Atividades Investigativas na Sala de Aula
Mudar metodologias

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Ana Paula Nunes de Sousa Jardim Dias

MESTRADO EM ENSINO DA MATEMÁTICA NO 3º CICLO DO ENSINO BÁSICO E SECUNDÁRIO

UNIVERSIDADE da MADEIRA
A Nossa Universidade
www.uma.pt

setembro | 2013

Atividades Investigativas na Sala de Aula
Mudar metodologias

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Ana Paula Nunes de Sousa Jardim Dias
MESTRADO EM ENSINO DA MATEMÁTICA NO 3º CICLO DO ENSINO BÁSICO E SECUNDÁRIO

ORIENTAÇÃO
Elsa Maria dos Santos Fernandes

RESUMO

O presente trabalho surgiu da necessidade de compreender de que modo a inclusão de atividades de natureza investigativa (atividades de investigação ou atividades exploratórias) contribui para a aprendizagem matemática de alunos do secundário. Com este propósito foram formuladas as seguintes questões: Como age o aluno perante este tipo de atividade? Que tipo de conhecimentos mobiliza o aluno nestas atividades? e Que benefícios (para o aluno) são alcançados com este tipo de tarefa?

O estudo envolveu os alunos de uma turma do décimo ano e três atividades que foram desenvolvidas ao longo do ano letivo. Estas atividades abrangem duas grandes áreas da Matemática: a geometria e as funções.

Tendo em conta que os dados resultantes da aplicação das tarefas eram essencialmente constituídos por pormenores descritivos e de difícil tratamento estatístico, adotei para a sua análise uma abordagem de tipo qualitativo.

Embora as atividades aqui apresentadas e desenvolvidas na sala de aula, tenham uma estrutura aberta, o seu grau de complexidade não é muito elevado, pelo que as considerei atividades de exploração. A última tarefa proposta é no entanto menos estruturada do que as duas primeiras, tendo constatado que nesta última alguns alunos alargaram as suas reflexões, o que lhes permitiu aprofundar a investigação.

Os diversos materiais utilizados nas atividades tiveram um papel muito importante no desenvolvimento das mesmas e no surgimento de alguns processos matemáticos.

Foi também constatado uma melhoria na autonomia dos alunos, à medida que se sucediam as tarefas e ainda a ocorrência de ligações entre diversos temas da Matemática de uma forma coerente e integrada.

Palavras-chave: Tarefas de exploração, competências, benefícios

ABSTRACT

This study analyses how the inclusion of investigative or exploratory activities contribute to the learning of Mathematics of secondary students. Starting this study, the following questions occurred: How do students react to this type of activity? What type of knowledge do students mobilize? And What benefits do they achieve?

The study involved a class of 10th year students who carried out activities throughout the school year. The activities covered two large areas of Mathematics: Geometry and Functions.

The data resulting from the tasks were essentially descriptive and of difficult statistic analysis so a qualitative one was adopted.

The activities presented and developed in class had an open structure but not of high complexity, therefore I considered them as exploration activities. The last task presented to the students was less structured than the first two, enabling the students to deepen their study and investigation.

Different materials were used which had an important role in the development of the activities and the appearance of some Mathematical processes.

Students were able to develop their autonomy throughout the tasks and make connections to different Mathematical areas in a coherent and integrated way.

Key words: Exploration tasks, competences, benefits.

AGRADECIMENTOS

Embora a escrita de uma tese seja um processo solitário, a sua conclusão só foi possível devido ao apoio e amizade de várias pessoas sem as quais, possivelmente não teria chegado ao fim.
É pois justo, deixar aqui registado os meus mais sinceros agradecimentos:

Aos meus alunos, que participaram no estudo e que sempre se mostraram recetivos e empenhados no desenvolvimento das tarefas

À Direção da escola que autorizou o estudo

À Dr.ª Elsa Fernandes, pela disponibilidade manifestada ao longo destes meses e pelas sugestões que tornaram mais rico o trabalho apresentado

Ao Carlos, à Mónica e ao Diogo, pela paciência e apoio demostrados neste últimos meses

À Cláudia pela sua amizade e pelas boas pausas que me obrigou a fazer

À Ana Castro pela ajuda dada em momento de aflição

ÍNDICE GERAL

Resumo i

Agradecimentos iii

Índice Geral iv

Índice de Figuras vi

Índice de Quadros viii

1. Introdução 1

1.1 O caminho percorrido… 1

1.2 Pertinência do estudo 6

1.3 Formulação do problema 6

1.4 Metodologia a utilizar 7

1.5 Análise de dados 7

2. Fundamentação Teórica..9

2.1 Tarefas Exploratórias ou Atividades de Investigação Matemática – o que são?.........9

2.2 Porquê desenvolver Tarefas/Atividades de Investigação Matemática? 12

2.3 Que tarefas? 15

2.4 Vantagens e inconvenientes das tarefas de investigação em sala de aula 16

2.5 Dinâmica de uma aula com investigações ..…………..……………………..………18

2.6 Avaliação de atividades investigativas 20

2.7 Processos matemáticos utilizados pelos alunos 23

3. Fase da Investigação e Metodologia utilizada 27

3.1 Fases da investigação.....27

3.2 Metodologia de investigação.....28

3.3 Intervenientes no estudo.....30

3.4 Tarefas.....31

3.5 Recolha dos dados.....35

4. Análise dos dados.....38

4.1 Panorâmica geral.....38

4.2 Análise dos materiais recolhidos na investigação.....47

5. Conclusões.....69

5.1 Atuação dos alunos nas aulas de atividades investigativas.....69

5.2 Benefícios auferidos pelos alunos nas aulas de atividades investigativas.....70

5.3 Mobilização de conhecimentos em contexto de atividades investigativas.....72

5.4 Reflexão sobre o trabalho desenvolvido.....73

6. Referências.....76

Anexos.....81

Anexo 1 – Tarefa de exploração "Sólidos Platónicos".....82

Anexo 2 – Tarefa de exploração "Que polígonos há num cubo?".....85

Anexo 3 – Ficha trabalho de secções.....87

Anexo 4 – Tarefa de exploração "Função Quadrática".....89

Anexo 5 – Subdivisão da tarefa de exploração "Função Quadrática".....91

Anexo 6 – Grelha de avaliação dos grupos.....93

Anexo 7 – Questão aula – Função Quadrática 95

Anexo 8 – Inquérito...98

Anexo 9 – Pedido de autorização dirigido aos Encarregados de Educação..................101

Anexo 10 – Pedido de autorização dirigido ao Conselho Executivo da Escola............103

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Os diversos tipos de tarefas , em termos de estrutura e do grau de complexidade 9

Figura 2. A actividade de investigação 11

Figura 3. Demonstração de que os zeros das funções definidas por $y=(x+\alpha)(x-\beta)$ são α e β 51

Figura 4. Outra demonstração de que os zeros das funções definidas por $y=(x+\alpha)(x-\beta)$ são α e β 52

Figura 5. Justificação da possibilidade/impossibilidade de construção de um poliedro regular quando o número de faces pentagonais que concorrem em cada vértice é superior ou igual a três ……………………….....……...…...52

Figura 6. Justificação da impossibilidade de construção de um poliedro regular em que o número de faces triangulares que concorrem em cada vértice é superior ou igual a seis ……………………...…..……….............53

Figura 7. Quinta questão do inquérito ....……………………………………………...54

Figura 8. Opinião de um aluno relativamente à questão colocada na figura 7
- empenho ……………...………………………………………………...54

Figura 9. Opinião de um aluno relativamente à questão colocada na figura 7
- maior motivação ……………………………………………..….…...55

Figura 10. Opinião de um aluno relativamente à questão colocada na
figura 7 - novos métodos……………………..……………………..….…..55

Figura 11- Opinião de alunos relativamente à questão colocada na figura 7
- preferência por trabalhos individuais ………………………………...…..56

Figura 12. Quarta questão do inquérito..... ……………………………….…....56

Figura 13. Opinião de um aluno relativamente à questão colocada na figura
12 – atividades desafiadoras ……………………………………...…...56

Figura 14. Opinião de um aluno relativamente à questão colocada na figura
12 – atividades teórico-práticas……………………..…………………....…...57

Figura 15. Opinião de um aluno relativamente à questão colocada na figura
12 – aprender com a experiência …………………….…..………………..…....57

Figura 16. Opinião de alunos relativamente à questão colocada na figura 12
– atividades ‘fora da zona de conforto’ ………………....…………...…..…...58

Figura 17. Conclusão dos alunos relativamente ao vértice da parábola…..…...……....60

Figura 18. Gráficos referentes a funções da família de funções definidas por
$y=a(x+1)(x-3)$, com $a\neq 0$ 61

Figura 19. Algumas incorreções de raciocínio ……………………………….......62

Figura 20. Gráficos referentes a funções da família de funções definidas por
$y=x^2+k$,com $k\in IR$ 63

Figura 21. Generalização ‘parcelar’ da variação do parâmetro *k* …....…………………......64

Figura 22. A apresentação oral como instrumento de predileção de alguns alunos …...……...66

Figura 23. Questão 1 da questão aula e alguns erros observados 67

Figura 24. Alguns erros decorrentes da má interpretação de sinais 68

Figura 25. Diferentes tipos de comunicação 71

ÍNDICE DE QUADROS

Quadro 1. Processos matemáticos utilizados pelos alunos 24

Quadro 2. 1ª Fase do trabalho 27

Quadro 3. 2ª Fase do trabalho 28

Quadro 4. Processos utilizados pelos alunos 48

1. Introdução

1.1 O caminho percorrido…

Antes de me debruçar sobre o tema, gostaria de fazer uma pequena resenha do que tem sido o meu percurso ao longo dos anos, pois é através daquilo que vamos fazendo ao longo do nosso trajeto que traduzimos aquilo que somos e o modo como vemos e sentimos a profissão.

Na capa de um dos muitos documentos de Reflexão Crítica entregues ao longo do meu percurso profissional (que já conta com vinte e cinco anos) coloquei um “Nautilus” (molusco que habita numa concha e que, à medida que cresce, vai aumentado, de uma forma matemática (espiral logarítmica), a câmara onde habita, de modo a torna-la capaz de responder às suas novas necessidades) e iniciei a reflexão desse ano explicando o porquê de ter colocado essa imagem. Ao pensar nesta introdução lembrei-me do nautilus. Na realidade, os alunos quando “nos chegam às mãos” também são “pequenos nautilus” que a cada ano que passa têm necessidade de aumentar o seu espaço para poder lidar/agir de acordo com os novos conhecimentos, capacidades e experiências que entretanto adquiriram. E nós, professores, somos “o matemático” que os ajuda a traçar a espiral do seu crescimento.

Ao longo destes anos “vivenciei” muitas experiências em vários âmbitos, e por tal, também fui aumentando o “meu nautilus”.

Enquanto docente desempenhei vários cargos, como sejam o de Coordenadora do Departamento das Ciências Exatas, da Natureza e Tecnológicas, o de Delegada de Grupo, o de Coordenadora da Comissão de Termos do 11º ano, o de Supervisora de Exames Nacionais do 12º ano e o de Diretora de Turma. Durante muitos anos fiz parte da Comissão de Horários.

Em cada um desses trabalhos adquiri conhecimentos que me permitiram conhecer melhor o sistema educativo. Apercebi-me da dificuldade de fazer circular a informação, da burocracia que existe em todos os processos e da dificuldade de lidar com alguns colegas. Em cada um dos cargos desempenhados procurei ser dinâmica, diligenciando sempre no sentido de melhorar os procedimentos de modo a torna-los mais produtivos.

Desempenhei o cargo de Coordenadora do Departamento das Ciências Exatas, da Natureza e Tecnológicas durante um período de quatro anos e foi um período de muito trabalho, pois, além de ter de coordenar um departamento constituído por várias disciplinas, com características muito específicas (Matemática, Física ou Química, Biologia, Informática, Contabilidade, Electrotécnia e Electrónica, Mecânica,…) ainda fazia parte nas minhas "obrigações" analisar os Documentos de Reflexão Crítica que os professores tinham de entregar para poderem subir de escalão. Penso que essa foi uma das tarefas que menos gostei de executar. Infelizmente ainda há pessoas que julgam que esses documentos são apenas assinados e que vão para um "monte" para serem arquivados, e por tal, julgam que podem escrever histórias da "Carochinha" para obter o abençoado "satisfaz". Pensando sobre o assunto, fico agradada que esse modelo de avaliação tenha desaparecido. Com esses documentos colocávamos todos os professores "no mesmo saco" e os professores que realmente faziam a diferença não eram diferenciados dos demais.

Nas Comissões de Horários e de Termos aprendi a dar atenção a todos os pormenores e a dar valor ao trabalho dos colegas que desempenham essas funções. Ao trabalhar em equipa ampliei uma das minhas "câmaras", e adquiri ferramentas que me permitiram avançar para outros patamares.

Como professora de Matemática, e além da realização das tarefas inerente à profissão, estive associada a outras atividades. No início do meu percurso profissional, fiz parte de um grupo de trabalho que se deslocava às escolas para ajudar os colegas na preparação de aulas; fui responsável, na minha escola, pela divulgação/experimentação dos novos programas de Matemática (1990-1992), tendo ainda orientado estágios durante um período de dois anos.

Ao desempenhar estas tarefas senti necessidade de aprofundar conhecimentos matemáticos e clarificar o discurso matemático, de modo a ser precisa aquando da transmissão de informação. Dado que, para alguns destes colegas este era o primeiro contacto que tinham com o ensino, era importante erguer bons alicerces que lhes permitissem fazer uma boa entrada na profissão, daí o ter havido também um investimento no aprofundamento de metodologias de ensino. Estava a ser aumentado mais um compartimento no "meu nautilus".

A parte lúdica também esteve presente em vários períodos da minha vida. Em 2003/2004, fiz parte do grupo que organizou a Final do Mat12 e EquaMat a nível regional (a equipa premiada com o primeiro lugar no Mat12 (dirigido aos alunos do décimo segundo ano) foi da nossa escola e esteve presente em Aveiro, na Final Nacional) e do grupo responsável pela organização da Final Nacional das Olimpíadas Portuguesas de Matemática (no ano 2005) (e que, segundo os responsáveis a nível nacional, foi uma das melhores finais das Olimpíadas Nacionais).

Estas duas experiências foram muito importantes no meu desenvolvimento como profissional da educação. Através da atividade Final Nacional das Olimpíadas Portuguesas de Matemática, desenvolvi as minhas capacidades de organização e de chefia, de escrita e de oralidade. A organização de um evento desta dimensão envolve não só o garantir o local da realização das provas como também a preparação da receção dos participantes, por parte da escola anfitriã – a Escola Secundária de Francisco Franco; o local da entrega de prémios – Escola Profissional de Hotelaria e Turismo da Madeira; as atividades lúdicas que fazem sempre parte deste tipo de eventos; o contacto com entidades regionais que representam a região ao nível da educação- Secretário Regional da Educação, Dr. Francisco Fernandes; a divulgação do evento através dos meios de comunicação, jornais, rádio e televisão.

Cooperei ainda em várias "Semanas da Matemática" das quais destaco duas: uma em 2002/2003-"A Matemática e a Tecnologia", onde fiz parte da organização e orientei conjuntamente com outra colega, uma atividade dirigida aos alunos, na qual se propunha que através de um sensor de movimento, o aluno" imitasse" um gráfico (foi muito interessante do ponto de vista matemático e houve muita aceitação por parte dos alunos); outra no ano letivo 2003/2004 - "Matemática e o Jogo" onde construi, com os os alunos das minhas turmas do 11º ano, umas mesas de bilhar diferentes. Inicialmente tinha proposto a construção de três mesas mas devido ao tempo e ao espaço apenas construímos duas: uma circular e outra elíptica. Fizemos os estudos necessários e os respetivos esboços e com a ajuda do carpinteiro da escola obtivermos duas belas mesas de bilhar. As mesas estiveram patentes ao público durante a semana da Matemática. Os alunos gostaram particularmente da mesa de bilhar elíptica porque nessa mesa a bola entrava sempre no buraco (a bola branca estava num dos focos e o buraco no outro foco- era portanto uma aplicação de uma propriedade da elipse).

Ainda dentro deste tópico, e associando-me ao desafio lançado pela Associação de Professores de Matemática (APM) no ano 2000, construí, com as turmas do 12º ano que lecionava na altura, o sólido que se encontra atualmente no jardim da Escola Secundária de Francisco Franco. Nesta atividade foram aferidos conhecimentos matemáticos e adquiridos conhecimentos de manuseamento e utilização de máquinas de corte de ferro e de soldadura (os alunos cortaram e soldaram as arestas dos cubos, nas salas de mecânica, contando com a ajuda dos professores da área).

Esta atividade foi para mim, professora, muito especial, pois em determinadas fases erámos todos aprendizes, isto é, estávamos todos no mesmo patamar, pelo que a cooperação e a interajuda foram muito importantes. Passados seis anos após a construção do sólido conversei com a encarregada de educação de uma das alunas (que estava a acabar Medicina) e ela disse-me que quando passou junto do jardim e olhou para o sólido, emocionou-se ao pensar que a filha tinha estado na construção do mesmo. Foi muito importante para mim esse desabafo, pois são muito poucas as vezes que sentimos, tão profundamente, que tivemos algum peso no desenvolvimento dos pequenos nautilus que nos vêm ter às mãos.

Em 2005 surgiu nova oportunidade de aumentar mais uma “ câmara”: convite para coordenar o Centro Novas Oportunidades da Escola Profissional de Hotelaria e Turismo da Madeira. Este novo cargo trouxe-me desafios que envolviam a minha capacidade de relacionamento, liderança e comunicação. Este Centro foi o primeiro a nível regional, e embora já existisse algum trabalho realizado aquando da minha chegada, a sua expansão ocorreu sob a minha coordenação. A divulgação do Centro foi feita em várias vertentes:

- contacto direto com as pessoas: nas Casa do Povo, nas empresas, em Corporações de bombeiros, em Institutos,…;
- criação de uma página na internet;
- divulgação através da imprensa regional, da RDP Madeira e da RTP Madeira.

Foi ainda durante a minha coordenação que se deram os primeiros passos para o reconhecimento de competências ao nível do secundário.

Como uma das aprendizagens importantes deste período gostaria de referir a aprendizagem feita ao nível da gestão de pessoal. “Gerir pessoas” é das tarefas mais difíceis que já desempenhei. Penso que além de aumentar a “minha câmara” também fortifiquei a “carapaça”.

O regresso à escola fez-se em setembro de 2007, a meu pedido. Embora me sentisse realizada com as metas atingidas (em julho de 2007 o número de inscrições tinham ultrapassado as metas fixadas (taxa de execução física 291,67%) e o número de certificados emitidos já atingiam em julho desse ano os 78% do número inscrito nas metas), a necessidade de estar numa sala de aula, de contactar novamente com os alunos, de vestir a pele de educadora falou mais alto.

Durante os anos 2007 e 2008 fui responsável pela divulgação e realização, na Madeira, do projeto "Tardes da Matemática", da responsabilidade da Sociedade Portuguesa de Matemática. Estas "Tardes" contavam com a presença de um convidado que abordavam temas dirigidos ao público em geral. Uma das que gostei particularmente foi a "Tarde" que ficou a cargo da Dr.ª Carlota Simões, em que o tema era: «Mozart, números e simetrias». A "Tarde" ocorreu na Escola Profissional das Artes da Madeira (Conservatório – Escola das Artes) e os presentes puderam ouvir o dueto "Papagena-Papageno" de "A Flauta Mágica", de Mozart, interpretado por dois alunos da escola. A continuação destas tardes foi interrompida devido a dificuldades financeiras da Secretaria Regional da Educação, entidade responsável por garantir a deslocação (viagens) do convidado/especialista.

Ano de 2013, convite para ser a representante na Madeira do Comité Executivo do Ano Internacional da Matemática do Planeta Terra. Durante este ano e até junho do próximo ano, serão propostas e realizadas várias atividades que se pretende cheguem não só ao continente português como também à Madeira, aos Açores e a São Tomé e Príncipe. Embora este desafio não exija muito trabalho da minha parte, gostaria de ser capaz de dar o meu melhor de forma a poder responder satisfatoriamente às expectativas que foram criadas aquando do meu convite. Já incluída neste projeto realizei, no dia 21 de junho, conjuntamente com um grupo de professores da escola e alguns alunos, uma atividade em que se pretendia, aproveitando o dia de solstício de Verão, medir o raio da terra usando o processo utilizado por Eratóstenes. A atividade decorreu num dos pátios da escola e obtivemos numa das medidas (foram feitas três) um valor aproximado de 6211,2km (o valor médio do raio da Terra é de 6 371 km). Estas medições foram registadas na página do projeto. No dia 23 de setembro (no dia 22 de setembro ocorreu o Equinócio do Outono) e repeti a experiência com os meus alunos do décimo primeiro ano e com o apoio de colegas da Física e Química, Geometria e Inglês. Estas medições foram realizadas fora da escola (no Largo do Colégio) para poder envolver a comunidade. Foram realizadas cinco medições sendo a melhor a de 6355,4 Km.

A concluir esta primeira parte fica a certeza de que ser professor é muito mais do que transmitir conhecimentos. É acima de tudo, adquirir saberes e competências para trabalhar com cada um dos pequenos “nautilus” que nos confiam, de forma que possam desenvolver-se de uma forma equilibrada e ganhem o gosto por querer aprender e descobrir a matemática através das suas práticas.

1.2 Pertinência do estudo

Numa era em que os nossos alunos são “bombardeados” com informação quase instantaneamente, nas mais variadas áreas, é difícil que na sala de aula tenhamos sujeitos passivos, que aceitem “replicar” os ensinamentos do professor. A Matemática exigida atualmente aos nossos alunos envolve mais do que mero treino de exercícios (embora o treino seja uma “fatia” importante no estudo, para a compreensão dos assuntos e posterior ligação a outros temas). Os alunos além de ter de assimilar conhecimentos, têm de os mobilizar em situações variadas. Nas nossas salas de aula temos alguns jovens que levantam questões, que querem saber o porquê das coisas, o como se desenvolvem. Gostam de ser dinâmicos e pretendem que o professor lhes proporcionem situações em que possam explorar, raciocinar, discutir,…

É pois neste contexto que julgo ser oportuno analisar e compreender como raciocinam os alunos perante situações em que têm de ser eles a descobrir relações, fazer conjeturas, construir conhecimento, e concluir dos benefícios deste tipo de atividades, para os alunos (dos mais dinâmicos aos menos dinâmicos).

1.3 Formulação do problema

“Uma aula de Matemática bem sucedida baseia-se, necessariamente, em tarefas matemáticas válidas e envolventes.” (Ponte, Ferreira, Brunheira, Oliveira &Varandas,1998, p. 13). É pois com este pensamento, que pretendo refletir na utilização de tarefas que têm estado na base do trabalho de muitos investigadores: as tarefas exploratórias e as tarefas de investigação matemática na sala de aula.

As atividades de exploração e de investigação matemática, e a sua introdução na sala de aula, têm sido, de há um tempo a esta parte, motivo de análise e de estudo. Ao longo do meu percurso profissional “experimentei”, em algumas aulas, este tipo de atividades, e surgiram após as mesmas, questões que, por falta de tempo e de oportunidade não foram analisadas.

Pretendo pois, com este trabalho, compreender de que modo a inclusão de atividades investigativas ou exploratórias, ao nível do ensino secundário, contribui para a aprendizagem da Matemática.

Com o propósito anterior formulei algumas questões que procurarei responder ao longo desta minha investigação:

- Como age o aluno perante este tipo de atividades?
- Que tipo de conhecimentos mobiliza o aluno nestas atividades?
- Que benefícios (para o aluno) são alcançados com este tipo de tarefas?

1.4 Metodologia a utilizar

Dado que a presente investigação pretende analisar questões que se prendem com o modo como os alunos agem e aprendem num contexto de sala de aula, em que lhes são apresentadas tarefas de natureza investigativa ou exploratória e em que todos os pormenores poderão ser importantes para responder às questões colocadas, julgo ser apropriada a utilização de uma metodologia de natureza qualitativa.

Segundo Bogdan e Biklen, (1994), a abordagem duma metodologia qualitativa “exige que o mundo seja examinado com a ideia de que nada é trivial, que tudo tem potencial para construir uma pista que nos permita estabelecer uma compreensão mais esclarecedora do nosso objecto de estudo” (p.49).

As principais características de uma investigação deste tipo serão posteriormente enunciadas com base na definição dada por Bogdan e Biklen, (1994).

1.5 Análise de dados

Após a fase de recolha dos dados segue-se a fase da organização e análise dos documentos. Segundo Bogdan e Biklen (1994), “[a] análise de dados é o processo de busca e de organização sistemático de transcrições de entrevistas, de notas de campo e de outros materiais que foram sendo acumulados"(p.205).

Ainda segundo estes autores a análise dos dados envolve "a sua organização, divisão em unidades manipuláveis, síntese, procura de padrões, descoberta dos aspectos importantes e do que deve ser aprendido e a decisão sobre o que vai ser transmitido aos outros"(p.205).

Neste trabalho os dados foram analisados em duas fases sendo que a primeira fase decorreu após a recolha dos mesmos, tal como sugerido por Bogdan e Biklen (1994):

> (…) alguma análise tem de ser realizada durante a recolha de dados. Sem isto, a recolha de dados não tem orientação; (…) os dados que recolher podem não ser suficientemente completos para realizar posteriormente a análise (p.206).

Nesta primeira fase os dados foram analisados de uma forma superficial de modo a poder permitir uma melhor organização da tarefa seguinte. A segunda fase decorreu após a conclusão do ano letivo. Esta análise foi fragmentada em tópicos:

- Primeiro tópico de análise: *Identificação dos processos utilizados pelos alunos*
- Segundo tópico de análise: I*nquéritos*
- Terceiro tópico de análise: *Relatórios*
- Quarto tópico de análise: *Trabalhos/cartolinas apresentadas pelos grupos*
- Quinto tópico de análise: *Apresentações Orais*
- Sexto tópico de análise: *Questão aula*

2. Fundamentação Teórica

2.1 Tarefas Exploratórias ou Atividades de Investigação Matemática – o que são?

E o que se entende por tarefas exploratórias ou atividades de investigação em Matemática? Embora alguns investigadores não façam distinção entre uma e outra, Ponte (2010) faz uma diferenciação de tarefas, baseado em “quatro dimensões básicas:

- o seu grau de complexidade
- a sua estrutura
- o seu contexto referencial
- o tempo requerido para a sua resolução” (p.21)

A conjugação das duas primeiras dimensões dá origem a quatro tipos de tarefas que nos são apresentadas por Ponte (2010), no seguinte esquema:

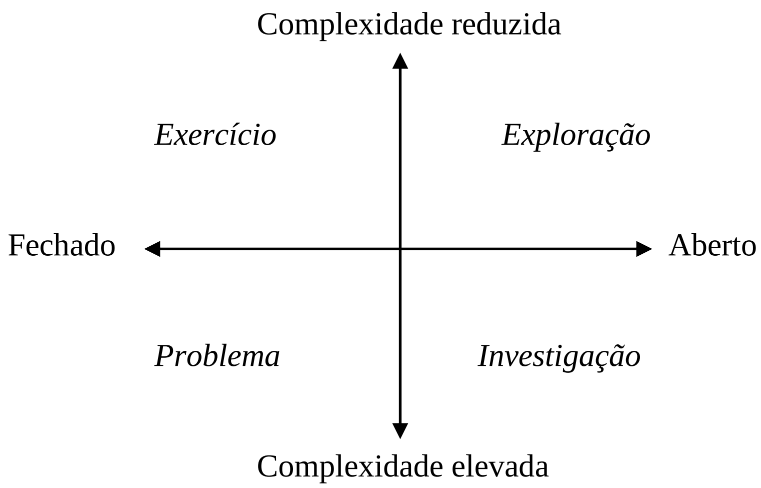


Figura 1 – Os diversos tipos de tarefas, em termos de estrutura e do grau de complexidade

Segundo este investigador, os exercícios e os problemas são tarefas de estrutura fechada, sendo o grau de complexidade reduzido no primeiro caso e elevado no segundo. Relativamente às tarefas de exploração e de investigação o autor considera estas tarefas com uma estrutura aberta diferenciando-se no seu grau de complexidade (as primeiras são consideradas pouco complexas, tendem a ser mais livres e menos sistemáticas, exigindo menos tempo de trabalho; as segundas com grau de complexidade elevado, em que não são imediatamente atingíveis nem o processo de resolução nem a solução da questão).

Na opinião de Ponte (2010), “Muitas vezes não se distingue entre tarefas de investigação e de exploração, chamando-se “investigações” a todas elas. Isso acontece, muito provavelmente, porque é complicado saber à partida qual o grau de complexidade que uma tarefa aberta terá para um certo grupo de alunos” (pp.21-22).

No meu trabalho utilizarei a terminologia «tarefas de exploração» pois parece-me mais adequado ao trabalho desenvolvido com os alunos.

Embora as tarefas de investigação ou de exploração não sejam uma panaceia para todos os problemas da educação, pois

> Nem tudo se pode aprender através da investigação. (…) isso não invalida a ideia que se trata de uma poderosa forma de construção do conhecimento tanto para o aluno como para o professor, que importa (…) promover no (…) ensino e na (…) cultura profissional.(Ponte,2003a, p.39)

Ainda que a minha experiência na aplicação de tarefas de exploração em sala de aula não seja nula, ela é pontual. Daí que, algumas das interrogações que foram surgindo resultam de experiências já vividas e outras foram emergindo ao longo da minha pesquisa bibliográfica.

Questões como: O que são atividades investigativas? Quais as principais fases em que assentam? Como escolher a tarefa a desenvolver? Que cuidado se deve ter aquando da preparação de uma tarefa desta natureza? Como organizar o trabalho de forma a garantir igualdade de condições para todos os alunos?, parecem invadir o espírito de todos aqueles que se envolvem neste tipo de tarefas.

Ainda questões como: De que modo integrar estas tarefas no currículo? Quanto tempo para «gastar» em investigações? Como avaliar os alunos? são também vistas em vários documentos.

Oliveira, Segurado e Ponte, (1996, p.208) definem atividades de investigação como “tipo de actividade em que é dada ênfase a processos matemáticos tais como procurar regularidades, formular, testar, justificar e provar conjecturas, reflectir e generalizar”.

Na opinião de Brocardo (2001, p.541), estes processos matemáticos não ocorrem, no entanto, de uma forma ‘linear e ordenada’. Nas atividades investigativas, após a fase da formulação de uma conjetura, passamos à fase de aferição (da mesma), que pode levar-nos ao aperfeiçoamento da conjetura ou até à necessidade de recolher novas informações que nos encaminhe para outra conjetura. É pois, toda esta dinâmica, que permite que os processos descritos anteriormente possam ser percorridos nos dois sentidos (recolha e organização de dados $\longrightarrow$ formulação de conjeturas $\longrightarrow$ teste de conjeturas $\longrightarrow$ formulação de conjeturas $\longrightarrow$ recolha e organização de dados), que confere às atividades investigativas uma característica de 'não linearidade'.

Esta mesma dinâmica é ilustrada por Oliveira (1998, p.74) no seguinte esquema:

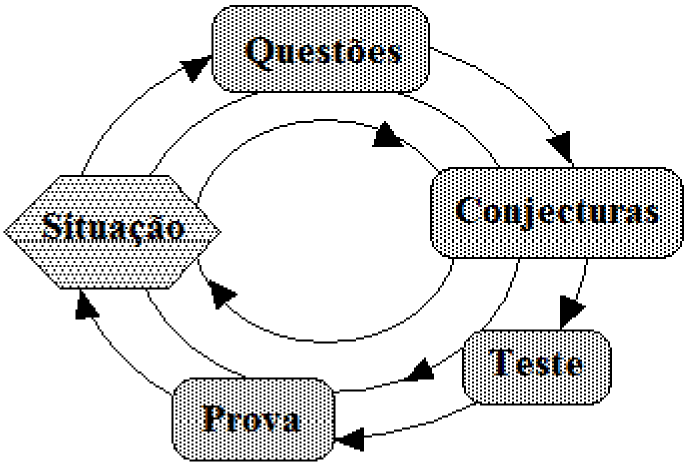


Figura 2 - A actividade de investigação

Ainda para Oliveira *et al.*, (1996)

> As investigações matemáticas caracterizam-se (…) pelo estímulo que fornecem ao aluno para este justificar e provar as suas afirmações, explicitando matematicamente as suas argumentações perante os seus colegas e o professor. As capacidades de argumentação e prova são dois aspectos destacados da capacidade de comunicar matematicamente (p. 208).

Segundo Ponte (2003b) "(...) investigar não significa necessariamente lidar com problemas na fronteira do conhecimento nem com problemas de grande dificuldade. Significa, apenas, trabalhar a partir de questões que nos interessam e que se apresentam inicialmente confusas, mas que conseguimos clarificar e estudar de modo organizado" (p.2).

Pretende-se pois, que os alunos, a partir de uma questão/tarefa pouco estruturada levantem questões, formulem e testem conjeturas, descubram relações. Resumidamente pretende-se que o aluno «descubra» o prazer de «fazer matemática». "O aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com os colegas e o professor.” (Ponte, Brocardo e Oliveira, 2003, p. 23).

Também Fonseca, Brunheira e Ponte (1999) defendem um paralelo entre a natureza da atividade do matemático e a da atividade do aluno na sala de aula:

> (…) os conhecimentos que o matemático possui, os processos de que faz uso, o grau de especialização que atinge, o tempo e o interesse que dedica à sua actividade são em dimensão incomparáveis com os dos alunos. No entanto, a actividade de resolução de problema de ambos pode ser equivalente quanto à sua natureza (p. 3).

Esta ideia é também corroborada por Hadamard (1945, citado por Fonseca *et al.* (1999) p.104) quando refere que a observação do trabalho de um aluno que resolve problemas e do trabalho de descoberta do matemático pode revelar somente uma diferença: “uma diferença de grau, uma diferença de nível”.

2.2 Porquê desenvolver Tarefas/Atividades de Investigação Matemática?

“A integração de atividades de investigação no currículo de Matemática tem sido uma preocupação crescente nos últimos tempos, dado ser um tipo de trabalho que contribui para fomentar nos alunos um conjunto de processos caraterísticos da experiência matemática” (Fonseca,2000, p.1).

As tarefas de investigação articuladas com outro tipo de tarefas, como sejam o exercício, o problema, as tarefas de exploração e os projetos, desempenham o seu papel no processo de ensino aprendizagem (Ponte, 2005). Ainda segundo Ponte (2005), se insistirmos apenas em tarefas do tipo exercício sem dar atenção ao trabalho exploratório estaremos a contribuir, claramente, para as dificuldades de aprendizagem dos alunos.

Esta ideia é também defendida por Goldenberg (1999), na sua conferência intitulada «Four roles for investigation in the mathematics classroom», onde refere:

> não acho que os alunos apenas possam aprender através da descoberta (ou mesmo que aprendam melhor através da descoberta). Mas, se se limitarem a memorizar, não aprendem a compreender as coisas. Na Matemática, na ciência, na reparação

> de automóveis, assim como na vida em geral, temos que aprender a compreender as coisas (p. 5).

No entanto, segundo Ponte (2005), não basta haver uma diversificação de tarefas

> É preciso que as tarefas, no seu conjunto, proporcionem um percurso de aprendizagem coerente, que permita aos alunos a construção dos conceitos fundamentais em jogo, a compreensão dos procedimentos matemáticos, o domínio das notações e formas de representação relevantes, bem como das conexões dentro e fora da Matemática (p. 18).

A realização de atividades/tarefas de investigação constitui uma orientação dos currículos escolares de vários países. Em Portugal, nos documentos produzidos pelo Departamento do Ensino Secundário (DES) do Ministério da Educação, programas de Matemática A para o ensino secundário, em particular no programa para o 10º ano de escolaridade (2001), preconiza-se a necessidade de selecionar tarefas que "deverão contribuir para o desenvolvimento do pensamento científico, levando o estudante a intuir, conjecturar, experimentar, provar, avaliar" e destaca-se ainda a importância dessas atividades "para o reforço das atitudes de autonomia e de cooperação". (p.10)

Nesse documento, no subtítulo Objetivos e Competências Gerais, pode ler-se que os alunos devem ser capazes de "exprimir e fundamentar as suas opiniões, revelar espírito crítico, de rigor e de confiança nos seus raciocínios, abordar situações novas com interesse, espírito de iniciativa e criatividade" (p.4) e ainda nas Capacidades e Aptidões serem capazes de formular hipóteses e prever resultados.

Nas Sugestões Metodológicas Gerais propõe-se uma metodologia assente no pressuposto de que o aluno é agente da sua própria aprendizagem, pelo que "os conceitos são construídos a partir da experiência de cada um e de situações concretas" e "são abordados sob diferentes pontos de vista e progressivos níveis de rigor e formalização" (p.10).

Relativamente ao papel do professor diz-se que "[n]a concretização da metodologia proposta cabe ao professor ser simultaneamente dinamizador e regulador do processo de ensino-aprendizagem criando situações motivadoras e adoptando uma estratégia que implique o estudante na sua aprendizagem e desenvolva a sua iniciativa" (p.12).

É portanto neste sentido, que as atividades/tarefas de investigação devem entrar nas salas de aula, pois essas tarefas além de clarificar o pensamento matemático despertam a curiosidade, a criatividade e o gosto do aluno pela matemática.

Esta ideia também é defendida pela Associação de Professores de Matemática, APM, através do documento elaborado em 1988, *Renovação do Currículo em Matemática*:

> A experiência matemática deve constituir o paradigma das actividades escolares nesta disciplina. Desde o princípio da escolaridade até ao fim do ensino secundário, e de acordo com o nível de desenvolvimento e maturidade dos alunos, estes deverão estar mergulhados num ambiente intelectualmente estimulante, no qual experimentar e fazer matemática sejam actividades naturais e desejadas (p. 40).

Segundo Santos, Brocardo, Pires e Rosendo (2002)

> As investigações matemáticas precisam de ocupar um lugar importante ao nível da experiência matemática dos alunos uma vez que elas proporcionam a vivência de processos característicos da Matemática – formular questões e conjecturas, testar conjecturas e procurar argumentos que demonstrem as conjecturas (p.84).

Estes autores referem ainda que estas atividades têm

> (…) importantes potencialidades educacionais (…) estimulam o tipo de participação dos alunos que favorece uma aprendizagem significativa, proporcionam pontos de entrada diferentes facilitando o envolvimento de alunos com diferentes níveis de competências e o reconhecimento e/ou estabelecimento de conexões (p.84).

Embora se possa pensar que atividades deste tipo, em que se pretende que sejam os alunos a construir o seu próprio conhecimento seja algo de muito recente, ficaremos maravilhados com a primeira das Normas Gerais contida no primeiro volume do Guia para utilização do Compêndio de Matemática de Sebastião e Silva (1975-1977):

> O professor deve abandonar, tanto quanto possível, o método expositivo tradicional, em que o papel dos estudantes é quase cem por cento passivo, e procurar, pelo contrário, seguir o método activo, estabelecendo diálogo com os estudantes e estimulando a imaginação destes, de modo a conduzi-los, sempre que possível, à redescoberta (p.11).

No trabalho de Oliveira, Segurado e Ponte (1998) pode ler-se que

> as actividades de investigação permitem o estabelecimento de ligações entre os mais diversos tópicos, dando uma perspectiva coerente e integrada da Matemática, completamente diferente da perspectiva compartimentada que os alunos tendem a manifestar. Tratam-se, portanto, de actividades que ajudam a criar uma imagem muito diferente — e mais verdadeira — desta ciência (p. 124)

2.3 Que tarefas?

Uma das questões que julgo preocupar qualquer professor que pretende desenvolver atividades desta natureza prende-se com as interrogações: «que tarefa selecionar?», «como selecionar»? Na opinião de Fonseca *et al.* (1999) a escolha ou construção de uma tarefa de investigação impõe ao professor a necessidade de pesquisar em várias fontes, nomeadamente "manuais escolares, livros com propostas de problemas e investigações e, mais recentemente, o mundo da Internet" (p.10). Estes autores afirmam ainda que o professor "precisará de recorrer à sua criatividade para dar forma à tarefa, adaptando as situações, reconstruindo as questões da maneira que melhor servir os seus objectivos." - e concluem referindo que a escolha da tarefa "está também dependente dos alunos que a irão trabalhar, devendo o professor ter em conta o seu nível etário, o seu desenvolvimento matemático, a familiaridade que têm com o trabalho investigativo, os seus interesses, etc." (p.10).

Outra questão que pode aflorar ao espírito do professor prende-se com o «acolhimento», por parte dos alunos, da tarefa escolhida. Segundo Skovsmose (2000), o sucesso de uma tarefa/atividade, ou a aceitação do 'convite feito pelo professor' depende de várias variáveis: da própria tarefa, do modo como o professor a apresenta, do tipo de alunos, etc.

Segundo Ponte, Oliveira, Brunheira e Varandas (1998) a dificuldade da tarefa pode não ser a que o professor previu aquando da sua seleção, podendo ocorrer que a tarefa seja considerada pelos alunos com elevado grau de dificuldade, o que poderá despoletar alguma intimidação perante a tarefa e consequente abandono da mesma, ou então considerada (a tarefa) muito simples e por tal desinteressante.

O modo de apresentar a tarefa pode também ser «causador» de entusiasmo/desânimo para os alunos, e por tal determinante no sucesso/insucesso da atividade. Skovsmose (2000) defende esta ideia quando diz que "[a] aceitação do convite depende de sua natureza (…), depende do professor (um convite pode ser feito de muitas maneiras, e, para alguns alunos, um convite do professor pode soar como um comando)" (p. 21).

A predisposição dos alunos para este tipo de tarefas e/ou a circunstância em que é apresentada, também são fatores decisivos para o sucesso da tarefa. Na opinião de Skovsmose (2000), o sucesso da tarefa ou a aceitação do convite "depende, certamente, dos alunos (no momento eles podem ter outras prioridades). O que pode servir perfeitamente como um cenário para investigação a um grupo de alunos numa situação particular pode não representar um convite para um outro grupo de alunos" (p. 21). A inclusão de uns traz quase sempre a exclusão de outros (Valero, 2013), mas o importante será equilibrar as metodologias e as propostas de trabalho para que no final exista um equilíbrio saudável entre a inclusão e a exclusão.

2.4 Vantagens e inconvenientes das tarefas de investigação em sala de aula

Tendo em conta que nem todos os alunos se «deleitam» com a Matemática ou com as atividades nela desenvolvidas, é importante saber se as tarefas de investigação podem ser aplicadas a todos os níveis de ensino e se serão adequadas a todos os alunos ou apenas aos que têm predisposição para a Matemática (Segurado & Ponte, 1998).

Vários investigadores apontam alguns problemas na utilização de atividades desta natureza como sejam a desvalorização, por alguns alunos, deste tipo de trabalho e a rejeição das mesmas por não as considerarem indispensáveis para a sua aprendizagem. (Segurado & Ponte, 1998).

Num estudo relatado por Ponte e Carreira (1992, p. 308) refere-se que poderão surgir reações desfavoráveis à introdução de tarefas desta natureza, por alunos do ensino secundário, que não identificam este tipo de tarefas como relevantes para a sua preparação nesta disciplina:

> they started manifesting a clear rejection of de work being developed (…), claiming that they needed a different type of teaching, a more serious one, in order to be prepared for future examinations. They wanted more practical exercises, more teacher exposition and more individual work in the classroom (p. 308).

Contudo, outros estudos realizados por vários investigadores (Segurado & Ponte, 1998), mostram que a realização de tarefas investigativas em sala de aula tem grandes potencialidades, pois permite o surgimento de situações que fomentam o debate e a reflexão, promovendo dessa forma a aquisição de conhecimentos de assuntos mais gerais.

Em Brocardo (2001) são indicados alguns argumentos para a introdução de atividades de investigação na sala de aula:

> -a exploração de investigações motiva os alunos;
> -as investigações favorecem um ambiente de aprendizagem *vivo* em que os alunos participam;
> -a exploração de investigações desenvolve capacidades e facilita a aprendizagem;
> -as investigações são importantes para perspectivar uma compreensão da actividade matemática (p. 552).

Pelo que, no resumo do seu estudo, esta autora afirma que:

> é possível concluir que a exploração continuada de investigações é uma experiência com várias potencialidades ao nível do ensino da Matemática: motiva os alunos, ajuda a estabelecer um ambiente em que os alunos participam activamente, facilita a compreensão vivida de processos e ideias matemáticas e da actividade matemática (p. Resumo).

Relativamente aos professores e tendo em conta que têm um papel decisivo no processo ensino-aprendizagem, não é de somenos importância as dificuldades por eles sentidas. As atividades investigativas, dado o seu grau de abertura, poderão levar ao surgimento de situações, que não tinham sido contempladas ou ponderadas pelo professor aquando da preparação da tarefa, exigindo da sua parte uma capacidade de raciocínio matemático que permita estabelecer conexões com outros conceitos matemáticos ou extra matemáticos (Ponte *et al.*, 1998).

Além dos conhecimentos matemáticos, o professor terá de ter uma outra qualidade: a de ser matematicamente confiante (Ponte *et al.*, 1998), nos seus conhecimentos e nas suas capacidades.

Segundo Mason (1996):

> [e]ssa confiança reside, não em saber as respostas, ou mesmo as técnicas correctas, mas antes em ser capaz de obter uma conjectura plausível, de saber especializar, generalizar e explorar em torno da questão, talvez alterando-a um pouco, ou mesmo drasticamente, até que se possam realizar alguns progressos (p.80).

Num dos seus trabalhos, Goldenberg afirma que as atividades de investigação “impõem novas exigências aos conhecimentos matemáticos dos professores” (1999, p.13). Refere ainda que, dada a essência deste género de atividades, pode por vezes suceder que a investigação tome um rumo não programado e ser difícil de distinguir desvios pertinentes de desvios irrelevantes. Segundo este investigador “[o]s professores precisam de ter boas bases matemáticas, para além de sensibilidade pedagógica, para poderem decidir quando é que uma investigação deve prosseguir e quando é que provavelmente será mais frutuoso pôr termo à investigação" (p. 13).

Outro obstáculo à consecução dos propósitos das atividades de investigação, apontado por Goldenberg, prende-se com facto de que "sem um bom entendimento da Matemática, muitos professores tendem a concentrar-se na própria investigação, em vez de verem a reflexão sobre a investigação e a abstracção que dela se retira, como é o seu objectivo" (p.13).

2.5 Dinâmica de uma aula com investigações

Na opinião de Holding (1991) é necessário ter em atenção que, na fase de preparação deste tipo de aulas, o professor não pode pressupor que atingirá este ou aquele ponto na investigação. Segundo o autor, só após algum contacto com a mesma atividade é que o professor terá condições de prever as possibilidades de execução da atividade.

É claro que o desenvolvimento de aulas em que se apresentam atividades investigativas exige que o professor esteja preparado para defrontar-se com algumas mudanças, não só na sua maneira de agir como professor em sala de aula mas também no modo de orientar os alunos no desenvolvimento da tarefa. O professor deve estar preparado para alterar o rumo da sua planificação conforme a direção tomada pelos acontecimentos que vão surgindo ao longo do desenvolvimento da atividade. É pois necessária uma capacidade de reflexão-ação por parte do professor, de modo a tirar o maior partido possível da atividade e das aprendizagens que os alunos vão fazendo ao longo da mesma. (Fonseca *et al.*,1999)

Segundo Christiansen e Walther, (1986), uma aula de tarefas de investigação deverá ser estruturada em três fases:

- Introdução da tarefa – esta introdução é uma parte importante do processo, pois depende dela o bom entendimento que se deseja que o aluno faça da tarefa e daquilo que se pretende que o aluno investigue. Não basta pois «propor», é necessário fazer uma exposição clara para que todos os alunos possam iniciar a atividade em igualdade de circunstâncias ou pelo menos para que não existam muitos desequilíbrios iniciais. O modo de fazer a exposição depende de muitos fatores: idade dos alunos, número de elementos da turma, âmbito da tarefa, experiência dos alunos nesse tipo de atividade. Segundo Fonseca *et al*. (1999), existem diversos modos de apresentar a tarefa de acordo com os «objetivos» delineados pelo professor:

> [p]ode optar-se pela distribuição do enunciado escrito acompanhado por uma pequena apresentação oral (…). Pode ser feita uma leitura em grande grupo (…). Pode-se, simplesmente, apresentar a tarefa por escrito, sem que se faça uma discussão inicial do enunciado (p. 6).

Estes autores referem ainda que poderão surgir situações em que o professor poderá apresentar a atividade oralmente, sem nenhum suporte escrito, sendo que o registo de informações essenciais ao desenvolvimento da tarefa vai sendo feito à medida que os alunos vão progredindo nas suas descobertas. Uma outra situação também ponderada por Fonseca *et al*.(1999), é a "da introdução da proposta de trabalho não ser preparada previamente pelo professor, surgindo a tarefa, espontaneamente, na aula a partir da actividade dos alunos" (p. 6).

- Desenvolvimento do trabalho/investigação – Nesta fase os alunos iniciam a análise da tarefa e levantam-se as primeiras questões. Pretende-se que haja uma forte interação entre os elementos do grupo assim como do professor com os diversos grupos. O papel do professor nesta fase, é muito importante e dos mais difíceis, pois terá de "ajudar (os alunos) a ultrapassar eventuais bloqueios ou a tornar mais rica a sua investigação"(Oliveira, Segurado & Ponte, 1998,p. 4). Segundo Pólya (1945), "[o] professor deve auxiliar, nem de mais nem de menos, mas de tal modo que ao estudante caiba uma parcela razoável do trabalho"(p. 4). É pois, este dosear «q.b» que poderá dificultar o trabalho do professor em atividades desta natureza. Se os esclarecimentos do professor forem escassos

> os alunos podem sentir-se "perdidos" (…). Se der informação a mais, pode proporcionar pistas desnecessárias, que distraem os alunos do que realmente interessa. Se der a informação estritamente necessária, sem qualquer ambiguidade, dá indirectamente pistas para a resolução da tarefa.(Ponte *et al*.,1998, pp.11-12).

Segundo Holding (1991), todas as observações e conclusões devem ser acolhidas pelo professor, independentemente do seu grau de precisão, cabendo-lhe depois a tarefa de colocar questões que orientem o aluno no sentido de analisar as suas afirmações com mais sagacidade. Questões do tipo: "O que é que acontece se…", Há outras possibilidades?", "Concordas com o que o teu colega disse?" levam o aluno a refletir sobre as suas observações e conclusões.

- Discussão final ou reflexão do trabalho desenvolvido. A reflexão final do trabalho desenvolvido em cada grupo é essencial em tarefas de trabalho investigativo, pois, "Such final reflection is a fundamental element of an investigation class. Carrying out investigative work and not reflecting on it is to waste most of the activity's learning potential"(Ponte, Ferreira, Brunheira, Oliveira,& Varandas,1998, p. 12).
  Esta fase é referida por muitos investigadores como sendo uma fase essencial na estruturação de uma tarefa de investigação.
  Para Oliveira *et al*. (1998), é nesta etapa que

> serão postas em confronto as estratégias, as hipóteses e as justificações que os (…) alunos construíram, e que o professor assume as funções de moderador. Ele procura trazer à atenção da turma os aspectos mais destacados do trabalho desenvolvido e estimula os alunos a questionarem as asserções dos seus pares"(p.5)

Segundo estes autores destaca-se nesta fase, dois dos objetivos que se pretende que sejam atingidos com tarefas desta natureza: "o desenvolvimento da capacidade dos alunos para comunicar matematicamente" e o "poder de argumentação".

2.6 Avaliação de atividades investigativas

Ao desenvolvermos atividades de investigação matemática em sala de aula temos a possibilidade de atingir várias das finalidades apontadas no programa de Matemática para o Ensino Secundário. Segundo Ponte *et al.* (2003),

> [a]s investigações reportam-se a diversos objectivos curriculares. (…) pretende-se que o aluno seja capaz de usar conhecimentos matemáticos na resolução da tarefa proposta, (…) desenvolva a capacidade de realizar investigações. (…) pretende-se promover atitudes tais como a persistência e o gosto pelo trabalho investigativo

É pois fundamental, que sejamos capazes de avaliar todo um conjunto de aprendizagens e competências que o aluno pode evidenciar ao desenvolver atividades desta natureza. Levantam-se então, algumas questões relativas a avaliação: O quê avaliar? Como avaliar este género de trabalho? Que instrumentos de avaliação se adaptam a este tipo de metodologia?

Dado que avaliação deve ser entendida "como parte integrante do processo da aprendizagem, como um meio que permite ao professor e ao aluno recolher e interpretar informação de forma a introduzir medidas que favoreçam essa mesma aprendizagem." (Santos, 2003, p.18) devemos privilegiar práticas que fomentem a "avaliação" assim entendida.

Segundo esta autora, existem práticas que "privilegiam uma avaliação ao serviço da aprendizagem e do desenvolvimento de competências" (p. 18), como sejam a observação e interpretação de dados e o questionamento, e que são boas práticas a utilizar em situações de trabalhos de investigação matemática em sala de aula.

Na opinião de Santos (2003)

> [A] observação é uma prática que todo o professor desenvolve na sala de aula, muito embora na generalidade lhe reconheça pouca importância. (…) não é acompanhada de registos, pelo que o professor lhe atribui uma natureza muito subjectiva e, como tal, a considere pouco fiável para dela fazer depender juízos de valor que possam sustentar classificações (…)(p. 18).

Embora comummente os professores não depositem muita confiança nas informações recolhidas através deste instrumento, não lhe atribuindo a mesma excelência que atribuem a testes escritos, este autor sustenta que "é através da observação que muito se pode saber sobre o aluno e, em particular, o modo como é ou não capaz de activar recursos face a uma situação nova" (p.18).

Também Ponte *et al.* (2003) referem que a

> observação é um bom meio de conhecer o modo como os alunos reagem às tarefas de investigação, o modo como as interpretam e a estratégia de trabalho que desenvolvem, os seus processos de raciocínios, bem como os conhecimentos matemáticos que usam e nas competências de cálculo que evidenciam.

No entanto, segundo os mesmos autores essa particularidade "é também a sua principal limitação, pois torna-se difícil ao professor fazer registos selectivos anotando apenas o que é realmente importante".

Associada a esta prática, Santos (2003), aponta uma outra: o questionamento. O colocar questões ao aluno não tem como único objetivo concluir dos saberes adquiridos ou dos procedimentos por ele seguidos. Segundo este autor a fase de questionamento tem como objetivos:

> [o]rientar o raciocínio do aluno para uma direcção que dê frutos, permitir que o próprio identifique o erro; contribuir para o desenvolvimento da capacidade de auto-avaliação regulada do aluno, entendida como um processo mental interno através do qual o próprio toma consciência dos diferentes momentos e aspectos da sua actividade cognitiva (p. 18).

Na opinião de Santos (2002) o facto de o professor utilizar o questionamento como estratégia continuada, em sala de aula, poderá contribuir para que o aluno desenvolva também essa aptidão:

> "[o] aluno poderá aprender a colocar-se autonomamente boas questões se o professor lhas colocar de forma continuada. Questões como: "O que fizeste?", "Porque tomaste esta opção?", (…), "Se quisesses convencer alguém de que isto é verdade, o que dirias?", poderão contribuir para, após diversas sessões deste tipo, os alunos passarem autonomamente a formular estas questões para si mesmos, enquanto desenvolvem as suas tarefas" (p. 81).

Ainda a propósito do questionamento, Santos (2002), refere dois tipos: o oral e o escrito: "[o] questionamento por parte do professor pode ocorrer oralmente na sala de aula, enquanto os alunos realizam as tarefas propostas e, por escrito, tomando por base produções realizadas" (p. 81).

Um outro instrumento de avaliação que se coaduna com este tipo de tarefas é o relatório escrito. Segundo Ponte *et al.* (2003), o relatório tem como finalidade a apresentação, escrita, de um trabalho desenvolvido individualmente ou em grupo em que devem incluir-se não só as conclusões retiradas na realização da tarefa como também do percurso trilhado e que conduziu a essas mesmas conclusões.

Segundo Menino e Santos (2004)

> [a]lém de se constituir como um instrumento de avaliação (o relatório) é claramente um factor de aprendizagem uma vez que o aluno tem de aprender a

> registar por escrito o seu pensamento, a articular ideias e explicar procedimentos, ao mesmo tempo que critica os processos utilizados, avalia os desempenhos do grupo e o produto final (p. 4).

Para Leal (1992) permite desenvolver capacidades em dois tipos de domínios: domínio cognitivo e domínio afetivo. No domínio cognitivo possibilita o desenvolvimento da comunicação, da interpretação, da reflexão, da exploração de ideias matemáticas e do espírito crítico. Ao nível afetivo permite o desenvolvimento do sentido da responsabilidade pessoal e de grupo, a perseverança e a relação entre os alunos.

A partir do que foi dito anteriormente podemos inferir que o relatório é um instrumento que permite não só avaliar as aprendizagens ocorridas durante o desenvolvimento da tarefa de investigação que lhe deu origem, como também avaliar outras capacidades exigidas aos alunos, como sejam a comunicação matemática e a argumentação.

As apresentações orais podem ser tidas como instrumentos de avaliação que favorecem o desenvolvimento das capacidades anteriormente referidas e que se proporciona à avaliação de tarefas de investigação.

Segundo Ponte *et al.* (2003)

> [a]s apresentações orais permitem avaliar uma variedade de objectivos, incluindo as atitudes e valores, a compreensão do processo de investigação, a pertinência das estratégias, os processos de raciocínio, o uso de conceitos, as competências de cálculo e a capacidade de comunicação oral.

2.7 Processos matemáticos utilizados pelos alunos

No trabalho realizado por Fonseca (2000), a autora identifica alguns dos processos matemáticos que são utilizados pelos alunos aquando da realização de investigações matemáticas ou de resolução de problemas. Segundo Fonseca (2000)

> em investigação matemática muitos são os processos relevantes que podemos encontrar, contudo, não existe uma lista pré-estabelecida e bem definida desses processos. Diferentes autores destacam e analisam processos consoante o grau de

relevância e o significado que lhes atribuem. Existem, no entanto, alguns que são mais ou menos partilhados por todos e outros em que isso não acontece (p.28).

Decorrente desse estudo, esta autora sistematizou no quadro que é apresentado de seguida, alguns desses processos e os autores que claramente os identificam (Mason, Burton e Stracey, 1982; Burton,1984; Pirie,1987; Kissane, 1988; Anderson, 1990; Holding, 1991; Frobisher, 1994; Oliveira, Segurado e Ponte, 1996; referidos em Fonseca, 2000).

Processos matemáticos	Autores que os defendem
Formulação de conjecturas	Mason et al., Burton, Pirie, Kissane, Anderson, Holding, Frobisher e Oliveira et al.
Generalização	Mason et al., Burton, Pirie, Kissane, Anderson, Frobisher e Oliveira et al.
Procura de regularidades	Pirie, Kissane, Anderson, Holding, Frobisher e Oliveira et al.
Justificação	Mason et al., Burton, Pirie, Kissane, Holding e Oliveira et al.
Verificação	Pirie, Kissane, Holding, Frobisher e Oliveira et al.
Prova	Pirie, Anderson, Holding, Frobisher e Oliveira et al.
Especialização	Mason et al., Burton, Pirie e Kissane
Simbolização	Kissane, Anderson e Frobisher
Registo de observações	Pirie e Kissane
Relato oral	Pirie e Kissane
Exploração sistemática de questões	Kissane e Anderson
Reflexão	Pirie e Oliveira et al.
Predição	Pirie e Frobisher
Selecção de estratégias	Pirie
Organização	Pirie
Elaboração de um relatório	Pirie
Formulação de problemas	Kissane
Geração de exemplos	Kissane
Interpolação e Extrapolação	Frobisher
Formulação de hipóteses	Frobisher
Adivinhação	Frobisher

Quadro 1 – Processos matemáticos utilizados pelos alunos

No seu estudo, a autora optou por

> analisar mais aprofundadamente o seguinte conjunto de processos: especialização, procura de regularidades, formulação de conjeturas, generalização, verificação, justificação e prova. Esta opção teve em conta vários factores: processos identificados por diversos autores; alguns desses processos abrangem de certo modo outros mais particulares (…); entre eles existe uma inter-relação (p. 71).

Fonseca (2000) refere no seu trabalho, os significados atribuídos por alguns dos autores estudados, dos processos anteriormente indicados. Na obra de Fonseca (2000) podemos ler que segundo Mason, Burton e Stracey (1982), "o processo de *especialização* consiste em começar a trabalhar com exemplos particulares, escolhidos a partir de uma situação mais geral e tem como objetivo compreender a questão que é colocada e clarificar ideias"(p.29).

Segundo estes mesmos autores, o processo de g*eneralização* é o "*sangue vital"* da Matemática e inicia-se "quando nos apercebemos da existência de uma *regularidade*, isto é, quando observamos certas características comuns a muitos exemplos particulares e ignoramos outras"(p.30).

A *formulação de conjeturas* "é o processo de perceber ou de supor que alguma coisa deve ser verdade e que implica a investigação da sua veracidade"(p.30). Segundo estes autores a formulação de conjetura não é um processo difícil, a *justificação* é que pode não ser fácil. Para Mason *et al.* (1982) justificar implica, numa primeira fase, a necessidade de o aluno se convencer a si próprio da veracidade da conjetura e posteriormente convencer o "mundo exterior". Esta última fase é a mais trabalhosa pois é este "mundo exterior" que levantará uma série de questões que poderá abalar ou não a conjetura concebida. Surge assim a necessidade de *provar* a conjetura. Na obra de Fonseca (2000) a autora refere que

> [p]ara Burton (1984), a prova é um argumento deduzido a partir de um conjunto de axiomas e independente da experiência e, para que seja aceitável, a "lógica" da sua dedução deve convencer um "inimigo" externo, por exemplo, a comunidade na qual ela se desenvolve (p. 32).

Na opinião de Fonseca(2000), Pirie (1987) defende que

> [D]epois da formulação de conjecturas, baseadas em mais ou menos evidência, deve vir a *verificação* e a justificação , da veracidade ou da refutação, dessas

mesmas conjecturas. A verificação pode ser feita através de mais especialização e a justificação deve ser devidamente justificada (p. 33).

3. Fase da Investigação e Metodologia utilizada

3.1 Fases da investigação

O presente estudo decorreu entre outubro de 2012 e setembro de 2013 e foi organizado segundo as fases indicadas nos quadros, apresentados de seguida.

Nesses quadros são também indicados os períodos em que decorreram as atividades de exploração.

No quadro 2 é apresentada a primeira fase do trabalho e no quadro 3 a segunda fase.

<table>
<tr><th>Ano</th><th>Mês</th><th>Tarefas</th></tr>
<tr><td rowspan="2">2012</td><td>Outubro</td><td>Preparação e desenvolvimento das atividades:
1ª atividade: Sólidos Platónicos
2ª atividade: Que polígonos há num cubo?</td></tr>
<tr><td>Novembro
Dezembro</td><td>Desenvolvimento do Tópico 1
Introdução
Desenvolvimento do Tópico 2
Fundamentação Teórica</td></tr>
<tr><td>2013</td><td>Janeiro
Fevereiro</td><td>Conclusão do Tópico 2
Fundamentação Teórica</td></tr>
</table>

Quadro 2 – 1ª Fase do trabalho

Ano	Mês	Tarefas
2013	Março	Preparação e desenvolvimento da 3ª atividade: Função quadrática
	Junho Julho	Desenvolvimento do Tópico 3 • Fases da Investigação e Metodologia utilizada
	Agosto	Conclusão do Tópico 3 • Fases da Investigação e Metodologia utilizada Desenvolvimento do Tópico 4 • Análise dos dados
	Setembro	Desenvolvimento do Tópico 5 • Conclusões Conclusão dos vários tópicos Revisão e entrega da tese

Quadro 3 – 2ª Fase do trabalho

3.2 Metodologia de investigação

Tal como referido anteriormente, para a realização deste estudo foi adotada uma metodologia de investigação de tipo qualitativo.

Segundo Bogdan e Biklen (1994), quando se pretende utilizar uma "metodologia de investigação que enfatiza a descrição, a indução, a teoria fundamentada e o estudo das percepções pessoais" (p. 11) estamos a fazer uma abordagem designada por "Investigação Qualitativa".

Na opinião destes autores, a expressão *investigação qualitativa* agrupa diversas estratégias de investigação que compartilham determinadas especificidades, como sejam:

- os dados recolhidos …são ricos em pormenores descritivos relativamente a pessoas locais e conversas e de complexo tratamento estatístico.
- as questões a investigar … são formuladas com o objetivo de investigar os fenómenos em toda a sua complexidade e em contexto natural.

- a abordagem à investigação não é feita com o objetivo de responder a questões prévias ou de testar hipóteses.
- privilegiam, essencialmente, a compreensão dos comportamentos a partir da perspectiva dos sujeitos da investigação.
- recolhem …os dados em função de um contacto aprofundado com os indivíduos, nos seus contextos ecológicos naturais” (p. 16).

Na perspetiva de Bogdan e Biklen, (1994), embora cada investigador tenha à sua disposição uma variedade de estratégias para conduzir as suas investigações, existem cinco características que (com mais ou menos intensidade) podem ocorrer numa investigação qualitativa:

1. “*Na investigação qualitativa a fonte directa de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal”* (p. 47). Segundo estes autores, os investigadores qualitativos recolhem os dados diretamente dos locais de estudo pois “entendem que as acções podem ser melhor compreendidas quando são observadas no seu ambiente habitual de ocorrência” visto que “o comportamento humano é significativamente influenciado pelo contexto em que ocorre” (p. 48). O principal instrumento de recolha de dados é o próprio investigador dado que é através do entendimento da informação recolhida que é feita a sua análise.

2. “*A investigação qualitativa é descritiva”* (p. 48). “A palavra escrita assume particular importância na abordagem qualitativa, tanto para o registo dos dados como para a disseminação dos resultados”. Ao fazer investigação qualitativa o investigador terá de ser um observador minucioso que através das suas notas e transcrições procura pistas que lhe permita “estabelecer uma compreensão mais esclarecedora do […] objeto de estudo.”

3. “*Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos”* (p. 49). Numa investigação qualitativa é dada grande importância à exploração do modo como surgem os acontecimentos, qual o percurso que foi necessário trilhar para se chegar a uma determinada noção, a um determinado estádio.

4. “*Os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva”* (p. 50). O objetivo do investigador qualitativo não é o de concluir a veracidade, ou não, de uma determinada tese a partir da recolha de dados. À medida que recolhe os dados e os examina, o investigador vai criando abstrações, que o levam à

construção de "um quadro que vai ganhando forma à medida que se examinam e recolhem as partes" (p. 50).

5. "*O significado é de importância vital na abordagem qualitativa"* (p. 50). Para o investigador qualitativo é fundamental captar corretamente as diferentes perspetivas dos participantes, o modo como cada um interpreta os significados, pois é através desse modo de agir que o investigador divisa "a dinâmica interna das situações, dinâmica esta que é frequentemente invisível para o observador exterior" (p. 51).

No presente estudo, estão patentes as cinco características anteriormente referidas, pois

- os dados foram obtidos num ambiente natural (sala de aula) sendo o investigador o instrumento principal na recolha de dados;
- a investigação é descritiva;
- o interesse da investigação é entender o processo, o modo como os alunos apreendem determinados conteúdos numa situação em que são eles que orientam o trabalho, levantam questões, refutam argumentos;
- as informações são analisadas num sentido ascendente, isto é de "baixo para cima";
- o atingir do objetivo do estudo resulta de um rigoroso entendimento das diferentes interpretações/significados atribuídos pelos alunos.

Além das características anteriormente referidas, este estudo enquadra-se naquilo que Bogdan e Biklen, (1994), denominam de 'observação participante', visto que o investigador é a própria professora da turma pelo que pode facilmente introduzir-se "no mundo das pessoas que pretende estudar [...] elaborando um registo escrito e sistemático de tudo aquilo que ouve e observa" (p. 16).

3.3 Intervenientes no estudo

O presente estudo realizou-se no ano letivo 2012/2013, numa escola Secundária do Funchal e numa turma do décimo ano de escolaridade, do curso de Ciências e Tecnologias da vertente Engenharias. Como referido anteriormente o estudo foi realizado num ambiente de sala de aula. A turma era constituída maioritariamente por rapazes (vinte e um) num total de vinte e cinco alunos. Embora o núcleo da turma fosse formado por alunos que se encontravam pela primeira vez no décimo ano, existiam quatro alunos que o frequentavam pela segunda vez.

Globalmente os alunos têm um bom relacionamento entre si assim como um bom comportamento em sala de aula. Existem no entanto três alunos que são casos especiais devido às suas dificuldades na socialização. As suas idades variam entre os quinze e os dessásseis anos.

Em relação às classificações da turma, podemos cataloga-la como uma turma ‘média-alta’, sendo que as disciplinas com melhores resultados foram a Matemática, a Física e Química e a Geometria Descritiva.

Os alunos que se encontravam a repetir a disciplina de Matemática eram alunos do curso de economia e apresentavam algumas dificuldades ao nível do cálculo e da abstração.

3.4 Tarefas

Tal como referido por Fonseca *et al*. (1999), a escolha da tarefa exigiu por parte do investigador uma pesquisa de informação, de forma a poder apresentar tarefas que pudessem ser consideradas como ‘tarefas de exploração’ e que abarcassem temas contidos no programa do décimo ano. Foi considerado, também, a faixa etária dos alunos a que se destinavam as tarefas, o seu desenvolvimento matemático e a diversificação dos temas.

Foram propostas aos alunos três tarefas exploratórias abrangendo dois temas distintos da Matemática A. As duas primeiras tarefas foram do tema Geometria e a terceira do tema Funções.

De seguida são dados a conhecer os traços gerais de cada uma das tarefas, o modo como foram introduzidas, os seus objetivos e os materiais utilizados na realização das mesmas.

1ª tarefa: *Sólidos Platónicos*

Esta tarefa foi desenvolvida em duas aulas do primeiro período, aquando da lecionação do tema *Geometria no Plano e no Espaço*. A exploração da atividade decorreu nos noventa minutos da primeira aula e a elaboração do relatório da atividade foi realizado nos cinquenta minutos da segunda aula.

Com o objetivo de constituir seis grupos, a professora solicitou aos alunos que retirassem de uma bolsa, previamente preparada com um número de *M&M* igual ao número de alunos e envolvendo seis cores, um *M&M* para os poder agrupar por grupo/cor. Concluída a constituição dos grupos, a professora entregou a cada grupo (formado por quatro ou cinco elementos) a tarefa a trabalhar.

Para a exploração da tarefa a professora distribuiu pelos grupos vários tipos de polígonos (triângulos, quadrados, retângulos, pentágonos e hexágonos) em Polydron e pediu que lessem atentamente o documento que tinha sido entregue.

2ª tarefa: *Que polígonos há num cubo?*

Esta proposta de atividade foi trabalhada também no primeiro período e no mesmo tema da primeira atividade- *Geometria no Plano e no Espaço.*

A constituição dos grupos foi deixada a cargo dos alunos e a exploração da tarefa ocorreu numa aula de noventa minutos.

Tal como na primeira tarefa foi distribuído a cada um dos grupos o documento de trabalho, foi pedido que o lessem com atenção e que tomassem notas de todas as descobertas que fossem fazendo, das conclusões/conjeturas a que foram chegando e das provas ou refutações que foram fazendo ao longo do trabalho. Foi ainda informado que teriam de fazer um relatório individual onde deveriam constar todos os procedimentos e raciocínios realizados.

Nesta tarefa pretendia-se que fosse investigado o tipo de polígonos que se poderia obter quando se seccionasse um cubo por um plano e que fosse identificada a posição do plano em relação a algum elemento do cubo (faces, arestas, diagonais-espaciais ou faciais). Para a consecução dos objetivos foram distribuídos, pelos vários grupos, alguns materiais que permitiam a visualização do cubo e dos possíveis polígonos, nomeadamente quatro cubos num material passível de ser seccionado- oásis e utensílio para o corte; esqueletos de cubo construídos em zometool, elásticos para poder visualizar os polígonos e dois cubos em acrílico transparente com diferentes quantidades de líquido colorido que também permitiam a visualização de polígonos.

Na aula seguinte à realização da atividade foram discutidas as secções obtidas através dos cortes realizados no material disponibilizado. A professora entregou uma folha de trabalho com alguns cubos desenhados e em que estavam assinalados três pontos em cada cubo, para que os alunos pudessem aplicar os conhecimentos obtidos na atividade. Como material de apoio a esta aula a professora utilizou uma folha de acetato que continha os mesmos cubos que a folha distribuída aos alunos e onde foram sendo desenhadas as diferentes secções, tendo sempre o cuidado de justificar cada um dos procedimentos realizados.

3ª tarefa: *Função quadrática*

Esta última atividade foi estruturada em quatro fases a desenvolver em aulas de noventa minutos. Para esta atividade, foi previsto a seleção de seis alunos que depois escolheriam os 'parceiros' para formar o grupo. O objetivo de tal constituição prendia-se com o facto de querer garantir um elemento mais ou menos dinâmico em cada um dos grupos e colocar, separadamente, alguns alunos que demonstravam alguma dificuldade na socialização. Dado que, após a comunicação aos alunos dessa intenção, os mesmos solicitaram que os grupos fossem formados tendo em atenção as afinidades existente entre os elementos da turma e que se pretendia que a atividade fosse bem aceite pelos alunos, indo de encontro ao que foi afirmado por Skovsmose (2000) – "A aceitação do convite […] depende, certamente, dos alunos" (p. 21), foi-lhes permitido que constituíssem os grupos segundo os seus interesses. Tal como previsto, os alunos referidos anteriormente acabaram por ficar para o fim e tiveram que formar um grupo. Para evitar constrangimentos não dei relevância à situação e passei rapidamente para a distribuição dos grupos pelas duas salas.

Embora inicialmente tivesse programado a constituição de seis grupos de trabalho apenas se formaram cinco dado que quatro dos alunos da turma faltaram à aula nesse dia. Três destes alunos estavam numa fase de desistência das aulas e outro estava doente.

Para a primeira fase do trabalho foi entregue a cada grupo um documento com a tarefa a realizar, uma cartolina (65x50) onde já estava desenhado um referencial e algumas canetas de cores. Para esta atividade optei por distribuir tarefas diferentes a cada um dos grupos, de modo que cada grupo pudesse fazer a 'sua investigação' e posteriormente houvesse um intercâmbio de informação (segunda fase do trabalho).

Além do material anteriormente referido também foram utilizadas as máquinas de calcular, réguas, esquadros e aristos.

A atividade 'Função Quadrática' foi ramificada nas seguintes tarefas:

<u>Grupo 1</u> - Análise do efeito da variação do parâmetro "$\underline{\boldsymbol{a}}$" nos diversos gráficos da família de funções definidas por $y=\boldsymbol{a}x^2$, com $a\neq 0$, tomando por base o gráfico da função definida por $y=x^2$.

<u>Grupo 2</u>- Análise do efeito da variação do parâmetro "$\underline{\boldsymbol{h}}$" nos diversos gráficos da família de funções definidas por $y=(x-h)^2$, com $h\in IR$, tomando por base o gráfico da função definida por $y=x^2$.

<u>Grupo 3</u>- Análise do efeito da variação do parâmetro "$\underline{\boldsymbol{k}}$" nos diversos gráficos da família de funções definidas por $y=x^2+k$, com $k\in IR$, tomando por base o gráfico da função definida por $y=x^2$.

<u>Grupo 4</u>- Análise do efeito da variação do parâmetro "**<u>a</u>**" nos diversos gráficos da família de funções definidas por $y=\boldsymbol{a}(x+1)(x-3)$, com $a\neq 0$, tomando por base o gráfico da função definida por $y=x^2$.

<u>Grupo 5</u>- Análise do efeito da variação dos parâmetros "$\underline{\alpha}$" e "$\underline{\boldsymbol{\beta}}$" nos diversos gráficos da família de funções definidas por $y=(x+\alpha)(x-\beta)$, tomando por base o gráfico da função definida por $y=x^2$.

Esta primeira fase do trabalho decorreu numa aula de noventa minutos e a segunda fase só ocorreu oito dias depois, dado que para as duas aulas seguintes já estavam agendadas uma aula de esclarecimento de dúvidas e uma aula de teste.

No segundo dia de trabalho foram utilizados os primeiros vinte minutos de aula para a conclusão das tarefas, e os restantes setenta minutos para desenvolver a segunda fase do trabalho- análise, avaliação e classificação pelos alunos/grupos dos trabalhos realizados. Os trabalhos foram colocados em cinco espaços diferentes e cada um dos grupos, após análise e avaliação do trabalho realizado pelos colegas, atribuiu uma classificação.

As restantes fases ocorreram nas duas aulas seguintes sendo que a última fase só ocupou trinta minutos da aula.

3.5 Recolha dos dados

Na primeira atividade - Sólidos Platónicos – foram utilizados apenas dois métodos de recolha de dados: o registo escrito obtido a partir das observações das aulas e os relatórios de grupo. Analisando o 'material' obtido após o desenvolvimento das aulas apercebi-me que esses dois suportes não eram suficientes para a obtenção de matéria satisfatória para análise.

Para a realização da segunda atividade utilizei, o registo escrito obtido a partir da observação das aulas, os relatórios individuais entregues pelos alunos e dois minigravadores. Dado que o número de grupos era superior ao número de suportes áudio tive de 'escolher' dois grupos para a colocação dos gravadores. A escolha dos grupos era um pouco aleatória pois o conhecimento que tinha dos alunos era escasso devido ao pouco tempo de convivência - sensivelmente um mês. Após a audição dos registos conclui que a escolha dos grupos não tinha sido a melhor porque, apesar de em sala de aula os alunos serem extrovertidos, essa característica não se traduziu em 'trabalho/participação efetivo'.

A opção por este tipo de registo áudio também não foi a melhor, visto que numa das cassetes a fita partiu-se logo após à primeira audição, tendo ficado sem esse registo e a segunda cassete não permitiu uma boa audição do desenvolvimento da tarefa, provavelmente por ter sido colocado num local pouco estratégico.

Na terceira atividade foram utilizados os seguintes métodos de recolhas de dados: registo escrito obtido a partir das observações das aulas; gravações áudio de três telemóveis, um iPod e uma câmara de filmar; trabalhos apresentados pelos grupos em suporte papel (cartolina); registos escritos feitos pela professora aquando da apresentação oral dos vários grupos; questão aula envolvendo os conhecimentos adquiridos na exploração da atividade e inquérito aos alunos.

Para esta tarefa decidi não solicitar a elaboração de um relatório porque considerei que os alunos já tinham um conjunto razoável de trabalhos a realizar (apresentação das conclusões por escrito, apresentação oral do trabalho realizado e realização de uma questão aula envolvendo os conhecimentos adquiridos na tarefa). No entanto, ao fazer uma análise 'pós trabalho' entendo que a atividade de exploração e os próprios alunos, teriam a ganhar se se tivesse exigido a realização de um relatório escrito.

Neste estudo serviram de dados:

- registos escritos feitos pela professora, a partir das observações das aulas em que foram trabalhadas as atividades de exploração;
- registos áudio do trabalho de alguns grupos;
- relatórios, individuais e de grupo, das atividades exploratórias desenvolvidas;
- apresentação, em suporte papel, da atividade “Função quadrática”;
- avaliação e classificação realizada pelos diversos grupos, na atividade “Função quadrática”, do trabalho desenvolvido pelos colegas;
- registos escritos feitos pela professora aquando da apresentação oral das conclusões da atividade “Função quadrática”, realizada pelos diversos grupos;
- questão aula envolvendo os conhecimentos adquiridos na exploração da atividade;
- inquérito aos alunos .

Como professora da turma e autora do estudo, a maioria dos registos escritos decorreram da observação das aulas e foram feitos após a realização das tarefas e de uma forma célere, valorizando o que julguei importante, indo de encontro à opinião de Ponte *et al.* (2003), quando afirmam que se torna “difícil ao professor fazer registos selectivos” pelo que vai “anotando apenas o que é realmente importante”.

Os registos áudios também foram transcritos para posterior análise.

Outra fonte de recolha de dados foram os relatórios. Embora inicialmente tivesse sido planeada a entrega de relatório após a realização de cada tarefa isso não ocorreu na última investigação. Nesta investigação optei por não solicitar um relatório dado que na delineação das fases da atividade considerei a apresentação, por grupo, de um trabalho escrito, assim como a realização de uma tarefa de avaliação. Esta tarefa de avaliação tinha como objetivo conhecer o teor dos conhecimentos adquiridos pelos alunos e concluir dos benefícios, para os alunos, deste tipo de estratégias.

Ainda em relação aos relatórios é de referir que os procedimentos e momentos da sua apresentação foram diferentes em ambas as tarefas. Na primeira proposta, S*ólidos Platónicos*, os alunos elaboraram e entregaram, por grupos, os relatórios referentes à investigação realizada. Este primeiro relatório foi realizado no decorrer da segunda aula dedicada à realização da tarefa. Após a avaliação dos relatórios foi dada nova oportunidade aos alunos/grupos para que, após as discussões já realizadas na aula e a leitura das observações e sugestões registadas em cada um dos relatórios, pudessem completar os seus relatórios. Na segunda tarefa foi solicitado que o relatório fosse elaborado individualmente e em casa, e foi dado um prazo de uma semana para a sua entrega. Relativamente a estes relatórios é de referir que seis dos alunos não entregaram o relatório sendo que quatro pertenciam ao mesmo grupo de trabalho.

Na terceira tarefa realizada, utilizaram-se como dados para análise: o trabalho apresentado por cada grupo, os diálogos resultantes aquando do contacto de cada grupo com os trabalhos dos colegas e os registos das apresentações orais.

Os instrumentos 'questão aula' e 'inquérito aos alunos' foram utilizados com o propósito de analisar o desempenho dos alunos, verificar o grau de conhecimento dos mesmos em relação às questões abordadas na terceira tarefa e conhecer a opinião dos alunos relativamente às tarefas realizadas.

4. Análise de dados

4.1 Panorâmica geral

Tal como referido no tópico 3.4, foram desenvolvidas durante o ano letivo, três atividades que envolviam trabalho exploratório. Para a maioria dos alunos este foi o primeiro contacto que tiveram com atividades deste tipo.

Um fator que condicionou a escolha das tarefas, tal como referido por Varandas (2000), foi a pressão do cumprimento do programa, pelo que, as tarefas selecionadas têm uma relação direta com os conteúdos a lecionar.

A escolha dos temas recaiu sobre assuntos que permitiam aos alunos edificar conhecimentos a partir de 'descobertas'. As duas primeiras atividades abordavam tópicos da Geometria- sólidos platónicos e secções, que teriam de ser lecionados no primeiro período. A terceira atividade tinha como objetivo desenvolver um ponto do tema das Funções -análise dos efeitos das alterações nos parâmetros *a, h* e *k* nos gráficos das funções quadráticas definidas por $f(x)=a(x-h)^2+k$ com $a,h,k\in IR$ e $a\neq 0$. Nesta última tarefa decidi estender o estudo às funções definidas por $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$ com $a,\alpha,\beta\in IR$ e $a\neq 0$, analisando também os efeitos dos parâmetros a, α e β nos gráficos das funções quadráticas obtidas.

1ª tarefa: *Sólidos Platónicos*

Dado que esta era a primeira vez que os alunos iriam trabalhar em grupo, optei por formar os grupos de trabalho baseando-se numa estratégia de 'cores', como referido num dos pontos anteriores. Após esta primeira fase de constituição dos grupos, procedeu-se à distribuição dos grupos pelas mesas de trabalho.

A tarefa foi apresentada por escrito não se tendo feito nenhuma apresentação oral da mesma. Foi pedido aos alunos que lessem com atenção o documento entregue e solicitado que o trabalho fosse realmente de grupo e não individual.

Enquanto os alunos liam o documento entregue, fui circulando pelos diversos grupos colocando um conjunto de quinze triângulos equiláteros que seriam necessários para dar início ao trabalho.

Ao circular pelos vários grupos apercebi-me que, de um modo geral, todos os grupos começaram por juntar os triângulos obtendo figuras planas o que desencadeou vários pedidos de esclarecimento por parte dos alunos. Para ultrapassar esta dificuldade foi necessário explicar à turma, as diferenças entre as duas noções que estavam na base da confusão: polígono e poliedro. Após este primeiro esclarecimento surgiu, em alguns grupos, o primeiro sólido platónico- o tetraedro, e noutros, sólidos que não respeitavam a definição de poliedro convexo que constava do documento de trabalho.

Servindo-me destas incorreções, alertei, novamente, para o cuidado que têm de ter na leitura dos enunciados e ainda, para a necessidade de registar o que iam observando e concluindo, de modo a poderem incluir no relatório da atividade todos os procedimentos seguidos assim como as tentativas falhadas.

Aproveitando o facto de que os alunos já tinham percebido o que se pretendia, iniciei a distribuição do polígono regular seguinte: o quadrado.

Um dos obstáculos sentidos nesta aula prendeu-se com a falta de atenção dos alunos na leitura do documento de trabalho, como já referido anteriormente. Um exemplo dessa dificuldade é ilustrado pelo seguinte diálogo, que ocorreu num grupo, após a introdução do quadrado:

> Aluno 1: Professora, obtivemos uma pirâmide…
> Professora: Que tipo de pirâmide é essa?
> Aluno 2: …é uma pirâmide…
> Professora: Há vários tipos de pirâmides…
> Aluno 1: Ah! É uma pirâmide de base quadrada.
> Professora: Sim, é uma pirâmide quadrangular. E esse sólido será um sólido platónico?...
> Aluno 3: Sólido platónico?...
> Professora: Sim. Leiam, com atenção o documento de trabalho.
> Aluno 1: As faces são polígonos regulares….mas não são iguais…
> Professora: Pois não. Portanto não podemos 'misturar' polígonos. Reparem ainda noutro pormenor: '…em todos os vértices concorrem o mesmo número de arestas'. Percebem o que isso quer dizer?
> Aluno 3: Sim. Por exemplo neste, em cada vértice temos três arestas. [mostra tetraedro].
> Professora: Então, ainda com os triângulos, analisem todas as possibilidades de construção de sólidos, não esquecendo de registar todo este trabalho que acabaram de fazer.

Esta dificuldade foi evidenciada por vários grupos.

Ultrapassada esta primeira etapa foram surgindo octaedros e 'ensaios' de icosaedros. Dado que o número de triângulos não era suficiente para a construção de um icosaedro, alguns alunos ‘requisitaram’ triângulos de outros grupos de trabalho e construíram o icosaedro. Essa construção foi aproveitada para mostrar a toda a turma o sólido, chamando a atenção para a verificação das condições indicadas no enunciado da tarefa (todas as faces são polígonos regulares iguais e em todos os vértices concorrem o mesmo número de arestas). Estas construções foram utilizadas na segunda aula para verificar a Relação de Euler.

Embora todos os grupos julgassem que tinham concluído a análise da construção de sólidos utilizando triângulos, em nenhum dos grupos foi analisada a possibilidade de juntar seis triângulos num vértice. Foi pois, necessário, chamar a atenção para essa situação:

> Professora: Antes de passarem aos quadrados, já analisaram todas a possibilidades com triângulos?
> Aluno 1: Não há mais nenhum sólido cujas fases sejam triângulos..
> Professora: E porquê?
> Aluno 1: …porque não dá…..
> Professora: Não dá, como?
> Aluno 2: Fica plano. Isto é, não é um sólido.
> Professora: E porque será que neste caso não dá?
> Aluno 1: ..?
> Professora: Sim. Porquê é que nos outros deu para formar um sólido e nesse não dá? Pensem na amplitude dos ângulos em torno de um vértice…
> Aluno 2: Já sei! O ângulo interno de um triângulo é 60º, logo os seis junto dá 360º.
> Professora: E?....
> Aluno 2: Não fica espaço livre para formar um sólido…
> Professora: E nas outras situações ficava?
> Aluno1: Sim. Por exemplo, no caso de juntarmos cinco triângulos, temos 5x60º, isto é, 300º logo fica um espaço de 60º que dá para ‘fechar’ o sólido.
> Professora: Certo. Agora não esqueçam de colocar todo esse raciocínio no vosso relatório.

Com este ‘debate’, que ocorreu em todos os grupos, quis levar os alunos a se aperceberem da necessidade de analisar todas as situações possíveis e de justificar as suas conjeturas.

A construção do cubo e a justificação de que não existem mais sólidos platónicos com esse tipo de face surgiu rapidamente.

Nas construções com pentágonos surgiu novamente a dificuldade de justificar a impossibilidade de construção no caso de termos mais do que três pentágonos. Alguns alunos lembravam-se da fórmula da amplitude dos ângulos internos de um polígono e justificaram a impossibilidade da construção utilizando o mesmo argumento que foi utilizado aquando da justificação para os triângulos. Para os alunos que não se recordavam da fórmula, e por tal julgavam não conseguir determinar esse ângulo, foi explicado como determinar o ângulo utilizando conhecimentos adquiridos em anos anteriores - decomposição do pentágono regular em cinco triângulo isósceles.

Na construção com hexágonos surgiram pelo menos três modos diferentes de determinar o ângulo interno, necessário à justificação:

- através da fórmula de determinação da amplitude do ângulo interno de um polígono regular;
- através da decomposição do hexágono em triângulos e determinação da amplitude do ângulo interno desses triângulos;
- através da decomposição do hexágono em triângulos e conclusão de que esses triângulos eram equiláteros, pelo que a amplitude do ângulo interno do hexágono teria de ser 120º.

À medida que os grupos iam concluindo o estudo com os hexágonos lancei uma última questão: existirá algum sólido constituído só por heptágonos? Os vários grupos foram muito perentórios na afirmação da impossibilidade de tal construção, baseando-se no facto de que a medida do ângulo interno do heptágono é superior ao do hexágono pelo que não seria possível 'juntar' três heptágonos no mesmo vértice. A veracidade desta afirmação foi rapidamente 'provada' com recurso à máquina de calcular.

Na aula seguinte concluiu-se a tarefa com a escrita dos relatórios. Os cinco sólidos construídos na aula anterior foram utilizados para relembrar uma relação já estudada no 3º ciclo: a Relação de Euler. Para a verificação desta relação os alunos tiveram de fazer um pequeno estudo do número de faces, vértices e arestas de cada um dos sólidos estudados.

2ª tarefa: *Que polígonos há num cubo?*

Esta segunda atividade surgiu uma semana após a primeira. Para esta tarefa utilizaram-se materiais variados: cubos de oásis (tipo de esponja utilizada nos arranjos florais), esqueletos de cubos construídos em zometool, elásticos coloridos e ainda cubos em acrílico com diferentes quantidades de líquido colorido.

Embora tenha sido sugerido que, para esta tarefa, cada aluno retirasse um número (entre 1 e 6) de um saco, de forma a poder constituir os grupos, os alunos propuseram que se mantivesse a constituição dos grupos da atividade anterior. A proposta foi aceite e foram reconstituídos os seis grupos de trabalho que se distribuíram por seis mesas. Em cada mesa foram colocados quatro cubos de oásis, um instrumento para corte e um esqueleto de cubo acompanhado de vários elásticos coloridos. Foi pedido aos grupos que experimentassem vários tipos de corte, aproveitando ao máximo o material distribuído, com o objetivo de averiguar que polígonos se obtêm quando se secciona um cubo.

Dada a novidade do material a primeira fase do trabalho foi de descoberta e de manuseamento do mesmo. Após este primeiro contacto, os alunos iniciaram a leitura da tarefa.

Tal como na primeira tarefa, surgiram as dificuldades de "leitura" do que se pretendia que fosse feito. Para ajudar a transpor esse obstáculo, principiei por explicar o que ocorre quando se secciona um sólido por um plano, tendo esta informação conduzido à necessidade de distinguir o polígono que se obtém quando se interseta um cubo por um plano, dos sólidos resultantes dessa interseção.

> Professora: Vamos lá ler com atenção, a primeira frase que está nesse documento de trabalho…Então o que é uma secção?
> Aluno 1: ...?
> Professora: Imaginem uma laranja. Agora suponham que com uma faca, cortam paralelamente ao 'equador' (da laranja). O que obtêm?
> Aluno 1: Dois sólidos.
> Professora: Sim... Mas o que nos interessa saber é qual a figura geométrica que resulta desse 'encontro entre a laranja e a faca'(a professora faz um esboço, no quadro, da laranja e do respetivo corte).
> Aluno 2: É uma circunferência.
> Professora: Uma circunferência?
> Aluno 1: Não! É um círculo.
> Professora: Assim está melhor. Então, neste caso, a secção é este círculo. E para obter uma circunferência que tipo de objeto teríamos de seccionar?
> Aluno 3: hum… uma bola de ping-pong?
> Professora: Muito bem! E será que também podemos obter círculos ou circunferências com os materiais que têm nas mesas?
> Aluno 3: Não. Neste caso devem ser quadrados….
> Professora: Então investiguem.

Ultrapassada esta primeira dificuldade os alunos iniciaram o seu trabalho de investigação. À medida que me deslocava entre os grupos apercebi-me que estes passavam rapidamente de uma questão para outra, preocupando-se apenas com o tipo de polígono encontrado e não como o modo de o obter. Aproveitando uma dúvida levantada por um dos alunos, lancei para a turma, questões que tinham como objetivo fazer com que os alunos encontrassem não só os polígonos mas também justificações, válidas, para a obtenção desses polígonos:

> Aluno 1: Professora, já tenho os três triângulos, e agora?
> Professora: Os três triângulos?
> Aluno 1: Sim. Um com os lados iguais, um com dois lados iguais e outro com os lados todos diferentes.
> Professora: Que nomes têm esses triângulos?
> Aluno 2: Equilátero, isósceles e ….não me lembro do outro.
> Professora: Escaleno. E as posições do plano?
> Aluno 1: Posições?...
> Professora: Para obtermos um triângulo equilátero, por exemplo, como temos de posicionar o plano de corte?
> Aluno 1: Tem de ser assim…[o aluno indica uma posição oblíqua que parte de dois vértices opostos).
> Professora: Como 'descreverias' essa posição?
> Aluno 2: …contendo uma diagonal facial?...
> Professora: Só isso chegará? Experimenta.
> Aluno 3: Não. O plano tem de passar cá em baixo (o aluno aponta para outro vértice do cubo).
> Aluno 1: Então o plano tem de conter uma diagonal facial e um vértice da base.
> Professora: Atenção que não é um vértice qualquer. Quando escreverem os vossos relatórios têm de ser claros. Podem acompanhar com uma figura. E têm a certeza que o triângulo é equilátero? Porquê?
> Aluno 3: Porque os lados são as diagonais faciais.
> Professora: Certo. Todas essas justificações devem fazer parte do vosso trabalho. Mas ainda voltando ao triângulo equilátero…
> Aluno2: Ainda não acabou?!
> Professora: Não haverá outras possibilidades? Terá sempre de conter uma diagonal facial? Têm de analisar e justificar todas a possibilidades.

O objetivo deste diálogo era fazer com que os alunos entendessem que teriam de explorar todas as possibilidades e que, além de indicar uma conjetura teriam de tentar justifica-la.

Embora esta discussão tenha proporcionado o surgimento de diferentes 'modos' de obter triângulos equiláteros, que se tratavam apenas de casos particulares,

- plano passa por tês vértices, não consecutivos;
- plano passa nos pontos médios de três faces 'adjacentes';
- plano passa pelos pontos médios de três arestas consecutivas;

os alunos não chegaram a referir um 'processo universal' que contivesse todos os modos referidos. Ficaram pelo caso que analisaram e não o generalizaram.

É de referir que apesar de ter ocorrido muitos diálogos semelhantes ao narrado, a generalidade dos relatórios não traduziram os raciocínios e argumentos apresentados pelos alunos no desenrolar da atividade.

Para ajudar na visualização das secções, fiz circular pelos grupos os dois cubos em acrílico, de modo que os alunos pudessem concluir da validade das suas conjeturas, em particular no que se referia às secções triangulares e hexagonais.

Das questões propostas na tarefa, duas houve que levantaram mais dúvidas: a da justificação de que não era possível obter triângulos retângulos e a de que as secções pentagonais não eram regulares. Alguns alunos ainda tentaram justificar que era possível obter um triângulo retângulo baseando-se no facto de dois dos lados do triângulo estarem contidos em duas faces perpendiculares. Para mostrar a falsidade da afirmação anterior utilizei o esqueleto do cubo e um elástico para que o aluno pudesse concluir que, embora as faces que continham os lados do triângulo fossem perpendiculares, os lados não o eram. A questão do pentágono regular ficou em aberto até ao segundo dia de trabalho.

Na generalidade dos grupos foi abordada e justificada, a questão da impossibilidade de obter seções com mais de seis lados, tendo-se considerado o caso particular do heptágono.

Uma das finalidades desta atividade era que os alunos percebessem o que é uma secção e quais os princípios que devem ter presentes aquando do seu traçado. Para a verificação deste objetivo, a professora distribuiu na segunda aula, um documento com alguns cubos onde se pretendia que os alunos desenhassem a secção que ocorria quando intersectávamos o cubo por um plano que passava em três pontos já assinalados.

Embora a maioria dos alunos conseguisse desenhar corretamente as primeiras secções, alguns alunos manifestaram dificuldades no traçado das mesmas. Para ilustrar as secções pretendidas utilizei algum material da aula anterior e aproveitei para rever as ‘regras’ a ter em conta no traçado de secções.

A explicação do modo de traçar as diferentes secções foi realizada com recurso ao retroprojetor e a um acetato que continha os mesmo cubos que os existentes no documento entregue aos alunos.

À medida que os alunos iam concluindo cada secção fui desenhando a secção, no respetivo cubo da folha de acetato, chamando a atenção para a questão do rigor matemático (cortes em planos paralelos originam segmentos paralelos) e do rigor geométrico (utilização de régua e esquadro para o traçado de segmentos paralelos).

Um dos obstáculos encontrados pelos alunos neste tipo de exercício prendeu-se com a dificuldade na visualização espacial. Ao desenhar a secção, os alunos uniam corretamente os pontos que se encontravam sobre a mesma face mas falhavam quando se tratava de 'imaginar' os restantes segmentos da secção. O apoio visual revelou-se muito importante nesta fase.

Ainda nesta aula e com o propósito de ampliar os conhecimentos adquiridos, foram desenhadas secções que resultavam de intersecções de planos que continham dois pontos que se encontravam sobre o cubo e um terceiro no seu exterior.

Para a conclusão desta atividade foi solicitado aos alunos que entregassem, na semana seguinte à realização da atividade, um relatório individual que traduzisse o trabalho realizado na sala de aula.

3ª tarefa: *Função quadrática*

A estratégia utilizada para a constituição dos grupos, tal como já foi referindo anteriormente, foi da responsabilidade dos alunos.

Dado que esta terceira tarefa surgiu quase no fim do segundo período e os alunos já tinham desenvolvidos duas tarefas deste tipo, não se fizeram sentir as dificuldades experimentadas nas tarefas anteriores, em relação à leitura e à interpretação do enunciado.

Para esta exploração dividi a atividade em cinco tarefas como se indica no tópico 3.4.

Após a leitura da respetiva tarefa cada grupo começou por analisar alguns casos particulares. Dado que todos os alunos tinham máquina de calcular, em alguns grupos decidiram analisar os casos separadamente, isto é, cada aluno ficou com um caso particular. Ao passar junto dos grupos apercebi-me desse facto e fui referindo a necessidade de todos os elementos do grupo analisarem em simultâneo as mesmas situações, para depois poderem tirar conclusões.

> Professora: O trabalho não é individual, é em grupo….
> Aluno 1: Nós sabemos professora. Cada um está a dar um valor a α e a β e a tirar conclusões.

> Professora: Convém que todos visualizem os mesmos exemplos. Como é que podes comparar as tuas conclusões com os do teu colega se ele está, por exemplo, a trabalhar numa janela diferente da tua?
> Aluno 2: Pois…
> Aluno 1: Já vamos colocar todos os ‘exemplos’.

Tal como referido anteriormente, a primeira fase do trabalho desenvolveu-se numa aula de noventa minutos. Para permitir que cada grupo tivesse um espaço de trabalho mais amplo, que lhe possibilitasse fazer a análise da sua tarefa sem intromissão das análises dos restantes grupos, distribui os grupos por duas salas e nesses noventa minutos desloquei-me entre as mesmas.

Embora tivesse previsto que os noventa minutos seriam razoáveis para a execução da primeira fase, constatei posteriormente, que para alguns grupos esse tempo não tinha sido suficiente, tendo inconscientemente impedido o aprofundamento das suas investigações.

Um dos grupos que mereceu mais atenção foi o que resultou da junção dos últimos elementos que tinham ficado sem grupo. Embora estes alunos tivessem características muito específicas, o grupo funcionou muito bem e apresentaram um bom desenvolvimento da tarefa proposta.

Após as fases de análise e conjetura os alunos passaram ao registo das suas conclusões na folha de cartolina que tinha sido distribuída. Nesta etapa surgiram algumas questões que se prendiam com o rigor na marcação dos pontos e no esboço da curva obtida. Em alguns grupos os alunos recorreram ao aristo para a marcação dos pontos. Embora tivesse referido aos vários grupos da necessidade de registar numa tabela os pontos marcados, dois dos grupos não o fizeram e um apenas registou as tabelas, não tendo deixado escrita as conclusões a que tinham chegado.

Na segunda aula permiti que os grupos que não tinham terminado o registo das conclusões na cartolina, o fizessem nos primeiros vinte minutos de aula. Dado que o desenvolvimento desta tarefa ocuparia várias aulas, contactei os três alunos que tinham faltado à primeira aula e atribuiu-lhes uma mesma tarefa que seria desenvolvida em casa e apresentada numa cartolina na segunda aula dedicada à tarefa. Nesta segunda aula apresentaram-se apenas dois desses alunos.

Para a segunda fase desta atividade, distribui os trabalhos por seis mesas. Cada grupo teria de analisar o trabalho realizado pelos colegas, perceber as conclusões retiradas, avaliar a clareza da exposição, a adequação dos exemplos apresentados e a precisão das conclusões.

Ao 'vaguear' pelas mesas apercebi-me que os alunos debatiam as informações constantes nas cartolinas e explicavam essas conclusões aos elementos do grupo que apresentavam mais dificuldades na compreensão das mesmas.

A classificação dos trabalhos também decorreu de forma organizada.

A terceira fase do trabalho ocorreu na aula seguinte. Os grupos tiveram quinze minutos para acertar os últimos pormenores antes da exposição oral. Nesta exposição os grupos apresentaram e justificaram as suas conclusões. Os alunos que estavam a presenciar as apresentações levantaram algumas questões que se prendiam com o 'porquê' de ocorrer determinada propriedade, 'obrigando' os alunos que apresentavam o trabalho a mostrar que realmente tinham analisado a questão ou que pelo menos eram capazes de esclarecer a dúvida do colega.

Como o objetivo de chegar à demonstração matemática de algumas conjeturas que tinham sido apresentadas mas não demonstradas levantei algumas questões aos alunos que faziam a apresentação oral. Esta aula decorreu de uma forma dinâmica.

Na aula seguinte os alunos responderam a um conjunto de questões que tinha como objetivo perceber qual o nível de conhecimentos atingido pelos alunos.

4.2 Análise dos materiais recolhidos na investigação

Para melhor análise dos dados agrupei-os em tópicos iniciando com a identificação dos processos utilizados pelos alunos e pelos inquéritos por estes respondidos, seguindo-se os vários instrumentos utilizados ao longo deste trabalho (relatórios trabalhos em cartolina, apresentações orais e questão aula). Embora o instrumento *inquérito* tenha sido aplicado só no fim do ano letivo, julguei que seria importante coloca-lo como segundo tópico de análise visto poder ajudar a perceber como os alunos veem este tipo de atividades.

Primeiro tópico de análise: *Identificação dos processos utilizados pelos alunos*

Tal como Fonseca (2000) tinha identificado no seu trabalho, os processos mais utilizados pelos alunos no desenvolvimento das tarefas foram a especialização, a procura de regularidades, a formulação de conjeturas, a generalização, a verificação, a justificação e a prova. Embora nem todos os processos estivessem presentes em todas as atividades desenvolvidas, houve quatro que foram utilizados nas três atividades: a especialização, a formulação de conjeturas, a generalização e a justificação, como é ilustrado no quadro seguinte:

Processos	1ª Tarefa	2ª Tarefa	3ª Tarefa
Especialização	✓	✓	✓
Procura de regularidades			✓
Formulação de conjeturas	✓	✓	✓
Generalização	✓	✓	✓
Verificação	✓		✓
Justificação	✓	✓	✓
Prova	✓		✓

Quadro 4 - Processos utilizados pelos alunos

Ao analisar os registos escritos após o desenvolvimento das tarefas e os relatórios apresentados pelos grupos, consegui identificar cada um dos processos referidos anteriormente.

Iniciemos pela especialização. Num dos grupos discutia-se um pormenor que numa aula 'normal' provavelmente não teria surgido:

> (Os alunos analisavam as funções definidas por expressões do tipo $y=\boldsymbol{a}(x+1)(x-3)$ à procura de características/propriedades que pudessem estudar).
>
> Aluno 1: Reparem numa coisa. Sempre que multiplicamos o valor de *a* por -4 obtemos o mínimo (ou máximo).
> Aluno 2: Como é isso?
> Aluno 1: Repara. A expressão da função é $y=\boldsymbol{a}(x+1)(x-3)$. Se fizermos $a=6$ obtemos 6x(-4) = -24. Agora repara no gráfico da função. O gráfico tem mínimo -24. Agora experimentem com $a=-3$. -3x(-4)=12 e o gráfico tem máximo igual a 12.
> Aluno 3: Boa!
> Aluno 2: Então para obter o máximo ou o mínimo destas funções multiplicamos o valor de *a* por -4.

Nesta conversa está bem patente o processo de especialização utilizado pelos alunos e ainda os processos de formulação de conjeturas e de generalização.

Infelizmente os alunos não avançaram para uma justificação ou prova da conjetura.

Num outro grupo discutia-se outra propriedade que também não é usual desenvolver na sala de aula:

(Este alunos analisavam as funções definidas por expressões do tipo $y=(x+\alpha)(x-\beta)$)
Aluno 1: Olha para isto: o β-α vai ter a mesma imagem que o zero . Repara. Por exemplo se $\beta=2$ e $\alpha=1$. 2-1=1 . O 1 e o 0 vão ter a mesma imagem.
Aluno 2: É mesmo!
Aluno 1: Agora $\beta=4$ e $\alpha=1$. 4-1=3 . O 3 e o 0 têm uma mesma imagem.
Aluno 3: Pois é….

A prova desta propriedade também não foi abordada. No entanto, a mesma propriedade surgiu novamente mas com outra 'roupagem':

Aluno 1: Eu já percebi uma cena….
Aluno 2: O quê?
Aluno 1: O α multiplicado pelo -β dá o *c* (o aluno desenvolveu o produto e escreveu a expressão como um polinómio de 2º grau: $x^2- (\alpha-\beta)x -\alpha\beta$)
Aluno 2: Qual *c*?
Aluno 1: O *c* da fórmula resolvente. Repara nesta expressão: $y= x^2- (\alpha-\beta)x -\alpha\beta$
Aluno 3: É verdade…. Mas o que é o *c* graficamente?
Aluno 1: Será que a ordenada na origem?
Aluno 2: Experimenta aí…
Aluno 3: É mesmo! É a ordenada na origem.
Aluno 2: Vamos manter o mesmo valor de α e variar o β para ver o que acontece.
Aluno 3: Eu acabei de fazer com os números 2e 3 e deu um número búe de grande!?...
Aluno 1: É porque tu utilizaste o valor 3 para o ***a.***
Aluno 3: Pois foi…

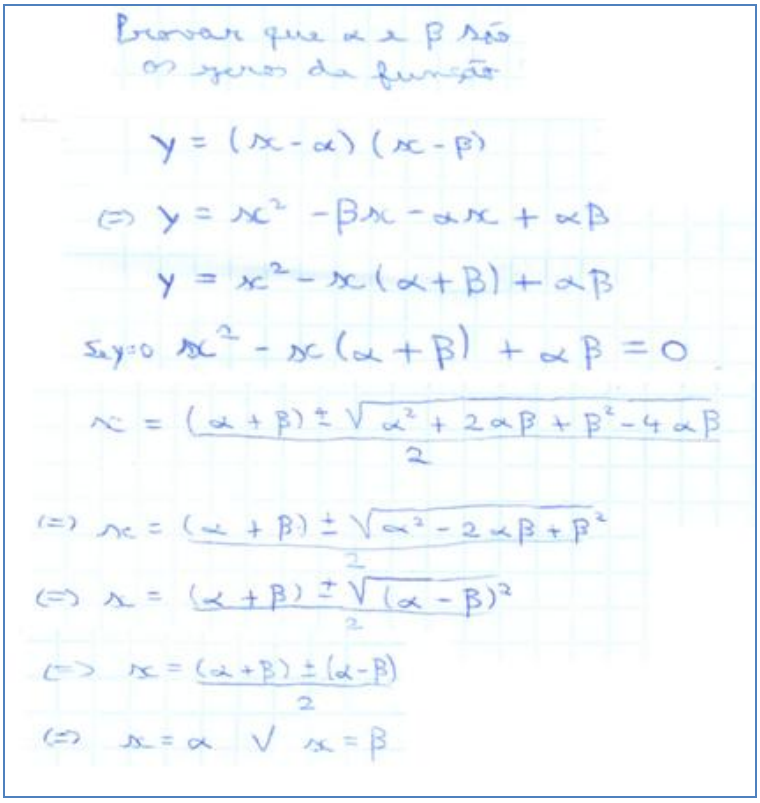
Embora não se tenha demostrado a propriedade no decorrer do trabalho, os alunos tiveram oportunidade de prova-la aquando da sua apresentação oral, isto porque, e utilizando uma expressão de Burton (1984), tiveram de convencer um "inimigo" externo.

(Apresentação oral do trabalho de grupo)

Aluno 1: Quando a expressão da função quadrática é da forma $y=(x+\alpha)(x-\beta)$, podemos obter a ordenada do ponto de intersecção do gráfico com o eixo Oy calculando o valor de -αβ.
Aluno 2: Como sabes que é esse número?
Aluno 1: Experimentámos com vários casos.

Professora: Pois. O que vocês fizeram foi a verificação da conjetura em casos particulares… mas é necessário mostrar que ela está correta. É necessário provar.
Aluno 1: … não sei fazer….
Professora: Analisa com atenção a tua afirmação.
Aluno 1: A parábola intersecta o eixo dos yy em $-\alpha\beta$.
Professora: E esse ponto tem coordenadas….
Aluno 1: $(0, -\alpha\beta)$.
Professora: Então sabes a abcissa…
Aluno 1: Sim…
Professora: E tens a expressão da função…
Aluno 1: Sim…Ah! Como o x é zero então substituindo na expressão obtemos $-\alpha\beta$!
Professora: Acabaste de provar a tua conjetura.

A justificação/prova de uma outra conjetura que decorreu do trabalho de exploração deste grupo mas que não foi provada, prende-se com a demonstração de que os zeros das funções definidas por $y=(x+\alpha)(x-\beta)$ são α e β. Dado que estes alunos já tinham demostrado a conjetura anterior e os colegas não levantaram 'dúvidas' aquando da apresentação desta nova conjetura, decidi não solicitar mais nenhuma prova naquele momento mas guardei-a para a colocar na aula seguinte ao referido grupo. A tentativa da demonstração solicitada, surgiu dias depois e com algumas gralhas referentes a sinais. Após ter apontado os erros que estavam a impedir a continuação da prova da conjetura, o aluno entregou a demonstração que é apresentada de seguida.



Provar que α e β são os zeros da função

$$y = (x-\alpha)(x-\beta)$$

$$\Leftrightarrow y = x^2 - \beta x - \alpha x + \alpha\beta$$

$$y = x^2 - x(\alpha+\beta) + \alpha\beta$$

$$\text{Se } y=0 \quad x^2 - x(\alpha+\beta) + \alpha\beta = 0$$

$$x = \frac{(\alpha+\beta) \pm \sqrt{\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - 4\alpha\beta}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{(\alpha+\beta) \pm \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{(\alpha+\beta) \pm \sqrt{(\alpha-\beta)^2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{(\alpha+\beta) \pm (\alpha-\beta)}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \alpha \vee x = \beta$$

Figura 3 - Demonstração de que os zeros das funções definidas por $y=(x+\alpha)(x-\beta)$ são α e β

Embora a demonstração não esteja cem por cento correta, matematicamente falando, porque o aluno teria de considerar o módulo do valor que se encontrava no radicando e fazer a sua análise, achei que era importante apresentá-la dado que se trata de uma demonstração que envolve alguma ‘habilidade matemática’ e que foi apresentada por um aluno do décimo ano de escolaridade.

Aquando da clarificação dos pontos necessários à continuação do processo de demonstração da propriedade, informei o aluno da possibilidade de ser utilizado um processo mais rápido de demonstração: a lei do anulamento do produto. Quando o aluno entregou a demonstração anterior entregou também esta:

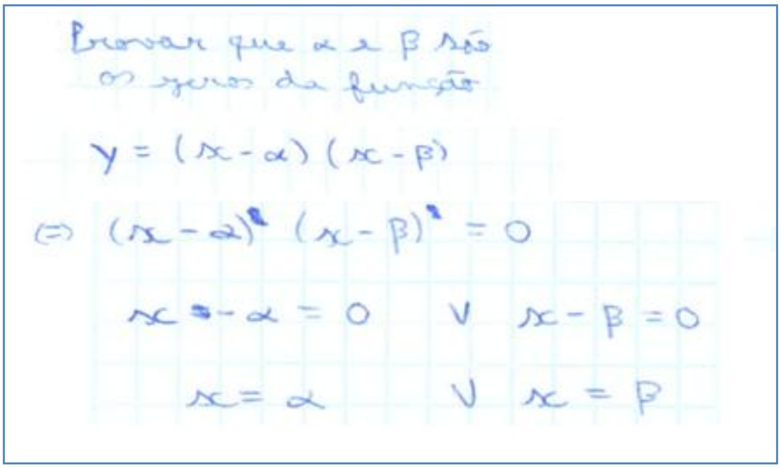


Figura 4 - Outra demonstração de que os zeros das funções definidas por $y=(x+\alpha)(x-\beta)$ são α e β

Embora em alguns casos os alunos não tenham justificado as suas conjeturas, outros houve em que a generalidade dos alunos justificou as suas conclusões. O trecho apresentado de seguida foi retirado de um relatório referente à primeira atividade: Sólidos Platónicos. Os alunos analisavam as possibilidades de construção de sólidos utilizando triângulos equiláteros e pentágonos. O que está patente nestes pequenos fragmentos é a utilização por parte dos alunos, do processo de justificação da conjetura elaborada.

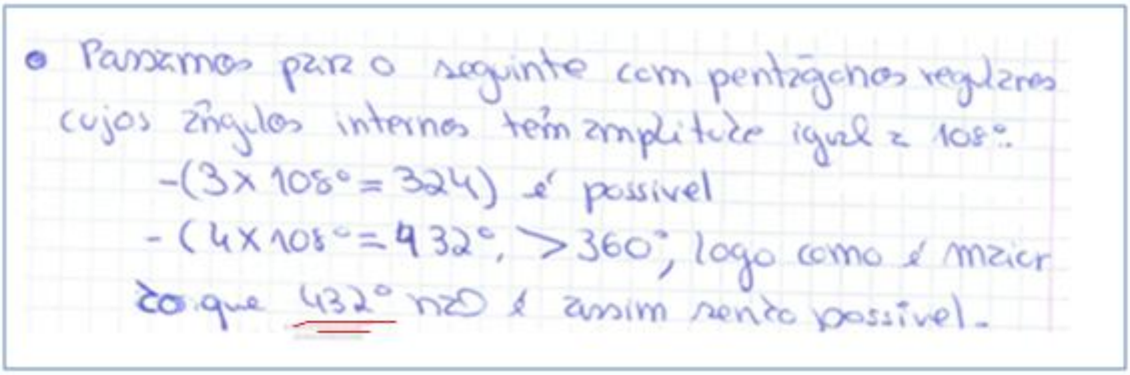


Figura 5 - Justificação da possibilidade/impossibilidade de construção de um poliedro regular quando o número de faces pentagonais que concorrem em cada vértice é superior ou igual a três

Com 6 ou mais faces por vértice seria impossível visto que iriam ter a soma dos ângulos internos num vértice igual ou superior a 360º

$$60^{\circ} \times 6 = 360^{\circ}$$

$$60 \times 7 = 420^{\circ}$$

…

Figura 6 - Justificação da impossibilidade de construção de um poliedro regular em que o número de faces triangulares que concorrem em cada vértice é superior ou igual a seis

A procura de regularidades e a verificação também foram processos utilizados:

Aluno 1: Olha a expressão é esta $y= a(x+1)(x-3)$…
Aluno 2: Olha lá, qual era aquela cena..? na equação da reta, não na … circunferência agente descobria o centro aqui. Se fosse '+' o número era negativo….
Aluno 3: Ah, já sei do que estás a falar. Se fosse -1, 2 então ficava $(x+1)^2+(x-2)^2$. Trocava-se os números.
Aluno 1: Então neste caso descobre-se o zero… é o zero! Vê. Os zeros são -1 e 3.
Aluno 3: Experimenta com outro *a*.
Aluno 1: Também dá! Vou experimentar mais um. … Sim, está correto.
Aluno 2: Então como conclusão podemos dizer que os zeros da função são o -1 e o 3… para qualquer *a*.

Embora nesta última 'conversa' esteja patente a falta de rigor matemático nas afirmações realizadas é de notar a capacidade de relacionamento de assuntos que permitiu a estes alunos obter conclusões corretas.

Segundo tópico de análise: I*nquérito*

Dado que uma das questões colocadas neste trabalho prende-se com o modo como os alunos agem perante este tipo de atividade, considerei ser importante começar por analisar o inquérito respondido pelos alunos, de modo a perceber qual o 'sentimento' que os mesmos têm em relação às atividades desenvolvidas. Assim sendo, iniciei a análise pelas questões que envolvem as noções de 'grupo' e de 'atividades exploratórias'.

Numa primeira fase quis saber se os alunos gostam de trabalhar em grupo e se acham esse método de trabalho favorável à aquisição de conhecimentos. No inquérito distribuído no fim do ano letivo, constava a seguinte questão:

Na tua opinião, o trabalho em grupo é mais "rico" em termos de aquisição de conhecimentos do que o trabalho individual? Justifica.

Figura 7 - Quinta questão do inquérito

Na generalidade dos casos os alunos afirmaram gostar de trabalhar em grupo, em particular os alunos que na realização de trabalhos individuais são considerados mais fracos.

Das respostas dadas pelos alunos selecionei três que me parecem apresentar argumentos diferentes para justificar essa predileção. Os argumentos encontrados foram: empenho geral, interesse de todos os elementos do grupo e descoberta de novos métodos de trabalho.

Empenho de todos os elementos do grupo. Nas atividades desenvolvidas na sala de aula notou-se, na generalidade dos grupos, empenho em perceber o que se pretendia com a atividade.

Sim, uma vez que é possível partilhar as tarefas pelo grupo, é possível que todos os elementos do grupo sejam empenhados no trabalho.

Figura 8 - Opinião de um aluno relativamente à questão colocada na figura 7- empenho

Nos casos em que algum aluno não estava a acompanhar o raciocínio era feita uma paragem, de modo que todos estivessem a acompanhar o que se estava a fazer. Um exemplo disso é traduzido no seguinte trecho:

(Conversa no grupo a propósito do significado do *k* na expressão $y=x^2+k$)

Aluno 1: O vértice como está no eixo Oy é … como é que eu ei de explicar isso? Por exemplo, o valor de k que nos dão é o lugar onde o vértice está no eixo dos yy.
Aluno 2: Já tinha notado isso.
Óscar: ?...
Aluno2: Estás a perceber Óscar? Não, não estás…
Aluno1: O valor de k é a ordenada no vértice.
Óscar: Já percebi!

Interesse em descobrir. As atividade levaram os alunos a ter gosto pelo trabalho que estavam a desenvolver e esse ‘gosto’ leva-os a ‘aprender melhor’.

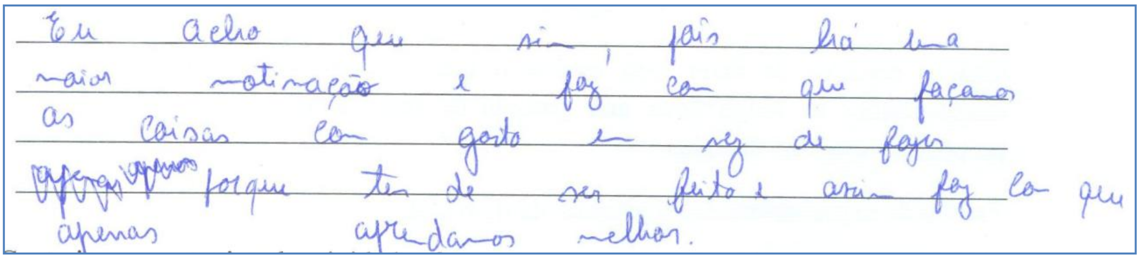

Eu acho que sim, pois há uma maior motivação e faz com que façamos as coisas com gosto e vez de fazer ~~aprendemos~~ porque tem de ser feito e assim faz com que apenas aprendamos melhor.

Figura 9 - Opinião de um aluno relativamente à questão colocada na figura 7- maior motivação

Descoberta de novos métodos de trabalho. Observar o modo como os colegas ‘pensam’, como ‘pegam’ no problema foi uma mais-valia destas atividades. A aprendizagem fez-se de uma forma natural.

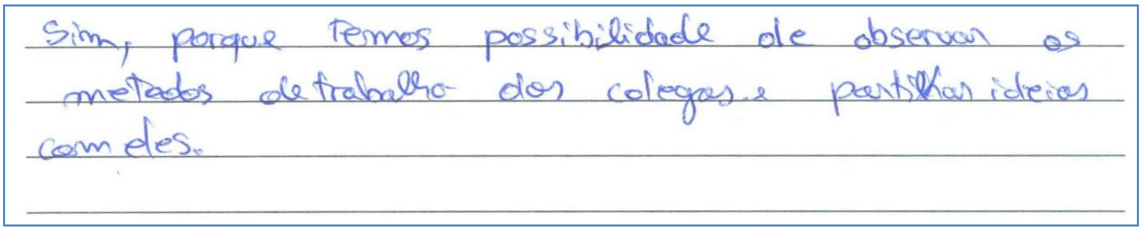

Sim, porque temos possibilidade de observar os metodos de trabalho dos colegas e partilhar ideias com eles.

Figura 10 - Opinião de um aluno relativamente à questão colocada na figura 7- novos métodos

No entanto há também os casos em que os alunos preferem trabalhar sozinhos, não por uma questão de ostracismo mas porque nessa situação o grau de concentração é maior.

Por vezes não pois há uma discordância entre os elementos.

Não. Penso que o trabalho individual permite uma maior concentração e desta forma uma melhor aquisição dos conhecimentos.

Figura 11 - Opinião de alunos relativamente à questão colocada na figura 7- preferência por trabalhos individuais

Relativamente ao tipo de atividades abordadas – atividades exploratórias- foi colocada a seguinte questão:

Na tua opinião, este tipo de tarefas (de exploração) trouxe mais benefícios para a tua aprendizagem comparativamente à aprendizagem que terias se os assuntos fossem abordados da forma habitual? Porquê?

Figura 12 - Quarta questão do inquérito

Embora as respostas dadas pelos alunos fossem variadas elegi quatro que me parecem apontar para argumentações distintas: ‘as atividades deste tipo são desafiantes’, ‘são atividades que ligam a teoria à prática’ e ainda ‘são atividades que permitem ver e sentir os assuntos’.

Atividades vistas como *desafios*:

Sim, porque ~~em vez da~~ a matéria ~~ser dada pela professora como é habitual~~, sendo pesquisada pelos alunos torna maior o desafio de percebê-la e de avaliar a autonomia do aluno na sua aprendizagem.

Figura 13 - Opinião de um aluno relativamente à questão colocada na figura 12 – atividades desafiadoras

Atividades que ligam a *teoria à prática*. Esta ligação 'imediata' e 'palpável' leva a que o entendimento do aluno em relação ao assunto em estudo se faça mais facilmente.

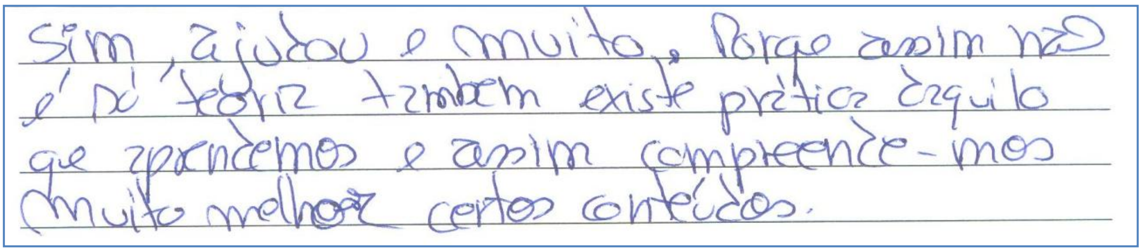
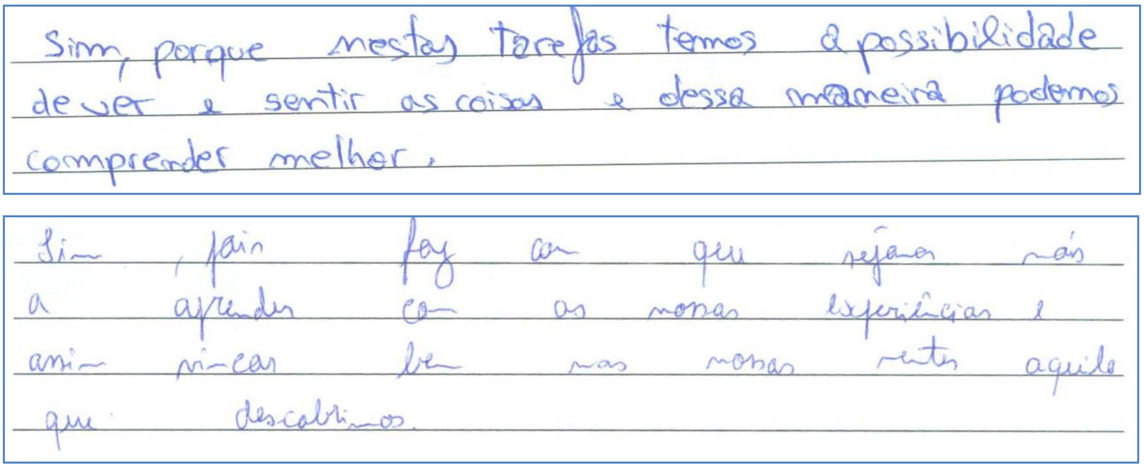

Sim, ajudou e muito. Porque assim não é só teoria também existe prática àquilo que aprendemos e assim compreende-mos muito melhor certos conteúdos.

Figura 14 - Opinião de um aluno relativamente à questão colocada na figura 12 – atividades teórico-práticas

Atividades que permitem *ver e sentir* os assuntos. Esta característica apontada por alguns alunos resulta do facto destas atividades serem relativamente abertas, o que possibilita um leque de descobertas, por parte dos alunos, que entusiasma mesmo aqueles que dizem não gostar da Matemática.


Sim, porque nestas tarefas temos a possibilidade de ver e sentir as coisas e dessa maneira podemos compreender melhor.

Sim, pois faz com que sejamos nós a aprender com as nossas experiências e assim ficam bem nas nossas mentes aquilo que descobrimos.

Figura 15 - Opinião de alunos relativamente à questão colocada na figura 12 – aprender com a experiência

Contudo, porque somos todos diferentes, também surgiram opiniões que estão no outro 'prato da balança':

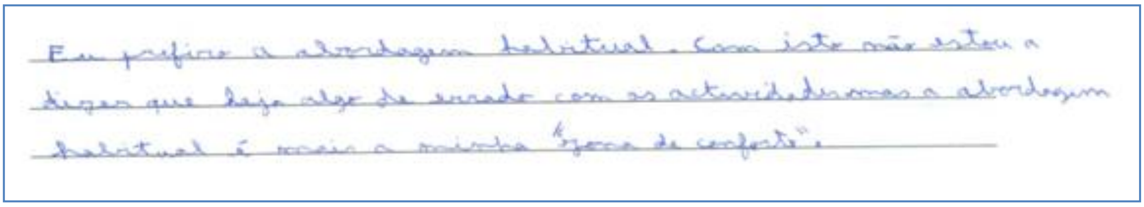

Eu prefiro a abordagem habitual. Com isto não estou a dizer que haja algo de errado com as actividades mas a abordagem habitual é mais a minha "zona de conforto".

Figura 16 - Opinião de alunos relativamente à questão colocada na figura 12 – atividades ‘fora da zona de conforto’

Terceiro tópico de análise: *Relatórios*

Aquando do pedido do primeiro relatório os alunos manifestaram alguma estranheza na solicitação de um relatório na aula de Matemática. Essa surpresa parece relacionar-se com o facto de não ter havido trabalho nessa área no ciclo anterior.

No primeiro relatório observou-se que os alunos sentiam alguma dificuldade na descrição/escrita dos raciocínios e das tentativas falhadas surgidas no desenrolar da tarefa, das conjeturas formuladas e das respetivas validações.

Embora na generalidade dos grupos, tenha havido exploração de várias situações e formulação de conjeturas que posteriormente se mostraram incorretas, na maioria dos relatórios apresentados constaram apenas as conjeturas corretas.

Em alguns relatórios (poucos) os alunos descreveram as tentativas frustradas. Isto é, conjeturas que foram tomadas como corretas mas que depois se verificaram não ser verdadeiras. Embora tenha pedido o registo dos procedimentos nos relatórios e tenha reforçado o pedido aquando da minha passagem pelos diversos grupos, na generalidade dos relatórios não se descreve esses ‘ensaios’.

Na primeira atividade os alunos tiveram de construir poliedros convexos regulares. A definição desse tipo de sólidos constava do documento entregue a cada grupo mas uma leitura apressada por parte dos alunos, não permitiu reter o que se pretendia, tendo surgido algumas situações em que os alunos apresentaram poliedro que não eram regulares.

Embora todos os grupos tenham construído um quadro para a organização das descobertas, seguindo as instruções dadas, alguns limitaram-se apenas, a escrever essas mesmas descobertas. Devido a esse facto surgiram relatórios pouco desenvolvidos, com falhas tanto ao nível da escrita matemática como ao nível da construção frásica.

Evidencia-se neste tipo de comportamento um filtrar de resultados de modo a não colocar os ‘falhanços’ obtidos mas apenas os ‘sucessos’ atingidos.

Embora os relatórios desta primeira tarefa tivessem sido reformulados, tal como foi referido anteriormente, e tenha havido melhorias na reformulação de algumas questões, houve grupos que não deram total atenção às observações e questões por mim levantadas aquando da análise da primeira versão do relatório. Ocorreram ainda duas situações em que os alunos foram penalizados: uma em que um grupo apresentou apenas a segunda versão do relatório não tendo entregue a primeira, mesmo após ter sido solicitada, e outra em que o grupo não entregou a segunda versão do relatório.

Na segunda tarefa decidi experimentar outro tipo de relatório: o relatório individual. O propósito desse pedido prendeu-se com necessidade de diversificar os instrumentos e de obter uma imagem mais nítida do trabalho de cada aluno. Uma outra caraterística distinguia estes relatórios: seriam realizados fora da sala de aula.

Estes relatórios acabaram por me desiludir pois, embora mais desenvolvidos do que os primeiros, limitaram-se, na generalidade dos casos, a referir resultados provenientes de pesquisa no manual ou na internet. Embora o ‘apoio extra’ seja sempre bem-vindo, é necessário que os alunos assimilem os conhecimentos trabalhados nas tarefas. Neste caso, ao conversar com alguns alunos sobre os conteúdos abordados na tarefa, apercebi-me que a assimilação dos conteúdos era muito frágil.

Estes relatórios não traduziram pois, o trabalho realizado na sala de aula. Muito poucos alunos tentaram responder a duas questões que foram formuladas no enunciado da atividade e que envolviam a justificação da possibilidade de obtenção de um triângulo retângulo e de um pentágono regular, provavelmente por não terem encontrado resposta nas pesquisas realizadas.

Quarto tópico de análise: *Trabalhos/cartolinas apresentadas pelos grupos*

Após a exploração da atividade e da formulação de conjeturas e respetivas justificações/demonstrações, os alunos teriam de apresentar numa folha de cartolina, entregue no início da tarefa, os gráficos obtidos para cada uma das situações analisadas; os pontos que foram marcados e as suas coordenadas; o eixo de simetria e o vértice da parábola e as conclusões relativas à influência do parâmetro estudado.

Esta fase da atividade foi pensada para os noventa minutos da aula e fiz alguma pressão no sentido de cumprir o tempo estipulado. Analisando os trabalhos realizados pelos alunos e as gravações dos mesmos, penso que teria sido mais proveitoso para os alunos e para os resultados finais por estes apresentados, se tivesse prolongado o período de realização da tarefa. Esta ideia também foi traduzida por alguns alunos aquando do preenchimento do inquérito.

Tal como nos relatórios, surgiram conjeturas em que a justificação ou prova foi substituída por uma verificação. Neste caso os alunos aperceberam-se de uma regularidade mas não foram capazes de demostrar a conjetura elaborada, pelo que acabaram por abandonar a tentativa de prova.

> (Tarefa envolvendo funções do tipo $y=\mathbf{a}(x+1)(x-3)$, com $a\neq 0$. Os alunos tentaram desenvolver o produto mas esqueceram de colocar o coeficiente *a*.)
>
> Aluno 1: Parece que é sempre 1, o minimizante…
> Aluno 2: Mas não quer dizer que seja…
> Aluno 3: Nesta expressão o maximizante é sempre 1.
> Aluno 2: Ok. Então agora vamos ver porquê. $y=ax^2-3x+x-3=ax^2-2x-3$ … mas não se pode tira nenhuma conclusão disto…

No entanto, os alunos foram capazes de concluir que a abcissa do ponto médio de [AB], (A e B pontos de interseção como eixo *Ox*) era a abcissa do vértice. A justificação estava a um passo… bastava olhar com atenção para a conclusão a que tinham chegado relativamente ao vértice.

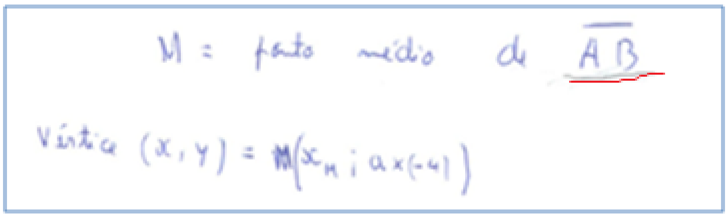


Figura 17 - Conclusão dos alunos relativamente ao vértice da parábola

O facto de ser só uma pessoa a coordenar este tipo de atividades numa sala de aula, é uma desvantagem, pois situações como a relatada anteriormente ou a que é descrita de seguida, poderiam ter tido outro desfecho se existisse um segundo elemento a dar apoio ao professor.

Utilizando o processo de *especialização*, o grupo referido anteriormente chegou a uma conclusão que não está completamente correta porque se deixaram persuadir pela informação obtida através da máquina de calcular, como podemos depreender da seguinte conversa:

Aluno 1: Para qualquer valor de *a* o valor do minimizante ou maximizante é sempre 1
Aluno 2: Neste tipo de função, para qualquer *a*, o valor do maximizante ou minimizante é sempre 1.
Aluno 3: Não é neste tipo. É nesta função.
Aluno 1: Espera! Sim, tens razão.
Aluno 3: Quando colocámos $a=\sqrt{2}$, o que é que aconteceu?
Aluno 2: Deu um número do tipo 0.99…
Aluno 1: Então já não dá 1!
Aluno 3: Se calhar porque já não é um número inteiro…
Aluno 2: Espera. Faz aí 2,3… um número fracionário.
Aluno 1: Dá 1.
Aluno 2: Então é para qualquer número de ℚ. São todos os números menos os números que são raízes , são infinitos (o aluno referia-se às dízimas infinita não periódicas…)
Aluno 3: Então escreve lá: para qualquer *a* pertencente a ℚ, o valor do maximizante ou minimizante é sempre 1.

Esta incorreção de raciocínio só foi detetada aquando da leitura dos trabalhos.

Dado que estes trabalhos seriam analisados pelos restantes alunos decidi sublinhar o conjunto indicado pelo grupo, deixando a retificação da afirmação para a aula em que os alunos fariam a exposição oral do trabalho.

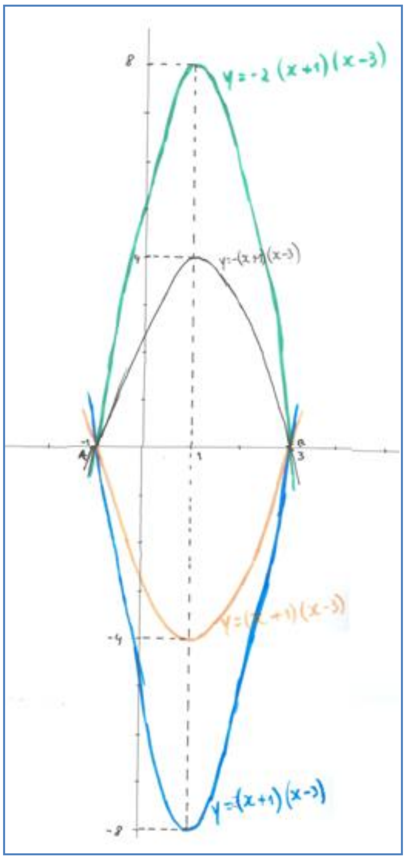


Figura 18 - Gráficos referentes a funções da família de funções definidas por $y=\boldsymbol{a}(x+1)(x-3)$, com $a\neq 0$

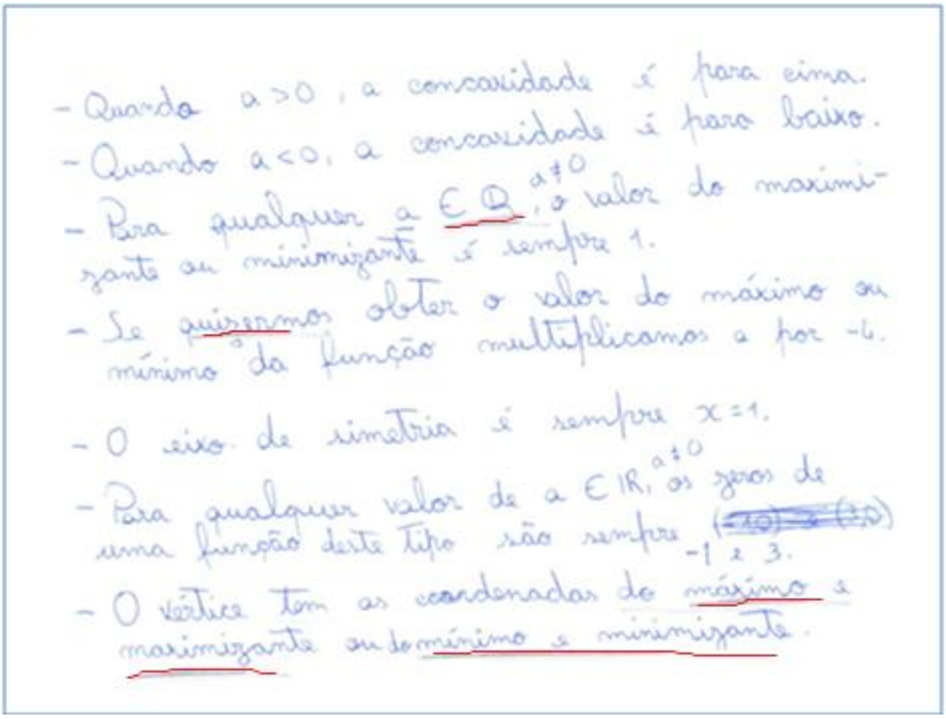

- Quando $a>0$, a concavidade é para cima.
- Quando $a<0$, a concavidade é para baixo.
- Para qualquer $a \in \mathbb{Q}$ ($a \neq 0$), o valor do maximizante ou minimizante é sempre 1.
- Se quisermos obter o valor do máximo ou mínimo da função multiplicamos a por -4.
- O eixo de simetria é sempre $x=1$.
- Para qualquer valor de $a \in \mathbb{R}$ ($a \neq 0$), os zeros de uma função deste tipo são sempre -1 2 3.
- O vértice tem as coordenadas do máximo e maximizante ou do mínimo e minimizante.

Figura 19 - Algumas incorreções de raciocínio

Embora entenda o porquê do erro cometido, pois durante todo o primeiro período insisti na questão de que não poderiam fazer aproximações ‘levianamente’, aproveitei essa situação para falar das limitações das máquinas de calcular e do cuidado que se deve ter quando com elas trabalhamos.

Outra questão que gostaria de referir é a da interajuda na clarificação de conceitos e na resolução de questões puramente matemáticas. Dois bons exemplos desse facto são os apresentados de seguida:

> (Conversa entre os vários elementos do grupo relativamente à diferença entre vértice e máximo)
> Aluno 1: Como é que escrevo que o vértice é sempre o valor do máximo ou do mínimo da função?
> Aluno 2: Espera, o vértice é um ponto e o máximo é só o valor de y…
> Aluno 1: Já percebi a diferença entre máximo e vértice.
> Aluno 3: Em conclusão: o vértice tem as (como) coordenadas o máximo e o maximizante ou o mínimo e minimizante, percebeste ?
> Aluno 4: Mais ou menos…

A questão da ordem das coordenadas do vértice indicada pelo grupo foi corrigida no trabalho apresentado e na apresentação oral.

Na conversa seguinte discute-se qual a melhor janela para observar os gráficos pedidos. É de notar que neste caso é o aluno que normalmente é mais fraco em termos de sala de aula que propõe a ideia correta para uma melhor visualização do gráfico e justifica o porquê dessa proposta:

Aluno 1: Vamos colocar o *y* a variar entre -100 e 100.
Aluno 2: Ui, não se vê nada!
Aluno 3: Temos de colocar maior.
Aluno 2: Não, temos de colocar menos. (aluno mais fraco em termos de cálculos)
Aluno 3: Acho que temos é de aumentar a janela…
Aluno 2: Repara, o mínimo deste é -24 … temos é de reduzir (aluno mais fraco)
Aluno 1: Então colocamos -30 a 30.
Aluno 2: Sim, fica melhor… Como fazemos os zeros?
Aluno 1: Igualas a zero a expressão: x^2-2x-3
Aluno 2: Como é que a gente vai resolver isto?
Aluno 3: Isso é o…. a fórmula resolvente, xiii….

Na maioria dos grupos houve o cuidado de apresentar uma generalização das regularidades que foram surgindo mas em alguns grupos essa generalização poderia ter sido mais 'geral'. No exemplo apresentado de seguida o grupo concluiu corretamente das propriedades dos gráficos aquando da variação 'parcelar' do parâmetro *k*, no entanto poderia ter ido mais além generalizando as questões que dizem respeito ao eixo de simetria, às coordenadas do vértice e, se tivesse havido alguma achega da minha parte, reconhecendo que os gráficos desta família de funções podem ser obtidos através de translações do gráfico da função definida por $y=x^2$.

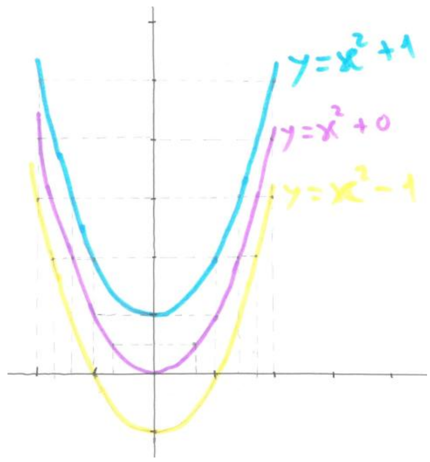
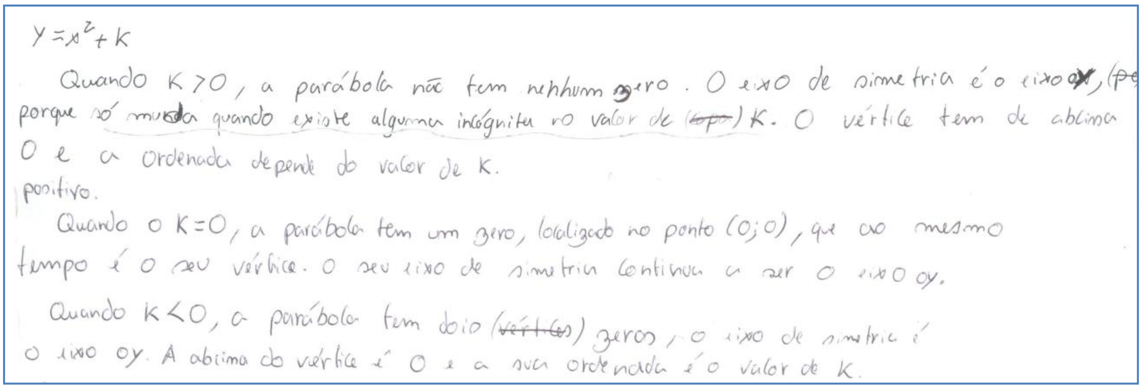


Figura 20 - Gráficos referentes a funções da família de funções definidas por $y=x^2+k$,com $k \in IR$


y=x²+k

Quando k>0, a parábola não tem nenhum zero. O eixo de simetria é o eixo ~~ox~~, (pe porque só muda quando existe alguma incógnita no valor de ~~(topo)~~ k. O vértice tem de abcissa 0 e a ordenada depende do valor de k.
positivo.

Quando o k=0, a parábola tem um zero, localizado no ponto (0;0), que ao mesmo tempo é o seu vértice. O seu eixo de simetria continua a ser o eixo oy.

Quando k<0, a parábola tem dois ~~(vértices)~~ zeros, o eixo de simetria é o eixo oy. A abcissa do vértice é 0 e a sua ordenada é o valor de k.

Figura 21 – Generalização ‘parcelar’ da variação do parâmetro *k*

Quinto tópico de análise: *Apresentação Oral*

A apresentação oral ocorreu, como já referido anteriormente, na última atividade desenvolvida. A inclusão deste tipo de produção surgiu com o objetivo de permitir analisar a capacidade de comunicação oral dos alunos e o modo como os alunos se relacionam uns com os outros em apresentações deste género.

Como o objetivo era observar todos os alunos foi imposto um requisito: todos os alunos tinham de ter uma participação ativa na apresentação oral do trabalho.

Para que os diversos grupos pudessem ajustar as suas estratégias de apresentação do trabalho, foram concedidos os primeiros quinze minutos da aula. A apresentação das tarefas seguiu a ordem numérica dos grupos, atribuída aquando da distribuição dos trabalhos.

Na generalidade das apresentações os alunos utilizaram um vocabulário correto, do ponto de vista matemático, e fizeram boas apresentações dos trabalhos realizados. A participação dos alunos que estavam a ouvir as apresentações também foi muito positiva.

Além dos conhecimentos adquiridos durante a exploração das tarefas, os alunos mostraram dominar outros conceitos matemáticos e serem capazes de fazer demostrações matemáticas. De seguida são apresentadas duas conversas ocorridas durante a apresentação dos trabalhos e que demonstram o que foi referido anteriormente:

Aluno 1: As funções do tipo $y=x^2$+k com $k>0$, não têm zeros.
Aluno 2: Como sabes?
Aluno 1: ?...

Professora: Como podes mostrar aos colegas que qualquer que seja *k*, a função que se obtém não tem zeros?
Aluno 1: (o aluno pensa um pouco e depois escreve:) $x^2+k=0 \Leftrightarrow x^2=-k \Leftrightarrow$ $x=\sqrt{-k}$. Como *k* é positivo então *–k* é negativo, logo não podemos calcular $\sqrt{-k}$. Portanto a função não tem zeros.
Professora: Muito bem justificado!

Relativamente a esta pequena demonstração note-se que, embora a questão se reduza à resolução de uma equação do segundo grau, incompleta, o aluno não se ficou apenas pela resolução da equação. Além de perceber e explicar que *-k* era um valor negativo também concluiu o que se pretendia em relação à função dada: que ela não tinha zeros. Nesta apresentação o aluno mostrou compreender a noção de zero de uma função e noções de álgebra que lhe permitiram responder corretamente à questão colocada pelo colega.

Também é de referir que embora se notasse um certo nervosismo, por parte dos alunos que estavam a apresentar, em particular quando questionados pelos colegas, ele desapareceu das fisionomias após a conclusão da 'demonstração' , tendo dado origem a expressões de satisfação.

A outra conversa envolve uma demonstração mais simples, que também não tinha sido apresentada no trabalho e que foi prontamente efetuada pelo aluno que estava a fazer a apresentação:

(Apresentação do trabalho envolvendo funções do tipo: $y=ax^2$, com $a>0$)

Aluno 1: Todas as curvas, parábolas, que se obtêm têm um zero, que é zero.
Aluno 2: Porquê?
Aluno 1: …?
Professora: Como podes mostrar ao colega que a tua afirmação é correta?
Aluno 1: Acho que não sei…
Professora: Analiticamente…
Aluno 1: Ah! Então fica: $ax^2=0 \Leftrightarrow x^2=\frac{0}{a} \Leftrightarrow x^2=0 \Leftrightarrow x=0$

Neste pequeno trecho está bem patente o 'à vontade' com que o aluno lida com a resolução analítica.

Embora a generalidade dos alunos não gostem de apresentações orais, existem alguns que preferem esse tipo de exposição como podemos perceber pelo comentário seguinte:

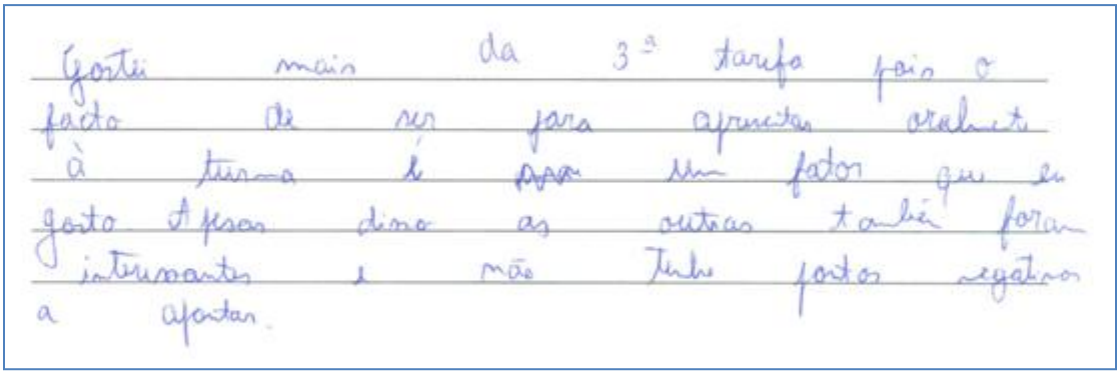

Gostei mais da 3ª tarefa pois o facto de ser para apresentar oralmente à turma é para um fator que eu gosto Apesar disso as outras também foram interessantes e não tinha pontos negativos a apontar.

Figura 22 – A apresentação oral como instrumento de predileção de alguns alunos

Uma das desvantagens deste tipo de instrumento é o facto de se poder tornar um processo repetitivo prejudicando por vezes o bom ambiente da sala de aula, ou então permitindo o favorecimento dos grupos que apresentam em último lugar.

Nesta apresentação oral não ocorreu nenhuma das situações anteriormente indicadas visto que cinco dos seis grupos apresentavam trabalhos diferentes mas que se conciliavam de forma a originar um todo. Os alunos foram levantando questões, ordenadamente, permitindo que a aula decorre-se de uma forma dinâmica e que os alunos compreendessem os trabalhos realizados pelos diversos grupos.

Sexto tópico de análise: *Questão Aula*

Uma das minhas preocupações como professora, é dotar os meus alunos de instrumentos que os ajudem a evoluir dentro da disciplina. Por esse motivo era importante saber até que ponto os conteúdos, que servem de base ao estudo das funções no décimo primeiro ano, tinham ficado entendidos.

As questões formuladas na ficha apresentada nos anexos, corresponde apenas a uma parte daquela que foi respondida pelos alunos, visto que para este trabalho interessa somente analisar os conhecimentos demostrados pelos alunos a propósito dos conteúdos envolvidos na tarefa.

Convém ainda referir que as questões colocadas na ficha são questões que se encontram no manual do aluno e que para a sua resolução não foi permitida a utilização de máquinas de calcular. Esta interdição deve-se ao facto de que se pretendia compreender o real conhecimento atingido pelos alunos em relação a este assunto.

Embora nem todos os alunos tenham respondido corretamente às questões formuladas a maioria fê-lo, pelo que me parece que os conteúdos foram assimilados pela maioria dos alunos.

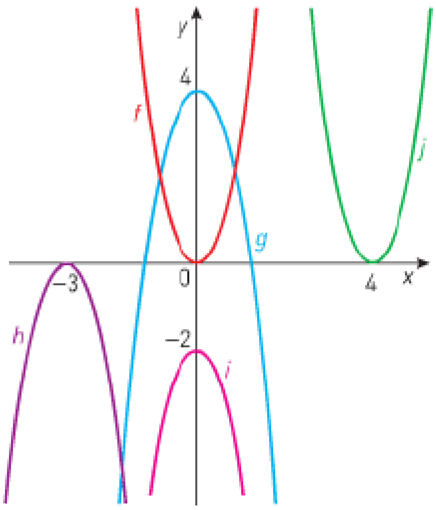
Após ter analisado as respostas de cada aluno conclui que os erros cometidos por determinados alunos seriam na mesma cometidos se os conteúdos tivessem sido lecionados da forma habitual.

Ao fazer um ‘inventário dos erros’ surgiram, nas questões 1. e 2., como erros mais frequentes os seguintes:

* erros na análise do valor de ***a***, falta de parêntesis e troca de sinais:

* esquecimento de colocação do expoente nos casos $(x+h)^2+k$.

1. Uma das funções representadas graficamente na figura é definida pela equação $y=3x^2$. Identifica-a e e escreve expressões que definam as restantes, sabendo que todas as parábolas representadas têm a mesma abertura



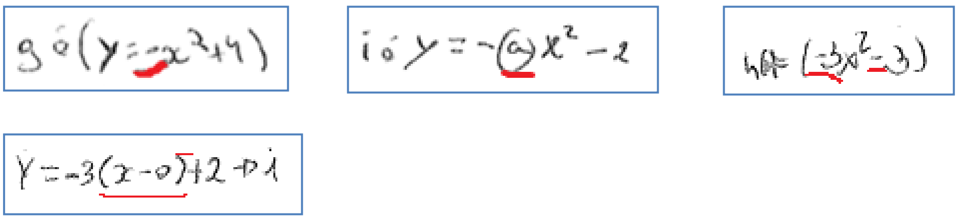
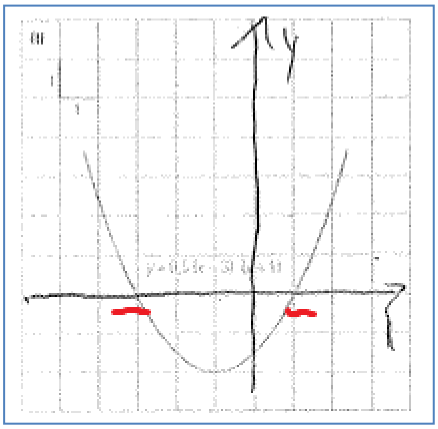


Figura 23 - Questão 1 da questão aula e alguns erros observados

Na questão 3. propunha-se aos alunos que perante uma função da qual conheciam o gráfico e a expressão analítica, desenhassem o referencial que se adaptava à situação. A maioria dos alunos desenhou corretamente os referenciais sendo no entanto de referir que o terceiro exercício foi onde ocorreu mais erros.

A maioria dos erros corresponde a erros de leitura de sinais, já referidos anteriormente.



$y=0.5(x-3)(x+1)$

Figura 24 - Alguns erros decorrentes da má interpretação de sinais

5. Conclusões

O presente estudo, desenvolvido a partir da realização de tarefas exploratórias na sala de aula, tinha como objetivo compreender de que modo a inclusão destas atividades no currículo de Matemática do ensino secundário, contribuíam para a aprendizagem da Matemática. Para ir ao encontro desse objetivo procurou-se analisar o modo como agem os alunos perante este tipo de atividades, o tipo de conhecimentos que são mobilizados pelos alunos nessas circunstâncias e ainda os benefícios que podem ser alcançados com o desenvolvimento destas atividades na sala de aula.

As tarefas selecionadas abrangiam duas áreas distintas da Matemática. Duas envolviam noções da Geometria (Sólidos Platónicos e Secções) e uma de Análise Matemática (Função Quadrática).

Analisando as tarefas em relação a duas dimensões fundamentais referidas por Ponte (2010), a estrutura e a complexidade, considerei-as, com uma 'estrutura aberta' mas com um 'grau de complexidade' pouco elevado pelo que adotei a designação de tarefas de exploração.

As duas primeiras foram mais ou menos estruturadas visando, numa primeira fase, o entrosamento dos alunos e numa segunda fase, o encaminhamento para experiências de descoberta que não são usuais numa aula dita 'tradicional'.

A terceira atividade, um pouco 'menos estruturada', possibilitava que os alunos fizessem as suas descobertas, construíssem conhecimento e partilhassem esse mesmo conhecimento com os restantes colegas, de uma forma também pouco habitual nas aulas de Matemática – através do trabalho em grupo e da exposição oral.

5.1 Atuação dos alunos nas aulas de atividades investigativas

Uma das questões levantadas envolvia o modo como atuam os alunos, como se comportam, neste tipo de aulas.

Embora nas primeiras atividades se verificasse por parte dos alunos, uma maior solicitação da professora, particularmente no início das atividades, essa necessidade foi sendo gradualmente reduzida ao longo da segunda atividade e em particular na terceira tarefa.

A atitude demonstrada pelos alunos em relação a este tipo de aula foi muito positiva. Em todos os grupos se discutiu com mais ou menos profundidade as atividades apresentadas, tornando as aulas mais dinâmicas e facilitando a compreensão dos processos e das ideias, o que também é confirmado em Brocado (2001).

O facto destas atividades favorecerem a descoberta de afinidades entre os alunos permitiu que houvesse uma maior participação e envolvimento de alunos com diferentes níveis de competências, o que também é corroborado pela investigação realizada por Santos *et al.* (2002).

Em alguns alunos notou-se um aumento da autoestima e da capacidade de iniciativa.

5.2 Benefícios auferidos pelos alunos nas aulas de atividades investigativas

Outra questão que se pretendia discutir prendia-se com os benefícios que este tipo de tarefas podia proporcionar. Uma das competências que pôde ser observada nestas aulas foi a de cooperação - trabalho cooperativo. Os alunos interagiram cooperando entre si, permitindo o desenvolvimento de competências ao nível da comunicação e da socialização.

Este tipo de trabalho (cooperativo) permitiu ainda que os alunos com mais dificuldade em determinados assuntos, desenvolvessem, além da capacidade de autonomia, as suas capacidades cognitivas permitindo assim um maior nível de sucesso na turma.

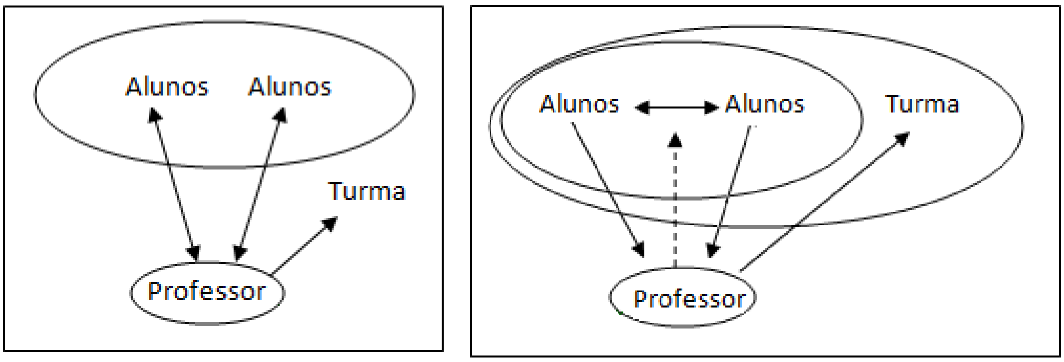
Uma outra capacidade que foi possível observar e que também foi identificada nos trabalhos de Ponte *et al.* (1998) e Oliveira *et al.*, (1996), foi a de ligação de vários tópicos da Matemática, o que permitiu que os alunos desenvolvessem um pensamento holístico, que é caraterística do raciocínio matemático. Ao pensar sobre as atividades, os alunos tiveram que relacionar matérias/assuntos de forma a poderem concluir da veracidade ou inconsistência das suas afirmações.

Outras capacidades que foram fortemente reforçada com estas atividades são a da argumentação matemática e a da comunicação matemática. Apesar de que, durante as ditas aulas tradicionais também se desenvolvem estas capacidades, questionando o aluno, procurando que justifique as suas afirmações, o seu desenvolvimento não pode ser equiparado ao que se obtém quando os alunos estão perante este tipo de atividades.

Embora em grupo os alunos só sentissem necessidade de argumentar quando a isso os incitava, na exposição oral tiveram que justificar as suas afirmações perante os colegas, com base em conhecimentos matemáticos, demonstrando assim evidente flexibilidade intelectual e atuando como verdadeiros “ matemáticos”.

A comunicação matemática também foi aperfeiçoada. Em alguns grupos, foram distinguidas conversas em que se explicava a diferença entre conceitos (‘ordenada’ e ‘coordenada’) ou em que se selecionava o termo mais correto a ser utilizado (discussão se deveriam colocar ‘e’ ou ‘ou’ – noções de lógica matemática). A comunicação matemática desenvolveu-se em vários momentos: na discussão da tarefa em pequeno e grande grupo e com a professora, na escrita dos relatórios e nas apresentações orais.

Enquanto que na aula tradicional a comunicação faz-se aluno-professor ou professor- turma, sendo o professor aquele que domina o discurso e dá um retorno imediato aos alunos, nestas aulas a comunicação fez-se envolvendo vários canais: aluno-aluno, aluno professor, professor-grupo, professor turma.



Aula ‘tradicional’ Aula com atividades investigativas

Figura 25 - Diferentes tipos de comunicação

Outro benefício que foi constatado pelos próprios alunos é o da possibilidade de observar e apreender outros métodos de trabalho. Ao confrontar o seu método de trabalho com os dos colegas cada aluno amplia o leque de processos a utilizar na resolução de novos exercícios/tarefas/problemas.

5.3 Mobilização de conhecimentos em contexto de atividades investigativas

E que conhecimentos mobiliza o aluno quando perante atividades desta natureza? A observação das aulas e a auscultação das gravações permitiu divisar a utilização/demonstração de vários saberes.

Nas duas primeiras tarefas não foi possível registar uma grande mobilização de saberes, provavelmente porque foram as primeiras atividades a ser colocadas (outubro), e ainda porque apenas foi possível obter algum registo da observação de aula e dos relatórios escritos devido, possivelmente, ao facto de não estar muito familiarizada com o registo das observações de aula. No entanto os alunos descobriram/construíram os sólidos platónicos e recordaram o modo de calcular os ângulos internos de um polígono quer recorrendo à fórmula estudada em anos anteriores quer baseando-se na decomposição de figuras.

No decorrer da terceira tarefa foram evidenciadas vários conceitos anteriormente lecionados, nomeadamente o de função, abcissa, ordenada, coordenada, simetria, intersecção com os eixos, zeros de uma função. As representações algébricas e gráficas de funções quadráticas estiveram sempre presentes neste trabalho. Os saberes ligados à utilização da máquina de calcular foram também mobilizados nesta tarefa. A máquina de calcular, presente durante a realização da tarefa, foi utilizada para a confirmação de resultados e de conjeturas e serviu, ainda, de mote para a clarificação de algumas das suas limitações. A resolução analítica de equações do segundo grau, completas e incompletas também surgiu, permitindo fortalecer a perceção de que a determinação rigorosa de determinados elementos de uma função, em muitos casos, só poderá ser alcançada pela via analítica.

Este mobilizar de saberes também é sustentado pelo trabalho desenvolvido por Segurado (2002) quando afirma que ficou bem patente “durante a realização das tarefas, o domínio que os alunos têm de alguns conceitos anteriormente leccionados (...) e da utilização da calculadora” (p. 72).

Constatou-se ainda, que em alguns grupos, se discutiram elementos de lógica matemática: «e», «ou» e o quantificador universal «qualquer que seja».

No desenrolar destas atividades foi possível observar o estabelecimento de ligações entre diversos temas da Matemática de uma forma coerente e integrada, o que também foi confirmado pelos trabalhos desenvolvidos por Santos *et al.* (2002) e por Oliveira *et al*., (1996).

5.4 Reflexão sobre o trabalho desenvolvido

Como professora do secundário preocupo-me, como já referi anteriormente, (e pelo que tenho lido, essa minha preocupação é geral) com a escolha de tarefas, que por um lado sejam interessantes para os alunos e por outro tenham ligação com os conteúdos programáticos do ano a que se destinam. A preocupação prende-se essencialmente com o ter tempo disponível para desenvolver os assuntos/conteúdos que constituem o programa a lecionar e com a preparação que desejo que os meus alunos tenham para poderem percorrer, com tranquilidade, o caminho que escolheram seguir (a grande maioria pretende frequentar o ensino superior).

Após ponderar os prós e os contras compreendi que, independentemente da seleção realizada, em qualquer tipo de investigação, em sala de aula ou fora dela, o professor/investigador não pode prever o tipo de questões/obstáculos que surgirão, e deixei-me levar então pelo pensamento de Susan Pirie quando afirma que: “a ênfase está em explorar uma questão da Matemática em todas as direcções. O objetivo é a viagem, não o destino” (1987, p.2).

Ao concluir a investigação, e observando o caminho percorrido, é possível concluir de uma mudança de atitude por parte dos alunos: embora inicialmente os alunos se limitassem a responder às questões colocadas ao longo do desenvolvimento das atividades, posteriormente evoluíram no sentido de formular novas questões, utilizando conceitos matemáticos que se tornaram úteis na realização das explorações, e que assumiram, por isso, outra importância para os mesmos. Esta ‘evolução’ também é confirmada no trabalho desenvolvido por Segurado (2002).

Outra reflexão que deverá ser feita prende-se com o fator ‘tempo’. Uma das falhas que sinto que ocorreu no desenvolver das tarefas resultou da necessidade/ pressão que sentia em desenvolver as tarefas nos ‘tempos’ designados para a sua realização. Embora tenha sido concedido algum tempo extra para a conclusão de algumas tarefas, a ‘urgência’ em cumprir horários impediu que alguns grupos aprofundassem o seu estudo, o que acarretou, possivelmente, perda de conclusões. Este dilema de continuar com a investigação, prolongando o seu período de desenvolvimento, ou de terminar no prazo previsto, truncando possíveis explorações, é também referido no trabalho desenvolvido por Porfírio e Oliveira (1999). Conclui pois, que para que ocorra 'aprendizagem' é necessário permitir que os alunos desenvolvam ideias e percorram os seus próprios caminhos, o que só é possível se lhes for concedido o tempo mínimo de que cada um necessita.

Embora se tenha realizado alguma discussão final após cada tarefa, a mesma não foi muito produtiva. Estas aulas foram entendidas como aulas de apresentação de resultados tendo-se perdido a possibilidade de aprofundar as explorações realizadas ou de projetar novas explorações. Esta fase do trabalho exige do professor um recolher 'atempado' de informação, decorrente do trabalho realizado durante as atividades, de modo a poder despoletar discussões interessantes e produtivas. No caso das atividades desenvolvidas esse 'timing' não foi totalmente respeitado, pelo que considero que essa falha empobreceu esta etapa.

A avaliação destas tarefas envolveu a aplicação de vários instrumentos entre os quais gostaria de destacar a observação. Embora este seja um instrumento utilizado por qualquer professor em sala de aula, a habituação ao registo escrito das observações realizadas, com vista ao seu 'aproveitamento' em termos de avaliação, não é de simples aplicação. A orientação da aula e as solicitações por parte dos alunos dificultaram o registo em tempo real, ficando a sua realização para o período após aula. Relativamente ao instrumento 'relatório', a sua aplicação foi limitada. O facto de não ter sido pedido um relatório na terceira tarefa não permitiu avaliar os benefícios desse instrumento.

Outra dificuldade sentida na aplicação deste tipo de tarefas prende-se com a incapacidade de estar presente em todos os grupos. Embora fosse dado apoio a todos os grupos apercebi-me, através dos registos áudios, que surgiram situações interessantes que não foram desenvolvidas porque o professor não foi chamado a intervir e outras que poderiam ter sido mais aprofundadas se o professor estivesse presente aquando do debate. Ter outro professor em sala de aula poderá ser uma mais-valia nestas situações. A possibilidade de ter outro ponto de vista na elaboração das tarefas, um maior apoio aos grupos no decurso das atividades e um maior número de registos de observações seria muito mais proveitoso neste tipo de aulas.

Embora se apontem algumas dificuldades na utilização destas tarefas, considero que no cômputo geral os benefícios das mesmas são consideráveis, tanto para o professor como para alunos.

O «aprender matemática» não é pois uma receita simples. Segundo a minha experiência, resulta de um menu educativo constituído por várias «dietas», que são constituídas por muitos ingredientes, com aplicação de vários «modos de fazer», que enriquecem o produto final – o aluno.

O facto de apresentamos a Matemática "como uma ciência experimental e dedutiva" (Pólya, 1945, p.vii), que se vai construindo com avanços e recuos, proporciona ao aluno uma experiencia fundamental para a sua aprendizagem e crescimento, dentro e fora da sala de aula.

6. Referências

Associação de Professores de Matemática (1988). Renovação do currículo de Matemática. Lisboa: APM.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). Investigação Qualitativa em Educação. Porto: Porto Editora.

Brocardo, J. (2001). *As investigações na aula de matemática: Um projecto curricular no 8º ano.* Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa. Lisboa.

Burton, L. (1984). Mathematical thinking: the struggle for meaning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 15(1), 35-49.

Christiansen, B., & Walther, G. (1986). Task and activity. In B. Christiansen, A. G. Howson, & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 243-307). Dordrecht: D. Reidel.

Fonseca, H.I.C.(2000). *Os processos matemáticos e o discurso em actividades de investigação na sala de aula.* Dissertação de Mestrado, Universidade de Lisboa, Lisboa, Portugal.

Fonseca, H., Brunheira, L., Ponte, J.P. (1999). As actividades de investigação, o professor e a aula de Matemática. *Actas do ProfMat*- Portimão. Consultado a 18/12/2012.

Disponível em: http://www.amma.com.pt/cm/af29/trabalhos/s7/Textos/texto18.pdf

Fonseca, L. M. (2002). Olha p'ro que eu digo mas não olhes p'ro que eu faço. In J. P. Ponte, C. Costa, A. I. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo & A. F. Dionísio (Eds.), *Actividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores* (pp. 207-222). Lisboa: SEM-SPCE.

Goldenberg, E. P., (1999). Quatro funções da investigação na aula de Matemática. In P. Abrantes, J.P. Ponte, H. Fonseca & L. Brunheira (EDs.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 35-49).Lisboa: APM e Projecto MPT.

Holding, J. (1991). *The investigations book*. Cambridge: University Press.

Leal, L. C. (1992). *Avaliação da aprendizagem num contexto de inovação curricular*. Tese de mestrado, Universidade de Lisboa. Lisboa: APM.

Mason, J. (1996). Resolução de problemas matemáticos no Reino Unido: Problemas abertos, fechados e exploratórios. In P. Abrantes, L. C. Leal & J. P. Ponte (Eds.) *Investigar para aprender matemática: Textos seleccionados* (pp. 15-24). Lisboa: Projecto MPT e APM. (publicado originalmente em inglês em 1991).

Mason, J., Burton, L. Stracey, K. (1982). Thinking mathematically. Bristol: Addison-Wesley.

Menino, H. & Santos, L. (2004). Instrumentos de avaliação das aprendizagens em matemática. O uso do relatório escrito, do teste em duas fases e do portefólio no 2º ciclo do ensino básico. *Actas do XV SIEM* (Seminário de Investigação em Educação Matemática) (pp. 271-291). Lisboa: APM.

Ministério da Educação (2001). *Matemática: Programa 10º ano*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário.

Oliveira, H., (1998, Julho/Dezembro).Vivências de duas professoras com as actividades de investigação. *Quadrante*, **7(**2), 71-98.

Oliveira, H.M., Segurado, M.I. & Ponte, J.P. (1998). Tarefas de investigação em Matemática: Histórias da Sala de Aula, *Actas do VI Encontro de Investigação em Educação Matemática*, Portalegre: SPCE-SEM, (pp. 107-125).

Oliveira, H.M., Segurado, M.I. & Ponte, J.P. (1996). Explorar, Investigar e Discutir na Aula de Matemática, *Actas do ProfMat96*, (p. 207-213). Lisboa: APM

Pirie, S. (1987). *Mathematical investigations in yours classrooms – a pack for teachers*. University of Oxford & University of Warwick.

Pólya, G. How to solve it - Tradução de parte do livro *How to solve it: A new aspect of the mathematical method*, publicado originalmente em Princeton, pela Princeton University Press, em 1945.

Ponte, J. P. (2010). Explorar e Investigar em Matemática: Uma Actividade Fundamental no Ensino e na Aprendizagem. *UNIÓN-Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *21*, 13-20.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2003a). Investigar, ensinar e aprender, Actas *do ProfMat 2003* (CD-ROM, pp. 25-39). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2003b). Investigação sobre investigações matemáticas em Portugal. *Investigar em Educação*, 2, 93-169.

Ponte, J. P., Brocardo, J., Oliveira, H. (2003). Investigações Matemáticas na Sala de Aula. Belo Horizonte: Autêntica. 1ª Edição, Out. 2003 (Capítulo VI- A avaliação do trabalho de investigação).

Ponte, J. P., & Carreira, S. (1992). Computer spreadsheet and investigative activities: A case study of an innovative experience. In J. P. Ponte, J. F. Matos, J. M. Matos, & D. Fernandes (Eds.), *Mathematical problem solving and new information technologies: Research in Contexts of practice* (pp. 301-312). Berlin: Springer.

Ponte, J. P., Ferreira, C., Brunheira, L., Oliveira, H., & Varandas, J. M. (1998). Investigating mathematical investigations. In P. Abrantes, J. Porfirio, & M. Baía (Eds.), *Les interactions dans la classe de mathématiques: Proceedings of the CIEAEM 49* (pp. 3-14). Setúbal: ESE de Setúbal.

Ponte, J. P., Oliveira, H., Brunheira, L., Varandas, J. M., & Ferreira, C. (1998). O trabalho do professor numa aula de investigação matemática. *Quadrante, 7*(2), 41-70.

Porfírio, J. e Oliveira, H. (1999). Uma reflexão em torno das tarefas de investigação. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca e L. Brunheira (Orgs.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 111- 118). Lisboa: Projecto Matemática Para Todos e Associação de Professores de Matemática.

Santos, L. (2005). A avaliação das aprendizagens em Matemática: Um olhar sobre o seu percurso. In L. Santos, A. P. Canavarro & J. Brocardo (Orgs.), *Educação e matemática: Caminhos e encruzilhadas. Actas do encontro internacional em homenagem a Paulo Abrantes* (pp. 169-187). Lisboa: APM.

Santos, L., (2003, Setembro/Outubro). Avaliar competências: uma tarefa impossível?, *in EM74*,16-21.

Santos, L. (2002). Auto-avaliação regulada. Porquê, o quê e como?. In P. Abrantes e F. Araújo (Coord.), *Reorganização Curricular do Ensino Básico. Avaliação das Aprendizagens - Das concepções às práticas.*Lisboa: Ministério da Educação / Departamento da Educação Básica.

Santos, L., Brocardo, J., Pires, M., & Rosendo, A. I. (2002). Investigações matemáticas na aprendizagem do 2º ciclo do ensino básico ao ensino superior. In J. P. Ponte, C. Costa, A. I. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo & A. F. Dionísio (Eds.), *Actividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores* (pp. 83-106). Lisboa: SEM-SPCE.

Sebastião e Silva, J.(1975–77). *Guia para a utilização do Compêndio de Matemática* (vol 1). Lisboa: MEC – GEP.

Segurado, I. (2002). O que acontece quando os alunos realizam investigações matemáticas? In GTI (Ed.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 57-73). Lisboa: APM.

Segurado, I., & Ponte, J. P. (1998). Concepções sobre a matemática e trabalho investigativo. *Quadrante*, 7(2), 5-40.

Skovsmose, O. (2008). Cenários para investigação (J. C. Barbosa, Trad). In *Desafios da Reflexão em educação matemática.* Campinas, SP: Papirus (Coleção Perspetivas em Educação) (obra original publicada em 2000).

Valero, P. (2013). Mathematics for all and the promise of a bright future. Proceedings of de Working Group 10. Cerme 8. The 8th Conference of European Research on Mathematics Education. Turkey.

Varandas, J. M. (2000). *Avaliação de investigações matemáticas. Uma experiência.* Tese de mestrado, Universidade de Lisboa. Lisboa: APM.

ANEXOS

Anexo 1 – Tarefa de exploração “Sólidos Platónicos”

Escola Secundária de Francisco Franco

Ficha de trabalho – 10º ano – 2012 / 2013

Sólidos Platónicos

Diz-se que um poliedro convexo é regular quando todas as faces são polígonos regulares iguais e em todos os vértices concorrem o mesmo número de arestas.

Problema: Quantos poliedros convexos regulares (**sólidos platónicos)** existem?

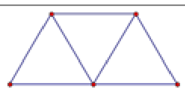
Sugestão: Comecem por construir um poliedro só com triângulos equiláteros. Será único?

Descubram todas as possibilidades, construindo esses sólidos.

Registem num quadro as informações e conclusões que vão conseguindo.

Repitam o estudo anterior para construir poliedros utilizando só quadrados ou só pentágonos ou só hexágonos regulares e façam os registos no mesmo quadro.

Em seguida têm um exemplo do quadro tipo que devem preencher:

Face possível para o poliedro regular	Nº de faces por vértice	Esboço plano das faces concorrentes em cada vértice	Nº de total de polígonos utilizados	Amplitude de um ângulo interno de cada face	Soma das amplitudes dos ângulos internos em torno do mesmo vértice	Nome do poliedro regular
Triângulo equilátero						
Triângulo equilátero						

A partir do trabalho realizado e do quadro preenchido, tirem as vossas conclusões.

Porquê só 5 sólidos platónicos?

Apresentem um pequeno relatório do trabalho realizado, sem esquecerem que dele devem fazer parte:

- A identificação do grupo
- A data
- O material utilizado
- O título do trabalho
- O problema proposto
- Os procedimentos e raciocínios efetuados bem como as tentativas falhadas.
- As observações feitas de maneira sistemática e exaustiva.
- As conjeturas
- A validação das conjeturas.

. . .

O relatório será avaliado de acordo com os seguintes parâmetros:

O relatório será avaliado de acordo com os seguintes parâmetros:

- Estrutura do relatório – 5%
- Apresentação – 10%
- Apresentação completa e correta dos procedimentos – 50%
- Apresentação e Validação de uma conjetura correta – 25%
- Correção de linguagem – 10%

Ficha de trabalho baseada numa ficha da prof. Rosa Canelas

Anexo 2 – Tarefa de exploração “Que polígonos há num cubo?”

Escola Secundária de Francisco Franco

10º Ano- Matemática A

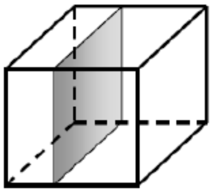
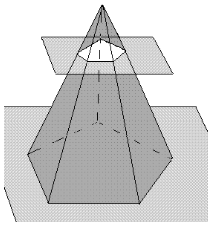
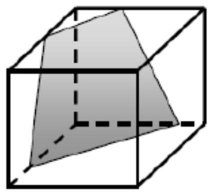
PARTE I – INFORMAÇÃO

Quando intersetamos um sólido por um plano, chamamos secção (ou corte) à figura produzida pela interseção do plano nas faces do sólido.

Para determinar as secções produzidas por cada plano deve ter-se em conta que:

- Dois pontos definem uma reta.
- Dois planos concorrentes intersetam-se segundo uma reta.
- Um plano interseta dois planos paralelos segundo duas retas paralelas.

Exemplos de secções:

PARTE II – INVESTIGAÇÃO

Que polígonos há num cubo?

- Que tipo de polígonos podemos obter quando cortamos um cubo por um plano?
- Para cada polígono, qual a posição do plano relativamente a algum(s) elemento(s) do cubo (faces, arestas, diagonais-espaciais ou faciais)?

Questões a analisar:

- Que tipo de triângulos é possível formar? Qual a posição do plano de corte?
- É possível obter um triângulo retângulo? Porquê?
- Que tipo de quadriláteros é possível formar? Qual a posição do plano de corte?
- É possível obter um pentágono? Qual a posição do plano de corte?
- É possível obter um pentágono regular? Porquê/como?
- É possível obter um hexágono? De que tipo? Qual a posição do plano de corte?
- É possível obter um heptágono? Porquê?

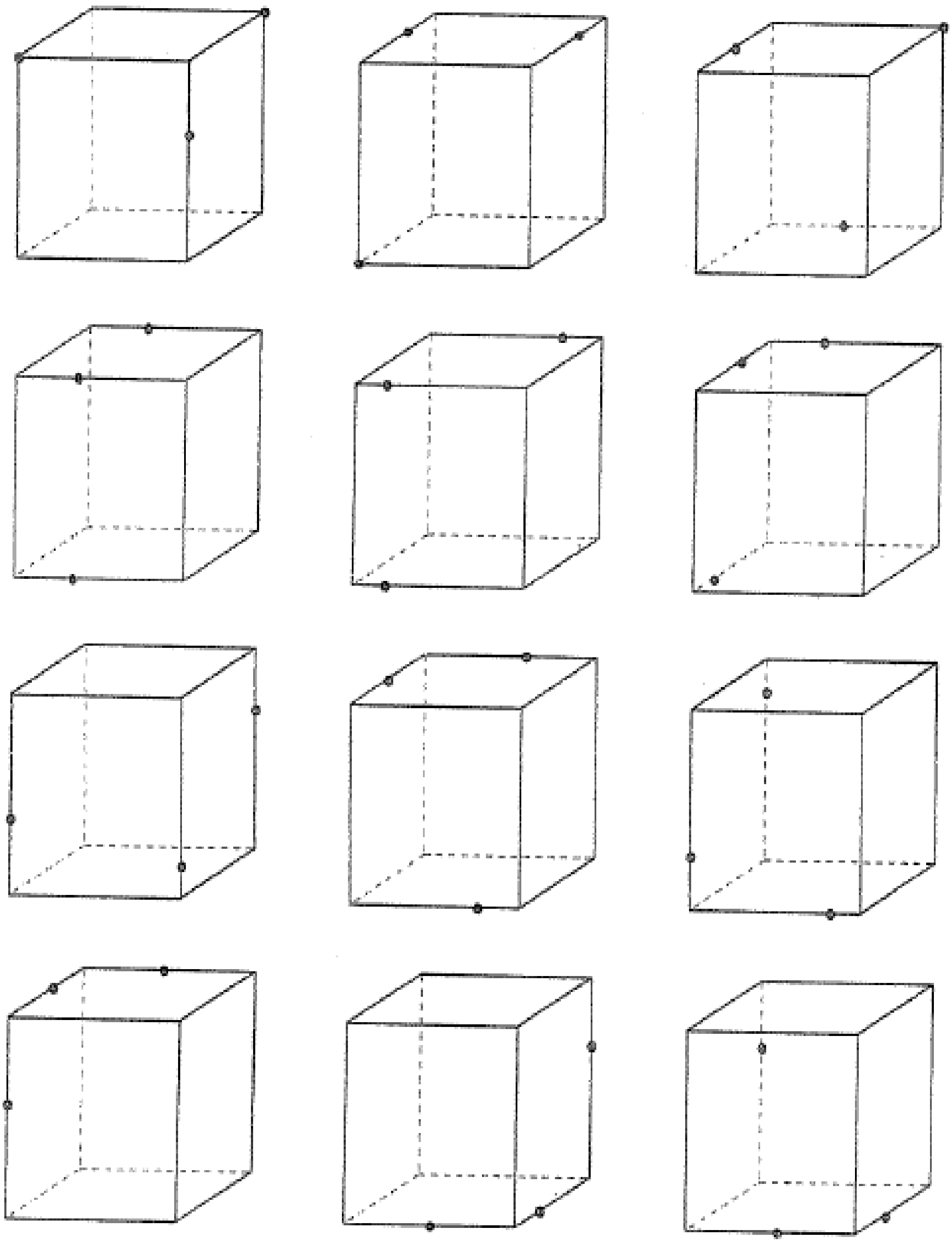
Para responder às questões colocadas utilize o material disponibilizado.

Apresente todas as conclusões a que o grupo chegou.

Anexo 3 – Ficha trabalho de secções

SECÇÕES PLANAS DEFINIDAS NUM CUBO

Identifique as secções planas obtidas pelo plano secante definido pelos pontos indicados:



Anexo 4 – Tarefa de exploração “Função Quadrática”

10º Ano – Matemática A

Função quadrática

Def. : Chama-se função quadrática a toda a função real de variável real definida por y= ax^2+bx+c, $a\neq 0$.

As funções quadráticas também podem ser definidas por: $y=a(x-h)^2+k$, $a,h,k\in IR\wedge a\neq 0$ e ainda por y=a(x-α)(x-β), $a,\alpha,\beta\in IR \wedge a\neq 0$, .

Pretende-se com este estudo analisar as influências dos parâmetros *a, h, k, α* e β, no gráfico das funções das famílias $y=a(x-h)^2+k$ e y=a(x-α)(x-β), tomando por base o gráfico da função definida por $y=x^2$.

Material: Folha cartolina A2; máquina de calcular; caneta de cores; régua; esquadro

1ª Fase

Cada grupo irá analisar um parâmetro e as alterações por ele produzidas.

Em cada grupo devem analisar três a quatro situações.

Devem apresentar na folha de grupo:

- os gráficos obtidos para cada uma das situações analisadas;
- os pontos que foram marcados e as suas coordenadas;
- o eixo de simetria;
- o vértice;
- conclusões relativas à influência do parâmetro estudado.

2ª Fase

Cada grupo "visitará" cada um dos trabalhos realizados pelos restantes grupos assimilando o que os colegas concluíram e deixaram registado no documento.

No fim desta fase, todos os grupos terão de ter percebido todos os trabalhos realizados.

Em cada folha estará uma grelha para avaliar e classificar o trabalho que foi "visitado" indicando a clareza da exposição e das conclusões.

O Grupo será avaliado pelo trabalho desenvolvido e pelo grau de entendimento de todos os elementos do grupo. Todos os elementos do grupo devem participar levantado questões, dando sugestões e levantando dúvidas no sentido de todos perceberem o trabalho realizado assim como os trabalhos "visitados.

Serão constituídos seis grupos com quatro elementos.

Anexo 5 – Subdivisão da tarefa de exploração “Função Quadrática”

Escola Secundária de Francisco Franco

Ficha de trabalho – 10º ano – 2012 / 2013

Função Quadrática

Grupo 1 - Análise do efeito da variação do parâmetro "***a***" nos diversos gráficos da família de funções definidas por $y=\boldsymbol{a}x^2$, com $a\neq 0$, tomando por base o gráfico da função definida por $y=x^2$.

Grupo 2- Análise do efeito da variação do parâmetro "***h***" nos diversos gráficos da família de funções definidas por $y=(x-h)^2$, com $h\in IR$, tomando por base o gráfico da função definida por $y=x^2$.

Grupo 3- Análise do efeito da variação do parâmetro "***k***" nos diversos gráficos da família de funções definidas por $y=x^2+k$, com $k\in IR$, tomando por base o gráfico da função definida por $y=x^2$.

Grupo 4- Análise do efeito da variação do parâmetro "**a**" nos diversos gráficos da família de funções definidas por $y=\boldsymbol{a}(x+1)(x-3)$, com $a\neq 0$, tomando por base o gráfico da função definida por $y=x^2$.

Grupo 5- Análise do efeito da variação dos parâmetros "α" e "β" nos diversos gráficos da família de funções definidas por $y=(x+\alpha)(x-\beta)$, tomando por base o gráfico da função definida por $y=x^2$.

Anexo 6 – Grelha de avaliação dos grupos

Escola Secundária de Francisco Franco

Tarefa: Função Quadrática

10º Ano

Grelha de avaliação Data: 5/3/2013

	Clareza da apresentação 30ptos	Exemplos adequados 30ptos	Conclusões precisas 40ptos
Grupo 1			
Grupo 2			
Grupo 3			
Grupo 4			
Grupo 5			
Grupo 6			
Grupo 7			

Anexo 7 – Questão aula – Função Quadrática

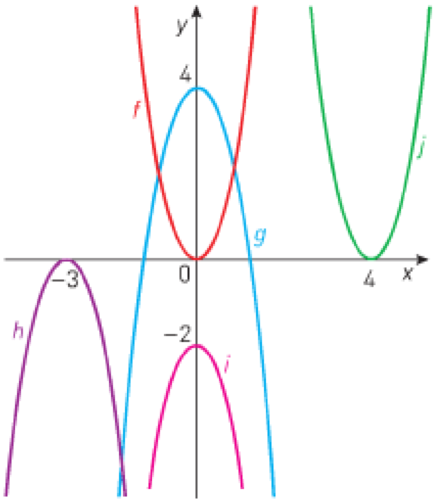
Escola Secundária de Francisco Franco

Nome:……………….…………… Grupo:……

Trabalho individual sobre a função quadrática

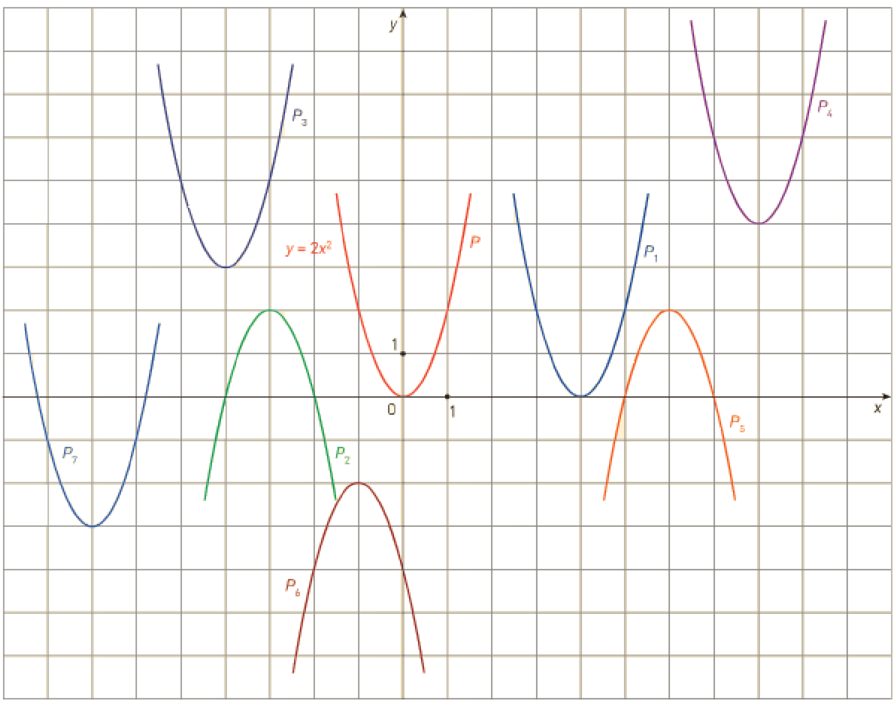
10º Ano- 2012/2013

1. Uma das funções representadas graficamente na figura é definida pela equação $y=3x^2$. Identifica-a e escreve expressões que definam as restantes, sabendo que todas as parábolas representadas têm a mesma abertura



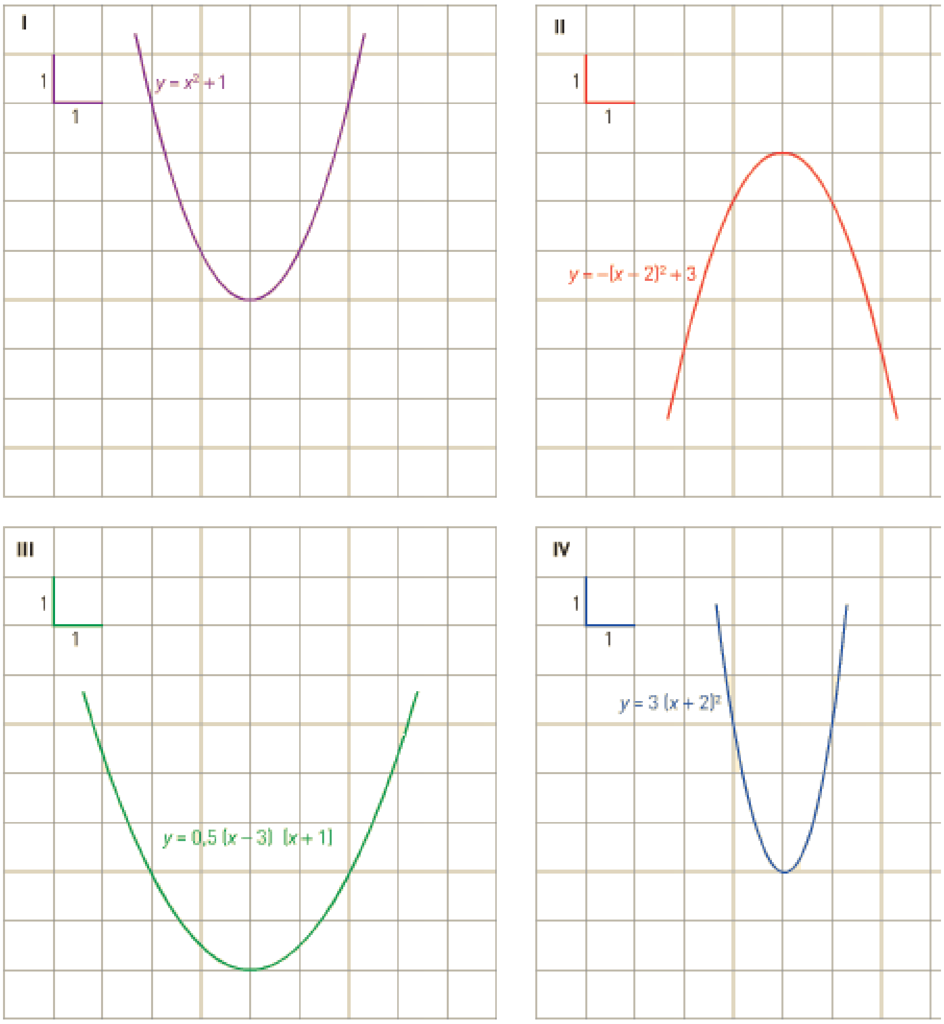
2. No referencial da figura estão representadas várias parábolas, todas com a mesma "abertura".

A parábola P é uma representação gráfica da função quadrática *f* definida por $f(x)=2x^2$. As parábolas P_1, P_2,P_3, P_4, P_5,P_6 *e* P_7 são representações gráficas, respetivamente, das funções f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6 e f_7.



Escreve uma expressão que defina cada uma das funções anteriores.

3. Em relação a referenciais *xOy o.m.*, as parábolas a seguir representadas correspondem a funções quadráticas, cujas expressões estão indicadas.



Para cada um dos casos apresentados, marca o referencial correspondente.

Anexo 8 – Inquérito

Ano letivo 2012/2013

Inquérito

Com o objetivo de fazer uma avaliação da introdução de trabalhos de exploração na sala de aula, gostaria de saber a tua opinião sobre este tipo de aulas e sobre as tarefas propostas.

Tarefas de exploração:

- Quantos poliedros convexos regulares (sólidos platónicos**)** existem?
- Que polígonos há num cubo? (Secções)
- Função Quadrática: análise das influências dos parâmetros a, h, k, α e β, no gráfico das funções definidas por $y=a(x-h)^2+k,\ a\neq 0$ e $y=a(x-\alpha)(x-\beta),\ a\neq 0$, tendo por base o gráfico da função definida por $y=x^2$.

1. Das atividades propostas em qual gostaste mais de trabalhar? E em qual não gostaste tanto? Porquê?

____

____

____

____

____

2. Que tipo de dificuldades sentiste na realização das tarefas?

____

____

____

____

3. Qual a tarefa que levantou mais dificuldades? Porquê?

____

____

____

4. Na tua opinião, este tipo de tarefas (de exploração) trouxe mais benefícios para a tua aprendizagem comparativamente à aprendizagem que terias se os assuntos fossem abordados da forma habitual? Porquê?

____

____

____

____

5. Na tua opinião, o trabalho em grupo é mais "rico" em termos de aquisição de conhecimentos do que o trabalho individual? Justifica.

____

____

____

____

6. Gostarias que este tipo de atividades fosse mais vezes desenvolvido em sala de aula?

____

____

Obrigada pela tua participação e umas boas férias.

A professora: Ana Paula Jardim

Anexo 9 – Pedido de autorização dirigido aos Encarregados de Educação

Exmo. Sr. Encarregado de Educação

Sou a professora de Matemática do seu educando neste ano letivo e estou a fazer o Mestrado em Didáctica da Matemática, no Centro de Ciências Exactas e da Engenharia da Universidade da Madeira. No âmbito da tese de mestrado, pretendo analisar o modo como os alunos aprendem em situações de tarefas de investigação/exploratórias, em que são eles a intuir, conjeturar, experimentar, num determinado tema matemático que se pretende abordar.

A investigação será desenvolvida durante o presente ano letivo, na escola, e para o seu desenvolvimento será necessário proceder à gravação, em áudio e vídeo, de algumas aulas de Matemática. Para o efeito, solicito a sua autorização para gravar o seu educando aquando do seu trabalho em grupo.

Saliento que os dados recolhidos serão usados exclusivamente como materiais de trabalho, estando garantida a privacidade e o anonimato dos participantes.

Manifesto, ainda, a minha inteira disponibilidade para prestar qualquer esclarecimento que considere necessário.

Na expectativa de uma resposta favorável, subscrevo-me com os melhores cumprimentos.

A Professora

Ana Paula Jardim

Funchal, 5 de Março de 2013

✂---

☐ Autorizo a referida gravação ☐ Não autorizo a referida gravação

Encarregado de Educação:____________________________________

Do aluno:_______________________________ Data _____________

Anexo 10 – Pedido de autorização dirigido ao Conselho Executivo da Escola

Exma. Presidente do Conselho Executivo

Como é do vosso conhecimento, encontro-me no presente ano letivo a fazer um mestrado no Centro de Ciências Exactas e da Engenharia da Universidade da Madeira. Este mestrado é na área da Didáctica da Matemática e é orientado pela Professora Doutora Elsa Fernandes.

O tema da tese prende-se com o modo como os alunos aprendem em situações de tarefas de investigação/exploração, em que são eles a intuir, conjeturar, experimentar, num determinado tema matemático que se pretende abordar.

É pois, no sentido de poder desenvolver esse trabalho, que venho por este meio solicitar autorização do Conselho Executivo, para proceder a gravações áudio e vídeo, de algumas aulas do 10º ano, turma 9, da qual sou professora.

Aproveito para informar que já foi pedida autorização aos encarregados de educação para a gravação do trabalho desenvolvido pelos seus educandos.

Agradecendo desde já toda a atenção dispensada e fico a aguardar deferimento.

Funchal, 5 março de 2013

A Professora

____