UNIVERSIDADE da MADEIRA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E ENGENHARIAS

Fundamentação Numérica da Análise em Portugal em Anastácio da Cunha, Gomes Teixeira e Vicente Gonçalves

Sónia Matilde Pinto Correia Martins

Orientador:
Professor Doutor José Francisco da Silva C. Rodrigues

Dissertação para a obtenção do grau de Mestre em Matemática
Especialização em Matemática para o Ensino

Funchal – Madeira

Junho de 2006

Resumo

Neste trabalho estudamos a fundamentação numérica da Análise em Portugal, centrando particularmente este estudo nos trabalhos de José Anastácio da Cunha, Francisco Gomes Teixeira e Vicente Gonçalves.

Num capítulo introdutório apresentamos uma perspectiva cronológica da procura de uma fundamentação rigorosa para a matemática, com o intuito de enquadrar historicamente as obras destes matemáticos Portugueses e reconhecer possíveis influências prestadas por trabalhos de outros autores.

Relacionado com Anastácio da Cunha, analisamos os aspectos fundamentais da sua obra *Principios Mathematicos*, procurando evidenciar os resultados mais importantes avançados pelo autor, bem como as suas preocupações axiomáticas que não eram usuais no século XVIII, em que se insere a sua obra.

Neste trabalho foi igualmente efectuada uma análise às quatro edições do *Curso de Analyse Infinitesimal – Calculo Integral* de Francisco Gomes Teixeira, particularmente centrada na definição do conceito de número irracional.

Finalmente, analisamos o *Curso de Álgebra Superior* de Vicente Gonçalves, particularmente as duas últimas edições.

A 2^a edição do referido *Curso* foi objecto de duras críticas por parte de Neves Real e um dos objectivos deste trabalho foi o de procurar analisar essas críticas e verificar até que ponto influenciaram a reformulação de alguns aspectos da 3^a edição.

Palavras Chave

Anastácio da Cunha; Gomes Teixeira; Vicente Gonçalves; Números Reais; História dos Números; Didáctica dos Reais; Fundamentação e Construção dos Reais.

Abstract

In this work we study the numerical foundations of the Analysis in Portugal, centering particularly this study in the works of José Anastácio da Cunha, Francisco Gomes Teixeira and Vicente Gonçalves.

In an introductory chapter we present a chronological perspective of the search of a rigorous foundation for the mathematics, with the aim to fit historically the works of these three Portuguese mathematicians and recognize possible influences given by the works of other authors.

Concerning Anastácio da Cunha, we analyze the basic aspects of its *Principios Mathematicos*, trying to evidence the most important results advanced by the author, as well his axiomatic style that were not usual in the XVIII century, when his work was written.

In this work it was also done an analysis of the four editions of the *Curso de Analyse Infinitesimal – Calculo Integral* of Francisco Gomes Teixeira, particularly centered in the definition of the concept of irrational number.

Finally, we analyze the *Curso de Álgebra Superior* of Vicente Gonçalves, particularly the two last editions.

The 2.nd edition that Curso was object of a critical review by Neves Real and one of the aims of this work was to analyse them and to study how far they influenced the reformulation of some aspects in 3.rd edition.

Key Words

Anastácio da Cunha; Gomes Teixeira; Vicente Gonçalves; Real Numbers; History of Real Numbers; Didactic of Reals; Foundation and Construction of Reals.

Agradecimentos

Ao meu orientador, Professor Doutor José Francisco da Silva Costa Rodrigues, pelas sugestões criteriosas com que sempre acompanhou todo o meu trabalho, e essencialmente por ter procurado desenvolver a minha própria autonomia.

À Universidade da Madeira, nomeadamente ao Departamento de Matemática e Engenharias pelo apoio logístico prestado. Agradeço particularmente aos colegas Dr. Jorge Nélio Ferreira e Dr. Maurício Reis pela ajuda dispendida em termos computacionais e, acima de tudo, pelo encorajamento e boa disposição contagiantes que, em termos motivacionais, desempenharam um papel preponderante.

À minha amiga e companheira de trabalho Dr.ª Cristina Lopes, pedra basilar da consecussão deste trabalho. Em termos profissionais agradeço-lhe todas as sugestões, conselhos e críticas, sem os quais a qualidade final deste trabalho estaria necessariamente comprometida. Em termos pessoais manifesto o meu profundo agradecimento por ter estado sempre presente nos momentos menos bons, procurando minimizar todas as dificuldades encontradas, representando um ombro amigo onde me pude, repetidas vezes, apoiar.

Ao meu marido pelo carinho, dedicação, disponibilidade e, acima de tudo, compreensão manifestada nos momentos mais difíceis que tiveram de ser ultrapassados na realização deste trabalho.

À minha filha Beatriz por, apesar da tenra idade e consequente incapacidade de entendimento da minha tão repetida ausência, ter-me proporcionado momentos de imensa felicidade, fazendo com que valorizasse cada vez mais o prazer de estar com ela.

À minha restante família, particularmente aos meus pais, pelo apoio manifestado em diversos momentos e, essencialmente, por acreditarem em mim.

A todos os meus alunos pela compreensão e disponibilidade nos momentos em que o cansaço era mais evidente.

Finalmente agradeço a todos aqueles que, embora não os nomeando em particular, interviram directa ou indirectamente na realização deste trabalho.

Índice

Capítulo 1

Acerca dos Fundamentos da Matemática

A existência de uma matemática pré-helénica muito desenvolvida é algo que hoje está bem estabelecido. Não raras vezes as noções, já por si muito abstractas, de número inteiro e de medidas de magnitudes aparecem nos documentos mais antigos, que nos chegam por exemplo do Egipto (veja-se [4], pp. 29 - 37).

Ainda que nos textos não se encontre nada parecido com uma *demonstração*, no sentido formal da palavra, temos motivos para pensar que a descoberta de tais procedimentos de resolução, cuja generalidade transparece através dos casos numéricos particulares, não se poderia realizar sem um mínimo de encadeamento lógico.

A originalidade essencial dos Gregos consiste precisamente num esforço consciente para escrever as demonstrações matemáticas como uma sucessão de passos, de forma que não haja lugar para dúvida ao passar de um passo para o seguinte, forçando a aceitação do raciocínio proposto (veja-se [5], p. 12).

A partir dos primeiros textos detalhados, que datam de meados do século V, deveremos salientar os grandes clássicos Euclides (300 a.C.), Arquimedes (287 - 212 a.C) e Apolónio (262 - 190 a.C) onde a noção de demonstração não se diferencia em nada da nossa.

Não possuimos textos que nos premitam seguir os primeiros passos deste *método dedutivo*, podemos somente indagar que se inscreve, de um modo bastante natural, na busca permanente de "explicações" do mundo, facto que caracteriza o pensamento Grego e que é visível nos filósofos Jónios do século VII. Por outro lado, a tradição coincide unanimemente em atribuir o desenvolvimento e aperfeiçoamento do método dedutivo à Escola Pitagórica, numa época situada entre o final do século VI e metade do século V.

Esta matemática dedutiva, plenamente ciente dos seus fins e dos seus métodos, é alvo de uma reflexão filosófica nas décadas posteriores.

Por um lado, veremos edificar-se a pouco e pouco a lógica "formal" e por outro, principalmente a partir do século XIX, se pensará cada vez mais sobre os conceitos básicos da Matemática e se tentará esclarecer a sua natureza, sobretudo após o aparecimento da Teoria dos Conjuntos (veja-se, por exemplo, [7], pp. 584 - 597).

Com efeito, o estudo do que se pode chamar os *Fundamentos da Matemática* tem vindo a realizar-se de uma forma ininterrupta desde o princípio do século XIX.

Os matemáticos Gregos do período clássico parecem ter dedicado os seus esforços à obtenção de novos resultados, mais do que a uma crítica dos fundamentos que nesta época teria resultado forçosamente estéril.

Para os matemáticos Gregos o número não era unicamente um meio de pensamento, mas tornou-se no objecto do próprio pensamento, o que é demonstrado pela simples distinção entre números pares e ímpares. Assim, afirmações sobre números eram possíveis e levantou-se, pela primeira vez, a carência de uma definição formal de número, uma vez que, para os Gregos os números eram apenas concebidos como números naturais.

É à Matemática grega que se deve a primeira teoria rigorosa e coerente das razões de magnitudes. Esta teoria, corresponde ao início de uma série de descobertas sobre as proporções e, em particular, sobre as razões incomensuráveis reais, cuja importância na história do pensamento grego não é realmente notória mas que reveste-se de extrema importância para desenvolvimentos posteriores.

Uma das tendências características da Escola Pitagórica foi a de pretender explicar tudo baseando-se apenas no número natural e nas razões de naturais. No entanto, foi a mesma Escola Pitagórica que descobriu a incomensurabilidade da diagonal do quadrado unitário (a irracionalidade de $\sqrt{2}$), o que constituíu o primeiro exemplo conhecido de uma limitação, face aos conceitos matemáticos que dispuham ([7], pp. 89 - 91).

O simples facto de depararem-se com esta problemática supõe uma distinção clara entre uma razão e os seus valores aproximados e é um dado suficiente para indicar a enorme distância que separa os matemáticos gregos dos seus antecessores.

Não possuimos dados históricos suficientes que nos permitam informar acerca da corrente de ideias que seguiu esta importante descoberta, contudo, poderemos assinalar as ideias principais que estão presentes na teoria da razão de magnitudes, edificada por Eudóxio (408 - 355 a.C) ([4], pp. 126 - 130), adoptada definitivamente pela Matemática grega clássica e que nos foi dada a conhecer pelos *Elementos* de Euclides, onde está exposta de uma forma magistral (nomeadamente no livro V).

Para Euclides um número era visto como uma multitude composta de unidades sendo que a própria unidade não era vista como um número. Aqui, a antiga tradição de contagem, da Matemática clássica, continuava bem visível.

O livro V, dos *Elementos* de Euclides, deu lugar a uma teoria geral sobre razões e proporcionalidade entre magnitudes. A criação da teoria da razão de números (naturais) é usualmente apontada como sendo de Eudóxio, que viveu cerca de meio século antes dos *Elementos* de Euclides serem compilados. Até Eudóxio, uma teoria formal de razões e proporções lidava exlusivamente com relações entre números que eram susceptíveis de serem decompostos apenas nos seus factores primos.

A teoria de proporções numéricas foi apresentada no livro VII, o primeiro dos livros de Euclides sobre Aritmética, apesar da sua teoria sobre razões entre magnitudes aparecer, compreensivelmente, ao longo dos seus seis livros Geométricos introdutórios.

No livro VII encontramos noções tais como parte e múltiplo de um número, números pares e ímpares, números primos e compostos, etc.. Apesar da razão entre dois números naturais ser definida possuindo implicitamente a ideia de magnitude, esta não é completamente esclarecida. Com efeito, Euclides afirma que "razão é um tipo de relação respeitante ao tamanho entre duas magnitudes da mesma natureza" (Elementos V, Def. 3) e "magnitudes dizem-se possuir uma razão de uma para a outra se são capazes, quando multiplicadas, de uma exceder a outra" (Elementos V, Def. 4).

No Livro V dos *Elementos*, Euclides apresenta o conceito de razão e proporção entre magnitudes, no entanto, a definição de magnitude não é encontrada.

Os conceitos básicos empregados por Eudóxio na fundação da teoria das razões foi o de medida e o de maior ou menor. O conceito de medida não era logicamente necessário para o desenvolvimento de conceito de número, no entanto, como verificamos, este conceito aparecia como sendo deveras importante na teoria numérica da razão ([4], pp. 126 - 130).

Este aspecto está implícito nas seguintes definições: "uma magnitude é parte de outra magnitude, a menor da maior quando mede a maior" (Elementos V, Def. 1) e "a maior é um múltiplo da menor quando é medida pela menor" (Elementos V, Def. 1).

Naturalmente estes autores (Eudóxio e Euclides) não consideravam estes conjuntos (conjunto das magnitudes e o conjunto das razões de magnitudes) como *completos*, no sentido que a palavra possui nos nossos dias, no entanto, sabemos que admitiam, certamente como evidente, que uma curva, susceptível de ser descrita por um movimento contínuo, não poderia passar de um lado a outro de uma recta sem cortá-la, princípio este que empregaram, por exemplo, nos seus trabalhos sobre a duplicação do cubo (construção de $\sqrt[3]{2}$ mediante intersecções de curvas não construíveis com régua e compasso). (veja-se, por exemplo, [4], p. 134)

Por mais admirável que consideremos o método de Eudóxio, há que reconhecer que possui algumas limitações sob o ponto de vista do rigor, que não favoreciam o desenvolvimento do cálculo.

As teorias da razão e proporção foram ultrapassadas quando deu-se a emergência da Álgebra Moderna, na forma de equações com regras convencionais e símbolos, no início da era moderna, depois de 1600 com os trabalhos de matemáticos como Viète (1540 - 1603) e Descartes (1596 - 1650). O simples transferir de termos de um membro de uma equação para o outro substituíu o tedioso processo da antiguidade.

Com efeito deve-se a F. Viète a introdução de letras que, representando grandezas, permitiam efectuar as operações aritméticas sobre estas, como se representassem números perfeitamente determinados.

Foi efectivamente este matemático que renovou o método da antiguidade grega, fundamentando a Aritmética na nova Álgebra, assim constituída.

Contudo Viète não se conseguiu destacar completamente da interpretação geométrica das expressões algébricas, que lhe eram tão familiares. Por exemplo, ao fazer corresponder a letra A a um determinado comprimento, considerou natural fazer corresponder $A \cdot A$ ao quadrado e $A \cdot A \cdot A$ ao cubo construídos à custa do comprimento A, no entanto, esta correspondência impediu de fornecer ao método por si fundado toda a generalidade que lhe era susceptível.

Foi René Descartes que, ao adoptar uma abordagem distinta para esta correspondência entre os símbolos algébricos e as grandezas, permitiu efectivamente implementar este novo método.

Inspirado na Teoria das Proporções da antiguidade grega, Descartes fixou uma unidade de comprimento e designou por letras os diferentes comprimentos obtidos a partir da unidade, fazendo assim corresponder os novos comprimentos obtidos ao resultado de todas as operações conhecidas que possam ser efectuadas sobre estas letras, como se estas representassem os próprios números.

O uso da Álgebra na Análise, iniciado com os trabalhos de Viète, foi assim conseguido posteriormente por Descartes quando reformulou muitas das ideias algébricas deste matemático, no contexto da Teoria das Equações.

Estes trabalhos, em consonância com outros protagonizados por Fermat (1601-1665), deram lugar à criação, no século XVII, da actual Geometria Analítica, embora para ambos esta tivesse interpretações distintas. ([26], p. 436)

Tanto Descartes como Fermat, desempenharam papéis de relevo em outras áreas da Matemática. Com efeito, quando consideramos a correspondência estabelecida entre Fermat e Blaise Pascal (1623 – 1662) assistimos ao início do desenvolvimento da Teoria das Probabilidades.

Fermat, envolvido nos desenvolvimentos iniciais da Geometria Analítica e das Probabilidades, estabeleceu, igualmente, importantes contribuições para a Teoria dos Números. O seu interesse por esta área derivou do conceito de número perfeito, aquele que é igual à soma dos seus divisores próprios.

A noção de número perfeito aparecia já nos *Elementos* de Euclides. Com efeito, o Livro IX apresenta uma demonstração de que se $2^n - 1$ é primo, então $2^{n-1}(2^n - 1)$ é perfeito.

Os gregos já conheciam a existência de quatro números perfeitos: 6, 28, 496 e 8128.

Fermat, por sua vez, descobriu três proposições que ajudariam na tarefa de encontrar outros números perfeitos.

Mais uma vez assiste-se ao preponderante papel assumido pela matemática da antiguidade que, por ter sido *revivida* por matemáticos posteriores, permitiu o desenvolvimento de novas e distintas áreas.

Matematicamente, assim como historicamente, não podemos negar o importante mérito do livro V de Euclides, apesar do seu autor não ter reconhecido números como casos particulares de magnitudes.

Este procedimento estava perfeitamente claro para Richard Dedekind (1831 - 1916) quando, no século XIX, apresentou o seu sistema dos números reais e elaborou uma fundamentação para a moderna compreensão do contínuo ([10], pp. 8 e 21).

Dedekind reconheceu que a definição 5, do livro V, de Euclides serviu de base para a sua teoria.

No prefácio da obra *Was sind und was sollen die Zahlen?* de 1888, Dedekind observou que existe mais na sua teoria do que a simples convicção de que um número irracional é definido por especificação de todos os racionais que são menores, e de todos os que são maiores do que esse irracional que está a ser definido. Com efeito, Dedekind afirma:

"(...) se entendermos o número irracional como uma razão de duas quantidades mensuráveis então esta maneira de determiná-lo já foi tratada, da forma mais clara possível, na definição estabelecida por Euclides no que diz respeito a igualdade de razões ... A mesma antiga convicção serviu de base à minha teoria bem como a outras, tais como as de Bertrand e muitas outras, mais ou menos completas, tentativas de depositar os fundamentos para a introdução dos números irracionais na aritmética." ([11], pp. 39 - 40)

Como foi referido anteriormente, o conceito de medida foi o conceito básico no tratamento da proporcionalidade nos *Elementos* de Euclides. Dedekind, por sua vez, *dispensou* este conceito e fundamentou o seu trabalho, sobre a construção dos números reais, na noção de ordenação.

Com efeito, na construção do conceito de número irracional feita por Dedekind, a noção de *corte* ou *secção (Schnitt)* assume um papel fundamental. Dedekind estabeleceu que, dado qualquer racional a, era possível seccionar o conjunto dos números racionais R em duas classes A_1 e A_2 de forma que todo o número de A_1 fosse inferior a todo o número de A_2, podendo o próprio número a ser o maior elemento de A_1 ou o menor elemento de A_2. Considerando esta propriedade como uma definição, Dedekind introduziu o conceito de *secção* como sendo uma qualquer divisão do conjunto dos números racionais deste tipo, representando-a por (A_1, A_2) ([10], p. 12).

Dedekind observou que, já que às *secções* produzidas por racionais podemos fazer corresponder números racionais, fazendo corresponder determinados números às *secções* cujas primeira e segunda classes não possuem, respectivamente, elemento máximo e elemento mínimo, obtém-se um conjunto de números que é uma extensão do domínio dos racionais. Foi exactamente esta a abordagem que Dedekind seguiu, denominando estes novos números de irracionais.

A toda a *secção* irá então corresponder um determinado número, quer ele seja racional ou irracional. Desta forma, Dedekind alargou o domínio dos números racionais, designando-o por conjunto dos números reais.

Apesar de Dedekind finalmente encontrar o conjunto que possui a mesma continuidade da linha recta, algumas objecções foram apresentadas ao seu conceito de número irracional.

Segundo Lipschitz (1832 - 1903), a teoria de Dedekind não diferia daquela que havia sido elaborada pelos gregos acerca das grandezas incomensuráveis, daí que não se lhe pudesse atribuir nenhum carácter inovador.

A noção "intuitiva" de número e os *Elementos* de Euclides, já aqui referidos, foram a base do ensino da Matemática ao longo de um largo período de tempo.

As "*razões*" de Euclides foram frequentemente classificadas de "*números*" e aplicando-lhes as regras do cálculo com os inteiros, obtiveram-se resultados exactos, sem analisar a fundo a razão do êxito destes métodos.

Verificamos que Bombelli (1526 - 1572), em meados do século XVI, expõe sobre este tema, o ponto de vista de que, se entendem-se como pressupostos os resultados do livro V de Euclides, então é porque estes são correctos.

Observou igualmente que, uma vez eleita a unidade de comprimento, existe uma correspondência biunívoca entre os comprimentos e as razões de magnitudes.

Define diversas operações algébricas sobre os comprimentos (supondo, desde logo, a unidade como sendo fixa) e, representando os números mediante comprimentos, obtém a definição geométrica do corpo dos números reais (ponto de vista cujo mérito se atribui a Descartes) proporcionando, deste modo, à Álgebra uma sólida base geométrica.

A contribuição de Bombelli para o desenvolvimento da Álgebra foi muito importante.

Aproveitando os trabalhos dos seus antecessores, nomeadamente Tartaglia (1500 - 1557) e Cardano (1501 - 1576), Bombelli elaborou a sua *Algebra*, escrita em italiano e composta por cinco volumes.

Nesta obra Bombelli expõe, de uma forma sistemática, os cálculos de raízes quadradas e cúbicas, envolvendo operações com radicais e a resolução de equações de diferentes graus.

Alguns historiadores consideram que o mais inovador nesta obra é o aparecimento de uma *outra espécie de raíz cubica*, a que vai permitir generalizar o uso da fórmula de Tartaglia - Cardano[1] ao caso irredutível da equação de 3^o grau.

Em Portugal, Pedro Nunes (1502 - 1578) interessou-se por este assunto, dedicando grande parte do *Libro de Algebra en Arithmetica y Geometria* à resolução de equações.

Neste trabalho Pedro Nunes revela-se conhecedor das descobertas dos algebristas italianos supra citados, formulando observações pertinentes e até mesmo levantando algumas objecções aos resultados obtidos pela aplicação da regra Tartaglia - Cardano. ([41], 469)

Segundo alguns historiadores, podemos afirmar que no quase meio século decorrido entre a *Ars Magna* (1545) de Cardano e a *Artem Analyticam Isagoge* (1591) de Viète, nenhum outro tratado ascendeu ao alto nível deste de Pedro Nunes. ([42], 367)

Como referimos anteriormente, Bombelli representando os números mediante comprimentos obteve uma definição geométrica do corpo dos números reais.

Simon Stevin (1548 - 1620) adopta, da mesma forma, um ponto de vista análogo no que diz respeito ao número, que é para ele, aquele mediante o qual denota-se uma medida de magnitude ([5], pp. 208 - 209).

Para Stevin, o número é considerado essencialmente *contínuo* (sem precisar qual o sentido que atribui à palavra), se bem que, realiza uma distinção entre contínuo geométrico e números geométricos.

À custa de ter sido o primeiro a fazer das fracções decimais um método de cálculo e propondo para estas uma notação bastante próxima da actual, dá-se claramente de conta de que estas fracções proporcionam um algoritmo de aproximação indefinida de todo o número real.

Assim, na obra *La disme* (1585) Stevin introduziu as fracções decimais como parte de um projecto unificador do sistema de medições numa base decimal. ([42], 152)

Ao mesmo tempo, forma-se uma noção intuitiva muito clara do contínuo numérico, que não teria sido demasiado difícil precisá-lo de modo definitivo.

Durante o século XVII o principal objecto de discussão foi a noção de infinitamente

[1] Para informações adicionais respeitantes ao estudo da cúbica por Tartaglia e Cardano, veja-se [41], pp. 460 - 465.

pequeno, que justificada pelos resultados que permitia alcançar, parecia estar em aberta contradição com o Axioma de Arquimedes.

Os matemáticos da época acabaram por adoptar um ponto de vista pouco diferente do de Bombelli, onde se distingue sobretudo uma maior atenção dedicada aos métodos rigorosos.

Isaac Barrow (1630 - 1677) ([7], pp. 363 - 365), que teve um papel preponderante na criação do Cálculo Infinitesimal, expõe, brilhantemente, a necessidade de voltar à Teoria de Eudóxio com o objectivo de reencontrar a proverbial *certeza geométrica*. Por outro lado, ao definir números como símbolos que designam as razões de magnitudes, susceptíveis de se combinarem recorrendo a operações da aritmética, obtém o corpo dos números reais em termos, que depois recorrerá igualmente Newton (1642 - 1727) na sua *Aritmética*, que não serão modificados, em nada, pelos seus sucessores até Dedekind e Cantor.

Durante o século XVIII e parte do século XIX muitos cientistas concordavam com a ideia de que a Matemática era a "Ciência da Quantidade". Mas, ao longo do século XIX a imagem da Matemática mudou e com isso a noção de número estendeu-se gradualmente para além dos seus anteriores limites ([16], 291).

A primeira exposição publicada sobre a Teoria dos Números Irracionais deve-se a Charles Méray (1835 - 1911). Nos anos de 1968 e de 1969 Méray publicou duas memórias, fruto de anos de reflexão.

A primeira dessas memórias, intitulada *Remarques nouvelles sur les points fondamentaux du calcul infinitésimal et sur la théorie du développement des fonctions en séries* esboça a sua doutrina baseada no desenvolvimento das funções em séries de Taylor e na segunda memória, *Remarques sur la nature des quantités définies par la condition de servir de limites à des variables donnés*, o autor apresenta um definição de número irracional.

Posteriormente, o ano de 1872 foi simbolicamente excepcional para o desenvolvimento da Análise. Durante esse ano, foram publicadas importantes contribuições para a aritmetização da Análise, devidas a cinco matemáticos: um francês, H. C. R. Méray, já aqui referenciado, e quatro alemães, Karl Weierstrass (1815 - 1897), H. E. Heine (1821 - 1881), George Cantor (1845 - 1918) e J. W. R. Dedekind (veja-se, por exemplo, [4], 691).

O trabalho destes matemáticos, no que se refere à aritmetização da análise, representa o culminar de meio século de investigações, em torno da fundamentação do conceito de função e de número, que haviam começado em 1822 com a Teoria do Calor de Fourier e com o intuito de reduzir toda a Análise à Aritmética.

Existiram duas causas principais de insatisfação durante este intervalo de 50 anos. Uma residia na consciência de que nem todas as séries de senos e co-senos se comportavam da mesma forma, a outra causa de insatisfação consistia na ausência de uma definição precisa de "número real", que constitui o foco principal do conceito de aritmetização.

Os trabalhos de Dirichlet (1805 - 1859) e de Riemann (1826 – 1866) tornaram absolutamente claro que uma série de Fourrier poderia representar uma função descontínua e consequentemente o Teorema de Cauchy acerca da soma da série de funções contínuas deveria ser modificado.

Foi Weierstrass, quando leccionava em Berlim, o primeiro a manifestar preocupações didácticas, relacionadas com o desenvolvimento em séries de Fourrier e introduziu uma distinção cuidadosa entre convergência de uma série de números e de uma série de funções.

Identificou, assim, uma propriedade crucial de convergência de funções, a convergência uniforme num intervalo.

Uma vez que Weierstrass não publicou muitas das suas ideias, foi através dos trabalhos dos seus alunos e seguidores que conceitos como o de convergência uniforme se tornaram efectivamente conhecidos.

Um dos seus alunos que retomou o antigo problema da convergência das séries de Fourrier e levantou a questão da unicidade da série trigonométrica que representa uma determinada função foi Cantor.

Ao contrário de Weierstrass e até mesmo de Dedekind, que ao leccionar na escola Politécnica de Zurique se deu conta da inexistência de uma definição satisfatória de número irracional, Cantor sentiu necessidade de uma nova abordagem para este conceito, atendendo aos trabalhos que vinha a desenvolver no âmbito da resolução dos problemas de convergência das séries de Fourrier.

Assim, motivada por preocupações didácticas ou por questões relacionadas com trabalhos de investigação, a realidade é que a preocupação em encontrar uma definição de número irracional que preenchesse as lacunas existentes tornou-se perfeitamente evidente.

Bolzano (1781 - 1848) mostrara-se claramente consciente, em 1817, da necessidade de rigor na Análise, no entanto, exerceu uma influência muito menor do que a de Cauchy

(1789 - 1857), cuja Análise continuava ainda fortemente enraizada na intuição geométrica.

O trabalho de Bolzano evidência uma quebra com o estilo do século XVIII apoiado na intuição geométrica. Bolzano discordava, de uma forma muito evidenciada, do carácter intuitivo das demonstrações matemáticas apontando a Lógica e a Aritmética como meios para uma fundamentação rigorosa da Matemática ([4], pp. 649 - 651).

A procura por uma axiomatização conveniente que conferisse o rigor ansiado foi igualmente preconizada, anteriormente, pelo matemático português José Anastácio da Cunha (1744 - 1787).

Na sua obra *Principios Mathematicos* o autor procura apresentar praticamente todos os conhecimentos matemáticos básicos para a época, onde revela um rigor e clareza não muito comuns. Contudo, os trabalhos de Anastácio da Cunha bem como como os de Bolzano alcançaram escasso impacto, talvez devido ao facto de terem sido publicados longe dos grandes centros culturais da Europa.

Coube a Cauchy, no início do seculo XIX, nos anos 20, uma utilização sistemática dos conceitos de continuidade e limite de uma função bem como de convergência e limite de uma sucessão, que em muito contribuiram para o desenvolvimento do conceito de número real.

Cauchy considerou os números irracionais como limites de *sucessões fundamentais*, actualmente denominadas de sucessões de Cauchy.

Uma sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números racionais diz-se *fundamental* se, dado um número $\varepsilon > 0$ arbitrário, se tiver $|a_n - a_k| < \varepsilon$, para todo o n e k tais que $n, k > p$, para algum p.

Cauchy não se apercebeu que só podia assegurar este resultado se tivesse sido antecipadamente provado que toda a *sucessão fundamental* possuía limite (Completude). Este aspecto foi posteriormente explorado por diversos matemáticos.

Embora existissem predecessores de Cauchy na apresentação de uma primeira definição de convergência de uma série, a verdade é que a sua definição, acompanhada de um critério é a que ainda é usada actualmente. ([26], p. 711)

Com o intuito de clarificar esta definição, Cauchy estabeleceu o denominado Critério de Convergência de Cauchy.

Entre os seus predecessores, destacamos Anastácio da Cunha, pois além de ter efectivamente lançado os alicerces desta definição, utilizou-a no estudo da convergência de uma série geométrica, na sua obra *Principios Mathematicos*, como veremos mais adiante.

Todos os trabalhos aqui focados permitiram uma crescente conscencialização da necessidade de rigor na Análise e consequentemente de uma definição consistente do conceito de número real.

Deu-se, então, início à aritmetização da Análise, conduzida por vultos, já aqui referidos, como Weierstrass e Dedekind, que tinham como objectivo, uma total caracterização do conceito de número real.

Weierstrass deu-se de conta que, com o intuito de separar a Análise da Geometria, era necessário apresentar uma definição de número irracional independente do conceito de limite.

A introdução do curso de Weierstrass *Introdução à Teoria das Funções Analíticas*, redigida por Hurwitz (1859 - 1919) relativo ao ano de 1878, é iniciada com a noção de número cuja ideia de ser um *agregado de unidades* é a mesma que podemos encontrar no livro VII dos *Elementos* de Euclides. Com efeito, em Hurwitz, encontramos a seguinte definição:

> "O conceito de número surge através da reunião mental de coisas, nas quais se descobriu uma característica comum, especialmente de coisas mentalmente idênticas. Designamos essa coisa como a unidade do número." (veja-se [24], pp. 1, 6 e 8 - cit. in [14], pp. 96, 98 e 100)

São ainda utilizadas as designações de *número usual*, *número inteiro* e *número inteiro usual* para se referir aos *números inteiros positivos*.

A construção do conjunto dos números racionais positivos assenta sobre o conceito de *parte exacta da unidade* que corresponde a um número fraccionário positivo da forma $\frac{1}{n}$.

Combinações lineares finitas de coeficientes inteiros positivos destas partes exactas da unidade definem os *números usuais mistos*, ou seja, os *números racionais positivos*.

Uma *parte exacta da unidade*, $\frac{1}{a}$, é um elemento dos quais existe a no elemento principal, a unidade. Um número complexo composto (agregado de números de diferentes unidades) destes novos elementos e da unidade principal será então uma *grandeza numérica*.

Uma grandeza numérica pode conter quer uma quantidade finita, quer uma quantidade infinita de elementos.

A identificação entre grandezas com um número finito de elementos e os números racionais positivos é bem clara na redacção que Thieme (1780 - 1860) faz do curso *Capítulos Seleccionados da Teoria das Funções Analíticas,* leccionado por Weierstrass no ano de 1886.

Em todo o caso, devemos ter em conta que a terminologia *grandeza numérica racional* refere-se quer a um racional positivo, quer a um racional negativo, contrariamente à redacção de Hurwitz, onde apenas são considerados inicialmente números positivos.

O conceito de *grandeza numérica* revela-se fundamental na construção do conjunto dos números racionais, bem como para a construção do número irracional.

Um dos pontos fundamentais para a construção do conceito de número real é estabelecer uma forma que nos permita distinguir os números racionais dos que não o são, os números irracionais. A maneira como Weierstrass definiu, de uma forma puramente aritmética estes dois tipos de números está bastante implícita na redacção de Thieme , anteriormente referida.

O conceito mais geral de número que apresentamos até ao momento foi o de *número usual misto*, correspondente a um racional positivo, e que coincide com uma grandeza numérica composta por uma quantidade finita de elementos. No entanto, as grandezas numéricas podem conter igualmente uma infinidade de elementos e é observando que existem grandezas deste último tipo, que não são equivalentes a nenhum racional, que Weierstrass conclui que o conjunto dos números não fica completo com os números racionais, razão pela qual surge a necessidade de criar novos números.

A únicas grandezas numéricas que podemos de alguma forma comparar são aquelas que possuem um valor finito. Weierstrass denomina de *números finitos* estas grandezas que correspondem exactamente a todos os números reais positivos. Weierstrass desenvolve as leis aritméticas relativamente a estas identidades e, com a introdução de *elementos oposto*, esta álgebra é estendida aos números reais negativos, ficando completo o conjunto dos reais.

As construções de números reais elaboradas por Weierstrass e Dedekind pareciam funcionar na prática matemática, no entanto, existiram alguns matemáticos que procuraram reformulá-las. Exemplo disso foram os trabalhos levados a cabo pelos matemáticos Gottlob Frege (1848 - 1925) e Giuseppe Peano (1858 - 1932), que, na tentativa de encontrar certezas absolutas, consideraram que todos os conceitos e teoremas aritméticos deveriam ser reduzidos a teoremas e conceitos lógicos.

Ambos estes matemáticos procuraram estabelecer uma caracterização do conjunto dos números naturais, com base em princípios, ou axiomas de modo que este conjunto de axiomas constituía uma verdadeira definição do que se deve entender por esse conjunto de números.

Frege tomou os Fundamentos da Matemática com grande seriedade e em 1884 publicou um pequeno tratado, intitulado *Die Grundlagen der Arithmetik,* contendo uma definição para os números inteiros positivos, numa base puramente lógica. Esta definição ocupou e fascinou filósofos da data.

Por um longo período, o objectivo principal de Frege foi o de depositar os fundamentos de toda a Aritmética por meios puramente lógicos ([7], pp. 618 e 619). Este objectivo estava claramente em oposição com a abordagem formal de Thomae (1840 - 1920), que via a Aritmética como um jogo de sinais, aos quais foram atribuídas regras operatórias que não são arbitrárias, tais que através de axiomas os números podem ser relaccionados com muitos e diferentes campos.

Não muito surpreendentemente Frege começou a atacar as publicações de Thomae em conferências e artigos.

Frege apresentou uma crítica detalhada à maioria das tentativas anteriores de construção dos números reais de uma forma rigorosa, bem como, alguns resultados preliminares da sua própria teoria, no entanto, não atingiu o seu grande objectivo de construir uma teoria lógica dos números reais.

Para além das suas observações críticas acerca das ideias sobre a *teoria dos símbolos* de autores como Heine (1821 - 1881) e Thomae, enfatizou um assunto que preocupou igualmente a visões de Dedekind e Weierstrass: *Como é que podemos ter a certeza, em todas estas construções, que os novos conceitos ou regras introduzidos não nos levam a contradições, violando o critério minimamente aceitável pela maioria dos conceitos matemáticos?*

Frege tentou resistir ao fim da ciência da quantidade, rejeitando todas as tentativas de reduzir a análise à aritmética dos inteiros, apoiando-se na visão tradicional de que os números reais deveriam ser concebidos como razões de quantidades, que ele não queria que fossem introduzidas por meios geométricos.

Para Frege, somente uma caracterização geral do conceito de quantidade iria realçar a natureza lógica da aritmética dos reais. As últimas secções do segundo volume do seu livro *Fundamental Laws*, contêm a sua tentativa de criar uma definição puramente lógica da noção de quantidade, similar à sua definição de números.

O matemático e filósofo Russel (1872 - 1970) escreveu-lhe uma carta onde o informava que o seu sistema lógico permitia definir um conceito paradoxal para o qual não existia nenhum domínio de objectos que lhe estivesse englobado.

Frege publicou, ele próprio, este paradoxo no segundo volume do seu *Grundgesetze der Arithmetik*.

Após algumas tentativas falhadas de tornar o seu sistema consistente, sentiu-se compelido a desistir do seu programa logicista, especialmente no fim da sua carreira.

Alguns anos antes da controvérsia entre Frege e Thomae, Cantor iniciou uma nova teoria, a Teoria dos Conjuntos Transfinitos, que agitou todo o debate sobre os Fundamentos.

No início do século XX, a Teoria dos Conjuntos de Cantor desenvolveu-se como sendo a melhor promessa para atingir um novo consenso sobre os Fundamentos da Análise e até da Matemática.

A construção da Teoria dos Conjuntos Transfinitos de Cantor deverá ser colocada no contexto do final da ciência da quantidade pois procurou clarificar o conceito de *contínuo*. Cantor propôs uma forma puramente aritmética da definição de contínuo e forneceu uma descrição precisa da sua cardinalidade ([5], pp. 597 - 609).

A ideia de reduzir a Matemática à Teoria dos Conjuntos continuou controversa e as ideias de Cantor sobre os conjuntos transfinitos teve uma lenta recepção, exemplo disso manifesta-se no cepticismo de Kronecker (1823 - 1891) em aceitar algo além dos números racionais ([7], pp. 584 - 597)

A Teoria dos Conjuntos reduzia a "árvore majestosa" da Matemática Clássica à simples relação de um elemento pertencer a um conjunto. Nesse sentido, a Matemática deixava de ser a ciência da quantidade para ser a ciência do $\in$ ([16], p. 311).

Por volta de 1900, quando as ideias de Cantor começaram a ser aceites, uma série de inesperadas contradições foram descobertas na Teoria dos Conjuntos. Curiosamente, estas contradições foram denominadas de paradoxos e foram encaradas como algo mais do que particularidades matemáticas.

Surgiram muitos paradoxos que levantaram dúvidas acerca da Teoria dos Conjuntos ([7], pp. 611 - 635), no entanto, Cantor considerava que as definições dos conjuntos deveriam ser suficientemente consistentes para lhes fazer frente. Hilbert (1862 - 1943) considerou esta reacção aos paradoxos como tecnicamente vaga e não muito satisfatória.

Em 1902, Bertrand Russel apresentou um paradoxo no qual a definição de conjunto, de Cantor, pareceu conduzir a uma contradição. A simplicidade deste paradoxo abalou os fundamentos da Lógica e da Matemática.

O mais notório paradoxo apareceu nos *Princípios da Matemática* de Russel, publicado em 1903. No entanto, antes de examinarmos este paradoxo observemos que alguns conjuntos são membros deles próprios e outros não o são. Por exemplo, o conjunto de todas as ideias abstractas, é uma ideia abstracta, mas o conjunto de todas as estrelas não é uma estrela. Com efeito, a maioria dos conjuntos não é elemento deles próprios.

Partindo desta ideia, podemos formular o paradoxo de Russel, de uma forma muito simples, usando as noções de conjunto e de elemento.

Se aceitarmos de uma forma ingénua o ponto de vista de Cantor no qual toda a condição determina um conjunto, então é obviamente possível considerar o conjunto de todos os conjuntos que possuem a propriedade de não serem elementos deles próprios, isto é, o conjunto $S = \{A : A \text{ é um conjunto e } A \notin A\}$.

S é ele próprio um conjunto, então pelo princípio do terceiro excluído, que diz-nos que toda a proposição ou é verdadeira ou é falsa, ou $S \in S$ ou $S \notin S$ é uma afirmação verdadeira. No entanto, qualquer um dos dois casos conduz-nos a uma contradição. Pois se $S \in S$ então S deverá ser um dos conjuntos A descritos na condição, logo, $S \notin S$, o que é impossível. Por outro lado, se $S \notin S$ então S satisfaz a propriedade pela qual determina-se quais os conjuntos que são elementos de S, assim $S \in S$, o que é igualmente impossível.

Uma vez que ambos os casos conduziram a uma contradição, temos claramente o paradoxo.

O paradoxo de Russel não foi o primeiro paradoxo relativo à Teoria dos Conjuntos. O primeiro dos paradoxos, baseado na consideração de *conjunto de todos os números* *ordinais*, foi publicado em 1897 pelo matemático italiano Burali-Forti (1861 - 1931). Posteriormente, em 1899, o próprio Cantor deparou-se com um paradoxo relacionado com a sua teoria dos números cardinais. Este estava relacionado com um seu Teorema que afirmava que, para qualquer conjunto A, o seu conjunto potência possuia um número cardinal superior ao do conjunto A. Notemos que, o conjunto potência de A, $P(A)$, é o conjunto de todos os subconjuntos de A.

O Teorema de Cantor não só respondia à questão de que para qualquer número cardinal existe um outro superior a ele, como também, apresentava um meio para construir uma sucessão crescente de números cardinais transfinitos.

O paradoxo levanta-se quando consideramos o mais compreensível de todos os conjuntos, o conjunto U que contém todos os conjuntos. Pelo Teorema de Cantor $\#(P(U)) > \#U$. Uma vez que, U é o conjunto de todos os conjuntos, e $P(U)$ é um conjunto, então $P(U)$ está contido em U, donde $\#(P(U)) \leqslant \#U$, o que é uma contradição.

No seu desenvolvimento original da Teoria dos Conjuntos, Cantor baseou-se na intuição, mais do que em qualquer conjunto de axiomas, para decidir quais os objectos que seriam conjuntos. A primeira bem sucedida axiomatização da Teoria dos Conjuntos foi publicada pelo matemático alemão Zermelo (1871 - 1953) em 1908.

Um axioma de Zermelo que apresenta particular interesse é o Axioma da Escolha, referindo que, para qualquer colecção de conjuntos não vazios disjuntos é possível escolher exactamente um elemento de cada um dos conjuntos e assim formar um novo conjunto.

A ideia de efectuar infinitamente muitas escolhas não era uma ideia nova, pois, por exemplo, em 1883, o próprio Cantor tinha inconscientemente aplicado o Axioma da Escolha.

Devido à ausência de uma prova da consistência deste axioma, a proposta de Zermelo de axiomatização da Teoria dos Conjuntos não foi imediatamente aceite por muitos matemáticos, contudo esta axiomatização constituiu um ponto de partida para fundamentações axiomáticas das teorias dos conjuntos que surgiram posteriormente.

Outro grande pioneiro do estudo dos Fundamentos da Matemática foi o alemão David Hilbert. O seu interesse pelos fundamentos relacciona-se com as suas investigações em Geometria que datam da última década do século XIX. A sua obra *Grundlagen der Geometrie*, apresenta uma rigorosa axiomatização da Geometria elementar evitando qualquer tipo de apelo à intuição.

Com efeito, em 1898 Hilbert abandonou o seu interesse pela Teoria dos Números Algébricos, com o intuito de trabalhar numa série de cursos onde apresentava um desenvolvimento postulacional da geometria euclideana. Estes trabalhos foram editados na forma do livro já aqui referido, *Grundlagen der Geometrie*, considerado "a seguir aos Elementos (...) o segundo trabalho mais influente escrito sobre geometria elementar." ([7], p. 579)

Hilbert iniciou este clássico com as seguintes palavras: "Imaginemos três sistemas diferentes de objectos". ([23], p. 1)

Os "objectos" por ele enunciados tratavam-se de pontos, rectas e planos, e estavam ligados por três tipos de relações, as quais Hilbert escolheu indicar por *incidência, ordem* e *congruência.* Efectivamente, os 21 axiomas do seu tratado dividiam-se em 5 grupos: incidência, ordem, congruência, paralelismo e continuidade.

O número de axiomas pode parecer invulgarmente grande quando comparado com outros tratados, com efeito, dois desses axiomas foram posteriormente provados serem equivalentes, de modo que, na formulação inicial, este conjunto de axiomas não era um conjunto independente.

Hilbert foi o principal responsável por estabelecer o ponto de vista de que um sistema de axiomas pode ser *consistente* ([7], p. 580).

Euclides acreditava que os axiomas representavam verdades evidentes, derivadas das experiências, no entanto, para Hilbert estes eram as regras básicas a partir das quais poderíamos avançar para consequências lógicas. Assim sendo, Hilbert não deixava lugar para a realidade física na sua ordem de ideias.

Enquanto a geometria euclideana foi considerada como um "catálogo de verdades" ([7], p. 580) acerca do mundo físico, a questão da consistência não se levantou, contudo, ao interpretar um ponto como um par ordenado de números reais e uma recta como uma equação linear, Hilbert construiu, em 1904, um modelo para a geometria euclideana baseado no domínio da Aritmética, reduzindo, assim, os seus esforços na tentativa de provar a consistência da própria Aritmética.

As ideias de Hilbert enfrentaram um considerável cepticismo, nomeadamente com o artigo de Kurt Gödel (1906, 1978) *Uber formal unentscheidbare Sätze der Principia*

Mathematica und Verwander Systeme[2] ([42], p. 323)

O trabalho de Gödel assume particular importância na medida em que mostrou que no caso em que um sistema aritmético S não apresenta contradições, esta imunidade às contradições não pode ser provada dentro dos meios desse sistema.

Traduzindo por outras palavras, num qualquer sistema axiomático existem proposições que não podem ser provadas, ou refutadas, recorrendo aos axiomas desse sistema. Em particular, a consistência dos axiomas não poderá ser provada.

O artigo de Gödel, tratando da completude, decibilidade e consistência dos axiomas, abriu assim um novo período nos trabalhos sobre as questões dos fundamentos, abalando as tentativas de estabelecer um sistema de axiomas que colocassem toda a matemática numa base axiomática.

Outra das obras abaladas pelos trabalhos de Gödel foram os *Principia Mathematica* (1910 - 1913) escritos por Bertrand Russel e Alfred Whitehead (1981 - 1947).

Esta obra assume particular importância na medida em que:

> "representa o auge de um programa denominado de *logicismo*, que diferia do formalismo de Hilbert na sua tentativa de construir toda a matemática através da dedução lógica a partir de um pequeno número de conceitos e princípios de natureza puramente lógica." ([42], p. 323)

Tal como a abordagem de Hilbert, a de Russel e Whitehead fracassou no seu propósito fundamental, embora a sua contribuição para a lógica tenha sido considerável.

---

[2] *Sobre as proposições formalmente indecidíveis dos Principia Mathematica e sistema afins.*

Capítulo 2

José Anastácio da Cunha

2.1 Vida e Obra

Um dos Matemáticos Portugueses mais importantes de século XVIII foi, com efeito, José Anastácio da Cunha. Podemos afirmar que Cunha era um seguidor dos princípios do Cálculo baseados na noção de limite, visão essa protagonizada por vultos como Newton e d'Alembert (1717 - 1783), no entanto, este matemático português "apresentou a sua própria definição de infinitésimo" ([12], p. 1).

Em 1772 uma importante reforma foi levada a cabo na Universidade de Coimbra, constituindo uma tentativa de modernizar a Educação Portuguesa. Esta reforma, levada a cabo pelo Marquês de Pombal, levou a uma substituição dos antigos estatutos, levando à criação de duas novas faculdades: a de Filosofia e a de Matemática.

Assistiu-se pela primeira vez, em Portugal, à criação de uma Faculdade de Matemática onde, igualmente pela primeira vez, introduziu-se o ensino do Cálculo Integral e Diferencial.

O livro de texto adoptado para o ensino do Cálculo foi o segundo volume dos *Elements de Analyse*, do então popular escritor de livros de texto Étienne Bezout (1739-1783). O seu *Cours de Mathématiques*, composto por seis volumes, foi originalmente escrito para a Escola Naval Francesa onde leccionou. Os dois primeiros volumes, respeitantes à Análise, foram traduzidos para Português com o intuito de serem utilizados pelos alunos da Faculdade de Matemática de Coimbra, sendo o segundo volume o primeiro livro de Cálculo publicado em Portugal.

Na última década do século XVIII os matemáticos portugueses mostraram-se fortemente interessados em discutir os princípios fundamentais do Cálculo. Exemplos de trabalhos sobre esse assunto foram: os quatro trabalhos desenvolvidos por José Anastácio da Cunha, um levado a cabo por Anastácio Joaquim Rodrigues (? - 1818) e dois por Francisco Garção Stockler (1759 - 1829) ([12], p. 16).

Ao mesmo tempo, mais precisamente em 1798, foram igualmente traduzidos dois importantes livros: *Théorie des Fonctions Analytiques* de Lagrange (1736 - 1813) e *Réflexions sur la Métaphysique du Calcul Infinitésimal* de Carnot (1753 - 1823). Atendendo ao facto de que ambas as edições originais destes livros foram publicadas apenas um ano antes, em 1797, podemos indubitavelmente constatar o interesse manifestado pelos matemáticos portugueses no que diz respeito a este assunto.

Como já havia sido referido anteriormente, um dos matemáticos portugueses do século XVIII que desempenhou um papel preponderante na Fundamentação do Cálculo em Portugal foi, sem sombra de dúvidas, José Anastácio da Cunha.

Nascido a 11 de Maio de 1744 em Lisboa, proveniente de uma família humilde, foi educado pelos padres da Congregação do Oratório na Casa das Necessidades. Nessa instituição era, na época, levado a cabo um processo inovador de acção pedagógica. Com efeito, Cunha declarou, anos mais tarde, ter aprendido Matemática e Física por sua própria conta, naquela instituição.

Cunha passou aproximadamente 10 anos no exército, onde ocupou um lugar de tenente, no Regimento de Artilharia do Porto, aquartelado em Valença do Minho, tendo adquirido nessa altura a reputação de ser um notável matemático.

A 5 de Outubro de 1773 o Marquês de Pombal escreveu ao Reitor da Universidade de Coimbra, D. Francisco de Lemos, indicando o nome do Tenente de Artilharia José Anastácio da Cunha, para a cadeira de Geometria.

Pombal afirma:

> "As incomodidades, que há sete semanas me tiveram impedido, não permitiram que eu desse a Vossa Excelência completa noção do Professor José Anastácio da Cunha, que até agora serviu de Tenente na Companhia de Bombeiros do Regimento da Praça de Valença do Minho. O dito militar é tão eminente na Ciência Matemática, que tendo-o eu destinado a ir à Ale-

> manha aperfeiçoar-se com o Marechal General, que me tinha pedido dois, ou três moços Portugueses para os fazer completos, me requereu o Tenente General Francisco Maclean, que não o mandasse, porque ele sabia mais que a maior parte dos Marechais dos Exércitos de França, de Inglaterra, e da Alemanha; e que é um daqueles homens raros, que nas Nações cultas costumam aparecer ." ([1] - cit. in [33], p. 2)

Anastácio da Cunha foi então para Coimbra, onde leccionou na recém criada faculdade de Matemática, contudo, tal não aconteceu por muito tempo.

Com efeito, Anastácio da Cunha apenas leccionou nos anos lectivos de 1773 a 1778, como lente da cadeira de Geometria.

As concepções pedagógicas adoptadas por Anastácio da Cunha eram invulgares para a época e, em vez de repetir literalmente o que estava nos livros adoptados, procurou, indo de encontro com os Estatutos da instituição, fomentar uma prática de ensino onde os alunos se conscencializavam dos aspectos mais peculiares do que pretendia transmitir, procurando que estes ultrapassassem as suas dificuldades.

É o próprio Matemático que afirma o seguinte:

> "Expunha o objecto das proposições, a sua conexão e dependencia, o artificio com que Euclides consegue quasi sempre unir a facilidade ao rigor geométrico, e d'este procurava dar aos estudantes o conhecimento necessário. Não me demorava em ler ou repetir litteralmente (como os meus companheiros costumavam) as proposições que por faceis nem carecem de explicação, nem a admittem, só para poder empregar tempo sufficiente em indicar aos estudantes as verdadeiras dificuldades da lição, e facilitar-lh'as quanto as minhas tenues forças o permittiam."[1]

Em 1777, com a morte de D. José, o Marquês de Pombal caíu em desgraça e os sectores sociais e políticos por ele reprimidos, rapidamente foram reabilitados. Assiste-se, então, à reactivação da Inquisição, que não tardou em considerar inconveniente certas práticas de Anastácio da Cunha, considerado na altura como sendo um livre-pensador.

[1]In *Questão entre José Anastácio da Cunha e José Monteiro da Rocha*, por António José Teixeira, publicado nos volumes 38 e 39 (1890/91/92) de *O Instituto*, Coimbra - cit. in [43], p. 69.

Denunciado à Inquisição por vários antigos colegas e conhecidos, Cunha foi preso. A sentença foi lida em público, num auto de fé realizado em Lisboa a 11 de Outubro do mesmo ano, sendo condenado a três anos de reclusão (na mesma Casa das Necessidades da Congregação do Oratório onde havia estudado) seguidos de quatro anos de degredo em Évora. Foi igualmente proibido de entrar em Coimbra e Valença.

A 23 de Janeiro de 1781, a seu pedido, foi-lhe perdoado o resto da pena. Nessa altura, assumiu funções de professor de Matemática na Casa Pia, onde pôde então resumir um livro que vinha a escrever durante alguns anos e que foi publicado em 1782 os *Princípios Mathematicos*.

2.2 Principios Mathematicos

Em 1773, o ensino na Universidade de Coimbra, de parte da cadeira de Geometria deveria ser feito tendo por base a tradução dos *Elementos de Trigonometria e Álgebra*, de Bezout, feita por José Monteiro Rocha. No entanto, José Anastácio da Cunha, considerando que aquela tradução revelava-se longa e complicada, substituiu-a por outra, por si elaborada, que ocupava apenas uma folha.

Não obstante este facto, apresentou, a 20 de Abril de 1776, um *Compêndio de Ellementos Práticos* de Geometria, considerando que este trabalho consistia num método mais breve e acessível para os estudantes aprenderem.

O *Compêndio* seria então examinado pelos outros professores, contudo, nunca mais dele houve notícia. Tratar-se-ia, acredita-se, dos primeiros capítulos dos seus *Principios Mathematicos*.

A 20 de Junho de 1778, a inquisição ordenou que a prisão de José Anastácio da Cunha se efectuasse e, após ter sido forçado a um retiro de três anos na congregação do oratório, logrou obter que o degredo para Évora fosse transformado em residência obrigatória, junto dos seus amigos oratonianos, o que ocorreu em 1781.

Os seis anos que lhe restaram de vida, foram empregues a ensinar na Casa Pia e a ultimar a sua obra *Principios Mathematicos*, em que trabalhava havia anos e que seria de publicação póstuma (1790) ([3], p. 18).

Após a sua morte, assiste-se a um propósito comum, por parte dos seus amigos, em procurar que José Anastácio da Cunha venha a ocupar o lugar de relevo que merece na História da Matemática. Exemplo deste facto, é o extracto seguinte, escrito 26 anos após a sua morte:

> "O longo silêncio em que foi sepultada huma obra [os Principios Mathematicos] que tanta honra faz a nossa nação, foi em todo este longo intervalo cauza de huma viva dor, e hum estimulo para os numerosos amigos, que o author deixou tam saudosos da sua memoria, como dezejosos de segurar-lhe aquella honra Literaria, que tão aturado esquecimento ameaçava roubar-lhe.
>
> Unirão-se todos os amigos do author em hum projecto, que parecia a primeira vista singular, mas que realizado como já se acha pelo zelo e intelligencia de hum d'elles, João Manuel Abreo, prehencheo os votos de todos."([31], pp. 535 - 536 - cit. in [3], p. 59)

Pode-se considerar José Anastácio da Cunha como um dos precursores da reforma da Análise Matemática, realizada no século seguinte, tendo em conta, não só os seus largos conhecimentos matemáticos mas, e mais do que tudo, o seu esforço consciente em evitar lacunas nos seus raciocínios, notando-se, contudo, erros que talvez possamos denominar de relativos, atendendo à Matemática conhecida na época.

A obra, supra citada, de José Anastácio da Cunha, consiste numa sequência bem articulada de axiomas, definições, proposições e demonstrações, com uma fundamentação lógico-dedutiva notável e com preocupações de rigor ímpares no século das luzes.

O nosso objectivo, nesta secção, será o de procurar evidenciar os mais importantes contributos deixados por este matemático, no âmbito do posterior desenvolvimento da Análise Infinitesimal, a saber: uma nova teoria sobre a função exponencial a^b, como soma de uma série de potências convergentes, a introdução da definição de diferencial de uma função real de variável real e finalmente a apresentação da primeira definição rigorosa de comvergência de uma série, antecipando-se aos trabalhos desenvolvidos por Bolzano e por Cauchy.

Procuraremos igualmente esboçar como é que José Anastácio da Cunha abordava o conceito de número, nomeadamente o conceito de número irracional que, como podemos constatar, ainda não nos é dado a conhecer de uma forma clara, por este matemático.

No que diz respeito ao tratamento propiciado por José Anastácio da Cunha à definição dos números naturais, podemos constatar que o autor é muito criterioso. Com efeito, temos:

> **Definição I, Livro IV:** "Este caracter 1, ou a palavra hum, ou a palavra unidade, denota a grandeza que se escolhe para por ella determinar alguma outra, averiguando, ou ponderando quantas vezes huma delas contém algum submultiplice da outra." ([9], p. 28)

A construção dos números naturais é feita tendo subjacente o Princípio de Indução, como podemos constatar em:

> **Definição IX, Livro IV:** "Este caracter 2, ou a palavra dois, significa o mesmo que esta expressão $1+1$; 3, ou a palavra três, significa $2+1$; 4, ou a palavra quatro, $3+1$; 5, ou cinco, $4+1$; 6, ou seis, $5+1$; 7, ou sete, $6+1$; 8, ou oito, $7+1$; 9, ou nove, $8+1$. Este caracter 0, que se chama cifra, ou zero equivale á palavra, nada.
>
> Escritos vários caracteres destes sem intervallo, e da direita para a esquerda, vale cada hum no lugar, que occupa a decima parte do que valeria no lugar immediato da esquerda: e o lugar, em que o caracter vale sómente o que o seu nome indica, marca-se com uma virgula á direita.(...)
>
> Para facilitar a pronunciação dos numeros, que constão de muitos caracteres, em vez de mil vezes mil, diz-se conto, ou milhão; em vez de milhar de milhão, diz-se billião (...); e assim por diante." ([9], p. 30)

Curiosamente podemos estabelecer um paralelo entre a definição axiomática dos números naturais, apresentada por Anastácio da Cunha, e a axiomática de Peano (1858 - 1932), publicada posteriormente em 1889, no seu livro *Principes de l'arithmétique*.

No parágrafo 1 desta obra, Peano introduz, além de um conjunto de símbolos que lhe serão úteis na sua exposição, nove axiomas sobre os quais assenta, segundo ele, toda a Aritmética.

Peano afirma que os axiomas 2, 3, 4 e 5 não são indispensáveis. Os outros cinco, denominados de axiomas de Peano, enunciam-se da seguinte forma, sendo S a função que corresponde ao conceito de sucessor de um número natural, ou seja, a função que a cada natural a, faz corresponder $a + 1$:

1) $\mathbb{N}$ é um conjunto;

2) $1 \in \mathbb{N}$;

3) S é uma aplicação injectiva de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$;

4) 1 não é sucessor de nenhum número;

5) Todo o subconjunto A de $\mathbb{N}$ que contém 1 e $S(A)$, coincide com $\mathbb{N}$ (Princípio da Indução Completa).

A partir destes axiomas Peano definiu, nos parágrafos de 1 a 7, da supra citada obra, as operações usuais da Aritmética.

O carácter axiomático, revelado por Anastácio da Cunha não é com certeza comum ao século em que se insere, conferindo-lhe assim extrema particularidade.

Outro aspecto que merece ser realçado é a forte influência que os *Elementos de Geometria* de Euclides parecem ainda oferecer nesta obra de Anastácio da Cunha. Exemplo disso é a definição de *fracção* que tem subjacente a noção de *razão.*

Definição IV, Livro IV:"Dividir huma grandeza por outra do mesmo genero, he achar a razão, que a primeira tem para a segunda. E dividir uma grandeza por hum numero, he achar outra grandeza, que seja consequente daquela, sendo o numero razão. (...)

Os Mathematicos tambem chamão fracção a todo o quociente, que assim achão indicado; e então o dividendo chama-se numerador, e o divisor denominador." ([9], p. 28)

Como foi referido esta Definição tem por base a noção de razão presente na:

Definição III, Livro IV:"O numero, que he para a unidade como huma grandeza antecedente para outra consequente, chama-se razão da antecedente para a consequente, ou razão que a antecedente tem para a consequente, ou razão em que a antecedente, e a consequente estão." ([9], p. 28)

As operações aritméticas com números escritos conforme a definição IX do livro IV, e entre números e grandezas são apresentadas sob a forma de Proposições, sendo:

Proposição I, Livro IV: "Dados varios numeros escritos conforme a **Definição IX**, deste livro IV, sommalos: isto he, achar hum numero igual a elles todos juntos." ([9], p. 31)

O autor apresenta um Corolário que permite verificar a veracidade do resultado obtido por esta operação.

Corolário 2 da Proposição II, Livro IV: "Occorre facilmente hum meio de examinar se na operação se cometteu algum erro; e he sommar o numero menor com a differença, porque deve resultar o maior." ([9], p. 34)

Na página anterior encontramos a definição de subtracção, expressa nos seguintes moldes:

Proposição II, Livro IV: "Dados dois numeros escritos conforme a **Definição IX** deste livro IV, subtrahir hum do outro, isto he, encontrar o excesso que o maior leva ao menor."

Relativamente a esta proposição o autor especifica que:

Corolário 3 da Proposição II, Livro IV: "A subtracção pode servir por varios modos para examinar a operação de sommar: e eisaqui hum."

A multiplicação e a divisão são assim apresentadas:

Proposição IV, Livro IV: "Dados dois numeros escritos conforme a **Definição IX** deste livro IV, multiplicar hum pelo outro." ([9], p. 35)

Proposição XVI, Livro IV: "Dados dois numeros escritos conforme a **Definição IX** deste livro IV, dividir hum pelo outro." ([9], p. 41)

Notemos ainda que sempre que é apresentada uma operação, esta vem acompanhada de uma respectiva exemplificação com números naturais ou com números decimais, para uma melhor compreensão da mesma.

Ao longo deste Livro IV, é apresentado todo um conjunto de propriedades das regras operatórias atrás descritas, para os números que foram definidos. Estas propriedades são descritas em termos de definições e proposições e através delas conseguimos identificar que o autor, embora sem manifestar essa pretensão, identifica e prova as propriedades de um Corpo.

Procuraremos desvendar algumas dessas propriedades que muitas vezes encontram-se *camufladas* em corolários, sob uma linguagem não muito evidente.

A *Existência de Elemento Neutro* e de *Elemento Simétrico* para a adição está subjacente no início de Livro VIII quando o autor especifica que existem grandezas que por serem precedidas do sinal $+$ denominam-se *addictivas* ou *positivas* ou ainda *affirmativas.* Em contrapartida, as grandezas que são precedidas do sinal $-$ são as *subtractivas* ou *defectivas.*

José Anastácio da Cunha define que duas grandezas *contrarias entre si*, são aquelas em que "huma he affirmativa, e a outra negativa". ([9], p. 101)

Notemos que quando o autor definiu as grandezas precedidas do sinal $-$ não utilizou a palavra *negativa* mas subentende-se estar-se a tratar de uma grandeza de tal natureza.

Na suposição seguinte o autor mostra como operar com estes dois tipos de grandezas e o que acontece no caso delas serem iguais e contrárias.

> **Supposição III, Livro VIII:** "Somma de duas grandezas desiguaes e contrarias, he a grandeza que se chamaria differença dellas, se se não supposessem contrarias; e he contraria á menor. Por somma de duas grandezas iguaes e contrarias, entende-se o mesmo que pela palavra, nada, ou pelo caracter 0; e este se trata como se fosse nome de alguma grandeza". ([9], p. 101)

Nesta suposição podemos inferir que aparece-nos a referência a que $-a + a = 0$, sendo $-a$ e a duas grandezas iguais e contrárias.

No que diz respeito à *Propriedade Associativa da multiplicação*, encontramos:

Definição VI, Livro IV: "Multiplicar huma grandeza por um numero he achar outra grandeza, cuja razão para aquella seja o numero. A grandeza, que se multiplica, chama-se multiplicando; o numero, multiplicador; ambos factores; e a grandeza encontrada, producto. Producto de tres factores [isto he, de uma grandeza e dois numeros] he o producto, que resulta de multiplicar hum factor pelo producto dos outros dois, ou o producto de dois factores pelo terceiro. (...)" ([9], p. 29)

A *Existência de Elemento Neutro* para esta operação, bem como de *Elemento Inverso*, é concretizada do seguinte modo:

Definição V, Livro IV: "Quando o dividendo he a unidade, o divisor e o quociente chamão-se reciprocos, ou inversos hum do outro." ([9], p. 29)

Proposição VI, Livro IV: "Quando o multiplicador he a unidade, he o producto igual ao multiplicando." ([9], p. 37)

A *Propriedade Comutativa da Multiplicação* é descrita na:

Proposição III, Livro IV: "Mesmos factores dão o mesmo producto, seja qual for a ordem das multiplicaçoens." ([9], p. 35)

Finalmente podemos encontrar a *Propriedade Distributiva da Multiplicação em relação à Adição* na seguinte:

Proposição XVIII, Livro IV: Multiplicar sommas indicadas, e differenças indicadas; isto he, reduzir a seríes as expressoens dos productos.

Sejão A e $B+C$ dois factores. Digo que o producto delles, $A(B+C)$, he $= AB+AC$." ([9], p. 46)

Encontramos, ainda neste livro, as seguintes três Proposições, todas na mesma página ([9], p. 37), que segundo o autor, derivam-se facilmente das definições previamente estabelecidas.

Proposição VII, Livro IV: "Quando o denominador he unidade, he a fracção igual ao numerador."

Proposição VIII, Livro IV: "Quando o numerador e denominador são iguaes entre si, he a fracção igual á unidade."

Proposição IX, Livro IV: "O quociente e o divisor são factores, cujo producto he o dividendo."

O livro segue com a enunciação de proposições e corolários respeitantes a operações com fracções e, assim, nas duas páginas seguintes do livro, encontramos:

Proposição X, Livro IV: "Dividir huma grandeza por hum numero he o mesmo que multiplicala pelo reciproco desse numero."

Proposição XI, Livro IV: "Formar huma fracção que seja producto de duas fracçoens propostas, com tando que huma destas tenha por numerador e denominador numeros."

Proposição XII, Livro IV: "Dividir huma fracção por outra fracção."

Corolário 1 da Proposição XII, Livro IV: "De introduzir hum mesmo factor no numerador e denominador de huma fracção proposta, resulta outra fracção igual á proposta: e tambem de omittir hum mesmo factor no numerador e denominador de huma fracção proposta, resulta outra fracção igual á proposta."

Corolário 2 da Proposição XII, Livro IV: "Daqui se deduz hum modo de reduzir fracçoens a hum denominador commum (...)."

Proposição XIII, Livro IV: "Sommar fracçoens."

Mais à frente, e ainda referente a operações com fracções, encontramos as seguintes duas proposições, na mesma página:

Proposição XIV, Livro IV: "Achar o excesso que huma fracção leva a outra fracção." ([9], p. 40)

Proposição XV, Livro IV: "Se a unidade for submultiplice do denominador de huma fracção, será a fracção igualmente submultiplice do numerador: e se tambem o numerador for multiplice da unidade, também será a fracção tão multiplice do reciproco do denominador como o numerador o he da unidade."

O autor define potência de um determinado factor, bem como a consequente radiciação e mostra como efectuar a simplificação de fracções, extracção de raízes e a verificação da proporcionalidade entre grandezas.

Definição VIII, Livro IV: "O producto de dois factores iguaes chama-se quadrado de cada hum; e cada hum, raiz quadrada delle: o producto de tres factores iguaes chama-se cubo de cada um; e cada hum, raiz cúbica delle (...) e assim por diante." ([9], p. 29)

Proposição XIX, Livro IV: "Dados dois numeros inteiros, achar os minimos dois numeros inteiros que estão na razão dos dados; ou em huma razão que não diffira demaziadamente da dos dados." ([9], p. 46)

Proposição XX, Livro IV: "Dado hum numero escrito conforme a **Definição IX** deste livro IV, achar-lhe a raiz quadrada." ([9], p. 51)

Proposição XXI, Livro IV: "Dado hum numero escrito conforme a **Definição IX** deste livro IV, achar-lhe a raiz cubica." ([9], p. 54)

Proposição XXII, Livro IV: "Postas quatro grandezas; se forem proposicionaes, e duas dellas numeros, será o producto das extremas igual ao das medias; e se o producto das extremas for igual ao das medias, serão proporcionaes." ([9], p. 58)

A definição de número irracional não é apresentada de uma forma clara, assistindo-se, com efeito, a iguais terminologias, quer o número se trate de uma dízima infinita periódica ou não periódica. Encontramos na:

> **Definição II, Livro IV:** "A unidade, e as grandezas, que com ella assim se comparão, chamão-se numeros. A unidade; e os seus multiplices chamão-se numeros inteiros. Qualquer outro numero chama-se quebrado, ou fracção, e o que não é multiplice de nenhum submultiplice da unidade, chama-se numero surdo, ou irracional." ([9], p. 28)

Quando José Anastácio da Cunha refere-se à escrita decimal dos números, encontramos:

> **Proposição XVII, Livro IV:** "O decimal chamado pelos Mathematicos periodico, isto he, o decimal que consta de hum mesmo carácter repetido, ou de huns mesmos caracteres repetidos sempre pela mesma ordem, resulta, ou pode resultar de se dividir o periodo [...] por um numero composto do caracter 9 tantas vezes repetido quantos são os caracteres do periodo; isto porem he quando o periodo principia na columna dos decimos: quando principia mais adiante facilmente se verá qual deva ser o dividor.
>
> O decimal $0,44444\&c.$he $= 4 \times 0,11111\&c.$: mas he $\frac{1}{9} = 0,11111\&c.$ [como se acha dividindo 1 por 9]; logo he $0,44444\&c. = 4 \times \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$." ([9], p. 44)

Contudo, no Livro XVI, referente à Trigonometria, assiste-se à definição do número irracional π, sem que seja referenciado como possuindo essa natureza:

> **Advertencia IV:** "O raio do circulo suponha-se unidade todas as vezes que se não declarar outra coisa; e em lugar de 180^o, ou $3,1415926\&c.$ escrevase π. ([9], p. 217)

Assistimos, assim, à utilização da terminologia $\&c.$ quer na designação de dízimas infinitas periódicas ou infinitas não periódicas.

A definição de número complexo, segundo José Anastácio da Cunha, não pode ser interpretada no sentido em que hoje utilizamos. Cunha define números complexos como números dados em unidades físicas diferentes, da seguinte forma:

Corolário da Proposição I, Livro IV: "Pelo mesmo methodo se sommão os numeros, a que chamão complexos, quaes são por exemplo os seguintes: 14 varas, 3 palmos e 5 pollegadas (...)." ([9], p. 32)

Com efeito, o autor mostra-nos como somar e subtrair números complexos. Apresentaremos os dois exemplos que são referidos no Livro IV, e que aparecem em corolários relativos às proposições respeitantes à soma e subtracção de números, respectivamente.

Vejamos como somar os seguintes três números complexos:

14 varas, 3 palmos e 5 pollegadas;

2 varas, 2 palmos e 6 pollegadas;

4 palmos e 1 pollegada.

Os números devem ser colocados por forma a que as varas formem uma coluna, os palmos outra e as pollegadas uma terceira.

Salientemos que as relações existentes entre as várias ordens são as seguintes:

1 palmo = 8 pollegadas;

1 vara = 5 palmos;

e que começamos a operar a partir da mínima denominação, isto é, pelas pollegadas.

Ao somarmos as pollegadas obtemos um total de 12 que correspondem a 1 palmo e 4 pollegadas. Colocamos 4 na coluna das pollegadas e o palmo constará da coluna a que pertence, perfazendo 10 palmos, o que se traduz em 2 varas.

Então, temos:

$$
\begin{array}{lll}
v & p & po \\
14 & 3 & 5 \\
2 & 2 & 6 \\
 & 4 & 1 \\
\hline
18 & 0 & 4
\end{array}
$$

Assim, a soma dos três números complexos representa 18 varas e 4 pollegadas.

Da mesma forma, subtraem-se os números complexos.

Vejamos como se subtraem os números:

20 varas, 3 palmos e 2 pollegadas;

18 varas, 4 palmos e 7 pollegadas.

À semelhança do que é feito para a soma, escrevemos os números por forma a que as varas, palmos e pollegadas fiquem organizados em coluna.

Quando operamos com as pollegadas, a quantidade a ser subtraída é superior à aditiva, logo precisamos efectuar um *empréstimo* de 1 palmo, que corresponde a 8 pollegadas, com o objectivo de podermos realizar a subtracção. Contudo, aos 4 palmos do subtractivo, temos de adicionar 1, para compensar o erro precedente.

Quando operamos com os palmos temos novamente de efectuar um *empréstimo*, sob a forma de uma vara, que corresponde a 5 palmos. Assim:

$$\begin{array}{ccc} v & p & po \\ 20 & 3 & 2 \\ 18 & 4 & 7 \\ \hline 1 & 3 & 3 \end{array}$$

O resultado da subtracção é 1 vara, 3 palmos e 3 pollegadas.

Ficando a terminologia *número complexo* associada aos números que acabamos de tratar, verificamos que a utilização do número i em nada tem a ver com a utilizada nos dias de hoje.

A associação de i a $\sqrt{-1}$ surgiu por parte de Leonhard Euler (1707 - 1782). Em 1739 Euler apresentou um seu trabalho à Academia de Ciências de S. Petesburgo, no qual é feita a primeira discussão acerca do cálculo de funções trigonométricas. ([26], p. 544)

Até à data não existiam quaisquer referências bibliográficas em que as funções seno e co-seno fossem expressas, à semelhança das funções algébricas, como fórmulas envolvendo letras e números, cujas relações com outras fórmulas da mesma natureza pudessem ser estudadas utilizando técnicas de cálculo.

Posteriormente Euler apercebeu-se que as funções trigonométricas apareciam naturalmente como soluções de equações diferenciais associadas à teoria das vibrações e assim constatou que as funções trigonométricas poderiam ser combinadas com funções de outros tipos.

Euler tornou as suas descobertas conhecidas através de cartas que trocou durante sucessivos anos com outros matemáticos e finalmente, em 1740, publicou detalhadamente as suas pesquisas na sua obra *Introductio.*[2]

Nos *Principios Mathematicos* o número i não aparece como designação de $\sqrt{-1}$. Encontramos um exemplo claro da utilização de $\sqrt{-1}$ em:

> **Proposição XXIX, Livro XVI:** "Sejam a e b quaesquer numeros: será $a^{b\sqrt{-1}}\,[= ...] = \cos bla + \left(\sqrt{-1}\right)\sin bla$." ([9], p. 217)

Uma das incongruências detectadas, é o facto de $\sqrt{-1}$ ser efectivamente utilizado, como acabamos de constatar, apesar de anteriormente, o autor, afirmar no quadro clássico de números e grandezas que:

> **Corolário 3 da Proposição V, Livro VIII:** "Numero negativo não pode ter raiz quadrada." ([9], p. 102)

O número i, por outro lado, designa um número inteiro positivo, conforme podemos constatar na:

> **Proposição XXXII, Livro XVI:** "Seja i qualquer numero inteiro positivo: será $l - a\,[= ...] = la \pm (2i-1)\,180^o\sqrt{-1}$." ([9], p. 218)

Apesar de não encontrarmos uma definição formal de número real e imaginário, a sua utilização é feita nesta obra em inúmeras situações, nomeadamente na designação de raizes de polinómios. A título de exemplo, encontramos na:

[2] Para mais informações referentes a correspondência trocada entre Euler e outros matemáticos, nomeadamente Bernoulli, respeitante a este assunto, veja-se [26], pp. 554 - 558.

> **Demonstração da Proposição XV, Livro XVIII:** "(...) a impossibilidade das raizes das equaçoens he a da raiz quadrada dos numeros negativos; por isso, e por ter cada numero duas raizes quadradas iguaes e contrarias, se $A + B\sqrt{-1}$ for raiz de huma equação, tambem $A - B\sqrt{-1}$ o será: e por isso sendo imaginarias todas as raizes da equação $Z = 0$ do grao $2n$, serão reaes n raizes, $-4B^2$, da equação $\Delta\left(\delta^2\right) = 0$." ([9], p. 255)

A obra *Principios Mathematicos* assume relevante importância na medida em que nela podemos assinalar importantes inovações, no que diz respeito aos Fundamentos da Análise Infinitesimal.

Como vimos no primeiro capítulo, o critério de convergência de uma série, tradicionalmente atribuído a Cauchy, foi previamente estabelecido por Anastácio da Cunha na obra que temos vindo a tratar.

Encontramos o referido critério na:

> **Definição I, Livro IX:** "Serie convergente chamam os Mathematicos àquella, cujos termos são semelhantemente determinados, cada hum pelo numero dos termos precedente, de sorte que sempre que a serie se possa continuar, e venha a ser indifferente o continua-la ou não, por se poder despresar sem erro notavel a somma de quantos termos se quizesse ajuntar aos já escritos ou indicados: e estes ultimos indicam-se escrevendo *&c.* depois dos primeiros dois, ou tres, ou quantos se quizer: he porém necessario que os termos escritos mostrem como se podería continuar a serie, ou que isso se saiba por outra via." ([9], p. 106)

Como observou Francisco Gomes Teixeira (1851 - 1933), na obra *História das Matemáticas em Portugal*, publicada postumamente, a doutrina apresentada por Anastácio da Cunha "equivale ao teorema hoje clássico: « se a razão de dois termos consecutivos de uma série tende para um limite, inferior à unidade, quando a ordem dêles tende para o infinito, a série é convergente ». Anastácio da Cunha não enuncia êste teorema, que foi mais tarde apresentado por Cauchy, mas a sua doutrina resolve a questão da convergência da série proposta nos mesmos casos em que o teorema enunciado a resolve.

Esta doutrina é depois aplicada pelo nosso matemático em diversos lugares da sua obra para demonstrar a convergência de algumas séries que emprega." ([51], pp. 255 - 256)

Na obra *Panegíricos e Conferencias* Francisco Gomes Teixeira acrescenta que:

> "A questão da convergência das séries formadas de termos positivos e negativos não foi considerada por Anastácio da Cunha, mas, tôdas as vezes que as encontra, aplica-lhes sem demonstração a doutrina anterior, o que equivale a considerá-las como convergentes, quando as séries formadas pelos valores absolutos dos seus termos são convergentes." ([50], p. 138)

O estudo acerca da convergência de uma série, levado a cabo por Cunha foi igualmente assinalado por José Vicente Gonçalves (1896 - 1985). Segundo este autor, a definição de Anastácio da Cunha corresponde à seguinte:

> "A série
>
> $$u_1 + u_2 + ... + u_n + ...$$
>
> será pois convergente se fôr possível alcançar um têrmo u_n a partir do qual seja indiferente o continuá-la ou não, por se poder desprezar sem êrro notável a soma
>
> $$u_{n+1} + u_{n+2} + ... + u_{n+p},$$
>
> qualquer que seja o inteiro p.
>
> (...) E não se diga que falta ali a definição de soma, pois tal definição está realmente implícita no texto: se pouco importa prolongar ou não a série convergente além de certo ponto por ser desprezível a soma de quantos têrmos se queiram tomar daí em diante, ¿não é porque os têrmos tomados fazem à sua parte a soma de todos sem êrro digno de nota?" ([18], pp. 125 - 126)

Apesar do incontestável valor desta contribuição de Anastácio da Cunha ter sido assinalado por autores portugueses, esta foi contestada incorrectamente pelo historiador de Matemática soviético Youschkevitch, no seu artigo de 1973 *J. A. da Cunha et les fondements de l'analyse infinitésimale*, [53], talvez devido a uma má interpretação induzida pela tradução francesa do livro de Anastácio da Cunha, efectuada pelo seu discípulo Manuel de Abreu.

Na tradução é referida a soma de todos "aqueles [termos] que se desprezam", no entanto, na versão original o autor refere, como vimos "a somma de quantos termos se quizesse ajuntar" o que se subentende serem em número *finito*.

A origem da confusão parece estar na interpretação feita por Manuel de Abreu, em ter tomado a notação &*c.* como parte da própria definição. Esta mesma confusão parece-nos ter sido ultrapassada quando assinalamos a definição de Anastácio da Cunha expressa, em notação moderna, por Vicente Gonçalves.

É crucial o facto de $u_1 + u_2 + u_3 + \&c.$ designar um número *finito* de termos.

O sinal de igualdade entre isto e o número, a soma da série, significa: *sem erro notável,* em que o erro notável foi arbitrariamente fixado anteriormente.

Este aspecto parece-nos claro para Anastácio da Cunha quando, por exemplo, se refere à escrita decimal dos números.

Cunha escreve

$$\frac{4}{9} = 0,4444\&c.$$

o que significa que, proposto qualquer número menor do que $\frac{4}{9}$, pode o decimal $0,4444\&c.$, continuado quanto for necessário, denotar um número maior do que o proposto, ainda que também menor do que $\frac{4}{9}$.

Este parece-nos ser o significado do sinal $=$ em expressões do mesmo género, na obra de Anastácio da Cunha.

Analisemos a demonstração da Proposição I, que aparece logo a seguir à definição de convergência da série.

Esta proposição estabelece que se $c < 1$ e A é arbitrário, então a série geométrica

$$A + Ac + Acc + Accc + ...$$

é convergente.

Realcemos o facto de que nesta demonstração $c < 1$ deva ser entendido como $0 < c < 1$, embora posteriormente o resultado seja considerado válido para $-1 < c < 1$.

Considerando O um número que se possa desprezar sem erro notável, Cunha mostra que na sucessão

$$1, \frac{1}{c}, \frac{1}{cc}, \frac{1}{ccc}, ...$$

podemos encontrar um termo d, maior do que $\frac{A}{O(1-c)}$.

d é representado com 1 mais uma soma de diferenças de termos consecutivos na sucessão, e depois é substituída cada uma destas diferenças pela primeira, que é a menor.

Cunha prova que por mais que se continue a série geométrica original a partir do termo $\frac{A}{d}$, a soma obtida será sermpre menor do que $\frac{A}{d(1-c)}$, ou seja, a escolha de d, será sempre menor do que O.

O que encontramos neste livro IX, e em particular nesta demonstração é a primeira demonstração rigorosa da convergência de uma série.

Outra das contribuições originais apresentadas por Anastácio da Cunha prende-se com a apresentação de uma nova teoria da função exponencial e, por inversão, a de logaritmo, definindo-a como soma de uma série de potencias convergentes, antecipando a teoria das funções analíticas que se iria desenvolver no século seguinte.

> **Definição II, Livro IX:** "Representem a e b dois numeros quaesquer, e seja c o numero que faz $1+c+\frac{cc}{2}+\frac{ccc}{2\times 3}+\frac{cccc}{2\times 3\times 4}+\&c. = a:$ a expressão a^b segnificará hum numero $= 1+bc+\frac{bc}{2}+\frac{bbcc}{2\times 3}+\frac{bbbccc}{2\times 3\times 4}+\&c.$; e se chamará o numero a^b potencia de a indicada pelo expoente $b:$ ou tambem, raiz de a indicada pelo expoente $\frac{1}{b}$ (...)." ([9], pp. 108 - 109)

Nesta definição assiste-se à introdução da função exponencial a^b para a e b dois números quaisquer $(a > 0)$, o que pode ser expresso em notação moderna por:

$$a^b = 1 + bc + \frac{(bc)^2}{2!} + \frac{(bc)^3}{3!} + \frac{(bc)^4}{4!} + \&c.,$$

onde c é o número que realiza esta mesma expressão quando $b = 1$, o que é sempre possível como o autor descreve no decorrer da definição supra citada.

Imediatamente após esta definição, Cunha demonstra na proposição II, Livro IX, que para todo o a positivo existe c satisfazendo a primeira igualdade da definição, e c é dado pelo desenvolvimento

$$2\left(\frac{a-1}{a+1} + \frac{1}{3}\cdot\frac{a-1}{a+1}\cdot\frac{a-1}{a+1}\cdot\frac{a-1}{a+1} + ...\right)$$

que, pelo corolário 2 é convergente para,

$$-1 < \frac{a-1}{a+1} < 1,$$

isto é, para $a > 0$.

Na proposição IV, demonstra-se, utilizando a definição II, que sendo a positivo e b e c arbitrários, se tem $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$.

O Livro IX continua com a apresentação de várias propriedades das potências, todas demonstradas usando a definição II, embora com um tratamento informal das operações com séries.

Antes de provar algumas dessas propriedades, o autor faz o seguinte reparo:

> "**Scholio:** Os Mathematicos em expressoens taes como a^b, consideram tambem o expoente como hum sinal que indica as multiplicaçoens, divisoens, e extracçoens de raizes necessarias para formar conforme os precedentes corollarios o numero a^b; e então costumão suppor o numero a tambem negativo." ([9], p. 112)

Encontramos assim, no Livro IX, uma abordagem perfeitamente rigorosa e vanguardista das operações com potências. Na realidade, exceptuando a questão da verificação da convergência, Cunha tratou as séries "com o à vontade de quem lida com somas. Assim se operava na época e se continuou operando por muitos anos ainda." ([18], pp. 132 - 133)

No que diz respeito ao tratamento conferido por Cunha à convergência das séries, como vimos anteriormente, este é estabelecido através da definição I, do Livro IX. Vimos igualmente que Gomes Teixeira referiu que tal critério coincide com o apresentado por Cauchy, no entanto, Vicente Gonçalves discorda, afirmando que:

> "(...) aquilo a que Teixeira chama critério de convergência não é critério em Cunha: é definição, e como tal vem no texto." ([18], p. 128)

Vicente Gonçalves não considerou correcto aproximar o princípio de comparação de Cunha com o de convergência de Cauchy, uma vez que:

> "(...) O português, quando a ocasião se apresenta, toma os valores absolutos dos têrmos de uma série e vai controntá-los com os têrmos correspondentes da progressão geométrica ou de outra série convergente de têrmos positivos. O princípio, pôsto em prática nos corolários I e II da Proposição I e ainda na demonstração da fórmula do binómio, é pois mais geral do que o de Cauchy, embora menos elevado." ([18], p. 128)

Outro factor de discordância na apreciação feita por parte destes dois matemáticos, relativamente à convergência de séries definida por Cunha, baseia-se no facto de Gomes Teixeira considerar que Cunha tratava unicamente as séries de termos positivos. Vicente Gonçalves discorda dessa opinião pois

> "(...) não declara o autor, expressamente, ao abrir o corolário I, «Represente a um número qualquer»? e não voltamos a ler, na Definição II, «Representem a e b dois números quaisquer»? Em contraprova, nas proposições II, III e IV, a é sempre declaradamente positivo, emquanto b e c são já números quaisquer. Nestas proposições, pois, e só nelas, é a um número essencialmente positivo." ([18], p. 129)

Vicente Gonçalves acrescenta que Gomes Teixeira foi provavelmente iludido pelo enunciado do corolário 2, ([18], p. 130) no entanto, considera declarada por Cunha a positividade dos termos onde tal declaração é necessária como hipótese, mas em outros pontos da sua apresentação, não coloca qualquer tipo de restrição.

Apesar das questões levantadas por Vicente Gonçalves, relativamente à análise feita por Gomes Teixeira a este livro nono, não deixou de referenciar o facto de Gomes Teixeira salientar a introdução da definição dos números irracionais, derivados das extracções de raizes, através da série exponencial de base qualquer, levada a cabo por Cunha.

A este respeito, Teixeira afirmou:

> "A esta doutrina das séries está ligada a dos números irracionais representados por potências de expoente fraccionário ou irracional, que constitue a parte mais notável da obra do nosso matemático. esta doutrina era exposta no século XVIII de um modo mal fundamentado, que não podia satisfazer um espírito como o de Anastácio da Cunha, educado no culto do rigor do grande geómetra lógico de Alexandria. (...) definiu os números irracionais que têm mencionada origem por meio da série exponencial de base qualquer, que tinha sido obtida no século anterior por Newton pelos meios imperfeitos da Álgebra do seu tempo, e empregando operações sôbre séries, demonstrou que os números assim definidos gozam das propriedades fundamentais das potências dos números inteiros." ([51], pp. 256 - 257)

Ainda no Livro IX, podemos destacar a notável demonstração do binómio de Newton, que encontramos na

> **Proposição VII, Livro IX:** "Denote A o termo precedente: será $(1+Q)^n = 1 + nQ + \frac{n-1}{2}AQ + \frac{n-2}{3}AQ + \frac{n-3}{4}AQ + \&c.$, com tanto que quando n não for numero positivo, seja $Q < 1$." ([9], p. 114)

Este desenvolvimento é novamente demonstrado no Problema V, do Livro XXI, aquando da *investigação de logarithmos e potencias*.

A função logaritmo é definida no final do Livro IX, como correspondendo à inversa da função exponencial, nos seguintes termos:

> **Definição III, Livro IX:** "Considerando todos os numeros como potencias de hum mesmo numero, chama-se esse base; e os expoentes chamam-se logarithmos dos numeros a que pretencem."
>
> **Corolário:** "O logarithmo da base he 1 [9. def. 1]."
>
> **Definição IV, Livro IX:** "Os logarithmos chamam-se hyperbolicos, e tambem naturaes, quando a base he $= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{2\times 3\times 4} + \frac{1}{2\times 3\times 4\times 5} + \&c.$" ([9], p. 119)

Os desenvolvimentos em série de potências das funções exponencial e logaritmo, haviam sido expostos por Euler (1707 - 1783), em 1748, na obra *Introductio in Analysin infinitorum*, apoiando-se muitas vezes em suposições não demonstradas e puramente intuitivas.

No desenvolvimento em série apresentado por Cunha tem-se obviamente $c = \log a$, no entanto, tal só encontra-se explicitado no final dos *Principios*.

Embora seja usual nos nossos dias tomar a definição de exponencial pela soma da série, na época em que Anastácio da Cunha a apresentou, a teoria das funções analíticas ainda não se havia desenvolvido. Talvez seja por isso que as suas inovações tenham sido realçadas pelo seu discípulo Manuel de Abreu que, em resposta às críticas do matemático escocês John Playfair (1748 - 1819), defende que:

"a definição e proposição primeiras do liv. 9., com os corolarios respectivos, constituem a base que até agora faltava na doutrina das series, e mesmo na Theorica de La Grange."[3]

Curiosamente, o trabalho de Cunha referente ao estudo das potências e logaritmos foi apreciado por C. F. Gauss (1777 - 1855), numa carta a Bessel (1784 - 1846) em 21 de Novembro de 1811. Gauss escreve:

"(...) todos os paradoxos que alguns matemáticos *descobriram* nos logaritmos desaparecem sozinhos, quando não se parte da definição habitual $base^{logar.} = número$, que no fundo só serve quando o expoente é um número inteiro, e não faz qualquer sentido quando o expoente é imaginário - mas se chama logaritmo de A a uma grandeza tal que, quando se substitui x por ela na série $1 + x + \frac{1}{2}xx + \frac{1}{6}x^3 + etc.$, esta fica com o valor de A; vejo com prazer que o português Cunha escolheu de facto esta definição - e por isso foi censurado numa má recensão das nossas *Gelehrten Anzeigen* (...)". ([54], p. 330)

Outra das inovações levadas a cabo por A. Cunha prende-se com a introdução, no Livro XV, da definição de diferencial de uma função real de variavel real, equivalente àquela que se passou a utilizar após Cauchy.

O livro XV trata concisamente os elementos do cálculo diferencial e integral.

A definição II contém a noção de infinitésimo, à maneira de d'Alembert (1717 - 1783). Vejamos:

Definição II, Livro XV: "A variavel que podér sempre admittir valor maior que qualquer grandeza que se proponha chamarse-ha infinita; e a variavel que podér sempre admittir valor menor que qualquer grandeza que se proponha, chamarse-ha infinitessima." ([9], p. 193)

Cunha, utilizando o termo *fluxão*, apresenta na definição IV, deste livro, uma definição analítica de diferencial:

[3] In [32] - um longo e interessante comentário à crítica que o Geómetra Playfair fizera do trabalho de Cunha, crítica reproduzida no vol. V da mesma publicação - cit. in [18], p. 131.

> **Definição IV, Livro XV:** "Escolhida qualquer grandeza, homogenea a huma raiz x, para se chamar fluxão dessa raiz, e denotada assim dx; chamarse-ha fluxão Γx, e se denotará assim, $d\Gamma x$, a grandeza que faria $\frac{d\Gamma x}{dx}$ constante, e $\frac{\Gamma(x+dx)-\Gamma x}{dx} - \frac{d\Gamma x}{dx}$ infinitessimo ou sifra, se dx fosse infinitessimo, e constante tudo o que não depende de dx." ([9], p. 124)

Acerca desta definição, escreve Youschkevitch:

> "Foi da Cunha que, pela primeira vez, formulou uma definição analítica rigorosa de diferencial, retomada e utilizada mais tarde pelos matemáticos do século XIX." ([53], p. 19)

J. Filipe Queiró defende que, neste livro XV, Cunha trata conceitos verdadeiramente vanguardistas para a época, tais como: a teoria dos limites, mediante uma manipulação algébrica de desigualdades envolvendo quantidades finitas e bem determinadas; o facto da diferenciabilidade implicar a continuidade, sem explicitar, contudo, o conceito de função contínua; a obtenção do desenvolvimento de Taylor e o teorema de Schwarz, relativo à igualdade de derivadas mistas. ([33], p. 15)

Ao realizar esta análise à obra *Principios Mathematicos*, constatamos que no século XVIII em Portugal, sendo José Anastácio da Cunha um dos nomes portugueses mais sonantes da época, não encontramos uma definição formal para o conceito de número irracional. Contudo, não podemos deixar de exprimir admiração pelo notável trabalho encontrado nas 302 páginas, divididas em 21 livros, que apresentam uma parte substancial da Matemática conhecida na época e que aborda desde as primeiras noções de geometria, aritmética e álgebra até questões sofisticadas de geometria diferencial, integração, equações diferenciais e cálculo de variações.

Capítulo 3

Francisco Gomes Teixeira

3.1 Vida e Obra

Ao ter por objectivo analisar a fundamentação numérica da Análise em Portugal, somos levados a estudar o trabalho do matemático português Francisco Gomes Teixeira. Para tal, começaremos por elaborar uma, ainda que não muito extensa, síntese biográfica, de modo a clarificar o conhecimento acerca da sua vida e obra.

Francisco Gomes Teixeira nasceu a 28 de Janeiro de 1851, na freguesia de S. Cosmado no Concelho de Armamar, distrito de Viseu.

Apesar de mais tarde ter ocupado um lugar de relevo na matemática portuguesa, não podemos afirmar que tal facto deveu-se à influência matemática do seu meio familiar, pois o pai era comerciante e a mãe dedicava-se unicamente à família.

Após a instrução primária, que decorreu na escola pública da sua aldeia, Francisco Gomes Teixeira estudou em Lamego, residindo em casa de um seu familiar.

O Liceu de Lamego, frequentado por Francisco Gomes Teixeira era, na época, de segunda classe, o que implicava que os exames aí levados a cabo não proporcionassem acesso à matrícula na Universidade. Atendendo a esse facto, Gomes Teixeira viu-se forçado a fazer os seus exames em Coimbra.

A escolha do seguimento dos estudos deste proeminente futuro Matemático, é feita de uma forma muito curiosa.

Com efeito, aquando da escolha profissional de Gomes Teixeira, surgiram divergências entre o seu pai e o seu primo, o Dr. Francisco Maria de Carvalho, familiar onde Francisco

Gomes Teixeira tinha residido quando estudou em Lamego.

O seu primo era da opinião que o jovem deveria enveredar pelo estudo da Matemática, enquanto que o seu pai pretendia que este seguisse a carreira Eclesiástica ou a de Direito.

Após ser questionado por seu pai sobre o seu futuro, Francisco Gomes Teixeira afirmou que para si seria indiferente seguir qualquer uma das carreiras.

Segundo testemunhos de seus netos ([2], p. 18) o pai de Francisco Gomes Teixeira decidiu que fosse tirada à sorte a carreira do filho, e a sorte fez com que estudasse Matemática.

Francisco Gomes Teixeira aceitou o que a sorte lhe ditou e matriculou-se na *Faculdade de Mathematica* da Universidade de Coimbra, em 1869, em regime de aluno voluntário.

Existem vários escritos que nos evidenciam a sua bem sucedida carreira de estudante universitário, onde atingiu a mais alta classificação.

Na *Faculdade de Mathematica* existiam dois cursos, um de 4 anos para a *Eschola do Exercito* e o outro, de 5 anos, dito Geral[1].

Francisco Gomes Teixeira matriculou-se a 2 de Outubro de 1869 no curso de *Mathematica.*

Em Julho de 1874, o *Conselho da Faculdade de Mathematica* confere a Gomes Teixeira o *Gráo de Bacharel*, tendo sido classificado de *Muito Bom com vinte valores*[2] e mais tarde, em Janeiro de 1875, fez exame de Licenciado, defendendo a dissertação com o título *Importância da observação do transito de Venus pelo disco do sol para a determinação da paralaxe solar. Apreciação dos diversos methodos de observação* ([2], pp. 33 - 34).

No mês de Junho de 1875, Francisco Gomes Teixeira defendeu a dissertação *Integração das equações ás derivadas parciaes de segunda ordem* e ainda *Theses de Mathematicas puras e applicadas* ([2], p. 34).

Recebeu o *Gráo de Doutor na Faculdade de Mathematica*, em Julho de 1875, com a classificação de *Muito Bom com vinte valores*[3].

Nessa altura, as informações finais dos alunos eram dadas, no final de cada ano lectivo.

---

[1] Veja-se *Plano dos Cursos* in [2], pp. 21 e 22.

[2] In *Livro de informação de Bacharel Formado de Francisco Gomes Teixeira na Faculdade de Mathematica*, no ano lectivo de 1873 - 1874, folha 79 a 79v - cit. in [2], p. 33.

[3] In *Livro de informações*, ano lectivo de 1874 - 1875, fls. 88 a 88v, Certidão passada pelo Arquivo da Universidade de Coimbra, em 20 de Outubro de 2003 - cit. in [2], p. 37.

Como os exames de Licenciado e o Doutoramento foram realizados no mesmo ano lectivo, a informação final é a informação do maior grau. Por esta razão, Gomes Teixeira não teve classificação, no seu exame de Licenciado, ficando apenas com a classificação do Doutoramento, que foi, como vimos, *Muito Bom com vinte valores.*

Verificamos, assim, que Francisco Gomes Teixeira tinha apenas 24 anos quando fez o seu Doutoramento, o que evidencia as suas excelentes faculdades, a nível de trabalho, organização, força de vontade e, sem sombra de dúvida, o excelente domínio da Matemática.

O Doutoramento de Francisco Gomes Teixeira foi algo de inédito até à data, pois, até então, nunca tinha sido conferida a mais alta classificação, vinte valores, simultaneamente no Bacharelato e no Doutoramento.

Apenas com 25 anos, Francisco Gomes Teixeira tomou posse como lente substituto na Universidade de Coimbra, onde foram-lhe destinadas a 1^a, a 2^a e a 4^a cadeiras de Matemática, apresentando uma dissertação na área da Geometria Analítica, intitulada *Sobre o emprego dos eixos coordenados obliquos na mecanica analytica* ([2], p. 45).

Em Fevereiro de 1880 foi provido a Lente Cathedratico de *Calculo Differencial e Integral,* cadeira que leccionou até 1883, ano em que abandonou a Universidade de Coimbra, pedindo transferência para a *Academia Polytechnica do Porto*, instituição com características de ensino técnico e sem o prestígio da Universidade de Coimbra.

As preocupações deste Matemático, no que se refere à situação de isolamento vivida na comunidade científica matemática portuguesa, levaram-no a publicar os seus trabalhos de investigação em revistas de prestígio internacional.

Defendendo que um dos maiores entraves à comunicação com outros Matemáticos era a barreira linguística, no terceiro ano de docência, Francisco Gomes Teixeira publicou o seu primeiro trabalho em revistas internacionais, escrito em Francês.

É claro que os seus primeiros artigos foram publicados em revistas nacionais e já desde o seu tempo de aluno começou a publicar memórias.

Em 1877 publicou os seus primeiros dois artigos no *Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas*, um sobre matemática pura e outro sobre astronomia ([2], p. 99).

Um ano depois, publicou o seu primeiro trabalho numa revista estrangeira, *Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bourdeaux* (2^e série, t. II), intitulado *Sur le nombre des fonctions arbitraires des intégrales des équations aux dérivées partielles*

([2], p. 99).

Em 1880 publica o seu segundo trabalho internacional *Sur les dérivées d'ordre quelconque* que saíu no *Giornale di Matematiche* (Napoli, t. XVIII) ([2], p. 99).

Nas duas décadas seguintes, só não produziu artigos em 1884, 1894 e 1895. De 1900 a 1918, só não publicou artigos em 1908, ano em que foi editado o volume IV das *Obras sobre Mathematica*[4], que analisaremos na próxima secção.

Os anos de 1904 e 1913 foram os mais produtivos em termos de número de trabalhos publicados, 12 e 11 artigos, respectivamente. Podemos ainda referir que os doze artigos publicados em 1904, foram todos em revistas internacionais.

Tendo já passado os 70 anos de idade, publicou ainda cinco artigos em revistas estrangeiras: três em 1923, um em 1924 e um em 1925. Depois de 1925, Gomes Teixeira não apresentou qualquer trabalho em revistas internacionais.

É de realçar que no ano de 1884, Francisco Gomes Teixeira não publicou nenhum trabalho científico, provavelmente por ter coincidido, como vimos anteriormente, com a sua transição da Universidade de Coimbra para a *Academia Polytechnica do Porto*, e certamente não possuir muito tempo para investir nos seus estudos e pesquisas.

Acredita-se que a vinda de Gomes Teixeira para a *Academia Polytechnica do Porto* teve repercurções na sua carreira, pois ao leccionar cadeiras a cursos técnicos, não poderia abordar problemas de análise que faziam parte da sua actividade de investigador, e para os quais poderia eventualmente motivar os alunos para a sua resolução.

Esta decisão, um pouco incompreendida por parte de alguns, uma vez que as condições de trabalho não seriam ainda comparáveis às da Universidade de Coimbra, é explicada pelos seus netos da seguinte forma:

> "(...) o nosso avô veio para o Porto para casar. A nossa avó não quis ir viver para Coimbra e ele fez-lhe a vontade."[5]

Como vimos, Francisco Gomes Teixeira ingressou em 1883 na referida Academia sendo, quatro anos depois, nomeado Lente da 3^a cadeira e em 1889, Lente da 2^a cadeira. No

[4] Obras sobre Mathematica é um conjunto de sete volumes, publicados sob a égide do Governo Português.

[5] Testemunho oral dos Netos de Francisco Gomes Teixeira, em 17 de Junho de 1999. - cit. in [2], p. 51.

entanto, em 1886 foi nomeado director daquela instituição, promovendo reformas a nível das disciplinas de Matemática.

Com a implantação da República, surgiram novas reformas no ensino superior e a 22 de Março de 1911, foi criada a Universidade do Porto, como fusão da *Academia Polytechnica* e da *Escola Medico-cirurgica do Porto.*

Gomes Teixeira foi eleito Reitor da recém criada Universidade e esta depressa se viu reconhecida internacionalmente, atendendo ao prestígio do seu Reitor.

Sousa Pinto, seu colega na *Academia Polytechnica,* e mais tarde na Universidade do Porto, relata, no discurso proferido no descerramento do busto de Gomes Teixeira, que:

> "(...) Conheci-o quando êle acabava de dobrar os 50 anos e tive a honra de conviver com êle de perto (...). Chegado ao seu gabinete (...) logo começava o seu labor, que se prolongava até hora adiantada da tarde. Dava a sua aula, mantinha em dia a sua correspondência com os mais ilustres matemáticos da época, revia provas ou redigia trabalhos (...) dirigia a publicação dos Anais da Academia Politécnica que fundou, organizava congressos (...)." ([2], p. 57)

Tal como este testemunho nos dá conta, Francisco Gomes Teixeira mantinha, desde o início da sua carreira, correspondência com notáveis matemáticos. Com efeito, enviou a Hermite um exemplar da sua dissertação inaugural, ao que este matemático respondeu:

> "Examinei a tese inaugural que tivestes a honra de me enviar, e ainda que o assunto importante e difícil que tratastes não encaixa no círculo habitual dos meus estudos, eu tenho a certeza que fizestes um trabalho muito sério e aprofundado (...)." ([2], p. 37)

Em 1918 com 67 anos de idade e 13 de funções como Reitor, foi proposto Reitor Honorário pela Academia Portuense, e nomeado pelo Governo.

Além de Reitor, Francisco Gomes Teixeira leccionou a cadeira de *Calculo Differencial e Integral*, até ao final da sua carreira, e já com 70 anos, no limite da idade para a docência, o Governo aprovou a sua recondução na regência da citada disciplina. Contudo, em 1929, com 78 anos, Gomes Teixeira deixou a cátedra, atendendo à alteração legislativa, no que se refere ao limite de idade para exercício de cargos públicos.

Para além do trabalho científico, Gomes Teixeira dedicou-se à escrita de textos que focavam essencialmente temas religiosos. Tal faceta evidenciou-se na última década da sua vida e a exemplo disso podemos destacar os livros: Santuários de Montanha (1926), Apoteose de S. Francisco de Assis (1928), Uma Santa e uma Sábia (1930) e Santo António de Lisboa (1931). Estes livros reflectem aspectos da personalidade do Matemático, nomeadamente o de extremo apreciador da natureza, amante das viagens e portador de uma profunda religiosidade.

A sua paixão pela Matemática e o seu incansável espírito, fez com que em 1930, apenas três anos antes da sua morte, apresentasse o seu último trabalho científico o qual "devido à sua debilidade física, foi lido por Mira Fernandes, na Academia de Ciências de Lisboa". ([2], p. 216)

3.2 Curso de Analyse Infinitesimal - Calculo Differencial

Como foi referido anteriormente, Francisco Gomes Teixeira publicou muitos artigos de ordem científica em várias revistas nacionais e internacionais. A sua actividade científica abrangeu campos diversos, destacando-se a Análise, a Geometria e a História da Matemática.

Apesar de em determinadas ocasiões este matemático ter-se dedicado a temas referentes a estas três áreas, nomeadamente no ano de 1906, no qual "publicou três artigos, sobre geometria, intitulados "Sur quelques propriétés des cubiques - extrait d'une lettre adressée a Ch. Hermite", "Sur deux manières de construire les spiriques de Perseus" e "Sur une propriété de la strophoïde et sur les cubiques qui coincident avec leurs cissoïdales"; publicou os artigos sobre análise, com os títulos "Sur quelques applications des séries ordonnées suivant les puissances du sinus" e "Sur les transformations linéaires"; editou a 4^a edição do seu manual *Curso de Analyse Infinitesimal - Calculo Differencial,* onde incorporou referências de história da matemática" ([2], p. 215), outras alturas houve em que restringiu as suas investigações e publicações a uma determinada área.

Como já vimos, as suas primeiras publicações foram feitas na altura em que era aluno universitário, e já nessa altura tratou tópicos importantes da Análise matemática contemporânea.

A exemplo disso, podemos referenciar que a 16 de Junho de 1871, como aluno do 2º ano da Universidade de Coimbra, elaborou uma dissertação, com o o título *Calculo de Variações*, a que Helmut Malonek tece o seguinte comentário:

> "É notório o rigor com que expõe os assuntos, sempre associado a preocupações de carácter pedagógico. O autor define o cálculo de variações, realçando as suas aplicações. Na exposição dos assuntos utiliza figuras para facilitar a sua compreensão, apresentando ao mesmo tempo, um desenvolvimento detalhado dos assuntos que pretende tratar." ([28], p. 12 - cit. in [2], p. 40)

Os trabalhos referentes a investigações no âmbito da Análise sucederam-se e, até 1889, os dez trabalhos publicados por Gomes Teixeira referiam-se a conteúdos dessa área da matemática.

Atendendo ao objectivo essencial desta tese, a fundamentação numérica da Análise em Portugal, iremos, nesta secção, incidir no estudo da análise das obras relaccionadas com este tema.

Apesar de Francisco Gomes Teixeira não estar associado à introdução de novas teorias no campo da Análise, a verdade é que a sua actividade científica nesta área reveste-se de grande importância na medida em que efectuou relevantes generalizações e sistematizações inovadoras para a época.

Prova disso são as importantes correspondências que mantinha com diversos matemáticos de renome internacional e o reconhecimento, por parte destes, do valor do matemático português.

Na altura em que Francisco Gomes Teixeira era aluno da Universidade de Coimbra os livros adoptados para o estudo da Análise nesta Universidade eram de autores estrangeiros, nomeadamente franceses.

A lista de manuais adoptados no ano lectivo de 1872 - 1873 por esta instituição era:

> "1.ª cadeira - *Geometria Analytica* e *Algebra Superior* de Francoeur, traduzidos e aumentados por Castro Freire e Souza Pinto, Coimbra 1871.
>
> 2.ª cadeira - *Calculo Differencial e Integral* de Francoeur, traduzido e aumentado por Castro Freire e Souza Pinto.

3.^{a} cadeira - *Mécanique rationnelle* de Duhamel.

4.^{a} cadeira - *Géométrie descriptive et stéréotomie* de Le Roy.

5.^{a} cadeira - *Elementos de Astronomia* de Sousa Pinto, e *Astronomie* de Dubois.

6.^{a} cadeira - *Géognosie et topographie* de Puissant.

7.^{a} cadeira - *Théorie analytique du système du monde* de Pontécoulant.

8.^{a} cadeira - *Mécanique Rationnelle* de Poisson, e *Théorie de l'élasticité* de Lam." ([38], p. 6 - cit. in [2], p. 220)

Os manuais de análise de Francoeur foram adoptados para a 2.^{a} cadeira - *Calculo Differencial e Integral* até ao ano lectivo de 1885 - 1886. A partir dessa data e até 1889 - 1890 adoptou-se o *Cours d'analyse* de Camille Jordan. ([2], p. 220)

Como foi referido na secção anterior, no ano de 1876, após ter concluído o seu doutoramento, Francisco Gomes Teixeira, com apenas 25 anos, tomou posse como lente substituto na Universidade de Coimbra, leccionando a 1.^{a}, 2.^{a} e 4.^{a} cadeiras de Matemática.

A adopção de manuais estrangeiros fez com que Francisco Gomes Teixeira, tanto como aluno bem como no papel de professor, tomasse consciência da dificuldade que tal facto representava no processo de aprendizagem. Essa preocupação manifesta-se quando afirma:

> "Entendo porém, que, para honra do professor e do País, deve aquele, logo que possa, substituir livro de texto, quando não é seu, por lições litografadas, que aperfeiçoe em anos sucessivos e que depois de bem pensadas imprima, afim de termos compêndios portugueses e se nacionalizar assim o ensino." ([2], p. 221)

A necessidade da existência de manuais em língua portuguesa levou-o, no ano lectivo de 1884 - 1885, a iniciar a publicação interna, na *Academia Polytechnica do Porto*, de uma série de textos a que intitulou *Fragmentos de um Curso d'Analyse Infinitesimal - Calculo Differencial.*

Estes textos foram publicados até 1887 - 1888, dando-se a partir daí a edição do *Curso de Analyse Infinitesimal - Calculo Differencial*, publicado pela primeira vez em 1887 no Porto, pela *Typographia Occidental.*

Este *Curso* teve quatro edições: uma 1.ª em 1887, a 2.ª edição em 1890, a 3.ª em 1896 e a 4.ª edição em 1906.

Ao compararmos a 1.ª edição do *Curso* com a obra *Fragmentos*, atrás referenciada, observamos:

> "*Fragmentos* de 1884 - 1885: toda a *Introducção* do *Curso de Analyse Infinitesimal - Calculo Differencial*;
>
> *Fragmentos* de 1885 - 1886: texto do *Calculo Differencial,* até à página 96, do *Curso de Analyse Infinitesimal - Calculo Differencial*;
>
> *Fragmentos* de 1886 - 1887: da página 97, até ao fim do capítulo VII, página 215, do *Curso de Analyse Infinitesimal - Calculo Differencial*;
>
> *Fragmentos* de 1887 - 1888: desde o início de capítulo VII, até ao fim do *Curso de Analyse Infinitesimal - Calculo Differencial.*" ([2], p. 222)

Como iremos constatar na secção dedicada ao estudo da *Theoria dos numeros irracionaes*, as várias edições do *Curso* sofreram importantes alterações, demonstrando uma constante preocupação por parte do autor em clarificar a exposição dos conteúdos.

O *Curso* está, efectivamente, dividido em duas partes e é possível indicar as seguintes datas de publicação de cada uma delas:

> "*Calculo integral - primeira parte:*
>
> 1889 - sem indicação de edição (será 1.ª edição, segundo Vilhena);
>
> 1890 - o *Annuario da Academia Polytechnica do Porto*, do ano lectivo 1894 - 1895, indica uma 2.ª edição da 1.ª parte do *Calculo Integral*;
>
> 1893 - um livro, com esta data, não refere a edição, mas pensamos que possa ter sido uma terceira edição, se tivermos em consideração a indicação do *Annuario* de 1894 - 1895;
>
> 1910 - um livro, com esta data, refere 3.ª edição.
>
> *Calculo integral - segunda parte:*
>
> 1892 - vários livros sem indicação de edição (será 1.ª edição, segundo Vilhena); não encontrámos qualquer referência a uma possível 2.ª edição da segunda parte do *Calculo Integral.*" ([2], p. 223)

A primeira publicação do *Curso* apareceu somente em 1889, no entanto, imediatamente após a 1.^{a} edição do *Curso*, a *Academia Polytechnica do Porto* adoptou-o como manual para a 2.^{a} cadeira, substituindo o manual de Castro Freire e Souza Pinto, *Elementos de Calculo Differencial e Integral,* que, como vimos, consistia numa tradução do de Francoeur.

A partir de 1890 - 1891 são adoptados na 2.^{a} cadeira os livros de Gomes Teixeira *Curso de Analyse Infinitesimal - Calculo Differencial*, de 1890, e *Calculo Integral* 1.^{a} Parte, de 1889. Não é encontrada qualquer referência ao manual *Calculo Integral* 2.^{a} Parte, como livro de texto da 2.^{a} cadeira.[6]

No que diz repeito à Universidade de Coimbra, verificamos anteriormente que até ao ano lectivo de 1889 - 1890 os manuais adoptados eram estrangeiros, traduzidos ou não, contudo, "a partir deste ano lectivo, o *Curso de Analyse Infinitesimal* passou também a ser adoptado, naquela Universidade". ([38], p. 6 - cit. in [2], p. 227)

Reconhecida a importância dos trabalhos científicos de Francisco Gomes Teixeira, a publicação de toda a sua obra, compilada em sete volumes e com o título, *Obras sobre Mathematica*, é feita por portaria de 8 de Fevereiro de 1902, transcrita no Diário do Governo de 3 de Março do mesmo ano.

No Volume I (1904) e no Volume II (1906) foram compilados artigos científicos escritos em diversas revistas nacionais e internacionais.

O Volume III das *Obras sobre Mathematica*, de 1906, coincide com a 4.^{a} edição da primeira parte do *Curso de Analyse Infinitesimal* e assim constatamos que circulavam simultaneamente duas publicações: o Volume III e a 4.^{a} edição do manual de *Calculo Differencial*. A 3.^{a} edição da segunda parte do *Curso de Calculo Integral*, por sua vez, constituíu o Volume VI (1912).

Os três tomos do *Traité des courbes spéciales remarquables planes e gauches* contituíram os Volumes IV (1908), V (1909) e VII (1915).

Este trabalho surgiu na sequência de um concurso aberto a prémios, em 1893, pela *Real Academia de Ciencias Exactas Fisicas y Naturales de Madrid.* Apesar de, nesse ano, não ter existido, segundo os responsáveis, respostas que satisfizessem ao pretendido, a

[6] Veja-se *Annuario da Academia Polytechnica do Porto, anno lectivo 1890-1891,* p. 44 - referido in [2], p. 226.

Academia publicou novo concurso, aberto desde 1 de Janeiro de 1896 até 1897, dando entrada na referida Academia três memórias, sendo uma de Gomes Teixeira que, com vista a manter o anonimato, foi-lhe atribuído o número 2. ([2], p. 247)

O representante da Academia, responsável pelo relatório da três memórias, afirmou, sobre o trabalho de Francisco Gomes Teixeira, o seguinte:

> "(...) coisa de cento e quarenta curvas, verdadeiramente notáveis; estudadas no texto, com conhecimento exacto e reflexivo, sob múltiplos e diferentes aspectos; a maior parte, graficamente representadas num apêndice de 15 finas folhas; e, como a memória N.^{o} 1, com a qual esta, N.^{o} 2, apresenta tantas analogias de forma e pela profundidade da sua doutrina, catalogadas, em separado, por ordem alfabética, para organização e maior comodidade do leitor." ([2], p. 247)

A esta obra foram tecidos largos elogios a nível nacional e internacional, salientando-se inclusive a atribuição de um prémio.

A publicação das *Obras sobre Mathematica* levou a que Gomes Teixeira recebesse muitas cartas de felicitação por parte de matemáticos portugueses e estrangeiros. ([2], p. 144)

Como havíamos verificado, a última edição de cada um dos manuais sobre Análise foi inserida nesta obra e, apesar das críticas positivas a nível internacional, a 1.^{a} edição do livro *Curso de Analyse Infinitesimal - Calculo Differencial,* provocou alguma polémica no seio da comunidade portuguesa da época.

No final do ano de 1887, Francisco Gomes Teixeira concorreu à atribuição do prémio D. Luiz, da *Real Academia de Sciencias*, com as seguintes obras:

> "(...) as obras seguintes para concurso ao premio de sua Magestade El-Rei D. Luiz:
>
> 1^o Curso de analyse infinitesimal, Porto 1887.
>
> 2^o Note sur le développement des fonctions satisfaisant á une équation différentielle (Annales de l'École Normale Supérieure de Paris, tomo IV, 1887).
>
> 3^o Sur le théorème d'Eisenstein (Annales de l'École Normale Supérieure de Paris, tomo III, 1886).

4º Sur un théorème de M. Hermite relatif à l'interpolation (Journal für die reine und angewandte Mathematik de Berlin, tomo 100, 1886).

5º Sur une limite relative aux polynômes de LEGENDRE (Comptes rendus de la Société R. des Sciences de Bohême, 1886).

6º Ueber den Eisenstein, seinen Satz (Archiv der Mathematik de Hoppe, Leipzig, 1886).

De cada um d'estes trabalhos envio exemplares, segundo o programma do concurso (...)."[7]

A obra *Curso de analyse infinitesimal* de 1887 foi a escolhida para a atribuição do prémio. A atribuição deste prémio revestiu-se de alguma polémica na medida em que Alfredo Schiappa Monteiro, outro concorrente, apresentou um pedido de reclamação, baseando-se nos seguintes termos:

"1º - O livro está escripto em linguagem que não póde deixar de ser a negação da [sic] estylo didatico.

2º - É deficiente nos principios de analyse, e muito mais nas applicações geometricas. Além de não primar pela exposição, que é muito confusa, não póde servir de texto para uma aula, porque não dá noções claras, nem rigorosas das concepções abstractas da analyse.

3º - O auctor substitue algumas demonstrações classicas por outras suas, que, me parece, não terem vantagem, por serem confusas e prolixas, alem de algumas se prestarem a serias objecções.

4º - Apresenta transformações de calculo novas, segundo creio, mas de que não vejo o alcance.

5º Considera como verdadeiros alguns theoremas, que hoje não se admitem como taes (...)." ([2], p. 230)

Schiappa Monteiro apresentou ainda um segundo protesto, baseando a sua discordância na atribuição do prémio, em irregularidades cometidas a nível do concurso.

[7] Em *Processo Académico de Gomes Teixeira, Academia de Ciências de Lisboa* - cit. in [2], pp. 227 e 228.

O desenrolar de tais acontecimentos fez com que Gomes Teixeira ripostasse, escrevendo uma carta ao *Presidente da Secção de Mathematica da Academia Real das Sciencias de Lisboa*, onde podemos ler:

> "(...) Se o sr. Schiappa não tivesse publicado a sua representação, ou se as censuras se referissem a uma memoria destinada a ser sómente lida pelos que conhecem as sciencias mathematicas, nada responderia aos reparos do sr. Schiappa; mas trata-se de um livro que é consultado por alunos dos nossos Estabelecimentos de Instrucção superior, e portanto não devo concorrer com o meu silencio para que estes adquiram ideias falsas julgando terem fundamento estes reparos (...)." ([46], p. 3 - cit. in [2], p. 232)

A disputa de palavras continuou ainda por mais alguns anos e a correspondência relacionada com este assunto manteve-se no mesmo tom. Contudo, Schiappa Monteiro posteriormente reconheceu publicamente a competência evidenciada por Gomes Teixeira. ([2], p. 233)

Apesar da contorvérsia que revestiu a atribuição do prémio da *Academia de Ciencias de Lisboa*, os livros sobre Análise *Curso de Analyse Infinitesimal - Calculo Differencial* e *Curso de Analyse Infinitesimal - Calculo Integral* foram alvo de inúmeras críticas positivas, nomeadamente no que se refere à clareza na exposição dos conteúdos, bem como, à introdução de referências a obras que tratavam as mais actualizadas teorias matemáticas da época.

Como já foi referido anteriormente, existem quatro edições do *Curso* e, apesar da estrutura global ser a mesma, nas quatro edições, o autor não as estruturou sempre da mesma forma.

Apresentamos o seguinte esquema elucidativo ([2], *Anexo C,* pp. 1549 - 1552) da forma como estão estruturadas as quatro edições, evidenciando apenas as alterações realizadas ao longo das mesmas:

Estrutura das várias edições do Curso

Fragmentos (1884 a 1888)

e

Primeira edição do *Curso* (1887)

I Curvas planas

II Curvas no espaço

Superficies

CAPITULO VII - Funcções definidas por series. Singularidade de algumas funcções

I Funcções definidas por series

II Singularidade de algumas funcções

CAPITULO VIII - Funcções de variaveis imaginarias

I Definições e principios geraes

II Extensão da formula de Taylor ás funcções de variaveis imaginarias

III Applicações

IV Outros methodos para desenvolver as funcções em serie

V Funcções regulares n'uma região do plano

VI Funcções regulares em todo o plano

VII Funcções uniformes regulares em todo o plano excepto em pontos isolados

NOTA - Theoria dos numeros irracionaes, dos numeros negativos e dos numeros imaginarios. Regras para o seu calculo *(págs. 281-291)*

I Caracteres das operações da Arithmetica e da Algebra

II Theoria dos numeros irracionaes

III Numeros negativos e numeros imaginarios

Segunda edição do *Curso* (1890)

INTRODUCÇÃO *(págs. 1-99)*

CAPITULO I - Theoria dos numeros irracionaes, dos numeros negativos e dos numeros imaginarios. Regras para o seu calculo

I Caracteres das operações da Arithmetica e da Algebra

II Theoria dos numeros irracionaes

III Numeros negativos e numeros imaginarios

IV Noção de limite

V Series

VI Produtos infinitos

VII Fracções continuas

CAPITULO II - *(Mantém-se igual à primeira edição)*

CALCULO DIFFERENCIAL *(págs. 101-356)*

CAPITULO I - Noções Preleminares

I Noção de infinitamente pequeno e de derivada

II - *(Mantém-se igual à primeira edição)*

CAPITULO II - Derivadas de primeira ordem das funcções

(Os tópicos tratados são os mesmos, apesar de apresentarem ordens diferentes)

CAPITULOS III, IV, V, VI, VII *(Mantêm-se iguais aos da primeira edição)*

CAPITULO VIII - *(Mantém-se igual à primeira edição, excepto os tópicos* ***III*** *e* ***IV*** *que foram suprimidos)*

Terceira edição do *Curso* (1896)

Todos os capítulos têm estrutura igual à edição precedente, excepto os seguintes:

CALCULO DIFFERENCIAL *(págs. 124-174 e págs. 222-255)*

CAPITULO II - *(Mantém-se igual à segunda edição, excepto o tópico* ***V*** *que foi suprimido)*

CAPITULO IV - *(Mantém-se igual à segunda edição, excepto o tópico* ***III*** *que foi suprimido)*

Quarta edição do *Curso* (1906)

Apresenta uma estrutura genérica igual à da terceira edição.

Como podemos verificar, em todas as edições do *Curso de Analyse Infinitesimal - Calculo Differencial*, este está dividido em dois blocos distintos: a *INTRODUCÇÃO* e o *CALCULO DIFFERENCIAL.*

A *INTRODUCÇÃO*, por sua vez, está subdividida em dois capítulos e o *CALCULO DIFFERENCIAL* em oito.

Talvez a importância atribuída por Gomes Teixeira aos dois blocos fosse equiparadamente distribuida. Com efeito, na 1.^{a} edição verificamos que existe uma numeração diferenciada para a *INTRODUCÇÃO* e para o bloco dedicado ao *CALCULO DIFFERENCIAL*, no entanto, a partir da 2.^{a} edição não se assiste a tal diferenciação, e a numeração é feita de uma forma sequencial ao longo de todo o *Curso*, apresentando-o num todo.

Deste modo, a *INTRODUCÇÃO*, apesar de ser uma secção onde são apresentados conceitos básicos que servirão de pré-requisitos ao que irá ser tratado na segunda parte, assume, por parte do autor, particular interesse a nível didáctico.

Ainda relativamente às primeiras duas edições, verificamos que a *INTRODUCÇÃO* não aborda os mesmos conteúdos, apesar de em ambas as edições estar dividida em dois capítulos. O mesmo acontece com o CAPITULO I do *CALCULO DIFFERENCIAL*, que apresenta diferenças significativas quando comparamos as duas primeiras edições, nomeadamente na introdução da noção de limite.

Podemos ainda acrescentar que, relativamente aos restantes capítulos, existem maiores diferenças da 1.^{a} para a 2.^{a} edição, do que da 2.^{a} para as restantes.

Quando analisamos o esquema elucidativo da estrutura das quatro edições, verificamos que no final da 1.^{a} edição, após o *INDICE* aparece a rúbrica *NOTA* intitulada *Theoria dos numeros irracionaes, dos numeros negativos e dos numeros imaginarios. Regras para o seu calculo.* Esta *NOTA* encontra-se dividida em três partes onde é tratado, respectivamente, os *Caracteres das operações da Aritmetica e da Algebra*, a *Theoria dos numeros irracionaes* e os *Numeros negativos e numeros imaginarios.* A partir da 2.^{a} edição, os conteúdos desta *NOTA* são inseridos na *INTRODUCÇÃO.*

Na secção seguinte vamos analisar como é que Francisco Gomes Teixeira desenvolveu estes assuntos ao longo das várias edições, evidenciando não só a organização dos conteúdos, bem como a forma distinta que os abordou.

3.3 Construção dos Números Reais

Francisco Gomes Teixeira tratou a *Theoria dos Numeros Irracionaes* nos *Fragmentos de um Curso de Analyse Infinitesimal - Calculo Differencial,* cuja publicação interna na Academia Polytechnica do Porto iniciou-se no ano lectivo 1884 - 1885 e terminou no ano lectivo 1887 - 1888, como já havíamos referido.

Esta série de textos destinava-se a facultar aos alunos meios de estudo na sua própria língua, uma vez que anteriormente a esta edição o manual adoptado pela referida academia, para a cadeira de *Calculo Infinitesimal,* era o de Serret ([2], p. 221).

Os *Fragmentos* foram publicados anualmente e Gomes Teixeira sempre apresentou uma preocupação em actualizar os seus textos. Em 1889 e 1892 houve publicação simultânea dos textos *Fragmentos de um Curso de Analyse Infinitesimal - Calculo Integral* e da primeira e segunda parte do manual *Curso de Analyse Infinitesimal - Calculo Integral.*

Procurando estabelecer uma fundamentação rigorosa no referido *Curso*, Gomes Teixeira introduziu a *Theoria dos Numeros Irracionaes*, assunto este que era novo na época.

A exposição desta teoria é análoga, tanto nos *Fragmentos* como na 1^a edição do *Curso.* Atendendo a esse facto, iremos, nesta secção, analisar a obra *Curso de Analyse Infinitesimal - Calculo Differencial*[8].

[8]Por simplificação de linguagem, passaremos, sempre que necessário, a designar apenas por *Curso* o

As várias edições do *Curso* sofreram, por parte do autor, reformulações que procuraremos aqui evidenciar. Em qualquer uma das edições a obra inicia-se com uma *INTRODUCÇÃO* onde Francisco Gomes Teixeira dedica uma secção aos *Caracteres das operações da Arithmetica e da Algebra*.

Como iremos verificar, a introdução de novos números baseia-se na preocupação de permanência das regras de cálculo, o que de certa forma explica que a apresentação da *Theoria dos Numeros Irracionaes* e da *Theoria dos Numeros Complexos* seja precedida pela *Theoria das operações da Arithmetica e da Algebra*.

3.3.1 Operações da Arithmetica e da Algebra

Na 1^a edição do Curso, Gomes Teixeira aborda por duas vezes o assunto referente às operações: uma na parte I do CAPITULO I da *INTRODUCÇÃO* ([45], pp. 1 - 3), e outra na parte I da *NOTA* ([45], pp. 281- 282), de formas diferentes.

Na *INTRODUCÇÃO* o autor desenvolveu a teoria das operações sobre reais não negativos, com o intuito de generalizar estas operações ao conjunto dos números imaginários.

Nos dois textos, *NOTA* e *INTRODUCÇÃO*, Gomes Teixeira apresentou a definição de cada uma das operações e suas propriedades, com algumas diferenças.

A enunciação da definição de cada uma das operações apresentava, na 1^a edição, distinções relevantes.

A adição foi apresentada na *INTRODUCÇÃO*, da seguinte forma:

> "1^o *Somma* das lettras a e b é a combinação d'estas lettras, cujos principios caracteristicos são (...)." ([45], pp. 1- 2)

No entanto, na *NOTA*, pode lêr-se:

> "1^o *Addição* dos numeros representados pelas lettras a e b é a combinação d'estes numeros cujas leis fundamentaes são (...)." ([45], p. 181)

Parece-nos, que ao substituir a palavra *somma* por *addição* o autor pretendeu tornar o segundo texto mais rigoroso.

---

manual *Curso de Analyse Infinitesimal - Calculo Integral.*

Na *INTRODUCÇÃO* da 4^a edição, como veremos mais tarde, a palavra *somma* já não aparece e a operação *addição* é-nos apresentada como sendo unívoca.

Outro aspecto que nos evidencia uma procura, por parte de Gomes Teixeira, de precisão na definição das operações, na *NOTA* da 1^a edição comparativamente com a *INTRODUCÇÃO* da mesma, é a substituição da expressão *somma das lettras a e b* por *addição dos numeros representados pelas lettras a e b.*

Relativamente à multiplicação, as alterações em termos de enunciação da operação repetem-se. Na *INTRODUCÇÃO* temos:

> "3^o *Multiplicação* é a combinação das lettras a e b caracterisada pelos principios seguintes (...)." ([45], p. 2)

Na *NOTA*, Gomes Teixeira explicita:

> "3^o *Multiplicação* é a combinação dos numeros representados pelas lettras a e b, caracterisada pelas leis (...)." ([45], p. 282)

À semelhança da adição, na *INTRODUCÇÃO* da 4^a edição, como veremos mais tarde, assiste-se à referência da operação *multiplicação* como sendo unívoca.

Podemos ainda referenciar que as propriedades da multiplicação foram enunciadas de forma distinta na *INTRODUCÇÃO* e na *NOTA* da 1^a edição.

As seguintes propriedades fazem parte dos dois textos:

1) $ab = ba,$

2) $(ab)\,c = (ac)\,b,$

3) $(a+b)\,c = ac + bc,$

4) $a \times 0 = 0, a \times 1 = a$ ([45], pp. 2 e 282)

Na *INTRODUCÇÃO*, foram acrescentadas as propriedades referentes às regras dos sinais:

4) $(+a)\,(+b) = +ab,\ (+a)\,(-b) = -ab,\ (-a)\,(-b) = +ab.$ ([45], p. 2)

A definição de *elevação a potencias* é distinta nos dois textos. Na *INTRODUCÇÃO,* aparece:

"5^o *Elevação a potencias* é a combinação caracterisada pela propriedade:

$$a^m \times a^n = a^{m+n}."\ ([45],\ p.\ 3)$$

Na *NOTA*, pode ler-se:

> "5^o *Elevação a potencias* é a multiplicação de factores iguaes." ([45], p. 282)

Na *NOTA*, Gomes Teixeira não apresentou apenas uma propriedade, como fez na *INTRODUCÇÃO*, mas teve o cuidado de definir a operação, para o caso do expoente ser inteiro e positivo.

Na 4^a edição, Gomes Teixeira, inicia a secção dedicada às *operações da Arithmetica e da Algebra,* apresentando uma definição da classe dos números racionais, designando os números racionais positivos como sendo o primeiro objecto da Arithmetica. Pode ler-se:

> "Os numeros inteiros e os números fraccionarios, cujos numeradores e denominadores são números inteiros, constituem a classe dos numeros *racionaes*, que podem ser *positivos* ou *negativos.* O estudo dos números racionaes positivos é o primeiro objecto da Arithmetica. Ahi são definidos, assim como as operações numericas, e ahi são estudadas as propriedades fundamentaes d'estas operações." ([49], p. 1)

O autor esclarece, nesta edição, que, em termos algébricos, os números aparecem substituídos por letras que os representam e é com base nessas letras que define as operações aritméticas fundamentais, da seguinte forma:

> "1^o *Addição* dos numeros representados pelas lettras a e b é a combinação *univoca* (de resultado unico) d'estes numeros, cujas leis fundamentaes são:
>
> 1) $a + b = b + a$, (*lei commutativa)*
>
> 2) $(a + b) + c = (a + c) + b$, (*lei associativa*)
>
> 3) $a + 0 = a$.
>
> 2^o *Subtracção* é a operação inversa da addição.
>
> 3^o *Multiplicação* é a combinação univoca dos numeros, representados pelas lettras a e b, caracterizada pelas leis:

1) $ab = ba$, (*lei commutativa*)

2) $(ab)\,c = (ac)\,b$, (*lei associativa*)

3) $(a + b)\,c = ac + bc$, (*lei distributiva*)

4) $a \times 0 = 0$, $a \times 1 = a$.

4^o *Divisão* é a operação inversa da multiplicação.

5^o *Elevação a potencia* é a multiplicação de factores eguaes.

6^o *Extracção de raiz* é a operação inversa da elevação a potencia." ([49], pp. 1 - 2)

É de salientar que foi nesta 4^a edição que Gomes Teixeira introduziu as designações de propriedade comutativa e propriedade associativa da adição e da multiplicação, bem como a de propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, evidenciando aqui uma valorização da precisão e clareza.

Além de enunciar cada uma das operações, como acabamos de analisar, Francisco Gomes Teixeira apresenta na 1^a edição, à semelhança das posteriores, propriedades características dessas mesmas operações.

Com alterações, ainda que pontuais, o autor manteve da 1^a para a 2^a edição, a descrição das operações fundamentais da Aritmética.

Na 2^a edição, Gomes Teixeira enumerou as propriedades da igualdade e da relação de ordem, como podemos constatar em:

"(...) e nas leis fundamentaes da transformação das igualdades e desigualdades:

1) Se fôr $a = b$, será $b = a$

2) Se fôr $a = b$ e $a = c$, será $b = c$

3) Se fôr $a > b$ e $b > c$, será $a > c$

4) Se fôr $a = b$ e $c = d$, será $a + c = b + d$, $ac = bd$, etc.

5) Se fôr $a > b$ e $c > d$, será $a+c > b+d$, $a-d > b-c$" ([47], p. 2)

Na 3^a edição o autor apenas manteve as propriedades 2) e 4), passando esta última a ter o seguinte enunciado:

> "(...) Se fôr $a = b$ e $c = d$, será $a + c = b + d$, $a - c = b - d$, $ac = bd$, etc. (...)." ([48], p. 2)

Na 4^a edição, Gomes Teixeira enuncia quatro propriedades características das operações aritméticas, denominando as três últimas de leis fundamentais das igualdades, do seguinte modo:

> "(...) é facil de ver que o calculo arithmetico é principalmente fundado nas leis fundamentaes precedentes, na propriedade que têem as operações de darem resultados eguaes quando se substituem a e b por quantidades eguaes e nas leis fundamentaes das egualdades: $a = a$; de $a = b$ resulta $b = a$; de $a = b$ e $b = c$ resulta $a = c$." ([49], p. 2)

O último parágrafo, referente à finalização da secção respeitante às operações, sofreu, ao longo das várias edições, significativas reformulações. Com efeito, na $1.^a$ edição Francisco Gomes Teixeira escreve:

> "(...) Duas das operações precedentes, isto é, a subtracção e a divisão são sempre possiveis usando os numeros considerados na Arithmetica." ([45], p. 282)

Na continuação da citação anterior, com o intuito de passar à *Theoria dos numeros irracionaes*, Gomes Teixeira afirmou:

> "(...) para não termos porém de separar os casos em que estas operações são ou não são possíveis, introduzem-se novos numeros mais geraes do que os precedentes e definem-se as suas operações de modo que os resultados a que levem sejam applicaveis áquelles." ([45], p. 282)

Já a partir da 2^a edição, esta mesma afirmação aparece de uma forma mais clara:

> "(...) introduzem-se novas especies de numeros, e generalisam-se as definições das operações, tendo sempre em vista que se conservem as propriedades fundamentaes que vimos de indicar, e que as novas definições levem aos mesmos resultados que as antigas, quando se applicam aos numeros para os quaes estas foram primeiramente estabelecidas (...)." ([47], p. 3)

Verifica-se, assim, que a criação de números de outra natureza, que não sejam racionais, é explicada por este Matemático, como fruto da impossibilidade de concretização de algumas operações aritméticas, com o objectivo de que as propriedades dessas mesmas operações continuem a ser verificadas.

Este alargamento do conceito de número com o objectivo de que toda a propriedade aplicável à operação generalizada, também o seja à operação restrita e contenha, como caso particular, a regra estabelecida para a operação restrita, em que se baseou Francisco Gomes Teixeira, já havia sido adoptado por outros autores, alguns deles referenciados por este matemático no decorrer das várias edições do curso.[9]

3.3.2 Theoria dos numeros irracionaes

Na 1^a edição o conceito de número irracional aparece associado à noção de radical. No início da parte II, da *NOTA* podemos ler:

> "Com effeito, por não ser sempre possivel a operação $\sqrt[n]{b}$ empregando os numeros racionaes, somos levados a considerar o signal $a + \sqrt[n]{b}$ como representando numeros de uma nova especie, que contém os numeros racionaes quando é $b = 0$, e que quando b é differente de zero tomam o nome de numeros *irracionaes.*"([45], p. 283)

Seguidamente, acrescentou que:

> "Os numeros irracionaes appareceram tambem na Geometria Elementar debaixo de um ponto de vista mais geral do que o precedente, como limites de uma série de numeros racionaes." ([45], p. 284)

[9] A relação entre o trabalho de Francisco Gomes Teixeira e trabalhos de outros autores será explorada na secção 3.4.

Ainda na mesma edição, Gomes Teixeira apresenta a seguinte definição de número irracional:

> "Diz-se que um numero racional, variavel e crescente u_n cujos valores sucessivos são $u_1, u_2...$ tende para um limite racional a quando n augmenta indefinidamente, se os numeros $u_1, u_2..., etc.$ se aproximam sucessivamente de a, de modo que a cada valôr que se dê ao numero arbitrario δ, por mais pequeno que seja, corresponda um valôr n_1 de n tal que seja (um valôr absoluto)
>
> $$u_n - a < \delta$$
>
> quando $n > n_1$.
>
> Se um numero racional crescer á medida que n augmenta, sem todavia poder jamais exceder um numero racional determinado, e não tender para um limite racional, diz-se, por definição, que tende para *um numero irracional* (que representaremos por $\lim u_n$) maior do que qualquer dos numeros racionaes u_n ou inferiores a u_n e menor do que qualquer dos outros." ([45], p. 284)

O número irracional aparece assim definido como um limite de uma sucessão, de uma forma análoga à feita por Cauchy.[10]

Esta definição de número irracional, apresentada por Francisco Gomes Teixeira, merece, da nossa parte, particular atenção.

No início da definição parece-nos que o autor considerou uma sucessão de números racionais convergente para um número racional a, embora não seja explícito que δ deva ser também racional, visto que os números irracionais não tinham sido ainda definidos. Entendemos igualmente que a referência a *numero racional, variavel e crescente* corresponde ao que hoje entendemos por uma sucessão crescente de números racionais, embora tal consideração não esteja perfeitamente clara no texto.

No parágrafo seguinte assiste-se a uma possível aceitação de que uma sucessão monótona crescente e limitada de números racionais é convergente e Francisco Gomes Teixeira explicita que se o limite dessa sucessão não for um número racional então dizemos, *por definição, que tende para um numero irracional (que representaremos por* $\lim u_n$).

[10] Veja-se na secção 3.4.

Devemos ainda salientar que na parte final da definição acima citada, onde encontramos, *ou inferiores a u_n e menor do que qualquer dos outros,* embora não esteja explicitado, parece-nos que o autor supõe que a sucessão em causa é, agora, monótona decrescente e limitada.

Verificamos que os números irracionais são considerados, por este autor, como limites, antes mesmo de estarem definidos, isto é, a definição é o limite.

Gomes Teixeira refere ainda, nesta 1^a edição, um teorema onde apresenta uma condição necessária e suficiente para que u_n possua limite.

> "É condição necessaria e sufficiente para que u_n tenda para um limite quando n augmenta indefinidamente, que, a cada valôr dado a δ, por mais pequeno que seja, corresponda um valôr n_1 de n tal que a desigualdade
>
> $$(1) \qquad u_{n+p} - u_n < \delta$$
>
> seja satisfeita (em valôr absoluto) pelos valores de n superiores a n_1, qualquer que seja p." ([45], pp. 285 - 286)

Este teorema, referenciado por Gomes Teixeira como sendo devido a Cauchy, é acompanhado de uma demonstração da condição necessária, muito próxima da actual.

A condição suficiente foi igualmente demonstrada, o que evidencia, por parte do autor, a sua necessidade.

Nas edições posteriores, este teorema é suprimido na parte respeitante à teoria dos números irracionais, aparecendo no contexto das sucessões, com a demonstração da condição suficiente, exposta com bastante mais clareza.

O facto de Gomes Teixeira, como acima foi referido, considerar os números irracionais como limites, antes mesmo de estarem definidos, mostra-nos que o seu objectivo não seria, nesta 1^a edição, o de apresentar uma construção rigorosa e puramente aritmética, como pretendiam outros matemáticos tais como Méray, Dedekind, Weierstrass e Cantor.[11]

A definição de número irracional aparece-nos de uma outra forma nas edições posteriores.

[11] Veja-se na secção 3.4.

"Consideremos um grupo composto de uma infinidade de numeros racionaes, positivos e crescentes,

$$a_1, a_2, ..., a_n, ...$$

e outro grupo composto de uma infinidade de numeros racionaes, positivos e decrescentes,

$$b_1, b_2, ..., b_n, ...$$

e supponhamos que os numeros do primeiro grupo são todos menores que os numeros do segundo e que a differença $b_n - a_n$ póde tornar-se tão pequena quanto se queira, dando a n um valor sufficientemente grande.

Se existe um numero racional, maior do que os numeros do primeiro grupo e menor que os do segundo grupo, este numero é completamente determinado pelos dous grupos. Com effeito, se existissem dous numeros A e B que satisfizessem a esta condição, estes numeros deveriam estar comprehendidos entre b_n e a_n, e seria, por maior que fosse n,

$$B - A < b_n - a_n,$$

o que é absurdo, visto que a differença $b_n - a_n$ póde tornar-se tão pequena quanto se queira, dando a n um valor sufficientemente grande.

Se porém não existe numero algum racional maior do que os numeros do primeiro grupo e menor do que os numeros do segundo, diz-se, por definição, que os dous grupos estão separados por um numero *irracional*. Como, n'este caso, qualquer numero racional differente dos precedentes é menor do que um valor de a_n ou maior do que um valor de b_n, vê-se que cada numero irracional divide a totalidade dos numeros racionaes em dous grupos, taes que os numeros do primeiro grupo são todos menores do que os numeros do segundo grupo." ([48], pp. 3 - 4)

Nota-se, nesta nova definição de número irracional apresentada na 3^a edição, uma possível influência do conceito de *corte* apresentado por Dedekind, embora Gomes Teixeira construa a sua própria definição.

Na 2^a edição, após ter apresentado a definição de número irracional, o autor afirma:

> "(...) a definição precedente comprehende os numeros irracionaes a que se foi conduzido em Arithmetica pela extracção das raizes. Assim, por exemplo, $\sqrt{2}$ representa um numero irracional que separa os numeros racionaes cujos quadrados são menores do que 2 d'aquelles cujos quadrados são maiores do que 2." ([47], p. 4)

Uma vez mais constata-se a preocupação de Gomes Teixeira, em relacionar um novo conceito, neste caso o de número irracional, com algo que os seus leitores pudessem reconhecer. Este aspecto vem de encontro com o facto desta obra representar um manual a ser utilizado pelos seus alunos da cadeira de *Calculo Infinitesimal,* como havíamos referido.

3.3.3 Operações com numeros irracionaes

Como pudemos observar em 3.3.2, na 1^a edição do *Curso,* os números irracionais foram considerados como limites de sucessões de números racionais e, atendendo a este aspecto, na parte II da *NOTA,* dessa mesma edição, as operações com números irracionais são definidas como operações sobre limites de sucessões.

A adição de números irracionais é definida da seguinte forma:

> "1^o Chama-se *addição* de dous numeros irracionaes $\lim u_n$ e $\lim v_m$ a operação que tem por fim determinar o numero racional ou irracional para que tende a somma $u_n + v_m$ quando n e m augmentam indefinidamente." ([45], p. 284)

A justificação, desta definição de adição de números irracionais, é feita pelo matemático do seguinte modo:

> "Para justificar esta definição, notemos primeiro que por serem, por hypothese, u_n e v_m menores do que dous numeros determinados, a somma u_n+v_m será tambem menor do que um numero determinado igual à somma d'estes; logo a somma $u_n + v_m$ tende para um numero racional ou irracional." ([45], p. 285)

Gomes Teixeira acrescentou que, por redução ao absurdo, demonstra-se que:

> "(...) este limite é sempre o mesmo qualquer que seja o modo como n e m augmentem." ([45], p. 285)

O intuito de que as propriedades inerentes às regras de cálculo se mantivessem para esta nova classe de números, é novamente evidente em:

> "(...) a somma de numeros irracionaes, como vimos de a definir, goza das propriedades fundamentaes (...) como é facil de vêr." ([45], p. 285)

Após ter definido a adição e a multiplicação, Gomes Teixeira, nesta 1^a edição, define a subtracção e a divisão como operações inversas, respectivamente, da adição e da multiplicação.

Nas edições posteriores à 1^a continua a definir a multiplicação e a divisão, fundamentando estas definições na teoria dos números irracionais, definidos a partir de sucessões. Com efeito, mais uma vez, é acentuado que a multiplicação, assim definida, satisfaz às *leis fundamentaes* dos números racionais.

A subtracção será, como veremos adiante, definida em termos de sucessões e não apenas como operação inversa da adição.

Na 1^a edição não se assiste à referência da potenciação nem da radiciação de irracionais, aquando da definição das operações fundamentais da Aritmética. Contudo, após algum desenvolvimento sobre limites de sucessões, no parágrafo intitulado *Potencias irracionaes dos numeros*, o autor aborda a exponencial a^u da seguinte forma genérica:

> "É bem conhecida desde os Elementos de Algebra a significação do signal a^u quando u representa um numero racional inteiro ou fraccionario, positivo ou negativo, e viu-se que em todos estes casos tem logar a igualdade fundamental $a^u \cdot a^v = a^{u+v}$.
>
> Resta definir este mesmo signal quando u é um numero irracional. Seja primeiro a maior do que a unidade e sejam $u_1, u_2, ..., u_n, ...$ os numeros crescentes com n, mas inferiores a um numero α, que determinam o numero irracional $u = \lim u_n$. Os numeros $a^{u_1}, a^{u_2}, ..., a^{u_n}, ...$ crescem tambem quando n augmenta, sem poderem todavia exceder o numero a^α. Tendem pois para um numero irracional $\lim a^{u_n}$ que tomaremos para definição do signal a^u." ([45], pp. 288 - 289)

A adição de números racionais ou irracionais, em edições posteriores à 1^a, é apresentada na parte II do CAPITULO I da *INTRODUCÇÃO*, da seguinte forma:

> "1^o Sejam dados dois numeros racionaes ou irracionaes A e B, determinados pelos grupos
>
> $$(1) \qquad \begin{cases} a_1, a_2, ..., a_n, ... \\ b_1, b_2, ..., b_n, ..., \end{cases}$$
>
> $$(2) \qquad \begin{cases} a'_1, a'_2, ..., a'_n, ... \\ b'_1, b'_2, ..., b'_n, ..., \end{cases}$$
>
> e formemos o grupo de numeros crescentes
>
> $$a_1 + a'_1, a_2 + a'_2, ..., a_n + a'_n, ...$$
>
> e o grupo de numeros decrescentes
>
> $$b_1 + b'_1, b_2 + b'_2, ..., b_n + b'_n, ...$$
>
> Como os numeros do primeiro d'estes grupos são menores do que os do segundo, e como a differença entre $b_n + b'_n$ e $a_n + a'_n$ póde tornar-se tão pequena quanto se queira, dando a n um valor sufficientemente grande, estes grupos determinam um numero *racional* ou *irracional*, que os separa, o qual se chama *somma* dos numeros dados." ([49], p. 4)

Mais uma vez, é feita pelo matemático uma justificação, da sua definição de adição de números racionais ou irracionais:

> "(...) notemos em primeiro logar que, se os numeros dados A e B forem racionaes, os grupos que vimos de formar determinam o numero racional $A+B$, visto que este numero os separa." ([49], p. 4)

Novamente, é acentuado que a adição, assim definida, satisfaz às *leis fundamentaes* dos números racionais. ([49], p. 4)

A subtracção, como referido anteriormente, é definida em termos de sucessões:

"2^o Consideremos ainda os numeros A e B e seja $A > B$. Demonstra-se, procedendo como no caso anterior, que os grupos

$$a_1 - b'_1, a_2 - b'_2, ..., a_n - b'_n, ...$$

$$b_1 - a'_1, b_2 - a'_2, ..., b_n - a'_n, ...$$

determinam um numero racional ou irracional. A este numero chama-se *differença* dos numeros dados, e representa-se por $A - B$." ([49], p. 5)

Seguidamente, Gomes Teixeira, prova que para quaisquer números A e B temos a igualdade:

$$(A - B) + B = A. \text{ ([49], p. 5)}$$

Como já foi por nós focado, a multiplicação não sofreu alterações ao longo das quatro edições, sendo definida como se segue:

"3^o Chama-se *producto* dos numeros A e B ao numero definido pelos grupos

$$a_1a'_1, a_2a'_2, ..., a_na'_n, ...,$$
$$b_1b'_1, b_2b'_2, ..., b_nb'_n, ...\text{" ([49], p. 5)}$$

Gomes Teixeira afirma que o produto assim definido satisfaz às *leis fundamentaes* da multiplicação de números racionais e justifica a definição desta operação aritmética do seguinte modo:

"Para justificar esta definição, é necessário demonstrar que estes dois grupos determinam um numero racional ou irracional, e, para isso, basta attender a que $a_na'_n$ cresce e $b_nb'_n$ decresce, quando n augmenta, a que temos $b_nb'_n > a_ma'_m$, quaesquer que sejam os valores de n e m, e a que da desegualdade

$$b_nb'_n - a_na'_n = b_n (b'_n - a'_n) + a'_n (b_n - a_n) < b_1 (b'_n - a'_n) + b'_1 (b_n - a_n)$$

resulta que a differença $b_nb'_n - a_na'_n$ se póde tornar tão pequena quanto se queira, dando a n valores sufficientemente grandes." ([49], p. 5)

Na 2^a e 3^a edições, a definição de potenciação é apresentada apenas fazendo referência ao caso particular de expoente inteiro e positivo.

> "4^o Chama-se *potencia* do gráo m do numero irracional A ao producto de m factores iguaes a A." ([47] e [48], p. 6)

Enquanto que, na 4^a edição, apresentou a seguinte definição:

> "5^o Chama-se *potencia* do grau m do numero irracional A ao producto de m factores eguaes a A. Os grupos que a determinam são pois
>
> $$a_1^m, a_2^m, ..., a_n^m, ...; \ \ b_1^m, b_2^m, ..., b_n^m, ..."$$ ([49], p. 6)

Nas edições posteriores à primeira, o autor apresentou sempre a mesma definição de radiciação:

> "6^o Chama-se *raiz* de indice m do numero A ao numero que elevado á potencia m dá A." ([49], p. 7)

Após definir cada uma das operações com números irracionais, Gomes Teixeira explica que a *theoria das operações* apenas fica completa após mostrarmos que o valor obtido por estas operações não varia quando se substituem os grupos dos números empregues para os determinar, por outros que definam números iguais a estes.

Com esse intuito, o matemático prova que, tomando A, B, C e D com $A = C$ e $B = D$, temos $A + B = C + D$ e acrescenta que procede-se do mesmo modo para provar, esta relação, nas outras operações ([49], pp. 7 - 8).

Gomes Teixeira introduz o conceito de número irracional com base nos números obtidos pela extracção de raizes, abrangendo assim, as dízimas infinitas. Na 3^a edição podemos ler:

> "A theoria precedente abrange os numeros irracionaes a que se foi conduzido em Arithmetica pela extracção das raizes (...).
>
> Assim, por exemplo, $\sqrt{A}$ quando não é igual a um numero racional, representa um numero irracional que separa o grupo dos numeros racionaes, que se

obtéem extraindo a raiz quadrada a A pelo processo ensinado na Arithmetica, levando a approximação sucessivamente até ás decimas, centesimas, etc.

$$\frac{m_1}{10}, \frac{m_2}{10^2}, \frac{m_3}{10^3}, ..., \frac{m_n}{10^n}, ...$$

do grupo de numeros

$$\frac{m_1+1}{10}, \frac{m_2+1}{10^2}, \frac{m_3+1}{10^3}, ..., \frac{m_n+1}{10^n}, ...$$

Os quadrados dos numeros do primeiro grupo e dos numeros racionaes inferiores a estes são menores do que A, e os quadrados dos numeros do segundo grupo e dos numeros racionaes superiores a estes são maiores do que A; por isso $\sqrt{A}$ separa os numeros racionaes cujos quadrados são menores do que A d'aquelles cujos quadrados são maiores do que A.

É facil vêr que o numero irracional assim definido goza da propriedade fundamental de, sendo elevado ao quadrado, dar A. Elevando com effeito ao quadrado o numero determinado pelos grupos anteriores, vem um numero definido pelos grupos

$$\frac{m_1^2}{10^2}, \frac{m_2^2}{10^4}, ..., \frac{m_n^2}{10^{2n}}, ...$$

$$\frac{(m_1+1)^2}{10^2}, \frac{(m_2+1)^2}{10^4}, ..., \frac{(m_n+1)^2}{10^{2n}}, ...;$$

mas os numeros do primeiro grupo são todos inferiores a A, os do segundo grupo são superiores a A e a differença

$$\frac{(m_n+1)^2}{10^{2n}} - \frac{m_n^2}{10^{2n}} = \frac{1}{10^n}\left(2\frac{m_n}{10^n} + \frac{1}{10^n}\right)$$

onde é $\frac{m_n}{10^n} < A$, póde tornar-se tão pequena quanto se queira, dando a n um valor sufficientemente grande; logo estes grupos definem o numero A." ([48], pp. 6 - 7)

Como pudemos observar, Gomes Teixeira mostrou que $\sqrt{A}$ separa os números racionais, cujos quadrados são menores do que A, daqueles cujos quadrados são maiores do que A. Acrescentou, igualmente, que o número irracional assim definido gozava da propriedade de ter quadrado igual a A.

Na 4^a edição considerou e explicitou, de uma forma generalizada, o cálculo de $\sqrt[m]{A}$, quando A é um número irracional, da seguinte forma:

> "Consideremos, para isso, o grupo de numeros crescentes
>
> $$\sqrt[m]{a_1},\ \sqrt[m]{a_2}, ..., \sqrt[m]{a_n}, ...$$
>
> e o grupo de numeros decrescentes, superiores aos do primeiro grupo,
>
> $$\sqrt[m]{b_1},\ \sqrt[m]{b_2}, ..., \sqrt[m]{b_n}, ...$$
>
> Elevando á potencia m os dois membros da identidade
>
> $$\sqrt[m]{b_n} = \sqrt[m]{a_n} + \left(\sqrt[m]{b_n} - \sqrt[m]{a_n}\right),$$
>
> vem
>
> $$b_n = a_n + m\left(\sqrt[m]{b_n} - \sqrt[m]{a_n}\right)\left(\sqrt[m]{a_n}\right)^{m-1} + ...;$$
>
> e portanto, temos
>
> $$b_n - a_n > m\left(\sqrt[m]{b_n} - \sqrt[m]{a_n}\right)\left(\sqrt[m]{a_n}\right)^{m-1} > m\left(\sqrt[m]{b_n} - \sqrt[m]{a_n}\right)\left(\sqrt[m]{a_1}\right)^{m-1},$$
>
> o que dá
>
> $$\sqrt[m]{b_n} - \sqrt[m]{a_n} < \frac{b_n - a_n}{m\left(\sqrt[m]{a_1}\right)^{m-1}}.$$
>
> Vê-se, por meio d'esta desegualdade, que a differença entre os termos da ordem n dos dois grupos considerados se póde tornar tão pequena quanto se queira, dando a n valores sufficientemente grandes. Logo os dois grupos determinam um numero racional ou irracional." ([49], pp. 9 - 10).

O matemático afirmou, ainda, que se pode demonstrar que este número, elevado à potência m, dá A, bastando aplicar aos grupos que o determinam a regra dada aquando da determinação de $\sqrt{A}$.

Ainda na 4^a edição, assistimos à prova da completude do conjunto dos números reais, nomeadamente no parágrafo 6. Neste parágrafo são consideradas as sucessões compostas apenas por números irracionais, embora o autor admita que o número por elas definido possa ser racional ou irracional.

"Consideremos agora o grupo de numeros crescentes

$$v_1, v_2, ..., v_n, ...$$

e o grupo de numeros decrescentes, maiores do que os anteriores,

$$w_1, w_2, ..., w_n, ...,$$

e supponhamos que estes numeros são *irracionaes* e que a differença $w_n - v_n$ póde tornar-se tão pequena quanto se queira, dando a n um valor sufficientemente grande. Vamos mostrar que, para os separar, não é necessario introduzir uma nova especie de numeros, pois que os separa um numero racional ou irracional.

Seja, com effeito,

$$a_1, a_2, ..., a_n, ...$$

um grupo de numeros racionaes crescentes e

$$b_1, b_2, ..., b_n, ...$$

um grupo de numeros racionaes decrescentes, que se formem tomando um numero racional entre cada par de numeros successivos dos grupos anteriores. Como a_n e b_n estão comprehendidos entre v_n e w_n, temos

$$b_n - a_n < w_n - v_n,$$

e porisso os ultimos grupos de numeros determinam um numero racional ou irracional c, que os separa. Este numero não póde ser inferior aos numeros $v_1, v_2, ...$, porque se fosse $c < v_n$, teriamos $c < a_n$, o que não póde ter logar, e, por motivo analogo, não póde ser superior aos numeros $w_1, w_2 ...$; logo separa estes dois grupos." ([49], p. 9)

3.3.4 Representação geometrica dos numeros irracionaes

No que diz respeito à representação geométrica dos números irracionais, verificamos que na 1^a edição Gomes Teixeira utiliza o termo "recta", ao referir-se a segmento de recta. Tal consideração foi reformulada na 2^a edição e posteriores, onde o termo "recta" é substituído por "segmento de recta".

A utilização da palavra "recta" ao referir-se, na 1^a edição, a segmento mostra-nos a adopção pelo autor da terminologia utilizada por Euclides. Com efeito, podemos ler:

> "Sabe-se pelos Elementos de Geometria que toda a recta póde ser representada por um numero racional ou irracional, tomando outra recta para unidade. Vamos agora demonstrar que, reciprocamente, todo o numero irracional póde ser representado por uma recta. Com effeito, representando sobre uma recta, a partir de um ponto A, todos os numeros racionaes menores do que os numeros u_n, que entram na definição do numero irracional $\lim u_n$, obtem-se uma série de pontos que representaremos por M. Do mesmo modo os numeros maiores do que u_n darão outra série de pontos que representaremos por N. Por ser sempre $AN > AM$, as duas séries de pontos estão separadas por um ponto K, e a distância AK representa o numero irracional considerado." ([45], p. 288)

Ao contrário das edições posteriores, na 1^a edição, Gomes Teixeira não apresenta qualquer figura alusiva à representação dos pontos M e N e, como tal, observamos uma certa confusão na representação dos mesmos.

O número irracional considerado é representado por $\lim u_n$ e para mostrar que a esse número irracional, corresponde um segmento de recta, designado por AK, são consideradas as *séries de pontos* que nos parecem ser análogas às classes relativas ao conceito de corte de Richard Dedekind.[12]

Somente na 2^a e 3^a edições, a correspondência entre o conjunto dos pontos da recta e o conjunto dos números reais foi claramente conseguida.

> "Sabe-se pelos elementos de Geometria que todo o segmento de recta póde ser representado por um numero racional ou irracional, tomando outro segmento de recta para unidade. Vamos agora demonstrar que, reciprocamente, todo o numero irracional A póde representar um segmento de recta. Com effeito, representando sobre uma recta, a partir de um ponto O, todos

[12] Veja-se na secção 3.4.

os numeros racionaes, menores do que o numero irracional considerado, que entram na sua definição, obtem-se uma série de pontos, que representaremos por $M_1, M_2, ..., M_n, ...$ Do mesmo modo os numeros maiores do que A darão outra série de pontos, que representaremos por $N_1, N_2, ..., N_n, ...$

$$\overline{O \quad M_1 \quad M_2 \quad K \quad N_2 \quad N_1}$$

Por ser $ON_n > OM_n$, qualquer que seja n, vê-se que as duas séries de pontos estão completamente separadas; e por poder tornar-se tão pequena, quanto se queira, a distancia M_nN_n, dando a n um valor sufficientemente grande, vê-se que esta separação é feita por meio de um ponto unico K (com effeito, se existissem dous pontos K e K_1, que satisfizessem a esta condição, seria $KK_1 < M_nN_n$, por maior que fosse n, o que é absurdo). Temos assim determinado o segmento OK que o numero irracional considerado representa."
([47], p. 8 e [48], p. 9)

Notamos assim que, comparativamente com a 1^a edição, existe uma preocupação crescente em termos da linguagem utilizada ("segmento de recta" e não "recta") e na definição do conjunto de pontos que agora é representado por $M_1, M_2, ..., M_n, ...$

Contudo, a existência de um único ponto K, que estabelece a separação das duas séries de pontos, é apenas justificada por um argumento intuitivo.

É efectivamente na 4^a edição que Gomes Teixeira estabelece que os irracionais que se conhecem da Geometria, coincidem com estes que agora são definidos, e fundamenta a existência e unicidade do ponto K, do seguinte modo:

"Dá-se o nome de *postulado de Archimedes* ao principio seguinte:

Se λ e λ_1 representarem dois segmentos de recta e se for $\lambda > \lambda_1$, existe um numero inteiro m tal que é $\lambda_1 \cdot m > \lambda$.

A doutrina d'este numero é fundada nos postulados que caracterizam a linha recta, no postulado de Archimedes e no *postulado de continuidade*, cujo enunciado é dado no texto."[13]

[13] In [49], p. 10 - Nota de rodapé (1).

O texto referente à *Representação geometrica dos numeros irracionaes* da 4^a edição, tem a seguinte redação:

> "Convem recordar que os numeros irracionaes que, em Geometria elementar, a medição dos segmentos de recta incommensuraveis com a unidade levou a considerar, coincidem com os que vêem de ser definidos. Com effeito, sendo dado o segmento OK, resulta do
>
> $$\overline{O \quad M_1 \quad M_2 \quad M_n \quad K \quad N_n \quad N_2 \quad N_1}$$
>
> postulado de Archimedes$^{(1)}$ que podemos determinar dois segmentos OM_1 e ON_1, entre os quaes esteja comprehendido OK, que contenham respectivamente m_1 e $m_1 + 1$ vezes a unidade." ([49], p. 10)

Gomes Teixeira acrescenta que, do mesmo modo, era possível dividir a unidade num número determinado de partes iguais. Considerando esta unidade dividida em dez partes iguais, o matemático tomou uma delas para nova unidade, determinando assim dois segmentos OM_2 e ON_2, que continham, respectivamente, m_2 e $m_2 + 1$ vezes a nova unidade e, consequentemente, representados pelos números $\frac{m_2}{10}$ e $\frac{m_2+1}{10}$, relativamente à primeira unidade e acrescentou que:

> "(...) Continuando do mesmo modo formam-se dois grupos de segmentos
>
> $$OM_1, OM_2, OM_3, ...; \quad ON_1, ON_2, ON_3, ...,$$
>
> entre os quaes está comprehendido OK, taes que a differença entre ON_n e OM_n se póde tornar menor do que qualquer segmento dado, tomando n sufficientemente grande; e a estes grupos de segmentos correspondem os grupos de numeros
>
> $$m_1, \frac{m_2}{10}, \frac{m_3}{10^2}, ...; m_1 + 1, \frac{m_2 + 1}{10}, \frac{m_3 + 1}{10^2}, ...,$$
>
> que determinam um numero racional ou irracional A, que os separa. (...) O numero que vimos de determinar é o que, em Geometria elementar, se tomou para medida do segmento considerado." ([49], p. 11)

Reciprocamente, Gomes Teixeira afirma que a todo o número irracional A, definido pelos grupos dos números racionais $(a_1, a_2, ...)$ e $(b_1, b_2, ...)$, corresponde um segmento

OK, tal que os números racionais menores do que o número A são representados pelos segmentos de comprimento menores do que OK e os números racionais maiores do que A são representados por segmentos cujos comprimentos são maiores do que OK, e acrescenta que:

> "Com effeito, representando sobre uma recta, a partir de um ponto O, todos os numeros racionaes menores do que o numero irracional considerado, que entram na sua definição, obtem-se uma serie de pontos, que representaremos por $M_1, M_2, ..., M_n, ...$ Do mesmo modo os numeros maiores do que A, que entram na sua definição, dão outra serie de pontos, que representaremos por $N_1, N_2, ..., N_n, ...$, os quaes, por ser $ON_n > OM_m$, quaesquer que sejam os valores de m e n, estão separados dos anteriores. Esta separação não póde ser feita por um segmento de recta, porque se o fosse, o numero que representa o segmento M_nN_n, isto é $b_n - a_n$, não poderia ser inferior ao que representa aquelle segmento. Admittindo porém como postulado (*postulado da continuidade*)$^{(1)}$ que os separe um ponto K, o segmento OK satisfaz ás condições indicadas." ([49], p. 11)

O autor refere, em nota de rodapé, que foi G. Cantor quem primeiro notou a necessidade de fazer intervir este postulado na presente questão.

Na parte final do CAPITULO II, dedicado à *Theoria dos numeros irracionaes*, Gomes Teixeira recorda como na Geometria elementar, foram definidas as operações sobre dois segmentos de recta L e L_1, no caso destes serem representados pelos números inteiros A e B. Com efeito, refere que os números $A + B$ e $A \cdot B$ representam a soma e o produto dos segmentos considerados.

Focou, igualmente, a extensão dessas mesmas operações, no caso de A e B serem racionais ou irracionais. Finalizou o capítulo afirmando:

> "A correspondencia entre os segmentos de recta e os numeros, que vem de ser considerada, é a base primordial da Geometria analytica. Em virtude d'ella, a toda a relação entre segmentos corresponde uma relação entre numeros e reciprocamente." ([49], p. 12)

3.4 Fundamentação Teórica da Construção dos Números Irracionais

Francisco Gomes Teixeira demonstrava possuir um perfeito conhecimento das Teorias Matemáticas que estavam a ser desenvolvidas internacionalmente, bem como dos trabalhos desenvolvidos por matemáticos anteriores a ele e que, de certa forma, fundamentaram o seu trabalho.

No campo da Análise, este matemático evidenciou, em várias obras, referências bibliográficas de autores estrangeiros. Exemplo disso foram as notas históricas sobre conceitos matemáticos e sobre matemáticos nas várias edições do *Curso de Analyse Infinitesimal - Calculo Differencial.*

É talvez significativo salientar que o livro de Tannery *Introduction à la theorie des fonctions*, publicado em 1886, tenha já sido referenciado na 1.^{a} edição do *Curso*, que como vimos, foi publicada em 1887.

Nas várias edições do *Curso* podemos encontrar referências às seguintes obras ([2], p. 279):

1.^{a} edição (1887)

Cours de Calcul Infitesimal, Tome I, de J. Hoüel (1878)

Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali de Dini (1878)

Die Elemente der Functionenlehre de Heine no *Jornal de Crelle t.* 74 (1872)

Stetigkeit und irrationale Zahlen de Dedekind (Brunswick, 1872)

Introduction à la theorie des fonctions de Tannery (1886)

2.^{a} edição (1890) e 3.^{a} edição (1896)

Cours d'Analyse de Cauchy (1821)

Stetigkeit und irrationale Zahlen de Dedekind (Brunswick, 1872)

Introduction à la theorie des fonctions de Tannery (1886)

4.^{a} edição (1906)

Stetigkeit und irrationale Zahlen de Dedekind (Brunswick, 1872)

Introduction à la theorie des fonctions de Tannery (1886)

Curso da Universidade de Berlim de Weierstrass

Ausdehunngslehre de Grassmann (Leipzig, 1844)

Mathematiche Annalen, t. V e t. XXI, de G. Cantor (Leipzig, 1883)

Theorie der complexen Zahlsysteme de Hankle (Leipzig, 1867)

Revue des sociétés savantes de Méray (Paris, 1869)

Giornale di Matematiche de Capelli (Napoli, 1897)

Intituzioni di Analisi algebrica de Capelli (Napoli, 1902)

Giornale di Matematiche, t. XVIII, de Pincherle (Napoli, 1880)

No CAPITULO I da *INTRODUCÇÃO* da 1.^{a} edição, intitulado *Theoria dos numeros imaginarios e regras para o seu calculo*, Gomes Teixeira apresenta-nos a teoria das operações sobre reais não negativos, com o objectivo de contemplar estas mesmas operações ao conjunto dos números imaginários.

O autor afirma:

> "1. - Sabe-se desde a Algebra elementar que o calculo dos imaginarios se faz seguindo as regras do calculo das quantidades reaes. Torna-se porém necessario demonstrar que são verdadeiros todos os resultados reaes a que se chega por este meio. Daremos duas demonstrações d'esta proposição, uma analytica e outra geometrica, porque cada uma d'ellas tem sua importancia propria e dão ambas muita luz sobre os principios geraes do Calculo das operações(*) que vamos aqui recordar rapidamente por d'elles termos de usar n'estas demonstrações." ([45], p. 1)

O asterisco presente nesta citação remete-nos para uma nota de rodapé na qual é referenciado o Tratado de Hoüel *Cours de Calcul Infinitesimal*, tomo I, de 1878, onde este autor, à semelhança de Gomes Teixeira, explica os sucessivos alargamentos do conceito de número como fruto da impossibilidade de concretização de certas operações. Com efeito, o matemático português evidenciou igualmente o mesmo propósito de conservação das regras de cálculo nas sucessivas generalizações do conceito de número, antes da introdução do conceito de número irracional.

Somente na 4.^{a} edição Gomes Teixeira referencia em nota de rodapé os autores que tinham trabalhado na teoria das operações, tomando-as como combinações de números, referindo que:

> "A theoria geral das operações, consideradas como combinações de numeros ou objectos, foi estudada por Grassmann nos seus *Ausdehnungslehre* (Leipzig, 1844), por Hankel na sua *Theorie der complexen Zahlsysteme* (Leipzig, 1867), etc." ([49], p. 1)

No que se refere ao conceito de número irracional, este aparece, na 1.^{a} edição associado à noção de radical, pois o matemático considera não ser sempre possível, no domínio dos números racionais, estabelecer a operação $\sqrt[n]{b}$.

Além desta definição de número irracional, Francisco Gomes Teixeira apresenta, ainda na 1.^{a} edição, uma outra que, como vimos anteriormente, baseia-se na noção de limite.

Ao considerar o número irracional como limite de uma sucessão, antes mesmo de estar definido, isto é, a definição de número irracional coincide com o próprio limite, este matemático não visa a construção rigorosa dos números irracionais.

A procura de uma definição puramente aritmética do conceito de número irracional, com base em sucessões que satisfizessem o Critério de Convergência de Cauchy, feita por Gomes Teixeira, constituiu o propósito de matemáticos como Charles Méray, Weierstrass, Georg Cantor e Eduard Heine.

Com efeito, à semelhança de outros matemáticos, Francisco Gomes Teixeira fundamentou a convergência da sucessão u_n, no teorema que referiu como sendo de Cauchy. Contudo, apenas a partir da 2.^{a} edição é que Gomes Teixeira pronuncia a influência dos trabalhos de alguns dos matemáticos supra citados.

Assim, na 4.^{a} edição, em nota de rodapé, podemos ler:

> "A theoria dos numeros irracionaes foi tratada primitivamente debaixo de uma fórma geometrica. Occuparam-se da theoria arithmetica dos mesmos numeros, á qual se tem dado diversas fórmas, Weierstrass, no seu curso na Universidade de Berlin, Méray em um trabalho publicado na *Revue des sociétés savantes*

(Paris, 1869), G. Cantor em artigos publicados nos *Mathematische Annalen* (Leipzig, t. V e t. XXI), Dedekind em um trabalho intitulado *Stetigkeit und irracionale Zahlen* (Brunswick, 1872), Tannery na sua *Introduction à la théorie des fonctions* (Paris, 1886), Capelli em um artigo publicado no *Giornale di Mathematiche* (Napoli, 1897) e nas suas *Istituzioni di Analisi algebrica* (Napoli, 1902), etc. A theoria de Weierstrass póde ver-se em um trabalho publicado por Pincherle no t. XVIII do *Giornale di Mathematiche.*" ([49], pp. 2 - 3)

Fazendo uma breve análise ao trabalho realizado por estes matemáticos, no âmbito da construção do conceito de número irracional, podemos referenciar que Weierstrass, no curso a que Gomes Teixeira se refere, esboçou uma definição de número irracional baseada no domínio dos números racionais, onde utilizou argumentos acerca de conjuntos infinitos de números racionais.

A sua primeira apresentação desta teoria foi efectivamente realizada em 1863, num curso sobre funções analíticas. Contudo, em anos posteriores regressou a este tópico, reformulando e aperfeiçoando esta mesma teoria.

No que diz respeito a Cantor, a ideia por detrás do seu conceito de número irracional, era a sua consideração como classe de equivalência de sucessões de números racionais que satisfaziam o atrás referenciado Critério de Convergência de Cauchy.

Desta forma Cantor introduziu a noção de *sucessão fundamental*, que consistia numa sucessão que satisfazia o Critério de Cauchy, como vimos no Capítulo 1.

Enquanto para Cauchy tornava-se óbvio que uma sucessão deste tipo convergia para um número real, Cantor, por sua vez, considerava que tal afirmação era imprecisa, na medida que pressuponha, à priori, a existência de tal número.

Cantor utilizou então a *sucessão fundamental* para definir o número real, isto é, associou um número real a toda a *sucessão fundamental* de números racionais, definindo assim este número como uma classe de equivalência da todas as sucessões que o têm como limite.

Este mesmo princípio parece-nos subjacente na parte II da *NOTA* da 1.^{a} edição, onde Francisco Gomes Teixeira define a igualdade de números irracionais, representados por $\lim u_n$ e $\lim v_n$, afirmando que esta relação de igualdade goza das propriedades, já por si referidas, da igualdade de números racionais.

Estas propriedades permitem considerar a relação de igualdade, entre estes números recém criados, como uma relação de equivalência, ficando assim, o número irracional definido por uma classe de equivalência de sucessões que o têm por limite.

Nas edições posteriores à primeira, denota-se, na definição de número irracional, uma influência, de acordo com o referido pelo próprio autor, dos trabalhos realizados por Dedekind.

À semelhança de outros matemáticos do século XIX, Dedekind procurou estabelecer novos fundamentos para o cálculo e aritmética dos números reais.

Era seu desejo encontrar uma definição a partir da qual se pudesse demonstrar os teoremas básicos sobre a existência de limites. Para consegui-lo, necessitava definir um sistema apresentando um certo conjunto de propriedades de continuidade ou completude.

A propriedade de completude ou continuidade que Dedekind ansiava foi satisfeita pela criação do que ele denominou de *Schnitt* (*corte*), quando estabeleceu uma comparação entre o conjunto dos pontos de uma recta e o conjunto dos números racionais.

Como vimos anteriormente, Dedekind considerou que todo o número racional a divide o conjunto dos números racionais em duas classes A_1 e A_2, em que A_1 é constituída por todos os números menores do que a e A_2 contém todos os números maiores do que a. O próprio a pode pertencer a qualquer uma das classes, A_1 ou A_2.

As duas classes assim definidas possuem a propriedade de que todo o número em A_1 é menor do que todo o número pertencente a A_2.

Com o intuito de estabelecer a correspondência entre os números racionais e os pontos de uma recta, Dedekind manifestou que era conhecido, desde a Grécia antiga, que uma recta era mais rica em pontos do que o conjunto dos números racionais o é em números, isto é, a existência de comprimentos incomensuráveis com a unidade de medida estabelecida. Contudo, Dedekind suponha que a "geometria teria que servir somente como origem da ideia para construir uma fundamentação aritmética" ([6], p. 286).

O matemático ansiava, assim, a criação de novos números que conferissem ao domínio dos numeros a mesma completude, ou a mesma continuidade, que a manifestada pela recta.

Enunciou, então, o *Princípio da Continuidade*, estabelecendo que se todos os pontos de uma recta pertencem a duas classes tal que todo o ponto da primeira está à esquerda de todo o ponto da segunda, então existe um e um só ponto que produz esta divisão da recta em duas classes.

Transportou esta propriedade para o conjunto dos números racionais afirmando que toda a separação do conjunto dos números racionais em duas classes, em que todo o número da primeira classe é menor do que todo o número da segunda constitui um *corte*.

Dedekind mostrou que existem *cortes* que não são produzidos por números racionais e assim, sempre que um *corte* não é produzido por um número racional, cria-se um número irracional.

Com base na definição de *corte*, Dedekind definiu toda a aritmética do conjunto dos números reais, conjunto esse formado pelos números racionais e irracionais. As operações aritméticas entre números reais foram assim definidas em termos de *cortes*, sobre o sistema dos números racionais e das correspondentes operações aritméticas definidas para os racionais.

Verificamos que a igualdade entre dois números irracionais, definida por Gomes Teixeira, segue a definição dada por Dedekind.

Na 1.ª edição do *Curso*, podemos ler:

> " Dous numeros irracionaes $\lim u_n$ e $\lim v_n$ dizem-se *iguaes* quando todos os numeros racionaes menores do que um são tambem [menores] do que o outro." ([45], p. 284)

Nas edições posteriores, encontramos:

> " Dous numeros irracionaes A e B dizem-se *iguaes* quando todos os numeros racionaes menores do que A são também menores do que B, e todos os numeros racionaes maiores do que A são também maiores de que B." ([47], p. 4 e [49], p. 3)

Com efeito, a igualdade entre dois *cortes* é estabelecida por Dedekind, da seguinte forma:

> "Com vista a obter uma base para a ordenação de todos os *reais*, isto é, de todos os números racionais e irracionais, é necessário investigar a relação entre quaisquer dois cortes (A_1, A_2) e (B_1, B_2) produzidos por dois quaisquer

números α e β. Obviamente um corte (A_1, A_2) está completamente determinado quando uma das classes, por exemplo, a primeira A_1 é conhecida, pois a segunda A_2 consiste em todos os números racionais que não estão contidos em A_1, e a propriedade característica da primeira classe reside no facto de que se o número a_1 está contido nela, estão igualmente contidos todos os números menores do que a_1. Se agora compararmos as duas primeiras classes A_1 e B_1, pode acontecer

1. Que elas sejam perfeitamente idênticas, isto é, que todo o número contido em A_1 está também contido em B_1, e que todo o número contido em B_1 está também contido em A_1. Neste caso A_2 é necessariamente idêntica a B_2, e os dois cortes são perfeitamente idênticos, o que denotamos simbolicamente por $\alpha = \beta$ ou $\beta = \alpha$." ([10], pp. 15 - 16)

Dedekind estabeleceu uma relação de ordem entre os números reais, a qual se pode demonstrar possuir as mesmas propriedades de uma ordenação densa. Além disso, e de maior importância, é o facto da definição de ordenação fazer com que o conjunto dos números reais, pela forma como estes foram definidos, constituir um conjunto completo, isto é, para todo o *corte* α produzido por um número real, a classe constituída pelos números racionais inferiores a α possui máximo ou a classe constituída pelos números racionais superiores a α possui mínimo.

Este aspecto evidencia que todo o *corte* é produzido por exactamente um número do conjunto dos números reais.

Os teoremas fundamentais dos limites resultam desta propriedade de completude e, em particular, Dedekind demonstrou que toda a sucessão crescente de números reais possui um limite.

Como vimos na secção anterior, a completude do conjunto dos números reais foi similarmente abordada por Francisco Gomes Teixeira, no parágrafo 6 da 4.^{a} edição. ([49], p. 9)

Gomes Teixeira parte de duas sucessões, a que chama grupo de números,

$$v_1, v_2, ..., v_n, ... \text{ e } w_1, w_2, ..., w_n, ...,$$

sendo a primeira monótona crescente e a segunda monótona decrescente.

Considera ainda que a diferença $w_n - v_n$ pode-se tornar tão pequena quanto se queira, tomando n suficientemente grande.

Com estes pressupostos, Gomes Teixeira assume que será fácil aos leitores aceitar que as duas sucessões são separadas por um único número que será irracional, quando não for racional.

A definição de número irracional, a partir das sucessões acima referidas, remete-nos para o *Princípio do Encaixe*, presente na construção dos números reais feita por Neves Real e que consiste no seguinte:

Princípio do Encaixe

Dadas a sucessão monótona não decrescente

$$\xi_1 \leq \xi_2 \leq ... \leq \xi_n \leq ...$$

e a sucessão monótona não crescente

$$\eta_1 \geq \eta_2 \geq ... \geq \eta_n \geq ...,$$

satisfazendo às condições de que todo o termo da primeira é inferior a todo o termo da segunda e que a partir de certa ordem é tão pequena quanto se queira a diferença entre dois termos correspondentes das duas sucessões, isto é,

$$\begin{array}{l} \forall i, j \ \xi_i < \eta_j \\ \forall \delta \ \exists N : \forall n > N \Longrightarrow \eta_n - \xi_n < \delta, \end{array}$$

existe um e um só número real que pertence a todos os intervalos fechados $\left[\xi_j, \eta_i\right]$.

Realcemos que Gomes Teixeira foi o pioneiro em Portugal a estabelecer o que Neves Real denominou posteriormente por *Princípio do Encaixe*.

Capítulo 4

José Vicente Gonçalves

4.1 Vida e Obra

José Vicente Martins Gonçalves nasceu a 26 de Agosto de 1896 na freguesia da Sé, Concelho do Funchal, Ilha da Madeira.

No início do século XX a taxa de analfabetismo no Distrito do Funchal era muito elevada, considerada, por distrito, a maior do país. (veja-se [8], p. 44)

Vicente Gonçalves foi assim um dos poucos madeirenses que, na data, frequentou o 1.^{o} grau, constituído por três classes e posteriormente o 2.^{o} grau, constituído unicamente por uma classe e que era obrigatório para a admissão ao curso liceal.

Em 1907, com 11 anos, Vicente Gonçalves inicia o curso no Liceu Nacional Central do Funchal, onde era apenas ministrado o Curso Complementar de Ciências.

José Vicente Gonçalves frequentou seis classes, no seu curso de liceu. As cinco primeiras classes tinham o seguinte troco comum de disciplinas: Português (P), Francês (F), Geografia e História (GH), Ciências Físicas e Naturais (CFN), Matemática (M), e Desenho (D).

Na 2.^{a} classe juntava-se, a estas disciplinas, a de Inglês (I) e na 4.^{a} classe introduzia-se o Latim (L). Na 5.^{a} classe não funcionavam todas as disciplinas que acabaram de ser enunciadas, e na 6.^{a} classe as disciplinas leccionadas eram: Geografia (G), Ciências Naturais (CN), Matemática (M), Física (FI), Química (Q) e Inglês (I).

De seguida apresentamos os quadros (presentes em [8], pp. 45 - 46) relativos às disciplinas que funcionavam em cada uma das classes, bem como as notas obtidas por

Vicente Gonçalves em cada uma delas.

As notas resultam da média anual de cada disciplina, uma vez que cada ano lectivo estava dividido em períodos.

Notamos em algumas das disciplinas a ausência de classificação, tal facto poderia dever-se à falta de professores que as leccionassem.

Verificamos, igualmente que as classificações conferidas a Vicente Gonçalves não são muito elevadas, evidenciando-se uma melhoria notória nas notas da 6.^{a} classe, comparativamente com as restantes.

Classes\Disciplinas	P	F	GH	CFN	M	D	I	L
1.^{a} (1907/08)	12	10	11	10	10	10	–	–
2.^{a} (1908/09)	10	11	10	10	10	11	10, 5	–
3.^{a} (1909/10)	10		10	13	10			–
4.^{a} (1910/11)	12	11, 5	12	12, 5	14	11, 5	12	12
5.^{a} (1911/12)	11			13	13	12, 5	10, 5	

Quadro I: Médias Anuais

Disciplinas	G	CN	M	FI	Q	I
6.^{a} (1912/13)	14,5	14,5	15	14,5	14,5	14,2

Quadro II: Média Anual

Em Julho de 1913 Vicente Gonçalves concluiu o exame de saída do Curso Complementar de Ciências do liceu e no Outono desse mesmo ano já Vicente Gonçalves se encontrava em Coimbra, com o intuito de seguir os seus estudos universitários onde ingressou na Faculdade de Ciências de Coimbra, no curso de Ciências Matemáticas.

José Vicente Gonçalves frequentou, como já referimos, a recém formada Faculdade de Ciências da Universidade de Coimbra, criada em 1911, a qual veio substituir as Faculdades de Matemática e de Filosofia.

As disciplinas leccionadas a Vicente Gonçalves nos quatro anos do curso de Ciências Matemáticas ([8], pp. 55, 57 e 59), foram as seguintes:

Estrutura dos Vários Anos do Curso

1^o Ano

Álgebra Superior Geometria Analítica e Trigonometria Esférica

Geometria Descritiva e Estereotomia

Química (curso geral)

Desenho Rigoroso

2.^{o} Ano

Desenho Rigoroso

Cálculo Diferencial, Integral e das Variações

Física

Mineralogia e Geologia (curso geral)

3.^{o} Ano

Geometria Projectiva

Desenho de Máquinas

Análise Superior

Cálculo das Probabilidades e suas Aplicações

Desenho Topográfico

4.^{o} Ano

Mecânica Racional

Astronomia e Geodesia

Desenho de Máquinas

Mecânica Celeste

Física Matemática

Em 1917 Vicente Gonçalves concluiu, com classificação final de 19 valores, o seu bacharelato e mais tarde, em 1921, doutorou-se em Ciências Matemáticas com a classificação de Muito Bom – dezanove valores.[1]

Para o exame de Doutoramento, defendeu a dissertação intitulada *Sobre Quatro Proposições Fundamentais da Teoria das Funções* ([8], p. 62), trabalho que nasceu da leitura das *Leçons sur les fonctions entières* de Emile Borel (1871 - 1956).

Comparativamente com as classificações obtidas no liceu, constatamos que na Faculdade as suas notas subiram consideravelmente. Estas excelentes classificações são fruto de uma grande dedicação e de um estudo sério e dedicado à Matemática.

As brilhantes classificações obtidas por Vicente Gonçalves fizeram com que em 1917, após terminar o seu bacharelato, fosse proposto como 2.º assistente provisório do 2.º grupo da 1.ª secção. ([8], p. 73)

Assim deu-se o início da sua carreira universitária como docente, que posteriormente desenrolou-se em três instituições de ensino superior.

Nos anos lectivos de 1917/1918 e 1918/1919 leccionou a disciplina de Mecânica e Astronomia e em 1919 interrompeu a sua actividade docente, durante sensivelmente quatro meses, para cumprir o serviço militar.

Em 1921, quando termina o seu doutoramento, passa a 1.º assistente e no ano seguinte entregaram-lhe a regência da disciplina de Análise Superior, onde se manteve até 1928. ([8], p. 74)

Em 1927 fez concurso de provas públicas para Professor Catedrático, onde apresenta a dissertação intitulada *Teoria Geral da Integrabilidade Riemanniana.* ([8], p. 74)

Vicente Gonçalves leccionou na Universidade de Coimbra até final de Outubro de 1942, transferindo-se seguidamente para a Universidade de Lisboa.

Acerca da sua saída pode-se ler:

> "No começo do ano lectivo, o Professor Doutor José Vicente Martins Gonçalves foi transferido, a seu pedido, para a Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. A Faculdade ficou, assim, privada de um colaborador distintíssimo, que durante 26 anos [julgamos terem sido 25 e não 26 anos] exerceu

[1] In *Anuário da Universidade de Coimbra 1918/1919* e *Acta de Doutoramento em Livro de Doutoramentos*, p. 86, Arquivo da Universidade de Coimbra, respectivamente - cit. in [8], p. 62.

> com singular relevo o magistério nas disciplinas de Álgebra superior, Cálculo infinitesimal, Análise superior, Geometria superior, Complementos de álgebra e geometria analítica, Matemáticas Gerais e Física Matemática."[2]

No ano de 1967, Vicente Gonçalves aposentou-se como Professor Catedrático da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, no entanto, entre os anos lectivos de 1947/1948 e 1959/1960 acumulou funções docentes no Instituto Superior de Ciências Económicas e Financeiras. ([8], p. 79)

Durante esse período Vicente Gonçalves veio ocupar a cátedra deixada por Bento de Jesus Caraça (1901 - 1948), que em 1946 havia sido demitido das funções de professor, pela ditadura salazarista.

Durante o seu percurso profissional, e ainda enquanto estudante, Vicente Gonçalves procurou sempre conciliar o ensino com a investigação, talvez por ter sentido uma necessidade intrínseca de procurar fundamentações rigorosas para os seus estudos.

O interesse manifestado por Vicente Gonçalves e o contacto próximo que mantinha com alguns dos seus professores, permitiu-lhe desde muito cedo tomar consciência do estado em que se encontrava o meio científico em Portugal nas várias vertentes, e em particular na Matemática.

Desde muito cedo constatou que os temas ensinados em Portugal estavam longe do que se ensinava e investigava em países estrangeiros, a julgar pela desactualização do curso que frequentou.

Podemos considerar que este tipo de preocupações pautou o desenrolar das actividades desenvolvidas posteriormente por Vicente Gonçalves, uma vez que foi sempre seu objectivo contribuir para a divulgação científica, numa época em que o seu desenvolvimento não constituía uma preocupação prioritária para o seu país.

Ao longo da sua vida participou em vários congressos, quer no seu país, quer no estrangeiro, onde procurou por um lado dar a conhecer as suas teorias e por outro inteirar-se do que se estava a desenvolver além fronteiras.[3]

Vicente Gonçalves começou a publicar artigos após ter-se doutorado, tendo publicado um total de 93, não contando com as traduções e reimpressões.

---

[2] Em *Vida da Faculdade*, Revista da Faculdade de Ciências da Universidade de Coimbra, 11(2), pp. 317-348 - cit. in [8], p. 77.

[3] Para mais informações consulte [8], pp. 89 – 93.

Os artigos são referentes a essencialmente três áreas da matemática: Análise, Álgebra e História da Matemática.

Durante a década de 50, Vicente Gonçalves publicou na secção *Historiae ac Pedagogiae de Minutiisn*, da *Revista da Faculdade de Ciências de Lisboa*, notas, num total de 26, na área da Análise e da Álgebra, onde se encontram "melhoramentos, observações ou demonstrações mais curtas de resultados já conhecidos, enquadrando-se perfeitamente numa secção de História e Pedagogia". ([8], p. 196)

Ainda relacionado com a vertente pedagógica, Vicente Gonçalves teve a seu cargo a elaboração de manuais para os primeiros ciclos do curso dos liceus e, relacionado com o ensino superior, podemos destacar os manuais *Lições de Cálculo e Geometria* e o *Curso de Álgebra Superior*.

Atendendo ao propósito desta tese iremos incidir o nosso estudo nas obras relacionadas com o ensino superior, particularmente no *Curso de Álgebra Superior*.

As preocupações de Vicente Gonçalves, em termos da investigação e do rigor matemático transponham-se, evidentemente, para as suas aulas e não raras vezes procurou incutir nos seus alunos o gosto pela investigação matemática.

Nos manuais por si redigidos para o ensino superior, podemos encontrar questões em aberto e propostas de exercícios de nível mais avançado, que permitiam aos seus alunos irem mais além.

A actualização do saber e das teorias apresentadas, sempre consistiu um objectivo primordial nos trabalhos de Vicente Gonçalves. As referências a trabalhos de matemáticos portugueses e estrangeiros, bem como a introdução dos temas mais recentes tornava-se uma constante.

A elaboração de textos de apoio ao ensino, quer ao nível do liceu quer a nível superior, demonstra uma incessante preocupação em traduzir em termos genéricos o que de mais importante se deveria estudar, incentivando sempre os alunos a tentarem chegar aos seus próprios resultados, incutindo-lhes o gosto pela descoberta do saber matemático.

Mesmo com a idade e a doença a minarem o seu espírito de descoberta, Vicente Gonçalves continuou os seus trabalhos de investigação, privilegiando nos últimos anos o estudo da História da Matemática, até morrer a 3 de Agosto de 1985, com 89 anos.

4.2 Curso de Álgebra Superior

Como já vimos na secção anterior, José Vicente Gonçalves é autor de vários livros de texto, entre eles contam-se as várias edições do seu *Curso de Álgebra Superior*.

A 1.^{a} edição desta obra data de 1933, a 2.^{a} de 1945, [19], e a 3.^{a} edição, [20], refere-se ao ano de 1953.

Na presente secção analisaremos as duas últimas edições procurando evidenciar, em particular, a teoria dos números irracionais levada a cabo pelo autor.

A segunda edição mereceu duras críticas, por parte de Luís Neves Real, publicadas em dois artigos: *Problemas do nosso ensino superior,* [35], *e Problemas do nosso ensino superior (II),* [36].

Procuraremos, ao longo desta secção, salientar as mais importantes críticas levantadas por Neves Real, no que diz respeito à definição de número real apresentada por Vicente Gonçalves que, como veremos, assenta na definição de *secções contíguas.*

Apesar de se mostrar consciente do grande valor do matemático Vicente Gonçalves, Neves Real não entende

> "(...) como foi possível a uma personalidade da categoria do Professor Vicente Gonçalves, cientista a quem a matemática portuguesa deve serviços incalculáveis, redigir tão lamentávelmente o primeiro capítulo da «última e completamente remodelada edição» do seu Curso de Álgebra Superior." ([35], p. 1)

As críticas levantadas por Neves Real, relativamente à 2.^{a} edição do *Curso de Álgebra Superior*, prendem-se, essencialmente, com a definição de número irracional e número real. Contudo, existem outros aspectos que no entender de Neves Real não se encontram devidamente explicitados e, como tal, dificultam o processo de aprendizagem dos alunos a que este livro de texto se destina.

Assim sendo, ao longo deste capítulo, tentaremos por um lado apresentar as objecções levantadas por Neves Real e, por outro, procurar fundamentá-las no quadro em que se insere a obra matemática de Vicente Gonçalves.

4.2.1 Secções Contíguas

A construção do conceito de número irracional, levada a cabo por Vicente Gonçalves, assenta, como já referimos, na definição de *secções contíguas*, definidas no conjunto dos números racionais.

Com efeito, à semelhança de outros autores que temos vindo a tratar, Vicente Gonçalves parte do conjunto dos números racionais e das leis aritméticas que os regem. Essas leis não são enunciadas pelo matemático pois, segundo ele:

> " (...) supõe-se o leitor já familiarizado com a doutrina dos números racionais, e em seu quadro se evocam, então, alguns factos numéricos capazes de sugerir e promover o conceito de número irracional." ([20], p. 1)

Esta posição adoptada por Vicente Gonçalves foi particularmente criticada por Neves Real, uma vez que, atendendo à insuficiente preparação dos seus alunos, seria deveras necessária, e até imprescindível, uma minuciosa apresentação da teoria dos números racionais, explicitando claramente as leis aritméticas pelas quais se regem.

Com efeito, Neves Real afirma:

> "Feito em Portugal, qualquer curso de introdução ao estudo da Análise, em que se não adopte a legítima atitude de partir do conjunto dos números reais como um dado, não deve prescindir de uma rigorosa caracterização do conjunto dos números racionais: ou do ponto de vista algébrico como *«corpo ordenado mínimo»*, ou do ponto de vista da teoria dos conjuntos, como *conjunto do tipo de ordenação n* (...)" ([35], p. 3)

Neves Real efectuou exactamente uma construção deste género, em conjunto com Andrade Guimarães, apresentada no Seminário de Matemática do Porto, onde, numa primeira fase é apresentada toda a teoria dos números racionais e posteriormente, a partir desses números, se constrói um conjunto que, algebricamente, é um corpo ordenado arquimediano e que, topologicamente, é um espaço métrico completo. (veja-se [22] e [37])

A construção levada a cabo por Neves Real assentava na concepção do conjunto dos números reais como um corpo arquimediano ordenado, dotado da noção de limite e tendo a condição de Cauchy, como condição necessária e suficiente de convergência de uma sucessão.

Pelo facto de Vicente Gonçalves não apresentar na sua obra a teoria dos números racionais, Neves Real considera que os seus alunos poderão ser confrontados com eventuais incoerências, se porventura procurarem uma definição de número racional expressa no seu *Compêndio de Aritmética* de 1939.

Nesta obra, Vicente Gonçalves define os números racionais como se tratando de relações entre números inteiros $a, b, a', b', ...$, expressas na forma $\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}, ...$, verificando os seguintes princípios:

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \text{ se } ab' = a'b$$

e

$$\frac{a}{b} \lesseqgtr \frac{a'}{b'} \text{ se } ab' \lesseqgtr a'b.$$

Ora, atendendo a esta definição de número racional e ao facto de Vicente Gonçalves considerar nesta obra que um inteiro não é uma relação, mas sim um *conceito de quantidade*, Neves Real considera gerada a incongruência quando, na 2.^{a} edição do *Curso de Álgebra Superior* os números racionais se unem, na totalidade dos números reais, aos números irracionais, e estes são tratados como *conceitos de quantidade*, como veremos adiante.

Segundo Neves Real, não é coerente que Vicente Gonçalves identifique um número real, nem com um inteiro, nem com um número racional, na medida em que "o primeiro é um *conjunto de conjuntos equivalentes*, enquanto que os dois últimos são relações." ([35], p. 3)

A crítica efectuada por Neves Real à 2.^{a} edição assume particular interesse na medida em que, por um lado, foca determinados aspectos da construção de Vicente Gonçalves que merecem ser discutidos e, por outro, permite diferenciar as visões adoptadas por estes dois matemáticos.

Verificamos que Vicente Gonçalves adopta uma perspectiva *genética*, em que muitos dos conceitos são introduzidos de uma forma sequencial, à custa de conceitos já existentes. Exemplo disso é a construção da dízima que representará o valor de separação das duas *secções contíguas,* como veremos mais à frente.

Em oposição, Neves Real evidencia uma abordagem profundamente axiomática, baseada num *formalismo*, que consideramos muitas vezes ter sido declarado de uma forma muito rude, nos comentários que teceu à 2.^{a} edição do *Curso de Álgebra Superior*.

A ausência de uma análise ao conjunto dos números racionais, focando as suas principais propriedades e a definição das operações aritméticas nesse conjunto, parece-nos constituir um dos aspectos menos positivos da obra de Vicente Gonçalves.

Tratando-se de um livro de texto, e baseando-se a definição de número irracional em conjuntos de números racionais, concordamos com Neves Real quando este manifesta as suas preocupações relativamente ao facto de Vicente Gonçalves não os ter definido, podendo surgir eventuais dúvidas, se forem consultadas outras obras do mesmo autor.

Como já referimos anteriormente, a definição de número irracional, apresentada por Vicente Gonçalves, assenta no conceito de *secções contíguas*, que, como veremos, remete-nos, indubitavelmente, para o conceito de *corte* ou *secção*, apresentado por Richard Dedekind, [10].

Contudo, a terminologia utilizada por Vicente Gonçalves parece-nos mais adequada do que a de Dedekind. Com efeito, com a utilização da expressão *secções contíguas* parece-nos que Vicente Gonçalves soube tirar partido da língua Portuguesa, recorrendo à intuição dos seus leitores.

Vicente Gonçalves afirma, na 2.^{a} edição, que um qualquer número racional separa todos os outros números racionais em duas colecções: a colecção R_1 dos números menores que ele e a colecção R_2 dos números maiores. Acrescenta que essa separação do conjunto dos números racionais é tal que:

> "α') se R_1 contém r, contém qualquer número racional $r' < r$.(...)
>
> β') R_1 não contém número algum superior a todos os mais." ([19], p. 1)

Na terceira edição a definição de *secções contíguas* é feita utilizando uma linguagem matemática mais rica, nomeadamente na utilização de termos como *máximo* e *mínimo*.

> "**Secções contíguas.** O número racional a separa todos os outros *números racionais* $(r, r', ...)$ em duas colecções: a dos números menores - R_1, e a dos números maiores - R_2; e sem dificuldade se reconhece que R_1,
>
> α_1) contendo um número, contém os números menores;
>
> β_1) não contém máximo$^{(1)}$. (...)

De modo análogo se verifica que R_2,

α_2) contendo um número, contém os números maiores;

β_2) não contém mínimo$^{(1)}$." ([20], pp. 1 - 2)

Segundo Vicente Gonçalves, uma colecção de números racionais satisfazendo as condições α_1 e α_2, define a *secção inferior* do conjunto dos números racionais e, inversamente, o mesmo acontece para uma colecção de números racionais satisfazendo β_1 e β_2, isto é, define a *secção superior*.

Duas secções U e V, sem elementos comuns, sendo U secção inferior e V secção superior, são *contíguas* sempre que se possam achar valores u e v de diferença $v-u$ arbitrariamente pequena, isto é, de diferença $v-u$ inferior a δ, por menor que seja o número positivo δ previamente dado.

Vicente Gonçalves acrescenta que:

"I. A condição necessária e suficiente de contiguidade das secções U e V (sem elementos comuns) é que nelas se compreendam todos os números racionais ou todos menos um." ([20], p. 2)

A condição é necessária pois se considerarmos valores s e t, com $s < t$, nenhum deles pertencentes a U nem a V, temos

$$u < s < t < v \text{ o que contraria } v - u < \delta,$$

quando se tomar $\delta \leq t - s$.

A suficiência da condição é provada como se segue.

Considerando δ, tome-se $\frac{\delta}{3} = \varepsilon$ e tomando u' e v' arbitrários, determine-se o inteiro n, de maneira que tenhamos $u' + n\varepsilon > v'$.

Compreendendo U e V todos os números racionais com uma só excepção possível, dos sucessivos valores:

$$u' \qquad u' + \varepsilon \qquad u' + 2\varepsilon \quad \ldots \quad u' + n\varepsilon > v'$$

o último que pertence a U e o primeiro que pertence a V, ou são consecutivos ou ficam separados por um só termo, fora de U e de V, e aí estão dois números u e v diferindo por menos de δ $(\varepsilon$ ou $2\varepsilon)$.

Para representar *secções contíguas*, Vicente Gonçalves utilizou a notação A_1, A_2 ou B_1, B_2, etc., em que a primeira letra designa a secção inferior.

Os elementos de A_1 são designados por $a_1, a_1', ...$ e os de A_2 por $a_2, a_2', ...$ e, atendendo à definição de *secções contíguas*, temos sempre $a_1 < a_2$ e podemos determinar a_1 e a_2 tais que $a_1 - a_2 < \delta$, para qualquer $\delta > 0$.

Atendendo à condição necessária e suficiente de contiguidade de duas secções, Vicente Gonçalves estipula que se A_1 e A_2 compreendem todos os números racionais, designam-se de *secções complementares* e a contiguidade é de *primeira espécie.*

Se, por outro lado, existe um número $r = a$ que lhes é exterior, a contiguidade é de *segunda espécie* e então temos $a_1 < a < a_2$.

Certamente com o intuito de clarificar algumas noções que irão ser tratadas em secções seguintes, o autor, na terceira edição, apresenta o seguinte conjunto de oito *exercícios:* ([20], p. 3)

Exercício 4.2.1 *Os números positivos de quadrado maior que* 1 *formam uma secção superior; os números positivos de quadrado menor que* 1*, com* 0 *e os números negativos formam uma secção inferior. As duas secções são contíguas. (...)*

Exercício 4.2.2 *Se os números u formam secção inferior (sup.), os números $-u$ formam secção superior (inf.), - que se diz simétrica da primeira.*

Exercício 4.2.3 *Se os números u formam secção inferior, os números $\frac{1}{u}$ positivos (se os há) formam secção superior.*

Exercício 4.2.4 *Se os números positivos v formam secção superior, os números $\frac{1}{v}$ formam a parte positiva da secção inferior.*

Exercício 4.2.5 *Se os números x e y formam secções inferiores (sup.), os números $x+y$ formam também secção inferior (sup.).*

Exercício 4.2.6 *Se os números positivos x e y formam secção superior, os produtos xy formam secção superior.*

Exercício 4.2.7 *Se os números x e y formam secções inferiores, os produtos xy de factores positivos (se os há) formam a parte positiva de secção inferior.*

Exercício 4.2.8 *Secções simétricas (Exercício 4.2.2) de secções contíguas são também contíguas e com a mesma espécie de contiguidade.*

Como já havíamos referido, a semelhança entre o conceito de *secções contíguas* e a definição de *corte* ou *secção*, apresentada por Dedekind, é relevante, facto que foi assinalado por Neves Real.

Com efeito, acerca da definição de número irracional, apresentada por Vicente Gonçalves, Neves Real afirma:

> "Fundamentalmente essa exposição assenta na noção da *secções contíguas*, parente muito próxima das de *corte* ou *encaixe*." ([36], p. 12)

Apesar de Neves Real considerar que Vicente Gonçalves demonstrava ter conhecimento do trabalho desenvolvido por Richard Dedekind, no que se refere à definição de número irracional, com base na noção de *corte*, suscitada pela tentativa de estabelecer uma correspondência biunívoca entre os pontos de uma recta e o conjunto dos números racionais, uma vez que refere-se ao postulado de Cantor-Dedekind, criticou-o pelo facto de, por um lado não ter referido explicitamente a abordagem de Dedekind, impedindo que os alunos tomassem conhecimento de tão importante trabalho, e por outro, o facto de Vicente Gonçalves não ter retomado o problema do limite com que Dedekind havia tropeçado.

Neves Real afirma que:

> "Ora, sendo precisamente a tentativa para solução da crise secular da teoria dos limites a origem das definições modernas de número real, dificilmente se compreende que o Professor Vicente Gonçalves não tenha insistido sobre as dificuldades que a operação de passagem ao limite encontra". ([35], p. 3)

Neves Real defende que, apesar do problema da passagem ao limite não ter sido solucionado por Dedekind, o seu trabalho assume particular importância, e como tal deveria ter sido incluído na obra de Vicente Gonçalves.

A importância de tal trabalho prende-se com o facto de que, baseado na intuição geométrica, Dedekind conseguiu provar que o conjunto dos números reais possui a mesma continuidade que os pontos da recta, estabelecendo assim uma importante condição a que tem de satisfazer todo o conjunto ordenado que se tome como domínio da variável real: a *continuidade*.

Neves Real defende que seria imprescindível que Vicente Gonçalves tivesse insistido sobre este momento capital da teoria dos números irracionais de Dedekind.

Com efeito, consideramos que seria importante realçar na obra de Vicente Gonçalves como é que se deu a criação dos números irracionais, atendendo à definição de *corte* numa recta. Isto é, o facto de Dedekind ter colocado entre os números racionais novos entes a que chamou de números irracionais, de modo a preencher todas as lacunas reveladas pela comparação da recta com o conjunto dos números racionais.

Assim, segundo a via genética adoptada por Vicente Gonçalves, ficaria explícito como é que surge o número real por livre criação da mente humana, consistindo num elemento de um conjunto constituído por todos os números racionais e por todos os números irracionais.

De grande importância reveste-se o facto de Dedekind ter levantado a questão deste novo conjunto possuir a mesma continuidade da recta.

Neves Real considera que, apesar da importância capital que deve ser atribuida à concepção de Dedekind, não devemos, contudo, deixar de focar que:

> "Falta-lhe o enunciado firme do que é um número real; e desagrada-nos a junção num mesmo conjunto dos números racionais não com os próprios números irracionais (o que lhe está vedado por falta de definição matemática) mas com os cortes nos números racionais." ([35], p. 4)

O facto de Vicente Gonçalves aparentemente se ter afastado do trabalho de Dedekind e ter apresentado uma definição de número irracional baseada na definição de *secções contíguas*, que segundo Neves Real, possui assinaláveis lacunas, levou a que Neves Real procurasse traduzir por outras palavras a definição de *secções contíguas*, com o objectivo de

> "libertar as definições que nos dá o Professor Vicente Gonçalves de tudo o que me parece menos conforme com esse pensamento. Em primeiro lugar é conveniente chamar *conjunto* ao que o autor chama *colecção*." ([36], p. 12)

Assim sendo, Neves Real define *secções contíguas* como sendo um conjunto ordenado cujos elementos são duas secções, uma inferior, U, e uma superior, V, tais que:

i) são disjuntas;

ii) a sua união, $U \cup V$, é densa no conjunto dos números racionais, isto é, entre quaisquer dois números racionais existem sempre elementos de $U \cup V$.

Podemos destacar duas importantes alterações que Neves Real introduziu na definição de *secções contíguas*, comparativamente com a apresentada por Vicente Gonçalves.

Em primeiro lugar, a substituição da palavra *colecção* pela palavra *conjunto* é, segundo Neves Real, deveras importante na medida em que:

> "(...) não se compreende o cuidado que põe o autor em manter-nos afastados do uso habitual em matemática da palavra «conjunto» até à página 34 das suas lições, altura em que num parágrafo (!), subordinado ao capítulo *Limite de sucessões*, introduz o *conceito geral de conjunto*, conceito que lhe será necessário não apenas na teoria dos limites, mas em toda a obra, inclusivé antes de nela o ter caracterizado, como, por exemplo, nos passos a que nos estamos a referir." ([36], p. 12)

Acrescenta que, o uso por parte de Vicente Gonçalves da palavra *conjunto* foi empregue numa outra situação em que, lamentavelmente, o contexto não o permitia. Citando-o:

> "(...) que usasse essa palavra numa frase que briga com a maneira de dizer corrente nos modernos livros de matemática: *as secções contíguas devem englobar,* **em seu conjunto,** *todos os números racionais, com uma só excepção possível* - quando pertendia dizer que na união das duas secções constitutivas de um *par* estão, como elementos, todos os números racionais com uma só excepção possível!!" ([36], p. 12)

Outro dos aspectos distintos em ambas as definições, prende-se com a enunciação da condição *ii)*, de Neves Real, correspondente à β', de Vicente Gonçalves.

Segundo Neves Real a sua condição, apesar de equivalente, apresenta particular vantagem, uma vez que a de Vicente Gonçalves "confere desnecessàriamente à noção de *par de secções contíguas* um caracter híbrido: combinações típicas da caracterização ordinal com outras - métricas - de natureza topológica: a condição exprime, de facto, que no espaço R, metrizado com o valor absoluto da diferença de dois números racionais, tem de ser nula a distância das duas secções contíguas." ([36], p. 12)

Apesar das críticas levantadas, relativamente ao conceito de *secções contíguas*, Neves Real afirma que:

> "Parece-nos importante salientar que o par de secções contíguas quando aproximado de corte apresenta, do ponto de vista da teoria ordinal, a real vantagem de serem equivalentes (correspondência biúnivoca) o conjunto R e o conjunto de todos os pares (U/V), cujos elementos, U e V, não são complementares, enquanto que a cada número racional correspondem dois cortes de Dedekind." ([36], p. 12)

Contudo, Neves Real acrescenta que quando analisamos a condição $ii)$ na definição de *secções contíguas* de Vicente Gonçalves, o que está subjacente é a noção de *encaixe* e no contexto do cálculo infinitesimal seria preferível o próprio *encaixe* para a definição de número irracional, pois esta se faria então à custa de sucessões de números racionais.

Assim, segundo Neves Real, uma definição de número real baseada na definição de *secções contíguas* teria de ser estabelecida do seguinte modo:

> "«um número real é um par de secções contíguas de números racionais; se as secções são complementares, o número diz-se real irracional, se o não são o número diz-se real racional.»." ([36], p. 12)

No entanto Neves Real considera que, apesar de Vicente Gonçalves andar próximo desta definição, afastou-se da mesma, preferindo estabelecer considerações sobre *dízimas* e *valores de separação.*

Com efeito, outro dos aspectos criticados por Neves Real foi a consideração, por parte de Vicente Gonçalves, das *dízimas infinitas,* que aparecem na sua obra sem serem relacionadas com qualquer questão matemática anteriormente tratada, demonstrando que Vicente Gonçalves:

> "(...) não teve a preocupação de aproximar o par de secções contíguas de qualquer problema concreto, que de qualquer modo preparasse os leitores, os seus alunos, para o aceitarem, como sua solução." ([36], p. 13)

Na secção seguinte veremos como é que Vicente Gonçalves tratou as *dízimas*, relacionando-as com os números racionais e com os números irracionais e analisaremos, igualmente, as críticas levantadas por Neves Real, relativamente a este conceito, onde observamos novamente o caracter *formalista* de Neves Real, em oposição à visão *genética* de Vicente Gonçalves.

4.2.2 Dízimas Infinitas e Conceito de Número Irracional

Verificamos que da segunda para a terceira edição o desenvolvimento de um número racional enquanto dízima infinita periódica mereceu, por parte do autor, cuidado diferenciado.

Enquanto na segunda edição a explicação desse desenvolvimento é feita a partir de exemplos, na terceira edição aparece-nos a definição formal do que o autor entende por dízima (infinita).

Talvez tal reformulação se deva ao facto do tratamento conferido às dízimas na $2.^a$ edição ter sido fortemente criticado por Neves Real.

Na $2.^a$ edição Vicente Gonçalves afirma que:

> "Como é sabido, todo o número racional admite um desenvolvimento decimal - ou *dízima* - constituido por uma infinidade de algarismos que periòdicamente se repetem de certo ponto em diante". ([19], p. 4)

Neves Real considera que, atendendo ao facto de que este não consiste num assunto tratado a nível do Liceu, deveria ter sido devidamente explicitado, na obra em causa, ou deveriam ter sido fornecidas indicações bibliográficas.

Na $3.^a$ edição, Vicente Gonçalves define dízima como sendo qualquer expressão

$$\eta_0, \eta_1\eta_2\eta_3 \cdots \eta_n \cdots$$

em que η_0 é um número inteiro positivo, nulo ou negativo, e $\eta_1, \eta_2, \eta_3, ..., \eta_n, ...$ valores inteiros entre 0 e 9.

η_0 é denominado a parte inteira, constituída de η_0 unidades, e a outra parte da dízima é denominada de decimal ou mantissa, composta de η_1 décimas, η_2 centésimas, etc..

A dízima diz-se *finita* ou *infinita*, consoante seja finito ou infinito o número de η significativos, isto é, diferentes de zero.

Uma vez mais, não referindo as leis ariméticas do conjunto dos números racionais, bem como a sua própria definição, Vicente Gonçalves afirma que todo o número racional pode ser expresso em termos de uma dízima infinita (periódica), dando os seguintes exemplos (Veja-se [19], e [20], p. 4):

$$\begin{aligned}
\frac{2}{15} &= 0,133...3... = 0,1(3) \\
-\frac{2}{15} &= -1+\frac{13}{13} = \overline{1},866...6... = \overline{1},8(6) \\
\frac{25}{11} &= 2+\frac{3}{11} = 2,2727...27... = 2,(27) \\
-\frac{11}{25} &= -1+\frac{14}{25} = \overline{1},56 = \overline{1},559...9... = \overline{1},55(9).
\end{aligned}$$

Se considerarmos

$$H) \quad \eta_0, \eta_1\eta_2\eta_3...\eta_n...$$

e

$$L) \quad \lambda_0, \lambda_1\lambda_2\lambda_3...\lambda_n...$$

duas dízimas distintas, e $\eta_m - \lambda_m$ a primeira das diferenças $\eta_0 - \lambda_0, \eta_1 - \lambda_1, ...$, distinta de zero, então consoante tenhamos $\eta_m < \lambda_m$ ou $\eta_m > \lambda_m$, diremos que $H)$ é *anterior* a $L)$ ou que $H)$ é *posterior* a $L)$.

Consequentemente, Vicente Gonçalves enuncia a seguinte proposição:

> "I. Se $H)$ e $L)$ representam números racionais, h e l respectivamente, e é $h < l$, então $H)$ é anterior a $L)$." ([20], p. 4)

Verificamos que o termo *é anterior*, na proposição acabada de enunciar, aparece em substituição da palavra *precede* na mesma proposição da segunda edição, o que consideramos mais correcto, uma vez que está de acordo com a definição dada pelo autor para as dízimas.

A introdução da noção de número irracional faz-se de uma forma muito subtil, recorrendo a duas *secções contíguas*, A_1, A_2, e à dízima que separa as dízimas dos a_1 das dízimas dos a_2.

A dízima de separação é construída da seguinte forma ([19], pp. 5 - 8 e [20], pp. 4 - 6).

Tomando A_1 e A_2 duas *secções contíguas*, p um inteiro de A_1 e q um inteiro de A_2, temos que, não fazendo q parte de A_1, algum dos números

$$p, p+1, p+2, ..., q-1$$

será o maior a_1 inteiro.

Consideremos $x_0 = \alpha_0$.

Por se não achar $\alpha_0 + 1$ em A_1, algum dos números

$$\alpha_0, 0 \quad \alpha_0, 1 \quad \alpha_0, 2 \quad ... \quad \alpha_0, 9$$

será o maior a_1 composto de parte inteira e décimas.

Consideremos $x_1 = \alpha_0, \alpha_1$. Do mesmo modo, um determinado $x_3 = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2$ será o maior a_1 composto de unidades, décimas e centésimas, e assim sucessivamente.

Tomando um destes números, $x_h = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2...\alpha_h$, poderemos tomar em A_1 algum $a_1' > x_h$, uma vez que, sendo A_1 a secção inferior, não possui máximo.

Consideremos, então

$$a_1' = \alpha_0', \alpha_1'...\alpha_k'... > x_h = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2...\alpha_h$$

e seja α_k' o primeiro dos valores $\alpha_{h+1}', \alpha_{h+2}', ...$, que não se reduz a zero.

Da desigualdade acima descrita, referente a a_1' e x_h, e da definição de x_h, vem que

$$\alpha_0' = \alpha_0, \quad \alpha_1' = \alpha_1, \quad ... \quad \alpha_h' = \alpha_h,$$

logo, por definição de x_k, temos

$$x_k \geq \alpha_0, \alpha_1\alpha_2...\alpha_h\alpha_k' > x_h.$$

Algum dos valores α_{h+1}, α_{h+2}, ... , é significativo, por maior que seja h.

Formemos então a dízima infinita

$$A) \quad \alpha_0, \alpha_1\alpha_2...\alpha_n...$$

e seja

$$R) \quad \rho_0, \rho_1\rho_2...\rho_n...$$

outra dízima infinita, representativa de algum número racional r.

Como as dízimas $A)$ e $R)$ são distintas, temos, por exemplo:

$$\rho_0 = \alpha_0, \quad \rho_1 = \alpha_1, \quad ... \quad \rho_{m-1} = \alpha_{m-1}, \quad \rho_m \neq \alpha_m$$

logo

$$r = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2...\alpha_{m-1}\rho_m...\rho_n... \; .$$

Se considerarmos $\rho_m < \alpha_m$ então

$$r \leq \alpha_0, \alpha_1\alpha_2...\alpha_{m-1}\alpha_m = x_m$$

e r (como x_m) pertence a A_1, atendendo à definição de secção inferior.

Por outro lado, se $\rho_m > \alpha_m$ temos

$$r > \alpha_0, \alpha_1\alpha_2...\alpha_{m-1}\rho_m > x_m$$

e, pelo valor médio (de m decimais e superior a x_m) estar fora de A_1, necessariamente temos $r \in A_2$.

Concluímos, assim, que r é um a_1 se $R)$ é *anterior* a $A)$ e é um a_2 se $R)$ é *posterior* a $A)$.

Concluímos, igualmente, que nenhum a_1 ou a_2 se desenvolve pela própria dízima $A)$, aliás, se tal acontecesse, deveriam os a_1 superiores desenvolver-se segundo dízimas posteriores, e tal não é possível.

Chegamos então ao importante resultado:

> "II. Número racional com dízima infinita(1) anterior a $A)$ é a_1, e todo a_1 têm dízima anterior a $A)$; número racional com dízima infinita posterior a $A)$ é a_2, e todo a_2 têm dízima posterior a $A)$." ([19], II., III. e V., pp. 6 - 8, e [20], p. 6)

Esta dízima $A)$ representa então o valor de separação das dízimas dos a_1 em relação às dízimas dos a_2.

Vicente Gonçalves explicita que na contiguidade de segunda espécie existe um certo número racional que fica de fora das secções, que esse é justamente o valor de separação e $A)$ corresponde à sua dízima infinita periódica.

Na segunda edição este resultado aparece-nos na conclusão:

> "VI. Se algum número racional existe fora de A_1 e de A_2, êsse número separa os elementos a_1 dos elementos a_2 e a sua dízima infinita é precisamente a dízima (A), então necessàriamente periódica." ([19], p. 8)

Verificamos, então que Vicente Gonçalves estipula que sendo a dízima (A) periódica corresponderá à representação decimal de um certo número racional e esse número, que não pertence a A_1 nem a A_2, excede todos os elementos a_1 de A_1 e é excedido por todos os elementos a_2 de A_2.

Assim, com base nesta asserção, o autor afirma que:

> "(...) a separação das dízimas reflete assim uma separação de valores." ([19], p. 8)

Segundo Neves Real não é claro o que Vicente Gonçalves entende pelo termo *valores*, podendo ser uma outra expressão para números racionais ou, inclusivamente, traduzir "qualquer enquandramento filosófico da teoria dos números." ([36], p. 14)

Neves Real evidencia, nesta passagem do seu artigo, um preciosismo de linguagem que talvez, em nosso entender, não fosse significativo para o entendimento da teoria apresentada por Vicente Gonçalves.

Atendendo à exposição anteriormente feita, parece-nos claro que a separação de valores produzida pela separação das dízimas, a que Vicente Gonçalves se refere, é claramente uma separação do conjunto dos números racionais.

O conceito de número irracional surge-nos associado à dízima de separação $A)$, quando a contiguidade é de primeira espécie, isto é,

> "(...) na contiguidade de primeira espécie, como todos os números se repartem pelas secções, $A)$ apresenta-se-nos como expressão(3) de um valor a não racional - de um *número irracional*(4) - superior a todos os a_1 e inferior a todos os a_2." ([20], p. 6)

A nota de rodapé (3) remete-nos para a informação de que a expressão a do número irracional, consiste numa dízima aperiódica, por exemplo, $0,10100100010000....$

Na segunda edição notamos que Vicente Gonçalves define o número irracional como se tratando de um *conceito de quantidade*, mas tal não acontece, explicitamente, na terceira edição, talvez atendendo às críticas levantadas por Neves Real. Com efeito,

> "Número irracional é o conceito de quantidade que decompõe em duas secções contíguas a **totalidade** dos números racionais. Cada número irracional excede todos os elementos da respectiva secção inferior e é excedido por todos os da secção superior." ([19], p. 8)

Esta interpretação dada por Vicente Gonçalves ao conceito de número irracional, identificando-o como um *conceito de quantidade*, mereceu-lhe severas críticas por parte de Neves Real.

Segundo Neves Real, o *conceito de quantidade* presente na definição de número irracional relega-nos para a noção metafísica, que em nenhum momento foi explicitada por Vicente Gonçalves.

Contudo, não foi esta a única incongruência presente nesta definição que foi apontada por Neves Real. O facto de Vicente Gonçalves afirmar que *é o número irracional que decompõe em duas secções contíguas a totalidade dos números racionais* entra em contradição com o facto de termos partido das *secções contíguas complementares* à procura da sua definição.

Com efeito, em nosso entender, parece que detectamos a mesma ambiguidade encontrada na definição de *corte* de Dedekind:

> *Foi o corte que originou o número irracional ou, inversamente, foi o número irracional que produziu o corte?*

Outro aspecto que Neves Real realça é o facto de na apresentação da ordenação dos números irracionais, avançada por Vicente Gonçalves, acima transcrita, o autor ter utilizado, inconvenientemente, os termos *excede* e *é excedido*.

Segundo Neves Real:

> "Tenho dúvidas sôbre o bom gosto literário de tal redacção, mas tenho a certeza dos seus incovenientes do ponto de vista didático; matemàticamente é imprópria." ([36], p. 15)

Como já referimos anteriormente, o conceito de dízima foi igualmente criticado por Neves Real e como acabamos de verificar o conceito de número irracional, segundo Vicente Gonçalves, está relacionado com a dízima A) que, neste caso, é infinita não periódica.

Ora, atendendo ao facto de que na segunda edição o autor não define o conceito de dízima, Neves Real considera que poderão existir ambiguidades se os alunos, a que se destina a obra, procurarem uma definição no *Compêndio de Aritmética* de Vicente Gonçalves.

Com efeito, nessa obra apenas se encontram referências ao estudo das dízimas periódicas, que aparecem relacionadas com os números racionais, sujeitando-os ao algoritmo de base 10.

Não terá então qualquer sentido falar, no *Curso de Álgebra Superior*, "de dízima não representativa de um número racional, nem falar de dízimas sem ser como o resultado do desenvolvimento dos números racionais". ([36], p. 13)

Efectivamente Vicente Gonçalves associa à sucessão $x_n = \{\alpha_0, \alpha_1\alpha_2...\alpha_n\}$ a dízima $\alpha_0, \alpha_1\alpha_2...\alpha_n...$ sem facultar qualquer tipo de explicações sobre a sua existência.

Além disso, Neves Real consideraria mais interessante o estudo da existência ou não de limite da sucessão x_n, anteriormente definida, devendo essa ser a questão fundamental que interessaria esclarecer.

Por outro lado, considerando que o caminho adoptado por Vicente Gonçalves foi o das dízimas infinitas, e adoptando para sua definição aquela que se encontra no *Compêndio de Aritmética*, isto é:

> "Dízima infinita é a figura em que pela imaginação dispomos em ordem determinada uma infinidade de algarismos, precedidos de um número inteiro e dele separados por uma vírgula." ([36], p. 13)

Neves Real considera fácil estabelecer um isomorfismo entre o conjunto de todas as dízimas e o conjunto de todos os pares de *secções contíguas*.

Se este isomorfismo tivesse sido estabelecido então estaria justificada a definição de número real como um par de *secções contíguas* de números racionais.

Após ter introduzido a noção de número irracional, Vicente Gonçalves afirma que o valor de separação das duas *secções contíguas*, a dízima A), é determinado por qualquer uma das secções, uma vez que em vez de ser deduzido a partir de A_1, como foi feito, poderia ser deduzido através de A_2.

Encontramos novamente aqui uma analogia [não confessada] com a concepção de *corte* proposta por Dedekind.

Concretamente, Dedekind afirmou que:

> "Obviamente um corte (A_1, A_2) está completamente definido quando uma das duas classes, por exemplo, a primeira A_1 é conhecida, pois a segunda classe A_2 consiste em todos os números racionais que não estão contidos em A_1". ([10], p. 15)

Vicente Gonçalves define números reais como sendo os números obtidos quando se juntam os números racionais e os números irracionais, acima definidos.

Duas *secções contíguas* determinam então sempre um número real e, inversamente, todo o número real, racional ou irracional, separa duas *secções contíguas*.

O valor de separação das duas *secções contíguas* é designado por a e representa o *menor* número superior a todos os a_1 ou *fecho da secção* A_1, e o *maior* número inferior a todos os a_2 ou *fecho da secção* A_2.

Na segunda edição Vicente Gonçalves reforça a ideia da natureza do valor de separação estar relacionada com o tipo de contiguidade das secções, isto é;

> "Se as secções são *complementares*, quere dizer, se uma delas contém todos os números racionais que faltam na outra, a é número irracional; de contrário, racional." ([19], p. 9)

As secções complementares acima descritas, referem-se, indubitavelmente, à contiguidade de primeira espécie, pois uma das secções contém todos os números racionais que faltam à outra e, neste caso, o número a de separação é irracional. Caso contrário, na contiguidade de segunda espécie, o número a é racional.

Todas estas considerações, acerca da definição de número real, mereceram algumas observações por parte de Neves Real. Neves Real considera que Vicente Gonçalves comporta-se, ao longo da sua exposição, de maneiras distintas em relação aos números irracionais. Com efeito, Neves Real afirma que:

> "(i) como analista e investigador, considera-o uma dízima infinita não periódica; (ii) como autor do «Curso de Algebra Superior», um par de secções contíguas e complementares de números racionais, e (iii) como elemento de

> destaque do Mundo Culto da nossa terra, *um conceito de quantidade, que separa, etc. ...* Não conseguiu o Professor Vicente Gonçalves na obra que estamos comentando, fazer a necessária coordenação das três concepções." ([36], p. 15)

Apesar de Vicente Gonçalves ter *evitado* a questão da continuidade, julgamos ser bem evidente a conexão existente entre as dízimas e os pares de *secções contíguas*, ao longo da sua exposição. Contudo, consideramos que a noção de *quantidade* seria perfeitamente dispensável.

Outro dos aspectos relacionados com a definição de número real, focado por Neves Real, foi a utilização inadequada da expressão *fecho de uma secção*, quando deveria ter focado *fecho de um conjunto.*

Com efeito, Vicente Gonçalves, afirma:

> "Num caso como noutro, o número real a é como que o fecho comum de A_1 e A_2: introduzido em A_1, ficaria sendo o maior elemento; em A_2, o menor." ([19], p. 9)

Neves Real considera inadmissível numa definição dizer-se «como que» mas, mais grave do que isso, é o facto de Vicente Gonçalves "*introduzir* um número numa secção, que é um conjunto de elementos de que o tal número não faz parte". ([36], p. 16)

Neves Real acrescenta ainda que:

> "O Professor Vicente Gonçalves, inexorável examinador que é, não admitiria nunca a um aluno seu uma sombra do atrevimento de linguagem que neste passo a si mesmo permitiu." ([36], p. 16)

Para minimizar tal situação Vicente Gonçalves deveria, em vez de ter considerado o número real como que o *fecho comum* de A_1 e A_2, tomado-o como o supremo de A_1 e o ínfimo de A_2 ou como o limite comum desses dois conjuntos.

Consideramos que Vicente Gonçalves poderia realmente ter utilizado esta terminologia, abrindo assim caminho para a prova da completude do conjunto dos números reais, que quanto a nós deveria ter sido tomada em conta nesta exposição.

4.2.3 Relações de Grandeza. Simetria e Inversão

Vicente Gonçalves inicia esta secção indicando que um número real se supõe dado pelas secções que *lhe* são contíguas.

Segundo Neves Real uma exposição desta natureza cairá forçosamente num ciclo vicioso, uma vez que no penúltimo parágrafo da secção anterior, Vicente Gonçalves afirma:

> "Graças ao conceito de número irracional, a cada sistema de secções contíguas A_1 e A_2 fica correspondendo em todos os casos um número de separação, que designaremos por a." ([19], p. 9)

Ora, se um número real é dado pelas secções que *lhe* são contíguas, o autor está forçosamente a considerar a existência prévia desse número. Por outro lado, ao assumir que sempre que tenha um par de *secções contíguas há* um número real que lhe corresponde, está a assumir que o número real e o par de *secções contíguas* ficam assim identificados.

Contudo, se designarmos o número real por uma determinada dízima, isto é, se estipularmos que o número real a que nos referimos é aquele que certa dízima representa, iremos com certeza chegar à conclusão que o algoritmo que nos permite encontrar essa mesma dízima não parte do *conceito de quantidade* mas sim das próprias *secções contíguas.*

Assim, segundo Neves Real, fecha-se de novo o ciclo, tornando esta exposição ambígua.

Apesar destas críticas, relativamente à utilização das dízimas, a verdade é que Vicente Gonçalves não reformulou, da 2.^{a} para a 3.^{a} edição, a construção da dízima que representa o valor de separação das *secções contíguas* e, consequentemente, o número real.

Voltando à análise da secção relativa às relações de grandeza, verificamos que Vicente Gonçalves procurou caracterizar os números irracionais, particularmente no que diz respeito à ordenação, existência de elemento simétrico, existência de elemento inverso e apresentando a definição de valor absoluto.

Assim, tomando a e b números reais, definidos pelas *secções contíguas* A_1 e A_2 e B_1 e B_2, respectivamente, apresenta-nos os seguintes resultados.

Quando a é irracional, todo o número racional lhe é inferior ou superior, isto é,

$$a_1 < a < a_2$$

e, consoante seja $a > 0$ ou $a < 0$ então a é positivo ou negativo.

No que diz respeito à igualdade de números irracionais, Vicente Gonçalves estabelece que os números irracionais a e b são iguais quando ordenadamente coincidem as respectivas secções: A_1 com B_1 e A_2 com B_2, sendo que uma coincidência arrasta a outra.

Este facto traduz-se escrevendo $a = b$ ou $b = a$, não se verificando a condição $a \neq b$ ou $b \neq a$.

Apenas na segunda edição Vicente Gonçalves esclareceu que um número racional não pode ser igual a um número irracional, uma vez que A_1 e A_2 são complementares, quando a é irracional e não são complementares quando a é racional.

A relação de ordem entre números irracionais é estabelecida como se segue.

Diz-se que o número irracional a é inferior ao número irracional b (ou b superior a a) quando algum número racional excede a e é inferior a b e escreve-se $a < b$ ou $b > a$.

Atendendo ao facto de que a análise da irracionalidade de a e b é independente, podemos concluir que:

> "I. De dois números reais distintos, sempre um excede o outro, e entre os dois há ínfinitos números racionais." ([20], p. 7 e [19], I. e II., pp. 9 - 10)

A demonstração deste resultado é unicamente feita na segunda edição ([19], p. 10) levando a outros dois resultados, sendo um deles um caso particular do outro.

> "III. Quando $a < b$, algum b_1 excede algum a_2.
>
> A recíproca é imediata. (...)
>
> IV. Com $a_2 > 0$, é $a \geqslant 0$." ([19], p. 10)

Na terceira edição o resultado é apresentado de forma distinta:

> "Se algum número real $a' < a$ excedesse todos os a_1, nenhum número racional entre a' e a teria cabimento nas secções. Logo,
>
> II. a é o menor número superior a todos os a_1, e (analogamente) o maior dos excedidos por todos os a_2." ([20], pp. 7 - 8)

O simétrico de um número racional ou irracional a consiste no fecho c da secção constituída pelos simétricos dos números racionais inferiores a a, isto é, dado um número racional ou irracional a, os valores $c_1 = -a_2$ e $c_2 = -a_1$ formam, respectivamente, uma secção inferior e uma superior.

Pela igualdade $c_2 - c_1 = a_2 - a_1$, podemos concluir que as secções formadas por c_1 e c_2 são contíguas.

O número c que as separa é, por definição, o *número simétrico* de a quando a é irracional, sendo designado por $-a$. Assim,

$$a_1 < a < a_2 \text{ e } -a_2 < -a < -a_1.$$

Sendo a um número racional, atendendo a esta definição, o número $-a$ separa também os $-a_2$ dos $-a_1$.

Temos igualmente que $a < b$ implica $-a > -b$, uma vez que se $b > a$ então qualquer número racional intermédio é ao mesmo tempo número a_2 e número b_1, e de $-a_2 = -b_1$ sai que $-a > -b$.

O autor acrescenta ainda que se $b > 0$ então $-b < 0$.

O número c, simétrico de a, por separar os c_1 dos c_2, atendendo à sua definição, faz com que $-c_2 = a_1$ e $-c_1 = a_2$, e acaba por se *confundir* com a e podemos assim escrever

$$-(-a) = a.$$

Sendo o número a irracional, evidentemente também o é $-a$, pois o simétrico de um número racional é igualmente um número racional.

Após definir o conceito de número simétrico, Vicente Gonçalves avança com a definição de valor absoluto, nos seguintes termos:

> "O conceito de *valor absoluto* reaparece aqui exactamente como no campo racional: para número positivo, o próprio número; para número negativo, o número simétrico. O valor absoluto de a representa-se por $|a|$." ([20],p. 8 e veja-se [19], p. 11)

O número *inverso* ou *recíproco* de um número irracional a, designado por $\frac{1}{a}$, é o fecho da secção dos inversos dos números racionais entre 0 e a, isto é, é o número que separa os inversos dos números racionais inferiores dos inversos dos números racionais superiores, *uns e outros com o sinal de a.*

Assim, supondo $a > 0$, temos

$$a_1 < a < a_2 \text{ e } \frac{1}{a_2} < \frac{1}{a} < \frac{1}{a_1}.$$

A hipótese $a > 0$ aparece com o intuito de provar que a inversão dos números racionais produz, de facto, uma secção.

Sendo a racional, o número $\frac{1}{a}$ separa também os valores $\frac{1}{a_1}$ e $\frac{1}{a_2}$, de sinal idêntico.

O autor acrescenta ainda que $a < b$ implica $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$, com $a > 0$, pois se $b > 0$ então qualquer número racional intermédio é ao mesmo tempo número b_1 e número a_2, e assim pode ter-se $b_1 > a_2$.

Com $a > 0$, vem então $\frac{1}{b_1} < \frac{1}{a_2}$, logo, $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$, ou seja, $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

4.2.4 Medida de Segmentos. Números e Pontos

Nesta secção Vicente Gonçalves estabelece, à custa do postulado de Cantor-Dedekind (Veja-se [19], p. 15 e [20], p. 10), a correspondência existente entre o conjunto dos números racionais e os pontos de uma recta.

Segundo Neves Real, ao longo de toda a exposição anteriormente apresentada por Vicente Gonçalves, relacionada com os números racionais e reais, foi sempre a intuição geométrica que esteve subjacente. No entanto, estranha que:

> "(...) nunca a ela se referisse no propósito de tornar admissíveis as definições adoptadas." ([35], p. 16)

Consideramos, tal como Neves Real, que talvez tivesse sido produtivo, desde o início da exposição, o estabelecimento desta relação entre a recta contínua e o conjunto ordenado das dízimas.

Apenas nesta secção Vicente Gonçalves justifica a existência dos números irracionais, na medida em que:

> "Cada número real e positivo a é medida de um segmento OA de Ox." ([19], p. 14)

Para estabelecer este resultado Vicente Gonçalves procurou primeiramente estabelecer a correspondência entre o conjunto dos números naturais e os pontos da recta, obtidos à custa de uma determinada unidade de medida U^1.

Considerando $x'x$ uma recta e um ponto fixo O, considerado a origem e que irá corrsponder ao número 0, atribui-se à recta um sentido positivo, digamos de x' para x.

Marcando sobre Ox segmentos de recta

$$\left[OP_1^1\right], \left[OP_2^1\right], ..., \left[OP_n^1\right], ...$$

de forma que

$$\overline{OP_1^1} = U^1; \quad \overline{OP_2^1} = 2U^1, \quad ... \quad , \quad \overline{OP_n^1} = nU^1 \ , ...$$

obtemos uma correspondência entre os inteiros 1, 2, ... , n, ... e os pontos da recta P_1^1, P_2^1, ... , P_n^1, ...

Se tomarmos agora como nova unidade de medida U^q, correspondente a uma parte alíquota $\frac{1}{q}$ de U^1, com $q = 1, 2, 3, ...$, marquemos novos segmentos de recta, tais que

$$\overline{OP_1^q} = U^q; \quad \overline{OP_2^q} = 2U^q, \quad ... \quad , \quad \overline{OP_n^q} = nU^q \ , ... \ .$$

Cada número racional $\frac{p}{q}$, com $p > 0$ e $q \geq 1$, fica assim em correspondência biunívoca com um ponto P_v^q, precisamente o extremo final do $\left[OP_p^q\right]$, de medida igual a $\frac{p}{q}U^1$.

$\left[OP_p^q\right]$ corresponde a um dos segmentos comensuráveis $[OM]$ com esta unidade.

Sendo um segmento $[OA]$ incomensurável com U^1, nenhum $[OM]$ coincide com $[OA]$, pois $[OM]$ é parte de $[OA]$ ou vice-versa.

Todo o número racional positivo é, assim, correspondentemente um a_1, medida de um $[OM_1]$, ou um $a_2 = \overline{OM_2}$.

Obviamente os a_2 formam uma secção superior e os a_1, com zero e os números racionais negativos, uma secção inferior e como $a_1 < a_2$ temos duas secções complementares, então certo número irracional a separa as medidas dos $[OM]$ contidos em $[OA]$, das medidas dos $[OM]$ em que $[OA]$ se contém.

Concluímos, então, que $a = \overline{OA}$, em relação a U^1.

Inversamente, todo o número irracional $a > 0$ é medida de um $[OA]$, facto esse provado recorrendo ao postulado de Cantor-Dedekind que estipula que um único ponto irá fazer a separação da recta em duas secções de forma que todo o M_1 é anterior a todo o M_2.

A correspondência biunívoca entre o conjunto dos números reais e os pontos da recta é então assumida, da seguinte forma:

> "Associando o número 0 à origem O, o número $\mu > 0$ ao ponto N que em Ox faz $\overline{ON} = \mu$ e o número $-\mu$ ao ponto simétrico de N em relação a O, estabelece-se uma *correspondência biunívoca* (ou de 1 para 1) entre os números reais e os pontos da recta $x'Ox$: cada número fica com sua *imagem* pontual, cada ponto com seu *afixo* numérico." ([20], p. 11)

Segundo Neves Real seria indispensável "fazer notar que, se pela escolha de uma origem e de uma unidade, destacarmos na recta um subconjunto com o tipo de ordenação do conjunto dos números racionais, todo par de secções contíguas neste subconjunto da recta corresponde biunivocamente a um par de secções contíguas na própria recta." ([36], p. 17)

Acrescenta ainda que, atendendo ao facto que Vicente Gonçalves não evidenciou esta propriedade nem enunciou o supra citado postulado de Dedekind, certamente surgirão legítimas dúvidas aos seus leitores.

Partilhamos da opinião de Neves Real na medida em que se Vicente Gonçalves tivesse explicitado a definição de *corte* de Dedekind, bem como o seu postulado, com certeza estaria caracterizada a continuidade da recta e, traduzindo os *cortes* numa linguagem numérica, estaria revelada a descontinuidade de conjunto dos números racionais.

4.2.5 Operações com números irracionais

Após definir o conceito de número irracional que, como vimos, assenta na definição de *secções contíguas* e no valor de separação das mesmas e que está relacionado com as dízimas infinitas não periódicas, Vicente Gonçalves procurou estabelecer as leis por que tais números se regem, quando se combinam entre si ou com números racionais.

Adição de números irracionais

Relativamente à adição de números irracionais, uma vez que estabelece como conhecida a adição de números racionais, Vicente Gonçalves define-a, na 2.^{a} edição, como sendo o *fecho* c da secção constituída pelas somas $a_2 + b_2$ dos números racionais, respectivamente superiores a a e b.

O número c tem assim a representação de $a + b$, isto é, $c = a + b$.

Verificamos que a definição de adição proposta por Vicente Gonçalves, assemelha-se à definição proposta por Richard Dedekind uma vez que para operar com dois *cortes*, Dedekind estabelece que basta-nos considerar as classes inferiores ou superiores, respectivamente.

Na 3.^{a} edição, esta mesma operação é definida de forma idêntica, embora já não seja utilizado o termo *fecho* de uma secção.

Com efeito constatamos que este termo foi utilizado, em ambas as edições, na definição de número irracional, contudo, da 2.^{a} para a 3.^{a} edição, Vicente Gonçalves já não o refere na definição das operações aritméticas nem na demonstração de resultados relacionados com as mesmas.

As provas de que as *somas inferiores* $s_1 = a_1 + b_1$ formam uma secção inferior e de que as *somas superiores* $s_2 = a_2 + b_2$ formam uma secção superior são deixadas como exercício. (Veja-se Exercício 4.2.5)

Em ambas as edições é estabelecida a seguinte relação:

$$\text{Se } a_1 < a < a_2 \text{ e } b_1 < b < b_2 \text{ então } a_1 + b_1 < a + b < a_2 + b_2.$$

Segundo Vicente Gonçalves, atendendo ao facto de que quando a e b são conjuntamente racionais, por simples adição das relações $a_1 < a < a_2$ e $b_1 < b < b_2$, se obtém $a_1 + b_1 < a+b < a_2+b_2$, esta constitui uma "notável justificação da propriedade da definição de soma de números não conjuntamente racionais" ([19], p. 17), o que "confirma a propriedade da precedente definição de soma de números não conjuntamente racionais." ([20], p. 12)

Destacamos que apenas na 3.^{a} edição Vicente Gonçalves referiu que a adição é uma *operação unívoca*, isto é, de um só resultado.

Vicente Gonçalves enuncia, como veremos em seguida, algumas propriedades dos números racionais que, segundo ele, têm plena validade no domínio mais amplo dos números reais, atendendo à forma como a adição de números irracionais foi definida.

$\alpha)$ $\quad a + b = b + a$

$\beta)$ $\quad a + 0 = a, \quad a + (-a) = 0$

$\gamma)$ $\quad (a + b) + c = a + (b + c)$

$\delta)$ $\quad a + b = h + k \quad \text{se} \;\; a = h,\, b = k$

A última propriedade apenas é enunciada na 2.^{a} edição. Nessa mesma edição o autor afirma que é fácil verificar que os dois membros de cada uma destas relações dão sempre origem às mesmas secções *homólogas*. Este termo foi substituído, na 3.^{a} edição, por *contíguas*, o que nos parece mais adequado.

Verificamos que com estas propriedades Vicente Gonçalves estabelece as primeiras propriedades de Corpo, isto é, que o conjunto dos números reais constitui um Grupo Comutativo, relativamente à adição.

Contudo, o autor não é muito explícito ao estabelecer a definição de elemento neutro e simétrico, talvez considerando serem evidentes. Julgamos que tal deveria ter sido feito, uma vez que esta obra constitui um livro de texto.

Entre as relações de desigualdade, Vicente Gonçalves destaca, em ambas as edições, a seguinte:

"ε) $a + b > h + k$ se $a = h$ e $b > k$" ([19], p. 18)

que corresponde à:

" I. A soma cresce se cresce uma parcela, ficando fixa a outra:

2) $a + h < a + k$ se $h < k$." ([20], p. 13)

Apresenta-nos, igualmente, a desigualdade triangular, nos seguintes termos, na 2.^{a} edição:

"5) $|a + b| \leqslant |a| + |b|$:

III. O valor absoluto da soma nunca excede a soma dos valores absolutos das parcelas.

A igualdade só prevalece em 5) quando prevaleça em um ou outro dos pares de relações 4): *quando a e b não são de sinais contrários.*

Por repetida aplicação de princípio, vem

$|a + b + c + ... + l| \leqslant |a| + |b| + |c| + ... + |l|$." ([19], pp. 18 - 19)

E na 3.^{a} edição:

"II. O valor absoluto da soma é quando muito igual à soma dos valores absolutos das parcelas:

$$\varepsilon) \qquad |a+b| \overset{=}{<} |a|+|b|$$

$$\varepsilon') \quad |a+b+c+...| \overset{=}{<} |a|+|b|+|c|+.... $$ " ([20], p. 13)

Relativamente à citação referente à 2.^{a} edição, as relações 4) a que o autor se refere são:

$$a \leqslant |a|\,,\ b \leqslant |b| \text{ e } -a \leqslant |a|\,,\ \ -b \leqslant |b|\,,$$

que na 3.^{a} edição expressou pelo facto da igualdade ter lugar unicamente quando todas as parcelas tiverem o mesmo sinal.

Salientamos que algumas provas de determinados teoremas, que na segunda edição eram feitas, foram deixadas como exercício na terceira edição. ([20], p. 13)

Subtracção de números irracionais

Verificamos que, tanto na 2.^{a} como na 3.^{a} edição, a subtracção é definida como operação inversa da adição. Com efeito,

"No domínio dos números reais bem como no campo racional, *diferença* dos números a e b é aquele número d que somado com b (*diminuídor*) produz a (*diminuendo*)." ([20], p. 13 e veja-se [19], p. 19)

Vicente Gonçalves mostra, em ambas as edições, como é que a operação de subtracção é redutível à adição, do seguinte modo:

$$a-b=a+(-b)\,,$$

provando-o com base nas propriedades α), γ) e β), da adição, atrás referidas.

À semelhança do que aconteceu para a adição, unicamente na 3.^{a} edição o autor refere que a subtracção é uma *operação unívoca.*

A apresentação da desigualdade triangular para a subtracção é feita de forma distinta nas duas edições, em análise.

Na segunda edição, a desigualdade apresentada é

$$|a-b| \geqslant |a|-|b|\,,$$

que resulta, segundo o autor, da igualdade

$$a = b + (a - b) .$$

No entanto, na 3.^{a} edição, tal resultado aparece com algumas alterações, sob a forma de um teorema:

"I. O valor absoluto da diferença é pelo menos igual à diferença dos valores absolutos do diminuendo e do diminuidor.

Assim o mostra a relação $|a| \overset{=}{<} |b| + |a - b|$, que se tira de 1).

Enfim, nos termos da igualdade

$$(a + b) - b = a = (a - b) + b\text{". ([20], pp. 13 - 14)}$$

De igual importância é o seguinte teorema, que unicamente encontramos na 3.^{a} edição:

"II. A adição e a subtracção são operações inversas." ([20], p. 14)

Vicente Gonçalves finaliza a secção referente à subtracção de números irracionais propondo o seguinte:

Exercício 4.2.9 *"De que natureza são os números a e b quando só uma das expressões $a + b$ e $a - b$ é racional?" ([20], p. 14)*

Temos constatado, ao longo desta análise às duas edições, segunda e terceira, que na 3.^{a} edição o autor apresenta diversos exercícios que, por um lado, propõem a prova de determinados teoremas que na 2.^{a} edição encontravam-se demonstrados, e por outro, é incentivada a investigação de determinados aspectos que revestem-se de particular interesse na apresentação da definição e aritmética dos números irracionais, como este que acabamos de enunciar.

Na 2.^{a} edição são igualmente propostos alguns destes exercícios e ainda outros distintos, estando todos agrupados no final do capítulo I e que, no nosso entender, constituem uma revisão da teoria exposta ao longo do capítulo, os quais passamos a transcrever: ([19], p. 34)

Exercício 4.2.10 *De que natureza são os números A e B quando $A+B$ e $A-B$ são conjuntamente racionais?*

Exercício 4.2.11 *O resultado de qualquer operação racional* (9) *sobre números do tipo $a+b\sqrt{3}$, $c+d\sqrt{3}$, ... , sendo $a, b, c, d, ...$ números racionais, é ainda um número do mesmo tipo?*

Exercício 4.2.12 *De que tipo são os números A e B quando $A+B$ e AB (mas não $A-B$) são conjuntamente racionais?*

Exercício 4.2.13 *Classes contíguas são duas colecções de números reais $a_1, a_2, a_3, ..., b_1, b_2, b_3, ...$ satisfazendo as condições seguintes:*

α) $a_i < a_{i+1}$ *e* $b_i > b_{i+1}$ $(i = 1, 2, 3, ...)$;

β) $a_i < b_j$ *para todos os valores de i e j;*

γ) *dado ε, há números a_m e b_m tais que $b_m - a_m < \varepsilon$.*

Provar que um número C separa os a_i dos b_j.

Exercício 4.2.14 *Mesmo problema substituindo-se as classes a_i e b_j por colecções* (a) *e* (b) *satisfazendo as condições seguintes:*

α) *Nenhum a excede todos os outros a, nenhum b excede todos os outros b;*

β) *Um a é sempre inferior a qualquer b;*

γ) *Dado ε, há números a e b tais que $b - a < \varepsilon$.*

Multiplicação de números irracionais

O produto de números reais, não negativos nem conjuntamente racionais, é feito de forma similar em ambas as edições.

Na 2.ª edição este produto:

> "(...) é o fecho c da secção dos produtos $c_2 = a_2 b_2$ dos números racionais respectivamente superiores a a e a b. Na qualidade de produto dos números (*factores*) a e b, o número c designa-se especialmente por $a \times b$, $a \cdot b$ ou ab."
> ([19], pp. 19 - 20)

Na 3.ª edição este produto corresponde ao:

> "(...) número p que separa os *produtos inferiores* $p_1 = a_1 b_1$, de factores positivos, dos *produtos superiores* $p_2 = a_2 b_2$.
>
> Na qualidade de produto dos números (*factores*) a e b, o número p é especialmente designado por $a \times b$, $a \cdot b$ ou ab." ([20], p. 14)

A definição completa-se, na 2.^{a} edição, do seguinte modo:

> "I. ab é nulo quando algum factor é nulo." ([19], p. 20)

Finalizando este caso particular, que segundo o autor não assume particular interesse, Vicente Gonçalves estuda os casos em que $a > 0$ e $b > 0$, ficando, lamentavelmente em nosso entender, por estudar o caso em que a e b possuem sinais contrários.

Já na 3.^{a} edição verificamos que, apesar do autor não ter estudado qualquer um dos casos, eles são apresentados de uma forma sucinta, como se segue:

> "A definição completa-se nos termos seguintes:
>
> *Com algum factor nulo,* $ab = 0$;
>
> *Com* a *e* b *negativos,* $ab = |a| \cdot |b|$;
>
> *Com* a *e* b *de sinais contrários,* $ab = -\ |a| \cdot |b|$."([20], p. 14)

Em ambas as edições o autor refere o comportamento do valor absoluto de um produto:

> "O valor absoluto do produto é sempre igual ao produto dos valores absolutos dos factores". ([19], IV, p. 21 e [20], I, p. 15)

À semelhança das propriedades relacionadas com a adição, verificamos que nas da multiplicação existem igualmente diferenças.

Nestas propriedades Vicente Gonçalves estabelece que o conjunto dos números reais, com as operações assim definidas, representa um Corpo.

Com efeito, na 2.^{a} edição as propriedades enunciadas são:

"α) $\quad ab = ba$,

β) $\quad a \cdot 0 = 0, \quad a \cdot 1 = a, \quad a \cdot \frac{1}{a} = 1$,

γ) $\quad ab \cdot c = a \cdot bc$

δ) $a\,(b+c) = ab + ac$

ε) $ab = hk$, se $a = h$, $b = k$,

ζ) $ah > bh$, se $a > b$ e $h > 0$". ([19], p. 22)

Por outro lado, na 3.^{a} edição, encontramos:

"α) $ab = ba$,

β) $a \cdot 1 = a$, $a \cdot \frac{1}{a} = 1$,

γ) $ab \cdot c = a \cdot bc$,

δ) $a\,(b+c) = ab + ac$,

ε) $ah < ak$, se $h < k$ e $a > 0$". ([20], p. 15)

Não percebemos muito bem por que é que na 3.^{a} edição Vicente Gonçalves não faz referência nestas propriedades ao elemento absorvente da multiplicação, propriedade esta que reveste-se de particular importância, apesar de, como vimos anteriormente, a referir quando completa a definição de produto.

O estudo da potenciação é feito nesta secção, o que faz todo o sentido uma vez que:

"A multiplicação de factores iguais continua a chamar-se *potenciação*". ([19], p. 22 e [20], p. 15)

Vicente Gonçalves acrescenta ainda que a potência a^m de *base* a e *expoente* inteiro e positivo $m > 1$ é o produto de m factores iguais a a.

Existem igualmente determinadas convenções que, sendo válidas para os números racionais, ainda se mantêm. São estas:

$$a^1 = a, \qquad a^0 = 1, \qquad a^{-m} = \frac{1}{a^m} \text{ (recíproco de } a^m\text{)}.$$

O autor acrescenta que, tendo por base as propriedades anteriormente enunciadas da multiplicação, é possível deduzir as propriedades que constituem as regras fundamentais do *cálculo de potências*.

Em ambas as edições, apesar de não ser pela mesma ordem, tomando h e k números inteiros, Vicente Gonçalves enuncia:

"φ) $\left(a^h\right)^k = a^{hk}$,

χ) $a^h \cdot a^k = a^{h+k}$,

ψ) $(a \cdot b...)^h = a^h \cdot b^h...$". ([19], p. 23 e veja-se [20], p. 15)

Relativamente à propriedade / regra χ) o autor refere que com $a > 1$ e $k > 0$ é $a^k > 1$ e, consequentemente,

$$a^{h+k} = a^h \cdot a^k > a^h,$$

dando lugar aos seguintes resultados:

"II. A potência de base e expoente positivos cresce com a base." ([20], p. 16)

"A potência de base superior à unidade cresce com o expoente." ([19], IV, p. 23 e [20], III, p. 16)

Finalmente, teríamos,

$$a^{h+k} = a^h \cdot a^k < a^h, \text{ se } 0 < a < 1.$$

Divisão de números irracionais

Em ambas as edições em análise, a divisão de números reais é definida à custa da multiplicação, isto é:

"Exactamente como no campo racional, chama-se *cociente* de a por b $(b \neq 0)$ aquele número c que multiplicado por b (*divisor*) produz a (*dividendo*).

Como cociente de a por b, o número c designa-se especialmente por $a : b$." ([20], p. 16 e veja-se [19], p. 23)

Assim, a divisão reduz-se à multiplicação, na medida em que:

$$a : b = a \times \frac{1}{b}.$$

Após a definição da divisão de números reais, é adoptada a notação $\frac{a}{b}$ para o cociente $a : b$, pois o inverso $\frac{1}{b}$ do número b, corresponde ao cociente de 1 por b.

Consequentemente, adoptada esta notação, podemos escrever:

$$a = b \times \frac{a}{b}.$$

Igualmente, em ambas as edições, apesar de utilizar diferentes notações, o autor apresenta as seguintes igualdades:

$$\frac{0}{b} = 0; \qquad \frac{a}{1} = a \quad \text{e} \quad \frac{h+k}{b} = \frac{h}{b} + \frac{k}{b}.$$

Às propriedades enunciadas na secção anterior, respeitantes à potenciação, Vicente Gonçalves junta a seguinte:

$$\omega) \quad \left(\frac{a}{b}\right)^h = \frac{a^h}{b^h}.$$

À semelhança do que aconteceu com a subtracção, unicamente na 3.^{a} edição Vicente Gonçalves enuncia o seguinte resultado:

"I. A multiplicação e a divisão são operações inversas." ([20], p. 17)

Após ter definido, como analisamos, as operações da adição e da multiplicação e de ter definido as operações de subtracção e divisão como inversas das primeiras, respectivamente, o autor afirma que estas operações são *operações racionais*, isto é, operações que quando aplicadas a números racionais, produzem números racionais.

O autor não tece qualquer tipo de comentário sobre o comportamento das operações quando aplicadas a números reais.

Radiciação

A definição de raiz de um número real b é feita, em ambas as edições, nos seguintes moldes:

Chamа-se raiz (*de índice*) n [inteiro e superior a 1, como de costume] do número real b denotada por $\sqrt[n]{b}$, todo o número c que faz $c^n = b$.

Extrair a raiz n a b é determinar uma tal raiz, sendo b o radicando.

Atendendo à definição de raiz acabada de enunciar, Vicente Gonçalves afirma que:

$$\left(\sqrt[n]{b}\right)^n = b.$$

Em ambas as edições é enunciado e demonstrado o seguinte teorema:

"I. Todo o número $b > 0$ tem uma (e uma só) raiz n positiva" ([20], p. 17)

Salientemos que, unicamente na 3.^{a} edição, aparece a advertência "(e uma só)", isto é, na 2.^{a} edição, aparentemente, Vicente Gonçalves não levantou a questão da unicidade da raíz de um número [real] positivo. Dizemos aparentemente pois na demonstração do teorema o autor refere, evocando que a multiplicação é estritamente crescente, que:

> "Como a^n cresce com a, b não tem outra raíz positiva." ([19], p. 25)

Outro aspecto que merece ser salientado prende-se com a forma com que o autor faz a prova deste teorema.

A demonstração feita na 3.^{a} edição parece-nos indubitavelmente mais completa, na medida em que o autor estuda separadamente os casos em que $b < 1$ e em que $b > 1$. Além disso, a linguagem com que é feita a demonstração, na 3.^{a} edição, parece-nos muito mais clara.

Vicente Gonçalves refere, em ambas as edições, que se o índice da raíz for par, o número real admite além da raiz positiva c, a raíz negativa $-c$.

Parece-nos existir nesta passagem da 2.^{a} edição, uma gralha pois o autor refere:

> "Se m é par, além da raiz positiva c, b admite a raiz negativa $-c$." ([19], p. 25)

Ora, parece-nos que em vez de m deveria constar n, uma vez que, como vimos anteriormente, essa foi a nomenclatura utilizada para indicar o índice da raíz do número real b, aquando da definição da mesma.

São ainda avançadas, em ambas as edições, os seguintes importantes resultados:

- Quando b é negativo não tem raíz de índice par, mas tem uma raíz negativa de índice ímpar: $-\sqrt[n]{|b|}$ (n ímpar);
- Com $b > 1$, $\sqrt[n]{b}$ decresce, quando n cresce;
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[mn]{b}$;
- $\sqrt[n]{b \cdot d ...} = \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{d} ...$;
- $\sqrt[n]{\frac{b}{d}} = \frac{\sqrt[n]{b}}{\sqrt[n]{d}}$;
- $\left(\sqrt[n]{b}\right)^p = \sqrt[n]{b^p}$;

- $\sqrt[n]{b^p} = \sqrt[mn]{b^{mp}}$.

Relativamente às regras dos radicais, supra enunciadas, necessitamos fazer dois reparos. O primeiro prende-se com o facto de Vicente Gonçalves ter explicitado, e muito bem, que no caso de algum dos radicandos ser negativo, ter de ser ímpar o índice da respectiva raíz. O segundo aspecto, que talvez mereça ser focado, é o facto de incompreensivelmente o último resultado acima descrito ter sido enunciado apenas na 2.^{a} edição.

Segundo Vicente Gonçalves as igualdades acima descritas representam as "bases do chamado cálculo de radicais" ([19], p. 26 e [20], p. 19) e justificam-se, exactamente como em Álgebra elementar, conferindo os sinais e, por potenciação, os valores absolutos dos dois membros.

A *potência de expoente fraccionário* $\frac{p}{q}$, com p e q inteiros e $q \geq 2$ é definida do seguinte modo:

$$b^{\frac{p}{q}} = \left(\sqrt[q]{b}\right)^p.$$

Salientando obviamente que q é ímpar se $b < 0$.

Na 3.^{a} edição Vicente Gonçalves prova que se $\frac{p}{q}$ é igual à fracção irredutivel $\frac{m}{n}$, então

$$b^{\frac{p}{q}} = b^{\frac{m}{n}}.$$

Com efeito, se $\frac{p}{q} = \frac{m}{n}$ então existe um inteiro positivo h, tal que $p = hm$ e $q = hn$ e, consequentemente, aplicando as leis para o cálculo de radicais obtemos:

$$b^{\frac{p}{q}} = \left(\sqrt[hn]{b}\right)^{hm} = \left(\left(\sqrt[h]{\sqrt[n]{b}}\right)^h\right)^m = \left(\sqrt[n]{b}\right)^m = b^{\frac{m}{n}}.$$

O autor afirma, em consequência deste resultado, que a potência de expoente fraccionário, $b^{\frac{p}{q}}$, depende do valor do expoente, mas não da sua expressão.

Igualmente, na 2.^{a} edição, este resultado é salientado, contudo a prova apresentada é feita de uma forma distinta, como se segue:

$$b^{\frac{mp}{mq}} = \sqrt[mq]{b^{mp}} \stackrel{(*)}{=} \sqrt[q]{b^p} = b^{\frac{p}{q}}.$$

Verificamos que no passo $(*)$ é aplicada uma regra do cálculo de radicais, que como vimos anteriormente, não foi enunciada na 3.^{a} edição, talvez por isso a prova deste resultado é feita nesta edição de forma diferente.

Tendo por base as propriedades dos radicais e as correspondentes propriedades das potências de expoente inteiro, Vicente Gonçalves enuncia as seguintes relações fundamentais, quando tomados r e s números racionais:

φ) $b^r \cdot b^s = b^{r+s}$;

χ) $(b^r)^s = b^{rs}$;

ψ) $(b \cdot d...)^r = b^r \cdot d^r ...$;

ω) $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$.

Após enunciar estas relações o autor apresenta os dois seguintes teoremas com que finaliza esta secção:

> "A potência de base superior a 1 cresce com o expoente." ([20], p. 20 e veja-se [19], p. 27)
>
> "A cada $\delta > 0$ corresponde um $\varepsilon > 0$ por forma que
>
> 2) $1-\delta < b^r < 1+\delta$ quando $-\varepsilon < r < \varepsilon \quad (b > 0)$." ([20], p. 20 e veja-se [19], p. 27)

Potência de expoente irracional

A potência b^α, sendo b positivo e diferente de 1 e α um número irracional corresponde, na 3.^{a} edição, ao número que separa as potências b^{α_1}, de expoente racional $\alpha_1 < \alpha$, das potências b^{α_2}, de expoente racional $\alpha_2 > \alpha$.

Esta definição, análoga à apresentada na segunda edição, apenas revestida de outra terminologia, é estabelecida para a base positiva e diferente de 1, uma vez que para $b < 0$, b^α não tem significado no campo real.

O autor acrescenta, em ambas as edições, os casos particulares em que a base é um ou é nula. Assim sendo, estabelece em complemento que:

$$1^\alpha = 1, \quad 0^\alpha = 0 \quad (\alpha > 0).$$

Na 2.^{a} edição Vicente Gonçalves afirma que, variando a base da potência entre 0 e 1, esta é definida pela igualdade

$$b^\alpha = \frac{1}{d^\alpha} \text{ sendo } d = \frac{1}{b} > 1.$$

Após estabelecer a definição da potência de expoente irracional o autor apresenta as propriedades gerais das potências que, neste contexto, continuam a ser válidas.

As propriedades apresentadas, que apenas são demonstradas na 2.^{a} edição, são as seguintes:

φ) $\quad b^\alpha \cdot b^\beta = b^{\alpha+\beta}$;

χ) $\quad (b^\alpha)^\beta = b^{\alpha\beta}$;

ψ) $\quad b^\alpha \cdot d^\alpha ... = (b \cdot d...)^\alpha$;

ω) $\quad \frac{a^\alpha}{b^\alpha} = \left(\frac{a}{b}\right)^\alpha$.

A secção referente à potência de expoente irracional é finalizada com a apresentação dos seguintes resultados, que segundo o autor derivam das propriedades atrás enunciadas:

> "I. A potência de expoente positivo cresce com a base." ([20], p. 21)
>
> " I. A potência de base superior a 1 [à unidade] cresce com o expoente." ([19], IV, p. 31 e [20], II, p. 21)
>
> "V. A todo o número δ corresponde um número ε por forma que
>
> 4) $\quad 1-\delta > b^\alpha < 1+\delta$ quando $-\varepsilon < \alpha < \varepsilon$." ([19], p. 31 e veja-se [20], p. 21)

Logaritmos

Na 2.^{a} edição a definição de logaritmo é feita como se segue:

> "Dados dois números *positivos* a e b - o último diferente da unidade, - chama-se *logaritmo de* a *na base* b o número α a que deve elevar-se b para obter a.
>
> Exprime-se que α é logaritmo de a na base b escrevendo $\alpha = \log_b a$."

Esta definição é similar à encontrada na 3.^{a} edição. Contudo, na 3.^{a} edição apenas é exigido que a base do logaritmo seja positiva, não existindo, aquando da definição, qualquer referência ao facto de ser distinta da unidade.

Atendendo à definição de logaritmo, o autor evidencia a equivalência entre as igualdades:

$$a = b^\alpha \quad \text{e} \quad \alpha = \log_b a.$$

Em ambas as edições é enunciado o seguinte teorema:

" I. Em base positiva $b \neq 1$, qualquer número positivo h tem um e um só logaritmo." ([20], p. 22 e veja-se [19], p. 32)

Apenas na 2.^{a} edição Vicente Gonçalves enuncia o seguinte teorema:

" Sendo $b > 1$, é $\log_b a \gtreqless 0$ consoante $a \gtreqless 1$." ([19], p. 32)

O autor acrescenta, ainda na 2.^{a} edição, que sendo $b > 1$ e designando β o logaritmo de a na base $\frac{1}{b}$ então será:

$$a = \left(\frac{1}{b}\right)^{\beta} = \frac{1}{b^{\beta}} = b^{-\beta}$$

e a tem por logaritmo $-\beta$.

Unicamente na 3.^{a} edição Vicente Gonçalves apresenta os seguintes importantes resultados:

$$\log_b 1 = 0 \quad \text{e} \quad \log_b b = 1.$$

Tomando em conta as regras φ), χ) e ω) relativas à potenciação e considerando

$$h = b^{\alpha} \quad \text{e} \quad k = b^{\beta},$$

ou seja,

$$\alpha = \log_b h \quad \text{e} \quad \beta = \log_b k$$

podemos deduzir, omitindo por simplificação a designação da base:

"$hk = b^{\alpha+\beta}$ ou $\log(hk) = \alpha + \beta = \log h + \log k$,

$\frac{h}{k} = b^{\alpha-\beta}$ ou $\log \frac{h}{k} = \alpha - \beta = \log h - \log k$,

$h^{\beta} = b^{\alpha\beta}$ ou $\log h^{\beta} = \beta\alpha = \alpha \log h$."([19], p. 33 e veja-se [20], p. 22)

Tomando γ o logaritmo de a na base d, ou seja, $\gamma = \log_d a$, então é

$$a = b^{\alpha} = d^{\gamma}$$

e consequentemente

$$\alpha = \gamma \log_b d,$$

ou seja,

$$\log_b a = \log_d a \times \log_b d.$$

Assim, em ambas as edições, a secção referente aos logaritmos, termina com o seguinte resultado:

"VI. O logaritmo de a na base b é igual ao produto do logaritmo de a na base d pelo logaritmo de d na base b."([19], p. 33 e veja-se [20], p. 23)

Verificamos que o Capítulo I da 2.^{a} edição termina com a secção dedicada aos logaritmos que acabamos de analisar. No entanto, na terceira edição, encontramos uma outra secção, a qual analisamos seguidamente.

4.2.6 Relações Notáveis

Unicamente na 3.^{a} edição encontramos esta secção, com que Vicente Gonçalves encerra o primeiro capítulo.

Nesta secção encontramos algumas relações gerais que, segundo o autor, são de frequente aplicação.

Procuraremos apresentar em termos gerais cada uma dessas relações, evidenciando os aspectos mais importantes.

Identidade de Abel

Uma identidade de Abel consiste numa identidade qualquer do tipo:

$$\begin{aligned} a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n &= (a_1 - a_2)\, b_1 + (a_2 - a_3)\,(b_1 + b_2) + (a_3 - a_4)\,(b_1 + b_2 + b_3) + ... \\ &\quad + (a_n - 0)\,(b_1 + b_2 + ... + b_n)\,. \end{aligned}$$

Com efeito, os termos com b_i do segundo membro somam:

$$b_i\,(a_i - a_{i+1} + a_{i+1} - ... + a_n) = a_ib_i.$$

Quando os $a_1, a_2, ...$ são números *positivos decrescentes*, isto é, $a_i \geqslant a_{i+1} \geqslant 0$, a substituição das somas dos b_i,

$$b_1, \quad b_1 + b_2, \quad b_1 + b_2 + b_3, \quad b_1 + b_2 + ... + b_n,$$

por números M e N, que as compreendam, resulta na *Desigualdade de Abel*:

$$Ma_1 \leqslant a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n \leqslant Na_1.$$

Se nenhuma das somas excede k em valor absoluto, podemos tomar $N = k$ e $M = -k$, e então:

$$|a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n| \leqslant ka_1.$$

Identidade de Lagrange

Esta identidade consiste na relação:

$$\left(a_1^2+...+a_n^2\right)\left(b_1^2+...+b_n^2\right)-\left(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n\right)^2=\sum\left(a_ib_j-a_jb_i\right)^2.$$

A verificação da validade da igualdade é simples de efectuar, se tomarmos em conta que esta possui três tipos de termos:

$$u=a_i^2b_i^2, v=a_h^2b_k^2 \text{ com } (h\neq k) \text{ e } w=2a_ia_jb_ib_j.$$

Os termos u são comuns ao diminuendo e ao diminuidor do primeiro membro e aí se reduzem.

Os termos v são comuns ao segundo membro e ao diminuendo do primeiro, e assim sucessivamente.

Desigualdade de Cauchy

O segundo membro da *Identidade de Lagrange* só se reduz a zero quando se anulem todos os $\delta_{ij}=a_ib_j-a_jb_i$, hipóteses em que existem valores α e β, não conjuntamente nulos, que verificam as condições:

$$\varphi)\quad \alpha b_i+\beta a_i=0\qquad (i=1,2,...,n).$$

dizendo-se assim que $a_1,a_2,...$ e $b_1,b_2,...$ são *sistemas (de números) proporcionais.*

Com efeito, anulando-se todos os a_i, satisfaz-se $\varphi)$ com, por exemplo, $\alpha=0$ e $\beta=1$ e sendo, por exemplo, $a_2\neq 0$, podemos tomar $\alpha=a_2$ e $\beta=-b_2$ e então:

$$\begin{aligned}-\delta_{12} &= a_2b_1-a_1b_2=\alpha b_1+\beta a_1=0,\\ \delta_{2j} &= a_2b_j-a_jb_2=\alpha b_j+\beta a_j=0\quad (j\geqslant 2).\end{aligned}$$

Inversamente, sendo os sistemas proporcionais e supondo, por exemplo, $\alpha\neq 0$, vem:

$$\alpha\delta_{ij}=\alpha\left(a_ib_j-a_jb_i\right)=a_i\left(\alpha b_j+\beta a_j\right)-a_j\left(\alpha b_i+\beta a_i\right)$$

e todos os δ_{ij} se reduzem a zero.

Então:

Com quaisquer sistemas $a_1, a_2, ...a_n$ e $b_1, b_2, ..., b_n$, temos:

$$\left(\sum ab\right)^2 \leqslant \left(\sum a^2\right)\left(\sum b^2\right)$$

e só ocorre a igualdade com sistemas proporcionais (Cauchy).

Podemos então afirmar que o sistema nulo, só de zeros, é proporcional a qualquer outro.

Média Aritmética e Média Geométrica

Consideremos os números positivos $a_1, a_2, ...a_n$.

Designando por A_n a *Média Aritmética* e por G_n a *Média Geométrica*, dos números $a_1, a_2, ...a_n$, temos:

$$A_n = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + ... + a_n) \quad \text{e} \quad G_n = \sqrt[n]{a_1, a_2, ...a_n}.$$

Se supormos, por comodidade, $a_1 \leqslant a_2 \leqslant ...$, temos:

$$mA_m = a_1 + a_2 + ... + a_m \leqslant ma_m, \text{ ou seja, } A_m \leqslant a_m.$$

Só temos a igualdade se

$$a_1 = a_2 = ... = a_m.$$

Exceptuando este caso particular, temos então:

$$A_{m-1} < a_{m-1} \leqslant a_m.$$

Vicente Gonçalves mostra igualmente que:

"A média geométrica é inferior à média aritmética, salvo se os valores se confundem." ([20], p. 25)

Com efeito, de

$$mA_m = (m-1)A_{m-1} + a_m = m - A_{m-1}$$

decorre

$$\begin{aligned} A_m^m &= \left[A_{m-1} + \frac{1}{m}(a_m - A_{m-1})\right]^m \\ &= A_{m-1}^m + mA_{m-1}^{m-1}\frac{1}{m}(a_m - A_{m-1}) + ... \\ &\geqslant A_{m-1}^{m-1}(A_{m-1} + a_m - A_{m-1}). \end{aligned}$$

Assim,

$$A_m^m \geqslant a_m A_{m-1}^{m-1}$$

e, consequentemente

$$A_n^n \geqslant a_n A_{n-1}^{n-1} \geqslant a_n a_{n-1} A_{n-2}^{n-2} \geqslant ... \geqslant a_n a_{n-1} ... a_1,$$

ou seja,

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} \leqslant \frac{1}{n}\left(a_1 + a_2 + ... + a_n\right).$$

Ainda relacionado com a *Média Aritmética* e com a *Média Geométrica*, Vicente Gonçalves tece alguns comentários quando existem, entre os a_i, p valores iguais a a, q valores iguais a b, etc..

Com efeito, se tal acontecer, temos:

$$a^p b^q ... l^t \leqslant \left(\frac{pa + qb + ... + tl}{p + q + ... + t}\right)^n \qquad (n = p + q + ... + t)$$

ou, tomando

$$\frac{p}{n} = \alpha, \frac{q}{n} = \beta, ...,$$

$$\psi) \qquad a^\alpha b^\beta ... l^\lambda \leqslant \alpha a + \beta b + ... + \lambda l,$$

com $\alpha, \beta, ..., \lambda$ ligados pela relação

$$\chi) \qquad \alpha + \beta + ... + \lambda = 1.$$

Por subsistir com quaisquer valores racionais, e positivos, de $\alpha, \beta, ...$ que satisfaçam χ), a desigualdade ψ) é também verdadeira quando esses valores, no todo ou em parte, sejam irracionais.

Desigualdade de Hölder

Quaisquer que sejam os sistemas de valores positivos ou nulos

$$a_1, ..., a_n; \quad b_1, ..., b_n; \quad ... \quad l_1, ..., l_n$$

e os correspondentes números positivos $\alpha, \beta, ..., \lambda$.

Sempre que se verifique χ), vem:

$$\sum a_i^\alpha b_i^\beta ... l_i^\lambda \leq \left(\sum a_i\right)^\alpha \left(\sum b_i\right)^\beta ... \left(\sum l_i\right)^\lambda$$

e só temos a igualdade se os sistemas são proporcionais dois a dois ou algum deles se anula.

Com efeito, não havendo sistemas nulos, e considerando $\sum a_i = A, ...$, temos

$$\frac{\sum a_i^\alpha b_i^\beta ...}{A^\alpha B^\beta ...} = \left(\sum \frac{a_i}{A}\right)^\alpha \left(\sum \frac{b_i}{B}\right)^\beta ...$$

e por ψ) a expressão é menor ou igual a:

$$\sum \left(\alpha \frac{a_i}{A} + \beta \frac{b_i}{B} + ...\right) = 1.$$

Apenas ocorre a igualdade quando

$$\frac{a_i}{A} = \frac{b_i}{B} = ... = \frac{l_i}{L}$$

e então os sistemas são proporcionais:

$$Ab_i - Ba_i = 0; \quad Ac_i - Ca_i = 0; \quad Lk_i - Ka_i = 0.$$

Sendo apenas dois os sistemas, fazendo-se

$$a_i^\alpha = p_i, \ \frac{1}{\alpha} = h \quad \text{e} \quad b_i^\beta = q_i, \ \frac{1}{\beta} = k,$$

temos finalmente, a desigualdade de Hölder:

$$\sum p_i q_i \leq \left(\sum p_i^h\right)^{\frac{1}{h}} \left(\sum q_i^k\right)^{\frac{1}{k}}$$

com $k > 1$, $\frac{1}{h} + \frac{1}{k} = 1$.

Quando $0 < h < 1$, a desigualdade sai invertida.

Vicente Gonçalves termina esta secção apresentando um conjunto de exercícios para aplicação dos conceitos tratados, sendo estes: ([20], p. 27)

Exercício 4.2.15 *Sendo $a_1, a_2, ..., a_n$ números positivos decrescentes e achando-se as primeiras $i-1$ somas*

$$b_1, \quad b_1 + b_2, \quad b_1 + b_2 + b_3, \quad ... \quad , \quad b_1 + b_2 + ... + b_n$$

compreendidas entre M' e N', e as seguintes entre M'' e N'', vem

$$M'(a_1 - a_i) + M''a_i \leq a_1 b_1 + ... + a_n b_n \leq N'(a_1 - a_i) + N''a_i.$$

Esta extensão da desigualdade de Abel deve-se a Bromwich.

Exercício 4.2.16 *Demonstrar a desigualdade de Jansen*

$$\left(\sum a^s\right)^{\frac{1}{s}} < \left(\sum a^r\right)^{\frac{1}{r}}, \quad (0 < r < s).$$

Exercício 4.2.17 *Provar que*

$$\sum (a_i + ... + l_i)^r < \sum a_i^r + ... + \sum l_i^r, \quad (0 < r < 1).$$

Bibliografia

[1] Almeida, M. L. 1937. *Documentos da Reforma Pombalina*. Coimbra. In [33], p. 2.

[2] Alves, M. Graça D. F. 2004. *Francisco Gomes Teixeira, o homem, o cientista, o pedagodo.* Tese de Doutoramento. Departamento de Matemática, Escola de Ciências, Universidade do Minho. Braga.

[3] Biblioteca Nacional. 1987. Catálogo 23. *José Anastácio da Cunha (1744 - 1787) Matemático e Poeta*.

[4] Boyer, C. B. 1986. *Historia de la Matemática*. Madrid: Alianza Editorial, S. A.

[5] Bourbaki, N. 1976. *Elementos de Historia de las Matematicas.* Alianza Universidad.

[6] Bunn, R. *Los Desarrollos en la fundamentacion de la matematica desde 1870 a 1910.* In [21], Cap. **6**, pp. 283 - 327.

[7] Burton, D. M. 1988. *The History of Mathematics an Introduction.* New York: The MacGraw-Hill Companies, Inc.

[8] Costa, Cecília. 2001. *José Vicente Gonçalves: Matemático... porque Professor!*. Funchal: Centro de Estudos de História do Atlântico Secretaria Regional do Turismo e Cultura.

[9] Cunha, J. Anastácio. 1790. *Principios Mathematicos*. Lisboa. Reprodução fac-simile publicada em Coimbra: Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade de Coimbra. 1987.

[10] Dedekind, Richard. 1872. *Continuity and irrational numbers*, English transl. 1901. In *Essays on the Theory of Numbers*, Dover, New York, 1963. pp. 1 - 24.

[11] Dedekind, Richard. 1888. *The nature and meaning of numbers*, English transl. 1901. In *Essays on the Theory of Numbers*, Dover, New York, 1963. pp. 30 - 40.

[12] Domingues, J. C. 2004. Variables, limits, and infinitesimals in Portugal in the late 18th century. In *Historia Math.* **31**, pp. 15 – 33.

[13] Drake, S. 1987. Euclid Book V from Eudoxus to Dedekind. In *Cahiers d´Histoire de Philosophie des Sciences.* Nouvell série. I. Grattan-Guinness, **21**, pp. 51 - 64.

[14] Dugac, Pierre. 1973. Eléments d'analyse de Karl Weierstrass. In *Archive for History of Exact Sciences*, Vol. 10, pp. 41 - 176.

[15] Dugac, Pierre. 2003. *Histoire de L'analyse.* Paris: Vuibert.

[16] Epple, Moritz. *The End of the Science of Quantity: Foundations of Analysis, 1860 - 1910.* In [25], Chap. **10**, pp. 291 - 323.

[17] Estrada, M., et al.. 2000. *História da Matemática.* Lisboa: Universidade Aberta.

[18] Gonçalves. V. 1940. Análise do livro VIII dos «Principios Mathematicos» de José Anastácio da Cunha, In *Congresso do Mundo Português*, Vol. XII, pp. 123 - 140.

[19] Gonçalves. V. 1945. *Curso de Álgebra Superior.* 2.^{a} Ed. Lisboa: Tipografia Atlântida.

[20] Gonçalves. V. 1953. *Curso de Álgebra Superior.* 3.^{a} Ed. Lisboa: Tipografia Delta.

[21] Grattan-Guiness, Ivor. (Editor)1984. *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630 - 1910. Una introducción historica.* Madrid: Alianza Editorial.

[22] Guimarães A. 1947. Dos números naturais aos números racionais. In *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática.* Vol. 1. Lisboa: Tipog. Matemática, LTD, pp. 1 - 22.

[23] Hilbert, David. 1930. *Fundamentos da Geometria.* Tradução Portuguesa de 1947, baseada na 7^a Ed.; re-edição Gradiva 2003, revista e coordenada por A. J. Franco de Oliveira com apêndices do autor e suplementos.

[24] Hurwitz, Adolf. 1878. *Einleitung in die Theorie der analytischen Funktionen.* In [14], pp. 96 - 118.

[25] Jahnke, H. N. (Editor) 2003. *A History of Analysis.* Vol. 24. American Matematical Society.

[26] Katz, V. J. 1998. *A History of Mathematics - An Introduction.* 2.nd Ed. New York: Addison Wesley Longman.

[27] Landau, Edmund. 1930. *Foundations of Analysis.* English transl. 1951, AMS-Chelsea Publishing, Providence, R.I. (Reprint 2001 of the 3rd ed. 1966)

[28] Malonek, H., Silva, J. C. & Costa, T. *Alunos/investigadores no ensino superior no séc. XIX*, publicação interna do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra. In [2], p. 40.

[29] Molk, J. 1904. Nombres Irrationnels et Notion de Limite. In *Encyclopédie des Sciences Mathématiques Pures et Appliquées.* Vol. I, pp. 133 - 160.

[30] Oliveira, J. T. 1988. Vicente Gonçalves em *Textos Sobre Matemática e Matemáticos em Portugal.* Lisboa: Sociedade Portuguesa de Matemática.

[31] Playfair, J. 1812. Introdução ao artigo *Censura dos redactores do Edinburgh Review aos Principios Mathematicos de José Anastácio da Cunha, Investigador Português em Inglaterra.* Vol. VII. In [3], p. 18.

[32] Playfair, J. *Investigador Português em Inglaterra.* Vol. VIII. In [18], p. 131.

[33] Queiró, J. F. 1994. José Anastácio da Cunha: Um Matemático a Recordar, 200 Anos depois. In *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática*, **29**, pp. 1 – 18.

[34] Queiró, J. F. 2000. A Matemática em Portugal. In [17], pp. 585 - 608.

[35] Real, N. L. 1949. Problemas do nosso ensino superior. In *Gazeta de Matemática.* Ano X, **40**. Lisboa: Tipog. Matemática, LTD, pp. 1 - 4.

[36] Real, N. L. 1949. Problemas do nosso ensino superior (II). In *Gazeta de Matemática.* Ano X, **41 - 42**. Lisboa: Tipog. Matemática, LTD, pp. 12 - 17.

[37] Real, N. L. 1951. Dos números racionais aos números reais. In *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática.* Vol. 1. Lisboa: Tipog. Matemática, LTD, pp. 59 - 135.

[38] Silva, J. C. 1997. *O Ensino na Universidade de Coimbra na segunda metade do séc. XIX.* Em *Actas do Encontro Luso-Brasileiro de História da Matemática e Seminário Nacional de História da Matemática.* São Paulo: Sérgio Nobre. In [2], pp. 220 e 227.

[39] Silva, J. C. 1997. Vicente Gonçalves e a História da Matemática em Portugal. In *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática.* **27**. Lisboa: Tipog. Matemática, LTD, pp. 47 - 55.

[40] Silva, J. C. 2002. *Selecção da Antologia de textos essenciais sobre a História da Matemática em Portugal.* Textos coligidos por Jaime Carvalho Silva. Ed. Sociedade Portuguesa de Matemática. Lisboa: Tipog. Nocamil.

[41] Silva, M. C. 2000. A Matemática no Ocidente Europeu nos séculos XII a XVI. In [17], pp. 445 - 478.

[42] Struik. D. J. 1989. *História Concisa das Matemáticas.* Tradução Portuguesa de João Cosme Santos Guerreiro. Lisboa: Gradiva - Publicações L.^{da}.

[43] Rodrigues, J. F. 1987. *Anastácio da Cunha. Matemático em Portugal de Setecentos.* Lisboa: Revista Ciência, Tecnologia e Sociedade.

[44] Rodrigues, J. F. 1988. A Obra Matemática de José Anastácio da Cunha, In *Cultura e Ciência em Portugal no Século das Luzes.* Revista Colóquio Ciências, Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa.

[45] Teixeira, F.G. 1887. *Curso de Analyse Infinitesimal, Calculo Differencial.* Porto: Typographia Occidental.

[46] Teixeira, F.G. 1889. *Carta dirigida ao presidente da Secção de Mathematica da Academia Real das Sciencias de Lisboa.* Porto: Typographia Occidental. In [2], p. 232.

[47] Teixeira, F.G. 1890. *Curso de Analyse Infinitesimal, Calculo Differencial.* 2.^{a} Ed. Porto: Typographia Occidental.

[48] Teixeira, F.G. 1896. *Curso de Analyse Infinitesimal, Calculo Differencial.* 3.^{a} Ed. Porto: Typographia Occidental.

[49] Teixeira, F.G. 1906. *Curso de Analyse Infinitesimal, Calculo Differencial.* 4.^{a} Ed. Coimbra: Imprensa da Universidade.

[50] Teixeira, F.G. 1925. Elogio Histórico do Doutor José Anastácio da Cunha. In *Panegírios e Conferências.* Coimbra: Academia das Ciências de Lisboa.

[51] Teixeira, F.G. 1934. *História das Matemáticas em Portugal.* Lisboa.

[52] Thiele, Rüdiger. *Antiquity.* In [25], Chap. **1**, pp. 1 - 39.

[53] Youschkevitch, A. P. 1973. J. A da Cunha et les fondements de l'analyse infinitésimale. In *Revue d'Histoire des Sciences,* XXVI, pp. 3 - 22.

[54] Youschkevitch, A. P. 1978. C. F. Gauss et J. A. da Cunha. In *Revue d'Histoire des Sciences,* XXXI, pp. 327 - 332.

Fundamentação Numérica da Análise em Portugal em Anastácio da Cunha, Gomes Teixeira e Vicente Gonçalves

por Sónia Matilde Pinto Correia Martins

Correcções a introduzir na dissertação:

Página	Linha	Onde se lê	Leia-se
iii	2	esse	este
2	-4	919	91
5	-1	incomensurável	importante
6	-3	representando-o	representando-a
7	-14	a meados	em meados
7	-11	longitude	comprimento
7	-10 e -9	as longitudes	os comprimentos
7	-8	longitudes	comprimentos
7	-4	1500,1557	1500-1557
7	-3	1501,1576	1501-1576
8	5	1502,1578	1502-1578
8	13 e 14	longitudes	comprimentos
17	5	É de realçar	Notemos
22	9	que, ambas	que ambas
22	-10	Matemático	matemático
23	14	conscencializavam-se	se conscencializavam
24	2	Outubro de	Outubro do
25	-5 e -6	de uma série	de convergência de uma série
38	-10	poder sem	poder desprezar sem
39	-11	continuando	continuado
40	13	exponencial, e	exponencial e,
40	14	defenindo-a	definindo-a
41	11	final	sinal
44	-7	duma	de uma
47	2	Português, Francisco	português Francisco
54	-7	na	em
66	-2	subtituir	substituir
67	4	a definição	na definição
67	5	da lettras	das lettras
67	-7	referente	referentes
72	-3	e, ... Teixeira,	e ... Teixeira
88	-3	semelhanca	semelhança
103	-4	disso, é	disso é
105	3	$\beta_1)$	$\beta_2)$
111	13	propíciado	conferido
116	12	encontramos	detectamos
116	-13 e -14	do número racional	dos números racionais
118	-3	concepções.	concepções."

Página	Linha	Onde se lê	Leia-se
119	10	numa dizer-se definição	numa definição dizer-se
123	5	irracionais	racionais
123	10	[?]	[36]
128	13	triângular	triangular
129	14	ao	no
132	1	porque	por que
145	11	Mathematics	Mathematics,
146	1	fo	of
147	5	Fundation	Foundations
148	15	Técnologia	Tecnologia