhamos $\varphi : I\!R \longrightarrow \mathbb{C}$ contínua de tal forma que

$$\forall k \in I\!R \quad \lim_{|x|\to+\infty} e^{k|x|}\varphi(x) = 0.$$

Tomemos $k \in I\!R$ qualquer e tomemos $\varepsilon > 0$ também qualquer. Por hipótese existe $\delta > 0$, tal que, para todo o x em módulo maior que $\frac{1}{\delta}$, se tem

$$|\varphi(x)| \leq \varepsilon\ e^{-k|x|}.$$

Resta-nos ver o que se passa para $|x| \leq \frac{1}{\delta}$.
Visto que, tanto φ como $e^{k|\hat{x}|}$ são contínuas em $I\!R$ então, em particular, o são em $\left[-\frac{1}{\delta}, \frac{1}{\delta}\right]$. Temos então que $e^{k|\hat{x}|}\varphi$ é uma função contínua em $\left[-\frac{1}{\delta}, \frac{1}{\delta}\right]$ donde, pelo teorema de Weierstrass, resulta que esta função tem máximo e mínimo no intervalo $\left[-\frac{1}{\delta}, \frac{1}{\delta}\right]$.
Assim, existe um número real M_k estritamente positivo, tal que

$$\begin{aligned} & \left|e^{k|x|}\varphi(x)\right| \leq M_k,\ \forall x \in \left[-\frac{1}{\delta}, \frac{1}{\delta}\right] \\ \Leftrightarrow\quad & |\varphi(x)| \leq M_k\ e^{-k|x|},\ \forall x \in \left[-\frac{1}{\delta}, \frac{1}{\delta}\right]. \end{aligned}$$

Da arbitrariedade de k em $I\!R$, resulta que:

$$\forall k \in I\!R \quad \exists c_k = \max\{\varepsilon, M_k\} > 0 \quad \forall x \in I\!R \quad |\varphi(x)| \leq c_k\ e^{-k|x|},$$

ou seja, $\varphi \in \mathcal{C}_{e^-}(I\!R)$.

Observação 4.1.3 *Repare-se que podemos dizer ainda que*

$$\varphi \in \mathcal{C}_{e^-}(I\!R) \Leftrightarrow \varphi \text{ é contínua e } \forall k_1 \in I\!R_0^+ \quad \lim_{|x|\to+\infty} e^{k_1|x|}\varphi(x) = 0.$$

Efectivamente,
($\Rightarrow$) *Imediato, pois basta apenas utilizar a observação anterior.*
($\Leftarrow$) *Seja* $\varphi : I\!R \longrightarrow \mathbb{C}$ *contínua tal que,*

$$\forall k_1 \in I\!R_0^+ \quad \lim_{|x|\to+\infty} e^{k_1|x|}\varphi(x) = 0$$

Tomemos $k \in I\!R$ *arbitrário.*
Se $k \in I\!R_0^+$ *é trivial. Pensemos então em* $k \in I\!R^-$ *logo*

$$k < k_1, \forall k_1 \in I\!R_0^+ \Rightarrow e^{k|x|}|\varphi(x)| \leq e^{k_1|x|}|\varphi(x)|$$

Temos então, por hipótese que

$$\begin{aligned} & \lim_{|x|\to+\infty} e^{k_1|x|}\varphi(x) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \lim_{|x|\to+\infty} e^{k_1|x|}|\varphi(x)| = 0, \end{aligned}$$

donde

$$\lim_{|x|\to+\infty} e^{k|x|}\varphi(x) = 0$$

e por isso, $\varphi \in \mathcal{C}_{e^-}(I\!R)$ *(ver observação 4.1.2).*

Veremos agora que $\mathcal{C}_{e^-}(\mathrm{I\!R})$ é um subconjunto de $\mathcal{C}_{e^+}(\mathrm{I\!R})$.

Observação 4.1.4 *É importante salientar que toda a função de decrescimento exponencial é de crescimento exponencial.*
Sem dúvida, sendo φ *uma função de decrescimento exponencial, tem-se, em especial, que para todo o* $\beta > 0$*, existe uma constante positiva* c_β *de tal forma que para todo o número real* x*, tem-se*

$$|\varphi(x)| \leq c_\beta \; e^{-\beta|x|} \leq c_\beta \; e^{\beta|x|},$$

isto é, φ *é de crescimento exponencial. Por outras palavras, se* $\varphi \in \mathcal{C}_{e^-}(I\!R)$ *então, em termos pouco precisos, pode dizer-se que o seu valor absoluto é menor ou igual que qualquer exponencial, logo é menor ou igual que alguma exponencial e portanto* $\varphi \in \mathcal{C}_{e^+}(I\!R)$.

Em seguida apresenta-se um exemplo de uma função de $\mathcal{C}_{e^-}(\mathbb{R})$:

Exemplo 4.1.5 *Para todo o número real positivo a, tem-se que* $e^{-a\hat{x}^2}$ *é uma função de decrescimento exponencial.*
Com efeito, sendo a e k números reais quaisquer, tal que a é positivo, vem

$$\begin{aligned} & \left(|x| - \frac{k}{2a}\right)^2 \geq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 \geq |x| \frac{k}{a} - \frac{k^2}{4a^2} \\ \Leftrightarrow \quad & e^{-ax^2} \leq e^{\frac{k^2}{4a}} \; e^{-|x|k}, \end{aligned}$$

e portanto (4.1) é verificada com $c_k = e^{\frac{k^2}{4a}}$.

Observação 4.1.6 *Repare-se que, se* $z \in \mathbb{C}$ *tal que* $\operatorname{Re}(z) > 0$, *então* $e^{-z\hat{x}^2} \in \mathcal{C}_{e^-}(\mathbb{R})$, *pois é suficiente observar que*

$$\left| e^{-zx^2} \right| = \left| e^{-\operatorname{Re}(z)x^2} \right|,$$

e recorrer ao exemplo precedente.

Façamos uma pequeno estudo das propriedades vectoriais das funções de decrescimento exponencial.

Proposição 4.1.7 $\mathcal{C}_{e^-}(\mathbb{R})$ *é um e.v. sobre o corpo dos complexos.*

Demonstração: Dado que a função identicamente nula é um elemento de $\mathcal{C}_{e^-}(\mathbb{R})$, então este espaço é não vazio.

Suponhamos que φ_1 e φ_2 são funções arbitrárias de decrescimento exponencial e seja k um número real qualquer, logo

$$\exists c_{1_k}, c_{2_k} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad |\varphi_1(x)| \leq c_{1_k} \; \mathrm{e}^{-k|x|} \;\wedge\; |\varphi_2(x)| \leq c_{2_k} \; \mathrm{e}^{-k|x|} \tag{4.2}$$

Tomemos $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{C}$ arbitrários. Se $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, então $\gamma_1\varphi_1 + \gamma_2\varphi_2$ é a função identicamente nula, que já vimos ser de decrescimento exponencial. Para

$$\gamma_1 \neq 0 \vee \gamma_2 \neq 0,$$

tem-se por (4.2)

$$\begin{aligned} & |(\gamma_1\varphi_1 + \gamma_2\varphi_2)(x)| \\ \leq \quad & (|\gamma_1| \, c_{1_k} + |\gamma_2| \, c_{2_k}) \; \mathrm{e}^{-k|x|}, \end{aligned}$$

o que implica que

$$\forall k \in \mathbb{R} \quad \exists c_k = |\gamma_1| \, c_{1_k} + |\gamma_2| \, c_{2_k} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad |(\gamma_1\varphi_1 + \gamma_2\varphi_2)(x)| \leq c_k \; \mathrm{e}^{-k|x|},$$

isto é, o conjunto das funções de decrescimento exponencial é um subespaço vectorial do conjunto das funções contínuas em $\mathbb{R}$. ■

Observação 4.1.8 *Evidentemente que se* $\varphi \in \mathcal{C}_{e^-}(I\!R)$*, então* $\varphi(-\hat{x})$ *ainda é uma função de decrescimento exponencial.*

Proposição 4.1.9 $\mathcal{C}_{e^-}(I\!R)$ *é fechado para a translação.*

Demonstração: Sejam $\varphi \in \mathcal{C}_{e^-}(\mathbb{R})$ e $a \in \mathbb{R}$ arbitrários. Como φ é contínua em $\mathbb{R}$, então $\tau_a\varphi = \varphi(\hat{x} - a)$ também o é.

Consideremos agora, $k \in \mathbb{R}$ qualquer.

Ora,

$$\begin{aligned} & \left| e^{k|x|}\tau_a(\varphi(x)) \right| \\ \leq \; & e^{|k||x-a|}e^{|k||a|} \left|\varphi(x-a)\right|. \end{aligned}$$

Seja $y = x - a$. Temos que

$$\left| e^{k|x|}\tau_a(\varphi(x)) \right| \leq e^{|k||a|}e^{|k||y|} \left|\varphi(y)\right|.$$

Atendendo a que $\varphi \in \mathcal{C}_{e^-}(\mathbb{R})$, pela observação 4.1.2

$$\lim_{|y|\to+\infty} e^{|k||a|}e^{|k||y|} \left|\varphi(y)\right| = 0$$

e, por conseguinte,

$$\lim_{|x|\to+\infty} e^{k|x|} \left|\tau_a(\varphi(x))\right| = 0,$$

ou seja,

$$\forall k \in \mathbb{R} \qquad \lim_{|x|\to+\infty} e^{k|x|}\tau_a(\varphi(x)) = 0,$$

o que, pela observação 4.1.2, prova que $\mathcal{C}_{e^-}(\mathbb{R})$ é invariante por translação. ∎

O resultado que se segue prova que o produto de uma função de decrescimento exponencial por uma de crescimento exponencial ainda é uma função de decrescimento exponencial.

Teorema 4.1.10 *O espaço das funções de decrescimento exponencial é fechado para o produto por funções contínuas de crescimento exponencial.*

Demonstração: Seja $f \in \mathcal{C}_{e^+}(\mathbb{R})$ qualquer. Logo

$$\exists \alpha, \beta > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad |f(x)| \leq \alpha\, e^{\beta|x|} \tag{4.3}$$

Consideremos $\varphi \in \mathcal{C}_{e^-}(\mathbb{R})$ arbitrária. Temos que $f \cdot \varphi$ é contínua em $\mathbb{R}$, por ser o produto de funções contínuas.

Fixemos k em $\mathbb{R}$.

Ora,

$$\begin{aligned}
&\left|\mathrm{e}^{k|x|} f(x)\,\varphi(x)\right| \\
\underset{\text{por }(4.3)}{\leq}\quad & \mathrm{e}^{k|x|}\alpha\ \mathrm{e}^{\beta|x|}\left|\varphi(x)\right|.
\end{aligned}$$

Tomando $k_1 = k + \beta \in \mathbb{R}$, resulta

$$\begin{aligned}
&\lim_{|x|\to+\infty}\left|\mathrm{e}^{k|x|} f(x)\,\varphi(x)\right| \\
\leq\ & \alpha \lim_{|x|\to+\infty} \mathrm{e}^{k_1|x|}\left|\varphi(x)\right| \\
=\ & 0.
\end{aligned}$$

Note-se que, sendo φ uma função de $\mathcal{C}_{e^-}(\mathbb{R})$ e k_1 um elemento de $\mathbb{R}$, a legitimidade do último passo é assim garantida.

Portanto

$$\lim_{|x|\to+\infty} \mathrm{e}^{k|x|} f(x)\,\varphi(x) = 0,$$

donde, para todo o φ em $\mathcal{C}_{e^-}(\mathbb{R})$ e para todo o f em $\mathcal{C}_{e^+}(\mathbb{R})$, tem-se $f\cdot\varphi \in \mathcal{C}_{e^-}(\mathbb{R})$. ■

Corolário 4.1.11 *$\mathcal{C}_{e^-}(\mathbb{R})$ é fechado para o produto.*

Demonstração: Sejam φ_1 e φ_2 funções de $\mathcal{C}_{e^-}(\mathbb{R})$ arbitrárias. De acordo com a observação 4.1.4 pode-se afirmar que $\varphi_2 \in \mathcal{C}_{e^+}(\mathbb{R})$ e logo, pelo teorema 4.1.10, obtém-se que $\varphi_1\cdot\varphi_2$ é uma função de decrescimento exponencial. ■

Atendendo ao teorema 4.1.10 e aos exemplos 3.1.2, 3.1.3 e 3.1.4 podemos, em particular, asseverar que as exponenciais, os polinómios e as funções contínuas e limitadas são multiplicadores de $\mathcal{C}_{e^-}(\mathbb{R})$. Estes factos serão resumidos nos três corolários seguintes:

Corolário 4.1.12 *Se $\varphi \in \mathcal{C}_{e^-}(\mathbb{R})$ então, para todo o z em $\mathbb{C}$, $e^{z\hat{x}}\cdot\varphi \in \mathcal{C}_{e^-}(\mathbb{R})$.*

Corolário 4.1.13 *O espaço das funções contínuas de decrescimento exponencial é fechado para o produto por polinómios.*

Corolário 4.1.14 *$\mathcal{C}_{e^-}(\mathbb{R})$ é fechado para o produto por funções contínuas e limitadas.*

4.1.2 Transformação de Fourier

Vamos encabeçar este subcapítulo com a definição do operador transformada de Fourier $\mathcal{F}$ no espaço $\mathcal{C}_{e^-}(\mathbb{R})$. Tal definição é possível, pois toda a função contínua de decrescimento exponencial é integrável em $\mathbb{R}$, ou seja, pertence ao espaço $L^1(\mathbb{R})$.

Assim, podemos pensar na restrição a $\mathcal{C}_{e^-}(\mathbb{R})$ do operador $\mathcal{F}$ definido de $L^1(\mathbb{R})$ em $L^\infty(\mathbb{R})$, obtendo o seguinte operador:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \mathcal{C}_{e^-}(\mathbb{R}) &\longrightarrow L^\infty(\mathbb{R}) \\ \varphi &\longmapsto \mathcal{F}\varphi(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-ix\xi}\varphi(x)\,dx. \end{aligned}$$

Segue-se um resultado de elevada importância, que nos garante a analiticidade da transformação de Fourier de funções de decrescimento exponencial.

Teorema 4.1.15 *Se $\varphi \in \mathcal{C}_{e^-}(\mathbb{R})$, então $\mathcal{F}\varphi$ é prolongável a $\mathbb{C}$ como função inteira.*

Demonstração: Tomemos φ uma função contínua em $\mathbb{R}$ de decrescimento exponencial.

Consideremos a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} F : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto F(z) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-ixz}\varphi(x)\,dx \end{aligned} \tag{4.4}$$

Para obtermos o pretendido, é suficiente mostrar que F é inteira e que prolonga $\mathcal{F}\varphi$.

É evidente que F é um prolongamento de $\mathcal{F}\varphi$, pois basta ter em consideração a definição de F (cf. (4.4)).

Vejamos em primeiro lugar que F está bem definida. Seja $z = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$ quaisquer.

Sem dúvida,

$$\left|\mathrm{e}^{-ixz}\varphi(x)\right| = \mathrm{e}^{xb}\left|\varphi(x)\right| \tag{4.5}$$

Como φ é um elemento de $\mathcal{C}_{e^-}(\mathbb{R})$, então por definição de $\mathcal{C}_{e^-}(\mathbb{R})$ (cf. (4.1)), e em particular para $k = |b| + 1 \in \mathbb{R}$, temos

$$\exists c = c_{|b|+1} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad |\varphi(x)| \leq c\ \mathrm{e}^{-(|b|+1)|x|}.$$

Atendendo à igualdade (4.5) resulta que

$$\begin{aligned} &\left|\mathrm{e}^{-ixz}\varphi(x)\right| \\ \leq\ & \mathrm{e}^{|x||b|}c\ \mathrm{e}^{-(|b|+1)|x|} \\ =\ & c\ \mathrm{e}^{-|x|} \end{aligned} \tag{4.6}$$

e dado que

$$\int_{\mathbb{R}} c\ \mathrm{e}^{-|x|}dx = 2c,$$

podemos asseverar que $\int_{\mathbb{R}} \left|\mathrm{e}^{-ixz}\varphi(x)\right| dx$ é convergente e finalmente que $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-ixz}\varphi(x)\,dx$ é absolutamente convergente.

Provemos agora que F é inteira. Para tal, vejamos que $F'(z)$ existe, para todo o z em $\mathbb{C}$. Seja $z \in \mathbb{C}$ arbitrário.

$$\begin{array}{rl} & \left|\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\mathrm{e}^{-ixz}\varphi(x)\right)\right| \\ = & \left|-ix\ \mathrm{e}^{-ixz}\varphi(x)\right| \\ \underset{\text{por (4.6)}}{\leq} & |x|\, c\ \mathrm{e}^{-|x|} \end{array} \tag{4.7}$$

mas

$$\int_{\mathbb{R}} c\,|x|\ \mathrm{e}^{-|x|}dx = 2c \tag{4.8}$$

pelo que

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial z}\left(\mathrm{e}^{-ixz}\varphi(x)\right)dx$$

converge absolutamente.

Para obtermos o pretendido, basta verificarmos que

$$F'(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial z}\left(\mathrm{e}^{-ixz}\varphi(x)\right)dx,$$

ou seja, mostrarmos que[1]:

- $\forall z \in \mathbb{C}$

  $$\mathrm{e}^{-i\hat{x}z}\varphi \in L^1(\mathbb{R});$$

- $\forall z \in \mathbb{C}$

  $$\frac{\partial}{\partial z}\left(\mathrm{e}^{-ixz}\varphi(x)\right)$$

  existe para quase todo o x em $\mathbb{R}$ e é contínua como função da variável z;

- $\exists g \in L^1(\mathbb{R})$ tal que,

  $$\left|\frac{\partial}{\partial z}\left(\mathrm{e}^{-ixz}\varphi(x)\right)\right| \leq g(x)$$

  para quase todo o x em $\mathbb{R}$ e para qualquer z em $\mathbb{C}$.

[1] Com base no teorema da convergência dominada.

Efectivamente, podemos notar que a primeira condição já foi demonstrada quando vimos que F estava bem definida, pois provámos que

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-ixz}\varphi\left(x\right)dx$$

é absolutamente convergente, o que também significa que, para todo o z em $\mathbb{C}$

$$\mathrm{e}^{-i\hat{x}z}\varphi \in L^1\left(\mathbb{R}\right).$$

A segunda condição é evidente, pois

$$\forall z\in\mathbb{C} \quad \forall x\in\mathbb{R} \quad \frac{\partial}{\partial z}\left(\mathrm{e}^{-ixz}\varphi\left(x\right)\right) = -ix\ \mathrm{e}^{-ixz}\varphi\left(x\right)$$

e sem dúvida alguma podemos dizer que

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\mathrm{e}^{-ixz}\varphi\left(x\right)\right)$$

é contínua como função de z.

No que diz respeito à terceira e última condição necessitamos apenas de relembrar a desigualdade (4.7), isto é,

$$\forall z\in\mathbb{C} \quad \forall x\in\mathbb{R} \quad \left|\frac{\partial}{\partial z}\left(\mathrm{e}^{-ixz}\varphi\left(x\right)\right)\right| \leq |x|\, c\ \mathrm{e}^{-|x|}$$

e concluirmos que com $g\left(x\right)=|x|\,c\ \mathrm{e}^{-|x|}$ temos $g\in L^1\left(\mathbb{R}\right)$ (ver (4.8)).

Acabamos assim de provar que

$$\frac{d}{dz}\left(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-ixz}\varphi\left(x\right)dx\right) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial z}\left(\mathrm{e}^{-ixz}\varphi\left(x\right)\right)dx$$

e dado que o segundo integral converge absolutamente, é-nos permitido concluir que

$$\forall z\in\mathbb{C} \quad \exists F'\left(z\right),$$

o que significa finalmente que F é inteira. ■

Corolário 4.1.16 *Se $\varphi\in\mathcal{C}_{e^-}\left(\mathbb{R}\right)$, então $\mathcal{F}_{-1}\varphi$ é prolongável a $\mathbb{C}$ como função inteira.*

Demonstração: Recorde-se que

$$\mathcal{F}_{-1}\varphi\left(\xi\right)=\mathcal{F}\varphi\left(-\xi\right)=\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{ix\xi}\varphi\left(x\right)dx,$$

pelo que, recorrendo ao teorema 4.1.15 e à sua demonstração, é imediato afirmar que $\mathcal{F}_{-1}\varphi$ é prolongável a $\mathbb{C}$ como função inteira. ■

4.2 O espaço $\mathcal{G}_a(\mathbb{R})$

Introduziremos neste parágrafo o espaço $\mathcal{G}_a(\mathbb{R})$, com a um número real positivo. Provaremos algumas das suas propriedades vectoriais, entre as quais destacamos, no caso de a ser igual a $\frac{1}{2}$, a inclusão densa deste espaço em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Posteriormente, como teremos oportunidade de confirmar, este facto será muito útil na demonstração da densidade em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dos diversos espaços de funções teste que iremos construir.

Definição 4.2.1 *Seja $a \in \mathbb{R}^+$ qualquer. Denotaremos o conjunto das funções complexas ψ contínuas em $\mathbb{R}$, tal que $\psi = p \cdot \exp(-a\hat{x}^2)$ com $p \in \mathcal{P}$, por $\mathcal{G}_a(\mathbb{R})$, isto é,*

$$\mathcal{G}_a(\mathbb{R}) = \left\{ \psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \mid \psi \text{ é contínua} \wedge \psi(x) = p(x) \ e^{-ax^2}, p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \right\} \tag{4.9}$$

Para cada n natural, consideremos

$$\psi_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C},$$

tal que

$$\psi_n(x) = \left(2^n n! \sqrt{\pi}\right)^{-1/2} \ \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x) \tag{4.10}$$

onde H_n é o **polinómio de Hermite de ordem** n, isto é,

$$H_n(x) = (-1)^n \ \mathrm{e}^{x^2} D_x^n \left(\mathrm{e}^{-x^2}\right), \forall n \in \mathbb{N} \tag{4.11}$$

Habitualmente dizemos que ψ_n é a **função de Hermite de ordem** n. Designemos por $\mathcal{H}$ o conjunto das funções de Hermite.

Exemplo 4.2.2 *As funções de Hermite pertencem a $\mathcal{G}_{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$.*
Efectivamente, basta recordar que as funções de Hermite são, a menos de uma constante, o produto de $\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$ *pelos polinómios de Hermite (cf. (4.10) e (4.11)).*

Verifiquemos que $\mathcal{G}_a(\mathbb{R})$ é um e.v. fechado para a derivação.

Proposição 4.2.3 *$\mathcal{G}_a(\mathbb{R})$ é um e.v. sobre $\mathbb{C}$.*

Demonstração: Seja $a > 0$ arbitrário. Naturalmente que a função $\psi \equiv 0$ pertence a $\mathcal{G}_a(\mathbb{R})$, pois basta considerar o polinómio nulo, por isso o conjunto em questão é não vazio.

Tomemos ψ_1 e ψ_2 funções quaisquer de $\mathcal{G}_a(\mathbb{R})$. Existem então, p_1 e p_2 em $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ tais que

$$\psi_1(x) = p_1(x)\ \mathrm{e}^{-ax^2} \wedge \psi_2(x) = p_2(x)\ \mathrm{e}^{-ax^2} \tag{4.12}$$

Sejam $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{C}$ também arbitrários.

Ora,

$$\begin{aligned} & (\gamma_1\psi_1 + \gamma_2\psi_2)(x) = \\ \underset{\text{por (4.12)}}{=} & (\gamma_1 p_1(x) + \gamma_2 p_2(x))\ \mathrm{e}^{-ax^2} \\ = & \ p(x)\ \mathrm{e}^{-ax^2}, \end{aligned}$$

com $p = \gamma_1 p_1 + \gamma_2 p_2 \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, o que significa que $\gamma_1\psi_1 + \gamma_2\psi_2$ é, como esperávamos, uma função de $\mathcal{G}_a(\mathbb{R})$. Acabámos de provar que para todo o $a > 0$, $\mathcal{G}_a(\mathbb{R})$ é um subespaço vectorial do conjunto das funções contínuas em $\mathbb{R}$. ■

Observação 4.2.4 *$\mathcal{G}_a(\mathbb{R})$ não é fechado para as translações, porque se $b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ e $\psi \in \mathcal{G}_a(\mathbb{R})$, então*

$$\begin{aligned} \tau_b(\psi(x)) &= p(x-b)\ e^{-a(x-b)^2} = p(x-b)\ e^{-a\left(x^2-2xb+b^2\right)} \\ &= q(x-b)\ e^{-a\left(x^2-2xb\right)},\ \text{com } q(x-b) = p(x-b)\ e^{-ab^2}. \end{aligned}$$

Mas

$$q(x-b)\ e^{-a\left(x^2-2xb\right)} \notin \mathcal{G}_a(\mathbb{R}).$$

De igual modo, podemos concluir que o subespaço gerado pela união dos $\mathcal{G}_a(\mathbb{R})$, ou seja, o span $\left(\bigcup_{a>0} \mathcal{G}_a(\mathbb{R})\right)$*, não é invariante para as translações.*

No entanto, prova-se que:

Proposição 4.2.5 *$\mathcal{G}_a(\mathbb{R})$ é fechado para a derivação.*

Demonstração: Consideremos a em $\mathbb{R}^+$ e p em $\mathcal{P}$ arbitrários. Seja então, $\psi = p\cdot\ \mathrm{e}^{-a\hat{x}^2}$. Provemos o pretendido pelo método de indução finita.

Com efeito,

$$m = 0 \Rightarrow D_x^0\left(p(x)\ \mathrm{e}^{-ax^2}\right) = p(x)\ \mathrm{e}^{-ax^2}.$$

Suponhamos que para m em $\mathbb{N}$, a derivada de ordem m de ψ escreve-se na forma q_m $\mathrm{e}^{-a\hat{x}^2}$, com $q_m \in \mathcal{P}$. Obviamente que esta notação deve-se ao facto de que o polinómio q_m depende da ordem de derivação, logo $p \equiv q_0$.

Hipótese de indução:

$$D_x^m\left(p(x)\ \mathrm{e}^{-ax^2}\right)=q_m(x)\ \mathrm{e}^{-ax^2},\text{ onde } q_m\in\mathcal{P} \tag{4.13}$$

Tese de indução:

$$D_x^{m+1}\left(p(x)\ \mathrm{e}^{-ax^2}\right)=q_{m+1}(x)\ \mathrm{e}^{-ax^2},\text{ onde } q_{m+1}\in\mathcal{P}.$$

Ora,

$$\begin{aligned}
& D_x^{m+1}\left(p(x)\ \mathrm{e}^{-ax^2}\right)\\
\underset{\text{por (4.13)}}{=}\ & D_x\left(q_m(x)\ \mathrm{e}^{-ax^2}\right)\\
=\ & \left(D_xq_m(x)-2axq_m(x)\right)\ \mathrm{e}^{-ax^2}\\
=\ & q_{m+1}(x)\ \mathrm{e}^{-ax^2},\text{ onde } q_{m+1}=D_xq_m-2a\hat{x}q_m\in\mathcal{P}.
\end{aligned}$$

Por conseguinte, para todo o ψ em $\mathcal{G}_a(\mathrm{I\!R})$ e para todo o m natural, tem-se $D_x^m\psi$ em $\mathcal{G}_a(\mathrm{I\!R})$. ■

Mostremos agora que toda a função de $\mathcal{G}_a(\mathrm{I\!R})$ é indefinidamente diferenciável de decrescimento polinomial rápido, isto é, é uma função teste de Schwartz.

Proposição 4.2.6

$$\mathcal{G}_a(\mathrm{I\!R})\subset\mathcal{S}(\mathrm{I\!R}).$$

Demonstração: Seja $a\in\mathrm{I\!R}^+$ arbitrário. É óbvio que $\mathcal{G}_a(\mathrm{I\!R})$ é um subconjunto de $\mathcal{S}(\mathrm{I\!R})$, pois sendo ψ uma função de $\mathcal{G}_a(\mathrm{I\!R})$ é imediato afirmar que ψ é indefinidamente diferenciável em $\mathrm{I\!R}$ e, para todo o l e m em $\mathrm{I\!N}$,

$$\begin{aligned}
& \lim_{|x|\to+\infty}\left|x^lD_x^m\psi(x)\right|\\
=\ & \lim_{|x|\to+\infty}\left|x^lD_x^m\left(p(x)\ \mathrm{e}^{-ax^2}\right)\right|\\
\underset{\text{proposição. 4.2.5}}{=}\ & \lim_{|x|\to+\infty}\left|x^lq(x)\ \mathrm{e}^{-ax^2}\right|\\
=\ & 0.
\end{aligned}$$

■

Passemos a expôr o resultado central desta secção, ou seja, toda a função indefinidamente diferenciável de decrescimento polinomial rápido pode ser aproximada por uma sucessão de funções de $\mathcal{G}_{\frac{1}{2}}(\mathrm{I\!R})$.

Teorema 4.2.7

$$\mathcal{G}_{\frac{1}{2}}(I\!\!R) \overset{d}{\subset} \mathcal{S}(I\!\!R).$$

Demonstração: Vimos na proposição 4.2.6 que

$$\mathcal{G}_{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Consideremos agora o espaço gerado pelas funções de Hermite e denotemo-lo por $\operatorname{span}\mathcal{H}$. Por um lado, sabemos que o $\operatorname{span}\mathcal{H}$ é denso[2] em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ (ver o technical report do Zemanian [Zem64]). Por outro lado, o espaço $\mathcal{G}_{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$ contém o $\operatorname{span}\mathcal{H}$ (cf. exemplo 4.2.2), resultando imediatamente o pretendido, ou seja, a densidade de $\mathcal{G}_{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. ■

Observação 4.2.8 *É importante realçar que, pelo facto de $\mathcal{G}_{\frac{1}{2}}(I\!\!R)$ ser denso em $\mathcal{S}(I\!\!R)$ (cf. teorema 4.2.7) poderíamos perguntar-nos o porquê de não escolher para espaço de funções teste o espaço $\mathcal{G}_{\frac{1}{2}}(I\!\!R)$. Ora, a resposta a esta questão é evidente e é dada pela observação 4.2.4, que nos diz que, para todo a em $I\!\!R^{+}$, $\mathcal{G}_a(I\!\!R)$ não é fechado para a translação real. Consequentemente, estaríamos a pôr de parte um dos principais objectivos desta tese.*

Uma propriedade que merece a nossa consideração é a invariância do espaço $\mathcal{G}_{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$ para a transformação de Fourier. A proposição seguinte não só demonstra tal facto, como também estabelece o que acontece no caso mais geral.

Proposição 4.2.9 *Se $\psi \in \mathcal{G}_a(I\!\!R)$, então $\mathcal{F}\psi \in \mathcal{G}_{\frac{1}{4a}}(I\!\!R)$.*

Demonstração: Tomemos $\psi \in \mathcal{G}_a(\mathbb{R})$ arbitrário. Pretendemos mostrar que

$$\mathcal{F}\left(p\ \mathrm{e}^{-a\hat{x}^2}\right) = s\ \mathrm{e}^{-\frac{\hat{\xi}^2}{4a}}, \text{ onde } s \in \mathcal{P}.$$

Suponhamos que p tem grau n, logo

$$p(x) = \sum_{j \leq n} c_j x^j,$$

com $c_j \in \mathbb{C}$, para todo o j em $\{0, \ldots, n\}$.

É importante salientar que $\mathcal{G}_a(\mathbb{R})$ é um subconjunto do espaço de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ (cf. proposição 4.2.6) e consequentemente de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

[2] A demonstração da densidade do $\operatorname{span}\mathcal{H}$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ é difícil de encontrar na literatura, por isso, optámos por incluí-la neste trabalho. Uma vez que esta prova requer cálculos longos e técnicos, e para não provocar uma quebra conceptual na leitura do texto, pareceu-nos mais razoável apresentá-la no apêndice.

Então, pelas propriedades da transformada de Fourier em $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ (ver proposição 2.2.7), sabemos que

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}\left(p\ \mathrm{e}^{-a\hat{x}^2}\right)\\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\mathcal{F}p * \mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{-a\hat{x}^2}\right)\right)\\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\mathcal{F}\left(\sum_{j\leq n} c_j \hat{x}^j\right) * \sqrt{\frac{\pi}{a}}\ \mathrm{e}^{-\frac{\hat{\xi}^2}{4a}}\right).
\end{aligned}$$

Mas $\mathcal{F}$ é linear, pelo que

$$\mathcal{F}\left(\sum_{j\leq n} c_j \hat{x}^j\right) = \sum_{j\leq n} c_j \mathcal{F}\left(\hat{x}^j\right)$$

e como

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left(\hat{x}^j\right) &= i^j \mathcal{F}\left[(-i\hat{x})^j \cdot 1\right]\\
&= i^j D_\xi^j \left[\mathcal{F}(1)\right]\\
&= i^j D_\xi^j (2\pi\delta),
\end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}\left(p\ \mathrm{e}^{-a\hat{x}^2}\right)\\
&= \sum_{j\leq n} c_j\ i^j \left(D_\xi^j \delta * \sqrt{\frac{\pi}{a}}\ \mathrm{e}^{-\frac{\hat{\xi}^2}{4a}}\right)\\
&= \sum_{j\leq n} c_j\ i^j \left(\delta * D_\xi^j \left(\sqrt{\frac{\pi}{a}}\ \mathrm{e}^{-\frac{\hat{\xi}^2}{4a}}\right)\right)\\
&= \mathrm{e}^{-\frac{\hat{\xi}^2}{4a}} \sum_{j\leq n} \sqrt{\frac{\pi}{a}} c_j\ i^j q\left(\hat{\xi}\right)\\
&= \mathrm{e}^{-\frac{\hat{\xi}^2}{4a}} s\left(\hat{\xi}\right),
\end{aligned}$$

onde $s = \sum_{j\leq n} \sqrt{\frac{\pi}{a}} c_j\ i^j q \in \mathcal{P}$. ■

No resultado que se segue veremos que as funções de $\mathcal{G}_a(\mathbb{R})$ são de decrescimento exponencial.

Proposição 4.2.10 *Para todo o $a \in \mathbb{R}^+$, tem-se que*

$$\mathcal{G}_a(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}_{e^-}(\mathbb{R}).$$

Demonstração: Seja ψ uma função qualquer de $\mathcal{G}_a(\mathrm{I\!R})$. Então $\psi = p\ \mathrm{e}^{-a\hat{x}^2}$ com $p \in \mathcal{P}(\mathrm{I\!R})$ e $a \in \mathrm{I\!R}^+$.

É imediato dizer que $\psi \in \mathcal{C}_{e^-}(\mathrm{I\!R})$, pois basta ter em consideração o teorema 4.1.10 e os factos de que $\mathrm{e}^{-a\hat{x}^2}$ é uma função de decrescimento exponencial (cf. exemplo 4.1.5) e p é uma função de crescimento exponencial (cf. exemplo 3.1.3). ■

4.3 Funções de decrescimento exponencial rápido

4.3.1 Estrutura vectorial

Elaboraremos nesta secção uma análise semelhante à realizada anteriormente, mas agora para as funções de $\mathcal{E}(\mathrm{I\!R})$ e de decrescimento exponencial rápido, onde mostraremos que estas são fechadas para a translação, para a derivação e também para o produto por funções de crescimento exponencial lento. Veremos ainda que este espaço contém o espaço $\mathcal{G}_a(\mathrm{I\!R})$ e consequentemente está contido densamente no espaço $\mathcal{S}(\mathrm{I\!R})$ de Schwartz.

Passamos a apresentar o conceito de função de decrescimento exponencial rápido:

Definição 4.3.1 *Dizemos que uma função φ complexa e de classe $\mathcal{C}^\infty$ em $I\!R$ é de **decrescimento exponencial rápido** se todas as derivadas de φ forem de decrescimento exponencial, ou seja, se para todo m em $I\!N$, $D_x^m\varphi \in \mathcal{C}_{e^-}(I\!R)$, isto é,*

$$\forall m \in I\!N \quad \forall k \in I\!R \quad \exists c_{m,k} > 0 \quad \forall x \in I\!R \quad |D_x^m\varphi(x)| \leq c_{m,k}\ e^{-k|x|} \tag{4.14}$$

$\mathcal{C}_{e^-,\infty}(I\!R)$ denotará o conjunto de todas as funções de decrescimento exponencial rápido.

Pela observação 4.1.2 podemos ainda afirmar que

$$\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathrm{I\!R}) = \left\{\varphi : \mathrm{I\!R} \longrightarrow \mathbb{C} \mid \varphi \in \mathcal{E}(\mathrm{I\!R}) \wedge \forall m \in \mathrm{I\!N} \quad \forall k \in \mathrm{I\!R} \quad \lim_{|x|\to+\infty} \mathrm{e}^{k|x|} D_x^m\varphi(x) = 0\right\} \tag{4.15}$$

Observação 4.3.2 *Ressalte-se que toda a função de decrescimento exponencial rápido tem crescimento exponencial lento.*
Se $\varphi \in \mathcal{C}_{e^-,\infty}(I\!R)$ então, em particular, para qualquer inteiro não negativo m,

$$D_x^m\varphi \in \mathcal{C}_{e^-}(I\!R),$$

o que, recorrendo à observação 4.1.4, nos leva a afirmar que

$$\forall m \in I\!N \quad D_x^m\varphi \in \mathcal{C}_{e^+}(I\!R),$$

ou seja, $\varphi \in \mathcal{C}_{e^+,\infty}(I\!R)$.

Segue-se o estudo das propriedades vectoriais das funções de decrescimento exponencial rápido.

Proposição 4.3.3 *O conjunto das funções de decrescimento exponencial rápido é um e.v. sobre* $\mathbb{C}$.

Demonstração: Repare-se que $\varphi \equiv 0 \in \mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$ e por isso $\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$ é um conjunto não vazio.

Consideremos φ_1 e φ_2 duas funções arbitrárias de decrescimento exponencial rápido e sejam γ_1 e γ_2 complexos quaisquer não simultaneamente nulos. Para todo o m em $\mathbb{N}$ e k em $\mathbb{R}$, temos

$$D_x^m(\gamma_1\varphi_1 + \gamma_2\varphi_2) = \gamma_1 D_x^m\varphi_1 + \gamma_2 D_x^m\varphi_2.$$

Como $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$, então

$$D_x^m\varphi_1 \in \mathcal{C}_{e^-}(\mathbb{R}) \wedge D_x^m\varphi_2 \in \mathcal{C}_{e^-}(\mathbb{R}),$$

donde

$$\gamma_1 D_x^m\varphi_1 + \gamma_2 D_x^m\varphi_2 \in \mathcal{C}_{e^-}(\mathbb{R}),$$

pois $\mathcal{C}_{e^-}(\mathbb{R})$ é um e.v. (cf. proposição 4.1.7).

Assim

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad D_x^m(\gamma_1\varphi_1 + \gamma_2\varphi_2) \in \mathcal{C}_{e^-}(\mathbb{R}),$$

permitindo-nos afirmar que $\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$ é um subespaço vectorial de $\mathcal{C}_{e^-}(\mathbb{R})$. ■

Vejamos, agora, que $\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$ é denso em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Para tal, provemos, em primeiro lugar, que $\mathcal{G}_a(\mathbb{R})$ é um subconjunto do espaço das funções de decrescimento exponencial rápido.

Proposição 4.3.4 *Para todo o* $a > 0$ *tem-se*

$$\mathcal{G}_a(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R}).$$

Demonstração: Seja $\psi \in \mathcal{G}_a(\mathbb{R})$ qualquer. Temos $\psi = p \cdot \mathrm{e}^{-a\hat{x}^2} \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$, porque é o produto de duas funções indefinidamente diferenciáveis. Tomemos ao arbítrio um número natural m.

De acordo com as proposições 4.2.5 e 4.2.10 podemos, respectivamente, ver que

$$D_x^m\left(p(x)\ \mathrm{e}^{-ax^2}\right) = q(x)\ \mathrm{e}^{-ax^2}, \text{ onde } q \in \mathcal{P}$$

e

$$q \cdot \mathrm{e}^{-a\hat{x}^2} \in \mathcal{C}_{e^-}(\mathbb{R}).$$

Da arbitrariedade de m em $\mathbb{N}$ resulta que $\psi \in \mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$. ■

Proposição 4.3.5 *O espaço vectorial* $\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathit{I\!R})$ *é sequencialmente denso em* $\mathcal{S}(\mathit{I\!R})$*, isto é,*

$$\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathit{I\!R}) \overset{d}{\subset} \mathcal{S}(\mathit{I\!R}).$$

Demonstração: Mostremos em primeiro lugar que $\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Seja $\varphi \in \mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$ arbitrário; então, em particular, φ é de classe $\mathcal{C}^\infty$ em $\mathbb{R}$.

Consideremos agora $l, m \in \mathbb{N}$ quaisquer

$$\begin{aligned} & \left|x^l D_x^m \varphi(x)\right| \\ = & \left|x^l\right| \left|D_x^m \varphi(x)\right| \\ \leq & \left(\mathrm{e}^{|x|}\right)^l \left|D_x^m \varphi(x)\right| \\ = & \left|\mathrm{e}^{l|x|} D_x^m \varphi(x)\right| \end{aligned}$$

Por outro lado, sabemos que $\varphi \in \mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$, logo

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad \forall k \in \mathbb{R} \qquad \lim_{|x| \to +\infty} \mathrm{e}^{k|x|} D_x^m \varphi(x) = 0.$$

Em particular para $k = l \in \mathbb{R}$, tem-se que

$$\lim_{|x| \to +\infty} \left|\mathrm{e}^{l|x|} D_x^m \varphi(x)\right| = 0$$

e como

$$\left|x^l D_x^m \varphi(x)\right| \leq \left|\mathrm{e}^{l|x|} D_x^m \varphi(x)\right|$$

resulta finalmente que

$$\lim_{|x| \to +\infty} \left|x^l D_x^m \varphi(x)\right| = 0,$$

isto é, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Resta-nos provar que $\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$ é sequencialmente denso em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Mas isso é evidente, pois basta ter em consideração que as funções de $\mathcal{G}_{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$, para além de serem densas em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ (cf. teorema 4.2.7), são também de decrescimento exponencial rápido, ou seja, $\mathcal{G}_{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$ (cf. proposição 4.3.4). ∎

Vejamos que os operadores definidos no espaço das funções de decrescimento exponencial mantêm-se em $\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$ e, como é natural, obtemos adicionalmente o operador de derivação.

Observação 4.3.6 $\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathit{I\!R})$ *é fechado para a mudança de variável* [3]

$$x \longmapsto -x.$$

[3] Note-se que o espaço $\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$ também é fechado para mudanças de variável do tipo

$$x \longmapsto ax + b,$$

com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Sem dúvida, se φ for uma função de decrescimento exponencial rápido, então para qualquer m em $I\!N$, $D_x^m \varphi \in \mathcal{C}_{e^-}(I\!R)$ e logo pela observação 4.1.8 temos que, para todo o natural m, $D_x^m \varphi(-\hat{x}) \in \mathcal{C}_{e^-}(I\!R)$, isto é, $\varphi(-\hat{x}) \in \mathcal{C}_{e^-,\infty}(I\!R)$.

Proposição 4.3.7 *$\mathcal{C}_{e^-,\infty}(I\!R)$ é invariante por translação.*

Demonstração: Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $\varphi \in \mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$ arbitrários. Tem-se que φ é indefinidamente diferenciável em $\mathbb{R}$ e por isso $\tau_a \varphi$ também o é.

Decorre de φ ser uma função de decrescimento exponencial rápido que

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad D_x^m \varphi \in \mathcal{C}_{e^-}(\mathbb{R}).$$

Recorrendo à proposição 4.1.9 vem imediatamente que, para todo o m em $\mathbb{N}$,

$$\tau_a(D_x^m \varphi) \in \mathcal{C}_{e^-}(\mathbb{R}).$$

Mas,

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad \tau_a(D_x^m \varphi) = D_x^m(\tau_a \varphi),$$

por outras palavras, a translatada da derivada é a derivada da translatada, consequentemente

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad D_x^m(\tau_a \varphi) \in \mathcal{C}_{e^-}(\mathbb{R}).$$

■

Proposição 4.3.8 *$\mathcal{C}_{e^-,\infty}(I\!R)$ é fechado para a derivação.*

Demonstração: Suponhamos que $\varphi \in \mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$, logo $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$ e daí que, para qualquer l em $\mathbb{N}$, $D_x^l \varphi$ é do mesmo modo de classe $\mathcal{C}^\infty$ em $\mathbb{R}$.

Tomemos $l, m \in \mathbb{N}$ quaisquer.

Pelo facto de φ ser de decrescimento exponencial rápido, é-nos assegurado, evidentemente, que $D_x^{m+l}\varphi$ é de decrescimento exponencial, e portanto

$$D_x^m\left(D_x^l \varphi\right) = D_x^{m+l}\varphi \in \mathcal{C}_{e^-}(\mathbb{R}).$$

Em conclusão, para todo o φ função de decrescimento exponencial rápido e para qualquer l natural,

$$D^l \varphi \in \mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R}).$$

■

O teorema seguinte é uma consequência do resultado apresentado no teorema 4.1.10.

Teorema 4.3.9 *Se $\varphi \in \mathcal{C}_{e^-,\infty}(I\!R)$ e $f \in \mathcal{C}_{e^+,\infty}(I\!R)$, então $f \cdot \varphi \in \mathcal{C}_{e^-,\infty}(I\!R)$.*

Demonstração: Sejam φ uma função qualquer de decrescimento exponencial rápido e f uma função igualmente arbitrária de crescimento exponencial lento. É óbvio que $f \cdot \varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$, pois tanto f como φ são indefinidamente diferenciáveis em $\mathbb{R}$.

Fixemos m em $\mathbb{N}$. Recordando uma das fórmulas de Leibniz para a derivação do produto, temos

$$\begin{aligned} & D_x^m (f(x)\varphi(x)) \\ = & \sum_{l \leq m} \binom{m}{l} D_x^l f(x) D_x^{m-l} \varphi(x). \end{aligned}$$

Tendo em consideração que f é uma função de crescimento exponencial lento e φ uma função de decrescimento exponencial rápido, então $D_x^l f$ e $D_x^{m-l} \varphi$ pertencem respectivamente aos espaços $\mathcal{C}_{e^+}(\mathbb{R})$ e $\mathcal{C}_{e^-}(\mathbb{R})$, o que implica, pelo teorema 4.1.10, que

$$D_x^l f \cdot D_x^{m-l} \varphi \in \mathcal{C}_{e^-}(\mathbb{R}).$$

Para ultimar a nossa prova, basta apenas ter em conta a proposição 4.1.7 que nos garante que $\mathcal{C}_{e^-}(\mathbb{R})$ é um e.v., donde

$$\sum_{l=0}^{m} \binom{m}{l} D_x^l f \cdot D_x^{m-l} \varphi = D_x^m (f \cdot \varphi) \in \mathcal{C}_{e^-}(\mathbb{R}).$$

Da arbitrariedade de f em $\mathcal{C}_{e^+,\infty}(\mathbb{R})$ e de φ em $\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$, conclui-se finalmente que $f \cdot \varphi \in \mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$. ∎

Corolário 4.3.10 *O espaço das funções de decrescimento exponencial rápido é fechado para o produto.*

Demonstração: Tomemos φ_1 e φ_2 em $\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$. A observação 4.3.2 permite-nos dizer que φ_2 pertence ao espaço $\mathcal{C}_{e^+,\infty}(\mathbb{R})$, o que, pelo teorema 4.3.9, nos leva a concluir que $\varphi_1 \cdot \varphi_2$ é uma função de decrescimento exponencial rápido. ∎

Os exemplos 3.3.2 e 3.3.3 garantem-nos o crescimento exponencial lento das exponenciais e dos polinómios, pelo que, aplicando o teorema 4.3.9 podemos afirmar que tanto os polinómios como as exponenciais são multiplicadores do espaço $\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$. Abreviaremos estes resultados nos seguintes dois corolários:

Corolário 4.3.11 *$\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$ é fechado para o produto por exponenciais.*

Corolário 4.3.12 *O espaço das funções de decrescimento exponencial rápido é fechado para o produto por polinómios.*

4.3.2 Transformação de Fourier em $\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$

Com base na proposição 4.3.5, sabemos que

$$\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R}) \overset{d}{\subset} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \tag{4.16}$$

Deste modo, é possível pensar na restrição a $\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$ do operador transformação de Fourier $\mathcal{F}$ definido de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ por:

$$\mathcal{F}\varphi(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-ix\xi}\varphi(x)\,dx,$$

onde $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ e $\xi \in \mathbb{R}$.

Vimos anteriormente que a transformação de Fourier de uma dada função de $\mathcal{C}_{e^-}(\mathbb{R})$ é prolongável a $\mathbb{C}$ como função inteira. Logo, é de esperar que o mesmo se passe com a transformação de Fourier de funções de decrescimento exponencial rápido. A observação seguinte assim o confirma.

Observação 4.3.13 *É importante evidenciar que se $\varphi \in \mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$, então $\mathcal{F}\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ e, além disso, é prolongável a $\mathbb{C}$ como função inteira.*
Com efeito, dada uma função φ indefinidamente diferenciável em $\mathbb{R}$ de decrescimento exponencial rápido, temos que $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ (ver (4.16)). Por conseguinte

$$\mathcal{F}\varphi(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi}\varphi(x)\,dx.$$

É evidente que $\mathcal{F}\varphi$ é uma função do espaço de Schwartz, pois a transformação de Fourier é um isomorfismo vectorial e topológico de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ (ver teorema 2.2.5). Quanto a $\mathcal{F}\varphi$ ser prolongável a $\mathbb{C}$ como função inteira é óbvio, pois basta notar que $\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}_{e^-}(\mathbb{R})$ e ter em consideração que a transformação de Fourier de toda a função de $\mathcal{C}_{e^-}(\mathbb{R})$ é prolongável a $\mathbb{C}$ como função inteira (cf. teorema 4.1.15).

Observação 4.3.14 *Se φ é uma função de decrescimento exponencial rápido, então $\mathcal{F}_{-1}\varphi$ é prolongável a $\mathbb{C}$ como função inteira.*
Vimos no teorema 2.2.5 que

$$\mathcal{F}_{-1}\varphi(\xi) = \mathcal{F}\varphi(-\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}\varphi(x)\,dx,$$

pelo que, recorrendo à observação precedente e à demonstração do teorema 4.1.15 é imediato afirmar que $\mathcal{F}_{-1}\varphi$ é prolongável a $\mathbb{C}$ como função inteira.

4.3.3 Estrutura topológica do espaço $\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$

Muniremos agora o espaço $\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$ com uma estrutura de espaço vectorial topológico. Para esse fim, definamos para cada $k \in \mathbb{R}$ e $m \in \mathbb{N}$ a seguinte família de semi-normas:

$$\mu_{k,m}(\varphi) = \left\| \mathrm{e}^{k|\hat{x}|} D_x^m \varphi \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \tag{4.17}$$

Como acabámos de ver, a família de semi-normas definida em $\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$ não é numerável, no entanto, não é difícil pensar numa que o seja e que gere a mesma topologia neste espaço. Basta, por exemplo, indexar a constante k no conjunto dos números naturais. Desta forma, surge o resultado seguinte:

Proposição 4.3.15 *Consideremos a família de semi-normas* $(\nu_{k_1,m_1})_{k_1,m_1\in\mathbb{N}}$ *definida em* $\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$ *da seguinte forma:*

$$\nu_{k_1,m_1}(\varphi) = \left\| e^{k_1|\hat{x}|} D_x^{m_1}\varphi \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \tag{4.18}$$

Então, $(\nu_{k_1,m_1})_{k_1,m_1\in\mathbb{N}}$ *é equivalente à família de semi-normas* $(\mu_{k,m})_{k\in\mathbb{R},m\in\mathbb{N}}$*, definida por (4.17).*

Demonstração: Seja $\varphi \in \mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$ qualquer. Pretendemos mostrar que

$$\begin{cases} \forall k_1, m_1 \in \mathbb{N}\ \exists k \in \mathbb{R}\ \exists m \in \mathbb{N}\ \exists d \geq 0 \quad \nu_{k_1,m_1}(\varphi) \leq d\mu_{k,m}(\varphi) \\ \text{e} \\ \forall k' \in \mathbb{R}\ \forall m' \in \mathbb{N}\ \exists k_1', m_1' \in \mathbb{N}\ \exists d' \geq 0 \quad \mu_{k',m'}(\varphi) \leq d'\nu_{k_1',m_1'}(\varphi). \end{cases}$$

A primeira condição é imediata pois, se k_1 e m_1 são números naturais arbitrários, então basta tomar $k = k_1$, $m = m_1$ e $d = 1$ que teremos

$$\nu_{k_1,m_1}(\varphi) \leq d\mu_{k,m}(\varphi).$$

Para verificarmos a segunda condição, deveremos fixar k' em $\mathbb{R}$ e m' em $\mathbb{N}$ quaisquer.

Escolhendo $m_1' = m' \in \mathbb{N}$, $d' = 1$ e $k_1' = |C(k') + 1| \in \mathbb{N}$, onde $C(k')$ representa o maior inteiro que não excede o número k', temos

$$\begin{array}{cl} & k' \leq |C(k') + 1| \\ \Rightarrow & \mathrm{e}^{k'|x|}\left|D_x^{m'}\varphi(x)\right| \leq \mathrm{e}^{|C(k')+1||x|}\left|D_x^{m'}\varphi(x)\right| \\ \underset{m'=m_1' \text{ e } |C(k')+1|=k_1'}{\Rightarrow} & \left|\mathrm{e}^{k'|x|}D_x^{m'}\varphi(x)\right| \leq \left|\mathrm{e}^{k_1'|x|}D_x^{m_1'}\varphi(x)\right| \\ \Rightarrow & \sup\limits_{x\in\mathbb{R}}\left|\mathrm{e}^{k'|x|}D_x^{m'}\varphi(x)\right| \leq \sup\limits_{x\in\mathbb{R}}\left|\mathrm{e}^{k_1'|x|}D_x^{m_1'}\varphi(x)\right| \\ \Leftrightarrow & \left\|\mathrm{e}^{k'|\hat{x}|}D_x^{m'}\varphi\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \left\|\mathrm{e}^{k_1'|\hat{x}|}D_x^{m_1'}\varphi\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \\ \underset{d'=1}{\Leftrightarrow} & \mu_{k',m'}(\varphi) \leq d'\nu_{k_1',m_1'}(\varphi). \end{array}$$

■

Observação 4.3.16 *É claro que podemos sempre filtrar qualquer uma das famílias de semi-normas* $(\nu_{k_1,m_1})_{k_1,m_1\in\mathbb{N}}$ *e* $(\mu_{k,m})_{k\in\mathbb{R},m\in\mathbb{N}}$*, sendo para isso suficiente, como já referimos anteriormente, juntar os supremos de sub-famílias finitas, ou seja,*

$$\widetilde{\mu}_{k,\widetilde{m}}(\varphi) = \sup_{m\leq\widetilde{m}} \left\| e^{k|\hat{x}|} D_x^m\varphi \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \tag{4.19}$$

e

$$\widetilde{\nu}_{k_1,\widetilde{m_1}}(\varphi) = \sup_{m_1 \leq \widetilde{m_1}} \left\| e^{k_1|\hat{x}|} D_x^{m_1} \varphi \right\|_{L^\infty(I\!R)} \tag{4.20}$$

Efectivamente, sendo $j_1, j_2 \in I\!R$ *e* $\widetilde{l_1}, \widetilde{l_2} \in I\!N$ *arbitrários, então basta escolher*

$$k = \max\{j_1, j_2\} \wedge \widetilde{m} = \max\left\{\widetilde{l_1}, \widetilde{l_2}\right\},$$

que teremos

$$\widetilde{\mu}_{k,\widetilde{m}} \geq \widetilde{\mu}_{j_1,\widetilde{l_1}} \wedge \widetilde{\mu}_{k,\widetilde{m}} \geq \widetilde{\mu}_{j_2,\widetilde{l_2}} \ ,$$

ou seja, a família $\left(\widetilde{\mu}_{k,\widetilde{m}}\right)_{k\in I\!R,\widetilde{m}\in I\!N}$ *é filtrante. De igual forma se prova que* $\left(\widetilde{\nu}_{k_1,\widetilde{m_1}}\right)_{k_1,\widetilde{m_1}\in I\!N}$ *é também filtrante.*

Estabelecemos de seguida as características topológicas das funções de decrescimento exponencial rápido.

Proposição 4.3.17 $\mathcal{C}_{e^-,\infty}(I\!R)$ *é um e.l.c..*

Demonstração: Atendendo a que $\left(\widetilde{\nu}_{k_1,\widetilde{m_1}}\right)_{k_1,\widetilde{m_1}\in \mathbb{N}}$ descrita em (4.20) é uma família filtrante de semi-normas sobre o espaço das funções de decrescimento exponencial rápido, logo $\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$ é um espaço semi-normado, pelo que é localmente convexo (cf. proposição 2.1.11). ■

Teorema 4.3.18 *O espaço das funções indefinidamente diferenciáveis de decrescimento exponencial rápido em* $I\!R$ *é separado.*

Demonstração: Precisamos verificar que:

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R}) \left(\varphi \neq 0 \Rightarrow \exists k_1, m_1 \in \mathbb{N} \quad \nu_{k_1,m_1}(\varphi) \neq 0\right).$$

Tomemos φ uma função arbitrária de decrescimento exponencial rápido não nula. Então,

$$\exists a \in \mathbb{R} \quad \varphi(a) \neq 0.$$

Logo, para todo o k_1 natural, tem-se

$$\mathrm{e}^{k_1|a|} |\varphi(a)| > 0$$

e como

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\mathrm{e}^{k_1|x|}\varphi(x)\right| \geq \mathrm{e}^{k_1|a|} |\varphi(a)|,$$

resulta que

$$\nu_{k_1,0}(\varphi) > 0 \Leftrightarrow \nu_{k_1,0}(\varphi) \neq 0$$

e, portanto, $\left(\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R}), \left(\nu_{k_1,m_1}\right)_{k_1,m_1\in\mathbb{N}}\right)$ é um espaço de Hausdorff. ■

Corolário 4.3.19 *O espaço $\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$ é metrizável.*

Demonstração: Atendendo a que a família de semi-normas $(\nu_{k_1,m_1})_{k_1,m_1\in\mathbb{N}}$ (cf. (4.18)) é numerável e que $\left(\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R}), (\nu_{k_1,m_1})_{k_1,m_1\in\mathbb{N}}\right)$ é separado (ver teorema 4.3.18), podemos afirmar que $\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$ é metrizável (veja-se teorema 2.1.13). ∎

Teorema 4.3.20 *O espaço das funções indefinidamente diferenciáveis de decrescimento exponencial rápido em $\mathbb{R}$ está contido com injecção canónica contínua e densa no espaço de Schwartz.*

Demonstração: Já demonstrámos na proposição 4.3.5 que

$$\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R}) \overset{d}{\subset} \mathcal{S}(\mathbb{R}),$$

por isso, resta unicamente provar que a aplicação

$$\begin{aligned} I_{\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R}),\mathcal{S}(\mathbb{R})} : \mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}) \\ \varphi &\longmapsto I_{\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R}),\mathcal{S}(\mathbb{R})}(\varphi) = \varphi \end{aligned}$$

é linear, injectiva e contínua.

A linearidade e a injectividade são óbvias. Verifiquemos então que $I_{\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R}),\mathcal{S}(\mathbb{R})}$ é realmente contínua.

Uma vez que, tanto $\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$ como $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ são espaços semi-normados, logo e.v.t., então basta provar que $I_{\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R}),\mathcal{S}(\mathbb{R})}$ é contínua no ponto $\varphi \equiv 0$. Para além disto, sabemos que $\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$ e $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ são espaços metrizáveis (cf. corolário 4.3.19 e proposição 2.2.4) e, por isso, a continuidade é equivalente à continuidade sequencial.

Fixemos $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de funções em $\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$ tal que,

$$\varphi_n \to 0, \text{ em } \mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R}),$$

ou seja,

$$\begin{aligned} & \nu_{k_1,m_1}(\varphi_n - 0) \to 0, \quad \forall k_1, m_1 \in \mathbb{N} \\ \Leftrightarrow\ & \forall k_1, m_1 \in \mathbb{N}\ \forall \varepsilon_1 > 0\ \exists n_1 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_1 \Rightarrow \left\| \mathrm{e}^{k_1|\hat{x}|} D_x^{m_1}(\varphi_n) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \varepsilon_1 \end{aligned} \tag{4.21}$$

Queremos mostrar que

$$I_{\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R}),\mathcal{S}(\mathbb{R})}(\varphi_n) \to I_{\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R}),\mathcal{S}(\mathbb{R})}(0), \quad \text{em } \mathcal{S}(\mathbb{R}),$$

ou seja,

$$\forall l, m \in \mathbb{N} \quad \rho_{l,m}(\varphi_n) \to 0.$$

Deste modo, tomemos l e m em $\mathbb{N}$ arbitrários e ε um número real positivo qualquer,

$$\begin{aligned} & \left\| \hat{x}^l D_x^m \varphi_n \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \\ \leq\ & \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \mathrm{e}^{l|x|} D_x^m(\varphi_n(x)) \right|, \end{aligned}$$

fazendo $k_1 = l$, $m_1 = m$ e $\varepsilon_1 = \varepsilon$ na hipótese (4.21), temos que

$$\left\| \hat{x}^l D_x^m \varphi_n \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \varepsilon, \text{ sempre que } n \geq n_1.$$

Por conseguinte $I_{\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R}),\mathcal{S}(\mathbb{R})}$ é contínua. ■

O resultado seguinte é imprescindível às provas das propriedades ser de Fréchet e de Montel.

Lema 4.3.21 *Seja $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão limitada em $\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$ e seja $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Então, se $\varphi_n \to \varphi$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, tem-se $\varphi \in \mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$ e $\varphi_n \to \varphi$ em $\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$.*

Demonstração: Sejam $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão qualquer limitada em $\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$ e φ uma função de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ de igual modo arbitrária. Suponhamos ainda que $\varphi_n \to \varphi$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Dizer que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada no espaço das funções de decrescimento exponencial rápido é equivalente a afirmar que

$$\forall k_1, m_1 \in \mathbb{N} \quad \exists A_{k_1,m_1} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \nu_{k_1,m_1}(\varphi_n) \leq A_{k_1,m_1} \tag{4.22}$$

Mostremos, em primeiro lugar, que $\varphi \in \mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$. É claro que $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$, pois φ é uma função do espaço de Schwartz.

Tomemos $m \in \mathbb{N}$ e $k \in \mathbb{R}$ quaisquer. Dado que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$, então por (4.22) e, em particular, para $m_1 = m, k_1 = |C(k)+1| \in \mathbb{N}$, resulta que

$$\exists A_{|C(k)+1|,m} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \left\| \mathrm{e}^{|C(k)+1||\hat{x}|} D_x^m (\varphi_n) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq A_{|C(k)+1|,m} \tag{4.23}$$

Deste modo,

$$\begin{aligned} & \left| \mathrm{e}^{|C(k)+1||x|} D_x^m \varphi_n(x) \right| \\ \leq \; & \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \mathrm{e}^{|C(k)+1||x|} D_x^m \varphi_n(x) \right| \\ \underset{\text{por } (4.23)}{\leq} \; & A_{|C(k)+1|,m} \end{aligned}$$

o que implica que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad |D_x^m \varphi_n(x)| \leq A_{|C(k)+1|,m} \, \mathrm{e}^{-|C(k)+1||x|} \tag{4.24}$$

Como $\varphi_n \to \varphi$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ temos em especial que

$$\lim_{n\to+\infty} \|D_x^m (\varphi_n - \varphi)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = 0,$$

ou seja, $D_x^m \varphi_n \to D_x^m \varphi$ uniformemente em $\mathbb{R}$.

Consequentemente, passando ao limite quando $n \to +\infty$ na desigualdade (4.24) vem que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |D_x^m \varphi(x)| \leq A_{|C(k)+1|,m} \, \mathrm{e}^{-|C(k)+1||x|} \leq A_{|C(k)+1|,m} \, \mathrm{e}^{-k|x|},$$

pelo que

$$\forall m \in \mathbb{N}\ \forall k \in \mathbb{R}\ \exists c_{m,k} = A_{|C(k)+1|,m} > 0\ \forall x \in \mathbb{R} \quad |D_x^m \varphi(x)| \leq c_{m,k}\ \mathrm{e}^{-k|x|},$$

isto é, $\varphi \in \mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$.

Para finalizar, verifiquemos que $\varphi_n \to \varphi$ em $\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$, ou seja, que $\psi_n = \varphi_n - \varphi \to 0$ em $\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$.

Sejam k_1 e m_1 em $\mathbb{N}$ e ε_1 em $\mathbb{R}^+$ arbitrários. Temos

$$\left|\mathrm{e}^{(k_1+1)|x|} D_x^{m_1} \psi_n(x)\right| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\mathrm{e}^{(k_1+1)|x|} D_x^{m_1} \psi_n(x)\right| = \nu_{k_1+1,m_1}(\psi_n) \tag{4.25}$$

Tendo em consideração que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada no espaço das funções de decrescimento exponencial rápido e que φ é um elemento deste espaço, podemos afirmar que a sucessão $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é também limitada em $\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$. Daqui resulta que

$$\exists B_{k_1+1,m_1} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \nu_{k_1+1,m_1}(\psi_n) \leq B_{k_1+1,m_1}$$

e, portanto, da condição (4.25) decorre que, para todo o n em $\mathbb{N}$ e todo o x em $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} & \left|\mathrm{e}^{|x|}\mathrm{e}^{k_1|x|} D_x^{m_1} \psi_n(x)\right| \leq B_{k_1+1,m_1} \\ \Leftrightarrow\ & \left|\mathrm{e}^{k_1|x|} D_x^{m_1} \psi_n(x)\right| \leq B_{k_1+1,m_1}\mathrm{e}^{-|x|} \end{aligned} \tag{4.26}$$

Para

$$|x| > \ln\left(\frac{B_{k_1+1,m_1}}{\varepsilon_1}\right)$$

tem-se, de (4.26), que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad |x| > \ln\left(\frac{B_{k_1+1,m_1}}{\varepsilon_1}\right) \Rightarrow \left|\mathrm{e}^{k_1|x|} D_x^{m_1} \psi_n(x)\right| \leq \varepsilon_1 \tag{4.27}$$

Tomando em atenção o facto de que $\psi_n \to 0$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ (porque $\varphi_n \to \varphi$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$), podemos asseverar que $D_x^{m_1}\psi_n$ converge uniformemente para 0 em $\mathbb{R}$, o que se pode traduzir por:

$$\forall \varepsilon_0 > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \Rightarrow \sup_{x\in\mathbb{R}} |D_x^{m_1}\psi_n(x)| \leq \varepsilon_0.$$

Se tomarmos

$$\varepsilon_0 = \frac{(\varepsilon_1)^{k_1+1}}{(B_{k_1+1,m_1})^{k_1}} > 0$$

temos

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \Rightarrow |D_x^{m_1}\psi_n(x)| \leq \frac{(\varepsilon_1)^{k_1+1}}{(B_{k_1+1,m_1})^{k_1}} \tag{4.28}$$

Suponhamos que

$$|x| \leq \ln\left(\frac{B_{k_1+1,m_1}}{\varepsilon_1}\right)$$

então

$$\begin{aligned}
&\left|\mathrm{e}^{k_1|x|} D_x^{m_1} \psi_n(x)\right| \\
\leq\ & \left(\frac{B_{k_1+1,m_1}}{\varepsilon_1}\right)^{k_1} \left|D_x^{m_1} \psi_n(x)\right| \\
\underset{\text{por (4.28)}}{\leq}\ & \left(\frac{B_{k_1+1,m_1}}{\varepsilon_1}\right)^{k_1} \frac{(\varepsilon_1)^{k_1+1}}{(B_{k_1+1,m_1})^{k_1}},
\end{aligned}$$

isto é,

$$\forall n \geq n_0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad |x| \leq \ln\left(\frac{B_{k_1+1,m_1}}{\varepsilon_1}\right) \Rightarrow \left|\mathrm{e}^{k_1|x|} D_x^{m_1} \psi_n(x)\right| \leq \varepsilon_1 \tag{4.29}$$

De (4.27) e (4.29) resulta que

$$\forall \varepsilon_1 > 0 \quad \exists n_1 = n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_1 \Rightarrow \left|\mathrm{e}^{k_1|x|} D_x^{m_1} \psi_n(x)\right| \leq \varepsilon_1,$$

ou seja,

$$\nu_{k_1,m_1}(\psi_n) \to 0$$

e, dado que k_1 e m_1 são números naturais arbitrários, concluímos finalmente que $\psi_n \to 0$ em $\left(\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R}), (\nu_{k_1,m_1})_{k_1,m_1 \in \mathbb{N}}\right)$, que é o mesmo que dizer que φ_n converge para φ no espaço das funções de decrescimento exponencial rápido. ∎

Teorema 4.3.22 *O espaço $\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$ é de Fréchet.*

Demonstração: À luz da proposição 4.3.17 e do corolário 4.3.19, resta-nos somente provar que $\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$ é completo.

Seja $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de Cauchy arbitrária no espaço das funções indefinidamente diferenciáveis de decrescimento exponencial rápido em $\mathbb{R}$.

Verifiquemos, em primeiro lugar que $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ também é de Cauchy no espaço de Schwartz. É óbvio que $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, pois $\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$ é um subconjunto do espaço de Schwartz (ver proposição 4.3.5).

Queremos mostrar que

$$\forall l, m \in \mathbb{N} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n, p \in \mathbb{N} \quad n, p \geq n_0 \Rightarrow \rho_{l,m}(\varphi_n - \varphi_p) \leq \varepsilon.$$

Ora, isto advém imediatamente do facto de

$$\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}), \text{ (cf. teorema 4.3.20)},$$

isto é, $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Recordando a proposição 2.2.4, podemos constatar que $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ é completo (por ser de Fréchet), logo

$$\exists\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})\quad \varphi_n\to\varphi\quad \text{em } \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

A sucessão $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sendo de Cauchy em $\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$, é limitada em $\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$, donde, pelo lema 4.3.21, tem-se $\varphi\in\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$ e

$$\varphi_n\to\varphi\quad \text{em } \mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R}),$$

o que prova que $\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$ é completo. ∎

Teorema 4.3.23 *$\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$ é um espaço de Montel.*

Demonstração: O teorema 4.3.22 assegura-nos que $\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$ é um espaço tonelado, porque é de Fréchet (cf. teorema 2.1.15).

Resta-nos provar que todo o subconjunto limitado de $\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$ é relativamente compacto.

Tomemos $L\subset\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$ qualquer tal que L é limitado. Atendendo ao facto de que o espaço das funções de decrescimento exponencial rápido é metrizável (ver corolário 4.3.19), mostrar que L é relativamente compacto é equivalente a verificar que de toda a sucessão de elementos de L se pode extrair uma subsucessão convergente em $\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$ (ver teorema 2.1.14).

Seja então, $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão arbitrária de elementos de L. Sabemos, pelo teorema 4.3.20, que

$$\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})\overset{d}{\hookrightarrow}\mathcal{S}(\mathbb{R}),$$

em particular, a aplicação

$$\begin{aligned} I_{\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R}),\mathcal{S}(\mathbb{R})}:\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})\\ \varphi &\longmapsto I_{\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R}),\mathcal{S}(\mathbb{R})}(\varphi)=\varphi\end{aligned}$$

é linear e contínua. Por conseguinte $I_{\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R}),\mathcal{S}(\mathbb{R})}$ transforma limitados em limitados e, uma vez que, L é limitado em $\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$, tem-se L limitado no espaço de Schwartz. Mas, $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ é metrizável e é de Montel (cf. proposição 2.2.4), logo por L ser limitado neste espaço e $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}\in L^{\mathbb{N}}$, existe uma subsucessão $\left(\varphi_{m_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente no espaço das funções teste de Schwartz.

Assim, existe $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ tal que $\varphi_{m_n}\to\varphi$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Visto que L é um subconjunto limitado do espaço das funções de decrescimento exponencial rápido e que $\left(\varphi_{m_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de elementos de L, resulta que $\left(\varphi_{m_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão limitada em $\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$.

Como $\left(\varphi_{m_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão limitada em $\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$, $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ e $\varphi_{m_n}\to\varphi$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, então, pelo lema 4.3.21, $\varphi\in\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$ e $\varphi_{m_n}\to\varphi$ em $\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$, o que prova que L é relativamente compacto. ∎

Teorema 4.3.24 *O espaço das funções de decrescimento exponencial rápido é bornológico.*

Demonstração: Resulta imediatamente da proposição 2.1.16, pois $\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$ é localmente convexo (proposição 4.3.17) e metrizável (corolário 4.3.19). ∎

As proposições que se seguem mostram-nos a continuidade dos operadores definidos em $\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$.

Proposição 4.3.25 *Seja $a \in \mathbb{R}$. Então o operador translação τ_a definido em (3.4) é um isomorfismo vectorial e topológico do espaço $\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$ nele próprio.*

Demonstração: Já vimos que τ_a vai de $\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$ para $\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$ (cf. proposição 4.3.7).

A linearidade é óbvia, pois sendo φ_1 e φ_2 elementos arbitrários de $\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$ e $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{C}$ quaisquer, temos

$$\begin{aligned}
& \tau_a (\gamma_1\varphi_1 + \gamma_2\varphi_2)(x) \\
= \; & (\gamma_1\varphi_1 + \gamma_2\varphi_2)(x-a) \\
= \; & \gamma_1\varphi_1(x-a) + \gamma_2\varphi_2(x-a) \\
= \; & (\gamma_1\tau_a\varphi_1 + \gamma_2\tau_a\varphi_2)(x).
\end{aligned}$$

A injectividade sai imediatamente do facto do $\operatorname{Ker}\tau_a = \{0\}$. Quanto à sobrejectividade, basta notar que, se Φ é uma função qualquer de $\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$, então se tomarmos $\varphi = \tau_{-a}\Phi$ continuamos a ter uma aplicação de decrescimento exponencial rápido (cf. proposição 4.3.7) e por isso

$$\begin{aligned}
\tau_a\varphi(x) &= \tau_a(\tau_{-a}\Phi)(x) \\
&= \tau_a\Phi(x+a) \\
&= \Phi(x),
\end{aligned}$$

isto é, τ_a é sobrejectiva. Posto isto, podemos asseverar que a inversa do operador τ_a é τ_{-a}.

Verifiquemos agora a continuidade do operador

$$\tau_a : \mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R}).$$

Seja $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R}))^{\mathbb{N}}$ qualquer, tal que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para zero em $\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$, isto é,

$$\begin{aligned}
& \nu_{k_1,m_1}(\varphi_n - 0) \to 0, \quad \forall k_1, m_1 \in \mathbb{N} \\
\Leftrightarrow \; & \forall k_1, m_1 \in \mathbb{N}\; \forall \varepsilon_1 > 0\; \exists n_1 \in \mathbb{N}\; \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_1 \Rightarrow \left\| \mathrm{e}^{k_1|\hat{x}|} D_x^{m_1}(\varphi_n) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \varepsilon_1
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Pretendemos provar que $\tau_a(\varphi_n)$ converge para zero no espaço das funções de decrescimento exponencial rápido.

Efectivamente, para k_2 e m_2 números naturais quaisquer e ε um real positivo também arbitrário, temos

$$\begin{aligned}
& \left|\mathrm{e}^{k_2|x|} D_x^{m_2}(\tau_a\varphi_n)(x)\right| \\
= & \left|\mathrm{e}^{k_2|x|} D_x^{m_2}(\varphi_n(x-a))\right| \\
= & \left|\mathrm{e}^{k_2|y+a|} D_y^{m_2}(\varphi_n(y))\right|, \text{ com } y=x-a\in\mathbb{R} \\
\leq & \ \mathrm{e}^{k_2|a|}\left|\mathrm{e}^{k_2|y|} D_y^{m_2}(\varphi_n(y))\right|
\end{aligned}$$

Fazendo em (4.30) $k_2=k_1, m_2=m_1\in\mathbb{N}$ e $\varepsilon_1=\dfrac{\varepsilon}{\mathrm{e}^{k_2|a|}}>0$, vem, em particular, que

$$\exists n_1\in\mathbb{N}\ \forall n\in\mathbb{N}\quad n\geq n_1\Rightarrow\left|\mathrm{e}^{k_2|y|} D_y^{m_2}(\varphi_n(y))\right|\leq\frac{\varepsilon}{\mathrm{e}^{k_2|a|}}$$

e por isso,

$$\left|\mathrm{e}^{k_2|x|} D_x^{m_2}(\tau_a\varphi_n)(x)\right|\leq\mathrm{e}^{k_2|a|}\frac{\varepsilon}{\mathrm{e}^{k_2|a|}},\text{ sempre que } n\geq n_1 \text{ e } \forall x\in\mathbb{R}.$$

Logo

$$\forall k_2,m_2\in\mathbb{N}\ \forall\varepsilon>0\ \exists n_0=n_1\in\mathbb{N}\ \forall n\in\mathbb{N}\quad n\geq n_0\Rightarrow\left\|\mathrm{e}^{k_2|\hat{x}|} D_x^{m_2}(\tau_a\varphi_n)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\leq\varepsilon,$$

que é precisamente o que queríamos demonstrar.

Como a é um real qualquer, a continuidade do operador inverso da translação τ_{-a} é imediata.

Conclui-se assim, que o operador translação é um isomorfismo vectorial e topológico de $\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$ nele próprio. ∎

Proposição 4.3.26 *Para todo o l em $\mathbb{N}$, o operador derivada*

$$\begin{aligned}
D_x^l:\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R}) \\
\varphi &\longmapsto D_x^l\varphi
\end{aligned}$$

é linear e contínuo.

Demonstração: Decorre da proposição 4.3.8, que dado φ arbitrário em $\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$, $D_x^l\varphi$ ainda pertence a $\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$.

A linearidade é trivial.

Fixemos l em $\mathbb{N}$ e $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de funções em $\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$, tal que

$$\varphi_n\to 0\quad\text{em } \mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R}).$$

É evidente que

$$D_x^l(\varphi_n)\to 0\quad\text{em } \mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R}),$$

pois advém do simples facto de

$$\forall l, m_2 \in \mathbb{N} \quad D_x^{m_2}\left(D_x^l \varphi_n\right) = D_x^{m_2+l}\left(\varphi_n\right).$$

Consequentemente,

$$D_x^l : \mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$$

é linear e contínuo. ■

Proposição 4.3.27 *Para cada $f \in \mathcal{C}_{e^+,\infty}(\mathbb{R})$, o operador produto*

$$\begin{aligned} P_f : \mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R}) \\ \varphi &\longmapsto P_f(\varphi) = f \cdot \varphi \end{aligned}$$

é linear e contínuo.

Demonstração: Tome-se f uma função arbitrária de crescimento exponencial lento em $\mathbb{R}$. O teorema 4.3.9 permite-nos afirmar que, se $f \in \mathcal{C}_{e^+,\infty}(\mathbb{R})$ e $\varphi \in \mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$, então

$$P_f(\varphi) = f \cdot \varphi \in \mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R}).$$

Obviamente que o operador P_f é linear.

Seja $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})\right)^{\mathbb{N}}$ qualquer, tal que φ_n converge para zero em $\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$.

Sejam $k_2, m_2 \in \mathbb{N}$ quaisquer.

$$\begin{aligned} & \left|e^{k_2|x|} D_x^{m_2}\left(P_f(\varphi_n)(x)\right)\right| \\ \underset{\text{fórmula de Leibniz}}{=} \; & e^{k_2|x|}\left|\sum_{l\le m_2}\binom{m_2}{l} D_x^l f(x)\, D_x^{m_2-l}\varphi_n(x)\right| \\ \le \; & e^{k_2|x|}\sum_{l\le m_2}\binom{m_2}{l}\left|D_x^l f(x)\right|\left|D_x^{m_2-l}\varphi_n(x)\right|, \end{aligned}$$

mas $f \in \mathcal{C}_{e^+,\infty}(\mathbb{R})$, donde

$$\begin{aligned} & \left|e^{k_2|x|} D_x^{m_2}\left(P_f(\varphi_n)(x)\right)\right| \\ \le \; & e^{k_2|x|}\sum_{l\le m_2}\binom{m_2}{l}\alpha_l\, e^{\beta_l|x|}\left|D_x^{m_2-l}\varphi_n(x)\right| \\ \le \; & e^{k_2|x|}\sum_{l\le m_2}\binom{m_2}{l}\alpha\, e^{\beta|x|}\left|D_x^{m_2-l}\varphi_n(x)\right| \end{aligned} \tag{4.31}$$

onde $\alpha = \max\limits_{0\le l\le m_2}\alpha_l$ e $\beta = \max\limits_{0\le l\le m_2}\beta_l$.

Tomemos $k = \left|C\left(k_2+\beta\right)+1\right| \in \mathbb{N}$. Da desigualdade (4.31) vem que

$$\begin{aligned} & \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|e^{k_2|x|} D_x^{m_2}\left(P_f(\varphi_n)(x)\right)\right| \\ \le \; & \alpha\sum_{l\le m_2}\binom{m_2}{l}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|e^{k|x|} D_x^{m_2-l}\varphi_n(x)\right| \end{aligned} \tag{4.32}$$

Mas $\varphi_n \to 0$ em $\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$, donde

$$\forall k_1, m_1 \in \mathbb{N} \quad \nu_{k_1,m_1}(\varphi_n) \to 0.$$

Então,

$$\nu_{k,m_2-l}(\varphi_n) \to 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \left\| \mathrm{e}^{k|\hat{x}|} D_x^{m_2-l}(\varphi_n) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = 0$$

e, portanto, da condição (4.32) vem

$$\begin{aligned} & \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \mathrm{e}^{k_2|x|} D_x^{m_2}(P_f(\varphi_n)(x)) \right| \\ \leq \; & \alpha \sum_{l\leq m_2} \binom{m_2}{l} \lim_{n\to+\infty} \left\| \mathrm{e}^{k|\hat{x}|} D_x^{m_2-l}(\varphi_n) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \\ = \; & 0. \end{aligned}$$

Decorrendo daqui que

$$\forall k_2, m_2 \in \mathbb{N} \quad \nu_{k_2,m_2}(P_f(\varphi_n)) \to 0,$$

o que quer dizer que a sucessão $P_f(\varphi_n)$ converge para zero no espaço das funções de decrescimento exponencial rápido, levando-nos assim à conclusão de que P_f é um operador contínuo de $\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$ nele mesmo. ■

Capítulo 5

O espaço $\mathfrak{X}_0(\mathrm{I\!R})$

5.1 Estrutura vectorial

Uma das limitações do espaço das funções de decrescimento exponencial rápido é não ser fechado para a transformação de Fourier $\mathcal{F}$. Portanto, uma forma de colmatar esta insuficiência é considerar apenas o espaço das funções de $\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathrm{I\!R})$, cujas transformadas de Fourier ainda pertencem a $\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathrm{I\!R})$.

Assim sendo, consideremos o conjunto das funções complexas de classe $\mathcal{C}^\infty$ em $\mathrm{I\!R}$, tais que estas e as suas transformadas de Fourier têm decrescimento exponencial rápido, isto é:

$$\mathfrak{X}_0(\mathrm{I\!R}) = \{\varphi \in \mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathrm{I\!R}) \wedge \mathcal{F}\varphi \in \mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathrm{I\!R})\} \tag{5.1}$$

Iremos ver que algumas das propriedades até aqui provadas para o espaço $\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathrm{I\!R})$ são válidas em $\mathfrak{X}_0(\mathrm{I\!R})$, entre as quais se destaca a invariância para a translação, para a derivação, para o produto por funções do mesmo espaço e para o produto por polinómios. Embora se "perca" alguns multiplicadores, "ganha-se" uma mais valia: a invariância para a transformação de Fourier. Naturalmente que o espaço $\mathcal{G}_a(\mathrm{I\!R})$ está contido em $\mathfrak{X}_0(\mathrm{I\!R})$ e este, por sua vez, está contido densamente no espaço $\mathcal{S}(\mathrm{I\!R})$ de Schwartz.

Proposição 5.1.1 *$\mathfrak{X}_0(\mathrm{I\!R})$ é um e.v. sobre $\mathbb{C}$.*

Demonstração: Vimos na proposição 4.3.3 que $\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathrm{I\!R})$ é um e.v. sobre $\mathbb{C}$ e como $\mathcal{F}$ é linear, então $\mathcal{F}(\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathrm{I\!R}))$ também é um e.v. complexo.

Atendendo à definição do espaço $\mathfrak{X}_0(\mathrm{I\!R})$, podemos afirmar que

$$\mathfrak{X}_0(\mathrm{I\!R}) = \mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathrm{I\!R}) \bigcap \mathcal{F}(\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathrm{I\!R})),$$

ou seja, $\mathfrak{X}_0(\mathrm{I\!R})$ é uma intersecção de e.v., logo é um e.v. sobre $\mathbb{C}$. $\blacksquare$

Observação 5.1.2 *Poderia pensar-se que* $\mathfrak{X}_0(I\!R) = \mathcal{C}_{e^-,\infty}(I\!R)$. *Isto não é verdade porque, se* φ *pertence a* $\mathfrak{X}_0(I\!R)$, *então* φ *é analítica (facto este que será provado já a seguir no teorema 5.1.3) e, como sabemos, existem funções não analíticas em* $\mathcal{C}_{e^-,\infty}(I\!R)$, *como por exemplo qualquer função de* $\mathcal{D}(I\!R)$, *pois toda a função não nula indefinidamente diferenciável de suporte compacto não é analítica.*

Teorema 5.1.3 *Se* $\varphi \in \mathfrak{X}_0(I\!R)$, *então* φ *é prolongável a* $\mathbb{C}$ *como função inteira.*

Demonstração: Fixemos φ em $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$ qualquer. Em particular $\mathcal{F}\varphi$ é uma função de decrescimento exponencial rápido, consequentemente, pela observação 4.3.14, $\mathcal{F}_{-1}(\mathcal{F}\varphi)$ é prolongável a $\mathbb{C}$ como função inteira, logo $\dfrac{1}{2\pi}\mathcal{F}_{-1}(\mathcal{F}\varphi)$ é de igual modo, prolongável a $\mathbb{C}$ como função inteira.

Mas,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\mathcal{F}_{-1}(\mathcal{F}\varphi)\\
=\;&\frac{1}{2\pi}2\pi\varphi\\
=\;&\varphi, \quad \text{pois } \mathcal{F}^{-1} = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}_{-1} \text{ (cf. teorema 2.2.5)},
\end{aligned}$$

o quer dizer que φ é prolongável a $\mathbb{C}$ como função inteira. ■

Proposição 5.1.4 *Para todo o a em* $I\!R^+$, *o espaço* $\mathcal{G}_a(I\!R)$ *é um subconjunto de* $\mathfrak{X}_0(I\!R)$.

Demonstração: Sejam $p \in \mathcal{P}$ e $a \in \mathbb{R}^+$ arbitrários.

Já demonstrámos que $\psi = p\ \mathrm{e}^{-a\hat{x}^2} \in \mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$ (cf. proposição 4.3.4). Resta-nos, por isso, mostrar que $\mathcal{F}(\psi) \in \mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$.

A proposição 4.2.9 diz-nos que as funções de $\mathcal{G}_a(\mathbb{R})$ são "quase " fechadas para a transformada de Fourier, isto é

$$\mathcal{F}\left(p\ \mathrm{e}^{-a\hat{x}^2}\right) = s\ \mathrm{e}^{-\frac{\hat{\xi}^2}{4a}}, \quad \text{onde } s \in \mathcal{P}.$$

Se prestarmos novamente atenção à proposição 4.3.4 e ao facto de que $b = \dfrac{1}{4a} > 0$, podemos deduzir que

$$\mathcal{G}_b(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R}),$$

o que nos permite concluir que $s \cdot \mathrm{e}^{-b\hat{\xi}^2}$ é uma função de decrescimento exponencial rápido e, por isso,

$$\mathcal{F}\psi \in \mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R}),$$

finalizando assim a nossa demonstração. ■

Proposição 5.1.5

$$\mathfrak{X}_0(I\!R) \overset{d}{\subset} \mathcal{S}(I\!R).$$

Demonstração: É imediato que $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$, pois basta notar que $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$ e que $\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ (cf. proposição 4.3.5).

Pela proposição precedente, sabemos, em particular, que $\mathcal{G}_{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}) \subset \mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$, e como as funções de $\mathcal{G}_{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$ são densas em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ (cf. teorema 4.2.7), conclui-se imediatamente que $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$ é denso em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. ■

Naturalmente que:

Observação 5.1.6

$$\forall\varphi \quad \varphi \in \mathfrak{X}_0(I\!R) \Rightarrow \varphi(-\hat{x}) \in \mathfrak{X}_0(I\!R).$$

Com efeito, se $\varphi \in \mathfrak{X}_0(I\!R)$ então, em particular, $\varphi \in \mathcal{C}_{e^-,\infty}(I\!R)$ e logo, pela observação 4.3.6, $\varphi(-\hat{x}) \in \mathcal{C}_{e^-,\infty}(I\!R)$. Resta pois mostrar que $\mathcal{F}[\varphi(-\hat{x})] \in \mathcal{C}_{e^-,\infty}(I\!R)$.
Mas,

$$\mathcal{F}[\varphi(-\hat{x})](\xi) = \mathcal{F}_{-1}[\varphi(\hat{y})](\xi) = \mathcal{F}[\varphi(\hat{y})](-\xi).$$

Por definição do espaço $\mathfrak{X}_0(I\!R)$ temos que $\mathcal{F}\varphi \in \mathcal{C}_{e^-,\infty}(I\!R)$. Recorrendo novamente à observação 4.3.6 vem que $\mathcal{F}\varphi\left(-\hat{\xi}\right) \in \mathcal{C}_{e^-,\infty}(I\!R)$, ou seja, $\mathcal{F}[\varphi(-\hat{x})]$ é uma função de decrescimento exponencial rápido.

Proposição 5.1.7 *$\mathfrak{X}_0(I\!R)$ é invariante por translação.*

Demonstração: Tomemos $a \in \mathbb{R}$ e $\varphi \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$. Verifica-se imediatamente que $\tau_a\varphi \in \mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$, pois $\varphi \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$, o que implica que $\varphi \in \mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$ e, logo, é só aplicar a proposição 4.3.7.

Vejamos que $\mathcal{F}(\tau_a\varphi) \in \mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$.

Recorde-se que $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$ é um subconjunto de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Então, pelas propriedades da transformada de Fourier em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ (ver observação 2.2.8), sabemos que

$$\mathcal{F}(\tau_a\varphi) = \mathrm{e}^{-ia\hat{\xi}}\mathcal{F}\varphi.$$

É importante salientar que $\mathrm{e}^{-ia\hat{\xi}}$ é uma função de crescimento exponencial lento (cf. exemplo 3.3.2) e que $\mathcal{F}\varphi$ é de decrescimento exponencial rápido porque, por hipótese $\varphi \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$, então aplicando o teorema 4.3.9, obtém-se que

$$\mathcal{F}(\tau_a\varphi) \in \mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R}).$$

Da arbitrariedade de a em $\mathbb{R}$ e de φ em $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$, resulta que

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \forall\varphi \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R}) \quad \tau_a\varphi \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R}).$$

■

Proposição 5.1.8 $\mathfrak{X}_0\left(I\!R\right)$ *é fechado para a derivação.*

Demonstração: Sejam $\varphi \in \mathfrak{X}_0\left(\mathbb{R}\right)$ e $l \in \mathbb{N}$ quaisquer.

De $\varphi \in \mathfrak{X}_0\left(\mathbb{R}\right)$ temos que $\varphi \in \mathcal{C}_{e^-,\infty}\left(\mathbb{R}\right)$, logo $D_x^l\varphi \in \mathcal{C}_{e^-,\infty}\left(\mathbb{R}\right)$ (ver proposição 4.3.8), por isso, falta-nos provar unicamente que $\mathcal{F}\left(D_x^l\varphi\right) \in \mathcal{C}_{e^-,\infty}\left(\mathbb{R}\right)$.

Com base na observação 2.2.8, podemos afirmar que

$$\mathcal{F}\left(D_x^l\varphi\right) = \left(i\hat{\xi}\right)^l \mathcal{F}\varphi.$$

O corolário 4.3.12 garante-nos que o espaço das funções de decrescimento exponencial rápido é fechado para o produto por polinómios; então, e uma vez que $\left(i\hat{\xi}\right)^l$ é um polinómio de $\mathcal{P}$, e $\mathcal{F}\varphi$ é uma função de $\mathcal{C}_{e^-,\infty}\left(\mathbb{R}\right)$ (pois $\varphi \in \mathfrak{X}_0\left(\mathbb{R}\right)$), temos, como pretendíamos, que $\mathcal{F}\left(D_x^l\varphi\right)$ é uma função indefinidamente diferenciável de decrescimento exponencial rápido. ∎

Em seguida provamos a propriedade que motivou a construção do espaço $\mathfrak{X}_0\left(\mathbb{R}\right)$.

Proposição 5.1.9 *O espaço* $\mathfrak{X}_0\left(I\!R\right)$ *é fechado para a transformada de Fourier.*

Demonstração: Seja $\varphi \in \mathfrak{X}_0\left(\mathbb{R}\right)$. Por definição de $\mathfrak{X}_0\left(\mathbb{R}\right)$, $\mathcal{F}\varphi \in \mathcal{C}_{e^-,\infty}\left(\mathbb{R}\right)$. Falta provar somente que $\mathcal{F}\left(\mathcal{F}\varphi\right) \in \mathcal{C}_{e^-,\infty}\left(\mathbb{R}\right)$.

Se tivermos em atenção que $\mathcal{F}\left(\mathcal{F}\varphi\right)$ é analítica em $\mathbb{R}$ (ver observação 4.3.13) então, em particular, $\mathcal{F}\left(\mathcal{F}\varphi\right)$ é indefinidamente diferenciável em $\mathbb{R}$.

Consideremos $m \in \mathbb{N}$ e $k \in \mathbb{R}$ arbitrários. O corolário 2.2.9 permite-nos dizer que

$$\mathcal{F}\left(\mathcal{F}\varphi\right) = 2\pi\varphi\left(-\hat{\xi}\right)$$

e, como φ é uma função de decrescimento exponencial rápido, pois $\varphi \in \mathfrak{X}_0\left(\mathbb{R}\right)$, então $\varphi\left(-\hat{\xi}\right)$ ainda é uma função de decrescimento exponencial rápido (cf. observação 4.3.6), logo

$$\mathcal{F}\left(\mathcal{F}\varphi\right) \in \mathcal{C}_{e^-,\infty}\left(\mathbb{R}\right).$$

∎

Proposição 5.1.10 *O espaço* $\mathfrak{X}_0\left(I\!R\right)$ *é fechado para o produto.*

Demonstração: Sejam φ_1 e φ_2 funções quaisquer do espaço $\mathfrak{X}_0\left(\mathbb{R}\right)$. Em particular, φ_1 e φ_2 são funções de decrescimento exponencial rápido, pelo que $\varphi_1 \cdot \varphi_2 \in \mathcal{C}_{e^-,\infty}\left(\mathbb{R}\right)$ (cf. corolário 4.3.10). Para finalizar a nossa demonstração, basta provar que $\mathcal{F}\left(\varphi_1 \cdot \varphi_2\right)$ ainda pertence ao espaço das funções de decrescimento exponencial rápido. Atendendo a que $\varphi_1 \cdot \varphi_2$ é de decrescimento exponencial rápido, então sabemos, pela observação 4.3.13, que $\mathcal{F}\left(\varphi_1 \cdot \varphi_2\right)$ é analítica em $\mathbb{R}$, logo é uma função de $\mathcal{E}\left(\mathbb{R}\right)$. Sejam agora m um natural qualquer e k um real também arbitrário.

Pelas propriedades clássicas da convolução temos que

$$\begin{aligned}
&\lim_{|\xi|\to+\infty} \mathrm{e}^{k|\xi|} D_\xi^m \left[\mathcal{F}\left(\varphi_1 \cdot \varphi_2\right)\right] \\
=&\lim_{|\xi|\to+\infty} \mathrm{e}^{k|\xi|} D_\xi^m \left[\frac{1}{2\pi}\left[\mathcal{F}\left(\varphi_1\right) * \mathcal{F}\left(\varphi_2\right)\right]\right] \\
=&\frac{1}{2\pi}\lim_{|\xi|\to+\infty} \mathrm{e}^{k|\xi|} \left(\mathcal{F}\left(\varphi_1\right) * D_\xi^m \mathcal{F}\left(\varphi_2\right)\right) \\
=&\frac{1}{2\pi}\lim_{|\xi|\to+\infty} \left(\mathrm{e}^{k|\xi|}\mathcal{F}\left(\varphi_1\right) * \mathrm{e}^{k|\xi|} D_\xi^m \mathcal{F}\left(\varphi_2\right)\right).
\end{aligned}$$

É importante agora notar que $\mathcal{F}(\varphi_1)$ e $\mathcal{F}(\varphi_2)$ são funções de decrescimento exponencial rápido, pois φ_1 e φ_2 pertencem a $\mathfrak{X}_0(\mathrm{I\!R})$ e como $\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathrm{I\!R})$ é fechado para a derivação e para o produto por exponenciais (ver proposição 4.3.8 e corolário 4.3.11) resulta que $\exp\left(k\left|\hat{\xi}\right|\right)\mathcal{F}(\varphi_1)$ e $\exp\left(k\left|\hat{\xi}\right|\right) D_\xi^m\mathcal{F}(\varphi_2)$ ainda são funções do espaço $\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathrm{I\!R})$. Consequentemente, pertencem ao espaço $\mathcal{S}(\mathrm{I\!R})$ de Laurent Schwartz (cf. proposição 4.3.5) e, por isso, podemos também dizer que $\exp\left(k\left|\hat{\xi}\right|\right)\mathcal{F}(\varphi_1)$ e $\exp\left(k\left|\hat{\xi}\right|\right) D_\xi^m\mathcal{F}(\varphi_2)$ são funções do espaço $L^2(\mathrm{I\!R})$. Assim, é-nos permitido afirmar, pela teoria geral do produto de convolução, que a função

$$\mathrm{e}^{k\left|\hat{\xi}\right|}\mathcal{F}(\varphi_1) * \mathrm{e}^{k\left|\hat{\xi}\right|} D_\xi^m \mathcal{F}(\varphi_2)$$

existe para quase todo o ξ em $\mathrm{I\!R}$, é contínua e tende para zero quando $|\xi| \to +\infty$, ou seja,

$$\frac{1}{2\pi}\lim_{|\xi|\to+\infty} \left(\mathrm{e}^{k|\xi|}\mathcal{F}(\varphi_1) * \mathrm{e}^{k|\xi|} D_\xi^m \mathcal{F}(\varphi_2)\right) = 0,$$

o que significa finalmente que $\mathcal{F}(\varphi_1 \cdot \varphi_2) \in \mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathrm{I\!R})$. ■

Proposição 5.1.11 $\mathfrak{X}_0(\mathrm{I\!R})$ *é fechado para o produto por polinómios.*

Demonstração: Consideremos $\varphi \in \mathfrak{X}_0(\mathrm{I\!R})$ e $p \in \mathcal{P}$ quaisquer. Uma vez que $\varphi \in \mathfrak{X}_0(\mathrm{I\!R})$, então $\varphi \in \mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathrm{I\!R})$, donde se conclui que $p \cdot \varphi \in \mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathrm{I\!R})$ (cf. corolário 4.3.12). Resta, pois, mostrar que $\mathcal{F}(p\varphi)$ ainda é uma função de decrescimento exponencial rápido.

Suponhamos que o polinómio p é de grau n, ou seja,

$$p(x) = \sum_{j\leq n} c_j x^j, \quad \text{com } c_j \in \mathbb{C},\ \forall j \in \{0,\ldots,n\},$$

donde, pelo corolário 2.2.10,

$$\mathcal{F}(p\varphi) = \sum_{j\leq n} c_j\, i^j D_\xi^j(\mathcal{F}\varphi).$$

Note-se que $\mathcal{F}\varphi$ é uma função de decrescimento exponencial rápido porque φ é um elemento de $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$. Atendendo ao facto de que $\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$ é fechado para a derivação (ver proposição 4.3.8) tem-se que $\forall j \in \{0, \ldots, n\}$, $D_\xi^j(\mathcal{F}\varphi)$ ainda pertence a $\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$ e por fim, como este espaço é um e.v. (cf. proposição 4.3.3), resulta trivialmente que

$$\sum_{j\leq n} c_j \, i^j D_\xi^j(\mathcal{F}\varphi) \in \mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R}),$$

isto é, $\mathcal{F}(p\varphi) \in \mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$.

Conclui-se, assim, que

$$\forall p \in \mathcal{P} \quad \forall \varphi \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R}) \quad p \cdot \varphi \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R}).$$

■

Proposição 5.1.12 *Se b é um número real arbitrário e φ é uma função de $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$ arbitrária, então $\varphi \cdot e^{ib\hat{x}}$ ainda é uma função do espaço $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$.*

Demonstração: Sejam $b \in \mathbb{R}$ e $\varphi \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$ arbitrários.

Note-se que $\mathcal{F}\varphi$ é uma função de $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$, pois $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$ é fechado para a transformação de Fourier (ver proposição 5.1.9). Atendendo à proposição 5.1.7, podemos concluir que

$$\tau_b(\mathcal{F}\varphi) \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$$

e, pela observação 2.2.8, temos que

$$\mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{ib\hat{x}}\varphi\right) \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R}).$$

Utilizando novamente a proposição 5.1.9, vem que

$$\mathcal{F}\left[\mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{ib\hat{x}}\varphi\right)\right] \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R}).$$

Recordando o corolário 2.2.9 e a observação 5.1.6, temos respectivamente que

$$\mathcal{F}\left[\mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{ib\hat{x}}\varphi\right)\right] = 2\pi \mathrm{e}^{ib(-\hat{x})}\varphi(-\hat{x}) \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$$

e que

$$2\pi \mathrm{e}^{ib\hat{x}}\varphi \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R}),$$

ou seja,

$$\varphi \cdot \mathrm{e}^{ib\hat{x}}$$

é uma função do espaço $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$, pois estamos perante um e.v. (cf. proposição 5.1.1).

■

Seguidamente, apresentamos um resultado, algo curioso, que nos afirma que o produto de uma exponencial por uma função de $\mathcal{G}_a(\mathbb{R})$ é uma função de $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$.

Proposição 5.1.13 *Para toda a função* ψ *de* $\mathcal{G}_a(\mathbb{R})$ *e para todo o número real* b*, tem-se que*

$$\psi \cdot e^{b\hat{x}} \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R}).$$

Demonstração: Sejam $p \in \mathcal{P}$, $a \in \mathbb{R}^+$ e $b \in \mathbb{R}$ arbitrários.

Repare-se que $\mathrm{e}^{-a\hat{x}^2}$ é uma função de $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$, pois este espaço contém $\mathcal{G}_a(\mathbb{R})$ (ver proposição 5.1.4), logo por $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$ ser invariante para as translações (cf. proposição 5.1.7), temos que

$$\tau_{\frac{b}{2a}}\left(\mathrm{e}^{-a\hat{x}^2}\right) = \mathrm{e}^{-a\left(\hat{x}-\frac{b}{2a}\right)^2}$$

ainda pertence ao espaço $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$.

Atendendo à proposição 5.1.11 podemos afirmar que

$$p \cdot \mathrm{e}^{-a\left(\hat{x}-\frac{b}{2a}\right)^2} \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$$

e como, pela proposição 5.1.1, $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$ é um e.v., resulta finalmente que

$$\mathrm{e}^{\frac{b^2}{4a}} \cdot p \cdot \mathrm{e}^{-a\left(\hat{x}-\frac{b}{2a}\right)^2}$$

é uma função de $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$, mas

$$\begin{aligned} & \mathrm{e}^{\frac{b^2}{4a}} \cdot p \cdot \mathrm{e}^{-a\left(\hat{x}-\frac{b}{2a}\right)^2} \\ = \; & p \cdot \mathrm{e}^{-a\hat{x}^2} \cdot \mathrm{e}^{b\hat{x}} \\ = \; & \psi \cdot \mathrm{e}^{b\hat{x}}, \end{aligned}$$

com $\psi = p\,\mathrm{e}^{-a\hat{x}^2} \in \mathcal{G}_a(\mathbb{R})$, o que finaliza a nossa demonstração. ■

5.2 Estrutura topológica em $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$

Dada a definição do espaço $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$, a família de semi-normas mais natural a considerar, indexada em $k \in \mathbb{R}$ e em $m \in \mathbb{N}$, é a seguinte:

$$\mu_{k,m}(\varphi) = \left\| \mathrm{e}^{k|\hat{x}|} D_x^m \varphi \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + \left\| \mathrm{e}^{k|\hat{\xi}|} D_\xi^m (\mathcal{F}\varphi) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \tag{5.2}$$

Proposição 5.2.1 *A família de semi-normas* $\left(\mu_{k,m}\right)_{k\in\mathbb{R},m\in\mathbb{N}}$*, definida em* $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$ *por (5.2), é equivalente à seguinte família de semi-normas, indexada em* k_1 *e* m_1 *naturais quaisquer,*

$$\eta_{k_1,m_1}(\varphi) = \left\| e^{k_1|\hat{x}|} D_x^{m_1} \varphi \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + \left\| e^{k_1|\hat{\xi}|} D_\xi^{m_1} (\mathcal{F}\varphi) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \tag{5.3}$$

Demonstração: A prova é idêntica à efectuada na demonstração da proposição 4.3.15. ■

Observação 5.2.2 *As famílias filtradas de* $\left(\eta_{k_1,m_1}\right)_{k_1,m_1\in I\!N}$ *e* $\left(\mu_{k,m}\right)_{k\in I\!R,m\in I\!N}$ *podem ser respectivamente:*

$$\widetilde{\mu}_{k,\widetilde{m}}(\varphi)=\sup_{m\leq\widetilde{m}}\left\|e^{k|\hat{x}|}D_x^m\varphi\right\|_{L^\infty(I\!R)}+\sup_{m\leq\widetilde{m}}\left\|e^{k|\hat{\xi}|}D_\xi^m(\mathcal{F}\varphi)\right\|_{L^\infty(I\!R)} \tag{5.4}$$

e

$$\widetilde{\eta}_{k_1,\widetilde{m_1}}(\varphi)=\sup_{m_1\leq\widetilde{m_1}}\left\|e^{k_1|\hat{x}|}D_x^{m_1}\varphi\right\|_{L^\infty(I\!R)}+\sup_{m_1\leq\widetilde{m_1}}\left\|e^{k_1|\hat{\xi}|}D_\xi^{m_1}(\mathcal{F}\varphi)\right\|_{L^\infty(I\!R)} \tag{5.5}$$

Veremos agora que todas as propriedades topológicas estudadas em $\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$ são válidas no espaço $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$.

Proposição 5.2.3 *O espaço* $\mathfrak{X}_0(I\!R)$ *é um e.l.c..*

Demonstração: É importante frisar que a família de semi-normas $\left(\widetilde{\eta}_{k_1,\widetilde{m_1}}\right)_{k_1,\widetilde{m_1}\in\mathbb{N}}$ descrita em (5.5) é uma família filtrante sobre o espaço $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$, logo este espaço é semi-normado, pelo que é localmente convexo (cf. proposição 2.1.11). ■

Teorema 5.2.4 $\mathfrak{X}_0(I\!R)$ *é um espaço de Hausdorff.*

Demonstração: Seja $\varphi\in\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$ qualquer, tal que $\varphi\neq 0$; temos, por definição de $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$, que φ é uma função de decrescimento exponencial rápido donde, e de acordo com o teorema 4.3.18, existem k_1 e m_1 números naturais, tais que

$$\begin{aligned}&\nu_{k_1,m_1}(\varphi)\neq 0\\ \Leftrightarrow\quad&\left\|\mathrm{e}^{k_1|\hat{x}|}D_x^{m_1}\varphi\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\neq 0.\end{aligned}$$

Então obtém-se

$$\left\|\mathrm{e}^{k_1|\hat{x}|}D_x^{m_1}\varphi\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}+\left\|\mathrm{e}^{k_1|\hat{\xi}|}D_\xi^{m_1}(\mathcal{F}\varphi)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\neq 0,$$

o que significa que

$$\eta_{k_1,m_1}(\varphi)\neq 0,$$

isto é, $\left(\mathfrak{X}_0(\mathbb{R}),\left(\eta_{k_1,m_1}\right)_{k_1,m_1\in\mathbb{N}}\right)$ é um espaço separado. ■

Corolário 5.2.5 *O espaço das funções tais que tanto elas como as suas transformadas de Fourier são de decrescimento exponencial rápido é metrizável.*

Demonstração: Uma vez que $\mathfrak{X}_0\left(\mathbb{R}\right)$ é separado (ver teorema 5.2.4) e que a família de semi-normas $\left(\eta_{k_1,m_1}\right)_{k_1,m_1\in\mathbb{N}}$ definida por (5.3) é numerável, podemos, pelo teorema 2.1.13, afirmar que $\mathfrak{X}_0\left(\mathbb{R}\right)$ é metrizável. ∎

Na sequência, apresentamos um resultado que afirma que o espaço $\mathfrak{X}_0\left(\mathbb{R}\right)$ se injecta continuamente em $\mathcal{C}_{e^-,\infty}\left(\mathbb{R}\right).$

Proposição 5.2.6

$$\mathfrak{X}_0\left(\mathbb{R}\right) \hookrightarrow \mathcal{C}_{e^-,\infty}\left(\mathbb{R}\right).$$

Demonstração: É claro que $I_{\mathfrak{X}_0(\mathbb{R}),\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})}$ é linear e injectiva.

Mostremos então que $I_{\mathfrak{X}_0(\mathbb{R}),\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})}$ é contínua. Como já vimos anteriormente, basta provar que $I_{\mathfrak{X}_0(\mathbb{R}),\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})}$ é sequencialmente contínua no ponto $\varphi\equiv 0$, pois tanto $\mathfrak{X}_0\left(\mathbb{R}\right)$ como $\mathcal{C}_{e^-,\infty}\left(\mathbb{R}\right)$ são espaços localmente convexos (ver proposições 5.2.3 e 4.3.17) e metrizáveis (cf. corolários 5.2.5 e 4.3.19).

Para este fim, tomemos uma sucessão $\left(\varphi_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ arbitrária de elementos de $\mathfrak{X}_0\left(\mathbb{R}\right)$, tal que

$$\varphi_n\to 0 \quad \text{em } \mathfrak{X}_0\left(\mathbb{R}\right).$$

Sejam k_1 e m_1 em $\mathbb{N}$ arbitrários. Por hipótese, tem-se que

$$\begin{aligned} & \eta_{k_1,m_1}\left(\varphi_n\right)\to 0 \\ \Leftrightarrow\quad & \left\|\mathrm{e}^{k_1|\hat{x}|}D_x^{m_1}\varphi_n\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}+\left\|\mathrm{e}^{k_1|\hat{\xi}|}D_\xi^{m_1}\left(\mathcal{F}\varphi_n\right)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\to 0, \end{aligned}$$

o que implica que

$$\begin{aligned} & \left\|\mathrm{e}^{k_1|\hat{x}|}D_x^{m_1}\varphi_n\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\to 0 \\ \Leftrightarrow\quad & \nu_{k_1,m_1}\left(\varphi_n\right)\to 0 \\ \Leftrightarrow\quad & \varphi_n\to 0 \quad \text{em } \mathcal{C}_{e^-,\infty}\left(\mathbb{R}\right). \end{aligned}$$

∎

Corolário 5.2.7 *O espaço $\mathfrak{X}_0\left(\mathbb{R}\right)$ está contido com injecção canónica contínua e densa no espaço de Schwartz.*

Demonstração: De acordo com a proposição 5.1.5, $\mathfrak{X}_0\left(\mathbb{R}\right)$ é denso no espaço $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}\right)$ de Schwartz, por isso, falta somente provar que

$$\mathfrak{X}_0\left(\mathbb{R}\right) \hookrightarrow \mathcal{S}\left(\mathbb{R}\right).$$

Isto é imediato, pois basta ter em consideração a proposição anterior e o teorema 4.3.20, que nos dizem respectivamente que

$$\mathfrak{X}_0\left(\mathbb{R}\right) \hookrightarrow \mathcal{C}_{e^-,\infty}\left(\mathbb{R}\right)$$

e

$$\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

■

Em seguida, iremos apresentar um lema que nos assegura a convergência de uma sucessão no espaço $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$, desde que esta seja limitada em $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$ e que convirja em $\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$ para um elemento deste último espaço. Este resultado é de grande serventia aos dois teoremas seguintes (ver teoremas 5.2.9 e 5.2.10).

Lema 5.2.8 *Seja* $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sucessão limitada em* $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$ *e seja* $\varphi \in \mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$. *Então, se* $\varphi_n \to \varphi$ *em* $\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$, *tem-se* $\varphi \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$ *e* $\varphi_n \to \varphi$ *em* $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$.

Demonstração: Tome-se $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$ qualquer, tal que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada. Seja φ uma função arbitrária de decrescimento exponencial rápido, tal que $\varphi_n \to \varphi$ em $\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$.

Vejamos que φ é realmente uma função do espaço $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$, ou seja, provemos que $\mathcal{F}\varphi \in \mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$. Analisando a observação 4.3.13, é-nos permitido dizer que $\mathcal{F}\varphi$ é de classe $\mathcal{C}^\infty$ em $\mathbb{R}$, pois $\varphi \in \mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$ e, logo, a sua transformada de Fourier é prolongável a $\mathbb{C}$ como função inteira.

Sejam $m \in \mathbb{N}$ e $k \in \mathbb{R}$ quaisquer.

Verifiquemos em primeiro lugar que

$$D_\xi^m \mathcal{F}\varphi_n \underset{u}{\to} D_\xi^m \mathcal{F}\varphi \quad \text{em } \mathbb{R} \tag{5.6}$$

ou ainda, (cf. observação 2.2.8)

$$\mathcal{F}\left[(-i\hat{x})^m \varphi_n\right] \underset{u}{\to} \mathcal{F}\left[(-i\hat{x})^m \varphi\right] \quad \text{em } \mathbb{R}.$$

Atendendo a que $\varphi_n \to \varphi$ em $\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$ temos que

$$\forall k_1, m_1 \in \mathbb{N} \quad \nu_{k_1,m_1}(\varphi_n - \varphi) \to 0.$$

Em particular, para $k_1 = m \in \mathbb{N}$ e $m_1 = 0$ vem que

$$\lim_{n\to+\infty} \left\| \mathrm{e}^{m|\hat{x}|}(\varphi_n - \varphi) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = 0 \tag{5.7}$$

Ora, para todo o $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
& \left|\mathcal{F}\left[(-i\hat{x})^m \varphi_n\right](\xi) - \mathcal{F}\left[(-i\hat{x})^m \varphi\right](\xi)\right| \\
\underset{\mathcal{F}\text{ é linear}}{=} & \left|\mathcal{F}\left[(-i\hat{x})^m (\varphi_n - \varphi)\right](\xi)\right| \\
= & \left| \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-ix\xi} (-ix)^m (\varphi_n(x) - \varphi(x))\, dx \right| \\
\leq & \int_{\mathbb{R}} |x^m| \left|\varphi_n(x) - \varphi(x)\right| dx \\
\leq & \int_{\mathbb{R}} \left|\mathrm{e}^{|x|m}\right| \left|\varphi_n(x) - \varphi(x)\right| dx,
\end{aligned}$$

por conseguinte,

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}}\left|\mathcal{F}\left[(-i\hat{x})^m\varphi_n\right](\xi)-\mathcal{F}\left[(-i\hat{x})^m\varphi\right](\xi)\right|\leq\sup_{\xi\in\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}\left|e^{|x|m}\right|\left|\varphi_n(x)-\varphi(x)\right|dx\right)$$

ou ainda,

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}}\left|\mathcal{F}\left[(-i\hat{x})^m\varphi_n\right](\xi)-\mathcal{F}\left[(-i\hat{x})^m\varphi\right](\xi)\right|\leq\int_{\mathbb{R}}\left|e^{|x|m}\left(\varphi_n(x)-\varphi(x)\right)\right|dx \tag{5.8}$$

Atendendo a que $\varphi_n-\varphi\to 0$ em $\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$, então $(\varphi_n-\varphi)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de funções limitada em $\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$ e, portanto,

$$\forall k_1,m_1\in\mathbb{N}\quad\exists C_{k_1,m_1}>0\quad\forall n\in\mathbb{N}\quad\nu_{k_1,m_1}(\varphi_n-\varphi)\leq C_{k_1,m_1}.$$

Em particular, para $k_1=m+1$ e $m_1=0$, vem que

$$\exists C_{m+1}>0\quad\forall n\in\mathbb{N}\quad\forall x\in\mathbb{R}\quad\left|e^{(m+1)|x|}\left(\varphi_n(x)-\varphi(x)\right)\right|\leq C_{m+1},$$

isto é,

$$\exists C_{m+1}>0\quad\forall n\in\mathbb{N}\quad\forall x\in\mathbb{R}\quad\left|e^{m|x|}\left(\varphi_n(x)-\varphi(x)\right)\right|\leq C_{m+1}\,e^{-|x|} \tag{5.9}$$

Como

$$\int_{\mathbb{R}}\left|C_{m+1}\,e^{-|x|}\right|dx=2C_{m+1}$$

então

$$C_{m+1}\,e^{-|x|}\in L^1(\mathbb{R}) \tag{5.10}$$

Observando a igualdade (5.7), é-nos permitido afirmar que $(\varphi_n-\varphi)\,e^{m|\hat{x}|}$ converge para zero uniformemente em $\mathbb{R}$, e tendo em consideração as condições (5.9) e (5.10) podemos, pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue, asseverar que

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}}\left|e^{|x|m}\left(\varphi_n(x)-\varphi(x)\right)\right|dx\\=&\int_{\mathbb{R}}\lim_{n\to+\infty}\left|e^{|x|m}\left(\varphi_n(x)-\varphi(x)\right)\right|dx\\=&\;0,\end{aligned}$$

pelo que, da desigualdade (5.8), resulta

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to+\infty}\sup_{\xi\in\mathbb{R}}\left|\mathcal{F}\left[(-i\hat{x})^m\varphi_n\right](\xi)-\mathcal{F}\left[(-i\hat{x})^m\varphi\right](\xi)\right|=0\\\Leftrightarrow\;&\mathcal{F}\left[(-i\hat{x})^m\varphi_n\right]\underset{u}{\to}\mathcal{F}\left[(-i\hat{x})^m\varphi\right]\quad\text{em }\mathbb{R},\end{aligned}$$

ou seja, a condição (5.6) está satisfeita.

Dado que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada no espaço $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$, temos, em especial, que existe uma constante $A_{|C(k)+1|,m}$ positiva, tal que, para todo o n em $\mathbb{N}$

$$\begin{aligned} & \eta_{|C(k)+1|,m}(\varphi_n) \leq A_{|C(k)+1|,m} \\ \Leftrightarrow\quad & \left\| \mathrm{e}^{|C(k)+1||\hat{x}|} D_x^m \varphi_n \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + \left\| \mathrm{e}^{|C(k)+1||\hat{\xi}|} D_\xi^m (\mathcal{F}\varphi_n) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq A_{|C(k)+1|,m} \end{aligned} \tag{5.11}$$

Assim,

$$\begin{aligned} & \left| \mathrm{e}^{|C(k)+1||\xi|} D_\xi^m (\mathcal{F}\varphi_n(\xi)) \right| \\ \leq\quad & \sup_{\xi\in\mathbb{R}} \left| \mathrm{e}^{|C(k)+1||\xi|} D_\xi^m (\mathcal{F}\varphi_n(\xi)) \right| \\ \leq\quad & \left\| \mathrm{e}^{|C(k)+1||\hat{\xi}|} D_\xi^m (\mathcal{F}\varphi_n) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + \left\| \mathrm{e}^{|C(k)+1||\hat{x}|} D_x^m \varphi_n \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \\ \underset{\text{por } (5.11)}{\leq}\quad & A_{|C(k)+1|,m}, \end{aligned}$$

o que implica que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \xi \in \mathbb{R} \quad \left| D_\xi^m (\mathcal{F}\varphi_n(\xi)) \right| \leq A_{|C(k)+1|,m}\ \mathrm{e}^{-|C(k)+1||\xi|}.$$

Mas $D_\xi^m \mathcal{F}\varphi_n$ converge uniformemente para $D_\xi^m \mathcal{F}\varphi$ em $\mathbb{R}$ (ver (5.6)). Em consequência,

$$\lim_{n\to+\infty} \left| D_\xi^m (\mathcal{F}\varphi_n(\xi)) \right| \leq \lim_{n\to+\infty} A_{|C(k)+1|,m}\ \mathrm{e}^{-|C(k)+1||\xi|},$$

ou seja,

$$\forall \xi \in \mathbb{R} \quad \left| D_\xi^m (\mathcal{F}\varphi(\xi)) \right| \leq A_{|C(k)+1|,m}\ \mathrm{e}^{-|C(k)+1||\xi|}$$

e como $|C(k)+1| \geq k$, obtém-se finalmente

$$\forall \xi \in \mathbb{R} \quad \left| D_\xi^m (\mathcal{F}\varphi(\xi)) \right| \leq A_{|C(k)+1|,m}\ \mathrm{e}^{-k|\xi|},$$

isto é, $\mathcal{F}\varphi$ é uma função de decrescimento exponencial rápido em $\mathbb{R}$.

Mostremos agora que φ_n converge para φ em $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$, que é o mesmo que provar que $\psi_n = \varphi_n - \varphi$ converge para a função identicamente nula em $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$, ou seja,

$$\forall k_1, m_1 \in \mathbb{N} \quad \eta_{k_1,m_1}(\psi_n) = \left\| \mathrm{e}^{k_1|\hat{x}|} D_x^{m_1} \psi_n \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + \left\| \mathrm{e}^{k_1|\hat{\xi}|} D_\xi^{m_1} (\mathcal{F}\psi_n) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \to 0 \tag{5.12}$$

Sejam k_1 e m_1 em $\mathbb{N}$ quaisquer. Por hipótese $\varphi_n \to \varphi$ em $\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$, o que significa que

$$\nu_{k_1,m_1}(\varphi_n - \varphi) \to 0 \Leftrightarrow \left\| \mathrm{e}^{k_1|\hat{x}|} D_x^{m_1} \psi_n \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \to 0 \tag{5.13}$$

e, portanto, da expressão (5.12) apenas temos que provar que

$$\left\| e^{k_1 |\hat{\xi}|} D_\xi^{m_1} \left(\mathcal{F}\psi_n \right) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \to 0 \tag{5.14}$$

Fixemos ε_1 em $\mathbb{R}^+$ arbitrário. Pelo facto de $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ser limitada em $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$ e φ ser uma função deste espaço, a sucessão $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de igual modo limitada no espaço $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$ e, por isso,

$$\exists B_{k_1+1,m_1} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \eta_{k_1+1,m_1}(\psi_n) \leq B_{k_1+1,m_1}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} & \left| e^{(k_1+1)|\xi|} D_\xi^{m_1} \left(\mathcal{F}\psi_n(\xi) \right) \right| \\ \leq \; & \left\| e^{(k_1+1)|\hat{x}|} D_x^{m_1} \psi_n \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + \left\| e^{(k_1+1)|\hat{\xi}|} D_\xi^{m_1} \left(\mathcal{F}\psi_n \right) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \\ \leq \; & B_{k_1+1,m_1}, \end{aligned}$$

o que nos conduz a

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall \xi \in \mathbb{R} \quad \left| e^{k_1|\xi|} D_\xi^{m_1} \left(\mathcal{F}\psi_n(\xi) \right) \right| \leq B_{k_1+1,m_1} \, e^{-|\xi|} \tag{5.15}$$

Suponhamos que

$$|\xi| > \ln\left(\frac{B_{k_1+1,m_1}}{\varepsilon_1} \right);$$

tem-se de (5.15) que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall \xi \in \mathbb{R} \quad |\xi| > \ln\left(\frac{B_{k_1+1,m_1}}{\varepsilon_1} \right) \Rightarrow \left| e^{k_1|\xi|} D_\xi^{m_1} \left(\mathcal{F}\psi_n(\xi) \right) \right| \leq \varepsilon_1 \tag{5.16}$$

Para

$$|\xi| \leq \ln\left(\frac{B_{k_1+1,m_1}}{\varepsilon_1} \right)$$

vem que

$$e^{k_1|\xi|} \leq \left(\frac{B_{k_1+1,m_1}}{\varepsilon_1} \right)^{k_1}$$

e, portanto,

$$\left| e^{k_1|\xi|} D_\xi^{m_1} \left(\mathcal{F}\psi_n(\xi) \right) \right| \leq \left(\frac{B_{k_1+1,m_1}}{\varepsilon_1} \right)^{k_1} \left| D_\xi^{m_1} \left(\mathcal{F}\psi_n(\xi) \right) \right| \tag{5.17}$$

Sabemos ainda que $D_\xi^{m_1}\mathcal{F}\varphi_n$ converge uniformemente para $D_\xi^{m_1}\mathcal{F}\varphi$ em $\mathbb{R}$ (cf. (5.6)), por outras palavras, $D_\xi^{m_1}\mathcal{F}\psi_n$ converge uniformemente para 0 em $\mathbb{R}$, isto é,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall \xi \in \mathbb{R} \; \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \Rightarrow \left| D_\xi^{m_1} \left(\mathcal{F}\psi_n(\xi) \right) \right| \leq \frac{(\varepsilon_1)^{k_1+1}}{(B_{k_1+1,m_1})^{k_1}}.$$

Deste modo, da inequação (5.17), tem-se que

$$\forall n \geq n_0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R} \quad |\xi| \leq \ln\left(\frac{B_{k_1+1,m_1}}{\varepsilon_1}\right) \Rightarrow \left|\mathrm{e}^{k_1|\xi|} D_\xi^{m_1}\left(\mathcal{F}\psi_n\left(\xi\right)\right)\right| \leq \varepsilon_1 \tag{5.18}$$

De (5.16) e (5.18) resulta que

$$\forall \varepsilon_1 > 0 \; \exists n_1 = n_0 \in \mathbb{N} \; \forall \xi \in \mathbb{R} \; \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_1 \Rightarrow \left|\mathrm{e}^{k_1|\xi|} D_\xi^{m_1}\left(\mathcal{F}\psi_n\left(\xi\right)\right)\right| \leq \varepsilon_1;$$

acabámos assim, de verificar a expressão (5.14).

Temos

$$\forall k_1, m_1 \in \mathbb{N} \quad \lim_{n\to+\infty} \left\|\mathrm{e}^{k_1|\hat{\xi}|} D_\xi^{m_1}\left(\mathcal{F}\psi_n\right)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = 0$$

e por (5.13)

$$\forall k_1, m_1 \in \mathbb{N} \quad \lim_{n\to+\infty} \left\|\mathrm{e}^{k_1|\hat{x}|} D_x^{m_1}\psi_n\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = 0;$$

logo

$$\forall k_1, m_1 \in \mathbb{N} \quad \lim_{n\to+\infty} \left[\left\|\mathrm{e}^{k_1|\hat{x}|} D_x^{m_1}\psi_n\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + \left\|\mathrm{e}^{k_1|\hat{\xi}|} D_\xi^{m_1}\left(\mathcal{F}\psi_n\right)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\right] = 0,$$

o que nos permite concluir que $\psi_n \to 0$ em $\mathfrak{X}_0\left(\mathbb{R}\right)$, ou seja, $\varphi_n \to \varphi$ no espaço $\mathfrak{X}_0\left(\mathbb{R}\right)$.

■

Teorema 5.2.9 *O espaço das funções de decrescimento exponencial rápido cujas transformadas de Fourier são também de decrescimento exponencial rápido é de Fréchet.*

Demonstração: Em conformidade com a proposição 5.2.3 e com o corolário 5.2.5, é suficiente provar que $\mathfrak{X}_0\left(\mathbb{R}\right)$ é completo.

Tome-se $\left(\varphi_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de Cauchy arbitrária no espaço das funções indefinidamente diferenciáveis de decrescimento exponencial rápido cuja transformada de Fourier é também de decrescimento exponencial rápido.

Atendendo a que

$$\mathfrak{X}_0\left(\mathbb{R}\right) \hookrightarrow \mathcal{C}_{e^-,\infty}\left(\mathbb{R}\right), \text{ (veja-se proposição 5.2.6),}$$

pode-se asseverar que $\left(\varphi_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em $\mathcal{C}_{e^-,\infty}\left(\mathbb{R}\right)$.

Aplicando o teorema 4.3.22, constata-se que

$$\exists \varphi \in \mathcal{C}_{e^-,\infty}\left(\mathbb{R}\right) \quad \varphi_n \to \varphi \quad \text{em } \mathcal{C}_{e^-,\infty}\left(\mathbb{R}\right),$$

porque $\mathcal{C}_{e^-,\infty}\left(\mathbb{R}\right)$ é de Fréchet, logo completo.

A sucessão $\left(\varphi_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, sendo de Cauchy em $\mathfrak{X}_0\left(\mathbb{R}\right)$, é limitada em $\mathfrak{X}_0\left(\mathbb{R}\right)$, donde pelo lema 5.2.8, tem-se $\varphi \in \mathfrak{X}_0\left(\mathbb{R}\right)$ e

$$\varphi_n \to \varphi \quad \text{em } \mathfrak{X}_0\left(\mathbb{R}\right),$$

o que prova que $\mathfrak{X}_0\left(\mathbb{R}\right)$ é completo. ■

Teorema 5.2.10 *$\mathfrak{X}_0(I\!R)$ é um espaço de Montel.*

Demonstração: Comecemos por observar que $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$ é um espaço tonelado, porque é de Fréchet (cf. teoremas 5.2.9 e 2.1.15).

Temos ainda que mostrar que todo o subconjunto limitado de $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$ é relativamente compacto.

Consideremos, então, L um subconjunto qualquer limitado de $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$. O corolário 5.2.5 garante-nos que o espaço $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$ é metrizável. Por conseguinte, provar que L é relativamente compacto é equivalente a mostrar que, de toda a sucessão de elementos de L, se pode extrair uma subsucessão convergente em $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$ (ver teorema 2.1.14).

Fixemos $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão arbitrária de elementos de L.

A proposição 5.2.6 propicia a continuidade e a linearidade da aplicação

$$\begin{aligned} I_{\mathfrak{X}_0(\mathbb{R}),\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})} : \mathfrak{X}_0(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R}) \\ \varphi &\longmapsto I_{\mathfrak{X}_0(\mathbb{R}),\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})}(\varphi) = \varphi, \end{aligned}$$

pelo que L é limitado em $\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$, pois $I_{\mathfrak{X}_0(\mathbb{R}),\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})}$ transforma limitados em limitados. Por outro lado, $\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$ é um espaço metrizável e de Montel (veja-se corolário 4.3.19 e teorema 4.3.23) donde, pelo facto de L ser limitado neste espaço e $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ser uma sucessão de elementos em L, existe uma subsucessão $\left(\varphi_{m_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente no espaço das funções indefinidamente diferenciáveis de decrescimento exponencial rápido.

Assim, existe $\varphi \in \mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$ tal que $\left(\varphi_{m_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para φ em $\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$.

Temos $\varphi \in \mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$, $\varphi_{m_n} \to \varphi$ em $\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$ e $\left(\varphi_{m_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sucessão limitada em $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$, (porque L é limitado em $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$ e $\left(\varphi_{m_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in L^{\mathbb{N}}$). Então, pelo lema 5.2.8, $\varphi \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$ e $\varphi_{m_n} \to \varphi$ em $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$. Obtém-se, por fim, que L é relativamente compacto em $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$. ∎

Corolário 5.2.11 *$\mathfrak{X}_0(I\!R)$ é reflexivo.*

Demonstração: Basta ter em atenção que o espaço $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$ é de Montel (ver teorema 5.2.10) e recordar o teorema 2.1.17. ∎

Teorema 5.2.12 *O espaço $\mathfrak{X}_0(I\!R)$ é bornológico.*

Demonstração: Vimos na proposição 5.2.3 e no corolário 5.2.5 que $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$ é respectivamente localmente convexo e metrizável; então, pela proposição 2.1.16, podemos inferir que $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$ é bornológico. ∎

Na sequência vamos provar a continuidade dos operadores definidos em $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$.

Proposição 5.2.13 *Para todo o a em $I\!R$, o operador translação*

$$\begin{aligned} \tau_a : \mathfrak{X}_0(I\!R) &\longrightarrow \mathfrak{X}_0(I\!R) \\ \varphi &\longmapsto \tau_a\varphi \end{aligned}$$

é um isomorfismo vectorial e topológico.

Demonstração: Mostrámos na proposição 5.1.7 que, para todo o $a \in \mathbb{R}$, $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$ é fechado para τ_a. Obviamente que τ_a é linear. Em relação à bijectividade do operador τ_a, a demonstração é análoga à efectuada na proposição 4.3.25. Provemos agora a continuidade do operador τ_a.

Seja $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão arbitrária de funções de $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$, tal que φ_n converge para zero em $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$. Então, φ_n converge também para zero em $\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$, pois o espaço $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$ está contido com injecção canónica contínua no espaço das funções indefinidamente diferenciáveis de decrescimento exponencial rápido (ver proposição 5.2.6). Assim, decorre da proposição 4.3.25 que

$$\tau_a\varphi_n \to 0 \quad \text{em } \mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R}) \tag{5.19}$$

Recorde-se que o propósito desta demonstração é provar que $\tau_a(\varphi_n) \to 0$ em $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$, isto é, para todo o k_1 e m_1 em $\mathbb{N}$,

$$\eta_{k_1,m_1}(\tau_a\varphi_n) = \left\| e^{k_1|\hat{x}|} D_x^{m_1}(\tau_a\varphi_n)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + \left\| e^{k_1|\hat{\xi}|} D_\xi^{m_1}(\mathcal{F}(\tau_a\varphi_n))\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \to 0;$$

logo, por (5.19), somente precisamos mostrar que

$$\forall k_1, m_1 \in \mathbb{N} \quad \left\| e^{k_1|\hat{\xi}|} D_\xi^{m_1}(\mathcal{F}(\tau_a\varphi_n))\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \to 0 \tag{5.20}$$

Tomemos k_1 e m_1 números naturais quaisquer,

$$\begin{aligned}
& \left| e^{k_1|\xi|} D_\xi^{m_1}(\mathcal{F}(\tau_a\varphi_n)(\xi))\right| \\
= \quad & \left| e^{k_1|\xi|} D_\xi^{m_1}\left(e^{-ia\xi}\mathcal{F}\varphi_n(\xi)\right)\right| \\
\underset{\text{fórmula de Leibniz}}{=} \quad & \left| e^{k_1|\xi|} \sum_{l\le m_1} \binom{m_1}{l} D_\xi^l\left(e^{-ia\xi}\right) D_\xi^{m_1-l}(\mathcal{F}\varphi_n(\xi))\right| \\
= \quad & \left| \sum_{l\le m_1} \binom{m_1}{l} (-ia)^l e^{-ia\xi} e^{k_1|\xi|} D_\xi^{m_1-l}(\mathcal{F}\varphi_n(\xi))\right|,
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
& \sup_{\xi\in\mathbb{R}} \left| e^{k_1|\xi|} D_\xi^{m_1}(\mathcal{F}(\tau_a\varphi_n)(\xi))\right| \\
\le \quad & \sum_{l\le m_1} \binom{m_1}{l} \left|a^l\right| \left\| e^{k_1|\hat{\xi}|} D_\xi^{m_1-l}(\mathcal{F}(\varphi_n))\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}
\end{aligned} \tag{5.21}$$

Sabemos, por hipótese, que φ_n converge para zero em $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$, pelo que

$$\left\| e^{k_1|\hat{x}|} D_x^{m_1-l}(\varphi_n)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + \left\| e^{k_1|\hat{\xi}|} D_\xi^{m_1-l}(\mathcal{F}(\varphi_n))\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \to 0,$$

o que implica que

$$\left\| e^{k_1|\hat{\xi}|} D_\xi^{m_1-l}(\mathcal{F}(\varphi_n))\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \to 0,$$

resultando imediatamente de (5.21) que

$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{\xi\in\mathbb{R}}\left|\mathrm{e}^{k_1|\xi|}D_\xi^{m_1}\left(\mathcal{F}\left(\tau_a\varphi_n\right)(\xi)\right)\right|=0,$$

ou seja, a expressão (5.20).

Da arbitrariedade de k_1 e m_1 em $\mathbb{N}$, conclui-se que

$$\forall k_1,m_1\in\mathbb{N}\quad \eta_{k_1,m_1}\left(\tau_a\varphi_n\right)\to 0.$$

Por outras palavras, $\tau_a\varphi_n$ converge para zero em $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$.

A arbitrariedade do real a permite-nos concluir a continuidade do operador inverso da translação τ_{-a}. ■

Proposição 5.2.14 *Seja $l\in\mathbb{N}$. Então o operador derivada definido por*

$$\begin{aligned} D_x^l:\mathfrak{X}_0(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathfrak{X}_0(\mathbb{R})\\ \varphi &\longmapsto D_x^l\varphi\end{aligned}$$

é linear e contínuo do espaço $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$ nele próprio.

Demonstração: Como o espaço $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$ é fechado para a derivação (ver proposição 5.1.8), então D_x^l é um operador de $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$ em $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$. A linearidade de D_x^l é trivial.

Fixemos $l\in\mathbb{N}$ e $\left(\varphi_n\right)_{n\in\mathbb{N}}\in\left(\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})\right)^{\mathbb{N}}$, tal que $\varphi_n\to 0$ em $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$. Em conformidade com a proposição 5.2.6, podemos afirmar que

$$\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})\hookrightarrow \mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$$

e, por isso,

$$\varphi_n\to 0\quad\text{em } \mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R}),$$

o que nos garante, pela proposição 4.3.26, que

$$D_x^l\left(\varphi_n\right)\to 0\quad\text{em } \mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R}).$$

Assim, basta-nos apenas demonstrar que

$$\forall k_1,m_1\in\mathbb{N}\quad \left\|\mathrm{e}^{k_1|\hat{\xi}|}D_\xi^{m_1}\left(\mathcal{F}\left(D_x^l\left(\varphi_n\right)\right)\right)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\to 0$$

para termos o pretendido, isto é,

$$D_x^l\left(\varphi_n\right)\to 0\quad\text{em } \mathfrak{X}_0(\mathbb{R}).$$

Tomemos para tal, k_1 e m_1 em $\mathbb{N}$ quaisquer

$$\begin{aligned} &\left|\mathrm{e}^{k_1|\xi|}D_\xi^{m_1}\left(\mathcal{F}\left(D_x^l\varphi_n\right)(\xi)\right)\right|\\ = &\left|\mathrm{e}^{k_1|\xi|}D_\xi^{m_1}\left((i\xi)^l\mathcal{F}\left(\varphi_n\right)(\xi)\right)\right|\\ \underset{\text{fórmula de Leibniz}}{\leq} &\mathrm{e}^{k_1|\xi|}\sum_{j\leq m_1}\binom{m_1}{j}\left|i^l\right|\left|D_\xi^j\left(\xi^l\right)\right|\left|D_\xi^{m_1-j}\left(\mathcal{F}\left(\varphi_n\right)(\xi)\right)\right|,\end{aligned}$$

o que implica que

$$
\begin{aligned}
&\sup_{\xi\in\mathbb{R}}\left|\mathrm{e}^{k_1|\xi|}D_\xi^{m_1}\left(\mathcal{F}\left(D_x^l\varphi_n\right)(\xi)\right)\right| \\
\leq\ &\sum_{j\leq m_1}\binom{m_1}{j}\sup_{\xi\in\mathbb{R}}\left(\left|D_\xi^j\left(\xi^l\right)\mathrm{e}^{-|\xi|}\right|\left|\mathrm{e}^{(k_1+1)|\xi|}D_\xi^{m_1-j}\left(\mathcal{F}\left(\varphi_n\right)(\xi)\right)\right|\right) \\
\leq\ &\sum_{j\leq m_1}\binom{m_1}{j}\sup_{\xi\in\mathbb{R}}\left|D_\xi^j\left(\xi^l\right)\mathrm{e}^{-|\xi|}\right|\sup_{\xi\in\mathbb{R}}\left|\mathrm{e}^{(k_1+1)|\xi|}D_\xi^{m_1-j}\left(\mathcal{F}\left(\varphi_n\right)(\xi)\right)\right| \qquad (5.22)
\end{aligned}
$$

Por um lado, sabemos que $\left|D_\xi^j\left(\xi^l\right)\mathrm{e}^{-|\xi|}\right|$ é uma função contínua e, como

$$\lim_{|\xi|\to+\infty}\left|D_\xi^j\left(\xi^l\right)\mathrm{e}^{-|\xi|}\right|=0,$$

então existe e é finito o supremo em $\mathbb{R}$ de $\left|D_\xi^j\left(\xi^l\right)\mathrm{e}^{-|\xi|}\right|$. Para todo o $j\leq m_1$, designemos por M_j tal supremo. Seja agora $M=\max\limits_{j\leq m_1}M_j$. Logo

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}}\left|D_\xi^j\left(\xi^l\right)\mathrm{e}^{-|\xi|}\right|\leq M.$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty}\left[\sum_{j\leq m_1}\binom{m_1}{j}\sup_{\xi\in\mathbb{R}}\left|D_\xi^j\left(\xi^l\right)\mathrm{e}^{-|\xi|}\right|\cdot\left\|\mathrm{e}^{(k_1+1)|\hat{\xi}|}D_\xi^{m_1-j}\left(\mathcal{F}\varphi_n\right)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\right] \\
=\ &\sum_{j\leq m_1}\binom{m_1}{j}M\lim_{n\to+\infty}\left\|\mathrm{e}^{(k_1+1)|\hat{\xi}|}D_\xi^{m_1-j}\left(\mathcal{F}\varphi_n\right)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}=0,
\end{aligned}
$$

porque $\varphi_n\to0$ em $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$; portanto, da desigualdade (5.22), resulta que

$$\lim_{n\to+\infty}\left\|\mathrm{e}^{k_1|\hat{\xi}|}D_\xi^{m_1}\left(\mathcal{F}\left(D_x^l\left(\varphi_n\right)\right)\right)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}=0.$$

Consequentemente, $D_x^l\left(\varphi_n\right)$ converge para a função identicamente nula em $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$ e assim, o operador derivação D_x^l é linear e contínuo de $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$ em $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$. ■

Proposição 5.2.15 *Para cada $q\in\mathcal{P}$, o operador produto*

$$
\begin{aligned}
P_q:\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})&\longrightarrow\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})\\
\varphi&\longmapsto P_q(\varphi)=q\cdot\varphi
\end{aligned}
$$

é linear e contínuo.

Demonstração: Seja q um polinómio complexo definido em $\mathbb{R}$ qualquer. A proposição 5.1.11 garante-nos que o operador P_q vai de $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$ para $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$. Obviamente que o operador P_q é linear.

Seja $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de funções de $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$, tal que φ_n converge para zero em $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$. Tal como já vimos anteriormente podemos dizer que φ_n converge igualmente para zero em $\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$ (cf. proposição 5.2.6). Tendo em atenção o exemplo 3.3.3 constatamos que q é uma função de crescimento exponencial lento, logo, aplicando a proposição 4.3.27, obtém-se que $P_q(\varphi_n)$ converge para a função identicamente nula em $\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$.

Por todas estas razões, é suficiente demonstrar que

$$\forall k_1, m_1 \in \mathbb{N} \quad \lim_{n\to+\infty} \left\| e^{k_1|\hat{\xi}|} D_\xi^{m_1}\left(\mathcal{F}\left(P_q(\varphi_n)\right)\right)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = 0$$

para obtermos o pretendido, isto é,

$$P_q(\varphi_n) \to 0 \quad \text{em } \mathfrak{X}_0(\mathbb{R}).$$

Sejam $k_1, m_1 \in \mathbb{N}$ quaisquer. Suponhamos ainda que o polinómio q é de grau n. Então, pelo corolário 2.2.10,

$$\mathcal{F}(q\cdot\varphi_n) = \sum_{j\le n} c_j\, i^j D_\xi^j(\mathcal{F}\varphi_n), \quad \text{onde } c_j\in\mathbb{C},\ \forall j\in\{0,\dots,n\}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
&\left|e^{k_1|\xi|} D_\xi^{m_1}\left(\mathcal{F}\left(P_q(\varphi_n)\right)(\xi)\right)\right| \\
=\ &\left|e^{k_1|\xi|} D_\xi^{m_1}\left(\sum_{j\le n} c_j\, i^j D_\xi^j\left(\mathcal{F}\varphi_n(\xi)\right)\right)\right| \\
\le\ &\sum_{j\le n} |c_j| \left|e^{k_1|\xi|} D_\xi^{m_1+j}\left(\mathcal{F}\varphi_n(\xi)\right)\right|,
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
&\left\|e^{k_1|\hat{\xi}|} D_\xi^{m_1}\left(\mathcal{F}\left(P_q(\varphi_n)\right)\right)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \\
\le\ &\sum_{j\le n} |c_j| \left\|e^{k_1|\hat{\xi}|} D_\xi^{m_1+j}\left(\mathcal{F}\varphi_n\right)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}
\end{aligned} \tag{5.23}$$

Em virtude de

$$\varphi_n \to 0 \quad \text{em } \mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$$

tem-se, em particular, que

$$\lim_{n\to+\infty} \left\|e^{k_1|\hat{\xi}|} D_\xi^{m_1+j}\left(\mathcal{F}\varphi_n\right)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = 0$$

e, por isso, da expressão (5.23), obtém-se

$$\lim_{n\to+\infty} \left\|e^{k_1|\hat{\xi}|} D_\xi^{m_1}\left(\mathcal{F}\left(P_q(\varphi_n)\right)\right)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = 0.$$

Dada a arbitrariedade de k_1 e m_1 em $\mathbb{N}$, podemos finalmente concluir que

$$\forall k_1, m_1 \in \mathbb{N} \quad \eta_{k_1,m_1}\left(P_q(\varphi_n)\right) \to 0,$$

isto é, $P_q(\varphi_n)$ converge para a função identicamente nula no espaço $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$. ■

Proposição 5.2.16 *O operador $\mathcal{F}$ definido em $\mathfrak{X}_0(I\!R)$ por*

$$\mathcal{F}\varphi = \int_{I\!R} e^{-ix\hat{\xi}}\varphi(x)\,dx \tag{5.24}$$

é um isomorfismo vectorial e topológico de $\mathfrak{X}_0(I\!R)$ em $\mathfrak{X}_0(I\!R)$.

Demonstração: É importante salientar que o integral definido por (5.24) é absolutamente convergente porque, pela proposição 5.1.5, sabemos que

$$\mathfrak{X}_0(\mathrm{I\!R}) \overset{d}{\subset} \mathcal{S}(\mathrm{I\!R}).$$

Pretendemos verificar que $\mathcal{F}$ é linear, bijectiva, contínua e de inversa contínua.

Não há dúvidas no que concerne à linearidade de $\mathcal{F}$, pois este operador é a restrição a $\mathfrak{X}_0(\mathrm{I\!R})$ do operador transformação de Fourier definido em $\mathcal{S}(\mathrm{I\!R})$, que sabemos ser linear (ver teorema 2.2.5).

A prova da injectividade é simples, pois dado $\varphi \in \mathfrak{X}_0(\mathrm{I\!R})$ qualquer, tal que $\mathcal{F}\varphi = 0$, φ é uma função do espaço de Schwartz cuja transformada de Fourier é nula, pelo que, atendendo ao facto do operador $\mathcal{F}$ ser um isomorfismo vectorial e topológico de $\mathcal{S}(\mathrm{I\!R})$ nele mesmo (cf. teorema 2.2.5), φ só pode ser a função identicamente nula. Portanto, $\operatorname{Ker}\mathcal{F} = \{0\}$, o que significa que o operador $\mathcal{F}$ é injectivo.

Se ψ for um elemento arbitrário do espaço $\mathfrak{X}_0(\mathrm{I\!R})$, então $\mathcal{F}\psi$ é, da mesma forma, uma função de $\mathfrak{X}_0(\mathrm{I\!R})$ (cf. proposição 5.1.9), daí que $\dfrac{1}{2\pi}\mathcal{F}\psi\left(-\hat{\xi}\right)$ também pertence a $\mathfrak{X}_0(\mathrm{I\!R})$ (ver observação 5.1.6). Posto isto, a ideia que nos surge é tomar

$$\varphi = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\psi\left(-\hat{\xi}\right) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}_{-1}\psi \in \mathfrak{X}_0(\mathrm{I\!R});$$

logo φ é uma função teste de Schwartz (porque $\mathfrak{X}_0(\mathrm{I\!R}) \subset \mathcal{S}(\mathrm{I\!R})$) e, pelas propriedades da transformada de Fourier no espaço $\mathcal{S}(\mathrm{I\!R})$, resulta que

$$\mathcal{F}\varphi = \mathcal{F}\left(\frac{1}{2\pi}\mathcal{F}_{-1}\psi\right) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}(\mathcal{F}_{-1}\psi) = \frac{1}{2\pi}2\pi\psi = \psi \quad \text{(ver teorema 2.2.5).}$$

Da arbitrariedade de ψ em $\mathfrak{X}_0(\mathrm{I\!R})$ temos que

$$\forall\psi \in \mathfrak{X}_0(\mathrm{I\!R}) \quad \exists\varphi = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}_{-1}\psi \in \mathfrak{X}_0(\mathrm{I\!R}) \quad \psi = \mathcal{F}\varphi \tag{5.25}$$

ou seja, a sobrejectividade de $\mathcal{F}$ está provada.

Para vermos que $\mathcal{F}$ é contínuo de $\mathfrak{X}_0(\mathrm{I\!R})$ em $\mathfrak{X}_0(\mathrm{I\!R})$, basta tomarmos $(\varphi_n)_{n\in\mathrm{I\!N}}$ uma sucessão de funções de $\mathfrak{X}_0(\mathrm{I\!R})$, tal que $(\varphi_n)_{n\in\mathrm{I\!N}}$ converge para zero em $\mathfrak{X}_0(\mathrm{I\!R})$ e mostrarmos que $\mathcal{F}(\varphi_n) \to 0$ em $\mathfrak{X}_0(\mathrm{I\!R})$, isto é, para quaisquer naturais k_1 e m_1,

$$\eta_{k_1,m_1}(\mathcal{F}(\varphi_n)) = \left\|\mathrm{e}^{k_1|\hat{t}|}D_t^{m_1}(\mathcal{F}(\varphi_n))\right\|_{L^\infty(\mathrm{I\!R})} + \left\|\mathrm{e}^{k_1|\hat{\xi}|}D_\xi^{m_1}(\mathcal{F}(\mathcal{F}(\varphi_n)))\right\|_{L^\infty(\mathrm{I\!R})} \to 0.$$

Com efeito, sendo k_1 e m_1 elementos quaisquer de $\mathbb{N}$, vem

$$\begin{aligned}
&\left\| e^{k_1|\hat{t}|} D_t^{m_1}\left(\mathcal{F}\left(\varphi_n\right)\right)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + \left\| e^{k_1|\hat{\xi}|} D_\xi^{m_1}\left(\mathcal{F}\left(\mathcal{F}\left(\varphi_n\right)\right)\right)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \\
\underset{\text{corolário 2.2.9}}{=} &\left\| e^{k_1|\hat{t}|} D_t^{m_1}\left(\mathcal{F}\left(\varphi_n\right)\right)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + 2\pi \left\| e^{k_1|\hat{\xi}|} D_\xi^{m_1}\left(\varphi_n\left(-\hat{\xi}\right)\right)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \\
\leq \quad & 2\pi\left(\left\| e^{k_1|\hat{t}|} D_t^{m_1}\left(\mathcal{F}\left(\varphi_n\right)\right)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + \left\| e^{k_1|\hat{\xi}|} D_\xi^{m_1}\left(\varphi_n\left(-\hat{\xi}\right)\right)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\right)
\end{aligned} \tag{5.26}$$

Por hipótese $\varphi_n \to 0$ em $\mathfrak{X}_0\left(\mathbb{R}\right)$, o que quer dizer que

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\left\| e^{k_1|\hat{\xi}|} D_\xi^{m_1}\left(\varphi_n\right)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + \left\| e^{k_1|\hat{t}|} D_t^{m_1}\left(\mathcal{F}\left(\varphi_n\right)\right)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\right] = 0,$$

o que implica que

$$\lim_{n\to+\infty}\left[2\pi\left(\left\| e^{k_1|\hat{t}|} D_t^{m_1}\left(\mathcal{F}\left(\varphi_n\right)\right)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + \left\| e^{k_1|\hat{\xi}|} D_\xi^{m_1}\left(\varphi_n\left(-\hat{\xi}\right)\right)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\right)\right] = 0,$$

donde, da desigualdade (5.26), resulta imediatamente o pretendido, ou seja,

$$\left\| e^{k_1|\hat{t}|} D_t^{m_1}\left(\mathcal{F}\left(\varphi_n\right)\right)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + \left\| e^{k_1|\hat{\xi}|} D_\xi^{m_1}\left(\mathcal{F}\left(\mathcal{F}\left(\varphi_n\right)\right)\right)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \to 0;$$

garantimos assim a convergência para a função nula em $\mathfrak{X}_0\left(\mathbb{R}\right)$ da transformada de Fourier da sucessão $\left(\varphi_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Por conseguinte o operador $\mathcal{F}$ é contínuo de $\mathfrak{X}_0\left(\mathbb{R}\right)$ em $\mathfrak{X}_0\left(\mathbb{R}\right)$.

A prova da injectividade de $\mathcal{F}$ e a condição (5.25) mostra-nos que $\mathcal{F}$ é uma bijecção de $\mathfrak{X}_0\left(\mathbb{R}\right)$ em $\mathfrak{X}_0\left(\mathbb{R}\right)$, sendo a bijecção inversa dada por:

$$\frac{1}{2\pi}\mathcal{F}_{-1}.$$

Sendo $\mathcal{F}$ uma aplicação de $\mathfrak{X}_0\left(\mathbb{R}\right)$ em $\mathfrak{X}_0\left(\mathbb{R}\right)$ linear, contínua e bijectiva, com $\mathfrak{X}_0\left(\mathbb{R}\right)$ um espaço de Fréchet (cf. teorema 5.2.9), o teorema da aplicação aberta garante--nos que $\mathcal{F}$ é uma aplicação aberta. Consequentemente, a sua inversa $\mathcal{F}^{-1} = \dfrac{1}{2\pi}\mathcal{F}_{-1}$ também é contínua[1].

Assim, $\mathcal{F}$ é um isomorfismo vectorial e topológico do espaço $\mathfrak{X}_0\left(\mathbb{R}\right)$ nele próprio.

■

[1]Podemos também notar que $\mathcal{F}_{-1}$ é um operador contínuo de $\mathfrak{X}_0\left(\mathbb{R}\right)$ em $\mathfrak{X}_0\left(\mathbb{R}\right)$ e como (cf. teorema 2.2.5)

$$\mathcal{F}_{-1}\left(\varphi\right)\left(\xi\right) = \mathcal{F}\varphi\left(-\xi\right),$$

então a aplicação

$$\varphi \to \varphi\left(-\hat{\xi}\right)$$

também é contínua de $\mathfrak{X}_0\left(\mathbb{R}\right)$ em $\mathfrak{X}_0\left(\mathbb{R}\right)$.

Observação 5.2.17 *É de realçar que as propriedades (2.19) a (2.22) da transformação de Fourier referidas na proposição 2.2.7, são obviamente válidas no espaço* $\mathfrak{X}_0(I\!R)$ *pois, como já referimos anteriormente,* $\mathfrak{X}_0(I\!R) \subset \mathcal{S}(I\!R)$ *(cf. proposição 5.1.5),* $\mathcal{S}(I\!R) \subset \mathcal{S}'(I\!R)$ *e pela proposição precedente* $\mathcal{F}$ *é um isomorfismo de* $\mathfrak{X}_0(I\!R)$ *em* $\mathfrak{X}_0(I\!R)$*. Quanto às propriedades (2.23) e (2.24) são também verdadeiras em* $\mathfrak{X}_0(I\!R)$ *e podem ser demonstradas directamente recorrendo à definição usual de convolução. De igual forma, podemos concluir que os corolários 2.2.9 e 2.2.10 são válidos em* $\mathfrak{X}_0(I\!R)$.

Capítulo 6

Distribuições generalizadas

6.1 O espaço $\mathfrak{X}_0'(\mathbb{R})$

Denotaremos por $\mathfrak{X}_0'(\mathbb{R})$ o dual topológico do espaço $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$, ou seja, $T \in \mathfrak{X}_0'(\mathbb{R})$ se, e só se, T é um funcional linear e contínuo sobre $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$, isto é,

$$\begin{aligned} T : \mathfrak{X}_0(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \varphi &\longmapsto \langle T, \varphi \rangle_{\mathfrak{X}_0', \mathfrak{X}_0}, \end{aligned}$$

é uma aplicação linear e contínua, onde $\langle T, \varphi \rangle_{\mathfrak{X}_0', \mathfrak{X}_0}$ denota o produto de dualidade entre $T \in \mathfrak{X}_0'(\mathbb{R})$ e $\varphi \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$.

Para abreviarmos a notação e desde que não haja confusão possível, designaremos o produto de dualidade entre $\mathfrak{X}_0'(\mathbb{R})$ e $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$ somente por $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Vamos munir o espaço $\mathfrak{X}_0'(\mathbb{R})$ com a **topologia forte** e designamo-la, como é usual, por $\beta(\mathfrak{X}_0', \mathfrak{X}_0)$. O teorema 5.2.4 diz-nos que $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$ é de Hausdorff, o que implica que a topologia forte $\beta(\mathfrak{X}_0', \mathfrak{X}_0)$ seja a topologia da convergência uniforme nos limitados de $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$.

Tendo em conta que $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$ está contido com injecção canónica contínua e densa em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, podemos enunciar e provar o seguinte teorema:

Teorema 6.1.1 *O espaço das distribuições temperadas de Schwartz $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ está contido com injecção canónica contínua no espaço $\mathfrak{X}_0'(\mathbb{R})$.*

Demonstração: Resulta imediatamente do corolário 5.2.7 que

$$\mathfrak{X}_0(\mathbb{R}) \overset{d}{\hookrightarrow} \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

e por dualidade, é imediato afirmar que

$$\mathcal{S}'(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathfrak{X}_0'(\mathbb{R}).$$

Tendo-se ainda

$$\forall T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \quad \forall \varphi \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R}) \quad \langle T, \varphi \rangle_{\mathfrak{X}_0', \mathfrak{X}_0} = \langle T, \varphi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}}.$$

■

Observação 6.1.2 *Importa agora salientar que, pelo facto do espaço $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ estar contido com injecção canónica contínua em $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ e este, por sua vez, estar contido com injecção canónica contínua em $\mathfrak{X}_0'(\mathbb{R})$ (cf. teorema 6.1.1), então a seguinte cadeia de inclusões canónicas e contínuas é válida:*

$$\mathfrak{X}_0(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathfrak{X}_0'(\mathbb{R}) \tag{6.1}$$

Passaremos agora a expor os operadores de derivação $\tilde{D}_x^l$, produto por um polinómio $\tilde{P}_q$ e translação $\tilde{\tau}_a$ em $\mathfrak{X}_0'(\mathbb{R})$, que se obtêm facilmente por transposição[1] dos operadores previamente definidos em $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$ (ver proposições 5.2.14, 5.2.15 e 5.2.13). Incontestavelmente estes "novos" operadores serão lineares e contínuos.

Proposição 6.1.3 *Para todo o l em $\mathbb{N}$, o operador de derivação*

$$\begin{aligned} \tilde{D}_x^l : \mathfrak{X}_0'(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathfrak{X}_0'(\mathbb{R}) \\ T &\longmapsto \tilde{D}_x^l T, \end{aligned}$$

definido por

$$\forall \varphi \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R}) \quad \left\langle \tilde{D}_x^l T, \varphi \right\rangle = (-1)^l \left\langle T, D_x^l \varphi \right\rangle \tag{6.2}$$

é linear e contínuo e prolonga o operador derivada usual definido em $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$.

Proposição 6.1.4 *Para cada $q \in \mathcal{P}$, o operador produto*

$$\tilde{P}_q : \mathfrak{X}_0'(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathfrak{X}_0'(\mathbb{R}),$$

tal que

$$\forall T \in \mathfrak{X}_0'(\mathbb{R}) \quad \forall \varphi \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R}) \quad \left\langle \tilde{P}_q T, \varphi \right\rangle = \langle T, P_q \varphi \rangle = \langle T, q \cdot \varphi \rangle$$

é linear e contínuo e prolonga o operador $P_q : \mathfrak{X}_0(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$.

Proposição 6.1.5 *Para todo o a em $\mathbb{R}$, o operador translação*

$$\tilde{\tau}_a : \mathfrak{X}_0'(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathfrak{X}_0'(\mathbb{R})$$

definido por

$$\forall T \in \mathfrak{X}_0'(\mathbb{R}) \quad \forall \varphi \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R}) \quad \langle \tilde{\tau}_a T, \varphi \rangle = \langle T, \tau_{-a} \varphi \rangle$$

é um isomorfismo vectorial e topológico, onde o operador inverso é obviamente $\tilde{\tau}_{-a}$. Para além disso, $\tilde{\tau}_a$ prolonga o operador $\tau_a : \mathfrak{X}_0(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$.

Observação 6.1.6 *Mais uma vez, para simplificar a nossa exposição, omitiremos o símbolo $\sim$ em cada um dos operadores de $\mathfrak{X}_0'(\mathbb{R})$ atrás definidos.*

[1] No caso do operador derivação $\tilde{D}_x^l$, este obtém-se a menos do produto por uma constante, por transposição do operador D_x^l.

6.2 Transformação de Fourier em $\mathfrak{X}_0'(\mathbb{R})$

Em virtude da linearidade e da continuidade do operador

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \mathfrak{X}_0(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathfrak{X}_0(\mathbb{R}) \\ \varphi &\longmapsto \mathcal{F}\varphi, \end{aligned}$$

onde

$$\forall \xi \in \mathbb{R} \quad \mathcal{F}\varphi(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-ix\xi} \varphi(x)\, dx,$$

podemos aplicar o processo de transposição a este operador, obtendo por isso, um operador $\tilde{\mathcal{F}}$, definido por:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{F}} : \mathfrak{X}_0'(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathfrak{X}_0'(\mathbb{R}) \\ T &\longmapsto \tilde{\mathcal{F}}T, \end{aligned}$$

com

$$\left\langle \tilde{\mathcal{F}}T, \varphi \right\rangle = \langle T, \mathcal{F}\varphi \rangle \tag{6.3}$$

Seguindo a mesma linha de raciocínio da secção anterior, surge-nos o seguinte resultado:

Proposição 6.2.1 *A transformada de Fourier $\tilde{\mathcal{F}}$ descrita em (6.3) é um isomorfismo vectorial e topológico de $\mathfrak{X}_0'(\mathbb{R})$ sobre $\mathfrak{X}_0'(\mathbb{R})$ e prolonga o operador transformação de Fourier $\mathcal{F}$ determinado em $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$.*

Demonstração: O operador $\tilde{\mathcal{F}}$ é claramente linear, e, sendo o transposto de um operador linear contínuo de $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$ em $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$, é de igual forma contínuo. Mais ainda, a proposição 5.2.16 diz-nos que a transformação de Fourier $\mathcal{F}$ é um isomorfismo vectorial e topológico de $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$ nele próprio, o que nos permite concluir que $\tilde{\mathcal{F}}$ é também um isomorfismo vectorial e topológico de $\mathfrak{X}_0'(\mathbb{R})$ sobre $\mathfrak{X}_0'(\mathbb{R})$. ∎

Observação 6.2.2 *No que se segue, para maior facilidade de escrita e sempre que não haja confusão possível, notaremos a transformação de Fourier em $\mathfrak{X}_0'(\mathbb{R})$ por $\mathcal{F}$ em vez de $\tilde{\mathcal{F}}$.*

Observação 6.2.3 *Por dualidade, as propriedades da transformação de Fourier em $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$ mantêm-se válidas em $\mathfrak{X}_0'(\mathbb{R})$, ou seja, todas as propriedades de $\mathcal{F}$ definidas em $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ (ver proposição 2.2.7 e corolários 2.2.9 e 2.2.10) são verdadeiras no espaço de distribuições generalizadas $\mathfrak{X}_0'(\mathbb{R})$.*

6.3 Caracterização de alguns elementos de $\mathfrak{X}_0'(\mathbb{R})$

Interessa-nos, neste subcapítulo, identificar alguns elementos do espaço $\mathfrak{X}_0'(\mathbb{R})$. Para esse fim, procederemos, em primeiro lugar, a um estudo prévio das propriedades topológicas do nosso espaço de distribuições generalizadas.

Observação 6.3.1 *É imediato afirmar que $\mathfrak{X}_0'(\mathbb{R})$ é localmente convexo, pois é semi--normado.*

Proposição 6.3.2 *O espaço $(\mathfrak{X}_0'(\mathbb{R}), \beta(\mathfrak{X}_0', \mathfrak{X}_0))$ é de Montel.*

Demonstração: Com base no teorema 5.2.10, podemos afirmar que $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$ é de Montel, pelo que o seu dual topológico $\mathfrak{X}_0'(\mathbb{R})$ é, de igual forma, de Montel quando munido da topologia forte (ver teorema 2.1.17). ■

Corolário 6.3.3 *$\mathfrak{X}_0'(\mathbb{R})$ é um espaço tonelado, logo, por maioria de razão, é separado.*

Demonstração: Advém da proposição anterior, pois acabámos de ver que $(\mathfrak{X}_0'(\mathbb{R}), \beta(\mathfrak{X}_0', \mathfrak{X}_0))$ é um espaço de Montel. ■

Corolário 6.3.4 *O espaço $\mathfrak{X}_0'(\mathbb{R})$ é reflexivo.*

Demonstração: É imediato, pois $\mathfrak{X}_0'(\mathbb{R})$ é de Montel (ver proposição 6.3.2) e, como sabemos, todo o espaço de Montel é reflexivo (cf. teorema 2.1.17). ■

Observação 6.3.5 *Observe-se que $(\mathfrak{X}_0'(\mathbb{R}), \beta(\mathfrak{X}_0', \mathfrak{X}_0))$ não é metrizável, porque é possível provar que não existe qualquer família de semi-normas contável que gere a topologia forte em $\mathfrak{X}_0'(\mathbb{R})$, ou seja, que origine a topologia da convergência uniforme nos limitados de $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$ (cf. teorema 2.1.13).*

Observação 6.3.6 *Evidentemente que o espaço $\mathfrak{X}_0'(\mathbb{R})$ não é de Fréchet, pois pela observação precedente, $\mathfrak{X}_0'(\mathbb{R})$ não é metrizável.*

Proposição 6.3.7 *$(\mathfrak{X}_0'(\mathbb{R}), \beta(\mathfrak{X}_0', \mathfrak{X}_0))$ é completo.*

Demonstração: Atendendo aos teoremas 5.2.12 e 5.2.4, reconhecemos respectivamente, que $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$ é bornológico e separado; logo, pela proposição 2.1.19, $\mathfrak{X}_0'(\mathbb{R})$ é completo para a topologia forte $\beta(\mathfrak{X}_0', \mathfrak{X}_0)$. ■

Estamos agora aptos a identificar alguns elementos do espaço $\mathfrak{X}_0'(\mathbb{R})$:

Teorema 6.3.8 *Se f é uma função contínua de crescimento exponencial em $\mathbb{R}$, ou seja, $f \in \mathcal{C}_{e^+}(\mathbb{R})$, temos que $f \in \mathfrak{X}_0'(\mathbb{R})$.*

O método mais natural, baseado no lema de Riesz, para identificarmos f como um elemento de $\mathfrak{X}_0'(\mathbb{R})$, é o de fazer corresponder a f um funcional $\mathcal{T}_f$. Precisamos para tal de uma aplicação auxiliar $\mathcal{T}$ definida da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{T} : \mathcal{C}_{e^+}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathfrak{X}_0'(\mathbb{R}) \\ f &\longmapsto \mathcal{T}_f, \end{aligned}$$

tal que

$$\forall \varphi \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R}), \quad \langle \mathcal{T}_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\varphi(x)\,dx.$$

A demonstração deste teorema consistirá essencialmente em três lemas. O primeiro deles será provar a existência de $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\varphi(x)\,dx$; no segundo mostraremos que $\mathcal{T}_f \in \mathfrak{X}_0'(\mathbb{R})$ e, por último, provaremos que $\mathcal{T}$ é injectiva.

Lema 6.3.9 *O integral $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\varphi(x)\,dx$ é absolutamente convergente.*

Demonstração: Tendo em consideração que $f \in \mathcal{C}_{e^+}(\mathbb{R})$, logo

$$\exists \alpha, \beta > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad |f(x)| \leq \alpha\ \mathrm{e}^{\beta|x|}.$$

Além disso, como $\varphi \in \mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$, pois $\varphi \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$, obtém-se em particular que

$$\exists c_\beta \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad |\varphi(x)| \leq c_\beta\ \mathrm{e}^{-(\beta+1)|x|},$$

e portanto

$$|f(x)\,\varphi(x)| \leq \alpha\ \mathrm{e}^{\beta|x|} c_\beta\ \mathrm{e}^{-(\beta+1)|x|} = \alpha_1\ \mathrm{e}^{-|x|}, \quad \text{com } \alpha_1 = \alpha c_\beta \tag{6.4}$$

Temos ainda que

$$\int_{\mathbb{R}} \alpha_1\ \mathrm{e}^{-|x|} dx = 2\alpha_1.$$

Atendendo à desigualdade (6.4) e ao facto do integral $\int_{\mathbb{R}} \alpha_1\ \mathrm{e}^{-|x|}dx$ ser convergente, então podemos afirmar que $\int_{\mathbb{R}} |f(x)\,\varphi(x)|\,dx$ é convergente e, finalmente, que $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\varphi(x)\,dx$ é absolutamente convergente. ∎

Lema 6.3.10 $\mathcal{T}_f \in \mathfrak{X}_0'(\mathbb{R})$.

Demonstração: A linearidade de $\mathcal{T}_f$ é trivial, pois sendo φ_1 e φ_2 elementos arbitrários de $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$ e $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{C}$ quaisquer, temos

$$\begin{aligned} & \langle \mathcal{T}_f, \gamma_1\varphi_1 + \gamma_2\varphi_2 \rangle \\ = & \int_{\mathbb{R}} f(x)\,(\gamma_1\varphi_1(x) + \gamma_2\varphi_2(x))\,dx \\ = & \gamma_1 \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\varphi_1(x)\,dx + \gamma_2 \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\varphi_2(x)\,dx \\ = & \gamma_1 \langle \mathcal{T}_f, \varphi_1 \rangle + \gamma_2 \langle \mathcal{T}_f, \varphi_2 \rangle. \end{aligned}$$

Resta-nos mostrar que

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_f : \mathfrak{X}_0(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{C}\\ \varphi &\longmapsto \langle \mathcal{T}_f, \varphi\rangle = \textstyle\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\varphi(x)\,dx\end{aligned}$$

é contínua. Uma vez que $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$ e $\mathbb{C}$ são espaços semi-normados, logo e.v.t., então é suficiente demonstrar que $\mathcal{T}_f$ é contínua no ponto $\varphi \equiv 0$. Para além disto, sabemos que $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$ e $\mathbb{C}$ são espaços metrizáveis (cf. corolário 5.2.5), por isso a continuidade é equivalente à continuidade sequencial. Tomemos, para tal, $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão arbitrária de funções em $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$, tal que $\varphi_n \to 0$ em $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$. Queremos provar que $\langle \mathcal{T}_f, \varphi_n\rangle \to \langle \mathcal{T}_f, 0\rangle = 0$ em $\mathbb{C}$.

Em virtude de $\varphi_n \to 0$ em $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$, podemos imediatamente garantir que

$$\forall k \in \mathbb{R} \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad \left\| e^{k|\hat{x}|} D_x^m \varphi_n \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + \left\| e^{k|\hat{\xi}|} D_\xi^m (\mathcal{F}\varphi_n) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \to 0 \quad \text{em } \mathbb{R}.$$

Então, em particular para $k = \beta \in \mathbb{R}$ e $m = 0 \in \mathbb{N}$,

$$\left\| e^{\beta|\hat{x}|} \varphi_n \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + \left\| e^{\beta|\hat{\xi}|} \mathcal{F}\varphi_n \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \to 0 \quad \text{em } \mathbb{R},$$

donde

$$\left\| e^{\beta|\hat{x}|} \varphi_n \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \to 0 \quad \text{em } \mathbb{R},$$

o que implica que

$$\left| e^{\beta|\hat{x}|} \varphi_n \right| \underset{u}{\to} 0 \quad \text{em } \mathbb{R} \tag{6.5}$$

Observe-se que

$$|\langle \mathcal{T}_f, \varphi_n\rangle| \le \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,|\varphi_n(x)|\,dx \underset{f\in\mathcal{C}_{e^+}(\mathbb{R})}{\le} \alpha \int_{\mathbb{R}} e^{\beta|x|}\,|\varphi_n(x)|\,dx \tag{6.6}$$

Tendo em conta, uma vez mais, que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão convergente em $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$, podemos inferir que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada neste espaço e, por isso,

$$\forall k_1, m_1 \in \mathbb{N} \quad \exists A_{k_1,m_1} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \eta_{k_1,m_1}(\varphi_n) \le A_{k_1,m_1}.$$

Para $k_1 = \beta + 1$ e $m_1 = 0$ vem, em particular, que

$$\exists A_{\beta+1} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \left| e^{\beta|x|} \varphi_n(x) \right| \le A_{\beta+1}\, e^{-|x|} \tag{6.7}$$

Como

$$\int_{\mathbb{R}} \left| A_{\beta+1}\, e^{-|x|} \right| dx = 2A_{\beta+1}$$

então

$$A_{\beta+1}\, e^{-|x|} \in L^1(\mathbb{R}) \tag{6.8}$$

De (6.7) e (6.8) é imediato afirmar que $\left(\mathrm{e}^{\beta|\hat{x}|}\varphi_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é dominada por uma função de $L^1(\mathbb{R})$ e se recordarmos que esta sucessão converge para zero uniformemente em $\mathbb{R}$ (cf. (6.5)), o teorema da convergência dominada de Lebesgue permite-nos concluir que

$$\lim_{n\to+\infty}\alpha\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{\beta|x|}\left|\varphi_n(x)\right|dx=\alpha\int_{\mathbb{R}}\lim_{n\to+\infty}\left|\mathrm{e}^{\beta|x|}\varphi_n(x)\right|dx=0.$$

Portanto, da desigualdade (6.6) decorre que

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\langle\mathcal{T}_f,\varphi_n\rangle\right|=0,$$

o que nos leva a deduzir que

$$\langle\mathcal{T}_f,\varphi_n\rangle\to 0 \text{ em } \mathbb{C}.$$

Dada a arbitrariedade de $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $(\mathfrak{X}_0(\mathbb{R}))^{\mathbb{N}}$, tal que $\varphi_n\to 0$, temos que

$$\forall(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}\in(\mathfrak{X}_0(\mathbb{R}))^{\mathbb{N}}\quad \varphi_n\to 0 \text{ em } \mathfrak{X}_0(\mathbb{R})\Rightarrow\langle\mathcal{T}_f,\varphi_n\rangle\to 0 \text{ em } \mathbb{C},$$

isto é, $\mathcal{T}_f$ é contínua em $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$. ■

Lema 6.3.11 *A aplicação*

$$\begin{aligned}\mathcal{T}:\mathcal{C}_{e^+}(\mathbb{R})&\longrightarrow\mathfrak{X}_0'(\mathbb{R})\\ f&\longmapsto\mathcal{T}_f\end{aligned}$$

é injectiva.

Demonstração: Sejam $f,g\in\mathcal{C}_{e^+}(\mathbb{R})$, $\gamma_1,\gamma_2\in\mathbb{C}$ e $\varphi\in\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$ quaisquer, temos

$$\begin{aligned}&\left\langle\mathcal{T}_{\gamma_1 f+\gamma_2 g},\varphi\right\rangle\\ =\;&\int_{\mathbb{R}}(\gamma_1 f(x)+\gamma_2 g(x))\,\varphi(x)\,dx\\ =\;&\gamma_1\int_{\mathbb{R}}f(x)\,\varphi(x)\,dx+\gamma_2\int_{\mathbb{R}}g(x)\,\varphi(x)\,dx\\ =\;&\gamma_1\langle\mathcal{T}_f,\varphi\rangle+\gamma_2\langle\mathcal{T}_g,\varphi\rangle\\ =\;&\langle\gamma_1\mathcal{T}_f,\varphi\rangle+\langle\gamma_2\mathcal{T}_g,\varphi\rangle\\ =\;&\langle\gamma_1\mathcal{T}_f+\gamma_2\mathcal{T}_g,\varphi\rangle,\end{aligned}$$

donde se conclui que $\mathcal{T}$ é linear.

Para demonstrarmos que $\mathcal{T}$ é injectiva, basta provar que $\operatorname{Ker}\mathcal{T}=\{0\}$. Consideremos então, $f\in\mathcal{C}_{e^+}(\mathbb{R})$ arbitrário tal que $\mathcal{T}_f=0$.

Observe-se que

$$\begin{aligned}&\mathcal{T}_f=0\\ \Leftrightarrow\;&\forall\varphi\in\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})\quad\langle\mathcal{T}_f,\varphi\rangle=0\\ \Leftrightarrow\;&\forall\varphi\in\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})\quad\int_{\mathbb{R}}f(x)\,\varphi(x)\,dx=0\end{aligned}\tag{6.9}$$

Seja $\varphi = \hat{x}^n \ \mathrm{e}^{-\hat{x}^2}$. Tem-se que $\varphi \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$ (cf. proposição 5.1.4), donde por (6.9)

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_{\mathbb{R}} f(x)\, x^n \ \mathrm{e}^{-x^2} dx = 0 \tag{6.10}$$

Se notarmos por $m_n \left(f \ \mathrm{e}^{-\hat{x}^2} \right)$ os momentos de ordem n da função $f \ \mathrm{e}^{-\hat{x}^2}$, então de (6.10),

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad m_n \left(f \ \mathrm{e}^{-\hat{x}^2} \right) = 0 \tag{6.11}$$

o que nos permite afirmar que todos os momentos de ordem n da função $f \ \mathrm{e}^{-\hat{x}^2}$ são nulos.

Tencionamos provar que $f \equiv 0$. Para tal, vamos em primeiro lugar mostrar que

$$D_\xi^n \left[\mathcal{F}\left(f \ \mathrm{e}^{-\hat{x}^2} \right) \right](0) = (-i)^n \, m_n \left(f \ \mathrm{e}^{-\hat{x}^2} \right) \tag{6.12}$$

Por um lado, e em virtude do teorema 4.1.10, podemos dizer que $f \cdot \mathrm{e}^{-\hat{x}^2} \in \mathcal{C}_{e^-}(\mathbb{R})$, pois $\mathrm{e}^{-\hat{x}^2}$ pertence a $\mathcal{C}_{e^-}(\mathbb{R})$ (cf. exemplo 4.1.5) e f é uma função de crescimento exponencial em $\mathbb{R}$. Por outro lado, é importante frisar que toda a função de decrescimento exponencial tem crescimento polinomial, pelo que $f \cdot \mathrm{e}^{-\hat{x}^2}$ pode ser identificada como uma distribuição temperada de Schwartz, o que significa que $f \cdot \mathrm{e}^{-\hat{x}^2} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Logo, pelas propriedades da transformação de Fourier no espaço $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ (cf. proposição 2.2.7),

$$D_\xi^n \left(\mathcal{F}\left(f \ \mathrm{e}^{-\hat{x}^2} \right) \right) = \mathcal{F}\left((-i\hat{x})^n f \ \mathrm{e}^{-\hat{x}^2} \right)$$

e, por isso,

$$\begin{aligned} & D_\xi^n \left(\mathcal{F}\left(f \ \mathrm{e}^{-\hat{x}^2} \right)(\xi) \right) \\ = \ & (-i)^n \mathcal{F}\left((\hat{x})^n f \ \mathrm{e}^{-\hat{x}^2} \right)(\xi) \\ = \ & (-i)^n \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-ix\xi} x^n f(x) \ \mathrm{e}^{-x^2} dx, \end{aligned}$$

pelo que

$$D_\xi^n \left[\mathcal{F}\left(f \ \mathrm{e}^{-\hat{x}^2} \right) \right](0) = (-i)^n \int_{\mathbb{R}} x^n f(x) \ \mathrm{e}^{-x^2} dx,$$

ou seja, a igualdade (6.12) é satisfeita.

Confrontando as expressões (6.11) e (6.12), resulta que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad D_\xi^n \left[\mathcal{F}\left(f \ \mathrm{e}^{-\hat{x}^2} \right) \right](0) = 0 \tag{6.13}$$

Já vimos que $f \cdot \mathrm{e}^{-\hat{x}^2} \in \mathcal{C}_{e^-}(\mathbb{R})$, logo $\mathcal{F}\left(f \ \mathrm{e}^{-\hat{x}^2} \right)$ é prolongável a $\mathbb{C}$ como função inteira (ver teorema 4.1.15). Portanto, a transformada de Fourier de $f \cdot \mathrm{e}^{-\hat{x}^2}$ é uma função analítica em $\mathbb{R}$ com todas as suas derivadas no ponto zero nulas (ver (6.13)). Consequentemente,

$$\forall \xi \in \mathbb{R} \quad \mathcal{F}\left(f\ \mathrm{e}^{-\hat{x}^2}\right)(\xi) = 0$$

e como $\mathcal{F}$ é injectiva (cf. corolário 2.2.6), então

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x)\ \mathrm{e}^{-x^2} = 0.$$

Tendo em consideração que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{e}^{-x^2} > 0,$$

podemos finalmente asseverar que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = 0.$$

Portanto, $\mathcal{T}$ é injectiva. ■

Observação 6.3.12 *Saliente-se que, pelo facto de $e^{\hat{x}}$ ser uma função de crescimento exponencial (cf. exemplo 3.1.2), podemos afirmar pelo teorema 6.3.8 que $e^{\hat{x}}$ é uma distribuição generalizada de $\mathfrak{X}_0'(\mathbb{R})$. Colmatamos assim uma das limitações do espaço das distribuições temperadas de Schwartz, isto é, o facto de $e^{\hat{x}} \notin \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.*

O teorema 6.3.8 motiva o resultado que se segue.

Teorema 6.3.13 *Consideremos $f \in \mathcal{A}_{e^+}(\mathbb{C})$ e seja $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathfrak{X}_0'(\mathbb{R}))^{\mathbb{N}}$ a sucessão de polinómios de Mac-Laurin de f. Nestas condições, $p_n \to f$ em $(\mathfrak{X}_0'(\mathbb{R}), \beta(\mathfrak{X}_0', \mathfrak{X}_0))$.*

Demonstração: Tomemos f em $\mathcal{A}_{e^+}(\mathbb{C})$ arbitrária. Logo $f \in \mathcal{C}_{e^+}(\mathbb{R})$ e, portanto, f é uma distribuição generalizada de $\mathfrak{X}_0'(\mathbb{R})$. Seja então $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sucessão de polinómios de Mac-Laurin de f.

Para proceder à prova deste teorema, não nos devemos esquecer que o espaço $\mathfrak{X}_0'(\mathbb{R})$ é de Montel (cf. proposição 6.3.2). Por esta razão, mostrar que a sucessão p_n converge fortemente para f em $\mathfrak{X}_0'(\mathbb{R})$ é equivalente a mostrar que p_n converge fracamente para f em $\mathfrak{X}_0'(\mathbb{R})$ (ver teorema 2.1.17).

Neste caso,

$$\begin{aligned}
& p_n \to f \text{ em } (\mathfrak{X}_0'(\mathbb{R}), \beta(\mathfrak{X}_0', \mathfrak{X}_0)) \\
\Leftrightarrow\ & p_n \to f \text{ em } (\mathfrak{X}_0'(\mathbb{R}), \sigma(\mathfrak{X}_0', \mathfrak{X}_0)) \\
\Leftrightarrow\ & \forall \varphi \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R}) \quad \lim_{n\to+\infty} |\langle p_n - f, \varphi\rangle| = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \forall \varphi \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R}) \quad \lim_{n\to+\infty} \left| \int_{\mathbb{R}} (p_n - f)(x)\, \varphi(x)\, dx \right| = 0.
\end{aligned}$$

Mas f é inteira, logo podemos representá-la por uma série de potências absolutamente convergente, isto é,

$$f(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} a_j x^j$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} & p_n \to f \text{ em } \left(\mathfrak{X}_0'(\mathbb{R}), \beta(\mathfrak{X}_0', \mathfrak{X}_0)\right) \\ \Leftrightarrow\ & \forall \varphi \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R}) \quad \lim_{n \to +\infty} \left| \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{j=0}^{n} a_j x^j - \sum_{j=0}^{+\infty} a_j x^j \right) \varphi(x)\, dx \right| = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \forall \varphi \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R}) \quad \lim_{n \to +\infty} \left| \int_{\mathbb{R}} \sum_{j \geq n+1} a_j x^j \varphi(x)\, dx \right| = 0 \end{aligned} \tag{6.14}$$

Comecemos por verificar que

$$\forall \varphi \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R}) \quad \sum_{j \geq n+1} a_j \hat{x}^j \varphi \underset{u}{\to} 0 \quad \text{em } \mathbb{R},$$

isto é,

$$\forall \varphi \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R})\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \Rightarrow \left| \varphi(x) \sum_{j \geq n+1} a_j x^j \right| \leq \varepsilon.$$

Tomemos $\varphi \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$ e $\varepsilon > 0$ arbitrários. Ora,

$$\begin{aligned} & \left| \varphi(x) \sum_{j \geq n+1} a_j x^j \right| \\ \leq\ & |\varphi(x)| \sum_{j=1}^{+\infty} |a_j| \left| x^j \right| \end{aligned} \tag{6.15}$$

Como $f(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} a_j x^j$ é de crescimento exponencial em $\mathbb{C}$ (pois $f \in \mathcal{A}_{e^+}(\mathbb{C})$), então segundo o teorema 3.2.7

$$\exists L > 0 \quad \forall j \in \mathbb{N}_1 \quad \sqrt[j]{j!\, |a_j|} \leq L,$$

isto é,

$$\exists L > 0 \quad \forall j \in \mathbb{N}_1 \quad |a_j| \leq \frac{L^j}{j!}.$$

Donde de (6.15) vem que

$$\begin{aligned}\left|\varphi(x)\sum_{j\geq n+1}a_jx^j\right| &\leq |\varphi(x)|\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{L^j}{j!}\left|x^j\right| \\ &\leq |\varphi(x)|\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{L^j|x|^j}{j!},\end{aligned}$$

o que implica que

$$\left|\varphi(x)\sum_{j\geq n+1}a_jx^j\right| \leq |\varphi(x)|\ \mathrm{e}^{L|x|} \tag{6.16}$$

Por último, e uma vez que φ é um elemento de $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$, logo pertence ao espaço $\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$, obtém-se imediatamente por definição de $\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$ que

$$\exists\delta>0 \quad \forall x\in\mathbb{R} \quad |x|>\frac{1}{\delta}\Rightarrow\left|\mathrm{e}^{L|x|}\varphi(x)\right|\leq\varepsilon,$$

e, por conseguinte,

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad \forall x\in\mathbb{R} \quad |x|>\frac{1}{\delta}\Rightarrow\left|\varphi(x)\sum_{j\geq n+1}a_jx^j\right|\leq\varepsilon \tag{6.17}$$

Resta-nos ver o que se passa $|x|\leq\dfrac{1}{\delta}$.

Sabemos que φ é analítica em $\mathbb{R}$ (cf. teorema 5.1.3), logo é contínua em $\left[-\dfrac{1}{\delta},\dfrac{1}{\delta}\right]$. Aplicando o teorema de Weierstrass, resulta que φ tem máximo e mínimo no intervalo $\left[-\dfrac{1}{\delta},\dfrac{1}{\delta}\right]$, ou seja,

$$\exists M\in\mathbb{R}^+ \quad \forall x\in\left[-\frac{1}{\delta},\frac{1}{\delta}\right] \quad |\varphi(x)|\leq M \tag{6.18}$$

Por outro lado, recorde-se que f é analítica em $\mathbb{R}$, pelo que $f(x)=\sum\limits_{j=0}^{+\infty}a_jx^j$ e esta série converge uniformemente nos compactos de $\mathbb{R}$, logo em $\left[-\dfrac{1}{\delta},\dfrac{1}{\delta}\right]$, isto é,

$$\forall\varepsilon_1>0 \quad \exists n_1\in\mathbb{N} \quad \forall x\in\left[-\frac{1}{\delta},\frac{1}{\delta}\right] \quad \forall n\in\mathbb{N} \quad n\geq n_1\Rightarrow\left|\sum_{j=n+1}^{+\infty}a_jx^j\right|\leq\varepsilon_1.$$

Consequentemente, e em particular para $\varepsilon_1=\dfrac{\varepsilon}{M}>0$, temos que

$$\exists n_1\in\mathbb{N} \quad \forall x\in\left[-\frac{1}{\delta},\frac{1}{\delta}\right] \quad \forall n\in\mathbb{N} \quad n\geq n_1\Rightarrow\left|\sum_{j=n+1}^{+\infty}a_jx^j\right|\leq\frac{\varepsilon}{M} \tag{6.19}$$

Deste modo, para todo o $x \in \left[-\frac{1}{\delta}, \frac{1}{\delta}\right]$ e sempre que $n \geq n_1$,

$$\begin{aligned} & \left|\varphi(x) \sum_{j \geq n+1} a_j x^j\right| \\ \underset{\text{por (6.18)}}{\leq} \quad & M \left|\sum_{j=n+1}^{+\infty} a_j x^j\right| \\ \underset{\text{por (6.19)}}{\leq} \quad & \varepsilon \end{aligned} \tag{6.20}$$

Em virtude de (6.17) e (6.20), é-nos permitido concluir que

$$\forall \varphi \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R}) \;\; \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 = n_1 \in \mathbb{N} \; \forall x \in \mathbb{R} \; \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \Rightarrow \left|\varphi(x) \sum_{j \geq n+1} a_j x^j\right| \leq \varepsilon,$$

o que significa que

$$\forall \varphi \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R}) \quad \varphi \sum_{j \geq n+1} a_j \hat{x}^j \underset{u}{\rightarrow} 0 \text{ em } \mathbb{R} \tag{6.21}$$

Vimos em (6.16) que

$$\exists L > 0 \quad \forall j \in \mathbb{N}_1 \quad \left|\sum_{j=n+1}^{+\infty} a_j x^j \varphi(x)\right| \leq |\varphi(x)| \; \mathrm{e}^{L|x|}$$

e dado que $\varphi \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$ temos, em particular, que

$$\exists A_{L+1} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad |\varphi(x)| \leq A_{L+1} \; \mathrm{e}^{-(L+1)|x|},$$

ou seja,

$$\exists L > 0 \quad \exists A_{L+1} > 0 \quad \forall j \in \mathbb{N}_1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \left|\sum_{j=n+1}^{+\infty} a_j x^j \varphi(x)\right| \leq A_{L+1} \; \mathrm{e}^{-|x|}.$$

Assim, a sucessão de funções $\left(\sum_{j=n+1}^{+\infty} a_j \hat{x}^j \varphi\right)_{n \in \mathbb{N}}$ é dominada por uma função de $L^1(\mathbb{R})$ e como esta sucessão converge uniformemente para zero em $\mathbb{R}$ (cf. (6.21)), o teorema da convergência dominada de Lebesgue permite-nos permutar o limite com o integral, isto é,

$$\begin{aligned} & \lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} \sum_{j=n+1}^{+\infty} a_j x^j \varphi(x) \, dx \\ = \; & \int_{\mathbb{R}} \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{j=n+1}^{+\infty} a_j x^j \varphi(x)\right) dx \\ = \; & 0, \end{aligned}$$

e, por isso,

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\int_{\mathbb{R}}\sum_{j\geq n+1}a_jx^j\varphi(x)\,dx\right|=0, \text{ para qualquer } \varphi \text{ em } \mathfrak{X}_0(\mathbb{R}),$$

ou seja, acabámos de verificar a condição (6.14).

Em conclusão, podemos finalmente afirmar que $p_n \to f$ em $(\mathfrak{X}_0'(\mathbb{R}), \beta(\mathfrak{X}_0', \mathfrak{X}_0))$. ■

Uma questão naturalmente se coloca: será que basta que a função f do teorema precedente seja apenas analítica de crescimento exponencial em $\mathbb{R}$, para termos a convergência de $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ para f em $(\mathfrak{X}_0'(\mathbb{R}), \beta(\mathfrak{X}_0', \mathfrak{X}_0))$? A resposta a esta questão é negativa. A observação seguinte assim o prova.

Observação 6.3.14 *É importante frisar que, embora* $\exp(-\hat{x}^2)$ *se identifique como uma distribuição generalizada de* $\mathfrak{X}_0'(\mathbb{R})$, *por ser uma função de crescimento exponencial em* $\mathbb{R}$ *(ver teorema 6.3.8), a sua sucessão de polinómios de Mac-Laurin não converge para* $\exp(-\hat{x}^2)$ *em* $(\mathfrak{X}_0'(\mathbb{R}), \beta(\mathfrak{X}_0', \mathfrak{X}_0))$.
Designemos por $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *a sucessão de polinómios de Mac-Laurin de* $\exp(-\hat{x}^2)$, *ou seja,*

$$p_n(x)=\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^j}{j!}x^{2j}$$

e suponhamos, com vista a um absurdo, que $p_n \to \exp(-\hat{x}^2)$ *em* $(\mathfrak{X}_0'(\mathbb{R}), \beta(\mathfrak{X}_0', \mathfrak{X}_0))$.
Então a transformada de Fourier de p_n *também convergirá para a transformada de Fourier de* $\exp(-\hat{x}^2)$. *Portanto, para todo o* φ *em* $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$, *a sucessão numérica*

$$\left\langle \mathcal{F}(p_n)-\mathcal{F}\left(e^{-\hat{x}^2}\right),\varphi\right\rangle$$

converge para zero.
Ora,

$$\begin{aligned}&\left|\left\langle \mathcal{F}(p_n)-\mathcal{F}\left(e^{-\hat{x}^2}\right),\varphi\right\rangle\right|\\ =&\left|\left\langle \sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^j}{j!}\mathcal{F}\left(\hat{x}^{2j}\right)-\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{(-1)^j}{j!}\mathcal{F}\left(\hat{x}^{2j}\right),\varphi\right\rangle\right|.\end{aligned}$$

Repare-se que a justificação da igualdade precedente deve-se ao facto de $\mathcal{F}$ *ser um isomorfismo vectorial e topológico de* $\mathfrak{X}_0'(\mathbb{R})$ *em* $\mathfrak{X}_0'(\mathbb{R})$ *(cf. proposição 6.2.1). Assim,*

$$\begin{aligned}&\left|\left\langle \mathcal{F}(p_n)-\mathcal{F}\left(e^{-\hat{x}^2}\right),\varphi\right\rangle\right|\\ =&\left|\left\langle -\sum_{j=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^j}{j!}2\pi i^{2j}\delta^{(2j)},\varphi\right\rangle\right|\\ =&\ 2\pi\left|\sum_{j=n+1}^{+\infty}\frac{1}{j!}D_x^{2j}\varphi(0)\right| \qquad (6.22)\end{aligned}$$

Em particular, para $\varphi = e^{-\hat{x}^2} \in \mathfrak{X}_0(I\!R)$, *tem-se que*

$$D_x^{2j}\varphi(0) = \frac{(-1)^j}{j!}(2j)!$$

e da igualdade (6.22), segue-se que

$$\begin{aligned} & \left|\left\langle \mathcal{F}(p_n) - \mathcal{F}\left(e^{-\hat{x}^2}\right), \varphi\right\rangle\right| \\ = \;& 2\pi\left|\sum_{j=n+1}^{+\infty}\frac{1}{j!}\frac{(-1)^j}{j!}(2j)!\right| \end{aligned} \tag{6.23}$$

Analisemos agora a convergência da série

$$2\pi\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{(-1)^j}{j!j!}(2j)! \tag{6.24}$$

Para este fim, recorreremos a um corolário do critério geral de Cauchy. Note-se que

$$\lim_{j\to+\infty}\frac{(2j)!}{j!j!} = +\infty,$$

logo, a sucessão

$$(-1)^j\frac{(2j)!}{j!j!}$$

não é um infinitésimo, o que implica que a série dada por (6.24) é divergente. Consequentemente o seu resto de ordem n *não é um infinitésimo, pelo que*

$$\lim_{n\to+\infty}\left|2\pi\sum_{j=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^j}{j!j!}(2j)!\right| \neq 0.$$

Da condição (6.23), vem que

$$\left|\left\langle \mathcal{F}(p_n) - \mathcal{F}\left(e^{-\hat{x}^2}\right), \varphi\right\rangle\right|$$

não é um infinitésimo, o que constitui um absurdo, pois contraria a hipótese de

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\left\langle \mathcal{F}(p_n) - \mathcal{F}\left(e^{-\hat{x}^2}\right), \varphi\right\rangle\right| = 0.$$

Portanto,

$$p_n \not\to e^{-\hat{x}^2} \;\; em \;\; \left(\mathfrak{X}_0'(I\!R), \beta(\mathfrak{X}_0', \mathfrak{X}_0)\right).$$

Por conseguinte, podemos ainda afirmar que a função $e^{-\hat{x}^2}$ *não tem representação em série de potências convergente em* $\mathfrak{X}_0'(I\!R)$.

Uma outra consequência do teorema 6.3.8 é dada pelo seguinte resultado:

Teorema 6.3.15 *É condição suficiente para que a série de multipolos* $\sum_{j\geq 0} b_j \delta^{(j)}$ *seja convergente em* $\mathfrak{X}_0'(\mathbb{R})$ *que a sucessão* $\left(\sqrt[j]{j!\,|b_j|}\right)_{j\in\mathbb{N}_1}$ *seja limitada.*

Demonstração: Suponhamos, então, que a sucessão $\left(\sqrt[j]{j!\,|b_j|}\right)_{j\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ é limitada, pelo que existe uma constante positiva L tal que

$$\forall j \in \mathbb{N}_1 \quad \sqrt[j]{j!\,|b_j|} \leq L.$$

Resulta

$$\sqrt[j]{|b_j|} \leq \frac{L}{\sqrt[j]{j!}}.$$

Como

$$\lim_{j\to+\infty} \sqrt[j]{\frac{1}{j!}} = \lim_{j\to+\infty} \frac{\frac{1}{(j+1)!}}{\frac{1}{j!}} = 0,$$

então

$$\overline{\lim_{j\to+\infty}} \sqrt[j]{|b_j|} = 0,$$

e, por isso,

$$\overline{\lim_{j\to+\infty}} \sqrt[j]{\left|\frac{b_j}{2\pi i^j}\right|} = \overline{\lim_{j\to+\infty}} \frac{1}{\sqrt[j]{2\pi}} \cdot \overline{\lim_{j\to+\infty}} \sqrt[j]{|b_j|} = 0,$$

o que significa que a série

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{b_j}{2\pi i^j} x^j$$

tem raio de convergência $R = +\infty$ e, portanto, a série representa uma função inteira. Denotemo-la por f, ou seja, ponhamos

$$f = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{b_j}{2\pi i^j} \hat{x}^j.$$

Demonstremos agora que a sucessão $\left(\sqrt[j]{j!\left|\frac{b_j}{2\pi i^j}\right|}\right)_{j\in\mathbb{N}_1}$ também é limitada. Efectivamente,

$$\begin{aligned} & \sqrt[j]{j!\left|\frac{b_j}{2\pi i^j}\right|} \\ = & \sqrt[j]{j!\,|b_j|\,\frac{1}{2\pi}} \\ = & \frac{1}{\sqrt[j]{2\pi}} \sqrt[j]{j!\,|b_j|} \end{aligned} \tag{6.25}$$

mas $\left(\sqrt[j]{j!\,|b_j|}\right)_{j\in\mathbb{N}_1}$ é limitada, logo

$$\frac{1}{\sqrt[j]{2\pi}}\sqrt[j]{j!\,|b_j|}\leq\frac{1}{\sqrt[j]{2\pi}}L.$$

Repare-se que

$$\forall j\in\mathbb{N}_1\quad\frac{1}{\sqrt[j]{2\pi}}<1;$$

logo, de (6.25), vem que

$$\sqrt[j]{j!\left|\frac{b_j}{2\pi i^j}\right|}\leq L,$$

isto é,

$$\exists L>0\quad\forall j\in\mathbb{N}_1\quad\sqrt[j]{j!\left|\frac{b_j}{2\pi i^j}\right|}\leq L\tag{6.26}$$

Assim, com base no teorema 3.2.7, podemos garantir o crescimento exponencial em $\mathbb{C}$, logo em $\mathbb{R}$, da função inteira:

$$f=\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{b_j}{2\pi i^j}\hat{x}^j.$$

A parte final desta demonstração torna-se de fácil compreensão se observarmos que toda a função analítica de crescimento exponencial em $\mathbb{R}$ é uma função de $\mathcal{C}_{e^+}(\mathbb{R})$ e, logo, pertence ao nosso espaço de distribuições generalizadas $\mathfrak{X}_0'(\mathbb{R})$ (cf. teorema 6.3.8) e que $\mathfrak{X}_0'(\mathbb{R})$ é fechado para a tranformação de Fourier (cf. proposição 6.2.1). Resumindo, como $f\in\mathcal{A}_{e^+}(\mathbb{R})$, então $f\in\mathfrak{X}_0'(\mathbb{R})$, e logo $\mathcal{F}f\in\mathfrak{X}_0'(\mathbb{R})$.

Deste modo,

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}(f)\\
=\quad&\mathcal{F}\left(\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{b_j}{2\pi i^j}\hat{x}^j\right)\\
\underset{\text{proposição 6.2.1}}{=}\quad&\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{b_j}{2\pi i^j}\mathcal{F}\left(\hat{x}^j\right)\\
\underset{\text{proposição 2.2.7}}{=}\quad&\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{b_j}{2\pi i^j}2\pi i^j\delta^{(j)}\\
=\quad&\sum_{j\geq 0}b_j\delta^{(j)}.
\end{aligned}$$

Consequentemente

$$\mathcal{F}(f) = \sum_{j\geq 0} b_j \delta^{(j)} \in \mathfrak{X}_0'(\mathrm{I\!R}).$$

A série $\sum\limits_{j=0}^{+\infty} b_j \delta^{(j)}$ converge em $\mathfrak{X}_0'(\mathrm{I\!R})$. ∎

Antes de mostrarmos que o espaço das distribuições temperadas de Schwartz está contido densamente no espaço $\mathfrak{X}_0'(\mathrm{I\!R})$, precisamos provar a densidade de $\mathfrak{X}_0(\mathrm{I\!R})$ em $\mathfrak{X}_0'(\mathrm{I\!R})$.

Proposição 6.3.16

$$\mathfrak{X}_0(I\!R) \overset{d}{\hookrightarrow} \mathfrak{X}_0'(I\!R).$$

Demonstração: Vimos na observação 6.1.2 que o espaço $\mathfrak{X}_0(\mathrm{I\!R})$ está contido com injecção canónica contínua em $\mathfrak{X}_0'(\mathrm{I\!R})$.

O facto de $\mathfrak{X}_0(\mathrm{I\!R})$ ser denso em $\mathfrak{X}_0'(\mathrm{I\!R})$ é uma consequência imediata da reflexibilidade de $\mathfrak{X}_0(\mathrm{I\!R})$ e de $\mathfrak{X}_0'(\mathrm{I\!R})$ (ver corolários 5.2.11 e 6.3.4). Assim, $\mathfrak{X}_0(\mathrm{I\!R})$ é denso em $\mathfrak{X}_0'(\mathrm{I\!R})$, se, e só se,

$$\forall T \in \mathfrak{X}_0''(\mathrm{I\!R}) \quad \left(\forall \varphi \in \mathfrak{X}_0(\mathrm{I\!R}) \quad \langle T, \varphi\rangle_{\mathfrak{X}_0'', \mathfrak{X}_0'} = 0\right) \Rightarrow T = 0.$$

Com efeito, seja $T \in \mathfrak{X}_0''(\mathrm{I\!R})$ qualquer. A propriedade peculiar da reflexibilidade leva--nos a afirmar que $T \in \mathfrak{X}_0(\mathrm{I\!R})$, pois $\mathfrak{X}_0''(\mathrm{I\!R})$ identifica-se com $\mathfrak{X}_0(\mathrm{I\!R})$ e, por isso,

$$\langle T, \varphi\rangle_{\mathfrak{X}_0'', \mathfrak{X}_0'} = \int_{\mathrm{I\!R}} T(x)\,\varphi(x)\,dx \tag{6.27}$$

Mas, para todo o φ em $\mathfrak{X}_0(\mathrm{I\!R})$, sabemos que

$$\langle T, \varphi\rangle_{\mathfrak{X}_0'', \mathfrak{X}_0'} = 0;$$

em particular, para $\varphi = T$, resulta de (6.27) que

$$\int_{\mathrm{I\!R}} T^2(x)\,dx = 0$$

e, como $T^2 \geq 0$ e é contínua, pois é de classe $\mathcal{C}^\infty$ em $\mathrm{I\!R}$ (porque $T \in \mathfrak{X}_0(\mathrm{I\!R})$), então só podemos ter $T = 0$. ∎

Proposição 6.3.17 *O espaço das distribuições temperadas de Schwartz $\mathcal{S}'(I\!R)$ está contido densamente no espaço das distribuições generalizadas $\mathfrak{X}_0'(I\!R)$.*

Demonstração: Já vimos no teorema 6.1.1 que

$$\mathcal{S}'(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathfrak{X}_0'(\mathbb{R}).$$

Para provarmos a densidade de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ em $\mathfrak{X}_0'(\mathbb{R})$ basta recorrermos à proposição precedente, que nos garante que $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$ é denso em $\mathfrak{X}_0'(\mathbb{R})$, e ao seguinte facto:

$$\mathfrak{X}_0(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}).$$

■

Concluímos este subcapítulo com o estudo do núcleo do operador derivação no quadro das distribuições generalizadas.

Lema 6.3.18 *Se ψ é uma função de $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$, tal que*

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(x)\, dx = 0,$$

então

$$\int_{-\infty}^{x} \psi(s)\, ds$$

também é uma função de $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$.

Demonstração: Seja $\psi \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$ arbitrária, tal que

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(x)\, dx = 0.$$

Definimos

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{x} \psi(s)\, ds,$$

donde

$$D_x \varphi = \psi.$$

Como ψ é de classe $\mathcal{C}^\infty$ em $\mathbb{R}$, φ também o é. Note-se que, para $m \in \mathbb{N}_1$, é evidente que

$$D_x^m \varphi \in \mathcal{C}_{e^-}(\mathbb{R}) \;,$$

pois

$$D_x^m \varphi = D_x^{m-1} \psi.$$

Falta somente ver o caso de $m = 0$. Seja $k \in \mathbb{R}_0^+$ arbitrário. Aplicando a regra de Cauchy, temos, por um lado, que

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{k|x|}\varphi(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{D_x\left(\int_{-\infty}^{x}\psi(s)\,ds\right)}{D_x\left(\mathrm{e}^{-k|x|}\right)} = \frac{1}{k_1}\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{k|x|}\psi(x).$$

Por outro lado,

$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{k|x|}\varphi(x) = \frac{1}{k_1}\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{k|x|}\psi(x),$$

onde

$$k_1 = \begin{cases} -k & \text{se } x \geq 0 \\ k & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

Dado que $\psi \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$, resulta que

$$\lim_{|x|\to+\infty} \mathrm{e}^{k|x|}\varphi(x) = 0.$$

Assim,

$$\varphi \in \mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R}) \tag{6.28}$$

Se tivermos em atenção que $\mathcal{F}\varphi$ é analítica em $\mathbb{R}$ (ver observação 4.3.13) então, em particular, $\mathcal{F}\varphi$ é indefinidamente diferenciável em $\mathbb{R}$. Tendo em consideração que $\varphi \in \mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$ (cf. (6.28)), logo $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ (ver proposição 4.3.5). Portanto, pelas propriedades da transformação de Fourier em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, vem que

$$\mathcal{F}\psi = \left(i\hat{\xi}\right)\mathcal{F}\varphi \tag{6.29}$$

por conseguinte, para[2] $\xi \neq 0$,

$$\lim_{|\xi|\to+\infty} \left|\mathrm{e}^{k|\xi|}\mathcal{F}\varphi\right| = \lim_{|\xi|\to+\infty} \frac{1}{|\xi|}\left|\mathrm{e}^{k|\xi|}\mathcal{F}\psi\right| \underset{\psi\in\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})}{=} 0,$$

isto é,

$$\mathcal{F}\varphi \in \mathcal{C}_{e^-}(\mathbb{R}) \tag{6.30}$$

Para vermos que

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad D_\xi^m(\mathcal{F}\varphi) \in \mathcal{C}_{e^-}(\mathbb{R})$$

vamos utilizar o metodo de indução finita.

[2] Note-se que, o ponto $\xi = 0$ não nos causa problemas, porque sendo φ uma função de $\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$, $\mathcal{F}\varphi$ é analítica.

Com efeito, para $m=0$,

$$D_\xi^0\left(\mathcal{F}\varphi\right)=\mathcal{F}\varphi,$$

que já vimos que é uma função com decrescimento exponencial (cf. (6.30)).

Hipótese de indução:

$$D_\xi^m\left(\mathcal{F}\varphi\right)\in\mathcal{C}_{e^-}\left(\mathrm{I\!R}\right) \tag{6.31}$$

Tese de indução:

$$D_\xi^{m+1}\left(\mathcal{F}\varphi\right)\in\mathcal{C}_{e^-}\left(\mathrm{I\!R}\right).$$

Utilizando uma das fórmulas de Leibniz para derivada do produto, obtemos

$$\begin{aligned}&D_\xi^{m+1}\left[\left(i\hat{\xi}\right)\mathcal{F}\varphi\right]\\ =&\sum_{l\leq m+1}\binom{m+1}{l}D_\xi^l\left(i\hat{\xi}\right)D_\xi^{m+1-l}\left(\mathcal{F}\varphi\right)\\ =&\left(i\hat{\xi}\right)D_\xi^{m+1}\left(\mathcal{F}\varphi\right)+\left(m+1\right)iD_\xi^m\left(\mathcal{F}\varphi\right)\end{aligned}$$

porque, para $l=\{2,\dots,m+1\}$,

$$D_\xi^l\left(i\xi\right)=0.$$

Assim,

$$\left(i\hat{\xi}\right)D_\xi^{m+1}\left(\mathcal{F}\varphi\right)\underset{\text{por (6.29)}}{=}D_\xi^{m+1}\left(\mathcal{F}\psi\right)-\left(m+1\right)iD_\xi^m\left(\mathcal{F}\varphi\right)$$

Consequentemente, para $\xi\neq0$,

$$\begin{aligned}&\lim_{|\xi|\to+\infty}\left|\mathrm{e}^{k|\xi|}D_\xi^{m+1}\left(\mathcal{F}\varphi\right)\right|\\ \leq&\lim_{|\xi|\to+\infty}\frac{1}{|\xi|}\left|\mathrm{e}^{k|\xi|}D_\xi^{m+1}\left(\mathcal{F}\psi\right)\right|+\left(m+1\right)\lim_{|\xi|\to+\infty}\frac{1}{|\xi|}\left|\mathrm{e}^{k|\xi|}D_\xi^{m}\left(\mathcal{F}\varphi\right)\right|\end{aligned}$$

Recorrendo à hipotese de indução e ao facto de $\mathcal{F}\psi$ ser uma função de $\mathfrak{X}_0\left(\mathrm{I\!R}\right)$, podemos inferir que

$$\lim_{|\xi|\to+\infty}\left|\mathrm{e}^{k|\xi|}D_\xi^{m+1}\left(\mathcal{F}\varphi\right)\right|=0.$$

Por conseguinte, para todo o m em $\mathrm{I\!N}$, $D_\xi^m\left(\mathcal{F}\varphi\right)$ tem decrescimento exponencial, ou seja,

$$\mathcal{F}\varphi\in\mathcal{C}_{e^-,\infty}\left(\mathrm{I\!R}\right) \tag{6.32}$$

Por (6.28) e (6.32), resulta

$$\varphi\in\mathfrak{X}_0\left(\mathrm{I\!R}\right),$$

o que finaliza a nossa demonstração. ∎

Lema 6.3.19 *$D(\mathfrak{X}_0(I\!R))$ é um hiperplano de $\mathfrak{X}_0(I\!R)$.*

Demonstração: Comecemos por considerar o seguinte hiperplano[3] de $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$:

$$H = \left\{ \psi \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R}) \mid \int_{\mathbb{R}} \psi(x)\, dx = 0 \right\} \tag{6.33}$$

Consideremos agora o subespaço:

$$D(\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})) = \{\psi \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R}) \mid \exists \varphi \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R}) \wedge \psi = D_x\varphi\}$$

e mostremos que

$$D(\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})) = H.$$

É óbvio que $D(\mathfrak{X}_0(\mathbb{R}))$ é um subconjunto de H pois, sendo ψ uma função de $D(\mathfrak{X}_0(\mathbb{R}))$, então

$$\exists \varphi \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R}) \wedge \psi = D_x\varphi$$

e, por isso,

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(x)\, dx = \lim_{s\to+\infty} \varphi(s) - \lim_{t\to-\infty} \varphi(t) = 0,$$

porque $\varphi \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$ e, logo, é uma função de decrescimento exponencial rápido.

Tomemos agora ψ uma função arbitrária de H, logo ψ é um elemento de $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$ e

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(x)\, dx = 0.$$

Decorre, então, do lema 6.3.18, que

$$\int_{-\infty}^{x} \psi(s)\, ds$$

é uma função de $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$.

Se definirmos

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{x} \psi(s)\, ds;$$

reconhecemos facilmente que

$$\varphi \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$$

e que

$$D_x\varphi = \psi.$$

Finalmente, conclui-se que

$$D(\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})) = H.$$

■

[3] Recorde-se que, podemos dizer que H é um hiperplano, porque é o núcleo de uma forma linear não nula.

Teorema 6.3.20 *Seja T é uma distribuição generalizada de $\mathfrak{X}_0'(I\!R)$, tal que $T' = 0$. Então T é constante.*

Demonstração: Fixemos uma distribuição generalizada T de $\mathfrak{X}_0'(\mathbb{R})$, tal que $T' = 0$.

Seja ainda

$$\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\hat{x}^2}{2}}.$$

Temos que φ_0 é uma função de $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$ (cf. proposição 5.1.4) e

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi_0(x)\, dx = 1 \tag{6.34}$$

Vimos no lema 6.3.19 que

$$D(\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})) = \left\{ \psi \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R}) \mid \int_{\mathbb{R}} \psi(x)\, dx = 0 \right\} \tag{6.35}$$

Logo, para além de

$$\varphi_0 \notin D(\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})),$$

podemos dizer que todo o elemento φ de $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$ se escreve de uma maneira única, sob a forma:

$$\varphi = \psi + \lambda\varphi_0 \tag{6.36}$$

onde $\psi \in D(\mathfrak{X}_0(\mathbb{R}))$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, isto é,

$$\mathfrak{X}_0(\mathbb{R}) = D(\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})) \oplus \operatorname{span}\{\varphi_0\} \tag{6.37}$$

Se $T' = 0$ significa que, para todo o $\varphi \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$,

$$\langle D_x T, \varphi \rangle = 0,$$

isto é,

$$\langle T, D_x \varphi \rangle = 0,$$

ou seja, ainda,

$$\langle T, \psi \rangle = 0 \quad \forall \psi \in D(\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})) \tag{6.38}$$

Uma vez que $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$ é a soma directa de $D(\mathfrak{X}_0(\mathbb{R}))$ com $\operatorname{span}\{\varphi_0\}$ (cf. (6.37)) então, existe $\psi \in D(\mathfrak{X}_0(\mathbb{R}))$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, tal que

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \psi + \lambda\varphi_0 \rangle = \langle T, \psi \rangle + \lambda \langle T, \varphi_0 \rangle$$

o que, recorrendo à condição (6.38),

$$\langle T, \varphi \rangle = \lambda \langle T, \varphi_0 \rangle \tag{6.39}$$

Sabemos, por (6.36), que

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} \psi(x)\, dx + \lambda \int_{\mathbb{R}} \varphi_0(x)\, dx$$

e, como $\psi \in D(\mathfrak{X}_0(\mathbb{R}))$, temos pelas igualdades (6.34) e (6.35), que

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, dx = \lambda$$

e, dado que

$$\langle T, \varphi_0 \rangle = c,$$

onde $c \in \mathbb{C}$, resulta, de (6.39), que

$$\langle T, \varphi \rangle = c\lambda = \int_{\mathbb{R}} c\varphi(x)\, dx = \langle c, \varphi \rangle .$$

Dada a arbitrariedade de φ em $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$, conclui-se que

$$T = c,$$

isto é, T é constante. ■

Observação 6.3.21 *É importante salientar que o núcleo do operador de derivação*

$$\tilde{D}_x : \mathfrak{X}_0'(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathfrak{X}_0'(\mathbb{R}),$$

definido em (6.2), é o espaço das funções constantes. Este facto é uma consequência imediata do teorema anterior.

Capítulo 7

O espaço $\mathfrak{X}$

Como vimos anteriormente, as translações complexas não estão definidas no espaço de distribuições generalizadas $\mathfrak{X}_0'(\mathbb{R})$, o que o torna insuficiente. Por forma a colmatar esta deficiência, torna-se útil estender este espaço a um espaço de ultradistribuições. Assim sendo, o objectivo deste capítulo é construir um espaço de funções teste onde o operador de translação complexa tenha sentido, o que, posteriormente, e por via da dualidade, nos permitirá obter um espaço de ultradistribuições.

7.1 Estrutura vectorial

Definimos, para cada r em $\mathbb{N}_1$, o conjunto $\mathfrak{X}_r$ das funções φ complexas e inteiras em $\mathbb{C}$ tais que[1]:

1.
$$\forall b, y \in [-r, r] \quad \mathrm{e}^{b\hat{x}} \cdot \tau_{iy}\varphi \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R});$$

2.
$$\forall k_1, m_1 \in \mathbb{N} \quad \eta^r_{k_1,m_1}(\varphi) = \sup_{\substack{|y|\le r \\ |b|\le r}} \eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi\right) < \infty.$$

Observação 7.1.1 *É importante justificar a necessidade da 2ª condição na definição dos espaços $\mathfrak{X}_r$; tal exigência deve-se à estrutura topológica destes espaços de que posteriormente falaremos no subcapítulo 7.2, pois infelizmente ainda não sabemos se todas as funções que obedecem à primeira condição satisfazem obrigatoriamente à segunda. No entanto, temos a certeza de que toda a função de $\mathcal{G}_a(\mathbb{R})$ cumpre as duas condições, como veremos na proposição 7.1.10. Pode-se ainda questionar o porquê do supremo em y; tal requisito é exigido para que o operador translação complexa definido na intersecção destes espaços seja contínuo.*

[1] Note-se que, na primeira condição da definição de $\mathfrak{X}_r$, ao encararmos $\tau_{iy}\varphi$ como uma função definida em $\mathbb{R}$ estamos, como é natural, a referir-nos à restrição da função $\tau_{iy}\varphi$ a $\mathbb{R}$.

Consideremos agora a intersecção de todos os conjuntos $\mathfrak{X}_r$ e denotemo-la por $\mathfrak{X}$, ou seja,

$$\mathfrak{X} = \bigcap_{r \in \mathbb{N}} \mathfrak{X}_r \tag{7.1}$$

onde, para $r = 0$, $\mathfrak{X}_0$ se identifica com o espaço $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$ definido no capítulo 5.

Seguidamente veremos de que forma se relacionam os espaços $\mathfrak{X}_r$.

Proposição 7.1.2 *Para qualquer $r \in \mathbb{N}_1$, tem-se*

$$\mathfrak{X}_r \subset \mathfrak{X}_0(\mathbb{R}).$$

Demonstração: [2]Fixemos r em $\mathbb{N}_1$. Se $\varphi \in \mathfrak{X}_r$, então

$$\forall b, y \in \mathbb{R} \quad b, y \in [-r, r] \Rightarrow \mathrm{e}^{b\hat{x}} \cdot \tau_{iy}\varphi \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R});$$

em particular, para $b = y = 0 \in [-r, r]$ temos

$$\varphi \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R}),$$

o que nos permite concluir que $\mathfrak{X}_r$ é um subconjunto de $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$. ■

Proposição 7.1.3 *Para todo o r em $\mathbb{N}$, verifica-se a seguinte inclusão:*

$$\mathfrak{X}_{r+1} \subset \mathfrak{X}_r.$$

Demonstração: A demonstração é óbvia, pois basta ter em conta que

$$[-r, r] \subset [-r-1, r+1].$$

Com efeito, dada uma função $\varphi \in \mathfrak{X}_{r+1}$ arbitrária, dois reais b e y também arbitrários pertencentes ao conjunto $[-r, r]$, temos que b e y pertencem a $[-r-1, r+1]$ e logo de $\varphi \in \mathfrak{X}_{r+1}$ vem que $\mathrm{e}^{b\hat{x}} \cdot \tau_{iy}\varphi \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$, ou seja, a primeira condição da definição do espaço $\mathfrak{X}_r$ está satisfeita.

Relativamente à 2^acondição, basta notar que

$$\eta^r_{k_1,m_1}(\varphi) \leq \eta^{r+1}_{k_1,m_1}(\varphi)$$

e, como $\varphi \in \mathfrak{X}_{r+1}$, o segundo membro desta inequação é finito, o que nos leva a afirmar que $\varphi \in \mathfrak{X}_r$. ■

[2]Ao dizer que, se $\varphi \in \mathfrak{X}_r$, então $\varphi \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$, estamos a referir-nos, como é evidente, à restrição de φ a $\mathbb{R}$, ou seja $\varphi_{|\mathbb{R}}$; estamos, pois, a identificar φ com a sua restrição.

Estabeleceremos agora as características vectoriais dos espaços $\mathfrak{X}_r$ e, consequentemente, do espaço $\mathfrak{X}$.

Proposição 7.1.4 *Para todo o r em $I\!N_1$, $\mathfrak{X}_r$ é um e.v. sobre $\mathbb{C}$.*

Demonstração: Tomemos $r \in \mathbb{N}_1$ arbitrário. Tendo em consideração que $\mathfrak{X}_r \subset \mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$ e que $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$ é um e.v. sobre $\mathbb{C}$ (cf. proposições 7.1.2 e 5.1.1 respectivamente), basta então, mostrar que $\mathfrak{X}_r$ é um subespaço vectorial de $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$. Naturalmente que $\mathfrak{X}_r$ é um conjunto não vazio, pois a função identicamente nula a ele pertence.

Sejam φ_1 e φ_2 funções de $\mathfrak{X}_r$, γ_1 e γ_2 complexos quaisquer e $b, y \in \mathbb{R}$ também quaisquer, tais que $b, y \in [-r, r]$.

Atendendo a que a translação é um operador linear, sabemos que

$$\mathrm{e}^{b\hat{x}} \cdot \tau_{iy}(\gamma_1\varphi_1 + \gamma_2\varphi_2) = \gamma_1\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}} \cdot \tau_{iy}\varphi_1\right) + \gamma_2\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}} \cdot \tau_{iy}\varphi_2\right);$$

mas $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathfrak{X}_r$, o que significa que

$$\mathrm{e}^{b\hat{x}} \cdot \tau_{iy}\varphi_1 \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R}) \quad \wedge \quad \mathrm{e}^{b\hat{x}} \cdot \tau_{iy}\varphi_2 \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R});$$

como $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$ é um e.v. sobre o corpo dos complexos (ver proposição 5.1.1), obtém-se que

$$\gamma_1\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}} \cdot \tau_{iy}\varphi_1\right) + \gamma_2\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}} \cdot \tau_{iy}\varphi_2\right)$$

é um elemento de $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$.

Sejam agora k_1 e m_1 quaisquer em $\mathbb{N}$.

Ora,

$$\begin{aligned} & \eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}(\gamma_1\varphi_1 + \gamma_2\varphi_2)\right) \\ \leq\ & |\gamma_1|\,\eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi_1\right) + |\gamma_2|\,\eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi_2\right), \end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned} & \sup_{b,y\in[-r,r]}\left[\eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}(\gamma_1\varphi_1 + \gamma_2\varphi_2)\right)\right] \\ \leq\ & |\gamma_1| \sup_{b,y\in[-r,r]} \eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi_1\right) + |\gamma_2| \sup_{b,y\in[-r,r]} \eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi_2\right) \end{aligned} \tag{7.2}$$

Sabemos que φ_1 e φ_2 são funções do espaço $\mathfrak{X}_r$, donde

$$\eta^r_{k_1,m_1}(\varphi_1) < \infty \quad \wedge \quad \eta^r_{k_1,m_1}(\varphi_2) < \infty$$

e, portanto, de (7.2),

$$\eta^r_{k_1,m_1}(\gamma_1\varphi_1 + \gamma_2\varphi_2) < \infty,$$

o que finaliza a nossa demonstração. ∎

Proposição 7.1.5 *$\mathfrak{X}$ é um e.v. complexo.*

Demonstração: A prova é imediata, pois basta ter em consideração as proposições 7.1.4 e 5.1.1 e o facto de que a intersecção qualquer de espaços vectoriais ainda é um espaço vectorial. ■

Com o intuito de determinar a transformada de Fourier da translação complexa de uma função de $\mathcal{G}_a(\mathbb{R})$, necessitamos provar dois resultados, a nosso ver, bastante curiosos. O primeiro deles demonstra que toda a translação complexa de uma função de $\mathcal{G}_a(\mathbb{R})$ tem decrescimento exponencial rápido. O segundo, por sua vez, trata da existência do supremo em $b, y \in [-r, r]$, com $r \in \mathbb{N}$, das semi-normas ν_{k_1,m_1} (definidas em $\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$), da função que resulta do produto de uma determinada exponencial pela translação complexa de uma função de $\mathcal{G}_a(\mathbb{R})$.

Lema 7.1.6 *Para todo o w real e para toda a função ψ do espaço $\mathcal{G}_a(\mathbb{R})$, tem-se que $\tau_{iw}\psi$ é uma função de decrescimento exponencial rápido.*

Demonstração: Seja $w \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^+$ e $\psi \in \mathcal{G}_a(\mathbb{R})$ quaisquer. Tomemos $m \in \mathbb{N}$ qualquer. Sabemos que

$$D_x^m(\tau_{iw}\psi) = \tau_{iw}(D_x^m\psi)$$

e, como o espaço $\mathcal{G}_a(\mathbb{R})$ é fechado para a derivação (veja-se proposição 4.2.5), então

$$D_x^m(\tau_{iw}\psi) = \tau_{iw}\left(q\ \mathrm{e}^{-a\hat{x}^2}\right),$$

onde $q \in \mathcal{P}$.

Assim,

$$D_x^m(\tau_{iw}\psi(x)) = q(x - iw)\ \mathrm{e}^{-a(x-iw)^2} \tag{7.3}$$

Repare-se que, para k fixo em $\mathbb{R}$,

$$\left|\mathrm{e}^{-a(x-iw)^2}\right| = \mathrm{e}^{-ax^2}\mathrm{e}^{aw^2} \le \mathrm{e}^{aw^2}c_k\ \mathrm{e}^{-k|x|},$$

pois $\mathrm{e}^{-a\hat{x}^2} \in \mathcal{C}_{e^-}(\mathbb{R})$ (ver exemplo 4.1.5), donde

$$\left|\mathrm{e}^{-a(x-iw)^2}\right| \le c_{k,w}\ \mathrm{e}^{-k|x|}, \quad \text{onde } c_{k,w} = \mathrm{e}^{aw^2}c_k > 0$$

ou seja,

$$\mathrm{e}^{-a(\hat{x}-iw)^2} \in \mathcal{C}_{e^-}(\mathbb{R}) \tag{7.4}$$

Designando por n o grau de q e excluindo, como é natural, o caso $q = 0$, vejamos agora que

$$q(\hat{x} - iw) \in \mathcal{C}_{e^+}(\mathbb{R}).$$

Decerto,

$$\begin{aligned}
|q(x-iw)| &= \left|\tau_{iw}\left(\sum_{j\leq n} c_j x^j\right)\right| \\
&\leq \sum_{j\leq n} |c_j| \left|(x-iw)^j\right| \\
&\leq \sum_{j\leq n} |c_j| \ \mathrm{e}^{j|x-iw|} \\
&\leq \sum_{j\leq n} |c_j| \ \mathrm{e}^{j|x|} \ \mathrm{e}^{j|w|} \\
&\leq \sum_{j\leq n} |c_j| \ \mathrm{e}^{n|x|} \ \mathrm{e}^{n|w|},
\end{aligned}$$

mas,

$$\mathrm{e}^{n|x|} \leq \mathrm{e}^{(n+1)|x|}$$

e logo

$$|q(x-iw)| \leq \sum_{j\leq n} |c_j| \ \mathrm{e}^{n|w|} \ \mathrm{e}^{(n+1)|x|},$$

pelo que

$$\exists \alpha = \sum_{j\leq n} |c_j| \ \mathrm{e}^{n|w|} > 0 \quad \exists \beta = n+1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad |q(x-iw)| \leq \alpha \ \mathrm{e}^{\beta|x|},$$

isto é, $\tau_{iw}q$ é uma função de crescimento exponencial.

Vimos assim que

$$q(\hat{x}-iw) \in \mathcal{C}_{e^+}(\mathbb{R})$$

e como

$$\mathrm{e}^{-a(\hat{x}-iw)^2} \in \mathcal{C}_{e^-}(\mathbb{R}) \ \text{ (cf. (7.4))},$$

então, pelo teorema 4.1.10, vem que

$$q(\hat{x}-iw) \ \mathrm{e}^{-a(\hat{x}-iw)^2} \in \mathcal{C}_{e^-}(\mathbb{R}),$$

o que corresponde a asseverar, pela condição (7.3), que

$$D_x^m(\tau_{iw}\psi) \in \mathcal{C}_{e^-}(\mathbb{R})$$

e, dado que m foi tomado arbitrariamente, resulta evidentemente que $\tau_{iw}\psi$ é uma função de decrescimento exponencial rápido. ∎

Lema 7.1.7 *Se $\psi \in \mathcal{G}_a(I\!R)$, então*

$$\forall r_1, m_1, k_1 \in I\!N \quad \sup_{b,y\in[-r_1,r_1]} \nu_{k_1,m_1}\left(e^{b\hat{x}}\tau_{iy}\psi\right) < \infty.$$

Demonstração: Tomemos a um número real positivo qualquer, ψ uma função arbitrária de $\mathcal{G}_a(\mathbb{R})$ e sejam r_1, m_1 e k_1 inteiros não negativos de igual modo arbitrários.

Ora,

$$\begin{array}{cl} & \nu_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\psi\right) \\ = & \left\|\mathrm{e}^{k_1|\hat{x}|}D_x^{m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\psi\right)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \\ \underset{\text{fórmula de Leibniz}}{=} & \left\|\mathrm{e}^{k_1|\hat{x}|}\sum_{l\le m_1}\binom{m_1}{l}D_x^l\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\right)D_x^{m_1-l}\left(\tau_{iy}\psi\right)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}. \end{array}$$

Atendendo a que a derivada da translação é a translatada da derivada, e como

$$D_x^{m_1-l}\psi = q_{m_1-l}\cdot\exp\left(-a\hat{x}^2\right) \text{ (cf. proposição 4.2.5),}$$

onde $\psi = q\cdot\exp\left(-a\hat{x}^2\right)$ e q_{m_1-l} denota o polinómio que se obtém da derivada de ordem $m_1 - l$ de ψ. Então

$$\begin{array}{cl} & \nu_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\psi\right) \\ = & \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\mathrm{e}^{k_1|x|}\sum_{l\le m_1}\binom{m_1}{l}b^l\ \mathrm{e}^{bx}q_{m_1-l}(x-iy)\ \mathrm{e}^{-a(x-iy)^2}\right| \\ \le & \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\mathrm{e}^{k_1|x|}\mathrm{e}^{bx}\right|\left|\mathrm{e}^{-ax^2+ay^2}\right|\sum_{l\le m_1}\binom{m_1}{l}\left|b^l\right|\left|q_{m_1-l}(x-iy)\right|. \end{array}$$

Analogamente ao que foi feito anteriormente, se designarmos por N_{m_1-l} o grau de q_{m_1-l}, então

$$\left|q_{m_1-l}(x-iy)\right| \le \sum_{j\le N_{m_1-l}}|c_j|\ \mathrm{e}^{N_{m_1-l}|x|}\ \mathrm{e}^{N_{m_1-l}|y|},$$

pelo que

$$\begin{array}{cl} & \nu_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\psi\right) \\ \le & \sum_{l\le m_1}\binom{m_1}{l}|b|^l\,\mathrm{e}^{N_{m_1-l}|y|+ay^2}\sum_{j\le N_{m_1-l}}|c_j|\sup_{x\in\mathbb{R}}\mathrm{e}^{\left(k_1+N_{m_1-l}\right)|x|+bx-ax^2} \\ \le & \sum_{l\le m_1}\binom{m_1}{l}|b|^l\,\mathrm{e}^{N_{m_1-l}|y|+ay^2}\sum_{j\le N_{m_1-l}}|c_j|\sup_{x\in\mathbb{R}}\mathrm{e}^{\left(k_1+N_{m_1-l}+|b|\right)|x|-ax^2} \end{array} \tag{7.5}$$

Seja $L_{m_1-l} = k_1 + N_{m_1-l}$. Logo

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\left(L_{m_1-l}+|b|\right)|x|-ax^2} = \mathrm{e}^{\frac{\left(L_{m_1-l}+|b|\right)^2}{4a}}$$

e, por isso, da desiguladade (7.5), vem que

$$\begin{aligned} & \nu_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\psi\right) \\ \leq & \sum_{l\leq m_1}\binom{m_1}{l}|b|^l\ \mathrm{e}^{N_{m_1-l}|y|+ay^2}\ \mathrm{e}^{\frac{\left(L_{m_1-l}+|b|\right)^2}{4a}}\sum_{j\leq N_{m_1-l}}|c_j|\,. \end{aligned}$$

Assim sendo, se aplicarmos à desigualdade anterior o supremo em b e em y, ambos pertencentes ao intervalo $[-r_1, r_1]$, obtemos

$$\begin{aligned} & \sup_{b,y\in[-r_1,r_1]}\nu_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\psi\right) \\ \leq & \sup_{|y|\leq r_1}\sum_{l\leq m_1}\binom{m_1}{l}\mathrm{e}^{N_{m_1-l}|y|+ay^2}\sum_{j\leq N_{m_1-l}}|c_j|\sup_{|b|\leq r_1}|b|^l\ \mathrm{e}^{\frac{\left(L_{m_1-l}+|b|\right)^2}{4a}} \\ = & \sum_{l\leq m_1}\binom{m_1}{l}(r_1)^l\ \mathrm{e}^{\frac{\left(L_{m_1-l}+r_1\right)^2}{4a}+N_{m_1-l}r_1+a(r_1)^2}\sum_{j\leq N_{m_1-l}}|c_j| < \infty, \end{aligned}$$

isto é, para todo o r_1, m_1 e k_1 em $\mathbb{N}$ e para todo o ψ em $\mathcal{G}_a(\mathbb{R})$,

$$\sup_{b,y\in[-r_1,r_1]}\nu_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\psi\right)\in\mathbb{R}_0^+.$$

■

Assim, estamos aptos a provar que:

Proposição 7.1.8 *Sejam $a \in \mathbb{R}^+$, $\psi \in \mathcal{G}_a(\mathbb{R})$ e $w \in \mathbb{R}$ quaisquer. Então*

$$\mathcal{F}(\tau_{iw}\psi) = e^{w\hat{\xi}}\mathcal{F}\psi.$$

Demonstração: Consideremos a um real positivo, ψ uma função de $\mathcal{G}_a(\mathbb{R})$ e w um real qualquer. Com base no lema 7.1.6 podemos afirmar que

$$\tau_{iw}\psi\in\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})\,.$$

Consequentemente,

$$\tau_{iw}\psi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})\ \text{(ver proposição 4.3.5)},$$

logo, para todo o ξ em $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}(\tau_{iw}\psi)(\xi) \\ = & \int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-ix\xi}\psi(x-iw)\,dx \\ = & \mathrm{e}^{w\xi}\int_{\mathbb{R}-iw}\mathrm{e}^{-iz\xi}\psi(z)\,dz \qquad (7.6) \end{aligned}$$

Suponhamos, em primeiro lugar, que $w \geq 0$. Fixemos um ponto A positivo na recta real e consideremos as seguintes curvas:

$$\begin{aligned} C_1 : [-A, A] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto t - iw \end{aligned} \quad , \qquad \begin{aligned} C_2 : [-w, 0] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto A + it \end{aligned} \; ,$$

$$\begin{aligned} C_3 : [A, -A] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto t \end{aligned} \qquad \text{e} \qquad \begin{aligned} C_4 : [0, -w] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto -A + it \end{aligned} \; .$$

Consideremos agora, a curva definida por $C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ e designemo-la por γ. Saliente-se que γ é um caminho fechado, logo e atendendo a que a função $\mathrm{e}^{-i\hat{z}\xi}\psi(\hat{z})$ é analítica[3] sobre e no interior de γ, podemos afirmar, pelo teorema de Cauchy-Goursat, que

$$\int_\gamma \mathrm{e}^{-iz\xi}\psi(z)\, dz = 0 \tag{7.7}$$

Assim,

$$\begin{aligned} & \left| \int_{C_2} \mathrm{e}^{-iz\xi}\psi(z)\, dz \right| \\ \leq \; & \int_{-w}^{0} \left|\mathrm{e}^{-iA\xi}\right| \left|\mathrm{e}^{t\xi}\right| |i| \left|\psi(A+it)\right| dt \\ \leq \; & \int_{-w}^{0} \mathrm{e}^{|t\xi|} \left|\psi(A+it)\right| dt. \end{aligned}$$

Como $-w \leq t \leq 0$ logo $|t| \leq w$ e, por isso,

$$\begin{aligned} & \int_{-w}^{0} \mathrm{e}^{|t\xi|} \left|\psi(A+it)\right| dt \\ \leq \; & \mathrm{e}^{w|\xi|} \int_{-w}^{0} \left|\psi(A+it)\right| dt \end{aligned} \tag{7.8}$$

Relembrando o lema 7.1.7, é-nos permitido asseverar que

$$\forall r_1, m_1, k_1 \in \mathbb{N} \quad \exists M \geq 0 \quad \sup_{\substack{|y| \leq r_1 \\ |b| \leq r_1}} \left\| \mathrm{e}^{k_1|\hat{x}|} D_x^{m_1} \left(\mathrm{e}^{b\hat{x}} \tau_{iy}\psi \right) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = M.$$

Fazendo $r_1 = |C(w) + 1|$, $m_1 = 0$ e $k_1 = 1$ temos

$$\exists M \geq 0 \quad \forall y, b \in [-|C(w)+1|, |C(w)+1|] \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \left|\mathrm{e}^{bx}\psi(x - iy)\right| \leq M\, \mathrm{e}^{-|x|} \tag{7.9}$$

[3] A proposição 5.1.4 afirma-nos que $\mathcal{G}_a(\mathbb{R})$ é um subespaço de $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$, pelo que $\psi \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$ e de acordo com o teorema 5.1.3, a analiticidade de ψ é, pois, garantida.

Como $-t \in [0, w]$ então $-t \in [0, |C(w) + 1|]$ e uma vez que $0 \in [-|C(w)+1|, |C(w)+1|]$ e $A \in \mathbb{R}^+$, resulta em especial da condição (7.9) que

$$\exists M \geq 0 \quad |\psi(A + it)| \leq M \ \mathrm{e}^{-A}.$$

Por conseguinte, e da desigualdade (7.8), vem que

$$\begin{aligned} & \int_{-w}^{0} \mathrm{e}^{|t\xi|} |\psi(A+it)| \, dt \\ \leq \ & \mathrm{e}^{w|\xi|} \int_{-w}^{0} M \ \mathrm{e}^{-A} dt \\ = \ & M \ \mathrm{e}^{w|\xi|} \mathrm{e}^{-A} w, \end{aligned}$$

isto é,

$$\lim_{A \to +\infty} \left| \int_{C_2} \mathrm{e}^{-iz\xi} \psi(z) \, dz \right| \leq \lim_{A \to +\infty} M \ \mathrm{e}^{w|\xi|} \mathrm{e}^{-A} w = 0 \tag{7.10}$$

Quanto ao integral ao longo de C_4, temos

$$\begin{aligned} & \left| \int_{C_4} \mathrm{e}^{-iz\xi} \psi(z) \, dz \right| \\ = \ & \left| - \int_{-w}^{0} \mathrm{e}^{iA\xi} \mathrm{e}^{t\xi} i \psi(-A+it) \, dt \right| \\ \leq \ & \mathrm{e}^{w|\xi|} \int_{-w}^{0} |\psi(-A+it)| \, dt. \end{aligned}$$

Tendo em consideração novamente o lema 7.1.7 e o facto de ψ ser uma função de $\mathcal{G}_a(\mathbb{R})$ podemos, como anteriormente, afirmar que

$$\exists M \geq 0 \quad |\psi(-A + it)| \leq M \ \mathrm{e}^{-|-A|},$$

ou seja,

$$\lim_{A \to +\infty} \left| \int_{C_4} \mathrm{e}^{-iz\xi} \psi(z) \, dz \right| \leq \lim_{A \to +\infty} M \ \mathrm{e}^{w|\xi|} \mathrm{e}^{-A} w = 0 \tag{7.11}$$

Fazendo $A \to +\infty$ em (7.7), vem que

$$\begin{aligned} & \lim_{A \to +\infty} \int_{C_1} \mathrm{e}^{-iz\xi} \psi(z) \, dz + \lim_{A \to +\infty} \int_{C_2} \mathrm{e}^{-iz\xi} \psi(z) \, dz \\ + \ & \lim_{A \to +\infty} \int_{C_3} \mathrm{e}^{-iz\xi} \psi(z) \, dz + \lim_{A \to +\infty} \int_{C_4} \mathrm{e}^{-iz\xi} \psi(z) \, dz = 0 \end{aligned}$$

e, por (7.10) e (7.11),

$$\begin{aligned}
& \lim_{A\to+\infty}\int_{C_1} \mathrm{e}^{-iz\xi}\psi(z)\,dz = -\lim_{A\to+\infty}\int_{C_3} \mathrm{e}^{-iz\xi}\psi(z)\,dz \\
\Leftrightarrow\ & \lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A} \mathrm{e}^{-i(t-iw)\xi}\psi(t-iw)\,dt = -\lim_{A\to+\infty}\int_{A}^{-A} \mathrm{e}^{-it\xi}\psi(t)\,dt \\
\Leftrightarrow\ & \int_{\mathbb{R}-iw} \mathrm{e}^{-iz\xi}\psi(z)\,dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-it\xi}\psi(t)\,dt \\
\Leftrightarrow\ & \int_{\mathbb{R}-iw} \mathrm{e}^{-iz\xi}\psi(z)\,dz = \mathcal{F}(\psi)(\xi).
\end{aligned}$$

Portanto, de (7.6), resulta finalmente o desejado:

$$\mathcal{F}(\tau_{iw}\psi) = \mathrm{e}^{w\hat{\xi}}\mathcal{F}\psi.$$

Note-se que no caso de $w < 0$, as curvas consideradas mantêm-se e os cálculos a efectuar são semelhantes aos anteriores, obtendo-se de igual forma o resultado pretendido.

■

A fim de demostrarmos a inclusão do espaço $\mathcal{G}_a(\mathbb{R})$ em $\mathfrak{X}$, não só precisamos ter em consideração os três resultados precedentes, a saber, lemas 7.1.6 e 7.1.7 e proposição 7.1.8, como também necessitamos provar um resultado homólogo ao do lema 7.1.7, mas onde intervém a tranformada de Fourier, ou seja, o lema que se segue:

Lema 7.1.9 *Sejam $a \in \mathbb{R}^+$ e $\psi \in \mathcal{G}_a(\mathbb{R})$. Então*

$$\forall r_1, m_1, k_1 \in \mathbb{N} \quad \sup_{b,y\in[-r_1,r_1]} \nu_{k_1,m_1}\left(\mathcal{F}\left(e^{b\hat{x}}\tau_{iy}\psi\right)\right) < \infty.$$

Demonstração: Fixemos a em $\mathbb{R}^+$, ψ em $\mathcal{G}_a(\mathbb{R})$ e r_1, m_1 e k_1 em $\mathbb{N}$.

Uma vez que

$$\nu_{k_1,m_1}\left(\mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\psi\right)\right) = \left\|\mathrm{e}^{k_1|\hat{\xi}|}D_\xi^{m_1}\left(\mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\psi\right)\right)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})},$$

que

$$\mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\psi\right) = \tau_{-ib}\left[\mathcal{F}(\tau_{iy}\psi)\right]$$

e que

$$\mathcal{F}(\tau_{iy}\psi) = \mathrm{e}^{y\hat{\xi}}\mathcal{F}\psi \text{ (cf. proposição 7.1.8)},$$

então

$$\nu_{k_1,m_1}\left(\mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\psi\right)\right) = \left\|\mathrm{e}^{k_1|\hat{\xi}|}D_\xi^{m_1}\left[\tau_{-ib}\left(\mathrm{e}^{y\hat{\xi}}\mathcal{F}\psi\right)\right]\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}.$$

Vimos na proposição 4.2.9 que

$$\mathcal{F} : \mathcal{G}_a\left(\mathbb{R}\right) \longrightarrow \mathcal{G}_d\left(\mathbb{R}\right)$$

onde $d = \dfrac{1}{4a}$, logo

$$\mathcal{F}\psi = s \cdot \mathrm{e}^{-d\hat{\xi}^2}, \quad \text{com } s \in \mathcal{P}.$$

Assim, se recorrermos a uma das fórmulas de Leibniz para a derivação do produto e tivermos em conta que a derivada da translação é a translatada da derivada, teremos

$$\begin{aligned} & \nu_{k_1,m_1}\left(\mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\psi\right)\right) \\ = & \sup_{\xi\in\mathbb{R}}\left|\mathrm{e}^{k_1|\xi|}\tau_{-ib}\left[\sum_{l\leq m_1}\binom{m_1}{l}D_\xi^l\left(\mathrm{e}^{y\xi}\right)D_\xi^{m_1-l}\left(s\left(\xi\right)\ \mathrm{e}^{-d\xi^2}\right)\right]\right| \end{aligned} \tag{7.12}$$

O espaço $\mathcal{G}_d\left(\mathbb{R}\right)$ é fechado para a derivação (cf. proposição 4.2.5), logo

$$D_\xi^{m_1-l}\left(s\left(\xi\right)\ \mathrm{e}^{-d\xi^2}\right) = s_{m_1-l}\left(\xi\right)\ \mathrm{e}^{-d\xi^2},$$

onde s_{m_1-l} denota o polinómio que se obtém da derivada de ordem $m_1 - l$ de $s\cdot\ \mathrm{e}^{-d\hat{\xi}^2}$. Portanto, da igualdade (7.12), obtemos

$$\begin{aligned} & \nu_{k_1,m_1}\left(\mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\psi\right)\right) \\ = & \sup_{\xi\in\mathbb{R}}\left|\mathrm{e}^{k_1|\xi|}\sum_{l\leq m_1}\binom{m_1}{l}y^l\tau_{-ib}\left[\mathrm{e}^{y\xi}s_{m_1-l}\left(\xi\right)\ \mathrm{e}^{-d\xi^2}\right]\right| \\ \leq & \sup_{\xi\in\mathbb{R}}\mathrm{e}^{k_1|\xi|+y\xi-d\xi^2}\mathrm{e}^{db^2}\sum_{l\leq m_1}\binom{m_1}{l}\ \mathrm{e}^{l|y|}\left|s_{m_1-l}\left(\xi+ib\right)\right| \\ \leq & \sup_{\xi\in\mathbb{R}}\mathrm{e}^{k_1|\xi|+y\xi-d\xi^2}\ \mathrm{e}^{m_1|y|}\ \mathrm{e}^{db^2}\sum_{l\leq m_1}\binom{m_1}{l}\left|s_{m_1-l}\left(\xi+ib\right)\right|. \end{aligned}$$

Se designarmos por A_{m_1-l} o grau de s_{m_1-l}, então

$$\begin{aligned} & \left|s_{m_1-l}\left(\xi+ib\right)\right| \\ \leq & \sum_{j\leq A_{m_1-l}}\left|c_j\right|\left|\left(\xi+ib\right)^j\right| \\ \leq & \sum_{j\leq A_{m_1-l}}\left|c_j\right|\ \mathrm{e}^{A_{m_1-l}|\xi|}\ \mathrm{e}^{A_{m_1-l}|b|} \end{aligned}$$

e, por isso,

$$\begin{aligned} & \nu_{k_1,m_1}\left(\mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\psi\right)\right) \\ \leq & \ \mathrm{e}^{m_1|y|}\ \mathrm{e}^{db^2}\sum_{l\leq m_1}\binom{m_1}{l}\ \mathrm{e}^{A_{m_1-l}|b|}\sum_{j\leq A_{m_1-l}}\left|c_j\right|\sup_{\xi\in\mathbb{R}}\mathrm{e}^{k_1|\xi|+|y||\xi|-d\xi^2}\mathrm{e}^{A_{m_1-l}|\xi|} \end{aligned} \tag{7.13}$$

Seja $B_{m_1-l} = k_1 + A_{m_1-l}$; então

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\left(B_{m_1-l}+|y|\right)|\xi|-d\xi^2} = \mathrm{e}^{\frac{1}{4d}\left(B_{m_1-l}+|y|\right)^2}.$$

Ao calcularmos o supremo em $y, b \in [-r_1, r_1]$ na desigualdade (7.13), vem

$$\begin{aligned}
&\sup_{y,b\in[-r_1,r_1]} \nu_{k_1,m_1}\left(\mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\psi\right)\right) \\
\le\ & \sum_{l\le m_1}\binom{m_1}{l}\sum_{j\le A_{m_1-l}}|c_j| \sup_{y\in[-r_1,r_1]} \mathrm{e}^{m_1|y|}\mathrm{e}^{\frac{1}{4d}\left(B_{m_1-l}+|y|\right)^2} \sup_{b\in[-r_1,r_1]} \mathrm{e}^{db^2+A_{m_1-l}|b|} \\
=\ & \sum_{l\le m_1}\binom{m_1}{l}\sum_{j\le A_{m_1-l}}|c_j|\ \mathrm{e}^{\frac{1}{4d}\left(B_{m_1-l}+r_1\right)^2+m_1r_1}\ \mathrm{e}^{d(r_1)^2+r_1A_{m_1-l}}
\end{aligned}$$

e, por isso,

$$\sup_{y,b\in[-r_1,r_1]} \nu_{k_1,m_1}\left(\mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\psi\right)\right) < \infty,$$

isto é, para todo o r_1, m_1 e k_1 em $\mathbb{N}$ e para todo o ψ em $\mathcal{G}_a(\mathbb{R})$,

$$\sup_{b,y\in[-r_1,r_1]} \nu_{k_1,m_1}\left(\mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\psi\right)\right) \in \mathbb{R}_0^+.$$

■

Proposição 7.1.10 *Para todo o a em $\mathbb{R}^+$, tem-se*

$$\mathcal{G}_a(\mathbb{R}) \subset \mathfrak{X}.$$

Demonstração: Fixemos a um real positivo e p um polinómio complexo definido em $\mathbb{R}$.

Tencionamos provar que $\psi = p\ \mathrm{e}^{-a\hat{x}^2} \in \mathfrak{X}$, ou seja, que para todo o inteiro não negativo r, ψ é uma função de $\mathfrak{X}_r$. Já demonstrámos, na proposição 5.1.4, que $\psi \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$, pelo que ψ é inteira (cf. teorema 5.1.3).

Sejam $b, y \in \mathbb{R}$, tais que $|b| \le r$ e $|y| \le r$. Mostremos, em primeiro lugar, que

$$\mathrm{e}^{b\hat{x}} \cdot \tau_{iy}\psi \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R}).$$

Em conformidade com o lema 7.1.6, podemos afirmar que $\tau_{iy}\psi$ é uma função de decrescimento exponencial rápido em $\mathbb{R}$ e, como $\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$ é fechado para o produto por exponenciais (ver corolário 4.3.11), resulta que

$$\mathrm{e}^{b\hat{x}} \cdot \tau_{iy}\psi \in \mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R}).$$

Precisamos agora verificar que $\mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}} \cdot \tau_{iy}\psi\right)$ também é uma função de decrescimento exponencial rápido em $\mathbb{R}$.

É importante salientar que

$$\mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}} \cdot \tau_{iy}\psi\right) = \tau_{-ib}\left[\mathcal{F}\left(\tau_{iy}\psi\right)\right]$$

e, como a proposição 7.1.8 nos assevera que

$$\mathcal{F}\left(\tau_{iy}\psi\right) = \mathrm{e}^{y\hat{\xi}}\mathcal{F}\psi,$$

decorre que

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}} \cdot \tau_{iy}\psi\right) \\ = \; & \tau_{-ib}\left(\mathrm{e}^{y\hat{\xi}}\mathcal{F}\psi\right) \\ = \; & \mathrm{e}^{y\hat{\xi}}\mathrm{e}^{iby}\mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\psi\right) \end{aligned} \tag{7.14}$$

A proposição 5.1.13 garante-nos, por sua vez, que

$$\mathrm{e}^{b\hat{x}} \cdot \psi \in \mathfrak{X}_0\left(\mathbb{R}\right)$$

e logo

$$\mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\psi\right) \in \mathfrak{X}_0\left(\mathbb{R}\right),$$

pois $\mathfrak{X}_0\left(\mathbb{R}\right)$ é fechado para a transformação de Fourier (cf. proposição 5.1.9). Por maioria de razão, podemos então dizer que $\mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\psi\right)$ é uma função de decrescimento exponencial rápido em $\mathbb{R}$. Assim, e atendendo novamente ao corolário 4.3.11, é-nos garantido o decrescimento exponencial rápido de $\mathrm{e}^{y\hat{\xi}}\mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\psi\right)$ e, como $\mathcal{C}_{e^-,\infty}\left(\mathbb{R}\right)$ é um e.v. sobre o corpo dos complexos (ver proposição 4.3.3), conclui-se que

$$\mathrm{e}^{iby}\mathrm{e}^{y\hat{\xi}}\mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\psi\right) \in \mathcal{C}_{e^-,\infty}\left(\mathbb{R}\right)$$

e, por (7.14),

$$\mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}} \cdot \tau_{iy}\psi\right) \in \mathcal{C}_{e^-,\infty}\left(\mathbb{R}\right).$$

Para finalizar esta prova, precisamos verificar que, dados k_1 e m_1 em $\mathbb{N}$,

$$\eta^r_{k_1,m_1}\left(\psi\right) < \infty.$$

Ora,

$$\begin{aligned} & \sup_{b,y\in[-r,r]} \eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\psi\right) \\ \leq \; & \sup_{b,y\in[-r,r]} \nu_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\psi\right) + \sup_{b,y\in[-r,r]} \nu_{k_1,m_1}\left(\mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\psi\right)\right) \end{aligned} \tag{7.15}$$

Interessa-nos agora recordar os lemas 7.1.7 e 7.1.9 que nos dizem, respectivamente, que para todo o r_1, m_1 e k_1 em $\mathbb{N}$ e para todo o ψ em $\mathcal{G}_a\left(\mathbb{R}\right)$, com a em $\mathbb{R}^+$,

$$\sup_{b,y\in[-r_1,r_1]} \nu_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\psi\right) < \infty$$

e

$$\sup_{b,y\in[-r_1,r_1]} \nu_{k_1,m_1}\left(\mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\psi\right)\right) < \infty;$$

logo

$$\sup_{b,y\in[-r,r]} \nu_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\psi\right) + \sup_{b,y\in[-r,r]} \nu_{k_1,m_1}\left(\mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\psi\right)\right) \in \mathbb{R}_0^+.$$

Assim, da desigualdade (7.15), resulta por fim que

$$\eta_{k_1,m_1}^r(\psi) < \infty.$$

■

Estamos finalmente aptos a provar a densidade do nosso espaço $\mathfrak{X}$ no espaço das funções teste de Schwartz.

Proposição 7.1.11 *O espaço $\mathfrak{X}$ está contido densamente no espaço $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ de Schwartz.*

Demonstração: Note-se que é imediato afirmar que $\mathfrak{X} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$, pois $\mathfrak{X} = \bigcap_{r\in\mathbb{N}} \mathfrak{X}_r$ é um subconjunto de $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$ e, este último, por sua vez, é um subconjunto do espaço $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ de Schwartz (cf. proposição 5.1.5).

A proposição 7.1.10 garante-nos que, para todo o a em $\mathbb{R}^+$, toda a função do espaço $\mathcal{G}_a(\mathbb{R})$ pertence a $\mathfrak{X}$ e, dado que as funções de $\mathcal{G}_{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$ são densas em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ (ver teorema 4.2.7), somos levados a concluir que

$$\mathfrak{X} \overset{d}{\subset} \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

■

Passemos a expôr um resultado que nos garante a invariância para as translações complexas no nosso espaço $\mathfrak{X}$, o que, posteriormente, nos assegurará tal invariância no dual de $\mathfrak{X}$, ou seja, no nosso futuro espaço de ultradistribuições.

Proposição 7.1.12 *O espaço $\mathfrak{X}$ é fechado para as translações complexas.*

Demonstração: Sejam $\varphi \in \mathfrak{X}$ e $z_0 \in \mathbb{C}$ arbitrários, onde $z_0 = x_0 + iy_0$. Tomemos $r \in \mathbb{N}$ qualquer e vejamos que $\tau_{z_0}\varphi \in \mathfrak{X}_r$. Verifica-se imediatamente que $\tau_{z_0}\varphi = \varphi(\hat{z} - z_0)$ é inteira, pois φ o é.

Sejam $b, y \in [-r, r]$ arbitrários. Mostremos agora que $\mathrm{e}^{b\hat{x}} \cdot \tau_{iy}(\tau_{z_0}\varphi) \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$.

Com efeito,

$$\begin{aligned} & \mathrm{e}^{b\hat{x}} \cdot \tau_{iy}(\tau_{z_0}\varphi)(x) \\ = & \ \mathrm{e}^{b\hat{x}} \cdot \varphi(x - iy - x_0 - iy_0) \\ = & \ \mathrm{e}^{b\hat{x}} \cdot \tau_{x_0}\varphi[x - i(y + y_0)] \\ = & \ \mathrm{e}^{b\hat{x}} \cdot \tau_{x_0}(\tau_{iy_1}\varphi)(x) \end{aligned} \tag{7.16}$$

com $y_1 = y + y_0$.

Mas,

$$|y_1| \leq |y| + |y_0| \leq r + |y_0| \leq r + |C(y_0)| + 1,$$

onde $C(y_0)$ representa, como já referimos anteriormente, o maior inteiro que não excede o número y_0.

Como $\varphi \in \mathfrak{X}$ temos, em particular, que $\varphi \in \mathfrak{X}_{r+|C(y_0)|+1}$ e, dado que $|y_1| \leq r + |C(y_0)| + 1$, obtém-se por definição do espaço $\mathfrak{X}_{r+|C(y_0)|+1}$ que

$$\mathrm{e}^{b\hat{x}} \cdot \tau_{iy_1}\varphi \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R}).$$

De acordo com a proposição 5.1.1, $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$ é um e.v., logo

$$\mathrm{e}^{x_0 b} \cdot \mathrm{e}^{b\hat{x}} \cdot \tau_{iy_1}\varphi \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$$

e, como $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$ é invariante para as translações reais (ver proposição 5.1.7), vem que

$$\mathrm{e}^{x_0 b}\tau_{x_0}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}} \cdot \tau_{iy_1}\varphi\right) \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R}),$$

ou seja,

$$\mathrm{e}^{b\hat{x}} \cdot \tau_{x_0}\left(\tau_{iy_1}\varphi\right) \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R}),$$

o que, pela igualdade (7.16), implica que $\mathrm{e}^{b\hat{x}} \cdot \tau_{iy}\left(\tau_{z_0}\varphi\right)$ é uma função de $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$.

Falta vermos que, dados k_1 e m_1 naturais quaisquer,

$$\eta^r_{k_1,m_1}\left(\tau_{z_0}\varphi\right) = \sup_{b,y\in[-r,r]} \eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\left(\tau_{z_0}\varphi\right)\right)$$

é finito.

Notemos, em primeiro lugar, que

$$\begin{aligned}
&\sup_{b,y\in[-r,r]} \eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\left(\tau_{z_0}\varphi\right)\right) \\
\leq\ & \sup_{b,y\in[-r,r]} \mathrm{e}^{|x_0 b|} \sup_{b,y\in[-r,r]} \eta_{k_1,m_1}\left(\tau_{x_0}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy_1}\varphi\right)\right) \\
\leq\ & \mathrm{e}^{r|x_0|}\left[\sup_{b,y\in[-r,r]} \left\|\mathrm{e}^{k_1|\hat{x}|}D_x^{m_1}\left(\tau_{x_0}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy_1}\varphi\right)\right)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\right. \\
&\left. + \sup_{b,y\in[-r,r]} \left\|\mathrm{e}^{k_1|\hat{\xi}|}D_\xi^{m_1}\left[\mathcal{F}\left(\tau_{x_0}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy_1}\varphi\right)\right)\right]\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\right],
\end{aligned}$$

onde $y_1 = y + y_0$. Dado que a derivada da translação é a translação da derivada e, como $\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy_1}\varphi \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$, então, pelas propriedades da transformação de Fourier em $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$ (ver observação 5.2.17), vem que

$$\begin{aligned}
&\sup_{b,y\in[-r,r]} \eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\left(\tau_{z_0}\varphi\right)\right) \\
\leq\ & \mathrm{e}^{r|x_0|}\left[\sup_{b,y\in[-r,r]} \left\|\mathrm{e}^{k_1|\hat{x}-x_0|}\mathrm{e}^{k_1|x_0|}\tau_{x_0}\left[D_x^{m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy_1}\varphi\right)\right]\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\right. \\
&\left. + \sup_{b,y\in[-r,r]} \left\|\mathrm{e}^{k_1|\hat{\xi}|}D_\xi^{m_1}\left[\mathrm{e}^{-ix_0\xi}\mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy_1}\varphi\right)\right]\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\right].
\end{aligned}$$

Utilizando uma das fórmulas de Leibniz para a derivação do produto obtém-se

$$\begin{aligned}
&\sup_{b,y\in[-r,r]} \eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\left(\tau_{z_0}\varphi\right)\right)\\
\leq\ & \mathrm{e}^{r|x_0|}\left[\mathrm{e}^{k_1|x_0|}\sup_{b,y\in[-r,r]}\left\|\tau_{x_0}\left[\mathrm{e}^{k_1|\hat{x}|}D_x^{m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy_1}\varphi\right)\right]\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\right.\\
&\left.+\sup_{b,y\in[-r,r]}\left\|\mathrm{e}^{k_1|\hat{\xi}|}\sum_{l\leq m_1}\binom{m_1}{l}\left(-ix_0\right)^l\mathrm{e}^{-ix_0\xi}D_\xi^{m_1-l}\left[\mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy_1}\varphi\right)\right]\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\right]\\
\leq\ & \mathrm{e}^{r|x_0|}\left[\mathrm{e}^{k_1|x_0|}\sup_{b,y\in[-r,r]}\left\|\tau_{x_0}\left[\mathrm{e}^{k_1|\hat{x}|}D_x^{m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy_1}\varphi\right)\right]\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\right.\\
&\left.+\mathrm{e}^{m_1|x_0|}\sum_{l\leq m_1}\binom{m_1}{l}\sup_{b,y\in[-r,r]}\left\|\mathrm{e}^{k_1|\hat{\xi}|}D_\xi^{m_1-l}\left[\mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy_1}\varphi\right)\right]\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\right]
\end{aligned}\tag{7.17}$$

Seja $r_1 = r + |C(y_0)| + 1 \in \mathbb{N}$, temos que $|y_1| = |y + y_0| \leq r_1$ e $|b| \leq r \leq r_1$. Uma vez que φ é uma função de $\mathfrak{X}$, então é também uma função de $\mathfrak{X}_{r_1}$ e, portanto,

$$\forall k_2, m_2 \in \mathbb{N}\quad \exists M \geq 0 \qquad \sup_{b,y_1\in[-r_1,r_1]} \eta_{k_2,m_2}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy_1}\varphi\right) = M \tag{7.18}$$

o que implica em particular que

$$\forall k_2, m_2 \in \mathbb{N}\quad \exists M_1 \geq 0\quad \forall x_0 \in \mathbb{R} \qquad \sup_{b,y_1\in[-r_1,r_1]}\left\|\tau_{x_0}\left[\mathrm{e}^{k_2|\hat{x}|}D_x^{m_2}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy_1}\varphi\right)\right]\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq M_1,$$

ou seja, para $k_2 = k_1$ e $m_2 = m_1$ tem-se

$$\exists M_1 \geq 0\quad \forall x_0 \in \mathbb{R}\quad \forall b, y_1 \in [-r_1, r_1] \qquad \left\|\tau_{x_0}\left[\mathrm{e}^{k_1|\hat{x}|}D_x^{m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy_1}\varphi\right)\right]\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq M_1 \tag{7.19}$$

É importante agora notar que, se

$$y_1 \in [-r_1, r_1],$$

então

$$y \in [-r_1 - y_0, r_1 - y_0].$$

Decorrendo, assim, da condição (7.19)

$$\exists M_1 \geq 0\quad \forall x_0 \in \mathbb{R} \qquad \sup_{y\in[-r_1-y_0,r_1-y_0]}\ \sup_{|b|\leq r_1}\left\|\tau_{x_0}\left[\mathrm{e}^{k_1|\hat{x}|}D_x^{m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy_1}\varphi\right)\right]\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq M_1 \tag{7.20}$$

Se analisarmos novamente a condição (7.18), e fazendo $k_2 = k_1$ e $m_2 = m_1 - l$, podemos também concluir que

$$\exists M_2 \geq 0 \qquad \sup_{b,y_1 \in [-r_1,r_1]} \left\| e^{k_1|\hat{\xi}|} D_\xi^{m_1-l} \left[\mathcal{F}\left(e^{b\hat{x}} \tau_{iy_1} \varphi \right) \right] \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq M_2,$$

e, consequentemente,

$$\exists M_2 \geq 0 \qquad \sup_{y \in [-r_1-y_0, r_1-y_0]} \sup_{|b| \leq r_1} \left\| e^{k_1|\hat{\xi}|} D_\xi^{m_1-l} \left[\mathcal{F}\left(e^{b\hat{x}} \tau_{iy_1} \varphi \right) \right] \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq M_2 \qquad (7.21)$$

Repare-se que o nosso propósito era analisar o supremo em b e em y, ambos pertencentes ao intervalo $[-r, r]$; mas como

$$[-r, r] \subset [-r_1 - y_0, r_1 - y_0]$$

e

$$[-r, r] \subset [-r_1, r_1],$$

logo

$$\begin{aligned} & \sup_{b,y \in [-r,r]} \left\| \tau_{x_0} \left[e^{k_1|\hat{x}|} D_x^{m_1} \left(e^{b\hat{x}} \tau_{iy_1} \varphi \right) \right] \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \\ \leq & \sup_{y \in [-r_1-y_0, r_1-y_0]} \sup_{|b| \leq r_1} \left\| \tau_{x_0} \left[e^{k_1|\hat{x}|} D_x^{m_1} \left(e^{b\hat{x}} \tau_{iy_1} \varphi \right) \right] \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} & \sup_{b,y \in [-r,r]} \left\| e^{k_1|\hat{\xi}|} D_\xi^{m_1-l} \left[\mathcal{F}\left(e^{b\hat{x}} \tau_{iy_1} \varphi \right) \right] \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \\ \leq & \sup_{y \in [-r_1-y_0, r_1-y_0]} \sup_{|b| \leq r_1} \left\| e^{k_1|\hat{\xi}|} D_\xi^{m_1-l} \left[\mathcal{F}\left(e^{b\hat{x}} \tau_{iy_1} \varphi \right) \right] \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}, \end{aligned}$$

por isso, da condição (7.17), segue-se que

$$\begin{aligned} & \sup_{b,y \in [-r,r]} \eta_{k_1,m_1} \left(e^{b\hat{x}} \tau_{iy} \left(\tau_{z_0} \varphi \right) \right) \\ \leq \; & e^{r|x_0|} \left[e^{k_1|x_0|} \sup_{y \in [-r_1-y_0, r_1-y_0]} \sup_{|b| \leq r_1} \left\| \tau_{x_0} \left[e^{k_1|\hat{x}|} D_x^{m_1} \left(e^{b\hat{x}} \tau_{iy_1} \varphi \right) \right] \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \right. \\ & \left. + e^{m_1|x_0|} \sum_{l \leq m_1} \binom{m_1}{l} \sup_{y \in [-r_1-y_0, r_1-y_0]} \sup_{|b| \leq r_1} \left\| e^{k_1|\hat{\xi}|} D_\xi^{m_1-l} \left[\mathcal{F}\left(e^{b\hat{x}} \tau_{iy_1} \varphi \right) \right] \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \right]. \end{aligned}$$

Por (7.20) e (7.21) resulta, por fim, que

$$\sup_{b,y \in [-r,r]} \eta_{k_1,m_1} \left(e^{b\hat{x}} \tau_{iy} \left(\tau_{z_0} \varphi \right) \right) \leq e^{r|x_0|} \left(e^{k_1|x_0|} M_1 + e^{m_1|x_0|} \sum_{l \leq m_1} \binom{m_1}{l} M_2 \right),$$

isto é,

$$\eta_{k_1,m_1}^r \left(\tau_{z_0} \varphi \right) \in \mathbb{R}_0^+.$$

■

Observação 7.1.13 *Se examinarmos com atenção a demonstração da proposição precedente 7.1.12, podemos concluir que, embora $\mathfrak{X}$ seja fechado para as translações complexas, os espaços $\mathfrak{X}_r$ não o são.*

Observação 7.1.14 *Vimos na observação anterior que os espaços $\mathfrak{X}_r$ não são invariantes para as translações complexas. São-no, no entanto, para as translações reais. Efectivamente, sendo r um inteiro positivo qualquer, a um número real qualquer e φ uma função de $\mathfrak{X}_r$ também arbitrária, é imediato afirmar que $\tau_a\varphi$ é inteira.*
Sejam b e y pertencentes ao intervalo $[-r, r]$. Atendendo a que $\varphi \in \mathfrak{X}_r$, temos que

$$e^{b\hat{x}} \cdot \tau_{iy}\varphi \in \mathfrak{X}_0 (I\!R).$$

Como $\mathfrak{X}_0 (I\!R)$ é fechado para as translações reais (cf. proposição 5.1.7) vem que $\tau_a \left(e^{b\hat{x}} \cdot \tau_{iy}\varphi\right)$ ainda pertence a $\mathfrak{X}_0 (I\!R)$ e, dado que este espaço é um e.v. (cf. proposição 5.1.1), resulta que

$$e^{ba}\tau_a \left(e^{b\hat{x}} \cdot \tau_{iy}\varphi\right) \in \mathfrak{X}_0 (I\!R),$$

ou seja,

$$e^{b\hat{x}} \cdot \tau_{iy} (\tau_a\varphi) \in \mathfrak{X}_0 (I\!R).$$

Fixemos agora k_1 e m_1 em $I\!N$. Procedendo de forma inteiramente análoga à demonstração da proposição 7.1.12, podemos dizer que

$$\begin{aligned}
& \sup_{b,y\in[-r,r]} \eta_{k_1,m_1} \left(e^{b\hat{x}}\tau_{iy} (\tau_a\varphi)\right) \\
\leq \quad & e^{r|a|} \left[e^{k_1|a|} \sup_{b,y\in[-r,r]} \left\|\tau_a \left[e^{k_1|\hat{x}|} D_x^{m_1} \left(e^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi\right)\right]\right\|_{L^\infty(I\!R)} \right. \\
& \left. + e^{m_1|a|} \sum_{l\leq m_1} \binom{m_1}{l} \sup_{b,y\in[-r,r]} \left\| e^{k_1|\hat{\xi}|} D_\xi^{m_1-l} \left[\mathcal{F}\left(e^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi\right)\right]\right\|_{L^\infty(I\!R)} \right].
\end{aligned}$$

Uma vez que φ é uma função de $\mathfrak{X}_r$, então

$$\forall k_2, m_2 \in I\!N \quad \exists M \geq 0 \qquad \sup_{b,y\in[-r,r]} \eta_{k_2,m_2} \left(e^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi\right) = M,$$

o que, em especial, implica que

$$\exists M_1 \geq 0 \quad \forall a \in I\!R \qquad \sup_{b,y\in[-r,r]} \left\|\tau_a \left[e^{k_1|\hat{x}|} D_x^{m_1} \left(e^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi\right)\right]\right\|_{L^\infty(I\!R)} \leq M_1$$

e que

$$\exists M_2 \geq 0 \qquad \sup_{b,y\in[-r,r]} \left\| e^{k_1|\hat{\xi}|} D_\xi^{m_1-l} \left[\mathcal{F}\left(e^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi\right)\right]\right\|_{L^\infty(I\!R)} \leq M_2.$$

Por conseguinte,

$$\sup_{b,y\in[-r,r]} \eta_{k_1,m_1}\left(e^{b\hat{x}}\tau_{iy}\left(\tau_a\varphi\right)\right) \leq e^{r|a|}\left[e^{k_1|a|}M_1 + e^{m_1|a|}\sum_{l\leq m_1}\binom{m_1}{l}M_2\right],$$

o que significa que

$$\eta^r_{k_1,m_1}\left(\tau_a\varphi\right) \in I\!R_0^+$$

e, portanto, $\tau_a\varphi \in \mathfrak{X}_r$.

Na continuação veremos que $\mathfrak{X}$ é fechado para a derivação.

Proposição 7.1.15 $\mathfrak{X}$ *é fechado para a derivação*[4].

Demonstração: Sejam $\varphi \in \mathfrak{X}$ e $l, r \in \mathbb{N}$ quaisquer.

De $\varphi \in \mathfrak{X}$ temos que $\varphi \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$ e como $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$ é fechado para a derivação (ver proposição 5.1.8), resulta que $D_x^l\varphi \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$, o que pelo teorema 5.1.3 nos permite dizer que $D_x^l\varphi$ é inteira.

Tomemos agora $b, y \in [-r, r]$ arbitrários. Provemos que $\mathrm{e}^{b\hat{x}} \cdot \tau_{iy}\left(D_x^l\varphi\right) \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$.

Usando uma das fórmulas de Leibniz, obtemos

$$\begin{aligned} & \mathrm{e}^{b\hat{x}} \cdot D_x^l\left(\tau_{iy}\varphi\right) \\ = & \sum_{j\leq l}(-1)^j\binom{l}{j}D_x^{l-j}\left[\left(D_x^j\mathrm{e}^{b\hat{x}}\right)\tau_{iy}\varphi\right] \\ = & \sum_{j\leq l}(-1)^j\binom{l}{j}b^jD_x^{l-j}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi\right) \end{aligned} \tag{7.22}$$

Mas, como φ é uma função de $\mathfrak{X}$, podemos afirmar que $\varphi \in \mathfrak{X}_r$, o que significa, em particular, que

$$\mathrm{e}^{b\hat{x}} \cdot \tau_{iy}\varphi \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$$

e, atendendo novamente à proposição 5.1.8, temos

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad D_x^m\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}} \cdot \tau_{iy}\varphi\right) \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R});$$

para $m = l - j$, vem que

$$D_x^{l-j}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi\right)$$

[4] É importante notar que, embora nos estejamos a referir ao operador derivação parcial em relação à parte real da variável independente z, é evidente que este operador coincide com o operador derivação total em ordem à variável z, pois as funções de $\mathfrak{X}$ são inteiras.

Observe-se ainda que, por simples conveniência de cálculos, é mais cómodo usar o operador $D^l_{\mathrm{Re}\,z}$. Além disso, a sua utilização deve-se também à construção dos espaços $\mathfrak{X}_r$ e, consequentemente, do espaço $\mathfrak{X}$.

é uma função de $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$ e, como este espaço é um e.v. (cf. proposição 5.1.1), resulta de (7.22) que

$$e^{b\hat{x}} \cdot D_x^l\left(\tau_{iy}\varphi\right) \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R}),$$

isto é,

$$e^{b\hat{x}} \cdot \tau_{iy}\left(D_x^l\varphi\right) \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R}).$$

Resta-nos, pois, provar que

$$\forall k_1, m_1 \in \mathbb{N} \quad \eta^r_{k_1,m_1}\left(D_x^l\varphi\right) < \infty.$$

Fixemos, para tal, k_1 e m_1 naturais quaisquer,

$$\begin{aligned}
&\sup_{b,y\in[-r,r]} \eta_{k_1,m_1}\left(e^{b\hat{x}} D_x^l\left(\tau_{iy}\varphi\right)\right)\\
= &\sup_{b,y\in[-r,r]} \eta_{k_1,m_1}\left[\sum_{j\le l}(-1)^j\binom{l}{j} b^j D_x^{l-j}\left(e^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi\right)\right]\\
\le &\sum_{j\le l}\binom{l}{j}\sup_{b,y\in[-r,r]}|b|^j\left\{\left\|e^{k_1|\hat{x}|}D_x^{m_1+l-j}\left(e^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi\right)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\right.\\
&\left.+\left\|e^{k_1|\hat{\xi}|}D_\xi^{m_1}\left[\mathcal{F}\left(D_x^{l-j}\left(e^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi\right)\right)\right]\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\right\}.
\end{aligned}$$

Mas,

$$\mathcal{F}\left(D_x^{l-j}\left(e^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi\right)\right) = \left(i\hat{\xi}\right)^{l-j}\mathcal{F}\left(e^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi\right),$$

logo

$$\begin{aligned}
&\sup_{b,y\in[-r,r]} \eta_{k_1,m_1}\left(e^{b\hat{x}} D_x^l\left(\tau_{iy}\varphi\right)\right)\\
\underset{\text{fórmula de Leibniz}}{\le} &\sum_{j\le l}\binom{l}{j}e^{lr}\sup_{b,y\in[-r,r]}\left\{\left\|e^{k_1|\hat{x}|}D_x^{m_1+l-j}\left(e^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi\right)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\right.\\
&\left.+\left\|e^{k_1|\hat{\xi}|}\sum_{\alpha\le m_1}\binom{m_1}{\alpha}i^{l-j}D_\xi^\alpha\left[\left(\hat{\xi}\right)^{l-j}\right]D_\xi^{m_1-\alpha}\mathcal{F}\left(e^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi\right)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\right\}
\end{aligned} \tag{7.23}$$

Vamos dividir o nosso estudo em três casos:
1^{o}caso:

$$\alpha > l - j.$$

Neste caso,

$$D_\xi^\alpha\left(\xi^{l-j}\right)=0$$

e, por isso, da desigualdade (7.23), resulta que

$$\begin{aligned}&\sup_{b,y\in[-r,r]}\eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}D_x^l\left(\tau_{iy}\varphi\right)\right)\\ \leq&\sum_{j\leq l}\binom{l}{j}\mathrm{e}^{lr}\sup_{b,y\in[-r,r]}\left\|\mathrm{e}^{k_1|\hat{x}|}D_x^{m_1+l-j}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi\right)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}.\end{aligned}$$

É importante agora relembrar que φ é uma função de $\mathfrak{X}$, pelo que $\varphi\in\mathfrak{X}_r$ e, portanto,

$$\forall k_2,m_2\in\mathbb{N}\qquad\sup_{b,y\in[-r,r]}\eta_{k_2,m_2}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi\right)<\infty\tag{7.24}$$

o que implica, em particular, que

$$\exists M_1\geq 0\qquad\sup_{b,y\in[-r,r]}\left\|\mathrm{e}^{k_1|\hat{x}|}D_x^{m_1+l-j}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi\right)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\leq M_1\tag{7.25}$$

Por conseguinte,

$$\sup_{b,y\in[-r,r]}\eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}D_x^l\left(\tau_{iy}\varphi\right)\right)\leq\sum_{j\leq l}\binom{l}{j}\mathrm{e}^{lr}M_1\tag{7.26}$$

2^{o}caso:

$$\alpha=l-j.$$

Neste caso,

$$D_\xi^\alpha\left(\xi^{l-j}\right)=(l-j)!$$

e, da condição (7.23), temos

$$\begin{aligned}&\sup_{b,y\in[-r,r]}\eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}D_x^l\left(\tau_{iy}\varphi\right)\right)\\ \leq&\sum_{j\leq l}\binom{l}{j}\mathrm{e}^{lr}\sup_{b,y\in[-r,r]}\left\{\left\|\mathrm{e}^{k_1|\hat{x}|}D_x^{m_1+l-j}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi\right)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\right.\\ &\left.+\sum_{\alpha\leq m_1}\binom{m_1}{\alpha}(l-j)!\left\|\mathrm{e}^{k_1|\hat{\xi}|}D_\xi^{m_1-\alpha}\mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi\right)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\right\}\\ \leq&\sum_{j\leq l}\binom{l}{j}\mathrm{e}^{lr}\left\{\sup_{b,y\in[-r,r]}\left\|\mathrm{e}^{k_1|\hat{x}|}D_x^{m_1+l-j}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi\right)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\right.\\ &\left.+\sum_{\alpha\leq m_1}\binom{m_1}{\alpha}(l-j)!\sup_{b,y\in[-r,r]}\left\|\mathrm{e}^{k_1|\hat{\xi}|}D_\xi^{m_1-\alpha}\mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi\right)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\right\}\end{aligned}\tag{7.27}$$

Mas $\varphi \in \mathfrak{X}_r$, pelo que a condição (7.25) é válida, isto é,

$$\exists M_1 \geq 0 \qquad \sup_{b,y\in[-r,r]} \left\| \mathrm{e}^{k_1|\hat{x}|} D_x^{m_1+l-j} \left(\mathrm{e}^{b\hat{x}} \tau_{iy}\varphi\right) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq M_1,$$

e por isso, de (7.27), vem que

$$\begin{aligned} &\sup_{b,y\in[-r,r]} \eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}} D_x^l \left(\tau_{iy}\varphi\right)\right) \\ \leq\ & \sum_{j\leq l} \binom{l}{j} \mathrm{e}^{lr} \left\{ M_1 + \sum_{\alpha\leq m_1} \binom{m_1}{\alpha} (l-j)! \sup_{b,y\in[-r,r]} \left\| \mathrm{e}^{k_1|\hat{\xi}|} D_\xi^{m_1-\alpha} \mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}} \tau_{iy}\varphi\right) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \right\} \end{aligned} \tag{7.28}$$

Atendendo novamente à condição (7.24), e para $k_2 = k_1$ e $m_2 = m_1 - \alpha$, temos que

$$\exists M_2 \geq 0 \qquad \sup_{b,y\in[-r,r]} \left\| \mathrm{e}^{k_1|\hat{\xi}|} D_\xi^{m_1-\alpha} \mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}} \tau_{iy}\varphi\right) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq M_2.$$

Portanto, a desigualdade (7.28) dá lugar a

$$\sup_{b,y\in[-r,r]} \eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}} D_x^l \left(\tau_{iy}\varphi\right)\right) \leq \sum_{j\leq l} \binom{l}{j} \mathrm{e}^{lr} \left[M_1 + \sum_{\alpha\leq m_1} \binom{m_1}{\alpha} (l-j)! M_2 \right] \tag{7.29}$$

3^{o}caso:

$$\alpha < l - j.$$

Neste caso tem-se

$$D_\xi^\alpha \left(\xi^{l-j}\right) = \frac{(l-j)!}{(l-j-\alpha)!} \xi^{l-j-\alpha}.$$

Assim, de (7.23), obtém-se

$$\begin{aligned} &\sup_{b,y\in[-r,r]} \eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}} D_x^l \left(\tau_{iy}\varphi\right)\right) \\ \leq\ & \sum_{j\leq l} \binom{l}{j} \mathrm{e}^{lr} \left\{ \sup_{b,y\in[-r,r]} \left\| \mathrm{e}^{k_1|\hat{x}|} D_x^{m_1+l-j} \left(\mathrm{e}^{b\hat{x}} \tau_{iy}\varphi\right) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \right. \\ & \left. + \sum_{\alpha\leq m_1} \binom{m_1}{\alpha} \frac{(l-j)!}{(l-j-\alpha)!} \sup_{b,y\in[-r,r]} \left\| \mathrm{e}^{(k_1+l-j-\alpha)|\hat{\xi}|} D_\xi^{m_1-\alpha} \mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}} \tau_{iy}\varphi\right) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \right\} \end{aligned} \tag{7.30}$$

A hipótese de φ ser uma função de $\mathfrak{X}_r$ permite-nos, por um lado, obter a condição (7.25):

$$\exists M_1 \geq 0 \qquad \sup_{b,y\in[-r,r]} \left\| \mathrm{e}^{k_1|\hat{x}|} D_x^{m_1+l-j} \left(\mathrm{e}^{b\hat{x}} \tau_{iy}\varphi\right) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq M_1$$

e, por outro lado, tomando $k_2 = k_1 + l - j - \alpha$ e $m_2 = m_1 - \alpha$, escrever

$$\exists M_3 \geq 0 \qquad \sup_{b,y \in [-r,r]} \left\| e^{(k_1+l-j-\alpha)|\hat{\xi}|} D_\xi^{m_1-\alpha} \mathcal{F}\left(e^{b\hat{x}} \tau_{iy}\varphi\right) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq M_3.$$

Por conseguinte, da condição (7.30), resulta que

$$\sup_{b,y \in [-r,r]} \eta_{k_1,m_1}\left(e^{b\hat{x}} D_x^l (\tau_{iy}\varphi)\right) \leq \sum_{j \leq l} \binom{l}{j} e^{lr} \left[M_1 + \sum_{\alpha \leq m_1} \binom{m_1}{\alpha} \frac{(l-j)!}{(l-j-\alpha)!} M_3 \right] \tag{7.31}$$

Analisando as condições (7.26), (7.29) e (7.31), podemos inferir que em todos os casos o

$$\sup_{b,y \in [-r,r]} \eta_{k_1,m_1}\left(e^{b\hat{x}} D_x^l (\tau_{iy}\varphi)\right)$$

é finito, ou seja,

$$\forall k_1, m_1 \in \mathbb{N} \quad \eta_{k_1,m_1}^r\left(D_x^l \varphi\right) < \infty,$$

o que finaliza a nossa demonstração. ■

Observação 7.1.16 *Ao analisarmos minuciosamente a demonstração da proposição 7.1.15, podemos deduzir que, para cada r em $\mathbb{N}$, $\mathfrak{X}_r$ é fechado para a derivação.*

Vimos, na proposição 7.1.8, como se define a transformada de Fourier da translação complexa de uma função de $\mathcal{G}_a(\mathbb{R})$, mas ainda não sabemos como se estabelece tal transformação da translação complexa de uma qualquer função de $\mathfrak{X}$. O teorema que se segue formula tal propósito.

Teorema 7.1.17 *Sejam $\varphi \in \mathfrak{X}$ e $w \in \mathbb{R}$ quaisquer. Então*

$$\mathcal{F}(\tau_{iw}\varphi) = e^{w\hat{\xi}} \mathcal{F}\varphi.$$

Demonstração: Tomemos φ em $\mathfrak{X}$ e w em $\mathbb{R}$ arbitrários. Note-se que

$$\tau_{iw}\varphi \in \mathfrak{X} \text{ (cf. proposição 7.1.12)},$$

logo

$$\tau_{iw}\varphi \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R}).$$

Por definição da transformação de Fourier em $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$ (ver proposição 5.2.16), temos, para todo o ξ em $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}(\tau_{iw}\varphi)(\xi) \\ = & \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} \tau_{iw}\varphi(x)\, dx \\ = & \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} \varphi(x - iw)\, dx \\ = & \; e^{w\xi} \int_{\mathbb{R}-iw} e^{-iz\xi} \varphi(z)\, dz \end{aligned} \tag{7.32}$$

Recorde-se que, na demonstração da proposição 7.1.8, fizemos o estudo para w não negativo, por isso desenvolveremos aqui o caso em que w é não positivo.

Fixemos um ponto A positivo na recta real e consideremos as seguintes curvas:

$$\begin{array}{rl} C_1 : [-A,A] & \longrightarrow \mathbb{C} \\ t & \longmapsto t - iw \end{array}, \qquad \begin{array}{rl} C_2 : [-w,0] & \longrightarrow \mathbb{C} \\ t & \longmapsto A + it \end{array},$$

$$\begin{array}{rl} C_3 : [A,-A] & \longrightarrow \mathbb{C} \\ t & \longmapsto t \end{array} \qquad \text{e} \qquad \begin{array}{rl} C_4 : [0,-w] & \longrightarrow \mathbb{C} \\ t & \longmapsto -A + it \end{array}.$$

Tomemos agora o caminho fechado

$$\gamma = C_1 + C_2 + C_3 + C_4.$$

Uma vez que $\mathrm{e}^{-i\hat{z}\xi}\varphi$ é analítica sobre e no interior de γ, então, pelo teorema de Cauchy--Goursat, sabemos que

$$\int_\gamma \mathrm{e}^{-iz\xi}\varphi(z)\,dz = 0 \tag{7.33}$$

Por conseguinte,

$$\begin{aligned} & \left|\int_{C_2} \mathrm{e}^{-iz\xi}\varphi(z)\,dz\right| \\ = & \left|-\int_0^{-w} \mathrm{e}^{-iz\xi}\varphi(z)\,dz\right| \\ \leq & \int_0^{-w} \left|\mathrm{e}^{-iA\xi}\right| \left|\mathrm{e}^{t\xi}\right| |i| \left|\varphi(A+it)\right| dt \\ \leq & \int_0^{-w} \mathrm{e}^{|t\xi|} \left|\varphi(A+it)\right| dt. \end{aligned}$$

Como $0 \leq t \leq -w$ tem-se $|t| \leq -w$ e, por isso,

$$\begin{aligned} & \int_0^{-w} \mathrm{e}^{|t\xi|} \left|\varphi(A+it)\right| dt \\ \leq & \ \mathrm{e}^{-w|\xi|} \int_0^{-w} \left|\varphi(A+it)\right| dt \end{aligned} \tag{7.34}$$

É de realçar que, se $\varphi \in \mathfrak{X}$, então

$$\forall r, m_1, k_1 \in \mathbb{N} \quad \exists M \geq 0 \qquad \sup_{b,y\in[-r,r]} \eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi\right) = M,$$

o que implica que

$$\forall r, m_1, k_1 \in \mathbb{N} \quad \exists M \geq 0 \quad \forall b, y \in [-r,r] \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \left|\mathrm{e}^{k_1|x|}D_x^{m_1}\left(\mathrm{e}^{bx}\tau_{iy}\varphi(x)\right)\right| \leq M.$$

Fazendo $r = |C(-w) + 1|$, $m_1 = b = 0$ e $k_1 = 1$ temos

$$\exists M \geq 0 \quad \forall y \in [-|C(-w)+1|, |C(-w)+1|] \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad |\varphi(x - iy)| \leq M\ \mathrm{e}^{-|x|} \tag{7.35}$$

Tendo em atenção que

$$w \leq -t \leq -w,$$

então $-t \in [-|C(-w)+1|, |C(-w)+1|]$ e, como $A \in \mathbb{R}^+$, a condição (7.35) garante--nos que

$$\exists M \geq 0 \quad |\varphi(A + it)| \leq M\ \mathrm{e}^{-|A|}.$$

Consequentemente, da desigualdade (7.34), vem que

$$\int_0^{-w} \mathrm{e}^{|t\xi|} |\varphi(A + it)|\, dt \underset{A>0}{\leq} M\ \mathrm{e}^{-w|\xi|} \mathrm{e}^{-A}(-w),$$

ou seja,

$$\lim_{A\to+\infty} \left| \int_{C_2} \mathrm{e}^{-iz\xi} \varphi(z)\, dz \right| \leq -\lim_{A\to+\infty} M\ \mathrm{e}^{-w|\xi|} \mathrm{e}^{-A} w = 0 \tag{7.36}$$

No que diz respeito ao integral ao longo do caminho C_4, temos

$$\left| \int_{C_4} \mathrm{e}^{-iz\xi} \varphi(z)\, dz \right| \leq \mathrm{e}^{-w|\xi|} \int_0^{-w} |\varphi(-A + it)|\, dt.$$

Tendo em consideração novamente o facto de que φ é uma função de $\mathfrak{X}$, podemos, como anteriormente, asseverar que

$$\exists M \geq 0 \quad |\varphi(-A + it)| \leq M\ \mathrm{e}^{-|-A|},$$

isto é,

$$\lim_{A\to+\infty} \left| \int_{C_4} \mathrm{e}^{-iz\xi} \varphi(z)\, dz \right| \leq 0 \tag{7.37}$$

Fazendo $A \to +\infty$ em (7.33), vem

$$\begin{aligned} &\lim_{A\to+\infty} \int_{C_1} \mathrm{e}^{-iz\xi} \varphi(z)\, dz + \lim_{A\to+\infty} \int_{C_2} \mathrm{e}^{-iz\xi} \varphi(z)\, dz \\ + &\lim_{A\to+\infty} \int_{C_3} \mathrm{e}^{-iz\xi} \varphi(z)\, dz + \lim_{A\to+\infty} \int_{C_4} \mathrm{e}^{-iz\xi} \varphi(z)\, dz = 0 \end{aligned}$$

e, por (7.36) e (7.37),

$$\begin{aligned}
& \lim_{A\to+\infty}\int_{C_1} \mathrm{e}^{-iz\xi}\varphi(z)\,dz = -\lim_{A\to+\infty}\int_{C_3} \mathrm{e}^{-iz\xi}\varphi(z)\,dz \\
\Leftrightarrow\ & \lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A} \mathrm{e}^{-i(t-iw)\xi}\varphi(t-iw)\,dt = -\lim_{A\to+\infty}\int_{A}^{-A} \mathrm{e}^{-it\xi}\varphi(t)\,dt \\
\Leftrightarrow\ & \int_{\mathbb{R}-iw} \mathrm{e}^{-iz\xi}\varphi(z)\,dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-it\xi}\varphi(t)\,dt \\
\Leftrightarrow\ & \int_{\mathbb{R}-iw} \mathrm{e}^{-iz\xi}\varphi(z)\,dz = \mathcal{F}(\varphi)(\xi).
\end{aligned}$$

Assim, de (7.32), resulta finalmente que

$$\mathcal{F}(\tau_{iw}\varphi) = \mathrm{e}^{w\hat{\xi}}\mathcal{F}\varphi.$$

Observe-se que, no caso de w ser positivo, as curvas consideradas permanecem inalteradas e os cálculos a efectuar são semelhantes aos anteriores, obtendo-se de igual forma o resultado desejado.

$\blacksquare$

À semelhança do que já acontecia em $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$, $\mathfrak{X}$ também é fechado para a mudança de variável:

$$x \longmapsto -x.$$

Observação 7.1.18

$$\forall\varphi\in\mathfrak{X}\quad \varphi(-\hat{x})\in\mathfrak{X}.$$

Seja $\varphi\in\mathfrak{X}$ qualquer. Então, em particular, $\varphi\in\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$ e logo, pela observação 5.1.6, $\varphi(-\hat{x})\in\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$. De acordo com o teorema 5.1.3, podemos afirmar que $\varphi(-\hat{x})$ é inteira. Sejam $r\in\mathbb{N}$, $b,y\in[-r,r]$ arbitrários.
Uma vez que $\varphi\in\mathfrak{X}$, então $\varphi\in\mathfrak{X}_r$ e, por isso, $e^{-b\hat{x}}\cdot\tau_{iy}\varphi$ é uma função de $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$.
Tendo em consideração novamente a observação 5.1.6, podemos dizer que $e^{b\hat{x}}\cdot\tau_{iy}\varphi(-\hat{x})$ também pertence a $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$.
Resta pois mostrar que, para todo o k_1 e m_1 naturais,

$$\eta^r_{k_1,m_1}(\varphi(-\hat{x}))<\infty.$$

Com efeito,

$$\begin{aligned}
& \sup_{b,y\in[-r,r]} \eta_{k_1,m_1}\left(e^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi(-\hat{x})\right) \\
= & \sup_{-b,y\in[-r,r]} \eta_{k_1,m_1}\left(e^{-b(-\hat{x})}\tau_{iy}\varphi(-\hat{x})\right) \\
= & \sup_{-b,y\in[-r,r]} \eta_{k_1,m_1}\left(e^{-b\hat{x}_1}\tau_{iy}\varphi(\hat{x}_1)\right) \qquad (7.38)
\end{aligned}$$

onde $x_1 = -x$.
Sabemos por hipótese que

$$\forall r_1, k_2, m_2 \in I\!N \quad \exists M_1 \geq 0 \quad \forall b_1, y_1 \in [-r_1, r_1] \quad \eta_{k_2,m_2}\left(e^{b_1 \hat{x}_1} \tau_{iy_1} \varphi\left(\hat{x}_1\right)\right) \leq M_1;$$

então, fazendo $r_1 = r$, $k_2 = k_1$, $m_2 = m_1$, $b_1 = -b$ e $y_1 = y$, temos

$$\exists M_1 \geq 0 \qquad \sup_{-b,y \in [-r,r]} \eta_{k_1,m_1}\left(e^{-b\hat{x}_1} \tau_{iy} \varphi\left(\hat{x}_1\right)\right) \leq M_1.$$

Consequentemente, de (7.38), obtém-se o pretendido.

Tem-se, naturalmente, que

Proposição 7.1.19 *O espaço $\mathfrak{X}$ é fechado para a transformada de Fourier.*

Demonstração: Sejam $\varphi \in \mathfrak{X}$ e $r \in \mathbb{N}$ quaisquer. Tem-se imediatamente que $\varphi \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$ e, como $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$ é fechado para a transformação de Fourier (ver proposição 5.1.9), então $\mathcal{F}\varphi$ ainda pertence ao espaço $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$, o que nos permite concluir, pelo teorema 5.1.3, que $\mathcal{F}\varphi$ é inteira.

Tomemos b e y elementos de $\mathbb{R}$, tais que $|b| \leq r$ e $|y| \leq r$, e vejamos que $\mathrm{e}^{b\hat{\xi}} \cdot \tau_{iy}(\mathcal{F}\varphi)$ também é uma função de $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$.

Ora,

$$\begin{aligned} & \mathrm{e}^{b\hat{\xi}} \cdot \tau_{iy}(\mathcal{F}\varphi) \\ = \; & \mathrm{e}^{iby} \tau_{iy}\left(\mathrm{e}^{b\hat{\xi}} \mathcal{F}\varphi\right). \end{aligned}$$

Como $\varphi \in \mathfrak{X}$ então, pelo teorema 7.1.17,

$$\mathrm{e}^{b\hat{\xi}} \mathcal{F}\varphi = \mathcal{F}\left(\tau_{ib}\varphi\right)$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} & \mathrm{e}^{b\hat{\xi}} \cdot \tau_{iy}(\mathcal{F}\varphi) \\ = \; & \mathrm{e}^{iby} \tau_{iy}\left(\mathcal{F}\left(\tau_{ib}\varphi\right)\right). \end{aligned}$$

Mas

$$\tau_{iy}\left(\mathcal{F}\left(\tau_{ib}\varphi\right)\right) = \mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{-y\hat{x}} \tau_{ib}\varphi\right),$$

pelo que

$$\begin{aligned} & \mathrm{e}^{b\hat{\xi}} \cdot \tau_{iy}(\mathcal{F}\varphi) \\ = \; & \mathrm{e}^{iby} \mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{-y\hat{x}} \tau_{ib}\varphi\right) \end{aligned} \tag{7.39}$$

Decorre, do facto de φ ser uma função de $\mathfrak{X}$, que $\varphi \in \mathfrak{X}_r$ e, por conseguinte,

$$\mathrm{e}^{-y\hat{x}}\tau_{ib}\varphi \in \mathfrak{X}_0\left(\mathbb{R}\right).$$

Atendendo novamente à proposição 5.1.9, podemos observar que

$$\mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{-y\hat{x}}\tau_{ib}\varphi\right) \in \mathfrak{X}_0\left(\mathbb{R}\right)$$

e, como a proposição 5.1.1 nos garante que $\mathfrak{X}_0\left(\mathbb{R}\right)$ é um e.v., resulta de (7.39) que $\mathrm{e}^{b\hat{\xi}} \cdot \tau_{iy}\left(\mathcal{F}\varphi\right)$ é uma função do espaço $\mathfrak{X}_0\left(\mathbb{R}\right)$.

Sejam agora $k_1, m_1 \in \mathbb{N}$ arbitrários.

$$\begin{aligned}
&\eta^r_{k_1,m_1}\left(\mathcal{F}\varphi\right)\\
=\ &\sup_{b,y\in[-r,r]} \eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{\xi}}\tau_{iy}\left(\mathcal{F}\varphi\right)\right)\\
=\ &\sup_{b,y\in[-r,r]} \eta_{k_1,m_1}\left(\mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{-y\hat{x}}\tau_{ib}\varphi\right)\right)\\
=\ &\sup_{b,y\in[-r,r]} \left[\left\|\mathrm{e}^{k_1|\hat{\xi}|}D^{m_1}_{\xi}\left(\mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{-y\hat{x}}\tau_{ib}\varphi\right)\right)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + \left\|\mathrm{e}^{k_1|\hat{x}|}D^{m_1}_{x}\left[\mathcal{F}\left(\mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{-y\hat{x}}\tau_{ib}\varphi\right)\right)\right]\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\right].
\end{aligned}$$

Já vimos que $\mathrm{e}^{-y\hat{x}}\tau_{ib}\varphi \in \mathfrak{X}_0\left(\mathbb{R}\right)$; portanto, pelas propriedades da transformação de Fourier em $\mathfrak{X}_0\left(\mathbb{R}\right)$ (cf. observação 5.2.17), obtemos que

$$\mathcal{F}\left(\mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{-y\hat{x}}\tau_{ib}\varphi\right)\right) = 2\pi\left(\mathrm{e}^{y\hat{x}}\tau_{ib}\varphi\left(-\hat{x}\right)\right).$$

Assim,

$$\begin{aligned}
&\eta^r_{k_1,m_1}\left(\mathcal{F}\varphi\right)\\
\leq\ &\sup_{b,y\in[-r,r]} \left\|\mathrm{e}^{k_1|\hat{\xi}|}D^{m_1}_{\xi}\left(\mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{-y\hat{x}}\tau_{ib}\varphi\right)\right)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\\
&+2\pi\sup_{b,y\in[-r,r]} \left\|\mathrm{e}^{k_1|\hat{x}|}D^{m_1}_{x}\left(\mathrm{e}^{y\hat{x}}\tau_{ib}\varphi\left(-\hat{x}\right)\right)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}.
\end{aligned}$$

Por um lado, por φ pertencer a $\mathfrak{X}$ e tendo em consideração a observação 7.1.18, podemos afirmar que $\varphi\left(-\hat{x}\right) \in \mathfrak{X}$. Consequentemente,

$$\exists M_1 \geq 0 \quad \sup_{b,y\in[-r,r]} \left\|\mathrm{e}^{k_1|\hat{x}|}D^{m_1}_{x}\left(\mathrm{e}^{y\hat{x}}\tau_{ib}\varphi\left(-\hat{x}\right)\right)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq M_1 \tag{7.40}$$

Por outro lado, é possível também dizer que

$$\exists M_2 \geq 0 \quad \sup_{b,y\in[-r,r]} \left\|\mathrm{e}^{k_1|\hat{\xi}|}D^{m_1}_{\xi}\left(\mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{-y\hat{x}}\tau_{ib}\varphi\right)\right)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq M_2 \tag{7.41}$$

Como consequência de (7.40) e (7.41) vem

$$\eta^r_{k_1,m_1}\left(\mathcal{F}\varphi\right) \leq M_2 + 2\pi M_1 \in \mathbb{R}^+_0.$$

■

Observação 7.1.20 *Já vimos que os espaços $\mathfrak{X}_r$ não eram fechados para a translação complexa (cf. observação 7.1.13), pelo que o teorema 7.1.17 não é válido para φ função de $\mathfrak{X}_r$ e, por isso, a proposição anterior não é verdadeira em cada $\mathfrak{X}_r$, com $r \in I\!N_1$, isto é, estes espaços não são fechados para a transformação de Fourier.*

Concluímos este parágrafo com o estudo dos multiplicadores de $\mathfrak{X}$.

Proposição 7.1.21 *Para toda a função φ de $\mathfrak{X}$ e para todo o número real d, tem-se que*

$$e^{d\hat{x}} \cdot \varphi \in \mathfrak{X}.$$

Demonstração: Fixemos φ em $\mathfrak{X}$, d em $\mathbb{R}$ e r em $\mathbb{N}$ quaisquer. Vejamos que

$$\mathrm{e}^{d\hat{x}} \cdot \varphi \in \mathfrak{X}_r.$$

Sejam então, $b, y \in \mathbb{R}$ arbitrários, tais que $-r \leq y \leq r$ e $-r \leq b \leq r$.

Ora,

$$\mathrm{e}^{b\hat{x}} \cdot \tau_{iy}\left(\mathrm{e}^{d\hat{x}}\varphi\right) = \mathrm{e}^{(b+d)\hat{x}}\mathrm{e}^{-idy}\tau_{iy}\varphi \tag{7.42}$$

Atendendo a que $\varphi \in \mathfrak{X}$, sabemos que, para todo o r_1 natural, $\varphi \in \mathfrak{X}_{r_1}$, ou seja,

$$\forall b_1, y_1 \in \mathbb{R} \quad |b_1| \leq r_1 \wedge |y_1| \leq r_1 \Rightarrow \mathrm{e}^{b_1\hat{x}} \cdot \tau_{iy_1}\varphi \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R}) \tag{7.43}$$

e

$$\forall k_2, m_2 \in \mathbb{N} \quad \eta^{r_1}_{k_2,m_2}(\varphi) < \infty \tag{7.44}$$

Em particular, para $r_1 = r + |C(d)| + 1$, $b_1 = b + d$ e $y_1 = y$ temos, da condição (7.43), que

$$\mathrm{e}^{(b+d)\hat{x}} \cdot \tau_{iy}\varphi \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$$

e, como $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$ é um e.v. (cf. proposição 5.1.1), resulta de (7.42) que

$$\mathrm{e}^{b\hat{x}} \cdot \tau_{iy}\left(\mathrm{e}^{d\hat{x}}\varphi\right) \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R}).$$

Resta agora provar que, dados k_1 e m_1 naturais quaisquer,

$$\eta^{r}_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{d\hat{x}}\varphi\right) < \infty.$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} & \sup_{b,y\in[-r,r]} \eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\left(\mathrm{e}^{d\hat{x}}\varphi\right)\right) \\ = & \sup_{b,y\in[-r,r]} \eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{(b+d)\hat{x}}\mathrm{e}^{-idy}\tau_{iy}\varphi\right) \\ = & \sup_{b,y\in[-r,r]} \eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{(b+d)\hat{x}}\tau_{iy}\varphi\right) \end{aligned} \tag{7.45}$$

Se tomarmos na condição (7.44) $k_2 = k_1$ e $m_2 = m_1$, vem que

$$\exists M_1 \geq 0 \qquad \sup_{b_1, y_1 \in [-r_1, r_1]} \eta_{k_1, m_1}\left(\mathrm{e}^{b_1 \hat{x}} \tau_{iy_1} \varphi\right) = M_1,$$

o que implica, fazendo $r_1 = r + |C(d)| + 1$, $b_1 = b + d$ e $y_1 = y$, que

$$\exists M_1 \geq 0 \qquad \sup_{\substack{|b+d| \leq r_1 \\ |y| \leq r_1}} \eta_{k_1, m_1}\left(\mathrm{e}^{(b+d)\hat{x}} \tau_{iy} \varphi\right) = M_1.$$

Note-se que

$$(b+d) \in [-r_1, r_1],$$

logo

$$b \in [-r_1 - d, r_1 - d]$$

e, por isso, podemos asseverar que

$$\exists M_1 \geq 0 \quad \sup_{|y| \leq r_1} \sup_{b \in [-r_1 - d, r_1 - d]} \eta_{k_1, m_1}\left(\mathrm{e}^{(b+d)\hat{x}} \tau_{iy} \varphi\right) \leq M_1.$$

Mas

$$[-r, r] \subset [-r_1, r_1]$$

e

$$[-r, r] \subset [-r_1 - d, r_1 - d],$$

donde

$$\sup_{b, y \in [-r, r]} \eta_{k_1, m_1}\left(\mathrm{e}^{(b+d)\hat{x}} \tau_{iy} \varphi\right) \leq \sup_{|y| \leq r_1} \sup_{b \in [-r_1 - d, r_1 - d]} \eta_{k_1, m_1}\left(\mathrm{e}^{(b+d)\hat{x}} \tau_{iy} \varphi\right) \leq M_1.$$

Assim, da igualdade (7.45), conclui-se que

$$\sup_{b, y \in [-r, r]} \eta_{k_1, m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}} \tau_{iy}\left(\mathrm{e}^{d\hat{x}} \varphi\right)\right)$$

é finito. ■

Observação 7.1.22 *Atendendo à prova da proposição 7.1.21, podemos concluir que os espaços $\mathfrak{X}_r$ não são fechados para o produto por exponenciais.*

Proposição 7.1.23 *Para todo o polinómio p de $\mathcal{P}$ e para toda a função φ de $\mathfrak{X}$, tem-se que $p \cdot \varphi$ também é uma função de $\mathfrak{X}$.*

Demonstração: Sejam $\varphi \in \mathfrak{X}$, $p \in \mathcal{P}$ e $r \in \mathbb{N}$ arbitrários. Uma vez que $\varphi \in \mathfrak{X}$, então, em particular, $\varphi \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$, donde $p \cdot \varphi \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$ (cf. proposição 5.1.11) e, logo podemos dizer que $p \cdot \varphi$ é inteira (veja-se teorema 5.1.3).

Consideremos agora $b, y \in [-r, r]$ quaisquer. Mostremos que $\mathrm{e}^{b\hat{x}} \cdot \tau_{iy}(p \cdot \varphi)$ é uma função de $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$.

Ora,

$$\begin{aligned} & \mathrm{e}^{b\hat{x}} \cdot \tau_{iy}(p \cdot \varphi) \\ = \; & \mathrm{e}^{b\hat{x}} \cdot \tau_{iy} p \cdot \tau_{iy}\varphi, \end{aligned}$$

mas $\mathrm{e}^{b\hat{x}} \cdot \tau_{iy}\varphi \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$, pois $\varphi \in \mathfrak{X}_r$ e, como para y fixo em $[-r, r]$, $\tau_{iy}p \in \mathcal{P}$ podemos afirmar novamente, pela proposição 5.1.11, que $\mathrm{e}^{b\hat{x}} \cdot \tau_{iy}p \cdot \tau_{iy}\varphi$ ainda é uma função de $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$.

Tomemos k_1 e m_1 naturais arbitrários.

Resta pois, provar que

$$\eta^r_{k_1,m_1}(p \cdot \varphi) \in \mathbb{R}^+_0.$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} & \sup_{b,y\in[-r,r]} \eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}(p\varphi)\right) \\ = \; & \sup_{b,y\in[-r,r]} \eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}p\tau_{iy}\varphi\right) \\ = \; & \sup_{b,y\in[-r,r]} \left[\left\|\mathrm{e}^{k_1|\hat{x}|}D_x^{m_1}\left(\tau_{iy}p\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi\right)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + \left\|\mathrm{e}^{k_1|\hat{\xi}|}D_\xi^{m_1}\left(\mathcal{F}\left(\tau_{iy}p\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi\right)\right)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\right] \end{aligned} \tag{7.46}$$

Aplicando uma das fórmulas de Leibniz para a derivação do produto, obtém-se que

$$\begin{aligned} D_x^{m_1}\left(\tau_{iy}p\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi\right) &= \sum_{l\le m_1}\binom{m_1}{l}D_x^l(\tau_{iy}p)\,D_x^{m_1-l}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi\right) \\ &= \sum_{l\le m_1}\binom{m_1}{l}\tau_{iy}D_x^l p D_x^{m_1-l}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi\right) \end{aligned}$$

Denotemos por q_l o polinómio que se obtém da derivada de ordem l de p e seja n_l o grau de q_l, então

$$\tau_{iy}q_l(x) = \sum_{j\le n_l} c_j (x - iy)^j, \quad \text{com } c_j \in \mathbb{C}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} & D_x^{m_1}\left(\tau_{iy}p\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi\right) \\ = \; & \sum_{l\le m_1}\binom{m_1}{l}\sum_{j\le n_l} c_j(\hat{x} - iy)^j D_x^{m_1-l}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi\right). \end{aligned}$$

Substituindo na condição (7.46), vem

$$\begin{aligned}
&\sup_{b,y\in[-r,r]} \eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\left(p\varphi\right)\right)\\
\leq\ &\sup_{b,y\in[-r,r]}\left\|\mathrm{e}^{k_1|\hat{x}|}\sum_{l\leq m_1}\binom{m_1}{l}\sum_{j\leq n_l}c_j\left(x-iy\right)^j D_x^{m_1-l}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi\right)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\\
&+\sup_{b,y\in[-r,r]}\left\|\mathrm{e}^{k_1|\hat{\xi}|}D_\xi^{m_1}\left(\mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}p\tau_{iy}\varphi\right)\right)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}.
\end{aligned}$$

Seja agora N o grau do polinómio p. Temos

$$\begin{aligned}
&\sup_{b,y\in[-r,r]} \eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\left(p\varphi\right)\right)\\
\leq\ &\sum_{l\leq m_1}\binom{m_1}{l}\sum_{j\leq n_l}|c_j|\sup_{b,y\in[-r,r]}\mathrm{e}^{j|y|}\left\|\mathrm{e}^{(k_1+j)|\hat{x}|}D_x^{m_1-l}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi\right)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\\
&+\sup_{b,y\in[-r,r]}\left\|\mathrm{e}^{k_1|\hat{\xi}|}D_\xi^{m_1}\left(\mathcal{F}\left(\sum_{s\leq N}C_s\left(x-iy\right)^s\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi\right)\right)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\\
\leq\ &\sum_{l\leq m_1}\binom{m_1}{l}\sum_{j\leq n_l}|c_j|\,\mathrm{e}^{jr}\sup_{b,y\in[-r,r]}\left\|\mathrm{e}^{(k_1+j)|\hat{x}|}D_x^{m_1-l}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi\right)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\\
&+\sup_{b,y\in[-r,r]}\left\|\mathrm{e}^{k_1|\hat{\xi}|}\sum_{s\leq N}C_s i^s D_\xi^{m_1}\left(\mathcal{F}\left(\left(-ix-y\right)^s\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi\right)\right)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}.
\end{aligned}$$

Como

$$\left(-ix-y\right)^s=\sum_{t=0}^{s}\binom{s}{t}\left(-ix\right)^t\left(-y\right)^{s-t},$$

vem

$$\begin{aligned}
&\sup_{b,y\in[-r,r]} \eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\left(p\varphi\right)\right)\\
\leq\ &\sum_{l\leq m_1}\binom{m_1}{l}\sum_{j\leq n_l}|c_j|\,\mathrm{e}^{jr}\sup_{b,y\in[-r,r]}\left\|\mathrm{e}^{(k_1+j)|\hat{x}|}D_x^{m_1-l}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi\right)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\\
&+\sum_{s\leq N}C_s\sum_{t=0}^{s}\binom{s}{t}\sup_{b,y\in[-r,r]}\mathrm{e}^{(s-t)|y|}\left\|\mathrm{e}^{k_1|\hat{\xi}|}D_\xi^{m_1+t}\left[\mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi\right)\right]\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}
\end{aligned}\tag{7.47}$$

Atendendo a que $\varphi\in\mathfrak{X}$, então $\varphi\in\mathfrak{X}_r$ e, portanto,

$$\forall k_2,m_2\in\mathbb{N}\quad \eta^r_{k_2,m_2}\left(\varphi\right)<\infty,$$

o que, por um lado, implica que

$$\exists M_1\geq 0\quad \sup_{b,y\in[-r,r]}\left\|\mathrm{e}^{(k_1+j)|\hat{x}|}D_x^{m_1-l}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi\right)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\leq M_1$$

e por outro, garante que

$$\exists M_2 \geq 0 \qquad \sup_{b,y\in[-r,r]} \left\| \mathrm{e}^{k_1|\hat{\xi}|} D_\xi^{m_1+t} \left[\mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}} \tau_{iy}\varphi \right) \right] \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq M_2.$$

Substituindo na inequação (7.47), obtém-se

$$\sup_{b,y\in[-r,r]} \eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}} \tau_{iy}\left(p\varphi\right) \right) \leq \sum_{l\leq m_1} \binom{m_1}{l} \sum_{j\leq n_l} |c_j|\, \mathrm{e}^{jr} M_1 + \sum_{s\leq N} C_s \sum_{t=0}^{s} \binom{s}{t} \mathrm{e}^{(s-t)r} M_2,$$

que é o mesmo que afirmar que

$$\eta_{k_1,m_1}^r\left(p\cdot\varphi\right)$$

é um número real não negativo. ∎

Observação 7.1.24 *Para todo o r natural, $\mathfrak{X}_r$ é invariante para o produto por polinómios. Este resultado advém de uma análise pormenorizada da demonstração precedente.*

7.2 Topologia dos espaços $\mathfrak{X}_r$

O nosso propósito é, neste subcapítulo, munir os espaços $\mathfrak{X}_r$ com uma estrutura de espaço vectorial topológico e estudar algumas propriedades topológicas que estes verificam.

Para cada $r \in \mathbb{N}_1$, muniremos $\mathfrak{X}_r$, como já era de prever, com a seguinte família de semi-normas, indexada em k_1 e m_1 elementos de $\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \eta_{k_1,m_1}^r\left(\varphi\right) &= \sup_{b,y\in[-r,r]} \eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}} \tau_{iy}\varphi \right) \\ &= \sup_{b,y\in[-r,r]} \left(\left\| \mathrm{e}^{k_1|\hat{x}|} D_x^{m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}} \tau_{iy}\varphi \right) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + \left\| \mathrm{e}^{k_1|\hat{\xi}|} D_\xi^{m_1}\left(\mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}} \tau_{iy}\varphi \right) \right) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \right) \end{aligned} \tag{7.48}$$

Observação 7.2.1 *Repare-se que a família de semi-normas $\left(\eta_{k_1,m_1}^r\right)_{k_1,m_1\in\mathbb{N}}$ não é filtrante. Uma família filtrante pode ser, por exemplo, a que se segue:*

$$\widetilde{\eta}_{k_1,\widetilde{m_1}}^r\left(\varphi\right) = \sup_{m_1\leq\widetilde{m_1}} \sup_{b,y\in[-r,r]} \eta_{k_1,m_1}\left(e^{b\hat{x}} \tau_{iy}\varphi \right) \tag{7.49}$$

onde $k_1, \widetilde{m_1} \in \mathbb{N}$.

Veremos de seguida quais as características topológicas dos espaços $\mathfrak{X}_r$.

Proposição 7.2.2 *Se* $r \in I\!N_1$, *então* $\mathfrak{X}_r$ *é um e.l.c..*

Demonstração: Para cada $r \in \mathbb{N}_1$, $\mathfrak{X}_r$ é um espaço semi-normado, pois está munido com uma família filtrante de semi-normas $\left(\widetilde{\eta}^r_{k_1,\widetilde{m_1}}\right)_{k_1,\widetilde{m_1}\in\mathbb{N}}$ (cf.(7.49)) e, por conseguinte, $\mathfrak{X}_r$ é localmente convexo (ver proposição 2.1.11). ∎

Teorema 7.2.3 *Para todo o r inteiro positivo,* $\mathfrak{X}_r$ *é um espaço de Hausdorff.*

Demonstração: Fixemos r em $\mathbb{N}_1$ e φ função de $\mathfrak{X}_r$, tal que $\varphi \neq 0$.

A proposição 7.1.2 permite-nos dizer que φ é um elemento de $\mathfrak{X}_0\left(\mathbb{R}\right)$ e, como este último espaço é de Hausdorff (cf. teorema 5.2.4), resulta imediatamente que existem k_1e m_1 números naturais, tais que

$$\eta_{k_1,m_1}\left(\varphi\right) > 0,$$

que é o mesmo que dizer que

$$\sup_{b=y=0} \eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi\right) > 0.$$

Assim, e atendendo ao facto de que

$$\sup_{b=y=0} \eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi\right) \leq \sup_{b,y\in[-r,r]} \eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi\right),$$

vem

$$0 < \sup_{b,y\in[-r,r]} \eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi\right),$$

ou seja,

$$\eta^r_{k_1,m_1}\left(\varphi\right) \neq 0.$$

∎

Corolário 7.2.4 *Os espaços* $\mathfrak{X}_r$ *são metrizáveis.*

Demonstração: Advém imediatamente do teorema 2.1.13 e do facto de que para cada r em $\mathbb{N}_1$, $\mathfrak{X}_r$ é um espaço semi-normado separado (ver teorema 7.2.3), cuja família de semi-normas é numerável (cf. (7.48)). ∎

Proposição 7.2.5 *Para cada r inteiro não negativo,* $\mathfrak{X}_{r+1}$ *está contido com injecção canónica contínua em* $\mathfrak{X}_r$.

Demonstração: Tomemos $r \in \mathbb{N}$ qualquer. A inclusão de $\mathfrak{X}_{r+1}$ em $\mathfrak{X}_r$ já foi demonstrada na proposição 7.1.3.

A linearidade e injectividade da aplicação $I_{\mathfrak{X}_{r+1},\mathfrak{X}_r}$ é óbvia. Com respeito a continuidade de $I_{\mathfrak{X}_{r+1},\mathfrak{X}_r}$, é suficiente mostrar a continuidade segundo Heine na origem, pois estamos perante espaços localmente convexos e metrizáveis (cf. proposição 7.2.2 e corolário 7.2.4).

Fixemos $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sucessão arbitrária de funções de $\mathfrak{X}_{r+1}$, convergindo para a função identicamente nula e tomemos k_1 e m_1 naturais quaisquer.

Temos assim que

$$\eta_{k_1,m_1}^{r+1}(\varphi_n) = \sup_{b,y\in[-r-1,r+1]} \eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}(\varphi_n)\right) \to 0;$$

mas é evidente que

$$\sup_{b,y\in[-r,r]} \eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}(\varphi_n)\right) \leq \sup_{b,y\in[-r-1,r+1]} \eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}(\varphi_n)\right)$$

e, consequentemente,

$$\sup_{b,y\in[-r,r]} \eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}(\varphi_n)\right) \to 0,$$

isto é,

$$\varphi_n \to 0 \quad \text{em } \mathfrak{X}_r.$$

■

Corolário 7.2.6 *Para todo o r em $\mathbb{N}_1$,*

$$\mathfrak{X}_r \hookrightarrow \mathfrak{X}_0(\mathbb{R}).$$

Demonstração: É uma consequência imediata da proposição anterior. ■

Corolário 7.2.7

$$\mathfrak{X}_r \overset{d}{\hookrightarrow} \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Demonstração: Comecemos por observar que para todo o r em $\mathbb{N}_1$, $\mathfrak{X}_r$ é denso no espaço $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ de Schwartz (cf. proposição 7.1.11). Em conformidade com os corolários 7.2.6 e 5.2.7, podemos asseverar respectivamente que

$$\mathfrak{X}_r \hookrightarrow \mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$$

e

$$\mathfrak{X}_0(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}),$$

o que implica imediatamente a injecção canónica contínua de $\mathfrak{X}_r$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. ■

Seguidamente, mostraremos a continuidade dos operadores definidos em $\mathfrak{X}_r$ que, de acordo com as observações 7.1.14, 7.1.16 e 7.1.24, são unicamente os operadores translação real, derivação e produto por polinómios.

Proposição 7.2.8 *Para todo o a em $\mathbb{R}$, o operador translação real*

$$\begin{aligned} \tau_a : \mathfrak{X}_r &\longrightarrow \mathfrak{X}_r \\ \varphi &\longmapsto \tau_a\varphi \end{aligned}$$

é um isomorfismo vectorial e topológico.

Demonstração: Os cálculos a efectuar para obter a linearidade e a bijectividade do operador τ_a, são semelhantes aos efectuados anteriormente em proposições análogas a esta e, como é óbvio, não nos devemos esquecer que $\mathfrak{X}_r$ é invariante para a translação real (ver observação 7.1.14).

No que diz respeito à continuidade do operador τ_a, tomemos $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão arbitrária de funções de $\mathfrak{X}_r$, de tal forma que convirja para zero em $\mathfrak{X}_r$ e sejam k_1 e m_1 naturais quaisquer.

À semelhança do que fizemos anteriormente, como por exemplo na demonstração da proposição 7.1.12, é-nos permitido afirmar que

$$\begin{aligned} &\sup_{b,y\in[-r,r]} \eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\left(\tau_a\varphi_n\right)\right) \\ \leq\ & \mathrm{e}^{r|a|}\left[\mathrm{e}^{k_1|a|}\sup_{b,y\in[-r,r]}\left\|\tau_a\left[\mathrm{e}^{k_1|\hat{x}|}D_x^{m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi_n\right)\right]\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\right. \\ &\left. +\mathrm{e}^{m_1|a|}\sum_{l\leq m_1}\binom{m_1}{l}\sup_{b,y\in[-r,r]}\left\|\mathrm{e}^{k_1|\hat{\xi}|}D_\xi^{m_1-l}\left[\mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi_n\right)\right]\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\right] \end{aligned} \tag{7.50}$$

Por hipótese, sabemos que φ_n converge para zero em $\mathfrak{X}_r$, pelo que

$$\forall k_2, m_2 \in \mathbb{N} \quad \lim_{n\to+\infty}\sup_{b,y\in[-r,r]}\eta_{k_2,m_2}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi_n\right) = 0. \tag{7.51}$$

Em particular, vem que

$$\sup_{b,y\in[-r,r]}\left\|\mathrm{e}^{k_1|\hat{x}|}D_x^{m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi_n\right)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \to 0$$

e, como a norma em $L^\infty(\mathbb{R})$ é invariante para as translações reais, o limite quando n tende para $+\infty$ de

$$\sup_{b,y\in[-r,r]}\left\|\tau_a\left[\mathrm{e}^{k_1|\hat{x}|}D_x^{m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi_n\right)\right]\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \tag{7.52}$$

é também igual a zero.

Da condição (7.51), temos também que

$$\sup_{b,y\in[-r,r]}\left\|\mathrm{e}^{k_1|\hat{\xi}|}D_\xi^{m_1-l}\left[\mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi_n\right)\right]\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \to 0 \tag{7.53}$$

Assim, e tendo em consideração (7.52) e (7.53), da desigualdade (7.50) resulta que

$$\lim_{n\to+\infty} \eta^r_{k_1,m_1}(\tau_a\varphi_n) = 0.$$

Da arbitrariedade de k_1 e m_1 em $\mathbb{N}$, conclui-se que

$$\tau_a\varphi_n \to 0 \quad \text{em } \mathfrak{X}_r.$$

Uma vez que a é um real arbitrário, a continuidade do operador translação inversa τ_{-a} é imediata. ∎

Proposição 7.2.9 *Sejam $r \in \mathbb{N}_1$ e $l \in \mathbb{N}$. Então o operador de derivação definido por*

$$\begin{aligned} D^l_x : \mathfrak{X}_r &\longrightarrow \mathfrak{X}_r \\ \varphi &\longmapsto D^l_x\varphi \end{aligned}$$

é linear e contínuo.

Demonstração: Tomemos r em $\mathbb{N}_1$ qualquer e l um natural também arbitrário. Como já referimos, $\mathfrak{X}_r$ é fechado para a derivação (ver observação 7.1.16), então D^l_x é um operador de $\mathfrak{X}_r$ em $\mathfrak{X}_r$.

A linearidade de D^l_x é trivial. A continuidade segundo Cauchy de D^l_x em $\mathfrak{X}_r$ é equivalente à continuidade segundo Heine na origem, pois $\mathfrak{X}_r$ é metrizável e localmente convexo (cf. corolário 7.2.4 e proposição 7.2.2).

Fixemos $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucessão de funções em $\mathfrak{X}_r$, tal que $\varphi_n \to 0$ em $\mathfrak{X}_r$. Pretende-se demonstrar que

$$D^l_x(\varphi_n) \to 0 \quad \text{em } \mathfrak{X}_r.$$

Tomemos para tal, k_1 e m_1 em $\mathbb{N}$ quaisquer. Os cálculos a efectuar para majorar o

$$\sup_{b,y\in[-r,r]} \eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\left(D^l_x(\varphi_n)\right)\right)$$

são semelhantes aos realizados na demonstração da proposição 7.1.15; por isso, podemos afirmar que

$$\begin{aligned} &\sup_{b,y\in[-r,r]} \eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\left(D^l_x(\varphi_n)\right)\right) \\ \leq\ &\sum_{j\leq l}\binom{l}{j}\mathrm{e}^{lr}\sup_{b,y\in[-r,r]}\left\{\left\|\mathrm{e}^{k_1|\hat{x}|}D^{m_1+l-j}_x\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi_n\right)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\right. \\ &\left.+\left\|\mathrm{e}^{k_1|\hat{\xi}|}\sum_{\alpha\leq m_1}\binom{m_1}{\alpha}i^{l-j}D^\alpha_\xi\left[\left(\hat{\xi}\right)^{l-j}\right]D^{m_1-\alpha}_\xi\mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi_n\right)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\right\} \qquad (7.54) \end{aligned}$$

No caso de α ser estritamente maior que $l-j$, então

$$D^\alpha_\xi\left(\xi^{l-j}\right) = 0$$

e, por isso, da desigualdade (7.54), resulta que

$$\begin{aligned}
&\sup_{b,y\in[-r,r]} \eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\left(D_x^l\varphi_n\right)\right)\\
\leq\ & \sum_{j\leq l}\binom{l}{j}\mathrm{e}^{lr}\sup_{b,y\in[-r,r]}\left\|\mathrm{e}^{k_1|\hat{x}|}D_x^{m_1+l-j}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi_n\right)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\\
\leq\ & \sum_{j\leq l}\binom{l}{j}\mathrm{e}^{lr}\sup_{b,y\in[-r,r]}\eta_{k_1,m_1+l-j}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\left(\varphi_n\right)\right)
\end{aligned}$$

Como $\varphi_n \to 0$ em $\mathfrak{X}_r$ então, em particular,

$$\sup_{b,y\in[-r,r]}\eta_{k_1,m_1+l-j}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\left(\varphi_n\right)\right)\to 0 \tag{7.55}$$

Por conseguinte,

$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{b,y\in[-r,r]}\eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\left(D_x^l\varphi_n\right)\right)=0 \tag{7.56}$$

Quando α é igual a $l-j$, resulta

$$D_\xi^\alpha\left(\xi^{l-j}\right)=(l-j)!\ ;$$

da condição (7.54) temos

$$\begin{aligned}
&\sup_{b,y\in[-r,r]}\eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\left(D_x^l\varphi_n\right)\right)\\
\leq\ & \sum_{j\leq l}\binom{l}{j}\mathrm{e}^{lr}\left\{\sup_{b,y\in[-r,r]}\left\|\mathrm{e}^{k_1|\hat{x}|}D_x^{m_1+l-j}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi_n\right)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\right.\\
&\left.+\sum_{\alpha\leq m_1}\binom{m_1}{\alpha}(l-j)!\sup_{b,y\in[-r,r]}\left\|\mathrm{e}^{k_1|\hat{\xi}|}D_\xi^{m_1-\alpha}\mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi_n\right)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\right\}\\
\leq\ & \sum_{j\leq l}\binom{l}{j}\mathrm{e}^{lr}\left\{\sup_{b,y\in[-r,r]}\eta_{k_1,m_1+l-j}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\left(\varphi_n\right)\right)\right.\\
&\left.+\sum_{\alpha\leq m_1}\binom{m_1}{\alpha}(l-j)!\sup_{b,y\in[-r,r]}\eta_{k_1,m_1-\alpha}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\left(\varphi_n\right)\right)\right\}
\end{aligned}\tag{7.57}$$

Uma vez que a sucessão $\left(\varphi_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para a função identicamente nula em $\mathfrak{X}_r$, temos, por um lado, a condição (7.55), e por outro,

$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{b,y\in[-r,r]}\eta_{k_1,m_1-\alpha}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\left(\varphi_n\right)\right)=0.$$

Portanto, da desigualdade (7.57), vem que

$$\sup_{b,y\in[-r,r]}\eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\left(D_x^l\varphi_n\right)\right)\to 0 \tag{7.58}$$

Finalmente, se α for estritamente menor que $l-j$, temos

$$D_\xi^\alpha\left(\xi^{l-j}\right)=\frac{(l-j)!}{(l-j-\alpha)!}\xi^{l-j-\alpha}.$$

Assim, por (7.54), obtém-se

$$\begin{aligned}
&\sup_{b,y\in[-r,r]}\eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\left(D_x^l\left(\varphi_n\right)\right)\right)\\
\leq\ &\sum_{j\leq l}\binom{l}{j}\mathrm{e}^{lr}\left\{\sup_{b,y\in[-r,r]}\left\|\mathrm{e}^{k_1|\hat{x}|}D_x^{m_1+l-j}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi_n\right)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\right.\\
&\left.+\sum_{\alpha\leq m_1}\binom{m_1}{\alpha}\frac{(l-j)!}{(l-j-\alpha)!}\sup_{b,y\in[-r,r]}\left\|\mathrm{e}^{(k_1+l-j-\alpha)|\hat{\xi}|}D_\xi^{m_1-\alpha}\mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi_n\right)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\right\}\\
\leq\ &\sum_{j\leq l}\binom{l}{j}\mathrm{e}^{lr}\left\{\sup_{b,y\in[-r,r]}\eta_{k_1,m_1+l-j}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\left(\varphi_n\right)\right)\right.\\
&\left.+\sum_{\alpha\leq m_1}\binom{m_1}{\alpha}\frac{(l-j)!}{(l-j-\alpha)!}\sup_{b,y\in[-r,r]}\eta_{k_1+l-j-\alpha,m_1-\alpha}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\left(\varphi_n\right)\right)\right\}.
\end{aligned}$$

A hipótese $\varphi_n\to 0$ em $\mathfrak{X}_r$ permite-nos, como anteriormente, afirmar que

$$\sup_{b,y\in[-r,r]}\eta_{k_1,m_1+l-j}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\left(\varphi_n\right)\right)\to 0$$

e

$$\sup_{b,y\in[-r,r]}\eta_{k_1+l-j-\alpha,m_1-\alpha}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\left(\varphi_n\right)\right)\to 0,$$

o que implica que

$$\sup_{b,y\in[-r,r]}\eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\left(D_x^l\left(\varphi_n\right)\right)\right)\to 0 \tag{7.59}$$

Analisando as condições (7.56), (7.58) e (7.59) podemos inferir que em todos os casos

$$\forall k_1,m_1\in\mathbb{N}\quad \lim_{n\to+\infty}\eta_{k_1,m_1}^r\left(D_x^l\left(\varphi_n\right)\right)=0,$$

ou seja,

$$D_x^l\left(\varphi_n\right)\to 0\quad \text{em } \mathfrak{X}_r.$$

■

Proposição 7.2.10 *Para cada r em $\mathbb{N}_1$ e q em $\mathcal{P}$, o operador produto por polinómios*

$$\begin{aligned}P_q:\mathfrak{X}_r&\longrightarrow\mathfrak{X}_r\\ \varphi&\longmapsto P_q(\varphi)=q\cdot\varphi\end{aligned}$$

é linear e contínuo.

Demonstração: Sejam r em $\mathbb{N}_1$ qualquer e q um polinómio complexo definido em $\mathbb{R}$ também qualquer. A observação 7.1.24 garante-nos que o operador P_q vai de $\mathfrak{X}_r$ para $\mathfrak{X}_r$. Obviamente que o operador P_q é linear.

Seja $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de funções de $\mathfrak{X}_r$, tal que φ_n converge para zero em $\mathfrak{X}_r$.

Sejam $k_1, m_1 \in \mathbb{N}$ quaisquer. Necessitamos majorar o

$$\sup_{b,y\in[-r,r]} \eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\left(P_q\left(\varphi_n\right)\right)\right).$$

Para tal, basear-nos-emos nos cálculos efectuados na demonstração da proposição 7.1.23. Assim,

$$\begin{aligned}
&\sup_{b,y\in[-r,r]} \eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\left(q\varphi_n\right)\right)\\
\leq\ & \sum_{l\leq m_1}\binom{m_1}{l}\sum_{j\leq n_l}|c_j|\sup_{b,y\in[-r,r]}\mathrm{e}^{j|y|}\left\|\mathrm{e}^{(k_1+j)|\hat{x}|}D_x^{m_1-l}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi_n\right)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\\
&+\sup_{b,y\in[-r,r]}\left\|\mathrm{e}^{k_1|\hat{\xi}|}D_\xi^{m_1}\left(\mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}q\tau_{iy}\varphi_n\right)\right)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})},
\end{aligned}$$

onde n_l é o grau do polinómio que se obtém da derivada de ordem l de q e $c_j \in \mathbb{C}$, para todo o j no conjunto $\{0,\ldots,n_l\}$.

Se designarmos por N o grau do polinómio q, temos

$$\begin{aligned}
&\sup_{b,y\in[-r,r]} \eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\left(q\varphi_n\right)\right)\\
\leq\ & \sum_{l\leq m_1}\binom{m_1}{l}\sum_{j\leq n_l}|c_j|\,\mathrm{e}^{jr}\sup_{b,y\in[-r,r]}\left\|\mathrm{e}^{(k_1+j)|\hat{x}|}D_x^{m_1-l}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi_n\right)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\\
&+\sup_{b,y\in[-r,r]}\left\|\mathrm{e}^{k_1|\hat{\xi}|}\sum_{s\leq N}C_s i^s D_\xi^{m_1}\left(\mathcal{F}\left((-ix-y)^s\,\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi_n\right)\right)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})},
\end{aligned}$$

com $C_s \in \mathbb{C}$, para todo o $s \in \{0,\ldots,N\}$.

Pela fórmula binomial dos números complexos, vem que

$$\begin{aligned}
&\sup_{b,y\in[-r,r]} \eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\left(q\varphi_n\right)\right)\\
\leq\ & \sum_{l\leq m_1}\binom{m_1}{l}\sum_{j\leq n_l}|c_j|\,\mathrm{e}^{jr}\sup_{b,y\in[-r,r]}\left\|\mathrm{e}^{(k_1+j)|\hat{x}|}D_x^{m_1-l}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi_n\right)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\\
&+\sum_{s\leq N}C_s\sum_{t=0}^{s}\binom{s}{t}\mathrm{e}^{(s-t)r}\sup_{b,y\in[-r,r]}\left\|\mathrm{e}^{k_1|\hat{\xi}|}D_\xi^{m_1+t}\left[\mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi_n\right)\right]\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}.
\end{aligned}$$

Atendendo a que $\varphi_n \to 0$ em $\mathfrak{X}_r$, obtém-se

$$\sup_{b,y\in[-r,r]} \eta_{k_1+j,m_1-l}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\left(\varphi_n\right)\right)\to 0$$

e

$$\sup_{b,y\in[-r,r]} \eta_{k_1,m_1+t}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\left(\varphi_n\right)\right) \to 0,$$

donde

$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{b,y\in[-r,r]} \eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\left(q\varphi_n\right)\right) = 0.$$

Resulta assim, tal como pretendíamos,

$$\forall k_1, m_1 \in \mathbb{N} \quad \lim_{n\to+\infty} \eta^r_{k_1,m_1}\left(P_q\left(\varphi_n\right)\right) = 0.$$

■

Para provar que os espaços $\mathfrak{X}_r$ são de Fréchet e de Montel, os dois resultados que se seguem são de grande importância.

Lema 7.2.11 *Sejam r um inteiro positivo, b e y reais quaisquer pertencentes ao intervalo $[-r,r]$ e $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão limitada em $\mathfrak{X}_r$. Consideremos as seguintes sucessões de funções reais definidas por:*

$$\Psi^b_n\left(y\right) = \eta_{k_1,m_1}\left(e^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi_n\right)$$

e

$$\Phi_n\left(b\right) = \sup_{y\in[-r,r]} \Psi^b_n\left(y\right).$$

Então, $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão equicontínua em $[-r,r]$ e, para todo o $b \in [-r,r]$, $\left(\Psi^b_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão equicontínua em $[-r,r]$ como função de y.

Demonstração: Tomemos r em $\mathbb{N}_1$, b e y em $[-r,r]$ arbitrários. Seja $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathfrak{X}_r)^{\mathbb{N}}$, tal que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $\mathfrak{X}_r$.

Consideremos a sucessão de funções $\left(\Psi^b_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, definida por

$$\Psi^b_n\left(y\right) = \eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi_n\right)$$

e vejamos que $\left(\Psi^b_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão equicontínua como função de y em $[-r,r]$, isto é,

$$\forall y_0 \in [-r,r]\ \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall n \in \mathbb{N}\ \forall y \in [-r,r] \quad |y - y_0| \le \delta \Rightarrow \left|\Psi^b_n\left(y\right) - \Psi^b_n\left(y_0\right)\right| \le \varepsilon.$$

Sejam $y_0 \in [-r,r]$ e $\varepsilon > 0$ arbitrários. Ora,

$$\begin{aligned}
&\left|\Psi^b_n\left(y\right) - \Psi^b_n\left(y_0\right)\right| \\
=\ &\left|\eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi_n\right) - \eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy_0}\varphi_n\right)\right| \\
\le\ &\eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\left(\tau_{iy}\varphi_n - \tau_{iy_0}\varphi_n\right)\right) \qquad (7.60)
\end{aligned}$$

Suponhamos, sem perda de generalidade, que $y > y_0$. Uma vez que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de funções de $\mathfrak{X}_r$ então, para cada n em $\mathbb{N}$, φ_n é inteira logo, para todo o n em $\mathbb{N}$, $\tau_{iy}\varphi_n$ também é inteira, pelo que $\tau_{iy}\varphi_n$ é contínua em $[y_0, y]$ e diferenciável em $]y_0, y[$. Aplicando o teorema dos acréscimos finitos, temos que

$$\exists \tilde{y} \in \,]y_0, y[\quad D_y\left(\tau_{iy}\varphi_n(x)\right)_{|y=\tilde{y}} = \frac{\tau_{iy}\varphi_n(x) - \tau_{iy_0}\varphi_n(x)}{y - y_0}.$$

Assim[5], de (7.60), resulta que

$$\begin{aligned} & \left|\Psi_n^b(y) - \Psi_n^b(y_0)\right| \\ \leq \; & \eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}(y - y_0)\, D_y\left(\tau_{iy}\varphi_n\right)_{|y=\tilde{y}}\right). \end{aligned}$$

Dado que $\tau_{iy}\varphi_n = \varphi_n(\hat{x} - i\hat{y})$ é inteira, logo para além de existir a derivada total de φ_n em ordem a $z \in \mathbb{C}$, temos também que

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\tau_{iy}\varphi_n\right)_{|y=\tilde{y}} = i\frac{\partial}{\partial x}\left(\tau_{iy}\varphi_n\right)_{|y=\tilde{y}} = i\frac{\partial}{\partial x}\left(\tau_{i\tilde{y}}\varphi_n\right)$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} & \left|\Psi_n^b(y) - \Psi_n^b(y_0)\right| \\ \leq \; & |y - y_0|\, \eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}} i D_x\left(\tau_{i\tilde{y}}\varphi_n\right)\right) \\ = \; & |y - y_0|\, \eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}} \tau_{i\tilde{y}}\left(D_x\varphi_n\right)\right) \end{aligned} \tag{7.61}$$

Em conformidade com a proposição 7.2.9 e, pelo facto de $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ser uma sucessão limitada de funções de $\mathfrak{X}_r$, podemos assegurar que $(D_x\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ também é uma sucessão limitada em $\mathfrak{X}_r$ e, por isso,

$$\forall k_2, m_2 \in \mathbb{N} \quad \exists B_{k_2,m_2} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \sup_{b_1, y_1 \in [-r,r]} \eta_{k_2,m_2}\left(\mathrm{e}^{b_1\hat{x}}\tau_{iy_1}\left(D_x\varphi_n\right)\right) \leq B_{k_2,m_2}.$$

Sabemos que $|y| \leq r$, $|y_0| \leq r$ e que $\tilde{y} \in \,]y_0, y[$, logo $|\tilde{y}| \leq r$. Portanto, para $k_2 = k_1$, $m_2 = m_1$, $b_1 = b$ e $y_1 = \tilde{y}$, vem que

$$\exists B_{k_1,m_1} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \sup_{b, \tilde{y} \in [-r,r]} \eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{i\tilde{y}}\left(D_x\varphi_n\right)\right) \leq B_{k_1,m_1}.$$

Consequentemente, da expressão (7.61), resulta que

$$\begin{aligned} & \left|\Psi_n^b(y) - \Psi_n^b(y_0)\right| \\ \leq \; & |y - y_0| \sup_{b, \tilde{y} \in [-r,r]} \eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{i\tilde{y}}\left(D_x\varphi_n\right)\right) \\ \leq \; & B_{k_1,m_1}\,|y - y_0|\,. \end{aligned}$$

[5] Note-se que neste caso D_y é a derivada parcial em ordem à variável y, isto é, $D_y = \frac{\partial}{\partial y}$.

Basta escolher

$$\delta = \frac{\varepsilon}{B_{k_1,m_1}}$$

e teremos o pretendido, ou seja, a sucessão $\left(\Psi_n^b\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é equicontínua em $[-r,r]$ como função de y.

Seja agora,

$$\Phi_n(b) = \Psi_n^b(y) = \sup_{y\in[-r,r]} \eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi_n\right).$$

Mostremos que $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é também uma sucessão equicontínua em $[-r,r]$.

Tomemos b_0 em $[-r,r]$ e $\varepsilon > 0$ arbitrários,

$$\begin{aligned} & |\Phi_n(b) - \Phi_n(b_0)| \\ \leq & \sup_{y\in[-r,r]} \eta_{k_1,m_1}\left(\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}} - \mathrm{e}^{b_0\hat{x}}\right)\tau_{iy}\varphi_n\right). \end{aligned}$$

Suponhamos, sem perda de generalidade, que $b > b_0$. Como $\mathrm{e}^{\hat{b}\hat{x}}$ é inteira como função de b, então é contínua em $[b_0,b]$ e diferenciável em $]b_0,b[$. Pelo teorema dos acréscimos finitos vem que

$$\exists\tilde{b}\in\,]b_0,b[\quad D_b\left(\mathrm{e}^{bx}\right)_{|_{b=\tilde{b}}} = \frac{\mathrm{e}^{bx} - \mathrm{e}^{b_0x}}{b-b_0}.$$

Por conseguinte,

$$\begin{aligned} & |\Phi_n(b) - \Phi_n(b_0)| \\ \leq & \sup_{y\in[-r,r]} \eta_{k_1,m_1}\left((b-b_0)\,\hat{x}\mathrm{e}^{\tilde{b}\hat{x}}\tau_{iy}\varphi_n\right) \\ = & |b-b_0| \sup_{y\in[-r,r]} \eta_{k_1,m_1}\left[\mathrm{e}^{\tilde{b}\hat{x}}\left(\tau_{iy}\left(\hat{x}\varphi_n\right) + iy\tau_{iy}\varphi_n\right)\right] \\ \leq & |b-b_0|\left[\sup_{y\in[-r,r]} \eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{\tilde{b}\hat{x}}\tau_{iy}\left(\hat{x}\varphi_n\right)\right) + \sup_{y\in[-r,r]} |y|\,\eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{\tilde{b}\hat{x}}\tau_{iy}\varphi_n\right)\right] \end{aligned} \tag{7.62}$$

Com base na proposição 7.2.10 e atendendo a que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão limitada de funções de $\mathfrak{X}_r$, podemos dizer que $(\hat{x}\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ também é uma sucessão limitada em $\mathfrak{X}_r$, pelo que

$$\exists C_{k_1,m_1} > 0 \quad \forall n\in\mathbb{N} \quad \sup_{\tilde{b},y\in[-r,r]} \eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{\tilde{b}\hat{x}}\tau_{iy}\left(\hat{x}\varphi_n\right)\right) \leq C_{k_1,m_1} \tag{7.63}$$

Tendo em consideração novamente o facto de $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ser limitada em $\mathfrak{X}_r$, obtém-se

$$\exists A_{k_1,m_1} > 0 \quad \forall n\in\mathbb{N} \quad \sup_{\tilde{b},y\in[-r,r]} \eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{\tilde{b}\hat{x}}\tau_{iy}\varphi_n\right) \leq A_{k_1,m_1} \tag{7.64}$$

Como consequência de (7.63), (7.64) e da desigualdade (7.62) vem que

$$\begin{aligned}
&\left|\Phi_n(b)-\Phi_n(b_0)\right| \\
\leq\ & |b-b_0|\left[\sup_{\tilde{b},y\in[-r,r]}\eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{\tilde{b}\hat{x}}\tau_{iy}(\hat{x}\varphi_n)\right)+r\sup_{\tilde{b},y\in[-r,r]}\eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{\tilde{b}\hat{x}}\tau_{iy}\varphi_n\right)\right] \\
\leq\ & |b-b_0|\left(C_{k_1,m_1}+rA_{k_1,m_1}\right).
\end{aligned}$$

Portanto, para todo o $b_0\in[-r,r]$ e para todo o $\varepsilon>0$,

$$\exists\delta=\frac{\varepsilon}{C_{k_1,m_1}+rA_{k_1,m_1}}>0\ \forall n\in\mathbb{N}\ \forall b\in[-r,r]\quad |b-b_0|\leq\delta\Rightarrow\left|\Phi_n(b)-\Phi_n(b_0)\right|\leq\varepsilon,$$

o que significa que $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão equicontínua em $[-r,r]$. ∎

Lema 7.2.12 *Sejam r um inteiro positivo, w um real qualquer com módulo menor que r, $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão limitada em $\mathfrak{X}_r$ e φ uma função de $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$. Se $\tau_{iw}\varphi_n\to\tau_{iw}\varphi$ em $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$, então $\varphi\in\mathfrak{X}_r$ e $\varphi_n\to\varphi$ em $\mathfrak{X}_r$.*

Demonstração: Fixemos r em $\mathbb{N}_1$ e $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}\in(\mathfrak{X}_r)^{\mathbb{N}}$ qualquer, tal que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada. Seja φ uma função arbitrária de $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$, tal que $(\tau_{iw}\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $\tau_{iw}\varphi$ em $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$, para todo o w real pertencente ao intervalo $[-r,r]$.

De $\varphi\in\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$ vem que φ é prolongável a $\mathbb{C}$ como função inteira (ver teorema 5.1.3).

Sejam $b,y\in[-r,r]$ arbitrários. Provemos, em primeiro lugar, que $\varphi\in\mathfrak{X}_r$, ou seja,

$$\mathrm{e}^{b\hat{x}}\cdot\tau_{iy}\varphi\in\mathfrak{X}_0(\mathbb{R}) \tag{7.65}$$

e

$$\forall k_1,m_1\in\mathbb{N}\quad \eta^r_{k_1,m_1}(\varphi)=\sup_{b,y\in[-r,r]}\eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi\right)<\infty \tag{7.66}$$

Para provar (7.65), é necessário ver que tanto a função $\mathrm{e}^{b\hat{x}}\cdot\tau_{iy}\varphi$ como a sua transformada de Fourier são de decrescimento exponencial rápido.

Para tal, recordemos que $\varphi\in\mathcal{E}(\mathbb{R})$, pelo que $\mathrm{e}^{b\hat{x}}\cdot\tau_{iy}\varphi$ é de igual modo de classe $\mathcal{C}^\infty$ em $\mathbb{R}$. Tomemos m em $\mathbb{N}$ e k em $\mathbb{R}$ arbitrários. Comecemos por verificar que

$$D_x^m\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\cdot\tau_{iy}\varphi_n\right)\underset{u}{\to}D_x^m\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\cdot\tau_{iy}\varphi\right)\quad\text{em }\mathbb{R} \tag{7.67}$$

Ora,

$$\begin{aligned}
&\left\|D_x^m\left[\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}(\varphi_n-\varphi)\right]\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \\
\underset{\text{fórmula de Leibniz}}{\leq}\ & \sum_{l\leq m}\binom{m}{l}\mathrm{e}^{l|b|}\left\|\mathrm{e}^{b\hat{x}}D_x^{m-l}\left(\tau_{iy}(\varphi_n-\varphi)\right)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \\
\leq\ & \sum_{l\leq m}\binom{m}{l}\mathrm{e}^{l|b|}\left\|\mathrm{e}^{(C(|b|)+1)|\hat{x}|}D_x^{m-l}\left(\tau_{iy}(\varphi_n-\varphi)\right)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}
\end{aligned}\tag{7.68}$$

Por hipótese,

$$\forall w \in [-r, r] \quad \tau_{iw}\varphi_n \to \tau_{iw}\varphi \text{ em } \mathfrak{X}_0(\mathbb{R})\,;$$

então, em particular,

$$\tau_{iy}\varphi_n \to \tau_{iy}\varphi \text{ em } \mathfrak{X}_0(\mathbb{R}) \tag{7.69}$$

ou seja,

$$\forall k_2, m_2 \in \mathbb{N} \quad \eta_{k_2,m_2}\left(\tau_{iy}\left(\varphi_n - \varphi\right)\right) \to 0 \tag{7.70}$$

Tomando $k_2 = C(|b|) + 1$ e $m_2 = m - l$, vemos que

$$\lim_{n\to+\infty} \left\| \mathrm{e}^{(C(|b|)+1)|\hat{x}|} D_x^{m-l}\left(\tau_{iy}\left(\varphi_n - \varphi\right)\right)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = 0.$$

Aplicando o limite em n na desigualdade (7.68), vem que

$$\lim_{n\to+\infty} \left\| D_x^m\left[\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\left(\varphi_n - \varphi\right)\right]\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = 0,$$

isto é, temos a condição (7.67).

Sabemos ainda que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $\mathfrak{X}_r$, o que significa que

$$\forall k_1, m_1 \in \mathbb{N} \quad \exists A_{k_1,m_1} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \sup_{b,y\in[-r,r]} \eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi_n\right) \le A_{k_1,m_1}.$$

Em particular, para $k_1 = |C(k) + 1|$ e $m_1 = m$, temos que

$$\exists A_{|C(k)+1|,m} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \sup_{b,y\in[-r,r]} \eta_{|C(k)+1|,m}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi_n\right) \le A_{|C(k)+1|,m} \tag{7.71}$$

Assim,

$$\begin{aligned} &\left|\mathrm{e}^{|C(k)+1||x|} D_x^m\left(\mathrm{e}^{bx}\tau_{iy}\varphi_n(x)\right)\right| \\ \le\ & \sup_{b,y\in[-r,r]} \eta_{|C(k)+1|,m}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi_n\right) \\ \le\ & A_{|C(k)+1|,m} \end{aligned}$$

e, portanto, para todo o n em $\mathbb{N}$ e todo o x em $\mathbb{R}$,

$$\left|D_x^m\left(\mathrm{e}^{bx}\tau_{iy}\varphi_n(x)\right)\right| \le A_{|C(k)+1|,m}\ \mathrm{e}^{-|C(k)+1||x|} \le A_{|C(k)+1|,m}\ \mathrm{e}^{-k|x|}.$$

Mas, $D_x^m\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\cdot\tau_{iy}\varphi_n\right) \underset{u}{\to} D_x^m\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\cdot\tau_{iy}\varphi\right)$ em $\mathbb{R}$ (ver (7.67)), por conseguinte

$$\lim_{n\to+\infty} \left|D_x^m\left(\mathrm{e}^{bx}\tau_{iy}\varphi_n(x)\right)\right| \le A_{|C(k)+1|,m}\ \mathrm{e}^{-k|x|},$$

isto é,

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad \forall k \in \mathbb{R} \quad \exists A_{|C(k)+1|,m} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \left|D_x^m\left(\mathrm{e}^{bx}\tau_{iy}\varphi(x)\right)\right| \le A_{|C(k)+1|,m}\ \mathrm{e}^{-k|x|},$$

ou seja,

$$\mathrm{e}^{b\hat{x}} \cdot \tau_{iy}\varphi \in \mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathrm{I\!R}) \tag{7.72}$$

Verifiquemos agora que

$$D_\xi^m\left(\mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}} \cdot \tau_{iy}\varphi_n\right)\right) \underset{u}{\to} D_\xi^m\left(\mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}} \cdot \tau_{iy}\varphi\right)\right) \quad \text{em } \mathrm{I\!R} \tag{7.73}$$

ou ainda (cf. observação 2.2.8),

$$\mathcal{F}\left[\mathrm{e}^{b\hat{x}}\left(-i\hat{x}\right)^m \tau_{iy}\varphi_n\right] \underset{u}{\to} \mathcal{F}\left[\mathrm{e}^{b\hat{x}}\left(-i\hat{x}\right)^m \tau_{iy}\varphi\right] \quad \text{em } \mathrm{I\!R}.$$

Com efeito,

$$\begin{aligned}
&\sup_{\xi\in\mathrm{I\!R}}\left|\mathcal{F}\left[\mathrm{e}^{b\hat{x}}\left(-i\hat{x}\right)^m \tau_{iy}\left(\varphi_n-\varphi\right)\right](\xi)\right| \\
\leq\ & \int_{\mathrm{I\!R}} \mathrm{e}^{|x|(m+|b|)}\left|\tau_{iy}\left(\varphi_n-\varphi\right)(x)\right| dx \\
\leq\ & \int_{\mathrm{I\!R}} \mathrm{e}^{|x|(m+C(|b|)+1)}\left|\tau_{iy}\left(\varphi_n-\varphi\right)(x)\right| dx \qquad (7.74)
\end{aligned}$$

Sabemos por hipótese que $(\varphi_n)_{n\in\mathrm{I\!N}} \in (\mathfrak{X}_r)^{\mathrm{I\!N}}$ logo, para todo o y em $[-r,r]$, $(\tau_{iy}\varphi_n)_{n\in\mathrm{I\!N}} \in (\mathfrak{X}_0(\mathrm{I\!R}))^{\mathrm{I\!N}}$ e como $(\tau_{iy}(\varphi_n-\varphi))_{n\in\mathrm{I\!N}}$ converge para 0 em $\mathfrak{X}_0(\mathrm{I\!R})$ (ver (7.69)), então $(\tau_{iy}(\varphi_n-\varphi))_{n\in\mathrm{I\!N}}$ é limitada em $\mathfrak{X}_0(\mathrm{I\!R})$, ou seja,

$$\forall k_1, m_1 \in \mathrm{I\!N} \quad \exists A_{k_1,m_1} > 0 \quad \forall n \in \mathrm{I\!N} \quad \eta_{k_1,m_1}\left(\tau_{iy}\left(\varphi_n-\varphi\right)\right) \leq A_{k_1,m_1}.$$

Para $k_1 = m + C(|b|) + 2$ e $m_1 = 0$ temos, em particular, que

$$\exists A_{m+C(|b|)+2} > 0 \quad \forall n \in \mathrm{I\!N} \quad \forall x \in \mathrm{I\!R} \ \left|\mathrm{e}^{(m+C(|b|)+1)|x|}\tau_{iy}\left(\varphi_n-\varphi\right)(x)\right| \leq A_{m+C(|b|)+2}\,\mathrm{e}^{-|x|}.$$

Uma vez que

$$A_{m+C(|b|)+2}\,\mathrm{e}^{-|x|} \in L^1(\mathrm{I\!R})$$

então podemos dizer que $\left(\mathrm{e}^{(m+C(|b|)+1)|\hat{x}|}\tau_{iy}\left(\varphi_n-\varphi\right)\right)_{n\in\mathrm{I\!N}}$ é dominada por uma função de $L^1(\mathrm{I\!R})$.

Utilizando novamente a condição (7.70), e para $k_2 = m + C(|b|) + 1$ e $m_2 = 0$, vem

$$\lim_{n\to+\infty}\left\|\mathrm{e}^{(m+C(|b|)+1)|\hat{x}|}\tau_{iy}\left(\varphi_n-\varphi\right)\right\|_{L^\infty(\mathrm{I\!R})} = 0,$$

que é o mesmo que dizer que a sucessão $\left(\mathrm{e}^{(m+C(|b|)+1)|\hat{x}|}\tau_{iy}\left(\varphi_n-\varphi\right)\right)_{n\in\mathrm{I\!N}}$ converge para zero uniformemente em $\mathrm{I\!R}$. Recorrendo ao teorema da convergência dominada de Lebesgue decorre, da desigualdade (7.74), que

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty}\sup_{\xi\in\mathrm{I\!R}}\left|\mathcal{F}\left[\mathrm{e}^{b\hat{x}}\left(-i\hat{x}\right)^m \tau_{iy}\left(\varphi_n-\varphi\right)\right](\xi)\right| \\
\leq\ & \int_{\mathrm{I\!R}} \lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{|x|(m+C(|b|)+1)}\left|\tau_{iy}\left(\varphi_n-\varphi\right)(x)\right| dx \\
=\ & 0.
\end{aligned}$$

Obtemos assim a condição (7.73).

Tendo em atenção a hipótese (7.71), podemos asseverar que

$$\left|D_\xi^m\left[\mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi_n\right)\right](\xi)\right| \leq A_{|C(k)+1|,m}\ \mathrm{e}^{-k|\xi|}.$$

Calculando o limite em n, temos

$$\begin{aligned} & \lim_{n\to+\infty}\left|D_\xi^m\left[\mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi_n\right)\right](\xi)\right| \leq A_{|C(k)+1|,m}\ \mathrm{e}^{-k|\xi|} \\ \underset{\text{por (7.73)}}{\Leftrightarrow} & \left|D_\xi^m\left[\mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi\right)\right](\xi)\right| \leq A_{|C(k)+1|,m}\ \mathrm{e}^{-k|\xi|}, \end{aligned}$$

podemos, por isso, dizer que $\mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\cdot\tau_{iy}\varphi\right)$ tem decrescimento exponencial rápido e, como $\mathrm{e}^{b\hat{x}}\cdot\tau_{iy}\varphi$ é também uma função de $\mathcal{C}_{e^-,\infty}(\mathbb{R})$ (cf. (7.72)), resulta que

$$\mathrm{e}^{b\hat{x}}\cdot\tau_{iy}\varphi \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R}).$$

Fixemos k_1 e m_1 em $\mathbb{N}$ arbitrários. Mostremos que a condição (7.66) é verdadeira. Para este fim, vejamos em primeiro lugar que

$$\lim_{n\to+\infty}\eta^r_{k_1,m_1}(\varphi_n) = \eta^r_{k_1,m_1}(\varphi) \tag{7.75}$$

Cálculos semelhantes aos anteriores[6] são suficientes para afirmar que

$$\mathrm{e}^{k_1|\hat{x}|}D_x^{m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\cdot\tau_{iy}\varphi_n\right) \underset{u}{\to} \mathrm{e}^{k_1|\hat{x}|}D_x^{m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\cdot\tau_{iy}\varphi\right) \quad \text{em } \mathbb{R}$$

e que

$$\mathrm{e}^{k_1|\hat{\xi}|}D_\xi^{m_1}\left(\mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\cdot\tau_{iy}\varphi_n\right)\right) \underset{u}{\to} \mathrm{e}^{k_1|\hat{\xi}|}D_\xi^{m_1}\left(\mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\cdot\tau_{iy}\varphi\right)\right) \quad \text{em } \mathbb{R},$$

ou seja,

$$\lim_{n\to+\infty}\left\|\mathrm{e}^{k_1|\hat{x}|}D_x^{m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}(\varphi_n-\varphi)\right)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = 0$$

e

$$\lim_{n\to+\infty}\left\|\mathrm{e}^{k_1|\hat{\xi}|}D_\xi^{m_1}\left(\mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}(\varphi_n-\varphi)\right)\right)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = 0.$$

Temos assim que

$$\lim_{n\to+\infty}\eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}(\varphi_n-\varphi)\right) = 0 \tag{7.76}$$

Como

$$\begin{aligned} & \left|\eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi_n\right) - \eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi\right)\right| \\ \leq\ & \eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}(\varphi_n-\varphi)\right), \end{aligned}$$

[6] Ver as provas da convergência uniforme de $D_x^{m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\cdot\tau_{iy}\varphi_n\right)$ e de $D_\xi^{m_1}\left(\mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\cdot\tau_{iy}\varphi_n\right)\right)$ para respectivamente $D_x^{m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\cdot\tau_{iy}\varphi\right)$ e $D_\xi^{m_1}\left(\mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\cdot\tau_{iy}\varphi\right)\right)$.

então

$$\lim_{n\to+\infty}\eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi_n\right)=\eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi\right) \tag{7.77}$$

Seja $\left(\Psi_n^b\right)_{n\in\mathbb{N}}$ a seguinte sucessão de funções:

$$\Psi_n^b\left(y\right)=\eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi_n\right).$$

Vimos no lema 7.2.11 que $\left(\Psi_n^b\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão equicontínua em $[-r,r]$ como função de y e, como em (7.77) provámos que a sucessão $\left(\Psi_n^b\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergia pontualmente para $\eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi\right)$ em $y\in[-r,r]$, podemos, pelo 2^o teorema de Ascoli[7], afirmar que $\left(\Psi_n^b\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para $\eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi\right)$ em $y\in[-r,r]$; por outras palavras

$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{y\in[-r,r]}\left|\eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi_n\right)-\eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi\right)\right|=0.$$

Mas,

$$\begin{aligned}&\left|\sup_{y\in[-r,r]}\eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi_n\right)-\sup_{y\in[-r,r]}\eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi\right)\right|\\ \leq\ &\sup_{y\in[-r,r]}\left|\eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi_n\right)-\eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi\right)\right|,\end{aligned}$$

donde

$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{y\in[-r,r]}\eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi_n\right)=\sup_{y\in[-r,r]}\eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi\right) \tag{7.78}$$

Seja agora,

$$\Phi_n\left(b\right)=\sup_{y\in[-r,r]}\eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi_n\right).$$

No lema 7.2.11, mostrámos também que $\left(\Phi_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ era uma sucessão equicontínua em $[-r,r]$.

Uma vez que a sucessão $\left(\Phi_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é equicontínua em $[-r,r]$ e converge pontualmente para $\sup_{y\in[-r,r]}\eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi\right)$ em $[-r,r]$ (cf. (7.78)), conclui-se, pelo 2^o teorema de Ascoli, que a sucessão $\left(\Phi_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para $\sup_{y\in[-r,r]}\eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi\right)$ em $[-r,r]$, ou seja,

$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{b\in[-r,r]}\left|\Phi_n\left(b\right)-\sup_{y\in[-r,r]}\eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi\right)\right|=0$$

[7] Ver, por exemplo, Schwartz [Sch70, Corol. 2 do Teor. T.2, XX, 3; 1].

e como

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\sup_{b\in[-r,r]}\sup_{y\in[-r,r]}\eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi_n\right)-\sup_{b\in[-r,r]}\sup_{y\in[-r,r]}\eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi\right)\right|$$

$$\leq\lim_{n\to+\infty}\sup_{b\in[-r,r]}\left|\sup_{y\in[-r,r]}\eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi_n\right)-\sup_{y\in[-r,r]}\eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi\right)\right|,$$

temos finalmente a igualdade (7.75), isto é,

$$\lim_{n\to+\infty}\eta^r_{k_1,m_1}(\varphi_n)=\eta^r_{k_1,m_1}(\varphi)\,.$$

Recorde-se que o nosso objectivo era provar que $\eta^r_{k_1,m_1}(\varphi)$ é finito. Ora isto advém, mais uma vez, do facto de $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ser limitada em $\mathfrak{X}_r$ e, portanto,

$$\exists A_{k_1,m_1}>0\quad\forall n\in\mathbb{N}\quad\eta^r_{k_1,m_1}(\varphi_n)\leq A_{k_1,m_1},$$

o que implica que

$$\lim_{n\to+\infty}\eta^r_{k_1,m_1}(\varphi_n)\leq A_{k_1,m_1},$$

o que quer dizer que

$$\eta^r_{k_1,m_1}(\varphi)\leq A_{k_1,m_1}.$$

Satisfizemos assim a 2^a condição (ver (7.66)) para que φ seja uma função do espaço $\mathfrak{X}_r$.

Para finalizar esta prova, precisamos verificar que $\varphi_n\to\varphi$ em $\mathfrak{X}_r$. Seja $\psi_n=\varphi_n-\varphi$; basta então provar que $\psi_n\to 0$ em $\mathfrak{X}_r$, isto é,

$$\forall k_1,m_1\in\mathbb{N}\quad\lim_{n\to+\infty}\eta^r_{k_1,m_1}(\psi_n)=0 \tag{7.79}$$

Fixemos k_1 e m_1 em $\mathbb{N}$ quaisquer. Note-se que $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $\mathfrak{X}_r$, pois $\varphi\in\mathfrak{X}_r$ e $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada neste espaço.

Já vimos em (7.76) que

$$\lim_{n\to+\infty}\eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\psi_n\right)=0,$$

ou seja, $\eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\psi_n\right)$ converge pontualmente para zero em $[-r,r]$ como função de $y\in[-r,r]$. Pondo

$$\tilde{\Psi}^b_n(y)=\eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\psi_n\right),$$

é fácil ver que $\left(\tilde{\Psi}^b_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão equicontínua[8] em $y\in[-r,r]$. Deste modo, o 2^o teorema de Ascoli, conduz-nos à convergência uniforme de $\left(\tilde{\Psi}^b_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ para a função

[8] Os cálculos a efectuar são semelhantes aos realizados no lema 7.2.11, quando vimos que $\left(\Psi^b_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ era equicontínua; basta apenas substituir φ_n por ψ_n e, é claro, não esquecer que $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $\mathfrak{X}_r$.

identicamente nula em $y \in [-r, r]$, isto é,

$$\lim_{n \to +\infty} \sup_{y \in [-r,r]} \eta_{k_1,m_1} \left(\mathrm{e}^{b\hat{x}} \tau_{iy} \psi_n \right) = 0.$$

Considerando agora

$$\tilde{\Phi}_n (b) = \sup_{y \in [-r,r]} \eta_{k_1,m_1} \left(\mathrm{e}^{b\hat{x}} \tau_{iy} \psi_n \right),$$

podemos dizer que $\left(\tilde{\Phi}_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge pontualmente para zero em $[-r, r]$ e que também é uma sucessão equicontínua em $[-r, r]$. Assim sendo, e tendo o 2^o teorema de Ascoli em mente, sabemos que a sucessão $\left(\tilde{\Phi}_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente para zero em $[-r, r]$, o que se traduz por

$$\lim_{n \to +\infty} \sup_{b \in [-r,r]} \sup_{y \in [-r,r]} \eta_{k_1,m_1} \left(\mathrm{e}^{b\hat{x}} \tau_{iy} \psi_n \right) = 0.$$

Obtemos assim o pretendido, ou seja, a condição (7.79). ■

Teorema 7.2.13 *Os espaços $\mathfrak{X}_r$ são de Fréchet.*

Demonstração: É imediato que, para todo o r inteiro positivo, $\mathfrak{X}_r$ é localmente convexo e metrizável (cf. proposição 7.2.2 e corolário 7.2.4). Resta provar que $\mathfrak{X}_r$ é completo.

Suponhamos que $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão de Cauchy arbitrária no espaço $\mathfrak{X}_r$.

Comecemos por observar que a sucessão $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$, sendo de Cauchy em $\mathfrak{X}_r$, é limitada em $\mathfrak{X}_r$.

De forma a poder utilizar o lema 7.2.12, vamos mostrar que, para todo o w em módulo menor que r, $\tau_{iw}\varphi_n \to \tau_{iw}\varphi$ em $\mathfrak{X}_0 (\mathbb{R})$, onde φ é o limite da sucessão $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $\mathfrak{X}_0 (\mathbb{R})$ e é uma função deste espaço.

Seja $w \in [-r, r]$ qualquer. Por hipótese $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão de funções em $\mathfrak{X}_r$ logo, para todo o n em $\mathbb{N}$ e para todo o b e y em $[-r, r]$,

$$\mathrm{e}^{b\hat{x}} \cdot \tau_{iy} \varphi_n \in \mathfrak{X}_0 (\mathbb{R});$$

em particular, para $b = 0$ e $y = w$, temos que $(\tau_{iw}\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão de funções em $\mathfrak{X}_0 (\mathbb{R})$.

Vejamos que $(\tau_{iw}\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy em $\mathfrak{X}_0 (\mathbb{R})$. Tomemos $k_1, m_1 \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon > 0$ arbitrários.

Com efeito,

$$\begin{aligned} & \eta_{k_1,m_1} \left(\tau_{iw} \left(\varphi_n - \varphi_m \right) \right) \\ \leq & \sup_{b,w \in [-r,r]} \eta_{k_1,m_1} \left(\mathrm{e}^{b\hat{x}} \tau_{iw} \left(\varphi_n - \varphi_m \right) \right) \\ = & \ \eta^r_{k_1,m_1} \left(\varphi_n - \varphi_m \right); \end{aligned}$$

mas $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em $\mathfrak{X}_r$, donde

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \quad n, m \geq n_1 \Rightarrow \eta^r_{k_1,m_1}(\varphi_n - \varphi_m) \leq \varepsilon$$

o que prova que a sucessão $(\tau_{iw}\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$.

O facto de $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$ ser completo (ver teorema 5.2.9) dá-nos a possibilidade de asseverar que

$$\exists \tilde{\varphi}_w \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R}) \quad \tau_{iw}\varphi_n \to \tilde{\varphi}_w \quad \text{em } \mathfrak{X}_0(\mathbb{R}) \tag{7.80}$$

Em particular,

$$\lim_{n\to+\infty} |\tau_{iw}\varphi_n(x) - \tilde{\varphi}_w(x)| = 0,$$

isto é,

$$\tau_{iw}\varphi_n \to \tilde{\varphi}_w \quad \text{em } \mathbb{R} \tag{7.81}$$

É importante agora salientar que

$$\mathfrak{X}_r \hookrightarrow \mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$$

(veja-se corolário 7.2.6), o que nos permite dizer que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sendo de Cauchy em $\mathfrak{X}_r$, é de igual modo de Cauchy em $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$. Consequentemente, e recordando uma vez mais o teorema 5.2.9, a afirmação seguinte é verdadeira:

$$\exists \varphi \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R}) \quad \varphi_n \to \varphi \quad \text{em } \mathfrak{X}_0(\mathbb{R}).$$

Então

$$\forall k_2, m_2 \in \mathbb{N} \quad \eta_{k_2,m_2}(\varphi_n - \varphi) \to 0;$$

em particular,

$$\lim_{n\to+\infty} \|\varphi_n - \varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = 0,$$

ou seja,

$$\varphi_n \underset{u}{\to} \varphi \quad \text{em } \mathbb{R} \tag{7.82}$$

Dado que, para todo o n em $\mathbb{N}$, φ_n é uma função de $\mathfrak{X}_r$, então φ_n é inteira em $\mathbb{C}$. Como $\varphi \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$, então φ é prolongável a $\mathbb{C}$ como função inteira, sendo este prolongamento único[9] (cf. teorema 5.1.3). Por esta razão, e porque $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para φ em $\mathbb{R}$, podemos afirmar que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para φ pontualmente em todo o plano $\mathbb{C}$.

[9]Como já foi referido anteriormente, identificaremos a função φ com o seu (único) prolongamento analítico a $\mathbb{C}$.

Consequentemente, se considerarmos o conjunto

$$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = -w\},$$

é-nos permitido dizer que a restrição a este conjunto da sucessão $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para a respectiva restrição da função φ, isto é,

$$\varphi_n|_{\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Im} z=-w\}} \to \varphi|_{\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Im} z=-w\}},$$

o que significa ainda

$$\tau_{iw}\varphi_n \to \tau_{iw}\varphi \quad \text{em } \mathbb{R} \tag{7.83}$$

Confrontando as afirmações (7.81) e (7.83), e tendo em conta que $\mathbb{R}$ é um espaço de Hausdorff, somos levados a concluir que

$$\tilde{\varphi}_w = \tau_{iw}\varphi.$$

Por conseguinte, da condição (7.80), e tendo em consideração que $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$ é separado (ver teorema 5.2.4), vem que

$$\tau_{iw}\varphi_n \to \tau_{iw}\varphi \quad \text{em } \mathfrak{X}_0(\mathbb{R}).$$

Finalmente, e dado que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $\mathfrak{X}_r$, φ é uma função de $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$ e $\tau_{iw}\varphi_n \to \tau_{iw}\varphi$ em $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$; usando o lema 7.2.12, $\varphi \in \mathfrak{X}_r$ e $\varphi_n \to \varphi$ em $\mathfrak{X}_r$, o que prova que $\mathfrak{X}_r$ é completo. ■

Presenciámos na demonstração do teorema precedente que, sendo $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de Cauchy em $\mathfrak{X}_r$, existe φ função de $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$ tal que, $(\tau_{iw}\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $\tau_{iw}\varphi$ em $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$. Este último facto, como sabemos, é essencial para a utilização do lema 7.2.12, o qual, por sua vez, é indispensável à prova da completude dos espaços $\mathfrak{X}_r$.

Reconhecemos com alguma facilidade que, nestas condições, não nos é possível provar que os espaços $\mathfrak{X}_r$ são de Montel. De um modo geral, apenas temos a sucessão $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ limitada em $\mathfrak{X}_r$, o que é insuficiente para aplicar o referido lema 7.2.12, que mais uma vez é imprescindível à demonstração da propriedade em análise.

Assim, com vista à utilização do tão mencionado resultado 7.2.12, passamos agora a expor um lema que apenas nos garante a convergência em $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$ de uma subsucessão de $(\tau_{iw}\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e que se baseia somente nos factos de $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ser limitada em $\mathfrak{X}_r$ e de existir φ função de $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$ tal que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para φ em $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$.

Lema 7.2.14 *Sejam $r \in \mathbb{N}_1$, $w \in [-r, r]$, $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão limitada em $\mathfrak{X}_r$ e φ uma função de $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$. Se $\varphi_n \to \varphi$ em $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$, então existe $(\varphi_{m_n})_{n\in\mathbb{N}}$ subsucessão de $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tal que $\tau_{iw}\varphi_{m_n} \to \tau_{iw}\varphi$ em $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$.*

Demonstração: Fixemos r em $\mathbb{N}_1$, w em $[-r,r]$ e φ em $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$ quaisquer. Tomemos uma sucessão $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funções em $\mathfrak{X}_r$, tal que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $\mathfrak{X}_r$ e $\varphi_n \to \varphi$ em $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$.

Note-se que $(\tau_{iw}\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de funções em $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$, pois $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é, por sua vez, uma sucessão de funções em $\mathfrak{X}_r$.

Vejamos que $(\tau_{iw}\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$. Tomemos $k_1, m_1 \in \mathbb{N}$ arbitrários:

$$\begin{aligned} &\eta_{k_1,m_1}(\tau_{iw}\varphi_n) \\ \leq\ &\sup_{b,w\in[-r,r]} \eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iw}\varphi_n\right); \end{aligned}$$

mas $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $\mathfrak{X}_r$, donde

$$\exists A_{k_1,m_1} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \eta^r_{k_1,m_1}(\varphi_n) \leq A_{k_1,m_1}.$$

Consequentemente, a sucessão $(\tau_{iw}\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$. Assim, o conjunto dos seus termos é um subconjunto limitado de $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$ e, como este espaço é metrizável e de Montel (veja-se corolário 5.2.5 e teorema 5.2.10), podemos garantir a existência de uma subsucessão de $(\tau_{iw}\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, digamos $\left(\tau_{iw}\varphi_{m_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, convergente em $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$, ou seja,

$$\exists \tilde{\varphi}_w \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R}) \quad \tau_{iw}\varphi_{m_n} \to \tilde{\varphi}_w \quad \text{em } \mathfrak{X}_0(\mathbb{R}) \tag{7.84}$$

Em particular, obtém-se

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\tau_{iw}\varphi_{m_n}(x) - \tilde{\varphi}_w(x)\right| = 0,$$

isto é,

$$\tau_{iw}\varphi_{m_n} \to \tilde{\varphi}_w \quad \text{em } \mathbb{R} \tag{7.85}$$

É importante agora salientar que $\left(\varphi_{m_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma subsucessão de $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e, dado que esta última converge para φ em $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$, temos que

$$\varphi_{m_n} \to \varphi \quad \text{em } \mathfrak{X}_0(\mathbb{R}).$$

Portanto, podemos afirmar que

$$\varphi_{m_n} \underset{u}{\to} \varphi \quad \text{em } \mathbb{R}.$$

Para além disto, sabemos que φ é prolongável a $\mathbb{C}$ como função inteira (pois pertence a $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$), sendo este prolongamento único (cf. teorema 5.1.3) e que, para cada n em $\mathbb{N}$, φ_{m_n} é inteira, por ser uma função de $\mathfrak{X}_r$. Logo a convergência pontual em $\mathbb{C}$ de $\left(\varphi_{m_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ para φ está assegurada. Consideremos o conjunto

$$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = -w\};$$

é fácil ver que

$$\varphi_{m_n}|_{\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Im}\, z=-w\}} \to \varphi|_{\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Im}\, z=-w\}},$$

o que significa ainda

$$\tau_{iw}\varphi_{m_n} \to \tau_{iw}\varphi \quad \text{em } \mathbb{R} \tag{7.86}$$

Atendendo à separabilidade do espaço $\mathbb{R}$, e tendo em conta (7.85) e (7.86), conclui--se que

$$\tilde{\varphi}_w = \tau_{iw}\varphi.$$

Por conseguinte, da condição (7.84), e tendo em consideração que $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$ é um espaço de Hausdorff (cf. teorema 5.2.4), obtemos finalmente que

$$\tau_{iw}\varphi_{m_n} \to \tau_{iw}\varphi \quad \text{em } \mathfrak{X}_0(\mathbb{R}).$$

■

Estamos agora em condições de demonstrar que os espaços $\mathfrak{X}_r$ são de Montel.

Teorema 7.2.15 *Para todo o r inteiro positivo, $\mathfrak{X}_r$ é um espaço de Montel.*

Demonstração: É importante salientar que $\mathfrak{X}_r$ é um espaço de Fréchet (cf. teorema 7.2.13) e, portanto, recordando o teorema 2.1.15, $\mathfrak{X}_r$ é um espaço tonelado.

Resta ainda mostrar que todo o subconjunto limitado de $\mathfrak{X}_r$ é relativamente compacto.

Tomemos, para tal, um subconjunto L qualquer limitado de $\mathfrak{X}_r$. Sabemos que o espaço $\mathfrak{X}_r$ é metrizável (ver corolário 7.2.4), consequentemente, provar que L é relativamente compacto é o mesmo que mostrar que, de toda a sucessão de elementos de L, se pode extrair uma subsucessão convergente em $\mathfrak{X}_r$ (ver teorema 2.1.14).

Consideremos então $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão arbitrária de elementos de L. O corolário 7.2.6 garante-nos a continuidade e a linearidade da aplicação

$$I_{\mathfrak{X}_r,\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})} : \mathfrak{X}_r \longrightarrow \mathfrak{X}_0(\mathbb{R}).$$

Assim, e pelo facto da aplicação $I_{\mathfrak{X}_r,\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})}$ transformar limitados em limitados, somos levados a afirmar que L é limitado em $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$. Por outro lado, $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$ é um espaço metrizável e de Montel (veja-se corolário 5.2.5 e teorema 5.2.10), donde pelo facto de L ser limitado neste espaço e $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ser uma sucessão de elementos em L, existe uma subsucessão $\left(\varphi_{m_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente em $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$, ou seja, existe $\varphi \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$ tal que $\varphi_{m_n} \to \varphi$ em $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$. Temos ainda que $\left(\varphi_{m_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão limitada em $\mathfrak{X}_r$ porque L é limitado em $\mathfrak{X}_r$ e $\left(\varphi_{m_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in L^{\mathbb{N}}$. Então, e de acordo com o lema 7.2.14, para todo o w em $[-r, r]$ existe $\left(\varphi_{l_{m_n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ subsucessão de $\left(\varphi_{m_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\tau_{iw}\varphi_{l_{m_n}} \to \tau_{iw}\varphi \quad \text{em } \mathfrak{X}_0(\mathbb{R}).$$

Nestas condições, o lema 7.2.12 assegura-nos que, para além de φ ser uma função de $\mathfrak{X}_r$, a sucessão $\left(\varphi_{l_{m_n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para φ em $\mathfrak{X}_r$. Somos, então, levados a concluir que L é relativamente compacto em $\mathfrak{X}_r$. ■

Corolário 7.2.16 *Os espaços $\mathfrak{X}_r$ são reflexivos.*

Demonstração: Resulta imediatamente do teorema 2.1.17 e do facto dos espaços $\mathfrak{X}_r$ serem de Montel (ver teorema 7.2.15). ■

Teorema 7.2.17 *Para cada r inteiro positivo, $\mathfrak{X}_r$ é bornológico.*

Demonstração: É imediato reconhecer que, para todo o r em $\mathbb{N}_1$, $\mathfrak{X}_r$ é bornológico, pois, pelo teorema 7.2.13, $\mathfrak{X}_r$ é de Fréchet. ■

7.3 Estrutura topológica em $\mathfrak{X}$

Uma vez que $\mathfrak{X}$ é uma intersecção de espaços localmente convexos, a saber os espaços $\mathfrak{X}_r$, contidos com injecção canónica contínua uns nos outros (cf. proposições 7.2.2 e 7.2.5), é natural introduzir em $\mathfrak{X}$ a **topologia do limite projectivo** relativo às famílias $(\mathfrak{X}_r)_{r\in\mathbb{N}}$ e $(I_r)_{r\in\mathbb{N}}$, o que nos permite dizer que $\mathfrak{X}$ é o **limite projectivo da família** $(\mathfrak{X}_r)_{r\in\mathbb{N}}$ **relativo à família de aplicações** $(I_r)_{r\in\mathbb{N}}$. Neste caso, escrevemos

$$\mathfrak{X} = \underleftarrow{\lim} I_r^{-1}(\mathfrak{X}_r),$$

onde, para cada r em $\mathbb{N}$, I_r denota a injecção canónica de $\mathfrak{X}$ em $\mathfrak{X}_r$, ou seja,

$$\begin{aligned} I_r : \mathfrak{X} &\longrightarrow \mathfrak{X}_r \\ \varphi &\longmapsto I_r(\varphi) = \varphi. \end{aligned}$$

Reconhece-se facilmente que $(I_r)_{r\in\mathbb{N}}$ é uma **família de aplicações lineares que separa pontos**; por outras palavras, dadas φ_1 e φ_2 funções distintas de $\mathfrak{X}$, existe sempre um natural r_0 tal que $I_{r_0}(\varphi_1)$ é distinto de $I_{r_0}(\varphi_2)$.

É de realçar também que, por definição, a topologia do limite projectivo é a menos fina das topologias em $\mathfrak{X}$ que tornam **contínuas** todas as aplicações I_r.

Nestas condições, $\mathfrak{X}$ é **localmente convexo** (porque, pela proposição 7.2.2, os espaços $\mathfrak{X}_r$ são e.l.c.), $(\mathfrak{X}_r)_{r\in\mathbb{N}}$ forma um **sistema projectivo para** $\mathfrak{X}$ e as aplicações I_r passam a ser chamadas de **aplicações projectivas**.

De acordo com os teoremas 7.2.3 e 5.2.4, para cada r em $\mathbb{N}$, $\mathfrak{X}_r$ é um espaço de Hausdorff. Como $\mathfrak{X} = \underleftarrow{\lim} I_r^{-1}(\mathfrak{X}_r)$, então $\mathfrak{X}$ é de igual modo **separado**.

Reparemos que $(\mathfrak{X}_r)_{r\in\mathbb{N}}$ é um sistema projectivo para $\mathfrak{X}$, $\mathbb{N}$ é um conjunto dirigido (porque é totalmente ordenado) e, dados r e s inteiros não negativos quaisquer, tais que sempre que r é estritamente menor que s, existe[10] uma aplicação $I_{s,r}$ linear contínua

[10] A existência destas aplicações deve-se simplesmente ao facto de que para $r < s$,

$$\mathfrak{X}_s \hookrightarrow \mathfrak{X}_r,$$

o que significa que as aplicações $I_{s,r}$ coincidem com as injecções canónicas contínuas de $\mathfrak{X}_s$ em $\mathfrak{X}_r$, isto é,

$$I_{s,r} \equiv I_{\mathfrak{X}_s,\mathfrak{X}_r}.$$

definida por:

$$\begin{aligned} I_{s,r} : \mathfrak{X}_s &\longrightarrow \mathfrak{X}_r \\ \varphi &\longmapsto I_{s,r}(\varphi) = \varphi, \end{aligned}$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

- $$I_{t,r} = I_{s,r} \circ I_{t,s}, \qquad \text{se } r < s < t;$$

- $$I_r = I_{s,r} \circ I_s, \qquad \text{se } r < s.$$

Então, podemos dizer que $(\mathfrak{X}_r)_{r\in\mathbb{N}}$ constitui um **espectro projectivo para** $\mathfrak{X}$. As aplicações $I_{s,r}$ $(r, s \in \mathbb{N} : r \leq s)$ são usualmente designadas por **aplicações de transição**.

Sendo $\mathfrak{X} = \underleftarrow{\lim} I_r^{-1}(\mathfrak{X}_r)$, com $(\mathfrak{X}_r)_{r\in\mathbb{N}}$ um espectro projectivo para $\mathfrak{X}$, a teoria geral dos limites projectivos permite-nos concluir que a família $(\mathfrak{X}_r)_{r\in\mathbb{N}}$ forma um **espectro projectivo relativamente às aplicações de transição** $I_{s,r}$ $(r, s \in \mathbb{N} : r \leq s)$.

Face às considerações precedentes, uma questão naturalmente se coloca: será $\mathfrak{X}$ o **limite projectivo maximal** do espectro projectivo $(\mathfrak{X}_r)_{r\in\mathbb{N}}$ relativamente às aplicações $I_{s,r}$? O resultado seguinte dá resposta a esta questão.

Proposição 7.3.1 *O espaço $\mathfrak{X}$ é o limite projectivo maximal do espectro projectivo $(\mathfrak{X}_r)_{r\in\mathbb{N}}$ relativamente às aplicações $I_{s,r}$, com $r, s \in \mathbb{N}$, tal que $r \leq s$.*

Demonstração: Sejam r e s naturais quaisquer, tais que $r \leq s$ e consideremos o espectro projectivo $(\mathfrak{X}_r)_{r\in\mathbb{N}}$ relativamente às aplicações de transição $I_{s,r}$. Denotemos por A o limite projectivo maximal deste espectro. Por definição,

$$A = \left\{ \psi = (\psi_r)_{r\in\mathbb{N}} \in \prod_{r\in\mathbb{N}} \mathfrak{X}_r \mid \forall r, s \in \mathbb{N} \quad \psi_r = I_{s,r}(\psi_s) \text{ sempre que } r \leq s \right\},$$

onde A está munido com a topologia induzida pela topologia produto em $\prod_{r\in\mathbb{N}} \mathfrak{X}_r$.

Comecemos por identificar o conjunto $\mathfrak{X}$ com um subconjunto do produto cartesiano dos espaços $\mathfrak{X}_r$. Para tal, consideremos a aplicação

$$\begin{aligned} h : \mathfrak{X} &\longrightarrow \prod_{r\in\mathbb{N}} \mathfrak{X}_r \\ \varphi &\longmapsto h(\varphi) = (\varphi, \varphi, \ldots, \varphi, \ldots) \end{aligned} \tag{7.87}$$

É óbvio que h é injectiva e, portanto, podemos afirmar que $\mathfrak{X} \subset \prod_{r\in\mathbb{N}} \mathfrak{X}_r$.

Verifica-se, com alguma simplicidade, que $\mathfrak{X} \subset A$ pois, como sabemos, se $r \leq s$, então $\mathfrak{X}_s$ está contido com injecção canónica contínua em $\mathfrak{X}_r$ (ver proposição 7.2.5) e, por conseguinte, podemos inferir que

$$I_{\mathfrak{X}_s,\mathfrak{X}_r}\left(\varphi_s\right) = \varphi_r.$$

Mas

$$I_{\mathfrak{X}_s,\mathfrak{X}_r} \equiv I_{s,r},$$

o que nos permite concluir que $\varphi \in A$.

Fixemos agora $(\psi_r)_{r\in\mathbb{N}}$ em A. Logo

$$(\psi_r)_{r\in\mathbb{N}} \in \prod_{r\in\mathbb{N}} \mathfrak{X}_r \tag{7.88}$$

e

$$\psi_r = I_{s,r}\left(\psi_s\right) \text{ sempre que } r \leq s.$$

Consequentemente, e por definição das aplicações de transição $I_{s,t}$, resulta que

$$\forall r, s \in \mathbb{N} \quad \psi_s = \psi_r.$$

Fazendo

$$\psi = \psi_s,$$

vem

$$(\psi_r)_{r\in\mathbb{N}} = (\psi, \psi, \ldots, \psi, \ldots) \tag{7.89}$$

Para cada r em $\mathbb{N}$ temos, pela condição (7.88), que $\psi_r \in \mathfrak{X}_r$, ou seja, $\psi_r \in \mathfrak{X}$. Mas $\psi = \psi_r$, donde $\psi \in \mathfrak{X}$.

Atendendo a que a aplicação h definida em (7.87) identifica cada elemento de $\mathfrak{X}$ com um elemento de $\prod\limits_{r\in\mathbb{N}} \mathfrak{X}_r$, podemos dizer que

$$\psi = (\psi, \psi, \ldots, \psi, \ldots)$$

e, por (7.89), temos finalmente que

$$(\psi_r)_{r\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{X}.$$

■

Assim, a proposição anterior permite-nos escrever:

$$\mathfrak{X} = \varprojlim_{m} \pi_r^{-1}\left(\mathfrak{X}_r\right),$$

onde, para cada r em $\mathbb{N}$, $\pi_r : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{X}_r$ designa a projecção na coordenada r.

Estamos agora interessados em saber quais as propriedades topológicas do espaço $\mathfrak{X}$ munido da topologia do limite projectivo maximal do espectro projectivo $(\mathfrak{X}_r)_{r\in\mathbb{N}}$ relativamente às aplicações $I_{s,r}$ $(r, s \in \mathbb{N} : r \leq s)$. Neste contexto, a teoria geral dos limites projectivos justifica[11], mais geralmente, a seguinte proposição:

Proposição 7.3.2 *Seja E o limite projectivo maximal de um espectro projectivo $(E_j)_{j\in J}$ relativamente às aplicações de transição u_{ij}. Supondo o conjunto de índices J contável, são verdadeiras as duas proposições seguintes:*

1. *Se, para todo o j em J, E_j é metrizável, então E também é metrizável;*

2. *Se, para todo o j em J, E_j é um espaço de Fréchet reflexivo, então E é de igual forma um espaço de Fréchet reflexivo.*

Como consequência da proposição anterior, e não esquecendo os resultados obtidos nos corolários 7.2.4 e 7.2.16 e no teorema 7.2.13 do parágrafo anterior, podemos concluir facilmente que:

Proposição 7.3.3 *O espaço $\mathfrak{X}$ munido com a topologia do limite projectivo maximal do espectro projectivo $(\mathfrak{X}_r)_{r\in\mathbb{N}}$ relativamente às aplicações $I_{s,r}$ $(r, s \in \mathbb{N} : r \leq s)$, além de ser metrizável, é um espaço de Fréchet reflexivo.*

Da proposição precedente, resulta que:

Proposição 7.3.4 *$\mathfrak{X}$ é tonelado e bornológico.*

Demonstração: Basta recordar que todo o espaço de Fréchet é tonelado e bornológico (ver teorema 2.1.15 e proposição 2.1.16). ∎

No teorema seguinte provaremos que $\mathfrak{X}$ é um espaço de Montel.

Teorema 7.3.5 *O limite projectivo maximal do espectro projectivo $(\mathfrak{X}_r)_{r\in\mathbb{N}}$ relativamente às aplicações $I_{s,r}$, com $r, s \in \mathbb{N}$, tal que $r \leq s$, é um espaço de Montel.*

Demonstração: Uma vez que $\mathfrak{X}$ é um espaço tonelado (cf. proposição 7.3.4), falta-nos provar que todo o subconjunto limitado de $\mathfrak{X}$ é relativamente compacto.

Seja L um subconjunto qualquer limitado de $\mathfrak{X}$. Vimos na proposição 7.3.3 que $\mathfrak{X}$ é metrizável, por isso, basta mostrar que qualquer sucessão de elementos de L possui uma subsucessão convergente em $\mathfrak{X}$ (cf. teorema 2.1.14).

Tomemos uma sucessão arbitrária de elementos de L e denotemo-la por $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

[11] Ver, por exemplo, Viegas [Vie87].

Recorrendo uma vez mais à teoria dos limites projectivos, sabemos que, para todo o r em $\mathbb{N}$, $I_r(L)$ é limitado em $\mathfrak{X}_r$. Mas

$$I_r(L) = L,$$

logo L também é um limitado de $\mathfrak{X}_r$.

O teorema 7.2.15 e o corolário 7.2.4 garantem-nos respectivamente que $\mathfrak{X}_r$ é de Montel e metrizável.

Em particular, para $r = 0$, temos que L é um limitado de $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$ e $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de elementos de L, consequentemente existe uma subsucessão de $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, digamos $\left(\varphi^0_{m_{0_n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, convergente em $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$, isto é,

$$\exists \varphi_0 \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R}) \quad \varphi^0_{m_{0_n}} \to \varphi_0 \quad \text{em } \mathfrak{X}_0(\mathbb{R}) \tag{7.90}$$

Para $r = 1$, temos L um limitado de $\mathfrak{X}_1$, $\left(\varphi^0_{m_{0_n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de elementos de L, logo existe uma subsucessão $\left(\varphi^1_{m_{1_n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ da sucessão $\left(\varphi^0_{m_{0_n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, tal que

$$\exists \varphi_1 \in \mathfrak{X}_1 \quad \varphi^1_{m_{1_n}} \to \varphi_1 \quad \text{em } \mathfrak{X}_1 \tag{7.91}$$

Para $r = 2$, e tendo em conta que L é um subconjunto limitado em $\mathfrak{X}_2$ e que $\left(\varphi^1_{m_{1_n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão em L, existe uma subsucessão $\left(\varphi^2_{m_{2_n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ da sucessão $\left(\varphi^1_{m_{1_n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, tal que

$$\exists \varphi_2 \in \mathfrak{X}_2 \quad \varphi^2_{m_{2_n}} \to \varphi_2 \quad \text{em } \mathfrak{X}_2.$$

Seguindo progressivamente este raciocínio, podemos afirmar que existe uma subsucessão $\left(\varphi^j_{m_{j_n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ da sucessão $\left(\varphi^{j-1}_{m_{j-1_n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, tal que

$$\exists \varphi_j \in \mathfrak{X}_j \quad \varphi^j_{m_{j_n}} \to \varphi_j \quad \text{em } \mathfrak{X}_j \tag{7.92}$$

e assim sucessivamente.

Reconhece-se, com alguma facilidade, que

$$\varphi_0 = \varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_j = \ldots \tag{7.93}$$

Com efeito, a proposição 7.2.5 garante-nos, por exemplo, que

$$\mathfrak{X}_1 \hookrightarrow \mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$$

e como $\left(\varphi^1_{m_{1_n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para φ_1 em $\mathfrak{X}_1$ (cf. (7.91)), vem que

$$\varphi^1_{m_{1_n}} \to \varphi_1 \quad \text{em } \mathfrak{X}_0(\mathbb{R}).$$

Dado que $\left(\varphi^1_{m_{1_n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma subsucessão da sucessão $\left(\varphi^0_{m_{0_n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ e esta última converge para φ_0 em $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$ (ver (7.90)), então só podemos ter

$$\varphi_0 = \varphi_1,$$

pois $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$ é separado.

Raciocinando sucessivamente da mesma forma obtém-se as igualdades descritas em (7.93). Designemos, para todo o j em $\mathbb{N}$, a função φ_j por φ (porque são todas iguais).

Com o intuito de construir uma subsucessão $\left(\varphi_{m_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, que convirja em $\mathfrak{X}$ para a função φ de $\mathfrak{X}$, vamos recorrer ao processo de diagonalização. Assim,

$$\begin{aligned}
\varphi_{m_0} &= \varphi^0_{m_{0_0}} \\
\varphi_{m_1} &= \varphi^1_{m_{1_1}} \\
&\vdots \\
\varphi_{m_j} &= \varphi^j_{m_{j_j}} \\
\varphi_{m_{j+1}} &= \varphi^{j+1}_{m_{j+1_{j+1}}} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Provemos agora que

$$\forall r \in \mathbb{N} \quad \varphi_{m_n} \to \varphi \quad \text{em } \mathfrak{X}_r \tag{7.94}$$

Sejam r, k_1 e m_1 inteiros não negativos quaisquer e ε um real positivo também arbitrário. Temos que, para cada n em $\mathbb{N}$, tal que $n \geq r$, φ_{m_n} é um termo da sucessão $\left(\varphi^r_{m_{r_n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Com efeito, por construção, tem-se que $\left(\varphi^j_{m_{j_n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma subsucessão de $\left(\varphi^{j-1}_{m_{j-1_n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ para todo o j em $\mathbb{N}_1$, pelo que para $j > r$, $\left(\varphi^j_{m_{j_n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma subsucessão de $\left(\varphi^r_{m_{r_n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ e, portanto,

$$\varphi_{m_r}, \varphi_{m_{r+1}}, \varphi_{m_{r+2}}, \ldots$$

são termos da sucessão $\left(\varphi^r_{m_{r_n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Consideremos a seguinte sucessão:

$$\tilde{\varphi}_{m_n} = \begin{cases} \varphi^r_{m_{r_n}} & \text{se } n < r \\ \varphi_{m_n} & \text{se } n \geq r \end{cases}.$$

Verifica-se facilmente que $\left(\tilde{\varphi}_{m_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma subsucessão de $\left(\varphi^r_{m_{r_n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Atendendo às condições (7.92) e (7.93), podemos afirmar que

$$\varphi^r_{m_{r_n}} \to \varphi \quad \text{em } \mathfrak{X}_r,$$

o que implica que

$$\tilde{\varphi}_{m_n} \to \varphi \quad \text{em } \mathfrak{X}_r.$$

Por conseguinte,

$$\exists p_r \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq p_r \Rightarrow \left| \eta^r_{k_1,m_1} \left(\tilde{\varphi}_{m_n} - \varphi \right) \right| \leq \varepsilon.$$

Tomemos uma ordem p como sendo o máximo entre a ordem p_r e o natural r, isto é, $p = \max \{r, p_r\}$. Então

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq p \Rightarrow \left| \eta^r_{k_1,m_1} \left(\tilde{\varphi}_{m_n} - \varphi \right) \right| \leq \varepsilon \tag{7.95}$$

É importante agora realçar que, para $n \geq p \geq r$,

$$\varphi_{m_n} = \tilde{\varphi}_{m_n};$$

logo, de (7.95), tem-se

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq p \Rightarrow \left| \eta^r_{k_1,m_1} \left(\varphi_{m_n} - \varphi \right) \right| \leq \varepsilon,$$

ou seja,

$$\varphi_{m_n} \to \varphi \quad \text{em } \mathfrak{X}_r.$$

Da arbitrariedade de r em $\mathbb{N}$, resulta a condição (7.94). Consequentemente, e uma vez que

$$\mathfrak{X} = \underset{\underset{m}{\longleftarrow}}{\lim} \pi_r^{-1} \left(\mathfrak{X}_r \right),$$

podemos imediatamente asseverar que a subsucessão $\left(\varphi_{m_n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge[12] para φ em $\mathfrak{X}$. Finalmente conclui-se que L é relativamente compacto em $\mathfrak{X}$. ■

Antes de provarmos a injecção contínua de $\mathfrak{X}$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, enunciaremos o seguinte resultado, que por certo é bastante evidente.

Proposição 7.3.6 *Para todo o inteiro não negativo r, tem-se que*

$$\mathfrak{X} \hookrightarrow \mathfrak{X}_r.$$

Demonstração: Fixemos r em $\mathbb{N}$. Obviamente que $\mathfrak{X} = \bigcap_{r \in \mathbb{N}} \mathfrak{X}_r$ é um subconjunto de $\mathfrak{X}_r$ e que a aplicação $I_{\mathfrak{X},\mathfrak{X}_r}$ é linear e injectiva. A continuidade desta aplicação é imediata, pois estando $\mathfrak{X}$ munido com a topologia do limite projectivo, para cada r em $\mathbb{N}$, a aplicação projectiva I_r é contínua, o que implica imediatamente a continuidade de $I_{\mathfrak{X},\mathfrak{X}_r}$ (porque $I_{\mathfrak{X},\mathfrak{X}_r} \equiv I_r$). ■

[12] Observe-se que, por definição do limite projectivo maximal, uma sucessão $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de termos em $\mathfrak{X}$ converge para a função nula, se, e só se, para todo o r em $\mathbb{N}$, $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para a função nula em $\mathfrak{X}_r$.

Corolário 7.3.7 *O espaço $\mathfrak{X}$ está contido com injecção canónica contínua e densa no espaço $\mathcal{S}(I\!R)$ de Schwartz.*

Demonstração: Já vimos na proposição 7.1.11 que $\mathfrak{X}$ é denso em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. A injecção canónica contínua de $\mathfrak{X}$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ advém imediatamente da proposição 7.3.6 e do corolário 7.2.7, que nos garantem respectivamente que

$$\mathfrak{X} \hookrightarrow \mathfrak{X}_r$$

e

$$\mathfrak{X}_r \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

■

Observação 7.3.8 *No prosseguimento da investigação em curso, um problema que surge naturalmente é o de averiguar se $\mathfrak{X}$ é denso em $\mathfrak{X}_0(I\!R)$. Desafortunadamente, não conseguimos responder a esta questão, pelo que permanecerá em aberto.*

Analisemos agora a continuidade dos operadores definidos no nosso espaço $\mathfrak{X}$.

Proposição 7.3.9 *Para todo o z_0 em $\mathbb{C}$, o operador translação complexa*

$$\begin{aligned} \tau_{z_0} : \mathfrak{X} &\longrightarrow \mathfrak{X} \\ \varphi &\longmapsto \tau_{z_0}\varphi \end{aligned}$$

é um isomorfismo vectorial e topológico.

Demonstração: Sejam $\varphi \in \mathfrak{X}$ e $z_0 \in \mathbb{C}$ arbitrários, tal que $z_0 = x_0 + iy_0$.

Comecemos por observar que $\mathfrak{X}$ é fechado para a translação complexa (cf. proposição 7.1.12), portanto τ_{z_0} é, de facto, um operador de $\mathfrak{X}$ em $\mathfrak{X}$.

É muito simples provar que τ_{z_0} é linear e bijectivo, onde, como é natural, o seu operador inverso é dado por τ_{-z_0}.

Escolhamos, ao arbítrio, uma sucessão $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funções de $\mathfrak{X}$ que convirja para zero em $\mathfrak{X}$. Sendo $\mathfrak{X}$ o limite projectivo maximal do espectro projectivo $(\mathfrak{X}_r)_{r\in\mathbb{N}}$ relativamente às aplicações $I_{s,r}$ $(r, s \in \mathbb{N} : r \leq s)$, por definição, temos que, para todo o r em $\mathbb{N}$, $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para zero em $\mathfrak{X}_r$. Por conseguinte, se provarmos que $(\tau_{z_0}\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para a função identicamente nula em todos os espaços $\mathfrak{X}_r$, então $(\tau_{z_0}\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergirá também para zero em $\mathfrak{X}$.

Sejam r, k_1 e m_1 inteiros não negativos quaisquer. Designando $y + y_0$ por y_1, facilmente se reconhece que

$$\begin{aligned} &\sup_{b,y\in[-r,r]} \eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\left(\tau_{z_0}\varphi_n\right)\right) \\ = &\sup_{b,y\in[-r,r]} \eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy_1}\left(\tau_{x_0}\varphi_n\right)\right) \end{aligned} \tag{7.96}$$

Sendo $r_1 = r + |C(y_0)| + 1 \in \mathbb{N}$, temos que $|y_1| = |y + y_0| \leq r_1$ e $|b| \leq r \leq r_1$. Por hipótese sabemos, em particular, que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para zero em $\mathfrak{X}_{r_1}$ e, como o operador translação real define neste espaço um isomorfismo vectorial e topológico (ver proposição 7.2.8), então

$$\tau_{x_0}\varphi_n \to 0 \quad \text{em } \mathfrak{X}_{r_1},$$

ou seja,

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{b,y_1\in[-r_1,r_1]} \eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy_1}\left(\tau_{x_0}\varphi_n\right)\right) = 0 \tag{7.97}$$

É importante agora notar que, se

$$y_1 \in [-r_1, r_1],$$

então

$$y \in [-r_1 - y_0, r_1 - y_0].$$

Portanto, de (7.97),

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{y\in[-r_1-y_0,r_1-y_0]} \sup_{|b|\leq r_1} \eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy_1}\left(\tau_{x_0}\varphi_n\right)\right) = 0 \tag{7.98}$$

Dado que

$$[-r, r] \subset [-r_1 - y_0, r_1 - y_0]$$

e

$$[-r, r] \subset [-r_1, r_1],$$

vem

$$\sup_{b,y\in[-r,r]} \eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy_1}\left(\tau_{x_0}\varphi_n\right)\right) \leq \sup_{y\in[-r_1-y_0,r_1-y_0]} \sup_{|b|\leq r_1} \eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy_1}\left(\tau_{x_0}\varphi_n\right)\right) \tag{7.99}$$

Atendendo às condições (7.98) e (7.99), conclui-se que

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{b,y\in[-r,r]} \eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy_1}\left(\tau_{x_0}\varphi_n\right)\right) = 0.$$

Por (7.96), resulta por fim que

$$\sup_{b,y\in[-r,r]} \eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\left(\tau_{z_0}\varphi_n\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

isto é,

$$\forall r \in \mathbb{N} \quad \tau_{z_0}\varphi_n \to 0 \quad \text{em } \mathfrak{X}_r$$

e, por conseguinte,

$$\tau_{z_0}\varphi_n \to 0 \quad \text{em } \mathfrak{X}.$$

Sendo z_0 um complexo arbitrário, a continuidade do operador translação inversa τ_{-z_0} fica também provada. ■

Proposição 7.3.10 *Seja l um inteiro não negativo. O operador de derivação D_x^l é linear e contínuo de $\mathfrak{X}$ em $\mathfrak{X}$.*

Demonstração: Tomemos l um natural arbitrário. Já vimos na proposição 7.1.15 que D_x^l é um operador de $\mathfrak{X}$ em $\mathfrak{X}$. É trivial afirmar que D_x^l é linear.

Seja $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de funções em $\mathfrak{X}$, convergindo para a função nula em $\mathfrak{X}$. Então, para todo o r em $\mathbb{N}$, $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ para além de ser uma sucessão de funções em $\mathfrak{X}_r$, converge para zero em $\mathfrak{X}_r$ (ver proposição 7.3.6).

Para obtermos a continuidade do operador D_x^l, basta ter em conta as proposições 5.2.14 e 7.2.9, que nos garantem que

$$\forall r \in \mathbb{N} \quad D_x^l(\varphi_n) \to 0 \quad \text{em } \mathfrak{X}_r$$

e o facto de $\mathfrak{X}$ ser o limite projectivo maximal do espectro projectivo $(\mathfrak{X}_r)_{r\in\mathbb{N}}$ relativamente às aplicações $I_{s,r}$ $(r, s \in \mathbb{N} : r \leq s)$. Assim,

$$D_x^l(\varphi_n) \to 0 \quad \text{em } \mathfrak{X}.$$

■

Proposição 7.3.11 *Para todo o número real d, o operador produto por exponenciais P_d, definido por:*

$$\begin{aligned} P_d : \mathfrak{X} &\longrightarrow \mathfrak{X} \\ \varphi &\longmapsto P_d(\varphi) = e^{d\hat{x}} \cdot \varphi \end{aligned}$$

é linear e contínuo.

Demonstração: Seja d um número real qualquer. A proposição 7.1.21 diz-nos que P_d é um operador de $\mathfrak{X}$ em $\mathfrak{X}$. Obviamente que este operador é linear.

Se escolhermos, ao arbítrio, uma sucessão $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funções em $\mathfrak{X}$ que convirja para a função nula em $\mathfrak{X}$, então, para todo o r em $\mathbb{N}$, $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de funções em $\mathfrak{X}_r$ que também converge para zero em $\mathfrak{X}_r$ (cf. proposição 7.3.6).

Tomemos agora, r, k_1 e m_1 em $\mathbb{N}$ arbitrários. Ora,

$$\sup_{b,y\in[-r,r]} \eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\left(\mathrm{e}^{d\hat{x}}\varphi_n\right)\right) = \sup_{b,y\in[-r,r]} \eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{(b+d)\hat{x}}\tau_{iy}\varphi_n\right) \tag{7.100}$$

Fazendo $r_1 = r + |C(d)| + 1$ e $b_1 = b + d$, temos que $|b_1| = |b + d| \leq r_1$ e $|y| \leq r \leq r_1$. Sabendo que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para zero em $\mathfrak{X}_{r_1}$, então

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{b_1,y\in[-r_1,r_1]} \eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b_1\hat{x}}\tau_{iy}\varphi_n\right) = 0 \tag{7.101}$$

Uma vez que

$$(b + d) \in [-r_1, r_1],$$

logo

$$b \in [-r_1 - d, r_1 - d].$$

Por isso, podemos asseverar de (7.101) que

$$\lim_{n \to +\infty} \sup_{|y| \leq r_1} \sup_{b \in [-r_1 - d, r_1 - d]} \eta_{k_1, m_1} \left(\mathrm{e}^{b_1 \hat{x}} \tau_{iy} \varphi_n \right) = 0 \tag{7.102}$$

Mas,

$$[-r, r] \subset [-r_1, r_1]$$

e

$$[-r, r] \subset [-r_1 - d, r_1 - d],$$

donde

$$\sup_{b, y \in [-r, r]} \eta_{k_1, m_1} \left(\mathrm{e}^{b_1 \hat{x}} \tau_{iy} \varphi_n \right) \leq \sup_{|y| \leq r_1} \sup_{b \in [-r_1 - d, r_1 - d]} \eta_{k_1, m_1} \left(\mathrm{e}^{b_1 \hat{x}} \tau_{iy} \varphi_n \right),$$

o que, por (7.102), implica que

$$\sup_{b, y \in [-r, r]} \eta_{k_1, m_1} \left(\mathrm{e}^{b_1 \hat{x}} \tau_{iy} \varphi_n \right) \to 0.$$

Portanto, da igualdade (7.100), decorre imediatamente que

$$\lim_{n \to +\infty} \sup_{b, y \in [-r, r]} \eta_{k_1, m_1} \left(\mathrm{e}^{b \hat{x}} \tau_{iy} \left(\mathrm{e}^{d \hat{x}} \varphi_n \right) \right) = 0,$$

o que significa, dada a arbitrariedade de r em $\mathbb{N}$, que

$$\forall r \in \mathbb{N} \quad P_d (\varphi_n) \to 0 \quad \text{em } \mathfrak{X}_r.$$

Atendendo, uma vez mais, à definição da topologia do limite projectivo maximal, podemos garantir a convergência de $(P_d (\varphi_n))_{n \in \mathbb{N}}$ para a função identicamente nula em $\mathfrak{X}$. Consequentemente, o operador P_d é contínuo. ∎

Proposição 7.3.12 *Para cada q em $\mathcal{P}$, o operador produto por polinómios P_q, definido por:*

$$P_q (\varphi) = q \cdot \varphi$$

é linear e contínuo de $\mathfrak{X}$ em $\mathfrak{X}$.

Demonstração: É suficiente ter em consideração as proposições 7.1.23, 5.2.15 e 7.2.10 e raciocinar de forma interiamente análoga à demonstração da proposição 7.3.10. ∎

Proposição 7.3.13 *O operador transformação de Fourier definido por*

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \mathfrak{X} &\longrightarrow \mathfrak{X} \\ \varphi &\longmapsto \mathcal{F}\varphi, \end{aligned}$$

onde

$$\mathcal{F}\varphi = \int_{I\!R} e^{-ix\hat{\xi}} \varphi\left(x\right) dx \tag{7.103}$$

é um isomorfismo vectorial e topológico.

Demonstração: A convergência absoluta do integral definido por (7.103) é garantida pelo corolário 7.3.7 que afirma

$$\mathfrak{X} \overset{d}{\hookrightarrow} \mathcal{S}\left(\mathbb{R}\right).$$

Sabemos, em particular, pela proposição 7.3.6, que

$$\mathfrak{X} \hookrightarrow \mathfrak{X}_0\left(\mathbb{R}\right).$$

Portanto, sendo $\mathcal{F}$ a restrição a $\mathfrak{X}$ do operador transformação de Fourier definido em $\mathfrak{X}_0\left(\mathbb{R}\right)$, $\mathcal{F}$ é linear e injectiva, pois a transformada de Fourier define em $\mathfrak{X}_0\left(\mathbb{R}\right)$ um isomorfismo vectorial e topológico (ver proposição 5.2.16).

À luz das proposições 7.1.19 e 7.3.6 e das observações 7.1.18 e 5.2.17, reconhece-se facilmente que

$$\forall \psi \in \mathfrak{X} \quad \exists \varphi = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}_{-1}\psi \in \mathfrak{X} \quad \psi = \mathcal{F}\varphi,$$

isto é, $\mathcal{F}$ é sobrejectiva.

Fixemos $\left(\varphi_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de funções em $\mathfrak{X}$, tal que $\left(\varphi_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para zero em $\mathfrak{X}$. Então, para todo o r em $\mathbb{N}$, $\left(\varphi_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de funções em $\mathfrak{X}_r$ que também converge para zero em $\mathfrak{X}_r$ (cf. proposição 7.3.6).

Sejam r, k_1 e m_1 naturais arbitrários. Baseando-nos nos cálculos efectuados na demonstração da proposição 7.1.19, podemos afirmar que

$$\begin{aligned} & \sup_{b,y\in[-r,r]} \eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\left(\mathcal{F}\varphi_n\right)\right) \\ \leq & \sup_{b,y\in[-r,r]} \left\|\mathrm{e}^{k_1|\hat{\xi}|} D_\xi^{m_1}\left(\mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{-y\hat{x}}\tau_{ib}\varphi_n\right)\right)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \\ & +2\pi \sup_{b,y\in[-r,r]} \left\|\mathrm{e}^{k_1|\hat{x}|} D_x^{m_1}\left(\mathrm{e}^{y\hat{x}}\tau_{ib}\varphi_n\left(-\hat{x}\right)\right)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \end{aligned} \tag{7.104}$$

Como

$$\varphi_n \to 0 \quad \text{em } \mathfrak{X}_r,$$

temos, por um lado, que

$$\sup_{b,y\in[-r,r]} \left\| e^{k_1|\hat{\xi}|} D_\xi^{m_1} \left(\mathcal{F}\left(e^{-y\hat{x}} \tau_{ib} \varphi_n \right) \right) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \to 0 \tag{7.105}$$

e por outro lado, (como facilmente se reconhece),

$$\varphi_n(-\hat{x}) \to 0 \quad \text{em } \mathfrak{X}_r.$$

Consequentemente,

$$\sup_{b,y\in[-r,r]} \left\| e^{k_1|\hat{x}|} D_x^{m_1} \left(e^{y\hat{x}} \tau_{ib} \varphi_n(-\hat{x}) \right) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \to 0 \tag{7.106}$$

Decorre das condições (7.105) e (7.106) que

$$\begin{aligned} &\sup_{b,y\in[-r,r]} \left\| e^{k_1|\hat{\xi}|} D_\xi^{m_1} \left(\mathcal{F}\left(e^{-y\hat{x}} \tau_{ib} \varphi_n \right) \right) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \\ + \quad &2\pi \sup_{b,y\in[-r,r]} \left\| e^{k_1|\hat{x}|} D_x^{m_1} \left(e^{y\hat{x}} \tau_{ib} \varphi_n(-\hat{x}) \right) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \to 0 \end{aligned}$$

e por isso, da desigualdade (7.104), vem

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{b,y\in[-r,r]} \eta_{k_1,m_1} \left(e^{b\hat{x}} \tau_{iy} (\mathcal{F}\varphi_n) \right) = 0.$$

Da arbitrariedade de r em $\mathbb{N}$, resulta que

$$\forall r \in \mathbb{N} \quad \mathcal{F}(\varphi_n) \to 0 \quad \text{em } \mathfrak{X}_r.$$

Como $\mathfrak{X}$ é o limite projectivo maximal, então

$$\mathcal{F}(\varphi_n) \to 0 \quad \text{em } \mathfrak{X},$$

ou seja, o operador $\mathcal{F}$ é contínuo.

Um vez que $\mathfrak{X}$ é um espaço de Fréchet (cf. proposição 7.3.3) e $\mathcal{F}$ é linear, contínua e bijectiva, o teorema da aplicação aberta assegura-nos que $\mathcal{F}$ é uma aplicação aberta. Por conseguinte, a sua inversa $\mathcal{F}^{-1} = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}_{-1}$ também é contínua[13]. ■

[13] À semelhança do que fizemos anteriormente, podemos afirmar que a aplicação

$$\varphi \to \varphi\left(-\hat{\xi}\right)$$

também é contínua de $\mathfrak{X}$ em $\mathfrak{X}$, pois (cf. teorema 2.2.5)

$$\mathcal{F}_{-1}(\varphi)(\xi) = \mathcal{F}\varphi(-\xi)$$

e $\mathcal{F}_{-1}$ é um operador contínuo de $\mathfrak{X}$ em $\mathfrak{X}$, porque

$$\mathcal{F}_{-1} = 2\pi\mathcal{F}^{-1}.$$

Observação 7.3.14 *As propriedades (2.19) a (2.22) da transformação de Fourier, estabelecidas na proposição 2.2.7 são trivialmente verdadeiras no espaço $\mathfrak{X}$, pois como já tivemos oportunidade de referir $\mathfrak{X} \subset \mathcal{S}(I\!R)$ (cf. proposição 7.1.11), $\mathcal{S}(I\!R) \subset \mathcal{S}'(I\!R)$ e pela proposição anterior $\mathcal{F}$ é um isomorfismo de $\mathfrak{X}$ em $\mathfrak{X}$. Recorrendo à definição usual da convolução, podemos provar que, em $\mathfrak{X}$, as propriedades (2.23) e (2.24) e o corolário 2.2.10 são válidos. Também é possível demonstrar o corolário 2.2.9 no espaço $\mathfrak{X}$.*

Capítulo 8

Ultradistribuições exponenciais

Este capítulo estuda, de um ponto de vista geral, o dual topológico $\mathfrak{X}'$ do espaço $\mathfrak{X}$ construído no capítulo anterior. Veremos que os operadores definidos em $\mathfrak{X}$ se mantêm lineares e contínuos em $\mathfrak{X}'$, em especial a transformação de Fourier define um isomorfismo vectorial e topológico em $\mathfrak{X}'$, o que generaliza o resultado de Schwartz para as distribuições temperadas. Identificaremos algumas ultradistribuições exponenciais e séries de multipolos convergentes em $\mathfrak{X}'$.

8.1 O espaço $\mathfrak{X}'$

Atendendo a que no espaço $\mathfrak{X}$ está definida a translação complexa, os elementos do seu dual topológico $\mathfrak{X}'$ são designados, como é usual, por ultradistribuições. Deste modo, dizemos que T é uma ultradistribuição pertencente a $\mathfrak{X}'$ se, e só se, T é um funcional linear e contínuo sobre $\mathfrak{X}$, ou seja,

$$\begin{aligned} T : \mathfrak{X} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \varphi &\longmapsto \langle T, \varphi \rangle_{\mathfrak{X}', \mathfrak{X}} \end{aligned}$$

é uma aplicação linear e contínua.

Por comodidade, e desde que não haja ambiguidade na notação, designaremos o produto de dualidade entre $\mathfrak{X}'$ e $\mathfrak{X}$ somente por $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Se munirmos o espaço $\mathfrak{X}'$ com a topologia forte, $\beta(\mathfrak{X}', \mathfrak{X})$, esta coincide com a topologia da convergência uniforme nos limitados de $\mathfrak{X}$, pois $\mathfrak{X}$ é separado (cf. proposição 7.3.3).

Naturalmente que $\mathfrak{X}'$ é invariante para a generalização natural dos operadores definidos em $\mathfrak{X}$. Como sabemos, os operadores em $\mathfrak{X}'$ constroem-se por transposição dos operadores previamente definidos em $\mathfrak{X}$ e, por isso, mantêm-se lineares e contínuos de $\mathfrak{X}'$ em $\mathfrak{X}'$. Passemos, então, a apresentar tais operadores.

Proposição 8.1.1 *Para todo o z_0 em $\mathbb{C}$, o operador translação complexa*

$$\tilde{\tau}_{z_0} : \mathfrak{X}' \longrightarrow \mathfrak{X}'$$

definido por

$$\forall T \in \mathfrak{X}' \quad \forall \varphi \in \mathfrak{X} \quad \langle \tilde{\tau}_{z_0} T, \varphi \rangle = \langle T, \tau_{-z_0} \varphi \rangle$$

é um isomorfismo vectorial e topológico, onde o operador inverso é dado por $\tilde{\tau}_{-z_0}$.

Proposição 8.1.2 *Seja l um inteiro não negativo. O operador de derivação*

$$\begin{aligned} \tilde{D}_x^l : \mathfrak{X}' &\longrightarrow \mathfrak{X}' \\ T &\longmapsto \tilde{D}_x^l T \end{aligned}$$

definido por

$$\forall \varphi \in \mathfrak{X} \quad \left\langle \tilde{D}_x^l T, \varphi \right\rangle = (-1)^l \left\langle T, D_x^l \varphi \right\rangle$$

é linear e contínuo.

Proposição 8.1.3 *Para todo o número real d, o operador produto por exponenciais*

$$\tilde{P}_d : \mathfrak{X}' \longrightarrow \mathfrak{X}',$$

tal que

$$\forall T \in \mathfrak{X}' \quad \forall \varphi \in \mathfrak{X} \quad \left\langle \tilde{P}_d T, \varphi \right\rangle = \langle T, P_d \varphi \rangle = \left\langle T, e^{d\hat{x}} \cdot \varphi \right\rangle$$

é linear e contínuo.

Proposição 8.1.4 *Para cada $q \in \mathcal{P}$, o operador produto por polinómios*

$$\tilde{P}_q : \mathfrak{X}' \longrightarrow \mathfrak{X}'$$

definido por

$$\forall T \in \mathfrak{X}' \quad \forall \varphi \in \mathfrak{X} \quad \left\langle \tilde{P}_q T, \varphi \right\rangle = \langle T, P_q \varphi \rangle = \langle T, q \cdot \varphi \rangle$$

é linear e contínuo de $\mathfrak{X}'$ em $\mathfrak{X}'$.

Observação 8.1.5 *Para maior clareza e simplificação da notação, e atendendo a que os operadores definidos em $\mathfrak{X}'$ generalizam os correspondentes operadores em $\mathfrak{X}$, omitiremos o símbolo $\sim$ em cada um dos operadores determinados em $\mathfrak{X}'$.*

8.2 Transformação de Fourier no dual de $\mathfrak{X}$

Vimos na proposição 7.3.13 que o operador transformação de Fourier $\mathcal{F}$ definido em $\mathfrak{X}$ é um isomorfismo vectorial e topológico de $\mathfrak{X}$ nele próprio. Assim, aplicando o processo de transposição ao operador $\mathcal{F}$, obtém-se um operador $\tilde{\mathcal{F}}$, definido por:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{F}} : \mathfrak{X}' &\longrightarrow \mathfrak{X}' \\ T &\longmapsto \tilde{\mathcal{F}}T, \end{aligned}$$

onde

$$\forall T \in \mathfrak{X}' \quad \forall \varphi \in \mathfrak{X} \quad \left\langle \tilde{\mathcal{F}}T, \varphi \right\rangle = \langle T, \mathcal{F}\varphi \rangle \tag{8.1}$$

É importante realçar que, sendo $\tilde{\mathcal{F}}$ o transposto de um operador linear, bijectivo e bicontínuo, $\tilde{\mathcal{F}}$ satisfaz também estas propriedades. Surge, por conseguinte, a seguinte proposição:

Proposição 8.2.1 *O operador transformação de Fourier $\tilde{\mathcal{F}}$, definido em 8.1, constitui um isomorfismo vectorial e topológico de $\mathfrak{X}'$ sobre $\mathfrak{X}'$ e prolonga o operador transformação de Fourier $\mathcal{F}$ determinado em $\mathfrak{X}$.*

Observação 8.2.2 *Por dualidade, as propriedades da transformação de Fourier em $\mathfrak{X}$ mantêm-se verdadeiras em $\mathfrak{X}'$, ou seja, todas as propriedades de $\mathcal{F}$ definidas em $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ (ver proposição 2.2.7 e corolários 2.2.9 e 2.2.10) são válidas no espaço de ultradistribuições exponenciais $\mathfrak{X}'$.*

Observação 8.2.3 *Mais uma vez, para maior facilidade de escrita e quando não haja possibilidade de equívoco, notaremos a transformação de Fourier em $\mathfrak{X}'$ por $\mathcal{F}$ em vez de $\tilde{\mathcal{F}}$.*

8.3 Identificação de algumas ultradistribuições exponencias de $\mathfrak{X}'$

Neste parágrafo vamos caracterizar alguns elementos de $\mathfrak{X}'$. No entanto, convém salientar que, como já mencionámos anteriormente, não nos foi possível mostrar a densidade de $\mathfrak{X}$ em $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$, pelo que não podemos garantir a injecção de $\mathfrak{X}_0'(\mathbb{R})$ em $\mathfrak{X}'$. Nestas condições, apenas podemos asseverar que, para qualquer distribuição generalizada T, existe uma ultradistribuição exponencial $\tilde{T}$, que é a restrição a $\mathfrak{X}$ de T:

$$\forall T \in \mathfrak{X}_0'(\mathbb{R}) \quad \exists \tilde{T} \in \mathfrak{X}' \quad T_{|\mathfrak{X}} = \tilde{T}.$$

No entanto, como $\mathfrak{X}$ está contido com injecção canónica contínua e densa em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ (cf. corolário 7.3.7), podemos, por dualidade, enunciar o seguinte teorema:

Teorema 8.3.1

$$\mathcal{S}'(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathfrak{X}'.$$

Tendo-se ainda

$$\forall T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \quad \forall \varphi \in \mathfrak{X} \quad \langle T, \varphi \rangle_{\mathfrak{X}',\mathfrak{X}} = \langle T, \varphi \rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} \ .$$

Consequentemente, temos o seguinte resultado:

Observação 8.3.2 *Como*

$$\mathfrak{X} \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

e

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R})\,;$$

então, pelo teorema precedente,

$$\mathfrak{X} \hookrightarrow \mathfrak{X}'.$$

Segue-se a análise das propriedades topológicas do nosso espaço $\mathfrak{X}'$.

Observação 8.3.3 *Sendo $\mathfrak{X}'$ um espaço semi-normado, é localmente convexo.*

Proposição 8.3.4 *O espaço das ultradistribuições $\mathfrak{X}'$ é de Montel.*

Demonstração: Resulta imediatamente do teorema 2.1.17 e do facto de $\mathfrak{X}$ ser um espaço de Montel (cf. teorema 7.3.5). ■

Corolário 8.3.5 *$\mathfrak{X}'$ é um espaço tonelado e de Hausdorff.*

Demonstração: É uma consequência imediata da proposição anterior. ■

Corolário 8.3.6 *O espaço $(\mathfrak{X}', \beta(\mathfrak{X}', \mathfrak{X}))$ é reflexivo.*

Demonstração: Advém novamente da proposição 8.3.4 e do teorema 2.1.17. ■

Observação 8.3.7 *Uma vez que é possível provar que não existe nenhuma família de semi-normas contável que origine a topologia forte em $\mathfrak{X}'$, podemos dizer que o espaço $\mathfrak{X}'$ não é metrizável (cf. teorema 2.1.13).*

Como consequência da observação anterior, temos que:

Observação 8.3.8 *O espaço $\mathfrak{X}'$ não é de Fréchet.*

Observe-se, no entanto, que o resultado seguinte garante a completude do nosso espaço de ultradistribuições exponenciais.

Proposição 8.3.9 *$\mathfrak{X}'$ é completo.*

Demonstração: Como $\mathfrak{X}$ é separado e bornológico (ver proposição 7.3.4), então, pela proposição 2.1.19, o seu dual topológico $\mathfrak{X}'$ é completo para a topologia forte $\beta(\mathfrak{X}', \mathfrak{X})$.

■

Passamos agora a enunciar um resultado que nos assegura que toda a função de $\mathcal{C}_{e^+}(\mathrm{I\!R})$ se identifica com uma ultradistribuição exponencial:

Teorema 8.3.10 *Seja f uma função contínua de crescimento exponencial em $\mathrm{I\!R}$. Então f é uma ultradistribuição exponencial de $\mathfrak{X}'$.*

Demonstração: Definamos, então, uma aplicação $\mathcal{T}$ entre os espaços $\mathcal{C}_{e^+}(\mathrm{I\!R})$ e $\mathfrak{X}'$, da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \mathcal{T} : \mathcal{C}_{e^+}(\mathrm{I\!R}) &\longrightarrow \mathfrak{X}' \\ f &\longmapsto \mathcal{T}_f, \end{aligned}$$

tal que

$$\forall \varphi \in \mathfrak{X} \quad \langle \mathcal{T}_f, \varphi \rangle = \int_{\mathrm{I\!R}} f(x)\, \varphi(x)\, dx.$$

A demonstração deste teorema faz-se de forma análoga à do teorema 6.3.8 da secção 6.3. Assim, dever-se-á provar o correspondente aos três lemas de então, ou seja, mostrar que $\int_{\mathrm{I\!R}} f(x)\, \varphi(x)\, dx$ existe, que $\mathcal{T}_f$ é uma ultradistribuição de $\mathfrak{X}'$ e, por último, que $\mathcal{T}$ é injectiva.

Após uma análise pormenorizada à demonstração do dito teorema 6.3.8, podemos observar que o primeiro dos lemas (lema 6.3.9) se baseia essencialmente no facto de φ ser uma função de decrescimento exponencial rápido, o que permanece aqui inalterado, pois φ é uma função de $\mathfrak{X}$ e $\mathfrak{X}$ é um subconjunto de $\mathfrak{X}_0(\mathrm{I\!R})$. O segundo lema (lema 6.3.10) apoia-se na definição de convergência em $\mathfrak{X}_0(\mathrm{I\!R})$, o que, mais uma vez, não nos causa problemas, pois basta recordar que $\mathfrak{X}$ está contido com injecção canónica contínua em $\mathfrak{X}_0(\mathrm{I\!R})$ (ver proposição 7.3.6). O terceiro, e por certo o mais importante dos lemas (lema 6.3.11), fundamenta-se principalmente nos factos de a função $\hat{x}^n \cdot \mathrm{e}^{-\hat{x}^2}$ pertencer ao espaço das funções teste e de a derivada de ordem n no ponto zero da transformação de Fourier de $f \cdot \mathrm{e}^{-\hat{x}^2}$ identificar-se, a menos de uma constante, com os momentos de ordem n dessa mesma função. Ora, este último facto é aqui aplicável pois, tal como antes, $f \cdot \mathrm{e}^{-\hat{x}^2}$ é uma distribuição temperada de Schwartz. Por último, como $\hat{x}^n \cdot \mathrm{e}^{-\hat{x}^2}$ é uma função de $\mathcal{G}_1(\mathrm{I\!R})$ e $\mathcal{G}_1(\mathrm{I\!R})$ é um subconjunto de $\mathfrak{X}$ (cf. proposição 7.1.10), então o terceiro lema é válido, isto é, $\mathcal{T}$ é de facto uma injecção de $\mathcal{C}_{e^+}(\mathrm{I\!R})$ em $\mathfrak{X}'$. ■

Observação 8.3.11 *Tal como já acontecia em* $\mathfrak{X}'_0(I\!R)$, *a equação diferencial* $u' = u$ *tem solução*[1] *não nula no espaço das ultradistribuições exponenciais* $\mathfrak{X}'$, *pois a função* $e^{\hat{x}}$ *tem crescimento exponencial (cf. exemplo 3.1.2) e, portanto, é uma ultradistribuição exponencial.*

Ao examinarmos minuciosamente a demonstração do teorema 6.3.13 do secção 6.3 e tendo em consideração o teorema 8.3.10, é fácil mostrar que:

Teorema 8.3.12 *Se* $f \in \mathcal{A}_{e^+}(\mathbb{C})$ *e se* $(p_n)_{n\in I\!N} \in (\mathfrak{X}')^{I\!N}$ *for a sucessão de polinómios de Mac-Laurin de* f, *então* $p_n \to f$ *em* $(\mathfrak{X}', \beta(\mathfrak{X}', \mathfrak{X}))$.

Observação 8.3.13 *Assim como sucedia em* $\mathfrak{X}'_0(I\!R)$, *a sucessão de polinómios de Mac-Laurin de* $\exp(-\hat{x}^2)$ *não converge em* $\mathfrak{X}'$ *para esta ultradistribuição.*

A demonstração do teorema seguinte é análoga à do teorema 6.3.15 do parágrafo 6.3.

Teorema 8.3.14 *Se a sucessão* $\left(\sqrt[j]{j!\,|b_j|}\right)_{j\in I\!N_1}$ *é limitada, então a série de multipolos* $\sum_{j\geq 0} b_j\delta^{(j)}$ *é convergente em* $\mathfrak{X}'$.

Terminamos este subcapítulo com dois resultados que já eram previsíveis. O primeiro deles assegura que a injecção canónica contínua de $\mathfrak{X}$ em $\mathfrak{X}'$ é densa, e o segundo, por sua vez, trata da densidade do espaço das distribuições temperadas de Schwartz no espaço das ultradistribuições exponenciais $\mathfrak{X}'$.

Proposição 8.3.15 *O espaço* $\mathfrak{X}$ *está contido com injecção canónica contínua e densa em* $\mathfrak{X}'$.

Demonstração: Na observação 8.3.2 provámos que

$$\mathfrak{X} \hookrightarrow \mathfrak{X}'.$$

Com respeito à densidade de $\mathfrak{X}$ em $\mathfrak{X}'$, basta recordar que tanto $\mathfrak{X}$ como $\mathfrak{X}'$ são reflexivos (ver proposição 7.3.3 e corolário 8.3.6). Portanto, sendo T um elemento qualquer de $\mathfrak{X}''$, temos que T é uma função teste de $\mathfrak{X}$. Suponhamos ainda que

$$\forall \varphi \in \mathfrak{X} \quad \langle T, \varphi \rangle_{\mathfrak{X}'', \mathfrak{X}'} = 0.$$

[1] Ver observação 9.2.1 da secção 9.2.

Então, para $\varphi = T$, resulta que

$$\langle T, \varphi \rangle_{\mathfrak{X}'', \mathfrak{X}'} = \int_{\mathbb{R}} T^2(x)\, dx = 0$$

o que implica que $T = 0$. Acabámos de provar que

$$\forall T \in \mathfrak{X}'' \quad \left(\forall \varphi \in \mathfrak{X} : \langle T, \varphi \rangle_{\mathfrak{X}'', \mathfrak{X}'} = 0 \right) \Rightarrow T = 0,$$

isto é, $\mathfrak{X}$ é denso em $\mathfrak{X}'$. ∎

Proposição 8.3.16

$$\mathcal{S}'(\mathbb{R}) \overset{d}{\subset} \mathfrak{X}'.$$

Demonstração: A prova é inteiramente análoga à da proposição 6.3.17 da secção 6.3, não esquecendo que $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ está contido com injecção canónica contínua em $\mathfrak{X}'$ (cf. teorema 8.3.1) e que $\mathfrak{X}$ é denso em $\mathfrak{X}'$ (ver proposição 8.3.15). ∎

Capítulo 9

Aplicações e comentários finais

There is no branch of mathematics, however abstract, which may not some day be applied to phenomena of the real world.

Nikolai Lobatchevsky

Apresentaremos agora alguns exemplos de ultradistribuições exponenciais de $\mathfrak{X}'$ que têm representação em série de multipolos convergente neste espaço e exporemos algumas aplicações destas séries, isto é, mostraremos como é possível resolver equações diferenciais ordinárias em $\mathfrak{X}'$, utilizando as séries de multipolos convergentes em $\mathfrak{X}'$. Por último, faremos algumas observações finais, onde apontaremos alguns rumos de continuidade deste trabalho.

9.1 Exemplos de séries de multipolos em $\mathfrak{X}'$

1. Já vimos que $\mathrm{e}^{\hat{x}}$ tem crescimento exponencial em $\mathbb{C}$; por isso $\mathrm{e}^{\hat{x}} \in \mathfrak{X}'$ (cf. teorema 8.3.10) e, pelo teorema 8.3.12,

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!} \to \mathrm{e}^x \text{ em } \left(\mathfrak{X}', \beta\left(\mathfrak{X}', \mathfrak{X}\right)\right).$$

Atendendo a que a transformação de Fourier $\mathcal{F}$ define um isomorfismo vectorial e topológico em $\mathfrak{X}'$ (ver proposição 8.2.1), temos

$$\mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{\hat{x}}\right) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} \mathcal{F}\left(\hat{x}^j\right)$$

e

$$\mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{\hat{x}}\right) \in \mathfrak{X}',$$

isto é, a série de multipolos

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{2\pi i^j}{j!} \delta^{(j)}$$

é convergente para $\mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{\hat{x}}\right)$ em $\mathfrak{X}'$ (cf. teorema 8.3.14).

2. Seja $a \in \mathbb{R}$; então $\mathrm{e}^{ia\hat{x}}$ tem crescimento exponencial em $\mathbb{C}$, por isso é também uma ultradistribuição de $\mathfrak{X}'$. Analogamente ao que se fez no exemplo anterior, podemos dizer que a sucessão $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polinómios de Mac-Laurin, ou seja,

$$p_n = \sum_{j=0}^{n} \frac{(ai)^j}{j!} \hat{x}^j$$

converge para $\mathrm{e}^{ia\hat{x}}$ em $(\mathfrak{X}', \beta(\mathfrak{X}', \mathfrak{X}))$. Como a transformação de Fourier $\mathcal{F}$ é um isomorfismo vectorial e topológico em $\mathfrak{X}'$, vem que

$$\mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{ia\hat{x}}\right) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(ai)^j}{j!} \mathcal{F}\left(\hat{x}^j\right)$$

e

$$\mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{ia\hat{x}}\right) \in \mathfrak{X}',$$

ou seja, a série de multipolos

$$\sum_{j=0}^{+\infty} 2\pi \frac{(-a)^j}{j!} \delta^{(j)} \tag{9.1}$$

é convergente para $\mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{ia\hat{x}}\right)$ em $\mathfrak{X}'$.
Por outro lado, e tendo em conta as propriedades da transformação de Fourier em $\mathfrak{X}'$, resulta que

$$\mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{ia\hat{x}}\right) = \tau_a\left(\mathcal{F}1\right) = 2\pi\delta_a;$$

logo, por (9.1),

$$\delta_a = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-a)^j}{j!} \delta^{(j)};$$

portanto, a distribuição $\boldsymbol{\delta_a}$ tem **representação em série de multipolos convergente** em $\mathfrak{X}'$.

9.2 Equações diferenciais ordinárias

Como veremos em seguida, os resultados obtidos nos parágrafos anteriores permitem estudar equações diferenciais ordinárias lineares no âmbito das ultradistribuições.

Consideremos a seguinte equação diferencial ordinária de 1^aordem

$$x^2 T' + T = 0 \tag{9.2}$$

Procuremos uma solução da forma

$$T = \sum_{j=0}^{+\infty} b_j \delta^{(j)}.$$

Assim,

$$x^2 T' = \sum_{j=0}^{+\infty} b_j x^2 \delta^{(j+1)}$$

e como

$$x^2 \delta^{(j+1)} = \begin{cases} 0 & j = 0 \\ \dfrac{(j+1)!}{(j-1)!}\delta^{(j-1)} & j \geq 1 \end{cases},$$

vem que

$$\begin{aligned} & x^2 T' + T = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \sum_{j=1}^{+\infty} b_j (j+1) j \delta^{(j-1)} + \sum_{j=0}^{+\infty} b_j \delta^{(j)} = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \sum_{j=0}^{+\infty} \left(b_{j+1}(j+2)(j+1) + b_j\right) \delta^{(j)} = 0. \end{aligned}$$

Logo

$$b_{j+1} = -\frac{b_j}{(j+2)(j+1)},$$

donde se conclui que b_0 pode tomar qualquer valor complexo e

$$\forall j \geq 0 \quad b_j = b_0 \frac{(-1)^j}{(j+1)!j!}.$$

Por isso, a solução da equação diferencial (9.2) é

$$T = b_0 \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{(j+1)!j!} \delta^{(j)}, \quad \text{com } b_0 \in \mathbb{C} \tag{9.3}$$

Vejamos agora que a série de multipolos dada em (9.3) é convergente em $\mathfrak{X}'$. Para tal, recorreremos ao teorema 8.3.14.

Efectivamente, a sucessão $\left(\sqrt[j]{j!\left|b_0\frac{(-1)^j}{(j+1)!j!}\right|}\right)_{j\in\mathbb{N}_1}$ é limitada, por ser convergente, pois

$$\begin{aligned}
&\lim_{j\to+\infty}\sqrt[j]{j!\left|b_0\frac{(-1)^j}{(j+1)!j!}\right|}\\
=&\lim_{j\to+\infty}\sqrt[j]{\frac{|b_0|}{(j+1)!}}\\
=&\lim_{j\to+\infty}\frac{|b_0|}{(j+2)!}\frac{(j+1)!}{|b_0|}\\
=&\ 0.
\end{aligned}$$

Assim, podemos imediatamente afirmar que a série de multipolos definida em (9.3) é convergente em $\mathfrak{X}'$ (cf. teorema 8.3.14).

Observação 9.2.1 *Não se pense que todos os elementos de $\mathfrak{X}'$ se podem desenvolver em série de multipolos. Por exemplo, a ultradistribuição exponencial $e^{\hat{x}}$ não tem representação em série de multipolos em $\mathfrak{X}'$. Basta considerar a equação diferencial:*

$$u'-u=0 \tag{9.4}$$

e supôr que

$$T=\sum_{j=0}^{+\infty}b_j\delta^{(j)}$$

é uma solução da equação. Então

$$\begin{aligned}
&u'-u=0\\
\Leftrightarrow\ &\sum_{j=0}^{+\infty}b_j\delta^{(j+1)}-\sum_{j=0}^{+\infty}b_j\delta^{(j)}=0\\
\Leftrightarrow\ &\sum_{j=1}^{+\infty}\left(b_{j-1}-b_j\right)\delta^{(j)}-b_0\delta=0.
\end{aligned}$$

Logo

$$\forall j\geq 0\quad b_j=0,$$

ou seja,

$$T=0.$$

Portanto, a única série de multipolos convergente em $\mathfrak{X}'$, e que é solução da equação (9.4), é a série identicamente nula, o que nos garante que, embora a função $e^{\hat{x}}$ seja uma ultradistribuição exponencial, não tem representação em série de multipolos em $\mathfrak{X}'$, pois, como sabemos, $e^{\hat{x}}$ é uma solução da equação diferencial (9.4).

9.3 Observações finais

What we know is not much. What we do not know is immense.

Pierre-Simon de Laplace

Não temos a veleidade de afirmar que tudo ficou esclarecido neste estudo. Temos, pelo contrário, a noção de que estamos apenas a levantar a ponta do véu de um estudo que se pretende continuado, especialmente no sentido de averiguar de que forma se relaciona o nosso espaço de ultradistribuições exponenciais $\mathfrak{X}'$ com o espaço das ultradistribuições de crescimento exponencial de Sebastião e Silva. Acreditamos que este espaço de Sebastião e Silva está estritamente contido em $\mathfrak{X}'$, pois já foi provado que o espaço de ultradistribuições de crescimento exponencial coincide com o dual do espaço das funções de decrescimento exponencial; ora, este último espaço contém estritamente o nosso espaço de funções teste $\mathfrak{X}$, porque as nossas funções, para além de serem de decrescimento exponencial rápido, as suas transformadas de Fourier também o são. Assim sendo, é lícito pensarmos que $\mathfrak{X}'$ contém estritamente o espaço de ultradistribuições de crescimento exponencial de Sebastião e Silva.

Durante esta investigação foram surgindo alguns problemas que merecem a nossa consideração pois, infelizmente, os deixamos em aberto. Por exemplo, seria interessante saber se, para toda a função φ de $\mathfrak{X}_r$ e para todo o k_1 e m_1 em $\mathbb{N}$,

$$\eta^r_{k_1,m_1}(\varphi) = \sup_{b,y\in[-r,r]} \eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi\right) \tag{9.5}$$

é finito? Por outras palavras, reduz-se a saber se existe sempre o supremo em $y \in [-r, r]$ de

$$\sup_{|b|\leq r} \eta_{k_1,m_1}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}}\tau_{iy}\varphi\right).$$

O problema da densidade de $\mathfrak{X}$ em $\mathfrak{X}_0(\mathbb{R})$ é também uma questão a ponderar. Estamos convencidos que tal inclusão densa existe.

Duas questões que, para além de serem importantes, são muito vantajosas, são as de caracterizar, se possível, todas as ultradistribuições exponenciais e encontrar uma condição necessária para que a série de multipolos $\sum_{j\geq 0} b_j\delta^{(j)}$ seja convergente em $\mathfrak{X}'$.

Um outro problema a considerar é o estudo do núcleo do operador derivação no quadro das ultradistribuições exponenciais. Seria interessante provar que este núcleo não aumenta, para, por exemplo, garantir que toda a ultradistribuição exponencial cuja derivada é nula, é constante. Acreditamos que assim se passa, pois a grande dificuldade está na demonstração do resultado correspondente ao lema 6.3.18, mais propriamente na prova de que as semi-normas (9.5) são finitas. Conseguimos já mostrar que a parte correspondente à função é finita, isto é, que

$$\sup_{b,y\in[-r,r]} \left\| \mathrm{e}^{k_1|\hat{x}|} D_x^{m_1} \left(\mathrm{e}^{b\hat{x}} \tau_{iy}\varphi\right) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} < \infty.$$

Em relação a existência de

$$\sup_{b,y\in[-r,r]} \left\| \mathrm{e}^{k_1|\hat{\xi}|} D_\xi^{m_1} \left(\mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{b\hat{x}} \tau_{iy}\varphi\right)\right) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$$

surgiram alguns problemas técnicos que esperamos serem ultrapassáveis.

Por último, gostaríamos de salientar que a generalização dos resultados obtidos nesta tese ao caso de dimensão $n > 1$, é possível, mas requer o devido cuidado, principalmente no que concerne à generalização de todas as propriedades do espaço $\mathfrak{X}$ e, consequentemente, do espaço $\mathfrak{X}'$.

Pensamos que a consideração destes aspectos num estudo futuro se traduzirá num trabalho muito mais conclusivo e valioso.

Apêndice

Mathematics is the science which uses easy words for hard ideas.

E. Kasner and J. Newman

Este apêndice é dedicado à demonstração da densidade do span $\mathcal{H}$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Em primeiro lugar, faz-se duas observações que serão imprescindíveis aos resultados seguintes. Em segundo lugar, prova-se dois lemas de grande serventia à prova central deste apêndice. No primeiro deles, verifica-se que toda a função φ de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ se pode expandir numa série uniformemente convergente em $\mathbb{R}$ em termos das funções de Hermite e, no segundo lema, afirma-se que uma qualquer derivada daquela série converge uniformemente em $\mathbb{R}$ para a derivada correspondente de φ.

Observação A. 1 *Recorde-se que as funções de Hermite formam um sistema ortonormal completo em $L^2(\mathbb{R})$, o que nos permite expandir qualquer função de quadrado integrável numa série convergente em $L^2(\mathbb{R})$ em termos das funções de Hermite (ver, por exemplo, Zemanian [Zem87b]), isto é, se $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$, então*

$$\varphi = \sum_{j=0}^{+\infty} (\varphi, \psi_j)\, \psi_j \tag{1}$$

onde $(\cdot,\cdot)$ representa o produto interno definido em $L^2(\mathbb{R})$, ou seja,

$$(\varphi, \psi_j) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, \overline{\psi_j(x)} dx$$

e, para cada j em $\mathbb{N}$, ψ_j designa a função de Hermite de ordem j. A série definida em (1) é convergente em $L^2(\mathbb{R})$.

Observação A. 2 *Tendo em conta algumas propriedades das funções de Hermite*[1]*, podemos asseverar que o sistema $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ formado pelas funções de Hermite é um sistema de vectores próprios do seguinte operador diferencial:*

$$Z = D_x^2 - x^2 + 1,$$

[1] Estas propriedades podem ser encontradas no livro do Erdély [Erd53].

cujos respectivos valores próprios são dados por $\lambda_n = -2n$, *isto é,*

$$\forall n \in I\!N \quad Z\psi_n = -2n\psi_n.$$

Para além disto, é importante realçar que o operador Z *verifica a propriedade:*

$$\forall \varphi, \psi \in \mathcal{S}(I\!R) \quad (Z\varphi, \psi) = (\varphi, Z\psi) \tag{2}$$

Para proceder à demonstração deste último facto, basta primitivar por partes 2 vezes.

Lema A. 3 *Seja* $\varphi \in \mathcal{S}(I\!R)$ *e, para cada* j *natural, seja* ψ_j *a função de Hermite de ordem* j. *Então a série*

$$\sum_{j=0}^{+\infty} (\varphi, \psi_j)\, \psi_j(x)$$

converge uniformemente para φ *em* $I\!R$.

Demonstração: Fixemos φ em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ e, para todo o j em $\mathbb{N}_1$, seja ψ_j a função de Hermite de ordem j.

Uma vez que

$$Z\psi_j = \lambda_j \psi_j,$$

onde

$$Z = D_x^2 - x^2 + 1 \quad \text{e} \quad \lambda_j = -2j \text{ (cf. observação A.2)},$$

então

$$\begin{aligned}
& \left|(\varphi, \psi_j)\right| \\
\underset{\lambda_j \neq 0}{=} \; & \left|\left(\varphi, \frac{1}{\lambda_j} Z\psi_j\right)\right| \\
= \; & \left|\frac{1}{\lambda_j}(\varphi, Z\psi_j)\right| \\
= \; & \dots \\
= \; & \left|\frac{1}{(\lambda_j)^k}(\varphi, Z^k\psi_j)\right|, \quad \forall k \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Atendendo a que o operador diferencial Z obedece à condição (2), temos que

$$\begin{aligned}
& \left|(\varphi, \psi_j)\right| \\
= \; & \left|(\lambda_j)^{-k}\right| \left|(Z^k\varphi, \psi_j)\right| \\
\leq \; & |\lambda_j|^{-k} \int_{\mathbb{R}} \left|(Z^k\varphi)(x)\right| \left|\overline{\psi_j(x)}\right| dx.
\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade integral de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned}
&\left|\left(\varphi,\psi_j\right)\right| \\
\leq\ & \left|\lambda_j\right|^{-k}\left(\int_{\mathbb{R}}\left|\left(Z^k\varphi\right)(x)\right|^2 dx\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}}\left|\overline{\psi_j(x)}\right|^2 dx\right)^{1/2}
\end{aligned} \tag{3}$$

e como $\left(\psi_j\right)_{j\in\mathbb{N}}$ é, em particular, um sistema ortonormal, vem que

$$\int_{\mathbb{R}}\left|\psi_j(x)\right|^2 dx = 1$$

e, portanto, de (3) resulta que, para todo o k em $\mathbb{N}$ e j em $\mathbb{N}_1$,

$$\left|\left(\varphi,\psi_j\right)\right| \leq \left|\lambda_j\right|^{-k}\left\|Z^k\varphi\right\|_{L^2(\mathbb{R})} \tag{4}$$

em que $\|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R})}$ é a norma definida no espaço $L^2(\mathbb{R})$.

No livro de Erdélyi [Erd53, p. 208] podemos encontrar uma majoração muito útil para os polinómios de Hermite, que se traduz do seguinte modo:

$$\exists c\in\mathbb{R}\quad \forall j\in\mathbb{N}\quad \forall x\in\mathbb{R}\qquad \left|\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}H_j(x)\right| < c\ 2^{\frac{j}{2}}\,(j!)^{\frac{1}{2}} \tag{5}$$

Assim, e recordando uma das definições das funções de Hermite (cf. (4.10)) tem-se que

$$\begin{aligned}
&\left|\psi_j(x)\right| \\
=\ & \left|\left(2^j j!\sqrt{\pi}\right)^{-1/2}\ \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}H_j(x)\right| \\
\underset{\text{por (5)}}{<}\ & \frac{c}{\sqrt[4]{\pi}}
\end{aligned} \tag{6}$$

Posto isto, é fácil afirmar que, para todo o $k\in\mathbb{N}$, todo o $j\in\mathbb{N}_1$ e todo o $x\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
&\left|\left(\varphi,\psi_j\right)\right|\left|\psi_j(x)\right| \\
\underset{\text{por (4) e (6)}}{\leq}\ & \frac{c}{\sqrt[4]{\pi}}\left|\lambda_j\right|^{-k}\left\|Z^k\varphi\right\|_{L^2(\mathbb{R})} \\
\underset{\lambda_j=-2j}{=}\ & \frac{c}{\sqrt[4]{\pi}}2^{-k}\frac{1}{j^k}\left\|Z^k\varphi\right\|_{L^2(\mathbb{R})}
\end{aligned} \tag{7}$$

Ao particularizarmos $k=2$ na expressão (7), obtemos, para todo o x em $\mathbb{R}$ e todo o j em $\mathbb{N}_1$,

$$\left|\left(\varphi,\psi_j\right)\psi_j(x)\right| \leq \frac{c}{4\sqrt[4]{\pi}}\left\|Z^2\varphi\right\|_{L^2(\mathbb{R})}\frac{1}{j^2} \tag{8}$$

Note-se que a série de Dirichlet dada por

$$\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{1}{j^2}$$

é convergente, o que nos permite dizer que a série numérica

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{c}{4\sqrt[4]{\pi}} \left\| Z^2 \varphi \right\|_{L^2(\mathbb{R})} \frac{1}{j^2}$$

também é convergente. Assim, tendo em conta a majoração (8), podemos, pelo critério de Weierstrass, afirmar que a série de funções

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \left(\varphi, \psi_j\right) \psi_j\left(x\right)$$

é uniformemente convergente em $\mathbb{R}$, pelo que

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \left(\varphi, \psi_j\right) \psi_j\left(x\right) \tag{9}$$

é, de igual modo, uniformemente convergente em $\mathbb{R}$. Como a série (9) converge em $L^2\left(\mathbb{R}\right)$ para φ (ver observação A.1), acabámos de mostrar que converge uniformemente para φ em $\mathbb{R}$. ■

Lema A. 4 *Para todo o $\varphi \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}\right)$ e para todo o ψ_j função de Hermite de ordem j, a série*

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \left(\varphi, \psi_j\right) D_x^m \psi_j\left(x\right)$$

é uniformemente convergente para $D_x^m \varphi$ em $\mathbb{R}$, qualquer que seja m em $\mathbb{N}$.

Demonstração: Tomemos φ uma função teste do espaço de Schwartz e $\left(\psi_j\right)_{j \in \mathbb{N}}$ o sistema de funções de Hermite.

Atendendo às propriedades dos polinómios de Hermite, podemos afirmar que para quaisquer l, m e j em $\mathbb{N}$, $x^{2l} D_x^m \psi_j$ é uma combinação linear finita de funções ψ_r de Hermite[2], cujos coeficientes são de crescimento lento com respeito a j. Recordando a majoração (5) (cf. Erdélyi [Erd53, p. 208]) apresentada na demonstração do lema A.3, podemos afirmar que

$$\exists c \in \mathbb{R} \quad \forall r \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \left|\psi_r\left(x\right)\right| < c \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}},$$

o que significa que, para $l = 0$, existe uma constante C e um natural q suficientemente grande, tal que

$$\left| D_x^m \psi_j\left(x\right) \right| \leq C j^q. \tag{10}$$

[2] Ver, por exemplo, o apêndice do technical report do Zemanian [Zem64, p. A-1].

Provámos também, no decorrer da demonstração do lema A.3, que

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall j \in \mathbb{N}_1 \quad \left|\left(\varphi, \psi_j\right)\right| \leq 2^{-k} \frac{1}{j^k} \left\|Z^k \varphi\right\|_{L^2(\mathbb{R})} \tag{11}$$

Tomando $k = q + 2$ na condição (11) e tendo em consideração a desigualdade (10), temos que, para todo o $x \in \mathbb{R}$ e para todo o $j \in \mathbb{N}_1$,

$$\begin{aligned} & \left|\left(\varphi, \psi_j\right) D_x^m \psi_j (x)\right| \\ \leq \; & \frac{C}{2^{q+2}} \left\|Z^{q+2} \varphi\right\|_{L^2(\mathbb{R})} \frac{1}{j^2} \end{aligned} \tag{12}$$

Uma vez que a série

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{C}{2^{q+2}} \left\|Z^{q+2} \varphi\right\|_{L^2(\mathbb{R})} \frac{1}{j^2}$$

é convergente, e tendo em conta a condição (12), o critério de Weierstrass permite-nos concluir que a série de funções

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \left(\varphi, \psi_j\right) D_x^m \psi_j (x) \tag{13}$$

converge uniformemente em $\mathbb{R}$.

Resulta finalmente do lema A.3 que a série (13) converge uniformemente em $\mathbb{R}$ para $D_x^m \varphi$. ■

Teorema A. 5 *O espaço* $\operatorname{span} \mathcal{H}$ *é sequencialmente denso em* $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Demonstração: Tendo em conta a proposição 4.2.6, podemos afirmar que $\mathcal{G}_{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$ é um subconjunto do espaço $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ de Schwartz e, como o exemplo 4.2.2 nos garante, por sua vez, que $\operatorname{span} \mathcal{H}$ é um subconjunto de $\mathcal{G}_{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$, resulta assim que $\operatorname{span} \mathcal{H} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Basta, por isso, provar que

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \quad \exists \left(\Psi_n\right)_{n \in \mathbb{N}} \in (\operatorname{span} \mathcal{H})^{\mathbb{N}} \quad \Psi_n \longrightarrow \varphi \text{ em } \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Consideremos então $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ arbitrário. Temos obviamente φ em $L^2(\mathbb{R})$. Resulta imediatamente, pela observação A.1, que

$$\varphi(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\varphi, \psi_j\right) \psi_j (x) \tag{14}$$

onde, para cada j, ψ_j é a função de Hermite de ordem j. Além disso, esta série converge em $L^2(\mathbb{R})$.

Assim, é sugestivo considerar para $(\Psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sucessão de funções cujo termo geral é dado por

$$\Psi_n(x) = \sum_{j=0}^{n} (\varphi, \psi_j)\, \psi_j(x) \tag{15}$$

Repare-se que, para todo o n em $\mathbb{N}$, Ψ_n é uma função do espaço $\operatorname{span}\mathcal{H}$.

Sejam $l, m \in \mathbb{N}$ quaisquer. Com vista à simplificação dos cálculos, vamos considerar em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ as semi-normas definidas por (2.2), isto é,

$$\rho_{l,m}(\varphi) = \left\| \hat{x}^{2l} D_x^m \varphi \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}.$$

Ora,

$$\begin{aligned}
&\left| x^{2l} D_x^m (\Psi_n(x) - \varphi(x)) \right| \\
\underset{\text{por (14) e (15)}}{=} &\left| x^{2l} D_x^m \left(\sum_{j=0}^{n} (\varphi, \psi_j)\, \psi_j(x) - \sum_{j=0}^{+\infty} (\varphi, \psi_j)\, \psi_j(x) \right) \right| \\
\underset{\text{pelos lemas A.3 e A.4}}{=} &\left| x^{2l} \sum_{j=n+1}^{+\infty} (\varphi, \psi_j)\, D_x^m \psi_j(x) \right| \\
\leq &\sum_{j=n+1}^{+\infty} \left| (\varphi, \psi_j) \right| \left| x^{2l} D_x^m \psi_j(x) \right|
\end{aligned} \tag{16}$$

Em virtude de j ser maior ou igual que $n+1$, podemos afirmar como anteriormente[3] que

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \left| (\varphi, \psi_j) \right| \leq 2^{-k} \frac{1}{j^k} \left\| Z^k \varphi \right\|_{L^2(\mathbb{R})} \tag{17}$$

À semelhança do que fizemos na prova do lema A.4, é possível garantir que

$$\forall l, m \in \mathbb{N} \quad \exists C \in \mathbb{R} \quad \forall j \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \left| x^{2l} D_x^m \psi_j(x) \right| \leq C j^q \tag{18}$$

onde q é um natural suficientemente grande.

As condições (17) e (18) permitem-nos inferir da condição (16) que

$$\begin{aligned}
&\left| x^{2l} D_x^m (\Psi_n(x) - \varphi(x)) \right| \\
\leq &\sum_{j=n+1}^{+\infty} 2^{-k} \frac{1}{j^k} \left\| Z^k \varphi \right\|_{L^2(\mathbb{R})} C j^q
\end{aligned} \tag{19}$$

Aplicando o supremo em $\mathbb{R}$ à desigualdade (19), obtém-se que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| x^{2l} D_x^m (\Psi_n(x) - \varphi(x)) \right| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(2^{-k} C \left\| Z^k \varphi \right\|_{L^2(\mathbb{R})} \sum_{j=n+1}^{+\infty} \frac{1}{j^{k-q}} \right) \tag{20}$$

[3] Ver demonstração do lema A.3.

Particularizando $k = q + 2$ e calculando o limite quando $n \to +\infty$ na inequação (20) resulta finalmente que

$$\begin{aligned} & \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| x^{2l} D_x^m \left(\Psi_n \left(x \right) - \varphi \left(x \right) \right) \right| \\ \leq \; & \frac{C}{2^{q+2}} \left\| Z^{q+2} \varphi \right\|_{L^2(\mathbb{R})} \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=n+1}^{+\infty} \frac{1}{j^2} \end{aligned}$$

Para ultimar esta demonstração, basta relembrar que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{j=n+1}^{+\infty} \frac{1}{j^2} = 0,$$

pois $\sum\limits_{j=n+1}^{+\infty} \frac{1}{j^2}$ é o resto de ordem n da respectiva série de Dirichlet, que sabemos ser convergente. Por esta razão, o limite quando $n \to +\infty$ de $\left\| \hat{x}^{2l} D_x^m \left(\Psi_n - \varphi \right) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$ é, de igual forma, igual a zero. Por outras palavras, para todo o l e m em $\mathbb{N}$, tem-se que

$$\begin{aligned} & \rho_{l,m} \left(\Psi_n - \varphi \right) \longrightarrow 0 \\ \Leftrightarrow \; & \Psi_n \longrightarrow \varphi \text{ em } \mathcal{S} \left(\mathbb{R} \right), \end{aligned}$$

e portanto

$$\operatorname{span} \mathcal{H} \overset{d}{\subset} \mathcal{S} \left(\mathbb{R} \right).$$

$\blacksquare$

Bibliografia

[AMS73] P. Antosik, Mikusinski, and R. Sikorski. *Theory of Distributions, the Sequencial Approach.* Elsevier Pub., 1973.

[AS74] M. Abramowitz and I. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions.* Dover Publications, Inc., New York, 1974.

[Bou87] N. Bourbaki. *Elements of Mathematics - Topological Vector Spaces.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo, 1987.

[BSU96a] Y. M. Berezansky, Z. G. Sheftel, and G. F. Us. *Functional Analysis*, volume 1. Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 1996.

[BSU96b] Y. M. Berezansky, Z. G. Sheftel, and G. F. Us. *Functional Analysis*, volume 2. Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 1996.

[CF90] J. Campos Ferreira. *Introdução À Teoria Das Distribuições.* Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 1990.

[Cha90] B. Chabat. *Introduction À L'analyse Complexe*, volume I and II. Éditions Mir, Moscou, 1990.

[Cho69] G. Choquet. *Lectures on Analysis.* W.A. Benjamin, Inc., vol. I e II, 1969.

[Din81] S. Dineen. *Complex Analysis in Locally Convex Spaces*, volume 57 of *Mathematical Studies.* North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1981.

[Dir27] P. Dirac. *The Physical Interpretation of the Quantum Dynamics.* Proc. of the Royal Society, London, section A, 113, pages 621 - 641, 1926-1927.

[Ehr56] L. Ehrenpreis. Analytic functions and the fourier transform of distributions I. *Annals. of Maths., 63*, pages 129 – 159, 1956.

[Erd53] A. Erdélyi, editor. *Higher Transcendental Functions*, volume II of *The Bateman Manuscript Project.* McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1953.

[Fel71] W. Feller. *An Introduction to Probability Theory and its Applications.* John Wiley & Sons, New York, London, Sydney, vol. II, 1971.

[Gen67] *The Applications of Generalized Functions*, Philadelohia, Pennsylvania, 1967. Society for Industrial and Applied Mathematics. A colletion of papers presented at the Symposium on "The Applications of Generalized Functions" sponsered by the Air Force Office of Scientific Research at the 1966 Fall Meeting of Society for Industrial and Applied Mathematics held at the State University of New York at Stony Brook.

[GKHO99] M. Grosser, M. Kunzinger, G. Hörmann, and M. Oberguggenberger. *Nonlinear Theory of Generalized Functions (Proceedings of the Workshop: Nonlinear Theory of Nonlinear Functions).* Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, London, New York, Washington, D.C., 1999.

[GKOS01] M. Grosser, M. Kunzinger, M. Oberguggenberger, and R. Steinbauer. *Geometric Theory of Generalized Functions with Applications to General Relativity.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 2001.

[GR80] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik. *Table of Integrals, Series, and Products (Corrected and Enlarged Edition).* Academic Press, Inc., 1980.

[GS64] I. M. Gelfand and G. E. Shilov. *Generalized Functions*, volume 1-3. Academic Press, New York, 1964.

[Gue90] J. S. Guerreiro. *Espaços Vectoriais Topológicos.* Textos e Notas, 45. CMAF, Lisboa, 1990.

[Hea93] Heaviside. *On Operators in Mathematical Physics I and II.* Proc. of the Royal Society, London, 52, pages 504 - 529, 1893.

[HM87] M. J. Hoffman and J. E. Marsden. *Basic Complex Analysis.* W. H. Freeman and Company, New York, 1987.

[HP94] R. F. Hoskins and J. S. Pinto. *Distributions, Ultradistributions and Other Generalized Functions.* Ellis Horwood, New York, London, Toronto, Sydney, Tokyo, Singapore, 1994.

[Jon66] D. S. Jones. *Generalised Functions.* McGraw-Hill, 1966.

[Kan98] Ram P. Kanwal. *Generalized Functions: Theory and Technique.* Birkhauser Boston, Boston, Basel, Berlin, second edition, 1998.

[Kel55] J. L. Kelley. *General Topology.* Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1955.

[KF82] A. N. Kolmogorov and S. V. Fomin. *Elementos Da Teoria Das Funções e de Análise Funcional.* Editora Mir, Moscou, 1982.

[Köt52] G. Köthe. Die randverteilungen analytischer funktionen. *Math. Zeitschr., 57*, pages 13 – 33, 1952.

[Kre78] Erwin Kreyszig. *Introductory Functional Analysis with Applications.* John Wiley & Sons. Inc., New York, 1978.

[Lan93] S. Lang. *Real and Functional Analysis.* Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, third edition, 1993.

[Ler34] Leray. Sur le mouvement d'une liquide visqueux emplissant l'espace. *Acta Math., 63*, pages 193 – 248, 1934.

[Lig58] M. J. Lighthill. *An Introduction to Fourier Analysis and Generalized Functions.* Cambridge University Press, London, 1958.

[Loj57] S. Lojasiewicz. Sur la valeur et la limite d'une distribution dans un point. *Stud. Math., 16*, 1957.

[Lou02] L. C. Loura. Multipole series and differential equations. *Fields Institute Communications*, 31, 2002.

[Lou03] L. C. Loura. A space of the generalized distributions. Iniciado em 1993, 2003.

[LV98] L. C. Loura and F. S. Viegas. Hermitean ultradistributions. *Portugaliae Mathematica*, 55, Fasc.1, 1998.

[Mal82] P. Mallivian. *Intégration et Probabilités - Analyse de Fourier et Analyse Spectrale.* Masson, Paris, New York, Barcelone, Milan, México, Rio de Janeiro, 1982.

[Mar63] I. Marinescu. *Espaces Vectorials Pseudo-Topologiques et Théorie Des Distributions.* Deuts. Verlag des Wissensch., Berlin, 1963.

[Mar70] A. Markushevich. *Teoria de Las Funciones Analíticas*, volume II. Editorial Mir, Moscu, 1970.

[Men64] A. Sousa Menezes. Sobre uma construção axiomática da teoria das ultradistribuições na recta e alguns possíveis modelos. Bilbau, 1964. XXVII Congresso Luso-Espanhol para o progresso das ciências.

[Men67] A. Sousa Menezes. As ultradistribuições de uma variável como translatadas formais. *AEFC*, 1967.

[Rib] L. Ribeiro. Introdução à teoria das ultradistribuições. Technical report, IST, Lisboa.

[Rib87] L. Ribeiro. Teoria axiomática das ultradistribuições e ultradistribuções de suporte compacto. Master's thesis, IST, Lisboa, 1987.

[Rib90] L. Ribeiro. *Sobre Uma Noção de Limite Na Teoria Das Ultradistribuições.* PhD thesis, IST, Lisboa, 1990.

[Roh76] V. K. Rohatgi. *An Introduction to Probability Theory and Mathematical Statistics*. John Wiley & Sons, New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore, 1976.

[RR73] A. P. Robertson and W. J. Robertson. *Topological Vector Spaces*. Cambridge Univ. Press, London, New York, New Rochelle, Melbourne, Sydney, second edition, 53, 1973.

[RS72] M. Reed and B. Simon. *Functional Analysis I*. Academic Press, Inc., New York, London, 1972.

[RS75] M. Reed and B. Simon. *Fourier Analysis Self-Adjointness II*. Academic Press, Inc., San Diego, New York, Berkeley, Boston, London, Sydney, Tokyo, Toronto, 1975.

[RSN90] F. Riesz and B. Sz.-Nagy. *Functional Analysis*. Dover Publications, Inc., New York, 1990.

[Rud74] W. Rudin. *Functional Analysis*. McGraw-Hill, Inc., New Delhi, 1974.

[Sat59] M. Sato. Theory of hyperfunctions. *Fac. Sci. Tokyo, 8*, pages 139 – 193, 1959.

[Sch65] L. Schwartz. *Méthodes Mathématiques Pour Les Sciences Physiques*. Hermann, Paris, deuxième edition, 1965.

[Sch66] L. Schwartz. *Théorie Des Distributions*. Hermann, Paris, 1966.

[Sch70] L. Schwartz. *Topologie Générale et Analyse Fonctionnelle*. Hermann, Paris, 1970.

[SeS55a] J. Sebastião e Silva. Le calcul opérationnel au point de vue des distributions. *Portugaliae Mathematica, 14*, pages 105 – 132, 1955.

[SeS55b] J. Sebastião e Silva. Su certe classi di spazi localmente convessi importanti per le applicazioni. In *Rend. Mat. Univ. Roma*, pages 388 – 410. 1955.

[SeS55c] J. Sebastião e Silva. Sur une construction axiomatique de la théorie des distributions. *Rev. Fac. Ciências Lisboa, 2 série A, 4*, pages 79 – 186, 1955.

[SeS58a] J. Sebastião e Silva. Les fonctions analytiques comme ultra-distributions dans le calcul opérationnel. *Math. Annalen, 136*, pages 58 – 96, 1958.

[SeS58b] J. Sebastião e Silva. Sur l'espace des fonctions holomorphes à croissance lente à droite. *Portugaliae Mathematica, 17, Fasc. 1*, pages 1 – 17, 1958.

[SeS61] J. Sebastião e Silva. Sur l'axiomatique des distributions et des possibles modèles. *C.I.M.E.*, 1961.

[SeS63] J. Sebastião e Silva. Novos elementos para a teoria do integral no campo das distribuições. *Boletim da Academia das Ciências de Lisboa*, 1963.

[SeS67] J. Sebastião e Silva. Les séries des multipôles des physiciens et la théorie des ultradistributions. *Math. Annalen, 174*, pages 109 – 142, 1967.

[SO83] J. Silva Oliveira. *Sobre Certos Espaços de Ultradistribuições e Uma Noção Generalizada de Produto Multiplicativo.* Textos e Notas, 29. CMAF, Lisboa, 1983.

[Sob36] Sobolev. Méthode nouvelle à résoudre le problème de cauchy pour les équations hyperboliques normales. *Recueil Mat. (Math. Sbornik), 1*, pages 39 – 71, 1936.

[Til53] H. G. Tillmann. Randverteilungen analytischer funktionen und distributionen. *Math. Zeitschr., 59*, pages 61 – 83, 1953.

[Vie87] F. S. Viegas. *Limites Indutivos e Projectivos.* Tese Complementar, IST, Lisboa, 1987.

[Vie90] F. S. Viegas. Introdução à teoria das distribuições. *I.S.T.*, 1990.

[Zay96] Ahmed I. Zayed. *Handbook of Function and Generalized Function Transformations.* CRC Press, Boca Raton, New York, London, Tokyo, 1996.

[Zem64] A. H. Zemanian. Orthonormal series expansions of certain distributions and distributional transform calculus. Technical Report 22, College of Engineering, State University of New York at Stony Brook, 1964.

[Zem87a] A. H. Zemanian. *Distribution Theory and Transform Analysis (An Introduction to Generalized Functions, with Applications).* Dover Publications, Inc., New York, 1987.

[Zem87b] A. H. Zemanian. *Generalized Integral Transformations.* Dover Publications, Inc., New York, 1987.