UNIVERSIDADE da MADEIRA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E ENGENHARIAS

# Construções dos Números Reais

Paula Cristina Reis Lopes

**Orientador:**
Professor Doutor José Francisco da Silva C. Rodrigues

**Dissertação para a obtenção do grau de Mestre em Matemática**
**Especialização em Matemática para o Ensino**

Funchal – Madeira

Junho de 2006

# Resumo

Neste trabalho estudamos várias construções do sistema dos números reais. Antes porém, começamos por abordar a evolução do conceito de número, destacando três diferentes aspectos da evolução do conceito de número real.

Relacionado com este tema, dedicamos dois capítulos, deste trabalho, à apresentação das teorias que consideramos assumir maior importância, nomeadamente: a construção do sistema dos números reais por *cortes* na recta ou *secções* no conjunto dos números racionais, avançada por Dedekind, e a construção do número real como classe de equivalência de sucessões fundamentais de números racionais, ideia protagonizada por Cantor.

Posteriormente, e de uma forma mais sintetizada do que nas anteriores, apresentamos outras construções, onde procuramos clarificar a ideia fundamental subjacente ao conceito de número real. Finalmente utilizamos o método axiomático com o intuito de mostrar a unicidade do sistema dos números reais, isto é, concluir finalmente que existe um corpo completo e ordenado, e apenas um a menos de um isomorfismo, do conjunto dos números reais.

## Palavras Chave

Números Reais; Construção dos Números Irracionais; Aritmetização da Análise; Axiomatização dos Reais; Didáctica dos Números Reais; História dos Números Reais.

# Abstract

In this work we study some constructions of the system of the real numbers. First, we describe an approach to the evolution of the number concept, detaching three different fields of the construction of the concept of real number.

Related with this subject, we dedicate two chapters, of this work, to the presentation of the theories that we consider to be more important, namely: the construction of the system of the real numbers with *cuts* in the line or *sections* in the set of the rational numbers, due to Dedekind, and the construction of the real number as an equivalence class of fundamental sequences of rational numbers, idea carried out by Cantor.

Later, and in a more condensate form, we present other constructions, where we try to clarify the underlying basic idea of the concept of real number. Finally we describe the axiomatic method and we show the uniqueness of the system of the real numbers, that is, we conclude finally that there exists one complete and ordered field and, up to isomorphism, only one, the set of the real numbers.

## Key Words

Real Numbers; Construction of Irrational Numbers; Arithmetization of Analysis; Axiomatization of Reals; Didactic of Real Numbers; History of Real Numbers.

# Agradecimentos

Ao meu orientador, Professor Doutor José Francisco da Silva Costa Rodrigues, pelas criteriosas sugestões e pistas, que foram fontes primárias, fundamentais na minha investigação.

À Universidade da Madeira, nomeadamente ao Departamento de Matemática e Engenharias, pelas condições de trabalho que me proporcionou e pelo apoio logístico prestado.

À minha amiga, Dr.ª Sónia Correia Martins, pela ajuda, pelo empenho, pelo ânimo que me transmitiu, pela amizade que perdura, um obrigado especial.

Aos colegas de Departamento de Matemática e Engenharias, em especial ao Dr. Jorge Nélio Ferreira e ao Dr. Maurício Reis por me tirarem de apuros informáticos com simpatia e disponibilidade.

À minha família, em especial, à minha mãe, Ana Azevedo, ao Duarte Azevedo e ao meu marido, Hugo Pereira por tudo o que fizeram para que eu pudesse realizar um sonho, pela paciência demonstrada, pelo apoio, tendo sempre palavras de amizade, ânimo e incentivo.

A todos os meus alunos pela compreensão e incentivo nos momentos em que o cansaço era evidente.

Finalmente agradeço a todos os meus amigos, que apesar de não lhes ter dado a devida atenção, continuaram presentes e com palavras amigas.

# Índice

# Capítulo 1

# Introdução

## 1.1 Das Quantidades aos Números

Ao longo de toda a história da Matemática o problema da relação entre o descontínuo da Aritmética e o contínuo Geométrico (a passagem dos números naturais, 1, 2, 3, ... , aos pontos, que na linha recta se sucedem, sem lacunas e sem saltos) esteve sempre presente, sendo este um dos aspectos essenciais da filosofia de Pitágoras (cerca de 580 - 500 a.C.) para compreender o mundo real a partir dos números naturais.

Podemos, como é do conhecimento geral, afirmar que esta ideia de Pitágoras fracassou devido à inviabilidade do pressuposto da comensurabilidade de todas as grandezas, isto é, da possibilidade de se exprimirem as suas relações por meio de uma razão de inteiros, conduzindo ao absurdo de um mesmo número natural ser par e ímpar (para que a hipotenusa do triângulo rectângulo isósceles se possa medir com um dos seus lados mediante um número racional) (Veja-se, por exemplo, [35], pp. 34 - 35).

Movidos pela necessidade de estruturar uma Álgebra das grandezas os Gregos desenvolveram a *Teoria das Proporções* ([2], p. 204) atribuída a Eudóxio (408 - 355 a.C.).

Se, por exemplo, no plano, $G$ e $G'$ representam duas áreas e $U$ a área limitada por um quadrado, diz-se que a razão $G/U$ das duas grandezas $G$ e $U$ é igual à razão $G'/U$ das grandezas $G'$ e $U$:

$G/U = G'/U$ se quaisquer que sejam os números inteiros positivos $m$ e $n$,

$$\begin{aligned} m \cdot U &< n \cdot G \text{ implica } m \cdot U < n \cdot G' \\ m \cdot U &> n \cdot G \text{ implica } m \cdot U > n \cdot G' \\ m \cdot U &= n \cdot G \text{ implica } m \cdot U = n \cdot G' \end{aligned}$$

onde $m \cdot U$, por exemplo, significa uma área constituída por $m$ áreas iguais a $U$.

Por outro lado, diz-se que $G/U > G'/U$ se se encontrarem dois números $m$ e $n$ tais que $n \cdot G > m \cdot U$ e $m \cdot U > n \cdot G'$.

$G/U$ e $G'/U$ exprimem-se por *ratios* $g$ e $g'$ e as convenções de Eudóxio equivalem a considerar $g$ e $g'$ como iguais sempre que dêem lugar à mesma repartição dos números racionais em duas classes: a dos que são maiores que $g$ (ou $g'$) e a dos que são menores que $g$ (ou $g'$).

Como veremos mais à frente, esta caracterização dos números é semelhante à elaborada posteriormente por Dedekind (1831 - 1916) onde está igualmente subjacente o conceito de ordenação ([9], p. 12).

A Teoria de Eudóxio remonta ao século IV antes de Cristo e foram precisas algumas centenas de anos para que o programa de Pitágoras, de aritmetização do contínuo, fosse efectivamente cumprido.

Quando os Gregos consideravam, como grandeza a medir, o perímetro de uma circunferência, suponham intuitivamente que esse comprimento existia e que estava para o diâmetro tal como a área do círculo estava para o quadrado do raio, no entanto, a identificação desse número com o irracional $\pi$ não estava ao alcance dos conhecimentos matemáticos da época.

Nos primeiros passos da elaboração da ideia fundamental da Análise: *a passagem ao limite*, é ainda significativo o papel da intuição geométrica. A ideia de que a circunferência está compreendida entre duas sucessões de polígonos, uns inscritos outros circunscritos, serviu para chegarmos a valores aproximados, do que a intuição indicava ser o comprimento da circunferência. No entanto, a afirmação de que este comprimento existe e se exprime por um número, é o que só pode decorrer das condições de monotonia das referidas sucessões para a existência de um limite comum.

Esta ideia implícita na condição suficiente de convergência, enunciada por Cauchy (1789 - 1857) no século XIX, não pôde ser rigorosamente estabelecida antes das construções lógicas dos números reais feitas por Georg Cantor (1845 - 1918), Charles Méray (1835 - 1911) e Richard Dedekind.

Se a Teoria das Proporções e o Método de Exaustão ([3], pp. 128 - 131) eram suficientes para a resolução de problemas métricos na geometria antiga, a insuficiência da escala numérica grega manifesta-se com a resolução das equações algébricas no século XVI e com a Geometria Analítica, no século XVII.

Os números conhecidos até então, (os racionais e os irracionais obtidos por construções geométricas) encarados como *infinidade* apenas *numerável,* não chegam para cobrir o contínuo dos pontos do eixo dos *xx.* Assim, a intuição sugere que o número real é o resultado da medida de qualquer segmento orientado, marcado a partir de uma origem de coordenadas.

Assim sendo, a intuição do que possa ser a recta euclideana, está na base da análise da variável real e dos seus desenvolvimentos nos séculos XVIII e XIX.

A necessidade de uma definição formal de número real levou vários matemáticos a publicarem as suas teorias quase simultaneamente, embora elaboradas em épocas diferentes e tendo sido igualmente diferentes as razões que os moveram a empreender semelhante tarefa.

Durante a segunda metade do século XIX um crescente número de artigos e livros foram publicados, dedicados a um único assunto: a definição precisa de número real e a investigação de funções reais baseada nessa definição.

Podemos destacar três campos distintos de construção da definição de número real.

Hankel (1839 - 1873) e Frege (1848 - 1925) defenderam a ideia tradicional de que a Análise deveria ser fundada na noção de quantidade contínua.

Dedekind, Weierstrass (1815 - 1897) e Cantor defenderam que a noção de quantidade deveria ser substituída por uma rigorosa construção aritmética dos números reais, isto é, uma construção baseada na noção de números naturais ou racionais, que assumiu-se ser menos problemática do que a noção de quantidade contínua.

Heine (1821 - 1881), Thomae (1840 - 1921) e Hilbert (1862 - 1943) defenderam que os conceitos fundamentais da Análise poderiam, e deveriam, ser construídos simplesmente de uma maneira formal, desprezando, tanto quanto possível, os assuntos de ordem filosófica.

Hankel estudou com Riemann (1826 - 1866) bem como com Weierstrass e Kronecker

(1823 - 1891). Em 1867 publicou o livro *Theorie der Complexen Zahlensysteme, insbesondere der gemeinen imaginären Zahlen und der Hamiltonschen Quaternionen* onde tratou um dos assuntos que caracterizou o fim da ciência da quantidade.

Para Hankel o número não é um objecto, é uma substância que existe "*fora*" do sujeito e do objecto que lhe deu origem, é um princípio independente, tal como foi visto pelos Pitagóricos.

Hankel introduziu uma distinção no que diz respeito ao conceito de número. Números cuja noção está completamente determinada, mas que não são susceptíveis de serem construídos intuitivamente devem ser denominados de *números puramente intelectuais* ou *puramente formais,* em contraste com os números cuja representação pode ser encontrada em quantidades *reais* (no sentido filosófico da palavra) e suas combinações.

De uma maneira formal, Hankel tomou os sistemas numéricos como sistemas de símbolos e operações (uma operação era vista como uma combinação de símbolos que produzia outro símbolo do mesmo sistema). Exigiu também que todos os símbolos de um determinado sistema pudessem ser obtidos de outros símbolos básicos (as "*unidades*") por repetidas aplicações de operações, definindo assim o sistema, e o sistema como um todo deveria ser fechado para estas operações.

Hankel deu uma definição recursiva de adição e de multiplicação e provou as leis associativa, comutativa e distributiva. Posteriormente, introduziu a subtracção e divisão juntamente com novos símbolos para os números negativos e para as fracções. De seguida, estendeu as leis aritméticas, de forma a produzir os números racionais.

Nesta altura, questionou-se sobre o facto de este sistema de números estar ou não completo. A ideia por detrás desta questão é que podem existir outras operações, para além das referidas, tal como a extracção de uma raiz quadrada de números positivos, para as quais o sistema dos números reais seja necessário.

Hankel estava convencido de que a problemática dos números irracionais não poderia estar formalmente resolvida, uma vez que, era impossível definir, de uma vez por todas, todas as operações que podemos eventualmente admitir no domínio dos números reais.

A razão principal para Hankel acreditar que uma abordagem formal dos números reais possuía limitações essenciais, foi a sua visão fundamentalmente construtivista do sistema dos números *formais.* Apesar disso, ele não o colocou desta forma.

Numa última análise, Hankel supôs que qualquer sistema deste tipo deveria ser gerado a partir de um conjunto finito de símbolos básicos por uma sequência contável de aplicações de operações definidas.

A noção de quantidade, por outro lado, foi levada para um domínio que englobava outro tipo de infinidade, nomeadamente o contínuo intuitivo. Hankel defendeu que, apenas utilizando a nossa intuição, era possível compreender o conceito de número real.

Apesar de continuar preso à ideia tradicional de quantidades contínuas faltou-lhe uma noção formal da completude no domínio do número, tal como a proposta por Hilbert mais tarde.

## 1.2 Aritmetização da Análise

Apesar de Hankel continuar a acreditar que era necessário fundamentar a análise na doutrina da quantidade, o seu professor Weierstrass já havia desistido deste ponto de vista.

Nas suas conferências em Berlim, Weierstrass esboçou uma noção de números reais numa base puramente aritmética, isto é, começando no domínio dos números racionais e utilizando argumentos acerca de certos conjuntos infinitos de racionais. Nos anos seguintes, voltou muitas vezes a este tópico elaborando cada vez mais as suas ideias.

Weierstrass encarou os números como *agregados* de certos elementos (veja-se [44] - cit. in [13], p. 295). Os inteiros positivos referem-se a agregados de *coisas idênticas em pensamento*, isto é, unidades de uma mesma espécie. Os números racionais positivos foram concebidos como agregados cujos elementos são *unidades básicas* (denotadas por 1) e *partes exactas* dessas unidades.

Arbitrariamente, *quantidades numéricas* eram entendidas similarmente como *agregados infinitos* possuindo o mesmo tipo de elementos. Mais precisamente, uma quantidade numérica era representada por qualquer membro de uma classe de equivalência destes *agregados*, respeitante a uma relação de equivalência de *igualdade* cuja definição requeria algum cuidado.

Weierstrass considerou dois tipos de transformações de quantidades numéricas que não as alterava essencialmente:

> $(i)$ Quaisquer $n$ elementos da forma $\frac{1}{n}$ podem ser substituídos pela unidade principal.
>
> $(ii)$ Qualquer elemento pode ser substituído pelas suas partes exactas, isto é, 1 por $n \cdot \frac{1}{n}$; $\frac{1}{a}$ por $b \cdot \frac{1}{ab}$, etc.

Uma quantidade numérica $a'$ denomina-se por *parte de* $a$ se $a'$ consiste numa quantidade finita de elementos de $a$ e pode ser transformada numa quantidade $a''$ por uma sequência finita de transformações $(i)$ e $(ii)$ tal que todos os elementos de $a''$ ocorrem em $a$ o mesmo número de vezes que em $a''$ e, além disso, $a$ contém outros elementos ou um número maior dos mesmos elementos.

Weierstrass definiu duas quantidades numéricas $a$ e $b$ iguais se [e só se] toda a parte de $a$ pode ser obtida por transformação numa parte de $b$ e vice-versa. Se as partes de $a$ podem ser transformadas em partes de $b$ mas não vice-versa, $b$ é denominado maior do que $a$. ([13], p. 296, ou, [10], p. 80)

Assim, Weierstrass pôde caracterizar quantidades numéricas *finitas* pela seguinte condição:

> "Dizemos que um número $a$ é uma quantidade finita, se existe um número $b$ maior do que $a$, sendo $b$ composto por um número finito de elementos." ([10], p. 81)

As operações de adição e multiplicação explicadas para números inteiros positivos por óbvias manipulações das suas unidades, estavam agora definidas, analogamente, para os números finitos arbitrários. Com o intuito de definir os números negativos, Weierstrass introduziu a noção de *agregados opostos* e a convenção de que agregados iguais e opostos *anulam-se* um ao outro.

Estas descrições das definições de Weierstrass mostram que os seus *agregados* podiam ser vistos, com alguma cautela, como somas (possivelmente infinitas) dos seus elementos. No entanto, as suas definições evitaram este tipo de expressão, talvez para permanecerem próximas da visão tradicional dos números como *agregados* de unidades.

Claro que Weierstrass usou livremente a linguagem das somas ao longo das suas conferências. Estas definições consistiram na fundamentação do assunto principal dos seus cursos e permitiram-lhe apresentar provas e teoremas acerca de limites de sucessões de números e funções.

A abordagem de Weierstrass reduz o conceito de quantidade (real e consequentemente também complexa) ao conceito de número. Weierstrass continuou a utilizar a noção de quantidade, mas expressões como *quantidade aritmética* ou *quantidade numérica* tornam claro que na sua mente existia uma separação lógica entre os seus conceitos e aqueles que são mais intuitivos, em contrapartida, na Geometria ou Física.

Em 1871, Cantor iniciou um programa de aritmetização semelhante aos de Méray e Weierstrass.

Heine sugeriu certas simplificações que levaram ao chamado desenvolvimento de Heine-Cantor, publicado em 1972 por Heine no seu artigo *Die Elemente der Functionenlehre*.

Heine e Cantor foram colegas em Halle e ambos fortemente influenciados pela escola de análise de Berlim e trocaram ideias acerca da construção de números reais com base em conjuntos infinitos de racionais.

A posição de Heine foi mais filosoficamente pronunciada que a de Cantor.

Cantor sustentou que a cada sucessão fundamental [sucessão de Cauchy] corresponde um número real.

A condição de Cauchy como condição suficiente de convergência de sucessões numéricas ou, em linguagem da Topologia - ao contrário do que sucede com os números racionais, os números reais constituem um espaço métrico completo. A construção dos números reais feita por Cantor tem por objectivo imediato garantir essa suficiência. Isto é, parte-se de sucessões de números racionais que satisfaçam a condição de Cauchy, consideram-se equivalentes aquelas que por diferença de termos da mesma ordem conduzem a uma sucessão de limite zero, e um número real será então qualquer classe de sucessões equivalentes.

A abordagem de Cantor foi similar à de Heine mas colocou mais ênfase na possibilidade de interagir no método de formação das sucessões de Cauchy.

Cantor denominou um número dado por uma sucessão de Cauchy de racionais de *quantidade numérica de primeira espécie*, adicionando uma reflexão entre quantidades numéricas e os pontos de uma linha recta. Reconheceu igualmente que era necessário um princípio que servisse de elo de ligação entre estes dois conceitos. Para tal, estabeleceu que

> "toda a quantidade numérica corresponde a um ponto definido numa recta, cuja coordenada [respeitante a um segmento de recta unitário] é igual a esta

quantidade numérica" (veja-se [7], p. 97 - cit. in [13], p. 306).

Além da definição de número real, o ingrediente técnico crucial da investigação de Cantor foi a noção de *ponto limite*, que hoje é denominado de *ponto de acumulação.*

O conjunto derivado, $P'$ de um conjunto de pontos $P$, foi definido como o conjunto de todos os pontos de acumulação de $P$.

Cantor provou que o conjunto dos números reais é não numerável e comunicou-o numa carta a Dedekind. Este resultado mostrou que se a sua construção (ou a de Dedekind, ou a de Weierstrass) dos números reais fosse tomada como verdadeiramente garantida, então existia pelo menos dois tipos de conjuntos infinitos: os conjuntos do tipo do conjunto dos números naturais e os conjuntos do tipo do contínuo.

Cantor formulou então a noção de que existiam dois tipos de infinito se e só se fosse impossível efectuar uma correspondência um a um entre os dois conjuntos.

Em 1883 Cantor sumariou as suas investigações num documento onde introduziu as noções de *ordinais transfinitos* e *cardinais transfinitos* ([5], p. 594).

A construção da Teoria dos Conjuntos Transfinitos ([5], pp. 597 - 609) de Cantor pode ser colocada como representando o final da ciência da quantidade devido à clarificação do conceito de contínuo, propondo-o de uma forma puramente aritmética. Além disso, Cantor forneceu uma precisa descrição da sua cardinalidade.

O trabalho de Weierstrass sobre aritmetização da análise não foi publicado, no entanto, estas ideias foram dadas a conhecer pelos seus discípulos, em particular por Heine, que havia frequentado os seus cursos.

Heine no seu artigo, *Die Elemente der Functionenlehre*, fez referência a muitos teoremas sobre funções provados por Weierstrass, que formavam a Análise Weierstrassiana. Heine observou que, nesses teoremas, ainda se levantavam dúvidas em algumas passagens, devido "à sua não completamente rígida definição de números irracionais". Nesta definição "ideias da Geometria, nomeadamente sobre a criação de uma linha por movimento, ocasionaram muitas vezes influências confusas" (veja-se [20], p. 172 - cit. in [13], p. 299).

Numa tentativa de resolver o mistério dos números irracionais, de uma vez por todas, Heine efectuou uma abordagem formal, que era ainda mais radical do que a apresentada por Hankel, para os números racionais:

"Para a definição tomarei a visão puramente formal, denominando certos sím-

> bolos tangíveis de números, tais que não poderá existir dúvida acerca da sua existência. Estes símbolos necessitam estar *equipados* de um sistema que nos permita definir as operações [uma aritmética]". (veja-se [20], p. 173 - cit. in [13], p. 299)

A ideia matemática básica por detrás da visão de Heine, tomada de Cantor, foi considerar sucessões de números racionais satisfazendo o que hoje é denominado de *Critério de Convergência de Cauchy* ([38], p. 75).

A construção de Heine mostrou, mais uma vez, a tentativa de separar o conceito de número real das ideias intuitivas sobre quantidade e, mais uma vez, assistiu-se à introdução de conjuntos infinitos de racionais na sua definição.

A ênfase filosófica de Heine era contudo distinta da de Weierstrass. Ele procurou evitar problemas filosóficos de uma forma surpreendentemente ingénua, encarando os números como *símbolos tangíveis* sem estar consciente do quanto a sua ideia era vaga.

Frege criticou o trabalho de Heine questionando se deveríamos considerar as sucessões infinitas, e se ainda seriam um símbolo tangível. Questionou, igualmente, se um número irracional seria uma sucessão desse género ou uma classe de equivalência de uma dessas sucessões.

Alguns anos antes, uma ideia similar à construção dos números reais de Cantor e Heine, foi apresentada por Charles Méray, professor na Universidade de Dijon.

Se formos fiéis à cronologia dos acontecimentos, afirmamos que foi Méray o primeiro matemático a publicar uma teoria dos números irracionais, no ano de 1869, no artigo intitulado *Remarques sur la nature des quantités définies par la condition de servir de limites à des variables données* ([29], pp. 280 - 289).

Segundo Méray, as definições existentes de números irracionais eram insatisfatórias, consequentemente, sentiu necessidade de criar uma teoria de números irracionais.

Méray pretendeu com a sua obra edificar a Análise, fundamento de todas as matemáticas, sobre bases sólidas, excluindo qualquer empréstimo que a Geometria pudesse fornecer a algumas demonstrações.

Considerou os raciocínios empregues na análise das funções pouco claros e rigorosos, ao contrário do que sucedia na Álgebra e na Geometria ([30], XI).

Méray defendeu, em todas as suas obras, que a possibilidade das funções poderem ser desenvolvidas em Séries de Taylor, constituía um princípio simples sobre o qual a teoria das funções deveria ser edificada. É esta, de facto, a ideia base da análise de Méray e o instrumento unificador de toda a sua teoria.

Introduzido por Joseph-Louis Lagrange (1736 - 1813) nos finais do século XVIII, na perspectiva de algebrização da Análise, o desenvolvimento de funções em Séries de Taylor foi pela primeira vez abordado por Méray em 1868, no seu artigo *Remarques nouvelles sur les points fondamentaux du calcul infinitésimal et sur la théorie de développement des fonctions en séries* ([28], pp. 133 - 138).

Se considerarmos o limite como sendo a noção de base da Análise, compreendemos a necessidade sentida por Méray em definir correctamente os números irracionais, pois os teoremas sobre limites de sucessões deixavam de ter sentido quando estas não tendessem para números racionais.

Foi por não concordar com as definições de número *incomensurável,* que tinha à disposição, que sentiu a necessidade de elaborar uma teoria de números irracionais. O seu descontentamento manifesta-se em relação a definições que recorrem ao conceito de limite, uma vez que exigiam à *priori* a existência de um número *incomensurável.*

O princípio de que uma sucessão crescente majorada (respectivamente decrescente minorada) tende para um limite e o princípio de que toda a sucessão de Cauchy tende para um limite, constituem, segundo Méray, a base essencial de todas as partes da matemática, onde intervém a noção de limite de uma sucessão.

Méray afirma, na sua obra de 1869, que na época as proposições supra citadas eram tomadas como axiomas apenas para escapar à introdução da noção de número *incomensurável* ([29], p. 280).

Assim, tendo em conta a natureza dos limites de sucessões de números racionais que não admitem por limite nenhum racional, Méray formula o seu conceito de número irracional e é à custa dessa definição que, no final das suas obras, apresenta o que considera serem provas perfeitamente correctas de tão importantes resultados.

Com efeito, Méray considerou sucessões de números racionais satisfazendo o critério de convergência de Cauchy. No caso em que uma sucessão não convergia para um número racional, Méray definiu *limite fictício.* Estes *limites* eram denotados por símbolos arbitrários.

Méray discutiu, igualmente, a necessária relação de equivalência entre sucessões diferindo unicamente numa sucessão convergente para zero.

O conjunto constituído pelos limites racionais e pelos limites *fictícios* foi considerado o *domínio das quantidades reais.*

No ano de 1872 Méray voltou a apresentar a sua teoria dos números irracionais, na obra *Nouveau Précis d'Analyse Infinitésimale.*

Mais tarde, pareceu-lhe que a publicação não clarificava suficientemente a teoria apresentada, talvez por este tema não ter constituído o papel principal de tal obra, e então decidiu fazer um estudo mais aprofundado e em 1887 publicou o artigo *Sur le sens qu'il convient d'attacher à l'expression nombre incommensurable et sur le critérium de l'existence d'une limite pour une quantité variable de nature donnée* ([31], pp. 342 - 360).

Podemos encontrar uma exposição final da sua teoria no volume 1 da obra, *Leçons nouvelles sur l'analyse infinitésimale et ses apllications géométriques*, [32], publicada em 1894.

Foram vários os factores que contribuiram para que não fosse dada a devida importância à obra de Méray. Podemos salientar o facto de que na época em que Méray publica a sua obra não existir, em França, uma notória apreciação à problemática da definição de número irracional. Além disso, Méray foi o único matemático do século XIX de nacionalidade francesa a se dedicar à aritmetização da Análise e como não se tratava de um matemático de renome, a teoria por si desenvolvida não assumiu as repercussões que ansiava.

Por Méray ver a prioridade do seu feito ser atribuída a outros matemáticos, escreveu no prefácio da sua obra de 1894, que:

> "A teoria dos números incomensuráveis (...) foi atribuída ao Sr. Heine pela sua invenção, aos Sr. Lipschitz, de Bois-Reymond, G. Cantor pelas suas primeiras aplicações mas três anos antes eu tinha exposto a mesma teoria na sua totalidade, depois de a ter comunicado ao Congresso, na *Revue des Sociétés Savantes.*" ([32], XXIII)

Contudo, Cantor e Heine pareceram ter formado as suas ideias independentemente do trabalho de Méray, facto este que não é surpreendente num período que ocorreu logo após a Guerra Franco-Prussiana.

Um tratamento distinto do mesmo problema, e um dos mais conhecidos nos nossos dias, foi o prestado por Dedekind na forma do seu famoso ensaio *Stetigkeit und Irrationale Zahlen,* publicado em 1872, representando o ponto alto das suas pesquisas, iniciadas em Zurique em 1858 quando, ensinando Cálculo Diferencial, pela primeira vez tomou consciência da necessidade de uma discussão científica acerca do conceito de continuidade e foi levado a reconsiderar todo o problema da definição de número real.

Notemos que Dedekind, tal como Weierstrass, usou conjuntos infinitos de números racionais na sua construção de números reais.

Dedekind insistiu na visão de que os objectos matemáticos, aos quais chamamos números reais, são invenção do homem. Acreditava que isto era igualmente verdade para os números naturais e racionais, bem como para novos conceitos como a Teoria Algébrica Numérica.

Assim, Dedekind foi um dos proponentes da visão *criacionista* dos conceitos matemáticos. Esta visão mostra o quanto ele tinha abandonado a metafísica tradicional, fazendo um corte consciencioso com as ideias anteriores.

Além de propor uma construção aritmética dos números reais, acrescentou a questão do que esta construção deveria fazer com a ideia geométrica dos pontos numa linha recta, isto é, com a noção intuitiva de quantidade contínua.

Estava suficientemente claro que toda a razão entre segmentos de recta definia um *corte (Schnitt)* de números racionais, mas e inversamente? Será que todo o *corte* define uma razão possível entre segmentos de recta ou, se fixarmos um segmento unitário, todo o *corte* corresponde a um bem definido ponto numa linha?

A resposta a este impasse foi a criação do seguinte postulado:

> "Se todos os pontos numa linha recta caem em duas classes de tal forma que todo o ponto da primeira classe está à esquerda de todo o ponto da segunda, então existe um e um só ponto que produz esta decomposição de todos os pontos em duas classes, esta divisão da linha recta em duas partes". ([9], p. 11)

Na base da ordenação natural dos *cortes*, pode ser introduzida uma ordenação dos números reais. Atendendo a esta ordenação, o conjunto dos números reais satisfaz a denominada *condição de corte,* descrita pelo seguinte Teorema:

> Se o conjunto $\mathbb{R}$ de todos os números reais é decomposto em dois subconjuntos $A_1$ e $A_2$ tais que para todo o $\alpha_1 \in A_1$ e $\alpha_2 \in A_2$ se tem $\alpha_1 < \alpha_2$, então existe um único número $\alpha \in \mathbb{R}$ que produz este corte, isto é, tal que $A_1 = \{\beta \in \mathbb{R} : \beta < \alpha\}$ e $A_2 = \mathbb{R} \backslash A_1$ ou $A_2 = \{\beta \in \mathbb{R} : \beta > \alpha\}$ e $A_1 = \mathbb{R} \backslash A_2$.

O facto de que esta propriedade é válida para os números reais foi, para Dedekind, a garantia para a estreita analogia entre esta criação matemática e a noção intuitiva de quantidade contínua.

Ao conscienciosamente separar os conceitos de número real e quantidade contínua, Dedekind tomou uma decisão diferente da tomada por Hankel. Enquanto Hankel viu a continuidade do domínio dos números reais como uma razão para confiar na doutrina tradicional da quantidade, Dedekind revolucionou a versão desta propriedade de continuidade, transformando-a num elo de ligação entre a Geometria e a Aritmética dos números reais.

Até mesmo Weierstrass passou por cima deste ponto de uma forma engenhosa mas pouco clara. Contudo, a escolha de Dedekind dos *cortes* como o aspecto característico do contínuo foi, mais tarde, muito criticada.

Rodolf Lipschitz (1832 - 1903) e Heinrich Weber (1842 - 1913) foram os primeiros a apontar críticas à teoria dos números irracionais de Dedekind, através de correspondências que trocaram com o matemático.

Segundo Lipschitz, a teoria de Dedekind não possuía carácter inovador pois não diferia da que havia sido elaborada pelos gregos nos *Elementos,* livro V*,* a partir da definição 5 ([14], p. 114), acerca das grandezas incomensuráveis ([39], p. 116).

Sobre este assunto foram trocadas várias cartas entre os dois matemáticos, cada qual defendendo o seu ponto de vista (veja-se, [39]).

Esta discussão foi iniciada por Lipschitz em 1876, mas na actualidade vários autores, como por exemplo, Jean Louis Gardies (1925 - 2004), [16], Howard Stein (1911 - 1980), [41], e Leo Corry, [8], continuam a debruçar-se sobre esta controvérsia.

Mas, em todo o caso, todas estas exposições parecem ir de encontro à ideia defendida pelo próprio Dedekind:

> "(...) os princípios euclideanos por si só, sem a junção do princípio da continuidade que *não está* contido neles, são incapazes de fundamentar uma teoria

completa dos números reais como razões entre grandezas (...)."[1]

Na construção de Dedekind do conceito de número irracional, a noção de *corte* assume um papel fundamental, no entanto, as expressões utilizadas pelo matemático para referir-se à criação desse número são pouco claras, gerando até alguma contradição.

> "Sempre que um *corte* $(A_1, A_2)$ não seja produzido por nenhum número racional, criamos um novo número, um número *irracional* $\alpha$, que consideramos completamente definido por este *corte* $(A_1, A_2)$; diremos que o número $\alpha$ corresponde a este *corte*, ou que produz este *corte*." ([9], p. 15)

Nesta definição parece claro, tal como para Weber, que o número irracional não é nada mais do que o próprio *corte*, mas Dedekind em carta a Weber[2] defende que um número irracional não é um *corte*, é antes *algo* que corresponde ao *corte*. Afirma que o poder criativo que atribui à mente humana é justificável pela semelhança de todos os números. Justifica que existindo igualmente *cortes* produzidos por números racionais, não teria sentido, nesse caso, afirmar que um número racional seria idêntico ao *corte* que produz. Da mesma forma, não podemos dizer que um número irracional é um *corte*.

Dedekind estabeleceu uma correspondência entre *cortes* e números irracionais e com ela não pretendeu identificar as duas entidades mas sim assegurar que ambas verificam as mesmas propriedades.

Contudo, as palavras de Dedekind justificam o facto de não sabermos a entidade com a qual identificar um número irracional.

Note-se que Dedekind já havia feito algo do género quando comparou os números racionais com os pontos de uma linha recta.

Dedekind reconheceu que o facto de um número real ser definido por um *corte* acarreta algumas desvantagens, quando pretendeu verificar quais as propriedades dos números racionais que seriam válidas no conjunto dos números reais. Solucionou esta questão, enunciando o seguinte teorema:

> "Se o número $\lambda$ é o resultado de uma operação entre os números $\alpha, \beta, \gamma, ...$ e $\lambda$ pertence ao intervalo $L$, então podemos considerar intervalos $A, B, C, ...$, aos

[1] Carta de 10 de Junho de 1876 - cit. in [39], p. 121.

[2] Veja-se Carta de 24 de Janeiro de 1888 - cit. in [15], p. 835.

quais pertençam $\alpha, \beta, \gamma, ...$ de modo que, substituindo os números $\alpha, \beta, \gamma, ...$ por números arbitrários de $A, B, C, ...$, o resultado da operação aplicada a estes novos números é sempre um número do intervalo $L$."([9], p. 23)

Perante tamanha generalidade deste resultado Dedekind reconheceu ser necessário introduzir novos conceitos por forma a simplificar o seu enunciado e é sobre as noções de grandeza variável, função e valores limites que afirma deverem ser definidas as mais simples operações aritméticas.

Pierre Dugac (1926 - 2000) considerou notável este teorema para a época pelo facto de envolver leis de composição (veja-se [11], p. 46).

Segundo Dugac ([11], pp. 60 - 62) a teoria dos números irracionais elaborada por Dedekind teve uma grande aceitação por parte da comunidade matemática, inclusivamente, foram vários os matemáticos que consideraram esta teoria mais simples do que as de Weierstrass e de Cantor, publicadas no mesmo ano de 1872.

A popularidade, reconhecimento ou simplesmente o interesse pela obra de Dedekind, justificaram o facto do seu livro *Stetigkeit und Irrationale Zahlen* ter sido traduzido para inglês em 1901, russo em 1908, polaco em 1914, italiano em 1926 e até para japonês ([11], p. 62).

A forma como Dedekind respondeu à pergunta orientadora da sua obra: *Qual a essência da continuidade?* levou-o à construção do seu conceito de número irracional e permitiu que as suas ideias fossem difundidas por todo o mundo.

Assim, concluída a aritmetização da variável real, e tendo chegado ao número real por um caminho puramente lógico que teve início no número natural, decide-se a concordância das duas escalas (a numérica e a dos pontos da recta) à maneira de Cantor e de Dedekind, num postulado, afirmando a correspondência biunívoca entre os seus elementos ([5], p. 607).

## 1.3 Axiomatização dos Reais

Foi também no século XIX que se deu o aparecimento de sistemas de axiomas para vários tipos de estruturas matemáticas. Em particular, no final desse século foram desenvolvidos conjuntos de axiomas com o intuito de definir os números inteiros positivos e, como já referimos, um grande esforço foi efectuado no sentido de ser apresentada uma definição precisa de número real.

É evidente que o mais antigo sistema de axiomas conhecido é o de Euclides (300 a.C.), respeitante ao estudo da Geometria. Contudo, são muitos os matemáticos que, ao longo dos tempos, têm evidenciado que Euclides tomou como certas determinadas afirmações, em algumas das suas demonstrações, que não se encontravam explicitamente mencionadas na sua lista de axiomas e postulados.

Com os desenvolvimentos da Geometria não Euclideana os matemáticos reexaminaram a natureza dos vários axiomas e procuraram colocar a Geometria de Euclides sob uma base sólida e consistente.

A tentativa mais bem sucedida de construir um sistema de axiomas para o qual a Geometria Euclideana pudesse ser derivada, foi levada a cabo por David Hilbert.

Em 1899 Hilbert publicou a obra *Grundlagen der Geometrie*, que consistia essencialmente numa compilação das suas lições sobre Geometria Euclideana, apresentadas na Universidade de Göttingen.

O objectivo do seu trabalho consistia numa

> "tentativa para dar o enunciado dum sistema de axiomas *completo e tão simples quanto possível* para a geometria, e deduzir dele os teoremas geométricos mais importantes de tal modo que fique também claramente em evidência o significado dos diferentes grupos de axiomas e a projecção de cada um dos axiomas nas consequências que deles depois se tiram." ([21], p. xvii)

Hilbert, ao efectuar uma axiomatização do que lhe pareceu fundamental na noção de continuidade que a recta sugere, fê-lo de tal modo que a correspondência biunívoca, entre o conjunto dos números reais e os pontos da recta, está implicitamente assegurada.

O trabalho de Hilbert, supra citado, continha uma nova definição de número real, cuja estrutura lógica era diferente da maioria das definições anteriores.

Hilbert desenvolveu meios para estudar as consequências de grupos particulares de axiomas separadamente, tendo a sua caracterização do sistema dos números reais se apoiado em trabalhos de Hankel e Thomae.

Em contraste com as outras construções dos números reais, a abordagem de Hilbert não assentava em objectos que já eram conhecidos, tais como os números racionais. Em vez disso, proponha aos seus leitores que imaginassem um *sistema de entes* em que todas as propriedades (dos números racionais) eram satisfeitas, embora Hilbert nunca tenha conseguido provar a existência desse sistema.

A ideia de Hilbert consistia em começar com três termos indefinidos: ponto, linha e plano, e definir as relações existentes entre eles por meio de axiomas. Segundo Hilbert, eram os próprios axiomas que definiam estas relações e não necessitaríamos de qualquer tipo de intuição geométrica para levar a cabo a demonstração de um resultado.

Com efeito, Hilbert defendia que as três noções iniciais poderiam ser substituídas por quaisquer outras, desde que satisfizessem os axiomas.

A sua ideia de um sistema de axiomas era distinta das elaboradas por Euclides, e Aristóteles (384 - 322 a.C.). Os Gregos estipularam como verdadeiras certas afirmações que já as tinham intuitivamente compreendido, enquanto que Hilbert, por outro lado, delegou para o abstracto as propriedades desejadas, independentemente de qualquer interpretação concreta.

Hilbert dividiu os seus axiomas em cinco conjuntos: os axiomas de conecção, os de ordem, de paralelismo, de congruência, os de continuidade e os de completude.

O primeiro grupo, de sete axiomas, estabelecia as conexões existentes entre as suas concepções iniciais: ponto, linha e plano. O segundo grupo de axiomas permitia, segundo Hilbert, definir a ideia de segmento de recta $[AB]$ como sendo o conjunto de pontos que estão entre os pontos $A$ e $B$. O terceiro grupo de axiomas consistia unicamente na concepção de Hilbert do Axioma das Paralelas e o quarto grupo, dedicado à congruência, procurou definir explicitamente este termo, uma vez que o método adoptado por Euclides, e por alguns contestado, consistia em efectuar uma simples sobreposição.

O último grupo de axiomas contém dois que caracterizam a ideia básica de continuidade. O primeiro consiste no Axioma de Arquimedes, que estipula que dado um qualquer segmento de recta e uma qualquer unidade de medida, existe um inteiro $n$ tal que $n$ unidades de medida conduz a um segmento de recta maior que o segmento dado. Uma das consequências deste axioma, quando adicionado aos estipulados anteriormente, é que não existe limitação para o comprimento de uma linha recta.

O último axioma de Hilbert afirma que os pontos de uma recta estão em correspondência biunívoca com o conjunto dos números reais. Por outras palavras, não existem *buracos* na recta. Este axioma responde à objecção feita à construção Euclideana de um triângulo equilátero, de que não existia garantia de que os dois círculos construídos efectivamente se intersectavam, pois segundo este axioma não podem ser adicionados outros pontos a estes dois círculos, logo, estes não podem deixar de se intersectar.

Assim, Hilbert formulou o Axioma da Completude, axioma esse que em trabalhos modernos é usualmente substituído por outras condições de completude, tais como o Postulado dos Cortes de Dedekind ou a Condição da Completude das Métricas (isto é, a existência de Limite para todas as Sucessões de Cauchy).

Após estabelecer os diferentes grupos de axiomas, Hilbert prosseguiu provando que estes eram consistentes, isto é, que não poderia ser deduzida qualquer contradição a partir deles.

A sua ideia, à semelhança de outros matemáticos, ao mostrar que a Geometria não Euclideana não possuía contradições, era a de construir uma Geometria usando unicamente operações aritméticas, que satisfizesse os diferentes grupos de axiomas.

Assim, ao interpretar aritmeticamente qualquer conceito geométrico, Hilbert criou um modelo aritmético dos seus axiomas para a Geometria. Se os axiomas levassem a uma contradição geométrica, existiria uma análoga contradição em termos aritméticos. Consequentemente, assumindo que os axiomas para a aritmética eram consistentes, também o eram os axiomas geométricos.

Outra importante característica deste sistema de axiomas era a independência, isto é, a particularidade de que nenhum axioma pode ser deduzido a partir dos restantes. Apesar de Hilbert não ter demonstrado completamente a independência do seu sistema de axiomas, mostrou que vários grupos de axiomas eram independentes, construindo interessantes modelos em que um grupo de axiomas era satisfeito e outros não.

Hilbert não tratou directamente a questão da completude do seu sistema de axiomas, isto é, o facto de se poder mostrar que qualquer afirmação estabelecida pode ser verdadeira ou falsa. Contudo, acreditamos que Hilbert confiava na completude dos seus axiomas e, posteriormente, vários matemáticos mostraram que todos os teoremas da Geometria Euclideana poderiam ser provados usando os axiomas de Hilbert.

A importância do trabalho desenvolvido por Hilbert prende-se não só com as respostas apresentadas às objecções relacionadas com o esquema dedutivo de Euclides, mas essencialmente com o reforço da ideia de que qualquer *espaço* matemático deverá ter por base determinados termos não definidos e um conjunto de axiomas especificando as relações existentes entre eles.

Assim verificamos que apesar de inicialmente o trabalho de Hilbert consistir numa tentativa de desenvolver um tratamento completo e consistente dos axiomas da geometria, ao longo das várias edições, procurou sintetizar estes axiomas no contexto da análise dos números reais, a qual explicaremos no último capítulo deste trabalho.

Notemos que foram vários os sistemas de axiomas desenvolvidos com o intuito de fundamentar várias áreas da matemática. O trabalho de Hilbert constitui um culminar desse processo na medida em que conseguiu justificar as ideias transmitidas pelo modelo dos elementos de Euclides, fazendo com que este continuasse a ser o modelo matemático adoptado e, uma possível confirmação disso é que, um século mais tarde as suas ideias ainda continuam a ser válidas.

# Capítulo 2

# Construção dos números reais utilizando a Noção de *Corte* ou *Secção*

Neste Capítulo será elaborada uma construção do Conjunto dos Números Reais, partindo do Conjunto dos Números Racionais, e tendo por base a noção de *corte* ou *secção* utilizada, pela primeira vez, por Richard Dedekind, aquando da sua Construção dos Números Reais publicada em 1872.

Passado mais de um século, e com a Teoria dos Conjuntos aceite na matemática, tentamos manter, neste Capítulo, o estilo original de Dedekind e a nossa exposição da sua teoria não difere muito da apresentada pelo autor .

Apesar de Dedekind não ter enunciado os Teoremas, Definições e Propriedades como tal, optamos pelo uso dessa terminologia, para uma melhor interpretação da sua obra e para podermos alcançar o objectivo deste Capítulo: mostrar que o conjunto construído por Dedekind é um Corpo Ordenado Completo.

Tendo em conta que Dedekind pretendeu criar uma base aritmética sólida para o Conjunto dos Números Reais, a primeira secção - *Properties of Rational Numbers* da sua obra *Essays on the theory of numbers*, [9], é relativa à reformulação em termos aritméticos das propriedades do conjunto que constitui a base da sua construção: o Corpo dos Números Racionais, que denota por $R$, mas que aqui denotaremos por $Q$. Assim, inicia a sua construção com três propriedades dos números racionais e com as correspondentes propriedades para pontos numa linha recta e é a partir dessa correspondência que Dedekind reflecte sobre a incompletude do Conjunto dos Números Racionais, ampliando este conjunto com a criação de novos números com o objectivo de que este adquira a mesma completude que uma linha.

Tendo por base a definição de *corte* ou *secção*, e demonstrando que nem todos os *cortes* são produzidos por Números Racionais, Dedekind constrói um novo conjunto, o Conjunto dos Números Reais, formado por todos os *cortes*.

As operações entre *cortes* não foram explicitadas na sua obra, à excepção da soma, no entanto, autores posteriores ampliaram o trabalho levado a cabo por Dedekind, apresentando toda a Aritmética do Conjunto dos Números Reais.

Em 1930 Edmund Landau (1877 - 1938) apresenta na sua obra *Foundations of Analysis*, uma construção do Conjunto dos Números Reais igualmente baseada na noção de *corte* ou *secção* partindo, não do Conjunto de Números Racionais como Dedekind, mas do Conjunto dos Números Naturais utilizando a Axiomática de Peano.

Edmund Landau assume na obra supra citada a influência do trabalho de Dedekind dedicando inclusivamente a secção 5 do Capítulo IV ao que denominou de Teorema Fundamental de Dedekind.

Contudo, a identificação corrente de que este sistema de números constitui um Corpo Ordenado Completo só se tornou mais tarde usual nos livros de texto de análise e cálculo, como por exemplo, no livro de texto de Michael Spivak em 1967.

Assim, tendo por base o livro de Spivak vamos mostrar que o Conjunto dos Números Reais, construído usando a noção de *corte* ou *secção,* é um Corpo Ordenado Completo.

## 2.1 Analogia entre os números racionais e os pontos de uma linha recta

Como já havia sido referido anteriormente, Dedekind estabeleceu algumas propriedades referentes aos números racionais. Nomeadamente, a relação de ordem em $Q$, e estabelece como válidas as propriedades de transitividade e densidade, bem como uma definição não formalizada de *corte* ou *secção,* realçando que o conjunto dos racionais forma um domínio infinito totalmente ordenado.

Na secção I - *Properties of Rational Numbers*, do livro *Essays on the theory of numbers,* Dedekind, com o intuito de expressar que dois símbolos $a$ e $b$ representam um e o mesmo número racional, escreve-o na forma $a = b$ bem como $b = a$.

Dois números racionais $a$ e $b$ são diferentes se a diferença $a - b$ corresponde a um valor positivo ou negativo, indicando que $a$ é maior do que $b$ ou que $b$ é maior do que $a$, respectivamente. No caso de $a$ ser maior do que $b$ diz-se que $b$ é menor do que $a$, o que é indicado pelos símbolos $a > b$ , $b < a$.

Partindo do pressuposto de que dois números podem diferir, Dedekind definiu as seguintes propriedades para os números racionais:

**Propriedade 2.1.1** *"(I) Se $a > b$, e $b > c$ então $a > c$. Sempre que $a$, $c$ são dois números diferentes (ou desiguais), e $b$ é maior do que um e menor do que o outro, iremos, sem hesitação devido à sugestão das ideias geométricas, expressar brevemente este aspecto afirmando: $b$ está entre os dois números $a$, $c$.*

*(II) Se $a$, $c$ são dois números diferentes, existem infinitos números diferentes entre $a$, $c$.*

*(III) Se $a$ é um número qualquer, então todos os números do sistema $Q$ caem em duas classes, $A_1$ e $A_2$, cada uma delas contendo infinitos elementos; a primeira classe $A_1$ compreende todos os números $a_1$ que são $< a$, a segunda classe $A_2$ compreende todos os números $a_2$ que são $> a$; o próprio número $a$ poderá pertencer à primeira ou à segunda classe, sendo respectivamente o maior número da primeira classe ou o menor número da segunda. Em qualquer um dos casos a separação do sistema $Q$ nas duas classes $A_1$, $A_2$ é tal que todo o número da primeira classe $A_1$ é menor do que todo o número da segunda classe $A_2$." ([9], p. 6)*

Considerando $p$ e $q$ como dois pontos diferentes numa linha recta $L$, e distinguindo por *direita* e *esquerda* as duas posições opostas de quaisquer dois pontos numa linha recta, Dedekind estipulou as propriedades anteriormente citadas para os números racionais, no que diz respeito a pontos sobre uma linha recta.

**Propriedade 2.1.2** *"(I) Se $p$ está situado à direita de $q$, e $q$ à direita de $r$, então $p$ está à direita de $r$; e dizemos que $q$ está situado entre os pontos $p$ e $r$.*

*(II) Se $p$, $r$ são dois pontos distintos, então existe uma infinidade de pontos situados entre $p$ e $r$.*

*(III) Se $p$ é um ponto definido em $L$, então todos os pontos em $L$ pertencem a duas classes, $P_1$, $P_2$ cada qual contendo infinitos elementos; a primeira classe $P_1$ contém todos os pontos $p_1$, que estão à esquerda de $p$, e a segunda classe $P_2$ contém todos os pontos $p_2$, que estão à direita de $p$; o próprio ponto $p$ poderá pertencer à primeira ou à segunda classe. Em qualquer um dos casos a separação da linha recta $L$ nas duas classes ou porções $P_1$, $P_2$ é tal que todo o ponto da primeira classe $P_1$ está à esquerda de todo o ponto da segunda classe $P_2$." ([9], p. 7)*

A analogia entre os números racionais e os pontos de uma linha recta $L$, torna-se uma verdadeira correspondência quando, sobre a linha, seleccionamos um ponto que podemos denominar de *origem,* **o**, e uma determinada unidade de comprimento, com o intuito de medir os seus segmentos. Assim, para todo o número racional $a$ poderá ser construído o correspondente comprimento e se, por outro lado, deslocarmo-nos na linha recta, para a direita ou esquerda de **o**, conforme $a$ é positivo ou negativo, obtemos um determinado ponto $p$, o qual será denominado de ponto correspondente ao número racional $a$.

Atendendo ao facto que foi estabelecida correspondência entre o número racional zero e o ponto **o**, podemos afirmar que para todo o número racional $a$, isto é, para todo o elemento em $Q$, corresponde um e um só ponto $p$, isto é, um elemento de $L$.

A dois números $a$, $b$ corresponde, respectivamente, dois pontos $p$, $q$ e, obviamente, se $a > b$, então $p$ está situado à direita de $q$. Assim, as propriedades citadas anteriormente, *(I)*, *(II)* e *(III)*, respeitantes a números racionais, correspondem completamente às propriedades *(I)*, *(II)* e *(III)*, respeitantes a pontos numa linha recta.

## 2.2 Continuidade de uma linha recta

De grande importância é o facto de que, numa linha recta $L$ existem infinitos pontos que não correspondem aos números racionais. Com efeito, se a um ponto $p$ corresponder um número racional $a$ então, como é sabido o comprimento $\mathbf{o}p$ é comensurável com a unidade de medida utilizada na construção, isto é, existe um terceiro comprimento, denominado de *medida comum*, segundo o qual estes dois comprimentos são múltiplos.

No entanto, na Grécia Antiga, já era conhecido, e até demonstrado, que existem comprimentos incomensuráveis com a unidade de medida dada, por exemplo, a diagonal de um quadrado cujo lado é igual à medida de comprimento utilizada ([2], p. 203).

Se colocarmos sobre uma recta um comprimento do tipo descrito no parágrafo anterior, a partir do ponto **o**, obtemos como extremo um número que não é racional. Uma vez que é facilmente demonstrado que existem infinitos comprimentos que são incomensuráveis com a unidade de medida, podemos afirmar que, "a linha recta $L$ é infinitamente mais rica em elementos - pontos do que o domínio $Q$ dos números racionais em elementos - números". ([9], p. 9)

Então, o domínio dos números racionais revelou-se insuficiente e tornou-se absolutamente necessário que o conjunto $Q$, construído pela criação de números racionais, seja "alargado" pela criação de novos números, tal que o novo conjunto adquira a completude, ou digamos, a mesma *continuidade* que uma linha recta.

A comparação acima descrita do domínio $Q$, dos números racionais, com uma linha recta, levou-nos a reconhecer a existência de uma certa incompletude ou descontinuidade de $Q$. No entanto, estamos a pressupor a continuidade da linha recta que é explicada por Dedekind, da seguinte forma:

> "... nós atribuímos à recta a qualidade de ser completa, sem lacunas, ou seja, contínua. Mas esta continuidade, em que consiste? Tudo deve depender na resposta a esta questão, e somente através dela obteremos uma base científica para a investigação de todos os domínios contínuos." ([9], p. 10)

Naturalmente, não se consegue nada quando, para explicar a continuidade, se fala, de um modo vago, de uma conexão ininterrupta nas suas partes mais pequenas. Para tal Dedekind procurou e formulou uma propriedade característica e precisa de continuidade que serviu de base a deduções verdadeiras e próprias.

Verificou que, todo o ponto da recta determina uma decomposição da mesma em duas partes, de tal natureza que todo o ponto de uma delas está à esquerda de todo o ponto da outra.

Dedekind observou a essência da continuidade na inversão desta propriedade e, portanto, no seguinte princípio:

> "Se todos os pontos da linha recta pertencerem a duas classes tal que todo o ponto da primeira classe está à esquerda de todo o ponto da segunda classe, então existe um e um só ponto que produz esta divisão de todos os pontos em duas classes, separando a linha recta em duas porções". ([9], p. 11)

Dedekind acreditava não errar, ao admitir que a exactidão do princípio enunciado seria imediatamente aceite por todos. No entanto, afirmou que a maior parte dos seus leitores teriam uma grande desilusão ao tomar conta de que foi esta banalidade que revelou todo o mistério da continuidade.

A este propósito observou que cada um deveria considerar o princípio enunciado tão evidente e tão concordante com a sua própria representação da recta, pois considerava que, nem ele, nem ninguém conseguiria dar a este princípio uma qualquer demonstração.

Dedekind considerou que a propriedade da recta, expressa por este princípio, não era mais do que um axioma, e é sob a forma deste axioma que pensou a continuidade da recta.

Não existe, por parte de Dedekind, referência à demonstração da unicidade do ponto determinado pelo axioma, no entanto, esta é feita por redução ao absurdo com base nas alíneas *(II)* e *(III)* da Propriedade 2.1.2, como se mostra de seguida.

Suponhamos que $p$ e $p'$ são dois pontos distintos que produzem a divisão da recta em duas classes $L_1$ e $L_2$, de modo que todo o ponto de $L_1$ está à esquerda de todo o ponto de $L_2$, e consideremos, sem perda de generalidade, que $p$ está à esquerda de $p'$. Pela alínea *(II)*, da propriedade 2.1.2, existem infinitos pontos $p''$ compreendidos entre $p$ e $p'$, e como cada um destes pontos $p''$ está situado à direita de $p$ e à esquerda de $p'$, podemos afirmar, invocando a alínea *(III)*, que $p''$ é, respectivamente um ponto de $L_2$ e de $L_1$. Assim, obtemos um absurdo, visto que pelo princípio da continuidade da linha recta, a construção das classes $L_1$ e $L_2$ é feita supondo que todo o ponto de $L_1$ se situa à esquerda de todo o ponto de $L_2$.

## 2.3 Construção dos Números Irracionais

Como já foi estabelecido, todo o número racional $a$ origina uma separação do conjunto $Q$ em duas classes tais que todo o número $a_1$, da primeira classe $A_1$, é menor do que todo o número $a_2$, na segunda classe $A_2$; o número $a$ é igualmente o maior número da classe $A_1$ ou o menor número da classe $A_2$. Assim, Dedekind definiu *corte* ou *secção* da seguinte maneira:

**Definição 2.3.1** *Uma qualquer separação do conjunto $Q$ em duas classes, $A_1$ e $A_2$, tal que todo o número de $A_1$ é menor do que todo o número em $A_2$ consiste numa secção (Schnitt), que é denotada por $(A_1, A_2)$.*

Com o intuito de tornar esta construção mais clara, reservaremos o termo *corte* para nos referirmos à divisão da recta em duas classes e utilizaremos o termo *secção* quando nos referimos à separação do conjunto $Q$, dos números racionais.

Nem todas as *secções* são produzidas por números racionais. Com efeito, Dedekind provou, do seguinte modo, que existem infinitas *secções* que não são produzidas por números racionais.

Sendo $d$ um inteiro positivo, diferente de um quadrado perfeito, então existe um inteiro positivo $p$, tal que:

$$p^2 < d < (p+1)^2 .$$

Se considerarmos a segunda classe $A_2$, constituída por todos os números racionais positivos $a_2$, cujo quadrado é maior do que $d$ e a primeira classe $A_1$, constituída por todos os outros números racionais $a_1$, esta separação forma a *secção* $(A_1, A_2)$, isto é, todo o número $a_1$ é menor do que todo o número $a_2$.

Com efeito, se $a_1 = 0$, ou é negativo, então é obvio que $a_1$ é menor do que todo o número $a_2$, pois, por definição, este último é positivo.

Se por outro lado, $a_1$ é positivo e o seu quadrado é menor ou igual a $d$ então, temos sempre que $a_1$ é menor do que qualquer número positivo $a_2$, cujo quadrado é maior do que $d$.

Bastará então, mostrar que $(A_1, A_2)$ não é produzido por nenhum número racional, para que se conclua que existe um número infinito de *secções* que não são originadas por números racionais.

Dedekind começa por mostrar, primeiramente, que não existe nenhum número racional cujo quadrado seja igual a $d$.

Suponhamos, com vista a um absurdo, que existe um número racional nessas condições, então existem dois inteiros positivos, $t$ e $u$, que satisfazem a equação $t^2 - du^2 = 0$ e podemos supor que $u$ é o menor número inteiro positivo possuindo a propriedade de que o seu quadrado, multiplicado por $d$, pode ser convertido no quadrado de um determinado inteiro $t$.

Uma vez que, evidentemente, $pu < t < (p+1)\,u$, o número $u' = t - pu$ é um inteiro positivo certamente menor do que $u$.

Se considerarmos $t' = du - pt$, $t'$ é, do mesmo modo, um inteiro positivo e temos

$$t'^2 - du'^2 = \left(p^2 - d\right)\left(t^2 - du^2\right) = 0$$

o que é contrário à suposição respeitante a $u$.

Obtivemos então, números $t'$ e $u'$, com $u' < u$ tais que $d = \left(\frac{t}{u}\right)^2$, o que é um absurdo.

Donde, o quadrado de qualquer número racional $x$ é menor do que $d$ ou maior do que $d$, mas nunca igual a $d$.

Numa segunda fase da demonstração, Dedekind prova que na classe $A_1$ não existe máximo, nem existe mínimo na classe $A_2$.

Se considerarmos $y = \frac{x\left(x^2+3d\right)}{3x^2+d}$ temos $y - x = \frac{2x\left(d-x^2\right)}{3x^2+d}$ e $y^2 - d = \frac{\left(x^2-d\right)^3}{\left(3x^2+d\right)^2}$.

Se supusermos que $x$ é um número positivo da classe $A_1$, então $x^2 < d$, e daqui $y > x$ e $y^2 < d$. Logo, do mesmo modo, $y$ pertence à classe $A_1$ e, portanto a classe $A_1$ não admite máximo.

Mas se supusermos que $x$ é um número pertencente à classe $A_2$, então $x^2 > d$, donde $y < x$, $y > 0$ e $y^2 > d$. Então, $y$ pertence à classe $A_2$ e, portanto a classe $A_2$ não admite elemento mínimo.

Assim, consequentemente, esta *secção* não é produzida por um número racional ([9], p. 13).

Dedekind assume que sempre que estamos perante uma *secção* produzida por um número que não seja racional, criamos um novo número, um número irracional $\alpha$, o qual está completamente definido por esta *secção*. Afirma que o número $\alpha$ corresponde a esta *secção* ou que produz esta *secção*.

As expressões utilizadas por Dedekind quando faz a criação de um número irracional são consideradas, por vários autores, como sendo vagas e pouco precisas. Uma vez que nesta definição parece, tal como pareceu a Pierre Dugac que a segunda parte da definição entra em contradição com a primeira ([11], p. 43).

Ora, o número $\alpha$, considerou-se *completamente definido* pelo *corte* mas, Dedekind afirma de seguida que o *corte* é produzido pelo número $\alpha$.

Assim, ao afirmar que o irracional $\alpha$ origina o *corte*, comete uma imprecisão: a suposição à *priori* que o número $\alpha$ existe.

Para explicar a sua crítica, Dugac compara os *cortes* originados por números racionais àqueles originados por irracionais.

Relativamente aos números racionais, Dedekind afirma no início da Secção IV - *Creation of irrational numbers* que: "(...) todo o número racional $a$ produz um *corte* (...)." ([9], p. 13)

Esta afirmação não levanta objecções pois por um lado o número racional já existe antes de se criar o *corte* e, além disso, o modo como são formados os *cortes*, a partir dos elementos de $Q$, conjunto dos números racionais, justifica totalmente o uso da palavra *criar.*

Mas, segundo Dugac, não podemos afirmar o mesmo quando o *corte* é originado por um número irracional, pois a palavra *criar* pressupõe uma certa existência à *priori* de $\alpha$, quando na realidade é o número $\alpha$ que é criado pelo *corte.*

Contudo, veremos nas secções seguintes que a correspondência entre *cortes* e números (racionais e irracionais) ficará perfeitamente caracterizada sem a utilização da expressão de Dedekind, no que diz respeito ao facto de um número produzir um *corte.*

Tal como Dedekind, outros autores posteriores, nomeadamente Landau, [25], e Spivak ([40], pp. 494 - 506), tendo ao seu dispor o conjunto dos números racionais construiram um novo conjunto, com estrutura de Corpo, ao qual denominaram de Conjunto dos Números Reais.

A estratégia de construção utilizada para definir números reais requer a descrição destes em termos dos números racionais. A observação de que um número real pode ser completamente determinado pelo conjunto dos números racionais menores do que ele sugere uma simples e atractiva possibilidade: um número real pode ser descrito como uma colecção de números racionais.

Contudo, com o objectivo de tornar esta proposta efectiva devem ser encontrados meios de descrever o conjunto dos números racionais menores do que um determinado número real, sem mencionar os números reais, que, segundo Spivak, "são nada mais do que produtos heurísticos da nossa imaginação matemática" ([40], p. 494)

Spivak utiliza a seguinte propriedade dos números racionais que são menores do que um número real $\alpha$. Se considerarmos $A$ o conjunto de números racionais menores do que $\alpha$ então:

**Propriedade 2.3.1** *Se $x$ pertence a $A$ e $y$ é um número racional tal que $y < x$, então $y$ pertence a $A$.*

Além desta propriedade o conjunto $A$ deve possuir algumas outras.

Uma vez que deve existir algum número racional $x < \alpha$, o conjunto $A$ deve ser não vazio. Da mesma forma, uma vez que deve existir algum número racional $x > \alpha$, o conjunto $A$ não deverá coincidir com o conjunto $Q$.

Finalmente, se $x < \alpha$, então deve existir outro número racional $y$ com $x < y < \alpha$, então $A$ não deve conter máximo.

Se temporariamente tomarmos os números reais tais como os conhecemos, então não é difícil verificar que o conjunto $A$ com estas propriedades é de facto o conjunto dos números racionais menores do que um determinado número real $\alpha$.

Poderemos então, sem hesitações, formular a seguinte definição (presente em [40], p. 495), que segue as ideias de Dedekind:

**Definição 2.3.2** *Um número real é um conjunto $\alpha$, de números racionais, com as seguintes propriedades:*

*(1) Se $x$ está em $\alpha$ e $y$ é um número racional com $y < x$, então $y$ está também em $\alpha$.*

*(2) $\alpha \neq \emptyset$.*

*(3) $\alpha \neq Q$.*

*(4) Não existe máximo em $\alpha$, por outras palavras, se $x$ está em $\alpha$, então existe algum $y$ em $\alpha$ com $y > x$.*

O facto do conjunto $A$ ser considerado na definição como sendo $\alpha$, indica uma preocupação conceptual e notacional.

Assim, analogamente à concepção tomada por Dedekind, um número real é, por definição, um conjunto de números racionais. O que significa, em particular, que um número racional (um elemento de $Q$) não é um número real, no entanto todo o número racional $x$ possui um correspondente número real, nomeadamente $\{y \in Q : y < x\}$.

Spivak ([40], p. 495) afirma que após completar a construção dos números reais, podemos mentalmente excluir os elementos de $Q$ e assumir que $Q$ irá, a partir de agora, denotar estes conjuntos em especial.

A partir de agora, será necessário trabalhar simultaneamente com números racionais, números reais (conjuntos de números racionais) e até com conjuntos de números reais (conjuntos de conjuntos de números racionais). Alguma confusão é talvez inevitável mas uma notação própria deverá minimizar este facto.

## 2.4 Continuidade do Domínio dos Números Reais

Com vista a obter uma base para a ordenação de todos os números reais, isto é, de todos os números racionais e irracionais, é necessário estabelecer a relação entre quaisquer duas *secções* $(A_1, A_2)$ e $(B_1, B_2)$, produzidas por dois quaisquer números $\alpha$ e $\beta$. Estas relações entre *secções*, estabelecidas por Dedekind, serão tratadas, comparativamente com uma outra interpretação do conceito de *secção*.

Em consequência das distinções estabelecidas, o sistema $\widehat{R}$, de todos os números reais, segundo Dedekind, forma um domínio bem ordenado de uma dimensão, o que significa que as seguintes propriedades, são verificadas:

**Propriedade 2.4.1** *"(I) Se $\alpha > \beta$, e $\beta > \gamma$, então temos $\alpha > \gamma$. Diremos que o número $\beta$ está entre $\alpha$ e $\gamma$.*

*(II) Se $\alpha, \gamma$ são dois quaisquer números distintos, então existem infinitos números distintos $\beta$ que estão entre $\alpha, \gamma$.*

*(III) Se $\alpha$ é um número qualquer então todos os números do sistema $\widehat{R}$ pertencem a duas classes $U_1$ e $U_2$ cada qual contendo infinitos elementos; a primeira classe $U_1$ compreende todos os números $\alpha_1$ menores que $\alpha$, a segunda $U_2$ compreende todos os números $\alpha_2$ maiores do que $\alpha$; o próprio número $\alpha$ pode pertencer à primeira ou à segunda classe, e é respectivamente o maior elemento da primeira ou o menor elemento da segunda classe. Em qualquer um dos casos a separação do sistema $\widehat{R}$ em duas classes $U_1, U_2$ é tal que todo o número da primeira classe $U_1$ é menor do que todo o número da segunda classe $U_2$ e dizemos que esta separação é produzida pelo número $\alpha$." ([9], p. 19)*

Além destas propriedades, contudo, o domínio $\widehat{R}$ é igualmente contínuo, isto é, o seguinte Teorema é válido:

> *(IV) "Se o sistema $\widehat{R}$ de todos os números reais for dividido em duas classes $U_1, U_2$ tal que todo o número $\alpha_1$ da classe $U_1$ é menor do que todo o número $\alpha_2$ da classe $U_2$, então existe um e um só número $\alpha$ pelo qual esta separação é produzida."* ([9], p. 20)

Seguidamente apresentamos a Demonstração deste Teorema, feita por Dedekind.

Pela separação ou *secção* de $\widehat{R}$ em $U_1$ e $U_2$ obtemos, ao mesmo tempo a *secção* $(A_1, A_2)$ do sistema $Q$ de todos os números racionais que é definido como sendo tal que: $A_1$ contém todos os números racionais da classe $U_1$ e $A_2$ todos os outros números racionais, isto é, todos os números racionais da classe $U_2$.

Seja $\alpha$ o número perfeitamente definido que produz esta *secção* $(A_1, A_2)$. Se $\beta$ é um qualquer número diferente de $\alpha$, então existem sempre infinitos números racionais $c$ que estão entre $\alpha$ e $\beta$.

Se $\beta < \alpha$, então $c < \alpha$; logo $c$ pertence à classe $A_1$ e consequentemente, também à classe $U_1$, e uma vez que $\beta < c$ então $\beta$ pertence igualmente à mesma classe $U_1$, pois todo o número em $U_2$ é maior do que todo o número $c$ em $U_1$.

Mas se $\beta > \alpha$, então $c > \alpha$; logo $c$ pertence à classe $A_2$ e consequentemente, também à classe $U_2$, e uma vez que $\beta > c$ então $\beta$ pertence igualmente à mesma classe $U_2$, pois todo o número em $U_1$ é menor do que todo o número $c$ em $U_2$.

Uma vez que todo o número $\beta$ diferente de $\alpha$ pertence à classe $U_1$ ou à classe $U_2$, conforme $\beta < \alpha$ ou $\beta > \alpha$; consequentemente $\alpha$ é ele próprio o maior número em $U_1$ ou o menor número em $U_2$, isto é, $\alpha$ é o número, e obviamente o único número, pelo qual a separação de $Q$ em duas classes $U_1, U_2$ é produzida.

## 2.5 Operações com Números Reais

Para reduzir quaisquer operações com dois números reais $\alpha$ e $\beta$ a operações com números racionais, Dedekind estabelece que, é apenas necessário a partir das *secções* $(A_1, A_2)$, $(B_1, B_2)$ produzidas pelos números $\alpha$ e $\beta$ no sistema $Q$ definir a *secção* $(C_1, C_2)$ a qual corresponde ao resultado da operação, $\gamma$.

Assim, para a adição de números reais estabelece que:

**Definição 2.5.1** *"Se $c$ é um qualquer número racional, colocamo-lo na classe $C_1$, de forma que existam dois números $a_1$ em $A_1$ e $b_1$ em $B_1$ tal que a sua soma $a_1 + b_1 \geqq c$; todos os outros números racionais devem ser colocados na classe $C_2$." ([9], p. 21)*

Esta separação de todos os números racionais em duas classes $C_1, C_2$ evidentemente forma uma *secção*, uma vez que todo o número $c_1$ em $C_1$ é menor do que todo o número $c_2$ em $C_2$.

Se $\alpha$ e $\beta$ são racionais, então todo o número $c_1$, contido em $C_1$ é menor ou igual a $\alpha + \beta$, pois $a_1 \leqq \alpha$, $b_1 \leqq \beta$, e, consequentemente, $a_1 + b_1 \leqq \alpha + \beta$. Além disso, se estivessem contidos em $C_2$ um número $c_2 < \alpha + \beta$, pois $\alpha + \beta = c_2 + p$, onde $p$ é um número racional positivo, então teríamos:

$$c_2 = \left(\alpha - \frac{1}{2}p\right) + \left(\beta - \frac{1}{2}p\right),$$

o que contradiz a definição do número $c_2$, pois $\alpha - \frac{1}{2}p$ é um número em $A_1$, e $\beta - \frac{1}{2}p$ um número em $B_1$; consequentemente todo o número $c_2$ contido em $C_2$ é $\geqq \alpha + \beta$.

Assim, neste caso, a *secção* $(C_1, C_2)$ é produzida pela soma $\alpha + \beta$. Assim não violamos a definição que se mantém na aritmética dos números racionais se em todos os casos entendermos pela soma $\alpha + \beta$ de quaisquer dois números reais $\alpha, \beta$ aquele número $\gamma$ pelo qual a *secção* $(C_1, C_2)$ é produzida. Se apenas um dos dois números $\alpha, \beta$ é racional, por exemplo $\alpha$, é fácil verificar que não existe diferença com a soma $\gamma = \alpha + \beta$, consoante o número $\alpha$ é colocado na classe $A_1$ ou na classe $A_2$.

Assim como a soma é definida, Dedekind afirma podermos definir as outras operações aritméticas, ditas elementares, como por exemplo, diferenças, produtos, quocientes, potências, raízes, logaritmos, e desta forma, chegar a demonstrações de teoremas (como, por exemplo, $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$), o qual, no seu entender, não havia ainda sido estabelecido.

O excessivo comprimento que se teme na definição de operações mais complicadas está inerente, em parte, à natureza do objecto mas pode, na maioria das vezes, ser evitado. Dedekind afirma ser muito útil nesta conexão a noção de intervalo, isto é, um sistema $A$ de números racionais possuindo a seguinte propriedade característica:

**Propriedade 2.5.1** *"Se $a$ e $a'$ são números do sistema $A$, então todos os números racionais que estão entre $a$ e $a'$ estão contidos em $A$. O sistema $Q$ de todos os números* *racionais, bem como as duas classes de qualquer secção são intervalos. Se existe um número racional* $a_1$ *que é menor e um número racional* $a_2$ *que é maior do que qualquer número de um intervalo* $A$*, então* $A$ *é denominado de intervalo finito; então existem infinitos números na mesma condição que* $a_1$ *e infinitos números na mesma condição que* $a_2$*; todo o domínio* $Q$ *é assim dividido em três partes* $A_1, A, A_2$ *e existem dois números racionais ou irracionais perfeitamente definidos* $\alpha_1, \alpha_2$*, que podem ser denominados respectivamente de limites inferior ou superior (ou menor e maior) do intervalo; o limite inferior* $\alpha_1$ *é determinado pela secção pela qual o sistema* $A_1$ *forma a primeira classe e o superior* $\alpha_2$ *pela secção pelo qual o sistema* $A_2$ *forma a segunda classe. Para todo o número racional ou irracional* $\alpha$ *entre* $\alpha_1$ *e* $\alpha_2$*, pode ser dito que está dentro do intervalo* $A$*. Se todos os números de um intervalo* $A$ *são igualmente números de um intervalo* $B$*, então* $A$ *diz-se parcela de* $B$*." ([9], p. 22)*

Dedekind, considera ainda necessárias extensas considerações quando tentamos adaptar os numerosos teoremas da aritmética dos números racionais a quaisquer números reais, por exemplo, o Teorema $(a+b)\,c = ac + bc$.

Dedekind considera fácil verificar que tudo se resume a mostrar que as operações aritméticas possuem uma certa continuidade. Esta afirmação pode ser expressa, segundo este autor, na forma do seguinte teorema geral:

**Teorema 2.5.1** *"Se o número* $\lambda$ *é o resultado de uma operação entre os números* $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ *e* $\lambda$ *pertence ao intervalo* $L$*, então os intervalos* $A, B, C, \ldots$ *podem ser tomados de forma que incluam* $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ *de modo que substituindo os números* $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ *por números arbitrários de* $A, B, C, \ldots$ *o resultado da operação aplicada a estes novos números é sempre um número do intervalo* $L$*." ([9], p. 23)*

Dedekind reconhece a necessidade da introdução de novos conceitos com o objectivo de simplificar o seu enunciado, bem como justificar a generalidade do mesmo. Com efeito, afirma que as mais simples operações aritméticas devem definir-se sobre as noções de *grandeza variável, função* e *valores limite* que, no entanto, não aborda na sua obra.

Apesar de Dedekind apenas ter definido, de uma forma explícita, a soma de números reais, outros autores (veja-se, por exemplo, [25], pp. 70 - 89 ou [40], pp. 497 - 504), tendo por base a mesma definição, definiram mais do que isso, como veremos de seguida.

Em 1930, Edmund Landau apresenta no Capítulo III da sua obra *Foundations of Analysis*, [25], a definição de *corte* ou *secção*, à semelhança do que foi feito por Dedekind e que não é mais do que a Definição 2.3.2 escolhida por Spivak.

**Definição 2.5.2** *"Um conjunto de números racionais denomina-se corte se:*

*1) contém um número racional, mas não contém todos os números racionais;*

*2) todos os números racionais do conjunto são menores do que todos os números racionais que não pertencem ao conjunto;*

*3) não possui máximo (i. e. um número que seja maior do que qualquer outro número pertencente ao conjunto)". ([25], p. 43)*

Landau utilizou a mesma terminologia que Dedekind ao referir-se às classes produzidas por esta separação do Conjunto dos Números Racionais. Com efeito, Landau acrescenta, após a definição anterior que:

> "Vamos também utilizar o termo "classe minorante" para um conjunto com as propriedades anteriormente referidas, e o termo "classe majorante" para o conjunto de todos os números racionais que não estão contidos na classe minorante. Os elementos dos dois conjuntos serão, igualmente, chamados de "minorantes" e "majorantes", respectivamente." ([25], p. 43)

Landau estabelece igualmente no Capítulo III a Ordenação entre *cortes* e as operações aritméticas entre estes, nomeadamente a Adição, a Subtracção, a Multiplicação e a Divisão.

Na última secção deste Capítulo, Landau estabelece a distinção entre *cortes* racionais, produzidos por números racionais e *cortes* integrais, produzidos por números inteiros e assume que os números racionais, são os *cortes* para os quais existe o menor dos majorantes $\alpha$ e que este $\alpha$ é então o *corte* ([25], p. 64).

Analogamente a Dedekind, Landau assume, em termos de uma definição que "todo o corte que não é um número racional é denominado de número irracional." ([25], p. 67)

Aquando da definição da multiplicação entre *cortes,* Landau prova que sendo $A$ e $B$ dois *cortes*, para cada $B$, a equação $AA = B$ tem exactamente uma solução ([25], p. 65) e é com base nesta ideia que Landau demonstra o seguinte:

**Teorema 2.5.2** *"Existe um número irracional." ([25], p. 67)*

**Demonstração.** É suficiente mostrar que a solução de

$$AA = 1',$$

onde $1'$ é o sucessor de 1, e cuja existência é garantida pelo Teorema anterior, é irracional.

Por outro lado, podemos ter

$$A = \frac{a}{b},$$

com $a$ e $b$ naturais e $b \neq 0$, para além de todas as representações deste tipo, escolhemos uma, para a qual $b$ é o menor possível pois em todos os conjuntos não vazios de números naturais existe um número mínimo, isto é, um número que é menor do que todos os outros do conjunto.

Uma vez que

$$1' = AA = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{aa}{bb}$$

temos

$$bb < 1'(bb) = aa = (1'b)\, b < (1'b)(1'b)$$

$$b < a < 1'b.$$

Seja $a - b = c$. Então

$$b + c = a < 1'b = b + b$$

$$c < b.$$

Agora temos que

$$\begin{aligned} (m+n)(m+n) &= (m+n)\, m + (m+n)\, n = (mm + nm) + (mn + nn) = \\ &= (mm + 1'(mn)) + nn \end{aligned}$$

donde, tomando

$$b - c = d$$

então

$$\begin{aligned} aa + dd &= (b+c)(b+c) + dd = (bb + 1'(bc)) + (cc + dd) = \\ &= (bb + (1'c)(c+d)) + (cc + dd) = (bb + 1'(cc)) + ((1'(cd) + cc) + dd) = \\ &= (bb + 1'(cc)) + (c+d)(c+d) = (bb + 1'(cc)) + bb = 1'(bb) + 1'(cc) = \\ &= aa + 1'(cc) \end{aligned}$$

logo

$$dd = 1'(cc)$$
$$\frac{d}{c} \cdot \frac{d}{c} = 1'.$$

o que contradiz

$$c < b.$$

■

Finalmente, no Capítulo IV, é apresentada a definição do Conjunto dos Números Reais da seguinte forma:

**Definição 2.5.3** *"Os cortes serão, a partir de agora, denominados "Números Positivos". Da mesma forma, o que temos chamado "números racionais" e "inteiros" serão, daqui para a frente, denominados "números racionais positivos" e "inteiros positivos", respectivamente.*

*Criamos um novo número 0 (lê-se "zero"), distinto dos números positivos.*

*Também criamos números que são, igualmente, distintos dos números positivos e do zero, que serão denominados de números negativos, de maneira que para cada $A$ (i.e., para cada número positivo) associamos um número negativo denotado por $-A$ ( $-$ lê-se "menos").*

*Nesta definição $-A$ e $-B$ serão considerados o mesmo número (considerados iguais) se e só se $A$ e $B$ são o mesmo número.*

*O conjunto constituído por todos os números positivos, pelo zero e por todos os números negativos, será denominado de números reais." ([25], p. 69)*

Landau estabelece igualmente no Capítulo IV a Ordenação entre Números Reais e as operações aritméticas entre estes, nomeadamente a Adição, a Subtracção, a Multiplicação e a Divisão e termina este Capítulo dedicando a última secção ao Teorema Fundamental de Dedekind.

**Teorema 2.5.3** *"Consideremos uma qualquer divisão de todos os números reais em duas classes com as seguintes propriedades:*

*1) Existe um número na primeira classe e um número na segunda classe;*

*2) Todo o número da primeira classe é menor que todo o número da segunda classe.*

*Então existe exactamente um número real $\alpha$ tal que todo $\beta < \alpha$ pertence à primeira classe e todo o $\beta > \alpha$ pertence à segunda classe.*

*Por outras palavras, todo o número da primeira classe é $\leq \alpha$ e todo o número da segunda classe é $\geq \alpha$.*

***Observação Preliminar:*** *É óbvio que, inversamente, todo o número real $\alpha$ origina exactamente duas destas divisões. Uma delas possui como primeira classe todos $\beta \leq \alpha$ e como segunda classe todos $\beta > \alpha$, a outra possui como primeira classe todos $\beta < \alpha$ e como segunda classe todos $\beta \geq \alpha$." ([25], p. 89)*

Com o intuito de provar que o Conjunto dos Números Reais constitui um Corpo Ordenado e Completo e tendo por base a Definição 2.3.2, apresentamos, de seguida, a Aritmética subjacente a este conjunto que nos conduzirá a esse propósito.

A razão por começarmos com a definição de $<$ deve-se à simplicidade deste conceito, como de seguida apresentamos.

**Definição 2.5.4** *Se $\alpha$ e $\beta$ são números reais, então $\alpha < \beta$ significa que $\alpha$ está contido em $\beta$, isto é, todo o elemento de $\alpha$ é também um elemento de $\beta$, mas $\alpha \neq \beta$.*

A repetição das definições de $\leq$, $>$, $\geq$ é aqui supérfluo, mas é interessante notar que $\leq$ pode agora ser mais simplesmente expresso do que $<$, pois se $\alpha$ e $\beta$ são números reais, então $\alpha \leq \beta$ se e só se $\alpha$ está contido em $\beta$.

**Definição 2.5.5** *Se $\alpha$ e $\beta$ são números reais, então:*

$$\alpha \dot{+} \beta = \{x : x = y + z \text{ para algum } y \text{ em } \alpha \text{ e algum } z \text{ em } \beta\}.$$

A definição da operação $\dot{+}$ é simples, no entanto, deve ser acompanhada de uma prova de que esta operação realmente faz sentido.

**Teorema 2.5.4** *Se $\alpha$ e $\beta$ são números reais, então $\alpha \dotplus \beta$ é um número real.*

**Demonstração.** A prova de que $\alpha \dotplus \beta$ é um número real baseia-se em verificar as quatro propriedades da Definição 2.3.2.

(1) Suponhamos que $w < x$ para algum $x$ em $\alpha \dotplus \beta$.

Então, $x = y + z$ para algum $y$ em $\alpha$ e algum $z$ em $\beta$, o que significa que, $w < y + z$, e consequentemente, $w - y < z$.

Isto mostra que, $w - y$ está em $\beta$ (uma vez que $z$ está em $\beta$ e $\beta$ é um número real).

Uma vez que, $w = y + (w - y)$, resulta que, $w$ está em $\alpha \dotplus \beta$.

(2) É claro que, $\alpha \dotplus \beta \neq \emptyset$, uma vez que, $\alpha \neq \emptyset$ e $\beta \neq \emptyset$.

(3) Uma vez que, $\alpha \neq Q$ e $\beta \neq Q$, então existem números racionais $a$ e $b$, com $a$ não pertencente a $\alpha$ e $b$ não pertencente a $\beta$.

Qualquer $x$ em $\alpha$ satisfaz $x < a$ (pois, se $a < x$ então, a condição (1) para número real iria implicar que $a$ pertencesse a $\alpha$).

Similarmente qualquer $y$ em $\beta$ satisfaz $y < b$.

Assim, $x + y < a + b$ para qualquer $x$ em $\alpha$ e $y$ em $\beta$. O que mostra que, $a + b$ não está em $\alpha \dotplus \beta$, logo $\alpha \dotplus \beta \neq Q$.

(4) Se $x$ está em $\alpha \dotplus \beta$, então $x = y + z$ para algum $y$ em $\alpha$ e $z$ em $\beta$.

Existem $y'$ em $\alpha$ e $z'$ em $\beta$ com $y < y'$ e $z < z'$; então $x < y' + z'$ e $y' + z'$ está em $\alpha \dotplus \beta$. Isto significa que $\alpha \dotplus \beta$ não possui máximo.

Estas 4 propriedades provam que $\alpha \dotplus \beta$ é um número real. ■

**Teorema 2.5.5** *Se $\alpha, \beta$ e $\gamma$ são números reais, então:*

$$(\alpha \dotplus \beta) \dotplus \gamma = \alpha \dotplus (\beta \dotplus \gamma).$$

**Demonstração.** Uma vez que $(x + y) + z = x + (y + z)$ para quaisquer números racionais $x, y$ e $z$, todo o membro de $(\alpha \dotplus \beta) \dotplus \gamma$ é igualmente membro de $\alpha \dotplus (\beta \dotplus \gamma)$, e vice-versa. ■

**Teorema 2.5.6** *Se $\alpha$ e $\beta$ são números reais, então:*

$$\alpha \dotplus \beta = \beta \dotplus \alpha.$$

**Demonstração.** Uma vez que $x + y = y + x$ para quaisquer números racionais $x$ e $y$, todo o membro de $\alpha \dotplus \beta$ é igualmente membro de $\beta \dotplus \alpha$, e vice-versa. ∎

Para provar as outras propriedades de $\dotplus$ necessitamos de definir, o elemento neutro para esta operação, o $\mathbf{0}$.

$$\mathbf{0} = \{x \in Q : x < 0\}.$$

**Teorema 2.5.7** *Se $\alpha$ é um número real, então $\alpha \dotplus \mathbf{0} = \alpha$.*

**Demonstração.** Se $x$ está em $\alpha$ e $y$ está em $\mathbf{0}$, então $y < 0$, logo $x + y < x$. O que implica que $x + y$ está em $\alpha$. Assim, todo o membro de $\alpha \dotplus \mathbf{0}$ é também membro de $\alpha$.

Por outro lado, se $x$ está em $\alpha$, então existe um número racional $y$ em $\alpha$ tal que $y > x$.

Uma vez que, $x = y + (x - y)$, onde $y$ está em $\alpha$, e $x - y < 0$, tal que, $x - y$ está em $\mathbf{0}$, isto mostra que, $x$ está em $\alpha \dotplus \mathbf{0}$.

Assim, todo o membro de $\alpha$ é também membro de $\alpha \dotplus \mathbf{0}$. ∎

**Definição 2.5.6** *Se $\alpha$ é um número real, então*

$$-\alpha = \{x \in Q : -x \text{ não está em } \alpha, \text{ mas } -x \text{ não é o mínimo de } Q - \alpha\}.$$

**Teorema 2.5.8** *Se $\alpha$ é um número real, então $-\alpha$ é um número real.*

**Demonstração.** (1) Suponhamos que $x$ está em $-\alpha$ e que $y < x$. Então $-y > -x$.

Uma vez que $-x$ não está em $\alpha$, é igualmente verdade que, $-y$ não está em $\alpha$. Além disso, é claro que $-y$ não é o mínimo de $Q - \alpha$, uma vez que, $-x$ é um elemento mais pequeno. Isto mostra que, $y$ está em $-\alpha$.

(2) Uma vez que $\alpha \neq Q$, existe algum número racional $y$ que não está em $\alpha$. Podemos supor que $y$ não é o menor número racional em $Q - \alpha$ (uma vez que $y$ pode sempre ser substituído por qualquer $y' > y$). Então $-y$ está em $-\alpha$ e assim $-\alpha \neq \emptyset$.

(3) Uma vez que $\alpha \neq \emptyset$, então existe algum $x$ em $\alpha$. Então, $-x$ não poderá estar em $-\alpha$, logo $-\alpha \neq Q$.

(4) Se $x$ está em $-\alpha$, então $-x$ não está em $\alpha$ e existe um número racional $y < -x$ que também não está em $\alpha$.

Consideremos $z$ um número racional tal que $y < z < -x$. Então $z$ também não está em $\alpha$ e $z$ não é claramente o mínimo de $Q - \alpha$, então, $-z$ está em $-\alpha$. Como $-z > x$ então $-\alpha$ não possui máximo. ∎

A demonstração de que $\alpha \dotplus (-\alpha) = \mathbf{0}$ não é muito evidente, no entanto a dificuldade não se deve à definição de $-\alpha$. Antes de efectuarmos esta demonstração necessitamos provar o seguinte Lema, tendo em conta que os números racionais gozam da propriedade arquimediana dos números reais, apresentada de seguida:

**Propriedade 2.5.2** *Seja $x$ um elemento de $Q$ com $x > 0$. Então, para todo o $y \in Q$ existe algum $n \in \mathbb{N}$ tal que $nx > y$.*

**Lema 2.5.1** *Seja $\alpha$ um número real e $z$ um número racional positivo então, existem números racionais $x$ em $\alpha$ e $y$ não pertencente a $\alpha$, tais que $y - x = z$. Além disso, podemos supor que $y$ não é mínimo de $Q - \alpha$.*

**Demonstração.** Suponhamos primeiramente que $z$ está em $\alpha$.

Se os números $z, 2z, 3z, ...$ estão todos em $\alpha$, então todo o número racional estará em $\alpha$, uma vez que todo o número racional $w$ satisfaz $w < nz$ para algum $n$, pela Propriedade 2.5.2. O que contradiz o facto de que $\alpha$ é um número real, então existe algum $k$ tal que $x = kz$ está em $\alpha$ e $y = (k+1)\, z$ não está em $\alpha$. Claramente $y - x = z$.

Além disso, se $y$ for o mínimo de $Q - \alpha$, consideremos $x' > x$ um elemento de $\alpha$, e substituamos $x$ por $x'$, e $y$ por $y + (x' - x)$.

Se $z$ não está em $\alpha$ então a prova é similar, baseada no facto de que os números $(-n)\, z$ não poderão estar todos em $\alpha$. ∎

**Teorema 2.5.9** *Se $\alpha$ é um número real então $\alpha \dotplus (-\alpha) = \mathbf{0}$.*

**Demonstração.** Suponhamos $x$ em $\alpha$ e $y$ em $-\alpha$, então $-y$ não está em $\alpha$, logo $-y > x$.

Uma vez que $x + y < 0$, então $x + y$ está em $\mathbf{0}$. Assim, todo o membro de $\alpha \dotplus (-\alpha)$ está em $\mathbf{0}$.

É mais difícil fazer a demonstração no sentido inverso. Se $z$ está em $\mathbf{0}$, então $-z > 0$. De acordo com o Lema 2.5.1 existe algum $x$ em $\alpha$ e algum $y$ que não está em $\alpha$ com $y$ não sendo o mínimo de $Q - \alpha$ tal que $y - x = -z$. Esta equação pode ser escrita da forma $x + (-y) = z$. Uma vez que $x$ está em $\alpha$, e $-y$ está em $-\alpha$, isto prova que $z$ está em $\alpha \dotplus (-\alpha)$. ∎

Antes de prosseguirmos com a multiplicação, iremos definir o que são *elementos positivos* e provar uma propriedade básica.

**Definição 2.5.7**

$$\mathbf{P} = \left\{ \alpha \in \widehat{R} : \alpha > \mathbf{0} \right\}.$$

Notemos que $\alpha \dotplus \beta$ está claramente em $\mathbf{P}$, se $\alpha$ e $\beta$ estiverem.

**Teorema 2.5.10** *Se $\alpha$ é um número real, então uma e uma só das seguintes condições é verdadeira:*

*(i)* $\alpha = \mathbf{0}$.

*(ii)* $\alpha \in \mathbf{P}$.

*(iii)* $-\alpha \in \mathbf{P}$.

**Demonstração.** Se $\alpha$ contém um qualquer número racional positivo, então $\alpha$ certamente contém todos os números racionais negativos, logo $\alpha$ contém $\mathbf{0}$ e $\alpha \neq \mathbf{0}$, isto é, $\alpha$ está em $\mathbf{P}$.

Se $\alpha$ não contém qualquer número racional positivo, então uma das seguintes possibilidades é verificada:

(1) $\alpha$ contém todos os números racionais negativos, então $\alpha = \mathbf{0}$.

(2) existe algum número racional negativo $x$ que não está em $\alpha$, podemos supor que $x$ não é o mínimo de $Q - \alpha$ (uma vez que $x$ pode ser substituído por $\frac{x}{2} > x$). Então $-\alpha$ contém o número racional positivo $-x$, logo como acabamos de provar, $-\alpha \in \mathbf{P}$.

Isto mostra que, pelo menos uma das condições *(i)* - *(iii)* é verdadeira.

Se $\alpha = \mathbf{0}$, as condições *(ii)* e *(iii)* são claramente impossíveis. Além disso, é impossível que $\alpha > \mathbf{0}$ e que $-\alpha > \mathbf{0}$, uma vez que isto implicaria que $\mathbf{0} = \alpha \dotplus (-\alpha) > \mathbf{0}$. ■

Recordemos que $\alpha > \beta$ significa que $\alpha$ contém $\beta$ mas que é diferente de $\beta$. Esta definição é indicada para provar a completude, como veremos mais à frente, no entanto, temos que provar que é equivalente à definição que será feita em termos de $\mathbf{P}$.

Assim, necessitamos de mostrar que $\alpha - \beta > \mathbf{0}$ é equivalente a $\alpha > \beta$, o que é claramente uma consequência do próximo Teorema.

**Teorema 2.5.11** *Se $\alpha$, $\beta$ e $\gamma$ são números reais e $\alpha > \beta$ então $\alpha \dotplus \gamma > \beta \dotplus \gamma$.*

**Demonstração.** A hipótese $\alpha > \beta$ implica que $\beta$ está contido em $\alpha$; resulta imediatamente da definição de $\dotplus$ que $\beta \dotplus \gamma$ está contido em $\alpha \dotplus \gamma$. Isto mostra que $\alpha \dotplus \gamma \geq \beta \dotplus \gamma$. Podemos facilmente eliminar a possibilidade da igualdade, pois se

$$\alpha \dotplus \gamma = \beta \dotplus \gamma$$

então

$$\alpha = (\alpha \dotplus \gamma) \dotplus (-\gamma) = (\beta \dotplus \gamma) \dotplus (-\gamma) = \beta,$$

o que é falso. Assim,

$$\alpha \dotplus \gamma > \beta \dotplus \gamma.$$

■

Se $\alpha, \beta > \mathbf{0}$, então $\alpha \bullet \beta$ pode ser definida como se segue:

**Definição 2.5.8** *Se $\alpha$ e $\beta$ são números reais e $\alpha, \beta > \mathbf{0}$, então*

$$\alpha \bullet \beta = \{z : z \leq 0 \text{ ou } z = x \cdot y \text{ para algum } x \text{ em } \alpha \text{ e } y \text{ em } \beta \text{ com } x, y > 0\}.$$

**Teorema 2.5.12** *Se $\alpha$ e $\beta$ são números reais com $\alpha, \beta > \mathbf{0}$, então $\alpha \bullet \beta$ é um número real.*

**Demonstração.** Como já sabemos, temos de verificar 4 condições.

(1) Suponhamos $w < z$, onde $z$ está em $\alpha \bullet \beta$.

Se $w \leq 0$, então $w$ está automaticamente em $\alpha \bullet \beta$. Suponhamos $w > 0$, então $z > 0$ logo $z = x \cdot y$ para algum $x$ positivo em $\alpha$ e $y$ positivo em $\beta$. Consideremos

$$w = \frac{wz}{z} = \frac{wxy}{z} = \left(\frac{w}{z} \cdot x\right) \cdot y.$$

Uma vez que $0 < w < z$, temos $\frac{w}{z} < 1$, logo $\left(\frac{w}{z}\right) \cdot x$ está em $\alpha$. Assim $w$ está em $\alpha \bullet \beta$.

(2) Claramente $\alpha \bullet \beta \neq \emptyset$.

(3) Se $x$ não está em $\alpha$ e $y$ não está em $\beta$, então $x > x'$ para todo $x'$ em $\alpha$, e $y > y'$ para todo $y'$ em $\beta$, uma vez que $xy > x'y'$ para todos os positivos $x'$ e $y'$. Logo $xy$ não está em $\alpha \bullet \beta$, assim $\alpha \bullet \beta \neq Q$.

(4) Suponhamos $w$ em $\alpha \bullet \beta$ e $w \leq 0$. Existe algum $x$ em $\alpha$ com $x > 0$ e algum $y$ em $\beta$ com $y > 0$, então $z = xy$ está em $\alpha \bullet \beta$ e $z > w$.

Suponhamos agora $w > 0$. Então $w = xy$ para algum $x$ positivo em $\alpha$ e algum $y$ positivo em $\beta$. Além disso, $\alpha$ contém algum $x' > x$. Se $z = x'y$, então $z > xy = w$, e $z$ está em $\alpha \bullet \beta$. Assim $\alpha \bullet \beta$ não possui máximo. ■

Notemos que $\alpha \bullet \beta$ está claramente em $\mathbf{P}$ se $\alpha$ e $\beta$ estiverem. Para completar a definição de $\bullet$ devemos definir $|\alpha|$.

**Definição 2.5.9** *Se $\alpha$ é um número real, então*

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha \text{ se } \alpha \geq \mathbf{0} \\ -\alpha \text{ se } \alpha \leq \mathbf{0} \end{cases}$$

**Definição 2.5.10** *Se $\alpha$ e $\beta$ são números reais, então*

$$\alpha \bullet \beta = \begin{cases} \mathbf{0} \text{ se } \alpha = \mathbf{0} \text{ ou } \beta = \mathbf{0} \\ |\alpha| \bullet |\beta| \text{ se } \alpha > \mathbf{0},\ \beta > \mathbf{0} \text{ ou } \alpha < \mathbf{0},\ \beta < \mathbf{0} \\ -(|\alpha| \bullet |\beta|) \text{ se } \alpha > \mathbf{0},\ \beta < \mathbf{0} \text{ ou } \alpha < \mathbf{0},\ \beta > \mathbf{0} \end{cases}$$

**Teorema 2.5.13** *Se $\alpha$, $\beta$ e $\gamma$ são números reais, então*

$$\alpha \bullet (\beta \bullet \gamma) = (\alpha \bullet \beta) \bullet \gamma.$$

**Demonstração.** É óbvio se $\alpha$, $\beta$, $\gamma > \mathbf{0}$. A prova do caso geral requer a consideração de casos separados (e é simples se utilizarmos o seguinte Teorema). ■

**Teorema 2.5.14** *Se $\alpha$ e $\beta$ são números reais, então*

$$\alpha \bullet \beta = \beta \bullet \alpha.$$

**Demonstração.** É óbvio se $\alpha$, $\beta > \mathbf{0}$, e os outros casos são facilmente verificados. ■

O $\mathbf{1}$ pode ser definido da seguinte maneira e é evidente que, atendendo à definição, é um número real.

**Definição 2.5.11**

$$\mathbf{1} = \{x \in Q : x < 1\}.$$

**Teorema 2.5.15** *Se $\alpha$ é um número real, então $\alpha \bullet \mathbf{1} = \alpha$.*

**Demonstração.** Consideremos $\alpha > \mathbf{0}$. É fácil constatar que todo o membro de $\alpha \bullet \mathbf{1}$ é igualmente membro de $\alpha$.

Por outro lado, suponhamos $x$ em $\alpha$.

Se $x \leq 0$, então $x$ está automaticamente em $\alpha \bullet \mathbf{1}$.

Se $x > 0$, então existe algum número racional $y$ em $\alpha$ tal que $x < y$. Então, $x = y \cdot \left(\frac{x}{y}\right)$, e $\frac{x}{y}$ está em $\mathbf{1}$, logo $x$ está em $\alpha \bullet \mathbf{1}$. O que prova que $\alpha \bullet \mathbf{1} = \alpha$ se $\alpha > \mathbf{0}$.

Se $\alpha < \mathbf{0}$, então aplicando a Definição 2.5.10 temos:

$$\alpha \bullet \mathbf{1} = -(|\alpha| \bullet |\mathbf{1}|) = -(|\alpha|) = \alpha.$$

Finalmente, o Teorema é óbvio quando $\alpha = \mathbf{0}$. ■

**Definição 2.5.12** *Se $\alpha$ é um número real e $\alpha > \mathbf{0}$, então*

$$\alpha^{-1} = \left\{ x \in Q : x \leq 0, \text{ ou } x > 0 \text{ e } \frac{1}{x} \text{ não está em } \alpha, \text{ mas } \frac{1}{x} \text{ não é o mínimo de } Q - \alpha \right\}.$$

*Se $\alpha < \mathbf{0}$, então $\alpha^{-1} = -\left(|\alpha|^{-1}\right)$.*

**Teorema 2.5.16** *Se $\alpha$ é um número real diferente de $\mathbf{0}$, então $\alpha^{-1}$ é um número real.*

**Demonstração.** Claramente é suficiente apenas considerar o caso $\alpha > \mathbf{0}$ e as quatro condições de número real necessitam ser verificadas.

(1) Suponhamos $y < x$ e $x$ em $\alpha^{-1}$.

Se $y \leq 0$, então $y$ está em $\alpha^{-1}$.

Se $y > 0$, então $x > 0$ logo $\frac{1}{x}$ não está em $\alpha$. Uma vez que $\frac{1}{y} > \frac{1}{x}$, temos que $\frac{1}{y}$ não está em $\alpha$, e $\frac{1}{y}$ não é, claramente, o mínimo de $Q - \alpha$, assim $y$ está em $\alpha^{-1}$.

(2) Como é óbvio, $\alpha^{-1} \neq \emptyset$.

(3) Uma vez que $\alpha > \mathbf{0}$, existe algum número racional positivo $x$ em $\alpha$. Então $\frac{1}{x}$ não está em $\alpha^{-1}$, assim $\alpha^{-1} \neq Q$.

(4) Suponhamos $x$ em $\alpha^{-1}$.

Se $x \leq 0$, então existe claramente algum $y$ em $\alpha^{-1}$ com $y > x$, pois $\alpha^{-1}$ contém racionais positivos.

Se $x > 0$ então $\frac{1}{x}$ não está em $\alpha$. Uma vez que $\frac{1}{x}$ não é o mínimo de $Q - \alpha$, então existe um número racional $y$ que não está em $\alpha$, com $y < \frac{1}{x}$. Escolhamos um número racional $z$ com $y < z < \frac{1}{x}$. Então $\frac{1}{z}$ está em $\alpha$ e $\frac{1}{z} > x$. Assim $\alpha^{-1}$não possui máximo. ■

Para provar que $\alpha^{-1}$ é o inverso de $\alpha$, o Lema seguinte ajuda.

**Lema 2.5.2** *Seja $\alpha$ um número real com $\alpha > \mathbf{0}$, e $z$ um número racional com $z > 1$. Então, existem números racionais $x$ em $\alpha$ e $y$ não pertencente a $\alpha$, tais que $\frac{y}{x} = z$. Além disso, podemos supor que $y$ não é o mínimo de $Q - \alpha$.*

**Demonstração.** Suponhamos primeiramente que $z$ está em $\alpha$.

Uma vez que $z - 1 > 0$ e que

$$z^n = (1 + (z-1))^n \geq 1 + n(z-1),$$

resulta que os números $z, z^2, z^3, ...$ não podem estar todos em $\alpha$. Então, existe algum $k$ tal que $x = z^k$ está em $\alpha$, e $y = z^{k+1}$ não está em $\alpha$. Claramente, $\frac{y}{x} = z$. Além disso, se

$y$ for o mínimo de $Q - \alpha$, consideremos $x' > x$ um elemento de $\alpha$, e substituamos $x$ por $x'$ e $y$ por $\frac{yx'}{x}$.

Se $z$ não está em $\alpha$, a prova é similar, baseada no facto de que os números $\frac{1}{z^k}$ não poderão todos estar em $\alpha$. ■

**Teorema 2.5.17** *Se $\alpha$ é um número real e $\alpha \neq \mathbf{0}$, então $\alpha \bullet \alpha^{-1} = \mathbf{1}$.*

**Demonstração.** É obviamente suficiente considerar apenas $\alpha > \mathbf{0}$ e assim $\alpha^{-1} > \mathbf{0}$. Suponhamos que $x$ é um número racional positivo em $\alpha$, e $y$ um número racional positivo em $\alpha^{-1}$. Então $\frac{1}{y}$ não está em $\alpha$, logo $\frac{1}{y} > x$. Consequentemente $xy < 1$, o que significa que $xy$ está em $\mathbf{1}$.

Uma vez que todos os números racionais $x \leq 0$ estão igualmente em $\mathbf{1}$, isto mostra que todo o membro de $\alpha \bullet \alpha^{-1}$ está em $\mathbf{1}$.

Para provar o sentido inverso, consideremos $z$ em $\mathbf{1}$.

Se $z \leq 0$, então claramente $z$ está em $\alpha \bullet \alpha^{-1}$.

Suponhamos $0 < z < 1$. De acordo com o Lema 2.5.2, existem números racionais positivos $x$ em $\alpha$ e $y$ não pertencente a $\alpha$, tais que $\frac{y}{x} = \frac{1}{z}$ e podemos supor que $y$ não é o mínimo de $Q - \alpha$. Mas isto significa que $z = x \cdot \left(\frac{1}{y}\right)$, onde $x$ está em $\alpha$ e $\frac{1}{y}$ está em $\alpha^{-1}$. Consequentemente, $z$ está em $\alpha \bullet \alpha^{-1}$. ■

**Teorema 2.5.18** *Se $\alpha, \beta$ e $\gamma$ são números reais, então:*

$$\alpha \bullet (\beta \dotplus \gamma) = \alpha \bullet \beta \dotplus \alpha \bullet \gamma.$$

**Demonstração.** Suponhamos primeiramente que $\alpha, \beta, \gamma > \mathbf{0}$. Então, todos os números na equação contêm todos os números racionais menores ou iguais a 0.

Um número racional positivo em $\alpha \bullet (\beta \dotplus \gamma)$ é da forma $x \cdot (y + z)$ para positivos $x$ em $\alpha$, $y$ em $\beta$ e $z$ em $\gamma$.

Uma vez que $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ onde $x \cdot y$ é um elemento positivo de $\alpha \bullet \beta$ e $x \cdot z$ é um elemento positivo de $\alpha \bullet \gamma$, este número está também em $\alpha \bullet \beta \dotplus \alpha \bullet \gamma$. Assim, todo o elemento de $\alpha \bullet (\beta \dotplus \gamma)$ é também elemento de $\alpha \bullet \beta \dotplus \alpha \bullet \gamma$.

Por outro lado, um número racional positivo em $\alpha \bullet \beta \dotplus \alpha \bullet \gamma$ é da forma $x_1 \cdot y + x_2 \cdot z$ para positivos $x_1, x_2$ em $\alpha$, $y$ em $\beta$ e $z$ em $\gamma$.

Se $x_1 \leq x_2$, então $\left(\frac{x_1}{x_2}\right) \cdot y \leq y$, logo $\left(\frac{x_1}{x_2}\right) \cdot y$ está em $\beta$. Assim

$$x_1 \cdot y + x_2 \cdot z = x_2 \left[\left(\frac{x_1}{x_2}\right) \cdot y + z\right] \text{ está em } \alpha \bullet (\beta \dotplus \gamma).$$

É óbvio que o mesmo raciocínio funciona para $x_2 \leq x_1$.

Para completar a demonstração é necessário considerar os casos em que $\alpha, \beta$ e $\gamma$ não são todos maiores do que $\mathbf{0}$.

Se algum deles for igual a $\mathbf{0}$, a prova é fácil e os casos envolvendo $\alpha < \mathbf{0}$ podem ser derivados imediatamente, uma vez que todas as possibilidades para $\beta$ e $\gamma$ foram explicadas. Assim iremos supor $\alpha > \mathbf{0}$ e considerar três casos: $\beta, \gamma < \mathbf{0}$, e $\beta < \mathbf{0}$, $\gamma > \mathbf{0}$, e $\beta > \mathbf{0}$, $\gamma < \mathbf{0}$.

Os primeiros resultam imediatamente dos casos já provados, o terceiro resulta do segundo trocando $\beta$ por $\gamma$. Consequentemente, ir-nos-emos concentrar no caso $\beta < \mathbf{0}$, $\gamma > \mathbf{0}$.

Existem duas possibilidades:

(1) $\beta \dotplus \gamma \geq \mathbf{0}$. Então

$$\alpha \bullet \gamma = \alpha \bullet ([\beta \dotplus \gamma] \dotplus |\beta|) = \alpha \bullet (\beta \dotplus \gamma) \dotplus \alpha \bullet |\beta|,$$

logo

$$\alpha \bullet (\beta \dotplus \gamma) = -(\alpha \bullet |\beta|) \dotplus \alpha \bullet \gamma = \alpha \bullet \beta \dotplus \alpha \bullet \gamma.$$

(2) $\beta \dotplus \gamma \leq \mathbf{0}$. Então

$$\alpha \bullet |\beta| = \alpha \bullet (|\beta \dotplus \gamma| \dotplus \gamma) = \alpha \bullet |\beta \dotplus \gamma| \dotplus \alpha \bullet \gamma,$$

logo

$$\alpha \bullet (\beta \dotplus \gamma) = -(\alpha \bullet |\beta \dotplus \gamma|) = -(\alpha \bullet |\beta|) \dotplus \alpha \bullet \gamma = \alpha \bullet \beta \dotplus \alpha \bullet \gamma.$$

■

## 2.6 Números Reais como Corpo Ordenado Completo

Dedekind ao fazer a construção do sistema dos números reais pretendeu que fosse um sistema densamente ordenado sobre o qual se poderiam definir as operações e no qual se poderiam demonstrar proposições tais como a proposição que diz que todo o elemento positivo do sistema possui raiz quadrada.

Esta forma de completude para as operações aritméticas pode ser descrita pela afirmação de que o sistema deve ser fechado para as operações aritméticas que satisfazem as leis da Álgebra Elementar. Além disso, o sistema deve ser completo no que diz respeito aos limites, isto é, toda a sucessão convergente de seus elementos deve possuir um limite.

Nesta secção vamos mostrar que o conjunto dos números reais construídos, à maneira de Dedekind, isto é, através de *secções* no conjunto dos números racionais ou *cortes* na recta, constituem um Corpo Ordenado e Completo.

O conjunto dos números reais assim definido constitui um Corpo, uma vez que, atende à definição geral, se considerarmos $F$ o conjunto dos números reais, $\widehat{R}$, e as operações binárias, $\dot{+}$ e $\bullet$, as operações usuais $+$ e $\cdot$.

**Definição 2.6.1** *Um Corpo é um conjunto $F$, de objectos de qualquer natureza, em conjunto com duas operações binárias, $\dot{+}$ e $\bullet$, definidas em $F$, isto é, duas regras que associam a dois elementos $a, b \in F$ outros elementos $a \dot{+} b$ e $a \bullet b \in F$, para as quais as seguintes condições são satisfeitas:*

*(1)* $(a \dot{+} b) \dot{+} c = a \dot{+} (b \dot{+} c)$ *para todo $a, b, c \in F$. (Teorema 2.5.5)*

*(2) Existe algum elemento $\mathbf{0}$ em $F$ tal que:*

*(i)* $a \dot{+} \mathbf{0} = a$ *para todo o $a \in F$. (Teorema 2.5.7)*

*(ii) para todo o $a \in F$, existe algum elemento $b \in F$ tal que $a \dot{+} b = \mathbf{0}$. (Teorema 2.5.9)*

*(3)* $a \dot{+} b = b \dot{+} a$ *para todo $a, b \in F$. (Teorema 2.5.6)*

*(4)* $(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$ *para todo $a, b, c \in F$. (Teorema 2.5.13)*

*(5) Existe algum elemento $\mathbf{1}$ em $F$ tal que $\mathbf{1} \neq \mathbf{0}$ e*

*(i)* $a \bullet \mathbf{1} = a$ *para todo $a \in F$. (Teorema 2.5.15)*

*(ii) para todo o $a \in F$ com $a \neq \mathbf{0}$, existe algum elemento $b \in F$ tal que $a \bullet b = \mathbf{1}$. (Teorema 2.5.17)*

*(6)* $a \bullet b = b \bullet a$ *para todo $a, b \in F$. (Teorema 2.5.14)*

*(7)* $a \bullet (b \dot{+} c) = a \bullet b \dot{+} a \bullet c$ *para todo $a, b, c \in F$. (Teorema 2.5.18)*

Neste caso, os elementos que desempenham os papéis de $\mathbf{0}$ e $\mathbf{1}$ são, respectivamente, os números 0 e 1 e o número $b$ em *(2)* ou *(5)* é $-a$ ou $a^{-1}$, respectivamente, de acordo com as Definições 2.5.6 e 2.5.12. Por esta razão, num Corpo $F$, arbitrário, denotamos por $-a$ o elemento tal que $a \dot{+} (-a) = \mathbf{0}$, e por $a^{-1}$ o elemento tal que $a \bullet a^{-1} = \mathbf{1}$, para $a \neq 0$.

Analogamente, e continuando a utilizar teoremas anteriormente provados, podemos afirmar que o conjunto dos números reais é ordenado pois:

**Definição 2.6.2** *Um Corpo Ordenado é um Corpo $F$, com as operações $\dot{+}$ e $\bullet$, com um determinado subconjunto $P$, de elementos positivos, de $F$ com as seguintes propriedades:*

*(8) Para todo o $a \in F$, uma e uma só das seguintes afirmações é verdadeira:*

*(i) $a = \mathbf{0}$,*

*(ii) $a \in P$,*

*(iii) $-a \in P$. (Teorema 2.5.10)*

*(9) Se $a, b \in P$, então $a \dot{+} b \in P$. (Teorema 2.5.4 e Definição 2.5.7)*

*(10) Se $a, b \in P$, então $a \bullet b \in P$. (Teorema 2.5.12 e Definições 2.5.9 e 2.5.10)*

Utilizando a definição de ordenação definida neste Capítulo, podemos reproduzir para um qualquer Corpo $F$ as seguintes:

**Definição 2.6.3** *Um conjunto $A$ de elementos de $F$ é limitado superiormente se existe um $x \in F$ tal que $x \geq a$ para todo o $a \in A$. Um $x$ nestas condições é denominado majorante de $A$.*

*Um elemento $x \in F$ é o supremo de $A$ se $x$ é um majorante de $A$ e $x \leq y$ para todo o $y \in F$ que seja majorante para $A$, isto é, é o menor dos majorantes.*

**Definição 2.6.4** *Um Corpo Ordenado Completo é um Corpo Ordenado no qual todo o subconjunto não vazio limitado superiormente (majorado) tem supremo.*

Então, provando o seguinte Teorema verificamos, finalmente, que o Conjunto dos Números Reais, construído ao longo deste Capítulo, é um Corpo Ordenado Completo.

**Teorema 2.6.1** *Se $A$ é um conjunto de números reais, $A \neq \emptyset$ e limitado superiormente, então $A$ possui supremo.*

**Demonstração.** Consideremos $\beta = \{x : x \text{ está em algum } \alpha \in A\}$. Então $\beta$ é certamente uma colecção de números racionais.

A prova de que $\beta$ é um número real baseia-se em verificar as quatro propriedades de número real, isto é, as quatro propriedades da Definição 2.3.2.

(1) Suponhamos que $x$ está em $\beta$ e que $y < x$. A primeira condição significa que $x$ pertence a algum $\alpha$ em $A$.

Uma vez que $\alpha$ é um número real, $y < x$ implica que $y$ está em $\alpha$. Consequentemente, é certamente verdade que $y$ está em $\beta$.

(2) Uma vez que $A \neq \emptyset$, então existe algum $\alpha \in A$. Sendo $\alpha$ um número real, existe algum $x$ em $\alpha$. Isto significa que $x$ está em $\beta$, logo $\beta \neq \emptyset$.

(3) Uma vez que $A$ é limitado superiormente, existe um número real $\gamma$ tal que $\alpha < \gamma$, para qualquer $\alpha \in A$.

Sendo $\gamma$ um número real, existe um número racional $x$ que não está em $\gamma$.

Mas se $\alpha < \gamma$ significa que $\alpha$ está contido em $\gamma$, então, é igualmente verdade que $x$ não está em $\alpha$ para qualquer $\alpha \in A$. O que significa que $x$ não está em $\beta$, logo $\beta \neq Q$.

(4) Suponhamos que $x$ está em $\beta$. Então $x$ está em $\alpha$ para algum $\alpha \in A$.

Como $\alpha$ não possui máximo, existe um número racional $y$ tal que $x < y$ e $y$ está em $\alpha$. Isto significa que $y$ está em $\beta$, assim $\beta$ não possui máximo.

Estas 4 propriedades provam que $\beta$ é um número real.

A prova de que $\beta$ é o supremo de $A$ é facilmente concretizada.

Se $\alpha \in A$, então claramente $\alpha$ está contido em $\beta$, o que significa que $\alpha \leq \beta$, então $\beta$ é um majorante de $A$.

Por outro lado, se considerarmos $\gamma$ um majorante para $A$, então $\alpha \leq \gamma$ para todo $\alpha \in A$, o que implica $\alpha$ estar contido em $\gamma$, para todo $\alpha \in A$, e isto seguramente implica que $\beta$ está contido em $\gamma$. O que significa que $\beta \leq \gamma$ e assim $\beta$ é o supremo de $A$. ∎

# Capítulo 3

# Construção dos Números Reais utilizando Classes de Equivalência

## 3.1 Cantor e as Sucessões de Cauchy

Cantor abordou o problema da criação dos números reais de um ponto de vista distinto do adoptado por Dedekind.

Começando, como Dedekind, com o conjunto dos números racionais, Cantor utilizou a noção de sucessão fundamental, uma sucessão $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ com a propriedade de que para qualquer valor racional positivo $\epsilon$ existe um inteiro $n_1$ tal que $|a_{m+n} - a_n| < \epsilon$ para $n \geq n_1$ e para qualquer inteiro positivo $m$.

Tal sucessão, agora denominada de sucessão de Cauchy, satisfaz o Critério de Cauchy, estabelecido em 1821. Para Cauchy, era óbvio que uma sucessão destas convergia para um número real $b$. Cantor, por outro lado, defendia que afirmar isto seria cometer um erro lógico, pois esta afirmação pressuponha a existência desse número real.

Consequentemente, Cantor utilizou a sucessão fundamental para definir o número real $b$. Por outras palavras, Cantor associou a toda a sucessão fundamental de números racionais um número real.

O número racional $r$ era, ele próprio, associado a uma sucessão, a sucessão $r, r, ..., r, ...$, mas existiam igualmente sucessões não associadas a números racionais. Por exemplo, a sucessão $1, 1.4, 1.41, 1.414, ...$, gerada por um algoritmo clássico para o cálculo de $\sqrt{2}$, consiste numa das sucessões supra citadas.

Tomando consciência de que duas sucessões fundamentais podiam convergir para o mesmo número real, Cantor definiu uma relação de equivalência no conjunto de todas essas sucessões. Assim, o número $b$ associado à sucessão $\{a_i\}$ diz-se igual ao número $b'$, associado à sucessão $\{a_i'\}$, se para qualquer $\epsilon > 0$, existe um $n_1$, tal que $|a_n - a_n'| < \epsilon$, para todo $n > n_1$.

O conjunto dos números reais correspondia então ao conjunto das classes de equivalência de sucessões fundamentais. Não foi difícil definir uma relação de ordem nestas sucessões, bem como estabelecer as operações aritméticas básicas.

Contudo, Cantor pretendia mostrar que o conjunto por si definido era, de algum modo, o mesmo que a recta numérica. Estava claro para Cantor que todo o ponto da recta correspondia a uma sucessão fundamental, contudo, deu-se de conta que o inverso requeria um axioma, nomeadamente, que para todo o número real (classe de equivalência de uma sucessão fundamental) correspondia um ponto definido na recta.

Ao utilizar esta identificação dos números reais com os pontos na recta, Cantor definiu *ponto limite* (hoje denominado como *ponto de acumulação*) de um conjunto de pontos $P$, como sendo um ponto da linha tal que em toda a sua vizinhança poderíamos encontrar infinitos pontos de $P$.

Cantor definiu *vizinhança de um ponto* como sendo todo o intervalo que contém o respectivo ponto no seu interior.

Posto isto, é fácil provar que um conjunto de pontos [limitado] consistindo de um número infinito de pontos, possui sempre um ponto limite. (veja-se, por exemplo, [24], p. 732)

Cantor denotou o conjunto destes pontos limites por $P'$, denominando este conjunto de *primeiro conjunto derivado* de $P$. Similarmente, se $P'$ é infinito, Cantor definiu o *segundo conjunto derivado* $P''$ como o conjunto dos pontos limites de $P'$. Se $P'$ é finito, o conjunto dos seus pontos limites é vazio. Continuando desta forma, definiu conjuntos derivados de qualquer ordem finita.

Posteriormente, distinguiu dois tipos de conjuntos limitados de pontos. Os da primeira espécie eram aqueles para os quais o conjunto derivado $P^{(n)}$ é vazio para algum valor de $n$, os da segunda espécie eram aqueles que não satisfaziam esta condição. Por exemplo, no intervalo $[0, 1]$, o conjunto de pontos $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...\right\}$ tem como conjunto derivado

$\{0\}$, e consequentemente é de primeira espécie, enquanto que o conjunto dos números racionais nesse intervalo possui como conjunto derivado, o intervalo na sua totalidade, e é consequentemente de segunda espécie.

## 3.2 Número Real como Limite de uma Sucessão de Cauchy

Neste Capítulo iremos construir, a partir de sucessões convergentes de Números Racionais, um conjunto que, algebricamente é um corpo ordenado que possui a propriedade arquimediana[1], dotado da noção de limite e tendo a condição de Cauchy, como condição necessária e suficiente de convergência de uma sucessão.

**Definição 3.2.1** *Diz-se que a sucessão* $\{r_n\}$ *é uma sucessão de Cauchy, ou uma sucessão normal, ou uma sucessão fundamental, o que se nota simbolicamente* $\mathcal{C}\{r_n\}$, *quando essa sucessão satisfaz a condição, chamada de Cauchy:*

$$\mathcal{C}\{r_n\}_n \Leftrightarrow (\forall \delta > 0\ \exists N : \forall n > N, \forall p > 0 \Longrightarrow r_n - \delta < r_{n+p} < r_n + \delta),$$

*isto é, para todo o* $\delta$ *racional positivo, existe uma ordem* $N$, *tal que todos os elementos* $r_{n+p}$ *de ordem superior à de um elemento* $r_n$, *de ordem* $n > N$, *se encontram na vizinhança racional* $]r_n - \delta, r_n + \delta[$ *de* $r_n$.

**Teorema 3.2.1** *Todas as sucessões convergentes são sucessões de Cauchy.*

**Demonstração.** Se $\{r_n\}$ converge para um número racional $r$ e é $\delta$ um número racional positivo arbitrário, tomem-se $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$, tais que $\delta = \delta_1 + \delta_2$.

Seja ainda $\delta_1 < \delta_2$. A convergência exige a existência de uma ordem $N$ tal que

$$r - \delta_1 < r_n < r + \delta_1, \text{ para } n > N$$

e

$$r - \delta_1 < r_{n+p} < r + \delta_1, \text{ se } n > N \text{ e } p > 0.$$

[1] A propriedade arquimediana estabelece que *qualquer número real, ou é menor que* 1 *ou é menor que a soma de um número* $N$ *de parcelas iguais a* 1.

Atendendo ao facto de que o conjunto dos números racionais corresponde a um grupo ordenado aditivo, isto é, um conjunto ordenado em que a operação de grupo satisfaz à lei de monotonia para a soma, temos que

$$r_n < r + \delta_1 \text{ e } r - \delta_1 < r_{n+p} \Longrightarrow r_n + (r - \delta_1) < r_{n+p} + (r + \delta_1)$$

ou

$$r_n - r_{n+p} < r + \delta_1 - (r - \delta_1) = \delta_1 + \delta_1 < \delta_1 + \delta_2 = \delta$$

donde

$$r_{n+p} > r_n - \delta, \text{ se } n > N \text{ e } p > 0.$$

Mas, por outro lado, a mesma lei dá-nos

$$r - \delta_1 < r_n \text{ e } r_{n+p} < r + \delta_1 \Longrightarrow (r - \delta_1) + r_{n+p} < r_n + (r + \delta_1)$$

ou

$$r_{n+p} - r_n < r + \delta_1 - (r - \delta_1) = \delta_1 + \delta_1 < \delta_1 + \delta_2 = \delta$$

donde

$$r_{n+p} < r_n + \delta, \text{ se } n > N \text{ e } p > 0$$

o que acaba de provar que a condição de Cauchy é uma condição necessária de convergência, graças às características da ordenação densa do grupo dos números racionais.

■

Uma vez demonstrado que todas as sucessões convergentes de números racionais são sucessões de Cauchy, deparamo-nos com a impossibilidade, no domínio dos números racionais, de fazer corresponder a cada sucessão de Cauchy um número racional, que seja o seu limite.

No domínio da Análise Clássica interessa que a variável, com que trabalhamos, pertença a um conjunto onde todas as sucessões de Cauchy tenham limite. Atendendo a isso, a ideia utilizada por Cantor, para a edificação do conjunto dos números reais, foi a de fazer corresponder, a cada sucessão de Cauchy de números racionais, um número real.

Atendendo que, se $\{r_n\}$ converge para $r$ e $\{u_n\}$ converge para zero, $r$ é também o limite de $\{r_n + u_n\}$, então a um número racional pode-se fazer corresponder infinitas sucessões de números racionais, que para ele convergem, o que nos mostra que a correspondência sucessão - número não é biunívoca.

Esta situação pode ser ultrapassada, pela utilização de um conjunto, onde cada elemento corresponde a um conjunto de elementos equivalentes.

Comecemos então por definir uma condição de equivalência de sucessões de Cauchy.

**Definição 3.2.2** *Duas sucessões de Cauchy de números racionais dizem-se equivalentes, o que se simboliza por* $\{r_n\} \approx \{r'_n\}$*, se a sucessão* $\{r_n - r'_n\}$ *, constituída pelas diferenças dos termos da mesma ordem nas duas sucessões, tiver como limite o número racional zero:*

$$\{r_n\} \approx \{r'_n\} \Longleftrightarrow \{r_n - r'_n\}_n \longrightarrow 0.$$

A definição anterior verifica as três propriedades de uma equivalência:

**Propriedade 3.2.1** *(1) Reflexividade:*

$$\{r_n\} \approx \{r_n\} \ \textit{porque} \ \{r_n - r_n\} \longrightarrow 0.$$

*(2) Simetria:*

$$\{r_n\} \approx \{r'_n\} \Leftrightarrow \{r'_n\} \approx \{r_n\} \ \textit{pois se} \ \{r_n - r'_n\} \longrightarrow 0 \ \textit{também} \ \{r'_n - r_n\} \longrightarrow 0.$$

*(3) Transitividade:*

$$\textit{Se} \ \{r_n\} \approx \{r'_n\} \ \textit{e} \ \{r'_n\} \approx \{r''_n\} \ \textit{então} \ \{r_n\} \approx \{r''_n\}$$

*o que se justifica com a seguinte implicação:*

$$\lim_n (r_n - r'_n) = 0 \ \textit{e} \ \lim_n (r''_n - r'_n) = 0 \Longrightarrow \lim_n (r_n - r''_n) = 0$$

*porque*

$$\lim (r_n - r''_n) = \lim [(r_n - r'_n) + (r'_n - r''_n)] = \lim_n (r_n - r'_n) + \lim_n (r'_n - r''_n) = 0.$$

Vamos agora, no conjunto de todas as sucessões de Cauchy de números racionais, agrupar num mesmo subconjunto aquelas que são entre si equivalentes.

Consideremos cada um desses subconjuntos como elemento de um novo conjunto, o conjunto $\overline{R}$, constituído pela totalidade dos subconjuntos de sucessões de Cauchy que agora foram criados.

Podemos distinguir dois tipos de elementos de $\overline{R}$: os que são constituídos por sucessões de Cauchy convergentes no domínio dos números racionais, e os que são constituídos por sucessões de Cauchy não convergentes.

A cada um dos elementos do primeiro tipo, corresponde biunivocamente um número racional, isto é, o elemento constituído pelo conjunto das sucessões que convergem para um número racional $\frac{m}{n}$ corresponderá ao número racional $\frac{m}{n}$.

**Definição 3.2.3** *Os elementos de $\overline{R}$ denominam-se de números reais.*

Respeitando a nomenclatura utilizada por Neves Real, em [38], designaremos por $[r_n]$ o número real constituído pelo conjunto de todas as sucessões equivalentes à sucessão $\{r_n\}$ e a sucessão $\{r_n\}$ ou outra qualquer $\{r'_n\}$ que lhe seja equivalente, diremos representante do número real $[r_n]$.

Se a sucessão $\{r_n\}$ tem limite no domínio $Q$, dos números racionais, e se esse limite é $r$, o número real $[r_n]$, será representado por $[r]$, uma vez que a sucessão $\{r\}$, com todos elementos iguais ao número racional $r$, tem como limite $r$ e é uma sucessão que pode ser utilizada para representar $[r_n]$, pois é equivalente a $\{r_n\}$.

Assim, podemos denominar de $[0]$ o número real que corresponde ao conjunto de todas as sucessões de números racionais que convergem para o número racional 0. Da mesma forma, $[1]$ o número real que corresponde ao conjunto de todas as sucessões de números racionais que convergem para o número racional 1, e assim sucessivamente.

Assim, quando não necessitarmos utilizar sucessões representativas dos números reais utilizaremos as letras minúsculas gregas.

## 3.3 Ordenação do Conjunto dos Números Reais

**Definição 3.3.1** *Diz-se que a sucessão de números racionais $\{r_n\}$, satisfazendo a condição de Cauchy, goza da propriedade $\mathcal{P}$, o que se simboliza por $\mathcal{P}\{r_n\}$, quando for possível determinar um número racional positivo $d$, de modo que quase todos os elementos da sucessão $\{r_n\}$ sejam maiores que $d$, querendo significar-se com a expressão "quase todos", todos os elementos $r_n$, com excepção de um número finito. Simbolicamente:*

$$\mathcal{P}\{r_n\} \Longleftrightarrow (\exists d \in Q, d > 0 \ \exists N : \forall n > N \Longrightarrow d < r_n).$$

É de realçar que entre as sucessões de números racionais que gozam da propriedade anterior, encontram-se todas aquelas que convergem para os números racionais positivos.

**Definição 3.3.2** *Diz-se que a sucessão de números racionais* $\{r_n\}$*, satisfazendo a condição de Cauchy, goza da propriedade* $\mathcal{N}$*, que se simboliza por* $\mathcal{N}\{r_n\}$*, quando for possível determinar um número racional positivo* $d$*, de modo que quase todos os elementos da sucessão* $\{r_n\}$ *sejam menores que* $-d$*, querendo significar-se com a expressão "quase todos", todos os elementos* $r_n$*, com excepção de um número finito. Simbolicamente:*

$$\mathcal{N}\{r_n\} \Longleftrightarrow (\exists d \in Q, d > 0\ \exists N : \forall n > N \Longrightarrow r_n < -d)\,.$$

Gozam desta propriedade $\mathcal{N}$, todas as sucessões que convergem para números racionais negativos.

**Teorema 3.3.1** *Se a sucessão de Cauchy de números racionais* $\{r_n\}$ *não converge para* $0$*, então* $\{r_n\}$ *possui ou a propriedade* $\mathcal{P}$ *ou a propriedade* $\mathcal{N}$*, uma com exclusão da outra, o que se simboliza por:*

$$\mathcal{C}\{r_n\}\ \ e \neg\{r_n\} \longrightarrow 0 \Longrightarrow \mathcal{P}\{r_n\} \downarrow \mathcal{N}\{r_n\}\,.$$

**Demonstração.** Vamos raciocinar pelo absurdo e supor que a conclusão é falsa.

Como tem lugar a seguinte identidade lógica:

$$\mathcal{P}\{r_n\} \downarrow \mathcal{N}\{r_n\} \Longleftrightarrow (\mathcal{P}\{r_n\} \wedge \neg\mathcal{N}\{r_n\}) \vee (\neg\mathcal{P}\{r_n\} \wedge\ \mathcal{N}\{r_n\})$$

pelas leis da álgebra das proposições, temos:

$$\begin{aligned}(1)\ \ \neg(\mathcal{P}\{r_n\} \downarrow \mathcal{N}\{r_n\}) \ &\Longleftrightarrow\ \neg\mathcal{P}\{r_n\} \vee \mathcal{N}\{r_n\} \wedge\ \mathcal{P}\{r_n\} \vee \neg\mathcal{N}\{r_n\} \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow\ \mathcal{N}\{r_n\} \wedge\ \mathcal{P}\{r_n\} \vee \neg\mathcal{P}\{r_n\} \wedge\ \neg\mathcal{N}\{r_n\}\,.\end{aligned}$$

Mas

$$(2) \qquad \mathcal{N}\{r_n\} \Longleftrightarrow (\exists d' > 0\ \exists N' : \forall n > N' \Longrightarrow r_n < -d')$$

e

$$\mathcal{P}\{r_n\} \Longleftrightarrow (\exists d'' > 0\ \exists N'' : \forall n > N'' \Longrightarrow r_n > d'')$$

donde

$$\neg\mathcal{N}\{r_n\} \Longleftrightarrow \forall d, n\ \exists N'_n > n : r_{N'_n} \geq -d$$

$$(3) \quad \text{e} \quad \neg\mathcal{P}\{r_n\} \Longleftrightarrow \forall d, n \ \exists N''_n > n : r_{N''_n} \leq d.$$

De modo que a primeira conjunção de (1), $\mathcal{N}\{r_n\} \wedge \mathcal{P}\{r_n\}$, implicaria, para $n$ maior do que o supremo de $N'$ e $N''$ (o maior dos números $N'$, $N''$), $-d' > r_n > d''$, o que, pela ordenação dos números racionais é absurdo.

Vejamos agora que a segunda conjunção de (1), $\neg\mathcal{P}\{r_n\} \wedge \neg\mathcal{N}\{r_n\}$, contradiz as duas hipóteses feitas, a de se tratar de uma sucessão de Cauchy e a de não convergir para 0.

Escrevamos a condição de Cauchy:

$$(4) \quad \forall d > 0 \ \exists N : \forall n > N \text{ e } \forall p > 0 \Longrightarrow r_n - d < r_{n+p} < r_n + d$$

e sejam $r_{N'_N}$ e $r_{N''_N}$ os dois elementos da sucessão que as proposições de (3), uma vez arbitrado $d$, fazem corresponder ao índice $N$, dado por (4), em função de $d$. Será então

$$(5) \quad r_{N'_N} \geq -d, \text{ com } N'_N > N \text{ e } r_{N''_N} \leq d, \text{ com } N''_N > N$$

e (4) implicará

$$r_{N'_{N+p}} < r_{N'_N} + d, \text{ para } p > 0 \text{ e } N'_N > N$$

e

$$r_{N''_N} - d < r_{N''_{N+p}}, \text{ com } p > 0 \text{ e } N''_N > N$$

ou, por ser $p$ qualquer,

$$r_{N''_N} - d < r_n < r_{N'_N} + d, \text{ para } n > N$$

e por (5)

$$-2d < r_n < 2d$$

o que significa que $\{r_n\}$ é uma sucessão de limite 0, contrariando uma das hipóteses. ■

**Teorema 3.3.2** *As sucessões equivalentes têm conjuntamente a propriedade $\mathcal{P}$ ou a propriedade $\mathcal{N}$ , isto é,*

$$\begin{aligned} \mathcal{P}\{r_n\} &\Longrightarrow \forall \{r'_n\} \ \textit{se} \ \{r'_n\} \approx \{r_n\} \ \textit{então} \ \mathcal{P}\{r'_n\} \\ \mathcal{N}\{r_n\} &\Longrightarrow \forall \{r'_n\} \ \textit{se} \ \{r'_n\} \approx \{r_n\} \ \textit{então} \ \mathcal{N}\{r'_n\}. \end{aligned}$$

**Demonstração.** Suponhamos que $\mathcal{P}\{r_n\}$, isto é:

$$\mathcal{P}\{r_n\} \Longleftrightarrow (\exists d > 0 \; \exists N' : \forall n > N' \Longrightarrow d < r_n)$$

e seja $\{r'_n\}$ uma sucessão equivalente a $\{r_n\}$, então:

$$\{r_n\} \approx \{r'_n\} \Longrightarrow \left(\exists N'' \; : \forall n > N \Longrightarrow -\frac{d}{2} < r_n - r'_n < \frac{d}{2}\right).$$

Mas as duas proposições anteriores implicam

$$\forall n > \sup(N', N'') \Longrightarrow d < r_n < r'_n + \frac{d}{2}$$

e assim $\frac{d}{2} < r'_n$ para $n > \sup(N', N'')$ o que significa ser $\mathcal{P}\{r'_n\}$. ■

As duas seguintes definições são consistentes, independentemente das sucessões representativas dos números reais a que dizem respeito.

**Definição 3.3.3** *O número real* $\alpha = [a_n]$ *diz-se positivo ou maior do que* $[0]$*, ou ainda* $[0]$ *menor do que* $[a_n]$ *se a sucessão* $\{a_n\}$ *admite a propriedade* $\mathcal{P}$*. Simbolicamente:*

$$[0] < [a_n] \Longleftrightarrow [a_n] > [0] \Longleftrightarrow \mathcal{P}\{a_n\}.$$

*O número real* $\alpha' = [a'_n]$ *diz-se negativo ou menor do que* $[0]$*, ou ainda* $[0]$ *maior do que* $[a'_n]$ *se a sucessão representante admite a propriedade* $\mathcal{N}$*. Simbolicamente:*

$$[0] > [a'_n] \Longleftrightarrow [a'_n] < [0] \Longleftrightarrow \mathcal{N}\{a_n\}.$$

*É imediato que se* $[a_n]$ *for positivo, então* $[-a_n]$ *é negativo.*

**Definição 3.3.4** *Dois números reais* $\alpha = [a_n]$ *e* $\beta = [b_n]$ *dizem-se entre si na relação menor que ou maior que, simbolicamente*

$$\begin{aligned} [a_n] &< [b_n], \; [a_n] \textit{ menor que } [b_n] \\ [b_n] &> [a_n], \; [b_n] \textit{ maior que } [a_n], \end{aligned}$$

*sempre que* $[b_n - a_n] > [0]$*.*

Das Definições 3.3.1 e 3.3.3 podemos enunciar o seguinte Teorema, e respectivo Corolário.

**Teorema 3.3.3**

$$[a_n] < [b_n] \Longleftrightarrow (\exists d > 0, \exists N : \forall n > N \Longrightarrow b_n > a_n + d).$$

**Corolário 3.3.1**

$$[a_n] < [b_n] \Longrightarrow \exists N : \forall n > N \Longrightarrow b_n > a_n.$$

É de destacar que este Corolário contém uma condição necessária, mas não suficiente para arrastar a relação *menor do que* entre os números que as sucessões, a que estão sujeitas na condição, representam.

Com efeito, se considerarmos, por exemplo, as duas sucessões $\left\{1+\frac{2}{n}\right\}$ e $\left\{1+\frac{1}{n}\right\}$, para $n \geq 1$ temos que $1+\frac{2}{n} > 1+\frac{1}{n}$ e, no entanto, as duas sucessões representam o mesmo número real: $\left[1+\frac{2}{n}\right] = \left[1+\frac{1}{n}\right]$.

**Teorema 3.3.4** *As Definições 3.3.3 e 3.3.4 ordenam o conjunto* $\overline{R}$.

**Demonstração.** A relação de $<$ é, obviamente, completa e reflexiva. Vamos ver que também é transitiva:

$$\forall\,[a_n],[b_n],[c_n] \text{ se } [a_n] < [b_n] \text{ e } [b_n] < [c_n] \text{ então } [a_n] < [c_n].$$

Como

$$\begin{aligned} [a_n] &< [b_n] \text{ temos que } \forall n > N' \Longrightarrow b_n - a_n > d', \\ [b_n] &< [c_n] \text{ temos que } \forall n > N'' \Longrightarrow c_n - b_n > d''. \end{aligned}$$

Mas então, desde que se tome $n > \sup(N', N'')$, será $b_n - a_n > d'$ e $c_n - b_n > d''$ e, atendendo ao facto de que o conjunto dos números racionais constitui um grupo ordenado relativamente à adição, temos:

$$(b_n - a_n) + (c_n - b_n) > d' + (c_n - b_n) > d' + d'' = d.$$

Ou seja, $c_n - a_n > d$, se $n > \sup(N', N'')$. ■

## 3.4 Números Reais como Grupo Abeliano Aditivo

Nesta secção pretendemos mostrar que o conjunto dos números reais definidos como limites de sucessões de Cauchy constitui um grupo abeliano aditivo, isto é, cuja adição é comutativa, contudo começaremos, obviamente, por definir a adição neste mesmo conjunto. Para tal necessitamos provar os seguintes:

**Teorema 3.4.1** *Se $\{a_n\}$ e $\{a'_n\}$ são sucessões de Cauchy, o mesmo acontece à sucessão $\{a_n + a'_n\}$.*

**Demonstração.** As hipóteses asseguram-nos que para todo o número natural $p$, $|a_{n+p} - a_n| < \frac{d}{2}$ desde que $n > N'$ e para todo o número natural $q$, $\left|a'_{n+q} - a'_n\right| < \frac{d}{2}$ desde que $n > N''$.

Portanto, para todo o número natural $k$:

$$\begin{aligned} \left|\left(a_{n+k} + a'_{n+k}\right) - \left(a_n + a'_n\right)\right| &= \left|\left(a_{n+k} - a_n\right) + \left(a'_{n+k} - a'_n\right)\right| \leq \\ &\leq \left|a_{n+k} - a_n\right| + \left|a'_{n+k} - a'_n\right| < \frac{d}{2} + \frac{d}{2} = d, \end{aligned}$$

desde que $n$ seja superior ao $\sup(N', N'')$. ■

**Teorema 3.4.2**

$$Se\ \ \{a_n\} \approx \{a'_n\} \quad e \quad \{b_n\} \approx \{b'_n\}\ \ então\ \ \{a_n + b_n\} \approx \{a'_n + b'_n\}.$$

**Demonstração.** Basta fazer a passagem ao limite na identidade

$$a_n + b_n - (a'_n + b'_n) = (a_n - a'_n) + (b_n - b'_n),$$

lembrando que, por hipótese, as duas parcelas do segundo membro devem ter 0 por limite.

■

**Teorema 3.4.3** *Toda a sucessão de Cauchy não convergente para zero é equivalente a uma outra de termos todos diferentes de zero.*

*Por outras palavras, se $[a_n] \neq [0]$ pode sempre ser representado por uma sucessão de termos não nulos.*

**Demonstração.** Não sendo $\{a_n\}$ convergente para zero, temos que ou $\mathcal{P}\{a_n\}$ ou $\mathcal{N}\{a_n\}$.

Na primeira hipótese, existe um número $d$ positivo e uma ordem $N$ tal que a partir dela, todos os termos

$$a_{N+1}, a_{N+2}, \ldots$$

são maiores que $d$.

Na segunda, existem igualmente números $d'$ e $N'$ tais que

$$a_{N'+1}, a_{N'+2}, ...$$

são todos menores que $-d'$.

É evidente que são equivalentes as sucessões

$$\{a_1, a_2, ..., a_N, a_{N+1}, ...\} \text{ e } \{d, d, ..., d, a_{N+1}, a_{N+2}, ...\}$$

como igualmente o são

$$\{a_1, a_2, ..., a_{N'}, a_{N'+1}, a_{N'+2}, ...\} \text{ e } \{-d', -d', ..., -d', a_{N'+2}, ...\}.$$

■

Tendo como base os Teoremas 3.4.1 e 3.4.2, podemos introduzir a adição de números reais da seguinte forma:

**Definição 3.4.1** *A soma $\alpha + \beta$ de dois números reais, $\alpha = [a_n]$ e $\beta = [b_n]$, é o conjunto $[a_n + b_n]$ de todas as sucessões equivalentes à sucessão $\{a_n + b_n\}$, com*

$$[a_n] + [b_n] = [a_n + b_n].$$

Estamos então, em condições de mostrar o seguinte:

**Teorema 3.4.4** *$\overline{R}$ é um grupo comutativo relativamente à operação adição.*

Provar o teorema equivale a provar os seguintes quatro postulados referentes a Grupo Abeliano.

(i) $\overline{R}$ é fechado relativamente à adição.

Resulta imediatamente da definição.

(ii) A operação adição é comutativa: $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.

Seja $\alpha = [a_n]$ e $\beta = [b_n]$. Uma vez que o conjunto dos números racionais é um grupo comutativo relativamente à adição, pela Definição 3.4.1, temos

$$\alpha + \beta = [a_n + b_n] = [b_n + a_n] = [b_n] + [a_n] = \beta + \alpha.$$

(iii) A operação adição é associativa: $\alpha + (\beta + \gamma) = (\beta + \alpha) + \gamma$.

Seja $\alpha = [a_n]$ , $\beta = [b_n]$ e $\gamma = [c_n]$.

Novamente pela Definição 3.4.1 e pelo facto do conjunto dos números racionais ser um grupo comutativo relativamente à adição, temos:

$$\begin{aligned} [a_n] + ([b_n] + [c_n]) &= [a_n] + [b_n + c_n] = [a_n + (b_n + c_n)] = \\ &= [(a_n + b_n) + c_n] = [a_n + b_n] + [c_n] = ([a_n] + [b_n]) + [c_n] . \end{aligned}$$

(iv) A equação aditiva $\alpha + \xi = \beta$ tem sempre solução em $\overline{R}$.

Tomemos $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ como representantes de $\alpha$ e $\beta$, temos de encontrar a solução da equação $[a_n] + x = [b_n]$.

Com efeito, em $\lambda = [a_n - b_n]$ , temos a única solução da equação.

É solução porque

$$[a_n] + [b_n - a_n] = [a_n + b_n - a_n] = [b_n]$$

e é única, porque se $[x_n]$ fosse uma outra solução, teríamos

$$[a_n] + [x_n] = [b_n] \text{ ou } [a_n + x_n] = [b_n]$$

o que implicaria a equivalência

$$\{a_n + x_n\} \approx \{b_n\} ,$$

isto é,

$$\lim (a_n + x_n - b_n) = 0 \text{ ou } \lim (x_n - (b_n - a_n)) = 0$$

e portanto

$$\{x_n\} \approx \{b_n - a_n\} \text{ ou } [x_n] = [b_n - a_n] .$$

Tendo em conta o postulado (iv), acabado de provar, a subtracção de números reais assenta na seguinte:

**Definição 3.4.2** *A solução $\xi$ da equação $\alpha + \xi = \beta$, que se representa por $\xi = \beta - \alpha$, considera-se obtida de $\beta$ e de $\alpha$ por uma operação unívoca, a que se chama subtracção.*

Uma vez que

$$\alpha + [0] = [a_n] + [0] = [a_n + 0] = [a_n] = \alpha,$$

temos que a unidade do grupo (ou módulo da adição) é o número real $[0]$, o qual passaremos a representar pelo símbolo 0 (zero).

A solução de $\alpha + \xi = 0$ corresponde ao simétrico, $-\alpha$, de $\alpha$. Se $\alpha = [a_n]$, então $-\alpha = [-a_n]$.

## 3.5 Números Reais como Corpo Ordenado Comutativo

Nesta secção pretendemos mostrar que o conjunto dos números reais definidos como limites de sucessões de Cauchy constitui um Corpo Ordenado Comutativo, contudo começaremos, obviamente, por definir a multiplicação neste mesmo conjunto. Para tal necessitamos dos seguintes:

**Teorema 3.5.1** *As sucessões de Cauchy são limitadas.*

**Demonstração.** Se uma sucessão $\{a_n\}$ é de Cauchy, arbitrado o número positivo $d$, pode encontrar-se uma ordem $N$ tal que

$$a_{N'} - d < a_n < a_{N'} + d$$

em que $N'$ é um número escolhido maior que $N$ e $n$ percorre todos os números maiores que $N'$. Então, se representarmos por $l$ um número inferior ao menor dos números

$$a_1, a_2, ..., a_{N'} \text{ e } a_{N'} - d,$$

e por $L$ um número superior ao maior dos números

$$a_1, a_2, ..., a_{N'} \text{ e } a_{N'} + d,$$

teremos, evidentemente, todos os termos da sucessão compreendidos entre $l$ e $L$, ficando o Teorema assim demonstrado. ■

**Teorema 3.5.2** *Se a sucessão $\{a_n\}$ é de Cauchy, a sucessão $\{|a_n|\}$, constituída pelos valores absolutos dos termos da sucessão dada, é igualmente de Cauchy.*

**Demonstração.** Se $\{a_n\}$ tem a propriedade $\mathcal{P}$, a partir de certa ordem a sucessão dos valores absolutos coincide com a sucessão dada.

Se $\{a_n\}$ tem a propriedade $\mathcal{N}$, a partir de certa ordem os termos de $\{|a_n|\}$ coincidem com os de $\{-a_n\}$.

Mas como

$$|(-a_{n+p}) - (-a_n)| = |a_{n+p} - a_n|\,,$$

as sucessões $\{a_n\}$ e $\{-a_n\}$ são simultaneamente de Cauchy. Portanto, ainda nesta hipótese se verifica o enunciado.

Resta considerar o caso em que $\{a_n\}$ converge para zero. Mas isto significa que, qualquer que seja $d$, encontra-se $N$ de modo a ser $|a_n| < d$ para $n > N$, o que é exactamente a condição de convergência de $\{|a_n|\}$ para zero. ■

**Teorema 3.5.3** *Se* $\{a_n\}$ *e* $\{a'_n\}$ *são sucessões de Cauchy, o mesmo acontece à sucessão* $\{a_n \cdot a'_n\}$.

**Demonstração.** Como podemos escrever

$$\begin{aligned}\left|a_{n+p} \cdot a'_{n+p} - a_n \cdot a'_n\right| &= \left|a_{n+p} \cdot a'_{n+p} + a_{n+p} \cdot a'_n - a_{n+p} \cdot a'_n - a_n \cdot a'_n\right| \leq \\ &\leq \left|a_{n+p}\right| \left|a'_{n+p} - a'_n\right| + \left|a'_n\right| \left|a_{n+p} - a_n\right|\end{aligned}$$

e determinar $N$ de tal modo que, para $n$ maior que $N$ e para todo $p$, número natural, tenham lugar as desigualdades:

$$\left|a'_{n+p} - a'_n\right| < \frac{d}{2L} \text{ e } \left|a_{n+p} - a_n\right| < \frac{d}{2L'}$$

em que $L$ e $L'$ são majorantes, respectivamente, dos conjuntos constituídos pelos termos da sucessão $\{|a_n|\}$ e da sucessão $\{|a'_n|\}$, que existem pelos Teoremas 3.5.1 e 3.5.2, é então

$$\left|a_{n+p} \cdot a'_{n+p} - a_n \cdot a'_n\right| \leq L \times \frac{d}{2L} + L' \times \frac{d}{2L'} = d$$

para $n > N$, combinado com qualquer $p$. ■

**Teorema 3.5.4**

$$\textit{Se } \{a_n\} \approx \{a'_n\} \textit{ e } \{b_n\} \approx \{b'_n\} \textit{ então } \{a_n \cdot a'_n\} \approx \{b_n \cdot b'_n\}\,.$$

**Demonstração.** O raciocínio justificativo é idêntico ao efectuado na demonstração do Teorema 3.4.2, partindo-se de

$$\begin{aligned} |a_n b_n - a'_n b'_n| &= |a_n b_n + a_n b'_n - a_n b'_n - a'_n b'_n| = \\ &= |a_n (b_n - b'_n) + b'_n (a_n - a'_n)| \leq \\ &\leq |a_n| \, |b_n - b'_n| + |b'_n| \, |a_n - a'_n| \,. \end{aligned}$$

O carácter limitado das sucessões $\{|a_n|\}$ e $\{|b'_n|\}$, de acordo com os Teoremas 3.5.1 e 3.5.2, e a convergência para zero de $b_n - b'_n$ e de $a_n - a'_n$, conduzem então ao resultado. ■

Tendo em conta os Teoremas 3.5.3 e 3.5.4, podemos, então, definir o produto de números reais da seguinte forma:

**Definição 3.5.1** *O produto $\alpha \cdot \beta$ de dois números reais, $\alpha = [a_n]$ e $\beta = [b_n]$, é o conjunto $[a_n \cdot b_n]$, de todas as sucessões equivalentes à sucessão $\{a_n \cdot b_n\}$, com $[a_n \cdot b_n] = [a_n] \cdot [b_n]$.*

Estamos agora em condições de demonstrar o seguinte:

**Teorema 3.5.5** *$\overline{R}$, com a única exclusão do número $0$, é um grupo comutativo relativamente à operação multiplicação.*

Provar o teorema, equivale a provar os seguintes quatro postulados.

(i) É fechado relativamente à multiplicação.

Resulta imediatamente da definição.

(ii) A operação multiplicação é comutativa: $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$.

Sejam $\alpha = [a_n]$ e $\beta = [b_n]$. Pela Definição 3.5.1 e pelo facto de $\{Q \backslash \{0\}, \cdot\}$ ser um grupo comutativo, podemos escrever sucessivamente:

$$\alpha \cdot \beta = [a_n] \cdot [b_n] = [a_n \cdot b_n] = [b_n \cdot a_n] = [b_n] \cdot [a_n] = \beta \cdot \alpha.$$

(iii) A operação multiplicação é associativa: $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$.

Sejam $\alpha = [a_n]$, $\beta = [b_n]$ e $\gamma = [c_n]$, pelas mesmas condições da alínea (ii) temos:

$$\begin{aligned} \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) &= [a_n] \cdot ([b_n] \cdot [c_n]) = [a_n] \cdot [b_n \cdot c_n] = [a_n \cdot (b_n \cdot c_n)] = \\ &= [(a_n \cdot b_n) \cdot c_n] = ([a_n] \cdot [b_n]) \cdot [c_n] = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma. \end{aligned}$$

(iv) A equação multiplicativa $\alpha \cdot \xi = \beta$, com $\alpha \neq 0$, é sempre possível e tem sempre uma única solução em $\overline{R}$.

Para provar o (iv), necessitamos demonstrar o seguinte:

**Lema 3.5.1** *Se $\{a_n\}$ é uma sucessão de Cauchy que não converge para* 0 *(número racional), tal que, para todo $n$, $a_n \neq 0$, então $\{a_n^{-1}\}$ é igualmente uma sucessão de Cauchy.*

**Demonstração.** Considere-se

$$\left|\frac{1}{a_m} - \frac{1}{a_n}\right| = \left|\frac{a_n - a_m}{a_m a_n}\right| = \frac{|a_n - a_m|}{|a_m|\,|a_n|}.$$

Sendo $\{a_n\}$ sucessão de Cauchy, o mesmo acontece com $\{|a_n|\}$.

Seja $\rho^{-1}$ um minorante de $\{|a_n|\}$, que existe atendendo ao Teorema 3.5.1.

Então, qualquer que seja $m$, temos

$$\frac{1}{\rho} < |a_m|\,, \text{ isto é, } \frac{1}{|a_m|} < \rho,$$

e assim

$$\left|\frac{1}{a_m} - \frac{1}{a_n}\right| < \rho^2\,|a_n - a_m|\,.$$

Escolhendo agora $N$ de modo a ser $|a_n - a_m| < \frac{d}{\rho^2}$, desde que $n$ e $m$ sejam maiores que $N$, vem finalmente

$$\left|\frac{1}{a_m} - \frac{1}{a_n}\right| < d, \text{ para } m, n > N,$$

o que prova o Lema. ■

Retomando a prova de (iv), consideremos $\alpha = [a_n]$ e $\beta = [b_n]$.

Em virtude da hipótese $-\alpha = [-a_n]$, o Teorema 3.4.3 garante-nos que a sucessão $\{a_n\}$, representativa de $\alpha$, pode ser escolhida de modo a que sejam os seus elementos todos diferentes de 0.

Então $\{a_n^{-1}\}$ é uma sucessão de Cauchy, pelo Lema atrás enunciado, e $\left\{\frac{b_n}{a_n}\right\}$ também, de modo que em $\left[\frac{b_n}{a_n}\right]$ temos uma solução da equação, porque

$$[a_n] \cdot \left[\frac{b_n}{a_n}\right] = \left[a_n \cdot \frac{b_n}{a_n}\right] = \left[a_n \cdot \frac{1}{a_n} \cdot b_n\right] = [b_n]\,.$$

A solução é única pois, se supusermos que não tem lugar a unicidade e que $\xi = [x_n]$ é um outro número real tal que

$$\alpha \cdot \xi = \beta \text{ ou seja } [a_n] \cdot [x_n] = [b_n] \text{ ou seja } [a_n \cdot x_n] = [b_n],$$

irão ser equivalentes as sucessões que figuram a representar o número real no primeiro e no segundo membro:

$$\{a_n x_n\} \approx \{b_n\} \text{ ou seja } \lim (a_n x_n - b_n) = 0$$

o que significa,

$$\forall \delta \in Q, \delta > 0 \; \exists N : \forall x, \forall n > N \implies |a_n x_n - b_n| < \delta.$$

Designe-se por $M$ um majorante do conjunto dos elementos da sucessão $\{a_n^{-1}\}$, conforme o Teorema 3.5.1, e determine-se para um número racional positivo qualquer, $\delta$, uma ordem $N$ de modo a ser $\left| a_n \left( x_n - \frac{b_n}{a_n} \right) \right| < \frac{\delta}{M}$, para $n > N$. Nas mesmas condições, será ainda

$$|a_n| \left| x_n - b_n a_n^{-1} \right| < \frac{\delta}{M}, \text{ isto é, } \left| x_n - b_n a_n^{-1} \right| < \frac{\delta}{M} \frac{1}{|a_n|}$$

e portanto, desde que $n > N$,

$$\left| x_n - \frac{b_n}{a_n} \right| < \delta$$

ou seja

$$\lim \left( x_n - \frac{b_n}{a_n} \right) = 0, \text{ ou seja, } \{x_n\} \approx \left\{ \frac{b_n}{a_n} \right\}$$

ou, finalmente,

$$[x_n] = \left[ \frac{b_n}{a_n} \right].$$

Tendo por base o que acabamos de provar, podemos definir a divisão de números reais da seguinte forma:

**Definição 3.5.2** *À operação que permite determinar, a partir de dois quaisquer números reais $\alpha$ e $\beta$, com $\alpha \neq 0$, um terceiro número real $\xi$ tal que $\alpha\xi = \beta$, denomina-se divisão de $\beta$ por $\alpha$, e ao resultado que se simboliza por $\frac{\beta}{\alpha}$, quociente dos dois números.*

Podemos continuar a designar por 1 (um) o número real, unidade do Grupo Multiplicativo dos números reais. Uma vez que

$$[a_n]\,[x_n] = [a_n]$$

implica

$$[x_n] = \left[\frac{a_n}{a_n}\right] = [1]$$

a solução da equação $\alpha\xi = \alpha$ é o número real $[1]$, conjunto de todas as sucessões de números racionais que convergem para o número racional 1.

Continuando com a caracterização algébrica do conjunto $\overline{R}$, podemos enunciar o seguinte Teorema, o qual é facilmente demonstrável nos termos dos anteriores.

**Teorema 3.5.6** *$\overline{R}$ é um corpo ordenado.*

Para provar o teorema temos de demonstrar as seguintes quatro proposições:

(i) $\overline{R}$ é um conjunto ordenado.

Resulta do Teorema 3.3.4.

(ii) É satisfeita a lei da monotonia relativamente à adição:

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \text{ se } \alpha < \beta \text{ então } \alpha + \gamma < \beta + \gamma.$$

Tomem-se $\alpha = [a_n]$, $\beta = [b_n]$ e $\gamma = [c_n]$.

Se $[a_n] < [b_n]$ então existe $d$ tal que $a_n + d < b_n$, desde que se tome $n < N$. Mas atendendo a que o conjunto dos números racionais constitui um grupo ordenado relativamente à adição, isto é, um conjunto ordenado em que a operação de grupo satisfaz a lei de monotonia para a adição, temos

$$a_n + d < b_n \Longrightarrow a_n + c_n + d < b_n + c_n,$$

sob a condição $n > N$, o que implica

$$[a_n + c_n] < [b_n + c_n] \text{ ou seja } [a_n] + [c_n] < [b_n] + [c_n]\,,$$

ou finalmente

$$\alpha + \gamma < \beta + \gamma.$$

(iii) É satisfeita a lei da monotonia relativamente à multiplicação:

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \text{ se } \alpha < \beta \text{ e } \gamma > 0 \text{ então } \alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma.$$

Tomem-se $\alpha = [a_n]$, $\beta = [b_n]$ e $\gamma = [c_n]$.

Sabemos que

$$[a_n] < [b_n] \Longrightarrow (\exists d, N : \forall n > N \Longrightarrow a_n + d < b_n)$$

e que

$$0 < [c_n] \Longrightarrow (\exists d', N' : \forall n > N' \Longrightarrow 0 < d < c_n).$$

Mas de $a_n + d < b_n$, para $n > N$, e de $0 < c_n$, para $n > N'$, resulta, desde que se tomem valores de $n$ superiores ao maior dos números $N$ e $N'$, isto é, para $n > \sup(N, N')$,

$$a_n c_n + d c_n < b_n c_n,$$

pois a operação do produto de números racionais satisfaz à lei de monotonia para o mesmo.

Mas de $d' < c_n$ tira-se, ainda pela mesma razão que $dd' < dc_n$ e, atendendo ao facto de que, como referido anteriormente, $Q$ é um corpo ordenado relativamente à adição, temos

$$a_n c_n + dd' < a_n c_n + dc_n,$$

donde, pondo

$$d'' = dd' > 0,$$

resulta que

$$a_n c_n + d'' > b_n c_n \text{ para } n > \sup(N, N').$$

Portanto,

$$[a_n c_n] < [b_n c_n], \text{ isto é, } [a_n] \cdot [c_n] < [b_n] \cdot [c_n], \text{ ou seja, } \alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma.$$

(iv) A ordenação é arquimediana, isto é, qualquer número real, ou é menor que 1 ou é menor que a soma de um número $N$ de parcelas iguais a 1.

Por outras palavras, e convencionando designar por $N$ o número real (natural) $[N]$, conjunto de todas as sucessões de números racionais que convergem para o número racional (natural) $N$, temos que, para todo o $\alpha$, existe um número natural (real) $N$ tal que $\alpha < N$.

Antes de iniciar a prova de (iv) salientemos o facto de que no conjunto dos números racionais a ordenação ser arquimediana, isto é, qualquer número racional ou é menor que 1, ou é menor que a soma de um número $N$ de parcelas iguais a 1.

Retomando a demonstração de (iv), consideremos $\alpha = [a_n]$ e suponhamos ter em $L$ um majorante do conjunto constituído pelos elementos de $\{a_n\}$. Em virtude da ordenação em $Q$ ser arquimediana, existe um número natural (racional) $N$ tal que, $a_n < L < N$.

Tome-se $d < N - L$. É então

$$a_n + d < L + d < N,$$

donde $[a_n] < [N]$ ou, finalmente, pela convenção adoptada $\alpha < N$.

## 3.6 Números Reais como extensão dos Números Racionais

Dizer que $\overline{R}$ é ampliação de $Q$, significa poder encontrar em $\overline{R}$ um subconjunto $Q'$ isomorfo a $Q$.

**Definição 3.6.1** *Os números reais que correspondem a sucessões de números racionais que convergem para números racionais serão denominados números reais racionais. Este subconjunto dos números reais designar-se-á, daqui em diante, por $Q'$.*

**Teorema 3.6.1** *$Q'$ e $Q$ podem pôr-se em correspondência isomórfica, de ordem e algébrica.*

**Demonstração.** A correspondência é biunívoca e trata-se de um isomorfismo de ordem pois se $r$ e $r'$ são dois racionais ligados pela relação $r < r'$, e se $[r_n]$ e $[r'_n]$ são os seus correspondentes em $\overline{R}$, então

$$\lim_n r_n = r \text{ e } \lim_n r'_n = r'.$$

Tomemos, o que é sempre possível por $Q$ ser corpo de ordenação densa,

$$d < \frac{r' - r}{2}.$$

Têm lugar as seguintes proposições:

$$\exists N_r : \forall n > N_r \Longrightarrow r < r' - d < r'_n$$

e

$$\exists N_{r'} : \forall n > N_{r'} \Longrightarrow r_n < r + d < r' - d < r'_n.$$

Notando que

$$r'_n - r_n > r' - d - r - d = r' - r - 2d,$$

conclui-se que

$$\forall n > N = \sup(N_r, N_{r'}) \Longrightarrow r'_n - r_n > 2d$$

o que mostra ser, pela Definição 3.3.1, $\mathcal{P}\{r'_n - r_n\}$ e portanto $[r_n] < [r'_n]$, pela Definição 3.3.4.

Resta mostrar que se trata de um isomorfismo algébrico, isto é, que à soma e ao produto de dois números reais racionais correspondem, respectivamente, a soma e o produto dos dois números racionais imagens dos dois números reais racionais.

Sejam $\overline{r} = [r_n]$ e $\overline{r'} = [r'_n]$, dois números racionais que correspondem aos números racionais $r$ e $r'$, que são limites das sucessões $\{r_n\}$ e $\{r'_n\}$ que representam $\overline{r}$ e $\overline{r'}$.

Temos

$$[r_n] + [r'_n] = [r_n + r'_n] \text{ e } [r_n] \cdot [r'_n] = [r_n \cdot r'_n].$$

Mas as sucessões $\{r_n + r'_n\}$ e $\{r_n \cdot r'_n\}$ têm por limites, precisamente, $r + r'$ e $r \cdot r'$, que serão assim os números racionais correspondentes aos números racionais $\overline{r}$ e $\overline{r'}$, o que prova o isomorfismo algébrico entre $Q'$ e $Q$. ■

Tendo por base as noções lógicas de correspondência, relação e conjunto, passamos do conjunto dos números racionais para um conjunto, cujos elementos chamamos números reais, que, por sua vez, contém um subconjunto $Q'$, cujos elementos denominamos de números reais racionais, que não se distingue, do ponto de vista algébrico e de ordenação, do conjunto dos números racionais, de que havíamos partido. E assim como nos números racionais há um subgrupo isomorfo dos números naturais e um domínio de integridade isomorfo dos números inteiros ([19], pp. 15 - 19), também no conjunto dos números reais, na correspondência estabelecida entre o conjunto dos números racionais e o conjunto dos números reais racionais, nos aparecem números reais a que poderemos denominar de números reais naturais e números reais inteiros. Deste modo, continuaremos a utilizar as mesmas notações e símbolos para os números reais seus isomorfos, desde que não surjam quaisquer confusões.

## 3.7 Completude do Conjunto dos Números Reais

Ao longo deste capítulo, provamos que o conjunto dos números reais aqui construído constitui um corpo ordenado comutativo, resta-nos agora provar a completude desse mesmo conjunto, isto é, que todo o subconjunto não vazio de $\overline{R}$, limitado superiormente, tem um supremo em $\overline{R}$.

Nesta secção, iremos provar a completude do conjunto dos números reais, a partir do Princípio de Cauchy. Para tal, podemos introduzir, no conjunto dos números racionais e no conjunto dos números reais, métricas, tendo ambas por base a definição de distância entre dois números.

**Definição 3.7.1** *Dados dois números racionais $r_1$ e $r_2$ denomina-se distância desses dois números aquele dos dois números, $r_1 - r_2$ e $r_2 - r_1$, que for positivo.*

**Definição 3.7.2** *Dados dois números reais $\alpha$ e $\beta$ denomina-se distância desses dois números ao número obtido da forma:*

$$d(\alpha, \beta) = |\alpha - \beta| = |\beta - \alpha| .$$

Consideremos o conjunto $Q'$ dos números reais racionais, algebricamente isomorfo ao conjunto dos números racionais, $Q$, atrás definido. A introdução da métrica do espaço dos números reais, feita na Definição 3.7.2, organiza igualmente o subconjunto $Q'$, como um espaço métrico.

Em relação às duas métricas definidas, para o conjunto dos números reais, na Definição 3.7.2, e para o conjunto dos números racionais, na Definição 3.7.1, tem lugar o seguinte:

**Teorema 3.7.1** *$Q'$ e $Q$ são espaços isométricos.*

**Demonstração.** A correspondência do isomorfismo conserva igualmente a distância entre os pares de pontos correspondentes.

Sejam $\rho$ e $\rho'$ dois números reais racionais e $r$ e $r'$ os números racionais correspondentes.

Os números reais $\rho$ e $\rho'$ podem, como sabemos, ser representados pelas sucessões $\{r\}$ e $\{r'\}$.

Pela Definição 3.7.2, temos

$$d(\rho, \rho') = |\rho - \rho'| = |[r] - [r']| = |[r - r']| = [|r - r'|].$$

E a distância entre os dois números racionais é $|r - r'|$, que é o número que em $Q$ corresponde a $[|r - r'|]$ de $Q'$. ■

Com o intuito de fazer o estudo da convergência de sucessões de números reais, consideremos as seguintes convenções:

> Com $\{a_n\}_n$ indicaremos uma sucessão $\{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$ cujos termos não são necessariamente iguais.
>
> Com $\{a_n\}$ indicaremos uma sucessão em que todos os termos são iguais a $a_n$, isto é, $\{a_n, a_n, ..., a_n, ...\}$.
>
> Com $[a_n]_n$ indicaremos o número real representado pela sucessão
>
> $$\{a_1, a_2, ..., a_n, ...\} \equiv \{a_n\}_n.$$
>
> Com $[a_n]$ indicaremos o número real representado pela sucessão
>
> $$\{a_n, a_n, ..., a_n, ...\} \equiv \{a_n\}.$$

Reportando-nos à definição de limite, podemos enunciar a seguinte condição necessária e suficiente de convergência.

$$\begin{aligned} \lim \{\alpha_n\}_n &= \alpha \Longleftrightarrow \forall \delta > 0 \; \exists N : \forall n > N \Longrightarrow d(\alpha_n, \alpha) < \delta \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \forall \delta > 0 \; \exists N : \forall n > N \Longrightarrow |\alpha_n - \alpha| < \delta. \end{aligned}$$

Utilizando a noção de limite vamos relacionar um número real com os números reais racionais isomorfos dos números racionais que intervêm numa qualquer das sucessões suas representantes.

**Teorema 3.7.2** *Pode-se considerar todo o número real como limite da sucessão de números reais racionais isomorfa da sucessão de números racionais que representa esse número real, isto é,*

$$\forall \alpha = [a_n]_n \Longrightarrow \alpha = \lim_n [a_n] .$$

**Demonstração.** Seja

$$|a - [a_n]| = |[a_m]_m - [a_n]| = |[a_m - a_n]_m| = [|a_m - a_n|]_m$$

e sejam $\delta$ um número real positivo qualquer e $d$ um número racional, cujo correspondente em $Q'$ seja menor que $\delta$, isto é, $[d] < \delta$.

Uma vez que $\{a_n\}_n$ é uma sucessão de Cauchy, de números racionais, podemos encontrar $N$, tal que

$$|a_{n+p} - a_n| < d, \text{ para } n > N \text{ e } p > 0.$$

Tomando um número $n > N$

$$|a_{n+1} - a_n| , |a_{n+2} - a_n| , ..., |a_m - a_n| , \text{ com } m > n,$$

são inferiores a $d$.

Deste modo, o número real

$$[|a_m - a_n|]_m$$

será menor ou igual ao número real $[d]$, se $n > N$. Ou seja,

$$|\alpha - [a_n]| < \delta, \text{ se } n > N,$$

o que mostra que converge para o número $\alpha$, representado pela sucessão

$$\{a_1, a_2, ..., a_n, ...\} ,$$

a sucessão de números reais representados pelas seguintes sucessões de números racionais

$$\{a_1, a_1, ..., a_1, ...\} , \text{ representante de } [a_1]$$

$$\{a_2, a_2, ..., a_2, ...\} , \text{ representante de } [a_2]$$

$$...$$

$$\{a_n, a_n, ..., a_n, ...\} , \text{ representante de } [a_n] .$$

■

Analogamente ao que fizemos na Definição 3.2.1, para os números racionais, podemos introduzir as sucessões de Cauchy para os números reais pela

**Definição 3.7.3** *Uma sucessão de Cauchy de números reais é caracterizada por:*

$$\mathcal{C}\left\{\alpha_n\right\}_n \Leftrightarrow \left(\forall\delta > 0\ \exists N : \forall n > N, \forall p > 0 \Longrightarrow \left|\alpha_{n+p} - \alpha_n\right| < \delta\right).$$

Com base no Teorema 3.7.2 podemos, agora, enunciar o Teorema Fundamental de Cauchy.

**Teorema 3.7.3** *Princípio de Cauchy*

*O espaço métrico dos números reais é um espaço métrico completo, isto é, a condição necessária e suficiente para que uma sucessão*

$$\{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...\} \equiv \{\xi_n\}_n$$

*seja convergente é que essa sucessão seja sucessão de Cauchy, ou seja, que, para todo*

$$\delta > 0, |\xi_n - \xi_m| < \delta, \text{ para } n > N \text{ e } m > n.$$

**Demonstração.** *Condição Suficiente:*

Considerem-se as sucessões representantes dos números $\xi\xi$:

$$\begin{aligned}
\xi_1 &\equiv [\{x_{11}, x_{12}, ..., x_{1m}, ...\}] \equiv [x_{1m}]_m \\
\xi_2 &\equiv [\{x_{21}, x_{22}, ..., x_{2m}, ...\}] \equiv [x_{2m}]_m \\
&\ldots \\
\xi_n &\equiv [\{x_{n1}, x_{n2}, ..., x_{nm}, ...\}] \equiv [x_{nm}]_m .
\end{aligned}$$

Pelo Teorema 3.7.2, temos, para cada $n$,

$$\lim_m [x_{nm}] = \xi_n.$$

O facto de, para todo o $n$, a sucessão $\{x_{nm}\}_m$ ser uma sucessão de Cauchy, implica que, para um mesmo $d$, escolhido de modo a ser $[d] < \delta$, podemos determinar, para cada $n$, uma ordem $m$, designada por $m_n$, tal que

$$|x_{nm_n} - x_{nm}| < d, \text{ desde que } m > m_n.$$

Como a correspondência entre $Q'$ e $Q$ é isométrica, será ainda

$$|[x_{nm_n}] - [x_{nm}]| < [d]$$

com $m_n$ determinado por $n$ e $d$, e $m$ arbitrário, mas superior a $m_n$.

Por passagem ao limite relativamente a $m$, obtemos

$$(a) \qquad\qquad |[x_{nm_n}] - \xi_n| \leq [d] < \delta.$$

Considere-se, agora, a sucessão de números reais racionais

$$\{[x_{1m_1}], [x_{2m_2}], ..., [x_{nm_n}], ...\} \equiv \{[x_{nm_n}]\}_n$$

e forme-se a diferença

$$|[x_{nm_n}] - [x_{km_k}]| \leq |[x_{nm_n}] - \xi_n| + |\xi_n - \xi_k| + |\xi_k - [x_{km_k}]| \, .$$

A primeira e terceira parcelas são menores do que $\delta$ em virtude de $(a)$ e portanto pela própria maneira como a sucessão foi determinada. Quanto à segunda parcela, como a sucessão $\{\xi_n\}_n$ é de Cauchy podemos sempre determinar, em função de $\delta$, uma ordem $N$ tal que

$$|\xi_n - \xi_k| < \delta,$$

desde que $n > N$ e $k > n$.

Desse modo será

$$|[x_{nm_n}] - [x_{km_k}]| < \delta + \delta + \delta = 3\delta$$

com a condição única de $n > N$ e $k > n$.

Fica assim provado que a sucessão de números racionais $\{[x_{nm_n}]\}$ é uma sucessão de Cauchy bem como, pela isometria entre $Q'$ e $Q$, a sucessão dos números racionais seus correspondentes

$$\{x_{1m_1}, x_{2m_2}, ..., x_{nm_n}, ...\} \equiv \{x_{nm_n}\} \, .$$

Esta sucessão de números racionais é pois a sucessão representante de um número real, o número $[x_{nm_n}]_n$ que será representado por $\xi$, isto é,

$$\xi = [x_{nm_n}]_n \, .$$

Atendendo ao Teorema 3.7.2, podemos considerar este número como o limite dos números racionais correspondentes aos números racionais da sucessão $\{x_{nm_n}\}_n$, isto é,

$$(b) \qquad \xi = \lim_n [x_{nm_n}].$$

Este número real é o limite da sucessão $\{\xi_n\}_n$ como iremos provar.

Na realidade, sendo

$$|\xi - \xi_n| \leq |\xi - [x_{nm_n}]| + |[x_{nm_n}] - \xi_n|$$

como a segunda parcela é, por $(a)$, inferior a $\delta$, e a primeira também, por $(b)$, desde que se tome $n$ superior a uma ordem $N'$, determinada pelo número $N$, virá

$$|\xi - \xi_n| < 2\delta, \text{ para } n > N,$$

isto é,

$$\xi = \lim_n \xi_n,$$

o que demonstra que toda a sucessão de Cauchy de números reais é convergente.

*Condição Necessária:*

Como no espaço métrico dos números racionais, é uma consequência imediata da propriedade triangular da distância entre dois pontos. ∎

Uma vez estabelecido o Princípio de Cauchy estamos em condições de provar a completude de $\overline{R}$, antes porém necessitamos provar o seguinte:

**Teorema 3.7.4** *Todas as sucessões monótonas e limitadas são sucessões fundamentais.*

**Demonstração.** Seja a sucessão monótona não decrescente com o majorante $\overline{m}$

$$r_1 \leq r_2 \leq ... \leq r_n \leq ... < \overline{m},$$

e vamos, com vista a um absurdo, supor que para esta sucessão não se verifica a condição de Cauchy.

Particularizando a aplicação da condição a uma sucessão não decrescente, a sua negação terá a seguinte forma

$$\exists \delta > 0, \forall n \ \exists N, p : N > n \text{ e } p > 0 \Longrightarrow r_{N+p} \geq r_N + \delta.$$

Esta afirmação mostra que se pode determinar para aquele número $\delta$ uma sucessão de inteiros

$$N_1 \text{ e } p_1; N_2 > N_1 + p_1 \text{ e } p_2; N_3 > N_2 + p_2 \text{ e } p_3; \ ...$$

tal que

$$r_{N_1+p_1} \geq r_{N_1} + \delta;\ r_{N_2+p_2} \geq r_{N_2} + \delta \geq\ r_{N_1+p_1} + 2\delta; ...;\ r_{N_k+p_k} \geq r_{N_1} + k\delta.$$

Podendo $k$ ter o valor que se queira, basta escolhê-lo, como nos permite a ordenação arquimediana, de modo a ser

$$k\delta > \overline{m} - r_{N_1},$$

para que se obtenha

$$r_{N_k+p_k} \geq r_{N_1} + k\delta > \overline{m},$$

o que contradiz a hipótese de ser $\overline{m}$ o majorante da sucessão. ■

**Teorema 3.7.5** *Princípio do Encaixe*[2]

*Dadas a sucessão monótona não decrescente*

$$\xi_1 \leq \xi_2 \leq ... \leq \xi_n \leq ...$$

*e a sucessão monótona não crescente*

$$\eta_1 \geq \eta_2 \geq ... \geq \eta_n \geq ...,$$

*satisfazendo às condições de que todo o termo da primeira é inferior a todo o termo da segunda e que a partir de certa ordem é tão pequena quanto se queira a diferença entre dois termos correspondentes das duas sucessões, isto é,*

$$\forall i, j\ \xi_i < \eta_j$$
$$\forall \delta\ \exists N : \forall n > N \Longrightarrow \eta_n - \xi_n < \delta,$$

*existe um e um só número real que pertence a todos os intervalos fechados* $[\xi_j, \eta_i]$.

[2]Notemos que foi Gomes Teixeira o pioneiro, em Portugal, a enunciar este princípio, no seu *Curso de Analyse Infinitesimal - Calculo Differencial.*

**Demonstração.** Sendo monótonas e limitadas as sucessões $\{\xi_i\}$ e $\{\eta_i\}$, são ambas sucessões de Cauchy pelo Teorema 3.7.4, e portanto, pelo Princípio de Cauchy, são sucessões convergentes.

Sejam $\xi$ e $\eta$ os respectivos limites.

Pelas condições do enunciado, qualquer que seja $n$ e $j$ é sempre $\xi_n < \eta_j$.

Nesta desigualdade, passando ao limite, relativamente ao índice $n$, obtemos

$$\lim \xi_n = \xi \leq \eta_j.$$

Como esta desigualdade verifica-se para todo o $j$, uma nova passagem ao limite, no conjunto dos números reais, e agora relativamente a $j$, conduz a

$$\xi \leq \lim \eta_j = \eta.$$

Resta agora provar que $\xi$ e $\eta$ não podem ser distintos. Se o fossem, todos os termos $\xi_n$ e $\eta_n$, respectivamente da primeira e segunda sucessões, que satisfizessem a

$$\eta_n - \xi_n < \eta - \xi$$

que existem pela segunda condição do teorema, seriam maiores que $\xi$ e menores que $\eta$, facto esse que seria um absurdo. ■

Tendo por base o Princípio do Encaixe, que acabamos de estabelecer, e tomando $X$ um subconjunto de um conjunto $O$, completamente ordenado pela relação de $<$, iremos agora enunciar a seguinte definição de supremo e ínfimo.

**Definição 3.7.4** *O conjunto $X$ tem um supremo $S$ se o conjunto $X^*$ dos seus majorantes tem um primeiro elemento $S$.*

*O conjunto $X$ tem um ínfimo $J$ se o conjunto $X_*$ dos seus minorantes tem um último elemento $J$.*

**Teorema 3.7.6** *É condição necessária e suficiente para que $S$ seja o supremo de um subconjunto $X$ de um conjunto ordenado que*

$$1^o \qquad \forall x \in X \Longrightarrow x \leq S;$$

$$2^o \qquad \forall y < S \Longrightarrow \exists x \in X : y < x < S.$$

*À segunda condição, no caso de se tratar de um subconjunto $X$ de um Grupo Ordenado, pode dar-se a seguinte forma:*

$$\forall \delta > 0 \ \exists x \in X : y - \delta < x < S.$$

Todas estas noções aplicáveis a conjuntos ordenados valem, por isso, igualmente para conjuntos de números racionais ou números reais.

Notemos, no entanto, que existem conjuntos de números racionais que admitem majorantes sem que tenham supremo. ([38], pp. 108 - 109)

**Teorema 3.7.7** *Princípio do Supremo / Ínfimo*

*Todo o conjunto de números que tenha majorante tem supremo e todo o conjunto de números que tenha minorante tem ínfimo.*

**Demonstração.** Seja $X$ um conjunto e $\overline{m}_0$ um seu majorante.

Considere-se um número $x_0$ que não seja majorante de $X$. Forme-se, então

$$\frac{x_0 + \overline{m}_0}{2}.$$

Vamos designar por $\overline{m}_1$ o menor dos números

$$\frac{x_0 + \overline{m}_0}{2} \text{ e } \overline{m}_0,$$

que é majorante de $X$, e por $x_1$ o maior dos números

$$\frac{x_0 + \overline{m}_0}{2} \text{ e } x_0,$$

que não o é.

Em qualquer das duas hipóteses a diferença $\overline{m}_1 -\ x_1$ é sempre $\frac{\overline{m}_0 - x_0}{2}$.

De um modo geral, obtidos os números $\overline{m}_n$ e $x_n$, representamos por $\overline{m}_{n+1}$ o menor dos dois números

$$\frac{\overline{m}_n + x_n}{2} \text{ e } \overline{m}_n,$$

que é majorante de $X$ e por $x_{n+1}$ o maior dos dois números que não o é.

A diferença entre esses dois números é

$$\overline{m}_{n+1} - x_{n+1} = \frac{\overline{m}_0 - x_0}{2^{n+1}}$$

e, como as sucessões $\{\overline{m}_n\}$ e $\{x_n\}$ são, a primeira monótona não crescente, e a segunda monótona não decrescente, a sucessão de intervalos fechados $\{[x_n, \overline{m}_n]\}$ constitui um encaixe a que corresponde um número real $S$, que é afinal o supremo de $X$, pois, se qualquer que seja $x \in X$, se tem sempre $x \leq \overline{m}_n$.

Igualmente, passando-se ao limite, se terá

$$x \leq \lim \overline{m}_n = S$$

para todos os elementos de $X$, tratando-se, pois, de um majorante.

Nenhum outro número inferior poderá ainda sê-lo pois, se isso se desse, por exemplo com $S - \delta$, em que $\delta$ é um número positivo, bastaria notar que sendo

$$\lim x_n = S$$

se poderia encontrar uma ordem $N$ tal que

$$S - \delta < x_n, \text{ para } n > N$$

e, desde que por construção nenhum dos $x_n$ é majorante, também o não pode ser o número $S - \delta$. ■

É importante que esta propriedade se possa inverter servindo-nos para a edificação do conjunto dos números reais. Com esse intuito, precisamos ainda da seguinte:

**Definição 3.7.5** *$x$, elemento de um Grupo, é divisível ao meio, se existir no Grupo um elemento $y$ tal que $y + y = x$.*

**Teorema 3.7.8** *Se num Grupo Ordenado e Denso, cujos elementos são divisíveis ao meio, todo o seu subconjunto que admite majorante tem supremo, todas as sucessões de Cauchy são convergentes.*

*Se num Grupo Ordenado e Denso, cujos elementos são divisíveis ao meio, todo o seu subconjunto que admite minorante tem ínfimo, todas as sucessões de Cauchy são convergentes.*

**Demonstração.** Seja $\{\xi_n\}$ uma sucessão de Cauchy, constituída por elementos do Grupo. É sabido, pelo Teorema 3.5.1, que uma sucessão de Cauchy tem sempre majorante e minorante. Por isso, não são vazios os dois conjuntos $A$ e $B$, definidos do seguinte modo:

$$\begin{aligned} a &\in A \Longrightarrow (\exists N_a : \forall n > N_a \Longrightarrow \xi_n < a) \\ b &\in B \Longrightarrow (\exists N_b : \forall n > N_b \Longrightarrow b < \xi_n) . \end{aligned}$$

Em $A$ estão todos os elementos do Grupo que são maiores que todo o elemento da sucessão, a partir de determinada ordem.

Em $B$, pelo contrário, estão todos os elementos do Grupo que são menores que todo o elemento da sucessão, a partir de determinada ordem.

De modo que, para quaisquer $a$ e $b$, se pode determinar uma ordem $N_{ab}$, tal que

$$b < \xi_n < a, \text{ para } n > N_{ab},$$

o que nos mostra terem os conjuntos $A$ e $B$ respectivamente minorantes e majorantes, e portanto, pela hipótese do teorema, $A$ ter ínfimo $J$ e $B$ supremo $S$.

Vamos mostrar que sendo $\{\xi_n\}$ uma sucessão de Cauchy, é forçoso que seja $S = J$.

Suponhamos que tal não acontece. Como as relações $b < \xi_n < a$ exigem $S \leq J$, a diferença $d = J - S$ terá de ser maior que 0.

Escolhamos $\delta$ tal que

$$0 < \delta < \frac{d}{2}.$$

Como a sucessão $\{\xi_n\}$ é uma sucessão de Cauchy, existe uma ordem $N$ para a qual

$$\xi_N - \delta < \xi_n < \xi_N + \delta$$

qualquer que seja $n > N$.

$N$ pode ainda ser escolhido de modo que

$$S - \delta < \xi_N < J + \delta$$

em virtude de $S$ ser supremo de $B$ e $J$ ínfimo de $A$.

Se

$$\xi_N \geq \frac{S+J}{2} \text{ e } \xi_n > \xi_N - \delta$$

implicaria

$$\xi_n > \frac{S+J}{2} - \delta = S + \frac{d}{2} - \delta > S$$

para todo $n$, contrariamente a ser $S$ o supremo de $B$.

Se, pelo contrário,

$$\xi_N < \frac{S+J}{2} \text{ e } \xi_n < \xi_N + \delta < \frac{S+J}{2} + \delta = J - \frac{d}{2} + \delta = J - \left(\frac{d}{2} - \delta\right) < J$$

para todo $x$, haveria elementos menores do que $J$ que seriam ainda minorantes de $A$, o que seria um absurdo. ■

Este resultado justifica que os Princípios enunciados nos Teoremas 3.7.5 e 3.7.7, isto é, que o Princípio do Encaixe e o Princípio do Supremo / Ínfimo sejam equivalentes à Condição de Cauchy, em qualquer Corpo Ordenado e Denso e, portanto, em particular, no Conjunto dos Números Reais.

Assim, neste Capítulo, definimos o Conjunto dos Números Reais como Limites de Sucessões Convergentes de Números Racionais, isto é, à maneira de Cantor e, com base em resultados referentes ao Conjunto dos Números Racionais, conseguimos provar que o Conjunto de Números Reais assim construído consiste, a menos de um isomorfismo algébrico e de ordem, num conjunto que satisfaz as seguintes condições:

(i) Algebricamente é um Corpo Ordenado;

(ii) A Ordenação definida é Densa e Arquimediana;

(iii) Topologicamente é um Espaço Métrico Completo.

# Capítulo 4

# Outras Construções do Conjunto dos Números Reais

A Teoria dos Números Reais, como base da Análise Matemática, foi completada no século XIX de diversas formas.

Como vimos no decorrer dos capítulos anteriores, as primeiras definições rigorosas de números reais estavam já publicadas em 1872 por Méray, Dedekind, Heine e Cantor.

A definição rigorosa de convergência de uma sucessão de números foi dada por d'Alembert em 1765 e por Cauchy em 1821 sem possuírem na altura uma definição rigorosa de números reais. Uma exposição da construção dos números reais foi dada no livro *Grundlagen der Analysis,* [25], por Edmund Landau, sendo fácil hoje em dia encontrar outras, em vários livros de texto.

O Conjunto dos Números Reais foi construído usando os *Cortes* de Dedekind ou as Classes de Equivalência de Sucessões de Cauchy, mas segundo A. H. Lightstone, "estes sistemas têm pouca conexão com a nossa intuição de números reais, e por isso possuem pouco ou nenhum impacto no nosso pensamento". ([26], p. 347)

Segundo Mitio Nagumo, "estas teorias matemáticas foram estabelecidas como complemento do sistema dos números racionais, enquanto que a relação íntima entre a quantidade e o número foi muito negligenciada". ([34], p. 1)

Tendo por base as opiniões supra citadas, ou outros motivos, o facto é que, vários matemáticos, elaboraram *outras* Construções de Números Reais, algumas das quais apresentaremos, de uma forma sintetizada, nas várias secções deste capítulo.

## 4.1 Construção dos números reais utilizando uma alternativa aos *Cortes* de Dedekind

A. H. Lightstone apresentou, em 1962, *Uma Simples Alternativa aos Cortes de Dedekind,* [26], na revista *Scripta Mathematica* pois, sendo da opinião de que a maioria da Matemática actual está enraizada no sistema dos números reais, pareceu-lhe necessário possuir um completo conhecimento sobre o que significa o sistema dos números reais. Introduziu-o da seguinte maneira, o que em si não traz nada de novo.

**Definição 4.1.1** *Um sistema algébrico, digamos* $(S, +, \cdot, <, 0, 1)$*, onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações binárias em* $S$*,* $<$ *é uma relação binária em* $S$*,* $0 \in S$ *e* $1 \in S$*, diz-se um Sistema de Números Reais desde que este sistema algébrico seja um Corpo Completo e Ordenado.*

A definição anterior implica que as seguintes catorze condições devem ser verdadeiras sobre o sistema algébrico $(S, +, \cdot, <, 0, 1)$.

**1.** $x + (y + z) = (x + y) + z$ sempre que $x \in S$, $y \in S$ e $z \in S$.

**2.** $x + y = y + x$ sempre que $x \in S$ e $y \in S$.

**3.** $x + 0 = x$ sempre que $x \in S$.

**4.** Dado $x \in S$, existe $y \in S$ tal que $x + y = 0$.

**5.** $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ sempre que $x \in S$, $y \in S$ e $z \in S$.

**6.** $x \cdot y = y \cdot x$ sempre que $x \in S$ e $y \in S$.

**7.** $x \cdot 1 = x$ sempre que $x \in S$.

**8.** Dado $x \in S$ e $x \neq 0$, existe $y \in S$ tal que $x \cdot y = 1$.

**9.** $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$, sempre que $x \in S$, $y \in S$ e $z \in S$.

**10.** $x < z$ sempre que $x < y$, $y < z$, $x \in S$, $y \in S$ e $z \in S$.

**11.** $x = y$ ou $x < y$ ou $y < x$, sempre que $x \in S$ e $y \in S$.

**12.** Se $x < y$ então $x + z < y + z$, sempre que $x \in S$, $y \in S$ e $z \in S$.

**13.** Se $0 < z$ e $x < y$ então $x \cdot z < y \cdot z$, sempre que $x \in S$, $y \in S$ e $z \in S$.

**14.** $T$ possui supremo sempre que $T$ é um subconjunto não vazio de $S$ que possui majorantes.

Notemos que, as catorze condições aqui enunciadas equivalem às condições das Definições 2.6.1, 2.6.2 e 2.6.4, que introduzimos na Secção 2.6 do Capítulo 2.

A. H. Lightstone apresenta um sistema de números reais, que considera próximo do sistema intuitivo de aritmética no uso actual, e torna precisos os conceitos e operações envolvidos nesse sistema, exemplificando-os, sempre que pertinente.

Em particular, apresenta definições de adição e multiplicação que descrevem as operações de adição e multiplicação utilizadas na aritmética usual.

Tendo em conta que o sistema intuitivo de números reais é baseado no sistema dos números racionais, vamos, tal como Lightstone fez, supor que este último é conhecido, e do material provido pelo sistema dos números racionais construir o sistema dos números reais.

Para construir o sistema dos números reais, fixemos a nossa atenção num determinado subconjunto de números racionais, nomeadamente, os números racionais decimais.

**Definição 4.1.2** *Um número racional diz-se racional decimal se é da forma:*

$$\frac{a}{b} \text{ onde } a \text{ é inteiro, } b = 10^n \text{ e } n \text{ é número natural.}$$

É fácil perceber que $x + y$ é um racional decimal se $x$ e $y$ são racionais decimais. Com efeito, se $x_1, x_2, ..., x_n$ são racionais decimais então $x_1 + x_2 + ... + x_n$ também o é.

> O número racional decimal $\frac{a_0}{1} + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + ... + \frac{a_n}{10^n}$ é denotado por $a_0, a_1a_2...a_n$ desde que $0 \leqslant a_0$ e $\{a_{1,}a_2, ..., a_n\} \subset \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, os elementos deste segundo conjunto são denominados de *dígitos.*

Vejamos um exemplo:

$$\frac{35}{1} + \frac{3}{10^1} + \frac{1}{10^2} + \frac{0}{10^3} + \frac{8}{10^4} + \frac{0}{10^5} + \frac{7}{10^6} \text{ é denotado por } 35,310807.$$

Assim como o racional decimal $\frac{35310807}{10^6}$ é denotado, igualmente, por $35,310807$.

**Definição 4.1.3** *Uma sucessão de números racionais decimais é denotada por* $(a_1; a_2; a_3; ...; a_n; ...)$ *em que ao número racional decimal* $a_1$ *é associado o número natural* $1$*, ao* $a_2$ *associado o número natural* $2$*, ... , e ao* $a_n$ *associado o número natural* $n$*. Convencionalmente denota-se* $(a_1; a_2; a_3; ...; a_n; ...)$ *por* $(a_n)$.

*Os elementos deste conjunto ordenado são denominados de termos da sucessão e* $a_n$ *é o n-ésimo termo da sucessão, sempre que* $n$ *é natural.*

**Definição 4.1.4** *Uma sucessão de números racionais decimais, $(a_n)$, é um número real se a sucessão verifica as três seguintes propriedades:*

***1.*** *$a_1$ apenas pode ter um dígito à direita da vírgula.*

***2.*** *$a_{n+1}$ é obtido a partir de $a_n$ juntando um dígito a $a_n$ sempre que $n$ é um número natural.*

***3.*** *Dado um qualquer número natural $n$ existe sempre um número natural $k$ maior que ele, tal que $a_k$ é obtido a partir de $a_{k-1}$ juntando um dígito diferente de $9$ a $a_{k-1}$.*

São exemplos de números reais as seguintes sucessões:

$$(i) \qquad (2,0; 2,01; 2,011; 2,0111; 2,01111; ...)$$

Note-se que, como o número racional $2,0$ é o mesmo que $2$, logo, o número real que representa a sucessão anterior é o mesmo que o que representa a sucessão

$$(2; 2,01; 2,011; 2,0111; 2,01111; ...) .$$

$$(ii) \qquad (3,1; 3,14; 3,141; 3,1415; ...) .$$

$$(iii) \qquad (-15,4; -15,48; -15,489; -15,4890; ...) .$$

$$(iv) \qquad (-2,1; -2,10; -2,100; -2,1000; ...) .$$

$$(v) \qquad (2,2,2,...,2,...) .$$

Não são números reais as sucessões:

$$(i) \qquad (1,1; 1,19; 1,100; 1,1999; ...)$$

$$(ii) \qquad (2,01; 2,011; 2,0111; 2,01111; ...)$$

$$(iii) \qquad (45,2; 45,23; 45,228; 45,2280; 45,22800; ...)$$

Antes, porém, de definir a adição e multiplicação de números reais é conveniente introduzir duas famílias de operadores unários de sucessões de racionais decimais.

**Definição 4.1.5** *Suponhamos $(a_n)$ uma sucessão de racionais decimais, e $k$ um número natural. Denotamos por $D_k(a_n)$ a sucessão de racionais decimais obtida a partir de $(a_n)$ em que a cada termo de $(a_n)$ apaga-se todos os dígitos à direita do $k$-ésimo dígito que está após a vírgula.*

Vejamos um exemplo:

$$D_2\,(13,201;-1,415;0,0014;0,105;...) = (13,20;-1,41;0;0,10;...)$$

O segundo operador unário é também simples:

**Definição 4.1.6** *Dada uma sucessão podemos obter uma outra "bloqueando-a", isto é, apagando os primeiros termos da sucessão. O resultado de apagar os primeiros $k$-termos da sucessão $(a_n)$ denota-se por $B_k\,(a_n)$, onde $B_k\,(a_n) = (a_{k+n})$.*

Exemplificando:

$$B_2\,(3;3,1;3,14;3,141;...) = (3,14;3,141;...)$$

Notemos que $B_k\,(a_n)$ não é necessariamente um número real se $(a_n)$ é um número real e $k$ um número natural.

Definidos os dois operadores unários, estamos prontos para definir a adição e a multiplicação.

Comecemos por definir a adição.

> Sejam $(a_n)$ e $(b_n)$ quaisquer números reais, representamos por $(a_n) + (b_n)$ o número real construído pelo seguinte procedimento:
>
> Primeiro consideramos a sucessão de racionais decimais cujo $n$-ésimo termo é $a_n + b_n$ e denominamo-lo por $(a_n + b_n)$.
>
> É fácil perceber que existe um único racional decimal, digamos $d_1$, tal que
>
> $$B_q D_1\,(a_n + b_n) = (d_1)$$
>
> para algum número natural $q$; da mesma forma, existe um único racional decimal, digamos $d_2$, tal que
>
> $$B_q D_2\,(a_n + b_n) = (d_2)$$
>
> para algum número natural $q$; de facto, se $k$ é um número natural qualquer, então existe um único racional decimal, digamos $d_k$, tal que
>
> $$B_q D_k\,(a_n + b_n) = (d_k)$$
>
> para algum número natural $q$.
>
> Desta forma, construímos a sucessão de racionais decimais $(d_n)$.

Claramente, esta sucessão satisfaz os primeiros dois requisitos de um número real.

Se o terceiro requisito é igualmente verificado então $(d_n)$ é o número real que iremos denotar por $(a_n) + (b_n)$.

Se o terceiro requisito não se verifica, então seja $k$ o menor número natural tal que

$d_n$ é obtido a partir de $d_{n-1}$ juntando 9 a $d_{n-1}$, sempre que $n > k$.

Façamos a seguinte *correcção* à sucessão $(d_n)$:

Se $n \geq k$ e $d_n > 0$ então $d_n$ é substituído por $d_n + \frac{1}{10^n}$;

Se $n \geq k$ e $d_n < 0$ então $d_n$ é substituído por $d_n - \frac{1}{10^n}$.

Notemos que, em ambos os casos, a sucessão resultante é um número real, o qual denotaremos por $(a_n) + (b_n)$.

Vejamos um exemplo em que foi necessário fazer uma *correcção*:

$$(5,1; 5,12; 5,120; 5,1200; ...) + (17,3; 17,38; 17,382; 17,3820; 17,38200; ...) =$$

$$= (\mathbf{22,5}; 22,50; 22,502; 22,5020; 22,50200; ...)$$

A multiplicação é definida como se segue:

Consideremos $(a_n)$ e $(b_n)$ quaisquer números reais. Então, denotamos por $(a_n) \cdot (b_n)$ o número real construído pelo seguinte procedimento:

Primeiro consideramos a sucessão de racionais decimais $(a_n \cdot b_n)$, analogamente, ao caso da adição, construímos a sucessão $(e_n)$ onde $e_1$ é o único racional decimal tal que

$$B_q D_1 (a_n \cdot b_n) = (e_1)$$

para algum número natural $q$; $e_2$ é o único racional decimal tal que

$$B_q D_2 (a_n \cdot b_n) = (e_2)$$

para algum número natural $q$; e, de uma forma geral, $e_k$ é o único racional decimal tal que

$$B_q D_k (a_n \cdot b_n) = (e_k)$$

para algum número natural $q$.

Claramente, esta sucessão, $(e_n)$, satisfaz os primeiros dois requisitos de um número real.

Se o terceiro requisito é igualmente verificado, então $(e_n)$ é o número real que iremos denotar por $(a_n) \cdot (b_n)$.

Se o terceiro requisito não se verifica, então transformamos $(e_n)$ num número real efectuando a mesma *correcção* que no caso da adição. O número real resultante denotamos por $(a_n) \cdot (b_n)$.

Vejamos um exemplo de uma multiplicação em que as três condições para ser número real são directamente satisfeitas:

$$(5,0; 5,00; 5,000; ...) \cdot (2,1; 2,11; 2,110; 2,1100; ...) =$$

$$= (10,5; 10,55; 10,550; 10,5500; ...) .$$

Vejamos um exemplo em que foi necessário fazer algumas *correcções*:

$$(3,0; 3,00; 3,000; ...) \cdot (1,2; 1,21; 1,213; 1,2133; 1,21333; ...) =$$

$$= (3,6; \mathbf{3,64}; \mathbf{3,640}; \mathbf{3,6400}; \mathbf{3,64000}; ...) .$$

Notemos que, é importante introduzir os operadores $D_k$ e $B_k$ na definição de adição e multiplicação, uma vez que, estes operadores são úteis na definição do conceito de limite de uma sucessão de números reais.

Definidas as operações de adição e multiplicação, vamos, agora, introduzir uma relação de ordem nos números reais, que aqui estamos a definir.

Dizemos que $(a_n) < (b_n)$ se existe um número natural $k$ tal que $a_k < b_k$.

Notemos que, se $(a_n)$ e $(b_n)$ são números reais, então $a_m < b_m$ sempre que $a_k < b_k$ e $k < m$.

Por exemplo

$$(25,7; 25,74; 25,746; 25,7468; 25,74680; 25,746800; ...) <$$

$$< (25,7; 25,74; 25,746; 25,7468; 25,74680; 25,746803; 25,7468030; ...) .$$

É usual denotar um número real, digamos $(a_n)$, por $a_k$, sendo $k$ o menor número natural tal que $a_n$ é obtido de $a_{n-1}$ juntando 0 a $a_{n-1}$, sempre que $n > k$.

Vejamos alguns exemplos:

O número real $(5,1;5,12;5,120;5,1200;...)$ é denotado por $5,12$,

o número real $(5;5;5;...;5;...)$ é denotado por 5 e

o número real $(0;0;0;...;0;...)$ é denotado por 0.

Seja $R_{\#}$ o conjunto de todos os elementos que, segundo a Definição 4.1.4, chamamos de números reais. O sistema algébrico $(R_{\#},+,\cdot,<,0,1)$ que acabamos de construir, usando unicamente os números racionais, é um corpo completo e ordenado.

É possível demonstrar que o sistema algébrico $(R_{\#},+,\cdot,<,0,1)$ goza das catorze propriedades enunciadas no início desta secção.

A título de exemplificação, iremos provar apenas a propriedade relacionada com a completude, isto é, que:

*Um subconjunto não vazio de $R_{\#}$ que possui majorante, também, possui supremo.*

Para tal, vamos supor que $k$ é um conjunto não vazio de números reais que possui um majorante e vamos construir o supremo de $k$.

Denotemos por $D_m(k)$ o conjunto de todos os racionais decimais obtidos de $k$ seleccionando o $m$-ésimo termo de cada membro de $k$.

Notemos que, cada membro de $D_m(k)$ é um racional decimal com no máximo $m$ dígitos à direita da vírgula.

Uma vez que $k$ é limitado superiormente, é claro que o conjunto $D_1(k)$ possui um número maior que todos os outros, denominemos esse número de $d_1$.

Da mesma forma, seja $d_2$ o maior número do conjunto $D_2(k)$ e, de um modo geral, seja $d_n$ o maior número do conjunto $D_n(k)$.

Consideremos então a sucessão $(d_n)$.

Esta sucessão satisfaz os primeiros dois requisitos de número real.

Se o terceiro requisito não for satisfeito, efectuamos em $(d_n)$ a transformação num número real pela *correcção* apresentada nos casos anteriores relativos à adição e multiplicação.

Denotemos o número real obtido por $(d_n')$.

Vamos mostrar que $(d_n')$ é um majorante de $k$.

Suponhamos que existe um membro de $k$, digamos $(a_n)$, tal que $(d'_n) < (a_n)$, então existe um número natural $s$ tal que $d'_s < a_s$. O que contradiz a construção de $d'_s$.

Suponhamos, agora, que existe um majorante de $k$, digamos $(b_n)$, tal que $(b_n) < (d'_n)$, então existe um número natural $r$ tal que $b_r < d'_r$.

Se $d'_r = d_r$ então $d_r$ é o $r$-ésimo termo de um membro de $k$, digamos $(c_n)$, e temos que $(b_n) < (c_n)$. Assim, $(b_n)$ não é um majorante de $k$.

Se $d'_r \neq d_r$ então existe um número natural, digamos $m$, tal que $r < m$, e o último dígito de $b_m$ não é 9. Mas então $b_m < d_m$ e então existe um membro de $k$, digamos $(e_n)$, tal que $b_m < e_m$, desde que $e_m = d_m$. Assim, $(b_n)$ não é um majorante de $k$. O que estabelece que $(d'_n)$ é o supremo de $k$.

## 4.2 Construção dos números reais utilizando a Noção de Quantidade

Mitio Nagumo publicou, no ano de 1944, *Zenkoku Shijo Sugaku Danwakai* e posteriormente, em 1976, escreveu o artigo *Quantities and Real Numbers*, [34], publicado em 1977, na revista *Osaka J. Math*, onde faz uma construção dos números reais, que tem por ideia base os *cortes* de Dedekind, e na qual estabelece, e realça, a relação entre *quantidade* e *números*. Relação essa que o autor considera, como já referimos, que foi negligenciada pelos matemáticos do século XIX.

Mitio Nagumo considera que devemos começar por fazer uma caracterização do sistema de quantidades positivas e derivar o sistema dos números reais positivos como o conjunto dos automorfismos do sistema de quantidades positivas. Então, a partir desta derivação, a extensão, do sistema dos números reais positivos, para todo o sistema de números reais poderá ser facilmente obtida.

É seguindo o artigo de Nagumo que, nesta secção, vamos mostrar mais uma possível construção do sistema dos números reais, na qual começamos por caracterizar o sistema de quantidades positivas.

### 4.2.1 Sistema de Quantidades Positivas

Seja $Q$ um sistema de quantidades do mesmo tipo, no qual são válidos os seguintes axiomas, respeitantes à adição:

$(I_1)$ Se $a, b \in Q$ então $a + b \in Q$ e $a + b$ é unicamente determinado.

$(I_2)$ Se $a, b \in Q$ então $a + b = b + a$.

$(I_3)$ Se $a, b, c \in Q$ então $(a + b) + c = a + (b + c)$.

$(I_4)$ Se $a, b, c \in Q$ e $a + c = b + c$ então $a = b$.

O sistema de quantidades $Q$ é denominado de *positivo* se satisfaz as seguintes condições:

$(II_1)$ Se $a, b \in Q$, então $a + b \neq a$.

$(II_2)$ Se $a, b \in Q$ e $a \neq b$ então existe $c \in Q$ tal que uma, e apenas uma, das seguintes igualdades é verdadeira:

$$a + c = b \quad \text{ou} \quad a = b + c.$$

**Definição 4.2.1** *Seja $Q$ um sistema de quantidades positivas e $a, b \in Q$. Dizemos que $b$ é maior do que $a$, denotamos por $b > a$, e que $a$ é menor do que $b$, denotamos por $a < b$, se e só se existe um $a' \in Q$ tal que $b = a + a'$.*

São, igualmente, válidas no sistema $Q$, de quantidades positivas do mesmo tipo, as seguintes:

**Proposição 4.2.1** *Se $a, b \in Q$ e $a < b$ então existe um único $a' \in Q$ tal que*

$$a' + a = b.$$

*Neste caso, $a' = b - a$.*

**Proposição 4.2.2** *Para qualquer par de elementos $a, b \in Q$ dado, ocorre apenas um dos seguintes três casos:*

$$1) \quad a = b; \qquad 2) \quad a < b; \qquad 3) \quad b < a.$$

**Proposição 4.2.3** *(i) Se* $a, b, c \in Q$, $a < b$ *e* $b < c$, *então* $a < c$.

*(ii)* $a + c < b + c$ *decorre, se e só se* $a < b$.

A continuidade é uma *característica* de grande importância tanto no domínio dos números reais como no sistema de quantidades positivas, $Q$, e pode ser definida como se segue.

O sistema de quantidades positivas $Q$ é denominado de *contínuo* se satisfaz os axiomas $(III_1)$ e $(III_2)$.

$(III_1)$ Para todo $a \in Q$, existe um $a' \in Q$ tal que $a' < a$.

A partir do axioma, $(III_1)$, acabado de enunciar, obtemos a seguinte:

**Proposição 4.2.4** *Sejam* $a, b \in Q$ *e* $a < b$. *Então existe um elemento* $c \in Q$ *tal que*

$$a < c < b.$$

Antes de enunciarmos o segundo axioma da continuidade, $(III_2)$, temos de definir o que é, segundo Nagumo, um *par de Dedekind*.

**Definição 4.2.2** *Um par de subconjuntos* $Q^-, Q^+$ *de* $Q$ *não vazios, é denominado de par de Dedekind, se e só se, satisfaz as três seguintes condições:*

*(i)* $Q^- \cup Q^+ = Q$;

*(ii)* $Q^- \cap Q^+ = \emptyset$ *(conjunto vazio)*;

*(iii)* $a_1 \in Q^-$, $a_2 \in Q^+$ *implica sempre* $a_1 < a_2$.

$(III_2)$ Para qualquer par de Dedekind $Q^-, Q^+$ de $Q$, existe um elemento $c \in Q$ tal que $a_1 \in Q^-$ e $a_2 \in Q^+$ implica $a_1 \leq c \leq a_2$.

A partir dos axiomas, $(III_1)$ e $(III_2)$, obtemos:

**Proposição 4.2.5** *Seja* $Q^-, Q^+$ *um par de Dedekind de* $Q$. *O elemento* $c \in Q$, *definido em* $(III_2)$, *é unicamente determinado e* $c$ *é tanto o máximo de* $Q^-$ *como o mínimo de* $Q^+$.

**Definição 4.2.3** *Denominamos o elemento $c$, definido em $(III_2)$, por elemento corte do par de Dedekind $Q^-, Q^+$ e representamo-lo por $c = (Q^-|Q^+)$.*

Para qualquer $a \in Q$ e para qualquer número natural $n$ ($n \in \mathbf{N}$), definimos $na \in Q$ por indução em $n$:

$$1a = a$$
$$(n+1)\,a = na + a.$$

A proposição seguidamente enunciada e demonstrada é conhecida como sendo o axioma de *Arquimedes.*

**Proposição 4.2.6** *Se $a, b \in Q$, então existe $n \in \mathbf{N}$ tal que $na > b$.*

**Demonstração.** Consideremos $Q^-$ e $Q^+$ definidos por

$$\begin{aligned} Q^- &= \{q \in Q : \exists n \in \mathbf{N}, na > q\}, \\ Q^+ &= \{q' \in Q : \forall n \in \mathbf{N}, na \leq q'\}, \end{aligned}$$

respectivamente.

Suponhamos, com vista a um absurdo, que a Proposição 4.2.6 é falsa. Então $Q^-, Q^+$ poderia ser um par de Dedekind, com $Q^- \neq \emptyset$ e $Q^+ \neq \emptyset$, e $c = (Q^-|Q^+) \in Q$ o que nos levava a uma contradição. ■

### 4.2.2 Aplicações Lineares e Automorfismos

Sejam $Q$ e $Q'$ sistemas de quantidades positivas que satisfazem os axiomas da continuidade acima descritos.

Seja $\Phi$ uma aplicação de $Q$ em $Q'$, isto é, por $\Phi$, para todo $q \in Q$, corresponde unicamente um elemento $q' \in Q'$ tal que $q' = \Phi(q)$, uma função de variável $q \in Q$.

**Definição 4.2.4** *Uma aplicação $\Phi$ de $Q$ em $Q'$ é dita linear, isto é, $\Phi$ é um homomorfismo, se e só se, para quaisquer elementos $a_1, a_2 \in Q$*

$$\Phi(a_1 + a_2) = \Phi(a_1) + \Phi(a_2).$$

**Definição 4.2.5** *Uma aplicação $\Phi$ de $Q$ em $Q'$ é dita $1-1$ (um para um) em $Q'$, se e só se, para todo $a' \in Q'$, existe um único $a \in Q$ tal que*

$$\Phi(a) = a'.$$

*Neste caso, a aplicação inversa $\Phi^{-1}$ de $Q'$ em $Q$ é $1-1$ em $Q$.*

Definidas $\Phi$ e a sua inversa, $\Phi^{-1}$, podemos enunciar o seguinte teorema da inversão.

**Proposição 4.2.7** *Seja $\Phi$ uma aplicação linear de $Q$ em $Q'$. Então $\Phi$ é $1-1$ em $Q'$, e a aplicação inversa $\Phi^{-1}$ de $Q'$ em $Q$ é também linear.*

Para demonstrar a Proposição 4.2.7 são necessários os três lemas que se seguem.

**Lema 4.2.1** *Seja $\Phi$ uma aplicação conforme a definida na Proposição 4.2.7. Então, dados $a_1, a_2 \in Q$,*

$$\Phi(a_1) < \Phi(a_2) \text{ se e só se } a_1 < a_2.$$

**Lema 4.2.2** *Para todo o $a \in Q$, e para todo o $n \in \mathbf{N}$, existem $a_n \in Q$ tais que*

$$na_n < a.$$

**Lema 4.2.3** *Para todo o $b \in Q'$, existem $a_1, a_2 \in Q$ tais que*

$$\Phi(a_1) < b < \Phi(a_2).$$

Estabelecidos os lemas, 4.2.1, 4.2.2 e 4.2.3, estamos em condições para fazer a seguinte

**Demonstração. da Proposição 4.2.7**

Para qualquer $a' \in Q'$ fixo definimos, os subconjuntos de $Q$, $Q^-$ e $Q^+$, por

$$\begin{aligned} Q^- &= \{q \in Q : \Phi(q) < a'\} \text{ e} \\ Q^+ &= \{q \in Q : \Phi(q) \geq a'\}, \end{aligned}$$

respectivamente.

Então, $Q^-$ e $Q^+$, formam um par de Dedekind de $Q$.

Tomemos $a \in Q$ com $a = (Q^- | Q^+)$, e mostremos que $\Phi(a) = a'$.

Se tivéssemos $\Phi(a) < a'$, então $a$ tinha que ser o máximo de $Q^-$. Mas assim deveria existir um $a_1 \in Q$ tal que $a < a_1$ e $\Phi(a_1) < a'$ o que contradiz o facto de $a$ ser o máximo de $Q^-$. Pois, pelo Lema 4.2.3 deveria existir $c \in Q$ tal que $\Phi(c) < a' - \Phi(a)$ que pertence a $Q'$, donde $\Phi(a+c) < a'$. Notemos que consideramos, $a_1 = a + c$.

Se tivéssemos $\Phi(a) > a'$, então $a$ tinha que ser o mínimo de $Q^+$. Mas, pelo Lema 4.2.3 deveria existir um $c \in Q$ tal que $\Phi(c) < \Phi(a) - a'$, donde $c < a$ e $a' < \Phi(a-c)$, denotamos $a_1 = a - c$, o que nos levou novamente a uma contradição.

Assim mostramos que $\Phi$ aplica $Q$ em $Q'$.

Pelo Lema 4.2.1 vemos que $\Phi$ é uma aplicação $1-1$ de $Q$ em $Q'$ e podemos facilmente ver que $\Phi^{-1}$ é linear. ∎

Posto isto, vamos definir o que é um automorfismo racional, e para tal, consideremos, novamente, $Q$ um sistema de quantidades positivas que satisfaz os axiomas da continuidade.

**Definição 4.2.6** *Uma aplicação linear de $Q$ em $Q$, isto é, de $Q$ nele próprio, é denominada de automorfismo de $Q$.*

*Dados $q \in Q$ e $m \in \mathbf{N}$, definimos a aplicação $\Phi$ de $Q$ em $Q$ por*

$$\Phi(q) = mq.$$

*Então, pela Proposição 4.2.7, $\Phi^{-1}$ é também um automorfismo de $Q$ e escrevemos*

$$\Phi^{-1}(q) = m^{-1}q.$$

Para qualquer automorfismo $\Phi$ de $Q$, isto é, para qualquer aplicação linear de $Q$ em $Q$, temos para $n \in \mathbf{N}$

$$\Phi(nq) = n\Phi(q).$$

Donde, para todo $q \in Q$

$$n^{-1}\Phi(q) = \Phi\left(n^{-1}q\right).$$

Assim, para quaisquer $m, n \in \mathbf{N}$, e qualquer $q \in Q$

$$n^{-1}(mq) = m\left(n^{-1}q\right).$$

A aplicação $\Phi$ de $Q$ em $Q$, definida por

$$\Phi(q) = n^{-1}(mq) = m\left(n^{-1}q\right) \quad (\forall q \in Q) \quad (m, n \in \mathbf{N}),$$

é igualmente um automorfismo de $Q$ e, este automorfismo de $Q$, pode ser escrito do seguinte modo

$$\frac{m}{n}q = m\left(n^{-1}q\right) \quad = n^{-1}(mq) \quad (\forall q \in Q).$$

**Definição 4.2.7** *Um automorfismo $\Phi$ de $Q$ dado por*

$$\Phi(q) = \frac{m}{n}q \quad (\forall q \in Q) \quad (m, n \in \mathbf{N})$$

*é denominado de automorfismo racional de $Q$.*

**Proposição 4.2.8** *Seja $\Phi$ uma aplicação linear de $Q$ em $Q'$. Então, para qualquer automorfismo racional $\frac{m}{n}$ (de $Q$ e $Q'$)*

$$\Phi\left(\frac{m}{n}q\right) = \frac{m}{n}\Phi(q) \qquad (\forall q \in Q).$$

**Proposição 4.2.9** *Sejam $a, b \in Q$ tais que $a < b$. Então para qualquer $c \in Q$ existe um automorfismo racional de $Q$, $\frac{m}{n}$, tal que*

$$a < \frac{m}{n}c < b.$$

**Demonstração.** Seja $d = b - a$, com $a < b$.

Então existe, pela Proposição 4.2.6, $n \in \mathbf{N}$ tal que $nd > c$. Logo, $d > n^{-1}c$.

Considerando $c_i = \frac{i}{n}c$ com $i \in \mathbf{N}$ temos $c_i = ic_1$ e $c_i < c_{i+1}$.

Existe, igualmente pela Proposição 4.2.6, $j \in \mathbf{N}$ tal que $c_j = jc_1 > a$. Consideremos $j = m$ o menor número natural que satisfaz esta propriedade.

Então, facilmente obtemos

$$a < c_m < b \text{ com } c_m = \frac{m}{n}c.$$

■

**Proposição 4.2.10** *Sejam $\Phi_1$ e $\Phi_2$ automorfismos de $Q$ tais que $\Phi_1(a) = \Phi_2(a)$ para algum $a \in Q$. Então, identicamente, $\Phi_1(q) = \Phi_2(q)$ para todo o $q \in Q$.*

**Demonstração.** Consideremos, com vista a um absurdo, que $b \in Q$ é tal que $\Phi_1(b) < \Phi_2(b)$. Então, considerando $\Phi_1(a) = \Phi_2(a) = c$, pela Proposição 4.2.9, existe um automorfismo racional $\frac{m}{n}$ tal que

$$\Phi_1(b) < \frac{m}{n}c < \Phi_2(b).$$

Assim, como

$$\Phi_1(b) < \frac{m}{n}c = \Phi_1\left(\frac{m}{n}a\right) \text{ e } \Phi_2\left(\frac{m}{n}a\right) = \frac{m}{n}c < \Phi_2(b),$$

temos, pelo Lema 4.2.1,

$$b < \frac{m}{n}a < b,$$

o que é um absurdo.

Similarmente, se supusermos $\Phi_2(b) < \Phi_1(b)$ obteremos novamente uma contradição.

Consequentemente, temos que $\Phi_1(b) = \Phi_2(b)$ para todo o $b \in Q$. ■

**Proposição 4.2.11** *Sejam $\Phi_1$ e $\Phi_2$ automorfismos de $Q$ tais que $\Phi_1(a) < \Phi_2(a)$ para algum $a \in Q$. Então, $\Phi_1(q) < \Phi_2(q)$ para todo o $q \in Q$.*

*Neste caso, por simplificação da escrita, apenas escrevemos $\Phi_1 < \Phi_2$.*

**Demonstração.** Se a condição anterior não for verdadeira, podemos supor a existência de um $b \in Q$ tal que $\Phi_1(b) > \Phi_2(b)$.

Já mostramos que se $\Phi_1(b) = \Phi_2(b)$ para algum $b \in Q$, então, $\Phi_1(q) = \Phi_2(q)$ para todo o $q \in Q$.

Considerando $c \in Q$, tal que $c = \Phi_1(b) - \Phi_2(b)$, pela Proposição 4.2.6, existe um $n \in \mathbf{N}$ tal que

$$nc > \Phi_1(a) \text{ e } nb > a.$$

Logo

$$n^{-1}a < b.$$

Então, existe $m \in \mathbf{N}$ tal que

$$\frac{m}{n}a < b \leq \frac{m+1}{n}a.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\Phi_1(b) &\leq \Phi_1\left(\frac{m+1}{n}a\right) = \frac{m+1}{n}\Phi_1(a) < \frac{m}{n}\Phi_2(a) + n^{-1}\Phi_1(a)\\ &< \Phi_2(b) + n^{-1}\Phi_1(a) < \Phi_2(b) + c.\end{aligned}$$

O que é um absurdo pois contradiz a igualdade, imposta no início,

$$\Phi_1(b) = \Phi_2(b) + c.$$

■

A *ordenação* pode ser definida no conjunto de todos os automorfismos racionais de $Q$. Com o intuito de a definirmos comecemos por denominar por $\mathbf{P}$, o conjunto de todos os automorfismos racionais de $Q$.

Pela Proposição 4.2.11, a ordenação em $\mathbf{P}$ é definida do seguinte modo:

**Definição 4.2.8** *Sejam $r_1, r_2 \in \mathbf{P}$. Se para todo $q \in Q$ temos $r_1 q < r_2 q$ então $r_1 < r_2$.*

Com base nas proposições 4.2.8 e 4.2.10, podemos definir em $\mathbf{P}$, a adição e a multiplicação por

$$r_1 + r_2 \in \mathbf{P} \Leftrightarrow (r_1 + r_2)(q) = r_1(q) + r_2(q) \text{ para todo } q \in Q.$$

$$r_1 \cdot r_2 \in \mathbf{P} \Leftrightarrow r_2(r_1 q) = r_1(r_2 q) \text{ para todo } q \in Q.$$

Notemos que, em $\mathbf{P}$, a adição e a multiplicação satisfazem as regras usuais da adição e da multiplicação de números racionais.

**Definição 4.2.9** *Um par de subconjuntos $\mathbf{P}^-$ e $\mathbf{P}^+$ não vazios do conjunto $\mathbf{P}$ é denominado de par de Dedekind de $\mathbf{P}$, se e só se satisfaz as três seguintes condições:*

(*i*) $\mathbf{P}^- \cup \mathbf{P}^+ = \mathbf{P}$;

(*ii*) $\mathbf{P}^- \cap \mathbf{P}^+ = \emptyset$ *(conjunto vazio)*;

(*iii*) $r_1 \in \mathbf{P}^-$, $r_2 \in \mathbf{P}^+$ *implica* $r_1 < r_2$.

**Proposição 4.2.12** *Seja $Q$ um sistema de quantidades positivas satisfazendo os axiomas da continuidade e seja $a \in Q$. Se $\mathbf{P}^-, \mathbf{P}^+$ é um par de Dedekind de $\mathbf{P}$, então existe um único $c \in Q$ tal que*

$$r_1 a \leq c \leq r_2 a$$

*para todo $r_1 \in \mathbf{P}^-$ e para todo $r_2 \in \mathbf{P}^+$.*

**Demonstração.** Sejam $Q^-$ e $Q^+$ subconjuntos de $Q$ definidos por:

$$\begin{aligned} Q^- &= \left\{ q \in Q : \forall r \in \mathbf{P}^+, q < ra \right\}, \\ Q^+ &= \left\{ q \in Q : \exists r \in \mathbf{P}^+, ra \leq q \right\}. \end{aligned}$$

Então $Q^-, Q^+$ é um par de Dedekind de $Q$, o qual é denotado por $c = (Q^- | Q^+)$.

Em primeiro lugar vamos supor $c$ como o máximo de $Q^-$. Então, $c < ra$ para todo o $r \in \mathbf{P}^+$ e $c \geq ra$ para todo $r \in \mathbf{P}^-$. Pois, se tivéssemos $c < r_1 a$ para algum $r_1 \in \mathbf{P}^-$, então como $r_1 a \in Q^-$, contradizia que $c$ fosse o máximo de $Q^-$.

Agora vamos supor $c$ como o mínimo de $Q^+$. Então, $c = r_0 a$ para algum $r_0 \in \mathbf{P}^+$ e $ra < r_0 a = c$ para todo o $r \in \mathbf{P}^-$. Além disso, como $\{ra : r \in \mathbf{P}^+\} \subset Q^+$, temos $c \leq ra$ para todo o $r \in \mathbf{P}^+$.

A unicidade de $c$ na Proposição 4.2.12 decorre da Proposição 4.2.9. ∎

Para enunciar o Teorema do Isomorfismo, presente na Proposição 4.2.13, continuaremos a considerar $Q$ e $Q'$ sistemas de quantidades positivas que satisfazem os axiomas da continuidade.

**Proposição 4.2.13** *Sejam dados $a \in Q$ e $a' \in Q'$. Então, existe apenas uma aplicação linear, isto é, um isomorfismo, $\Phi$ de $Q$ em $Q'$ tal que $\Phi(a) = a'$.*

**Demonstração.** Para definir a aplicação linear $\Phi$ desejada, tomemos um $q \in Q$ arbitrário e deixemos $\mathbf{P}^-_{(q)}$ e $\mathbf{P}^+_{(q)}$ serem definidos por

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^-_{(q)} &= \{r \in \mathbf{P} : ra < q\}, \\ \mathbf{P}^+_{(q)} &= \{r \in \mathbf{P} : ra \geq q\}, \end{aligned}$$

respectivamente.

Então, $\mathbf{P}^-_{(q)}$ e $\mathbf{P}^+_{(q)}$ formam um par de Dedekind de automorfismos racionais.

Assim, pela Proposição 4.2.12, existe apenas um $q' \in Q'$, dependendo de $Q$, tal que

$$r_1 a' \leq q' \leq r_2 a' \quad \text{para todo } r_1 \in \mathbf{P}^-_{(q)} \text{ e para todo } r_2 \in \mathbf{P}^+_{(q)}.$$

Donde, definimos a aplicação $\Phi$ de tal forma que $\Phi(q) = q'$. Claramente temos

$$\Phi(a) = a'.$$

Agora, consideremos $\Phi(q_i) = q'_i$ com $i = 1, 2$. Temos de mostrar que $\Phi$ é linear, isto é, temos de provar que

$$\Phi(q_1 + q_2) = q'_1 + q'_2.$$

Consideremos

$$q_3 = q_1 + q_2 \text{ e } \mathbf{P}^-_i = \{r \in \mathbf{P} : ra < q_i\} \text{ com } i = 1, 2, 3.$$

Então, obtemos

$$\mathbf{P}_3^- = \left\{r_1 + r_2 : r_1 \in \mathbf{P}_1^-, r_2 \in \mathbf{P}_2^-\right\}.$$

Pois, facilmente observamos que

$$\left\{r_1 + r_2 : r_1 \in \mathbf{P}_1^-, r_2 \in \mathbf{P}_2^-\right\} \subset \mathbf{P}_3^-.$$

Para mostrar que

$$\mathbf{P}_3^- \subset \left\{r_1 + r_2 : r_1 \in \mathbf{P}_1^-, r_2 \in \mathbf{P}_2^-\right\},$$

consideremos $r \in \mathbf{P}_3^-$. Então, $ra < q_1 + q_2$, considerando

$$d = \min\{q_1 + q_2 - ra, q_1, q_2\} \in Q,$$

pela Proposição 4.2.9, existe $r_i' \in \mathbf{P}$, com $i = 1, 2$, tal que

$$q_i - \frac{1}{2}d < r_i'a < q_i, \text{ com } i = 1, 2.$$

Então,

$$r_i' \in \mathbf{P}^- \text{ e } ra \leq q_1 + q_2 - d < (r_1' + r_2')\, a < q_1 + q_2.$$

Assim, considerando $r_i = \frac{r_i'}{r_1' + r_2'} r$, com $i = 1, 2$, obtemos

$$r_i \in \mathbf{P}_i^- \text{ e } r = r_1 + r_2.$$

Para

$$r_i a = \frac{r_i'}{r_1' + r_2'} ra \leq \frac{r_i'}{r_1' + r_2'} (r_1' + r_2')\, a = r_i' a < q_i.$$

Agora, consideremos

$$\mathbf{P}_3^+ = \{r \in \mathbf{P} : ra \geq q_3 = q_1 + q_2\}.$$

Então, $\mathbf{P}_3^-, \mathbf{P}_3^+$ forma um par de Dedekind de números racionais e, pela definição de $\Phi$, considerando $\Phi(q_3) = q_3'$, obtemos

$$r_1 a' < q_3' \leq r_2 a' \text{ para todo } r_1 \in \mathbf{P}_3^- \text{ e todo } r_2 \in \mathbf{P}_3^+.$$

Assim, temos de provar que $q_3' = q_1' + q_2'$.

Se tivéssemos $q_3' < q_1' + q_2'$, então existiria $r' \in \mathbf{P}$ tal que

$$q_3' < r'a' < q_1' + q_2'.$$

Por um método similar ao caso anterior em que $ra \leq q_1 + q_2$, existe $r'_i \in \mathbf{P}_i^-$, com $i = 1, 2$, tal que $r'_1 + r'_2 = r'$. Assim

$$r' \in \mathbf{P}_3^- = \{r \in \mathbf{P} : ra < q_3\} = \{r \in \mathbf{P} : ra' < q'_3\},$$

contradizendo

$$q'_3 < r'a'.$$

Se tivéssemos $q'_3 > q'_1 + q'_2$, então existiria $r' \in \mathbf{P}$ tal que

$$q'_3 > r'a' > q'_1 + q'_2.$$

E similarmente, como anteriormente, existiria $r'_i \in \mathbf{P}_i^+$, com $i = 1, 2$, tal que $r'_1 + r'_2 = r'$. Donde,

$$r' \in \mathbf{P}_3^+ = \{r \in \mathbf{P} : ra > q_1 + q_2\},$$

contradizendo

$$r'a' < q'_3.$$

A unicidade de $\Phi$ é obvia pela Proposição 4.2.10. ■

### 4.2.3 O Corpo dos Números Reais

Continuemos a considerar $Q$ um sistema de quantidades positivas que satisfaz os axiomas da continuidade, seja $\mathbf{\Phi}$ o conjunto de todos os automorfismos de $Q$, isto é, o conjunto de todas as aplicações lineares de $Q$ em $Q$.

Passemos, agora, à caracterização de $\mathbf{\Phi}$.

Em $\mathbf{\Phi}$ definimos a adição e a multiplicação como se segue:

$$\Phi_1 + \Phi_2 \text{ por } (\Phi_1 + \Phi_2)(q) = \Phi_1(q) + \Phi_2(q) \text{ para todo } q \in Q.$$

$$\Phi_2 \circ \Phi_2 \text{ por } (\Phi_2 \circ \Phi_1)(q) = \Phi_2(\Phi_1(q)) \text{ para todo } q \in Q.$$

**Proposição 4.2.14** *São válidas as propriedades comutativa e associativa da adição em* $\mathbf{\Phi}$*:*

$$\Phi_1 + \Phi_2 = \Phi_2 + \Phi_1,$$

$$(\Phi_1 + \Phi_2) + \Phi_3 = \Phi_1 + (\Phi_2 + \Phi_3).$$

**Proposição 4.2.15** *São válidas as propriedades associativa da multiplicação e distributiva da multiplicação em relação à adição em* $\mathbf{\Phi}$*:*

$$\Phi_1 \circ (\Phi_2 + \Phi_3) = \Phi_1 \circ \Phi_2 + \Phi_1 \circ \Phi_3,$$

$$(\Phi_1 + \Phi_2) \circ \Phi_3 = \Phi_1 \circ \Phi_3 + \Phi_2 \circ \Phi_3,$$

$$(\Phi_1 \circ \Phi_2) \circ \Phi_3 = \Phi_1 \circ (\Phi_2 \circ \Phi_3) .$$

**Proposição 4.2.16** *É válida a propriedade comutativa da multiplicação em* $\mathbf{\Phi}$*:*

$$\Phi_1 \circ \Phi_2 = \Phi_2 \circ \Phi_1.$$

Em termos de exemplificação vamos fazer a demonstração da Proposição 4.2.16.

**Demonstração.** Seja $a \in Q$, queremos mostrar que

$$\Phi_1 \circ \Phi_2 (a) = \Phi_2 \circ \Phi_1 (a) .$$

Suponhamos, com vista a um absurdo, que a igualdade anterior não é válida, e que temos, por exemplo,

$$\Phi_1 \circ \Phi_2 (a) < \Phi_2 \circ \Phi_1 (a) .$$

Assim, pela Proposição 4.2.9, existe um automorfismo racional $r = \frac{m}{n}$ tal que

$$\Phi_1 \circ \Phi_2 (a) < r\Phi_1 (a) < \Phi_2 \circ \Phi_1 (a) .$$

Pela Proposição 4.2.8,

$$r\Phi_1 (a) = \Phi_1 (ra) > \Phi_1 \circ \Phi_2 (a) ,$$

obtemos pelo Lema 4.2.1, $ra > \Phi_2 (a)$, donde, $r > \Phi_2$.

Além disso, como $rb < \Phi_2 (b)$ com $b = \Phi_1 (a)$, temos $r < \Phi_2$, o que contradiz a consequência anterior $r > \Phi_2$.

Similarmente, se supusermos

$$\Phi_1 \circ \Phi_2 (a) > \Phi_2 \circ \Phi_1 (a) ,$$

obtemos novamente uma contradição. ■

Com o objectivo de obter o corpo dos números reais, temos de prosseguir, a nossa construção, com mais algumas definições, nomeadamente de elemento neutro da adição e dos elementos negativos, $-\phi$ (com $\phi \in \mathbf{\Phi}$) .

O 0 (zero), é um elemento ideal tal que

$$\phi + 0 = 0 + \phi = \phi \text{ para todo } \phi \in \mathbf{\Phi}.$$

Para todo o $\phi \in \mathbf{\Phi}$ dado, definimos $-\phi$ por

$$\phi + (-\phi) = (-\phi) + \phi = 0.$$

**Proposição 4.2.17** *O conjunto* $\mathbf{R}$*, de todos os elementos* $\phi$*,* $0$ *e* $-\phi$ *com* $\phi \in \mathbf{\Phi}$ *forma um grupo comutativo relativamente à adição.*

Em $\mathbf{R}$, uma extensão de $\mathbf{\Phi}$, definimos a adição por:

1) Se $\phi_1, \phi_2 \in \mathbf{\Phi}$, a adição $\phi_1 + \phi_2$ continua a ser a mesma que foi definida para $\mathbf{\Phi}$.

2) $\phi_1 + (-\phi_2) = (-\phi_2) + \phi_1 = \begin{cases} \phi_1 - \phi_2 \text{ se } \phi_2 < \phi_1 \\ 0 \text{ se } \phi_1 = \phi_2 \\ -(\phi_2 - \phi_1) \text{ se } \phi_1 < \phi_2 \end{cases}$ para todo $\phi_1, \phi_2 \in \mathbf{\Phi}$.

3) $(-\phi_1) + (-\phi_2) = (-\phi_2) + (-\phi_1) = -(\phi_1 + \phi_2)$, para todo $\phi_1, \phi_2 \in \mathbf{\Phi}$.

4) $(-\phi) + 0 = 0 + (-\phi) = -\phi$ para todo $\phi \in \mathbf{\Phi}$ e $0 + 0 = 0$.

Em $\mathbf{R}$, como extensão de $\mathbf{\Phi}$, também, podemos definir a multiplicação como se segue:

1) Se $\phi_1, \phi_2 \in \mathbf{\Phi}$, o produto $\phi_1 \circ \phi_2$ continua a ser o mesmo que foi definido para $\mathbf{\Phi}$.

2) $(-\phi_1) \circ \phi_2 = \phi_2 \circ (-\phi_1) = -(\phi_1 \circ \phi_2)$ para todo $\phi_1, \phi_2 \in \mathbf{\Phi}$.

3) $(-\phi_1) \circ (-\phi_2) = \phi_1 \circ \phi_2$ para todo $\phi_1, \phi_2 \in \mathbf{\Phi}$.

4) $\phi \circ 0 = 0 \circ \phi = 0$ para todo $\phi \in \mathbf{\Phi}$.

Definidas as operações de adição e multiplicação em $\mathbf{R}$, podemos enunciar a seguinte:

**Proposição 4.2.18** *A adição e a multiplicação definidas anteriormente faz com que* $\mathbf{R}$ *seja um corpo comutativo.*

**Proposição 4.2.19** **R** *é essencialmente independente de* $Q$*, isto é,* $\mathbf{R}_Q$ *é isomorfo a* $\mathbf{R}_{Q'}$*, somente se* $Q$ *e* $Q'$ *são sistemas de quantidades positivas que satisfazem os axiomas de continuidade.*

**Demonstração.** Seja $a \in Q$ fixo, então a correspondência $1-1$, $\phi : \phi(a) = q$, para $\phi \in \mathbf{\Phi}_Q$ e $q \in Q$, produz um isomorfismo ($1-1$, é uma aplicação linear) de $\mathbf{\Phi}_Q$ com $Q$ no que diz respeito à adição temos que $\mathbf{\Phi}_Q \simeq Q$.

Como $Q \simeq Q'$, pela Proposição 4.2.13, obtemos, no que diz respeito à adição e à ordenação que $\mathbf{\Phi}_Q \simeq Q \simeq Q' \simeq \mathbf{\Phi}_{Q'}$.

Além disso, tomando $\mathbf{\Phi}_Q$ e $\mathbf{\Phi}_{Q'}$ com o intuito de torná-los isomorfos, também, no que diz respeito à multiplicação, podemos concluir que:

$1_Q \in \mathbf{\Phi}_Q$ tem de corresponder a $1_{Q'} \in \mathbf{\Phi}_{Q'}$, desde que $1_Q^2 = 1_Q$ e $1_{Q'}'^2 = 1'_{Q'}$.

Também para $n \in \mathbf{N}$, $n_Q \in \mathbf{\Phi}_Q$ tem de corresponder a $n_{Q'} \in \mathbf{\Phi}_{Q'}$ para o mesmo $n \in \mathbf{N}$.

Assim para $r_Q \in \mathbf{\Phi}_Q$, com $r \in \mathbf{R}$ um número racional, tem de corresponder $r_{Q'} \in \mathbf{\Phi}_{Q'}$ para o mesmo $r \in \mathbf{R}$.

Seja agora $\phi \in \mathbf{\Phi}_Q$ e suponhamos $\mathbf{P}$ um automorfismo racional tal que $\phi \notin \mathbf{P}$. Sejam $\mathbf{P}^+$ e $\mathbf{P}^-$ definidos por

$$\mathbf{P}^- = \{r \in \mathbf{P} : r < \phi\} \text{ e } \mathbf{P}^+ = \{r \in \mathbf{P} : r > \phi\}.$$

Então $\mathbf{P}^+, \mathbf{P}^-$ forma um par de Dedekind e existe um único $\phi' \in \mathbf{\Phi}_{Q'}$ tal que

$$r_{-(Q')} \leq \phi' \leq r_{+(Q')}, \text{ para todo } r_- \in \mathbf{P}^- \text{ e para todo } r_+ \in \mathbf{P}^+.$$

Pelo isomorfismo de $\mathbf{\Phi}_Q$ com $\mathbf{\Phi}_{Q'}$ no que diz respeito à ordenação, devido à adição, vemos que a $\phi$ deve corresponder $\phi'$.

Consequentemente, podemos observar que $\mathbf{\Phi}_Q$ e $\mathbf{\Phi}_{Q'}$ coincidem, como sistemas de adição e multiplicação, no sentido abstracto.

Como $\mathbf{R}_Q$ é unicamente derivado de $\mathbf{\Phi}_Q$ observamos que $\mathbf{R}_Q$ e $\mathbf{R}_{Q'}$ coincidem como corpo no sentido abstracto. ■

Denominamos assim, o sistema abstracto $\mathbf{R}$ de sistema de números reais e $\mathbf{\Phi}$ o sistema de números reais positivos.

## 4.3 Construção dos números reais como Classes de Equivalência de Declives

Norbert A' Campo, no artigo *A natural construction of the real numbers,* [6], propõe uma construção do sistema dos números reais, que consiste em construir directamente a partir do grupo aditivo dos números inteiros, utilizando por objecto base da construção os declives (*Slopes*).

Como já vimos, as construções clássicas do sistema dos números reais são baseadas nos *cortes* de Dedekind ou nas sucessões $(r_n)_{n \in N}$ de Cauchy de números racionais.

### 4.3.1 Declives e definição de Número Real

Consideremos $(\mathbf{Z}, +)$ o conjunto dos inteiros, munido da operação aritmética de adição, para introduzirmos as definições necessárias.

**Definição 4.3.1** *Um declive (slope) é, por definição, uma aplicação $\lambda : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, com a propriedade de que o conjunto*

$$\{\lambda(m+n) - \lambda(m) - \lambda(n) \ \ com\ m, n \in \mathbf{Z}\},$$

*é finito.*

**Definição 4.3.2** *Dois declives $\lambda$ e $\lambda'$ são equivalentes se o conjunto*

$$\{\lambda(n) - \lambda'(n) \ \ com\ n \in \mathbf{Z}\}$$

*é finito.*

Atendendo à definição de declive constatamos que a presente construção, está relacionada com as construções clássicas, pois, a um declive $\lambda$ corresponde um *corte* $(A, B)$ de Dedekind, tomando

$$A = \left\{\frac{p}{q} \in Q : \overline{p} \leq \lambda \circ \overline{q}\right\} \text{ e } B = \left\{\frac{p}{q} \in Q : \lambda \circ \overline{q} \leq \overline{p}\right\}$$

e corresponde igualmente a uma sucessão de Cauchy $(r_n)_{n \in N}$, considerando $r_n = \frac{\lambda(n+1)}{n+1}$.

**Definição 4.3.3** *Um número real é uma classe de equivalência de declives.*

Denotemos por $\mathbf{R}$ o conjunto dos números reais.

Para $j \in \mathbf{Z}$, seja $\overline{j} : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ a aplicação definida por $\overline{j}(n) = nj$.

A aplicação linear $\overline{j}$ é um declive para o qual a expressão $\overline{j}(m+n) - \overline{j}(n) - \overline{j}(m)$ toma apenas o valor 0.

Identifiquemos um inteiro $j \in \mathbf{Z}$ com o número real representado pelo declive $\overline{j}$.

Após esta identificação o conjunto dos inteiros $\mathbf{Z}$ torna-se um subconjunto de conjunto dos números reais $\mathbf{R}$. Posto isto, os inteiros, são aqueles números reais que são representados por declives lineares.

Para $p, q \in \mathbf{Z}$ e $q > 0$ consideremos a aplicação $\phi : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ definida para $n \in \mathbf{N}$ com $n > 0$ por

$$\phi(n) = \min\{k \in \mathbf{N} : qk \geq pn\}$$

e para $n \in \mathbf{Z}$ com $n \leq 0$ por

$$\phi(-n) = -\phi(n).$$

A aplicação $\phi$ é um declive representando o número racional $\frac{p}{q}$, isto é, o declive $\phi$ representa o número real que é solução da equação $qx = p$, o que tornar–se-á claro após a definição de multiplicação de números reais.

Tal como para os inteiros, identificamos o conjunto dos números racionais $\mathbf{Q}$, com um subconjunto de $\mathbf{R}$.

Podemos caracterizar os números racionais como aqueles números reais que são representados por um declive $\lambda$, tal que para algum inteiro $q > 0$ a aplicação

$$n \in \mathbf{Z} \to \lambda(qn) \in \mathbf{Z}$$

é linear.

Vamos na próxima secção definir a aritmética dos números reais, nomeadamente no que se refere às operações de adição e multiplicação, bem como a ordenação.

### 4.3.2 Aritmética dos Números Reais

Sejam $a, b \in \mathbf{R}$ números reais e $\alpha$ e $\beta$ declives representantes dos números reais $a$ e $b$.

**Definição 4.3.4** *A aplicação* $\alpha + \beta : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ *definida por*

$$(\alpha + \beta)(n) = \alpha(n) + \beta(n)$$

*é novamente um declive e a sua classe de equivalência é independente da escolha dos $\alpha$ e $\beta$ representativos de $a$ e $b$.*

*Definimos a adição $a+b \in \mathbf{R}$, com $a, b \in \mathbf{R}$, como a classe de equivalência do declive acima descrito.*

**Definição 4.3.5** *A composição $\alpha \circ \beta : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ definida por*

$$(\alpha \circ \beta)(n) = \alpha(\beta(n))$$

*é novamente um declive e definimos o produto $ab \in \mathbf{R}$, com $a, b \in \mathbf{R}$, como a classe de equivalência da composição acima descrita.*

A consistência desta definição decorre do seguinte:

**Lema 4.3.1** *Consideremos os declives $\alpha, \alpha'$ representativos de $a \in \mathbf{R}$ e os declives $\beta, \beta'$ representativos de $b \in \mathbf{R}$. Então as composições $\alpha \circ \beta$ e $\alpha' \circ \beta'$ são declives equivalentes.*

**Demonstração.** Provemos, em primeiro lugar que a aplicação $\alpha \circ \beta$ é efectivamente um declive.

Consideremos $E_\alpha$ e $E_\beta$ subconjuntos finitos de $\mathbf{Z}$, tais que

$$\alpha(n+m) - \alpha(n) - \alpha(m) \in E_\alpha$$

e

$$\beta(n+m) - \beta(n) - \beta(m) \in E_\beta,$$

para $n, m \in \mathbf{Z}$.

Assim, para $n, m \in \mathbf{Z}$ existem $u, u' \in E_\alpha$ e $v \in E_\beta$ com

$$\alpha \circ \beta(n) + \alpha \circ \beta(m) - \alpha \circ \beta(n+m) = \alpha(\beta(n) + \beta(m)) + u - \alpha(\beta(n) + \beta(m) - v) =$$

$$= \alpha(\beta(n) + \beta(m)) + u - (\alpha(\beta(n) + \beta(m)) + \alpha(-v) - u') = u - \alpha(-v) - u'.$$

Concluímos que a expressão

$$\alpha \circ \beta(n) + \alpha \circ \beta(m) - \alpha \circ \beta(n+m), \ n, m \in \mathbf{Z},$$

toma valores num conjunto finito e assim a aplicação $\alpha \circ \beta$ e, igualmente, também a aplicação $\alpha' \circ \beta'$ são declives.

Vejamos agora, que os declives $\alpha \circ \beta$ e $\alpha' \circ \beta'$ são equivalentes. Para tal, consideremos $E_{\alpha,\alpha'}$ e $E_{\beta,\beta'}$ conjuntos finitos tais que, para $n \in \mathbf{Z}$, temos

$$\alpha(n) - \alpha'(n) \in E_{\alpha,\alpha'}$$

e

$$\beta(n) - \beta'(n) \in E_{\beta,\beta'}.$$

Assim, para $n \in \mathbf{Z}$ existem $r \in E_{\alpha,\alpha'}$, $s \in E_{\beta,\beta'}$ e $u \in E_{\alpha}$, com

$$\begin{aligned} \alpha \circ \beta(n) - \alpha' \circ \beta'(n) &= \alpha(\beta'(n) - s) - (\alpha(\beta'(n)) + r) = \\ &= \alpha(\beta'(n)) + \alpha(-s) - u - (\alpha(\beta'(n)) + r) = \alpha(-s) - r - u. \end{aligned}$$

Concluimos, desta forma, que a expressão $\alpha \circ \beta(n) - \alpha' \circ \beta'(n)$, com $n \in \mathbf{Z}$ toma valores num conjunto finito e, consequentemente, os declives $\alpha \circ \beta$ e $\alpha' \circ \beta'$ são equivalentes.

■

A positividade de um número real está relacionada com a natureza dos seus declives representantes. Com efeito:

**Definição 4.3.6** *Um número real a é positivo se os seus declives representantes o forem.*

Consideremos

$$\mathbf{N} = \{n \in \mathbf{Z} : n \geq 0\},$$

o conjunto dos números naturais.

**Definição 4.3.7** *Dizemos que um declive $\lambda$ é positivo se o conjunto*

$$\{\lambda(n), \ \text{com } n \in \mathbf{N} : \lambda(n) \leq 0\}$$

*é finito, enquanto o conjunto*

$$\{\lambda(n), \ \text{com } n \in \mathbf{Z}\}$$

*é infinito.*

A partir da definição de positividade no conjunto dos números reais podemos estabelecer a ordenação desses números, do seguinte modo:

$(i)$ Se $a$ é positivo, dizemos que $a > 0$ e $0 < a$.

$(ii)$ O número real $a$ diz-se menor do que o número real $b$ se existe um número real positivo, $t$, tal que $b = a + t$. Se $a$ é menor que $b$ escrevemos $a < b$.

Antes de verificar que o conjunto $\mathbf{R}$ com a adição, $+$, multiplicação, $\cdot$, e ordenação, $<$, satisfaz todos os axiomas dos números reais, isto é, que se trata de um corpo arquimediano totalmente ordenado e completo, iremos apresentar algumas definições.

**Definição 4.3.8** *Uma aplicação $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ diz-se ímpar se para todo $n \in \mathbf{Z}$ temos $f(-n) = -f(n)$.*

Notemos que uma aplicação ímpar $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ é determinada pela sua restrição a $\mathbf{N}^+ = \{n \in \mathbf{Z} : n > 0\}$.

**Definição 4.3.9** *Consideremos $\lambda$ um declive arbitrário. A aplicação $\kappa : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ com $\kappa(0) = 0$, definida por $\kappa(n) = \lambda(n)$ se $n > 0$ e por $\kappa(n) = -\lambda(-n)$ se $n < 0$, é um declive ímpar, o qual é equivalente ao declive $\lambda$.*

Assim, todo o número real pode ser representado por um declive ímpar.

Para verificar se uma aplicação ímpar $\gamma : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ é um declive, é suficiente verificar que o conjunto

$$\left\{\gamma(n+m) - \gamma(n) - \gamma(m) \text{ com } n, m \in \mathbf{N}^+\right\}$$

é finito.

Com o intuito de caracterizar as propriedades no conjunto, $\mathbf{R}$, dos números reais é necessário caracterizar determinados declives, denominados de bem ajustados, aos quais irá corresponder um número real.

### Declives Bem Ajustados

**Definição 4.3.10** *Denominamos um declive $\lambda$ de bem ajustado se é ímpar e satisfaz as desigualdades*

$$-1 \leq \lambda(m+n) - \lambda(m) - \lambda(n) \leq 1, \text{ com } n, m \in \mathbf{Z}.$$

Podemos dizer que um declive bem ajustado não necessita tratar-se de uma aplicação linear de $\mathbf{Z}$ em $\mathbf{Z}$, mas difere o menos possível de ser linear.

Cada declive é equivalente a um declive bem ajustado, como mostra o Lema da concentração que será enunciado e demonstrado posteriormente.

Assim, em particular, um número real pode ser representado por um declive bem ajustado.

Antes porém, necessitamos de estabelecer a seguinte:

**Definição 4.3.11** *Para inteiros $p, q$ com $q \neq 0$, o resultado da divisão Euclideana optimizada de $p$ por $q$ denota-se por $p \div q$ e resulta no inteiro $r = p \div q \in \mathbf{Z}$ que satisfaz as desigualdades*

$$2p - |q| \leq 2qr < 2p + |q|,$$

*onde $|q| = \max\{q, -q\}$ é o valor absoluto de $q$.*

Por exemplo, $4 \div 7 = 1$ mas $3 \div 7 = 0$.

Notemos que, se $\frac{p}{q}$, com $p, q \in \mathbf{Z}$ e $q \neq 0$, denota uma fracção, então temos

$$\left|\frac{p}{q} - p \div q\right| \leq \frac{1}{2}.$$

Posto isto, relacionados com a divisão Euclideana optimizada, temos os seguintes:

**Lema 4.3.2** *Seja $q \in \mathbf{N}^+$ e $a, b, c \in \mathbf{Z}$ tais que*

$$-q \leq a - b - c \leq q.$$

*Então temos*

$$-1 \leq a \div 3q - b \div 3q - c \div 3q \leq 1.$$

**Demonstração.** O inteiro

$$a \div 3q - b \div 3q - c \div 3q$$

difere de 0 por, pelo menos

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \left|\frac{a}{3q} - \frac{b}{3q} - \frac{c}{3q}\right| \leq \frac{3}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}.$$

Então

$$-1 \leq a \div 3q - b \div 3q - c \div 3q \leq 1$$

uma vez que $\frac{11}{6} < 2$. ■

**Lema 4.3.3** *Sejam $n, m \in \mathbf{N}^+$ e $c \in \mathbf{Z}$. Então*

$$-1 \leq c \div m\,(n+m) - c \div n\,(n+m) - c \div nm \leq 1.$$

**Demonstração.** O inteiro

$$c \div m\,(n+m) - c \div n\,(n+m) - c \div nm$$

difere de

$$\frac{c}{m\,(n+m)} - \frac{c}{n\,(n+m)} - \frac{c}{nm}$$

por, quanto muito $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, logo

$$-1 \leq c \div m\,(n+m) - c \div n\,(n+m) - c \div nm \leq 1,$$

uma vez que $\frac{3}{2} < 2$. ∎

**Lema 4.3.4** ***(da Concentração)*** *Seja $\lambda$ um declive. Consideremos $s \in \mathbf{N}^+$ tal que, para todo $n, m \in \mathbf{Z}$, temos*

$$-s \leq \lambda\,(m+n) - \lambda\,(m) - \lambda\,(n) \leq s.$$

*Seja $\lambda' : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ definida por $\lambda'(n) = \lambda\,(3sn) \div 3s$ com $n \in \mathbf{Z}$, então a aplicação $\lambda'$ é um declive bem ajustado, equivalente ao declive $\lambda$.*

**Demonstração.** Por indução em $t \in \mathbf{N}^+$, provamos que

$$-s\,(t-1) \leq \lambda\,(tn) - t\lambda\,(n) \leq s\,(t-1).$$

Para $t = 3s$ temos

$$-s\,(3s-1) \leq \lambda\,(3sn) - 3s\lambda\,(n) \leq s\,(3s-1)$$

e consequentemente

$$-s \leq \lambda'(n) - \lambda\,(n) \leq s,$$

o que mostra a equivalência entre $\lambda$ e $\lambda'$.

De

$$-s \leq \lambda\,(3sn + 3sm) - \lambda\,(3sn) - \lambda\,(3sm) \leq s$$

deduzimos

$$-1 \leq \lambda'(n+m) - \lambda'(n) - \lambda'(m) \leq 1.$$

■

Um declive bem ajustado $\lambda$ possui as seguintes seis propriedades:

$(i)$ $|\lambda(n+1) - \lambda(n)| \leq |\lambda(1)| + 1$;

$(ii)$ Se para algum $k \in \mathbf{N}^{+}$ temos

$$\lambda(k) > 1 \text{ (ou } \lambda(k) < -1),$$

então para todo $n \in \mathbf{N}^{+}$ temos

$$\lambda(n) \geq -1 + n \div k \quad (\text{ou } \lambda(n) \leq 1 - n \div k).$$

$(iii)$ Se para algum $k \in \mathbf{Z}$ temos

$$\lambda(k) > 1,$$

então para $v \in \mathbf{Z}$ o conjunto

$$\{n \in \mathbf{Z} : \lambda(n) = v\}$$

é finito e possui menos do que $k+1$ elementos.

$(iv)$ Se para algum $k \in \mathbf{Z}$ temos

$$\lambda(k) > 1,$$

então para todo $v \in \mathbf{Z}$ existe $n \in \mathbf{Z}$ com

$$|v - \lambda(n)| \leq |\lambda(1)| + 1.$$

$(v)$ O número real $x$ representado por $\lambda$ satisfaz $x > 0$ se e só se existe $a \in \mathbf{N}$ com

$$\lambda(a) > 1.$$

$(vi)$ Seja $y$ um número real representado por um declive $\kappa$ bem ajustado. Temos $x > y$ se e só se existe $n \in \mathbf{N}^{+}$ com

$$\lambda(n) > 2 + \kappa(n).$$

Do Lema anterior e das propriedades acabadas de enunciar obtemos:

**Lema 4.3.5** *Seja $\lambda$ um declive. Se $\lambda$ toma infinitos valores, então existem $b, B \in \mathbf{N}^+$ verificando as seguintes desigualdades:*

$$|\lambda(n+k) - \lambda(n)| \leq kb, \ \text{com } n \in \mathbf{Z} \text{ e } k \in \mathbf{N};$$

$$|\lambda(n+kB) - \lambda(n)| \geq k, \ \text{com } n \in \mathbf{Z} \text{ e } k \in \mathbf{N}.$$

*Em particular, o declive $\lambda$ toma cada valor no máximo $2B-1$ vezes.*

### 4.3.3 Axiomática do Sistema dos Números Reais

Nesta secção, vamos provar, parcialmente e de uma forma abreviada, que os axiomas para um Corpo Ordenado e Completo são satisfeitos para $(\mathbf{R}, +, \cdot, <)$, isto é, que são válidas as seguintes três condições:

**1.** $(\mathbf{R}, +)$ é um Grupo Abeliano.

**2.** $(\mathbf{R}, +, \cdot)$ é um Corpo.

**3.** $(\mathbf{R}, +, \cdot, <)$ é um Corpo Ordenado Completo Arquimediano.

Recapitulemos que:

> Ser Corpo Completo e Ordenado significa que qualquer subconjunto não vazio $T$, limitado superiormente em $\mathbf{R}$, possui supremo, o qual é denotado por $\sup T$.
>
> Ser Corpo Ordenado e Arquimediano significa que para qualquer $a \in \mathbf{R}$, $a > 0$ e $A \in \mathbf{R}$ existe um $N \in \mathbf{N}$ tal que $Na > A$.

Seguiremos com a verificação de alguns dos axiomas que acabamos de enunciar, para o sistema dos números reais.

A adição, $+$, de inteiros faz com que $(\mathbf{Z}, +)$ constitua um Grupo Abeliano. Assim, facilmente decorre que $(\mathbf{R}, +)$ constitui igualmente um Grupo Abeliano.

$(\mathbf{R}, +, \cdot)$ é um Corpo. A multiplicação é associativa, uma vez que o é a composição de aplicações.

Apenas a propriedade comutativa e existência de elemento inverso necessita de especial cuidado.

Com o intuito de provar a propriedade comutativa da multiplicação consideremos dois declives $\alpha$ e $\beta$ verificando as estimativas

$$n\alpha\left(\beta\left(n\right)\right)=\alpha\left(n\beta\left(n\right)\right)+E_1=\alpha\left(\beta\left(n\right)n\right)+E_1=\beta\left(n\right)\alpha\left(n\right)+E_2+E_1$$

com

$$\left|E_1\right|\leq\left|n\right|S_\alpha \text{ e } \left|E_2\right|\leq\left|\beta\left(n\right)\right|S_\alpha\leq\left|n\right|\left(\left|\beta\left(1\right)\right|+S_\beta\right)S_\alpha.$$

Donde, decorre que

$$\left|\alpha\circ\beta\left(n\right)-\beta\circ\alpha\left(n\right)\right|\leq S_\alpha\left(1+\left|\beta\left(1\right)\right|+S_\beta\right)+S_\beta\left(1+\left|\alpha\left(1\right)\right|+S_\alpha\right)$$

o que mostra que os declives $\alpha\circ\beta$ e $\beta\circ\alpha$ são equivalentes, logo a multiplicação é comutativa.

Vejamos como está definido o elemento inverso para a multiplicação, para tal, consideremos 1 o número real representado pela aplicação identidade $Id_{\mathbf{Z}}:\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}$. Claramente, para um número real $x$, as propriedades $1x=x1=x$ são válidas, o que faz com que 1 seja o elemento neutro para a multiplicação em $\mathbf{R}$.

Iremos agora construir o elemento inverso para $x\in\mathbf{R}$, com $x\neq0$, isto é, um elemento $y\in\mathbf{R}$ que satisfaz $xy=1$.

Seja $\alpha$ um declive bem ajustado representativo de $x$. Então, para cada $v\in\mathbf{Z}$ podemos escolher $n_v\in\mathbf{Z}$ com

$$\left|v-\alpha\left(n_v\right)\right|\leq\left|\alpha\left(1\right)\right|+1.$$

Definimos a aplicação $\beta:\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}$ por $\beta\left(v\right)=n_v$.

A aplicação $\beta$ é um declive pois tomando $v,w\in\mathbf{Z}$ temos

$$\begin{aligned}\left|\alpha\left(\beta\left(v+w\right)-\beta\left(v\right)-\beta\left(w\right)\right)\right| &= \left|\alpha\left(n_{v+w}-n_v-n_w\right)\right|\leq\\ \left|\left(v+w\right)-v-w\right|+2+3\left(\left|\alpha\left(1\right)\right|+1\right) &= 3\left|\alpha\left(1\right)\right|+5.\end{aligned}$$

Uma vez que $\alpha$ toma cada valor unicamente finitas vezes, concluímos que o conjunto

$$\left\{\beta\left(v+w\right)-\beta\left(v\right)-\beta\left(w\right)\ \text{ com } v,w\in\mathbf{Z}\right\}$$

é finito.

Para $v \in \mathbf{Z}$ temos $\alpha \circ \beta(v) = \alpha(n_v)$, então os declives $\alpha \circ \beta$ e $Id_{\mathbf{z}}$ são equivalentes, uma vez que

$$|v - \alpha(n_v)| \leq |\alpha(1)| + 1.$$

Assim, resulta que $xy = 1$.

Mostremos que o par $(\mathbf{R}, <)$ representa uma relação ordenada, no entanto, provemos primeiramente que a relação $<$ é total.

Sejam $x$ e $y$ números reais representados pelos declives $\alpha$ e $\beta$.

Consideremos o declive $\delta = \alpha - \beta$, o qual representa o número $x - y$.

Seja $\delta'$ o declive bem ajustado equivalente a $\delta$, dado pelo Lema da concentração.

Se $\delta'(n) \in \{-1, 0, 1\}$ para todo $n \in \mathbf{Z}$ então temos $x = y$.

Se $x \neq y$ temos, para algum $n \in \mathbf{N}$ ,

$$\delta'(n) > 1 \text{ ou } \delta'(n) < -1.$$

No primeiro caso temos $x > y$ e no segundo $x < y$.

O caso $x = y$ exclui $x < y$ e $x > y$.

Os casos $x < y$ e $x > y$ excluem-se mutuamente.

Resta-nos unicamente provar a transitividade.

Sejam $x, y$ e $z$ números reais com $x > y$ e $y > z$, os quais são representados pelos declives $\alpha, \beta$ e $\gamma$.

Consideremos $\delta_1$ e $\delta_2$ declives bem ajustados equivalentes aos declives $\alpha - \beta$ e $\beta - \gamma$. Então para algum $n \in \mathbf{N}^+$ e algum $m \in \mathbf{N}^+$ temos

$$\delta_1(n) > 1 \text{ e } \delta_2(m) > 1.$$

Assim, resulta que $(\delta_1 + \delta_2)(nm) > 2$.

O declive bem ajustado $\delta_{12}$ equivalente a $\delta_1 + \delta_2$ satisfaz $\delta_{12}(nm) > 1$ e consequentemente temos $x > z$.

Vamos provar que $(\mathbf{R}, +, \cdot, <)$ é um Corpo Ordenado.

Sejam $x, y$ e $t$ números reais satisfazendo $x < y$.

Representaremos $x, y$ e $t$ pelos declives bem ajustados $\alpha, \beta$ e $\tau$.

Uma vez que $x < y$ então existe $b \in \mathbf{N}$ com

$$\alpha(bn) < \beta(bn) - n, \text{ para } n \in \mathbf{N}^+.$$

Então

$$\alpha(bn) + \tau(bn) < \beta(bn) + \tau(bn) - n, \text{ para } n \in \mathbf{N}^+,$$

o que mostra a monotonia para translações

$$x + t < y + t.$$

Se $t > 0$, para algum $d \in \mathbf{N}$ temos $\tau(dn) > n$, com $n \in \mathbf{N}^+$, logo

$$\tau(\alpha(bdn)) < \tau(\beta(bdn)) - n, \text{ para } n \in \mathbf{N}^+,$$

o que mostra a monotonia para as transformações do tipo $tx < ty$.

Provemos agora a propriedade arquimediana.

Consideremos $a, A \in \mathbf{R}$ com $a > 0$.

Construamos $N \in \mathbf{N}$ tal que $Na > A$, como se segue.

Representamos $a$ e $A$ por declives bem ajustados $\lambda$ e $\Lambda$. Uma vez que temos $a > 0$, podemos escolher $n \in \mathbf{N}^+$ com $\lambda(n) > 1$ e então $\lambda(2n) > 2$.

Definimos

$$N = 1 + \max\{\Lambda(2n), 0\}.$$

Seja $\kappa$ o declive bem ajustado equivalente ao declive $N\lambda$. Temos

$$\kappa(2n) > N\lambda(2n) - N > 2 + \Lambda(2n).$$

Consequentemente $Na > A$.

Finalmente para estabelecer a Completude consideremos $D$ um subconjunto de $\mathbf{R}$ não vazio e limitado superiormente por $m \in \mathbf{R}$.

Então, para $x \in D$ temos a desigualdade $x \leq m$.

Seja $\Delta$ um conjunto de declives bem ajustados representativos dos números reais no conjunto $D$.

Consideremos $\mu$ um declive bem ajustado, representativo de $m$.

Para todo $n \in \mathbf{N}$ e $\delta \in \Delta$ temos $\delta(n) < \mu(n) + 2$.

Donde, decorre que, para $n \in \mathbf{N}^+$ o conjunto não vazio $\{\delta(n) \text{ com } \delta \in \Delta\}$ é limitado superiormente por $\mu(n) + 2$.

Seja $\sigma : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ a aplicação ímpar definida por

$$\sigma(n) = \max\{\delta(n) \text{ com } \delta \in \Delta\}.$$

A aplicação $\sigma$ constitui um declive pois para $u \in \mathbf{N}^+$ consideramos $\delta_u \in \Delta$ um declive, o qual atinge em $u$ o valor $\max\{\delta(u),\ \text{com } \delta \in \Delta\}$. Assim sendo, temos $\delta_u(u) = \sigma(u)$.

Para $p, N \in \mathbf{N}^+$ tomemos $q = pN$.

Comparemos $\delta_p$ e $\delta_q$ em $p$ e $q$, como se segue.

Temos

$$\delta_q(q) \div N \leq \delta_p(p) + 1$$

uma vez que

$$|\delta_q(q) \div N - \delta_q(p)| \leq 1 \text{ e } \delta_q(p) \leq \delta_p(p).$$

Temos também

$$N\delta_p(p) \leq \delta_p(q) + N \leq \delta_q(q) + N.$$

Concluímos que, para todo $p, N \in \mathbf{N}^+$ temos

$$|\delta_p(p) - \delta_{pN}(pN) \div N| \leq 1.$$

Então, para $n, m \in \mathbf{N}^+$, considerando

$$c = \delta_{nm(n+m)}(nm(n+m)),$$

temos as seguintes desigualdades

$$|\sigma(n) - c \div m(n+m)| \leq 1,$$

$$|\sigma(m) - c \div n(n+m)| \leq 1,$$

$$|\sigma(n+m) - c \div nm| \leq 1.$$

Por exemplo, a primeira desigualdade é obtida com $p = n$, $N = m(n+m)$, $q = Np$ e por comparação de $\delta_p$ com $\delta_q$ no ponto $p$.

De

$$|c \div nm - c \div m(n+m) - c \div n(n+m)| \leq 1$$

decorre que, para todo o $n, m \in \mathbf{N}^+$ temos

$$|\sigma(n+m) - \sigma(n) - \sigma(m)| \leq 1 + 3 = 4,$$

o que prova o pretendido.

Seja $s$ o número real representado pelo declive $\sigma$. Para todo $x \in D$ temos a desigualdade $x \leq s$, uma vez que, para um declive $\delta \in \Delta$ representando $x$, a desigualdade

$$\delta(n) \leq \delta_n(n) = \sigma(n) \text{ com } n \in \mathbf{N}^+$$

é válida.

Então $s \in \mathbf{R}$ é um majorante para $D$.

Com o intuito de provar que $s$ representa o supremo de $D$, mostraremos que nenhum $t \in \mathbf{R}$ com $t < s$ é um majorante para $D$.

Com efeito, seja $\tau$ um declive bem ajustado para $t \in \mathbf{R}$ com $t < s$.

Então existe $n \in \mathbf{N}^+$ com

$$\tau(n) < \sigma(n) - 2.$$

Seja $x$ em $D$ representado por $\delta_n$.

Temos $\delta_n(n) > \tau(n) + 2$, logo $x > t$ e assim $t$ não representa um majorante para $D$.

Assim, à semelhança do que foi feito para as outras construções do sistema dos números reais, provamos que, definindo um número real como uma classe de equivalência de declives, as propriedades de Corpo Ordenado e Completo estão satisfeitas.

## 4.4 Construção dos Números Reais como Sucessões de Intervalos *Encaixados*

O livro *Perspectives in Mathematics*, [36], publicado, no ano de 1972, dedica o Capítulo 10 à construção do sistema dos números reais utilizando sucessões de intervalos encaixados, e é tendo por base essa construção que elaboramos esta secção.

Nesta construção do sistema dos números reais, tal como em todas as anteriores, vamos assumir como conhecido o sistema $(Q, \cdot, +, <)$, dos números racionais, com as usuais operações de multiplicação e adição e com a ordenação usual em $Q$.

Nesta secção vamos, partindo do sistema dos números racionais, elaborar uma construção dos números reais, explicitando algumas das mais importantes propriedades deste sistema de números.

Esta construção tem por base sucessões de intervalos fechados de números racionais e, para tal, precisamos de uma importante propriedade do conjunto dos números racionais, expressa no seguinte:

**Teorema 4.4.1** *Sejam $r$ e $s$ números racionais com $r < s$ então existem infinitos números racionais entre $r$ e $s$.*

**Demonstração.** Escolhamos inteiros $m$ e $n$ tais que $0 < m < n$. Então

$$0 < \frac{m}{n} < 1.$$

Uma vez que $r < s$ então $s - r$ é positivo. Também $s - r$ é racional e então temos

$$0 < \frac{m}{n}(s - r) < s - r,$$

e consequentemente

$$r < r + \frac{m}{n}(s - r) < s.$$

Uma vez que $\frac{m}{n}$ e $s - r$ são racionais, também o é o seu produto e a soma

$$r + \frac{m}{n}(s - r).$$

Existem infinitas escolhas para os valores dos inteiros $m$ e $n$ tais que

$$0 < m < n,$$

e $m$ e $n$ podem ser escolhidos por forma a termos infinitos valores distintos de $\frac{m}{n}$, e assim, infinitos valores distintos para $r + \frac{m}{n}(s - r)$, os quais todos estão entre $r$ e $s$. ■

Vejamos, de seguida a definição de intervalo de números racionais, conceito base da nossa construção.

**Definição 4.4.1** *Sejam $a$ e $b$ números racionais com $a < b$. Por intervalo $[a, b]$ entendemos o conjunto*

$$[a, b] = \{x \in Q : a \leq x \leq b\}.$$

Deste modo, $[a, b]$ consiste em todos os números racionais entre $a$ e $b$, incluindo $a$ e $b$.

Como vimos no Teorema 4.4.1, cada um deste conjuntos contém infinitos números racionais.

**Definição 4.4.2** *Considerando $[a,b]$, denotamos o comprimento deste intervalo por $\lambda([a,b])$, o qual é dado por*

$$\lambda([a,b]) = b - a.$$

Assim, se $I$ é um intervalo de números racionais, então $\lambda(I)$ é um número racional positivo, e se $J \subset I$ sendo $J$ um intervalo de números racionais, então $\lambda(J) \leq \lambda(I)$.

Com efeito, se $J$ é um subconjunto próprio de $I$, então, $\lambda(J) < \lambda(I)$.

Centremos a nossa atenção nas sucessões de tais intervalos, da forma

$$I_1, I_2, I_3, I_4, ...,$$

onde cada intervalo da sucessão contém o seguinte e a sucessão de números

$$\lambda(I_1), \lambda(I_2), \lambda(I_3), \lambda(I_4), ...,$$

tende para zero.

Vamos, contudo precisar a definição de convergência de uma sucessão e para tal tomando $r$ um número racional, denotaremos por $|r|$ o valor absoluto de $r$, onde

$$|r| = \begin{cases} r \text{ se } r \geq 0 \\ -r \text{ se } r < 0 \end{cases}.$$

Assim, se $r$ é um número racional, $|r|$ é não negativo e mede a distância de $r$ a 0, quando colocamos $r$ sobre uma linha recta orientada.

Consideremos a sucessão de números racionais

$$\{s_n\} = s_1, s_2, s_3, ..., s_n, ....$$

Dizemos que a sucessão $\{s_n\}$ tende para zero, ou tem limite zero se para qualquer número positivo $\varepsilon$, tão pequeno quanto se queira, existe um número natural $k$, tal que para todo o número natural $n \geq k$ temos $|s_n| < \varepsilon$.

Notemos que, apesar dos termos de uma sucessão se aproximarem de zero isso não quer dizer que a sucessão tenda para zero, vejamos, por exemplo, o caso da sucessão $\{s_n\}$ de termo geral $1 + \frac{1}{n}$ que tem por limite 1.

A definição de limite de uma sucessão não significa igualmente que os termos da sucessão devam aproximar-se cada vez mais do limite da mesma. Por exemplo, se considerarmos a sucessão $\{s_n\}$ definida por $\frac{1}{n}$ se $n$ é ímpar e $\frac{1}{2^n}$ se $n$ é par, os termos não aproximam-se *continuamente* do seu limite, que é zero.

Outra alternativa de definir a convergência de uma sucessão $\{s_n\}$ para zero é a seguinte:

**Definição 4.4.3** *Uma sucessão* $\{s_n\}$ *tende para zero se, escolhido um qualquer intervalo da forma* $]-\varepsilon, \varepsilon[$, *tão pequeno quanto se queira, contendo o zero, a partir de uma determinada ordem, os termos da sucessão* $\{s_n\}$ *pertencem ao intervalo.*

Iremos construir os números reais com base na localização da sua posição, utilizando sucessões de intervalos fechados de números racionais.

Por exemplo, uma típica sucessão para a localização do número $\sqrt{2}$, será:

$$\begin{aligned}
I_1 &= [1;2]\,; \\
I_2 &= [1,4;1,5]\,; \\
I_3 &= [1,41;1,42]\,; \\
I_4 &= [1,414;1,415]\,; \\
I_5 &= [1,4141;1,4142]\,; \\
& \ldots
\end{aligned}$$

O comportamento destes intervalos é tal que unicamente o número $\sqrt{2}$ pode pertencer a todos eles. Contudo, uma vez que $\sqrt{2}$ ainda não foi construído, não podemos falar de um número pertencente a todos estes intervalos. Com efeito, no contexto dos números racionais, não existe um número que pertença a todos estes intervalos. Consequentemente, iremos fazer corresponder $\sqrt{2}$ à sucessão $\{I_n\}$.

Para que esta ideia seja bem sucedida é necessário impor determinadas características a esta sucessão de intervalos. Assim sendo, estabelecemos a seguinte

**Definição 4.4.4** *Uma sucessão de intervalos encaixados fechados de números racionais é uma sucessão*

$$I_1, I_2, I_3, I_4, ...,$$

*de intervalos fechados de números racionais tal que*

$(i)$ *para cada* $n$, $I_{n+1}$ *é um subconjunto próprio de* $I_n$;

$(ii)$ *a sucessão* $\{\lambda(I_n)\}$ *tende para zero.*

Notemos que, podemos denominar de *iguais,* duas sucessões de intervalos encaixados, se definem o mesmo número. Tendo por base esta ideia, vamos posteriormente definir um número real como uma sucessão de intervalos encaixados de números racionais.

Tecnicamente, um número real corresponde, como veremos, ao conjunto de todas as sucessões de intervalos encaixados de números racionais que são *iguais*.

### 4.4.1 Número Real como Equivalência de Sucessões

O conceito de número real assenta na definição da equivalência de sucessões de intervalos encaixados de números racionais.

**Definição 4.4.5** *Sejam $\zeta$ e $\eta$ sucessões de intervalos encaixados de números racionais, onde*

$$\zeta = \{I_1, I_2, I_3, ...\} \text{ e } \eta = \{J_1, J_2, J_3, ...\}$$

*com $I_n$ e $J_n$ intervalos fechados de números racionais. Dizemos que $\zeta$ e $\eta$ são equivalentes, e escrevemos $\zeta = \eta$ se para qualquer combinação de números naturais $m$ e $n$, existe um ponto comum a $I_m$ e $J_n$.*

Por outras palavras, cada intervalo em $\zeta$ sobrepõe cada intervalo em $\eta$.

O ponto comum às duas sucessões será a eventual localização do número real o qual, em virtude da definição anterior, é definido tanto por $\zeta$ como por $\eta$, pois se algum intervalo $I_m$ é disjunto de algum intervalo $J_n$ então todos os intervalos após $I_m$ em $\zeta$ serão disjuntos de todos os intervalos após $J_n$ em $\eta$, e existirá uma distância positiva entre o ponto definido por $\zeta$ e o ponto definido por $\eta$.

Consideremos as sucessões de intervalos encaixados de números racionais $\zeta = \{I_n\}$ e $\eta = \{J_n\}$ com

$$I_n = \left[1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{3}{n}\right] \text{ e } J_n = \left[1 - \frac{2}{n}, 1\right] \quad \text{com } n \in N.$$

Temos, obviamente, $\zeta = \eta$ pois todo o intervalo $I_n$ bem como todo o intervalo $J_n$ contém o número 1 e consequentemente para toda a combinação de números naturais $m$ e $n$, e $I_m$ sobrepõe $J_n$ pelo menos no número 1.

Este exemplo, elucidativo da equivalência de sucessões de intervalos encaixados de números racionais, mostra-nos que, obviamente, um número racional é sempre um número real pois o número 1 é o único número comum a todos os intervalos $I_n$ e a todos os intervalos $J_n$. Então, neste caso, ambas as sucessões $\zeta$ e $\eta$ correspondem ao número racional 1.

Mostraremos, de seguida, que a equivalência de sucessões de intervalos encaixados de números racionais corresponde a uma relação de equivalência.

**Teorema 4.4.2** *Sejam $\zeta, \eta$ e $\theta$ sucessões de intervalos encaixados de números racionais. Então*

(*i*) $\zeta = \zeta$;

(*ii*) *se* $\zeta = \eta$ *então* $\eta = \zeta$;

(*iii*) *se* $\zeta = \eta$ *e* $\eta = \theta$ *então* $\zeta = \theta$.

**Demonstração.** As condições (*i*) e (*ii*) são óbvias.

Para estabelecer (*iii*), suponhamos, com vista a um absurdo, que $\zeta \neq \theta$. Então, algum intervalo $I_m$ em $\zeta$ é disjunto de algum intervalo $K_n$ em $\theta$.

Uma vez que $I_m$ e $K_n$ são intervalos, podemos supor que cada número em $I_m$ é menor do que cada número em $K_n$. Em particular, o limite superior $r$ de $I_m$ é menor do que o limite inferior $s$ de $K_n$.

Uma vez que $\zeta = \eta$ e $\eta = \theta$ então cada intervalo $J_t$ na sucessão $\eta$ deve conter $r$ e $s$ pois cada intervalo $J_t$ deve intersectar $I_m$ e $K_n$.

Como $r < s$ então $s - r$ é um número positivo e logo

$$\lambda \left( J_t \right) \geq s - r$$

para todos os números naturais $t$, assim como o intervalo $[r, s]$ é um subconjunto de $J_t$ para cada número natural $t$.

Consequentemente, a sucessão $\{\lambda \left( J_t \right)\}$ não pode tender para zero. O que contradiz o facto de $\eta$ ser uma sucessão de intervalos encaixados de números racionais, e por definição, a sua sucessão de comprimentos tender para zero.

Esta contradição mostra que $\zeta = \theta$ o que demonstra o teorema. ■

Com base na relação de equivalência existente entre sucessões de intervalos encaixados de números racionais podemos estabelecer a seguinte:

**Definição 4.4.6** *Um número real corresponde a uma colecção de sucessões equivalentes de intervalos encaixados de números racionais.*

Esta definição justifica a utilização do símbolo de igualdade na definição de sucessões equivalentes pois dois números reais são iguais se e só se são representados por sucessões equivalentes de intervalos encaixados de números racionais.

### 4.4.2 Aritmética do Sistema dos Números Reais

Com o intuito de definir a operação de adição no conjunto dos números reais iremos, primeiramente, definir a adição de sucessões de intervalos encaixados de números racionais.

**Definição 4.4.7** *Sejam $\zeta$ e $\eta$ duas sucessões de intervalos encaixados de números racionais, onde*

$$\zeta = \{I_1, I_2, I_3, ...\} \ \text{ e } \eta = \{J_1, J_2, J_3, ...\}.$$

*$\zeta + \eta$ corresponde à sucessão*

$$\{I_1 + J_1, I_2 + J_2, I_3 + J_3, ...\},$$

*onde, para cada número natural $n$*

$$I_n + J_n = \{a + b \ \text{ com } a \in I_n \ \text{ e } b \in J_n\}.$$

Assim, com o objectivo de adicionar dois números reais, iremos escolher quaisquer sucessões de intervalos encaixados de números racionais representando esses dois números reais. Adicionamos essas sucessões, adicionando os intervalos correspondentes e os intervalos, por sua vez são adicionados, estabelecendo essa mesma operação a cada par de números dos dois intervalos.

Em última análise verificamos que a operação acima descrita corresponde à adição definida no conjunto dos números racionais.

É necessário contudo garantir que a adição de intervalos encaixados de números racionais continue a ser um intervalo encaixado de números racionais, o que se traduz no seguinte:

**Teorema 4.4.3** *Se $I$ e $J$ são dois intervalos encaixados de números racionais então também o é $I + J$.*

Se tomarmos a adição de dois pares de sucessões de intervalos encaixados de números racionais representativas de dois números reais, é necessário provar que estas são equivalentes.

Com efeito, a definição da adição $\zeta + \eta$, como base da adição de dois números reais, necessita de um teorema que justifique a sua validade.

A razão é que ao adicionarmos dois números reais $\zeta$ e $\eta$, seleccionamos uma de muitas possíveis sucessões de intervalos encaixados para representar $\zeta$ e igualmente uma de muitas hipóteses de sucessões de intervalos encaixados para representar $\eta$. Existem pois várias hipóteses de escolha.

Se escolhermos $\zeta$ representado por

$$\{I_1, I_2, I_3, ...\} \text{ e } \{X_1, X_2, X_3, ....\}$$

e $\eta$ também representados por

$$\{J_1, J_2, J_3, ...\} \text{ e } \{Y_1, Y_2, Y_3, ....\}.$$

Além de $\{I_n\}$ e $\{X_n\}$ serem equivalentes necessitam não ser idênticas. O mesmo deve acontecer com $\{J_n\}$ e $\{Y_n\}$.

Assim, não poderemos esperar que as duas sucessões

$$\{I_1 + J_1, I_2 + J_2, I_3 + J_3, ...\} \text{ e } \{X_1 + Y_1, X_2 + Y_2, X_3 + Y_3, ...\}$$

sejam idênticas.

O problema reside no facto de que elas podem não ser equivalentes.

Uma vez que é suposto que ambas determinem a mesma adição $\zeta + \eta$, as duas sucessões acima devem ser equivalentes ou teríamos uma ambiguidade na definição da adição de números reais.

Para garantir que esta ambiguidade não tenha lugar é suficiente estabelecer o seguinte:

**Teorema 4.4.4** *Sejam $\zeta$ e $\eta$ números reais. Consideremos $\zeta$ representado por duas sucessões de intervalos encaixados $\{I_n\}$ e $\{X_n\}$ e $\eta$ representado por duas sucessões de intervalos encaixados $\{J_n\}$ e $\{Y_n\}$. Então as duas sucessões de intervalos encaixados $\{I_n + J_n\}$ e $\{X_n + Y_n\}$ são equivalentes, donde originam o mesmo número real $\zeta + \eta$.*

**Demonstração.** Suponhamos $\zeta$ e $\eta$ números reais, consideremos $\zeta$ representado por duas sucessões de intervalos encaixados $\{I_n\}$ e $\{X_n\}$ e $\eta$ representado por duas sucessões de intervalos encaixados $\{J_n\}$ e $\{Y_n\}$.

Suponhamos ainda, com vista a um absurdo, que a sucessão $\{I_n + J_n\}$ representa o número real $\gamma$, que a sucessão $\{X_n + Y_n\}$ representa o número real $\delta$ e que $\gamma \neq \delta$.

Atendendo a última condição, as duas sucessões $\{I_n + J_n\}$ e $\{X_n + Y_n\}$ não são equivalentes, então, deverá existir algum intervalo da forma $I_k + J_k$ disjunto de algum intervalo da forma $X_m + Y_m$.

Suponhamos, sem perda de generalidade, que $m \geq k$, então, uma vez que

$$I_m + J_m \subset I_k + J_k,$$

decorre que $I_m + J_m$ e $X_m + Y_m$ são igualmente disjuntos.

Mas, atendendo ao facto de que $\{I_n\}$ e $\{X_n\}$ são equivalentes, existe pelo menos um número racional $a$ pertencente a $I_m$ e $X_m$.

Similarmente, existe um número racional $b$ pertencente a $J_m$ e $Y_m$.

Consequentemente, podemos afirmar que o número racional $a + b$ pertence tanto a $I_m + J_m$ como a $X_m + Y_m$. Está encontrado o absurdo, uma vez que $I_m + J_m$ e $X_m + Y_m$ são disjuntos.

É obvio que se $\{I_n\}$ e $\{J_n\}$ são sucessões de intervalos encaixados fechados de números racionais também o é a sucessão $\{I_n + J_n\}$. ■

Seguidamente, por conveniência iremos estabelecer que todo o número racional é um número real, isto é, que cada número racional pode ser tomado como uma colecção de sucessões equivalentes de intervalos encaixados de números racionais.

Assim, podemos afirmar que $Q \subset R$ onde $R$ denota o conjunto de todos os números reais.

**Teorema 4.4.5** *Seja $r$ um número racional, então $r$ é um número real.*

**Demonstração.** Para cada número natural $n$, consideremos

$$I_n = \left[r - \frac{1}{n}, r + \frac{1}{n}\right].$$

Claramente $\{I_n\}$ é uma sucessão de intervalos encaixados fechados de números racionais.

É fácil verificar que se $\{J_n\}$ é uma outra sucessão nestas condições, então é equivalente à sucessão $\{I_n\}$ se e só se todo o intervalo $J_n$ contém o número $r$. Além disso, se tal acontecer, $r$ é o único número comum a todos os intervalos da sucessão $\{J_n\}$, se atendermos à condição que diz-nos que a sucessão $\{\lambda(J_n)\}$ tende para zero.

Consequentemente, o número racional $r$ é representado por uma sucessão de intervalos encaixados e portanto é um número real. ■

Retomando a adição, temos duas formas de adicionar números racionais.

Se $r$ e $s$ são racionais podemos adicioná-los pela adição usual definida em $Q$ ou então podemos tomá-los como números reais e adicioná-los utilizando as sucessões de intervalos encaixados. Os dois resultados obtidos são iguais, e assim a definição de adição de números reais corresponde à usual adição de números racionais, quando ambos os métodos são aplicados a dois pares de números.

Atendendo à Definição 4.4.6, de número real, como uma colecção de sucessões equivalentes de intervalos encaixados de números racionais, e ao facto de, como acabamos de ver, a adição de números reais resultar, em última instância, na adição de números racionais podemos, obviamente, enunciar os seguintes:

**Teorema 4.4.6** *A adição de números reais é comutativa, isto é, para quaisquer dois números reais $\zeta$ e $\eta$ temos*

$$\zeta + \eta = \eta + \zeta.$$

**Teorema 4.4.7** *A adição de números reais é associativa, isto é, para quaisquer números reais $\zeta$, $\eta$ e $\theta$ temos*

$$(\zeta + \eta) + \theta = \zeta + (\eta + \theta).$$

**Teorema 4.4.8** *O número racional* 0, *quando tomado como número real, é o elemento neutro da adição, isto é, para todo o número real $\zeta$ temos*

$$\zeta + 0 = 0 + \zeta = \zeta.$$

**Teorema 4.4.9** *Para todo o número real $\zeta$ existe um número real $-\zeta$ tal que*

$$\zeta + (-\zeta) = (-\zeta) + \zeta = 0.$$

Analogamente, podemos definir a multiplicação de números reais com base nas sucessões de intervalos encaixados de números racionais e enunciar o seguinte:

**Teorema 4.4.10** *Sejam $\zeta$ e $\eta$ números reais. Consideremos $\zeta$ representado por duas sucessões de intervalos encaixados $\{I_n\}$ e $\{X_n\}$ e $\eta$ representado por duas sucessões de intervalos encaixados $\{J_n\}$ e $\{Y_n\}$. Então as duas sucessões de intervalos encaixados $\{I_n \cdot J_n\}$ e $\{X_n \cdot Y_n\}$ são equivalentes, donde originam o mesmo número real $\zeta \cdot \eta$.*

São igualmente válidos os seguintes:

**Teorema 4.4.11** *A multiplicação de números reais é comutativa, isto é, para quaisquer dois números reais* $\zeta$ *e* $\eta$ *temos*

$$\zeta \cdot \eta = \eta \cdot \zeta.$$

**Teorema 4.4.12** *A multiplicação de números reais é associativa, isto é, para quaisquer números reais* $\zeta$, $\eta$ *e* $\theta$ *temos*

$$(\zeta \cdot \eta) \cdot \theta = \zeta \cdot (\eta \cdot \theta)$$

**Teorema 4.4.13** *A multiplicação de números reais é distributiva em relação à adição, isto é, para quaisquer números reais* $\zeta$, $\eta$ *e* $\theta$ *temos*

$$\zeta \cdot (\eta + \theta) = \zeta \cdot \eta + \zeta \cdot \theta \ \text{ e } \ (\eta + \theta) \cdot \zeta = \eta \cdot \zeta + \theta \cdot \zeta.$$

**Teorema 4.4.14** *O número racional* 1, *quando tomado como número real, é o elemento neutro da multiplicação, isto é, para todo o número real* $\zeta$ *temos*

$$\zeta \cdot 1 = 1 \cdot \zeta = \zeta.$$

**Teorema 4.4.15** *O número racional* 0, *quando tomado como número real, é o elemento absorvente da multiplicação, isto é, para todo o número real* $\zeta$ *temos*

$$0 \cdot \zeta = \zeta \cdot 0 = 0.$$

**Teorema 4.4.16** *Para todo o número real* $\zeta$, *distinto de* 0 *existe um número real* $\frac{1}{\zeta}$ *tal que*

$$\zeta \cdot \frac{1}{\zeta} = 1.$$

Na próxima secção iremos ver como podemos definir a ordenação em $R$ com base na ordenação definida em $Q$.

### 4.4.3 Ordenação do Sistema dos Números Reais

**Definição 4.4.8** *Consideremos* $\zeta$ *e* $\eta$ *dois números reais com representações* $\{I_n\}$ *e* $\{J_n\}$ *respectivamente, sucessões de intervalos encaixados fechados de números racionais. Se existe um número racional* $r$ *e um número natural* $n$ *tais que cada número em* $I_n$ *é menor do que* $r$ *e cada número em* $J_n$ *excede* $r$ *então dizemos que* $\zeta < \eta$.

**Teorema 4.4.17** *Se $a$ e $b$ são números racionais e $a < b$, com a usual relação de ordem definida em $Q$, então $a < b$ em $R$ e inversamente.*

**Teorema 4.4.18** *Se $\zeta$ e $\eta$ são números reais então uma, e apenas uma, das três seguintes condições se verifica:*

(i) $\zeta < \eta$;

(ii) $\zeta = \eta$;

(iii) $\eta < \zeta$.

**Teorema 4.4.19** *Se $\zeta$, $\eta$ e $\theta$ são números reais tais que $\zeta < \eta$ e $\eta < \theta$ então $\zeta < \theta$.*

Notemos que a notação $\zeta \leq \eta$ significa que apenas uma das duas seguintes condições é verificada $\zeta < \eta$ ou $\zeta = \eta$.

**Teorema 4.4.20** *Se $\zeta$ é um número real e $0 < \zeta$ então existe um número natural $n$ tal que $\frac{1}{n} < \zeta$.*

O teorema seguinte é conhecido como a Propriedade Arquimediana dos Números Reais.

**Teorema 4.4.21** *Se $\varepsilon$ é um número real com $0 < \varepsilon$ e $\gamma$ é um número real com $0 < \gamma$, então, com $\varepsilon$ tão pequeno quanto se queira e $\gamma$ tão grande quanto se queira, existe um número natural $n$ tal que*

$$\gamma < n \cdot \varepsilon.$$

**Demonstração.** Sejam $\varepsilon$ e $\gamma$ números reais positivos tais que $\varepsilon < \gamma$ (pois $\varepsilon$ é tão pequeno quanto se queira e $\gamma$ tão grande quanto se queira).

Consideremos $\{I_n\}$ e $\{J_n\}$ sucessões de intervalos encaixados representantes de $\varepsilon$ e $\gamma$, respectivamente.

Como $\{I_n\}$ não tende para zero, existe um número racional positivo $r$ tal que $\{I_n\} > r$, a partir de certa ordem, donde se conclui que $r \leq \varepsilon$.

Por outro lado, sendo $\{J_n\}$ uma sucessão de intervalos encaixados fechados de números racionais, é majorada por um número racional $k$ e temos portanto $\{J_n\} \leq k$, logo $\gamma \leq k$.

Atendendo ao facto que o conjunto dos números racionais goza da propriedade Arquimediana, então existe um natural $n$ tal que $nr > k$, donde $n\varepsilon > \gamma$. ■

**Definição 4.4.9** *Consideremos $S$ um conjunto não vazio de números reais. Dizemos que um número $b$ é um majorante para $S$ se $x \leq b$, para todo $x \in S$.*

**Definição 4.4.10** *Se $c$ é um majorante de $S$ tal que $c \leq b$ para todo o $b$ majorante de $S$, então $c$ denomina-se supremo de $S$.*

O próximo teorema, conhecido como o do Supremo, estabelece realmente que a recta real não possui *buracos*.

**Teorema 4.4.22** *Se $S$ é um conjunto não vazio de números reais com um majorante, então $S$ possui supremo.*

**Demonstração.** Suponhamos que $S$ é majorado. Como $S \neq \emptyset$ e possui um majorante, podemos determinar $a$ e $b$ números reais tais que $b$ é majorante de $S$ mas $a$ não é majorante de $S$. Seja $I = [a, b]$.

Dividindo $I = [a, b]$ ao meio, encontramos dois intervalos estando um deles, o qual vamos designar por $I_1 = [a_1, b_1]$, nas mesmas condições de $I$, isto é, $b_1$ é majorante de $S$ e $a_1$ não o é.

Repetindo a operação sucessivamente, encontra-se uma sucessão de intervalos $I_n = [a_n, b_n]$ com comprimento $\lambda([a_n, b_n])$. E como o comprimento de cada intervalo $I_n$, é metade do comprimento do precedente, temos

$$\lambda([a_n, b_n]) = b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n},$$

que tende para 0.

Assim, encontramos uma sucessão de intervalos nas condições do princípio do encaixe [isto é, que estão de acordo com a Definição 4.4.4] tais que $b_n$ é majorante de $S$ e $a_n$ não é majorante de $S$.

Seja $\zeta$ o ponto comum aos intervalos $I_n$.

Se $c \in S$, para todo o $n$ temos $c \leq b_n$. Donde vem, passando ao limite, $c \leq \zeta$. O que prova que $\zeta$ é majorante de $S$.

Por outro lado, se $\eta$ é majorante de $S$, temos, para todo o $n$, $\eta \geq a_n$, e portanto $\eta \geq \zeta$ donde se conclui que $\zeta$ é o menor dos majorantes de $S$. Logo $\zeta = \sup S$. ■

Com efeito, utilizando o Teorema 4.4.22, acabado de demonstrar, podemos mostrar que não existem outros números reais, uma vez que podemos estabelecer uma relação de correspondência biunívoca entre $R$ e os pontos de uma recta, isto é, qualquer quantidade que possa ser interpretada como um comprimento pode ser medida exactamente por um e unicamente um número real.

Tal comprimento pode ser representado como um comprimento medido a partir de 0 até um qualquer ponto da linha recta.

Se por alguma razão o comprimento fosse negativo, por exemplo relacionado com a carga de uma partícula, poderíamos sempre supor que seria medido na direcção positiva pois podemos mostrar que se $\zeta$, número real, mede um comprimento positivo, $-\zeta$ mede um comprimento negativo.

Então, o problema consiste em mostrar que cada ponto à direita de zero consiste na localização de um número real $\zeta$ previamente construído.

Consideremos $P$ tal ponto, então existe certamente pelo menos um número racional $r$ à direita de $P$ e $-1$ é um numero racional à esquerda de $P$.

Consequentemente, o conjunto

$$S = \{x \in Q : x \text{ está à esquerda de } P\}$$

é o conjunto não vazio majorado de números reais.

Consideremos $\zeta$ o supremo de $S$.

Consideremos, com vista a um absurdo, que $\zeta$ está à esquerda de $P$ então, pela construção de $\zeta$, deverá existir algum intervalo fechado $I$ de números racionais com $\zeta \in I$ e $P$ à direita de qualquer número de $I$.

Em particular, o limite superior $b$ do intervalo $I$ é um número racional à esquerda de $P$, então $b \in S$. Mas $\zeta < b$, o que é um absurdo, uma vez que $\zeta$ é o supremo de $S$.

Similarmente, obtemos um absurdo se considerarmos que $\zeta$ está à direita de $P$.

Assim, o ponto $P$ é a localização exacta do número real $\zeta$ e estabelecemos que cada ponto da recta corresponde à localização de algum número real $\zeta$ e, além disso, esta é a localização exacta de $\zeta$ pois este ponto está à direita de todo o número racional menor que $\zeta$ e à esquerda de todo o número racional maior que $\zeta$.

Posto isto, com base nas definições e nos teoremas apresentados nesta secção 4.4 podemos afirmar que o sistema dos números reais construído, tendo por base as colecções de sucessões equivalentes de intervalos encaixados fechados de números racionais, é um Corpo Ordenado e Completo.

# Capítulo 5

# Axiomatização dos Números

Hilbert desenvolveu um tratamento completo e consistente dos axiomas da geometria e sintetizou esses axiomas no contexto da análise dos números reais.

Hilbert demonstrou que na análise dos números reais é possível encontrar um modelo de axiomas da geometria. Mostrou ainda como estabelecer que este modelo é essencialmente único, isto é, que qualquer modelo lhe é isomorfo.

Quando comparamos os trabalhos existentes até ao final do século XIX relacionados com os princípios da aritmética e com os axiomas da geometria, observamos, não obstante as múltiplas analogias, uma diferença no que respeita ao *método* de investigação.

O processo de introdução do conceito de número consistia no *método genético* e na estruturação da geometria utilizava-se o *método axiomático.* (Veja-se [21], p. 216)

Hilbert questionou se o método genético seria o único método apropriado para o estudo do conceito de número, reservando-se o método axiomático para o estudo dos fundamentos da geometria. Considerou interessante comparar estes dois métodos e investigar qual deles apresentava mais vantagens para a investigação lógica dos fundamentos, chegando à seguinte conclusão:

> "(...) apesar do alto valor heurístico e pedagógico do método genético, merece, no entanto a minha preferência o método axiomático para a representação definitiva do nosso conhecimento e a sua plena fundamentação lógica." ([21], p. 217)

Assim, relacionado com a teoria do conceito de número, desenvolveu o método axiomático como enunciamos seguidamente.

Como já foi referido, na secção 1.3, do capítulo 1, Hilbert propôs que imaginássemos um *sistema de entes*, aos quais chamamos *números* que são designados por $a, b, c, ...$, relacionados entre si. Essas relações ajustam-se exacta e completamente por quatro conjuntos de axiomas ([21], pp. 217 - 219): os de ligação, de cálculo, de ordem e de continuidade, que enunciamos de seguida.

### I. Axiomas de Ligação

**I 1.** Do número $a$ e do número $b$ origina-se por adição um determinado número $c$. Simbolicamente:

$$a + b = c \text{ ou } c = a + b.$$

**I 2.** Se $a$ e $b$ são números dados, existe sempre um só número $x$ e um só número $y$ tais que, respectivamente, se tenha

$$a + x = b \text{ e } y + a = b.$$

**I 3.** Existe um determinado número chamado *zero* (0) tal que para qualquer número $a$ se verifica simultaneamente

$$a + 0 = a \text{ e } 0 + a = a.$$

**I 4.** Dos números $a$ e $b$ se origina contudo de outra maneira - por multiplicação - um determinado número $c$. Simbolicamente:

$$ab = c \text{ ou } c = ab.$$

**I 5.** Se $a$ e $b$ são dois números quaisquer com $a$ diferente de zero, existem sempre um só número $x$ e também um só número $y$ tais que, respectivamente, se cumpra

$$ax = b \text{ e } ya = b.$$

**I 6.** Existe um determinado número chamado *um* (1) tal que para todo o valor de $a$ resulta simultaneamente

$$a \cdot 1 = a \text{ e } 1 \cdot a = a.$$

### II. Axiomas de Cálculo

Se $a, b$ e $c$ são números quaisquer, verificam-se sempre as seguintes igualdades:

**II 1.** $a + (b + c) = (a + b) + c.$

**II 2.** $a + b = b + a.$

**II 3.** $a\,(bc) = (ab)\,c.$

**II 4.** $a\,(b + c) = ab + ac.$

**II 5.** $(a + b)\,c = ac + bc.$

**II 6.** $ab = ba.$

### III. Axiomas da Ordem

**III 1.** Se $a$ e $b$ são números distintos quaisquer, então um e um só deles (digamos $a$) é maior ($>$) do que o outro; e este diz-se, então, o menor dos dois. Simbolicamente

$$a > b \;\text{ e }\; b < a.$$

Para nenhum número $a$ é válida a relação $a > a$.

**III 2.** Se $a > b$ e $b > c$ então também é $a > c$.

**III 3.** Se $a > b$ então verifica-se sempre

$$a + c > b + c \;\text{ e }\; c + a > c + b.$$

**III 4.** Se $a > b$ e $c > 0$ verifica-se igualmente

$$ac > bc \;\text{ e }\; ca > cb.$$

### IV. Axiomas da Continuidade

**IV 1. (Axioma de Arquimedes)** Se $a > 0$ e $b > 0$ são dois números quaisquer, então é sempre possível somar $a$ consigo mesmo, quantas vezes for necessário para que a soma resultante tenha a propriedade

$$a + a + ... + a > b.$$

> **IV 2. (Axioma da Completabilidade)** Se queremos conservar as relações entre os números, não é possível juntar ao seu sistema outro sistema de entes de modo que no sistema combinado de ambos sejam satisfeitos na sua totalidade os axiomas **I**, **II**, **III** e **IV 1.**.
>
> Dito de uma forma breve, os números formam um sistema de entes que não é susceptível de ampliação alguma se se mantiverem todas as relações e todos os axiomas estabelecidos.

Notemos que, os axiomas **I**, **II**, **III** e **IV** correspondem aos de Corpo Ordenado Arquimediano e Completo, sendo a completude entendida no sentido do axioma **IV 2.** e a propriedade arquimediana, no sentido do axioma **IV 1.**, onde é pressuposto o conceito de número finito.

Verificamos que alguns dos axiomas, acabados de enunciar, são consequência dos restantes, o que nos leva à discussão da dependência lógica dos mesmos.

A existência de elemento neutro na adição (axioma **I 3.**), assenta, essencialmente, na propriedade associativa da adição, logo constitui uma consequência dos axiomas **I 1. - 2.** e **II 1.**.

A existência de elemento neutro na multiplicação (axioma **I 6.**), depende, fundamentalmente, da propriedade associativa da multiplicação, logo constitui uma consequência dos axiomas **I 4. - 5.** e **II 3.**.

A propriedade comutativa da adição (axioma **II 2.**), deduzida da propriedade associativa da adição e da propriedade distributiva à esquerda e à direita da multiplicação em relação à adição, constitui uma consequência dos axiomas **I 2.** e **II 1.**, **4.** e **5.**.

A propriedade comutativa da multiplicação (axioma **II 6.**), pode ser deduzida quando e só quando se junta o axioma de Arquimedes, **IV 1.**, aos axiomas **I**, **II 1. - 5.** e **III.**, logo é uma consequência dos axiomas **I**, **II 1. - 5.**, **III** e **IV 1.**.

Os axiomas **IV 1.** e **IV 2.** são independentes um do outro. Nenhum destes axiomas contém afirmações sobre o conceito de convergência ou sobre a existência de limites, no entanto, pode-se demonstrar através deles o Teorema de Bolzano-Weierstrass sobre a existência de pontos de acumulação e também a existência da fronteira correspondente a um *corte* de Dedekind.

Verificamos, assim, que o sistema de números, apresentado por Hilbert, coincide com o sistema usual dos números reais.

Hilbert considera que na demonstração da *não-contradição*[1] dos axiomas admitidos, encontramos a prova da existência da totalidade dos números reais, isto é, na terminologia de Cantor, a prova de que o sistema dos números reais é um conjunto *consistente* (acabado).

Assim, segundo esta concepção do conjunto dos números reais, não temos de imaginar todas as propriedades possíveis a que podem ser sujeitos os elementos de uma sucessão fundamental, mas sim um sistema de entes cujas relações recíprocas são dadas pelo referido sistema finito e fechado dos axiomas **I - IV**, e para o qual são válidos novos enunciados somente quando estes podem ser deduzidos daqueles axiomas, por um número finito de inferências lógicas.

Neste momento, tendo por base o método axiomático de Hilbert, estamos aptos a responder à seguinte questão:

> *Existem outros Corpos distintos do, sistema dos números reais,* $\mathbb{R}$, *que sejam Completos e Ordenados?*

Para responder a esta questão iremos utilizar letras minúsculas para denotar os números reais, reservando as letras minúsculas "*negritas*" para outros corpos que possam eventualmente aparecer.

Iremos considerar os números inteiros e racionais como casos especiais dos números reais e vamos *esquecer* a forma particular como os números reais foram definidos, nos capítulos anteriores, que como vimos constituem corpos ordenados, arquimedianos e completos.

Notemos que, se os elementos de um corpo $F$ forem utilizados para denominar certos elementos de $\mathbb{R}$, então, para cada $a$ pertencente a $\mathbb{R}$ deve corresponder um $f(a)$ em $F$. A notação $f(a)$ sugere que esta nova denominação pode ser formulada em termos de uma função.

**Definição 5.0.11** *Uma função é uma colecção de pares ordenados (de quaisquer objectos) que não contém dois pares distintos com o mesmo primeiro elemento.*

[1] A *não-contradição* consiste em não ser possível obter, a partir deles, por inferência lógica, uma afirmação que contradiga um dos axiomas apresentados.

**Definição 5.0.12** *Domínio de uma função $f$ é o conjunto $A$ de todos os objectos $a$ tais que $(a,b)$ está em $f$ para algum $b$; este (único) $b$ é denotado por $f(a)$.*

*Se $f(a)$ está no conjunto $B$ para todo o $a$ em $A$, então $f$ é denominada de uma função de $A$ para $B$.*

Suponhamos que $F_1$ e $F_2$ são dois corpos, denotaremos as operações em $F_1$ por $\oplus, \odot, \lhd$, etc., e as operações em $F_2$ por $\dot{+}, \bullet, <$, etc..

Se $F_2$ for considerado como uma colecção de novos elementos de $F_1$, então deve existir uma função de $F_1$ em $F_2$ com as seguintes quatro propriedades:

(1) A função $f$ deve ser de $1-1$ (um para um), isto é, se $x \neq y$, então deveremos ter $f(x) \neq f(y)$. O que significa que, não existem dois elementos de $F_1$ possuindo a mesma imagem.

(2) A função $f$ deve ser sobrejectiva, isto é, para o elemento $z$ em $F_2$ existe algum $x$ em $F_1$ tal que $z = f(x)$. O que significa que, todo o elemento de $F_2$ é usado para denominar um elemento de $F_1$.

(3) Para todo o $x$ e $y$ em $F_1$ devemos ter:

$$\begin{aligned} f(x \oplus y) &= f(x) \dot{+} f(y), \\ f(x \odot y) &= f(x) \bullet f(y). \end{aligned}$$

O que significa que, a correspondência efectuada é consistente com as operações do corpo.

Se $F_1$ e $F_2$ forem considerados corpos ordenados, acrescentamos uma nova propriedade:

(4) Se $x \lhd y$, então $f(x) < f(y)$.

Uma função com estas quatro propriedades é denominada de *isomorfismo* de $F_1$ para $F_2$, assim, podemos introduzir a seguinte:

**Definição 5.0.13** *Se $F_1$ e $F_2$ são dois corpos, um isomorfismo de $F_1$ para $F_2$ é uma função $f$ de $F_1$ para $F_2$ com as seguintes propriedades:*

(1) *Se $x \neq y$, então $f(x) \neq f(y)$.*

(2) *Se $z$ está em $F_2$, então $z = f(x)$ para algum $x$ em $F_1$.*

(3) *Se $x$ e $y$ estão em $F_1$, então*

$$f(x \oplus y) = f(x) \dotplus f(y) \quad e \quad f(x \odot y) = f(x) \bullet f(y).$$

*Se $F_1$ e $F_2$ são corpos ordenados necessitamos também de:*

(4) *Se $x \lhd y$, então $f(x) < f(y)$.*

Definido o isomorfismo, podemos enunciar o que são corpos isomorfos, como se segue:

**Definição 5.0.14** *Dois corpos $F_1$ e $F_2$ são denominados isomorfos se existe um isomorfismo entre eles.*

Dois corpos isomorfos podem ser considerados essencialmente iguais, isto é, qualquer propriedade importante de um é automaticamente verificada no outro.

Então, sendo $F$ um corpo completo e ordenado não é necessário verificar se ele é igual a $\mathbb{R}$, mas sim se é isomorfo a $\mathbb{R}$.

Para o próximo teorema iremos considerar $F$ um corpo com as operações $\dotplus$ e $\bullet$ e *elementos positivos* $\mathbf{P}$, escreveremos $a < b$ para indicar que $b - a$ está em $\mathbf{P}$.

**Teorema 5.0.23** *Se $F$ é um corpo completo e ordenado, então $F$ é isomorfo a $\mathbb{R}$.*

**Demonstração.** Uma vez que dois corpos são isomorfos se existe um isomorfismo entre eles, temos, para demonstrar o teorema, de construir uma função $f$ de $\mathbb{R}$ para $F$ que seja um isomorfismo.

Comecemos por definir $f$ para os números inteiros como se segue:

$$\begin{aligned} f(0) &= \mathbf{0}, \\ f(n) &= \underbrace{\mathbf{1} \dotplus ... \dotplus \mathbf{1}}_{n \text{ vezes}} \text{ para } n > 0, \\ f(n) &= -\underbrace{(\mathbf{1} \dotplus ... \dotplus \mathbf{1})}_{|n| \text{ vezes}} \text{ para } n < 0. \end{aligned}$$

É fácil verificar que:

$$f(m+n) = f(m) \dotplus f(n) \text{ e } f(m \cdot n) = f(m) \bullet f(n),$$

para todos os inteiros $m$ e $n$, e é conveniente denotarmos $f(n)$ por $\mathbf{n}$.

Definimos, agora, $f$ para os números racionais por:

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{\mathbf{m}}{\mathbf{n}} = \mathbf{m} \bullet \mathbf{n}^{-1}$$

Notemos que, como $F$ é um corpo ordenado, se $n > 0$ temos $\mathbf{1} \dot{+} ... \dot{+} \mathbf{1} \neq \mathbf{0}$.

Esta definição faz sentido pois se $\frac{m}{n} = \frac{k}{l}$ então $ml = nk$, logo $\mathbf{m} \bullet \mathbf{l} = \mathbf{k} \bullet \mathbf{n}$, donde $\mathbf{m} \bullet \mathbf{n}^{-1} = \mathbf{k} \bullet \mathbf{l}^{-1}$.

É fácil verificar que:

$$f(r_1 + r_2) = f(r_1) \dot{+} f(r_2) \quad \text{e que} \quad f(r_1 \cdot r_2) = f(r_1) \bullet f(r_2),$$

para todos os números racionais $r_1$ e $r_2$, e que $f(r_1) < f(r_2)$ se $r_1 < r_2$.

A definição de $f(x)$ para um $x$ arbitrário é baseada na ideia, nossa familiar, de que qualquer número real é determinado pelos números racionais menores do que ele.

Para qualquer $x$ em $\mathbb{R}$, consideremos $A_x$ o subconjunto de $F$ consistindo de todos $f(r)$, para todos os números racionais $r < x$.

O conjunto $A_x$ é certamente não vazio e é igualmente limitado superiormente. Pois, se $r_0$ é o número racional com $r_0 > x$, então $f(r_0) > f(r)$, para todo $f(r)$ em $A_x$.

Uma vez que $F$ é um corpo completo e ordenado, o conjunto $A_x$ possui supremo, vamos assim definir $f(x)$ como $\sup A_x$.

Temos agora $f(x)$ definido de duas formas distintas, primeiro para o racional $x$ e depois para qualquer $x$.

Antes de prosseguir, com a demonstração do teorema, é necessário mostrar que ambas as definições coincidem para o racional $x$. Por outras palavras, se $x$ é um número racional pretendemos mostrar que $\sup A_x = f(x)$, onde $f(x)$ aqui denota $\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{n}}$, para $x = \frac{m}{n}$, o que não é automático mas depende da completude de $F$, logo, requer a utilização de um artifício.

Uma vez que $F$ é completo, os elementos $\underbrace{\mathbf{1} \dot{+} ... \dot{+} \mathbf{1}}_{n \text{ vezes}}$ para números naturais $n$ formam um conjunto que não é limitado superiormente.

As consequências deste facto para $\mathbb{R}$ são análogas às causadas em $F$, em particular, se $a$ e $b$ são elementos de $F$ com $a < b$, então existe um número racional $r$ tal que

$$a < f(r) < b.$$

Após esta observação, voltamos à demonstração de que as duas definições de $f(x)$ são válidas para um número racional $x$.

Se $y$ é um número racional com $y < x$, então já vimos que $f(y) < f(x)$. Assim, todo o elemento de $A_x$ é $< f(x)$. Consequentemente,

$$\sup A_x \leq f(x).$$

Por outro lado, suponhamos que temos $\sup A_x < f(x)$, então existirá um número racional $r$ tal que

$$\sup A_x < f(r) < f(x).$$

Mas a condição $f(r) < f(x)$ significa que $r < x$, donde resulta que $f(r)$ está no conjunto $A_x$ o que contradiz claramente a condição $\sup A_x < f(r)$. O que mostra que a afirmação original era falsa, logo, temos

$$\sup A_x = f(x).$$

Temos assim uma função $f$ , bem definida, de $\mathbb{R}$ para $F$.

Com o intuito de verificar que $f$ é um isomorfismo temos de verificar as condições $(1)-(4)$ da Definição 5.0.13.

Comecemos por demonstrar a $(4)$.

Se $x$ e $y$ são números reais com $x < y$, então claramente $A_x$ está contido em $A_y$. Assim,

$$f(x) = \sup A_x \leq \sup A_y = f(y).$$

Para eliminar a hipótese de igualdade, notemos que existem números racionais $r$ e $s$ com

$$x < r < s < y.$$

Sabemos que $f(r) < f(s)$ donde resulta que

$$f(x) \leq f(r) < f(s) \leq f(y)$$

e assim provamos a condição $(4)$.

A condição $(1)$ resulta imediatamente da condição $(4)$. Pois se $x \neq y$ então $x < y$ ou $y < x$.

No primeiro caso $f(x) < f(y)$, e no segundo caso $f(y) < f(x)$ e em qualquer um dos casos $f(x) \neq f(y)$.

Para provar (2), consideremos $a$ um elemento de $F$ e seja $B$ o conjunto de todos os números racionais $r$ com $f(r) < a$.

O conjunto $B$ é não vazio e é igualmente limitado superiormente, pois existe um número racional $s$ com $f(s) > a$, tal que $f(s) > f(r)$ para $r$ em $B$, o que implica que $s > r$.

Seja $x$ o supremo de $B$; vamos provar que $f(x) = a$.

Se $f(x) < a$ existe um número racional $r$ com $f(x) < f(r) < a$. Mas isto significa que $x < r$ e esse $r$ está em $B$, o que contradiz o facto de que $x = \sup B$.

Por outro lado, se $a < f(x)$ existe um número racional $r$ com $a < f(r) < f(x)$. O que significa que $r < x$ e uma vez que $x = \sup B$, isto implica que $r < s$ para algum $s$ em $B$. Donde, $f(r) < f(s) < a$ e temos novamente uma contradição. Assim $f(x) = a$, o que prova (2).

Para verificar (3), consideremos $x$ e $y$ números reais e suponhamos, com vista a um absurdo, que

$$f(x+y) \neq f(x) \dot{+} f(y).$$

Então

$$f(x+y) < f(x) \dot{+} f(y) \text{ ou } f(x) \dot{+} f(y) < f(x+y).$$

No primeiro caso, $f(x+y) < f(x) \dot{+} f(y)$, existirá um número racional $r$ tal que

$$f(x+y) < f(r) < f(x) \dot{+} f(y).$$

Mas isto significa que $x + y < r$. Consequentemente, $r$ pode ser escrito como sendo a soma de dois números racionais $r = r_1 + r_2$, onde $x < r_1$ e $y < r_2$.

Assim, usando os factos demonstrados para $f$ respeitante a números racionais, obtém-se

$$f(r) = f(r_1 + r_2) = f(r_1) \dot{+} f(r_2) > f(x) \dot{+} f(y),$$

o que é uma contradição.

O outro caso, $f(x) \dot{+} f(y) < f(x+y)$, é tratado de forma similar.

Finalmente, se $x$ e $y$ são números reais positivos, o mesmo tipo de argumentos mostra-nos que

$$f(x \cdot y) = f(x) \bullet f(y);$$

e o caso geral é então uma simples consequência. ■

# Conclusão:

Com este teorema concluímos finalmente que existe um corpo completo e ordenado, e apenas um a menos de um isomorfismo, do conjunto dos números reais, o qual denotamos por $\mathbb{R}$ e que utilizamos hoje em dia.

O conjunto $\mathbb{R}$ pode deste modo representar:

- As Secções de Dedekind, isto é, conjuntos ordenados de racionais;
- Classes de Equivalência de Sucessões Fundamentais;
- Sucessões Corrigidas de Racionais;
- Operações com Quantidades do mesmo tipo;
- Classes de Equivalência de Declives no Plano Reticulado;
- Colecção de Sucessões Equivalentes de Intervalos Encaixados;
- ...

# Bibliografia


[1] Agudo, F. R. Dias. 1989. *Análise Real.* Vol. I. Lisboa: Escolar Editora.

[2] Bourbaki, N. 1976. *Elementos de Historia de las Matematicas.* Alianza Universidad.

[3] Boyer, Carl B. 1986. *Historia de la Matemática.* Madrid: Alianza Editorial, S. A.

[4] Bunn, R. *Los Desarrollos en la fundamentacion de la matematica desde 1870 a 1910.* In [17], Cap. **6**, pp. 283 - 327.

[5] Burton, D. M. 1988. *The History of Mathematics an Introduction.* New York: The MacGraw-Hill Companies, Inc.

[6] Campo, Norbert. *A natural construction for the real numbers.* In http://www.math.ethz.ch/~gruppe5/group5/lectures/analysis/ws0405/real270604.pdf

[7] Cantor, J. 1872. *Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen. Mathematische Annalen*, **5**. In [13], p. 306.

[8] Corry, Leo. 1994. La teoria de las proporciones de Eudoxio interpretada por Dedekind. In *Mathesis,* Vol. 10, pp. 1 - 24 .

[9] Dedekind, Richard. 1872. *Continuity and irrational numbers*, English transl. 1901. In *Essays on the Theory of Numbers*, Dover, New York, 1963. pp. 1 - 24.

[10] Dugac, Pierre. 1973. Éléments d'analyse de Karl Weierstrass. In *Archive for the History of Exact Sciences*, Vol. 10, n.º 1/2. Berlin: Springer-Verlag. pp. 41 - 176.

[11] Dugac, Pierre. 1976. *Richard Dedekind et les fondements des mathématiques.* Paris: Virn.

[12] Dugac, Pierre. 2003. *Histoire de L'analyse.* Paris: Vuibert.

[13] Epple, Moritz. *The End of the Science of Quantity: Foundations of Analysis, 1860 - 1910. In* [23]*,* Chap. **10**, pp. 291 - 323.

[14] Euclid. 1956. *The thirteen books of The Elements.* 2.$^{nd}$ Ed. Vol. II. New York: Dover Publications, Inc.

[15] Ewald, William. 1996. *From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics.* Vol. 2. Oxford: Clarendon Press.

[16] Gardies, Jean Louis. 1984. Eudoxe et Dedekind. *Revue d´Histoire des Sciences,* XXXVII (2), pp. 111 - 125.

[17] Grattan-Guiness, Ivor. (Editor) 1984. *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630 - 1910. Una introducción historica.* Madrid: Alianza Editorial.

[18] Guerreiro, J. Santos. 1968. *Curso de Matemáticas Gerais.* Vol. II. Lisboa: Livraria Escolar Editora.

[19] Guimarães, A. Andrade. 1947. Dos números naturais aos números racionais. In *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática.* Vol. 1. Lisboa: Tipog. Matemática, LTD, pp. 1 - 22.

[20] Heine, E. 1872. Die Elemente der Functionenlehre*. Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **74**. In [13], p. 299.

[21] Hilbert, David. 1930. *Fundamentos da Geometria*. Tradução Portuguesa de 1947, baseada na 7$^{a}$ Ed.; re-edição Gradiva 2003, revista e coordenada por A. J. Franco de Oliveira com apêndices do autor e suplementos.

[22] Hurwitz, Adolf. 1878. *Einleitung in die Theorie der analytischen Funktionen*. In [10], pp. 96 - 118.

[23] Jahnke, H. N. (Editor) 2003. *A History of Analysis.* Vol. 24. American Mathematical Society.

[24] Katz, V. J. 1998. *A History of Mathematics - An Introduction*. 2.$^{nd}$ Ed. New York: Addison Wesley Longman.

[25] Landau, Edmund. 1930. *Foundations of Analysis*. English transl. 1951, AMS-Chelsea Publishing, Providence, R.I. (Reprint 2001 of the 3rd ed. 1966)

[26] Lightstone, A. H. 1962. *A simple alternative to Dedekind cuts*. New York: Scripta Mathematica, XXVI (4), pp. 347 - 351.

[27] Martins, A. P. M. F. 2004. *As construções do Sistema dos Números Reais por Dedekind, Weierstrass e Méray.* Tese de Mestrado. Departamento de Matemática Pura, Faculdade de Ciências, Universidade do Porto.

[28] Méray, Charles. 1868. Remarques nouvelles sur les points fondamentaux du calcul infinitésimal et sur la théorie de développement des fonctions en séries. In *Revue des Sociétes Savantes des departements, Section sciences mathématiques, physiques et naturelles,* 37, pp. 133 - 138.

[29] Méray, Charles. 1869. Remarques sur la nature des quantités définies par la condition de servir de limites à des variables données. In *Revue des Sociétes Savantes des departements, Section sciences mathématiques, physiques et naturelles.* $2^{eme}$ série. Tome IV. Paris: Imprimerie Impériale.

[30] Méray, Charles. 1872. *Nouveau Précis d'Analyse Infinitésimale.* F. Savy, Libraire - Éditeur: Paris.

[31] Méray, Charles. 1887. Sur le sens qu'il convient d'attacher à l'expression nombre incommensurable et sur le critérium de l'existence d'une limite pour une quantité variable de nature donnée. In *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, IV (3), pp. 342 - 360.

[32] Méray, Charles. 1894. *Leçons nouvelles sur l'analyse infinitésimale et ses apllications géométriques.*

[33] Molk, J. 1904. Nombres Irrationnels et Notion de Limite. In *Encyclopédie des Sciences Mathématiques Pures et Appliquées.* Vol. I, pp. 133 - 160.

[34] Nagumo, Mitio. 1977. Quantities and Real Numbers. In *Osaka J. Math.*, **14**, pp. 1 - 10.

[35] Nogueira, et. al. 2004. *Contar e Fazer Contas - Uma Introdução à Teoria dos Números.* Lisboa: Gradiva.

[36] Penney, David E. 1972. *Perspectives in Mathematics.* USA: W. A. Benjamin. Chap. **10**, pp. 280 - 315.

[37] Real, L. N. 1947. Breves notas históricas. In *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática.* Vol. 1. Lisboa: Tipog. Matemática, LTD, pp. IV - X.

[38] Real, L. N. 1951. Dos números racionais aos números reais. In *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática.* Vol. 1. Lisboa: Tipog. Matemática, LTD, pp. 59 - 135.

[39] Sinaceur, Mohamed A. 1979. La méthode mathématique de Dedekind. In *Revue d'Historie des Sciences*, XXXII (2), pp. 107 - 142.

[40] Spivak, M. 1967. *Calculus.* London: Addison Wesley W. A. Benjamim.

[41] Stein, Howard. 1990. Eudoxus and Dedekind: on the ancient greek theory of ratios and its relation to modern mathematics. In *Synthese*, **84**, pp. 163 - 221.

[42] Thiele, Rüdiger. *Antiquity.* In [23], Chap. **1**, pp. 1 - 39.

[43] Toepell, Michael. 1986. Origins of David Hilbert's Grundlagen der Geometrie. In *Archive for History of Exact Sciences*, Vol. 35, pp. 329 - 344.

[44] Weierstrass, K. 1878/1988. *Einleitung in die Theorie der analytischen Funkitionen. Nachschrift der Vorlesung Berlin 1878 von A. Hurwitz.* Ed. by P. Ullrich. Braunschweig: Vieweg. In [13], pp. 295 - 296.

Construções dos Números Reais *por* Paula Cristina Reis Lopes

Correcções a introduzir na dissertação:

| Página | Linha | Onde se lê | Leia-se |
|---|---|---|---|
| 6 | 6 | numa qualquer quantidade | numa quantidade |
| 7 e 8 | 9 e -9 resp. | Funktionenlehre | Functionenlehre |
| 7 | 18 | devem constituir | constituem |
| 8 | -13 | discrição | descrição |
| 10 e 149 | 9 | fonction | fonctions |
| 11 e 149 | 12 e -8 | donné | donnée |
| 11 e 149 | 14 e -6 resp. | applications | apllications |
| 12 e 15 | 3 e 15 resp. | Stertigkeit und Irrationale Zablen | Stetigkeit und Irrationale Zahlen |
| 13 | -12 | deferia | diferia |
| 22 | 11 | Foudations | Foundations |
| 22 | -4 | $R$ | $Q$ |
| 26 | -9 | das propriedades supra citadas | da propriedade 2.1.2 |
| 27 | -10 | então | e |
| 27 | -10 | e assim | então |
| 29 | 7 | Criation | Creation |
| 29 | -11 | construiu | construiram |
| 29 | -10 | denominou de Números Reais | denominaram de Conjunto dos Números Reais |
| 31 | 11 | produzidos | produzidas |
| 33 | -1 | racionais estão entre $a$ e $a'$ contidos | racionais que estão entre $a$ e $a'$ estão contidos |
| 35 | -7 | maior | menor |
| 41 | -13 | todos estar | estar todos |
| 41 | -2 | prosseguir | prosseguirmos |
| 42 | -4 | $\alpha < \beta$ | $\alpha > \beta$ |
| 47 | 4 | pode | podem |
| 47 | 5 | derivado | derivados |
| 47 | 9 | iremos nos | ir-nos-emos |
| 48 e 49 | -3 e 12 resp. | espaço | corpo |
| 50 | -3 e -4 | supremo | majorante |
| 56 | -9 | quando necessitarmos | quando não necessitarmos |

| Página | Linha | Onde se lê | Leia-se |
|---|---|---|---|
| 56 | -8 | maiúsculas | minúsculas |
| 57 | 8 | $\exists d \in Q, d > 0\ \exists N : \forall n \supset N \Longrightarrow r_n < -d$ | $(\exists d \in Q, d > 0\ \exists N : \forall n > N \Longrightarrow r_n < -d)$ |
| 59 | 7 | $\sup(N', N')$ | $\sup(N', N'')$ |
| 61 | 4 | e $\lvert a'_{n+p} - a'_n \rvert$ | e para todo o número natural $q$, $\lvert a'_{n+q} - a'_n \rvert$ |
| 61 | 5 | Portanto: | Portanto, para todo o número natural $k$: |
| 61 | 6 | $\lvert (a_{n+p} + a'_{n+p}) - (a_n + a'_n) \rvert = \lvert (a_{n+p} - a_n) + (a'_{n+p} - a'_n) \rvert$ | $\lvert (a_{n+k} + a'_{n+k}) - (a_n + a'_n) \rvert = \lvert (a_{n+k} - a_n) + (a'_{n+k} - a'_n) \rvert$ |
| 61 | 7 | $\lvert a_{n+p} - a_n \rvert + \lvert a'_{n+p} - a'_n \rvert$ | $\lvert a_{n+k} - a_n \rvert + \lvert a'_{n+k} - a'_n \rvert$ |
| 61 | -2 | tal | tais |
| 68 | 3 e 6 | ou | ou seja |
| 69 | -11 | $\gamma < \beta$ | $\alpha < \beta$ |
| 69 | -3 | $[a_n + c_n] > [b_n + c_n]$ ou | $[a_n + c_n] < [b_n + c_n]$ ou seja |
| 73 | -6 | fora | forma |
| 77 | -6 | reais | racionais |
| 79 | Nota de Rodapé | Vicente Gonçalves | Gomes Teixeira |
| 83 | -2 | $... = S + \frac{\delta}{2} - \delta > S$ | $... = S + \frac{d}{2} - \delta > S$ |
| 85 | -6 | Mito | Mitio |
| 87 | -11 | $\{a_o, a_1, a_2, ..., a_n\} \subset \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ | $\{a_1, a_2, ..., a_n\} \subset \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ |
| 88 | 16 | $(2,2,2,...,2,)$ | $(2,2,2,...,2,...)$ |
| 93 | 2 | natural $k$ tal que $d'_k < a_k$. O que contradiz a construção de $d'_k$ | natural $s$ tal que $d'_s < a_s$. O que contradiz a construção de $d'_s$ |
| 93 | -8 e -14 | Naguno | Nagumo |
| 93 | -12 | Oska | Osaka |
| 99 | 15 | $c_i = \frac{i}{n}c\ \ c$ com | $c_i = \frac{i}{n}c$ com |
| 101 | -14 e -13 | de um automorfismo racional $P$ | do conjunto $P$ |
| 102 | 5 | $Q^-$ | $Q^+$ |
| 103 | 2 e 4 | $\{r_1 \in \mathbf{P}_1^-, r_2 \in \mathbf{P}_2^- : r_1 + r_2\}$ | $\{r_1 + r_2; r_1 \in \mathbf{P}_1^-, r_2 \in \mathbf{P}_2^-\}$ |
| 104 | 15 | satisfazem | satisfaz |
| 106 | 2 | $\phi + 0 = 0 + \phi$ | $\phi + 0 = 0 + \phi = \phi$ |
| 106 | -10 | $(-\phi) + 0 = 0 + (-\phi) = 0$ | $(-\phi) + 0 = 0 + (-\phi) = -\phi$ |
| 107 | 15 | supusermos | suponhamos |
| 108 e 147 | 3 e 9 | Norberto | Norbert |
| 108 | -11 | $\{\ n, m \in \mathbf{Z} : \lambda(m+n) - \lambda(m) - \lambda(n)\}$ | $\{\lambda(m+n) - \lambda(m) - \lambda(n)$ com $n, m \in \mathbf{Z}\}$ |
| 108 | -8 | $\{n \in \mathbf{Z} : \lambda(n) - \lambda'(n)\}$ | $\{\lambda(n) - \lambda'(n)$ com $n \in \mathbf{Z}\}$ |
| 109 | -8 | $n : \mathbf{Z}$ | $n \in \mathbf{Z}$ |
| 110 | -1 e -2 | transformação | aplicação |
| 112 | -9 | $\{n, m \in \mathbf{N}^+ : \gamma(n+m) - \gamma(n) - \gamma(m)\}$ | $\{\gamma(n+m) - \gamma(n) - \gamma(m)$ com $n, m \in \mathbf{N}^+\}$ |

| Página | Linha | Onde se lê | Leia-se |
| --- | --- | --- | --- |
| 114 | 6 | $\frac{c}{m}(n+m)-\frac{c}{n}(n+m)-\frac{c}{nm}=0$ | $\frac{c}{m(n+m)}-\frac{c}{n(n+m)}-\frac{c}{nm}$ |
| 114 | 7 | pelo menos | quanto muito |
| 114 | -11 | o declive | a aplicação |
| 115 | 7 | algum | todo |
| 116 | 6 | pelo menos | no máximo |
| 116 | -2 | Em $(\mathbf{R},+,\cdot,<)$ a multiplicação | $(\mathbf{R},+,\cdot)$ é um Corpo. A multiplicação |
| 117 | -2 | $\{v,w\in\mathbf{Z}:\beta(v+w)-\beta(v)-\beta(w)\}$ | $\{\beta(v+w)-\beta(v)-\beta(w)\text{ com } v,w\in\mathbf{Z}\}$ |
| 120 | 1 | pois se considerarmos $u\in\mathbf{N}^+$ e $\delta_u\in\Delta$ | pois para $u\in\mathbf{N}^+$ consideramos $\delta_u\in\Delta$ |
| 120 | 12 | $\delta_p(q)$ | $\delta_p(p)$ |
| 121 | 3 | $\sigma$ | $\delta$ |
| 121 | 6, 8 e 13 | limite superior | majorante |
| 124 | 3 e 4 | um determinado ponto | uma determinada ordem |
| 124 | 12 | $I_5=[1,414;1,415]$ | $I_5=[1,4141;1,4142]$ |
| 129 | 11 | encontrada | encontrado |
| 129 | 12 | como | são |
| 140 | -9 | O significa | O que significa |
| 141 | 3 | espaços | corpos |
| 145 | 3 | $f(x\cdot y)=f(x)\cdot f(y)$ | $f(x\cdot y)=f(x)\bullet f(y)$ |
| 145 | -3 | equivalências | equivalência |
| 147 | 12 | Ausdehung | Ausdehnung |
| 147 | -4 | Archives | Archive |
| 149 | 1 | Fundation | Foundations |
| 150 | 5 | Beves | Breves |