DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E ENGENHARIAS

A APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA COM RECURSO AOS MATERIAIS MANIPULÁVEIS NO 7º ANO DE ESCOLARIDADE

Rubina Maria Matos Velosa
Licenciada em Matemática - Ramo Ensino
Universidade da Madeira

Orientadora
Professora Doutora Elsa Maria dos Santos Fernandes

Dissertação apresentada para a obtenção do
grau de Mestre em Matemática
Especialização em Matemática para o Ensino

Madeira
2008

Departamento de Matemática e Engenharias

Universidade da Madeira

A APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA COM RECURSO AOS MATERIAIS MANIPULÁVEIS NO 7º ANO DE ESCOLARIDADE

Rubina Maria Matos Velosa

Mestrado em Educação

2008

Resumo

O presente estudo tem por objectivo compreender como é que os alunos se apropriam dos conceitos da Geometria do sétimo ano de escolaridade quando usam materiais manipuláveis. Com este propósito formularam-se as seguintes questões: (1) Quais os processos matemáticos utilizados pelos alunos ao realizarem tarefas recorrendo aos materiais manipuláveis? (2) Como é que os materiais manipuláveis promovem o desenvolvimento dos conhecimentos geométricos? (3) Qual o contributo dado pelos materiais manipuláveis no desenvolvimento de determinadas competências matemáticas nos alunos? (4) Qual é o desempenho matemático dos alunos ao trabalharem, cooperativamente, em tarefas com recurso a materiais manipuláveis?

Tendo em vista os objectivos do estudo, analisou-se o trabalho de uma turma do sétimo ano de escolaridade em torno da realização de dez tarefas que compreendiam o uso de diferentes materiais manipuláveis e, dentro da turma, estudaram-se dois grupos em particular.

A investigação segue uma metodologia qualitativa de natureza interpretativa. Os dados foram recolhidos pela investigadora através de registos escritos feitos a partir da observação directa realizada nas aulas, de registos escritos e audiovisuais do trabalho dos alunos, e de um questionário aplicado aos mesmos no final da experiência. A análise dos dados e a disposição das conclusões foram estabelecidas conforme o papel dos materiais manipuláveis no aperfeiçoamento de processos matemáticos, na aprendizagem de conhecimentos geométricos, no desenvolvimento de competências matemáticas e no desempenho matemático dos alunos.

Das conclusões que emergem do estudo destacam-se:

- A realização das tarefas por parte dos alunos, com recurso aos materiais manipuláveis, parece ter contribuído para o aperfeiçoamento de alguns processos matemáticos, o que parece evidenciar que desenvolveram a aptidão na sua apropriação e aplicabilidade. O facto de poderem tocar, mover ou manipular estes materiais, enfatizam a forma como aprendem Matemática valorizando os processos utilizados nas suas experiências de construção da aprendizagem. As tarefas cujo enunciado apelou directamente à investigação e à descoberta foram aquelas que desencadearam a utilização de um maior número de processos matemáticos.
- Os vários conceitos geométricos foram apreendidos de forma significativa pelos alunos, pois a aprendizagem foi feita a partir da sua própria experiência. A utilização de materiais manipuláveis facilitou as interacções entre os alunos, originando mais momentos de partilha e discussão dos seus raciocínios e processos.
- Os alunos trabalharam ao nível do desenvolvimento de competências principalmente, competência de pensamento matemático, pois contactaram e dominaram modos matemáticos de pensamento; competência de raciocínio matemático, que implica estar apto a raciocinar matematicamente; competência em instrumentos e acessórios, que implica estar apto a fazer uso e estabelecer relações com instrumentos e acessórios matemáticos; competência de comunicação que envolve estar apto a comunicar em, com e sobre a matemática e competência de cooperação.
- Os dados parecem sugerir que houve uma evolução no desempenho dos alunos a vários níveis, nomeadamente: no trabalho cooperativo, no envolvimento da tarefa e nas interacções estabelecidas.

Palavras-chave: Materiais Manipuláveis, Aprendizagem da Geometria, História da Geometria, Trabalho Cooperativo, Competências Matemáticas.

Abstract

The aim of the present study is to understand how students, in the seventh grade, make inner knowledge of Geometry concepts when they use manageable materials. With that purpose, the following questions were formulated: (1) Which mathematical processes do students use when fulfilling tasks supported by manageable materials? (2) How do manageable materials promote the development of geometrical knowledge? (3) What contribute do manageable materials give in the development of certain mathematical capacities on students? (4) What is the mathematical performance of students, when working co-operatively, in tasks supported with manageable materials?

Taking into account the study goals, the activities of a seventh grade class were analyzed. Those activities involved ten tasks in which different manageable materials were used. Inside the class, two particular work groups were studied.

The investigation follows a qualitative methodology of interpretative nature. The information was collected through written notes of the researcher by direct observation in classes, through written and audiovisual records of the students, and a student questionnaire done at the end of the experiment. Data analysis and conclusions disposition were established consistent with the role of manageable materials in the improvement of mathematical processes, in the learning of geometrical knowledge, in the development of mathematical capacities, and also in the mathematical students performance.

From the conclusions that arise from the study, I would like to point out:

- The tasks execution supported by manageable materials, by the students, seems to contribute in the improvement of some mathematical processes, which seems to evidence that the students developed their ability in the appropriation and applicability. The fact that they could touch, move and manage the manageable materials, emphasize the way they learn Mathematics giving added value to the processes used in their learning construction experiments. The tasks, whose proposition appealed directly to research and discovery, unchained the use of a larger number of mathematical processes.
- The several geometrical concepts were perceived in a significative way by the students since the learning was made based on their own experience. The use of manageable materials made the students interactions easier, giving rise to more moments of share and discussion of their reasoning and processes.
- Students work mainly at the level of capabilities development, mathematical reflection capability since they had contact and overcome mathematical modes of thought; mathematical reasoning capability, which implies being able to reasoning mathematically; capability in accessory and utensils, which implies being able to make use of and establish relations with mathematical utensils and accessories; communication capability, which involves being able to communicate in, with and over Mathematics; and finally, cooperation capability.
- The data suggest that the student performance evolved in several levels, namely: in co-operative work, in task envolvement and in established interactions.

Keywords: Manageable Materials, Geometry Learning, Geometry History, Co-operative Work, Mathematical Capabilities

Agradecimentos

A todos que de alguma forma me apoiaram ao longo da realização deste trabalho, quero agradecer a compreensão e o carinho que sempre me dedicaram.

À minha orientadora Professora Doutora Elsa Fernandes pelo interesse e apoio na orientação, bem como, pela disponibilidade com que sempre me atendeu e pela amizade com que me orientou.

À Direcção Executiva da Escola que me abriu as portas com grande simpatia e que propiciou todas as condições para a realização deste estudo.

À professora e alunos intervenientes neste estudo pela forma com que me acolheram nas suas aulas de Matemática, pela simpatia e pela disponibilidade dispensadas.

À Lilibete e ao Nuno pelo apoio e encorajamento que me deram, pela força nos momentos mais difíceis, pela sua imensa amizade e generosidade.

Ao Odílio por saber estar sempre presente, pelo companheirismo, confiança, apoio, paciência e compreensão que demonstrou, sem os quais jamais eu teria conseguido levar em frente este projecto.

Aos meus irmãos pelo carinho, pela força nos momentos mais difíceis e pelo apoio constante que me deram.

E à minha mãe e ao meu pai, em especial, pelo apoio, incentivo e por me ajudarem no que fosse necessário e sempre sem hesitar. Sem eles a realização deste trabalho seria muito mais difícil.

Obrigada por me terem feito acreditar que seria capaz.

Índice

Índice de Figuras

Índice de Tabelas

Capítulo I

INTRODUÇÃO

“Se decoro, esqueço
Se vejo, lembro.
Se faço, aprendo.”
(ditado chinês)

Neste primeiro capítulo, apresentamos o problema da presente investigação, o seu objectivo geral e as questões que a orientaram na consecução desse objectivo. Sucedem-se a contextualização da investigação, a sua pertinência e, por fim, explicitam-se a organização da tese.

1.1. Apresentação do problema e questões do estudo

A Matemática não cessa de evoluir e, deste facto, fomos tomando consciência com o passar do tempo. O problema é que o insucesso na disciplina de Matemática é cada vez maior, havendo, assim, necessidade de tomar medidas. A melhoria da qualidade do ensino e da aprendizagem da Matemática passa pela necessidade de haver maior interesse e motivação por parte dos alunos. É fundamental mudar as metodologias de ensino e a natureza das actividades que devem fazer parte da sala de aula. Essa preocupação é manifestada pela Associação de Professores de Matemática no seu documento *Renovação do Currículo de Matemática* (APM, 1988) quando refere:

> “A aprendizagem da Matemática é sempre produto da actividade, e se esta se reduz, por exemplo, à resolução repetitiva de exercícios para a aplicação de certas fórmulas, é exactamente isso que se aprende e vai perdurar, enquanto ficar a memória das fórmulas. Além disso, essa é a imagem adquirida da Matemática” (p. 55-56).

Nesta perspectiva, ser matematicamente letrado tem um sentido completamente diferente do que tinha há algumas décadas atrás. No início do século XX as grandes preocupações da educação focalizavam-se, essencialmente, na aquisição de competências de literacia (ler, escrever e calcular). Hoje, não faz sentido um ensino da Matemática focado nas técnicas para realizar cálculos, pois temos, à nossa disposição os computadores e as calculadoras. Assim, podemos concluir que a resolução de tarefas rotineiras é desajustada das necessidades colocadas pela sociedade. As transformações sociais ocorridas nas últimas décadas, nomeadamente a mundialização da economia, a globalização das tecnologias e o advento da sociedade de informação levaram a que houvesse uma modificação das competências a adquirir, implicando, obviamente, alterações no ensino da Matemática. Hoje,

> "ser-se matematicamente competente na realização de uma determinada tarefa implica ter não só os conhecimentos necessários como a capacidade de os identificar e mobilizar na situação concreta e ainda a disposição para fazê-lo efectivamente." (Abrantes, Serrazina e Oliveira, 1999, p. 21-22).

Nesta perspectiva, e de acordo com as mais recentes orientações curriculares para o ensino da Matemática, "todos os alunos devem ter oportunidade de se envolver em diversos tipos de experiências de aprendizagem" que promovam o desenvolvimento das competências definidas para a disciplina de Matemática (Ministério da Educação, 2001, p. 68). De entre essas experiências de aprendizagem destacam-se a utilização de materiais manipuláveis:

> "Materiais manipuláveis de diversos tipos são, ao longo de toda a escolaridade, um recurso privilegiado como ponto de partida ou suporte de muitas tarefas escolares, em particular das que visam promover actividades de investigação e a comunicação matemática entre os alunos. Naturalmente, o essencial é a natureza da actividade intelectual dos alunos, constituído a utilização de materiais um meio e não um fim."(Ministério da Educação, 2001, p. 71).

Neste sentido, torna-se pertinente a realização de uma investigação que tem como objectivo compreender como é que os alunos se apropriam dos conceitos da Geometria do sétimo ano de escolaridade quando usam materiais manipuláveis.

Com o intuito de estudar esta questão definiram-se as seguintes questões de investigação:

1. Quais os processos matemáticos utilizados pelos alunos ao realizarem tarefas recorrendo aos materiais manipuláveis?

2. Como é que os materiais manipuláveis promovem o desenvolvimento dos conhecimentos geométricos?

3. Qual o contributo dado pelos materiais manipuláveis no desenvolvimento de determinadas competências matemáticas nos alunos?

4. Qual é o desempenho matemático dos alunos ao trabalharem, cooperativamente, em tarefas com recurso a materiais manipuláveis?

1.2. Contexto e pertinência do estudo

Nas últimas décadas, o sistema educativo caracterizou-se pela constante mutação, uma vez que visa responder às necessidades da sociedade. A função da escola é preparar, educar e formar os jovens para a sua integração na sociedade. Numa sociedade em permanente evolução é fundamental que os alunos questionem, investiguem, reflictam, construam o seu conhecimento, sejam autónomos no processo de ensino e aprendizagem. A Matemática desempenha um papel fundamental uma vez que está presente no quotidiano de todos nós: nas diversas ciências, na tecnologia, na comunicação, nas diversas profissões e em numerosos outros campos. Contudo, a Matemática ainda é considerada, com muita frequência, uma ciência exacta, rigorosa, infalível, formal, abstracta e é considera por muitos a disciplina mais difícil do currículo escolar. Daí resulta o seu elevado insucesso escolar. Relativamente a este assunto, Ponte mencionava, em 1988, que:

> "o insucesso traduz-se não apenas em níveis de aprendizagem profundamente insatisfatórios, mas também na falta de confiança na utilização dos conceitos e técnicas matemáticas, numa visão geral empobrecida e deturpada da natureza desta ciência, e numa atitude de alheamento ou mesmo de repulsa relativamente a esta matéria" (p.19).

Nesta perspectiva, a aprendizagem da Matemática não pode ser apenas um processo em que os alunos têm contacto com um produto final; ela deve incluir, também oportunidades de viverem uma actividade matemática genuína (NCTM, 1991). Os próprios matemáticos, com base nas suas experiências, confirmam "a importância dos "caminhos tortuosos" da tentativa-erro, o papel decisivo dos processos experimentais ou semi-experimentais; em suma, o valor dos aspectos informais e da intuição na investigação matemática" (APM, 1988, p. 21). Neste ponto de vista, "saber matemática é fazer matemática, ou seja, o aluno recolhe, descobre ou cria conhecimento na realização de alguma actividade com finalidade própria, devendo-se privilegiar o *fazer* em detrimento do *saber que* (NCTM, 1991, p.8). Logo, é necessário que o professor crie um bom ambiente na sala de aula, diversifique o tipo de tarefas, de forma a permitir o envolvimento dos alunos. Essa ideia é realçada pela Associação de Professores de Matemática:

> "a experiência matemática deve constituir o paradigma das actividades escolares nesta disciplina. (…) de acordo com o nível de desenvolvimento e maturidade dos alunos, estes deverão estar mergulhados num ambiente intelectualmente estimulante, no qual experimentar e fazer matemática sejam actividades naturais e desejadas" (APM, 1988, p.52).

Nesta perspectiva, os materiais manipuláveis podem ser um precioso auxílio no processo de ensino-aprendizagem da Matemática. A sua importância educacional é salientada por vários autores (Serrazina, 1991; Ministério da Educação, 2001; Reys, 1982; Vale, 2000, Ribeiro, 1995; Szendrei, 1996). A utilização de materiais nas aulas de Matemática permite um envolvimento activo e efectivo dos alunos e contribui, também, para um envolvimento físico, que apela ao uso dos vários sentidos no desenrolar do processo de ensino-aprendizagem, promovendo uma atitude de maior abertura para a Matemática.

No documento *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar* (NCTM, 1991) são referidos alguns recursos que o professor de Matemática pode recorrer. Nela se recomenda que:

> "- todas as salas de aula devem estar equipadas com conjuntos de materiais manipuláveis (por exemplo, cubos, placas, geoplanos, escalas, compassos, réguas, transferidores, papel para traçado de gráficos, papel ponteado).
> - Professores e alunos devem ter acesso a materiais apropriados para desenvolver problemas e ideias para exploração." (NCTM, 1991, 80)".

Cabe ao professor decidir quando e porquê determinado material deve ser utilizado e procurar que os materiais estejam mais próximos dos conceitos matemáticos a serem explorados e que representem, de uma forma clara, o conceito matemático em causa. As tarefas com materiais manipulativos, na sala de aula, promovem a interacção do aluno com os colegas e com o professor, dando origem a momentos de partilha e discussão de diferentes pontos de vista. Nesta interacção, os alunos apresentam as suas descobertas, descrevem os seus raciocínios, justificam as suas conclusões e sentem maior segurança, pois a aprendizagem é feita a partir da sua própria experiência. Nesta perspectiva, o aluno constrói o seu conhecimento a partir de múltiplas interacções. Daí que os professores não devam apresentar os conceitos matemáticos como objectos prontos, pois estes devem ser construídos pelos alunos de forma a que estes vivenciem as mesmas dificuldades conceituais e superem os mesmos obstáculos epistemológicos encontrados pelos matemáticos.

O documento *Matemática 2001: Diagnósticos e Recomendações para o Ensino e Aprendizagem da Matemática* (1998), da Associação de Professores de Matemática verificou que o trabalho individual é o modo de trabalho mais utilizado, em detrimento do trabalho de grupo, apesar das recomendações feitas por diversas entidades e associações profissionais. Relativamente aos materiais utilizados na sala de aula constatou-se que o manual adoptado, as fichas de trabalho e a calculadora são os mais usados. Os jogos didácticos, os materiais manipuláveis e o computador são referidos como nunca ou raramente usados. Perante os resultados, a APM (1998) apresenta, no documento, um conjunto de recomendações dirigidas aos professores, no sentido de incluírem nas suas práticas pedagógicas materiais manipuláveis e o trabalho de grupo.

O uso de materiais manipuláveis na construção de conceitos matemáticos, recorrendo ao trabalho em pequenos grupos, auxilia o desenvolvimento de aspectos transversais da aprendizagem, como, por exemplo, a comunicação. No *Currículo Nacional do Ensino Básico – Competências Essenciais* (2001) pode ler-se que:

> "Na comunicação oral, são importantes as experiências de argumentação e de discussão em grande e pequeno grupo, assim como a compreensão de pequenas exposições do professor. O rigor da linguagem, assim como o formalismo, devem corresponder a uma necessidade sentida e não a uma imposição arbitrária" (p. 70).

Também, de acordo com Reys (1982), os materiais manipuláveis permitem diversificar as actividades de ensino, realizar experiências em torno de situações problemáticas, representar correctamente as ideias abstractas, analisar sensorialmente dados necessários à formação de conceitos, descobrir relações e formular generalizações, envolver os alunos activamente na aprendizagem, respeitar as diferenças individuais e aumentar a motivação.

As várias investigações realizadas realçam que a utilização de muitos materiais só por si não constituem uma garantia de haver aprendizagem, ou seja, só ocorre aprendizagem se essa experiência vivida pelos alunos for significativa. Assim sendo, Serrazina (1991) salienta que:

> “aprender Matemática fazendo-a não implica só a manipulação de materiais mas também pensar acerca da manipulação e reflectir nos processos e nos produtos, porque o que está em causa é não só a actividade física mas, em especial, a actividade mental que reflecte a actividade matemática” (p. 38).

A Geometria no sétimo ano é um exemplo de uma temática em que podemos trabalhar com materiais manipuláveis. Aliás, nas últimas décadas, assiste-se a uma tentativa de valorização da Geometria no Ensino Básico. O documento *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar* (1991), reforça a integração da Geometria no ensino e aprendizagem desta disciplina, salientado que:

> “os alunos descobrem relações e desenvolvem o sentido espacial ao construírem, desenharem, medirem, visualizarem, compararem, transformarem e classificarem figuras geométricas. Discutir ideias, fazer conjecturas e testar hipóteses são actividades que devem proceder o desenvolvimento de questões mais formais. (…). Neste nível, a Geometria deve focar-se na investigação e utilização de ideias geométricas e de relações, em vez da memorização de definições e fórmulas.” (NCTM, 1991, p. 133).

Também, no documento *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2000), recomendam que a Geometria deve fazer parte do currículo da disciplina de Matemática, realçando que “a Geometria proporciona um contexto rico para o desenvolvimento do raciocínio matemático, incluído o raciocínio indutivo e dedutivo, através da formulação e validação de conjecturas, e da classificação e definição de objectos geométricos” (p. 275). Neste documento, as Normas para a Geometria, que os programas de ensino do pré-escolar ao décimo segundo deverão habituar todos os alunos, são as seguintes:

- “Analisar as características e propriedades de formas geométricas bi e tridimensionais e desenvolver argumentos matemáticos acerca de relações geométricas;
- Especificar posições e descrever relações espaciais recorrendo à geometria de coordenadas e a outros sistemas de representação;
- Aplicar transformações geométricas e usar a simetria para analisar situações matemáticas;
- Usar a visualização, o raciocínio espacial e a modelação geométrica para resolver problemas” (NCTM, p. 44).

Nesta perspectiva, o *Currículo Nacional do Ensino Básico: Competências Essenciais* (Ministério da Educação, 2001) apresentada, para o ensino da Matemática, um conjunto de competências, no domínio da Geometria, a desenvolver ao longo de todos os Ciclos do Ensino Básico e competências específicas a desenvolver em cada um dos Ciclos.

É, neste contexto, que se afigura pertinente a utilização de materiais manipuláveis no ensino da Geometria.

Com este estudo, realizado no contexto da sala de aula, pensamos poder contribuir para uma maior compreensão e reflexão sobre o papel desempenhado pelos materiais manipuláveis no processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

1.3. Organização da tese

Para a consecução dos objectivos do estudo foi analisado o trabalho de uma turma do sétimo ano na realização de tarefas com recurso a materiais manipulativos e, dentro da turma, foram estudados dois grupos em particular.

No capítulo II, "Revisão da Literatura" abordam-se aspectos relativos à temática em estudo, apresentados em quinto subtemas: a evolução do currículo de Matemática no Ensino Básico, objectivos e finalidades do ensino da Matemática, perspectiva histórica da Geometria nos programas de Matemática, história da Geometria e aprendizagem da Matemática.

No capítulo III, "Metodologia", indicam-se e fundamentam-se as opções metodológicas do estudo, caracterizam-se a escola, a professora, os participantes no estudo e os materiais utilizados e referem-se as técnicas utilizadas para recolher os dados, assim como se explicita o modo como estes foram analisados.

No capítulo IV, "Análise dos resultados", descrevem-se e analisam-se os episódios mais representativos para as questões de investigação.

No capítulo V, "Conclusões", procura-se sintetizar as principais conclusões provenientes da análise anterior e são indicadas algumas recomendações que emergem do estudo. Finalmente, conclui-se este trabalho com uma breve reflexão pessoal sobre o seu desenvolvimento.

Capítulo II

REVISÃO DA LITERATURA

Neste capítulo é apresentada uma revisão da literatura relativa às principais temáticas que servem de suporte a esta investigação e que o enquadram. O capítulo encontra-se subdividido em cinco pontos: evolução do currículo de Matemática no Ensino Básico, objectivos e finalidades do ensino da Matemática, perspectiva histórica da Geometria nos programas de Matemática, história da Geometria e aprendizagem da Matemática. No quinto ponto são abordadas questões relacionadas com a aprendizagem em Matemática, nomeadamente o que significa aprender matemática, as competências Matemáticas, em particular as competências e capacidades associadas ao tema Geometria do 3º Ciclo (dado tratar-se do conteúdo programático objecto de estudo). Ainda directamente relacionado com a aprendizagem, seguem-se alguns resultados de investigações relevantes para o presente estudo, nomeadamente os materiais manipuláveis e o trabalho cooperativo na aula de Matemática.

2.1- Evolução do Currículo de Matemática no Ensino Básico

Em Portugal, o currículo da disciplina de Matemática do Ensino Básico conheceu, nas últimas décadas, mudanças muito significativas. Para se ter uma perspectiva fundamentada acerca das actuais orientações do ensino da Matemática para o Ensino Básico, é necessário conhecer, o modo como se chegou à situação presente.

A grande evolução científica e tecnológica, verificada na segunda metade do século XX, provocou profundas alterações nas estruturas sociais. Como tal, também os currículos de Matemática têm sido alvo de reformas mais ou menos profundas.

Durante muito tempo, os grandes temas de Matemática, ensinados aos alunos, antes da entrada para a Universidade eram a Geometria, a Aritmética e a Álgebra.

Em meados do século XX, segundo Ponte, Boavida, Graça e Abrantes (1997), a Aritmética (quatro operações básicas com números inteiros e fraccionários) era estudada principalmente, nos níveis de ensino mais elementares. No segundo ciclo do antigo ensino liceal (actuais sétimo, oitavo e nono anos de escolaridade) no programa de

Matemática constava uma iniciação ao estudo da Álgebra (polinómios e equações) e abordava-se a Geometria, de forma muito semelhante aos *Elementos* de Euclides.

No terceiro ciclo do ensino liceal (actuais décimo e décimo primeiro anos), continuava-se com o estudo da Álgebra e estudava-se a Geometria Analítica, Trigonometria e a Aritmética Racional.

Até a década de sessenta, os currículos eram elaborados por uma figura proeminente, sendo oficializados através da sua publicação, em diploma legal. Os currículos de Matemática dessa época eram constituídos por uma lista de conteúdos que teriam de ser abordados, organizados por temas, anos e ciclos de escolaridade, complementados com breves notas para cada um dos diferentes ciclos. Assim, no final dos programas, podiam ler-se algumas observações relativamente ao programa e algumas recomendações para o ensino da Matemática, bem como as características do respectivo manual.

Ao nível da prática de sala de aula, "as principais ideias relativas ao processo de ensino aprendizagem da Matemática prendem-se com uma visão do professor como alguém que explica a matéria que deve ser compreendida pelo aluno" (Porfírio, 1998, p.33). O aluno, como tal, deveria memorizar factos e resolver muitos exercícios, os necessários para dominar as técnicas de cálculo.

No entanto, nessas observações, salientavam-se aspectos que ainda hoje são referidos nas orientações curriculares, tais como: "a importância da experimentação, o desenvolvimento do raciocínio e a valorização da Historia da Matemática" (Porfírio, 1998, p.34).

Nessa época, a grande ênfase do ensino, em todos os ciclos, era o treino das técnicas de cálculo. Nessa altura, pensava-se que, com a resolução de exercícios do mesmo tipo e o muito treino, os alunos aprendiam Matemática. O ensino da Matemática era orientado nesse sentido, assim "ao cálculo numérico da Aritmética seguia-se o cálculo algébrico, as regras de derivação, o cálculo com expressões trigonométricas e com logaritmos" (Porfírio, p.34). Também com a Geometria Analítica de Descartes e Fermat, os alunos realizavam exercícios de cálculo dos mais diversos (distâncias, intersecções e posições relativas de rectas, de rectas e circunferências, ...). Apesar de todo o ensino ser conduzido para a aprendizagem do cálculo, os alunos apresentavam grandes dificuldades.

Por isso, na década de sessenta, a Matemática era considerada, pela maior parte dos alunos, uma disciplina que não suscitava interesse, verificando-se assim, um elevado nível de insucesso escolar. Começam-se, então, a questionar quanto à eficácia da preparação que se conferia aos alunos, quer para o ingresso no ensino superior, quer para o ingresso no mundo do trabalho, onde era necessário preparar cidadãos capazes de se adaptar às recentes inovações tecnológicas. Além disso, os cientistas começaram a protestar contra o crescente fosso entre os conhecimentos ministrados aos alunos no ensino liceal e os conhecimentos que consideravam que estes deveriam ter no início dos estudos superiores. Segundo Ponte *et al.* (1997), o ensino universitário começou a sofrer mudanças com a introdução de novos temas resultantes das Investigações Matemáticas mais recentes, tais como: Álgebra Abstracta, Topologia, Teoria das Probabilidades, Teoria dos Conjuntos e Lógica Matemática. Perante este panorama torna-se urgente modificar o currículo de Matemática. Em Portugal, foram várias as críticas apontadas ao currículo apresentado em 1948. "A falta de interesse dos alunos, a quebra de rendimento escolar mesmo nas técnicas matemáticas elementares e, sobretudo, a pobre preparação que o ensino proporcionada para os estudos superiores" são factores que demonstram o panorama do ensino da Matemática, nesta época (APM, 1988, p.11).

Em 1957, após o lançamento do primeiro satélite artificial, "Sputnik", pela União Soviética, intensificou-se a pressão para a modernização do ensino da Matemática de forma a recuperar um certo atraso cientifico que havia na altura.

> "Nos Estados Unidos esse lançamento provocou um verdadeiro alvoroço até no meio dos matemáticos: querendo estar a par da tecnologia russa, era preciso formar técnicos, engenheiros, cientistas. A Matemática, portanto devia ter um lugar de relevo desde os primeiros anos da escola secundária" (Castelnuovo, 1982, p. 31).

Assim, em 1959, a pedido dos Estados Unidos a Organisation Européenne de Coopération Economique organizou um simpósio internacional em Royaumont (França) para se pronunciarem sobre a renovação do ensino da Matemática em todo o mundo.

Na transição da década de cinquenta para a década de sessenta, surge, assim, o denominado Movimento da Matemática Moderna. A principal razão do aparecimento deste movimento radicava no facto de o ensino da Matemática tinha fracassado, porque o currículo tradicional era antiquado e urgia substitui-lo por um currículo onde estivessem incluídos novos domínios. Neste sentido, o Movimento da Matemática Moderna procurou, assim, "(i) usar conceitos e processos unificadores para reestruturar os diversos tópicos escolares de um modo mais coerente, (ii) introduzir novos tópicos que se considerava poderem ser aprendidos pelos alunos e de valor nas novas aplicações desta ciência e (iii) eliminar alguns dos tópicos tradicionais e considerados obsoletos" (Ponte *et al.*, 1997, p. 49). Pretendia-se, assim, proporcionar aos alunos uma melhor compreensão das ideias matemáticas, melhorando as suas competências de cálculo. As grandes dificuldades dos alunos resultavam de não saberem relacionar os diversos conceitos aprendidos. Pensava-se que "o estudo das estruturas unificadoras e o uso de uma linguagem comum poderiam ter, nesta perspectiva, uma influência benéfica no próprio domínio do cálculo" (Ponte *et al.*, 1997, p. 49).

O Movimento da Matemática Moderna, em Portugal, conheceu dois períodos distintos. Nos anos sessenta, teve uma fase experimental, estendendo-se a algumas turmas do terceiro ciclo do ensino liceal, conduzida por José Sebastião e Silva. No entanto, este Movimento não se limitou apenas a mudanças ao nível dos conteúdos, procurou inovar a prática pedagógica a nível dos métodos de ensino, onde se pretendia que os alunos assumissem um papel mais activo, valorizando-se o "ensino pela descoberta". É necessário referir que, algumas das ideias de Bruner no ensino/aprendizagem foram aplicadas, nomeadamente, o facto de enfatizar o método da descoberta e a utilização de materiais manipuláveis no ensino. Neste sentido, o professor deveria abandonar o método expositivo tradicional, em que o aluno tem um papel passivo, e procurar, pelo contrário, seguir o método activo, estabelecendo diálogo com os discentes e estimulando a sua imaginação e criatividade, de modo a conduzi-los, à redescoberta, sempre que possível. O professor deveria, assim, desenvolver, nos seus alunos, principalmente o sentido crítico e o poder de análise. Para desenvolver o sentido crítico, cabe ao professor encorajar o aluno à discussão livre e disciplinada, habituando-o a expor os seus pontos de vista e a ouvir as opiniões dos outros.

Sebastião e Silva foi o responsável pela elaboração dos novos manuais escolares para alunos e professores. Estes manuais continham novas matérias que se pretendiam introduzir, como a Iniciação à Lógica, Estruturas Algébricas e Álgebra Linear, articulando-as com as matérias tradicionais, como a Iniciação à Análise Infinitesimal, a Trigonometria, o Cálculo Algébrico e a Geometria Analítica.

A partir do início da década de setenta, numa segunda fase, deu-se a sua generalização aos alunos de todos os níveis de ensino, verificando-se que, nesta fase, a preocupação com os métodos não foi valorizada, originando a elaboração de novos programas e novos manuais escolares.

Nesta altura, com a reforma de Veiga Simão, o currículo para além dos conteúdos a leccionar, passa a incluir objectivos, algumas considerações metodológicas de carácter geral e indicações sobre a avaliação, mas de forma superficial.

"Foram os programas dessa época, com pequenos reajustes no período pós 25 de Abril, que acabaram por vigorar até 1991", altura em que se deu a reforma de Roberto Carneiro e a formulação da nova Lei de Bases do Sistema Educativo (Pontes *et al.*, 1997, p. 50). As principais razões que podem explicar a duração excessiva deste currículo são a falta de capacidade para avaliar os maus resultados obtidos pelos alunos e o grande isolamento em relação à comunidade internacional de educação matemática. A permanência do currículo, durante tanto tempo, teve consequências, tais como: a desvalorização do uso de materiais didácticos, a aversão dos alunos à disciplina de Matemática, a ideia, ainda hoje bastante em voga, de que a Matemática é a disciplina do insucesso, o desaparecimento das aplicações da Matemática, ...

Convém referir que o Professor José Sebastião e Silva foi o grande impulsionador da Reforma da Matemática Moderna em Portugal. Numa entrevista ao "Diário de Noticias", de 23 de Janeiro de 1968, Sebastião e Silva afirma que "o que se pretende acima de tudo é levar o aluno a compreender o porquê dos processos matemáticos, em vez de lhe paralisar o espírito". Na sua opinião, no ensino tradicional, o aluno "é tratado precisamente como se fosse uma máquina enquanto no ensino moderno se procura, por todos os meios, levá-lo a reflectir e a reencontrar por si as ideias fundamentais que estão na base da matemática". Este autor critica o ensino tradicional por ser baseado na memorização e na mecanização por parte do aluno com a resolução de exercícios. Sebastião e Silva considerava "que ensinar Matemática sem mostrar a origem e a finalidade dos conceitos era como falar de cores a um daltónico: é construir no vazio" (Silva, 1995). Sebastião e Silva era da opinião que o professor deveria mostrar ao aluno que não devemos ter medo de errar porque só errando é que se aprende verdadeiramente. Salientando que, aqueles que não aprendem à custa da própria experiência e dos próprios erros, nada ou pouco aprendem, na verdade. Segundo ainda o mesmo autor "é preciso evitar certos exercícios artificiosos ou complicados, especialmente em assuntos simples. (…) É mais importante reflectir sobre o mesmo exercício que tenha interesse, do que resolver vários exercícios diferentes, que não tenham interesse nenhum. (…). Entre os exercícios que podem ter mais interesse figuram aqueles que se aplicam a situações reais, concretas". (Silva, 1995).

Numa carta a Emma Castelnuovo, Sebastião e Silva afirma que “se quisermos que o ensino da Matemática seja autenticamente vivo e fecundo, deveremos apresentar uma ciência que se faz e não uma ciência já feita. A Matemática não deve desprezar o concreto, a Matemática deve estar ligada à realidade física em que o pensamento matemático mergulha as suas raízes. E é sobretudo a geometria que serve de modo natural para a ligação entre o mundo físico e a abstracção” (Castelnuovo, 1982, p. 33).
Na sua opinião, a “educação, na era científica, não pode continuar, de modo nenhum, a ser feita segundo os moldes do passado. Em todas as escolas o ensino das ciências tem que ser intensificado e remodelado desde as suas bases, não só quanto a programas mas ainda quanto a métodos”. Por isso, é da competência da escola “ formar seres pensantes, dotados de imaginação criadora e de capacidade de adaptação em grau cada vez mais elevado” (Entrevista ao Diário de Noticias, de 23 de Janeiro de 1968). Daí que a Matemática não é um conjunto de técnicas a dominar, mas sim um meio de obter a formação integral de um cidadão.

Mas, “com a unificação do ensino, e a morte de Sebastião e Silva passam a predominar, no Ensino Secundário, métodos e programas de Matemática muito rígidos. A resolução de problemas e a matematização do real, actividades com grandes potencialidades educativas, são desvalorizadas em benefício do formalismo e do rigor da linguagem” (Matos, 2004). Pois “para o formalismo, o que conta é o modo como se manuseia os símbolos e não o seu significado. Ganha-se em rigor, mas perde-se na compreensão das ideias e dos conceitos matemáticos” (Ponte, 2002, p. 5). Nesta altura, Portugal passa a estar isolado em relação à comunidade internacional de educação matemática.

Contudo, o grande objectivo ambicionado pelo Movimento da Matemática Moderna, de proporcionar uma melhoria das aprendizagens dos alunos no Ensino Secundário para possibilitar uma aproximação dos requisitos que se consideravam necessários no Ensino Superior, não foi alcançado. Embora, alguns aspectos no ensino tenham melhorado, nomeadamente uma renovação dos temas, uma actualização da forma como se abordam os conceitos e uma preocupação com a interligação das ideias matemáticas.

Esta nova orientação curricular não teve o êxito que se esperava. Tanto em Portugal, como noutros países, começaram a surgir críticas aos programas da Matemática Moderna. O uso excessivo de simbolismo, o rigor da linguagem e a ênfase dada às estruturas abstractas revelaram-se, afinal, de difícil compreensão para os alunos.

A Matemática passa a ser encarada pelos alunos como uma ciência acabada, artificialmente criada e sem qualquer ligação com a realidade. Os alunos revelam-se cada vez mais desmotivados em relação a esta disciplina, não compreendem os novos símbolos e os resultados nos exames pioram, em vez de melhorar. A Matemática não estava a ser apresentada como uma actividade criativa, que realmente é. O ensino desta disciplina não tinha em conta às necessidades dos alunos, nem à realidade da escola e da sala de aula. "Apontava-se que a reforma sobrevalorizava os conteúdos, quando o fundamental estaria nos métodos" (Matos, 2004).

Assim, o novo currículo não estava a produzir os efeitos desejados, pois os alunos não tinham melhorado as suas capacidades no raciocínio, na resolução de problemas e no domínio de técnicas de cálculo. Perante esta situação começou-se a reclamar um regresso à aprendizagem do cálculo.

No início da década de setenta, em diversos países, "explodia um forte movimento de revolta contra a Matemática Moderna (…). O principal porta-estandarte deste movimento era um matemático prestigiado, Morris Kline, que escreveu um livro intitulado *Why Johnny can´t add: The failure of the new Math* (Pontes *et al.*, 1997, p.51). Este movimento ficou conhecido por Back to Basics e "responsabilizava a reforma pela incapacidade dos alunos em dominarem as técnicas básicas da aritmética e da álgebra e reclamava um retorno à primazia dessas técnicas que haviam sido, durante muito tempo, os grandes pilares da Matemática escolar" (APM, 1988, p.12).

Este movimento, embora não tivesse conseguido levar a cabo uma reforma curricular, veio reforçar as críticas aos currículos da Matemática Moderna.

No nosso país o movimento "Back to Basics" (originário no EUA), não assumiu grandes proporções, uma vez que se integrou no novo currículo da Matemática Moderna muito do antigo currículo tradicional. A aprendizagem do cálculo nunca deixou de estar presentes no ensino da Matemática. "Entre nós não se verificaram os exageros que ocorreram noutros países (…) e não havia muita razão para reclamar mais atenção às competências de cálculo porque elas nunca deixaram de estar no centro do palco, constituindo o prato forte dos exames, nomeadamente do décimo segundo ano" (Pontes *et al.*, 1997, p.52).

Mas, o movimento "Back to Basics" encontrou uma forte oposição, desde o início, visto que muitos educadores matemáticos eram da opinião que as competências básicas, em Matemática, não se deveriam limitar apenas ao domínio do cálculo, mas incluir outros aspectos, tais como: a resolução de problemas, a ligação da Matemática à vida real e sua aplicabilidade, a utilização de calculadoras e outros materiais no ensino da disciplina.

Diversos relatórios surgem nessa altura, como contestação ao movimento "Back to Basics". Por exemplo: o "National Council of Supervisors of Mathematics" (NCSM) dos EUA publicou, em 1977, um documento que procurava definir, o que deveria ser entendido por "competências básicas" em Matemática. Este documento está na origem da elaboração da *Agenda for Action*. Convém salientar que o documento do NCSM de 1977 foi uma resposta ao movimento do "Back to Basics", que privilegiava que as competências básicas em Matemática focadas na aprendizagem do cálculo.

Tanto em Portugal, como em muitos outros países, na década de oitenta, assiste-se a um forte movimento de reforma no ensino da Matemática. O início deste movimento é marcado pela publicação da *Agenda for Action*, do NCTM (1980) onde se recomenda que a resolução de problemas deve ser o foco do ensino da Matemática. Recomenda-se ainda nesta publicação: o ênfase na aplicabilidade da Matemática, o alargamento das capacidades básicas para além da capacidade de cálculo, a utilização em todos os níveis dos computadores e das calculadoras, o uso de uma variedade de instrumentos de avaliação, ... Algum tempo depois surge a publicação do relatório *Mathematics Counts* coordenado por Cockroft (1982), que apresenta uma análise do ensino da Matemática em todos os níveis de ensino, na Inglaterra e no País de Gales bem como, um conjunto de recomendações no sentido de melhorar o ensino desta disciplina. Segundo este documento, o ensino da Matemática, em qualquer nível, deve incluir oportunidades de: exposição por parte do professor, discussão entre o professor e os alunos e dos alunos entre si (aspecto particularmente inovador neste documento), trabalho prático apropriado, consolidação e prática de técnicas e algoritmos fundamentais, resolução de problemas, incluindo a aplicação da Matemática a situações da vida real e trabalho de natureza investigativa.

No final da década de oitenta, surgem também várias publicações nos Estados Unidos, que criticam as práticas dominantes no ensino da Matemática, visto que o ensino da Matemática está muito desfasado daquilo que são as necessidades colectivas e individuais na actual sociedade de informação. *Everybody Counts* (NRC, 1989), *Normas para o Currículo e Avaliação em Matemática Escolar* (NCTM, 1991) e *Reshaping School Mathematics* (NRC, 1990) são algumas delas. Todos estes documentos criticam a forma como se processa o ensino da Matemática e propõem ideias para melhorar esta situação.

As *Normas para o Currículo e Avaliação em Matemática Escolar* (NCTM, 1991) propõem um conjunto de orientações para o currículo da disciplina desde a pré-primária até ao décimo segundo ano. Estas normas são uma resposta dada pela comunidade de educadores matemáticos aos pedidos insistentes de reforma do ensino e aprendizagem da Matemática.

Neste documento, preconiza-se a necessidade de formar cidadãos matematicamente alfabetizados, preparados para "compreender as complexidades e as tecnologias da comunicação, para pôr questões, para assimilar informação não esperada, e para trabalhar cooperativamente em grupo", ou seja, para dar resposta às exigências da sociedade actual (NCTM, 1991, p. 4).

O NCTM (1991) destaca três aspectos da Matemática que devem ser contemplados no currículo desta disciplina. O primeiro, a ideia de que "saber Matemática é fazer Matemática" (p.8), neste sentido o seu ensino deve privilegiar o fazer e não o saber. Em segundo lugar, "um currículo para todos os alunos deve dar oportunidade para a aquisição da compreensão de modelos, estruturas e simulações matemáticas aplicáveis a muitas disciplinas" (p.9). Em terceiro lugar, o ensino da Matemática deve incluir o uso das calculadoras e dos computadores e a exploração das suas potencialidades educativas, visto que as novas tecnologias "mudaram a própria natureza dos problemas que são importantes em Matemática e os métodos que os matemáticos utilizam para os investigar" (p.9).

Estas normas destacam o desenvolvimento do "poder matemático" dos alunos, como o principal objectivo da Matemática escolar.

> "O poder matemático inclui a capacidade para explorar, conjecturar e raciocinar logicamente, para resolver problemas não rotineiros, para comunicar sobre a Matemática e através dela, e para estabelecer conexões dentro da Matemática e entre a Matemática e outras actividades intelectuais. O poder matemático também envolve o desenvolvimento da autoconfiança e a predisposição para procurar, avaliar e usar informação quantitativa e espacial na resolução de problemas e na tomada de decisões" (NCTM, 1994, p. 1).

Para isso, os professores devem envolver todos os alunos na formulação e resolução de uma grande diversidade de problemas, na construção de conjecturas e de argumentos, na validação de soluções e na avaliação da plausibilidade das afirmações de Matemática. Também os "professores devem desenvolver nos alunos a predisposição para usar e se dedicar à Matemática, para apreciar a sua beleza e utilidade" (NCTM

1994, p. 23). Neste documento o raciocínio matemático, a resolução de problemas, a comunicação e as conexões matemáticas são aspectos a ter em conta no ensino da Matemática. Convém referir que as Normas para o Currículo "sugerem modificações não apenas em o que é ensinado, mas também em como é ensinado" (NCTM, 1994, p. 22). Este documento pretendia ser um guia para a orientação da reforma curricular da disciplina de Matemática.

Em Portugal, na década de oitenta, "realizam-se vários encontros importantes sobre o ensino da Matemática: o primeiro encontro nacional da Sociedade Portuguesa de Matemática (1980); o colóquio de homenagem a Sebastião e Silva (1982); o 35º CIEAEM (1983), um encontro sobre a utilização dos micro computadores no ensino, organizado pelo Departamento de Educação da FCUL e em 1985 o 1º ProfMat" (Porfírio, 1988, p.36). É criada em 1986, a Associação de Professores de Matemática (APM). Nestes encontros foram discutidos vários aspectos relacionados com o ensino e aprendizagem da Matemática, assim como aspectos relacionados com o currículo.

Mas o momento de reflexão em matéria curricular com maior impacto foi o Seminário de Vila Nova de Milfontes, organizado pela Associação de Professores de Matemática, em 1988, onde participaram um grupo de vinte e cinco professores de todos os níveis de ensino. Desse seminário resultou o documento "*Renovação do Currículo de Matemática*" (APM, 1988), onde se critica a forma como o ensino da Matemática tem sido conduzido e a concepção de aprendizagem que o mesmo subentende.

Nesse documento, estão as principais orientações curriculares da década de oitenta, das quais se destacam:

- importância da resolução de problemas, entendida como um meio de proporcionar aos alunos uma experiência matemática semelhante à actividades dos matemáticos;
- utilização das calculadoras e dos computadores no processo de ensino-aprendizagem da Matemática, altera significativamente a ênfase a colocar e o modo de abordar alguns conteúdos;
- os currículos devem acompanhar a evolução da própria Matemática, incluído os novos temas;

- diversificação dos métodos de trabalho e do tipo de tarefas a proporcionar aos alunos no processo de aprendizagem, não incluindo apenas a exposição do professor e a prática de exercícios.

Também são apresentadas algumas propostas: (i) valorizar objectivos curriculares referentes a capacidades (resolução de problemas e raciocínio matemático) e atitudes positivas em relação à Matemática; (ii) dar prioridade, na sala de aula, a tarefas ricas e desafiantes, envolvendo resolução de problemas, explorações matemáticas, raciocínio e comunicação; (iii) encarar o programa e os manuais como instrumentos de trabalho e não como prescrições a seguir cegamente.

O NCSM publica o documento "A Matemática essencial para o século XXI" que vem actualizar as suas recomendações de 1977. Neste documento, o NCSM enuncia quais as competências essenciais de que os cidadãos irão precisar para a sua vida futura. "O NCSM considera "essenciais" as competências que são necessárias para que as portas do mundo do trabalho ou do ensino superior se mantenham abertas" (NCTM, 1990, p.23). Logicamente, que as competências essenciais se vão alterando à medida que as exigências da sociedade se modificam. Segundo o NCSM existem doze áreas fundamentais de competências matemáticas. Elas são: resolução de problemas, comunicação de ideias matemáticas, raciocínio matemático, aplicações da Matemática à vida quotidiana, competências de cálculo, verificação da razoabilidade dos resultados, estimação e aproximação, geometria, pensamento algébrico, conceito de medida e uso de instrumentos de medida, estatística, probabilidades.

Na década de noventa foram diversas as alterações que têm sido apontadas como necessárias para modificar o ensino da Matemática em Portugal, tais como: (1) a utilização de uma gestão da sala de aula que contribua para que os alunos construam o seu próprio conhecimento; (2) uma utilização de materiais que permita uma boa base para a formação de conceitos; (3) uma ligação da Matemática ao real e (4) uma abordagem da Matemática virada para a resolução de problemas. A primeira mudança refere-se ao facto do professor dever criar um ambiente na sala de aula que permita aos alunos interagir uns com os outros, que aprendam uns com os outros, que sejam participantes activos, em vez de receptores passivos. O professor deve deixar de ser o centro das atenções no processo de ensino – aprendizagem. A segunda alteração menciona a necessidade da utilização de materiais para a aprendizagem da Matemática. O contacto dos alunos com os materiais é necessário antes da formalização de um conceito, pois a aprendizagem é feita com base na experiência. A manipulação de materiais dá ao aluno a oportunidade de experimentar, manipular e desenvolve o pensamento abstracto, visto que a aprendizagem da Matemática deve partir do concreto para o abstracto. Por exemplo: o uso de materiais manipuláveis possibilitam uma abordagem experimental, em que os alunos exploram conceitos e situações matemáticas.

A terceira mudança mostra que a aprendizagem da Matemática deve estar ligada a exemplos concretos, ou seja, que permitam aos alunos aplicar a Matemática nas suas actividades e na sua vida diária. A última alteração defende que, em vez de um conhecimento estático, os alunos passem a ter um conhecimento dinâmico, capaz de se adaptar a um mundo em transformação. A resolução de problemas ajuda a desenvolver determinadas capacidades, pois no mundo de hoje, a especialização é cada vez maior, logo a posse de um conhecimento amplo e capaz de se adaptar é crucial.

À medida que o tempo passa é visível o esforço para modificar o ensino da Matemática e concretizar as grandes tendências identificadas nas décadas anteriores, consideradas importantes. Daí que nos últimos anos muitos educadores matemáticos tenham expressado a necessidade de alterar o modo como se processa a aprendizagem da Matemática.

Após uma fase de experimentação, durante o ano lectivo 1990/1991, em algumas escolas do país, só para os primeiros anos de cada ciclo, em Junho de 1991, o novo currículo de Matemática foi tornado público. Era, assim, implementada a reforma do Sistema Educativo, há muito esperada.

A Lei de Bases do Sistema Educativo torna o Ensino Básico obrigatório e define o Ensino Secundário (décimo, décimo primeiro e décimo segundo anos) como um ciclo autónomo.

De um modo geral, pode considerar-se que o novo currículo de Matemática integra as principais ideias curriculares defendidas anteriormente.

Este documento não só contém os conteúdos temáticos a tratar por ciclo, como inclui finalidades, objectivos gerais e específicos, orientações metodológicas e considerações sobre a avaliação. As orientações metodológicas, mais desenvolvidas do que anteriormente, “propõem exemplos concretos que podem ser explorados na aula, materiais que podem ser utilizados e clarificam algumas conexões entre os tópicos” (Porfírio, 1998, p.37.).

As novas orientações curriculares propostas valorizam o papel do aluno na construção do saber, a resolução de problemas, o uso de tecnologias (calculadora e computador), à história da Matemática, à importância da Matemática enquanto instrumento de interpretação do mundo real, o uso de materiais manipuláveis, o trabalho de grupo, os métodos activos.

Neste currículo o aluno é o centro e o agente de todo o processo de ensino/aprendizagem. Isto implica que as metodologias sejam diferentes, com actividades diversas, feitas individualmente ou em grupo, que possibilite ao aluno "experimentar, comparar, trocar experiências, argumentar e ouvir os outros, elaborar pequenos relatórios, fazer pesquisas, de forma progressivamente mais autónoma e com sentido de cooperação" (Lobato, 1991,p.4). Neste sentido, também o papel do professor mudou. Cabe ao professor "escolher para cada ano e em cada unidade, a sequência de actividades a realizar, visando os diferentes objectivos gerais; regular o processo, num ambiente de confiança; fazer ou ajudar a fazer sínteses pontuais e globais, absolutamente indispensáveis; ajudar a organizar o trabalho dos grupos e a ultrapassar dificuldades, procurando não resolver o que compete aos alunos; tirar e ensinar a tirar partido do erro, analisando-o e desdramatizando-o; (…)" (Lobato, 1991, p. 4).

Uma das diferenças em relação ao currículo anterior é que se considera como parte do currículo, não só os conhecimentos a adquirir, mas igualmente as capacidades/aptidões (de resolução de problemas, de raciocínio, de comunicação, de utilização da Matemática na interpretação e intervenção no real) e as atitudes e valores (de autonomia, de solidariedade) a desenvolver. Outra diferença é que a nova reforma do ensino não tem como fim único a preparação para o ensino superior.

Contudo, com o passar do tempo, foram também apontadas algumas críticas ao currículo de Matemática, tais como: a extensão do programa; a falta de recursos que as escolas possuíam; a falta de articulação entre os conteúdos, objectivos e metodologias, uma estrutura que privilegia os conteúdos, ao processo de experimentação; a pouca clarificação das propostas de avaliação; a insuficiente preparação e formação dos professores; ... Porém, a reforma curricular que foi seguida, ignorou, mais uma vez, a necessidade de envolvimento dos professores e, por isso, ao nível dos docentes, a reforma assumiu a forma de mudança por decreto (Porfírio, 1998).

De acordo com as tendências actuais é atribuída grande importância à resolução de problemas, noção teorizada e aprofundada por George Pólya (1945). Na opinião deste matemático para aprender Matemática não basta resolver exercícios, é necessário desafiar o aluno com problemas interessantes, que o ajudem a resolver situações de natureza diversa e a enfrentar com confiança situações novas. Mas, os problemas que podem ser propostos deverão ser de muitos tipos e, logicamente, não têm todos o mesmo interesse educativo. Daí que, recentemente começaram a valorizar-se, também, as actividades de investigação matemática por parte dos alunos. Estas permitem ao aluno a formulação de conjecturas, a avaliação da sua plausibilidade, a escolha dos testes adequados para a sua validação ou rejeição, a procura de argumentos que demonstrem as conjecturas, ... No entanto, ambas as experiências de aprendizagem apelam à imaginação e à criatividade, estimulam o espírito de pesquisa, dando aos alunos oportunidade de observar, experimentar, seleccionar e organizar dados, relacionar, fazer conjecturas, argumentar, concluir e avaliar. Convém salientar que o aluno desenvolve outras capacidades que se situam para além do cálculo e da memorização, de definições e procedimentos, que não eram desenvolvidas no ensino tradicional. Estas duas actividades desenvolvem outras capacidades "como a comunicação, o espírito crítico, a modelação, a capacidade de analisar dados e situações complexas e realizar demonstrações" (Ponte *et al.*, 1997, p.55). Convém referir que a resolução de problemas ligados à vida real já fazia parte dos programas dos anos 50 e, ainda hoje, continua a estar presente nos programas actuais. Claro que, "nos anos 50, o objectivo seria o professor dar realce ao cálculo, devendo os alunos seguir o mesmo raciocínio. A aplicabilidade deste item nos anos noventa tem, como objectivos principais, permitir ao aluno o desenvolvimento do raciocínio seguindo várias heurísticas, a compreensão de conceitos matemáticos e mostrar como a Matemática tem relação com outras áreas do saber" (Ribeiro *et al.*, 1996, p.5).

Na década de noventa, o NCTM publica diversos documentos com o objectivo de complementar e precisar a visão curricular defendidas nas *Normas para o Currículo e Avaliação em Matemática Escolar*.

Destacam-se as *Normas Profissionais para o Ensino da Matemática* (NCTM, 1994), que constitui uma importante reflexão em torno da prática, da formação e do desenvolvimento profissional do professor. Segundo este documento "os professores são os principais protagonistas na mudança dos processos pelos quais a Matemática é ensinada e aprendida nas escolas" (NCTM, 1994, p.2), daí a sua elaboração. O objectivo deste documento é fornecer uma orientação aos professores na transformação do ensino da Matemática. Também salienta que "tais mudanças requerem que os professores tenham um apoio contínuo e recursos adequados" (NCTM, 1994, p. 2). Segundo este documento “a verdadeira essência do estudo da Matemática é, precisamente, uma actividade de exploração, de formulação de conjecturas, de observação e de experimentação” (p. 97). Daí que o “espírito de investigação deve estar presente em todo o ensino e aprendizagem da Matemática” (NCTM, 1994, p117).

Mais recentemente, o NCTM publicou *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2000). Este documento de orientação curricular tem como “objectivo principal o de servir de suporte a tomada de decisões, tanto por responsáveis da administração educacional como pelos próprios professores” (Ponte, 2000, 65). Convém referir que, este documento, difere dos Standards de 1991 “pela existência de seis princípios que guiam os programas de ensino da Matemática escolar e por terem os mesmos dez standards em todos os ciclos”, ou seja desde a pré-primária ao secundário (Kilpatrick e Moura, 1999, p. 44). Os seis princípios tratam os seguintes aspectos: equidade, currículo, ensino, aprendizagem, avaliação e tecnologia. Os Standards estão divididos em dois grandes grupos. O primeiro refere-se a conteúdos (número e operação; funções e álgebra; medida; geometria e sentido espacial; análise de dados, estatística e probabilidades) e, o segundo, a um conjunto de processos (resolução de problemas; raciocínio e demonstração; conexões e representação; comunicação). De uma forma muito geral podem resumir-se, da seguinte forma, os seis princípios enunciados no NCTM 2000.

- Equidade: constitui uma reafirmação da noção de Matemática para todos, já afirmada no documento de 1991;
- Currículo: é dado ênfase à ideia de que o currículo não pode ser visto como uma colecção de actividades devendo ser coerente, articulado ao longo dos anos de escolaridade e centrado em ideias matemáticas importantes;
- Aprendizagem: é salientada a importância de aprender percebendo;
- Avaliação: é realçado que a avaliação pode apoiar a aprendizagem dos alunos e dar importantes informações que ajudem a tomar decisões sobre o ensino;
- Ensino: fundamentalmente realça-se que ele requer (1) conhecimentos sobre a Matemática, o modo como os alunos aprendem e sobre a pedagogia, (2) um ambiente ao nível da sala de aula que desafie e apoie a evolução dos alunos e (3) uma procura constante de evolução;

- Tecnologia: é vista como essencial, uma vez que facilita a aprendizagem desta disciplina, constitui um importante apoio ao ensino e influência a Matemática que se ensina.

Este novo documento identifica quatro necessidades da sociedade para a percepção da Matemática: para a vida, como parte da nossa herança cultural, para o local de trabalho e para a comunidade científica e tecnológica.

No entanto, dez anos depois, as investigações evidenciam um fosso existente entre estas orientações e o modo como a Matemática é ensinada na maior parte das escolas. A Associação de Professores de Matemática preocupada com o nível de insucesso dos alunos, promoveu um estudo – Matemática 2001, sobre o modo como se ensinava e aprendia Matemática em Portugal. O relatório do projecto Matemática 2001 pretendia contribuir para uma compreensão dos principais problemas que afectam o ensino e aprendizagem da disciplina de Matemática nas escolas Básicas e Secundárias e para a identificação de propostas de resolução desses problemas.

Feito o diagnostico da situação, verificou-se a existência de um fosso entre as orientações curriculares defendidas nas últimas décadas e a realidade praticada nas salas de aulas. Estes são alguns dos resultados do relatório Matemática 2001:

- Ao nível dos conteúdos, os temas matemáticos que foram reforçados nos novos programas – Geometria e Estatística – são os que os professores indicam com alguma frequência para excluir ou simplificar. Embora os novos programas recomendam o trabalho com situações da realidade, verificamos ter ainda pouca expressão nas práticas lectivas, embora diminuído ao longo da escolaridade e em relação ao uso da "História da Matemática" parece ter pouca expressão.
- Ao nível dos materiais, verificou-se que a maioria dos professores utiliza com pouca frequência os materiais manipuláveis, os jogos didácticos e o computador.
- Ao nível das tarefas desenvolvidas na sala de aula, "os exercícios são largamente maioritários (…), a resolução de problemas tem ainda assim uma expressão significativa, o que já não se passa com as actividades de exploração e investigação, e muito menos com os projectos, que são, praticamente, inexistentes." (Abrantes, 1998, p.26).

- Ao nível das formas de interacção na sala de aula “a exposição pelo professor é o método de comunicação dominante. (…) A discussão entre alunos tem uma expressão bastante menor ” (Abrantes, 1998, p.26).
- Ao nível dos “modos de trabalho na sala de aula verifica-se uma predominância do trabalho individual. O trabalho em pares é, também, usado com muita frequência, assim como o trabalho com toda a turma. Já o trabalho de grupo tem uma expressão francamente reduzida” (Abrantes, 1998, p.27).
- Ao nível da avaliação, o uso de relatórios, de projectos e de desempenhos orais dos alunos são poucos os professores que os utilizam para a recolha de dados para a avaliação dos alunos, sendo os testes a forma mais utilizada pelos professores.

Em 1996, iniciou-se um novo movimento de renovação curricular com a “Reflexão Participada sobre os Currículos do Ensino Básico”, no sentido de melhorar a qualidade e a eficácia da resposta educativa deste nível face às necessidades e direitos dos indivíduos e aos problemas da sociedade em geral, confrontada com mudanças e novos desafios. É continuado pelo *Projecto de Gestão Flexível do Currículo* e culminado com a publicação, no início do ano lectivo de 2001/2002, do *Currículo Nacional do Ensino Básico: Competências essenciais (*Ministério da Educação, 2001), coordenado por Paulo Abrantes.

Também o livro *A Matemática na Educação Básica* (Abrantes, Serrazina e Oliveira) foi mais um contributo para a revisão participada dos currículos do Ensino Básico, uma vez que contribuiu para a discussão e reflexão de aspectos fundamentais do ensino-aprendizagem da Matemática.

Como foi dito anteriormente, o currículo no passado, era frequentemente encarado como um programa, um plano de estudos ou um conjunto de disciplinas, sendo uma estrutura rígida. Actualmente, o currículo contempla não só os conteúdos por disciplina e por ano de escolaridade, mas também as competências a desenvolver, as sugestões metodológicas, os tipos de experiências de aprendizagem a proporcionar por área disciplinar e por ciclo, e a avaliação, sendo uma estrutura flexível e adaptável a cada realidade. No novo desenho curricular dá-se “a possibilidade de cada escola, dentro dos limites do currículo nacional, organizar e gerir, autonomamente, todo o processo de ensino/aprendizagem” (Serrazina, 1999, p.40). Por isso, em tempos idos, o professor tinha apenas que cumprir os programas elaborados pelas equipas nomeadas pelas autoridades educativas, independentemente dos contextos socioculturais em que trabalhavam. Neste sentido, “o papel do professor resumia-se a utilizador de materiais elaborados por outros: programas, manuais escolares, etc.” (Serrazina, 1999,p. 40). Hoje, com a gestão flexível do currículo, “o professor deve, em primeiro lugar, identificar quais os objectivos curriculares que considera dever desenvolver com os seus alunos e deve fazer uma programação das suas actividades a partir deles e do conhecimento que tem dos seus alunos” (Serrazina, 1999, p. 40), adaptando o currículo às realidades locais e gerido de acordo com cada situação de forma autónoma.

O novo currículo foi definido em termos de competências a desenvolver ao longo da educação básica e de tipos de experiências de aprendizagem que devem ser proporcionadas aos alunos. Aí, é assumida a seguinte noção de competência:

> “Adopta-se aqui uma noção ampla de competência, que integra conhecimentos, capacidades e atitudes e que pode ser entendida como saberes em acção ou em uso. Deste modo, não se trata de adicionar a um conjunto de conhecimentos um certo número de capacidades e atitudes, mas sim de promover o desenvolvimento integrado de capacidades e atitudes que viabilizam a utilização dos conhecimentos em situações diversas, mais familiares ou menos familiares ao aluno” (Ministério da Educação, 2001, p.9).

Neste sentido, quando falamos de competência, referimo-nos ao saber que se traduz na capacidade efectiva de utilização e manejo – intelectual, verbal ou prático e não a conteúdos acumulados, com os quais não sabemos nem agir no concreto, nem fazer qualquer operação mental ou resolver qualquer situação, nem pensar com eles.

> “O significado que aqui é atribuído, a competência não está ligada ao treino para, num dado momento, produzir respostas ou executar tarefas previamente determinadas. A competência diz respeito ao processo de activar recursos (conhecimentos, capacidades, estratégias) em diversos tipos de situações, nomeadamente situações problemáticas. Por isso, não se pode falar de competências sem lhe associar o desenvolvimento de algum grau de autonomia em relação ao uso do saber.” (Ministério da Educação, 2001, p. 21).

A reorganização curricular defende que as experiências de aprendizagem que devem ser proporcionadas a todos os alunos são: resolução de problemas, actividades de investigação, realização de projectos e exploração de conexões. Estas podem ser potencializados com a utilização de recursos de natureza diversa, tais como: a utilização das tecnologias e a utilização de materiais manipuláveis, já que o novo currículo salienta o facto de que todos os alunos devem ter a oportunidade de trabalhar com as calculadoras, elementares, científicas e gráficas, e com o computador, em diversos programas educativos, nomeadamente de gráficos, de funções e de geometria dinâmica, assim como aproveitar as potencialidades educativas da Internet. "Entre os contextos possíveis, incluem-se a resolução de problemas, actividades de investigação e os projectos" (Ministério da Educação, 2001, p. 71). Também realça que o trabalho realizado com diversos tipos de materiais manipulativos "são, ao longo de toda a escolaridade, um recurso privilegiado como ponto de partida ou suporte de muitas tarefas escolares, em particular das que visam promover actividades de investigação e a comunicação matemática entre os alunos" (Ministério da Educação, 2001, p.71). Esta utilização não constitui um fim mas um meio para o desenvolvimento da actividade intelectual dos alunos.

Convém referir que "a vivência de uma diversidade de situações de aprendizagem, a possibilidade de os alunos poderem reflectir, individualmente ou em grupo, sobre essas experiências e os conhecimentos a elas ligados contribuem para o desenvolvimento da competência Matemática" (Pinto *et al.*, 2003, p.35). Neste sentido, "ser-se matematicamente competente na realização de determinada tarefa implica ter não só os conhecimentos necessários, como a capacidade para os identificar e mobilizar na situação concreta e ainda a disposição para fazê-lo efectivamente" (Pinto *et al.*, 2003, p.37).

É explícito no *Currículo Nacional do Ensino Básico* (2001) que "a Matemática constitui um património cultural da humanidade e um modo de pensar. A sua apropriação é um direito de todos" (p.57). E que "a razão primordial para se proporcionar uma educação matemática prolongada a todas as crianças e jovens é de natureza cultural" (p.58). Deste modo, sublinham o carácter formativo da Matemática escolar.

Segundo este documento, "a ênfase da Matemática escolar não está na aquisição de conhecimentos isolados e no domínio de regras e técnicas, mas sim na utilização da Matemática para resolver problemas, para raciocinar e para comunicar, o que implica a confiança e a motivação pessoal para fazê-lo" (Ministério da Educação, 2001, p.58).

Este documento refere diversas competências matemáticas que todos os alunos devem desenvolver, tais como: raciocinar matematicamente, procurar regularidades, fazer e testar conjecturas, formular generalizações, pensar de maneira lógica, etc. (Ministério da Educação, 2001, p.57). Pode ler-se ainda, no documento, o contributo que a Matemática pode dar às outras disciplinas escolares na partilha de “ métodos próprios de estudar, de pesquisar e de organizar a informação, assim como de resolver problemas e de tomar decisões” (Ministério da Educação, 2001, p.59).

Outro aspecto importante a sublinhar é o facto de a Matemática constituir uma área com grande potencialidade “para a realização de projectos transdisciplinares e de actividades interdisciplinares”, tornando possível integrar conhecimentos variados.

Embora muitos dos aspectos focados tenham sido, incorporados nos novos currículos de Matemática, continuam ainda a ser um objectivo a atingir em muitas aulas de Matemática, de todos os níveis de ensino. Reconhece-se que continua a persistir uma diferença entre o que se preconiza e o que acontece ao nível da prática. Isto tudo, porque ainda hoje, em muitas salas de aula, são utilizados métodos expositivos, acreditando-se na eficácia da transmissão do saber. Nesta perspectiva, uma das tarefas que se impõem ao professor de Matemática é conseguir que os alunos entendam os diversos conceitos em jogo, não de uma forma mecânica, mas saibam operar com eles em diversos contextos da vida real.

Ponte (2002) considera que “este documento constitui, sem dúvida, a formulação de orientações gerais oficiais para o ensino da disciplina mais avançada e mais coerente, jamais realizada no nosso país” (pp.11-12).

2.2. Objectivos e Finalidades do Ensino da Matemática no Ensino Básico

A evolução da Matemática é permanente, estando sempre relacionada com os problemas de cada época e com os progressos da humanidade, torna-se assim importante que os alunos se apercebam desta ligação. Por isso, a Matemática ao longo tempo, foi ganhando prestígio sendo considerada fundamental na formação dos cidadãos. Por isso, “aprender Matemática é um direito básico de todas as pessoas – em particular, de todas as crianças e jovens – e uma resposta a necessidades individuais e sociais” (Abrantes, Serrazina, Oliveira, 1999, p. 17). Daí que a Matemática integra os currículos por razões de natureza cultural, prática e cívica, que têm a ver ao mesmo tempo com o desenvolvimento dos alunos, ao nível individual, e enquanto membros da sociedade e com o progresso desta.

> “A Educação Matemática tem o objectivo de ajudar a desocultar a Matemática presente nas mais diversas situações, promovendo a formação de cidadãos participativos, criativos e confiantes nos modos como lidam com a Matemática” (Ministério da Educação, 2001, p.58).

2.2.1. Porque se Ensina Matemática?

Existem inúmeras razões que justificam o ensino da Matemática nos dias de hoje. Podemos afirmar que esta disciplina é necessária à vida quotidiana e essencial em muitas actividades profissionais, visto que tem grande aplicabilidade em vários problemas práticos do dia-a-dia e em diferentes áreas do conhecimento. Podemos fundamentar, também, que a Matemática faz parte integrante do património cultural e histórico da humanidade e, portanto, é nossa obrigação transmiti-la às gerações vindouras, mostrando o seu carácter dinâmico, a sua evolução ao longo dos tempos, o seu papel na sociedade e a sua relação com as outras ciências. Advogamos que ela “ensina a pensar”, tornando-nos mais competentes; por exemplo, para pensar de forma abstracta e para fazer raciocínios dedutivos. Salientamos ainda o facto desta auxiliar a desenvolver valores estéticos, designadamente a noção de belo. Outra razão é o facto de ela poder constituir uma fonte de prazer intelectual. Por exemplo, na Grécia Antiga, esta era a principal razão para estudar Matemática. Outra razão apontada relaciona-se com o seu carácter formativo, pois, esta disciplina, ajuda no desenvolvimento de capacidades: análise, interpretação, crítica, argumentação, intuição, compreensão espacial, abstracção, cálculo, formulação e resolução de problemas, raciocínio, ... Outra razão, refere a sua utilidade: no quotidiano, na continuação dos estudos, no desenvolvimento científico e tecnológico, no exercício profissional e na cidadania.

Por outro lado, a Matemática é considerada uma linguagem universal, daí que todos os alunos devem ter a oportunidade de a aprender, ou seja, todas as pessoas “devem ter possibilidade de contactar, a um nível apropriado, com as ideias e os métodos fundamentais da Matemática e de apreciar o seu valor e a sua natureza” (Abrantes, Serrazina, Oliveira, 1999, p.17). O ensino da Matemática deve contribuir para ajudar os alunos a tornarem-se indivíduos competentes, críticos, confiantes e criativos nos aspectos essenciais em que a sua vida se relaciona com esta disciplina. Convém referir que é necessário educar os alunos para uma sociedade em rápida evolução, ou seja, estes devem estar preparados para a mudança e abertos à inovação.

Segundo Ponte, Boavida, Graça e Abrantes (1997) as finalidades do ensino da Matemática em qualquer nível de ensino envolvem diversas dimensões, destacando-se aspectos de ordem cultural, social, formativa e política. Na perspectiva destes autores “a valorização que se dá a cada uma delas tem consequências profundas na elaboração do currículo, no processo de aprendizagem e no papel social desempenhado (…) por esta disciplina” (p. 60).

Ainda de acordo com Pontes, Boavida, Graça e Abrantes (1997) no que respeita às dimensões culturais, “qualquer currículo envolve sempre diversas grandes opções no modo como valoriza (ou não) a perspectiva histórica e as aplicações desta ciência, levando os alunos a compreender o seu papel na sociedade” (p.62). Aliás, o facto de a Matemática fazer parte integrante de qualquer cultura, sustenta a grande dimensão cultural que encontramos nas finalidades do ensino da Matemática.

A Matemática para os Egípcios e os Babilónios em tempos remotos tinha um carácter utilitário, assim como hoje em dia para muitos grupos sociais tais como: os artesões, os pescadores, os vendedores ambulantes, etc. Muitos são os indivíduos que a utilizam para resolver problemas do quotidiano, desde os mais simples aos mais complicados. Por exemplo, para comprar um artigo em época de saldos é necessário calcular o valor do desconto, para poder saber o seu custo; para pavimentar um chão com azulejos é necessário saber calcular a área do polígono. Tais conceitos podem ser entendidos como parte de uma herança cultural, que deve ser transmitida às futuras gerações. A cultura Matemática tem resolvido, nos diferentes momentos da história, problemas fundamentais que lhe deram prestígio. Daí que se justifique a sua inclusão no ensino! Neste sentido, “a Matemática constitui um património cultural da humanidade e um modo de pensar. A sua apropriação é um direito de todos.” (Abrantes, Serrazina e Oliveira, 1999, p.17). Como tal, não devemos privar os alunos da aprendizagem da Matemática, como também não devemos priva-los da aprendizagem da leitura e da escrita.

A Matemática tem um papel importante uma vez que surge em todas as actividades da sociedade, constituindo o que alguns autores designam por uma *cultura invisível.* As finalidades da dimensão social atribuídas ao ensino da Matemática incluem segundo Ponte *et al.* (1997):

> “a qualificação profissional de mão-de-obra indispensável para atender às necessidades do mercado de trabalho bem como às necessidades de funcionamento da sociedade

> actual; (…) proporcionar ao cidadão comum as ferramentas matemáticas básicas para o seu desempenho social, âmbito em que podemos distinguir três domínios essenciais de qualificação: o vocacional, o prático e o cívico" (p.63).

A vertente vocacional visa ajudar os alunos a preparar-se para uma variedade de carreiras profissionais e científicas. Por exemplo, no Ensino Secundário e no Ensino Superior, os alunos fazem opções, através de cursos orientados para as diversas profissões.

A vertente prática deve expressar-se, não só na aquisição de conhecimentos essenciais para a resolução de problemas práticos do dia-a-dia, mas, também, no desenvolvimento de capacidades fundamentais numa sociedade cada vez mais tecnológica. Por exemplo, a capacidade de visualização e organização do espaço permite-nos orientar no dia-a-dia, ler mapas, seguir itinerários, ler tabelas (horário de autocarros).

O livro *A Matemática na Educação Básica* (Abrantes, Serrazina e Oliveira, 1999) menciona que todos os alunos devem adquirir literacia Matemática, no sentido de serem matematicamente competentes, ou seja, os alunos devem ter os conhecimentos necessários para o desempenho de uma dada tarefa, mas também a capacidade de os identificar e mobilizar na situação concreta e também a disposição para o fazer. Neste sentido, o currículo de Matemática deve contemplar a aquisição de conhecimentos e o desenvolvimento de capacidades, atitudes e valores.

A vertente cívica "visa tornar os alunos cidadãos capazes de participar com sentido crítico numa sociedade cada vez mais matematizada. Ela inclui o conhecimento matemático necessário para que cada indivíduo se possa desenvolver na sociedade, para comunicar e receber informação em geral, interpretar esta informação e tomar decisões correctas com base na sua interpretação" (Ponte *et al.*, 1997, p. 63). Por exemplo, os indivíduos devem ser capazes de analisar qual o melhor banco para pedir um empréstimo para a compra de uma casa.

Um dos objectivos do ensino é o desenvolvimento integral dos indivíduos. A educação Matemática pretende que os cidadãos desenvolvam uma adequada compreensão da disciplina, de forma a poderem utilizá-la nos mais diversos contextos. Isso implica a aquisição de conhecimentos e o desenvolvimento de diversas capacidades, atitudes e valores. O ensino da Matemática evoluiu de uma função, exclusivamente instrutiva, que privilegiava a memorização e a mecanização, para uma "função formalista mais ampla, considerando o conhecimento matemático estreitamente ligado ao mundo da cultura e aos interesses, preferências e inclinações dos indivíduos" (Ponte *et al.*, 1997, p. 64). De acordo com Ponte *et al.* (1997) os valores formativos da Matemática envolvem aspectos cognitivos, metacognitivos e afectivos. Os autores destacam os seguintes aspectos: raciocinar matematicamente, relacionar conceitos, usar definições, fazer demonstrações, formular e resolver problemas, mas, também, de construir e aperfeiçoar modelos matemáticos e discutir a aplicação desta ciência a outras ou na vida quotidiana; a capacidade de comunicar e interpretar ideias matemáticas expressas, oralmente e por escrito; a aptidão para usar, com desembaraço as ferramentas e ideias matemáticas, estabelecendo uma relação positiva com esta disciplina.

Por fim, destacamos a última finalidade da Matemática: a de dimensão política. Na sociedade actual, a Matemática tem um papel de selecção, visto que o desempenho dos alunos em Matemática tem constituído um critério, por exemplo, no ingresso ao Ensino Superior, na escolha da carreira profissional. Por outro lado, o ensino da Matemática pode ser conduzido de forma a fomentar o desenvolvimento de valores éticos e democráticos, a promover a tolerância, a solidariedade, a integração social (como a capacidade de cooperação, a actividade crítica e a acção comunicativa).

Assim, todas estas finalidades devem ser consideradas, aquando a elaboração do currículo.

Ao longo dos tempos, verificamos que cada época valoriza diferentes aspectos na aprendizagem dos alunos, que mudam à medida que variam as grandes finalidades da educação Matemática e à medida que a sociedade evolui. Daí que "um currículo pode vigorar durante mais ou menos tempo, conforme se revela mais ou menos adequado às suas funções e ao jogo das forças políticas e sociais a que se encontra submetido" (Ponte *et al.*, 1997, p. 45).

Como já foi referido, antigamente, a formação matemática necessária a todas as pessoas era a aquisição de técnicas de cálculo, nomeadamente a capacidade para efectuar as operações aritméticas. A aprendizagem da Matemática consistia basicamente em fazer cálculos simples ou utilizar, fórmulas existentes, o que era suficiente, quer para poder comprar ou vender; quer para poder trocar ou emprestar; quer para poder construir ou fabricar, ou ainda, para conseguir ficar aprovado num exame de Matemática. Como tal, a Matemática era necessária para o dia-a-dia e, a nível profissional, para as pessoas que trabalhavam no comércio, na exploração marítima, para os responsáveis eclesiásticos e para os governantes (marcação das fronteiras dos seus territórios e para auferir e despender dos recursos do seu governo). Sendo esta perspectiva vista como uma herança que nos foi deixada pelos matemáticos Egípcios dos primórdios.

Actualmente, trata-se de uma visão ultrapassada do que são as capacidades matemáticas que todas as pessoas devem desenvolver. Hoje, as capacidades de cálculo não correspondem às exigências da sociedade actual, visto que, por exemplo, as máquinas dos supermercados calculam a soma dos produtos, os trocos e as percentagens, o que demonstra que no dia-a-dia há menos exigências de cálculo do que no passado. Naturalmente, que o cálculo faz “parte integrante da Matemática mas aprender procedimentos de cálculo isolados, só por si, não promove o contacto dos alunos com as ideias e os modos de pensar fundamentais da Matemática e não garante que eles sejam capazes de mobilizar os conhecimentos relevantes quando tiverem que enfrentar mesmo as situações problemáticas mais simples surgidas num contexto diferente” (Abrantes, Serrazina, Oliveira, 1999, p. 18). Hoje, temos noção que não é por fazer muitas contas que os alunos aprendem a identificar quais são as operações que fazem sentido naquele contexto. E não é por fazer muitos exercícios repetitivos, que os alunos conseguem desenvolver a capacidade de resolver problemas. Averiguamos é que o aluno, quando executa uma “tarefa matemática de forma mecânica e sem lhe atribuir qualquer sentido, é muito provável que ele seja incapaz de reconstituir aquilo que parecia saber fazer perante uma situação que apresenta alguma diferença (mesmo que ligeira) ou que esteja colocada num contexto diferente (ainda que familiar)” (Abrantes, Serrazina, Oliveira, 1999, p. 25). Daí que hoje, as competências de cálculo, devem estar ligadas a problemas com situações concretas e à capacidade do aluno analisar a razoabilidade de um resultado, de acordo com a complexidade da situação.

Na sociedade actual, apela-se ao desenvolvimento de outras capacidades: formular e resolver problemas, analisar e resolver situações problemáticas, raciocinar e comunicar matematicamente e reflectir sobre os processos e resultados.

Assistimos que, ao longo do tempo, as finalidades foram-se alterando porque a sociedade assim o exigiu.

De acordo com esta ideia, a APM, em *Renovação do Currículo de Matemática* (1988), indica alguns objectivos e orientações fundamentais para o ensino desta disciplina. Segundo este documento, os objectivos gerais são: proporcionar aos alunos experiências de aprendizagens diversificadas, em ambientes ricos e variados, promovendo o desenvolvimento de capacidades e hábitos de natureza cognitiva, afectiva e social; promover uma experiência positiva, com significado e importante para o aluno; os currículos e programas de Matemática devem encorajar experiências de aprendizagem que tem em conta os interesses de natureza individual, social e cultural dos alunos; a avaliação deve recorrer a diversos instrumentos, não somente a testes e exames escritos, individuais. Dos objectivos mais específicos, destacamos os seguintes: a resolução de problemas deve ser o centro do ensino e da aprendizagem da Matemática; devem-se proporcionar actividades de aplicação da Matemática; o ensino e a aprendizagem da Matemática devem promover a utilização das novas tecnologias, nomeadamente, os computadores e as calculadoras; a escolha dos conteúdos matemáticos, a incluir nos currículos escolares, e as actividades propostas para a sua exploração e desenvolvimento devem ter em conta os objectivos gerais.

Também no documento *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar* (1991), são definidos cinco objectivos gerais que devem estar presentes nos currículos e nas situações de ensino e aprendizagem da matemática. Eles são: (1) aprender a dar valor à Matemática; (2) tornar-se confiante nas próprias capacidades; (3) tornar-se apto a resolver problemas matemáticos; (4) aprender a comunicar matematicamente; (5) aprender a raciocinar matematicamente” (NCTM, 1991, pp. 5-6).

O primeiro objectivo valoriza a importância de proporcionar aos alunos numerosas experiências relacionadas com a evolução cultural, histórica e científica da Matemática, de modo a poderem apreciar o papel que esta disciplina desempenhou no desenvolvimento da nossa sociedade contemporânea e explorar as relações que existem entre ela e as disciplinas que serve. O segundo objectivo sugere que, na aprendizagem da Matemática, os alunos devem tornar-se confiantes nas suas próprias capacidades e potencialidades matemáticas, devem sentir-se capazes de utilizar o seu poder matemático nas tarefas propostas e nas situações problemáticas que surgem no mundo que o rodeia. O terceiro objectivo é a primeira norma da *Agenda para a Acção* onde se salienta que o foco da Matemática escolar é a resolução de problemas. E, por fim, os dois últimos objectivos referem-se à capacidade dos alunos para comunicar e raciocinar matematicamente. O primeiro implica a aprendizagem dos sinais, símbolos e termos da Matemática; o segundo destaca, como elementos fundamentais da actividade Matemática, a formulação de conjecturas, as justificações e construção de uma argumentação.

Ainda segundo o citado documento, estes objectivos implicam que os alunos devem:

- participar em numerosas e variadas experiências relacionadas entre si, que os encorajem a dar apreço ao desenvolvimento da Matemática, a desenvolver hábitos de pensamento matemático e a compreender e apreciar o seu papel da Matemática na vida da humanidade;
- ser encorajados a explorar, a fazer tentativas, e mesmo a fazer erros e a corrigi-los, de tal modo que ganhem confiança na sua capacidade de resolver problemas complexos;
- ler, escrever e discutir Matemática e, ainda, conjecturar, testar e construir argumentos sobre a validade de uma conjectura.

No currículo de Matemática, definem-se finalidades e objectivos de ensino que contemplam, quer aspectos de natureza essencialmente cognitiva, quer aspectos de natureza efectiva e social, ao nível da aquisição e desenvolvimento de conhecimentos, de capacidades e de atitudes e valores.

Os objectivos gerais do currículo de Matemática apresentado, em 1991, para o Ensino Básico, foram: desenvolver a confiança em si próprio, desenvolver o raciocínio, ampliar o conceito de número, desenvolver o cálculo, desenvolver a capacidade de comunicação, desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real, iniciar-se em processos e técnicas de tratamento de informação, desenvolver o conhecimento do espaço, desenvolver hábitos de trabalho e de persistência, desenvolver o conceito de função, desenvolver o espírito de tolerância e de cooperação, desenvolver a capacidade de resolução de problemas e desenvolver a curiosidade e gosto de aprender.

O documento *Organização Curricular e Programas: Ensino Básico 3º Ciclo*, propõem cinco finalidades para o ensino desta disciplina:

- desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática como instrumento de interpretação e de intervenção no real;
- promover a estruturação do indivíduo no campo do pensamento, desenvolvendo os conceitos de espaço, tempo e quantidade, ou estabelecendo relações lógicas, avaliando e hierarquizando;
- desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como a memória, o rigor, o espírito crítico e a criatividade;
- facultar processos de aprender a aprender e condições que despertem o gosto pela aprendizagem permanente;

- promover a realização pessoal mediante o desenvolvimento de atitudes de autonomia e cooperação (p. 175).

Neste documento “atribui-se ao ensino da Matemática uma dupla função: desenvolvimento de capacidades e atitudes; aquisição de conhecimentos e de técnicas para a sua mobilização” (p. 171).

É de salientar que muitos dos aspectos focados nos documentos anteriormente referidos estão presentes nas orientações curriculares, propostas em 1991, “ainda que em formulações nem sempre muito claras e com uma articulação por vezes deficiente, não só entre diferentes níveis de objectivos, mas também entre esses objectivos e as outras componentes curriculares, nomeadamente os conteúdos e as orientações metodológicas” (APM, 1998, p. 21).

Mas será que os objectivos e finalidades propostas estão a ser concretizados e alcançados?

No currículo de 1991 foram introduzidas alterações significativas em relação aos que vigoravam até finais da década de oitenta. Como podemos verificar, as novas orientações curriculares valorizam uma grande variedade de objectivos; no entanto, “existe uma articulação frequentemente deficiente, não só entre diferentes níveis de objectivos, mas também entre os objectivos e os conteúdos e as orientações metodológicas” (APM, 1998, p. 31).

O documento *Matemática 2001- Diagnósticos e Recomendações para o Ensino Aprendizagem da Matemática*, publicado em 1998, recomenda com base num estudo realizado entre Março de 1996 e Outubro de 1998, relativamente aos objectivos e finalidades do ensino básico que:

> “devem ser clarificadas as grandes finalidades para o ensino da Matemática propostas nos currículos, quer ao nível da sua formulação, quer ao nível da sua articulação com os objectivos gerais, proporcionando maior integração dos diversos domínios (conhecimentos, capacidades e atitudes e valores) e maior ênfase nos objectivos dos domínios das atitudes e valores relacionados com a Matemática” (APM, 1998, p. 31).

Neste relatório, analisam-se questões relacionadas com as finalidades e os objectivos do ensino da Matemática, que constam nos programas em vigor de 1991. Nesse estudo, relativamente à importância que os professores atribuem às diferentes finalidades, verificamos que os mesmos valorizam as finalidades associadas directa ou indirectamente com a Matemática, ou seja, as relacionadas com o raciocínio e resolução de problemas e a capacidade de utilizar a disciplina como instrumento de interpretação e de intervenção no real. Sendo que as finalidades do domínio das atitudes e valores, e as que não estão associadas à Matemática são menos valorizadas pelos professores. Em relação a importância que os professores atribuem aos diferentes objectivos gerais do programa, verificamos que estes valorizam mais os objectivos que visam o desenvolvimento de capacidades que lhe estão associadas (raciocínio, utilização da Matemática em situações reais, resolução de problemas), e valorizam menos os objectivos relacionados com a aquisição e desenvolvimento de conhecimentos, directamente relacionados com conteúdos matemáticos. É assim que:

> "como grande finalidades para o ensino desta disciplina, se dá especial relevo ao desenvolvimento da capacidade de resolver problemas e de raciocinar e comunicar matematicamente, ao desenvolvimento de atitudes positivas nos alunos face à Matemática, nomeadamente a confiança nas suas próprias capacidades e potencialidades matemáticas, a valorização da Matemática como património cultural de grande importância na evolução cientifica e social, e à capacidade de utilizar a Matemática para uma melhor compreensão do mundo"(APM, 1998, p.21).

Também no parecer da APM sobre o processo de *Reflexão Participada sobre os Currículos do Ensino Básico*, são salientados aspectos que devem ser discutidos e clarificados em relação as finalidades dos programas em vigor, nomeadamente, quais as competências e aprendizagens essenciais que devem ser desenvolvidas, como consequência das finalidades estabelecidas para o Ensino Básico, com a indicação das responsabilidades/contributos de cada ciclo. Também outro aspecto que deve ser analisado e discutido, antes de definir um conjunto de competências e de aprendizagens essenciais, é se o Ensino Básico deve ser orientado para o prosseguimento de estudos ou deve ser orientado, principalmente, para a integração na vida activa.

A publicação em Abril de 2000, do documento *Principles and Standards for School Mathematics*, do NCTM, veio actualizar e dar novo impulso à aplicação prática dos seus documentos anteriores, os Standards sobre o currículo, a prática profissional e a avaliação. Este confirma as ideias essenciais das *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar* (NCTM, 1991), mas propõe diversas alterações. Neste documento, a expressão "poder matemático", que constituía uma ideia aglutinadora do documento de 1991, desapareceu nesta versão e não se dá tanto ênfase à ideia de que os alunos podem e devem fazer Matemática. Porém, outras ideias continuam a ter um lugar de destaque, como por exemplo, a resolução de problemas, que, no novo documento, é um dos standards de processo. Embora não estejam definidas de um modo explícito um conjunto de finalidades para o ensino da disciplina, dá a entender que estas se desdobram por quatro grandes domínios, nomeadamente: (i) o uso da Matemática na vida de todos os dias, incluindo o exercício da cidadania; (ii) a sua apropriação como parte da herança cultural; (iii) o seu uso em actividades profissionais e (iv) o seu uso pela comunidade técnica e científica (NCTM, 2000, p.4). Convém referir que este documento foi elaborado tendo em conta as realidades e o contexto americano, pelo que seria um erro transpor estes standards sem serem adaptados, de forma crítica, à realidade portuguesa. No entanto, constitui um importante documento de trabalho para ser estudado e analisado atentamente por todos aqueles que, em Portugal, se interessam pelo ensino e aprendizagem da Matemática.

Em 2001, o Ministério da Educação publica o documento *O Currículo Nacional do Ensino Básico – Competências Essenciais*, onde são definidas duas finalidades para o ensino da Matemática: (1) proporcionar aos alunos um contacto, com as ideias e métodos fundamentais da Matemática que lhes permita apreciar o seu valor e a sua natureza e (2) desenvolver a capacidade e confiança pessoal no uso da Matemática para analisar e resolver situações problemáticas, para raciocinar e comunicar. Estas finalidades para o Ensino Básico, na disciplina de Matemática, ficaram directamente relacionadas com um conjunto de competências consideradas "essenciais", que os alunos deverão adquirir ao longo do seu percurso escolar nos, primeiro, segundo e terceiro ciclos.

De acordo com Ponte, Matos e Abrantes (1998), as competências são de diversos níveis de complexidade. As competências elementares implicam processos de simples memorização e execução, incluindo o conhecimento de factos específicos, terminologias, conceitos, procedimentos e a capacidade básica de comunicação. As competências intermédias dizem respeito a tarefas que envolvem um grau maior de complexidade, como a compreensão de relações matemáticas, de argumentação matemática, a resolução de um problema relativamente simples ou a aplicação de ideias conhecidas a situações simples. As competências de ordem superior implicam a capacidade de lidar com novas situações, que incluem a exploração e investigação, a formulação e o teste de conjecturas, a resolução de problemas relativamente complexos, a realização e a crítica de demonstrações, a análise crítica de teorias matemáticas e a modelação.

Convém referir que estas finalidades propostas no currículo de 2001, resumem as que já foram apresentadas na reforma anterior. Contudo, encontramos muitas dificuldades na consecução das finalidades do ensino da Matemática. Por exemplo, no programa do Ensino Básico foram poucas as alterações efectuadas; no entanto, pretende-se que os alunos desenvolvam uma série de competência, na sua passagem pelos três ciclos do ensino correspondente. Ou seja, um ensino orientado para os processos e não para os conteúdos não deixa de precisar de conteúdo, mas exige que estes sejam actualizados ou reorientados, para se tornar coerente com o currículo de 2001. Neste sentido, o programa deveria ser mais limitado, para que cada aluno possa desenvolver determinadas competências que necessitam de tempo para serem desenvolvidas e amadurecidas.

Outro aspecto, a ter em conta é o facto do currículo fazer referência a um conjunto de recursos necessários à sua concretização, que incluem a utilização de materiais manipuláveis e das tecnologias, nomeadamente as calculadoras e os computadores. No entanto, em muitas escolas, esses recursos são escassos, dificultando, para muitos professores, o exercício da sua profissão. Infelizmente, a ideia de que a Matemática é uma disciplina árida, abstracta, de quadro e giz permanece presente em muitas escolas, sendo um dos motivos que justificam a apatia e a falta interesse nas aulas actuais. Por exemplo: no tema de Geometria, o currículo faz referência à utilização de matérias manipuláveis e de software geométrico. O problema é que muitas escolas não dispõem de meios logo, dificilmente, o professor poderá desenvolver certas competências nos alunos. Na nossa opinião, para um professor desenvolver o seu trabalho bem, terão de existir essas condições. Só deste modo a concretização do currículo faz sentido, visto que o que esta prescrito no currículo é muito diferente da realidade existente nas escolas.

Em suma, a falta de meios e infra-estruturas, a falta de formação de professores, direccionada para as necessidades dos docentes, a extensão do programa, são algumas das razões que dificultam a concretização das finalidades do ensino da Matemática.

2.2.2. Finalidades do ensino da Geometria

Na década de cinquenta, dava-se muita importância à Geometria, porque era ela que proporcionava o rigor. Mas, com a Movimento da Matemática Moderna o papel da Geometria no ensino foi desvalorizado, sendo vista apenas como " uma parente pobre da álgebra linear, sem grande interesse para o prosseguimento dos estudos" (Abrantes, Serrazina e Oliveira, 1999, p. 67). No entanto, nos últimos anos assistimos a uma revalorização da geometria nos programas desta disciplina. Hoje a aplicabilidade deste item tem como finalidades permitir ao aluno o desenvolvimento do raciocínio, mostrar como a Matemática se relaciona com outras áreas do conhecimento, desenvolver a capacidade de usar a disciplina como instrumento de interpretação e intervenção no real, desenvolver a capacidades de organização e de comunicação, quer escrita ou oral, desenvolver o espírito crítico e a criatividade, promover a realização do individuo como pessoa, favorecendo as atitudes de autonomia e cooperação. Para tal, cabe ao professor propor actividades de construção e manipulação de modelos, ligadas a problemas históricos; de exploração de programas de computador e de exploração das conexões da geometria com outras áreas da matemática.

A Geometria está presente no mundo que nos rodeia, sendo uma das razões pela qual deve ser ensinada. Por exemplo, está presente em várias áreas do conhecimento da nossa sociedade actual: na Produção Industrial, no Design, na Arquitectura, na Biologia, na Coreografia, na Medicina, na Topografia, nas Artes Plásticas. Estas áreas dependem cada vez mais de raciocínios geométricos ou do desenvolvimento de capacidades visuais. Portanto, a aprendizagem da geometria e das suas potencialidades, tem de ser, inevitavelmente, valorizados no ensino actual. Por outro lado, "o conhecimento básico das formas geométricas é importante na vida quotidiana, para as pessoa se orientarem, estimar formas e distâncias, fazer medições indirectas ou apreciar a ordem e a estética na natureza e na arte. É, também, importante na comunicação, por exemplo, para dar e receber informações relativas ao modo de se chegar a um dado lugar" (Abrantes, Serrazina e Oliveira, 1999, p.69).

Segundo Barbosa (s.d.), para justificar a presença da Geometria no currículo de Matemática, bastaria o argumento de que, sem estudar esta, as pessoas não desenvolveriam o pensar geométrico ou o raciocínio visual e, sem essa habilidade, dificilmente conseguiriam resolver as situações da vida que fossem geometrizadas. Sem a Geometria, a leitura interpretativa do mundo torna-se incompleta, a comunicação das ideias fica reduzida e a visão da Matemática torna-se distorcida. Por exemplo, tarefas tais como, escolher um itinerário num mapa ou pendurar um quadro numa parede, exigem um sentido de orientação no espaço, ou seja, são necessários, alguns conhecimentos de Geometria.

Neste contexto, actualmente, o ensino da Geometria segundo as novas orientações curriculares, ocupa um lugar importante, quer no Ensino Básico, quer no Ensino Secundário.

Relativamente ao ensino da Geometria, no terceiro ciclo, este inicia-se no sétimo ano, com o estudo da semelhança de figuras e de polígonos; perímetros, áreas e volumes; posição relativa de planos e rectas; ângulos; propriedades dos triângulos e dos quadriláteros. No oitavo ano, o estudo da Geometria está presente no capítulo de decomposição de figuras e Teorema de Pitágoras, lugares geométricos e translações. Por fim, no nono ano estuda-se as isometrias, a trigonometria e a geometria no espaço (sólidos geométricos, áreas e volumes de sólidos, posição relativa de rectas e planos).

A Geometria é um tema propício ao desenvolvimento do pensamento matemático, através da realização de investigações e de outras actividades, contribuindo para que os alunos possam manipular, observar, comparar, descobrir, construir, traçar, medir, recortar, conjecturar, procurar e verificar propriedades, trabalhar com puzzles, utilizar raciocínios indutivos e dedutivos, fazer esboços para melhor compreender um problema, discutir ideias, procurar argumentos convincentes, resolver problemas por construção. Só assim, os alunos poderão desenvolver determinadas competências ao longo da sua educação básica.

Segundo Abrantes *et al.* (1999), o raciocínio geométrico é uma das competências matemáticas a desenvolver nos alunos. Como tal, a observação, a experimentação com materiais manipulativos e a construção de modelos auxiliam no desenvolvimento de determinadas competências gerais definidas para o Ensino Básico. De facto, o *Currículo Nacional do Ensino Básico* (2001) indica que todos os alunos devem estar aptos para realizar construções geométricas, para reconhecer e analisar propriedades de figuras geométricas, recorrendo a materiais manipuláveis e a software geométrico, para utilizar a visualização e o raciocínio espacial na análise de situações e na resolução de problemas em Geometria e em outras áreas da Matemática, para formular argumentos válidos recorrendo à visualização e ao raciocínio espacial. Além disso, os alunos devem estar predispostos para procurar e explorar padrões geométricos e investigar propriedades e relações geométricas. Finalmente, faz parte das finalidades da

Geometria, das grandezas e da medida, desenvolver nos alunos a sensibilidade para apreciar esta área da Matemática no mundo real e o reconhecer e usar as ideias geométricas nas mais variadas situações, por exemplo, na comunicação. Com o ensino da Geometria pretende-se no terceiro ciclo, “a aptidão para visualizar e descrever propriedades e relações geométricas, através da análise e comparação de figuras, para fazer conjecturas e justificar os seus raciocínios; a aptidão para realizar construções geométricas, nomeadamente quadriláteros, outros polígonos e lugares geométricos; a compreensão do conceito de forma de uma figura geométrica e o reconhecimento das relações entre elementos de figuras semelhantes; a aptidão para resolver problemas geométricos através de construções, nomeadamente envolvendo lugares geométricos, igualdade e semelhança de triângulos, assim como para justificar os processos utilizados; o reconhecimento do significado de fórmulas e a sua utilização no cálculo de áreas e volumes de sólidos e de objectos do mundo real, em situações diversificadas; a predisposição para identificar transformações geométricas e a sensibilidade para relacionar a Geometria com a arte e com a técnica; a tendência para procurar invariantes em figuras geométricas e para utilizar modelos geométricos na resolução de problemas reais” (Ministério da Educação, 2001, p. 63).

É nítida a importância dada, actualmente, à Geometria no currículo de Matemática, nos documentos oficiais da última reforma curricular e em todos os níveis de ensino. Visto que a Matemática faz parte de um património cultural que é determinante na organização da nossa sociedade, torna-se importante que os alunos contactem com esse património. Como tal, a Geometria que deve ser ensinadas nas escolas, ao longo de todos os ciclos, deve ser aquela que nos permite interpretar e intervir no espaço em que vivemos. Segundo Rita Bastos, “esta inclui a visualização de objectos, a sua representação, a manipulação dessas representações e a criação de novos objectos; inclui também a resolução de problemas de aplicação da Geometria a situações da vida real, a sua ligação à arte, etc.” (Veloso, Fonseca, Ponte e Abrantes, 1999, p. 70). Nesta perspectiva, o currículo não deverá ser organizado em torno de conceitos geométricos (polígonos, circunferência e círculo, áreas e volumes) pois não revela utilidade para o aluno, isto porque só fará sentido quando for aprendido pelo aluno num contexto de aplicação, intervenção no espaço em que vive; daí falarmos no desenvolvimento de competências matemáticas. Segundo Eduardo Veloso, o currículo de Geometria deveria ser organizado em torno de ideias unificadoras como Visualização e Representação, Simetrias, Formas e Dimensões. Não importa se uns alunos conhecem melhor a família dos poliedros arquimedianos e outros conhecem a família dos deltaedros. Neste sentido, não são os objectos geométricos que interessam, porque esses são esquecidos, mas a qualidade do pensamento matemático e as capacidades que o aluno desenvolveu.

A Geometria tem um papel indiscutível no ensino da Matemática pelo seu carácter formativo e estruturante do pensamento matemático de cada pessoa, nomeadamente na interacção das conexões dos conceitos geométricos entre si ou com outros matemáticos ou ligados a outras ciências. O professor deverá, neste sentido, propor aos alunos actividades interessantes e adequadas ao seu nível de desenvolvimento e maturidade. O desenvolvimento da tecnologia (computadores e calculadoras) e a utilização de materiais manipulativos contribui para que a ênfase no ensino incida nos aspectos mais conceptuais da Matemática em detrimento dos seus aspectos mais mecânicos. A aquisição de conhecimentos matemáticos e o desenvolvimento de determinadas capacidades implica que o aluno, enquanto pessoa, possa ter uma participação crítica e interventiva na sociedade.

2.3 - Perspectiva histórica da Geometria nos programas de Matemática

Veloso (1998) refere que, durante a década quarenta e cinquenta - Matemática Clássica - o currículo da Geometria dos liceus tinha dois conteúdos principais: as construções geométricas, que permitiam aos professores promoverem actividades interessantes de resolução de problemas, e o estudo da Geometria euclidiana no plano e no espaço, no estado exacto em que Euclides a deixara.

Embora a nível internacional, a discussão sobre o programa de Geometria era já debatido desde a década de 20, em Portugal, devido à situação política que gerou um isolamento científico, só durante os anos trinta e sete – quarenta e sete é que começaram a ser debatidas questões relacionadas com o ensino da Matemática. Veloso (1998) destaca Aniceto Monteiro, Ruy Luís Gomes e Bento de Jesus Caraça e a criação da Gazeta Matemática como os principais responsáveis pelo debate sobre a forma como o ensino da Matemática estava a ser ministrado, em Portugal. A criação da Gazeta de Matemática permitiu a publicação de artigos que ajudavam à reflexão sobre as questões do ensino. Em relação à Geometria, Veloso (1998) faz referência a dois artigos publicados nessa revista de Matemática de Emma Castelnuovo. O primeiro artigo intitula-se *Um Método Activo no Ensino da Geometria Intuitiva* traduzido por Sebastião e Silva, em mil novecentos e quarenta e sete. Neste, a autora propõe um novo tipo de abordagem para o ensino da Geometria em que "substitui um método descritivo por um método construtivo com passagem do concreto ao abstracto, do complexo ao simples e, portanto, ordenação do curso segundo o desenvolvimento histórico" (Veloso, 1998, p. 21). O segundo artigo é publicado em 1953 e intitula-se *I Films di geometria di Jean Louis Nicolet*. A autora destaca a utilização de filmes no ensino como uma das formas de introduzir na escola movimento.

No Programa do Ensino Primário (Decreto – lei nº 42 994, 28 de Maio de 1960) os temas ensinados aos alunos eram a Aritmética e a Geometria. O ensino da Geometria era apenas leccionado na terceira classe, sendo, por isso, menos aprofundado que o de Aritmética. Os números e as operações aritméticas elementares eram o tema mais abordado, dando-se grande ênfase ao treino das técnicas de cálculo. Nesse decreto eram dadas as seguintes instruções em relação ao ensino da geometria: "A Geometria […] não pode ser ensinada pelo método que lhe é próprio, isto é, dedutivamente. A isso se opõe o carácter elementar do programa, por sua vez imposto pela idade dos alunos. Os processos a utilizar serão a observação, a análise e ainda a imaginação criadora das crianças" (Programa do Ensino Primário, 1960, citado em Porfírio, 1998, p. 34).

No programa de Matemática do Ensino Liceal (Decreto nº 37.112 de 22 de Outubro de 1948) no 1º Ciclo (actuais 5º e 6º anos) ensinava-se a Aritmética e a Geometria. "Com o ensino da Matemática, neste ciclo, pretende-se que o aluno adquira o hábito de observar factos e generalizar resultados, de sistematizar e classificar as propriedades estabelecidas experimentalmente, e, sem deixar de estimular a curiosidade e o interesse, pretende-se ainda habituar a criança a concentrar-se sobre a matéria em estudo, a executar com ordem e cuidado as experiências que constituem o fundo deste ensino e a registar, no seu livro ou no seu caderno, com métodos e asseio e em linguagem adequada ao seu desenvolvimento mental, não apenas as experiências em que tomou parte ou viu fazer no curso, mas também o que se pode inferir delas e esteja no âmbito deste programa" (Decreto nº 37.112 de 22 de Outubro de 1948). Em relação ao tema Geometria nas observações finais do programa, são salientados aspectos a ter em conta aquando o seu ensino, tais como: a observação, a experimentação e a utilização de materiais didácticos. No Decreto nº 37.112 de 22 de Outubro de 1948, pode ler-se, nas observações, algumas recomendações para o ensino da Geometria,

> "(…) os conhecimentos de Geometria continuam a adquirir-se por intuição sensível baseada na observação e na experiência, sendo as demonstrações lógicas totalmente

banidas e substituídas por verificações experimentais. Recomenda-se particularmente todo o cuidado com o rigor das definições e com o modo de sistematizar e coordenar os conhecimentos que os alunos vão adquirindo por via experimental" (Ministério da Educação, 1948).

Também faz referência ao uso de materiais didácticos tais como: colecção de figuras planas, sólidos geométricos, em cartão ou em madeira, caixas de pesos e medidas, balanças de Roberval, provetas graduadas e tesouras.

Apesar destas observações, na prática, o ensino da Matemática era dirigido, essencialmente, para a resolução de exercícios com vista à memorização, à mecanização e ao cálculo.

Em relação aos conteúdos verificamos algumas semelhanças, em termos de listagem de temas, entre os programas de Matemática do 2º Ciclo actualmente em vigor, e os do 1º Ciclo do Ensino Liceal.

Em relação ao 2º Ciclo do antigo Ensino Liceal (actuais sétimo, oitavo e nono anos de escolaridade), os temas ensinados aos alunos eram uma iniciação ao estudo da Álgebra e Geometria (Decreto nº 37.112, de 22 de Outubro de 1948). Ensinava-se nos liceus a Geometria de Euclides, no estado exacto em que este a deixara. Assim, o rigor e o sentido lógico das demonstrações de geometria elementar eram considerados de grande importância para a aprendizagem da Matemática, pois os alunos adquiriam hábitos de precisão de ideias e de linguagem, que permitiam aplicar o raciocínio lógico-dedutivo não só a outras ciências, como a questões da vida real. Neste ciclo "recomenda-se o uso de modelos, principalmente em Geometria no espaço, não com a finalidade do 1º Ciclo, mas porque a observação e a experiência devem preceder as demonstrações; estas serão feitas por vezes sem recurso a figuras na pedra, servindo o modelo de base ao encadeamento lógico dos raciocínios" (Decreto nº 37.112, de 22 de Outubro de 1948).

No 3º Ciclo do Ensino Liceal (actuais décimos e décimo primeiro anos) estudava-se a Álgebra, a Geometria Analítica, a Trigonometria e a Aritmética Racional. As indicações dadas no programa eram que "o estudo da Matemática, no 3º Ciclo devem contribuir para o aluno uma ginástica intelectual que lhe permita raciocinar com precisão e clareza, tanto no campo científico como na vida prática" (Decreto nº 37.112, de 22 de Outubro de 1948). Focam, também, no programa do 3º Ciclo, a importância da história da Matemática, sugerindo que esta deve estar relacionada com os assuntos tratados nas aulas e deve ser adaptada à mentalidade dos alunos. Segundo as observações feitas no programa, os factos da história da Matemática "constituem um poderoso auxiliar para a boa compreensão de certas questões e, por vezes, também um incitamento ao trabalho" (Decreto nº 37.112, de 22 de Outubro de 1948).

São estes programas que se mantêm em geral até a década de sessenta, embora sejam feitas pequenas alterações introduzidas pelo Decreto nº 39.807, de 7 de Setembro de 1954 e pela Circular nº 2026 de 14 de Março de 1956 da Direcção-Geral do Ensino Liceal. Nesta circular são indicados quais os teoremas, corolários e problemas de Geometria cujos enunciados são de demonstração e resolução obrigatória. De uma forma geral, o processo de ensino aprendizagem da Matemática é marcado, nesta época, pela memorização e mecanização. Os alunos tinham de saber de cor teoremas geométricos e as respectivas demonstrações. O que levava a que maior parte dos alunos ficasse desanimado e "a odiar a Geometria para o resto da vida" (Veloso, 1998, p. 19). E tinham de praticar uma lista infindável de exercícios do livro de "Palma Fernandes", para dominar as técnicas de cálculo. Convém referir que todo o Ensino Liceal era orientado para o domínio das técnicas de cálculo. No entanto, os resultados dos alunos, no que concerne ao domínio do cálculo, não eram brilhantes; pelo contrário: revelavam graves lacunas a esse nível. Também no Ensino Universitário, os matemáticos estavam insatisfeitos com a preparação dos alunos aquando da sua entrada na Universidade. Isto porque tinham sido introduzidos novos temas resultantes da investigação matemática, como a teoria de conjuntos, a lógica e a teoria das probabilidades, mas, nas escolas secundárias, os professores não estavam a preparar os discentes para o estudo destes novos temas. Perante tal facto, quando os alunos entravam na universidade, não sabiam os novos conceitos matemáticos e a nova linguagem introduzida pelos matemáticos nas suas investigações. Perante tal situação, começam a surgir críticas à Matemática Clássica, o que originou um movimento de modernização do ensino desta ciência. "De acordo com as ideias bourbakistas, a Matemática escolar devia traduzir a própria essência da Matemática, devendo ser apresentada de uma forma unificadora recorrendo à linguagem da teoria de conjuntos e da lógica e privilegiando o papel das estruturas algébricas" (Porfírio, 1998, p. 35).

Em Portugal, na década de 60, foi introduzida a Matemática Moderna. No que se refere as consequências das ideias da Matemática Moderna, em relação ao ensino da geometria, na fase experimental, conduzida por José Sebastião e Silva, apenas às turmas do 3º ciclo do Ensino Liceal, que correspondia ao sexto e sétimo anos, o peso do formalismo não se fez sentir. Isto porque Sebastião e Silva valorizava a visualização e o desenvolvimento da intuição geométrica nos alunos.

Em 1963, inicia-se, assim, a experiência conduzida por Sebastião e Silva sendo aplicado a três turmas experimentais constituídas pelos melhores alunos do 6º ano, dos liceus: Pedro Nunes, em Lisboa, D. Manuel II no Porto e D. João III, em Coimbra. Nesse ano, não existiam ainda manuais. O programa do 3º Ciclo é alterado. Novos temas são introduzidos no programa experimental: Lógica, Teoria dos Conjuntos, Álgebra (grupos, anéis, corpos, números complexos, álgebra de Boole, álgebra linear), Cálculo Integral, Probabilidades, Estatística e Cálculo Numérico Aproximado. Porém, alguns temas do antigo programa, mantiveram-se: Cálculo Diferencial, Trigonometria e Geometria Analítica. O programa experimental não só apresentava alterações nos temas tratados como, também, modificações na forma como os temas eram abordados, quer nas relações estabelecidas entre eles. A disciplina de Matemática passa de uma carga horária semanal de quatro horas para seis horas semanais. Em 1968, é publicado, a 9 de Setembro, o programa para o Ciclo Preparatório, que correspondia ao 1º e 2º anos, da autoria de Sebastião e Silva. Em 1969, a experiência da Matemática Moderna abrangia 60 turmas do 6º e 7º anos.

A participação de José Sebastião e Silva neste movimento ficou marcado pelo seu contributo. Este foi quem redigiu os manuais do 3.º Ciclo do antigo Ensino Liceal, para alunos e professores, articulou as novas matérias com as matérias tradicionais, conservando o essencial dos temas habitualmente estudados neste nível. Nesses manuais criou numerosos exemplos, com o objectivo de mostrar aos alunos a importância das aplicações da Matemática (embora na fase de generalização da Matemática Moderna, as aplicações da Matemática tivessem desaparecido por completo).

No entanto, com a generalização da reforma da Matemática Moderna, em Portugal (início da década de 70) e a morte de José Sebastião e Silva, "a situação do ensino da Matemática em geral entrou numa fase de degradação profunda" (Veloso, 1998, p.22). Foram diversos os factores que contribuíram para o estado de degradação do ensino da Matemática. Segundo Veloso (1998) destacam-se os seguintes factores que contribuíram para a desvalorização da Geometria no ensino: a Geometria era vista como um parente pobre da Álgebra Linear, sem grande interesse para o prosseguimento dos estudos; realçava-se o carácter axiomático e dedutivo da Geometria, enquanto outros aspectos ligados à observação, à visualização, à experimentação e à construção praticamente desapareceram do ensino; as actividades atractivas de Geometria ligadas as construções geométricas passaram a fazer parte da disciplina de Educação Visual, não existindo qualquer trabalho interdisciplinar com a Matemática; o facto de muitos professores, terem presente na sua memória uma imagem negativa do ensino axiomático da Geometria, tornando desejável um papel reduzido da geometria no currículo de Matemática. O ensino da Geometria, na prática lectiva, foi aos poucos e pouco, sendo reduzido do currículo de Matemática implementado pelos professores. Na prática, os conteúdos de Geometria que os professores leccionavam eram o teorema de Pitágoras e algumas fórmulas necessárias para o cálculo de perímetros, áreas e volumes. Nesta perspectiva, a intuição e a visualização desempenham um papel menor no processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Mas, não só a geometria, como também actividades com grandes potencialidades, tais como, a resolução de problemas e a matematização do real, são desvalorizadas nessa época, em benefício do formalismo e do rigor da linguagem. Outro aspecto que contribuiu para a sua desvalorização foi o facto de a Geometria não ser necessária para o prosseguimento dos estudos.

Outra consequência da reforma da Matemática Moderna, relativamente ao ensino da Geometria, foi o facto de que aspectos ligados à observação, à experimentação e à construção praticamente desapareceram do Ensino Básico.

Foram os programas de Matemática desta época, com pequenos ajustamentos e remodelações, realizados após o 25 de Abril, que estiveram em vigor até à reforma iniciada em 1989.

Assim, ao longo das décadas de 70 e 80 assiste-se a uma diminuição do papel da Geometria, em Portugal, quando comparado com a situação do ensino da Geometria antes dos programas da Matemática Moderna.

Os programas da Matemática Moderna começam a ser criticados por vários motivos: as aplicações desta ciência desapareceram e a sua visão hermética e formalista, com grande carga de simbolismo, com uma linguagem complicada e desligada da realidade. Isto aconteceu porque a Matemática Moderna levou os matemáticos a desprezarem a Geometria Euclidiana, reduzindo-a a um exemplo de aplicação da Teoria dos Conjuntos e da Álgebra Vectorial. Desta forma, a Geometria foi praticamente excluída dos programas escolares.

No entanto, no panorama mundial assiste-se a um movimento de regresso da Geometria, que tem vindo a acentuar-se, através da publicação de livros, novos materiais e software para o ensino da geometria, de inúmeras reuniões de diversos tipos e do lançamento de projectos. Assim, são várias as iniciativas, reflexões e propostas para o regresso da Geometria como tema do currículo de Matemática.

No panorama internacional, Hans Freudenthal (1905-1990) foi a personalidade que exerceu maior influência na revalorização da Geometria, como tema fundamental, à Matemática escolar. No seu livro intitulado *Matematics as an Educational Task* publicado em 1973, no capítulo *The Case of Geometry* (*O caso da Geometria*), este apresenta razões para a renovação do ensino da Geometria através de descrições de cursos concretos, de vários exemplos, de comentários e de observações. Segundo Freudenthal, a Geometria era apresentada aos alunos de uma forma acabada, em vez de lhes ser dada a oportunidade para a reinvenção. Para o referido autor “a Geometria é compreender o espaço em que a criança vive, respira e se move. O espaço que a criança deve aprender a conhecer, explorar, conquistar, de modo a poder aí viver, respirar e mover-se melhor” (Veloso, 1998, p.15). Freudenthal considera que a Geometria é um campo privilegiado para a aprendizagem da matematização da realidade e para a realização de descobertas, que sendo feitas “com os próprios olhos e mãos, são mais convincentes e surpreendentes” (Veloso, 1998, p. 26). Talvez por isso, grande parte dos cursos da sua obra, consistiam em trabalho experimental por parte dos alunos. Daí o facto dos alunos utilizarem diferentes materiais concretos e de procederem, como os matemáticos, nas suas investigações, formulando conjecturas e tentando justificá-las.

A teoria de Dina e Peter Van Hiele desenvolvida em meados da década de cinquenta, na Holanda, também influenciou o ensino da Geometria, pelas suas características. Esta teoria, propõe que a aprendizagem da Geometria se desenvolva através de uma sequência de cinco níveis de compreensão, de sucessiva complexificação. Os cinco níveis de aprendizagem da Geometria são: “visualização”, “análise”, “dedução informal ou ordenação”, “dedução formal” e “rigor”. Neste sentido, começamos pelo nível da visualização, onde as figuras são percepcionadas pela sua aparência, passando pelo nível dois, onde as figuras são o conjunto das suas propriedades; depois pelo nível três, onde os alunos ordenam logicamente as propriedades das figuras; no nível quatro os alunos já entendem a Geometria como um sistema dedutivo e, por fim, o nível cinco, em que os alunos estudam diversos sistemas axiomáticos para a Geometria. Esta progressão é determinada pelo ensino, uma vez que cada aluno encontra-se num destes níveis de compreensão, de acordo com a sua maturidade geométrica. Deste modo, os alunos só passarão para outro nível superior ao que se encontram, com a ajuda de um ensino apropriado. Convém referir que o aluno pode ou não progredir na sua compreensão da Geometria. O modelo van Hiele veio demonstrar que os alunos não se encontram todos no mesmo nível de compreensão da Geometria e ajudar os professores a lidar com as diferenças existentes. É importante analisar o contexto em que surge a teoria de Van Hiele. Nesta década, na Holanda, reflectia-se sobre o ensino da Geometria e os materiais didácticos tinham acabado de aparecer. Nesta altura, surgem novos materiais didácticos: o geoplano e as barras de Cuisenaire. Daí que esta teoria propõe uma nova abordagem pedagógica, que inclui uma grande utilização de materiais. Acreditavam, estes dois autores que, a manipulação de materiais contribui para a construção dos conceitos geométricos, levando os alunos a progredirem na aprendizagem da Geometria. Os Van Hiele produziram o seu trabalho num ambiente em que estavam a ser desenvolvidos novos métodos, novos materiais, novos objectivos e novos conteúdos para o ensino da Matemática e em que as linhas essenciais da reforma curricular estavam a ser definidas. Esta teoria de aprendizagem valoriza a aprendizagem da Geometria como um fenómeno gradual, global e construtivo.

> “Gradual, porque pressupõe que a intuição, o raciocínio e a linguagem geométrica são adquiridos gradualmente. Global, porque uma figura ou propriedade não são abstracções isoladas mas antes estabelecem relações umas com as outras e pressupõem níveis mais simples ou mais complexos que lhes dão outros significados. Construtivo, porque pressupõem que não existe transmissão de conhecimento mas antes que o aluno deverá construir ele próprio os seus conceitos” (Matos, 1988, p. 10).

A publicação da NCTM (1991) contribuiu para a revalorização da Geometria como tema da Matemática escolar. Neste documento faz-se referência a tópicos de Geometria para o Ensino Básico, a que se devem dar maior ênfase num ensino renovado de Matemática: o desenvolvimento da compreensão dos objectos geométricos e das suas relações; a utilização da Geometria na resolução de problemas; a utilização de materiais concretos no ensino da Geometria; a utilização de tecnologia apropriada e exploração; a integração da Geometria em todos os temas e em todos os anos de escolaridade e a aplicação da Geometria quer no contexto matemático quer no contexto de situações do mundo real (NCTM, 1991, p. 86). Também são referidos alguns tópicos a que o NCTM recomenda que se devem dar menor atenção, tais como: a memorização do vocabulário da Geometria e a memorização de factos e relações (p.87).

Assim sendo, este documento reflecte as mudanças que já no final da década de oitenta se propõem para o ensino da Geometria. Também foram publicadas várias adendas às Normas *Geometry and Spatial Sense* (nível de escolaridade K-6); *Geometry and the Middle Grades* (5-8) e *Geometry from Multiple Perspectives* (9-12); a revista do NCTM publicou numerosos artigos sobre Geometria e o ensino desta área da Matemática, desenvolvendo as recomendações das Normas e das Adendas. Essas reflexões sobre o ensino da Geometria tiveram "consequências diminutas na situação portuguesa" (Veloso, 1998, p. 31), uma vez que só mais tarde, em 2001, foram adoptadas, aquando a Renovação Curricular.

O ensino da Geometria, em Portugal, iniciar-se-á através dos computadores e da sua utilização no ensino. O aparecimento do programa LOGO, por volta de 1986, em Portugal, de Seymour Papert, despertou o interesse para o ensino da Geometria Plana Elementar. Em 1986, realizam-se as primeiras experiências de utilização da linguagem LOGO no Ensino Primário; também neste ano criam-se clubes de computadores em diversas escolas do Ensino Preparatório e Secundário. Este programa proporciona um ambiente de trabalho facilitador da construção de determinados conceitos geométricos, estimula o desenvolvimento de importantes estratégias de pensamento, fundamentais no processo de resolução de problemas. Também proporciona uma maior interacção aluno-aluno e aluno-professor, estimulando e despertando no aluno a curiosidade. Ainda contribuiu para o surgimento da Geometria, o aparecimento do Projecto Minerva, em 1985, tendo como objectivo promover a introdução das tecnologias da informação no ensino não superior em Portugal e a realização das Semanas do LOGO, sendo a primeira realizada em 1987, no distrito de Portalegre. É de salientar que o papel do professor e do aluno são bem diferentes das aulas tradicionais. Nestas aulas, o professor para além de fornecer informações básicas, organiza as aprendizagens de forma a conduzir os alunos à (re)descoberta de conhecimentos geométricos, assume-se como um gerador de problemas, um animador de discussões e um sistematizador das descobertas. Os alunos têm um papel activo, uma vez que são desafiados a abordar situações geométricas que antigamente lhes eram apresentadas como factos indiscutíveis, tornando-se agente da construção do seu próprio conhecimento. Este tipo de actividades desenvolve no aluno outras capacidades importantes para a estruturação do raciocínio geométrico: a visualização e a intuição geométrica.

Os programas de Matemática, da década de setenta e oitenta, "são uma curiosa mistura de Matemática formalista, no estilo moderno, com Matemática computacional, no estilo tradicional" (Ponte, 2002, p.7). Convém referir que "o formalismo foi um programa ambicioso que visava construir uma fundamentação inatacável para a Matemática, objectivo que não conseguiu alcançar" (Ponte, 2002, p.5).

Os resultados dos alunos na disciplina de Matemática continuavam maus, assim como a insatisfação dos matemáticos com a preparação com que os alunos entravam na Universidade, visto que não tinham melhorado as suas aprendizagens. Tal facto, leva a Sociedade Portuguesa de Matemática a organizar vários debates onde se pedia a revisão dos programas de Matemática. No final da década de noventa a tendência era a de revalorização da Geometria no currículo de Matemática.

Em 1986, foi criada a Associação de Professores de Matemática (APM). Esta criou uma revista *Educação e Matemática* onde publicou vários artigos e realizou diversas sessões práticas sobre Geometria nos encontros anuais, contribuindo, deste modo, para o regresso desta área ao processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Em 1988, surge a primeira publicação de um livro que incentiva o uso de materiais manipuláveis na sala de aula *O Geoplano na Sala de Aula* de Lurdes Serrazina e José Manuel Matos. Este livro contribuiu para estimular a utilização deste material didáctico na sala de aula, pois sugere numerosas propostas de trabalho. Além de apresentar uma metodologia inovadora para o ensino da Geometria, intensificava, também o uso de materiais manipuláveis. Segundo Veloso, "os materiais manipuláveis iniciavam o seu regresso à sala de aula, movimento que não deixaria de se intensificar até à actualidade" (p. 32).

Também no Seminário de Vila Nova de Milfontes, realizado em 1988, organizado pela APM, debatem-se vários aspectos relacionados com o ensino da Matemática. Desse encontro é elaborado e publicado um livro "Renovação do Currículo de Matemática", que contém as principais orientações curriculares da década de oitenta. Estas perspectivas contrastavam fortemente com os programas ainda em vigor na época. Perante tal facto, o Ministério da Educação iniciou, em 1989, uma reformulação geral do currículo de Matemática. As equipas propostas pelo Ministério da Educação tiveram em consideração as recomendações dessa época para o ensino da Matemática, aquando da elaboração do currículo. Algumas das recomendações para a renovação do ensino da Geometria foram: actualizar ou reorganizar os conteúdos da Geometria, utilização das novas tecnologias e exploração das suas potencialidades educativas e a resolução de problemas.

Segundo Veloso (1998), em Março de 1990, realizou-se nos Estados Unidos um seminário intitulado *Geometry´s Future*, organizado pelo COMAP (Consortium for Mathematics and Its Applications) para analisar a situação do ensino da Geometria e fazer algumas sugestões para a sua revitalização. O objectivo principal dessa reunião era a reforma do ensino de geometria nos colégios americanos; no entanto, os participantes esperavam que a sua concretização viesse, por sua vez, a contrariar o ensino da Geometria nas Escolas Secundárias. De acordo com Veloso, as principais recomendações dessa reunião foram as seguintes: (1) os conceitos e objectos geométricos devem ser estruturados mais de um ponto de vista experimental e indutivo do que axiomático; (2) deve ser dada tanta importância aos aspectos combinatórios, topológicos, analíticos e computacionais da Geometria como às ideias métricas; (3) deve ser apresentado aos alunos o amplo campo de aplicação da Geometria; (4) deve ser utilizada uma grande diversidade de programas de computador (Mathematica, LOGO, etc.), tanto como ferramentas para investigação como para a construção de conceitos; (5) deve ser referida a história da Geometria no ensino da Matemática; (6) devem ser encorajados o pensamento e o raciocínio visuais; (7) devem ser trabalhados domínios nos quais seja possível fazer experiências em Matemática (por exemplo: pavimentações, e estudo de simetrias com espelhos, entre outras).

Este conjunto de recomendações abrange grande parte do pensamento actual, sobre o que deve ser um ensino renovado da Geometria.

Quando se iniciou a preparação para a reforma dos programas de Matemática, para os vários níveis de escolaridade, no final da década de oitenta, em Portugal, já estavam reunidas algumas condições favoráveis para que a Geometria recuperasse o lugar que lhe competia no currículo. Segundo Veloso, alguns dos aspectos que contribuíram foram os seguintes: a reflexão sobre a renovação do currículo de Matemática em torno de documentos que mencionavam a importância e o papel da Geometria (por exemplo, os *Standards* do NCTM, em forma de documento de trabalho, surgiam em Portugal em 1988); um ambiente propício à aprendizagem da Geometria através dos materiais manipuláveis e da utilização das novas tecnologias (experiência acumulada no Projecto Minerva); compreensão por parte de um número considerável de professores, da importância da Geometria no currículo de Matemática.

Assim, em 1991, os novos programas de Matemática do Ensino Básico e Secundário foram introduzidos nas escolas. No Ensino Básico assiste-se ao regresso da Geometria. Embora vários aspectos sejam realçados nos novos programas, tais como o valor da intuição, a utilização de materiais manipulativos e importância à ligação com o real, recomendam-se novas metodologias incluindo trabalho de grupo, o uso de calculadoras, computadores e o recurso à história da Matemática. Veloso (1998) refere que estes apresentam algumas lacunas: os programas revelam uma falta de visão de conjunto sobre os problemas e possíveis soluções para o ensino da Geometria ao longo da escolaridade. Um exemplo disso é a separação das transformações geométricas ao longo dos diversos anos (simetrias no 6º ano, semelhanças no 7º ano, translações no 8º ano e rotações no 9º ano). Veloso (1998) refere ainda que são poucos os incentivo para a utilização de computadores no ensino da Matemática, em particular no ensino da Geometria. Segundo os novos programas só devemos utilizá-los "quando possível", ou seja, se houver condições para a sua concretização, sendo ignorada a experiência do Projecto Minerva. No entanto, existe software para geometria dinâmica, cujos programas são o *Cabri-Géométre* e *The Geometer´s Sketchpad* que poderiam ajudar na resolução de problemas, nas demonstrações, na exploração de situações, na construção de conceitos, sendo um método de abordagem da geometria diferente do habitual. O mesmo autor salienta ainda o facto de não ter havido nenhuma reflexão nem por parte dos autores dos programas, nem do Ministério da Educação do que implicava, ao nível da formação de professores e da criação de condições nas escolas, as novas alterações propostas para o ensino da Geometria. Também o facto de o programa apresentar uma listagem de temas demasiado compartimentada e exaustiva, dificulta uma abordagem centrada na resolução de problemas e conexões, induzindo um ensino mais virado para o conhecimento de vocabulário, factos e relações. Alguns destes factores são também identificados no relatório *Diagnósticos e Propostas para a Matemática Escolar* (1997) e, mais concretamente, é apontada a dificuldade que alguns professores sentem no domínio de alguns conteúdos, nomeadamente de Geometria, o que origina uma deficiente abordagem deste tema (Ministério da Educação, 1997).

Os programas de Matemática do Ensino Básico foram introduzidos sem grandes problemas, mas o mesmo não aconteceu com os programas do Ensino Secundário. A equipa nomeada para a elaboração dos programas assumiu uma carga horária para a disciplina de Matemática de cinco horas semanais; no entanto, uma das mudanças dos novos programas de Matemática era a redução da carga horária de cinco para quatro horas semanais nos décimo e décimo primeiro anos. A consequência dessa alteração foi que o programa ficou demasiado extenso para ser leccionado em quatro horas semanais. Tal facto, gerou uma onda de protestos dos professores de todo o país, contra os novos programas do Ensino Secundário. Houve então necessidade de uma nova Revisão Curricular no Ensino Secundário, denominado "reajustamento", de que foi responsável uma Equipa Técnica coordenada por Jaime Carvalho e Silva. Assim, em 1997, é publicado o novo programa do Ensino Secundário.

No que diz respeito à Geometria do Ensino Secundário podemos encontrar nos novos programas de Matemática, várias lacunas: a Geometria Analítica continua a dominar o programa desta área; as transformações geométricas e as geometrias não-euclidianas são tópicos de Geometria inexistentes no programa; a Trigonometria (funções e equações trigonométricas) ocupa parte do programa de geometria no décimo primeiro ano. Segundo Veloso (1998) "estes pontos negativos resultam, sobretudo, do facto do ajustamento ter deixado intactos os objectivos (…) do programa do Ensino Secundário. Ora, esses objectivos, tendem a considerar o ensino de Matemática, no Secundário, como preparação para prosseguimento de estudos superiores" (p. 36). Logo, continuamos a valorizar a Álgebra e a Análise em detrimento da Geometria.

No entanto, no novo programa de Matemática do Ensino Secundário, publicado em Janeiro de 1997, verificamos que a Geometria ocupa um lugar de destaque, por ser o tema leccionado em primeiro lugar no décimo e no décimo primeiro anos. Porém, apesar de apresentar algumas deficiências, este programa permite o desenvolvimento de "actividades interessantes no espaço e no plano, que despertem o gosto pela geometria em todos os seus alunos e que aumentem o seu "poder geométrico", ou seja as suas capacidades de resolução de problemas utilizando diferentes perspectivas, de raciocínio geométrico, de visualização e de compreensão do espaço em que vivem" (Veloso, 1998, p.37).

Veloso considera no entanto, que "o ajustamento, em Geometria, está ainda bastante longe de ser aceitável como programa para o Ensino Secundário nesta mudança de milénio" (p. 37). Refere, também, que deve haver uma reflexão global sobre as linhas de orientação para o ensino da Geometria ao longo de toda a escolaridade, e que para melhorar o programa de Matemática no Ensino Secundário, os objectivos do ensino da Matemática terão que mudar. Segundo este "não é possível compreender o papel da Matemática na construção da nossa sociedade sem integrar a história da Geometria no seu ensino. Neste sentido, a parte histórica da Geometria não deve ser esquecida, nem dada pouca relevância. A história da Geometria não terminou no séc. XVIII, ou seja, não existe só a Geometria Euclidiana. Veloso considera importante que os alunos não acabem o décimo segundo ano sem saber que para além da Geometria de Euclides, existem “outras Geometrias”.

Em St. Olaf College, nos Estados Unidos decorreu um encontro, entre 25 e 28 de Junho de 1997. O projecto tinha como objectivo contribuir para melhorar a educação matemática do sexto ao décimo segundo ano de escolaridade, através de um ensino da Geometria integrado, ao longo destes níveis, e baseado em actividades de investigação. Eduardo Veloso foi o participante português neste encontro. Segundo Veloso as ideias salientadas neste encontro estavam também a ser debatidas na comunidade de educação matemática em Portugal. Os objectivos específicos deste projecto eram os seguintes: “(a) criação de um currículo de Geometria que esteja verticalmente integrado desde o sexto ao décimo segundo ano e planos para inserir a Geometria e a visualização em todo o currículo de Matemática nestes níveis; (b) uma renovação sistemática no ensino da Geometria” (Veloso, 1997, p. 18). Alguns dos pressupostos e requisitos colocados, desde o início, pelos coordenadores do projecto, relativamente ao ensino da Geometria são: “(a) A Geometria deve ser em todos os níveis activa, experimental, descritiva, táctil e visual; (b) A integração de materiais de laboratório e de computadores pode melhorar o ensino da Geometria; (c) Os professores necessitam de maiores conhecimentos e compreensão da Geometria; (d) Os professores devem desempenhar um papel principal em qualquer projecto, que tem por objectivo responder a questões sobre as mudanças a fazer no ensino; (e) Os alunos aprendem melhor quando constroem os seus conhecimentos em Geometria através de experiências conduzidas pelos professores: a realização de experiências também é fundamental para desenvolver o conhecimento em Geometria dos professores; (f) Qualquer projecto que conduza à melhoria do ensino deve incluir um apoio continuado dado aos professores pelas autoridades escolares” (Veloso, 1997, p. 18).

A aprendizagem da Geometria proporciona aos alunos a oportunidade para realizar diversas experiências que lhes permitam explorar, visualizar, desenhar, construir e comparar. A realização dessas experiências desenvolve, nos alunos, múltiplas capacidades do pensamento geométrico, sendo a mais óbvia de todas a capacidade de visualização. Além disso, a Geometria é um tema propício para a realização de descobertas e para a resolução de problemas. O ensino deste tema deve ser feito de um modo informal, partindo de experiências com materiais concretos do mundo real, de modo que os alunos possam formar os conceitos essenciais. Como tal, a manipulação de materiais e a reflexão sobre as actividades realizadas têm um papel fundamental na construção desses conceitos. Neste sentido, "muitos conceitos em Geometria não podem ser reconhecidos ou compreendidos a menos que, visualmente, o aluno possa perceber exemplos e identificar figuras e propriedades associando-os a experiências anteriores" (Ponte e Serrazina, 2000, p.166). Por exemplo, para que o aluno compreenda que um triângulo e a sua imagem numa isometria, são congruentes, precisa de ter a percepção da invariância da forma quando há um deslocamento. Contudo, tal percepção é adquirida pela experiência obtida através da manipulação de objectos reais. No tema Geometria há um vastíssimo campo para a realização de actividades de natureza exploratória e investigativa, não sendo necessário, para tal, um grande número de pré-requisitos.

Também no livro o *Ensino da Geometria no Virar do Milénio*, de 1999, Abrantes refere em relação ao tema Geometria alguns argumentos para a sua valorização no currículo e nas aulas de Matemática: (1) possibilita o contacto com uma grande variedade de objectos e situações; (2) permite descobrir e explorar uma grande variedade de propriedades e conexões, no plano e no espaço; (3) a Geometria contém inúmeros exemplos e concretizações, da relação existente entre situações da realidade concreta e situações matemáticas; (4) é uma fonte de problemas de vários tipos: de visualização e representação; de construção e lugares geométricos, envolvendo transformações geométricas, em torno das ideias de forma e de dimensão e implicando conexões com outros domínios da Matemática; (5) as actividades investigativas em Geometria conduzem à necessidade de se lidar com diversos aspectos essenciais da natureza da própria Matemática; (6) permite formular e resolver problemas, fazer conjecturas, testá-las, validá-las ou refutá-las, procurar generalizações, comunicar descobertas e justificações, tornando-se um processo natural; (7) permite conhecer a história e a evolução da Matemática; (8) permite realizar tarefas de natureza exploratória e investigativa em Geometria, em todos os níveis de escolaridade e a diversos níveis de desenvolvimento.

Ainda em 1999 é publicado, pelo Ministério da Educação, o livro *A Matemática na Educação Básica*, sendo mais um contributo para a revisão participada dos currículos do Ensino Básico. Alguns dos textos elaborados por Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) é feita uma reflexão sobre alguns dos principais problemas da aprendizagem da Geometria. Os autores referem que a aprendizagem da Geometria deverá ser baseada no desenvolvimento da visualização, da verbalização e da intuição utilizando estas capacidades na resolução de problemas. Salienta também o facto da aprendizagem baseada na observação, na experimentação, na construção e na manipulação, utilizando materiais manipulativos ou ferramentas computacionais, designadas por ambientes geométricos dinâmicos (Cabri-Geométre, Geometer´s Sketchpad) são geradoras de determinadas competências matemáticas. Refere que uma das consequências da reforma da Matemática Moderna para a desvalorização da Geometria foi o facto dos aspectos, anteriormente referidos, serem esquecidos, ao ponto de desaparecerem do ensino desta, sendo o papel da Geometria, no ensino, "o de ilustrar o carácter axiomático e dedutivo da Matemática" (Abrantes, *et al.*, 1999, p. 67).

Também no documento *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2000) é realçada a importância do ensino Geometria. Neste livro podemos ler que "as ideias geométricas são úteis para a representação e resolução de problemas de outras áreas da Matemática e de situações da vida real. Deste modo, a geometria deve ser integrada, sempre que possível, noutras áreas" (p.41).

Fonseca (1999) considera que o surgimento, no início dos anos noventa, dos novos programas para o Ensino Básico, valorizou o papel da Geometria; no entanto há muito a fazer neste campo e refere que ainda são poucos os professores que propõem "[…] aos seus alunos actividades que os levem a formular conjecturas e a desenvolver capacidades de visualização no plano ou no espaço, de modo a enriquecer o seu mundo de imagens mentais num processo de construção de uma mente activa em processos em que intervêm a intuição e a abstracção" (p. 66).

Também, segundo Fonseca, existem vários aspectos a melhorar: o facto do programa do Ensino Básico ser demasiado longo e muito retalhado leva a que muitos professores sacrifiquem o ensino/aprendizagem da Geometria; os temas de Geometria aparecem sem nenhuma interligação e muitos professores não realizam actividades que levem os alunos a adquirir hábitos de pensamento, entre outras. Na sua opinião tudo isto leva a que "muitos alunos entram no Ensino Secundário resolvendo (se resolvem) problemas, particularmente de Geometria, por receitas ou uso imediato de formulários […] com muito poucas imagens mentais visuais para manipular e com conceitos muito pouco claros" (Fonseca, 1999, p. 66).

Sendo a Geometria um tema rico pelas razões anteriormente apresentadas, pelos diversos autores, tem implicações curriculares evidentes.

Na última década a tendência foi no sentido da revalorização da Geometria nos programas de Matemática. Como tal, em 2001, o Ministério da Educação publica o *Currículo Nacional do Ensino Básico: Competências essenciais* (Ministério da

Educação, 2001). Nestas novas orientações curriculares é destacada a importância da Geometria no ensino da Matemática. O Currículo Nacional do Ensino Básico propõe que todos os alunos tenham oportunidade de se envolver em diversos tipos de experiências de aprendizagem (resolução de problemas, actividades investigativas e projectos). Como tal, devemos aproveitar as potencialidades inerentes ao estudo da Geometria. Outro aspecto, é o facto de podermos utilizar vários recursos de natureza diversa na aprendizagem da Geometria: os materiais manipulativos e as tecnologias (calculadora e o computador).

2.4 - História da Geometria

A Matemática é considerada uma ciência importante. Como tal, tem uma história que reflecte o pensamento de inúmeras gerações. A componente histórica no acto pedagógico do ensino/aprendizagem da Geometria contribui para que os alunos possam perceber determinado assunto, em que contexto surgiu e o porquê da sua leccionação. Segundo Sebastião e Silva, ensinar Matemática sem mostrar a origem e a finalidade dos conceitos é como falar de cores a um daltónico: é construir no vazio.

2.4.1. Origem da Geometria (Grécia Antiga)

Do período pré-euclideano (séculos VI, V e IV a.C.) não existem documentos escritos originais, logo tudo o que sabemos desta época baseia-se em referências ou comentários escritos posteriores. Eudemo de Rodes na sua obra intitulada *História da Geometria e da Astronomia* faz alusão à história da Matemática grega. No entanto, esta obra encontra-se perdida, o que resta dela são fragmentos de citações feitas por autores posteriores. No livro *Comentários sobre o Primeiro Livro dos Elementos de Euclides*, de Proclo de Lícia (século V d.C.), pudemos encontrar alguns excertos do texto de Eudemo. Nesta obra, encontramos uma breve história do desenvolvimento da Matemática grega até ao tempo de Euclides.

Tales de Mileto (c. 624-547 a.C.) e Pitágoras de Samos (c. 572-497 a.C.) são dois matemáticos gregos considerados os responsáveis pelo impulso inicial da Matemática nessa época.

Tales de Mileto foi considerado um dos sete sábios da Grécia antiga: era filósofo, astrónomo e matemático. Como astrónomo é conhecida a sua previsão de um eclipse total do Sol que ocorreu em 28 de Maio de 585 a.C., sendo com base nesse facto que são datados o seu nascimento e a sua morte.

Segundo a descrição histórica de Proclo, foi Tales quem introduziu, na Grécia, a Geometria praticada no rio Nilo, pois este viajou pela Babilónia e o Egipto, na primeira metade do século VI a.C., adquirindo conhecimentos sobre Astronomia e Matemática. Também se pensa que a proposição – que um ângulo inscrito num semicírculo é um ângulo recto – conhecida hoje como teorema de Tales, pode ter sido absorvida por Tales durante uma das suas viagens à Babilónia. No entanto, é-lhe atribuído uma "demonstração" do teorema, daí ser conhecida por Teorema de Tales.

Também são atribuídos a Tales os seguintes teoremas e sua respectiva prova: "(1) um círculo é bissectado por um diâmetro; (2) os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais; (3) os pares de ângulos opostos formados por duas rectas que se cortam são iguais; (4) se dois triângulos são tais que dois ângulos e um lado de um são iguais respectivamente a dois ângulos e um lado de outro, então os triângulos são congruentes" (Boyer, 1996, p. 32). Não há documentos que comprovam que foi Tales o responsável por estas descobertas, no entanto, Proclo no *Comentário sobre o primeiro livro de Os Elementos de Euclides* diz que Tales "primeiro foi ao Egipto e de lá introduziu esse estudo na Grécia. Descobriu muitas proposições ele próprio, e instruiu seus sucessores nos princípios que regem muitas outras, seu método de ataque sendo em certos casos mais geral, em outros mais empíricos" (Heat, 1981, Vol I, p.128, citado em Boyer, 1996, p. 32).

É a partir de Tales que a Geometria é estabelecida como teoria dedutiva, visto que há uma certa preocupação, nesta época, não só com a questão de saber "como" se faz, mas, também, com a questão científica em justificar "porque" se faz. Desenvolve-se, assim, uma Matemática mais no espírito da compreensão, da racionalização que da utilidade. Sendo, portanto, bem diferente da Matemática de carácter eminentemente prático, desenvolvida no Egipto e na Mesopotâmia. As demonstrações desta época não eram rigorosas, o que é típico do estágio de ornamentação primitiva, ou seja, "a veracidade das proposições é estabelecida por métodos sem uma sólida base em princípios fundamentais" (Lintz, 1999, p. 39). Tales é o primeiro matemático grego que defendeu a necessidade de demonstrar as proposições matemáticas. Porém, este tipo de raciocínio alcançou o seu apogeu com os *Elementos* de Euclides (aproximadamente 300 a.C.), embora o seu trabalho de sistematização da Geometria seja continuado nos séculos posteriores, pelos pitagóricos.

Como matemático, atribuímos a Tales a descoberta de métodos para efectuar certos cálculos: a altura de uma pirâmide, a largura de um rio ou a distância de um barco à costa. Tales, para resolver problemas como estes, baseia-se nas propriedades dos triângulos semelhantes: "sejam ABC e $A'B'C'$ dois triângulos com dois ângulos α, β respectivamente iguais a α', β', então, vale a proporção $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$" (Lintz, 1999, p.35).

Pitágoras nasceu na ilha Grega de Samos, próximo da costa da Ásia Menor. Sobre a sua vida quase nada se sabe e de seus escritos nada restou. Uma vez que não existem relatos originais sobre sua vida e trabalhos, tudo aquilo que conhecemos provém de referências de outros autores. Fez várias viagens entre o Egipto e a Mesopotâmia, possivelmente chegando até a Índia, onde recolheu, não só informação matemática e astronómica, como também muitas ideias religiosa. Ao retornar, foi obrigado, pelo tirano Polícrates, a sair de Samos. Decidiu, então, emigrar para Crotona, na Magna Grécia. Lá, fundou a Escola Pitagórica por volta de 530 a.C., que para além de se estudar Aritmética, Geometria, Astronomia e Música, era também uma irmandade estreitamente unida por rituais secretos. A sociedade dos pitagóricos adoptou grande parte das ideias do orfismo, acrescentando a elas uma forte mística dos números. Como tal, "para Pitágoras e os seus seguidores, a chave para a compreensão do mundo era o número, o que fazia surgir a Aritmética como a ciência por excelência; a Música, a Astronomia e a Geometria eram encaradas como ciências redutíveis da Aritmética" (Estrada, Sá, Queiró, Silva, Costa, 2000, p. 230). O lema da Escola Pitagórica era *Tudo é Número*. As descobertas da Escola Pitagórica não eram atribuídas a um membro específico da escola, mas sim ao seu colectivo.

O primeiro aspecto da doutrina dos pitagóricos refere que o número é a origem de tudo. Outro aspecto desta doutrina era a harmonia, fundamental para a criação do Universo. Daí surgir a teoria musical dos Pitagóricos, com o intuito de mostrar que a "combinação de sons e suas relações obedecem a leis numéricas e cuja harmonia depende a beleza da arte musical" (Lintz, 1999, p. 56). A música era assim estudada por métodos aritméticos. Como tal, atribui-se aos Pitagóricos "a descoberta das relações entre os intervalos musicais e a divisão de uma corda em face dos sons emitidos" (Lintz, 1999, p. 77). A sua doutrina baseava-se também na ideia de que o número, para além de ser a origem de tudo, é também o guia do conhecimento.

Na Grécia, a palavra número era usada só para os inteiros e uma fracção era uma razão ou relação entre inteiros.

Segundo Proclo, no seu *Comentário,* atribui-se "a Pitágoras duas descobertas matemáticas específicas: (1) a construção dos sólidos regulares e (2) a teoria das proporções" (Boyer, 1996, p. 38). Os Pitagóricos estudaram as proporções ou a igualdade de razões, sabiam distinguir uma proporção aritmética ($2b = a + c$), de uma geométrica $b^2 = ac$ e, de uma harmónica $\left(\frac{2}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right)$. No entanto, conta-se que Pitágoras soube dessas três médias e da proporção áurea na Mesopotâmia. Porém, os pitagóricos generalizaram este conhecimento, acrescentando sete novas médias, para perfazer dez no seu total.

De todo o conhecimento atribuído aos pitagóricos, a descoberta mais importante foi, certamente, o famoso teorema sobre os triângulos rectângulos, muito embora os babilónios já conhecessem o referido teorema, mais de um milénio antes. Porém, foram os Pitagóricos os primeiros a demonstrá-lo, o que justifica a denominação de "Teorema de Pitágoras", como ficou conhecido. Um aspecto interessante é que "os Babilónicos o consideravam basicamente como um resultado de medições e os Pitagóricos concebiam-no como um teorema geométrico abstracto" (Struik, 1997, p. 80). Atribui-se, também, à Escola Pitagórica o seguinte processo para a obtenção dos ternos pitagóricos, dada por: $\frac{m^2-1}{2}, m, \frac{m^2+1}{2}$, em que m é um número inteiro ímpar. Uma vez que este processo, para calcular ternos pitagóricos, se assemelha aos exemplos babilónicos, faz-nos pensar que talvez não seja uma descoberta independente.

A estrela de cinco pontas ou pentagrama era o símbolo da Escola Pitagórica, revelando que os Pitagóricos conheciam algumas propriedades do pentágono regular. Este símbolo era obtido a partir do pentágono regular, traçando as respectivas diagonais. O pentágono estrelado também já era conhecido na arte da babilónia.

Para construir o pentágono regular, começávamos por construir um polígono regular ABCDE e traçávamos as cinco diagonais. Por observação, verificamos que as diagonais se cortam em pontos $A'B'C'D'E'$ formando outro pentágono regular.

Nesta figura averiguamos, também, que cada um destes pontos "divide uma diagonal em dois segmentos desiguais, tais que a razão da diagonal toda para o maior é igual à deste para o menor. Esta subdivisão das diagonais é a bem conhecida "secção áurea" de um segmento. Também no pentágono estrelado verificamos que "os segmentos determinados em uma diagonal com a intersecção de uma outra são incomensuráveis com ela" (Lintz, 1999, p. 82). Pensa-se que tal facto não teria escapado aos Pitagóricos, sendo um dos segredos da irmandade.

Os Pitagóricos estudaram os números figurados e investigaram as propriedades desses números. Para este grupo, os números eram representados por pontos, em que cada um representa uma unidade e eram dispostos segundo padrões geométricos. Este tipo de representação realça a ligação entre as propriedades dos números e as formas geométricas. A disposição dos vários pontos poderia ter a forma triangular equilátera, quadrada, pentagonal, … Os números triangulares sucessivos são formados pela sequência 1, 3, 6,10,…, $\frac{n(n+1)}{2}$ tal que $n \in IN$. Os números quadrados sucessivos são formados pela sequência 1, 4, 9,16,…, n^2 tal que $n \in IN$. Os números pentagonais sucessivos são formados pela sequência 1, 5, 12, 22, … tal que $n \in IN$. Deste modo, havia números poligonais de todas as ordens. Os números primos e os números planos ou compostos surgem devido ao facto dos Pitagóricos quererem representar os números na forma rectangular. A representação rectangular dos números primos é trivial uma vez que estão todos dispostos numa só fila, enquanto os números planos admitem uma ou mais representações rectangulares não triviais. Os números rectangulares são aqueles números que admitem uma decomposição em factores consecutivos.

Os Pitagóricos estudaram todas estas representações geométricas dos números, suas relações, fórmulas e proposições aritméticas.

Tales e seus contemporâneos descobriram alguns resultados importantes para a Geometria, como vimos anteriormente, embora sem muita conexão entre eles. Nesta época, já se sabia o que significava demonstrar um teorema, embora o processo dedutivo aplicado na demonstração não tinha o rigor de hoje; no entanto, estavam presentes alguns dos princípios básicos. Os Pitagóricos continuaram o processo de sistematização elaborado por Tales, mas a crise dos incomensuráveis constituiu-lhes um obstáculo, uma vez que todo o edifício construído desmoronava-se. Como para os Pitagóricos todas as coisas são números, então a qualquer segmento de recta podemos associar um número pela escolha de uma unidade. Como tal, podemos "operar com segmentos como se fossem números, isto é, a "soma", e o "produto" de segmentos se definem como a soma e o produto de seus comprimentos que são os números a eles associados" (Lintz, 1999, p. 65). A Geometria Pitagórica assentava na comensurabilidade das grandezas, ou seja, que duas grandezas do mesmo tipo admitem sempre uma medida em comum. Ou seja, "dadas duas grandezas (necessariamente do mesmo tipo), α e β, a sua comensuralidade significa a existência duma terceira grandeza *u* (ainda do mesmo tipo que α e β), e de dois números naturais *m* e *n*, de tal modo que $\alpha = \underbrace{u+u+...+u}_{m \ \ vezes}$ e $\beta = \underbrace{u+u+...+u}_{n \ \ vezes}$, ou seja, mais sucintamente, de tal modo que $\alpha = mu$ e $\beta = nu$. Portanto, *u* "cabe" um certo número (exacto) de vezes em α e "cabe" um certo número (também exacto) de vezes em β" (Estrada et. al., 2000, p.242).

No caso da diagonal de um quadrado (que é a hipotenusa do triângulo rectângulo isósceles) e o seu lado, não há uma unidade comum entre eles, portanto, são incomensuráveis. Esta constatação levou a que os princípios da filosofia pitagórica fossem abalados. A descoberta de que afinal nem tudo era número, ou seja, dos incomensuráveis implicou algumas consequências: a separação dos domínios do numérico e do geométrico e as demonstrações da Geometria, que utilizavam a teoria das proporções, que serviu de base para quase toda a geometria por eles criada, tiveram de ser abandonadas. Porém, convencidos de que algumas das proposições provadas pela teoria das proporções eram verdadeiras, os matemáticos da época procuraram encontrar demonstrações alternativas para elas. Havia dois caminhos a seguir, criar uma outra teoria das proporções, capaz de substituir a teoria pitagórica, mas que fosse aplicável a grandezas quer comensuráveis quer incomensuráveis ou criar novos métodos de prova, que permitissem estabelecer os mesmos teoremas sem recorrer ao conceito de proporcionalidade. Cerca de um século mais tarde, Eudoxo de Cnido desenvolveu um método de prova, designado por "*Geometria das Áreas*, que permitiu reformular as demonstrações de vários teoremas da Geometria Pitagórica.

É a partir da descoberta da existência dos incomensuráveis que começa o declínio da Escola Pitagórica, uma vez que colocava em causa a generalidade da teoria das proporções, que só seria válida para grandezas comensuráveis. Por outro lado, o conceito de número, com essa descoberta, não poderia ser considerado a origem de todas as coisas. Convém referir que no livro I dos *Elementos* de Euclides, a proposição 47 é a demonstração do Teorema de Pitágoras. A prova dada por Euclides não utiliza as proporções, o que pode ter sido uma estratégia para evitar a questão da incomensuralidade. Como tal, não sabemos, ao certo, em que circunstâncias os Pitagóricos se defrontaram com a existência dos incomensuráveis: poderia ter sido com a aplicação do teorema de Pitágoras ao triângulo rectângulo isósceles; no cálculo da diagonal de um quadrado em função do lado ou através das diagonais de um pentágono regular.

Não existem documentos escritos dos Pitagóricos na Aritmética e na Geometria. No entanto, o essencial das suas contribuições geométricas consta no tratado *Elementos* de Hipócrates de Quios por volta de 400 a. C., sendo a primeira compilação de elementos da Geometria. No seu tratado, Hipócrates incluiu vários resultados, entre eles a congruência de triângulos e os polígonos regulares inscritos e circunscritos a uma circunferência. Esta obra evidenciava já uma tentativa de sistematização da Matemática. Isto vem demonstrar que, havia já, em meados do século V a. C., uma preocupação dos geómetras em expor o conhecimento num sistema dedutivo. Também "deve-se a Hipócrates a redução do problema da duplicação do cubo ao da inserção de dois meios proporcionais entre um segmento de recta e o seu dobro" (Estrada *et al.*, 2000, p. 247). Interessou-se ainda pelo problema da quadratura do círculo que o levou ao estudo das quadraturas de certas lúnulas (figuras limitadas por dois arcos de círculo).

Em Atenas distinguem-se, no século IV a.C., dois filósofos: Platão e Aristóteles com contribuições importantes para a Geometria.

Filolau de Crotona foi o primeiro pitagórico a escrever as ideias da sua escola numa forma organizada. Pensa-se que os conhecimentos de Platão (429 – 347 a. C.) da Ordem Pitagórica provinham desse livro. Segundo Boyer (1996) "embora o próprio Platão não tenha dado contribuição específica digna de nota a resultados matemáticos técnicos, ele era o centro da actividade matemática da época e guiava e inspirava seu desenvolvimento" (p. 58). Talvez por isso ficou conhecido "não como matemático mas como o criador de matemáticos"(Boyer, 1997, p. 58). Este fundou, por volta de 385 a.C., a sua Academia em Atenas, onde ensinava Filosofia e Ciências. Segundo Platão, a Matemática possuía quatro ramos: Aritmética, Geometria, Música e Astronomia. No entanto, a condição indispensável para ser admitido na Academia era ter conhecimentos de Geometria. Pois, nos pórticos da Academia, estava escrito "*Não entre aqui quem não souber Geometria*" (Estrada, Sá, Queiró, Silva e Costa, 2000, p. 249).

Deste período destacam-se três matemáticos que estiveram ligados à Academia de Platão: Arquitas de Tarento, Teeteto de Atenas e Eudoxo de Cnido.

Arquitas de Tarento viveu na primeira metade do IV a.C. e "continuou a tradição pitagórica, pondo a Aritmética acima da Geometria" (Boyer, 1996, p. 49). Este escreveu sobre a aplicação das médias aritmética, geométrica e harmónica à Música. Segundo os historiadores, Arquitas dedicou mais atenção à música que os seus predecessores.

A Teeteto (c. 417 – 369 a. C.) atribui-se a teoria das grandezas incomensuráveis (irracionais) tal como aparece no décimo volume dos *Elementos*, de Euclides.

A Eudoxo de Cnido (c. 408-355 a. C.) atribui-se a descoberta da teoria das proporções, usada no volume V de *Os Elementos,* de Euclides. Segundo Boyer (1996), a fé do pitagorismo é que a "essência de tudo, tanto na Geometria como nas questões práticas e teóricas da vida do homem, pode ser explicada em termos de *arithmos*, ou das propriedades intrínsecas dos inteiros e suas razões" (p.50). A descoberta dos incomensuráveis, pela Escola Pitagórica, demolia a base da fé pitagórica nos inteiros. Isto significava que os inteiros e suas razões não eram suficientes, pois não bastavam para comparar a diagonal de um quadrado, ou de um cubo ou de um pentágono com seu lado, pois os segmentos são incomensuráveis. Eudoxo de Cnido colmata, geometricamente, pela teoria das proporções, podendo comparar-se grandezas de qualquer natureza. Desta forma Eudoxo resolveu a "crise" da Matemática grega. Convém referir que a Teoria das Proporções de Eudoxo pôs de parte a Teoria Aritmética dos Pitagóricos, que se aplicava apenas a quantidades comensuráveis. Outra contribuição de Eudoxo foi o Método de Exaustão, que permitiu provar teoremas sobre as áreas e volumes de figuras curvilíneas.

Também é-lhe atribuído o facto de a Astronomia se ter tornado uma disciplina de Matemática, através da utilização da Geometria Esférica.

Aristóteles (384 a. C. -322 a.C.) nasceu na colónia grega de Estagira. Estudou em Atenas na Academia de Platão durante cerca de vinte anos, tornando-se discípulo de Platão. Em 335 a.C., Aristóteles fundou em Atenas a sua escola denominada Liceu. A sua obra com maior repercussão na Matemática foi o *Órganon*, sendo considerado o primeiro tratado de Lógica. Todos os volumes que formam essa obra contêm exemplos e ideias básicas da Matemática, em particular da Geometria. Também "teorizou sobre as regras a que deve obedecer a exposição dedutiva do saber; os Elementos de Euclides haveriam de constituir um exemplo paradigmático do tratado científico de concepção aristotélica" (Estrada, Sá, Queiró, Silva e Costa, 2000, p. 249). Pois este definiu dois conceitos, axiomas e teoremas, que deveriam ser usados aquando da exposição dos conhecimentos científicos. "Os axiomas são afirmações admitidas sem demonstração (…) os teoremas devem ser demonstrados; além dos axiomas, apenas os teoremas anteriormente estabelecidos podem ser chamados a intervir numa demonstração" (Estrada, Sá, Queiró, Silva e Costa, 2000, p. 252).

O período que medeia do século III a. C. até ao século IV d. C. é denominado de Alexandrino, porque a cidade de Alexandria, no Egipto helenizado, é considerada o mais importante centro intelectual da época. O rei Ptolomeu I sucedeu a Alexandre Magno no trono do Egípcio. A maior obra no campo científico é-lhe atribuída. Este fundou, na capital de Alexandria, duas importantes instituições: o *Museu* e a *Biblioteca*. Para o Museu de Alexandria convidou vários sábios dos mais variados ramos da ciência (Matemática, Astronomia, Geografia, Medicina e Filosofia) para se dedicarem à investigações, à discussão de ideias e ao ensino. Desses sábios podemos destacar Euclides, Eratóstenes, Arquimedes e Apolónio. Com a Biblioteca pretendia juntar todas as obras de cultura (literárias, filosóficas, matemáticas ou astronómicas). Estas duas instituições tornaram-se, até à conquista árabe no século VII, o principal centro cultural do mundo então conhecido. Convém referir que o Museu e a Biblioteca alcançaram um prestígio tal, que superou o das escolas atenienses (Academia e Liceu).

Sobre a vida de Euclides de Alexandria (323-285 a.C.) pouco se sabe. A cidade que é costume juntar ao seu nome refere-se, não à sua naturalidade, mas ao local provável onde estudou e ensinou. Segundo Estrada *et al.* (2000), o resumo histórico de Proclo de Lícia situa Euclides no tempo, por comparação com outros matemáticos, sendo este posterior aos geómetras referidos na História de Eudemo de Rodes e anterior a Arquimedes e Eratóstenes.

> "Reunindo *Elementos*, Euclides coordenou muito de Eudoxo, aperfeiçoou muito de Teeteto e deu demonstrações irrefutáveis daqueles que os seus predecessores não haviam demonstrado com rigor.
>
> Este homem viveu sob o primeiro Ptolomeu; pois Arquimedes, que viveu depois do primeiro Ptolomeu, menciona Euclides. Diz-se que um dia Ptolomeu perguntou a Euclides se não existia uma via mais curta para a Geometria do que o *Ensino dos Elementos*, e que ele respondeu que em geometria não existia uma estrada para reis. Euclides é portanto mais recente do que os discípulos de Platão, mas mais antigo do que Arquimedes e do que Eratóstenes, sendo estes últimos contemporâneos, como Eratóstenes diz algures.
>
> Euclides era da opinião platónica e muito conhecedor da filosofia de Platão. Esta é aliás a razão pela qual apresentou a constituição das figuras platónicas, isto é, dos poliedros regulares como o objectivo final do seu *Ensino dos Elementos.*" (Estrada, Sá, Queiró, Silva e Costa, 2000, p. 250).

Euclides foi o primeiro director do Museu de Alexandria por volta do ano 300 a.C., tendo tido a possibilidade de compilar e organizar os resultados obtidos por vários matemáticos anteriores. Deu o seu contributo publicando o livro *Os Elementos* que depois da *Bíblia*, é a obra mais editada em todo o mundo. Euclides, nessa obra, expõe, de uma forma lógica, os principais conhecimentos da sua época de Geometria e Aritmética, tendo esta marcado este campo de conhecimento até ao século XIX.

A obra de Euclides é constituída por treze volumes. Euclides compilou aí toda a Geometria conhecida na sua época, baseando-se nos seus predecessores gregos: os Pitagóricos, nos volumes I – IV, VII e IX; Arquitas, no volume VIII; Eudóxio nos volumes V, VI e XII, e Teeteto, nos volumes X e XIII. Esta obra, desde o século III a. C. até ao século XIX, foi praticamente o único livro usado no ensino elementar da Matemática. Não existe nenhum exemplar dos *Elementos*, de Euclides que esteja completo e date da época. No entanto, foram feitas muitas edições e copiados inúmeros exemplares, embora com algumas alterações do texto original: acréscimo ou supressão de resultados e comentários. Porém, no século XIX, o historiador e filósofo dinamarquês J.L. Heiberg apresentou uma reconstituição credível do original grego, baseada na análise e comparação das diferentes edições existentes. Convém referir ainda que Euclides, no seu livro, no que concerne à Geometria, organizou “as matérias de um modo sistemático a partir de princípios e definições, procedendo ao desenvolvimento por via dedutiva” (Oliveira, 1995, p.24). Não se limitou a reunir todo o conhecimento geométrico: ordenou-o e estruturou-o; isto é, primeiro assumiu um pequeno conjunto de axiomas como verdadeiros e depois, a partir desses axiomas, desenvolveu e demonstrou os teoremas e proposições geométricas.

Estrada *et al.* (2000) refere que:

> “De acordo com os preceitos aristotélicos, na exposição dos conhecimentos científicos utilizam-se frases de dois tipos: axiomas e teoremas. Os axiomas são afirmações admitidas sem demonstração, pelo que se devem ser “imediatamente evidentes”. Em contrapartida, os teoremas devem ser demonstrados; além dos axiomas, apenas os teoremas anteriormente estabelecidos podem ser chamados a intervir numa demonstração.” (p.252).

Nos *Elementos* de Euclides, o primeiro volume trata das questões que são fundamentais para a Geometria. Começa com uma sequência de definições, prossegue com uma sequência de postulados e depois uma sequência de noções comuns, a partir dos quais deduz os teoremas. Este volume contém, entre outros resultados, os três casos de congruência de triângulos, um estudo dos ângulos determinados por uma transversal e duas rectas paralelas e ainda o Teorema de Pitágoras. O segundo volume é dedicado à Álgebra Geométrica ou Geometria das Áreas e o volume III e IV dedicados a Geometria do Círculo. No terceiro volume, mais concretamente, são abordadas as propriedades dos ângulos ao centro e dos ângulos inscritos em arcos de circunferência e as propriedades das rectas tangentes a circunferências. O quarto volume é um prolongamento do anterior e inclui o estudo dos polígonos inscritos e circunscritos a circunferências. Assim sendo, nos primeiros quatro volumes, encontramos as proposições da Geometria Plana Elementar e os dois volumes seguintes tratam da Teoria das Proporções, criada por Eudoxo de Cnido e a aplicação dessa teoria à Geometria. Segundo Estrada *et al.* (2000), estes seis primeiros volumes dos *Elementos* são conhecidos como os livros planimétricos, visto que tratam da Geometria Plana. Porém, esta denominação não é adequada ao quinto livro, pois a teoria das proporções nele exposta é aplicável à Geometria Tridimensional.

Os volumes VII, VIII e IX dos *Elementos* de Euclides são designados por livros aritméticos, pois são dedicados à Teoria dos Números: divisibilidade de inteiros, propriedades dos números primos, proporções e progressões geométricas e aritméticas. Embora a maioria das contribuições matemáticas neles contidas sejam de origem Pitagórica, há também outras de Arquitas de Tarento, Teodoro de Cirene e Teeteto de Atenas. O volume X desta obra é o mais extenso e trata dos números irracionais. E, por fim, os três últimos volumes referem-se à Geometria do Espaço e são conhecidos por livros estereométricos. O volume XI é uma introdução a essa Geometria; o volume XII trata das pirâmides, cones e cilindros e o volume XIII refere-se aos cinco sólidos regulares e a prova de que existem somente estes cinco.

Euclides, na sua obra, não apresenta a Geometria como um mero agrupamento de dados desconexos, mas como um sistema lógico, uma vez que cada teorema resulta de uma demonstração, em que são utilizados as definições e os axiomas definidos inicialmente e os teoremas anteriormente provados. Euclides foi o primeiro a utilizar este método, chamado axiomático.

Segundo Struik (1997), a intenção de Euclides ao escrever os *Elementos* é "reunir num texto três grandes descobertas do seu passado recente: a Teoria das Proporções de Eudoxo, a Teoria dos Irracionais de Teeteto e a Teoria dos Cinco Sólidos

Regulares, que ocupava um lugar importante na cosmologia de Platão. Estas três descobertas eram, todas elas, tipicamente realizações gregas" (p. 92-93).

Arquimedes de Siracusa (c. 287-212 a.C.) é considerado o segundo grande matemático da primeira escola de Alexandria. As suas principais contribuições foram em Geometria; mas revelou-se também, pelas suas invenções em Mecânica e descobertas na Física. Este sábio inventou engenhos mecânicos e diversas máquinas de guerra que permitiram a Siracusa resistir ao exército romano durante mais de dois anos. Por exemplo, inventou, baseando-se nas propriedades das cónicas, um sistema de espelhos: "os specchi ustori". Estes espelhos concentravam os raios de Sol nas naves romanas e incendiavam-nas. Atribui-se, também, a Arquimedes, a invenção do parafuso sem fim, do parafuso de Arquimedes (utilizado na extracção de água de minas e de poços) e de diversas roldanas para levantar peso. Entre as obras de mecânica, destacam-se *Sobre Equilíbrio dos Planos* e *Sobre Corpos Flutuantes*. A primeira aborda os princípios fundamentais da Mecânica, usando métodos geométricos e a segunda é um Tratado de Hidrostática. Esta última obra contém o princípio de Arquimedes sobre a perda de peso de corpos submersos num líquido.

Das obras de Arquimedes, de conteúdo matemático, destacam-se: *Sobre as Medidas do Círculo*, *Sobre as Espirais*, *Sobre a Quadratura da Parábola*, *Sobre as Conóides e Esferóides*, *Sobre a Esfera e o Cilindro e Livro dos Lema*.

Em Geometria, concebeu métodos gerais para calcular áreas de figuras planas curvilíneas e o volume de sólidos delimitados por superfícies curvas. Para os calcular utilizava o Método da Exaustão, que é uma forma primitiva de integração. Arquimedes tinha, portanto, um sistema de cálculo integral muito tempo antes de Newton e Leibniz.

Arquimedes contribuiu para o progresso da Geometria, introduzindo a noção de movimento. Desta forma, pôde construir uma espiral, conhecida como espiral de Arquimedes. A espiral é "definida como o lugar geométrico no plano de um ponto que se move, partindo da extremidade de um raio, ou semi-recta, uniformemente ao longo do raio enquanto esse por sua vez gira uniformemente em torno da sua origem"(Boyer, 1996, p. 87). Em coordenadas polares é a equação $r = a\theta$.

É considerado também o precursor do cálculo diferencial. Pois, Arquimedes conseguiu resolver o problema da tangente num ponto da sua espiral e, ao fazê-lo, aproximou-se bastante da Noção de Derivada, noção que ainda não era conhecida na altura. O estudo que Arquimedes realizou da espiral era uma tentativa de solução para os três problemas famosos da Grécia. Essa espiral forneceu soluções para dois deles: a trissecção do ângulo e a quadratura do círculo.

O Tratado *Sobre as Medidas do Círculo* é composto por três proposições. Uma é a prova que a "área dum círculo é igual à área dum triângulo de base igual ao perímetro da circunferência do círculo e de altura igual ao raio do círculo" (Estrada et. al., 2000, 305). Para demonstrá-lo, Arquimedes utilizou o Método de Eudoxo, que nesta altura já era conhecido, através do volume XII dos *Elementos* de Euclides. Na sua obra Arquimedes apresenta, na proposição 3, um valor para π compreendido entre $3\frac{10}{71}$ e $3\frac{1}{7}$. Para a obtenção daqueles valores utilizou o método dos polígonos regulares inscritos e circunscritos à circunferência. "Começando com o hexágono regular inscrito, ele calculou os perímetros de polígonos obtidos dobrando sucessivamente o número de lados até chegar a noventa e seis lados" (Boyer, 1996, p.86). Arquimedes obteve, assim, uma melhor aproximação do valor de π que a dos egípcios e a dos babilónios.

Outra das obras de Arquimedes é *Sobre a Esfera e o Cilindro.* Entre os seus resultados destaca-se a expressão para a área e o volume de uma esfera: a área da esfera é igual a quatro vezes a área de um círculo máximo e o volume de uma esfera é igual a duas terças partes do volume do cilindro circunscrito. Segundo Arquimedes, a área de um segmento parabólico é igual a quatro terços da área de um triângulo inscrito com a mesma base que o segmento da parábola e cujo vértice é o ponto onde a tangente à parábola é paralela à base. Este resultado encontra-se no seu livro *Quadratura da Parábola*. No livro *Sobre as Espirais* encontra-se um estudo de uma curva plana, hoje chamada Espiral de Arquimedes. A obra é composta por vinte e oito proposições, sendo algumas referentes a áreas associadas à espiral. No livro *Sobre as Conóides e Esferóide*, Arquimedes prova que a área de uma elipse é igual à área de um círculo cujo raio é a média geométrica dos semi-eixos da elipse. Na mesma obra mostra como achou os volumes dos segmentos cortados de um elipsóide de revolução, parabolóide de revolução e hiperbolóide de revolução em torno do eixo principal. No *Livro dos Lemas* encontra-se uma construção por nêusis para a trissectriz dum ângulo agudo.

Atribui-se também a Arquimedes a descoberta e a prova de que a razão dos volumes do cilindro e da esfera é igual à razão das áreas. Conta-se que, devido a essa descoberta, Arquimedes pediu que sobre seu túmulo fosse esculpida uma representação de uma esfera inscrita num cilindro circular recto cuja altura é igual ao seu diâmetro.

Ainda é atribuído a Arquimedes a descoberta dos treze sólidos semi-regulares. A diferença dos poliedros regulares para os sólidos semi-regulares é que um poliedro regular tem faces que são polígonos regulares do mesmo tipo; no entanto, um sólido semi-regular é um poliedro convexo cujas faces são polígonos regulares mas não todas do mesmo tipo.

O terceiro grande matemático da primeira escola de Alexandria é Apolónio de Perga (262-190 a.C.). Foi um astrónomo e matemático que se destacou, assim como Euclides e Arquimedes, dos restantes matemáticos do Período Helenístico. Dos muitos tratados de Apolónio, apenas dois se preservaram em grande parte: *Dividir Segundo Uma Razão* e *As Cónicas*. Este último é a sua obra-prima.

O seu tratado *As Cónicas* é a última obra da Matemática grega, composta por oito volumes. Nos primeiros quatro volumes encontramos uma exposição sobre as cónicas, do que havia aparecido em tratados anteriores, e os quatro últimos volumes, a sua teoria. Um século antes de Apolónio, as cónicas tinham sido descobertas pelo matemático grego Menecmo e utilizadas na resolução do problema da duplicação do cubo. A elipse, a hipérbole e a parábola eram obtidas como secções de três tipos diferentes de cone circular recto (o eixo é perpendicular à base circular), conforme o ângulo no vértice fosse agudo, recto ou obtuso. Apolónio "mostrou sistematicamente que não é necessário tomar secções perpendiculares a um elemento do cone e que de um único cone podem ser obtidas todas as três espécies de secções cónicas, simplesmente variando a inclinação do plano de secção" (Boyer, 1996, p. 99). Este provou, também, que o cone não precisa de ser necessariamente recto: pode ser um cone oblíquo ou escaleno. Demonstrou ainda que as propriedades dessas curvas, sejam cortadas de cones oblíquos ou rectos, não são diferentes. Um dos problemas mais conhecidos de Apolónio foi certamente o lugar de três e quatro rectas, que diz que "dadas três rectas (ou quatro rectas) de um plano, achar o lugar de um ponto P, que se move de modo que o quadrado da distância de P a uma delas seja proporcional ao produto das distâncias às outras duas (ou, no caso de quatro rectas, o produto das distâncias a duas delas é proporcional ao produto das distâncias às outras duas), as distâncias sendo medidas em ângulos dados com relação às rectas" (Boyer, 1996, p. 103). Este problema tornou-se importante na história da Matemática pelo facto de Descartes, em 1637, o ter utilizado para pôr à prova a sua Geometria Analítica.

Apolónio foi o fundador da Astronomia Matemática grega, usando modelos geométricos para explicar o movimento dos planetas. Este propôs dois sistemas alternativos: um feito de movimentos epicíclicos e outro envolvendo movimentos excêntricos. Porém, Eudoxo para a representação do movimento dos planetas, tinha usado esferas concêntricas.

No início do século XVII, a partir das observações astronómicas de Tycho Brahe, Kepler deduziu as suas famosas leis sobre o movimento dos planetas. De acordo com a primeira destas leis as órbitas dos planetas em torno do sol eram elípticas. Para formular esta lei, Kepler baseou-se nos estudos realizados por Apolónio de Perga sobre as secções de uma superfície cónica, resultado esse que o sábio grego não conseguiu descobrir.

Hoje em dia, as cónicas desempenham um papel importante tanto na Física como na Matemática. Sabemos agora que as órbitas dos planetas são elipses, que a trajectória dos foguetes balísticos é uma parábola e que os espelhos dos telescópios são parabólicos.

Dos séculos I a V d. C. assistimos ao declínio da cultura grega. Dos geómetras deste período, destacam-se Heron de Alexandria, Menelau de Alexandria, Cláudio Ptolomeu e Papo de Alexandria.

Heron de Alexandria foi um matemático que viveu no século I d. C. A sua obra, *Métrica* tornou-se conhecida pelo seu conteúdo. O livro I trata de áreas de figuras planas e de superfícies cilíndricas, cónicas e esféricas. Este contém também a fórmula de Heron que dá a área de um triângulo quando são conhecidos os seus lados: $Área = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ onde s é o semi-perímetro e a, b, c o comprimento dos lados. A Fórmula de Heron para o volume de um tronco de pirâmide quadrangular é equivalente à encontrada no antigo Papiro de Moscovo: $V = \frac{1}{3} \times h \times \left(a^2 + ab + b^2\right)$.

O segundo livro trata do cálculo de volumes de figuras de formato variado, como o cilindro, o cone, a pirâmide e suas secções. O terceiro livro trata de problemas relativos à divisão de figuras em áreas numa razão dada.

Menelau de Alexandria viveu em fins do I século d. C. e princípios do II século d.C. A sua obra *Sphaerica* continha uma Geometria da Esfera. O primeiro volume desse tratado estabelece uma base para triângulos esféricos, análoga à do volume I dos *Elementos* de Euclides, para triângulos planos. Menelau procura estender para os triângulos esféricos e estudo feito para os triângulos planos, como os casos de congruência e a soma dos ângulos internos (maior do que 180º). O segundo volume descreve a aplicação da Geometria Esférica à Astronomia; o terceiro trata da Trigonometria. O último volume contém o célebre Teorema de Menelau.

Cláudio Ptolomeu viveu no II século d. C. e estava ligado à escola de Alexandria. A sua obra mais importante foi *Coletânea de Matemática ou Almagesto* constituída por treze volumes. Esta obra trata de Astronomia, usando a Trigonometria Esférica como ferramenta básica. Encontramos, também, no primeiro volume, o famoso Teorema de Ptolomeu: "Em um quadrilátero (convexo) inscrito em um círculo, o produto de suas diagonais é igual à soma dos produtos dos lados opostos".

Papo de Alexandria foi o último matemático importante da Grécia antiga. Viveu num "período de declínio da Geometria e que, portanto, não poderia fazer mais nada a não ser analisar a obra de seus predecessores e tentar generalizá-las e melhorá-las com a descoberta de novos resultados (…)" (Lintz, 1999, p. 283). A sua obra mais importante intitula-se *Colecção (Synagoge),* constituída por oito livros com resultados próprios e comentários às obras de matemáticos gregos, sendo considerada uma rica fonte de informação relativamente a Matemática grega. A sua obra era uma "espécie de manual para o estudo da Geometria grega juntamente com anotações históricas, aperfeiçoamentos e alterações de teoremas e demonstrações" (Struik, 1997, 107). Esta obra contém um estudo aos poliedros platónicos, onde Papo demonstra que estes podem inscrever-se numa esfera; um estudo dos sólidos semi-regulares de Arquimedes; um estudo sobre as propriedades da quadratriz e da espiral de Arquimedes. Papo apresenta também a sua solução para a trissecção do ângulo.

2.4.1.1. Os três problemas clássicos da Matemática Grega

As fontes directas sobre a actividade dos matemáticos Gregos da antiguidade são praticamente inexistentes; aquilo que sabemos é por referências posteriores. O período compreendido entre os séculos V e IV a. C. chamado época Heróica da Matemática, tem início na história dos três problemas clássicos da Matemática Grega. Durante dois mil anos, estes três problemas chamaram a atenção de alguns matemáticos da Grécia. Mas, a notoriedade destes problemas, reside no facto de terem constituído, ao logo dos tempos, uma fonte muito rica de ideias e processos matemáticos, que foram sendo inventados nas sucessivas tentativas de resolução. Os três problemas da antiguidade grega que se tornaram notáveis eram: a quadratura do círculo, a duplicação do cubo e a trissecção do ângulo. Estes três problemas deveriam ser resolvidos usando somente régua não graduada e compasso. No século XIX, foram apresentadas demonstrações da impossibilidade de solução de qualquer um dos três problemas, utilizando apenas aqueles instrumentos.

Vários foram os matemáticos gregos que tentaram resolvê-los. No entanto, pensa-se que, provavelmente, já sabiam da impossibilidade de solução, nos termos estritos em que tinha sido enunciados. De facto, eram bem poucas as tentativas de resolução naqueles termos, porém existia uma abundância de propostas de solução não ortodoxas. No entanto, as várias tentativas que foram feitas para resolvê-los levaram à invenção das cónicas e de outras curvas planas.

O problema da quadratura do círculo consiste no seguinte: "dado um círculo *c* de raio *r*, determinar com régua não graduada e compasso, o lado *a* de um quadrado ABCD de área igual à de *c*" (Veloso, 1998, p.41). Esquecendo o facto de o problema ter de ser resolvido com régua não graduada e compasso, o problema consiste em resolver em ordem a *a* a equação $a^2 = \pi r^2$. Logo, o problema é equivalente a conhecer o valor de π, razão constante entre o perímetro e o diâmetro de uma circunferência. Assim, este problema reduz-se a determinar o valor de π.

O texto de Plutarco é a primeira referência que existe relativamente ao problema da quadratura do círculo. Segundo o referido texto, Anaxágoras de Clazomene (499-428 a.C.) estudou o problema da quadratura do círculo, enquanto estava na prisão. Este "foi preso em Atenas por afirmar que o Sol era uma pedra incandescente e não um deus" (Veloso, 1998, p. 55).

Este problema já estava presente na Matemática da Babilónia e do Antigo Egipto. Encontramo-lo no Papiro de Rhind, uma das fontes da Matemática egípcia, no Problema 50, que o escriba egípcio toma 3,16 para o valor de π. Também os Babilónios assumiram que o valor de π era de 31/8, ou seja, cerca de 3,125.

Foi Arquimedes o primeiro a mostrar que a razão constante entre o perímetro e o diâmetro de qualquer circunferência e a razão constante entre a área de um círculo e o seu raio tinham uma relação entre si. De facto, a primeira razão é π e a outra razão é π^2. Na sua obra *Sobre a Medida da Circunferência*, Arquimedes prova que π esta compreendido entre $3\frac{10}{71}$ e $3\frac{10}{70}$. Assim, Arquimedes reduz o problema da quadratura do círculo à rectificação de uma circunferência, isto é, construir com régua não graduada e compasso, um segmento igual ao perímetro de um círculo de raio dado. Ora, sendo possível construir um segmento de comprimento π, o problema estaria resolvido. Neste sentido, a resolução do referido problema está ligado ao valor de π. O matemático alemão Lindemann (1852-1939), publicou na revista *Mathematische Annalen*, em 1882, um artigo em que demonstra que a quadratura do círculo não é possível nas condições do enunciado. Pois sendo π "um número transcendente, ou seja, não pode ser obtido como raiz de uma equação algébrica com coeficientes racionais", demonstramos a impossibilidade da quadratura do círculo nas condições definidas (Veloso, 1998, p. 43).

Vários matemáticos tentaram resolver o problema sem usar régua e compasso, utilizando outras curvas. Foram várias as soluções apresentadas com uso de curvas especiais: a Dinostrato é atribuída a resolução da quadratura do círculo utilizando a quadratriz de Hípias e a Arquimedes por meio de uma Espiral. Embora Hipócrates não tenha conseguido resolver o problema da quadratura do círculo, nas suas tentativas para o resolver, conseguiu determinar a quadratura de certas lúnulas (regiões do plano contidas entre dois arcos de circunferência com a concavidade no mesmo sentido).

Apresentamos, em seguida, uma demonstração não ortodoxa da quadratura do círculo feita por Arquimedes usando uma espiral.

A espiral de Arquimedes é construída do seguinte modo: "consideremos uma semi-recta *s* que roda, com movimento de rotação uniforme, em torno da origem, ao mesmo tempo que um ponto *P*, movendo-se sobre *s*, também com movimento uniforme, se afasta da origem. Suponhamos ainda que ambos os movimentos começaram no mesmo instante, com *P* sobre a origem da semi-recta. A espiral de Arquimedes é o lugar geométrico das posições do ponto *P*" (Veloso, 1998, p. 44).

Para resolver o problema da quadratura do círculo, Arquimedes procedeu do seguinte modo: seja *v* a velocidade do ponto *P* acima referido sobre a semi-recta *s* e seja *W* a velocidade da rotação da semi-recta *s*, em radianos por segundo, então as coordenadas polares *r* e θ do ponto P serão dadas por $r = vt$ e $\theta = wt$, sendo *t* o tempo. Resolvendo cada uma das equações a ordem a *t* temos $t = \frac{r}{v}$ e $t = \frac{\theta}{w}$, depois igualando $\frac{r}{v} = \frac{\theta}{w}$, obtemos a equação da espiral de Arquimedes em coordenadas polares que é $r = a\theta$ em que $a = \frac{v}{w}$. Basta provar que "*Se considerarmos a posição do ponto P ao fim de uma volta completa da semi-recta s, e se for T a intersecção de t, tangente à* *espiral no ponto P, com a perpendicular a s passando por O, origem de s, então o comprimento do segmento PT é igual ao perímetro da circunferência de centro O e raio OP"* (Veloso, 1998, p.4). A sua demonstração encontra-se na sua obra *Sobre as Espirais*, na proposição 18, sendo esta prova feita por uma dupla redução ao absurdo. Surgem, assim, contradições de considerar que o comprimento do segmento PT é superior ou inferior ao perímetro do círculo. O problema da quadratura do círculo fica reduzido ao da rectificação da circunferência. A solução tem um carácter teórico, uma vez que não existe um processo rigoroso para traçar a espiral de modo contínuo e não se pode determinar a tangente num ponto sem conhecer o valor de π.

A impossibilidade de quadrar um círculo deve-se ao facto do valor de π não ser exacto. Como foi dito, este problema despertou o interesse de vários matemáticos, ao longo dos séculos, não se tendo encontrado uma solução. Daí que a expressão, quadrar um círculo, passou a ser usada para designar uma meta inatingível.

A origem do problema da trissecção do ângulo não é conhecida. Pensa-se que pode ter surgido como extensão da bissecção de um ângulo ou a propósito da construção de polígonos regulares. Vários foram os geómetras gregos que tentaram, infrutiferamente, solucioná-lo utilizando os recursos permitidos: a régua não graduada e o compasso. Destacam-se algumas resoluções deste problema: a de Pappus, no século IV d. C., utilizando uma hipérbole; a de Nicomede, utilizando a conchóide e, utilizando a quadratriz (ou trissectriz) de Hípias; a de Papo de Alexandria e a de Arquimedes de Siracusa, através duma construção por nêusis (inclinação).

A trissecção de um dado ângulo consiste no seguinte "dado um ângulo qualquer AOB, determinar, com régua não graduada e compasso, um ângulo AOC com um terço da amplitude do ângulo AOB", ou seja, dividir qualquer ângulo em três partes iguais.

Arquimedes de Siracusa na sua obra *Livro dos Lemas* produziu uma construção por nêusis para a trissecção dum ângulo agudo que é a seguinte: considere-se "um ângulo agudo de vértice A; trace-se uma circunferência centrada em A, de raio r arbitrário e intersectando os lados do ângulo nos pontos B e C. Insira-se, entre a recta AC e a circunferência, um segmento de recta FE de comprimento igual ao de r e de tal modo que o ponto B esteja no seu prolongamento.

A recta que passa pelo ponto A e é paralela a BF trissecta o ângulo dado, $\angle$CAB. De facto, designa-se por G o ponto em que esta paralela intersecta o arco de circunferência BC. No sistema de rectas paralelas AG e FB intersectadas pela transversal FC, os ângulos $\angle$CAG e $\angle$AFE são correspondentes e, portanto, iguais:

$\angle$CAG = $\angle$AFE. Além disso, os triângulos ABE e EAF são ambos isósceles, donde decorre que $\angle$ABE = $\angle$AEB e que $\angle$EFA = $\angle$EAF. Como $\angle$AEB é um ângulo externo do triângulo EAF, é igual à soma dos dois ângulos internos opostos, $\angle$AFE =$\angle$FAE. Analogamente, $\angle$CAB é um ângulo externo do triângulo ABF e, portanto, é igual à soma dos dois ângulos internos opostos, $\angle$ABE e $\angle$AFE. Logo,

$\angle$CAB = $\angle$ABE +$\angle$AFE = $\angle$AEB + $\angle$AFE =

=$\angle$ FAE + $\angle$AFE + $\angle$AFE = 3 $\angle$AFE = 3$\angle$CAG" (Estrada, Sá, Queiró, Silva e Costa, 2000, p. 282). Esta é uma das formas de trissectar o ângulo $\angle$BAC que envolve uma construção por nêusis e diversas construções com régua e compasso.

E, por fim, a duplicação do cubo que consiste no seguinte: "Dado um cubo de aresta *a*, determinar, com régua não graduada e compasso, a aresta *b* de outro cubo com o dobro do volume" (Veloso, 1998, p. 41).

Pressupõem-se que foi Hipócrates de Quios quem descobriu que o problema da duplicação do cubo se pode reduzir ao problema da determinação dos dois meios proporcionais entre dois números *a* e *b* (*a* > *b*), ou seja, à determinação de dois números x e y que verificam a condição $\frac{a}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{b}$. Considerando *a* o comprimento da aresta de um dado cubo, e se fizermos *b* = *2a*, teremos $xy = 2a^2$ e $x^2 = ay$, de onde se deduz $x^3 = 2a^3$. Obtemos o valor de *x* como solução do problema da duplicação do cubo.

Menecmo, em meados do século IV a.C., apresentou duas soluções para o problema da duplicação do cubo usando cónicas. A primeira solução de Menecmo utiliza uma parábola e uma hipérbole; e na segunda solução utiliza duas parábolas. Verificou que podia obter a solução do referido problema por meio da intersecção de pares de cónicas. Convém referir que Menecmo descobriu as cónicas (elipse, parábola e hipérbole) como secções planas de um cone, nas suas tentativas de resolução do problema da duplicação do cubo.

Uma das demonstrações é a seguinte " Seja duas médias proporcionais entre OA e OB, duas grandezas dadas, isto é, quer-se encontrar duas grandezas x e y tais que $\frac{OA}{x}=\frac{x}{y}=\frac{Y}{OB}$. Coloquemos AO e OB perpendiculares e suponhamos o problema resolvido, colocando-se OM = x e ON = y. Então, por hipótese, $\frac{OA}{OM}=\frac{OM}{ON}=\frac{ON}{OB}$

donde, $OB \times OM = \overline{ON}^2 = PM^2$ o que indica que P está sobre uma parábola de eixo OM, vértice O e "latus rectum" OB. Por outro lado, $OA \times OB = OM \times ON = PN \times PM$ o que evidencia que P também está na hipérbole de centro O e assímptotas OM e ON. Portanto, dadas OA e OB, começamos por construir a parábola e a hipérbole, como acima definidas e, então, a intersecção delas dará o ponto P que determina OM = x e ON = y que resolvem nosso problema" (Lintz, 1999, p. 300).

Em suma, no processo histórico de desenvolvimento da Matemática, os matemáticos gregos confrontaram-se com algumas dificuldades, sendo lançados novos desafios, embora também tenham realizado inúmeras descobertas, dando assim o seu contributo. Os três problemas clássicos que deveriam ser resolvidos somente usando a régua não graduada e o compasso (quadratura do círculo, duplicação do cubo e a trissecção do ângulo), a descoberta dos incomensuráveis (impossibilidade de medir a diagonal de um quadrado tomando o lado para unidade), o Quinto Postulado de Euclides e a impossibilidade de o demonstrar utilizando os restantes postulados, foram alguns problemas que desafiaram os matemáticos gregos durante vários séculos. Diversos matemáticos empenharam-se em solucioná-los muitas vezes sem sucesso; o facto é que muitas descobertas foram feitas ao tentarem resolver estes problemas. Os matemáticos gregos descobriram, por exemplo, outras curvas na tentativa de as utilizar para resolver os três problemas clássicos: as cónicas por Menecmo, a trissectriz de Hipías e a espiral de Arquimedes.

Os gregos desenvolveram a Matemática não por motivos práticos e utilitários, mas movidos, muitas vezes, pelo desafio intelectual, pelo "sabor do saber" e pelo prazer intrínseco.

2.4.2. Os Poliedros

Os poliedros têm sido, desde os tempos mais remotos, objectos de admiração e de estudo.

Existem diversas fontes da Matemática egípcia, chinesa e babilónica que demonstram que o interesse pelos poliedros procede de tempos longínquos.

Na Civilização Egípcia, encontramos no Papiro de Rhind e no Papiro de Moscovo, problemas referentes a poliedros, o que demonstra o conhecimento destes.

Na China, a obra *Nove Capítulos Sobre a Arte da Matemática* contém problemas que cobrem um elevado número de tópicos, aparecendo a fórmula do volume da pirâmide e a fórmula para o cálculo do volume do tronco de pirâmide de base quadrada, $V = \frac{1}{3} \times h \times \left(a^2 + ab + b^2\right)$.

Também na Civilização Babilónica encontramos, em placas de barro, problemas de cálculo de volumes de troncos de pirâmides e de outros sólidos. No entanto, algumas das fórmulas utilizadas estão correctas e outras não.

Mas, o interesse pelos poliedros não é apenas utilitário, pois em escavações arqueológicas, junto de Pádua, foi descoberto um dodecaedro etrusco (500 a.C.) utilizado no jogo. E, no Egipto, eram usados dados com a forma de icosaedros.

Os poliedros podem ser divididos do seguinte modo: poliedros de Platão ou sólidos platónicos, semi-regulares, prismas, pirâmides e multiformes.

2.4.2.1. Os sólidos Platónicos

Os cinco poliedros regulares – tetraedro, cubo ou hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro foram trazidos para a história por Platão.

Para Veloso (1998) ”um poliedro é regular quando todas as faces são polígonos regulares congruentes, todas as arestas são congruentes e todos os vértices são congruentes” (p. 232).

Platão, sobre estes sólidos escreveu um diário intitulado *Timaeus*, onde associava estes poliedros a elementos da natureza: o tetraedro ligado ao fogo; o octaedro ao ar; o icosaedro à água; o cubo à terra e, finalmente, o dodecaedro ao Universo que nos cerca. Nesta obra, Platão apresentou uma descrição dos cinco poliedros regulares e mostrou como construir modelos desses sólidos, juntando triângulos, quadrados e pentágonos para formar suas faces. Uma das características destes sólidos geométricos é que cada um é composto por apenas uma única figura geométrica regular. Assim, através do triângulo equilátero, obteve o tetraedro, o octaedro e o icosaedro, de quatro, oito e vinte faces respectivamente; com o quadrado, obteve o cubo ou hexaedro com seis faces idênticas; e, por fim, com o pentágono regular, obteve um dodecaedro, com doze faces iguais.

Segundo os historiadores, os Pitagóricos já conheciam todos os sólidos platónicos e sabiam construir o tetraedro, o cubo, o octaedro e o icosaedro utilizando a construção em triângulos descrita por Platão em *Timaeus* e o dodecaedro através da construção de pentágonos. Também Teeteto de Atenas, que ensinou na Academia de Platão, realizou um estudo teórico sobre os cinco poliedros regulares e, provavelmente, a ele se deve o teorema que diz que há cinco e somente cinco poliedros regulares. Porém, "um escólio ao Livro XIII de *Os Elementos* de Euclides afirma que somente três dos cinco sólidos regulares eram devidos aos Pitagóricos e que foi através de Teeteto que o octaedro e o icosaedro se tornaram conhecidos" (Boyer, 1996, p. 59).

Portanto, não foi Platão quem primeiro os estudou. No entanto, foi ele quem compilou alguns trabalhos, anteriores a ele, e sistematizou seu estudo, sendo por isso, actualmente, designados por *Sólidos Platónicos.*

Nos livros XI, XII e XIII dos *Elementos* de Euclides são tratados os poliedros, sendo no livro XIII, a partir da proposição número treze, que Euclides estuda, sistematicamente, os sólidos platónicos. Contudo, são demonstradas nas proposições treze, catorze, quinze, dezasseis e dezassete as construções do tetraedro, octaedro, cubo, icosaedro e dodecaedro, respectivamente. A proposição dezoito estabelece as relações entre as arestas destes sólidos e o diâmetro da superfície esférica. E, na proposição seguinte, Euclides estabelece quantos e quais são os poliedros convexos regulares; ou seja, demonstra que não pode ser construído mais nenhum poliedro cujas faces sejam polígonos regulares, iguais entre si, para além dos cinco sólidos que acabou de construir.

Alguns historiadores afirmam que, o facto de Euclides terminar os treze volumes da sua obra com esta proposição, significa que o "objectivo principal dos *Elementos* é precisamente demonstrar a existência de apenas cinco poliedros regulares" (Veloso, 1998, p. 235).

2.4.2.2. Os sólidos arquimedianos

Os sólidos arquimedianos foram estudados por Arquimedes, no século III a.C..

Arquimedes estudou os sólidos que obtínhamos, se na definição de poliedro regular mantivermos a condição das faces serem polígonos regulares, mas não a de serem todas congruentes e acrescentarmos a condição de que todo o vértice pode ser transformado noutro vértice por uma simetria do poliedro. Assim, enquanto nos sólidos platónicos as faces são polígonos regulares apenas de um tipo, nesta família de sólidos poderão ser de vários tipos. Estes sólidos são chamados de arquimedianos ou semi-regulares.

De acordo com a definição dada, os prismas e os antiprismas são sólidos arquimedianos. Existem infinitos prismas e antiprismas, sendo esta a razão pela qual temos de incluir mais uma condição. Por isso, para obter apenas os treze que

Arquimedes estudou é necessário acrescentar outra condição: todos os sólidos arquimedianos podem ser colocados dentro de um tetraedro regular, de modo que quatro das suas faces fiquem sobre as faces do tetraedro. Concluímos, portanto, que os prismas e os antiprismas não estão incluídos na família dos arquimedianos. Logo, sem os prismas e antiprismas, a família dos arquimedianos é finita.

Existem treze sólidos arquimedianos. Cada um deles pode obter-se por meio de uma sucessão de cortes (truncaturas) a partir dos sólidos platónicos por meio de transformações. Segundo Veloso (1998) as truncaturas, em cada vértice, são feitas por planos perpendiculares ao eixo de simetria de rotação que passa por esse vértice (p. 236). Assim, conforme a distância do vértice a que a truncatura se faz, se vão obtendo vários poliedros arquimedianos. Deste modo, se partirmos do tetraedro, cubo ou octaedro, conseguimos chegar, por meio de truncaturas (ou truncaturas modificadas) dos vértices, aos seguintes arquimedianos: tetraedro truncado, cubo truncado, octaedro truncado, cuboctaedro, cuboctaedro truncado e rombicuboctaedro. No entanto, se partirmos do icosaedro ou do dodecaedro, podemos por truncaturas (ou truncaturas modificadas) dos vértices, conseguimos chegar aos seguintes arquimedianos: icosaedro truncado, icosidodecaedro, dodecaedro truncado, icosidodecaedro truncado e rombicosidodecaedro. Os dois sólidos arquimedianos que faltam não se podem obter por sucessões de truncaturas. Eles são chamados de arquimedianos achatados, sendo o cubo achatado e dodecaedro achatado.

Dois mil anos mais tarde, no princípio do século XVII, Johannes Kepler (1571-1630) interessou-se também por estes sólidos e investigou-os de maneira exaustiva demonstrando que, para além dos prismas e antiprismas, apenas podem existir treze sólidos arquimedianos, atribuindo um nome a cada um deles.

Em suma, a diferença entre os sólidos platónicos e os sólidos arquimedianos reside no facto de que nos primeiros as faces são polígonos regulares (triângulo equilátero, quadrado, pentágono regular, etc.) todos da mesma espécie, ao passo que nos arquimedianos podemos ter polígonos regulares de diferentes espécies.

2.4.2.3. Poliedros estrelados

Durante um longo período, depois de os matemáticos gregos terem estudado os sólidos regulares (sólidos platónicos) e semi-regulares (sólidos de Arquimedes), o estudo dos poliedros não avançou significativamente.

Até que, durante o Renascimento Italiano, diversos artistas e matemáticos se interessaram novamente pelo estudo e representação daqueles sólidos. Destacam-se Piero della Francesca, Luca Pacioli, Leonardo da Vinci e *Dürer*. O pintor Piero della Francesca escreveu o tratado *Libellus de Cinque Corporibus Regularibus*, sobre os cinco sólidos regulares. Também Luca Pacioli (1445-1517) no seu Tratado *De Divina Proporcione* aborda os poliedros e nele aparecem desenhos da autoria de Leonardo da Vinci. *Dürer* no seu tratado *Underveissung der Messung*, expõe a construção de poliedros regulares e semi-regulares a partir da sua planificação.

No período do Renascimento surge outra categoria de poliedros: os poliedros estrelados. Johannes Kepler (1571-1630) é quem vai estudar esta nova categoria de poliedros.

Para compreendermos como se obtêm os sólidos estrelados, basta saber o que são polígonos estrelados. Se prolongarmos os lados de um triângulo equilátero e de um pentágono regular, obtemos resultados muito diferentes.

Assim, enquanto no triângulo não conseguimos formar um novo polígono limitado pelos lados prolongados, pois eles não se voltam a encontrar, no caso do pentágono regular os lados prolongados intersectam-se, definindo um novo polígono: o pentagrama, usado pelos discípulos de Pitágoras como símbolo da Escola Pitagórica. O processo utilizado para obter o pentagrama chama-se estrelação. Em certos polígonos, esse processo pode repetir-se mais de uma vez, ou seja, o polígono pode admitir mais do que uma estrelação. Por exemplo, o heptágono admite duas estrelações.

O processo de estrelação para obter sólidos estrelados é análogo ao dos polígonos. Só que, para obter os sólidos estrelados, o que se prolonga são as faces e procuram-se os sólidos limitados por essas faces prolongadas, quando elas se encontram. Por exemplo, se prolongarmos as faces de um cubo, não conseguimos encontrar nenhum sólido limitado por elas; isto quer dizer que não é possível obter a partir do cubo nenhum sólido estrelado. No entanto, da estrelação do octaedro resulta um sólido estrelado. E, no caso do dodecaedro, admitem-se três estrelações, ou seja, obtemos três sólidos estrelados: pequeno dodecaedro estrelado, grande dodecaedro e o grande dodecaedro estrelado respectivamente da primeira, segunda e terceira estrelação.

O poliedro platónico com mais estrelações é o icosaedro. No século XX, Coxeter provou a existência de cinquenta e nove estrelações do icosaedro.

No início do século XVII, Kepler descobriu o pequeno dodecaedro estrelado (doze faces, doze vértices e trinta arestas) e o grande dodecaedro estrelado (doze faces, vinte vértices e trinta arestas).

Em 1809, Louis Poinsot (1777-1859) escreveu um trabalho importante sobre poliedros, descobrindo, independentemente de Kepler, os quatro poliedros estrelados. Além dos acima referidos, descobriu também o grande dodecaedro (doze faces, doze vértices e trinta arestas) e o grande icosaedro (vinte faces, doze vértices e trinta arestas). Por isso, as três estrelações do dodecaedro e a décima sexta estrelação do icosaedro são chamados sólidos de Kepler-Poinsot. A importância destes quatro sólidos reside no facto de serem, tal como os cinco sólidos platónicos, regulares. Segundo Veloso (1998) se admitirmos que as faces podem ser polígonos regulares generalizados (incluindo os pentagramas, por exemplo) e que se podem intersectar, os quatro poliedros obtidos por estrelação são regulares (p.243). As faces do pequeno dodecaedro estrelado e do grande dodecaedro estrelado são pentagramas, enquanto as faces do grande dodecaedro e do grande icosaedro são triângulos equiláteros. Como tal só existem quatro poliedros regulares estrelados: os anteriormente referidos.

Em 1983, Cauchy (1789-1857) demonstrou que apenas podem existir nove poliedros regulares: os quatro poliedros estrelados (pequeno dodecaedro estrelado, grande dodecaedro estrelado, grande dodecaedro e grande icosaedro) e os cinco sólidos platónicos (tetraedro, cubo ou hexaedro, octaedro, dodecaedro, icosaedro). Também provou, para um caso particular de poliedros, que a fórmula de Euler é válida.

Num mosaico do pintor Paolo Ucello, existente na Basílica de S. Marcos, em Veneza, figura um sólido deste tipo. No mosaico apenas vemos seis pirâmides pentagonais, pois a base é um pentágono. No entanto, se considerarmos a parte escondida simétrica da que se vê, verificaríamos que o sólido é o pequeno dodecaedro estrelado.

2.4.2.4. Sólidos de Catalan

Eugéne Charles Catalan (1814-1894) estudou os duais dos poliedros arquimedianos. Em 1865, publicou num texto intitulado *Mémoire sur la Théorie des Polyédres* o seu estudo.

O conceito de dualidade que será apresentado aplica-se apenas aos sólidos platónicos e arquimedianos. Existem dois métodos para encontrar o dual destes poliedros convexos:

1º - qualquer sólido platónico ou arquimediano pode ser inscrito numa superfície esférica. Para obter os duais dos sólidos platónicos basta "imaginarmos o plano tangente à respectiva superfície esférica em cada um dos vértices e se tomarmos esses planos como os planos das faces de um novo poliedro", obtemos o seu dual (Veloso, 1998, p. 245).

2º - Também obtemos o dual destes sólidos se unirmos os pontos centrais dos pares de faces adjacentes.

Aplicando qualquer um destes métodos obtemos que o dual do tetraedro é o tetraedro, que o dual do cubo é o octaedro e vice-versa e que o dual do dodecaedro é o icosaedro e vice-versa.

Se fizermos a mesma construção a partir dos planos tangentes para os sólidos arquimedianos, obtemos os seus duais. Aos duais dos sólidos arquimedianos chamamos de sólidos de Catalan. Verificamos que nos duais obtidos as faces não são polígonos regulares sendo, no entanto, todas congruentes.

2.4.2.5. A família dos Deltaedros

Durante o século XX os poliedros continuam a despertar interesse nos matemáticos.

Em 1960, Norman Johnson conjectura que para além dos sólidos platónicos e dos arquimedianos, existem 92 poliedros convexos, em que as faces são polígonos convexos regulares, incluindo os prismas e os antiprismas regulares, embora em 1947, já tivesse sido provado pelos matemáticos Hans Freudenthal e Van der Waerden que existem apenas oito poliedros convexos cujas faces são triângulos equiláteros. Para estes oito poliedros Cundy e Rollett sugerem o nome de deltaedros. Assim, a família dos deltaedros são todos os sólidos cujas faces são triângulos equiláteros, todos iguais.

Os oito deltaedros são: o tetraedro (quatro faces), o octaedro (oito faces), o icosaedro (vinte faces), bipirâmide triangular (seis faces), bipirâmide pentagonal (dez faces), dodecadeltaedro (doze faces), tetradecadeltaedro (catorze faces), hecadecadeltaedro (dezasseis faces). A bipirâmide triangular obtém-se unindo por uma face dois tetraedros e a bipirâmide pentagonal obtém-se unindo, pela base, duas pirâmides pentagonais cujas faces são triângulos equiláteros. Existem assim deltaedros convexos com quatro, seis, oito, dez, doze, catorze, dezasseis e vinte faces. Notamos que o número de faces varia entre quatro e vinte. Será que não deveria existir um deltaedro com 18 faces? Hans Freudenthal e Van der Waerden demonstraram que esse deltaedro não se pode construir.

2.4.3. A Geometria no Antigo Egipto

Segundo Boyer (1996) "afirmações sobre a origem da Matemática, sejam da Aritmética, sejam da Geometria, são necessariamente arriscadas, pois os primórdios do assunto são mais antigos que a arte de escrever" (p.4).

Apesar do historiador grego Heródoto escrever que a Geometria nasceu no Antigo Egipto, as primeiras concepções de Geometria datam de tempos tão remotos como os do começo da Idade da Pedra. Os registos mais antigos da actividade humana, no campo da Geometria, remontam ao homem paleolítico. Os desenhos e pinturas feitos nas cavernas "revelam uma compreensão da descrição bidimensional dos objectos no espaço", isto matematicamente falando (Struik, 1997, p. 29). Porém, foram poucos os progressos que se realizaram no conhecimento de relações espaciais. Contudo, a transição da recolha de alimentos onde fosse possível encontrá-los (nómadas) para a sua produção (caça, pesca e agricultura) mudou a atitude do Homem perante a Natureza. Esta deixou de ser passiva, para se tornar activa. Inicia-se um novo período da Idade da Pedra: o Neolítico. Dos achados arqueológicos, "os restos encontrados mostram como se desenvolveram gradualmente certos ofícios elementares, tais como: a cerâmica, a carpintaria e a tecelagem" (Struik, 1997, p. 30). Estes achados permitem conhecer o Homem Neolítico. Por exemplo, os potes, os tecidos e as cestas mostram exemplos de padrões geométricos utilizados na Cerâmica, na Tecelagem e na Cestaria. Na ornamentação neolítica observamos exemplos de congruência, de simetria e de semelhança, conceitos que fazem parte da nossa Geometria elementar. Também a necessidade de medir o comprimento ou o volume de certos objectos deu origem a unidades de medida como o dedo, o pé e a mão.

Boyer (1996) sublinha que a preocupação do homem pré-histórico com configurações e relações pode ter origem no seu sentimento estético e no prazer que lhe dava a beleza das formas, motivos que muitas vezes motivaram também a Matemática de hoje" (p. 5).

Segundo Boyer (1996):

> "Heródoto e Aristóteles não quiseram arriscar-se a propor origens mais antigas que a civilização egípcia, mas é claro que a Geometria que tinham em mente possuía raízes

> mais antigas. Heródoto mantinha que a Geometria se originou no Egipto, pois acreditava que tinha surgido da necessidade prática de fazer novas medições de terras após cada inundação anual no vale do rio Nilo. Aristóteles achava que a existência no Egipto de uma classe sacerdotal com lazeres é que tinha conduzido ao estudo da Geometria" (p.4).

Segundo o historiador grego Heródoto, a origem da Geometria no Egipto, provém da necessidade prática. O Antigo Egipto ocupava uma extensa região, ao longo do vale do Nilo. O rio Nilo tinha, em certas épocas do ano, inundações que alagavam os campos, fazendo desaparecer os marcos de delimitação entre eles. A necessidade de estabelecer de novo os limites das propriedades pode ter sido a principal razão que levou os antigos egípcios a desenvolver a Geometria. Sem marcos a demarcar os terrenos, os agricultores não sabiam qual era a sua propriedade para a poderem cultivar. Para demarcarem novamente os limites existiam os agrimensores egípcios, funcionários dos faraós encarregados de avaliar os prejuízos das cheias e delimitar as fronteiras entre as diversas propriedades. Estes agrimensores ou "estiradores de corda", sabiam calcular perímetros e áreas de terrenos, decompondo-os em rectângulos e triângulos. Como tal, a necessidade de delimitar as terras conduziu à noção de figuras geométricas (rectângulo, quadrado e triângulos), de perímetro e de área.

Prova disso é o texto do historiador Heródoto (meados do século V a.C.), segundo o qual a Geometria que, etimologicamente, significa medida da terra, se terá iniciado no Egipto e daí, terá passado para a Grécia:

> "O rei, assim dizem, dividiu as terras entre os egípcios dando a cada um uma parcela de terra e fez disso uma fonte de recursos, impondo o pagamento de um imposto. Qualquer homem que tivesse sido privado de parte das suas terras pelo rio, deveria declarar a Sesóstris o que lhe tinha sido tirado: o rei mandaria homens verificar e medir o espaço do qual a terra fora diminuída, de forma a que o dono pagaria apenas um imposto proporcional ao original.
>
> Daqui, na minha opinião, os gregos aprenderam a arte da Geometria (…)" (Fauvel and Gray, 1987, p.21, citado por Estrada, 2000,p.45).

Aristóteles acredita que a origem da Geometria no vale do Nilo surgiu porque os sacerdotes tinham o lazer necessário para desenvolver o conhecimento teórico. Neste ponto de vista, ambas as teorias poderiam ter servido de motivação para produzir a Matemática e, em particular, a Geometria.

Os conhecimentos que temos da Matemática egípcia provêm de papiros e os seus escritos conservaram-se devido ao clima seco da região. Deles destacam-se os Papiros de Rhind e o de Moscovo. Através do conteúdo destes papiros, é possível obter informação sobre os conhecimentos da Matemática egípcia, em particular, da Geometria.

O Papiro de Moscovo foi escrito em hierático, por volta de 1850 a.C., por um escriba desconhecido. Este papiro foi comprado no Egipto, em 1893, pelo antiquário russo Golenishchev e conserva-se no Museu de Belas Artes de Moscovo (daí ser conhecido por Papiro de Moscovo). Nele constam vinte e cinco problemas da vida prática e a sua respectiva resolução. Devido ao seu estado de degradação é impossível interpretar muitos deles. Os problemas de natureza geométrica contidos neste papiro são: quatro, seis, dez e catorze. Os problemas quatro e seis referem-se a área de um triângulo e de um rectângulo, respectivamente. O problema dez consiste em calcular a área da superfície de um cesto. Os cálculos que o escriba usa são adaptáveis a um cesto cuja forma é uma semiesfera ou um semicilindro. Se considerarmos uma semiesfera de diâmetro *d* e um semicilindro de diâmetro da base *d* e altura *d* verificamos que a área da superfície lateral de cada um dos sólidos se determina aplicando a mesma fórmula. Pois a área lateral do cesto semiesférico é dado pela seguinte fórmula $A_{semi-esfera} = 2\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2$ e a área lateral do cesto semicilíndrico é dado pela fórmula $A_{semicilindro} = \pi\frac{d}{2}\times d = 2\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2$. O problema catorze consiste na determinação do volume de um tronco de pirâmide de base quadrada com altura de seis unidades se as arestas das bases superior e inferior medirem duas e quatro unidades, respectivamente. “O escriba indica que se devem tomar os quadrados dos números dois e quatro e adicionar à soma desses quadrados o produto de dois por quatro, sendo o resultado vinte e oito. Esse é então multiplicado por um terço de seis”, e o escriba obtém cinquenta e seis (Boyer, 1996, p. 13). Verificamos que os cálculos efectuados pelo escriba egípcio correspondem à aplicação da fórmula moderna $V = \frac{1}{3}\times h\times\left(a^2 + ab + b^2\right)$, onde *h* é a altura da pirâmide, e *a* e *b* são os comprimentos dos lados das bases quadradas do tronco de pirâmide. Esta fórmula não aparece escrita em nenhum lugar, mas era evidentemente conhecida pelos egípcios. No entanto, não sabemos como chegaram àquela fórmula.

O papiro de Rhind é o mais extenso dos papiros de natureza Matemática. Tem cerca de 0,30 m de altura e 5 m de comprimento. Foi comprado numa cidade à beira do Nilo, Luxor, em 1858, por um banqueiro e antiquário escocês, Henry Rhind (daí conhecido como Papiro de Rhind); é também conhecido por Papiro de Ahmes, devido ao escriba que o copiou. Actualmente, encontra-se no British Museum.

Este contém oitenta e quatro problemas, em escrita hierática, sendo alguns deles, de cariz geométricos. Foi escrito por volta de 1650 a.C., pelo escriba Ahmes. O texto é uma cópia dum mais antigo, de cerca de duzentos anos antes. Embora no papiro não haja enumeração dos problemas, o editor alemão A.A. Eisenlohr, em 1877 enumerou-os. Neste papiro os problemas entre quarenta e um e quarenta e sete, entre quarenta e oito e cinquenta e três e entre cinquenta e seis e sessenta são de natureza geométrica. A partir destes problemas do Antigo Egipto, que chegaram até nós, é possível conhecer o seu conhecimento na Geometria.

Os problemas entre quarenta e um e quarenta e sete consistem na determinação do volume de sólidos: o cubo, o paralelepípedo e o cilindro circular, todos concebidos como recipientes, principalmente de sementes. Os problemas entre quarenta e oito e cinquenta e três estão relacionados com a determinação da área de triângulos, de rectângulos, de trapézios e de círculos. Os problemas entre cinquenta e seis e sessenta dizem todos respeito a questões sobre o "seked" de uma pirâmide. O "*seked*" é a unidade usada para medir a inclinação das faces laterais das pirâmides.

O problema quarenta e um deste papiro corresponde ao cálculo do volume de um celeiro cilíndrico de nove côvados de diâmetro de base e dez côvados de altura. O escriba egípcio nas suas instruções indica "calcular sucessivamente 1/9 do diâmetro, que é 1; a diferença para 9 que é 8; o quadrado de 8, que é 64 (área da base) e depois, multiplicar 64 por 10, que dá 640 côvados cúbicos" (Estrada *et al.*, 2000, p.51). A fórmula utilizada corresponde à fórmula que hoje usamos, ou seja, $V = A_b \times h$ em que A_b é a área da base e h a altura do cilindro. A única diferença é que o escriba egípcio usa $\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2 = \frac{256}{81} = 3{,}1605$ no cálculo da área da base, visto que a base do cilindro é um círculo. Este valor de π é considerado bastante bom para a época.

O problema cinquenta corresponde ao cálculo da área de um círculo. Segundo as instruções do escriba, a área do círculo de diâmetro *d* era dada por $\left(d - \frac{d}{9}\right)^2$. Portanto,

$\left(d-\frac{d}{9}\right)^2=\left(\frac{8}{9}d\right)^2=\left(\frac{16}{9}\right)^2\times\left(\frac{d}{2}\right)^2$ fazendo $\pi=\left(\frac{16}{9}\right)^2=3{,}1605$ vem $A_{círculo}=\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2$ que corresponde à fórmula que utilizamos actualmente para o cálculo da área de um círculo.

O problema cinquenta e um refere-se ao cálculo da área de um triângulo isósceles. Segundo o escriba, a área era dada pela metade do produto da base pela altura. Ahmes justifica o seu método para o cálculo da área lembrando que o triângulo isósceles é composto por dois triângulos rectângulos iguais, e que deslocando um deles podemos formar um rectângulo. No problema cinquenta e dois é pedido para calcular a área de um trapézio isósceles, ao que Ahmes resolve-o de maneira semelhante ao problema anterior, ou seja, transforma o trapézio num rectângulo. Em transformações como estas, de busca de relações entre as figuras geométricas, observamos o início da ideia de prova em Geometria. Porém, os Egípcios não a desenvolveram.

Como podemos verificar a Geometria surgiu por necessidade do homem para resolver certos problemas práticos do dia-a-dia.

A partir destes papiros, temos acesso apenas a uma Matemática elementar, pois o conhecimento aí contido é quase todo prático e a componente principal nas questões era o cálculo. Não encontramos também tentativas de demonstração de resultados, "mas somente a prescrição de certas regras: Fazer tal, fazer assim" (Struik, 1997, p. 63). Verificamos ainda que as regras de cálculo dizem respeito, unicamente, a casos concretos e específicos. Segundo Boyer (1996), embora os "dois principais papiros matemáticos sejam de uma época bastante antiga, mil anos antes do surgimento da Matemática grega, a egípcia parece ter permanecido notavelmente uniforme durante sua longa história (…) a de seus antepassados e descendentes" (p.15).

Não se sabe se os egípcios tinham, ou não, conhecimentos matemáticos mais avançados. No entanto, os seus monumentos (pirâmides e templos) levam a pensar que, na realidade, os arquitectos eram possuidores de conhecimentos não relevados nos papiros.

A partir do rei Ptolomeu I, houve um desenvolvimento na Matemática Egípcia, uma vez que nesta altura os matemáticos gregos, Euclides e outros vão trabalhar no Museu e Biblioteca de Alexandria, no Egipto. No entanto, a maior parte da produção Matemática realizada no Egipto é considerada como grega, não só porque foi desenvolvida por matemáticos de origem grega, mas também porque era escrita em grego.

2.4.4. A Geometria na Mesopotâmia

A Mesopotâmia, região a sul da Ásia, situada entre os rios Tigre e Eufrates, que actualmente corresponde aproximadamente ao Iraque.

Os conhecimentos que hoje temos sobre a Matemática da Civilização Mesopotâmica provêm de tabletas de barro encontradas com conteúdos matemáticos gravados. Hoje, a quantidade de documentação sobre a Matemática da Mesopotâmia é superior à sobre o Egipto, pois os papiros egípcios eram mais vulneráveis aos estragos do tempo que as tabletes de barro. Os mesopotâmios coziam essas tabletes de barro, sendo praticamente indestrutíveis, excepto quando não foram cuidadosamente conservadas depois das escavações. É através destes documentos que podemos afirmar que a "matemática mesopotâmicas atingiram um nível mais elevado do que o obtido pelas matemáticas egípcias. Na Mesopotâmia podemos mesmo detectar um certo progresso no decorrer dos séculos" (Struik, 1997, p. 56).

As placas descobertas na Mesopotâmia com conteúdo matemático fazem referência a três períodos distintos, bastante separados no tempo: período antigo (c. 1990 – 1600 a.C.) a que chamamos de Antiga Babilónia; neo-assírio (aproximadamente 700 a.C.) e neo-babilónico e selêucida (aproximadamente 600 a. C. até à era cristã).

Só no século XIX, com a decifração da escrita cuneiforme, é que foi possível o estudo desta civilização. Contudo, a decifração das placas de conteúdo matemático só começou a ser realizada no século XX pelo historiador Otto Neugebauer. Actualmente, muitas das placas de barro encontram-se decifradas, comentadas e publicadas em texto, muito embora haja ainda milhares de placas por decifrar. Convém referir que os historiadores, na tradução e interpretação dos textos das placas procuraram "integrá-los no contexto cultural em que foram escritos e analisá-los em relação com o modo de pensamento e os problemas da sociedade dessa época" (Estrada, Sá, Queiró, Silva e Costa, 2000, p.69). Na Civilização Babilónica encontramos nas placas de barro muitos problemas sobre figuras geométricas, que "poderíamos chamar de Geometria, mas que os Babilónios provavelmente consideravam como Aritmética Aplicada" (Boyer, 1996, p. 28). Essas placas encontram-se em diversos museus: Antiquités Orientales- Museu de Louvre, Museu Britânico, Vorderasiatische Abteilung Tontafeln-Museu de Berlim e Yale Babylonian Collection – Universidade de Yale nos E.U.A.. Muitos dos problemas contidos nas tábuas babilónicas revelam-nos o dia-a-dia desta civilização. Nelas encontramos problemas sobre diversos assuntos: "problemas de divisões de campos numa herança, cálculo do número de tijolos necessários para construir um celeiro, problema de áreas e volumes, de construção e alargamento de canais de irrigação" (Estrada, Sá, Queiró, Silva e Costa, 2000, p. 90). Os processos utilizados para a sua resolução consistem na aplicação de fórmulas, umas vezes correctamente, outras incorrectamente, sem que tal distinção seja clarificada.

Por exemplo, segundo Estrada (2000), esta civilização para calcular a área de um círculo aplicava a seguinte fórmula $A = \frac{1}{12}P^2$, sendo P o perímetro da circunferência do círculo. Se se comparar com à fórmula que se usa actualmente verifica-se que isso corresponde a tomar $\pi = 3$. De facto, de $\pi r^2 = \frac{1}{12}(2\pi r)^2$, vem $\pi = 3$.

Porém, em 1936, os arqueólogos franceses de Susa, capital do antigo Elam, cerca de 360 km a Este da Babilónia, encontraram placas que nos transmitem outra informação do valor de π. Numa dessas placas há um texto que dá a relação existente entre o perímetro de um hexágono regular (p_6) e o perímetro p da circunferência circunscrita ao hexágono, ou seja, $p_6 = \left(\frac{57}{60} + \frac{36}{60^2}\right) \times p$. Se substituirmos p_6 por 6R e p por $2\pi R$, sendo R o raio da circunferência circunscrita ao hexágono, obteremos um valor de π com uma melhor aproximação do que a anterior. De facto, substituindo obtemos $6R = \left(\frac{57}{60} + \frac{36}{60^2}\right) \times 2\pi R \Leftrightarrow \pi = \frac{3}{\frac{57}{60} + \frac{36}{60^2}}$, vem $\pi \cong 3\frac{1}{8}$.

A área de um quadrilátero era determinada tomando o produto das médias aritméticas dos pares de lados opostos. Convém referir que, na maior parte dos casos, essa área é uma aproximação. No entanto, tal como na Civilização Egípcia, a Civilização Babilónica não faziam uma distinção entre as medidas que são exactas e as que são apenas aproximações.

Outro aspecto interessante é que na Matemática Egípcia não há qualquer indicação nos documentos encontrados de que os Egípcios tivessem conhecimento do Teorema de Pitágoras. Todavia, as placas de barro da Mesopotâmia mostram que o teorema "era conhecido, não apenas para casos especiais, mas com toda a generalidade, como uma relação numérica entre os lados de um triângulo rectângulo. Este facto conduziu à descoberta de triplos pitagóricos, tais como (3,4,5) e (5,12,13)" (Struik, 1997, p. 59). A placa Plimpton trezentos e vinte e dois é uma prova desse facto.

A referida placa encontrada data de cerca de 1700 a. C.. O seu nome deve-se ao facto de esta placa ter o número 322 da colecção de Plimpton (da Universidade de Colúmbia, em Nova Yorque). Segundo o historiador Neugebauer, que decifrou, estudou e interpretou o conteúdo matemático contido na placa, considera-a como um texto relativo a ternos pitagóricos. A placa contém quatro colunas, mas, os seus cabeçalhos estão muito danificados. Para além disso, a margem esquerda está partida. Como tal, nem todos os números podem ser lidos. Neugebauer numerou de I a IV as colunas e interpretou-as. A coluna IV é apenas uma enumeração das linhas de um a quinze e tem, como finalidade, identificar a ordem dos itens nas outras três colunas dispostas. A coluna III refere-se à diagonal de um quadrado (os valores da hipotenusa c), a coluna II seria o lado do quadrado (valores do cateto b) e a coluna I, devido ao facto de estar muito danificada, tornou-se difícil a sua interpretação. No entanto, considera como sendo $\left(\dfrac{c^2}{a^2}\right)$, sendo a, b e c lados de um triângulo rectângulo. Este historiador reconstruiu as partes ilegíveis da placa e corrigiu os erros que o escriba cometeu.

Um terno pitagórico é constituído por três números inteiros *a, b* e *c* que possam ser lados de um triângulo rectângulo. De modo que $a^2 + b^2 = c^2$ (1), sendo c a hipotenusa do triângulo. Podemos exprimir c e b como soma e diferença de dois números inteiros x e y tais que $\begin{cases} x+y=c \\ x-y=b \end{cases}$. Substituindo em (1) vem $(x-y)^2 + a^2 = (x+y)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2xy + a^2 = x^2 + y^2 + 2xy \Leftrightarrow a^2 = 4xy \Leftrightarrow a = 2\sqrt{xy}$. O número $\sqrt{xy}$ será inteiro desde que x e y sejam quadrados perfeitos, logo, $x = p^2$ e $y = q^2$, com p e q sendo números naturais. Então, sendo $a = 2pq$, $c = p^2 + q^2$, $b = p^2 - q^2$ com $p > q$ satisfaz a relação (1), obtemos um terno pitagórico. Os três inteiros assim, obtidos formam um triângulo rectângulo, em que o quadrado do maior é igual à soma dos quadrados dos outros dois. A placa Plimpton trezentos e vinte e dois parece ter sida construída deste modo. No entanto, para obter os valores da placa, temos que restringir "a valores de *p* menores que 60 e a valores correspondentes de *q* tais que $1 < \dfrac{p}{q} < 1 + \sqrt{2}$, isto é a triângulos rectângulos para os quais $a < b$. Os Babilónios presumivelmente verificaram que havia exactamente trinta e oito pares possíveis de valores de *p* e *q* satisfazendo as condições e para esses, aparentemente, formaram as trinta e oito correspondentes triplas pitagóricas" (Boyer, 1996, p. 24).

Algumas das deficiências evidentes da Matemática desta civilização foram: as placas conterem apenas casos concretos de problemas, sem formulações gerais; a falta de enunciados explícitos de regras e a ausência de distinção entre resultados exactos e aproximados, visível no cálculo da área de um quadrilátero ou de um círculo.

2.4.5. A Geometria na China

Os Egípcios usaram o papiro, os Mesopotâmios usaram as placas de barro, os chineses e os indianos usaram a casca de árvore e o bambu, sendo este material usado mais deteriorável que os anteriores. Daí o conhecimento das matemáticas chinesas ser impreciso. Das fontes de Matemática Chinesa destacam-se os livros: *Chiu Chang Suan-Shu (Nove Capítulos sobre a Arte Matemática) e Chou Pei*, que datam o período da dinastia Han (206 a. C. - 220 d.C.).

Chou Pei é só parcialmente matemático pois "trata de cálculos astronómicos, embora contenha uma introdução relativa às propriedades do triângulo rectângulo e algumas coisas sobre o uso de fracções" (Boyer, 1996, p. 133). A obra informa-nos que a Geometria chinesa derivou da mensuração e como na Babilónia era, essencialmente, um exercício de Aritmética ou Álgebra. Também, através desta obra, ficamos a saber que o Teorema de Pitágoras era conhecido pelos chineses, pois é visível a demonstração e explicações de cálculos com o referido teorema.

Chiu Chang Suan-Shu, pelo contrário, é um livro dedicado somente à Matemática. A obra contém duzentas e quarenta e seis problemas, todos resolvidos sobre mensuração de terras, agricultura, sociedades, engenharia, impostos, cálculos, soluções de equações, e propriedades dos triângulos rectângulos. Segundo Boyer (1996) "ao passo que os gregos da mesma época estavam compondo tratados logicamente ordenados e sistematicamente expositórios, os chineses repetiam o velho hábito dos Babilónios de compilar colecções de problemas específicos"(p.134).

No que se refere à Geometria destaca-se as fórmulas para calcular áreas e volumes complicados e o uso do Teorema de Pitágoras.

A obra inclui um conjunto de conhecimentos de Matemática necessários às práticas do dia-a-dia, em todos os sectores de actividade. Os problemas estão agrupados em nove tópicos. A obra contém fórmulas para o cálculo de áreas de rectângulos, de triângulos, de trapézios e de círculos. Através dos problemas referentes ao cálculo da área de um círculo observamos que o valor tomado para π era três, se compararmos a fórmula aqui dada com a fórmula actual. Segundo Boyer (1996) “a área do círculo era calculada tomando três quartos do quadrado sobre o diâmetro ou um doze avos do quadrado da circunferência”(p.134).

A obra contém, também, um formulário com fórmulas para o cálculo de volumes de sólidos geométricos associados às peças: forte circular (cilindro), telhado (pirâmide rectangular), junção (tetraedro), fosso, dique ou cano de esgoto (tronco de pirâmide quadrangular) e entrada para o túmulo (prisma triangular recto truncado). As peças eram destinadas a construir castelos, casas, canais. Ainda contém vinte e quatro problemas sobre as propriedades dos triângulos rectângulos e aplicação do teorema de Pitágoras.

Também Liu Hui, autor de um comentário extenso sobre os “Nove Capítulos”, descobriu, através de polígonos regulares inscritos e circunscritos, que $3{,}1401 < \pi < 3{,}1427$, dois séculos mais tarde Tsu Ch´ung-chih e seu filho apresentam um valor de π com sete casas decimais e também os valores $\pi = \frac{22}{7}$ e $\frac{355}{113}$.

2.4.6. A Geometria na África

Durante o século XX, efectuaram-se escavações em África e foram descobertos vários objectos que provam que o homem vive em África pelo menos há 37 mil anos. É com base nesses objectos encontrados que averiguamos que as populações africanas recorriam a motivos geométricos para decorar tecidos, paredes e até utensílios de uso diário. Em muitos dos objectos produzidos, por forma artesanal, são visíveis as aplicações da Geometria. Por exemplo, os “sipatsi” (carteiras de mão com duas partes de encaixar utilizadas para transportar documentos e moedas). Ao observarmos estes objectos verificamos que, para ornamentar e confeccionar os “sipatsi”, os cesteiros aplicam Geometria, pois eram ornamentados a partir da translação de um motivo e com padrões que apresentam eixos de simetria. A confecção destas carteiras de mão “parte de um nó de forma pentagonal dado sobre quatro tiras, seguindo-se o entrançar dessas tiras, duas a duas, perpendicularmente; pronta a cesta, é necessário efectuar um número par de nós. As tiras fazem ângulos de 45º e 135º com o contorno da mesma” (Estrada et.al, 2000, p.208). Novamente, verificamos abordagens matemáticas.

As informações disponíveis do contributo de África para o desenvolvimento da Matemática são diminutas e, aquilo que sabemos, provém das tradições culturais transmitidas oralmente e de achados arqueológicos. Enquanto no Egipto e na Antiga

Babilónia, estas civilizações registaram de forma escrita as suas descobertas de conteúdo matemático, o mesmo não aconteceu em África.

2.4.7. A geometria na Índia Medieval

Os primeiros registos da civilização indiana encontram-se no livro *Os Vedas*. No entanto, não encontramos vestígios de qualquer actividade Matemática, visto que este contém apenas textos sagrados com cânticos de louvor e cultos religiosos. Só mais tarde, aparece um apêndice a um dos *Vedas*, os *Sulvasūtras* com três versões, das quais a mais conhecida é a Apastamba. Os *Sulvasūtras* datam a época de Pitágoras e continham conhecimentos necessários à construção de templos sagrados e de altares. Neste período a Matemática usada "consistia em algumas regras empíricas de Geometria como, por exemplo, aplicações do Teorema de Pitágoras, a construção de ângulos rectos por meio de ternos pitagóricos, a quadratura de rectângulos e, de forma aproximada, de círculos" (Estrada, Sá, Queiró, Silva e Costa, 2000, p.376). Nesta altura, em geral não eram provados os resultados apresentados.

É a partir dos finais do século V da nossa era que surgem matemáticos indianos com contributos importantes para a história da Matemática, destacando-se Aryabhata I, Brahmagupta e Bhaskara II.

Aryabhata I nasceu no ano de 476, na cidade de Kusumapura, no norte da Índia, e foi o primeiro indiano a incluir uma secção de Matemática na sua obra, cujo título é *Aryabhatiya*. Na parte relativa à Matemática, são indicadas regras para calcular a área de algumas de figuras planas, apesar de algumas delas não estarem correctas ou só se verificarem em situações particulares. Nesta obra, verificamos que "a área de um quadrilátero é determinada pelo produto de dois dos lados e a área de um triângulo é o produto da perpendicular que bissecta a base por metade da base" (Estrada, Sá, Queiró, Silva e Costa, 2000, p.384). Hoje sabemos que a primeira afirmação só é verdadeira se a figura geométrica for um quadrado e a segunda só faz sentido para triângulos isósceles.

Brahmagupta nasceu em 598. Publicou uma obra de Astronomia denominada de *Brahmasphutasiddhânta* em que também incluiu uma secção de Matemática. A obra é constituída por vinte e um capítulos sendo apenas dois dedicados à Matemática. Das contribuições de Brahmagupta para a Geometria destaca-se a generalização da fórmula de Heron para a determinação da área de um quadrilátero. Esta é conhecida por fórmula de Brahmagupta: designando por A a área do quadrilátero, s o semiperímetro e a, b, c e d os lados, tem-se $A = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$. Segundo Bhaskara II, que foi o último matemático indiano do período medieval, a fórmula de Brahmagupta só pode ser aplicada a quadriláteros cíclicos, ou seja, quadriláteros convexos inscritos num círculo.

2.4.8. A Geometria na Civilização Islâmica

As maiores contribuições dos matemáticos islâmicos foram no campo da Álgebra. O primeiro tratado sobre Álgebra no Islão foi escrito por Al-Khwarizmi. A obra é constituída por três partes, sendo a segunda parte referente à Geometria prática. Contendo um conjunto de regras práticas para determinar áreas e volumes, tais como conceitos com aplicações à agrimensura e a outros problemas concretos. Por exemplo, a "área de um círculo é obtido multiplicando metade do seu diâmetro por metade do perímetro da circunferência; por sua vez o perímetro p da circunferência de diâmetro d é determinado por uma das três fórmulas: $p = 3\frac{1}{7}d$ ou $p = \sqrt{10d^2}$ ou $p = \frac{62832}{20000}d$" (Estrada, Sá, Queiró, Silva e Costa, 2000, p.428). Pensa-se que a primeira aproximação feita por Al-Khwarizmi remonta a Arquimedes e, as duas últimas, aos matemáticos hindus. Na sua obra encontramos ainda outras influências gregas, principalmente a de Heron de Alexandria. Também os sucessores de Al-Khwarizmi nas suas obras de Álgebra continuaram a incluir partes de Geometria.

Em Sevilha e Granada é possível observar alguns palácios cheios de ornamentações geométricas, sendo um dos exemplos mais visíveis da aplicação da Geometria em tempos remotos. Os construtores árabes, na ornamentação dos palácios, utilizavam construções geométricas, visto que o Corão proibia a representação de seres vivos.

Em Geometria, há que realçar o trabalho de vários matemáticos islâmicos. Abu-l-Wafa (940-998), matemático e astrónomo, que publicou a obra *Sobre as Partes da Geometria de que Precisam os Artesões.* Em meados do século X, surge uma outra obra sobre a construção das secções cónicas por pontos, obtidos com régua e compasso, de Ibrahim ibn Sina. Já o autor Omar Khayyam (1048-1131) constrói uma teoria de resolução geométrica das equações cúbicas, que é considerada uma das maiores descobertas do Islão.

Somente no final do século VIII é que as obras dos grandes geómetras gregos começaram a ser traduzidas em árabe. Destes destacam-se Euclides, Arquimedes e

Apolónio, que foram fonte de inspiração para os matemáticos árabes. Mas, os árabes não se limitaram a fazer traduções, também deram algumas contribuições próprias. Destacam-se as tentativas de demonstração do Postulado das Paralelas de Euclides feitas por Ibn al-Haytham, Omar Khayyam e Nasir ad-Din at-Tusi e os trabalhos originais realizados por Tabit ibn-Qurra e Ibn al-Haytham, na obtenção de alguns dos resultados de Arquimedes e de outros similares pelo do método da exaustão. Por exemplo, Ibn al-Haytham "determinou o volume do sólido de revolução obtido pela rotação de um segmento de parábola em torno de uma recta perpendicular ao eixo da parábola" (Estrada, Sá, Queiró, Silva e Costa, 2000, p.430).

2.4.9. Geometrias não-euclidianas

A obra de Euclides *Os Elementos* está estruturada de acordo com a concepção aristotélica. Segundo esta concepção, "toda a ciência demonstrativa devia assentar num conjunto de primeiros princípios da teoria, que abrangiam as definições, as noções comuns ou axiomas e os postulados" (Estrada, Sá, Queiró, Silva e Costa, 2000, p.489). Deste modo, por via dedutiva, todas as outras proposições seriam derivadas.

O Volume I dos *Elementos* contém vinte e três definições, cinco postulados e cinco noções comuns. A origem da invenção das Geometrias não-euclidianas deve-se ao quinto postulado de Euclides.

Desde a publicação dos Elementos e, durante mais de dois mil anos, a Geometria de Euclides foi considerada como a única possível. Sua obra, *Os Elementos,* tornou-se referência, sendo pouco questionada, à excepção do quinto postulado. A questão era saber se o postulado das paralelas de Euclides é um axioma independente ou pode ser derivado de outros axiomas. O postulado euclidiano das paralelas é o menos evidente, devido à complexidade relativa a sua formulação; é o mais extenso de todos, incluído noções comuns e postulados e só é utilizado por Euclides, pela primeira vez, aquando a demonstração da proposição vinte e nove do Livro I. Também, ao analisarmos as proposições do Livro I dos *Elementos* verificamos que as primeiras vinte e oito proposições e a trigésima primeira proposição são independentes do quinto postulado; no entanto, a proposição vinte e nove, trinta e a partir da proposição trinta e dois até à quarenta e sete dependem todas do quinto postulado. Talvez por isso os sucessores de Euclides o considerassem um teorema e não um postulado. Neste sentido, diversos matemáticos tentaram demonstrá-lo a partir dos outros axiomas da Geometria, mas sem grande sucesso. Esta impossibilidade em demonstrar o postulado das paralelas foi, durante séculos, um desafio para os matemáticos.

Estrada (2000) afirma que Proclo de Lícia, no seu comentário aos Elementos de Euclides, no século V d.C. apresenta-nos a tentativa de demonstração de Cláudio Ptolomeu de Alexandria (c. 150 d.C.). Na sua prova, Ptolomeu "admite que não pode existir mais de uma paralela a uma linha recta dada" (Oliveira, 1995, p. 38). Mas, Ptolomeu peca por circularidade, pois esta suposição é equivalente ao que ele queria demonstrar, ou seja, o quinto postulado. Proclo apresenta a sua própria tentativa de demonstração corrigindo a suposição de Ptolomeu do seguinte modo. "Sejam r e s paralelas e l cortando r em P, com vista a provar que l corta necessariamente s" Oliveira, 1995, p. 38). Esta tentativa também se revelou inválida porque é equivalente ao quinto postulado.

Como já foi referido anteriormente os matemáticos árabes Ibn al-Haytham e Omar Khayyam tentaram demonstrar o quinto postulado (na edição de T.L. Heath), utilizando o método de redução ao absurdo; no entanto, essas demonstrações não são válidas. Convém referir que Ibn al-Haytham considerou um quadrilátero $[ABCD]$ com três ângulos rectos A, B e C, porém Omar Khayyam considerou um quadrilátero $[ABCD]$, com os dois ângulos da base A e B rectos e os dois lados laterais AD e BC congruentes. Na Idade Média, o matemático árabe Nasir ad-Din at-Tusi (1201-1274), numa tentativa de demonstrar o quinto postulado, parte do quadrilátero proposto por Omar Khayyam como ponto de partida, mas a sua argumentação veio a revelar-se também inválida.

Os matemáticos John Wallis (1916-1703), Gerolamo Saccheri (1667-1733), Johann Heinrich Lambert (1728-1777) ocuparam-se também em demonstrar o postulado euclidiano das paralelas.

John Wallis vai substituir o quinto postulado de Euclides por outro equivalente conhecido como o postulado de Wallis: "Dado um triângulo $[ABC]$qualquer e um segmento DE qualquer, existe um triângulo $[DEF]$, construído sobre DE, e que é semelhante ao triângulo $[ABC]$" (Estrada, Sá, Queiró, Silva e Costa, 2000, p.492). Daí que retire validade à sua demonstração. Porém, Wallis descobre um resultado importante: se não verificarmos o quinto postulado as figuras semelhantes têm de ser idênticas em tamanho e em forma.

Girolamo Saccheri também investigou sobre o postulado das paralelas e, como ponto de partida, tomou o quadrilátero de Omar Khayyam. Esse quadrilátero ficou conhecido por quadrilátero de Saccheri. Em 1733, são publicados os seus resultados no livro *Euclides ab Omne Naevo Vindicatus* (*Euclides Limpo de Todos os Erros*).

No quadrilátero de Saccheri "existe um par de lados opostos iguais e perpendiculares a um terceiro lado. Este lado chama-se base e o oposto chama-se topo. Os ângulos α e β são chamados ângulos de topo" (Veloso, 1998, p. 346). Saccheri pretendia provar que o postulado das paralelas era um teorema da Geometria Neutra. Essa prova era importante para mostrar que Euclides não precisava de mais um postulado. Num quadrilátero de Saccheri os ângulos de topo são sempre congruentes, o que implica que sejam ambos obtusos, ambos rectos, ou ambos agudos. Este sábio estudou um sistema constituído pela Geometria Neutra e por uma das seguintes hipóteses: ângulo obtuso, ângulo recto e ângulo agudo. Provou que a hipótese do ângulo recto conduzia à Geometria Euclidiana, por vezes também chamada Parabólica.

Tentou ainda provar que o postulado das paralelas era um teorema da Geometria Euclidiana, utilizando o método de redução ao absurdo. Para isso, bastava negar o postulado das paralelas, ou seja, considerar a hipótese do ângulo obtuso e a do ângulo agudo e chegaríamos a contradições em qualquer um dos casos. No primeiro caso, Saccheri chega a uma contradição; depois vai tentar chegar a uma contradição para a hipótese do ângulo agudo. Convém referir que algum tempo depois se descobre que tal contradição não existe. Na tentativa de chegar a uma contradição, na hipótese do ângulo agudo, Saccheri vai demonstrando numerosas propriedades dessa Geometria. Estava, assim, a construir a primeira Geometria Não-Euclidiana sem se aperceber.

Saccheri descobriu que não havia quaisquer contradições na hipótese do ângulo agudo, aspecto este que despertou a atenção do matemático Lambert.

Lambert, para o estudo das paralelas, teve, como ponto de partida, o quadrilátero de Ibn al-Haytham, com três ângulos rectos. Também como Saccheri, Lambert formulou as mesmas três hipóteses para o quarto ângulo do quadrilátero: hipótese do ângulo recto, hipótese do ângulo obtuso e a hipótese do ângulo agudo. Embora tenha obtido novas proposições ao tentar demonstrar o postulado das paralelas, não conseguiu demonstrá-lo.

Adrien Marie-Legendre (1752-1833) foi o geómetra francês que mais tentativas realizou para provar o quinto postulado, como podemos verificar num apêndice de sucessivas edições do seu conhecido *Éléments de Géométrie*. Uma das proposições que publicou na terceira edição da sua obra é que a soma dos ângulos de um triângulo é menor ou igual a dois ângulos rectos. Este provou esta proposição independentemente do quinto postulado.

Também o físico e matemático escocês John Playfair (1748-1819) usou na sua obra *Elements of Geometry,* de 1796, uma proposição conhecida por axioma de Playfair: "Sendo dada uma recta e um ponto exterior, existe uma e uma só recta contendo o ponto e paralela à recta dada". Esta proposição é equivalente ao quinto postulado.

Como anteriormente referimos, foram feitas inúmeras tentativas de demonstração do quinto postulado. No entanto, nenhuma delas resultou, pois todas se apoiavam numa suposição equivalente ao próprio postulado.

Apresentamos, de seguida, alguns dos enunciados equivalentes ao quinto postulado:

- Por um ponto exterior a uma recta passa uma e só uma recta paralela à dada (Playfair).
- A soma dos ângulos de um triangulo é dois ângulos rectos (I,32).
- Existem triângulos semelhantes não congruentes (Wallis).
- Por três quaisquer pontos não colineares passa uma circunferência.
- Duas rectas paralelas são equidistantes.
- Duas rectas paralelas a uma terceira são paralelas entre si (I,30).
- Por um ponto qualquer do interior de um ângulo, inferior a 2/3 do recto, pode desenhar-se uma recta que corta os dois lados do ângulo.
- A hipótese do ângulo recto de Saccheli.

(Heath, 1956, Vol.1, p.220, citado por Estrada, Sá, Queiró, Silva e Costa, 2000, p.499).

Janos Bolyai chamou de Geometria Absoluta, embora hoje seja designada de Geometria Neutra, ao sistema axiomático que se obtém retendo apenas como axiomas os primeiros quatro postulados de Euclides e mantendo as definições e as noções comuns (hoje são chamadas de Regras de Inferência).

O problema dos matemáticos era mostrar que o quinto postulado não se tratava de um verdadeiro postulado, mas sim de um teorema e, como tal, deveria ser demonstrado dentro da própria Geometria, utilizando apenas os primeiros quatro postulados e o conjunto de definições fixado.

Só na primeira metade do século XIX se começou a suspeitar de que o quinto postulado seria realmente independente dos outros e que se trataria, efectivamente, de um axioma e não de um teorema. Pois, substituindo o postulado das paralelas, era possível construir outras Geometria diferentes da Euclidiana.

Matemáticos como Carl Friederich Gauss (1777-1855), Johann Bolyai (1802-1860) e Nicolai Lobatschewski (1793-1856) são considerados os co-descobridores da Geometria Hiperbólica. Estes três matemáticos compreenderam que o quinto postulado não podia ser provado a partir dos outros, ou seja, que este postulado não era uma consequência lógica dos quatro postulados anteriores. Substituindo-o por uma proposição contraditória, poderíamos construir uma Geometria tão válida e consistente quanto a Euclidiana. Uma das formas para o fazer era negar a unicidade das paralelas no quinto postulado de Euclides, supondo que por qualquer ponto exterior a uma recta dada é possível passar, pelo menos, duas paralelas a esta recta. A contribuição destes três matemáticos foi, descobrir que era possível alterar o quinto postulado de Euclides sem que uma contradição fosse criada com os outros postulados. Este acontecimento deu origem a uma geometria Não-Euclidiana, mais tarde chamada de Geometria Hiperbólica.

Gauss foi o primeiro a acreditar na independência do postulado das paralelas, embora nunca tenha publicado os seus pensamentos sobre este assunto. Porém, Lobatschewski e Bolyai publicaram as suas descobertas relativas à nova Geometria Não-Euclidiana. Por isso, muitos historiadores referem-se à Geometria Hiperbólica como a Geometria de Lobatschewski-Bolyai. No entanto, existe documentação comprovando que Gauss já tinha começado a desenvolver as ideias da nova Geometria. O que sabemos das suas investigações provém de cartas a amigos e de algumas notas encontradas nos seus documentos. Este tentou provar o quinto postulado, mas terá verificado que tal não era possível. Perante tal facto, começou a investigar uma nova Geometria, que chamou de Anti-Euclidiana, depois Astral e, por fim, Não-Euclidiana.

Lobatschewski tentou também demonstrar o quinto postulado mas, só por volta de 1823, se deparou com a hipótese de uma nova Geometria. Foi o primeiro a publicar um trabalho sobre a Geometria Não-Euclidiana, denominado *Sobre os Princípios da Geometria*, publicada em 1829. Este, na construção da sua Geometria, parte duma proposição contraditória ao quinto postulado.

O postulado adoptado por Lobatschewski corresponde à hipótese do ângulo agudo de Saccheri e Lambert e ainda à proposição de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é menor que dois ângulos rectos.

Na mesma época, Bolyai, trabalhando de forma independente, chegou à mesma descoberta que Lobatschewski. Bolyai, em 1832, publica as suas reflexões como apêndice a um livro de seu pai, com o título *Appendix Scientiam Spatii Absolute Veram Exhibens,* sobre a nova Geometria.

Desta forma, as vinte e oito primeiras proposições e a proposição número trinta e um, do Livro I dos *Elementos* de Euclides, como são independentes do quinto postulado, serão, também, teoremas em qualquer Geometria, em particular da Geometria Hiperbólica. Por outro lado, as proposições vinte e nove, trinta e entre a trinta e dois e a quarenta e sete não serão teoremas da Geometria Hiperbólica.

No entanto, nem Bolyai nem Lobatschewski demonstraram a consistência da Geometria Hiperbólica. A solução foi recorrer a modelos. Segundo Veloso (1998), um modelo de um sistema axiomático obtém-se atribuindo interpretações aos termos primitivos do sistema de modo a transformar os axiomas em afirmações verdadeiras de acordo com as interpretações feitas (p.352). A consistência é absoluta, "se o modelo é obtido mediante interpretações dos termos primitivos como objectos e relações do mundo real" (Veloso, 1998, p. 353). A consistência é considerada relativa, "se as interpretações são feitas em termos de outro sistema axiomático" (Veloso, 1998,p. 353).

Foram desenvolvidos, pelo menos, três modelos consistentes para a Geometria Hiperbólica, tendo sido o primeiro desenvolvido por Eugénio Beltrami (1835-1900). Em 1868, Beltrami publicou um artigo, no qual descreve um modelo euclidiano para a Geometria Hiperbólica, provando que este tipo de Geometria é feita em superfícies de curvatura constante negativa, denominada de pseudo-esférica, ou seja, tais superfícies são geradas pela rotação completa de uma tractriz em torno da assímptota. Demonstrou ainda como as fórmulas da Trigonometria Esférica se convertem em fórmulas da Trigonometria Hiperbólica, quando aplicadas a triângulos geodésicos numa superfície de curvatura constante negativa. No seu trabalho, também, "construiu um "mapa" da pseudo-esfera, em que as geodésicas são transformadas em rectas. Tal mapa é constituído por um círculo aberto em que as geodesias da pseudo-esfera são cordas desse círculo e os pontos da pseudo-esfera são pontos do interior do círculo" (Estrada, Sá, Queiró, Silva e Costa, 2000, p.509). Em 1989, Beltrami publica os trabalhos de

Saccheri, nomeadamente os teoremas que este tinha obtido na hipótese do ângulo agudo.

Um outro modelo foi criado pelo matemático Félix Klein (1849-1925) e outros dois pelo matemático Henry Poincaré (1854-1912). O modelo de Poincaré, para a Geometria Hiperbólica, demonstra a consistência relativa daquela Geometria em relação a Geometria Euclidiana. Quer isto dizer que se a Geometria Euclidiana é consistente então, também a Geometria Hiperbólica é consistente.

Neste sentido, a independência do postulado das paralelas em relação aos outros postulados da Geometria Euclidiana foi estabelecida quando se obtiveram provas da consistência da Geometria Não-Euclidiana. Segundo Estrada (2000), a aceitação da Geometria Hiperbólica pela comunidade científica, especialmente depois da publicação dos trabalhos de Riemann e de Beltrami, causou um forte impacto na Matemática, com repercussões na Arte e na Literatura. Na arte, destacam-se os trabalhos do artista M.C. Escher (1898-1972); na literatura sobressai Balzac, que escreveu, por volta de 1840, *Le Pére Goriot*, onde faz referência às linhas assimptóticas, que nunca se encontram. Porém, a repercussão maior foi seguramente na própria Matemática. A revolução científica causada devido a descoberta das Geometrias Não-Euclidianas, fez com que houvesse necessidade de reapreciar e analisar os *Elementos* de Euclides, tendo-se encontrado algumas "falhas lógicas". Nomeadamente, o facto de algumas das definições serem pouco convincentes e a utilização de postulados não explicitados. Muitas das demonstrações euclidianas são feitas sobre figuras que, de certo modo, substituem o enunciado explícito de axioma. Daí a urgência de reconstruir os fundamentos da Geometria Euclidiana. Algumas das contribuições mais importantes foram as de: Moritz Pasch (1843-1930); G. Peano (1858-1932); G. Veronese (1854-1917) e D. Hilbert (1862-1943). Segundo Estrada (2000), o mais notável sistema axiomático para a Geometria Euclidiana é apresentado em 1899, por D. Hilbert, na sua obra *Grundlagen der Geometrie* (*Fundamentos da Geometria*). A sua obra veio pôr em evidência a natureza hipotética-dedutiva da Geometria Euclidiana e, contribuindo para a expansão do método axiomático, não só em Geometria, mas também noutras áreas da Matemática. O sistema axiomático de Hilbert difere do de Euclides em duas características fundamentais: a introdução de conceitos primitivos e a não existência de axiomas admitidos implicitamente. Os conceitos primitivos introduzidos por Hilbert são "ponto", "recta" e "plano". Hilbert explicita um conjunto de vinte axiomas para a Geometria Euclidiana, divididos em cinco grupos:

- oito axiomas de incidência;
- quatro axiomas de ordem;
- cinco axiomas de congruência;
- axioma das paralelas;
- dois axiomas de continuidade.

Na sua obra prova a consistência dos seus axiomas, reduzindo o problema à consistência da Aritmética. Logo, “a Geometria Euclidiana é consistente se a Aritmética também for” (Estrada, Sá, Queiró, Silva e Costa, 2000, p.512).

A Geometria Neutra é a Geometria que se obtém da euclidiana, omitindo o quinto postulado. Com os axiomas da Geometria Neutra e negando a unicidade das paralelas do quinto postulado, surgem novas Geometrias como já foi referido anteriormente. Há duas maneiras possíveis de negar o axioma de Playfair, que é equivalente ao quinto postulado de Euclides: (1) Sendo dada uma recta e um ponto exterior, existem pelo menos duas rectas distintas contendo o ponto dado e paralelas à recta dada; (2) Sendo dada uma recta e um ponto exterior, não existe nenhuma recta contendo o ponto dado e paralelas à recta dada. O primeiro é considerado o axioma hiperbólico e o segundo é chamado axioma elíptico. A Geometria Hiperbólica obtém-se juntando o axioma hiperbólico à Geometria Neutra; a Geometria Elíptica não se obtém juntando o axioma elíptico à Geometria Neutra, pelo facto desta não ser consistente. A proposição trinta e um dos *Elementos* de Euclides assegura a existência de pelo menos uma paralela a uma recta dada por um ponto exterior que, como já foi referido, é independente do quinto postulado. Surge daqui uma contradição. Assim, para obter uma outra Geometria Não-Euclidiana, a chamada Geometria Elíptica, teremos que abdicar de quase toda a Geometria Neutra e, portanto, de toda a Geometria de Euclides e incluir o axioma elíptico. Um modelo de uma versão da Geometria Elíptica é a Geometria Esférica.

Bernhard Riemann (1826-1866) publicou em 1867, um trabalho intitulado *Uber die Hypotheses, welche der Geometrie zu Grunde Liegen* (*Sobre as Hipóteses que estão na Base dos Fundamento da Geometria),* que contribuiu para a aceitação das Geometrias não euclidianas na comunidade científica. Isto devido ao facto de as descobertas de Bolyai e Lobatschewski não terem tido grandes repercussões nos meios matemáticos da época.

Riemann considera uma formulação da geometria baseada no conceito de curvatura de uma superfície: a Geometria Euclidiana correspondia as superfícies de curvatura nula, a Geometria Hiperbólica correspondia as superfícies de curvatura constante negativa e, finalmente, a Geometria Elíptica correspondia as superfícies de curvatura constante positiva.

A Geometria Elíptica corresponde à Geometria baseada na hipótese do ângulo obtuso de Saccheri. De acordo com as ideias de Riemann, se admitirmos que as rectas são finitas, são concebidos dois tipos de Geometria: uma que se realiza na superfície de uma semiesfera e a outra na superfície de uma esfera. Elas são: “a Geometria Elíptica Simples, em que duas rectas quaisquer se encontram sempre num ponto; Geometria Elíptica Dupla, em que duas rectas quaisquer se encontram sempre em dois pontos” (Estrada, Sá, Queiró, Silva e Costa, 2000, p.506). Esta distinção foi feita por Félix Klein. De facto, as propriedades da esfera eram há muito tempo conhecidas.

A Geometria Euclidiana deixou de ser a única Geometria existente, pois o trabalho de Riemann permitiu a “concepção de uma infinidade de geometrias, cada uma associada a uma certa superfície e a uma métrica, determinada pela curvatura da superfície” (Estrada, Sá, Queiró, Silva e Costa, 2000, p.507).

2.4.10. Perspectiva e Geometria Projectiva

Marcus Vitrúvio Pollio viveu no século I a.C. e tudo o que sabemos dele, é o que se deduz de sua obra *De Architectura*. Esta obra fornece inúmeras informações sobre as técnicas de construção em uso entre os romanos; no entanto não contém muitos detalhes sobre o desenho para a arquitectura. Nesta obra de Vitrúvio podemos ler: “A Geometria é também de grande assistência para o arquitecto e, em particular, ela ensina-nos o uso da régua e do compasso com os quais podemos planear correctamente os edifícios e depois traçar, no canteiro de obras, com precisão, os ângulos rectos e usar correctamente o nível e o fio-de-prumo. (…) É verdade que a Aritmética nos ajuda a calcular o custo total e o dimensionamento da obra, mas as difíceis questões de simetria são resolvidas pelas teorias geométricas e seus métodos práticos” (Lintz 1999, p. 16).

Nesta obra, o volume I começa com uma dedicatória ao Imperador Augusto e, depois, refere quais os princípios básicos na formação profissional de um arquitecto. Segundo Vitrúvio, o arquitecto deveria dominar os princípios básicos de vários campos: Óptica, História, Filosofia, Física, Música, sem no entanto ser um especialista em algum deles. Faz também referência aos princípios fundamentais da arquitectura: ordem, disposição, euritmia, simetria, propriedade e economia. No início do segundo volume Vitrúvio conta como Dinócrates conseguiu chamar a atenção de Alexandre para construir a famosa cidade de Alexandria e, depois, faz uma descrição dos diversos materiais usados na construção civil. O volume III trata das proposições correctas que devem orientar a construção de templos e sua classificação. O volume IV trata das leis de proporção e simetrias. O volume V é dedicado ao estudo dos edifícios públicos, tais como fóruns e teatros. O volume VI trata da construção de casas e residências em geral. O volume VII trata da decoração de interiores. O volume VIII trata de engenharias hidráulicas e, por fim, o volume IX, é dedicado à Astronomia de campo.

Nesta época, na pintura não existe nenhum indício do emprego de regras sistemáticas. Porém, no fim da Idade Média começa a revelar-se, neste campo artístico um movimento precursor do realismo renascentista. A pintura religiosa medieval não tinha preocupações de representação realista. Os artistas, através da pintura, pretendiam transmitir episódios da história sagrada, não havendo uma preocupação relativamente à profundidade e à representação da terceira dimensão, sendo apenas visível na dimensão das edificações. Nestas pinturas verificamos que as figuras estão praticamente no mesmo plano. Mas, no início do século XIV, vários artistas começaram a rejeitar esta forma de representação. Destes artistas destaca-se Giotto (1267-1337), um pintor e arquitecto de Florença, considerado um precursor do Renascimento. A maior parte dos temas de suas pinturas é do foro religioso; no entanto, o estilo de Giotto é muito diferente do anterior. Destaca-se, nas suas pinturas, o realismo dos episódios descritos, a profundidade e representação da terceira dimensão. Ao longo do século XIV, esta nova maneira de pintar vai ganhando força, mas a maior transformação ocorre no início do século XV nas obras de vários artistas, dos quais se destacam Filippo Brunelleschi (1377-1446), Leon Battista Alberti (1404-1472), Piero della Francesca (1420-1492) e Albrecht Durër (1471-1528).

O início do Renascimento é marcado por uma transformação no modo de representação, que deu origem à perspectiva geométrica dos pintores.

Brunelleschi, arquitecto, ficou famoso devido “ao facto de ter conseguido completar a cúpula da catedral de Florença, o que ele fez tomando como base os seus conhecimentos das técnicas de construção gótica” (Veloso, 1998, p. 290). Mais tarde abandonou o modelo gótico e passou a usar formas clássicas (colunas e frontões) para um novo estilo de edifícios, que perdurou durante quinhentos anos na Europa e na América. Ele foi o primeiro a estudar as regras da perspectiva, com base na Geometria. A partir daí, Brunelleschi passou a utilizar, nas suas pinturas, as regras de perspectiva que tinha descoberto.

Alberti interessou-se também pela representação matemática no plano de objectos tridimensionais, sendo o primeiro a publicar na sua obra de 1435, *Della Pittura,* as regras da perspectiva com um ponto de fuga. A sua abordagem da perspectiva nesta obra foi de carácter teórico, fazendo uma exposição completamente matemática desta arte, enquanto Brunelleschi fez uma abordagem da perspectiva de carácter prático, visível nas suas pinturas.

Piero della Francesca foi matemático e um dos mais famosos pintores deste período. As obras que chegaram até nós são: *Trattado d´Abaco, Libellus de Cinque Corporibus Regularibus* e *De Prospectiva Pingendi*. Na primeira obra ocupa-se de problemas matemáticos, que vão desde a Aritmética à Álgebra, na segunda obra trata da Geometria no espaço, redescobrindo os sólidos truncados arquimedianos. *De Prospectiva Pingendi* (*Sobre a Perspectiva dos Pintores*) é a sua obra mais conhecida, nela expõem a teoria da perspectiva através de proposições, demonstrações e mostra a sua aplicação com desenhos executados por si. O livro é composto por três partes, sendo que a primeira parte diz respeito à perspectiva de figuras sobre o plano e, as outras duas, referem-se à perspectiva de sólidos. A *Flagelação de Cristo* é uma das obras de arte de Piero della Francesca mais conhecida e onde aplica a perspectiva.

Luca Pacioli publicou em 1494 um tratado intitulado *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalita* que continha tudo o que era conhecido, naquela época, sobre Aritmética, Álgebra, Geometria e Trigonometria.

Em 1509, Luca Pacioli publica o livro *De Divina Proportione*, onde partes do tratado *Libellus de Cinque Corporibus Regularibus* de Piero della Francesca foram incorporados no seu livro, sobre os sólidos platónicos e as suas propriedades. Também nesse livro aparecem desenhos de poliedros, em particular os sólidos arquimedianos, da autoria de Leonardo da Vinci.

Em suma, os pintores do Renascimento passaram a utilizar, nas suas pinturas, as leis da perspectiva descobertas por Brunelleschi e estudadas mais tarde teoricamente por Alberti e Piero della Francesca.

Outro artista do período do Renascimento é Durër. Em 1525, Durër publicou *Underweissung der Messung mit Zirckel und Richtscheyt in Linien, Ebnen, ung Gantzen Corporen (Tratado das Medidas com Régua e Compasso, das Linhas, Superfícies e Corpos Inteiros)* sendo o primeiro tratado de Geometria para artistas. A importância de sua obra deve-se ao facto de "descrever um certo número de aplicações da Geometria à Arte, mas ao fazê-lo relativamente aos sólidos e às suas representações, nomeadamente através da perspectiva, acaba por fazer esses próprios tipos de representações penetrar nos domínios da Geometria Pura, abrindo-a a novos desenvolvimentos" (Veloso, 1998, 296). Durër aplicou também os seus conhecimentos da perspectiva nas suas gravuras e pinturas. É ainda de salientar o facto de este artista ter utilizado os processos de projecção ao estudo das proporções do corpo humano. Essa sua obra é publicada em 1528, depois da sua morte. Um aspecto a salientar é o facto de, nesta época, não ter sido dado o justo valor às suas invenções em Geometria, uma vez que as suas obras não tiveram grande influência, para lá do círculo dos artistas. No século que se segue à sua morte, apenas duas obras de Matemática surgem dedicadas ao estudo da perspectiva: um de Guidobaldo Del Monte e outro de Simon Stevin.

Porém muitas obras são publicadas divulgando e sistematizando as regras de desenho em perspectiva dos pintores. Em 1811, é publicado por Brook Taylor, *The Principles of Linear Perspective*, um tratado de perspectiva que se tornou famoso pelas suas gravuras. William Henry Fox Talbot, após alguns anos de experiências, descobriu "uma nova forma de arte, a fotografia, tinha nascido, culminando séculos de aperfeiçoamento do modo de representação descoberto por Brunelleschi, a perspectiva linear" (Veloso, 1998, p. 298).

Desargues (1591-1661) foi um engenheiro e arquitecto francês, tendo publicado, em 1636, na sua obra, inovações no campo da perspectiva. Este estudou as ideias de Descartes publicadas na sua obra *Géometrie*, embora, de início, tenha estudado sobre os métodos da Álgebra aplicada à Geometria. Mas depressa as suas investigações tomaram outro rumo e levando-o a adoptar uma via exclusivamente geométrica. Daí resulta a criação de uma nova Geometria: a Geometria Projectiva. Em 1639, publica *Brouillon Project d´Une Atteinte aux Événements des Rencontres du Cone avec un Plan* que é considerada a sua obra mais importante. Esta obra "tratava extensamente as cónicas, retomando, generalizando e ampliando as propriedades conhecidas desde Apolónio, com a utilização de métodos e conceitos próprios da nova geometria nascente. (…) A ideia central de Desargues é identificar quais são as propriedades que se conservam por projecção e partir daí estudar a família das cónicas, que são todas projecção da circunferência" (Veloso, 1998, p. 303). Blaise Pascal, segundo os historiadores da Matemática, foi dos poucos que compreendeu e estudou o trabalho de Desargues. Em, 1640, Pascoal publica um curto *Ensaio sobre as Cónicas*, no qual segue a ideia central de Desargues.

Depois do seu início com Desargues e Pascoal, na primeira metade do século XVII, a Geometria Projectiva caiu no esquecimento até ao início do século XIX.

Gaspard Monge (1746-1818) foi um dos principais impulsionadores da Geometria nos finais do século XVIII e inícios do século XIX. Em finais do século XVIII, Monge inventa a Geometria Descritiva, resolvendo, desta forma, os problemas gráficos da representação no plano de objectos tridimensionais. O problema da representação plana de objectos a três dimensões esteve presente desde que o homem se lembrou de traçar sobre uma rocha figuras humanas ou de animais. No nosso dia-a-dia, quando olhamos para imagens num ecrã de televisão, ou quando folheamos um livro de gravuras, estamos a visualizar objectos tridimensionais como sendo figuras planas. No entanto, só em 1799, Monge publica o seu tratado de Geometria Descritiva. Esta obra e as suas lições nas novas École Polytechnique e École Normale, nascidas da Revolução Francesa, influenciaram os seus alunos, despertando-os para o estudo da Geometria Pura. Os seus alunos foram Poncelet, Brianchon, Dupin e Chasles e vão fazer renascer a Geometria Projectiva.

Jean-Victor Poncelet foi oficial de Napoleão durante a invasão na Rússia, em 1812, tendo ficado aí preso durante dois anos. Contudo, durante os anos que esteve em cativeiro, recordou-se das lições de Monge e de Carnot, tendo estudado praticamente a partir do nada, a Geometria Projectiva. O seu principal trabalho é *Essai sur les Propriétes Projectives des Sections Coniques,* publicado em 1822. Este tratado contribuiu para a renovação do interesse e da investigação em Geometria Projectiva. Foi a partir das suas investigações que Poncelet "descobriu que na Geometria Projectiva existe uma "dualidade" entre pontos e planos, que permite substituir, em qualquer teorema desta Geometria pontos por rectas e rectas por pontos, sendo também a proposição resultante um teorema da Geometria Projectiva" (Veloso, 1998, p. 304). No entanto, Poncelet não demonstrou o princípio da dualidade, embora o usasse com frequência na descoberta de novas propriedades. As ideias de Poncelet foram posteriormente desenvolvidas por matemáticos alemães.

Desde Desargues, que os matemáticos pretendiam, com o estudo da Geometria Projectiva, compreender quais as propriedades das figuras que ficavam invariantes por projecção. Como tal, verificaram que quando projectavam uma figura mediante uma projecção central sobre um plano, não se mantêm os comprimentos dos lados, nem os ângulos, nem a área. No entanto, Michel Chasles descobriu uma propriedade de carácter métrico que se mantém por projecção: a razão dupla ou razão cruzada.

2.4.11. Geometria Analítica

Nos finais do século XVI surge, pela primeira vez, um simbolismo literal que permitia operar sobre as expressões algébricas de modo eficaz. Deve-se a François Viéte (1540-1603) essa descoberta. Este representava por letras os dados dos problemas e depois aplicava-lhe as operações usuais da Aritmética. Outro aspecto interessante é que as letras que figuravam nas expressões algébricas e nas equações podiam significar números positivos ou grandezas geométricas. Assim, a Álgebra deixou de se ocupar apenas de problemas numéricos, sendo também aplicada na resolução de problemas geométricos.

Não há unanimidade entre os historiadores sobre quem inventou e quando se inventou a Geometria Analítica. Contudo, a maioria dos historiadores consideram decisiva a contribuição dos matemáticos franceses Pierre de Fermat (1601-1665) e René Descartes (1596-1650).

A Geometria Analítica representa a aplicação da Álgebra à Geometria. Ao associar, a cada ponto do plano ou do espaço determinadas coordenadas, propriedades e relações geométricas, estes podem expressar-se através de equações. Ou seja, a ideia básica da Geometria Analítica é a representação de curvas geométricas por equações algébricas.

René Descartes, em 1637, publica *La Géométrie* como um dos três apêndices do *Discours de la Méthode*, a sua concepção de Geometria Analítica. O mérito da obra deve-se a invenção da Geometria Analítica como uma forma de definir e manipular as formas geométricas usando expressões algébricas. No entanto, esta obra não deve ser considerada a primeira sobre o assunto. A ideia de caracterizar um ponto do plano por meio das suas coordenadas, surge na Grécia antiga através de Apolónio de Persa, quando caracterizou as secções cónicas através das suas coordenadas, embora não lhes fossem atribuídos valores numéricos. Também Nicolau Oresme, no século XIV, representou “certas leis da física, por exemplo, a velocidade como função do tempo, por um gráfico ladeado por dois eixos, um para a variável independente, que designou de longitude, e outro para a variável dependente, a latitude” (Oliveira, 1997, nº 41, p. 3).

A obra de Descartes apresenta um método para resolver problemas, traduzindo as operações algébricas em linguagem geométrica. Descartes dividiu-a em três partes. A primeira parte tem o título *Como os Cálculos de Aritmética se relacionam com Operações de Geometria*, nela explicando alguns dos princípios da Álgebra

Geométrica, começando com uma aritmetização dos segmentos de recta. Na segunda parte de *La Géométrie*, Descartes descreve como a adição, a subtracção, a multiplicação, a divisão e a radiciação de segmentos de recta são efectuadas geometricamente. A terceira parte do trabalho diz respeito a soluções de equações de grau superior a dois. O método proposto por Descartes, para resolver problemas de Geometria, consistia no seguinte: "o primeiro passo é a formulação algébrica do problema em causa, escrevendo equações que traduzam a situação geométrica; de seguida, há que resolver essas equações; finalmente, deve interpretar-se geometricamente a solução algébrica obtida" (Estrada, Sá, Queiró, Silva e Costa, 2000, p.561). Descartes em *La Géométrie*, restringe o seu estudo às curvas algébricas, isto é, às curvas que admitem uma equação de tipo polinomial.

Fermat e Descartes elaboraram os seus trabalhos independentemente um do outro; no entanto, ambos tiveram "como ponto de partida o mesmo problema geométrico clássico, nomeadamente, a solução analítica do problema das três ou quatro rectas de Apolónio" (Oliveira, 1997, nº 41, p. 4). Descartes começou com o lugar das três e quatro rectas de Apolónio, usando uma das rectas como eixo das abcissas; porém, Fermat, começou com a equação linear e escolheu um sistema de coordenadas arbitrário sobre o qual a esboçou.

Fermat publica em 1679, em *Ad Locus Planos et Sólidos Isagoge(Introdução aos Lugares Geométricos Planos e Sólido),* os seus resultados da aplicação da Álgebra de Viéte ao estudo dos lugares geométricos. A ideia de Fermat exposta na obra consiste em "fazer corresponder um ponto P dum plano a dois segmentos de recta, *a* e *e*, o primeiro dos quais era marcado sobre uma recta fixa *r* do plano, a partir dum certo ponto origem O, e o outro elevado sobre *r*, segundo um ângulo fixo, e terminando no ponto P. Deste modo, a cada ponto P do plano, ficam associados uma abcissa *a* e uma ordenada *e*, e vice-versa" (Estrada *et al.*, 2000, p. 557).

Desta forma, Fermat estabelece uma correspondência entre entidades de natureza geométrica e entidades de natureza algébrica. Depois Fermat trata de estudar as propriedades da curva (objecto geométrico) através das propriedades da equação (objecto algébrico). Demonstrou a proposição que diz que toda a equação do primeiro grau representa uma recta. Depois definiu os vários lugares geométricos através de uma equação algébrica: $y = mx$ é uma recta, $xy = k^2$ é uma hipérbole, $a^2 \pm x^2 = by$ é uma parábola, $x^2 + y^2 + 2ax + 2by = c^2$ é um círculo, $a^2 - x^2 = ky^2$ é uma elipse,

$a^2 + x^2 = ky^2$ é uma hipérbole. E aplicou, também, uma rotação de eixos as equações quadráticas mais gerais, em que os vários termos do segundo grau aparecem, para reduzi-las a uma das formas anteriores.

Mas, a evolução deste novo ramo da Matemática foi relativamente lento. Em 1704, é publicado por Isaac Newton, *Opticks*, um livro com dois capítulos *De Quadratura Curvarum e Enumerativo Lineaarum Tertii Ordinis (Enumeração de Curvas de Terceiro Grau).* Nesta obra Newton faz um estudo as curvas de terceiro grau e, pela primeira vez nas construções geométricas, são considerados os quatro quadrantes, ou seja, são usadas as coordenadas cartesianas negativas. Entre os resultados contidos nesta obra, destacam-se as seguintes propriedades: uma curva de terceiro grau não pode ter mais de três assímptotas; uma cónica não pode ter mais de duas assímptotas; todas as cónicas são projecções do círculo; todas as cúbicas são projecções de uma parábola divergente ($y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$). Porém, esta não foi a única contribuição de Newton à Geometria Analítica. Noutra sua obra *No Método de Fluxos,* Newton propõe oito tipos de sistemas de coordenadas. O terceiro tipo de sistemas de coordenadas corresponde ao que chamamos hoje coordenadas bipolares, utilizado para determinar uma curva. O sétimo tipo para determinar espirais, sendo hoje conhecido como sistema de coordenadas polares.

Euler publicou vários artigos no *Commentarii de Petersburgo* sobre o uso de Geometria de coordenadas no espaço, dando equações gerais para três grandes classes de superfícies: cilindros, cones e superfícies de revolução. Porém, foi a obra publicada, em 1748, intitulada *Introductio* que contribuiu "para tornar o uso de coordenadas, tanto em duas quanto em três dimensões, a base para um estudo sistemático das curvas e superfícies" (Boyer, 1996, p. 318).

2.5 - Aprendizagem da Matemática

A escola tem a função de preparar os alunos para se tornarem cidadãos aptos numa sociedade em constante evolução. Embora, durante muito tempo, a aprendizagem da Matemática fosse encarada como um processo que se desenvolvia apenas por transmissão (pelo professor) e absorção (pelo aluno) dos conhecimentos, estando associada a mecanização e a memorização. Actualmente, é reconhecido que a aprendizagem da Matemática é um processo de construção activa por parte dos alunos a partir de múltiplas interacções, que envolve três aspectos inseparáveis:

conhecimentos, capacidades e atitudes. Nesta perspectiva "a aprendizagem ocorre quando os alunos assimilam activamente nova informação e experiências e constroem os seus próprios significados" (NCTM, 1994, p. 2). Isto exige um envolvimento activo dos alunos em tarefas adequadas, que permitam construir um novo conhecimento a partir daquele que possui e num contexto de aula em que as interacções professor/alunos e alunos sejam valorizadas, de forma a reservar aos alunos um papel central na construção do conhecimento, no processo de ensino/aprendizagem. Cabe ao professor proporcionar aos alunos experiências diversificadas e interessantes, em que lhes sejam propostas tarefas desafiantes, matematicamente ricas, que despertem a curiosidade e o entusiasmo, sendo realizadas num ambiente de aprendizagem estimulante. O professor também pode recorrer a vários suportes educativos, concretos e manejáveis para facilitar a aprendizagem da Matemática. Estes materiais podem servir de ponte entre o mundo abstracto do simbolismo matemático e as situações concretas do mundo real. O papel dos recursos utilizados é de dar suporte aos objectos matemáticos e as acções mentais dos alunos, favorecendo os processos inerentes à construção do conhecimento matemático e ao desenvolvimento de estruturas cognitivas, fundamentais na aprendizagem da Matemática.

> "Ser-se matematicamente competente na realização de uma determinada tarefa implica ter não só os conhecimentos necessários como a capacidade de os identificar e mobilizar na situação concreta e ainda a disposição de fazê-lo efectivamente. (…) Se é certo que as capacidades se desenvolvem sobre conhecimentos concretos, não é menos verdade que a ausência de elementos de resolução de problemas e de hábitos de pensamento é, muitas vezes, um obstáculo intransponível para se adquirirem mesmo as competências usualmente consideradas mais básicas. (…) A escola tem justamente a função de ajudar os alunos a desenvolver as suas capacidades e de cultivar a sua disposição para usá-las mesmo que (sobretudo quando!) isso envolva algum esforço de pensamento" (Abrantes, Serrazina, Oliveira, 1999, p. 21-22).

Neste sentido, parece claro que a aprendizagem da Matemática, baseada em exercícios rotineiros, privilegiando o cálculo e memorização, além de não responder às exigências colocadas hoje ao sistema de ensino, não contribui para uma melhor compreensão do que é esta ciência, nem constitui um pré-requisito para a sua aprendizagem. Os conhecimentos a adquirir ganham mais relevância se forem integrados num conjunto de competências que, para além de proporcionar o desenvolvimento de hábitos de pensamento e atitudes positivas face a esta área do conhecimento, contribuam para uma melhor compreensão do mundo que nos rodeia.

Segundo as investigações realizadas sobre a aprendizagem, “o aluno aprende em consequência da actividade que desenvolve e da reflexão que sobre ela faz” (Ponte *et al.*, 1997, p. 72). Neste ponto de vista, o aluno atribui às novas aprendizagens um significado em função daquilo que já conhece e das interpretações que faz do que de novo adquire. De acordo com Ponte *et al.* (1998), “para que haja aprendizagem efectiva é preciso que quem aprende atribua significado às ideias, ligando-as entre si e com outras ideias do mesmo ou de outros domínios” (p. 321). Contudo, existem factores de ordem individual (envolvimento e capacidades do individuo), de ordem cultural, de ordem social (classe social, família, grupo cultural a que pertence o individuo) e de ordem institucional (escola e outros espaços de aprendizagem da Matemática) que condicionam a sua aprendizagem.

O livro *A Matemática na Educação Básica* (Abrantes, *et al.*, 1999) apresenta um conjunto de ideias fundamentais para a aprendizagem da Matemática:

- “A aprendizagem requer o envolvimento activo dos alunos em actividades significativas, isto é, que vivam experiências concretas sobre as quais essas experiências podem fazer sentido;

- Para além da participação em actividades concretas, é necessário que haja um processo de reflexão sobre essas actividades, ou seja, valorizando a actividade intelectual dos alunos e não os recursos utilizados;

- Criar condições para que eles se envolvam em actividades adequadas ao desenvolvimento da capacidade de pensamento e raciocínio dos alunos;

- As actividades propostas aos alunos deverão conter elementos de compreensão, raciocínio e resolução de problemas, uma vez que a sua ausência poderá gerar dificuldades na realização de procedimentos simples;

- O desenvolvimento do conhecimento de termos, factos e procedimentos deverá ser, em simultâneo, com o desenvolvimento capacidade de raciocinar e resolver problemas apoiando-se umas às outras;

- As actividades proporcionadas aos alunos devem permitir-lhes estabelecer relações com o que já sabem, ver as mesmas coisas de outros ângulos e noutros contextos;

- Cometer erros, responder de forma imperfeita ou incompleta é algo inerente ao próprio processo de aprendizagem; só assim o professor e aluno poderão perceber a origem do erros, compreender as dificuldades em causa, contribuindo para uma aprendizagem mais significativa;

- A motivação e a natureza desta influência a forma como os alunos se envolvem na realização das actividades e aprendem;

- As concepções que os alunos têm da Matemática e o seu papel na aula de Matemática são aspectos a ter em conta na aprendizagem;

- O ambiente de aprendizagem que se vive nas aulas também é determinante; é necessário valorizar o envolvimento do aluno em processos de pensamento, de raciocínio e de argumentação lógica em detrimento da resposta rápida e certa" (pp. 24-28).

2.5.1. Competências Matemáticas

O *Currículo Nacional do Ensino Básico* (2001) define competência como:

> "(…) a cultura geral que todos devem desenvolver como consequência da sua passagem pela educação básica pressupõe a aquisição de um certo número de conhecimentos e a apropriação de um conjunto de processos fundamentais mas não se identifica com o conhecimento memorizado de termos, factos e procedimentos básicos, desprovidos de elementos de compreensão, interpretação e resolução de problemas (Ministério da Educação, 2001, p.9)".

A aquisição de conhecimentos, acompanhados com o desenvolvimento de capacidades e atitudes pelos alunos, leva-nos ao conceito de competência, que diz respeito "ao processo de activar recursos (conhecimentos, capacidades, estratégias) em diversos tipos de situações, nomeadamente situações problemáticas" (Ministério da Educação, 2001, p. 9). Assim, "existe competência (ou competências) quando, perante uma situação, se é capaz de mobilizar adequadamente diversos conhecimentos prévios, seleccioná-los e integrá-los adequadamente perante aquela situação (ou problema, ou questão, ou objecto cognitivo ou estético, etc.)" (Roldão, 2003, p. 20). Deste modo, uma vez desenvolvida uma competência, não se esquece, mas podemos sempre ampliá-la e consolidá-la.

O projecto dinamarquês *KOM – Kompetencer Og Matematiklaering* (*Competências e aprendizagem em Matemática*) (Niss, 2006) assenta o processo de ensino/aprendizagem da Matemática no desenvolvimento de um conjunto de competências. Este projecto surgiu por indicações do Ministério da Educação da Dinamarca e do Conselho Nacional para Ciências e Educação Matemática dinamarquês. O projecto tinha por objectivo resolver problemas e outras questões relevantes da educação Matemática dinamarquesa, em todos os níveis de ensino, e elaborar uma abordagem unificadora, de forma a incluir todas as áreas e todos os níveis educacionais (Niss, 2006). Nesse projecto, foram definidas um conjunto de competências necessárias para uma reformulação do ensino em termos da sua melhoria. Foram identificadas oito competências Matemáticas, estabelecidas em dois grupos de quatro:

1º Grupo – Habilidades para perguntar e responder perguntas em Matemática e com a Matemática.

Competência de **pensamento matemático** – dominar modos matemáticos de pensamento:

- entender e lidar com as origens, os escopos e as limitações de determinados conceitos;
- abstrair conceitos e generalizar resultados;
- distinguir os vários tipos de proposições matemáticas, como definições, teoremas, conjecturas e preposições concernentes a objectos únicos e casos particulares;
- ter consciência dos tipos de perguntas típicas da Matemática e “insights” sobre os tipos de respostas esperadas;
- possuir habilidades de propor tais perguntas.

Competência no **tratamento de problemas** – formular e resolver problemas matemáticos:

- descobrir, formular, delimitar e especificar problemas matemáticos – puros ou aplicados, abertos ou fechados;
- possuir habilidade de resolver problemas propostos por si próprios ou por outros e de modos diferentes, se assim o desejar.

Competência de **modelagem** – ser capaz de analisar e construir modelos matemáticos concernentes a outras áreas:

- analisar os fundamentos e as propriedades dos modelos existentes e avaliar sua abrangência e validade;
- executar modelagem activa em determinados contextos, isto é, estruturar e matematizar situações, manejar o modelo resultante, tirar conclusões

matemáticas, validar o modelo, analisá-lo criticamente, comunicar factos sobre ele e controlar o processo.

Competência de **raciocínio** – estar apto a raciocinar matematicamente:

- acompanhar e avaliar o raciocínio matemático de outrem;
- entender o que é uma demonstração (e o que não é) e como ela difere de outros modos de raciocínio;
- entender a lógica que subjaz a um contra-exemplo;
- descobrir as ideias principais em uma demonstração;
- planejar e colocar em prática argumentos informais e formais, incluindo a transformação de um raciocínio heurístico em uma demonstração válida.

2º Grupo – Habilidade para lidar com a linguagem matemática e seus instrumentos.

Competência de **representação** – poder manipular diferentes representações de entidades matemáticas:

- compreender (descodificar, interpretar, distinguir) e utilizar vários tipos de representação de entidades matemáticas;
- entender as relações entre representações diferentes da mesma entidade;
- escolher, fazer "uso de" e alterar representações diferentes.

Competência em **simbologia e formalismo** – estar apto a manipular a linguagem simbólica e os sistemas matemáticos formais:

- descodificar a linguagem simbólica e formal;
- traduzir bilateralmente a linguagem simbólica e a linguagem natural;
- manipular e utilizar proposições simbólicas e expressões, inclusive fórmulas;
- compreender a natureza dos sistemas matemáticos formais.

Competência de **comunicação** – estar apto a comunicar-se em, "com" e "sobre" a Matemática:

- compreender, examinar e interpretar tipos diferentes de expressões matemáticas ou textos escritos, orais ou visuais;
- expressar com precisão ou de modos diferentes e em níveis diferentes assuntos matemáticos para vários níveis de audiência.

Competência em **instrumentos e acessórios** – estar apto a fazer uso e estabelecer relações com instrumentos e acessórios em Matemática:

- ter conhecimento da existência e das propriedades de diferentes instrumentos e de acessórios relevantes para a actividade matemática (por exemplo, réguas, bússolas, …, calculadoras, computadores e internet);

- ter insights sobre as possibilidades e as limitações de tais instrumentos;
- usar instrumentos e acessórios de maneira reflectida.”

(Niss, 2006, pp. 33-35)

É de salientar que as competências estabelecidas, embora distintas, estão intimamente relacionadas entre si e cada uma delas tem duas facetas, dado que têm um aspecto analítico e um aspecto produtivo. O aspecto analítico das competências enfatiza a capacidade de um indivíduo para entender, interpretar, acompanhar, relacionar, analisar e julgar fenómenos e processos matemáticos, nomeadamente o trabalho de outros sobre actividades abarcadas por aquela competência; o aspecto produtivo enfatiza a própria busca independente do indivíduo em relação às actividades atrás referidas (Niss, 2006).

Em Portugal, na última reorganização curricular do Ensino Básico também redefiniu o currículo de Matemática, em termos de competências que todos os alunos deverão adquirir ao longo do seu percurso escolar nesses ciclos de ensino. No *Currículo Nacional do Ensino Básico* (Ministério da Educação, 2001) foram definidas em duas categorias as Competências Essenciais: competências gerais a desenvolver ao longo de todo o Ensino Básico e as competências específicas, que dizem respeito a cada uma das áreas disciplinares, em termos globais do Ensino Básico e para cada um dos três ciclos que o compõem. De acordo com este documento, o objectivo fundamental da aprendizagem da Matemática é formar pessoas matematicamente competentes o que envolve, de forma integrada, “um conjunto de atitudes, de capacidades e de conhecimentos relativos à Matemática” (Ministério da Educação, 2001, p. 57). Ao longo da sua instrução básica os alunos deverão adquirir as seguintes competências específicas na disciplina de Matemática:

- “A predisposição para raciocinar matematicamente, isto é, para explorar situações problemáticas, procurar regularidades, fazer e testar conjecturas, formular generalizações, pensar de maneira lógica;
- O gosto e a confiança pessoal em realizar actividades intelectuais que envolvem raciocínios matemáticos e a concepção de que a validade de uma afirmação está relacionada com a consistência da argumentação lógica e não com alguma autoridade exterior;

- A aptidão para discutir com outros e comunicar descobertas e ideias matemáticas através do uso de uma linguagem, escrita e oral, não ambígua e adequada à situação;
- A compreensão das noções de conjecturas, teorema e demonstrações, assim como das consequências do uso de diferentes definições;
- A predisposição para procurar entender a estrutura de um problema e a aptidão para desenvolver processos de resolução, assim como para analisar os erros cometidos e ensaiar estratégias alternativas;
- A aptidão para decidir sobre a razoabilidade de um resultado e de usar, consoante os casos, o cálculo mental, os algoritmos da papel e lápis ou os instrumentos tecnológicos;
- A tendência para procurar, ver e apreciar a estrutura abstracta que está presente numa situação, seja ela relativa a problemas do dia-a-dia, à natureza ou à arte, envolva ela elementos numéricos, geométricos ou ambos;
- A tendência para usar a Matemática, em combinação com outros saberes, na compreensão de situações da realidade, bem como o sentido crítico relativamente à utilização de procedimentos e resultados matemáticos."

(Ministério da Educação, 2001, p. 57).

O nosso trabalho de investigação recai na unidade temática "Do Espaço ao Plano", que faz parte da Geometria do 7º ano de escolaridade. A seguir explora-se as principais competências e capacidades a desenvolver nos alunos neste domínio.

2.5.1.1. Competências e capacidades associadas ao tema Geometria

A Geometria ocupa hoje um lugar importante no currículo de Matemática. Aliás, nas últimas décadas, a tendência é no sentido da sua revalorização. O *Currículo Nacional do Ensino básico: Competências Essenciais* (Ministério da Educação, 2001) estabeleceu novas orientações curriculares formuladas em termos de competências a adquirir por área disciplinar e, mais concretamente, em cada um dos temas matemáticos a abordar – Número e Cálculo, Geometria, Estatística e Probabilidades, Álgebra e Funções.

Assim, a competência Matemática no domínio da Geometria, das grandezas e da medida, que todos os alunos deverão desenvolver ao longo de todos os Ciclos do Ensino Básico inclui os seguintes aspectos:

- "Aptidão para realizar construções geométricas e para reconhecer e analisar propriedades de figuras geométricas, nomeadamente recorrendo a materiais manipuláveis e a software geométrico;

- A aptidão para utilizar a visualização e o raciocínio espacial na análise de situações e na resolução de problemas em geometria e em outras áreas da matemática;
- A compreensão dos conceitos de comprimento e perímetro, área, volume e amplitude, assim como e a aptidão para utilizar conhecimentos sobre estes conceitos na resolução e formulação de problemas;
- A aptidão para efectuar medições e estimativas em situações diversas, bem como a compreensão do sistema internacional de unidades;
- A predisposição para procurar e explorar padrões geométricos e o gosto por investigar propriedades e relações geométricas;
- A aptidão para formular argumentos válidos recorrendo à visualização e ao raciocínio espacial, explicitando-os em linguagem corrente;
- A sensibilidade para apreciar a Geometria no mundo real e o reconhecimento e a utilização de ideias geométricas em diversas situações, nomeadamente na comunicação."

(Ministério da Educação, 2001, p. 62).

Mas, para além dos aspectos gerais comuns a todos os ciclos da educação básica, há aspectos específicos para o 3º Ciclo que importa identificar:

- "A aptidão para visualizar e descrever propriedades e relações geométricas, através da análise e comparação de figuras, para fazer conjecturas e justificar os seus raciocínios;
- A aptidão para realizar construções geométricas, nomeadamente quadriláteros, outros polígonos e lugares geométricos;
- A compreensão do conceito de forma de uma figura geométrica e o reconhecimento das relações entre elementos de figuras semelhantes;
- A aptidão para resolver problemas geométricos através de construções, nomeadamente envolvendo lugares geométricos, igualdade e semelhança de triângulos, assim como para justificar os processos utilizados;
- O reconhecimento do significado de fórmulas e a sua utilização no cálculo de áreas e volumes de sólidos e de objectos do mundo real, em situações diversificadas;
- A predisposição para identificar transformações geométricas e a sensibilidade para relacionar a geometria com a arte e com a técnica;
- A tendência para procurar invariantes em figuras geométricas e para utilizar modelos geométricos na resolução de problemas reais."

(Ministério da Educação, 2001, p. 63).

A aprendizagem da Geometria desenvolve nos alunos, um conjunto de capacidades fundamentais para toda a Matemática. Uma vez que as primeiras experiências dos alunos são geométricas e espaciais, o professor deve ter em conta as suas experiências informais. Segundo Abrantes *et al.* (1999) esta deve ser continuada através da manipulação e ordenação de objectos, da dobragem de papéis, do uso de espelhos, da realização de jogos envolvendo a construção de padrões, da realização de experiências com itinerários, da realização de construções geométricas. Aliás, este "conhecimento geométrico deve constituir um ponto de partida para o desenvolvimento de novas competências e uma atitude positiva relativamente à Matemática" (Abrantes *et al.*, 1999, p. 71).

O homem, desde sempre, sentiu necessidade de compreender a Natureza, o mundo que o rodeia. Se olharmos à nossa volta com atenção, facilmente nos apercebemos que na Natureza, na Arte e na Arquitectura podemos encontrar um grande número de formas diferentes. Tudo o que é visível tem uma forma, ocupa um espaço, tem um tamanho, cor e textura. A compreensão espacial é necessária para interpretar, compreender e apreciar o mundo, que é intrinsecamente geométrico. De acordo com Ponte e Serrazina (1996) "A Geometria constitui um domínio da Matemática importante. Todos os cidadãos precisam de desenvolver as suas capacidades espaciais e de organização do espaço para viverem numa sociedade que é cada vez mais visual" (p. 164).

Existem várias tentativas de agrupar as capacidades espaciais segundo características específicas. Uma das categorizações é a de Frostig e Horne (Gordo, 1993, pp. 29-31, citado em Del Grande, 1987) que identificaram cinco capacidades espaciais diferentes. A coordenação visual motora é a capacidade para coordenar a visão com os movimentos do corpo. Alguns exemplos desta capacidade são: resolver e fazer labirintos; pintar desenhos; reproduzir desenhos dados e pintar espaços marcados com pontinhos. A percepção figura-fundo é a capacidade de identificar uma componente específica numa determinada situação e que envolve a mudança de percepção de figuras contra fundos complexos. Alguns exemplos desta capacidade são: completar figuras de forma a que se assemelharem a outras dadas e procurar figuras imersas noutras (recorrendo, por exemplo, ao tangram e a pavimentações). A constância perceptual é a capacidade de reconhecer figuras geométricas apresentadas numa variedade de tamanhos, texturas, tonalidades e posições no espaço e de discriminar figuras geométricas semelhantes. Alguns exemplos desta capacidade são: procurar todos os quadrados num geoplano 5 x 5; construir uma figura geométrica utilizando diversos materiais e procurar, na sala de aula ou noutro contexto, uma determinada figura geométrica. A percepção da posição no espaço é a capacidade para distinguir figuras iguais mas colocadas com orientações diferentes. Alguns exemplos desta capacidade são: desenhar uma figura simétrica de uma dada; descobrir figuras com eixos de simetria, utilizando o Mira ou um espelho e encontrar figuras iguais a uma dada, mas com orientações diferentes. A percepção de relações espaciais é a capacidade de ver ou imaginar dois ou mais objectos em relação consigo próprios ou com cada um deles. Alguns exemplos desta capacidade são: fazer uma construção com cubos a partir do desenho da mesma e fazer corresponder a um sólido a respectiva planificação e vice-versa.

Hoffer (1997, referido em Gordo, 1993) aos cinco tipos de capacidades espaciais acima descritas, acrescentou outras duas: a discriminação visual e a memória visual.
A discriminação visual é a capacidade para identificar semelhanças ou diferenças entre objectos. Alguns exemplos desta capacidade são: identificar características de triângulos; descobrir as diferenças entre dois desenhos e descobrir critérios que conduzem a determinadas classificações ou ordenações. A memória visual é a capacidade de recordar objectos que já não estão visíveis. Alguns exemplos desta capacidade são: observar figuras e copiá-las, mas sem as voltar a observar e observar figuras em papel ponteado e desenhá-las no geoplano, sem as voltar a observar.

Estas capacidades são desenvolvidas através da realização de experiências concretas, por exemplo utilizando materiais manipuláveis.

Outra categorização distinta para as capacidades espaciais é a que considera dois tipos de capacidades: a visualização e a orientação espaciais.

"A visualização espacial envolve a capacidade de imaginar como se apresentará um objecto representado numa gravura se for rodado, torcido, invertido, dobrado ou desdobrado" (McGee referido em Tartre, 1990, citado em Gordo, 1993, p.32). Enquanto a orientação espacial "envolve a capacidade para detectar combinações de objectos segundo um padrão e a capacidade para manter precisas as percepções, face à mudança de orientação" (Bishop, 1983, referido em Gordo, 1993, p. 32).

Outra categorização para as capacidades espaciais é a que considera dois tipos de capacidades: a capacidade de interpretar informação figurativa e a capacidade de processamento visual. A capacidade de interpretar informação figurativa "envolve a compreensão de representações visuais e de vocabulário espacial usados no trabalho geométrico, em gráficos, cartas e diagramas de todos os tipos" (Bishop, 1980, p. 184, citado em Gordo, 1993, p. 32). A capacidade de processamento visual "envolve a visualização e a translação de relações abstractas e informação não figurativa para termos visuais. Inclui também a manipulação e transformação de representações e imagens visuais" (Bishop, 1980, p. 184, referido em Gordo, 1993, p. 32).

Segundo Veloso (1998), algumas das dificuldades manifestadas na visualização provêem do facto do aluno não possuir, com grande clareza, a imagem dos objectos geométricos na sua memória ou não conseguir atribuir um nome a um determinado ente geométrico. Daí que o autor considere necessário que, no ensino da Geometria, se "utilizem métodos activos de construção e manipulação de modelos e em que existam actividades explicitas para desenvolver a visualização" (Veloso, 1998, p. 133).

Segundo Veloso (1998), no ensino da Geometria, e em geral da Matemática, devemos ter em atenção os seguintes aspectos:

- "É essencial que a construção de modelos e os materiais manipuláveis estejam presentes no ensino da Geometria ao longo de toda a escolaridade e não apenas nos primeiros anos; apenas dessa forma é possível ir construindo uma "memória" de imagens que serão suporte de experiências de visualização progressivamente mais complexas.
- A solução para os "erros" da percepção visual não é diminuir-lhes o estatuto na educação matemática e "confiar" apenas nas palavras e nos números, com a esperança, de resto infundada, que desta forma o rigor esteja garantido. Numa sociedade em que os aspectos visuais se tornam predominantes, o que é importante é "aprender a ver", e isso apenas se adquire pela experiência seguida de reflexão. Este deve ser um dos objectivos e práticas do ensino da Geometria" (Veloso, 1998, p. 131).

Contudo, existem outras capacidades que os alunos podem desenvolver na Geometria.

Para desenvolver a capacidade de construção e manipulação de objectos geométricos, o professor deve propor aos alunos tarefas, tais como: a construção de objectos geométricos, a construção de frisos ou pavimentações através da manipulação de figuras geométricas ou a construção de um lugar geométrico que satisfaça uma determinada condição. Segundo Abrantes *et al.*, (1999) esta capacidade envolve a "construção material de objectos, como no caso do cubo ou outros sólidos geométricos, de desenhos geométricos com régua e compasso ou de construções no computador" (p.85). Por exemplo, o aluno ao construir um paralelogramo no geoplano, tem de recordar as diversas propriedades deste.

Das capacidades de organização lógica do pensamento matemático podemos salientar as seguintes: a intuição espacial; o estabelecimento de relações espaciais entre os objectos; as estimações relativas à forma e à medida; a descoberta de propriedades das figuras e a aplicação destas propriedades em situações variadas. De acordo com Matos e Serrazina (1996), o desenvolvimento desta capacidade "é um processo gradual que se inicia com experiências concretas, passando a uma diferenciação dos objectos geométricos, passando ainda por uma organização local de propriedades que finalmente se globaliza num sistema axiomático" (p.270).

A capacidade de aplicar os conhecimentos geométricos noutras situações, refere-se ao facto que o aluno deve ser capaz de mobilizar os conhecimentos adquiridos na sala de aula para outras situações da vida real. Por exemplo, o conceito de simetria pode proporcionar oportunidades para os alunos verem a Geometria no mundo da Arte ou na Natureza.

A capacidade de compreensão dos invariantes numa figura engloba a compreensão de quatro tipos de transformações, que deixam as figuras invariantes no que se refere à forma e tamanho. Elas são: a reflexão (ou simetria axial), a translação, a rotação e a reflexão deslizante. Por exemplo, observar em frisos e pavimentações as transformações geométricas que estão na base da sua construção.

O desenvolvimento, pelos alunos, da capacidade de medição implica, segundo Abrantes *et al.* (1999), que estes percebam que o comprimento, a área e o volume de objectos não mudam por deslocamento, implica que compreendam as relações entre as unidades do mesmo sistema e que saibam escolher unidades e instrumentos de medida apropriados.

A comunicação na aula de Matemática desempenha um papel importante no ensino-aprendizagem. Segundo Matos e Serrazina (1996), a capacidade de comunicação deve ser entendida como a capacidade de trocar ideias, muitas vezes difusas, que por um processo de negociação (entre os alunos ou entre o professor e os alunos) podem ser aperfeiçoadas e que ajuda por sua vez no desenvolvimento de argumentos válidos. Daí a necessidade em adoptar, no ensino da Geometria, metodologias pedagógicas diversificadas (o trabalho cooperativo, a resolução de problemas, ...), utilizando recursos de natureza diversa (materiais manipuláveis, tecnologias, ...), criando, deste modo, um ambiente favorável ao desenvolvimento da comunicação matemática.

A comunicação constitui um processo social onde os participantes interagem trocando informações e influenciando-se mutuamente. Nas aulas de Matemática, a comunicação desenvolve-se, sobretudo, pela linguagem oral, embora também se recorra à linguagem gestual, à linguagem escrita e à linguagem icónica (gráficos, diagramas, desenhos e ilustrações). Cabe ao professor a regulação da comunicação oral na sala de aula, encorajando os alunos a assumir uma participação activa, uma vez que a linguagem faz parte do processo avaliativo, tanto na vertente escrita como na vertente oral. Por isso, na realização de determinada actividade deve haver espaço para a exposição (quando o professor fornece informação sobre determinado conteúdo), para o questionamento (quando o professor faz perguntas aos alunos sobre determinado assunto) e para a discussão (quando os diversos intervenientes interagem expondo ideias e fazendo perguntas uns aos outros). Convém referir que todos estes tipos de comunicação ocorrem numa aula de Matemática. A exposição por parte do professor "é uma prática bastante comum no ensino, servindo para introduzir informação, para explicar um procedimento ou para sistematizar um certo trabalho" (Ponte e Serrazina, 2000). O questionamento permite ao professor fazer determinadas perguntas, com o "objectivo de detectar dificuldades ao nível da compreensão dos conceitos e dos processos matemáticos, ajudá-los a pensar, motivá-los para participar e saber se eles estão a acompanhar o trabalho da aula" (Ponte e Serrazina, 2000). O professor deve estimular os alunos a mostrarem, dizerem, explicarem e criticarem o trabalho realizado, não deve dizer o que está certo ou errado, deve porém colocar questões que promovam a clarificação de ideias. Daí que as questões colocadas na sala de aula pelo professor servem não só para testar o conhecimento dos alunos quer seja antes ou após novas aprendizagens, mas também ajuda os alunos a reflectir sobre o trabalho realizado. Existem três tipos fundamentais de perguntas: de focalização, de confirmação e de inquirição.

Segundo Ponte e Serrazina (2000) as perguntas de focalização, ajudam o aluno a seguir um certo percurso de raciocínio, as perguntas de confirmação servem para verificar os conhecimentos dos alunos e por fim, as perguntas de inquirição visam o esclarecimento do professor. O professor utiliza as perguntas de inquirição quando quer obter informação de que não dispõe, por exemplo, o modo como os alunos estão a pensar, o modo como resolveram um certo problema, ou qual a sua opinião sobre um dado resultado ou estratégia (p.120).

E por fim, a discussão que envolve vários intervenientes (os alunos ou os alunos e o professor). Uma discussão "tem sempre um objectivo, que pode ser a estratégia a seguir para a realização de uma tarefa, a avaliação de uma dada solução, o balanço do trabalho realizado ao longo de todo um período, etc". (Ponte e Serrazina, 2000).

O NCTM (1994), nas Normas Profissionais, atribui especial ênfase ao discurso da aula e, em particular, ao do professor, porque deste depende o envolvimento dos alunos no discurso. Daí que, ao professor, compete "iniciar e dirigir este tipo de discurso e usá-lo habitualmente para desenvolver a aprendizagem dos alunos" (NCTM, 1994, p. 36). Através do questionamento o professor pode envolver os alunos no discurso. Aliás, no NCTM (1994), pode ler-se: "Questões bem colocadas podem simultaneamente elucidar sobre o pensamento dos alunos e ampliá-lo. É crucial a habilidade do professor na formação de questões que dirijam o discurso oral e escrito na direcção do raciocínio matemático" (p. 38). Daí que o professor deve incrementar a comunicação entre os alunos, porque permite perceber aquilo que os mesmos aprendem, obter informação sobre a qualidade desse saber, sobre o modo como pensam, sobre as capacidades e atitudes que estão a ser desenvolvidas. O NCTM (1994) destaca algumas sugestões para melhorar a qualidade do discurso nas aulas. A primeira sugestão para favorecer o discurso consiste na selecção de tarefas estimulantes, que conduzam à discussão e à formulação de questões, que desafiem o pensamento dos alunos, encorajando-os a tomar posições e a defendê-las com convicção. Segundo Menezes,

> "(…) as tarefas rotineiras, vulgarmente designadas por exercícios, não são, normalmente, geradoras de grande discussão entre os alunos, uma vez que o modo de resolução assenta num algoritmo já conhecido destes. As tarefas demasiado difíceis para os alunos - sem nenhum tipo de familiaridade - são, no outro oposto, inibidoras do desencadear da comunicação, que na maior parte dos casos bloqueiam totalmente. Por isso, é preciso encontrar tarefas que sejam equilibradas para cada tipo de alunos, ou seja, que sejam abordáveis por estes mas, ao mesmo tempo, desafiantes" (1999, p. 76).

Também o modo de organização dos alunos nas aulas, na realização de tarefas influência a comunicação na sala de aula. Algumas investigações realizadas realçam que, o facto de os alunos realizarem tarefas de uma forma cooperativa traz benefícios em termos de comunicação entre eles. Segundo Menezes (1999), "a participação dos alunos, através de intervenções verbais – explicando as suas ideias, manifestando desacordo em relação aos colegas, argumentando, conjecturando – é facilitada em grupos mais pequenos" (p. 78). O trabalho cooperativo em pequeno grupo dá aos alunos a possibilidade de discutirem entre si, tentando esclarecer ideias menos claras, assim como a oportunidade de expressarem os seus pontos de vista, de ouvirem, de clarificarem dúvidas contribuindo para a qualidade do discurso da aula. É também importante que o professor escute os alunos, lhes peça para explicarem o seu pensamento, levando os alunos a verbalizar os seus raciocínios, explicando, discutindo, confrontando os resultados obtidos com as dos colegas, só assim conseguirá estimular a comunicação entre os alunos. Neste sentido o professor desempenha um papel relevante na condução do discurso da aula, "colocando questões, proporcionando situações que favoreçam a ligação da Matemática à realidade, estimulando a discussão e a partilha de ideias" (Menezes, 1999, p.80). As orientações mais recentes para o ensino e aprendizagem da Matemática propõem outro tipo de papel do professor no discurso da aula. Numa aula dita tradicional, a intervenção dos alunos, nas aulas, são esporádicas e curtas, não havendo espaço para os alunos explicarem as suas ideias, nem confrontá-las com as dos colegas. O professor é quem fala, explica, corrige, enquanto os alunos ouvem, seguem o raciocínio do professor e respondem às perguntas colocadas. Hoje, o professor é o principal responsável pela organização do discurso da aula, sendo um facilitador ou inibidor de processos comunicativos na sala de aula. Para fomentar a comunicação na sala de aula o professor deve endereçar aos alunos convites à intervenção na discussão, perguntando "porquê?", pedindo a um aluno que explique a sua ideia ou que justifique a sua resposta. A estimulação, pelo professor, da comunicação matemática na aula entre os alunos permite descentralizar a autoridade, em matéria de saber, do professor para o par professor/alunos. O poder decisório na validação das respostas deixa de pertencer exclusivamente ao professor. Por isso, o professor deve pedir aos alunos justificações sempre que considere necessário, procurando desta forma que os mesmos assumam também o poder de decisão do que está certo ou errado. Deste modo, os alunos passam a ser responsabilizados pela sua própria aprendizagem.

2.5.2. Materiais Manipuláveis

Desde os tempos mais remotos, que o homem usa materiais para realizar actividades matemáticas. Por exemplo, o homem primitivo começou por usar para contar objectos, pedras, marcas num bastão, nós numa corda, como sendo símbolos para os números e como ferramentas para encontrar resultados de operações. Mais tarde, o surgimento do sistema de numeração indo-árabe e o aparecimento do ábaco vieram simplificar não só a escrita dos números, mas também as operações aritméticas. A Matemática do dia-a-dia tornou-se, assim, mais acessível.

O aparecimento do ábaco deve-se a Gerbert Abacus (930-1003) e ajudou na representação dos números. O ábaco foi um dos primeiros materiais construídos, especificamente, para trabalhar conceitos de Aritmética, tornando-se útil no processo de representar números. O ábaco é um dispositivo de cálculo aritmético que consiste, geralmente, num quadro de madeiras com cordas ou arames transversais, correspondendo cada um a uma posição digital (unidades, dezenas,...) e nos quais estão os elementos de contagem (fichas, bolas, contas,...) que podem fazer-se deslizar livremente. Por volta do século XV, este desapareceu das escolas a partir do momento que surgiram novos métodos de cálculo – os algoritmos. Já não era necessário usar os materiais concretos no ensino da Matemática para encontrar um resultado, bastava que o aluno mecanizasse determinadas "regras" de cálculo.

A utilização de materiais manipuláveis no ensino e aprendizagem da Matemática foram reintroduzidos e recomendados, no século XIX, pelos fundadores da Escola Activa, Comenius, Pestalozzi e, mais tarde, por Decroly e Montessori.

Segundo Szendrei (1996), os trabalhos desenvolvidos por Comenius (1592-1670) tiveram uma grande influência na Educação. Este educador tinha como princípio que os alunos devem aprender a usar a realidade dos sentidos e não somente as palavras. Na sua obra, *Didáctica Magna,* defende que "o conhecimento deve, necessariamente, começar através dos sentidos - dado que nada pode ser objecto de compreensão se não tiver sido primeiro objecto de sensação. Porquê então começar com uma exposição verbal das coisas e não com uma observação real das mesmas? Só quando esta observação da coisa for feita, a palavra poderá intervir para explicá-la com eficácia" (citado por Costa, 1998, p. 149). Por isso, Comenius sentiu necessidade de construir materiais educacionais para as suas aulas. Este não era apenas um educador teórico, defendia a utilização de materiais da vida diária ou imagens dos mesmos na sala de aula.

Um século mais tarde, surge Pestalozzi (1746-1827), o "pai" do uso sistemático de experiências sensoriais na escola. Pois, de acordo com Pestalozzi, a observação e os sentidos devem ser o primeiro passo a dar em qualquer processo de aprendizagem. No seu livro " *Como Gertrudes Instrui os Seus Filhos*", escrito em 1801, Pestalozzi afirma que " Não se deve pôr o aluno em condições de inferioridade; desencorajá-lo com uma didáctica catedrática, com um ensino verbal, porque assim a sua aprendizagem será passiva. É mediante a experiência directa, a actividade, a concepção por si só através dos sentidos e das operações sobre as coisas, que nascerá o conceito, primeiro vago e apenas esboçado, depois mais preciso, consistente, claro e universal" (Costa, 1998, p. 149).

Alguns anos mais tarde (1909), Charles Laisant no seu trabalho, *L'Enseignement Mathemátiques: Ouvrage Étranger Pour Tout Programme Dédie aux Amis de l'Enfance,* defendia que os professores ao utilizarem materiais concretos na sala de aula de Matemática podiam: exibir propriedades matemáticas, ilustrar conceitos e procedimentos matemáticos e construir um ambiente de aprendizagem.

Decroly e Maria Montessori também recomendavam a utilização de materiais manipuláveis no ensino da Matemática. Maria Montessori (1914) desenvolveu um aparato didáctico, que segundo ela, era um meio de alcançar o desenvolvimento sensorial, motor e intelectual. Queria dar ideias claras de conceitos tais como: número, séries de números naturais, medida, operações aritméticas, sistema de base dez, figuras geométricas planas e sólidos geométricos. No seu método, foram usados materiais especiais, para preparar a escrita dos números e criar uma correspondência entre o símbolo e o número de objectos que ele representa.

Também Piaget, nas suas experiências com crianças para a concepção da sua teoria do desenvolvimento cognitivo, considerou "que quanto mais tempo as crianças se dedicarem ao estudo do concreto, quanto mais tempo empregarem na observação activa, tanto melhor passarão, então, à compreensão das formas abstractas " (Costa, 1998, p. 149). Segundo ele, os alunos que vêem e manipulam vários tipos de objectos têm imagens mentais mais claras e podem representar ideias abstractas mais completamente do que aqueles cujas experiências são mais pobres. Assim, os materiais são, para Piaget, um auxílio importante para o desenvolvimento cognitivo das crianças.

Materiais didácticos dos mais variados tipos são usados no processo de ensino-aprendizagem da Matemática. Entre os materiais didácticos iremos dar especial atenção aos materiais manipuláveis. Podemos agrupá-los em duas categorias: estruturados e não estruturados. Os materiais estruturados são aqueles que foram construídos com objectivos específicos para o ensino da Matemática e como tal incorporam conceitos matemáticos: geoplanos, sólidos geométricos, réguas, compassos, transferidores, esquadro, balanças, tangrans, papel ponteado, blocos lógicos, material multibásico, barras cuisenaire, ábacos, ... Enquanto os materiais não estruturados são objectos diversos do dia-a-dia: palhinhas, embalagens, mosaicos, papéis de embrulho, feijões, paus de gelado, ... Convém referir que os alunos na sala de aula podem trabalhar com diversos tipos de materiais estruturados ou não estruturados, em todos os tópicos de Matemática.

Hoje, temos à nossa disposição uma grande variedade de materiais manipuláveis para usar na aula de Matemática, com o objectivo de facilitar o processo de ensino-aprendizagem. Reys (1982) define materiais manipuláveis como "objectos ou coisas que o aluno é capaz de sentir, tocar, manipular e movimentar. Podem ser objectos reais que têm aplicação nos afazeres do dia-a-dia ou podem ser objectos que são usados para representar uma ideia" (p.5). Os materiais manipuláveis apelam a diferentes sentidos dos alunos: o visual, o táctico e o oral. Também são caracterizados pelo envolvimento físico dos alunos, visto que podem ser tocados, movidos, reajustados e manipulados, numa situação de aprendizagem activa, levando os alunos a participar na construção do seu próprio conhecimento. Convém referir que não é o material manipulável em si que é importante na construção do conhecimento matemático, mas sim as acções dos alunos e a sua reflexão sobre essas acções. Cabe ao aluno seleccionar, reorganizar a informação e estabelecer conexões entre a nova informação e os conhecimentos já adquiridos anteriormente, de forma a dar-lhe sentido.

Os materiais manipuláveis são essenciais no processo de aprendizagem em qualquer estádio de desenvolvimento, pois estes ajudam a compreender ideias abstractas a partir de situações concretas e problemáticas. De acordo com Reys (1982) os processos cognitivos envolvidos e desenvolvidos aquando o uso de materiais são mais ricos e complexos que o ensino baseado na repetição e na memorização de factos. Por isso, NCTM (1989/1991) recomenda que as salas de aula devem estar equipadas com uma grande diversidade de materiais manipuláveis, como calculadoras e computadores. Esta recomendação é fundamentada no facto de que:

> "(…) as crianças são indivíduos activos que constroem, modificam e integram ideias, interagindo com o mundo físico, com os materiais e com outras crianças. Assim sendo, é evidente que a aprendizagem da Matemática deve ser um processo activo (…). Os professores têm de criar um ambiente que encoraje as crianças a explorar, desenvolver, testar, discutir, e aplicar ideias. Têm de ouvir as crianças, atentamente, e guiar o desenvolvimento das suas ideias. Têm de usar, frequentemente, materiais manipuláveis em actividades que impliquem o raciocínio de forma a fomentar a aprendizagem de ideias abstractas" (NCTM, 1991, pp. 21-22).

Um ambiente de aprendizagem que recorra à utilização destes materiais permite experiências matemáticas mais eficazes. Szendrei (1996) refere que a utilização dos materiais manipuláveis "ajudam os alunos a desenvolver e compreender os conceitos, procedimentos e outros aspectos da Matemática. E também ajudam os alunos a desenvolver aptidões que não estão bem desenvolvidas através da experiência fora da aula" (p. 427). Pode-se ler no documento *Normas para o Currículo e Avaliação em Matemática Escolar* (1991) que:

> "(…) a evolução destes alunos a nível intelectual, psicológico, fisiológico e social, é acompanhado pelo desenvolvimento da sua capacidade de pensar de forma cada vez mais abstracta. No entanto, (…) deverão ser as experiências concretas a proporcionar a construção do seu conhecimento. Destas experiências os alunos poderão abstrair ideias e conceitos mais complexos e elaborados" (p.81).

O Ministério da Educação, nas suas publicações faz várias referências à necessidade de se utilizarem uma grande variedade de materiais manipulativos para apoiar a actividade matemática. Por exemplo, relativamente ao programa do terceiro ciclo do ensino básico pode-se ler:

> "Um programa que se pretende ligado à experiência e à intuição pressupõe a possibilidade de largo uso de materiais diversificados: material simples do quotidiano (embalagens, mosaicos, papéis de embrulho, cartolinas, objectos da sala de aula,…); materiais de desenho e de medição, modelos geométricos, geoplano, …; materiais escritos (fichas de trabalho, manuais, …); calculadoras; meios audiovisuais (retroprojectores, slides, vídeo, …); meios informáticos" (Ministério da Educação, 1991, p. 197).

Reys (1982) identificou, a partir da comparação de diferentes teorias de aprendizagem, alguns aspectos que fundamentam o uso de materiais manipuláveis no ensino e aprendizagem da Matemática: (1) a formação de conceitos é essencial para a aprendizagem da Matemática; (2) a aprendizagem é baseada na experiência; (3) a aprendizagem sensorial é a base de toda a experiência e assim o coração da aprendizagem; (4) a aprendizagem é um processo de crescimento e é por natureza um processo de desenvolvimento; (5) a aprendizagem é caracterizada por estádios distintos de desenvolvimento; (6) a aprendizagem é aumentada pela motivação; (7) a aprendizagem constrói-se do concreto para o abstracto; (8) a aprendizagem requer uma participação activa do aluno; (9) a formulação de abstracções matemáticas é um processo longo (p. 6). Convém referir que, os aspectos focados, não são independentes, mas estão bastante interrelacionados.

Surgem, no entanto, algumas questões relacionadas com os materiais manipuláveis. Quais são os critérios para seleccionar materiais manipulativos? Que materiais devem ser usados e como utilizá-los? Quais são as vantagens e desvantagens de os usar?

Pedagogicamente, existem vários critérios a considerar ao seleccionar materiais manipulativos. Reys (1982) definiu os seguintes critérios para seleccionar bons materiais manipuláveis:

- Os materiais devem proporcionar uma verdadeira personificação do conceito matemático ou das ideias a serem exploradas;
- Os materiais devem representar claramente o conceito matemático;
- Os materiais devem ser motivantes. Só assim, podem estimular na imaginação e o interesse dos alunos;
- Os materiais, se possível, devem ser apropriados para usar, quer em diferentes anos de escolaridade, quer em diferentes níveis de formação de conceitos. De preferência os materiais devem ser úteis em desenvolver mais do que um conceito matemático. Esta vasta aplicabilidade é frequentemente conseguida ao usar uma grande variedade de materiais. Estes devem ser usados, não só para a introdução de um novo conceito matemático, mas também quando os alunos exploram as novas ideias matemáticas;
- Os materiais devem proporcionar uma base para a abstracção;
- Os materiais devem proporcionar manipulação individual. Isto é cada aluno deve ter oportunidade para manipular os materiais, quer individualmente ou dentro de um grupo, de acordo com as circunstâncias.

Este investigador definiu, também, as características físicas que devemos considerar ao seleccionar materiais manipulativos: durabilidade, atractividade, simplicidade, tamanho e custo. Reys (1982) salienta ainda o facto de que, um bom material didáctico, tem de apresentar aplicabilidade num grande número de ideias matemáticas, uma vez que essa diversidade de aplicações permite que os alunos estabeleçam conexões entre os diversos conceitos intrínsecos à manipulação do material.

Por outro lado, Reys (1982) chama também a atenção para alguns aspectos a evitar na utilização de materiais. Segundo este, os materiais manipuláveis não devem desviar a atenção dos alunos dos conceitos matemáticos a serem desenvolvidos. Por exemplo, materiais com cores vivas podem ser um impedimento à formação de um determinado conceito. Também a complexidade ou a demasiada simplicidade do material a utilizar pode ser uma barreira e não representar o conceito pretendido. Por isso, os materiais devem ser simples de manipular e funcionar. Logicamente, que os professores devem ter cuidado na escolha dos materiais, assegurando que estes incorporam adequadamente o conceito matemático a ser desenvolvido. Outro aspecto que faz referência é que o professor não deve usar os materiais nem indiscriminadamente, nem exaustivamente.

Em suma, seria ideal se os materiais manipuláveis contivessem todos os critérios já mencionados. Estes critérios pedagógicos e físicos podem ajudar os professores na selecção e uso destes.

Em Portugal, ainda se utiliza muito pouco os materiais manipuláveis no ensino da Matemática de acordo com algumas investigações realizadas. De acordo com os resultados do relatório *Matemática 2001* (APM, 1998), que realizou um estudo sobre o ensino e aprendizagem da Matemática nos diversos níveis de ensino (Básico e Secundário). Por exemplo, em relação à utilização dos materiais didácticos utilizados pelos professores na sua prática lectiva, concluiu-se que o manual adoptado é utilizado com muita frequência de cerca de 80% dos professores, vindo as fichas de trabalho em seguida com um pouco menos de 60%. Este facto verifica-se em todos os níveis de ensino. Em relação aos materiais manipuláveis e aos jogos didácticos, a frequência de utilização é muito baixa em qualquer dos ciclos – cerca de 90 % dos professores, em cada ciclo raramente os utilizou. Também se verificou que a frequência da sua utilização decresce à medida que se progride na escolaridade.

Apesar das recomendações feitas no currículo, que fazem apelo à utilização de materiais manipuláveis no ensino da Matemática, ainda estão pouco integrados nas práticas pedagógicas. As justificações dadas para a fraca utilização de materiais relacionam-se o mau apetrechamento das escolas com este tipo de material, à falta de conhecimento e de familiaridade com os manipuláveis por parte dos professores, entre outros. Desta forma, continua a valorizar-se a exposição feita pelo professor e a resolução de exercícios rotineiros, em detrimento de modos de trabalhar que favoreçam o envolvimento do aluno no processo de aprendizagem. Nesse relatório, em relação ao uso de materiais didácticos, é recomendado que "a prática pedagógica deve utilizar situações de trabalho que envolvam contextos diversificados (nomeadamente, situações da realidade e da História da Matemática) e a utilização de materiais que proporcionam um forte envolvimento dos alunos na aprendizagem, nomeadamente os materiais manipuláveis, calculadoras e computadores" (p. 44).

Contudo, de acordo com as novas orientações curriculares para que os alunos atinjam determinadas competências é necessário proporcionar-lhes situações de aprendizagem diversificadas e actividades matemáticas ricas, recorrendo ao uso de diversos tipos de materiais manipuláveis.

Segundo Philippe Perrenoud (2000), a escola deve preparar os alunos para a vida em sociedade, daí a importância de desenvolver, em cada ciclo, uma série de competências. Segundo este, competência é a faculdade de mobilizar um conjunto de recursos cognitivos (saberes, capacidades, informações) para solucionar com pertinência e eficácia uma série de situações. Logicamente, que nem todas as competências são desenvolvidas na escola, pois nem todas as pessoas vivem as mesmas situações. Por exemplo, as pessoas que vivem nas cidades desenvolvem competências diferentes daquelas pessoas que vivem no campo, ou seja, elas desenvolvem competências adaptadas ao seu mundo. É necessário referir que a escola desempenha um papel relevante no desenvolvimento de competências. Neste sentido, é necessário trabalha-las, o que exige tempo, metodologias diversificadas e situações apropriadas. Só assim os alunos puderam transferir e mobilizar capacidades, saberes e conhecimentos para situações da sua vida quotidiana.

A utilização de materiais manipulativos na realização de uma determinada actividade ajuda no desenvolvimento de determinadas competências. Os alunos como indivíduos activos na construção do saber, terão oportunidade para explorar, procurar generalizações, fazer conjecturas, raciocinar logicamente, comunicar. Se o aluno no seu percurso académico:

> "(…) se habituar a experimentar e a tentar encontrar generalizações, a procurar o que há de invariante numa situação (…) e se compreende que não basta que uma hipótese formulada se verifique em alguns casos para poder tomar essa hipótese como uma afirmação verdadeira, sendo necessário encontrar uma argumentação lógica para a validar, ou um contra exemplo para a rejeitar", então está a desenvolver aspectos fundamentais da sua competência matemática (Abrantes, Serrazina, Oliveira, 1999, p. 33).

Como a aprendizagem é baseada na experiência, visto que o aluno utilizou materiais manipuláveis, este, mais facilmente, se apercebe de que aquilo que torna certa uma afirmação em Matemática não é o facto de coincidir com a resposta do manual ou com a aprovação do professor, mas a consistência do raciocínio apresentado.

A manipulação de materiais pelos alunos pode facilitar a construção de certos conceitos matemáticos e também contribui para o envolvimento do aluno na sua aprendizagem, sendo por esse motivo recomendados por vários investigadores e entidades (Reys, 1982; Serrazina, 1991; Szendrei, 1996; Ministério da Educação, 1991; Ministério da Educação, 2001; NCTM, 1991). Mas, a utilização de materiais por si só não garante uma aprendizagem significativa por parte dos discentes. Convém salientar que, para o professor tirar partido dos materiais, estes devem ser manuseados pelos alunos e não somente pelo professor. Também não podemos esquecer que é importante que o professor explique qual o objectivo da actividade proposta, assim como o modo de funcionamento do material em questão, especialmente se é a primeira vez que os alunos o utilizam. A utilização de materiais manipuláveis no ensino torna os alunos participativos activos no processo de aprendizagem.

Assumindo que saber Matemática é fundamentalmente fazer Matemática (NCTM, 1991, p.8), a utilização de materiais numa actividade proporciona aos alunos momentos para se envolverem em aspectos fundamentais da experiência matemática, como estabelecer e validar conjecturas, construir, reflectir, identificar, explorar, comunicar, discutir e argumentar. Isto é, aprender Matemática fazendo-a não implica só a manipulação de materiais, mas também pensar acerca da manipulação e reflectir acerca das experiências que vivemos, porque o que está em causa é não só a actividade física mas, a actividade mental que reflecte a actividade matemática. Só assim à utilização de materiais na aprendizagem da Matemática poderá contribuir para o desenvolvendo de competências.

Segundo Reys (1982), ao utilizarmos materiais manipuláveis no ensino da Matemática, o processo mental envolvido na formação dos conceitos, tem maior consistência do que aqueles associados à memorização de factos. Aliás, a memorização passiva não significa necessariamente que o aluno tenha realmente aprendido ou compreendido determinado conceito matemático. Neste sentido, é importante explorá-los uma vez que estes são um poderoso auxilio na passagem do nível concreto para o nível abstracto.

O trabalho dos alunos com estes materiais, se for realizado com actividades interessantes e desafiantes, pode favorecer a formulação de conjecturas, estimular uma atitude investigativa e enriquecer os raciocínios e argumentos por eles utilizados. Além disso, a aprendizagem utilizando materiais, apela aos vários sentidos dos alunos, através do contacto e da movimentação, envolvendo-os fisicamente, e é através desta interacção que se dá a aprendizagem. Contudo, o recurso aos materiais manipuláveis trata-se de um meio e não de um fim, o essencial está na natureza da actividade intelectual dos alunos" (Abrantes, Serrazina, Oliveira, 1999). Ou seja, os materiais permitem não só que os alunos reflictam sobre as experiências que vivenciaram, mas também que interajam e comuniquem uns com os outros. A utilização de materiais manipuláveis na sala de aula é um convite à exploração, à descoberta e ao raciocínio, contribuindo para a construção de conceitos e para o desenvolvimento do poder matemático dos alunos, em aspectos como a resolução de problemas, a comunicação na aula de Matemática ou o raciocínio matemático.

Segundo Reys (1982), para que o professor consiga usar com eficácia materiais manipuláveis deve ter em consideração os seguintes aspectos: (1) definir critérios pedagógicos e físicos ao seleccionar os materiais manipulativos; (2) criar actividades que proporcionam a incorporação múltipla do conceito; (3) prepara-se com antecedência para a actividade; (4) preparar os alunos para a actividade; (5) preparar a sala de aula; (6) encorajar os alunos a pensar por si mesmos; (7) encorajar a interacção no grupo de trabalho, encorajando os alunos a comunicar os seus pensamentos, as suas ideias e as suas observações com os seus colegas; (8) fazer perguntas aos alunos; (9) permitir que os alunos façam erros; (10) proporcionar actividades "follow-up"; (11) avaliar a eficácia dos materiais, depois de usá-los; (12) trocar ideias com os colegas (p.9).

O professor ao elaborar as actividades, para utilizar materiais manipuláveis, deve verificar se os utiliza em toda a actividade, antes de eles serem usados pelos alunos. E responder a questões, como:

- que pré-requisitos são precisos antes da utilização destes materiais manipulativos serem introduzidos?
- as orientações são claras?
- existe um número adequado de questões principais?
- os materiais manipuláveis são adequados ao conceito matemático e ao nível de desenvolvimento dos alunos?

Isto, para verificar se, realmente, através da actividade proposta, o aluno atingirá os objectivos pretendidos. Só assim o professor poderá preparar os alunos de forma que estes possam beneficiar da experiência com os materiais, assumindo os discentes um papel activo e participativo no processo ensino-aprendizagem.

Também é importante a preparação da sala de aula. Neste sentido, o professor deve assegurar que todo o material que necessita está operacional, acessível e disponível em quantidade suficiente.

As actividades em que o professor utiliza materiais manipuláveis são uma boa maneira para encorajar os alunos a pensar por si mesmos. Através do diálogo o professor pode obter informação acerca do modo de pensar dos mesmos, verificando se o seu raciocínio está correcto ou não. Neste sentido, o professor não deve rejeitar uma ideia de um aluno mesmo sendo incorrecta, pois pode reprimir as ideias futuras. Deve sim demonstrar respeito pelas suas ideias e tentar, através do questionamento, que ele chegue ao raciocínio pretendido. Pois, frequentemente, a primeira reacção do professor, quando algum aluno responde incorrectamente é dar a resposta correcta. O professor deve colocar questões pertinentes aos alunos, chamando a atenção para alguns pormenores importantes que tenham sido esquecidos.

Nestas aulas com materiais, os alunos não têm um papel de receptores de informação, mas sim uma participação activa no decurso da actividade. O trabalho desenvolvido coloca o aluno mais a vontade para "cometer erros ou dizer as coisas de modo imperfeito ou incompleto, não é um mal a evitar, é algo inerente ao próprio processo de aprendizagem. É na medida em que o aluno se expõe e tanto ele como o seu professor se apercebem dos erros e da sua origem que é possível falar sobre isso, compreender melhor o que está em causa" (Abrantes, Serrazina, Oliveira, 1999). É preciso que o aluno saiba que tem o direito a errar ou a cometer um engano nas tarefas propostas, pois o erro é uma via de acesso para que aluno e professor conheçam a situação/estado do saber. Daí a importância do professor incluir, nas suas aulas, actividades em que utilizam materiais com o objectivo de levar o aluno a raciocinar, a levantar hipóteses pertinentes, a relacionar as soluções com a plausibilidade das mesmas, só assim os professores poderão prepará-los para o futuro. Claro que não é suficiente que o aluno participe nas actividades para haver uma aprendizagem de novos conhecimentos, é necessário que ele se envolva num processo de reflexão as mesmas.

Todos estes aspectos devem ser tidos em consideração, pois a falha ao escolher materiais manipuláveis adequados para a actividade em questão e a falha ao usá-los apropriadamente, pode destruir a sua eficácia no processo de aprendizagem

Ainda acordo com Reys (1982), não devemos usar excessivamente materiais manipulativos, nem usar indiscriminadamente. Devemos usá-los apenas quando existem determinados conceitos no programa de Matemática, onde a sua ajuda facilitam a sua compreensão. Evidentemente que, por vezes, pode acontecer o professor observar sinais de aborrecimento por parte dos alunos, que podem indicar uso excessivo de materiais manipuláveis ou pode sugerir a necessidade de levantar questões pertinentes, que despertem a atenção do aluno, ou a necessidade de estender os conceitos a ser explorados com os materiais manipuláveis.

Outro aspecto a ter em atenção, quando se utilizam materiais, é o facto de devermos dar tempo aos alunos para realizar a actividade. Ao apressar o aluno na resolução de uma actividade, cria uma situação de aprendizagem artificial, visto que o aluno não teve tempo para amadurecer as suas ideias. Também os materiais devem ser flexíveis, de forma a permitir múltiplas formas de uso e desta forma, deve incorporar vários conceitos. Segundo Vale (1999) “há temas que serão bastante mais complicados de introduzir se não tiverem um suporte físico para o fazer, assim os materiais poderão ser um suporte valioso para actividades problemáticas na sala de aula” (p. 119).

Na perspectiva de Reys (1982), os materiais manipuláveis só podem fazer parte integrante do programa educacional de Matemática se, ao utilizá-los, o professor seguir alguns passos: (1) a aprendizagem desejada deve ser claramente definida; (2) os materiais manipuláveis, que vão ajudar no processo de aprendizagem, precisam de ser seleccionados; (3) os materiais devem ser integrados numa sequência de aprendizagem organizada, para que os alunos possam progredir do simples e concreto para o complexo e abstracto (p. 12).

Cabe aos professores criarem ambientes propícios à utilização de materiais manipuláveis, de acordo com os aspectos que foram referidos anteriormente, isto para ajudar os alunos a atingir e desenvolver determinadas competências consideradas essenciais. A maior dificuldade é seleccioná-los e saber como utilizá-los com eficácia.

Embora o uso de materiais manipuláveis seja recomendado por várias entidades (NCTM, 1991, 1994, 2000; ME, Organização Curricular e Programas, Vol I, 3ºciclo), algumas investigações efectuadas sobre a sua utilização verificaram que muito poucos professores os utilizam na sala de aula. Segundo as investigações, o livro didáctico continua a merecer a preferência dos professores, apesar nos programas oficiais de Matemática, para todos os níveis de escolaridade, desde o primeiro Ciclo até ao Secundário, serem feitas recomendações para alterar esta prática.

O projecto Matemática 2001 realizou um estudo sobre o ensino-aprendizagem desta área do saber e verificou que, em relação aos materiais manipuláveis, a sua fraca utilização, se deve ao facto de que as escolas estão mal apetrechadas com este tipo de material. Nesse projecto, recomendam que " a prática pedagógica deva utilizar situações de trabalho que envolvam contextos diversificados (nomeadamente, situações da realidade e da História da Matemática) e a utilização de materiais que proporcionem um forte envolvimento dos alunos na aprendizagem, nomeadamente os materiais manipuláveis, calculadoras e computadores" (p.44).

A investigação realizada sugere que os materiais manipuláveis são particularmente úteis na passagem do nível concreto para o nível abstracto. Por exemplo, quando o professor utiliza uma balança para explicar o significado de equação, este, oferece aos alunos algo concreto e familiar para os ajudar a compreender uma ideia abstracta e não familiar. Ao estabelecer uma ligação entre o novo conceito e o conceito de balança permite descrever um novo conceito matemático, facilitando a aproximação da matemática ao mundo real. O aluno a partir da observação e manipulação da balança, da troca de ideias entre os alunos e entre estes e o professor apreendem mais facilmente a noção de equação. Cabe ao professor, aos poucos, ir organizando o conhecimento, que pretende que os alunos construam. Estas experiências vivenciadas pelos alunos são importantes para progredir do concreto para o abstracto.

Os materiais manipuláveis podem ser usados nos mais variados temas e desde os níveis mais elementares até ao Secundário. E, de acordo com Vale (1999), "podemos dizer que a regularidade do seu uso estará na razão inversa do nível em que se encontra. Quer isto dizer que os alunos mais novos necessitarão de mais tempo e mais actividades com materiais concretos do que os outros, mas qualquer aluno, de qualquer idade, beneficiará da sua utilização no momento certo. Os materiais não são só necessários para os níveis elementares, pois aprender Matemática requer, dos "aprendedores" de todas as idades, uma participação activa" (p. 115).

De acordo com "Reys (1974), os materiais manipulativos permitem, se convenientemente utilizados: diversificar as actividades de ensino; realizar experiências em torno de situações problemáticas; representar correctamente as ideias abstractas; analisar sensorialmente dados necessários à formação de conceitos; descobrir relações e formular generalizações; envolver os alunos activamente na aprendizagem; respeitar as diferenças individuais e aumentar a motivação" (Serrazina, 1991). Como tal, a utilização de materiais manipuláveis favorece a aprendizagem desde que seja bem utilizado e para dar resposta à concretização de objectivos educacionais concretos. Esta mudança na prática pedagógica vai alterar substancialmente o papel do professor. O professor torna-se menos fornecedor de informação, para desempenhar um papel de guia da aprendizagem dos alunos.

2.5.2.1. Recomendações para o uso de materiais manipuláveis

Durante a década de sessenta e setenta fizeram-se diversas investigações sobre a utilização de materiais. Porém, os resultados não têm sido muitas das vezes conclusivos. De qualquer modo, vários autores e investigadores recomendam a utilização de materiais manipuláveis no ensino/aprendizagem da Matemática. Costa (1998) refere que é muito vantajoso usar materiais concretos para a construção significativa dos conceitos matemáticos, mas, para que a construção conceptual aconteça, é preciso que o professor planeie a acção a desenvolver com eles e oriente os alunos para a reflexão sobre a acção desenvolvida com os materiais (p.155). Só assim a sua utilização poderá contribuir para uma aprendizagem significativa dos alunos, visto que estes se envolvem activamente, de modo a construírem o seu próprio conhecimento. A utilização de material manipulativo poderá surgir como um facilitador da estruturação cognitiva, visto que há um grande envolvimento físico dos alunos com aquilo que estuda, sendo a aprendizagem feita por descoberta.

Também nos diversos estudos realizados, que comparam o ensino tradicional com o ensino recorrendo à utilização de materiais manipuláveis, defendem que "o uso de materiais manipulativos produz maiores rendimentos que a não utilização, em todas as idades e em todos os anos da escola elementar" (Pires, 1994, p.289). Também Serrazina (1990), sublinha que " os estudantes que utilizam materiais manipulativos na construção de conceitos têm melhores resultados que os que o não fizeram" (p.1). O NCTM (1991), também sublinha a importância dos materiais manipuláveis, visto que podem proporcionar uma aprendizagem activa, com experiências matemáticas significativas, desde que impliquem o raciocínio e ajudem a superar o "medo" que alguns alunos têm da Matemática. No ProfMat, realizado em 1989, organizado por Veloso e Guimarães, no relatório sobre "Os Materiais e a Matemática", pode ler-se:

> “(…) que a utilização de materiais pode facilitar o processo de ensino/aprendizagem mas … utilizar materiais não implica necessariamente aprendizagem significativa; é preciso seleccionar os materiais e preparar as actividades; o material que serve vários objectivos é melhor pois facilita, por exemplo, o desenvolvimento da criatividade no aluno; o material deve ser um elemento motivador; deve-se variar a forma de aprender; a avaliação da aprendizagem deve ser cuidada e variada e é preciso reflectir sobre as actividades realizadas” (p. 297).

Neste sentido, os materiais podem ser um bom auxiliar nas diversas fases de aprendizagem, podem ajudar os alunos a descobrir, entender ou consolidar conceitos fundamentais. Serrazina é da opinião que “só existe aprendizagem se os alunos estiverem envolvidos activa e fisicamente nas actividades a realizar, pois eles constroem, modificam e integram ideias ao interaccionar com o mundo físico, com os materiais e com outros indivíduos” (1991, p.37). Daí que sejam fundamentais os materiais manipulativos no processo de ensino e aprendizagem para o desenvolvimento de conceitos e competências da Matemática.

Outros estudos mostram que, a mera presença de materiais manipulativos, não garante a compreensão dos conceitos, e que a motivação desenvolvida pelo material se traduza numa aprendizagem significativa. Contudo, é importante estimular o interesse do aluno para a resolução de situações problemáticas, com exemplos do dia-a-dia e não apenas para o manuseamento do material. O interesse do aluno não deve ser atraído pelo material em si, mas sim pelo conteúdo. Neste sentido, os materiais e o seu emprego devem estar em consonância com o conteúdo.

A utilização de manipulativos na sala de aula cria um ambiente, onde o aluno poderá investigar formas para resolver problemas, falar sobre as suas soluções e as de outros alunos, reflectir, conjecturar, fazer perguntas, descobrir estruturas, ... “Geralmente o que faz com que aconteça aprendizagem com os materiais é que eles apelam a vários sentidos e são usados pelas crianças como envolvimento físico numa situação activa de aprendizagem” (Serrazina, 1991, p. 37). Como tal, devemos dar oportunidade aos alunos para experimentar e estes farão uso de todos os sentidos na construção dos conceitos matemáticos. Embora este processo de construção seja longo, requer um envolvimento activo do aluno e ajuda-o a progredir do concreto para o abstracto.

Matos e Serrazina (1996) realçam o facto de em muitas das investigações (Bruner, 1960, Dienes, 1970, Reys, 1974) realizadas existirem fortes evidências “que permitem afirmar que ambientes onde se faça uso de materiais manipuláveis favorecem a aprendizagem e desenvolvem nos alunos uma atitude mais positiva" (p. 193). No entanto, também, eles salientam que existem investigações (Fennema, 1972; Raphael e Wahlstrom, 1989; Sowell, 1989; Suydam e Higgins, 1977) não conclusivas sobre a eficácia dos materiais concretos nas salas de aula.

Hiebert e Carpenter (1992) refere que existem várias explicações para aquelas conclusões:

> "Se os alunos não trazem com eles os conhecimentos que o professor espera, não é fácil para os alunos relacionarem as suas interacções com os materiais com as estruturas existentes. Eles não interpretam os materiais como o professor espera e o uso de materiais concretos dará provavelmente origem apenas a conexões ao acaso" (Matos e Serrazina, 1996, p. 196).

Os autores enfatizam ainda que, mesmo quando um professor usa materiais manipuláveis, os alunos muitas vezes não relacionam essas experiências concretas com a Matemática formal (escrita). Certos materiais são seleccionados para as actividades de sala de aula porque têm implícitas relações matemáticas, que os professores acreditam serem especialmente importantes. Entretanto, não há nenhuma garantia de que os alunos vejam as mesmas relações nos materiais que são vistas pelos professores (Matos e Serrazina, 1996). Outros aspectos referidos pelos autores dos resultados negativos com materiais concretos podem estar associados à distância existente entre o material concreto, e as relações matemáticas que temos e a intenção que eles representem. Outra razão para a ineficácia dos materiais manipuláveis tem a ver com o facto do material seleccionado não se adequar à actividade proposta. De acordo com Vale (2000), o uso de materiais manipuláveis na sala de aula, de nada valerão se, por um lado, o "aluno não os quiser utilizar, e, por outro, se o professor não tiver sólidos conhecimentos científicos e didácticos, conhecimentos sobre a sua utilização e potencialidades e se não permitir que o aluno tenha um papel activo e reflexivo na construção do seu saber, proporcionando momentos de reflexão sobre as tarefas propostas " (p. 71).

2.5.3. Trabalho Cooperativo na aula de Matemática

O uso de métodos de aprendizagem cooperativa ganhou maior impacto depois da publicação dos trabalhos de Johnson & Johnson, na década de setenta nos Estados Unidos. A organização de um ambiente de trabalho ao nível da sala de aula, em que os alunos discutem ideias e trabalham em pequenos grupos na resolução de tarefas que lhes são apresentadas, é uma das alterações mais visíveis ao nível do ensino da Matemática nas últimas décadas. Os estudos realizados revelaram que havia diferenças significativas entre os alunos que trabalham cooperativamente em pequenos grupos e o ensino tradicional. A implementação nas aulas da aprendizagem cooperativa permite aos alunos a oportunidade de trabalharem juntos para melhorarem a sua própria aprendizagem e a de todos os membros do grupo. Neste sentido, todos os elementos do grupo assumem que o sucesso do grupo passa pelo sucesso de cada um e que se um deles fracassa, então fracassam todos. Desta forma, todos os elementos do grupo são responsáveis e responsabilizados pela sua própria aprendizagem e pela dos restantes elementos; ou seja, todos devem-se esforçar para que se obtenham bons resultados na realização da tarefa comum. Daí que, quando os alunos trabalham cooperativamente, devem compreender que o desempenho de cada um depende do desempenho de todos, ou seja que, "a união faz a força". De acordo com Johnson & Johnson (1999) "as actividades de Aprendizagem Cooperativa são aquelas cujos objectivos dos elementos do grupo se encontram tão estreitamente vinculados que cada elemento só pode alcançar os seus objectivos se e só se os outros conseguirem alcançar os seus" (citado em Fontes e Freixo, 2004, p. 27). Quando se promove trabalho cooperativo os alunos trabalham sempre em conjunto na realização de uma determinada tarefa, permitindo que discutam entre si a sua resolução, que procurem soluções, que escutem as explicações e opiniões dos colegas, que se esforcem para atingirem os objectivos do grupo. Deste modo, ao se ajudarem mutuamente, quer ao nível da aquisição de conhecimentos quer no desenvolvimento de competências e aptidões, estão a aprender cooperativamente. Eles envolvem-se activamente no trabalho proposto, para que o trabalho de grupo seja eficaz e decorra com sucesso. Os alunos ganham mais confiança nas suas capacidades, empenham-se mais no trabalho e desenvolvem a capacidade de perceber pontos de vista diferentes dos seus. Quando os alunos trabalham cooperativamente a competição deve ser banida de dentro do grupo dando lugar à cooperação e à solidariedade. O trabalho cooperativo "permite que os alunos adquiram determinados valores e competências e exercitem atitudes ligadas à cooperação (…). Esta cooperação grupal é fundamental para o entendimento da escola como promotora do pensamento crítico, criativo e de valores que intensificam o sentido da aprendizagem e das relações humanas" (Fontes e Freixo, 2004, p. 60). Neste sentido, o ensino da Matemática deixa de ser centrado na prática de técnicas rotineiras para um ensino em que se dê mais atenção à construção e exploração de conceitos e à resolução de problemas.

Actualmente, de acordo com os documentos programáticos assiste-se a uma crescente valorização do trabalho cooperativo nas aulas de Matemática. Aliás, vários autores, associações profissionais e responsáveis pela elaboração de programas oficiais, fazem diversas recomendações realçando os aspectos positivos e negativos do trabalho cooperativo. Alguns dos benefícios do trabalho cooperativo na aprendizagem do aluno a nível das competências cognitivas são: "maior produtividade e rendimento; desenvolvimento do pensamento crítico, criativo e a resolução de problemas; aquisição e utilização de competências cognitivas superiores e de estratégias cognitivas de nível elevado; desenvolvimento e utilização de uma linguagem correcta e mais elaborada nos debates e no intercâmbio de informação entre os grupos" (Fraile, 1998, citado em Fontes e Freixo, 2004, p. 60).

A nível das atitudes as vantagens são as seguintes:

> "(…) desenvolvimento de uma imagem pessoal mais positiva, aumentando a valorização e a auto-estima; aumento do interesse e da motivação devido aos processos interpessoais desenvolvidos dentro do grupo; aumento das expectativas futuras que têm por base a valorização das capacidades e dos esforços apresentados; desenvolvimento de uma comunicação eficaz e positiva; desenvolvimento do respeito pelos outros baseados na confiança, colaboração, solidariedade e empatia; desenvolvimento da responsabilidade individual perante o grupo e perante a sua própria aprendizagem; integração dos alunos com dificuldades de aprendizagem" (Fraile, 1998, citado em Fontes e Freixo, 2004, pp. 60-61).

Porém, o trabalho cooperativo traz, também, vantagens para o professor: permite alcançar, com maior facilidade, os objectivos previamente estabelecidos, quer do domínio cognitivo quer do domínio pessoal e social, promovendo estes dois em simultâneo e permite uma maior flexibilidade e criatividade no seu papel de formador e de educador.

Contudo, existem algumas dúvidas em relação aos benefícios da aprendizagem cooperativa, por exemplo o facto de desencorajar a competição no seio do grupo. Segundo Davidson (1990, citado em Fernandes 1998) "o trabalho cooperativo promove um ambiente onde há pouco espaço para a competição e muito para as interacções entre os alunos" (p. 228). Surge então uma questão: "dado que vivemos num mundo extremamente competitivo, não será obrigação da escola – que deve "preparar para a vida" – ensinar os alunos a lidar com a competição?" (Freitas e Freitas, 2002, p. 15).

Tendo a competição aspectos positivos e negativo, o facto é que a escola promove muitas vezes uma competição que não é benéfica para todos, "encorajando vaidades e situações de humilhação que estão associadas a quem "vence" e a quem "perde" (Freitas e Freitas, 2002, p. 15). Outra dúvida, sobre os benefícios da aprendizagem cooperativa, refere-se ao facto de alguns investigadores consideraram que o processo de aprendizagem pertence intrinsecamente ao indivíduo. Logicamente, que cada um aprende por si, mas há um conjunto de aprendizagens, chamadas aprendizagens sociais, que o aluno isoladamente não as apreende. Contudo, a escola como detentora da maior responsabilidade da formação do aluno, deve proporcionar as aprendizagens consideradas convenientes para a sua formação, daí que nesse aspecto a aprendizagem cooperativa surja como resposta. Outra dúvida é o facto dos alunos sobredotados serem prejudicados, se integrados em turmas onde se desenvolvem actividades de aprendizagem cooperativa. As desvantagens para os sobredotados advêm do facto do modo como se agrupam os alunos para que eles alcancem melhor as aprendizagens. Muitas têm sido as investigações realizadas em que foram utilizadas técnicas de aprendizagem cooperativa com grupos heterogéneos e homogéneos, onde existiam alunos considerados sobredotados. Os resultados porém nem sempre são negativos, e depende de diversos factores.

De acordo com Johnson e Johnson (1999):

> "[não] há tipo de grupo ideal. O que determina a produtividade de um grupo não é quem são os seus membros mas em que medida trabalham bem juntos. Pode haver ocasiões em que se formam grupos homogéneos para ensinar determinados skills ou para atingir certos objectivos de aprendizagem. Contudo, há geralmente vantagens na constituição de grupos heterogéneos, aos quais os estudantes chegam de diversos contextos e têm competências, experiências e interesses diferentes: (1) os estudantes são expostos a uma variedade de ideias, a múltiplas perspectivas e a diferentes métodos de resolução de problemas; (2) os estudantes geram mais desequilíbrio cognitivo, o que estimula a aprendizagem, a criatividade e o desenvolvimento cognitivo e social; (3) os estudantes envolvem-se em pensamentos mais elaborados, dão e recebem mais explicações e envolvem-se em mais frequente tomada de perspectivas ao discutirem os materiais, tudo isso aumentando a profundidade, a compreensão e a qualidade do raciocínio e o rigor da retenção a longo termo (p. 21, citado em Freitas e Freitas, 2002, p. 19).

No relatório *Matemática 2001* (APM, 1998), no inquérito realizado aos professores dos três níveis de ensino (2º Ciclo, 3º Ciclo e Secundário), foi apresentada uma lista de modos de trabalho na sala de aula. De acordo com os resultados concluímos que, cerca de 70 % dos professores usam, com muita frequência, o trabalho individual na sala de aula. O trabalho de grupo é o modo de trabalho menos utilizado nos vários níveis de ensino, pois mais de 26% dos professores indicam que nunca ou raramente utilizam esta forma de trabalho e só 12 % a referem como usada com muita frequência. Os autores recomendam que "a prática pedagógica deve valorizar tarefas que promovam o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos (nomeadamente, resolução de problemas e actividades de investigação) e que diversifiquem as formas de interacção na aula, criando oportunidades de discussão entre os alunos, de trabalho de grupo e de trabalho de projecto." (p. 44). Também a Associação de Professores de Matemática, no seu documento *Renovação do Currículo de Matemática* (APM, 1988) faz recomendações no sentido de se dar ênfase ao trabalho de grupo. Salientando que "em pequenos grupos e com os seus colegas, torna-se mais fácil para um aluno arriscar as suas opiniões e avançar com as suas descobertas, exprimindo o seu pensamento, sentir a necessidade de uma linguagem, inventar e/ou utilizar os termos de Matemática." (p.54). Igualmente no documento *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar,* do National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 1991) argumenta-se a favor do trabalho de grupo:

> "O trabalho individual pode auxiliar os alunos a desenvolver a autoconfiança na sua capacidade de resolver problemas mas deverá constituir apenas uma parte da sua experiência escolar. O trabalho em pequenos grupos proporciona aos alunos a oportunidade de falar sobre as suas ideias e ouvir as opiniões dos colegas, permite ao professor interagir com os alunos de forma mais intensa, tira partido das características dos alunos quanto à sociabilidade, dá oportunidade aos alunos de trocarem ideias e, finalmente, desenvolve a sua capacidade de comunicação e raciocínio." (p.80).

Assim como, no documento *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2000) fazem referência que "quando os alunos trabalham em pares ou em pequenos grupos, têm a oportunidade de arriscar as suas próprias ideias e de ouvir as reacções dos seus colegas. Apropriadamente as interacções estruturadas podem ajudar os alunos a aprender a ouvir e a expressar claramente as suas ideias matemáticas." (p. 87).

Contudo, já no século XIX, as vantagens do trabalho cooperativo estavam presentes no pensamento dos grandes pedagogos europeus (Herbart, Froebel, Pestalozzi), realçando a importância da partilha nas aprendizagens. Várias investigações têm sido realizadas originando um corpo de conhecimentos relativamente à aprendizagem cooperativa.

De acordo com as investigações já realizadas relacionadas com a aprendizagem cooperativa, alguns resultados dessa prática mencionados por muitos autores são os seguintes: "(1) melhoria das aprendizagens na escola; (2) melhoria das relações interpessoais; (3) melhoria da auto-estima; (4) melhoria das competências no pensamento crítico; (5) maior capacidade em aceitar as perspectivas dos outros; (6) maior motivação intrínseca; (7) maior número de atitudes positivas para com as disciplinas estudadas, a escola, os professores e os colegas; (8) menos problemas disciplinares, dado existirem mais tentativas de resolução dos problemas de conflitos pessoais; aquisição das competências necessárias para trabalhar com os outros; (9) menor tendência para faltar à escola" (Freitas e Freitas, 2003, p. 21). Dada a sua importância no processo de aprendizagem dos alunos, o trabalho cooperativo está presente nas orientações curriculares dos últimos anos.

Segundo o NCTM (1991), devem ser proporcionados aos alunos a possibilidade de trabalharem actividades em pequenos ou grandes grupos, contribuindo para que os alunos se tornem mais activos e independentes no processo de aprendizagem. Aliás, "o trabalho em pequenos grupo proporciona aos alunos a oportunidade de falar sobre as suas ideias e ouvir as opiniões dos colegas, permite ao professor interagir com os alunos de forma mais intensa, tira partido das características dos alunos quanto à sociabilidade, dá oportunidade aos alunos de trocarem ideias e, finalmente, desenvolve a sua capacidade de comunicação e raciocínio" (NCTM, 1991, p. 80). Contudo, o NCTM não apresenta o trabalho de grupo como uma alternativa, mas como uma estratégia a usar de forma coordenada com outras, nomeadamente como trabalho individual e a discussão ao nível de toda a turma.

Em Portugal, a Associação de Professores de Matemática, em *Renovação do Currículo de Matemática* (APM, 1988) defende também uma posição idêntica. Aliás, em relação ao espaço das aulas de Matemática, é referido que esses espaços devem conter diversos materiais e outros recursos para a realização de actividades Matemáticas. Além disso, salientam que os espaços destinados às actividades desta disciplina devem ser preparados de tal modo que seja dada aos alunos a possibilidade de trabalhar individualmente, em pequenos grupos ou em grande grupo (toda a turma). De acordo com a APM (1988), "uma das condições essenciais para o êxito da aprendizagem em Matemática é a procura de um justo equilíbrio entre estes três tipos de organização do trabalho escolar" (p. 66). No entanto, o trabalho em pequenos grupos é realçado, chamando a atenção para o facto de este permitir que os alunos exponham as suas ideias, ouçam as ideias dos seus colegas, coloquem questões, discutam estratégias e soluções, argumentem, critiquem, expliquem e verifiquem o seu raciocínio em vez de ser o professor a dizer o que está certo ou errado. Consequentemente, o trabalho de grupo tem efeitos positivos na motivação dos alunos, na auto-estima, na cooperação, na ajuda, no trabalho em equipa, na organização, no respeito pelas ideias dos outros, no saber ouvir os outros, no reflectir sobre as ideias dos outros. Por outro lado, o papel do professor deixará de ser o de fornecer a informação para passar a ser, também, "um organizador das actividades, um facilitador da aprendizagem, um dinamizador do trabalho, um companheiro de descobertas" (APM, 1988, p. 71). É nesse sentido que nos últimos anos vários documentos referem a necessidade em modificar a natureza das actividades predominantes na aula de Matemática, salientando que devemos dar menos importância às tarefas rotineiras e repetidas, dando ênfase à resolução de problemas, às actividades de exploração e descoberta, ao trabalho de investigação, à discussão e à comunicação. Ou seja, a ênfase é posta nos tipos de actividades a promover, que condicionam as decisões relativas ao modo de organizar o trabalho dos alunos. Daí a necessidade em diversificar as formas de trabalho na sala de aula. Neste sentido "os alunos devem envolver-se intelectualmente, de um modo mais activo, nas actividades de aprendizagem, e partilhar as suas ideias com os colegas e o professor, em lugar de assumirem um papel passivo, de meros ouvintes ou espectadores que trabalham unicamente numa base individual" (Abrantes, 1994, p. 133).

Das investigações realizadas relacionadas com o trabalho cooperativo na sala de aula destaca-se o projecto MAT_{789}. A justificação apresentada pelo projecto para a utilização do trabalho de grupo "não tinha a ver apenas com o comportamento social dos alunos ou com a sua motivação para a aprendizagem mas, também, com os tipos de interacções que se desenvolvem na sala de aula, em particular com a qualidade das discussões matemáticas entre os alunos" (Ponte *et al.*, 1998, p. 80). Aliás, apresentar, ouvir e criticar argumentos, explicar raciocínios e pedir explicações são aspectos fundamentais para a aprendizagem da Matemática. De acordo com a experiência do projecto MAT_{789} para que o trabalho de grupo comece a funcionar bem leva um certo tempo. As observações realizadas demonstraram que "a evolução das turmas envolvidas foi lenta e gradual, passando por várias fases desde o sétimo ano: (a) inicialmente, os alunos mantinham discussões pobres e uma grande dependência do professor; (b) ao fim de cerca de um ano, mostravam uma crescente autonomia mas subsistindo alguma instabilidade e problemas de relacionamento; (c) numa terceira fase (ao fim de dois anos), revelavam finalmente uma maior maturidade no modo como trabalhavam em pequenos grupos" (Ponte *et al.*, 1998, p. 81). Segundo os autores deste projecto a implementação do trabalho cooperativo na sala de aula apresenta vantagens no desenvolvimento de competências, capacidades, atitudes, e hábitos necessários à cooperação. O balanço que o projecto MAT$_{789}$ faz da sua utilização foi positivo. Os obstáculos com que se defrontaram na implementação desta metodologia advêm das "dificuldades de cooperação e dos problemas de relacionamento que tendem a ocorrer entre os alunos, a concepção da Matemática como uma disciplina do tipo certo ou errado" (Abrantes *et al.,* 1997, p. 64). Os autores sugerem que para que o trabalho de grupo funcione bem é necessário ter em atenção os seguintes aspectos: (1) o professor deve ser flexível nas medidas que toma quanto à composição e estabilidade dos grupos; (2) o professor deve remeter as dúvidas individuais dos alunos para o debate no seio do grupo e encorajar as produções resultantes do trabalho cooperativo entre os alunos; (3) a natureza das actividades propostas; (4) o valor que se dá ao raciocínio e à argumentação, como forma de validar as respostas aos problemas propostos; (5) o ambiente de aprendizagem deve encorajar a cooperação entre os alunos e o trabalho autónomo (Abrantes *et al*., 1997)

A aprendizagem cooperativa, em pequenos grupos, constitui uma alternativa tanto à aprendizagem competitiva como à aprendizagem individualista. O ensino expositivo para toda a turma, leva a que cada aluno recolha a informação individualmente, porém quando não consegue "compreender o que está a ser estudado, sem qualquer outro suporte a não serem eles próprios, perdem a motivação, convivem com dúvidas sobre a sua capacidade de aprender, o que faz baixar a auto-estima" (Freitas e Freitas, 2002, p. 25). No entanto, em vez de colocarmos o aluno a aprender sozinho, podemos integrá-lo num grupo. O trabalho de grupo permite uma interacção entre os alunos, assim como um envolvimento activo do aluno na sua aprendizagem. Segundo Dees (1990), quando os alunos trabalham juntos com o mesmo objectivo de aprendizagem e produzem um produto ou solução final comum, estão a aprender cooperativamente (citado em Fernandes, 1998, p. 48). Neste sentido, para que um grupo desenvolva um trabalho cooperativo é necessário ter em conta as seguintes características específicas: “(1) interdependência positiva; (2) interacção face a face; (3) avaliação individual/responsabilização pessoal pela aprendizagem; (4) desenvolvimento das competências interpessoais e de pequeno grupo, mais relevantes (5) avaliação do processo do trabalho do grupo” (Johnson & Johnson, 1999, citado em Freitas e Freitas, 2004, p. 26).

O primeiro princípio refere-se ao facto de que qualquer grupo deve se organizar de modo que os seus elementos sintam que a sua contribuição é útil não só para eles próprios mas, fundamentalmente, para o grupo. Ou seja, todos os elementos do grupo devem perceber que só podem atingir os seus próprios objectivos se os restantes membros também conseguirem atingir os deles. Portanto, para que o grupo consiga alcançar os seus objectivos, os diferentes elementos têm de partilhar com os demais toda a informação que possuem, indispensável para a concretização de uma determinada tarefa proposta. Como tal só se verifica interdependência positiva “se cada aluno tem consciência que o seu sucesso é o sucesso de todo o grupo, que o fracasso de cada elemento do grupo também é seu, e ainda, quando todos os elementos do grupo se sentem co-responsáveis pela aprendizagem de todos” (Fontes e Freixo, 2004, 31). Desta forma, os alunos desenvolvem a convicção de que “navegam no mesmo barco”.

Quanto ao segundo princípio, a interacção face a face existe quando os alunos são encorajados para realizar as tarefas de modo a alcançarem os objectivos do grupo, ou seja, os alunos trabalham sempre em conjunto com a finalidade de se alcançarem os objectivos previamente estabelecidos e de modo que todos possam participar. Desta forma, cria-se um ambiente onde cada membro do grupo ajuda os outros no processamento de informação e onde o “feedback” entre os elementos permite o progresso da aprendizagem. O trabalho cooperativo promove a partilha e discussão de ideias em grupo, sendo essa reflexão efectuada que leva os alunos a atingirem elevados raciocínios e capacidades de decisão. Daí que a interacção face a face permite desenvolver a auto-estima do aluno, assim como o desenvolvimento de competências sociais. A interacção face a face caracteriza-se tendo em conta os seguintes objectivos:

“- Proporcionar a todos os elementos ajuda e apoio eficaz e eficiente;

- Facilitar o intercâmbio dos recursos, assim como facilitar o processamento de nova informação de forma eficiente e efectiva;

- Proporcionar a cada elemento um “feedback” necessário e imprescindível para melhorar o seu rendimento futuro, dentro do grupo e a nível individual;

- Permitir que o grupo tire conclusões, analise situações e aponte soluções para resolver eventuais problemas que possam surgir;

- Defender e exigir o esforço de todos, para que o grupo consiga atingir os objectivos comuns;

- Desenvolver a autoconfiança e contribuir para que cada um tenha uma actuação correcta dentro do grupo;

- Incentivar para o sucesso do grupo;

- Manter um nível moderado de estimulação que esteja de acordo com as características individuais, para que não ocorram situações de diminuição de auto-estima, ansiedade e stress" (Fontes e Freixo, 2004, p. 33).

O terceiro princípio refere-se ao facto de que cada elemento do grupo tem de sentir-se responsável pelas aprendizagens dos outros elementos, tendo como consequência que sejam os próprios elementos do grupo a procurarem que todos aprendam e realizem bem as suas tarefas. Logo, todos os elementos do grupo devem conhecer-se o suficiente, de forma a saberem quem necessita de mais ajuda, apoio e incentivo para a concretização das tarefas propostas. Um dos objectivos da aprendizagem cooperativa é permitir que cada elemento do grupo se transforme num indivíduo responsável. A responsabilidade pessoal "refere-se muitas vezes ao contributo que cada elemento dá para a avaliação do grupo. (…) Cada elemento sabe que as suas falhas podem contribuir para que o grupo obtenha piores resultados e se existe espírito de grupo cada um procurará dar o seu melhor e ajudar os outros a darem também o seu melhor" (Freitas e Freitas, 2002, p. 30). Daí que o professor deva avaliar o esforço com que cada aluno contribuiu para a realização do trabalho de grupo.

O quarto princípio refere-se ao facto de que ninguém nasce a saber como trabalhar, com eficiência, num grupo; daí a necessidade que exista uma aprendizagem de determinadas competências relacionadas com o trabalho colectivo. Algumas das competências que devem ser desenvolvidas na prática de grupo são: "partilhar sentimentos; de ouvir sem interromper, esperando pela sua vez de intervir; mostrar simpatia pelas ideias dos outros, ainda que não concordando com elas, de encorajar quem se mostre desanimado" (Freitas e Freitas, 2002, p. 31). Assim, o professor para implementar a aprendizagem cooperativa, nas suas aulas, deve dar tempo aos alunos para adquirirem essas competências e as desenvolverem, uma vez que elas não surgem espontaneamente. Sente-se, assim, necessidade de serem trabalhadas de forma correcta e sistemática. Desta forma, cada membro do grupo deve “desenvolver e utilizar correctamente um conjunto de competências sociais e de pequeno grupo de forma a que:

- Todos os elementos se conheçam e confiem uns nos outros;

- Ocorra dentro do grupo um diálogo aberto, directo e sem ambiguidade;

- Haja uma aceitação por parte de todos os elementos das diferenças individuais e se apoiem e incentivem mutuamente;

- Resolvam de forma positiva e construtiva todos os conflitos que eventualmente possam surgir” (Fontes e Freixo, 2004, p. 34).

Todas estas competências sociais devem ser praticadas e ensinadas aos alunos porque constituem a base do sucesso do trabalho de grupo.

Por fim, o último princípio está relacionado com o facto de que os alunos devem ser capazes de avaliar o trabalho realizado, avaliando-se em permanência, através da reflexão sobre o seu trabalho e sobre os objectivos que forem sendo atingidos. O grupo deve efectuar uma avaliação frequente e regulada ao funcionamento do mesmo, com o objectivo de melhorar a sua eficácia. A sua avaliação é fundamental uma vez que permite: “distinguir quais as acções dentro do grupo que são de ajuda daquelas que não o são; decidir quais os comportamentos a adoptar para um melhor funcionamento do grupo, quais os que devem manter e aqueles que têm de banir por completo uma vez que são prejudiciais ao desenvolvimento do trabalho cooperativo e ao próprio grupo” (Fontes e Freixo, 2004, p. 35).

Segundo Pujolás (2001), referidos por Fontes e Freixo (2004), as principais características de um grupo de trabalho cooperativo e de um grupo de trabalho tradicional são as apresentadas na tabela seguinte:

Grupo de trabalho cooperativo	**Grupo de trabalho Tradicional**
Interdependência positiva.	Não ocorre interdependência positiva.
Responsabilidade individual.	Não se assegura a responsabilidade individual.
Aplicação de competências cooperativas.	As competências cooperativas podem ser espontaneamente exercitadas.
Liderança partilhada e partilha de responsabilidades.	A liderança, geralmente, é feita por um aluno e as responsabilidades não são necessariamente partilhadas.

Contribuição de todos os elementos para o êxito do grupo.	O êxito do grupo, por vezes, depende da contribuição de um ou de alguns dos elementos.
Observação e "feedback" por parte do professor ao grupo.	O professor não observa o grupo ou fá-lo de uma forma esporádica. O desenvolvimento do trabalho faz-se normalmente fora da sala de aulas.
O grupo avalia o seu funcionamento e propõe objectivos para o melhorar.	O grupo não avalia de forma sistemática o seu funcionamento.

Tabela 1 -Principais características de um grupo de trabalho cooperativo e de um grupo de trabalho tradicional.

(Pujolás, 2001, adaptado de Fontes e Freixo, 2004, p. 30).

As investigações, realizadas Johnson e Johnson (1990) indicam seis razões para o uso do trabalho cooperativo nas aulas de Matemática: "(a) obtêm-se melhores resultados na retenção de factos e princípios, na resolução de problemas, no uso mais frequente de estratégias de raciocínio, na geração de novas ideias; (b) a participação activa dos alunos (condição para uma melhor aprendizagem da Matemática) requer desafio intelectual e curiosidade que, por sua vez, se desenvolvem em discussões com outros alunos; (c) a resolução de problemas em Matemática é uma actividade interpessoal que implica falar, explicar, discutir, e os alunos têm mais possibilidade de o fazer (e em muitos casos sentem-se mais à vontade para o fazer) em pequenos grupos do que perante toda a turma; (d) a estruturação da turma em pequenos grupos promove as interacções entre os alunos mais do que a simples recomendação de que devem discutir uns com os outros; (e) os alunos adquirem mais confiança nas suas capacidades matemáticas individuais; (f) em situações de aprendizagem cooperativa, os alunos tendem a estar mais intrinsecamente motivados para estudar Matemática e a admitir continuar a fazê-lo em cursos ou carreiras futuras" (citado em Abrantes,1994, p.137-138).

Segundo Davidson (1990), existem quatro características que podem definir a aprendizagem cooperativa em pequenos grupos em Matemática: "(1) há uma tarefa matemática para discussão e resolução pelo grupo; (2) há interacção entre os alunos no seio do grupo; (3) há um ambiente de cooperação e ajuda mútua dentro de cada grupo; (4) há considerações pelo progresso individual" (citado por Abrantes, 1994, p. 153).

Para que a aprendizagem cooperativa tenha resultados positivos, não basta agrupar os alunos: é necessário a criação de um ambiente na sala de aula onde os alunos se sintam à vontade para discutirem livremente as suas ideias, dúvidas e dificuldades uns com os outros, permitindo aos membros do grupo dar mais atenção aos processos que aos resultados, ganhando mais confiança nas suas capacidades individuais. O professor é, como tal, o responsável pela criação de tal ambiente. As actividades propostas devem ser não rotineiras e desafiadoras, contribuindo para que os alunos tenha uma participação activa na sua aprendizagem e na qual todos os indivíduos tenham oportunidade de contribuir na sua resolução. Quando os alunos trabalham cooperativamente, o espírito de grupo, ou seja, o sentimento de pertença de cada elemento ao grupo, está presente. Como tal, o trabalho cooperativo permite aos alunos a troca de ideias e comentários, assim como ajudarem-se mutuamente na compreensão dos conceitos, Além disso, o facto de um aluno explicar determinado conteúdo aos outros, faz com que esse aluno tenha de reorganizar as suas ideias, contribuindo, desta forma, para ajudá-lo a detectar lacunas que possam existir na sua própria compreensão. Daí a importância em desenvolver, nos alunos, aptidões para trabalhar com outros e proporcionar tarefas apropriadas e adequadas ao trabalho de grupo, que encorajem a interacção cooperativa. Só assim a aprendizagem da Matemática tem uma influência positiva nos discentes.

Porém, existem diversos factores que podem contribuir para que o trabalho de grupo funcione bem, destacando os seguintes: formação dos grupos; o tipo de actividades de aprendizagem e o apoio que o professor dá aos vários grupos.

Diversas investigações têm sido realizadas com vista a estudar os aspectos anteriormente referidos, contudo não existe um consenso entre os investigadores.

Um dos primeiros desafios que se colocam aos professores, quando pretendem implementar a aprendizagem cooperativa nas aulas é a formação dos grupos. Porém existem vários aspectos a ter em conta, tais como: a dimensão, a composição e o tempo de duração dos grupos.

As opiniões a respeito da dimensão e da composição dos grupos de trabalho cooperativo são muito variadas. Muito embora, vários autores estejam de acordo que os pequenos grupos são aqueles que funcionem melhor. Segundo Johnson & Johnson (1999), não existe uma dimensão ideal para a constituição dos grupos de Aprendizagem Cooperativa. Para estes autores, o número de elementos de cada grupo depende das tarefas que têm de realizar, da idade dos alunos, assim como da sua experiência anterior nesta modalidade de trabalho, dos materiais a utilizar e do tempo de que dispõem para a realização das tarefas. Ainda segundo Johnson & Johnson, o número de elementos por grupo deve ser compreendido entre dois a quatro elementos. A utilização de grupos pequenos de dois a quatro elementos e não de grupos de cinco ou mais alunos deve-se ao facto de, num grupo grande, alguns alunos se tornem muito passivos, o que não favorece o raciocínio e o pensamento crítico. Claro que, quanto mais pequenos forem os grupos, mais difícil se torna alguns elementos não trabalharem e mais rapidamente o professor conseguirá identificar as dificuldades de cada elemento do grupo; por outro lado, quanto maior for o grupo existirá menos oportunidades de interacção entre todos, contribuindo para diminuir a responsabilidade de cada elemento do grupo.

Qual é a melhor composição dos grupos? Existem várias possibilidades de constituição de grupos, "todas elas podem ser utilizadas de acordo com o momento e os objectivos que se perseguem" (Freitas e Freitas, 2002, p. 39). A constituição dos grupos de trabalho cooperativo tanto pode ser feita ao acaso, pelo professor como pelos próprios alunos. A formação de grupos ao acaso é útil quando há necessidade de promover o conhecimento mútuo entre os alunos da turma. Porém, a escolha do grupo deve ser efectuada pelos alunos só em determinadas tarefas, uma vez que "corre-se o risco de ter não verdadeiros grupos de trabalho mas grupos de amigos, ou seja, de estruturas que existem com base noutras assunções que não sejam as da aprendizagem" (Freitas e Freitas, 2002, p. 39). A escolha pelo professor do grupo é a mais indicada, uma vez que possui dados acerca dos seus alunos, em termos de capacidades intelectuais, atitudes e valores de cada um deles. Existem diversas formas do professor dividir os alunos de uma turma em grupos de trabalho: constitui grupos heterogéneos em termos de aproveitamento escolar, sexo, idade, origem social e racial e capacidades; forma grupos homogéneos com base nalgum critério, por exemplo o aproveitamento em Matemática; utiliza um processo aleatório ou arbitrário para formar os grupos; administra um teste psicológico e usa os resultados para formar os grupos (Abrantes, 1994). Na disciplina de Matemática não existe um consenso entre os investigadores, uma vez que uns defendem os grupos heterogéneos e outros os grupos homogéneos. A composição ideal do grupo está relacionada com outras opções relativas ao colectivo: tipo de actividades propostas aos alunos, os objectivos que se pretendem alcançar, entre outros. Porém, alguns investigadores defendem que os grupos de trabalho cooperativo heterogéneo, em que os elementos do grupo apresentam diferentes níveis socioculturais com diferentes aptidões, interesses e experiências, traz vantagens, nomeadamente aceitação de diferentes pontos de vista, de diferentes perspectivas e de diferentes resoluções para um mesmo problema. Deste modo, a heterogeneidade dos grupos de trabalho cooperativo contribui para a promoção de um pensamento mais crítico, um maior intercâmbio de explicações e um maior à vontade para os alunos assumirem e comentarem os seus pontos de vista durante a realização da tarefa proposta.

Outro aspecto a ter em atenção é que os grupos em aprendizagem cooperativa não devem ter carácter permanente, sendo a sua duração no tempo variável. Como tal o professor poderá manter os mesmos grupos durante um período escolar, durante algumas semanas, o tempo necessário para a realização de uma tarefa, durante uma unidade de ensino, de um capítulo, de um projecto, ou de um conjunto de problemas diferentes. Desta forma, os alunos sentir-se-ão responsáveis pela conclusão das actividades que têm em mãos. É necessário manter o mesmo grupo durante algum tempo para compreender os métodos de trabalho e as dificuldades dos colegas, para que se sintam em equipa. O grupo deve, também, manter-se durante um determinado tempo para que os alunos adquirem e desenvolvam competências cooperativas ao realizarem, em conjunto, as tarefas propostas. Estas competências contribuem para a formação de cidadão mais livres, mais interventivos, mais cooperantes, mais solidários e mais responsáveis. O trabalho cooperativo também "promove a autonomia, porque faz com que os intervenientes se sintam responsáveis por si próprios e pela construção e aquisição de conhecimentos, em cooperação com os demais elementos envolvidos no processo, alargando-se esta conduta ao quotidiano colectivo" (Fraile, 1998, citado em Fontes e Freixo, 2004, p. 63).

Outro aspecto importante que deve ser considerado para que os grupos funcionem bem, é o tipo de actividades de aprendizagem que propomos aos alunos. Todavia, nem todos os tipos de actividades em Matemática são adequados para trabalhar cooperativamente. Por exemplo, os exercícios com uma única solução não são os mais adequados para trabalhar em grupo. Os tipos de actividades mais vantajosas para trabalhar em grupo são: a resolução de problemas abertos e relacionados com situações da realidade, as actividades investigativas e o trabalho de projecto.

O papel do professor na sala de aula enquanto os alunos trabalham em grupo é fundamental para o bom funcionamento deste. O professor é responsável por definir os objectivos do trabalho, por preparar com antecedência as tarefas, pela constituição dos grupos, assim como pôr em funcionamento os princípios básicos que os permitem serem cooperativos, nomeadamente, a interdependência positiva, a responsabilidade individual, a interacção pessoal, a integração social e a avaliação do grupo. O professor deve ser capaz de aplicar os princípios desta metodologia em qualquer nível de ensino, em qualquer conteúdo, em qualquer disciplina. Também é "tarefa do professor dar informações pertinentes durante o trabalho de grupo, assim como responder às questões que sejam colocadas e que estejam relacionadas com o desenvolvimento da tarefa e com os conceitos que vão aprender e aplicar” (Fontes e Freixo, 2004, p. 58). Cabe ainda ao professor estimular a interacção, a partilha e discussão entre todos os elementos de cada grupo, ajudar a ultrapassar dificuldades internas de funcionamento e encorajar todos os alunos a desempenharem um papel activo no trabalho de grupo. Sempre que considere necessário o professor deve intervir quer seja para melhorar a execução da tarefa proposta, quer seja para melhorar o trabalho cooperativo.

É importante que as actividades realizadas em grupo sejam consideradas pelo professor em termos de avaliação dos alunos. Segundo Abrantes (1994) “o reconhecimento por parte do professor da importância do trabalho de grupo inclui a valorização dos produtos elaborados pelos grupos” (p. 167). Nesse sentido, o professor deve circular entre os grupos e deve prestar atenção ao que se fala e como se fala, de forma a recolher informação relativamente ao empenho na execução das tarefas, das competências demonstradas, das interacções desenvolvidas entre os diferentes elementos, o grau de cooperação que ocorre em cada grupo, isto para que a avaliação do professor seja o mais objectiva possível. Também os alunos devem realizar a sua avaliação da sua participação dentro do grupo e do próprio grupo, isto para que no final a avaliação feita, tanto pelo professor como pelos alunos, seja mais ou menos parecida.

Contudo, segundo Fraile (1998, p.31) referidos em Fontes e Freixo (2004) existem alguns inconvenientes ou dificuldades que podem surgir ao professor aquando da implementação na sua aula do trabalho cooperativo: “(a) os alunos podem apresentar ritmos de trabalho e níveis académicos diferentes; (b) os alunos transportam consigo atitudes individuais e aprendizagens quotidianas marcantes e diferentes; (c) a maioria dos professores não se encontra preparado, nem motivado, para aplicar esta modalidade de ensino/aprendizagem; (d) há dificuldades em encontrar parâmetros e modalidades de avaliação adequados; (e) há falta de apoio e convergência de todos os professores de uma turma; (f) a mentalidade das famílias dos alunos, que na sua maioria apenas se preocupam com a aquisição de conhecimentos em detrimento do desenvolvimento de competências socioafectivas” (p. 62).

Em suma, de acordo as investigações realizadas, o trabalho cooperativo em pequenos grupos pode facilitar a aquisição e domínio dos conteúdos trabalhados; desenvolve nos alunos uma atitude mais positiva em relação aos seus colegas, à própria Matemática e à matéria estudada; os alunos ficam mais motivados para aprender e desenvolvem atitudes de auto-estima. Existem muitos factores que podem influenciar, ou não, o sucesso do trabalho cooperativo: a questão da formação de grupos; a forma como se organiza o trabalho e o tipo de tarefas que são apresentadas e exploradas.

Capítulo III

METODOLOGIA DE INVESTIGAÇÃO

Neste capítulo, começamos por apresentar uma breve descrição da metodologia adoptada para este estudo e as razões da sua escolha. Depois, descrevemos a escola, os intervenientes do estudo e os materiais manipuláveis utilizados nesta investigação. Em seguida, explicamos as técnicas utilizadas para proceder à recolha e análise dos dados.

3.1. Fundamentação para as opções metodológicas

O principal objectivo desta investigação é compreender como é que os alunos aprendem os conceitos da Geometria do sétimo ano de escolaridade quando usam materiais manipuláveis no ensino-aprendizagem da Matemática. Este objectivo levou à formulação das seguintes questões:

1. Quais os processos matemáticos utilizados pelos alunos ao realizarem tarefas recorrendo aos materiais manipuláveis?

2. Como é que os materiais manipuláveis promovem o desenvolvimento dos conhecimentos geométricos?

3. Qual o contributo dado pelos materiais manipuláveis no desenvolvimento de determinadas competências matemáticas nos alunos?

4. Qual é o desempenho matemático dos alunos ao trabalharem, cooperativamente, em tarefas com recurso a materiais manipuláveis?

Atendendo à natureza do problema em questão e tendo em conta os objectivos deste estudo, optou-se por uma metodologia de natureza qualitativa, do tipo naturalista e com carácter interpretativo, porque as suas características revelaram-se adequadas à investigação que se pretendia realizar. De acordo com Bogdan e Biklen (1994)

> “ (…) a expressão investigação qualitativa como um termo genérico que agrupa diversas estratégias de investigação que partilham determinadas características. Os dados recolhidos são designados por qualitativos, o que significa ricos em pormenores descritivos relativamente a pessoas, locais e conversas, e de complexo tratamento estatístico (...) com o objectivo de investigar fenómenos em toda a sua complexidade e em contexto natural “ (p.16).

Ainda segundo os mesmos autores, existem cinco aspectos que caracterizam a metodologia de investigação qualitativa: (i) a fonte directa de dados é o ambiente natural, sendo o investigador o instrumento principal de recolha de dados; (ii) os dados recolhidos são predominantemente descritivos; (iii) a investigação qualitativa incide mais nos processos do que nos resultados ou produtos que dela decorrem; (iv) a análise dos dados tende a seguir um processo indutivo, não se pretendendo confirmar hipóteses prévias; (v) compreender o "significado" que os participantes atribuem às suas experiências, assume uma importância vital para o investigador qualitativo (Bogdan e Biklen, 1994, pp. 47-50).

Estas características mostram-se adequadas aos objectivos do presente estudo. Trata-se de um estudo do tipo naturalista, visto que a fonte directa de dados são as situações consideradas "naturais" que o investigador teve oportunidade de observar no dia-a-dia de uma turma do sétimo ano de escolaridade, no contexto natural de sala de aula de Matemática. Segundo Guba (1978) e Wolf (1978 a):

> "Em educação, investigação qualitativa é frequentemente designada por naturalista, porque o investigador frequenta os locais, em que naturalmente se verificam os fenómenos nos quais está interessado, incidindo os dados recolhidos nos comportamentos naturais das pessoas: conversar, visitar, observar, comer, etc.". (citado em Bogdan e Biklen, 1994, p.17).

O investigador tem um contacto directo e prolongado com o ambiente e com a situação que está a ser objecto de estudo. Convém referir também que numa investigação desta natureza os actos, as palavras e os gestos só fazem sentido e só podem ser compreendidos no seu contexto, ou seja, no ambiente em que eles ocorrem. Pressupõe-se que separar a palavra ou o gesto do seu contexto é perder de vista o significado.

Para além de tudo o que já foi referido, importa ainda salientar que este estudo não foi realizado com a preocupação de confirmar hipóteses prévias, nem de generalizar resultados; neste sentido, a investigadora teve em atenção o estudo dos processos e não os resultados, o que sugere que a análise dos dados foi feita de uma forma indutiva. Segundo Bogdan e Biklen (1994),

> "(…) o investigador qualitativo evita iniciar um estudo com hipóteses previamente formuladas para testar ou questões específicas para responder, defendendo que a formulação das questões deve ser resultante da recolha de dados e não efectuada a priori. É o próprio resultado do estudo que estrutura a investigação, não as ideias preconcebidas ou um plano prévio detalhado" (p. 83).

Apenas se pretendeu investigar o trabalho de uma turma em geral e de dois grupos de quatro alunos em particular, tendo por base as questões inicialmente formuladas.

A maior parte das vezes, ao realizarmos determinado estudo, temos algumas ideias preconcebidas da realidade que nos envolve, resultado de observações baseadas na experiência pessoal ou de documentação existente sobre esse assunto. Neste sentido, no decorrer da recolha de dados, tivemos a preocupação de recolher um leque variado de dados para perder o mínimo de pormenores, embora tenhamos consciência de que não será possível explorar todos os ângulos do fenómeno em estudo, num espaço de tempo tão limitado. Daí a necessidade de definir, em traços gerais, quais os aspectos que queríamos analisar nessas aulas, isto para poder proceder à colecta de dados.

A recolha de dados efectuou-se durante, sensivelmente, dois meses no terceiro período do ano lectivo de 2005/2006, visto que se pretendia observar os alunos durante a leccionação do capítulo de Geometria na unidade temática " Do Espaço ao Plano: Sólidos, Triângulos e Quadriláteros". A colecta dos dados realizou-se em ambiente natural de aula de Matemática e recaiu na observação dos alunos quando realizavam determinadas tarefas em grupo com materiais manipuláveis. Os instrumentos utilizados, para recolher os dados, foram: a gravação em vídeo e áudio das aulas, num total de onze blocos de noventa minutos; os registos dos alunos, efectuados durante a realização das propostas de trabalho; as notas da investigadora, efectuadas durante e após a observação das aulas de Matemática e o questionário realizado aos alunos.

Após os dados serem recolhidos, a investigadora analisou-os de forma indutiva, com a intenção de procurar relações entre eles, verificando que, determinados aspectos deste estudo, se enquadravam num quadro teórico pré-existente. No entanto, esta investigação poderá contribuir para o enriquecimento deste quadro teórico. Segundo Bogdan e Biklen (1994) "a preocupação central não é a de se os resultados são susceptíveis de generalização, mas sim a de que outros contextos e sujeitos a eles podem ser generalizados" (p.66).

Em suma, este estudo enquadra-se numa metodologia de investigação qualitativa.

3.2. O Contexto de recolha de dados

3.2.1. A escola

A Escola da Levada surgiu na década de setenta, como escola vocacionada para o terceiro ciclo. O ensino obrigatório de nono ano tornou-se uma realidade após o 25 de Abril de 1974, respondendo à necessidade de que a Educação era um direito constitucional de todos.

A Madeira, através da sua Secretária de Educação, lança um programa de construção de novas escolas pré-fabricadas e é, no âmbito desta iniciativa, que surge a escola referida.

No ano lectivo de 1978/79, após a portaria nº 757/78 de 22 de Dezembro de 1978, a Escola da Levada abre as suas portas na freguesia de Santa Luzia, a alunos de sétimo ano. São setecentos e noventa e sete alunos distribuídos por trinta turmas. Este número de alunos mostra bem as necessidades das freguesias circundantes.

Só quatro anos após a sua abertura a Escola garante a leccionação dos três anos do terceiro ciclo, com a entrada em funcionamento, em 1981/1982, do nono ano de escolaridade.

Como os pavilhões pré-fabricados cedo evidenciaram as suas carências e o seu carácter provisório, é decidida a construção de uma Escola Secundária de raiz.

Esta escola, anunciada como uma das melhores do país, pelas suas condições ideais para a prática do desporto, oficinas, laboratórios e amplas salas de aula é inaugurada no ano lectivo de 1984/85 pelo Presidente do Governo Regional da Madeira, Dr. Alberto João Jardim, e baptizada com o nome do ilustre pedagogo madeirense, Dr. Ângelo Augusto da Silva, de acordo com a Resolução do Governo Regional nº913/83 de 20 de Outubro de 1983.

O Ensino Secundário abre as portas nesta freguesia, em 1984/1985, com a matrícula de oitenta e sete alunos no décimo ano. Neste ano lectivo, o universo escolar atinge os dois mil e vinte e quatro alunos, distribuídos pelos terceiro ciclo do Ensino Básico e Ensino Secundário (décimo ano).

Em 1986/87, é lançado o Ensino Nocturno, com a frequência de cinquenta e oito alunos.

Em 1989/90, inicia-se a leccionação do décimo segundo ano.

A Escola, adaptando-se às novas realidades e exigências organizacionais do Sistema Educativo, lançou cursos técnico-profissionais, currículos alternativos do terceiro ciclo e o décimo terceiro ano profissionalizante.

3.2.2. Os alunos

Para realizar este estudo, observaram-se as aulas de Matemática de uma turma do sétimo ano de escolaridade da Escola Básica e Secundaria Dr. Ângelo Augusto da Silva. A turma era constituída por dezoito alunos com idades compreendidas entre os doze e os treze anos, a idade "normal" de frequência do sétimo ano, sendo doze rapazes e seis raparigas. Todos os alunos frequentavam pela primeira vez o 7º ano de escolaridade.

Os critérios aplicados pela professora, para a escolha desta turma, foram os seguintes: 1) a existência de uma boa relação entre a professora e a turma; 2) ser uma turma receptiva a novos tipos de experiências de aprendizagem; 3) ser uma turma com hábitos de trabalho e com alunos comunicativos.

Convém referir que, ao nível do aproveitamento, a professora da turma o considerou razoável.

Durante os dois meses em que assistimos às aulas desta turma, observamos com mais atenção, dois dos quatro grupos que se formaram. A escolha dos alunos mais observados teve como critérios: a sua localização física na sala, de forma a facilitar a colocação da máquina de filmar; serem alunos comunicativos e trabalhadores e que, no grupo, existissem diferentes níveis de aproveitamento escolar.

Pudemos observar que a turma não estava habituada a trabalhar em grupo, visto que, por várias vezes, a professora chamou a atenção de alguns elementos dos vários grupos, que executavam as tarefas individualmente.

As aulas eram, por vezes, um pouco "barulhentas", devido a grande agitação dos alunos para manipular o material entregue pela professora, e, também, pelo facto dos alunos terem a liberdade de discutir com os colegas do grupo aquilo que faziam.

A autorização para a realização desta investigação foi formalizada pelo Conselho Executivo da Escola, no dia 15 de Fevereiro de 2002 (Anexo 1) Foi também pedida autorização aos Encarregados de Educação para gravar em vídeo e áudio algumas aulas de Matemática dos seus educandos. Os Encarregados de Educação formalizaram, por escrito, a sua autorização à participação dos seus educandos na investigação.

3.2.3. A professora

A professora da referida turma é licenciada em Matemática, Via Ensino, pela Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. É professora do Quadro de Nomeação Definitiva da Escola Básica e Secundária Dr. Ângelo Augusto da Silva, estando, desde 1989, neste estabelecimento de ensino. Estagiou no ano lectivo 1994/1995, na Escola Básica e Secundária Dr. Ângelo Augusto da Silva já tinha leccionado seis anos antes de estagiar. No ano de estágio leccionou uma turma do oitavo ano e outra do décimo ano.

Do seu currículo fazem parte a participação em vários projectos como: membro da comissão organizadora do "ProfMat 2000 – Encontro Nacional de Professores de Matemática", levado a cabo pelo Núcleo Regional da Associação de Professores de Matemática; membro da equipa de preparação do concurso EquaMat; membro da equipa de trabalhos do estudo dos resultados da primeira chamada do exame de Matemática de 2005 do nono ano;

Além disso já teve a oportunidade de passar pelo cargo de directora de turma, já participou no Conselho para da Comunidade Educativa e leccionou os Cursos de Educação e Formação.

É uma professora que, por estar sempre aberta a experimentar novas estratégias de ensino/aprendizagem, aceitou participar nesta experiência. Nas suas aulas valoriza o "aprender fazendo", daí que não dê grande importância à memorização. Esta docente adora aquilo que faz, tem uma excelente relação com os alunos, contribuindo para um bom ambiente entre a turma e a professora.

Na opinião desta professora o processo ensino/aprendizagem não pode reduzir-se a uma simples transmissão de conhecimentos e conteúdos por parte do professor, perante alunos meramente receptivos e imitadores. Cabe pois, ao professor, a responsabilidade de observar, analisar e modificar os diferentes comportamentos e atitudes, por forma a melhorar e a tornar o ambiente da "sua aula" o mais estimulante e acolhedor possível.

3.3. Materiais manipuláveis utilizados nas aulas

As tarefas propostas aos alunos nesta investigação, foram em número de dez e inserem-se no tema da Geometria. Optamos por tarefas que recorrem a diferentes tipos de materiais manipuláveis o que também foi de encontro ao objectivo da investigadora.

Os materiais manipuláveis usados nesta investigação foram: geoplano circular e quadrangular, régua, transferidor, compasso, esquadro, palhinhas de refresco, arroz, polidron, modelos de sólidos geométricos em madeira e em acrílico e espelhos, Em seguida, apresentamos e descrevemos as suas principais características e potencialidades.

3.3.1. Polidron

O Polidron é um recurso didáctico, de origem inglesa, constituído por um conjunto de polígonos em plástico, com encaixes, que nos permite construir vários sólidos unindo as diferentes peças (espaço) e descobrir diferentes planificações desses mesmos sólidos (plano).

3.3.2. Modelos de sólidos geométricos

Os modelos de sólidos geométricos, em madeira ou em plástico, são um material privilegiado na representação dos modelos geométricos existentes no espaço. Estes modelos espaciais contribuem para que os alunos interpretem o espaço que os rodeia e que actuem sobre ele. Estes modelos são importantes, pois facilitam a visualização geométrica e permitem, aos alunos, a sua manipulação: tocar, sentir, contornar. O seu interesse pedagógico advém do facto de motivar e favorecer a manipulação dos sólidos geométricos, facilitando a identificação dos elementos dos sólidos.

3.3.3. Geoplano

O geoplano é um material composto por uma base de madeira (que também pode ser transparente) com uma malha quadrangular, rectangular ou circular de “pregos”. Este representa um espaço geométrico no qual se marcam pontos por meio de pregos e algumas rectas por meio de marcas no tabuleiro. Entre os pregos, podem-se esticar elásticos que permitem a representação de situações concretas.

É um recurso didáctico-pedagógico dinâmico e manipulativo (construir, movimentar e desfazer). Existem diversos tipos de geoplano: quadrado, trelissado, circular e oval. Apesar de existirem vários tipos, o mais usual é o geoplano quadrado. Através da manipulação de elásticos de diversas cores é possível identificar e construir nele figuras geométricas; permite identificar a razão de semelhança de figuras geométricas e a razão de áreas e auxilia o estudo das transformações do plano. Podemos explorar situações que conduzem à definição de diferentes conceitos matemáticos (como os de medida, de vértice, de aresta, de lado, de simetria, de polígono, de perímetro, de áreas, de figuras equivalentes, de ângulo) e resolver problemas geométricos e algébricos. No geoplano podem-se formar polígonos variados, cujas áreas e perímetros podem ser calculadas.

De acordo com Araújo (1998):

> "o geoplano é um material estruturado que permite desenvolver a aprendizagem através de experiências geométricas na sala de aula. Permite envolver os alunos activamente como construtores do conhecimento pois ao agirem sobre este material estabelecem relações e organizam mentalmente a sua actividade. Para além de permitir actividades lúdicas, transforma-se num meio de motivação e é uma base concreta para o desenvolvimento de conceitos e relações abstractas"(p. 37).

É um modelo matemático que facilita o desenvolvimento do pensamento geométrico e das habilidades de exploração espacial, comparação, relação, discriminação e sequência. É também um suporte concreto para a representação mental e um recurso que permite a passagem do concreto para o abstracto, proporcionando uma experiência geométrica e algébrica aos alunos.

Segundo Serrazina e Matos (1988) " uma das grandes vantagens do geoplano é a sua mobilidade, o que faz com que os alunos se habituem a ver figuras em diversas posições. Outra das vantagens específicas do geoplano é que, ao contrário da folha de papel é um aparelho dinâmico, permitindo "desenhar" e "apagar" facilmente e possibilitando a aferição rápida de conjecturas" (p. 10). Também é um material que "permite visualizar figuras de diversos ângulos e posições, permite comparar, investigar, modificar e prever resultados de transformações, bem como desenvolver actividades de resolução de problemas" (Araújo, 1998, p. 37).

O papel do professor deve ser o de condutor ou guia, uma vez que irá orientar o trabalho dos alunos no geoplano, questionando, complementando, assessorando o processo de redescoberta. O professor ao proporcionar este tipo de experiência aos alunos deverá dar tempo para que eles observem, pensem e expressem o seu pensamento. A linguagem do professor deve ser concisa e cuidadosa, suficientemente rica para utilizar expressões equivalentes, que tornem claras as ideias e facilitem a compreensão dos significados.

3.3.4. Régua, esquadro, compasso e transferidor

A régua, o esquadro, o compasso e o transferidor são ferramentas de desenho muito utilizadas nas construções geométricas. A régua e o esquadro também são úteis para efectuar medições. O transferidor é utilizado para medir a amplitude dos ângulos.

3.3.5. Espelhos

Os espelhos são objectos da vida corrente que podem ser utilizados numa grande variedade de tarefas. É um óptimo material para o estudo intuitivo das simetrias no Ensino Básico, bastando colocar o espelho perpendicularmente à folha de papel, e encontrar uma posição para o mesmo, de modo a que a imagem reflectida de uma das metades da figura seja igual à outra metade, situada do lado baço do espelho.

O seu interesse pedagógico advém do facto de motivar e favorecer a assimilação do conceito de simetria, exercitar a determinação e identificação dos eixos de simetria e desenvolver o pensamento autónomo.

3.3.6. Material não estruturado

Caricas, fósforos, palitos, botões, palhinhas, massas, … são objectos do nosso quotidiano que permitem o desenvolvimento de capacidades e a construção de conceitos. Por exemplo, as palhinhas de refresco são um material que poderá auxiliar na descoberta de relações geométricas e na construção de conceitos geométricos. A mobilidade do material permite manobrar os elementos da figura inicial, facilitando a decomposição e a recomposição, sem os gastos de tempo que a elaboração de desenhos exigiria.

Em suma, estes são alguns dos materiais que poderão ser utilizados no processo ensino/aprendizagem da Geometria. Estes poderão "não só contornar a questão da capacidade de abstracção exigida pela Geometria e que constitui um obstáculo grave, tendo em conta o período de desenvolvimento psicogenético em que se encontram (…) bem como anular uma das questões que mais frequentemente é posta aos professores de Matemática pelos seus alunos: "Para que é que isto serve?", pois os problemas a resolver passam a ser a procura de respostas a uma necessidade interior do aluno" (Costa, 1994, p. 116).

3.4. Técnicas de Recolha de Dados

Numa investigação de natureza qualitativa é fundamental obter informação de diversas fontes. Os instrumentos utilizados na recolha de dados neste estudo foram: (a) registos escritos feitos pela investigadora, com base na sua observação das aulas de Matemática; (b) registos vídeo e áudio do trabalho realizado por dois grupos, durante a realização das tarefas propostas; (c) análise documental (registos escritos, produzidos pelos alunos, no âmbito das tarefas e questionário aplicado aos mesmos no final da experiência.

3.4.1. Registo de observação das aulas de Matemática

A observação ocupa, segundo Ludke e André (1986), um lugar privilegiado nas abordagens qualitativas, constituindo uma importante ferramenta de trabalho que permite obter informação normalmente não acessível por outras técnicas. Esta foi usada nesta investigação como a principal técnica de recolha de dados, pois possibilita um contacto directo do investigador com o fenómeno a investigar. Segundo Ludke e André, "a experiência directa é sem dúvida o melhor teste de verificação da ocorrência de um determinado fenómeno. "Ver para crer", diz o ditado popular" (1986, p. 26). A observação directa permitiu à investigadora acompanhar as experiências diárias dos alunos e da professora, compreender o significado que eles atribuem à realidade que os cerca, às suas próprias acções, as suas opiniões e as suas perspectivas. Durante as aulas a investigadora tomou notas sobre a forma como elas se desenrolavam. O registo escrito elaborado contemplava, sobretudo, as principais dificuldades encontradas pelos alunos, as estratégias utilizadas na resolução das tarefas propostas, os processos que usavam, o contributo do material na resolução da tarefa, o tipo de competências matemáticas que eram desenvolvidas e a organização do trabalho de grupo. Nesta perspectiva, a observação permite a aquisição de dados relevantes para este estudo.

Durante as actividades desenvolvidas pelos alunos, fizemos o registo das observações, o mais detalhado possível dos aspectos que ocorreram dentro da sala de aula e que não estavam a ser filmados: palavras, gestos, observações feitas entre os sujeitos ou entre estes e a professora da turma. Como apenas dois grupos estavam a ser filmados, a máquina de filmar não conseguia captar as interacções entre os vários grupos.

Nesta investigação, na análise dos dados, fizemos uma combinação das anotações escritas em cada aula com o material transcrito das gravações.

Para além da observação directa, foram ainda efectuadas gravações vídeo e áudio das aulas. A necessidade de utilização da máquina de filmar deve-se, sobretudo, ao facto desta captar aspectos que poderiam passar despercebidos, em virtude da atenção da investigadora não poderem estar focalizadas unicamente, num determinado grupo de trabalho. Também o registo dos alunos das propostas de trabalho contribuíram para complementar os dados já recolhidos através da observação das aulas.

"A abordagem da investigação qualitativa exige que o mundo seja examinado com a ideia de que nada é trivial, que tudo tem potencial para construir uma pista que nos permita estabelecer uma compreensão mais esclarecedora do nosso objecto de estudo" (Bogdan e Biklen, 1991, p.41). A descrição funciona eficazmente quando se pretende que nenhum detalhe significativo se escape. Para isso é fundamental que o investigador observe e registe sistematicamente, tentando fazê-lo o mais objectivamente possível. Este instrumento de recolha de dados "obriga o investigador a um registo sistemático de observações que de outro modo ficariam apenas na memória daqueles, perdendo com o decorrer do tempo objectividade" (Varandas, 2000, pp. 73-74).

3.4.2. Registo vídeo e áudio das aulas

As aulas foram gravadas em vídeo e áudio durante sensivelmente dois meses, no terceiro período. Foram dez blocos de aulas, de noventa minutos cada. Para tal, foram colocadas duas câmaras de vídeo uma para cada grupo, que estava a ser o foco do estudo.

Antes do início de cada aula a investigadora instalava a câmara de vídeo e o microfone no lugar que seria ocupado por cada um dos grupos que estavam a ser alvo do estudo. Em todas as aulas filmadas, era proposto, aos alunos, a realização de uma tarefa, que teria de ser concretizada através da manipulação de algum material. O material era escolhido tendo em conta os objectivos e as competências que se pretendiam desenvolver. Convém referir que, nesta unidade "Do espaço ao plano", os alunos trabalharam sempre em grupos de quatro ou cinco elementos. A professora da turma foi a responsável pela constituição dos grupos. Assim sendo, teve o cuidado de que, em cada grupo, estivessem alunos bons, razoáveis e fracos. Outro aspecto a salientar é que, nesta unidade temática, os grupos foram sempre os mesmos.

Aquando da transcrição das aulas vídeogravadas, procurou-se descrever, o mais detalhadamente possível, tudo o que acontecia nos dois grupos que estavam a ser observados. Foram vários os aspectos tidos em atenção: o raciocínio matemático e crítico; a comunicação gestual, oral e escrita; as interacções entre alunos e entre eles e a professora; o trabalho cooperativo e a mobilização de conhecimentos.

Nas primeiras aulas filmadas os alunos não se sentiram muito a vontade essencialmente por dois motivos. O primeiro é que as aulas seriam gravadas em vídeo e áudio e o segundo a presença de outra professora dentro da sala de aula de Matemática. Mas, à medida que as aulas decorreram, a presença da máquina de filmar e da investigadora deixaram de interferir com o normal funcionamento da aula, sendo consideradas como naturais.

3.4.3. Análise documental

São vários os autores que fazem referência a importância de recolher informações a partir da análise de um conjunto de documentos.

Por exemplo, segundo Ludkë e André (1986), ”a análise documental pode constituir-se numa técnica valiosa de abordagem de dados qualitativos, seja complementando as informações obtidas por outras técnicas, seja desvendando aspectos novos de um tema ou problema” (p.38). Ainda segundo estes autores, “os documentos constituem uma fonte poderosa de onde podem ser retiradas evidências que fundamentem afirmações e declarações do pesquisador” (p.39). Neste sentido, os documentos consultados servem de base ao estudo realizado e dão mais estabilidade aos resultados obtidos. Assim, o uso da análise documental é útil para ratificar e validar informações obtidas aquando da recolha de dados para a investigação. Permite, também, legitimar e confirmar a inferência sugerida por outras fontes de dados.

Neste trabalho foram analisados diversos tipos de documentos:

1. Documentos produzidos pelos alunos durante a realização das propostas de trabalho;
2. Questionário sobre a visão dos alunos acerca da utilização de materiais manipulativos no Ensino/Aprendizagem da Matemática, aplicado no final do ano lectivo, a todos os alunos da turma em estudo.

Os documentos produzidos pelos alunos, durante a realização das propostas de trabalho, forneceram alguns dados que facilitaram a compreensão do modo como os alunos abordaram a tarefa e a exploraram, como obtiveram e organizaram os dados, e que conjecturas formularam e que relações foram descobertas.

A unidade temática "Do Espaço ao Plano" foi o último capítulo leccionado no sétimo ano; como tal, não houve tempo para entrevistar alguns dos alunos. Como forma de esclarecer algumas dúvidas, pedimos à professora da turma que entregasse, no último dia de aulas, o questionário em anexo aos alunos. Este questionário foi aplicado a todos os alunos desta turma. E tinha, como principais objectivos, conhecer as experiências anteriores dos alunos em relação à utilização de materiais manipuláveis na sala da aula e o seu parecer sobre a utilização destes no Ensino/Aprendizagem da Matemática.

A primeira parte do questionário era constituída por várias questões, relativas ao percurso escolar do aluno, em relação à disciplina de Matemática, ao tema Geometria e à utilização de materiais manipuláveis antes desta experiência. Com a segunda parte do questionário pretendíamos averiguar a ideia com que os alunos ficaram sobre a utilização dos materiais manipuláveis nas aulas de Matemática.

3.5. A análise de dados

De acordo com Bogdan e Biklen (1994) a análise de dados é:

> "(…) O processo de busca e de organização sistemático de transcrições de entrevistas, de notas de campo e de outros materiais que foram sendo acumulados, com o objectivo de aumentar a sua própria compreensão desses mesmos materiais e de lhe permitir apresentar aos outros aquilo que encontrou. A análise envolve o trabalho com os dados, a sua organização, divisão em unidades manipuláveis, síntese, procura de padrões, descoberta dos aspectos importantes e do que deve ser aprendido e a decisão sobre o que vai ser transmitido aos outros" (p. 205).

Em suma, é um processo de compreensão e sistematização da informação, recolhida com o objectivo de responder às questões propostas no início da investigação, que nos transporta das descrições vagas até aos produtos finais (Bogdan e Biklen, 1994).

A análise dos dados começou a ser realizada durante o processo de recolha dos mesmos, tendo sido aprofundada após terminada a recolha. Todo o material obtido ao longo do estudo foi organizado e submetido a uma análise atenta e cuidada. A análise foi efectuada tendo em consideração as questões de investigação. A primeira etapa da análise dos dados consistiu na transcrição integral das aulas gravadas em vídeo. Depois de concluído este trabalho, procedeu-se a uma leitura dos diversos dados recolhidos (registos escritos efectuados pela investigadora e pelos alunos, transcrição dos registos de vídeo e áudio e questionário) que permitiu a formulação das categorias de análise que tiveram como objectivo facilitar a análise das dados, tendo como ponto de partida as questões do estudo, como sugerem Bogdan e Biklen (1994). As categorias encontradas para analisar os dados foram: (i) processos utilizados na descoberta de propriedades e relações geométricas; (ii) mobilização de conteúdos e competências; (iii) envolvimento na tarefa e as interacções estabelecidas; (iv) comunicação oral e escrita; (v) trabalho de grupo; (vi) papel dos materiais e (vii) raciocínios matemáticos efectuados. Depois de todo este processo estar concluído, procedemos à elaboração de um relatório de cada tarefa, de forma a verificar a adequação das categorias e facilitar a análise dos dados, assim como a redacção da investigação. A seguir, era feita uma síntese da tarefa proposta. Por isso, os resultados da investigação são bastante descritivos, uma vez que procura dar conta de toda a actividade matemática desenvolvida pelos alunos, ao longo de cada tarefa, e as competências matemáticas que iam sendo desenvolvidas. Também na descrição dos dados obtidos deu-se mais importância aos processos desenvolvidos durante a realização da tarefa com materiais manipulativos, do que aos resultados ou produtos obtidos. Como tal os dados foram analisados de forma indutiva. Bogdan e Biklen (1994) refere que, nas abordagens qualitativas, “não se recolhem dados ou provas com o objectivo de confirmar ou infirmar hipóteses construídas previamente; ao invés disso, as abstracções são construídas à medida que os dados particulares que foram recolhidos se vão agrupando” (1994, p. 50).

A segunda etapa deste trabalho foi a de complementar as descrições apresentadas com a análise e a interpretação dos resultados observados, com a finalidade de encontrar respostas para o problema inicial. Esta análise resultou da triangulação da informação obtida, através dos vários instrumentos utilizados para a recolha dos dados. De facto, em investigação qualitativa, uma das tarefas do observador é descobrir o que é fundamental ou central nas pessoas ou situações observadas (Merriam, 1988).

Capítulo IV

ANÁLISE DOS DADOS

Neste capítulo, descrevemos alguns dos episódios mais relevantes das aulas, onde a turma a que pertencem os alunos deste estudo, realizaram várias tarefas com materiais manipulativos, num contexto de trabalho cooperativo. A descrição contempla diferentes momentos destas aulas, desde o instante em que a professora fornece a tarefa aos alunos, até à fase de discussão das conclusões obtidas.

4.1. Tarefa "Sólidos Geométricos"

A tarefa "Sólidos geométricos" (anexo 3) foi realizada no dia 20 de Março num bloco de noventa minutos. Esta foi a aula de introdução ao capítulo "Do Espaço ao Plano: Sólidos, Triângulos e Quadriláteros" e visava rever alguns conceitos, abordados no sexto ano, que interessavam para o capítulo que ia ser objecto de estudo.

A formação dos grupos e o estabelecimento das regras para o trabalho dos mesmos foi efectuada na aula anterior. Daí que a professora, no início da aula, apenas relembrou o que tinha sido acordado com a turma.

Contudo, antes da professora distribuir a tarefa, fez referência à História da Geometria, realçando os aspectos mais marcantes desta. Esta realçou o facto da Geometria ter nascido das necessidades básicas que o homem se via obrigado a satisfazer e que foram vitais para o desenvolvimento desta ciência. A professora valorizou a parte da História no Ensino/Aprendizagem da Matemática pois, ao fazer referência ao matemático Tales de Mileto, apenas relembrou que já haviam falado nele, quando abordaram o capítulo "Semelhança de Figuras".

Prof.: Quando falamos de Tales de Mileto, na semelhança de triângulos, falamos das pirâmides do Egipto. Lembram-se de que falamos duma pirâmide em especial?
B.: Da pirâmide de Quéops.
Prof.: O que tinha essa pirâmide de especial?
B.: É a maior de todas.
Prof.: Sim, a pirâmide de Quéops é o maior sólido geométrico construído pelo homem. Lembram-se que nós calculamos a área da base e vimos que a área é equivalente a ter treze campos de futebol. Uma pirâmide com cento e trinta e oito metros de altura e a base, quadrada, tem de lado duzentos e trinta metros. Nós também vimos que este matemático era considerado um dos sete sábios da Grécia.

Na primeira tarefa proposta pela professora, os alunos dispunham de uma caixa com vários sólidos geométricos (poliedros e não poliedros), num total de oito. O interesse do estudo dos sólidos geométricos é, evidentemente, consequência de vivermos num mundo tridimensional. A exploração desta tarefa constituiu um ponto de partida para o estudo de conteúdos de Geometria, que já tinham sido abordados em anos anteriores. Tratou-se de uma tarefa bastante orientada, pois o seu principal objectivo era relembrar alguns conceitos necessários à concretização das restantes propostas de trabalho. Os alunos, ao responderem às questões, iam-se familiarizando com os termos do conteúdo que estavam estudando. Pretendeu-se, com esta tarefa, que os alunos identificassem os sólidos geométricos que a caixa continha, os agrupassem por características comuns e as identificassem, e que identificassem, também, os polígonos das faces dos poliedros.

Após a distribuição do enunciado da tarefa e do material necessário à sua resolução, a professora referiu o objectivo da sua realização. Depois, apelou aos alunos para que, discutissem e trocassem impressões com os colegas de grupo relativamente à resolução da tarefa. Os alunos envolveram-se na resolução da tarefa com grande entusiasmo: "É fixe! Devia ser sempre assim".

O facto de os alunos disporem de diferentes sólidos geométricos provocou inicialmente alguma distracção e barulho nos vários grupos, sendo possível observar alguns grupos a brincar com os sólidos geométricos. Após várias chamadas de atenção da professora para a realização da tarefa, os alunos começaram a concentrar-se na mesma e a utilizar o material como um meio auxiliar do seu trabalho.

O facto de não estarem habituados a trabalhar em grupo, fez com que, inicialmente, houvesse pouca discussão e troca de impressões entre os seus membros. Verificou-se, inicialmente, que cada aluno do grupo G1 identificava os sólidos que sabia e quando não se recordava de algum, solicitava, de imediato, o auxílio da professora. Perante as constantes solicitações dos vários grupos, a professora decidiu relembrar à turma que a tarefa é para ser resolvida em grupo e que, só depois de a discutirem entre os membros e permanecer a dúvida, poderiam e deveriam solicitar a professora. A adaptação ao trabalho de grupo foi lenta.

> **B.:** Este [esfera] fica com nenhum destes [restantes sólidos] … Professora este não fica com nenhum?
>
> **Prof.:** Já discutiste com os teus colegas?
>
> **B.:** Não.
>
> **R.:** A diferença deste [Pirâmide triangular] sólido para este [pirâmide quadrangular] qual é?
>
> **Prof.:** Deste para este, tem uma diferença, qual é?

R.: Este tem quatro e este três.

Prof.: Como se chama este [pirâmide triangular] sólido?

B.: Uma pirâmide. E este que tem menos uma aresta …

Prof.: Como se chama?

R.: Pirâmide.

Prof.: Qual é a diferença entre as duas pirâmides?

B.: [apontando para as bases das duas pirâmides] Isto.

Prof.: [apontando para a base] Que nome damos a isto?

N.: [apontando para cada um dos sólidos] Isto é uma pirâmide triangular e isto é uma pirâmide quadrangular.

Prof.: Sim, pois as pirâmides classificam-se de acordo com o polígono da base.

A professora ao chegar ao grupo G1, o **B.** e depois o **R.** colocam-lhe dúvidas relativamente à questão 2., evidenciando que os alunos estavam a resolver a tarefa individualmente. Perante tal facto, a professora devolve as perguntas para o grupo, de forma a gerar discussão entre os elementos. Esta atitude da professora, ao longo da resolução da tarefa, permitiu que os alunos fossem interiorizando a necessidade de se ouvirem uns aos outros e de comentarem as opiniões dos colegas, antes de chamarem a docente. Como escreve o **B.** numa das respostas ao questionário do final do terceiro período (anexo 13): "Porque pude trocar ideias, teorias, conhecimentos com os meus companheiros de grupo e trabalhar melhor".

A intenção da professora era aumentar a autonomia e promover um maior debate de ideias entre os elementos de cada grupo. Perante os apelos da professora para que procurassem discutir com os outros elementos a proposta de trabalho, o grupo G1 começou por discutir a questão 1. da tarefa. Isto deve-se ao facto de cada elemento, do referido grupo, ter resolvido sozinho essa questão, sem trocar impressões com os colegas. Contudo, perante as dificuldades manifestadas na identificação dos sólidos geométricos, começaram a discutir e a procurar ajuda junto dos colegas. Alguns elementos não sabiam fazer a distinção entre polígonos e sólidos, ou seja, designavam alguns dos sólidos pelo polígono da base. Atenda-se ao seguinte diálogo:

V.: Este é um rectângulo [apontando para o paralelepípedo rectângulo].

R.: Tem tudo a ver com o rectângulo.

V.: [apontando para o paralelepípedo rectângulo] **B.** isto não é um rectângulo?

B.: [Rindo] Não é! É um paralelepípedo rectângulo.

N.: Este [apontando para o prisma triangular] é um triângulo?

B.: É um triângulo na base só … Isto não é um triângulo.

V. e N.: [quase em simultâneo] Não percebo!

R.: A base é que é um triângulo …

B.: Triângulo é isto [apontando para as faces alteras da pirâmide triangular].

V.: Como se chama este [apontando para o prisma hexagonal] sólido?

R.: Não sei! Não me lembro!

V.: Isto não é um hexágono, então?

B.: Hexágono é isto [apontando para a base] o sólido …. vocês estão a confundir isto tudo. Hexágono, não podes fazer isto, agarrar, mover … é como se pegasses na base e puxasses para cima.

N.: Não percebo?

B.: É como se desenhasses no papel e depois puxasses para cima. Como é que se chama é mais difícil.

Pelo diálogo, parece evidente que o **B.** e o **R.** sabem a definição de polígono e de sólido, contudo o grupo não sabe a definição de prisma. Os dois alunos tentam explicar aos restantes elementos a razão pela qual não concordam com o nome atribuído a três dos sólidos, assim como a diferença entre um sólido e um polígono. Os elementos do grupo G1 sentem-se à vontade com o grupo para os questionar; a confiança leva-os a não ter medo de expor as suas dúvidas. Os alunos envolviam-se, agora, em actividade, e todos os elementos se esforçavam por participar no trabalho. Contudo, os elementos do grupo G1 não se lembravam do nome de dois sólidos que a caixa continha. Perante esta situação os alunos procuram resposta no manual. Esse recurso ajudou o grupo na questão 1., não tendo sido necessário o apoio da professora.

R.: [olhando para o manual] Este é um prisma hexagonal.

V.: E este [prisma triangular]?

R.: [Procurando no manual o nome do sólido] É um prisma triangular.

B.: Ah! É um prisma!

R.: [Apontando para o desenho do sólido do manual] Está aqui.

B.: Se o livro diz, está certo.

N.: Um prisma tem duas bases iguais.

B.: Então a diferença é que a pirâmide tem uma base e termina em bico.

Perante as dificuldades em descobrir o nome dos referidos sólidos, um dos elementos do grupo recorreu ao manual adoptado para procurar a resposta. Verificou-se que os alunos consideraram a informação contida no manual uma fonte segura da verdade e, como tal, nem a questionaram. Depois de encontrada a resposta às suas dúvidas, pareceu evidente que os alunos compreenderam a diferença entre uma pirâmide e um prisma, isto pelas observações feita pelo **N.** e o **B.** no diálogo anterior. Para se certificarem que todos tinham escrito correctamente o nome dos sólidos, o **R.** apontando para cada um, identificou os sólidos.

Na questão 2., a presença dos sólidos geométricos permitiu a sua manipulação. Os alunos podiam visualizar detalhes do mesmo, tais como as figuras planas que compunham as faces do sólido ou o número de vértices, arestas e faces. Na segunda questão, os alunos deveriam agrupar os diversos sólidos por características comuns, observando as particularidades de cada um deles.

B.: Este [a esfera] fica sozinho, o cone e o cilindro ficam juntos.

N.: Tens a certeza?

B.: Acho que sim. Não sei se estes [às pirâmides] ficam com estes [os prismas], … mas estes [às pirâmides] têm um vértice. Professora podemos cortar o vértice? [ri-se] Este [esfera] fica sozinho.

V.: Têm faces planas todos estes [pirâmides e prismas].

B.: Por isso, estes [cone e cilindro] não podem ficar com estes [os primas e as pirâmides].

R.: Porquê?

B.: Face curva [apontando para a esfera], mas estes [cone e cilindro] têm faces planas e curvas.

V.: Professora, na questão 2. pode ser as faces planas?

Prof: O que é que estava a dizer? … Diga.

B.: Senhora professora, estes [pirâmides] ficam no mesmo grupo porque têm um vértice e estes [prismas] não.

Prof.: Sim, pode ser. E estes [Apontando para o cone e o cilindro]? Porque é que podemos agrupá-los no mesmo grupo?

B.: [apontando para a base]: Têm os dois base e têm …

Prof.: Têm o quê?

B.: Base e têm forma redonda. Mas este tem um vértice e este não.

Prof.: Mas têm uma característica em comum. Por exemplo, eu e o **R.** temos o cabelo castanho, podemos não ter mais nada em comum, mas temos alguma coisa em comum.

A visualização e a manipulação dos sólidos permitiram, aos alunos, formular argumentos válidos acerca das características comuns destes sólidos. Os alunos poderiam ter, simplesmente, agrupado os sólidos em dois grupos poliedros e não poliedros; porém, já não se lembravam destes conceitos. O contacto dos alunos com os sólidos permitiu identificar outros aspectos. Realmente, de todos os sólidos, a esfera é a única que é limitada apenas por uma superfície curva daí que, logo no início, o **B.** a tenha colocado sozinha num grupo. Depois, colocaram o cone e o cilindro no mesmo grupo porque eram limitados por uma superfície lateral curva. As maiores dúvidas surgiram na forma como deveriam agrupar os restantes sólidos.

B.: [comparando o cubo e o paralelepípedo] O cubo pode ficar com o paralelepípedo: têm os dois duas bases.

R.: As bases têm quatro lados.

B.: Sim, também podemos agrupar este [prisma hexagonal] com este [cubo].

R.: [olhando para as bases desses dois sólidos]: São diferentes.

B.: Isso é um hexágono e isso é um quadrado.

R.: Ah! Estes dois têm duas bases. Ou melhor pode ser assim …

[**R.** agrupa o prisma hexagonal, o cubo e o paralelepípedo no mesmo grupo].

No diálogo anterior, é possível constatar que os alunos verificaram que um sólido pode pertencer a vários grupos de acordo com a característica que estamos a considerar. Também os alunos puderam observar que existem características que permitem agrupar um maior número de sólidos, enquanto que com outras isso não acontece. Os alunos começaram por agrupar o cubo e o paralelepípedo porque a base era um quadrilátero; ao juntar o prisma hexagonal apenas consideraram a característica de os três sólidos terem duas bases. A discussão no grupo G1 foi rica uma vez que houve oportunidade para explicar e partilhar informação entre os seus elementos. Depois de algum debate, os alunos agruparam os restantes sólidos num só grupo. Atenda-se ao seguinte diálogo:

V.: Qual é o terceiro grupo, então?

N.: Prisma hexagonal, cubo, paralelepípedo, pirâmides e prisma triangular.

V.: As pirâmides?

B.: Sim, todos estes sólidos têm as faces todas planas.

Na questão 3., da tarefa, os alunos não revelaram dificuldades em agrupar os poliedros e identificar os polígonos das faces desses sólidos geométricos. O diálogo estabelecido entre os elementos do grupo foi o suficiente para que os alunos chegassem, de forma rápida e autónoma, aos sólidos limitados apenas por faces planas e as suas respectivas faces.

V.: Tens de agrupar os que têm faces planas.

B.: Faces planas…

R.: São estes [apontando para as pirâmides e prismas].

N.: Todos têm faces planas.

V.: [olhando para a folha da tarefa]: Limitados apenas por faces planas. São estes todos. São estes todos.

R.: São todos menos a esfera.

B.: Limitados apenas por faces planas não são todos. Estes [cone e ao cilindro] têm faces planas e curvas.

V.: Estes [Cone, cilindro e esfera] não são?

R.: Não, têm superfícies curvas.

B.: Pirâmide e prismas têm faces planas. Não dás uma para a caixa [rindo-se].

R.: Nas faces temos triângulos, quadrados, rectângulos e hexágonos só.

Na questão 1. da tarefa, os elemento do grupo G2 manifestaram algumas dificuldades na identificação dos sólidos contidos na caixa.

G.: Tanta coisa! [tirando da caixa os sólidos geométricos] Rectângulo.

Ma.: Paralelepípedo … Isto é um paralelepípedo.

G.: Um rectângulo, um cilindro.

Ma.: [apontando para a face do paralelepípedo]: Um rectângulo é isto. Professora, como se chama este sólido [prisma hexagonal]?

[A professora aproxima-se do grupo].

Prof.: Esse sólido o que pode ser?

Ma.: Hexágono é só isto.

Prof.: Quais os nomes dos sólidos que sabem? Escrevam na folha.

[A professora afastou-se do grupo].

Ma.: Isto é uma pirâmide triangular …

G.: Pirâmide quadrangular, paralelepípedo rectângulo, quadrado.

C.: Isto é um cubo. As faces é que são quadrados.

Ma.: Cone.

C.: Não me lembro deste [prisma hexagonal] e deste [prisma triangular].

G.: No livro de Matemática tem. Empresta-mo. [Passados alguns instantes] Tá aqui, tá aqui.

O diálogo anterior demonstra que o grupo não se recordava do conceito de prisma e que um elemento do grupo confundia polígonos com sólidos. Também verificamos que os alunos solicitaram a ajuda da professora; esta, porém, devolveu a questão ao grupo. O facto de os alunos poderem encontrar a resposta no manual parece ter sido o motivo pelo qual a professora tomou essa opção. É importante que os alunos se tornem menos dependentes desta na busca da resposta para as suas dúvidas. Só assim podem ter um papel activo e interventivo na sociedade actual. Nesse sentido, o grupo, aos poucos, ia ganhando autonomia na realização do seu trabalho.

É ainda de referir que a **G.**, uma aluna normalmente pouco interessada nas aulas de Matemática, se envolveu no trabalho com entusiasmo; embora, pelo diálogo anterior e o seguinte, sejam visíveis as suas dificuldades na disciplina. Contudo, a presença de algo diferente, os sólidos geométricos poderá ter sido a causa da sua participação na resolução da tarefa.

G.: Isto é um quadrado com seis lados [referindo-se ao cubo].

[O grupo riu-se].

Prof.: Como é que é possível um quadrado com seis lados? O que é um quadrado?

C.: [Apontando para as faces do cubo] Um quadrado é isto.

Ma.: Um quadrado é uma face de um cubo.

G.: Só que tem quatro lados e este tem seis lados.

Prof.: Que nome é que damos a um polígono com seis lados?

C.: Hexágono.

Prof.: Muito bem. O quadrado tem quantos lados **G.**?

G.: Quatro.

Prof.: Quantos quadrados tem este sólido?

G.: Seis

Prof.: Isso significa que tem seis faces. Qual é o nome deste sólido?

Ma.: É um cubo.

Prof.: Sim, o nome deste sólido é cubo.

Notou-se alguma confusão por parte da **G.** entre lados de um polígono e faces de um sólido. A professora foi colocando questões ao grupo, esperando que surgissem respostas que levassem a **G.** a compreender que a sua afirmação não tinha sentido.

A interacção entre os alunos do grupo G2 permitiu discutir as características comuns que observavam nos vários sólidos.

Ma.: Este [pirâmide quadrangular] e este [cubo].

G.: Porquê?

Ma.: Porque têm na base a mesma forma.

M.: Pode ser este [paralelepípedo] e este [prisma triangular].

C.: [apontando para as faces laterais] O rectângulo.

[A professora aproximou-se do grupo G2].

Prof .: [apontando para o paralelepípedo]: Que nome damos a esta figura?

G.: Um rectângulo.

M.: Um rectângulo! É um paralelepípedo.

Prof.: Pode ser um rectângulo **G.**? Qual é a diferença entre um rectângulo e este [paralelepípedo] sólido. Desenha um rectângulo se faz favor?

G.: [desenhando na folha da tarefa um rectângulo] Um rectângulo é assim.

Prof.: [apontando para o paralelepípedo e depois para a folha, onde a **G.** desenhou o rectângulo]: Qual é a diferença deste [paralelepípedo] para este [rectângulo]?

C.: Não é tão alto.

Prof.: Este tem altura e aquele não tem. Esta é uma figura geométrica plana, enquanto que este [paralelepípedo] é um sólido, tem três dimensões, tem comprimento, largura e altura. É um sólido em que as faces são realmente rectângulos.

A aluna **G.** manifestou, ao longo da realização da tarefa, que muitos dos conceitos abordados nos anos anteriores não estavam bem assimilados. Pelo diálogo anterior, verificamos que não sabe distinguir um polígono de um sólido. A intervenção da professora ajudou a **G.** a compreender a diferença entre esses conceitos. É de salientar o facto de o grupo não ter explicado a **G.** essa diferença; mas, no entanto, a ter corrigido aquando a resolução da questão 1.

A professora também interagiu com o grupo, com o objectivo de que os alunos explicassem e reflectissem sobre o facto de terem agrupado uns sólidos e não outros. Desta forma, questionou-os, obrigando-os a pensar na sua actividade e ajudou-os a ultrapassar alguns impasses.

Prof.: Qual é a diferença entre estes [cone e pirâmide triangular] dois?

Ma.: Porque terminam em bico e têm só uma base.

Prof.: [apontando para o cilindro e o cone] Porque não agruparam estes dois, por exemplo?

Ma.: Podíamos agrupar … a face lateral é redonda nos dois.

M.: Têm uma superfície curva.

[A professora afastou-se do grupo].

C.: Então podíamos ter agrupado estes dois. Têm uma característica em comum.

M.: Ambas as figuras têm um círculo. Agora estes [prisma triangular e pirâmide triangular] dois?

Ma.: Faces planas.

M.: Em ambas, a base é um triângulo.

C.: Agora vamos fazer estes dois: a pirâmide quadrangular e o cubo.

M.: Superfície plana a ambas e têm …

C.: Um quadrado na base.

Ao longo da tarefa, foi notória uma atitude mais autónoma e menos individualista por parte dos alunos do grupo G2. A última pergunta não suscitou grande discussão, uma vez que os alunos sabiam identificar os polígonos que constituíam as faces dos poliedros.

Nos quinze minutos finais da aula, realizou-se a discussão desta tarefa. Os alunos relembraram, com base nas explorações feitas, algumas das características dos sólidos geométricos. Na discussão da tarefa, a professora colocou questões de forma a apelar à participação dos alunos. Estes, por vezes, recorriam ao material manipulável para os ajudar nas suas explicações. A primeira questão não gerou discussão, pois era consensual entre os elementos dos vários grupos. No entanto, a professora resolveu questioná-los. O seguinte diálogo, entre a professora e alunos, ilustra bem a sua atitude:

Prof.: Qual é a diferença entre este [pirâmide triangular] e este [pirâmide quadrangular]?

Ma.: A base deste é um triângulo e deste é quadrangular.

Prof.: Depois esqueceram completamente destes …

N.: Prismas.

Prof.: Porque é que damos a estes sólidos o nome de prismas? Porquê?

B.: Tinha de desenhar um quadrado … depois puxamos e ficou assim.

Prof.: O que é que ficou?

B.: Este por exemplo, desenhei o hexágono, puxei e ficou algo tridimensional.

Prof.: [Agarrando no sólido] Qual é o nome deste sólido?

N.: Prisma hexagonal.

Prof.: Hexagonal, porquê?

B.: Porque a base é um hexágono.

Prof.: E este [prisma triangular]?

N.: A base é um triângulo.

Prof.: O que é que distingue uma pirâmide de um prisma? Em relação as bases?

N.: São iguais.

Prof.: São iguais, não é? … Tem duas bases iguais .

B.: As faces são rectangulares.

A ideia da professora funcionou como um catalisador para a discussão e exposição de ideias. Desta forma consegue com que os alunos participem, levando-os a reflectir no trabalho realizado na aula.

Relativamente à questão 2., cada grupo leu a sua resposta. Atenda-se ao seguinte diálogo:

Prof.: Agrupa os sólidos por características comuns. Quais são? Que concluis? Aqui o grupo da **Ma.**.

Ma.: Pirâmide quadrangular e o cubo, porque as bases são quadradas. Prisma hexagonal e o paralelepípedo, porque as faces laterais são rectângulos. O cilindro e o cone, porque as faces laterais são superfícies curvas. O prisma triangular e a pirâmide triangular porque a base é um triângulo.

Prof.: O grupo do **A.** .

A.: Aqui, na número dois, nós agrupamos em poliedros e não poliedros. Estes são lisos, são limitados apenas por uma superfície plana [apontando para os seguintes sólidos: a pirâmide quadrangular, prisma triangular, pirâmide triangular, prisma hexagonal, cubo, paralelepípedo e o cilindro].

Prof.: Este [cilindro] sólido é limitado apenas por uma superfície plana?

A.: Aqui [apontando para a base do cilindro].

Prof.: Aí e o resto?

L.: O resto é uma superfície curva.

Prof.: Sim, então não é limitado só por superfícies planas.

A.: Não.

Prof.: Será que pode fazer parte desse grupo?

A.: Não, então fica junto com o cone.

Prof.: Sim. Os poliedros são estes porque são limitados apenas por superfícies planas e os não poliedros são o cone, o cilindro e também a esfera porque têm pelo menos uma superfície curva. Então, os sólidos geométricos podem ser divididos em dois grupos: poliedros e não poliedros. Agora o grupo do **N.** .

N.: Cone e o cilindro porque as faces laterais são superfícies curvas.

A esfera é sozinha. Temos o paralelepípedo, o prisma quadrangular e o cubo porque as faces são planas e temos a pirâmide e o prisma triangular.

Prof.: Porque é que agruparam esses dois?

N.: Porque a face da base é um triângulo nos dois sólidos.

A professora quis mostrar que havia várias respostas para a mesma pergunta. Os diversos grupos agruparam os sólidos de acordo com uma característica comum. Tal facto levou a respostas diferentes que não se contradiziam, mas se completavam.

Na terceira questão da tarefa, os alunos limitaram-se a identificar os polígonos que constituíam as faces dos poliedros.

Os grupos foram assim incentivados a participar na discussão da tarefa, relembrando e assimilando conceitos que tinha sido leccionado em anos anteriores. Depois dos alunos visualizarem as características dos vários sólidos contidos na caixa, a professora estabeleceu um diálogo com toda a turma procurando que eles conseguissem identificar, no seu dia-a-dia, objectos que sugerissem sólidos geométricos.

> **Prof.:** Nós, no nosso dia-a-dia, somos rodeados por muitos objectos que fazem lembrar sólidos geométricos. Por exemplo, hoje ao tomarem o pequeno-almoço, de certeza absoluta que olharam para o pacote de leite.
>
> **B.:** Sim.
>
> [**Ma.** faz uma cara de espanto].
>
> **Prof.:** Mariana não … amanhã de certeza absoluta que vai olhar. Toda a gente consegue imaginar um pacote de leite?
>
> **Alunos da turma:** Sim.
>
> **Prof.:** Lembra o quê? Qual é o sólido geométrico que este objecto nos faz lembrar?
>
> **B.:** O paralelepípedo rectângulo.
>
> **Prof.:** Que outros objectos, é que vocês utilizam no dia-a-dia que lembram sólidos geométricos?
>
> **B.:** A porta
>
> **Af.:** O Estojo
>
> **Prof.:** Mais?
>
> **Ma.:** A caixa de cereais.
>
> **M.:** A caixa de fósforos.
>
> **N.:** O tampo da mesa.
>
> **Prof.:** Será que um gelado, uma bola de futebol, o chapéu de um palhaço não faz lembrar sólidos geométricos?
>
> **Alunos da turma:** Sim.
>
> **Prof.:** Claro que sim. O objectivo da aula de hoje é estudar os sólidos geométricos. Podemos encontrar na natureza várias formas geométricas … André ia dizer qualquer coisa.
>
> **A.:** As colmeias das abelhas.
>
> **Prof:** Como são os favos de mel?
>
> **Af.:** Hexagonais.
>
> **Prof.:** Hexagonal, muito bem. Mais … vamos aos planetas … vocês adoram os planetas.
>
> **B.:** São esferas.

Desta forma, a professora tentou fazer uma ligação entre a tarefa realizada e o mundo que os rodeia. Os alunos identificaram, através da visualização, vários objectos do seu dia-a-dia, que faziam lembrar alguns dos sólidos geométricos estudados.

Síntese

De um modo geral, os alunos revelaram interesse e envolveram-se na resolução da tarefa, pois todos intervieram e participaram activamente, apesar de se terem referenciado níveis diferentes. No início da tarefa, o trabalho foi, maioritariamente, de cariz individual, já que os alunos quase não trocavam impressões uns com os outros. Contudo, a intervenção da professora permitiu que, aos poucos, os alunos construíssem um ambiente de cooperação, ouvindo a opinião dos colegas e a discutindo a tarefa proposta, tendo deixado de chamar a professora com tanta frequência em situações que, eles próprios, podiam resolver no seio do grupo. À medida que a aula se foi desenvolvendo, os alunos foram revelando mais autonomia e à vontade, mostrando entusiasmo em trabalhar quer em grupo, quer com materiais manipuláveis. Note-se também que os alunos revelaram uma atitude mais independente face à professora, uma vez que a tarefa apresentava uma estrutura mais orientada, com questões mais directas.

Um outro aspecto relevante na resolução da tarefa foi o facto de se ter constatado uma maior participação dos alunos considerados (até então) mais fracos na disciplina de Matemática. Estes alunos revelaram uma atitude activa, embora nos diálogos transcritos sejam notórias as suas dificuldades. No entanto, nenhum destes alunos deixou de expressar as suas ideias e de colaborar na realização da tarefa, tendo contado com o apoio e a ajuda dos restantes elementos do grupo.

A resolução desta tarefa caracterizou-se por uma organização de trabalho em três fases: a compreensão (leitura e interpretação das questões e apropriação do material), a execução da mesma e a finalização (elaboração das respostas e registo).

Notou-se também, por parte dos alunos, algum esquecimento relativamente a certos conhecimentos básicos sobre Geometria. Tendo-se verificado, por isso, ao nível do vocabulário, que os alunos não utilizavam frequentemente os termos matemáticos, preferindo fazê-lo apontando directamente para os sólidos.

Um outro aspecto resultante desta tarefa é a utilização de alguns processos matemáticos durante a sua realização. Os alunos através da manipulação e visualização dos sólidos geométricos em madeira recolheram dados relativamente as características de cada um; isso permitiu estabelecer relações e, deste modo, agrupá-los. As argumentações dos alunos a respeitos dos sólidos são baseadas em critérios perceptivos, surgindo da interacção, da partilha de opiniões e das questões que foram colocadas no seio do grupo, quer pela professora quer pelos próprios alunos.

Na discussão da tarefa, a professora teve um papel relevante, uma vez que conduziu a discussão, procurando que os alunos interviessem. Estes revelaram ter capacidade para comunicarem os resultados obtidos. Os diálogos estabelecidos, durante a correcção da tarefa, sugerem que os alunos apreenderam e assimilaram os conceitos.

A tarefa proporcionou, ainda, aos alunos, a discussão e revisão de alguns conceitos leccionados em ciclos anteriores, como por exemplo a classificação dos prismas e das pirâmides de acordo com o polígono da base e a noção de polígono e de sólidos geométricos.

Os materiais manipuláveis

O material manipulável, utilizado na realização desta tarefa, permitiu aos alunos explorarem as características dos sólidos geométricos, através da sua manipulação e visualização. A generalidade dos grupos parece que conseguiu, com o auxílio do material, identificar semelhanças e diferenças entre os vários sólidos contidos na caixa, como é possível verificar pelos diálogos transcritos. Assim sendo, o contacto e manipulação dos sólidos e não o seu desenho, permitiu que os alunos, aos poucos, fossem descobrindo as suas características, não sendo a professora a transmiti-las, as quais seriam aprendidas apenas por memorização. É difícil perceber as características de um objecto tridimensional quando o estudamos bidimensionalmente.

A utilização dos modelos dos sólidos em madeira captou a atenção dos alunos, verificando-se um maior interesse e empenho na resolução da tarefa, até daqueles com maiores dificuldades na disciplina. Os materiais permitiram que os alunos interagissem uns com os outros, partilhando e comunicando os resultados encontrados e estratégias utilizadas.

A manipulação do material colocado à disposição dos alunos constituiu uma estratégia seleccionada pelos grupos para a exploração da tarefa. Contudo, na realização da tarefa, os alunos utilizaram outros processos matemáticos. Utilizaram o processo de organização, pois com base nos dados recolhidos, relativamente às características dos sólidos, os alunos agruparam-nos tirando partido da estratégia utilizada. Assim, a visualização do modelo dos sólidos, permitiu aos alunos detectarem algumas regularidades entre os sólidos contidos na caixa. E foi a partir dessas regularidades que foram construindo o seu próprio conhecimento, relativamente às características destes. De igual modo, utilizaram-no na verificação e confirmaram a veracidade das suas afirmações. O material manipulável utilizado favoreceu a comunicação entre os alunos. O diálogo que estabeleceram, permitiu que relatassem oralmente os seus raciocínios, levando à colocação de questões e pedidos de esclarecimento por parte dos colegas. Numa fase inicial, os alunos manifestaram dificuldades em trabalhar em grupo, pois não estavam habituados a exporem as suas ideias, a ouvirem e confrontarem as sugestões apresentadas pelos colegas, dependendo, para isso, da professora. Contudo, a atitude da docente, para que os grupos discutissem as questões levantadas pelos mesmos e utilizassem o material para verificar os seus raciocínios, contribuiu para aumentar a interacção e a comunicação entre os alunos dos vários grupos. Com o registo, pretendia-se que os alunos reflectissem sobre o trabalho realizado. Nas respostas observadas na proposta de trabalho surgem evidências de que os alunos analisaram as várias características dos sólidos geométricos, pois agruparam-nos por características comuns.

A discussão em grupo e em grande grupo permitiu aos alunos verificarem que, os sólidos contidos na caixa, podem agrupar-se de várias formas, levando-os a compreenderem que a questão 2. tem várias soluções, todas elas correctas.

4.2. Tarefa “ Fórmula de Euler”

A tarefa “Fórmula de Euler” (anexo 4) foi fornecida aos alunos no dia 23 de Março, sendo realizada num bloco de noventa minutos. A forma de recolher e organizar os dados para a resolução da tarefa estava explícita no enunciado. Pretendia-se que os alunos, com base na observação e análise dos poliedros construídos com as peças de polidron, registassem na tabela o número de faces, arestas e vértices e procurassem descobrir a relação entre estes para um poliedro qualquer.

Cada um dos grupos formado nas aulas anteriores recebeu várias peças de polidron e a ficha de trabalho. O início da aula foi marcado por alguma dificuldade na construção dos sólidos, uma vez que os alunos não conseguiam encaixar as peças. Deste modo, a professora optou por fazer algumas considerações para toda a turma, em relação ao uso do material. Após algum tempo de familiarização com os materiais e ultrapassada essa dificuldade inicial, os alunos começaram a responder às questões da ficha de trabalho. A professora durante o período de trabalho em grupo, circulou entre os grupos e foi colocando questões aos alunos. O apoio, concebido por esta, foi no sentido de ajudar os alunos a ultrapassarem certas dificuldades; por isso, quando era solicitada questionava os alunos colocando regularmente a pergunta porquê, levando-os a analisar e reflectir sobre o seu trabalho. Também, em diversos momentos, questionou os elementos de cada grupo de modo a poder observar se estes tinham conhecimento das conclusões a que o grupo havia chegado.

A primeira questão remetia os alunos para a construção de vários poliedros. Mas teriam, em primeiro lugar, de identificar os sólidos através das faces que os compunham. Isto implicaria ter presente alguns conceitos abordados em anos anteriores, nomeadamente as características dos prismas e das pirâmides.

No grupo G1, aquando da construção dos sólidos geométricos surgiram algumas dúvidas referentes às características do material em si, o que evidencia o facto de os alunos nunca terem trabalhado com este tipo de material. O facto do material ter peças de várias cores não era relevante para a resolução da tarefa. O importante era os alunos perceberem que com as várias peças (triângulos, quadrados, rectângulos, pentágonos e hexágonos) podiam formar vários poliedros e que essas peças eram as faces dos sólidos que pretendiam construir. No entanto, surgiram algumas dúvidas em relação a este aspecto. Outra dúvida que surgiu em relação ao material distribuído foi o facto dos alunos terem apenas "o esqueleto" do sólido. Quando **B.** acabou de construir o paralelepípedo rectângulo, olhou atentamente para o sólido e disse:

> **B.:** Professora, já está! Professora, isto a seguir leva rectângulos aqui, não leva?
>
> **Prof.:** O objectivo é o de construir a estrutura.
>
> **B.:** Só o esqueleto.
>
> **Prof.:** Exactamente.

Numa das alíneas da questão 1. era pedido aos alunos para construir um sólido à escolha do grupo. Mas, no grupo G1, todos os elementos queriam construir um sólido diferente, o que originou a desmontagem dos sólidos anteriormente construídos. O aluno **B.** queria construir um octaedro, contudo não o conseguiu. A razão pela qual não o conseguiu deve-se ao facto das faces do octaedro serem triângulos equiláteros, num total de oito, e o **B.** estava a utilizar triângulos isósceles. Este aspecto e o facto dos alunos disporem de várias peças de polidron que podiam usar para a exploração da tarefa parece ter originado um maior dispêndio de tempo do que o inicialmente previsto para a construção dos sólidos. Já tinha decorrido mais de metade da primeira aula, quando os alunos passaram para a resolução das outras questões propostas na tarefa.

Relativamente à questão 2., parece que os alunos não tiveram grandes dificuldades em preencher a tabela que lhes permitiria começar a formular as primeiras conjecturas. Os alunos, ao manipularem modelos de sólidos, vão, aos poucos, descobrindo propriedades dos prismas e das pirâmides. A transcrição seguinte evidencia a tentativa de estabelecer relações, por parte dos alunos; ou seja, os alunos tentam relacionar o número de vértices com o número de lados do polígono da base.

B.: São dez, são dez.

N.: [apontando para os vértices do prisma hexagonal.] 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12.

V.: São dois vezes seis.

R.: São 13.

B.: Isso é um hexágono ou um pentágono?

N.: Hexágono.

B.: Como é que pode ser 13? São duas bases … São dois vezes seis não dá treze.

R.: A mim deu-me porque eu contei mal.

B.: Eu também me enganei! Pensei que era um pentágono!

Os grupos envolviam-se na resolução da tarefa, apesar de nem todos os elementos se esforçarem por participar no trabalho. Por exemplo, um elemento do grupo G1, o **V.** andava fascinado com o facto da pirâmide triangular caber dentro do cubo. Por essa razão, não estava atento ao que os colegas faziam.

V.: Tira a pirâmide sem desmanchar.

B.: Isto não sai daí!

V.: Experimenta tirar a pirâmide [triangular] de dentro do cubo.

B.: Eu sempre quis ter um brinquedo destes.

V.: Vê, é fácil.

Passados alguns instantes, **V.** olha para o **B.** com um ar irritado e diz:

V.: Vocês já vão muito adiantados.

B.: [pegando no cubo] Está mais atento. Agora o cubo, número de faces seis, número de vértices oito, número de faces mais o número de vértices dá catorze.

V.: Quantas arestas tem?

B.: Calma! Deixa-me escrever na folha. São dezasseis.

N.: Preciso de mais três [faltam três sólidos para completar a tabela] Este [pirâmide pentagonal].

No diálogo anterior, o **B.** comete um erro na contagem do número de arestas do cubo, contudo este não é detectado por nenhum dos elementos do grupo, pois o número de arestas é doze e não dezasseis. O facto de ser considerado um bom aluno, tanto pela professora como pela turma pode ter estado na origem desta aceitação. **B.** não utiliza o sólido construído para contar as arestas. Fá-lo mentalmente, mas nenhum elemento confirma através da visualização dos vértices do sólido, nem o contrária.

Na questão 3., a professora pretendia que os alunos visualizassem, em todos os sólidos construídos, que o número de arestas que estão ligadas a cada vértice é sempre o mesmo. Porém o facto de os alunos terem desmanchado alguns dos sólidos levou a que não verificassem em todos os sólidos (cinco) pedidos para construir. Apenas verificaram em quatro - no cubo, na pirâmide triangular, no prisma hexagonal e no paralelepípedo (sólido construído pelo **B.**). O facto de não terem verificado se o mesmo acontecia na pirâmide pentagonal e na pirâmide quadrangular (construída pelo **N.** como sendo o sólido a sua escolha) fez com que chegassem a uma conclusão errada. Apesar de **B.** não conseguir construir o sólido com o **V.**, a quem tinha pedido ajuda, parece evidente, pelo desenho, que conhece algumas características do sólido. O aluno demonstra saber que o octaedro é constituído só por triângulos, embora não se recordasse que eram triângulos equiláteros e que, em cada vértice se encontravam quatro arestas. Este facto é ilustrado na seguinte situação:

B.: Professora, dava quatro.

[B. desenha na sua folha supostamente o octaedro].

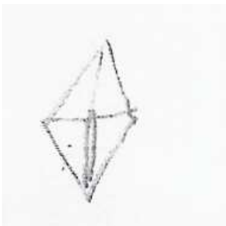


Figura 1 - Desenho do octaedro do B.

B.: Era este sólido mais ou menos que eu queria construir. Se a professora reparar tem uma, duas, três, quatro arestas num vértice.

Prof.: Sim, está certo. No octaedro em cada vértice encontram-se quatro arestas. Têm de escrever as vossas conclusões na folha.

[A professora afastou-se]

N.: Eu meti assim em todos os outros sólidos que verificamos o número de arestas que estão ligadas a cada vértice é sempre o mesmo, o três.

B.: Não é sempre três, pode ser quatro. O octaedro é quatro.

N.: Está bem!

B.: Basta dizer que o número de arestas que estão ligadas a cada vértice é sempre o mesmo.

R.: E que nos prismas é sempre três arestas [ligadas a cada vértice].

Os alunos do grupo G1 concluíram, relativamente à questão 3., que o número de arestas que estão ligadas a cada vértice é sempre o mesmo; no entanto não tem de ser necessariamente de três arestas. Verificaram que, para o cubo, o prisma hexagonal, a pirâmide triangular e o paralelepípedo, em cada vértice encontram-se três arestas, mas que, no caso de por exemplo do octaedro, concorrem, em cada vértice, quatro arestas. Como a maior parte dos sólidos que visualizaram eram prismas, concluíram que, no caso dos prismas, o número de arestas ligadas a cada vértice é sempre três. O facto de terem verificado para um reduzido número de sólido pode ter estado na origem de não terem observado que existem sólidos em que o número de arestas ligadas a cada vértice não é o mesmo.

Relativamente à questão 4., os alunos do grupo G1 não sentiram dificuldades em responder, uma vez que, através da observação da tabela, constataram que tal não se verificava.

N.: Tens de dizer se estás de acordo.

B.: Com o quê?

N.: [Lendo a questão quatro da tarefa] Que para saber o número de faces de um sólido geométrico basta contar o número de arestas e multiplicar por dois?

R.: Não está certo.

N.: Porquê?

R. [apontando para a tabela**]:** Na pirâmide [triangular] por exemplo, são seis arestas se multiplicares por dois dá doze.

N.: Ah! Já percebi.

B.: São seis faces.

No episódio é visível que nem todos os elementos do grupo compreenderam o enunciado da questão 4.. Contudo, o **R.**, apontando para a tabela, tenta explicar ao **N.** a forma como chegou à conclusão de que aquela afirmação é falsa. O exemplo apresentado foi o suficiente para o N. concordar com a justificação apresentada pelo colega. Só quando às dúvidas ficaram esclarecidas é que os alunos passaram ao registo escrito da justificação validada pelo grupo.

Depois de registarem na folha, os alunos começaram a resolver a questão 5. da tarefa. Todos os alunos do grupo estiveram envolvidos na resolução da tarefa, quer seja dando a sua opinião, trocando ideias ou esclarecendo dúvidas com os colegas. Por exemplo, num dado momento da aula na resolução da tarefa, **V.** quer ajudar o grupo. Porém, faz uma afirmação errada. Verificamos que os elementos do grupo tentam explicar-lhe o motivo pela qual não faz sentido aquilo que disse. Podemos observar, neste pequeno diálogo, a cooperação entre todos os elementos do grupo para que o **V.**

compreenda que os elementos (vértices, faces e arestas) de um cubo não se alteraram com o tamanho da aresta. Trabalhando cooperativamente, o **V.** teve acesso a uma série de interacções com os restantes elementos do grupo, que lhe possibilitaram a compreensão de um determinado saber matemático. Deste modo, ao interagir com os colegas de grupo, o **V.** parece ter compreendido.

> **B. [**agarrando no cubo e contando o número de arestas**]:** Quatro mais quatro dá oito, mais quatro dá doze. Está bem.
>
> **N.:** Mas aqui diz que é 24 quer dizer que é o dobro de 12.
>
> **V.:** Quer dizer que é um quadrado maior do que este, com mais arestas ...
>
> **B.:** Não, porque o cubo não aumenta o número de arestas pela sua dimensão, pode ser deste tamanho [fazendo um gesto com as mãos] que vai ter sempre doze arestas.
>
> **N.:** O que importa é …
>
> **R.:** Não são as dimensões.
>
> **V.:** Não!
>
> **B.:** Ele nunca muda a forma, até pode ter dez quilómetros de diâmetro … diâmetro não … de largura, de comprimento e de altura, vai ter sempre doze arestas.
>
> **R.:** Não modifica a forma, pode ser mais pequeno ou maior.
>
> **B.:** Tem sempre seis faces, oito vértices e doze arestas.

O facto dos restantes elementos constarem que a afirmação do **V.** era falsa, demonstra que os alunos estão atentos às opiniões e sugestões dos colegas de grupo, ou seja, não ignoram as afirmações dos colegas e reflectem sobre aquilo que é dito em grupo.

Em relação a questão 5., **B.** chegou rapidamente às conclusões pretendidas. Tal facto não inibiu os outros elementos de grupo de o questionarem, pois queriam perceber onde e porquê falhou o raciocínio, como comprova o seguinte diálogo:

> **N.:** [Lendo o enunciado da questão número cinco]: Onde é que este raciocínio falha? Como será possível no caso do cubo saber o número de arestas a partir do número de faces?
>
> **R.:** Cada face tem quatro arestas e o cubo tem seis faces, ou seja, ele multiplicou seis por quatro e deu 24.
>
> **B.:** Ele multiplicou seis por quatro o que queria dizer era isto [demonstrando com o sólido] aqui tinha quatro e contava este novamente e depois contava com este novamente. Estás a perceber?
>
> **N.:** Sim, está errado.
>
> **B.:** Ou seja …
>
> **N.:** Ou seja, seis vezes quatro dá vinte e quatro.
>
> **B.:[**olhando para o **N.]** Tenta contar se realmente contando desta forma dá vinte e quatro arestas.

Note-se que os alunos do grupo tiveram alguma dificuldade em compreender as explicações do colega. Contudo, **B.** esforçava-se para que todos os elementos do grupo percebam. Mas, como não consegue, solicita a professora em primeiro lugar para legitimar a sua resposta e só depois para o ajudar a explicar aos colegas. Como demonstra o diálogo seguinte:

R.: Como é que é?

N.: [franzindo a testa] E porque é que é assim?

B.: Ele ao contar … ele enganou-se, ele repetia sempre, contava duas vezes a mesma aresta ... repetia, dando o dobro do resultado original, não.

N.: Do resultado …

B.: Verdadeiro.

N.: Porquê?

B.: Se repetia as arestas…Contava a mesma aresta duas vezes. Professora … Professora … ele aqui … ele contava cada aresta duas vezes, por exemplo, um, dois, três, quatro, um dois, três, quatro, repetia esta.

Prof.: Sim. Quantas arestas têm aqui?

B.: São doze arestas. É como se contássemos cada aresta duas vezes.

Prof.: Reparem nesta aqui? [aponta para a aresta do cubo] É comum a estas duas faces.

N.: Pois é!

R.: Ah, pois! É só isso?

A intervenção da professora revelou-se útil, pois auxiliou o **B.** na explicação ao grupo do seu raciocínio.

Na questão 6. os alunos não tiveram muitas dificuldades em descobrir a relação entre o número de vértices, o número de faces e o número de arestas de um poliedro. No início, quando observaram a tabela, estavam à tirar conclusões erradas devido a nesta constar que o número de arestas de um cubo é dezasseis. Por isso, chegaram a conclusão que o número de vértices com o número de faces era sempre ou menos dois ou mais dois que o número de arestas. Contudo, voltaram a contar o número de arestas, vértices e faces do cubo, provavelmente porque era o único caso que não respeitava a regra por eles “descoberta”. Desta forma os alunos chegaram a Fórmula de Euler. Os alunos, ao explorarem a tabela, generalizaram a conjectura a que chegaram a partir dos casos concretos que observaram (cinco poliedros). Contudo, não arranjam uma explicação lógica para a aceitação da conjectura que descobriram; basearam-se apenas na contagem. A troca de ideias e a partilha de informação entre todos os elementos do grupo foi uma constante. Podemos constatar, pela transcrição que se segue, o auxilio dado pelos elementos do grupo ao **N.** numa tentativa de o levar a perceber o erro que cometeram de forma a esclarecer as suas dúvidas.

B.: O número de arestas do cubo da tabela está errado … vê.

N.: Mas às vezes é mais dois?

B.: Não temos aqui.

N.: Não.

B.: Olha para a tabela … observa. É sempre menos dois. Olha para o número de arestas do cubo.

N.: Ah! É doze e não dezasseis.

B.: Disseste ainda à pouco, por isso mudei e já deu menos dois.

[N. altera na folha o número de arestas do cubo e coloca doze na tabela].

R.: Olha, os dois últimos agora.

[N. fica a olhar para a sua folha, como quem tenta ainda perceber se é mais ou menos dois].

N.: [abanando a cabeça em jeito de concordância] Mais dois.

B.: menos dois… sim, mais dois. Este [o número de faces com o número de vértices] tem menos dois do que este [número de arestas], as também podia ser o número de vértices mais o número de faces é igual ao número arestas mais dois.

V.: Estão os dois certos.

B.: A soma do número de faces com o número de vértices é sempre menos dois do que o número de arestas. Percebeste?

N.: Sim.

O **N.** embora tivesse dito que o número de arestas do cubo era dezasseis não compreendeu que esse facto alterava a conjectura que inicialmente tinham formulado. No entanto, o **B.** clarifica a dúvida colocada pelo **N.** com base nos dados disponíveis na tabela. Os alunos do grupo G1 revelaram-se envolvidos na resolução da tarefa proposta, pois todos intervieram e colaboraram na sua resolução.

No grupo G2 o desenvolvimento da tarefa decorreu de forma diferente da atrás descrita. A presença do material serviu para motivar os alunos para a resolução da tarefa. A motivação revelou-se eficaz porque despertou o interesse dos alunos para o assunto que a professora pretendia abordar. Depois de distribuir a tarefa e as peças de polidron, os alunos começaram a ler o enunciado desta, em silêncio. Passados alguns segundos, **M.** interrompe os restantes elementos do grupo e distribuiu por cada elemento a construção de um sólido. Assim, cada aluno teria a oportunidade de manipular as peças de forma a construir um sólido, contribuindo para a resolução da tarefa. Inicialmente, a escolha do sólido que cada aluno iria construir gerou alguma discussão no seio do grupo.

Em relação a questão 1., o grupo não revelou grandes dificuldades. Conseguiram construir os sólidos pedidos, embora na alínea c) tenham identificado mal o sólido, uma vez que pensaram que se tratava do prisma pentagonal. Contudo, a professora questionou os alunos de forma a que se apercebessem do seu erro. Na alínea c) era pedido um sólido em que a base era um pentágono e as faces laterais fossem triângulos; logo, o sólido que deveriam construir, era uma pirâmide pentagonal e não um prisma pentagonal.

Ma.: Professora podemos tirar mais peças?

Prof.: Falta o quê?

G.: Para fazer este [apontando para a questão um alínea c]?

M.: Prisma pentagonal.

Prof.: Será um prisma pentagonal?

C.: Diz base pentagonal e faces triangulares.

Prof.: O que é que é? É um prisma? Quantas bases têm os prismas?

M.: Duas.

Prof.: Quais são os sólidos com faces triangulares?

Ma.: As pirâmides. Ainda falta um!

Uma das dificuldades dos alunos é a de não conseguirem atribuir a designação matemática correcta aos entes geométricos. Como podemos constatar pelo seguinte diálogo:

Prof.: O que é que distingue uma pirâmide de um prisma?

Ma.: Termina em bico.

M.: Tem só uma base e as faces laterais são triângulos.

Com as peças de polidron os alunos poderiam construir vários poliedros, uma vez que eram figuras geométricas planas. Contudo, surgiram algumas dúvidas se poderiam, ou não, construir não poliedros. A professora aproveitou essa dificuldade para intervir junto do grupo:

G.: Qual é o nome disto? … Isto é um cone.

Prof.: [agarrando na pirâmide triangular] Isto é um cone? O que é um cone? Diga …

G.: [apontando para as faces do tetraedro] Isto tem faces… Tem estas faces...

Prof.: As faces são … O cone como é que é?

G.: É redondo com este material não existe nada redondo.

Prof.: Como assim?

G.: Eu não consigo fazer com este material um cone.

Prof.: Porquê? [apontando para a caixa de polidron] porque isto são …

M.: Figuras planas.

Talvez pelo facto da **G.** não ser boa aluna em Matemática, isto de acordo com a avaliação da professora, e dos alunos também terem a sua avaliação do que é ser bom aluno, parece que os colegas não lhe prestaram muita atenção.

Durante a resolução da tarefa é possível observar, nesta aluna, períodos em que parece ausente, em que se isola, com períodos em que simplesmente trabalha em conjunto com os colegas. A professora, contudo, chama a atenção do grupo para que compreendam que trabalhar cooperativamente não significa que os restantes membros podem avançar na resolução da tarefa mesmo que um aluno tenha alguma dúvida. Esta pretende mostrar aos restantes elementos que, na resolução da tarefa, é necessário o contributo de todos.

Prof.: Agora a G. vai contar.

G.: Número de faces um, dois, três, quatro.

M.: Quatro ... Deixa-me contar.

G.: Não, é a minha vez. Número de vértices quatro.

Ma.: É quatro e quatro. Quantas arestas são?

G.: Um, dois, três, quatro, cinco, seis. São seis arestas.

Ma.: Tu [referindo a **G.**] não estás a escrever?

Enquanto que, alguns alunos, ainda sentem necessidade de apontar para cada elemento do sólido, para auxiliar na contagem, outros já conseguem relacionar o número de faces, arestas e vértices de uma pirâmide com o polígono da base. Parece evidente que para alguns alunos a visualização e manipulação dos sólidos ajudaram a ultrapassar certas dificuldades que poderiam sentir se não estivesses na presença destes. Como comprova o seguinte diálogo:

M.: Prisma hexagonal … Agora sou eu. [agarrando no sólido] Tem seis aqui [base superior] e seis em baixo, dá doze.

Ma.: Doze …

M.: Vértices. Seis mais dois dá oito faces. Três vezes seis dezoito … arestas.

G.: Como?

M.: Tem seis em cima, seis à volta e seis em baixo dá dezoito.

G.: Ah! Já percebi!

Na questão 2. surgiram algumas dúvidas na contagem do número de vértices, arestas e faces dos poliedros. Mas, progressivamente, foram descobrindo formas de garantir a não repetição do mesmo elemento ou de não se esquecerem de contar outras:

Ma.: Faces … um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito faces.

M.: Não é!

Ma.: Tem seis faces.

Prof.: Porque não podem ser oito?

M.: Repetiste duas faces.

Ma.: Repeti?

Prof.: Tens de manter o sólido na mesma posição … ao rodar voltas a contar a mesmas faces.

No preenchimento da tabela não surgiram dificuldades, uma vez que os alunos estavam atentos, às contagens dos colegas. Por isso, quando alguém não estava de acordo, imediatamente mostrava a sua discordância e voltava a contar. O material revelou-se útil na contagem dos elementos de cada um dos sólidos. O grupo G2 manifestou dificuldades na interpretação do enunciado da questão 3.. Por isso, solicitaram a ajuda professora.

Prof.: Quero saber se acontece a mesma coisa com todos os outros sólidos … experimente noutros. Com este [prisma hexagonal] acontece?

M.: Acontece, são três arestas em cada vértice.

Ma.: Este [pirâmide triangular] também.

Prof.: Esse [pirâmide triangular] também. E este [pirâmide quadrangular] se faz favor?

M.: São quatro.

Prof.: Saem quatro arestas em todos os vértices?

Alunos do grupo: Não.

Prof.: Então será que são o mesmo número de arestas ligadas em cada vértice?

M.: Não.

Prof.: Acontece em todos os sólidos?

M.: Em quase todos.

Prof.: Quais? Destes que vocês têm aí, digam em quais os sólidos que isso acontece?

Ma.: Com os prismas.

Prof.: Vamos lá escrever na folha.

Efectivamente, não teriam conseguido resolver a questão apresentada se a professora não os tivesse auxiliado, colocando questões que os levassem a compreender a questão proposta.

Em relação à questão 4., o grupo resolveu-a com relativa facilidade, uma vez que, observando a tabela, os alunos arranjavam rapidamente vários contra-exemplos de como aquela regra falhava. Com esta pergunta pretendia-se que os alunos compreendessem que para refutar uma regra bastava encontrar um contra-exemplo que a levasse a rejeitar.

Ma.: [Lendo o enunciado da questão quatro] Duas faces contínuas têm uma aresta comum. Verifica que é assim. Então será que, para saber o número de faces de um sólido geométrico, basta contar o número de arestas e multiplicar por dois?

M.: [Agarrando na pirâmide pentagonal] Estás de acordo? … Na pirâmide pentagonal isso não se verifica.

Ma.: Olha para a tabela. Se multiplicares o número, de arestas por dois não é igual a coluna do número de faces? Professora venha cá! … Professora venha cá.

Prof.: Já multiplicaram por 2?

C.: Dá vinte [multiplicando o número de arestas da pirâmide pentagonal por dois].

Prof.: Então, será que para saber o número de faces de um sólido geométrico, basta contar o número de arestas e multiplicar por dois?

Ma.: Não.

A professora foi solicitada para validar a resposta à questão 4., o que revela alguma dependência por parte do grupo em relação à docente, encarando-a como a detentora do saber.

Relativamente à questão 5., os alunos através da observação do cubo teriam que responder as seguintes perguntas "Será, então, que o cubo tem 24 arestas? Onde é que este raciocínio falha? Como será possível no caso do cubo saber o número de arestas a partir do número de faces?". Os alunos responderam que o cubo não tinha 24 arestas, mas sim 12 arestas e que para saber o número de arestas de um cubo bastava multiplicar o número de faces por dois. No entanto, não sabiam justificar o motivo pela qual o raciocínio falhava. Como tal, solicitaram a professora:

Prof.: Não. Onde é que o raciocínio falha?

Ma.: Cada face tem quatro arestas e tem seis faces.

Prof.: Que cálculo é que estamos a fazer para dar vinte e quatro?

Ma.: Multiplicar.

Prof.: Pode ser assim?

M.: Não.

Prof.: Porquê? O que é que estas duas faces têm em comum?

M.: Estão ligadas.

Prof.: Estão ligadas através do quê?

Ma.: Das arestas.

Prof.: Falha porquê? Porque há arestas comuns …Tem quatro arestas em cada face, mas esta aresta é comum a esta e esta face. Assim, como está é comum a esta face, para saber o número de arestas é multiplicar o número de faces por quatro. Vocês olharam para a tabela e verificaram que não podia ser. Logo, não é a tabela que está mal, mas sim que isto não se verifica.

A última questão da tarefa não levantou dúvidas ao grupo G2, uma vez que os alunos, ao observarem os valores numéricos das duas últimas colunas da tabela, descobriram a relação existente entre o número de faces, de vértices e de arestas, ou seja, a Fórmula de Euler. Também como aconteceu no primeiro grupo os alunos do grupo G2 generalizaram a partir dos casos concretos que observaram esta fórmula.

A correcção da tarefa foi realizada nos últimos dez minutos da aula. Embora a tarefa estivesse bastante orientada, havia questões (3, 4 e 5) cujo objectivo era aumentar as discussões no seio dos grupos. Ainda que de forma muito simples, os alunos começavam a colocar conjecturas e a argumentar em sua defesa.

Síntese

A utilização das peças de polidron entusiasmou bastante os alunos, muito embora inicialmente estes sentissem alguma dificuldade no encaixe das peças com vista a formar os sólidos pedidos. A maior parte dos grupos começou por distribuir tarefas relativamente à construção dos sólidos. Os alunos não manifestaram grandes dificuldades em identificar as figuras geométricas necessárias à construção dos sólidos pedidos, embora no grupo G1 se tenha verificado a falta de conhecimento, por parte dos alunos, relativamente as faces do octaedro. Os alunos não sabiam que o octaedro era composto por oito triângulos equiláteros, daí o facto de não o terem conseguido construir.

O interesse manifestado pelos alunos foi uma constante e o trabalho de grupo pautou-se pela participação e intervenção de todos os elementos do grupo. O ponto de partida para este interesse terá residido no uso das peças de polidron para a realização da tarefa.

Os alunos solicitaram a professora para que esta lhes esclarecesse certas dúvidas por eles colocadas e confirmasse alguns dos resultados obtidos. Esta atitude revela alguma dependência em relação à professora, encarando-a como a detentora do saber. No entanto, a postura interrogativa da professora, optando por responder com questões às dúvidas dos alunos e o facto de pedir explicações e justificações para as suas afirmações, contribuiu para que os alunos tivessem um papel activo na realização da tarefa. Com esta sua atitude, pretendia desenvolver o pensamento matemático dos alunos e torná-los mais autónomos.

Relativamente ao trabalho dos discentes, notou-se uma certa evolução no sentido de inter-ajuda e partilha de informação, relativamente à primeira tarefa (anexo 3), em que os alunos mostraram algumas dificuldades em trabalhar, de forma cooperativa, com os colegas de grupo. Todos os alunos se envolveram no trabalho do grupo, embora, por vezes, fosse evidente a liderança exercida por algum dos seus membros. Por exemplo, no grupo G1 são visíveis, algumas manifestações de liderança por parte do **B.** na coordenação da actividade do mesmo. Esta liderança assume várias formas, que se traduzem na apresentação de respostas às questões da tarefa e sua explicação aos restantes elementos, no incentivo aos colegas para participar ou, ainda, no auxílio da rectificação quando alguém afirma algo que considera errado.

A dinâmica de grupo foi intensa. A partilha de ideias e opiniões foi evidente, destacando-se algumas discussões que fizeram aumentar à participação dos alunos. Estes recorriam, muitas vezes, ao material manipulável para os ajudar a perceber e a explicarem-se aos colegas. Apesar da linguagem predominante ser a que usam normalmente no seu dia-a-dia, foram usados, com alguma frequência, termos específicos de Geometria.

É possível constatar, nalguns diálogos transcritos, os alunos a explicarem aos seus colegas de grupo os seus raciocínios. Por exemplo, o B. na questão 5. compreendeu onde falhava o raciocínio e, imediatamente, tentou-o explicar aos seus colegas de grupo.

Alguns dos processos matemáticos utilizados pelos alunos na realização desta tarefa foi a recolha de dados, especialização, formulação de conjecturas e generalização. Os diferentes grupos começaram por construir os sólidos geométricos pedidos e foi a partir deles que recolheram os dados necessários ao preenchimento da tabela que constava na tarefa. A análise (processo de raciocínio) desta permitiu que, através de alguns exemplos (especialização), os alunos formulassem uma conjectura, tendo compreendido a necessidade de introduzir um valor numérico que não constava na tabela. É de referir que a verificação desta conjectura ficou limitada aos dados contidos na tabela, não utilizando o processo de especialização para testar essa mesma conjectura, generalizando-a.

Os grupos evidenciaram saber relacionar o número de faces, arestas e vértices do prisma ou pirâmide com o polígono da base, revelando desta forma serem capazes de aplicar os conhecimentos anteriormente adquiridos de modo correcto à situação em estudo. O facto de mobilizarem esses conhecimentos poderá constituir um indício de que os alunos os têm interiorizados.

Os materiais manipuláveis

Inicialmente, os alunos passaram por um período de adaptação ao material distribuído. A novidade fez com que ocupassem alguns minutos a manipular e a estudar o material disponibilizado.

A construção dos sólidos, na sua representação tridimensional, com recurso aos polidrons, facilitou a visualização das características de cada um deles: as figuras planas que compunham as faces do sólido, o número de vértices, arestas e faces e o número de arestas que estão ligadas a cada vértice. A representação de uma figura tridimensional no plano trazia dificuldades para os alunos. Por exemplo, na visualização das arestas ocultas, das faces não visíveis, dificultando assim, a abstracção por parte dos alunos. O material utilizado na tarefa permitiu que os alunos conseguissem entender conceitos ligados à própria formação dos sólidos, tais como a planificação e a sua formação a partir das figuras planas. Neste sentido, os alunos foram construindo os sólidos geométricos, visualizando as suas características, relacionando-os com objectos do quotidiano e familiarizando-se com os entes geométricos. Os alunos, ao identificarem os elementos de cada sólido, estabeleceram uma relação entre o número de vértices, arestas e faces, conhecida pela Igualdade de Euler.

No decorrer da tarefa, verificamos que muitas vezes o material manipulável utilizado foi útil na justificação. As afirmações dos alunos são validadas muitas vezes por verificação directa, através da manipulação dos modelos concretos ou da tabela preenchida com base nestes, como é o caso das questões 4., 5. e 6.. Aliás, a manipulação e visualização dos modelos concretos dos sólidos permitiu que os alunos recolhessem dados que levaram à formulação de conjecturas: a relação existente entre o número de vértices, o número de faces e o número de arestas de um poliedro, a relação entre o número de faces, arestas e vértices de um prisma ou de uma pirâmide com o polígono da base.

O recurso aos polidrons parece ter contribuído para que os alunos construíssem o seu conhecimento através da observação, visualização e manipulação de modelos concretos de sólidos.

4.3. Tarefa " Planificação de sólidos"

A tarefa "Planificação de Sólidos" (anexo 5) foi realizada num bloco de noventa minutos no dia 27 de Março. A proposta de trabalho tinha como objectivo que os alunos descobrissem as possíveis planificações para o tetraedro e para o cubo, utilizando as peças de polidron.

A professora, antes de distribuir a tarefa, perguntou aos alunos se sabiam o que era a planificação de um sólido. Os alunos, como na tarefa anterior, haviam trabalhado com as peças de polidron na construção dos sólidos, criaram a noção do que seria planificar um sólido.

Ma.: Construir.

Prof.: Construir… um de cada vez. Mariana explique-se? Construir como?

Ma.: Fazendo.

Prof.: Como é que construíram os sólidos? … Como?

Ma.: Juntando.

Prof.: Juntando o quê?

Ma.: As peças.

Prof.: [agarrando no sólido e mostrando aos alunos] Por exemplo, se fosse para fazer a planificação deste [tetraedro] sólido, o que é que vocês faziam?

B.: Eu abria o sólido … é como se ele ficasse aberto.

Prof.: Então o que é que significa planificar um sólido? É abri-lo, é desmancha-lo, é desmontá-lo sem separar as faces. Como já foi referido as faces dos poliedros são…

B.: Planas.

Após a professora relembrar aos alunos a noção de que planificar um sólido é, simplesmente, desmontá-lo, esta distribuiu a tarefa aos alunos e leu-lhe o enunciado. Aí explicava, claramente, o que era para fazer. O objectivo desta tarefa era explorar diferentes planificações de sólidos, usando as peças de polidron. Pretendia-se que os alunos construíssem sólidos, passando do plano ao espaço e, depois, descobrissem planificações, passando do espaço ao plano.

A tarefa estava dividida em duas partes. Na primeira parte, os alunos deveriam começar por construir um tetraedro e depois "abrir" a construção para descobrir uma possível planificação para o sólido. No grupo G1, foi o **V.** quem construiu o tetraedro e quem abriu o sólido, obtendo deste modo uma planificação do tetraedro. O aluno não teve dificuldade em encontrar uma das planificações do sólido. A questão três pedia para desenhar no ponteado essa planificação, levando-o a compreender que a sua planificação permite representá-lo no plano.

B.: É para planificar?

V.: Sim, é para abrir.

Depois de construir o tetraedro Vítor abre o sólido e obtém a seguinte planificação.

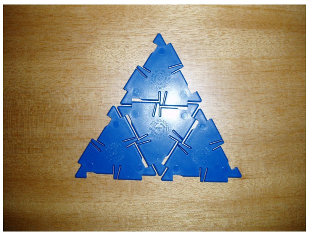


Figura 2 - Primeira planificação do tetraedro

B.: Fica mais fácil para desenhar.

Ao observar a planificação do tetraedro, os alunos olham-no num todo e, como tal, o que visualizaram foi um triângulo equilátero. Como tal construíram primeiro o triângulo maior e só depois dividiram-no em quatro triângulos equiláteros, sendo esta a estratégia adoptada para desenhar a planificação do tetraedro.

Notou-se que os alunos perceberam claramente o tipo de tentativas que deveriam fazer de forma a descobrir outras planificações para o tetraedro. Os alunos começaram a investigar, usando as peças do polidron para as diferentes planificações possíveis do tetraedro. A utilização deste material torna mais simples "desmontar" este sólido, ou seja, planificá-lo. Após várias tentativas, os alunos conseguiram obter outra planificação para o tetraedro. Na transcrição seguinte, torna a ser visível a dificuldade dos alunos em atribuírem designações aos entes geométricos.

N.: Já está outra.

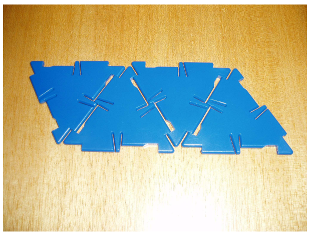


Figura 3 - Segunda Planificação do tetraedro

V.: Boa, fixe!

N.: É um rectângulo.

V.: Mas os lados são triângulos.

R.: Um rectângulo entre aspas.

Na generalidade, os alunos não relevaram dificuldades na resolução da primeira parte da tarefa.

A segunda parte da tarefa tinha como objectivo permitir que os alunos passassem do plano para o espaço. No grupo G1, logo após a distribuição da proposta de trabalho, os alunos começaram a lê-la. Na primeira questão, era pedido aos alunos que construíssem as figuras representadas na folha usando as peças do polidron distribuído pela professora e verificassem quais as que eram planificações do cubo. Como foi distribuído a cada grupo apenas seis quadrados do polidron, significava que apenas um aluno poderia manipular essas peças.

O entusiasmo com que os alunos do grupo G1 começaram a explorar a tarefa foi perfeitamente visível. Alguns alunos optaram por dar sugestões relativamente ao facto de ser ou não a planificação do cubo, mesmo antes de começarem a construir a primeira figura contida na tarefa. Com base na visualização das figuras da tarefa, os alunos argumentavam o motivo pela qual não era a planificação do cubo. Os alunos não precisaram de qualquer apoio inicial da professora, uma vez que perceberam claramente a acção que teriam de desenvolver nesta parte da tarefa.

B.: Já sei qual é!

R.: A dois pode ser.

B.: Ah! A cinco não dá.

R.: A cinco não dá, mas a dois dá.

Após o diálogo transcrito, o **B.** começou a construir as figuras da tarefa. Contudo, os alunos continuaram a dar a sua opinião relativamente ao facto de ser ou não a planificação do cubo. Note-se que todos os elementos do grupo contribuíram para a resolução da questão 1., dando sugestões, construindo as várias figuras com as peças de polidron ou explicando a razão pela qual não podem ser a planificação de um cubo.

B.: A primeira não dá.

N.: Há faces que ficam sobrepostas.

V.: A dois dá.

R.: Já tinha dito.

B.: Este dá, o três dá.

R.: Qual é o que vais fazer agora?

B.: O quatro. Estou a fazer por ordem.

R.: O quatro não vai dar.

B.: Estou a fazer por ordem, o quatro tem assinalado quatro.

R.: Está bem! Mas acho que não vai dar.

V.: Dá.

R.: Por acaso dá.

B.: O cinco dá.

R. e V.: (quase em simultâneo) Só tem cinco faces.

N.: O cubo tem seis faces.

B.: O seis.

R.: Eu digo não.

N.: O seis penso que dá.

B.: Não dá.

R.: Não, foi o que eu pensei.

V.: O sete.

B.: O sete … já faço.

R.: Esse não dá.

N.: Não dá porquê?

R.: Porque estão duas faces sobrepostas.

R.: Eu acho que dá.

B.: Dá.

As sugestões eram baseadas apenas na intuição, naquilo que lhes parecia. Embora a intuição seja uma ajuda preciosa, não chega para concluir a sua veracidade. Daí que embora se baseassem na intuição, não aceitavam como válidas sem verificar com a ajuda das peças de polidron. A utilização das peças do polidron é útil, pois permite verificar se de facto é ou não a planificação de um cubo. Embora na tarefa não fosse pedido para justificar a razão pela qual algumas daquelas figuras não eram planificações do cubo, os alunos iam-no fazendo. Concluíram que a figura cinco não poderia ser, visto que o cubo tem seis faces e que a figura um, seis e sete não são planificações do cubo porque existem faces que iriam ficar sobrepostas.

Em seguida, passaram para a questão dois onde era pedido para assinalar os quadrados que se vão sobrepor nas figuras que não são planificações. Inicialmente, os alunos, intuitivamente, comentavam uns com os outros os quadrados que se sobrepõem, mas como já perceberam que isso não é suficiente, arranjaram rapidamente uma estratégia com a ajuda das peças do polidron para verificar a sua veracidade. **B.** entrega ao **N.** as peças do polidron para que construa novamente as figuras que não são planificações do cubo. **N.** começa por construir a figura seis da tarefa.

N.: [apontando para a figura seis] Esta.

B.: Sim

N.: É este e este que se sobrepõem.

B.: Já viste?

N.: [apontando para os quadrados que se sobrepõem] Está sobrepõem-se a esta. Tu fazes assim … vê repara. Tu vês que está sobrepõem-se a esta, então tu abres e vês quais são.

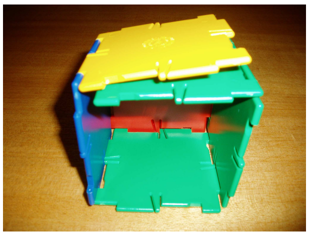


Figura 4 - Imagem seis da tarefa 3, parte 2

O **N.** arranjou uma estratégia que permitia, mais facilmente, identificar as faces sobrepostas, sendo esta apoiada pelos restantes elementos do grupo. Depois, procedeu à construção da primeira figura. E foi nesta que surgiram algumas dúvidas ao grupo G1.

B.: [Olhando para o **N.**] Constrói a primeira.

[Nuno constrói a figura um].

B.: Ai não se sobrepõem nenhuma.

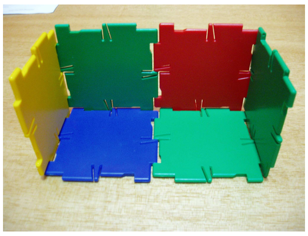


Figura 5 - Imagem um da tarefa 3, parte 2

Prof.: O que é que se sobrepõem?

N.: Nada.

Prof.: [Apontando para a figura um] Está figura é a planificação de um cubo?

Alunos do grupo 1: Não.

Prof.: Porquê?

R.: Não conseguimos formar um cubo … fica aberto.

Prof.: E se tentássemos fechar … o que é que acontecia?

B.: Se dobrarmos mais, estas duas sobrepõem-se.

Prof.: Então, existem ou não faces que se sobrepõem?

Alunos do grupo 1: Sim.

As questões lançadas pela professora conduziram os alunos a reflectirem sobre o que estavam a fazer, facultando-lhes, desta forma, a resposta. Nas outras duas figuras que não eram planificações do cubo, não surgiram dificuldades. Os alunos construíram novamente cada uma delas e concluíram que na figura cinco não havia faces a sobreporem-se e que na figura sete havia duas faces que se sobreponham. Para identificar quais as faces, utilizaram a mesma estratégia aplicada na figura seis.

B.: Faz o cinco! O cinco vai se sobrepor a uma. De certeza!

R.: Mas o cinco tem menos uma.

B.: Mas vai-se sobrepor. É para dizer quais as peças que se vão sobrepor?

V.: Não se sobrepõem.

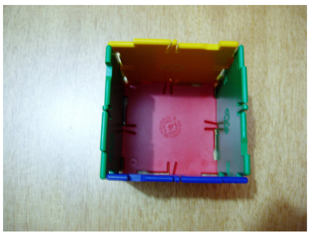


Figura 6 - Imagem cinco da tarefa 3, parte 2

R.: Falta uma peça.

B.: Então, era possível fazer mais uma planificação.

V.: Não.

B.: Porquê? … Calma, mas se acrescentássemos outra face dava para fazer outra planificação.

N.: Mas falta uma face.

B.: Estou a dizer que falta aqui uma planificação. Estás a perceber o que estou a querer dizer.

N.: Sim.

O raciocínio de **B.** estava correcto: existiam outras planificações. **B.** explicou aos colegas que bastava acrescentar mais uma face de forma a construir um cubo. Como alguns alunos ainda não tinham compreendido, este decidiu exemplificar, colocando mais um quadrado na figura cinco. Depois, por dobragem e encaixe dos quadrados, obteve um cubo, ou seja, tinha descoberto outra planificação do cubo diferente das que a tarefa continha.

Por fim, na questão três, os alunos teriam que investigar outras planificações para o cubo. Os alunos discutem as várias possibilidades e descobrem três estratégias que podem utilizar para descobrir outras planificações para o cubo. A primeira estratégia era utilizar as figuras da tarefa que não são planificações e alterar os quadrados de modo a formar um cubo.

B.: Já está! Essa era óbvia. Quais são as que não dão? A um não dá, se a um não dá então vamos arranjar uma maneira dela dar.

Contudo, houve alunos que preferiram construir um cubo e depois "abri-lo" obtendo, deste modo, outra planificação. Notou-se que os alunos estavam muito empenhados a descobrir planificações e queriam competir com os outros grupos, para ver quem descobria mais.

N.: Não abre professora.

Prof.: Se vou aí com a minha força acabo por …desmanchá-lo.

[**B.** tentou abrir mas não consegue, depois **N.** tenta novamente e conseguiu].

Prof.: Isso.

N.: Pronto, já temos outra.

V.: Essa já temos … já temos um parecido.

Prof.: Têm alguma que seja igual a esta?

V.: Igual não.

Prof.: Pronto igual não é … e não será outra planificação do cubo?

B.: Parecido não interessa.

V.: Se for assim só muda está peça para aqui.

Prof.: E será que não pode ser?

R.: Então podemos mover apenas esta peça e verificar se dá ou não uma planificação do cubo e depois alterar outra peça …

Prof.: Sim, isso se calhar é uma das estratégias para descobrir as planificações do cubo.

B.: Ou então as que não dão tentar fazer com que elas dêem?

Prof.: Pode ser também. Muito bem!

Perante as dúvidas do colega e as perguntas colocadas pela professora ao grupo, **R.** encontra um processo que permite descobrir outras planificações para o cubo. Esta consiste em, através da planificação de um cubo, alterar de posição apenas de uma peça, várias vezes e ir verificando quais as que por dobragem e encaixe, permitem obter um cubo. Depois, ir seguindo o mesmo processo, só que alterando a posição de outra peça. A professora, ao circular pela sala de aula, incentiva os alunos a continuarem a procurar outras planificações. Por isso, não os informa do número de planificações que o cubo tem.

Uma vez que as peças iam rodando por todos os elementos do grupo, de forma que todos participassem e contribuíssem activamente para o trabalho do mesmo, cada um utilizava o processo que achava mais eficaz na descoberta das planificações. É de referir que os restantes elementos cooperavam dando sugestões.

N.: Tenho outra ideia.

B.: Vai dar uma planificação do cubo de certeza absoluta?

R.: [Observando a figura que **N.** está a construir] Eu duvido que dê.

B.: Vai-se sobrepor.

N.: [Alterando uma das peças que se sobrepõe] Está coloca-se aqui.

B.: Assim não dá.

R.: Espera …

[**N.** volta a alterar novamente a peça]

B. e R.: [quase em simultâneo] Assim já dá.

N.: Já dá?

B.: Dá.

N.: [Olhando para o **B.**] Tens a certeza que já dá?

[Passados alguns instantes].

B.: Fizeste a mesma coisa, só que mudaste esta peça de sítio.

R.: Se tu mudares a peça de sítio para qualquer sítio desta linha dá quase sempre para fazer um cubo.

A aula foi decorrendo e os alunos continuavam a experimentar com o intuito de descobrir mais planificações do cubo. Verificou-se uma dinâmica de grupo interessante. Os alunos cooperavam todos na resolução da tarefa, dando a sua opinião ou sugestões. Neste diálogo também é visível a capacidade de observação do **B.**.

V.: [olhando para o **N.**] Agora muda este.

N.: Vou tentar doutra forma.

[Passados alguns instantes].

V.: Eu acho que vai ficar aberto.

R.: Fica.

Prof.: Pode ser assim?

N.: Não.

B.: Tenta por esta aqui em baixo, vai dar outra planificação.

N.: És sempre o mesmo.

B.: Já tínhamos essa?

N.: Não.

B.: Professora, veja, já descobrimos seis planificações do cubo. Existe mais do que estas seis?

O grupo G1 solicitou diversas vezes a professora, apenas com o fim de lhe transmitir as descobertas feitas pelo grupo e tentar saber se já tinham descoberto todas as possíveis planificações. Mas, a professora continuou com a actuação que vinha demonstrando desde o início da tarefa, ou seja, dando sugestões e propondo outras questões, não revelando o número de planificações possíveis para o cubo.

A tarefa proposta contribuiu para o envolvimento dos alunos, uma vez que lhes despertou o interesse e a curiosidade para a exploração das várias planificações do cubo e, também, exigiu que os alunos pensassem sobre diferentes estratégias que poderiam utilizar para obter o pretendido. Desta forma, contribuiu para aumentar a interacção verbal, entre os elementos do grupo:

B.: Sete, lindo. Só existem sete?

V.: **B.** vais muito apressado.

B.: É uma cruz! Ainda é possível fazer mais uma?

V.: Pois é!

B.: Deixa-me pensar … pareço o Picasso, já vamos em oito.

V.: Bernardo, tu é que já vais em oito. Ainda não desenhei no caderno.

B.: Nove.

R.: Homem é só trocar.

V.: Pois!

N.: [exemplificando] Vê é só trocar basta fazer assim … se está peça fica aqui e se nós fizermos assim … esta peça muda, isto não é igual a isto.

R.: Exactamente.

N.: Ou seja, é só trocar.

Nesta transcrição é evidente o entusiasmo de **B.** na descoberta das planificações do cubo. Os alunos **R.** e **N.** estavam a acompanhar o raciocínio feito pelo **B.**, porém repararam que **V.** não estava a acompanhar. Perante esta situação, os alunos tentaram explicar-lhe a estratégia que **B.** utilizava, de forma a permitir que todos avancem na resolução da tarefa.

No grupo G2 a resolução da tarefa decorreu de forma semelhante à anterior. Um dos elementos do grupo lia a tarefa em voz alta e os restantes colegas acompanhavam-no. Na primeira parte da tarefa os alunos não tiveram dificuldade em descobrir as duas planificações do tetraedro, uma vez que seguiram as indicações dadas pela professora.

Na segunda parte da tarefa, os alunos procederam a construção de cada uma das figuras. Porém a **M.** não achava necessário verificar para cada uma das figuras, utilizando as peças do polidron se era ou não uma planificação do cubo, considerando mesmo uma perda de tempo. No entanto, as colegas de grupo consideravam importante verificar. A **M.** sugeriu ao grupo que como eram oito figuras cada um deveria ter a oportunidade de construir duas com as peças do polidron e verificar se eram ou não planificações do cubo. Porém **G.**, quando chega à sua vez, verifica para as restantes figuras, apesar de ter sido chamada a atenção pelos colegas de grupo várias vezes. Segundo a professora a **G.** raramente participa nas aulas. Contudo, o trabalho de grupo, a presença das peças de polidron e a tarefa ser de exploração contribuiu para o seu envolvimento.

M.: Não vai dar.

C.: Não dá.

M.: Estás a perder tempo.

C.: Faz todos e vê os que dá.

M.: O que é que eu te disse? Não dá!

C.: Agora este [figura dois], mas faz para verificar.

M.: A dois dá, não é preciso fazer.

C.: Faz para ver.

M.: Estão a perder tempo. A três também não dá. Esse [figura dois] dá.

Ma.: Já está.

C.: Agora a três. [olhando para a **G.**] Tens de fazer para ver se dá.

G.: Dá.

Ma.: Já viste?

M.: Eu pus que dá. A cinco não dá porque nem sequer tem seis quadrados.

G.: Só se fizermos mais um para baixo dá … Mais um dá.

Ma.: Não … tem de ser como está ali.

M.: A cinco não dá porque nem sequer tem seis quadrados.

Neste diálogo é possível constatar que os alunos do grupo G2 sabem que todas as faces do cubo são quadradas, num total de seis, sendo esta a razão pela qual a figura cinco não poderá ser a planificação do cubo. As alunas não apresentaram dificuldades na resolução da questão 1., uma vez que identificaram bem quais as figuras que não eram a planificação do cubo, explicando as razões pelas quais não poderia ser. A professora circulava pela sala de aula questionando os vários grupos relativamente ao seu trabalho.

Prof.: Porque é que essa [figura seis] não pode ser?

Ma.: Tem dois numa face.

Prof.: Há faces que se vão sobrepor.

[A professora afastou-se]

G.: Esta [figura sete] não dá de certeza.

M.: A sete não dá, não é preciso fazer. A oito eu pus aqui que não dava.

Ma.: [Olhando para a **G.**] Deixa-a fazer.

G.: Está [figura sete] é a última.

C.: Não é a tua vez.

G.: Não, não dá, há faces que ficam sobrepostas.

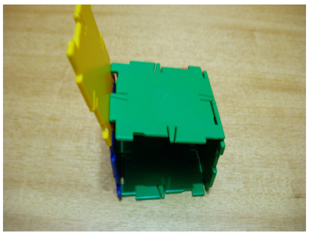


Figura 7 - Imagem sete da tarefa 3, parte 2

[**G.** constrói a oito].

Ma.: Dá.

Ultrapassada com sucesso a primeira questão, os alunos avançaram confiantes para a segunda. Esta revelou-se-lhes fácil, uma vez que, com o auxílio das peças de polidron, conseguiam facilmente identificar os quadrados que se sobrepõem. A terceira questão também não se lhes revelou difícil. Nesta questão, já se viu uma maior coesão entre os alunos, uma vez que todos tiveram oportunidade de explorar, com as peças do polidron, surgindo, deste modo, diferentes planificações para o cubo. O ambiente criado à volta da resolução da tarefa facilita a discussão de estratégias.

G.: Não dá.
M.: Só que a gente muda.
M.: G. [apontando para a figura seis] Em vez de colocar esta aqui, mete aqui para ver se dá.
G.: O quê?
Ma.: Mete esta aqui.
G.: Não dá! Não é assim.
Ma.: Não é! Empresta isso.
M.: Deixa-a fazer.
G.: Não percebe nada disto e quer fazer.
M.: Isto deve dar para fazer milénios.
G.: É assim… dá.

Os alunos conseguem, a partir da figura seis construir uma nova figura, que é uma planificação do cubo. Desta forma, os alunos arranjaram uma estratégia para descobrir outras possíveis planificações: foram construindo figuras como as da tarefa e, quando verificavam que não era uma planificação do cubo, tentavam alterar de posição a face sobreposta de forma a construir um cubo. Os alunos fizeram no caderno o desenho das planificações do cubo e é, com base nesse registo, que verificam se já tinham alguma igual.

A professora, ao longo da tarefa, interagiu com os alunos, incentivando-os à investigação e interrogando-os sobre o trabalho realizado.

A discussão da tarefa foi viva e bastante participada. Todos os alunos tiveram oportunidade de comunicar, à turma, as estratégias que utilizaram na descoberta de outras planificações e desenhar no quadro.

Prof.: Pronto, temos ali cinco possíveis planificações para o cubo. Existem outras. Existem ou não?
Alunos da turma: Existem.
A.: Existem dez.
B.: Nós temos nove.
Ma.: Temos dez.

Prof.: Já está. Pronto, não interessar quem descobriu mais.

S.: Também acho.

Prof.: O mais importante era arranjar uma estratégia para planificar o cubo. Como é que podíamos arranjar facilmente uma estratégia para a planificação do cubo?

Ma.: Tentar que as que não eram a planificação de um cubo fossem uma planificação de um cubo.

Prof.: Mais estratégias …

B.: Bastava mudar a posição de uma peça que nós obtínhamos outras planificações do cubo.

Prof.: Certo! Cada grupo arranjou uma estratégia e assim foi obtendo várias planificações para o cubo.

Convém salientar que todos os grupos contribuíram para a descoberta das várias planificações do cubo, uma vez que nenhum grupo conseguiu descobrir as onze possíveis. Durante a discussão, pudemos observar, com bastante clareza, a cooperação entre os alunos, pois ajudavam-se e trocavam informação relativamente ao trabalho desenvolvido.

Síntese

O aspecto mais saliente, ao longo da resolução desta tarefa de trabalho, foi o dinamismo da aula, caracterizado pelo papel activo dos alunos na procura das possíveis planificações para o tetraedro e para o cubo.

A estratégia utilizada pelos alunos para descobrir as planificações do tetraedro consistiu em construir esse sólido e depois abri-lo de várias formas. Os alunos, após várias experiências, concluíram que o tetraedro só tinha duas planificações possíveis. No entanto, as estratégias adoptadas pelos alunos para descobrir as possíveis planificações do cubo variaram nos diferentes grupos. Alguns alunos começaram por construir as figuras da tarefa, que não eram planificações do cubo, e iam alterando de forma a obter uma nova planificação. Outros grupos começaram por construir uma das planificações do cubo e foram alterando uma das peças até obter uma nova planificação. No entanto, houve ainda grupos que optaram por construir o cubo e depois abri-lo de vários modos. Depois de escolhida uma estratégia, deu-se início a uma sequência de experiências com a ajuda do material manipulável. Consoante, iam descobrindo as planificações, desenhavam no caderno um esboço da mesma.

Também revelaram bastante autonomia relativamente à professora, tendo solicitado a sua presença apenas para lhe dar a conhecer as planificações encontradas.

Os grupos funcionaram em cooperação, tendo todos os seus elementos participado activamente, quer dando sugestões, quer realizando experiências com as peças de polidron. Assim sendo, os alunos mostraram-se empenhados e envolvidos na resolução da tarefa proposta evidenciando pelo ambiente criado em torno das discussões geradas pelas sugestões apresentadas pelo grupo e que não convidavam à desistência.

Nesta tarefa saliente-se a utilização de três processos matemáticos: a visualização, a manipulação e a argumentação, usados na descoberta das possíveis planificações para o cubo e para o tetraedro. Uma vez que a percepção pode levar a interpretações erradas, os alunos encontravam a prova de que realmente era uma planificação do cubo ou do tetraedro recorrendo à manipulação das peças de polidron. Essa exploração permitiu aos alunos visualizarem a passagem da planificação para o sólido, contribuindo também para os alunos argumentarem sobre a razão pela qual não era uma planificação dos sólidos pedidos.

Um outro aspecto resultante da realização desta tarefa foi a competição. Os grupos competiram entre si para ver quem descobria mais planificações. Muitas vezes abordavam o grupo vizinho, só para perguntar quantas planificações já haviam encontrado. Em determinados momentos, a aula tornou-se numa pequena competição na procura de possíveis planificações para o cubo.

Material manipulável

O polidron permitiu aos alunos visualizarem a passagem do sólido para a planificação e vice-versa. Os alunos parecem ter compreendido que um sólido pode ter mais do que uma planificação.

O material mostrou-se bastante útil e prático nas experiências realizadas, facilitando a verificação das várias planificações possíveis para o tetraedro e para o cubo. Através da experimentação, utilizando as peças de polidron, os alunos puderam verificar quais são as planificação do cubo e do tetraedro, não se baseado na sua intuição. Quando os alunos utilizaram os polidrons compreenderam a ligação entre a representação plana (planificação do sólido) e o sólido, na sua representação tridimensional.

A utilização de materiais manipuláveis na sala de aula de Matemática deixa bem claro a diferença entre o ensino tradicional e o ensino que o novo currículo propõe. Enquanto no ensino tradicional seria uma Matemática acabada, abstracta, mecanizada, expositiva, descontextualizada da realidade, em que o papel do professor é transmitir conhecimento, o novo ensino está imbuído de teria um carácter de descoberta ou construção do conhecimento matemático. Nesta aula com materiais manipuláveis verificamos os alunos que constroem o seu conhecimento são mais activos, participativos e autónomos.

Os diálogos estabelecidos durante a resolução da tarefa sugerem que os alunos se mostraram persistentes na procura de várias estratégias que poderiam levar à descoberta de outras planificações para o cubo ou tetraedro. A explicação dessas estratégias, recorrendo ao material polidron, permitiu aos alunos exprimirem e partilharem o seu pensamento e raciocínio com os colegas de grupo.

A utilização das peças de polidron parece gerar uma sensação de segurança levando a uma alteração da atitude dos alunos com fraco aproveitamento, ao nível do comportamento, da autonomia e da cooperação com os colegas na realização da tarefa. Por isso, o trabalho de grupo pautou-se pela participação e intervenção de todos os elementos do mesmo.

O manuseamento e o uso dos polidrons parece ter contribuído para o desenvolvimento de determinadas capacidades: raciocinar, comunicar, reflectir e elaborar estratégias, aspectos importantes na formação de cidadãos na sociedade actual.

4.4. Tarefa "Desigualdade Triangular"

A tarefa "Desigualdade Triangular" (anexo 6) foi aplicada no dia 20 de Abril num bloco de noventa minutos e tinha como objectivo que os alunos descobrissem, a partir de casos de impossibilidade de construção de triângulos, uma relação entre os comprimentos dos lados de um triângulo (desigualdade triangular). Os alunos teriam que cortar as palhinhas de refresco distribuídas pela professora em vários tamanhos e com estas experimentar construir triângulos. Este seria o ponto de partida para os alunos iniciarem a sua investigação; depois teriam que discutir em que situações era ou não possível a construção de um triângulo. A recolha e organização dos dados obtidos são importantes para que os alunos conjecturem uma regra, que garanta a possibilidade de construção de um triângulo, dadas as medidas dos seus lados. Os alunos tinham de registar na folha os vários casos que investigassem, pois no final cada grupo teria de apresentar, de forma sucinta, as suas conclusões ao grupo turma.

O grupo G1, depois de ler o enunciado da proposta de trabalho, cortou as palhinhas de refresco em vários tamanhos e começou a experimentar em que situações seria ou não possível construir um triângulo.

N.: Quando são três pequenas…

B.: Discute as situações … já faço com estas palhinhas.

N.: Se tiveres três pequenas consegues construir um triângulo. Uma grande e duas pequenas.

B.: [Apontando para as palhinhas que tem na mão] Consegues construir o triângulo com estas por exemplo?

N.: Consigo.

B.: Olha.

V.: O triângulo não fecha, logo não é possível construir um triângulo com os três pedaços de palhinhas.

N.: Não é! Pensei que dava sempre.

B.: Nem sempre é possível construir um triângulo com três palhinhas.

O **B.**, através de um contra-exemplo, demonstra aos seus companheiros que com três palhinhas, uma grande e duas pequenas nem sempre é possível construir um triângulo. As experiências que vão realizando com as palhinhas evidenciam que nem sempre é possível construir um triângulo sabendo os três lados. Ao visualizarem os esboços das construções que vão fazendo na folha de tarefa vão reflectindo porque será que em certos casos, é possível construir um triângulo e noutros não.

B.: Já reparaste que o comprimento desta palhinha é muito superior à soma dos comprimentos das outras duas?

N.: Não dá para construir um triângulo. Quando uma é maior que as outras duas… não, somando estas duas e se não der, espera. Somando estas duas e se der o tamanho desta é que dá.

[O **B.** pega em três palhinhas].

B.: Não dá … olha.

V.: É maior então?

B.: Estas duas têm o mesmo tamanho que a debaixo percebes … Tu não podes… se a soma de duas não for maior que o tamanho da outra não dá.

[**B.** pega noutra palhinha e substitui uma das duas palhinhas mais pequenas por uma maior].

V.: Se a soma de duas palhinhas não tiver o comprimento igual ou maior do que a outra é impossível formar um triângulo.

B. Não é igual, não tem o igual … vimos que não dava.

N.: Quando tem o mesmo comprimento que as outra duas é impossível formar um triângulo?

B.: Sim. Se soma de duas palhinhas der o mesmo comprimento que a outra é impossível formar um triângulo.

R.: Tem de ser maior ou menor?

B.: A soma de duas palhinhas tem de ser maior para dar um triângulo. Se for menor também é outro caso que não dá para construir.

Verificou-se uma dinâmica de grupo interessante. A interacção entre todos os elementos do grupo permitiu que os alunos se explicassem e confrontassem as suas ideias com os seus colegas. Os alunos corrigiam os colegas, confirmando aquilo que afirmavam através das palhinhas e, perante alguma dúvida de um colega, não hesitavam em tentar explicar. Os alunos, ao analisarem as construções realizadas, verificaram em que condições era ou não possível construir um triângulo. Os elementos do grupo G1 atingiram o objectivo pretendido com esta tarefa, sendo a discussão de certos pontos com os colegas fundamental.

Na questão 5. da tarefa proposta, os alunos sugeriram vários valores possíveis para o terceiro lado do triângulo, aplicando deste modo a regra que haviam descoberto. No diálogo seguinte é possível constatar que o grupo G1, através de uma negociação entre os elementos do grupo, resultado da interacção destes e da partilha de opiniões e sugestões, chegaram à conclusão que o terceiro lado poderia tomar vários valores. Os alunos na folha de tarefa elaboraram uma lista dos possíveis valores abaixo de 10 que o terceiro lado poderia tomar. Depois, aplicando a regra estabelecida (desigualdade triangular), verificaram que dessa lista havia dois valores que o terceiro lado não podia tomar, pois seria impossível construir um triângulo.

N.: Os dois lados dão dez e tem de ser maior, o outro tem de ser 9.

B.: Desculpa!

N.: O terceiro lado tem de ser nove. Se somarmos estes dois dá dez e se estes dois tem de ser maior que o terceiro lado, o terceiro lado tem de ser nove.

B.: Tem de ser maior [a soma dos dois lados relativamente ao terceiro lado] … abaixo de dez. O terceiro lado tem que ter menos de dez centímetros.

V.: É o nove, oito, sete, seis, cinco, quatro, três, dois, um.

B.: Não. quatro mais um é cinco é menor que seis.

R.: O dois também não … não é?

N.: O três pode ser.

R.: Pode! Sete [soma dos dois lados menores do triângulo respectivamente com quatro centímetros e três centímetros de comprimento] é maior do que seis.

Neste diálogo é possível constatar que os alunos sabem aplicar o conhecimento adquirido à nova situação proposta. Os elementos do grupo G1 chegaram de uma forma rápida e autónoma aos valores inteiros possíveis para o terceiro lado.

O ambiente criado à volta da resolução da tarefa facilitava que, quando algum elemento do grupo G1 tinha alguma dúvida, solicitava ajuda aos seus companheiros. Desta forma, os restantes elementos tinham a possibilidade de rever a sua resposta e clarificá-la não só para quem não compreendeu, mas também para os outros colegas.

V.: O seis pode ser?

B.: Sim, é menor que a soma dos outros dois.

V.: Não percebo!

B.: [apontando para a folha da tarefa] Os lados são seis, seis, quatro …

N.: Olha para os dois lados mais pequenos.

B.: Agora somas seis mais quatro … dá dez e verificas que é maior que seis.

V.: Ah! E aqui não podia ser dez o terceiro lado porque é igual, não é?

R.: Tem de ser maior … sempre.

Verificamos que todos os elementos do grupo auxiliam o **V.** nas suas dúvidas, e que, embora seja um aluno com dificuldades na disciplina de Matemática, mostra-se interessado. Isto, por um lado, denota uma maior preocupação para com a actividade matemática do que para com o resultado e por outro um posicionamento de não desistência perante as dificuldades que vão surgindo. O apoio e a ajuda dos colegas revelaram-se fundamentais.

Os alunos do grupo G2 depois da professora distribuir a tarefa começaram por cortar as palhinhas de refresco em vários tamanhos. O enunciado da tarefa proposta não dava indicações relativamente ao processo que os alunos deveriam organizar os dados, embora estivesse explícito a forma de recolhê-los. Por isso na questão 2. não tiveram dificuldade em esboçar as construções que iam fazendo e até colocavam as medidas dos lados. Contudo, na questão 3. os alunos manifestaram alguma dificuldade em responder à questão, apesar de terem investigado, com a ajuda das palhinhas, diferentes situações em que obtinham um triângulo e noutras não. Perante as dificuldades, o grupo G2 decidiu resolver a última questão. A **M.** na questão 5. arranjou uma estratégia para descobrir os valores inteiros que poderiam ser a medida do terceiro lado. Em primeiro lugar cortou duas palhinhas de refresco, uma com seis centímetros e outra com 4 centímetros de comprimento, depois cortou palhinhas de vários tamanhos. A ideia era experimentar quais os valores possíveis para o terceiro lado. Talvez o facto do grupo G2 ainda não ter estabelecido uma regra que garanta a possibilidade de construção de um triângulo levou o grupo a optar pela experimentação. As várias tentativas realizadas permitiram identificá-los. Verificou-se uma grande persistência em torno da descoberta dos valores para o terceiro lado.

M.: Seis centímetros.

G: Isso não tem seis centímetros.

Ma.: Para que queres uma [palhinha] com seis centímetros.

M.: Para ver com a de quatro como fica. **Ma.** corta aqui.

Ma.: Já percebi.

M.: Agora tens de descobrir qual é a medida do outro lado?

[**M.** pega noutra palhinha de seis centímetros].

M.: Uma de seis pode ser.

Ma.: seis, seis, quatro.

M.: Sim, diz aqui descobre a medida do terceiro lado.

Ma.: Não pode ter outro valor a não ser o seis?

M.: Pode … Indica valores é mais do que um.

C.: Pode ser o quatro?

M.: Experimenta … corta uma palhinha com quatro centímetros.

A professora, enquanto os alunos trabalham, percorre os vários grupos, procurando observar o seu desempenho. A professora olha para a folha de um elemento do grupo G2 e verifica que os alunos escreveram que não se poderiam construir triângulos com três medidas diferentes. A professora sem se precipitar em corrigir os alunos, uma vez que manifestavam ideias erradas, procurou que eles chegassem à ideia correcta. Verificamos, através do diálogo, que a professora em vez de lhes dar de imediato a resposta, tentou que a alcançassem, usando como forma de intervenção o questionamento e as palhinhas.

Prof.: Estas palhinhas são todas diferentes, logo, não se pode construir um triângulo?

C. e Ma.: [quase em simultâneo] Sim.

Prof.: Uma de vocês que verifique se aquilo que disseram está correcto.

[**Ma.** experimenta].

Ma.: Dá … se for uma pequena, uma média e uma grande não se pode construir [referia-se as palhinhas].

G.: Pode ser … estás a ver … olha [apontando para o triângulo construído].

C.: Não tem nenhuma pequena **G.** … Põe uma destas para ver se dá para fazer

[**Ma.** experimenta].

Prof.: Com estas palhinhas não conseguimos construir um triângulo, porquê?

Ma.: Uma bem pequena … bem pequenininha, uma média e uma grande, não dá.

Prof.: Então com três palhinhas diferentes podemos ou não construir um triângulo?

Ma.: Depende.

Prof.: Depende do quê?

M.: Dos lados.

Prof.: Porque será que neste caso foi possível construir um triângulo e neste não é possível obter um triângulo?

[A professora afastou-se do grupo].

M.: Tem a ver com os lados.

Este diálogo entre a professora e os elementos do grupo foi o suficiente para desencadear a discussão, levando os alunos a reflectir nas questões colocadas. Esta tarefa exige que os alunos especulem, que investiguem e que compreendem a razão pela qual, dados três lados, nem sempre é possível construir um triângulo. Pela última frase do diálogo anterior, parece haver evidência de que **M.** compreendeu a sugestão dada pela professora, ou seja, que existe uma relação entre os lados de um triângulo. A dica da professora foi o suficiente para que as alunas não desmotivassem. De imediato começaram a experimentar com as várias palhinhas construir triângulos, deixando sobre a mesa as tentativas realizadas.

Ma.: Para dar um triângulo …

[**Ma.** com o lápis faz o que falta para dar um triângulo].

C.: Para dar um triângulo estas palhinhas [apontando para as duas palhinhas mais pequenas] têm que ser maiores.

G: O que é que tem de ser maior?

Ma.: As palhinhas … Estas duas têm de ser maiores.

M.: Neste [apontando para o triângulo construído] as palhinhas são maiores que este lado.

Ma.: Estas duas são mais pequenas … por isso não dá.

C.: Mais pequeno que o quê?

M.: Que este lado!

Ma.: Então, só podemos construir um triângulo se dois lados juntos tiverem o tamanho maior do que o outro.

A observação da **Ma.**, relativamente ao facto de naquele caso não se poder construir um triângulo porque os dois lados menores deveriam ter um comprimento maior, levou a que o grupo G2 reflectisse sobre esse aspecto. Através da visualização dos vários exemplos chegaram à conclusão que o comprimento de duas palhinhas deveria ser sempre maior que a terceira palhinha. A discussão entre os elementos do grupo levou a que formulassem uma conjectura relativamente aos lados de um triângulo. Verificou-se uma dinâmica de grupo interessante. Os alunos do grupo G2 interagiam uns com os outros colocando questões e, perante algumas dúvidas de alguns elementos, não hesitavam em tentar explicar. A cooperação entre os elementos do grupo ajudou-os, deste modo, a estabelecer uma relação entre os lados de um triângulo que permitia verificar se era possível, ou não, construir um triângulo. Note-se ainda que os alunos, com base nas experiências realizadas com as palhinhas, verificaram a conjectura formulada, embora para um número reduzido de casos. Estes sentem uma maior segurança na comunicação, uma vez que as suas observações são feitas com base nas experiências realizadas. Contudo, surgiu uma dúvida aquando a redacção da questão 4.: se a soma de dois lados poderia ser igual ao terceiro lado. Como a professora circulava perto do grupo solicitaram o apoio da professora:

Ma.: Professora, a soma de duas palhinhas pode ser igual à outra?

Prof.: Quem quer responder à **Ma**.?

M.: Não.

Prof.: Vamos lá confirmar.

[**Ma.** corta uma palhinha de forma que tenha o mesmo tamanho que outras duas e experimenta].

Ma.: Mais ou menos.

Prof.: Mais ou menos, não pode ser… tem que ser direitinho.

Ma.: Não.

C.: [trocando uma das palhinhas por uma maior] Mas assim dá.

Prof. : Porque é que assim dá?

Ma.: Porque … Elas são maiores do que…

Prof.: O que é que é maior?

C.: Estas aqui.

Prof.: Juntando estas duas, são maiores do que esta. Que conclusões podem tirar daqui?

M.: Que dois lados juntos … que para fazer um triângulo …

Prof.: Para construir um triângulo …

M.: Dois lados juntos têm que ser maiores do que o outro.

Prof.: Qual é a operação matemática que permite juntar?

C.: Somar.

M.: Para construir um triângulo temos que somar dois lados e têm que ser maior que o terceiro lado.

A situação proposta aos alunos exigia, da sua parte, um papel activo e autónomo na resolução da tarefa proposta. Caso contrário, a professora teria optado, simplesmente, por transmitir aos alunos o conceito de desigualdade triangular. Por isso, quando a aluna solicitou o auxílio da professora, colocando-lhe uma pergunta directa, a docente devolveu a questão ao grupo G2, de modo a envolver todos na discussão, encorajando-os à participação e à experimentação.

Quando todos os grupos terminaram, a professora decidiu fazer a correcção da tarefa proposta em grande grupo, para esclarecer algumas dúvidas.

Relativamente à discussão em grande grupo da questão 5., gerou-se o seguinte diálogo:

> **B.:** Por exemplo, esta é de seis centímetros e esta é de quatro centímetros, tinha que arranjar uma palhinha que pudesse construir um triângulo. Se eu sei que a soma destas duas tem que ser maior do que a outra, logo seis mais quatro dá dez. Logo, a outra tem que ser menor que dez … nove, oito, sete, seis, cinco.
>
> **Prof.:** O terceiro lado só pode tomar esses valores?
>
> **A.:** Sim. Até um.
>
> **Prof.:** Até um! Será que pode ser um?
>
> **R. :** Não, porque a soma de quatro com um não é maior que 6.
>
> **Prof.:** E se o terceiro lado for dois?
>
> **N.:** Também não podemos construir um triângulo.
>
> **Prof.:**E se for três?
>
> **B.:** Agora já é possível construir.
>
> **Prof.:** Pode ser dez centímetros?
>
> **Ma.:** Não pode.
>
> **M.:** Se for dez são iguais, não dá um triângulo.
>
> **Prof.:** Que valores é que encontraram para o terceiro lado?
>
> **N.:** nove, oito, sete, seis, cinco, quatro, três.
>
> **M.:** Sendo assim, podemos concluir que como os comprimentos de dois lados do triângulo são seis centímetros e quatro centímetros, o terceiro lado pode ter qualquer comprimento desde que seja maior que dois e menor que dez.
>
> **Prof.:** Sim, pois a soma de seis com quatro é igual a dez e a diferença entre seis e quatro é igual a dois.

Os alunos não revelaram grande dificuldade em aplicar o conceito de desigualdade triangular à situação proposta. A discussão com toda a turma permitiu esclarecer algumas ideias pouco claras em alguns grupos. Os alunos mostraram-se envolvidos nas discussões, apresentando argumentos a favor das suas opções, de uma forma bastante activa.

Síntese

Ao longo destas aulas foram emergindo aspectos importantes relacionados com o comportamento dos alunos. Embora, inicialmente, os alunos manifestassem dificuldades em trabalhar em grupo (não ouviam as opiniões dos colegas, chamavam com muita frequência a professora para validar as suas respostas ou para tirar dúvidas, que muitas vezes podiam ser discutidas em grupo), esse comportamento foi-se alterando, lentamente, devido à atitude da docente em contrariá-la.

A estratégia adoptada pelos alunos foi a sugerida pela própria tarefa, seguindo, ordenadamente, as questões e abordagens propostas. Os alunos cortaram as palhinhas de refresco distribuídas em diferentes tamanhos e, utilizando as palhinhas, experimentaram construir triângulos. A manipulação das palhinhas permitiu aos alunos verificar que nem sempre com três palhinhas é possível construir um triângulo. A maior dificuldade com que os alunos se depararam foi em descobrir a relação existente entre os comprimentos dos lados de um triângulo. Os alunos realizaram várias experiências explorando vários casos de possibilidade, ou não, de construir um triângulo, esboçando-os na folha de tarefa. Estes mostraram-se persistentes, envolvendo-se em discussões geradas pelas sugestões apresentadas pelo grupo. As experiências sucediam-se sempre que os grupos necessitavam de confirmar as suas ideias ou para desfazer dúvidas que entretanto foram surgindo. Por exemplo, os alunos tiveram dúvidas se o comprimento de um lado poderia ser igual à soma dos outros dois, a experiência realizada permitiu concluir que, nesse caso, não era possível a sua construção.

As intervenções da professora limitaram-se a apoiar os grupos através de sugestões ou da formulação de questões.

Os diálogos estabelecidos, durante a resolução da tarefa, sugerem que os alunos apreenderam o conceito de desigualdade triangular, mostrando-se capazes de aplicar o mesmo a novas situações, como se pôde verificar com a aplicação deste conceito na última questão.

As várias experiências realizadas, recorrendo às palhinhas de refresco, favoreceram a intervenção de todos os elementos do grupo, até mesmo dos alunos de aproveitamento mais fraco, evidenciando uma mudança de atitude em relação à aprendizagem. No que se refere ao envolvimento dos alunos na resolução da tarefa, verifica-se uma participação activa de todos. Os diálogos transcritos evidenciaram vários indicadores que indicam desenvolvimento social positivo: cooperação (os alunos davam sugestões e explicavam as suas ideias uns aos outros, de forma amigável), auto-estima (demonstraram um sentimento de realização e satisfação após terem descoberto a desigualdade triangular), colaboração na realização da tarefa e maior autonomia.

Material Manipulável

O material manipulativo usado na tarefa, as palhinhas de refresco, ajudaram a atribuir um significado ao conceito de desigualdade triangular. O material utilizado teve alguma influência nos processos matemáticos usados: a especialização, a procura de regularidades, a formulação de conjecturas e a verificação. Estes materiais auxiliaram na construção de triângulos, obtendo assim, um variado número de exemplos (especialização) em que, com três palhinhas, obtínhamos um triângulo e, noutros casos, não. O grande número de exemplos gerados terá incentivado a procura de regularidades entre eles, permitindo, assim, a testagem das conjecturas que iam sendo formuladas. A verificação da conjectura formulada foi realizada através da experimentação recorrendo ao uso das palhinhas. Com base nos dados recolhidos os alunos generalizaram, por fim, uma conjectura (desigualdade triangular) que relacionava os lados de um triângulo.

Também o material utilizado na tarefa teve alguma influência na motivação, no interesse e no empenho demonstrado pelos alunos na sua actividade. O trabalho com materiais manipuláveis contribuiu para a entreajuda, através da verbalização dos seus pensamentos, troca de impressões e algumas discussões no seio do grupo. Nalguns diálogos transcritos parece evidente que o material se revelou útil na verificação das suas afirmações. Por exemplo: os alunos utilizaram as palhinhas para verificar se a soma do comprimento de dois lados poderiam ser igual ao comprimento do terceiro lado; na última questão, houve um grupo que descobriu os possíveis comprimentos para o terceiro lado de um triângulo, cortando palhinhas com vários tamanhos. Assim sendo, as várias experiências realizadas com as palhinhas de diferentes comprimentos permitiram a descoberta de uma relação entre os lados de um triângulo. Deste modo, os alunos constroem os seus alicerces de conhecimento matemático. Estes sentem uma maior segurança na comunicação e partilha dos seus raciocínios, pois a aprendizagem é feita da própria experiência.

A utilização de materiais manipuláveis do quotidiano dos alunos entusiasmou-os bastante, observando-se uma grande interacção entre a recolha de dados e a formulação e teste de conjecturas. Autonomamente, os alunos começaram a experimentar e a analisar os esboços efectuados na folha de tarefa e a formular conjecturas que iam sendo verificadas e refutadas recorrendo às palhinhas de refresco.

4.5. Tarefa “Investigações com espelhos”

A tarefa “Investigações com Espelhos” (anexo 7) foi realizada no dia 4 de Maio num bloco de noventa minutos. A proposta de trabalho estava dividida em duas partes. Nesse dia os alunos mudaram de sala, pois a professora iria precisar dum computador. À entrada da sala, a professora solicitou aos alunos que se dispusessem segundo os grupos habituais, e, aguardando que se sentassem e tirassem o material necessário, foi dando algumas indicações sobre a tarefa que iriam realizar.

A intervenção da professora junto dos vários grupos, durante a realização da tarefa, foi caracterizada por alguma discrição, no sentido de procurar não retirar o carácter investigativo à tarefa proposta nem minimizar a atitude investigativa dos alunos. Assim, as sugestões que propunha iam mais no sentido de os questionar, levando-os a reflectir, e de os ajudar a ultrapassar alguns impasses.

Relativamente à primeira parte da tarefa, a professora informou os alunos que era necessário que se recordassem da construção de triângulo, uma vez que foi leccionado no ano anterior. Para relembrar esse conteúdo a professora utilizou o CD da Escola Virtual da Porto Editora. Os alunos seguiram atentamente as explicações, o que permitiu esclarecer algumas dúvidas e recordar os conhecimentos que já tinham sido adquiridos. Estes mostraram-se interessados e entusiasmados. Na primeira parte da tarefa os alunos teriam que construir três triângulos a partir de elementos dados. Como tal, iriam precisar da régua, do compasso e do transferidor. O objectivo era melhorar o nível de precisão nas construções de triângulos e sensibilizar os alunos para o uso correcto dos instrumentos de medição, desenvolvendo destrezas manuais.

Depois da professora distribuir os enunciados das tarefas, procedeu à leitura e explicação de alguns aspectos da mesma. O grupo G1 não manifestou dificuldades na construção do primeiro triângulo. Contudo, revelaram algumas dificuldades em relação à construção do segundo triângulo, levando-os a solicitar a presença da professora.

Apesar de ouvirem as indicações apresentadas no CD, necessitaram de uma explicação mais individualizada.

Prof.: Temos dois lados e um ângulo. A primeira coisa a fazer …

B.: As duas medidas.

Prof.: Será?

N.: Não sei!

Prof.: Qual é a vossa ideia?

B.: Traçar o lado de cinco centímetros e depois o outro.

Prof.: Experimentem! É a melhor forma de tirarem as vossas dúvidas!

Os alunos do grupo G1 seguiram a sugestão apresentada pelo **B.**. Começaram por traçar na sua folha um segmento de recta de extremos A e B, com cinco centímetros de comprimento e, em seguida, traçaram outro segmento de recta a partir do ponto B, com cinco centímetros de comprimento; depois, uniram o ponto A ao ponto C. Para verificar se o ângulo de vértice B tinha, de amplitude, 85º. Alguns dos elementos do grupo agarraram no transferidor para confirmar. Confrontados com a variedade de amplitudes do ângulo de vértice B, **B.** resolveu chamar a professora.

B.: Professora … Professora.

[A professora aproximou-se].

R.: Professora não é como o **B.** disse?

Prof.: Não! Porquê?

B.: Nós medimos a amplitude do ângulo B e todos temos diferentes valores.

Prof.: Qual é a amplitude do ângulo B?

N.: Aqui diz 85º.

Prof.: Então será que marcamos em primeiro lugar os dois lados?

R.: Não.

Prof.: Não! … porque a seguir o ângulo pode não ser igual. Como devemos então proceder para construir o triângulo?

B.: Traçamos o lado de cinco centímetros e depois, com o transferidor, marcamos o ângulo indicado na ficha e só depois é que marcamos o outro [lado].

Os alunos ao construírem o triângulo depararam-se com o facto de que os triângulos construídos eram todos diferentes. A impossibilidade de construir apenas um triângulo originou que os alunos compreendessem que a ordem seguida tem influência na construção do triângulo. A sugestão da professora, para que experimentassem foi o suficiente para iniciar a discussão no grupo, ajudando, desta forma, a elucidá-los sobre os passos a seguir na construção de triângulos, surgindo dessa discussão e não da parte da professora a razão pela qual a ideia de **B.** estava incorrecta.

Os alunos não revelaram dificuldades em desenhar o último triângulo. Porém, surgiram algumas dúvidas relativamente à classificação do triângulo quanto à amplitude dos ângulos e quanto ao comprimento dos lados. A professora conduziu o discurso de modo a envolver todos os elementos do grupo na discussão:

N.: Professora, este … Como é que classificamos este triângulo quanto aos ângulos?

Prof.: O que é que vocês aprenderam sobre os triângulos no ano passado?

B.: Escaleno, equilátero…

Prof.: O que é que significa equilátero?

R.: Tem todos os lados iguais e escaleno tem todos os lados diferentes.

N.: Falta um, isósceles … tem dois lados iguais.

Prof.: [apontando para o triângulo construído pelo **B.**] E este, como é que nós classificamos quanto aos lados?

R.: Não sabemos as medidas de dois lados.

Prof.: Não? De certeza?

R.: Podemos medir com a régua?

Prof.: Claro.

[Silêncio].

R.: Equilátero.

Prof.: E quanto aos ângulos?

B.: Tem de dar 180º.

R.: Então tem 60º … 3 vezes 60 é 180.

V.: Obtusângulo.

Prof.: Será?

B.: Não, são todos menores que 90º, é agudo.

Prof.: Como o triângulo tem três ângulos agudos, nós classificamos de …

R.: Acutângulo.

Quando o aluno solicitou o auxílio da professora, colocando-lhe uma pergunta directa, obteve, como resposta, outra pergunta. O facto de não responder à questão e colocar outra, evidencia a sua expectativa de que os alunos, ao participar, possam dar o seu contributo, sendo estes a recordar a classificação dos triângulos quanto aos lados e quanto aos ângulos. As questões colocadas pela professora tiveram como objectivo, essencialmente, recordar conceitos anteriormente estudados. A professora, indirectamente, através das perguntas colocadas aos alunos, encaminha-os para a resposta à sua pergunta. Os alunos mobilizaram os conhecimentos adquiridos relativamente à classificação de triângulos; no entanto, as suas dúvidas residiam no facto de apenas saberem o comprimento de um lado e dois dos seus ângulos. A intervenção da professora foi o suficiente para os alunos compreenderem que poderiam saber os outros dois lados se utilizassem a régua para efectuar as respectivas medições. Os alunos revelaram conhecer que a soma dos ângulos internos de um triângulo é de 180º, pois utilizaram esse conhecimento para calcular o ângulo em falta no triângulo.

No grupo G2, relativamente à primeira parte da tarefa, correu de uma forma muito similar ao grupo anterior. Os alunos não manifestaram dúvidas na construção do primeiro triângulo, em que eram dados os comprimentos dos três lados do triângulo. Os alunos utilizaram a régua e o compasso para efectuar a sua construção. Tal como no outro grupo, a questão dois suscitou algumas dúvidas em relação ao uso do transferidor.

Ma.: Professora coloco o transferidor em B.

Prof.: Muito bem.

Ma.: Começo daqui ou dali?

Prof.: Vai marcar para qual o lado, o direito ou o esquerdo? … Exactamente. Porque é que não poderia ser para o outro lado?

Muitas vezes os alunos recorrem à professora para que esta lhes diga como devem proceder. Embora **Ma.** tenha marcado bem o ângulo de 85º, a professora interpela o grupo levando-os a reflectir do porquê de ser assim. Na construção do triângulo detectou-se que a dificuldade do grupo era na manipulação do transferidor, para medir a amplitude dos ângulos. Ao contrário do grupo anterior, as alunas começaram por traçar um segmento de recta de extremos A e B, com cinco centímetros de comprimento e depois marcaram um ângulo com vértice em B com 85º.

Ma.: Unimos estes dois pontos com uma régua.

Prof.: De B até o C quantos centímetros são?

M.: Ah! Tenho que medir primeiro cinco centímetros.

Ma.: cinco centímetros.

Prof.: Certo, mede agora cinco centímetros. (Silêncio) Pronto este aqui será…

M.: É o ponto C.

A intervenção da professora foi no sentido do grupo se aperceber que não podiam unir os vértices do triângulo sem medir, com a régua, cinco centímetros do ponto B ao ponto C, revelando alguma distracção dos alunos aquando a construção do triângulo.

Quando os alunos terminaram de construir os triângulos, a professora distribuiu a segunda parte da tarefa e um espelho por cada grupo. Os alunos teriam que investigar o número de eixos de simetria de algumas figuras geométricas, utilizando os espelhos. Nesta tarefa, existiam questões referentes a diferentes investigações; número de eixos de simetria dos polígonos regulares, dos triângulos e dos quadriláteros. Nas questões um e dois estavam, explícitos a forma de recolher e organizar os dados de modo a investigar; contudo, nas questões seguintes, os alunos teriam que definir quais os casos que seriam pertinentes investigar.

Inicialmente quando a professora distribuiu os espelhos, os alunos começaram por mostrar algum espanto em relação ao material com que iam trabalhar. Também os espelhos provocaram alguma distracção, isto porque muitos alunos começaram a utilizá-los, como é hábito, e não como um material de trabalho. Em seguida, a professora explicou aos alunos que, para além dos espelhos, existem outros materiais que permitem investigar o número de eixos de simetria de figuras geométricas, por dobragem ou utilizando o Mira. A professora continuou informando que poderiam por exemplo, desenhar e recortar essas figuras e depois, por dobragem da figura, de forma a obterem polígonos geometricamente iguais, ou seja, procurando uma coincidência entre as duas partes, poderiam investigar os eixos de simetria. Salientou que o Mira é um material que funciona como um espelho, mas tem a vantagem de ser transparente, permitindo testar mais facilmente se a imagem reflectida de uma das metades da figura coincide com a outra metade, situada do outro lado esse instrumento. E realçou que, também, através dos espelhos podemos investigar os eixos de simetria, referindo que, para tal, teriam de colocá-lo de modo que a imagem reflectida de uma das metades da figura fosse igual à outra metade, situada do lado baço do espelho. No entanto, depois da professora explicar para toda a turma o fim a que se destinava o espelho, passaram a encará-lo como um meio auxiliar do seu trabalho.

O conceito de eixo de simetria não é novo para os alunos, porém a professora, através de um exemplo, pretende que os alunos, de forma intuitiva, compreendam o seu significado.

> **Prof.:** Vamos lá fazer uma pequena experiência. Vou dobrar uma folha A4 a meio e num dos lados vou desenhar qualquer coisa … pode ser isto.

B.: Meia árvore.

Prof.: Se eu agora recortar com uma tesoura a meia árvore, o que é que acontece?

B.: Fica igual nos dois lados.

Prof.: Como o **B.** dizia aparecia meia árvore, dobrei, cortei e se agora eu abrir dá o quê?

Alunos da turma: Uma árvore.

Prof.: Dá uma árvore, não é? O que estivemos a fazer aqui … estivemos a fazer uma figura simétrica desta. Esta linha é o eixo de simetria da figura. O que é o eixo de simetria da figura?

B.: Traça a figura a meio.

Prof.: Divide a figura em duas partes geometricamente iguais ou seja, se dobrarmos por esta linha, elas iam se sobrepor ponto por ponto. As simetrias estão presentes no nosso dia-a-dia. Onde?

R.: As borboletas.

B.: O símbolo da Renault.

A professora introduziu o conceito de eixos de simetria através de um exemplo. Esta começou por dobrar uma folha de papel e, numa das partes, desenhou meia árvore. Depois recortou o papel dobrado pelo contorno da figura desenhada e, ao abrir, obteve uma árvore. Os alunos identificaram na figura o eixo de simetria que dividia a árvore em duas partes geometricamente iguais.

Os alunos revelaram ter compreendido o conceito introduzido pela professora, pois apresentaram vários exemplos de simetrias na natureza. Um dos exemplos apresentados foi o da borboleta, que tem um eixo de simetria que a divide em duas partes geometricamente iguais.

Relativamente às investigações acerca dos eixos de simetria dos vários polígonos regulares, os alunos não tiveram dúvidas em recolher e organizar os dados, uma vez que estava explícito, no enunciado da tarefa, o processo que deveriam seguir. Todos os grupos descobriram, sem dificuldade, todos os eixos de simetria colocando o espelho em todas as posições sobre a figura. Durante a recolha dos dados estes foram preenchendo a tabela. A observação dos valores registados na tabela permitiu formular uma conjectura, pois verificaram que o número de lados do polígono regular era igual ao número de eixos de simetria.

B.: Três eixos de simetria no triângulo equilátero, quatro no quadrado e cinco no pentágono

N.: Devem ser seis no hexágono.

B.: Vai ser sempre igual ao número de lados.

R.: Parece.

No entanto, nas questões em que era exigida uma identificação dos casos a estudar surgiram algumas dificuldades aos alunos.

N.: É só um que dá.
B.: Este dá.
N.: Pois dá … dá um.
B.: Este aqui é o único que não tem eixos de simetria. E este tem dois.
N.: [experimentando com o espalho para confirmar] Tens a certeza que não tem eixos de simetria?
B.: Sim. O terceiro tem de certeza absoluta … tem três eixos, dá três.
R.: Um assim…
N.: Sim.
R.: Depois …
B.: É igual tem todos os ângulos iguais ao virares o triângulo dá sempre igual.

Os alunos do grupo G1, ao manipularem o espelho, posicionando-o de várias formas, descobriram o número de eixos de simetria presentes nos triângulos. No entanto, no grupo G1 não verificaram, para todos os casos. Por isso, na questão três, registaram por escrito o seguinte:

Triângulo escaleno rectângulo não tem eixos de simetria.
Triângulo isósceles acutângulo tem dois eixos de simetria.
Triângulo equilátero acutângulo tem três eixos de simetria.

É possível verificar, pelos registos dos alunos, que eles se basearam apenas nos triângulos construídos, investigando apenas para três casos: triângulo escaleno rectângulo, triângulo isósceles acutângulo e triângulo equilátero acutângulo. Este facto levou a professora a intervir no grupo, de forma a explicitar o que pretendia que os alunos investigassem.

Prof.: Ainda há pouco disseram e muito bem que um triângulo equilátero tem os lados todos iguais. Em relação aos ângulo o que é que sabemos?
B.: São iguais.
Prof.: Qual é a amplitude de cada um dos ângulos?
R.: Dá 60º.
Prof.: Quanto aos ângulos como é que classificamos?
B.: Acutângulo.

Prof.: Isso significa que todos os triângulos equiláteros são acutângulos quanto aos ângulos [apontando para o registo]. Existem triângulos acutângulos que são isósceles quanto aos lados?

B.: Sim. Este [apontando para o triângulo construído na primeira parte da tarefa]

Prof.: E existe algum triângulo acutângulo que seja escaleno quanto aos lados?

B.: Temos que investigar para os vários tipos de triângulos.

Prof.: Claro que sim.

As questões lançadas pela professora conduziram a que os alunos compreendessem que não existem só aqueles três casos. Os alunos rapidamente se deram conta da necessidade de organizarem as suas ideias. Então, construíram uma tabela. A intervenção da professora fez com que os discentes não dessem por terminada a questão, mas investigassem para outros tipos de triângulos que existem e verificassem, para cada caso, qual era o número de eixos de simetria. Contudo, os alunos não chegaram à conclusão nem se interrogaram sobre qual a característica que seria determinante para ter três, um ou zero eixos de simetria.

Na questão 3., o grupo G2 investigou o número de eixos de simetria para os triângulos construídos, não considerando todos os tipos de triângulos. O facto de terem apenas considerado a classificação dos triângulos quanto aos lados permitiu que chegassem à conclusão que um triângulo equilátero tem três eixos de simetria, um triângulo isósceles tem dois eixos de simetria e um triângulo escaleno não tem eixos de simetria.

Ma.: Se a gente colocar o espelho o que aparece neste lado não é igual a este lado … o mesmo assim … Só existe um eixo de simetria este … está igual nos dois lados.

M.: Este? [apontando para o triângulo equilátero construído]

Ma.: Três eixos de simetria.

C.: O que é que escrevemos na folha?

Ma: Equilátero três eixos de simetria, Isósceles dois eixos de simetria e escaleno sem eixos de simetria.

Na questão 4., os alunos fizeram um esboço no caderno dos vários quadriláteros que conheciam. Não manifestaram dificuldade em descobrir o número de eixos de simetria, pois iam colocando o espelho sobre a figura em várias posições. Durante a realização da tarefa, a professora apenas interveio quando considerou pertinente dando, liberdade de acção aos grupos de trabalho. Os grupos revelaram-se autónomos na execução da tarefa.

Faltavam dez minutos, aproximadamente, para finalizar a aula, quando se deu início à discussão da tarefa. A professora sugeriu que cada grupo respondesse a uma questão, sendo o porta-voz de cada um dos grupos o responsável por comunicar ao grupo turma as suas conclusões. As questões três e quatro foram as que suscitaram maior debate, pois a maioria dos grupos não tinham investigado todos os casos.

Na discussão da questão três surgiram dúvidas, uma vez que a maior parte dos grupos não tinha identificado todos os tipos de triângulos: triângulo acutângulo equilátero, triângulo acutângulo isósceles, triângulo acutângulo escaleno, triângulo obtusângulo isósceles, triângulo obtusângulo escaleno, triângulo rectângulo escaleno e triângulo rectângulo isósceles. Para facilitar a análise dos dados, a professora sugeriu ao porta-voz do grupo, a quem coube a questão três que fosse ao quadro e construísse uma tabela com duas colunas (tipos de triângulos e número de eixos de simetria). Com o contributo de todos os grupos, os alunos foram preenchendo a tabela.

Prof.: Observando a tabela quais são os triângulos que têm um eixo de simetria?

Ma.: Triângulos isósceles.

Prof.: São os triângulos obtusângulo isósceles, rectângulo isósceles …

B.: Acutângulo isósceles.

Prof.: Todos estes triângulos tem uma coisa em comum. O que é?

Alunos da turma: São Isósceles.

Prof.: Então, todos os triângulos isósceles que não são equiláteros têm só um eixo de simetria. E quais são que não têm eixos de simetria?

Alunos da turma: Os escalenos.

Prof.: E quais são que têm três eixos de simetria?

Alunos da turma: Equiláteros.

A discussão que se foi desenvolvendo permitiu aos alunos identificarem vários tipos de triângulos e verificarem que o que define o facto de ter três, um, ou nenhum eixo de simetria é a sua classificação quanto aos lados.

Síntese

O uso dos espelhos nesta tarefa permitiu aos alunos a utilização de alguns processos matemáticos, uma vez que o enunciado da tarefa apelava directamente à investigação e à descoberta. Estes revelaram uma certa apropriação de alguns processos específicos das investigações matemáticas: explorar, procurar regularidades, formular conjecturar, desenhar, explicar, falar, concordar e questionar. Esta tarefa, por ser de carácter mais investigativo, permitiu aos alunos um outro tipo de trabalho. Nesta tarefa, a experiência realizada permitiu aos alunos explorarem o número de eixos de simetria recorrendo aos espelhos. Os conhecimentos matemáticos envolvidos – classificação dos triângulos quanto aos lados e quanto aos ângulos, eixo de simetria e medição de ângulos e comprimentos - revelaram-se acessíveis a todos os alunos, não tendo sido necessário fornecer-lhes mais informação do que aquela de que eles já eram portadores. Os alunos envolveram-se activamente na tarefa proposta, construindo o seu conhecimento relativamente ao número de eixos de simetria das várias figuras geométricas.

Nesta tarefa foi notória a importância do material manipulável que os alunos tinham à sua disposição. A falta deste constituiria um obstáculo à realização da investigação, pois foi, através da manipulação do espelho, que os alunos puderam visualizar o número de eixos de simetria de cada figura geométrica. Na realização desta tarefa de investigação os alunos empenharam-se na sua exploração com visível entusiasmo. Apenas manifestaram dificuldades na questão em que era fundamental tomar decisões sobre o número e tipo de casos a estudar, notando-se uma clara tendência para recolher poucos dados.

A professora, na fase de desenvolvimento da tarefa, procurou apoiar os grupos, sempre que necessário, mas adoptando uma atitude questionadora e não de resposta imediata às questões e dúvidas colocadas, de forma a envolvê-los no processo de investigação.

Os alunos manifestaram interesse na exploração e investigação do número de eixos de simetria dos triângulos, quadriláteros e dos polígonos regulares. Um dos aspectos evidenciados na resolução da tarefa proposta são as alterações manifestadas no modo de encarar as tarefas, especialmente pelos alunos “mais fracos”. Talvez o facto de não necessitarem de uma grande “bagagem matemática”, deu-lhes alguma segurança. Outro aspecto a salientar é que os resultados obtidos foram, de um modo geral, consensuais e fruto do trabalho de colaboração entre todos os elementos do grupo. Daí que o ambiente de trabalho foi agradável, em resultado do clima de boa camaradagem que os alunos desenvolveram.

Na fase de discussão da tarefa verificou-se uma grande interacção entre a professora e os alunos. Estes tiveram oportunidade de apresentar as suas descobertas e discutir aspectos pouco pensados durante a investigação, no entanto, questionaram, pouco as ideias uns dos outros; talvez porque os alunos exemplificavam com o espelho, o que era suficiente para validar aquilo que diziam.

Material manipulável

O material posto à disposição dos alunos teve grande influência na realização da tarefa, pois foi com ele que foram concretizadas todas as investigações. Os espelhos permitiram aos vários grupos recolher dados relativamente ao número de eixos de simetria dos polígonos regulares, dos triângulos e dos quadriláteros. Desta forma, os alunos puderam visualizar de forma rápida e eficaz os vários eixos de simetria das diferentes figuras geométricas. Nesta perspectiva, a visualização e a manipulação do material desencadearam um processo de reflexão e de discussão que conduziu os alunos ao conhecimento, validando-o.

Os espelhos revelaram-se úteis, pois influenciaram os alunos na utilização de alguns processos matemáticos específicos das investigações matemáticas. Por exemplo, os alunos, aquando a recolha de dados, relativamente ao número de eixos de simetria dos polígonos regulares, reflectiram e discutiram o significado dos dados recolhidos e tentaram prever o que iria acontecer na experiência seguinte. A organização dos dados numa tabela permitiu-lhes procurar regularidade e, este aspecto, contribuiu para a formulação de uma conjectura.

Verificou-se que os alunos estavam mais atentos ao trabalho do grupo, uma vez que foi distribuído a cada grupo apenas um espelho. Quando um aluno manipulava o espelho, os restantes elementos observavam e registavam na folha os resultados, verificando-se que só repetiam a experiência simplesmente para confirmar, ou para desfazer dúvidas, que surgissem relativamente ao número de eixos de simetria. As suas interacções vão assumindo um carácter mais cooperativo e revelam maior autonomia em relação à professora. Os alunos lêem em conjunto a tarefa e interpretam-na antes de começarem a resolver as questões. Há uma partilha de material (espelho), de informação (os alunos explicam aos colegas de grupo os seus raciocínios) e de resultados.

4.6. Tarefa “Critérios de igualdade de triângulos”

No dia 8 de Maio num bloco de noventa minutos foi explorada a tarefa “Critério de Igualdade de Triângulos” (anexo 8). A professora, no início da aula, distribuiu o enunciado da mesma e, simultaneamente, fez referência ao material que seria necessário para a realização da tarefa, pedindo para que a realizassem na íntegra com muita atenção a todos os pormenores. Depois acrescentou “Acho que não é preciso dizer mais nada. Está tudo bem explícito na tarefa. Podem começar a trabalhar”. No entanto, ao longo da aula, a professora foi circulando sistematicamente pelos diferentes grupos para tentar acompanhar, dentro do possível, o que se estava a passar.

Os alunos deveriam recolher dados relativamente ao comprimento dos lados e as amplitudes dos ângulos internos do triângulo, registando os valores obtidos. Depois de conhecer os seus seis elementos (três ângulos e três lados) deveriam proceder à experimentação utilizando o material necessário.

No início, os alunos sentiram alguma dificuldade no arranque da tarefa, pois não compreenderam o que teriam de investigar. Assim, a professora ajudou-os sugerindo que lessem novamente o que era proposto e dando orientações através da colocação de questões e do pedido de explicações, levando os alunos a compreender o tipo de investigações que teriam de realizar. Os grupos seguiram na sua maior parte a seguinte estratégia: consistia em verificar se, com um só elemento, conseguiam construir um triângulo geometricamente igual ao dado, depois com dois, três e assim sucessivamente. As questões da tarefa orientavam os alunos para a discussão acerca do número mínimo de dados que seria necessário conhecer para construir um triângulo e as várias condições que permitem garantir a igualdade sem ser necessário comparar os seis elementos.

Para a realização desta tarefa, os alunos dispuseram de um compasso, um transferidor e uma régua. O trabalho decorreu, como habitualmente, em grupo e o ritmo de trabalho era estabelecido pelos elementos dos mesmos.

No grupo G1, depois de distribuída a tarefa, os alunos iniciaram logo a leitura da proposta de trabalho e, imediatamente, começaram a efectuar as medições dos lados e dos três ângulos para desenharem um triângulo geometricamente igual ao dado na tarefa.

A aula foi decorrendo e o grupo G1 continuava a manifestar algumas dificuldades na compreensão do enunciado da tarefa, nomeadamente o que deveriam investigar, utilizando o material de desenho. Perante estas dificuldades, a professora decidiu intervir junto do grupo:

> **Prof.:** Já mediram os lados, muito bem.
>
> **N.:** Se soubermos que este é seis, e se estes não soubermos pode ser três e quatro.
>
> **Prof.:** Porque pode ser três e quatro?
>
> **N.:** Porque aquilo [referindo-se a definição de desigualdade triangular] … este [lado com seis centímetros] tem de ser mais pequeno… que a soma dos outros dois.

Prof.: Então, já me estás a dar a resposta para a pergunta número dois. Então se soubermos a medida de um dos lados é possível obter só com esta informação um triângulo geometricamente igual a este?

N.: Sim.

Prof.: Então, estava-me a dizer, ainda hà pouco, que pode ser quatro e três. Já é diferente deste [apontando para o triângulo da proposta de trabalho].

B.: Sim

Prof.: Será que basta só ter conhecimento de uma medida do lado?

N.: Não.

Prof.: O que é que é preciso?

N.: Dois pelo menos.

Prof.: Então, vamos lá experimentar se conhecendo a medida de dois lados é possível construir um triângulo geometricamente igual a este.

A intenção da professora era que os alunos experimentassem construir um triângulo com apenas o comprimento de dois lados e verificassem se os dois triângulos são ou não geometricamente iguais. Parece evidente, pelo diálogo, que os alunos compreenderam que para construir um triângulo não é necessário conhecer todos os seus seis elementos.

N.: Não é para fazer um geometricamente igual só sabendo dois lados?

[B. desenhou o segmento de recta AB na folha de tarefa].

B.: Sim. Como é que é possível?

N.: Construímos primeiro este [apontando para o segmento de recta AB] e depois este [segmento de recta AC].

B.: É necessário este ângulo [$C\hat{A}B$] senão não conseguimos construir.

R.: Porquê? Fica mais ou menos assim este segmento [colocando a régua no ponto A].

B.: Por isso mesmo dá outro triângulo.

R.: Como assim?

B.: Podes colocar aqui … aqui … aqui.

[A professora aproximou-se do grupo]

V.: Basta saber dois lados e um ângulo, não é professora?

Prof.: Pode ser qualquer ângulo do triângulo?

R.: Este [apontando para o $C\hat{A}B$].

Prof.: Vocês que experimentem.

A experimentação levou os alunos a concluírem que o comprimento de dois dos lados não era suficiente para construir um triângulo. O **B.** começou por desenhar o segmento de recta AB com seis centímetros de comprimento, mas ficou indeciso sobre a posição a escolher para o outro lado. Este facto mostra a necessidade de um terceiro elemento. Confrontado com o facto do segundo lado poder tomar várias posições, **B.** explica o seu raciocínio aos colegas de grupo, demonstrando que é necessário saber a amplitude do ângulo formado pelos dois lados, para garantir a igualdade. O grupo experimentou construir o triângulo com esses três elementos. Depois de construído o triângulo os alunos investigaram a sua igualdade, sobrepondo-os, e verificaram que coincidiam ponto por ponto. A ideia de que seria necessário pelo menos dois elementos é posta em causa pelo **B.**, pois dois lados não garantem a igualdade dos dois triângulos. A discussão em torno do número mínimo de dados que seriam necessários conhecer aumenta perante as investigações realizadas no seio do grupo.

> **R:** Qual é o número mínimo de dados que será necessário conhecer? Se soubermos apenas a amplitude de um ângulo será suficiente? Não.
>
> **N.:** É necessário saber as medidas de todos os lados.
>
> **B.:** É só preciso saber dois ângulos.
>
> **V.:** Está errado.
>
> **B.:** Estão a ver como vocês não sabem. Se vocês souberem dois ângulos, por exemplo, 70º e 30º , basta fazer 180º menos a soma de 70º com 30º, obtemos o ângulo que falta. Somando dá 180º. Vocês podem fazer este triângulo.
>
> **N.:** Maior
>
> **B.:** Maior não, fica neste.
>
> **N.:** Exactamente. E qual é a medida dos lados?
>
> **B.:** Só dá um triângulo. Se soubermos os ângulos dá este. Se nós soubermos os ângulos só dá este triângulo, não dá mais nenhum. Se eu quisesse fazer este triângulo maior, ah teria que aumentar … tens razão tendo os três ângulos não conseguimos construir um triângulo geometricamente igual a este.
>
> **N.:** Tendo os ângulos podíamos construir triângulos maiores, ou mais pequenos que o triângulo da ficha.

O **N.** não concorda com a opinião do **B.**, que é suficiente conhecer a amplitude de dois ângulos para construir dois triângulos geometricamente iguais. De facto, sabendo a amplitude de dois ângulos sabemos o terceiro ângulo pois a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º. No entanto, esse aspecto não é o suficiente para garantir que os triângulos sejam geometricamente iguais, uma vez que podemos construir vários triângulos com as mesmas amplitudes dos ângulos internos. O **N.** insiste no seu raciocínio mas **B.** não parece convencido. Contudo, quando confrontado com as medidas dos lados do triângulo, compreende que o seu colega tem razão. O grupo chega à conclusão que no mínimo são necessário três elementos. A discussão continuou em torno de quais os três elementos que serão suficientes para construir dois triângulos geometricamente iguais.

As experiências sucediam-se e os alunos revezavam-se na sua realização. O número mínimo de dados e quais os elementos necessários surgiam como uma negociação, resultado da interacção dos alunos e da partilha de opiniões e sugestões, acompanhadas de pequenas reflexões acerca das experiências que vão realizado no seio do grupo.

N.: Vamos experimentar construir um triângulo com a medida do comprimento de um lado e a medida da amplitude de dois ângulos.

B.: Este lado tem seis centímetros.

N.: Então traça um segmento de recta com seis centímetros.

B.: Os ângulos são 70º, 30º e 80º .

[Utilizando o transferidor, o **B.**, com origem no ponto A, marcou o ângulo de 70º; depois traçou uma semi-recta com origem no ponto A].

N.: Agora faz-se da mesma maneira.

B.: Sim, procede-se do mesmo modo para o outro ângulo dado.

[**B.** na sua folha coloca o transferidor no ponto B e marcou um ângulo de 30º, depois traçou uma semi-recta com origem no ponto B].

N.: Vê se coincidem os dois triângulos.

R.: O ponto de intersecção é o ponto C.

[**B.** coloca o triângulo da tarefa por cima do triângulo que construíram].

B.: São geometricamente iguais.

Com a ajuda do material, os alunos puderam experimentar quais e o número de elementos necessários para que dois triângulos sejam geometricamente iguais. O grupo verificava a igualdade do triângulo da tarefa com o triângulo construído através da sobreposição dos triângulos. Esta foi a estratégia utilizada para provar a sua igualdade. Ao longo da tarefa os elementos do grupo G1 participavam activamente, quer experimentando quer discutindo ideias, como revelam os diálogos transcritos.

Na questão quatro, os alunos não revelaram dificuldades em aplicar os conhecimentos adquiridos.

No grupo G2 os alunos começaram por ler a tarefa proposta. Contudo, a professora constatou que não estavam a compreender o enunciado da tarefa. Perante essa constatação dirige-se ao grupo. A professora decidiu chamar a atenção para o tipo de investigação que pretendia que os alunos realizassem na tarefa proposta.

Prof.: Que medições é que fariam? Mediam o quê?

M.: Os lados.

Ma: Mediamos os lados com a régua.

C.: É necessário conhecer dois lados.

Prof.: Comecem a experimentar se tivessem a medida de dois lados se era possível construir um triângulo geometricamente igual ao da tarefa. Como se constrói um triângulo, sabendo as medidas de dois lados? Como é que faziam no sexto ano?

[**M.** pega na régua]

Prof.: Com uma régua, o que é que faziam?

[M. mede o comprimento do segmento de recta AB do triângulo].

Prof.: Tem quanto?

G.: Cinco vírgulas nove.

[M. desenha um segmento de recta com cinco vírgula nove centímetros].

Prof.: E agora, já temos um lado. Se tivéssemos outra medida do triângulo com procederíamos?

[**M.** desenha outro lado do triângulo com três centímetros].

Ma.: É só unir este a este.

M.: Temos que sobrepô-los um sobre o outro.

Prof.: Será que coincidem … fica igual?

[A professora pega noutra ficha e coloca em cima do triângulo construído, de forma que o grupo verifique se os triângulos são ou não geometricamente iguais].

C. Não são iguais.

M.: Temos que ter a medida dos três lados.

Ao longo do diálogo, a professora coloca sucessivamente perguntas sobre o trabalho realizado, para as quais obtém respostas dos vários elementos, no sentido de os conduzir a uma reflexão sobre os elementos a que os triângulos devem obedecer para que se verifique a igualdade. A professora aproveitou a sugestão da **C.** e pediu aos alunos para experimentarem construir um triângulo igual ao da tarefa, sabendo apenas o comprimento de dois lados. As alunas construíram o triângulo sem dificuldade. Contudo, quando verificaram se coincidiam ponto por ponto, tal não ocorreu. Reflectiram sobre o processo utilizado para a construção do triângulo, chegando à conclusão que o comprimento de dois lados não é suficiente para construir um triângulo. Voltaram a experimentar construí-lo tendo apenas a medida dos três lados. Começaram por traçar um dos lados do triângulo com cinco vírgula nove centímetros de comprimento. Depois abriram o compasso com cinco vírgula seis centímetros e com centro em B, traçaram um arco de circunferência de raio igual ao comprimento do lado [BC]. Em seguida, com centro no ponto A, traçaram um arco de circunferência de raio igual ao comprimento do lado [AC] com três centímetros. O ponto de intersecção dos dois arcos traçados designaram por C. Por fim, uniram os pontos A e C e B e C, traçando os lados [AC] e [BC] do triângulo. Para finalizar, os alunos conferiram se os seus vértices coincidiam ponto por ponto. Como tal se verificou, obtiveram um triângulo geometricamente igual ao dado na tarefa. A professora pediu-lhes que, em cada situação, identificassem quais os elementos necessários para construir triângulos geometricamente iguais e que deviam registar também os contra-exemplos. Isto levou a que os elementos do grupo G2 passassem a analisar atentamente os vários casos e a registarem as conclusões obtidas.

Na generalidade, os alunos não revelaram grandes dificuldades na resolução da questão quatro da tarefa.

A fase de discussão da tarefa ocorreu nos últimos momentos do bloco de noventa minutos. Houve uma grande participação dos alunos aquando a apresentação e discussão dos resultados em grande grupo, com registo dos resultados mais importantes no quadro. A discussão teve como objectivo pôr os alunos a pensar e a reflectir sobre diversos aspectos da tarefa em questão. Os alunos explicavam como procederam na construção dos triângulos e como verificaram se eram iguais; apresentaram, também, justificações para os casos em que tal não ocorre. Os alunos mostraram-se sempre muito activos para responder às questões e desafios propostos pela professora e para defender as suas ideias e pontos de vista. A professora promoveu a discussão e incentivou a procura de justificações e ajudou no esclarecimento de dúvidas que pudessem surgir nalgum grupo.

A questão um não suscitou dúvidas porque a maior parte dos grupos, começou por medir o comprimento dos lados e a amplitude dos ângulos do triângulo da tarefa.

D.: Medíamos todos os ângulos e todas as linhas … o comprimento da linha.

Prof.: Vocês aqui a que conclusão chegaram?

C.: Medir os três lados.

B.: Os lados e os ângulos.

R.: Os lados e os ângulos.

Os alunos identificaram os seis elementos do triângulo (três ângulos e três lados) e utilizaram o material correcto para obter o comprimento dos três lados e a amplitude dos três ângulos. Na questão dois os alunos teriam que investigar se é necessário conhecer os seis elementos, para que dois triângulos sejam geometricamente iguais, e quais os elementos do triângulo que eram necessários conhecer. Os vários grupos investigaram com um só elemento, com dois, com três e assim sucessivamente. Contudo, houve grupos que não investigaram todas as hipóteses. No entanto, a aula de discussão serviu para discutir as possibilidades de construção de um triângulo geometricamente igual a outro.

Prof.: Que conclusões puderam tirar? Para construir um triângulo geometricamente igual a este, o que é necessário conhecer?

H.: Os ângulos.

Prof.: Todos os ângulos.

B.: Não, pelo menos dois.

H.: Dois pelo menos … depois pudemos fazer uma conta.

Prof.: Que conta?

H.: Se sabemos dois ângulos como a soma dos ângulos internos do triângulo é 180º, sabemos o que falta.

Prof.: Então dados dois ângulos pudemos construir um triângulo igual ao da tarefa.

B.: Não, temos de saber um lado e dois ângulos.

Prof.: Porquê?

N.: Se tivermos os três ângulos não sabemos qual o comprimento dos lados do triângulo.

A.: Os lados podem ser mais pequenos ou maiores que o da tarefa.

Todos os alunos concluíram que existiam seis elementos, mas três elementos podem ser suficientes, desde que bem escolhidos. Os alunos concluíram que dados os três ângulos de um triângulo não é uma condição suficiente para construir um triângulo geometricamente igual ao dado, pois podemos construir uma infinidade de triângulos diferentes. Também investigaram condições em que obtinham um triângulo geometricamente igual ao dado.

S.: Sabendo o comprimento dos três lados podíamos obter um triângulo igual a este.

Prof.: Era preciso saber todos os lados?

S.: Não, bastava dois.

Prof.: **S.** faz no quadro um triângulo igual a este sabendo apenas dois lados.

[O aluno levanta-se e agarra na régua que estava em cima da secretária da professora].

Prof.: Quais os lados que tu sabes?

S.: Um tem seis centímetros e o outro três centímetros.

[O aluno traça o segmento de recta AB com seis centímetros].

B.: É preciso a amplitude do ângulo A.

Prof.: Concordam com o **B.** ? Será necessário saber a amplitude do ângulo CAB?

R.: Eu acho que sim.

Prof.: Porquê?

R.: [fazendo o gesto com as mãos] Porque o outro lado pode ficar assim ou assim [fazendo gestos com o braço] que tem sempre três centímetros.

Ma.: Já não fica igual ao triângulo dado.

Os três critérios de igualdade de triângulos ao longo da discussão com toda a turma foram surgindo, para que não restassem dúvidas em relação aos elementos necessários, os alunos construíam-nos no quadro com o material adequado. Assim, através da visualização, os alunos constatavam e justificavam a razão pela qual o triângulo não era igual ao dado. Ao longo da discussão, a professora foi registando no quadro as condições que permitiam construir um triângulo geometricamente igual ao dado. Notou-se que os alunos estiveram envolvidos e empenhados na realização da tarefa e como tal alcançaram os objectivos pretendidos.

Na questão quatro os alunos teriam que aplicar os conhecimentos que adquiriram ao longo da resolução da tarefa. O exercício tinha como objectivo utilizar os critérios de igualdade de triângulos para justificar a sua igualdade. A questão um ponto um não suscitou dúvidas ao que todos os alunos responderam que os triângulos eram iguais porque têm dois lados iguais e o ângulo por eles formado igual. Na questão um ponto dois surgiram algumas hesitações que foram esclarecidas pela professora e os restantes colegas da turma.

Prof.: O que é que sabemos em cada triângulo?

Nuno: Que em cada triângulo é dado dois ângulos e um lado.

Prof.: Muito bem. Então existe um critério que compara a medida do lado e os ângulos adjacentes a esse lado. Vamos lá ver, um lado é igual, é ou não?

Ma.: É, há um ângulo que não é igual.

Prof.: Qual é o que não é?

Ma.: O de 40º.

Prof.: Quais são os ângulos que estão juntos ao lado que mede cinco centímetros no triângulo B?

Ma.: Um é 120º e o outro é 20º.

Prof.: Mas, no triângulo A, só tem o de 20º. Falta saber o outro ângulo. Qual é a amplitude do outro ângulo que falta?

H.: 120º.

Prof.: Porquê?

B.: Porque a soma dos ângulos internos de um triângulo tem de dar 180º.

Prof.: Portanto, estes triângulos são ou não geometricamente iguais?

Ma.: São.

Prof.: São, porque têm um lado com o mesmo comprimento e os dois ângulos adjacentes são iguais. Portanto, utilizaram o critério ALA.

Na questão um ponto três os alunos não manifestaram qualquer dificuldade em aplicar o critério correcto pois era dados dois lados e o ângulo por eles formado. Relativamente à questão um ponto quatro os alunos revelaram algumas incertezas relativamente ao critério a aplicar. Perante as hesitações a professora, através do questionamento à turma, direcciona-os para o critério adequado a situação.

Prof.: Os triângulos são geometricamente iguais?

Ma.: São.

N.: Não, não são.

Prof.: No triângulo A sabemos a medida de um lado seis centímetros e a amplitude dos dois ângulos adjacentes a esse lado. No outro o que é que nós temos?

B.: O comprimento de um lado seis centímetros e apenas a amplitude de um ângulo adjacente a esse lado.

Prof.: Qual é a medida da amplitude do outro ângulo que falta ai?

N.: cinquenta com cinquenta e três dá cento e três, para chegar a cento e oitenta faltam setenta e sete.

Prof.: O ângulo que falta é de 77º. Os dois triângulos são geometricamente iguais?

Alunos da turma: [Em simultâneo] Não.

Prof.: Não, o que é que falha?

N.: O ângulo.

R.: Um dos ângulos adjacentes a esse lado é diferente.

Os alunos demonstraram que sabiam que a soma dos ângulos internos de um triângulo era 180º e calcularam o ângulo em falta no triângulo B. No entanto, em grande parte da turma teve uma certa dificuldade em identificar o critério que poderiam aplicar, uma vez que poucos alunos responderam à questão da professora. Com as questões formuladas pela professora concluíram correctamente a questão e conseguiram justificar o facto dos dois triângulos não serem geometricamente iguais.

Síntese

Durante a realização da tarefa os alunos começaram por efectuar medições quer em relação aos ângulos, quer em relação aos comprimentos dos lados. Essa atitude sugere que seria necessário conhecer todos os seus elementos para construir um triângulo geometricamente igual ao dado na tarefa. Aliás, só ao longo das suas investigações é que os vários grupos se foram apercebendo de que não necessitavam de saber os seis elementos de que dispunham.

A estratégia de investigação adoptada pelos diferentes grupos consistiu em efectuar algumas medições que permitiram recolher dados, relativamente aos seis elementos do triângulo. Em seguida, os alunos, com base nos dados recolhidos, começaram por tentar desenhar um triângulo tendo apenas alguns dos seus elementos. Depois de adaptado este modo de trabalho, deu-se início a uma série de experiências com a ajuda do material de desenho (régua, transferidor e compasso), atitude esta que se estendeu ao longo de toda a aula. Os alunos discutiam as investigações realizadas no seio do grupo, e também justificavam a razão pela qual não conseguiam formar um triângulo geometricamente igual com aquela combinação de elementos. As conclusões surgiram, assim, a partir das experiências realizadas pelos alunos. Estes agrupavam alguns elementos e procediam à construção do triângulo. Desta forma, iam verificando quais os elementos necessários e suficientes para construir um triângulo igual ao dado. O processo de verificação da igualdade entre os dois triângulos, utilizado pelos vários grupos foi a sobreposição dos triângulos.

No registo, verificou-se a falta de hábito dos alunos em os realizar, revelando uma valorização dos produtos em relação aos processos. Alguns grupos apresentaram-se mais completos do que outros. Uns grupos limitaram-se a uma enumeração dos casos em que era possível construir um triângulo geometricamente igual ao dado, não registando os casos em que não era possível formar um triângulo geometricamente igual. Outros grupos, no entanto, incluíram algumas explicações das suas descobertas acompanhadas por alguns esboços.

A experiência realizada levou os alunos a tirar conclusões, construindo desta forma o seu próprio conhecimento relativamente à igualdade de dois triângulos. Todos os grupos concluíram que um ou dois elementos seriam insuficientes para construir um triângulo geometricamente igual ao dado. Também concluíram que, no mínimo, seria necessário conhecerem três elementos, muito embora os vários grupos não analisassem todas as combinações possíveis de três dos seis elementos do triângulo.

Um outro aspecto que se salienta desta tarefa é a colaboração. A razão de tal colaboração poderá dever-se às características específicas da tarefa. Os alunos tinham um leque variado de casos que deveriam ser explorados.

Os alunos revelaram-se empenhados e envolvidos na resolução da tarefa e mostraram-se persistentes, não esmorecendo na procura dos elementos necessários e suficientes para construir um triângulo geometricamente igual ao dado. Isto denota uma maior preocupação para com a actividade matemática do que para com o produto a obter.

A discussão final teve por objectivo pôr os alunos a pensar e a reflectir sobre o trabalho desenvolvido nesta tarefa, uma vez que nem todos os grupos chegaram aos três critérios de igualdade de triângulos. Os alunos tiveram uma grande participação, procurando responder às questões colocadas pela professora, uma vez que esta encorajou a procura de justificações (porquê?), tentando que os alunos não tirassem conclusões apenas por intuição, mas com base nas construções realizadas. Eles apresentaram e explicaram quais as situações que era ou não possível construir um triângulo geometricamente igual ao dado. A discussão da tarefa proporcionou alguns confrontos de opiniões entre os alunos, levando-os a interagir e a aprender uns com os outros.

Material Manipulável

O material manipulável que foi posto à disposição dos alunos revelou-se útil na exploração e na realização de todas as experiências, conduzindo-os a algumas descobertas relativamente aos critérios de igualdade de triângulos. Talvez se as conclusões da tarefa fossem apenas transmitidas pela professora, poderiam não fazer sentido aos olhos dos alunos, pois não tinham tido a oportunidade de verificar o porquê de serem apenas três critérios. Os vários grupos, à medida que iam realizando as experiências, justificavam o facto dos elementos seleccionados não serem suficientes para formar um triângulo geometricamente igual ao dado. Neste sentido, o material utilizado ajudou na formulação das justificações.

A utilização de materiais manipuláveis contribuiu para o envolvimento dos alunos ao longo da resolução da tarefa, revelando um papel activo e mais autónomo por parte dos alunos. O trabalho de grupo pautou-se pela participação de todos os seus elementos, onde a partilha de ideias e opiniões, a apresentação de sugestões foram evidentes, encorajando-os a ouvirem-se mutuamente, criando um ambiente acolhedor.

O material utilizado na tarefa teve alguma influência nos processos matemáticos que foram utilizados pelos alunos: recolher dados, seleccionar informação, experimentar, analisar, justificar, registar, esboçar.

A manipulação do material pelos alunos parece ter facilitado a construção de certos conhecimentos e a aquisição de destrezas no seu uso. A linguagem utilizada pelos alunos durante a realização da tarefa é um misto de linguagem corrente com linguagem matemática. Também se verificou que todos os elementos do grupo se organizaram de modo a que todos participassem activamente.

4.7. Tarefa "Ângulos Verticalmente Opostos e Ângulos de Lados Paralelos"

A tarefa "Ângulos Verticalmente Opostos e Ângulos de Lados Paralelos" (anexo 9) foi realizada no dia 15 de Maio num bloco de noventa minutos e tinha como objectivo definir ângulos verticalmente opostos e de lados paralelos.

Os alunos como já estavam familiarizados com a dinâmica das aulas, entravam na sala de aula e de imediato colocavam-se em posição para trabalharem em grupo. A professora começou por distribuir o enunciado da tarefa e um geoplano circular pelos diferentes grupos de trabalho. Depois, pediu aos alunos que lessem, atentamente, o enunciado da tarefa e a explorassem, pois no final da aula cada grupo iria apresentar à turma as suas descobertas. No decorrer da tarefa a professora foi circulando pelos diferentes grupos de alunos na tentativa de perceber o que se ia passando em cada um deles. Também ao longo do desenvolvimento da tarefa, a professora foi frequentemente colocando questões aos vários grupos, procurando levá-los a esclarecer as suas dúvidas.

Na primeira questão os alunos tinham que "desenhar" no geoplano circular alguns ângulos. O **B.** lê a questão e inicia-se o seguinte diálogo, durante o qual o **N.** apenas ouve.

V.: O que é um ângulo recto?

B.: Um ângulo de 90º.

V.: E não se consegue fazer com os elásticos?

B.: Calma!

R.: Utiliza dois elásticos.

[**B.** desenhou no geoplano com os elásticos um ângulo obtuso].

V.: Não é …ou é.

B.: Não é, mas está quase lá.

[**B.** alterando um dos elásticos].

R.: O obtuso já fizemos.

[**B.** alterando um dos elásticos].

V.: Muda deste prego para este é o suficiente.

R.: É obtuso novamente.

B.: [retirando o transferidor do estojo] Tem 90º.

R.: É recto então.

Os alunos sentem uma certa dificuldade em manipular os elásticos de forma a "desenhar", no geoplano circular, um ângulo recto, apesar de saberem o referido conceito. O **B.** apresentou ao grupo uma estratégia que permitia verificar se o ângulo era recto. Para tal, utilizou o transferidor, uma vez que persistiam algumas dúvidas aquando a visualização do ângulo desenhado. Os colegas seguem com atenção a sua verificação com o transferidor, não restando dúvidas de que o ângulo formado é recto. A primeira questão era para os alunos se familiarizarem e explorarem o material manipulável distribuído pela professora, "desenhando" vários tipos de ângulos.

Na questão dois os elementos do grupo G1 adoptaram a estratégia de investigação sugerida na tarefa. Começaram por "desenhar" os dois diâmetros no geoplano não circular, iguais aos da figura da ficha de trabalho e mediram a amplitude dos quatro ângulos a, b, c e d.

B.: Quanto é que deu o ângulo **a**?

N.: 150º.

V.: Agora mede os outros.

[**N.** pega no transferidor para medir a amplitude dos restantes ângulos].

N.: O b é 30º.

V.: O d é igual ao b também é 30º.

N.: Não.

V.: [apontando para o arco que o ângulo formava] Olha, três pregos e aqui três, logo são iguais.

N.: Pois é!

B.: O c também é de 150º.

V.: É igual ao **a**.

A discussão no grupo prolongou-se durante algum tempo pois utilizando o material distribuído, os alunos experimentaram vários diâmetros, chegando sempre à mesma conclusão. Por isso, conjecturaram que ângulos verticalmente opostos são iguais. A cooperação estendia-se à parte experimental. Partilhavam tarefas enquanto o **B.** alterava os diâmetros, o **N.** ou o **V.** mensuravam a amplitude dos ângulos formados com o auxílio do transferidor. O **R.** registava os valores indicados pelos colegas fazendo um esboço na folha de tarefa. A divisão de tarefas e a discussão desta ajudaram a contribuir para uma maior independência relativamente à professora, demonstrando, assim alguma autonomia na realização do seu trabalho. As solicitações que eram feitas à professora iam maioritariamente no sentido de confirmar os resultados obtidos com o material manipulável. Os alunos não expressaram durante as suas investigações dificuldades. Recolheram os dados, tendo o cuidado de fazer na folha de tarefa um esboço da imagem apresentada no geoplano. A partir da informação recolhida os alunos formularam uma conjectura. O geoplano possibilitou ao grupo G1 avançar com alguma facilidade nas suas investigações. A investigação realizada pelos alunos e a descoberta dessa conjectura foi inteiramente da responsabilidade dos alunos, cuja satisfação era evidente após o feito, traduzida em sorrisos. O grupo, ao longo da tarefa, registava por escrito as suas descobertas à medida que trocavam opiniões entre si. Apesar de não surgirem dúvidas na realização da tarefa, a professora em determinadas alturas, obrigava os alunos a pensar colocando-lhes questões e pedindo explicações do trabalho realizado.

Prof.: Quantos ângulos obtusos é que nós temos ai no geoplano?

B.: Um ângulo obtuso.

Prof.: Será?

R.: [apontando para o ângulo] Este ângulo tem mais de 90º.

N.: Temos dois ângulos obtusos. Este e este, pois são iguais.

Prof.: [apontando para o geoplano] Sim, esses dois são obtusos. [apontando para o ângulo formado pelos ângulos **a**, **c** e **b**.] Qual é a amplitude deste ângulo?

R.: 330º.

Prof.: Porquê?

N.: Este é 150º, este é 30º e este é 150º.

V.: É também obtuso.

Neste diálogo é visível que os alunos olham para o geoplano e só observam os quatro ângulos indicados na figura da tarefa. A professora tenta demonstrar que existem outros ângulos obtusos para além daqueles dois por eles identificados, apresentado um exemplo de outro ângulo maior que 90º.

Prof.: Qual a amplitude de metade de uma circunferência?

B.: 180º.

Prof.: Qual a amplitude deste e deste ângulo?

B.: Medindo com o transferidor … este tem 30º e este 150º.

Prof.: [apontando para o geoplano] Este ângulo tem 30º, portanto significa que cada um destes ângulos tem de amplitude…

B.: 10º.

N.: Não, quinze metade de trinta.

Prof.: Claro. Então sabemos a amplitude destes dois ângulos?

B.: Sim. Este dá 30º e este 150º.

Prof.: Dizemos que são ângulos suplementares, porquê? … O que é que observamos?

B.: Um é obtuso e o outro é agudo.

N.: Que estes dois são iguais e que estes dois também são iguais.

Prof.: Sim, então podemos dizer que ângulos verticalmente opostos são iguais. E o que sabemos em relação a estes dois ângulos?

B.: A soma dá 180º.

Prof.: Isso significa que são ângulos suplementares.

Verifica-se, pelo diálogo, que a professora formula várias questões aos alunos com o intuito de os direccionar para a definição de ângulos suplementares. As várias questões formuladas pela professora são respondidas de forma clara demonstrando o trabalho realizado pelo grupo na sala de aula.

Relativamente à questão três, na alínea três ponto um os alunos do grupo G1 não revelaram dificuldades em seleccionarem dois ângulos agudos na figura. Depois de seleccionarem os dois ângulos com o transferidor, mediram a amplitude dos ângulos escolhidos.

B.: Aqui medimos os ângulos com o transferidor?

R.: Sim.

V.: O que são ângulos agudos?

R.: Menor que 90º.

B.: [Medindo a amplitude dos ângulos agudos seleccionados pelos alunos] Têm 70º.

R.: São os dois de 70º.

V.: O que é que se pode concluir?

B.: Que são iguais.

R.: Temos de escolher outros dois?

B.: [apontado para dois ângulos agudos] Podem ser estes? [Medindo a amplitude dos ângulos seleccionados] Este tem 70º.

V.: São iguais.

B.: São todos iguais.

Os alunos não manifestaram dificuldades em seleccionar, na figura ângulos agudos e utilizaram o instrumento adequado para medir a amplitude dos mesmos. Ao recolherem os dados, os alunos verificaram que todos os ângulos agudos tinham a mesma amplitude. Os alunos não sentiram necessidade em conjecturar, pois os dados recolhidos constituíam respostas suficientemente válidas. Contudo, perante certas questões levantadas pela professora, o grupo procedeu à formulação de conjecturas e sua justificação. Estes tiveram alguma facilidade em recolher os dados, pois no enunciado está explícito o processo que se deveria seguir. Pelo diálogo apenas um aluno não sabia o conceito de ângulo agudo, mas perguntou aos colegas de grupo que responderam à questão. Em relação, aos ângulos obtusos também chegaram à conclusão que eram todos iguais.

A professora também encorajou os alunos a justificarem aquilo que diziam, por isso questionou-os, obrigando-os a pensar.

Prof.: Vamos olhar para aí. Porque é que são iguais?

R.: Como estas rectas são paralelas, esta família de rectas podem intersectar estas em qualquer posição, que estes dois ângulos tinham amplitudes iguais.

B.: Em qualquer posição não! [fazendo um gesto se fossem perpendiculares às outras].

N.: Assim eram perpendiculares.

V.: Não havia ângulos agudos … eram rectos.

R.: Estas rectas ao intersectarem estas e sendo paralelas e estas também é a razão dos ângulos agudos serem iguais e os obtusos serem iguais.

Prof.: Então como estes dois ângulos têm os lados paralelos e os ângulos são …

R.: Obtusos, maiores que 90º.

Prof.: O que é que observaram?

B.: Eram iguais.

Prof.: Então, verificaram que dois ângulos de lados paralelos se forem ambos obtusos ou ambos obtusos são geometricamente iguais.

A professora colocou uma questão ao grupo G1 desencadeando discussão entre os elementos, uma vez que pretendia com base na investigação realizada, que o grupo apresentasse uma justificação para os ângulos agudos e os obtusos serem todos iguais entre si.

Relativamente à questão três ponto quatro, os alunos, com base nos dados recolhidos, verificaram que a junção de um ângulo agudo, com um ângulo obtuso na figura da tarefa eram suplementares. Deste modo, a professora resolveu questioná-los acerca da razão pela qual isso acontece na figura. Também chamou a atenção para questões que não estavam a ser pensadas pelos alunos.

B.: Dá 180º.

R.: São ângulos suplementares.

B.: Professora é assim não é?

Prof.: [Aproximando-se do grupo] Espere … Diga?

B.: Se um é agudo e outro é obtuso são suplementares.

Prof.: Será?

B.: É.

Prof.: Se eu tiver um ângulo agudo de 70º e um ângulo obtuso de 140º eles são suplementares?

R.: 210º.

B.: Não.

Prof.: Então porque é que a soma destes dois ângulos dá 180º?

B.: Porque os lados são paralelos.

Prof.: Então dois ângulos de lados paralelos, sendo um agudo e um obtuso, são suplementares.

A conjectura formulada pelo grupo com base na observação dos dados recolhidos permitiu verificarem que a soma da amplitude de um ângulo agudo com a amplitude de um ângulo obtuso, na figura, dava sempre 180º. A conjectura inicialmente formulada pelos alunos do grupo G1 não era válida para todos os casos. A professora através de um exemplo levou os alunos a compreenderem que a sua ideia não estava completa, ou seja, que a soma de um ângulo agudo com um ângulo obtuso não é sempre 180º. Contudo, o exemplo dado pela professora foi o suficiente para os alunos concluírem que a sua afirmação não era verdadeira para todos os casos. No entanto, as várias perguntas colocadas pela professora levaram os alunos a procurar uma justificação para esse facto.

Relativamente à primeira questão da tarefa, o grupo G2 não teve qualquer dificuldade em representar os vários ângulos pedidos, no geoplano circular. O referido grupo utilizou o transferidor para confirmar a amplitude dos ângulos "desenhados". Atenda-se ao seguinte diálogo:

[**Ma.** pega nos elásticos para desenhar no geoplano um ângulo agudo].

Ma.: Um ângulo agudo é menor que 90º, não é?

M.: Sim.

Ma.: Assim pode ser?

M.: Sim, deve ter uns 20º.

Ma.: É fácil de ver … onde está o transferidor.

G.: [olhando para o transferidor] É de 30º.

Ma.: É menor que 90º, está certo.

A **Ma.**, com a ajuda do transferidor, mediu a amplitude do ângulo que tinha "desenhado". Em primeiro lugar começa por colocar o centro do transferidor sobre o prego que se encontra no centro do geoplano circular (vértice do ângulo) e coloca a linha horizontal do transferidor que passa pelo centro de forma que coincida com um dos elásticos utilizados para formar o ângulo, que coincide com o 0º. Depois, no outro elástico verificou qual a amplitude do ângulo que correspondia no transferidor. O grupo G2 tem noção que o instrumento utilizado para medir ângulos é o transferidor e que a medida dos ângulos é traduzida em graus. Verificou-se também que sabe medir um ângulo, utilizando o transferidor. Foi notória a adaptação do grupo ao material manipulável distribuído pela professora.

Relativamente à segunda questão, o grupo G2 começou por "desenhar" a figura que era proposta no enunciado da tarefa. Em seguida um dos elementos do grupo mediu a amplitude dos ângulos com o auxílio do transferidor e conjecturou, com alguma facilidade, que ângulos verticalmente opostos eram iguais. Para procurar testar a sua conjectura, o grupo fez variar o diâmetro e mediu os quatro ângulos formados por eles e verificou que ela era realmente válida para todos os casos que experimentaram. Depois generalizaram a conjectura para quaisquer diâmetros. Todos os elementos do grupo tiveram oportunidade de alterar os elásticos "desenhando" outros diâmetros e medir a amplitude dos ângulos.

A professora foi frequentemente colocando questões que de alguma forma obrigava que os alunos reflectissem sobre as mesmas.

Prof.: Imaginem que não tinham o transferidor, como é que procederiam para determinar cada um destes ângulos? [apontado para o ângulo formado pelo arco entre dois pregos] Como posso determinar a amplitude deste ângulo aqui?

Ma.: Com o transferidor era fácil.

Prof.: Qual é a amplitude de um ângulo giro?

Ma.: 360º.

Prof.: Isto tudo tem 360º, certo?

Alunas do grupo G2: Sim.

Prof.: E este ângulo aqui é de quanto?

[Afastou-se do grupo].

C.: Temos de ver quantos espaços tem.

Ma.: Posso contar? [Passados alguns segundos] Deu 24.

M.: Se fosse 10º dava 240º.

C.: Experimenta com 15º.

M.: 15 vezes 24 dá …a calculadora.

Ma.: Espera que já tiro da mochila. [fazendo a conta na calculadora] Dá 15º direitinho.

M.: Este ângulo é de 15º.

Ma.: Professora, já está. Venha ver se está certo. [A professora dirige-se ao grupo] Professora cada ângulo tem de amplitude 15º porque tem 24 espaços se cada espaço é 15º vai dar 360º.

Prof.: O que é que vocês acham?

Alunas do grupo G2: Está bem.

Prof.: Estão todos de acordo?

[Os elementos do grupo G2 abanam a cabeça em gesto de concordância].

A professora pretendia que os elementos do grupo encontrassem uma estratégia alternativa para o caso de não terem o transferidor para medir a amplitude de um ângulo. O grupo G2 para calcular a amplitude do arco formado por dois pregos fez por tentativas, em vez de aplicar a divisão. A sugestão da professora em forma de pergunta foi o suficiente para aumentar o diálogo no grupo através da discussão. Depois de encontrar o valor do referido ângulo a **Ma.** solicitou a professora para que esta validasse o trabalho realizado pelo grupo, embora não houvesse qualquer razão para o fazer. Porém, a professora não dá resposta se é ou não um ângulo de 15º. O seu objectivo é que seja o grupo G2 a validar as suas conclusões. Isto permite que reflictam sobre o seu trabalho.

O grupo G2 experimentou vários diâmetros como era sugerido no enunciado da tarefa, demonstrando assim alguma autonomia na realização do seu trabalho.

C.: Então se cada ângulo tem de amplitude 15º, agora é fácil descobrir a amplitude dos outros ângulos.

Ma.: Aqui é três vezes quinze.

M.: Dá quarenta e cinco.

C.: Este aqui tem 45º e este?

Ma.: [olhando para o geoplano] 45º.

G.: Porquê?

C.: É quinze mais quinze mais quinze.

Ma: Estes dois são iguais. Aqui é quarenta e cinco mais quarenta e cinco mais quarenta e cinco.

M.: 135º.

C.: E o outro oposto também.

G.: Porquê?

Ma.: [apontando para o arco correspondente ao ângulo ao centro] Tem nove espaços aqui e aqui.

C.: Temos que escrever uma conjectura?

Ma.: Basta escrever que dois ângulos verticalmente opostos são iguais.

Nas experiências realizadas para outros diâmetros, o grupo faz uso dos seus conhecimentos, nomeadamente o facto de cada arco entre dois pregos ter de amplitude 15º e de um arco de circunferência ter de amplitude 360º. Os alunos reconhecem a existência de uma relação entre os ângulos verticalmente opostos da figura. Com base na experimentação e manipulação dos elásticos o grupo formula uma conjectura tendo em conta os dados recolhidos. As interacções entre os elementos do grupo conduzem a um trabalho mais rico, pois os alunos desenvolvem grande parte da actividade em colaboração, partilhando opiniões e discutindo ideias.

A professora introduziu, no grupo G2 a noção de ângulos suplementares. Atenda-se ao seguinte diálogo:

Prof.: Quem é que "desenha" no geoplano um ângulo de 180º com os elásticos?

Ma.: [olhando para a **G.**] Dá-me um elástico.

[**Ma.** coloca o elástico de forma a formar um ângulo de 180º].

Prof.: [agarrando noutro elástico divide o ângulo de 180º em dois ângulos diferentes] Quantos ângulos têm ai descritos?

Ma.: [apontando para os dois ângulos em que ficou dividido o ângulo de 180º] Aqui dois.

M.: Um agudo e um obtuso.

Prof.: [apontando para os ângulos] O que acontece se adicionarem este com este? Quanto é que dá?

Ma.: Este é quinze mais quinze dá 30º.

Prof.: [apontando para o ângulo] E este?

M.: 150º.

Prof.: Quanto é que dá?

Alunas do grupo G2: 180º.

Prof.: Quando a soma de dois ângulos é 180º, dizemos que são ângulos suplementares.

A professora aproveita o material manipulativo para exemplificar o que são ângulos suplementares. Os alunos sabiam "desenhar" no geoplano um ângulo raso. É evidente o seu conhecimento relativamente à classificação dos ângulos.

Na questão três da tarefa o grupo G2 recolheu e analisou os dados, o que permitiu que verificassem que todos os ângulos agudos eram iguais, assim como todos os ângulos obtusos. Os alunos não sentiram necessidade em conjecturar, esta atitude poderá ter sido influenciada pelo tipo de questões colocadas no enunciado da tarefa. Contudo a professora incentivou os alunos nesse sentido, colocando várias questões. A justificação só surgiu quando a professora os interpelou, relativamente à investigação realizada.

Prof.: A que conclusões chegaram depois de medirem as amplitudes dos ângulos agudos?

Ma.: Que é tudo igual.

Prof.: O que é que é tudo igual?

Ma.: A amplitude dos ângulos agudos.

M.: Calculamos a amplitude destes ângulos usando o transferidor são todos de 70º e os ângulos obtusos são todos de 110º.

Prof.: Pronto, por exemplo estes dois ângulos são classificados de ângulos …

Ma.: Agudos.

Prof.: O que é um ângulo agudo?

C.: Menor que 90º.

Prof.: Certo. Estes dois ângulos agudos são iguais, por que razão isso acontece?

Ma.: Estas rectas são paralelas e estas também.

Prof.: Então conjecturaram que dois ângulos com lados respectivamente paralelos, se forem ambos agudos ou ambos obtusos são iguais.

Prof.: [apontando para os ângulos] Quanto é que dá a soma destes dois ângulo?

Ma.: 180º.

M.: Um agudo e outro obtuso, são suplementares se os lados forem paralelos.

A intervenção da professora no grupo, proporciona condições para a justificação sobre as conjecturas formuladas, não surgindo espontaneamente da actividade dos alunos, mas sim da solicitação desta. O processo de justificação foi importante para que os alunos pudessem generalizar as conjecturas formuladas.

Ao longo da discussão verificou-se uma grande participação de muitos dos alunos que intervieram para mostrar o modo como o seu grupo investigou para formular as conjecturas pedidas. A professora procurou dar oportunidade a todos para participar, dando sucessivamente a palavra a alunos que mostravam interesse em dar a sua opinião colocando o dedo no ar. Também deu a palavra aos alunos mais distraídos, apanhando-os de surpresa, tentando, deste modo, envolvê-los no trabalho da aula.

Em relação à primeira pergunta da tarefa, o porta-voz de cada grupo foi ao geoplano que se encontrava no retroprojector e “desenhou” um ângulo. Como eram quatro alíneas cada grupo resolveu uma delas sem grande dificuldade. A questão dois também não suscitou dúvidas. Cada aluno sugerido pela professora, desenhava no geoplano dois diâmetros e media a amplitude dos quatro ângulos recorrendo ao transferidor ou faziam os cálculos pois sabiam que cada arco entre dois pregos tinha 15º. Depois faziam um esboço no quadro da figura que estava no geoplano. No final todos os grupos conseguiram conjecturar que ângulos verticalmente opostos eram iguais. Relativamente a questão três todos os grupos mediram os ângulos agudos e obtusos e formularam duas conjecturas ao analisar a figura.

Síntese

Com a aplicação desta tarefa pretendia-se que os alunos investigassem as relações geométricas entre os ângulos verticalmente opostos e entre os ângulos de lados paralelos. Relativamente ao modo como descobriram as relações geométricas salienta-se a utilização da visualização e a manipulação.

A estratégia de trabalho adoptada para investigar as relações geométricas entre os ângulos verticalmente opostos foi a sugerida pela própria tarefa: desenharem outros diâmetros no geoplano circular e voltar a medir a amplitude dos ângulos. Durante o decorrer das explorações, os alunos tiveram o cuidado de fazer um esboço na folha da tarefa, para assim procurarem regularidades e tirarem conclusões. Com base nos dados recolhidos os alunos, formularam uma conjectura. Na questão três a estratégia utilizada foi novamente a sugerida pela tarefa. Os alunos com o auxílio do transferidor mediram as amplitudes dos ângulos sugeridos, verificando que todos os ângulos agudos tinham a mesma amplitude e que o mesmo acontecia em relação aos ângulos obtusos. Também verificaram que na tarefa “Ângulos Verticalmente Opostos e Ângulos de Lados Paralelos” a soma de um ângulo agudo com um ângulo obtuso dava 180º. No início os alunos não sentiram necessidade de formular conjecturas; porém, incentivados pela professora, procederam à formulação de duas conjecturas.

Nesta tarefa, através dos episódios transcritos, parece evidente que os alunos valorizaram os processos matemáticos em detrimento dos resultados obtidos. Os alunos utilizaram alguns processos matemáticos durante a realização da tarefa. Os vários grupos evidenciaram facilidade na leitura e compreensão da situação apresentada na tarefa. Os alunos através dos dados recolhidos procuram regularidades, sendo este um processo que contribuiu, em certa medida, para a formulação de conjecturas. A justificação das conjecturas formuladas foi um processo utilizado pelos alunos, embora tenha sido sugerido pela professora. Outro processo utilizado foi o de escrever sobre as suas descobertas, obrigando, desta forma o grupo a reflectir sobre o trabalho realizado.

Os alunos evidenciaram maior independência em relação à professora, pois só a solicitavam para esclarecer dúvidas. Como resposta, a professora dava alguns esclarecimentos, devolvia-lhes questões, pedia explicações e justificações para os resultados obtidos. É possível verificar que as justificativas dos alunos foram expressas de forma não formalizada. Não há um encadeamento lógico de demonstrações rigorosas, uma vez que neste nível de ensino esta não é uma prática dos alunos em sala de aula. Nesta aula, os alunos formularam diversas conjecturas; no entanto, a justificação das mesmas eram baseadas em casos particulares. Mas, incentivados pela professora, os alunos procuraram justificações para o caso geral.

Na fase da discussão final da tarefa houve uma grande participação dos alunos na apresentação das conjecturas formuladas e na explicação das mesmas. Alguns alunos revelaram mais facilidade do que outros em explicá-las, utilizando uma linguagem matemática adequada.

Os grupos adquiriram dinâmicas diferentes, devido ao papel mais activo de determinados elementos que se envolveram em actividade de forma muito entusiástica, procurando explorar e descobrir relações entre os ângulos.

Material manipulável

O material manipulável usado na tarefa revelou ter alguma influência nos processos matemáticos utilizados: especialização, formulação de conjecturas e verificação. Estes materiais ajudaram na recolha de dados, permitindo, assim, obter alguns exemplos, que levaram os alunos a procurar regularidades entre eles, conduzindo-os à formulação de uma conjectura e à sua verificação. Os alunos também recorreram ao material disponibilizado para os auxiliar nos seus raciocínios e explicações aos outros colegas, salientando-se a utilização da visualização e da manipulação.

Também foi visível uma certa evolução dos alunos ao nível do discurso na sala de aula, assim como uma menor dependência da professora, tendo para tal contribuído a utilização de materiais manipuláveis. Da observação dos alunos na resolução da tarefa podemos registar a motivação, o interesse e o empenho demonstrado, em particular daqueles que têm menor aproveitamento.

O geoplano circular permitiu aos alunos desenhar, com o auxílio dos elásticos, os vários ângulos pedidos. Alguns alunos manifestaram dificuldades na manipulação dos elásticos de forma a desenhá-los. Porém, na manipulação do transferidor os alunos não revelaram dúvidas de manuseamento, tendo o material se revelado útil na medição da amplitude dos ângulos.

Relativamente ao vocabulário usado na sala de aula, verificou-se que os alunos utilizaram termos específicos de Geometria como ângulo recto, ângulo obtuso, ângulo agudo, ângulos suplementares, ângulo raso, rectas concorrentes, rectas paralelas. Esta situação parece evidenciar que os alunos adquiriram confiança na utilização desta linguagem.

Os diálogos estabelecidos sugerem que os alunos apreenderam os conceitos de ângulos verticalmente opostos e ângulos de lados paralelos, através da experiência e não na simples transmissão pela professora.

O material revelou-se útil, pois auxiliou os alunos nas explicações dos seus raciocínios, dando-lhes uma maior segurança nas suas afirmações, desencorajando-os a ficarem dependentes de uma autoridade exterior que lhes diga quando estão certos ou errados.

Os alunos que evidenciavam dificuldades nesta disciplina, envolveram-se na tarefa com grande entusiasmo, não se inibindo em colaborar para a sua resolução, verificando-se da parte dos outros alunos uma aceitação das opiniões expressas por esses, contestando-as ou não.

4.8. Tarefa “Propriedades dos quadriláteros”

Esta tarefa (anexo 10) foi realizada durante um bloco de noventa minutos no dia 18 de Maio, com o intuito de rever alguns conceitos (noção, classificação e propriedades dos quadriláteros), fundamentais para o estudo das propriedades e construção dos paralelogramos.

Os alunos, ao entrarem na sala de aula, dispuseram-se de acordo com os grupos inicialmente formados. Após a professora distribuir a tarefa e o geoplano não circular, os grupos começaram a debruçar-se sobre esta. Só passado algum tempo de familiarização com o material por parte dos alunos é que a professora circulou entre os grupos, colocando questões ao trabalho desenvolvido, com a finalidade de esclarecer dúvidas que possam ter surgido.

Os alunos do grupo G1 tiveram algumas dificuldades na questão um que remetia para a representação no geoplano de vários quadriláteros a partir de um quadrilátero inicial.

V.: É pedido um quadrilátero não rectângulo e não isósceles.

[**B.** muda os elásticos de forma a formar um trapézio não rectângulo e não isósceles].

N.: Calma … Estes dois lados têm de ser paralelos.

B.: Tem de estar paralelos senão não é um trapézio.

N.: Este [lado] está igual a este [lado].

V.: Não é para ficar igual?

B.: Claro, que não. É pedido um trapézio não isósceles.

R.: Isósceles tem dois lados iguais.

B.: Então, não pode ter nenhum lado igual.

V.: E não pode ser rectângulo.

R.: Não pode ter nenhum ângulo de 90º.

B.: É não rectângulo, não isósceles … é um trapézio escaleno.

R.: Como este [apontando para o quadrilátero da tarefa] não tem nenhum ângulo de 90º e tem todos os lados diferentes e é não trapézio, basta alterar os elásticos para ser trapézio.

Como é possível constatar, a colaboração de todos os elementos do grupo, a interacção dos alunos e a partilha de opiniões levou-os à identificação do quadrilátero que teriam de formar na alínea a). As questões colocadas no seio do grupo levaram à reflexão de alguns significados: trapézio, trapézio não isósceles e trapézio não rectângulo. O **R.** apresenta, com base na discussão com os seus colegas uma estratégia para construir o polígono pedido (trapézio escaleno). Esta consistia em alterar os elásticos de forma a só alterar uma das suas características, ou seja, passar de não trapézio a trapézio.

Os alunos continuaram a alterar os elásticos de maneira a obter os quadriláteros pedidos a partir do quadrilátero inicial. Estes discutem entusiasticamente cada alínea.

B.: Um paralelogramo…

N.: Tens de construir esta figura.

[O **N.** desenhou na folha da tarefa um paralelogramo obliquângulo].

V.: Existem outros …Não tem de ser esse.

N.: Porquê?

V.: O rectângulo é um paralelogramo.

B.: Desculpa lá, mas não me parece.

R.: Estás confuso. O paralelogramo e o rectângulo são quadriláteros.

N.: Sim, são polígonos de quatro lados.

V.: Um paralelogramo tem os lados opostos paralelos. Logo, o rectângulo é sim um paralelogramo. Assim, como o quadrado, o losango … basta ter os lados opostos paralelo.

Neste diálogo, verificamos que nenhum aluno do grupo concorda com a opinião do **V.**, muito embora esta esteja correcta. **V.** tenta explicar o seu raciocínio ao grupo, mas os colegas são da opinião que o **V.** está a confundir as definições de paralelogramo e de quadrilátero. No entanto, a dedução de **V.** permitiu-lhe estabelecer a relação de que um rectângulo é um paralelogramo porque tem todas as propriedades (quadrilátero e lados opostos são paralelos) de um paralelogramo. Note-se que o **V.** relacionou as propriedades geométricas dos quadriláteros. A razão pela qual nenhum dos colegas do grupo do **V.** aceitou a sua resposta, muito embora o sua dedução estivesse correcta, pode ser explicada talvez pelo facto do **V.** ser considerado um aluno fraco, tanto pela professora como pela turma. Gerou-se um momento de discussão, por isso a intervenção da professora junto do grupo foi fundamental. A ideia de que a professora é a detentora da verdade é visível na postura dos alunos. Só quando a professora diz que o raciocínio do **V.** é correcto, tentam compreendê-lo.

N.: Professora o rectângulo, o quadrado, o losango são paralelogramos?

Prof.: Sim.

B.: Não percebo!

Prof.: O que quererá dizer paralelogramo?

B.: Paralelo.

Prof.: E o que é paralelo?

B.: Os lados.

R.: Os lados são paralelos dois a dois.

Prof.: Então, esses polígonos têm ou não os lados opostos paralelos?

B: Sim. Mas professora e este polígono [apontando para o paralelogramo obliquângulo desenhado pelo **N.**] não é um paralelogramo?

Prof.: Claro que sim, é um paralelogramo. Será que um paralelogramo é um trapézio?

B.: Não sei.

Prof.: Pensem nisso!

Após uma breve discussão e com a ajuda da professora, chegaram à conclusão que o **V.** tinha razão na sua afirmação pois os losangos, os rectângulos e os quadrados são paralelogramos, só que têm nomes específicos. Isso significava que havia outros paralelogramos, sem ser o sugerido pelo **N.**, que poderiam construir no geoplano. Parece evidente que os alunos têm alguma dificuldade em estabelecer relações entre propriedades relativas a uma figura ou entre figuras. Contudo, os alunos do grupo G1 são capazes de identificar os quadriláteros, pois desenharam-nos no geoplano e sabem distinguir as características das figuras. No diálogo anterior parece evidente que a professora pretende que os alunos superem as dificuldades manifestadas. Várias foram as vezes que a professora abordou o grupo para os incentivar a estabelecer relações entre figuras. Atenda-se ao seguinte diálogo:

B.: Rectângulo não quadrado.
V.: Um rectângulo não é um quadrado.
Prof.: E um quadrado é um rectângulo?
B.: Não, são diferentes.
Prof.: O que é que caracteriza um rectângulo?
V.: Tem quatro ângulos rectos.
Prof.: Muito bem! E os lados?
B.: São iguais dois a dois.
Prof.: Um rectângulo não é um quadrado. E o quadrado, será um rectângulo?
R.: Mais tem os lados e os ângulos todos iguais.
Prof.: Quais são as características de um rectângulo?
R.: Tem quatro ângulos rectos.
Prof.: E o quadrado não tem quatro ângulos rectos?
Alunos do grupo G1: Sim.
Prof.: Então também é um rectângulo, por isso é que o coloquei ao lado não quadrado.

Esta primeira questão permitiu aos alunos familiarizarem-se com o material, mas, também, exigia uma representação mental das figuras geométricas. Ou seja, os alunos têm de conceber uma imagem visual de algo que não têm diante dos olhos no momento e tentar "desenhá-las" no geoplano. Tal facto apelava a memória visual dos alunos, uma vez que a classificação de quadriláteros foi leccionada no sexto ano. O material disponível permite a construção dessas figuras e exige o conhecimento das suas propriedades. Esse aspecto leva a que a comunicação entre os alunos aumente, como comprovam os diálogos anteriores. É nesta fase que o trabalho dos alunos começa a ter características de natureza cooperativa, pois é aqui que todos contribuem para a resolução da tarefa, para alcançar um objectivo comum. Assim, a tarefa, aos poucos, vai sendo resolvida com a cooperação de cada membro do grupo. Neste sentido, o trabalho de grupo é visto como um produto resultante de um acordo conjunto sobre o que estão fazendo.

Embora a maior parte das discussões fossem em relação às propriedades dos quadriláteros, também houve discussões relacionadas com a manipulação dos elásticos no geoplano não circular, pois todos queriam construir figuras. Verificamos que todos os membros do grupo queriam experimentar, construir com os elásticos os quadriláteros pedidos.

V.: Posso…

B.: Vou alterar.

V.: Agora sou eu. Já tiveste a tua oportunidade, e não conseguiste.

B.: Não …

V.: O próximo sou eu que vou construir.

Quando os alunos chegaram à questão dois, onde se questionava qual foi a estratégia que os alunos usaram para formar cada um dos quadriláteros a partir do quadrilátero inicial, o grupo G1 revelou algumas dúvidas. Quando a professora passou próximo do grupo, aproveitaram de imediato para obter alguma ajuda.

B.: Professora, não compreendemos [apontando para a questão dois].

Prof.: O que é que tiveram de fazer para obter os quadriláteros? Por exemplo, se fosse o trapézio rectângulo …

B.: Alterávamos este [vértice] e este [vértice].

Prof.: Era preciso o quê? … O que é que fizeram?

N.: Pegamos no elástico e esticamos.

Prof.: Era preciso mexer em todos os vértices?

N.: Não.

Prof.: Então qual foi a estratégia que utilizaram para formar cada um dos quadriláteros anteriores a partir do quadrilátero inicial?

B.: Ah! Já sei.

A professora, ao dialogar com os alunos, ouve-os, interroga-os e orienta-os, mas não dá resposta à pergunta por eles formulada. No entanto, as questões formuladas pela professora conduziram os alunos à resposta. Após alguns momentos de reflexão e discussão sobre a estratégia utilizada, os alunos escreveram na folha de tarefa: [Usei o geoplano, alterei os vértices de modo a dar o quadrilátero, alterei, um, dois, três vértices conforme o quadrilátero].

Na questão três, os alunos começaram por construir novamente cada uma das figuras e marcaram as diagonais com elásticos de cores diferentes, conforme referia o enunciado. Em cada quadrilátero construído teriam que verificar se as diagonais eram eixos de simetria, se as diagonais eram iguais e se as diagonais eram perpendiculares. Os alunos do grupo G1 tiveram alguma dificuldade em verificar se no trapézio escaleno as diagonais eram perpendiculares. Quando a professora passou por perto, solicitaram a sua ajuda.

Prof.: Neste quadrilátero [trapézio escaleno] as diagonais são perpendiculares?
B.: Sim.
N.: Não.
Prof.: Sim ou não?
B.: Sim.
Prof.: O que são rectas perpendiculares?
R.: Formam um ângulo de 90º.
Prof.: Qual o instrumento que utilizamos para medir os ângulos?
V.: Com o transferidor.
[**B.** pegou no transferidor e mediu a amplitude de um dos ângulo formado pelas diagonais].
V.: Não.
Prof.: Então as diagonais são perpendiculares?
Alunos do grupo G1: Não.

Os alunos sabiam a definição de rectas perpendiculares e tinham conhecimento que o instrumento utilizado para medir a amplitude de um ângulo é o transferidor, no entanto tinham dúvidas se as diagonais eram ou não perpendiculares. As perguntas colocadas pela professora foram o suficiente para que os alunos compreendessem como deveriam proceder para verificar que as diagonais do trapézio escaleno eram ou não perpendiculares. Os alunos manifestaram saber usar o transferidor para mensurar ângulos. A descoberta de que no trapézio escaleno as diagonais não são perpendiculares baseou-se, essencialmente, na visualização e na manipulação do transferidor, sendo uma forma de verificação. Depois de discutida a situação anterior, os alunos deste grupo utilizavam o transferidor sempre que tinham dúvidas se as diagonais eram perpendiculares ou oblíquas. Também utilizaram a régua para verificar se as diagonais eram iguais.

> **B.:** As diagonais [do rectângulo] são iguais?
> **V.:** Mede com a régua.
> [**N.** com a régua mede o comprimento das duas diagonais].
> **N.:** Sim, têm o mesmo comprimento.
> **B.:** Só no rectângulo e no quadrado é que as diagonais são iguais.
> **R.:** E no papagaio?
> **B.:** Não … [desenhando na folha um papagaio] Olha esta [diagonal] é maior que esta [diagonal].

Os alunos do grupo G1 necessitaram da régua e do transferidor como forma de verificarem se as diagonais eram iguais ou se eram perpendiculares. De facto, ao medirem as diagonais dos vários quadriláteros e a amplitude dos ângulos formados pelas diagonais, permitiram que concluíssem, de imediato, quais os quadriláteros em que as diagonais eram iguais, perpendiculares e eixos de simetria.

> **B.:** As diagonais do papagaio são diferentes dos outros. [já tinham analisado os trapézios, o paralelogramo e o rectângulo].
> **V.:** Porquê?
> **N.:** Têm a forma de cruz.
> **V.:** São perpendiculares.
> **R.:** Porquê?
> **V.:** Porque formam ângulos rectos … de 90º.

Este pequeno diálogo ilustra a forma como se foi processando a aprendizagem, o papel que a construção das figuras no geoplano e a respectiva análise e visualização das características das suas diagonais desempenhou na aprendizagem dos alunos. Estas descobertas originaram uma discussão acerca das características das diagonais dos vários quadriláteros. Na folha de tarefa, os alunos registaram todas as suas descobertas assim como um esboço dos vários quadriláteros e suas diagonais, assinalando os ângulos formados por estas e o comprimento de cada uma.

A questão quatro, os alunos resolveram com alguma facilidade: traçaram o outro segmento de recta de forma que os dois segmentos fossem as diagonais do quadrado. Os alunos utilizaram os instrumentos correctos para proceder à construção do quadrado. Relativamente aos cuidados que tiveram ao traçar a segunda diagonal, o grupo G1 com base na questão três sabia que as diagonais eram perpendiculares, tinham o mesmo tamanho e bissectam-se.

Relativamente ao grupo G2, o início da tarefa foi marcado por algumas dificuldades. A primeira dificuldade deveu-se ao facto dos alunos não conseguirem alterar o quadrilátero inicial de modo a formar um trapézio não rectângulo e não isósceles. Primeiro, desenharam um trapézio isósceles; depois alteram os elásticos apenas com o objectivo de que os lados teriam de ser diferentes, esquecendo-se que para ser trapézio tem de ter, pelo menos dois lados paralelos, obtendo um não trapézio. Após várias tentativas, solicitaram a ajuda da professora, uma vez que não conseguiam formá-lo:

Ma.: Professora o trapézio escaleno não dá para fazer aqui no geoplano.

Prof.: Não dá? Têm a certeza? [A professora constrói no geoplano o trapézio escaleno] ... É um trapézio?

C.: Sim, tem dois lados paralelos.

Prof.: Tem os lados todos diferentes?

C.: Sim, é um trapézio escaleno?

[A professora altera os elásticos no geoplano].

Prof.: E assim?

Ma.: Não é um trapézio, não tem lados paralelos.

Prof.: E assim, pode ser?

Ma.: Sim, é um trapézio escaleno.

A dificuldade advinha do facto de, ao formar a figura, os alunos teriam que observar três características: quatro lados, dois lados paralelos e lados todos diferentes. Contudo, só conseguiam formar figuras com duas dessas características, levando a concluir que não era possível formar o trapézio pedido no geoplano. Os alunos continuaram a formar os vários quadriláteros que eram pedidos na tarefa com a ajuda do geoplano. Para os formar os alunos tiveram de ter presente as suas características. O ambiente é de trabalho.

Ma.: Professora, um losango não quadrado é símbolo da Renault?

Prof.: Claro. Então se fossem caracterizar este polígono [losango não quadrado] aos vossos colegas que informações dariam?

M.: Tem os lados todos iguais.

Prof.: E em relação aos ângulos?

[Mónica pega no transferidor e com a ajuda da Mariana, medem a amplitude de todos os ângulos].

M.: Este [ângulo] é igual a este [ângulo], e este [ângulo] é igual a este [ângulo].

Prof.: Isso quer dizer que os ângulos opostos são iguais. Será que o losango é um paralelogramo?

Mariana: Sim … porque os lados opostos são paralelos.

Prof.: Exacto.

Verificamos que os alunos sabem identificar algumas das características do losango e foram capazes de estabelecer uma relação entre o losango e o paralelogramo. Durante este período da actividade dos alunos, a professora procura que eles discutam entre si, nos seus grupos, as questões da tarefa.

Ma: O trapézio escaleno tem algum eixo de simetria?

M.: Não.

Ma.: As diagonais são perpendiculares?

G.: Sim.

M.: As diagonais cruzam-se.

Ma: Isso significa que são perpendiculares! [apontando para as diagonais do trapézio escaleno] Estas duas rectas são perpendiculares?

G.: Sim. Mas…

C: Rectas perpendiculares têm de formar um ângulo de 90º.

Ma.: [pegando no transferidor e medindo a amplitude de um dos ângulos] Olha!

M.: Não é.

Os alunos demonstraram ter alguma dificuldade em identificar a posição relativa das diagonais do trapézio escaleno, somente através da observação das mesmas. E, só o fizeram correctamente, após a **Ma.** ter mensurado a amplitude de um dos ângulos formados pelas diagonais. Verificamos que os elementos do grupo sabem o processo de mensuração de ângulos, uma vez que sabiam qual o instrumento utilizado e como usá-lo. Desta forma, averiguaram que as diagonais do trapézio escaleno não eram perpendiculares, mais sim oblíquas.

Também verificamos que quando algum aluno do grupo não concorda com o colega, interrompe-o, questiona-o e expõe o seu ponto de vista.

[**M.** constrói o paralelogramo no geoplano].

M.: Assim, está certo?

Ma.: Sim, agora as diagonais.

M.: São [eixos de simetria].

Mariana: Não são. Tens a certeza?

[**Ma.** desenha numa folha A4 um paralelogramo, depois corta e dobra o paralelogramo por uma diagonal e verifica que as diagonais não dividem a figura em duas partes iguais].

M: Agora dobra. É igual?

Ma.: Não é igual.

M.: Está bem, pronto! As diagonais não são eixos de simetria.

Ma.: Não tem eixos de simetria. As diagonais são iguais?

G.: Não, nem são perpendiculares.

A estratégia utilizada pela **Ma.** para demonstrar às suas colegas que tinha razão, permitiu que verificassem que as diagonais não eram eixos de simetria e que o paralelogramo não tem eixos de simetria. Em termos de conhecimentos os alunos evidenciaram saber o conceito de simetria e de diagonal de um quadrilátero. Os alunos do grupo G2 utilizaram a régua e o transferidor na descoberta das características dos quadriláteros sempre que algum elemento manifestava alguma dúvida.

Os alunos não revelaram grandes dificuldades na resolução da questão quatro da ficha de trabalho. Notaram-se, porém, algumas dificuldades por parte dos alunos em escrever os cuidados que tiveram ao traçar a segunda diagonal. Parece que os alunos não estavam habituados a registar as suas observações. Talvez estes alunos nunca tinham trabalhado com relatórios em Matemática. Daí terem sentido imensas dificuldades em descrever o que acabaram de fazer. Como tal, solicitaram a ajuda da professora, tendo-se passado o seguinte diálogo:

Prof.: Já escreveram os cuidados que tiveram?

Ma.: As diagonais são iguais. [apontando para a figura].

Prof.: O que é que sabem mais em relação as diagonais do quadrado?

M.: São perpendiculares.

Prof.: Porque é que a segunda diagonal passa por aqui? [apontando para o ponto médio do segmento de recta marcado] Podia ser aqui e as diagonais eram perpendiculares?

Ma.: Tem de ser a meio desta … fica metade para cada lado.

Prof.: Escrevam isso … não foram esses os cuidados que tiveram?

Os alunos acabaram por escrever: [As diagonais são iguais e têm que formar um ângulo de 90º para serem perpendiculares; a segunda diagonal passa pelo meio da diagonal desenhada]. Deste modo, a professora encorajou os alunos a explicarem os procedimentos necessários a ter em consideração na construção de um quadrado. Ao registarem o que fizeram os alunos reflectem sobre o trabalho desenvolvido.

A apresentação ao grande grupo das conclusões dos alunos foi rápida pelo facto de faltar pouco tempo para dar o toque de saída. Por isso, em relação a questão um, cada grupo limitou-se a ir ao retroprojector construir os quadriláteros pedidos. Como eram oito alíneas, cada grupo ficou com duas delas. Nas alíneas seguintes, os alunos limitaram-se a ler o que haviam escrito e os restantes grupos pouco questionaram, uma vez que chegaram às mesmas conclusões.

Síntese

A tarefa proposta aos alunos, exigia a cooperação e colaboração de todos os elementos do grupo, situação que não era nova para eles. Também sugeria um papel mais activo e autónomo da sua parte, uma vez que teriam que desenhar no geoplano não circular vários quadriláteros, tendo em conta as suas propriedades, apelando à sua memória visual.

Alguns alunos manifestaram dificuldades em alterar o quadrilátero (não trapézio e não papagaio) de forma a desenhar os quadriláteros pedidos. Esse facto originou alguma discussão no seio dos vários grupos acerca das suas características, sendo este um dos objectivos da tarefa.

A estratégia utilizada pelos diferentes grupos consistia em, a partir do quadrilátero desenhado na tarefa, alterá-lo através da manipulação dos elásticos de forma a desenhar o quadrilátero pedido. Os alunos compreenderam que não era necessário mexer em todos os vértices ou segmentos de recta do quadrilátero inicial para os desenhar. A descoberta das propriedades das diagonais dos vários quadriláteros baseou-se, essencialmente, na utilização da visualização e da manipulação dos elásticos.

Notava-se uma grande motivação, interesse e empenho dos alunos na resolução da tarefa. Houve mais autonomia; mas, por vezes, a presença da professora pareceu funcionar como catalisador para a discussão entre os alunos. Verificamos que, quando algum aluno colocava alguma questão, a professora em vez de responder, colocava outras questões ao grupo, para que pudessem reflectir sobre isso, ou sugeria que verificassem com a ajuda do material. As intervenções da professora iam no sentido de esclarecer dúvidas e recolher dados acerca do trabalho dos alunos, adoptando por isso uma atitude interpelativa. Neste sentido, a professora pretendia que os alunos se tornem menos dependente desta, mas autónomos no processo de aprendizagem.

A tarefa permitiu aos alunos trabalhar ao nível do desenvolvimento da capacidade espacial – discriminação visual, uma vez que era dado um conjunto de figuras geométricas para os alunos formarem no geoplano com os elásticos o que apelava que soubessem identificar as respectivas semelhanças e diferenças entre as figuras. Os alunos tiveram oportunidade para explorar e discutir as propriedades dos vários quadriláteros, o que numa aula expositiva essas seriam fornecidas pela professora, cabendo aos alunos memorizá-las. A comunicação verbal foi outra capacidade que os alunos trabalharam, através da troca de ideias entre alunos e entre estes e a professora. Também estiveram a trabalhar ao nível do desenvolvimento da capacidade de organização lógica do pensamento matemático. Nesse processo de experimentação, os alunos revelaram passar para um nível posterior, pois para além de reconhecerem e diferenciam as figuras geométricas contidas no enunciado, manifestaram saber distinguir as suas propriedades. Contudo, apenas alguns alunos, evidenciaram estabelecer relações entre as figuras e as suas propriedades. Assim, partindo de um pensamento sobre objectos concretos, neste caso os quadriláteros construídos no geoplano não circular, com os elásticos, o aluno foi conduzido a um pensamento sobre relações entre as figuras e suas propriedades, tudo isto é propício para que níveis sucessivos de abstracção possam ser alcançados.

Material manipulável

Uma influência que se revelou decisiva ao longo de toda a tarefa foi a dos materiais manipuláveis que foram postos à disposição dos alunos. Foi com ele que foram concretizadas todas as experiências, sendo a aquisição de alguns conhecimentos facilitada pelo tipo de material que os alunos tiveram oportunidade de utilizar.

A distribuição de um geoplano não circular por grupo, parece ter promovido a necessidade de todos os alunos cooperarem para a resolução da tarefa proposta. Assim sendo, os alunos interagem uns com os outros, quer para verbalizar os seus raciocínios, quer para discutir as descobertas do grupo. Por exemplo, o material auxiliou os alunos a conjecturar que os rectângulos possuem sempre diagonais congruentes que se bissectam. Esta tarefa foi desenvolvida num ambiente de camaradagem e boa disposição, onde todos os alunos se empenharam com entusiasmo.

O aspecto mais saliente ao longo da resolução desta tarefa é o dinamismo da aula, caracterizado pelo papel activo dos alunos, uma vez que os alunos discutiam e reflectiam no seio do grupo às várias questões propostas. Deste modo, parece evidente que os alunos desenvolveram uma compreensão mais completa das formas e das suas propriedades e construíram, de uma forma mais natural, o vocabulário da Geometria. A manipulação dos elásticos e os seus conhecimentos, relativamente aos quadriláteros, influenciou o ritmo de trabalho dos vários grupos.

Os diálogos estabelecidos durante a resolução da tarefa sugerem que os alunos analisaram e descreveram as características dos vários tipos de quadriláteros e identificaram as relações existentes entre os vários tipos, sendo a exploração feita recorrendo ao geoplano não circular e aos elásticos. Neste sentido, o material revelou-se útil, uma vez que serviu de catalisador para conversas produtivas, relativamente aos lados, ângulos e diagonais dos vários quadriláteros. Os aspectos citados parecem evidenciar que os alunos estiveram a trabalhar ao nível do desenvolvimento de competências matemáticas nomeadamente ao nível do pensamento geométrico; do raciocínio geométrico; da construção e análise das propriedades das figuras geométricas, recorrendo a materiais manipuláveis, da medição, utilizando instrumentos apropriados; da organização lógica do pensamento matemático (diferenciação das figuras geométricas); e da comunicação (formulação de argumentos recorrendo à visualização, explicitando-os em linguagem corrente).

4.9. Tarefa "Propriedades e Construção de Paralelogramos"

A tarefa "Propriedades e Construção de paralelogramos" (anexo 11) foi aplicada no dia 22 de Maio, numa aula de noventa minutos.

Como os alunos já estavam familiarizados com a dinâmica das aulas, entravam na sala de aula e de imediato ocupavam os seus lugares para trabalharem em grupo. A professora distribuiu a tarefa, o geoplano não circular e os elásticos de vários cores aos alunos. O restante material (o transferidor, o compasso, a régua e o esquadro) foi solicitado aos alunos que trouxessem para a aula. A proposta de trabalho tinha como objectivo estudar as propriedades dos paralelogramos com recurso ao geoplano não circular e construir paralelogramos a partir de condições dadas. Também se pretendia proporcionar a aplicação dos conhecimentos adquiridos em tarefa anteriores, tais como a noção de paralelogramo, diagonal de um paralelogramo e as propriedades dos triângulos e dos ângulos.

Na questão um os alunos teriam que "desenhar", no geoplano não circular, um paralelogramo obliquângulo, analisar e justificar a relação existente entre: (1) as amplitudes dos ângulos internos de um paralelogramo, (2) os comprimentos dos lados opostos de um paralelogramo, (3) as amplitudes dos ângulos adjacentes ao mesmo lado e (4) as diagonais de um paralelogramo. Depois teriam que experimentar para outros paralelogramos e confirmar se as propriedades descobertas no paralelogramo obliquângulo se verificavam novamente.

Os grupos embrenharam-se com entusiasmo no trabalho. A primeira questão revelou-se-lhes fácil e, com o auxílio do material colocado à sua disposição, rapidamente a resolveram. A maior parte dos grupos manifestou alguma dificuldade na parte da justificação.

No grupo G1, os alunos começaram por ler a proposta de trabalho na íntegra. Depois, "desenharam" um paralelogramo obliquângulo no geoplano não circular com os elásticos. Os alunos, através do transferidor, recolheram os dados relativamente aos ângulos internos do paralelogramo. E, com base nos dados recolhidos, verificaram que a soma dos ângulos internos do paralelogramo era de 360º, os ângulos opostos eram iguais e que os ângulos consecutivos eram suplementares. Estes demonstraram que perceberam a acção que teriam de desenvolver nesta primeira questão da proposta de trabalho. Contudo, os alunos manifestaram alguma dificuldade em justificar os dados recolhidos. Decidiram, então, imediatamente chamar a professora.

Prof.: [apontando para o geoplano] Têm um paralelogramo, muito bem. Como é que classificamos cada um dos ângulos internos do paralelogramo? … Este [ângulo A] é?

V.: Agudo

Prof.: Sim. E este [ângulo C]?

B.: É igual, têm a mesma amplitude.

Prof.: [apontando para os ângulos] Este ângulo [A] é igual aquele [ângulo C]?

V.: Não é! … utilizando o transferidor dá igual.

Prof.: [apontando para dois segmentos de recta] Qual é a posição relativa destes dois segmentos de recta?

V.: Paralelos.

Prof.: E destes?

B.: Paralelos.

Prof.: Se traçarmos esta diagonal, por exemplo, o paralelogramo fica decomposto em dois triângulos. O ângulo DCA é igual ao ângulo CAB porquê?

V.: Porque os ângulos são de lados paralelos e da mesma espécie

Prof.: E o ângulo DAC é igual ao ângulo ACB porquê?

R.: Pela mesma razão.

Prof.: Exactamente! Por isso os ângulos opostos do paralelogramo têm a mesma amplitude.

O diálogo entre os alunos do grupo e a professora foi o suficiente para desencadear a discussão no grupo, pois a intervenção da professora provocou um momento de reflexão. A justificação da primeira alínea da questão um surge do questionamento feito pela professora. O conceito ângulos de lados paralelos, estudado na aula anterior, foi mobilizado pelo **V.** para justificar o facto dos ângulos oposto de um paralelogramo serem iguais. Deste modo, o aluno evidenciou possuir o conhecimento do conceito mas ainda a capacidade de o aplicar de modo correcto à situação em estudo. Todos os elementos do grupo procuravam ter um papel activo e interventivo no diálogo que se ia construindo. Note-se, também, que o **V.**, aluno com dificuldades na disciplina, tornou-se progressivamente mais participativo nestas aulas com materiais manipulativos. A falta de hábito em procurar justificações parece ter sido a razão pela qual solicitaram a presença da professora. No entanto, os alunos não manifestaram qualquer dificuldade em utilizar o transferidor e mensurar a amplitude dos ângulos internos do paralelogramo, concluindo que os ângulos opostos de um paralelogramo têm a mesma amplitude. A professora colocou questões que permitiram aos alunos justificar a conclusão a que tinham chegado, recorrendo aos materiais manipuláveis. Os alunos começaram a questionar-se mutuamente e a tentar justificar os resultados obtidos com o material distribuído. Assim, as participações nas discussões sucediam-se naturalmente e sem a presença da professora.

R.: Estes dois [apontando para o ângulos A e o ângulo D] dão 180º … estes também [apontando para o ângulo C e o ângulo B].

B.: Dá sempre 180º.

V.: É sempre um agudo e um obtuso.

R.: Como os lados [opostos] são paralelos, os ângulos [consecutivos] são ângulos de lados paralelos são suplementares.

B.: São ângulos de lados paralelos de espécies diferentes, pois um é agudo e o outro obtuso.

R.: São suplementares … de 180º.

N.: No quadrado e no rectângulo acontece a mesma coisa.

V.: Como assim?

N.: Olha [apontando para o quadrado e o rectângulo desenhados na folha da tarefa] … os ângulos são todos de 90º, dá 360º, os opostos são iguais e estes [ângulos] dão 180º … neste [apontando para o losango desenhado na folha da tarefa] tenho dúvidas.

Os alunos mobilizaram os conhecimentos anteriormente aprendidos para justificar o facto dos ângulos consecutivos de um paralelogramo serem suplementares. O **N.** evidenciou compreender que o mesmo acontece com o quadrado e o rectângulo, manifestando dúvidas em relação ao losango. Os alunos do grupo G1 sentiram necessidade de desenhar no geoplano não circular um losango e mensurar a amplitude dos seus ângulo internos, no entanto, o mesmo não aconteceu para o quadrado e o rectângulo talvez porque soubessem que estas figuras têm os quatro ângulos rectos. Note-se que todos os elementos do grupo participaram no diálogo.

A professora interpelou o grupo G1 no sentido de dar uma justificação para o facto dos lados paralelos serem iguais dois a dois. Atenda-se ao seguinte diálogo:

Prof.: Se traçarmos a diagonal do paralelogramo este fica dividido em dois triângulos … para provar que os triângulos são iguais. O que é que temos de provar?

B.: O do meio.

Prof.: Qual? O do meio qual é? Que nome dávamos a isto?

V.: Eixo de simetria.

Prof.: O que é um eixo de simetria?

B.: Divide a figura em duas partes iguais.

R.: A diagonal … a diagonal é comum aos dois triângulos.

Prof.: A diagonal …

N.: Professora, este ângulo é igual aquele e este … aquele são ângulos de lados paralelos.

Prof.: Então temos um lado igual e os ângulos adjacentes ao mesmo lado iguais.

B.: Os triângulos são iguais.

Prof.: Sim. Este [apontando para o lado] lado é igual a qual?

V.: Aquele.

Prof.: [apontando para o lado] A este. E este [lado]é igual a este [lado].

B.: Os lados [opostos] são iguais dois a dois.

Os alunos do grupo G1 através dos ângulos, usando os dados da figura e o facto de a diagonal ser comum aos dois triângulos, mobilizaram os conhecimentos adquiridos relativamente aos critérios de igualdade de triângulos para justificar que os lados opostos de um paralelogramo têm o mesmo comprimento. O **B.** revelou dificuldade em atribuir um nome a um determinado ente geométrico.

Relativamente à última alínea, os alunos mediram o comprimento das diagonais recorrendo à régua tendo verificado que as diagonais de um paralelogramo intersectam-se nos seus pontos médios.

No grupo G2 a introdução da tarefa decorreu de forma semelhante à anterior. Depois de distribuída a tarefa um dos seus elementos leu a tarefa em voz alta e os restantes colegas acompanharam-no. Os alunos não manifestaram dificuldades pois seguiram a sugestão da proposta de trabalho, pegaram nos elásticos e desenharam no geoplano não circular um paralelogramo obliquângulo e começaram a medir as amplitudes dos ângulos internos.

No decorrer do trabalho dos alunos, a professora tentou averiguar se estes compreenderam a tarefa proposta, sendo esta uma forma de saber o resultado das interacções entre os elementos do grupo e se existiu partilha de opiniões.

Prof.: Ao traçar uma diagonal o nosso paralelogramo ficou dividido em quantos triângulos?

Alunos do grupo G2: Dois.

Prof.: Dois, não é! … Qualquer paralelogramo ao traçarmos uma diagonal fica sempre dividido em dois triângulos … sempre.

G.: Só que não são iguais?

Prof.: O que é que não são iguais?

G.: Os triângulos.

Prof.: Será que aqueles dois triângulos não são iguais? Mede com a régua **G.** os lados?

C.: São sim.

Prof.: Porque é que são iguais?

M.: [apontando para a diagonal] tem o mesmo comprimento.

Prof.: O que é que tem o mesmo comprimento?

M.: A diagonal.

Prof.: Este lado [diagonal] é igual porque é comum aos dois triângulos. Este ângulo é igual a este e este é igual a este porquê?

M.: Porque são ângulos de lados paralelos e da mesma espécie … são iguais.

Prof.: Se os dois triângulos têm um lado igual e os ângulos adjacentes respectivamente iguais …

Ma.: São iguais.

Prof.: Então o que é que concluímos?

C.: Este lado é igual a este e este lado é igual a este.

Prof.: Os lados opostos de um paralelogramo têm o mesmo comprimento.

A **G.** manifestou alguma dificuldade em reconhecer que os dois triângulos eram iguais. A sugestão da professora permitiu a **G.** visualizar que os três lados de um triângulo eram iguais aos do outro, reconhecendo a sua igualdade. O questionamento da professora, ao grupo G2, possibilitou que os alunos provassem que os lados opostos de um paralelogramo têm o mesmo comprimento, conduzindo desta forma ao esclarecimento desse facto.

Os alunos do grupo G2 manifestaram dificuldade em associar as designações aos entes geométricos, como comprova o seguinte diálogo:

Prof.: Que nome é que dávamos quando a soma das amplitudes de dois ângulos dá 180º?

Ma.: Obtuso.

M.: Não é professora … não é.

Prof.: Porquê?

M.: Obtuso é um ângulo maior que 90º.

Ma.: Rasos.

Prof.: Raso é um ângulo de 180º. Se juntarmos dois ângulos são …

G.: Suplementares.

A professora, passado algum tempo, iniciou a correcção da primeira questão da tarefa relativamente as propriedades dos paralelogramos. Esta "desenhou" no geoplano um paralelogramo obliquângulo, mas rapidamente ouviu alguns alunos da turma comentarem que existiam outros paralelogramos – quadrado, losango, rectângulo. A discussão da tarefa permitiu que os alunos interagissem não só com os elementos do seu grupo, mas com os restantes grupos. Daí a sua importância na assimilação de certos conceitos que estão pouco claros. Os alunos participaram de uma forma dinâmica no relato das descobertas relativamente as propriedades dos paralelogramos. A professora aproveitou a discussão com toda a turma para introduzir um novo termo "bissectam-se". Embora os alunos não conheçam o termo, já tinham verificado que as diagonais de um paralelogramo intersectam-se num ponto e que este divide cada uma das diagonais em duas partes iguais.

Prof.: Estas duas diagonais … qual é a posição relativa?

B.: Concorrentes.

S.: Paralelas.

B.: Tocam-se num ponto, são concorrentes.

Prof.: Sim, se fossem paralelas não tinham nenhum ponto comum. Este ponto é comuns as duas diagonais. O que é que observaram em relação as diagonais do paralelogramo?

B.: Que o comprimento deste ponto [de intersecção das diagonais] a este vértice é igual deste ponto [de intersecção das diagonais] até este vértice.

A.: O mesmo acontece na outra diagonal.

Prof.:. As diagonais cruzam-se no seu ponto médio, isto é, bissectam-se.

Os alunos, para recolherem os dados relativamente às diagonais do paralelogramo, recorreram à régua para efectuar as medições necessárias. A informação recolhida permitiu que os alunos compreendessem o significado do novo conceito introduzido pela professora.

Na questão dois da tarefa os alunos teriam que construir três paralelogramos, sabendo alguns dos seus elementos. No grupo G1 os alunos não apresentaram dificuldade na construção do primeiro paralelogramo, utilizando correctamente o material. Os alunos mostravam-se empenhados na realização da tarefa e a partilha de opiniões contribuía para a reflexão dos resultados que tinham obtido na primeira parte.

B.: Temos dois lados e o ângulo por eles formado

R.: Este aqui [apontando para o esboço] também é de 50º, então faz-se 360º menos 100º dá 260º, que é estes dois ângulos e dividimos por dois dá 130º.

V.: 100º.

R.: [apontando para o esboço feito na folha] cinquenta com cinquenta dá cem, aqui é cento e trinta.

B.: Marcamos agora os dois ângulos, não é?

R.: Sim.

[Passados uns instantes].

B.: Basta medir dois centímetros em cada lado.

R.: Sim, os lados são iguais.

V.: Não percebo?

B.: Marcamos três centímetros e depois marcamos os dois ângulos, um de 50º e o outro de 130º a soma tem de dar 180º, depois como no paralelogramo os lados opostos são iguais é dois.

Neste curto diálogo é visível a interacção entre os alunos, caracterizada pelas interpelações e explicações entre os seus elementos. Note-se que o **V.**, aluno com dificuldades na disciplina, pede ajuda aos seus colegas de grupo sempre que não compreende o raciocínio dos seus colegas, este auxiliam-no nas suas dúvidas.

Contudo, na construção do segundo paralelogramo a professora ao circular pela sala verifica que o grupo está com algumas dificuldades. Por isso, decide intervir.

Prof.: [apontando para a folha do enunciado] Que nome damos a estes dois segmentos de recta?

V.: As diagonais.

Prof.: As diagonais muito bem. O que é que elas formam entre si?

B.: Um ângulo.

Prof.: Um ângulo de quanto?

V.: 140º.

Prof.: Já marcaram uma das diagonais, o que é que marcamos agora?

R.: O ângulo.

Prof.: Porque é que vão marcar o ângulo e só depois a outra diagonal?

B.: O ângulo poderia não ser de 140º.

Prof.: A outra diagonal onde vai passar?

V.: Ali.

Prof.: Onde?

V.: A meio.

R.: Dois para cada lado e marcamos o ângulo neste ponto [apontando para o ponto médio do segmento de recta [FH]].

Verificamos que os alunos sabem as propriedades dos paralelogramos quando interrogados pela professora. É importante referir que numa tarefa anterior a esta, **B.** ao construir um triângulo, dados os dois lados e o ângulo por eles formado marcou em primeiro lugar os dois lados, contudo o grupo apercebeu-se que assim obteriam vários triângulos. O erro cometido permitiu que chegassem à conclusão que teria de ser primeiro um dos lados, depois o ângulo e por fim o outro lado.

Na questão dois na alínea a), eram dados os comprimentos de dois lados consecutivos e o ângulo por eles formado, os alunos do grupo G2 também não manifestaram qualquer dificuldade no uso da régua e do transferidor aquando a sua construção. No entanto, a professora, ao circular pelos vários grupos, questionava os alunos relativamente ao trabalho realizado.

Prof.: Será que este ângulo [apontando para o esboço da tarefa] é de 50º também?

M.: Não, porque isto aqui é agudo e este aqui é um obtuso.

Prof.: O que é que nós sabemos sobre estes dois ângulos?

M.: Que são suplementares.

Prof.: O que são ângulos suplementares?

C.: Dá 180º.

Prof.: Tem de dar 180º a soma de dois ângulos, já marcaram este que era de 50º, se estes dois têm de dar 180º. Este [apontando para o esboço dos alunos] aqui de quanto é que vai ser?

M.: 130º.

Prof.: Quais as propriedade que utilizaram para construir este paralelogramo?

M.: Que os ângulos adjacentes são suplementares e os lados opostos são iguais.

Prof.: Pronto, vamos lá escrever isso na folha.

Parece evidente que as tarefas realizadas anteriormente com régua, transferidor e esquadro contribuíram para melhor os desempenhos dos alunos na utilização deste tipo de material.

Passado algum tempo, a professora passou novamente no grupo G2 e verifica que os alunos já resolveram a alínea b). Decide, então, questionar os alunos sobre o processo utilizado para construir o paralelogramo.

Prof.: Expliquem-me quais as propriedades que utilizaram na construção desse paralelogramo?
M.: Nós vimos que se bissectam, vimos que aqui é dois centímetros para cada lado.
Prof.: Porque tem de ser dois?
M.: Porque dividem-se ao meio.
Prof.: As diagonais de um paralelogramo bissectam-se, ou seja, cortam-se ao meio… Muito bem. E depois o que é que fizeram também?
C.: Marcamos um ângulo de 140º, depois medimos aqui três centímetros para cima e para baixo e unimos.
Prof.: Qual é a amplitude deste ângulo aqui?
Ma.: De 140º… são iguais.
Prof.: Será que são iguais?
M.: São ângulos verticalmente opostos.
Prof.: Muito bem. E este qual é a amplitude?
M.: De 40º …falta 40º para 180º.

Os alunos mobilizaram os conhecimentos adquiridos em tarefas anteriores e aplicaram de modo correcto à situação em estudo. A flexibilidade com que mobilizaram e partilharam estes conhecimentos poderão constituir uma indicação de que os alunos os têm interiorizados. Apesar dos diferentes contributos, o desempenho de cada um na actividade do grupo, foi decisiva para a dinâmica desenvolvida pelo grupo G2. Revelaram uma maior autonomia, pois na construção dos paralelogramos não solicitaram a professora, sendo as dúvidas colocadas no grupo, tendo a participação de todos, contribuído para a correcta construção dos paralelogramos das alíneas a) e b).

Na última alínea, ambos os grupos tiveram imensas dificuldades na sua resolução. Uma vez que faltava pouco tempo para dar o toque de saída, a professora decidiu discutir a resolução da alínea c) com o grande grupo. A primeira dificuldade manifestada pelos alunos é que não sabiam identificar os dados, parece evidente que a falta de um esboço na alínea c) dificultou a sua construção.

Prof.: Quais os dados que temos do paralelogramo?

S.: Seis centímetros.

Prof.: O que é que é seis centímetros?

A.: O comprimento de dois lados.

Prof.: O que é que nós sabemos também?

S.: É um paralelogramo.

Prof.: É um paralelogramo. É dado os comprimentos de dois lados consecutivos e o de uma diagonal.

A professora não deixou que fossem os alunos a responder à sua pergunta dando quase imediatamente a resposta, não os deixando que, autonomamente, o grupo turma interagisse entre si na procura da resposta. O facto, de faltar pouco tempo para terminar a aula, parece ter sido o motivo pela qual não deixou os alunos reflectirem. Contudo, a falta de um esboço dificultava a compreensão dos alunos. Perante tal situação, a professora sugere que os alunos façam um esboço do paralelogramo.

Prof.: O que é que fazemos em primeiro lugar para construir o paralelogramo? Sugestões?

B.: Traçar um segmento de recta.

Prof.: Vá lá ao quadro, tem ali o material todo que vai precisar [apontando para cima da sua secretária].

[**B.** no quadro traça um segmento de recta com seis centímetros].

Prof.: Podemos fazer um esboço de como seria o paralelogramo.

[**B.** desenha um esboço no quadro do paralelogramo].

Prof.: Diga **B.**, o que é que nós sabemos? … Que o comprimento do [JL] tem seis centímetros e que o comprimento do [LM] tem oito centímetros. Como é que vamos marcar o segmento de recta com oito centímetros?

N.: Com o compasso.

Prof.: [A professora passa o compasso ao **B.** que está em cima da sua secretária] Porquê?

N.: Temos um triângulo em que temos os três lados.

A presença de um esboço foi o suficiente para que os alunos compreendessem o que teriam de desenhar em primeiro lugar. Os alunos mobilizaram os conhecimentos adquiridos em tarefas anteriores, relativamente à construção de triângulos, pois além de saberem os procedimentos, sabiam qual o material necessário à sua construção. Outra das dificuldades manifestadas pelos alunos foi a construção do outro triângulo igual ao já construído, uma vez que não sabiam para qual dos lados do triângulo deveriam continuar o paralelogramo. Perante essa hesitação, a professora colocou questões de modo a serem eles próprios a obter resposta para as suas dúvidas.

Prof.: O que é que nós obtivemos ali? Aquilo é um paralelogramo?

Ma.: Não, um triângulo.

Prof.: Um triângulo. Será que este triângulo é igual a este [apontando para os triângulos do esboço].

M.: Sim, a diagonal divide o paralelogramo em dois triângulos iguais.

Prof.: Como é que podemos desenhar a outra parte?

B.: Posso fazer para aqui [lado direito].

Prof.: Será? Se isto é a diagonal para que lado é que vai ser?

N.: Para aquele lado.

Prof.: O que é que sabemos em relação aos lados do paralelogramo?

Ma.: São paralelos.

A.: E têm o mesmo comprimento.

Prof.: Certo, muito bem. Se este é um lado, o outro lado oposto terá o mesmo tamanho, como é que se pode desenhar a outra parte? … Se utilizarmos a régua e o esquadro podemos traçar rectas paralelas.

[**B.** segue as indicações da professora na construção do paralelogramo].

R.: Professora não podíamos construir o outro triângulo com o compasso?

Prof.: Sim, é outro processo.

A professora explica aos alunos como devem proceder para a construção do outro lado do triângulo, referindo também os materiais que deveram utilizar. O **R.**, apesar da sugestão da professora, refere outro processo que podiam utilizar para construir o outro triângulo. Isto revela por parte dos alunos uma valorização dos processos em relação aos produtos.

Síntese

Esta tarefa de investigação foi realizada com grande entusiasmo e interesse. Numa forma geral, o trabalho dos grupos pautou-se pela grande cooperação e colaboração de todos os elementos de cada grupo.

A estratégia adoptada pelos grupos foi influenciada pelo próprio enunciado da tarefa. As questões encaminhavam os alunos para a descoberta das propriedades dos paralelogramos: começaram por construir um paralelogramo obliquângulo no geoplano circular com os elásticos e, utilizando o transferidor para efectuar as medições necessárias, recolhiam dados em relação aos ângulos internos deste. Através dos dados recolhidos, os alunos procuravam descobrir relações entre as amplitudes dos ângulos opostos e entre as amplitudes dos ângulos adjacentes ao mesmo lado (consecutivos). Também utilizaram a régua para recolher dados relativamente ao comprimento dos lados e das diagonais do paralelogramo. Depois, construíram outros paralelogramos e verificaram que aquelas propriedades são observáveis em qualquer paralelogramo e não somente para aquele em particular. Na resolução da tarefa salienta-se a utilização da visualização e da manipulação na descoberta das propriedades dos paralelogramos. Os vários grupos utilizaram o processo de justificação para fundamentar os dados recolhidos, através do material colocado à disposição de cada grupo.

Na parte relativa à construção de paralelogramos, os alunos manifestaram somente dificuldade na última alínea. A falta de um esboço foi um obstáculo à identificação dos dados contidos no enunciado.

A professora limitava-se a apoiar os grupos através da formulação de questões e no esclarecimento de dúvidas, o que ainda sugere alguma dependência dos alunos em relação à professora. O discurso da professora ia no sentido de procurar desenvolver nos alunos uma atitude mais activa, em que eles próprios fossem os agentes da sua aprendizagem e condutores do seu discurso. Esta postura da professora contribuiu para que estes se envolvessem mais profundamente na tarefa proposta, tornando-se mais autónomos, passando a valorizar tanto as respostas como os processos utilizados. Nesta tarefa os alunos utilizarem vários processos: processo de comunicação (explicar, falar, questionar), processo de raciocínio (analisar e compreender os dados obtidos), processos operacionais (recolher dados com a ajuda do transferidor e da régua), processo de registo (escrever as suas descobertas).

Apesar da linguagem predominante ser a que usam normalmente no seu dia-a-dia, foram usados, com alguma frequência, alguns termos específicos deste capítulo: paralelogramo, diagonais e ângulos de lados paralelos.

Materiais manipuláveis

A construção, no geoplano não circular com os elásticos, dos paralelogramos e o recurso ao transferidor e à régua permitiu que os alunos descobrissem algumas propriedades dos paralelogramos. Também a régua, o transferidor e o esquadro foram úteis, pois permitiram que os alunos construíssem os paralelogramos sugeridos na tarefa, tendo apenas alguns dos seus elementos. O material utilizado revelou-se proveitoso, pois, através da sua manipulação, os alunos atingiram os objectivos pretendidos com a tarefa. Os alunos não revelaram dificuldades na manipulação dos instrumentos de desenhado, utilizados talvez pelo facto de já os terem utilizado em tarefas anteriores.

A actividade de grupo foi intensa, destacando-se na resolução da tarefa a motivação e o empenho demonstrado pelos alunos, tendo o material utilizado influenciado.

Os alunos utilizaram alguns processos matemáticos na realização da tarefa proposta: recolha de dados, especialização, procura de regularidades, formulação de conjecturas, verificação e construção. A manipulação dos materiais permitiu a recolha de dados, por parte dos alunos, em vários paralelogramos. Estes, ao analisarem os dados, verificaram regularidades, tendo essa constatação levado à formulação de conjecturas. O processo de procura de regularidades (lados, ângulos e diagonais) entre os vários paralelogramos contribuiu para a formulação de conjecturas, tendo os alunos utilizado o processo de especialização para testá-las. Os vários processos usados contribuíram para que respondessem com relativa facilidade à primeira questão da tarefa, não revelando dificuldades em identificar as propriedades dos paralelogramos. Outro aspecto evidenciado refere-se ao facto dos alunos aplicarem o conhecimento adquirido na construção dos vários paralelogramos, tendo-se verificado alguma dificuldade. A aula caracterizou-se, assim, por grande actividade dos discentes.

Também o material manipulável utilizado favoreceu as interacções estabelecidas no seio dos vários grupos. Ao longo da realização da tarefa, os alunos trocaram impressões entre si, partilharam os seus raciocínios, colocaram questões uns aos outros e reflectiram sobre o trabalho realizado, levando a que este facto, também, se tivesse reflectido nas suas intervenções nas discussões em grande grupo.

4.10. Tarefa "Áreas e Volumes de Sólidos"

A tarefa "Áreas e Volumes de Sólidos" (anexo 12) foi planificada para ser aplicada no dia 25 de Maio, numa aula de noventa minutos. Na primeira questão da tarefa era proposto aos alunos a resolução de um problema, enquanto que na segunda questão da tarefa os alunos teriam que investigar a relação existente entre o volume de alguns sólidos com a mesma base e a mesma altura. A tarefa visava também rever alguns conceitos abordados em anos anteriores, tais como as noções de área e de volume.

Os alunos já estavam na sala à hora prevista, entravam e sentavam-se em grupo, uma vez que a sala já se encontrava disposta para trabalharem. A atenção da maioria dos alunos no início da aula estava direccionada para os materiais que estavam sobre a mesa da professora, especialmente para o pacote de arroz integral. A professora distribuiu a tarefa proposta e os grupos começaram a ler. Depois, apelou aos alunos para que discutissem com os outros elementos do grupo a primeira questão da proposta de trabalho. Na questão um pretendia-se que resolvessem uma situação problemática. O problema era relativamente a uma empresa de chocolates que substituiu a embalagem A pela embalagem B, com forma e dimensões diferentes, levando a mesma quantidade de bombons e mantendo o preço de venda. Os alunos teriam que investigar se a nova embalagem ficaria mais económica à empresa e justificar o porquê das suas conclusões.

No grupo G1, o **N.** começou por ler em voz alta o enunciado do problema e, em seguida, o **B.** faz a interpretação do problema.

B.: As embalagens são feitas do mesmo cartão. É melhor fazer a planificação de cada um dos sólidos para ver a quantidade de papel que leva.
V.: Porquê?
B.: Vemos melhor.
V.: O quê?
B.: As faces … para calcular a área.
N.: Não é o volume?
B.: Não, o volume é o espaço dentro, não é isso que é pedido.
R.: [apontando para a tarefa] Leva a mesma quantidade de bombons. É a área.
B.: Temos só duas dimensões.

O **B.** e o **R.** revelam ter compreendido que no contexto do problema é pedido para calcular a área das superfícies das embalagens. Como estratégia de resolução o **B.** sugeriu ao grupo que fizessem a planificação dos sólidos, pois permitiria uma melhor visualização das faces que constituam cada um. Os restantes elementos concordaram e começaram a desenhar um esboço da planificação de cada uma das embalagens.

B.: Ao abrir o sólido fica o quadrado no meio.
R.: [mostrando a sua planificação ao **B.**] É mais ou menos assim.
V.: Neste [apontando para o paralelepípedo rectângulo] pode ser uma destas planificações.
B.: Não é um cubo.
N.: Olha … a base é um rectângulo … oito centímetros e seis centímetros.
V.: Como é que calculamos a área?

B.: Qual é os polígonos das faces?

V.: Seis rectângulos.

R.: Não, as faces à volta são quadrados.

N.: Quatro quadrados e dois rectângulos.

B.: Basta calcular a área de cada uma das faces.

Como estratégia de resolução desta situação-problema, o grupo G1 desenhou um esboço da planificação de cada uma das embalagens. Desta forma, os alunos revelaram mobilizar, adequadamente, os seus conhecimentos sobre as planificações de sólidos e utilizaram-nas para resolver o problema. Pelo diálogo, parece evidente que os alunos compreenderam que para calcular a área total da embalagem tinham que somar a área de cada uma das suas faces. A estratégia para resolver o problema que o **B.** sugeriu facilitou a visualização das faces que compõem cada sólido. Em relação ao cálculo da área total da embalagem A, os alunos não manifestaram dúvidas uma vez que procederam de igual modo. Os discentes realizaram os cálculos necessários para obter a área de cada sólido, interagindo com os colegas de grupo. Tiveram oportunidade de discutir uns com os outros os valores do comprimento e largura dos polígonos das faces, sendo a embalagem B a que suscitou mais dúvidas, talvez pelo facto de ser composta por dois rectângulos e quatro quadrados. Os alunos não manifestaram dificuldade em contabilizar o número de faces de cada um dos sólidos. A conclusão do problema, foi rapidamente interpretada pelos alunos.

B.: Na nova embalagem a empresa gasta menos cartão.

V.: Temos de justificar porquê.

B.: A embalagem A leva 384 cm^2 de papel e a embalagem B 320 cm^2.

N.: É necessário menos quantidade de cartão para forrar a caixa.

R.: A área é menor … sai mais barato à empresa.

V.: A nova embalagem?

B.: Sim.

Os alunos justificaram com base nos cálculos efectuados que a empresa gasta menos cartão na embalagem B, ou seja, que a nova embalagem fica mais económica à empresa porque, para o mesmo volume, a área da superfície é menor. Como um dos alunos do grupo revelou alguma dificuldade em compreender o significado dos valores obtidos para a área dos dois sólidos no contexto do problema, os restantes elementos tentaram explicar o seu raciocínio.

No Grupo G2 a estratégia de resolução do problema foi similar ao do grupo G1. O processo utilizado pelos alunos do grupo G2 na resolução do problema consistiu no seguinte: desenharam um esboço da planificação e calcularam a área total de cada uma das embalagens; depois verificaram que a área da embalagem A é maior do que na embalagem B. O uso de um esboço da planificação de cada sólido como estratégia para a resolução da questão um da tarefa, parece evidente que ajudou na determinação da área de cada um dos sólidos.

M.: Vamos planificar o primeiro.

Ma.: Vamos desenhar um quadrado … Isto é um quadrado? [apontando para o caderno da **G.**]

G.: É [colocou quatro quadriculas de largura e cinco de comprimento].

Ma.: É um quadrado!

C.: Tem de ter os lados todos iguais.

G.: Então não é.

M.: A embalagem A tem um quadrado e quatro triângulos.

Ma.: Temos de calcular a área de cada face.

C.: Basta calcular a dum triângulo e multiplicar por quatro.

G.: Não percebo porque multiplicaram por quatro.

Ma.: São quatro triângulos iguais.

Notava-se uma grande interacção entre os elementos do grupo. Quando algum elemento manifestava dificuldades, os restantes elementos procuram ajudar e, só depois, avançam na resolução da tarefa. Embora cada aluno efectuasse os cálculos da área de cada embalagem individualmente, estes comparavam os valores obtidos como forma de verificar se obtinham todos o mesmo resultado. Assim, todos colaboram na realização dos cálculos necessários para calcular a área das embalagens.

G.: Como é que se calcula a área do quadrado?

Ma.: Lado vezes lado.

M.: É doze vezes doze.

Ma.: Dá 144 cm^2 . Agora falta calcular a área dos triângulos.

G.: São todos iguais?

Ma.: Sim, é base vezes altura a dividir por dois.

M.: Dá sessenta.

C.: Nós calculamos a área de um triângulo, faltam três.

M.: É três vezes sessenta [fazendo a conta na calculadora].

G.: Ele vai gastar 144 cm^2 ?

Ma.: Na base e nos quatro triângulo ele gasta quanto?

M.: 240 cm^2.

G.: Agora é só somar.

Os alunos revelaram ser capazes de aplicar os conhecimentos anteriormente adquiridos à situação proposta e de forma satisfatória, pois recorreram à planificação para uma melhor visualização das faces de cada embalagem e utilizaram o conceito de área para saber qual a embalagem que leva menos papel.

Em relação à embalagem B, os alunos procederam de forma idêntica. Contudo, quando a professora chega ao grupo G2 inicia-se o seguinte diálogo, devido a um erro detectado pela professora na folha de tarefa da **C.**:

Prof.: Porque dividiram por dois?

C.: Não é! Porque não é um triângulo.

Prof.: Não é um triângulo?

C.: Fiz mal!

Prof.: Quais são os polígonos que são iguais?

C.: Estes [apontando para as faces laterais] … tínhamos que multiplicar sessenta e quatro por quatro.

Prof.: Esse valor é área do paralelepípedo?

C.: Não! Quarenta e oito mais sessenta e quatro vezes quatro.

Prof.: Então eu olho para aqui parece que este paralelepípedo tem quatro faces iguais mais uma dá cinco.

Ma.: Falta uma face.

C.: Temos que multiplicar este quarenta e oito por dois.

Verificamos que, embora a estratégia utilizada estivesse correcta para a resolução do problema, foi possível observar dois erros cometidos pela **C.** no cálculo da área da embalagem B. A intervenção da professora, colocando sucessivamente várias questões sobre o trabalho realizado pela aluna, foi no sentido de a conduzir a uma reflexão sobre os erros cometidos, levando-a a identificá-los.

Quando os alunos acabaram de resolver a questão um, a professora procedeu à discussão dos resultados obtidos. A correcção não suscitou grande discussão, embora alguns alunos tivessem intervido para mostrar o modo como o seu grupo pensou para resolver o problema. Todos os grupos chegaram aos mesmos valores para a área de cada uma das embalagens, chegando à conclusão que a construção da nova embalagem ficará mais económica à empresa e fundamentaram a sua justificação com argumentos válidos. Atenda-se ao seguinte diálogo:

Prof.: Foi uma boa opção que a empresa tomou ao decidir mudar o formato da embalagem?

Alunos da turma.: Sim.

Prof.: Porquê é que foi uma boa opção?

Ma.: Porque ia ser mais barato para a empresa.

Prof.: Porque é que ia ser mais barato?

A.: Gasta menos cartão. Nesta [embalagem B] 320 cm^2 e nesta [embalagem A] 384 cm^2.

B.: Porque na embalagem B vai gastar menos papel, significa que a firma vai gastar menos dinheiro em papel.

Prof.: Portanto será mais rentável … se gasta menos ficará com mais dinheiro.

Esta questão terá contribuído para que os alunos aplicassem os conhecimentos adquiridos em Matemática a uma situação real.

Na segunda questão da tarefa, a professora começou por distribuir o material necessário à realização da experiência.

V.: Integral, integral …

B.: É mais barato … é mais caro aliás.

V.: Vamos comer.

B.: Até do arroz mais caro a professora compra para a gente. Espectáculo! Se fosse outra professora comprava do arroz mais barato.

Segundo **B.**, o facto da professora comprar arroz do mais caro demonstra o afecto e carinho desta pela turma.

Após a leitura do enunciado, os alunos começaram rapidamente a encher a pirâmide de arroz e a verter para o prisma, repetindo a operação até encher o prisma. Os alunos, autonomamente, começaram a experimentar, dando lugar a uma animada discussão sobre os aspectos que iam observando.

V.: O cone leva menos.

B.: Dá três.

R.: Para encher o cilindro quantas vezes utilizaram o cone?

V: Três, não contaste?

B.: É a terça parte.

V.: Porquê é que é a terça parte?

R.: Porque são precisos três deste [cone] para encher o cilindro.

Os alunos, ao realizarem a experiência, verificaram que, para encher o cilindro, é necessário encher por completo o cone três vezes. Contudo, ao realizar a experiência com o prisma triangular e a pirâmide triangular o mesmo não aconteceu. Decidiram, então, experimentar novamente.

B.: Rapaz aqui em cima. Já fez perca.

N.: Um.

B.: Não pode cair um grão fora.

N.: Vai dar uns dois e qualquer coisa.

B.: Não valeu.

R.: Dá três.

B.: Isso não dá três. Eu aposto com vocês.

R.: Dá.

B.: Olha já tem muito.

N.: Não dá, não dá. Queres que eu faça isso para dar? Dá-me isso para experimentar?

B.: Vê se consegues, com o prisma cheio, encher três vezes aquela pirâmide.

[**V.** enche o prisma triangular e deita agora na pirâmide que o **N.** segura].

N.: Um.

[V. deita novamente].

N.: Dois … três.

A estratégia do **B.** foi eficaz uma vez que, com o prisma triangular cheio de arroz, os alunos conseguiam encher três vezes a pirâmide, contrariando o resultado obtido na experiência anterior. Os alunos voltaram a efectuar a experiência de encher o prisma de arroz com a pirâmide.

N.: [realizando novamente a experiência] Aprecia.

V.: Já está cheio.

[**N.** deita no prisma e enche mais uma vez a pirâmide de arroz integral].

N.: Este já está a abarrotar.

V.: Já está muito cheio, já é muito.

N.: Tem de dar para fechar.

[**N.** deita a terceira pirâmide de arroz no prisma].

N.: Dá para fechar, sim.

V.: [**V.** coloca a tampa] Não dá.

R.: [fazendo a experiência] Queres ver como são três?

V.: Pára já isso. Já está muito cheio!

N.: Tem de dar para fechar.

V.: Isso não está cheio. Por isso faz esse barulho.

N.: Cabe mais.

V.: Estão a fazer batota.

N.: Mais. Dá três.

V.: Esta [pirâmide] não estava cheia.

R.: Dá três sim. Três cones para encher um cilindro e três pirâmides para encher um cubo.

N.: Isto é o volume não é?

B.: Sim.

N.: Cada prisma tem o mesmo volume que o de três pirâmides triangulares, com a mesma base e mesma altura.

Verificou-se uma grande persistência por parte dos alunos na realização da experiência, pois, deitando o arroz da pirâmide no prisma triangular, este não levava três pirâmides de arroz. No entanto, conseguiam encher, com o prisma cheio de arroz, três vezes a pirâmide. Tal facto levou a que os alunos estivessem com muita atenção às experiências realizadas pelos vários elementos do grupo. Uma das justificações encontradas pelo grupo foi que quem realizava a experiência, enchia demasiado a pirâmide de arroz não conseguindo tapá-la. Os alunos realizaram sucessivas experiências, devido à necessidade de confirmar um dos resultados obtidos. O facto de todos os alunos quererem realizar a experiência foi o suficiente para que houvesse discussão no seio do grupo, caracterizada pelas sugestões, interpelações e indicações relativamente à experiência.

No grupo G2 a experiência decorreu de forma semelhante à descrita anteriormente.

Ma.: Dois … três.

M.: Dois e meio.

Prof.: Dois e meio, tenho a impressão que mediram mal … mediram mal.

Ma.: Tem de dar quanto?

Prof.: Vocês é que têm de me dizer.

[Afastando-se do grupo]

M.: Três.

C.: Deixa fazer. Vá.

[**G.** enche a pirâmide de arroz e deita no prisma]

Ma.: Oh rapariga! Tu deitas fora.

G.: Um … dois.

Ma.: Está demasiado cheio.

C.: Assim não dá para fechá-la.

O grupo aponta o facto da pirâmide estar demasiado cheia como uma das razões para não conseguirem encher o prisma triangular com apenas três pirâmides de arroz. Após várias experiências realizadas pelos vários elementos do grupo, este solicita a ajuda da professora. A professora interpelou o grupo sobre o trabalho que estavam a desenvolver e **Ma.** explica que com base na experiência realizada são necessários duas pirâmides e meia para encher o prisma triangular. O grupo volta a realizar a experiência e confirma, novamente, o resultado obtido anteriormente. Perante tal facto, a professora decide realizar a experiência.

> **Prof.:** Têm a mesma altura e a mesma base?
>
> **Ma.:** Sim … Mas não dá.
>
> [A **G.** enche a pirâmide de arroz e começa a realizar a experiência].
>
> **Ma.:** Um.
>
> **Prof.:** Dois.
>
> **Ma.:** Não dá.
>
> **Prof.:** Estão a deitar demais … penso que estão a deitar muito arroz. Não podem deitar muito cheio senão não dá certo. Vocês não podem esquecer que isto fecha e tem de estar abaixo desta linha.
>
> **M.:** Podemos tapar a pirâmide e deitar [o arroz] por esta abertura, assim não deitamos demasiado.
>
> **Prof.:** Sim. Para vocês terem a certeza absoluta façam pelo buraquinho que dá certo. Está bem. Em vez de arroz podíamos ter utilizado água, areia.
>
> **Ma.:** Água!
>
> **Prof.:** Sim. Enchendo assim vai demorar mais tempo mas vocês vão ver que dá três.

A sugestão da **M.** para a realização da nova experiência permitiu aos alunos do grupo G2 verificarem e formularem as seguintes conjecturas: cada prisma tem o mesmo volume que o de três pirâmides triangulares, com a mesma base e mesma altura e cada cilindro tem o mesmo volume que o de três cones, com a mesma base e mesma altura. Verificamos que só após várias experiências é que o grupo solicitou a professora, revelando uma maior autonomia na realização da tarefa.

Todos os grupos chegaram às mesmas conclusões na questão dois da tarefa.

Síntese

Ao longo do desenvolvimento da tarefa os alunos mostraram-se sempre muito entusiasmados e empenhados. Em primeiro lugar, pelo facto de estarem a explorar um problema que surge em muitas empresas; em segundo lugar, pelo facto de utilizarem arroz na sala de aula de Matemática.

A estratégia de resolução do problema proposto adoptada pelos alunos consistiu, na generalidade dos grupos, em desenhar as planificações de cada um dos sólidos e depois calcular a área das superfícies das embalagens. Com base nos dados obtidos os alunos justificaram a opção da empresa. Na questão dois os alunos adoptaram a estratégia sugerida pela própria tarefa, que consistia em encher a pirâmide de arroz e verter para o prisma, repetindo esta operação até enchê-lo. A mesma estratégia era sugerida para o cone e o cilindro.

Os alunos evidenciaram possuir conhecimento, o que significa planificar e sobre o conceito de área, assim como demonstraram a capacidade de o aplicar de modo correcto no problema proposto. A facilidade com que mobilizaram e partilharam estes conhecimentos na actividade do grande grupo poderá constituir um indício de que os alunos os têm interiorizados.

Os alunos não manifestaram dificuldade na determinação da área total da superfície de figuras tridimensionais, a partir das suas representações bidimensionais, porque os alunos esboçaram a planificação dos dois sólidos geométricos. Desta forma, os alunos conseguiram visualizar as faces escondidas destes. Para tal, parece ter contribuído a prática com modelos de sólidos geométricos e respectivas planificações bidimensionais em tarefas anteriores, tendo-se revelado útil no desenvolvimento da visualização.

Todos os alunos se envolveram no trabalho do grupo, apesar dos seus diferentes desempenhos. Contudo, o contributo de cada um foi decisivo para a dinâmica do grupo. A partilha de ideias e opiniões, a apresentação de sugestões foram evidentes ao longo da resolução da tarefa proposta.

Apesar de solicitarem a ajuda da professora, foi notório, ao longo das várias aulas, o desenvolvimento da autonomia revelado pela menor frequência com que solicitarem a professora para o esclarecimento de dúvidas do grupo. Os alunos, de uma primeira fase de grande dependência da professora evoluíram para outra em que se tornaram mais independentes. A professora, deixou de ser considerada como a autoridade máxima sobre o assunto, para assumir mais o papel de "companheira de descobertas", tendo os materiais manipuláveis e a natureza da tarefa influenciado.

Apesar da linguagem predominante ser a que usam normalmente no seu dia-a-dia, alguns termos específicos da Geometria foram usados com alguma frequência: cone, cilindro, prisma, tetraedro, volume, área e planificação.

Verificou-se também que, antes de registar qualquer resultado, os alunos procuravam ouvir a opinião dos elementos do grupo. As questões e as propostas de resposta eram reflectidas e discutidas pelos seus elementos. Ao procurarem, entre todos, encontrar a solução que lhes parecia melhor fundamentada, os alunos mostraram-se mais persistentes.

Também verificamos um envolvimento e empenho maior por parte dos alunos com aproveitamento mais fraco, sendo este um aspecto relevante que se verifica em todas as tarefas não se eximindo estes em apresentar e defender as suas opiniões no grupo, assim como colocar as suas dúvidas.

Material Manipulável

O material manipulável que os alunos tinham à sua disposição, nomeadamente os sólidos em acrílico (prisma triangular, tetraedro, cone e cilindro) e o arroz integral para colocar no seu interior revelaram-se de grande importância na realização da questão dois da tarefa. Estes materiais permitiram aos alunos comparar o volume de alguns sólidos com a mesma base e a mesma altura. As sucessivas experiências realizadas, utilizando estratégias diferentes, permitiram aos alunos reflectir e discutir o facto de obterem resultados diferentes. Os alunos reconheceram falhas nos seus procedimentos, nomeadamente o facto de encherem o tetraedro ou o cone com uma grande quantidade de arroz. Esse facto, obrigou a constantes repetições das experiências com os materiais. Mesmo assim, os alunos não desanimaram; verificou-se uma grande persistência por parte destes, que só terminaram quando obtiveram o mesmo resultado nas diferentes estratégias utilizadas. A formulação das conjecturas e a sua verificação foram dois processos matemáticos utilizados. Nesta perspectiva, o relacionamento dos alunos na resolução da tarefa, nos diferentes grupos caracterizou-se pela apresentação de várias sugestões que iam sendo submetidas à discussão em grupo. Com esta questão pretendia-se que os alunos intuíssem a noção de volume de um sólido. Os instrumentos de medida (cone e tetraedro em acrílico) constituíram uma estratégia usada na determinação de uma medida.

Os alunos envolveram-se, com muito entusiasmo, na realização da experiência e até os alunos com mais dificuldades na aprendizagem manifestaram interesse. Para tal poderá ter contribuído a utilização dos materiais referidos.

Os diálogos transcritos evidenciam que a natureza da tarefa e o material usado contribuíram para que os alunos adquirissem um conhecimento matemático válido e partilhado, verificando-se que os alunos tiveram um papel central na sua construção. As interacções entre os alunos conduziram a um trabalho rico, pois os alunos desenvolveram a tarefa em colaboração, partilhando o seu pensamento (as ideias dos alunos são experimentadas no grupo).

Capítulo V

CONCLUSÕES

Neste capítulo procuramos responder às questões deste estudo, apresentando e discutindo algumas conclusões decorrentes da análise dos dados. Em seguida, faremos algumas recomendações que poderão ser tomadas em linha de conta em futuras investigações congéneres e, por fim é feita uma reflexão final acerca da investigação realizada no que concerne às suas influências na minha prática lectiva enquanto professora de Matemática.

Esta investigação tinha como objectivo geral compreender como é que os alunos se apropriam dos conceitos da Geometria do 7º ano de escolaridade quando usam materiais manipuláveis. Com o intuito de estudar este objectivo foram formuladas questões de investigação: (1) Quais os processos matemáticos utilizados pelos alunos ao realizarem tarefas recorrendo aos materiais manipuláveis? (2) Como é que os materiais manipuláveis promovem o desenvolvimento dos conhecimentos geométricos dos alunos? (3) Qual o contributo dado pelos materiais manipuláveis no desenvolvimento de determinadas competências matemáticas nos alunos? (4) Qual é o desempenho dos alunos ao trabalharem, cooperativamente, em tarefas com recurso a materiais manipuláveis?

5.1. Processos matemáticos e materiais manipulativos

O relatório *Everybody Counts* (1989) focaliza o ensino e a aprendizagem da Matemática nos processos matemáticos, isto é, aquilo a que se entende por “fazer Matemática”. Nesta perspectiva, realça a importância dos alunos em procurarem soluções, explorarem padrões, formularem e testarem conjecturas em vez de apenas memorizarem regras ou procedimentos e formularem ou fazerem exercícios.

Nesta experiência, os alunos, da turma em estudo, realizaram diferentes tarefas de exploração/investigação que possibilitaram a utilização de vários processos matemáticos durante a sua actividade Matemática. Verificou-se, por parte dos alunos, uma crescente valorização dos processos matemáticos na construção do conhecimento geométrico. Os processos matemáticos utilizados e desenvolvidos pelos alunos, em diferentes momentos da sua actividade, foram os seguintes: operacionais, de comunicação, de registo e de raciocínio.

O material manipulável distribuído pela professora nas várias tarefas propostas permitiu aos alunos recolher e organizar a informação (são os processos operacionais). Por exemplo, na tarefa 1, através da visualização e da manipulação dos modelos de sólidos geométricos em madeira, os alunos recolheram informação que permitiu ser organizada de acordo com as características comuns dos vários sólidos. No entanto, houve tarefas em que os alunos utilizaram uma tabela como forma de organizar a informação obtida. Na tarefa 2, a construção dos vários sólidos com as peças de polidron possibilitou aos alunos a identificação dos elementos que compõem cada sólido. Essa informação foi depois organizada numa tabela. Na tarefa 5, através dos espelhos, os alunos estudaram as simetrias de vários polígonos regulares. Também essa informação foi registada numa tabela. A forma de organizar a informação facilitou a procura de regularidades e a formulação de conjecturas.

À medida que os alunos formulam conjecturas e tentam explicar a sua validade recorrendo aos materiais, ao mesmo tempo utilizam alguns processos de raciocínio (NCTM, 1991). Na tarefa 2, questão 6, os alunos analisaram a informação contida na tabela, procurando regularidades entre os exemplos nela contidos e discutindo a possível relação existente entre o número de faces, vértices e arestas. A visualização dos elementos de cada sólido permitiu a formulação de uma conjectura. Os alunos validaram-na, utilizando os materiais, mas fizeram-na através da manipulação verificando se as regularidades encontradas se mantinham. De salientar que os alunos validaram a conjectura com base num número reduzido de exemplos.

O processo de comunicação foi utilizado em todas as tarefas, pois os alunos relataram oralmente o que estavam a fazer e a observar. As suas dúvidas eram discutidas e esclarecidas no seio do grupo. Por esse motivo, falar, questionar, explicar, concordar foram processos que estiveram presentes ao longo da actividade. O material manipulável utilizado em cada tarefa revelou-se fundamental na validação de algumas afirmações por parte dos alunos.

Em todas as tarefas os alunos utilizaram o processo de registo, pois era-lhes exigido uma redacção de todos os resultados encontrados ao longo da sua actividade. Inicialmente verificámos algumas dificuldades por parte dos alunos, já que não estavam habituados a escrever na aula de Matemática. Ao registar a informação recolhida teriam que reflectir sobre o trabalho desenvolvido, auxiliando a clarificar o seu pensamento matemático (NCTM, 1991).

Contudo, nalgumas tarefas os alunos utilizaram outros processos matemáticos sem ser os que foram anteriormente referidos. São eles: selecção de estratégias, procura de regularidades, formulação de conjecturas, especialização, justificação, verificação, generalização e reflexão. Estes processos são actividades fundamentais para o “fazer Matemática” (NCTM, 1991).

Na fase inicial da tarefa, os alunos seleccionaram sempre uma estratégia de partida, destacando-se a manipulação de materiais manipuláveis e a apresentação da informação recolhida através de tabelas ou desenhos /esboços. A recolha da informação nas diferentes tarefas foi feita recorrendo à manipulação do material manipulável distribuído pela professora.

Os grupos da turma em estudo identificaram as propriedades e relações geométricas baseando-se essencialmente na visualização e manipulação do material utilizado. Os aspectos descobertos foram os seguintes: as propriedades dos quadriláteros (tarefa 8), as propriedades das diagonais dos paralelogramos (tarefa 8), as propriedades dos paralelogramos (tarefa 9), a relação entre ângulos de lados paralelos (tarefa 7), a relação entre ângulos verticalmente opostos (tarefa 7), a relação entre os lados de um triângulo (tarefa 4), a relação entre o número de vértices, faces e arestas de um poliedro (tarefa 2).

Os alunos utilizaram, em várias tarefas, o processo de generalização. Os alunos da turma em estudo generalizavam uma conjectura quando identificavam a existência de uma regularidade, isto é, quando visualizavam certas características comuns a muitos exemplos (por exemplo, na tarefa 7). A regularidade descoberta permitiu, nas várias tarefas propostas, que os alunos formulassem uma conjectura. Estes a partir da especialização testavam a sua veracidade, uma vez que poderia ser refutada. Como exemplo temos a tarefa 7, na qual os alunos realizaram várias experiências no geoplano, alterando os dois diâmetros “desenhados” e a partir de alguns esboços os alunos identificaram uma regularidade. Chegaram a observar que existiam pares de ângulos iguais nos quatro ângulos formados pelos dois diâmetros. Ao constatarem esse facto os alunos formularam uma conjectura: ângulos verticalmente opostos são iguais. O processo de especialização ajudou os alunos na generalização dessa conjectura. Os materiais utilizados nesta tarefa, o geoplano circular e os elásticos, permitiram aos alunos uma aferição rápida da conjectura formulada e uma envolvência activa na tarefa proposta (Serrazina e Matos, 1988).

Na fase de confirmação da conjectura formulada, os alunos utilizaram os processos de verificação, justificação e especialização. A verificação de conjecturas foi realizada através da experimentação e da geração de mais exemplos, recorrendo ao material manipulável. A análise dos dados sugere que os materiais utilizados nas tarefas ajudaram a testar conjecturas. O processo de justificação de uma conjectura foi utilizado apenas na tarefa 7.

De acordo com a noção descrita nas *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar* (1991), os alunos estiveram a trabalhar ao nível do desenvolvimento do seu poder matemático. Esta competência inclui aspectos tais como "explorar, conjecturar e raciocinar logicamente, bem como a sua aptidão para usar uma variedade de métodos matemáticos para resolver problemas não rotineiros" (NCTM, 1991, p.6).

Em suma, ao longo das várias tarefas os alunos usaram e aplicaram vários processos, o que parece evidenciar que desenvolveram a aptidão na sua apropriação e aplicabilidade. Esta ideia é corroborada por Serrazina (1991) quando afirma que "aprender Matemática fazendo-a não implica só a manipulação de materiais mas também pensar acerca da manipulação e reflectir nos processos e nos produtos" (p. 38).

5.2. Os materiais manipuláveis e o desenvolvimento dos conhecimentos geométricos.

Na resolução das tarefas propostas, os alunos ampliaram os seus conhecimentos relativamente aos sólidos geométricos, triângulos, quadriláteros e relações geométricas. Os conhecimentos geométricos surgiram de uma forma natural como resultado do trabalho de exploração/investigação por parte dos alunos. Os materiais manipuláveis proporcionaram aos alunos uma aprendizagem, por descoberta, baseada na experiência (Reys, 1982). A utilização destes materiais parece ter contribuído para que os alunos compreendessem que aquilo que torna certa uma afirmação em Matemática não é o facto de coincidir com a resposta do manual ou com a aprovação da professora, mas a consistência do raciocínio apresentado (Ministério da Educação, 2001).

A manipulação dos materiais e a sua visualização permitiram identificar e descrever propriedades em triângulos, quadriláteros e relações geométricas. Permitiram também aos alunos formularem conjecturas, validá-las, justificá-las e argumentarem em sua defesa, o que vai ao encontro das actuais orientações curriculares (Ministério da Educação, 2001).

Algumas das tarefas propostas permitiram aos alunos mobilizar conhecimentos adquiridos anteriormente. Por exemplo, na tarefa 10, os alunos apropriaram-se do conceito de planificação, usado na tarefa 3, e utilizaram-no na resolução do problema proposto, sendo ele uma estratégia utilizada pelos alunos para o cálculo da área total de cada um dos sólidos.

O uso de materiais manipuláveis revelou-se útil para o entendimento dos conceitos básicos de Geometria por parte dos alunos. Na tarefa 3, os alunos utilizaram as peças de Polidron para explorar e descobrir as diferentes planificações para o cubo e para o tetraedro. O material manipulável permitiu a construção de diferentes sólidos, passando do plano ao espaço, e facilitou a descoberta das suas planificações, passando do espaço ao plano. Desta forma, contribuiu para a compreensão do significado de planificar. Nesta medida, também contribuiu para minorar as dificuldades relacionadas com a visualização das características dos sólidos, como vértices, faces e arestas; aspecto que seria mais difícil de observar em representações bidimensionais, uma vez que os alunos não poderiam mover, tocar e manipular o sólido.

A abordagem da Geometria com a utilização de materiais manipuláveis permitiu o envolvimento físico e activo dos alunos, visto que tiveram oportunidade de tocar, mover e manipular, tendo constituído um factor essencial para a formação dos vários conceitos (Reys, 1982). Tal facto, contribuiu para motivá-los e empenhá-los na realização das tarefas propostas.

A visualização do material didáctico manipulável proporcionado aos alunos facilita a assimilação dos conteúdos de Geometria. Na tarefa 1, por exemplo, a visualização permitiu aos alunos agruparem os sólidos pelas suas características comuns.

Nas tarefas propostas alguns materiais manipuláveis foram utilizados para desenvolver mais do que um conceito matemático (Reys, 1982; Serrazina, 1991). Por exemplo, na tarefa 8, os alunos ao manipularem os elásticos de diversas cores no geoplano não circular construíram nele, os vários quadriláteros pedidos, que conduziu à definição de diferentes conceitos matemáticos: trapézio, não trapézio, paralelogramo, rectângulo, quadrado e losango; e permitiu aos alunos estudarem algumas características das suas diagonais. Na construção dos quadriláteros no geoplano, os alunos efectuaram dois tipos de correcções: desfaziam totalmente e voltavam a desenhar a figura inicial partindo daí para chegar às figuras pretendidas ou corrigiam, aproveitando algo do que está feito (Araújo, 1998). Os alunos apresentaram maiores dificuldades nesta última, uma vez que não conseguiam alterar, mantendo algumas das características desse quadrilátero. A sua utilização na tarefa 9 parece evidenciar que os alunos mostraram-se mais familiarizados com certas figuras geométricas, os paralelogramos, pois não manifestaram dificuldades em investigar algumas das suas propriedades. A sua utilização promoveu a interacção entre os alunos durante as actividades de grupo, facilitando a aprendizagem de determinados conceitos (Serrazina, 1988).

Na tarefa 6, os alunos fizeram as suas próprias investigações com recurso aos materiais de desenho (régua, compasso e transferidor) em relação ao número mínimo e aos elementos necessários para construir um triângulo geometricamente igual ao dado. As várias construções realizadas com esse material permitiram-lhes visualizar as várias hipóteses e ajudaram-nos a construir raciocínios válidos para o facto da combinação de certos elementos não obterem um triângulo geometricamente igual ao dado. Deste modo, os alunos pensaram e reflectiram sobre o trabalho realizado. A acção desenvolvida pelos alunos permitiu que descobrissem os critérios de igualdade de triângulos. O facto de utilizarem materiais de desenhos nas tarefas 5, 6 e 9 parece ter contribuído para um maior à vontade no seu manuseamento.

As palhinhas de refresco e os espelhos são objectos do quotidiano dos alunos que facilitaram a aprendizagem de determinados conceitos matemáticos (Ribeiro 1995; Vale, 1999). Os alunos recorreram às palhinhas de refresco para realizar as suas experiências. A mobilidade do material permitiu aos alunos verificar a possibilidade ou não da construção de um triângulo, sem os gastos de tempo que a elaboração de desenhos exigiria. O facto dos alunos poderem mover, tocar e manipular permitiu que explorassem muitos casos. Verificou-se o seguinte aspecto: os alunos seleccionaram e organizaram a informação obtida que os levou à formulação e à verificação de uma conjectura. O conceito de desigualdade triangular foi assim fruto do trabalho dos alunos, na procura de uma relação entre os três lados de um triângulo. Também os espelhos ajudaram os alunos na determinação e identificação dos eixos de simetria de triângulos, quadriláteros e polígonos regulares, através da sua manipulação.

O carácter lúdico de que se revestiram os materiais manipuláveis foi essencial para a forte adesão às tarefas propostas, acabando por se tornarem num auxiliar e facilitador da aprendizagem.

Em suma, podemos dizer que o trabalho realizado com os materiais manipuláveis facilitou a construção do conhecimento geométrico pelos próprios alunos e permitiu-lhes, também, reflectir sobre as suas acções ao comunicarem uns com os outros, originando uma aprendizagem mais significativa (Vale, 2000). Os materiais manipuláveis apelaram a diferentes sentidos dos alunos: o visual, o táctico e o oral (Reys, 1982).

5.3. O desenvolvimento de competências matemáticas com os materiais manipuláveis.

Segundo o *Currículo Nacional do Ensino Básico - Competências Essenciais* (2001) “ser matematicamente competente envolve hoje, de forma integrada, um conjunto de atitudes, de capacidades e de conhecimentos relativos à Matemática” (p. 7). Com o recurso aos materiais manipuláveis, os alunos da turma em estudo desenvolveram algumas das competências expressas neste documento.

Os alunos estiveram a trabalhar ao nível do desenvolvimento da competência de raciocínio dado que foi possível observar alunos a acompanharem e a avaliarem o raciocínio matemático dos seus elementos de grupo, a recorrer aos materiais manipuláveis para confirmar ou rebater as suas afirmações e conjecturas e a formular argumentos matemáticos convincentes, baseados na observação e na visualização das experiências realizadas (Niss, 2006). As várias tarefas propostas contribuíram, desta forma, para o desenvolvimento desta competência.

A motivação, o interesse, a cooperação em grupo e o envolvimento dos alunos nas tarefas propostas parecem ter contribuído para aumentar a sua predisposição para raciocinar matematicamente, isto é, para “procurar regularidades, fazer e testar conjecturas, formular generalizações e pensar de maneira lógica” (Ministério da Educação, 2001). Por exemplo, nas tarefas 2, 4, 5, 7, 9 e 10, os alunos procuraram e identificaram regularidades, formularam conjecturas acerca dessas regularidades, explicando em que se basearam para as formular, e discutiram no seio do grupo argumentos convincentes acerca da validade da conjectura. Deste modo, os alunos utilizaram o raciocínio indutivo para chegarem a uma generalização dessas conjecturas, sendo estas elaboradas a partir da observação de um pequeno número de casos. Esta prática permitiu-lhes tornarem-se mais competentes na sua utilização e a usarem-no de forma adequada.

A utilização de materiais manipuláveis na aula de Matemática facilitou as interacções com os outros, originando mais momentos de partilha e discussão de pontos de vista e proporcionando-lhes o desenvolvimento de competências ao nível da comunicação. Os alunos revelaram também uma maior segurança na comunicação das suas descobertas e das ideias matemáticas (quer ao nível oral e a nível escrito) e partilha dos seus raciocínios, estimulando desta forma uma compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos.

Durante a realização das tarefas com recurso aos materiais manipuláveis, foi notória por parte dos alunos o crescente gosto e a confiança pessoal desenvolvida, até mesmo pelos alunos com fraco aproveitamento em Matemática. Este aspecto contribuiu para que os alunos não recorressem frequentemente à professora para validar as suas respostas, denotando que começaram a reconhecer que a validade de um raciocínio ou de uma afirmação está relacionada com a consistência da argumentação lógica e não com alguma autoridade exterior (Ministério da Educação, 2001).

Os alunos desenvolveram a aptidão para visualizar e para reconhecer e analisar propriedades e relações geométricas (por exemplo, nas tarefas 7, 8 e 9), através da análise e comparação de figuras, que permitiram aos alunos formular conjecturas e justificar os seus raciocínios. Assim como, a aptidão para realizar construções geométricas (tarefas 6 e 9), nomeadamente triângulos e quadriláteros e para efectuar medições (tarefa 6 e 7, por exemplo), utilizando instrumentos apropriados. Averiguámos que como a aprendizagem é feita a partir da sua própria experiência, recorrendo a diversos materiais manipuláveis, os alunos assimilaram e compreenderam os vários conceitos matemáticos abordados (Reys, 1982; Vale, 2000; Szendrei, 1996).

Os alunos estiveram a trabalhar ao nível do desenvolvimento de competência e habilidades necessárias para construir sólidos geométricos, a partir de suas planificações (tarefa 3). O desenvolvimento destas competências é importante na compreensão e ampliação da percepção de espaço e construção de modelos para interpretar questões da Matemática e de outras áreas do conhecimento.

Há a evidência de que os alunos estiveram a trabalhar ao nível do desenvolvimento da competência de cooperação. Se inicialmente o trabalho dos alunos era maioritariamente de cariz individual, com o decorrer das tarefas o trabalho de grupo pautou-se pela partilha, discussão, reflexão e validação de respostas.

Durante a resolução das tarefas propostas, os alunos usaram diversos materiais manipuláveis que foram indispensáveis na sua actividade matemática, facilitando a relação professor/aluno/conhecimento no momento em que um saber matemático estava a ser construído. A sua manipulação contribuiu para que os alunos fossem ganhando grande aptidão e propensão para a sua utilização. Os materiais proporcionaram aos alunos o conhecimento das suas propriedades, assim como, das suas capacidades e limitações (Niss, 2006). Por exemplo, o Geoplano ajudou a desenvolver nos alunos a destreza manual e a percepção visual e promoveu a interacção entre os alunos durante as actividades de grupo. A utilização dos materiais manipuláveis não é um fim em si mesmo, mas um meio para a introdução de conhecimento matemáticos, desde que sejam utilizados de maneira reflectida (Niss, 2006), ou seja, na actividade dos alunos é importante o significado que dão às suas acções, às questões que formulam e às verificações que realizam com recurso aos materiais.

Por outro lado, os alunos trabalharam a sua competência ao nível da simbologia e do formalismo que se traduz na aptidão para manejar a linguagem e os sistemas formais da Matemática (Niss, 2006). Os alunos revelaram-se capazes de aplicar fórmulas no cálculo de áreas de rectângulos, quadrados e triângulos, por exemplo, tarefa 10, na resolução do problema proposto.

Os alunos desenvolveram competência ao nível do pensamento matemático dado que constataram e provaram "dominar" modos matemáticos de pensamento. O trabalho desenvolvido em grupo permitiu-lhes ainda, de uma forma simples e intuitiva, abstrair conceitos (planificar, tarefa 3 por exemplo) e generalizar resultados (por exemplo: tarefa 2, Igualdade de Euler; tarefa 4, Desigualdade Triangular).

Os alunos desenvolveram a visualização espacial aquando da resolução das tarefas propostas: os alunos revelaram-se capazes de recordar figuras geométricas (memória visual) e desenhá-las no geoplano (tarefa 8); de identificar figuras geométricas em diversas posições e tamanhos (constância perceptual), pois construíram-nas, utilizando elásticos no geoplano ou material de desenho, compasso, transferidor e régua (tarefas 5, 8 e 9); de relacionar sólidos geométricos e suas planificações (percepção de relações espaciais), pois os alunos observaram e descobriram de entre várias figuras quais as que correspondiam a uma planificação do cubo (tarefa 3); de identificar semelhanças e diferenças (discriminação visual) entre figuras e sólidos geométricos (tarefa 1, 2, 8 e 9).

Nos dias de hoje, face a uma sociedade cada vez mais complexa e exigente, torna-se necessário desenvolver nos alunos a sua autonomia (Ministério da Educação, 2001). Assim sendo, temos de prepará-los para as novas exigências da sociedade

(Abrantes *et al.*, 1999, NCTM, 2000). Neste sentido, os materiais manipuláveis, o trabalho cooperativo, as tarefas de investigação/exploração, a orientação da professora contribuíram para que os alunos participassem activamente no seu processo de aprendizagem, construindo o seu próprio conhecimento. Verificou-se ao longo da realização das tarefas que os alunos participaram na tomada de decisões, discutiram ideias, fizeram descobertas, reflectiram o trabalho desenvolvido e trabalharam cooperativamente ao interagir uns com os outros, fazendo com que se tornassem mais activos e enriquecessem a sua aprendizagem.

De acordo com Niss (2006), os alunos da turma em estudo estiveram a trabalhar ao nível do desenvolvimento de competências matemáticas, principalmente no seguinte: competência de pensamento matemático, pois constataram e dominaram modos matemáticos de pensamento; competência de raciocínio matemático que implica estar apto a raciocinar matematicamente; competência em instrumentos e acessórios que implica estar apto a fazer uso e estabelecer relações com instrumentos e acessórios em Matemática (neste caso concreto os vários materiais manipuláveis usados nas tarefas propostas); competência de comunicação que envolve estar apto a se comunicar em, com e sobre a Matemática; e competência de cooperação.

Em suma, podemos dizer que os materiais manipuláveis constituíram um forte recurso para o desenvolvimento de competências matemáticas nos alunos, o que é corroborado pelo NCTM (2000). Convém salientar que o seu desenvolvimento exige tempo, continuidade do trabalho e envolvimento dos alunos em situações apropriadas (Fernandes, Fermé, Oliveira, 2007).

5.4. O desempenho dos alunos com materiais manipuláveis

A experiência com materiais manipuláveis proporcionou a utilização de vários processos matemáticos e o desenvolvimento de determinadas competências. Neste sentido, fomos ao encontro das finalidades propostas para o ensino da Matemática (Ministério da Educação, 2001).

Ao longo das várias tarefas parece haver evidência que os alunos melhoraram o seu desempenho nas diversas vertentes da competência geométrica, embora o nível de desenvolvimento não fosse igual em todos os alunos, apesar das experiências serem as mesmas. Esse desenvolvimento foi mais notório nos alunos com mais dificuldades na disciplina de Matemática, de acordo com a avaliação da professora da turma em estudo.

Verificou-se que os alunos dessa turma desenvolveram mais a vertente relacionada com a construção de figuras geométricas e análise das suas propriedades, pois tiveram oportunidade de construir triângulos (tarefa 5) e quadriláteros (tarefa 9), e de analisar algumas das suas propriedades, como desigualdade triangular (tarefa 4), critérios de igualdade de triângulos (tarefa 6), diagonais dos quadriláteros (tarefa 8) e propriedades dos paralelogramos (tarefa 9). Neste sentido, os alunos melhoraram os seus desempenhos pois desenvolveram a aptidão para realizar construções geométricas, nomeadamente quadriláteros e triângulos, e para reconhecer e analisar propriedades de figuras geométricas.

Todos os alunos que participaram neste estudo tiveram um desempenho notável nas tarefas de exploração e de investigação. A utilização dos materiais manipuláveis parece ter ajudado os alunos a concretizarem e a visualizarem os conteúdos geométricos, tais como: sólidos com faces triangulares e quadrangulares (Igualdade de Euler, Planificação de Sólidos), triângulos (Construção de Triângulos, Desigualdade Triangular e Critérios de Igualdade de Triângulos), ângulos verticalmente opostos, ângulos de lados paralelos, quadriláteros (Classificação de Quadriláteros, Propriedades dos Paralelogramos, Construção de Paralelogramos, Eixos de Simetria em Triângulos e Quadriláteros, Áreas e Volumes de Sólidos. Os dados sugerem que o trabalho desenvolvido permitiu-lhes também concretizar e atribuir um significado aos vários conceitos abordados (por exemplo, o significado de planificar, tarefa 3).

Os dados parecem sugerir que os alunos tiveram uma evolução na adopção de estratégias adequadas às situações (tarefa 3 por exemplo) na utilização de processos matemáticos e no registo dos resultados a apresentar em grande grupo. Também sugerem que os alunos desenvolveram a aptidão para formular argumentos válidos recorrendo à visualização e a predisposição para investigar propriedades e relações geométricas (Ministério da Educação, 2001).

As respostas registadas no questionário avaliativo da experiência, realizado no final das tarefas, denotam que os próprios alunos notaram e sentiram o seu desenvolvimento e reconhecem ter gostado de trabalhar com materiais manipuláveis. Observaram-se respostas como as seguintes: “Com os materiais chegamos a mais conclusões.”, “Foi diferente.”, “Ficamos mais atentos e incentivados.”, “Porque aprendíamos por nós próprios e chegávamos a descobrir coisas, e isso tornava a matemática um desafio e ao mesmo tempo interessante.”, “Eles ajudaram-me a compreender a matéria.”.

5.4.1. Os materiais manipuláveis num contexto de trabalho cooperativo.

Ao longo do trabalho dos alunos na resolução das várias tarefas propostas com materiais manipuláveis evidenciou-se um dos objectivos matemáticos, que é aprender cooperando e cooperando aprendendo, ou seja, "quando se coopera com os outros, aprende-se ajudando os outros a aprender" (Fernandes, 1998, p. 218).

O trabalho cooperativo durante a realização das dez tarefas propostas teve uma evolução bastante favorável. Na primeira tarefa, os alunos revelaram alguma dificuldade em interagir com os colegas de grupo (Abrantes, 1994). Durante a actividade verificou-se que os alunos tinham bastantes dificuldades em trabalhar em conjunto, mostrando-se inseguros e relutantes em participar, isolando-se dos restantes colegas de grupo, não discutindo as questões da tarefa entre si. Esse comportamento alterou-se ao longo das várias tarefas propostas. No final da investigação foi possível observar algumas mudanças relativamente ao trabalho cooperativo (Fernandes, 1998; Abrantes, 1994): os alunos solicitavam com menor frequência a professora e só a solicitavam em caso de dúvidas ou para confirmar os resultados obtidos. O facto da professora remeter as dúvidas dos alunos para a discussão com os colegas parece ter contribuído para uma autonomização destes (Abrantes, 1994). Os alunos revelaram uma maior autonomia no modo como se envolviam nas tarefas propostas e na iniciativa que revelaram na sua exploração, para tal parece ter contribuído a utilização de materiais manipuláveis.

De acordo com NCTM (1991), a aprendizagem em grupo como estrutura organizacional de aula, desenvolve a capacidade de raciocínio e de comunicação dos alunos. As observações realizadas neste estudo forneceram dados que permitem corroborar esse ponto de vista. Com efeito, as tarefas propostas permitiram que os alunos desenvolvessem processos de raciocínio e de comunicação necessários à compreensão matemática. Ocorreram episódios em que alunos observaram, procuraram regularidades, conjecturaram, validaram, justificaram e argumentaram, parecendo evidenciar que eles valorizaram os processos em detrimento de uma simples resposta (como por exemplo na tarefa 4). Na verificação e validação das conjecturas, os alunos utilizaram os materiais manipuláveis colocados à sua disposição e utilizaram alguns casos particulares para a testagem das mesmas e sua generalização. Por exemplo, na tarefa 4, o grupo G1, com as palhinhas de refresco de vários tamanhos, verificou que com três segmentos de recta quaisquer nem sempre é possível construir um triângulo. A sua constatação tornou-se objecto de reflexão, aperfeiçoamento (experiências realizadas) e discussão, como comprovam os diálogos estabelecidos entre os elementos do grupo. O facto dos alunos terem de investigar em que situações era possível ou não construir um triângulo, com base na visualização e manipulação das palhinhas, foi determinante para a formulação de uma conjectura, dado que se mostraram dispostos a procurar e a analisar os vários esboços desenhados na tarefa. Nesta perspectiva, podemos dizer que os alunos estiveram a desenvolver o seu poder matemático (NCTM, 1991).

Da análise dos dados do estudo, verificou-se que a capacidade de comunicação foi desenvolvida pelos alunos aquando do trabalho com os materiais manipuláveis, servindo de catalisador para conversas produtivas entre os alunos de cada grupo. Os alunos ao exporem as suas ideias, ao ouvirem as explicações dos seus pares, ao colocarem questões, ao discutirem estratégias, ao argumentarem em defesa das suas opiniões e ao refutarem ideias dos outros colegas, estavam a desenvolver a sua compreensão matemática. Na tarefa 3, por exemplo, os alunos ao dialogarem entre si, descreveram as estratégias necessárias com a finalidade de encontrar as possíveis planificações para o cubo. Esta experiência contribuiu para que os alunos desenvolvessem a sua competência na comunicação, na organização e na consolidação do seu pensamento matemático, uma vez que reflectiram sobre o seu trabalho.

Segundo Fernandes (1998), o trabalho cooperativo promove um ambiente que desencoraja a competição e estimula as interacções entre os alunos no seio do grupo. De facto, verificou-se que entre os elementos do grupo não havia espaço para a competição, pois a dinâmica que se gerava era a de interajuda entre eles. Na turma observada verificou-se dois tipos de interajuda: um quando a mesma era solicitada por algum membro do grupo, outra quando era alguém do grupo a cometer um erro e este era detectado por um colega. Por exemplo, nos dados recolhidos da tarefa 3, podemos observar esses dois tipos de interajuda: o **B.** explicou a questão 5 aos restantes elementos do grupo quando o solicitaram; na questão 2, houve um erro na contagem do número de arestas e o mesmo foi detectado por um dos elementos do grupo.

O trabalho cooperativo favoreceu a participação e o envolvimento dos alunos de aproveitamento mais fraco, evidenciando uma mudança de atitude em relação à aprendizagem. De facto, a passividade destes alunos alterou-se devido às tarefas propostas, aos materiais manipuláveis usados e à atitude da professora durante as aulas, evidenciando uma preferência por tarefas que os levavam a descobrir coisas e a mexer em materiais. Deste modo, os alunos mais fracos envolveram-se activamente no trabalho proposto.

Ao longo das várias tarefas os alunos foram percebendo que o trabalho se tornava mais produtivo se interagissem uns com os outros, por isso desenvolveram grande parte do trabalho em colaboração, partilhando descobertas e ideias matemáticas, e para dar continuidade ao trabalho desenvolvido, iam discutindo entre si. No fim do estudo, observou-se em todos os alunos um maior grau de responsabilidade e autonomia nas suas aprendizagens, devido sobretudo ao tipo de tarefas que foram propostas e aos materiais manipuláveis utilizados.

O trabalho cooperativo permitiu que os alunos adquirissem determinados valores e exercitassem atitudes ligadas à cooperação (Abrantes 1994; Fernandes 1998). O facto de trabalharem em grupo fomentou a interajuda, a partilha da ideia e o espírito de colaboração entre os elementos do grupo, tendo os alunos revelado em maior ou menor grau esses valores conforme os momentos da aula ou os objectivos de cada um.

A análise dos dados evidenciou que os alunos se tornaram mais activos e independentes no processo de aprendizagem. As experiências com materiais manipuláveis dão significado às ideias matemáticas e o facto de apelarem, através do contacto e da movimentação, aos vários sentidos envolve-os fisicamente. É através desta interacção alunos/material e alunos/alunos, da partilha de saberes e de discussões que daí advêm, que se constrói o conhecimento matemático (Vale, 1999). Contudo, a construção do conhecimento exige tempo e requer o envolvimento activo dos alunos (Reys, 1982; Vale, 1999). A turma, a qual pertence a este estudo, trabalhou cooperativamente sendo de realçar que a orientação ou intervenção da professora nas tarefas limitou-se ao fornecimento de determinadas indicações ou sugestões e à colocação de questões. A sua principal influência foi aquando da utilização do processo de justificação por parte dos alunos, nalgumas tarefas. Por exemplo, na tarefa 9, os alunos justificaram as propriedades dos paralelogramos quando foram solicitados pela professora, uma vez que os mesmos não sentiram necessidade em fazê-lo. De facto, a atitude da professora levou a que os alunos construíssem o seu conhecimento, contudo cada grupo foi responsável pela forma como conduziu o seu trabalho.

Nas respostas dos alunos ao questionário (anexo 13) aplicado no final da investigação, os alunos indicaram que gostavam de trabalhar em grupo com materiais manipuláveis. Por exemplo, à questão ”Porque gostavas de trabalhar em grupo?” um dos alunos questionado respondeu “ porque pude trocar ideias, teorias, conhecimentos com os companheiros de grupo e trabalhar melhor.", à mesma questão, um outro aluno respondeu " porque é mais fácil de resolver as questões, pois todos ajudam.". Isto só vem demonstrar que estas aulas tornam-se menos monótonas e mais atraentes aos olhos dos alunos, visto contribuírem para uma melhor compreensão da Matemática, segundo a perspectiva dos alunos desta turma. Em relação ao trabalho com materiais manipuláveis, os alunos disseram que tinham ficado "mais atentos e incentivados.", que tinham aprendido por eles próprios e que tinham chegado a descobrir coisas e que "isso tornava a Matemática um desafio e ao mesmo tempo interessante.". As várias respostas obtidas pelo questionário avaliativo da experiência pareceram evidenciar que os alunos desenvolveram uma atitude positiva face à Matemática e que aprenderam Matemática de uma forma mais descontraída e de um modo menos árido. Por isso, quando questionados se gostariam de voltar a trabalhar com materiais manipuláveis, um dos alunos respondeu "Gostava que as aulas de Matemática fossem sempre assim, pois aprende-se com mais facilidade.". Este aspecto evidencia que o trabalho em grupo com materiais manipuláveis contribui para envolver os alunos em actividade, gerando um ambiente amigável entre os elementos de cada grupo que facilitando a construção do saber matemático. Por outro lado, constitui uma indicação de que os alunos aprendem a valorizar mais os processos experimentados que o resultado final de cada tarefa (Ministério da Educação, 2001).

Em relação ao funcionamento dos grupos, verificamos que numa fase inicial a professora tenta conduzir os alunos à construção de normas (Abrantes, 1994; Fonte e Freixo, 2004; Freitas e Freitas, 2003). Contudo, no decurso das interacções estabelecidas na aula, os alunos aos poucos vão construindo normas de funcionamento em grupo, tais como: debater primeiro as dúvidas no grupo e só quando as mesmas persistem perguntar à professora, ouvir as ideias dos vários elementos e partilhar o material distribuído. Estas normas surgiram de forma natural no decorrer das tarefas propostas.

5.4.2. Envolvimento na tarefa e interacções estabelecidas

A interacção entre grupos tanto pode assumir a forma de colaboração como de competição (Santos, 1996). O facto de, em todas as aulas, os alunos trabalharem em grupo com materiais manipuláveis em tarefas de exploração/investigação proporcionou aos mesmos condições para uma maior colaboração entre os elementos de cada grupo, sendo este o tipo de interacção observado com maior frequência. Apenas na tarefa 3, os vários grupos revelaram espírito de competição pois, em vários momentos da aula, foi possível verificar alguns alunos a perguntarem aos grupos vizinhos o número de planificações descobertas.

Os objectivos das interacções existentes nestas aulas consistiram essencialmente em pedir ou oferecer ajuda, explicar ou partilhar com os outros o que estavam a pensar, ouvir o outro e para legitimar resultados.

De acordo com o NCTM (2000), aprendendo compreendendo pode ser fomentado através das interacções na sala de aula pelo envolvimento activo dos alunos na sua aprendizagem e pela apresentação e discussão de ideias matemáticas. Por exemplo, na tarefa 6, os alunos construíram o seu conhecimento matemático relativamente aos critérios de igualdade de triângulos através das interacções estabelecidas entre os alunos de cada grupo. Parece estar em evidência que os alunos compreenderam aquilo que lhes era pedido para aprender, pois a tarefa exigiu, da parte dos alunos, análise e compreensão da situação proposta, discussão durante a sua realização, experimentação, verificação recorrendo aos instrumentos de desenho e justificação do resultado obtido.

As interacções entre os alunos desenvolveram-se em torno de tarefas com materiais manipuláveis. A sua utilização parece ter aumentado o interesse, a motivação e o envolvimento deles para o trabalho que realizaram. Estas aulas contribuíram para aumentar a confiança dos alunos nas suas capacidades e desenvolveram a sua autonomia. Os resultados anteriores vêm confirmar as conclusões de Reys (1982) relativamente ao uso de materiais no processo de ensino/aprendizagem da Matemática.

Na análise dos dados da investigação, verificou-se vários tipos de interacções verbais que ocorreram entre os elementos dos grupos. Um dos tipos de interacções verbais é o das ajudas que os alunos podem prestar uns aos outros nos grupos. Na tarefa 8, eles manifestaram algumas dificuldades em desenhar no geoplano os vários quadriláteros. No entanto, as explicações que foram dadas por alguns elementos do grupo, relativamente às características de alguns quadriláteros, ajudaram na assimilação dos conhecimentos aprendidos em anos anteriores. A necessidade de ajuda manifestou-se de várias formas através de perguntas colocadas ao grupo ou de erros cometidos. Por exemplo, na tarefa 2, um dos alunos do grupo G1 afirma erradamente que o cubo aumenta o número de elementos, no caso de aumentarmos os comprimentos dos lados. Perante o erro cometido, os colegas de grupo tentam explicar-lhe que a sua afirmação não está correcta. Mas nem sempre as ajudas se manifestam numa explicação detalhada por parte de um elemento do grupo, já que essa ajuda pode ser manifestada através de uma simples resposta. Na tarefa 1, é visível este tipo de interacção entre os alunos na confirmação dos nomes dos sólidos presentes na caixa.

Durante as aulas, também existiram entre a professora e os vários grupos diversos tipos de interacções consoante a fase do trabalho e o tipo de grupo. Essa interacção tem características diferentes consoante ela decorre da iniciativa dos alunos ou do professor. As interacções que surgem por iniciativa dos alunos têm características diferentes conforme os seus objectivos (Fernandes, 1998). Por vezes, eles recorrerem à professora para esclarecer dúvidas, validar o trabalho realizado, apoiar ideia. Por exemplo, na tarefa 6, um dos grupos teve dificuldade em avançar na tarefa porque não estava a compreender o tipo de trabalho que teriam de realizar com os instrumentos de desenho. O papel da professora foi o de orientá-los de forma a prosseguirem na tarefa. Outro aspecto, visível na interacção que os alunos mantinham com a professora, era o facto dos alunos serem confrontados com a necessidade de explicarem as suas dúvidas e os seus raciocínios, em momentos que exigiam mais clareza e precisão e de justificarem os processos matemáticos utilizados.

As interacções que surgem por iniciativa da professora têm características diferentes conforme os seus objectivos (Fernandes, 1998). Estes são: a clarificação ou explicação de uma ideia por parte dos alunos, a sugestão, o controlo do ritmo de trabalho ou da compreensão da tarefa e a avaliação das dificuldades na tarefa ou na manipulação do material. Na análise das aulas, é possível identificar em vários episódios estes tipos de objectivos. Também verificou-se que nos diálogos entre os alunos e a professora, esta respondia às questões dos alunos com outras perguntas procurando conduzi-los à resposta em vez de lhas fornecer imediatamente. Os diálogos entre os alunos, durante a resolução das tarefas propostas em grupo, dizem respeito ao tipo de estratégias, à manipulação dos materiais, aos processos matemáticos utilizados e à necessidade de confronto de opiniões. O facto de serem fomentados a exploração, a experiência, a investigação e a descoberta com recurso aos materiais manipuláveis proporcionou aos alunos mais oportunidades de discussão entre eles, mostrando que aprender Matemática não se reduz à aquisição de algoritmos, à realização de procedimentos rotineiros, à memorização de regras ou ao desenvolvimento de capacidades sem as respectivas aplicações (NCSM, 1990).

Em suma, podemos dizer que é interagindo uns com os outros que os alunos desenvolvem competências como a resolução de problemas, o raciocínio, a comunicação e o pensamento crítico, e promovem atitudes e valores como o gosto pela Matemática, a autonomia e a cooperação (Ponte *et al.*, 1997).

5.5. Recomendações

Os resultados deste estudo sugerem algumas recomendações para o trabalho do professor na sala de aula e para a investigação neste domínio.

A investigação realizada mostra a importância de uma cuidadosa preparação das tarefas e dos materiais manipuláveis. Sendo os professores responsáveis pela qualidade das tarefas que propõem aos alunos para nelas estes se envolverem (NCTM, 1994), é de salientar que eles devem ter cuidado na escolha ou elaboração das tarefas com recurso aos materiais manipuláveis: o tipo de tarefa, o grau de estruturação da mesma e os termos utilizados na sua construção poderão influenciar a atitude dos alunos aquando da sua realização. Também a escolha do material manipulável é importante, pois estes devem proporcionar uma verdadeira personificação do conceito matemático ou das ideias a serem exploradas e deve apresentar aplicabilidade num grande número de ideias matemáticas (Reys, 1982). É importante que os alunos se apercebam da variedade de aplicações, uma vez que permite estabelecer conexões entre os diferentes conceitos intrínsecos à manipulação do material.

Durante o desenvolvimento das tarefas com materiais manipuláveis em trabalho cooperativo a presença do professor deverá ser discreta, questionadora e, se necessário, voltada para o incentivo ao desenvolvimento de determinadas competências, atitudes, valores e conhecimentos matemáticos por parte dos alunos.

A investigação realizada aponta resultados claramente favoráveis à inclusão dos materiais manipuláveis no ensino/aprendizagem da Matemática. O seu uso possibilitou que estes alunos trabalhassem ao nível do desenvolvimento de um número considerável de competências matemáticas, assim como apreendessem de forma significativa alguns conceitos matemáticos de Geometria. Também lhes possibilitou trabalharem ao nível do desenvolvimento de alguns processos matemáticos.

A motivação, o interesse e o entusiasmo dos alunos durante as tarefas foram uma constante. Os resultados do questionário avaliativo aplicado no final da experiência foram muito favoráveis e todos os alunos referiram que gostariam de voltar a trabalhar com materiais manipuláveis, até mesmo aqueles que responderam que não gostavam da disciplina de Matemática. Os alunos consideraram que os materiais manipuláveis deveriam ser utilizados também noutros capítulos, salientado que os “cativam mais.” e “é uma maneira mais fácil de aprender” pois “ajuda a compreender a matéria” aprendendo-a mais depressa.

O uso de materiais manipuláveis é recomendado nas orientações curriculares mais recentes, como O *Currículo Nacional do Ensino Básico* (2001), contudo são ainda poucos os professores que os introduziram nas suas aulas de Matemática, isto de acordo com o documento *Matemática 2001 - Diagnósticos e Recomendações para o Ensino e Aprendizagem da Matemática* (APM, 1998). Talvez a falta de formação dos professores nesta área seja uma das causas para a sua fraca utilização na sala de aula, ou por falta de confiança, ou porque a escola onde leccionam não dispõe desses materiais. Nesta perspectiva, torna-se importante “promover uma reflexão e discussão sobre as implicações pedagógicas decorrentes da sua utilização na sala de aula bem como das dinâmicas que em torno destes se podem desenvolver” (Ribeiro, 1995).

Os resultados deste trabalho sugerem algumas propostas relevantes para serem analisadas em futuras investigações. O presente estudo centrou-se em tarefas de natureza explorativa e investigativa com materiais manipuláveis na aprendizagem da Geometria, em pequenos grupos na aula de Matemática, em que foram analisados os processos matemáticos utilizados, as competências desenvolvidas, os conhecimentos construídos pelos alunos e as formas de interacção dos alunos do sétimo ano de escolaridade. Contudo, interessará investigar o contributo dos materiais manipuláveis em outro tipo de conteúdo e/ou em diferentes níveis de escolaridade.

Ainda no que concerne a futuras investigações parece relevante para ser analisado a avaliação do trabalho realizado pelos alunos quando utilizam materiais manipuláveis. Levantam-se questões que merecem investigação: “Que tipos de instrumentos se tornam mais adequados para a avaliação do trabalho usando materiais manipuláveis em pequenos grupos ou individualmente em actividades de investigação e de resolução de problemas.

5.6. Reflexão final

Para nós, foi muito gratificante esta experiência, pois contribuiu para um melhor conhecimento das potencialidades educativas de cada material manipulável. Esta investigação causou-nos um enorme crescimento e uma valorização do papel de educador e permitiu-nos observar muito do que nos escapa na sala de aula. Espero que a investigação realizada sirva de incentivo para muitos professores experimentarem e utilizarem os materiais manipuláveis nas suas aulas de Matemática.

A experiência realizada demonstrou a importância da diversificação dos métodos de ensino em contraposição ao ensino tradicional de aulas expositivas, pois os alunos tiveram oportunidade de trabalhar com vários materiais manipuláveis em tarefas de natureza explorativa e investigativa. O enfoque construtivo, no qual o aluno constrói o seu próprio conhecimento, através da sua participação activa na resolução das tarefas propostas usando materiais manipuláveis, interagindo com os colegas e com o material, tomando decisões, discutindo e partilhando pontos de vista e trabalhando cooperativamente, contrasta com o ensino tradicional. Outro aspecto que enfatizamos é o de que geralmente a Geometria ser abordada de maneira teórica, numa linguagem formal, exigindo abstracção e memorização de fórmulas. No nosso estudo, essa abordagem é feita com a utilização de materiais manipuláveis, proporcionando aos alunos explorações, investigações, experiências e descobertas que levam a um maior envolvimento e uma maior participação dos alunos, sendo estes factores essenciais para a construção dos conceitos geométricos realizados e adquiridos pelos alunos.

A constante evolução da sociedade exige que professores e alunos assumam papéis diferentes, isto se quisermos formar indivíduos autónomos, criativos, dinâmicos e capazes de se adaptarem e actuarem positivamente no seu meio (Abrantes *et al.*, 1999). Os materiais manipuláveis podem contribuir, se bem enquadrados, para dar respostas às novas exigências da sociedade. A investigação revelou que este tipo de metodologia dá aos alunos a oportunidade de expressar, explicar e organizar ideias matemáticas, que numa aula tradicional seriam transmitidas pelo professor, como se ele fosse o único e exclusivo detentor de verdades absolutas, cabendo ao aluno apenas memorizá-las e aplicá-las, mesmo que as não compreenda. Daí que consideremos importante mostrar aos alunos que o conhecimento matemático é um constructo que não está pronto e acabado, mas que está em contínua construção. Os materiais manipuláveis podem ser uma mais valia na sistematização e formalização de conhecimentos matemáticos. É importante dar aos alunos a oportunidade de experimentar e colher os resultados dos seus experimentos, de argumentar, refutar, descobrir e errar para poder alcançar o conhecimento. Cabe a nós, professores de Matemática, mudar as nossas práticas pedagógicas diversificando as experiências de aprendizagem, de modo que se crie na sala da aula situações em que o aluno precisa de experimentar, manipular e vivenciar para construir o seu conhecimento.

Do ponto de vista da investigadora, a investigação realizada realça alguns aspectos relativamente à prática do professor de Matemática. O professor é um aprendiz pois está em constante aprendizagem. Este tem que se adaptar às inovações e ao grupo de alunos com que trabalha. De acordo com as novas orientações curriculares, o professor deixa de ser a única fonte de saber e de transmissão exclusivo do conhecimento, passando a assumir o papel de mediador na relação aluno-saber, parceiro da negociação pedagógica (Abrantes *et al.*, 1999).

Outro aspecto realçado neste estudo é o facto de que no trabalho desenvolvido pelos alunos não é só a resposta correcta que é valorizada mas também os processos utilizados, a diversidade de estratégias e a comunicação destes aos colegas. A comunicação dos raciocínios por parte dos alunos revelou-se essencial pois facilitou o ultrapassar de certos obstáculos e bloqueios à aprendizagem de algum assunto.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abrantes, P., (1994). *O Trabalho de Projecto e a Relação dos Alunos com a Matemática: A experiência do Projecto MAT 789*. (Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Abrantes, P. (1998). *Matemática 2001: Natureza e importância de um Estudo sobre o Ensino da Matemática*. Educação e Matemática 46, 25-27.

Abrantes, P. (1999). *Investigações em Geometria na Sala de Aula.* Em Veloso, E., Fonseca, H., Ponte, J., Abrantes, P. (org). *Ensino da Geometria no virar do milénio.* Lisboa: Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Abrantes, P., Leal, L. C., Teixeira, P. e Veloso, E. (1997). *Mat_{789} - Inovação curricular em Matemática.* Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Abrantes, P., Serrazina, L., Oliveira, I. (1999). *A Matemática na Educação Básica*. Lisboa: Ministério da Educação - Departamento da Educação Básica.

Araújo, M. (1998). *Resolução de Problemas com o Geoplano*. APM, Educação e Matemática, nº 47, pp. 37-40.

APM (1988). *Renovação do Currículo de Matemática.* Lisboa: APM.

APM (1998). *Matemática 2001: Diagnósticos e Recomendações para o Ensino e Aprendizagem da Matemática*. Lisboa: APM e IIE.

Barbosa, P. M. (s.d). *O Estudo da Geometria*. Disponível em http://www.ibcnet.org.br/paginas/nossos_meios/RBC/PUBLIC/RevAgo2003/Artigo_3.rtf.

Bogdan, R. e Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em Educação: Uma Introdução à teoria e aos métodos.* Colecção Ciências da Educação. Porto: Porto Editora.

Boyer, Carl. B. (1996). *História da Matemática*. Tradução: Elza F. Gomide, 2.ª Edição. S. Paulo: Edgard Blücher. Tradução de: A History of Mathematics.

Castelnuovo, E. (1982). *Para um ensino da Matemática capaz de produzir cultura cientifica*. Actas do Colóquio realizado no âmbito do encontro internacional de homenagem a José Sebastião e Silva. Lisboa: SPM, (pp. 29-41).

Cockcroft, W. H. (1982). *Mathematics Counts* (report of the Committee of Inquiry into the Teaching of Mathematics in school). Londres: Her Majesty Stationery Office.

Conceição M., Almeida, M. (2006). *Matematicamente Falando 7º Ano* (Parte 2). 1ª Edição. Lisboa: Areal Editores.

Correia, Gisélia (1995). *O ensino da Geometria através da utilização de materiais manipuláveis.* In ProfMat 95: Actas, APM, pp. 149-154.

Costa, C. (1998). *Ensinar Geometria com (a) Arte.* Actas do Prof Mat 98 (pp. 185-190). Guimarães: APM.

Costa, L.B., (1998). *Manipulação de materiais no Ensino da Matemática. Uma varinha de condão?* In ProfMat 98: Actas, APM, pp. 149-155.

Costa, M.C. (1994). *Ensinar Geometria no 3º Ciclo do Ensino Básico*. Tese de Mestrado. Lisboa: APM.

Decreto-Lei Nº 6/2001 de 18 de Janeiro.

Disponível em http://www.fcsh.unl.pt/docentes/cceia/Decreto%206-2001.doc

Entrevista de José Sebastião e Silva publicada no Diário de Notícias (23/01/1968). Disponível em

http://phoenix.sce.fct.unl.pt/jmmatos/CLIVROS/CLPESS0/CLPES011/PES011A.JPG

Estrada, M., Sá, C., Queiró, J., Silva, M. e Costa, M., (2000). *História da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.

Faria, L., Guerreiro, L. (2006). *Matemática Dinâmica 7º Ano* (Parte 2). 1ª Edição. Porto: Porto Editora.

Fernandes, E. (1998). *A aprendizagem da Matemática escolar num contexto de trabalho cooperativo.* Tese de Mestrado. Lisboa: APM.

Fernandes, E., Fermé, E., e Oliveira, R. (2007). Viajando com Robots na Aula de Matemática. *V Conferência Internacional de Tecnologias de Informação e Comunicação na Educação – Challenges 2007: Ambientes Emergentes. O Digital e o Currículo e Avaliação Online.* Universidade do Minho. Braga.

Fonseca, G. (1999). Painel "Geometria no Currículo de Matemática". Em Veloso, E., Fonseca, H., Ponte, J., Abrantes, P. (org). *Ensino da Geometria no virar do milénio*. Lisboa: Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Fontes, A., Freixo, O. (2004). *Vygotsky e a Aprendizagem Cooperativa.* Livro Horizonte, Biblioteca do Educador.

Freitas, L. V. e Freitas C.V., (2003). *Teoria Guias Práticos. Aprendizagem Cooperativa.* Porto: Edições ASA.

Gordo, M. F. M. (1993). *A Visualização Espacial e a Aprendizagem da Matemática: Um Estudo no 1º ciclo do Ensino Básico*. Tese de Mestrado. Lisboa: APM.

Kilpatrick, J. e Moura, E.B. (1999) *Reflexão sobre os Standards.* Educação e Matemática, 55 (tradução de Maria de Lurdes Pinto Salústio, Escola Superior de Educação de Coimbra), 43-46.

Leal, L.C., Veloso, E., (1990). *Geometria do Espaço e Materiais no 7º ano.* APM, Educação e Matemática, 13, 13-15.

Lessard-Hébert, M., Goyette, G., Boutin, G. (1994). *Investigação Qualitativa: Fundamentos e Práticas.* Lisboa: Instituto Piaget.

Lintz, Rubens G. (1999). *História da Matemática*. Editora da Furb, Volume I.

Lobato, G.(1991). Novos programas de Matemática no Ensino Básico e Secundário – que mudanças? APM, Educação e Matemática, 19/20, 3-6.

Lopes, A.V., Antunes, A.B., Varandas, J. M. (1989). *Ideias para Construir Geometria: Alguns Materiais e Acividades*. ProfMat 89: Actas, APM, pp. 53-63.

Ludke, M., André, M.E.D.A. (1986). Pesquisa em Educação: Abordagens Qualitativa. São Paulo: Editora Pedagógica e Universitária, Lda.

Matos, J. M. (1988). *Um exemplo de Didáctica da Geometria.* Educação e Matemática, 6, p. 5-10.

Matos, J. M. (1989). *Cronologia Recente do Ensino da Matemática.* Lisboa: APM. Disponível em http://phoenix.sce.fct.unl.pt/jmmatos/clivros/CLVRSHTM/CRONOL/CRONPRF.HTM

Matos, J.M. (2004). *Reformas Curriculares no ensino liceal.* Disponível em http://phoenix.sce.fct.unl.pt/jmmatos/clivros/CLVRSHTM/CLINDCT2.HTM

Matos, J.M., Gordo, M.F., (1993). *Visualização espacial: algumas actividades.* APM, Educação e Matemática, 26, 13-17.

Matos, J. M. e Serrazina, M. L.(1996). *Didáctica da Matemática.* Lisboa: Universidade Aberta.

NCR. (1989). Everybody Couts: A Report to the Nation of the Future of Mathematics Education. Washington, DC: National Acadey Press.

NCSM. (1990). *A Matemática essencial para o século XXI*. Educação e Matemática, 14, 23 -25. Lisboa: APM.

NCTM (1980). *An agenda for action.* Reston, VA: NCTM.

NCTM. (1991). *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar*. Lisboa: APM e IIE. (Trabalho original em inglês, publicado em 1989).

NCTM. (1994). *Normas profissionais para o ensino da Matemática.* Lisboa: APM e IIE. (Trabalho original em inglês, publicado em 1991).

NCTM (2000). *Principles and Standards for School mathematics.* Reston: NCTM.

Menezes, L. (1999). *Matemática, linguagem e comunicação, Actas do ProfMat 99* (pp. 71-81). Lisboa: APM.

Merriam, S. B. (1988). *Case Study Research in Education. A Qualitative Approach.* San Francisco: Jossey- Bass Publishers.

Ministério da Educação (1991). *Organização curricular e programas: Ensino Básico 3º Ciclo* (vol. 1). Lisboa: Ministério da Educação.

Ministério da Educação – Departamento do Ensino Básico (2001). *Currículo Nacional do Ensino Básico. Competências Essenciais.* Lisboa: ME.

Neves, M., Leite, A., (2006). *Matemática 7º Ano* (Parte 2). 1ª Edição. Porto: Porto Editora.

Niss, M. (2006) O projecto dinamarquês KOM e as suas relações com a formação de professores. Em M. Borda (org) *Tendências Internacionais em Formação de Professores de Matemática*. Autêntica Editora. São Paulo. Brasil.

Oliveira, A.J. Franco (1995). *Geometria Euclidiana.* Lisboa: Universidade Aberta.

Oliveira, A.J. Franco (1997). *Descartes, geómetra acidental.* Educação e Matemática, 41, 3-7.

Passos, I., Correia, O., (2006). *Matemática em acção 7º Ano* (Parte2). 1ª Edição. Lisboa: Lisboa Editora.

Perrenoud, P. (2000), Construindo competências. Disponível em http://www.unige.ch/fapse/SSE/teachers/perrenoud/php_main/php_2000/2000_31.html

Pimentel, T., Palhares, P., Fonseca, L., (1990). *Construção de materiais manipulativos*. APM, Educação e Matemática, 13, 9-10.

Pinto, P.F., APPI, Félix, N., APM, Cunha, I. M., APEVT (2003). *Competências essenciais no Ensino Básico – Visões multidisciplinares.* Cadernos do Centro de Recursos de Informação e Apoio Pedagógico ASA. (p. 33 – 40).

Pires, M. (1999). *O Professor e o Currículo.* Educação e Matemática, 55, 3-6.

Ponte, C., (1990). *Um lugar para o geoplano no ensino da Geometria*. Educação e Matemática, 13, 16-18.

Ponte, J. P. (1988). *Matemática, Insucesso e Mudança: Problema Possível, Impossível ou Indeterminado?* Em Aprender, Novembro, pp. 10 -19.

Ponte, J. P. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics, um novo documento de orientação curricular do NCTM*. Educação e Matemática, nº 60. p- 64-66.

Ponte, J. P., (2002). O ensino da Matemática em Portugal: Uma prioridade educativa? Conferência realizada no Seminário "*O Ensino da Matemática: Situações e Perspectivas*". Conselho Nacional de Educação (Org). Lisboa: Ministério da Educação.

Disponível em www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/02-Ponte (CNE).pdf.

Ponte, J. P., Boavida, A., Graça, M., e Abrantes, P. (1997). *Didáctica da Matemática*. Lisboa: Departamento do Ensino Secundário, Ministério da Educação.

Ponte, J. P., Matos, J.M., Abrantes, P.(1998) *Investigação em Educação Matemática. Implicações curriculares*. Instituto de inovação Educacional.

Ponte, J. P., Serrazina, M. L. (2000). *Didáctica da Matemática do 1º ciclo.* Lisboa: Universidade Aberta.

Porfírio, J. (1998). *Os currículos de Matemática: como têm evoluído*. Educação e Matemática, 50, 32-38.

Reys, R.E., (1982). *Considerations for teachers using manipulative materials.* Em S. Smith e C. Backman (Eds.), Teacher made aids for elementary school mathematics. Reston: NCTM.

Ribeiro, A. (1995). *Concepções de Professores do 1º ciclo. A matemática, o seu Ensino e os Materiais Didácticos*. (Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Ribeiro, A. I., Braz, F., Corredoura, I., Mano, P., Andrade, S., (1996). *Os currículos de ontem, os de hoje e os de amanhã.* APM, Educação e Matemática, 37, 3-5.

Roldão, M.C. (2003). *Gestão do Currículo e Avaliação de Competências*. *As questões dos professores.* Lisboa: Editorial Presença.

Santos, M. P. (1996). *Na aula de Matemática fartamo-nos de trabalhar. Aprendizagem e contexto da matemática escolar.* (tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Serrazina, Maria de Lurdes (1990). *Os Materiais e o Ensino da Matemática*. Educação e Matemática. Lisboa: APM, nº 13, p. 1.

Serrazina, Maria de Lurdes (1991). *Aprendizagem de Matemática: a Importância da Utilização de Materiais.* In NOESIS, 21, 37-39.

Serrazina, Maria de Lurdes (1999). *Gestão flexível do currículo no 1º ciclo: Algumas reflexões*. Educação e Matemática, 55, 39-41.

Serrazina, L., Matos, J. M. (1988) *O Geoplano na sala de aula*. Lisboa: Associação de professores de matemática.

Silva, J.C. (1995). *O pensamento pedagógico de José Sebastião e Silva.* Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática, 32, p. 101-114.

Disponível em http://www.mat.uc.pt/%7Ejaimecs/pessoal/sebsilva.html

Silva, J. S. (1975). *Guia para a utilização do Compêndio de Matemática*. Curso Complementar do Ensino Secundário (1º Vol.), Gabinete de Estudos e Planeamento do Ministério da Educação e Investigação Científica, Lisboa.

Struik, Dirk J. (1997). *História Concisa das Matemáticas.* Gradiva, Lisboa. (3ª Edição).

Szendrei, J. (1996). *Concrete materials in the classroom.* Em A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick e C. Laborde, (Eds.), International Handbook of Mathematics Education, Part 1, Vol 4, (pp. 411-434). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Vale, I. (1999). *Materiais Manipuláveis na Sala de Aula: o que se diz, o que se faz.* In ProfMat 99: Actas, APM, pp. 111-120.

Vale, I. (2000). *Didáctica da Matemática e Formação Inicial de Professores num Contexto de Resolução de Problemas e de Materiais Manipuláveis* (Tese de Doutoramento, Universidade de Aveiro). Aveiro: APM.

Veloso, E., (1997). *Geometria em St. Olaf.* Educação e Matemática, 44, 17-20.

Veloso, Eduardo (1998). *Geometria. Temas actuais: Materiais para Professores.* Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Veloso, E., Guimarães, H. (1989). *Os Materiais e a Matemática (relatório).* ProfMat 89: Actas, APM, pp. 291-305.

ANEXOS

Anexo 1 Requerimento à Presidente da Direcção Executiva

Ex.^{ma} Senhora Presidente da
Direcção Executiva da
Escola Secundária Dr. Ângelo Augusto da Silva

Eu, Rubina Velosa, Professora do Primeiro Grupo da Escola Básica dos 2º e 3º Ciclos do Caniço, venho por este meio solicitar a vossa autorização para proceder ao registo áudio/vídeo de algumas aulas, na turma um do sétimo ano, que servirão de dados para a investigação sobre a utilização de Materiais Manipuláveis em Matemática, no estudo da Geometria no 7º ano, no âmbito da dissertação de Mestrado em Matemática para o Ensino, do Departamento de Matemática e Engenharias da Universidade da Madeira, que estou no momento a realizar.

A professora em causa, já foi contactada e deu autorização para o efeito.

Antecipadamente agradeço a vossa colaboração

Funchal, 15 de Fevereiro de 2006

A professora responsável

Rubina Velosa

Anexo 2 Autorização do Encarregado de Educação

Caro Encarregado de Educação

A professora de Matemática do seu educando, foi convidada e aceitou participar num projecto que conduzirá à elaboração da dissertação de Mestrado em Ensino da Matemática da Universidade da Madeira a realizar pela professora Rubina Velosa. O tema da dissertação é "A Aprendizagem da Geometria com Recurso aos Materiais Manipuláveis".

Para este efeito, preciso de observar e gravar em vídeo o trabalho dos alunos, nas aulas de Matemática, durante o estudo da Geometria. Por esse motivo, solicito a sua autorização para proceder à gravação das aulas de Matemática, da referida professora de quem o seu educando é aluno(a).

Todos os dados recolhidos terão um carácter confidencial, servindo apenas como elementos da parte empírica da dissertação, pelo que não serão difundidos.

Agradeço antecipadamente a sua colaboração e solicito que assine a declaração seguinte, devendo depois destacá-la e devolvê-la.

Com os meus cumprimentos,
Funchal, 15 de Fevereiro de 2006

Rubina Maria Matos Velosa

Eu,____ encarregado de educação do aluno ____, nº____ Turma___, autorizo que as aulas de Matemática do meu educando sejam gravadas em vídeo.

Anexo 3 Tarefa 1 - “Sólidos Geométricos”

Escola Secundária Dr. Ângelo Augusto da Silva
Matemática – 7º Ano
Tarefa nº 1
Nome: ____ Nº: ____ Turma:______
Unidade: Do Espaço ao plano **Conteúdo: Sólidos Geométricos**

Para descobrir …

Considera os sólidos geométricos (caixa de sólidos):

1. Indica o nome dos sólidos.

2. Agrupa os sólidos por características comuns. Quais são? Que concluis?

3. Agrupa os sólidos limitados apenas por faces planas.

Como é que são as faces destes sólidos geométricos?

Anexo 4 Tarefa 2 - “Fórmula de Euler”

Escola Secundária Dr. Ângelo Augusto da Silva
Matemática – 7º Ano
Tarefa nº 2

Nome: _______________________________________ Nº: ____ Turma:______
Unidade: Do Espaço ao plano **Conteúdo: Fórmula de Euler**

1. Constrói "esqueletos" de sólidos geométricos com as seguintes condições:

a) Faces quadradas
b) Faces triangulares
c) Base pentagonal e faces triangulares
d) Bases hexagonais e faces rectangulares
e) À tua escolha.

2. Conta os vértices, arestas e faces de cada um dos sólidos geométricos obtidos e regista-os na tabela seguinte:

Poliedro	Nº de faces	Nº de vértices	Faces + Vértices	Nº de arestas

3. Verifica que para o cubo, o número de arestas que estão ligadas a cada vértice é sempre o mesmo. Acontece o mesmo com todos os outros sólidos?
Investiga.

4. Duas faces contíguas têm uma aresta comum. Verifica que é assim. Então será que para saber o número de faces de um sólido geométrico basta contar o número de arestas e multiplicar por dois?
Estás de acordo? Justifica.

5. Ao olhar para o cubo vemos que cada face do cubo tem quatro arestas e que o cubo tem seis faces. Será então que o cubo tem 24 arestas? Onde é que este raciocínio falha? Como será possível no caso do cubo saber o número de arestas a partir do número de faces? Apoia o teu raciocínio nos registos feitos.

6. Tenta descobrir uma relação entre o número de faces (F) e de vértices (V) com o de arestas (A), comparando as duas últimas colunas da tabela.

Anexo 5 Tarefa 3 - “Planificação de sólidos”

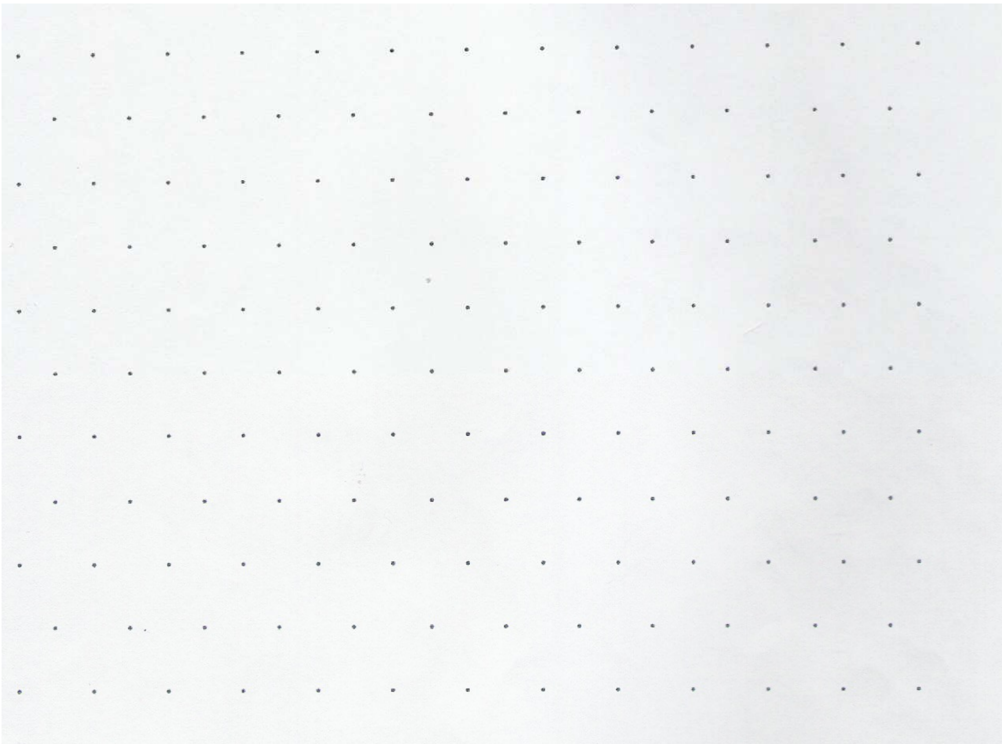
Escola Secundária Dr. Ângelo Augusto da Silva
Matemática – 7º Ano
Tarefa nº 3 – Parte 1

Nome: ____ **Nº:** ____ **Turma:**______

Unidade: Do Espaço ao plano **Conteúdo: Planificações do Tetraedro**

Há sólidos geométricos cujas faces são triângulos equiláteros geometricamente iguais – são os Deltaedros. O tetraedro é um deltaedro.

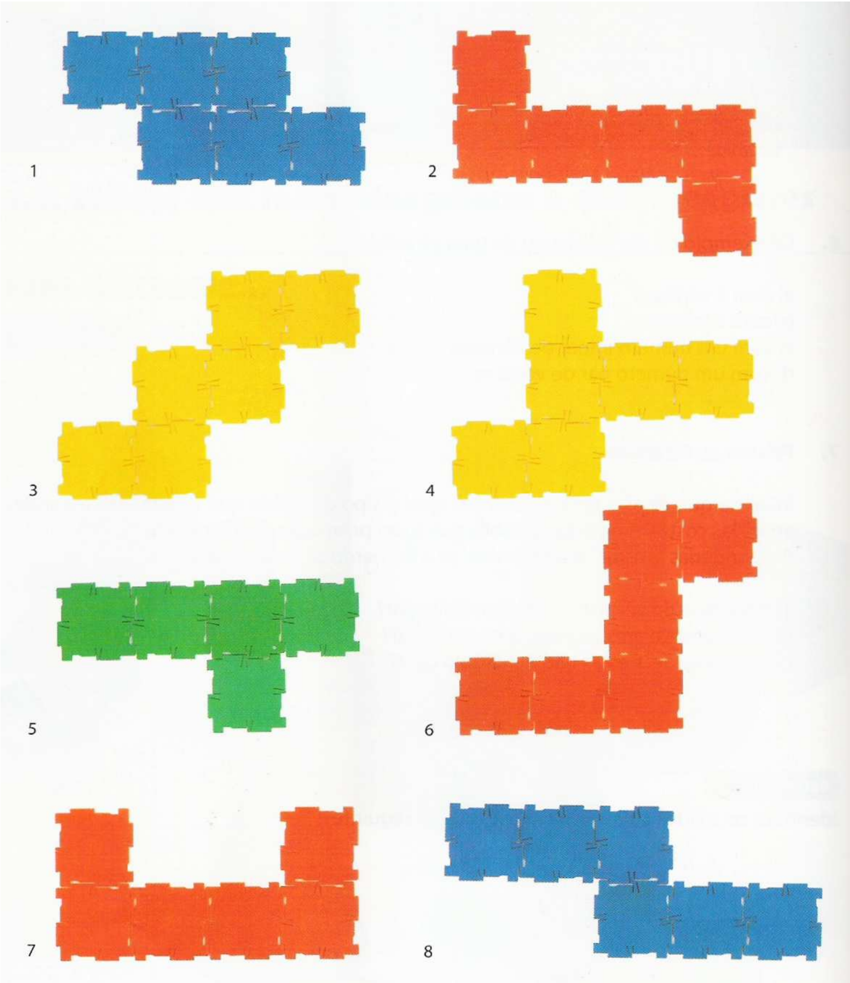
1. Constrói um tetraedro com peças do “Polydron”.
2. “Abre” a construção para descobrires uma possível planificação para o sólido.
3. Desenha no ponteado essa planificação.
4. Tenta descobrir outras planificações para o tetraedro.



Escola Secundária Dr. Ângelo Augusto da Silva
Matemática – 7º Ano
Tarefa nº 3 – Parte 2

Nome: ____ **Nº:** ____ **Turma:**______
Unidade: Do Espaço ao plano **Conteúdo: Planificações do Cubo**

Observa as figuras que se seguem:

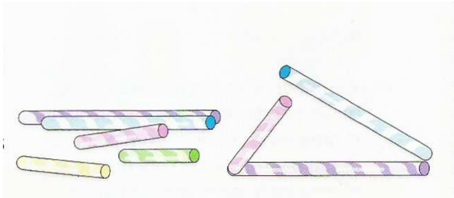


1. Entre as figuras anteriores, indica as que são planificações do cubo.
2. Nas figuras que não são planificações do cubo, assinala os quadrados que se vão sobrepor. Certifica-te das tuas respostas, reproduzindo os modelos.
3. Tenta desenhar outras planificações do cubo.

Anexo 6 Tarefa 4 - "Desigualdade triangular"

Escola Secundária Dr. Ângelo Augusto da Silva
Matemática – 7º Ano
Tarefa nº 4

Nome: ____ Nº: ____ Turma:______
Unidade: Do Espaço ao plano Conteúdo: Desigualdade Triangular



1. Corta palhinhas de refresco em vários tamanhos.

2. Constrói triângulos usando diferentes comprimentos de palhinhas. Esboça as construções que fores fazendo.

3. Discute as situações em que é possível ou não construir os triângulos.

4. Estabelece, com palavras tuas uma regra, que garanta a possibilidade de construção de um triângulo, dadas as medidas dos seus lados.

5. Sabendo que dois dos lados de um triângulo têm respectivamente 6 e 4 centímetros de comprimento, indica valores inteiros para medidas do 3º lado.

Anexo 7 Tarefa 5 - “Investigações com espelhos”

Escola Secundária Dr. Ângelo Augusto da Silva
Matemática – 7º Ano
Tarefa nº 5 – 1º Parte

Nome: ____ Nº: ____ Turma:______

Unidade: Do Espaço ao plano **Conteúdo: Construção de triângulos**

1. Constrói e classifica quanto à amplitude dos ângulos e quanto ao comprimento dos lados um triângulo [MAR], sendo:

- $\overline{AM} = 5$ cm
- $\overline{MR} = 3$ cm
- $\overline{RA} = 4$ cm

2. Constrói e classifica quanto à amplitude dos ângulos e quanto ao comprimento dos lados um triângulo [ABC], sendo:

- $\overline{AB} = 5$ cm
- $\overline{BC} = 5$ cm
- $A\hat{B}C = 85º$

3. Constrói e classifica quanto à amplitude dos ângulos e quanto ao comprimento dos lados um triângulo [TIR], sendo:

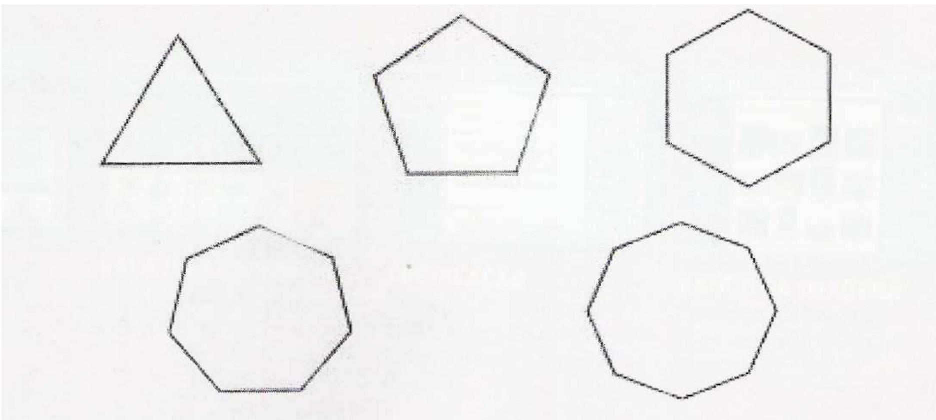
- $\overline{TI} = 4$ cm
- $T\hat{I}R = 60º$
- $I\hat{T}R = 60º$

Escola Secundária Dr. Ângelo Augusto da Silva
Matemática – 7º Ano
Tarefa nº 5 – 2º Parte
Nome: ____ Nº: ____ Turma:______
Unidade: Do Espaço ao plano Conteúdo: Simetrias

Investigações com espelhos

1. Desenha um quadrado e descobre quantos eixos de simetria tem. Faz um desenho que explique o que concluíste.

2. A seguir estão representados alguns polígonos regulares já teus conhecidos.



a) Descobre todos os eixos de simetria de cada polígono. (Experimenta e regista).

Nº de lados do polígono regular	3	4	5	6	7	8	…	N
Nº de eixos de simetria								

b) Observando a tabela que preencheste, a que conclusões podes chegar?

3. Quantos eixos de simetria tem um triângulo?
Experimenta para vários tipos de triângulos (considera os triângulos que construíste) e escreve as tuas conclusões acerca do número de eixos de simetria de cada um deles.
Registas todas as descobertas do grupo.

4. Desenha num papel cada um dos seguintes quadriláteros: rectângulo, losango, quadrado, paralelogramo, trapézios isósceles, trapézio rectângulo e trapézio escaleno. Com uma tesoura recorta os quadriláteros.

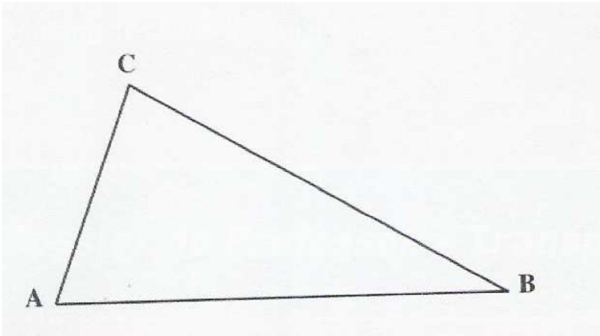
Descobre para cada um deles, quantos eixos de simetria há. Faz um esboço das tuas descobertas.

Anexo 8 Tarefa 6 - “Critérios de igualdade de triângulos”

Escola Secundária Dr. Ângelo Augusto da Silva
Matemática – 7º Ano
Tarefa nº 6

Nome: ____ Nº: ____ Turma:______
Unidade: Do Espaço ao plano Conteúdo: Critérios de igualdade de Triângulos

Considera o triângulo [ABC]



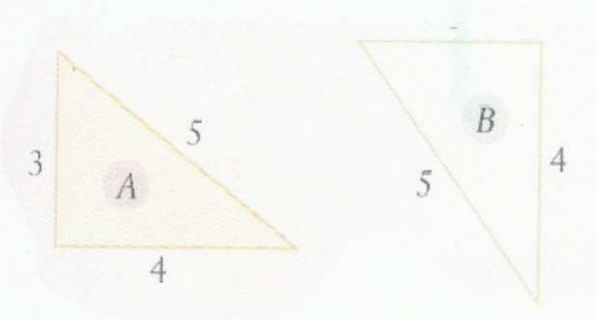
1. Que medições farias, para desenhar no teu caderno um triângulo geometricamente igual ao $\Delta[ABC]$?

2. Imagina que pretendes construir um triângulo geometricamente igual ao dado. Qual o número mínimo de dados que será necessário conhecer? Por exemplo, se souberes apenas o comprimento de um lado, essa informação será suficiente?
Vamos experimentar …

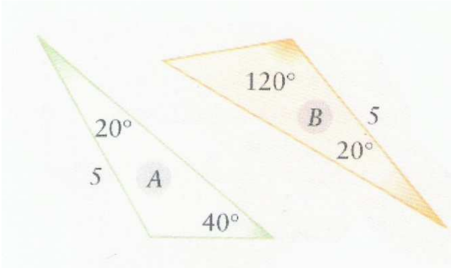
3. Procura tirar conclusões a partir das várias situações que te surgiram em 2.

4. Diz, justificando, se os triângulos A e B são geometricamente iguais:

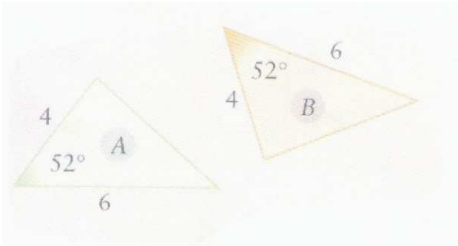
4.1.



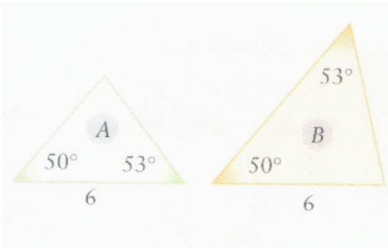
4.2.



4.3.



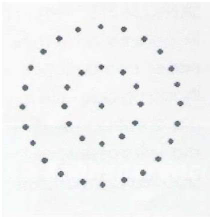
4.4.



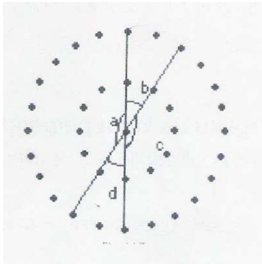
Anexo 9 Tarefa 7 - “Ângulos verticalmente opostos e ângulos de lados paralelos”

Escola Secundária Dr. Ângelo Augusto da Silva **Matemática – 7º Ano** **Tarefa nº 7**
Nome: ______________________________________ Nº: ____ Turma:______
Unidade: Do Espaço ao plano   Conteúdo: Ângulos

1. Desenha no geoplano circular:



   1.1. Ângulos agudos;
   1.2. Um ângulo obtuso e um recto;
   1.3. Ângulos Suplementares;
   1.4. Ângulos Complementares.



2. **Ângulos verticalmente opostos**

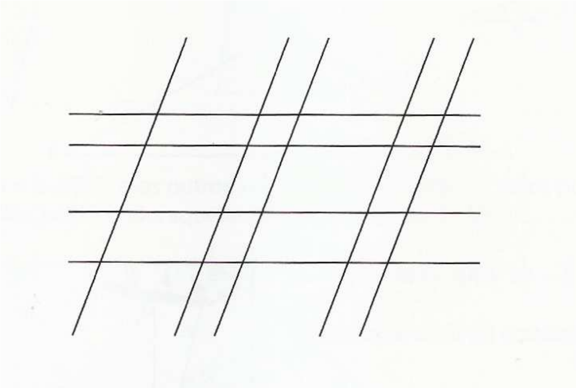
2.1. Desenha dois diâmetros no geoplano circular (ver Fig.).
Determina as medidas dos ângulos a, b, c e d.

2.2. Experimenta desenhar outros diâmetros e mede os novos ângulos a, b, c e d.

Consegues formular alguma conjectura.

Nota:
Os ângulos a e c dizem-se verticalmente opostos. Os ângulos b e d são também verticalmente opostos.

3. Na figura estão representadas duas famílias de rectas paralelas que, ao cruzarem-se, determinam vários ângulos.



3.1. Escolhe dois ângulos agudos quaisquer e mede as suas amplitudes. Que observas?

3.2. Repete o exercício anterior com outros ângulos agudos. Que verificas?

3.3. Agora escolhe dois ângulos obtusos quaisquer e mede as suas amplitudes. Que observas?

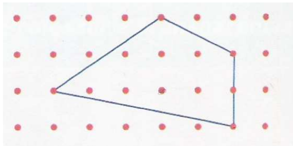
3.4. Que relação existe entre um ângulo agudo e um ângulo obtuso, nesta figura?

Anexo 10 Tarefa 8 - “Propriedades dos quadriláteros”

Escola Secundária Dr. Ângelo Augusto da Silva
Matemática – 7º Ano
Tarefa nº 8

Nome: ____ Nº: ____ Turma:______
Unidade: Do Espaço ao plano Conteúdo: Propriedades dos quadriláteros

1. Forma um quadrilátero (não trapézio e não papagaio) e altera-o, de modo a obter um:



a) trapézio (não rectângulo e não isósceles);
b) trapézio isósceles;
c) trapézio rectângulo;
d) paralelogramo;
e) rectângulo (não quadrado);
f) losango (não quadrado)
g) quadrado;
h) papagaio (não losango).

2. Explica que estratégia usaste para formar cada um dos quadriláteros anteriores a partir do quadrilátero inicial.

3. Em cada um dos quadriláteros que formaste, marca as diagonais com um elástico de outra cor.

a) Em que quadriláteros as diagonais são eixos de simetria?

b) Em que quadriláteros as diagonais são iguais?

c) Em que quadriláteros as diagonais são perpendiculares?

Regista todas as descobertas do grupo

4. Traça um segmento vertical como o seguinte:

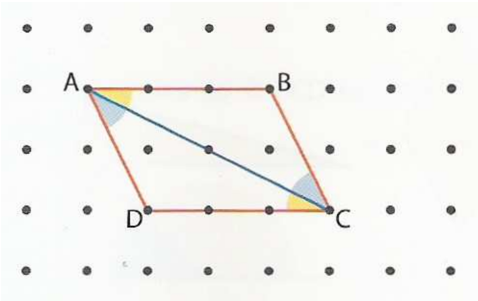
Desenha outro, de modo que os dois segmentos sejam as diagonais de um quadrado. Desenha o quadrado correspondente e escreve os cuidados que tiveste ao traçar a segunda diagonal.

Anexo 11 Tarefa 9 – “Propriedades e construção de Paralelogramos”

Escola Secundária Dr. Ângelo Augusto da Silva
Matemática – 7º Ano
Tarefa nº 9

Nome: ____ Nº: ____ Turma:______
Conteúdo: Propriedades e construção de paralelogramos

1. Considera o seguinte paralelogramo.



Desenha o paralelogramo da figura e uma das suas diagonais no geoplano não circular e tenta responder às seguintes questões:

1.1. Qual a relação existente entre as amplitudes dos ângulos opostos de um paralelogramo? Justifica.

1.2. Qual a relação existente entre os comprimentos dos lados opostos de um paralelogramo? Justifica.

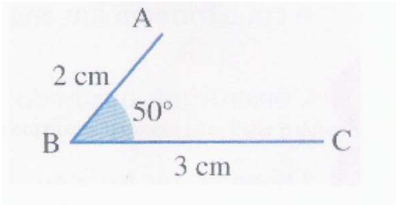
1.3. Relação existe entre as amplitudes dos ângulos adjacentes ao mesmo lado (consecutivos)? Justifica.

1.4. Traça a outra diagonal. Que relação existe entre as diagonais de um paralelogramo.

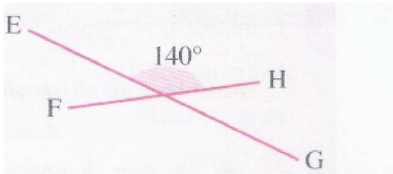
Experimenta para outros paralelogramos e regista a tuas descobertas.

2. Construção de paralelogramos.

a) Desenha um paralelogramo [ABCD] com os dados da figura.
Indica as propriedades em que te baseaste para a construção do paralelogramo.



b) Desenha o paralelogramo [EFGH] atendendo aos dados da figura e ainda:



$\overline{EG} = 6$ cm

$\overline{FH} = 4$ cm

Indica as propriedades em que te baseaste para a construção de [EFGH].

c) Desenha um paralelogramo [JLMN], em que

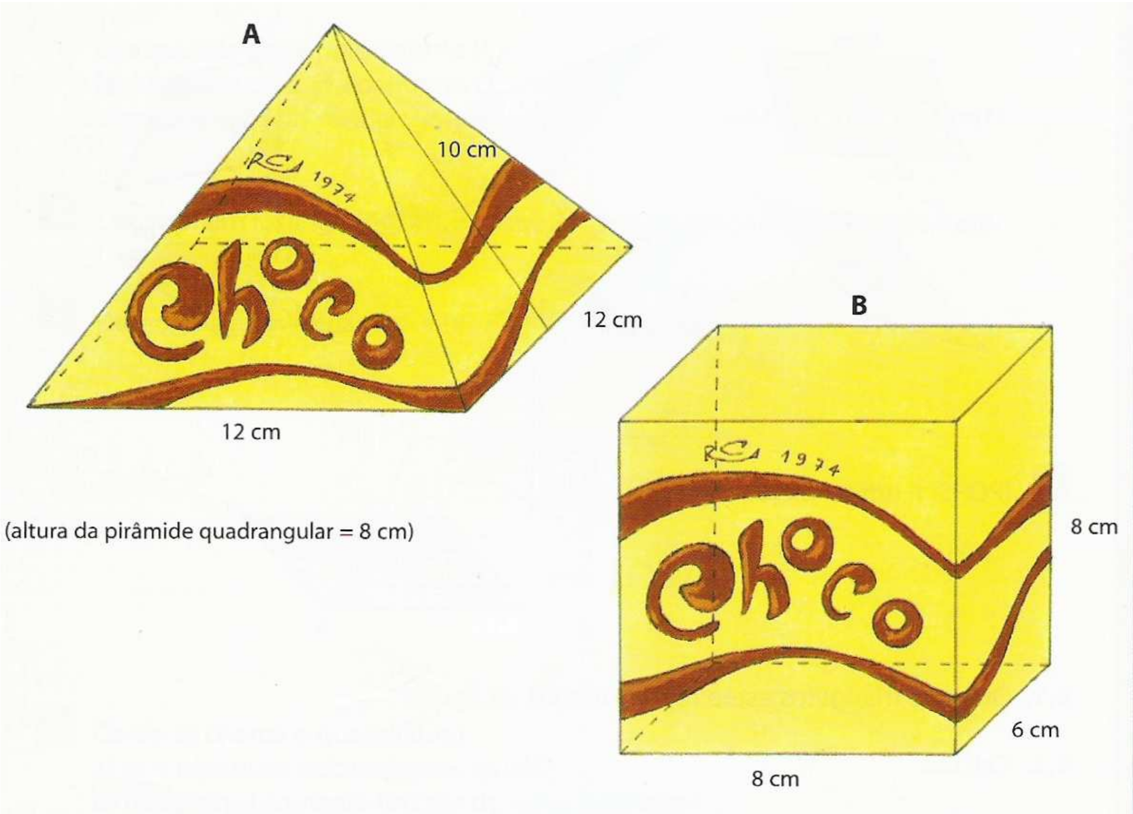
$\overline{JL} = 6$ cm
$\overline{LM} = 8$ cm
$\overline{JM} = 10$ cm

Indica as propriedades em que te baseaste para a construção de [JLMN].

Anexo 12 Tarefa 10 - “Áreas e volumes de sólidos”

Escola Secundária Dr. Ângelo Augusto da Silva **Matemática – 7º Ano** **Tarefa nº 10** **Nome: ____ Nº: ____ Turma:______** **Unidade: Do Espaço ao plano Conteúdos: Áreas e volumes de sólidos**

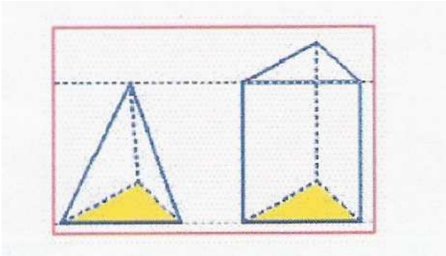
1. Uma empresa de chocolates criou uma nova embalagem com forma e dimensões diferentes, para comercializar bombons, substituindo a embalagem A pela embalagem B e mantendo o preço de venda. Ambas as embalagens são feitas em cartão canelado e levam a mesma quantidade de bombons.



Será que a empresa gasta menos cartão na embalagem B? Justifica.

2.

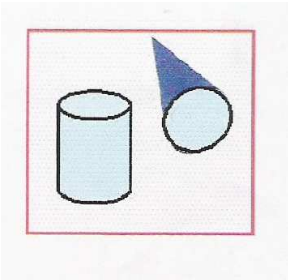
a) Qual será a relação entre o volume de um prisma e de uma pirâmide com a mesma base e a mesma altura?



Enche a pirâmide de arroz e verte-o para o prisma. Repete esta operação até encheres o prisma.

Regista as tuas conclusões

b) Como se poderá calcular o volume de um cone a partir do volume do cilindro?



Compara os volumes destes sólidos realizando uma experiência semelhante à anterior.

Regista as tuas conclusões

Anexo 13 Questionário.

Mestrado em Matemática para o ensino

Questionário – 7º 1

Nome: ____Nº___

> Como já sabes, a tua turma foi escolhida para participar na parte empírica de uma tese de mestrado em Matemática. O tema da tese é “A aprendizagem da Geometria com recurso aos materiais manipuláveis. Para tal, pedimos-te que respondas cuidadosamente ao questionário que se segue. Todas as respostas que deres são muito importantes para este estudo.
>
> Este questionário tem carácter confidencial e destina-se a saber a tua opinião sobre o uso de materiais manipuláveis na disciplina de Matemática.
>
> Obrigada pela tua colaboração

1. Gostas da disciplina de matemática? Porquê?

____

____

____

____

2. Quais são as aulas de Matemática que te cativam mais? Porquê?

____

____

____

____

3. Em que ano de escolaridade contactaste, pela primeira vez, com a Geometria?

____

____

____

____

4. Que materiais manipuláveis te lembras de serem usados nessas aulas? Refere alguns.

____

____

____

5. Quais foram as dificuldades que sentiste na utilização de materiais manipuláveis?

6. Este ano, trabalhaste com vários materiais manipuláveis. Qual foi na tua opinião o mais fácil e o mais difícil na sua utilização? Porquê?

7. Na tua opinião as actividades matemáticas desenvolvidas nas aulas com materiais tornaram as aulas de Matemática mais interessantes. Porquê?

8. Achas que a utilização de materiais manipuláveis deveria ser utilizado noutros capítulos do programa? Porquê?

9. Gostarias de voltar a trabalhar com materiais manipuláveis? Porquê?

10. Gostaste de trabalhar em grupo? Porquê?