UNIVERSIDADE da MADEIRA

Departamento de Matemática e Engenharias

Equações de diferenças e aplicações

Rafael Domingos Garanito Luís
(Licenciado)

Dissertação para obtenção do grau de Mestre em Matemática
(Área de Especialização de Matemática para o Ensino)

Orientadora: Professora Doutora Margarida Faria

Funchal, Agosto de 2006

Resumo

Sistemas dinâmicos são todos os sistemas que evoluem no tempo, qualquer que seja a sua natureza, isto é, sistemas fisícos, biológicos, químicos, sociais, económicos, etc.. Esta evolução pode ser descrita (modelada) por equações de diferenças, uma vez que esse tempo é muitas vezes medido em intervalos discretos. As equações de diferenças aparecem também quando se estuda métodos para a discretização de equações diferenciais.

Assim, este trabalho tem por principal objectivo estudar as soluções de alguns tipos de equações de diferenças. Para isso, começa-se por introduzir o conceito de diferença e a sua relação com as equações de diferenças. Em seguida, determina-se a solução geral das todas as equações lineares de primeira ordem, bem como o estudo do seu comportamento assimptótico. Prossegue-se, desenvolvendo as principais técnicas para determinar a solução de equações de diferenças lineares de qualquer ordem. Em particular, estudam-se as equações com coeficientes constantes. Depois de se desenvolver a teoria básica dos sistemas lineares de equações de diferenças, particulariza-se aos sistemas lineares autónomos, com apenas duas variáveis dependentes, fazendo assim o estudo do comportamento das soluções no plano de fases. Por fim, utiliza-se a transformada $\mathcal{Z}$ como uma ferramenta que permite resolver equações de diferenças, em especial as equações de tipo convolução.

Palavras Chave

Operador diferença; Equação de diferenças; Sistemas lineares de equações de diferenças; Transformada $\mathcal{Z}$; Estabilidade; Pontos de equilíbrio.

Abstract

Dynamic systems are systems that evolve in time, wherever there is nature, that is, physical, biological, chemical, social, economic systems, etc. This evolution can be described with difference equations, wherever time involves discrete variables. Mathematically the difference equations appear when we study methods for discretization of differential equations.

Thus, one of the main objectives of this work is the determination of the solutions of some types of difference equations. So we start by introducing the concept of difference and its relation with the difference equations. Then we determine the general solution of the first order linear equations and study its asymptotic behavior. Next we develop the main techniques to determine the solution of linear difference equations of any order. In particular, the equations with constant coefficients are studied. After the development of the basic theory of linear systems of difference equations, we study the autonomous linear systems with only two dependent variables, thus making a study of the behavior of the solutions in the plane of phases. Finally, we use the $\mathscr{Z}$-transform as a tool that allows solving difference equations, in particular the equations of convolution type.

Key Words

Difference operator; Difference equations; Liner systems of difference equations; $\mathscr{Z}$-Transform; Stability; Equilibrium points.

Agradecimentos

Ao Departamento de Matemática e Engenharias (DME), da Universidade da Madeira (UMa).

À Professora Doutora Margarida Faria, minha orientadora, pelo seu incentivo, apoio e orientação constantes e pela confiança que manifestou no meu trabalho.

Aos colegas do departamento, em particular ao Professor Doutor José Castanheira da Costa, ao Professor Doutor José Carmo, à Professora Doutora Glória Cravo, Dr. Jorge Nélio, Dr. Maurício Reis, Dr. Luís Camacho e Dr Marco Garapa.

Ao Professor Doutor Francisco Miguel Dionísio, do Instituto Superior Técnico.

A todas as pessoas que me formaram e aquelas que manifestaram o seu apoio.

Aos meus alunos.

À Helena pelo seu incansável e carinhoso apoio.

À minha família e em especial ao meu pai, que partiu mas não deixa de manifestar o seu apoio.

Índice

Lista de figuras

Lista de tabelas

Introdução

O presente trabalho foi elaborado como dissertação, do 2º ano do Mestrado em Matemática (área de especialização de Matemática para o Ensino), da Universidade da Madeira. O tema proposto foi equações de diferenças e aplicações.

A teoria de equações de diferenças é rica em aplicações para muitos ramos das ciências naturais. Estas equações, na generalidade dos casos, descrevem fenómenos ao longo do tempo. Este tempo é medido em intervalos regulares de modo a ser interpretado como uma variável discreta. Por exemplo, se se estiver a estudar o efeito da administração de uma determinada dose de droga num indivíduo, cada unidade de tempo poderá ser algumas horas, para o cálculo do número de células numa cultura de bactérias, poderá ser dias, para a medição de caudais de rios, poderá ser semanas, para o produto nacional bruto, poderá ser anos, etc.

O primeiro problema envolvendo equações de diferenças aparece por volta de 1202, pelo matemático Leonardo de Pisa (Fibonacci):

"Quantos pares de coelhos serão produzidos num ano, começando com um só par, se em cada mês cada par gera um novo par que se torna produtivo a partir do segundo mês?"

Todo este problema considera que os coelhos estão permanente fechados num certo local e que não ocorrem mortes. Se n representar o número de meses, então

n	pares de coelhos	
0	1	
1	2	o "velho" par mais o "novo" par
2	3	dois "velhos" pares mais o "novo" par
3	5	três "velhos" pares mais os dois "novos" par
4	8	cinco "velhos" pares mais os três "novos" par
$\vdots$	$\vdots$	
12	377	

Assim, 377 é a resposta ao problema proposto por Fibonacci. Note-se que o novo número pode ser determinado adicionando os dois últimos valores, ou seja, se F_n representa o números de pares de coelhos no mês n, então

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

Mais tarde foi acrescentado no início da sequência um 1, o que originou os números de Fibonacci: $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...\}$.

Mais de 600 anos depois (1843), Jacques Binet publicou uma fórmula que permite determinar o $n-\acute{e}simo$ número de Fibonacci, sem se determinar todos os outros números anteriores da sequência. Essa fórmula é a solução da equação de diferenças anterior e é dada por

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

Esta expressão denomina-se por solução particular da equação de Fibonacci. Para se poder determinar a solução particular de uma equação de diferenças, é necessário ter condições iniciais. Para cada condição inicial tem-se uma solução particular distinta. Contudo, pode-se querer escrever a solução geral da equação. Esta solução depende de constantes arbitrárias, tantas quanto a ordem da equação. Para se determinar esta solução é necessário desenvolver métodos apropriados para as equações que se estão a tratar.

Os vários capítulos foram organizados por temas, de modo a apresentar os assuntos que são necessários para a determinação das soluções das equações de diferenças e o estudo da sua estabilidade.

No primeiro capítulo introduzem-se os operadores de diferença, antidiferença e de deslocamento. O conhecimento das propriedades destes operadores funciona como pré-requisitos para os capítulos seguintes. Nas últimas duas secções, dá-se uma classificação das equações de diferenças, e prova-se a existência e unicidade de solução das equações lineares.

No segundo capítulo determina-se a solução geral da equação $x_{n+1} = f(n)\, x_n + g(n)$, onde $(x_n)_0^\infty$ é uma sequência e $f(n)$ e $g(n)$ são funções reais de variável discreta. Esta equação classifica-se como sendo linear de primeira ordem. Faz-se uma particularização deste estudo, às equações com coeficientes constantes. Por fim apresentam-se conceitos conducentes ao estudo da estabilidade das suas soluções.

No capítulo que se segue, apresenta-se a solução geral das equações lineares de qualquer ordem. Desenvolvem-se métodos para determinar a solução particular de uma equação. Também se faz uma particularização às equações com coeficientes constantes, dado que este tipo de equações podem-se resolver analiticamente. Depois de se fazer o estudo da estabilidade das soluções ilustram-se os métodos desenvolvidos com casos concretos.

No quarto capítulo, descrevem-se alguns métodos para resolver alguns tipos de equações que não foram abordadas nos capítulos anteriores, nomeadamente equações exactas e equações de diferenças não lineares.

No quinto capítulo desenvolve-se a teoria básica para a resolução de sistemas lineares de equações de diferenças. Entre outros conceitos estuda-se a estabilidade das soluções. Também se faz uma abordagem aos sistemas periódicos lineares. É feita uma particularização ao estudo dos sistemas autónomos ou invariantes no tempo com apenas duas variáveis dependentes.

Por fim, no último capítulo apresenta-se a transformada $\mathcal{Z}$ e as suas principais propriedades. Utiliza-se este conceito, equivalente às transformações integrais usadas na resolução de equações diferenciais, como uma ferramenta para resolver equações de diferenças, em particular, as equações de tipo convolução. São desenvolvidas algumas técnicas de cálculo para se demonstrar resultados de estabilidade. Uma delas envolve o conceito de funcional de Lyapunov.

O apêndice apresentado serve de apoio ao capítulo dos sistemas lineares. Contém alguns resultados relacionados com matrizes, nomeadamente, métodos para se determinar a potência de uma matriz, destacando-se entre esses, a forma canónica de Jordan.

Capítulo 1

Cálculo de diferenças e equações de diferenças

Existem muitas situações reais em que não se pode ou não interessa tirar partido das características de regularidade de funções de uma ou mais variáveis independentes, que figuram em certos modelos matemáticos que se concebem para o estudo de alguns fenómenos. Por exemplo, se se estudar o caudal dos rios ou o produto nacional, difícil será no primeiro caso ou não interessará no segundo, obter os valores instantâneos daquelas grandezas. Os valores dessas grandezas serão obtidos nos instantes $t_1, t_2, t_3, ...$ considerando-se geralmente que os intervalos $t_2 - t_1$, $t_3 - t_2$, ... são todos iguais e fixos em cada caso. No caso dos caudais, o intervalo de tempo poderá ser uma semana, no caso do produto nacional bruto poderá ser um ano.

De uma forma geral, a cada grandeza corresponderá um intervalo de tempo adequado, permitindo assim estudar de forma útil a sua variação. Este estudo é feito à custa do conceito de diferença. Associado a este conceito aparecem equações (equações de diferenças). O estudo das propriedades das suas soluções pode ajudar a descrever tais fenómenos.

Assim, neste capítulo faz-se uma breve introdução ao cálculo de diferenças e à sua relação com as equações de diferenças.

Na Secção 1.1 evidenciam-se as propriedades mais importantes dos operadores diferença e deslocamento. Na secção seguinte introduz-se o conceito de operador antidiferença. O estudo das propriedades destes três operadores é fundamental na teoria de equações de diferenças. Sempre que possível faz-se um paralelo entre estas propriedades e as propriedades do cálculo integral e diferencial. Apresentam-se ainda algumas tabelas que serão úteis ao longo de todo o trabalho. Sempre que possível tenta-se ilustrar estes conceitos com exemplos clássicos.

Na penúltima secção deste capítulo classifica-se os vários tipos de equações de diferenças e na última faz-se referência à existência e unicidade de solução.

1.1 O operador diferença e o de deslocamento

No que se segue representa-se a sequência de termos x_0, x_1, x_2, ... por $(x_n)_0^\infty$ ou simplesmente x_n, $n \in \mathbb{Z}_0^+$.

Definição 1.1 *Chama-se primeira diferença da sequência* $(x_n)_0^\infty$ *à sequência* $(\Delta x_n)_0^\infty$

dada por

$$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n,\ n \in \mathbb{Z}_0^+. \tag{1.1}$$

A segunda diferença $(\Delta^2 x_n)_0^\infty$ é a primeira diferença da sequência de primeiras diferenças $(\Delta x_n)_0^\infty$, ou seja,

$$\begin{aligned} \Delta^2 x_n &= \Delta(\Delta x_n) = \Delta x_{n+1} - \Delta x_n \\ &= x_{n+2} - x_{n+1} - (x_{n+1} - x_n) \\ &= x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n \end{aligned}$$

Mais geralmente, para qualquer $k \in \mathbb{Z}^+$, a diferença de ordem k, é dada por

$$\begin{aligned} \Delta^k x_n &= \Delta\left(\Delta^{k-1} x_n\right) \\ &= \Delta^{k-1} x_{n+1} - \Delta^{k-1} x_n,\ n = k, k+1, ... \end{aligned}$$

Definição 1.2 *Chama-se equação de diferenças a uma equação que envolve o termo x_n e as suas diferenças Δx_n, $\Delta^2 x_n$,....*

Por exemplo,

$$2\Delta^2 x_n - 3\Delta x_n + 5x_n = 0 \tag{1.2}$$

é uma equação de diferenças.

Também se pode expressar cada x_{n+i}, $i \in \mathbb{N}$, em termos de x_n e das suas diferenças. Portanto,

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \Delta x_n \\ x_{n+2} &= x_{n+1} + \Delta x_{n+1} \\ &= x_n + \Delta x_n + \Delta x_n + \Delta^2 x_n \\ &= x_n + 2\Delta x_n + \Delta^2 x_n \\ &\ \ \vdots \end{aligned}$$

Usando estas relações e substituindo na equação de diferenças, esta transforma-se numa equação que envolve alguns dos $n-$*ésimos* termos da sequência $\{x_n\}_0^\infty$. Por exemplo, a equação (1.2) pode transformar-se na equação

$$2(x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n) - 3(x_{n+1} - x_n) + 5x_n = 0,$$

ou seja,

$$2x_{n+2} - 7x_{n+1} + 10x_n = 0. \tag{1.3}$$

Deste modo uma equação de diferenças pode ser interpretada como uma relação que envolve alguns termos da sequência. A equação (1.3), implica que para cada valor de $n \in \mathbb{Z}_0^+$, o dobro do termo de ordem $n+2$ (x_{n+2}), menos o séptuplo do termo de ordem $n+1$ (x_{n+1}) mais o décuplo do termo de ordem n é igual a zero.

Definição 1.3 *Chama-se operador diferença da sequência $(x_n)_0^\infty$ à primeira diferença da sequência $(x_n)_0^\infty$.*

Assim, também se representa o operador diferença da sequência $(x_n)_0^\infty$ por

$$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n,\ n \in \mathbb{Z}_0^+. \tag{1.4}$$

Paralelamente a este operador, existe um outro, o operador deslocamento.

Definição 1.4 *Chama-se operador deslocamento da sequência $(x_n)_0^\infty$, e representa-se por Ex_n, à expressão*

$$Ex_n = x_{n+1},\ n \in \mathbb{Z}_0^+. \tag{1.5}$$

Designando por I o operador identidade, operador este que operando sobre uma sequência qualquer dá como resultado a própria sequência, $Ix_n = x_n$, tem-se que $\Delta^0 x_n = Ix_n = x_n$ e $E^0 x_n = Ix_n = x_n$ ($\Delta^0 = E^0 = I$ por convenção).

Teorema 1.5 *Se E é o operador deslocamento da sequência $(x_n)_0^\infty$, então*

$$E^k x_n = x_{n+k}, k \in \mathbb{Z}_0^+. \tag{1.6}$$

Prova. A prova é feita por indução em k.
Para $k = 0$ é trivial.
Suponha-se que $E^k x_n = x_{n+k}$ (hipótese de indução). Então

$$E^{k+1} x_n = E\left(E^k x_n\right) \underset{\text{HI}}{=} E x_{n+k} \underset{(1.5)}{=} x_{n+k+1},$$

ou seja, verifica-se que $E^{k+1} x_n = x_{n+k+1}$ (tese de indução). ■

Definição 1.6 *Diz-se que dois operadores O_1 e O_2 são equivalentes, se para qualquer sequência x_n a que são aplicáveis se verifica a relação $O_1 x_n = O_2 x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*

Para se exprimir a equivalência de dois operadores O_1 e O_2, escreve-se

$$O_1 \equiv O_2.$$

Tem-se que

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x_n = (I + \Delta)\, x_n,$$

e assim verifica-se a equivalência funcional

$$\Delta \equiv E - I \text{ ou } E \equiv \Delta + I.$$

Os operadores Δ e E comutam entre si uma vez que

$$\Delta E x_n = \Delta\left[E x_n\right] = \Delta\left[x_{n+1}\right] = x_{n+2} - x_{n+1}$$

e

$$E \Delta x_n = E\left[\Delta x_n\right] = E\left[x_{n+1} - x_n\right] = x_{n+2} - x_{n+1}.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \Delta^m \Delta^n &\equiv \Delta^n \Delta^m \equiv \Delta^{m+n}; \\ E^m E^n &\equiv E^n E^m \equiv E^{m+n}. \end{aligned}$$

Deste modo, pelo binómio de Newton, com $k \in \mathbb{Z}^+$, vem que

$$\Delta^k x_n = (E - I)^k x_n = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} E^{k-i} (-I)^i x_n = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} x_{n+k-i},$$

e

$$E^k x_n = (\Delta + I)^k x_n = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \Delta^i x_n.$$

Exemplo 1.7 *Calcule* $\Delta^3 \sin(n\theta)$, $n \in \mathbb{Z}_0^+$.

Solução.

$$\begin{aligned} \Delta^3 \sin(n\theta) &= \sum_{i=0}^{3} (-1)^i \binom{3}{i} \sin[(n+3-i)\theta] \\ &= \sin[(n+3)\theta] - 3\sin[(n+2)\theta] + 3\sin[(n+1)\theta] - \sin(n\theta). \end{aligned}$$

■

O teorema seguinte garante a lineariedade dos operadores Δ e E.

Teorema 1.8 *Os operadores Δ e E são lineares.*

Prova. Sejam $(x_n)_0^\infty$ e $(y_m)_0^\infty$ duas sequências quaisquer.
Para se demonstrar a linearidade dos operadores, tem-se de provar que

$$\Delta[ax_n + by_m] = a\Delta x_n + b\Delta y_m$$

e

$$E[ax_n + by_m] = aEx_n + bEy_m$$

para duas constantes a e b quaisquer.

Para o operador diferença tem-se

$$\begin{aligned} \Delta[ax_n + by_m] &= (ax_{n+1} + by_{m+1}) - (ax_n + by_m) \\ &= a(x_{n+1} - x_n) + b(y_{m+1} - y_m) \\ &= a\Delta x_n + b\Delta y_m \end{aligned}$$

e para o operador deslocamento

$$\begin{aligned} E[ax_n + by_m] &= ax_{n+1} + by_{m+1} \\ &= aEx_n + bEy_m. \end{aligned}$$

■

Teorema 1.9 *(Soma de Abel) Sejam $(x_n)_0^\infty$ e $(y_n)_0^\infty$ duas sequências quaisquer. Então*

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k = x_{n+1} \sum_{k=1}^{n} y_k - \sum_{k=1}^{n} \left(\Delta x_k \sum_{r=1}^{k} y_r \right).$$

Prova.

$$
\begin{aligned}
x_{n+1}\sum_{k=1}^{n} y_k - \sum_{k=1}^{n}\left(\Delta x_k \sum_{r=1}^{k} y_r\right) &= x_{n+1}\sum_{k=1}^{n} y_k - \sum_{k=1}^{n}\left((x_{k+1}-x_k)\sum_{r=1}^{k} y_r\right) \\
&= x_{n+1}\sum_{k=1}^{n} y_k - (x_2 - x_1)\, y_1 - \\
&\quad (x_3 - x_2)(y_1 + y_2) - ... - (x_{n+1} - x_n)(y_1 + ... + y_n) \\
&= x_{n+1}\sum_{k=1}^{n} y_k + \sum_{k=1}^{n} x_k y_k - x_{n+1}\sum_{k=1}^{n} y_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} x_k y_k.
\end{aligned}
$$

■

Lema 1.10 *Se* $n_0 < n \in \mathbb{Z}_0^+$*, então* $\sum\limits_{k=n_0}^{n-1} \Delta x_k = x_n - x_{n_0}$.

Prova. Seja $n_0 < n \in \mathbb{Z}_0^+$, então

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=n_0}^{n-1} \Delta x_k &= \sum_{k=n_0}^{n-1} x_{k+1} - x_k \\
&= x_{n_0+1} - x_{n_0} + x_{n_0+2} - x_{n_0+1} + x_{n_0+3} - x_{n_0+2} + ... + x_n - x_{n-1} \\
&= x_n - x_{n_0}.
\end{aligned}
$$

■

Estes operadores podem-se aplicar a funções de variável discreta.

Seja $p(n) = a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + ... + a_k$ um polinómio de grau k com coeficientes reais e $k \in \mathbb{Z}^+$. O operador diferença de $p(n)$ é dado por

$$
\begin{aligned}
\Delta p(n) &= p(n+1) - p(n) \\
&= \left(a_0 (n+1)^k + a_1 (n+1)^{k-1} + ... + a_{k-1}(n+1) + a_k\right) \\
&\quad - \left(a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + ... + a_{k-1} n + a_k\right)
\end{aligned}
$$

Sabe-se que

$$
\begin{aligned}
(n+1)^k &= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} n^{k-i} \\
&= \binom{k}{0} n^k + \binom{k}{1} n^{k-1} + \binom{k}{2} n^{k-2} + ... + \binom{k}{k-1} n + 1
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
(n+1)^{k-1} &= \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} n^{k-1-i} \\
&= \binom{k-1}{0} n^{k-1} + \binom{k-1}{1} n^{k-2} + \binom{k-1}{2} n^{k-3} + ... + \binom{k-1}{k-2} n + 1
\end{aligned}
$$

Por substituição obtém-se

$$\Delta p(n) = a_0 k n^{k-1} + q_1(n), \tag{1.7}$$

onde $q_1(n)$ é um polinómio em n de grau $k-2$, com coeficientes reais.

A segunda diferença do polinómio exprime-se como

$$\begin{aligned}
\Delta^2 p(n) &= \Delta(\Delta p(n)) \\
&= \Delta\left[a_0 k n^{k-1} + q_1(n)\right] \\
&= a_0 k\left[(n+1)^{k-1} - n^{k-1}\right] + q_1(n+1) - q_1(n).
\end{aligned}$$

Como $(n+1)^{k-1} - n^{k-1} = (k-1)n^{k-2} +$ "um polinómio de grau $k-3$" e $q_1(n+1) - q_1(n)$ é um polinómio de grau $k-3$, resulta que

$$\Delta^2 p(n) = a_0 k(k-1) + q_2(n),$$

onde $q_2(n)$ é um polinómio em n de grau $k-3$, com coeficientes reais.

Aplicando k vezes este processo obtém-se

$$\Delta^k p(n) = a_0 k! \tag{1.8}$$

e

$$\Delta^{k+i} p(n) = 0 \text{ para } i \geq 1. \tag{1.9}$$

Fica assim provado o teorema seguinte.

Teorema 1.11 *Seja $p(n) = a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + ... + a_k$ um polinómio de grau k com coeficientes reais e $k \in \mathbb{Z}^+$. Então $\Delta^k p(n) = a_0 k!$ e $\Delta^{k+i} p(n) = 0$ para $i \geq 1$.*

Como consequência deste teorema surge outro, que pode ser considerado como o equivalente discreto do desenvolvimento de uma função em série de Mac-Laurin. Para simplificar a escrita deste teorema é conveniente definir primeiro potência factorial.

Definição 1.12 *Chama-se potência factorial descendente de n de grau k, e representa-se por $n^{(k)}$, à expressão*

$$n^{(k)} = n(n-1)(n-2)...(n-k+1) = \prod_{i=0}^{k-1}(n-i), \ n, \ k \in \mathbb{Z}^+.$$

A potência factorial ascendente de n de grau k, que se representa por ${}^{(k)}n$, é a expressão

$${}^{(k)}n = n(n+1)...(n+k-1) = \prod_{i=0}^{k-1}(n+i), \ n, \ k \in \mathbb{Z}^+.$$

Note-se que $n^{(k)} = \dfrac{n!}{(n-k)!} =^{(k)} (n-k+1)$ e assim $n^{(n)} = n! =^{(n)} 1$, ou seja, a potência factorial descendente de n de grau n é igual à potência factorial ascendente de 1 de grau n. Por convenção escreve-se $n^{(0)} = 1 =^{(0)} n$.

Teorema 1.13 *(Fórmula de Mac-Laurin discreta) Seja $p(n)$ um polinómio de grau k com coeficientes reais e $k \in \mathbb{Z}^+$. Então*

$$p(n) = p(0) + \frac{\Delta p(0)}{1!}n + \frac{\Delta^2 p(0)}{2!}n^{(2)} + \frac{\Delta^3 p(0)}{3!}n^{(3)} + ... + \frac{\Delta^k p(0)}{k!}n^{(k)}.$$

Prova. Seja $p(n) = b_0 + b_1 n + b_2 n^{(2)} + b_3 n^{(3)} + ... + b_k n^{(k)}$ um polinómio de grau k. Tem-se $p(0) = b_0$.

Pelo teorema 1.11 e tendo em atenção a forma como o polinómio é definido, obtém-se $\Delta^k p(n) = b_k k!$. Assim, para $n = 0$ vem que

$$\Delta^m p(0) = b_m m!, \ 1 \leq m \leq k, \ k \in \mathbb{Z}^+,$$

isto é,

$$b_m = \frac{\Delta^m p(0)}{m!}, \ 1 \leq m \leq k, \ k \in \mathbb{Z}^+.$$

Deste modo

$$p(n) = p(0) + \frac{\Delta p(0)}{1!}n + \frac{\Delta^2 p(0)}{2!}n^{(2)} + \frac{\Delta^3 p(0)}{3!}n^{(3)} + ... + \frac{\Delta^k p(0)}{k!}n^{(k)}.$$

■

Considere-se agora o operador polinomial

$$p(E) = a_0 E^k + a_1 E^{k-1} + ... + a_k I, k \in \mathbb{Z}^+. \tag{1.10}$$

Para $b \in \mathbb{R}$ tem-se que

$$\begin{aligned} p(E)\, b^n &= a_0 E^k b^n + a_1 E^{k-1} b^n + ... + a_k I b^n \\ &= a_0 b^{n+k} + a_1 b^{n+k-1} + ... + a_k b^n \\ &= b^n \left(a_0 b^k + a_1 b^{k-1} + ... + a_k\right) \end{aligned}$$

ou seja,

$$p(E)\, b^n = b^n p(b) \tag{1.11}$$

O teorema seguinte é a generalização deste resultado.

Teorema 1.14 *Seja $P(E)$ o operador polinomial definido em* (1.10) *e $g(n)$ uma função de argumento discreto. Então*

$$p(E)\,(b^n g(n)) = b^n p(bE)\, g(n).$$

Prova. Sabe-se que $E(x_n y_n) = x_{n+1} y_{n+1} = E x_n E y_n$, assim

$$\begin{aligned} p(E)\,(b^n g(n)) &= a_0 E^k b^n g(n) + a_1 E^{k-1} b^n g(n) + ... + a_k I b^n g(n) \\ &= a_0 b^{n+k} E^k g(n) + a_1 b^{n+k-1} E^{k-1} g(n) + ... + a_k b^n g(n) \\ &= b^n \left(a_0 b^k E^k g(n) + a_1 b^{k-1} E^{k-1} g(n) + ... + a_k g(n)\right) \\ &= b^n p(bE)\, g(n). \end{aligned}$$

■

Também é possível estabelecer regras para o produto e quociente do operador diferença. Estas são fornecidas pelo teorema seguinte. Note-se que se pode estabelecer um paralelo entre estas regras com as do produto e quociente do cálculo diferencial.

Teorema 1.15 *Sejam* $(x_n)_0^\infty$ *e* $(y_n)_0^\infty$ *duas sequências quaisquer, então*

1. $\Delta[x_n y_n] = Ex_n \Delta y_n + y_n \Delta x_n$,

2. $\Delta\left[\dfrac{x_n}{y_n}\right] = \dfrac{y_n \Delta x_n - x_n \Delta y_n}{y_n E y_n}$, $y_n \neq 0$.

Prova. Sejam $(x_n)_0^\infty$ e $(y_n)_0^\infty$ quaisquer.
1.

$$\begin{aligned}
\Delta[x_n y_n] &= x_{n+1}y_{n+1} - x_n y_n \\
&= x_{n+1}y_{n+1} - x_{n+1}y_n + x_{n+1}y_n - x_n y_n \\
&= x_{n+1}(y_{n+1} - y_n) + y_n(x_{n+1} - x_n) \\
&= Ex_n \Delta y_n + y_n \Delta x_n.
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\Delta\left[\frac{x_n}{y_n}\right] &= \frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} - \frac{x_n}{y_n} = \frac{x_{n+1}y_n - x_n y_{n+1}}{y_n y_{n+1}} \\
&= \frac{x_{n+1}y_n - x_n y_n + x_n y_n - x_n y_{n+1}}{y_n y_{n+1}} \\
&= \frac{y_n \Delta x_n - x_n \Delta y_n}{y_n E y_n},\ y_{n \neq 0}.
\end{aligned}$$

■

O teorema seguinte fornece algumas propriedades para potência factorial descendente. Novamente pode-se estabelecer um paralelo entre estas propriedades e as regras da derivação da potência no cálculo diferencial.

Teorema 1.16 *Seja* $n, p, q, k \in \mathbb{Z}^+$, *então*

1. $\Delta n^{(k)} = kn^{(k-1)}$,

2. $n^{(p+q)} = n^{(p)}(n-p)^{(q)} = n^{(q)}(n-q)^{(p)}$,

3. $\Delta^p n^{(k)} = k(k-1)...(k-p+1)n^{(k-p)}$,

4. $\Delta^k n^{(k)} = k!$.

Prova. 1.

$$\begin{aligned}
\Delta n^{(k)} &= (n+1)^{(k)} - n^{(k)} \\
&= (n+1)n(n-1)...(n-k+2) - n(n-1)...(n-k+1) \\
&= n(n-1)...(n-k+2)[n+1-n+k-1] \\
&= kn^{(k-1)}.
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
n^{(p+q)} &= n(n-1)...(n-p-q+1) \\
&= n(n-1)...(n-p+1)(n-p)(n-p-1)...(n-p-q+1) \\
&= n^{(p)}(n-p)^{(q)}.
\end{aligned}$$

Analogamente prova-se que $n^{(p+q)} = n^{(q)}\,(n-q)^{(p)}$.

3. A prova desta igualdade faz-se por indução em p.

Para $p = 1$ a igualdade é verificada com se viu em 1.

Suponha-se que $\Delta^p n^{(k)} = k\,(k-1)\ldots(k-p+1)\,n^{(k-p)}$ com vista a provar que

$$\Delta^{p+1} n^{(k)} = k\,(k-1)\ldots(k-p)\,n^{(k-p-1)}.$$

$$\begin{aligned}
\Delta^{p+1} n^{(k)} &= \Delta\left(\Delta^p n^{(k)}\right) = \Delta\left(k\,(k-1)\ldots(k-p+1)\,n^{(k-p)}\right) \\
&= k\,(k-1)\ldots(k-p+1)\,\Delta\left(n^{(k-p)}\right) \\
&= k\,(k-1)\ldots(k-p+1)\left[(n+1)^{(k-p)} - n^{(k-p)}\right] \\
&= k\,(k-1)\ldots(k-p+1)\,n^{(k-p-1)}\,[n+1-(n-k+p+1)] \\
&= k\,(k-1)\ldots(k-p)\,n^{(k-p-1)}.
\end{aligned}$$

4. É imediata a partir de 3. quando $p = k$. ■

Note-se que, como consequência do ponto 2. do teorema precedente, pode-se estender a definição 1.12 a graus negativos. Substituindo p por $-q$ na expressão $n^{(p+q)} = n^{(p)}\,(n-p)^{(q)}$ obtém-se $1 = n^{(-q)}\,(n+q)^{(q)}$, ou seja,

$$n^{(-q)} = \frac{1}{(n+q)\,(n+q-1)\ldots(n+1)}.$$

1.2 O operador antidiferença

Inicia-se esta secção definindo o operador antidiferença.

Definição 1.17 *Se $\Delta X_n = x_n$, então a antidiferença de x_n é $X_n + c$ e representa-se por*

$$\Delta^{-1} x_n = X_n + c, c \in \mathbb{R}.$$

Tem-se que

$$\Delta\Delta^{-1} x_n = \Delta\,(X_n + c) = \Delta X_n - \Delta c = x_n,$$

$$\Delta^{-1}\Delta X_n = \Delta^{-1} x_n = X_n + c$$

donde $\Delta\Delta^{-1} = I$, no entanto, em geral $\Delta^{-1}\Delta \neq I$. Portanto os operadores Δ e Δ^{-1} não comutam.

Note-se que, sendo Δ um operador linear, Δ^{-1} também é linear.

Em seguida determina-se o operador diferença e antidiferença de algumas sequências.

Exemplo 1.18 *Calcule o operador Δ e Δ^{-1} da sequência $(1)_0^\infty$.*

Solução. Como $x_n = 1$, $\forall n \in \mathbb{Z}_0^+$, então $\Delta x_n = \Delta 1 = 0$. Por outro lado, atendendo a que $\Delta n = 1$, vem $\Delta^{-1} 1 = n + c$. ■

Exemplo 1.19 *Determine o operador Δ e Δ^{-1} da sequência $(n)_0^\infty$.*

Solução. Viu-se que $\Delta n = 1$. Para se determinar $\Delta^{-1} n$ note-se que

$$\Delta n^2 = (n+1)^2 - n^2 = 2n + 1,$$

pelo que $\Delta^{-1}(2n+1) = n^2 + c_1$, ou seja, $2\Delta^{-1} n + \Delta^{-1} 1 = n^2 + c_1$. Portanto $2\Delta^{-1} n = -n + n^2 + c_2$ e assim $\Delta^{-1} n = \frac{n(n-1)}{2} + c$. ■

Exemplo 1.20 *Calcule o operador diferença e antidiferença da sucessão* $x_n = a^n$, $n \in \mathbb{Z}_0^+$ *e* $a \neq 1$.

Solução. É fácil verificar que $\Delta a^n = (a-1)\, a^n$. Aplicando o operador Δ^{-1} a esta igualdade vem que

$$(a-1)\,\Delta^{-1} a^n = a^n + c_1 \Leftrightarrow \Delta^{-1} a^n = \frac{a^n}{a-1} + c, \; a \neq 1.$$

■

Exemplo 1.21 *Calcule o operador* Δ *e* Δ^{-1} *da sequência* $(na^n)_0^\infty$, $a \neq 1$.

Solução. Para esta sucessão tem-se

$$\Delta n a^n = n a^n (a-1) + a^{n+1}.$$

Aplicando Δ^{-1} vem

$$n a^n + c_1 = (a-1)\,\Delta^{-1} n a^n + a \Delta^{-1} a^n,$$

ou seja,

$$\Delta^{-1} n a^n = \frac{a^n}{a-1}\left(n - \frac{a}{a-1}\right) + c, \; a \neq 1.$$

■

Exemplo 1.22 *Determine o operador* Δ *e* Δ^{-1} *das sequências* $(\cos(an+b))_0^\infty$ *e* $(\sin(an+b))_0^\infty$.

Solução. Pela fórmula de Moivre sabe-se que

$$\cos(am+b) + i \sin(am+b) = e^{i(am+b)} = e^{iam} e^{ib}.$$

Aplicando o operador Δ tem-se

$$\begin{aligned}
\Delta \cos(am+b) + i \Delta \sin(am+b) &= e^{ib} \Delta e^{iam} = e^{ib}\left(e^{ia(m+1)} - e^{iam}\right) \\
&= e^{ib} e^{iam}\left(e^{ia} - 1\right) = 2i \frac{e^{\frac{ia}{2}} - e^{\frac{-ia}{2}}}{2i} e^{\frac{ia}{2}} e^{i(am+b)} \\
&= 2i \sin\left(\frac{a}{2}\right) e^{i\left(am + \frac{a}{2} + b\right)} \\
&= 2i \sin\left(\frac{a}{2}\right)\left[\cos\left(am + \frac{a}{2} + b\right) + i \sin\left(am + \frac{a}{2} + b\right)\right]
\end{aligned}$$

Comparando as partes reais e imaginárias desta igualdade, conclui-se que

$$\Delta \cos(am+b) = -2 \sin\left(\frac{a}{2}\right) \sin\left(am + \frac{a}{2} + b\right),$$

$\{x_n\}_0^\infty$	Δx_n	$\Delta^{-1} x_n$
1	0	$n+c$
n	1	$\frac{n(n-1)}{2}+c$
a^n	$(a-1)\,a^n$	$\frac{a^n}{a-1}+c,\ a\neq 1$
$(-1)^n$	$2\,(-1)^{n+1}$	$\frac{1}{2}\,(-1)^{n+1}+c$
na^n	$na^n\,(a-1)+a^{n+1}$	$\frac{a^n}{a-1}\left(n-\frac{a}{a-1}\right)+c,\ a\neq 1$
$n\,(-1)^n$	$(-1)^{n+1}\,(2n+1)$	$\frac{1}{2}\,(-1)^{n+1}\left(n-\frac{1}{2}\right)+c$
$(n+b)^{(k)}$	$k\,(n+b)^{k-1}$	$\frac{(n+b)^{(k+1)}}{k+1}+c,\ k\neq -1$
$\binom{n}{k}$	$\binom{n}{k-1}$	$\binom{n}{k+1}+c$
$(an+b)^{(k)}$	$ka\,(an+b)^{(k)}$	$\frac{(an+b)^{(k+1)}}{a(k+1)}+c$
$\log\,(n+a)$	$\log\left(1+\frac{1}{n+a}\right)$	$\log\Gamma\,(n+a)+c$
$\cos\,(an+b)$	$-2\sin\left(\frac{a}{2}\right)\sin\left(an-\frac{a}{2}+b\right)$	$\frac{\sin\left(an-\frac{a}{2}+b\right)}{2\sin\left(\frac{a}{2}\right)}+c$
$\sin\,(an+b)$	$2\sin\left(\frac{a}{2}\right)\cos\left(an-\frac{a}{2}+b\right)$	$-\frac{\cos\left(an-\frac{a}{2}+b\right)}{2\sin\left(\frac{a}{2}\right)}+c$

Tabela 1.1: Diferença e antidiferença de x_n

e

$$\Delta \sin\,(am+b) = 2\sin\left(\frac{a}{2}\right)\cos\left(am+\frac{a}{2}+b\right).$$

Fazendo a substituição $am = an - \frac{a}{2}$, tem-se

$$\Delta \cos\left(an-\frac{a}{2}+b\right) = -2\sin\left(\frac{a}{2}\right)\sin\,(an+b)\,.$$

Aplicando o operador Δ^{-1} a ambos os membros desta identidade, resulta que

$$\cos\left(an-\frac{a}{2}+b\right)+c_1 = -2\sin\left(\frac{a}{2}\right)\Delta^{-1}\sin\,(an+b)\,,$$

ou seja,

$$\Delta^{-1}\sin\,(an+b) = \frac{\cos\left(an-\frac{a}{2}+b\right)}{-2\sin\left(\frac{a}{2}\right)}+c.$$

Seguindo os mesmos passos prova-se que

$$\Delta^{-1}\cos\,(an+b) = \frac{\sin\left(an-\frac{a}{2}+b\right)}{2\sin\left(\frac{a}{2}\right)}+c.$$

■

Na Tabela 1.1 apresenta-se um resumo, destes e de outros exemplos, do operador diferença e antidiferença de algumas sequências dadas.

A soma $\sum\limits_{i=m}^{n-1} x_i$, com m, n inteiros positivos tal que $m < n$, pode ser determinada através do operador antidiferença. O teorema seguinte apresenta este resultado.

Teorema 1.23 *(Teorema fundamental) Se* $\Delta X_n = x_n$ *e* $m < n$ *com* $m, n \in \mathbb{Z}_0^+$*, então*

$$\sum_{i=m}^{n-1} x_i = \Delta^{-1} x_i \Big|_m^n = X_n - X_m. \tag{1.12}$$

Prova. Por hipótese vem que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=m}^{n-1} x_i &= \sum_{i=m}^{n-1} (X_{i+1} - X_i) \\
&= X_{m+1} - X_m + X_{m+2} - X_{m+1} + ... + X_n - X_{n-1} \\
&= X_n - X_m \\
&= \Delta^{-1} x_n - \Delta^{-1} x_m \\
&= \Delta^{-1} x_i \Big|_m^n
\end{aligned}$$

■

Substituindo m por 0 em (1.12) obtém-se

$$\Delta \left(\sum_{i=0}^{n-1} x_i \right) = \Delta (X_n - X_0) = \Delta X_n - \Delta X_0 = x_n. \tag{1.13}$$

Aplicando Δ^{-1} em ambos os membros desta igualdade, resulta a importante fórmula

$$\Delta^{-1} x_n = \sum_{i=0}^{n-1} x_i + c, \tag{1.14}$$

para alguma constante arbitrária c. É por esta razão que o operador antidiferença é o equivalente discreto do integral indefinido no cálculo integral, assim como a expressão (1.12) é a equivalente discreta do integral definido.

Note-se que, na fórmula (1.12) se $n-1 = m$, então $\sum\limits_{i=m}^{m} x_i = X_{m+1} - X_m = \Delta X_m = x_m$. Se $n = m$, então $\sum\limits_{i=m}^{m-1} x_i = X_m - X_m = 0$.

Nos exemplos seguintes calcula-se a soma dos $n+1$ primeiros termos de uma dada sequência com o auxílio do operador Δ^{-1}.

Exemplo 1.24 *(Soma geométrica) Calcule* $\sum\limits_{i=0}^{n} ar^i$.

Solução.

$$\sum_{i=0}^{n} ar^i = a\, \Delta^{-1} r^i \Big|_0^{n+1} = a\, \frac{r^i}{r-1}\Bigg|_0^{n+1} = a \left(\frac{r^{n+1}}{r-1} - \frac{1}{r-1} \right) = \frac{a\,(r^{n+1}-1)}{r-1}, r \neq 1$$

Note-se que se $r = 1$, então $\sum\limits_{i=0}^{n} a = a\Delta^{-1} 1\Big|_0^{n+1} = a\,(n+1)$. ■

Exemplo 1.25 *(Soma dos números ímpares) Determine* $\sum_{i=1}^{n}(2i-1)$.

Solução.

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = \Delta^{-1}(2i-1)\Big|_1^{n+1} = 2\frac{i(i-1)}{2} - i\Big|_1^{n+1} = i^2 - 2i\Big|_1^{n+1} = n^2.$$

■

Exemplo 1.26 *(Soma aritmética) Calcule* $\sum_{i=0}^{n}(a+bi)$.

Solução.

$$\sum_{i=0}^{n}(a+bi) = \Delta^{-1}(a+bi)\Big|_0^{n+1} = ai + b\frac{i(i-1)}{2}\Big|_0^{n+1} = a(n+1) + b\frac{n(n+1)}{2}.$$

■

Exemplo 1.27 *(Soma dos quadrados) Determine* $\sum_{i=0}^{n} i^2$.

Solução.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} i^2 &= \sum_{i=0}^{n}(i + i(i-1)) = \Delta^{-1}\left(i^{(1)} + i^{(2)}\right)\Big|_1^{n+1} \\
&= \frac{i^{(2)}}{2} + \frac{i^{(3)}}{3}\Big|_0^{n+1} = \frac{(n+1)^{(2)}}{2} + \frac{(n+1)^{(3)}}{3} \\
&= \frac{(n+1)n}{2} + \frac{(n+1)n(n-1)}{3} \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.
\end{aligned}$$

■

Exemplo 1.28 *(Soma dos cubos) Calcule* $\sum_{i=0}^{n} i^3$.

Solução. Uma vez que $i^3 = i^{(1)} + 3i^{(2)} + i^{(3)}$ vem

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} i^3 &= \Delta^{-1}\left(i^{(1)} + 3i^{(2)} + i^{(3)}\right)\Big|_1^{n+1} \\
&= \frac{i(i-1)}{2} + i(i-1)(i-2) + \frac{i(i-1)(i-2)(i-3)}{4}\Big|_0^{n+1} \\
&= \frac{i^2(i-1)^2}{4}\Big|_0^{n+1} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.
\end{aligned}$$

■

Exemplo 1.29 *Determine* $\sum\limits_{i=0}^{n} i^4$.

Solução.

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} i^4 &= \sum_{i=0}^{n}\left(i^{(4)}+6i^{(3)}+7i^{(2)}+i\right) = \Delta^{-1}\left(i^{(4)}+6i^{(3)}+7i^{(2)}+i\right)\Big|_0^{n+1} \\ &= \left.\frac{6i^{(5)}+45i^{(4)}+70i^{(3)}+15i^{(2)}}{30}\right|_0^{n+1} = \frac{n\left(6n^4+15n^3+10n^2-1\right)}{30}\end{aligned}$$

■

Exemplo 1.30 *(Soma dos cosenos) Determine* $\sum\limits_{i=1}^{n}\cos(ai)$.

Solução.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\cos(ai) &= \Delta^{-1}\cos(ai)\Big|_1^{n+1} = \left.\frac{\sin\left(ai-\frac{a}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{a}{2}\right)}\right|_1^{n+1} \\ &= \frac{\sin\left(na+\frac{a}{2}\right)-\sin\left(\frac{a}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{a}{2}\right)}.\end{aligned}$$

■

Na Tabela 1.2 apresenta-se um resumo destas e de outras somas.

No cálculo integral aparece um conceito muito útil, a integração por partes. O seguinte teorema é o equivalente discreto.

Teorema 1.31 *(Soma por partes) Sejam* $(x_n)_0^\infty$ *e* $(y_n)_0^\infty$ *duas sequências quaisquer. Então*

$$\sum_{i=0}^{n-1} y_i\Delta x_i = x_i y_i|_0^n - \sum_{i=0}^{n-1} x_{i+1}\Delta y_i.$$

Prova. Pelo teorema 1.15 sabe-se que

$$\Delta\left[x_n y_n\right] = Ex_n\Delta y_n + y_n\Delta x_n,$$

isto é,

$$y_n\Delta x_n = \Delta\left[x_n y_n\right] - x_{n+1}\Delta y_n.$$

e aplicando Δ^{-1} a ambos os membros desta última igualdade vem

$$\Delta^{-1}\left[y_n\Delta x_n\right] = \Delta^{-1}\left[\Delta\left[x_n y_n\right] - x_{n+1}\Delta y_n\right].$$

Pela linearidade de Δ^{-1} e por (1.14) tem-se

$$\sum_{i=0}^{n-1} y_i\Delta x_i = x_n y_n - \sum_{i=0}^{n-1} x_{i+1}\Delta y_i + c$$

Para $n-1=0$ a equação anterior fica $y_0\Delta x_0 = x_0y_0 - x_1\Delta y_0 + c$, ou seja, $c=-x_0y_0$ e assim

$$\sum_{i=0}^{n-1} y_i\Delta x_i = x_i y_i|_0^n - \sum_{i=0}^{n-1} x_{i+1}\Delta y_i.$$

■

Soma	Resultado
$\sum_{i=0}^{n} ar^i$	$\begin{cases} \dfrac{a\left(r^{n+1}-1\right)}{r-1} & \text{se } r \neq 1 \\ a\left(n+1\right) & \text{se } r = 1 \end{cases}$
$\sum_{i=0}^{n} (a+bi)$	$a\left(n+1\right)+b\dfrac{n\left(n+1\right)}{2}$
$\sum_{i=0}^{n} i^2$	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
$\sum_{i=0}^{n} i^3$	$\frac{n^2(n+1)^2}{4}$
$\sum_{i=0}^{n} i^4$	$\frac{n\left(6n^4+15n^3+10n^2-1\right)}{30}$
$\sum_{i=1}^{n} ir^i$	$\frac{(r-1)(n+1)r^{n+1}-r^{n+2}+r}{(r-1)^2}, \ r \neq 1$
$\sum_{i=1}^{n} i^2r^i$	$\frac{r^{n+1}\left(1+r+2n(1-r)+n^2(1-r)^2\right)-r(r+1)}{(1-r)^3}, \ r \neq 1$
$\sum_{i=1}^{n} \log i$	$\log \Gamma\left(n+1\right)$
$\sum_{i=1}^{n} i^{(k)}$	$\frac{(n+1)^{(k+1)}-1}{k+1}$
$\sum_{i=1}^{n} \sin\left(ai+b\right)$	$\frac{-\cos\left(an+\frac{a}{2}+b\right)+\cos\left(\frac{a}{2}+b\right)}{2\sin\left(\frac{a}{2}\right)}$
$\sum_{i=1}^{n} \cos\left(ai\right)$	$\frac{\sin\left(na+\frac{a}{2}+b\right)-\sin\left(\frac{a}{2}+b\right)}{2\sin\left(\frac{a}{2}\right)}$

Tabela 1.2: Somas finitas

Observação 1.32 *De uma forma geral, se m e n são inteiros positivos tais que $m < n$, então*

$$\sum_{i=m}^{n-1} y_i \Delta x_i = x_i y_i\big|_m^n - \sum_{i=m}^{n-1} x_{i+1}\Delta y_i.$$

Exemplo 1.33 *Calcule* $\sum_{i=0}^{n-1} i3^i$.

Solução. Seja $y_n = n$ e $\Delta x_n = 3^n$. Então $x_n = \frac{3^n}{2}$ e $\Delta y_n = 1$, pelo que

$$\sum_{i=0}^{n-1} i3^i = \frac{3^n}{2}n - \sum_{i=0}^{n-1}\frac{3^{i+1}}{2} = \frac{n3^n}{2} - \frac{3}{2}\frac{3^n-1}{3-1} = \frac{\left(2n-3\right)3^n+3}{4}.$$

■

1.3 Classificação

Já se viu que se pode escrever uma equação de diferenças envolvendo alguns dos $n-$ *ésimos* termos da sequência $\left(x_n\right)_0^\infty$. Seguidamente, apresenta-se uma definição alternativa à definição 1.2 para equação de diferenças.

Definição 1.34 *Uma equação de diferenças para uma variável independente $n \in \mathbb{Z}_0^+$ e para $x_n \in \mathbb{R}$ desconhecido é uma relação funcional da forma*

$$f(n, x_{n+k}, x_{n+k-1}, ..., x_n) = 0. \tag{1.15}$$

Definição 1.35 *A ordem de* (1.15) *é definida pela diferença entre o maior e o menor índice dos termos da sequência $(x_n)_0^\infty$ envolvidos.*

Por exemplo, a equação $x_{n+3} - 2x_{n+2} + 5x_{n+1} = 0$ é de ordem 2, ao passo que a equação $x_{n+12} = n(n^2 + 5)$ tem ordem 0.

Definição 1.36 *A equação* (1.15) *diz-se linear se f é linear nas variáveis $x_{n+k}, ..., x_n$, caso contrário, a equação é não linear.*

Na prática reconhece-se que uma equação de diferenças de ordem k é linear se está escrita na forma

$$f_0(n)\, x_{n+k} + f_1(n)\, x_{n+k-1} + ... + f_{k-1}(n)\, x_{n+1} + f_k(n)\, x_n = g(n), \tag{1.16}$$

onde $f_i(n)$, $0 \leq i \leq k$ e $g(n)$ são funções de $\mathbb{Z}_0^+ \longmapsto \mathbb{R}$, $f_0(n) \neq 0$ e $f_k(n) \neq 0$.

Definição 1.37 *Se $g(n) = 0$ em* (1.16)*, então a equação diz-se homogénea, caso contrário, a equação diz-se não homogénea ou completa.*

Definição 1.38 *Se f não depende directamente de n na equação* (1.15)*, então diz-se que a equação é autónoma ou invariante no tempo, caso contrário, a equação é não autónoma ou variante no tempo.*

As equações

$$x_{n+2} + 5x_n = n \text{ e } nx_{n+1} + n^2 x_n = 0$$

são não autónomas, ao passo que,

$$x_n x_{n+2} + 5x_n = \sin(x_n)$$

é uma equação autónoma. No primeiro caso, ambas as equações são lineares, sendo a primeira não homogénea e a segunda homogénea, enquanto que no segundo caso, a equação é não linear completa.

1.4 Existência e unicidade de solução

Definição 1.39 *Uma sequência $(x_n)_0^\infty$, ou simplesmente x_n, diz-se solução de uma equação de diferenças se, para todos os valores de n, x_n satisfaz a equação.*

Por exemplo, a equação $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 0$ tem como solução

$$x_n = 2^n (c_1 + c_2 n),$$

sendo c_1 e c_2 constantes arbitrárias. Com efeito, se se substituir o valor de x_n na equação, vem

$$\begin{aligned} & 2^{n+2}(c_1 + c_2 n + 2c_2) - 2^{n+3}(c_1 + c_2 n + c_2) + 2^{n+2}(c_1 + c_2 n) \\ = \; & 2^{n+2}(c_1 + c_2 n + 2c_2 - 2c_1 - 2c_2 n - 2c_2 + c_1 + c_2 n) \\ = \; & 2^{n+2}(0 + 0n) \end{aligned}$$

Definição 1.40 *A solução geral de uma equação de diferenças de ordem k é a solução x_n que depende de k constantes arbitrárias.*

A solução apresentada no exemplo precedente é a solução geral da equação. Se se particularizar c_1 e c_2 atribuíndo-lhes determinados valores numéricos, obtém-se uma solução particular única. Se não se particularizar todas as constantes, tem-se soluções particulares, mas ainda não a unicidade de solução.

Definição 1.41 *A solução particular de uma equação de diferenças de ordem k é a solução que obedece a k condições impostas.*

Se essas condições se referem aos k valores iniciais consecutivos de x_n é costume chamar-se a essas condições, condições iniciais.

Embora algumas equações de diferenças possam não ter uma solução analítica, enquanto outras possam ter infinitas soluções, pode-se afirmar que, uma equação linear tem pelo menos uma solução e sob certas condições uma só solução. É o conteúdo do teorema de existência e unicidade relativo às soluções duma equação linear.

A equação (1.16) de ordem k tem uma e uma só solução determinada por k condições iniciais. Como $f_0(n) \neq 0$ tem-se

$$x_{n+k} = \frac{1}{f_0(n)}\left[g(n) - f_1(n)\, x_{n+k-1} - ... - f_{k-1}(n)\, x_{n+1} - f_k(n)\, x_n\right]. \tag{1.17}$$

Portanto, se forem arbitrados os valores de x_n, x_{n+1}, ..., x_{n+k-1}, obtém-se univocamente o valor de x_{n+k} e da mesma forma o de $x_{n+k-1}, ...$

Se for desconhecido o valor de x_n e conhecidos x_{n+k}, $x_{n+k-1}, ...,$ x_{n+1}, pode-se obter o valor de x_n, uma vez que $f_k(n) \neq 0$. Da mesma forma obtém-se os valores de x_{n-1}, $x_{n-2}, ...$

Se forem dadas k condições consecutivas mas não iniciais procede-se da mesma forma. Com efeito, se se substituir n por n_0 em (1.17) pode-se escrever x_{n_0+k} em termos de $x_{n_0+k-1}, x_{n_0+k-2}, ..., x_{n_0}$, isto é, tem-se

$$x_{n_0+k} = \frac{1}{f_0(n_0)}\left[g(n_0) - f_1(n_0)\, x_{n_0+k-1} - ... - f_{k-1}(n_0)\, x_{n_0+1} - f_k(n_0)\, x_{n_0}\right],$$

portanto x_{n_0+k} está determinado. Para se determinar x_{n_0+k+1} substitui-se n por n_0+1 em (1.17) e tem-se

$$x_{n_0+k+1} = \frac{1}{f_0(n_0+1)}\left[g(n_0+1) - f_1(n_0+1)\, x_{n_0+k} - ... - f_k(n_0+1)\, x_{n_0+1}\right].$$

Repetindo este processo, é possível determinar todos os valores de x_n tais que $n \geq n_0 \geq 0$.

No caso de as condições impostas não serem consecutivas o processo de determinação dos valores é análogo, mas agora é necessário um número superior de iterações, por forma a serem determinados todos os valores intermédios da sequência.

Ilustra-se este processo com os seguintes exemplos.

Exemplo 1.42 *Para a equação de diferenças de 4^a ordem dada por*

$$x_{n+4} - nx_{n+3} + \frac{n}{n+1}x_{n+1} - 3x_n = n^2, \tag{1.18}$$

onde $x_0 = 0$*,* $x_1 = -1$*,* $x_2 = 2$ *e* $x_3 = -2$*, tem-se que*

$$x_{n+4} = nx_{n+3} - \frac{n}{n+1}x_{n+1} + 3x_n + n^2. \tag{1.19}$$

Fazendo $n = 0$ *em* (1.19) *vem*

$$x_4 = 3x_0 = 0.$$

Para $n = 1$ *resulta*

$$x_5 = x_4 - \frac{1}{2}x_2 + 3x_1 + 1 = -3,$$

e para $n = 2$ *tem-se*

$$x_6 = 2x_5 - \frac{2}{3}x_3 + 3x_2 + 4 = \frac{16}{3},$$

quando $n = 3$ *vem*

$$x_7 = 3x_6 - \frac{3}{4}x_4 + 3x_3 + 3^2 = 19.$$

Por exaustão determinamos x_n*.*

Exemplo 1.43 *Seja a equação* $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 0$*, para a qual se sabe as condições* $x_3 = 8$ *e* $x_5 = 32$*. Então* $x_5 = 4x_4 - 4x_3 = 4x_4 - 32 = 32$*, isto é,* $x_4 = 16$*. Por outro lado da equação vem* $x_4 = 4x_3 - 4x_2 = 32 - 4x_2 = 16$*, ou seja,* $x_2 = 4$*. Desto modo determina-se ainda que* $x_1 = 2$ *e* $x_0 = 1$*. Todos os valores de* x_n *são obtidos sucessivamete a partir da equação como no exemplo anterior.*

Capítulo 2

Equações de diferenças lineares de primeira ordem

Neste capítulo faz-se o estudo das equações de diferenças lineares de primeira ordem.

Na Secção 2.1 determina-se a solução geral de todas as equações lineares de 1ª ordem. Na secção seguinte particulariza-se este estudo a equações com coeficientes constantes. Esta subclasse de equações da classe de equações lineares (incluindo as equações de ordem superior a um, como se verá nos próximos capítulos) representa um grupo de famílias de equações que se pode resolver explicitamente.

Na Secção 2.3 estuda-se o caso de equações com coeficientes variáveis que podem ser reduzidas a equações com coeficientes constantes. Na secção seguinte utiliza-se a função gama para resolver alguns tipos de equações com coeficientes variáveis.

Na Secção 2.5 apresenta-se um forma alternativa de resolver equações de diferenças lineares de 1ª ordem com recurso às propriedades dos operadores Δ e Δ^{-1}, introduzidos no capítulo 1.

Finalmente na última secção deste capítulo estuda-se a estabilidade das soluções. Este conceito é conhecido como teoria da estabilidade e tem muitas aplicações na área da biologia, da economia, da engenharia, da física, etc.

2.1 Solução geral

Seja a equação de diferenças linear de 1ª ordem dada por

$$x_{n+1} = f(n)\, x_n + g(n) \tag{2.1}$$

onde $f(n)$ e $g(n)$ são funções de $\mathbb{Z}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ e $f(n) \neq 0$, $\forall n \geq n_0 \geq 0$.

Em primeiro lugar considere-se a equação homogénea associada à equação (2.1), isto é,

$$x_{n+1} = f(n)\, x_n \tag{2.2}$$

Para um determinado valor inicial x_{n_0}, $n \geq n_0 \geq 0$, pode-se determinar o valor de x_n, $\forall n \in \mathbb{Z}_0^+$ da equação (2.2), através do processo iterativo descrito em 1.3. Assim,

$$\begin{aligned}
x_{n_0+1} &= f(n_0)\, x_{n_0} \\
x_{n_0+2} &= f(n_0+1)\, x_{n_0+1} = f(n_0+1)\, f(n_0)\, x_{n_0} \\
x_{n_0+3} &= f(n_0+2)\, x_{n_0+2} = f(n_0+2)\, f(n_0+1)\, f(n_0)\, x_{n_0}
\end{aligned}$$

Mais geralmente,

$$x_n = f(n-1) f(n-2) ... f(n_0+1) f(n_0) x_{n_0} = \prod_{i=n_0}^{n-1} f(i) x_{n_0} \tag{2.3}$$

Observação 2.1 *Sempre que se justifique usa-se a notação* $\prod\limits_{i=n+1}^{n} f(i) = 1$ *e* $\sum\limits_{i=n+1}^{n} f(i) = 0$.

Aplicando o processo iterativo à equação (2.1), também se pode determinar o valor de x_n para um determinado valor inicial x_{n_0}. Com efeito,

$$\begin{aligned}
x_{n_0+1} &= f(n_0) x_{n_0} + g(n_0) \\
x_{n_0+2} &= f(n_0+1) x_{n_0+1} + g(n_0+1) = f(n_0+1)\left[f(n_0) x_{n_0} + g(n_0)\right] + g(n_0+1) \\
&= f(n_0+1) f(n_0) x_{n_0} + f(n_0+1) g(n_0) + g(n_0+1) \\
x_{n_0+3} &= f(n_0+2) x_{n_0+2} + g(n_0+2) = f(n_0+2)\left[f(n_0+1) f(n_0+) x_{n_0}\right. \\
&\quad \left. + f(n_0+1) g(n_0) + g(n_0+1)\right] + g(n_0+2) \\
&= f(n_0+2) f(n_0+1) f(n_0) x_0 + f(n_0+2) f(n_0+1) g(n_0) \\
&\quad + f(n_0+2) g(n_0+1) + g(n_0+2) \\
x_{n_0+4} &= f(n_0+3) f(n_0+2) f(n_0+1) f(n_0) x_{n_0} + f(n_0+3) f(n_0+2) f(n_0+1) g(n_0) \\
&\quad + f(n_0+3) f(n_0+2) g(n_0+1) + f(n_0+3) g(n_0+2) + g(n_0+3) \\
&= \prod_{i=n_0}^{3} f(i) x_{n_0} + \sum_{k=n_0}^{3} \left[\prod_{i=k+1}^{3} f(i)\right] g(k)
\end{aligned}$$

Mais geralmente,

$$x_n = \prod_{i=n_0}^{n-1} f(i) x_{n_0} + \sum_{k=n_0}^{n-1} \left[\prod_{i=k+1}^{n-1} f(i)\right] g(k) \tag{2.4}$$

A prova de (2.4) é feita por indução sobre n. Para tal suponha-se que (2.4) é verdadeira com vista a provar que

$$x_{n+1} = \prod_{i=n_0}^{n} f(i) x_{n_0} + \sum_{k=n_0}^{n} \left[\prod_{i=k+1}^{n} f(i)\right] g(k).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= f(n) x_n + g(n) \\
&= f(n) \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} f(i) x_{n_0} + \sum_{k=n_0}^{n-1} \left[\prod_{i=k+1}^{n-1} f(i)\right] g(k)\right] + g(n) \\
&= \prod_{i=n_0}^{n} f(i) x_{n_0} + f(n) \sum_{k=n_0}^{n-1} \left[\prod_{i=k+1}^{n-1} f(i)\right] g(k) + g(n) \\
&= \prod_{i=n_0}^{n} f(i) x_{n_0} + \sum_{k=n_0}^{n-1} \left[\prod_{i=k+1}^{n} f(i)\right] g(k) + \left[\prod_{i=n+1}^{n} f(i)\right] g(n) \\
&= \prod_{i=n_0}^{n} f(i) x_{n_0} + \sum_{k=n_0}^{n} \left[\prod_{i=k+1}^{n} f(i)\right] g(k)
\end{aligned}$$

Acabou-se assim de provar que a fórmula (2.4) é a solução particular da equação (2.1) . Não sendo conhecido o valor inicial x_{n_0}, pode-se sempre supor x_{n_0} é uma constante arbitrária e a solução (2.4) passa a ser a solução geral.

Exemplo 2.2 *Determine a solução da equação*

$$x_{n+1} = (n+1)\, x_n - 3^n\,(n+1)!,\ \ x_0 = 1.$$

Solução. Da fórmula (2.4) vem que

$$\begin{aligned}
x_n &= \prod_{i=0}^{n-1}(i+1)\, x_0 + \sum_{k=0}^{n-1}\left[\prod_{i=k+1}^{n-1}(i+1)\right]\left(-3^k\right)(k+1)! \\
&= n! - \sum_{k=0}^{n-1}(k+2)(k+3)\ldots(n-1)\, n3^k\,(k+1)! \\
&= n! - n!\sum_{k=0}^{n-1}3^k \\
&= n!\left[1-\frac{1-3^n}{1-3}\right], \text{ ver Tabela 1.2} \\
&= \frac{3-3^n}{2}n!
\end{aligned}$$

■

Embora a expressão (2.4) seja a solução de todas as equações de diferenças lineares de 1ª ordem, por vezes surgem equações de diferenças com um "aspecto" mais simples (isto é, só em alguns casos é que a equação de diferenças linear de 1ª ordem assume a forma mais geral, como a da equação (2.1) com f e g funções de $\mathbb{Z}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, contendo n nas suas expressões). Isto acontece por exemplo quando as funções f e g são constantes, ou quando apenas uma delas é constante. Nestes casos um tratamento à parte pode tornar mais simples a tarefa de se encontrar a solução da equação. O estudo destes casos também é importante na medida em que aparecem muitas vezes associados a importantes problemas do quotidiano. Sendo assim, na secção seguinte estuda-se alguns desses casos particulares.

2.2 Equação com coeficientes constantes

Quando f é constante na equação (2.1), diz-se que se tem uma equação de diferenças linear de 1ª ordem com coeficientes constantes. Pode-se estudar separadamente os casos em que a função g é constante ou não.

Considere-se em primeiro lugar o caso em que a função g é constante, isto é, a equação (2.1) toma a forma

$$x_{n+1} = ax_n + b \tag{2.5}$$

onde a e b são constantes com $a \neq 0$.

De acordo com (2.4), para um determinado valor inicial x_0, tem-se que

$$x_n = x_0\prod_{i=0}^{n-1}a + \sum_{k=0}^{n-1}\left[\prod_{i=k+1}^{n-1}a\right]b = x_0a^n + b\sum_{k=0}^{n-1}a^{n-k-1} = x_0a^n + ba^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}a^{-k}$$

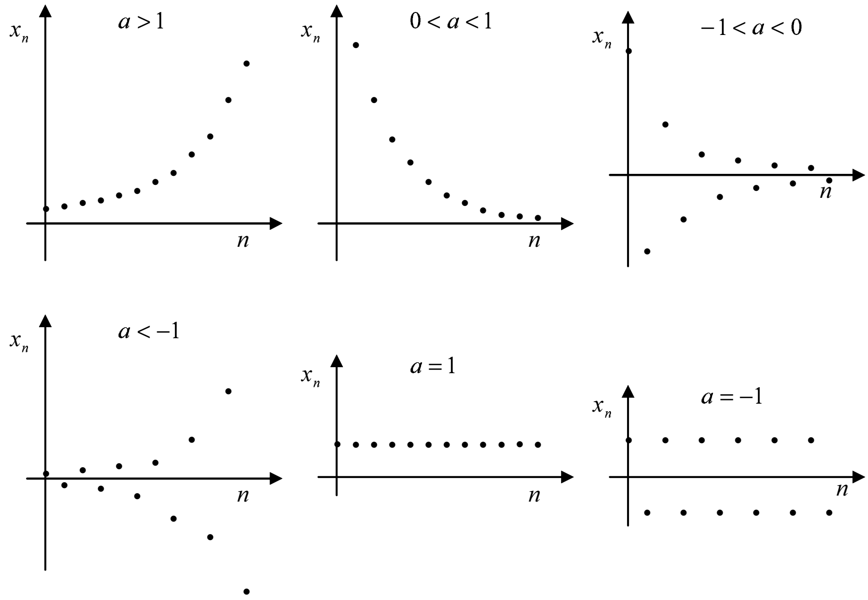

Figura 2.1: Limite de $x_n = a^n x_0$ com $x_0 > 0$

Se $a = 1$ vem

$$x_n = x_0 + b \sum_{k=0}^{n-1} 1 = x_0 + bn$$

e para $a \neq 1$ tem-se

$$\begin{aligned} x_n &= a^n x_0 + b a^{n-1} \frac{1 - a^{-n}}{1 - a^{-1}}, \text{ ver Tabela 1.2} \\ &= a^n x_0 + b \frac{a^n - 1}{a - 1}. \end{aligned}$$

Portanto a solução da equação (2.5) é

$$x_n = \begin{cases} a^n x_0 + b \frac{a^n - 1}{a - 1} \text{ se } a \neq 1 \\ x_0 + bn \text{ se } a = 1 \end{cases} \tag{2.6}$$

Tem particular interesse o estudo do comportamento assimptótico da solução da equação (2.5) e a sua dependência dos parâmetros a, b e x_0.

Quando $b = 0$ a solução da equação (2.5) é $x_n = a^n x_0$. O limite x_n depende de a e do valor absoluto de x_0. Na Tabela 2.1 apresenta-se um resumo de todos os casos.

Considere-se agora o caso em que $b \neq 0$. Para $a \neq 1$ a solução da equação (2.5) tem a forma

$$\begin{aligned} x_n &= a^n x_0 + \frac{b}{1 - a} (1 - a^n) \\ &= a^n (x_0 - x^*) + x^*, \text{ com } x^* = \frac{b}{1 - a} \end{aligned}$$

Portanto se:

	$a>1$	$a=1$	$\|a\|<1$	$a=-1$	$a<-1$
$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$	$\begin{cases} +\infty, \ x_0>0 \\ -\infty, \ x_0<0 \end{cases}$	x_0	0	$\begin{cases} x_0, \ n \text{ par} \\ -x_0, \ n \text{ ímpar} \end{cases}$	$\begin{cases} +\infty, \ n \text{ par}, \ x_0>0 \\ -\infty, \ n \text{ par}, \ x_0<0 \\ -\infty, \ n \text{ ímpar}, \ x_0>0 \\ +\infty, \ n \text{ ímpar}, \ x_0<0 \end{cases}$

Tabela 2.1: Limite da solução de $x_{n+1} = ax_n$

- $a \neq 1$ e $x_0 = x^*$ vem que $x_n = x_0 = x^*$,

- $a > 1$ e $x_0 > x^*$ tem-se que $x_n > x^*$ e x_n é uma sucessão monótona crescente já que

$$x_{n+1} - x_n = a^n \left(x_0 - x^*\right)(a-1) > 0,$$

  sendo que neste caso $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$,

- $a > 1$ e $x_0 < x^*$ vem $x_n < x^*$ e tem-se que x_n é uma sucessão monótona decrescente com $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$,

- $0 < a < 1$ e $x_0 > x^*$ vem $x_n > x^*$, sendo x_n uma sucessão monótona decrescente. Neste caso $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x^*$,

- $0 < a < 1$ e $x_0 < x^*$ decorre que $x_n < x^*$. Neste caso x_n é uma sucessão monótona crescente convergindo para x^* à medida que $n \to +\infty$,

- $-1 < a < 0$ e $x_0 \neq x^*$, x_n é uma sucessão oscilante convergindo para x^* à medida que $n \to +\infty$,

- $a = -1$ e $x_0 \neq x^*$, x_n é uma sucessão divergente pois oscila entre dois sub limites finitos diferentes,

- $a < -1$ e $x_0 \neq x^*$, x_n é uma sucessão divergente pois oscila entre limites infinitos.

Para $a = 1$, a solução tem a forma $x_n = x_0 + bn$ e tem-se 2 casos a considerar:

- se $b > 0$ tem-se $x_n > x_0$ e x_n é monótona crescente com $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$,

- se $b < 0$ tem-se $x_n < x_0$ e x_n é monótona decrescente com $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

Vê-se como a solução é sensível às condições iniciais, assim como aos valores das constantes a e b. Estes parâmetros vão ser determinantes para o estudo de modelos concretos que se regem pela lei (2.5).

Exemplo 2.3 *Resolva a equação $2x_{n+1} - x_n = 2$ com $x_0 = 4$ e determine o comportamento da sua solução.*

Solução. Para esta equação tem-se que $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + 1$ e portanto $a = \frac{1}{2}$ e $b = 1$. De (2.6) resulta que

$$x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n 4 + 1.\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{4}{2^n} + 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 2\frac{1}{2^n} + 2.$$

Quando $n \to +\infty$, $\frac{1}{2^n} \to 0$ pelo que $x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 2$ (neste caso x_n é monótona decrescente). ■

Exemplo 2.4 *(Juros) Suponha-se que é feito um depósito de €200 no fim de cada período fixo num banco. Sabendo que a taxa de juro por cada período é de 2,8% e que no período 0 houve um depósito de €500, qual a quantidade acumulada ao fim de* 20 *períodos?*

Solução. Seja q_n a quantidade acumulada ao fim de n períodos. A quantidade acumulada no fim do período $n+1$ é igual à quantidade acumulada no período n com o juro ganho neste período mais o depósito efectuado. A seguinte equação traduz o que se acabou de descrever

$$q_{n+1} = (1 + 0,028)\, q_n + 200$$

De (2.6) sabe-se que a solução da equação é

$$\begin{aligned} q_n &= 500 \times 1,028^n + 200\frac{1,028^n - 1}{1,028 - 1} \\ &= 7642,857 \times 1,028^n - 7142,857 \end{aligned}$$

Assim, ao fim de 20 períodos a quantidade acumulada é de €6134,7, aproximadamente. ■

Exemplo 2.5 *(Datação através do carbono-14) Foi observado que a proporção de carbono-14 nas plantas e animais é a mesma que a da atmosfera desde que a planta ou o animal esteja vivo. Quando o animal ou a planta morre o carbono-14 dos seus tecidos começa a decrescer segundo uma razão r.*
1. A "meia-vida" do material radioactivo é o tempo necessário para que metade do material se dissipe. Se a "meia-vida" do carbono-14 é de 5700 anos, qual é a razão de decrescimento?
2. Se a quantidade de carbono-14 observada num osso de um animal é 70% da quantidade original de carbono-14, que idade tem a ossada?

Solução. Seja R_n a quantidade de carbono-14 que o osso contém no ano n. A quantidade de carbono-14 no ano $n+1$ é igual à quantidade de carbono-14 no ano n menos a quantidade respeitante à razão de decrescimento, ou seja,

$$R_{n+1} = R_n - rR_n = (1 - r)\, R_n$$

De (2.6) vem que a solução geral desta equação tem a forma

$$R_n = (1 - r)^n\, R_0$$

onde R_0 é a quantidade de carbono-14 que o animal possuía no exacto momento que morre.

1. Pretende-se que para $n = 5700$ a quantidade de carbono-14 seja metade da quantidade inicial, ou seja,
$$\frac{1}{2}R_0 = (1-r)^{5700} R_0 \Leftrightarrow r = 1 - \sqrt[5700]{0,5}$$

2. Usando o facto de que $r = 1 - \sqrt[5700]{0,5}$, pretende-se saber o número de anos que uma ossada possui, se for observado 70% da quantidade original de carbono-14. Esta situação traduz-se em
$$0,7R_0 = (1-r)^n R_0,$$
ou seja,
$$\ln(0,7) = n \ln\left(0,5^{\frac{1}{5700}}\right),$$
isto é,
$$n = \frac{\ln(0,7)}{\ln(0,5)}5700$$
donde $n = 2933$ anos. ■

Considere-se agora o caso em que apenas a função f na equação (2.1) é constante. A equação toma a forma
$$x_{n+1} = ax_n + g(n),$$
com $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ e $g(n)$ uma função de $\mathbb{Z}_0^+ \longmapsto \mathbb{R}$.

Usando a fórmula (2.4), para um determinado valor inicil x_0, vem
$$x_n = a^n x_0 + a^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} a^{-k} g(k) \tag{2.7}$$

Exemplo 2.6 *Resolva a equação* $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + n5^n$ *com* $x(0) = x_0 = 2$.

Solução. De (2.7) pode-se escrever
$$\begin{aligned} x_n &= \left(\frac{1}{2}\right)^n 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} 2^k k 5^k \\ &= 2^{1-n}\left[1 + \sum_{k=0}^{n-1} k10^k\right] \\ &= 2^{1-n}\left[1 + \frac{9(n+1)10^{n+1} - 10^{n+2} + 10}{81} - n10^n\right], \text{ ver Tabela 1.2} \\ &= 2^{1-n}\left[\frac{(9n-10)10^n + 91}{81}\right] \end{aligned}$$

■

Exemplo 2.7 *(Amortização de empréstimos) A amortização é um processo pelo qual um empréstimo bancário é pago, através de uma sequência de pagamentos periódicos. Nestes pagamentos, uma parte diz respeito ao juro e a outra parte é para reduzir a dívida.*
Se E_n *representa o total em dívida após o* $n-$ *ésimo pagamento* $g(n)$ *que se supõe constante, qual a expressão que traduz a prestação, sabendo que se aplica uma taxa de juro* r *por cada pagamento periódico?*

Solução. O total em dívida após o $(n+1)-\acute{e}simo$ pagamento é igual ao total em dívida após o $n-\acute{e}simo$ pagamento mais o respectivo juro, menos o $n-\acute{e}simo$ pagamento, ou seja,

$$E_{n+1} = (1+r)\,E_n - g\,(n)$$

De (2.7) sabe-se que

$$E_n = (1+r)^n\,E_0 - (1+r)^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}(1+r)^{-k}\,g\,(k)\,, \tag{2.8}$$

onde E_0 é o valor inicialmente emprestado. Como $g\,(n)$ é constante represente-se por P esse pagamento. De (2.8) resulta

$$\begin{aligned}
E_n &= (1+r)^n\,E_0 - (1+r)^{n-1}\,P\sum_{k=0}^{n-1}(1+r)^{-k} \\
&= (1+r)^n\,E_0 - (1+r)^{n-1}\,P\frac{(1+r)^{-n}-1}{(1+r)^{-1}-1} \\
&= (1+r)^n\left[E_0 + \frac{P}{r}\left((1+r)^{-n}-1\right)\right]
\end{aligned}$$

Quando a dívida ficar saldada, E_n é 0 e nesse caso vem que

$$0 = (1+r)^n\left[E_0 + \frac{P}{r}\left((1+r)^{-n}-1\right)\right],$$

ou seja,

$$P = \frac{r\,(1+r)^n\,E_0}{(1+r)^n-1} = \frac{rE_0}{1-(1+r)^{-n}}$$

Para um empréstimo a 30 anos de €125000 a uma taxa de juro de 3,5% ao ano, tem-se que o pagamento mensal é

$$p = \frac{\frac{0{,}035}{12}\times 125000}{1-\left(1+\frac{0{,}035}{12}\right)^{-12\times 30}}$$

isto é, a prestação é de €561,31. ■

2.3 Equações redutíveis a equações com coeficientes contantes

Alguns tipos de equações de diferenças lineares, com coeficientes variáveis, podem ser reduzidas a equações com coeficientes constantes. Considere-se o seguinte caso

$$af\,(n+1)\,x_{n+1} + bf\,(n)\,x_n = g\,(n) \tag{2.9}$$

em que a e b são constantes, $f\,(n)$ e $g\,(n)$ são funções de argumento discreto.

A substituição $u_n = f\,(n)\,x_n$ transforma a equação (2.9) na equação com coeficientes constantes

$$au_{n+1} + bu_n = g\,(n)\,.$$

Note-se que este método pode ser usado sempre que as parcelas da equação de diferenças contêm produtos entre funções discretas e sucessões de argumento e ordem iguais.

Exemplo 2.8 *Resolva a equação* $e^{n+1}x_{n+1} - 2e^n x_n = n$, *com* $x(0) = x_0 = 2$.

Solução. Fazendo a substituição $u_n = e^n x_n$ vem

$$u_{n+1} = 2u_n + n, \text{ com } u_0 = e^0 x_0 = 2.$$

A solução geral desta equação é

$$\begin{aligned} u_n &= 2^n \times 2 + 2^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} k2^{-k} \\ &= 2^{n+1} + 2^{n-1} \left[\frac{-\frac{1}{2}(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} + \frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} - n\left(\frac{1}{2}\right)^n \right] \\ &= 3 \times 2^n - n - 1. \end{aligned}$$

Como $u_n = e^n x_n$ resulta que

$$x_n = 3\left(\frac{2}{e}\right)^n - \frac{n+1}{e^n}.$$

■

2.4 Equações com coeficientes não constantes

Podem-se resolver algumas equações de diferenças lineares com coeficientes não constantes através da função gama. A função gama é uma função especial definida por meio do integral impróprio

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx. \tag{2.10}$$

Pode-se decompor $\Gamma(p)$ na forma

$$\Gamma(p) = \int_0^1 x^{p-1} e^{-x} dx + \int_1^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx. \tag{2.11}$$

O segundo integral é convergente para qualquer $p \in \mathbb{R}$ (pois $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 \left(x^{p-1}e^{-x}\right) = 0 < +\infty$). Assim, a convergência do integral da equação (2.10) depende apenas da convergência do primeiro integral de (2.11). Este existe no sentido de Riemann para $p \geq 1$, porque é o integral duma função contínua em $[0, 1]$ e quando $0 < p < 1$ o referido integral também é convergente, já que $x^{p-1}e^{-x} < x^{p-1} = \frac{1}{x^{1-p}}$ para $x \in]0, 1]$. Por outro lado, $x^{p-1}e^{-x} > x^{p-1}e^{-1} = \frac{e^{-1}}{x^{1-p}}$ para $x \in]0, 1]$ e, assim, o integral $\int_0^1 x^{p-1}e^{-x}dx$ diverge para $p \leq 0$. Em suma, o integral definido em (2.10) é convergente para qualquer valor real p positivo.

A função gama goza de algumas propriedades, nomeadamente

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p), \forall p > 0 \tag{2.12}$$

Para se demonstrar este resultado, pode-se determinar $\Gamma(p+1)$ a partir de (2.10), integrando por partes. Assim,

$$\Gamma(p+1) = \int_0^{+\infty} x^p e^{-x} dx = -x^p e^{-x}\Big|_0^{+\infty} + \int p x^{p-1} e^{-x} dx = p\Gamma(p)$$

Facilmente se vê que $\Gamma(1) = 1$ e usando (2.12), por indução em p, pode-se provar que

$$\Gamma(p+1) = p!, \;\; p > 0 \tag{2.13}$$

Para se poder obter um prolongamento da função factorial aos reais $p > -1$, coloca-se por definição

$$p! = \Gamma(p+1) \tag{2.14}$$

Esta maneira de definir o factorial de um real maior que -1, coincide com o valor usual do factorial quando $p \in \mathbb{Z}_0^+$ e também verifica a propriedade $p! = p\,(p-1)!, \;\; \forall p > -1$.

As relações (2.14) e (2.12) permitem escrever

$$p! = \Gamma(p+1) = p\Gamma(p) = p\,(p-1)!$$

A relação (2.12) também permite prolongar, de uma maneira natural, a função Γ aos reais negativos não inteiros (inicialmente definidada só para reais positivos). Ao substitur-se p por $p+1$ na relação (2.12), vem

$$\Gamma(p+1) = \frac{1}{p+1}\Gamma(p+2)\,, \;\; p > -1$$

O mesmo acontece para $p \in \left]-2, +\infty\right[\setminus \{1\}$ pondo

$$\Gamma(p+1) = \frac{1}{(p+1)(p+2)}\Gamma(p+3)\,.$$

Através deste processo consegue-se definir naturalmente a função gama em todos os números reais excepto nos inteiros negativos.

Por consequência do que se acabou de descrever, fica-se com a função

$$p! = \Gamma(p+1)\,, \forall p \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}^-. \tag{2.15}$$

Estas propriedades que se acabaram de descrever, podem ser utilizadas para resolver equações de diferenças com coeficientes lineares em n. Assim, seja a equação

$$a\,(n+b)\,x_{n+1} + b\,(n+d)\,x_n = 0 \tag{2.16}$$

onde a, b, c e d são constantes reais com b e d positivas.

Usando (2.12) pode-se escrever

$$\begin{aligned} n+b &= \frac{\Gamma(n+b+1)}{\Gamma(n+b)} = \frac{f_{n+1}}{f_n} \\ n+d &= \frac{\Gamma(n+d+1)}{\Gamma(n+d)} = \frac{g_{n+1}}{g_n} \end{aligned} \tag{2.17}$$

Substituíndo em (2.16) e agrupando os termos com o mesmo índice, obtém-se

$$a\frac{f_{n+1}}{f_n}x_{n+1} + b\frac{g_{n+1}}{g_n}x_n = 0 \tag{2.18}$$

A equação (2.18) pode ser reduzida a uma equação de diferenças, com coeficientes constantes. Para tal utiliza-se o método introduzido na Secção 2.3.

Se os coeficientes da equação de diferenças linear de 1ª ordem, com coeficientes não constantes, incluem produtos e quocientes de factores lineares, por exemplo $\frac{(n+a)(n+b)}{(n+c)}$, cada factor pode ser escrito de forma anóloga a (2.17) , e agrupando termos com a mesma ordem, obtém-se uma equação redutível a equação com coeficientes constantes linear de 1ª ordem.

Quando a constante d na equação (2.16) pertencer a $\mathbb{Z}^-$ $(d = -m, m \in \mathbb{Z}^+)$, a solução será uma sequência finita, já que para $n = m$ obtém-se $x_{m+1} = 0$ e qualquer outro termo de ordem superior a m será nulo. Se o valor de m for baixo, só existirão alguns termos na sequência e será possível calculá-los directamente a partir da equação de diferenças. Se m for elevado, para reduzir a equação a uma equação com coeficientes constantes, escreve-se o factor $(n - m)$ da seguinte forma

$$n - m = -(m - n) = -\frac{\Gamma(m - n + 1)}{\Gamma(m - n)} = -\frac{f_n}{f_{n+1}} \tag{2.19}$$

A mudança de sinal é necessária devido ao facto de que a função $\Gamma(m - n)$ existe para $n = 0, 1, 2, ..., m - 1$, enquanto que $\Gamma(n - m)$ é indefinida.

Exemplo 2.9 *Se $x_0 = 2$, determine a solução da equação de diferenças*

$$(n + 2)\, x_{n+1} + \frac{n^2 + 5n + 4}{n + 7} x_n = 0.$$

Solução. Podem-se usar factoriais para escrever os coeficientes da equação na forma $\frac{f_{n+1}}{fn}$.

$$\begin{aligned} n + 2 &= \frac{(n+2)!}{(n+1)!} \\ \frac{n^2 + 5n + 4}{n + 7} &= \frac{(n+1)(n+4)}{n+7} = \frac{\frac{(n+1)!(n+4)!}{(n+7)!}}{\frac{n!(n+3)!}{(n+6)!}} \end{aligned}$$

Substituíndo na equação de diferenças e reagrupando os termos vem que

$$\frac{(n+2)!\,(n+7)!}{(n+1)!\,(n+4)!} x_{n+1} + \frac{(n+1)!\,(n+6)!}{n!\,(n+3)!} x_n = 0$$

Usando a substituição $u_n = \frac{(n+1)!(n+6)!}{n!(n+3)!} x_n$, obtém-se a equação

$$u_{n+1} + u_n = 0,$$

que é uma equação com coeficientes constantes para a sucessão u_n. A solução geral desta equação é $u_n = (-1)^n u_0$, e como $x_0 = 2$ resulta que $u_0 = \frac{6!}{3!}2 = 240$. Portanto

$$\frac{(n+1)!\,(n+6)!}{n!\,(n+3)!} x_n = (-1)^n\, 240 \Rightarrow x_n = \frac{240 \times (-1)^n}{(n+1)(n+4)(n+5)(n+6)}$$

■

Exemplo 2.10 *Calcule a solução da equação* $(n + 1)\, x_{n+1} + 2(n - 20)\, x_n = 0$ *com* $x_0 = \frac{1}{2}$.

Solução. Escrevendo os coeficientes da equação com recurso à função gama, vem

$$n+1=\frac{(n+1)!}{n!} \text{ e } n-20=-(20-n)=-\frac{(20-n)!}{(19-n)!}$$

e substituíndo na equação obtém-se

$$\frac{(n+1)!}{n!}x_{n+1}-2\frac{(20-n)!}{(19-n)!}x_n=0,$$

ou seja,

$$(n+1)!\,(19-n)!x_{n+1}-2n!\,(20-n)!x_n=0.$$

Se $u_n = n!\,(20-n)!x_n$ a equação anterior transforma-se na equação com coeficientes constantes

$$u_{n+1}-2u_n=0,$$

que tem como solução geral $u_n=2^n u_0$, e como $x_0=\frac{1}{2}$ resulta que $u_0=\frac{20!}{2}$, donde

$$x_n=\frac{20!2^{n-1}}{n!\,(20-n)!}$$

■

2.5 Uso dos operadores Δ e Δ^{-1}

A abordagem que se fez relativa à determinação da solução geral das equações de diferenças lineares de 1ª ordem, poderá ser feita com recurso aos operadores Δ e Δ^{-1} que se introduziu em 1.1.

Viu-se que a solução geral da equação homogénea

$$x_{n+1}=f(n)\,x_n \tag{2.20}$$

é

$$x_n=x_{n_0}\prod_{i=n_0}^{n-1}f(i)=x_{n_0}P(n) \tag{2.21}$$

para algum valor inicial x_{n_0}, com $n\geq n_0\geq 0$ e $P(n)=\prod\limits_{i=n_0}^{n-1}f(i)$. De (2.21) vem

$$\Delta\left(\frac{x_n}{P(n)}\right)=\frac{x_{n+1}}{P(n+1)}-\frac{x_n}{P(n)}=\Delta x_{n_0}=0$$

Esta equação é equivalente à equação (2.20) se se multiplicar ambos os membros desta por $\frac{1}{P(n+1)}$, ou seja,

$$\frac{x_{n+1}}{P(n+1)}=\frac{f(n)\,x_n}{P(n+1)}=\frac{f(n)}{\prod\limits_{i=n_0}^{n}f(i)}x_n=\frac{f(n)}{f(n)\prod\limits_{i=n_0}^{n-1}f(i)}x_n=\frac{x_n}{P(n)},$$

isto é,

$$\frac{x_{n+1}}{P(n+1)} - \frac{x_n}{P(n)} = 0$$

Usando esta ideia pode-se determinar a solução geral da equação não homgénea

$$x_{n+1} = f(n)\, x_n + g(n)\,. \tag{2.22}$$

Assim, ao multiplicar-se ambos os membros de (2.22) por $\frac{1}{P(n+1)}$, resulta que

$$\Delta\left(\frac{x_n}{P(n)}\right) = \frac{g(n)}{P(n+1)}.$$

Portanto a solução geral de (2.22) é

$$x_n = P(n)\,\Delta^{-1}\left(\frac{g(n)}{P(n+1)}\right) + cP(n)\,,\ \ c \in \mathbb{R}. \tag{2.23}$$

Fazendo $g(n) = 0$ tem-se que $cP(n)$ é a solução geral da equação homogénea associada, e quando $c = 0$, tem-se que $P(n)\,\Delta^{-1}\left(\frac{g(n)}{P(n+1)}\right)$ é uma solução particular da equação completa.

Exemplo 2.11 *Calcule a solução geral da equação* $x_{n+1} = (k-n)\,x_n$ *com* $x_1 = k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Solução. Para esta equação tem-se que

$$P(n) = \prod_{i=1}^{n-1}(k-i) = (k-1)(k-2)\ldots(k-n+1)$$

e por (2.23) resulta

$$x_n = x_1 P(n) = k(k-1)(k-2)\ldots(k-n+1) = k^{(n)}$$

■

Exemplo 2.12 *Determine a solução de* $x_{n+1} = nx_n + (n+1)!$ *com* $x_2 = 2$.

Solução. Como $f(n) = n$ vem que $P(n) = \prod_{i=2}^{n-1} i = (n-1)!$. A solução geral da equação é

$$\begin{aligned} x_n &= (n-1)!\Delta^{-1}\left(\frac{(n+1)!}{n!}\right) + c(n-1)! \\ &= (n-1)!\Delta^{-1}(n+1) + c(n-1)!, \text{ ver Tabela 1.1} \\ &= (n-1)!\left[\frac{n(n-1)}{2} + n + c\right] \end{aligned}$$

Mas como $x_2 = 2$ resulta que $c = -1$ e portanto

$$x_n = (n-1)!\frac{n^2+n-2}{2}$$

■

Exemplo 2.13 *Resolva a equação* $x_{n+1} = x_n + \cos(kn)$, $x_0 = 1$.

Solução. Como $P(n) = 1$ vem

$$x_n = \Delta^{-1}(\cos kn) + c$$

ou seja,

$$x_n = \frac{\sin\left(kn - \frac{k}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{k}{2}\right)} + \frac{3}{2} \text{ (ver Tabela 1.1)}$$

■

2.6 Estabilidade das soluções

Os conceitos de ponto de equilíbrio e órbita periódica têm particular interesse no estudo de modelos regidos por equações de diferenças.

2.6.1 Órbitas e pontos de equilíbrio

Na Secção 1.3 viu-se como classificar uma equação de diferenças. Considere-se uma equação de diferenças de primeira ordem escrita na forma

$$x_{n+1} = f(x_n) \tag{2.24}$$

em que f é uma função linear ou não.

Pode-se interpretar a relação (2.24) da seguinte forma: o termo da sequência $(x_n)_0^\infty$ de ordem $n+1$, é uma função do termo de ordem n. Ou ainda, qualquer termo da sequência $(x_n)_0^\infty$ é uma função do termo imediatamente anterior. Pode-se por exemplo interpretar x_n como a grandeza de uma população na geração n, e dir-se-ia que a geração de ordem $n+1$, x_{n+1}, é uma função da geração de ordem n, x_n. Se a população inicial for x_0, então a aplicação sucessiva da função f, permite determinar a sequência de estados

$$x_0,\ f(x_0),\ f(x_1) = f(f(x_0)) = f^2(x_0),\ f(x_2) = f(f(f(x_0))) = f^3(x_0), \ldots$$

Note-se que $f^0(x_0) = x_0$ e $x_{n+1} = f^{n+1}(x_0) = f(f^n(x_0)) = f(x_n)$.

Definição 2.14 *Chama-se a iterada de ordem k da função f no ponto x_0 à expressão* $f^k(x_0) = \underbrace{f(f(\ldots(f(x_0))))}_{k \text{ vezes}}, k \in \mathbb{Z}_0^+$.

O valor de $f(x_0)$ é conhecido como a primeira iterada de f no ponto x_0.

Definição 2.15 *(Órbita) Chama-se órbita positiva de x_0 ao conjunto de todas as iteradas positivas da função f no ponto x_0, isto é,* $O^+(x_0) = \left\{f^n(x_0) : \forall n \in \mathbb{Z}_0^+\right\}$ *e órbita negativa de x_0 ao conjunto* $O^-(x_0) = \left\{f^n(x_0) : \forall n \in \mathbb{Z}_0^-\right\}$. *O conjunto* $O^+(x_0) \cup O^-(x_0)$ *é denominado de órbita de x_0 e representa-se por* $O(x_0)$.

Definição 2.16 *(Ponto de equilíbrio ou estado permanente) Um ponto x^* pertencente ao domínio de f diz-se ponto de equilibrio da equação (2.24) se é um estado fixo de f, ou seja, se* $f(x^*) = x^*$.

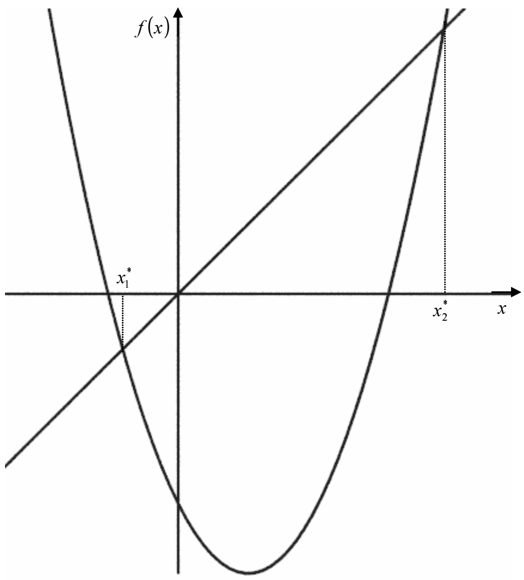

Figura 2.2: Pontos fixos de $f(x) = x^2 - 2x - 3$

Há autores que chamam a x^* ponto fixo ou ponto permante ou estado de equilíbrio. Estas diferentes designações vêm da sua interpretaçãso intuitiva nos variados contexos a que se aplica.

A Definição 2.16 diz que x^* é um ponto que iterado permanece invariante. Graficamente, um ponto de equilíbrio é a abcissa do ponto onde o gráfico de f intersecta a recta $y = x$. Na Figura 2.2 pode-se visualizar a representação gráfica dos pontos de equilíbrio da equação de diferenças $x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n - 3$ quando se considera $f(x) = x^2 - 2x - 3$. Analiticamente, para se determinar os pontos de equilíbrio, resolve-se a equação $f(x^*) = x^*$, ou seja, $(x^*)^2 - 2x^* - 3 = x^*$ e chega-se à conclusão que -1 e 3 são os referidos pontos.

É possível que uma solução de uma equação de diferenças não seja um ponto de equilíbrio, mas poderá sê-lo após um número finito de iterações. Ou seja, um estado de não equilíbrio poderá passar para um estado de equilíbrio em tempo finito. Esta ideia leva à seguinte definição.

Definição 2.17 *(Eventual ponto de equilíbrio) Se x é um ponto que pertence ao domínio de f, x^* um ponto de equilíbrio da equação* (2.24) *e existe um inteiro positivo k tal que $f^k(x) = x^*$ e $f^{k-1}(x) \neq x^*$, então diz-se que x é um eventual ponto de equilíbrio.*

Para melhor se compreender esta definição, considere-se um exemplo. Seja a equação $x_{n+1} = T(x_n)$ onde

$$T(x) = \begin{cases} 3x \text{ para } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 3(1-x) \text{ para } \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

Os pontos de equilíbrio desta equação são 0 e $\frac{3}{4}$. Para se encontrar um eventual ponto de equilíbrio considere-se $x_0 = \frac{1}{9}$. Para este valor inicial, tem-se que $x_1 = T\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{1}{3}$, $x_2 = T^2\left(\frac{1}{9}\right) = 1$ e $x_3 = T^3\left(\frac{1}{9}\right) = 0$. Então $\frac{1}{9}$ é um eventual ponto de equilíbrio. Existem mais eventuais pontos de equilíbrio desta equação. Se se considerar $x = \frac{k}{3^n}$, com k e n inteiros positivos tal que $0 < \frac{k}{3^n} \leq 1$, tem-se que x é um eventual ponto de equilíbrio.

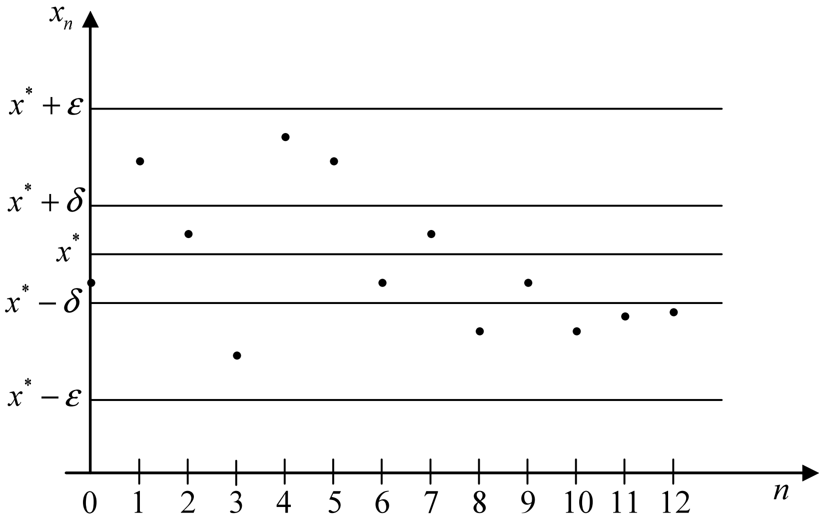

Figura 2.3: Ponto de equilíbrio estável

2.6.2 Estabilidade e diagramas em "teia de aranha"

O estudo do comportamento assimptótico das soluções de uma determinada equação nas proximidades dos pontos de equilíbrio é conhecido como teoria de estabilidade. A seguinte definição é um conceito básico neste domínio.

Definição 2.18 *O ponto de equilíbrio x^* da equação* (2.24) *diz-se:*

1. *Estável (*Figura *2.3) se*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall n \in \mathbb{N} : |x_0 - x^*| < \delta \Longrightarrow |f^n(x_0) - x^*| < \varepsilon$$

   Caso contrário x^* diz-se instável (Figura 2.4).

2. *Repelente* (Figura 2.5) *se*

$$\exists \varepsilon > 0 \exists_N \in \mathbb{N} \forall n \geq_N : 0 < |x_0 - x^*| < \varepsilon \Longrightarrow |f(x_n) - x^*| > |x_n - x^*|$$

3. *Assimptoticamente estável ou atractor (*Figura *2.6) se for estável e*

$$\exists_{\eta > 0} : |x_0 - x^*| < \eta \Longrightarrow \lim_{n \to \infty} x_n = x^*$$

   Quando $\eta = \infty$ diz-se que x^* tem uma estabilidade assimptótica global (Figura 2.7).

Em geral não é uma tarefa fácil determinar, a partir da definição, a estabilidade de um ponto de equilíbrio, e em alguns casos é mesmo uma tarefa impossível. Uma maneira de tentar superar este obstáculo pode ser recorrendo a técnicas gráficas. O gráfico em forma de "teia de aranha" ou diagramas de degraus (Cobweb diagrams) é uma ferramenta muito poderosa e que nos ajuda a compreender o comportamento da solução na vizinhança dos pontos de equilíbrio da equação. Este consiste no seguinte: dada a equação $x_{n+1} = f(x_n)$

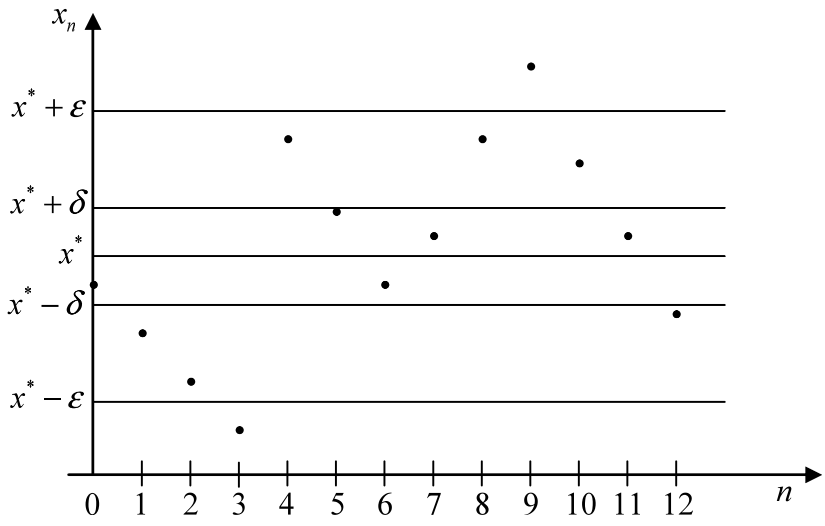

Figura 2.4: Ponto de equilíbrio instável

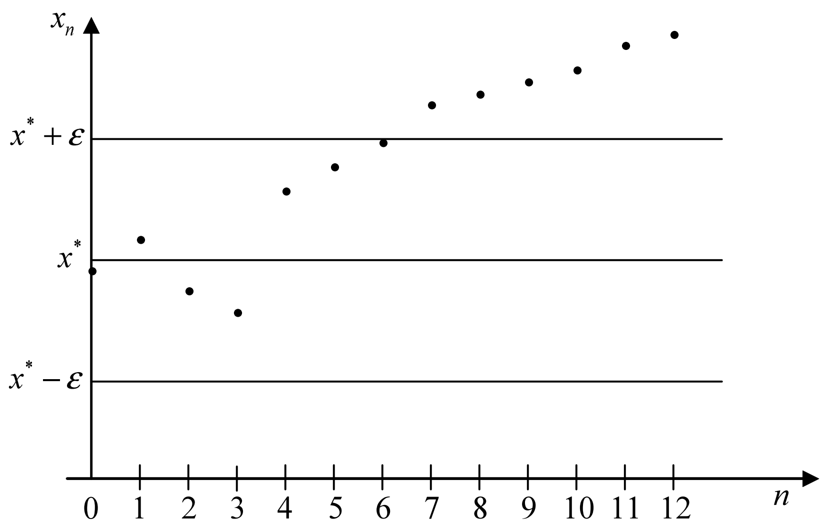

Figura 2.5: Ponto de equilíbrio repelente

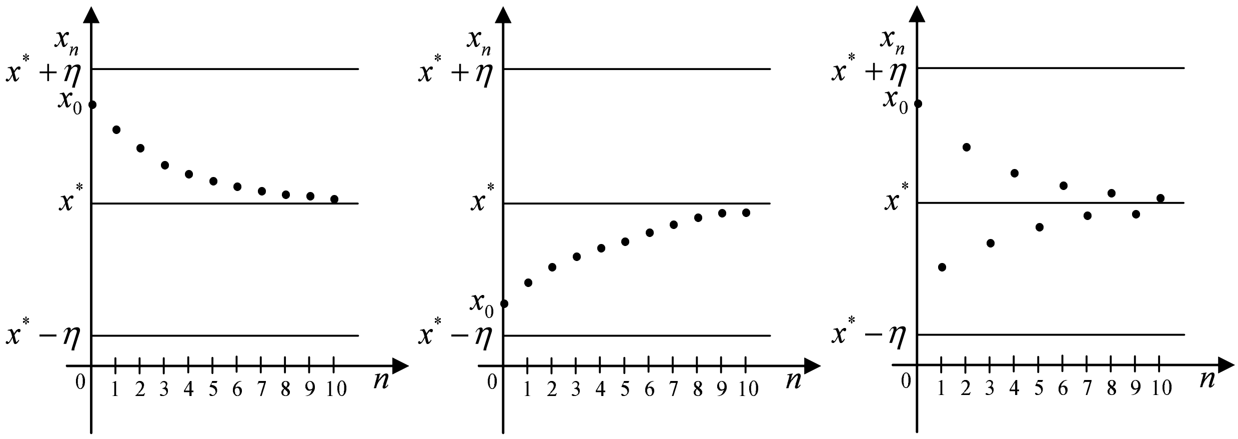

Figura 2.6: x^* assimptoticamente estável

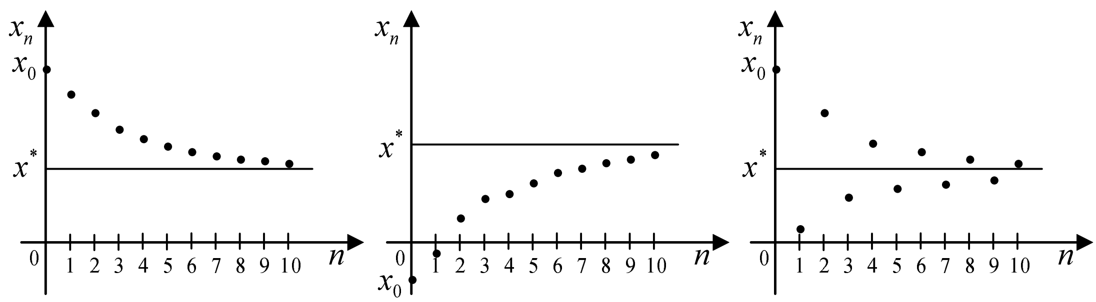

Figura 2.7: Estabilidade assimptótica global

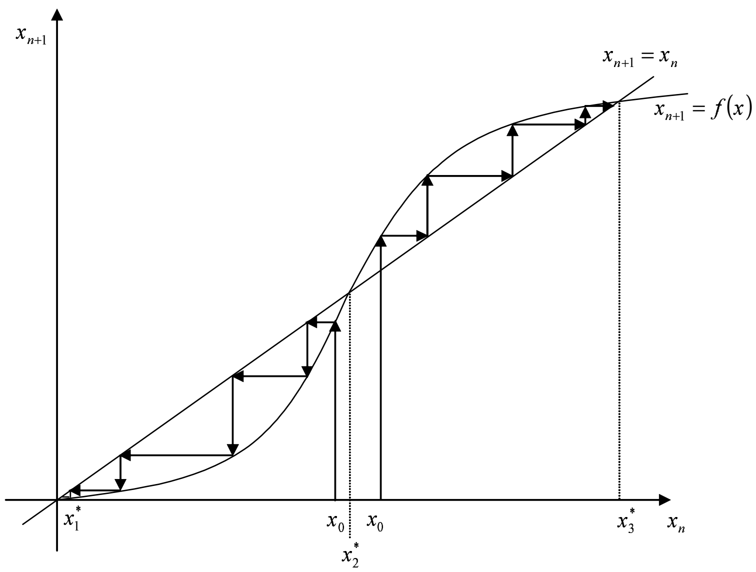

Figura 2.8: Estabilidade dos pontos fixos

representa-se o gráfico de f no plano (x_n, x_{n+1}). Toma-se um valor inicial x_0 no eixo das abcissas.Traça-se uma linha vertical a partir de x_0 até se encontar o gráfico de f e lê-se esse valor no eixo das ordenadas. Marca-se o valor de $f(x_0)$ encontrado no eixo das abcissas, $x_1 = f(x_0)$, para o qual se determina novamente o valor de f, e assim sucessivamente. Graficamente este ciclo pode ser feito traçando uma linha horizontal desde o ponto do gráfico $(x_0, f(x_0))$ até a função identidade $f(x) = x$ (a bissetriz do primeiro quadrante), e daí novamente uma linha vertical até ao gráfico de f. Continuando este processo pode-se determinar a órbita $x_0, f(x_0), f^2(x_0), ..., f^n(x_0), ...$

Se x_0 for um ponto inicial suficientemente próximo de um ponto de equilíbrio x^*, a órbita de x_0 dá uma indicação clara da estabilidade de x^*, pois indica como evolui x_0 quando há um pequeno desvio de x^*.

Na Figura 2.8 representa-se um diagrama em "teia de aranha" para se estudar a estabilidade do ponto de equilíbrio x_2^* de uma equação com três pontos de equilíbrio. Observa-se que este é instável, uma vez que, para qualquer valor x_0, relativamente próximo de x_2^*, a órbita $x_0, f(x_0), f^2(x_0), ...$ vai afastando-se, progressivamente de x_2^*. Também se vê que, no caso dos outros dois pontos de equilíbrio, a órbita converge para os mesmos.

Nota-se que o estudo por diagramas em "teia de aranha" usa uma aproximação da função discreta por uma função contínua. Apesar de ser um método eficiente chama-se a atenção para a necessidade de ter métodos gráficos convenientes.

Exemplo 2.19 *(Fenómeno de "teia de aranha" em Economia)*

Pretende-se neste exemplo estabelecer o "preço justo" ou o "preço certo" para um bem (produto) fornecido por uma empresa.

Seja S_n o número de unidades fornecidas (vendidas) pela empresa no período n, D_n o número de unidades pedidas (encomendadas) no período n e p_n o preço por unidade. Assuma-se ainda que se tem um modelo de mercado simples, ou seja, as encomendas dependem linearmente do preço por unidade, que se traduz por

$$D_n = -ap_n + b$$

em que a e b são constantes reais positivas. A constante a na equação anterior, também conhecida como a curva de procura, representa a sensibilidade dos consumidores em ao preço. O sinal negativo aparece porque, em geral, os aumentos de preços implicam um descréscimo de encomendas.

Por outro lado, a capacidade do fornecedor depende do preço que praticou no período anterior. Vai-se supor que essa dependência também é linear, ou seja, que

$$S_{n+1} = cp_n + d$$

em que c e d são constantes reais positivas. Esta equação é conhecida como a curva da oferta. Aqui o coeficiente de p_n tem sinal positivo, pois quanto maior é o preço mais possibilidades tem a empresa de fornecer bens no período seguinte.

Finalmente, assuma-se que o preço certo de mercado é tal que a quantidade de bens procurada é igual à quantidade fornecida, ou seja,

$$D_{n+1} = S_{n+1} \Leftrightarrow -ap_{n+1} + b = cp_n + d$$

ou ainda

$$p_{n+1} = Ap_n + B = f(p_n) \tag{2.25}$$

onde $A = -\frac{c}{a}$ e $B = \frac{b-d}{a}$. A equação (2.25) é uma equação de diferenças linear de 1ª ordem. Neste caso, o ponto de equilíbrio (preço de equilíbrio) é $p^* = \frac{B}{1-A}$. Este é o ponto de intersecção da curva da oferta e da curva da procura. Neste ponto a quantidade procurada é exactamente igual à quantidade oferecida. Para preços acima do preço de equilíbrio haverá excesso de oferta, enquanto que para preços abaixo do preço de equilíbrio haverá excesso de procura. Neste sentido, a razão entre os declives das curvas de fornecimento e procura determina o comportamento da sequência de preços, que neste caso é representado pela constante A. Assim, tem-se 3 casos a considerar, conforme o declive da curva de preços:

1. $-1 < A < 0$
2. $A = -1$
3. $A < -1$

O estudo destes casos é feito graficamente usando o diagrama em "teia de aranha". De acordo com o comportamento gráfico, pode-se concluir, respectivamente, que:

1. O preço alterna, mas convergindo para o preço de equilíbrio p^*. Neste caso p^* é assimptoticamente estável (Figura 2.9). Note-se que este caso é equivalente a $-\frac{c}{a} > -1$, ou seja, $c < a$, que se interpreta como um mercado onde a sensibilidade dos fornecedores ao preço é menor que a dos compradores.
2. Os preços oscilam entre dois valores, já que, se p_0 vem que $p_1 = -p_0 + B$ e $p_2 = p_0$. Assim, o ponto de equilíbrio é estável (Figura 2.10). Neste caso a sensibilidade dos fornecedores e compradores ao preço é a mesma.
3. Os preços oscilam indefinidamente à volta do ponto de equilíbrio p^* mas afastando--se progressivamente deste. Neste caso p^* é instável (Figura 2.11). Tem-se que a sensibilidade ao preço dos fornecedores é maior que a dos compradores.

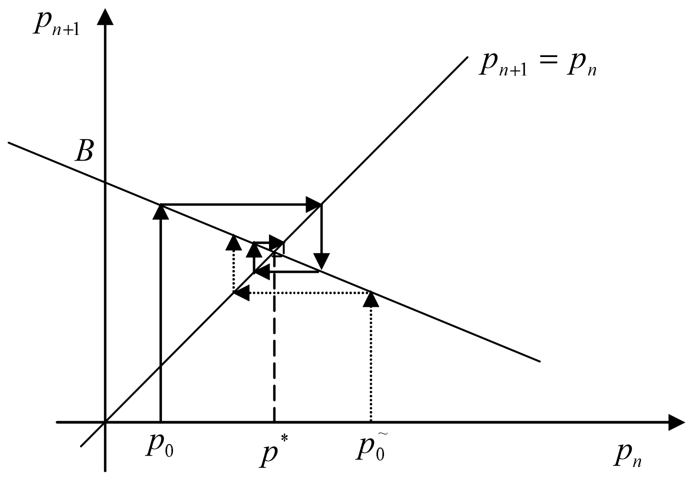

Figura 2.9: Preço de equilíbrio assimptóticamente estável

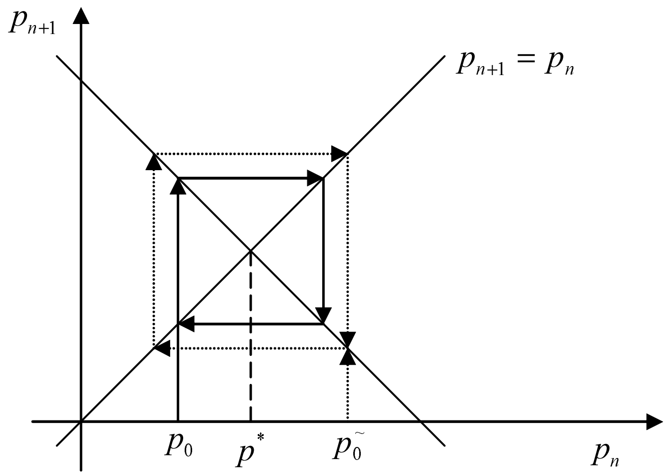

Figura 2.10: Preço de equilíbrio estável

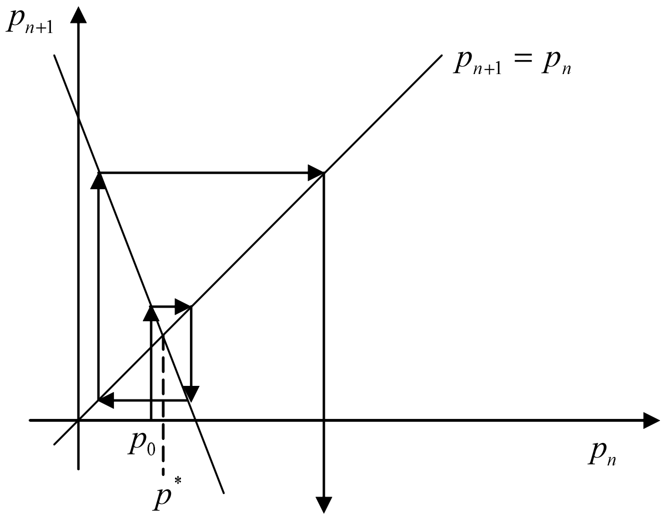

Figura 2.11: Preço de equilíbrio instável

A solução analítica da equação (2.25), com uma condição inicial p_0 é

$$p_n = \left(p_0 - \frac{B}{1-A}\right) A^n + \frac{B}{1-A}.$$

Calculando o limite de p_n quando $n \to +\infty$, chegam-se às três conclusões tiradas a partir dos diagramas em "teia de aranha". Assim, no 1º caso $\lim_{n\to\infty} p_n = \frac{B}{1-A} = p^*$, no 2º caso, se n é par $\lim_{n\to\infty} p_n = p_0$ e se n é ímpar $\lim_{n\to\infty} p_n = B - p_0$ e, no 3º caso p_n não tem limite.

Exemplo 2.20 *(Equação logística de Pielou) Calcule os pontos de equilíbrio positivos da equação*

$$x_{n+1} = \frac{\alpha x_n}{1+\beta x_n}, \ \alpha > 1, \ \beta > 0$$

e prove, usando o diagrama em "teia de aranha", que o ponto de equilíbrio positivo é assimptoticamente estável quando $\alpha = 2$ e $\beta = 1$.

Solução. Para se determinar os pontos de equilíbrio, resolve-se a equação

$$x^* = \frac{\alpha x^*}{1+\beta x^*},$$

ou seja,

$$x^*(1+\beta x^*) - \alpha x^* = 0.$$

O único ponto de equilíbrio positivo é $x^* = \frac{\alpha-1}{\beta}$. Para $\alpha = 2$ e $\beta = 1$ tem-se $x_{n+1} = \frac{2x_n}{1+x_n}$, ou seja, $x_{n+1} = f(x_n)$ com $f(x) = \frac{2x}{1+x}$. Observando o diagrama em "teia de aranha" (Figura 2.12), conclui-se que, os valores das várias iterações convergem para o ponto de equilíbrio $x^* = 1$. Neste caso, o ponto de equilíbrio $x^* = 1$ é assimptoticamente estável.
■

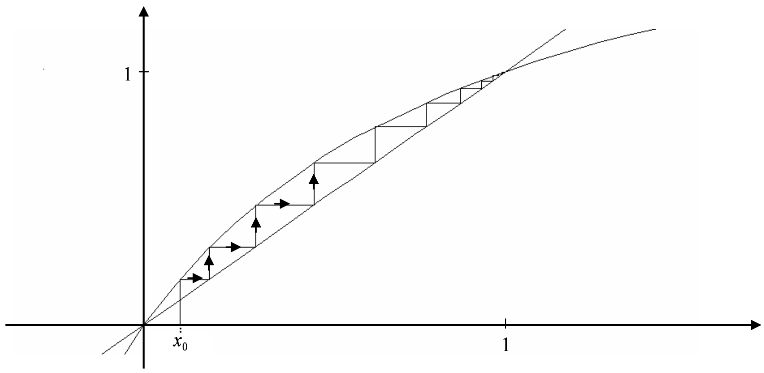

Figura 2.12: $x^* = 1$ é assimptoticamente estável para $x_{n+1} = \frac{2x_n}{1+x_n}$.

O estudo gráfico da estabilidade dos pontos de equilíbrio de uma equação, através dos diagramas em forma de "teia de aranha", não fornece uma prova analítica da estabilidade das soluções. Seguidamente apresentam-se alguns critérios para determinar o comportamento assimptótico dos pontos de equilíbrio.

Teorema 2.21 *Seja x^* um ponto de equilíbrio da equação* (2.24)*, f continuamente diferenciável em x^*. Se:*

1. $|f'(x^*)| < 1$, *então x^* é assimptoticamente estável (atractor).*
2. $|f'(x^*)| > 1$, *então x^* é instável (mais especificamente, x^* é um ponto repelente).*
3. $f'(x^*) = 1$, *então:*
   (a) *x^* é instável se $f''(x^*) \neq 0$.*
   (b) *x^* é instável se $f''(x^*) = 0$ e $f'''(x^*) > 0$.*
   (c) *x^* é assimptoticamente estável se $f''(x^*) = 0$ e $f'''(x^*) < 0$.*
4. $f'(x^*) = -1$, *então:*
   (a) *x^* é assimptoticamente estável se $-2f'''(x^*) - 3[f''(x^*)]^2 < 0$.*
   (b) *x^* é instável se $-2f'''(x^*) - 3[f''(x^*)]^2 > 0$.*

Prova. 1. Suponha-se que $|f'(x^*)| \leq M < 1$. Como f é contínua em x^*, então $\forall \varepsilon_1 > 0 \exists \delta_1 > 0 : |x - x^*| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(x^*)| < \varepsilon_1$. Então existe um intervalo $I =]x^* - \delta_1, x^* + \delta_1[$ tal que $\forall x \in I$ se tem $|f'(x)| \leq M < 1$.

Seja $x_0 \in I$, então $|x_1 - x^*| = |f(x_0) - f(x^*)|$ e pelo teorema de Lagrange, existe β entre x_0 e x^* tal que

$$|f(x_0) - f(x^*)| = |f'(\beta)| |x_0 - x^*|,$$

ou seja, $|x_1 - x^*| \leq M|x_0 - x^*|$. Esta desigualdade mostra que, x_1 está mais perto de x^* do que x_0 está de x^*, donde $x_1 \in I$.

De modo análogo tem-se que $|x_2 - x^*| \leq M|x_1 - x^*|$, e assim, x_2 está mais perto de x^* do que x_1 está de x^*, donde $x_2 \in I$. Mais geralmente, tem-se que $|x_n - x^*| \leq$

$M|x_{n-1} - x^*|$, pelo que, x_n está mais perto de x^* do que x_{n-1} está de x^*, donde $x_n \in I, \forall n \geq 0$.

Também por indução, pode-se concluir que $|x_n - x^*| \leq M^n |x_0 - x^*|$. Seja $\varepsilon > 0$ tal que $\delta = \frac{\varepsilon}{2M}$. Tem-se que se $|x_0 - x^*| < \delta$, então $|x_n - x^*| < M^n \frac{\varepsilon}{2M} < \varepsilon$, $\forall n \geq 0$, ou seja,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \frac{\varepsilon}{2M} : |x_0 - x^*| < \delta \Rightarrow |x_n - x^*| < \varepsilon,$$

portanto x^* é estável.

Também se tem que

$$\lim_{n\to+\infty} |x_n - x^*| \leq \lim_{n\to+\infty} \left(M^n |x_0 - x^*|\right) = 0,$$

ou seja, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x^*$.

Conclui-se assim que x^* é assimptoticamente estável.

2. Suponha-se que $|f'(x^*)| \geq M > 1$. Seja I nas condições da demonstração do ponto anterior tal que $\forall x \in I$ se tem $|f'(x)| \geq M > 1$.

Seja $x_0 \in I$, então tem-se pelo teorema de Lagrange que existe β entre x_0 e x^* tal que

$$|x_1 - x^*| = |f'(\beta)| \, |x_0 - x^*|,$$

ou seja, $|x_1 - x^*| \geq M|x_0 - x^*|$ e como $M > 1$ vem que $|x_1 - x^*| > |x_0 - x^*|$. Isto quer dizer que a distância de x_1 a x^* é superior à distância de x_0 a x^*. Mais geralmente, vem que $|x_{n+1} - x^*| \geq M|x_n - x^*|$ $\forall n \geq 0$, ou seja, a distância de x_{n+1} a x^* é superior à distância de x_n a x^*. Assim, existe $\delta > 0$ tal que se $x_0 - x^* < \delta$, então $|x_{n+1} - x^*| > \varepsilon$ para um dado $\varepsilon > 0$, ou seja, x^* é instável. Mais concretamente, tem-se que

$$\exists \delta > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |x_0 - x^*| < \delta \Rightarrow |x_{n+1} - x^*| > |x_n - x^*|,$$

ou seja, x^* é um ponto de equilíbrio repelente.

3. Seja $f'(x^*) = 1$.

(a) Se $f''(x^*) \neq 0$, então a curva tem concavidade voltada para cima quando $f''(x^*) > 0$ e a concavidade voltada para baixo quando $f''(x^*) < 0$.

Se $f''(x^*) > 0$, então $\forall x \in \left]x^*, x^* + \varepsilon\right[$ tem-se que $f'(x) > 1$ com $\varepsilon > 0$ relativamente pequeno. Seja $f'(x) \geq M > 1$ e $x_0 \in \left]x^*, x^* + \varepsilon\right[$, pelo teorema de Lagrange, existe β entre x^* e $x^* + \varepsilon$ tal que

$$|x_1 - x^*| = |f'(\beta)| \, |x_0 - x^*| > |x_0 - x^*|.$$

Usando os mesmos argumentos de 2. prova-se a instabilidade de x^* (Figura 2.13).

Se $f''(x^*) < 0$, então $\forall x \in \left]x^* - \varepsilon, x^*\right[$ tem-se que $f'(x) > 1$ com $\varepsilon > 0$ relativamente pequeno. Novamente, seguindo as ideias da prova precedente, conclui-se que x^* é instável (Figura 2.14)

(b) Seja $f''(x^*) = 0$ (x^* é um ponto de inflexão) e $f'''(x^*) > 0$. Usando uma aproximação da função pela série de taylor, em torno do ponto x^*, vem que

$$f(x) = f(x^*) + (x - x^*) f'(x^*) + \frac{(x - x^*)^2}{2!} f''(x^*) + \frac{(x - x^*)^3}{3!} f'''(x^*),$$

ou seja,

$$f(x) = x + \frac{(x - x^*)^3}{3!} f'''(x^*). \tag{2.26}$$

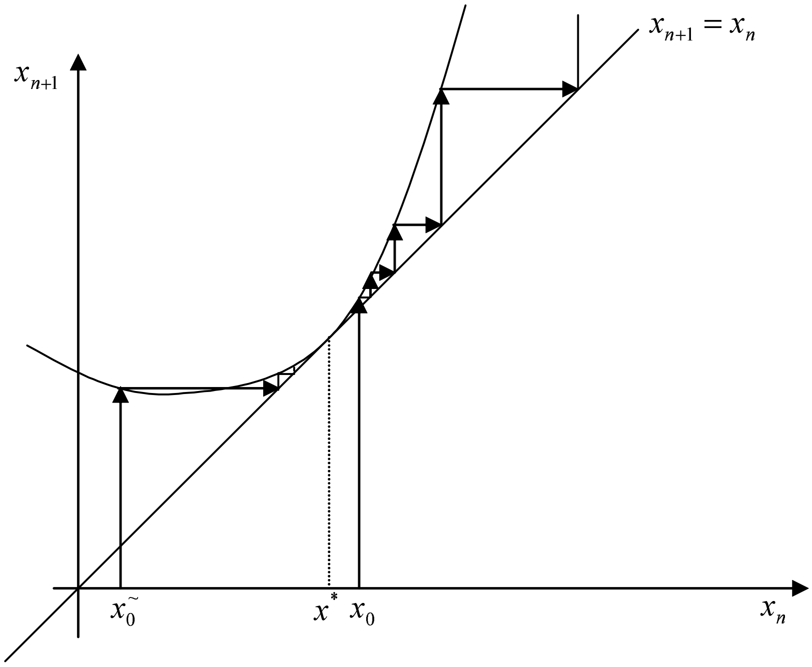

Figura 2.13: Instabilidade de x^* quando $f'(x^*) = 1$ e $f''(x^*) > 0$ (semi estável à esquerda)

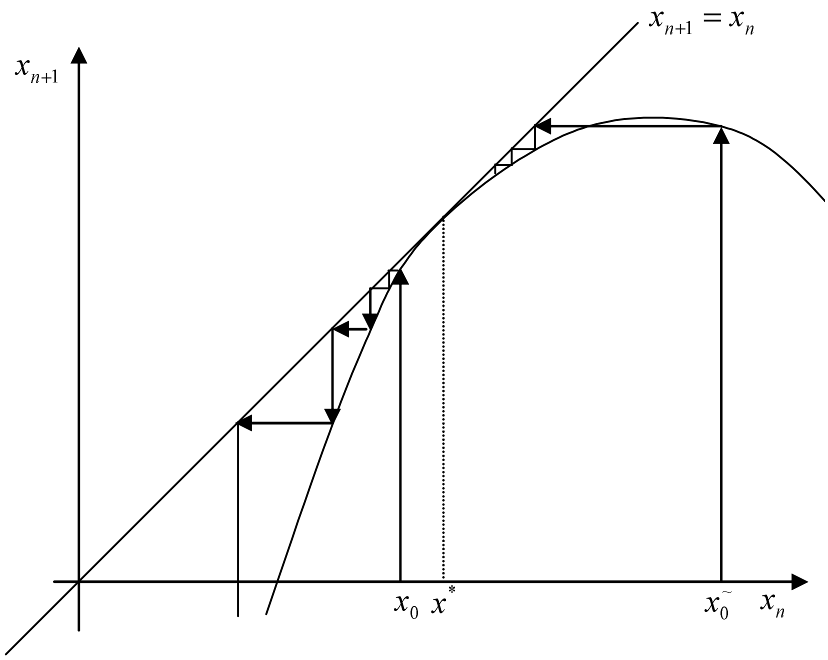

Figura 2.14: Instabilidade de x^* quando $f'(x^*) = 1$ e $f''(x^*) < 0$ (semi estável à direita)

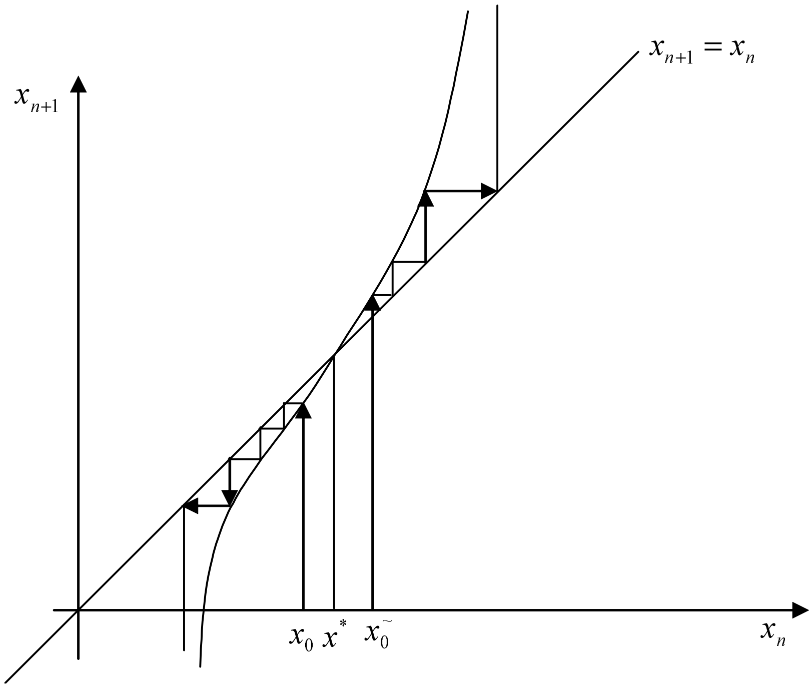

Figura 2.15: Instabilidade de x^* quando $f'(x^*) = 1$, $f''(x^*) = 0$ e $f'''(x^*) > 0$

Se $x > x^*$ vem que $x - x^* > 0$, pelo que $f(x) > x$ e assim a recta x está "abaixo" de $f(x)$, $\forall x \in]x^*, x^* + \varepsilon[$. Se $x < x^*$, então $f(x) < x$ e assim a recta x está "acima" de $f(x)$, $\forall x \in]x^* - \varepsilon, x^*[$. Em ambos os casos conclui-se instabilidade (Figura 2.15).

(c) Seja $f''(x^*) = 0$ e $f'''(x^*) < 0$. Por (2.26) se $x > x^*$ vem que $f(x) < x$ e portanto o gráfico de $f(x)$ está "abaixo" de x, $\forall x \in]x^*, x^* + \varepsilon[$ e se $x < x^*$ conclui-se que o gráfico de $f(x)$ está "acima" de x, $\forall x \in]x^* - \varepsilon, x^*[$. Em ambos os casos tem-se que x^* é assimptoticamente estável (Figura 2.16).

4. Suponha-se agora que $f'(x^*) = -1$ e considere-se a equação

$$y_{n+1} = g(y_n) \tag{2.27}$$

onde $g(y) = f(f(y))$. Observe-se que o ponto de equilíbrio x^* também é um ponto de equilíbrio de f^2, já que $f^2(x^*) = f(f(x^*)) = f(x^*) = x^*$ e assim o ponto de equilíbrio x^* de (2.24) também é ponto de equilíbrio de (2.27). Portanto, se x^* for um ponto de equilíbrio assimptoticamente estável (ou instável) na equação (2.27), então também é assimptoticamente estável (ou instável) na equação (2.24).

Usando a regra da cadeia, vem que

$$\frac{d}{dy} g(y) = \frac{d}{dy}[f(f(y))] = f'(f(y)) f'(y)$$

e assim

$$\frac{d}{dy} g(x^*) = f'(f(x^*)) f'(x^*) = [f'(x^*)] = (-1)^2 = 1$$

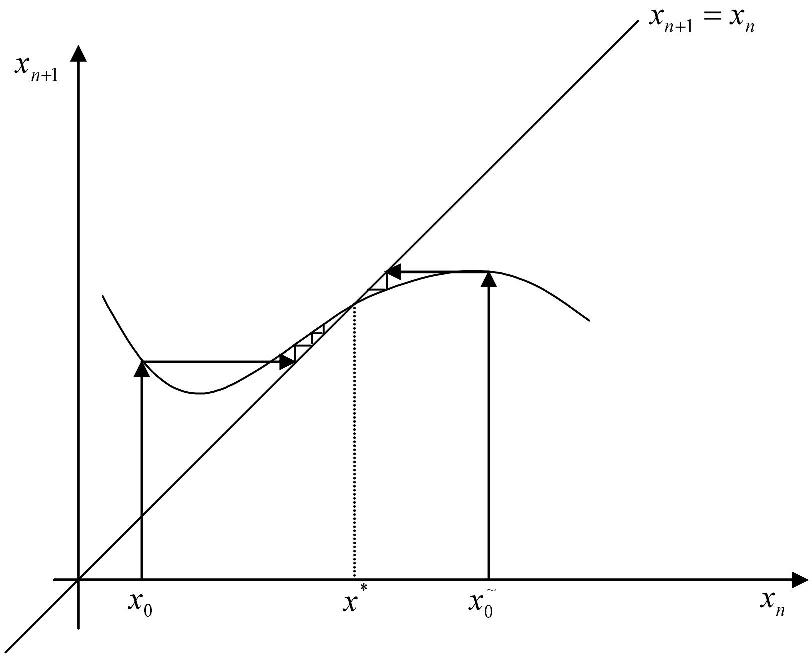

Figura 2.16: Estabilidade assimptótica de x^* quando $f'(x^*) = 1$, $f''(x^*) = 0$ e $f'''(x^*) < 0$

e portanto pode-se usar 3. Para tal tem-se de calcular $\frac{d^2}{dy^2}(g(x^*))$.

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dy^2}(g(y)) &= \frac{d}{dy}[f'(f(y))f'(y)] \\ &= f''(f(y))[f'(y)]^2 + f'(f(y))f''(y)\end{aligned}$$

Portanto

$$\frac{d^2}{dy^2}(g(x^*)) = f''(x^*)(-1)^2 + (-1)f''(x^*) = 0$$

Para se poder estabelecer o comportamento assimptótico de x^* tem-se que determinar o sinal da terceira derivada.

$$\begin{aligned}\frac{d^3}{dy^3}(g(y)) &= \frac{d}{dy}\left[f''(f(y))[f'(y)]^2 + f'(f(y))f''(y)\right] \\ &= f'''(f(y))[f'(y)]^3 + 3f''(f(y))f''(y)f'(y) + f'(f(y))f'''(y)\end{aligned}$$

e assim,

$$\frac{d^3}{dy^3}(g(x^*)) = -2f'''(x^*) - 3[f''(x^*)]^2$$

Portanto, se $-2f'''(x^*) - 3[f''(x^*)]^2 > 0$, então por 3.(b) x^* é instável e se $-2f'''(x^*) - 3[f''(x^*)]^2 < 0$ por 3.(c) x^* é assimptoticamente estável. ■

Exemplo 2.22 *Determine a estabilidade dos pontos de equilíbrio da equação* $x_{n+1} = \frac{\alpha x_n}{1+\beta x_n}$, $\alpha > 1$ *e* $\beta > 0$.

Solução. Seja $x_{n+1} = f(x)$ com $f(x) = \frac{\alpha x}{1+\beta x}$. Os pontos de equilíbrio da equação são 0 e $\frac{\alpha-1}{\beta}$. Como $f'(x) = \frac{\alpha}{(1+\beta x)^2}$ vem que $f'(0) = \alpha > 1$ e portanto $x^* = 0$ é instável e $f'\left(\frac{\alpha-1}{\beta}\right) = \frac{1}{\alpha} < 1$, logo $x^* = \frac{\alpha-1}{\beta}$ é um ponto de equilíbrio estável. ■

Por vezes surgem pontos de equilíbrio semi-estáveis, ou seja, o ponto de equilíbrio pode ser estável à direita (ou à esquerda) e ser instável à esquerda (ou à direita). Este conceito de estabilidade é expresso na seguinte definição.

Definição 2.23 *(Semi-estável) Um ponto de equilíbrio x^* da equação* (2.24) *diz-se semi--estável à direita se*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : x_0 > x^*, x_0 - x^* < \delta \Rightarrow x_n - x^* < \varepsilon$$

e semi-estável à esquerda se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : x_0 < x^*, x^* - x_0 < \delta \Rightarrow x^* - x_n < \varepsilon.$$

Teorema 2.24 *Seja x^* um ponto de equilíbrio da equação* (2.24) *tal que $f'(x^*) = 1$ e $f''(x^*) \neq 0$. Então:*

1. *x^* é semi-estável à direita se $f''(x^*) < 0$;*

2. *x^*é semi-estável à esquerda se $f''(x^*) > 0$.*

Prova. 1. Suponha-se que $f''(x^*) < 0$, então o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo. Seja $I =]x^*, x^* + \delta[$, $\delta > 0$ suficientemente pequeno. Como $f'(x^*) = 1$ e $f''(x^*) < 0$, então $f'(x) < 1$, $\forall x \in I$. Seja ainda $x_0 \in I$ e $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$, $\varepsilon > 0$. Tem-se que $x_0 - x^* < \delta$ e existe $\beta \in I$ tal que $x_1 - x^* < f'(\beta)(x_0 - x^*)$, ou seja, $x_1 - x^* < (x_0 - x^*)$. Mais geralmente, por indução, vem que $x_n - x^* < x_0 - x^*$, $\forall n > 0$. Assim,

$$x_n - x^* < x_0 - x^* < \delta = \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon,$$

ou seja,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \frac{\varepsilon}{3} : x_0 > x^*, x_0 - x^* < \delta \Rightarrow x_n - x^* < \varepsilon,$$

portanto x^* é semi-estável à direita (Figura 2.14).

2. Seguindo os mesmos argumentos da demostração do ponto precedente, considerando agora $I =]x^* - \delta, x^*[$, conclui-se que x^* é semi-estável à esquerda (Figura 2.13). ■

Exemplo 2.25 *Determine a estabilidade e semi-estabilidade dos pontos de equilíbrio da equação $x_{n+1} = x_n^3 + x_n^2 + x_n$.*

Solução. Seja $x_{n+1} = f(x_n)$ com $f(x) = x^3 + x^2 + x$. Os pontos de equilíbrio da equação $x_{n+1} = x_n^3 + x_n^2 + x_n$ são -1 e 0. Como $f'(x) = 3x^2 + 2x + 1$, então $f'(-1) = 2 > 1$ e pelo teorema 2.21 vem que $x^* = -1$ é instável. Tem-se que $f'(0) = 1$ e $f''(x) = 6x + 2$ pelo que $f''(0) = 2 \neq 0$ e assim, pelo ponto 3. do teorema 2.21, o ponto de equilíbrio é instável. Em relação à semi-estabilidade, apenas $f'(0) = 1$ e como $f''(0) > 0$, pelo teorema 2.24 o ponto de equilíbrio $x^* = 0$ é semi-estável à esquerda (Figura 2.17). ■

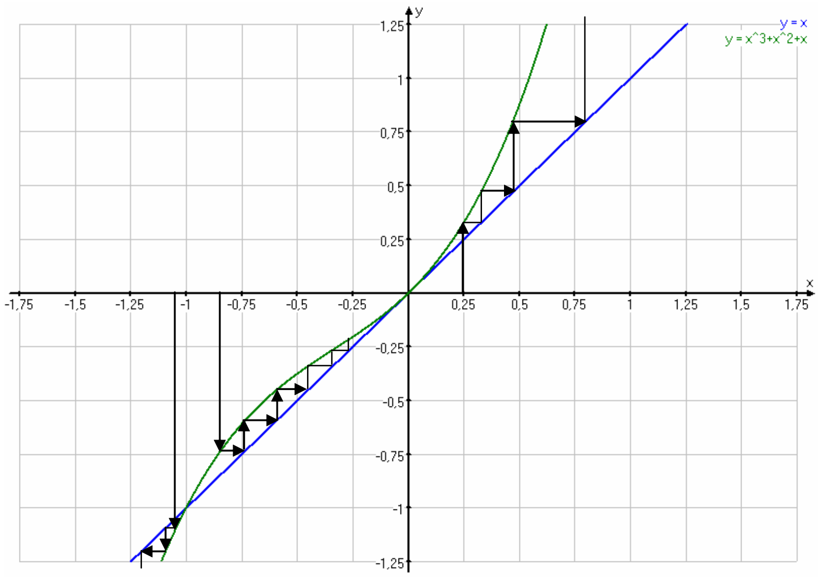

Figura 2.17: Semi-estabilidade à esquerda de $x^* = 0$

2.6.3 Órbitas periódicas

Definição 2.26 *Seja b um ponto do domínio de $f(x)$. Então:*

1. *b é um ponto periódico da equação* (2.24) *de período k (ou $k-$ periódico) se existe um inteiro k tal que $f^k(b) = b$. Portanto, o ponto é $k-$periódico se é um ponto fixo de f^k, ou seja, se é um ponto de equilíbrio da equação de diferenças*

$$x_{n+1} = g(x_n) \tag{2.28}$$

onde $g = f^k$. A órbita periódica de b, $O^+(b) = \{b, f(b), f^2(b), ..., f^{k-1}(b)\}$ é usualmente denominada por $k-$ciclo.

2. *b é eventualmente k-periódico se para algum inteiro positivo m, $f^m(b)$ é um ponto k-periódico, ou seja, b é eventualmente k-periódico se $f^{m+k}(b) = f^m(b)$.*

Graficamente, um ponto k-periódico é a abcissa do ponto onde o gráfico de f^k intersecta a bissectriz dos quadrantes ímpares. Na Figura 2.18 pode-se visualizar os pontos fixos de f e f^2 da equação $x_{n+1} = f(x_n)$ onde $f(x) = 3.4x(1-x)$ e $x_0 = 0.32$. Observa-se que f^2 tem quatro pontos fixos, sendo que dois destes são também de f. Assim, os dois pontos fixos de f^2, que não são pontos fixos de f formam um $2-$*ciclo*. Neste caso, o 2-*ciclo* é $\{0.45196, 0.84215\}$ já que $f(0.45196) = 0.84215$ e $f(0.84215) = 0.45196$, ou seja, $f^2(0.45196) = 0.45196$, portanto o ponto 0.45196 é 2-periódico. Também tem-se que 0.45196 é um ponto eventualmente 2-periódico, já que existe um inteiro $m = 1$ tal que $f^{1+2}(0.45196) = f(0.45196)$. Ao se construir o diagrama em teia de aranha de f^2, constata-se que $x_1^* = 0.45196$ e $x_2^* = 0.84215$ são pontos de equilíbrio assimptoticamente estáveis em relação a f^2 (Figura 2.19).

Na Figura 2.20 pode-se ver o gráfico de $g^3(x)$ onde $g(x) = 3.83x(1-x)$. Verifica--se que g^3 tem 5 pontos fixos, sendo que dois são os mesmos que os de g. Os 3 pontos fixos que não são pontos fixos de g formam um $3-$*ciclo*. Como $g(0.156149)$ =0.504666,

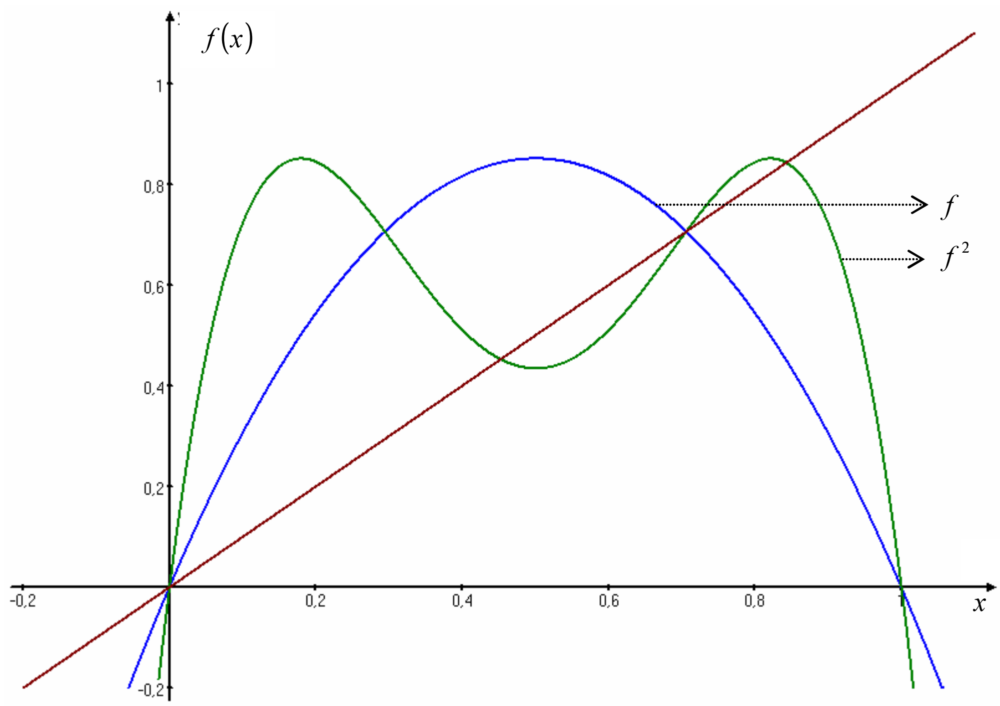

Figura 2.18: Pontos fixos de f e f^2 onde $f(x) = 3.4x(1-x)$

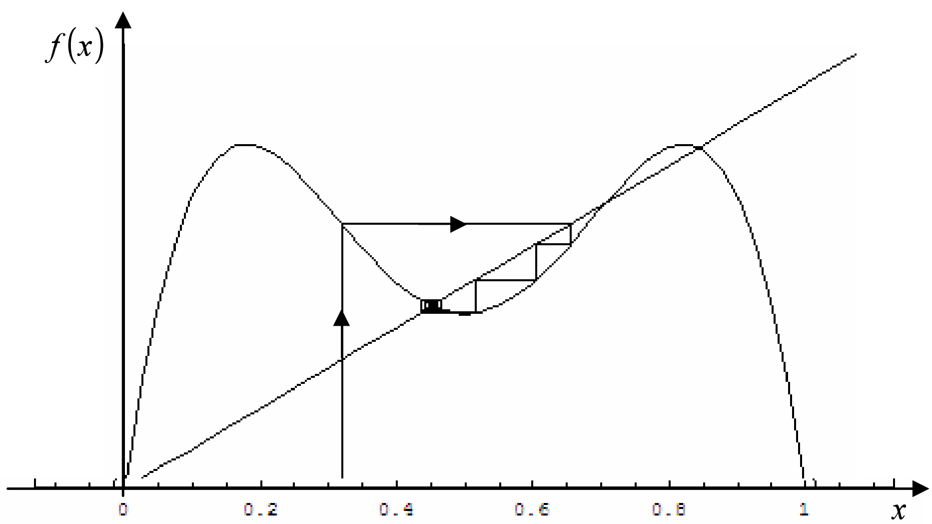

Figura 2.19: Estabilidade assimptótica de $x^* = 0,45196$ da função f^2 com $f(x) = 3.4x(1-x)$ e $x_0 = 0.3$

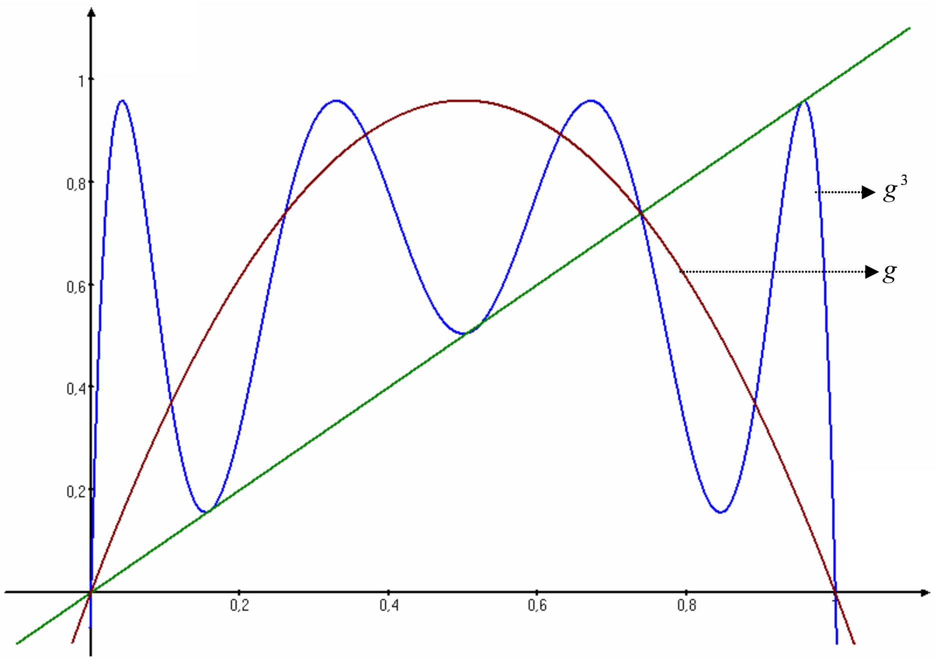

Figura 2.20: Pontos fixos g^3 com $g(x) = 3.83x(1-x)$

$g(0.504666)$ =0.957417 e $g(0.957417) = 0.156149$, então $\{0.156149, 0.504666, 0.957417\}$ é um $3-$*ciclo* relativamente a g.

Já se viu como determinar órbitas periódicas. Assim, o próximo passo será o de determinar se as mesmas são atractoras ou não. Para tal introduz-se em primeiro lugar a noção de estabilidade dos pontos periódicos.

Definição 2.27 *Seja b um ponto k-periódico de f. Então b é:*

1. *estável se é ponto fixo estável de f^k;*
2. *assimptoticamente estável (atractor) se é um ponto fixo atractor de f^k;*
3. *repelente se é um ponto fixo repelente de f^k.*

Note-se que a estabilidade de b determina a estabilidade de todos os pontos do $k-$*ciclo* $\left\{x_0 = b, x_1 = f(b), x_2 = f^2(b), ..., x_{k-1} = f^{k-1}(b)\right\}$. Assim o $2-$*ciclo* $\{0.45196, 0.84215\}$, relativamente à função $f(x) = 3.4x(1-x)$, é assimptoticamente estável, uma vez que, $x^* = 0.84215$ é assimptoticamente estável em relação a f^2.

Deste modo, para se estudar a estabilidade de um ponto k-periódico da equação (2.24) é sufuciente estudar a estabilidade do ponto de equilíbrio da equação (2.28) e aplicar o teorema 2.21 à função $g = f^k$.

Teorema 2.28 *Seja f uma função continuamente diferenciável e*

$$O^+(b) = \{b = x_0, x_1, x_2, ..., x_{k-1}\}$$

um $k-$ciclo de f. Então o $k-$ciclo $O^+(b)$ é:

1. *atractor se* $|f'(x_0) f'(x_1) \times ... \times f'(x_{k-1})| < 1$;
2. *repelente se* $|f'(x_0) f'(x_1) \times ... \times f'(x_{k-1})| > 1$.

Prova. Suponha-se que f é uma função continuamente diferenciável e $O^+(b)$ é um $k-$*ciclo* de f. Pela regra da cadeia tem-se que

$$\begin{aligned}
\left[f^k(x_0)\right]' &= \left[f\left(f^{k-1}(x_0)\right)\right]' = f'\left(f^{k-1}(x_0)\right)\left[f^{k-1}(x_0)\right]' \\
&= f'(x_{k-1}) f'\left(f^{k-2}(x_0)\right)\left[f^{k-2}(x_0)\right]' \\
&= f'(x_{k-1}) f'(x_{k-2}) f'\left(f^{k-3}(x_0)\right)\left[f^{k-3}(x_0)\right]' \\
&\vdots \\
&= f'(x_{k-1}) f'(x_{k-2}) ... f'(x_1) f'(x_0)
\end{aligned}$$

Pelo teorema 2.21 vem que se $|f'(x_0) f'(x_1) \times ... \times f'(x_{k-1})| < 1$, então $b = x_0$ é um ponto fixo atractor de f^k, ou seja, o $k-$*ciclo* $O^+(b)$ é atractor.

Se $|f'(x_0) f'(x_1) \times ... \times f'(x_{k-1})| > 1$ conclui-se que o $k-$*ciclo* $O^+(b)$ é repelente. ■

Exemplo 2.29 *Considere a aplicação logística* $F_\mu(x) = \mu x(1-x), \mu > 0$, $x \in [0,1]$. *Calcule o* $2-$*ciclo e determine a sua estabilidade.*

Solução. Para se encontrar um 2-ciclo resolve-se a equação $F_\mu^2(x) = x$. Assim tem-se

$$\mu F_\mu(x)(1 - F_\mu(x)) - x = 0$$

ou seja,

$$\mu^2 x(1-x)(1-\mu x(1-x)) - x = 0 \tag{2.29}$$

Esta equação tem 4 raízes, sendo que duas destas são os pontos de equilíbrio de F_μ. Assim, 0 e $\frac{\mu-1}{\mu}$ são soluções de (2.29). Deste modo, pode-se factorizar (2.29) dividindo a equação por $x\left(x - \frac{\mu-1}{\mu}\right)$. Assim, obtém-se

$$\frac{\mu^2(1-x)(1-\mu x(1-x)) - 1}{\mu x - \mu + 1} = 0$$

e, aplicando o algoritmo da divisão, vem que

$$-\mu^2 x^2 + \left(\mu^2 + \mu\right) x - (\mu + 1) = 0.$$

Os outros dois pontos de equilíbrio de F_μ^2 que não são de F_μ são então

$$\begin{aligned}
x_0 &= \frac{(\mu+1) - \sqrt{(\mu+1)(\mu-3)}}{2\mu} \\
x_1 &= \frac{(\mu+1) + \sqrt{(\mu+1)(\mu-3)}}{2\mu}
\end{aligned}$$

Note-se que $\sqrt{(\mu+1)(\mu-3)} \in \mathbb{R}$ sse $\mu \geq 3$. No caso $\mu = 3$ vem que $x_0 = x_1$ e portanto não se tem um $2-$*ciclo*. Assim, o $2-$*ciclo* $\{x_0, x_1\}$ existe para $\mu > 3$.
Do teorema 2.28 sabe-se que o $2-$*ciclo* é atractor se $\left|F_\mu'(x_0) F_\mu'(x_1)\right| < 1$.

$$F_\mu'(x_0) = -1 + \sqrt{(\mu+1)(\mu-3)} \text{ e } F_\mu'(x_1) = -1 - \sqrt{(\mu+1)(\mu-3)}$$

Donde

$$\left|F'_\mu(x_0)\, F'_\mu(x_1)\right| = |1-(\mu+1)(\mu-3)| = \left|-\mu^2+2\mu+4\right|$$

Assim

$$\begin{aligned}
\left|F'_\mu(x_0)\, F'_\mu(x_1)\right| &< 1 \Leftrightarrow -1 < -\mu^2+2\mu+4 < 1 \\
&\Leftrightarrow -\mu^2+2\mu+3 < 0 \wedge -\mu^2+2\mu+5 > 0 \\
&\Leftrightarrow \mu \in \left[(]-\infty,-1[\cup]3,+\infty[) \cap \left(\left]1-\sqrt{6},1+\sqrt{6}\right[\right)\right] \\
&\Leftrightarrow \mu \in \left]3, 1+\sqrt{6}\right[,\ \mu > 3
\end{aligned}$$

Para $\mu = 1+\sqrt{6}$ vem que

$$\left[F^2_\mu(x_0)\right]' = F'_\mu(x_0)\, F'_\mu(x_1) = -\left(1+\sqrt{6}\right)^2 + 2\left(1+\sqrt{6}\right) + 4 = -1$$

Tem-se então de aplicar o ponto 4. do teorema 2.21.

$$-2\left[F^2_\mu(x_0)\right]''' - 3\left[\left[F^2_\mu(x_0)\right]''\right]^2 = -2\times 8\mu^2 - 3\left[-2\mu^2(1-2x_1) - 2\mu^2(1-2x_0)\right]^2 < 0$$

Assim, quando $\mu = 1+\sqrt{6}$ o $2-ciclo$ é assimptoticamente estável.
Em resumo, tem-se então que o $2-ciclo$ $\{x_0, x_1\}$ é atractor se $3 < \mu \leq 1+\sqrt{6}$.
Pelo teorema 2.28 o $2-ciclo$ torna-se instável quando $\mu > 1+\sqrt{6}$, já que

$$\begin{aligned}
\left|F'_\mu(x_0)\, F'_\mu(x_1)\right| &> 1 \Leftrightarrow -\mu^2+2\mu+3 > 0 \vee -\mu^2+2\mu+5 < 0 \\
&\Leftrightarrow \mu \in]-1,3[\cup \left]-\infty, 1-\sqrt{6}\right[\cup \left]1+\sqrt{6},+\infty\right[\\
&\Leftrightarrow \mu \in \left]1+\sqrt{6},+\infty\right[
\end{aligned}$$

■

Capítulo 3

Equações de diferenças lineares de ordem superior

Neste capítulo estudam-se algumas técnicas essenciais à resolução de equações de diferenças lineares de ordem superior ou igual a 2.

Na Secção 3.1 apresenta-se a teoria fundamental para a resolução de equações de diferenças lineares de ordem superior. Na secção seguinte desenvolve-se o método de variação das constantes para determinar a solução particular de uma equação.

Na Secção 3.3 estuda-se a importante classe de equações lineares com coeficientes constantes. Para além de se apresentar a solução geral da equação completa, desenvolvem-se alguns métodos para determinar soluções particulares, nomeadamente, o método dos coeficientes indeterminados, o uso dos operadores Δ, e E e o método das funções geradoras.

Alguns tipos de equações lineares com coeficientes variáveis podem ser resolvidas analiticamente. Assim, na Secção 3.4 apresenta-se a resolução de algumas formas específicas de equações de diferenças.

Na Secção 3.5 estuda-se a estabilidade das soluções das equações com coeficientes constantes. Faz-se uma particularização deste estudo às equações de segunda ordem.

Por fim, na Secção 3.6 apresentam-se alguns exemplos de aplicações em que se usa a teoria desenvolvida nas secções anteriores para resolver equações relacionadas com casos concretos.

3.1 Resultados iniciais

Considere-se a equação de diferenças linear de ordem k dada por

$$x_{n+k} + f_1(n)\, x_{n+k-1} + ... + f_k(n)\, x_n = g(n) \tag{3.1}$$

onde $f_1(n), ..., f_k(n), g(n)$ são funções reais definidas em $\mathbb{Z}_0^+$. Note-se que não há perda de generalidade ao se considerar esta equação em vez da equação (1.16), pois como $f_0(n) \neq 0$, pode-se sempre, por divisão, obter uma equação equivalente, com o coeficiente de x_{n+k} igual a 1.

Quando $g(n) = 0$ tem-se que a equação homogénea associada é

$$x_{n+k} + f_1(n)\, x_{n+k-1} + ... + f_k(n)\, x_n = 0. \tag{3.2}$$

No Capítulo 1 viu-se que quando são dadas k condições, as equações (3.1) e (3.2) têm uma solução única (solução particular). Se não for dada nenhuma condição, a solução da equação de diferenças de ordem k dependerá de k constantes arbitrárias (solução geral).

Antes de se passar à determinação da solução das equações de diferenças lineares de ordem superior, abordam-se alguns conceitos, nomeadamente, o de dependência e/ou independência linear. Este conceito será importante na abordagem que se faz às soluções de uma equação de diferenças e está relacionado com o casoratiano de uma matriz, ou seja, com o determinante da matriz de Casorati de uma determinada sequência, como se verá adiante.

Definição 3.1 *Diz-se que as funções $f_1(n), f_2(n), ..., f_k(n)$ são linearmente independentes para $n \geq n_0$ sempre que para todos os $\alpha_1, ..., \alpha_k \in \mathbb{C}$, se $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i f_i(n) = 0$, então $\alpha_i = 0$, para todo $i = 1, 2, ..., k$. Se existir algum $\alpha_i \neq 0, i \in \{1, ..., k\}$ tal que $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i f_i(n) = 0$, então as funções dizem-se linearmente dependentes.*

Na prática, duas funções são linearmente dependentes se uma é múltipla da outra. Ou seja, $f_1(n)$ e $f_2(n)$ são linearmente dependentes se $f_1(n) = \alpha f_2(n)$, para algum $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

A equação (3.2) pode ter várias soluções particulares. Para se representar cada uma dessas soluções, usa-se a notação $x_{1,n}, x_{2,n}, ...$, onde o primeiro índice identifica uma diferente solução e o segundo índice representa a variável discreta independente, que em muitas situações se interpreta como sendo um tempo. Assim, representa-se o conjunto $\{x_{1,n}, x_{2,n}, ..., x_{k,n}\}$ como sendo um conjunto de k soluções particulares da equação (3.2).

Definição 3.2 *Diz-se que o conjunto $\{x_{1,n}, x_{2,n}, ..., x_{k,n}\}$ é um conjunto fundamental de soluções da equação* (3.2) *se $x_{1,n}, x_{2,n}, ..., x_{k,n}$ são k soluções linearmente independentes desta equação.*

Exemplo 3.3 *Mostre que $\{1, n, 2^n\}$ é um conjunto linearmente independente.*

Solução. É necessário provar que, para quaisquer constantes α_1, α_2 e α_3, da relação

$$\alpha_1 + \alpha_2 n + \alpha_3 2^n = 0 \tag{3.3}$$

sai que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Para se determinar as três incógnitas, são precisas mais duas equações. Estas duas equações podem ser obtidas por derivações sucessivas da relação (3.3) em ordem a n. Neste sentido, obtém-se as relações $\alpha_2 + \alpha_3 2^n \ln 2 = 0$ e $\alpha_3 2^n \ln^2 2 = 0$. Da última conclui-se que $\alpha_3 = 0$ e por substituição nas anteriores, conclui-se que (3.3) só é verdadeira para $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, logo o conjunto é linearmente independente. ■

Exemplo 3.4 *Mostre que $\{1, n, (-2)^n\}$ é um conjunto linearmente independente.*

Solução. Seja $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$. A equação

$$\alpha_1 + \alpha_2 n + \alpha_3 (-2)^n = 0 \tag{3.4}$$

não permite determinar o valor das três constantes α_1, α_2 e α_3. Também não se podem obter equações simples, como no exemplo anterior, por derivação em ordem a n. Sabendo que (3.4) terá de ser válida para qualquer n, pode-se substituir n por $n+1$ e por $n+2$, obtendo-se o sistema

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_1 + \alpha_2 n + \alpha_3 (-2)^n = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 (n+1) + \alpha_3 (-2)^{n+1} = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 (n+2) + \alpha_3 (-2)^{n+2} = 0 \end{array}\right. , \tag{3.5}$$

que resolvido em ordem a α_1, α_2 e α_3 origina $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Consequentemente, o conjunto dado é linearmente independente. ■

Note-se que, no caso de se ter um conjunto com muitas funções, a resolução de sistemas com recurso a técnicas de Álgebra Linear é mais simples e rápida que os métodos de eliminação e substituição.

No exemplo anterior, a matriz que caracteriza o sistema (3.5) é

$$K = \begin{bmatrix} 1 & n & (-2)^n \\ 1 & n+1 & (-2)^{n+1} \\ 1 & n+2 & (-2)^{n+2} \end{bmatrix}.$$

O sistema tem uma única solução se $|K| \neq 0$. Com efeito, $|K| = 9(-2)^n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}_0^+$, o que permite concluir a independência linear.

Definição 3.5 *Sejam $x_{1,n}, x_{2,n}, ..., x_{k,n}$ k soluções da equação* (3.2)*. A matriz de Casorati $K(n)$, de dimensão $k \times k$, da sequência de soluções é dada por*

$$K(n) = \begin{bmatrix} x_{1,n} & x_{2,n} & \cdots & x_{k,n} \\ x_{1,n+1} & x_{2,n+1} & \cdots & x_{k,n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1,n+k-1} & x_{2,n+k-1} & \cdots & x_{k,n+k-1} \end{bmatrix}.$$

Ao valor do determinante de $K(n)$ chama-se casoratiano e representa-se por $C(n)$.

Exemplo 3.6 *Determine o casoratiano da sequência de soluções 1,$(-2)^n$, 3^n,$(-4)^n$ da equação $x_{n+4} + 2x_{n+3} - 13x_{n+2} - 14x_{n+1} + 24x_n = 0$.*

Solução.

$$\begin{aligned} C(n) &= \begin{vmatrix} 1 & (-2)^n & 3^n & (-4)^n \\ 1 & (-2)^{n+1} & 3^{n+1} & (-4)^{n+1} \\ 1 & (-2)^{n+2} & 3^{n+2} & (-4)^{n+2} \\ 1 & (-2)^{n+3} & 3^{n+3} & (-4)^{n+3} \end{vmatrix} = (-2)^n 3^n (-4)^n \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & -8 & 27 & -64 \end{vmatrix} \\ &= -2^n 3^n 4^n \begin{vmatrix} 3 & -5 & 7 \\ -3 & -5 & -7 \\ 9 & -35 & 91 \end{vmatrix} = 7 \times 5^2 \times 3^{n+1} \times 2^{3n+2} \end{aligned}$$

■

O casoratiano de uma sequência de soluções de uma equação linear pode ser determinado pela fórmula de Abel. Para se obter esta fórmula, em primeiro lugar calcula-se o casoratiano para uma equação de ordem 3. Em seguida procede-se a uma generalização para uma equação de ordem k.

Sejam x_n, y_n e z_n três soluções linearmente independentes da equação

$$x_{n+3} + f_1(n)\,x_{n+2} + f_2(n)\,x_{n+1} + f_3(n)\,x_n = 0 \tag{3.6}$$

e $n \geq n_0$. Para esta sequência de soluções tem-se que

$$C(n) = \begin{vmatrix} x_n & y_n & z_n \\ x_{n+1} & y_{n+1} & z_{n+1} \\ x_{n+2} & y_{n+2} & z_{n+2} \end{vmatrix}$$

e, substituíndo n por $n+1$ vem

$$C(n+1) = \begin{vmatrix} x_{n+1} & y_{n+1} & z_{n+1} \\ x_{n+2} & y_{n+2} & z_{n+2} \\ x_{n+3} & y_{n+3} & z_{n+3} \end{vmatrix}$$

Escrevendo (3.6) na forma

$$x_{n+3} = -f_3(n)\,x_n - f_2(n)\,x_{n+1} - f_1(n)\,x_{n+2}$$

e substituíndo, para cada uma das soluções particulares, a terceira linha de $C(n+1)$ resulta

$$\begin{aligned} C(n+1) &= \begin{vmatrix} x_{n+1} & y_{n+1} & z_{n+1} \\ x_{n+2} & y_{n+2} & z_{n+2} \\ -f_3(n)\,x_n & -f_3(n)\,y_n & -f_3(n)\,z_n \end{vmatrix} \\ &+ \begin{vmatrix} x_{n+1} & y_{n+1} & z_{n+1} \\ x_{n+2} & y_{n+2} & z_{n+2} \\ -f_2(n)\,x_{n+1} & -f_2(n)\,y_{n+1} & -f_2(n)\,z_{n+1} \end{vmatrix} \\ &+ \begin{vmatrix} x_{n+1} & y_{n+1} & z_{n+1} \\ x_{n+2} & y_{n+2} & z_{n+2} \\ -f_1(n)\,x_{n+2} & -f_1(n)\,y_{n+2} & -f_1(n)\,z_{n+2} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Pelas propriedades dos determinantes vê-se que os dois últimos são nulos (basta pôr em evidência $-f_1$ e $-f_2$). O primeiro determinante, depois de se pôr em evidência $-f_3$ e trocar a primeira linha com a terceira obtém-se $C(n)$, ou seja,

$$C(n+1) = -f_3(n)\,(-1)^2\,C(n) = (-1)^3\,f_3(n)\,C(n) \tag{3.7}$$

Pode-se interpretar (3.7) como sendo uma equação de diferenças linear de primeira ordem, cuja solução tem a forma obtida em (2.3), ou seja, para $n \geq n_0$ é

$$C(n) = \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} (-1)^3\,f_3(i)\right] C(n_0) = (-1)^{3(n-n_0)} \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} f_3(i)\right] C(n_0)$$

Em geral, se $x_{1,n}, x_{2,n}, ..., x_{k,n}$ são k soluções linearmente independentes da equação (3.2), então o casoratiano desta sequência de soluções para $n \geq n_0$ é

$$C(n) = (-1)^{k(n-n_0)} \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} f_k(i)\right] C(n_0) \tag{3.8}$$

Para se estabelecer esta relação, note-se que

$$C(n+1) = \begin{vmatrix} x_{1,n+1} & x_{2,n+1} & \cdots & x_{k,n+1} \\ x_{1,n+2} & x_{2,n+2} & \cdots & x_{k,n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1,n+k} & x_{2,n+k} & \cdots & x_{k,n+k} \end{vmatrix}.$$

e que para cada $1 \leq i \leq k$ tem-se

$$x_{i,n+k} = -f_k(n)\, x_{i,n} - f_{k-1}(n)\, x_{i,n+1} - ... - f_1(n)\, x_{i,n+k-1}.$$

Ao se substituir esta relação na última linha do determinante e ao se aplicar as propriedades vem

$$\begin{aligned} C(n+1) &= \begin{vmatrix} x_{1,n+1} & x_{2,n+1} & \cdots & x_{k,n+1} \\ x_{1,n+2} & x_{2,n+2} & \cdots & x_{k,n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -f_k(n)\, x_{1,n} & -f_k(n)\, x_{2,n} & \cdots & -f_k(n)\, x_{k,n} \end{vmatrix} \\ &= -f_k(n)(-1)^{k-1} C(n). \end{aligned}$$

Ou seja,

$$C(n+1) = (-1)^k f_k(n)\, C(n), \tag{3.9}$$

que é uma equação linear de primeira ordem de solução (3.8).

A fórmula (3.8) para se determinar o casoratiano de um sistema de soluções é conhecida como fórmula de Abel. Assim, o processo precedente usado para determinar a fórmula de Abel é a demonstração do seguinte teorema.

Teorema 3.7 *(Fórmula de Abel) Sejam $x_{1,n}, x_{2,n}, ..., x_{k,n}$ k soluções linearmente independentes da equação* (3.2) *e $C(n)$ o seu respectivo casoratiano. Então para $n \geq n_0$*

$$C(n) = (-1)^{k(n-n_0)} \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} f_k(i) \right] C(n_0).$$

Quando a equação (3.2) tem coeficientes constantes e para $n_0 = 0$ o casoratiano é

$$C(n) = (-1)^{kn} [f_k(n)]^n\, C(0).$$

Então $C(n) \neq 0$ sempre que $C(0) \neq 0$. Esta ideia conduz ao seguinte resultado.

Corolário 3.8 *Suponha-se que $f_k(n) \neq 0$, $\forall n \geq n_0$, então $C(n) \neq 0$, $\forall n \geq n_0$ se e só se $C(n_0) \neq 0$.*

Prova. Pelo teorema 3.7 sabe-se que $C(n) = (-1)^{k(n-n_0)} \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} f_k(i) \right] C(n_0)$. Como por hipótese $f_k(n) \neq 0$, $\forall n \geq n_0$, então $\prod_{i=n_0}^{n-1} f_k(i) = f(n) \neq 0$, portanto, $C(n) = f(n)\, C(n_0)$ com $f(n) \neq 0$, $\forall n \geq n_0$. Daqui decorre que, sempre que $C(n) \neq 0$, então $C(n_0) \neq 0$ e vice-versa. ■

Da análise que se faz ao resultado precedente, uma condição suficiente para garantir que um conjunto de soluções seja linearmente indendente, é garantir que o seu casoratiano seja sempre diferente de 0. O seguinte teorema expressa esta ideia.

Teorema 3.9 *O conjunto de soluções* $\{x_{1,n}, x_{2,n}, ..., x_{k,n}\}$ *da equação* (3.2) *é um conjunto fundamental de soluções se e só se para algum* $n_0 \in \mathbb{Z}_0^+$, $C(n_0) \neq 0$.

Prova. ($\Longrightarrow$) Seja $\{x_{1,n}, x_{2,n}, ..., x_{k,n}\}$ um conjunto fundamental de soluções da equação (3.2). Então $x_{1,n}, x_{2,n}, ..., x_{k,n}$ são linearmente independentes, pelo que, $C(n) \neq 0$, $\forall n \geq n_0$, logo $\exists n_0 \in \mathbb{Z}_0^+$: $C(n_0) \neq 0$.

($\Longleftarrow$) Suponha-se que para algum $n_0 \in \mathbb{Z}_0^+$ se tem $C(n_0) \neq 0$. Pelo corolário 3.8 existe $n \geq n_0$ tal que $C(n) \neq 0$. Então pelas propriedades do determinante sai que $x_{1,n}, x_{2,n}, ..., x_{k,n}$ são soluções linearmente independentes. ■

Exemplo 3.10 *Prove que a sequência de soluções* $x_{1,n} = n$ *e* $x_{2,n} = n^2$ *é linearmente independente.*

Solução. $C(n) = \begin{vmatrix} n & n^2 \\ n+1 & (n+1)^2 \end{vmatrix} = n^2 + n \neq 0$, $\forall n \geq 1$. Logo $\exists n_0 \in \mathbb{Z}_0^+$: $C(n_0) \neq 0$ e assim conclui-se a independência linear. ■

Exemplo 3.11 *Considere a equação de diferenças de 4ª ordem dada por*

$$x_{n+4} + 2x_{n+3} - 3x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 0.$$

Prove que $\{1, n, (-2)^n, n(-2)^n\}$ *é um conjunto fundamental de soluções da equação.*

Solução. Em primeiro lugar tem-se de provar que a sequência dada é um conjunto de soluções da equação. Essa verificação é imediata pela substituição de cada sequência na equação dada. Para se afirmar que a sequência de soluções $1, n, (-2)^n$ e $n(-2)^n$ é linearmente independente, tem-se de provar que o casoratiano desta sequência de soluções é não nulo para algum $n_0 \in \mathbb{Z}_0^+$.

$$C(n) = \begin{vmatrix} 1 & n & (-2)^n & n(-2)^n \\ 1 & n+1 & (-2)^{n+1} & (n+1)(-2)^{n+1} \\ 1 & n+2 & (-2)^{n+2} & (n+2)(-2)^{n+2} \\ 1 & n+3 & (-2)^{n+3} & (n+3)(-2)^{n+3} \end{vmatrix}$$

Para $n = n_0 = 0$ vem que

$$C(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & -8 & -24 \end{vmatrix} = -162$$

logo pelo Teorema 3.9 o sistema de soluções é linearmente independente, ou seja, é um conjunto fundamental de soluções. ■

Falta garantir em que condições uma equação de diferenças linear de ordem k possui um sistema fundamental de soluções. Este é o conteúdo do teorema fundamental.

Teorema 3.12 *(Teorema fundamental) Se* $f_k(n) \neq 0$, $\forall n \geq n_0$, *então a equação* (3.2) *possui um sistema fundamental de soluções para* $n \geq n_0$.

Prova. O teorema da existência e unicidade da solução de uma equação linear de ordem k, abordado na Secção 1.4, garante que existem as soluções $x_{1,n}, x_{2,n}, ..., x_{k,n}$ a partir das condições iniciais $x_{i,n_0+i-1} = 1$, $x_{i,n_0} = x_{i,n_0+1} = ... = x_{i,n_0+i-2} = x_{i,n_0+i} = ... = x_{i,n_0+k-1} = 0$ com $1 \leq i \leq k$.

Assim, para cada i vem

$$\begin{cases} x_{1,n_0} = 1 \text{ e } x_{1,n_0+j} = 0 \text{ com } j = 1, ..., k-1 \\ x_{2,n_0+1} = 1 \text{ e } x_{2,n_0+j} = 0 \text{ com } j = 0, 2, ..., k-1 \\ x_{3,n_0+2} = 1 \text{ e } x_{2,n_0+j} = 0 \text{ com } j = 0, 1, 3, ..., k-1 \\ \vdots \\ x_{k,n_0+k-1} = 1 \text{ e } x_{k,n_0+j} = 0 \text{ com } j = 0, 1, ...k-2 \end{cases}$$

pelo que

$$C(n_0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & & \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \end{vmatrix} = |I| = 1.$$

Então pelo Teorema 3.9 o conjunto $\{x_{1,n}, x_{2,n}, ..., x_{k,n}\}$ é um conjunto fundamental de soluções da equação (3.2). ■

Considere-se S o conjunto de todas as soluções particulares da equação (3.2). O conjunto S tem uma estrutura de espaço vectorial sobre o corpo $\mathbb{k}$ ($\mathbb{k} = \mathbb{R}$ se as soluções são reais e $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ se as soluções são complexas), de dimensão k. Para se provar esta afirmação é necessário introduzir os seguintes lemas:

Lema 3.13 *Qualquer combinação linear de elementos de S pertence a S.*

Prova. Sejam $x_{1,n}, x_{2,n}, ..., x_{j,n} \in S$ e $\alpha_1, ..., \alpha_j \in \mathbb{k}$. Tem-se que

$$\begin{gathered} x_{1,n+k} + f_1(n)\, x_{1,n+k-1} + ... + f_k(n)\, x_{1,n} = 0 \\ x_{2,n+k} + f_1(n)\, x_{2,n+k-1} + ... + f_k(n)\, x_{2,n} = 0 \\ \vdots \\ x_{j,n+k} + f_1(n)\, x_{j,n+k-1} + ... + f_k(n)\, x_{j,n} = 0 \end{gathered}$$

Multiplicando a primeira equação por α_1, a segunda por α_2 e assim sucessivamente até à última que se multiplica por α_j, tem-se que

$$\begin{gathered} (\alpha_1 x_{1,n+k} + \alpha_2 x_{2,n+k} + ...\alpha_j x_{j,n+k}) + f_1(n)\,(\alpha_1 x_{1,n+k-1} + \alpha_2 x_{2,n+k-1} + ...\alpha_j x_{j,n+k-1}) + \\ ... + f_k(n)\,(\alpha_1 x_{1,n} + \alpha_2 x_{2,n} + ...\alpha_j x_{j,n}) = 0, \end{gathered}$$

ou seja, $\alpha_1 x_{1,n} + \alpha_2 x_{2,n} + ... + \alpha_j x_{j,n} \in S$. ■

Observação 3.14 *Uma das consequências que se pode tirar do lema anterior, é que se $x_{1,n}$ e $x_{2,n}$ forem duas soluções particulares de* (3.2) *e $\alpha, \beta \in \mathbb{k}$, então $\alpha x_{1,n} + \beta x_{2,n}$ também é uma solução particular da equação* (3.2).

Lema 3.15 *Se* $x_{1,n}, x_{2,n}, ..., x_{k,n}$ *são* k *soluções linearmente independentes da equação* (3.2), *então qualquer outra solução* $x_{k+1,n}$ *é linearmente dependente das soluções anteriores.*

Prova. Seja $x_{1,n}, x_{2,n}, ..., x_{k,n}$ k soluções linearmente independentes da equação (3.2) e suponha-se, com vista a um absurdo, que o conjunto $\{x_{1,n}, x_{2,n}, ..., x_{k,n}, x_{k+1,n}\}$ é ainda linearmente independente, com $x_{k+1,n}$ uma outra solução de (3.2). Então o casoratiano desta sequência de soluções é

$$C(n) = \begin{vmatrix} x_{1,n} & x_{2,n} & \cdots & x_{k,n} & x_{k+1,n} \\ x_{1,n+1} & x_{2,n+1} & \cdots & x_{k,n+1} & x_{k+1,n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_{1,n+k-1} & x_{2,n+k-1} & \cdots & x_{k,n+k-1} & x_{k+1,n+k-1} \\ x_{1,n+k} & x_{2,n+k} & \cdots & x_{k,n+k} & x_{k+1,n+k} \end{vmatrix}$$

Como para cada $1 \leq i \leq k+1$ tem-se

$$x_{i,n+k} = -f_k(n)\, x_{i,n} - f_{k-1}(n)\, x_{i,n+1} - ... - f_1(n)\, x_{i,n+k-1},$$

então substituindo na última linha de $C(n)$ cada valor de $x_{i,n+k}$ e aplicando as propriedades dos determinantes sai que $C(n) = 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}_0^+$. Então não existe nenhum $n_0 \in \mathbb{Z}_0^+$ tal que $C(n_0) \neq 0$, logo pelo teorema 3.9 o conjunto $\{x_{1,n}, x_{2,n}, ..., x_{k,n}, x_{k+1,n}\}$ não é linearmente dependente, o que contraria a hipótese. ■

Teorema 3.16 *O conjunto* S *de todas as soluções da equação* (3.2) *é um espaço vectorial sobre* $\mathbb{k}$, *de dimensão* k.

Prova. Usando o lema 3.13 prova-se que as propriedades de espaço vectorial são satisfeitas. Pelo teorema 3.12 a equação (3.2) possui um sistema fundamental de soluções para $n \geq n_0$, ou seja, possui k soluções linearmente independentes. O lema 3.15 garante que qualquer outra solução da equação pode ser expressa como combinação linear das sequências do sistema fundamental de soluções, pelo que $\dim(S) = k$. ■

Observação 3.17 *Se* $\{x_{1,n}, x_{2,n}, ..., x_{k,n}\}$ *for um sistema fundamental de soluções da equação* (3.2), *então a partir dos resultados anteriores sai que a solução geral de* (3.2) *é*

$$x_n = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_{i,n}$$

para constantes arbitrárias $\alpha_i \in \mathbb{k}$, $1 \leq i \leq k$.

Note-se que qualquer solução da equação (3.2) pode ser obtida a partir da solução geral escolhendo adequadamente as constantes α_i.

A estrutura de espaço vectorial de S garante que existem infinitos conjuntos fundamentais de soluções da equação (3.2). A solução geral da equação linear homogénea de ordem k, depende de k constantes arbitrárias. A unicidade de solução só é obtida após a imposição de k condições, obtendo-se assim uma solução particular.

Teorema 3.18 *Se* $x_{1,n}$ *e* $x_{2,n}$ *são soluções da equação* (3.1), *então* $x_{1,n} - x_{2,n}$ *é uma solução da equação* (3.2).

Prova. Por hipótese tem-se que

$$\begin{array}{c} x_{1,n+k} + f_1(n)\, x_{1,n+k-1} + ... + f_k(n)\, x_{1,n} = g(n) \\ x_{2,n+k} + f_1(n)\, x_{2,n+k-1} + ... + f_k(n)\, x_{2,n} = g(n) \end{array}$$

Ao se subtrair estas duas relações tem-se

$$(x_{1,n+k} - x_{2,n+k}) + f_1(n)\,(x_{1,n+k-1} - x_{2,n+k-1}) + ... + f_k(n)\,(x_{1,n} - x_{2,n}) = 0,$$

ou seja, $x_{1,n} - x_{2,n}$ é uma solução da equação (3.2). ■

A resolução da equação não homogénea (3.1) depende da resolução da equação homogénea (3.2) que lhe está associada, assim como da determinação de uma solução particular da equação completa, como se vê no seguinte resultado.

Teorema 3.19 *Se* $\{x_{1,n}, ..., x_{k,n}\}$ *é um sistema fundamental de soluções da equação* (3.2) *e* $x_{p,n}$ *é uma solução particular da equação* (3.1), *então a solução geral da equação* (3.1) *é dada por*

$$x_n = x_{p,n} + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_{i,n}$$

com $\alpha_i \in \mathbb{k}, 1 \leq i \leq k.$

Prova. Represente-se por x_n uma solução da equação (3.1). Pelo teorema 3.18, $x_n - x_{p,n}$ é solução da equação (3.2), logo $x_n - x_{p,n} \in S$. Pelo lema 3.15, $x_n - x_{p,n}$ pode ser expressa como combinação linear de $x_{1,n}, ..., x_{k,n}$, ou seja, $x_n - x_{p,n} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_{i,n}$ para $\alpha_i \in \mathbb{k}$ com $1 \leq i \leq k$. ■

Observação 3.20 *O teorema 3.19 diz que a solução geral da equação não homogénea* (3.1) *é* $x_n = x_{h,n} + x_{p,n}$, *onde* $x_{h,n}$ *é a solução geral da equação homogénea associada e* $x_{p,n}$ *uma solução particular da equação completa.*

3.2 Método de variação das constantes

Na secção anterior viu-se que a determinação da solução geral da equação (3.1) passa pela determinação de uma solução particular dessa equação. Esta determinação, feita por inspecção, pode ser uma tarefa simples ou complicada.

Essa solução particular de (3.1) pode ser determinada a partir da solução geral de (3.2) pelo método de variação das constantes.

A solução geral da equação (3.2) é

$$x_n = \sum_{j=1}^{k} c_j x_{j,n} \tag{3.10}$$

com $\{x_{1,n}, x_{2,n}, ..., x_{k,n}\}$ um sistema fundamental de soluções da equação (3.2) e $c_j \in \mathbb{k}$, $1 \leq j \leq k$.

Suponha-se a partir de agora que c_j, $1 \leq j \leq k$ são funções que dependem de n, ou seja, tem-se $c_j(n)$ onde $c_j(n_0) = c_j$ e exija-se que as funções

$$x_n = \sum_{j=1}^{k} c_j(n)\, x_{j,n} \tag{3.11}$$

satisfaçam a equação (3.1).

De (3.11) tem-se

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \sum_{j=1}^{k} c_j(n+1)\, x_{j,n+1} \\ &= \sum_{j=1}^{k} c_j(n)\, x_{j,n+1} + \sum_{j=1}^{k} \Delta c_j(n)\, x_{j,n+1}. \end{aligned}$$

Imponha-se que $\sum\limits_{j=1}^{k} \Delta c_j(n)\, x_{j,n+1} = 0$. Então

$$x_{n+1} = \sum_{j=1}^{k} c_j(n)\, x_{j,n+1}.$$

Daqui decorre que se $\sum\limits_{j=1}^{k} \Delta c_j(n)\, x_{j,n+2} = 0$, então

$$x_{n+2} = \sum_{j=1}^{k} c_j(n)\, x_{j,n+2}.$$

Deste modo, se se considerar que

$$\sum_{j=1}^{k} \Delta c_j(n)\, x_{j,n+i} = 0,\ \ i = 1, 2, ..., k-1 \tag{3.12}$$

vem que

$$x_{n+i} = \sum_{j=1}^{k} c_j(n)\, x_{j,n+i},\ \ i = 1, 2, ..., k-1 \tag{3.13}$$

Para o caso de $i = k$ tem-se

$$x_{n+k} = \sum_{j=1}^{k} c_j(n)\, x_{j,n+k} + \sum_{j=1}^{k} \Delta c_j(n)\, x_{j,n+k} \tag{3.14}$$

Substituíndo as identidades (3.13) e (3.14) na equação (3.1) e usando a notação $f_0(n) = 1$

resulta

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k} f_i(n)\, x_{n+k-i} &= x_{n+k} + \sum_{i=1}^{k} f_i(n)\, x_{n+k-i} \\
&= \sum_{j=1}^{k} \Delta c_j(n)\, x_{j,n+k} + f_0(n) \sum_{j=1}^{k} c_j(n)\, x_{j,n+k} \\
&\quad + \sum_{i=1}^{k} f_i(n) \sum_{j=1}^{k} c_j(n)\, x_{j,n+k-i} \\
&= \sum_{j=1}^{k} \Delta c_j(n)\, x_{j,n+k} + \sum_{i=0}^{k} f_i(n) \sum_{j=1}^{k} c_j(n)\, x_{j,n+k-i} \\
&= g(n)
\end{aligned}$$

Uma vez que $x_{j,n}$ é a solução da equação (3.2), então

$$\sum_{j=1}^{k} \Delta c_j(n)\, x_{j,n+k} = g(n). \tag{3.15}$$

As equações (3.12) e (3.15) formam o seguinte sistema de equações lineares com k incógnitas

$$\begin{cases}
\Delta c_1(n)\, x_{1,n+1} + \Delta c_2(n)\, x_{2,n+1} + ... + \Delta c_k(n)\, x_{k,n+1} = 0 \\
\Delta c_1(n)\, x_{1,n+2} + \Delta c_2(n)\, x_{2,n+2} + ... + \Delta c_k(n)\, x_{k,n+2} = 0 \\
\vdots \\
\Delta c_1(n)\, x_{1,n+k-1} + \Delta c_2(n)\, x_{2,n+k-1} + ... + \Delta c_k(n)\, x_{k,n+k-1} = 0 \\
\Delta c_1(n)\, x_{1,n+k} + \Delta c_2(n)\, x_{2,n+k} + ... + \Delta c_k(n)\, x_{k,n+k} = g(n)
\end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{pmatrix} x_{1,n+1} & x_{2,n+1} & \cdots & x_{k,n+1} \\ x_{1,n+2} & x_{2,n+2} & \cdots & x_{k,n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1,n+k} & x_{2,n+k} & \cdots & x_{k,n+k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta c_1(n) \\ \Delta c_2(n) \\ \vdots \\ \Delta c_k(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g(n) \end{pmatrix}.$$

Como $\{x_{1,n}, x_{2,n}, ..., x_{k,n}\}$ é um conjunto fundamental de soluções, a matriz dos coeficientes é a matriz de Casorati $K(n+1)$, pelo que $C(n+1) \neq 0$, e assim a solução do sistema é

$$\begin{pmatrix} \Delta c_1(n) \\ \Delta c_2(n) \\ \vdots \\ \Delta c_k(n) \end{pmatrix} = K^{-1}(n+1) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g(n) \end{pmatrix}.$$

Denotando por $M_{ik}(n+1)$ o elemento da linha i e coluna k da matriz adjunta da matriz $K(n+1)$ vem que

$$\Delta c_i(n) = \frac{M_{ik}(n+1)}{C(n+1)} g(n), \; i = 1, 2, ..., k \tag{3.16}$$

A resolução da equação (3.16) poderá ser feita de duas formas diferentes.

1. Aplicando Δ^{-1} a ambos os membros resulta

$$c_i(n) = \Delta^{-1}\left(\frac{M_{ik}(n+1)}{C(n+1)}g(n)\right) + w_i, \;\; c_i(n_0) = c_i$$

   onde w_i é uma constante.

2. Como $\Delta c_i(n) = c_i(n+1) - c_i(n)$ vem que a equação (3.16) é equivalente

$$c_i(n+1) - c_i(n) = \frac{M_{ik}(n+1)}{C(n+1)}g(n), \;\; i = 1, 2, ..., k$$

   que é uma equação linear de primeira ordem. De (2.4) sabe-se que a solução é

$$c_i(n) = c_i(0) + \sum_{q=0}^{n-1} \frac{M_{ik}(q+1)}{C(q+1)}g(q)$$

Se se substituir os valores de $c_i(n)$ em (3.11) sai que a expressão resultante satisfaz (3.1). Como se conhece a solução geral de (3.2), então a solução particular da equação (3.1) é a expressão remanescente.

Exemplo 3.21 *Sabendo que a solução geral da equação homogénea associada à equação* $x_{n+2} + 8x_{n+1} + 7x_n = e^n$ *é* $x_{h,n} = c_1(-1)^n + c_2(-7)^n$, *determine a solução particular usando o método de variação da constante.*

Solução. Suponha-se que c_1 e c_2 são funções de n com $c_1(0) = c_1$ e $c_2(0) = c_2$ tais que $x_n = c_1(n)(-1)^n + c_2(n)(-7)^n$ satisfaz a equação dada.

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= c_1(n+1)(-1)^{n+1} + c_2(n+1)(-7)^{n+1} \\ &= c_1(n)(-1)^{n+1} + c_2(n)(-7)^{n+1} + \Delta c_1(n)(-1)^{n+1} + \Delta c_2(n)(-7)^{n+1} \end{aligned}$$

Impondo

$$\Delta c_1(n)(-1)^{n+1} + \Delta c_2(n)(-7)^{n+1} = 0$$

resulta

$$x_{n+1} = c_1(n)(-1)^{n+1} + c_2(n)(-7)^{n+1}. \tag{3.17}$$

$$x_{n+2} = c_1(n)(-1)^{n+2} + c_2(n)(-7)^{n+2} + \Delta c_1(n)(-1)^{n+2} + \Delta c_2(n)(-7)^{n+2} \tag{3.18}$$

Substituindo estas duas identidades na equação dada resulta

$$\Delta c_1(n)(-1)^{n+2} + \Delta c_2(n)(-7)^{n+2} = e^n.$$

Daqui decorre o seguinte sistema

$$\begin{cases} \Delta c_1(n)(-1)^{n+1} + \Delta c_2(n)(-7)^{n+1} = 0 \\ \Delta c_1(n)(-1)^{n+2} + \Delta c_2(n)(-7)^{n+2} = e^n \end{cases}$$

que na forma matricial é

$$\begin{pmatrix} (-1)^{n+1} & (-7)^{n+1} \\ (-1)^{n+2} & (-7)^{n+2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta c_1(n) \\ \Delta c_2(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^n \end{pmatrix}$$

e cuja solução é dada por

$$\begin{pmatrix} \Delta c_1(n) \\ \Delta c_2(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^{n+1} & (-7)^{n+1} \\ (-1)^{n+2} & (-7)^{n+2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ e^n \end{pmatrix}.$$

A matriz adjunta da matriz $K(n+1)$ é

$$adj\,(K(n+1)) = \begin{pmatrix} (-7)^{n+2} & -(-1)^{n+2} \\ -(-7)^{n+1} & (-1)^{n+1} \end{pmatrix}^T$$

e $C(n+1) = -6 \times 7^{n+1}$ pelo que

$$\begin{pmatrix} \Delta c_1(n) \\ \Delta c_2(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{6}(-1)^n & -\frac{1}{6}(-1)^n \\ \frac{1}{42(-7)^n} & \frac{1}{42(-7)^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ e^n \end{pmatrix}.$$

Daqui decorre que $\Delta c_1(n) = -\frac{(-e)^n}{6}$ e $\Delta c_2(n) = \frac{1}{42}\left(-\frac{e}{7}\right)^n$. Assim,

$$c_1(n) = -\frac{1}{6}\Delta^{-1}(-e)^n + w_1 = -\frac{1}{6}\sum_{i=0}^{n-1}(-e)^i + w_1 = \frac{(-e)^n - 1}{6(e+1)} + w_1$$

e

$$c_2(n) = \frac{1}{42}\sum_{i=0}^{n-1}\left(-\frac{e}{7}\right) + w_2 = -\frac{1}{6(e+7)}\left(\left(-\frac{e}{7}\right)^n - 1\right) + w_2.$$

Deste modo a solução geral da equação dada é

$$\begin{aligned} x_n &= \left[\frac{(-e)^n - 1}{6(e+1)} + w_1\right](-1)^n + \left[-\frac{1}{6(e+7)}\left(\left(-\frac{e}{7}\right)^n - 1\right) + w_2\right](-7)^n \\ &= \frac{e^n}{(e+1)(e+7)} + \frac{(-1)^{n+1}}{6(e+1)} + \frac{(-7)^n}{6(e+7)} + w_1(-1)^n + w_2(-7)^n \end{aligned}$$

Como a solução geral da equação homogénea associada é $x_{h,n} = c_1(-1)^n + c_2(-7)^n$, então a solução particular é $x_{p,n} = \frac{e^n}{(e+1)(e+7)} + \frac{(-1)^{n+1}}{6(e+1)} + \frac{(-7)^n}{6(e+7)}$. ■

Exemplo 3.22 *Determine a solução particular da equação* $x_{n+3} + 3x_{n+2} + 3x_{n+1} + x_n = 2^n$ *com* $x_0 = 1$, $x_1 = -1$ *e* $x_2 = 2$ *sabendo que* $x_{h,n} = (c_1 + c_2 n + c_3 n^2)(-1)^n$.

Solução. Suponha-se que $c_1(n)$, $c_2(n)$ e $c_3(n)$ tais que

$$x_n = \left(c_1(n) + c_2(n)\,n + c_3(n)\,n^2\right)(-1)^n$$

é solução da equação dada. Calculando x_{n+1}, x_{n+2} e x_{n+3} e fazendo as imposições exigidas resulta o sistema

$$\begin{cases} \left(\Delta c_1(n) + \Delta c_2(n)(n+1) + \Delta c_3(n)(n+1)^2\right)(-1)^{n+1} = 0 \\ \left(\Delta c_1(n) + \Delta c_2(n)(n+2) + \Delta c_3(n)(n+2)^2\right)(-1)^{n+2} = 0 \\ \left(\Delta c_1(n) + \Delta c_2(n)(n+3) + \Delta c_3(n)(n+3)^2\right)(-1)^{n+3} = 2^n \end{cases}$$

que na forma matricial é

$$\begin{pmatrix} 1 & n+1 & (n+1)^2 \\ 1 & n+2 & (n+2)^2 \\ 1 & n+3 & (n+3)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta c_1(n) \\ \Delta c_2(n) \\ \Delta c_3(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -(-2)^n \end{pmatrix}.$$

Calculando a matriz inversa vem

$$\begin{pmatrix} \Delta c_1(n) \\ \Delta c_2(n) \\ \Delta c_3(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}n^2 + \frac{5}{2}n + 3 & -n^2 - 4n - 3 & \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 1 \\ -n - \frac{5}{2} & 2n+4 & -n - \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -(-2)^n \end{pmatrix}$$

Daqui resulta as equações

$$\begin{aligned} \Delta c_1(n) &= -\left(\frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 1\right)(-2)^n \\ \Delta c_2(n) &= \left(n + \frac{3}{2}\right)(-2)^n \\ \Delta c_3(n) &= -\frac{1}{2}(-2)^n \end{aligned}$$

cujas soluções são

$$\begin{aligned} c_1(n) &= \left(\frac{1}{27} + \frac{5}{18}n + \frac{1}{6}n^2\right)(-2)^n + w_1 \\ c_2(n) &= \left(-\frac{1}{3}n - \frac{5}{18}\right)(-2)^n + w_2 \\ c_3(n) &= \frac{1}{6}(-2)^n + w_3 \end{aligned}$$

Assim, $x_n = (w_1 + w_2 n + w_3 n^2)(-1)^n + \frac{2^n}{27}$, pelo que $x_{p,n} = \frac{2^n}{27}$. ∎

3.3 Equações com coeficientes constantes

Quando os coeficientes $f_i(n)$ da equação (3.1) são todos constantes, obtém-se uma importante classe de equações de diferenças - as equações com coeficientes constantes.

Considere-se a equação de diferenças de ordem k

$$x_{n+k} + p_1 x_{n+k-1} + p_2 x_{n+k-2} + \dots + p_k x_n = g(n) \tag{3.19}$$

onde $p_1, \dots, p_k$ são constantes com $p_k \neq 0$. Pode-se reescrever a equação (3.19) na forma

$$\sum_{i=0}^{k} p_i x_{n+k-i} = g(n), \ p_0 = 1. \tag{3.20}$$

A sua correspondente equação homogénea é

$$\sum_{i=0}^{k} p_i x_{n+k-i} = 0. \tag{3.21}$$

O objectivo é encontrar um conjunto fundamental de soluções da equação (3.21) e obviamente determinar a sua solução geral. Depois de se saber a solução geral da equação homogénea, pode-se aplicar o método de variação da constante ou outro (o método dos coeficientes indeterminados, como se verá mais à frente) para determinar uma solução particular da equação (3.20) e consequentemente a sua solução geral.

3.3.1 Solução geral da equação completa

Começa-se esta discusão sobre a solução da equação com coeficientes constantes por procurar soluções da equação (3.21) na forma $x_n = \lambda^n$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Substituindo λ^n na equação (3.21) vê-se que o problema se reduz à resolução da equação algébrica

$$\lambda^k + p_1\lambda^{k-1} + p_2\lambda^{k-2} + ... + p_k = 0 \tag{3.22}$$

Pelo Teorema Fundamental da Álgebra, esta equação tem k raízes não nulas

Definição 3.23 *Diz-se que o polinómio* $\lambda^k + p_1\lambda^{k-1} + p_2\lambda^{k-2} + ... + p_k$ *é o polinómio característico da equação* (3.21)*. À equação* (3.22) *chama-se equação característica da equação* (3.21)*. As soluções* $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ *da equação característica são conhecidas como raízes características.*

Teorema 3.24 *Se as raízes características* $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ *são todas distintas, então o conjunto* $\{\lambda_1^n, \lambda_2^n, ..., \lambda_k^n\}$ *é um conjunto fundamental de soluções.*

Prova. Pelo teorema 3.9 sabe-se que $\{\lambda_1^n, \lambda_2^n, ..., \lambda_k^n\}$ é um conjunto fundamental de soluções sse $C(0) \neq 0$, onde $C(n)$ é o determinante da matriz de Casorati $K(n)$.

$$K(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_k \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_k^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-2} & \cdots & \lambda_k^{k-1} \end{pmatrix}$$

Esta matriz é conhecida como matriz de Vandermonde e o seu respectivo determinante $C(0)$ como determinante de Vandermonde. Neste caso

$$C(0) = \prod_{1 \leq i < j \leq k} (\lambda_j - \lambda_i)$$

Como por hipótese $\lambda_i \neq \lambda_j$, $\forall i \neq j$, então $C(0) \neq 0$, pelo que o conjunto $\{\lambda_1^n, \lambda_2^n, ..., \lambda_k^n\}$ é um conjunto fundamental de soluções. ■

Observação 3.25 *Pelos teoremas 3.24 e 3.16 conclui-se que o conjunto fundamental de soluções* $\{\lambda_1^n, \lambda_2^n, ..., \lambda_k^n\}$ *forma uma base de dimensão* k *do conjunto* S *de todas as soluções da equação* (3.21)*, pelo que, a sua solução geral é*

$$x_{h,n} = \sum_{i=1}^{k} c_i \lambda_i^n, \; c_i \in \mathbb{C}. \tag{3.23}$$

Usando a propriedade $E^k x_n = x_{n+k}, k \in \mathbb{N}$ (teorema 1.5) pode-se escrever a equação de diferenças completa de ordem k com coeficientes constantes à custa do operador E. Para esta propriedade, a equação (3.19) assume a forma

$$\left(E^k + p_1E^{k-1} + p_2E^{k-2} + ... + p_{k-1}E + p_k\right) x_n = g(n) \tag{3.24}$$

Denotando o operador polinomial por $f(E)$ vem

$$f(E)\,x_n = g(n) \tag{3.25}$$

Já se viu que a solução geral da equação homogénea associada ($f(E)\,x_n = 0$) é determinada à custa das raízes características, ou seja, das soluções da equação $f(\lambda) = 0$. Como esta equação tem grau k vem que

$$f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\ldots(\lambda - \lambda_k)$$

e assim

$$f(E) = (E - \lambda_1)(E - \lambda_2)\ldots(E - \lambda_k)$$

Os factores $(E - \lambda_i)$ comutam, já que, por exemplo

$$\begin{aligned}(E-a)(E-b)\,x_n &= (E-a)(x_{n+1} - bx_n) = x_{n+2} - bx_{n+1} - ax_{n+1} + abx_n \\ (E-b)(E-a)\,x_n &= (E-b)(x_{n+1} - ax_n) = x_{n+2} - ax_{n+1} - bx_{n+1} + abx_n\end{aligned}$$

Assim, a equação reduzida assume a forma

$$(E - \lambda_1)(E - \lambda_2)\ldots(E - \lambda_k)\,x_n = 0 \tag{3.26}$$

Como cada factor $(E - \lambda_i)$ comuta, então cada um contribui para a solução x_n. Assim, a solução de $(E - \lambda_i)\,x_n = 0$ é uma solução particular de (3.26). O mesmo acontece se uma raíz λ_j tem multiplicidade m_j. Neste caso, o factor $(E - \lambda_j)^{m_j}$ também contribui para a solução de x_n. Deste modo, pode-se escrever (3.26) na forma

$$h(E)\,(E - \lambda_j)^{m_j}\,x_n = 0$$

Daqui decorre que as soluções de $(E - \lambda_j)^{m_j}\,x_n = 0$ são soluções da equação (3.26).

No teorema 3.24 supôs-se que as raízes características eram todas diferentes, ou seja, tinham todas multiplicidade 1. Suponha-se agora que as raízes características não são todas distintas. Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ raízes características com multiplicidade $m_1, m_2, \ldots, m_r$, respectivamente. Neste caso, pode-se escrever a equação (3.21) na forma

$$(E - \lambda_1)^{m_1}(E - \lambda_2)^{m_2}\ldots(E - \lambda_r)^{m_r}\,x_n = 0 \tag{3.27}$$

Assim, as soluções de

$$(E - \lambda_i)^{m_i}\,x_n = 0 \tag{3.28}$$

são soluções da equação (3.27). Para se determinar a solução de (3.27) tem-se de encontrar um conjunto fundamental de soluções da equação (3.28), $1 \le i \le r$.

Teorema 3.26 *O conjunto* $G_i = \{\lambda_i^n, n\lambda_i^n, n^2\lambda_i^n, \ldots, n^{m_i-1}\lambda_i^n\}$ *é um conjunto fundamental de soluções de* (3.28).

Prova. Em primeiro lugar prova-se que $n^q\lambda_i^n$, $0 \le q \le m_i - 1$ é solução de (3.28). Pelo teorema 1.14 sabe-se que

$$\begin{aligned}(E - \lambda_i)^{m_i}(n^q\lambda_i^n) &= \lambda_i^n(\lambda_i E - \lambda_i)^{m_i}\,n^q \\ &= \lambda_i^{n+m_i}(E - I)^{m_i}\,n^q \\ &= \lambda_i^{n+m_i}\Delta^{m_i}n^q \\ &= 0, \text{ pelo teorema 1.11, uma vez que } m_i > q\end{aligned}$$

Como $\lambda_i \neq 0$, então o conjunto G_i é linearmente independente se o conjunto $\{1, n, n^2, ..., n^{m_i-1}\}$ for linearmente independente. Seja $n \geq n_0$ e $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{m_i}$ constantes não nulas. Da relação $\alpha_1 1 + \alpha_2 n + ...\alpha_{m_i} n^{m_i-1} = 0$ sai que $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_{m_i} = 0$, pelo que, o conjunto $\{1, n, n^2, ..., n^{m_i-1}\}$ é linearmente independente e portanto G_i é um conjunto fundamental de soluções. ■

Já se sabe como determinar a solução de (3.28). Para calcular a solução geral de (3.27) também se tem de encontar um conjunto fundamental de soluções. É o conteúdo do seguinte teorema.

Teorema 3.27 *O conjunto* $G = \bigcup_{i=1}^{r} G_i$ *é um conjunto fundamental de soluções da equação* (3.27).

Prova. Tem-se que o conjunto G é dado por

$$\{\lambda_1^n, \lambda_2^n, ..., \lambda_r^n, n\lambda_1^n, n\lambda_2^n, ..., n\lambda_k^n, n^2\lambda_1^n, n^2\lambda_2^n, ..., n^2\lambda_k^n, ... \\ n^{m_1-1}\lambda_1^n, n^{m_2-1}\lambda_2^n, ..., n^{m_r-1}\lambda_k^n\}$$

É necessário provar que para cada i, $1 \leq i \leq r$ a expressão $n^q\lambda_i^n$, $0 \leq q \leq m_i - 1$ é solução da equação (3.27). Seja $i = 1$ (para os outros valores de i é análogo). Substituindo a expressão $n^q\lambda_1^n$ na equação (3.27) vem

$$(E - \lambda_1)^{m_1} (E - \lambda_2)^{m_2} ... (E - \lambda_r)^{m_r} n^q\lambda_1^n$$

e pela comutatividade dos factores resulta

$$\begin{aligned}(E - \lambda_2)^{m_2} ... (E - \lambda_r)^{m_r} (E - \lambda_1)^{m_1} n^q\lambda_1^n &= (E - \lambda_2)^{m_2} ... (E - \lambda_r)^{m_r} \lambda_1^n (E\lambda_1 - \lambda_1)^{m_1} n^q \\ &= (E - \lambda_2)^{m_2} ... (E - \lambda_r)^{m_r} \lambda_1^{n+m_1} \Delta^{m_1} n^q \\ &= 0, \text{ pois } m_1 > q\end{aligned}$$

Em relação à independência linear basta ver que da relação

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i^n \left(\alpha_{i,0} + \alpha_{i,1}n + \alpha_{i,2}n^2 + ... + \alpha_{i,m_i-1}n^{m_i-1}\right) = 0$$

sai que $\alpha_{i,j} = 0$, $1 \leq i \leq r$, $0 \leq j \leq m_i - 1$. ■

Corolário 3.28 *A solução geral da equação* (3.27) *é*

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i^n \left(\alpha_{i,0} + \alpha_{i,1}n + \alpha_{i,2}n^2 + ... + \alpha_{i,m_i-1}n^{m_i-1}\right) \tag{3.29}$$

onde $\alpha_{i,j} \in \mathbb{k}$.

Prova. Usando a definição 3.17 e o teorema 3.26 sai que

$$\lambda_i^n \left(\alpha_{1,0} + \alpha_{1,1}n + \alpha_{1,2}n^2 + ... + \alpha_{1,m_i-1}n^{m_i-1}\right)$$

é a solução geral de (3.28) e consequentemente uma solução de (3.27). Novamente, usando a definição 3.17 e o teorema 3.27 vem que

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i^n \left(\alpha_{i,0} + \alpha_{i,1}n + \alpha_{i,2}n^2 + ... + \alpha_{i,m_i-1}n^{m_i-1}\right)$$

é a solução geral de (3.27). ■

Observação 3.29 *(Raízes características complexas) Suponha-se que ao se determinar as raízes características da equação* $x_{n+2} + p_1 x_{n+1} + p_2 x_n = 0$ *obtém-se um par de raízes complexas conjugadas* $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ *e* $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ *com* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. *Neste caso a solução geral da equação é*

$$x_n = c_1 (\alpha + i\beta)^n + c_2 (\alpha - i\beta)^n, \; c_1, c_2 \in \mathbb{C} \tag{3.30}$$

Pela fórmula de Moivre resulta

$$\begin{aligned} x_n &= c_1 [\rho^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)] + c_2 [\rho^n (\cos n\theta - i \sin n\theta)] \\ &= \rho^n [(c_1 + c_2) \cos n\theta + i (c_1 - c_2) \sin n\theta] \end{aligned}$$

com $\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ *e* $\theta = \arctan\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$. *Suponha-se sem perda de generalidade que* $\overline{c_1} = c_2$. *Substituindo vem*

$$\begin{aligned} x_n &= \rho^n [(c_1 + \overline{c_1}) \cos n\theta + i (c_1 - \overline{c_1}) \sin n\theta] \\ &= \rho^n [k_1 \cos n\theta + k_2 \sin n\theta] \end{aligned}$$

com $k_1 = c_1 + \overline{c_1} \in \mathbb{R}$ *e* $k_2 = i (c_1 - \overline{c_1}) \in \mathbb{R}$.

Exemplo 3.30 *Resolva a equação* $x_{n+6} - 10x_{n+4} - 20x_{n+3} + 5x_{n+2} + 132x_{n+1} + 180x_n = 0$.

Solução. As raízes características são $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -2$ com multiplicidade 2, $\lambda_3 = -1 + 2i$ e $\lambda_4 = -1 - 2i$. Para as raízes complexas tem-se $\rho = \sqrt{5}$ e $\theta = -\arctan 2$. Assim, a solução geral da equação é

$$x_n = (\alpha_1 + \alpha_2 n) 3^n + (\alpha_3 + \alpha_4 n) (-2)^n + \left(\sqrt{5}\right)^n (\alpha_5 \cos(n\theta) + \alpha_6 \sin(n\theta)), \; \alpha_i \in \mathbb{R}$$

■

3.3.2 Método dos coeficientes indeterminados

Para se determinar a solução geral da equação não homogénea (3.19) é necessário conhecer uma solução particular da mesma. Esta pode ser obtida através do método de variação das constantes. No entanto, este método pode ser longo e trabalhoso.

Para as equações com coeficientes constantes existe um método mais simples que permite obter a solução particular - o método dos coeficientes indeterminados. Este nome deve-se ao facto de se escolher uma função para solução particular. É facilmente aplicável quando $g(n)$ se pode exprimir na forma de funções elementares. Basicamente o método consiste no seguinte:

1. Se $g(n)$ for uma das funções da Tabela 3.1, escolhe-se para $x_{p,n}$ a opção indicada na tabela.

2. Se a opção escolhida constituir uma solução da equação homogénea associada, multiplica-se a opção para $x_{p,n}$ por n^q, onde q é o menor inteiro positivo tal que $n^q x_{p,n}$ não é solução da equação homogénea associada.

3. Se $g(n)$ é a soma de um conjunto de funções correspondentes a diferentes entradas da tabela, toma-se para $x_{p,n}$ a soma das correspondentes opções.

$g(n)$	opção para $x_{p,n}$
ra^n	$c_1 a^n$
rn^k	$c_0 + c_1 n + ... + c_k n^k$
$rn^k a^n$	$\left(c_0 + c_1 n + ... + c_k n^k\right) a^n$
$r \sin bn,\ r \cos bn$	$c_1 \sin bn + c_2 \cos bn$
$ra^n \sin bn,\ ra^n \cos bn$	$(c_1 \sin bn + c_2 \cos bn)\, a^n$
$rn^k a^n \sin bn,\ rn^k a^n \cos bn$	$\left(c_0 + c_1 n + ... + c_k n^k\right) a^n \sin bn +$ $\left(d_0 + d_1 n + ... + d_k n^k\right) a^n \cos bn$

Tabela 3.1: Solução particular $x_{p,n}$

Exemplo 3.31 *Determine a solução geral da equação* $x_{n+2} + 8x_{n+1} + 7x_n = n2^n$.

Solução. As raízes características são -1 e -7 pelo que a solução da equação homogénea associada é $x_{h,n} = \alpha_1 (-1)^n + \alpha_2 (-7)^n$, $\alpha_{1,2} \in \mathbb{R}$. Como o 2º membro da equação é $n2^n$ e nenhuma das soluções da equação homogénea assume esta forma, então usa-se a opção $x_{p,n} = (c_0 + c_1 n)\, 2^n$. Substituíndo na equação dada vem

$$(c_0 + c_1 (n+2))\, 2^{n+2} + 8\,(c_0 + c_1 (n+1))\, 2^{n+1} + 7\,(c_0 + c_1 n)\, 2^n = n2^n$$

ou seja,

$$27c_0 + 24c_1 + 27c_1 n = n$$

Daqui decorre que $c_1 = \frac{1}{27}$ e $c_0 = -\frac{8}{243}$. Assim, a solução geral da equação é

$$x_n = \alpha_1 (-1)^n + \alpha_2 (-7)^n + \left(-\frac{8}{243} + \frac{1}{27} n\right) 2^n,\ \alpha_i \in \mathbb{R}$$

■

Exemplo 3.32 *Calcule a solução geral da equação* $x_{n+2} - x_n = n2^n \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$.

Solução. É fácil ver que $x_{h,n} = \alpha_1 + \alpha_2 (-1)^n$, $\alpha_{1,2} \in \mathbb{C}$. Então para este caso tem-se de usar a opção $x_{p,n} = (c_0 + c_1 n)\, 2^n \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + (d_0 + d_1 n)\, 2^n \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$. Substituindo na equação vem $c_0 = \frac{8}{25}$, $c_1 = -\frac{1}{5}$, $d_0 = d_1 = 0$. ■

3.3.3 Uso dos operadores Δ e E

Pode-se usar as propriedades dos operadores Δ e E para determinar uma solução particular da equação (3.20). Para tal introduz-se a seguinte definição e apresenta-se algumas propriedades necessárias à obtenção desse objectivo.

Definição 3.33 *O inverso do operador* $(E - \lambda I)$ *é o operador* $(E - \lambda I)^{-1}$ *tal que*

$$(E - \lambda I)(E - \lambda I)^{-1} = I, \lambda \in \mathbb{C}.$$

Teorema 3.34 *Seja* $\lambda \in \mathbb{C}$, *então o inverso de* $E - \lambda I$ *pode ser dado por*

$$(E - \lambda I)^{-1} = \lambda^{n-1} \Delta^{-1} \lambda^{-n} \tag{3.31}$$

Prova. Aplicando $(E-\lambda I)$ em ambos os membros de (3.31) e usando o teorema 1.14 vem

$$\begin{aligned}(E-\lambda I)(E-\lambda I)^{-1} &= (E-\lambda I)\lambda^{n-1}\Delta^{-1}\lambda^{-n} = \lambda^{n-1}(\lambda E-\lambda I)\Delta^{-1}\lambda^{-n} \\ &= \lambda^{n-1}\lambda\Delta\Delta^{-1}\lambda^{-n} = I\end{aligned}$$

■

Corolário 3.35 *Para $m \in \mathbb{N}$ tem-se*

$$(E-\lambda I)^{-m} = \lambda^{n-m}\Delta^{-m}\lambda^{-n} \tag{3.32}$$

Prova. É fácil ver que

$$\begin{aligned}(E-\lambda I)^{m}(E-\lambda I)^{-m} &= (E-\lambda I)^{m}\lambda^{n-m}\Delta^{-m}\lambda^{-n} \\ &= \lambda^{n-m}\lambda^{m}\Delta^{m}\Delta^{-m}\lambda^{-n} \\ &= I\end{aligned}$$

■

Pode-se usar a relação (3.32) para determinar a solução de (3.28) . De facto, da relação (3.28) e usando (3.32) vem que

$$x_n = (E-\lambda I)^{-m_i}(0) = \lambda_i^{n-m_i}\Delta^{-m_i}\lambda_i^{-n}(0) = \lambda_i^{n-m_i}\Delta^{-m_i}(0)$$

mas $\Delta^{-m_i}(0) = q_i(n)$ onde $q_i(n)$ é um polinómio de grau inferior a m_i. Portanto, $x_n = \lambda_i^{n-m_i}q_i(n)$, $i = 1, 2, ..., r$. Deste modo, a solução geral de (3.27) pode ser apresentada na forma

$$x_n = \sum_{i=1}^{r} a_i\lambda_i^{n-m_i}q_i(n) \tag{3.33}$$

e como λ^{-m_i} não depende de n, então $a_i\lambda^{-m_i}$ é uma constante, pelo que (3.33) assume a forma

$$x_n = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i\lambda_i^{n}q_i(n)$$

que é equivalente a (3.29) .

Teorema 3.36 *Seja $f(\lambda)$ um polinómio de grau k, $\lambda \in \mathbb{C}$ com $f(\lambda) \neq 0$. Então*

$$f^{-1}(E)\lambda^n = \frac{\lambda^n}{f(\lambda)} \tag{3.34}$$

Prova. Aplicando o operador $f(E)$ em ambos os membros de (3.34) e usando a relação (1.11) vem

$$f(E)f^{-1}(E)\lambda^n = \frac{f(E)\lambda^n}{f(\lambda)} = \lambda^n$$

■

Teorema 3.37 *Seja $f(\lambda)$ um polinómio de grau k e $\lambda_1 \in \mathbb{C}$ uma raíz de f com multiplicidade m. Então fazendo $f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^m g(\lambda)$ tem-se*

$$f^{-1}(E)\,\lambda_1^n = \frac{\lambda_1^{n-m} n^{(m)}}{g(\lambda_1)\, m!} \tag{3.35}$$

Prova. Aplicando o operador $f(E)$ em ambos os lados de (3.35) e usando o teorema 1.14 vem

$$\begin{aligned}
f(E)\,f^{-1}(E)\,\lambda_1^n &= \frac{f(E)\,\lambda_1^{n-m} n^{(m)}}{g(\lambda_1)\, m!} = \lambda_1^{n-m} \frac{f(\lambda_1 E)\, n^{(m)}}{g(\lambda_1)\, m!} \\
&= \lambda_1^{n-m} \frac{\lambda_1^m (E - I)^m g(\lambda_1 E)\, n^{(m)}}{g(\lambda_1)\, m!} \\
&= \lambda_1^n \frac{g(\lambda_1 E)\, \Delta^m n^{(m)}}{g(\lambda_1)\, m!} \\
&= \lambda_1^n \frac{g(\lambda_1 E)\, m!}{g(\lambda_1)\, m!}, \text{ por } (1.8) \\
&= \lambda_1^n, \text{ por } (1.11)
\end{aligned}$$

■

Teorema 3.38 *Seja $f(\lambda)$ um polinómio de grau k e x_n uma sequência. Então*

$$f^{-1}(E)\,\lambda^n x_n = \lambda^n f^{-1}(\lambda E)\, x_n, \ \forall n \in \mathbb{N} \tag{3.36}$$

Prova. Aplicando $f(E)$ vem

$$f(E)\,f^{-1}(E)\,\lambda^n x_n = f(E)\,\lambda^n f^{-1}(\lambda E)\, x_n = \lambda^n f(\lambda E)\, f^{-1}(\lambda E)\, x_n = \lambda^n x_n$$

■

Estes resultados podem ser utilizados para se calcular a solução particular da equação (3.25). Os seguintes casos são os mais frequentes:

1. $g(n) = c$, c constante. Se $f(1) \neq 0$ por (3.34) vem

$$x_{p,n} = f^{-1}(E)\, c = c f^{-1}(E)\, 1^n = c \frac{1^n}{f(1)} = \frac{c}{\sum\limits_{i=0}^{k} p_i}$$

2. $g(n) = \sum\limits_{i=1}^{s} \alpha_i \lambda_i^n$ com $f(\lambda_i) \neq 0$.

$$x_{p,n} = f^{-1}(E) \sum_{i=1}^{s} \alpha_i \lambda_i^n = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i f^{-1}(E)\, \lambda_i^n = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i \frac{\lambda_i^n}{f(\lambda_i)}$$

3. $g(n) = \sum\limits_{i=1}^{s} \alpha_i \lambda_i^n$, $f(\lambda_i) \neq 0$ e λ_j é uma raíz de $f(\lambda)$ com multiplicidade m. De (3.34) e (3.35) vem

$$x_{p,n} = \sum_{i=1, i\neq j}^{s} \alpha_i \frac{\lambda_i^n}{f(\lambda_i)} + \alpha_j \frac{\lambda_j^{n-m} n^{(m)}}{g(\lambda_j)\, m!} \text{ onde } f(\lambda) = (\lambda - \lambda_j)^m g(\lambda)$$

4. $g(n) = e^{in\theta}$. Neste caso usa-se 2. ou 3. fazendo $\lambda = e^{i\theta}$.

5. $g(n) = \cos n\theta$, $g(n) = \sin n\theta$. Faz-se como em 4. tomando a parte real ou parte imaginária conforme o caso.

3.3.4 Método das funções geradoras

O método das funções geradoras é um outro método que permite resolver equações de diferenças lineares com coeficientes constantes.

Definição 3.39 *Chama-se série de potências a uma série da forma*

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ... = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

onde a_n (n=0,1,2,...) são números reais ou complexos e x designa uma variável.

Se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ são duas séries de potências, então a soma destas duas séries de potências é a série de potências dada por

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) x^n$$

e o produto é a série de potências cujo coeficiente de x^n, $n = 0, 1, 2, ...$ é

$$a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + ... + a_n b_0 = \sum_{i,j \geq 0;\ i+j=n} a_i b_j,$$

ou seja, a série de potências produto é dada por

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left[\sum_{i,j \geq 0;\ i+j=n} a_i b_j \right] x^n.$$

Definição 3.40 *A função geradora para a sequência $(a_n)_0^{\infty}$ de números reais ou complexos é a série de potências*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Note-se que qualquer polinómio é uma série de potências particular. Por exemplo, o polinómio $5x^2 + 2x^3 + 3x^6$ pode ser escrito na forma $0 + 0x + 5x^2 + 2x^3 + 0x^4 + 0x^5 + 3x^6 + 0x^7 + ...$ que é uma série de potências com os coeficientes quase todos nulos.

Teorema 3.41 *1. Se a_n é o coeficiente de x^n na função geradora*

$$f(x) = \left(1 + x + x^2 + x^3 + ...\right)^k,$$

então $a_n = \binom{k+n-1}{n}$;

2. $(1-x^m)^n = 1 - \binom{n}{1}x^m + \binom{n}{2}x^{2m} - ... + (-1)^n x^{nm}$;

3. $(1+x+x^2+...+x^{m-1})^n = (1-x^m)^n (1+x+x^2+...)^n$.

Prova. 1. $f(x) = \left(\sum\limits_{i=0}^{\infty} x^i\right)^k = \left(\frac{1}{1-x}\right)^k = (1-x)^{-k} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \binom{-k}{n} (-1)^n x^n$, onde

$$\begin{aligned}\binom{-k}{n} &= \frac{(-k)!}{n!\,(-k-n)!} = \frac{-k\,(-k-1)\,...\,(-k-n+1)}{n!} \\ &= (-1)^n \frac{k\,(k+1)\,...\,(k+n-1)}{n!} = (-1)^n \frac{(k+n-1)!}{n!\,(k-1)!} \\ &= (-1)^n \binom{k+n-1}{n}\end{aligned}$$

Substituindo na relação anterior, vem

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^n \binom{k+n-1}{n} (-1)^n x^n = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k+n-1}{n} x^n$$

e assim o coeficiente de x^n é $\binom{k+n-1}{n}$.

2. Basta fazer $t = (-x^m)$ no desenvolvimento binomial de $(1+t)^n$ e obtém-se o pretendido.

3. Pode-se ver que

$$1+x+x^2+...+x^{m-1} = (1-x^m)\left(1+x+x^2+...\right)$$

e tomando a potência de ordem n de ambos os membros obtém-se a igualdade apresentada. ■

Teorema 3.42 *Se $f(x)$ e $g(x)$ forem as funções geradoras associadas às sucessões $(a_n)_0^{\infty}$ e $(b_n)_0^{\infty}$, respectivamente, então:*

1. *$\alpha f(x) + \beta g(x)$ é a função geradora associada à sucessão $(\alpha a_n + \beta b_n)_0^{\infty}$;*

2. *$(1-x) f(x)$ é a função geradora associada à sucessão $(a_n - a_{n-1})_0^{\infty}$ (com a convenção $a_{-1} = 0$);*

3. *$(1+x+x^2+...) f(x)$ é a função geradora associada à sucessão*

$$(a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_n)_0^{\infty};$$

4. *$f(x)\,g(x)$ é a função geradora da sucessão $(a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + ... + a_n b_0)_0^{\infty}$;*

5. *$x f'(x)$ é a função geradora da sucessão $(n a_n)_0^{\infty}$ onde $f'(x)$ é a derivada relativamente a x.*

Prova. Seja $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ e $g(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}b_nx^n$. Então

1. $\alpha f(x)+\beta g(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(\alpha a_n+\beta b_n)x^n$
2.

$$\begin{aligned}(1-x)f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n-\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^{n+1}=a_0-a_0x+a_1x-a_1x^2+...\\ &= (a_0-a_{-1})+(a_1-a_0)x+(a_2-a_1)x^2+...+(a_n-a_{n-1})x^n+...\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\left(1+x+x^2+...\right)f(x) &= \left(1+x+x^2+...\right)\left(a_0+a_1x+a_2x^2+...\right)\\ &= a_0+(a_0+a_1)x+(a_0+a_1+a_2)x^2+...\\ &\quad +(a_0+a_1+a_2+...+a_n)x^n+...\end{aligned}$$

4. $f(x)g(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left[\sum\limits_{j=0}^{n}a_jb_{n-j}\right]x^n,$
5. $f'(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}$ e assim $xf'(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}na_nx^n$. ■

Observação 3.43 *É fácil ver que $(1-x)(1+x+x^2+...)=1$ pelo que $f(x)=1+x+x^2+...=\frac{1}{1-x}$ (esta série converge absolutamente para $|x|<1$) é a função geradora da sucessão constante $(1)_0^\infty$. A função $g(x)=(f(x))^k=\left(\frac{1}{1-x}\right)^k$ é a função geradora da sucessão $\left(\binom{k+n-1}{n}\right)_0^\infty$ (pelo teorema 3.41).*

Exemplo 3.44 *Determine a função geradora associada à sucessão $(3n+5n^2)_0^\infty$.*

Solução. A função $f(x)=\frac{1}{1-x}$ é a função geradora associada à sucessão $(1)_0^\infty$. Tendo em atenção o ponto 5. do teorema 3.42, $xf'(x)=\frac{x}{(1-x)^2}$ é a função geradora da sucessão $(n)_0^\infty$. Aplicando novamente este princípio, vem que $x\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)'=\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$ é a função geradora de $(n^2)_0^\infty$. Assim, a função geradora de $(3n+5n^2)_0^\infty$ é a função $3xf'(x)+5x(xf'(x))'=\frac{2x(4+x)}{(1-x)^3}$. ■

Na Tabela 3.2 pode-se visualizar a função geradora de algumas sucessões.

Viu-se que, dada uma sucessão, é possível escrever a função geradora associada. Esta função geradora contém toda a informação relativa à sucessão em causa, e por vezes é mais fácil de manipular do que a própria sucessão. O termo geral da sucessão, pode ser recuperado a partir do coeficiente de x^n no desenvolvimento em série de potências. Faz-se uso desta ideia para resolver equações de diferenças.

Para se resolver a equação de diferenças linear de ordem k com coeficientes constantes

$$a_{n+k}+p_1a_{n+k-1}+...+p_ka_n=g(n)\,,\ p_k\neq 0$$

segue-se os seguintes passos:

$(a_n)_0^\infty$	função geradora $f(x)$	Domínio de convergência
1	$\frac{1}{1-x}$	$\lvert x\rvert < 1$
n	$\frac{x}{(1-x)^2}$	$\lvert x\rvert < 1$
n^2	$\frac{x(x+1)}{(1-x)^3}$	$\lvert x\rvert < 1$
n^3	$\frac{x\left(x^2+4x+1\right)}{(1-x)^4}$	$\lvert x\rvert < 1$
n^4	$\frac{x\left(x^3+11x^2+11x+1\right)}{(1-x)^5}$	$\lvert x\rvert < 1$
$(n+m)^{(m)}$	$\frac{m!}{(1-x)^{m+1}}$	$\lvert x\rvert < 1$
$n^{(m)}$	$\frac{m!x^m}{(1-x)^{m+1}}$	$\lvert x\rvert < 1$
k^n	$\frac{1}{1-kx}$	$\lvert x\rvert < \frac{1}{k}$
$(n+m)^{(m)}k^n$	$\frac{m!}{(1-kx)^{m+1}}$	$\lvert x\rvert < \frac{1}{k}$
$e^{\alpha n}$	$\frac{1}{1-e^\alpha x}$	$\lvert x\rvert < \frac{1}{e^\alpha}$
$k^n \cos\theta n$	$\frac{1-kx\cos\theta}{1-2kx\cos\theta+k^2x^2}$	$\lvert x\rvert < \frac{1}{k}$
$k^n \sin\theta n$	$\frac{kx\sin\theta}{1-2kx\cos\theta+k^2x^2}$	$\lvert x\rvert < \frac{1}{k}$
$\binom{n}{m}$	$\frac{x^m}{(1-x)^{m+1}}$	$\lvert x\rvert < 1$
$\binom{k}{n}$	$(1+x)^k$	$\lvert x\rvert < 1$
$\binom{k+n-1}{n}$	$\frac{1}{(1-x)^k}$	$\lvert x\rvert < 1$

Tabela 3.2: Função geradora de $f(x)$

1. Multiplicam-se ambos os membros da equação por x^{n+k};
2. Escreve-se a nova equação em termos da função geradora $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ e resolve--se em ordem a $f(x)$;
3. Expande-se a expressão encontrada para $f(x)$ em série de potências de x de tal modo que o coeficiente a_n de x^n possa ser identificado;
4. A solução da equação é a expressão encontrada para a_n.

Exemplo 3.45 *Resolva a equação* $a_{n+1} - 2a_n = -\frac{n}{3}$, $a_0 = 1$ *pelo método das funções geradoras.*

Solução. Seja $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Multiplicando ambos os membros da equação por x^{n+1}, obtém-se

$$a_{n+1}x^{n+1} - 2a_n x^{n+1} = -\frac{n}{3}x^{n+1}$$

Escrevendo esta equação em termos da função geradora $f(x)$ resulta

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1}x^{n+1} - 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty} n x^{n+1},$$

ou seja,

$$f(x) - a_0 - 2xf(x) = -\frac{x}{3}\sum_{n=0}^{+\infty} n x^n$$

Mas

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} nx^n &= x\left(1+2x+3x^2+...\right) = x\left(x+x^2+x^3+...\right)' = x\left(-1+\frac{1}{1-x}\right)' \\ &= \frac{x}{(1-x)^2},\end{aligned}$$

e assim,

$$f(x)(1-2x) = \frac{-x^2}{3(1-x)^2} + 1 \Leftrightarrow f(x) = \frac{2}{3}\left(\frac{\frac{1}{2}}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-2x}\right)$$

Portanto,

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2+n-1}{n}x^n + \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}2^n x^n, \text{ ver Tabela 3.2} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+1+2^{n+1}}{3}x^n\end{aligned}$$

Consequentemente, a solução da equação é $a_n = \frac{n+1+2^{n+1}}{3}$. ■

Exemplo 3.46 *Resolva a equação* $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 2^n$, $a_0 = 1, a_1 = 2$.

Solução. Seja $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Multiplicando ambos os membros da equação por x^{n+2} e escrevendo a nova equação em termos da função geradora $f(x)$ resulta

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+2}x^{n+2} - 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1}x^{n+2} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2} = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n x^{n+2},$$

ou seja,

$$f(x) - a_1 x - a_0 - 2x\left(f(x) - a_0\right) + x^2 f(x) = x^2\sum_{n=0}^{+\infty}(2x)^n$$

portanto

$$f(x)\left(1-2x+x^2\right) = \frac{x^2}{1-2x} + 1 \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{1-2x}$$

donde $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n x^n$, logo a solução da equação dada é $a_n = 2^n$. ■

Para se encontar o termo geral da sucessão a_n é necessário expandir a função geradora encontrada em série de potências de x. Na Tabela 3.3 apresenta-se a expansão de algumas funções geradoras.

Função geradora	Expansão
$(1+x)^k$	$\binom{k}{0}+\binom{k}{1}x+\binom{k}{2}x^2+...+\binom{k}{k}x^k=\sum\limits_{n=0}^{k}\binom{k}{n}x^n$
$(1+rx)^k$	$\binom{k}{0}+\binom{k}{1}rx+\binom{k}{2}r^2x^2+...+\binom{k}{k}r^kx^k=\sum\limits_{n=0}^{k}\binom{k}{n}r^nx^n$
$(1+x^m)^k$	$\binom{k}{0}+\binom{k}{1}x^m+\binom{k}{2}x^{2m}+...+\binom{k}{k}x^{km}=\sum\limits_{n=0}^{k}\binom{k}{n}x^{nm}$
$(1+x)^{-k}$	$\binom{-k}{0}+\binom{-k}{1}x+\binom{-k}{2}x^2+...=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{k+n-1}{n}x^n$
$(1+rx)^{-k}$	$\binom{-k}{0}+\binom{-k}{1}rx+\binom{-k}{2}r^2x^2+...=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{k+n-1}{n}r^nx^n$
$(1-x)^{-n}$	$\binom{-k}{0}+\binom{-k}{1}(-x)+\binom{-k}{2}(-x)^2+...=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\binom{k+n-1}{n}x^n$
$(1-rx)^{-k}$	$\binom{-k}{0}+\binom{-k}{1}(-rx)+\binom{-k}{2}(-rx)^2+...=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\binom{k+n-1}{n}r^nx^n$
$\frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$	$\binom{k}{k}x^k+\binom{k+1}{k}x^{k+1}+...=\sum\limits_{n=k}^{\infty}\binom{n}{k}x^n$

Tabela 3.3: Expansão da função geradora

3.4 Equações com coeficientes variáveis

A maioria das equações lineares com coeficientes variáveis de ordem superior ou igual a dois, não têm uma solução analítica. Contudo, existe algumas equações que é possível determinar uma solução explícita. É o caso das equações que são do mesmo tipo (embora de ordem superior) das que se desenvolveu nas secções (2.3) e (2.4) do capítulo sobre as equações lineares de 1ª ordem. Uma generalização dos métodos descritos permite resolver tais equações.

Nesta secção abordam-se outros métodos que permitem encontrar-se uma solução explícita para alguns tipos de equações com coeficientes variáveis.

Por vezes consegue-se identificar uma solução não nula da equação homogénea. Neste caso, pode-se reduzir a ordem da equação. Para uma equação de 2ªordem, por exemplo, é possível encontrar a 2ª solução sabendo a primeira.

Assim, assuma-se que $x_{1,n}$ é uma solução conhecida (não trivial) da equação

$$x_{n+2}+f_1(n)\,x_{n+1}+f_2(n)\,x_n=0 \tag{3.37}$$

e seja $x_{2,n}$ a outra solução (a determinar). Pelo teorema 1.15, sabe-se que

$$\Delta\frac{x_{2,n}}{x_{1,n}}=\frac{x_{1,n}\Delta x_{2,n}-x_{2,n}\Delta x_{1,n}}{x_{1,n}x_{1,n+1}} \tag{3.38}$$

e como $\{x_{1,n},x_{2,n}\}$ é um conjunto de solução, então $C(n)=x_{1,n}x_{2,n+1}-x_{1,n+1}x_{2,n}$. Assim,

$$\Delta\frac{x_{2,n}}{x_{1,n}}=\frac{C(n)}{x_{1,n}x_{1,n+1}} \tag{3.39}$$

Pelo fórmula de Abel (teorema 3.7) sabe-se que $C(n)=\left[\prod\limits_{i=n_0}^{n-1}f_2(i)\right]C(n_0)$, pelo que, ao se aplicar Δ^{-1} em ambos os membros de (3.39) resulta

$$x_{2,n} = x_{1,n} \sum_{i=n_0}^{n-1} \frac{\left[\prod_{j=n_0}^{i-1} f_2(j)\right] C(n_0)}{x_{1,i}x_{1,i+1}} \tag{3.40}$$

Deste modo a solução geral da equação (3.37) é

$$x_n = x_{1,n} \left[\alpha_1 + \alpha_2 \sum_{i=n_0}^{n-1} \frac{\left[\prod_{j=n_0}^{i-1} f_2(j)\right] C(n_0)}{x_{1,i}x_{1,i+1}}\right], \tag{3.41}$$

Exemplo 3.47 *Resolva a equação* $x_{n+2} - x_{n+1} - \frac{1}{n+1}x_n = 0$, $n \in \mathbb{Z}_0^+$.

Solução. É fácil ver que $x_{1,n} = n+1$ é uma solução da equação e que

$$C(n) = \left[\prod_{i=0}^{n-1} \frac{-1}{n+1}\right] C(0) = C(0)\frac{(-1)^n}{n!}.$$

Então

$$x_{2,n} = (n+1)\sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-1)^i}{i!\,(i+1)\,(i+2)}.$$

Deste modo a solução geral da equação é

$$x_n = \alpha_1(n+1) + \alpha_2(n+1)\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(-1)^i}{(i+2)!}$$

■

Também se pode usar o método das funções geradoras para determinar a primeira solução da equação e seguidamente usar o método precedente para determinar a segunda.

Exemplo 3.48 *Calcule a solução de* $(n+2)\,a_{n+2} - (n+3)\,a_{n+1} + 2a_n = 0$, $n \in \mathbb{Z}_0^+$.

Solução. Seja $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Multiplicando cada termo da equação por x^{n+2} e aplicando somas em n quando este varia entre 0 e ∞ resulta

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)\,a_{n+2}x^{n+2} - \sum_{n=0}^{+\infty}(n+3)\,a_{n+1}x^{n+2} + 2\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^{n+2} = 0.$$

Aplicando as propriedades de somatório vem

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n a_n x^n - x\sum_{n=1}^{+\infty}(n+2)\,a_n x^n + 2x^2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0.$$

Mas $f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$, pelo que

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n a_n x^n = x\left(f'(x) - a_1\right) \text{ e } x\sum_{n=1}^{+\infty}(n+2)\, a_n x^n = x^2 f'(x) + 2x\left(f(x) - a_0\right)$$

e assim vem

$$x(1-x)\, f'(x) - 2x(1-x)\, f(x) = a_1 x - 2x a_0,$$

ou seja,

$$f'(x) - 2f(x) = \frac{a_1 - 2a_0}{1-x}.$$

Quando $a_1 = 2a_0$ esta equação tem a solução $f(x) = e^{2x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n!}$, pelo que uma solução é $a_{1,n} = \frac{2^n}{n!}$. Para se determinar a segunda solução procede-se de forma análoga ao descrito no exemplo precedente. Como $C(n) = \prod\limits_{i=0}^{n-1} \frac{2}{i+2}$, então o casoratiano satisfaz a equação $C(n+1) = \frac{2}{n+2} C(n)$. Daqui decorre que $C(n) = \frac{2^n}{(n+1)!}$, pelo que a 2ª solução é

$$a_{2,n} = \frac{2^n}{n!} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\frac{2^i}{(i+1)!}}{\frac{2^i}{i!}\frac{2^{i+1}}{(i+1)!}} = \frac{2^n}{n!} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i!}{2^{i+1}}.$$

Assim, a solução geral da equação dada é

$$a_n = \alpha_1 \frac{2^n}{n!} + \alpha_2 \frac{2^n}{n!} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i!}{2^{i+1}}$$

■

Já se viu que em alguns casos a equação com coeficientes variáveis pode ser reduzida a uma equação com coeficientes constantes. Com efeito, considere-se a equação

$$c_k x_{n+k} + c_{k-1} f(n)\, x_{n+k-1} + \ldots + c_0 f(n)\, f(n-1) \ldots f(n-k+1)\, x_n = g(n), \tag{3.42}$$

onde c_i, $i = 0, \ldots, k$ são coeficientes numéricos. Fazendo a substituição

$$x_n = f(n-k)\, f(n-k-1) \ldots f(b)\, y_n, \; n \geq k + b$$

e dividindo ambos os membros de (3.42) por $f(n)\, f(n-1) \ldots f(b)$ vem

$$c_k y_{n+k} + c_{k-1} y_{n+k-1} + \ldots + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n = \frac{g(n)}{f(n)\, f(n-1) \ldots f(b)},$$

que é uma equação linear de ordem k, não homogénea com coeficientes constantes.

Exemplo 3.49 *Resolva a equação* $x_{n+2} - 3n x_{n+1} + 2n(n-1)\, x_n = 0.$

Solução. Seja $x_n = (n-2)(n-3)\ldots \cdot 2 \cdot 1 \cdot y_n = (n-2)!y_n$, $n \geq 2$. Dividindo ambos os membros da equação por $n!$ vem $y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = 0$, cuja solução geral é $y_n = \alpha_1 + \alpha_2 2^n$ e assim $x_n = (n-1)!\left(\alpha_1 + \alpha_2 2^n\right)$. ■

Podem aparecer equações na forma

$$c_k x_{n+k} + c_{k-1} d^n x_{n+k-1} + c_{k-2} d^{2n} x_{n+k-2} + \ldots + c_0 d^{kn} x_n = g(n), \; d \in \mathbb{R} \tag{3.43}$$

Neste caso pode-se escrever $d^{\gamma n}$, $\gamma = 1, \ldots, k$ da seguinte forma

$$d^{\gamma n} = d^n d^{n-1} \ldots d^{n-\gamma+1} d^{\frac{\delta(\gamma-1)}{2}}$$

e fazendo a substituição $d^n = f(n)$ a equação (3.43) pode ser reduzida a uma equação do tipo (3.42).

3.5 Estabilidade das soluções

Na sequência dos conceitos introduzidos na Secção 2.6, pode-se dizer que uma solução $x_{p,n}$ da equação (3.1) é estável, se para qualquer outra solução x_n da equação (3.1) a diferença $D_n = x_n - x_{p,n}$, $\forall n \in \mathbb{Z}_0^+$ é limitada. Quando $\lim\limits_{n\to+\infty} D_n = 0$, $x_{p,n}$ é assimptoticamente estável. É obvio que $x_{p,n}$ é instável se não for estável.

Em geral não se pode tecer conclusões acerca do comportamento assimptótico das soluções de uma equação linear de ordem k. Contudo, para as equações com coeficientes constantes podem-se estabelecer alguns resultados.

Teorema 3.50 *A solução x_n da equação* (3.20) *é assimptoticamente estável se as raízes características estão todas dentro do círculo unitário no plano complexo.*

Prova. Sabe-se que $x_n = x_{h,n} + x_{p,n}$ e da identidade (3.29) vem

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} |x_n - x_{p,n}| &= \lim_{n\to+\infty} \left| \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^n \left(\alpha_{i,0} + \alpha_{i,1} n + \alpha_{i,2} n^2 + \ldots + \alpha_{i,m_i-1} n^{m_i-1}\right) \right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{r} \lim_{n\to+\infty} |\lambda_i|^n \left(|\alpha_{i,0}| + |\alpha_{i,1} n| + \left|\alpha_{i,2} n^2\right| + \ldots + \left|\alpha_{i,m_i-1} n^{m_i-1}\right| \right)
\end{aligned}$$

Se $|\lambda_i| < 1$, então $\lim\limits_{n\to+\infty} |x_n - x_{p,n}| = 0$ e vice-versa. ■

Teorema 3.51 *A solução $x_{p,n}$ da equação* (3.20) *é estável se o valor absoluto das raízes características é menor ou igual a 1 e para o caso em que o valor absoluto for 1, só o é, se as raízes forem simples.*

Prova. Se o valor absoluto das raízes características for menor do que 1, então pela identidade (3.29) D_n é limitada. Quando o valor absoluto de alguma raíz for 1, então D_n só é limitada se a raíz for simples, já que, no caso contrário, um polinómio em n de grau maior ou igual a 1 nunca é limitado. ■

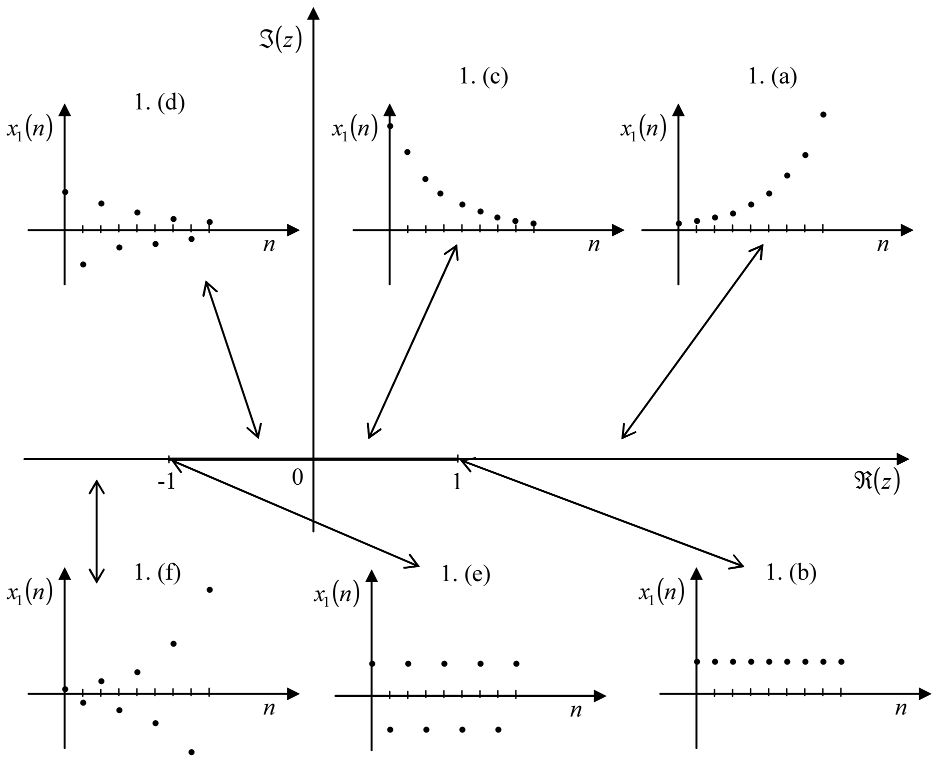

Figura 3.1: Raízes características reais distintas

Por forma a simplificar a discussão sobre a estabilidade das soluções, particulariza-se este estudo, às equações de diferenças lineares de 2ª ordem homogéneas com coeficientes constantes. Seja

$$x_{n+2} + p_1 x_{n+1} + p_2 x_n = 0 \tag{3.44}$$

Suponha-se que λ_1 e λ_2 são as raízes características. Então se:

1. λ_1 e λ_2 são reais distintos, a solução geral da equação é $x_n = \alpha_1\lambda_1^n + \alpha_2\lambda_2^n$. Deste modo $x_{1,n} = \lambda_1^n$ e $x_{2,n} = \lambda_2^n$ são duas soluções linearmente independentes da equação (3.44). Suponha-se que $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ (o caso em que $|\lambda_1| < |\lambda_2|$ é análogo). Neste caso chama-se λ_1 de raíz dominante e $x_{1,n}$ de solução dominante. O comportamento do limite da solução é condicionado pela solução dominante, já que

$$x_n = \lambda_1^n \left[\alpha_1 + \alpha_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n\right].$$

Como $\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right| < 1$, então $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n = 0$ pelo que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_1\lambda_1^n$. Tem-se seis situações a destacar (ver Figura 3.1):

(a) $\lambda_1 > 1$: $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \begin{cases} +\infty, \text{ se } \alpha_1 > 0 \\ -\infty, \text{ se } \alpha_1 < 0 \end{cases}$, a sequência $(\alpha_1\lambda_1^n)_0^\infty$ diverge e assim a solução é instável;

(b) $\lambda_1 = 1$: $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \alpha_1$, a sequência $(\alpha_1\lambda_1^n)_0^\infty$ é constante pelo que a solução é estável;

(c) $0 \leq \lambda_1 < 1 : \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$, a sequência $(\alpha_1\lambda_1^n)_0^\infty$ é monótona decrescente sendo que a solução é assimptoticamente estável ;

(d) $-1 < \lambda_1 < 0 : \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$, a sequência $(\alpha_1\lambda_1^n)_0^\infty$ oscila convergindo para zero sendo a solução assimptoticamente estável;

(e) $\lambda_1 = -1 : \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \begin{cases} \alpha_1 \text{ se } n \text{ é par} \\ -\alpha_1 \text{ se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$, a sequência $(\alpha_1\lambda_1^n)_0^\infty$ oscila entre $-\alpha_1$ e α_1 pelo que a solução é estável (existem autores que consideram esta situação como sendo uma instabilidade controlada);

(f) $\lambda_1 < -1 : \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \infty$, a sequência $(\alpha_1\lambda_1^n)_0^\infty$ oscila mas aumentando a magnitude pelo que a solução é instável.

2. $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ é uma raíz real dupla. A solução geral da equação é $x_n = (\alpha_1 + \alpha_2 n)\lambda^n$ e neste caso é fácil de ver que se $|\lambda| \geq 1$, então $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \infty$, pelo que a solução é instável. Para $|\lambda| < 1$ tem-se que $(n\lambda^n)_0^\infty$ é um infinitésimo pelo que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$ e assim a solução é assimptoticamente estável.

3. λ_1 e λ_2 são um par de raízes complexas conjugadas da forma $a \pm ib$. A solução da equação é $x_n = \rho^n(\alpha_1 \cos(n\theta) + \alpha_2 \sin(n\theta))$ onde $\rho = \sqrt{a^2+b^2}$ e $\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$. Seja $\omega = \tan^{-1}\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)$, ou seja, $\cos\omega = \frac{\alpha_1}{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}}$ e $\sin\omega = \frac{\alpha_2}{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}}$. Portanto,

$$\begin{aligned} x_n &= \rho^n\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}\,[\cos(\omega)\cos(n\theta) + \sin(\omega)\sin(n\theta)] \\ &= \alpha\rho^n\cos(n\theta - \omega). \end{aligned}$$

Neste caso a solução da equação oscila, já que a função coseno também oscila. Tem-se 3 situações distintas (ver Figura 3.2):

(a) $\rho > 1$, as raízes λ_1 e $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$ estão no exterior do círculo unitário. x_n oscila aumentando de magnitude e consequentemente a solução é instável;

(b) $\rho = 1$, as raízes λ_1 e $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$ estão sobre a circunferência unitária. x_n oscila de forma constante mantendo a magnitude, pelo que a solução é estável;

(c) $\rho < 1$, as raízes λ_1 e $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$ estão no interior do círculo unitário sendo que x_n oscila mas convergindo para zero pelo que a solução é assimptoticamente estável.

Observação 3.52 *Note-se que a solução da equação* (3.44) *oslica em torno de zero se e só se nenhuma das raízes reais características é positiva ou se são complexas conjugadas e é assimptoticamente estável se e só se* $\max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\} < 1$.

Observação 3.53 *No estudo da estabilidade da solução da equação* (3.44) *não se considerou a dependência de condições iniciais. As soluções particulares podem ter comportamentos diferentes conforme as condições que forem impostas.*

Considere-se agora a equação não homogénea com coeficientes constantes

$$x_{n+2} + p_1 x_{n+1} + p_2 x_n = c, \tag{3.45}$$

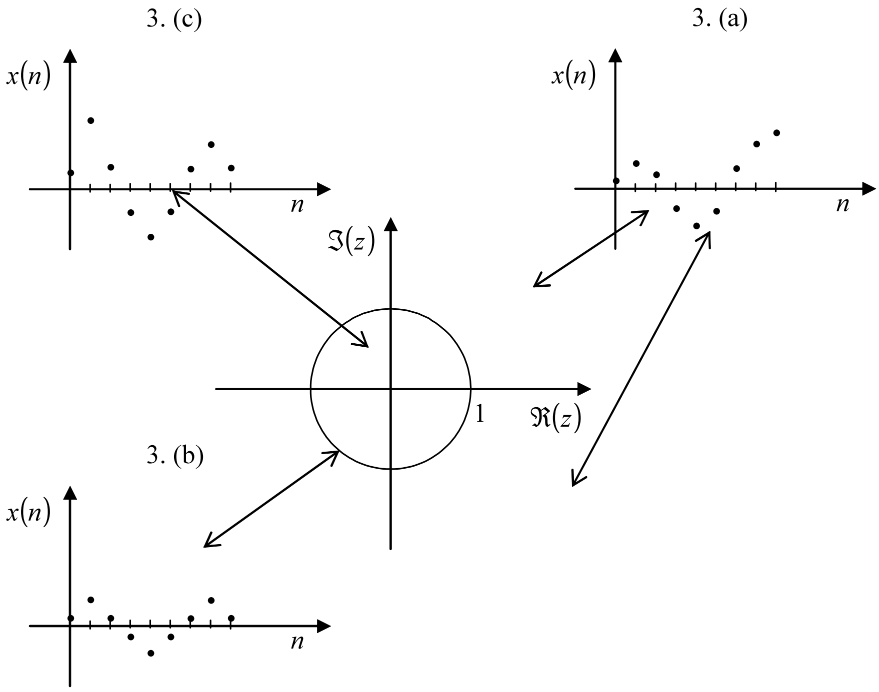

Figura 3.2: Raízes características imaginárias

onde c é uma constante não nula.

Depois de se conhecer a solução da equação homogénea associada, é necessário determinar uma solução particular, para se poder escrever a correspondente solução geral.

No caso da equação (3.45) e se a constante não faz parte da solução homogénea, então a solução particular só pode ser constante.

Ao se determinar os pontos de equilíbrio da equação (3.45), ou seja, os valores para os quais $x_{n+2} = x_{n+1} = x_n = x^*$, verifica-se que $x^* = \frac{c}{1+p_1+p_2}$ é uma solução particular de (3.45). Assim a solução geral é $x_n = x_{h,n} + x^*$. É evidente que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x^*$ se e só se $x_{h,n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Mas $x_{h,n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ quando $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ e $|\lambda_1| < 1$, ou seja, quando $\max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\} < 1$. Também se verifica que todas as soluções da equação (3.45) oscilam em torno de x^* se e só se nenhuma das raízes características é um real positivo ou são complexas conjugadas.

Exemplo 3.54 *Determine as condições para os quais a solução da equação*

$$x_{n+2} - a(1+b)\,x_{n+1} + abx_n = 1,\ \ a,\ b > 0$$

oscila em torno do ponto de equilíbrio.

Solução. A solução oscila em torno de $x^* = \frac{1}{1-a}$, $a \neq 1$ quando as raízes características são reais negativas ou quando são complexas conjugadas.
No caso de serem reais negativas, tem-se $a^2(1+b)^2 > 4ab \Leftrightarrow a > \frac{4b}{(1+b)^2}$. Como $\lambda_{1,2} = \frac{a(b+1)}{2} \pm \frac{\sqrt{a^2(1+b)^2-4ab}}{2}$ e $a(b+1) > \sqrt{a^2(1+b)^2 - 4ab}$, então é impossível ter-se este caso.

Para o caso de $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$ vem $a < \frac{4b}{(1+b)^2}$ e assim todas as soluções da equação oscilam em torno de x^* se $a < \frac{4b}{(1+b)^2}$. ■

Como consequência das observações anteriores surge o seguinte teorema.

Teorema 3.55 *Os pontos de equilíbrio das equações* (3.44) *e* (3.45) *são assimptoticamente estáveis (isto é,* $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x^*$*) sse* $1 + p_1 + p_2 > 0$, $1 - p_1 + p_2 > 0$ *e* $1 - p_2 > 0$.

Prova. ($\Longrightarrow$)Por hipótese tem-se que $\max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\} < 1$ onde λ_1 e λ_2 são as raízes de $\lambda^2 + p_1\lambda + p_2 = 0$. Sejam $\lambda_1 = \frac{-p_1+\sqrt{p_1^2-4p_2}}{2}$ e $\lambda_2 = \frac{-p_1-\sqrt{p_1^2-4p_2}}{2}$.

No caso em que λ_1 e λ_2 são reais tem-se

$$\begin{aligned} -2 + p_1 &< \sqrt{p_1^2 - 4p_2} < 2 + p_1 \\ -2 + p_1 &< -\sqrt{p_1^2 - 4p_2} < 2 + p_1 \end{aligned}$$

A soma destas raízes é $-p_1$ e como se está a assumir que as raízes variam entre -1 e 1, então certamente que se tem $-2 < -p_1 < 2$ (-2<$\lambda_1 + \lambda_2 < 2$). Assim, $2 + p_1 > 0$ e $2 - p_1 > 0$. De $|\lambda_1| < 1$ sai que $\sqrt{p_1^2 - 4p_2} < 2 + p_1$, ou seja, $p_1^2 - 4p_2 < (2 + p_1)^2$, portanto $1 + p_1 + p_2 > 0$ e de $|\lambda_2| < 1$ tem-se $\sqrt{p_1^2 - 4p_2} < 2 - p_1$ e assim $1 - p_1 + p_2 > 0$.

Se λ_1 e λ_2 são complexos conjugados tem-se $\lambda_1 = \frac{-p_1+i\sqrt{4p_2-p_1^2}}{2}$ e $\lambda_2 = \frac{-p_1-i\sqrt{4p_2-p_1^2}}{2}$ e como $-1 < \lambda_1, \lambda_2 < 1$, então $\lambda_1\lambda_2 < 1$, ou seja, $p_2 < 1$.

($\Longleftarrow$)Suponha-se que $1 + p_1 + p_2 > 0$, $1 - p_1 + p_2 > 0$ e $1 - p_2 > 0$. Tem-se de provar que $\max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\} < 1$ onde λ_1e λ_2 são as raízes características.

Se λ_1e λ_2 são complexos conjugados, então $\lambda_{1,2} = \frac{-p_1\pm i\sqrt{4p_2-p_1^2}}{2}$ com $4p_2 - p_1^2 > 0$. Desta última relação sai que $p_2 > 0$. Então

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = \sqrt{\frac{p_1^2}{4} + \frac{4p_2 - p_1^2}{4}} = \sqrt{p_2} < 1$$

Se λ_1e λ_2 são reais, então da relação $1 + p_1 + p_2 > 0$ sai que $-4p_2 < 4p_1 + 4$ e $1 + p_1 > -p_2$ pelo que $2 + p_1 > 1 - p_2 > 0$. Então

$$|\lambda_1| = \left|\frac{-p_1 + \sqrt{p_1^2 - 4p_2}}{2}\right| < \left|\frac{-p_1 + \sqrt{p_1^2 + 4p_1 + 4}}{2}\right| = \left|\frac{-p_1 + (p_1 + 2)}{2}\right| = 1$$

Da relação $1 - p_1 + p_2 > 0$ sai que $-4p_2 < 4 - 4p_1$ e $2 - p_1 > 1 - p_2 > 0$ pelo que

$$|\lambda_2| = \left|\frac{-p_1 - \sqrt{p_1^2 - 4p_2}}{2}\right| < \left|\frac{-p_1 + \sqrt{p_1^2 - 4p_1 + 4}}{2}\right| = \left|\frac{-p_1 - (2 - p_1)}{2}\right| = 1$$

■

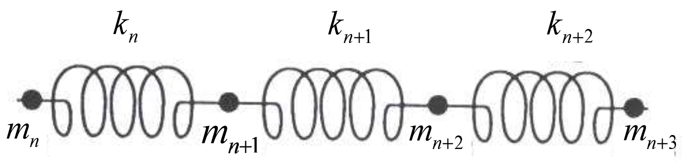

Figura 3.3: Massas conectadas por molas

3.6 Aplicações

3.6.1 Estrutura de um cristal

A estrutura de um cristal pode ser modelada matematicamente considerando o cristal como sendo uma colecção infinita de objectos ligados por molas. Vai-se considerar vibrações ao longo de uma direcção fixa. Seja v_n o deslocamento do $n-$*ésimo* objecto a partir do ponto de equilíbrio. Então a equação do movimento é

$$m_{n+1}\frac{d^2v_{n+1}}{dt^2} = k_{n+1}\left(v_{n+2}-v_{n+1}\right)+k_n\left(v_n-v_{n+1}\right), \tag{3.46}$$

onde m_n é a massa do $n-$*ésimo* objecto e k_n e k_{n+1} são constantes das molas.

Fazendo a substituição $v_n = u_n e^{-iwt}$ tem-se que $\frac{d^2v_{n+1}}{dt^2} = -w^2u_{n+1}e^{-iwt}$ e assim a equação (3.46) é equivalente a

$$-m_{n+1}w^2u_{n+1}e^{-iwt} = k_{n+1}\left(u_{n+2}-u_{n+1}\right)e^{-iwt}+k_n\left(u_n-u_{n+1}\right)e^{-iwt},$$

ou seja,

$$k_{n+1}u_{n+2}+\left(m_{n+1}w^2-k_{n+1}-k_n\right)u_{n+1}+k_nu_n=0.$$

Para um cristal ideal assume-se que os coeficientes são independentes de n. Portanto $m_n = m$ e $k_n = k$, $\forall n \in \mathbb{Z}_0^+$. Neste caso, a equação anterior assume a forma

$$u_{n+2}+\left(\frac{mw^2}{k}-2\right)u_{n+1}+u_n=0, \tag{3.47}$$

que é uma equação linear de 2ª ordem homogénea com coeficientes constantes. As raízes características são

$$\lambda_{1,2} = 1-\frac{w^2m}{2k}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{mw^2}{k}-2\right)^2-4} = 1-\frac{w^2m}{2k}\pm\frac{w}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}\sqrt{\frac{w^2m}{k}-4}$$

A solução geral de (3.47) é $u_n = \begin{cases} c_1\lambda_1^n+c_2\lambda_2^n \text{ se } \frac{w^2m}{k}-4>0 \\ (c_1+c_2n)\left(1-\frac{w^2m}{2k}\right)^n \text{ se } \frac{w^2m}{k}-4=0 \end{cases}$.

Quando as raízes características são complexas conjugadas, ou seja, quando $\frac{w^2m}{k}-4<0$ vem

$$\lambda_{1,2} = 1-\frac{w^2m}{2k}\pm\frac{wi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}\sqrt{4-\frac{w^2m}{k}}.$$

pelo que

$$\rho=\sqrt{\left(1-\frac{w^2m}{2k}\right)^2+\left(\frac{w}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}\sqrt{4-\frac{w^2m}{k}}\right)^2}=1$$

e

$$\theta=\arctan\left(\frac{\frac{w}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}\sqrt{4-\frac{w^2m}{k}}}{1-\frac{w^2m}{2k}}\right).$$

Assim

$$\begin{aligned}u_n &= c_1\cos(n\theta)+c_2\sin(n\theta)=\left(\frac{c_1}{2}+\frac{c_2}{2i}\right)e^{in\theta}+\left(\frac{c_1}{2}-\frac{c_2}{2i}\right)e^{-in\theta}\\ &= \alpha_1e^{in\theta}+\alpha_2e^{-in\theta}\end{aligned}$$

Portanto, o deslocamento do $n-$*ésimo* objecto a partir do ponto de equilíbrio é

$$v_n=\alpha_1e^{i(n\theta-wt)}+\alpha_2e^{-i(n\theta+wt)}.$$

3.6.2 Racionamento de água

Devido à necessidade de racionar água, o João pode apenas regar a sua relva das 21 horas às 9 horas. Suponha-se que o João pode adicionar uma quantidade q de água ao seu relvado durante este período, mas que metade desta água é perdida por evaporação durante o período das 9 horas às 21 horas. Assuma-se que o relvado contém uma quantidade inicial q_0 de água às 21 horas do 1º dia de racionamento.

Seja y_n a quantidade de água no solo após $n-$*ésimos* períodos de 12 horas. Então

$$\begin{aligned}y_1 &= y_0+q,\ y_2=\frac{y_0}{2}+\frac{q}{2}\\ y_3 &= \frac{y_1}{2}+q,\ y_4=\frac{y_2}{2}+\frac{q}{2}\\ y_5 &= \frac{y_3}{2}+q,\ y_6=\frac{y_4}{2}+\frac{q}{2}\end{aligned}$$

Assim, se n é ímpar tem-se $y_{n+2}=\frac{1}{2}y_n+q$ e se n é par vem $y_{n+2}=\frac{1}{2}y_n+\frac{q}{2}$. Em geral tem-se

$$y_{n+2}-\frac{1}{2}y_n=\frac{q}{4}\left(3-(-1)^n\right).$$

A solução da equação homogénea associada é

$$y_{h,n}=c_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n+c_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n.$$

Se se usar o método dos coeficientes indetermonados vem que $y_{p,n}=\frac{q}{2}\left(3-(-1)^n\right)$. Assim, a solução geral do modelo é

$$y_n=c_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n+c_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n+\frac{q}{2}\left(3-(-1)^n\right).$$

Como as condições iniciais são $y_0=q_0$ e $y_1=q_0+q$ então

$$c_1=\frac{1+\sqrt{2}}{2}(q_0-q)\ \text{ e } c_2=\frac{1-\sqrt{2}}{2}(q_0-q).$$

Note-se que para valores de n grandes, y_n essencialmente oscila entre q e $2q$.

3.6.3 Negociação de salários

Considere-se um modelo simples para a negociação de salários entre os trabalhadores e a administração de uma empresa.

A negociação centraliza-se no facto de que o trabalhador solicita um salário de L_0 euros/mês, ao passo que a administração oferece M_0 euros/mês. Em muitas situações reais estas negociações duram meses, levando com que as duas partes se reúnam muitas vezes. A cada passo da negociação, o representante dos trabalhadores submete uma proposta de salário à consideração da gerência que então apresenta uma contraproposta. Em geral, a proposta de salário apresentada pela gerência é inferior à exigida pelos trabalhadores, consequentemente, mais negociações são necessárias.

Um modelo matemático para esta situação pode ser construído assumindo que, a cada passo da negociação, a nova proposta apresentada pela gerência adiciona ao último salário oferecido uma fracção α da diferença entre o último salário exigido e o oferecido. Do mesmo modo, o representante dos trabalhadores actualiza o salário exigido anteriormente subtraindo à última proposta uma fracção β da diferença entre o exigido e o oferecido na etapa anterior.

Seja M_n e L_n, respectivamente, o salário oferecido pela gerência e o exigido pelos trabalhadores na $n-ésima$ reunião. Então as equações que traduzem as negociações são dadas por

$$M_{n+1} = M_n + \alpha\left(L_n - M_n\right) \text{ e } L_{n+1} = L_n - \beta\left(L_n - M_n\right), \tag{3.48}$$

onde α e β são constantes positivas tais que $0 < \alpha, \beta < 1$.

As equações (3.48) podem ser reescritas na forma

$$M_{n+1} = (1-\alpha)\, M_n + \alpha L_n \text{ e } L_{n+1} = \beta M_n + (1-\beta)\, L_n.$$

Eliminando L_n da 1ª equação vem

$$M_{n+2} = (1-\alpha)\, M_{n+1} + \alpha\left[(1-\beta)\,\frac{M_{n+1} - (1-\alpha)\, M_n}{\alpha} + \beta M_n\right],$$

ou seja,

$$M_{n+2} - (2-\alpha-\beta)\, M_{n+1} + (1-\alpha-\beta)\, M_n = 0 \tag{3.49}$$

A equação característica de (3.49) é $\lambda^2 - (2-\alpha-\beta)\,\lambda + (1-\alpha-\beta) = 0$ que tem as soluções $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 1-\alpha-\beta$. Assim, a solução de (3.49) é

$$M_n = A + B\,(1-\alpha-\beta)^n$$

onde A e B são constantes arbitrários.

A solução L_n pode ser obtida a partir da relação $L_n = \frac{M_{n+1}-(1-\alpha)M_n}{\alpha}$. Substituíndo o valor de M_n vem

$$L_n = \frac{A + B\,(1-\alpha-\beta)^n - (1-\alpha)\left[A + B\,(1-\alpha-\beta)^n\right]}{\alpha} = A - B\frac{\beta}{\alpha}\,(1-\alpha-\beta)^n$$

As constantes A e B podem ser determinadas impondo as condições iniciais, isto é, $A+B = M_0$ e $A - B\frac{\beta}{\alpha} = L_0$. Destes duas relações sai que $A = \frac{\alpha L_0+\beta M_0}{\alpha+\beta}$ e $B = \frac{\alpha(M_0-L_0)}{\alpha+\beta}$. Como

n	M_n	L_n	n	M_n	L_n
0	900	1000	13	943,7	945,37
1	912	985	14	943,9	945,12
2	920,76	974,05	15	944,04	944,93
3	927,15	966,05	16	944,15	944,8
4	931,82	960,82	17	944,23	944,7
5	935,23	955,96	18	944,29	944,63
6	937,71	952,85	19	944,33	944,58
7	939,53	950,58	20	944,36	944,54
8	940,86	948,92	21	944,38	944,51
9	941,82	947,71	22	944,4	944,49
10	942,53	946,83	23	944,41	944,48
11	943,05	946,18	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
12	943,42	945,71	∞	944,44	944,44

Tabela 3.4: Salário oferecido versus salário exigido

$L_0 > M_0$, então $A > 0$ e $B < 0$. Substituindo o valor das constantes nas respectivas expressões tem-se

$$\begin{aligned} M_n &= \frac{\alpha L_0 + \beta M_0}{\alpha + \beta} - \frac{(L_0 - M_0)\,\alpha}{\alpha + \beta}(1 - \alpha - \beta)^n \\ L_n &= \frac{\alpha L_0 + \beta M_0}{\alpha + \beta} + \frac{(L_0 - M_0)\,\beta}{\alpha + \beta}(1 - \alpha - \beta)^n \end{aligned}$$

Da análise que se faz a estas duas relações podem-se tirar as seguintes conclusões:

1. O salário oferecido pela administração e o exigido pelos trabalhadores é estável se $0 < \alpha + \beta < 2$;

2. Se há medida que as negociações decorrem houver convergência, isto é, M_n cresce lentamente e L_n decresce lentamente, então $0 < \alpha + \beta < 1$ ($1 - \alpha - \beta > 0$, pois caso contrário, originaria uma oscilação indesejada e não haveria convergência);

3. O salário final que satisfaz ambas as partes é

$$w = \lim_{n\to\infty} M_n = \lim_{n\to\infty} L_n = \frac{\alpha L_0 + \beta M_0}{\alpha + \beta}$$

Note-se que o salário final esperado w varia entre M_0 e L_0, isto é, $M_0 < w < L_0$.

Na Tabela 3.4 apresenta-se um caso concreto em que $L_0 =$€1000, $M_0 =$€900, $\alpha = 0,12$ e $\beta = 0,15$.

3.6.4 Propagação anual de plantas

Uma planta produz sementes na fase final do seu desenvolvimento. Após este período a planta morre. Apenas uma pequena parte das sementes produzidas sobrevive ao inverno e uma parte das que sobrevivem germinam no início da primavera dando origem a uma nova geração de plantas.

O objectico é o de encontar um modelo que descreva o número de plantas numa qualquer geração. Seja

- γ o número de sementes produzidas por planta na fase final do seu desenvolvimento,
- α a fracção de sementes que germinam na primavera após o seu desenvolvimento,
- β a fracção de sementes que germinam na segunda primavera após o seu desenvolvimento,
- σ a fracção de sementes que sobrevive a um dado inverno.

Seja p_n o número de plantas na geração n, ou seja, o número de plantas geradas a partir das sementes com um ano (fracção α), mais o número de plantas geradas a partir das sementes com dois anos (fracção β).

Se $s_{1,n}$ representa o total de sementes que sobrevivem apenas a um inverno e $s_{2,n}$ representa o total de sementes que sobrevivem a dois invernos, então $p_n = \alpha s_{1,n} + \beta s_{2,n}$.

As sementes que restam após o período de germinação são $\widetilde{s}_{1,n} = (1-\alpha)\, s_{1,n}$ para as sementes com um ano e $\widetilde{s}_{2,n} = (1-\beta)\, s_{2,n}$ para as sementes com dois anos.

$s_{0,n}$ representa o número total de novas sementes produzidas na razão γ por planta, ou seja, $s_{0,n} = \gamma p_n$. Após um inverno, apenas uma fracção σ desstas sementes sobrevivem, ou seja, $s_{1,n+1} = \sigma s_0\,(n) = \sigma\gamma p_n$. Analogamente, $s_{2,n+1} = \sigma\widetilde{s}_{1,n} = \sigma\,(1-\alpha)\, s_{1,n}$ e portanto $s_{2,n+1} = \sigma^2\,(1-\alpha)\,\gamma p_{n-1}$.

Como $p_{n+1} = \alpha s_{1,n+1} + \beta s_{2,n+1}$, então

$$p_{n+1} = \alpha\sigma\gamma p_n + \beta\sigma^2\,(1-\alpha)\,\gamma p_{n-1},$$

ou seja,

$$p_{n+2} - \alpha\sigma\gamma p_{n+1} - \beta\sigma^2\,(1-\alpha)\,\gamma p_n = 0.$$

A equação característica é $\lambda^2 - \alpha\sigma\gamma\lambda - \beta\sigma^2\,(1-\alpha)\,\gamma = 0$ cujas soluções são

$$\lambda_{1,2} = \frac{\alpha\sigma\gamma \pm \sqrt{\alpha^2\sigma^2\gamma^2 + 4\beta\sigma^2\,(1-\alpha)\,\gamma}}{2} = \frac{\alpha\sigma\gamma}{2}\left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{4\beta\,(1-\alpha)}{\gamma\alpha^2}}\right].$$

λ_1 e λ_2 são raízes reais, já que $1-\alpha > 0$ pelo que $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 < 0$.

Para que a propagação de plantas cresca indefenidamente quando n tende para infinito deverá ser $\lambda_1 > 1$ (não se faz o estudo para λ_2, uma vez que este é negativo o que originará uma oscilação indesejada no número de plantas). Assim

$$\frac{\alpha\sigma\gamma}{2}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{4\beta\,(1-\alpha)}{\gamma\alpha^2}}\right] > 1 \Leftrightarrow \gamma > \frac{1}{\alpha\sigma + \sigma^2\beta\,(1-\alpha)}.$$

Se $\beta = 0$, então não existe nenhuma semente que sobreviva a dois invernos e germine. Para este caso a condição é $\gamma > \frac{1}{\alpha\sigma}$. Esta condição diz que a propagação da planta ocorre se o produto do número de sementes produzidas por planta com a fracção de sementes que germinam na primavera seguinte ao seu desenvolvimento e com a fracção de sementes que sobrevivem a um dado inverno é superior a 1.

3.6.5 Produto nacional

Nos países capitalistas o produto nacional P_n no período n é dado por

$$P_n = C_n + I_n + G_n,$$

onde C_n representa as despesas de consumo público em geral, I_n as despesas dos investimentos privados e G_n as despesas governamentais. Em geral o período n é apresentado em anos.

Em seguida, assume-se alguns pressupostos universalmente aceites em economia:

1. As despesas de consumo público no período n são proporcionais ao produto nacional no período $n-1$, ou seja, $C_n = \alpha P_{n-1}$, $\alpha > 0$. A constante α é conhecida no mundo económico por "propensão marginal ao consumo".

2. As despesas de investimento privado no período n são proporcionais à diferença do consumo público no período n com o do período $n-1$, isto é, $I_n = \beta \Delta C_{n-1}$, $\beta > 0$.

3. As despesas governamentais são constantes ao longo do tempo. Suponha-se sem perda de generalidade que $G_n = 1$.

Assim, o produto nacional no período n é dado por

$$P_n = \alpha P_{n-1} + \beta \Delta \left[\alpha P_{n-2}\right] + 1,\ n = 2, 3, ...$$

Esta equação é equivalente à equação

$$P_{n+2} - \alpha\left(\beta + 1\right) P_{n+1} + \alpha\beta P_n = 1,\ n = 0, 1, 2, ...$$

O ponto de equilíbrio desta equação é $P^* = \frac{1}{1-\alpha}$. No exemplo 3.54 viu-se que as soluções desta equação oscilam em torno do ponto de equilíbrio, ou seja, $P_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} P^*$ se $\alpha < \frac{4\beta}{(1+\beta)^2}$ (isto acontece quando as raízes características são complexas). Pelo teorema 3.55 o ponto de equilíbrio P^* é assimptoticamente estável (ou simplesmente estável na linguagem económica) se

$$1 - \alpha\left(1+\beta\right) + \alpha\beta > 0 \text{ e } 1 + \alpha\left(1+\beta\right) + \alpha\beta > 0 \text{ e } 1 - \alpha\beta > 0.$$

A segunda condição é automaticamente verificada já que α e β são valores positivos. Assim as outras duas condições podem ser reescritas na forma

$$\alpha < 1 \text{ e } \alpha < \frac{1}{\beta}.$$

Estas duas condições são necessárias e suficientes para que o produto nacional P^* seja estável. Significam que a "propensão marginal ao consumo" é inferior a 1 e que quando multiplicada por β também é inferior a 1. Se estas duas condições forem satisfeitas, a sequência dos valores do produto nacional converge para P^*, independentemente dos valores iniciais. Na Figura 3.4 pode-se visualizar o domínio de estabilidade em função dos parâmetros α e β.

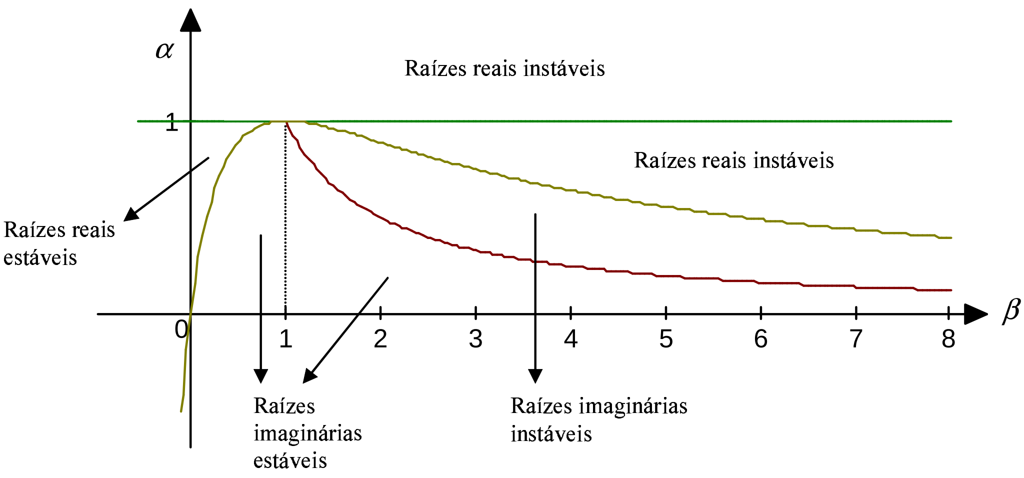

Figura 3.4: Domínio de estabilidade no plano $(O; \beta, \alpha)$

Capítulo 4

Miscelânea de equações de diferenças

Neste pequeno capítulo apresenta-se a resolução de certos tipos de equações de diferenças, que não foram abordados nos capítulos anteriores. Em particular estudam-se alguns tipos de equações não lineares.

Na Secção 4.1 desenvolve-se o método de resolução de equações exactas. Nas secções 4.2 e 4.3 apresenta-se o caso discreto das equações de Clairaut e de Euler, respectivamente. Na Secção 4.4 estuda-se a equação de Riccati. Na secção seguinte apresenta-se um método de resolução de equações não lineares homogéneas do tipo $f\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}, n\right) = 0$. Na penúltima secção abordam-se as equações que são dadas na forma de produto de potências. Finalmente na última secção estuda-se o caso discreto da equação de Bernoulli.

4.1 Equações exactas

Inicia-se esta secção definindo equação exacta.

Definição 4.1 *Diz-se que a equação*

$$f_0(n)\, x_{n+2} + f_1(n)\, x_{n+1} + f_2(n)\, x_n = 0 \tag{4.1}$$

é exacta se pode ser expressa na forma $\Delta\left[f(n)\, x_{n+1} + g(n)\, x_n\right] = 0.$

Uma vez que

$$\Delta\left[f(n)\, x_{n+1} + g(n)\, x_n\right] = f(n+1)\, x_{n+2} + \left(g(n+1) - f(n)\right) x_{n+1} - g(n)\, x_n,$$

então por comparação quando a equação (4.1) é exacta tem-se

$$f(n+1) = f_0(n)\,,\ \ g(n+1) - f(n) = f_1(n)\ \text{ e }\ -g(n) = f_2(n)\,.$$

Daqui decorre que a condição para uma equação ser exacta é

$$f_0(n) + f_1(n+1) + f_2(n+2) = 0. \tag{4.2}$$

Tem-se que $f(n) = f_0(n-1)$ e $g(n) = -f_2(n)$, pelo que, quando a equação (4.1) é exacta vem

$$\Delta\left[f_0(n-1)\, x_{n+1} - f_2(n)\, x_n\right] = 0.$$

Quando a diferença é calculada, o coeficiente de x_{n+1} é $f_1(n) = -f_2(n+1) - f_0(n-1)\,.$

Definição 4.2 *Diz-se que a função $M(n)$ é um multiplicador da equação de diferenças se a equação multiplicada por $M(n)$ é exacta.*

A partir de (4.2) decorre que $M(n)$ é um multiplicador de (4.1) quando a condição $f_0(n)M(n)+f_1(n+1)M(n+1)+f_2(n+2)M(n+2)=0$ é satisfeita. Ora, isto acontece quando $M(n)$ é a solução da equação adjunta da equação (4.1), ou seja, da equação

$$f_2(n+2)\,y_{n+2}+f_1(n+1)\,y_{n+1}+f_0(n)\,y_n=0 \tag{4.3}$$

A equação adjunta da equação (4.3) é a equação

$$f_0(n+2)\,x_{n+2}+f_1(n+2)\,x_{n+1}+f_2(n+2)\,x_n=0$$

Efectuando a substitução $m=n+2$ vem

$$f_0(m)\,x_m+f_1(m)\,x_{m-1}+f_2(m)\,x_{m-2}=0$$

que é necessariamente uma equação equivalente à equação (4.1).

Exemplo 4.3 *Resolva a equação $2x_{n+2}-\frac{n+3}{n+1}x_{n+1}+\frac{1}{n}x_n=0$, $n\geq 1$.*

Solução. Como a equação dada não é exacta, então o seu multiplicador é a solução da equação adjunta

$$\frac{1}{n+2}y_{n+2}-\frac{n+4}{n+2}y_{n+1}+2y_n=0$$

Como 2^n é solução desta equação, então $M(n)=2^n$. Ao se multiplicar ambos os membros da equação dada por $M(n)$, vem que a equação

$$2^{n+1}x_{n+2}-\frac{(n+3)\,2^n}{n+1}x_{n+1}+\frac{2^n}{n}x_n=0$$

é exacta. Daqui decorre que $\Delta\left[2^n x_{n+1}-\frac{2^n}{n}x_n\right]=0$, ou seja, $2^n x_{n+1}-\frac{2^n}{n}x_n=c_1$. Como esta equação é equivalente à equação $x_{n+1}=\frac{1}{n}x_n+c_1 2^{-n}$, sai que

$$\begin{aligned} x_n &= c_2\frac{1}{(n-1)!}+\sum_{k=1}^{n-1}\left[\prod_{i=k+1}^{n-1}\frac{1}{i}\right]c_1 2^{-k} \\ &= \frac{1}{(n-1)!}\left[c_2+c_1\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k!}{2^k}\right] \end{aligned}$$

■

Mais geralmente, a condição que determina se a equação de ordem k

$$f_0(n)\,x_{n+k}+f_1(n)\,x_{n+k-1}+...+f_k(n)\,x_n=0 \tag{4.4}$$

é exacta ou não é

$$f_0(n)+f_1(n+1)+f_2(n+2)+...+f_k(n+k)=0 \tag{4.5}$$

Em particular, para a equação de primeira ordem

$$f_0(n)\,x_{n+1} + f_1(n)\,x_n = 0 \tag{4.6}$$

tem-se que se $f_0(n) + f_1(n+1) = 0$, então a equação é exacta. Para este caso, tem-se que $\Delta\left[-f_1(n)\,x_n\right] = 0$, ou seja, $f_1(n)\,x_n = c$, c constante.

A equação adjunta da equação (4.6) é a equação $f_1(n+1)\,y_{n+1} + f_0(n)\,y_n = 0$, que tem como solução geral

$$y_n = y_0 \prod_{i=n_0}^{n-1} \frac{-f_0(i)}{f_1(i+1)}$$

Portanto, $M(n) = \prod\limits_{i=n_0}^{n-1} \frac{-f_0(i)}{f_1(i+1)}$ é o multiplicador da equação (4.6).

Exemplo 4.4 *Encontre o multiplicador da equação* $x_{n+1} + (n-1)(n+1)\,x_n = 0$ *e determine a sua solução.*

Solução. É fácil de verificar que a equação dada não é exacta. O multiplicador da equação é a solução da equação adjunta $n(n+2)\,y_{n+1} + y_n = 0$, ou seja,

$$M(n) = \prod_{i=1}^{n-1} \frac{-1}{i(i+2)} = \frac{2(-1)^{n-1}}{(n-1)!\,(n+1)!}$$

Multiplicando ambos os membros da equação dada por $M(n)$ vem que a equação

$$\frac{2(-1)^{n-1}}{(n-1)!\,(n+1)!}x_{n+1} + \frac{2(-1)^{n-1}}{(n-2)!n!}x_n = 0$$

é exacta, pelo que $\Delta\left[\frac{2(-1)^n}{(n-2)!n!}x_n\right] = 0$, ou seja, $x_n = c\frac{(-1)^n(n-2)!n!}{2}$. ■

A equação com coeficientes polinomiais de primeira ordem

$$a(n-a_1)\ldots(n-a_q)\,x_{n+1} - b(n-b_1)\ldots(n-b_p)\,x_n = 0 \tag{4.7}$$

admite o multiplicador

$$M(n) = \frac{a^n\Gamma(n-a_1)\ldots\Gamma(n-a_q)}{b^{n+1}\Gamma(n-b_1+1)\ldots\Gamma(n-b_p+1)}$$

e assim, ao se multiplicar ambos os membros de (4.7) pelo multiplicador vem

$$\Delta\left[\frac{a^n\Gamma(n-a_1)\ldots\Gamma(n-a_q)}{b^n\Gamma(n-b_1)\ldots\Gamma(n-b_p)}x_n\right] = 0$$

donde, a solução geral de (4.7) é

$$x_n = c\frac{b^n\Gamma(n-b_1)\ldots\Gamma(n-b_p)}{a^n\Gamma(n-a_1)\ldots\Gamma(n-a_q)}.$$

Exemplo 4.5 *Resolva a equação* $x_{n+2} + (n+1)\,x_{n+1} - nx_n = 0$, $x_0 = 1$, $x_1 = \frac{1}{2}$.

Solução. A equação não é exacta. O multiplicador da equação é a solução da equação adjunta, ou seja, da equação $-(n+2)\,y_{n+2}+(n+2)\,y_{n+1}+y_n=0$. Esta equação é equivalente à equação $-(n+2)\,\Delta y\,(n+1)+y\,(n)=0$, que admite uma solução quando $y_n=n+2$ e $\Delta y\,(n+1)=1$. Assim, o multiplicador da equação dada é $M\,(n)=n+2$. Ao se multiplicar ambos os membros da equação pelo seu multiplicador, sai que

$$(n+2)\,x_{n+2}+(n+1)\,(n+2)\,x_{n+1}-n\,(n+2)\,x_n=0$$

é uma equação exacta. Daqui decorre que $\Delta\left[(n+1)\,x_{n+1}+n\,(n+2)\,x_n\right]=0$ e portanto

$$(n+1)\,x_{n+1}+n\,(n+2)\,x_n=c_1 \tag{4.8}$$

A equação (4.8) admite o multiplicador $M\,(n)=\frac{\Gamma(n+1)}{(-1)^{n+1}\Gamma(n+1)\Gamma(n+3)}=\frac{(-1)^{n+1}}{(n+2)!}$, pelo que

$$\Delta\left[\frac{n\,(n+2)\,(-1)^n}{(n+2)!}x_n\right]=c_1\frac{(-1)^{n+1}}{(n+2)!}$$

e assim,

$$x_n=\frac{(-1)^n\,(n+1)!}{n}\left[c_1\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(-1)^{i+1}}{(i+2)!}+c_2\right]$$

■

4.2 Equação de Clairaut

O caso discreto da equação de Clairaut, utilizada no cálculo diferencial, pode ser escrito na forma

$$x_n=n\Delta x_n+f\,(\Delta x_n)\,,\ n\in\mathbb{Z}_0^+ \tag{4.9}$$

onde f é uma função não linear.

Fazendo a substituição $\Delta x_n=y_n$ vem que a equação (4.9) é equivalente a

$$x_n=ny_n+f\,(y_n) \tag{4.10}$$

Aplicando o operador Δ em ambos os membros de (4.10) vem

$$y_n=(n+1)\,y_{n+1}-ny_n+f\,(y_{n+1})-f\,(y_n)\,,$$

ou seja,

$$(n+1)\,\Delta y_n+f\,(\Delta y_n+y_n)-f\,(y_n)=0 \tag{4.11}$$

É fácil ver que $\Delta y_n=0$ é uma solução de (4.11), ou seja, $y_n=c$, $c\in\Bbbk$. De (4.10) resulta que $x_n=cn+f\,(c)$ é uma solução de (4.9). Se $\Delta y_n\neq 0$, então a solução de (4.11) é determinada através da solução da equação $(n+1)+\frac{f(\Delta y_n+y_n)-f(y_n)}{\Delta y_n}=0$.

Exemplo 4.6 *Resolva a equação de Clairaut dada por* $x_n=n\Delta x_n+(\Delta x_n)^2\,,\ n\in\mathbb{Z}_0^+$.

Solução. Fazendo a substituição $\Delta x_n = y_n$ tem-se $x_n = ny_n + y_n^2$. Ao se aplicar o operador Δ em ambos os membros desta última identidade, resulta a equação $(n+1)\,\Delta y_n + (y_n + \Delta y_n)^2 - y_n^2 = 0$. Daqui decorre que as soluções desta equação são as soluções de $\Delta y_n = 0$ ou $(n+1) + \frac{(y_n+\Delta y_n)^2 - y_n^2}{\Delta y_n} = 0$. Assim, $x_n = cn + c^2$ é uma solução da equação dada. Da 2ª relação sai que

$$-\,(n+1)\,\Delta y_n = (y_n + \Delta y_n + y_n)\,(y_n + \Delta y_n - y_n)\,,$$

ou seja,

$$y_{n+1} + y_n = -\,(n+1)$$

cuja solução geral é

$$y_n = k\,(-1)^n - \frac{1}{2}n - \frac{1}{4}.$$

Portanto a 2ª solução da equação é

$$x_n = n\left(k\,(-1)^n - \frac{1}{2}n - \frac{1}{4}\right) + \left(k\,(-1)^n - \frac{1}{2}n - \frac{1}{4}\right)^2,$$

isto é,

$$x_n = \left(k\,(-1)^n - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{n^2}{4}$$

■

Exemplo 4.7 *Resolva a equação* $x_n = n\Delta x_n + \frac{1}{\Delta x_n}$, $n \in \mathbb{Z}_0^+$.

Solução. Fazendo a substituição $\Delta x_n = y_n$ sai que $x_n = cn + \frac{1}{c}$ é uma solução. A outra solução sai de

$$(n+1) + \frac{\frac{1}{y_{n+1}} - \frac{1}{y_n}}{\Delta y_n} = 0,$$

ou seja,

$$\frac{y_n - y_{n+1}}{y_n y_{n+1}} = -\,(n+1)\,\Delta y_n \Leftrightarrow y_{n+1}y_n = \frac{1}{n+1}.$$

Não é fácil determinar uma expressão explícita para a solução desta equação. Contudo, se se iterar a expressão $y_{n+1} = \frac{1}{(n+1)y_n}$ pode-se verificar que

$$y_n = \begin{cases} \frac{n!y_0}{2^n\left[\left(\frac{n}{2}\right)!\right]^2}, & \text{se } n \text{ é par} \\ \frac{2^{n-1}\left[\left(\frac{n-1}{2}\right)!\right]^2}{n!y_0}, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}.$$

Assim a 2ª solução da equação é $x_n = \Delta^{-1}y_i\big|_0^n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} y_i + c$. ■

4.3 Equação de Euler

O caso discreto da equação diferencial de Euler

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_1 x y' + a_0 y = 0$$

é dado na forma

$$a_k (n+k-1)^{(k)} \Delta^k x_n + a_{k-1} (n+k-2)^{(k-1)} \Delta^{k-1} x_n + ... + a_1 n \Delta x_n + a_0 x_n = 0,$$

ou seja,

$$\sum_{i=0}^{k} a_i (n+i-1)^{(i)} \Delta^i x_n = 0,\ n \in \mathbb{Z}^+,\ a_0 a_k \neq 0,\ a_i \in \mathbb{C},\ 0 \leq i \leq n \tag{4.12}$$

Procurem-se soluções desta equação na forma

$$x_n = \frac{\Gamma(n+\lambda)}{\Gamma(n)},\ \lambda \in \mathbb{C},\ n+\lambda \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{Z}^-. \tag{4.13}$$

Tem-se que

$$\Delta \left(\frac{\Gamma(n+\lambda)}{\Gamma(n)} \right) = \frac{\Gamma(n+1+\lambda)}{\Gamma(n)+1} - \frac{\Gamma(n+\lambda)}{\Gamma(n)} = \frac{\lambda \Gamma(n+\lambda)}{\Gamma(n+1)}$$

$$\Delta^2 \left(\frac{\Gamma(n+\lambda)}{\Gamma(n)} \right) = \Delta \left(\frac{\lambda \Gamma(n+\lambda)}{\Gamma(n+1)} \right) = \lambda(\lambda-1) \frac{\Gamma(n+\lambda)}{\Gamma(n+2)}$$

e mais geralmente

$$\Delta^i \left(\frac{\Gamma(n+\lambda)}{\Gamma(n)} \right) = \lambda^{(i)} \frac{\Gamma(n+\lambda)}{\Gamma(n+i)} \tag{4.14}$$

Substituíndo (4.14) na equação (4.12) vem

$$\sum_{i=0}^{k} a_i (n+i-1)^{(i)} \lambda^{(i)} \frac{\Gamma(n+\lambda)}{\Gamma(n+i)} = 0, \tag{4.15}$$

mas

$$(n+i-1)^{(i)} = (n+i-1)(n+i-2)...(n) \frac{(n-1)!}{(n-1)!} = \frac{\Gamma(n+i)}{\Gamma(n)}$$

e assim a equação (4.15) assume a forma

$$\sum_{i=0}^{k} a_i \lambda^{(i)} \frac{\Gamma(n+\lambda)}{\Gamma(n)} = 0.$$

Como $\frac{\Gamma(n+\lambda)}{\Gamma(n)} \neq 0$ resulta

$$\sum_{i=0}^{k} a_i \lambda^{(i)} = 0. \tag{4.16}$$

Portanto (4.13) é solução de (4.12) se e só se λ é raíz do polinómio (4.16).

Exemplo 4.8 *Resolva a equação* $(n+1)\,n\Delta^2 x_n - 6n\Delta x_n + 10x_n = 0$, $n \in \mathbb{Z}^+$.

Solução. O polinómio (4.16) reduz-se a $a_0\lambda^{(0)} + a_1\lambda^{(1)} + a_2\lambda^{(2)} = 0$, ou seja, $10 - 6\lambda + \lambda(\lambda-1) = 0$, cujas soluções são 2 e 5. Portanto, $x_{1,n} = \frac{\Gamma(n+2)}{\Gamma(n)} = n(n+1)$ e $x_{2,n} = \frac{\Gamma(n+5)}{\Gamma(n)} = (n+4)^{(5)}$ são duas soluções linearmente independentes da equação dada. Assim

$$x_n = c_1 n(n+1) + c_2 (n+4)^{(5)}.$$

■

Exemplo 4.9 *Resolva a equação* $(n+1)\,n\Delta^2 x_n + 7n\Delta x_n + 9x_n = 0$, $n \geq 4$.

Solução. O polinómio (4.16) é dado por $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$ que admite -3 como raíz real. Então $x_{1,n} = \frac{\Gamma(n-3)}{\Gamma(n)} = \frac{1}{(n-1)(n-2)(n-3)}$ é uma solução da equação. Para se calcular a outra solução linearmente independente, note-se que a equação dada é equivalente à equação

$$x_{n+2} + \frac{5-2n}{n+1}x_{n+1} + \frac{(n-3)^2}{(n+1)\,n}x_n = 0.$$

Como $x_{1,n}$ é solução desta equação, então por (3.40) vem

$$x_{2,n} = x_{1,n}\sum_{i=4}^{n-1}\frac{\prod_{j=4}^{i-1}\left(\frac{(j-3)^2}{j(j+1)}\right)}{\frac{1}{i(i-1)^2(i-2)^2(i-3)}} = 144x_{1,n}\sum_{i=4}^{n-1}\frac{1}{i-3}$$

é a outra solução linearmente independente. Portanto, neste caso a solução geral é

$$x_n = \frac{1}{(n-1)(n-2)(n-3)}\left[c_1 + c_2\sum_{i=4}^{n-1}\frac{1}{i-3}\right].$$

■

Exemplo 4.10 *Determine a solução geral da equação* $4(n+1)\,n\Delta^2 x_n + 4n\Delta x_n + 9x_n = 0$.

Solução. O polinómio (4.16) reduz-se a $4\lambda^2 + 9 = 0$ que tem como solução $\lambda = \pm\frac{3}{2}i$. As duas soluções linearmente independentes são $x_{1,n} = \frac{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}i\right)}{\Gamma(n)}$ e $x_{2,n} = \frac{\Gamma\left(n-\frac{3}{2}i\right)}{\Gamma(n)}$.
Se $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$, $i = \sqrt{-1}$, então

$$\begin{aligned}\Gamma(z) &= \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt = \int_0^{+\infty} t^{x-1}t^{yi}e^{-t}dt = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}e^{iy\ln t}dt \\ &= \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\cos(y\ln t)\,dt + i\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\sin(y\ln t)\,dt\end{aligned}$$

Neste caso tem-se

$$\Gamma\left(n+\frac{3}{2}i\right) = \int_0^{+\infty} t^{n-1}e^{-t}\cos\left(\frac{3}{2}\ln t\right)dt + i\int_0^{+\infty} t^{n-1}e^{-t}\sin\left(\frac{3}{2}\ln t\right)dt$$

e

$$\Gamma\left(n-\frac{3}{2}i\right) = \int_0^{+\infty} t^{n-1}e^{-t}\cos\left(\frac{3}{2}\ln t\right)dt - i\int_0^{+\infty} t^{n-1}e^{-t}\sin\left(\frac{3}{2}\ln t\right)dt$$

pelo que a solução geral da equação dada é

$$x_n = \frac{1}{\Gamma(n)}\left[c_1\int_0^{+\infty} t^{n-1}e^{-t}\cos\left(\frac{3}{2}\ln t\right)dt + c_2\int_0^{+\infty} t^{n-1}e^{-t}\sin\left(\frac{3}{2}\ln t\right)dt\right].$$

■

4.4 Equação de Riccati

Existem dois tipos de equações de Riccati. A equação reduzida e a equação geral. A primeira é apresentada na forma

$$x_{n+1}x_n + f_1(n)\,x_{n+1} + f_2(n)\,x_n = g(n) \tag{4.17}$$

e a segunda

$$x_{n+1} = \frac{f_3(n)\,x_n + f_4(n)}{f_5(n)\,x_n + f_6(n)} \tag{4.18}$$

com $f_5(n) \neq 0$ e $f_3(n)\,f_6(n) - f_4(n)\,f_5(n) \neq 0$, $\forall n \geq 0$.

Se $g(n) = 0$, então para resolver (4.17) é suficiente efectuar a mudança de variável $y_n = \frac{1}{x_n}$, e neste caso, a equação assume a forma

$$1 + f_1(n)\,y_n + f_2(n)\,y_{n+1} = 0,$$

ao passo que, se $g(n) \neq 0$ é necessário efectuar a substituição

$$x_n = \frac{y_{n+1}}{y_n} - f_1(n).$$

Neste caso, esta transformação origina a equação

$$y_{n+2} + (f_2(n) - f_1(n+1))\,y_{n+1} + (-g(n) - f_1(n)\,f_2(n))\,y_n = 0 \tag{4.19}$$

A equação (4.17) é de primeira ordem, pelo que, a sua solução geral depende de uma constante arbitrária, ao passo que, a equação (4.19) por ser de segunda ordem terá duas constantes arbitrárias. Contudo, se $y_{1,n}$ e $y_{2,n}$ são duas soluções linearmente independentes da equação (4.19), então a solução geral pode ser escrita na forma $y_n = c_1y_{1,n} + c_2y_{2,n}$. Deste modo a solução de (4.17) é

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{c_1y_{1,n+1} + c_2y_{2,n+1}}{c_1y_{1,n} + c_2y_{2,n}} - f_1(n) \\ &= \frac{y_{1,n+1} + cy_{2,n+1}}{y_{1,n} + cy_{2,n}} - f_1(n) \end{aligned}$$

onde $c = \frac{c_2}{c_1}$.

Exemplo 4.11 *Resolva a equação* $x_{n+1}x_n - \frac{2}{3}x_{n+1} + \frac{1}{6}x_n = \frac{5}{18}$.

Solução. Fazendo a mudança de variável $x_n = \frac{y_{n+1}}{y_n} + \frac{2}{3}$ tem-se que a equação assume a forma

$$\left(\frac{y_{n+2}}{y_{n+1}} + \frac{2}{3}\right)\left(\frac{y_{n+1}}{y_n} + \frac{2}{3}\right) - \frac{2}{3}\left(\frac{y_{n+2}}{y_{n+1}} + \frac{2}{3}\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{y_{n+1}}{y_n} + \frac{2}{3}\right) = \frac{5}{18}$$

Simplicando, obtém-se a equação $y_{n+2} + \frac{5}{6}y_{n+1} - \frac{1}{6}y_n = 0$, cuja solução geral é $y_n = c_1\left(\frac{1}{6}\right)^n + c_2(-1)^n$. Assim

$$x_n = \frac{c_1\left(\frac{1}{6}\right)^{n+1} + c_2(-1)^{n+1}}{c_1\left(\frac{1}{6}\right)^n + c_2(-1)^n} + \frac{2}{3} = \frac{6^{-n-1} - c(-1)^{n+1}}{6^{-n} + c(-1)^n} + \frac{2}{3}$$

■

Para se determinar uma solução explícita da equação (4.18) pode-se efectuar a substituição $f_5(n)\,x_n + f_6(n) = \frac{y_{n+1}}{y_n}$, ou seja, $x_n = \frac{y_{n+1}}{f_5(n)y_n} - \frac{f_6(n)}{f_5(n)}$. Para esta mudança de variável, a equação (4.18) assume a forma

$$\frac{y_{n+2}}{f_5(n)\,y_{n+1}} - \frac{f_6(n+1)}{f_5(n+1)} = \frac{f_3(n)\left[\frac{y_{n+1}}{f_5(n)y_n} - \frac{f_6(n)}{f_5(n)}\right] + f_4(n)}{\frac{y_{n+1}}{y_n}}.$$

Simplificando esta equação, obtém-se

$$y_{n+2} + A(n)\,y_{n+1} + B(n)\,y_n = 0$$

onde $A(n) = -f_6(n+1) - f_3(n)\frac{f_5(n+1)}{f_5(n)}$ e $B(n) = \frac{f_3(n)f_6(n)f_5(n+1)}{f_5(n)} - f_4(n)\,f_5(n+1)$.

Exemplo 4.12 *Determine a solução da equação* $x_{n+1} = \frac{x_n + a}{x_n + 1}$, $1 \neq a > 0$.

Solução. Seja $x_n = \frac{y_{n+1}}{y_n} - 1$. Para esta mudança de variável, a equação dada toma a forma $y_{n+2} - 2y_{n+1} + (1-a)\,y_n = 0$. As raízes características são $1 \pm \sqrt{a}$ pelo que a solução da equação é $y(n) = c_1(1+\sqrt{a})^n + c_2(1-\sqrt{a})^n$. Assim, a solução geral da equação dada é

$$x_n = \frac{(1+\sqrt{a}) + (1-\sqrt{a})\,c\left(\frac{1-\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}\right)^n}{1 + c\left(\frac{1-\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}\right)^n} - 1$$

■

4.5 Equações homogéneas do tipo $f\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}, n\right) = 0$

Se uma equação não linear se consegue escrever na forma $f\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}, n\right) = 0$, então através da mudança de variável $y_n = \frac{x_{n+1}}{x_n}$ é possível resolver a equação na variável y_n.

Exemplo 4.13 *Resolva a equação* $x_{n+1}^2 - 2x_{n+1}x_n - 3x_n^2 = 0$.

Solução. Dividindo ambos os membros da equação por x_n^2, resulta

$$\left[\frac{x_{n+1}}{x_n}\right]^2 - 2\left[\frac{x_{n+1}}{x_n}\right] - 3 = 0$$

que é uma equação do tipo $f\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}, n\right) = 0$. Fazendo a mudança de variável $\frac{x_{n+1}}{x_n} = y_n$, então a equação reduz-se a $y_n^2 - 2y_n - 3 = 0$. Pela fórmula resolvente decorre que $y_n = 3$ ou $y_n = -1$. Assim $x_{n+1} = 3x_n$ ou $x_{n+1} = -x_n$, ou seja, $x_n = c3^n$ ou $x_n = c(-1)^n$. ■

Exemplo 4.14 *Resolva a equação* $nx_{n+1}^3 + (2^n + 2n)\,x_{n+1}^2 x_n + (-2^{n+1} - 3n)\,x_{n+1}x_n^2 - 3 \times 2^n x_n^3 = 0$.

Solução. Ao se dividir ambos os membros da equação por x_n^3, obtém-se a equação

$$n\left[\frac{x_{n+1}}{x_n}\right]^3+\left(2^n+2n\right)\left[\frac{x_{n+1}}{x_n}\right]^2+\left(-2^{n+1}-3n\right)\left[\frac{x_{n+1}}{x_n}\right]-3\times 2^n=0$$

e efectuando a mudança de variável $\frac{x_{n+1}}{x_n}=y_n$ vem

$$ny_n^3+\left(2^n+2n\right)y_n^2+\left(-2^{n+1}-3n\right)y_n-3\times 2^n=0$$

É fácil ver que $y_n=-1$ e $y_n=3$ são duas soluções, pelo que, a equação anterior se pode decompor em

$$\left(y_n-3\right)\left(y_n+1\right)\left(ny_n+2^n\right)=0$$

Assim $x_{n+1}=3x_n$ ou $x_{n+1}=-x_n$ ou $x_{n+1}=\frac{-2^n}{n}x_n$, ou seja, $x_n=c3^n$ou $x_n=c\left(-1\right)^n$ ou $x_n=c\frac{(-1)^{n-1}2^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(n-1)!}$. ■

4.6 Equações com produto de potências

Se se considerar a equação não linear dada na forma

$$x_{n+k}^{m_1}x_{n+k-1}^{m_2}...x_k^{m_{k+1}}=g\left(n\right)$$

e ao se aplicar logaritmos em ambos os membros, resulta

$$m_1\ln x_{n+k}+m_2\ln x_{n+k-1}+...+m_{k+1}\ln x_k=\ln g\left(n\right).$$

Efectuando a substituição $\ln x_n=y_n$, obtém-se a seguinte equação linear não homogénea com coeficientes constantes

$$m_1y_{n+k}+m_2y_{n+k-1}+...+m_{k+1}y_k=\ln g\left(n\right).$$

Exemplo 4.15 *Resolva a equação* $x_{n+1}=x_n^2$.

Solução. Aplicando logaritmos tem-se $\ln x_{n+1}=2\ln x_n$ e fazendo a substituição $\ln x_n=y_n$ vem $y_{n+1}=2y_n$, cuja solução geral é $y_n=c2^n$ e assim, $x_n=e^{c2^n}$, $\forall n\in\mathbb{Z}_0^+$. ■

Exemplo 4.16 *(Equação logística com* $r=2$*) Resolva a equação* $x_{n+1}=2x_n\left(1-x_n\right)$.

Solução. Para se poder aplicar o método descrito a esta equação é necessário em primeiro lugar efectuar a mudança de variável $x_n=\frac{1}{2}\left(1-y_n\right)$. Para esta substituição obtém-se a equação $y_{n+1}=y_n^2$. Portanto a solução geral da equação dada é $x_n=\frac{1}{2}\left(1-e^{c2^n}\right)$. ■

4.7 Equação de Bernoulli

No cálculo diferencial, uma das equações não lineares que pode se resolvida analiticamente é a equação de Bernoulli. A equivalente discreta é dada por

$$x_{n+1}^{m-1} - x_n^{m-1} = \left(p\left(n\right) - q\left(n\right) x_n^{m-1}\right) x_{n+1}^{m-1} \tag{4.20}$$

onde $p\left(n\right)$ e $q\left(n\right)$ são funções de argumento discreto e $m \neq 0, 1$ com $n \geq n_0 \in \mathbb{Z}_0^+$.

Fazendo a substituição $x_n^{m-1} = y_n$, a equação (4.20) é equivalente

$$y_{n+1} - y_n = \left(p\left(n\right) - q\left(n\right) y_n\right) y_{n+1},$$

ou seja,

$$y_{n+1} y_n + A\left(n\right) y_{n+1} + B\left(n\right) y_n = 0 \tag{4.21}$$

onde $A\left(n\right) = \frac{1-p(n)}{q(n)}$ e $B\left(n\right) = \frac{-1}{q(n)}$. A equação (4.21) é uma equação de Riccati. Neste tipo de equações faz-se a substituição $z_n = \frac{1}{y_n}$, e assim vem

$$\frac{1}{z_{n+1}} \frac{1}{z_n} + A\left(n\right) \frac{1}{z_{n+1}} + B\left(n\right) \frac{1}{z_n} = 0.$$

Multiplicando ambos os membros por $z_{n+1} z_n$ vem

$$z_{n+1} = -\frac{B\left(n\right)}{A\left(n\right)} z_n - \frac{1}{A\left(n\right)},$$

que é uma equação linear de primeira ordem.

Exemplo 4.17 *Resolva a equação* $x_{n+1}^6 - x_n^6 = \left(n - \frac{1}{2} x_n^6\right) x_{n+1}^6$, $n \geq 2$.

Solução. Fazendo a substituição $x_n^6 = y_n$ vem que a equação dada é equivalente a

$$y_{n+1} y_n + 2\left(1 - n\right) y_{n+1} - 2 y_n = 0.$$

Seja ainda $y_n = \frac{1}{z_n}$. Então a equação assume a forma

$$z_{n+1} = -\left(n - 1\right) z_n + \frac{1}{2},$$

cuja solução geral é

$$\begin{aligned} z_n &= c \prod_{i=2}^{n-1} \left[-\left(i-1\right)\right] + \sum_{k=2}^{n-1} \left[\prod_{i=k+1}^{n-1} \left(-\left(i-1\right)\right)\right] \frac{1}{2} \\ &= \left(-1\right)^n \left(n-2\right)! \left[c - \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{n-1} \frac{\left(-1\right)^k}{\left(k-1\right)!}\right] \end{aligned}$$

Assim, $x_n^6 = \frac{1}{(-1)^n (n-2)! \left[c - \frac{1}{2} \sum\limits_{k=2}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(k-1)!}\right]}$. ■

Capítulo 5

Sistemas lineares de equações de diferenças

Neste capítulo estudam-se os sistemas lineares de equações de diferenças (SLED). Usam-se, para além de outros conceitos, os já desenvolvidos nos capítulos anteriores.

Para o estudo dos SLED é necessário utilizar alguma teoria relativa ao cálculo matricial. No Apêndice A, apresenta-se a teoria matricial necessária ao desenvolvimento deste capítulo.

Nos capítulos anteriores estudaram-se equações de diferenças com apenas uma variável dependente (e também uma variável independente). Em muitas situações, não só a nível teórico bem como no campo prático, surgem equações com duas ou mais variáveis independentes. O estudo destas equações é feito através dos sistemas.

Assim, na Secção 5.1 estuda-se a teoria básica necessária para o estudo das soluções dos SLED. Na Secção 5.2 apresenta-se um método para determinar a solução geral de um sistema não homogéneo a partir da solução geral do correspondente sistema homogéneo. Na secção seguinte será apresentado um método para representar uma equação de diferenças linear de ordem k sob a forma de um SLED de 1^{a} ordem.

Na Secção 5.4 estuda-se o importante conceito de estabilidade das soluções dos sistemas lineares. Na secção seguinte será feito o estudo das soluções periódicas de alguns sistemas lineares.

Finalmente, na última secção deste capítulo, estudam-se as propriedades das soluções dos sistemas lineares autónomos, com apenas duas variáveis dependentes. Este estudo do comportamento das soluções é feito no plano de fases e permite obter-se uma compreensão global do comportamento das mesmas.

5.1 Teoria básica

Suponha-se que se tem k equações lineares dadas na forma

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{1,n+1} = a_{11}x_{1,n} + a_{12}x_{2,n} + ... + a_{1k}x_{k,n} \\ x_{2,n+1} = a_{21}x_{1,n} + a_{22}x_{2,n} + ... + a_{2k}x_{k,n} \\ \qquad\qquad\vdots \\ x_{k,n+1} = a_{k1}x_{1,n} + a_{k2}x_{2,n} + ... + a_{kk}x_{k,n} \end{array} \right. .$$

Escrevendo o sistema anterior na forma matricial vem

$$x_{n+1} = Ax_n \tag{5.1}$$

onde $x_n = \begin{bmatrix} x_{1,n} & x_{2,n} & \cdots & x_{k,n} \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^k$ e $A = [a_{ij}]$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i, j = 1, ..., k$ é uma matriz não singular (determinante diferente de zero).

Um sistema escrito na forma de (5.1) é considerado autónomo ou invariante no tempo, já que todas as entradas da matriz A são constantes.

Se se tomar um inteiro $n_0 \geq 0$ fixo, tem-se que x_{n_0} é um valor inicial específico (é por esta razão que o sistema (5.1) é conhecido por problema do valor inicial). Iterando o sistema a partir de n_0 vem

$$x_n = A^{n-n_0} x_{n_0} \tag{5.2}$$

com $A^0 = I_k$, onde I_k é a matriz identidade de dimensão $k \times k$. Para $n_0 = 0$ tem-se que as soluções (5.2) são dadas na forma $x_n = A^n x_0$.

Exemplo 5.1 *Resolva o sistema* $\begin{cases} x_{1,n+1} = 2x_{1,n} + x_{2,n} + x_{3,n} + x_{4,n} \\ x_{2,n+1} = 2x_{2,n} \\ x_{3,n+1} = 2x_{3,n} + x_{4,n} \\ x_{4,n+1} = x_{4,n} + x_{5,n} \\ x_{5,n+1} = -x_{2,n} - x_{3,n} - x_{4,n} \end{cases}$, $n \geq 0$ *com* $x_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$.

Solução. O sistema dado é equivalente a $x_{n+1} = Ax_n$ com

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } x_n = \begin{bmatrix} x_{1,n} \\ x_{2,n} \\ x_{3,n} \\ x_{4,n} \\ x_{5,n} \end{bmatrix}.$$

A matriz A é a matriz do exemplo A.21. Então

$$\begin{aligned} x_n &= A^n x_0 \\ &= \begin{bmatrix} 2^n & 2^{n+1} - n - 2 & 2^{n+1} - n - 2 & 2^{n+1} - n - 2 & 2^n - n - 1 \\ 0 & 2^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{n(n+1)}{2} - 2^n + 1 & \frac{n(n+1)}{2} + 1 & \frac{n(n+1)}{2} & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & \frac{n(1-n)}{2} & \frac{n(1-n)}{2} & \frac{n(1-n)}{2} + 1 & \frac{n(3-n)}{2} \\ 0 & -n & -n & -n & -n+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2^{n+3} - 4n - 7 \\ 2^n \\ -2^n + n(2n+1) + 2 \\ n(3-2n) + 1 \\ -4n + 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

■

Considere-se agora uma matriz não singular $A(n) = [a_{ij}(n)]$, $\forall n \geq n_0$ de dimensão $k \times k$ onde os elementos $a_{ij}(n)$ são funções reais ou complexas definidas em $\mathbb{Z}_0^+$ e $x_n \in \mathbb{R}^k$ (ou $\mathbb{C}^k$).

Seja

$$x_{n+1} = A(n)\, x_n + g(n)\,, \tag{5.3}$$

com $g(n) \in \mathbb{R}^k$, um sistema linear não homogéneo. O correspondente sistema linear homogéneo é dado por

$$x_{n+1} = A(n)\, x_n \tag{5.4}$$

O sistema (5.4) é muitas vezes referido como não autónomo ou variante no tempo, uma vez que, as entradas da matriz $A(n)$ dependem de n.

Teorema 5.2 *Para cada vector inicial* $x_{n_0} \in \mathbb{R}^k$ *e* $n_0 \in \mathbb{Z}_0^+$ *existe uma única solução* x_n *do sistema* (5.4).

Prova. De (5.4) tem-se

$$\begin{aligned} x_{n_0+1} &= A(n_0)\, x_{n_0} \\ x_{n_0+2} &= A(n_0+1)\, x_{n_0+1} = A(n_0+1)\, A(n_0)\, x_{n_0} \end{aligned}$$

Mais geralmente tem-se

$$x_n = \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} A(i) \right] x_{n_0} \tag{5.5}$$

onde

$$\prod_{i=n_0}^{n-1} A(i) = \begin{cases} I_k \text{ se } n = n_0 \\ A(n-1)\, A(n-2) \ldots A(n_0) \text{ se } n > n_0 \end{cases}$$

A relação (5.5) fornece uma única solução do sistema (5.4). ■

Recorde-se que as soluções $x_{i,n}$, $1 \leq i \leq k$ do sistema (5.4) são linearmente independentes se $\sum\limits_{i=1}^{k} c_i x_{i,n} = 0$, $\forall n \geq n_0$, então $c_i = 0$, $1 \leq i \leq k$. Se existir um i tal que $c_i \neq 0$, então neste caso as soluções são linearmente dependentes.

Seja $\Phi(n)$ uma matriz de dimensão $k \times k$ tal que as suas colunas são soluções do sistema (5.4), ou seja,

$$\Phi(n) = \begin{bmatrix} x_{1,n} & x_{2,n} & \cdots & x_{k,n} \end{bmatrix}.$$

Tem-se que

$$\begin{aligned} \Phi(n+1) &= \begin{bmatrix} x_{1,n+1} & x_{2,n+1} & \cdots & x_{k,n+1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A(n)\, x_{1,n} & A(n)\, x_{2,n} & \cdots & A(n)\, x_{k,n} \end{bmatrix} \\ &= A(n) \begin{bmatrix} x_{1,n} & x_{2,n} & \cdots & x_{k,n} \end{bmatrix} = A(n)\, \Phi(n) \end{aligned}$$

Portanto $\Phi(n)$ satisfaz a equação

$$\Phi(n+1) = A(n)\, \Phi(n)\,. \tag{5.6}$$

Daqui decorre que as soluções $x_{i,n}$, $i = 1, \ldots, k$ são linearmente independentes para $n \geq n_0$ se e só se a matriz $\Phi(n)$ é não singular $\forall n \geq n_0$.

Toda a matriz $\Phi(n)$ não singular $\forall n \geq n_0$ que satisfaz o sistema (5.6) é chamada de matriz fundamental do sistema (5.4). Repare-se que se $\Phi(n)$ é uma matriz fundamental e

B é uma matriz não singular, então a matriz $\Phi(n)B$ é também uma matriz fundamental, já que a matriz $\Phi(n)B$ é não singular e $\Phi(n+1)B = A(n)\Phi(n)B$, ou seja, $\Phi(n+1) = A(n)\Phi(n)$. Portanto $\Phi(n)B$ satisfaz ao sistema (5.6). Deste modo existem infinitas matrizes fundamentais para um dado sistema. Entre essas, existe uma que pode ser determinada como se pode observar de seguida.

Se $\Phi(n_0) = I_k$, então por indução conclui-se que $\Phi(n) = \prod_{i=n_0}^{n-1} A(i)$.

Note-se que no caso autónomo quando A é uma matriz constante vem $\Phi(n) = A^{n-n_0}$ e se $n_0 = 0$ tem-se $\Phi(n) = A^n$.

Teorema 5.3 *Existe uma única solução $\Psi(n)$ da equação matricial* (5.6) *com* $\Psi(n_0) = I_k$.

Prova. A equação de diferenças matricial (5.6) representa um sistema com k^2 equações de diferenças de 1ª ordem. Pelo teorema 5.2 obtém-se um único vector solução v com k^2 componentes tal que

$$v(n_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

onde o 1 aparece nas $nk+n+1$ $(n = 0, 1, ..., k-1)$ componentes do vector. O vector v pode ser convertido na matriz $\Psi(n)$ do tipo $k \times k$, agrupando as primeiras k componentes para a 1ª coluna de $\Psi(n)$, as segundas k componentes para a segunda coluna e assim secessivamente. É obvio que $\Psi(n_0) = I_k$. ■

A partir de agora escrever-se-á $\Phi(n,m) = \Phi(n)\Phi^{-1}(m)$ para dois inteiros positivos n, m com $n \geq m$.

Como $\Phi(n+1,m) = \Phi(n+1)\Phi^{-1}(m)$, então a matriz fundamental $\Phi(n,m)$ é solução de $\Phi(n+1,m) = A(n)\Phi(n,m)$. Pode-se assim estabelecer algumas propriedades interessantes sobre a matriz fundamental $\Phi(n,m)$.

1.
$$\begin{aligned} \Phi^{-1}(n,m) &= [\Phi(n,m)]^{-1} = \left[\Phi(n)\Phi^{-1}(m)\right]^{-1} \\ &= \left[\Phi^{-1}(m)\right]^{-1}\Phi^{-1}(n) = \Phi(m)\Phi^{-1}(n) = \Phi(m,n); \end{aligned}$$

2.
$$\Phi(n,m) = \Phi(n)\Phi^{-1}(m) = \Phi(n)\Phi^{-1}(r)\Phi(r)\Phi^{-1}(m) = \Phi(n,r)\Phi^{-1}(r,m);$$

3.
$$\begin{aligned} \Phi(n,m) &= \Phi(n)\Phi^{-1}(m) = \prod_{i=n_0}^{n-1} A(i) \left[\prod_{i=n_0}^{m-1} A(i)\right]^{-1} \\ &= A(n-1)...A(n_0)A^{-1}(n_0)...A^{-1}(m-1) \\ &= A(n-1)...A(m) = \prod_{i=m}^{n-1} A(i). \end{aligned}$$

Corolário 5.4 *Se* $\Phi(n_0) = I_k$, *então a única solução* x_n *do sistema* (5.4) *é dada por* $x_n = \Phi(n, n_0)\, x_{n_0}$ *com* x_{n_0} *uma condição inicial imposta.*

Prova. Se $\Phi(n_0) = I_k$, então $\Phi(n) = \prod_{i=n_0}^{n-1} A(i)$. Assim

$$x_n = \Phi(n)\, x_{n_0} = \Phi(n)\, \Phi^{-1}(n_0)\, x_{n_0} = \Phi(n, n_0)\, x_{n_0}$$

■

Teorema 5.5 *(Fórmula de Abel para sistemas) Para* $\forall n \geq n_0 \geq 0$

$$|\Phi(n)| = |\Phi(n_0)| \prod_{i=n_0}^{n-1} |A(i)| \tag{5.7}$$

Prova. De (5.6) tem-se que $|\Phi(n+1)| = |A(n)|\, |\Phi(n)|$ que é uma equação de diferenças linear de 1ª ordem e cuja solução geral é a expressão (5.7). ■

Observação 5.6 *Se* A *é uma matriz constante no sistema* (5.4), *então*

$$|\Phi(n)| = |A|^{n-n_0}\, |\Phi(n_0)|.$$

Corolário 5.7 *A matriz fundamental* $\Phi(n)$ *é não singular* $\forall n \geq n_0$ *se e só se* $\Phi(n_0)$ *é não singular.*

Prova. Decorre da fórmula (5.7) notando-se que neste caso $|A(i)| \neq 0$, $\forall i \geq n_0$. ■

Observação 5.8 *Do corolário 5.7 decorre que as soluções* $x_{i,n}$, $i = 1, ..., k$ *da equação* (5.4) *são linearmente independentes* $\forall n \geq n_0$ *se e só se* $\Phi(n_0)$ *é não singular.*

Teorema 5.9 *Existe um conjunto fundamental de soluções do sistema* (5.4) *de dimensão* k.

Prova. Seja $e_1 = (1, 0, ..., 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, ..., 0)$, ..., $e_k = (0, ..., 0, 1)$ os k vectores unitários de $\mathbb{R}^k$. Pelo teorema 5.2, para cada e_i, $i = 1, ..., k$ existe uma única solução $x_{i,n}$ do sistema (5.4) com $x_{n_0} = e_i$. Portanto $x_{i,n}$, $i = 1, ..., k$ são k vectores solução do sistema (5.4).

Como $\Phi(n_0) = I_k$, então $|\Phi(n_0)| = 1$ e assim pela observação 5.8 tem-se o pretendido.

■

À semelhança do que acontece com as equações de ordem superior estudadas no Capítulo 3, se se considerar o conjunto S de todas as soluções da equação (5.4), tem-se que S é um espaço vectorial sobre o corpo $\Bbbk$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). O espaço S também é linear pois se x_n e y_n são soluções de (5.4) e $\alpha, \beta \in \Bbbk$, então $z_n = \alpha x_n + \beta y_n \in S$, uma vez que

$$z_{n+1} = \alpha x_{n+1} + \beta y_{n+1} = \alpha A(n)\, x_n + \beta A(n)\, y_n = A(n)\, z_n$$

Lema 5.10 *Qualquer solução* x_n *do sistema* (5.4) *pode ser expressa como combinação linear dos elementos do conjunto fundamental de soluções encontrado no teorema 5.9.*

Prova. Seja x_n uma solução de (5.4) com $x_{n_0} = c \in \mathbb{R}^k$. Pela linearidade de S e sendo $c = \sum_{i=1}^{k} c_i e_i$, $c_i \in \mathbb{R}$ tem-se que $y_n = \sum_{i=1}^{k} c_i x_{i,n}$ satisfaz (5.4), sendo $y_{n_0} = c$ e $x_{i,n}$, $i = 1, ..., k$ o conjunto fundamental de soluções encontrado no teorema 5.9. Então pela unicidade da solução y_n coincide com x_n. ■

Teorema 5.11 *O espaço S é um espaço linear de dimensão k.*

Prova. Decorre do lema 5.10 e do teorema 5.9. ■

Observação 5.12 *Se $x_{i,n}$, $i = 1, ..., k$, são k soluções linearmente independentes do sistema* (5.4) *e $c = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_k \end{bmatrix}^T$ é um vector constante arbitrário, então o vector $x_n = \Phi(n)\, c$ é a solução geral do sistema* (5.4) *com $\Phi(n) = \begin{bmatrix} x_{1,n} & x_{2,n} & \cdots & x_{k,n} \end{bmatrix}$, ou seja,*

$$x_n = \sum_{i=1}^{k} c_i x_{i,n},\ c_i \in \mathbb{R}.$$

Lema 5.13 *A diferença entre duas soluções x_n e y_n do sistema* (5.3) *é uma solução de* (5.4).

Prova. Tem-se que $x_{n+1} = A(n)\, x_n + g(n)$ e $y_{n+1} = A(n)\, y_n + g(n)$, pelo que $x_{n+1} - y_{n+1} = A(n)\,[x_n - y_n]$, o que prova o lema. ■

Ir-se-á agora direccionar a atenção para o sistema (5.3).

Uma solução particular $x_{p,n}$ do sistema (5.3) é uma função vectorial que satisfaz o sistema não homogéneo. O próximo teorema fornece um processo para determinar a solução geral do sistema (5.3).

Teorema 5.14 *Qualquer solução x_n do sistema* (5.3) *pode ser escrita na forma*

$$x_n = \Phi(n)\, c + x_{p,n}, \tag{5.8}$$

onde $x_{p,n}$ é uma solução particular de (5.3), *$\Phi(n)$ é a matriz fundamental do sistema* (5.4) *e $c = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_k \end{bmatrix}^T$, $c_i =\in \mathbb{R}$ com $i = 1, ..., k$.*

Prova. Pelo lema 5.13, $x_n - x_{p,n} \in S$ e qualquer elemento de S pode ser escrito na forma $\Phi(n)\, c$, ou seja, $x_n - x_{p,n} = \Phi(n)\, c$. ■

É necessário então encontrar um processo para determinar a solução particular do sistema (5.3). Este é precisamente o conteúdo teorema seguinte.

Teorema 5.15 *A solução particular do sistema* (5.3) *pode ser escrita na forma*

$$x_{p,n} = \sum_{i=n_0}^{n-1} \Phi(n, i+1)\, g(i),\ x_{p,n_0} = 0.$$

Prova.

$$\begin{aligned} x_{p,n+1} &= \sum_{i=n_0}^{n} \Phi(n+1,i+1)\, g(i) \\ &= \sum_{i=n_0}^{n-1} \Phi(n+1,i+1)\, g(i) + \Phi(n+1,n+1)\, g(n) \end{aligned}$$

Como

$$\Phi(n+1,n+1) = \Phi(n+1)\, \Phi^{-1}(n+1) = I_k$$

e

$$\begin{aligned} \Phi(n+1,i+1) &= \Phi(n+1)\, \Phi^{-1}(i+1) = \prod_{i=n_0}^{n} A(i)\, \Phi^{-1}(i+1) \\ &= A(n) \prod_{i=n_0}^{n-1} A(i)\, \Phi^{-1}(i+1) = A(n)\, \Phi(n)\, \Phi^{-1}(i+1) \\ &= A(n)\, \Phi(n,i+1) \end{aligned}$$

vem que

$$x_{p,n+1} = \sum_{i=n_0}^{n-1} A(n)\, \Phi(n,i+1)\, g(i) + g(n) = A(n)\, x_n + g(n)$$

pelo que, $x_{p,n}$ é uma solução de (5.3) com $x_{p,n_0} = 0$. ■

Exemplo 5.16 *Resolva o sistema* $x_{n+1} = Ax_n + g(n)$, *onde* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $g(n) = \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}$ *e* $n \geq n_0 = 0$.

Solução. Tem-se que

$$\begin{aligned} \Phi(n) &= \prod_{i=0}^{n-1} A(i) = A^n = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{(-1)^n+3^n}{2} & \frac{3^n-(-1)^n}{2} \\ \frac{3^n-(-1)^n}{2} & \frac{(-1)^n+3^n}{2} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

pelo que

$$\Phi(n,i+1) = A^{n-i-1} = \begin{bmatrix} \frac{(-1)^{n-i-1}+3^{n-i-1}}{2} & \frac{3^{n-i-1}-(-1)^{n-i-1}}{2} \\ \frac{3^{n-i-1}-(-1)^{n-i-1}}{2} & \frac{(-1)^{n-i-1}+3^{n-i-1}}{2} \end{bmatrix}.$$

Assim

$$\begin{aligned}
x_n &= \Phi(n)\,c + \sum_{i=0}^{n-1} \Phi(n,i+1)\,g(i) \\
&= \begin{bmatrix} \frac{(-1)^n+3^n}{2} & \frac{3^n-(-1)^n}{2} \\ \frac{3^n-(-1)^n}{2} & \frac{(-1)^n+3^n}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \\
&\quad + \sum_{i=0}^{n-1} \begin{bmatrix} \frac{(-1)^{n-i-1}+3^{n-i-1}}{2} & \frac{3^{n-i-1}-(-1)^{n-i-1}}{2} \\ \frac{3^{n-i-1}-(-1)^{n-i-1}}{2} & \frac{(-1)^{n-i-1}+3^{n-i-1}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{(-1)^n(c_1-c_2)+3^n(c_1+c_2)}{2} \\ \frac{(-1)^n(c_2-c_1)+3^n(c_1+c_2)}{2} \end{bmatrix} + \sum_{i=0}^{n-1} \begin{bmatrix} \frac{(i-1)(-1)^{n-i-1}+(i+1)3^{n-i-1}}{2} \\ \frac{(1-i)(-1)^{n-i-1}+(i+1)3^{n-i-1}}{2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{(-1)^n(c_1-c_2)+3^n(c_1+c_2)}{2} \\ \frac{(-1)^n(c_2-c_1)+3^n(c_1+c_2)}{2} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (-1)^{n-1} \sum\limits_{i=0}^{n-1} (i-1)(-1)^{-i} + 3^{n-1} \sum\limits_{i=0}^{n-1} (i+1)\,3^{-i} \\ (-1)^{n-1} \sum\limits_{i=0}^{n-1} (1-i)(-1)^{-i} + 3^{n-1} \sum\limits_{i=0}^{n-1} (i+1)\,3^{-i} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{(-1)^n(c_1-c_2)+3^n(c_1+c_2)}{2} \\ \frac{(-1)^n(c_2-c_1)+3^n(c_1+c_2)}{2} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{3(-1)^n+3^{n+1}-6}{4} \\ \frac{3^{n+1}-3(-1)^n-4n}{4} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{4(c_1-c_2+3)(-1)^n+4(c_1+c_2+3)3^n-6}{8} \\ \frac{4(c_2-c_1-3)(-1)^n+4(c_1+c_2+3)3^n-4n}{8} \end{bmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

■

5.2 Método de variação das constantes

Viu-se que a solução geral de (5.4) é dada por $x_n = \Phi(n, n_0)\, c$, $c \in \mathbb{R}^k$. Suponha-se que c é uma função vectorial definida em $\mathbb{Z}_0^+$ e imponha-se que $x_n = \Phi(n, n_0)\, c_n$ satisfaz (5.3). Então

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= \Phi(n+1, n_0)\, c_{n+1} = A(n)\,\Phi(n, n_0)\, c_{n+1} \\
&= A(n)\,\Phi(n, n_0)\, c_n + g(n)
\end{aligned}$$

Assim

$$\Phi(n, n_0)\, c_{n+1} = \Phi(n, n_0)\, c_n + A^{-1}(n)\, g(n),$$

ou seja,

$$c_{n+1} = c_n + [A(n)\,\Phi(n, n_0)]^{-1}\, g(n),$$

isto é,

$$c_{n+1} = c_n + \Phi^{-1}(n+1, n_0)\, g(n)$$

Como $\Phi^{-1}(n+1, n_0) = \Phi(n_0, n+1)$, então a solução geral da última equação é

$$c_n = c_{n_0} + \sum_{i=n_0}^{n-1} \Phi(n_0, i+1)\, g(i).$$

Assim, a solução de (5.3) pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} x_n &= \Phi(n,n_0)\,c_n = \Phi(n,n_0)\,c_{n_0} + \sum_{i=n_0}^{n-1} \Phi(n,n_0)\,\Phi(n_0,i+1)\,g(i) \\ &= \Phi(n,n_0)\,c_{n_0} + \sum_{i=n_0}^{n-1} \Phi(n,i+1)\,g(i) \end{aligned}$$

Observação 5.17 *Para $c_{n_0} = x_{n_0}$ vem que a única solução de (5.3) é*

$$x_n = \Phi(n,n_0)\,x_{n_0} + \sum_{i=n_0}^{n-1} \Phi(n,i+1)\,g(i), \tag{5.9}$$

ou seja,

$$x_n = \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} A(i)\right] x_{n_0} + \sum_{i=n_0}^{n-1} \left[\prod_{j=i+1}^{n-1} A(j)\right] g(i) \tag{5.10}$$

Quando A é uma matriz constante tem-se que $\Phi(n,n_0) = A^{n-n_0}$ e $\Phi(n,n_0) = \Phi(n-n_0,0)$. Portanto a solução anterior reduz-se a

$$x_n = A^{n-n_0}x_{n_0} + \sum_{i=n_0}^{n-1} A^{n-i-1}g(i)$$

Note-se que neste caso $A^{n-i-1} = \Phi(n-i-1,0) = \Phi(n,i+1)$.

Exemplo 5.18 *Resolva o sistema* $\begin{cases} x_{1,n+1} = 2x_{1,n} + 2x_{2,n} - 2x_{3,n} + 1 \\ x_{2,n+1} = 3x_{2,n} + x_{3,n} + n \\ x_{3,n+1} = x_{2,n} + 3x_{3,n} + n^2 \end{cases}$ *com* $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Solução. Para este sistema tem-se

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } g(n) = \begin{bmatrix} 1 \\ n \\ n^2 \end{bmatrix}$$

Como A é uma matriz constante, então $\Phi(n,0) = A^n$. Usando a forma canónica Jordan da matriz A tem-se

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

pelo que

$$\begin{aligned} \Phi(n,0) &= A^n = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^n & n2^{n-1} & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2^n & n2^n & -n2^n \\ 0 & 2^{n-1} + 2^{2n-1} & -2^{n-1} + 2^{2n-1} \\ 0 & -2^{n-1} + 2^{2n-1} & 2^{n-1} + 2^{2n-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

A solução do sistema que obedece à condição particular dada é

$$\begin{aligned}
x_n &= A^n x_0 + \sum_{i=0}^{n-1} A^{n-i-1} g(i) = \begin{bmatrix} (1+n)\,2^n \\ 2^{n-1}-2^{2n-1} \\ -2^{n-1}-2^{2n-1} \end{bmatrix} + \\
&+ \sum_{i=0}^{n-1} \begin{bmatrix} 2^{n-i-1} & (n-i-1)\,2^{n-i-1} & -(n-i-1)\,2^{n-i-1} \\ 0 & 2^{n-i-2}+2^{2(n-i)-3} & -2^{n-i-2}+2^{2(n-i)-3} \\ 0 & -2^{n-i-2}+2^{2(n-i)-3} & 2^{n-i-2}+2^{2(n-i)-3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ i^2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (1+n)\,2^n \\ 2^{n-1}-2^{2n-1} \\ -2^{n-1}-2^{2n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2^{n-1}\sum\limits_{i=0}^{n-1}\left(1-k+kn-k^2n+k^3\right)2^{-k} \\ 2^{n-2}\sum\limits_{i=0}^{n-1}\left(k-k^2\right)2^{-k} + \frac{4^n}{8}\sum\limits_{i=0}^{n-1}\left(k+k^2\right)4^{-k} \\ 2^{n-2}\sum\limits_{i=0}^{n-1}\left(-k+k^2\right)2^{-k} + \frac{4^n}{8}\sum\limits_{i=0}^{n-1}\left(k+k^2\right)4^{-k} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (1+n)\,2^n \\ 2^{n-1}-2^{2n-1} \\ -2^{n-1}-2^{2n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 13\times 2^n - 2n^2 - 6n - 2n2^n - 13 \\ 2\times 2^n - \frac{2}{3}n^2 - \frac{16}{9}n + \frac{4}{27}2^{2n} - \frac{58}{27} \\ 2^n - \frac{2}{3}n^2 - \frac{7}{9}n + \frac{4}{27}2^{2n} - \frac{31}{27} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (14-n)\,2^n - 2n^2 - 6n - 13 \\ 5\times 2^{n-1} - \frac{19}{54}4^n - \frac{2}{3}n^2 - \frac{16}{9}n - \frac{58}{27} \\ 2^{n-1} - \frac{19}{54}4^n - \frac{2}{3}n^2 - \frac{7}{9}n - \frac{31}{27} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

■

5.3 Representação de equações de ordem superior sob a forma de sistemas

Inicia-se esta secção considerando a equação linear de ordem k

$$x_{n+k} + p_1(n)\,x_{n+k-1} + p_2(n)\,x_{n+k-2} + \ldots + p_k(n)\,x_n = g(n) \tag{5.11}$$

onde $p_1(n), \ldots, p_k(n), g(n)$ são funções definidas em $\mathbb{Z}_0^+$.

Introduzindo as $k-1$ relações $x_{n+i} = x_{n+i},\ 1 \leq i \leq k-1$, obtém-se o sistema

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_{n+1} \\ x_{n+2} = x_{n+2} \\ \vdots \\ x_{n+k-1} = x_{n+k-1} \\ x_{n+k} = -p_1(n)\,x_{n+k-1} - p_2(n)\,x_{n+k-2} - \ldots - p_k(n)\,x_n + g(n) \end{cases}$$

que pode ser escrito na forma

$$X_{n+1} = A(n)\,X_n + G_n \tag{5.12}$$

onde

$$X_n = \begin{bmatrix} x_n \\ x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+k-1} \end{bmatrix},\ G_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g(n) \end{bmatrix},\ X_{n_0} = \begin{bmatrix} x_{n_0} \\ x_{n_0+1} \\ \vdots \\ x_{n_0+k-1} \end{bmatrix} \tag{5.13}$$

e

$$A(n) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \\ -p_k(n) & -p_{k-1}(n) & \cdots & -p_2(n) & -p_1(n) \end{bmatrix} \tag{5.14}$$

sendo X_{n_0} as condições iniciais impostas. À matriz (5.14) chama-se matriz companheira (ou de Frobenius) da equação (5.11). Esta matriz possui algumas propriedades interessantes que caracterizam a solução de (5.12):

1. O $|A(n) - \lambda I_k|$ é o polinómio $(-1)^k \left(\lambda^k + p_1(n)\lambda^{k-1} + ... + p_k(n)\right)$. Quando A é uma matriz constante este polinómio coincide com o polinómio característico;

2. $|A(n)| = (-1)^k p_k(n)$ e uma vez que a equação (5.11) tem ordem k, então $A(n)$ é não singular;

3. Quando A é independente de n e tem $\lambda_1, ..., \lambda_k$ vectores próprios simples, então pode-se escrever A na forma VDV^{-1} onde V é a matriz de Vandermonde e

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_k \end{bmatrix}.$$

De (5.9) sai que a solução do sistema (5.12) é dada na forma

$$X_n = \Phi(n, n_0) X_{n_0} + \sum_{i=n_0}^{n-1} \Phi(n, i+1) G(i),$$

ou seja,

$$X_n = \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} A(i)\right] X_{n_0} + \sum_{i=n_0}^{n-1} \left[\prod_{j=i+1}^{n-1} A(j)\right] G(i). \tag{5.15}$$

Como se quer descobrir a solução x_n da equação (5.11), então a primeira componente de (5.15) é a expressão pretendida.

Exemplo 5.19 *Revolva a equação usando a notação matricial*

$$x_{n+3} - 7x_{n+1} - 6x_n = (-2)^n, \; x_0 = 1, \; x_1 = 2 \text{ e } x_3 = -1.$$

Solução. Usando as equações auxiliares $x_{n+1} = x_{n+1}$ e $x_{n+2} = x_{n+2}$ tem-se o seguinte sistema

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_{n+1} \\ x_{n+2} = x_{n+2} \\ x_{n+3} = 6x_n + 7x_{n+1} + (-2)^n \end{cases}$$

cuja forma matricial é

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_{n+2} \\ x_{n+3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & 7 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ x_{n+1} \\ x_{n+2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (-2)^n \end{bmatrix},$$

ou seja, $X_{n+1} = A(n) X_n + G(n)$. Como a matriz A é uma matriz constante tem-se que $\Phi(n,0) = A^n$ e $\Phi(n, i+1) = A^{n-i-1}$. Diagonalizando A vem

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & 7 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{9} \\ -1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{12}{5} & -\frac{8}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{9}{10} & \frac{27}{20} & \frac{9}{20} \end{bmatrix}$$

pelo que

$$A^n = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}(-1)^n - \frac{3}{5}(-2)^n + \frac{1}{10}3^n & \frac{1}{4}(-1)^n - \frac{2}{5}(-2)^n + \frac{3}{20}3^n & -\frac{1}{4}(-1)^n + \frac{1}{5}(-2)^n + \frac{1}{20}3^n \\ -\frac{3}{2}(-1)^n + \frac{6}{5}(-2)^n + \frac{3}{10}3^n & -\frac{1}{4}(-1)^n + \frac{4}{5}(-2)^n + \frac{9}{20}3^n & \frac{1}{4}(-1)^n - \frac{2}{5}(-2)^n + \frac{3}{20}3^n \\ \frac{3}{2}(-1)^n - \frac{12}{5}(-2)^n + \frac{9}{10}3^n & \frac{1}{4}(-1)^n - \frac{8}{5}(-2)^n + \frac{27}{20}3^n & -\frac{1}{4}(-1)^n + \frac{4}{5}(-2)^n + \frac{9}{20}3^n \end{bmatrix}$$

Assim, a solução do sistema é

$$\begin{aligned} X_n &= A^n \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \sum_{i=0}^{n-1} A^{n-i-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (-2)^i \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{9}{4}(-1)^n - \frac{8}{5}(-2)^n + \frac{7}{20}3^n \\ -\frac{9}{4}(-1)^n + \frac{16}{5}(-2)^n + \frac{21}{20}3^n \\ \frac{9}{4}(-1)^n - \frac{32}{5}(-2)^n + \frac{63}{20}3^n \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} \frac{6}{25}(-2)^n - \frac{1}{4}(-1)^n + \frac{1}{100}3^n - \frac{1}{10}n(-2)^n \\ \frac{(-1)^n}{4} + \left(-\frac{7}{25} + \frac{n}{5}\right)(-2)^n + \frac{3}{100}3^n \\ \frac{4}{25}(-2)^n - \frac{1}{4}(-1)^n + \frac{9}{100}3^n - \frac{2}{5}n(-2)^n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2(-1)^n - \frac{34}{25}(-2)^n + \frac{9}{25}3^n - \frac{1}{10}n(-2)^n \\ -2(-1)^n + \left(\frac{73}{25} + \frac{1}{5}n\right)(-2)^n + \frac{27}{25}3^n \\ 2(-1)^n - \frac{156}{25}(-2)^n + \frac{81}{25}3^n - \frac{2}{5}n(-2)^n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Portanto, a solução da equação inicial é

$$x_n = 2(-1)^n - \frac{34}{25}(-2)^n + \frac{9}{25}3^n - \frac{1}{10}n(-2)^n$$

■

Exemplo 5.20 *Considere a sequência de triângulos rectângulos da Figura 5.1 onde* $p_0 = (0,0)$, $p_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ *e* $p_2 = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$. *Para* $p_n = (x_n, y_n)$ *com* $n \geq 3$ *tem-se*

$$x_{n+3} = \frac{x_{n+1} + x_n}{2} \text{ e } y_{n+3} = \frac{y_{n+1} + y_n}{2}$$

Escreva cada equação sob a forma matricial e determine a sua solução. Qual o $\lim\limits_{n \to \infty} p_n$?

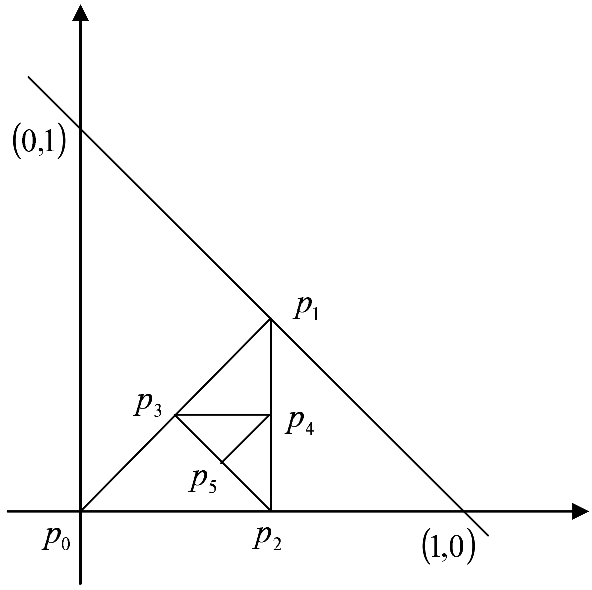

Figura 5.1: Sequência de triângulos rectângulos

Solução. As equações dadas podem ser apresentadas na forma

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_{n+2} \\ x_{n+3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ x_{n+1} \\ x_{n+2} \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} y_{n+1} \\ y_{n+2} \\ y_{n+3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_n \\ y_{n+1} \\ y_{n+2} \end{bmatrix}$$

que são sistemas lineares homogéneos de primeira ordem e cujas soluções são

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x_n \\ x_{n+1} \\ x_{n+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & -2i & 2i \\ 1 & -1+i & -1-i \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)^n \end{bmatrix} \\
&\quad \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{1}{10}+\frac{1}{5}i & -\frac{1}{5}-\frac{1}{10}i & \frac{3}{10}-\frac{1}{10}i \\ -\frac{1}{10}-\frac{1}{5}i & -\frac{1}{5}+\frac{1}{10}i & \frac{3}{10}+\frac{1}{10}i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{10}i\right)\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)^n - \left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}i\right)\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)^n + \frac{2}{5} \\ \left(\frac{1}{20}+\frac{3}{20}i\right)\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)^n + \left(\frac{1}{20}-\frac{3}{20}i\right)\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)^n + \frac{2}{5} \\ \left(\frac{1}{20}-\frac{1}{10}i\right)\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)^n + \left(\frac{1}{20}+\frac{1}{10}i\right)\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)^n + \frac{2}{5} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} y_n \\ y_{n+1} \\ y_{n+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{5}i\right)\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)^n - \left(\frac{1}{10}+\frac{1}{5}i\right)\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)^n + \frac{1}{5} \\ \left(\frac{3}{20}-\frac{1}{20}i\right)\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)^n + \left(\frac{3}{20}+\frac{1}{20}i\right)\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)^n + \frac{1}{5} \\ -\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{20}i\right)\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)^n - \left(\frac{1}{10}-\frac{1}{20}i\right)\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)^n + \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

Assim

$$\begin{aligned}
p_n &= \left(-\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{10}i\right)\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)^n - \left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}i\right)\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)^n + \frac{2}{5},\right. \\
&\quad \left.-\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{5}i\right)\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)^n - \left(\frac{1}{10}+\frac{1}{5}i\right)\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)^n + \frac{1}{5}\right)
\end{aligned}$$

Como $\left|-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right| = \left|-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right| = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$ então

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right).$$

■

5.4 Estabilidade das soluções

5.4.1 Preliminares

Considere-se a equação de diferenças vectorial

$$x_{n+1} = f(n, x_n), \tag{5.16}$$

onde $x_n \in \mathbb{R}^k$, $f : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^k$, $f(n,x)$ é uma função contínua em x e x_{n_0} é uma condição inicial.

A equação (5.16) é autónoma ou invariante no tempo se a variável n não aparece explicitamente no lado direito da equação, isto é, $f(n, x_n) \equiv f(x_n)$ e é periódica de período N se $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ se tem $f(n+N, x) = f(n, x)$ para algum inteiro positivo N.

Um ponto $x^* \in \mathbb{R}^k$ é um ponto de equilíbrio da equação (5.16) se $f(n, x^*) = x^*$, $\forall n \geq n_0$. Se se efectuar a mudança de variável $y_n = x_n - x^*$ vem

$$y_{n+1} = f(n, y_n + x^*) - x^* = g(n, y_n).$$

Quando $y_n = 0$ tem-se $x_n = x^*$. É por esta razão que muitos autores assumem que x^* é a origem 0 de um referencial e neste caso x^* é chamado de solução zero.

Seguidamente apresentam-se as várias noções de estabilidade do ponto de equilíbrio x^*.

Definição 5.21 *O ponto de equilíbrio x^* da equação* (5.16) *é:*

1. *Estável (E) se dado um $\varepsilon > 0$ e $n_0 \geq 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon, n_0)$ tal que se $\|x_{n_0} - x^*\| < \delta$, então $\|x_n - x^*\| < \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$, uniformemente estável (UE) se δ pode ser escolhido independente de n_0 e instável (I) se não for estável;*

2. *Atractivo (A) se existe $\mu = \mu(n_0)$ tal que $\|x_{n_0} - x^*\| < \mu$ implica $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$, uniformemente atractivo (UA) se μ pode ser escolhido independente de n_0. Pode-se redigir a condição de uniformemente atractivo de outro modo. Se existe $\mu > 0$ tal que para todo $\varepsilon > 0$ e $n_0 > 0$ existe $N = N(\varepsilon)$ independente de n_0 tal que se $\|x_{n_0} - x^*\| < \mu$, então $\|x_n - x^*\| < \varepsilon$, $\forall n \geq n_0 + N$;*

3. *Assimptoticamente estável (AE) se é estável e atractivo, uniformemente assimptoticamente estável (UAE) se é uniformemente estável e uniformemente atractivo;*

4. *Exponencialmente estável (EE) se $\exists \delta > 0$, $\exists M > 0$, $\exists \eta \in \left]0,1\right[$ tal que*

$$\|x_{n_0} - x^*\| < \delta \Longrightarrow \|x_n - x^*\| \leq M \|x_{n_0} - x^*\| \eta^{n-n_0};$$

5. *A solução x_n é limitada se $\|x_n\| \leq M$, $\forall n \geq n_0$ para alguma constante M positiva.*

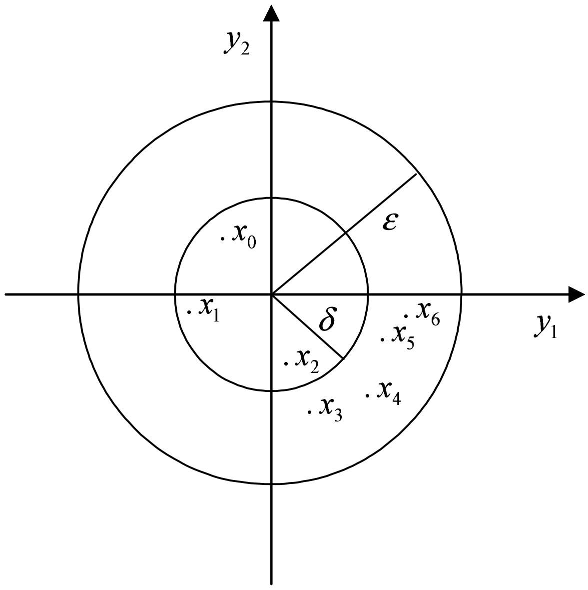

Figura 5.2: Ponto de equilíbrio $x^* = 0$ estável no plano de fases

Se no ponto 3. $\mu = \infty$ e no ponto 4. $\delta = \infty$, então diz-se que a estabilidade é global. Na Figura 5.2 pode-se visualizar o comportamento do ponto de equilíbrio $x^* = 0$, no caso deste ser estável. Suprimindo o tempo n e tomando x_0 dentro da bola de raio δ observa-se que o estado futuro x_n, $n \geq 0$ está sempre dentro da bola de raio ε. Este diagrama é conhecido como o retrato no plano de fases e será estudado na Secção 5.6. Na Figura 5.3 já se considera n como uma variável do plano tridimensional.

Na Figura 5.4 apresenta-se uma hierarquia entre os conceitos de estabilidade apresentados na definição 5.21

Para melhor se compreender a definição 5.21 seguem-se alguns exemplos:

1. A solução da equação $x_{n+1} = x_n$ é $x_n = x_{n_0}$, pelo que a solução zero ($x^* = 0$) é UE, uma vez que, dado $\varepsilon > 0$ e $n_0 \geq 0$ se se tomar $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ tem-se que $|x_{n_0}| < \delta$ implica $|x_n| = |x_{n_0}| < \delta = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Por outro lado a solução zero não é AE já que não é uma solução atractiva, uma vez que, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_{n_0} \neq x^*$ sempre que $x_{n_0} \neq 0$.

2. A solução da equação $x_{n+1} = \frac{1}{n}x_n$, $n \geq 1$ é $x_n = \left[\prod\limits_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i}\right] x_0 = \frac{1}{(n-1)!}x_0$. O ponto de equilíbrio $x^* = 0$ (ou solução zero) é UAE, uma vez que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, ou seja, a solução zero é UA. Por outro lado, dado $\varepsilon > 0$ e $n_0 \geq 0$ tome-se $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. Então sempre que $|x_0| < \delta$ tem-se que

$$|x_n| = \frac{1}{(n-1)!}\,|x_0| < \frac{1}{(n-1)!}\delta = \frac{1}{(n-1)!}\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

pelo que, a solução zero também é UE. Consequentemente a solução zero é UAE.

3. A solução da equação escalar $x_{n+1} = ax_n$, $n \geq 0$ é $x_n = a^n x_0$. Então:

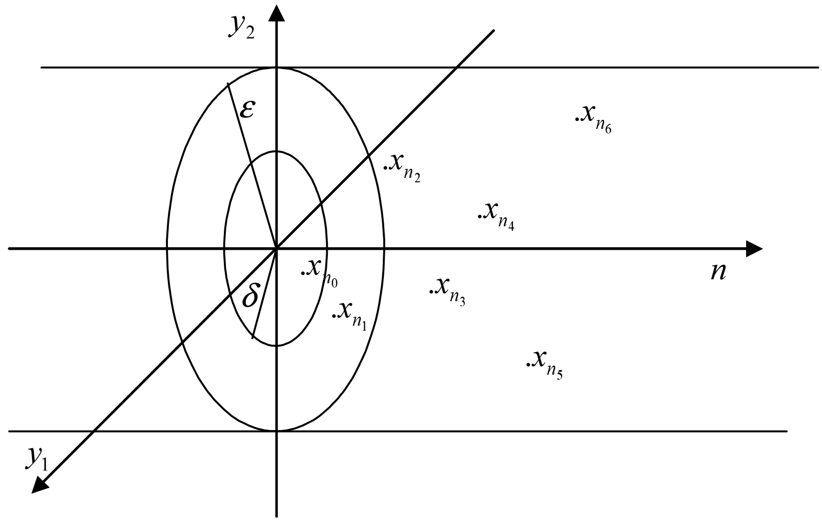

Figura 5.3: Estabilidade de um ponto de equilíbrio no plano tridimensional

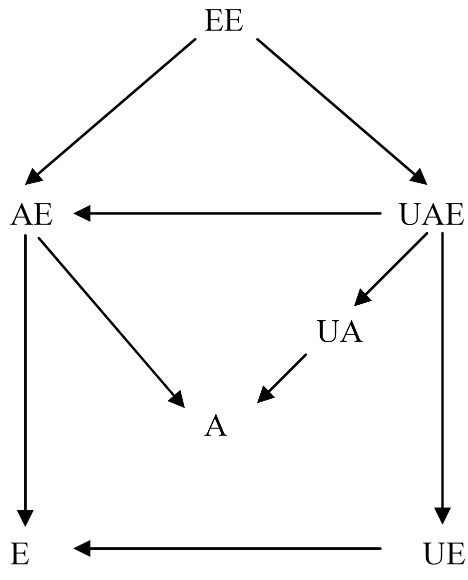

Figura 5.4: Hierarquia da noção de estabilidade

(a) Se $|a| < 1$ tem-se que a solução zero é UAE, já que é UA uma vez que $\exists \mu > 0$ tal que $|x_0| < \mu \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ e é UE pois para um dado $\varepsilon > 0$ e $\exists \delta = \frac{\varepsilon}{2|a^n|}$ tal que sempre que $|x_0| < \delta$, então

$$|x_n| = |a^n|\,|x_0| < |a^n|\,\delta = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

(b) Se $|a| = 1$ tem-se que a solução zero é UE, uma vez que se se tomar $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ para um dado $\varepsilon > 0$, então

$$|x_0| < \delta \Rightarrow |x_n| = |x_0| < \delta < \varepsilon.$$

(c) Se $|a| > 1$ tem-se que a solução zero é instável, uma vez que, não existe nenhum $\delta = \delta(\varepsilon, n_0)$ para um dado $\varepsilon > 0$ e tal que $|x_0| < \delta$ implique $|x_n| < \varepsilon$, já que a solução não é limitada.

4. A solução da equação $x_{n+1} = a(n)\,x_n$, é $x_n = \left[\prod\limits_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right] x_{n_0}$. Então podem-se tirar as seguintes conclusões:

(a) A solução zero é estável se e só se $\left|\prod\limits_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right| \leq M(n_0) = M$, onde M é uma constante positiva que depende de n_0.

Para se provar esta afirmação considere-se que a solução zero é estável. Isto quer dizer que, para um dado $\varepsilon > 0$ e $n_0 \geq 0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon, n_0)$ tal que $|x_{n_0}| < \delta$ implica $|x_n| < \varepsilon$. Então

$$|x_n| < \varepsilon \Rightarrow \left|\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right| |x_{n_0}| < \varepsilon \Rightarrow \left|\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right| < \frac{\varepsilon}{|x_{n_0}|} \leq M(n_0) = M$$

Reciprocamente, para um dado $\varepsilon > 0$ e $n_0 \geq 0$ tome-se $\delta = \delta(\varepsilon, n_0) = \frac{\varepsilon}{2M(n_0)}$. Então de $|x_{n_0}| < \delta$ tem-se que $|x_n| = \left|\prod\limits_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right| |x_{n_0}| \leq M\delta < \varepsilon$.

(b) A solução zero é UE se e só se $\left|\prod\limits_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right| \leq M$, onde M é uma constante positiva que não depende de n.

A prova no sentido directo é feita supondo-se que a solução zero é UE, ou seja, para $\varepsilon > 0$ e $n_0 \geq 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $|x_{n_0}| < \delta$ implica $|x_n| < \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$. Então

$$\left|\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right| |x_{n_0}| < \varepsilon \Rightarrow \left|\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right| < \frac{\varepsilon}{|x_{n_0}|} \leq M.$$

No sentido inverso pode-se tomar $\delta = \frac{\varepsilon}{2M}$ e tem-se que $|x_{n_0}| < \delta$ implica $|x_n| = \left|\prod\limits_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right| |x_{n_0}| \leq M\delta < \varepsilon$, ou seja, a solução zero é UE.

(c) A solução zero é AE se e só se $\lim_{n\to\infty}\left|\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right| = 0$.

Supondo por hipótese que a solução zero é AE, então $\lim_{n\to\infty}\left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right] x_{n_0} = 0$. Portanto $\lim_{n\to\infty}\left|\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right| |x_{n_0}| = 0$, ou seja, $\lim_{n\to\infty}\left|\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right| = 0$, uma vez que $|x_{n_0}|$ é uma constante. Reciprocamente, suponha-se que $\lim_{n\to\infty}\left|\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right| = 0$. Isto quer dizer que $\left|\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right|$ é limitado. Seja $\left|\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right| \leq D$, então para um dado $\varepsilon > 0$ e $n_0 \geq 0$ tome-se $\delta = \frac{\varepsilon}{2D}$. Assim, sempre que $|x_{n_0}| < \delta$ vem que $|x_n| = \left|\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right| |x_{n_0}| \leq D\delta < \varepsilon$, o que prova que a solução zero é estável. Para se provar que a solução é atractiva basta notar-se que $\lim_{n\to\infty}\left|\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right| = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i) = 0$, pelo que $\exists\mu = \mu(n_0)$ tal que $|x_{n_0}| < \delta$, então $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(\left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right] x_{n_0}\right) = 0$.

(d) A solução zero é EE se e só se $\left|\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right| \leq M\eta^{n-n_0}$, para algum $M>0$ e $0 < \eta < 1$.

Suponha-se que $\exists\delta > 0$, $\exists M > 0$, $\exists\eta \in]0,1[$ tal que $|x_{n_0}| < \delta$ implica $|x_n| \leq M|x_{n_0}|\eta^{n-n_0}$. Então

$$|x_n| = \left|\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right| |x_{n_0}| \leq M|x_{n_0}|\eta^{n-n_0} \Rightarrow \left|\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right| \leq M\eta^{n-n_0}.$$

Reciprocamente, suponha-se que $\left|\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right| \leq M\eta^{n-n_0}$, para algum $M>0$ e $0 < \eta < 1$. Seja $\delta > 0$ tal que $|x_{n_0}| < \delta$. Então

$$|x_n| = \left|\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right| |x_{n_0}| \leq M\eta^{n-n_0}|x_0|.$$

5.4.2 Estabilidade dos sistemas lineares

Considere-se o sistema linear

$$x_{n+1} = A(n)\, x_n \tag{5.17}$$

onde $n \geq n_0 \geq 0$ e para todo $n \geq n_0$ $A(n)$ é uma matriz não singular de dimensão $k \times k$. O sistema (5.17) é não autónomo. O correspondente sistema autónomo é

$$x_{n+1} = Ax_n \tag{5.18}$$

Seja $\Phi(n)$ a matriz fundamental de soluções dos sistemas (5.17) ou (5.18). Recorde-se que $\Phi(n,m) = \Phi(n)\Phi^{-1}(m)$ é a matriz de mudança de estado. Para o sistema (5.18) tem-se que $\Phi(n,n_0) = A^{n-n_0}$ e portanto a solução do sistema é $x_n = A^{n-n_0}x_{n_0}$.

Teorema 5.22 *Se* $\rho(A) < 1$*, então toda a solução* x_n *do sistema* (5.18) *satisfaz a condição* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. *Além disso, se* $\rho(A) < \delta < 1$*, então existe uma constante* $c>0$ *tal que* $\|x_n\| \leq c\delta^n \|x_{n_0}\|$, $n \geq n_0$.

Prova. Seja $\sigma(A) = \{\lambda_1, ..., \lambda_k\}$ e δ tal que $\rho(A) < \delta < 1$. Pelo algoritmo de Ptuzer pode-se determinar as potências de A. Neste caso a solução do sistema (5.18) é

$$x_n = \left[\sum_{i=1}^{k} u_i(n) M(i-1)\right] x_{n_0},\ M(i) = \begin{cases} I_k \text{ se } i=0 \\ (A-\lambda_i I_k) M(i-1),\ 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

$u_1(n) = \lambda_1^n$, $u_1(0) = 1$ e $u_i(n) = \sum\limits_{j=0}^{n-1} \lambda_i^{n-j-1} u_{i-1}(j)$, $i = 2, ..., k$. Daqui decorre que

$$|u_1(n)| = |\lambda_1|^n \leq [\rho(A)]^n \leq \delta^n,\ n \in \mathbb{Z}_0^+.$$

Como $u_2(n) = \sum\limits_{j=0}^{n-1} \lambda_2^{n-j-1}\lambda_1^j = \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2}$, então

$$|u_2(n)| = \frac{|\lambda_1^n - \lambda_2^n|}{|\lambda_1 - \lambda_2|} \leq a|\lambda_1^n - \lambda_2^n| \leq a(|\lambda_1^n| + |\lambda_2^n|) \leq 2a[\rho(A)]^n = b_2\delta^n,\ n \in \mathbb{Z}_0^+.$$

Analogamente tem-se $|u_i(n)| \leq b_i\delta^n$, $i = 1, ..., k$.

Sabe-se que para qualquer matriz M, existe uma constante $d > 0$ tal que $\|Mx\| \leq d\|x\|$, $\forall x \in \mathbb{R}^k$. Assim, as soluções x_n do sistema (5.18) satisfazem

$$\|x_n\| \leq \sum_{i=1}^{k} |u_i(n)| \|M(i) x_{n_0}\| \leq \sum_{i=1}^{k} b_i\delta^n d\|x_{n_0}\| = c\delta^n \|x_{n_0}\|.$$

Como $0 < \delta < 1$, então $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ ∎

Corolário 5.23 *A solução zero do sistema* (5.18) *é assimptoticamente estável se e só se* $\rho(A) < 1$.

Prova. ($\Longleftarrow$) Suponha-se que $\rho(A) < 1$, então pelo teorema 5.22 tem-se que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, pelo que a solução zero é atractica. Para um dado $\varepsilon > 0$ e $n_0 > 0$ tome-se $\delta = \frac{\varepsilon}{2\|A^{n-n_0}\|}$. Então sempre que $\|x_{n_0}\| < \delta$ tem-se

$$\|x_n\| = \|A^{n-n_0}\| \|x_{n_0}\| < \|A^{n-n_0}\| \delta = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

pelo que a solução zero é estável. Provou-se assim que se tem estabilidade assimptótica da solução zero.

($\Longrightarrow$) Por hipótese tem-se que $\exists\mu = \mu(n_0)$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ sempre que $\|x_{n_0}\| < \mu$. Assim $\lim\limits_{n\to\infty} A^{n-n_0}x_{n_0} = 0$ (x_{n_0} é uma constante). Daqui decorre que $\lim\limits_{n\to\infty} A^{n-n_0} = 0$. Pela forma canónica de Jordan sabe-se que $A^{n-n_0} = PJ^{n-n_0}P^{-1}$. É obvio que a matriz $J_i^{n-n_0} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ sempre que $|\lambda_i| < 1$. Como $\lim\limits_{n\to\infty} A^{n-n_0} = 0$, então $\lim\limits_{n\to\infty} J^{n-n_0} = 0$, e isto implica que $\lim\limits_{n\to\infty} J_i^{n-n_0} = 0$, ou seja $\rho(A) < 1$. ∎

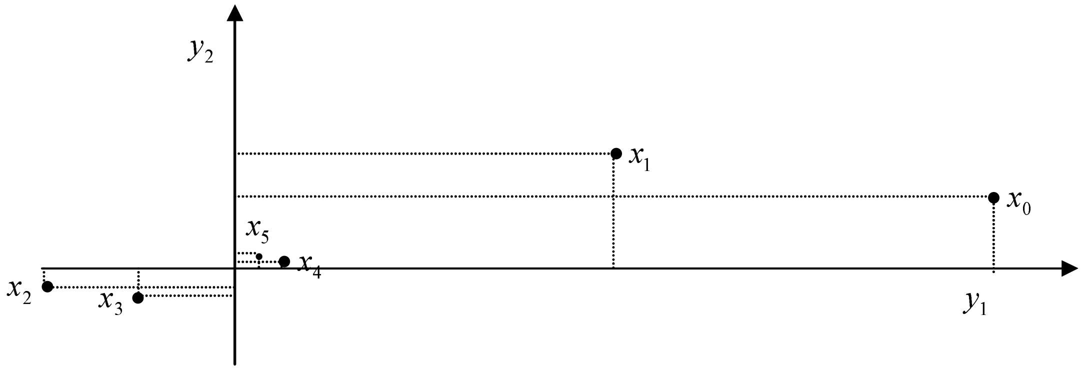

Figura 5.5: Estabilidade assimptótica da solução zero (solução em forma de espiral convergente para a origem)

Exemplo 5.24 *Prove que a solução zero do sistema é assimptoticamente estável*

$$x_{n+1} = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ \frac{1}{4} & -1 \end{bmatrix} x_n.$$

Solução. *O polinómio característico é* $p(\lambda) = \lambda^2 + \frac{1}{4}$. *Então* $\sigma(A) = \left\{-\frac{i}{2}, \frac{i}{2}\right\}$ *pelo que* $\rho(A) = \frac{1}{2} < 1$ *e assim em virtude do corolário 5.23 a solução zero é AE. Na Figura 5.5 ilustra-se esta situação com* $x_0 = \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \end{bmatrix}$. ■

Teorema 5.25 *Se* $\rho(A) > 1$, *então a solução* x_n *do sistema* (5.18) *satisfaz a relação* $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = \infty$.

Prova. Suponha-se $\rho(A) > 1$. Então $\exists \lambda \in \sigma(A)$ tal que $|\lambda| > 1$. Seja v o correspondente vector próprio. De $Av = \lambda v$ tem-se que $A^2 v = A\lambda v = \lambda A v = \lambda^2 v$. Mais geralmente, por indução prova-se que $A^{n-n_0} v = \lambda^{n-n_0} v$. Então $x_n = \lambda^{n-n_0} v$ é uma solução do sistema (5.18) e $\|x_n\| = |\lambda^{n-n_0}| \|v\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$. ■

Corolário 5.26 *A solução zero do sistema* (5.18) *é instável se* $\rho(A) > 1$.

Prova. Pelo teorema 5.25 a solução zero não é limitada, pelo que não existe nenhum $\delta = \delta(\varepsilon, n_0)$ para um dado $\varepsilon > 0$ e $n_0 \geq 0$ tal que $\|x_{n_0}\| < \delta$ implique $\|x_n\| < \varepsilon$. ■

Teorema 5.27 *Se* $\rho(A) \leq 1$ *e cada valor próprio* λ *de* A *com* $|\lambda| = 1$ *é semi-simples, então* $\exists c > 0$ *tal que* $\|x_n\| \leq c \|x_{n_0}\|$, $n \geq n_0 \geq 0$ *com* x_n *solução do sistema* (5.18).

Prova. Enumerem-se os valores próprios de A da seguinte forma: $|\lambda_i| < 1$ para $i = 1, ..., j-1$ e $|\lambda_i| = 1$ para $i = j, ..., k$. Neste caso tem-se que $x_n = A^{n-n_0} x_{n_0}$, pelo que $\|x_n\| = \|A^{n-n_0}\| \|x_{n_0}\|$. Pela forma canónica de Jordan sabe-se que $A^{n-n_0} = PJ^{n-n_0}P^{-1}$, onde

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \cdots & & & & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & & & \\ & & & J_r & 0 & & & \\ & & & 0 & \lambda_j & 0 & \cdots & 0 \\ & & & \vdots & 0 & \lambda_{j+1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & & & 0 & \cdots & 0 & \lambda_k \end{bmatrix}$$

onde J_i, $i = 1, ..., r$ é uma matriz do tipo $s_i \times s_i$ tal que $\sum_{i=1}^{r} s_i = j - 1$. É obvio que $J_i^{n-n_0} \underset{n\to\infty}{\to} 0$ pelo que cada bloco é limitado. Em relação aos restantes $k - j + 1$ blocos de dimensão 1×1 tem-se por hipótese que $|\lambda_i| = 1$, $i = j, ..., k$, ou seja, cada um destes blocos tem norma 1. Consequentemente $\|J^{n-n_0}\| < d$, $d > 0$, e assim

$$\|x_n\| = \|P\| \left\|J^{n-n_0}\right\| \left\|P^{-1}\right\| \|x_{n_0}\| < c\,\|x_{n_0}\|.$$

■

Corolário 5.28 *A solução zero do sistema* (5.18) *é estável se e só se* $\rho(A) \leq 1$ *e cada valor próprio* λ *de* A *com* $|\lambda| = 1$ *é semi-simples.*

Prova. ($\Longleftarrow$) Pelo teorema 5.27 sabe-se que $\|x_n\| \leq c\,\|x_{n_0}\|$. Para um dado $\varepsilon > 0$, $n_0 \geq 0$ tome-se $\delta = \frac{\varepsilon}{2c}$. Portanto sempre que $\|x_{n_0}\| < \delta$ vem que $\|x_n\| < c\,\|x_{n_0}\| < c\delta < \varepsilon$.

($\Longrightarrow$) Suponha-se que para um dado $\varepsilon > 0$ e $n_0 > 0$ $\exists\delta = \delta(\varepsilon, n_0)$ tal que $\|x_{n_0}\| < \delta$ implica $\|x_n\| < \varepsilon$. Assim, tem-se que

$$\left\|A^{n-n_0}\right\| \|x_{n_0}\| = \|P\| \left\|J^{n-n_0}\right\| \left\|P^{-1}\right\| \|x_{n_0}\| < \varepsilon$$

Então existe uma constante positiva d tal que $\|J^{n-n_0}\| < d$.

Portanto cada bloco de Jordan J_i^n é limitado e assim tem-se $|\lambda_i| < 1$ ou $|\lambda_i| = 1$ com λ_i semi-simples, ou seja, $\rho(A) \leq 1$. ■

Exemplo 5.29 *Determine se a solução zero do sistema* $x_{n+1} = Ax_n$ *é estável, AE ou instável quando a matriz* A *é* $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \frac{5}{12} & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{4} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{bmatrix}$ *ou* $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 1 & -1 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Solução. No 1º caso tem-se que $\sigma(A) = \{1\}$, pelo que tem-se de ver se este valor próprio é semi-simples. A forma canónica de Jordan da matriz A é

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

pelo que o valor próprio 1 não é semi-simples e consequentemente a solução zero do sistema é instável. No 2º caso $\sigma(A) = \left\{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{2}{3}\right\}$ pelo que $\rho(A) = \frac{2}{3} < 1$ e assim a solução zero é AE. Por último tem-se que $\sigma(A) = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right\}$ e assim $\rho(A) = 1$. Mas como 1 é valor próprio simples, então a solução zero deste sistema é estável. ■

O seguinte resultado estabelece as condições de estabilidade em termos da matriz fundamental $\Phi(n)$ do sistema (5.17).

Teorema 5.30 *A solução zero do sistema* (5.17) *é:*

1. *Estável se e só se existe uma constante positiva d tal que*

$$\|\Phi(n)\| \leq d,\ n \geq n_0 \geq 0; \tag{5.19}$$

2. *Uniformemente estável se e só se existe uma constante positica d tal que*

$$\|\Phi(n,m)\| \leq d \text{ para } n_0 \leq m \leq n < \infty; \tag{5.20}$$

3. *assimptoticamente estável se e só se*

$$\lim_{n\to\infty} \|\Phi(n)\| = 0; \tag{5.21}$$

4. *Uniformemente assimptoticamente estável se e só se existe uma constante positiva d e $\eta \in \left]0,1\right[$ tal que*

$$\|\Phi(n,m)\| \leq d\eta^{n-m},\ n_0 \leq m \leq n < \infty. \tag{5.22}$$

Prova. Seja $\Phi(n)$ a matriz fundamental do sistema (5.17), com $\Phi(n_0) = I_k$. Portanto $x_n = \Phi(n)\, x_{n_0}$.

1. Suponha-se que a relação (5.19) se verifica. Então $\|x_n\| \leq d\,\|x_{n_0}\|$. Para um dado $\varepsilon > 0$, $n_0 \geq 0$ tome-se $\delta = \frac{\varepsilon}{2d}$. Portanto sempre que $\|x_{n_0}\| < \delta$ vem $\|x_n\| \leq d\frac{\varepsilon}{2d} < \varepsilon$, ou seja, a solução zero é estável.

Reciprocamente, suponha-se que $\exists \delta = \delta(\varepsilon, n_0)$ tal que $\|x_n\| = \|\Phi(n)\, x_{n_0}\| < \varepsilon$ sempre que $\|x_{n_0}\| \leq \delta$. Como $\|x_{n_0}\| \leq \delta$ se e só se $\frac{1}{\delta}\|x_{n_0}\| \leq 1$, então

$$\|\Phi(n)\| = \sup_{\|v\|\leq 1} \|\Phi(n)\, v\| = \frac{1}{\delta} \sup_{\|x_{n_0}\|\leq\delta} \|\Phi(n)\, x_{n_0}\| \leq \frac{\varepsilon}{\delta} = d.$$

2. Suponha-se que a relação (5.20) é satisfeita. Então $\|\Phi(n)\|\,\|\Phi^{-1}(m)\| \leq d$. Seja $\delta = \frac{\varepsilon\|\Phi^{-1}(m)\|}{2d}$, então sempre que $\|x_{n_0}\| < \delta$ vem

$$\|x_n\| = \|\Phi(n)\|\,\|x_{n_0}\| \leq \frac{d}{\|\Phi^{-1}(m)\|}\delta < \varepsilon$$

Como δ não depende de n_0 então a solução zero é UE.

Reciprocamente, suponha-se que para um dado $\varepsilon > 0$, $n_0 \geq 0$ $\exists \delta = \delta(n_0)$ tal que $\|x_{n_0}\| \leq \delta$ implica $\|x_n\| < \varepsilon$. Como $\Phi(n) = \Phi(n,m)\,\Phi(m)$, então $\|\Phi(n,m)\|\,\|x_{n_0}\| < \frac{\varepsilon}{\|\Phi(m)\|}$, e portanto

$$\|\Phi(n,m)\| = \sup_{\|v\|\leq 1} \|\Phi(n,m)\, v\| = \frac{1}{\delta} \sup_{\|x_0\|\leq\delta} \|\Phi(n,m)\, x_{n_0}\| \leq \frac{\varepsilon}{\delta\,\|\Phi(m)\|} = d.$$

3. Suponha-se que $\lim_{n\to\infty} \|\Phi(n)\| = 0$, ou seja $\|\Phi(n)\|$ é limitada. Portanto $\|\Phi(n)\| \leq d$, $d > 0$. Para $\varepsilon > 0$, $n_0 \geq 0$ tome-se $\delta = \frac{\varepsilon}{2d}$. Então sempre que $\|x_{n_0}\| < \delta$ vem

$$\|x_n\| = \|\Phi(n)\|\,\|x_{n_0}\| \leq d\delta < \varepsilon$$

e assim a solução zero é estável. Para se provar que é atractiva basta ver que

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \lim_{n\to\infty} \|\Phi(n)\| \|x_{n_0}\| = 0 \times \|x_{n_0}\| = 0.$$

Daqui decorre que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ e assim tem-se a estabilidade assimptótica da solução zero.

Reciprocamente, suponha-se que a solução zero é AE. Então

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \lim_{n\to\infty} \|\Phi(n)\| \|x_{n_0}\| = 0$$

Daqui decorre que $\lim_{n\to\infty} \|\Phi(n)\| = 0$.

4. Suponha-se que a relação (5.22) é válida. Por 2. conclui-se que a solução zero é UE. Seja $\varepsilon \in]0, d[$, $\mu = 1$ e N tal que $\eta^N < \frac{\varepsilon}{d}$. Assim se $\|x_{n_0}\| < 1$, então $\|x_n\| = \|\Phi(n, n_0) x_{n_0}\| \leq d\eta^{n-n_0} < \varepsilon$ para $n \geq n_0 + N$. Daqui decorre que $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 0$ e assim $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Provou-se assim que a solução zero é UAE.

Reciprocamente, suponha-se que a solução zero é UAE. Pela estabilidade uniforme, sai que $\|\Phi(n, m)\| \leq d$ para $n_0 \leq m \leq n < \infty$ (ponto 2.). Como a solução zero é uniformemente atractiva tem-se que $\exists \mu > 0$ tal que $\|x_{n_0}\| < \mu$ implica $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, ou seja $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 0$. Tem-se então que $\|x_n\| < 1$ e assim para $\varepsilon \in]0, 1[$ existe $d > 0$ tal que $\|\Phi(n, n_0)\| < \varepsilon$ para $n \geq n_0 + N$ sempre que $\|x_{n_0}\| < \mu$. Para $n \in [n_0 + md, n_0 + (m+1) d]$, $m > 0$ tem-se

$$\begin{aligned}
\|\Phi(n, n_0)\| &= \|\Phi(n, n_0 + md)\| \|\Phi(n_0 + md, n_0 + (m-1) d)\| ... \|\Phi(n + d, n_0)\| \\
&\leq d\varepsilon^m = \frac{d}{\varepsilon}\left(\varepsilon^{\frac{1}{d}}\right)^{(m+1)d} = d'\eta^{(m+1)d} \\
&\leq d'\eta^{(n-n_0)}, \ md \leq n - n_0 \leq (m+1) d.
\end{aligned}$$

■

Corolário 5.31 *A solução zero do sistema* (5.17) *é:*

1. *Estável se e só se todas as soluções são limitadas;*

2. *Exponencialmente estável se e só se é UAE.*

Prova. 1. Pelo teorema 5.30 a solução zero é estável se e só se $\|\Phi(n)\| \leq d$. Assim

$$\|x_n\| = \|\Phi(n)\| \|x_{n_0}\| \leq d \|x_{n_0}\| \leq d'.$$

2. Novamente usando o teorema 5.30 a solução é UAE se e só se existe uma constante positiva d e $\eta \in]0, 1[$ tal que

$$\|\Phi(n, m)\| \leq d\eta^{n-m}, \ n_0 \leq m \leq n < \infty.$$

Assim, $\exists \delta > 0$ tal que $\|x_{n_0}\| < \delta$ implica

$$\|x_n\| \leq d\eta^{n-n_0} \|x_{n_0}\|$$

■

Exemplo 5.32 *Determine a estabilidade da solução zero do sistema* $x_{n+1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} x_n$.

Solução. A solução do sistema é

$$x_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1-i}{2} & \frac{1+i}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (2-i)^n & 0 \\ 0 & (2+i)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1-i}{2} & i \\ \frac{1+i}{2} & -i \end{bmatrix}.$$

Como $\sigma(A) = \{2-i, 2+i\}$, então $\rho(A) = \sqrt{5} > 1$ pelo que a solução do sistema não é limitada. Pelo corolário 5.31 a solução zero é instável. ■

Corolário 5.33 *A solução zero do sistema* (5.17) *é:*

1. *UE se* $\sum_{i=1}^{k} |a_{ij}(n)| \leq 1$, $1 \leq j \leq k$, $n \geq n_0$;

2. *UAE se* $\sum_{i=1}^{k} |a_{ij}(n)| \leq 1 - \upsilon$, *para algum* $0 < \upsilon < 1$, $1 \leq j \leq k$, $n \geq n_0$.

Prova. Seja $\|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq k} \sum_{i=1}^{k} |a_{ij}|$.

1. Tem-se que $\|A(n)\|_1 \leq 1$, $\forall n \geq n_0$, então

$$\|\Phi(n,m)\|_1 = \left\| \prod_{i=m}^{n-1} A(i) \right\|_1 = \|A(n-1)\|_1 \ldots \|A(m)\|_1 \leq 1.$$

Pelo ponto 2. do teorema 5.30 conclui-se a estabilidade uniforme.

2. Neste caso $\|A(n)\|_1 \leq 1 - \upsilon$, para algum $0<\upsilon < 1$.

$$\begin{aligned} \|\Phi(n,m)\|_1 &= \|A(n-1)\|_1 \ldots \|A(m)\|_1 \\ &\leq (1-\upsilon_1)(1-\upsilon_2)\ldots(1-\upsilon_m) \end{aligned}$$

Seja $\eta = \max\{1-\upsilon_1, 1-\upsilon_2, ..., 1-\upsilon_m\}$. Então

$$\|\Phi(n,m)\|_1 \leq \eta\eta\ldots\eta = \eta^{n-m}.$$

Logo pelo ponto 4. do teorema 5.30 conclui-se que a solução zero é UAE. ■

Exemplo 5.34 *Use o corolário 5.33 para determinar a estabilidade da solução zero do sistema* $x_{n+1} = A(n) x_n$ *onde* $A(n) = \begin{bmatrix} -1 & \frac{\cos n}{4} \\ 0 & \frac{\sin n}{2} \end{bmatrix}$, $A(n) = \begin{bmatrix} \frac{1}{n+1} & 0 & \frac{\sin n}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{\sin n}{2} & \frac{\cos n}{4} \\ \frac{1}{5} & 0 & 0 \end{bmatrix}$ *ou* $A(n) = \begin{bmatrix} \frac{n+2}{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{n+1} & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Solução. Para o 1º caso tem-se que a solução zero é UE já que $\sum_{i=1}^{2}|a_{i1}(n)| = 1$ e $\sum_{i=1}^{2}|a_{i2}(n)| = \frac{|\cos n|+2|\sin n|}{4} < 1$, mas não é UAE pois não existe nenhum $\upsilon \in]0,1[$ tal que 1=1-υ. Para o 2º sistema a solução zero é UAE, uma vez que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{3}|a_{i1}(n)| &= \frac{1}{n+1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5} \leq \frac{19}{20} \leq 1-\upsilon_1 \\
\sum_{i=1}^{3}|a_{i2}(n)| &= \frac{|\sin n|}{2} \leq 1-\upsilon_2 \\
\sum_{i=1}^{3}|a_{i3}(n)| &= \frac{|\cos n|+2|\sin n|}{4} \leq 1-\upsilon_3
\end{aligned}$$

No 3º caso nada se pode concluir, uma vez que, $\sum_{i=1}^{3}|a_{i1}(n)| = \frac{n+3}{n+1}$ e para $n=1$ sai $\sum_{i=1}^{3}|a_{i1}(1)| = 2 > 1$. ■

5.5 Sistemas periódicos lineares

Seja N um inteiro positivo superior a 1 e $A(n)$ uma matriz real não singular de dimensão $k\times k$. Suponha-se que $A(n)$ é periódica de período N, ou seja, $A(n+N)=A(n)$. Uma solução periódica de período N é uma solução da forma $x_{n+N}=x_n$, $\forall n\in\mathbb{Z}^+$.

Definição 5.35 *Diz-se que o sistema*

$$x_{n+1} = A(n)\,x_n \tag{5.23}$$

é um sistema periódico de paríodo N se $A(n)$ for periódica de período N, $\forall n\in\mathbb{Z}^+$.

O seguinte teorema é uma consequência da periodicidade de sistemas

Teorema 5.36 *Se o sistema* (5.23) *é um sistema periódico de período N, então a matriz fundamental $\Phi(n)$ satisfaz as seguintes relações:*

1. *$\Phi(n+N)$ também é uma matriz fundamental;*
2. *$\Phi(n+N)=\Phi(n)\,C$, para alguma matriz não singular C;*
3. *$\Phi(n+N,N)=\Phi(n,0)$;*
4. *$\Phi(n+N,0)=\Phi(n,0)\,\Phi(N,0)$.*

Prova. 1. Como $\Phi(n)$ é a matriz fundamental do sistema, então satisfaz a relação $\Phi(n+1)=A(n)\,\Phi(n)$, pelo que

$$\Phi(n+N+1)=A(n+N)\,\Phi(n+N)=A(n)\,\Phi(n+N).$$

Logo sai que $\Phi(n+N)$ é também uma matriz fundamental.

2.

$$\begin{aligned}\Phi(n+N) &= \prod_{i=n_0}^{n+N-1} A(i) = A(n+N-1)...A(N+n_0)\,A(N+n_0-1)...A(n_0)\\ &= A(n-1)\,A(n-2)...A(n_0)\,A(N+n_0-1)...A(n_0)\\ &= \Phi(n)\,C,\end{aligned}$$

com $C = A(N+n_0-1)\,A(N+n_0-2)...A(n_0)$.

3.

$$\begin{aligned}\Phi(n+N,N) &= \prod_{i=N}^{n+N-1} A(i) = A(n+N-1)...A(N+1)\,A(N)\\ &= A(n-1)...A(1)\,A(0) = \prod_{i=0}^{n-1} A(i) = \Phi(n,0)\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}\Phi(n+N,0) &= \prod_{i=0}^{n+N-1} A(i) = A(n+N-1)...A(N)\,A(N-1)...A(0)\\ &= A(n)...A(0)\,A(N-1)...A(0) = \Phi(n,0)\,\Phi(N,0)\end{aligned}$$

■

Existem algumas consequências deste teorema, nomeadamente o seguinte resultado.

Teorema 5.37 *Para toda a matriz fundamental* $\Phi(n)$ *do sistema* (5.23), *existe uma matriz* $P(n)$ *não singular, periódica com período* N, *tal que*

$$\Phi(n) = P(n)\,B^n. \tag{5.24}$$

Prova. Pelo lema A.22 existe uma matriz B tal que $B^N = C$, onde C é uma matriz específica. Seja $P(n) = \Phi(n)\,[B^n]^{-1}$. Então

$$\begin{aligned}P(n+N) &= \Phi(n+N)\left[B^{n+N}\right]^{-1} = \Phi(n+N)\,B^{-N}B^{-n}\\ &= \Phi(n)\,CB^{-N}B^{-n}, \text{ pelo ponto 2 do teorema 5.36}\\ &= \Phi(n)\,B^{-n} = P(n)\end{aligned}$$

Portanto $P(n)$ tem período N e é não singular, uma vez que, $\|P(n)\| = \|\Phi(n)\|\,\|B^{-n}\| = \frac{\|\Phi(n)\|}{\|B^n\|} \neq 0$. A partir da definição de $P(n)$ sai que $\Phi(n) = P(n)\,B^n$. ■

Observe-se que se y_n é a solução do sistema

$$y_{n+1} = By_n, \tag{5.25}$$

então

$$x_n = \Phi(n)\,c = P(n)\,B^n c,\ c \text{ vector constante}$$

ou seja,

$$x_n = P(n)\, y_n. \tag{5.26}$$

Isto mostra que o estudo do sistema (5.23) reduz-se ao estudo do sistema autónomo (5.25).

A matriz C ($C = B^N$) determinada no ponto 2. da demonstração do teorema 5.36 denomina-se por matriz de monodromia da matriz fundamental de soluções $\Phi(n)$ do sistema (5.23). Aos valores próprios μ de B chamam-se expoentes de Floquet do sistema (5.23) e aos correspondentes valores próprios μ^N de B^N chamam-se de multiplicadores de Floquet do sistema (5.23). Deste modo também se chamam aos sistemas (5.23) sistemas de Floquet.

Lema 5.38 *Um número complexo μ é um expoente de Floquet do sistema* (5.23) *se e só se existe uma solução não trivial do sistema* (5.23) *da forma $\mu^n q(n)$, onde $q(n)$ é uma função vectorial com $q(n+N) = q(n)$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$.*

Prova. ($\Longrightarrow$) Seja μ um expoente de Floquet do sistema (5.23). Então $|B - \mu I_k| = 0$. Seja $x_0 \in \mathbb{R}^k$, $x_0 \neq 0$ tal que $(B - \mu I_k)\, x_0 = 0$, ou seja, $Bx_0 = \mu x_0$. É fácil provar por indução que $B^n x_0 = \mu^n x_0$. Portanto $(B^n - \mu^n I_k)\, x_0 = 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ com $x_0 \neq 0$. Deste modo tem-se que $P(n)\, B^n x_0 = \mu^n P(n)\, x_0$, onde $P(n)$ é a matriz periódica definida em (5.24). Pela fórmula (5.24) resulta

$$x_n = \Phi(n, n_0)\, x_0 = P(n)\, B^n x_0 = \mu^n q(n).$$

Encontrou-se assim as soluções periódicas da forma desejada onde $q(n) = P(n)\, x_0$.

($\Longleftarrow$) Suponha-se que o sistema (5.23) tem soluções da forma $\mu^n q(n)$, $q(n+N) = q(n) \neq 0$. Pelo teorema 5.37 tem-se que $\mu^n q(n) = P(n)\, B^n x_0$, $x_0 \neq 0$. Daqui decorre que $\mu^{n+N} q(n) = P(n)\, B^{n+N} x_0$. Também tem-se que $\mu^{n+N} q(n) = \mu^N P(n)\, B^n x_0$. subtraindo as duas últimas identidades vem

$$P(n)\, B^n \left[B^N - \mu^N I_k\right] x_0 = 0$$

e consequentemente

$$\left|B^N - \mu^N I_k\right| = 0.$$

Isto quer dizer que μ é um multiplicador de Floquet e portanto é um expoente de Floquet. ∎

Corolário 5.39 *Se o sistema periódico* (5.23) *tem um multiplicador de Floquet $\mu = 1$ e nenhum dos restantes multiplicadores é igual a -1, então o sistema* (5.23) *tem uma solução periódica de período N. Se existir um multiplicador de Floquet $\mu = -1$, então neste caso o sistema* (5.23) *tem uma solução periódica de período 2N.*

Prova. Suponha-se que o sistema (5.23) tem um multiplicador de Floquet $\mu = 1$ e nenhum dos restantes é igual a -1, ou seja, $|C - I_k| = 0$. Pelo lema 5.38 o sistema (5.23) tem uma solução da forma $q(n)$, onde $q(n)$ é uma funcão vectorial da forma $q(n+N) = q(n)$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$. Isto é o mesmo que dizer que o sistema (5.23) tem uma solução periódica de período N.

Suponha-se agora que o sistema (5.23) tem um multiplicador de Floquet $\mu = -1$. Então pelo lema 5.38 $(-1)^n q(n)$, com $q(n+N) = q(n)$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, é uma solução do sistema. Isto quer dizer que, para n par a solução é $q(n)$ e para n ímpar a solução é $-q(n)$, ambas com período N. Consequentemente, num período de $2N$ as soluções coincidem. ∎

Observação 5.40 *No ponto 2 do lema 5.36 encontrou-se uma forma de obter a matriz de monodromia* $C = B^N$ *e cujos valores próprios são os multiplicadores de Floquet do sistema* (5.23). *Viu-se que* $\Phi(n+N) = \Phi(n)\,C$. *Pondo* $n = 0$ *com* $\Phi(0) = I_k$, *resulta que a matriz de monodromia é*

$$C = \Phi^{-1}(0)\,\Phi(N) = A(N-1)\,A(N-2)\ldots A(1)\,A(0)\,. \tag{5.27}$$

Exemplo 5.41 *Determine a matriz de monodromia, os multiplicadores de Foquet e a periodicidade das soluções do sistema*

$$x_{n+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ (-1)^n & 0 \end{bmatrix} x_n.$$

Solução. É fácil verificar-se que $A(n+2) = A(n)\,, \forall n \in \mathbb{Z}^+$. Então

$$C = A(1)\,A(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Os multiplicadores de Floquet são $\mu_1 = 1$ e $\mu_2 = -1$. Em virtude do corolário 5.39 a solução do sistema tem príodo 4. ■

Teorema 5.42 *Seja* x_n *a solução do sistema* (5.23).

1. *Se se verificar a condição* $|\mu| < 1$ *para todos os multiplicadores* μ *de Floquet do sistema* (5.23), *então* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$;

2. *Se se verificar a condição* $|\mu| \leq 1$ *para todos os multiplicadores* μ *de Floquet do sistema* (5.23) *e se todos os multiplicadores de Floquet* μ *com* $|\mu| = 1$ *são semi-simples, então existe uma constante* d *tal que* $\|x_n\| \leq d\,\|x_{n_0}\|\,, \forall n \in \mathbb{Z}_0^+$;

3. *Se algum multiplicador* μ *de Floquet do sistema* (5.23) *satisfaz a condição* $|\mu| > 1$, *então* $\|x_n\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Prova. Tem-se que

$$x_n = \Phi(n, n_0)\,x_{n_0} = P(n, n_0)\,B^{n-n_0}x_{n_0}$$

onde P é uma matriz não singular tal que $P(n+N, n_0) = P(n, n_0)$. Viu-se que efectuar o estudo do sistema (5.23) reduz-se ao estudo do sistema autónomo, ou invariante no tempo (5.25). Os valores próprios de B são os expoentes de Floquet. Então, o ponto 1 decorre do teorema 5.22, o 2 do teorema 5.27 e finalmente o ponto 3 do teorema 5.25. ■

Exemplo 5.43 *Encontre os multiplicadores de Floquet e determine a estabilidade da solução do sistema*

$$\begin{bmatrix} x_{1,n+1} \\ x_{2,n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2+(-1)^n}{2} \\ \frac{2-(-1)^n}{2} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{1,n} \\ x_{2,n} \end{bmatrix}.$$

Solução. Para este sistema $N = 2$ uma vez que $A(n+2) = A(n)$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$. Os multiplicadores de Floquet são os valores próprios da matriz

$$C = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{9}{4} \end{bmatrix},$$

ou seja, $\mu_1 = \frac{1}{4}$ e $\mu_2 = \frac{9}{4}$. Como $\rho(C) = \frac{9}{4} > 1$, então $\|x_n\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. ■

Corolário 5.44 *(Estabilidade dos sistema de Floquet) A solução zero do sistema* (5.23) *é:*

1. *Estável se e só se $|\mu| \leq 1$ para todos os multiplicadores μ de Floquet e aqueles com $|\mu| = 1$ são semi-simples;*

2. *AE se e só se $|\mu| < 1$ para todos os multiplicadores μ de Floquet.*

Prova. Como o estudo do sistema (5.23) reduz-se ao estudo do sistema autónomo, ou invariante no tempo (5.25), a prova decorre dos corolários 5.28 e 5.23. ■

Exemplo 5.45 *Determine a estabilidade da solução zero do sistema*

$$x_{n+1} = \begin{bmatrix} 0 & \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) \\ -\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) & 0 \end{bmatrix} x_n.$$

Solução. A matriz deste sistema tem período 3, uma vez que $A(n+3) = A(n)$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$. Assim

$$C = A(2)\,A(1)\,A(0) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

Tem-se então que $\sigma(C) = \left\{\pm\frac{i}{4}\right\}$ pelo que $\rho(C) = \frac{1}{4} < 1$, logo a solução zero é AE. ■

5.6 Análise no plano de fases

Num sistema com duas variáveis dependentes o vector de estado contém duas componentes. Quando o sistema é autónomo e sem entradas exteriores, o estudo do vector de estado, que residirá num plano, o plano de estado, permite obter-se uma compreensão global do comportamento do sistema.

Assim, nesta secção estudam-se as propriedades dos sistemas lineares com duas variáveis dependentes, autónomos ou invariantes no tempo. Mais precisamente, será feito o estudo do comportamento das soluções do sistema

$$x_{n+1} = Ax_n \tag{5.28}$$

com $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ não singular e $x_n = \begin{bmatrix} x_{1,n} \\ x_{2,n} \end{bmatrix}$.

O polinómio característico de A é $|A - \lambda I_2| = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$. As soluções desta equação são os valores próprios de A, ou seja,

$$\lambda_{1,2} = \frac{tr(A)}{2} \pm \sqrt{\blacktriangle(A)}$$

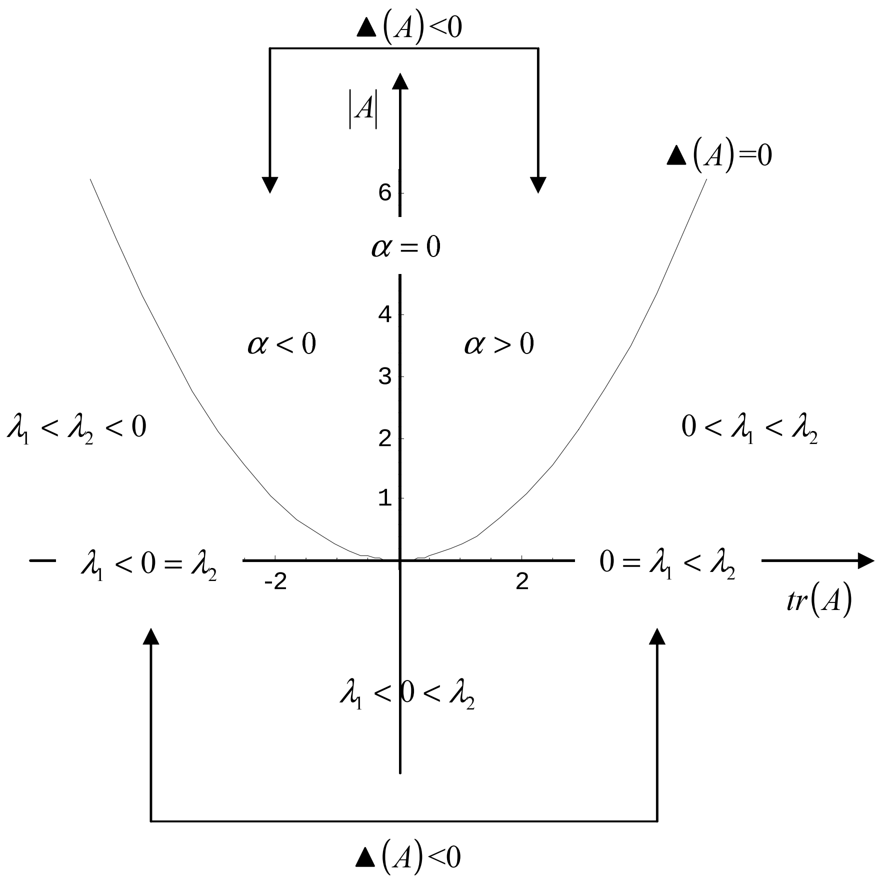

Figura 5.6: Valores próprios de A no espaço traço-determinante

	$\lambda_1 \neq \lambda_2$ ($\blacktriangle(A)>0$)	$\lambda_1=\lambda_2=\lambda$ ($\blacktriangle(A)=0$)	$\lambda=\alpha\pm\beta i$ ($\blacktriangle(A)<0$)
$tr\,(A) > 0$ e $\lvert A\rvert \geq 0$	$\lambda_1<\lambda_2\leq 0$	$\lambda\leq 0$	$\lambda_{1,2}=\alpha\pm\beta i,\ \alpha<0$
$tr\,(A) = 0$ e $\lvert A\rvert \geq 0$	-	-	$\lambda_{1,2}=\pm\beta i\ (\alpha=0)$
$tr\,(A) > 0$ e $\lvert A\rvert \geq 0$	$0\leq\lambda_1\leq\lambda_2$	$\lambda\geq 0$	$\lambda_{1,2}=\alpha\pm\beta i,\ \alpha>0$
$\lvert A\rvert < 0$	$\lambda_1<0<\lambda_2$	-	-
matriz de Jordan J	$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$

Tabela 5.1: Blocos de Jordan para matrizes do tipo 2×2

em que $tr\,(A) = a_{11} + a_{22}$ e $\blacktriangle\,(A) = \left(\frac{tr(A)}{2}\right)^2 - |A|$, com $|A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$.

Pela forma canónica de Jordan $A = PJP^{-1}$. Tem-se 3 representações possíveis para a matriz J tal como se ilustra na Tabela 5.1.

Viu-se nas secções anteriores que x^* é um ponto de equilíbrio do sistema (5.28) se $Ax^* = x^*$. Se $(A - I_k)$ é uma matriz não singular, então $x^* = 0$ é o único ponto de equilíbrio do referido sistema. Por outro lado, se $(A - I_k)$ é singular, então existe uma família de pontos de equilíbrio. Para este caso ao efectuar-se a mudança de variável $y_n = x_n - x^*$, vem

$$y_{n+1} = x_{n+1} - x^* = Ax_n - x^* = A\,(y_n + x^*) - x^* = Ay_n + Ax^* - x^* = Ay_n + x^* - x^* = Ay_n,$$

ou seja, obtém-se um sistema equivalente ao sistema (5.28). Deste modo, as propriedades de estabilidade dos pontos de equilíbrio $x^* \neq 0$ são as mesmas do ponto de equilíbrio $x^* = 0$. Perante este facto, considera-se que $x^* = 0$ é o único ponto de equilíbrio do sistema (5.28).

Efectuando a mudança $y_n = P^{-1}x_n$, então $y_{n+1} = P^{-1}x_{n+1} = P^{-1}PJP^{-1}x_n = Jy_n$. Assim tem-se a relação

$$y_{n+1} = Jy_n \tag{5.29}$$

Se x_{n_0} é uma condição inicial do sistema (5.28), então $y_{n_0} = P^{-1}x_{n_0}$ é a correspondente condição inicial do sistema (5.29). Note-se que as propriedades dos pontos de equilíbrio destes dois sistemas são idênticas.

Designem-se as duas componentes da variável de estado por x_1 e x_2 (ou y_1 e y_2). As condições iniciais x_{n_0} (ou y_{n_0}) condicionam a evolução do estado do sistema (5.28) (ou (5.29)), ou seja, o seu comportamento. O que se pretende é desenhar a trajectória dos sucessivos pontos de x_n (ou y_n) no espaço das variáveis de estado, isto é, representar os pontos no plano $(O; x_1, x_2)$ (ou $(O; y_1, y_2)$). Essencialmente, desenha-se a órbita $\{x_n : n \geq 0\}$ (ou $\{y_n : n \geq 0\}$).

Uma vez que os sistemas em estudo utilizam uma variável de estado com apenas duas componentes, então as órbitas são planas. A sua representação existe e é única. Ao conjunto de todas as órbitas (mesmo no caso em que há mais de duas variáveis de estado) dá-se o nome de retrato de fases do sistema. Ao espaço onde as órbitas se encontram definidas chama-se espaço de fases. No caso dos sistemas em estudo, o espaço de fases é designado por plano de fases ou plano de estudo.

Em sistemas de ordem superior a dois, não é possível efectuar uma representação gráfica de todo o retrato de fases. O que se faz é representar as órbitas mais significativas, em número suficiente para se poder concluir, por observação, como é que qualquer outra órbita se comportará. A esta representação chama-se esboço do retrato de fases. Para se efectuar o esboço do retrato de fases, podem-se utilizar métodos analíticos, gráficos ou numéricos, com o auxílio de uma boa calculadora ou computador.

5.6.1 Valores próprios reais distintos

Quando os valores próprios são reais e distintos, a solução do sistema (5.28) é $x_n = PJ^nP^{-1}x_{n_0}$, onde $J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ e $P = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix}$ com v_1 e v_2 vectores próprios associados a λ_1 e λ_2, respectivamente. Portanto

$$x_n = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = c_1\lambda_1^n v_1 + c_2\lambda_2^n v_2$$

No caso do sistema (5.29) tem-se

$$y_n = \begin{bmatrix} d_1\lambda_1^n \\ d_2\lambda_2^n \end{bmatrix} = d_1\lambda_1^n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + d_2\lambda_2^n \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Caso 1: $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < 1$ **(nodo estável)**

Se $c_1 = 0$, então $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ ao longo da recta que contém v_2 (isto é, a sequência de pontos $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ na Figura 5.7). Se $c_2 = 0$, então $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ ao longo da recta que contém v_1 (sequência de pontos $\{u_i\}$ e $\{w_i\}$). Se $c_1 \neq 0$ e $c_2 \neq 0$, então

$$x_n = \lambda_2^n \left(c_1 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^n v_1 + c_2 v_2 \right)$$

e assim $\frac{x_n}{\lambda_2^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} c_2 v_2$. Neste caso tem-se que as sequências de pontos $\{\delta_n\}$, $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ e $\{\gamma_n\}$ aproximam-se da origem por um ângulo que é determinado pela recta que contém o vector próprio v_2.

Cada uma das trajectórias de pontos representadas no plano de fases corresponde a uma solução particular do sistema (ou seja, provêm de uma condição inicial distinta). Diz-se que se trata de um nodo (ou nó) estável.

Se a trajectória de pontos fosse a do sistema (5.29), o raciocínio era análogo. Neste caso representa-se a sequência de pontos $(d_1\lambda_1^n, d_2\lambda_2^n)$. Para $d_1 = 0$ os pontos estão sobre o eixo das ordenadas e aproximam-se da origem à medida que n aumenta. Para $d_2 = 0$ é análogo mas agora os pontos estão sobre o eixo das das abcissas. Para $d_1 \neq 0$ e $d_2 \neq 0$ a sequência de pontos tende para 0, sendo que, para n grande, a abcissa é em valor absoluto superior à ordenada (Figura 5.8). As setas colocadas com cada trajectória indicam o sentido da sua evolução à medida que n aumenta.

Repare-se que, a menos da mudança de base, as trajectórias têm o mesmo comportamento.

Caso 2: $1 < \lambda_1 < \lambda_2$ **(fonte ou nó instável)**

Este caso é semelhante ao caso 1, excepto no facto de todas as soluções divergirem da origem à medida que n aumenta. Neste caso diz-se que a origem é um ponto de equilíbrio instável. A trajectória no espaço de fases é a indicada na Figura 5.9 e diz-se que se trata de uma fonte ou nó instável.

Caso 3: $-1 < \lambda_1 < 0 < \lambda_2 < 1$ **(nó com reflexão)**

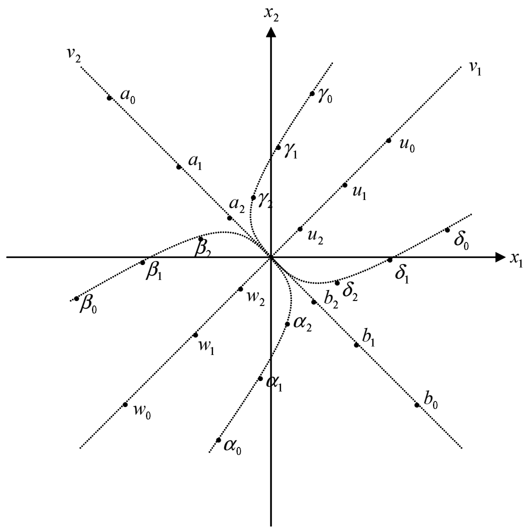

Figura 5.7: $0<\lambda_1 < \lambda_2 < 1$ − nodo estável

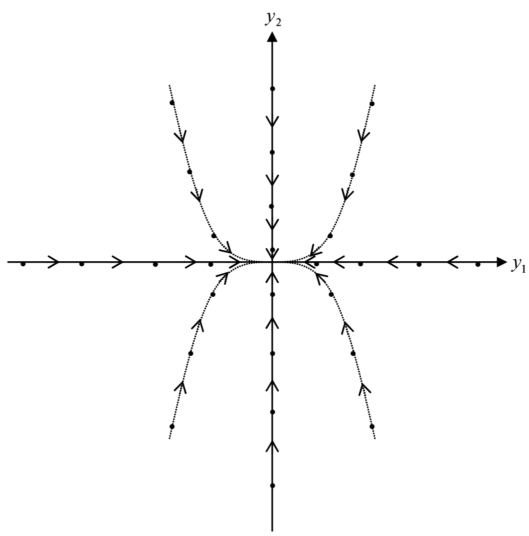

Figura 5.8: Nodo estável no plano $(O; y_1, y_2)$

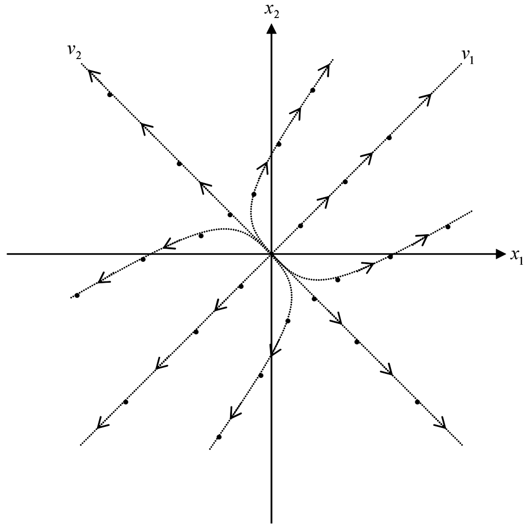

Figura 5.9: $1<\lambda_1 < \lambda_2$ - fonte ou nó instável

λ_1^n alterna de sinal e portanto para $c_1 \neq 0$. As soluções vão alternando a sua posição. Na Figura 5.10 pode-se visualizar a trajectória no plano de fases e diz-se que se trata de um nó com reflexão.

Caso 4: $\lambda_1 < -1 < 1 < \lambda_2$ **(fonte com reflexão)**

A Figura 5.11 ilustra o movimento das soluções à medida que n aumenta. Para esta trajectória de pontos diz-se que se trata de uma fonte com reflexão.

Caso 5: $0 < \lambda_1 < 1 < \lambda_2$ **(ponto de sela)**

As soluções no espaço de fases têm o andamento indicado na Figura 5.12, ao qual chama-se ponto de sela. Repare-se que existem algumas soluções que começam por se aproximar da origem mas que acabam por se afastar. A origem é um ponto de equilíbrio instável.

Caso 6: $-1 < \lambda_1 < 0 < 1 < \lambda_2$ **(ponto se sela com reflexão)**

Análogo ao caso 5, excepto que se está na presença de um valor próprio negativo que originará reflexão na solução em cada iteração. A trajectória no espaço de fases é a indicada na Figura 5.13 e diz-se que se trata de um ponto de sela com reflexão.

Caso 7: Um dos valores próprios é 1 **(pontos degenerados)**

Se um dos valores próprios for igual a 1, então as soluções degeneram em pontos que estão sobre rectas paralelas. Estas rectas são paralelas ao eixo das abcissas se $\lambda_2 = 1$ e ao eixo das ordenadas se $\lambda_1 = 1$ (Figura 5.14).

5.6.2 Valor próprio real duplo

Quando apenas existe um valor próprio duplo a solução do sistema (5.29) é

$$y_n = \begin{bmatrix} y_{1,n} \\ y_{2,n} \end{bmatrix} = J^n y_{n_0} = \begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix},$$

ou seja, $(y_{1,n}, y_{2,n}) = \left(\left(d_1 + d_2\lambda^{-1}n\right)\lambda^n, d_2\lambda^n\right)$. Repare-se que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_{2,n}}{y_{1,n}} = 0$.

Caso 8: $\lambda < 1$ **(nodo estável)**

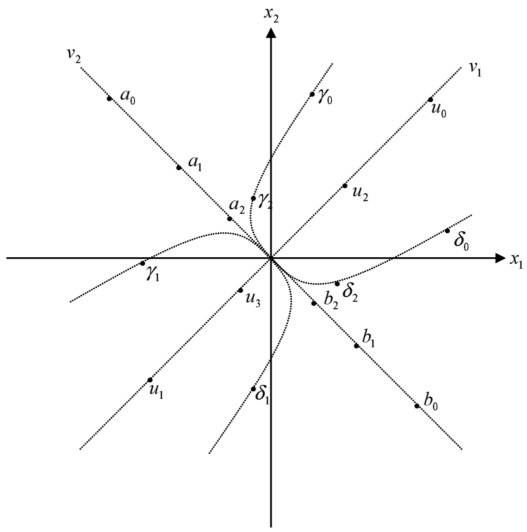

Figura 5.10: -1<$\lambda_1 < 0 < \lambda_2 < 1$ - nó com reflexão

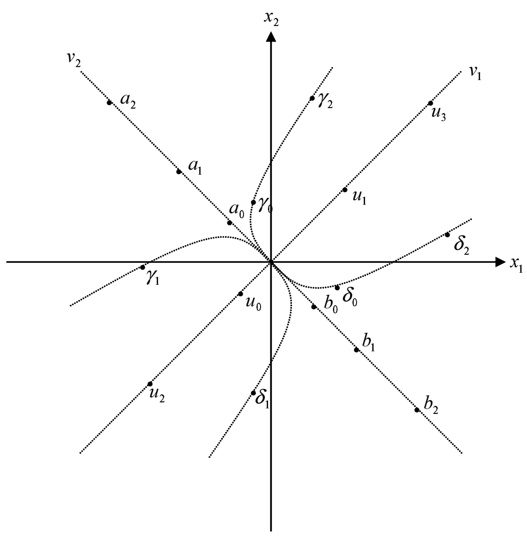

Figura 5.11: $\lambda_1 < -1 < 1 < \lambda_2$ - fonte com reflexão

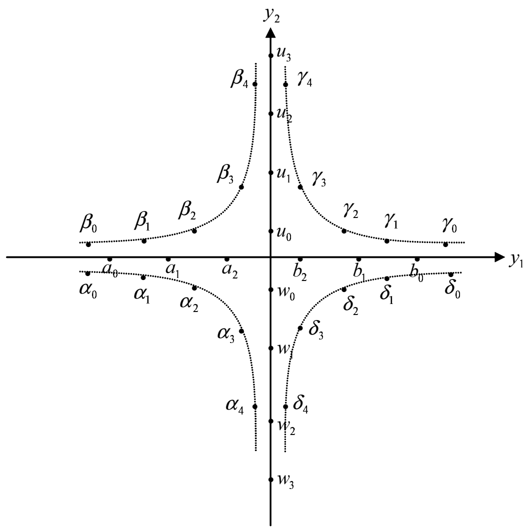

Figura 5.12: $0 < \lambda_1 < 1 < \lambda_2$ - ponto de sela

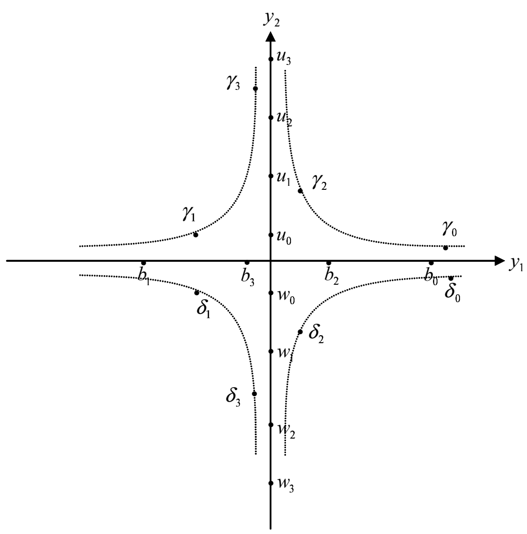

Figura 5.13: $-1 < \lambda_1 < 0 < 1 < \lambda_2$ - ponto de sela com reflexão

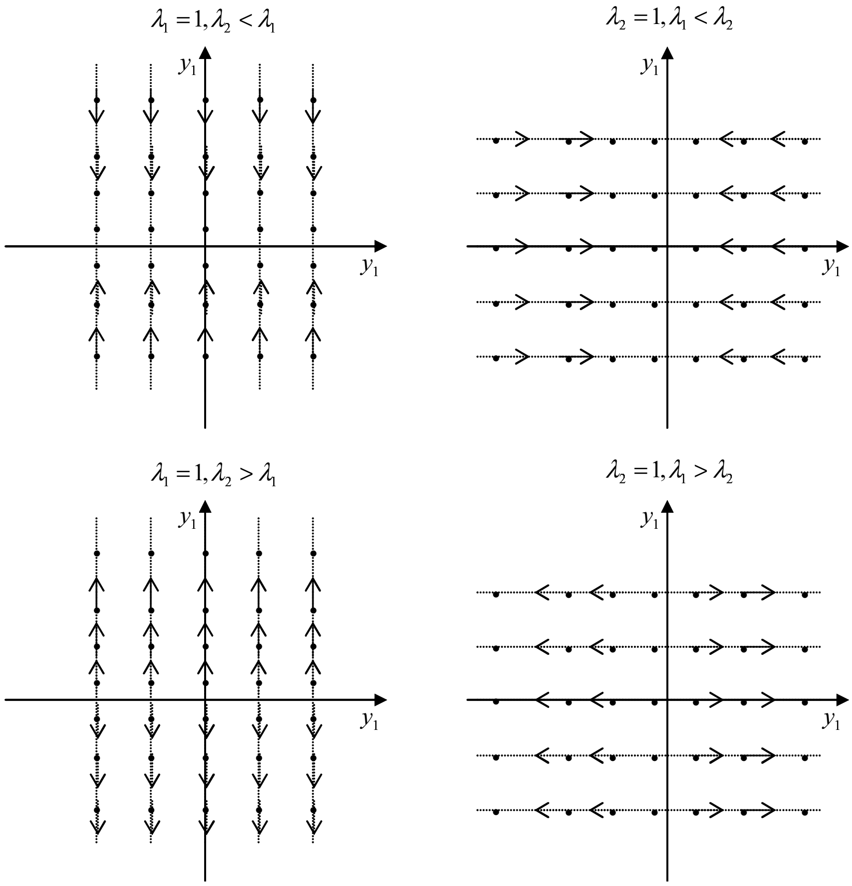

Figura 5.14: Nas duas primeiras imagens tem-se um nodo degenerado, ao passo que nas duas últimas uma fonte degenerada

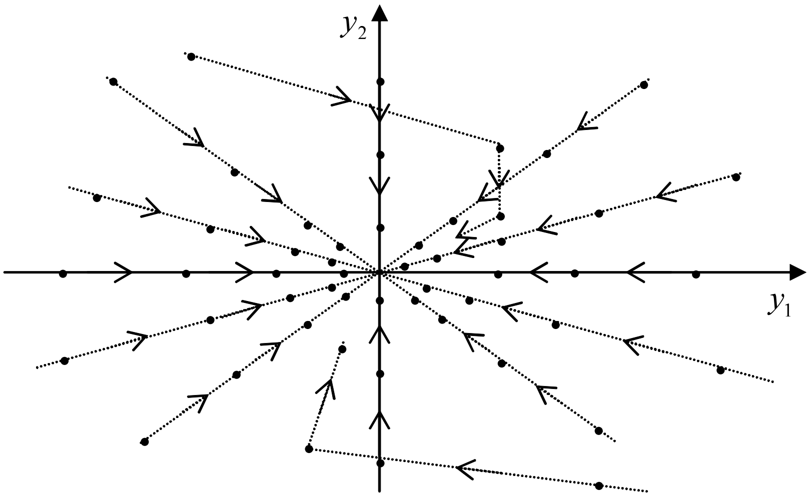

Figura 5.15: $\lambda < 1$ - nodo assimptóticamente estável

Se o valor próprio $\lambda < 1$, então as trajectórias convergem para a origem. A forma das trajectórias depende dos valores das constantes d_1 e d_2. As trajectórias no espaço de fases são as da Figura 5.15. A origem é estável.

Caso 9: $\lambda = 1$ (pontos degenerados)

Quando $\lambda = 1$ tem-se que representar a sequência de pontos $(d_1 + d_2 n, d_2)$. Como a ordenada na origem é constante, então a sequência de pontos está sobre rectas que são paralelas ao eixo das abcissas. Como $d_1 + d_2 n \underset{n\to\infty}{\to} \pm\infty$ ($+\infty$ se $d_2 > 0$ e -∞ se $d_2 < 0$), então trata-se de pontos degenerados instáveis (Figura 5.16).

Caso 10: $\lambda > 1$ (nodo instável)

Se o valor próprio $\lambda > 1$, então as trajectórias divergem da origem. A forma das trajectórias continua a depender do valor das constantes d_1 e d_2 (Figura 5.17). A origem é instável.

5.6.3 Valores próprios complexos

Quando os valores próprios são complexos eles são da forma $\lambda = \alpha \pm i\beta$, $\beta > 0$. A solução do sistema (5.29) é

$$y_n = \begin{bmatrix} y_{1,n} \\ y_{2,n} \end{bmatrix} = J^n y_{n_0} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} y_{1,n_0} \\ y_{2,n_0} \end{bmatrix}.$$

Escolha-se o angulo θ tal que $\cos(\theta) = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$ e $\sin(\theta) = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$ ($\theta = \arctan\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$). Então

$$J = \sqrt{\alpha^2+\beta^2} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} = |\lambda| R_\theta,$$

onde R_θ é a matriz de rotação. Portanto

$$y_n = |\lambda|^n R_{n\theta} y_0$$

A trajectória dos pontos depende de $|\lambda|$.

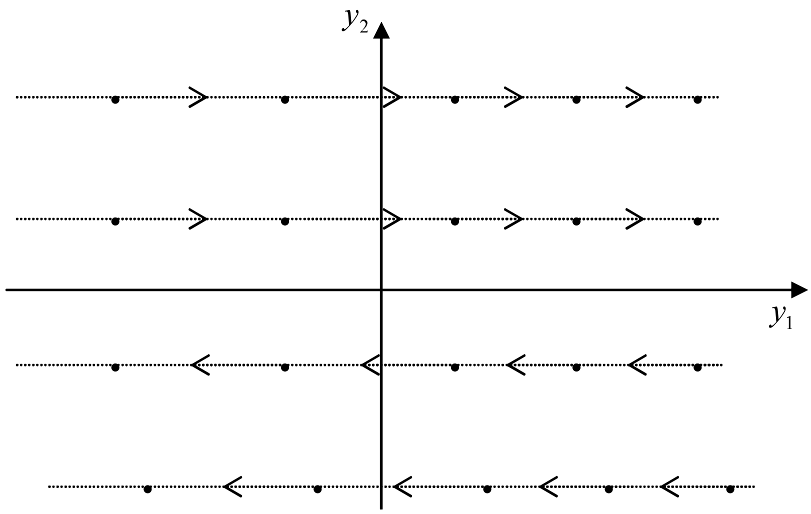

Figura 5.16: $\lambda = 1$ - pontos degenerados

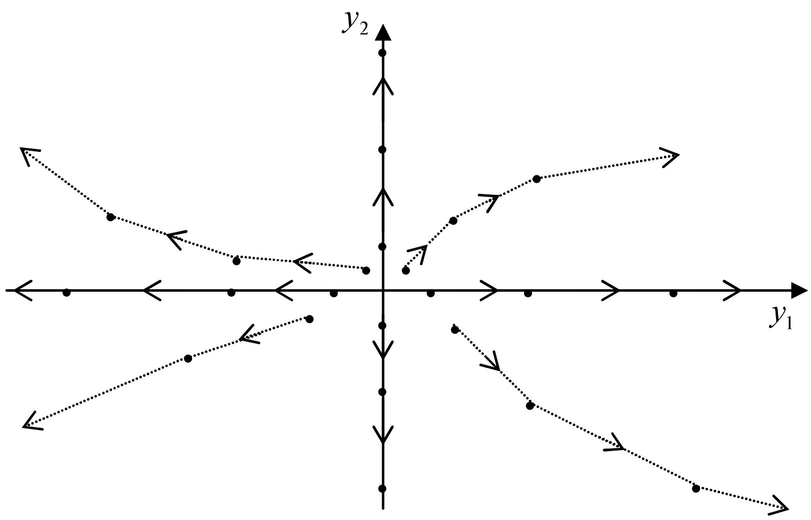

Figura 5.17: $\lambda > 1$ - nodo instável

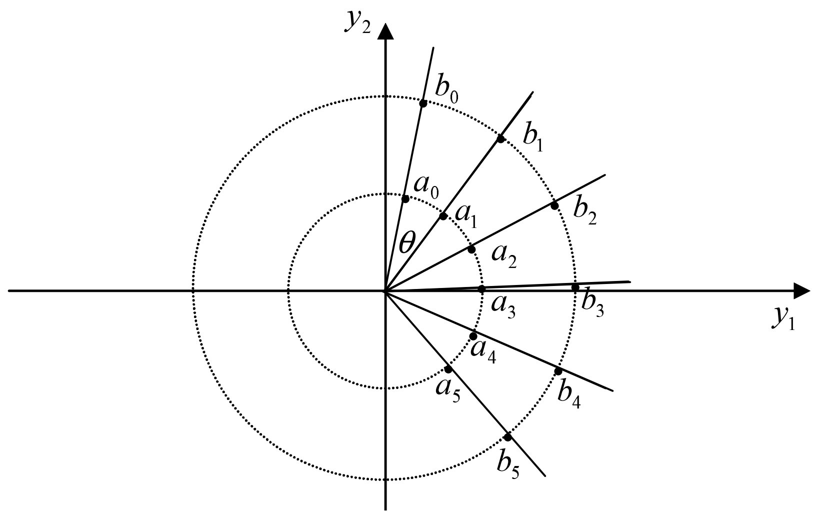

Figura 5.18: $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ - centro

Caso 11: $|\lambda| = 1$ **(centro)**

Se $|\lambda| = 1$ as soluções são oscilatórias, sem amortecimento ou expansão. As soluções mantêm a amplitude constante, não convergindo para a origem nem se afastando dela como se observa na Figura 5.18 (estão situadas sobre uma circunferência centrada na origem e raio $\sqrt{y_{1,n_0}^2 + y_{2,n_0}^2}$). A origem é um ponto de equilíbrio criticamente estável, designado por centro.

Caso 12: $|\lambda| < 1$ **(foco estável)**

Se $|\lambda| < 1$ as soluções têm um andamento oscilatório, em forma de espiral, convergindo para a origem, à medida que n aumenta, como se pode observar na Figura 5.19. A origem é um ponto de equilíbrio assimptoticamente estável, designado por foco estável.

Caso 13: $|\lambda| > 1$ **(foco instável)**

Este caso é semelhante ao caso 11, excepto que a espiral diverge da origem. A trajectória no espaço de fases é indicada na Figura 5.20. A origem é um ponto de equilíbrio instável designado por foco instável.

5.7 Aplicações

5.7.1 População de bisontes da América do Norte

Suponha-se que $u_n = \begin{bmatrix} u_{1,n} & u_{2,n} & u_{3,n} \end{bmatrix}^T$ é um vector que representa a população de bisontes da América do Norte, onde $u_{1,n}$, $u_{2,n}$ e $u_{3,n}$ representa, respectivamente, o número de nascimentos, bisontes com um ano e adultos, no ano n.

Assuma-se que em cada ano o número de recém-nascidos é de 42% do número de adultos do ano anterior, 60% dos bisontes nascidos vivem um ano, 75% dos bisontes com um ano atingem a idade adulta e 95% dos adultos sobrevivem mais um ano. Assim,

$$u_{1,n+1} = 0,42u_{3,n}, \; u_{2,n+1} = 0,6u_{1,n} \text{ e } u_{3,n+1} = 0,75u_{2,n} + 0,95u_{3,n}.$$

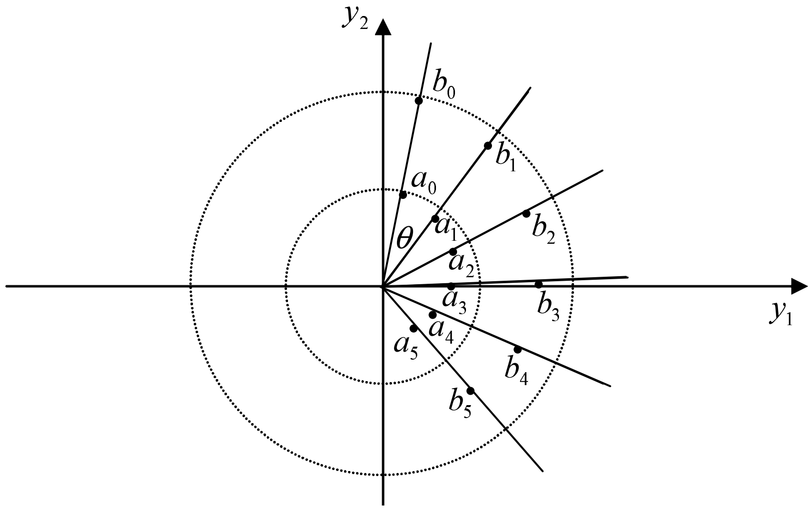

Figura 5.19: $\alpha^2 + \beta^2 < 1$ - foco estável

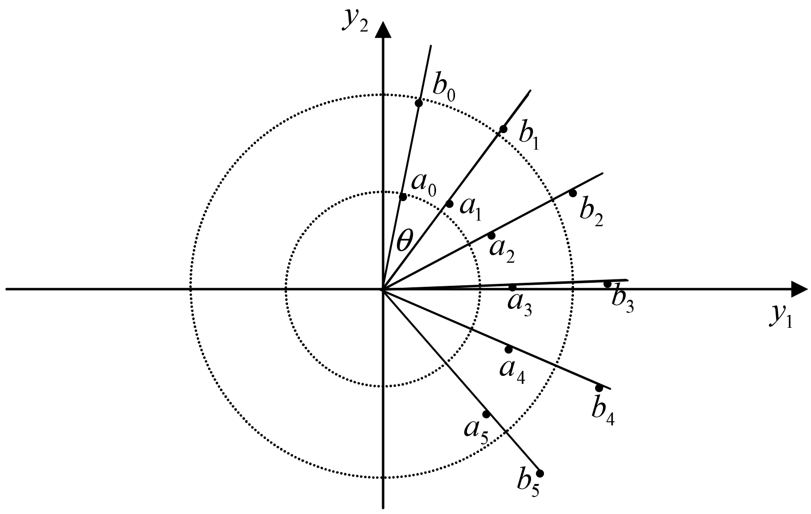

Figura 5.20: $\alpha^2 + \beta^2 > 1$ - foco instável

O vector população satisfaz o sistema linear

$$\begin{bmatrix} u_{1,n+1} \\ u_{2,n+1} \\ u_{3,n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,42 \\ 0,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0,75 & 0,95 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,n} \\ u_{2,n} \\ u_{3,n} \end{bmatrix},$$

ou seja, $u_{n+1} = Au_n$.

Para esta matriz tem-se que $\sigma(A) \approx \{-0.077 \pm 0.406i, 1.105\}$ pelo que $\rho(A) = 1.105 > 1$. Em virtude do teorema 5.25, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$ pelo que, para este modelo, a população de bisontes tende a aumentar ao longo do tempo.

5.7.2 Modelo de comércio

Considere-se um modelo de comércio entre dois países com as seguintes restrições:

1. Produto nacional = consumo total + investimento + exportações - importações.

2. Consumo doméstico = consumo total - importações.

3. Tempo é dividido em períodos de igual comprimento, denotados por $n = 0$, 1, 2, ...

Sejam $j = 1$, 2 dois países. Represente-se no período n, o produto nacional por $p_{j,n}$, o consumo total por $c_{j,n}$, o investimento por $i_{j,n}$, as exportações por $e_{j,n}$, as importações por $m_{j,n}$ e o consumo de produtos domésticos por $d_{j,n}$.

Para o país 1 tem-se

$$\begin{cases} p_{1,n} = c_{1,n} + i_{1,n} + e_{1,n} - m_{1,n} \\ d_{1,n} = c_{1,n} - m_{1,n} \end{cases}, \text{ ou seja, } \begin{cases} p_{1,n} = d_{1,n} + i_{1,n} + e_{1,n} \\ d_{1,n} = c_{1,n} - m_{1,n} \end{cases}.$$

Analogamente

$$\begin{cases} p_{2,n} = d_{2,n} + i_{2,n} + e_{2,n} \\ d_{2,n} = c_{2,n} - m_{2,n} \end{cases}.$$

É razoável considerar-se que o consumo doméstico $d_{j,n}$ e as importações $m_{j,n}$, para cada país, no período $n+1$ são directamente proporcionais ao produto nacional $p_{j,n}$ no período anterior. Então

$$\begin{aligned} d_{1,n+1} &= a_{11}p_{1,n} \text{ e } m_{1,n+1} = a_{21}p_{1,n} \\ d_{2,n+1} &= a_{22}p_{2,n} \text{ e } m_{2,n+1} = a_{12}p_{2,n} \end{aligned}$$

As constantes a_{ij} são denominadas no mundo económico de "propensão ou tendências marginais". Além disso, $a_{ij} > 0$, $i, j = 1, 2$.

Uma vez que se está a considerar um mundo com apenas dois países as exportações de um têm de ser forçosamente iguais às importações do outro, isto é, $e_{1,n} = m_{2,n}$ e $e_{2,n} = m_{1,n}$.

Substituíndo nas equações anteriores vem

$$\begin{cases} p_{1,n+1} = a_{11}p_{1,n} + a_{12}p_{2,n} + i_{1,n+1} \\ p_{2,n+1} = a_{22}p_{2,n} + a_{21}p_{1,n} + i_{2,n+1} \end{cases},$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} p_{1,n+1} \\ p_{2,n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{1,n} \\ p_{2,n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i_{1,n+1} \\ i_{2,n+1} \end{bmatrix}.$$

Assuma-se que os investimentos são constantes, isto é, $i_{1,n+1} = i_1$ e $i_{2,n+1} = i_2$. Então

$$\begin{bmatrix} p_{1,n+1} \\ p_{2,n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{1,n} \\ p_{2,n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix},$$

ou seja, tem-se a equação matricial $p_{n+1} = Ap_n + i$. A solução desta equação é

$$p_n = A^n p_0 + \sum_{r=0}^{n-1} A^{n-r-1} i.$$

Ao efectuar-se a substituição $r - n + 1 = k$ vem

$$\sum_{r=0}^{n-1} A^{n-r-1} = \sum_{k=1-n}^{0} A^{-k} = \sum_{k=0}^{n-1} A^k,$$

pelo que $p_n = A^n p_0 + \sum\limits_{k=0}^{n-1} A^k i$.

Para ter-se uma economia estável é razoável considerar-se que a soma do consumo doméstico $d_{j,n+1}$ com as importações $m_{j,n+1}$ no período $n+1$ seja menor do que o produto nacional $p_{j,n}$ no período n, ou seja,

$$d_{j,n+1} + m_{j,n+1} < p_{j,n}, \ \ j = 1, 2.$$

Portanto $a_{11}p_{1,n} + a_{21}p_{1,n} < p_{1,n}$, ou seja $a_{11} + a_{21} < 1$. Analogamente tem-se $a_{12} + a_{22} < 1$. Destas duas condições decorre que $\rho(A) < 1$, pelo que $\lim\limits_{n\to\infty} A^n = 0$. Assim

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \sum_{k=0}^{\infty} A^k i$$

Mas $\sum\limits_{k=0}^{\infty} A^k = (I - A)^{-1}$, já que $I - A$ é uma matriz não singular (basta provar que de $(I - A) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$ implica $x = y = 0$) e

$$(I - A)\left(I + A + A^2 + ... + A^{n-1}\right) = I - A^n,$$

pelo que

$$\sum_{k=0}^{n-1} A^k = (I - A)^{-1} (I - A^n)$$

e assim

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} A^k = \lim_{n\to\infty} \left((I - A)^{-1} - (I - A)^{-1} A^n\right) \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} A^k = (I - A)^{-1}.$$

Deste modo $\lim_{n\to\infty} p_n = (I-A)^{-1}\, i$. Daqui decorre que o produto nacional entre os países 1 e 2 aproxima-se de um valor de equilíbrio independentemente do valor inicial do produto nacional $p_{1,0}$ e $p_{2,0}$. Seguidamente ilustra-se este facto com um exemplo concreto.

Suponha-se que $a_{11} = \frac{2}{5}$, $a_{21} = \frac{1}{2}$, $a_{12} = \frac{3}{10}$, $a_{22} = \frac{3}{5}$, $i_1 = 25$ biliões de euros, $i_2 = 20$ biliões de euros, $p_{1,0} = 500$ biliões de euros e $p_{2,0} = 650$ biliões de euros. De acordo com a formulação do problema tem-se

$$\begin{bmatrix} p_{1,n+1} \\ p_{2,n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{1,n} \\ p_{2,n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 25 \\ 20 \end{bmatrix}.$$

A solução deste sistema é

$$\begin{aligned} p_n &= \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 500 \\ 650 \end{bmatrix} + \sum_{r=0}^{n-1} \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}^{n-r-1} \begin{bmatrix} 25 \\ 20 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1075}{18}\left(\frac{1}{10}\right)^n + \frac{525}{2}\left(\frac{9}{10}\right)^n + \frac{1600}{9} \\ -\frac{1075}{18}\left(\frac{1}{10}\right)^n + \frac{875}{2}\left(\frac{9}{10}\right)^n + \frac{2450}{9} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Assim,

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \begin{bmatrix} \frac{1600}{9} \\ \frac{2450}{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 \\ 20 \end{bmatrix} = (I-A)^{-1}\, i.$$

Capítulo 6

transformada $\mathcal{Z}$

Há algumas transformações integrais que fazem parte da maior parte dos currículos universitários, como por exemplo as transformadas de Laplace ou as de Fourier.

A transformada $\mathcal{Z}$ é a equivalente discreta da transformada de Laplace. Transforma uma sequência num polinómio. A transformada $\mathcal{Z}$ está também ligada à transformada de Fourier discreta. Estas duas ligações são óbvias porque, como é sabido, no caso contínuo, existe uma ligação entre as transformadas de Laplace e de Fourier.

Esta transformada tem uma série de propriedades que se obtêm directamente da definição. A aplicação desta a várias funções permite construir uma tabela de resultados, que servem de apoio ao cálculo de transformadas $\mathcal{Z}$, técnica esta, equivalente à utilizada no caso das transformadas de Laplace.

Embora se defina a inversa da transformada $\mathcal{Z}$, nas aplicações é muitas vezes suficiente a tabela de resultados obtida no estudo da transformada directa.

Tal como outras transformações, esta transformada é uma técnica que permite resolver uma equação algébrica em vez de uma equação de diferenças. A resolução de equações de diferenças, em particular, as não lineares, de tipo convolução, bem como a resolução de problemas com valor inicial são as aplicações mais importantes da transformada $\mathcal{Z}$. É também uma ferramenta importante na análise da estabilidade de sistemas.

Para problemas com condições de fronteira, usam-se outros tipos de transformações, as transformações discretas de seno (TDS) ou de coseno (TDC), que não vão ser abordadas.

Assim, na Secção 6.1 apresenta-se a definição da transformada $\mathcal{Z}$ e sua a região de convergência. Na secção seguinte serão abordadas as suas principais propriedades. Também se fará o cálculo da transformada $\mathcal{Z}$ de alguns exemplos importantes. Os resultados permitirão construir uma tabela de resultados.

Na Secção 6.3 apresentam-se as três técnicas mais usuais para a determinação da inversa da transformada $\mathcal{Z}$. Na Secção 6.4 faz-se uma breve relação entre a transformada $\mathcal{Z}$ e a transformada de Laplace e Fourier. Nesta secção também se fará uma transformação de domínio complexo de um plano para outro plano.

Na Secção 6.5 estudam-se equações e sistemas de tipo convolução bem como a estabilidade das suas soluções. Na última secção deste capítulo serão apresentados alguns exemplos de aplicações com recurso à transformada $\mathcal{Z}$.

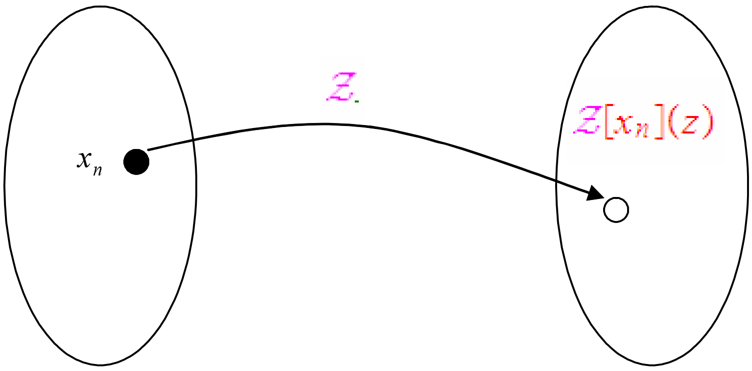

Figura 6.1: Transformação $\mathcal{Z}$

6.1 Definição e região de convergência

A partir desta secção considera-se $x_n = \begin{cases} x_n \text{ se } n \in \mathbb{Z}_0^+ \\ 0 \text{ se } n \in \mathbb{Z}^- \end{cases}$.

Definição 6.1 *Seja* $(x_n)_0^{+\infty}$ *uma sequência qualquer. A transformada* $\mathcal{Z}$ *de* x_n *é a função complexa definida pela série*

$$\mathcal{Z}\left[x_n\right](z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n z^{-n}, \ z \in \mathbb{C} \tag{6.1}$$

Pode-se interpretar a transformada $\mathcal{Z}$ como uma funcional que a cada elemento do espaço inicial x_n (onde n é muitas vezes tomado como medida discreta) faz corresponder um elemento $\mathcal{Z}\left[x_n\right](z)$ do espaço final, com $z \in \mathbb{C}$ (por exemplo, domínio complexo). Na Figura 6.1 pode-se visualizar a representação da função que caracteriza a transformada $\mathcal{Z}$ da sequência x_n.

O conjunto dos números z no plano complexo onde a série (6.1) converge é denominado região de convergência de $\mathcal{Z}\left[x_n\right](z)$ e nota-se por *ROC* (region of convergence). O seu estudo é importante porque caracteriza a região do plano z onde a transformada $\mathcal{Z}$ existe. Portanto

$$ROC\left(\mathcal{Z}\left[x_n\right](z)\right) = \left\{z \in \mathbb{C} : \sum_{n=0}^{+\infty} x_n z^{-n} < \infty\right\}.$$

Nesta região a convergência da série é uniforme. Isto vai permitir que, no cálculo de exemplos, operações de derivação e integração permutem com o sinal de soma, como se verá mais à frente.

Para encontrar-se a *ROC* normalmente utiliza-se o teste da razão. Assim, para a série (6.1), suponha-se que $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right| = R$, onde R é denominado raio de convergência da série (6.1). Deste modo, a série (6.1) converge se

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x_{n+1}\ z^{-(n+1)}}{x_n\ z^{-n}}\right| < 1,$$

isto é,

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \times \left|\frac{z^{-n}z^{-1}}{z^{-n}}\right| < 1 \Leftrightarrow R \times \left|z^{-1}\right| < 1 \Leftrightarrow |z| > R,$$

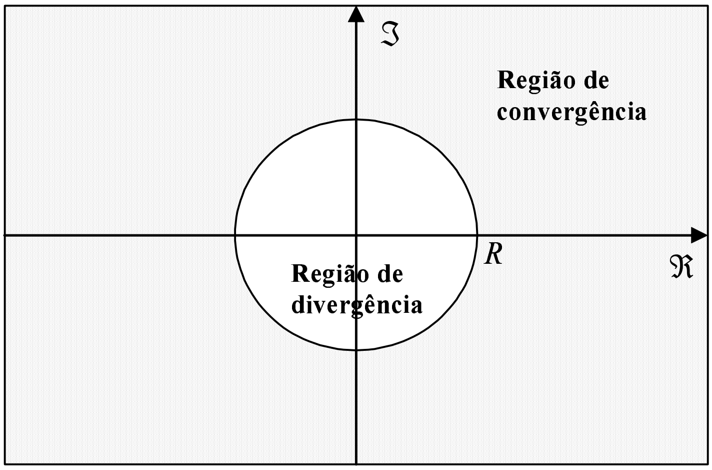

Figura 6.2: Região de convergência e divergência de $\mathcal{Z}[x_n](z)$.

e diverge se

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x_{n+1}\ z^{-(n+1)}}{x_n\ z^{-n}}\right| > 1 \Leftrightarrow |z| < R.$$

Verifica-se que a convergência da transformada $\mathcal{Z}[x_n](z)$ depende do valor de R. Se $R = 0$, a transformada $\mathcal{Z}[x_n](z)$ converge em todo o plano, excepto na origem. Por outro lado, se $R = \infty$, a transformada $\mathcal{Z}[x_n](z)$ é divergente em todo o plano.

Na Figura 6.2 está representada a região de convergência e de divergência de $\mathcal{Z}[x_n](z)$, onde $\Re$ representa o eixo real e $\Im$ o eixo imaginário.

A definição 6.1 é referida por alguns autores como transformada unilateral. Também é possível estabelecer uma definição bilateral para transformada $\mathcal{Z}$. Esta é dada por

$$\mathcal{Z}[x_n](z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n\ z^{-n}$$

A diferença entre as duas definições está relacionada com as regiões de convegência. Os valores de n negativos serão incluídos na definição bilateral, desde que se assegure a convergência da série.

Na abordagem que aqui se faz à transformada $\mathcal{Z}$, apenas se irá trabalhar com definição unilateral.

6.2 Propriedades e exemplos da transformada $\mathcal{Z}$

6.2.1 Linearidade

Seja $\mathcal{Z}[x_n](z)$ a transformada $\mathcal{Z}$ de x_n com raio de convergência R_1 e $\mathcal{Z}[y_n](z)$ a transformada $\mathcal{Z}$ de y_n com raio de convergência R_2. Então para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tem-se que

$$\mathcal{Z}[\alpha x_n + \beta y_n](z) = \alpha\mathcal{Z}[x_n](z) + \beta\mathcal{Z}[y_n](z), \text{ com } |z| > \max(R_1, R_2) \qquad (6.2)$$

Prova.

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\left[\alpha x_n+\beta y_n\right](z) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\alpha x_n+\beta y_n\right) z^{-n} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\alpha x_n z^{-n}+\beta y_n z^{-n}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\alpha x_n z^{-n}+\sum_{n=0}^{+\infty}\beta y_n z^{-n} \\
&= \alpha\sum_{n=0}^{+\infty}x_n z^{-n}+\beta\sum_{n=0}^{+\infty}y_n z^{-n} \\
&= \alpha\mathcal{Z}\left[x_n\right](z)+\beta\mathcal{Z}\left[y_n\right](z)
\end{aligned}$$

■

6.2.2 Translações

Seja $\mathcal{Z}\left[x_n\right](z)$ a transformada $\mathcal{Z}$ de x_n com raio de convergência R.

Translação para a esquerda

1.

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\left[x_{n+1}\right](z) &= \sum_{n=0}^{+\infty}x_{n+1}\ z^{-n} \\
&= x_1+x_2\ z^{-1}+x_3\ z^{-2}+x_4\ z^{-3}+... \\
&= z\left(-x_0+x_0+x_1\ z^{-1}+x_2\ z^{-2}+x_3\ z^{-3}+x_4\ z^{-4}+...\right) \\
&= z\left(-x_0+\sum_{n=0}^{+\infty}x_n\ z^{-n}\right)=z\mathcal{Z}\left[x_n\right](z)-x_0\ z
\end{aligned}$$

Assim,

$$\mathcal{Z}\left[x_{n+1}\right](z)=z\mathcal{Z}\left[x_n\right](z)-x_0\ z,\ \ |z|>R. \tag{6.3}$$

2.

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\left[x_{n+2}\right](z) &= \sum_{n=0}^{+\infty}x_{n+2}\ z^{-n} \\
&= x_2+x_3\ z^{-1}+x_4\ z^{-2}+x_5\ z^{-3}+... \\
&= z^2\left(-x_0-x_1\ z^{-1}+x_0+x_1\ z^{-1}+x_2\ z^{-2}+x_3\ z^{-3}+x_4\ z^{-4}+...\right) \\
&= z^2\left(-x_0-x_1\ z^{-1}+\sum_{n=0}^{+\infty}x_n\ z^{-n}\right)=z^2\mathcal{Z}\left[x_n\right](z)-z^2\left(x_0+x_1\ z^{-1}\right)
\end{aligned}$$

Assim,

$$\mathcal{Z}\left[x_{n+2}\right](z)=z^2\mathcal{Z}\left[x_n\right](z)-\sum_{n=0}^{1}x_n\ z^{2-n},\ \ |z|>R. \tag{6.4}$$

3.

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\left[x_{n+3}\right](z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} x_{n+3}\ z^{-n} \\
&= z^3\left(-x_0 - x_1\ z^{-1} - x_2\ z^{-2} + x_0 + x_1\ z^{-1} + x_2\ z^{-2} + x_3\ z^{-3} + ...\right) \\
&= z^3 \mathcal{Z}\left[x_n\right](z) - z^3\left(x_0 + x_1\ z^{-1} + x_2\ z^{-2}\right)
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathcal{Z}\left[x_{n+3}\right](z) = z^3 \mathcal{Z}\left[x_n\right](z) - \sum_{n=0}^{2} x_n\ z^{3-n},\ \ |z| > R. \tag{6.5}$$

4. Mais geralmente,

$$\mathcal{Z}\left[x_{n+k}\right](z) = z^k \mathcal{Z}\left[x_n\right](z) - \sum_{n=0}^{k-1} x_n z^{k-n},\ \ |z| > R. \tag{6.6}$$

Prova. Por indução sobre k a partir de (6.6).

Quere-se provar que $\mathcal{Z}\left[x_{n+k+1}\right](z) = z^{k+1}\mathcal{Z}\left[x_n\right](z) - \sum\limits_{n=0}^{k} x_n z^{k+1-n}, |z| > R.$

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\left[x_{n+k+1}\right](z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} x_{n+k+1}\ z^{-n} = z\sum_{n=0}^{+\infty} x_{n+k+1}\ z^{-n-1} \\
&= z\left(-x_k + x_k + x_{k+1}\ z^{-1} + x_{k+2}\ z^{-2} + ...\right) \\
&= -x_k z + z\sum_{n=0}^{+\infty} x_{n+k}\ z^{-n} = -x_k z + z\mathcal{Z}\left[x_{n+k}\right](z) \\
&= -x_k z + z\left(z^k \mathcal{Z}\left[x_n\right](z) - \sum_{n=0}^{k-1} x_n z^{k-n}\right), \text{ por } (6.6) \\
&= z^{k+1}\mathcal{Z}\left[x_n\right](z) - x_k z - \sum_{n=0}^{k-1} x_n z^{k-n+1} \\
&= z^{k+1}\mathcal{Z}\left[x_n\right](z) - \sum_{n=0}^{k} x_n z^{k-n+1}
\end{aligned}$$

■

Traslação para a direita

1.

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\left[x_{n-1}\right](z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} x_{n-1}\ z^{-n} \\
&= z^{-1}\left(\underbrace{x_{-1}}_{=0}\ z^1 + x_0 + x_1\ z^{-1} + x_2\ z^{-2} + x_3\ z^{-3} + ...\right) \\
&= z^{-1}\sum_{n=0}^{+\infty} x_n\ z^{-n} = z^{-1}\mathcal{Z}\left[x_n\right](z)
\end{aligned}$$

Assim,

$$\mathcal{Z}\left[x_{n-1}\right](z)=z^{-1}\mathcal{Z}\left[x_n\right](z),|z|>R. \tag{6.7}$$

2.

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\left[x_{n-2}\right](z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} x_{n-2}\ z^{-n} \\ &= z^{-2}\left(\underbrace{x_{-2}}_{=0} z^2+\underbrace{x_{-1}}_{=0} z^1+x_0+x_1\ z^{-1}+x_2\ z^{-2}+x_3\ z^{-3}+\ldots\right) \\ &= z^{-2}\sum_{n=0}^{+\infty} x_n\ z^{-n}=z^{-2}\mathcal{Z}\left[x_n\right](z)\end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathcal{Z}\left[x_{n-2}\right](z)=z^{-2}\mathcal{Z}\left[x_n\right](z),|z|>R. \tag{6.8}$$

3.

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\left[x_{n-k}\right](z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} x_{n-k}\ z^{-n} \\ &= z^{-k}\left(\underbrace{x_{-k}\ z^k}_{=0}+\ldots+\underbrace{x_{-1}\ z^1}_{=0}+x_0+x_1 z^{-1}+x_2 z^{-2}+x_3\ z^{-3}+\ldots\right) \\ &= z^{-k}\sum_{n=0}^{+\infty} x_n z^{-n}=z^{-k}\mathcal{Z}\left[x_n\right](z).\end{aligned}$$

Donde,

$$\mathcal{Z}\left[x_{n-k}\right](z)=z^{-k}\mathcal{Z}\left[x_n\right](z),|z|>R. \tag{6.9}$$

6.2.3 Valor inicial e valor final

Seja $\mathcal{Z}\left[x_n\right](z)$ a transformada $\mathcal{Z}$ de x_n com raio de convergência R. Então

1. $\lim\limits_{|z|\to+\infty}\mathcal{Z}\left[x_n\right](z)=x_0$ (Teorema do valor inicial).
2. $x_\infty=\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{z\to1}(z-1)\mathcal{Z}\left[x_n\right](z)$ (Teorema do valor final).

Prova. 1.

$$\begin{aligned}\lim_{|z|\to+\infty}\mathcal{Z}\left[x_n\right](z) &= \lim_{|z|\to+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x_n}{z^n} \\ &= \lim_{|z|\to+\infty}\left(x_0+\frac{x_1}{z}+\frac{x_2}{z^2}+\frac{x_3}{z^3}+\ldots\right)=x_0\end{aligned}$$

2. Sabe-se que

$$\mathcal{Z}\left[x_{n+1}-x_n\right](z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{z^n} \tag{6.10}$$

e pela linearidade resulta que

$$\mathcal{Z}\left[x_{n+1}-x_n\right](z)=\mathcal{Z}\left[x_{n+1}\right](z)-\mathcal{Z}\left[x_n\right](z).$$

De (6.3) tem-se que

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\left[x_{n+1}\right](z)-\mathcal{Z}\left[x_n\right](z) &= -x_0\ z+z\mathcal{Z}\left[x_n\right](z)-\mathcal{Z}\left[x_n\right](z)\\ &= -x_0\ z+(z-1)\,\mathcal{Z}\left[x_n\right](z)\end{aligned}$$

e usando (6.10) obtém-se

$$(z-1)\,\mathcal{Z}\left[x_n\right](z)=x_0z+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{z^n}.$$

Tomando o limite quando $z\to 1$ em ambos os membros desta última igualdade, vem que

$$\begin{aligned}\lim_{z\to1}(z-1)\,\mathcal{Z}\left[x_n\right](z) &= \lim_{z\to1}\left(x_0z+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{z^n}\right)\\ &= x_0+\sum_{n=0}^{+\infty}\left(x_{n+1}-x_n\right)\\ &= x_0+(x_1-x_0)+(x_2-x_1)+(x_3-x_2)+...\\ &= \lim_{n\to\infty}x_n=x_\infty\end{aligned}$$

■

6.2.4 Convolução

A convolução $*$ de duas sequências x_n e y_n é definida por

$$x_n*y_n=\sum_{k=0}^{n}x_{n-k}y_k=\sum_{k=0}^{n}x_ny_{n-k}$$

Assim,

$$\mathcal{Z}\left[x_n*y_n\right](z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x_n*y_n}{z^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n}x_{n-k}y_k\right]z^{-n}$$

E como o produto de séries é definido por $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kx^k\sum\limits_{k=0}^{\infty}b_kx^k=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\sum\limits_{l=0}^{k}a_lb_{k-l}\right)x^k$, resulta que

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n}x_{n-k}y_k\right]z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}x_nz^{-n}\sum_{n=0}^{\infty}y_nz^{-n}=\mathcal{Z}\left[x_n\right](z)\,\mathcal{Z}\left[y_n\right](z)$$

Portanto tem-se que

$$\mathcal{Z}\left[x_n*y_n\right](z)=\mathcal{Z}\left[x_n\right](z)\,\mathcal{Z}\left[y_n\right](z),\ |z|>\max\left(R_1,R_2\right)\tag{6.11}$$

ou seja, a transformada $\mathcal{Z}$ do produto de convolução é um produto de transformadas.

6.2.5 Mudança de escala

Suponha-se que $\mathcal{Z}[x_n](z)$ é a transformada $\mathcal{Z}$ de x_n com raio de convergência R. Então

$$\mathcal{Z}[a^n x_n](z) = \mathcal{Z}[x_n]\left(\frac{z}{a}\right), \text{ para } |z| > |a|\, R \tag{6.12}$$

Prova.

$$\mathcal{Z}[a^n x_n](z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n x_n \; z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \left(a^{-1}z\right)^{-n} = \mathcal{Z}[x_n]\left(\frac{z}{a}\right)$$

Para a determinação do raio de convergência, basta verificar que

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a^{n+1}x_{n+1}}{a^n x_n}\right| = |a|\, R,$$

portanto $\mathcal{Z}[a^n x_n](z)$ é convergente para $|z| > |a|\, R$. ■

Note-se que esta propriedade mostra que a multiplicação de x_n por a^n transforma-se na transformada de x_n de argumento $\frac{z}{a}$.

6.2.6 Derivada

Suponha-se que $\mathcal{Z}[x_n](z)$ é a transformada $\mathcal{Z}$ de x_n com raio de convergência R.

1.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}\left(\mathcal{Z}[x_n](z)\right) &= \frac{d}{dz}\left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n \; z^{-n}\right) \\
&= \frac{d}{dz}\left(x_0 + x_1 \; z^{-1} + x_2 \; z^{-2} + x_3 \; z^{-3} + ...\right) \\
&= -x_1 \; z^{-2} - 2x_2 \; z^{-3} - 3x_3 \; z^{-4} - ... \\
&= -z^{-1}\left(0 + x_1 \; z^{-1} + 2x_2 \; z^{-2} + 3x_3 \; z^{-3} + ...\right) \\
&= -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{nx_n}{z^n} = -\frac{1}{z}\mathcal{Z}[nx_n](z).
\end{aligned}$$

Esta série é convergente se $|z| > \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)\,x_{n+1}}{nx_n}\right| = 1.R$, portanto,

$$\mathcal{Z}[nx_n](z) = -z\frac{d}{dz}\left(\mathcal{Z}[x_n](z)\right), |z| > R \tag{6.13}$$

Note-se que esta propriedade mostra de que forma uma multiplicação por n se transforma numa derivada em ordem a z. A multiplicação por n^2 deve levar a duas derivações. Com efeito, 2.

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\left[n^2 x_n\right](z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 x_n}{z^n} \\
&= \frac{x_1}{z} + \frac{2^2 x_2}{z^2} + \frac{3^2 x_3}{z^3} + \frac{4^2 x_4}{z^4} + ... \\
&= -z\left(\frac{-x_1}{z^2} - \frac{2^2 x_2}{z^3} - \frac{3^2 x_3}{z^4} - \frac{4^2 x_4}{z^5} - ...\right) \\
&= -z\frac{d}{dz}\left(\frac{x_1}{z} + \frac{2x_2}{z^2} + \frac{3x_3}{z^3} + ...\right) \\
&= -z\frac{d}{dz}\left(\mathcal{Z}\left[n x_n\right](z)\right) \\
&= -z\frac{d}{dz}\left(-z\frac{d}{dz}\left(\mathcal{Z}\left[x_n\right](z)\right)\right)
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\mathcal{Z}\left[n^2 x_n\right](z) = \left(-z\frac{d}{dz}\right)^2 \left(\mathcal{Z}\left[x_n\right](z)\right), |z| > R \tag{6.14}$$

onde $\left(-z\frac{d}{dz}\right)^2 \left(\mathcal{Z}\left[x_n\right](z)\right)$ representa $-z\frac{d}{dz}\left(-z\frac{d}{dz}\left(\mathcal{Z}\left[x_n\right](z)\right)\right)$.

3. De uma maneira geral,

$$\mathcal{Z}\left[n^k x_n\right](z) = \left(-z\frac{d}{dz}\right)^k \left(\mathcal{Z}\left[x_n\right](z)\right), |z| > R \tag{6.15}$$

onde $\left(-z\frac{d}{dz}\right)^k \left(\mathcal{Z}\left[x_n\right](z)\right) = -z\frac{d}{dz}\left(-z\frac{d}{dz}\left(...\left(-z\frac{d}{dz}\left(\mathcal{Z}\left[x_n\right](z)\right)\right)...\right)\right)$.

Prova. Por indução sobre k a partir de (6.15).

Quere-se provar que $\mathcal{Z}\left[n^{k+1} x_n\right](z) = \left(-z\frac{d}{dz}\right)^{k+1} \left(\mathcal{Z}\left[x_n\right](z)\right), |z| > R$

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\left[n^{k+1}x_n\right](z) &= \sum_{n=0}^{\infty} n^{k+1}x_n\ z^{-n} \\
&= x_1\ z^{-1} + 2^{k+1}x_2\ z^{-2} + 3^{k+1}x_3\ z^{-3} + ... \\
&= -z\left(-x_1\ z^{-2} - 2^{k+1}x_2\ z^{-3} - 3^{k+1}x_3\ z^{-4} - ...\right) \\
&= -z\frac{d}{dz}\left(x_1\ z^{-1} + 2^{k}x_2\ z^{-2} + 3^{k}x_3\ z^{-3} + ...\right) \\
&= -z\frac{d}{dz}\left(\sum_{n=0}^{\infty} n^{k}x_k\ z^{-n}\right) \\
&= -z\frac{d}{dz}\left(\mathcal{Z}\left[n^{k}x_n\right](z)\right) \\
&= -z\frac{d}{dz}\left(\left(-z\frac{d}{dz}\right)^{k}\left(\mathcal{Z}\left[x_n\right](z)\right)\right),\ \text{por (6.15)} \\
&= \left(-z\frac{d}{dz}\right)^{k+1}\left(\mathcal{Z}\left[x_n\right](z)\right).
\end{aligned}$$

■

6.2.7 Transformada da sucessão periódica

Seja $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ uma sequência periódica de período N, isto é, $x_{n+N} = x_n$, $\forall n \in \mathbb{Z}_0^+$. Então

$$\mathcal{Z}\left[x_n\right](z) = \frac{z^N}{z^N - 1}\mathcal{Z}\left[x_1(n)\right](z), |z| > 1 \tag{6.16}$$

onde $\mathcal{Z}\left[x_1(n)\right](z) = \sum\limits_{n=0}^{N-1} x_1(n)\, z^{-n}$ e é conhecida como sendo a transformada $\mathcal{Z}$ do primeiro período.

Prova. Seja

$$x_n = \begin{cases} 0 \text{ se } n \in \mathbb{Z}^- \\ x_1(n) \ \text{ se } n = 0, 1, ..., N-1 \\ x_2(n) \ \text{ se } n = N, N+1, ..., 2N-1 \\ \vdots \end{cases}$$

Assim, tem-se que

$$\mathcal{Z}\left[x_1(n)\right](z) = \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n)\, z^{-n} \text{ e } \mathcal{Z}\left[x_2(n)\right](z) = \sum_{n=N}^{2N-1} x_2(n)\, z^{-n}.$$

Fazendo a substituição $n - N = k$ e tendo em atenção que $x_1(n) = x_2(n+N)$, resulta

$$\mathcal{Z}\left[x_2(n)\right](z) = \sum_{k=0}^{N-1} x_2(N+k)\, z^{-(N+k)} = z^{-N}\sum_{k=0}^{N-1} x_1(k)\, z^{-k} = z^{-N}\mathcal{Z}\left[x_1(n)\right](z)$$

Invocando os mesmos argumentos, verifica-se que

$$\mathcal{Z}\left[x_3(n)\right](z) = z^{-2N}\mathcal{Z}\left[x_1(n)\right](z)$$

Propriedade	Sequência	transformada $\mathcal{Z}$	ROC
Linearidade	$\alpha x_n + \beta y_n$	$\alpha \mathcal{Z}[x_n](z) + \beta \mathcal{Z}[y_n](z)$	$\lvert z\rvert > \max(R_x, R_y)$
Desl. de 1 uni. p/ esq.	x_{n+1}	$z\mathcal{Z}[x_n](z) - x_0\ z$	$\lvert z\rvert > R_x$
Desl. de 2 uni. p/ esq.	x_{n+2}	$z^2\mathcal{Z}[x_n](z) - x_0 z^2 - x_1 z$	$\lvert z\rvert > R_x$
Desl. de k uni. p/ esq.	x_{n+k}	$z^k\mathcal{Z}[x_n](z) - \sum\limits_{n=0}^{k-1} x_n z^{k-n}$	$\lvert z\rvert > R_x$
Desl. de 1 uni. p/ dir.	x_{n-1}	$z^{-1}\mathcal{Z}[x_n](z)$	$\lvert z\rvert > R_x$
Desl. de 2 uni. p/ dir.	x_{n-2}	$z^{-2}\mathcal{Z}[x_n](z)$	$\lvert z\rvert > R_x$
Desl. de k uni. p/ dir.	x_{n-k}	$z^{-k}\mathcal{Z}[x_n](z)$	$\lvert z\rvert > R_x$
Valor inicial	x_n	$x_0 = \lim\limits_{\lvert z\rvert\to+\infty} \mathcal{Z}[x_n](z)$	$\lvert z\rvert > R_x$
Valor final	x_n	$x_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{z\to 1} \frac{\mathcal{Z}[x_n](z)}{(z-1)^{-1}}$	$\lvert z\rvert > R_x$
Convolução	$x_n * y_n$	$\mathcal{Z}[x_n](z)\,\mathcal{Z}[y_n](z)$	$\lvert z\rvert > \max(R_x, R_y)$
Mudança de escala	$a^n x_n$	$\mathcal{Z}[x_n]\left(\frac{z}{a}\right)$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert R_x$
1ª derivada	$n x_n$	$-z\frac{d}{dz}(\mathcal{Z}[x_n](z))$	$\lvert z\rvert > R_x$
2ª derivada	$n^2 x_n$	$\left(-z\frac{d}{dz}\right)^2(\mathcal{Z}[x_n](z))$	$\lvert z\rvert > R_x$
Derivada de ordem k	$n^k x_n$	$\left(-z\frac{d}{dz}\right)^k(\mathcal{Z}[x_n](z))$	$\lvert z\rvert > R_x$
Sucessão periódica	$x_{n+N} = x_n$	$\frac{z^N}{z^N-1}\mathcal{Z}_1[x_n](z)$	$\lvert z\rvert > 1$

Tabela 6.1: Transformada $\mathcal{Z}$

Assim,

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}[x_n](z) &= \mathcal{Z}[x_1(n)](z) + \mathcal{Z}[x_2(n)](z) + \ldots \\
&= \left(1 + z^{-N} + z^{-2N} + \ldots\right)\mathcal{Z}[x_1(n)](z) \\
&= \frac{1}{1 - z^{-N}}\mathcal{Z}[x_1(n)](z) = \frac{z^N}{z^N - 1}\mathcal{Z}[x_1(n)](z)
\end{aligned}$$

■

Na Tabela 6.1 apresenta-se um resumo destas propridades, onde as sequências arbitrárias x_n e y_n têm transformada $\mathcal{Z}$, respectivamente, $\mathcal{Z}[x_n](z)$ e $\mathcal{Z}[y_n](z)$, com regiões de convergência R_x e R_y.

6.2.8 Exemplos

Em seguida calcula-se a transformada $\mathcal{Z}$ de algumas sequências. Em geral, pode-se determinar a transformada $\mathcal{Z}$ directamente a partir da definição, mas em muitos casos, é mais simples aplicar conjuntamente com a definição algumas das propriedades da transformada $\mathcal{Z}$ que estão expressas na Tabela 6.1.

Como muitos dos exemplos que se seguem aparecem com muita frequência, os resultados constarão numa tabela resumo no final deste capítulo (Tabela 6.2).

Exemplo 6.2 *Calcule a transformada $\mathcal{Z}$ da sequência* $x_n = \begin{cases} 1, & se\ n = 1 \\ 0, & se\ n \in \mathbb{Z}\backslash\{1\} \end{cases}$.

Solução. $\mathcal{Z}\left[x_n\right](z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x_n z^{-n}=z^{-1}$ ■

Exemplo 6.3 *Determine a transformada $\mathcal{Z}$ da sequência nula, excepto para os termos um, dois e três que são 2, 1 e 2, respectivamente.*

Solução. $\mathcal{Z}\left[x_n\right](z)=2z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}$ ■

Exemplo 6.4 *Calcule a transformada $\mathcal{Z}$ da sequência* $x_n=\begin{cases}1, & se\ n\in\mathbb{Z}_0^+\\ 0, & se\ n\in\mathbb{Z}^-\end{cases}$.

Solução. $\mathcal{Z}\left[x_n\right](z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{z^n}=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{z}}=\dfrac{z}{z-1},\ |z|>1$ ■

Exemplo 6.5 *Calcule a transformada $\mathcal{Z}$ da sequência* $x_n=\begin{cases}(-1)^n, & se\ n\in\mathbb{Z}_0^+\\ 0, & se\ n\in\mathbb{Z}^-\end{cases}$.

Solução. $\mathcal{Z}\left[x_n\right](z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{z^n}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{-1}{z}\right)^n=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{z}}=\dfrac{z}{z+1},\ |z|>1$ ■

Exemplo 6.6 *Encontre a transformada $\mathcal{Z}$ da sequência* $x_n=\begin{cases}a^n, & se\ n\in\mathbb{Z}_0^+\\ 0, & se\ n\in\mathbb{Z}^-\end{cases}$.

Solução. O raio de convergência R da transformada $\mathcal{Z}$ é dado por $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a^{n+1}}{a^n}\right|=|a|$. Assim,

$$\mathcal{Z}\left[a^n\right](z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{z}\right)^n=\frac{1}{1-\dfrac{a}{z}}=\frac{z}{z-a},\ |z|>|a|$$

■

Note-se que também se pode escrever

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\left[a^n\right](z) &= \mathcal{Z}\left[a^n.1\right](z)\\ &= \mathcal{Z}[1]\left(\frac{z}{a}\right),\ \text{por (6.12)}\\ &= \frac{za^{-1}}{za^{-1}-1},\ \text{pelo exemplo 6.4}\\ &= \frac{z}{z-a}\end{aligned}$$

Exemplo 6.7 *Calcule a transformada $\mathcal{Z}$ da sequência* $x_n=\begin{cases}a^{n-1}, & se\ n\in\mathbb{Z}_0^+\\ 0, & se\ n\in\mathbb{Z}^-\end{cases}$.

Solução. $\mathcal{Z}\left[a^{n-1}\right](z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a^{n-1}}{z^n}=a^{-1}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{z}\right)^n=\dfrac{1}{a}\dfrac{z}{z-a},\ |z|>|a|$ ■

Exemplo 6.8 *Determine da transformada $\mathcal{Z}$ das sequências seguintes:*

1. $x_n = \begin{cases} na^n, \text{ se } n \in \mathbb{Z}_0^+ \\ 0, \text{ se } n \in \mathbb{Z}^- \end{cases}$

   Solução.

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\left[na^n\right](z) &= -z\frac{d}{dz}\left(\mathcal{Z}\left[a^n\right](z)\right), \text{ por (6.13)} \\ &= \underbrace{-z\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-a}\right)}_{\frac{z-a-z}{(z-a)^2}}, \text{ pelo exemplo 6.6} \\ &= \frac{az}{(z-a)^2}, |z| > |a|. \end{aligned}$$

   ■

2. $x_n = \begin{cases} n^2a^n, \text{ se } n \in \mathbb{Z}_0^+ \\ 0, \text{ se } n \in \mathbb{Z}^- \end{cases}$

   Solução.

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\left[n^2a^n\right](z) &= -z\frac{d}{dz}\left(-z\frac{d}{dz}\left(\mathcal{Z}\left[a^n\right](z)\right)\right), \text{ por (6.14)} \\ &= -z\frac{d}{dz}\left(\frac{az}{(z-a)^2}\right), \text{ pelo caso anterior} \\ &= -z\frac{a(z-a)^2 - 2az(z-a)}{(z-a)^4} = \frac{za(z+a)}{(z-a)^3}, |z| > |a| \end{aligned}$$

   ■

3. $x_n = \begin{cases} n^3a^n, \text{ se } n \in \mathbb{Z}_0^+ \\ 0, \text{ se } n \in \mathbb{Z}^- \end{cases}$

   Solução.

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\left[n^3a^n\right](z) &= -z\frac{d}{dz}\left(\mathcal{Z}\left[n^2a^n\right](z)\right), \text{ por (6.15)} \\ &= -z\frac{d}{dz}\left(\frac{za(z+a)}{(z-a)^3}\right) \\ &= -z\frac{(2az+a^2)(z-a)^3 - 3za(z+a)(z-a)^2}{(z-a)^6} \\ &= \frac{z(az^2 - 4a^2z - a^3)}{(z-a)^4}, |z| > |a| \end{aligned}$$

   ■

4. $x_n = \begin{cases} n^ka^n, \text{ se } n \in \mathbb{Z}_0^+ \\ 0, \text{ se } n \in \mathbb{Z}^- \end{cases}$

Solução.

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\left[n^k a^n\right](z) &= \left(-z\frac{d}{dz}\right)^k \left(\mathcal{Z}\left[a^n\right](z)\right), \text{ por } (6.15)\\ &= \left(-z\frac{d}{dz}\right)^k \left(\frac{z}{z-a}\right), |z| > |a|\end{aligned}$$

■

Quando $a = 1$ obtém-se um importante caso particular. Assim,

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[n](z) &= \frac{z}{(z-1)^2}, |z| > 1\\ \mathcal{Z}\left[n^2\right](z) &= \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}, |z| > 1\\ \mathcal{Z}\left[n^3\right](z) &= \frac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}, |z| > 1\\ \mathcal{Z}\left[n^k\right](z) &= \left(-z\frac{d}{dz}\right)^k \left(\frac{z}{z-1}\right), |z| > 1\end{aligned}$$

Exemplo 6.9 *Calcule a transformada $\mathcal{Z}$ das sequências* $(\sin(wn))_0^\infty$ *e* $(\cos(wn))_0^\infty$.

Solução. Da identidade de Euler sabe-se que $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ e $e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos\theta - i\sin\theta$, para todo o real θ. Se se somar estas duas identidades resulta que $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$, portanto $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$. De modo análogo, ao subtrair-se as duas identidades, obtém-se $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$. Assim,

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[\sin(wn)](z) &= \mathcal{Z}\left[\frac{e^{iwn}-e^{-iwn}}{2i}\right](z)\\ &= \frac{1}{2i}\left(\mathcal{Z}\left[e^{iwn}\right](z) - \mathcal{Z}\left[e^{-iwn}\right](z)\right), \text{ por } (6.2)\\ &= \frac{1}{2i}\left(\mathcal{Z}\left[\left(e^{iw}\right)^n\right](z) - \mathcal{Z}\left[\left(e^{-iw}\right)^n\right](z)\right), \text{ pelo exemplo 6.6}\\ &= \frac{1}{2i}\left[\frac{z}{z-e^{iw}} - \frac{z}{z-e^{-iw}}\right] = \frac{z}{2i}\left[\frac{z-e^{-iw}-(z-e^{iw})}{(z-e^{-iw})(z-e^{iw})}\right]\\ &= \frac{z\sin w}{z^2-2z\cos w+1}\end{aligned}$$

Como a série $\mathcal{Z}\left[\left(e^{iw}\right)^n\right](z)$ é convergente para $|z| > |e^{iw}| = \sqrt{\cos^2 w + \sin^2 w} = 1$ e a série $\mathcal{Z}\left[\left(e^{-iw}\right)^n\right](z)$ também é convergente para $|z| > 1$, resulta que a série $\mathcal{Z}[\sin(wn)](z)$ é convergente para $|z| > \max(1,1) = 1$.
Por outro lado,

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[\cos(wn)](z) &= \mathcal{Z}\left[\frac{e^{iwn}+e^{-iwn}}{2}\right](z) = \frac{1}{2}\left(\mathcal{Z}\left[e^{iwn}\right](z) + \mathcal{Z}\left[e^{-iwn}\right](z)\right)\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{z}{z-e^{iw}} + \frac{z}{z-e^{-iw}}\right] = \frac{z}{2}\frac{2z-2\cos w}{(z-e^{iw})(z-e^{-iw})}\\ &= \frac{z(z-\cos w)}{z^2-2z\cos w+1}, |z| > 1\end{aligned}$$

■

Exemplo 6.10 *Determine a transformada $\mathcal{Z}$ das sequências* $(a^n \sin(wn))_0^\infty$ *e* $(a^n \cos(wn))_0^\infty$.

Solução. Usando a técnica do exemplo precedente sabe-se que $\cos(wn) = \dfrac{e^{iwn} + e^{-iwn}}{2}$ e multiplicando em ambos os membros desta identidade por a^n, resulta que $a^n \cos(wn) = \dfrac{(ae^{iw})^n + (ae^{-iw})^n}{2}$, pelo que

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}[a^n \cos(wn)](z) &= \frac{1}{2}\left[\mathcal{Z}\left[\left(ae^{iw}\right)^n\right](z) + \mathcal{Z}\left[\left(ae^{-iw}\right)^n\right](z)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{z}{z - ae^{iw}} + \frac{z}{z - ae^{-iw}}\right] \\
&= \frac{z}{2}\frac{2z - a\left(e^{iw} + e^{-iw}\right)}{\left(z - e^{iw}\right)\left(z - e^{-iw}\right)} \\
&= \frac{z(z - a\cos w)}{z^2 - 2a\cos w + a^2}
\end{aligned}$$

com $|z| > \max(|ae^{iw}|, |ae^{-iw}|) = |a|$.
Para determinar-se a transformada $\mathcal{Z}$ da sequência $(a^n \sin(wn))_0^\infty$, pode-se usar uma técnica semelhante à anterior, ou então, utilizar a propriedade (6.12). Deste modo,

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}[a^n \sin(wn)](z) &= \mathcal{Z}[\sin(wn)]\left(\frac{z}{a}\right) \\
&= \frac{\frac{z}{a}\sin w}{\left(\frac{z}{a}\right)^2 - 2\frac{z}{a}\cos w + 1}, \text{ pelo exemplo 6.9} \\
&= \frac{az\sin w}{z^2 - 2a\cos w + a^2}, \quad |z| > |a|
\end{aligned}$$

■

Exemplo 6.11 *Calcule a transformada $\mathcal{Z}$ da sequência delta de Kronecker definida por* $\delta_k(n) = \begin{cases} 1 & se\ n = k \\ 0 & se\ n \neq k \end{cases}$.

Solução. $\mathcal{Z}[\delta_k(n)](z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\delta_k(n)}{z^n} = z^{-k}, |z| > 0.$ ■

Exemplo 6.12 *Determine a transformada $\mathcal{Z}$ da sequência* $x_n = \begin{cases} \dfrac{a^n}{n!}, & se\ n \in \mathbb{Z}_0^+ \\ 0, & se\ n \in \mathbb{Z}^- \end{cases}$.

Solução.

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}[x_n](z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n! z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{a}{z}\right)^n}{n!} \\
&= e^{\frac{a}{z}}, \text{ pois } e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, x \in \mathbb{C}
\end{aligned}$$

com $|z| > \lim\limits_{n \to +\infty} \left| \dfrac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a^n}{n!}} \right| = |a| \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$ ■

Exemplo 6.13 *Calcule a transformada $\mathcal{Z}$ das sequências* $(\sinh(wn))_0^\infty$ *e* $(\cosh(wn))_0^\infty$.

Solução. Como $\cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ vem que

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}[\cosh(nw)](z) &= \mathcal{Z}\left[\frac{e^{nw}+e^{-nw}}{2}\right](z) \\
&= \frac{1}{2}\left[\mathcal{Z}[(e^w)^n](z) + \mathcal{Z}\left[\left(e^{-w}\right)^n\right](z)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{z}{z-e^w} + \frac{z}{z-e^{-w}}\right] = \frac{z}{2}\frac{2z-(e^w+e^{-w})}{(z-e^w)(z-e^{-w})} \\
&= \frac{z(z-\cosh(w))}{z^2-2z\cosh(w)+1},\ z > \max\left(e^w, e^{-w}\right)
\end{aligned}$$

e $\sinh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, resulta que

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}[\sinh(nw)](z) &= \frac{1}{2}\left[\mathcal{Z}[(e^w)^n](z) - \mathcal{Z}\left[\left(e^{-w}\right)^n\right](z)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{z}{z-e^w} - \frac{z}{z-e^{-w}}\right] = \frac{z}{2}\frac{z-e^w-z+e^{-w}}{(z-e^w)(z-e^{-w})} \\
&= \frac{z\sinh(w)}{z^2-2z\cosh(w)+1},\ |z| > \max\left(e^w, e^{-w}\right)
\end{aligned}$$

■

Exemplo 6.14 *Calcule a transformada $\mathcal{Z}$ da sequência* $x_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & se\ n \in \mathbb{Z}^+ \\ 0, & se\ n \in \mathbb{Z}_0^- \end{cases}$

Solução. Para o cálculo da transformada $\mathcal{Z}$ desta sequência observe-se que

$$1 + x + x^2 + x^3 + ... = \frac{1}{1-x}.$$

Integrando ambos os membros desta identidade em ordem à variável x, obtém-se

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + ... = -\ln(1-x)$$

e fazendo a substituição $x = \dfrac{1}{z}$, resulta que

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{3z^3} + ... = \ln\left(\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\right).$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}[x_n](z) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{nz^n} = \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{3z^3} + \frac{1}{4z^4} + ... \\
&= \ln\left(\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\right) = \ln\left(\frac{z}{z-1}\right),\ |z| > 1.
\end{aligned}$$

■

Exemplo 6.15 *Calcule a transformada $\mathcal{Z}$ da sequência* $\left(e^{-wn}x_n\right)_0^\infty$.

Solução.

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\left[e^{-wn}x_n\right](z) &= \mathcal{Z}\left[\left(e^{-w}\right)^n x_n\right](z)\\ &= \mathcal{Z}\left[x_n\right]\left(e^{w}z\right),\ \text{por } (6.12)\end{aligned}$$

onde $|z| > e^{-w}R$, e $\mathcal{Z}\left[x_n\right](z)$ é a transformada $\mathcal{Z}$ de x_n com raio de convergência R. ■

Exemplo 6.16 *Calcule a transformada $\mathcal{Z}$ da sequência* $\left(n^{(k)}\right)_0^\infty$, *onde*

$$n^{(k)} = n\left(n-1\right)\left(n-2\right)...\left(n-k+1\right).$$

Solução. Para determinar-se a transformada $\mathcal{Z}$ desta sequência, começa-se por calcular a expressão da transformada $\mathcal{Z}$ para valores de k pequenos, isto é, para $k = 2$ e $k = 3$. Assim, para $k = 2$ tem-se que

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\left[n^{(2)}\right](z) &= \mathcal{Z}\left[n\left(n-1\right)\right](z) = \mathcal{Z}\left[n^2 - n\right](z)\\ &= \mathcal{Z}\left[n^2\right](z) - \mathcal{Z}\left[n\right](z), por\, (6.2)\\ &= \frac{z\left(z+1\right)}{\left(z-1\right)^3} - \frac{z}{\left(z-1\right)^2},\ \text{pelo exemplo 6.8 com } a = 1\\ &= \frac{2z}{\left(z-1\right)^3},\ \ |z| > 1.\end{aligned}$$

e para $k = 3$, vem que

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\left[n^{(3)}\right](z) &= \mathcal{Z}\left[n\left(n-1\right)\left(n-2\right)\right](z) = \mathcal{Z}\left[n^3 - 3n^2 + 2n\right](z)\\ &= \mathcal{Z}\left[n^3\right](z) - 3\mathcal{Z}\left[n^2\right](z) + 2\mathcal{Z}\left[n\right](z),\ \text{por } (6.2)\\ &= \frac{z\left(z^2+4z+1\right)}{\left(z-1\right)^4} - 3\frac{z\left(z+1\right)}{\left(z-1\right)^3} + 2\frac{z}{\left(z-1\right)^2},\ \text{pelo exemplo 6.8 com } a = 1\\ &= \frac{3!z}{\left(z-1\right)^4},\ \ |z| > 1.\end{aligned}$$

Generalizando,

$$\mathcal{Z}\left[n^{(k)}\right](z) = \frac{k!z}{\left(z-1\right)^{k+1}}, |z| > 1. \tag{6.17}$$

A prova terá que ser feita por indução sobre k a partir de (6.17).

Querem-se mostar que $\mathcal{Z}\left[n^{(k+1)}\right](z) = \dfrac{(k+1)!z}{(z-1)^{k+2}}$, $|z|>1$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\left[n^{(k+1)}\right](z) &= \mathcal{Z}\left[n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)(n-k)\right](z)\\
&= \mathcal{Z}\left[nx_n - kx_n\right](z)\text{, onde } x_n = n^{(k)}\\
&= \mathcal{Z}\left[nx_n\right](z) - k\mathcal{Z}\left[x_n\right](z)\text{, com } \mathcal{Z}\left[x_n\right](z) = \frac{k!z}{(z-1)^{k+1}}\\
&= -z\frac{d}{dz}\left(\mathcal{Z}\left[x_n\right](z)\right) - k\mathcal{Z}\left[x_n\right](z)\text{, por (6.13)}\\
&= -z\frac{d}{dz}\left(\frac{k!z}{(z-1)^{k+1}}\right) - k\left(\frac{k!z}{(z-1)^{k+1}}\right)\text{, por (6.17)}\\
&= -z\frac{k!(z-1)^{k+1} - k!z(k+1)(z-1)^k}{\left((z-1)^{k+1}\right)^2} - k\frac{k!z}{(z-1)^{k+1}}\\
&= \frac{-zk!}{(z-1)^{k+1}}\left(\frac{z-1-zk-z}{z-1}+k\right)\\
&= \frac{z(k+1)!}{(z-1)^{k+2}}
\end{aligned}$$

■

Exemplo 6.17 *Calcule a transformada $\mathcal{Z}$ da sequência* $\left(\dfrac{n^{(k)}}{k!}a^n\right)_0^\infty$

Solução. Usando a técnica do exemplo precedente, prova-se que $\mathcal{Z}\left[\dfrac{n^{(2)}}{2}a^n\right](z) = \dfrac{a^2z}{(z-a)^3}$ e que $\mathcal{Z}\left[\dfrac{n^{(3)}}{3!}a^n\right](z) = \dfrac{a^3z}{(z-a)^4}$. Mais geralmente tem-se que

$$\mathcal{Z}\left[\frac{n^{(k)}}{k!}a^n\right](z) = \frac{a^kz}{(z-a)^{k+1}}, |z|>|a| \tag{6.18}$$

A prova desta identidade terá de ser feita por indução sobre k a partir de (6.18).
Quere-se provar que $\mathcal{Z}\left[\dfrac{n^{(k+1)}}{(k+1)!}a^n\right](z) = \dfrac{a^{k+1}z}{(z-a)^{k+2}}$, $|z|>|a|$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\left[\frac{n^{(k+1)}}{(k+1)!}a^n\right](z) &= \frac{1}{k+1}\left[\mathcal{Z}\left[nx_n\right](z) - k\mathcal{Z}\left[x_n\right](z)\right]\text{, com } x_n = \frac{n^{(k)}a^n}{k!}\\
&= \frac{1}{k+1}\left[-z\frac{d}{dz}\left(\frac{a^kz}{(z-a)^{k+1}}\right) - k\frac{a^kz}{(z-a)^{k+1}}\right]\\
&= \frac{1}{k+1}\left[-z\frac{a^k(z-a)^{k+1} - a^kz(k+1)(z-a)^k}{(z-a)^{2k+2}} - k\frac{a^kz}{(z-a)^{k+1}}\right]\\
&= \frac{-za^k}{(k+1)(z-a)^{k+1}}\left[\frac{z-a-zk-z}{z-a}+k\right]\\
&= \frac{za^{k+1}}{(z-a)^{k+2}}
\end{aligned}$$

■

6.3 A inversa da transformada $\mathcal{Z}$

Como já foi referido na introdução deste capítulo, a transformada $\mathcal{Z}$, transforma uma equação de diferenças de uma sequência x_n desconhecida, numa equação algébrica da sua transformada $\mathcal{Z}$.

A sequência x_n pode ser obtida a partir de $\mathcal{Z}[x_n](z)$, por um processo que se chama a inversa da transformada $\mathcal{Z}$. Este processo é simbolicamente representado por

$$\mathcal{Z}^{-1}[\mathcal{Z}[x_n](z)] = x_n. \tag{6.19}$$

Sendo$\mathcal{Z}$ uma transformação linear, então $\mathcal{Z}^{-1}$ também é linear.

Pode-se estabelecer a unicidade da inversa da transformada $\mathcal{Z}$ supondo-se que existem duas sequências x_n e y_n tais que as suas transformadas$\mathcal{Z}$ são iguais, isto é,

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[x_n](z) = \mathcal{Z}[y_n](z) \Leftrightarrow & \quad \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} y_n z^{-n} \\ \Leftrightarrow & \quad \sum_{n=0}^{\infty} (x_n - y_n) z^{-n} = 0, |z| > R. \end{aligned}$$

Tem-se então uma diferença de duas séries uniformemente convergentes, identicamente nula, portanto todos os coeficientes de z têm que ser nulos, isto é, $x_n - y_n = 0, \forall n \in \mathbb{Z}_0^+$, donde as sequências coincidem.

As técnicas mais usuais para se determinar a inversa da transformada $\mathcal{Z}$, para além da utilização directa das já determinadas são:

1. Método da divisão,
2. Uso das tabelas da transformada $\mathcal{Z}$, depois de decompor a fracção racional numa soma de fracções parciais,
3. Integral de linha.

6.3.1 O método da divisão

Para obter-se a inversa da transformada $\mathcal{Z}$ através deste método, é necessário expandir $\mathcal{Z}[a_n](z)$ numa série de potências de z^{-1}, na sua região de convergência.

Assim, se $\mathcal{Z}[x_n](z)$ for uma fracção da forma $\dfrac{g(z)}{h(z)}$, onde $g(z)$ e $h(z)$ são polinómios em z, começa-se por escrever $\dfrac{g(z)}{h(z)}$ em potências de z^{-1}. Seguidamente, aplica-se o algoritmo da divisão para se obter uma expansão em série de potências de z^{-1} da função $\mathcal{Z}[x_n](z)$.

Por comparação com a definição de $\mathcal{Z}[x_n](z)$, determina-se os valores dos coeficientes das potências de z, obtendo-se assim a sequência $(x_n)_0^{\infty}$.

Este método determina a inversa de $\mathcal{Z}[x_n](z)$, no entanto, não resolve todos os problemas, uma vez que, ao se comparar os coeficientes das potências de z, por vezes, não é possível escrever uma expressão para o termo geral da sequência $(x_n)_0^{\infty}$.

Exemplo 6.18 *Calcule a inversa da transformada $\mathcal{Z}$ de* $\mathcal{Z}[x_n](z) = \dfrac{z(z+1)}{(z-1)^2}$.

Solução. Em primeiro lugar escreve-se $\mathcal{Z}[x_n](z)$ como sendo a razão entre dois polinómios de potências de z^{-1}, isto é,

$$\frac{z(z+1)}{(z-1)^2} = \frac{z^2(1+z^{-1})}{z^2(1-z^{-1})^2} = \frac{1+z^{-1}}{1-2z^{-1}+z^{-2}}.$$

Aplicando o algoritmo da divisão tem-se

$$\begin{array}{l|l}
1+z^{-1} & 1-2z^{-1}+z^{-2} \\ \cline{2-2}
-1+2z^{-1}-z^{-2} & 1+3z^{-1}+5z^{-2}+7z^{-3}+9z^{-4}+... \\ \cline{1-1}
\quad 3z^{-1}-z^{-2} & \\
\quad \text{-}3z^{-1}+6z^{-2}-3z^{-3} & \\ \cline{1-1}
\qquad 5z^{-2}-3z^{-3} & \\
\qquad \text{-}5z^{-2}+10z^{-3}-5z^{-4} & \\ \cline{1-1}
\qquad\quad 7z^{-3}-5z^{-4} & \\
\qquad\quad \text{-}z^{-3}+14z^{-4}-7z^{-5} & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad 9z^{-4}-7z^{-5} & \\
\qquad\qquad \vdots &
\end{array}$$

Donde,

$$\mathcal{Z}[x_n](z) = 1+3z^{-1}+5z^{-2}+7z^{-3}+9z^{-4}+....$$

Assim,

$$x_0 = 1, x_1 = 3, x_2 = 5, x_3 = 7, ...,$$

ou seja,

$$x_n = 2n+1, n \in \mathbb{Z}_0^+.$$

■

6.3.2 Decomposição em fracções parciais

Este método é usado quando a transformada $\mathcal{Z}[x_n](z)$ é uma fracção racional em z irredutível, tal que o grau do numerador é inferior ou igual ao grau do denominador, isto é,

$$\mathcal{Z}[x_n](z) = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + ... + b_{m-1}z + b_m}{z^n + a_1 z^{n-1} + ... + a_{n-1}z + a_n}, \ m \leq n. \tag{6.20}$$

Este método só é útil quando $m \leq n$, pois caso contrário, está-se a calcular a inversa da transformada $\mathcal{Z}$ de potências de z com expoente positivo, que não figuram nas tabelas da transformada $\mathcal{Z}$.

Escrevendo $\mathcal{Z}[x_n](z)$ como a soma de fracções parciais vem

$$\mathcal{Z}[x_n](z) = \mathcal{Z}_1[x_n](z) + \mathcal{Z}_2[x_n](z) + \mathcal{Z}_3[x_n](z) + ... \ .$$

Pela unicidade e linearidade da inversa da transformada $\mathcal{Z}$ tem-se que

$$x_n = \mathcal{Z}^{-1}[\mathcal{Z}_1[x_n](z)] + \mathcal{Z}^{-1}[\mathcal{Z}_2[x_n](z)] + \mathcal{Z}^{-1}[\mathcal{Z}_3[x_n](z)] + ...$$

Usando as tabelas da transformada $\mathcal{Z}$ pode-se determinar $\mathcal{Z}^{-1}[\mathcal{Z}_i[x_n](z)], i = 1, 2, 3, ...$

Note-se que os zeros do numerador da expressão (6.20) são chamados zeros de $\mathcal{Z}[x_n](z)$ ao passo que, os zeros do denominador, são conhecidos como pólos de $\mathcal{Z}[x_n](z)$.

Observação 6.19 *Uma vez que o objectivo é o de utilizar a tabela de $\mathcal{Z}[x_n](z)$ é mais conveniente decompor $\dfrac{\mathcal{Z}[x_n](z)}{z}$ numa soma de fracções parciais em vez de $\mathcal{Z}[x_n](z)$, pois os exemplos da tabela, mostram que z aparece no numerador de muitas transformadas.*

Observação 6.20 *A decomposição de uma fracção do tipo $\dfrac{g(z)}{(z-a)^n(z-b)^m\left(z-\overline{b}\right)^m}$, $a \in \mathbb{R}$, $b, \overline{b} \in \mathbb{C}$ e $n, m \in \mathbb{N}$, deverá ser numa soma de fracções que evidenciem todas as multiplicidades das raízes reais e imaginárias, ou seja,*

$$\begin{aligned}\frac{g(z)}{(z-a)^n(z-b)^m\left(z-\overline{b}\right)^m} &= \frac{A_1}{(z-a)}+\dots+\frac{A_n}{(z-a)^n}+\frac{B_1}{(z-b)}+\dots+\frac{B_m}{(z-b)^m}+\\ &\quad \frac{C_1}{\left(z-\overline{b}\right)}+\dots+\frac{C_m}{\left(z-\overline{b}\right)^m}\end{aligned}$$

em que as constantes $A_i \in \mathbb{R}$, $B_j, C_j \in \mathbb{C}$, $i = 1, ..., n$ e $j = 1, ..., m$, devem ser calculadas, por exemplo, pelo método dos coeficientes indeterminados ou qualquer outro método adequado.

Exemplo 6.21 *(Pólos reais simples) Resolva a equação de diferenças $x_{n+2} + 3x_{n+1} + 2x_n = 0$, $x_0 = 1$, $x_1 = -4$.*

Solução. Aplicando a transformada $\mathcal{Z}$ em ambos os membros da equação e usando a propriedade (6.2) tem-se

$$\mathcal{Z}[x_{n+2}](z) + 3\mathcal{Z}[x_{n+1}](z) + 2\mathcal{Z}[x_n](z) = \mathcal{Z}[0](z).$$

De (6.3) e (6.4) resulta que

$$\begin{aligned} &\left(z^2+3z+2\right)\mathcal{Z}[x_n](z) - z^2x_0 - zx_1 - 3zx_0 = 0\\ \Leftrightarrow\quad &\mathcal{Z}[x_n](z) = \frac{z^2-z}{z^2+3z+2}\\ \Leftrightarrow\quad &\mathcal{Z}[x_n](z) = \frac{z(z-1)}{(z+1)(z+2)}\end{aligned}$$

Expandindo $\dfrac{\mathcal{Z}[x_n](z)}{z}$ em soma de fracções parciais resulta que

$$\frac{\mathcal{Z}[x_n](z)}{z} = \frac{(z-1)}{(z+1)(z+2)} = \frac{A_1}{z+1} + \frac{A_2}{z+2},$$

isto é,

$$\frac{(z-1)}{(z+1)(z+2)} = \frac{(A_1+A_2)z + 2A_1 + A_2}{(z+1)(z+2)}.$$

Usando o método dos coeficientes indeterminados tem-se

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 1\\ 2A_1 + A_2 = -1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1 = -2\\ A_2 = 3\end{cases}$$

Donde
$$\mathcal{Z}[x_n](z) = \frac{-2z}{z+1} + \frac{3z}{z+2}.$$
Aplicando $\mathcal{Z}^{-1}$ em ambos os membros, usando a linearidade de $\mathcal{Z}^{-1}$ e a tabela 6.2, vem que

$$\begin{aligned} x_n &= -2\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z+1}\right] + 3\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z+2}\right] \\ &= -2(-1)^n + 3(-2)^n \end{aligned}$$

■

Exemplo 6.22 *(Pólos reais múltiplos) Calcule a solução da equação de diferenças* $x_{n+4} + 9x_{n+3} + 30x_{n+2} + 44x_{n+1} + 24x_n = 0$, $x_0 = x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 10$.

Solução. Aplicando a transformada $\mathcal{Z}$ em ambos os membros da equação, vem que

$$\begin{aligned} & z^4\mathcal{Z}[x_n](z) - \left(x_0z^4 + x_1z^3 + x_2z^2 + x_3z\right) + 9z^3\mathcal{Z}[x_n](z) - 9\left(x_0z^3 + x_1z^2 + x_2z\right) + \\ & 30z^2\mathcal{Z}[x_n](z) - 30\left(x_0z^2 + x_1z\right) + 44z\mathcal{Z}[x_n](z) - 44x_0z + 24\mathcal{Z}[x_n](z) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left(z^4 + 9z^3 + 30z^2 + 44z + 24\right)\mathcal{Z}[x_n](z) = z^2 + 19z \\ \Leftrightarrow\ & \mathcal{Z}[x_n](z) = \frac{z(z+19)}{(z+3)(z+2)^3} \end{aligned}$$

Decompondo $\dfrac{\mathcal{Z}[x_n](z)}{z}$ em soma de fracções parciais resulta que

$$\frac{z+19}{(z+3)(z+2)^3} = \frac{A}{(z+3)} + \frac{B_1}{(z+2)^3} + \frac{B_2}{(z+2)^2} + \frac{B_3}{(z+2)} \tag{6.21}$$

Para determinar-se o valor de A, multiplica-se ambos os membros de (6.21) por $z+3$, e substitui-se z por -3, obtendo assim

$$A = \left.\frac{z+19}{(z+2)^3}\right|_{z=-3} = -16.$$

Ao multiplicar-se ambos os membros de (6.21) por $(z+2)^3$ obtém-se

$$\frac{z+19}{z+3} = -16\frac{(z+2)^2}{z+3} + B_1 + B_2(z+2) + B_3(z+2)^2 \tag{6.22}$$

donde,
$$B_1 = \left.\frac{z+19}{z+3}\right|_{z=-2} = 17.$$

Para se determinar o valor B_2, deriva-se ambos os membros de (6.22) em ordem à variável z. Portanto
$$\frac{-16}{(z+3)^2} = -16\frac{(z+2)^2(2z+7)}{(z+3)^2} + B_2 + 2B_3(z+2). \tag{6.23}$$

Substituindo z por -2 obtém-se

$$B_2 = \left.\frac{-16}{(z+3)^2}\right|_{z=-2} = -16.$$

Derivando (6.23) tem-se

$$\frac{32}{(z+3)^3} = -16\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{(z+2)^3}{z+3}\right) + 2B_3$$

e tomando o valor -2 para z vem que

$$B_3 = \left.\frac{16}{(z+3)^3}\right|_{z=-2} = 16.$$

Substituindo em (6.21) tem-se

$$\mathcal{Z}[x_n](z) = \frac{-16z}{(z+3)} + \frac{17z}{(z+2)^3}\frac{-16z}{(z+2)^2} + \frac{16z}{(z+2)}.$$

Aplicando $\mathcal{Z}^{-1}$ em ambos os membros da última identidade, usando a linearidade e a tabela 6.2 vem que

$$\begin{aligned} x_n &= -16(-3)^n - \frac{17}{2^2}\frac{n(n-1)}{2}(-2)^n + \frac{-16}{-2}n(-2)^n + 16(-2)^n \\ &= -16(-3)^n + \left(\frac{17}{8}n^2 + \frac{47}{8}n + 16\right)(-2)^n \end{aligned}$$

■

Observação 6.23 *Pode-se generalizar o processo usado para determinar as constantes B_1, B_2 e B_3 do exemplo precedente. Assim, se $\frac{\mathcal{Z}[x_n](z)}{z}$ tem um pólo de multiplicidade m, para a raíz $z = z_0$, então*

$$\frac{\mathcal{Z}[x_n](z)}{z} = \frac{B_1}{(z-z_0)^m} + \frac{B_2}{(z-z_0)^{m-1}} + ... + \frac{B_m}{(z-z_0)}$$

onde os B_k, $k = 1, 2, ..., m$ podem ser determinados usando a fórmula

$$B_k = \left.\frac{1}{(k-1)!}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left[(z-z_0)^m\frac{\mathcal{Z}[x_n](z)}{z}\right]\right|_{z=z_0}$$

Exemplo 6.24 *(Pólos complexos) Calcule a solução da equação de diferenças $x_{n+3} - x_{n+2} + 2x_n = 0$, $x_0 = x_1 = x_2 = 1$.*

Solução. Aplicando a transformada $\mathcal{Z}$ vem que

$$\left(z^3 - z^2 + 2\right)\mathcal{Z}[x_n](z) - \left(z^3x_0 + z^2x_1 + zx_2\right) + \left(x_0z^2 + x_1z\right) = 0,$$

ou seja,

$$\frac{\mathcal{Z}\left[x_n\right](z)}{z}=\frac{z^2}{\left(z^2-2z+2\right)(z+1)}.$$

Expandindo $\dfrac{\mathcal{Z}\left[x_n\right](z)}{z}$ na soma de fracções parciais da forma

$$\frac{z^2}{\left(z^2-2z+2\right)(z+1)}=\frac{A_1}{z+1}+\frac{A_2}{z-(1+i)}+\frac{A_3}{z-(1-i)},$$

pode-se determinar as constantes $A_1,\ A_2$ e A_3 usando a técnica do exemplo precedente.

$$\begin{aligned}
A_1 &= \left.\frac{z^2}{z^2-2z+2}\right|_{z=-1}=\frac{1}{5}\\
A_2 &= \left.\frac{z^2}{(z-(1-i))(z+1)}\right|_{z=1+i}=\frac{(1+i)^2}{2i(2+i)}=\frac{2-i}{5}\\
A_3 &= \left.\frac{z^2}{(z-(1+i))(z+1)}\right|_{z=1-i}=\frac{(1-i)^2}{-2i(2-i)}=\frac{2+i}{5}=\overline{A_2}
\end{aligned}$$

e portanto,

$$\mathcal{Z}\left[x_n\right](z)=\frac{\frac{1}{5}z}{z+1}+\frac{\frac{2-i}{5}z}{z-(1+i)}+\frac{\frac{2+i}{5}z}{z-(1-i)},$$

aplicando $\mathcal{Z}^{-1}$

$$\begin{aligned}
x_n &= \frac{1}{5}(-1)^n+\frac{2-i}{5}(1+i)^n+\frac{2+i}{5}(1-i)^n\\
&= \frac{1}{5}(-1)^n+\left(\sqrt{2}\right)^n\left[\frac{2-i}{5}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right)+\frac{2+i}{5}\left(\cos\frac{n\pi}{4}-i\sin\frac{n\pi}{4}\right)\right]\\
&= \frac{1}{5}(-1)^n+\left(\sqrt{2}\right)^n\left[\frac{4}{5}\cos\frac{n\pi}{4}+\frac{2}{5}\sin\frac{n\pi}{4}\right]\\
&= \frac{1}{5}(-1)^n+\frac{2}{5}\left(\sqrt{2}\right)^n\left[2\cos\frac{n\pi}{4}+\sin\frac{n\pi}{4}\right]
\end{aligned}$$

■

Observação 6.25 *Quando a multiplicidade dos pólos complexos for superior a um, procede-se de modo análogo ao caso do pólos reais múltiplos, de acordo com a observação 6.20.*

6.3.3 Integral de linha

Da teoria das funções complexas de uma variável complexa, sabe-se que se C é uma linha que fecha uma região simplesmente conexa, que contém o ponto $z=0$, então

$$\oint_C z^n dz=\begin{cases}2\pi i \text{ se } n=-1\\ 0 \text{ caso contrário}\end{cases}.$$

(fórmula integral de Cauchy generalizada).

Sabe-se que $\mathcal{Z}[x_n](z) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} x_i z^{-i}$, pelo que ao multiplicar-se ambos os membros desta igualdade por z^{n-1} vem

$$z^{n-1}\mathcal{Z}[x_n](z) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i z^{k-1-i} = x_0 z^{n-1} + x_1 z^{n-2} + ... + x_n z^{-1} + x_{n+1} z^{-2} + ... \qquad (6.24)$$

A equação (6.24) é a expansão em série de Laurent de $z^{n-1}\mathcal{Z}[x_n](z)$ em torno do ponto $z = 0$.

Considere-se uma circunferência C, centrado na origem do plano z, que contém todos os pólos de $z^{n-1}\mathcal{Z}[x_n](z)$. Calculando o integral de linha, na região de convergência de $\mathcal{Z}[x_n](z)$, de (6.24) resulta

$$\oint_C z^{n-1}\mathcal{Z}[x_n](z)\,dz = ...0 + 2\pi i\ x_n + 0 + ...,$$

ou seja,

$$x_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C z^{n-1}\mathcal{Z}[x_n](z)\,dz, \qquad (6.25)$$

e pelo teorema dos resíduos sabe-se que

$$x_n = \sum_{i=1}^{p} k_i(n), \text{ onde } k_i(n) \text{ são os resíduos do pólos de } z^{n-1}\mathcal{Z}[x_n](z) \qquad (6.26)$$

A equação (6.25) é uma expressão formal da inversa da transformada $\mathcal{Z}$. O seu uso envolve o cálculo de um integral de linha ao longo de uma curva fechada e tem como pré-requisitos o conhecimento de análise complexa.

Suponha-se que $z^{n-1}\mathcal{Z}[x_n](z) = \dfrac{h(z)}{g(z)}$ tem um pólo em $z = z_i$ de multiplicidade 1, então o seu resíduo $k_i(n)$ é dado por

$$k_i(n) = \lim_{z\to z_i}\left[(z - z_i)\frac{h(z)}{g(z)}\right]. \qquad (6.27)$$

No caso do pólo de $z^{n-1}\mathcal{Z}[x_n](z)$ ter multiplicidade m, então o resíduo $k_i(n)$ é determinado pela fórmula

$$k_i(n) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_i}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z - z_i)^m\frac{h(z)}{g(z)}\right]. \qquad (6.28)$$

Exemplo 6.26 *Calcule a inversa da transformada $\mathcal{Z}$ de $\mathcal{Z}[x_n](z) = \dfrac{z(z-1)}{(z-2)^2(z+3)}$.*

Solução. Para se calcular a inversa da transformada $\mathcal{Z}$ de $\mathcal{Z}[x_n](z)$ note-se que $z^{n-1}\mathcal{Z}[x_n](z) = \dfrac{z^n(z-1)}{(z-2)^2(z+3)}$. Esta função tem um pólo simples para $z_1 = -3$ e um

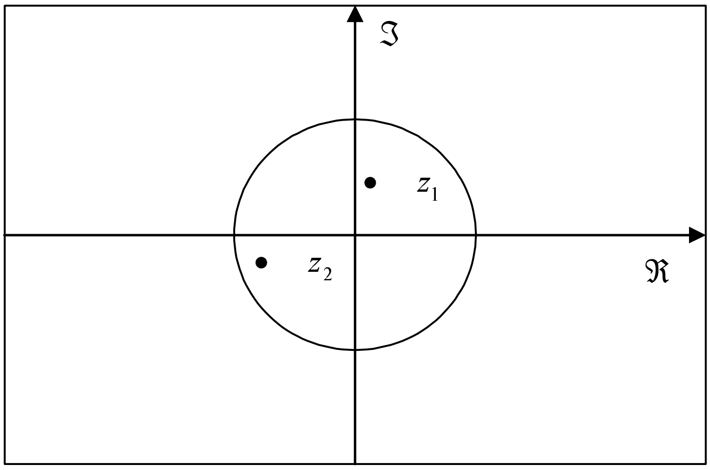

Figura 6.3: Pólos de $z^{k-1}\mathcal{Z}[x_n](z)$.

pólo duplo para $z_2 = 2$. Assim, pela fórmula (6.26) $x_n = k_1(n) + k_2(n)$, onde $k_1(n)$ e $k_2(n)$ são os resíduos dos pólos de $z^{n-1}\mathcal{Z}[x_n](z)$ em z_1 e z_2, respectivamente.

$$k_1(n) = \lim_{z\to-3}\left[(z+3)\frac{z^n(z-1)}{(z-2)^2(z+3)}\right] = \frac{-4}{25}(-3)^n$$

$$\begin{aligned} k_2(n) &= \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to2}\frac{d^{2-1}}{dz^{2-1}}\left[(z-2)^2\frac{z^n(z-1)}{(z-2)^2(z+3)}\right] \\ &= \lim_{z\to2}\frac{(z^n+n(z-1)z^{n-1})(z+3)-(z-1)z^n}{(z+3)^2} \\ &= \left(\frac{8+5n}{25}\right)2^{n-1} \end{aligned}$$

Assim, $x_n = \frac{-4}{25}(-3)^n + \left(\frac{8+5n}{25}\right)2^{n-1}$. ∎

6.4 Relação entre a transformada $\mathcal{Z}$ e as transformadas de Laplace e Fourier

6.4.1 A transformada $\mathcal{Z}$ e a transformada de Laplace

A transformada de Laplace (TL) de uma função $x(t)$ contínua é a função definida por

$$\mathcal{L}[x(t)](s) = \int_0^{+\infty} x(t)e^{-st}dt,\ t\in\mathbb{R}_0^+. \tag{6.29}$$

Também é possível estabelecer uma definição bilateral para a TL, mas em geral, quando se refere à TL, está-se a fazer referência à versão unilateral. Uma vez que a abordagem que se está a fazer para a transformada $\mathcal{Z}$ é unilateral, também se fará o mesmo tipo de abordagem à TL.

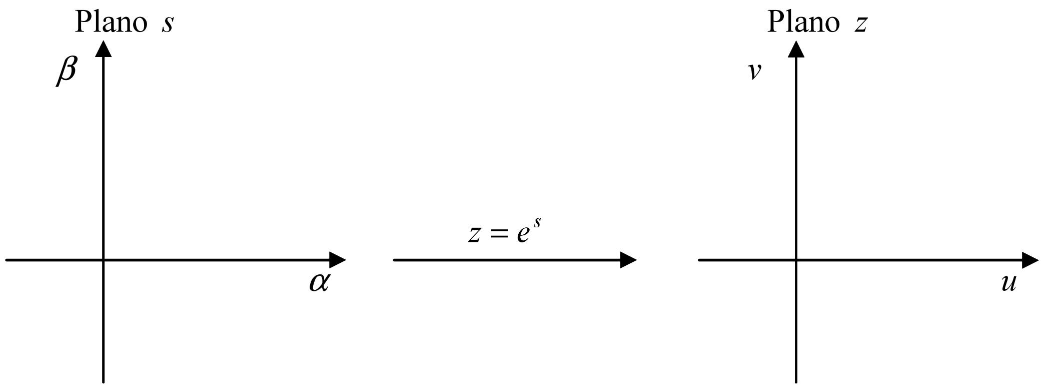

Figura 6.4: Transformação do plano s no plano z

As propriedades da TL tornaram-na muito útil na análise de sistemas dinâmicos lineares. Transforma a integração e a derivação em multiplicação e divisão, da mesma maneira que, o logaritmo transforma a multiplicação e divisão em adição e subtracção.

A TL também permite transformar uma equação diferencial numa equação polinomial, tornando assim mais simples a resolução de algumas equações diferenciais.

Discretizando o integral da fórmula (6.29), tem-se que a TL de argumento discreto é

$$\mathcal{L}\left[x_n\right](s) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n e^{-ns}. \tag{6.30}$$

Fazendo a substituição $z = e^s$, resulta que o 2º membro de (6.30) é dado por $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n}$, que é uma transformada $\mathcal{Z}$.

Assim, existe uma relação entre as variáveis s e z que é dada por

$$z = e^s \tag{6.31}$$

Seja $s = \alpha + \beta i$ um ponto do plano s. De (6.31) resulta que

$$z = e^{\alpha+\beta i} = e^{\alpha} e^{\beta i} = e^{\alpha} e^{(\beta+2\pi n)i},\ n \in \mathbb{Z},$$

isto é,

$$s = \ln z - 2i\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Portanto, um ponto no plano z corresponde a infinitos pontos no plano s.

Uma vez que $|z| = e^{\alpha}$, então a transformação do plano complexo s no plano complexo z, dada por (6.31), processa-se da seguinte forma:

1. Os pontos que pertencem ao eixo imaginário no plano s ($\alpha = 0$), correspondem por esta transformação, a uma circunferência centrada na origem de raio 1.

2. O semiplano à esquerda do eixo imaginário no plano s, corresponde aos pontos que estão no interior do círculo unitário no plano z, pois para $\alpha < 0$, $|z| < 1$. Portanto, para cada $\alpha < 0$ fixo no plano s, tem-se uma circunferência no interior do círculo unitário no plano z.

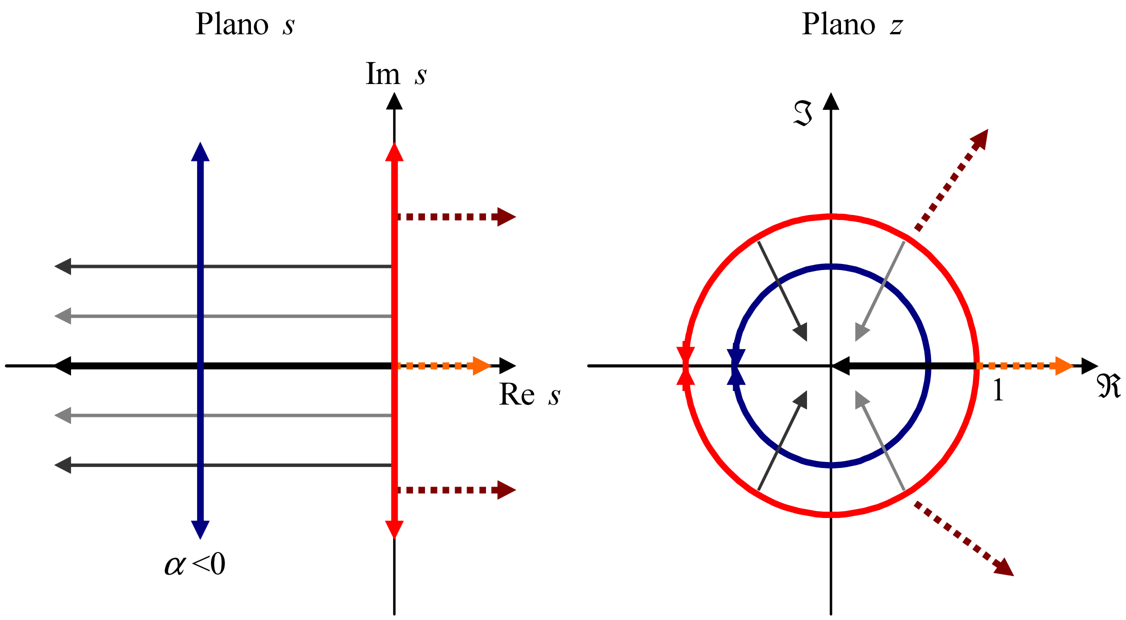

Figura 6.5: Plano s versus plano z.

3. O semiplano à direita do eixo imaginário no plano s, corresponde aos pontos que estão no exterior do círculo unitário no plano z, pois para $\alpha > 0$, $|z| > 1$. Portanto, para cada $\alpha > 0$ fixo no plano s, tem-se uma circunferência no exterior do círculo unitário no plano z.

4. A origem do plano s corresponde a $z = 1$ no plano z ($z = e^0$).

5. Para valores de $s \in \left]-\infty, 0\right[$ do plano s, corresponde no plano z o intervalo $\left]0, 1\right[$. Para o eixo real positivo do plano s, corresponde o intervalo $\left]1, +\infty\right[$ no plano z.

6. Os pontos pertencentes a uma semirecta no semiplano à esquerda do eixo imaginário no plano s, transformam-se em pontos sobre um segmento de recta pertencente ao interior do círculo unitário, e que é uma linha radial.

7. Pode-se dividir o plano s em faixas horizontais, de igual amplitude. Cada faixa do plano s corresponde a uma diferente superfície de Riemann do plano z.

A Figura 6.5 ilustra o que se acabou de descrever. Na Figura 6.6 pode-se visualizar a relação entre as áreas do plano s e as do plano z.

6.4.2 A transformada $\mathcal{Z}$ e a transformada de Fourier

A transformada de Fourier (TF) de uma função contínua $x(t)$, define-se por

$$\mathcal{F}[x(t)](w) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-iwt} dt, \;\; t \in \mathbb{R}_0^+. \tag{6.32}$$

A Física, a Análise Combinatória, a Teoria das Probabilidades e Estatística, a Criptografia, a Acústica, a Oceanografia, o Processamento de Sinal e outras áreas do

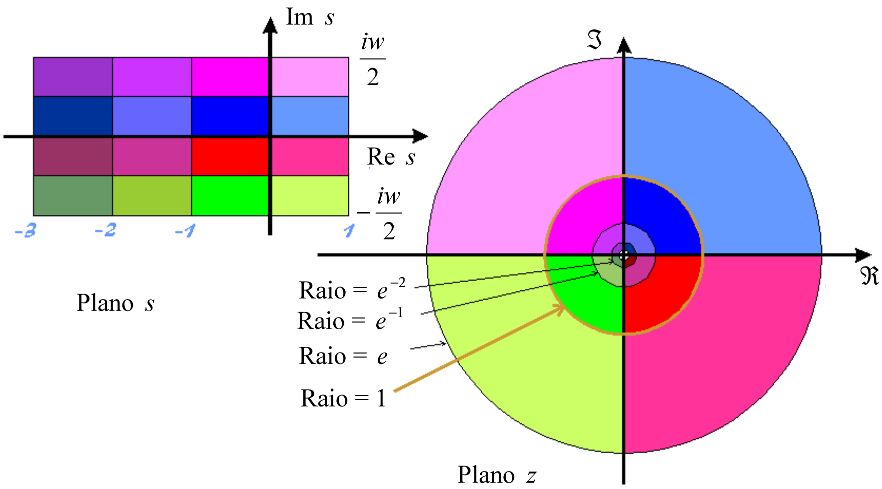

Figura 6.6: Áreas do plano s versus áreas do plano z

conhecimento científico, vêm nas transformadas de Fourier uma ferramenta muito útil para a resolução de alguns dos seus problemas. Em particular, na área relacionada com o processamento de sinal, a TF é tipicamente utilizada para decompor um sinal nas suas componentes em frequências e em amplitudes.

Discretizando o integral definido em (6.32), tem-se que a transformada de Fourier de argumento discreto (TFD), de uma sequência x_n é definida por

$$\mathcal{F}\left[x\left(n\right)\right]\left(w\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}x_n e^{-inw}. \tag{6.33}$$

Note-se que para valores de $n\in\mathbb{Z}^-,\ x_n=0$.

Para que a TFD de uma sequência exista é necessário que a série definida em (6.33) seja convergente, o que implica que x_n deve de obedecer à relação

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|x_n\right|=S<\infty. \tag{6.34}$$

Existem algumas sequências que não obedecem a esta condição, e portanto não possuem a TFD. Por exemplo, para as sequências $x_n=1$ ou $x_n=\sin\left(nw_0\right)$ não é possível determinar a TFD.

Para superar este problema desenvolveu-se uma outra transformada - a transformada $\mathcal{Z}$.

Da definição de transformada $\mathcal{Z}$ sabe-se que $z\in\mathbb{C}$. Portanto $z=a+bi=\rho e^{iw}$, com $\rho=\sqrt{a^2+b^2}$ e $w=\arctan\frac{b}{a}$. Assim

$$\mathcal{Z}\left[x_n\right](z)=\sum_{n=0}^{+\infty}x_n z^{-n}=\sum_{n=0}^{+\infty}x_n\left(\rho e^{iw}\right)^{-n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\rho^{-n}x_n\right)e^{-inw}=\mathcal{F}\left[\rho^{-n}x_n\right](w)$$

Pode-se concluir que $\mathcal{Z}\left[x_n\right](z)$ é a TFD da sequência $\rho^{-n}x_n$, cuja região de convergência é determinada pelos valores de ρ para os quais

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left|\rho^{-n} x_n\right| < \infty.$$

Assim, o cálculo da transformada $\mathcal{Z}$ quando $|z| = 1$ corresponde à TFD, isto é

$$\mathcal{F}[x_n](w) = \mathcal{Z}[x_n](z)|_{z=e^{iw}}, = \mathcal{Z}[x_n]\left(e^{iw}\right).$$

Portanto a TFD é a transformada $\mathcal{Z}$ calculada no círculo unitário do plano z.

Note-se que, para que a TFD de uma sequência exista é necessário que a circunferência unitária esteja contida na região de convergência de $\mathcal{Z}[x_n](z)$.

Observação 6.27 *As transformadas de Laplace e de Fourier de argumento discreto relacionam-se entre si e com a transformada $\mathcal{Z}$ pela mudança de variável $z = e^s = e^{iw}$, com $z, s, w \in \mathbb{C}$.*

6.4.3 Estabilidade

Em 6.4.1 viu-se que o semiplano à esquerda do eixo imaginário no plano s, corresponde aos pontos que estão no interior do círculo unitário no plano z.

Sabe-se que a estabilidade assimptótica das soluções de uma equação diferencial é obtida se todas as raízes do polinómio característico têm partes reais negativas. Nas equações de diferenças esta é obtida desde que todas as raízes da equação característica estejam no interior do círculo unitário (teorema 3.50).

Existe um outro método que permite estudar a estabilidade das soluções quando se faz uma transformação do plano s no plano z.

Suponha-se que o polinómio característico da equação de diferenças é dado por

$$p(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + ... + a_{n-1} z + a_n = 0.$$

Considere-se a transformação bilinear

$$z = \frac{s+1}{s-1}.$$

Seja $s = \alpha + i\beta$ tal que $\operatorname{Re} s < 0$. Então

$$|z|^2 = \left|\frac{s+1}{s-1}\right|^2 = \frac{(\alpha+1)^2 + \beta^2}{(\alpha-1)^2 + \beta^2} \underset{\alpha<0}{<} 1.$$

Assim o semiplano à esquerda do eixo imaginário no plano s é transformado na região do plano z interior ao círculo unitário (Figura 6.7).

Substituindo z por $\frac{s+1}{s-1}$ em $p(z)$ tem-se

$$a_0 \left(\frac{s+1}{s-1}\right)^n + a_1 \left(\frac{s+1}{s-1}\right)^{n-1} + ... + a_{n-1}\left(\frac{s+1}{s-1}\right) + a_n = 0,$$

obtendo-se assim um polinómio $q(s)$ de grau n dado por

$$q(s) = b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + ... + b_{n-1} s + b_n = 0.$$

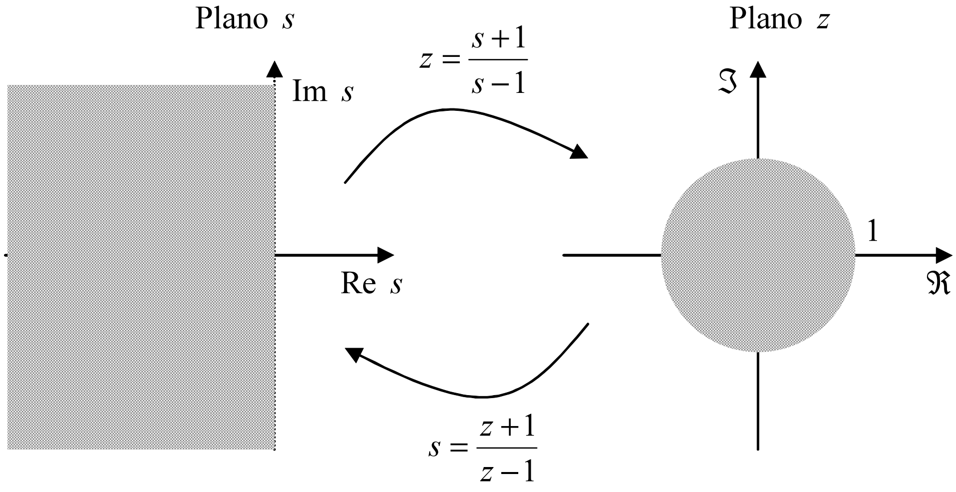

Figura 6.7: Transformação bilinear

Aplicando o critério de estabilidade de Routh[22] a $q(s)$ pode-se verificar se todos os zeros de $q(s)$ estão na metade esquerda do plano. Se isto acontecer, então os zeros de $p(z)$ estão todos no interior do círculo unitário.

Inversamente considere-se a transformação

$$s = \frac{z+1}{z-1}, \text{ com } |z| < 1.$$

Seja $z = u + iv$. Assim

$$\begin{aligned} s &= \frac{u+iv+1}{u+iv-1} \\ &= \frac{u^2-1+v^2}{(u-1)^2+v^2} + i\frac{-2v}{(u-1)^2+v^2} \end{aligned}$$

Como $|z| = \sqrt{u^2+v^2} < 1$, então

$$\operatorname{Re} s = \alpha = \frac{u^2+v^2-1}{(u-1)^2+v^2} < 0.$$

Conclui-se assim que, o círculo unitário no plano z é transformado no semiplano à esquerda do eixo imaginário do plano s.

Seguindo o mesmo argumento do caso anterior conclui-se a estabilidade das soluções através da transformação.

Note-se que, estes dois casos são apenas duas transformações possíveis entre dois planos, e portanto um caso particular de transformações. O que é importante realçar é que uma transformação de domínio complexo leva sempre à mesma conclusão.

6.5 Equações e sistemas de tipo convolução

6.5.1 Equações lineares de tipo convolução

Considere-se a equação linear de tipo convolução dada por

$$x_{n+1} = ax_n + \sum_{j=0}^{n} f(n-j)\, x_j, \tag{6.35}$$

com $a \in \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{Z}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de argumento discreto.

Na equação (6.35) o estado futuro x_{n+1} não depende apenas do estado actual x_n, mas também depende de todos os estados passados, isto é, também depende de x_{n-1}, $x_{n-2}, ..., x_1$, x_0. Este tipo de equações são normalmente conhecidas por equações hereditárias.

Seja x_0 uma condição inicial da equação (6.35). Então $x_1 = (a + f(0))\, x_0$ e $x_2 = \left((a + f(0))^2 + f(1)\right) x_0$. Generalizando este processo encontra-se a solução x_n da equação. Para cada condição inicial a solução é única. Com efeito, por redução ao absurdo, sejam x_n e y_n duas soluções distintas da equação (6.35) que obedecem à mesma condição inicial. Estas duas soluções obedecem às equações

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= ax_n + \sum_{j=0}^{n} f(n-j)\, x_j \\ y_{n+1} &= ay_n + \sum_{j=0}^{n} f(n-j)\, y_j \end{aligned}$$

que para $n = 0$ originam

$$x_1 = (a + f(0))\, x_0 \text{ e } y_1 = (a + f(0))\, y_0$$

Mas $x_0 = y_0$, logo $x_1 = y_1$ o que contraria a hipótese.

Reescrevendo a equação (6.35) na forma de convolução tem-se

$$x_{n+1} = ax_n + f * x. \tag{6.36}$$

Aplicando a transformada $\mathcal{Z}$ a ambos os membros de (6.36) e tendo em atenção as propriedades (6.2), (6.3) e (6.11) resulta que

$$z\mathcal{Z}[x_n](z) - x_0\, z = a\mathcal{Z}[x_n](z) + \mathcal{Z}[f(n)](z)\, \mathcal{Z}[x_n](z),$$

ou seja,

$$(z - a - \mathcal{Z}[f(n)](z))\, \mathcal{Z}[x_n](z) = x_0\, z,$$

portanto

$$\mathcal{Z}[x_n](z) = \frac{x_0\, z}{z - a - \mathcal{Z}[f(n)](z)}, \tag{6.37}$$

ou seja,

$$\mathcal{Z}[x_n](z) = x_0\, z\, (g(z))^{-1}, \tag{6.38}$$

onde

$$g(z) = z - a - \mathcal{Z}[f(n)](z). \tag{6.39}$$

Sabe-se que que uma função de variável complexa é analítica numa determinada região do plano complexo se for diferenciável nessa região do plano.

Seja E o espaço de todas as sequências infinitas de números complexos (ou números reais) tais que $x = (x_0, x_1, x_{3,}...)$. As 3 normas mais usuais em subconjuntos de E são:

1. a norma l_1: $\|x\|_{l_1} = \sum\limits_{i=0}^{\infty} |x_i|$,

2. a norma euclidiana (ou norma l_2): $\|x\|_{l_2} = \sqrt{\sum\limits_{i=0}^{\infty} |x_i|^2}$,

3. a norma l_∞: $\|x\|_{l_\infty} = \sup\limits_{i \geq 0} |x_i|$.

Como consequência destes conceitos resulta o seguinte teorema.

Teorema 6.28 *Seja $x_n \in l_1$. Então:*

1. $\mathcal{Z}[x_n](z)$ é uma função analítica para $|z| \geq 1$.

2. $|\mathcal{Z}[x_n](z)| \leq \|x\|_{l_1}$ para $|z| \geq 1$.

Prova. Como $x_n \in l_1$, então a série $\sum\limits_{i=0}^{\infty} |x_i|$ é convergente.

1. A série $\mathcal{Z}[x_n](z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n}$ é convergente para $|z| > R$ onde

$$R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| \leq 1.$$

Então $\mathcal{Z}[x_n](z)$ é diferenciável termo a termo na sua região de convergência. Assim, $\mathcal{Z}[x_n](z)$ é analítica para $|z| > 1$.

No caso de $|z| = 1$ tem-se que $\mathcal{Z}[x_n](z)$ também é analítica, uma vez que, da convergência da série $\sum\limits_{i=0}^{\infty} |x_i|$ sai a convergência de $\mathcal{Z}[x_n](z)$.

Consequentemente, $\mathcal{Z}[x_n](z)$ é uma função analítica para $|z| \geq 1$.

2.

$$\begin{aligned} |\mathcal{Z}[x_n](z)| &= \left| \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n} \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left| x_n z^{-n} \right| \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|, \ |z| \geq 1 \\ &= \|x\|_{l_1}. \end{aligned}$$

Note-se que se $|z| \geq 1$, então $|z|^{-n} \leq 1$. ■

Teorema 6.29 *Os zeros da função $g(z)$ definida em* (6.39) *pertencem todos à região $|z| < c$, para algum $c \in \mathbb{R}^+$. Além disso, $g(z)$ tem um número finito de zeros para $|z| \geq 1$.*

Prova. Suponha-se com vista a um absurdo que os zeros de $g(z)$ não pertencem a uma região do tipo $|z| < c$, para qualquer $c \in \mathbb{R}^+$. Então existe uma sequência $\{z_i\}$ de zeros de $g(z)$ com $|z_i| \underset{i\to\infty}{\to} \infty$.

Como $0 = g(z_i) = z_i - a - \mathcal{Z}[f(n)](z_i)$, então

$$|z_i - a| = |\mathcal{Z}[f(n)](z_i)| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} f(n) z_i^{-n}\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |f(n)| \left|z_i^{-n}\right|.$$

Portanto

$$|z_i - a| \leq |f(0)| + \left|\frac{f(1)}{z_i}\right| + \left|\frac{f(2)}{z_i^2}\right| + ... \tag{6.40}$$

Aplicando limite em ambos os membros de (6.40), verifica-se que à medida que $i \to \infty$, o lado direito tende para $|f(0)|$ ($|z_i| \underset{i\to\infty}{\to} \infty \Rightarrow |z_i|^{-n} \underset{i\to\infty}{\to} 0$, $n \in \mathbb{Z}_0^+$) e o lado esquerdo tende para ∞, o que é uma contradição.

Portanto, todos os zeros de $g(z)$ com $|z| \geq 1$ pertencem à região do plano $1 \leq |z| \leq c$, para algum $c \in \mathbb{R}^+$. Pelo teorema 6.28 $g(z)$ é analítica em $1 \leq |z| \leq c$, assim $g(z)$ tem um número finito de zeros na região $|z| \geq 1$. ■

Seja Γ o círculo que contém todos os zeros de $g(z)$ (o teorema 6.29 garante a existência de Γ). Multiplicando ambos os membros de (6.38) por z^{n-1} e por (6.25) obtém-se

$$x_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} x_0 z^n (g(z))^{-1} dz. \tag{6.41}$$

Por (6.26) se existem p pólos, então

$$x_n = \sum_{i=1}^{p} k_i(n), \text{ onde } k_i(n) \text{ são os resíduos dos pólos de } x_0 z^n (g(z))^{-1}. \tag{6.42}$$

Seja z_r um zero de ordem m da função $g(z)$. O resíduo em z_r pode ser determinado a partir da fórmula (6.28), ou em alternativa, pela determinação do coeficiente de Laurent da potência $(z - z_r)^{-1}$. A expansão em série de Laurent de $(g(z))^{-1}$ é dada por

$$(g(z))^{-1} = \sum_{j=-m}^{\infty} g_j (z - z_r)^j,$$

em que g_j é o coeficente de Laurent.

Por outro lado,

$$z^n = (z_r - (z_r - z))^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} z_r^{n-j} (z - z_r)^j.$$

Multiplicando as duas últimas identidades, conclui-se que o resíduo de $x_0 z^n (g(z))^{-1}$ em z_r é x_0 vezes o coeficiente de $(z - z_r)^{-1}$ em $z^n (g(z))^{-1}$. Esse coeficiente é dado por

$$g_{-m} \binom{n}{m-1} z_r^{n-m+1} + g_{-m+1} \binom{n}{m-2} z_r^{n-m+2} + ... + g_{-1} \binom{n}{0} z_r^n.$$

Assim x_n pode ser dada na forma

$$x_n = \sum_{r=1}^{p} p_r(n)\, z_r^n, \tag{6.43}$$

onde $p_r(n)$ é um polinómio em n de grau $m-1$.

6.5.2 Estabilidade da solução da equação de tipo convolução

Inicia-se esta secção com uma importante consequência da fórmula (6.43).

Teorema 6.30 *A solução zero da equação* (6.35) *é uniformemente estável sse*

1. $z - a - \mathcal{Z}[f(n)](z) \neq 0$ *para todo* $|z| > 1$ *e*

2. *Se* z_r *é um zero de* $g(z) = z - a - \mathcal{Z}[f(n)](z)$ *com* $|z_r| = 1$, *então o resíduo de* $x_0 z^n (g(z))^{-1}$ *em* z_r *é limitado à medida que* $n \to \infty$.

Prova. ($\Longleftarrow$)Suponha-se que as condições 1. e 2. são satisfeitas. Se z_r é um zero de $g(z)$ com $|z_r| < 1$, então de (6.43) resulta que a solução de x_n é limitada, uma vez que, $\lim_{n\to\infty} p_r(n)\, z_r^n = 0$ pois $|z_r| < 1$ e $p_r(n)$ é um polinómio em n.

Por outro lado, se z_r é um zero de $g(z)$ com $|z_r| = 1$, na qual o resíduo de $x_0 z^n (g(z))^{-1}$ é limitado à medida que $n \to \infty$, então de (6.42) conclui-se que x_n é também limitada.

Destas duas conclusões tem-se que $|x_n| \leq L|x_0|$ para algum $L > 0$. Consequentemente, para um dado $\varepsilon > 0$ se se tomar $\delta = \frac{\varepsilon}{2L}$ vem que se $|x_0| < \delta$, então $|x_n| \leq L|x_0| < L\delta < \varepsilon$, ou seja, a solução zero da equação é UE.

($\Longrightarrow$)Suponha-se que a solução zero da equação (6.35) é uniformemente estável. Então existe um $\delta > 0$ tal que $|x_0| < \delta$ implica $|x_n| \leq L|x_0|$ para algum $L > 0$. Por (6.43) tem-se que $\left|\sum p_r(n)\, z_r^n\right| \leq \sum \left|p_r(n)\, z_r^n\right| \leq L|x_0|$. Esta desigualdade só é verificada se $|z_r| \leq 1$ e assim $g(z) \neq 0$, para todo $|z| > 1$.

Por outro lado, de (6.42) tem-se que $\left|\sum k_i\right| \leq \sum |k_i| \leq L|x_0|$, portanto o resíduo k_i do pólo de $x_0 z^n (g(z))^{-1}$ em z_r é limitado à medida que $n \to \infty$. ■

Teorema 6.31 *A solução zero da equação* (6.35) *é uniformemente assimptoticamente estável sse* $z - a - \mathcal{Z}[f(n)](z) \neq 0$, $\forall z : |z| \geq 1$.

Prova. ($\Longrightarrow$) Suponha-se que a solução zero da equação (6.35) é UAE. Então por definição tem-se que a solução zero é UE e UA. Como a solução zero é UE, então pelo teorema 6.30 $z - a - \mathcal{Z}[f(n)](z) \neq 0$, $\forall z : |z| \geq 1$. Do facto da solução ser UA, então $\exists \mu > 0 : |x_0| < \mu$ implica $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. De (6.43) sai que $\lim_{n\to\infty} \sum p_r(n)\, z_r^n = 0$. Isto acontece sempre que $|z_r| < 1$. Assim, não existe nenhum zero de $g(z)$ tal que $|z| \geq 1$.

($\Longleftarrow$) Suponha-se que $g(z) \neq 0$, $\forall z : |z| \geq 1$. Por (6.43) sabe-se que $x_n = \sum p_r(n)\, z_r^n$, sendo que esta soma tem um número finito da parcelas. Então

$$|x_n| \leq |p_1(n)|\,|z_1^n| + |p_2(n)|\,|z_2^n| + ... + |p_j(n)|\,\left|z_j^n\right|,$$

Seja $|z| = \max\{|z_1|, ..., |z_j|\}$ e $p(n) = \max\{|p_1(n)|, ..., |p_j(n)|\}$. Então

$$|x_n| \leq j\,|p(n)|\,|z^n|.$$

Como $p(n)$ é um polinómio de grau menor ou igual a $m-1$, onde m é a máxima ordem dos pólos z_j e por hipótese os zeros de $g(z)$ são em valor absoluto inferiores a 1, então $|p(n)|\,|z^n| \underset{n\to\infty}{\to} 0$ e assim $|x_n| \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Portanto $\exists \mu > 0 : |x_0| < \mu \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, ou seja, a solução zero é UA. Como x_n tem limite, então é limitada e assim para um dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta>0$ tal que $|x_0| < \delta$ implica $|x_n| < \varepsilon$, ou seja, a solução zero é UE.

Provou-se assim que a solução zero é UAE. ■

Exemplo 6.32 *Resolva a equação* $x_{n+1} = 2x_n + \sum\limits_{r=0}^{n} 2^{n-r} x_r$ *e determine a estabilidade da solução zero.*

Solução. Aplicando a transformada $\mathcal{Z}$ em ambos os membros da equação, resulta que

$$(z - 2 - \mathcal{Z}[2^n](z))\,\mathcal{Z}[x_n](z) = x_0 z,$$

ou seja,

$$\mathcal{Z}[x_n](z) = \frac{x_0 z}{z - 2 - \frac{z}{z-2}} = \frac{x_0 z(z-2)}{z^2 - 5z + 4}.$$

Como $z^2 - 5z + 4 = (z-4)(z-1)$, então

$$\mathcal{Z}[x_n](z) = x_0 z \frac{z-2}{(z-4)(z-1)}.$$

Por (6.41)

$$x_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} x_0 z^n \frac{z-2}{(z-4)(z-1)} dz$$

e por (6.42)

$$x_n = \sum_{i=1}^{p} k_i, \text{ onde } k_i \text{ são os resíduos dos pólos de } x_0 z^n \frac{z-2}{(z-4)(z-1)}.$$

O resíduo de $x_0 z^n \frac{z-2}{(z-4)(z-1)}$ em 4 é x_0 vezes o coeficiente de $(z-4)^{-1}$ em $z^n \frac{z-2}{(z-4)(z-1)}$. Este coeficiente é dado por

$$g_{-1}\binom{n}{0} 4^{n-1+1} = \left.\frac{z-2}{z-1}\right|_{z=4} 4^n = \frac{2}{3}4^n,$$

portanto, $k_1 = \frac{2x_0}{3}4^n$.
Seguindo os mesmos argumentos tem-se que $k_2 = \frac{x_0}{3}$. Consequentemente,

$$x_n = k_1 + k_2 = \frac{x_0}{3}\left(1 + 2 \times 4^n\right).$$

Como $g(z) = z - 2 - \frac{z}{z-2} = \frac{(z-4)(z-1)}{z-2} = 0$ se $z = 4$, então a solução zero da equação inicial é instável. ■

Exemplo 6.33 *Determine a estabilidade da solução zero da equação*

$$x_{n+1} = \frac{-1}{2} x_n + \sum_{r=0}^{n} 3^{r-n} x_r.$$

Solução. Seguindo os passos do exemplo precedente conclui-se que

$$x_n = \frac{x_0}{7}\left(4 + 3\left(\frac{1}{6}\right)^n\right)$$

com $g(z) = \frac{(z-1)\left(z+\frac{1}{6}\right)}{z-\frac{1}{3}}$. Os zeros de $g(z)$ são 1 e $\frac{-1}{6}$, então $z + \frac{1}{2} - \mathcal{Z}\left[3^{-n}\right](z) \neq 0$, $\forall z : |z| > 1$ e o resíduo de $z^n \frac{z-\frac{1}{3}}{(z-1)\left(z-\frac{1}{6}\right)}$ em 1 é limitado quando $n \to \infty$. Pelo teorema 6.30 a solução zero da equação inicial é uniformemente estável. ■

Dado que a manipulação directa das definições dos vários tipos de estabilidade pode ser uma tarefa dificil, usam-se muitas vezes técnicas alternativas. Uma delas envolve o conceito de funcional de Lyapunov.

Definição 6.34 *(Funcional de Lyapunov) Considere-se o espaço E de todas as sequências infinitas dos números complexos. A função $V : E \to \mathbb{R}$ é um funcional de Lyapunov se para $x_n \in E$ tem-se*

1. $V(x_n)$ é definida positiva,

2. $\Delta V(x_n) \leq 0$ onde $\Delta V(x_n) = V(x_{n+1}) - V(x_n)$, $\forall n \in \mathbb{Z}_0^+$.

Teorema 6.35 *A solução zero da equação* (6.35) *é UE se* $|a| + \sum_{j=0}^{n} |f(j)| \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{Z}_0^+$.

Prova. Seja $x_n \in E$ tal que

$$V(x_n) = |x_n| + \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{s=n}^{\infty} |f(s-r)| |x_r|. \tag{6.44}$$

Então

$$\begin{aligned}
\Delta V(x_n) &= V(x_{n+1}) - V(x_n) \\
&= |x_{n+1}| + \sum_{r=0}^{n} \sum_{s=n+1}^{\infty} |f(s-r)| |x_r| - \left(|x_n| + \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{s=n}^{\infty} |f(s-r)| |x_r| \right) \\
&= \left| a x_n + \sum_{j=0}^{n} f(n-j) x_j \right| + \sum_{r=0}^{n} \sum_{s=n+1}^{\infty} |f(s-r)| |x_r| - \\
&\quad \left(|x_n| + \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{s=n}^{\infty} |f(s-r)| |x_r| \right) \\
&\leq (|a|-1)|x_n| + \sum_{j=0}^{n} |f(n-j)| |x_j| + \sum_{r=0}^{n} \sum_{s=n+1}^{\infty} |f(s-r)| |x_r| - \\
&\quad \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{s=n}^{\infty} |f(s-r)| |x_r| \\
&= (|a|-1)|x_n| + \sum_{j=0}^{n} |f(n-j)| |x_j| + \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{s=n+1}^{\infty} |f(s-r)| |x_r| + \\
&\quad \sum_{s=n+1}^{\infty} |f(s-n)| |x_n| - \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{s=n+1}^{\infty} |f(s-r)| |x_r| - \sum_{r=0}^{n-1} |f(n-r)| |x_r| \\
&= (|a|-1)|x_n| + \sum_{j=0}^{n-1} |f(n-j)| |x_j| + |f(0)| |x_n| - \sum_{r=0}^{n-1} |f(n-r)| |x_r| + \\
&\quad \sum_{s=n+1}^{\infty} |f(s-n)| |x_n| \\
&= \left(|a| - 1 + \sum_{s=n}^{\infty} |f(s-n)| \right) |x_n| \\
&= \left(|a| + \sum_{j=0}^{\infty} |f(j)| - 1 \right) |x_n|.
\end{aligned}$$

e por hipótese vem que $\Delta V(x_n) \leq 0$. Consequentemente, V é um funcional de Lyapunov.

Como $\Delta V(x_n) \leq 0$, então $V(x_{n+1}) \leq V(x_n)$, $\forall n \in \mathbb{Z}_0^+$, isto é, $V(x_n)$ é decrescente. Deste modo $V(x_n) \leq V(x_0)$, $\forall n \in \mathbb{Z}_0^+$.

$$V(x_0) = |x_0| + \sum_{r=0}^{-1} \sum_{s=0}^{\infty} |f(s-r)| |x_r| = |x_0|$$

Como $|x_n| \leq V(x_n)$, então sai que $|x_n| \leq |x_0|$. Se se tomar $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ vem que para um dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta = \frac{\varepsilon}{2}$ tal que sempre que se $|x_0| < \delta$, então $|x_n| \leq |x_0| < \delta < \varepsilon$, ou seja, a solução zero da equação (6.35) é UE. ■

Exemplo 6.36 *Estude a estabilidade uniforme da solução zero da equação*

$$x_{n+1} = -\frac{1}{4} x_n + \sum_{r=0}^{n} \left(\frac{1}{3} \right)^{n+1-r} x_r.$$

Solução. Para esta equação tem-se

$$|a| + \sum_{j=0}^{n} |f(j)| = \frac{1}{4} + \sum_{j=0}^{n} \left| \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \right| = \frac{3}{4} - \frac{1}{2 \times 3^{n+1}} \leq 1,$$

então pelo teorema (6.35) a solução zero da equação é UE. ■

6.5.3 Sistemas de tipo convolução e estabilidade

Considere-se o sistema de equações de diferenças de tipo convolução dado por

$$x_{n+1} = Ax_n + \sum_{j=0}^{n} B(n-j) x_j, \tag{6.45}$$

onde A e $B(n)$ são matrizes reais de dimensão $k \times k$ com $B(n)$ definida em $\mathbb{Z}_0^+$ e x_n é um vector com k componentes, isto é, $x_n \in \mathbb{R}^k$. Assuma-se que $B(n) \in l_1$, isto é, $\sum\limits_{j=1}^{\infty} |B(j)| < \infty$.

Definição 6.37 *Se C for uma matriz qualquer, a transformada $\mathcal{Z}$ de C é a matriz obtida pela transformada $\mathcal{Z}$ de cada uma das suas entradas.*

Exemplo 6.38 *Calcule a transformada $\mathcal{Z}$ da matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & na^n \\ \frac{a^n}{n!} & (-1)^n \\ a^n & 1 \end{pmatrix}$.

Solução.

$$\mathcal{Z}[A](z) = \begin{pmatrix} \mathcal{Z}[1](z) & \mathcal{Z}[na^n](z) \\ \mathcal{Z}\left[\frac{a^n}{n!}\right](z) & \mathcal{Z}[(-1)^n](z) \\ \mathcal{Z}[a^n](z) & \mathcal{Z}[1](z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{z}{z-1} & \frac{az}{(z-a)^2} \\ e^{az^{-1}} & \frac{z}{z+1} \\ \frac{z}{z-a} & \frac{z}{z-1} \end{pmatrix}.$$

■

Aplicando a transformada $\mathcal{Z}$ em ambos os membros de (6.45) obtém-se

$$z\mathcal{Z}[x_n](z) - x_0 z = A\mathcal{Z}[x_n](z) + \mathcal{Z}[B(n)](z)\,\mathcal{Z}[x_n](z), \quad |z| > R, \tag{6.46}$$

onde R é o raio de convergência de $\mathcal{Z}[x_n](z)$.

Simplificando (6.46) vem

$$(zI - A - \mathcal{Z}[B(n)](z))\,\mathcal{Z}[x_n](z) = x_0 z,$$

ou seja,

$$\mathcal{Z}[x_n](z) = (zI - A - \mathcal{Z}[B(n)](z))^{-1} x_0 z, \quad |z| > R \tag{6.47}$$

com $(zI - A - \mathcal{Z}[B(n)](z))^{-1}$ não singular.

Daqui decorre que, uma condição necessária e suficiente para que o sistema (6.45) tenha estabilidade assimptótica uniforme é

$$\det[zI - A - \mathcal{Z}[B(n)](z)] \neq 0, |z| \geq 1. \tag{6.48}$$

Seja $e_i = (0, ..., 0, 1, 0..., 0)^T$ um vector unitário de $\mathbb{R}^k$ com $1 \leq i \leq k$. Então existem k vectores solução $x_{1,n}, x_{2,n}, ..., x_{k,n}$ do sistema (6.45) com $x_{i,0} = e_i$, $1 \leq i \leq k$. Este conjunto de soluções é linearmente independente em $\mathbb{Z}_0^+$, pois da relação

$$c_1 x_{1,n} + c_2 x_{2,n} + ... + c_k x_{k,n} = 0,$$

com $c_1, c_2, ..., c_k$ constantes, sai que para $n = 0$ tem-se

$$c_1 e_1 + c_2 e_2 + ... + c_k e_k = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = ... = c_k = 0,$$

o que prova a independência linear.

Considere-se a matriz quadrada X_n, de dimensão $k \times k$, onde as suas colunas são os vectores solução $x_{1,n}, x_{2,n}, ..., x_{k,n}$, ou seja, $X_n = \begin{bmatrix} x_{1,n} & x_{2,n} & \cdots & x_{k,n} \end{bmatrix}$ é a matriz fundamental do sistema (6.45). Tem-se que X_n é não singular ($\det X_n \neq 0$, pois as suas colunas são vectores linearmente independentes) e $X_0 = I$.

Como consequência deste raciocínio tem-se o seguinte teorema.

Teorema 6.39 *Dado a condição inicial x_0, a solução do sistema* (6.45) *é $x_n = X_n x_0$ em que X_n é uma matriz fundamental do sistema* (6.45).

Prova. Seja $D(z) = z\left(zI - A - \mathcal{Z}[B(n)](z)\right)^{-1}$. Então de (6.47) resulta que

$$\mathcal{Z}[x_n](z) = D(z)\, x_0$$

isto é

$$\begin{pmatrix} \mathcal{Z}[x_{1,n}](z) \\ \mathcal{Z}[x_{2,n}](z) \\ \vdots \\ \mathcal{Z}[x_{k,n}](z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11}(z) & \cdots & d_{1k}(z) \\ \vdots & & \vdots \\ d_{k1}(z) & \cdots & d_{kk}(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \\ \vdots \\ x_{k,0} \end{pmatrix}.$$

Daqui decorre que

$$\mathcal{Z}[x_{i,n}](z) = d_{i1}(z)\, x_{1,0} + d_{i2}(z)\, x_{2,0} + ... + d_{ik}(z)\, x_{k,0},\ 1 \leq i \leq k.$$

Aplicando em ambos os membros desta identidade a inversa da transformada $\mathcal{Z}$, vem que

$$x_{i,n} = \mathcal{Z}^{-1}[d_{i1}(z)]\, x_{1,0} + \mathcal{Z}^{-1}[d_{i2}(z)]\, x_{2,0} + ... + \mathcal{Z}^{-1}[d_{ik}(z)]\, x_{k,0}.$$

Assim tem-se que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_{1,n} \\ x_{2,n} \\ \vdots \\ x_{k,n} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathcal{Z}^{-1}[d_{11}(z)]\, x_{1,0} + \mathcal{Z}^{-1}[d_{12}(z)]\, x_{2,0} + ... + \mathcal{Z}^{-1}[d_{1k}(z)]\, x_{k,0} \\ \mathcal{Z}^{-1}[d_{21}(z)]\, x_{1,0} + \mathcal{Z}^{-1}[d_{22}(z)]\, x_{2,0} + ... + \mathcal{Z}^{-1}[d_{2k}(z)]\, x_{k,0} \\ \vdots \\ \mathcal{Z}^{-1}[d_{k1}(z)]\, x_{1,0} + \mathcal{Z}^{-1}[d_{k2}(z)]\, x_{2,0} + ... + \mathcal{Z}^{-1}[d_{kk}(z)]\, x_{k,0} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathcal{Z}^{-1}[d_{11}(z)] & \mathcal{Z}^{-1}[d_{12}(z)] & \cdots & \mathcal{Z}^{-1}[d_{1k}(z)] \\ \mathcal{Z}^{-1}[d_{21}(z)] & \mathcal{Z}^{-1}[d_{22}(z)] & & \mathcal{Z}^{-1}[d_{2k}(z)] \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathcal{Z}^{-1}[d_{k1}(z)] & \mathcal{Z}^{-1}[d_{k2}(z)] & \cdots & \mathcal{Z}^{-1}[d_{kk}(z)] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \\ \vdots \\ x_{k,0} \end{pmatrix} \\ &= X_n x_0 \end{aligned}$$

■

Exemplo 6.40 *Determine a solução do sistema* $x_{n+1} = Ax_n + \sum_{j=0}^{n} B(n-j)\,x_j$, *onde* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B(n) = \begin{pmatrix} 2^{-n} & 0 \\ 0 & 2^{-n} \end{pmatrix}$ *e* $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Solução. Seja $x_n = \begin{pmatrix} x_{1,n} \\ x_{2,n} \end{pmatrix}$. De (6.47) tem-se que

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}[x_n](z) &= \left(\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathcal{Z}[2^{-n}](z) & 0 \\ 0 & \mathcal{Z}[2^{-n}](z) \end{pmatrix}\right)^{-1} x_0 z \\
&= \begin{pmatrix} z-1-\frac{2z}{2z-1} & 0 \\ 0 & z-1-\frac{2z}{2z-1} \end{pmatrix}^{-1} x_0 z \\
&= \begin{pmatrix} \frac{2z-1}{2z^2-5z+1} & 0 \\ 0 & \frac{2z-1}{2z^2-5z+1} \end{pmatrix} x_0 z \\
&= \begin{pmatrix} \frac{(2z-1)z}{2z^2-5z+1} \\ \frac{(2z-1)z}{2z^2-5z+1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Assim

$$\mathcal{Z}[x_{1,n}](z) = \frac{(2z-1)\,z}{2z^2-5z+1} = \mathcal{Z}[x_{2,n}](z)$$

Para se determinar $x_{1,n}$, aplica-se um dos três métodos definidos na secção 6.3. Por exemplo o método das fracções parciais.

$$\frac{\mathcal{Z}[x_{1,n}](z)}{z} = \frac{(2z-1)}{2z^2-5z+1} = \frac{\frac{3}{34}\sqrt{17}+\frac{1}{2}}{z-\frac{5+\sqrt{17}}{4}} + \frac{\frac{-3}{34}\sqrt{17}+\frac{1}{2}}{z-\frac{5-\sqrt{17}}{4}},$$

pelo que

$$\begin{aligned}
x_{1,n} &= \left(\frac{3}{34}\sqrt{17}+\frac{1}{2}\right)\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z-\frac{5+\sqrt{17}}{4}}\right] + \left(\frac{-3}{34}\sqrt{17}+\frac{1}{2}\right)\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z-\frac{5-\sqrt{17}}{4}}\right] \\
&= \left(\frac{3}{34}\sqrt{17}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{5+\sqrt{17}}{4}\right)^n + \left(\frac{-3}{34}\sqrt{17}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{5-\sqrt{17}}{4}\right)^n
\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
x_n &= \begin{pmatrix} \left(\frac{3}{34}\sqrt{17}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{5+\sqrt{17}}{4}\right)^n + \left(\frac{-3}{34}\sqrt{17}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{5-\sqrt{17}}{4}\right)^n \\ \left(\frac{3}{34}\sqrt{17}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{5+\sqrt{17}}{4}\right)^n + \left(\frac{-3}{34}\sqrt{17}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{5-\sqrt{17}}{4}\right)^n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \left(\frac{3}{34}\sqrt{17}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{5+\sqrt{17}}{4}\right)^n + \left(\frac{-3}{34}\sqrt{17}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{5-\sqrt{17}}{4}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{3}{34}\sqrt{17}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{5+\sqrt{17}}{4}\right)^n + \left(\frac{-3}{34}\sqrt{17}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{5-\sqrt{17}}{4}\right)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= X_n x_0.
\end{aligned}$$

■

Para se estudar a estabilidade da solução zero do sistema (6.45) é útil o seguinte lema:

Lema 6.41 *Seja $G = [g_{ij}]$ uma matriz quadrada de dimensão $k \times k$. Se z_0 é um valor prório de G, então:*

1. $|z_0 - g_{ii}|\,|z_0 - g_{jj}| \leq \left(\sum\limits_{r=1}^{k} |g_{ir}| - |g_{ii}|\right)\left(\sum\limits_{r=1}^{k} |g_{jr}| - |g_{jj}|\right)$, para algum $i,\ j : i \neq j$, e

2. $|z_0 - g_{tt}|\,|z_0 - g_{ss}| \leq \left(\sum\limits_{r=1}^{k} |g_{rt}| - |g_{tt}|\right)\left(\sum\limits_{r=1}^{k} |g_{js}| - |g_{ss}|\right)$, para algum $t,\ s : t \neq s$.

Prova. Ver [4]. ■

Teorema 6.42 *A solução zero do sistema* (6.45) *é uniformemente assimptoticamente estável se uma das seguintes condições é satisfeita:*

1. $\sum\limits_{j=1}^{k} (|a_{ij}| + \beta_{ij}) < 1$, para cada i, $1 \leq i \leq k$,

2. $\sum\limits_{i=1}^{k} (|a_{ij}| + \beta_{ij}) < 1$, para cada j, $1 \leq j \leq k$,

onde $\beta_{ij} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} |b_{ij}(n)|\,, 1 \leq i, j \leq k$.

Prova. Para se provar a estabilidade assimptótica uniforme a partir da hipótese 1. é necessário usar a condição (6.48). Portanto, suponha-se com vista a um absurdo que

$$\det\left[z_0 I - A - \mathcal{Z}\left[B(n)\right](z_0)\right] = 0, \text{ para algum } z_0 \text{ com } |z_0| \geq 1.$$

Então z_0 é um valor próprio da matriz $A + \mathcal{Z}\left[B(n)\right](z_0)$. Pela primeira condição do lema 6.41 resulta que

$$\begin{aligned} & \left|z_0 - \left(a_{ii} + \mathcal{Z}\left[b_{ii}(n)\right](z_0)\right)\right| \left|z_0 - \left(a_{jj} + \mathcal{Z}\left[b_{jj}(n)\right](z_0)\right)\right| \\ \leq & \left(\sum_{r=1}^{k} \left|a_{ir} + \mathcal{Z}\left[b_{ir}(n)\right](z_0)\right| - \left|a_{ii} + \mathcal{Z}\left[b_{ii}(n)\right](z_0)\right|\right) \\ & \times \left(\sum_{r=1}^{k} \left|a_{jr} + \mathcal{Z}\left[b_{jr}(n)\right](z_0)\right| - \left|a_{jj} + \mathcal{Z}\left[b_{jj}(n)\right](z_0)\right|\right) \end{aligned} \tag{6.49}$$

Mas,

$$\begin{aligned} \left|z_0 - \left(a_{ii} + \mathcal{Z}\left[b_{ii}(n)\right](z_0)\right)\right| & \geq |z_0| - \left|a_{ii} + \mathcal{Z}\left[b_{ii}(n)\right](z_0)\right| \\ & \geq 1 - \left(|a_{ii}| + \left|\mathcal{Z}\left[b_{ii}(n)\right](z_0)\right|\right) \\ & > \sum_{r=1}^{k} (|a_{ir}| + \beta_{ir}) - \left|a_{ii} + \mathcal{Z}\left[b_{ii}(n)\right](z_0)\right|, \text{ por hipótese} \end{aligned}$$

Seguindo os mesmos argumentos tem-se que

$$\left|z_0 - \left(a_{jj} + \mathcal{Z}\left[b_{jj}(n)\right](z_0)\right)\right| > \sum_{r=1}^{k} (|a_{jr}| + \beta_{jr}) - \left|a_{jj} + \mathcal{Z}\left[b_{jj}(n)\right](z_0)\right|.$$

Combinando estas duas inequações vem que

$$\left|z_0 - a_{ii} - \mathcal{Z}\left[b_{ii}(n)\right](z_0)\right|\left|z_0 - a_{jj} - \mathcal{Z}\left[b_{jj}(n)\right](z_0)\right| >$$
$$\left(\sum_{r=1}^{k}\left(|a_{ir}| + \beta_{ir}\right) - \left|a_{ii} + \mathcal{Z}\left[b_{ii}(n)\right](z_0)\right|\right)\left(\sum_{r=1}^{k}\left(|a_{jr}| + \beta_{jr}\right) - \left|a_{jj} + \mathcal{Z}\left[b_{jj}(n)\right](z_0)\right|\right)$$

o que contraria (6.49), uma vez que, $\forall 1 \leq s,t \leq k$ se tem $\left|\sum_{n=0}^{\infty} b_{st}(n)\, z_0^{-n}\right| \leq \sum |b_{st}(n)| = \beta_{st}$, ou seja, $\beta_{st} \geq \left|\mathcal{Z}\left[b_{st}(n)\right](z_0)\right|$ e $|a_{st}| + \beta_{st} \geq |a_{st}| + \left|\mathcal{Z}\left[b_{st}(n)\right](z_0)\right| \geq \left|a_{st} + \mathcal{Z}\left[b_{st}(n)\right](z_0)\right|$.

Analogamente prova-se o teorema partindo da hipótese 2. ■

Exemplo 6.43 *Determine a estabilidade da solução zero do sistema*

$$x_{n+1} = Ax_n + \sum_{j=0}^{n} B(n-j)\, x_j,$$

onde $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ *e* $B(n) = \begin{pmatrix} 4^{-n-1} & 0 \\ 0 & 4^{-n-1} \end{pmatrix}$.

Solução. Como

$$\sum_{j=1}^{2}\left(|a_{1j}| + \beta_{1j}\right) = \beta_{11} + \frac{1}{5} + \beta_{12} = \sum_{n=0}^{\infty} 4^{-n-1} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15} < 1$$

e

$$\sum_{j=1}^{2}\left(|a_{2j}| + \beta_{2j}\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{9}{12} < 1,$$

então, pelo teorema 6.42 a solução zero do sistema é UAE. ■

Teorema 6.44 *A solução do sistema* (6.45) *é uniformemente estável se*

$$\sum_{i=1}^{k}\left(|a_{ij}| + \beta_{ij}\right) \leq 1,\ \forall\ j = 1,2,...,k.$$

Prova. Seja $V(x_{i,n}) = \sum_{i=1}^{k}\left[|x_{i,n}| + \sum_{j=1}^{k}\sum_{r=0}^{n-1}\sum_{s=n}^{\infty}|b_{ij}(s-r)|\,|x_{j,r}|\right]$. Tem-se

$$\begin{aligned} \Delta V(x_{i,n}) &= V(x_{i,n+1}) - V(x_{i,n}) \\ &= \sum_{i=1}^{k}\left[|x_{i,n+1}| + \sum_{j=1}^{k}\sum_{r=0}^{n}\sum_{s=n+1}^{\infty}|b_{ij}(s-r)|\,|x_{j,r}|\right] - \\ &\quad \sum_{i=1}^{k}\left[|x_{i,n}| + \sum_{j=1}^{k}\sum_{r=0}^{n-1}\sum_{s=n}^{\infty}|b_{ij}(s-r)|\,|x_{j,r}|\right] \end{aligned}$$

Mas

$$\begin{bmatrix} x_{1,n+1} \\ \vdots \\ x_{i,n+1} \\ \vdots \\ x_{k,n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ik} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,n} \\ \vdots \\ x_{i,n} \\ \vdots \\ x_{k,n} \end{bmatrix} +$$

$$\sum_{r=0}^{n} \begin{bmatrix} b_{11}(n-r) & \cdots & b_{1k}(n+r) \\ \vdots & & \vdots \\ b_{k1}(n-r) & \cdots & b_{kk}(n-r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,r} \\ \vdots \\ x_{k,r} \end{bmatrix},$$

então

$$\begin{aligned} x_{i,n+1} &= a_{i1}x_{1,n} + ... + a_{ik}x_{k,n} + \sum_{r=0}^{n} \left(b_{i1}(n-r)\, x_{1,r} + ... + b_{ik}(n-r)\, x_{k,r} \right) \\ &= \sum_{j=1}^{k} a_{ij}x_{j,n} + \sum_{j=1}^{k}\sum_{r=0}^{n} b_{ij}(n-r)\, x_{j,r}. \end{aligned}$$

Assim, $|x_{i,n+1}| \leq \sum\limits_{j=1}^{k} |a_{ij}|\, |x_{j,n}| + \sum\limits_{j=1}^{k}\sum\limits_{r=0}^{n} |b_{ij}(n-r)|\, |x_{j,r}|\,.$

Portanto

$$\begin{aligned} \Delta V(x_{i,n}) \leq& \sum_{i=1}^{k} \left\{ \sum_{j=1}^{k} |a_{ij}|\, |x_{j,n}| + \sum_{j=1}^{k}\sum_{r=0}^{n} |b_{ij}(n-r)|\, |x_{j,r}| \right. \\ &+ \sum_{j=1}^{k}\sum_{r=0}^{n}\sum_{s=n+1}^{\infty} |b_{ij}(s-r)|\, |x_{j,r}| \\ &\left. - |x_{i,n}| - \sum_{j=1}^{k}\sum_{r=0}^{n-1}\sum_{s=n}^{\infty} |b_{ij}(s-r)|\, |x_{j,r}| \right\} \\ =& \sum_{i=1}^{k} \left\{ \sum_{j=1}^{k} |a_{ij}|\, |x_{j,n}| + \sum_{j=1}^{k}\sum_{s=n}^{\infty} |b_{ij}(s-n)|\, |x_{j,n}| - |x_{i,n}| \right\} \end{aligned}$$

Sabe-se que

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} |a_{ij}|\, |x_{j,n}| = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} |a_{ji}|\, |x_{i,n}|$$

e

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\sum_{s=n}^{\infty} |b_{ij}(s-n)|\, |x_j(n)| = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\sum_{s=n}^{\infty} |b_{ji}(s-n)|\, |x_j(n)|\,.$$

Então

$$\begin{aligned} \Delta V(x_{i,n}) \leq& \sum_{i=1}^{k} \left\{ \sum_{j=1}^{k} \left[|a_{ji}| + \sum_{s=n}^{\infty} |b_{ji}(s-n)| \right] - 1 \right\} |x_{i,n}| \\ =& \sum_{i=1}^{k} \left\{ \sum_{j=1}^{k} \left[|a_{ji}| + \beta_{ji} \right] - 1 \right\} |x_{i,n}| \leq 0, \text{ por hipótese.} \end{aligned}$$

Assim $V(x_{i,n})$ é um funcional de Lyapunov. Então é uma função decrescente limitada superiormente por $V(x_{i,0})$, ou seja,

$$\begin{aligned} V(x_{i,n}) &\leq V(x_{i,0}) = \sum_{i=1}^{k}\left[|x_i(0)| + \sum_{j=1}^{k}\sum_{r=0}^{0-1}\sum_{s=0}^{\infty}|b_{ij}(s-r)|\,|x_j(r)|\right] \\ &= \sum_{i=1}^{k}|x_i(0)| = \|x(0)\|. \end{aligned}$$

Para um dado $\varepsilon > 0$ tome-se $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. Então sempre que $\|x_0\| < \delta$ vem que $|x_{i,n}| \leq V(x_{i,n}) \leq \|x_0\| < \delta = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

Provou-se assim que a solução zero é UE. ■

Exemplo 6.45 *Determine a estabilidade da solução zero do sistema*

$$x_{n+1} = Ax_n + \sum_{j=0}^{n} B(n-j)\,x_j,$$

onde $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *e* $B(n) = \begin{pmatrix} 2^{-n-1} & e^{-n-1} \\ 0 & 5^{-n-1} \end{pmatrix}$.

Solução. Para este sistema tem-se

$$\sum_{i=1}^{2}(|a_{i1}| + \beta_{i1}) = \beta_{11} + \beta_{21} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-2^{-1}} = 1 \leq 1$$

e

$$\sum_{i=1}^{2}(|a_{i2}| + \beta_{i2}) = \beta_{12} + \beta_{22} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n-1} + 5^{-n-1} = \frac{1}{e-1} + \frac{1}{4} \leq 1,$$

logo pelo teorema 6.44 a solução zero do sistema é UE. ■

Pode-se associar ao sistema (6.45) um sistema não homogéneo, dado por

$$y_{n+1} = Ay_n + \sum_{j=0}^{n} B(n-j)\,y_j + g(n), \tag{6.50}$$

onde A e $B(n)$ são matrizes reais de dimensão $k \times k$ com $B(n)$ definida em $\mathbb{Z}_0^+$ e y_n, $g(n) \in \mathbb{R}^k$.

A matriz fundamental do sistema (6.45) também satisfaz a equação matricial

$$X_{n+1} = AX_n + \sum_{j=0}^{n} B(n-j)\,X_j. \tag{6.51}$$

Teorema 6.46 *Suponha-se que a transformada* $\mathcal{Z}$ *de* $B(n)$ *e* $g(n)$ *existe, então a solução do sistema* (6.50) *é dada por*

$$y_n = X_n y_0 + \sum_{r=0}^{n-1} X_{n-r-1}\,g(r)$$

onde y_0 *é uma condição inicial.*

Prova. Aplicando a transformada $\mathcal{Z}$ em ambos os membros de (6.51) resulta que

$$z\mathcal{Z}[X_n](z) - X_0 z = A\mathcal{Z}[X_n](z) + \mathcal{Z}[B(n)](z)\,\mathcal{Z}[X_n](z),$$

com $|z| > R$, para algum $R > 0$.

Portanto

$$(zI - A - \mathcal{Z}[B(n)](z))\,\mathcal{Z}[X_n](z) = zI. \tag{6.52}$$

Como a matriz do segundo membro de (6.52) é uma matriz não singular, isto implica que, a matriz $zI - A - \mathcal{Z}[B(n)](z)$ terá que ser não singular (se M, N e P são matrizes tais que $MN = P$ com $\det P \neq 0$, então $\det M \times \det N \neq 0$ o que implica que $\det M \neq 0$ e $\det N \neq 0$). Consequentemente,

$$\mathcal{Z}[X_n](z) = z\,(zI - A - \mathcal{Z}[B(n)](z))^{-1}, \quad |z| > R \tag{6.53}$$

Aplicando a transformada $\mathcal{Z}$ em ambos os membros de (6.50) resulta que

$$(zI - A - \mathcal{Z}[B(n)](z))\,\mathcal{Z}[y_n](z) = zy_0 + \mathcal{Z}[g(n)](z)$$

com $|z| > R_1$, para algum $R_1 > R$, e assim

$$\mathcal{Z}[y_n](z) = (zI - A - \mathcal{Z}[B(n)](z))^{-1}\,(zy_0 + \mathcal{Z}[g(n)](z)).$$

Usando (6.53) esta fórmula é dada por

$$\mathcal{Z}[y_n](z) = \mathcal{Z}[X_n](z)\,y_0 + \frac{\mathcal{Z}[X_n](z)\,\mathcal{Z}[g(n)](z)}{z}, \quad |z| > R_1.$$

Aplicando $\mathcal{Z}^{-1}$ vem

$$\begin{aligned} y_n &= \mathcal{Z}^{-1}[\mathcal{Z}[X_n](z)\,y_0] + \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{\mathcal{Z}[X_n](z)\,\mathcal{Z}[g(n)](z)}{z}\right] \\ &= X_n y_0 + \sum_{r=0}^{n-1} X_{n-1-r}\,g(r), \end{aligned}$$

já que

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}^{-1}\left[z^{-1}\mathcal{Z}[X_n](z)\,\mathcal{Z}[g(n)](z)\right] &= \mathcal{Z}^{-1}[\mathcal{Z}[X_{n-1}](z)\,\mathcal{Z}[g(n)](z)] \\ &= \mathcal{Z}^{-1}[\mathcal{Z}[X_{n-1} * g(n)](z)] \end{aligned}$$

■

Exemplo 6.47 *Determine a solução do sistema*

$$y_{n+1} = Ay_n + \sum_{j=0}^{n} B(n-j)\,y_j + g(n),$$

onde $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B(n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$, $g(n) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *e* $y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Solução. Aplicando a transformada $\mathcal{Z}$ no sistema homogéneo vem

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\left[y_n\right](z) &= \begin{pmatrix} z-2-\frac{z}{z-1} & 0 \\ 0 & z-2-\frac{z}{z+1} \end{pmatrix} zy_0 \\
&= \begin{pmatrix} \frac{z-1}{z^2-4z+3} & 0 \\ 0 & \frac{z+1}{z^2-2z-2} \end{pmatrix} zy_0
\end{aligned}$$

Usando o método dos coeficientes indeterminados tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{z-1}{z^2-4z+3} &= \frac{\frac{\sqrt{2}+2}{4}}{z-\left(2+\sqrt{2}\right)} + \frac{\frac{-\sqrt{2}+2}{4}}{z-\left(2-\sqrt{2}\right)} \\
\frac{z+1}{z^2-2z-2} &= \frac{\frac{3+2\sqrt{3}}{6}}{z-\left(1+\sqrt{3}\right)} + \frac{\frac{3-2\sqrt{3}}{6}}{z-\left(1-\sqrt{3}\right)}
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} y_{1,n} \\ y_{2,n} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{\frac{\sqrt{2}+2}{4}z}{z-\left(2+\sqrt{2}\right)} + \frac{\frac{-\sqrt{2}+2}{4}z}{z-\left(2-\sqrt{2}\right)}\right] & 0 \\ 0 & \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{\frac{3+2\sqrt{3}}{6}z}{z-\left(1+\sqrt{3}\right)} + \frac{\frac{3-2\sqrt{3}}{6}z}{z-\left(1-\sqrt{3}\right)}\right] \end{pmatrix} y_0 \\
&= \begin{pmatrix} c_1\left(2+\sqrt{2}\right)^n + c_2\left(2-\sqrt{2}\right)^n & 0 \\ 0 & c_3\left(1+\sqrt{3}\right)^n + c_4\left(1-\sqrt{3}\right)^n \end{pmatrix} y_0 \\
&= X_n y_0
\end{aligned}$$

onde $c_1 = \frac{\sqrt{2}+2}{4}$, $c_2 = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$, $c_3 = \frac{3+2\sqrt{3}}{6}$ e $c_4 = \frac{3-2\sqrt{3}}{6}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{r=0}^{n-1} X_{n-1-r}\, g(r) &= \sum_{r=0}^{n-1} \begin{pmatrix} c_1\left(2+\sqrt{2}\right)^{n-1-r} + c_2\left(2-\sqrt{2}\right)^{n-1-r} \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} c_1\left(2+\sqrt{2}\right)^{n-1}\frac{1-\left(2+\sqrt{2}\right)^{-n}}{1-\frac{1}{2+\sqrt{2}}} + c_2\left(2-\sqrt{2}\right)^{n-1}\frac{1-\left(2-\sqrt{2}\right)^{-n}}{1-\frac{1}{2-\sqrt{2}}} \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} c_1\frac{\left(2+\sqrt{2}\right)^n-1}{1+\sqrt{2}} + c_2\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)^n-1}{1-\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
y_n &= \begin{pmatrix} c_1\left(2+\sqrt{2}\right)^n + c_2\left(2-\sqrt{2}\right)^n \\ c_3\left(1+\sqrt{3}\right)^n + c_4\left(1-\sqrt{3}\right)^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1\frac{\left(2+\sqrt{2}\right)^n-1}{1+\sqrt{2}} + c_2\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)^n-1}{1-\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{c_1}{1+\sqrt{2}}\left[\left(2+\sqrt{2}\right)^n - 1\right] + \frac{c_2}{1-\sqrt{2}}\left[\left(2-\sqrt{2}\right)^n - 1\right] \\ c_3\left(1+\sqrt{3}\right)^n + c_4\left(1-\sqrt{3}\right)^n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

■

Quando $B(n) = 0$ tem-se um importante caso particular do sistema (6.50). O seguinte teorema apresenta a solução do sistema resultante.

Teorema 6.48 *Suponha-se que a transformada $\mathcal{Z}$ de $g(n)$ existe. Então a solução do sistema*

$$y_{n+1} = Ay_n + g(n), \tag{6.54}$$

é dada por

$$y_n = \mathcal{Z}^{-1}\left[z(zI-A)^{-1}\right]y_0 + \mathcal{Z}^{-1}\left[(zI-A)^{-1}\mathcal{Z}[g(n)](z)\right] \tag{6.55}$$

onde $A = [a_{ij}]$ é uma matriz quadrada de dimensão $k \times k$ com $a_{ij} \in \mathbb{R}$, y_n e $g(n) \in \mathbb{R}^k$.

Prova. Aplicando a transformada $\mathcal{Z}$ a ambos os membros de (6.54) vem

$$(zI-A)\mathcal{Z}[y_n](z) = zy_0 + \mathcal{Z}[g(n)](z),$$

ou seja,

$$\mathcal{Z}[y_n](z) = (zI-A)^{-1}(zy_0 + \mathcal{Z}[g(n)](z)),$$

ou ainda,

$$\mathcal{Z}[y_n](z) = z(zI-A)^{-1}y_0 + (zI-A)^{-1}\mathcal{Z}[g(n)](z),$$

donde

$$y_n = \mathcal{Z}^{-1}\left[z(zI-A)^{-1}\right]y_0 + \mathcal{Z}^{-1}\left[(zI-A)^{-1}\mathcal{Z}[g(n)](z)\right]$$

■

Exemplo 6.49 *Resolva o sistema* $\begin{cases} x_{n+1} = x_n + y_n \\ y_{n+1} = x_n - y_n \end{cases}$, $x_0 = y_0 = 1$.

Solução. Escrevendo o sistema na forma matricial tem-se

$$v_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}, \; A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \; g(n) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

De (6.55) tem-se que

$$\begin{aligned} v_n &= \mathcal{Z}^{-1}\left[z\begin{pmatrix} z-1 & -1 \\ -1 & z+1 \end{pmatrix}^{-1}\right]\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \mathcal{Z}^{-1}\left[z\begin{pmatrix} \frac{z+1}{z^2-2} & \frac{1}{z^2-2} \\ \frac{1}{z^2-2} & \frac{z-1}{z^2-2} \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aplicando o método dos coeficientes indeterminados para decompor os elementos da matriz em fracções mais simples, vem

$$\begin{aligned} \frac{z+1}{z^2-2} &= \frac{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}{z-\sqrt{2}} + \frac{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}{z+\sqrt{2}} \\ \frac{1}{z^2-2} &= \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}}{z-\sqrt{2}} + \frac{\frac{-\sqrt{2}}{4}}{z+\sqrt{2}} \\ \frac{z-1}{z^2-2} &= \frac{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}{z-\sqrt{2}} + \frac{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}{z+\sqrt{2}} \end{aligned}$$

e portanto,

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{(z+1)\,z}{z^2-2}\right] &= \frac{2+\sqrt{2}}{4}\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z-\sqrt{2}}\right]+\frac{2-\sqrt{2}}{4}\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z+\sqrt{2}}\right]\\
&= \frac{2+\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{2}\right)^n+\frac{2-\sqrt{2}}{4}\left(-\sqrt{2}\right)^n\\
\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z^2-2}\right] &= \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{2}\right)^n-\frac{\sqrt{2}}{4}\left(-\sqrt{2}\right)^n\\
\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{(z-1)\,z}{z^2-2}\right] &= \frac{2-\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{2}\right)^n+\frac{2+\sqrt{2}}{4}\left(-\sqrt{2}\right)^n
\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$v_n=\begin{pmatrix} \frac{2+\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{2}\right)^n+\frac{2-\sqrt{2}}{4}\left(-\sqrt{2}\right)^n+\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{2}\right)^n-\frac{\sqrt{2}}{4}\left(-\sqrt{2}\right)^n \\ \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{2}\right)^n-\frac{\sqrt{2}}{4}\left(-\sqrt{2}\right)^n+\frac{2-\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{2}\right)^n+\frac{2+\sqrt{2}}{4}\left(-\sqrt{2}\right)^n \end{pmatrix},$$

ou seja,

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{2}\right)^n+\frac{1-\sqrt{2}}{2}\left(-\sqrt{2}\right)^n \\ \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}\right)^n+\frac{1}{2}\left(-\sqrt{2}\right)^n \end{pmatrix}.$$

■

6.6 Aplicações

Como foi visto nas secções anteriores, uma das aplicações da transformada $\mathcal{Z}$ é a resolução de equações de diferenças. Para as equações lineares de coeficientes constantes, bem como para a resolução de sistemas, já se viram alguns exemplos.

É possivel resolver algumas equações lineares de coeficientes não constantes com recurso à tranformada$\mathcal{Z}$. Na sub-secção que se segue, apresenta-se a resolução de algumas dessas equações. Nas sub-secções seguintes faz-se uma abordagem com a transformada $\mathcal{Z}$ à resolução de alguns problemas aplicados ao quotidiano.

6.6.1 Resolução de equações

Exemplo 6.50 *Resolva a equação* $(n+1)\,x_{n+1}-nx_n=n+1$, *com* $x_0=0$.

Solução. Aplicando a transformada $\mathcal{Z}$ vem que

$$\mathcal{Z}\left[nx_{n+1}\right](z)+\mathcal{Z}\left[x_{n+1}\right](z)-\mathcal{Z}\left[nx_n\right](z)=\mathcal{Z}\left[n\right](z)+\mathcal{Z}\left[1\right](z)\,. \tag{6.56}$$

Mas

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\left[nx_{n+1}\right](z) &= \sum_{n=0}^{\infty} nx_{n+1}z^{-n} = x_2z^{-1} + 2x_3z^{-2} + 3x_4z^{-3} + ... \\
&= z\left(x_2z^{-2} + 2x_3z^{-3} + 3x_4z^{-4} + ...\right) \\
&= z\frac{d}{dz}\left(-x_2z^{-1} - x_3z^{-2} - x_4z^{-3} - ...\right) \\
&= z\frac{d}{dz}\left[z\left(x_0 + x_1z^{-1} - \mathcal{Z}\left[x_n\right](z)\right)\right] \\
&= zx_0 - z\mathcal{Z}\left[x_n\right](z) - z^2\frac{d}{dz}\left(\mathcal{Z}\left[x_n\right](z)\right).
\end{aligned}$$

Substituindo em (6.56) e usando os resultados das tabelas, resulta que

$$zx_0 - z\mathcal{Z}\left[x_n\right](z) - z^2\frac{d}{dz}\left(\mathcal{Z}\left[x_n\right](z)\right) + z\mathcal{Z}\left[x_n\right](z) - zx_0 - \left(-z\frac{d}{dz}\left(\mathcal{Z}\left[x_n\right](z)\right)\right) = \frac{z^2}{(z-1)^2},$$

ou seja,

$$\frac{d}{dz}\left(\mathcal{Z}\left[x_n\right](z)\right) = \frac{-z}{(z-1)^3}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\left[x_n\right](z) &= \int \frac{-z}{(z-1)^3}dz \\
&= \frac{2z-1}{2(z-1)^2} + c,\ c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Assim tem-se que

$$\begin{aligned}
x_n &= \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{2z-1}{2(z-1)^2} + c\right] \\
&= \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{(z-1)^2}\right] - \frac{1}{2}\mathcal{Z}^{-1}\left[-1 + \frac{1}{(z-1)^2} + 1\right] + \mathcal{Z}^{-1}[c] \\
&= n - \frac{1}{2}(n-1) + \left(-\frac{1}{2} + c\right)\delta_k(n) \\
&= \frac{n+1}{2} + \left(-\frac{1}{2} + c\right)\delta_k(n),
\end{aligned}$$

com $\delta_k(n) = \begin{cases} 1 \text{ se } n = k \\ 0 \text{ se } n \neq k \end{cases}$.

Mas $x_0 = 0$, então

$$0 = \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2} + c\right)\delta_k(0) \Leftrightarrow c = 0 \text{ com } k = 0,$$

donde

$$x_n = \frac{n+1}{2} - \frac{1}{2}\delta_0(n),$$

ou seja,

$$x_n = \begin{cases} \frac{n+1}{2} \text{ se } n \geq 1 \\ 0 \text{ se } n = 0 \end{cases}$$

■

Exemplo 6.51 *Determine a solução da equação* $x_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{x_n}$, *com* $x_0 = 0$.

Solução. Fazendo a substituição $x_n = \dfrac{y_{n+1}}{y_n}$, vem que

$$\frac{y_{n+2}}{y_{n+1}} = 1 + \frac{y_n}{y_{n+1}},$$

ou seja,

$$y_{n+2} = y_{n+1} + y_n.$$

Aplicando a transformada $\mathcal{Z}$ em ambos os membros da última relação, resulta

$$z^2 \mathcal{Z}\left[y_n\right](z) - z^2 y_0 - z y_1 = z \mathcal{Z}\left[y_n\right](z) - z y_0 + \mathcal{Z}\left[y_n\right](z),$$

isto é,

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\left[y_n\right](z) &= \frac{z y_0 (z-1)}{z^2 - z - 1} \\ &= y_0 \left(\frac{5-\sqrt{5}}{10} \frac{z}{z - \frac{1+\sqrt{5}}{2}} + \frac{5+\sqrt{5}}{10} \frac{z}{z - \frac{1-\sqrt{5}}{2}} \right) \end{aligned}$$

e aplicando a inversa da transformada $\mathcal{Z}$, vem que

$$\begin{aligned} y_n &= \mathcal{Z}^{-1} \left[y_0 \left(\frac{5-\sqrt{5}}{10} \frac{z}{z - \frac{1+\sqrt{5}}{2}} + \frac{5+\sqrt{5}}{10} \frac{z}{z - \frac{1-\sqrt{5}}{2}} \right) \right] \\ &= y_0 \frac{5-\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + y_0 \frac{5+\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n . \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{y_0 \frac{5-\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} + y_0 \frac{5+\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}}{y_0 \frac{5-\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n} + y_0 \frac{5+\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n}} \\ &= \frac{2\sqrt{5} - 2\sqrt{5} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \right)^n}{5 - \sqrt{5} + \left(\sqrt{5} + 5 \right) \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \right)^n}. \end{aligned}$$

■

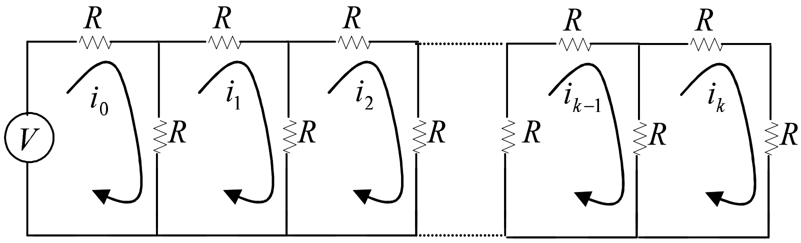

Figura 6.8: Circuito eléctrico

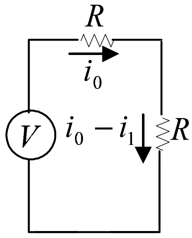

Figura 6.9: Primeiro sub-circuito

6.6.2 Circuito eléctrico

Considere-se um circuito eléctrico em forma de escada como o que se mostra na Figura 6.8, constituído por $k+1$ sub-circuitos fechados. Todas as resistências são iguais, ou seja, para todas, $R = \frac{V}{i}$ em que V representa o potencial eléctrico medido nos bornos da resistência e i a intensidade da corrente que passa nessa resistência.

Considere-se ainda que em cada sub-circuito, a intensidade da corrente tem o sentido indicado na figura.

Em primeiro lugar vai-se analizar o primeiro sub-circuito (Figura 6.9), no qual foi inserido um voltímetro. Seja i_0 a corrente que passa na resistência superior horizontal e $i_0 - i_1$ a corrente que passa na resistência vertical.

Em V mede-se o potencial eléctrico dado pela lei de Ohm (para duas resitências em série), como sendo,

$$V = Ri_0 + R\left(i_0 - i_1\right),$$

ou seja,

$$i_1 = 2i_0 - \frac{V}{R}. \tag{6.57}$$

Deste modo, sabendo i_0 (intensidade da corrente introduzida no primeiro elemento do circuito, R é uma quantidade conhecida à partida, V também é conhecido pois lê-se no voltímetro) sabe-se qual a intensidade da corrente que passou para o segundo elemento do circuito.

No segundo elemento não se tem um instrumento de medida (Figura 6.10) mas pode-se aplicar a segunda lei de Kirchhoff, que estabelece a lei de conservação de energia num circuito fechado, dizendo que, "a soma algébrica das diferenças de potencial encontrada num circuito fechado é nula".

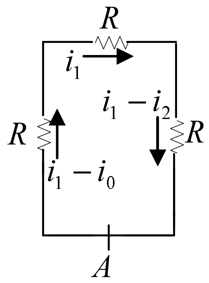

Figura 6.10: Segundo sub-circuito

Então pode-se dizer que no ponto A do circuito, o potencial eléctrico é V_A. Percorrendo o circuito no sentido da corrente, depois de passar pela resistência vertical do lado esquerdo, o potencial eléctrico é $V_A - R(i_1 - i_0)$. Quando fechar o circuito, o potencial tem que ser igual ao inicial, ou seja,

$$V_A - R(i_1 - i_0) - Ri_1 - R(i_1 - i_2) = V_A,$$

isto é,

$$i_2 - 3i_1 + i_0 = 0. \tag{6.58}$$

Daqui se conclui que, não é necessário medir V_A para saber a intensidade da corrente i_2 que passou para o 3º elemento do circuito, sabendo a que tinha passado do circuito anterior $i_2 = 3i_1 - i_0$.

Tem-se então um processo no qual se pode afirmar que, no elemento $n+2$ ter-se-á

$$i_{n+2} - 3i_{n+1} + i_n = 0, \tag{6.59}$$

que é uma equação de diferenças de segunda ordem, cuja solução dá o valor de i_n para qualquer elemento n do circuito.

Aplicando em (6.59) a transformada $\mathcal{Z}$, obtém-se

$$z^2\mathcal{Z}[i_n](z) - z^2 i_0 - zi_1 - 3z\mathcal{Z}[i_n](z) + 3zi_0 + \mathcal{Z}[i_n](z) = 0,$$

ou seja,

$$\left(z^2 - 3z + 1\right)\mathcal{Z}[i_n](z) = z^2 i_0 + zi_1 - 3zi_0.$$

Mas,

$$\begin{aligned} z^2 i_0 + zi_1 - 3zi_0 &= i_0\left(z^2 - 3z\right) + \left(2i_0 - \frac{V}{R}\right)z \\ &= i_0\left(z^2 - z\right) - \frac{V}{R}z \\ &= i_0\left(z^2 - z\left(1 + \frac{V}{i_0 R}\right)\right), \end{aligned}$$

donde

$$\mathcal{Z}[i_n](z) = \frac{z^2 - z\left(1 + \frac{V}{i_0 R}\right)}{z^2 - 3z + 1} i_0,$$

e consequentemente,

$$i_n = \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z^2 - z\left(1+\frac{V}{i_0 R}\right)}{z^2-3z+1} i_0\right]. \tag{6.60}$$

Observando a tabela 6.2 da transformada $\mathcal{Z}$, verifica-se que as fracções em z que têm z^2 e z no numerador, são as transformadas do coseno hiperbólico e trigonométrico. Para ser uma transformada de um coseno trigonométrico, deve-se interpretar o coeficiente de z como sendo $2\cos w$, ou seja, $3 = 2\cos w$ o que é impossível, pois o valor máximo da função coseno é 1.

Contudo, já é possível considerar $3 = 2\cosh w$ e pela relação fundamental das funções hipebólicas tem-se $\sinh w = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Assim, de (6.60) resulta que

$$\begin{aligned}
i_n &= \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z^2 - z\cosh w}{z^2-2z\cosh w+1} i_0 + \frac{z\cosh w - z\left(1+\frac{V}{i_0 R}\right)}{z^2-2z\cosh w+1} i_0\right] \\
&= i_0\cosh(nw) + \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z\left(\frac{3}{2}-1-\frac{V}{i_0 R}\right)}{z^2-2z\cosh w+1}\right] \\
&= i_0\cosh(nw) + \left(\frac{1}{2}-\frac{V}{i_0 R}\right) i_0 \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{\frac{2}{\sqrt{5}} z\sinh w}{z^2-2z\cosh w+1}\right] \\
&= i_0\cosh(nw) + \left(\frac{1}{2}-\frac{V}{i_0 R}\right) i_0 \frac{2}{\sqrt{5}}\sinh(nw)
\end{aligned}$$

Donde, a solução da equação de diferenças é dada por

$$i_n = i_0\cosh(nw) + \left(\frac{i_0}{\sqrt{5}} - \frac{V}{\sqrt{5}R}\right)\sinh(nw).$$

6.6.3 Indústria financeira

Suponha-se que um empréstimo bancário obedece às seguintes regras:

- x_n representa uma transacção mensal, do cliente com o banco, de depósito ou de levantamento (x_n é negativa quando o cliente faz o levantamento do empréstimo e é positiva quando paga as prestações, havendo apenas uma transacção por mês),
- y_n representa o saldo depois da operação mensal,
- mensalmente, há lugar ao pagamento de um juro Ty_{n-1}, com $0 < T \ll 1$ do cliente ao banco .

Pode-se representar o modelo de funcionamento deste empréstimo, por uma equação de diferenças. Ao saldo do mês anterior acresce o juro cobrado pelo banco e o valor do depósito relativo ao abatimento da dívida.

Assim a equação de diferenças é

$$y_n = x_n + (1+T)\,y_{n-1}. \tag{6.61}$$

Suponha-se ainda que, o saldo no mês -1 é nulo e que no mês zero o banco concede um crédito de 100 000 euros. Além disso a partir do mês 1 o cliente deposita regularmente P euros neste banco, com o objectivo de saldar a dívida ao fim de 20 anos.

Pode-se calcular, através de uma abordagem com a transformada $\mathcal{Z}$, o valor da prestação P a pagar, sabendo por exemplo, que a taxa de juro mensal é de 0,5%. Assim, a transacção mensal do cliente é dada por

$$x_n = \begin{cases} -100000 \text{ se } n = 0 \\ P \text{ se } n \geq 1 \end{cases},$$

ou seja,

$$x_n = -100000\delta_0(n) + PU(n-1), \tag{6.62}$$

onde $U(n-1) = \begin{cases} 1 \text{ se } n-1 \geq 0 \\ 0 \text{ se } n = 0 \end{cases}$ e $\delta_0(n) = \begin{cases} 1 \text{ se } n = 0 \\ 0 \text{ se } n \neq 0 \end{cases}$. Aplicando transformada $\mathcal{Z}$ em (6.62), resulta

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[x_n](z) &= -100000 + \frac{Pz^{-1}}{1-z^{-1}} \\ &= \frac{-100000 + (100000+P)z^{-1}}{1-z^{-1}} \end{aligned}$$

e de (6.61) tem-se

$$\mathcal{Z}[y_n](z) = \frac{-100000 + (100000+P)z^{-1}}{1-z^{-1}} + (1+T)z^{-1}\mathcal{Z}[y_n](z),$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[y_n](z) &= \frac{-100000 + (100000+P)z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-1,005z^{-1})} \\ &= \frac{100000 + P - 100000z}{(z-1)(z-1,005)}, \end{aligned}$$

portanto

$$y_n = \sum_{i=1}^{p} k_i, \text{ onde } k_i \text{ são os resíduos do pólos de } z^k \frac{100000 + P - 100000z}{(z-1)(z-1,005)}.$$

$z^{k-1}\frac{100000+P-100000z}{(z-1)(z-1,005)}$ tem dois pólos simples um em $z = 1$ e o outro em $z = 1,005$. Assim, $y_n = k_1(n) + k_2(n)$

$$k_1 = \lim_{z \to 1}\left[(z-1)z^k \frac{100000 + P - 100000z}{(z-1)(z-1,005)}\right] = \frac{-P}{0,005}$$

$$\begin{aligned} k_2 &= \lim_{z \to 1,005}\left[z^k \frac{100000 + P - 100000z}{(z-1)}\right] = \\ &= -100000 \times 1,005^k + \frac{1,005^k P}{0,005}. \end{aligned}$$

Donde

$$y_n = \frac{-P}{0,005} + -100000 \times 1,005^n + \frac{1,005^n P}{0,005}.$$

Para o saldo ser nulo ao fim de 20 anos, tem-se que $y_{240} = 0$, e portanto resulta que

$$\frac{\left(1,005^{240} - 1\right) P}{0,005} = 100000 \times 1,005^{240},$$

ou seja

$$P = 716,43.$$

6.6.4 Gestão de turmas

Suponha-se que se tem um sistema discreto em que x_n representa o número de novos alunos que, no início do ano n se inscreve a uma disciplina e y_n representa o número total de alunos que frequenta essa disciplina no ano n. Sabe-se que a taxa de aproveitamento é de 60%. Então a equação de diderenças que caracteriza este sistema é

$$y_n = x_n + 0,4y_{n-1}. \tag{6.63}$$

Para que valor tende o número de alunos a frequentar a disciplina, se o número de novos alunos for 75?

Ao aplicar-se transformada $\mathcal{Z}$ em (6.63), tem-se que

$$\mathcal{Z}\left[y_n\right](z) = \frac{\mathcal{Z}\left[x_n\right](z)}{1 - 0,4z^{-1}} = 74\frac{z}{z-1}\frac{z}{z-0,4}$$

Pelo teorema do valor final vem

$$y_\infty = \lim_{z\to 1}(z-1)\,74\frac{z}{z-1}\frac{z}{z-0,4} = \frac{74}{0,6} \approxeq 123.$$

Ou, em alternativa, pode-se evidentemente calcular y_n.

$$\frac{\mathcal{Z}\left[y_n\right](z)}{z} = \frac{74z}{(z-1)(z-0,4)} = 74\left(\frac{\frac{1}{0,6}}{z-1} + \frac{\frac{-0,4}{0,6}}{z-0,4}\right),$$

donde,

$$y_n = \frac{74}{0,6}\left(1 - 0,4^{n+1}\right),$$

e assim

$$y_\infty = \lim_{n\to\infty}\frac{74}{0,6}\left(1 - 0,4^{n+1}\right) = \frac{74}{0,6} \approxeq 123.$$

6.6.5 População mundial de baleias

Suponha-se que a população actual de baleias no mundo é 3000 e que em cada ano o aumento natural (nascimento e mortes naturais) da população é 30%. Admita-se também que o número de baleias abatidas pelos pescadores em cada ano é 950 e que esta tendência vai se manter nos próximos anos.

Seja P_n a população de baleias no ano n. O aumento da população durante esse ano, devido a nascimentos e mortes naturais é $0,3P_n$. Assim, o aumento (ou diminuição) da população durante esse ano é dado por

$$0,3P_n - 950.$$

No ano $n+1$, a população é

$$P_{n+1} = P_n + 0,3P_n - 950.$$

Como o ano 0 corresponde ao ano actual, então a condição necessária para resolver a equação de diferenças é $P_0 = 3000$.

Aplicando a transformada $\mathcal{Z}$ à equação determinada, vem

$$z\mathcal{Z}\left[P_n\right](z) - zP_0 = 1,3\mathcal{Z}\left[P_n\right](z) - \frac{950z}{z-1},$$

ou seja,

$$\frac{\mathcal{Z}\left[P_n\right](z)}{z} = \frac{3000z - 3950}{(z-1)(z-1,3)},$$

e aplicando o método dos coeficientes indeterminados resulta

$$\mathcal{Z}\left[P_n\right](z) = \frac{9500}{3}\frac{z}{z-1} - \frac{500}{3}\frac{z}{z-1,3}.$$

Aplicando a inversa da transformada $\mathcal{Z}$ tem-se

$$P_n = \frac{9500}{3} - \frac{500}{3}(1,3)^n.$$

Obviamente, a população de baleias não pode ser negativa e portanto a expressão anterior só poderá ser válida, para os valores de n tais que

$$\frac{9500}{3} - \frac{500}{3}(1,3)^n \geq 0,$$

isto é,

$$(1,3)^n \leq 19,$$

e aplicando logaritmo a ambos os membros desta identidade, vem que

$$n \ln 1,3 \leq \ln 19 \Longrightarrow n \leq 11,22,$$

logo, a solução do problema é

$$P_n = \begin{cases} \frac{9500}{3} - \frac{500}{3}(1,3)^n \text{ se } 0 \leq n \leq 11 \\ 0 \text{ se } n > 11 \end{cases},$$

ou seja, neste modelo a população de baleias extingue-se ao fim de 10 anos.

Nº.	Sequência x_n	transformada $\mathcal{Z}$
1	$\begin{cases} 1, & \text{se } n=1 \\ 0, & \text{se } n \in \mathbb{Z}\setminus\{1\} \end{cases}$	z^{-1}
2	1	$\frac{z}{z-1}$, $\lvert z\rvert > 1$
3	$(-1)^n$	$\frac{z}{z+1}$, $\lvert z\rvert > 1$
4	a^n	$\frac{z}{z-a}$, $\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
5	a^{n-1}	$\frac{1}{a}\frac{z}{z-a}$, $\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
6	na^n	$\frac{az}{(z-a)^2}$, $\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
7	n^2a^n	$\frac{za(z+a)}{(z-a)^3}$, $\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
8	n^3a^n	$\frac{z(az^2-4a^2z-a^3)}{(z-a)^4}$, $\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
9	n^ka^n	$\left(-z\frac{d}{dz}\right)^k\left(\frac{z}{z-a}\right)$, $\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
10	$\sin(wn)$	$\frac{z\sin w}{z^2-2z\cos w+1}$
11	$\cos(wn)$	$\frac{z(z-\cos w)}{z^2-2z\cos w+1}$, $\lvert z\rvert > 1$
12	$a^n\cos(wn)$	$\frac{z(z-a\cos w)}{z^2-2a\cos w+a^2}$, $\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
13	$a^n\sin(wn)$	$\frac{az\sin w}{z^2-2a\cos w+a^2}$, $\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
14	$\begin{cases} 1 \text{ se } n=k \\ 0 \text{ se } n\neq k \end{cases}$	z^{-k}, $\lvert z\rvert > 0$
15	$\frac{a^n}{n!}$	$e^{\frac{a}{z}}$, $\lvert z\rvert > 0$
16	$\cosh(wn)$	$\frac{z(z-\cosh(w))}{z^2-2z\cosh(w)+1}$, $z > \max(e^w, e^{-w})$
17	$\sinh(wn)$	$\frac{z\sinh(w)}{z^2-2z\cosh(w)+1}$, $\lvert z\rvert > \max(e^w, e^{-w})$
18	$\frac{1}{n}$, $n\in\mathbb{Z}^+$	$\ln\left(\frac{z}{z-1}\right)$, $\lvert z\rvert > 1$
19	$e^{-wn}x_n$	$\mathcal{Z}[x_n](e^wz)$, $\lvert z\rvert > e^{-w}R$
20	$n^{(2)}$	$\frac{2z}{(z-1)^3}$, $\lvert z\rvert > 1$
21	$n^{(3)}$	$\frac{3!z}{(z-1)^4}$, $\lvert z\rvert > 1$
22	$n^{(k)}$	$\frac{k!z}{(z-1)^{k+1}}$, $\lvert z\rvert > 1$
23	$\frac{n^{(k)}}{k!}a^n$	$\frac{a^kz}{(z-a)^{k+1}}$, $\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$

Tabela 6.2: Transformada $\mathcal{Z}$ de x_n

Apêndice A

Matrizes

A.1 Teorema de Cayley-Hamilton

Seja A uma matriz definida por $A = [a_{ij}]$, $a_{ij} \in \mathbb{C}$, $i, j \in \{1, ..., k\}$. Um valor próprio de A é um escalar $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que existe um vector não nulo $v \in \mathbb{C}^k$ tal que $Av = \lambda v$. Neste caso v diz-se um vector próprio associado ao valor próprio λ.

Da relação $Av = \lambda v$ decorre que $(A - \lambda I_k) v = 0$. Esta equação tem solução não nula quando $|A - \lambda I_k| = 0$, ou seja,

$$\lambda^k + a_1 \lambda^{k-1} + ... + a_{k-1} \lambda + a_k = 0 \tag{A.1}$$

A equação $(A.1)$ é conhecida como equação característica de A e as suas raízes como valores próprios de A. Se $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ forem os valores próprios de A (não necessariamente distintos), então factorizando $(A.1)$ vem

$$p(\lambda) = \prod_{i=1}^{k} (\lambda - \lambda_i) = 0 \tag{A.2}$$

Teorema A.1 *(Cayley-Hamilton) Se $p(\lambda)$ é o polinómio característico da matriz A de dimensão $k \times k$, então $p(A) = 0$.*

Prova. Ver [21]. ■

Exemplo A.2 *Verifique o teorema de Cayley-Hamilton na matriz* $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

Solução. O polinómio característico de A é

$$p(\lambda) = |A - \lambda I_2| = \lambda^2 - (a + d) \lambda + ad - cb$$

e assim

$$\begin{aligned} p(A) &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^2 - (a+d) \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + ad - cb \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a^2 + bc - a^2 - ad + ad - cb & ab + bd - ab - db \\ ca + dc - ac - cd & cb + d^2 - ad - d^2 + ad - cb \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

■

Observação A.3 *O teorema de Cayley-Hamilton implica que A^n pode ser escrito como combinação linear de $I, A, A^2, ..., A^{k-1}$, se A é uma matriz do tipo $k \times k$. Ainda é válido para $n = -1$, o que pode facilitar o cálculo de algumas inversas.*

Exemplo A.4 *Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. O polinómio característico é $p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda + 2$, pelo que $A^2 - A + 2I_2 = 0$, ou seja, $A^2 = A - 2I_2$. Para se calcular A^4 tem-se que $A^3 = (A - 2I_2) A = -A - 2I_2$ pelo que $A^4 = (-A - 2I_2) A = -3A + 2I_2$. Utilizando esta técnica recursiva, pode-se determinar qualquer potência inteira positiva da matriz A. Também se pode obter A^{-1} a partir de $A^{-1}(A^2 - A + 2I_2) = 0$ obtendo-se assim $A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I_2)$.*

A.2 Algoritmo de Putzer

O equivalente discreto do algoritmo de Putzer também serve para determinar a potência de ordem n de uma dada matriz.

Para uma matriz A de dimensão $k \times k$, a representação de A^n é dada da forma

$$A^n = \sum_{i=1}^{s} u_i(n) M(i-1) \tag{A.3}$$

onde $u_i(n)$ é uma função escalar (a ser determinada) e $M(i) = (A - \lambda_i I_k) M(i-1)$, $M(0) = I_k$. Iterando esta fórmula recursiva vem $M(n) = \prod_{i=1}^{n} (A - \lambda_i I_k)$. Pelo teorema A.1, $M(k) = \prod_{i=1}^{k} (A - \lambda_i I_k) = 0$, pelo que $M(n) = 0$, $\forall n \geq k$. Portanto, pode-se reescrever $(A.3)$ na forma

$$A^n = \sum_{i=1}^{k} u_i(n) M(i-1) \tag{A.4}$$

Para $n = 0$, de $(A.4)$ sai que $I_k = u_1(0) I_k + u_2(0) M(1) + ... + u_k(0) M(k-1)$. Esta equação é satisfeita se $u_1(0) = 1$ e $u_2(0) = u_3(0) = ... = u_k(0) = 0$.

Para $n > 0$ vem que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k} u_i(n+1) M(i-1) &= A^{n+1} = A \sum_{i=1}^{k} u_i(n) M(i-1) \\ &= \sum_{i=1}^{k} u_i(n) AM(i-1) \\ &= \sum_{i=1}^{k} u_i(n) (M(i) + \lambda_i M(i-1)) \end{aligned}$$

Comparando os coeficientes de $M(i)$, $1 \leq i \leq k$ tem-se

$$\begin{aligned} u_1(n+1) &= \lambda_1 u_1(n), \ u_1(0) = 1 \\ u_i(n+1) &= \lambda_i u_i(n) + u_{i-1}(n), \ u_i(0) = 0, \ i = 2, 3, ..., k \end{aligned} \tag{A.5}$$

As soluções das equações de $(A.5)$ são

$$u_1(n) = \lambda_1^n \text{ e } u_i(n) = \sum_{j=0}^{n-1} \prod_{r=j+1}^{n-1} \lambda_i u_{i-1}(j) = \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_i^{n-i-1} u_{i-1}(j), \; i = 2, ..., k \tag{A.6}$$

Exemplo A.5 *Calcule a potência de ordem n da matriz* $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, *usando o algoritmo de Putzer.*

Solução. Os valores próprios da matriz são $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = 2$ e $\lambda_4 = 3$. Então

$$\begin{aligned} M(0) &= I_4 \\ M(1) &= (A - \lambda_1 I_4) M(0) = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\ M(2) &= (A - \lambda_2 I_4) M(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\ M(3) &= (A - \lambda_3 I_4) M(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

De $(A.6)$ sabe-se que

$$\begin{aligned} u_1(n) &= 1^n = 1 \\ u_2(n) &= \sum_{j=0}^{n-1} 2^{n-j-1} u_1(j) = 2^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} 2^{-j} = 2^n - 1 \\ u_3(n) &= \sum_{j=0}^{n-1} 2^{n-1-j} \left(2^j - 1\right) = n2^{n-1} - 2^n + 1 \\ u_4(n) &= \sum_{j=0}^{n-1} 3^{n-1-j} \left(j2^{j-1} - 2^j + 1\right) = \frac{3^n}{2} - n2^{n-1} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Assim, aplicando a fórmula $(A.4)$ resulta que

$$\begin{aligned} A^n &= u_1(n) I_4 + u_2(n) M(1) + u_3(n) M(2) + u_4(n) M(3) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 3(2^n - 1) & \frac{3[(n-2)2^n+2]}{2} & -\frac{3^{n+1}}{2} + 3 \times 2^n - \frac{3}{2} \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} & -3^n + 2^n \\ 0 & 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3^n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

■

Observação A.6 *Este processo de determinar a potência de uma matriz é trabalhoso e nem sempre é possível obter uma expressão analítica explícita a partir de* $(A.6)$. *Quanto maior for a ordem da matriz, mais trabalhoso é o método.*

Na seguinte secção apresentam-se outros métodos para determinar a potência de uma matriz.

A.3 Potência de matrizes diagonalizáveis

Como foi referido, o Teorema de Cayley-Hamiltona e o método de Putzer podem ser itilizados para determinar qualquer potência inteira de uma matriz. No entanto, se a matriz é diagonal, o cálculo de qualquer potência é imediato.

Seja A a matriz diagonal

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_k \end{bmatrix}, \text{ então } A^n = \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_k^n \end{bmatrix}.$$

Se a matriz A não é diagonal, mas existe uma matriz P tal que $A = PDP^{-1}$, em que

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_k \end{bmatrix},$$

então

$$\begin{aligned} A^n &= \left(PDP^{-1}\right)\left(PDP^{-1}\right)...\left(PDP^{-1}\right) \\ &= PD\left(P^{-1}P\right)D\left(P^{-1}P\right)...\left(P^{-1}P\right)DP^{-1} \\ &= PD^nP^{-1} \end{aligned}$$

Para se determinar as matrizes P e D, quando elas existem, tais que $A = PDP^{-1}$, é necessário calcular os valores e vectores próprios da matriz A. Ao processo de encontrar as matrizes P e D chama-se diagonalização.

Definição A.7 *Diz-se que uma matriz A de dimensão $k \times k$ é diagonalizável, se existem matrizes P e D tais que $A = PDP^{-1}$, ou equivalentemente, $D = P^{-1}AP$, em que D é uma matriz diagonal.*

Teorema A.8 *Seja A uma matriz de dimensão $k \times k$ com k vectores próprios linearmente independentes $v_1, v_2, ..., v_k$ associados aos valores próprios $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$, respectivamente. Então as matrizes*

$$P = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_k \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_k \end{bmatrix}$$

são tais que $D = P^{-1}AP$, ou seja, A é diagonalizável. Reciprocamente, se A é diagonalizável, então ela possui k vectores próprios linearmente independentes.

Prova. ($\Longrightarrow$)Sejam $v_1, v_2, ..., v_k$ k vectores próprios linearmente independentes associados aos valores próprios $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$, respectivamente. Defina-se as matrizes

$$P = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_k \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_k \end{bmatrix}$$

Como $Av_i = \lambda_i v_i$ para $i = 1, ..., k$, então

$$\begin{aligned} AP &= A\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Av_1 & Av_2 & \cdots & Av_k \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1 v_1 & \lambda_2 v_2 & \cdots & \lambda_k v_k \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_k \end{bmatrix} = PD \end{aligned}$$

Como $v_1, v_2, ..., v_k$ são linearmente independentes, então a matriz P é invertível, pelo que ao se multiplicar a relação anterior por P^{-1}(à esquerda) sai $D = P^{-1}AP$, ou seja, A é diagonalizável.

($\Longleftarrow$) Suponha-se agora que A é diagonalizável. Então existe uma matriz P tal que $P^{-1}AP = D$, em que D é uma matriz diagonal. Multiplicando por P ambos os membros da relação anterior (à esquerda), obtém-se $AP = PD$. Sejam P e D nas condições do enunciado, em que v_i representa a coluna i de P. Tem-se então que

$$AP = \begin{bmatrix} Av_1 & Av_2 & \cdots & Av_k \end{bmatrix} \text{ e } PD = \begin{bmatrix} \lambda_1 v_1 & \lambda_2 v_2 & \cdots & \lambda_k v_k \end{bmatrix}.$$

Da relação $AP = PD$ sai que $Av_i = \lambda_i v_i$, para $i = 1, ..., k$ e como a matriz P é invertível, então $v_1, v_2, ..., v_k$ são vectores próprios linearmente independentes. ■

Observação A.9 *Se uma matriz quadrada A é diagonalizável e $D = P^{-1}AP$, então os valores próprios de A formam a diagonal de D e os k vectores próprios linearmente independentes associados aos valores próprios formam as colunas de P.*

Exemplo A.10 *Diagonalize a matriz* $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.

Solução. Para esta matriz o polinómio característico é $p(\lambda) = -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 36\lambda + 32$. Portanto os valores próprios são $\lambda_{1,2} = 2$ e $\lambda_3 = 8$. Para se calcular o vector próprio associado ao valor próprio 2, resolve-se o sistema $(A - 2I_3)X = 0$, ou seja,

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A solução geral deste sistema é $V_1 = \{(-y-z, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y, z \in \mathbb{R}\}$. Este é o conjunto de todos os vectores próprios associados ao valor próprio 2. Assim, pode-se escolher para vectores próprios $v_1 = (-1, 1, 0)$ e $v_2 = (-1, 0, 1)$. Em relação ao outro vector próprio, ele é determinado pela solução do sistema

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

O conjunto $V_2 = \{(x, x, x) \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{R}\}$ é a solução geral do sistema, pelo que, pode-se escolher o vector $(1, 1, 1)$ como sendo vector próprio associado ao valor próprio 8. Então

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

■

A.4 Forma canónica de Jordan

Quando a matriz não é diagonalizável, então pode-se usar a forma canónica de Jordan para determinar a potência da matriz.

Definição A.11 *Uma matriz quadrada diz-se um bloco de Jordan associado a um valor (real ou complexo) λ se os elementos da diagonal principal são iguais a λ, os elementos da supradiagonal (diagonal "acima" da diagonal principal), quando existem, são iguais a 1 e os restantes elementos são iguais a 0.*

Exemplo A.12

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \text{ é um bloco de Jordan de ordem 4}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \text{ é um bloco de Jordan de ordem 2}$$

$$[\lambda] \text{ é um bloco de Jordan de ordem 1}$$

Como consequência da definição anterior, tem-se que uma matriz do tipo $k \times k$ está na forma canónica de Jordan se consiste na justaposição, canto a canto, de blocos de Jordan ao longo da diagonal principal, sendo nulos os restantes elementos. Por exemplo, a matriz

$$J = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

está na forma canónica de Jordan. Trata-se de uma matriz do tipo 8×8, constituída por 4 blocos de Jordan: o primeiro, de ordem 4 é associado ao valor -2, o segundo de ordem 2 é associado ao valor 1 e os terceiro e quarto blocos ambos de ordem 1, são associados ao valor 1 e 3, respectivamente.

Definição A.13 *Os vectores não nulos* $v_1, v_2, ..., v_p$ *formam uma cadeia de Jordan associada ao valor próprio* λ *de uma matriz* A *do tipo* $k \times k$ *se*

$$(A - \lambda I_k)\, v_1 = 0, (A - \lambda I_k)\, v_2 = v_1, ..., (A - \lambda I_k)\, v_p = v_{p-1} \tag{A.7}$$

É usual se representar a cadeia de Jordan $(A.7)$ na forma

$$v_p \mapsto v_{p-1} \mapsto ... \mapsto v_2 \mapsto v_1 \mapsto 0.$$

Observação A.14 *Dos vectores da cadeia de Jordan* $(A.7)$ *há apenas um* (v_1) *que é vector próprio de* A. *Dos restantes,* $v_2, ..., v_p$ *diz-se que são vectores próprios generalizados. Assim, um vector* $v \neq 0$ *é vector próprio generalizado da matriz* A *associado ao valor próprio* λ *se* $\exists m > 1$, $m \in \mathbb{N}$ *tal que* $(A - \lambda I_k)^m\, v = 0$.

Teorema A.15 *(Forma canónica de Jordan) Qualquer matriz* A *do tipo* $k \times k$ *de elementos reais ou complexos é semelhante a uma matriz* J *na forma canónica de Jordan, isto é, existe uma matriz* P *invertível tal que* $A = PJP^{-1}$ *em que*

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_r \end{bmatrix},\ 1 \leq r \leq k,\ \ com\ J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & & 1 & 0 \\ \vdots & & \cdots & 0 & \lambda_i & 1 \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$$

e onde:

1. *Os elementos* λ_i *que figuram na diagonal principal dos blocos de Jordan são os valores próprios da matriz* A,

2. *O número total de blocos de Jordan é igual ao número de vectores próprios linearmente independentes (multiplicidade geométrica-mg),*

3. *A soma das ordens dos blocos que correspondem ao mesmo valor próprio (isto é, em cuja diagonal principal figura o mesmo valor próprio de A) é igual à multiplicidade algébrica (número de vezes que o valor próprio se repete - ma) desse valor próprio.*

4. J_i *é uma matriz do tipo* $s_i \times s_i$ *tal que* $\sum_{i=1}^{r} s_i = k$.

Prova. Ver [9] ■

Observação A.16 *1. As colunas da matriz* P *formam uma base para* $\mathbb{R}^k$ *(ou* $\mathbb{C}^k$*, consoante o caso) denomicada base de Jordan.*

2. *Quando ma(λ)=1 (isto é, λ não se repete), então diz-se que λ é simples. Se mg(λ) = ma$(\lambda) > 1$ (isto é, cada bloco de Jordan associado a λ corresponde a uma matriz do tipo 1×1), então diz-se que o valor próprio λ é semi-simples. Por exemplo, a matriz*

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

tem um valor próprio simples, o 1, um valor próprio semi-simples, o -1 e um valor próprio que nem é simples nem semi-simples, o 3 .

Os vectores da base de Jordan estão organizados em cadeias de Jordan. Assim, para se determinar a potência de uma matriz tem-se de encontar estas cadeias. Cada cadeia contém um conjunto de vectores linearmente independentes. Esta afirmação é o conteúdo do teorema seguinte:

Teorema A.17 *Os vectores de uma cadeia de Jordan são linearmente independentes.*

Prova. Seja $v_1, v_2, ..., v_p$ ($p \in \mathbb{N}$) uma cadeia de Jordan associada ao valor próprio λ da matriz A de dimensão $k \times k$ com $k \geq p$. Se se fizer $B = A - \lambda I_k$, pode-se afirmar que se trata de uma cadeia de Jordan associada ao valor próprio 0 da matriz B. A prova é feita por indução em p.

Para $p = 1$ tem-se apenas um vector, v_1, que é não nulo, portanto a afirmação verifica-se.

Suponnha-se (hipótese de indução) que $v_1, v_2, ..., v_p$ são linearmente independentes, com vista a provar que $v_1, v_2, ..., v_p, v_{p+1}$ são ainda linearmente independentes. Ou seja, para $\alpha_1, ..., \alpha_{p+1}$ constantes tais que

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_{p+1} v_{p+1} = 0, \tag{A.8}$$

tem-se de provar que tem de ser $\alpha_1 = ... = \alpha_{p+1} = 0$.

Multiplicando ambos os membros de $(A.8)$ por B obtém-se

$$\alpha_1 B v_1 + \alpha_2 B v_2 + ... + \alpha_{p+1} B v_{p+1} = 0,$$

ou seja,

$$\alpha_2 v_1 + ... + \alpha_{p+1} v_p = 0.$$

Por hipótese de indução os vectores $v_1, v_2, ..., v_p$ são linearmente independentes, portanto tem de ser $\alpha_2 = ... = \alpha_{p+1} = 0$. Substituíndo em $(A.8)$ vem $\alpha_1 v_1 = 0$ e como v_1 é não nulo sai que $\alpha_1 = 0$. ■

Segue-se um processo que permite obter-se os vectores da cadeia de Jordan.

Seja $v_1, v_2, ..., v_p$ ($p \in \mathbb{N}$) uma cadeia de Jordan associada ao valor próprio λ da matriz A do tipo $k \times k$ com $k \geq p$, ou seja,

$$v_p \mapsto v_{p-1} \mapsto ... \mapsto v_2 \mapsto v_1 \mapsto 0. \tag{A.9}$$

Fazendo $B = A - \lambda I_k$ tem-se

$$\begin{aligned}
Bv_1 &= 0, \text{ ou seja, } v_1 \in Nuc\,(B) \\
Bv_2 &= v_1 \neq 0 \text{ e } B^2 v_2 = 0, \text{ ou seja, } v_2 \in Nuc\left(B^2\right) \backslash Nuc\,(B) \\
Bv_3 &= v_2,\ B^2 v_3 = v_1 \neq 0 \text{ e } B^3 v_3 = 0, \text{ ou seja, } v_3 \in Nuc\left(B^3\right) \backslash Nuc\left(B^2\right) \\
&\vdots \\
Bv_p &= v_{p-1},\ B^{p-1} v_p = v_1 \neq 0, \text{ ou seja, } v_p \in Nuc\,(B^p) \backslash Nuc\left(B^{p-1}\right)
\end{aligned}$$

Sabe-se que $Nuc\,(B^m) \subseteq Nuc\,(B^{m+1})$, $\forall m \in \mathbb{N}$, pelo que, neste caso

$$Nuc\,(B) \subset Nuc\left(B^2\right) \subset ... \subset Nuc\,(B^p)$$

Se for $Nuc\,(B^p) = Nuc\,(B^{p+1})$, não existe nenhum vector não nulo v_{p+1} tal que $B^{p+1} v_{p+1} = 0$ e $B^p v_{p+1} \neq 0$, ou seja, a cadeia não pode aumentar. Mais geralmente, neste caso tem-se $Nuc\,(B^p) = Nuc\,(B^{p+m})$, $\forall m \in \mathbb{N}$. Diz-se que o comprimento da cadeia é p e não pode haver nenhuma cadeia de Jordan associada ao valor próprio λ com comprimento superior a p.

Na prática, para se determinar a cadeia $(A.9)$, escolhe-se adequadamente v_p e itera-se o processo nas condições descritas.

Nos exemplos seguintes apresenta-se este processo de construção da base de Jordan.

Exemplo A.18 *Escreva a matriz* $A = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 5 & 11 \\ -2 & 6 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 8 & 32 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ *na forma* PJP^{-1}.

Solução. O polinómio característico da matriz é $p(\lambda) = (\lambda - 8)^4$ pelo que o valor próprio 8 tem $ma_{\lambda=8} = 4$. É fácil de verificar que

$$Nuc\,(A - 8I_4) = \left\{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : a = -b \wedge c = d = 0\right\}$$

pelo que $Nuc\,(A - 8I_4) = \langle(-1, 1, 0, 0)\rangle$, donde a $mg_{\lambda=8}$=1 e assim a matriz da forma canónica de Jordan terá apenas um bloco de Jordan. Também tem-se que

$$\begin{aligned}
Nuc\left((A - 8I_4)^2\right) &= \left\{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : c = d = 0\right\} = \langle(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0)\rangle \\
Nuc\left((A - 8I_4)^3\right) &= \left\{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : d = 0\right\} = \langle(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)\rangle \\
Nuc\left((A - 8I_4)^4\right) &= \mathbb{R}^4
\end{aligned}$$

Como $Nuc\left((A - 8I_4)^4\right) = Nuc\left((A - 8I_4)^{4+m}\right)$, $\forall m \in \mathbb{N}$, então o comprimento da cadeia é 4, ou seja, $v_4 \mapsto v_3 \mapsto v_2 \mapsto v_1 \mapsto 0$. Então o bloco de Jordan é de ordem 4, pelo que neste caso vem

$$J = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

Se se considerar a base canónica de $\mathbb{R}^4$, tem-se que $e_4 \in Nuc\left((A-8I_4)^4\right) \setminus Nuc\left((A-8I_4)^3\right)$ e $(A-8I_4)^3 e_4 \neq 0$. Seja $v_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$. Então

$$v_3 = (A-8I_4)\, v_4 = \begin{bmatrix} 11 \\ -3 \\ 32 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = (A-8I_4)\, v_3 = \begin{bmatrix} 176 \\ 80 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v_1 = (A-8I_4) = \begin{bmatrix} 512 \\ -512 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Observe-se que v_1 é um valor próprio da matriz A. A base de Jordan é $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ pelo que a matriz P de mudança de base é $P = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{bmatrix}$, isto é,

$$P = \begin{bmatrix} 512 & 176 & 11 & 0 \\ -512 & 80 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 32 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Consequentemente

$$\begin{aligned} A &= PJP^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 512 & 176 & 11 & 0 \\ -512 & 80 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 32 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5}{8192} & -\frac{11}{8192} & -\frac{11}{32\,768} & 0 \\ \frac{1}{256} & \frac{1}{256} & -\frac{1}{1024} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{32} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

■

Exemplo A.19 *Seja* $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$. *Determine as matrizes* P, J *e* P^{-1} *tal que* $A = PJP^{-1}$.

Solução. Os valores próprios da matriz A são 1 e 2 com multiplicidades algébricas 3 e 2, respectivamente. Tem-se que

$$\begin{aligned} Nuc\,(A-I_5) &= \langle (0,0,1,-1,0) \rangle \\ Nuc\left((A-I_5)^2\right) &= \langle (1,0,-1,0,1), (0,0,-1,1,0) \rangle \\ Nuc\left((A-I_5)^3\right) &= \langle (-2,0,1,0,0), (-2,0,0,1,0), (-1,0,0,0,1) \rangle \end{aligned}$$

Como $mg_{\lambda=1} = 1$ e $Nuc\left((A-I_5)^3\right) = Nuc\left((A-I_5)^{3+m}\right)$, $\forall m \in \mathbb{N}$, então para este valor próprio tem-se um bloco de Jordan de comprimento 3, ou seja,

$$J_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

associado à cadeia $v_3 \mapsto v_2 \mapsto v_1 \mapsto 0$. Como

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \in Nuc\left((A-I_5)^3\right) \setminus Nuc\left((A-I_5)^2\right),$$

então $v_3 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ e obtém-se $v_2 = (A - I)\, v_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T$ e $v_1 = (A - I)\, v_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T$. Também é fácil de se verificar que

$$Nuc\,(A - 2I_4) = \langle (1,0,0,0,0)\,, (0,-1,1,0,0) \rangle$$

pelo que $mg_{\lambda=2} = 2$ e assim tem-se dois blocos de Jordan e como a $ma_{\lambda=2} = 2$, então estes blocos têm necessariamente comprimento 1. Sejam $J_2 = [2]$ e $J_3 = [2]$ os dois blocos associados às cadeias $v_4 \mapsto 0$ e $v_5 \mapsto 0$, respectivamente. Ora, os dois vectores da base de $Nuc\,(A - 2I_4)$ são vectores próprios da matriz, pelo que pode-se por $v_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ e $v_5 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$. Construiu-se assim as matrizes

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},\ P = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

■

Exemplo A.20 *Seja* $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$. *Determine a matriz* P *e* J *tal que* $A = PJP^{-1}$.

Solução. O polinómio característico desta matriz é $p\,(\lambda) = (\lambda - 1)^5\,(\lambda - 2)^5$, pelo que tem-se $ma_{\lambda=1} = ma_{\lambda=2} = 5$. Para esta matriz tem-se que

$$Nuc\,(A - I_{10}) = \langle u_1, u_2 \rangle$$

onde $u_1 = (1,0,0,0,0,0,0,0,1,0)$ e $u_2 = (-1,0,0,0,0,0,0,0,0,1)$. Como $mg_{\lambda=1} = 2$, então tem-se dois blocos de Jordan.

$$Nuc\left((A - I_{10})^2\right) = \langle u_1, u_2, u_3, u_4 \rangle$$

onde $u_3 = (0,0,1,0,0,0,0,0,0,0)$ e $u_4 = (0,0,0,1,0,0,0,0,0,0)$.

$$Nuc\left((A - I_{10})^3\right) = \langle u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 \rangle = Nuc\left((A - I_{10})^{3+m}\right), \forall m \in \mathbb{N}$$

com $u_5 = (0,0,0,0,1,0,0,0,0,0)$. Isto quer dizer que o 1º bloco associado ao valor próprio 1 tem comprimento 3 e consequentemente o 2º bloco tem comprimento 2. Sejam

$$J_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } J_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

associados às cadeias $v_3 \mapsto v_2 \mapsto v_1 \mapsto 0$ e $v_5 \mapsto v_4 \mapsto 0$, respectivamente. Como $u_5 \in Nuc\left((A-I_{10})^3\right) \backslash Nuc\left((A-I_{10})^2\right)$, então ponha-se $v_3 = u_5^T$. Daqui decorre que $v_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} \end{bmatrix}^T$ e $v_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}^T$. Sabe-se que v_5 terá de pertencer ao $Nuc\left((A-I_{10})^2\right) \backslash Nuc\,(A-I_{10})$ tal que seja linearmente independente com v_3, v_2 e v_1. O único vector nestas condições é o u_4. Seja então $v_5 = u_4$ e portanto $v_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^T$.

$$Nuc\,(A-2I_{10}) = \langle u_6, u_7 \rangle$$

com $u_6 = (-1,0,0,0,0,1,0,0,0,0)$ e $u_7 = (0,0,0,0,-1,0,0,1,0,0)$, pelo que $mg_{\lambda=2} = 2$ o que quer dizer que se tem 2 blocos de Jordan. Também tem-se

$$Nuc\left((A-2I_{10})^2\right) = \langle u_6, u_7, u_8 \rangle$$

onde $u_8 = (1,1,0,0,0,0,0,0,0,0)$,

$$Nuc\left((A-2I_{10})^3\right) = \langle u_6, u_8, u_9, u_{10} \rangle$$

com $u_9 = (-1,0,0,0,1,0,0,0,0,0)$ e $u_{10} = (-1,0,0,0,0,0,0,1,0,0)$.

$$Nuc\left((A-2I_{10})^4\right) = \langle u_6, u_8, u_9, u_{10}, u_{11} \rangle$$

onde $u_{11} = (-1,0,0,0,0,0,1,0,0,0)$. Como $Nuc\left((A-2I_{10})^4\right) = Nuc\left((A-2I_{10})^{4+m}\right)$, $\forall m \in \mathbb{N}$, então um bloco terá ordem 4 ao passo que o outro terá ordem 1. Sejam

$$J_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } J_4 = [2]$$

os blocos associados às cadeias $v_9 \mapsto v_8 \mapsto v_7 \mapsto v_6 \mapsto 0$ e $v_{10} \mapsto 0$, respectivamente. Como $u_{11} \in Nuc\left((A-2I_{10})^4\right) \backslash Nuc\left((A-2I_{10})^3\right)$ então ponha-se $v_9 = u_{11}^T$. Iterando o processo vem $v_8 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$, $v_7 = u_8^T$, $v_6 = u_6^T$. O comprimento do último bloco é 1 pelo que, o vector associado a este terá de ser um dos vectores de $Nuc\,(A-2I_{10})$, linearmente independente com v_9, v_8, v_7, v_6. Esse vector é $v_{10} = u_7^T$. Acabou-se assim de construir as matrizes

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

■

Provou-se que se A for uma matriz do tipo $k \times k$, então é sempre possível ter a relação $A = PJP^{-1}$, pelo que $A^n = (PJP^{-1})^n = PJ^nP^{-1}$ onde

$$J^n = \begin{bmatrix} J_1^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2^n & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_r^n \end{bmatrix}, \ 1 \leq r \leq k$$

Note-se que para cada J_i, $i = 1, .., r$ tem-se $J_i = \lambda_i I_{s_i} + N_i$ onde

$$N_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 \\ 0 & \cdots & & & 0 \end{bmatrix}$$

é uma matriz do tipo $s_i \times s_i$ nilpotente, isto é, $N_i^m = 0$, $\forall m \geq s_i$. Portanto,

$$\begin{aligned} J_i^n &= (\lambda_i I_{s_i} + N_i)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (\lambda_i I_{s_i})^{n-j} N_i^j \\ &= \binom{n}{0} \lambda_i^n I + \binom{n}{1} \lambda_i^{n-1} N_i + \binom{n}{2} \lambda_i^{n-2} N_i^2 + ... + \binom{n}{s_i - 1} \lambda_i^{n-s_i+1} N_i^{s_i-1} \end{aligned}$$

e calculando as potências de N_i vem

$$J_i^n = \begin{bmatrix} \lambda_i^n & n\lambda_i^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda_i^{n-2} & \cdots & & \binom{n}{s_i-1}\lambda_i^{n-s_i+1} \\ 0 & \lambda_i^n & n\lambda_i^{n-1} & \ddots & & \binom{n}{s_i-2}\lambda_i^{n-s_i+2} \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & \vdots & \ddots & & & \binom{n}{2}\lambda_i^{n-2} \\ & & & 0 & \lambda_i^n & n\lambda_i^{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 & \lambda_i^n \end{bmatrix} \tag{A.10}$$

Observe-se que cada diagonal desta matriz tem os elementos todos iguais.

Exemplo A.21 *Determine A^n onde A é a matriz do exemplo A.19.*

Solução. Para a decomposição de Jordan encontrada para esta matriz tem-se que

$$J^n = \begin{bmatrix} J_1^n & 0 & 0 \\ 0 & J_2^n & 0 \\ 0 & 0 & J_3^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix},$$

pelo que

$$\begin{aligned} A^n &= PJ^nP^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 2^n & 2^{n+1}-n-2 & 2^{n+1}-n-2 & 2^{n+1}-n-2 & 2^n-n-1 \\ 0 & 2^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{n(n+1)}{2}-2^n+1 & \frac{n(n+1)}{2}+1 & \frac{n(n+1)}{2} & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & \frac{n(1-n)}{2} & \frac{n(1-n)}{2} & \frac{n(1-n)}{2}+1 & \frac{n(3-n)}{2} \\ 0 & -n & -n & -n & -n+1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

■

Lema A.22 *Existe uma matriz C de dimensão $k \times k$ tal que $C^m = B$ com B uma matriz não singular de dimensão $k \times k$ e $m \in \mathbb{Z}^+$.*

Prova. Pela forma canónica de Jordan sabe-se que

$$P^{-1}BP = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_r \end{bmatrix}$$

Viu-se que $J_i = \lambda_i I_{s_i} + N_i = \lambda_i \left(I_{s_i} + \frac{1}{\lambda_i} N_i \right)$, onde I_{s_i} é a matriz identidade e N_i é uma matriz nilpotente de dimensão $s_i \times s_i$.

Construa-se a seguinte matriz

$$\begin{aligned} H_i &= e^{\frac{1}{m}\ln(J_i)} = e^{\frac{1}{m}\ln\left(\lambda_i\left(I_{s_i}+\frac{1}{\lambda_i}N_i\right)\right)} \\ &= e^{\frac{1}{m}\left[\ln\left(\lambda_i I_{s_i}\right)+\ln\left(I_{s_i}+\frac{1}{\lambda_i}N_i\right)\right]} \\ &= e^{\frac{1}{m}\left[\ln\left(\lambda_i I_{s_i}\right)+\sum\limits_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^{s-1}}{s}\left(\frac{N_i}{\lambda_i}\right)^s\right]} \end{aligned}$$

Como $N_i^m = 0$, $\forall m \geq s_i$ tem-se que

$$H_i = e^{\frac{1}{m}\left[\ln\left(\lambda_i I_{s_i}\right)+\sum\limits_{s=1}^{s_i-1}\frac{(-1)^{s-1}}{s}\left(\frac{N_i}{\lambda_i}\right)^s\right]}. \tag{A.11}$$

Isto quer dizer que H_i é uma matriz bem definida com $H_i^m = J_i$. Seja

$$H = \begin{bmatrix} H_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & H_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & H_r \end{bmatrix},$$

onde H_i é uma matriz do tipo $(A.11)$. Então

$$H^m = \begin{bmatrix} H_1^m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & H_2^m & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & H_r^m \end{bmatrix} = J$$

Defina-se $C = PHP^{-1}$. Então $C^m = PH^mP^{-1} = PJP^{-1} = B$. ■

A.5 Norma de uma matriz

Uma vez que uma matriz pode ser interpretada como um conjunto de vectores linha ou de vectores coluna, então para definir a norma de uma matriz há que ter em conta a norma de um vector.

Comece-se então por apresentar a definição de norma de um vector.

Definição A.23 *A norma de um vector é uma função* $\|\cdot\| : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ *que satizfaz as seguintes propriedades:*

1. $\|x\| \geq 0$ *e* $\|x\| = 0$ *sempre que* $x = 0$;
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$, $x \in \mathbb{R}^k$ *e* α *escalar;*
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^k$.

Há muitas funções que satisfazem esta definição. Entre elas a $p-$*norma* (ou norma em L_p)

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{k} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

e a norma em L_∞

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq k} |x_i| \, .$$

Pode-se considerar as seguintes normas como casos particulares da $p-$*norma* :

A norma em L_1: $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{k} |x_i|$;

A norma em L_2: $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} x_i^2}$.

A definição A.23 pode ser estendida a uma matriz A de dimensão $k \times k$.

Definição A.24 *Se* A *é uma matriz real de dimensão* $k \times k$, *define-se operador norma de* A *como sendo*

$$\|A\| = \max_{\|x\| \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max_{\|u\|=1} \|Au\| \, .$$

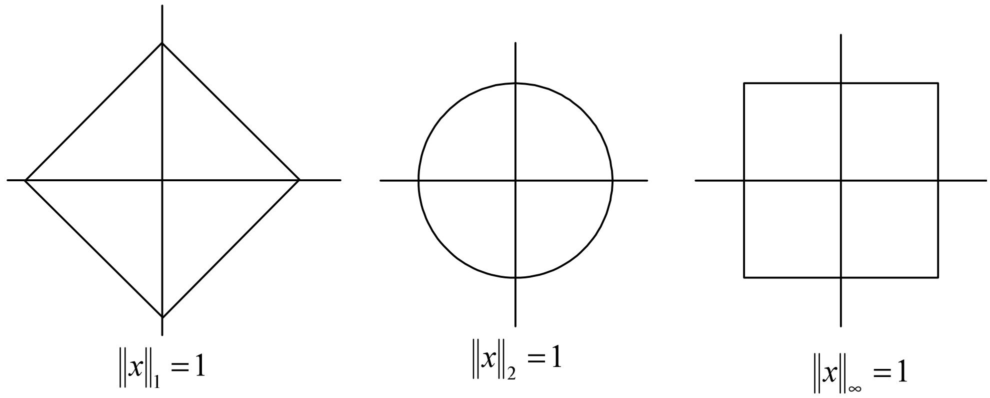

Figura A.1: Conjuntos de pontos com norma 1 para diferentes normas

	L_1	L_2	L_∞
$\|A\|$	$\max\limits_{1\leq j\leq k}\sum\limits_{i=1}^{k}\|a_{ij}\|$	$\sqrt{[\rho\left(A^TA\right)]}$	$\max\limits_{1\leq i\leq k}\sum\limits_{j=1}^{k}\|a_{ij}\|$

Tabela A.1: Normas

À semelhança do que acontece com a norma de vectores, também existem muitos operadores norma que satisfazem esta definição, como por exemplo

$$\|A\|_p=\left(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}|a_{ij}|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Toda a matriz A de dimensão $k\times k$ admite k valores próprios. Sejam $\lambda_1,...,\lambda_k$ esses valores. Ao conjunto dos valores próprios de A chama-se espectro de A e denota-se por $\sigma\left(A\right)$. Neste caso $\sigma\left(A\right)=\{\lambda_1,...,\lambda_k\}$. O raio espectral da matriz A é o número $\rho\left(A\right)=\max\limits_{1\leq i\leq k}|\lambda_i|$, ou seja, $\rho\left(A\right)=\max\{|\lambda|:\lambda\in\sigma\left(A\right)\}$. É fácil verificar que

$$\rho\left(A\right)=\max_{1\leq i\leq k}|\lambda_i|=\max_{1\leq i\leq k,\ \|x\|\neq 0}|\lambda_i|\frac{\|x\|}{\|x\|}\leq\max_{\|x\|\neq 0}\frac{\|\lambda x\|}{\|x\|}=\max_{\|x\|\neq 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}=\|A\|.$$

Na Tabela A.1 pode-se visualizar as normas mais usuais no cálculo matricial.

Exemplo A.25 *Determine* $\|A\|_1$, $\|A\|_2$, $\|A\|_\infty$ *e* $\rho\left(A\right)$ *da matriz* $A=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&3&-4\end{bmatrix}$.

Solução. Como os valores próprios da matriz são -4 e 2, então $\rho(A) = 4$.

$$\begin{aligned}
\|A\|_1 &= \max_{1\leq j\leq 3}\sum_{i=1}^{3}|a_{ij}| = \max\left\{\sum_{i=1}^{3}|a_{i1}|, \sum_{i=1}^{3}|a_{i2}|, \sum_{i=1}^{3}|a_{i3}|\right\} = \{2,6,4\} = 6 \\
\|A\|_2 &= \sqrt{[\rho(A^TA)]} = \sqrt{\rho\left(\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 14 & -12 \\ 0 & -12 & 16 \end{bmatrix}\right)} \approx \sqrt{27,121} \approx 5,208 \\
\|A\|_\infty &= \max_{1\leq i\leq 3}\sum_{j=1}^{3}|a_{ij}| = \max\left\{\sum_{j=1}^{3}|a_{1j}|, \sum_{i=1}^{3}|a_{2j}|, \sum_{i=1}^{3}|a_{3j}|\right\} = \{3,2,7\} = 7
\end{aligned}$$

■

Observação A.26 *1. Note-se que quaisquer duas normas sobre um espaço vectorial de dimensão finita são equivalentes.*

2. A norma de uma matriz real é sempre finita.

Conclusão

Este trabalho teve por base a teoria conducente à resolução de equações de diferenças e ao estudo qualitativo das soluções.

Toda a teoria que se desenvolveu é conhecida e consta nos livros que se apresentam na bibliografia.

Pensamos ter atingido os objectivos a que nos propusemos, uma vez que, apresentaram-se as técnicas mais usuais para a resolução de equações de diferenças bem como para o estudo da estabilidade das suas soluções.

A necessidade de se redigir um texto com este tema, surge da dificuldade em se encontrar bibliografia, que aborde estes conteúdos. Assim, pensamos que este trabalho poderá ser útil a quem queira conhecer ou ensinar uma introdução à Teoria de Equações de Diferenças. É por esta razão que são apresentados muitos exemplos, a maioria dos quais estruturados na forma de exercícios.

Naturalmente, não se cobriram todos os desenvolvimentos desta teoria, que poderão ser objecto de trabalho futuro. Realça-se em particular os métodos de linearização de equações, o estudo das equações de diferenças-diferenciais e as equações de diferenças parciais.

Bibliografia

[1] Agarwal, R., *Difference Equations and Inequalities: Theory, Methods and Applications,* Marcel Dekker, New York, 1991

[2] Blyth, T. S. and Robertson, E. F., *Further Linear Algebra*, Springer Verlag, London, 2002

[3] Brand, Louis, *Differential and Difference Equations, John Wiley & Sons, Inc., New York/London/Sydney, 1966.*

[4] Brauer, A., *Limits for the Characteristic Roots of a Matrix II,* Duke Math. J., 14 (1947), 21-26.

[5] Churchill, R. V. and Brown, J. W., *Complex Variables and Applications,* McGraw Hill, New York, 1990.

[6] D. Halliday, R. Resmick, K. S. Krane, *Physics*, volume 2, 4ª edição, John Wiley and Sons, inc., 1992.

[7] Elaydi, Saber N., *An Introduction to Difference Equations,* Springer-Verlag, New York, 1996.

[8] *Encyclopaedia of Mathematics,* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London*, 1995.*

[9] Friedberg, Stephen H., Insel, Arnold J. and Spence, Lawrence E., *Linear Algebra*, Third Edition, Prentice Hall, New Jersey, 1997.

[10] Godounov, S., Riabenki, V., *Schémas aux Différences - Introduction à la théorie*, Traduction française Éditions Mir, 1997.

[11] Goldberg, Samuel, *Introduction To Difference Equations,* Dover Publications, Inc., New York, 1986.

[12] Gradshteyn, I. S. and Ryzhik, I. M., *Table of integrals, Series and Produtcs, F*ourth edition, Academic Press, New York and London, 1965.

[13] Immink, G. k., *Asymptotics of Anaytic Difference Equations,* Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York/Tokyo, 1984.

[14] Jagerman, David L., *Difference Equations With Applications To Queues*, Marcel Dekker, Inc., New York/Basel, 2000.

[15] Kapitaniak, T., *Chaos for Engineers - Theory, Applications and Control*, 2 ed., Springer, 2000.

[16] Kelley, Walter G., Peterson, Allan C., *Difference Equations: An Introduction with Applications,* Second Edition, Academic Press, USA, 2001.

[17] Krishnan, Venkatarama, *Linear Systems Properties - A Quick Reference, Boca Raton/Boston/London/New York, Washington, D.C., CRC Press LLC, 1998.*

[18] Lakshmikantham, V., Trigiante, D., *Theory of Difference Equations: Numerical Methods and Applications,* Academic Press, London, 1988

[19] Lucas, William F., Brams, Steven J. and Straffin, Philip D., *Political and Related Models,* Springer-Verlag, New York/Heidelberg/Berlim, Vol 1, 2, 3 e 4, 1983.

[20] Magalhães, Luís T., *Álgebra Linear Como Introdução a Matemática Aplicada,* Texto Editora, Lisboa, 2001.

[21] Monteiro, António, *Álgebra Linear e Geometria Analítica*, McGraw-Hill, 2001.

[22] R., Miller and A., Michael, *Ordinary Differential Equations*, Academic, New York, 1982.

[23] Rowlands, G., *Non-Linear Phenomena in Science and Engineering*, Ellis Horwood Limited, 1990.

[24] Sharkovshy, A. N., Maistrenko, Yu. L. and Romannenko, E. Yu., *Difference Equations and Their Applications,* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, 1993.

[25] Vrabie, Loan L., *Differential Equations - An Introduction to Basics Concepts, Results and Applications,* World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2004