Universidade da Madeira

DEPARTAMENTO DE
Matemática

51
FUR EQU
+C
TIM

Equações Algébricas

Márcia Freitas Teixeira Furtado TEMTEM

UNIVERSIDADE DA MADEIRA
SERVIÇOS DE DOCUMENTAÇÃO

Dissertação para a obtenção do grau de Mestre em Matemática para o Ensino

Orientador: Professor Doutor Jorge Nuno Silva

Funchal – Madeira
Novembro de 2001

EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

Resumo

O presente trabalho aborda o tema das equações algébricas numa perspectiva analítica e histórica. Conhecer como se resolviam e como se resolvem equações do 1º ao 4º grau constitui uma secção deste trabalho.

O conhecimento de uma fórmula para a resolução de uma equação quadrática sugeriu a existência de fórmulas que exprimissem por meio de radicais as soluções de uma dada equação de grau superior. Assim, ao longo dos tempos alguns matemáticos dedicaram-se ao estudo de métodos de resolução de equações cúbicas e quárticas procurando encontrar uma fórmula que se aplicasse a todos os casos.

Ao longo do trabalho e de uma forma faseada procurámos apresentar ao leitor a evolução do conceito de equação e os métodos de resolução (por radicais) de equações do 1º ao 4º grau.

O facto de vários homens se terem dedicado entusiasticamente à procura da fórmula da cúbica resolvente foi motivo para que se relatasse com algum detalhe a história fascinante da referida fórmula. A partir da resolução de equações cúbicas e usando a fórmula da cúbica resolvente surgiram os agora denominados números complexos que até à altura eram conhecidos como números impensáveis.

No que concerne às equações do 5º grau alertamos o leitor para o facto das mesmas serem insolúveis por meio de radicais. Indo mais além referimos o Teorema Fundamental da Álgebra que garante a existência de n raízes para cada equação de grau n.

O facto de que expressões com radicais, à partida de difícil simplificação serem iguais a números inteiros fez com que se dedicasse uma secção do trabalho à manipulação algébrica de radicais.

ALGEBRAIC EQUATIONS

Summary

This work relates the theme algebraic equations in an analytic and historical way.

Knowing how to solve a quadratic equation give us some reasons to believe that exist others formulas for equations of higher degree.

In a constructive way we tried to show the evolutions of the equation's concept and method of resolutions (by radicals) of higher degree.

Some mans dedicated their life enthusiastically to search for the cubic formula. That's why we dedicated a section to relate that story.

From the resolution of cubic equations using the cubic formula appeared new numbers, called complex numbers, until then unknown.

The insolubility by radicals of equations of 5^{th} degree is referred in a general way. Going a little further away we make reference to the Algebraic Fundamental Theorem, that guarantees that every n^{th} degree equation as n solutions.

The fact that some expressions with radicals appeared in formulas, which looked complicated, were equal to integer numbers made that we dedicated a section to the algebraic manipulation of radicals.

EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

Palavras chave:

- Equações
- Matemática
- Álgebra
- História
- Fórmula
- Números Complexos

Índice

Prefácio

"Experimentando e errando, avançando no escuro e aos tropeções – assim progrediu o conhecimento humano. Embaraçado mas, ao mesmo tempo, esporeado pela dura luta pela existência e escravo das tradições do seu tempo, o Homem foi guiado no seu progresso pela intuição e pela experiência acumulada da raça. Isto aplica-se a todas as coisas humanas e a Matemática não constitui excepção."

Tobias Dantzig

Prefácio

O presente trabalho foi elaborado como Dissertação de Mestrado, do 2° ano do Curso de Mestrado em Matemática para o Ensino, da Universidade da Madeira.

O tema do trabalho proposto pelo orientador, Professor Doutor Jorge Nuno Silva, foi *Equações Algébricas*, tema esse que veio de encontro às minhas preferências, uma vez que pretendia que o tema pertencesse à área da Álgebra.

Enquanto aluna do curso de Matemática, sempre tive a preocupação de querer saber como é que aconteceu, como é que era, quem descobriu, como o fizeram, ... não apenas saber, mas indagar como o sabemos. Gostar da Matemática passa por conhecer as suas raízes...

Assim quando pesquisei bibliografia relativa à resolução das equações, nomeadamente as do 3° e 4° graus, conheci uma história fascinante, a história da vida de quatro homens que viveram nos séculos XV e XVI, que se dedicaram ao estudo da resolução de equações que, perante as dificuldades imanentes da escassez de simbologia, resolveram com palavras o que durante séculos ninguém havia conseguido. Essa história é uma lição de vida: não devemos desanimar nunca à primeira, segunda ou terceira tentativas. Não há nenhum problema excessivamente difícil ou inacessível, mas até os que parecem (e são) simples podem derrotar os fracos de ânimo. Tal como me ensinou o Professor Doutor Franco de Oliveira, *"na geometria e, de facto, em toda a matemática, devemos ter sempre presente o perigo das figuras e viver perigosamente. Façam muitas figuras!*[(1)] A álgebra não é mais do que geometria escrita com símbolos e a geometria é simplesmente álgebra expressa em figuras.

Para descobrir vale tudo, todos os recursos da intuição e inteligência, astúcia ou simples ingenuidade. A história dos algebristas italianos dos séculos XV e XVI é um exemplo de que o que parecia impossível revelou-se possível.

Provavelmente devido às dificuldades com que os algebristas se debateram, ao tentarem resolver a equação cúbica, em parte provenientes da existência de números complexos, foi possível explicar a origem desses números. Do mesmo modo, actualmente outros campos embatem em situações semelhantes. E, tal como outrora, o simples facto de se escrever o impossível deu-lhe uma existência simbólica, também hoje acontece o mesmo.

Foi com alguma dificuldade que li parcialmente uma tradução de Richard Witmer da obra-prima de Gerolamo Cardano, *Ars Magna*. Apaixonante foi o facto de que sobre a resolução de uma equação cúbica, que actualmente se faz em cerca de três páginas, Cardano escreveu um livro no qual, para cada tipo de equação era exibida uma regra geral, através de uma exemplificação muitas vezes demonstrada geometricamente.

[(1)] Frase lapidar de Snapper e Troyer na obra:
SNAPPER, E. & R. J. TROYER – *Metric affine geometry*, Dover, 1989, p. 7.

O presente trabalho foi organizado em seis capítulos.

O 1° capítulo aborda uma breve história das origens da Álgebra e alguns conceitos preliminares relativos a estruturas algébricas.

O 2° capítulo começa com uma breve incursão por aspectos históricos da Álgebra, desde os primórdios egípcios e babilónicos, abordando a resolução das equações do 1° grau.

O 3° capítulo descreve métodos geométricos e algébricos da resolução de equações do 2° grau, nomeadamente as regras de al-Khwarizmi, que consistem em completar o quadrado.

O 4° capítulo menciona os vários tipos de equações dos 3° e 4° graus, descrevendo os processos utilizados pelos algebristas italianos na resolução das mesmas e a consequente origem dos números complexos.

O 5° capítulo abrange parte da teoria de Galois, a qual é capaz de justificar a insolubilidade de resolução de uma equação do 5° grau por meio de radicais. Neste capítulo, os teoremas foram apresentados sem demonstração, podendo as mesmas serem encontradas em qualquer livro de Teoria de Galois, nomeadamente os assinalados na bibliografia com o símbolo *.

O 6° capítulo enuncia o Teorema Fundamental da Álgebra e uma sua demonstração que recorre à Análise Complexa. Neste capítulo foi dedicada uma secção à manipulação algébrica de radicais dado que, a fórmula resolvente da equação cúbica fornece, em certos casos, expressões complicadas com radicais que são iguais a números inteiros.

Espero que este trabalho contribua para mostrar que muitas vezes da intuição e do nada se descobrem maravilhas e que... a elaboração da resposta ou solução com justificação surge, muitas vezes, natural e necessariamente, depois...

Márcia Freitas Teixeira Furtado

Funchal, 9 de Julho de 2001

Agradecimentos

Ao meu orientador Professor Doutor Jorge Nuno Silva, pelo apoio, estímulo e confiança.

Ao senhor Carlos, Assistente de Informática, que me apoiou quando mais precisei.

Aos meus amigos e familiares, pela confiança e apoio constante.

Ao meu irmão Romeu, pelas palavras de incentivo e por acreditar sempre em mim.

À minha irmã, Helionora e ao meu cunhado, Daniel por estarem sempre presente e me compreenderem.

Aos meus pais, que me apoiaram em todos os momentos da vida, principalmente nos mais difíceis.

A alguém muito especial...

Capítulo I - Introdução

"A álgebra é generosa, frequentemente dá mais do que lhe pedem."

D'Alembert

1. Origens da Álgebra

A álgebra, no sentido lato em que hoje se toma o termo, ocupa-se das operações em forma simbólica.

No presente trabalho, estamos interessados na álgebra num sentido mais restrito, naquela parte da álgebra a que se chama a *teoria das equações*. Foi com este significado mais limitado que ao princípio se utilizou a palavra álgebra. O termo é de origem árabe: "al" é o artigo "o" e "gebra" é o verbo compor, "restituir".

É possível que o termo álgebra tenha sido adoptado de um título de um livro escrito por Mohamed Ben Musa Al Kwarizmi, que tanto contribuiu para o desenvolvimento da numeração de posição. O título completo do livro é *"Algebar wal Muquabalh"* cuja tradução literal será "Restituição e ajustamento". Al Kwarizmi utilizou a palavra restituição com o sentido que hoje damos a transposição, ou seja, a mudança dos termos de um para outro membro de uma equação como, por exemplo, a passagem de $3x + 7 = 25$ para $3x = 25 - 7$.

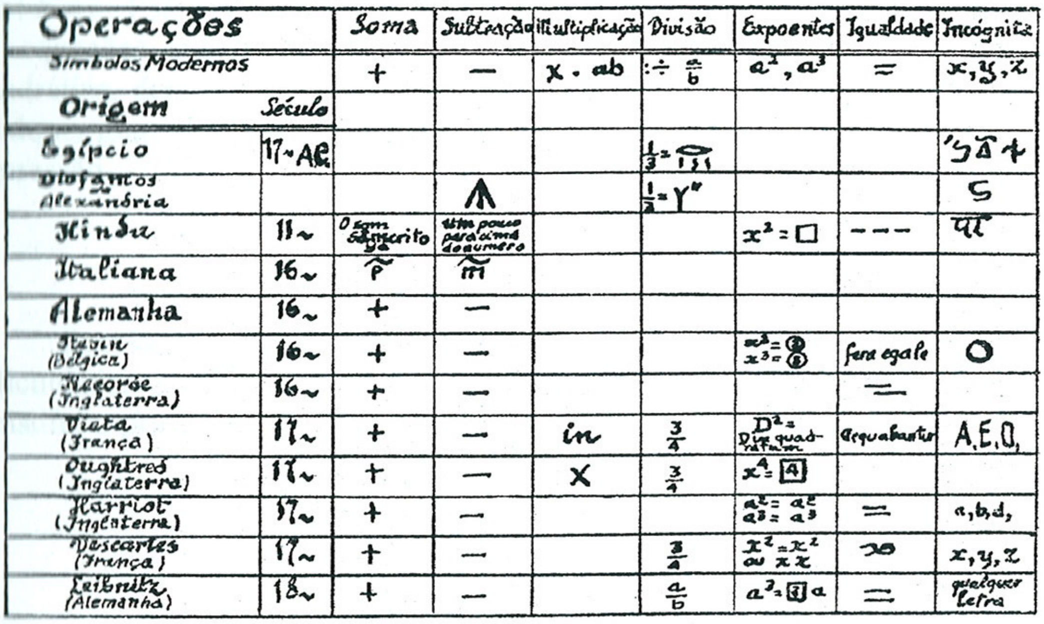
Encontram-se vestígios de uma álgebra primitiva nos tijolos de barro dos Sumérios, e a ciência alcançou, provavelmente, um grau de desenvolvimento bastante avançado entre os antigos Egípcios. Na verdade, o papiro de Rhind, não posterior ao século XVIII a. C., trata de problemas sobre a distribuição de alimentos e outros abastecimentos, problemas esses que conduzem a equações simples.

De um modo geral, a álgebra, na sua evolução nas várias regiões, passou por três fases sucessivas: a retórica, a sincopada e a simbólica.

A álgebra retórica caracteriza-se pela completa ausência de símbolos, com excepção, evidentemente das próprias palavras utilizadas, no sentido simbólico. Ainda hoje se usa a álgebra retórica, por exemplo, quando se afirma *"na soma, a ordem das parcelas é arbitrária"*, o que, por meio de símbolos, seria expresso por $a+b=b+a$.

A álgebra sincopada, de entre as quais a egípcia é um exemplo típico, constitui um avanço da retórica. Certas palavras de uso frequente vão sendo gradualmente abreviadas e, finalmente, as abreviaturas contraem-se, ao ponto de se esquecer a sua origem e os símbolos deixam de ter conexão aparente com as operações que representam. Deste modo, a palavra sincopada torna-se um símbolo.

A história dos símbolos + e – pode ilustrar este ponto. Na Europa medieval, o último era anotado pela palavra *minus*, por extenso, e mais tarde pela inicial *m* com um traço por cima. A letra acabou por desaparecer, ficando apenas o traço que se sobrepunha. Por semelhante metamorfose passou o sinal *mais*. Para ficarmos com uma ideia da evolução dos símbolos mais correntes podemos observar a figura seguinte.



Operações		Soma	Subtração	Multiplicação	Divisão	Expoentes	Igualdade	Incógnita
Símbolos Modernos		+	—	x . ab	: ÷ $\frac{a}{b}$	a^2, a^3	=	x, y, z
Origem	Século							
Egípcio	17 ~ AC				$\frac{1}{3}$ = [illegible]			[illegible]
Diofantos de Alexandria			⋔		$\frac{1}{2}$ = Γ''			ς
Hindu	11 ~	O som sânscrito ya	um pouco para cima do número			x^2 = □	- - -	या
Italiana	16 ~	$\tilde{p}$	$\tilde{m}$					
Alemanha	16 ~	+	—					
Stevin (Bélgica)	16 ~	+	—			x^3 = ③	fera egale	O
Recorde (Inglaterra)	16 ~	+	—				=	
Viata (França)	17 ~	+	—	in	$\frac{3}{4}$	D^2 = D in quadratum	aequabantur	A, E, O,
Oughtred (Inglaterra)	17 ~	+	—	X	$\frac{3}{4}$	x^4 = $\boxed{4}$		
Harriot (Inglaterra)	17 ~	+	—			a^2 = aa, a^3 = aaa	=	a, b, d,
Descartes (França)	17 ~	+	—		$\frac{3}{4}$	x^2 = x^2 ou xx	∝	x, y, z
Leibnitz (Alemanha)	18 ~	+	—		$\frac{a}{b}$	a^3 = $\boxed{3}$ a	=	qualquer letra

Figura 1 – Evolução dos símbolos

Quanto à álgebra simbólica, um exemplo usual é a grega, na qual designava-se a incógnita de um problema por letras minúsculas do alfabeto grego. No entanto, julgamos que esses símbolos não foram usados no sentido *"operacional"*, mas somente como *"rótulos"* para designar diferentes pontos ou elementos de uma figura geométrica. Esses mesmos símbolos são usados actualmente para identificar pontos de figuras geométricas, por isso devemos recordar que herdámos esse hábito dos gregos.

Há uma analogia notável entre a história da álgebra e a da aritmética. Nesta, a humanidade durante milhares de anos *lutou* com uma numeração inadequada por falta de um símbolo para o nada. Naquela, a ausência de uma notação genérica reduziu a ciência a uma série de regras do acaso para a solução de equações numéricas. Assim como a descoberta do zero criou a aritmética de hoje, a notação literal abriu uma nova era na história da álgebra.

Antes da introdução da notação literal apenas se podia falar de expressões individualizadas. Cada expressão como $2x+3$; x^2+4x+7 tinha *personalidade própria* e tinha de ser manuseada de acordo com as suas características individuais. A notação literal tornou possível a passagem do individual para o colectivo, do *"alguns"* para o "quaisquer".

Cada uma das formas linear $ax+b$ e quadrática ax^2+bx+c é considerada actualmente como uma espécie singular.

Se a, b e c forem números racionais quaisquer e se a não for nulo, existe sempre um número racional x, e só um, que satisfaz a equação $ax+b=c$. Esta equação chama-se linear e, de uma grande variedade de tipos de equações existentes, esta é a mais simples. Depois da linear vem a quadrática, depois a cúbica e, geralmente falando, as equações algébricas de qualquer grau, designando-se por grau n a mais alta potência da incógnita x na expressão

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \ldots + px + q = 0.$$

Resolver cada uma destas equações algébricas, descrever as dificuldades sentidas e as impossibilidades existentes ao longo dos tempos, constitui o principal objectivo deste trabalho.

2. Noções Preliminares

Toda esta secção é dedicada à descrição de definições que serão úteis mais adiante.

2.1 Estruturas Algébricas

Definição 1:

Seja A um conjunto não vazio. Definamos um aplicação $\alpha : A^2 \to A$.

Ao par (A, α) chamamos *grupóide,* A diz-se o *suporte do grupóide* e α diz-se a *operação binária definida em A.*

Definição 2:

$(G, \cdot)$ é um grupo se é um grupóide tal que:

(i) A operação . é associativa.

(ii) Existe elemento neutro pata a operação considerada, ou seja,

$$\exists e \in G \forall x \in G : e \cdot x = x \cdot e = x.$$

(iii) cada elemento $x \in G$ é invertível

$$\forall x \in G \exists x' \in G : x \cdot x' = x' \cdot x = e.$$

Definição 3:

Um grupo diz-se *abeliano* se a sua operação for comutativa.

Definição 4:

Um subconjunto H dum grupo é um *subgrupo* de G se H é um grupo para a operação definida em G e escrevemos $H \leq G$.

Definição 5:

Chama-se *anel* a uma estrutura constituída por um conjunto A e duas operações binárias definidas em A, arbitrariamente designadas por "adição" e "multiplicação", tais que:

(i) a adição é associativa e comutativa.

(ii) existe em A um elemento, designado por 0, que é neutro para a adição e cada elemento de A tem simétrico.

(iii) a multiplicação é associativa.

(iv) a multiplicação é distributiva em relação à adição.

O anel diz-se *comutativo* quando:

(v) a multiplicação é comutativa.

Diz-se ainda que *o anel tem identidade* quando:

(vi) existe em A um elemento, designado por 1, que é neutro para a multiplicação.

Num anel com identidade, os elementos que possuem oposto para a multiplicação dizem-se *invertíveis,* também se podendo dizer que são *unidades.*

Exemplos:

São exemplos de anéis os conjuntos Z, dos números inteiros, Q, dos números racionais, R, dos números reais e C, dos números complexos, com as operações usuais.

Definição 6:

Diz-se que um anel A é um *anel de divisão* se:

(i) $A \neq \{0\}$.

(ii) A tem identidade.

(iii) todo o elemento $a \in A \setminus \{0\}$ é invertível.

Definição 7:

Dá-se o nome de *corpo* a qualquer anel de divisão comutativo, ou seja, um anel comutativo com identidade no qual todo o elemento não nulo tem inverso.

Definição 8:

Diz-se que um a anel A tem *característica zero* $c(A) = 0$, se

$$m \cdot a = 0 \Rightarrow m = 0, \quad \forall a \in A.$$

Diz-se que um anel A tem *característica* q $(q > 0)$, se se tem $q \cdot a = 0, \quad \forall a \in A,$ sendo q o menor inteiro positivo que satisfaz esta condição, isto é,

$$\forall q' \in Z: \quad 0 < q' < q \quad \exists a \in A: \quad q' \cdot a \neq 0.$$

Definição 9:

Seja A um anel. Dá-se o nome de *subanel* de A a qualquer subsistema algébrico de A que seja anel.

Exemplos:

A é subanel de A (denomina-se *subanel próprio*).

$\{0\}$ é subanel de A (designa-se *subanel nulo*).

1.2 Generalidades Sobre Polinómios

A noção de polinómio está intimamente ligada à história recente da resolução de equações algébricas. O presente tópico é consagrado, basicamente, ao estudo de "polinómios". Consideraremos que A designa um anel comutativo e com identidade.

Definição 10:

Dado um anel A e um símbolo x, dá-se o nome de *polinómio,* na *variável* (ou *indeterminada*) x, a qualquer expressão do tipo

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n \ ,$$

onde $a_0 , a_1 , a_2 , \ldots , a_n \in A$ e n é um inteiro não negativo.

Os elementos a_i , com $i = 0, 1, .. n$, são os *coeficientes* de $p(x)$.

A propósito desta definição, convém fazer, de imediato, algumas observações.

Observações:

1. De um modo mais rigoroso, poderíamos dizer que um polinómio é uma sucessão $(a_0 , a_1 , a_2 , \ldots , a_k , \ldots)$ de elementos de A, satisfazendo a condição de que, a partir de certa ordem, todos os termos são nulos.

2. Uma consequência da definição anterior é que dois polinómios

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n \ , \qquad q(x) = b_0 + b_1 x + b_2x^2 + \ldots + b_mx^m \ ,$$

são *iguais* se, e só se, $n = m$ e, para cada $i = 0, 1, .. n$, se tem $a_i = b_i$.

3. Por vezes, usa-se a seguinte notação abreviada para representar um polinómio:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n = \sum_{i=o}^{n} a_ix^i ,$$

em que, por convenção, $a_0 x^0 = a_0$ e $x^1 = x$.

Definimos em seguida o "grau" de um polinómio. Este grau será um número inteiro não negativo, o que permite em muitos casos, fazer demonstrações por indução sobre o grau dos polinómios envolvidos.

Definição 11:

Dado um polinómio

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i,$$

no caso dos seus coeficientes não serem todos nulos, chama-se *grau* de $p(x)$ ao máximo dos índices $i = 0, 1, \dots n$ para os quais $a_n \neq 0$ e para $i > n$, $a_i = 0$.

No caso de todos os coeficientes do polinómio serem nulos $p(x)$ será o *polinómio nulo* e o seu grau será, por convenção, $-\infty$.

Se $p(x)$ tem grau n, o coeficiente a_n chama-se o *coeficiente director* de $p(x)$. Quando $a_n = 1$, o polinómio $p(x)$ chama-se *mónico*.

Convém notar que é usual omitir na prática corrente as parcelas que tenham coeficiente nulo.

Assim, por exemplo, tomando $A = \boldsymbol{Z}$, temos:

$$5 + 4x + x^2 = 5 + 4x + x^2 + x^3 = 5 + 4x + x^2 + x^3 + x^4 = \dots$$

$$x - x^4 = 0 + 1x + 0x^2 + 0x^2 - 1x^4 + 0x^5 = \dots$$

Os elementos do anel A podem ser encarados como polinómios: o elemento 0 será o *polinómio nulo*, todos os outros terão grau 0.

Quando encarados como polinómios, os elementos de A tomam o nome de *constantes*.

Representaremos por $A[x]$ o conjunto de todos os polinómios com coeficientes no anel A.

1.3 Morfismos

A noção de *"homomorfismo"* permite, de certo modo, relacionar uns grupos com outros.

Definição 12:

Sejam G e G' grupos. Chama-se *homomorfisno* (ou simplesmente *morfismo*) de G para G' qualquer aplicação

$$\theta : G \to G'$$

tal que

$$\forall x, y \in G : \theta(x \cdot y) = \theta(x) \cdot \theta(y).$$

Definição 13:

Um homomorfismo de G para G' chama-se:

(i) um *monomorfismo* quando é injectivo;

(ii) um *epimorfismo* quando é sobrejectivo;

(iii) um *isomorfismo* quando é bijectivo;

(iv) um *endomorfismo* quando $G = G'$;

(v) um *automorfismo* quando é endomorfismo e isomorfismo.

Quando há um isomorfismo entre os grupos G e G', escrevemos $G \cong G'$.

1.4 Espaços vectoriais

Definição 14:

Seja $E = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \ldots\}$ um conjunto qualquer e $(K, +, \cdot)$ um corpo em que $K = \{\alpha, \beta, \chi, \ldots\}$.

Suponhamos que em E está definida uma operação binária designada por condição e tal que:

(i) $\quad \vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}, \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in E.$

(ii) $\quad (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}), \quad \forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in E.$

(iii) $\quad \exists \vec{0} \in E : \vec{0} + \vec{x} = \vec{x}, \quad \forall \vec{x} \in E.$

(iv) $\quad \forall \vec{x} \in E, \exists -\vec{x} \in E : \vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}.$

Suponhamos ainda que, para cada $\lambda \in K$ e cada $\vec{x} \in E$ se define $\lambda \cdot \vec{x} \in E$:

(v) $\quad \lambda \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = \lambda\vec{x} + \lambda\vec{y}, \quad \forall \lambda \in K, \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in E.$

(vi) $\quad (\lambda + \mu) \cdot \vec{x} = \lambda\vec{x} + \mu\vec{x}, \quad \forall \lambda, \mu \in K, \quad \forall \vec{x} \in E.$

(vii) $\quad (\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{x} = \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{x}), \quad \forall \lambda, \mu \in K, \quad \forall \vec{x} \in E.$

(viii) $\quad 1 \cdot \vec{x} = \vec{x}, \quad \forall \vec{x} \in E.$

Nestas circunstâncias diz-se que E constitui um *espaço vectorial* sobre o corpo K.

Os elementos de E tomam o nome de *vectores* e os de K de *escalares*.

Se diz-se que E é um *espaço vectorial real.*

Definição 15:

Sejam $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k \in E, \quad \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in K.$

$$\vec{x} = \alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + \ldots + \alpha_k\vec{x}_k$$

diz-se uma *combinação linear* dos vectores $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k$ por meio dos escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$.

Definição 16:

Os vectores $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k \in E$ geram o espaço vectorial E (*geradores*) quando qualquer vector do espaço é combinação linear deles.

Escrevemos $E = \langle \vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots \vec{x}_k \rangle$.

Definição 17:

Os vectores $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k$ num espaço vectorial E qualquer, dizem-se *linearmente independentes* quando o vector nulo se pode obter como sua combinação linear de uma só manreira. Caso contrário, dizem-se *linearmente dependentes*.

Se $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k$ são *linearmente independentes* então

$$\alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + \ldots + \alpha_k\vec{x}_k = \vec{0} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0.$$

Definição 18:

Chama-se *base de um espaço vectorial E* a uma lista ordenada de vectores $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots \vec{e}_n \in E$ linearmente independentes e que geram o espaço.

Definição 19:

Um espaço vectorial *finitamente gerado* se admite um conjunto finito de geradores.

Definição 20:

Se E é um espaço vectorial finitamente gerado, o número de vectores de uma base qualquer de E, chama-se a *dimensão* do espaço e representa-se por $\dim E$.

Um espaço vectorial finitamente gerado também se chama espaço vectorial de *dimensão finita*.

Definição 21:

Sejam E e F espaços vectoriais sobre o mesmo corpo K e seja $\varphi : E \rightarrow F$ uma aplicação.

Diz-se que φ é uma *aplicação linear* quando:

(i) $\varphi(\vec{x}+\vec{y}) = \varphi(\vec{x}) + \varphi(\vec{y}), \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in E$

(ii) $\varphi(\alpha \cdot \vec{x}) = \alpha \cdot \varphi(\vec{x}), \quad \forall \alpha \in K, \quad \forall \vec{x} \in E$

Capítulo II – Equações do 1º grau

"Para Thales...a questão primária não era

O que é que sabemos,

mas

Como é que o sabemos."

Aristóteles

Capítulo II –Equações do 1º grau

1. Introdução

Um dos primeiros conhecimentos da Matemática pela humanidade, para além das contagens, provém das civilizações egípcia e babilónia. Ambas desenvolveram a Matemática de uma forma similar em alguns aspectos mas, logicamente distinta noutros, como seguidamente iremos observar.

2. Factos básicos no Antigo Egipto

No antigo Egipto era abundante o uso de hieroglifos, que permaneceram indecifráveis até 1799, quando em Alexandria se descobriu a pedra trilingue denominada *roseta*.

Na sociedade egípcia a religião era uma figura central pois a morte era uma constante preocupação.

A construção de projectos de grande escala era usualmente levada a cabo. Os "projectos" de construção requeriam todo o tipo de conhecimento matemático.

Quanto à Matemática no antigo Egipto sabe-se que:

- os números 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000 e 1000000 eram denotados por símbolos.
- a base usada era a decimal.
- na aritmética eram conhecidas as operações de adição por agrupamento, multiplicação e divisão do tipo binária.
- as fracções eram apenas unitárias (fracções cujo denominador era igual a 1)
- na geometria predominavam o cálculo de áreas e de volumes.
- relativamente à teoria dos números, esta era praticamente inexistente.
- no campo da Álgebra conheciam-se as soluções de equações de 1º grau.

O nosso conhecimento da sabedoria matemática do antigo Egipto não é oriunda dos hieroglifos gravados nos templos que eram considerados sagrados, mas sim de dois papiros que contêm colecções fabulosas de problemas matemáticos, bem como das suas soluções: o papiro de Rhind e o de Moscovo.

O papiro de Rhind é um pergaminho com cerca de 6 metros de comprimento e 33 cm de largura que foi assim denominado pelo escocês A. Henry Rhind (1833 – 1863) que o comprou em Luxor em 1858. A sua origem remonta a 1650 a.C. e foi escrito pelo escriba Ahmes que copiava um documento que era 200 anos mais velho. Por isso o papiro de Rhind também é denominado por papiro de Ahmes.

O papiro de Moscovo cujo autor é desconhecido foi adquirido por V. S. Golenishchev (1947) sendo posteriormente vendido ao Museu de Arte de Moscovo, daí o seu nome. A sua origem remonta a 1700 a. C. e contém cerca de 25 exemplos práticos .

Como base do conhecimento matemático do antigo Egipto encontra-se o já referido papiro de Rhind, um documento que incluía problemas em diversas áreas da Matemática, nomeadamente sobre a notação usada (fracções), aritmética, álgebra, geometria (medições de objectos). Dada a vasta importância do papiro, faremos de seguida uma referência ao mesmo, no que respeita à notação (sistema numérico), à adição, à multiplicação, à divisão e às fracções típicas utilizadas.

2.1 O Sistema Numérico do Antigo Egipto

A notação simbólica utilizada para os números era a seguinte:

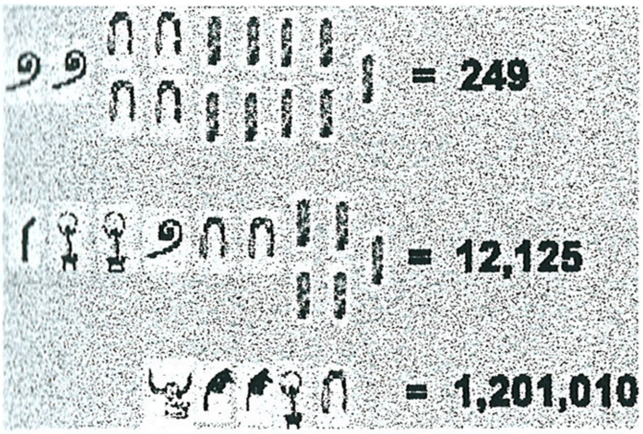
𓏺 = 1	𓆼 = 1,000	𓁨 = 1,000,000
𓎆 = 10	𓂭 = 10,000	
𓍢 = 100	𓆐 = 100,000	

Os significados de cada um dos símbolos utilizados são os seguintes [1]:

1 = traço vertical (vertical stroke)
10 = "heal bone"
100 = laço ("snare")
1000 = flor de lótus
10000 = um dedo curvado ("a bent finger")
100000 = "a burbot fish"
1000000 = uma figura ajoelhada

Os restantes números eram obtidos através de grupos dos números anteriores.

Exemplo:

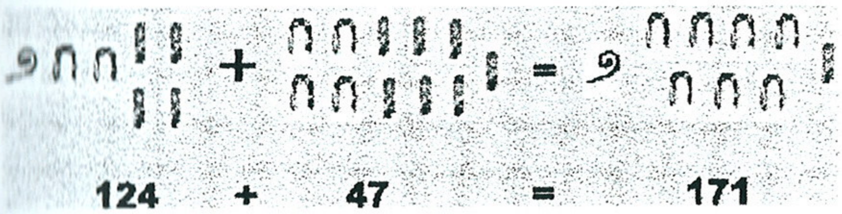


1.2 Operações Básicas do Antigo Egipto

1. Adição

Quanto à adição de números esta era feita por agrupamentos.

Por exemplo:



---

[1] Note-se que existem muitas interpretações acerca do que estes hieroglifos possam representar.

[11] Note-se que existem muitas interpretações acerca do que estes hieroglifos possam representar.

2. Multiplicação

A multiplicação era basicamente binária, isto é, usava somente duplicações sucessivas.

Exemplo:

Efectuar a operação: 41×59.

	41	59	
$\times 2$	1	59	$\times 2$
	2	118	
	4	236	...
	8	472	
	16	944	
	32	1888	

Como $64 = 32 \times 2 > 41$, então não há necessidade de duplicar o número 32. Assim efectuando as seguintes subtracções tem-se que:

$$41 - 32 = 9;$$
$$9 - 8 = 1;$$
$$1 - 1 = 0$$

onde se observa que $41 = 32 + 8 + 1$. Seguidamente assinalamos os números na coluna da direita correspondentes a 32, 8, 1 (cuja soma como vimos totaliza 41) e adicionamo-los.

41	59	
1	59	*
2	118	
4	236	
8	472	*
16	944	
32	1888	*

$$41 \times 59 = 2419$$

Reparemos que a multiplicação é obtida unicamente através de somas.

Para constatarmos como é que este método funciona repare-se que.

$$41 \times 59 = (\underbrace{\boxed{32 + 8 + 1}}_{\text{soma de elementos da coluna da esquerda}}) \times 59 =$$

$$= 32 \times 59 + 8 \times 59 + 1 \times 59 =$$

$$= \underbrace{\boxed{1888 + 472 + 59}}_{\text{soma de elementos da coluna da direita}} =$$

$$= 2419.$$

3. Divisão

A divisão era também basicamente binária.

Vejamos o seguinte exemplo de uma divisão exacta.

Exemplo:

Efectuar a divisão $91 \div 7$.

Os egípcios não consideravam a divisão como uma nova operação, mas sim equivalente a encontrar um número, designemo-lo por x, tal que,

$$x \times 7 = 91.$$

Assim tem-se que:

x	7	
1	7	*
2	14	
4	28	*
8	56	*
1+4+8=13	91	

Logo $13 \times 7 = 91$, ou seja, $91 \div 7 = 13$

Agora vejamos um exemplo de divisão não exacta.

Exemplo:

Efectuar a operação $329 \div 12$

	x	12
*	1	12
*	2	24
	4	48
*	8	96
*	16	192
	32	384

Como

$$329-192=137;$$
$$137-96=41;$$
$$41-24=17;$$
$$17-12=5$$

é necessário adicionar aos números com * o número 5 para perfazer 329.

Então

$$329=(16+8+2+1)\cdot 12+5$$
$$329=27\cdot 12+5$$
$$\frac{329}{12}=27\cdot\frac{5}{12}$$
$$\frac{329}{12}=27\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{12}\right)$$

Vejamos ainda um outro exemplo de uma divisão não exacta.

Exemplo:

Efectuar a operação 35 : 8.

x	8
1	8
2	16
* 4	32
½	4
* ¼	2
* 1/8	1
4 + ¼ + 1/8	35

$\boxed{:2}$

35 − 32 = 3.
Assim precisamos de ter 3 na coluna da direita ou números cuja soma seja igual a 3.

$$\left(4+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)\times 8 = 35 \qquad \text{logo} \qquad 35 \div 8 = 4+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}.$$

As leis distributivas para a multiplicação e divisão eram bem compreendidas.

4. Fracções

Ao que parece, os egípcios permitiam apenas o uso de fracções unitárias, com uma única excepção a fracção $\frac{2}{3}$. Todas as outras fracções deveriam ser convertidas em fracções unitárias. O símbolo utilizado para denotar uma fracção unitária de denominador n era $\overline{n}$ e para a fracção $\frac{2}{3}$ era 3. Por exemplo, a fracção unitária $\frac{1}{5}$ era representada por 5.

As decomposições de uma fracção não unitária numa soma de fracções unitárias não era necessariamente única. Actualmente conhecem-se métodos para a fazer, por exemplo, o método de Fibonacci-Sylvester e o *Splitting method*, aos quais não iremos fazer referência.

a fazer, por exemplo, o método de Fibonacci-Sylvester e o *Splitting method,* aos quais não iremos fazer referência.

No papiro de Rhind existe uma tabela de fracções na qual dada uma fracção da forma $\frac{2}{n}$ (com n natural ímpar até 101) converte-a numa soma de fracções unitárias. Parte dessa tabela está transcrita abaixo.

$\frac{2}{n}$	$\frac{1}{p}$ +	$\frac{1}{q}$ +	$\frac{1}{r}$ + ...
5	3	15	
7	4	28	
9	6	18	
11	6	66	
13	8	52	104
15	10	30	

Actualmente não se conhece o algoritmo exacto para a determinação dessa decomposição.

Alguns dos problemas do papiro de Rhind envolviam na sua resolução o uso de fracções unitárias.

3. Factos Básicos na Antiga Babilónia

O 4º milénio, antes da nossa era (cristã) foi um período notável de desenvolvimento cultural, oriundo com o uso da escrita, do ferro e dos metais.

Tal como no antigo Egipto também no vale da Mesopotâmia existia uma civilização de classe superior. Os sumérios do vale da Mesopotâmia, construíram templos decorados com loiças de barro artísticas e mosaicos com modelos geométricos.

Governadores poderosos tornaram o local num império, no qual foram construídos diversos trabalhos públicos, tais como, um sistema de irrigação por canais para regar as terras e controlar as inundações.

As civilizações da antiguidade da Mesopotâmia são muitas vezes referidas por "Babilónia", contudo esta designação da Babilónia não é rigorosamente correcta. A cidade da Babilónia não era no princípio o centro da cultura da Mesopotâmia associada aos rios Tigres e Eufrates, mas convencionalmente o nome "Babilónia" era usado para descrever a referida região durante o período de 2000 a 600 a.C.

O sistema de escrita da antiga Babilónia era denominado cuneiforme e era baseado numa serie de símbolos compostos por linhas rectas. O uso da escrita cuneiforme formou uma forte união. As leis, os cálculos dos impostos, as lições escolares, as cartas pessoais eram impressos em tábuas de argila maleáveis e depois eram queimadas sob o calor do sol ou em fornalhas.

Em meados do século XIX um grande número (cerca de 500 000) de placas de argila foram encontradas na Mesopotâmia. Algumas delas eram matemáticas, mas os conteúdos foram primeiramente decifrados apenas entre 1929 e 1930 e descobriu-se um novo mundo da Matemática da antiga Babilónia. Basicamente essas tábuas resumiam-se a textos ou problemas.

As tábuas de textos continham tabelas de multiplicações, de números elevados ao quadrado, ao cubo, entre outros. As outras tábuas continham relatos e soluções de problemas.

A maioria das tábuas eram da antiga Babilónia, isto é, datam da dinastia de Hammurapi (1800-1600 a.C.). Durante o período intermédio a linguagem e a forma de escrever os símbolos alteraram-se, e essas mudanças tornaram possível a data precisa das tábuas. O que não mudou foi o conteúdo matemático dos textos.

O facto surpreendente é que a maioria desses textos continham problemas do mesmo tipo que se reduziam a equações quadráticas, que abordaremos no próximo capítulo.

Quanto à Matemática da antiga Babilónia sabe-se que:

- a notação era posicional e sexagesimal;
- não usavam o zero;
- usavam fracções mais gerais se bem que nem todas as fracções eram admitidas;
- sabiam calcular a raiz quadrada de um número;
- sabiam resolver sistemas lineares;
- resolviam equações cúbicas com a ajuda de tábuas.

3.1 O Sistema Numérico Babilónio

Milhares de tábuas do tempo da dinastia de Hammurapi (1800-1600 a.C.) ilustram o sistema numérico que ficou bem estabelecido. O sistema decimal, comum à maioria das civilizações, tanto antigas como modernas, foram submersos na Mesopotâmia onde emergiu uma notação que tornou fundamental a base sessenta.

Não existe uma razão que justifique a selecção por parte dos babilónios dum sistema sexagesimal. Possivelmente a base 60 adoptada e legalizada no interesse da metrologia[2] e o facto dos números 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20 e 30 todos dividirem 60 (ou seja, 60 tem dez divisores próprios).

Qualquer que seja a origem, o sistema da numeração sexagesimal tem tido uma longa existência, pois ainda hoje existem vestígios na unidade de tempo e medida angular: dividimos uma hora em 60 minutos e um minuto em 60 segundos.

Para enumerar os babilónios usavam apenas dois símbolos, um cunho horizontal e um vertical:

< — — —10 V — — —1

Estes símbolos eram impressos com uma vara fina nas tábuas de argila que eram mais tarde queimadas.

---

(2) Ciência que trata principalmente da medição precisa das três quantidades fundamentais: comprimento, massa e tempo.

Todos os outros números eram obtidos através de combinações destes símbolos.

Exemplo:

O símbolo para 57 é mostrado na figura abaixo.

$$\begin{matrix} \prec\prec & \mathrm{V\,V\,V} \\ \prec\prec\prec & \mathrm{V\,V\,VV} \end{matrix} = 57$$

É de realçar que a notação era posicional, isto é, os valores dependiam das suas posições relativas na representação do número. Os números de 1 a 59 eram gravados, usando o princípio aditivo com os dois cunhos atrás descritos.

O estabelecimento de posições era através de espaços apropriados entre os grupos de cunhos. Lendo da direita para a esquerda, que corresponde à subida do valor do expoente. Cada grupo tem um "valor local" que depende da sua posição.

O número 222 na notação decimal usa a mesma cifra (algarismo) três vezes, mas com um diferente significado em cada uma das vezes. A primeira vez o algarismo 2 significa duas unidades, a segunda vez significa 2×10 , e finalmente 200 (isto é, 2×10^2). De uma forma análoga, os babilónios fazem múltiplos usos do símbolo *VV*. Quando escrevem

VV   *VV*   *VV*,

claramente separados por três grupos com dois cunhos cada, entendiam o grupo da direita como sendo 2 unidades, o grupo seguinte como 2×60 e o grupo da esquerda, como 2×60^2. Este número, consequentemente denota

$$2\cdot60^2+2\cdot60+2$$

(ou 7322 na nossa notação).

Exemplo:

$$\prec\prec\ \ \prec\prec = 20\cdot60+20$$

$$\mathrm{V\,V}\ \ \mathrm{VV}\ \ \prec\mathrm{V} = 2\cdot60^2+2\cdot60+21 = 7,331$$

Contudo, com este tipo de notação, os babilónios tinham um problema para indicar uma posição "vazia", pois, não conheciam um símbolo para o zero. Por vezes deixavam um espaço onde tencionavam escrever o zero. Isto significava que a forma dos números 22 e 222 assemelhava-se imenso.

Pois

V V VV -

poderia significar tanto $2 \cdot 60 + 2$ ou $2 \cdot 60^2 + 2$.

A necessidade do símbolo zero era algo incómodo. Assim aquando da conquista de Alexandre o Grande, um sinal especial foi criado: dois pequenos cunhos oblíquos. A partir dessa altura, o número

VV *VV* ou $2 \cdot 60^2 + 0 \cdot 60 + 2$

era rapidamente distinguido de

VV *VV* ou $2 \cdot 60 + 2$.

Contudo o símbolo para o zero dos babilónios não resolvia todas as ambiguidades, pois este sinal era usado unicamente para posições intermédias. Não existem tábuas em que o sinal do zero apareça numa posição terminal. Isto significa que os babilónios na antiguidade nunca elaboraram um sistema posicional absoluto.

Por exemplo, o símbolo

VV *VV* poderia representar

$2 \cdot 60 + 2$

ou $2 \cdot 60^2 + 2 \cdot 60$

ou $2 \cdot 60^3 + 2 \cdot 60^2$

ou outros quaisquer números onde estariam envolvidas duas posições sucessivas.

Uma das vantagens da Matemática da antiga Babilónia relativamente ao antigo Egipto é o facto de que a notação posicional sexagesimal continha também as fracções. Isto é, a notação

$$VV \quad VV$$

era usada não só para $2 \cdot 60 + 2$, mas também para $2 + 2 \cdot 60^{-1}$ ou para $2 \cdot 60^{-1} + 2 \cdot 60^{-2}$ ou para outras formas fraccionárias que envolviam duas posições sucessivas.

Actualmente a notação posicional sexagesimal é representada da seguinte forma:

$$d_1; d_2, d_3, \ldots = d_1 + \frac{d_2}{60} + \frac{d_3}{60_2} + \ldots$$

onde os valores $d_1; d_2, d_3, \ldots$ são todos inteiros.

Note-se que a parte inteira é separada da parte fraccionária por um ponto e vírgula e para separar as posições sexagesimais usamos somente uma vírgula.

Exemplo:

$$\begin{aligned} 1;24,51,10 &= 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} \\ &= 1.41421296 \end{aligned}$$

O número acima foi encontrado numa tábua da antiga Babilónia (Yale Collection # 7289) e é um dos valores estimados de $\sqrt{2}$ com uma grande precisão (note-se que o valor exacto de $\sqrt{2}$, com 8 casas decimais, é 1.41421356).

1.4 Operações Básicas da Antiga Babilónia

Multiplicação e divisão

Os babilónios usavam o facto de que $a \cdot .b = \dfrac{(a+b)^2 - a^2 - b^2}{2}$ e consequentemente $a \cdot .b = \dfrac{(a+b)^2}{4} - \dfrac{(a-b)^2}{4}$ para fazer sucessivas multiplicações. Assim se quisessem usar esta fórmula para multiplicar dois números, o que necessitavam era de uma tabela de quadrados.

Os babilónios possuíam como já fizemos referência, tábuas de textos, que incluíam tabelas de multiplicação, tabelas de recíprocos, tabelas de quadrados e cubos e de raízes quadradas e cúbicas em escrita cuneiforme, na base sexagesimal.

Uma dessas tabelas, por exemplo, consistia em duas colunas de números onde o produto dos elementos da mesma linha era em todos os casos igual a 60, a base numérica dos babilónios. Esta tabela foi aparentemente construída com a intenção de determinar recíprocos.

2	30
3	20
4	15
5	12
6	10
8	7;30
9	6,40
10	6
12	5
15	4
16	3,45
18	3;20
20	3
24	2,30
25	2,24
26	2;13,20

A sexta linha, por exemplo, denota que o recíproco de 8 é 7;30 (isto é, $7 + \frac{30}{60}$).

$$\frac{1}{6} = \frac{10}{60} = ;\prec$$

$$\frac{1}{9} = ;\begin{smallmatrix}\vee\vee\vee\\\vee\vee\vee\end{smallmatrix},\begin{smallmatrix}\prec\prec\\\prec\prec\end{smallmatrix}$$

Note-se que os recíprocos de 7 e 11 não constam da tabela, porque não era possível escrevê-los usando a base 60, tal como na nossa base decimal os recíprocos de 3, 6, 7 e 9 são infinitos quando expandidos infinitamente.

Quanto à operação de divisão esta era uma tarefa mais difícil. Os babilónios usavam o facto de que

$$a \cdot b = a \cdot \frac{1}{b}.$$

para resolver os problemas de divisão.

Assim sendo, a divisão era efectuada multiplicando o dividendo pelo recíproco do divisor

Logo se os babilónios quisessem dividir um número por outro, o que necessitavam era de uma tabela de recíprocos, como a que vimos atrás.

4. Resolução de Equações do 1º grau

4.1 Equações do 1º grau do Antigo Egipto

No papiro de Rhind constam alguns problemas que se traduzem por uma equação linear do 1º grau da forma (moderna)

$$ax + b = 0 \quad \text{ou} \quad x + ax + bx = c,$$

Onde a, b e c são conhecidos e x é desconhecido, sendo denominado por *montão*.

Um desses problemas é número 24 que passamos a referir:

"Determine o montão, se o montão e a sétima parte do montão é 19."

(ou seja, resolva a equação $x + \frac{x}{7} = 19$).

A resolução deste problema recorre a um palpite inicial (supostamente falso) da solução. Por isso este método de resolução é denominado por **método da falsa posição.**

4.1.1 Método da Falsa Posição

Iremos aplicar o método da falsa posição ao presente problema como faziam os antigos egípcios usando, no entanto, a notação moderna.

Assim, seja $g = 7$ um palpite para a solução do problema.

Logo substituindo g no 1º membro da equação tem-se que:

$$7 + \frac{1}{7} \cdot 7 = 8 \qquad (1)$$

Então dividindo o 2º membro pelo valor obtido em (1) vem que:

$$19 \div 8 = 2 + \frac{3}{8} = 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}.$$

Assim a solução da equação dada é $7 \cdot \left(2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) = 16 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$, que na notação egípcia escrever-se-ia $16\overline{2}\,\overline{8}$.

Uma demonstração actual desse método é a seguinte.

Demonstração do Método da Falsa Posição

Considere-se a equação linear de 1° grau da forma $x + ax = b$.

Seja g um palpite para a solução da equação dada.

Substituindo g na equação tem-se que $g + ag = c$.

Se $c = b$ então g é a solução pretendida.

Se $c \neq b$ então pretende-se encontrar o valor de y tal que:

$$cy = b, \quad \text{ou seja} \quad (g + ag)y = b$$

$$\Leftrightarrow gy + agy = b,$$

sendo deste modo gy a solução da equação $x + ax = b$.

Uma pequena generalização deste método é a suposição de dois palpites como soluções da equação. Por este facto este "novo" método denomina-se por **método da dupla falsa posição** ou **método do excesso e do defeito**.

4.1.2 Método da Dupla Falsa Posição

Consideremos a equação linear do 1° grau da forma $px + q = 0$. (2)

Note-se que a equação usada anteriormente $x + ax = b$ é equivalente a

$$(1 + a)x + (-b) = 0 \qquad (3)$$

e por isso da forma patente em (2), considerando $p = 1 + a$ e $q = -b$.

É de realçar que a equação (3) não era usada na altura pois os números negativos não eram "conhecidos".

Sejam g_1 e g_2 dois palpites para a solução da equação dada.

Logo $$pg_1 + q = f_1 \qquad (4)$$

$$pg_2 + q = f_2 \qquad (5).$$

Subtraindo membro a membro, tem-se que:

$$f_1 - f_2 = p \cdot g_1 + q - p \cdot g_2 - q$$

ou seja,

$$f_1 - f_2 = p \cdot (g_1 - g_2) \qquad (6)$$

Multiplicando as igualdades (4) e (5) por g_2 e g_1, respectivamente, vem que:

$$p \cdot g_1 \cdot g_2 + q \cdot g_2 = f_1 \cdot g_2 \qquad (7)$$

e

$$p \cdot g_2 \cdot g_1 + q \cdot g_1 = f_2 \cdot g_1. \qquad (8)$$

Subtraindo membro a membro, as igualdades (7) e (8), obtém-se:

$$f_1 \cdot g_2 - f_2 \cdot g_1 = p \cdot g_1 \cdot g_2 + q \cdot g_2 - p \cdot g_2 g_1 - q \cdot g_1$$

ou seja,

$$f_1 \cdot g_2 - f_2 \cdot g_1 = q \cdot (g_2 - g_1). \qquad (9)$$

Dividindo membro a membro as igualdades (6) e (9) vem que:

$$\frac{f_1 \cdot g_2}{f_1 - f_2} = \frac{q \cdot (g_2 - g_1)}{p \cdot (g_1 - g_2)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f_1 \cdot g_2}{f_1 - f_2} = -\frac{q}{p} \qquad (10)$$

Desta forma escrevemos os coeficientes da equação dada inicialmente em função dos palpites g_1 e g_2.

Recorde-se que $-\frac{q}{p}$ é a solução da equação $px+q=0$, logo, a igualdade (10) fornece a solução da equação linear de 1° grau dada em função dos dois palpites (g_1 *e* g_2).

Para exemplificar este método, recorremos ao exemplo anterior.

Exemplo:

$x+\frac{x}{7}=19$ que equivale a escrever, usando a notação moderna,

$$\left(1+\frac{1}{7}\right)x-19=0.$$

Note-se que escrevemos a equação do problema na forma $px+q=0$ onde $p=1+\frac{1}{7}$ e $q=-19$.

Consideremos os seguintes palpites: $g_1=7$ e $g_2=14$.

Assim tem-se que:

$$\begin{aligned} f_1 &= \left(1+\frac{1}{7}\right)\cdot 7-19 \\ &= 7+1-19 \\ &= -11 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f_2 &= \left(1+\frac{1}{7}\right)\cdot 14-19 \\ &= 14+2-19 \\ &= -3. \end{aligned}$$

Logo, pela aplicação da igualdade (10) vem que:

$$-\frac{q}{p}=\frac{(-11)\cdot 14-(-3)\cdot 7}{-11-(-3)}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{q}{p}=\frac{-154+21}{-8}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{q}{p}=\frac{133}{8}$$

que em notação egípcia equivale a escrever $16\overline{2}\overline{8}$.

Capítulo III – Equações do 2º grau

"Tal como o sol eclipsa as estrelas, com o seu brilho, o conhecimento do Homem eclipsará a fama no meio dos Homens, se propuser problemas algébricos, e ainda mais se os resolver."

F. Cajori, A History of Mathematics

Capítulo III –Equações do 2° grau

1. Equações Quadráticas no Antigo Egipto

Como escreveu Carl Benjamin Boyer, na 2ª edição do seu livro "*A History of Mathematics*":

"*A solução de uma equação quadrática de três termos parece ter excedido de longe as capacidades algébricas dos egípcios*", pois não são conhecidos documentos que provem que os antigos egípcios se tenham ocupado da resolução de equações quadráticas.

No entanto, no papiro de Rhind, há dois problemas que dependem da resolução de duas equações, uma do 1° grau e a outra do 2°.

Os sistemas, em notação actual, são os seguintes:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ 4x = 3y \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 400 \\ 4x = 3y \end{cases}$$

O primeiro sistema é para resolver o seguinte problema:

"*A área de um quadrado é 100 e tal quadrado é igual à soma de dois quadrados menores, em que o lado de um é igual a ¾ do lado do outro*".

O segundo sistema é para resolver um problema análogo.

A resolução é feita por um método que abordámos no capítulo I denominado regra da falsa posição.

Resolvamos então o 1° sistema.

Observe-se que a 2ª equação é satisfeita por $x = 3$ e $y = 4$.

$$x^2 + y^2 = 3^2 + 4^2 = 25$$

Assim, para obter, a soma 100, bastaria multiplicar ambos os membros por 4, isto é, bastaria assumir outros valores para x e y.

$$x = 2 \times 3 = 6 \quad \text{e} \quad y = 2 \times 4 = 8.$$

$$x^2 + y^2 = 36 + 64 = 100$$

e

$$4x = 24 = 3y.$$

Desta forma a solução do referido sistema é $x = 6$ e $y = 8$ (isto é, $(6 , 8)$ na notação actual).

É de realçar alguma admiração e estranheza na designação deste método, numa ciência cuja função é procurar a verdade. O certo é que este facto motivou alguns a pedir desculpas, como é o caso de Humphrey Baker (1568) que escreveu:

"A regra da falsidade é assim chamada, não porque ela ensine fraude ou falsidade, mas porque, por meio de números tomados à sorte, ensina a encontrar o número verdadeiro que é pedido".

2. Equações Quadráticas na Antiga Babilónia

Muitos textos de problemas do período da antiga Babilónia mostram, segundo a descoberta de Otto Neugebauer, em 1930, que a solução da equação quadrática de três termos foi estudada pelos antigos babilónios para resolver problemas muito antigos. A resolução de tais equações produziram poucas dificuldades aos babilónios devido ao desenvolvimento e flexibilidade das operações algébricas. Eles podiam:

- transpor termos numa equação através da adição de quantidades iguais em ambos os membros

e

- multiplicar ambos os membros por quantidades iguais para remover fracções ou eliminar factores.

Os babilónios conheciam muitas formas simples de factorização. Por exemplo, duas tábuas foram encontradas em Senkerah no Eufrates em 1854 e datam de 2000 a.C. forneciam os quadrados dos números superiores a 59 e cubos superiores a 32.

Os babilónios usavam a fórmula

$$x \cdot y = \frac{(x+y)^2 + (x-y)^2}{4}$$

para auxiliar na multiplicação (que é equivalente a $(x+y)^2 = 4x \cdot y + (x-y)^2$).

Os babilónios não usavam letras para quantidades desconhecidas, pois o alfabeto ainda não tinha sido inventado. No entanto estes denotavam os números desconhecidos por termos especiais em vez de símbolos: *"comprimento"*, *"largura"*, *"área"* e *"volume"*.

Estas palavras talvez tenham sido usadas num sentido muito abstracto, dado que os babilónios não hesitavam em somar *"comprimento"* com *"área"* e *"área"* com *"volume"*.

Problema:

Por exemplo, num desses problemas da antiga Babilónia pede-se o lado de um quadrado, em que a área menos o lado é igual a 14;30 (ou seja, $14 \times 60 + 30 = 870$).

Assim na notação actual a resolução do problema considerado é equivalente à resolução da equação $x^2 - x = 870$ (ou, mais precisamente, a procurar uma raiz positiva desta equação).

A resolução do referido problema pelos babilónios é expressa como se segue [1]:

"Tome metade de 1, que é 0;30. (0,5)

Multiplique 0;30 por 0,30, que é 0;15. (0,25)

Junte o resultado a 14,30. (870)

para obter 14,30;15. (870,25)

Este número é o quadrado de 29;30 (29,5 pois $29,5^2 = 870,25$)

Junte agora 0;30 a 29;30 e o resultado é 30 (29,5 + 0,5 = 30)

que é o lado do quadrado".

A solução Babilónica é exactamente equivalente à fórmula

$$x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} + \frac{p}{2}$$

que é uma raiz da equação $x^2 - px = q$, que é a fórmula quadrática familiar à que se aprende hoje em dia no 3° ciclo do ensino básico.

Problema:

Num outro texto a equação $1x^2 + 7x = 6;15$ foi reduzida pelos babilónios ao tipo standard $x^2 + px = q$, através da multiplicação por 11 obtendo-se

$$11x^2 + 7 \cdot (11x) = 1,8;45$$

(1) Entre parêntesis encontra-se o significado dos valores numéricos na base 10.

pois

$$6;15 = 6 \times \frac{15}{60}$$

e

$$11 \times \left(6 + \frac{15}{60}\right) = 66 + \frac{165}{60}$$

$$= 60 + 6 + 2 + \frac{45}{60}$$

$$= 60 + 8 + \frac{45}{60}$$

$= 1 \times 60 + 8 \times 60^0 + 45 \times 60^{-1}$, ou seja, 1,8;45 em notação babilónica.

Esta é uma equação quadrática na forma normal cuja quantidade desconhecida é $y = 11x$ e a solução em y é facilmente obtida pela regra familiar

$$y = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} - \frac{p}{2},$$

onde o valor de x é de seguida determinado.

Esta solução é notável pois realça o uso de transformações algébricas.

Arté aos tempos modernos não se pensava resolver a equação quadrática na forma

$x \ + px + q = 0$, onde p e q são positivos.

Consequentemente, a equação quadrática nos tempos antigos, foi classificada em três tipos, designadamente:

(1) $x^2 + px = q$

(2) $x^2 = px + q$

(3) $x^2 + q = px$

Todos estes três tipos foram encontrados nos textos da antiga Babilónia há cerca de 4000 anos atrás. Os primeiros dois tipos são ilustrados pelos problemas dados acima, enquanto que o 3° tipo aparece frequentemente em textos de problemas, onde é tratado equivalentemente ao seguinte sistema:

$$\begin{cases} x+y=p \\ \\ x\cdot y=q \end{cases}$$

Numerosos são os problemas nos quais se pedem para determinar dois números desconhecidos, denominados *"factor"* e *"inverso"*, cujo produto e soma (ou diferença) são dados. Citamos de seguida, um problema desse tipo.

Problema:

"Um factor e o seu inverso é 2;30*."*

Na nossa notação, este problema pode ser escrito como se segue:

$$\begin{cases} x+y=a \\ \\ x\cdot y=1 \end{cases}$$

onde x é o *"factor"* e y é o *"inverso"*, e $a=2;30$. Na notação decimal 2;30 é igual a

$$\begin{aligned} & 2\times 60^{0}+30\times 60^{-1} \\ &= 2\times 1+\frac{30}{60} \\ &= 2+\frac{1}{2} \\ &= 2{,}5. \end{aligned}$$

O que se segue é uma solução retórica do problema acompanhada por duas "traduções", uma decimal e outra literal.

LINGUAGEM RETÓRICA	TRADUÇÃO DECIMAL	TRADUÇÃO LITERAL
"factor e inverso 2;30*"*	$x+y=2{,}5$ $x \cdot y=1$	$x+y=a$ $x \cdot y=b$
"multiplica-se por 0;30, *obtendo-se* 1;15*"*	$0;30=\frac{1}{2}=0{,}5$ $2{,}5\times\frac{1}{2}=1{,}25$	$\frac{a}{2}$
"multiplica-se 1;15 *por* 1;15 *obtendo-se* 1;33;45*"*	$1{,}25\times 1{,}25=1{,}5625$	$\frac{a}{2}\times\frac{a}{2}=\left(\frac{a}{2}\right)^2$
"subtrai-se 1 *ao valor obtido:* 0;33,45*"*	$1{,}5625-1=0{,}5625$	$\left(\frac{a}{2}\right)^2-b$
"Qual é o valor que se deve multiplicar por si mesmo para se obter: 0;33,45*? É* 0;45*"*	$\sqrt{0{,}5625}=0{,}75$	$\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}$
"adicione-se 0;45 *a* 1;15, *obtendo-se o factor* 2*"*	$1{,}25+0{,}75=2$ [igual a x]	$\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}=x$
"subtrai-se 0;45 *de* 1;15 *obtendo-se* 0;30, *o inverso"*	$1{,}25-0{,}75=2$ [igual a y]	$\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}=y$

Observamos que processo para se obter a solução consiste numa sequência de operações requeridas para a solução da equação quadrática $z^2-az+b=0$, que é equivalente ao sistema atrás.

O texto não contém explicações. A generalidade do algoritmo foi ilustrada por aplicação a um vasto número de problemas do mesmo tipo.

UNIVERSIDADE DA MADEIRA
SERVIÇOS DE DOCUMENTAÇÃO

3. Regras de Al-Khwarizmi

3.1 O Homem e o seu Trabalho

Antes de relatarmos alguns factos da vida de al-Khwarizmi faremos referência à época cultural e científica em que viveu.

Harun al-Rashid tornou-se o 5° Califa da dinastia de Abbasid em 14 de Setembro de 786, altura em que al-Khwarizmi nasceu. Harun governou na sua corte, na cidade de Baghdad, sobre o império islâmico, o qual alargou-se desde o Mediterrâneo até à Índia.

Harun trouxe cultura para a sua corte e tentou estabelecer disciplinas intelectuais que naquele tempo não estavam prosperando no mundo árabe. Durante o seu reinado parte da obra de Euclides foi traduzida. Harun tinha dois filhos, o mais velho era al-Amin e o mais novo al-Mamun. Harun morreu em 809 e iniciou-se um conflito armado entre os dois irmãos. Al-Mamun ganhou a luta armada e al-Amin foi derrotado e morto em 813. Depois disto, al-Mamun tornou-se Califa e governou o império de Baghdad.

Al-Mamun continuou a defender o ensino começado pelo seu pai e fundou uma academia chamada a *"Casa de Wisdom"* onde eram traduzidos trabalhos filosóficos e científicos gregos, nomeadamente, *Almagest* de Ptolomeu e *Os Elementos*, de Euclides. Al-Mamun também construíu uma biblioteca de manuscritos, a primeira biblioteca desde Alexandria, coleccionando trabalhos importantes de bizantinos.

Mohammed ibn-Musa al-Khwarizmi, cujo nome, tal como o de Euclides tornou-se familiar na Europa Ocidental, era estudante na *"Casa de Wisdom"* em Baghdad. As suas tarefas envolviam a tradução de manuscritos científicos gregos. No entanto também estudava e escrevia sobre álgebra, geometria e astronomia.

Certamente al-Khwarizmi trabalhou sobre a orientação de al-Mamun e dedicou dois dos seus trabalhos ao Califa. Esses eram os seus tratados de álgebra e astronomia.

3.2 *Al-jabr* e *Al-muqabala*

Segundo as próprias palavras de al-Khwarizmi, foi encorajado a ...

"...escrever um pequeno trabalho sobre cálculo por completação e redução conferindo isso ao que é mais fácil e mais útil na aritmética, tal que o homem constantemente requere em casos de herança, doacções, partições, acções judiciais e negócios e, em todas as suas relações uns com os outros ou, no que diz respeito, a medição de terras, na escavação de canais, nos cálculos geométricos e outros objectos de variados comprimentos e tipos."

O tratado de álgebra *Al jabr e al-muqabala* foi o mais famoso e importante de todos os trabalhos de al-Khwarizmi. É o título desse tratado que nos dá a palavra "álgebra".

Al-Khwarizmi foi o primeiro autor islâmico que escreveu "sobre a solução de problemas por *al-jabr e al-muqabala*".

Usualmente por *jabr*(1), entende-se a operação de adicionar termos (um número ou expressão algébrica) iguais a ambos os membros de uma equação, para eliminar termos negativos. Também se diz *jabr* a operação de multiplicar ambos os membros de uma equação por um mesmo número, para eliminar fracções.

Por *muqabala*(2) entende-se a operação de subtrair termos (números ou expressões algébricas) de quantidades iguais a ambos os membros de uma equação a fim de mudar um termo de um membro para o outro.

A combinação das duas palavras, *al-jabr e al-muqabala* é usada algumas vezes num sentido mais geral: efectuando operações algébricas. Também pode significar: a ciência da álgebra.

Iremos fornecer alguns exemplos destas palavras no trabalho de al-Khwarizmi intitulado *"Algebra de Mohammed ben Musa"* que foi traduzido por Rosen.

---

(1) *jabr* significa restauração/completação.
(2) *muqabala* significa redução.

Exemplo:

"Dividi 10 em duas partes. Multipliquei cada uma das duas partes pela outra. Depois disto, multipliquei uma das duas por si mesma, e o produto da multiplicação por si mesmo é quatro vezes tanto como uma das partes pela outra."

Al-Khwarizmi denomina cada uma das partes por *"coisa"* e a outra por *"dez menos a coisa"*. Multiplicando as duas, ele obtém *"dez coisas menos o quadrado"*.

Finalmente, ele obtém a equação:

"um quadrado, que é igual a 40 coisas menos 4 quadrados."

Em notação moderna, podemos escrever esta equação como sendo

$$x^2 = 40x - 4x^2.$$

Depois usando a operação *al-jabr*, adiciona-se $4x^2$ a ambos os membros, obtendo-se

$$5x^2 = 40x$$

ou

$$x^2 = 8x$$

donde se obtém que

$$x = 8.$$

Na obra de al-Khwarizmi consta uma outra equação

$$50 + x^2 = 29 + 10x$$

a qual é reduzida por *al-muqabala* a

$$21 + x^2 = 10x.$$

3.3 Resolução de Equações Quadráticas

Al-Khwarizmi introduziu na primeira secção do seu *livro "Al-jabr e al muqabala"*, o tópico principal, denominado a solução de equações. As suas equações eram lineares e quadráticas e, eram compostas por *unidades, raízes* e *quadrados*.

Por exemplo, para al-Khwarizmi uma *unidade* era um número, uma *raiz* era x e um *quadrado* era x^2. Contudo, usaremos a notação algébrica familiar para melhor se entender as notações, pois a Matemática de al-Khwarizmi era feita inteiramente sem usar nenhum símbolo. Os árabes desconheciam os progressos dos hindus relativamente às quantidades negativas e às abreviaturas de quantidades desconhecidas.

Na primeira parte do seu livro, al-Khwarizmi explica a resolução de seis tipos de equações (se bem que apenas de exemplos numéricos de cada tipo), pois não conhecia o zero nem os números negativos, aos quais todas as equações lineares e quadráticas podem ser reduzidas:

(1) Quadrados igual a raízes

isto é, $ax^2 = bx$

(2) Quadrados igual a números

isto é, $ax^2 = c$

(3) Raízes igual a números

isto é, $bx = c$

(4) Quadrados e raízes igual a números

isto é, $ax^2 + bx = c$

(5) Quadrados e números igual a raízes

isto é, $ax^2 + c = bx$

(6) Raízes e números igual a quadrados

isto é, $bx + c = ax^2$

onde a, b e c são números positivos dados.

Al-Khwarizmi forneceu regras para resolver estas equações e apresentou demonstrações, ilustrando-as com exemplos. Seguidamente exemplificamos a resolução de cada um dos referidos tipos.

<u>1º tipo:</u> $ax^2 = bx$

No caso *"quadrados igual a raízes"* os exemplos usados em notação moderna foram

$$x^2 = 5x; \quad \frac{x^2}{3} = 4x; \quad 5x^2 = 10x,$$

onde as soluções eram $x = 5$, $x = 12$ e $x = 2$ respectivamente.

(Note-se que a raiz $x = 0$ não era reconhecida).

<u>2º tipo:</u> $ax^2 = c$

Relativamente a este caso não encontrei nenhum exemplo ao qual al-Khwarizmi tenha usado.

<u>3º tipo:</u> $bx = c$

No caso *"raízes igual a números"*, novamente se recorrem a três ilustrações para cobrir os casos em que o coeficiente do termo com variável é igual, maior ou menor que 1.

<u>4º tipo:</u> $ax^2 + bx = c$

Al-Khwarizmi usou dois métodos gerais para resolver equações quadráticas da forma

$$x^2 + bx = c.$$

Exemplo:

Na terminologia de al-Khwarizmi, um exemplo deste tipo de equação (*"raízes e quadrados igual a números"*) enuncia-se do seguinte modo:

"um quadrado e dez raízes da mesma quantidade é igual a trinta e nove unidades."

Isto é o mesmo que dizer que:

"Quanto é que deve ser o quadrado que, quando adicionado com dez das suas raízes, dará uma soma total de trinta e nove?"

A equação dada equivale a escrever na notação moderna

$$x^2 + 10x = 39.$$

(note-se que al-Khwarizmi também exemplificou este método para as equações $2x^2 + 10x = 18$ e $\frac{1}{2}x^2 + 5x = 28$). Em cada caso só a solução positiva era dada.

O método de resolução deste tipo de equação consiste em **completar o quadrado** como a seguir se descreve:

I) Toma-se metade do número das raízes mencionadas, que neste caso totaliza 5.

II) Ao valor obtido multiplica-se por si mesmo, o produto é 25.

III) Adiciona-se o valor obtido a 39, a soma é 64.

IV) Toma-se a raiz quadrada do valor obtido, que é 8 e subtrai-se a esse valor metade do número de raízes, que é 5. O resto é 3.

V) O número 3 representa uma raiz do quadrado, que é claro 9 (nove dá então o quadrado).

Em notação moderna, como já observámos, a equação é $x^2 + 10x = 39$, a qual pode ser transformada em:

$$\begin{aligned}
(x+5)^2 &= 39+25 \\
(x+5)^2 &= 64 \\
x+5 &= \sqrt{64} \\
x+5 &= 8 \\
x &= 3.
\end{aligned}$$

Uma exemplificação geométrica da resolução deste tipo de equação feita por al-Khwarizmi que consiste em completar o quadrado será agora descrita.

<u>1ª exemplificação geométrica do método:</u>

Al-Khwarizmi começa por desenhar um quadrado cujo lado mede x (a pretendida raiz) e que portanto representa-se por x^2 (Figura 1)

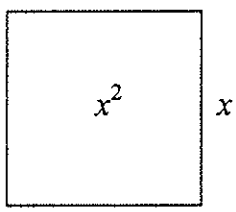


Figura 1

$\frac{1}{4}$ Em cada um dos quatro lados do quadrado ele constrói rectângulos, cada um tendo de largura de 10 ou $2\frac{1}{2}$ (isto é, $2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}=2{,}5$) (Figura 2).

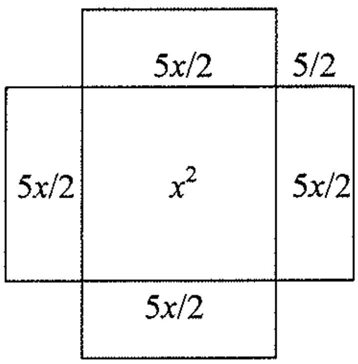


Figura 2

O quadrado juntamente com os quatro rectângulos tem de área 39 (pois $x^2 + 4 \cdot \frac{5x}{2} = x^2 + 10x = 39$).

Para completar o quadrado devemos adicionar quatro vezes o quadrado de lado $2 \cdot \frac{1}{2}$ (isto é, 2,5), refere al-Khwarizmi, que tem de área $\frac{5}{2} \times \frac{5}{2} = \frac{25}{4}$ (a tracejado na figura 3).

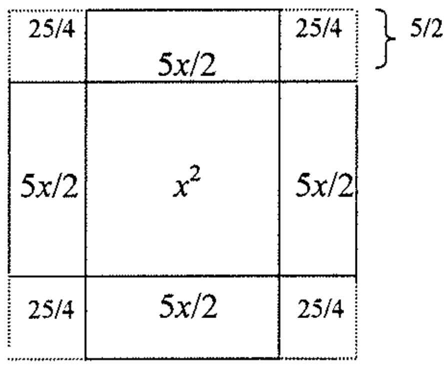


Figura 3

Então o quadrado maior da figura 3 tem de área

$$4 \times \frac{25}{4} + 39 = 25 + 39 = 64.$$

O lado do quadrado maior é por conseguinte igual a 8. Como o comprimento do lado do quadrado maior é dado por

$$\frac{5}{2} + x + \frac{5}{2}, \quad \text{ou seja,} \quad x + 5$$

então tem-se que

$$x + 5 = 8,$$

obtendo-se $x = 3$.

Uma outra forma de completar o quadrado é a seguir exemplificada para o caso da referida equação $x^2 + 10x = 39$.

2ª exemplificação geométrica do método:

Neste caso, a demonstração geométrica é muito semelhante à anterior. O desconhecido x era representado por um segmento, x^2 pelo quadrado e $10x$ por dois rectângulos de lados x e 5 (Figura 4).

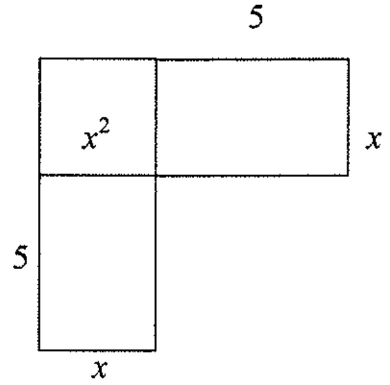


Figura 4

Assim, completa-se o quadrado pela adição de um quadrado de lado 5 (a tracejado na figura 5).

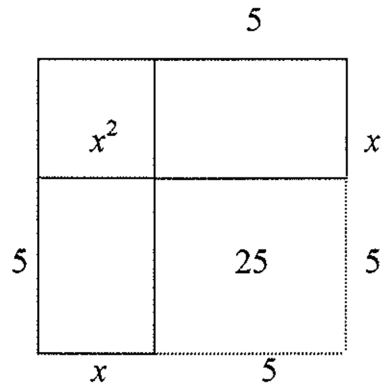


Figura 5

Então o lado do quadrado obtido é por um lado $x + 5$ e por outro 8 (pois a área do quadrado maior é igual a $39 + 25 = 64$), logo $x = 3$.

Observámos com base num mesmo exemplo, duas formas de resolução de uma equação do tipo

$$ax^2 + bx = c.$$

Assim sendo, iremos agora descrever esses dois métodos gerais, que al--Khwarizmi usou para resolver equações quadráticas da forma $x^2 + bx = c$.

3.3.1 1º Método de Al-Khwarizmi

1. Constrói-se um quadrado de lado x e, sobre esse lado, para o exterior do quadrado, constrói-se um rectângulo, de lados x e $\frac{b}{4}$.

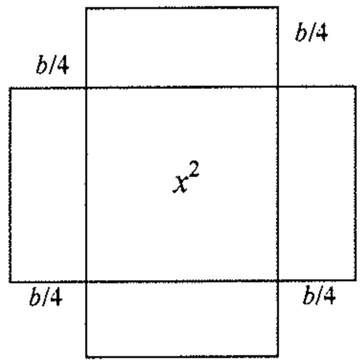


Figura 6

2. Completa-se a figura 6, construindo em cada um dos quatro cantos um quadrado de lado igual a $\frac{b}{4}$.

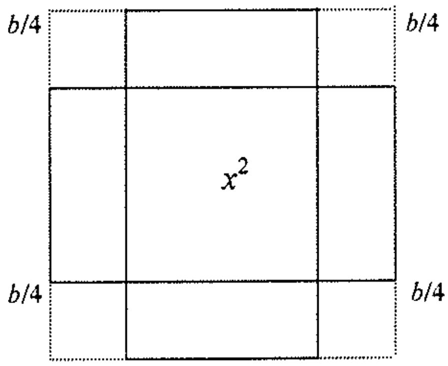


Figura 7

3. Então a área do quadrado maior é

$$x^2 + 4x\frac{1}{4}b + 4\frac{b}{4}\frac{b}{4} = x^2 + bx + \frac{1}{4}b^2.$$

4. Somando $\frac{1}{4}b^2$ a ambos os membros da equação $x^2 + bx = c$, vem

$$x^2 + bx + \frac{1}{4}b^2 = c + \frac{1}{4}b^2$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}b^2 + c$$

donde

$$x + \frac{b}{2} = \sqrt{\frac{b^2}{4} + c}$$

e, por consequência

$$x = \sqrt{\frac{b^2}{4} + c} - \frac{b}{2}.$$

3.3.2 2º Método de Al-Khwarizmi

O outro método de al-Khwarizmi assenta na construção da figura 8.

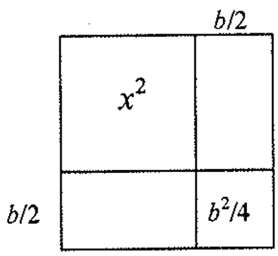


Figura 8

Então a área do quadrado maior é

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = x^2 + 2\frac{bx}{2} + \frac{b^2}{4}$$

$$= x^2 + bx + \frac{b^2}{4}.$$

Logo

$$\left(x+\frac{b}{2}\right)^2 = x^2+bx+\frac{b^2}{4} = c+\frac{b^2}{4}$$

$$x+\frac{b}{2} = \sqrt{\frac{b^2}{4}+c}$$

e, consequentemente

$$x = \sqrt{\frac{b^2}{4}+c}-\frac{b}{2}.$$

<u>5º tipo:</u> $ax^2 + c = bx$

Na resolução da equação *"quadrados e números igual às raízes"*, apenas um exemplo foi dado, designadamente

$$x^2 + 21 = 10x,$$

no qual ambas as raízes são determinadas, correspondendo à regra

$$x = 5 \pm \sqrt{25-21}.$$

Neste caso al-Khwarizmi chama a atenção para o facto de que o que designamos por binómio discriminante[1], tem de ser positivo. Citando-o:

"Devem compreender também que quando se toma a metade das raízes desta forma de equação e depois multiplica-se essa metade por si mesma, se o valor obtido, antes ou depois da multiplicação é menor que as unidades atrás mencionadas que acompanham o quadrado, tem-se uma equação."

A demonstração geométrica deste tipo de equação, bem como do tipo que abordaremos a seguir, é um pouco mais "delicada". Assim exemplificaremos a resolução da referida equação

$$x^2 + 21 = 10x.$$

Al-Khwarizmi desenha o quadrado [ABCD] para representar x^2 e o rectângulo [BEDF] para representar as unidades.

---

[1] $\Delta = b^2 - 4ac$ onde $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, a, b e $c \in \mathbb{C}$

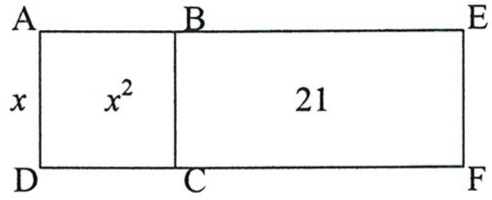


Figura 9

O rectângulo [AECF], que contém o quadrado [ABCD] e o rectângulo [BEFC], deve ter uma área igual a $10x$ (pois $x^2 + 21 = 10x$).

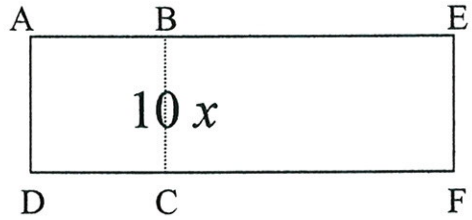


Figura 10

Assim sendo, $\overline{AD} = x$.

$$\overline{AE} = \overline{DF} = 10$$

Façamos a mediatriz de [DF] (perpendicular a [DF] passando por M, ponto médio de [DF]), designado-a por GM.

Marcamos o ponto H tal que

$$\overline{GH} = \overline{GE}$$

e completamos os quadrados [GEIH] e [MJKH].

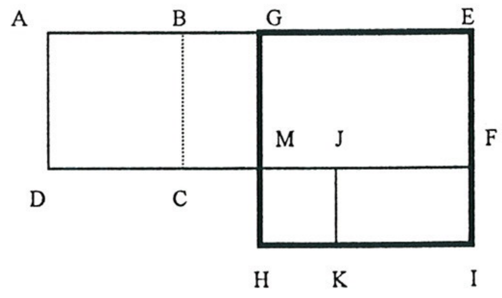


Figura 11

A área do rectângulo [BGMD] é igual à área do rectângulo [JFIK].

Como $\overline{GE} = 5$ então a área do quadrado [GEIH] é igual a 25 e a área do polígono [GEIKJM] é igual a 21 (pois o polígono [GEIKJM] é equivalente ao polígono [BEFC]).

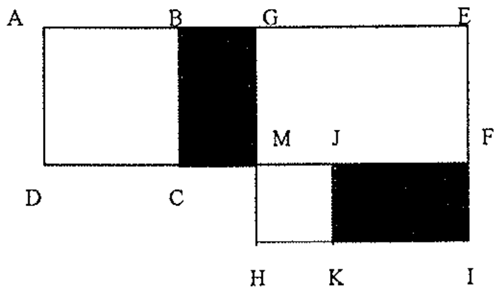


Figura 12

Então, o quadrado [MJKH] tem de área 4 e logo o seu lado mede 2

(pois a área [MJKH] = área [GEHI] – área [GEIKJM],

ou seja,

área [MJKH] = 25 – 21

área [MJKH] = 4).

Como $\overline{MH} = \overline{CM}$ e $\overline{DM} = 5$

Então $x = \overline{DC} = 5 - 2 = 3$, que constitui uma solução da equação dada.

Um esquema modificado do acima construído fornecerá a outra raiz da equação ($x = 5 + 2 = 7$).

<u>6º tipo:</u> $bx + c = ax^2$

No caso *"quadrados igual às raízes e números"*, al-Khwarizmi utiliza um único exemplo,

$$x^2 = 3x + 4$$

pois, sempre que o coeficiente de x^2 não é igual a 1, aconselha em primeiro lugar a dividir por esse mesmo coeficiente.

Uma vez mais, os passos para completar o quadrado são indicados meticulosamente, sem justificação, o processo de resolução é equivalente à solução $x = 1\frac{1}{2} + \sqrt{\left(1\frac{1}{2}\right)^2 + 4}$[1] (isto é, equivalente a $x = 4$).

Mais uma vez apenas é fornecida uma raiz, pois a outra é negativa.

[1] $1\frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5$.

3.4 O Pai da Álgebra

Como acabámos de observar, os seis tipos de equações descritos abordam todas as possibilidades das equações lineares e quadráticas terem uma raiz positiva. Neste sentido, al-Khwarizmi é intitulado *"o pai da Álgebra"*.

Segundo as palavras de al-Khwarizmi, *"a predilecção pela ciência,... essa amabilidade e condescendência que Deus mostrou ao hábil, essa prontidão com que ele protege e suporta-os na elucidação de obscuridades e na remoção de dificuldades, encorajou-me a compor um pequeno trabalho em cálculo por al--jabr e al-muqabala, conferindo isso ao que é mais fácil e útil na aritmética."*

No seu trabalho al-Khwarizmi examinou como as leis da aritmética se estenderam a uma aritmética para os seus "objectos algébricos". Por exemplo, al--Khwarizmi mostrou como multiplicar expressões, tais como

$$(a+bx)\cdot(c+dx),$$

embora novamente se enfatize que al-Khwarizmi, usava apenas palavras para descrever as suas expressões (os símbolos não eram usados).

Rashed, refere uma notável profundidade e inovação nos cálculos de al--Khwarizmi que nos aparece, quando examinados numa perspectiva moderna, com uma relativa elementaridade. Ele escreveu:

"O conceito de álgebra de al-Khwarizmi não pode ser entendido com uma grande precisão: resume-se à teoria de equações lineares e quadráticas com uma variável, e à aritmética elementar de binómios e trinómios... A solução deveria ser simultaneamente geral e calculável e, numa maneira Matemática, isto é, encontrada geometricamente...
A restrição do grau, bem como a do número de termos simples, é instantaneamente explicada. Do seu verdadeiro aparecimento, álgebra pode ser vista como a teoria das equações resolvidas por meio de radicais e de cálculos algébricos em expressões relatadas..."

Se a sua interpretação está correcta, então al-Khwarizmi foi como Sarton escreve: *"o maior matemático do seu tempo, e se tomarmos todas as circunstâncias em linha de conta, um dos maiores de todos os tempos..."*

A importância da álgebra de al-Khwarizmi foi uma das suas mais relevantes contribuições para a Matemática. Assim terminamos este tópico com uma citação de Mohammad Kahn:

"Na primeira linha de matemáticos de todos os tempos encontra-se al--Khwarizmi. Ele compôs os mais velhos trabalhos em aritmética e álgebra. Eles foram a primeira fonte do conhecimento matemático durante séculos no Este e no Oeste. O trabalho em aritmética introduziu em primeiro lugar os números hindus na Europa, como significa o próprio nome algarismo; e o trabalho de álgebra deu o nome a este importante ramo da Matemática..."

3.5 Problemas Algébricos

O trabalho de al-Khwarizmi contém mais do que as soluções de equações. Por exemplo, contém regras de operações com expressões binomiais, incluindo produtos, tais como, $(10+2)\cdot(10-1)$ e $(10+x)\cdot(10-x)$.

Um dos conteúdos do trabalho de al-Khwarizmi é a grande variedade de problemas ilustrativos de cada um dos seis tipos de equações anteriormente abordados. Como uma referência aos mesmos e no caso do tipo de equação da forma

$$ax^2 + c = bx,$$

al-Khwarizmi questiona sobre uma divisão de 10 unidades em duas partes, tais que:

"a soma dos produtos obtidos a partir da multiplicação de cada parte por si mesma é igual a cinquenta e oito"

(em notação moderna, o problema equivale a resolver a equação, $2x^2 + 42 = 20x$).

Segundo algumas traduções do trabalho de al-Khwarizmi, existem referências sobre problemas de herança, tal como o seguinte:

"Um homem morre, deixando dois filhos. No seu testamento deixou um terço do seu dinheiro a um estrangeiro. O homem deixa 10 dirhems em dinheiro e o direito a 10 dirhems a um dos seus filhos."

A resposta ao problema não é o que se esperaria, pois o estrangeiro herda apenas 5 dirhems. De acordo com a lei árabe, um filho que deve bens do seu pai num valor superior ao que herda desses bens, fica com tudo o que deve; uma parte que respeita à sua parte dos bens e a restante recebe como uma oferta do seu pai. Em grande parte parece que foi na natureza complicada das leis sobre herança, que encorajou o estudo da álgebra na Arábia.

4. Regra dos Chineses

4.1 O Ápice do Desenvolvimento da Álgebra Chinesa

Os problemas matemáticos chineses pareciam ser mais pitorescos do que práticos. Mesmo assim a civilização chinesa era responsável por uma inovadora e surpreendente tecnologia numérica. O uso da escrita e da pólvora (século VIII), do papel e da agulha de marear (século XI) era visível na China antes de outro local qualquer.

O período de "maré-cheia" na Matemática chinesa ocorreu no século XIII, no período de Sung. Nessa altura haviam matemáticos a trabalhar em várias partes da China. No entanto as relações entre eles pareciam remotas, quase inexistentes.

O último grande matemático do período Sung foi Chu Shih-chieh. Pouco se sabe sobre a sua vida, apenas que passou cerca de 20 anos como um erudito incerto que ganhava a vida ensinando Matemática.

Chu Shih-chieh teve a oportunidade de escrever dois tratados.

O primeiro foi escrito em 1929 e intitulava-se *Suan-hsiieh ch'i-meng* (*Introdução a estudos matemáticos*), um trabalho relativamente elementar que fortemente influenciou a Coreia e o Japão e que foi perdido, sendo só recuperado no século XIX.

De grande interesse histórico e matemático foi o segundo tratado de seu nome *Ssu-yuan yu-chien* (*O preciso espelho dos quatro elementos*) escrito em 1303. Desapareceu da China no século XVIII e foi redescoberto no século seguinte. Os quatro elementos eram denominados, céu, terra, homem e matéria, e constituíam as representações de quatro quantidades desconhecidas numa mesma equação. Este livro caracteriza o ápice do desenvolvimento da álgebra chinesa, pois trata de equações simultâneas e de equações de graus até 14. Nesta obra, o autor descreve um método de transformação que denomina por *fan-fa*, método esse que parece que surgiu na China há muito tempo atrás, mas que geralmente sustenta o nome de <u>*método de Horner*</u>, que viveu há mais de 500 anos.

4.2 Método de Horner ou *fan-fa*

A preocupação dos chineses em resolver as equações do segundo grau foi registada por Tsu Chung, no ano 450 d.C.. Segundo este, os problemas de áreas e inventários exigiam tal resolução.

O método utilizado pelos chineses que descreveremos a seguir, era denominado *fan-fa ("fazer até aparecer").*

Eles enunciaram a solução da seguinte forma:

"Pense na solução do problema do quadrado (equação do segundo grau) e acrescente o número dois. A solução aproximada do segundo problema que se formou é obtida dividindo o número resultante pela soma dos coeficientes do quadrado e do comprimento. Some esse valor com a solução pensada do primeiro problema e faça o cálculo novamente, até aparecer (fan-fa) o número que não se modifique."

para resolver problemas do tipo:

"a área de um quadrado $(x \cdot x = x^2)$ *menos o seu lado* (x) *resultou em 20. Quanto mede o lado desse quadrado?"*

Utilizando a álgebra, o problema pode ser equacionado assim:

$$x^2 - x = 20.$$

O método chinês permitia arbitrar o número dois como raiz ou solução da equação do segundo grau. A solução verdadeira era escrita como

$$x = 2 + d,$$

onde a letra d representava a diferença entre a solução verdadeira (x) e a solução arbitrada (2).

Este algoritmo interactivo era dividido em três partes, que se repetiam objectivando a convergência da solução.

O procedimento era como se segue:

1ª parte:

$$x = 2 + d.$$

2ª parte:

Tomando a equação do problema, que era $x^2 - x = 20$, e substituindo o valor x acima, tem-se:

$$(2 + d)^2 - (2 + d) = 20.$$

Desenvolvendo o quadrado, e eliminando-se os parênteses, tem-se que:

$$4 + 4d + d^2 - 2 - d = 20.$$

Reunindo as variáveis no primeiro membro e os resultados no segundo membro, tem-se que:

$$d^2 + 3d = 18.$$

3ª parte:

Seguindo-se os passos do "algoritmo" para resolver a equação, que diz:

"a solução aproximada do segundo problema que se formou é obtida dividindo o número resultante pela soma dos coeficientes do quadrado e do comprimento. Some esse valor com a solução pensada do primeiro problema".

Então, ficaria assim:

$$x = 2 + \frac{18}{1+3} = 6{,}50.$$

Repetindo o procedimento inicial, só que o 6,50 será considerado como valor arbitrário "*e fazendo o cálculo novamente, até aparecer um número que não se modifique*".

$$x = 6{,}50 + d$$

$$(6{,}50 + d)^2 - (6{,}50 + d) = 20$$

$$\Leftrightarrow 42{,}25 + 13d + d^2 - 6{,}50 - d = 20$$

$$\Leftrightarrow d^2 + 12d = -15{,}75$$

$$x = 6{,}50 + \frac{-15{,}75}{1+12} = 5{,}28.$$

Repetindo o processo outra vez, considerando agora o 5,28 como valor arbitrado:

$$x = 5{,}28 + d$$

$$(5{,}28 + d)^2 - (5{,}28 + d) = 20$$

$$\Leftrightarrow 27{,}87 + 10{,}56\, d + d^2 - 5{,}28 - d = 20$$

$$\Leftrightarrow d^2 + 9{,}56\, d = -2{,}59$$

$$x = 5{,}28 + \frac{-2{,}59}{1+9{,}56} = 5{,}03.$$

Repetindo outra vez, só que considerando o 5,03 como valor arbitrado, tem-se:

$$x = 5{,}03 + d$$

$$(5{,}03 + d)^2 - (5{,}03 + d) = 20$$

$$\Leftrightarrow 25{,}30 + 10.06d + d^2 - 5{,}03 - d = 20$$

$$\Leftrightarrow d^2 + 9{,}06 = -0{,}27$$

$$x = 5{,}03 + \frac{-0{,}27}{1+9{,}06} = 5{,}0.$$

Repetindo novamente e usando como valor arbitrado o número 5,0, tem-se

$$x = 5 + d$$

$$(5 + d)^2 - (5 + d) = 20$$

$$\Leftrightarrow 25 + 10d + d^2 - 5 - \mathrm{d} = 20$$

$$\Leftrightarrow d^2 + 9d = 0$$

$$x = 5 + \frac{0}{1+9} = 5.$$

Neste caso, não é necessário continuar, pois o valor convergiu, ou seja, ficou igual ao valor arbitrado, e no algoritmo dos chineses a operação termina quando *"aparecer um número que não se modifique"*.

Embora o método seja bastante trabalhoso, não deixa de ser uma técnica espectacular para resolver equações do segundo grau.

É motivo de muita admiração pensar que os chineses, já no século 500 d.C., tinham noção de interacção sucessiva.

Boyer também cita outros exemplos de resolução da equação quadrática pelo método de *fan-fa*, que constam no segundo livro do matemático chinês Chu Shih-chieh, marco representativo do ápice do desenvolvimento da álgebra chinesa.

Exemplo:

Na resolução da equação $x^2 + 252x - 5292 = 0$, Chu Shih-chieh primeiro obteve um valor para x,

$$x = 19$$

como uma aproximação (pois a raiz encontra-se entre 19 e 20).

Seguidamente usa o método *fan-fa*, através da transformação $x = 19 + d$,

obtendo a equação $d^2 + 290\, d = 143$ (que tem uma raiz entre 0 e 1).

Depois fornece a raiz (aproximada) da última equação como sendo

$$d = \frac{143}{1+290} = \frac{143}{291}.$$

Então, o valor correspondente de x é

$$19\frac{1}{2}\frac{4}{9}\frac{3}{1}$$

$$x = 19 + \frac{143}{291}.$$

É de realçar que em alguns casos ele determinou as raízes aproximadas.

5. Método Actual

Actualmente com o conhecimento da simbologia na escrita de equações e dos números complexos a resolução de equações do 2° grau com uma variável reveste-se de uma simplicidade e eficácia surpreendentes.

Definição1:

Uma *equação do 2° grau* ou *equação quadrática* é toda a equação da forma

$$ax^2 + bx + c = 0$$

onde *a, b* e *c* são números reais ou complexos e $a \neq 0$.

Exemplo:

Na equação $2x^2 - 6x + 3 = 0$ a variável é *x* e os coeficientes são:

$a = 2$ (coeficiente de x^2)
$b = -7$ (coeficiente de x)
$c = 3$ (coeficiente constante).

Observações:

1. O coeficiente de *a* deve ser diferente de zero pois, se não o fosse, a equação deixaria de ser do 2° grau. Teríamos, por exemplo:

$$0x^2 - 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow -5x + 3 = 0$$

que é uma equação do 1° grau.

2. O coeficiente constante é também chamado *termo independente*, pois este termo não varia, qualquer que seja o valor atribuído à variável.

3. A forma $ax^2 + bx + c = 0$ é chamada *forma geral* ou *forma normal* da equação do 2° grau.

Como vimos, na forma normal *a* deve ser diferente de zero, porém *b* e/ou *c* podem ser nulos. Assim consoante *b* ou *c* são ou não nulos podemos classificar as equações do 2° grau.

Definição 2:

Seja $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, uma equação do 2° grau.

Se b e c foram ambos diferentes de zero, a equação chama-se *completa.*

Se b e/ou c forem nulos, a equação chama-se *incompleta.*

Temos três tipos de equações incompletas, designadamente

$$ax^2 = 0, \qquad ax^2 + bx = 0 \quad \text{e} \quad ax^2 + c = 0.$$

5.1 Resolução de Equações Incompletas

1° Tipo: $ax^2 + c = 0$, onde a e c são diferentes de zero.

A solução geral é obtida do seguinte modo:

$ax^2 + c = 0 \Leftrightarrow ax^2 = -c$, dividindo ambos os termos da equação por a, dado que $a \neq 0$, obtém-se que:

$$x^2 = -\frac{c}{a}$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Logo o conjunto das soluções da equação dada, denominado por *conjunto solução* (abreviando *C. S.*) é dado por:

$$C.S. = \left\{-\sqrt{-\frac{c}{a}}, \sqrt{-\frac{c}{a}}\right\}.$$

2° Tipo: $ax^2 + bx = 0$, onde a e b são diferentes de zero e $c = 0$.

Solução geral é obtida do seguinte modo:

Como a variável x é comum aos dois termos do primeiro membro, colocamo-la em evidência, obtendo-se:

$$ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow x \cdot (ax + b) = 0.$$

Ora, para ser nulo um produto de dois factores, basta que um dos factores seja nulo.

Então, $x = 0$ ou $ax + b = 0$.

A primeira equação já nos fornece uma raiz que é o 0 (zero).

A segunda equação é uma equação do primeiro grau

$$ax + b = 0 \Leftrightarrow ax = -b$$
$$\Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}.$$

Logo temos que $C.S. = \left\{0; -\frac{b}{a}\right\}$.

3º Tipo: $ax^2 = 0,$ onde $a \neq 0$ e $b = c = 0$.

Como $a \neq 0$ podemos dividir cada membro por a.

Assim $ax^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0$.

Quando um dos factores for igual a zero, o outro também o será

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 0$$

$$x = 0.$$

Logo $C.S. = \{0;0\}$, ou simplesmente, $C.S. = \{0\}$. Dizemos que a equação $ax^2 = 0$ tem uma raiz dupla igual a zero.

5.2 Resolução da Equação Completa

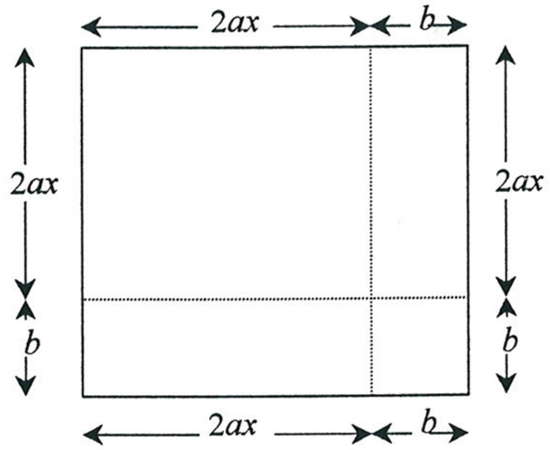
Existem várias demonstrações da resolução de uma equação do 2° grau que conduzem à chamada fórmula resolvente das equações do 2° grau.

<u>1° MÉTODO:</u>

Para resolver uma equação quadrática completa da forma

$$ax^2+bx+c=0 \quad \text{com} \quad a \neq 0, b \neq 0 \quad \text{e} \quad c \neq 0.$$

Consideremos um quadrado de lado $2ax+b$ como mostra a figura abaixo

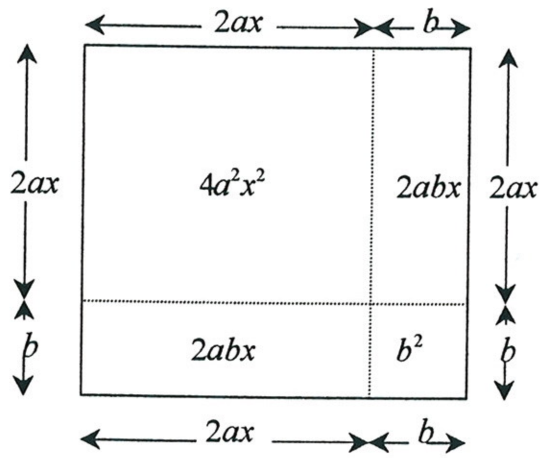


que é composto por dois quadrados de lados $2ax$ e b e por dois rectângulos equivalentes de lados $2ax$ e b.

A área do quadrado inicial é dada por ou, pela soma da sáreas dos quadriláteros que o compõe, ou seja,

$$(2ax+b)^2 = 4a^2x^2 + 4abx + b^2 \qquad (1)$$

como mostra a figura seguinte.



Tomemos agora a forma normal da equação do 2° grau, $ax^2+bx+c=0$ e procuremos uma equação equivalente que lhe forneça a solução.

Como c é o termo independente de x, transportemo-lo para o 2° membro. Então

$$ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow ax^2+bx=-c.$$

Vamos tentar obter, no 1° membro, o quadrado de uma soma, ou seja, o quadrado de $2ax+b$.

Multiplicando ambos os membros por $4a$, vem:

$$ax^2+bx=-c \Leftrightarrow 4a^2x^2+4abx=-4ac.$$

Comparando o primeiro membro desta equação com a expressão do quadrado considerado anteriormente (1), observamos que lhe falta o termo b^2. Assim, vamos acrescentá-lo aos dois membros.

Logo, obtemos:

$$4a^2x^2+4abx+b^2=b^2-4ac.$$

Observando que o 1° membro é igual a $(2ax+b)^2$, podemos escrever:

$$(2ax+b)^2=b^2-4ac.$$

Assim

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \text{ pois } a \neq 0.$$

Esta última equação, chamada *fórmula de Bhaskara* ou *fórmula resolvente,* mostra-nos o conjunto solução da equação completa do 2° grau, ou seja

$$C.S. = \left\{ \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right\}.$$

A aplicação da fórmula resolvente de equações do 2° grau é um conteúdo do programa de Matemática do 9° ano de escolaridade. A sua demonstração não faz parte do referido programa, no entanto, alguns dos manuais contêm, com curiosidade, uma sua demonstração que passamos a referir.

<u>2° MÉTODO:</u>

Consideremos a equação de 2° grau na sua forma normal,

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{com} \quad a \neq 0$$

dividem-se ambos os termos da equação por a ($a \neq 0$), obtendo-se:

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

adiciona-se

$\left(\frac{b}{2a}\right)^2$, a ambos os membros da equação (o quadrado da metade de $\frac{b}{a}$), transformando o primeiro membro no quadrado de um binómio

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}$$

substitui-se o trinómio do primeiro membro por $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$

$$x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a_{(4a)}}$$

$$\Leftrightarrow x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

por definição de raiz quadrada vem:

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

$$\Leftrightarrow x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

resolvem-se em x, as equações obtidas

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

chegando à fórmula resolvente

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Exemplo:

Resolver a equação $x^2-5x+6=0$

Sabemos que $a=1$; $b=-5$ e $c=6$.

Assim

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \times 1 \times 6}}{2 \times 1}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5 \pm 1}{2}.$$

Denominando uma das raízes por x_1 e a outra por x_2, temos que:

$$x_1 = \frac{5+1}{2} \vee x_2 = \frac{5-1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 3 \vee x_2 = 2.$$

Então $C.S. = \{2;3\}$.

5.3 Existência de Raízes Reais

É de relativa fácil observação que a expressão $b^2 - 4ac$ (designada por *radicando* da fórmula de *Bhaskara*) condiciona a solução da equação, pois se o seu valor numérico for negativo, então

$$\sqrt{b^2 - 4ac} \notin IR.$$

Dada a sua importância, é denominado por *discriminante*, pois discrimina a existência ou não de raízes, sendo simbolizado por Δ.

Assim a solução da equação do 2° grau pode ser escrita do seguinte modo:

$$C.S. = \left\{ \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right\}.$$

Um dos temas de discussão nas raízes de uma equação é o facto de estas serem reais ou não e, no primeiro caso, se são distintas ou não. Para isso, basta determinar o valor numérico do discriminante.

<u>1º Caso</u>: $\Delta > 0$

Se Δ for positivo então $\sqrt{\Delta}$ é um número real diferente de zero e a equação dada terá duas raízes reais distintas.

Exemplo:

Determinar as soluções (reais) da equação $x^2 + 7x + 12 = 0$.

Temos que $a = 1; b = 7$ e $c = 21$. Assim $\Delta = 7^2 - 4 \times 1 \times 12 = 1$. Vemos que $\Delta > 0$, então

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{1}}{2 \times 1}$$

e as raízes são:

$$x_1 = -3 \vee x_2 = -4.$$

Logo $\quad C.S. = \{-3;-4\}$.

<u>2º Caso</u>: $\Delta = 0$

Se Δ for nulo então $\sqrt{\Delta}$ é igual a zero e a equação terá duas raízes reais iguais designadamente

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}.$$

Exemplo:

Determinar as soluções (reais) da equação $x^2 + 6x + 9 = 0$.

Tem-se que $a = 1; b = 6$ e $c = 9$. Assim $\Delta = 6^2 - 36 = 0$

Então $x_{1,2} = \dfrac{-6 \pm \sqrt{0}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = -3.$

As duas raízes são iguais a -3, ou seja, $x_1 = x_2 = -3$.

Dizemos que a equação possui uma raiz de multiplicidade dois ou uma raiz dupla igual a -3.

Beste caso, tem-se que $C.\ S. = \{-3\}$.

<u>3º Caso</u>: $\Delta < 0$

Se Δ for negativo, então $\sqrt{\Delta}$ não é um número real e a equação dada, não possui raízes reais. No entanto, se considerarmos o corpo dos números complexos, C, a equação tem duas soluções, isto é,

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}; \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Então $C.S. = \left\{ \dfrac{-b + i\sqrt{\Delta}}{2a}; \dfrac{-b - i\sqrt{\Delta}}{2a} \right\}.$

Exemplo:

Determinar as soluções (reais) da equação $x^2 + 4x + 13 = 0$.

Tem-se que $a = 1$; $b = 4$ e $c = 13$.

Logo

$$\Delta = 4^2 \times 1 \times 13$$
$$\Delta = -36.$$

Vemos que $\Delta < 0$.

Então $x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{-36}}{2 \times 1} \notin IR.$

Se considerarmos válido o conjunto dos números complexos, tem-se que

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{36} \cdot \sqrt{-1}}{2 \times 1}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm 6i}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \pm 3i.$$

Assim, em *IR*, temos que *C. S.* = { }, isto é, a equação não tem raízes no conjunto dos números reais, mas em *C* temos que:

$$C.S. = \{-2-3i; -2+3i\}.$$

Em jeito de resumo tem-se que:

- Se $\Delta > 0$ então a equação admite raízes reais distintas.
- Se $\Delta = 0$ então a equação admite raízes reais iguais.
- Se $\Delta < 0$ então a equação não admite raízes reais distintas

5.4 Relações entre Coeficientes e Raízes

(Soma e produto das soluções de uma equação do 2º grau)

Dada a equação $ax^2 + bx + c = 0$ e as respectivas raízes x_1 e x_2, é de grande utilidade na Álgebra, relacionando a soma e o produto das raízes com os coeficientes da equação.

Sejam as raízes

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad (1) \qquad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}. \quad (2)$$

Assim para obtermos uma primeira relação determinamos a soma das raízes da equação.

1. Soma das raízes

Adicionando (1) e (2) membro a membro, vem:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}+\left(-b-\sqrt{\Delta}\right)}{2a}.$$

Reduzindo os termos semelhantes tem-se que:

$$x_1 + x_2 = -\frac{2b}{2a}, \quad \text{ou seja,} \quad x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}.$$

Desta forma, podemos concluir que a soma das raízes é igual ao simétrico do coeficiente de x, dividido pelo coeficiente de x^2.

Exemplo:

Dada a equação $x^2 - 5x + 6 = 0$ e aplicando a 1ª relação, temos que:

$$x_1 + x_2 = \frac{-(-5)}{1} = 5.$$

De facto, sabendo que as raízes dessa equação são 2 e 3, verificamos que

$$x_1 + x_2 = 2 + 3 = 5.$$

2. Produto das raízes

Multiplicando (1) por (2), membro a membro, vem:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 = \frac{\left(-b+\sqrt{\Delta}\right)\cdot\left(-b-\sqrt{\Delta}\right)}{4a^2}.$$

Observamos que o numerador é o produto da soma pela diferença de duas expressões, podemos escrever:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2}.$$

Substituindo Δ por $b^2 - 4ac$, temos que:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{4ac}{4a^2}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Podemos concluir que o produto das raízes é igual aos coeficiente constante dividido pelo coeficiente de x^2.

Exemplo:

Na mesma equação dada anteriormente, $x^2 - 5x + 6 = 0$ temos que:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{6}{1} = 6.$$

De facto, como as raízes são 2 e 3, facilmente se constata que $x_1 \cdot x_2 = 2 \times 3 = 6$.

3. Forma da equação do 2º grau usando os valores da soma (S) e do produto (P) das raízes da equação

Uma aplicação das relações atrás referidas é a escrita de equações de 2º grau conhecendo as respectivas raízes.

Dada a equação $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ e dividindo-se ambos os membros por a, teremos:

$$x^2+\frac{bx}{a}+\frac{c}{a}=0 \qquad (1)$$

Aplicando as relações entre coeficientes e raízes, vem que:

$$S=x_1+x_2=-\frac{b}{a} \Leftrightarrow \frac{b}{a}=-S$$

e

$$P=x_1\cdot x_2=\frac{c}{a} \Leftrightarrow \frac{c}{a}=P.$$

Substituindo estas expressões na equação (1), resulta que

$$x^2-Sx+P=0,$$

ou seja,

- a soma das raízes é igual ao simétrico do coeficiente x

e

- o produto das raízes é igual ao do coeficiente constante.

Quando as raízes de uma equação quadrática são reais faz sentido referir os sinais das mesmas. Em todo o processo evolutivo da Matemática procuram-se técnicas de resolução cada vez mais rápidas. Conhecer o sinal das raízes de uma equação quadrática, sem as determinar é obviamente, uma delas.

4. Sinal das raízes

I- Numa equação dada, com raízes reais e distintas $(\Delta > 0)$ temos que:

1º Caso: Se o produto dessas raízes for positivo então é evidente que as raízes devem ter o mesmo sinal. Neste caso, ou ambas são positivas ou negativas, conforme o sinal da soma.

Exemplo:

1. Sem resolver a equação, vamos descobrir qual é o sinal das raízes da equação $2x^2 - 7x + 3 = 0$.

Temos que $P = \frac{3}{2}$ e $S = -\frac{-7}{2} = \frac{7}{2} > 0$.

Logo as duas raízes são positivas.

2. Analogamente ao exmplo1, iremos descobrir o sinal das raízes da equação $x^2 + 5x + 6 = 0$.

Temos que $P = 6$ e $S = -5 < 0$.

Logo as duas raízes são negativas.

2º Caso: Se o produto for negativo, então é evidente que as raízes terão sinais contrários. Neste caso, a maior das raízes, em valor absoluto, será positiva ou negativa, conforme o sinal da soma, pois esta levará o sinal da maior parcela, em valor absoluto.

Exemplo:

1. Sem resolver a equação, iremos descobrir qual é o sinal das raízes da equação $4x^2 - 4x - 15 = 0$.

Temos então que:

$$P = -\frac{15}{4} < 0 \quad \text{e} \quad S = \frac{4}{4} = 1 > 0.$$

Logo as raízes têm sinais contrários, sendo positiva a maior em valor absoluto.

2. Sem resolver a equação iremos descobrir o sinal das raízes da equação $x^2 + 2x - 15 = 0$.

Temos que $P = -15$ e $S = -2 < 0$.

Logo, as raízes têm sinais contrários, sendo negativa a maior em valor absoluto.

3. Iremos descobrir, sem resolver a equação, o sinal das raízes da equação $x^2 - 9 = 0$.

Sabemos que $P = -9$ e $S = 0$.

Logo as raízes têm sinais contrários e, como a soma é nula, concluímos que são simétricas, isto é, têm o mesmo valor absoluto e sinais contrários.

3º Caso: Se o produto for nulo, pelo menos uma raiz será nula e a outra será igual à soma e, portanto, terá o sinal desta.

Exemplo:

1. Sem resolver a equação, iremos pesquisar qual é o sinal das raízes da equação $3x^2 - 4x = 0$.

Sabemos que $P = 0$ e $S = \frac{4}{3} > 0$.

Logo, uma raiz é nula e a outra é positiva (igual a $\frac{4}{3}$).

2. Pesquisemos o sinal das raízes da equação $x^2 + 3x = 0$, sem as calcular.

Temos então que $P = 0$ e $S = -3 < 0$.

Logo, uma raiz é nula e a outra é negativa (igual a -3).

II- Uma equação de raízes reais e iguais, isto é, uma equação que admite uma raiz dupla $(\Delta = 0)$, terá sempre o mesmo sinal da soma e vale a metade da mesma. Portanto, sendo $S = -\frac{b}{a}$, a raiz dupla será igual a $-\frac{b}{2a}$.

Exemplo:

Descubramos então o sinal das raízes da equação $x^2 - 6x + 9 = 0$.

Dado que $\Delta = 6^2 - 4 \times 9 \times 1 = 0$ (raiz dupla) e $S = 6 > 0$, então a equação dada admite uma raiz dupla, positiva e igual a $\frac{6}{2} = 3$.

III- Sendo $\Delta < 0$, a equação não admitirá raízes reais.

Facilmente se verifica que, sendo $a > 0$, então:

- o produto das raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$ terá o mesmo sinal de c

e

- a soma, o sinal contrário ao de b.

Capítulo IV – Equações do 3º e 4º grau

"O conhecimento que pára perante o que não sabe é o verdadeiro conhecimento."

Chuang Tzu, séc. IV a. C.

Capítulo IV –Equações do 3º e 4º grau

1. A Teoria das Equações nos séculos XV e XVI

1.1 Introdução

O Renascimento – séculos XV e XVI – foi um período de desenvolvimento da arte, ciência e literatura na Itália, Espanha, França e Inglaterra, bem como um período de familiarização com as "heranças da antiguidade". Este período parecia ser o renascimento da cultura da Grécia e de Roma.

Actualmente, o conhecimento adquirido da antiguidade tornou possível a construção dos fundamentos para uma nova ciência e cultura.

O líder deste movimento foi a Itália, o qual mais tarde ostentou pintores brilhantes (Boticelli, da Vinci, Raphael), escultores (Michel Angelo, Cellini) e, um pouco mais cedo, no século XIV, escritores e pintores (Boccaccio, Petrarch).

Esta foi uma época de grandes descobertas geográficas, tais como, a descoberta da América por Colombo (1492) e a viagem de circum-navegação de Magalhães (1521).

A península italiana não era só um país, mas uma colecção de cidades estado com muitos comerciantes ricos, nas quais se faziam ouvir protestos matemáticos de senhores das cidades. Em particular, um dos problemas frequentemente por resolver, que se tornou uma disputa já com velha tradição, era a determinação das soluções de uma dada equação cúbica da forma

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0,$$

onde *a, b* e *c* eram números racionais, usualmente inteiros.

É de salientar que a notação moderna expressa na escrita da equação acima, não existia no início do século XVI, e então a proeza de encontrar as soluções envolvia, não só a ingenuidade matemática, mas também uma habilidade para superar os obstáculos linguísticos.

Assim, no que respeita à Matemática, o século XVI foi a idade da álgebra. Começou pois, com a solução das equações cúbica e quártica através de radicais, a primeira grande proeza, além das da antiguidade, e terminou com a realização de cálculos algébricos e com a introdução dos números complexos.

1.2 A Notação

A escassez de uma "boa notação", nos séculos XV e XVI, foi um grande impedimento para a resolução das equações cúbicas. Por exemplo, a equação cúbica

$$x^3 + 2x^2 + 4x - 1 = 0$$

seria descrita do seguinte modo:

"Tome o cubo de uma coisa, adicione-lhe o dobro do quadrado dessa coisa; a isso adicione quatro vezes a coisa, e tudo isto deve ser igual a um".

Note-se que a equação acima escrita em notação moderna, utiliza um número negativo e o zero, que não eram aceites na altura. Assim a equação seria apenas dada na forma

$$x^3 + 2x^2 + 4x = 1$$

e uma equação da forma

$$x^3 - 4x^2 - 2x + 5 = 0,$$

seria dada por

$$x^3 + 5 = 4x^2 + 2x.$$

Deste modo existiam imensas formas de equações cúbicas, dependendo do facto dos coeficientes serem positivos, negativos ou nulos.

A designação de variáveis por letras foi inventada em 1591 por F. Viéte (1540 – 1603), que usou consoantes para denotar constantes e vogais para denotar variáveis (a notação moderna de usar letras *a, b, c, ...* do início o alfabeto para denotar constantes e letras *x, y, z, ...* do fim do alfabeto para denotar variáveis foi introduzida por R. Descartes em 1637 no seu livro *A Geometria*).

1.2.1 Nota Histórica

Como nota histórica salientamos a introdução de certa simbologia usada nos nossos dias aquando da resolução de equações algébricas:

- A notação exponencial A^2, A^3, A^4, ... foi essencialmente introduzida por J. Hume em 1636 (ele usava a notação A^{ii}, A^{iii}, A^{iv},...).
- Os símbolos +, - e $\sqrt{\ }$, bem como o símbolo / , para a divisão foram introduzidos por J. Widman em 1486.
- O símbolo $\times$ para multiplicação foi introduzido por W. Oughtred em 1631 e o símbolo $\div$ para divisão por J. H. Rahn em 1659.
- O símbolo = foi introduzido por Oxford don Robert Recorde em 1557, na sua *Whetstone of Wit:*

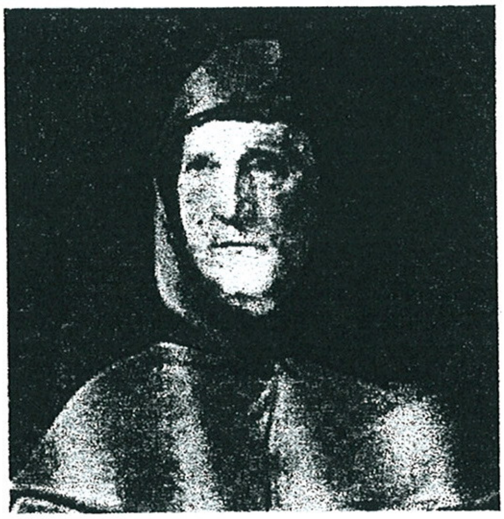
> *"E para evitar a repetição tediosa destas palavras é igual a, eu irei rotular como usualmente faço no meu trabalho, um par de paralelas, ou duas linhas paralelas de um comprimento, tal como =, porque não existem duas coisas que possam ser mais iguais".*

Todos estes símbolos não foram adoptados de uma só vez, e muitas vezes existiam notações competitivas. Apenas no século seguinte, com a publicação de Descartes, *A Geometria,* é que a maior parte desta notação se tornou universal na Europa e subsistiu até aos nossos dias.

1.3 História da Resolução das Equações Cúbicas e Quárticas

A solução geral das equações cúbica e quártica é devida aos algebristas italianos do século XVI, Scipione del Ferro, Tartaglia, Cardano e Ferrari. No entanto algum tempo antes outros matemáticos, como Luca Pacioli, já tinham tentado resolver essas equações.

1.3.1 Luca Pacioli (1)



1.3.1.1 A sua Vida

Pouco se sabe da vida de Luca Pacioli. Em 1477 Pacioli iniciou uma vida de viagens, ensinando Matemática, particularmente aritmética, em várias universidades.

1.3.1.2 O seu Trabalho

Escreveu vários trabalhos sobre aritmética, mas o seu livro mais famoso foi *"Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalità"*, conhecido por *Suma*, escrito na Itália em 1487, cuja primeira edição surgiu em 1494 em Veneza.

O livro *Suma* consiste basicamente numa sumarização de conhecimentos matemáticos da época, no qual poucos avanços foram feitos. *Suma* abrange diversos temas:

- aritmética,
- álgebra,
- geometria,
- trigonometria

e, apesar da falta de originalidade, foi um trabalho muito influente pois, contribuiu para um maior progresso da Matemática que teve lugar na Europa pouco tempo depois. Tal como referem:

(1) Nasceu em 1445 Sansepolcro e morreu em 1517 Sansepolcro, Itália.

"Suma não era dirigida a uma secção particular da comunidade. Um trabalho enciclopédico (600 páginas de impressão) escrito em italiano, contém um tratado geral sobre aritmética teórica e prática; os elementos de álgebra; uma tabela de pesos e comprimentos usada nos vários estados italianos; um tratado de contabilidade de dupla entrada; e um sumário da geometria de Euclides. Pacioli admitiu ter copiado livremente de Euclides, Boethuis, Sacrobosco, Fibonacci, ... ".

Na obra *Suma* é de realçar o estilo quase moderno da notação e da escrita de cálculos.

1.3.1.3 A sua Notação

Luca possuía uma notação algébrica relativamente simples. Ele denotava a raiz quadrada por *R* ou *R2*, a raiz cúbica por *R3* e a raiz quártica por *R4* ou *RR* (raiz raiz).

Numa equação o desconhecido era denotado por *co* (*cosa,* isto é, coisa), o seu quadrado por *ce* (*censo)* e um número à quarta por *ce.ce* (*censo de censo*). Para a adição e a subtracção eram usados os sinais *p* e *m.*

Exemplos:

1. *R V 40 m R 320* significa $\sqrt{40-\sqrt{320}}$. A letra *V* indica que a raiz deve ser extraída a toda a expressão que se lhe segue ($V = U =$ Universal).

2.

$$
\begin{array}{r}
6\,.\,p\,.\,R\,.\,10 \\
18\,.\,m\,.\,R\,.\,90 \\
\hline
108\,.\,m\,.\,R\,.\,3240\,.\,p\,.\,R\,.\,3240\,.\,m\,.\,R\,.\,900
\end{array}
$$

hoc est 78.

Na nossa notação

$$\left(6+\sqrt{10}\right)\cdot\left(18-\sqrt{90}\right)=\left(108-\sqrt{3240}+\sqrt{3240}-\sqrt{900}\right)$$

que é igual a 78.

1.3.1.4 Soluções das Equações Cúbica e Quártica

Durante o período em que Pacioli ensinou na Universidade de Bolonha (1501 – 1502) trabalhou com Scipione del Ferro e certamente existiram muitas conjecturas entre os dois na discussão de soluções algébricas das equações cúbicas.

Luca Pacioli no final do seu livro, *Suma*, afirma que, para as equações, nas quais ocorrem

numero, cosa e cubo (n, x e x^3)

ou

numero, censo e cubo (n, x^2 e x^3)

ou

numero, cubo e censo de censo (n, x^3 e x^4)

não foi possível *"até ao momento"* descobrir uma regra geral.

Contudo relativamente à equação quártica da forma

$$x^4 = a + bx^2 \quad \text{(denominada biquadrada)}$$

refere que *"pode ser resolvida por métodos quadráticos"*, enquanto que as equações quárticas da forma

$$x^4 + ax^2 = b \qquad \text{e} \qquad x^4 + a = bx^2$$

são *"impossíveis no presente estado da ciência."*

1.3.2 Scipione Del Ferro [(1)]

1.3.2.1 Breve Introdução

Scipione del Ferro teve um papel importante na história da Matemática e merece "todo" o crédito por ter resolvido um problema antigo de Matemática: a equação algébrica do 3° grau.

Num sentido, del Ferro é bem conhecido, pois o seu papel, na resolução de equações cúbicas, é explicado na maioria dos trabalhos em história da Matemática. No entanto, surpreendentemente, o seu nome permanece relativamente desconhecido.

1.3.2.2 A sua Vida

Os pais de Scipione del Ferro foram Floriano e Filipa del Ferro. Floriano trabalhava na realização do papel, na altura, um negócio importante devido à invenção da imprensa em 1450 que contribuiu para a crescente natural necessidade do papel.

Quanto à educação de Scipione del Ferro pouco se sabe, mas é provável que tenha estudado na antiga Universidade de Bolonha (fundada no início do século XII).

Del Ferro foi nomeado professor na Universidade de Bolonha em 1496 e manteve esse trabalho até ao resto da sua vida.

1.3.2.3 História da Resolução das Equações Cúbica e Quártica: 1ª Parte

A história da resolução das equações cúbicas começou quando Scipione del Ferro resolveu a equação

$$x^3 + px = q, \quad \text{com} \quad p, q > 0$$

por radicais, mas a história é um pouco mais complicada...

---

(1) Nasceu a 06/02/1465 Bolonha e morreu a 05/11/1526 Bolonha, Itália.

O problema consistia em determinar as raízes por adição, subtracção, multiplicação, divisão e tomando as raízes quadradas ou cúbicas de expressões com coeficientes da equação cúbica, ou seja, o problema que del Ferro resolveu, resumia-se a determinar uma fórmula para resolver a equação cúbica, semelhante à fórmula que era conhecida desde o tempo dos babilónios para resolver equações quadráticas. Hoje escrevemos as soluções de

$$ax^2 + bx + c = 0$$

como

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{e} \quad x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

No tempo de del Ferro, ainda que essas soluções fossem conhecidas, não o eram nesta forma pois, em meados do século XVI na Europa:

- não era usado o zero;
- os números negativos não eram utilizados;
- não havia conhecimento de que a equação quadrática tivesse duas raízes.

A equação cúbica geral

$$y^3 + ay^2 + by + c = 0$$

pode ser reduzida, pela introdução de uma nova variável

$$y = x + \frac{a}{3}$$

à forma simples

$$x^3 + px + q = 0.$$

Mas se apenas são admitidos coeficientes positivos e valores positivos de x, então tem-se três tipos de equações cúbicas:

$$x^3 + px = q \quad \text{(tipo I)}$$

$$x^3 = px + q \quad \text{(tipo II)}$$

$$x^3 + q = px \quad \text{(tipo III), com} \quad p, q > 0.$$

Acreditamos que Scipione del Ferro tenha resolvido apenas o tipo (I) de equação cúbica. Contudo, sem o conhecimento dos números negativos oriundo dos hindus, del Ferro não foi capaz de usar a sua resolução para resolver todas as equações cúbicas.

Notavelmente, del Ferro resolveu a equação cúbica (I) por volta de 1515, mas manteve o seu método e resultados em segredo. Manter um segredo era na altura tão vulgar como a tendência actual de publicar as descobertas o mais rápido possível. O dono de tal método poderia desafiar o seu rival a um "duelo científico" e propor-lhe problemas solúveis pelo método que o adversário ignorava. A vitória nesse "duelo" trazia fama a um e colocava o outro em desvantagem quando pretendesse ocupar um determinado cargo.

Scipione del Ferro, manteve uma espécie de agenda, na qual guardava as suas mais importantes descobertas. Antes da sua morte, del Ferro revelou o seu método a alguns amigos mais próximos e estudantes, nomeadamente, ao seu genro, Hannibal della Nave, e ao seu aluno, António Maria Fior, entregando a referida agenda a della Nave.

1.3.2.4. Comentário ao Trabalho de del Ferro

Segundo J.J. Connor, Pompeo Bolognetti que leccionava Matemática na Universidade de Bolonha desde 1554 a 1568, teve também acesso à solução original por del Ferro. Também Bombelli teve acesso a detalhes do trabalho de del Ferro que actualmente já não existem e expressou maravilhas ao génio de del Ferro descrevendo-o como:

> *"... um homem unicamente dotado desta arte [a álgebra]..."*

É pena que a agenda de del Ferro não tenha sobrevivido. É provável que ele tivesse alcançado consideravelmente mais fama se se pudesse fornecer detalhes dos problemas que resolveu e escreveu na sua agenda.

1.3.2.5. A História Continua ...

Em 1535, Fior, o aluno a quem del Ferro revelou o método de resolução da equação cúbica, que não era muito dotado em Matemática, desafiou para um "duelo" o conhecido matemático italiano Niccolò Tartaglia.

1.3.3 Niccolò Fontana [1]

1.3.3.1 A sua Vida

Niccolò Fontana nasceu numa família pobre na cidade de Brescia. O seu pai morreu quando o filho tinha seis anos.

Quando os franceses saquearam Brescia em 1512, o rapaz de doze anos de idade foi seriamente ferido no queixo e na laringe. A sua mãe era muito pobre para consultar um médico e tratou-o com remédios caseiros. Mas na sua vida Niccolò sempre usou uma barba para camuflar as suas cicatrizes e gaguejou durante anos. Actualmente Tartaglia é uma alcunha e significa "o gago". Apesar de todas estas dificuldades Niccolò tratou de adquirir conhecimentos de Matemática e Mecânica. Consequentemente ele escreveu um tratado notável, para a época, intitulado *"A nova ciência"*, no qual ele considerava uma variedade de resultados de mecânica.

Para ganhar a vida, Tartaglia leccionou durante muito tempo na sua cidade natal bem como em Verona e em Veneza. Foi também convidado como um consultor para redigir tratados comerciais. Como um humilde professor de Matemática em Veneza, Tartaglia gradualmente ganhou uma reputação como um promissor matemático através da sua participação em vários debates públicos.

1.3.3.2 História da Resolução das Equações Cúbica e Quártica: 2ª Parte

Tartaglia aceitou o desafio proposto por Fior. As regras eram as seguintes: cada um dos intervenientes fornecia ao outro 30 problemas para os resolver em 40 ou 50 dias. O vencedor era aquele que resolvesse o maior número de problemas e um pequeno prémio era também oferecido por cada problema resolvido.

---

(1) Nasceu em 1499, Brescia, República de Veneza (actual Itália) e morreu em 1557, Veneza, República de Veneza (actual Itália).

Tartaglia apresentou uma variedade de questões de diferentes áreas da Matemática e Mecânica. Fior, por outro lado, propôs a Tartaglia 30 questões para resolver o problema de *"a coisa e o cubo"* (isto é, resolver a equação $x^3 + px = q$) pois, acreditava que Tartaglia seria incapaz de resolver este tipo de equação.

Fior estava bastante confiante de que a sua habilidade em resolver a equação cúbica seria suficiente para derrotar Tartaglia mas, porque os números negativos não eram usados, existia mais do que um tipo de equação cúbica e a Fior foi apenas mostrado por del Ferro como resolver o tipo (I).

Por outro lado, Tartaglia sabia que Fior possuía a solução da equação cúbica do tipo (I) de del Ferro e realizou esforços persistentes em os descobrir por si mesmo. Assim, nas últimas horas do dia 12 de Fevereiro de 1535, Tartaglia estava inspirado e descobriu o método de resolução da equação cúbica do tipo (I).

Como todas as 30 questões propostas por Fior eram casos especiais da equação (I), Tartaglia resolveu-os rapidamente em menos de duas horas. Uma vez que Fior fez poucos progressos com as questões de Tartaglia, era óbvio para todos quem era o vencedor. Apenas a honra de ter ganho era satisfação suficiente para Tartaglia que renunciou o prémio.

1.3.3.3 A História Continua ...

É neste ponto da situação da história que, em 1539, surge Gerolamo Cardano, um famoso médico, astrólogo, filósofo e matemático, que viveu em Milão.

1.3.4 Gerolamo Cardano [1]

1.3.4.1 A sua Vida

Gerolamo Cardano era um filho ilegítimo de Fazio Cardano e Chiara Micheria. O seu pai era um advogado em Milão mas, a sua habilidade em Matemática era tal que foi consultado por Leonardo da Vinci sobre questões de geometria. Além da prática das leis, Fazio leccionou geometria na Universidade de Pávia e, com grande fascínio, na Fundação de Piatti em Milão. Quando tinha cinquenta e tal anos, Fazio conheceu Chiara Micheria, que era uma jovem víuva com cerca de trinta anos.

Chiara ficou grávida mas, antes de dar à luz, a praga atingiu Milão e ela foi persuadida a deixar a cidade e a mudar-se para Pávia. Assim, Cardano nasceu em Pávia. A alegria de sua mãe foi curta pois, ela recebeu a notícia de que o seu filho mais velho tinha morrido de praga em Milão. Chiara viveu longe de Fazio por muitos anos mas, anos mais tarde, casaram.

No início Cardano tornou-se assistente de seu pai, mas como era uma criança doente, Fazio pediu a ajuda a dois dos seus sobrinhos quando o trabalho era muito para Cardano. Contudo, Cardano começou a desejar ser mais do que assistente de seu pai. Fazio ensinou aos seus filhos Matemática e Cardano começou a pensar numa carreira académica. Quando jovem tinha uma obsessão pela fama. Ele escreveu:

> *"O ideal que procuro não são bens ou a ociosidade, não são honras, nem alta posição social, nem poder mas, obter, assim que puder, a imortalização do meu nome."*

Quando a guerra começou, a universidade foi obrigada a fechar e Cardano mudou-se para a Universidade de Pádua para completar os seus estudos.

---

[1] Nasceu a 24/09/1501, Pávia, Território de Milão (agora Itália) e morreu a 21/09/1576, Roma (agora Itália).

Cardano estudou medicina e tornou-se num cirurgião famoso e hábil. Também estudou matemática, mecânica, astrologia e filosofia. Ele viajou até à Europa e tratou de membros da aristocracia inglesa e escocesa e foi, durante algum tempo, o físico da corte do jovem Eduardo VI. Ele traçou o horóscopo do rei e previu para ele uma vida longa. Mas, Eduardo morreu poucos meses mais tarde e Cardano regressou a casa.

Cardano ficou frustrado e com grande pesar, quando o seu filho querido foi condenado à morte por ter envenenado a esposa.

Durante algum tempo, Cardano foi professor na Universidade de Bolonha, no entanto, uma queixa por envolvimento em magia negra, levou a que Cardano fosse perseguido pela Inquisição, tendo sido obrigado a fugir de Bolonha e privado do direito de leccionar.

Cardano passou os últimos anos da sua vida em Roma, para onde foi convidado pelo papa Pio V, como um físico famoso. Aí Cardano retomou a sua prática medicinal e no último ano da sua vida escreveu a sua famosa autobiografia: *"O livro da minha vida"*, que foi traduzido em todas as línguas europeias.

Cardano era um homem de um carácter impetuoso que faria tudo para alcançar os seus objectivos. Conta-se uma história, de que Cardano traçou o seu próprio horóscopo e previu que iria morrer a 21 de Setembro de 1576. Para aumentar a sua fama, como astrólogo, ele, presumivelmente, deixou de comer para morrer no dia previsto. Verdade ou não, a história é uma excelente reflexão da essência do carácter de Cardano

1.3.4.2 História da Resolução das Equações Cúbica e Quártica: 3ª Parte

Em 1539, Cardano estava preparando para publicar um livro *"Pratica Arithmeticae"*, quando descobriu que Tartaglia sabia o segredo da solução da equação cúbica. Até então, Cardano, professor de Matemática na Fundação Piatti em Milão, conhecia o problema da *"coisa e do cubo"* mas, até à disputa, assumia, tal como Pacioli no seu trabalho a *Suma*, publicado em 1494, que as soluções eram impossíveis. Bastante intrigado, Cardano, quando soube da disputa entre Fior e Tartaglia, começou imediatamente a trabalhar, no sentido de descobrir o método de Tartaglia, mas não obteve sucesso.

Assim em 1539, Cardano aproximou-se de Tartaglia, enviando-lhe o livreiro Zuan Antonio de Bassano a Veneza como um intermediário, para que lhe revelasse o seu método e assim incluí-lo num livro que iria publicar naquele ano. Tartaglia recusou essa oportunidade, manifestando a sua intenção em publicar a sua fórmula num livro que ele próprio escreveria mais tarde. Cardano aceitou tal facto e pediu-lhe que lhe mostrasse o método, prometendo-lhe que se o fizesse, mantê-lo-ia em segredo. Tartaglia, contudo, recusou.

Um Cardano, agora provocado, escreveu directamente a Tartaglia, expressando a sua amargura, desafiando-o para um debate e ao mesmo tempo informando-o que esteve a discutir o brilhantismo de Tartaglia com o governador militar de Milão, Alfonso d'Avalos, um dos grandes abonadores de Cardano. Ao receber esta carta, Tartaglia radicalmente reviu a sua atitude, concluindo que uma relação com um influente governador de Milão poderia ser muito gratificante na medida em que, algumas invenções militares lhe poderiam proporcionar um trabalho mais lucrativo na corte de Milão.

Assim, Tartaglia escreveu a Cardano com palavras amigas, procurando uma apresentação ao referido governador. Cardano ficou satisfeito com a aproximação de Tartaglia e, convidando-o para sua casa, assegurou-lhe, que lhe arranjaria um encontro com Alfonso d'Avalos.

Deste modo, em Março de 1539, Tartaglia deixou Veneza e viajou até Milão. Para grande desânimo de Tartaglia, o governador estava temporariamente ausente de Milão mas, Cardano atendeu a todas as necessidades do seu convidado e, cedo, o tema da conversa era o problema da *"coisa e do cubo"*.

Tartaglia, depois de muita persuasão, concordou em contar a Cardano o seu método, se Cardano jurasse nunca o revelar e, quando o escrevesse só o fizesse em código para que, quando morresse, ninguém descobrisse o segredo através dos seus papéis. Cardano rapidamente concordou e Tartaglia divulgou a sua fórmula em forma de poema, para ajudar a proteger o segredo, se este caísse em mãos erradas.

A descrição de Tartaglia do juramento de Cardano prestado a 25 de Março de 1539 foi a seguinte:

> *"Juro-te, pelo Santo Evangelho do Senhor e como homem de honra, nunca publicar as tuas descobertas, se me as ensinares, mas também prometo, e empenho a minha fé como verdadeiro cristão, não divulgar o código, para que, depois da minha morte, ninguém seja capaz de o compreender."*

Ansioso por deixar a casa de Cardano, Tartaglia obteve do dono da casa, uma carta para se apresentar ao governador e partiu para procurá-lo por toda a parte. Contudo, em vez disso, Tartaglia partiu de regresso a casa em Veneza, perguntando-se a si mesmo se a sua decisão, de ceder a sua fórmula, tinha sido um erro.

1.3.4.3 A História Continua ...

Cardano e Ferrari, o seu assistente, baseados na fórmula de Tartaglia, fizeram notáveis progressos encontrando provas para todos os casos da equação cúbica e, surpreendentemente, resolver a equação quártica.

1.3.5 Ludovico Ferrari [1]

1.3.5.1 A sua Vida

Ludovico Ferrari era um jovem notável, que chegou à casa de Cardano com 14 anos de idade, como servente. Cardano, notando a habilidade do rapaz, dado que sabia ler e escrever, nomeou-o seu assistente. Cedo, tornou-se claro para Cardano, que Ferrari era um jovem excepcionalmente dotado e decidiu ensinar-lhe Matemática.

1.3.5.2 História da Resolução das Equações Cúbica e Quártica: 4ª Parte

Cardano e Ferrari fizeram progressos notáveis baseados nos princípios que Tartaglia tinha revelado.

Ferrari descobriu a solução da equação quártica em 1540, com um belo raciocínio, usando, no entanto, a solução da equação cúbica. Assim sendo, não poderia publicar a resolução da equação quártica antes da solução da equação cúbica. Não havia pois, forma de tornar isso público sem quebrar o juramento feito por Cardano a Tartaglia.

Entretanto, Cardano descobriu que del Ferro foi o primeiro a resolver a equação cúbica e não Tartaglia.

Perdida quase a esperança de alguma vez publicar os seus trabalhos, Cardano e Ferrari, em 1543, viajaram até Bolonha para falar com o matemático della Nave, genro de Scipione del Ferro.

Cardano e Ferrari satisfizeram della Nave de que sabiam resolver o problema da *"coisa e do cubo"* e então, della Nave mostrou-lhes os apontamentos de del Ferro, provando que Tartaglia não foi o primeiro a resolver a equação cúbica por radicais. Consequentemente, Cardano sentiu que, apesar de ter jurado não revelar o método de Tartaglia, nada o impedia de publicar a fórmula da equação cúbica de del Ferro.

---

(1) Nasceu a 02/02/1522, Bolonha, Estado Papal e morreu a 05/10/1565, Bolonha, Estado Papal (agora Itália).

Ferrari escreveu (a 1 de Abril de 1547) acerca da viagem para encontrar--se com della Nave:

> *"Quatro anos atrás quando Cardano ia para Florença eu acompanhei-o. Encontrámo-nos em Bolonha com Hannibal della Nave, um homem esperto e humano, que nos mostrou um pequeno livro [agenda] de Scipione del Ferro, o seu sogro, escrito há muito tempo, no qual aquela descoberta [solução da equação cúbica] era elegantemente e sabiamente apresentada."*

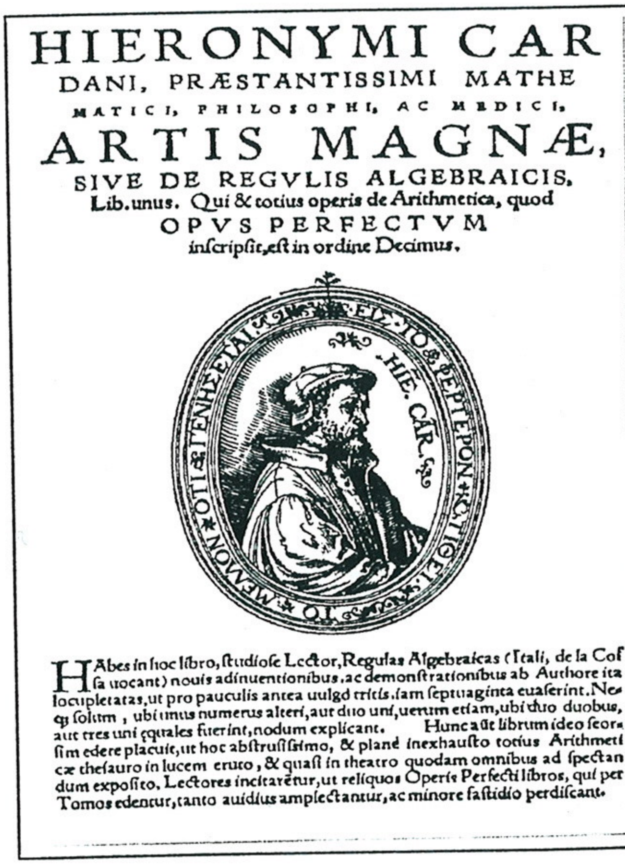
Assim, em 1545, Cardano publicou o seu maior trabalho matemático, a sua *"Grande Arte"*, ou *"As Regras da Álgebra"*, ou *"Ars Magna"*, como é mais conhecida, a qual incluía as regras para as soluções das equações cúbicas (tipos (I), (II) e (III)), bem como da equação quártica, descoberta pelo seu assistente Ferrari.

1.3.5.3 Ars Magna

1.3.5.3.1 Breve Introdução

Publicada pela primeira vez em Janeiro de 1545 como *"Artis Magna Sive de Regulis Algebraicis"*, a *Ars Magna* de Girolamo Cardano foi um dos grandes livros do Renascimento e um virar de esquina na história da Matemática. Entre muitas inovações, *Ars Magna* contém os princípios para resolver ambas as equações cúbica e quártica, fornecendo as soluções através de expressões formadas por radicais, de certa forma similar com o método que era conhecido desde os tempos antigos para equações do segundo grau.

Ars Magna foi traduzida em 1968 para a língua inglesa por T. Richard Witmer e contém 40 capítulos.


HIERONYMI CAR
DANI, PRÆSTANTISSIMI MATHE
MATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,
ARTIS MAGNÆ,
SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,
Lib. unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod
OPVS PERFECTVM
inscripsit, est in ordine Decimus.

HAbes in hoc libro, studiose Lector, Regulas Algebraicas (Itali, de la Cossa uocant) nouis adinuentionibus, ac demonstrationibus ab Authore ita locupletatas, ut pro pauculis antea uulgo tritis, iam septuaginta euaserint. Neque solum, ubi unus numerus alteri, aut duo uni, uerum etiam, ubi duo duobus, aut tres uni equales fuerint, nodum explicant. Hunc aūt librum ideo seorsim edere placuit, ut hoc abstrusissimo, & plane inexhausto totius Arithmeticæ thesauro in lucem eruto, & quasi in theatro quodam omnibus ad spectandum exposito, Lectores incitarētur, ut reliquos Operis Perfecti libros, qui per Tomos edentur, tanto auidius amplectantur, ac minore fastidio perdiscant.

Como um verdadeiro filósofo renascentista Cardano procurou as chaves para a compreensão profunda da natureza. Ele acreditava que a sua *"Ars Magna"* revelava perfeitamente a chave para a arte da álgebra.

Cardano começou o seu trabalho por especificar os limites que proporcionaram no seu meio a sua Matemática. Ele explicou que apenas os problemas que descreviam alguns aspectos do espaço de três dimensões eram reais e verdadeiros. Nas suas palavras:

> *"Por positio [a 1ª potência do desconhecido] refere-se a uma linha, quadratum [o quadrado do desconhecido] a uma superfície e cubum [o cubo do desconhecido] a um corpo sólido, seria muito disparatado para nós ir além desse ponto. A natureza não o permite."*

Consequentemente, Cardano preservou o fundamental do conhecimento dos seus antecessores. Ele considerou que apenas as equações de ou redutíveis aos graus 1, 2 ou 3 faziam sentido, porque, apenas essas equações descreviam a natureza. Além disso, desde que ele seleccionou as demonstrações geométricas de factos algébricos, evidente no trabalho de matemáticos árabes, entre outros, a geometria restringiu-o a considerar quanto muito a equação de 3° grau.

1.3.5.3.2 Agradecimentos aos Descobridores

É de realçar que Cardano não reclamou como sendo seu o que seu não era. Em *Ars Magna,* Cardano escreveu com grande respeito a proeza de del Ferro:

> *"Scipione del Ferro de Bolonha, há mais de 30 anos atrás, descobriu a solução de cubo e coisas igual a números [que na notação actual consiste no caso $x^3 + px = q$], com uma resolução bela e admirável.*
>
> *Esta descoberta excedeu toda a ingenuidade mortal, e toda a subtileza humana. É verdadeiramente um presente dos céus, se bem que ao mesmo tempo uma demonstração do poder da razão tão brilhante que, quem quer que o alcance, provavelmente acreditará que é capaz de resolver qualquer problema."*

Cardano no capítulo XI da sua *Ars Magna,* intitulado *"Cubo e primeira potência igual a um número"* refere-se ao trabalho dos matemáticos, Ferro e Tartaglia, nas seguintes palavras:

> *"Scipione del Ferro de Bolonha há 30 anos atrás descobriu a regra e revelou-a a Antonio Maria Fior de Veneza, cujo debate com Niccolò Tartaglia de Brescia deu a Niccolò a ocasião para a descobrir. Ele [Tartaglia] revelou-me a fórmula devido às minhas súplicas, se bem que detendo a demonstração"*

e salienta o seu trabalho na resolução das mesmas

> *"... possuindo esses conhecimentos, eu pesquisei a demonstração em [várias] formas. Foi muito difícil".*

Cardano não reclamou essas inovações como sendo inteiramente originais, mas sim, foi capaz de construir a partir delas a sua própria teoria geral, incluindo todos os casos possíveis.

Como Oystein Ore aponta:

> *"Estes vários casos, produzidos amplamente pela necessidade de separar os números positivos dos negativos e pela escassez de uma notação algébrica eficiente, conduz à lista elaborada de tipos de equações.*
>
> *Cardano estudou o que considerou como sendo propriedades gerais, por exemplo, relações entre raízes e coeficientes, regras para os sinais ou localização de raízes."*

1.3.5.3.3. Resolução da Equação Cúbica: $x^3 + px = q$ (tipo I)

Iremos então analisar a explicação de Cardano do método da resolução da equação cúbica do tipo (I), *o cubo e a 1ª potência igual a um número*, dado no seu livro *Ars Magna*, capítulo XI.

1.3.5.3.3.1 Resolução de Cardano

Consideremos então a demonstração de Cardano, do *"cubo e da primeira potência igual a um número"*, isto é, a resolução da equação

$$x^3 + px = q \qquad \text{(tipo I).}$$

Cardano baseia-se em exemplos numéricos para estabelecer uma regra de resolução, em todos os casos possíveis.

Para resolver o tipo de equação (I), Cardano começa com o exemplo

$$x^3 + 6x = 20,$$

através da linguagem da sua *"álgebra retórica"*, que passamos a citar.

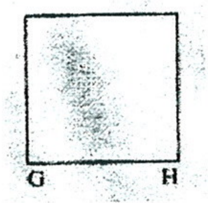


Figura 1

"Seja GH^3 mais seis vezes o seu lado GH igual a 20."

Isto é, seja um cubo e seis vezes o seu lado igual a 20.

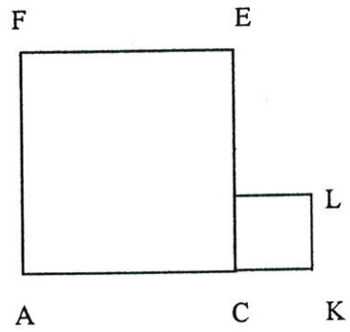


Figura 2

Cardano assume ainda que:

"... e seja AE e CL dois cubos, cuja diferença é 20 e tal que o produto de AC, o lado [de um] e CK o lado [do outro] é 2, nomeadamente, um terço do coeficiente de x".

Ou seja,

1°) AE – CL = 20 (onde AE e CL são cubos).

2°) AC x CK = 2 (onde AC e CK são arestas de cubos e 2 a terça parte do coeficiente de x, que no exemplo dado é 6).

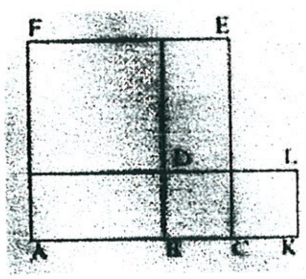


Figura 3

"Marcando BC igual a CK eu afirmo que, se isso for feito, a restante linha AB é igual a GH e é, consequentemente , o valor de x, pois GH já foi dado [como igual a x]."

Tem-se que BC = CK logo AB = GH = x.

"De acordo com a 1ª proposição do sexto capítulo deste livro...

[a fórmula em notação moderna, $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$ *],*

eu completo os corpos DA, DC, DE e DF; e como

DC representa BC^3*,*

então

DF representa AB^3*,*

DA representa 3 $(BC \times AB^2)$

e

DE representa 3 $(AB \times BC^2)$*."*

Assim tem-se que:

DC = BC^3;

DF = AB^3;

DA = 3 $(BC \times AB^2)$;

DC = 3 $(AB \times BC^2)$.

Aqui, Cardano solicita os seus leitores a completarem os cubos formados em AB + BC, da mesma forma que os árabes completaram o quadrado.

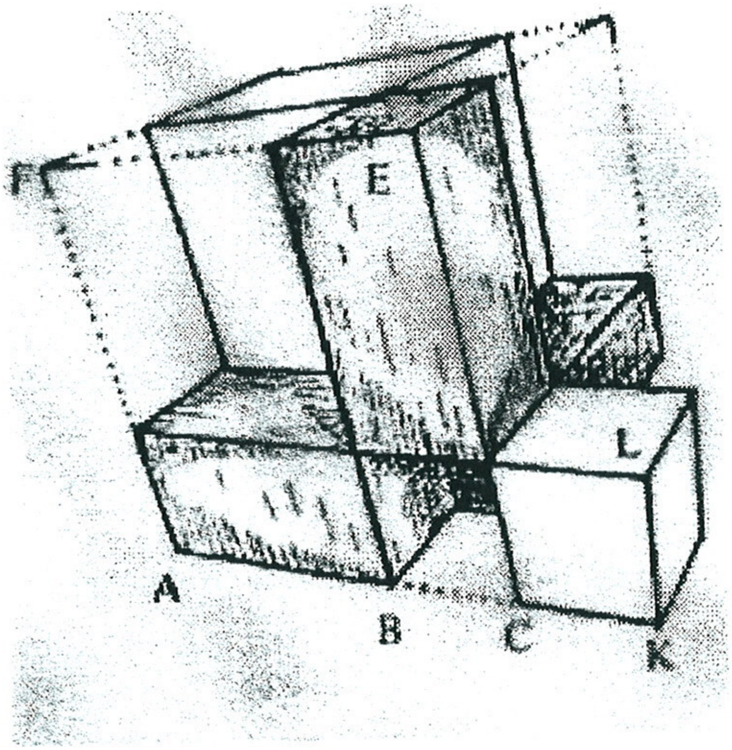


Figura 4

Isso resultou no sólido exibido na figura 4, onde, por exemplo, DE é a região sombreada.

Na construção de Cardano,

AC^3 correspondia ao cubo AE $(AE = AC^3)$

e

CK^3 representava o cubo CL e era equivalente a BC^3 $(CL = CK^3 = BC^3)$.

Assim, tem-se que

$$AC^3 - BC^3 = AC^3 - CK^3 = DA + DE + DF$$

$$AC^3 - BC^3 = 3\,(BC \times AB^2) + 3\,(AB \times BC^2) + AB^3 \qquad (1)$$

por construção.

Além disso,

> *"desde que ... $AC \times CK$ é igual a 2, $AC \times 3CK$ será igual a 6, o coeficiente de x; logo $AB \times 3\ (AC \times CK)$ perfaz 6x ou 6AB, pelo que três vezes o produto de AB, BC e AC é 6 AB.*

Isto fornece a Cardano uma equivalência algébrica essencial (em oposição à geométrica) de 6AB, nomeadamente,

$$6\ AB = 3\ (AB \times BC \times AC) \qquad (2)$$

Invocando a 2ª proposição do capítulo 6, que consiste em,

$$AC^3 + 3(AC \times CB^2) = (AC - CB\ )^3 + CB^3 + 3\ (CB \times AC^2).$$

Cardano usou a fórmula equivalente

$$AB^3 = (AC - CB)^3$$

$$AB^3 = AC^3 + \ 3(AC \times CB^2) + (-CB^3) + 3\ (-\ CB \times AC^2). \quad (3)$$

Substituindo (3) em (1) e, verificando que

$$3\ (BC \times AB^2\ ) + 3\ (AB \times BC^2) \text{ iguala a (2),}$$

pois

$$3\ (BC \times AB)\ (AB + BC) = 3\ (BC \times AB \times AC) = 6\ AB,$$

Cardano determinou que

$$AC^3 - BC^3 = AC^3 + 3\ (AC \times CB^2) + 3\ (-\ CB \times AC^2) + (-BC^3) + 6\ AB = 20. \quad (4)$$

Adicionando 6 AB a ambos os membros de (3) e usando (4), ele concluiu que:

$$AB^3 + 6\ AB = 20,$$

e então o GH pretendido era o construído AB, pois AB verifica a equação $x^3 + 6x = 20$.

1.3.5.3.3.2 Explicação Algébrica da Resolução de Cardano

A ideia de Cardano em resolver a equação

$$x^3 + 6x = 20 \qquad (5),$$

é tomar $x = u - v$ (6).

Cardano expressa a igualdade (6) na sua terminologia geométrica como de seguida se descreve. Ele representa o nosso u por um segmento AC, o nosso v por CK e depois afirma:

> *"Marcando BC igual a CK, eu afirmo que, se isso for feito, o segmento que resta AB é igual a GH [isto é, o nosso x]."*

Substituindo $x = u - v$ na equação (5), obtém-se que

$$\begin{aligned} x^3 + 6x &= (u - v)^3 + 6\,(u - v) \\ &= (u^3 - v^3) - 3\,u\,v\,(u - v) + 6\,(u - v) = 20. \end{aligned}$$

Agora u e v são sujeitos às seguintes condições:

$$u^3 - v^3 = 20 \qquad (7)$$

e

$$3\,u\,v = 6 \qquad (8).$$

Depois segue-se que $x = u - v$ satisfaz a equação requerida $x^3 + 6x = 20$.

Na terminologia geométrica de Cardano a redução $(u - v)^3$ em

$$(u^3 - v^3) - 3\, u\, v\, (u - v)$$

é um tanto ou quanto pesada, mas a ideia fundamental é a mesma.

Determina-se u e v a partir das condições (7) e (8) como veremos já a seguir.

De (8) determina-se que $u \cdot v = 2$ e então $u^3 \cdot v^3 = 8$ (9).

Agora, como a diferença e o produto dos dois cubos u^3 e v^3 são conhecidos (pois tem-se (7) e (9)), determina-se, usando a notação moderna, os valores positivos de u^3 e v^3, através da resolução abaixo.

Assim,

$$\begin{cases} u^3 - v^3 = 20 \\ u^3 \cdot v^3 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3 = v^3 + 20 \\ \left(v^3 + 20\right)v^3 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \left(v^3\right)^2 + 20v^3 - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ v^3 = \dfrac{-20 \pm \sqrt{400 + 32}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ v^3 = -10 \pm \sqrt{108} \end{cases}$$

Como $-10 - \sqrt{108} < 0$, assumia-se o valor positivo, ou seja,

$$v^3 = \sqrt{108} - 10,$$

logo

$$u^3 = \sqrt{108} - 10 + 20 \Leftrightarrow u^3 = \sqrt{108} + 10.$$

Então u e v são as raízes cúbicas de números conhecidos, isto é,

$$u = \sqrt[3]{\sqrt{108} + 10}$$

$$v = \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10},$$

e tem-se que $x = \sqrt[3]{\sqrt{108} + 10} - \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10}$.

Cardano completou o capítulo XI da sua *Ars Magna*, com uma descrição retórica da fórmula, para *o cubo e a primeira potência igual a um número*.

1.3.5.3.3.3 Regra Geral de Cardano

Cardano formula a sua resolução numa regra geral:

LINGUAGEM RETÓRICA DE CARDANO	NOTAÇÃO USUAL
O cubo de um terço do número de lados.	o cubo de um terço do coeficiente de x $\left(\frac{6}{3}\right)^3=8$
Adicione isso ao quadrado de metade da constante da equação...	$8+\left(\frac{20}{2}\right)^2=108$
... e tome a raiz quadrada de tudo	$\sqrt{108}$
Irá duplicar isso...	$\sqrt{108}$ e $\sqrt{108}$
... a um dos dois irá adicionar metade do número que elevou ao quadrado...	$\sqrt{108}+10$
... e do outro irá subtrair metade do mesmo.	$\sqrt{108}-10$
Irá então obter um binómio...	$\sqrt{108}+10$
... e a sua apótema.	$\sqrt{108}-10$
Depois, subtraindo a raiz cúbica da apótema da cúbica do binómio...	$\sqrt[3]{\sqrt{108}+10}-\sqrt[3]{\sqrt{108}-10}$
... o resto é o lado requerido.	o valor de x. Isto é, $\sqrt[3]{\sqrt{108}+10}-\sqrt[3]{\sqrt{108}-10}$

1.3.5.3.3.4 Resolução do Caso Geral

Ao resolver a equação $x^3 + px = q$ (tipo I), Cardano assumiu que uma das raízes era da forma

$$x = u - v.$$

Então a equação cúbica do tipo (I) reduz-se à forma

$$u^3 - v^3 + (u - v)\cdot(p - 3uv) = q.$$

Se impusermos a u e v a condição adicional $3uv = p$,

então u e v podem ser determinados a partir do sistema

$$\begin{cases} u^3 - v^3 = q \\ u \cdot v = \dfrac{p}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3 - v^3 = q \\ u^3 \cdot v^3 = \left(\dfrac{p}{3}\right)^3 \end{cases}$$

Fazendo $z = u^3$ observamos que este sistema é equivalente a uma equação quadrática

$$z^2 - qz - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0.$$

Resolvendo a equação quadrática acima, tem-se que

$$z = \frac{q \pm \sqrt{q^2 + \dfrac{4p^3}{27}}}{2} = u^3,$$

ou seja,

$$u^3 = \frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

e como,

$$u^3 = \frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} < 0$$

então

$$u = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Dado que $u^3 + v^3 = q$ tem-se que: $v^3 = u^3 - q$.

Logo, $v^3 = \frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} - q$,

isto é, $v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$.

O que significa que, como $x = u - v$

então $x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$ é uma solução da equação (I).

Ou seja,

se $x^3 + px = q$

então

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2} + \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2} - \frac{q}{2}}.$$

Antes de continuarmos a relatar a história dramática das relações entre Tartaglia e Cardano, nas quais, o assistente de Cardano, Ferrari teve também um papel significativo, regressemos às equações cúbicas.

Após a visita de Tartaglia, Cardano conseguiu estender o método da solução da equação (I) aos outros tipos, (II) e (III). Nestes casos, deve-se escrever a solução como $u + v$, em vez de $u - v$. Quanto ao resto os cálculos são basicamente os mesmos.

1.3.5.3.4 Resolução da Equação Cúbica: $x^3 = px + q$ (tipo II)

1.3.5.3.4.1 Resolução de Cardano

Cardano, no capítulo XII da sua *Ars Magna,* enuncia a regra para resolver uma equação do tipo $x^3 = px + q$ fornecendo, de seguida um exemplo que passaremos a descrever.

1º Exemplo:

Para resolver a equação $x^3 = 6x + 40$, Cardano enuncia os seguintes passos:

LINGUAGEM RETÓRICA DE CARDANO	NOTAÇÃO USUAL
Aumente 2, um terço do coeficiente de x, ao cubo, o que perfaz 8;	$\left(\frac{6}{3}\right)^3 = 8$
Subtraia o valor obtido a 400, o quadrado de 20, metade da constante, perfazendo 392;	$\left(\frac{40}{2}\right)^2 = 400;$ $400 - 8 = 392$
Tome a raiz quadrada do valor obtido , adicionada a 20, o que perfaz 20 + √ (392), e subtraia ao valor obtido perfazendo 20 - √(392);	$20 + \sqrt{392}$, $20 - \sqrt{392}$
Tome a soma das raízes cúbicas do valor obtido que é o valor de x.	$x = \sqrt[3]{20 + \sqrt{392}} + \sqrt[3]{20 - \sqrt{392}}$

Cardano fornece mais um exemplo no qual, os radicandos das raízes cúbicas são números inteiros.

2º Exemplo:

Na resolução da equação cúbica $x^3 = 6x + 6$, Cardano refere os seguintes procedimentos:

LINGUAGEM RETÓRICA DE CARDANO	NOTAÇÃO USUAL
Eleve ao cubo um terço do coeficiente de x, que é 2, perfazendo 8;	o coeficiente de x é 6, $\left(\frac{6}{3}\right)^3 = 8$
Subtraia isso a 9, o quadrado de metade de 6, a constante da equação, obtendo-se o valor 1;	a constante da equação é 6, $\left(\frac{6}{2}\right)^2 = 9; \quad 9 - 8 = 1$
Tome-se a raiz quadrada de 1 que é 1;	$\sqrt{1} = 1$
Tome-se o valor obtido adicionado e subtraído a 3, metade da constante, perfazendo 4 e 2.	$\frac{6}{2} = 3;$ $3 + 1 = 4$ e $3 - 1 = 2$
A soma das raízes cúbicas de 4 e 2 fornece-nos $^3\sqrt{4}$ + $^3\sqrt{2}$ *como valor de x.*	$x = \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}$

Cardano ao referir estes passos na resolução do tipo $x^3 = px + q$ considera as solução x da forma $u + v$.

1.3.5.3.4.2 Resolução do Caso Geral

Assim, seja $x = u + v$ logo, substituindo em $x^3 = px + q$ (II), vem que:

$$(u+v)^3 = p\,(u+v) + q,$$

ou seja,

$$u^3 + v^3 + 3uv\,(u+v) - p\,(u+v) = q.$$

Assumindo que $3uv = p$ e $u^3 + v^3 = q$

tem-se que, tomando $z = u^3$, resolver o sistema

$$\begin{cases} u \cdot v = \dfrac{p}{3} \\ u^3 + v^3 = q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3 \cdot v^3 = \left(\dfrac{p}{3}\right)^3 \\ u^3 + v^3 = q \end{cases}$$

que equivale a resolver a equação quadrática

$$z^2 - qz + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0.$$

Logo aplicando a fórmula resolvente para a equação quadrática tem-se que:

$$z = \frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

Logo seja $u^3 = \dfrac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{q}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{p}{3}\right)^3}$.

Assim sendo, $v^3 = q - u^3$,

isto é, $v^3 = q - \left[\dfrac{q}{2} + \sqrt{\left(\dfrac{q}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{p}{3}\right)^3}\right] \Leftrightarrow v^3 = \dfrac{q}{2} - \sqrt{\left(\dfrac{q}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{p}{3}\right)^3}$.

Donde a solução x é dada por:

$$x = u + v \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

Ou seja,

se $\quad x^3 = px + q \quad$ e $\quad \left(\frac{p}{3}\right)^3 \leq \left(\frac{q}{2}\right)^2$

então

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

1.3.5.3.4.3 Regra Geral de Cardano

Cardano na sua *Ars Magna* refere uma regra geral para resolver equações do tipo $x^3 = px + q$, que passamos a descrever.

LINGUAGEM RETÓRICA DE CARDANO	NOTAÇÃO USUAL
Quando o cubo de um terço do coeficiente de x não é maior que o quadrado de metade da constante da equação,...	Quando $\left(\frac{p}{3}\right)^3 \leq \left(\frac{q}{2}\right)^2$
... subtraia-se o primeiro do último...	$\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3$
... e adicione-se a raiz quadrada do obtido a metade da constante da equação.	$\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}$
E, novamente, subtraia isso à mesma metade,...	$\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}$
... e, obterá, como foi dito, um binómio e a sua apótema, a soma das raízes cúbicas que constituem o valor de x.	$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$

Cardano ao estabelecer a regra acima descrita supõe que $\left(\frac{p}{3}\right)^3 \leq \left(\frac{q}{2}\right)^2$.

pois, caso contrário, a diferença do radicando na fórmula seria negativa, não sendo possível calcular a raiz quadrada.

Essa suposição resultou numa nova dificuldade para Cardano, o chamado *"caso irredutível"*, no qual não é possível calcular a raiz quadrada de números negativos. Este *"caso irredutível"* será abordado numa próxima secção.

1.3.5.3.5 Resolução da Equação Cúbica: $x^3 + q = px$ (tipo III)

Para resolver o tipo de equação (III), que enuncia como *"o cubo e constante igual à 1ª potência"* no capítulo XIII da sua *Ars Magna*, Cardano descreve o método de resolução através de uma regra geral seguindo-se uma exemplificação da mesma.

1.3.5.3.5.1 Regra Geral de Cardano

Cardano formula a sua resolução numa regra geral:

LINGUAGEM RETÓRICA DE CARDANO	NOTAÇÃO USUAL
Quando o cubo e a constante é igual à 1ª potência,	$x^3 + q = px$
... determina-se a solução para o cubo igual ao mesmo número de y's e à mesma constante.	$y^3 = py + q$
Tome 3 vezes o quadrado de metade dessa solução e subtraia isso do coeficiente da 1ª potência.	$p - 3 \cdot \left(\frac{y_0}{2}\right)^2$ Seja y_0 a solução da equação $y^3 = py + q$.
E a raiz quadrada do resto ...	$\sqrt{p - 3 \cdot \left(\frac{y_0}{2}\right)^2}$
... adicionada ou subtraída de metade da solução do cubo igual a y mais a constante fornece a solução para o cubo e a constante igual a x.	$\frac{y_0}{2} + \sqrt{p - 3 \cdot \left(\frac{y_0}{2}\right)^2}$ e $\frac{y_0}{2} - \sqrt{p - 3 \cdot \left(\frac{y_0}{2}\right)^2}$

1.3.5.3.5.2 Resolução de Cardano

Consideremos então a exemplificação de Cardano, do *"cubo e da constante igual à primeira potência"*, isto é, a resolução da equação

$$x^3 + 3 = 8x.$$

Para resolver o exemplo da equação cúbica do tipo (III), Cardano enuncia a referida resolução enumerando diversas etapas, que passamos a descrever no seguinte quadro.

LINGUAGEM RETÓRICA DE CARDANO	NOTAÇÃO USUAL
Resolvemos $y^3 = 8y + 3$ *que, de acordo com o método anterior, obtemos* 3 *como solução.*(1)	$y=\sqrt[3]{\frac{3}{2}+\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{8}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{\frac{3}{2}-\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{8}{3}\right)^3}}.$
O quadrado de metade da solução 3 *é* $2\frac{1}{4}$. (2)	$\left(\frac{3}{2}\right)^2 = 2{,}25$
Multiplica-se o valor obtido por 3.	$3\cdot\left(2\frac{1}{4}\right)=6\frac{3}{4}$
Subtraindo isso a 8, o coeficiente de x, perfaz $1\frac{1}{4}$.	$8-6\frac{3}{4}=8-6{,}75=4{,}25=1\frac{1}{4}$
Toma-se a raiz quadrada de $1\frac{1}{4}$ *adicionada ou subtraída a* $1\frac{1}{2}$, *que é metade da solução do cubo igual à 1ª potência e constante, que fornece as soluções que eram procuradas.*	Uma é $1\frac{1}{2}+\sqrt{1\frac{1}{4}}$ e a outra é $1\frac{1}{2}-\sqrt{1\frac{1}{4}}$.

(1) Esta afirmação não é válida pois ao aplicarmos o método anterior à equação $y^3 = 8y + 3$ conduz--nos ao caso irredutível, isto é, à raiz quadrada de números negativos. Pois como a equação é do tipo (II) tem-se que $y=\sqrt[3]{\frac{3}{2}+\sqrt{-\frac{1805}{108}}}+\sqrt[3]{\frac{3}{2}-\sqrt{-\frac{1805}{108}}}$.

(2) $2\frac{1}{4}$ está escrito na forma de numeral misto, ou seja, $2\frac{1}{4}=2+\frac{1}{4}$.

UNIVERSIDADE DA MADEIRA
SERVIÇOS DE DOCUMENTAÇÃO

1.3.5.3.5.3 Resolução do Caso Geral

Segundo Cardano tem-se que:

se $x^3 + q = px$

e y_0 é uma solução da equação $y^3 = py + q$

então

$$x = \frac{y_0}{2} \pm \sqrt{p - 3 \cdot \left(\frac{y_0}{2}\right)^2}.$$

No entanto, assumindo $x = u + v$ como nos outros dois casos abordados, tem-se, efectuando basicamente os mesmos cálculos, a seguinte regra:

se $x^3 + q = px$

então

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

1.3.5.3.5.4 Determinação de uma Solução da Equação Cúbica do Tipo (III) Conhecendo Outra

Mostraremos agora como determinar uma solução conhecendo outra (dada).

LINGUAGEM RETÓRICA DE CARDANO	NOTAÇÃO USUAL
Eleve ao quadrado metade da 1ª solução e multiplique por três;	$3 \cdot \left(\frac{x_1}{2}\right)^2$
Subtraia o valor obtido do coeficiente de x...	$p - 3 \cdot \left(\frac{x_1}{2}\right)^2$
... e tome a raiz quadrada do restante, menos metade da 1ª solução, é a solução pretendida .	$\sqrt{p - 3 \cdot \left(\frac{x_1}{2}\right)^2} - \frac{x_1}{2}$

Exemplo:

Cardano resolveu o exemplo $x^3 + 60 = 46\,x$ conhecendo a solução 6 para x, ($x_1 = 6$) realizando os seguintes passos.

LINGUAGEM RETÓRICA DE CARDANO	NOTAÇÃO USUAL
Eleve ao quadrado 3, *metade da 1ª solução, que perfaz* 9,...	$\left(\frac{6}{2}\right)^3 = 3^2 = 9$
... e a isso multiplique por 3, *obtendo-se* 27.	$3 \times 9 = 27$
Subtraia 27 *a* 46 *e obtém-se* 19;	$46 - 27 = 19$
à raiz quadrada do valor obtido subtraia 3, *metade da 1ª solução, e obteremos o 2º valor para x como* $\sqrt{19} - \frac{6}{2} = \sqrt{19} - 3$	$\sqrt{19} - \frac{6}{2} = \sqrt{19} - 3$

Cardano também refere no capítulo XIII da sua *Ars Magna,* que se conhecermos a solução $\sqrt{19}-3$, como a 1ª solução, a outra solução será 6.

Assim, assumindo que $\sqrt{19}-3$ é a 1ª solução

$$\sqrt{46-3\cdot\left(\frac{\sqrt{19}-3}{2}\right)^2}-\frac{\sqrt{19}-3}{2}$$

$$=\sqrt{46-3\cdot\left(\frac{19+9-6\sqrt{19}}{4}\right)}-\frac{\sqrt{19}-3}{2}$$

$$=\sqrt{46-3\cdot\left(\frac{28-6\sqrt{19}}{4}\right)}-\frac{\sqrt{19}-3}{2}$$

$$=\sqrt{46-3\cdot\left(7-\frac{3}{2}\sqrt{19}\right)}-\frac{\sqrt{19}-3}{2}$$

$$=\sqrt{46-21+\frac{9}{2}\cdot\sqrt{19}}-\frac{\sqrt{19}-3}{2}$$

$$=\sqrt{25+\frac{9}{2}\cdot\sqrt{19}}-\frac{\sqrt{19}-3}{2}$$ que segundo Cardano é igual a 6.

Como é que algebricamente provamos que $\sqrt{25-\frac{9}{2}\cdot\sqrt{19}}-\frac{\sqrt{19}-3}{2}=6$?

Recorrendo ao programa *Mathematica 4.0* apenas obtemos a igualdade acima se solicitarmos um valor aproximado.

In[5]:= $\sqrt{25+\frac{9}{2}*\sqrt{19}}-\frac{\sqrt{19}-3}{2}$

Out[5]= $\frac{1}{2}\left(3-\sqrt{19}\right)+\sqrt{25+\frac{9\sqrt{19}}{2}}$

In[6]:= N[%, 800]

```
Out[6]= 6.0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000\
        000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000\
        000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000\
        000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000\
        000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000\
        000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000\
        000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000\
        000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000\
        000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000\
        000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000\
        000000000000000000000
```

In[7]:= Simplify[$\sqrt{25+\frac{9}{2}*\sqrt{19}}-\frac{\sqrt{19}-3}{2}$]

Out[7]= $\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{19}}{2}+\sqrt{25+\frac{9\sqrt{19}}{2}}$

O problema de mostrar, por métodos algébricos, que deteminadas expressões, à primeira vista complicadas, são iguais a números inteiros é fantáttica! Dada a surpresa de tal facto iremos adiante dedicar uma secção a esse tema.

1.3.5.3.6 Generalização do Método de Ferro-Tartaglia-Cardano

Apesar de ser verdade que Cardano se referiu no 1° capítulo do seu livro *Ars Magna* a del Ferro e a Tartaglia, como os descobridores da fórmula da solução da equação cúbica, a verdade é que, a fama permaneceu no seu nome pois, até hoje, as fórmulas para a solução das equações dos tipos (I) e (II) têm o seu nome (fórmula de Cardano). Assim parece-nos ser mais correcto denominá-la por método de Ferro - Tartaglia - Cardano (ou fórmula cúbica resolvente de Ferro - -Tartaglia - Cardano), uma vez que, todos estes três algebristas italianos contribuíram, de certa forma, para a resolução da equação cúbica, nomeadamente, os vários tipos de equações cúbicas.

Apresentaremos, de seguida, o desenvolvimento teórico do método de Ferro- Tartaglia - Cardano, usando a notação moderna.

Uma equação geral do terceiro grau na variável x, é dada por

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

e se o coeficiente a do termo do terceiro grau é não nulo, dividiremos esta equação por a para obter:

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0.$$

Assim, consideraremos apenas as equações em que o coeficiente de x^3 seja igual a 1, isto é, as equações cuja forma geral é dada por:

$$x^3 + \mathrm{A}x^2 + \mathrm{B}x + \mathrm{C} = 0, \quad \text{onde} \quad \mathrm{A} = \frac{b}{a}, \quad \mathrm{B} = \frac{c}{a} \quad \text{e} \quad \mathrm{C} = \frac{d}{a}.$$

Fazendo a substituição $x = y - \frac{\mathrm{A}}{3}$ na equação acima, obteremos:

$$y^3 + \left(\mathrm{B} - \frac{\mathrm{A}^2}{3}\right)y + \left(\mathrm{C} - \frac{\mathrm{AB}}{3} + 2\frac{\mathrm{A}^3}{27}\right) = 0$$

e, tomando

$$p = \mathrm{B} - \frac{\mathrm{A}^2}{3} \quad \text{e} \quad q = \mathrm{C} - \frac{\mathrm{AB}}{3} + \left(\frac{2}{27}\right)\mathrm{A}^3,$$

simplificaremos a equação do terceiro grau na variável y, para $y^3 + px + q = 0$.

Como toda a equação desta forma possui pelo menos uma raiz real, encontraremos esta raiz na forma

$$y = u + v.$$

Substituindo y por $u + v$, na última equação, obteremos:

$$(u+v)^3 + p\,(u+v) + q = 0$$

$$\Leftrightarrow\; v^3 + 3\,uv^2 + 3\,u^2v + u^3 + p\,(u+v) + q = 0$$

$$\Leftrightarrow\; u^3 + v^3 + 3\,uv\,(u+v) + p\,(u+v) + q = 0$$

o que equivale a

$$u^3 + v^3 + (3\,uv + p)\;(u+v) + q = 0.$$

Usando esta última equação e impondo as condições:

$$p = -3\,uv \qquad (1)$$

$$q = -\left(u^3 + v^3\right), \qquad (2)$$

teremos encontrado valores de u e v para os quais, $y = u + v$ deverá ser uma raiz da equação.

As condições (1) e (2) implicam que

$$u^3 \cdot v^3 = -\frac{p^3}{27} \qquad (3)$$

$$u^3 + v^3 = -q. \qquad (4)$$

Considerando $u^3 = z$, o problema equivale a resolver uma equação do 2° grau da forma $z^2 - Sz + P = 0$,

onde S é a soma das raízes

e P é o produto das raízes.

Assim resolveremos a equação do 2° grau

$$z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0,$$

para obter as "partes" u e v da 1ª raiz, designemo-la por y_1,

$$y_1 = u + v.$$

utilizando a fórmula de Bhaskara[1], mais conhecida como fórmula resolvente da equação quadrática, obtemos

$$z_1 = \frac{-q + \sqrt{q^2 + 4 \cdot \dfrac{p^3}{27}}}{2} \quad \text{e} \quad z_2 = \frac{-q - \sqrt{q^2 + 4 \cdot \dfrac{p^3}{27}}}{2},$$

ou seja,

$$z_1 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \quad \text{e} \quad z_2 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

Mas como $z_2 < 0$, assumimos z_1 como "válida".

Logo $u = \sqrt[3]{-\dfrac{q}{2} + \sqrt{\left(\dfrac{q}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{p}{3}\right)^3}}$.

Como $v^3 = - q - u^3$ tem-se que $v^3 = -q - \left[-\dfrac{q}{2} + \sqrt{\left(\dfrac{q}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{p}{3}\right)^3}\right]$,

logo $v = \sqrt[3]{-\dfrac{q}{2} - \sqrt{\left(\dfrac{q}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{p}{3}\right)^3}}$.

Então a raiz $y_1 = u + v$ da equação $y^3 + py + q = 0$ é dada por

$$y_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

Note-se que a raiz, designemo-la por, r_1 da equação original

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$$

dependerá da translação realizada no início e será dada por

$$r_1 = y_1 - \frac{A}{3} \text{ (onde } y_1 = u + v \text{ dado acima).}$$

[1] Segundo Bhaskara relatou num trabalho, a fórmula resolvente da equação quadrática não é da sua autoria mas sim do matemático hindu Sridhara.

Como r_1 é uma raiz, utilizaremos a divisão

$$(x^3 + Ax^2 + Bx + C) / (x - r_1)$$

para obter o polinómio quociente do 2° grau.

Assim aplicando a regra de Ruffini, tem-se que:

	1	A	B	C
r_1		r_1	$A r_1 + r_1^2$	$B r_1 + A r_1^2 + r_1^3$
	1	$A + r_1$	$B + A r_1 + r_1^2$	$C + B r_1 + A r_1^2 + r_1^3$

O polinómio (quociente) do 2° grau (Q(x)) é

$$Q(x) = x^2 + (A + r_1)\,x + B + A\,r_1 + r_1^2$$

e o resto (R) é igual a

$$R = C + B\,r_1 + A\,r_1^2 + r_1^3,$$

que será nulo.

Os zeros de Q(x) que é um polinómio do 2° grau, poderão ser calculados facilmente obtendo-se assim as outras duas raízes da equação original.

Assim para resolvermos uma equação cúbica basta encontrarmos uma solução, após o que, determinamos as restantes duas, visto que a equação obtida é do 2° grau.

O método acima descrito será exemplificado numa secção adiante aquando da resolução de uma equação quártica.

1.3.5.3.7 Debate entre Tartaglia e Ferrari

Após a publicação de *Ars Magna* por Cardano, as relações entre este e Tartaglia tornaram-se insustentáveis.

Recorde-se que Cardano publicou no livro atrás mencionado as soluções da equação cúbica e da solução quártica que motivaram os desentendimentos com Tartaglia.

Ferrari, assistente de Cardano que colaborou na elaboração da *Ars Magna*, escreveu então Tartaglia desafiando-o a um debate público.

Ferrari era na altura um matemático ainda desconhecido pelo que Tartaglia teria pouco a ganhar num debate, mesmo que o vencesse. A situação oposta verificava-se com Cardano uma vez que este era uma figura principal da matemática, medicina e literatura.

Neste contexto, Tartaglia responde a Ferrari tentando trazer Cardano para o debate.

Muitos insultos pessoais se trocaram entre Tartaglia e Ferrari sem que houvesse grandes progressos à realização da disputa, até que, em 1548 o primeiro recebe uma oferta surpreendente para ocupar o cargo de professor na sua terra natal. Nessa altura, para demonstrar que era o homem indicado para o trabalho, Tartaglia foi convidado a viajar até Milão e participar no debate com Ferrari.

Este debate suscitou grande interesse por parte de toda a comunidade italiana já que a correspondência entre os dois se tinha tornado pública.

Assim a 10 de Agosto de 1548 realizou-se o debate estando ambos convencidos da vitória final.

No final do 1° dia de debate era evidente que as coisas não estavam a decorrer como Tartaglia previu. Ferrari compreendera claramente as equações cúbica e quártica melhor que o seu oponente, que decidiu deixar Milão nessa mesma noite e, consequentemente deixar o debate por resolver, dando a vitória a Ferrari.

Tartaglia sofreu as consequências do debate pois, após ter tido leccionado durante um ano em Brescia, foi despedido, regressando ao seu antigo trabalho em Veneza.

Tartaglia é agora recordado por alguns na designação da fórmula para resolver a equação cúbica que se denominou por fórmula de Cardano - Tartaglia.

Quanto a Ferrari, com a fama de ter ganho o debate, foi inundado de muitas ofertas de trabalho, incluindo um pedido do próprio imperador, para ser o tutor do seu filho.

1.3.5.3.8 Resolução da Equação Quártica

1.3.5.3.8.1. Resolução de Ferrari

Ferrari, o amigo e assistente de Cardano, descobriu que a equação de grau 4 podia ser reduzida a uma equação de grau 3, e então ser resolvida por meio de raízes quadradas e cúbicas.

Cardano explicou o método de Ferrari no capítulo XXXIX da sua *Ars Magna*, afirmando que:

"... foi Ludovico Ferrari, quem me deu [a fórmula da quártica] a meu pedido."

1.3.5.3.8.1.1. Demonstração Geométrica por Cardano de um Teorema

A exposição de Cardano do método começa com um teorema sobre quadrados e rectângulos, que na notação moderna consiste em:

TEOREMA: Tem-se a identidade $(s + a + b)^2 = (s + a)^2 + 2\,sb + 2\,ab + b^2$.

e que Cardano demonstra como se segue.

1º - *"Seja o quadrado AF e dividamo-lo em dois quadrados AD e DF, e dois apêndices DC e DE."*

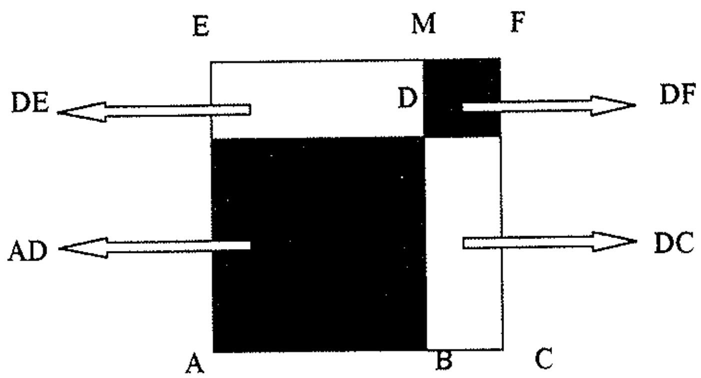


Figura 1

2º - *"Para completar o quadrado AH [ver figura 2]*

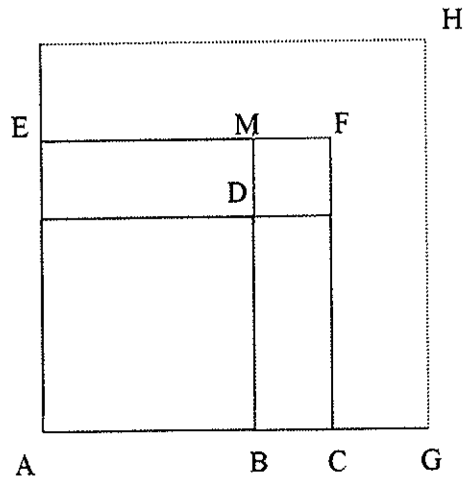


Figura 2

adicionamos à volta do polígono KFG [ver figura 3]."

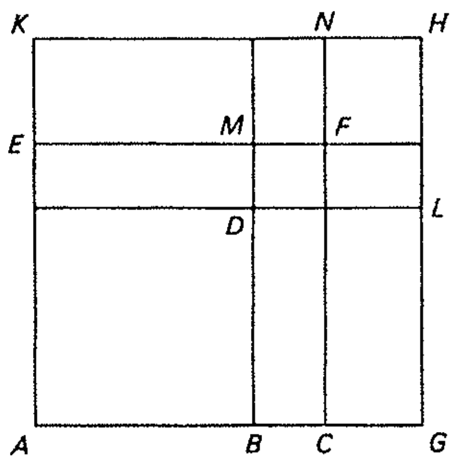


Figura 3

3° - *"Afirmo que esse polígono [KFG] consistirá em GC^2 mais o dobro da soma da linha $GC \times CA$, pois FG é $GC \times CF$ e CF é igual a CA pela definição de um quadrado."*

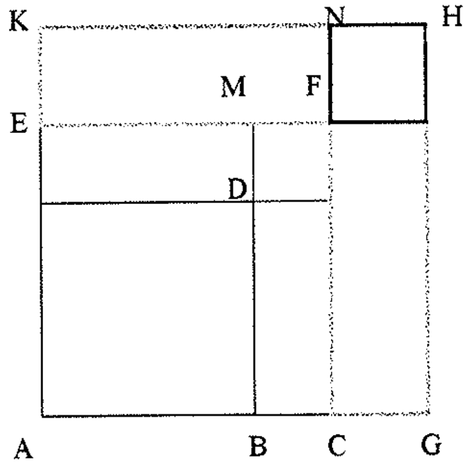


Figura 4

4° - *"Como KF é igual a FG, as duas superfícies GF e FK consistem em $GC \times 2CA$, e GC^2 igual a FH"*

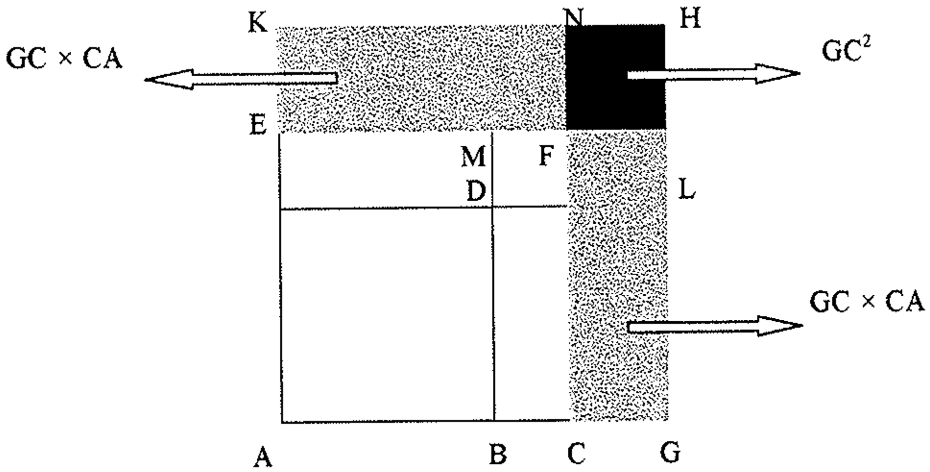


Figura 5

$KF = FG$
$GF = FK = GC \times 2\,CA$
e $GC^2 = FH.$

5º - *"Consequentemente a proposição é clara. Se, por conseguinte, AD é igual a x^4, e CD e DE [cada um] é igual a $3x^2$, e DF igual a 9, BA será igual a x^2 e BC será necessariamente igual a 3."*

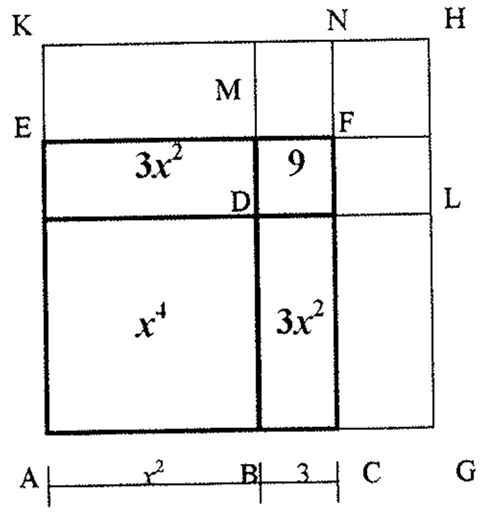


Figura 6

Se
$AD = x^4;$
$CD = DE = 3\,x^2;$
$DF = 9,$
então
$BA = x^2$
$BC = 3.$

6º - *"Desde que, desta forma, queremos adicionar mais quadrados a DC e DE, estes serão CL e KM. Com vista a completar todo o quadrado, é necessária a superfície LMN."*

7º - *"Esta, como foi demonstrado, consiste no quadrado de [lado] GC [mais 2 GC × BC], metade do [original] número de quadrados, [isto é, BC é metade do número original de quadrados], pois CL é a superfície produzida por GC × AB, como foi mostrada, e AB é x^2 porque assumimos que AD é x^4 e, consequentemente FL e MN são construídos a partir de GC × CB"*

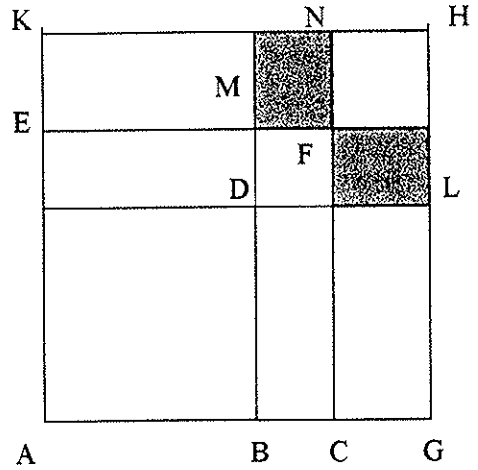


Figura 7

8º - *"Consequentemente a superfície LMN (este é o número a ser adicionado) é GC × 2 BC (isto é, vezes o coeficiente de x^2, que é 6) mais GC vezes ele próprio (isto é, vezes o número adicionado de quadrados). Esta demonstração é nossa."*

1.3.5.3.8.1.2. Explicação do Teorema Demonstrado por Cardano

Explicaremos de seguida a resolução apresentada por Cardano, usando a notação algébrica moderna.

Se tomarmos $AB = s$, $BC = a$ e $CG = b$,

o teorema provado por Cardano é equivalente à identidade

$$(s + a + b)^2 = (s + a)^2 + 2\,sb + 2\,ab + b^2.$$

Na aplicação desta identidade na resolução da equação de 4° grau, Cardano toma

$$s = AB$$

como sendo o quadrado do desconhecido x, isto é, $AB = s = x^2$, onde se obtém

$$(x^2 + a + b)^2 = (x^2 + a)^2 + 2\,x^2b + 2\,ab + b^2, \quad (1)$$

evidente na figura 8.

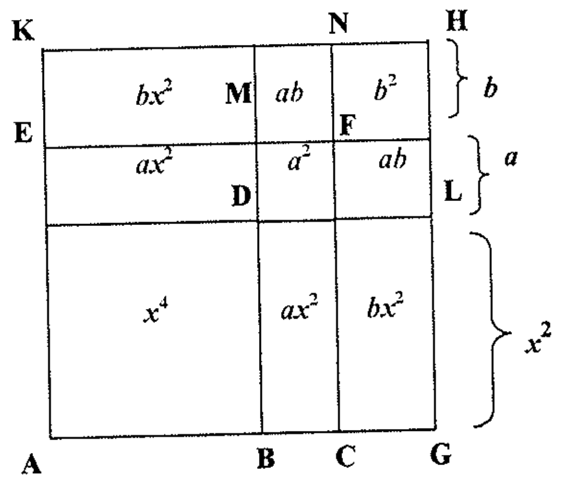


Figura 8

Note-se que $(x^2 + a + b)^2$ equivale, de acordo com a figura 8, a escrever

$$= x^4 + ax^2 + ax^2 + a^2 + bx^2 + bx^2 + ab + \mathrm{ab} + b^2$$

$$= (x^2 + a)^2 + 2\,x^2b + 2\,ab + b^2.$$

1.3.5.3.8.2 Resolução de um Exemplo por Ferrari

O que se reconhece que Ferrari conseguiu, foi resolver um problema que o matemático Zuanne de Tonini da Coi propôs a Cardano. O problema é o seguinte:

"Divide 10 em três partes proporcionais, o produto da primeira e da segunda é 6."

Coi afirmou que o referido problema não tinha solução, no entanto, Cardano, embora não conhecendo o método de resolução, discordou e na sua *Ars Magna* afirmou:

"Isso foi descoberto por Ferrari."

Ferrari considerou x como o valor pretendido na resolução do problema. Assim o primeiro valor seria $6/x$ e o terceiro igual a $\frac{1}{6}x^3$.

Logo todos esses valores igualariam a 10, isto é,

$$\frac{6}{x}+x+\frac{1}{6}x^3=10. \qquad (2)$$

Multiplicando todos os termos da equação (2) por $6x$ obtemos

$$36+6x^2+x^4=60x$$

$$\Leftrightarrow x^4+6x^2+36=60x \qquad (3)$$

que consiste na equação quártica original que Ferrari conseguiu resolver.

Note-se que a equação (3), que em notação moderna equivale a

$$x^4+6x^2-60x+36=0$$

é uma equação de 4° grau incompleta, pois falta o termo em x^3. Tal facto não é relevante pois, numa equação de 4° grau, (isto é, da forma $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$), o termo em x^3 pode sempre desaparecer, mediante uma mudança de variável adequada, que veremos numa próxima secção, permanecendo apenas os termos em x^4, x^2, x e q o termo constante.

Passamos então a descrever o método de Ferrari aplicado à resolução da equação (3), nomeadamente,

$$x^4 + 6\,x^2 + 36 = 60\,x\ .$$

Com vista a reduzir o 1° membro a um quadrado da forma $(x^2 + a)^2$, Ferrari adiciona $6x^2$ a ambos os membros da equação (2), obtendo:

$$x^4 + 12\,x^2 + 36 = 6\,x^2 + 60\,x$$

$$\Leftrightarrow\ (x^2 + 6)^2 = 6\,x^2 + 60\,x \quad (4)\,.$$

Pretende-se obter também no 2° membro um quadrado como relata Cardano na sua descrição:

"Agora se $6x^2 + 60x$ *tem uma raiz quadrada, teremos a solução. Mas não tem. Consequentemente deve-se adicionar a ambos os membros o número suficiente de quadrados e um número tal que num membro se obtenha um trinómio com uma raiz e a mesma no outro".*

Isto significa que:

Se $6x^2 + 60x$ é o quadrado de um binómio $px + q$, poderemos então extrair a raiz quadrada de ambos os membros de (4). Mas como $6x^2 + 60x$ não é um quadrado completo, temos de adicionar o termo $2bx^2$ da igualdade (1), e um termo constante a ambos os membros da equação (4), com vista a obter quadrados completos em ambos os membros.

Assim, tomando $a = 6$ na identidade (1), obtém-se a igualdade

$$(x^2 + 6 + b)^2 = (x^2 + 6)^2 + 2b\,x^2 + 12b + b^2$$

Então se adicionarmos $2b\,x^2 + 12b + b^2$ a ambos os membros de (4), obtém-se

$$(x^2 + 6 + b)^2 = 6x^2 + 60\,x + (2b\,x^2 + 12b + b^2\,)$$

$$\Leftrightarrow\ (x^2 + 6 + b)^2 = (2b + 6)\,x^2 + 60\,x + (b^2 + 12b) \quad (5)$$

Agora b é escolhido de modo que o 2° membro de (5) se torne num quadrado completo de um binómio $px + q$.

A condição para isso é a seguinte:

$$(2b + 6)\,(b^2 + 12b) = 30^2 \quad (6)$$

pois, se considerarmos

$$(px + q)^2 = (2b + 6)\,x^2 + 60x + (b^2 + 12b)$$

$$\Leftrightarrow\ p^2\,x^2 + 2\,pq\,x + q^2 = (2b + 6)\,x^2 + 60x + (b^2 + 12b)$$

então vem que

$$2pq = 60$$

$\Leftrightarrow\ pq = 30$, isto é, (6), dado que $p = 2b + 6$ e $q = b^2 + 12b$.

Logo (6) equivale a escrever-se

$$2\,b^3 + 30b^2 + 72b = 900$$

ou seja,

$$b^3 + 15b^2 + 36b = 450 \quad (7).$$

Assim sendo, obtivemos uma equação do 3° grau em b, que pode ser resolvida pelo método de Ferro - Tartaglia - Cardano já descrito.

Repare-se que, Ferrari ao resolver o problema da equação quártica, reduz o mesmo à resolução de uma equação do 3° grau, cujo método já era então conhecido.

Assim, basta determinarmos o valor de b de (7), substituímo-lo em (5), aplicar as raízes quadradas a cada membro da equação (5), pois o 2° membro de (5) é um quadrado completo, e obter-se-á uma equação do 2° grau em x, cujo método de resolução também já é conhecido.

Consequentemente, aplicando a fórmula de Ferro - Tartaglia - Cardano à equação (7), $b^3 + 15b^2 + 36b = 450$,

Efectuamos a seguinte mudança de variável

$$b = x - \frac{15}{3} \Leftrightarrow b = x - 5.$$

Logo $\qquad (x-5)^3 + 15\,(x-5)^2 + 36\,(x-5) = 450$

$$\Leftrightarrow \; x^3 - 15x^2 + 75x - 125 + 15x^2 - 150x + 375 + 36x - 180 = 450$$

$$\Leftrightarrow \; x^3 - 39x = 380$$

que equivale a escrever-se

$$x^3 = 39x + 380,$$

que consiste numa equação do tipo (II) de Cardano, cuja fórmula resolvente é

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

Neste exemplo, tem-se que $\quad p = 39 \quad$ e $\quad q = 380.$

Assim,

$$x = \sqrt[3]{\frac{380}{2} + \sqrt{\left(\frac{380}{2}\right)^2 - \left(\frac{39}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{380}{2} - \sqrt{\left(\frac{380}{2}\right)^2 - \left(\frac{39}{3}\right)^3}}$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{190 + \sqrt{190^2 - 13^3}} + \sqrt[3]{190 - \sqrt{190^2 - 13^3}}$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{190 + \sqrt{33903}} + \sqrt[3]{190 - \sqrt{33903}}$$

$$\Leftrightarrow x \approx 9{,}009791229^{(1)}$$

$$\Leftrightarrow x \approx 9 \quad \text{(com 0 casas decimais).}$$

---

(1) Cálculo efectuado na calculadora gráfica TI-83.

Logo $b = x - 5$, isto é, $b \approx 9 - 5 \iff b \approx 4$.

Assumindo $b \approx 4$ vem que:

$$(x^2 + 6 + 4)^2 \approx (2 \times 4 + 6)\, x^2 + 60\, x + (4^2 + 12 \times 4)$$

$$\iff (x^2 + 10)^2 \approx 14\, x^2 + 60\, x + 64$$

$$\iff (x^2 + 10)^2 \approx (\sqrt{14}\, x + 8)^2,$$

donde

$$x^2 + 10 \approx \pm (\sqrt{14}\, x + 8)$$

que equivale a escrever

$$\boxed{x^2 \pm \sqrt{14}\, x + 10 \pm 8 \approx 0}$$

$$x^2 - \sqrt{14}\, x + 10 - 8 \approx 0$$

$$\iff x \approx \frac{\sqrt{14} \pm \sqrt{6}}{2}$$

$$\iff x \approx 3,095573565$$

ou

$$x \approx 0,646083822.$$

$$x^2 + \sqrt{14}\, x + 10 + 8 \approx 0$$

$$\iff x \approx \frac{\sqrt{14} \pm i\sqrt{58}}{2}\ ^{(2)}$$

(2) Raízes imaginárias (conjugadas) que Ferrari desconhecia.

1.3.5.3.8.3. Generalização do Método de Ferrari

Ludovico Ferrari foi o descobridor do método de resolução da equação quártica, Assim, o método de resolução de uma equação de grau 4 é conhecido por quártica resolvente de Ferrari.

Apresentaremos, de seguida, o desenvolvimento teórico do método de Ferrari, usando a notação moderna.

Para utilizarmos o método a seguir, a equação quártica deve ter a forma

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

caso contrário, isto é, se o polinómio quártico $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ não tiver coeficiente director igual a 1, mas sim $e \notin \{0\ ,\ 1\}$
(logo da forma $ex^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$), divide-se cada termo, do referido polinómio por e, obtendo-se um polinómio quártico com coeficiente director igual a 1.

O método processa-se da seguinte forma:

__1º passo:__ Faz-se a mudança de variável $x = y - \frac{a}{4}$ para eliminar-se o termo em x^3, e obtém-se

$$\left(y-\frac{a}{4}\right)^4 + a\cdot\left(y-\frac{a}{4}\right)^3 + b\cdot\left(y-\frac{a}{4}\right)^2 + c\cdot\left(y-\frac{a}{4}\right) + d = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^4}{4^2} - \frac{a^3}{4^2}y + \frac{6}{4^2}a^2y^2 - ay^3 + y^4 - \frac{a^4}{4^3} + \frac{3}{4^2}a^3y - \frac{3}{4}a^2y^2 + ay^3 + by^2 +$$
$$+\frac{a^2b}{16} - \frac{ab}{2}y + cy - \frac{ac}{4} + d = 0$$

$$\Leftrightarrow y^4 + \left(b - 3\frac{a^2}{8}\right)y^2 + \left(\frac{a^3}{8} - \frac{ab}{2} + c\right)y + \left(\frac{a^2b}{16} - 3\frac{a^4}{4^4} - \frac{ac}{4} + d\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow y^4 + \left(b - 3\frac{a^2}{8}\right)y^2 = -\left(\frac{a^3}{8} - \frac{ab}{2} + c\right)y - \left(\frac{a^2b}{16} - 3\frac{a^4}{4^4} - \frac{ac}{4} + d\right)$$

$$\Leftrightarrow\ y^4 + py^2 = -qy - r \qquad (1),$$

onde $p = b - 3\dfrac{a^2}{8}$;

$$q = \frac{a^3}{8} - \frac{ab}{2} + c$$

e

$$r = \frac{a^2 b}{16} - 3\frac{a^4}{4^4} - \frac{ac}{4} + d.$$

<u>2º passo:</u> Soma-se a ambos os membros da equação (1), $py^2 + p^2$, com vista a obter o quadrado de um binómio no 1º membro de (1).

Assim sendo,

$$y^4 + py^2 + py^2 + p^2 = -qy - r + py^2 + p^2$$

$$\Leftrightarrow\ (y^2 + p)^2 = py^2 + p^2 - qy - r \qquad (2).$$

<u>3º passo:</u> Adiciona-se a ambos os membros de (2), $2\,(y^2 + p)\,z + z^2$,

com vista a completar-se o quadrado no 2º membro de (2).

Logo vem que:

$$(y^2 + p)^2 + 2\,(y^2 + p)\,z + z^2 = 2\,(y^2 + p)\,z + z^2 + py^2 + p^2 - qy - r$$

$$\Leftrightarrow\ (y^2 + p + z)^2 = (2\,z + p)\,y^2 + 2\,pz + z^2 + p^2 - qy - r$$

$$\Leftrightarrow\ (y^2 + p + z)^2 = (2z + p)\,y^2 - qy + (p^2 - r + 2pz + z^2) \qquad (3)$$

<u>4º passo:</u> Para que o 2º membro de (3), isto é,

$$(2z + p)\,y^2 - qy + (p^2 - r + 2pz + z^2),$$

seja o quadrado de alguma coisa, é necessário que o binómio discriminante seja zero, ou seja, $b^2 - 4\,ac = 0$.

Assim, obtém-se que:

$$(-q)^2 - 4\,(2z + p)\,(p^2 - r + 2pz + z^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \; q^2 - 4\,(2z + p)\,(p^2 - r + 2pz + z^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \; 4\,(2z + p)\,(p^2 - r + 2pz + z^2) = q^2 \quad (4).$$

5º passo: Resolve-se a equação (4) cúbica em z pelo método de Ferro-Tartaglia - Cardano.

Desenvolvendo a equação (4) obtém-se

$$2p^2z - 2rz + 4pz^2 + 2z^3 + p^3 - pr + 2p^2z + pz^2 = q^2/4$$

$$\Leftrightarrow \; 2z^3 + 5pz^2 + (4p^2 - 2r)z + p^3 - pr = q^2/4$$

$$\Leftrightarrow \; 2z^3 + 5pz^2 + (4p^2 - 2r)z + (p^3 - q^2/4 - pr) = 0,$$

que é uma equação cúbica em z.

6º passo: Conhecido o valor de z, substitui-se em (3) e, extraindo a raiz quadrada a ambos os membros da igualdade, obtém-se o valor de y, através da resolução da equação quadrática obtida em função de y.

7º passo: Determinado o valor de y, substitui-se na igualdade $x = y - \frac{a}{4}$ o valor de x pretendido, ou seja, uma solução da equação quártica, designemo-la por x_1.

8º passo: Efectua-se a divisão

$$(x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d) \,/\, (x - x_1)$$

	1	a	b	c	d
x_1		x_1	$ax_1 + x_1^2$	$bx_1 + ax_1^2 + x_1^3$	$cx_1 + bx_1^2 + ax_1^3 + x_1^4$
	1	$a + x_1$	$b + ax_1 + x_1^2$	$c + bx_1 + ax_1^2 + x_1^3$	$d + cx_1 + bx_1^2 + ax_1^3 + x_1^4$

Assim $\quad x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

$$\Leftrightarrow \quad [x^3 + (a + x1)\,x^2 + (b + ax_1 + x_1^2)\,x + (\,c + bx_1 + ax_1^2 + x_1^3)\,]\,(x - x_1) = 0,$$

ou seja, uma equação cúbica em x que se resolve pelo método de Ferro - Tartaglia - -Cardano, obtendo-se, desta forma, as restantes soluções da equação quártica.

1.3.6 Origem dos Números Complexos

1.3.6.1 Introdução

Ao contrário do que muitos pensam $\sqrt{-1} = i$, não surgiu associada à resolução da equação de 2° grau.

Até à Idade Média, os matemáticos não tiveram dificuldade em ignorar as raízes quadradas de números negativos quando se tratavam de equações quadráticas. Por exemplo, considere-se o problema de determinar os lados x e y de um rectângulo conhecendo a área A e o perímetro p.

As equações $x \cdot y = \mathrm{A}$ e $2x + 2y = p$

conduziam à equação quadrática $2x^2 - px + 2\mathrm{A} = 0$, e a fórmula quadrática fornecia as raízes

$$x = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 16\mathrm{A}}}{4}.$$

Se $p^2 - 16\mathrm{A} \geq 0$, então determina-se x (e y);

Se $p^2 - 16\mathrm{A} < 0$, apenas afirmava-se que não existia um rectângulo, cujo perímetro e área eram dados pela relação acima.

Qualquer matemático até ao século XVI classificaria a equação $x^2 + 1 = 0$ como absurda, obviamente impossível, sem solução. Não perderia tempo com ela. Mas, a fórmula cúbica não permitia renunciar as raízes quadradas de números negativos, porque como iremos ver, uma raiz real positiva, mesmo uma natural, pode aparecer em termos de números complexos.

É ao resolver a equação de grau 3, a cúbica, e exactamente o caso em que esta possui três raízes reais não nulas, que aparece o primeiro percurso pelo mundo dos complexos.

1.3.6.2 Os Primórdios

Cardano ao resolver a equação cúbica

$$x^3 = px + q \text{ (tipo II)} \qquad (1),$$

deparou-se com uma nova dificuldade. Recorde-se que a solução da equação (1) era dada por

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \qquad (2)$$

e, se considerarmos $w = \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}$ (3),

a solução (2) vem igual a $x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + w} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - w}$ (4).

A dificuldade com que Cardano encontrou consistia no caso, denominado *"irredutível"*, em que a diferença do radicando em (3) era negativa, isto é,

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2 < \left(\frac{p}{3}\right)^3.$$

Curioso é que no *"caso irredutível"* existiam três raízes reais. Esse caso surgia aquando da resolução das equações cúbicas

$$x^3 = px + q \text{ (tipo II)} \quad \text{e} \quad x^3 + q = px \text{ (tipo III)}.$$

Contudo, Cardano evitou-o cuidadosamente dado que, em todos os seus exemplos na *Ars Magna*, w é sempre uma raiz positiva e existe apenas uma raiz (positiva). No entanto, apesar de praticamente em todo o seu trabalho, Cardano ter evitado assumir soluções negativas da equação e o *"caso irredutível"*. É especialmente notável, na *Ars Magna* de Cardano, a constatação da existência de imaginários ou raízes complexas e a construção de exemplos com o objectivo expresso de lidar com problemas que envolvam raízes imaginárias.

Assim no capítulo XXXVII da *Ars Magna*, que Cardano intitulou por *"A regra onde se considera o negativo"*, é feita referência a três casos onde surgem os números negativos. O primeiro caso assume um número negativo como solução de equações, que Cardano denominou o *puro negativo*. O segundo caso assume raízes quadradas de números negativos na resolução de equações e o terceiro caso assume ambos os casos anteriores, isto é, exemplos de números compostos por puros negativos e raízes quadradas de números negativos.

1.3.6.2.1 Os Puros Negativos (1º Caso)

Cardano ao iniciar uma abordagem a este caso, verifica que as soluções das equações

$$x^2 = 4x + 32 \quad \text{e} \quad x^2 = x + 20$$

coincidem, no caso positivo.

Seguidamente, Cardano refere:

"Se pretendermos ir para além da verdadeira solução, x será igual a 8 *na primeira [equação], mas na segunda será* 5*. Se alterarmos as equações, mudando de membro alguns termos, isto é,* $x^2 + 4x = 32$ *e* $x = 4$;

Será também verdade para $x^2 + x = 20$*. Assim, se* +4 *resolve ambos os problemas,* -4 *é também uma solução para* $x^2 = 4x + 32$ *bem como para* $x^2 = x + 20$*."*

Desta forma Cardano concluiu:

"Se o caso é impossível de resolver quer com uma solução positiva quer com uma negativa, então o problema é falso.

Se [o problema] é verdadeiro com uma solução positiva, será um problema verdadeiro com uma solução negativa."

Seguidamente Cardano descreveu três problemas cujas soluções são números negativos, dos quais iremos descrever o primeiro.

"O dote da mulher de Francis é 100 *aureis mais que os próprios bens de Francis. O quadrado do dote é* 400 *mais do que o quadrado dos seus bens. Determine o valor do dote e dos bens."*

RESOLUÇÃO: Cardano ao resolver este tipo de problema assume que Francis tem $-x$ como valor dos seus bens. Então o dote da esposa de Francis é $100 - x$.

Elevando ao quadrado as duas partes (dote e bens), obtemos x^2 e $10000 + x^2 - 200x$, cuja diferença é 400 *aureis*, isto é,

$$10000 + x^2 = x^2 + 200x + 400.$$

Subtraindo os termos comuns obtém-se $9600 = 200x$.

Logo $x = 48$ e então Francis tem um valor negativo, isto é, tem necessidade, e o dote terá o restante de 100, ou seja, 52. Assim sendo, Francis tem - 48 *aureis*, logo sem dinheiro ou bens e o dote da sua esposa é 52 *aureis*.

Segundo as próprias palavras de Cardano *"... trabalhando desta forma podemos resolver os problemas mais difíceis e complexos".*

1.3.6.2.2 As Raízes Quadradas de [Números] Negativos (2º Caso)

A segunda espécie de números, obtidos ao assumirmos números negativos, envolve a raiz quadrada de números negativos.

Cardano apresenta o seguinte problema:

determinar dois números cuja soma seja 10 e o produto seja 40,

que descreveu e resolveu como a seguir se refere:

"Divida 10 *em duas partes, o produto das quais é* 30 *ou* 40. *É claro que este caso é impossível. Contudo, iremos trabalhá-lo:*

Divida-se 10 *em duas partes iguais, perfazendo cada* 5. *Esta elevamos ao quadrado, totalizando* 25. *Subtrai-se* 40, *se quiser, de* 25 *atrás produzido, como vos mostrei no capítulo das operações no livro* 6, *deixando um resto de* -15, *a raiz quadrada do qual adicionada ou subtraída a* 5 *fornece as partes cujo produto é* 40. *Estas partes são* $5+\sqrt{-15}$ *e* $5-\sqrt{-15}$*."*

Deste modo a resolução de Cardano levou-o a considerar as expressões

$$5+\sqrt{-15} \text{ e } 5-\sqrt{-15}.$$

Seguidamente Cardano verificou que os dois números assim obtidos satisfaziam as condições requeridas.

"Pondo de lado a tortura mental envolvida, multiplique-se $5+\sqrt{-15}$ *por* $5-\sqrt{-15}$, *obtendo-se* $25-(-15)=40$ *"*, escreveu.

Cardano ficou por aqui, pois não deu significado às expressões acima, mas tem o mérito de ter sido o primeiro a considerar expressões deste género. Note-se que neste tempo os números negativos eram evitados e desprovidos de significado.

Ele escreveu:

"...isto é verdadeiramente tão refinado quanto inútil".

Repare-se que o problema acima consiste em resolver a seguinte equação quadrática, em notação moderna:

$$x\,(10-x)=40$$

$$\Leftrightarrow 10x-x^2=40$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 10x+40=0$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{10\pm\sqrt{100-160}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{10\pm\sqrt{-60}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x=5\pm\sqrt{-\frac{60}{4}}$$

$$\Leftrightarrow x=5\pm\sqrt{-15}.$$

Verificando-se que:

$$\left(5+\sqrt{-15}\right)+\left(5-\sqrt{-15}\right)=10$$

e

$$\left(5+\sqrt{-15}\right)\times\left(5-\sqrt{-15}\right)=40.$$

1.3.6.2.3 Números Compostos por Negativos e Raízes Quadradas de Negativos (3º Caso)

Para exemplificar a existência de tal *"espécie"* de números, Cardano apresentou o seguinte problema:

"Encontre três números proporcionais [tal que], a raiz quadrada do primeiro subtraída do primeiro perfaz o segundo e a raiz quadrada do segundo subtraída do segundo perfaz o terceiro."

Na resolução deste problema, Cardano assumiu o primeiro número como sendo igual a x^2 $(x > 0)$.

Assim o segundo será igual a $x^2 - x$ e o terceiro $x^2 - x - \sqrt{x^2 - x}$.

Seguidamente, Cardano escreveu:

"Multiplicando o primeiro pelo terceiro e o segundo por si mesmo e, fazendo isso, obteremos as seguintes quantidades:

$$\frac{1}{4},\ -\frac{1}{4}\ \text{e}\ -\frac{1}{4}-\sqrt{-\frac{1}{4}}\text{''}.$$

Embora Cardano tenha assumido expressões com raízes quadradas de números negativos, evitou contudo, o *caso irredutível*. No entanto, outro matemático italiano, Bombelli, admirador do trabalho de Cardano, aprofundou o estudo do *caso irredutível*.

1.3.6.3 Rafael Bombelli [1]

1.3.6.3.1 A sua Vida

O pai de Rafael Bombelli era Antonio Mazzoli que mudou o nome Mazzoli para Bombelli, provavelmente devido ao passado da família.

Desde 1443 que Bolonha era governada pela família Bentivoglio, cujo *signore* (isto é, o lorde) era Sante Bentivoglio. Este foi sucedido por Giovanni II Bentivoglio que modernizou a cidade de Bolonha, em particular, os canais de irrigação.

A família Mazzoli era defensora da família Bentivoglio. Tudo mudou quando em 1506 o papa Julius II tomou controlo de Bolonha, exilando a família Bentivoglio. Em 1508, numa tentativa falhada de recuperar o controlo, o avô de Antonio Mazzoli (bisavô de Bombelli), bem como outros defensores dos Bentivoglio, foram executados.

Durante muitos anos a família Mazzoli sofreu, nomeadamente, a confiscação das suas propriedades. Mas, a Antonio Mazzoli, pai de Rafael Bombelli, foi cedida a propriedade de Bolonha dos seus antepassados e este aí recomeçou o seu negócio, como comerciante de lã. Casou com Diamante Saudieri, a filha do alfaiate e tiveram seis filhos, sendo o mais velho Rafael Bombelli.

Rafael não teve uma educação universitária, no entanto, adquiriu alguns conhecimentos de um engenheiro-arquitecto, Pier Francesco Clementi. Assim não surpreende o facto de que Bombelli tenha essa mesma ocupação. Bombelli encontrou um protector em Alessandro Rufini, um nobre de Roma, que mais tarde se tornou o Bispo de Melfi.

Pouco se sabe como é que Bombelli aprendeu Matemática e conheceu os trabalhos matemáticos mais importantes da época, no entanto, deve ter contribuído para despertar curiosidade sobre o tema, o facto de que viveu em Itália e estava envolvido por uma serie de eventos em torno das soluções das equações cúbicas.

Recorde-se que Scipione del Ferro, o primeiro a resolver a equação cúbica, era professor em Bolonha, a cidade natal de Bombelli mas, del Ferro morreu no ano em que Bombelli nasceu. A disputa entre Fior e Tartaglia ocorreu em 1535 quando Bombelli tinha 9 anos e, o principal trabalho de Cardano, *Ars*

---

(1) Nasceu em Janeiro de 1526 em Bolonha, Itália e morreu em 1573, provavelmente em Roma, Itália.

Magna foi publicado em 1545. Evidentemente Bombelli estudou o trabalho de Cardano e também seguiu de perto as várias discussões públicas entre Cardano, Ferrari e Tartaglia, que culminaram com a disputa entre Ferrari e Tartaglia em Milão em 1548.

Foi em 1549 que Alessandro Rufini, o patrono de Bombelli, adquiriu os direitos de reclamar a parte dos pântanos do Val di Chiana que pertencia aos Estados do Papa.

O Val di Chiana era uma região situada justamente na região central que não era bem drenada nem pelo rio Arne nem pelo rio Tiber.

Em 1551 Bombelli iniciou o trabalho de projecto no Val di Chiana, registando as fronteiras da terra que iriam ser reclamadas, que foi interrompido em 1555. Assim, enquanto Bombelli esperava que os trabalhos do projecto em engenharia hidráulica no Val di Chiana, recomeçassem decidiu escrever um livro de álgebra.

Bombelli admirava a *Ars Magna* de Cardano, mas achava que Cardano não tinha sido suficientemente claro na sua exposição, dado que não era acessível à maioria das pessoas sem um completo domínio da Matemática. Bombelli era da opinião que as razões para os vários debates entre os mais ilustres matemáticos era a escassez de uma exposição cuidadosa do tema.

Deste modo, Bombelli sentia que um texto independente que pudesse ser lido por todos aqueles que não possuíam um alto nível de treino matemático seria benéfico. Assim sendo no prefácio do seu trabalho escreveu:

"Eu comecei por rever a maior parte dos autores que escreveram [sobre a álgebra] até ao presente, para ser capaz de ser útil em vez deles no tema, pois existem muitos deles."

1.3.6.3.2 A sua Obra

Rafael Bombelli foi o autor de um trabalho muito influente composto por três livros intitulado *Algebra*, que foi imprimido pela primeira vez em Veneza em 1572 e a seguir em Bolonha em 1579.

A *Algebra* de Bombelli tinha sido inicialmente projectado para conter cinco livros. Os primeiros três foram publicados em 1572 e no final do terceiro livro, Bombelli escreveu:

"... a parte geométrica, livros IV e V, ainda não está pronta a publicar, mas a sua publicação seguir-se-á rapidamente."

Infelizmente Bombelli não foi capaz de completar os últimos dois livros, pois morreu pouco tempo depois da publicação dos primeiros três livros. Contudo, em 1923, os manuscritos de Bombelli foram descobertos por Bortolotti numa livraria em Bolonha, bem como um manuscrito com os três livros publicados que continha outro manuscrito incompleto dos outros dois livros. Bortolotti publicou a parte geométrica incompleta do trabalho de Bombelli em 1929.

A *Algebra* de Bombelli fornece uma completa descrição da álgebra então conhecida e inclui a importante descrição de Bombelli para os números complexos.

Antes de relatarmos a notável contribuição para os números complexos observaremos como Bombelli procedeu para escrever e efectuar cálculos com números negativos.

1.3.6.3.3 Aritmética dos Números Negativos

Bombelli introduziu *meno*, um número negativo, através da definição da *regra dos sinais da multiplicação*. As referidas regras tomam a forma de uma tabela na qual *piu* significa mais e *meno* menos.

Piu via piu fa piu
Meno via piu fa meno
Piu via meno fa meno
Meno via meno fa piu

Como Crossley denota:

"Bombelli está explicitamente trabalhando com números com sinais. Ele não tem reservas ao fazê-lo, ainda que nos problemas que seguidamente ele trata não faça caso das possíveis soluções negativas."

Na sua *Algebra*, Bombelli abordou o cálculo de radicais, particularmente de raízes quadradas e cúbicas e referiu-se às soluções de equações de graus superiores a 4. Relativamente às equações cúbicas e quárticas ele seguiu Cardano. No entanto, contrastando com Cardano, Bombelli aprofundou o *caso irredutível*, através da resolução da equação

$$x^3 = 15x + 4 \quad (1).$$

Na obra citada de Cardano, obtém-se para a equação

$$x^3 = px + q$$

onde p e q são números positivos, a solução dada por

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \quad (2)$$

Assim Bombelli, na sua *Algebra* (1572) considerou a equação (1) e aplicando--lhe (2) obteve:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}, \quad (3)$$

expressão estranha, tanto mais que ele conhecia as raízes todas:

$$4, \quad -2 + \sqrt{3} \quad \text{e} \quad -2 - \sqrt{3}.$$

A fórmula de Cardano (2) parecia não ajudar muito neste caso. Mas, Bombelli teve uma boa ideia:

"... talvez $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$, *estejam relacionados entre si como os respectivos radicandos."*

Mais precisamente, ele tentou equacionar a primeira raiz cúbica de (3) com um número complexo da forma $p + \sqrt{-q}$, ou seja, determinar os valores de p e q, positivos, tais que

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = p+\sqrt{-q}, \quad (4)$$

$$\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = p-\sqrt{-q}, \quad (5)$$

Assim desenvolvendo (4) obtemos:

$$2+\sqrt{-121} = \left(p^3-3pq\right)+\left(3p^2-q\right)\cdot\sqrt{-q}.$$

Esta equação pode ser satisfeita tomando-se

$$2 = p^3 - 3pq \quad (6)$$

e

$$\sqrt{-121} = \left(3p^2-q\right)\cdot\sqrt{-q}. \quad (7)$$

Assim, multiplicando (4) e (5), Bombelli obtém-se

$$\sqrt[3]{\left(2+\sqrt{-121}\right)\cdot\left(2-\sqrt{-121}\right)} = p^2+q$$

ou seja,

$$\sqrt[3]{125} = p^2+q,$$

logo $5 = p^2 + q$ (8).

Substituindo (8) em (6),

$$2 = p^3 - 3p\,(5-p^2),$$

obtém uma equação cúbica em p:

$$4p^3 - 15p = 2 \quad (9).$$

A solução da equação (9) é $p = 2$, e de (8) tem-se que:

$$q = 5 - 4 = 1,$$

então, substituindo $p = 2$ e $q = 1$ em (4) e (5), obtém-se:

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = 2+\sqrt{-1}$$

e

$$\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = 2-\sqrt{-1},$$

e, consequentemente

$$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$$

$$\Leftrightarrow x = 2+\sqrt{-1}+2-\sqrt{-1}$$

$$\Leftrightarrow x = 4.$$

Assim Bombelli, após alguma manipulação algébrica conseguiu obter uma solução inteira da equação (1). Ou seja, mostrou que, usando os cálculos com os números complexos, as soluções reais correctas podiam ser obtidas a partir da fórmula de Ferro-Tartaglia-Cardano para a solução da equação cúbica, mesmo quando a fórmula fornece uma expressão envolvendo raízes quadradas de números negativos. De algum modo, os números que viriam a ser chamados complexos, podiam produzir raízes reais. Bombelli, depois de ter descoberto este resultado, ficou muito satisfeito e escreveu:

"E embora a muitos isto vá parecer algo extravagante, porque ainda que eu tenha sido dessa opinião há um tempo atrás, ainda que isto me pareça mais sofista que verdadeiro, investiguei muito e encontrei a demonstração, que será referida a seguir... Mas deixemos o leitor aplicar toda a força da mente pois [caso contrário] ele irá notar que está iludido".

Bombelli foi o primeiro a escrever as regras para a adição, subtracção e multiplicação de números complexos. Assim, quando Bombelli introduziu formalmente os números complexos, procedeu da mesma forma que no caso da definição de números negativos através de uma *tabela de multiplicação.*

Bombelli denominou $+\sqrt{-n}$, que *"nem é positivo nem negativo"*, por *"piu di meno"*(mais de menos) e denominou $-\sqrt{-n}$, por *"meno di meno"* (menos de menos) e seguidamente, estabeleceu a seguinte tabela:

NOTAÇÃO DE BOMBELLI	**LINGUAGEM ACTUAL**	**NOTAÇÃO ACTUAL**
Piu di meno via piu di meno fa meno	O produto de mais de menos por mais de menos dá menos	$+\sqrt{-n}\cdot\left(+\sqrt{-n}\right)=-n$
Piu di meno via meno di meno fa piu	O produto de mais de menos por menos de menos dá mais	$+\sqrt{-n}\cdot\left(-\sqrt{-n}\right)=+n$
Meno di meno via piu di meno fa piu	O produto de menos de menos por mais de menos dá mais	$-\sqrt{-n}\cdot\left(+\sqrt{-n}\right)=+n$
Meno di meno via meno di meno fa meno	O produto de menos de menos por menos de menos dá menos	$-\sqrt{-n}\cdot\left(-\sqrt{-n}\right)=-n$

Depois de fornecer esta descrição da multiplicação de números complexos, Bombelli elaborou as regras para adicionar e multiplicá-los.

Consequentemente, ele multiplicou

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-3}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-3}},$$

adicionou $a\cdot\sqrt{-1}\pm b\cdot\sqrt{-1}$,

elevou $a+b\cdot\sqrt{-1}$ ao quadrado, ao cubo, etc.

1.3.6.3.4 A sua Notação

Embora alguns autores, como Pacioli, limitassem o uso da notação, outros como Cardano não usaram quaisquer símbolos. Contudo, Bombelli, usou uma notação um tanto ou quanto sofisticada, que passaremos a exemplificar.

A expressão $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}=\sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}}$ que ocorre na sua solução da equação cúbica atrás referida, é escrita como

R.c.⌊ 2p.di m.11⌋ .

Assim R.c. significa raiz cubica. A letra ⌊ e a invertida ⌋ no fim desempenha o papel de parênteses: a raiz cúbica é para ser extraída de toda a expressão entre ⌊ e a invertida ⌋. A abreviatura p.di m. significa *più di meno* (mais de menos).

Outros exemplos:

$$\sqrt{4+\sqrt{6}} \longrightarrow \text{Rq } \lfloor 4\text{p Rq } 6 \rfloor$$

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{0-121}} \longrightarrow \text{Rc} \lfloor 2 \text{ p Rq} \lfloor 0 \text{ m } 121 \rfloor \rfloor$$

1.3.6.3.5 Comentários ao Trabalho de Bombelli

Apesar do atraso na publicação, a *Algebra* de Bombelli foi um trabalho muito influente e conduziu Leibniz a elogiar Bombelli, afirmando que ele era um...

"... mestre ilustre da arte analítica."

Jayaderne escreveu que no seu tratado sobre números complexos, Bombelli

"... mostrou uma visão muito moderna para o seu tempo, pois o seu tratamento era quase o que se faz hoje em dia."

Crossley também escreveu que:

"Deste modo temos um engenheiro, Bombelli, fazendo uso prático dos números complexos, talvez porque eles lhe proporcionam resultados úteis, enquanto Cardano encontrou raízes quadradas de números negativos inúteis. Bombelli é o primeiro a dar um tratamento de qualquer número complexo... É notável como ele é completo na sua apresentação das leis do cálculo de números complexos..."

Parece-nos assim ser bastante justo descrever Bombelli como o inventor dos números complexos. Ninguém antes dele forneceu regras para trabalhar com tais números, nem sugeriram que trabalhando com tais números pudesse ser útil.

Conclui-se esta secção com uma citação de E. F. Robertson,

"A Algebra de Bombelli é uma das mais notáveis realizações da Matemática do século XVI, e ele deve ser considerado um grande matemático por ter compreendido a importância dos números complexos numa altura em que mais ninguém o fez."

Capítulo V – A Insolubilidade por Radicais da Equação 5º grau

"Quod est,
Nullum non problem solvere".

"Não há nenhum problema,
que não possa ser resolvido".

In "The New Algebra"

Capítulo V – A insolubilidade por radicais da equação quíntica

1. Introdução

O desafio de resolver equações polinomiais

$$a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (1)$$

tem sido um dos mais importantes na história da álgebra.

Métodos para resolver equações do primeiro e segundo graus remonta o antigo Egipto e Babilónia.

No século XVI, os matemáticos italianos (del Ferro, Tartaglia, Cardano e Ferrari) conseguiram resolver a equação cúbica (do terceiro grau) e a quártica (do quarto grau). As suas soluções consistiam em fórmulas que forneciam as raízes em termos dos coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$, tal como a conhecida fórmula quadrática resolvente para as equações do segundo grau. Tornou-se então um desafio fazer o mesmo para as equações de grau superior a quatro. Especificamente, o problema, como é habitualmente interpretado, consistia em mostrar que era possível expressar as raízes de uma equação (1) em termos dos coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$, usando apenas adições, subtracções, multiplicações, divisões e extracção de raízes, cada operação aplicada um número finito de vezes. Quando as raízes podem ser expressas desse modo, dizemos que a equação é *solúvel por meio de radicais*.

No início do século XIX, o italiano Paulo Ruffini e o norueguês, N.H. Abel, orientados pelas ideias de Lagrange, mostraram que, de facto, as equações de grau superior a quatro *não são solúveis por meio de radicais*. No entanto a resposta completa à questão da solubilidade por radicais de equações de grau superior a quatro foi finalmente dada pelo matemático francês, Évariste Galois.

Galois foi capaz de mostrar que a cada equação polinomial (1) se podia associar um grupo e que a solubilidade da equação era o resultado de uma determinada propriedade existente no referido grupo. Esta propriedade do grupo é denominada por *solubilidade* e é definida numa secção adiante.

O trabalho de Galois tornou-se a base para o que é actualmente conhecido como a *teoria de Galois*. Hoje em dia esta teoria está intimamente ligada à teoria dos grupos de automorfismos entre extensões de corpos. Assim, a secção relativa a teoremas sobre a solubilidade por radicais é meramente uma parte especial desta teoria.

2. Nota histórica

EVARISTE GALOIS [1]

Galois nasceu nos arredores de Paris, foi educado por sua mãe até aos seus 12 anos de idade, tendo depois ido estudar para a escola em Paris, *Louis-le-Grand.*

O seu sentido de justiça era Continuamente humilhado numa escola na qual, para além de considerar uma prisão (rodeada de grades nas janelas), os alunos e os administradores reflectiam a agitação política da época.

Galois não considerava inspiradores os estudos artificiais que se faziam da literatura clássica e que constituía a parte mais importante do curriculum de um jovem da época.

Quando finalmente chegou a altura de Galois tirar um curso de Matemática elementar, que consistia em dois anos de estudo sobre a geometria de Legendre, ele leu todo o livro de geometria como se de uma novela tratasse, compreendendo-a profundamente.

Mais tarde ele estudou álgebra, mas foi orientado para textos vulgares, nada refinados como o trabalho elegante e completo de Legendre. Aos 14 anos de idade, Galois descobriu o que os matemáticos criativos descobrem mais cedo ou mais tarde, que deveria estudar directamente dos trabalhos originais. Ele ignorou os estudos requeridos e tornou-se num autodidacta quando se debruçou na leitura de obras originais. Ele leu álgebra directamente de Lagrange e também leu os papéis de Abel.

A forma como Galois se desenvolvia divergia daquela que na época requeriam. Galois deve ter sido um aluno difícil para um professor vulgar. O facto de que Galois realizasse todo o trabalho mentalmente, não o ajudou aquando da realização de exames, nos quais os professores eram confrontados na maioria das vezes com conclusões. Dado que Galois trabalhava apenas na "fronteira da Matemática" que era conhecida na altura, as suas conclusões eram na maior parte das vezes, originais e de difícil compreensão.

---

[1] Nasceu a 25 de Outubro de 1811 em Bourg La Reine (próximo de Paris) e morreu a 31 de Maio de 1832 em Paris.

Se Galois era um aluno difícil, certamente considerava os seus professores o suficientemente difíceis para o compreender. Os requisitos da academia onde estudava faziam pouco sentido para o caso especial de Galois, tal como seria um absurdo exigir a um grande poeta que tenha uma caligrafia perfeita.

Aos 16 anos Galois reprovou os exames de admissão à Escola Politécnica, pois apenas exigiam os conhecimentos da Matemática elementar e clássica que Galois se recusava a estudar.

Aos 17 anos de idade Galois encontrou inesperadamente um excelente professor, de seu nome, Richard, o professor de Matemática avançada na Escola *Louis-le-Grand*. Richard acreditava na capacidade extrordinária de Galois, pois eram verdadeiras as soluções que apresentava para a resolução de problemas difíceis, e encorajou-o nas suas pesquisas. No entanto, Richard não conseguiu alterar a má sorte do seu aluno.

Cauchy tinha prometido apresentar o trabalho que Galois tinha realizado até aos seus 17 anos na Academia Francesa. Esses trabalhos incluíam novidades e conclusões de Galois sobre a teoria das equações que, cem anos depois da sua morte, os matemáticos ainda completavam certos detalhes e pesquisavam novas aplicações. Todavia, Cauchy esqueceu-se do prometido.

Aos 18 anos Galois falhou novamente o exame de admissão à Escola Politécnica, chegando mesmo ao ponto de atingir com o apagador um dos examinadores, quando já sabia eu não iria ser admitido.

Aos 19 anos ele submeteu um dos seus trabalhos à Academia das Ciências. A que parecia ser uma boa oportunidade para ganhar o Grande Prémio das Matemáticas, mais uma vez revelou-se numa decepção, pois a secretária levou o manuscrito para casa e morreu antes de lê-lo. O referido trabalho nunca foi encontrado.

Frustrado com a vida académica, Galois tornou-se activo na vida política. Em Maio de 1831 foi preso por supostamente ter feito uma ameaça à vida do Rei durante um banquete. Tendo sido considerado inocente foi mais tarde novamente preso e considerado como um perigoso radical tendo permanecido preso cerca de 6 meses por uma alegada falsa acusação.

Pouco depois de ter sido solto, uma das histórias que se conta é que os seus inimigos políticos prepararam-lhe uma armadilha: um duelo - no qual Galois pressentia que iria morrer. Uma outra história conta que a origem desse duelo é devida a um caso de amor. Segundo se conta Galois passou toda a noite antes do duelo escrevinhando sobre algumas das suas conclusões matemáticas a um seu amigo Chevalier. Parte dessa carta revela o desespero em que Galois se encontrava: *"Eu não tenho tempo"*, escreveu.

Na madrugada do dia 30 de Maio Galois foi baleado nos intestinos e deixado a morrer. Um camponês encontrou-o e levou-o ao hospital, onde Galois ainda pronunciou algumas palavras ao seu irmão mais novo:

"Não chores. Eu preciso de ter coragem para morrer aos vinte."

Galois morreu na manhã seguinte.

3. Polinómios

Alguns conceitos são essenciais na compreensão da Teoria de Galois, nomeadamente, o de polinómio que passamos a definir.

Seja R um anel comutativo,[1] $a_0, a_1, \ldots, a_n \in R$ e $x \in R$.

Então $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ (1) é um elemento de R.

A expressão (1) é um polinómio em x e consiste numa soma de termos, cada um dos quais é um elemento de R que multiplica uma potência inteira, não negativa de x.

No que se segue necessitamos de trabalhar com estas expressões quando o símbolo x denota, ou não, um elemento de R.

Definição 1:

Seja R um anel comutativo.

- Um *polinómio sobre R* na indeterminada x é uma expressão da forma (1) onde $a_0, a_1, \ldots, a_n \in R$ são os *coeficientes*.

- O *grau de um polinómio* $p(x)$ não nulo é o máximo i para $a_i \neq 0$. Se $a_n \neq 0$ então o inteiro n é o *grau do polinómio* e a_n é o *coeficiente director*. Designamos por $gr[p(x)]$ o grau do polinómio $p(x)$.

- *Dois polinómios* em x são *iguais* se e só se as potências iguais de x têm coeficientes iguais.

- Se R tem identidade multiplicativa 1 e o coeficiente director é igual a 1, então o polinómio diz-se *mónico*.

- Os polinómios de grau zero, correspondendo a elementos de R, são denominados *escalares*, os de grau 1 são os polinómios *lineares*, os de grau 2 *quadráticos*, 3 *cúbicos*, 4 *quárticos*, 5 *quínticos*. Considera-se que o polinómio de grau zero não tem grau.

- $R[x]$ é o conjunto de todos os polinómios sobre R na indeterminada x.

---

[1] Ver definição no capítulo I.

Definição 2:

Sejam $p(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_mx^m$ e $q(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_nx^n$ polinómios sobre o anel R.

Então

$$p(x) + q(x) = \begin{cases} (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \ldots + (a_n + b_n)x^n + a_{n+1}x^{n+1} + \ldots + a_mx^m & \text{se } m \geq n. \\ (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \ldots + (a_m + b_m)x^m + b_{m+1}x^{m+1} + \ldots + b_nx^n & \text{se } n > m. \end{cases}$$

Ou seja, para $n > m$, tem-se que

$$p(x) + q(x) = \sum_{i=o}^{n} a_ix^i + \sum_{j=o}^{n} b_jx^j = \sum_{i=o}^{n} (a_i + b_i)x^i.$$

Por outro lado,

$$p(x) \cdot q(x) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \ldots + (a_0b_k + a_1b_{k-1} + \ldots + a_kb_0)x^k + \\ + \ldots + a_mb_nx^{m+n}.$$

Ou seja,

$$\sum_{i=o}^{m} a_ix^i \cdot \sum_{j=o}^{m} b_jx^j = \sum_{k=o}^{m+n} c_kx^k, \quad \text{onde} \quad c_k = \sum_{i+j=k} a_ib_j.$$

Teorema 1:

Seja R um anel. Então $R[x]$ é um anel. Se R é um anel com identidade (multiplicativa), então $R[x]$ é um anel com identidade. Se R é um anel comutativo, então $R[x]$ também é um anel comutativo.

Demonstração:

Para quaisquer dois polinómios em $R[x]$ a soma e o produto estão em $R[x]$ de acordo com a definição 2 de soma e produto, então + e . são operações em $R[x]$. Para adicionarmos polinómios de graus distintos, usamos o maior grau, por exemplo n e introduzimos coeficientes nulos no polinómio de grau menor.

A associatividade é válida dada a aritmética em R, o anel dos coeficientes.

O elemento neutro da adição, 0, é o polinómio nulo, que adicionado com qualquer polinómio não o altera.

O inverso aditivo de $\sum_{i=o}^{n} a_i x^i$ é $\sum_{i=o}^{n} (-a_i) x^i$.

Se R tem identidade multiplicativa 1, então a identidade multiplicativa de $R[x]$ é 1, isto é, o polinómio $a_0 = 1$, $a_i = 0$ para $i > 0$, pois multiplicado por qualquer polinómio em $R[x]$ não o altera.

As leis distributivas à esquerda e à direita são válidas em $R[x]$ dada a sua validade em R.

Teorema 2 (algoritmo da divisão):

Se $f(x)$ e $g(x)$ são polinómios sobre um corpo F[2] com $g(x) \neq 0$, então existem polinómios únicos $q(x)$ e $r(x)$ sobre F tal que

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x), \text{ com } r(x) = 0 \text{ ou } gr[r(x)] < gr[g(x)]$$

Os polinómios $q(x)$ e $r(x)$ designam-se por *quociente* e *resto da divisão de $f(x)$ por $g(x)$*, respectivamente.

Demonstração:

Sejam

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m$$

e

$$g(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n, \text{ com } g(x) \neq 0.$$

Então, podemos supor que $b_n \neq 0$.

Portanto $gr[g(x)] = n$.

Se $f(x) = 0$ então $f(x) = g(x) \cdot 0 + 0$.

Se $f(x) \neq 0$, suponhamos que $a_m \neq 0$ e portanto $g[f(x)] = m$.

Vamos provar em primeiro lugar, que $q(x)$ e $r(x)$ existem (por indução em m).

Se $m < n$ então $f(x) = g(x) \cdot 0 + f(x)$ dá-nos a representação pretendida, isto é, $q(x) = 0$, $r(x) = f(x)$.

Suponhamos que $m \geq n$.

Se $m = 0$ então $g(x)$ e $f(x)$ são polinómios de grau zero, isto é,

$$f(x) = a_0 \text{ e } g(x) = b_0.$$

[2] Ver definição 7 no capítulo I.

Neste caso, $a_0 = \underbrace{b_0 b_0^{-1} a_0}_{q(x)} + \underbrace{0}_{r(x)}$ dá-nos a representação pretendida.

Resta-nos então verificar o teorema quando $gr[f(x)] = m \neq 0$, supondo por hipótese de indução que o resultado é verdadeiro sempre que $f(x)$ é substituído por um polinómio de grau menor que m.

Seja

$$f_1(x) = f(x) - a_m b_n^{-1} x^{m-n} g(x)$$

$$= a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m - a_m b_n^{-1} x^{m-n} \cdot \left(b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n\right)$$

$$= a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m - a_m b_n^{-1} b_0 x^{m-n} - a_m b_n^{-1} b_1 x^{m-n+1} - \ldots - \underbrace{a_m b_n^{-1} b_n x^m}_{a_m x^m}$$

$$= a_0 + a_1 x + \ldots + a_{m-1} x^{m-1} - a_m b_n^{-1} b_0 x^{m-n} - a_m b_n^{-1} b_1 x^{m-n+1} - \ldots - a_m b_n^{-1} b_{n-1} x^{m-1}.$$

Portanto $gr[f_1(x)] < gr[f(x)]$

Pela hipótese de indução existem polinómios $q_1(x)$ e $r_1(x)$ tal que

$$f_1(x) = g(x) \cdot q_1(x) + r_1(x) \quad \text{com} \quad r_1(x) = 0 \quad \text{ou} \quad gr[r_1(x)] < gr[g(x)]$$

$$f_1(x) = f(x) - a_m b_n^{-1} x^{m-n} g(x) = g(x) \cdot q_1(x) + r_1(x)$$

$$f(x) = a_m b_n^{-1} x^{m-n} g(x) + g(x) \cdot q_1(x) + r_1(x)$$

$$f(x) = g(x) \cdot \left(a_m b_n^{-1} x^{m-n} + q_1(x)\right) + r_1(x).$$

Portanto podemos considerar $q(x) = a_m b_n^{-1} x^{m-n} + q_1(x)$ e $r(x) = r_1(x)$.

Para provar a unicidade suponhamos que $q^*(x)$ e $r^*(x)$ são polinómios sobre F e que

$$f(x) = g(x) \cdot q^*(x) + r^*(x) \quad \text{com} \quad r^*(x) = 0 \quad \text{ou} \quad gr[r^*(x)] < gr[g(x)]$$

Então,

$$g(x)\cdot q(x)+r(x)=g(x)\cdot q^*(x)+r^*(x)$$

$$\Rightarrow g(x)\cdot\left(q(x)-q^*(x)\right)=r^*(x)-r(x).$$

Como $gr[r(x)]<gr[g(x)]$ e $gr[r^*(x)]<gr[g(x)]$

temos que $gr[r^*(x)-r(x)]<gr[g(x)]$, ou então, $r^*(x)-r(x)=0$ e, portanto,

$$g(x)\cdot\left(q(x)-q^*(x)\right)=0 \quad \text{ou} \quad gr\left[g(x)\cdot\left(q(x)-q^*(x)\right)\right]<gr[g(x)] \qquad (1)$$

Por outro lado, sabe-se que

$$g(x)\cdot\left(q(x)-q^*(x)\right)=0 \quad \text{ou} \quad gr\left[g(x)\cdot\left(q(x)-q^*(x)\right)\right]\geq gr[g(x)] \qquad (2)$$

Concluímos por (1) e (2) que:

$$g(x)\cdot\left(q(x)-q^*(x)\right)=0$$

e portanto, obtemos que $q(x)=q^*(x)$ e então, $r(x)=r^*(x)$.

c.q.d.

Observação: A indeterminada x num polinómio $f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$ pertencente a $F[x]$ não é necessariamente um elemento de F. No entanto, quando tal acontece o polinómio determina um elemento de F, ou seja, $x=c\in F\Rightarrow f(x)=f(c)=a_0+a_1c+\ldots+a_nc^n\in F$.

Teorema 3 (teorema do resto):

Se $f(x)\in F[x]$ e $c\in F$ então o resto da divisão de $f(x)$ por $x-c$ é $f(c)$.

Demonstração:

Como $gr(x-c)=1$ temos que o resto da divisão de $f(x)$ por $x-c$ é igual a 0 ou tem grau 0.

Então, pelo teorema 2, existe $q(x)\in F[x]$ tal que:

$$f(x)=(x-c)\cdot q(x)+r, \quad \text{com} \quad r\in F.$$

Assim

$$f(c) = (c - c) \cdot q(c) + r$$
$$\Leftrightarrow f(c) = r.$$

c.q.d.

Definição 3:

Se $f(x), g(x) \in F[x]$ com $g(x) \neq 0$ então, dizemos que $f(x)$ é *divisível por* $g(x)$ sobre F, se existe $q(x) \in F[x]$ tal que $f(x) = g(x) \cdot q(x)$. (ou seja, $f(x)$ é *divisível* por $g(x)$ se o resto da divisão de $f(x)$ por $g(x)$ é zero). Neste caso dizemos que $g(x)$ é um *factor* de $f(x)$.

Teorema 4:

Se $f(x) \in F[x]$ e $c \in F$ então, $x - c$ é um factor de $f(x)$ se e só se $f(c) = 0$.

Demonstração:

($\Rightarrow$:) Suponhamos que $x - c$ é um factor de $f(x)$. Logo, pelo teorema 2 existe $q(x) \in F[x]$ tal que:

$$f(x) = (x - c) \cdot q(x), \quad \text{onde} \quad r = 0.$$

Pelo teorema do resto, o resto da divisão de $f(x)$ por $x - c$ é $f(c)$.

Assim $f(c) = r = 0$.

$\therefore f(c) = 0$.

($\Leftarrow$:) Suponhamos que $f(c) = 0$.

Pelo teorema da divisão de $f(x)$ por $x - c$,

$$\exists q(x), r(x) \in F[x]: \; f(x) = (x - c) \cdot q(x) + r(x),$$

onde $r(x) = 0$ ou $gr[r(x)] < gr(x - c)$, isto é, $gr[r(x)] = 0$.

Mas, por hipótese,

$$f(c) = 0 \Leftrightarrow (c - c) \cdot q(c) + r = 0$$
$$\Leftrightarrow r = 0.$$

Logo $f(x) = (x - c) \cdot q(x)$, ou seja, $x - c$ é uma factor de $f(x)$.

c.q.d.

Definição 4:

Um elemento $c \in F$, onde F é um corpo, diz-se uma *raiz* ou *zero* de um polinómio $f(x) \in F[x]$ se é só se $f(c) = 0$.

Notemos que, pelo teorema 4, c é uma raiz se e só se $x - c$ é um factor de $f(x)$.

Teorema 5:

Se $a(x)$ e $b(x)$ são polinómios sobre o corpo F, não ambos nulos, então existe um único polinómio $d(x)$ com coeficiente director 1, sobre F tal que:

(i) $d(x) \mid a(x),\ d(x) \mid b(x);$

(ii) $c(x) \in F[x],\ c(x) \mid a(x),\ c(x) \mid b(x)$ então $c(x) \mid d(x).$

O polinómio $d(x)$ é chamado *máximo divisor comum* (abreviando *m.d.c.*) de $q(x)$ e $b(x)$.

Demonstração:

Suponhamos em primeiro lugar que $b(x) \neq 0$.

Pelo algoritmo da divisão temos que:

$$\exists^1 q_1(x), r_1(x):\ a(x) = b(x) \cdot q_1(x) + r_1(x) \quad \text{com} \quad r_1(x) = 0 \quad \text{ou} \quad gr[r_1(x)] < gr[b(x)]$$

Se $r_1(x) = 0$ então $b(x) \mid a(x)$ e, portanto $b(x)$ é o *m.d.c.* de $a(x)$ e $b(x)$.

Se $r_1(x) \neq 0$ então, aplicando repetidas vezes o algoritmo da divisão obtemos

$$a(x) = b(x) \cdot q_1(x) + r_1(x), \quad gr[r_1(x)] < gr[b(x)]$$

$$a(x) = r_1(x) \cdot q_2(x) + r_2(x), \quad gr[r_2(x)] < gr[r_1(x)]$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$r_{k-2}(x) = r_{k-1}(x) \cdot q_k(x) + r_k(x), \quad gr[r_k(x)] < gr[r_{k-1}(x)]$$

$$r_{k-1}(x) = r_k(x) \cdot q_{k+1}(x).$$

Como $gr[r_1(x)] > gr[r_2(x)],\ldots$ temos que obter um resto igual a zero. Seja $r_k(x)$ o último resto não nulo e suponhamos que r é o seu coeficiente director.

Vamos então verificar que $r^{-1}r_k(x) = r(x)$ satisfaz as condições *(i)* e *(ii)* do teorema.

(i) Observemos em primeiro lugar que $r(x) \mid r_{k-1}(x)$.

Como $r(x) \mid r_k(x)$ concluímos que $r(x) \mid r_{k-2}(x)$. Assim sucessivamente obtemos que

$$\begin{aligned} &r(x) \mid r_{k-1}(x) \\ &r(x) \mid r_{k-2}(x),\ldots, \\ \\ &r(x) \mid r_1(x), \\ &r(x) \mid b(x), \\ &r(x) \mid a(x), \end{aligned}$$

o que significa que $r(x)$ satisfaz *(i)*.

(ii) Suponhamos que $c(x)$ é um polinómio tal que $c(x) \mid a(x)$ e $c(x) \mid b(x)$.

Então, como $r_1(x) = a(x) - b(x) \cdot q_1(x)$ concluímos que $c(x) \mid r_1(x)$.

Como $r_2(x) = b(x) - r_1(x) \cdot q_2(x)$, $c(x) \mid b(x)$ e $c(x) \mid r_2(x)$.

Continuando este argumento obtemos ao fim de um número finito de passos, que $c(x) \mid r_k(x)$ logo, $c(x) \mid r^{-1}r_k(x)$ e, portanto, $c(x) \mid r(x)$.

Se $b(x) = 0$ e a_m coeficiente director de $a(x)$ então $a_m^{-1}a(x)$ é tal que $a_m^{-1}a(x) \mid a(x)$ e $a_m^{-1}a(x) \mid b(x)$.

Se $r(x) \mid a(x)$ e $r(x) \mid b(x)$ então obviamente $c(x) \mid a_m^{-1}a(x)$.
Portanto existe $m.d.c.$ de $a(x)$ e $b(x)$.

Vamos agora provar a unicidade.

Sejam $d(x)$ e $d_1(x)$ os máximos divisores comuns de $a(x)$ e $b(x)$.

Então por *(ii)*, temos que

$d_1(x) \mid d(x)$ e $d(x) \mid d_1(x)$.

Logo

$$\begin{aligned} \exists f(x), g(x): \; & d(x) = d_1(x) \cdot f(x) \\ & d_1(x) = d(x) \cdot f(x). \end{aligned}$$

Como o coeficiente director de $d(x)$ e $d_1(x)$ é 1 concluímos que o coeficiente director de $f(x)$ e $g(x)$ é 1.

Mas $gr[d(x)] \geq gr[d_1(x)]$ e $gr[d_1(x)] \geq gr[d(x)]$ e, portanto, $gr[d(x)] = gr[d_1(x)]$.

Logo $gr[f(x)] = gr[g(x)] = 0$, ou seja, $f(x)=1=g(x)$ e, portanto, $d(x) = d_1(x)$.

c.q.d.

Exemplo 1: Determinemos o *m.d.c.* $(a(x), b(x))$, onde $a(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$ e $b(x) = x^2 - 5x + 6$, polinómios em $Q[x]$.

Aplicando o algoritmo da divisão

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 3x^2 + 3x - 2 & x^2 - 5x + 6 \\ \cline{2-2} -x^3 + 5x^2 - 6x & x + 2 \\ \hline 2x^2 - 3x - 2 & \\ -2x^2 + 10x - 12 & \\ \cline{1-1} 7x - 14 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} x^2 - 5x + 6 & 7x - 14 \\ \cline{2-2} -x^2 + 2x & \frac{1}{7}x - \frac{3}{7} \\ \hline -3x + 6 & \\ 3x - 6 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

temos que $x^3-3x^2+3x-2=(x^2-5x+6)\cdot(x+2)+(7x-14)$ e que $x^2-5x+6=(7x-14)\cdot\left(\frac{1}{7}x-\frac{3}{7}\right)$.

Logo $m.d.c.\left(x^3-3x^2+3x-2, x^2-5x+6\right)=x-2$ dado que o coeficiente director, por definição, é igual a 1.

Teorema 6:

Se $a(x)$ e $b(x)$ são polinómios sobre um corpo F, não ambos nulos, e $d(x)$ é o seu $m.d.c.$, então existem polinómios $u(x)$ e $v(x)$ sobre F tal que:

$$d(x)=a(x)\cdot u(x)+b(x)\cdot v(x).$$

Demonstração:

Da primeira igualdade da demonstração do teorema 5, temos que

$$r_1(x)=a(x)-b(x)\cdot q_1(x),$$

e, portanto, $r_1(x)$ é combinação linear de $a(x)$ e $b(x)$.

Então

$$\begin{aligned} r_2(x) &= b(x)-r_1(x)\cdot q_2(x) \\ &= b(x)-[a(x)-b(x)\cdot q_1(x)]\cdot q_2(x) \\ &= b(x)-a(x)\cdot q_2(x)+b(x)\cdot q_1(x)\cdot q_2(x) \\ &= a(x)[-q_2(x)]+b(x)[1+q_1(x)\cdot q_2(x)], \end{aligned}$$

e, portanto, $r_2(x)$ também é uma combinação linear de $a(x)$ e $b(x)$.

Suponhamos agora que cada um dos restos $r_1(x), r_2(x), \ldots, r_j(x)$ é uma combinação linear de $a(x)$ e $b(x)$.

Então, em particular,

$$r_{j-1}(x)=a(x)\cdot m_{j-1}(x)+b(x)\cdot n_{j-1}(x),$$

$$r_j(x)=a(x)\cdot m_j(x)+b(x)\cdot n_j(x),$$

para certos polinómios $m_{j-1}(x), n_{j-1}(x), m_j(x), n_j(x)$ sobre F.

Da igualdade $r_{j-1}(x)=r_j(x)\cdot q_{j+1}(x)+r_{j+1}(x)$ obtemos que

$$r_{j+1}(x) = r_{j-1}(x) - r_j(x) \cdot q_{j+1}(x)$$

$$= a(x) \cdot m_{j-1}(x) + b(x) \cdot n_{j-1}(x) - \left[a(x) \cdot m_j(x) + b(x) \cdot n_j(x)\right] \cdot q_{j+1}(x)$$

$$= a(x)\left[m_{j-1}(x) - m_j(x) \cdot q_{j+1}(x)\right] + b(x)\left[n_{j-1}(x) - n_j(x) \cdot q_{j+1}(x)\right]$$

ou seja, $r_{j+1}(x)$ é combinação linear de $a(x)$ e $b(x)$.

Portanto, qualquer um dos restos, incluindo $r_k(x)$ pode ser expresso como combinação linear de $a(x)$ e $b(x)$.

$$\exists m(x), n(x): \ r_k(x) = a(x) \cdot m(x) + b(x) \cdot n(x).$$

$$d(x) = r^{-1} r_k(x) = a(x)\underbrace{\left[r^{-1} m(x)\right]}_{u(x)} + b(x)\underbrace{\left[r^{-1} n(x)\right]}_{v(x)}$$

c.q.d.

Exemplo 2:

Exprimamos o *m.d.c.* dos polinómios referidos no exemplo1 como combinação linear dos mesmos.

Assim, do exemplo 1, tem-se que

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 2 = (x^2 - 5x + 6) \cdot (x + 2) + (7x - 14).$$

Então

$$7x - 14 = \left(x^3 - 3x^2 + 3x - 2\right) - \left(x^2 - 5x + 6\right) \cdot (x + 2)$$

$$\Rightarrow 7(x - 2) = \left(x^3 - 3x^2 + 3x - 2\right) - \left(x^2 - 5x + 6\right) \cdot (x + 2)$$

$$\Rightarrow x - 2 = \left(x^3 - 3x^2 + 3x - 2\right) \cdot \frac{1}{7} - \left(x^2 - 5x + 6\right) \cdot \left(-\frac{x}{7} - \frac{2}{7}\right).$$

Portanto $d(x) = x - 2 = a(x) \cdot u(x) + b(x) \cdot v(x)$ para $u(x) = \frac{1}{7}$, $v(x) = -\frac{x}{7} - \frac{2}{7}$.

Definição 5:

Dois polinómios $f(x)$ e $g(x)$ sobre um corpo F, dizem-se *associados* se

$$\exists c \in F \setminus \{0\}: \; f(x) = c \cdot g(x).$$

Exemplo 3:

Os polinómios $f(x) = 2x^2 - 1$ e $g(x) = 6x^2 - 3$ são associados em Q pois $f(x) = 2g(x)$.

Observação:

1. Cada polinómio não nulo tem precisamente um polinómio associado com coeficiente director igual a 1. Vejamos como...

Seja $f(x)$ um polinómio com coeficiente director igual a a_m e suponhamos que $f(x)$ está associado a dois polinómios mónicos, designadamente $f_1(x)$ e $f_2(x)$.

Então

$$f(x) = a_m f_1(x)$$

$$f(x) = a_m f_2(x)$$

$$a_m f_1(x) = a_m f_2(x) \underset{\substack{\downarrow \\ f(x) \text{ polinómio não nulo}}}{\Rightarrow} f_1(x) = f_2(x).$$

2. Cada polinómio de grau pelo menos 1 tem dois conjuntos de divisores óbvios, os seus associados e os polinómios de grau 0. Vejamos como...

Seja $f(x)$ um polinómio de grau pelo menos 1 e $g(x)$ um seu associado.

Logo $\exists c \in F \setminus \{0\}: f(x) = cg(x)$ o que implica que $g(x) | f(x)$. (3)
Seja a um polinómio de grau zero. Temos então que $f(x) = a\left[a^{-1} f(x)\right]$

Definição 6:

Se um polinómio $f(x)$ de grau pelo menos 1, não tem outros divisores então, diz-se *irredutível*, isto é,

se $f(x)=g(x)\cdot h(x)$

e

$f(x)$ é irredutível

então um de $g(x)$ e $h(x)$ tem grau zero e o outro é associado a $f(x)$. [4]

Se um polinómio não é irredutível então diz-se *redutível.*

Veremos que um polinómio ser ou não irredutível depende do corpo F.

Corolário 1:

Se F é um corpo e $a(x), b(x), p(x) \in F[x]$ com $p(x)$ irredutível, então

$p(x) \mid a(x)\, b(x) \Rightarrow p(x) \mid a(x)$ ou $p(x) \mid b(x)$.

Demonstração:

Suponhamos que $p(x) \nmid a(x)$. Então, o *m.d.c.* de $p(x)$ e $a(x)$ é 1.

Logo, pelo teorema 6, $\exists u(x), v(x) \in F[x]$: $1 = u(x)\cdot p(x) + v(x)\cdot a(x)$, o que implica que $b(x) = u(x)\cdot p(x)\cdot b(x) + v(x)\cdot a(x)\cdot b(x)$.

Como $p(x) \mid p(x)$ e $p(x) \mid a(x)\cdot b(x)$ concluímos que

$$p(x) \mid u(x)\cdot p(x)\cdot b(x), \quad p(x) \mid v(x)\cdot a(x)\cdot b(x),$$

$$\Rightarrow p(x) \mid u(x)\cdot p(x)\cdot b(x) + v(x)\cdot a(x)\cdot b(x)$$

$$\Rightarrow p(x) \mid b(x).$$

---

(3) Se $f(x) = g(x)\cdot h(x) \in F[x]$, então dizemos que $g(x)$ divide $f(x)$, ou em símbolos $g(x) \mid f(x)$, e $h(x) \mid f(x)$.

(4) Podemos fazer uma analogia entre os números primos e os polinómios irredutíveis. Assim, um número p é primo se tem apenas dois divisores, ele próprio e o 1. Um polinómio $p(x)$ é irredutível se tem apenas dois tipos de divisores, os de grau zero e os seus associados.

O outro caso a demonstrar é análogo ao anterior.

c.q.d.

Corolário 2:

Se $p(x), a_1(x), \ldots, a_n(x)$ são polinómios sobre F com $p(x)$ irredutível então

$$p(x) \mid a_1(x) \cdot a_2(x) \cdot \ldots \cdot a_n(x) \Rightarrow \exists i \in \{1, \ldots, n\} : p(x) \mid a_i(x).$$

Demonstração:

A demonstração será feita por indução.

Para $n = 1$ o resultado é óbvio.
Suponhamos que $n > 1$ e que

$$p(x) \mid a_1(x) \cdot a_2(x) \cdot \ldots \cdot a_n(x) \Rightarrow \exists i \in \{1, \ldots, n\} : p(x) \mid a_i(x).$$

Se $p(x) \mid (a_1(x) \cdot a_2(x) \cdot \ldots a_{n-1}(x)) \cdot a_n(x)$ então, pelo corolário 1,

$$p(x) \mid a_1(x) \cdot a_2(x) \cdot \ldots \cdot a_{n-1}(x) \text{ ou } p(x) \mid a_n(x).$$

Pela hipótese de indução

$$\exists j \in \{1, \ldots, n-1\} : p(x) \mid a_j(x) \text{ ou } p(x) \mid a_n(x).$$

c.q.d.

Teorema** 7 **(teorema da factorização única):

Cada polinómio de grau pelo menos 1 sobre o corpo F pode ser escrito do modo único seguinte:

$$af_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x) \text{ onde } a \in F \text{ e } f_1(x), \ldots, f_n(x) \in F[x]$$

irredutíveis e com coeficiente director igual a 1.
A menos da ordem esta expressão é única.

Demonstração:

Seja S o conjunto dos polinómios sobre F, de grau maior ou igual a 1 que não podem ser escritos como no enunciado.

Vamos verificar que $S = \varnothing$.

Suponhamos que $S \neq \varnothing$. Pelo *axioma da boa ordem*[5], aplicado ao conjunto dos graus dos polinómios de S, sabemos que existe um polinómio de grau mínimo (positivo) em S.

Seja $a(x)$ um tal polinómio e suponhamos que o seu grau é n.

$a(x)$ não é irredutível (por definição de S).

Portanto, pode ser factorizado

$$a(x) = a_1(x) \cdot a_2(x), \text{ com } 1 < gr[a_1(x)] < n, \quad 1 < gr[a_2(x)] < n.$$

Pela escolha de $a(x)$ concluimos que $a_1(x)$ e $a_2(x) \notin S$.

Portanto, por definição de S, de $a_1(x)$ e $a_2(x)$ podem-se escrever como o produto de uma constante por um polinómio irredutível com coeficientes directores iguais a 1.

$$a_1(x) = ag_1(x) \cdot \ldots \cdot g_l(x)$$

$$a_2(x) = bh_1(x) \cdot \ldots \cdot h_t(x)$$

$$\begin{aligned} a(x) &= ag_1(x) \cdot \ldots \cdot g_l(x) \cdot bh_1(x) \cdot \ldots \cdot h_t(x) \\ &= abg_1(x) \cdot \ldots \cdot g_l(x) \cdot h_1(x) \cdot \ldots \cdot h_t(x) \end{aligned}$$

$\therefore a(x) \notin S$, o que é um absurdo.

Provemos então a unicidade.

Suponhamos que

$$f(x) = ap_1(x) \cdot \ldots \cdot p_s(x) = bq_1(x) \cdot \ldots \cdot q_t(x) \text{ onde } p_i(x), q_j(x)$$

são polinómios irredutíveis com coeficiente director igual a 1.

Como $p\ (x) | ap_1(x) \cdot \ldots \cdot p_s(x)$ concluímos que $p_1(x) | bq_1(x) \cdot \ldots \cdot q_s(x)$

$$p_1(x) | b \quad \text{ou} \quad p_1(x) | q_1(x) \cdot \ldots \cdot q_t(x).$$

---

[5] Se $P \neq \varnothing$ e $P \subset \{a, a+a, \ldots\}$ onde $a \in Z$, então P tem um primeiro elemeto (ou elemento mínimo).

Pelo corolário 2, $\exists j \in \{1,\dots,t\}: p_1(x) | q_j(x)$

$$p_1(x) \text{ irredutível} \Rightarrow gr[p_1(x)] > 0$$

$$q_j(x) \text{ irredutível} \Rightarrow p_1(x) \text{ é seu associado.}$$

Logo $\exists c \in F \setminus \{0\}$: $q_j(x) = cp_1(x)$. Como os coeficientes directores de $p_1(x)$ e $q_j(x)$ são iguais a 1, concluímos que $c = 1$ e portanto $q_j(x) = p_1(x)$.

Logo $ap_2(x) \cdot \ldots \cdot p_s(x) = bq_1(x) \cdot \ldots \cdot q_{j-1}(x) \cdot q_{j+1}(x) \cdot \ldots \cdot q_t(x)$.

Repetindo este argumento vemos que $p_2(x)$ é um dos polinómios irredutíveis do segundo membro da igualdade e na verdade, cada polinómio irredutível do primeiro membro é um polinómio irredutível do segundo membro.

Se $s < t$ ou $t < s$ então 1 é um produto de polinómios irredutíveis.

Portanto, $s = t$ e os $p_1(x), \dots, p_t(x)$ são os mesmos, eventualmente por uma ordem diferente.

c.q.d.

Exemplo 4:

Vejamos a factorização do polinómio $3x^4 - 3x^2 - 6$ em diferentes corpos.

- $Q[x]$: $3(x^2 - 2) \cdot (x^2 + 1)$
- $IR[x]$: $3(x - \sqrt{2}) \cdot (x + \sqrt{2}) \cdot (x^2 + 1)$
- $C[x]$: $3(x - \sqrt{2}) \cdot (x + \sqrt{2}) \cdot (x - i) \cdot (x + i)$

Teorema 8:

O número de raízes de uma equação polinomial $f(x) = 0$, onde os coeficientes de $f(x)$ pertencem a um corpo F, não é superior ao seu grau.

Demonstração:

Seja d o grau de $f(x)$ e r_1 uma raiz da equação, ou seja, um zero de $f(x)$. Então, pelo teorema 4, $x - r_1$ é um factor de $f(x)$, e temos que

$$f(x) = (x - r_1) \cdot q_1(x).$$

Comparando os graus em ambos os membros da equação acima, temos que:

$$gr[q_1(x)] = d - 1.$$

Agora se $r_2 \neq r_1$ é também uma raiz da equação, temos pelo teorema 4, que:

$$(x - r_2) | f(x) = (x - r_1) \cdot q_1(x).$$

Como $(x - r_2) \nmid (x - r_1)$, temos que pelo corolário 1

$$(x - r_2) | q_1(x) \quad \text{ou} \quad q_1(x) = (x - r_2) \cdot q_2(x)$$

onde $gr[q_2(x)] = d - 2$. Se existem n raízes distintas então $q_{n-1}(x) = (x - r_n) \cdot q_n(x)$,

onde $gr[q_n(x)] = d - n$. Mas $q_n(x) \in F[x]$ não tem grau negativo, logo

$$d - n \geq 0, \text{ e } n \leq d.$$

c.q.d.

Teorema 9 (critério de irredutibilidade de Eiesenstein):

Seja p um número primo e

$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \in Z[x]$, tal que $p | a_0$, $p | a_1, \ldots, p | a_{n-1}$, $p \nmid a_n$, $p^2 \nmid a_0$.

Então $f(x)$ é irredutível.

Demonstração:

Suponhamos com vista a um absurdo que,

$$u < n, \ v < n \text{ e } f(x) = (b_0 + b_1 x + \ldots + b_u x^u) \cdot (c_0 + c_1 x + \ldots + c_v x^v)$$

Se $p | b_0$ e $p | c_0$ então $p^2 | b_0 \cdot c_0$, isto é, $p^2 | a_0$ o que não é possível.

Portanto, p não divide b_0 e c_0 simultaneamente.

Assim $p | a_0 = b_0 c_0 \Rightarrow p | b_0$ ou $p | c_0$.

Portanto p divide um e um só de b_0 e c_0. Suponhamos sem perda de generalidade que $p|c_0$ e $p\nmid b_0$.

Se $p|c_v$ então $p|c_v b_u = a_n$ o que é absurdo.

$$\therefore p\nmid c_v.$$

Seja k o menor inteiro tal que: $p\nmid c_k$.

Sabemos que $a_k = b_0c_k + b_1c_{k-1} + \ldots + b_kc_0$.

Como $p|b_kc_0,\ldots,p|b_1c_{k-1}$ e $p|a_k$ temos que $p|b_0c_k$ o que implica que $p|b_0$ ou $p|c_k$ o que é absurdo.

Logo $f(x)$ é irredutível.

c.q.d.

4. Extensões de corpos

Nesta secção o nosso objectivo é construir uma extensão E de F que contenha uma solução da equação polinomial de grau finito n sobre F

$$p(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2 + \ldots + p_nx^n, \quad p_i \in F \text{ para } i = 0,1,\ldots,n, \quad p_n \neq 0.$$

De facto, podemos generalizar o nosso objectivo pois, tendo a extensão E que contenha uma raiz r de $p(x) = 0$, podemos factorizar $p(x)$ como $(x - r) \cdot q(x)$ em $E[x]$ e estender E a D se necessário para incluir uma raiz de $q(x) = 0$, isto é, uma segunda raiz de $p(x) = 0$. Continuando este processo iremos eventualmente obter uma extensão $\overline{F}$ que contenha todas as raízes de $p(x) = 0$.

Observação:
Os resultados que de seguida enunciaremos tiverem assinalados com o símbolo * não serão demonstrados.

Definição 1:

Se todo o elemento de um corpo F é um elemento de um corpo E e se em F estão definidas as mesmas operações que em E, então F é um subcorpo de E, e E é uma *extensão* de F. Escrevemos $F \subseteq E$.

Diz-se que E é uma *extensão finita* de F quando encarando E como um espaço vectorial sobre o corpo F ele tem dimensão finita. A notação usada para simbolizar dimensão é $[E:F]$. Assim quando escrevemos $[E:F] = n$, significa que E é uma extensão finita de grau n sobre F. [1]

Teorema 1:*

Se temos um corpo K e subcorpos, K' e K'' tal que:

$$K'' \subseteq K' \subseteq K.$$

Se K é extensão finita de K' e K' é extensão finita de K'' então K é extensão finita de K'', tendo-se

$$[K:K''] = [K:K'] \cdot [K':K'']$$

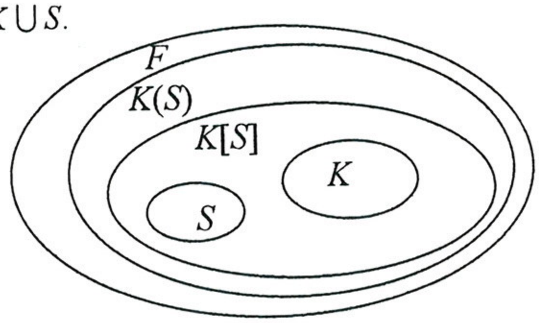
---

[1] A partir deste momento sempre que usarmos a designação F consideraremos que se trata de um corpo.

Definição 2:

Seja F uma extensão de K e $S \subseteq F$.

(i) O anel obtido por adjunção de S a K, que representamos por $K[S]$ é o subanel de F gerado por $K \cup S$, ou seja, é o menor subanel de F que contém $K \cup S$.



(ii) O corpo obtido por adjunção de S a K, que representamos por $K(S)$ é um subcorpo de F gerado por $K \cup S$.

Observação:

$K[S] \subseteq K(S)$.

Definição 3:

De acordo com a definição 2, se $S = \{\alpha\}$, então $K[\alpha]$ chama-se *extensão simples* de K.

Teorema 2*:

De acordo com a definição 2 temos que $K[\alpha] = \{p(\alpha) : p(x) \in K[x]\}$.

Teorema 3*:

De acordo com a definição 2 temos que

$$K(\alpha) = \left\{ \frac{p(\alpha)}{q(\alpha)} : p(x), q(x) \in K[x], q(\alpha) \neq 0 \right\}.$$

Teorema 4:*

Seja K um corpo e $p(x) \in K[x]$ um polinómio irredutível. Existe uma extensão de K na qual $p(x)$ tem uma raiz.

Definição 4:

Sejam K^* uma extensão de K e $p(x)$ um polinómio irredutível. Quando $p(x)$ tem uma raiz em K^* dizemos que K^* é um *corpo de ruptura de* $p(x)$.

Exemplo:

Construímos C a partir de IR, juntando um só elemento, i. C é pois uma extensão simples de IR, dado que C=IR[i]. Diz-se também que C é um corpo de ruptura de x^2+1 pois x^2+1 tem uma raiz, aliás duas, i e $-i$, em C.

Teorema 5:*

Seja $f(x)$ um polinómio de grau não inferior a 1. Então existe uma extensão de K na qual $f(x)$ se decompõe em factores lineares (isto é, de grau 1), salvo a multiplicação por uma constante.

Definição 5:

Seja F uma extensão do corpo K e $a \in F$. Diz-se que a é *algébrico sobre* K quando a é raiz de algum polinómio não nulo de $K[x]$. Ou seja, a é *algébrico sobre* K se $\exists p(x) \in K[x] \setminus \{0\} : p(a) = 0$.

Caso contrário, a diz-se *transcendente sobre* K.

Exemplo:

(i) $\sqrt{2} \in IR$ é algébrico sobre Q pois é raiz de x^2-2.

(ii) $i \in C$ é algébrico sobre IR pois é raiz de x^2+1.

Definição 6:

Seja F uma extensão do corpo K. Dizemos que F é uma *extensão algébrica de* K quando todo o elemento de F é algébrico sobre K.

Caso contrário, F diz-se uma *extensão transcendente de* K.

Exemplo:

C é uma extensão algébrica de IR.

Teorema 6:

Seja F uma extensão de K e $a \in F$ algébrico.

Existe um e um só polinómio irredutível com coeficiente director igual a 1, $p(x) \in K[x]$ tal que, a é raiz de $p(x)$.

Qualquer polinómio de $K[x]$ que tenha a como raiz é múltiplo de $p(x)$, o qual tem grau mínimo entre os polinómios que admitem a raiz a.

Demonstração:

Por hipótese $a \in F$ é algébrico sobre K, pelo que existe um polinómio (de grau n)

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n \in K[x],$$

do qual a é raiz.

Logo $f(a) = 0$, isto é, $c_0 + c_1 a + c_2 a^2 + \ldots + c_n a^n = 0$.

Assim $\frac{c_0}{c_n} + \frac{c_1}{c_n} a + \frac{c_2}{c_n} a^2 + \ldots + \frac{c_n}{c_n} a^n = 0$,

portanto a é raiz do polinómio

$$\frac{c_0}{c_n} + \frac{c_1}{c_n} x + \frac{c_2}{c_n} x^2 + \ldots + x^n$$ (tem coeficiente director igual a 1).

Seja $p(x)$ um polinómio com coeficiente director igual a 1 de grau mínimo que admita a raiz a.

Será que $p(x)$ é irredutível?

Se $p(x)$ é redutível então existe $g(x)$ divisor (não associado a $p(x)$ nem polinómio de grau zero) de $p(x)$.

$$1 \leq gr[g(x)] < gr[p(x)].$$

$$\exists h(x) \in K[x]: p(x) = g(x) \cdot h(x).$$

Notemos que

$$gr[p(x)] = gr[g(x)] + gr[h(x)]$$

$$\therefore gr[h(x)] < gr[p(x)]$$

$$0 = p(a) = g(a) \cdot h(a)$$
$$\Rightarrow g(a) = 0 \quad \text{ou} \quad h(a) = 0$$
$$\Rightarrow a \text{ é raiz de } g(x) \quad \text{ou} \quad a \text{ é raiz de } h(x).$$

o que é absurdo porque $p(x)$ é um polinómio de grau mínimo entre aqueles que admitem a raiz a.

Portanto $p(x)$ é irredutível.

Por outro lado, se $f(x) \in K[x]$ admite também a raiz a, temos que $\exists q(x), r(x) \in K[x]: f(x) = p(x) \cdot q(x) + r(x)$ onde $gr[r(x)] < gr[p(x)]$ ou $r(x) = 0$.

Assim

$$0 = f(a) = \underbrace{p(a)}_{0} \cdot q(a) + r(a)$$

$$0 = r(a).$$

Como $p(x)$ é o polinómio de grau mínimo que tem a raiz a e $gr[r(x)] < gr[p(x)]$ e $r(a) = 0$ então $r(x) = 0$.

Logo concluímos que $r(x) = 0$.

$$f(x) = p(x) \cdot q(x).$$
$$\therefore f(x) \text{ é múltiplo de } p(x).$$

A unicidade é óbvia, pois qualquer polinómio que admita a como raiz é múltiplo de $p(x)$.

c.q.d.

Definição 7:

Nas condições do teorema anterior, o polinómio $p(x)$, chama-se o *polinómio mínimo do elemento a.*

Se $p(x)$ tem grau n, o elemento a diz-se *algébrico de grau n* sobre o corpo K.

Teorema 7*:

Se a é um elemento algébrico de grau n sobre K, então $K[a]$ é um espaço vectorial sobre K de dimensão n, sendo $1, a, \ldots, a^{n-1}$ uma base de $K[a]$ sobre K.

Reciprocamente, se $K[a]$, encarado como espaço vectorial sobre K tem dimensão finita n, então a é algébrico de grau n sobre K.

Teorema 8*:

Seja F uma extensão finita de K.

F é uma extensão finita se e só se F pode ser obtido pela adjunção sucessiva de um número finito de elementos algébricos sobre K.

Teorema 9*:

Sejam K, F e W corpos tais que $K \subseteq F \subseteq W$.

Se F é extensão algébrica de K e W é extensão algébrica de F, então W é extensão algébrica de K.

Neste momento já temos alguns conceitos da teoria dos corpos para apreciar a teoria de Galois.

5. Teoria de Galois

"Bonita", "estruturada", "rica", "elegante", estas são as palavras usadas em várias introduções à teoria de Galois, onde a teoria dos grupos e a teoria dos corpos estão intimamente ligadas, capazes de se explicarem mutuamente.

A teoria é suficientemente capaz de navegar por si só, assim iremos em primeiro lugar introduzi-la (através da definição de alguns conceitos e da descrição de alguns teoremas) para então depois admirá-la.

Consideremos um corpo K e uma sua extensão L.

Definição 9:

Chamamos *automorfismo-K de L* um automorfismo φ de L tal que

$$\varphi(z) = z, \quad \forall z \in K.$$

Teorema 10*:

Designemos por $G(L:K)$ o conjunto de todos os automorfismos-K de L. Então:

(i) $G(L:K)$ é um grupo relativamente à operação de composição de aplicações.

(ii) Se K' é um subcorpo de L tal que $K \subseteq K' \subseteq L$ (*corpo intermédio* da extensão $K \subseteq L$) então $G(L:K') \leq G(L:K)$.

Definição 10:

O grupo $G(L:K)$ toma o nome de *grupo de Galois* da extensão L de K.

Teorema 11*:

Seja $H \leq G(L:K)$. O conjunto $C(H) = \{x \in L : \varphi(x) = x, \forall \varphi \in H\}$ é um corpo intermédio da extensão L de K, que toma o nome de *corpo fixo de H*.

Teorema 12:*

Qualquer conjunto de automorfismos (distintos) do corpo L é linearmente independente, ou seja,

se $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ são n automorfismos quaisquer de L então

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0_L, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Teorema 13:*

Seja L uma extensão finita de K e $H = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$ um subgrupo de $G(L:K)$.

Então, $[L : C(H)] = m = |\text{H}|$.

Corolário 14*:

Se $[L : K] = n$ então $|G(L:K)| \leq n$.

Definição 11:

Seja K um corpo e $a(x) = a_0 + a_1 x + a_1 x^2 + \ldots + a_n x^n \in K[x]$.

Chama-se *derivada de* $a(x)$ o polinómio $a'(x) = a_1 + 2a_2 x + \ldots + n a_n x^{n-1}$.

Teorema 15:*

Se K tem característica 0 então um polinómio irredutível em $K[x]$ não pode ter raízes múltiplas.

Demonstração:

Suponhamos que $a(x) \in K[x]$ é irredutível e tem uma raiz múltipla c. Então numa certa extensão K temos que

$$a(x) = (x-c)^2 \cdot q(x)$$

$$\Rightarrow a'(x) = 2(x-c) \cdot q(x) + (x-c)^2 \cdot q'(x)$$

e então c é raiz de $a'(x)$.

Seja $p(x)$ o polinómio mínimo de c sobre K.

Uma vez que $a(x)$ e $a'(x)$ têm a raiz c então

$$p(x) | a(x) \quad \text{e} \quad p(x) | a'(x).$$

$$\Rightarrow p(x) = a(x)$$

$$\Rightarrow a(x) | a'(x)$$

$$\Rightarrow a'(x) = 0.$$

Sendo

$$a(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \quad \text{com} \quad a_n \neq 0$$

$$a'(x) = a_1 + 2a_2 + \ldots + n a_n x^{n-1}$$

e portanto $n a_n = 0$ o que implica que $c(K) \neq 0$.

$\therefore a(x)$ não tem raízes múltiplas em qualquer extensão de K.

c.q.d.

Exemplo:

Reparemos que o polinómio $x^2 - 2 \in Q[x]$ é irredutível. As suas raízes não são múltiplas.

Corolário 16:*

Se um corpo K tem característica 0 então, toda a extensão finita de K é uma extensão simples.

Sendo K um corpo qualquer e $f(x)\in K[x]$, sabemos que existe um corpo, extensão de K, no qual $f(x)$ se decompõe em factores lineares.

Por exemplo, seja $f(x)=x\ -4x^2-5\in Q[x]$

Então $f(x)=(x-i)\cdot(x+i)\cdot(x-\sqrt{5})\cdot(x+\sqrt{5})$ em $C[x]$. O mesmo acontece com $f(x)$ em $Q(i,\sqrt{5})\subset C$. Como $Q(i,\sqrt{5})$ é a mais pequena extensão em que conseguimos decompor $f(x)$ então, denomina-se corpo de decomposição de $f(x)$ sobre Q.

Definição 12:

Seja $f(x)\in K[x]$ e L um extensão de K. Dizemos que L é um *corpo de decomposição de $f(x)$ sobre K,* quando:

(i) $f(x)$ se decompõe num produto de factores lineares em $L[x]$;

(ii) Se L' é um corpo intermédio da extensão $K\subseteq L$ e se $f(x)$ se decompõe em factores lineares em $L'[x]$ então $L'=L$.

Definição 13:

Se L é uma extensão de um corpo K, diz-se que é uma *extensão normal* quando todo o polinómio irredutível $p(x)\in K[x]$, que tenha uma raiz em L se decompõe em factores lineares em $L[x]$. Ou seja, se $p(x)$ tem uma raiz em L então, tem todas as raízes em L.

Exemplo:

(i) C é uma extensão normal de IR.

(ii) IR não é uma extensão normal de Q pois, observemos o seguinte contra-exemplo:

o polinómio $(x\ -2)\cdot(x^2+1)\in Q[x]$ apesar de ter uma raiz real, $\sqrt{2}\in IR$, tem duas raízes complexas, pois $\{i,-i\}\subset C$ e $i\notin IR$.

(iii) Se $[L:K]=2$ então L é uma extensão normal de K. Vejamos como...

Suponhamos que $p(x)\in K[x]$ é irredutível e seja $\alpha\in L$ uma raiz de $p(x)$.

Assim $2 = [L:K] = [L:K(\alpha)] \cdot [K(\alpha):K)]$

Logo $[K(\alpha):K] \leq 2$ pelo que $p(x)$ se decompõe

$$x^2 + bx + c \in K[x]$$

$$(x-\alpha)\cdot(x-\beta) = x^2 - \underbrace{(\alpha+\beta)}_{b}x + \alpha\beta$$

$$\underbrace{b}_{\in K} = \underbrace{\alpha+\beta}_{\in K} \Rightarrow \beta = \underbrace{b}_{\in K} - \underbrace{\alpha}_{\in L} \in L$$

$$\Rightarrow \beta \in L.$$

Teorema 17*:

Uma extensão L de um corpo K é finita e normal se e só se L é corpo de decomposição de algum polinómio sobre K.

Definição 14:

(i) Um polinómio irredutível $f(x) \in K[x]$ é *separável sobre K* quando não tem raízes múltiplas em qualquer corpo de decomposição.

(ii) Um polinómio é *separável sobre K* quando todos os seus factores irredutíveis o são.

(iii) Se L é uma extensão de K, um elemento $\alpha \in L$, algébrico sobre K é *separável sobre K* quando o seu polinómio mínimo o é.

Teorema 18*:

Seja L uma extensão algébrica separável de K e M um corpo intermédio então:

M é uma extensão separável de K

e

L é uma extensão separável de M.

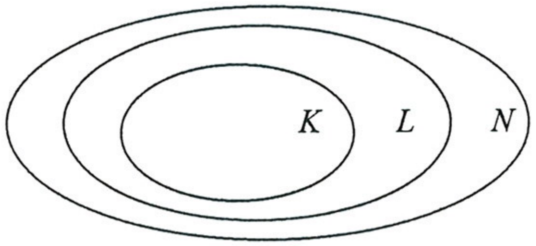
Definição 15:

Seja L uma extensão algébrica de K. Chama-se *fecho normal* dessa extensão, uma extensão N de L tal que:

(i) N é uma extensão normal de K.

(ii) Se M é um corpo intermédio entre L e N e é extensão normal de K, então $M = N$.

Ou seja, o fecho normal é a mais pequena extensão normal de K que contém L.



6. Solução por radicais

O principal problema da teoria de Galois, consiste na obtenção de condições tal que, para uma dada equação polinomial, se encontre um algoritmo que permita calcular as respectivas raízes efectuando sobre os coeficientes as operações de adição, subtracção, multiplicação, divisão e radiciação. Dizemos neste caso, que a equação é *solúvel por meio de radicais.*

Definição 16:

Seja G um grupo. Chamamos *série* em G a uma sequência

$$G_1, G_2, \dots, G_m, G_{m+1}$$

de grupos de G tal que:

(i) $G_0 = \{1\}$;

(ii) $G_{m+1} = G$;

(iii) $G_i \trianglelefteq G_{i+1}$ [1], $i = 0, \dots, m$.

$$\{1\} = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq G_m \trianglelefteq G_{m+1} = G$$

Caso os grupos sejam todos distintos diz-se que a série considerada tem *comprimento m.*

Uma série em G diz-se *abeliana* quando todos os seus factores são grupos abelianos.

Quando um grupo tem uma série abeliana dizemos que G é um *grupo resolúvel.*

Teorema 19:*

O grupo simétrico S_n, [2] com $n > 4$, não é resolúvel.

---

(1) O símbolo $\trianglelefteq$ significa que o grupo G_i é um subgrupo invariante de G_{i+1}. Ou seja, H é um *subgrupo invariante* de G, isto é, $H \trianglelefteq G$ se $xHx^{-1} = H$, $\forall x \in G$.

(2) S_n é o grupo das permutações de n elementos.

Definição 17:

1. Seja L uma extensão de um corpo K. Dizemos que L é uma *extensão radical* quando $L = K(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)$ onde, para cada $i = 1,2,\ldots,m$, existe um inteiro n_i tal que

(i) $\alpha_1^{n_1} \in K$;

(ii) $\alpha_i^{n_i} \in K(\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1}), i > 1$.

2. Se K é um corpo de característica 0 e $f(x) \in K[x]$, seja L um corpo de decomposição de $f(x)$ de K. Dizemos que f é *solúvel por meio de radicais* quando existe um corpo M, extensão de L, que seja uma extensão radical.

Teorema 20*:

Se K é um corpo de característica 0 e $K \subseteq L \subseteq M$ onde M é uma extensão radical de K então o grupo de Galois $G(L:K)$ é resolúvel.

Definição 18:

Seja L corpo de decomposição de $f(x) \in K[x]$ sobre K. Chamamos *grupo de Galois de f(x) sobre K* o grupo

$$G_f = G(L:K).$$

Teorema 21*:

Seja K é um corpo de característica 0 e $f(x) \in K[x]$.

Se $f(x)$ é solúvel por meio de radicais então, G_f é um grupo resolúvel.

Se existisse uma fórmula que fornecesse as raízes de qualquer polinómio de grau n em termos dos seus coeficientes, então isso iria também descrever as raízes da equação $x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_1x + c_0 = 0$.

Lema 22:*

Seja p um número primo e $f(x) \in Q[x]$ um polinómio irredutível de grau p.

Se $f(x)$ tem dois e só dois zeros complexos não reais então G_f é o grupo simétrico S_p.

Exemplo:

Mostramos de seguida que o polinómio $x^5 - 6x + 3$ não é solúvel por meio de radicais sobre Q.

Recorrendo ao critério de irredutibilidade de Eisenstein verificamos que o polinómio $f(x) = x^5 - 6x + 3$ é irredutível em $Q[x]$. Pois, 3 é primo e $3|3$; $3|6$; $3\nmid 1$; $3^2 \nmid 3$.

Repare-se que

$$f(-2) = -17;$$
$$f(-) = 8;$$
$$f(1) = -2;$$
$$f(2) = 23.$$

Pelo teorema de Bolzano concluímos que $f(x)$ tem pelo menos três raízes reais.

Assim, para aplicarmos o lema anterior, é necessário averiguarmos se as outras raízes são ou não reais.

$$f'(x) = 5x^4 - 6.$$

Como Q tem característica 0 e $f(x)$ é irredutível, o polinómio só tem raízes simples.

Assim, pelo teorema de Rolle(3) f não pode ter mais do que três raízes reais. Donde, pelo lema anterior $G_f = S_5$ não é resolúvel.

Então pelo teorema 21, f não é solúvel por meio de radicais.

---

(3) Entre dois zeros da derivada existe no máximo um zero da função.

Capítulo VI-Teorema Fundamental da Álgebra

"Não há ramo na Matemática, ainda que abstracto que não possa um dia ser aplicado a algum fenómeno do mundo real."

Lobachevsky

Capítulo VI – Teorema Fundamental da Álgebra

1. Conceitos básicos

Antes de enunciarmos o estudo do Teorema Fundamental da Álgebra iremos definir alguns conceitos que lhe são inerentes.

Definição 1: Chamamos *polinómio complexo* numa indeterminada x a uma expressão da forma

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

onde os coeficientes a_i $(0 \leq i \leq n)$ são números complexos. [1]

- Se todos os coeficientes forem números reais, dizemos que se trata de um *polinómio real.*

- Se todos os coeficientes forem nulos, o polinómio chama-se *polinómio zero.*

Definição 2: O polinómio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ diz-se de *grau n* se $a_n \neq 0$ e a_n chama-se o *coeficiente director.*

- Se $n = 0$ o polinómio diz-se *constante* e nos casos em que $n > 0$ diz-se *não constante.*

- Se o coeficiente director for igual a 1 o polinómio diz-se *mónico.*

Observação: Um polinómio de grau 1 diz-se *linear* ou *binomial*, um polinómio de grau 2 diz-se *quadrático*, um polinómio de grau 3 diz-se *cúbico*, um polinómio de grau 4 diz-se *quártico*, um polinómio de grau 5 diz-se *quíntico*, e assim sucessivamente.

---

[1] Quando dizemos que $z = x + yi \in C$ é um número complexo, não estamos a excluir a possibilidade de a parte imaginária $\Im(z) = y$ ser nula e z se reduzir à sua parte real, isto é, $z = \Re(z) = x$ ser um número real.

Definição 3: Os polinómios $p(x)$ e $q(x)$ dizem-se *iguais* ou *idênticos* se e só se tiverem o mesmo grau e os mesmos coeficientes.

Definição 4: Um número complexo c é uma *raiz* (ou *zero*) do polinómio

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

se e só se $p(c) = 0$, isto é,

$$p(c) = a_n c^n + a_{n-1}c^{n-1} + \ldots + a_1 c + a_0 = 0..$$

Também dizemos, neste caso, que c é uma *solução da equação polinomial* $p(x) = 0$.

2. História resumida do Teorema Fundamental da Álgebra

O *Teorema Fundamental da Álgebra* (abreviadamente, TFA [2]) é actualmente conhecido como a proposição de que

> *todo o polinómio complexo não constante, numa indeterminada x, possui, pelo menos, uma raiz complexa.*

O TFA foi demonstrado por Carl Gauss em 1799 num trabalho que constitui a sua tese de doutoramento, com o título bem descritivo *"Nova demonstração do teorema de que toda a função racional inteira de uma variável pode ser decomposta em factores reais do primeiro ou segundo graus"*. Gauss voltou posteriormente a fazer mais três demonstrações deste teorema, a última das quais em 1849.

O título do trabalho de Gauss sugere, por um lado, que existiriam tentativas de demonstrações anteriores e, por outro, que a questão essencial era a da decomposição em factores reais (isto é, com coeficientes reais) lineares ou quadráticos (ou seja, de uma das formas $ax + b$ ou $ax^2 + bx + c$), questão que é, aliás, equivalente à da existência de raízes complexas.

---

[2] Infelizmente, esta sigla também designa o *Teorema Fundamental da Aritmética* (existência e unicidade da decomposição em factores primos) mas, nesta secção, refere-se exclusivamente ao teorema enunciado para os polinómios.

No século XIX, a Álgebra ainda era essencialmente entendida como a teoria dos polinómios com coeficientes reais ou complexos ou, se quisermos, como a teoria das equações algébricas, sendo o TFA considerado como o teorema fundamental desta teoria. Mas, ao contrário da ênfase que tinha sido dada no passado, não era tanto a obtenção de soluções de equações da forma $p(x)=0$ como a questão da existência de soluções (em C) que ocupava o centro de interesse de Gauss pois, a existência era considerada longe de trivial.

A importância maior do TFA para a história das equações algébricas (bem como para a dos números complexos) é simplesmente o facto de ter sido possível demonstrá-lo, o que abriu o caminho para o reconhecimento e desenvolvimento dos números complexos e da Análise Complexa em toda a sua plenitude.

Mencionemos alguns antecedentes históricos do TFA, começando pelos êxitos, já descritos no capítulo IV, dos algebristas italianos seiscentistas na resolução das equações quadráticas, cúbicas e quárticas gerais, conseguindo exprimir sempre as respectivas raízes por meio de radicais, em função dos coeficientes. Em algumas dessas resoluções verificou-se que se podia trabalhar com quantidades mais gerais do que números complexos. Essa descoberta foi feita aquando da aplicação da fórmula de Ferro-Tartaglia-Cardano que fornecia as raízes de uma equação cúbica. A fórmula quando aplicada à equação $x^3=15x+4$ fornecia uma resposta que envolvia $\sqrt{-121}$, no entanto Bombelli sabia que a equação tinha como solução $x=4$. Com alguma perícia, Bombelli foi capaz de manipular os seus "números complexos" e obter a resposta correcta. Foi na resolução de equações cúbicas que os números "imaginários" fizeram uma fugaz e incontornável aparição, (3) como que a anunciar para a posteridade que não podiam deixar de ser considerados em certas situações.

A quíntica geral resistiu a todas as tentativas de resolução por meio de radicais, mas por boa razão, pois tais expressões para as raízes são, em geral, impossíveis de obter, como veio a demonstrar N. Abel em 1826.(4) Todavia, até à altura em que Gauss se debruçou sobre o assunto, quase todos os matemáticos acreditavam na existência de raízes em alguma "terra de ninguém" (como diríamos hoje, na linguagem da teoria de Galois, uma extensão do corpo C) e, desenvolviam métodos imaginativos para mostrar que tais soluções eram, na realidade, números complexos, mas não existia uma prova geral de que fosse sempre assim.

(3) É claro que a equação quadrática $ax^2+bx+c=0$ também tem soluções complexas (quando o discriminante é negativo), mas os matemáticos podiam dizer (e diziam!) que nesse caso não havia soluções. Até à época de Descartes, pelo menos, também diziam que as soluções negativas não eram soluções "reais"!

(4) B. L. Van der Waerden, *A history of algebra from Al-Khwarizmi to Emmy Noether*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York Tokyo, 1985, 85-88.

Albert Girard, na sua *L'invention en algèbre*, em 1629, foi o primeiro a afirmar que há sempre n soluções (possivelmente repetidas), mas não o demonstrou. Descartes, na 3ª parte de *La Géometrie*, em 1637, descreve tudo o que se conhecia na época sobre equações, observa que um polinómio $p(x)$ que se anula em c é divisível por $x-c$.[5] Leibniz, na *Acta Eruditorum*, de 1702, considera a questão de saber se é sempre possível factorizar um polinómio em factores reais lineares ou quadráticos, mas cede pela negativa, face ao seguinte "contra-exemplo":

$$x^4 + a^4 = \left(x^2 - a^2 i\right)\cdot\left(x^2 + a^2 i\right)$$

$$= \left(x + a\sqrt{i}\right)\cdot\left(x - a\sqrt{i}\right)\cdot\left(x + a\sqrt{-i}\right)\cdot\left(x - a\sqrt{-i}\right),$$

no qual, segundo Leibniz, o produto de quaisquer dois factores lineares no membro à direita nunca é um polinómio quadrático real. Não ocorreu a Leibniz que $\sqrt{i}$ e $\sqrt{-i}$ pudessem ser da forma $a+bi$. No entanto,

$$\sqrt{i} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) \quad \text{e} \quad \sqrt{-i} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i),$$

donde resulta que

$$\left(x + a\sqrt{i}\right)\cdot\left(x + a\sqrt{-i}\right) = x^2 + a\sqrt{-i} + a\sqrt{i}x + a^2\sqrt{i}\sqrt{-i}$$

$$= x^2 + a\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)x + a\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)x + a^2\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$$

$$= x^2 + a\frac{\sqrt{2}}{2} - a\frac{\sqrt{2}}{2}ix + a\frac{\sqrt{2}}{2}x + a\frac{\sqrt{2}}{2}ix + a^2\frac{2}{4}\cdot 2$$

$$= x^2 + a\sqrt{2}x + a^2.$$

[5] Resultado que já referimos no capítulo anterior.

O que significa que o produto do 1° e do 3° factores é um polinómio real do segundo grau. Analogamente determina-se que o produto do 2° e 4° factores é polinómio real do segundo grau, igual a $x^2+2ax+a^2$ obtendo-se a seguinte factorização:

$$x^4+a^4=\left(x^2+a\sqrt{2}x+a^2\right)\cdot\left(x^2-a\sqrt{2}x+a^2\right)$$

O que também escapou a Leibniz foi o facto de que a factorização acima resultaria facilmente da identidade

$$x^4+a^4=\left(x^2+a^2\right)^2-2a^2x^2.$$

O exemplo acima serve para ilustrar um ponto histórico importante. De facto, as hesitações de Leibniz não são de espantar, pois somente no século XVIII, antes de Gauss se debruçar sobre o assunto, a questão que ocupava os algebristas não era tanto a de saber se as equações algébricas possuíam solução, mas sim a de saber que forma elas tinham, e não era de todo claro que pudessem ser sempre expressas na forma $a+bi$ com a, b reais (a notação $i=\sqrt{-1}$ foi introduzida por Euler em 1777). Pelo contrário, acreditava-se que pudesse haver uma hierarquia de "quantidades imaginárias", de que as da forma $a+bi$ seriam as mais simples.

Euler, em carta a Bernoulli de 1742, enuncia o teorema da factorização na forma que Leibniz formulara hipoteticamente. Na resposta, Bernoulli aponta um presumível contra-exemplo, o do polinómio $x^4-4x^3+2x^2+4x+4$, cujas raízes são

$$x_{1,2}=1\pm\sqrt{2+i\sqrt{3}},\quad x_{3,4}=1\pm\sqrt{2-i\sqrt{3}}. \qquad (1)$$

Vejamos como, recorrendo ao processo descrito no capítulo IV, se obtém as raízes (1) da equação quártica acima.

Considerando a mudança de variável $x=y+1$ eliminamos o termo em y^3, obtendo-se a equação biquadrada $y^4-4y^2+7=0$, cujas raízes são

$$y_{1,2}=\pm\sqrt{2+i\sqrt{3}},\quad y_{3,4}=\pm\sqrt{2-i\sqrt{3}}.$$

Logo obtém-se (1).

Perante a decomposição da equação quártica acima, Euler desfez a dúvida mostrando que os produtos $(x-x_1)\cdot(x-x_3)$ e $(x-x_2)\cdot(x-x_4)$ são polinómios reais do segundo grau.

Note-se que, de facto, se tem:

$$(x-x_1)\cdot(x-x_3)=\left[x-\left(1+\sqrt{2+i\sqrt{3}}\right)\right]\cdot\left[x-\left(1+\sqrt{2-i\sqrt{3}}\right)\right]$$

$$=\left(x-1-\sqrt{2+i\sqrt{3}}\right)\cdot\left(x-1-\sqrt{2-i\sqrt{3}}\right)$$

$$=x^2-\left(2+\underbrace{\sqrt{2-i\sqrt{3}}+\sqrt{2+i\sqrt{3}}}_{a}\right)x+1+\underbrace{\sqrt{2-i\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+i\sqrt{3}}}_{\sqrt{7}}+\underbrace{\sqrt{2-i\sqrt{3}}+\sqrt{2+i\sqrt{3}}}_{a}$$

$$=x^2-(2+a)x+1+\sqrt{7}+a,$$

onde $a=\sqrt{4+2\sqrt{7}}$, pois

$$a^2=\left[\left(\sqrt{2-i\sqrt{3}}\right)+\left(\sqrt{2+i\sqrt{3}}\right)\right]^2=2-i\sqrt{3}+2+i\sqrt{3}+2\cdot\underbrace{\sqrt{2-i\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+i\sqrt{3}}}_{\sqrt{7}}=4+2\sqrt{7}.$$

Analogamente tem-se que

$$(x-x_2)\cdot(x-x_4)=x^2-(2-a)x+1+\sqrt{7}-a,\text{ onde } a=\sqrt{4+2\sqrt{7}}.$$

Quatro anos mais tarde, Euler tenta uma demonstração rigorosa para os polinómios reais (com coeficientes reais) de grau menor ou igual a 6, todavia com algumas falhas e passos omissos. Entretanto, já tinha descoberto e anunciado ao seu amigo Goldbach[(6)] o facto conhecido de que as raízes

[(6)] Cristian Goldbach (1690-1764) é mais conhecido como autor de uma famosa *conjectura* com o seu nome, a de que todo o número natural par $n \geq 4$ é igual a uma soma $n = p + q$ com p e q primos (possivelmente iguais).

complexas são sempre aos pares (complexos conjugados $a \pm bi$)[7] e que tais pares dão sempre factores quadráticos reais.[8] Goldbach responde cepticamente, mencionando um presumível contra-exemplo, o do polinómio $x^4 + 72x^2 - 20$, mas Euler é ágil a factorizá-lo (as raízes são $\pm\sqrt{36 \pm 2\sqrt{329}}$).

Atribui-se a D'Alembert a primeira tentativa séria, em 1746, de demonstração do teorema de factorização na forma geral (razão pela qual o TFA também é conhecido por *Teorema de Gauss-D'Alembert*) por um processo de minimização de $|p(x)|$, que consiste em escolher convenientemente um $x = x_1$, depois um $x = x_2$ tal que $|p(x_2)| < |p(x_1)|$, depois um $x = x_3$ tal que $|p(x_3)| < |p(x_2)|$ e assim sucessivamente até que, no limite, se obtém um x tal que $|p(x)| = 0$.

Na primeira parte da sua tese em 1779, Gauss critica e aponta as deficiências das "demonstrações" propostas por Euler e por D'Alembert (bem como as de outros matemáticos), mas reconhece o valor da ideia principal da argumentação de D'Alembert e exprime a sua convicção de que ela pode ser elaborada de modo a produzir uma demonstração rigorosa. É exactamente isso que Argand consegue fazer em 1814. Também Lagrange em 1772 e Laplace em 1795 tentam demonstrar o teorema, o primeiro através de uma melhoria das ideias de Euler (mas apelando a raízes "fictícias") e o segundo por um processo inteiramente novo, de natureza mais "algébrica".

Como se observa pela descrição anterior, não foram poucas as tentativas de demonstração do TFA, por métodos bastante diversos, umas mal, outras bem sucedidas, umas topológicas, outras algébricas, e algumas mais recentes recorrendo à Análise Complexa e outras ideias ainda. A mais simples de todas talvez seja a de Argand em 1814, utilizando todavia o facto verdadeiro mas ainda não justificado, naquela época, de que uma função real definida

---

(7) Quando se resolvem equações do segundo grau, as soluções complexas não reais aparecem sempre aos pares. Vejamos como essa situação é geral.

Se $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ é um polinómio de coeficientes reais e β é uma raiz de $p(x)$, então $\overline{\beta}$ também é uma raiz de $p(x)$, ou seja, $p(\overline{\beta}) = 0$.

Sabendo que o conjugado da soma, do produto e da divisão (bem definida) de dois números complexos, é igual à soma, multiplicação e divisão dos conjugados dos referidos números complexos, respectivamente, e que, todo o número real complexo que é igual ao se conjugado é um número real, tem-se que:

$$\begin{aligned} p(\overline{\beta}) = a_n\overline{\beta}^n + a_{n-1}\overline{\beta}^{n-1} + \ldots + a_0 &= \overline{a_n\beta^n} + \overline{a_{n-1}\beta^{n-1}} + \ldots + \overline{a}_0 \\ &= \overline{a_n\beta^n + a_{n-1}\beta^{n-1} + \ldots + a_0} = \overline{p(\beta)} = \overline{0} = 0. \end{aligned}$$

(8) Se $z = a + bi$, com a, b reais, então $z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2 \in \mathrm{IR}$.

contínua num conjunto D limitado e fechado do plano tem um valor máximo e um valor mínimo (conhecido posteriormente por *Teorema de Weierstrass* no plano, real ou complexo).[9] Daremos adiante uma versão desta demonstração.

Actualmente são conhecidas cerca de vinte demonstrações do TFA (sob qualquer das formas possíveis - existência de raiz complexa ou decomposição em factores lineares ou quadráticos), todavia, foi Gauss, como já se referiu, o principal responsável pela mudança de atitude dos matemáticos face aos números complexos, e, tal como refere o prof. Dr. A. J. Franco de Oliveira, *"removendo uma auréola de mistério e misticismo de que estavam revestidos até então, de que ainda permanecem alguns vestígios na terminologia usada."* Assim, foi só com Gauss que fica inteiramente claro que os métodos algébrico-analíticos de resolução de equações polinomiais $p(x) = 0$ nunca nos levam para fora do corpo dos números complexos (que são, todos, da forma $a + bi$ com a, b reais). É de realçar ainda que com Gauss a mera questão do "cálculo" das raízes dá lugar à questão da existência de raízes como questão preliminar e fundamental para qualquer busca subsequente.

[9] Argand já tinha publicado dois anos antes, *"Essai sur une maniére de representer les quantités imaginaires dans les constructions géometriques"*. Nesse trabalho Argand interpretou i como a rotação de 90º do plano, dando origem ao denominado *plano de Argand* ou *diagrama de Argand* como uma representação geométrica dos números complexos. Num outro trabalho, *"Reflexions sur la nouvelle théorie d'analyse"*, Argand simplificou a ideia de D'Alembert usando um teorema geral sobre a existência de um mínimo numa função contínua.

3. Uma demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra

A demonstração que iremos fazer recorre a alguns conceitos e teoremas da Análise, nomeadamente:

- a continuidade das funções polinomiais[10];
- o teorema de Weierstrass no plano;
- o *princípio do ínfimo*[11].

Para demonstrarmos o Teorema fundamental da Álgebra iremos demonstrar dois resultados preliminares (lemas), dos quais o TFA é uma simples consequência.

Lema 1: Se $p(x)$ é um polinómio complexo, então a função real de variável real $x \to |p(x)|$ tem um mínimo em algum ponto

Demonstração: Suponhamos que $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ de grau $n \geq 1$[12],

então tem-se que:

$$|p(x)| = |a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0|$$

$$= \left| z^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \ldots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n} \right) \right|$$

$$= |z^n| \cdot \left| a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \ldots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n} \right|$$

$$= |z|^n \cdot \left| a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \ldots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n} \right| \to +\infty, \qquad \text{quando } |z| \to +\infty, \quad \text{pois } n \geq 1.$$

[10] Definimos *polinómio*, numa indeterminada *x*, $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ como uma expressão de tipo especial. Outra coisa é a *função polinomial complexa de variável complexa* $p: C \to C$ por ele definida, tal que para todo $z \in C$, $p(z) = a_n z^n + \ldots + a_0$. (Será uma função real de variável real, se o polinómio for real). Todavia, por abuso de linguagem, identificável pelo contexto, também utilizamos, por vezes, a mesma designação $p(x)$ para o polinómio e para a função polinomila associada.

[11] O *princípio do ínfimo* refere que todo o conjunto não vazio e minorado de números reais tem ínfimo (o maior dos minorantes).

[12] O caso em que $n = 0$ (polinómio constante) é óbvio.

Deste modo, o conjunto dos números reais $\{|p(z)| : z \in C\}$ é limitado inferiormente e é não vazio, logo tem ínfimo, designemo-lo por m.

Por outro lado, como $|p(z)|$ é grande para $|z|$ grande, então m é também o ínfimo dos valores de $|p(z)|$ para z pertencente a um disco ou círculo de raio r, denominemo-lo por D, onde $D = \{z \in C : |z| \leq r\}$ com r suficientemente grande.

Como a função polinomial $p(x)$ é contínua em todo o plano e, em particular, no disco D, que é um conjunto limitado e fechado, então ela tem um mínimo em algum ponto $x_0 \in D \subset C$.

c.q.d.

Lema 2: Seja $p(x)$ um polinómio complexo não constante. Se $p(x_1) \neq 0$, então $|p(x_1)|$ não é o valor mínimo absoluto de $|p(x)|$.

Demonstração: Seja $p(x)$ um polinómio complexo não constante e $x_1 \in C$ tal que $p(x_1) \neq 0$.

Podemos supor, sem perda de generalidade, que $p(0) = 1$. [13] Assim, como $p(0) \neq 0$ basta mostrarmos que 1 não é o valor mínimo de $|p(x)|$. Usando a mesma designação que no lema 1, equivale a provar que $x_0 \neq 1$.

Seja k o expoente mais pequeno, não nulo, das potências de x que ocorrem em $p(x)$. Então pode-se escrever que

$$p(x) = 1 + ax^k + (\text{termos de grau maior que } k).$$

Seja ainda α uma raiz índice k de $-\frac{1}{a}$, isto é, $\alpha^k = -\frac{1}{a}$.

---

[13] Fazendo a mudança de variável $u = x + x_0$ (translação) obtemos um polinómio $q(u)$ tal que $q(0) \neq 0$, e se necessário, obtemos um polinómio que toma o valor 1 na origem.

Por exemplo, se $p(x) = x^2 - 1$ e $x_0 = 2$, então fazendo a mudança de variável, $u = x + x_0 \Rightarrow u = x + 2$, obtemos um outro polinómio $q(u)$ $q(u) = p(u-2) = (u-2)^2 - 1 = u^2 - 4u + 3 \Rightarrow q(u) = u^2 - 4u + 3$. Assim tem-se que $q(0) = 3$ e, considerando $h(u) = \frac{q(u)}{3}$, vem que $h(0) = \frac{q(0)}{3} \Leftrightarrow h(0) = 1$, ou seja, a partir de um polinómio dado conseguimos obter um outro que na origem toma o valor 1.

Façamos agora uma mudança de variável $x \to \alpha x$, de modo que podemos escrever

$$
\begin{aligned}
& p(x) = 1 + ax^k + (\text{termos de grau maior que } k) \\
& \Rightarrow p(\alpha\, x) = 1 + a(\alpha\, x)^k + (\text{termos de grau maior que } k) \\
& \Rightarrow p(\alpha\, x) = 1 + a\alpha^k x^k + (\text{termos de grau maior que } k) \\
& \Rightarrow p(\alpha\, x) = 1 + a\left(-\frac{1}{a}\right)x^k + (\text{termos de grau maior que } k) \\
& \Rightarrow p(\alpha\, x) = 1 - x^k + x^{k+1}q(x), \quad \text{para algum } q(x).
\end{aligned}
$$

Para $x > 0$ real suficientemente pequeno tem-se $x^k < 1$, isto é, $1 - x^k > 0$, donde

$$
\begin{aligned}
|p(x)| &= \left|1 - x^k + x^{k+1}q(x)\right| \\
&\leq \left|1 - x^k\right| + \left|x^{k+1}q(x)\right| \\
&= \Bigg|\underbrace{1 - x^k}_{>0}\Bigg| + \left|x^{k+1}\right| \cdot |q(x)| \\
&= 1 - x^k + x^{k+1}|q(x)| \\
&= 1 - x^k(1 - x|q(x)|).
\end{aligned}
$$

Ora, $x|q(x)|$ também se torna tão pequeno quanto se queira, de modo que existe $x_0 > 0$ tal que

$$
x_0|q(x_0)| < 1
$$

dond

$$
\begin{aligned}
& -x_0|q(x_0)| > -1 \\
& \Rightarrow 1 - x_0|q(x_0)| > 0 \\
& \Rightarrow x_0{}^k(1 - x_0|q(x_0)|) > 0 \\
& \Rightarrow -x_0{}^k(1 - x_0|q(x_0)|) < 0 \\
& \Rightarrow 1 - x_0{}^k(1 - x_0|q(x_0)|) < 1,
\end{aligned}
$$

e, portanto, como

$$
|p(x_0)| \leq 1 - x_0{}^k(1 - x_0|q(x_0)|) \quad \text{e} \quad 1 - x_0{}^k(1 - x_0|q(x_0)|) < 1,
$$

então tem-se que

$$|p(x_0)| < 1 = p(0),$$

o que mostra que $|p(0)|$ não é o valor mínimo de $|p(x)|$ e que prova o lema.

c.q.d.

Estamos agora em condições de demonstrar o Teorema Fundamental da Álgebra.

Teorema Fundamental da Álgebra:

Se $p(x)$ é um polinómio complexo não constante, então $p(x)$ tem, pelo menos, uma raiz em C.

Demonstração: Pelo lema 1, $|p(x)|$ tem mínimo em algum ponto $x_0 \in C$, mas, pelo lema 2, vem $|p(x_0)| = 0$, donde $p(x_0) = 0$, ou seja, x_0 é uma raiz complexa de $p(x)$.

Corolário 1:

Um polinómio complexo não constante factoriza-se completamente em factores lineares (reais ou complexos).

Por outras palavras:

se $p(x) \in C[x]$ tem grau $n \geq 1$, então $p(x)$ tem a seguinte factorização

$$p(x) = c(x - \alpha_1)...(x - \alpha_n),$$

onde $c, \alpha_1, ..., \alpha_n \in C$.

Demonstração: Basta considerar polinómios mónicos pois, se $a_n \neq 0$, as equações

$$a_n x^n + ... + a_0 = 0 \quad \text{e} \quad x^n + ... + \frac{a_0}{a_n} = 0$$

têm exactamente as mesmas raízes.

A demonstração é por indução completa no grau n do polinómio.

Se $n = 1$, o polinómio é linear e nada mais há a fazer.

Suponhamos (hipótese de indução) que o resultado é verdadeiro para todos os polinómios mónicos não constantes de grau menor do que n, e que $p(x)$ é um polinómio mónico não constante de grau $n > 1$.

Pelo TFA, $p(x)$ tem, pelo menos, uma raiz, digamos z_1, logo $x - z_1$ divide $p(x)$ e $p(x) = (x - z_1)q(x)$ para algum polinómio quociente (mónico) $q(x)$ de grau $n - 1 < n$. Pela hipótese de indução, $q(x)$ factoriza-se completamente em factores lineares (reais ou complexos), e é claro que também é assim para $p(x)$, cujos factores são $x - z_1$ e os factores de $q(x)$.

c.q.d.

A demonstração anterior contém também a informação suficiente para se poder extrair a conclusão adicional seguinte, uma vez que, de cada vez que se divide um polinómio de certo grau por um binómio (mónico), o grau do polinómio quociente baixa uma unidade, mas só é possível fazer isto n vezes, se n é o grau do polinómio inicial.

Corolário 2:

Se $p(x)$ é um polinómio complexo de grau $n \geq 1$ e as suas raízes (possivelmente com repetições) são $z_1, z_2, \ldots, z_n$, então

$$p(x) = a(x - z_1)\cdot(x - z_1)\ldots(x - z_1), \quad \text{com } a \in C.$$

Observe-se também que mais de n raízes distintas não poderá haver. [14]

Teorema 2: Um polinómio $p(x)$ de grau $n \geq 1$ sobre um corpo qualquer F tem no máximo n raízes em F.

[14] Pois se c é uma raiz qualquer e $p(x) = a(x - z_1)\cdot(x - z_2)\cdot\ldots\cdot(x - z_n)$, então $p(c) = a(c - z_1)\cdot(c - z_2)\cdot\ldots\cdot(c - z_n) = 0$, mas um produto de números complexos (ou reais) só se anula quando um factor, pelo menos, for nulo, de modo que terá de ser $c = z_i$ para algum i $(1 \leq i \leq n)$.

Demonstração: A demonstração será feita por indução em n.

Se $n=1$, então $p(x)=a_0+a_1x$ com $a_1 \neq 0$, e a única raiz é $-a_1^{-1}a_0$.

Assumamos então que $n>1$, e que o teorema é válido para polinómios de grau menor que n.

Se $p(x)$ não tem raízes tem-se o pretendido.

Se c é uma raiz, então pelo teorema da factorização única de polinómios $p(x)=(x-c)p_1(x)$ para algum $p_1(x) \in F[x]$, e $gr\, p_1(x)=n-1$.

Pela hipótese de indução $p_1(x)$ tem no máximo $n-1$ raízes em F. Segue-se então que $p(x)$ tem no máximo n raízes em F se $p(x)$ não tem raízes em F excepto c e as raízes de $p_1(x)$. O que é verdadeiro pois, se $a \in F$, então $p(a)=(a-c)p_1(a)$, e tem-se que $p(a)=0$ só se $a-c=0$ ou $p_1(a)=0$ (porque F não tem divisores de zero). Consequentemente $p(a)=0$ só se $a=c$ ou a é uma raiz de $p_1(x)$.

c.q.d.

Observámos que um polinómio sobre um determinado corpo pode não ter raízes nesse corpo. Por exemplo, x^2-2 e x^2+1 não tem raízes no corpo dos números racionais. Contudo, o TFA garante que cada polinómio sobre o conjunto dos números complexos tem pelo menos uma raiz complexa. De facto, podemos provar um resultado mais geral, no seguinte corolário.

Corolário 3: Cada polinómio de grau $n \geq 1$ sobre o corpo C dos números complexos tem n raízes em C.

Demonstração: Iremos provar o presente corolário por indução em n. Suponhamos que $p(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n \in C[x]$

Se $n=1$, então $p(x)$ tem uma raiz, nomeadamente, $-a_1^{-1}a_0$.

Suponhamos que o presente corolário é válido para todos os polinómios de grau menor que n.

Se $n>1$, então $p(x)$ tem uma raiz, digamos c, pelo TFA. Consequentemente, pelo teorema da factorização única de polinómios, $p(x)=(x-c)p_1(x)$ para algum $p_1(x) \in C[x]$, $gr\; p_1(x)=n-1$.

Pela hipótese de indução, $p_1(x)$ tem $n-1$ raízes em C, cada uma das quais é obviamente uma raiz de $p(x)$, tal como é c, e então $p(x)$ tem no mínimo n raízes em C. Pelo teorema 2, $p(x)$ tem no máximo n raízes em C. Consequentemente $p(x)$ tem exactamente n raízes em C.

c.q.d.

A terminar, mostramos que o TFA, na forma enunciada, não deixa de ser válido se apenas for demonstrado que *todo o polinómio real não constante possui uma raiz complexa*. De seguida, enunciamos e demonstramos um lema necessário à demonstração do corolário 4.

Lema 3: Se $a+bi$ é uma raiz de um polinómio $p(x)$ com coeficientes reais, então o seu conjugado $a-bi$ também é uma raiz de $p(x)$.

Demonstração: Assumimos que $b \neq 0$, pois, caso contrário, é trivialmente verdadeiro.

Como $a+bi$ é uma raiz de $p(x)$ então $x-(a+bi)$ é um factor de $p(x)$. Assim é suficiente mostrarmos que $x-(a-bi)$ é também um factor de $p(x)$. Iremos provar isso mostrando que

$$[x-(a+bi)]\cdot[x-(a-bi)] = [(x-a)-bi]\cdot[(x-a)+bi] = (x-a)^2+b^2$$

é um factor de $p(x)$.

Como $(x-a)+b^2 = x^2-2ax+(a^2+b^2)$ é um polinómio com coeficientes reais, podemos dividir $p(x)$ por ele, aplicando o Algoritmo da Divisão para polinómios em IR. Assim, existem $q(x)$, $r(x) \in \mathrm{IR}[x]$ únicos, tais que:

$$p(x) = \left[(x-a)^2+b^2\right]\cdot q(x)+r(x), \quad \text{com } r(x)=0 \text{ ou } gr[r(x)] < \underbrace{gr\left[(x-a)^2+b^2\right]}_{=2} \quad (1).$$

Se $r(x) \neq 0$, então $r(x)$ deve ser da forma $cx+d$. Então para $x=a+bi$ tem-se que:

$$0 = f(a+bi) = r(a+bi) = c(a+bi)+d = (ca+d)+cbi. \quad (2)$$

Acima usámos o facto de que $(x-a)^2+b^2=0$ para $x=a+bi$ pois $(x-a)^2+b^2 = [x-(a+bi)]\cdot[x-(a-bi)]$.

Mas por (2) tem-se que

$$(ca+d)+cbi = 0 \Rightarrow ca+d=0 \wedge cb=0.$$

Como $b \neq 0$, concluímos que $c = 0$ e que $d = 0$. Consequentemente $r(x) = 0$ e $[x-(a+bi)]\cdot[x-(a-bi)]$ é um factor de $p(x)$ por (1), como se pretendia.

c.q.d.

Corolário 4: Todo o polinómio $p(x) \in \mathrm{IR}[x]$ de grau ímpar tem uma raiz real.

Demonstração:[(15)] A demonstração é feita por indução em $n \geq 0$, onde $gr[f(x)] = 2n+1$, pois é um número ímpar.

Para $n = 0$ é obviamente verdadeiro. Seja $n \geq 1$ e u uma raiz complexa de $p(x)$.

Se u é real tem-se o pretendido. Caso contrário, $u = a + bi$ e pelo lema 3 o seu conjugado, $\bar{u} = a - bi$ também é uma raiz. Também se tem que $u \neq \bar{u}$ pois u não é real.

Pelo corolário 1 sabemos que existe uma factorização de $p(x)$ em $\mathrm{C}[x]$:

$$p(x) = (x-u)\cdot(x-\bar{u})\cdot s(x),$$

e, por esta razão, existe uma factorização em $\mathrm{IR}[x]$,

$$\begin{aligned} p(x) &= (x-u)\cdot(x-\bar{u})\cdot s(x) \\ &= \left(x^2 - \bar{u}x - ux + u\bar{u}\right)\cdot s(x) \\ &= \left(x^2 - (u+\bar{u})x + u\bar{u}\right)\cdot s(x) \\ &= \left(x^2 - 2ax + a^2 + b^2\right)\cdot s(x).^{(16)} \end{aligned}$$

Assim

$$s(x) = \frac{p(x)}{x^2 - 2ax + a^2 + b^2}$$

tem coeficientes reais e grau $(2n+1) - 2 = 2n - 1 = 2(n-1) + 1$. Ou seja, como $s(x)$ tem grau ímpar menor que o grau de $p(x)$, então está nas condições da hipótese de indução, logo $s(x)$ tem uma raiz real, por isso $p(x)$ tem uma raiz real.

c.q.d.

Para polinómios reais de grau par a questão não é tão simples. Precisamos de algumas noções e resultados preliminares.

---

(15) Esta demonstração assume que $f(x)$ tem uma raiz complexa (que advém do TFA). No entanto, para polinómios reais de grau ímpar, a existência de raízes reais até sai do conhecido teorema dos valores intermédios de Bolzano, pois toda a função polinomial

real é contínua e, se o polinómio é de grau ímpar, assume valores positivos e negativos, como é fácil de verificar.
(16) Recorde-se que $u = a + bi$.

Definição 5:

O *conjugado de um polinómio complexo* $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ é o polinómio complexo cujos coeficientes são os conjugados dos coeficientes de $p(x)$,

$$p(x) = \overline{a}_n x^n + \overline{a}_{n-1} x^{n-1} + \ldots + \overline{a}_1 x + \overline{a}_0 .$$

Iremos então enunciar e demonstrar algumas propriedades simples.

Lema 5: Para qualquer polinómio complexo $p(x)$,

(i) $p(z) = \overline{p}(\overline{z})$, para todo $z \in C$;

(ii) $p(x)$ é um polinómio real se, e só se, $p(x) = \overline{p}(x)$;

(iii) se $h(x) = p(x) \cdot q(x)$, então $\overline{h}(x) = \overline{p}(x) \cdot \overline{q}(x)$;

(iv) se $g(x)$ é um polinómio complexo, então $h(x) = g(x) \cdot \overline{g}(x)$ é um polinómio real.

Demonstração:

(i) Com $z \in C$, $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$, tem-se

$$p(z) = a_n z^n + \ldots + a_0 = \overline{a}_n \overline{z}^n + \ldots + \overline{a}_0 = \overline{p}(\overline{z}),$$

pois, como é sabido, o conjugado da soma e o conjugado do produto de dois números complexos é a soma e o produto dos respectivos conjugados. (17)

(ii) Se $p(x)$ é real, então para $i = 0, \ldots, n$, tem-se que $p(x) = p(\overline{x})$.

Reciprocamente se $p(x) = p(\overline{x})$, então $a_i = \overline{a}_i$ para todo o coeficiente a_i, logo $a_i \in \mathrm{IR}$ e $p(x) \in \mathrm{IR}[x]$

(17) Ou seja, para quaisquer números complexos z e w,
$z + w = z + w$, $z \cdot w = z \cdot w$ e, para qualquer inteiro positivo n, $z^n = \overline{z}^n$.

(iii) Sejam $p(x) = \sum_{i=1}^{r} a_i x^i$ e $q(x) = \sum_{j=1}^{s} b_j x^j$.

Assim $h(x) = p(x) \cdot q(x) = \sum_{k=1}^{r+s} \sum_{i+j=k} a_i b_j x^k$.

Logo

$$\overline{h}(x) = \overline{\sum_{k=1}^{r+s} \sum_{i+j=k} a_i b_j x^k} = \sum_{k=1}^{r+s} \sum_{i+j=k} \overline{a}_i \overline{b}_j x^k$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \overline{a}_i x^i \cdot \sum_{j=1}^{s} \overline{b}_j x^j$$

$$= \overline{p}(x) \cdot \overline{q}(x).$$

c.q.d.

(iv) Como

$$\begin{aligned} \overline{h}(x) &= \overline{g(x) \cdot \overline{g}(x)} \\ &= \overline{g}(x) \cdot \overline{\overline{g}}(x) \\ &= \overline{g}(x) \cdot g(x) = h(x), \end{aligned}$$

logo $h(x)$ é real pela parte ***(ii)***.

c.q.d.

Destas propriedades resulta imediatamente o facto já mencionado, de que as raízes complexas de um polinómio real vêm sempre aos pares. Pois se $p(x)$ é real e $p(z_0) = 0$, então $\overline{p(z_0)} = 0 = \overline{p}(\overline{z}_0) = p(\overline{z}_0)$.[18]

Podemos concluir que se o TFA é válido para os polinómios reais, então é válido para os polinómios complexos. Pois seja $p(x)$ um polinómio complexo não constante, e seja

$$q(x) = p(x) \cdot \overline{p}(x),$$

que é real, pela parte ***(iv)*** do lema 5.

Por hipótese, isto é, pelo TFA, existe $z_0 \in C$ tal que

$$q(z_0) = p(z_0) \cdot \overline{p}(z_0) = 0,$$

---

[18] $P(x)$ é um polinómio real, logo $p(x) = \overline{p}(x)$.

logo $p(z_0) = 0$ ou $\overline{p}(z_0) = 0$.

No primeiro caso, z_0 é uma raiz de $p(x)$, e no segundo caso, tem-se

$$p(z_0) = 0 = \underbrace{\overline{p}(z_0)}_{\substack{\text{o conjugado de } p(z_0) \\ \text{também igual a 0.}}} = \overline{p}(\overline{z}_0) = \overline{p}(\overline{z}_0)$$

pela parte ***(i)*** do lema 5, o que mostra que $\overline{z}_0$ é raiz de $p(x)$.

4. Validade da fórmula de Ferro-Tartaglia-Cardano

De acordo com o Teorema Fundamental da Álgebra (TFA) todo o polinómio complexo de grau n tem n raízes. Assim, uma equação cúbica tem exactamente três raízes em C.

Será então que a fórmula da cúbica resolvente, denominada no capítulo IV por Fórmula Resolvente de Ferro-Tartaglia-Cardano, fornece todas as três raízes de uma equação cúbica? Antes de respondermos a essa questão iremos mostrar uma fórmula explícita para determinar as raízes, sem reduzir a equação cúbica a uma equação do segundo grau. Para isso começaremos com uma analogia simples com as equações do segundo grau.

<u>Equação quadrática:</u>

<u>1º método:</u>

Consideremos a função polinomial quadrática $f(x) = x^2 + bx + c$. A maneira mais usual de derivar a fórmula quadrática é "completando o quadrado".

$$x^2 + bx + c = x^2 + bx + \frac{1}{4}b^2 + c - \frac{1}{4}b^2$$

$$= \left(x + \frac{1}{2}b\right)^2 + \frac{1}{4}\left(4c - b^2\right)$$

Então, se u é uma raiz de $f(x)$ tem-se que $f(u) = 0$.

Logo

$$u + \frac{1}{2}b = \pm\frac{1}{2}\sqrt{b^2 - 4c}$$

$$\Leftrightarrow u = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

Vamos agora apresentar uma derivação diferente da anterior a qual generaliza a determinação de raízes de polinómios cúbicos e quárticos.

<u>2º método:</u>

Se u é uma raiz de $f(x) = x^2 + bx + c$, então $u^2 + bu + c = 0$.

Defina-se $v = u + \frac{1}{2}b$, então

$$\left(v - \frac{1}{2}b\right)^2 + b\left(v - \frac{1}{2}b\right) + c = 0.$$

Simplificando a equação tem-se que:

$$v^2 + \frac{1}{4}b^2 - bv + bv - \frac{1}{2}b^2 + c = 0$$
$$\Leftrightarrow v^2 - \frac{1}{4}b^2 + c = 0$$
$$\Leftrightarrow v^2 = \frac{1}{4}\left(b^2 - 4c\right)$$

Segue-se que $v = \pm\frac{1}{2}\sqrt{b^2 - 4c}$.

Podemos agora obter a fórmula quadrática usual

$$u = v - \frac{1}{2}b = \pm\frac{1}{2}\sqrt{b^2 - 4c} - \frac{1}{2}b$$
$$= \frac{1}{2}\left(-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}\right)$$

$$\therefore u = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

A seguinte consequência da fórmula quadrática será usada na determinação da fórmula cúbica.

Lema 1: Se c e d são dois números dados então existem dois números α e β onde $\alpha + \beta = c$ e $\alpha \cdot \beta = d$.

***Demonstração*:**

Se $d = 0$, escolhe-se $\alpha = 0$ e $\beta = c$.

Se $d \neq 0$, então seja $\alpha \neq 0$ e $\beta = \frac{d}{\alpha}$, e substituindo em $c = \alpha + \beta$ tem-se que

$$c = \alpha + \frac{d}{\alpha}$$
$$\Leftrightarrow \alpha^2 + d = c\alpha$$
$$\Leftrightarrow \alpha^2 - c\alpha + d = 0.$$

A fórmula quadrática prova que α existe, se $\beta = \frac{d}{\alpha}$ (claro que α e β podem ser números complexos).

c.q.d.

A demonstração da fórmula cúbica envolverá a substituição de um polinómio cúbico por um mais simples.

Definição 1: Um polinómio cúbico $f(x) = x^3 + qx + r$ que não possui o termo x^2 é chamado *polinómio cúbico reduzido*.

Lema 2: A substituição $x = y - \frac{1}{3}b$, transforma $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ num polinómio cúbico reduzido $\tilde{f}(y) = f(y - \frac{1}{3}b) = y^3 + qy + r$.

Se u é uma raiz de $\tilde{f}(y)$ então $u - \frac{1}{3}b$ é uma raiz de $f(x)$.

Demonstração: Da substituição $x = y - \frac{1}{3}b$ obtém-se

$$f(x) = f\left(y - \frac{1}{3}b\right)$$

$$= \left(y - \frac{1}{3}b\right)^3 + b\left(y - \frac{1}{3}b\right)^2 + c\left(y - \frac{1}{3}b\right) + d \qquad (1)$$

Como os termos em x^2 são simétricos simplifica-se. O novo polinómio $\tilde{f}(y) = f\left(y - \frac{1}{3}b\right)$ é reduzido:

$$\tilde{f}(y) = y^3 + qy + r$$

onde os coeficientes q e r podem ser determinados a partir de (1) somando os termos semelhantes.

Finalmente, se u é uma raiz de $\widetilde{f}(y)$ então $0=\widetilde{f}(u)=f\left(u-\frac{1}{3}b\right)$ logo $u-\frac{1}{3}b$ é uma raiz de $f(x)$.

c.q.d.

Assim, o lema anterior reduz o problema de encontrar as raízes de um polinómio cúbico ao problema de determinar as raízes de um polinómio cúbico mais simples sem termo em x^2.

Equação cúbica:

1º método: O artifício usado na resolução da equação cúbica consiste em escrever a raiz u de y^3+qy+r como $u=\alpha+\beta$, e depois determinar α e β.

Assim

$$\begin{aligned} &0=u^3+qu+r \\ \Leftrightarrow\ &0=(\alpha+\beta)^3+q(\alpha+\beta)+r. \end{aligned}$$

Note-se que

$$\begin{aligned} (\alpha+\beta)^3 &= \alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3 \\ &= \alpha^3+\beta^3+3\alpha\beta(\alpha+\beta) \\ &= \alpha^3+\beta^3+3\alpha\beta u. \end{aligned}$$

Por conseguinte

$$0=\alpha^3+\beta^3+3\alpha\beta u+qu+r$$

e então,

$$0=\alpha^3+\beta^3+u(3\alpha\beta+q)+r \qquad (2)$$

Já definimos que $\alpha+\beta=u$ e pelo lema 1 podemos impor uma segunda condição

$$\alpha\beta=-\frac{q}{3} \qquad (3)$$

a qual conduz ao desaparecimento do termo u da equação (2), obtendo-se

$$0=\alpha^3+\beta^3+r \qquad (4).$$

Elevando ao cubo ambos os membros da equação (3) tem-se que

$$\alpha^3\beta^3=-\frac{q^3}{27} \qquad (5)$$

As equações (4) e (5) nas variáveis α^3 e β^3 podem ser resolvidas.

Substituindo $\beta^3=-\frac{q^3}{27\alpha^3}$ [(1)] na equação (4) obtém-se que $\alpha^3-\frac{q^3}{27\alpha^3}=-r$,

que pode ser reescrita como $\alpha^6+r\alpha^3-\frac{q^3}{27}=0$, uma equação quadrática em α^3.

A fórmula quadrática permite calcular $\alpha^3=\frac{1}{2}\left(-r\pm\sqrt{r^2+\frac{4q^3}{27}}\right)$.

Pela equação (3) tem-se que $\beta=-\frac{q}{3\alpha}$ e então $u=\alpha+\beta$ já está determinado.

Como já referimos o Teorema Fundamental da Álgebra garante a existência de três raízes de uma equação cúbica. Assim, conhecendo uma das raízes, quais serão as outras duas?

O corolário da página 222 refere que se u é uma raiz de um polinómio $f(x)$, então $f(x)=(x-u)g(x)$, para algum polinómio $g(x)$.

Assim, depois de encontrarmos uma raiz $u = \alpha + \beta$, divide-se y^3+qy+r por $y-u$ e usamos a fórmula quadrática no quociente quadrático $g(y)$ para determinar as outras duas raízes [(2)].

---

(1) Se $\alpha = 0$ então $q = 0$ e o polinómio é $f(x)=x^3+r$. Assim a equação $f(x)=0 \Leftrightarrow x^3+r=0$ tem solução que é obviamente as raízes cúbicas de $-r$ (isto é, $\sqrt[3]{-r}$).

(2) Se θ é uma raiz de $g(\theta)$, então θ é também uma raiz de $f(\theta)$ pois $g(\theta)=0$ e $f(\theta)=(\theta-u)\,g(\theta)$.

2º método: Mostraremos agora uma fórmula explícita para determinar as outras duas raízes de $f(y)$ (em vez do método acabado de referir para as determinar).

Teorema 1: (Fórmula cúbica)

As raízes de x^3+qx+r, onde $q \neq 0$, são

$$\alpha+\beta, \qquad w\alpha+w^2\beta \qquad \text{e} \qquad w^2\alpha+w\beta,$$

onde $\alpha^3=\frac{1}{2}\left(-r+\sqrt{r^2+\frac{4}{27}q^3}\right)$, $\quad \beta=-\frac{q}{3\alpha}$ e

$w=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ é uma raiz cúbica da unidade[3].

Demonstração: Existem três raízes cúbicas da unidade, nomeadamente,

$$1, \qquad w=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{e} \qquad w=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}^{(4)}.$$

Assim as outras raízes cúbicas de α^3 são $w\alpha$ e $w^2\alpha$.

Se β é o "par" de α, isto é, se $\alpha+\beta$ é uma raiz de $f(x)$, então o "par" de $w\alpha$ é $\frac{\beta}{w}=w^2\beta$, pois assim como no caso de $\alpha+\beta$ tinha-se que $\alpha\beta=-\frac{q}{3}$ logo,

$$(w\alpha)\cdot\left(\frac{\beta}{w}\right)=\alpha\beta=-\frac{q}{3}$$

$$\Rightarrow (w\alpha)\cdot\left(\frac{\beta}{w}\right)=-\frac{q}{3}.$$

---

[3] Ou seja, w é uma raiz do polinómio w^3-1.

[4] A maneira mais fácil para determinar a raiz cúbica de 1 é escrever w na forma polar $|w|(\cos\theta+i\sin\theta)$ (ou $|w|(cis\theta)$). As raízes cúbicas são dadas por $\sqrt[3]{|w|}cis\left(\frac{\theta}{3}+\frac{2k\pi}{3}\right)$, com $k\in Z$. A partir de $k=3$ as raízes repetem-se. Basta pois fazer $k\in\{0,1,2\}$.

Analogamente o "par" de $w^2\alpha$ é $\frac{\beta}{w^2} = w\beta$, pois tal como o caso $\alpha+\beta$ tem-se que $(w^2\alpha)\cdot\left(\frac{\beta}{w^2}\right) = -\frac{q}{3}$.

Consequentemente, as fórmulas explícitas para as raízes de $f(x)$ são

$$\alpha + \beta, \qquad w\alpha + w^2\beta \qquad \text{e} \qquad w^2\alpha + w\beta .$$

c.q.d.

Exemplo 1: Determinar as raízes de $x^3 - 15x - 126$.

Como não existe termo em x^2, o polinómio já está reduzido, e então encontra-se na forma a partir da qual se aplica a fórmula cúbica (caso não estiver reduzida, devemos em primeiro lugar reduzi-la, como no lema 1).

Neste caso, $q = -15$ e $r = -126$

logo

$$\alpha^3 = \frac{1}{2}\left(126 + \sqrt{(-126)^2 + \frac{4}{27}(-15)^3}\right) \Leftrightarrow \alpha^3 = \frac{1}{2}\left(126 + \sqrt{15376}\right)$$

$$\Leftrightarrow \alpha^3 = 125$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \sqrt[3]{125}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = 5$$

Como $\beta = -\frac{q}{3\alpha}$, então $\beta = -\frac{-15}{3\times 5} \Leftrightarrow \beta = 1$.

Então, pelo teorema 1 as raízes, designemo-las por r_1, r_2 e r_3, são as seguintes:

$$r_1 = \alpha + \beta = 5 + 1 = 6;$$

$$r_2 = w^2\alpha + w\beta = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot 5 + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot 1 = -3 - 2\sqrt{3}\, i$$

$$r_3 = w\alpha + w^2\beta = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot 5 + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot 1 = -3 + 2\sqrt{3}\, i$$

Alternativamente, tendo encontrado $u = r_1 = 6$ como sendo uma raiz, pelo algoritmo da divisão tem-se que

$$x^3 - 15x - 126 = (x-6)q(x)$$

	1	0	-15	-126
6		6	36	126
	1	6	21	0

$$\therefore\ q(x) = x^2 + 6x + 21$$

As raízes de $q(x)$ são obtidas pela aplicação directa da fórmula quadrática resolvente:

$$x^2 + 6x + 21 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \times 21}}{2} \Leftrightarrow x = -3 \pm 2\sqrt{3}\, i.$$

As raízes pretendidas são 6, $-3 + 2\sqrt{3}\, i$ e $-3 - 2\sqrt{3}\, i$.

Note-se que acabámos de provar a fórmula da cúbica resolvente (designada por fórmula de Ferro-Tartaglia-Cardano). Vejamos como...

Como já fizemos referência, a fórmula de Ferro-Tartaglia-Cardano para a equação $x^3 = px + q$ onde p e q são números positivos, é dada por

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}. \qquad (6)$$

Vejamos como esta fórmula fornece todas as soluções de uma equação cúbica.

Euler (1707-1783) na sua obra *Elementos de Álgebra,* introduz $\sqrt{-1}$ como algo que não se compara com os números então conhecidos. Observando que *"somos conduzidos à ideia de números que são, por natureza, impossíveis. Podemos chamar-lhes imaginários porque existem somente na nossa imaginação [...] nada nos impede de os usar nos cálculos."*

Esta nova atitude levou Euler a investigar sem receio os números complexos. Assim em 1751, explorou as raízes da unidade (que já referimos atrás). Para além das conhecidas raízes quadradas da unidade, ± 1, obteve as raízes cúbicas de 1, resolvendo a equação

$$0 = x^3 - 1 = (x-1)\cdot(x^2 + x + 1)$$

que são 1, $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{-3}}{2}$.

De forma semelhante obteve raízes de ordem superior. Mostrou que qualquer número (real ou complexo) tem n raízes de índice n. Foi Euler quem introduziu a notação i para $\sqrt{-1}$.

A partir da fórmula de Moivre (1667-1754) para $w = |w|(\cos\theta + i\sin\theta)$ dada por

$$w^n = |w|^n(\cos n\theta + i\sin n\theta), \qquad n \geq 1$$

da qual se obtém a expressão que dá as raízes de índice n de w:

$$\sqrt[n]{w}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right), \quad k \in \{0,1,\ldots,\text{n - 1}\}.$$

Vejamos como as raízes-n se revelam importantes na recuperação da fórmula de Ferro-Tartaglia-Cardano.

Comecemos então, baseados em Euler, a mostrar que a fórmula (6) fornece as soluções da equação $x^3 = px + q$ (7).

Note-se que agora não impomos que p e q sejam positivos.

Seja x a solução de (7), a e b, tais que $x=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$. Então tem-se que

$$x^3=\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)^3$$

$$=a+3\sqrt[3]{a^2b}+3\sqrt[3]{ab^2}+b$$

$$=3\sqrt[3]{ab}\cdot\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)+(a+b),$$

que comparando com (7) vê-se que se terá

$$3\sqrt[3]{ab}=p, \qquad a+b=q, \qquad (8)$$

que pode ser visto como um sistema de duas equações nas incógnitas a e b. De (8) vem que

$$ab=\frac{p^3}{27}, \qquad a^2+2ab+b^2=q^2,$$

logo

$$a^2+2ab+b^2-4ab=q^2-\frac{4p^3}{27},$$

isto é,

$$(a-b)^2=q^2-\frac{4p^3}{27},$$

donde

$$a-b=\sqrt{q-\frac{4p^3}{27}}.$$

Somando e subtraindo a esta igualdade, sucessivamente, $a+b=q$, obtém-se

$$\alpha=\frac{1}{2}\left(q+\sqrt{q^2-\frac{4p^3}{27}}\right),$$

$$\beta=\frac{1}{2}\left(q-\sqrt{q^2-\frac{4p^3}{27}}\right).$$

Notando que $x=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$, a fórmula de Ferro-Tartaglia-Cardano (6) conclui-se imediatamente. Para além de p e q não terem restrição de sinal, note-se que qualquer equação do terceiro grau, $z^3+\alpha z^2+\beta z+\chi=0$ se pode reduzir à forma (7) mediante a substituição $z=y-\frac{\alpha}{3}$, como provámos no lema 2.

Aplicando a fórmula de Ferro-Tartaglia-Cardano à equação $x^3=6x+4$, obtemos

$$\sqrt[3]{2+2\sqrt{-1}}+\sqrt[3]{2-2\sqrt{-1}}.$$

Agora as raízes cúbicas podem ser determinadas, considerando $w=2+2i$.

Assim tem-se que $|w|=\sqrt{8}$ e $\theta=arctg\frac{2}{2}=\frac{\pi}{4}$, logo as raízes cúbicas de 2+2i são $\sqrt[3]{\sqrt{8}}\left(\cos\frac{\pi/4+2k\pi}{3}+isin\frac{\pi/4+2k\pi}{3}\right)$, $k\in\{0,1,2\}$.

Ou seja, as raízes são:

$$k=0\rightarrow\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+isin\frac{\pi}{12}\right),$$

$$k=1\rightarrow\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+isin\frac{3\pi}{4}\right),$$

$$k=2\rightarrow\sqrt{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12}+isin\frac{17\pi}{12}\right).$$

De modo análogo, as raízes cúbicas de 2-2i são

$$\sqrt[3]{\sqrt{8}}\left(\cos\frac{-\pi/4+2k\pi}{3}+isin\frac{-\pi/4+2k\pi}{3}\right),\quad k\in\{0,1,2\}.$$

Ou seja,

$$k = 0 \rightarrow \sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{12} + isin\frac{-\pi}{12}\right),$$

$$k = 1 \rightarrow \sqrt{2}\left(\cos\frac{-17\pi}{12} + isin\frac{-17\pi}{12}\right),$$

$$k = 2 \rightarrow \sqrt{2}\left(\cos\frac{-3\pi}{4} + isin\frac{-3\pi}{4}\right).$$

De acordo com a dedução da fórmula (6), as raízes devem verificar (8), o que estabelece de forma inequívoca o emparelhamento de cada raiz cúbica de 2+2i com uma raiz cúbica 2-2i, produzindo assim as três raízes r_1, r_2 e r_3.

Observemos então a realização do referido emparelhamento.

Como $p = 6$ então por (8) tem-se que $\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b} = \frac{6}{3} \Leftrightarrow \sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b} = 2$.

Se $\sqrt[3]{a} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{12} + isin\frac{-\pi}{12}\right)$ então, como

$$\sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{12} + isin\frac{-\pi}{12}\right) \cdot \sqrt[3]{b}^{(5)} = 2^{(6)}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2}\rho = 2 \wedge \frac{-\pi}{12} + \theta = 0$$

$$\Rightarrow \rho = \sqrt{2} \wedge \theta = \frac{\pi}{12}$$

tem-se que, $\sqrt[3]{b} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + isin\frac{\pi}{12}\right)$, isto é, a raiz cúbica, $\sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{12} + isin\frac{-\pi}{12}\right)$, de 2-2$i$, emparelha com a raiz cúbica, $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + isin\frac{\pi}{12}\right)$, de 2+2$i$.

---

(5) Considere-se $\sqrt[3]{b} = \rho cis\theta$, com $\rho \geq 0$.

(6) O número complexo 2 na forma polar é igual a 2cis0.

Analogamente se mostra que as raízes cúbicas de 2-2i, $\sqrt{2}\left(\cos\frac{-3\pi}{4}+i\sin\frac{-3\pi}{4}\right)$ e $\sqrt{2}\left(\cos\frac{-17\pi}{12}+i\sin\frac{-17\pi}{12}\right)$, emparelham com as raízes cúbicas de 2+2i, $\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ e $\sqrt{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12}+i\sin\frac{17\pi}{12}\right)$, respectivamente.

Assim, as três raízes produzidas, r_1, r_2 e r_3, são então dadas por:

$$
\begin{aligned}
r_1 &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)+\sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{12}+i\sin\frac{-\pi}{12}\right)\\
&= 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\\
&= 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi/6}{2}\right)^{(7)}\\
&= 2\sqrt{2}\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{2}} = 2\sqrt{2}\sqrt{\frac{1+\sqrt{3}/2}{2}} = \sqrt{4+2\sqrt{3}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
r_2 &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)+\sqrt{2}\left(\cos\frac{-3\pi}{4}+i\sin\frac{-3\pi}{4}\right)\\
&= 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\
&= -2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
r_3 &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12}+i\sin\frac{17\pi}{12}\right)+\sqrt{2}\left(\cos\frac{-17\pi}{12}+i\sin\frac{-17\pi}{12}\right)\\
&= 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right)\\
&= 2\sqrt{2}\cos\left(\pi+\frac{5\pi}{12}\right) = 2\sqrt{2}\left(-\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right)\\
&= -2\sqrt{2}\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = -2\sqrt{2}\cos\left(\frac{5\pi/6}{2}\right) = -2\sqrt{2}\sqrt{\frac{1+\cos\frac{5\pi}{6}}{2}}\\
&= -2\sqrt{2}\sqrt{\frac{1-\sqrt{3}/2}{2}} = -\sqrt{4-2\sqrt{3}}
\end{aligned}
$$

---

(7) Recorde-se que $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$.

Note-se que as raízes são todas reais. A fórmula de Ferro-Tartaglia--Cardano não só permanece válida no novo contexto dos números complexos, como permite obter as três raízes de uma equação cúbica.

5. Manipulação algébrica de expressões com radicais

Apesar de ser verdade que a fórmula de Ferro-Tartaglia-Cardano, fornece todas as três raízes de qualquer equação cúbica, a sua determinação não é, na maior parte das vezes, tarefa fácil.

Analisemos o caso da aplicação da fórmula de Ferro-Tartaglia-Cardano ao polinómio $x^3 - 7x + 6 = (x-1)\cdot(x-2)\cdot(x+3)$. Assim as raízes são, obviamente, 1, 2 e –3. Como não existe termo em x^2, temos que q = -7 e r = 6 (considerando a equação na forma $x^3 + qx + r = 0$). Logo as raízes são $\alpha + \beta$, $w\alpha + w^2\beta$ e $w^2\alpha + w\beta$, onde

$$\alpha^3 = \frac{1}{2}\left(-r + \sqrt{r^2 + \frac{4q^3}{27}}\right) \quad \text{e} \quad \beta = -r - \alpha^3$$

Assim, no exemplo acima tem-se que:

$$\alpha^3 = \frac{1}{2}\left(-6 + \sqrt{36 - \frac{4 \times 343}{27}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \alpha^3 = \frac{1}{2}\left(-6 + \sqrt{36 - \frac{1372}{27}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \alpha^3 = \frac{1}{2}\left(-6 + \sqrt{-\frac{400}{27}}\right).$$

Logo

$$r_1 = \sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(-6 + \sqrt{-\frac{400}{27}}\right)} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(-6 - \sqrt{-\frac{400}{27}}\right)}$$

$$\Leftrightarrow r_1 = \sqrt[3]{-3 + \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{400}{27}}} + \sqrt[3]{-3 - \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{400}{27}}}.$$

A fórmula cúbica resolvente de Ferro-Tartaglia-Cardano, dá assim uma resposta "desarrumada", pois r_1 é igual a 1, 2 ou -3.

Como é que, recorrendo à manipulação algébrica se prova que r_1 é igual a 1, 2 ou -3?

Veremos mais adiante que $r_1 = 1$.

Expressões da forma $\sqrt[n]{a+\sqrt{b}}$ ocorrem frequentemente na literatura. É exemplo disso, a solução de Ferro-Tartaglia-Cardano da equação cúbica

$$x^3 - 3cx = 2a \qquad (1)$$

dada pela soma de dois radicais

$$x = \sqrt[3]{a+\sqrt{a^2-c^3}} + \sqrt[3]{a-\sqrt{a^2-c^3}} \qquad (2).$$

Quando c = -1 e a = 2, a equação (1) vem $x^3+3x=4$, que tem $x = 1$ como solução. Contudo, a solução dada por (2) é

$$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} \qquad (3).$$

Uma verificação rápida com a calculadora TI-83, por exemplo, mostra que esta expressão é realmente igual a 1. Mas, como é que se pode manipular a expressão (3) algebricamente até obter como resultado 1?

O facto de que tal combinação de raízes quadradas e cúbicas pode produzir um número racional e, até mesmo, um número inteiro é sensacional!

Iremos então verificar em que casos é possível simplificar uma expressão com radicais do tipo $\sqrt[n]{a+\sqrt{b}}+\sqrt[n]{a-\sqrt{b}}$. O nosso principal utensílio para o fazer é o que chamamos *"polinómios de Cardano"* [1] que denotaremos por $C_n(c,x)$.

5.1. Polinómios de Cardano

Comecemos com a expressão

$$x = \sqrt[n]{a+\sqrt{b}} + \sqrt[n]{a-\sqrt{b}} \qquad (4).$$

Definimos c como sendo

$$c = \sqrt[n]{a+\sqrt{b}} \cdot \sqrt[n]{a-\sqrt{b}} = \sqrt[n]{a^2-b},$$
$$\Rightarrow c = \sqrt[n]{a^2-b}. \qquad (5)$$

[1] Usamos o nome *"polinómios de Cardano"* porque a expressão para as suas raízes assemelha-se imenso à solução de Cardano (que designámos por fórmula de Ferro--Tartaglia-Cardano) para uma equação cúbica.

Se elevarmos ambos os membros de (4) a n, e fizermos substituições apropriadas, iremos gerar uma equação polinomial em x, de grau n, com coeficientes inteiros. Escrevemos a equação na forma

$$C_n(c,x) = 2a, \qquad (6)$$

que define o *polinómio de Cardano de grau n.*

Exemplificaremos de seguida a construção dos polinómios de Cardano de graus 1, 2, 3 e 4.

<u>1º caso:</u> $n = 1$

Para $n = 1$, recorrendo a (4), tem-se que

$$x = a + \sqrt{b} + a - \sqrt{b}$$
$$\Leftrightarrow x = 2a.$$

Por (6), vem

$$\therefore C_1(c,x) = x$$

<u>2º caso:</u> $n = 2$

Para $n = 2$ a expressão (4) escreve-se na forma:

$$x = \sqrt{a+\sqrt{b}} + \sqrt{a-\sqrt{b}}.$$

Elevando ambos os membros ao quadrado, tem-se que

$$x^2 = \left(\sqrt{a+\sqrt{b}} + \sqrt{a-\sqrt{b}}\right)^2$$
$$\Rightarrow x^2 = a + \sqrt{b} + 2\sqrt{a+\sqrt{b}} \cdot \sqrt{a-\sqrt{b}} + a - \sqrt{b}$$
$$\Rightarrow x^2 = 2a + 2 \cdot \underbrace{\sqrt{a^2 - b}}_{c}$$
$$\Rightarrow x^2 = 2a + 2c$$
$$\Rightarrow x^2 - 2c = 2a$$

Por (6), obtém-se que

$$\therefore C_2(c,x) = x^2 - 2c.$$

<u>3° caso:</u> $n = 3$

Para $n = 3$, elevamos ao cubo (4), obtendo-se:

$$x^3 = \left(\sqrt[3]{a+\sqrt{b}} + \sqrt[3]{a-\sqrt{b}}\right)^3$$

$$\Rightarrow x^3 = \left(\sqrt[3]{a+\sqrt{b}}\right)^3 + 3\left(\sqrt[3]{a+\sqrt{b}}\right)^2\left(\sqrt[3]{a-\sqrt{b}}\right) + 3\left(\sqrt[3]{a+\sqrt{b}}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{a-\sqrt{b}}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{a-\sqrt{b}}\right)^3$$

$$\Rightarrow x^3 = a+\sqrt{b} + 3\cdot\left(\sqrt[3]{a+\sqrt{b}}\cdot\sqrt[3]{a-\sqrt{b}}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{a+\sqrt{b}} + \sqrt[3]{a-\sqrt{b}}\right) + a - \sqrt{b}$$

$$\Rightarrow x^3 = 2a + 3\cdot\underbrace{\left(\sqrt[3]{a^2-b}\right)}_{c}\cdot\underbrace{\left(\sqrt[3]{a+\sqrt{b}} + \sqrt[3]{a-\sqrt{b}}\right)}_{x}$$

Usando (4) e (5) para simplificar o segundo termo do segundo membro, vem:

$$x^3 = 2a + 3cx.$$

Agora temos que $x^3 - 3cx = 2a.$

Como $C_3(c,x) = 2a,$ então

$$C_3(c,x) = x^3 - 3cx.$$

4° caso: $n = 4$

Para $n = 4$, elevamos à quarta a igualdade (4), obtendo-se:

$$x^4 = \left(\sqrt[4]{a+\sqrt{b}}\right)^4 + \left(\sqrt[4]{a-\sqrt{b}}\right)^4$$

$$\Rightarrow x^4 = \left(\sqrt[4]{a+\sqrt{b}}\right)^4 + 4\left(\sqrt[4]{a+\sqrt{b}}\right)^3 \sqrt[4]{a-\sqrt{b}} + 6\left(\sqrt[4]{a+\sqrt{b}}\right)^2 \left(\sqrt[4]{a-\sqrt{b}}\right)^2 +$$

$$4\sqrt[4]{a+\sqrt{b}}\left(\sqrt[4]{a-\sqrt{b}}\right)^3 + \left(\sqrt[4]{a-\sqrt{b}}\right)^4$$

$$\Rightarrow x^4 = a+\sqrt{b} + \underbrace{\sqrt[4]{a+\sqrt{b}} \cdot \sqrt[4]{a-\sqrt{b}}}_{c}\left[4\left(\sqrt[4]{a+\sqrt{b}}\right)^2 + 6\sqrt[4]{a-\sqrt{b}} \cdot \sqrt[4]{a-\sqrt{b}} + 4\left(\sqrt[4]{a-\sqrt{b}}\right)^2\right]$$

$$+ a - \sqrt{b}$$

$$\Rightarrow x^4 = 2a + c\left[4\left(\sqrt[4]{a+\sqrt{b}}\right)^2 + 8\sqrt[4]{a-\sqrt{b}} \cdot \sqrt[4]{a-\sqrt{b}} + 4\left(\sqrt[4]{a-\sqrt{b}}\right)^2 - 2\sqrt[4]{a-\sqrt{b}} \cdot \sqrt[4]{a-\sqrt{b}}\right]$$

$$\Rightarrow x^4 = 2a + c\left[4\left[\left(\sqrt[4]{a+\sqrt{b}}\right)^2 + 2\sqrt[4]{a-\sqrt{b}} \cdot \sqrt[4]{a-\sqrt{b}} + \left(\sqrt[4]{a-\sqrt{b}}\right)^2\right] - 2\sqrt[4]{a-\sqrt{b}} \cdot \sqrt[4]{a-\sqrt{b}}\right]$$

$$\Rightarrow x^4 = 2a + c\left[\underbrace{4\left(\sqrt[4]{a+\sqrt{b}} + \sqrt[4]{a-\sqrt{b}}\right)^2}_{x^2} - 2\underbrace{\sqrt[4]{a^2-b}}_{c}\right]$$

$$\Rightarrow x^4 = 2a + c\left(4x^2 - 2c\right)$$

$$\Rightarrow x^4 - 4cx^2 + 2c^2 = 2a$$

Como por (6) se tem $C_4(c,x) = 2a$ então

$$\therefore C_4(c,x) = x^4 - 4cx^2 + 2c^2.$$

Podemos continuar desta forma e derivar algebricamente os polinómios de Cardano $C_n(c,x)$ de grau superior e determinar que $C_n(c,x) = 2a$.

5.2. Construção da tabela dos polinómios de Cardano

Tabela 1: Polinómios de Cardano

$$C_1(c,x) = x$$

$$C_2(c,x) = x^2 - 2c$$

$$C_3(c,x) = x^3 - 3cx$$

$$C_4(c,x) = x^4 - 4cx^2 + 2c^2$$

$$C_5(c,x) = x^5 - 5cx^3 + 5c^2x$$

$$C_6(c,x) = x^6 - 6cx^4 + 9c^2x^2 - 2c^3$$

$$C_7(c,x) = x^7 - 7cx^5 + 14c^2x^3 - 7c^3x$$

$$C_8(c,x) = x^8 - 8cx^6 + 20c^2x^4 - 16c^3x^2 + 2c^4$$

$$C_9(c,x) = x^9 - 9cx^7 + 27c^2x^5 - 30c^3x^3 + 9c^4x$$

$$C_{10}(c,x) = x^{10} - 10cx^8 + 35c^2x^6 - 50c^3x^4 + 25c^4x^2 - 2c^5$$

$$C_{11}(c,x) = x^{11} - 11cx^9 + 44c^2x^7 - 77c^3x^5 + 55c^4x^3 - 11c^5x$$

Se denotarmos os coeficientes do polinómio de Cardano $C_n(c,x)$ por $d(n,k)$, então

$$C_n(c,x) = x^n - d(n,1)cx^{n-2} + d(n,2)c^2x^{n-4} - d(n,3)c^3x^{n-6} + \ldots$$

e a tabela acima sugere que

$$d(n,k) = d(n-1,k) + d(n-2,k-1), \quad \text{onde} \quad d(n,0) = 1, \text{ para todo } n \in Z^+. \qquad (7)$$

Exemplificamos de seguida a relação (7), para $d(4,2)$ e $d(4,1)$.

Por um lado, observamos pela tabela que $d(4,2) = 2$, por outro lado, aplicando a relação (7), tem-se que:

$$\begin{aligned} d(4,2) &= d(3,2) + d(2,1) \\ &= 0 + 2 \\ &= 2. \end{aligned}$$

Analogamente, aplicando a relação (7) tem-se que:

$$\begin{aligned} d(4,1) &= d(3,1) + d(2,0) \\ &= 3 + 1 \\ &= 4\,, \end{aligned}$$

que confere com a tabela 1 (na qual observamos que $d(4,1) = 4$).

A relação (7) significa que qualquer coeficiente na tabela 1 é igual à soma do coeficiente imediatamente acima com o coeficiente situado duas linhas acima e uma posição à esquerda. Usando esta relação recursiva, podemos estender a tabela 1 indefinidamente.

À relação (7) segue-se que

$$C_n(c,x) = x \cdot C_{n-1}(c,x) - c \cdot C_{n-2}(c,x), \qquad \forall n \geq 3. \qquad (8)$$

A sua prova recorre à relação (7).

Assim,

$$x \cdot C_{n-1}(c,x) - c \cdot C_{n-2}(c,x) =$$
$$= x \cdot \left(x^{n-1} - d(n-1,1)cx^{n-3} + d(n-1,2)c^2x^{n-5} - d(n-1,3)c^3x^{n-7} + \ldots\right) -$$
$$c \cdot \left(x^{n-2} - d(n-2,1)cx^{n-4} + d(n-2,2)c^2x^{n-6} - d(n-2,3)c^3x^{n-8} + \ldots\right)$$

$$= x^n - d(n-1,1)cx^{n-2} + d(n-1,2)c^2x^{n-4} - d(n-1,3)c^3x^{n-6} + \ldots$$
$$- cx^{n-2} + d(n-2,1)c^2x^{n-4} - d(n-2,2)c^3x^{n-6} + d(n-2,3)c^4x^{n-8} - \ldots$$

$$= x^n - \left(d(n-1,1)+1\right)cx^{n-2} + \left(d(n-1,2)+d(n-2,1)\right)c^2x^{n-4} - \left(d(n-1,3)+d(n-2,2)\right)c^3x^{n-6} + \ldots$$

$$= x^n - \left(d(n-1,1)+d(n-2,0)\right)cx^{n-2} + \left(d(n-1,2)+d(n-2,1)\right)c^2x^{n-4} -$$
$$\left(d(n-1,3)+d(n-2,2)\right)c^3x^{n-6} + \ldots$$

$$= x^n - d(n,1)cx^{n-2} + d(n,2)c^2x^{n-4} - d(n,3)c^3x^{n-6} + \ldots$$

$$= C_n(c,x)$$

$$\therefore C_n(c,x) = x \cdot C_{n-1}(c,x) - c \cdot C_{n-2}(c,x).$$

5.3. A conexão quadrática

Uma outra relação importante é a seguinte:

Lema 1: $$\sqrt[n]{a \pm \sqrt{b}} = \frac{x \pm \sqrt{x^2 - 4c}}{2} \qquad (9)$$

onde, como antes se definiu,

$$x = \sqrt[n]{a+\sqrt{b}} + \sqrt[n]{a-\sqrt{b}} \quad \text{e} \quad c = \sqrt[n]{a+\sqrt{b}} \cdot \sqrt[n]{a-\sqrt{b}} = \sqrt[n]{a^2 - b}.$$

Demonstração:

Para obtermos a igualdade (9), começamos por assumir que

$$y = \sqrt[n]{a+\sqrt{b}}. \qquad (10)$$

Multiplicando (10) por $\sqrt[n]{a-\sqrt{b}}$ e usando (5) obtemos que

$$\begin{aligned} y\cdot\sqrt[n]{a-\sqrt{b}} &= \sqrt[n]{a+\sqrt{b}}\cdot\sqrt[n]{a-\sqrt{b}} \\ &= \sqrt[n]{a^2-b} \\ &= c. \end{aligned}$$

$$\therefore\; y\cdot\sqrt[n]{a-\sqrt{b}} = c. \qquad (11)$$

De (10) e (11) tem-se que

$$x = \sqrt[n]{a+\sqrt{b}} + \sqrt[n]{a-\sqrt{b}} = y + \frac{c}{y}$$

$$\Rightarrow x = y + \frac{c}{y},$$

obtendo-se a equação quadrática $y^2 - xy + c = 0$ com as soluções

$$y = \frac{x \pm \sqrt{x^2-4c}}{2}. \qquad (12)$$

Comparando (10) e (12) observamos que a relação (9) é verdadeira.

c.q.d.

5.4. Uma técnica para resolver radicais

Para verificarmos se o radical da forma $\sqrt[n]{a \pm \sqrt{b}}$ pode ser reduzido a uma "forma mais simpática", resolvemos em primeiro lugar a relação $c = \sqrt[n]{a^2 - b}$, como definimos em (5), determinando o valor de c.

Se c é um número inteiro ou racional, há esperança de que o radical possa ser simplificado, contudo, mesmo que esse não seja o caso, não devemos desistir...

Seguidamente, examinemos a equação (6), $C_n(c,x) = 2a,$ usando a tabela 1 dos polinómios de Cardano, e procuramos uma raiz x inteira ou racional onde, como definimos em (4),

$$x = \sqrt[n]{a + \sqrt{b}} + \sqrt[n]{a - \sqrt{b}}.$$

Se tal raiz é determinada, então o radical pode ser escrito como em (9), na forma

$$\sqrt[n]{a + \sqrt{b}} = \frac{x \pm \sqrt{x^2 - 4c}}{2}.$$

Caso o procedimento anterior falhe na simplificação do radical, então repetimos os mesmos passos acima descritos substituindo n por qualquer um seu divisor d, onde $n = de$. Nesse caso, examinamos $\sqrt[e]{\sqrt[d]{a \pm \sqrt{b}}}$ para simplificarmos.

Exemplo 1: A calculadora TI-83 mostra que $\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}} = 1$. Mostremos o facto acima recorrendo a manipulações algébricas.

Resolução:

Comparando a expressão dada $\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}} = 1$ com (4), observamos que $n = 3,\ a = 2$ e $b = 5$.

Usando (5) obtemos que

$$c = \sqrt[3]{2^2 - 5}$$
$$\Rightarrow c = -1.$$

A partir da tabela 1 dada e da relação (6) obtemos que $C_3(c,x)=x^3-3cx=2a$ que se reduz a $x^3+3x=4$, donde $x=1$ é uma raiz exacta.

Note-se que também que a relação quadrática (9) produz $\sqrt[3]{2\pm\sqrt{5}}=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, a partir da qual se tem que

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}&=\frac{1+\sqrt{5}}{2}+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\\&=1.\end{aligned}$$

$$\therefore \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=1.$$

Exemplo 2: Mostre a seguinte igualdade numérica:

$$\sqrt[7]{\frac{29}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{845}}+\sqrt[7]{\frac{29}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{845}}=1.$$

<u>Resolução:</u>

Comparando a expressão numérica $\sqrt[7]{\frac{29}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{845}}+\sqrt[7]{\frac{29}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{845}}$ com (4), observamos que $n=7$, $a=\dfrac{29}{2}$ e $b=\dfrac{845}{4}$.

Usando (5), obtém-se que

$$\begin{aligned}&c=\sqrt[7]{\left(\frac{29}{2}\right)^2-\frac{845}{4}}\\ \Rightarrow\ &c=\sqrt[7]{-\frac{4}{4}}\\ \Rightarrow\ &c=-1.\end{aligned}$$

A partir da tabela 1, sabe-se que o polinómio de Cardano de grau 7 é dado por $C_7(c,x)=x^7-7cx^5+14c^2x^3-7c^3x$ e, pela relação (6), tem-se que $C_7(c,x)=2a$.

Logo $x^7-7cx^5+14c^2x^3-7c^3x=2a$. Substituindo os valores conhecidos, obtém-se que $x^7+7x^5+14x^3+7x=29$.

Observa-se que a soma dos coeficientes é 29, logo $x=1$ é uma raiz.[2]

Logo por aplicação da relação (9) vem que:

$$\sqrt[7]{\frac{29}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{845}}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Assim

$$\begin{aligned}\sqrt[7]{\frac{29}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{845}}+\sqrt[7]{\frac{29}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{845}}&=\frac{1+\sqrt{5}}{2}+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\\&=1.\end{aligned}$$

$$\therefore\sqrt[7]{\frac{29}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{845}}+\sqrt[7]{\frac{29}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{845}}=1.$$

Exemplo 3: Para que números positivos b se tem que $\sqrt[3]{2+\sqrt{b}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{b}}$ é um inteiro?

Resolução:

Comparando a expressão $\sqrt[3]{2+\sqrt{b}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{b}}$ com (4), observa-se que $a=2$ e $n=3$.

Por (5), tem-se que

$$c^3=4-b. \qquad (13)$$

Por (6), obtém-se $C_3(c,x)=4$ e pela tabela 1, tem-se que

$$\begin{aligned}&x^3-3cx=4\\ \Leftrightarrow\ &x^3-3cx-4=0,\end{aligned}$$

e resolvendo em ordem a c, temos:

$$c=\frac{4-x^3}{-x}\Leftrightarrow c=\frac{x^3-4}{3x}, \qquad (14)$$

[2] Muitos textos elementares encontrados afirmam que, nestas circunstâncias, $x=1$ é determinado "por inspecção".

o que parece que não nos ajuda muito. Podemos, no entanto, debruçarmo-nos sobre o problema de uma outra forma. Seja x um inteiro e usemos (14) para determinar c.

Por (13) tem-se que $b = 4 - c^3$ e, o facto de que esta última expressão tem de ser positiva (pois b é por hipótese um número positivo), limita o número de soluções possíveis.

Se tentarmos $x = 1$, a partir de (14), obtém-se $c = -1$, logo $b = 4 - c^3 \Rightarrow b = 5$.

Se tentarmos $x = 2$, obtém-se $c = \frac{2}{3}$ e $b = \frac{100}{27}$.

Se repararmos, qualquer outro valor de x produz valores de c que originam valores de $b < 0$.

Por exemplo, para $x = 3$, vem que $c = \frac{23}{9}$ e $b = -\frac{9251}{729} < 0$.

Para $x = -1$, obtém-se $c = \frac{5}{3}$ e $b = -\frac{17}{27} < 0$.

$\therefore b = 5$ ou $b = \frac{100}{27}$ são os únicos valores de b positivos que satisfazem a condição pretendida. [3]

Exemplo 4: Na dedicação de um trabalho[4] lê-se:

"Em memória de Ramanujan[5] no

$$\left[32\left(\frac{146410001}{48400}\right)^3 - 6\left(\frac{146410001}{4800}\right) + \sqrt{\left[32\left(\frac{146410001}{48400}\right)^3 - 6\left(\frac{146410001}{4800}\right)\right]^2 - 1}\,\right]^{1/6} \text{- ésimo}$$

aniversário do seu nascimento."

Qual é este número?

[3] Repare-se que o caso em que $b = 5$ obtém-se a expressão $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ que é igual a 1 como provámos no exemplo 1.

[4] B. C. Berndt, H. H. Chan, L. –C. Zhang, Ramanujan's association with radicals in India, *Amer Math. Monthly* 104 (1997), 905-911.

[5] Existem vários livros de B. C. Berndt que referem o nome de Ramanujan, cujos títulos são: *"A associação de Ramanujan com os radicais na Índia"*; *"Radicais e unidades no trabalho de Ramanujan"*; *"Problemas submetidos por Ramanujan ao Jornal de Matemática da Índia"*.

Resolução:

Por observação da expressão numérica dada e estabelecendo uma analogia com o radical $\sqrt[n]{a+\sqrt{b}}+\sqrt[n]{a-\sqrt{b}}$, conclui-se que

$$a=32\left(\frac{146410001}{48400}\right)^3-6\left(\frac{146410001}{48400}\right) \quad \text{e} \quad b=a^2-1.$$

Assim o número complicado acima pode ser escrito na seguinte forma:

$$y=\left(a+\sqrt{b}\right)^{1/6} \Rightarrow y=\sqrt[6]{a+\sqrt{b}}.$$

Como por (5) se deduz que $b=a^2-c^n$, no caso acima tem-se $b=a^2-c^6$.

Assim, como $b=a^2-1$ e $b=a^2-c^6$, conclui-se que $c=1$ ou $c=-1$.

Repare-se que

$$\begin{aligned}146410001&=146410000+1\\&=14641\cdot 10^4+1\\&=11^4\cdot 10^4+1\\&=110^4+1.\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}48400&=484\cdot 10^2\\&=4\cdot 11^2\cdot 10^2\\&=4\cdot 110^2.\end{aligned}$$

Assim sendo, reescrevendo a, obtém-se

$$\begin{aligned}&a=32\cdot\left(\frac{110^4+1}{4\cdot 110^2}\right)^3-6\left(\frac{110^4+1}{4\cdot 110^2}\right)\\&\Rightarrow 2a=\frac{2\cdot 32}{4^3}\left(\frac{110^4+1}{110^2}\right)^3-\frac{12}{4}\left(\frac{110^4+1}{110^2}\right)\\&\Rightarrow 2a=\left(\frac{110^4+1}{110^2}\right)^3-3\cdot\left(\frac{110^4+1}{110^2}\right).\end{aligned} \qquad (15)$$

Se considerarmos $x = \dfrac{110^4+1}{110^2}$, reescrevemos a expressão (15) da seguinte forma, $x^3 - 3x = 2a$, onde $x^3 - 3x$ é o polinómio de Cardano de grau 3, com $c = 1$, isto é, $C_3(1, x) = x^3 - 3x$.

Logo $C_3(1, x) = 2a$, com $x = \dfrac{110^4+1}{110^2}$.

Observe-se que $y = \sqrt[6]{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\sqrt[3]{a+\sqrt{b}}}$.[6]

Assim, recorrendo ao maior divisor próprio de 6, que é 3, e à relação (9), tem-se que:

$$\sqrt[3]{a+\sqrt{b}} = \frac{x+\sqrt{x^2-4c}}{2} = \frac{\dfrac{110^4+1}{110^2} + \sqrt{\left(\dfrac{110^4+1}{110^2}\right)^2 - 4\cdot 1}}{2}$$

$$= \frac{\dfrac{110^4+1}{110^2} + \sqrt{\dfrac{110^8+2\cdot 110^4+1}{110^4} - 4}}{2}$$

$$= \frac{\dfrac{110^4+1}{110^2} + \sqrt{\dfrac{110^8-2\cdot 110^4+1}{110^4}}}{2}$$

$$= \frac{\dfrac{110^4+1}{110^2} + \sqrt{\left(\dfrac{110^4-1}{110^2}\right)^2}}{2}$$

$$= \frac{\dfrac{110^4+1}{110^2} + \dfrac{110^4-1}{110^2}}{2}$$

$$= \frac{2\cdot 110^4}{2\cdot 110^2}$$

$$= 110^2.$$

---

[6] Note-se que o problema original envolvia a raiz de índice 6 e, consequentemente, esperar-se-ia observar o polinómio de Cardano de grau 6. O polinómio de Cardano deve ter falhado e quando isso ocorre deve-se usar o facto de que $\sqrt[m\cdot n]{z} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{z}}$ para observar se os polinómios de Cardano de menor grau reduzem o radical.

Ou seja, $\sqrt[3]{a+\sqrt{b}} = 110^2$.

Como

$$y = \sqrt{\sqrt[3]{a+\sqrt{b}}} = \sqrt{110^2} = 110$$
$$\Rightarrow y = 110.$$

Dado que $y = \sqrt[6]{a+\sqrt{b}}$ e $y = 110$, o número original pretendido é 110.

Exemplo 5: Sejam α e β as raízes da equação quadrática

$$y^2 - (\alpha+\beta)y + \alpha\cdot\beta = 0.$$

Mostre que $\alpha^n + \beta^n = C_n(\alpha\cdot\beta, \alpha+\beta)$.

Resolução: Considere-se a conexão quadrática (12) que deriva de $y^2 - xy + c = 0$.

Se α e β são as duas raízes desta equação quadrática em y, (isto é, suponhamos sem perda de generalidade que

$$\alpha = \frac{x+\sqrt{x^2-4c}}{2} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{x-\sqrt{x^2-4c}}{2} \text{),}$$

então $\quad c = \alpha\cdot\beta \quad$ e $\quad x = \alpha+\beta. \qquad (16)$

De (9) vemos que $\sqrt[n]{a\pm\sqrt{b}} = \dfrac{x\pm\sqrt{x^2-4c}}{2}$, logo obtém-se que,

$$\alpha = \sqrt[n]{a+\sqrt{b}} \quad \text{e} \quad \beta = \sqrt[n]{a-\sqrt{b}}.$$

Logo

$$\begin{aligned}\alpha^n + \beta^n &= \left(\sqrt[n]{a+\sqrt{b}}\right)^n + \left(\sqrt[n]{a-\sqrt{b}}\right)^n \\ &= a+\sqrt{b}+a-\sqrt{b} \\ &= 2a.\end{aligned}$$

$$\therefore \alpha^n + \beta^n = 2a. \qquad (17)$$

O resultado pretendido deriva imediatamente do facto de que $C_n(c,x) = 2a$. Vejamos como...

Substituindo (16) e (17) em $C_n(c,x)=2a$, vem que $C_n(\alpha\cdot\beta,\alpha+\beta)=\alpha^n+\beta^n$, como se pretendia.

Regressando ao problema inicial desta secção, isto é, a simplificação da expressão com radicais

$$r_1=\sqrt[3]{-3+\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{400}{27}}}+\sqrt[3]{-3-\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{400}{27}}}$$
$$=\sqrt[3]{-3+\sqrt{-\frac{100}{27}}}+\sqrt[3]{-3-\sqrt{-\frac{100}{27}}}, \qquad (18)$$

iremos então aplicar o método descrito anteriormente que recorre aos polinómios de Cardano.

Comparando a expressão (18) com $\sqrt[n]{a+\sqrt{b}}+\sqrt[n]{a-\sqrt{b}}$ tem-se que $a=-3$; $b=-\frac{100}{27}$ e $n=3$.

Por (5), obtém-se que

$$c=\sqrt[3]{9+\frac{100}{27}}$$
$$\Rightarrow c=\sqrt[3]{\frac{343}{27}}$$
$$\Rightarrow c=\frac{7}{3}.$$

A partir da tabela 1, e por (6), sabe-se que o respectivo polinómio de Cardano de grau 3 é dado por

$$C_3(c,x)=x^3-3cx=2a.$$

Logo

$$C_3\left(\frac{7}{3},x\right)=x^3-7x=-6.$$

Observe-se que $x=1$ é uma raiz, logo por aplicação da relação (9), vem que

$$\sqrt[3]{-3\pm\sqrt{-\frac{100}{27}}}=\frac{1\pm\sqrt{1^2-4\cdot\frac{7}{3}}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{-\frac{25}{3}}}{2}=\frac{1\pm\frac{5}{\sqrt{3}}i}{2}=\frac{1}{2}\pm\frac{5}{2\sqrt{3}}i.$$

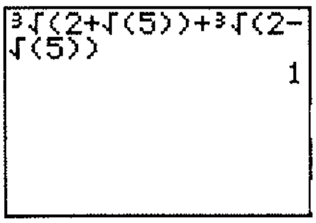
Assim

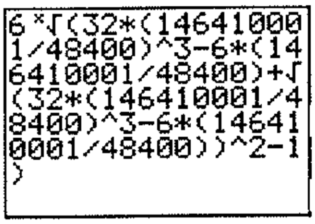
$$\begin{aligned} r_1=\sqrt[3]{-3+\sqrt{-\frac{100}{27}}}+\sqrt[3]{-3-\sqrt{-\frac{100}{27}}}&=\frac{1}{2}+\frac{5}{2\sqrt{3}}i+\frac{1}{2}-\frac{5}{2\sqrt{3}}i\\ &=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\\ &=1. \end{aligned}$$

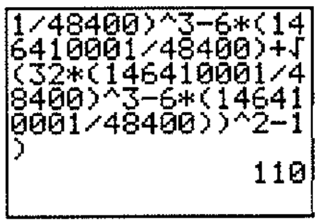
$\therefore r_1=1.$

Enquanto que no exemplo 1 e no exemplo 4, referidos anteriormente, a calculadora TI-83 fornecia o valor exacto, isto é,

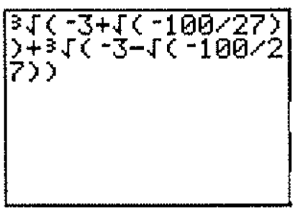
exemplo1: exemplo 4:

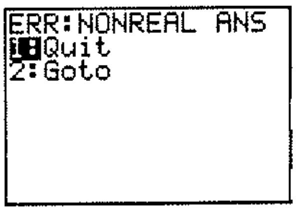




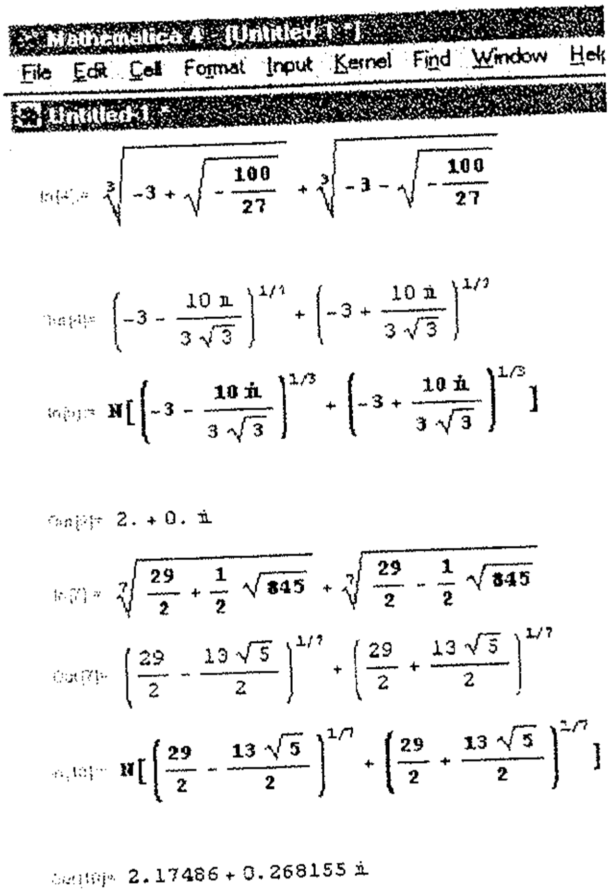


neste caso, a referida calculadora dá uma mensagem de erro pois não admite valores não reais, isto é, raízes quadradas de números negativos.

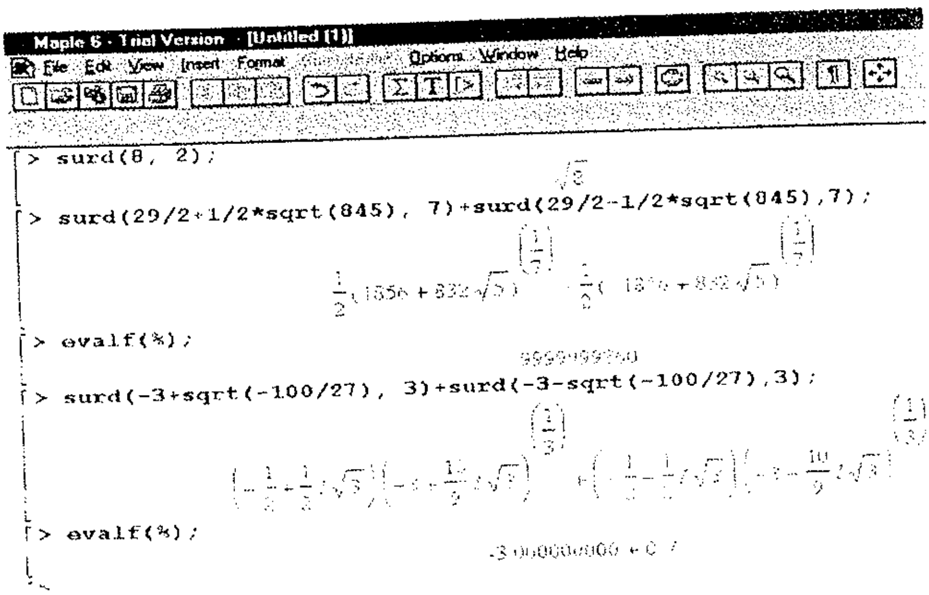




Recorrendo a programas matemáticos mais sofisticados, nomeadamente, o *Mathematica 4.0*, e o *Maple V*, verificamos que



e que...



Assim sendo a manipulação algébrica permite a estes programas matemáticos obter, neste caso, o valor exacto. Note-se que inicialmente obtivemos 1 , enquanto que estes programas de software fornecem os valores 2 e –3, o que não é muito surpreendente, pelo facto de que estão envolvidas raízes cúbicas.

Bibliografia

BIBLIOGRAFIA

BASHMAKOVA, Isabella & Galina Smirnova - *The Beginnings and Evolution of Algebra*
Dolciani Mathematical Expositions, Nº 23, Associação de Matemática da América, 2000

BOYER, Carl B. - *A History of Mathematics*
2ª edição, 1989
revista por Uta C. Merzbach
John Wilwy Sons

CARDANO, Girolamo - *Ars Magna or The Rules of Algebra*
Translated by T. Richard Witmer
Dover Publications, Inc. New York, 1968

DURBIN, John R. – *Modern Algebra . An Introduction*
3ª edição, 1992
John Wiley Sons, Inc.

*GAAL, Lisl – *Classical Galois Theory*
MAS Chelsea Publishing
American Mathematical Society
Providence, Rhode Island
5ª edição, 1998

JACOBSON, Nathan - *Basic Algebra I*
W. H. Freeman And Company
2ª edição
New York, 1985

KOSTRIKIN, A. I. - *Introducción al Álgebra*
Editorial Mir, Moscu
2ª edição, 1983

*MAXFIELD, John E. & Margaret W. - *Abstract Algebra and Solution by Radicals*
Dover Publications, Inc.
New York, 1992

*MONTEIRO, António J.& Isabel T. MATOS - *Álgebra - Um Primeiro Curso*
Escolar Editora
Fevereiro 1995

OLIVEIRA, António M. – *LISA, Biblioteca da Matemática Moderna tomo II*
Álgebra Elementar
Estruturas Matemáticas
Lisa – Livros irradiantes S.A.
São Paulo, 1981

OLIVEIRA, A. Franco, C. LOUREIRO, J. N. SILVA, R. BASTOS – *Trigonometria e Números Complexos*
12º ano de escolaridade
Ministério da Educação
Departamentos de Ensino Secundário
1ª edição, Maio 2000

OSLER, Thomas J. – *Mathematics Magazine*
Universidade de Rowan, Glassboro, NJ 08028
Vol. 74, Nº 1, Fevereiro 2001, págs 26 – 32

ROTMAN, Joseph J. - *A First Course in Abstract Algebra*
2ª edição
Prentice Hall, 2000

UNIVERSIDADE DA MADEIRA
SERVIÇOS DE DOCUMENTAÇÃO

STILLWELL, John – *Elements of Algebra Geometry, Numbers, Equations*
Undergraduate Texts in Mathematics
Springer, 2ª edição, 1996

WAERDEN, B. L.– *A History of Algebra from al-Khwarizmi to Emmy Noether*
Springer-Verlag Berlin Heidelberg
New York Tokyo, 1985

Endereços na Internet:

http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm22/frame9.htm

http://www-groups.dcs.st.and.ac.uk/~history/HistoryTopics.html

http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/HistoryTopics.html

http://www.ipv.pt/millenium/16_ect1.htm

http://lmc.fc.ul.pt/~jnsilva

http://www.math.edu/~don.allen/history/egypt/egypt.html

http://members.aol.com/bbyars/first.html

http://www.museums.reading.ac.uk/vmoc/algebra/

http://sapp.telepac.pt/jorgmoura/

http://www.sercomtel.com.br/matematica/matweb/mod215/tartagli.htm