UNIVERSIDADE da MADEIRA

De uma análise de um problema de combinatória aos quadrados Mágicos

Sofia Rúdi Caetano Mendonça

Funchal, Setembro de 2009

Universidade da Madeira
Departamento de Matemática e Engenharias

De uma análise de um problema de combinatória aos quadrados Mágicos

Sofia Rúdi Caetano Mendonça

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em Matemática

Orientadores:

Doutora Custódia Mercês Reis Rodrigues Drumond
Doutor José Manuel Nunes Castanheira da Costa

Funchal, Setembro de 2009

Resumo

Os quadrados mágicos, de um modo geral, são abordados como uma poderosa ferramenta pedagógica capaz de despertar e aprimorar o raciocínio lógico. São inúmeros os projectos que objectivam a realização de actividades lúdicas capazes de aprimorar capacidades humanas como o raciocínio lógico. Segundo [Leo05], na Alemanha, os quadrados mágicos chegam a ser referência nos manuais das escolas primárias.

Contrariamente à maioria dos trabalhos em quadrados mágicos, a grande preocupação presente neste não foi propriamente explorar a potencialidade dos quadrados mágicos como utensílio dogmático no desenvolvimento de raciocínios. Neste trabalho a nossa atenção incidiu na resolução de um problema de combinatória proposto por Henry Dudeney, mais concretamente o "*Enigma do Monge".*

Foi desenvolvida uma estratégia própria para solucionar o respectivo enigma. Foram ainda analisadas outras questões inerentes ao mesmo problema. Verificámos ainda que as relações de simetria desempenham um papel preponderante, no sentido em que o seu conhecimento facilitou a resolução do problema.

Contudo, e contrariamente ao que previamos, verificou-se que este problema estava fortemente relacionado com os quadrados mágicos. Mais, existem propriedades verificadas no enigma que são determinantes na construção de quadrados mágicos de ordem 3.

Palavras-chave: *"Os enigmas de Canterbury", Henry Dudeney* , Combinatória, Relações de Simetria em matrizes, Rotações, Quadrado Magico de ordem 3.

Abstract

Magical squares, in a general way, are considered as a powerful pedagogical tool capable of awakening and improving logical reasoning. Research with the intent of accomplishing playful activities, capable of improving human capacities as in logical reasoning, are innumerable. According to [Leo05], in Germany, magic squares are even reference, in primary school textbooks.

Contrarily to the majority of research about magical squares, the main concern in this investigation was not to explore the potentiality of the magical squares as dogmatic tool in the development of reasoning. In this investigation our attention was directed to the resolution of a combinatorial problem proposed by Henry Dudeney, The Monk Problem, to be more precise.

An original strategy was developed in order to solve the referred enigma. Still other questions inherent to the problem had been analyzed. We also noted that the symmetry relations in a square matrix played a determinant role, in order to facilitate the problem resolution.

However and contrarily what we foresaw, it was verified that this problem was strongly related with magical squares. Some properties verified in the enigma have a determinant role in the construction of magical squares of the third order.

Keywords: "*Canterbury Puzzles*", Henry Dudeney, combinatory, symmetry relations in matrixes, rotations, Magic Square of 3'order.

“Uma vida sem desafios não vale a pena ser vivida”
-Sócrates-

“Cada problema que resolvi, tornou-se uma regra, que serviu depois para resolver outros problemas”
-René Descartes-

Índice

Introdução

Os enigmas e os jogos matemáticos são muitas vezes tratados como um meio de intervenção pedagógica, pois possibilitam ao interveniente, particularmente às crianças, progredir na construção das estruturas do pensamento operatório, bem como nas noções de intervenção pedagógica. Esta intervenção pedagógica abrange todas as idades e diversas áreas. Por exemplo em [Ame], as crianças encontram actividades de quadrados mágicos para compreender regras de adição/subtracção assim como relações de simetrias, já [Hors03] recorre aos quadrados mágicos para introduzir implementações de ArrayLists e de Arrays em java, enquanto que [Poo04] recorre ao tema como introdução aos espaços vectoriais. Contudo, o nosso objectivo não é de todo reforçar a teoria construtivista de Piaget, mas sim debruçarmo-nos sobre um enigma muito particular. O enigma que exploraremos despertou-nos a atenção pela sua potencialidade em desenvolver raciocínios e por contrariar a ideia de que um qualquer enigma/problema desperta interesse nos homens enquanto este permanece oculto, no sentido em que uma vez solucionado, o seu interesse desvanece.

Em *"Os enigmas de Canterbury",* Henry Dudeney apresenta uma variedade de problemas matemáticos, um dos quais *"O enigma do monge".* Este é o problema que mencionámos, portanto aquele sobre o qual nos iremos debruçar. Trata-se de um problema de combinatória, que começa por desafiar-nos a contabilizar o número de distribuições possíveis de cães numa estrutura de canis. A respectiva estrutura é constituída por nove canis unidos de forma a formarem um quadrado. As distribuições a efectuar devem obedecer simultaneamente a quatro regras: as linhas exteriores de canis devem somar 10 cães; as colunas exteriores de canis também devem somar 10 cães; o canil central nunca é utilizado; podem existir canis sem ocupação, para além do central.

Este enigma já foi solucionado até porque na referida obra o número de distribuições possíveis é apresentado. Para além desta solução é referido que esta é complicada quando no lugar de 10 a soma é um número S fixo e ainda é apresentada a respectiva solução geral. No entanto não encontrámos qualquer informação que evidencie a técnica de contagem, nem nesta obra nem em outra qualquer. Assim, somos motivados pelo desafio de efectuarmos a respectiva contagem por meios próprios, assim como efectuar a análise da situação geral.

Contudo surgem ainda outras questões pertinentes e espontâneas: E se pudesse existir ocupação do canil central, onde as respectivas linhas e colunas tivessem, cada uma delas, de somar 10? Terá este novo enigma solução? E em caso afirmativo, terá a solução deste alguma relação com a do enigma original? E se fosse exigido que o canil central não tivesse ocupação e em contrapartida cada um dos restantes canis obrigatoriamente albergasse cães? E se fosse exigido que todos os canis fossem ocupados, onde, logicamente, todas as linhas e colunas somassem 10? Assim num primeiro capítulo pretendemos não só solucionar o enigma do monge como também responder a todas as questões aqui levantadas.

Uma questão que de certo modo provoca-nos alguma curiosidade é o valor 10. Será este número escolhido aleatoriamente pelo autor? Ou será que este problema só tem significado para um conjunto de valores onde o 10 está incluído? Consequentemente, no capítulo seguinte verificaremos para que valores é possível generalizar o problema do monge. De igual modo ao que foi referenciado para o caso clássico, é natural que aqui também surjam questões análogas às mencionadas no 1º capítulo, que dizem respeito à ocupação de cães ser exigida ou não e ao facto do canil central ser utilizado ou não. Deste modo, em analogia com o capítulo anterior pretendemos não só generalizar, se possível, o enigma do Monge como também generalizar todos os novos enigmas adjacentes às questões já mencionadas.

É pertinente questionarmo-nos se uma vez solucionadas todas as nossas questões teremos vários resultados independentes, ou uma cadeia de resultados interligados. Logicamente esperamos que exista uma ligação entre as soluções dos vários problemas, pois estão fortemente relacionados. Assim, ao longo da nossa análise compararemos as mesmas a fim de verificarmos como estas se relacionam.

No último capítulo abordaremos um tema que à partida não teria qualquer relação com o enigma do monge, os quadrados mágicos. Ao longo de uma pesquisa verificámos que os quadrados mágicos têm diversas semelhanças com a estrutura de canis descrita por [Dud08], pelo que pretendemos, neste capítulo, construir quadrados mágicos recorrendo aos capítulos anteriores.

Capítulo 1

O Enigma do Monge

"Os enigmas de Canterbury" [Dud08] é uma obra onde Henry Dudeney relata diversos trajectos de amigos e, ao longo dos percursos, o grupo depara-se com uma variedade de problemas, que são propostos por diversas personagens. Nesta obra, um problema em particular despertou a nossa atenção, "O Enigma do Monge". Este enigma, consiste num desafio proposto por um monge ao grupo de amigos:

«Há uma pequena questão que me deixou perplexo. Embora por certo não seja de grande importância; mesmo assim, pode servir para provar o vosso engenho, pois têm habilidade para estas coisas. Tenho nove canis para uso dos meus cães, colocados em forma de um quadrado, embora o do centro nunca seja usado, por não ser apropriado. A prova consiste em ver de quantas maneiras diferentes posso colocar os meus cães em todos ou alguns dos canis exteriores, de modo que o número de cães em cada lado do quadrado some dez.»- [Dud08]

Este enigma, é ainda acompanhado por ilustrações, em particular pelos diagramas que se seguem,

5	1	4
1		1
4	1	5

1	9	0
7		8
2	6	2

5	5	0
1		10
4	6	0

0	6	4
10		1
0	5	5

e pela informação de que os dois últimos diagramas são considerados distintos, uma vez que dizem respeito a diferentes distribuições.

Neste capítulo, pretendemos não só solucionar o enigma em causa, como também decifrar algumas questões que surgem espontaneamente. Questões relacionadas directamente com as exigências feitas pelo monge: o facto de poderem existir canis vazios e o facto do canil central nunca ser utilizado. Deste modo, neste conclave iremos abordar quatro problemas distintos. Numa primeira instância será estudado o caso clássico, portanto o enigma tal como este foi enunciado por Dudeney. Na segunda secção vamos estudar o problema com uma nova imposição: apenas o canil central não alberga cães e os restantes canis terão, portanto, ocupação obrigatória. Já no problema que se segue os diferentes canis incluindo o central poderão ter ocupação, ou não, mas todas as linhas e todas as colunas do canil terão de somar 10. Por fim na última secção dedicaremos a nossa atenção ao problema em que todos os canis, incluindo o central, são ocupados por cães.

É lógico que nos dois últimos problemas, face à forma como o enigma original é apresentado, faz todo o sentido que a linha e a coluna interiores também tenham de somar 10. Contudo, e apesar de serem quatro problemas distintos, mostraremos, pela forma como estes se relacionam, que existem relações nas respectivas soluções.

1.1- Caso clássico

Nesta secção, ambicionamos solucionar o enigma do monge, proposto por Henry Dudeney. Assim, objectivamos contabilizar o número de distribuições de cães numa estrutura de canis semelhante a uma matriz 3x3, de modo que cada linha e coluna das extremidades da estrutura some 10 cães, onde o canil central nunca é ocupado, podendo ainda existir outros canis vazios.

Observemos que o número de cães não é desvendado. Assim pretendemos não só obter o total das distribuições, como também saber discriminadamente, para cada número de cães quantas distribuições existem.

Apesar de nada ser dito, é evidente que, para determinados números de cães não faz qualquer sentido este problema, por exemplo: é claramente visível que não é possível arrumarmos 5 cães na referida estrutura e obtermos soma 10 em todos os lados. Assim torna-se evidente e necessário que em primeira instância averiguemos para que número total de cães faz sentido a nossa análise.

Então consideremos a estrutura

a	**b**	**c**
d		**e**
f	**g**	**h**

(0)

onde cada uma das letras a, b, c, d, e, f, g e h corresponde ao número de cães que se guarda no respectivo canil. Obviamente que cada um destes terá de ser um inteiro não negativo.

Sabemos que o número total de cães, n, é dado por:

$$n = a + b + c + d + e + f + g + h \qquad (\mathbf{1})$$

Por outro lado cada lado do quadrado tem de somar 10, ou seja,

$$\begin{cases} a+b+c=10 \\ f+g+h=10 \\ a+d+f=10 \\ c+e+h=10 \end{cases} \qquad (\mathbf{2})$$

Assim, se considerarmos (1) e (2), facilmente obtemos:

$$\begin{cases} a + b + c = 10 \\ f + g + h = 10 \\ d + e = x \end{cases} \Rightarrow n = 20 + x,\ x \in \mathbb{N}\ (\text{ pois } d, e \in \mathbb{N}) \qquad (\mathbf{3})$$

$$\begin{cases} a + d + f = 10 \\ c + e + h = 10 \\ b + g = y \end{cases} \Rightarrow n = 20 + y,\ y \in \mathbb{N}\ (\text{ pois } b, g \in \mathbb{N}) \qquad (\mathbf{4})$$

de onde resulta a igualdade entre x e y. Deste modo podemos enunciar o resultado que se segue e que desempenhará um papel preponderante ao longo da prova.

Proposição1.1.1 *A soma do número de cães na linha intermédia de canis é exactamente a mesma que na coluna intermédia, ou seja, se considerarmos a estrutura (0) temos que:*

$$b + g = d + e$$

Além disso, o número total de cães, n*, é dado em função do número de cães existentes nos canis intermédios por:*

$$n = 20 + x, \qquad x \in \mathbb{N}: x = b + g = d + e$$

Sabemos que, no máximo, cada um dos canis pode albergar 10 cães (caso contrário a soma das extremidades nunca poderá ser 10) e que um ou mais canis podem ficar vazios:

- Se considerarmos que os canis referentes a $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{e}$ e $\boldsymbol{g}$ estão vazios, ou seja,

$$b = g = d = e = 0$$

Temos a seguinte estrutura:

	0	
0		0
	0	

E pela proposição anteriormente enunciada, obtemos o mínimo de n quando $x = 0$, portanto $n = 20$.

Exemplos:

10	0	0
0		0
0	0	10

7	0	3
0		0
3	0	7

Assim podemos concluir que, para satisfazermos as condições do enunciado têm de existir no mínimo 20 cães.

- Se, por outro lado, considerarmos que os mesmos canis têm cada um deles 10 cães ($b = d = e = g = 10$) teremos o valor máximo para x e consequentemente o valor máximo para n.

$$n = 20 + x = 20 + b + d = 20 + 10 + 10 = 40$$

0	10	0
10		10
0	10	0

Deste modo concluímos que o problema tem significado para um máximo de 40 cães.

Então concluímos:

$$20 \leq n \leq 40 \qquad (5)$$

e como n corresponde ao número de cães tem de ser inteiro. Podemos então enunciar o,

Corolário 1.1.2 - *O número total de cães, a distribuir numa estrutura de canis semelhante a uma matriz 3x3, de modo a que cada linha e coluna exteriores some 10 e onde o canil central nunca é utilizado, é no mínimo 20 e no máximo 40.*

Observação 1.1.3 - *Notemos que os casos:*

7	0	3
0	■	0
3	0	7

3	0	7
0	■	0
7	0	3

são considerados distintos pois referem-se a diferentes distribuições de cães.

Observação1.1.4 - *Se conhecermos o número de cães nos canis b, d, e e g:*

(i) Saberemos o número total de cães; (ver Proposição 1.1.2)

(ii) Conhecidos os valores de b, d, e e g basta sabermos o número de cães num outro canil para deduzirmos a distribuição dos cães em todos os canis.

Exemplo:

?	3	?
2	■	2
7	1	?

$\Rightarrow$

1	3	6
2	■	2
7	1	2

A título de exemplo, consideremos os canis b, d, e e g fixos, da seguinte forma:

?	0	?
3		4
?	7	?

Sabemos, pela observação anterior, que se for conhecido o valor de um outro canil determinamos, de imediato, a distribuição dos restantes. Assim sem perda de generalidade podemos concentrar a nossa atenção apenas no canil correspondente a f.

Uma vez que $\boldsymbol{g = 7}$, recorrendo a (2), vem que $\boldsymbol{f + h = 3}$. Então temos as seguintes possibilidades:

f	h
0	3
1	2
2	1
3	0

Tabela 1

que correspondem às estruturas:

7	0	3
3		4
0	7	3

6	0	4
3		4
1	7	2

5	0	5
3		4
2	7	1

4	0	6
3		4
3	7	0

É evidente que se considerássemos um outro canil que não f, chegaríamos às mesmas distribuições de cães. Com efeito, consideremos, por exemplo, o canil relativo a c:

	0	?
3		4
	7	

Temos $c + e + h = 10$, pelo que $c + h = 6$ (pois $e = 4$). Consequentemente temos as seguintes possibilidades:

c	h
0	6
1	5
2	4
3	3
4	2
5	1
6	0

Tabela 2

Por outro lado $a + b + c = 10$ logo, para cada valor de c considerado, temos os seguintes valores de a ($a = 10 - c$):

c	h	a
0	6	10
1	5	9
2	4	8
3	3	7
4	2	6
5	1	5
6	0	4

Tabela 3

Sabemos ainda que $a + d + f = 10$, logo para cada valor de a temos os seguintes valores de f ($f = 7 - a$):

c	h	a	f
0	6	10	-3
1	5	9	-2
2	4	8	-1
3	3	7	0
4	2	6	1
5	1	5	2
6	0	4	3

Tabela 4

No entanto, $f \in \mathbb{N}$, pois refere-se ao número de cães no respectivo canil e como é óbvio nunca será um número negativo logo existem valores na tabela 4 que não podem ser admitidos como solução, de onde resulta:

c	h
3	3
4	2
5	1
6	0

Tabela 5

que coincidem com as situações já descritas na Tabela 1

A utilização do exemplo anterior tem a vantagem de evidenciar uma maior facilidade na manipulação do problema quando se fixa f em detrimento da fixação de c. Este aspecto deve-se ao facto de f estar junto ao canil intermédio com maior número de cães e assim permitir excluir de imediato situações improváveis, enquanto na segunda estratégia (fixando c) só conseguimos exclui-las posteriormente.

Observação 1.1.5 *De futuro, por uma questão de estratégia, sempre que os canis b, g, d e e estiverem fixos, e o objectivo for fixar um outro canil, a escolha recairá para um canil que estiver junto ao canil que alberga maior número de cães, ou seja junto do $max\{b, g, d, e\}$.*

Como já foi verificado anteriormente, o número de cães é dado por:

$$n = 20 + x,$$

onde

$$x = b + g = d + e.$$

Sabemos ainda que,

$$20 \leq n \leq 40.$$

Verifiquemos então, para cada número fixo de cães de quantas formas possíveis os podemos arrumar nos canis, obedecendo às condições iniciais.

- $\boldsymbol{n = 20}$

Para este número total de cães, resulta,

$$n = 20 \Longrightarrow x = 0 \Longrightarrow b + g = d + e = 0 \Longrightarrow b, g, d, e = 0$$

que corresponde à estrutura seguinte,

	0	
0		0
?	0	

Basta conhecermos o número de cães em qualquer canil para concluirmos os restantes, em particular é suficiente o conhecimento do número de cães no canil f.

Neste canil podemos ter 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ou 10 cães, ou seja, quando estamos a distribuir 20 cães existem, na totalidade, **11** formas distintas de arrumá-los de forma a serem satisfeitas as condições iniciais, isto é, de modo a que o número de cães em cada linha e cada coluna totalize 10.

- $\boldsymbol{n = 21}$

Se tivermos este número de cães, temos,

$$n = 21 \Longrightarrow x = 1 \Longrightarrow b + g = d + e = 1$$

donde resultam os seguintes casos,

	b	g	d	e
A	0	1	1	0
B	0	1	0	1
C	1	0	1	0
D	1	0	0	1

Tabela 6

que correspondem às seguintes estruturas,

	0	
1		0
	1	

A

	0	
0		1
	1	

B

	1	
1		0
	0	

C

	1	
0		1
	0	

Relativamente à estrutura A, o canil f pode arrumar 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9 cães. Temos portanto para este caso **10** possibilidades distintas.

B, C e D correspondem às rotações de A logo o número de casos possíveis também será 10 para cada uma destas situações. Temos portanto **40** formas distintas de arrumar 21 cães.

- $n = 22$

Analisando esta situação verificamos que $x = 2$ logo somos conduzidos às situações registadas na tabela seguinte,

	b	g	d	c
A	0	2	2	0
B	0	2	1	1
C	0	2	0	2
D	1	1	2	0
E	1	1	1	1
F	1	1	0	2
G	2	0	2	0
H	2	0	1	1
I	2	0	0	2

Tabela 7

que correspondem, às estruturas,

	0	
2	■	0
	2	

A

	0	
1	■	1
	2	

B

	0	
0	■	4
	2	

C

	1	
3	■	4
	1	

D

	1	
3	■	4
	1	

E

	1	
3	■	4
	1	

F

	2	
3	■	4
	0	

G

	2	
3	■	4
	0	

H

	2	
3	■	4
	0	

I

Quer na estrutura A, quer em B o canil f pode ter 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ou 8 cães. Ou seja existem 9 possibilidades, de arrumar os cães em qualquer um dos casos.

As estruturas C, G e I são rotações de A, enquanto as estruturas D, F e H são rotações de B, de onde se conclui que para cada um destes 8 casos existem 9 possibilidades. Contabilizando todas obtemos um total de 72 casos possíveis
$(9 \times 8 = 72)$.

Podemos, na estrutura E, arrumar 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ou 9 cães no canil f, ou seja, 10 novos casos.

Como as estruturas anteriormente representadas correspondem a todas as distribuições possíveis, relativamente aos canis b, g, d, e e para um total de 22 cães, concluímos que existem, na totalidade, **82** $(72 + 10 = 82)$ formas distintas de arrumá-los.

Antes de prosseguirmos na análise das diversas situações para n entre 23 e 40, é conveniente termos em atenção algumas observações que facilitarão muito os nossos raciocínios futuros.

Observação 1.1.6 *Uma vez fixos b, g, d e e basta-nos estudar separadamente, no máximo, quatro casos distintos, que são, respectivamente:*

- ***Caso 1:***

$$b = d = x_1;\ g = e = x_2\ com\ x_1 \neq x_2\ e\ x = x_1 + x_2$$

	x_1	
x_1		x_2
	x_2	

Se considerarmos todas as permutações possíveis deste caso, ou seja:

b	g	d	e
x_1	x_2	x_2	x_1
x_2	x_1	x_1	x_2
x_2	x_1	x_2	x_1

Tabela 8

verificamos que as mesmas equivalem respectivamente às rotações da estrutura inicial:

	x_1	
x_2		x_1
	x_2	

	x_2	
x_1		x_2
	x_1	

	x_2	
x_2		x_1
	x_1	

Além de serem as rotações da estrutura inicial correspondem ainda a todas as simetrias possíveis da estrutura.

- ***Caso 2:***

$$b = x_1; g = x_2;\ d = x_3\ ; e = x_4$$
$$onde\ \ x = x_1 + x_2 = x_3 + x_4\ ;\ i \neq j \Longrightarrow x_i \neq x_j$$

	x_1	
x_3		x_4
	x_2	

Se considerarmos todas as permutações possíveis deste caso, isto é, todas as permutações de $b,\ g,\ d,\ e$ *e tais que* $b + g = x = d + e$, *obteremos as várias possibilidades registadas na tabela,*

b	g	d	e
x_4	x_3	x_1	x_2
x_2	x_1	x_4	x_3
x_3	x_4	x_2	x_1
x_2	x_1	x_3	x_4
x_4	x_3	x_2	x_1
x_1	x_2	x_4	x_3
x_3	x_4	x_1	x_2

Tabela 9

Verificamos que as três primeiras permutações equivalem, respectivamente, às rotações da estrutura inicial:

	x_4	
x_1		x_2
	x_3	

	x_2	
x_4		x_3
	x_1	

	x_3	
x_2		x_1
	x_4	

A quarta permutação, é precisamente uma simetria da estrutura inicial, mais concretamente, a simetria em relação à mediatriz dos lados verticais do quadrado:

	x_2	
x_3	■	x_4
	x_1	

Os restantes casos, correspondem às rotações da estrutura anterior (da quarta permutação):

	x_4	
x_2	■	x_1
	x_3	

	x_1	
x_4	■	x_3
	x_2	

	x_3	
x_1	■	x_2
	x_4	

Tendo em vista a simplificação da linguagem designaremos por inversão, a simetria em relação à mediatriz dos lados verticais do quadrado bem como as respectivas rotações.

- ***Caso 3:***

$$b = x_1;\ g = x_2;\ d = e = x_3 = \frac{x}{2};\ onde\ x_1 \neq x_2\ e\ x_1 + x_2 = x$$

(Nota: Analogamente poderíamos ter considerado

$d = x_1;\ e = x_2;\ g = b = x_3 = \frac{x}{2};onde\ x_1 \neq x_2\ e\ x_1 + x_2 = x$ *)*

Temos então a seguinte estrutura:

	x_1	
x_3	■	x_3
	x_2	

De modo análogo aos casos anteriores, considerando todas as permutações possíveis para este caso, vemos que b, g, d, *e* e *podem tomar os seguintes valores:*

b	g	d	e
x_3	x_3	x_1	x_2
x_2	x_1	x_3	x_3
x_3	x_3	x_2	x_1

Tabela 10

E cada uma destas permutações equivale a uma rotação da estrutura inicial:

	x_3	
x_1		x_2
	x_3	

	x_2	
x_3		x_3
	x_1	

	x_3	
x_2		x_1
	x_3	

É possível verificar que estas rotações incluem todas as simetrias da estrutura inicial.

- ***Caso 4:***

$$b = g = d = e = x_1 = \frac{x}{2}$$

Que corresponde à seguinte estrutura:

	x_1	
x_1		x_1
	x_1	

Para este caso não existem permutações e do mesmo modo não existem simetrias.

Obviamente, os dois últimos casos só se verificam quando $\frac{x}{2}$ é inteiro, ou seja, quando x é par. Com efeito, de $n = 20 + x$, resulta,

$$x \; é \, par \iff n \; é \, par \tag{6}$$

ou equivalentemente:

$$x \text{ é } ímpar \iff n \text{ é } ímpar \tag{7}$$

Logo os dois últimos casos só terão lugar quando o número de cães a arrumar for de facto um número par.

Retomemos então a contagem dos casos possíveis, mas agora recorrendo às observações efectuadas.

- $\boldsymbol{n = 23}$

Ao considerarmos este total de cães, facilmente deduzimos que $x = 3$

Fixemos os casos onde $g = 3$. Uma vez que para cada caso já conhecemos as respectivas permutações basta considerarmos as seguintes estruturas:

	0	
3		0
	3	

I

	0	
2		1
	3	

II

Para qualquer um destes casos podemos, em relação ao canil f arrumar 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ou 7 cães, pelo que existem 8 casos possíveis.

Sabemos ainda, pelas observações feitas anteriormente, que em relação à estrutura I existem mais 3 casos associados (rotações), e em relação à estrutura II existem mais 7 casos associados (3 rotações e 4 inversões), totalizando 96 casos.

Considerando agora $g = 2 = d$, temos a estrutura,

	1	
2		1
	2	

III

Neste caso, o canil f pode arrumar 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ou 8 cães, somando 9 casos possíveis. Sabemos ainda que existem outras três estruturas (rotações de III) com o mesmo número de possibilidades, totalizando assim 27 casos.

A Tabela 11 ilustra que todas as possibilidades para os canis b, g, d e e já foram consideradas:

b	g	d	e	Estrutura Geral
0	3	3	0	Estrutura I
0	3	0	3	Rotação de I
3	0	3	0	Rotação de I
3	0	0	3	Rotação de I
0	3	2	1	Estrutura II
0	3	1	2	Inversão de II
3	0	2	1	Inversão de II
3	0	1	2	Rotação de II
2	1	3	0	Rotação de II
2	1	0	3	Inversão de II
1	2	3	0	Inversão de II
1	2	0	3	Rotação de II
1	2	2	1	Estrutura III
1	2	1	2	Rotação de III
2	1	2	1	Rotação de III
2	1	1	2	Rotação de III

Tabela 11

Assim concluímos que quando temos 23 cães existem **132** $(96 + 36 = 132)$ formas distintas de arrumá-los nos canis.

O facto de termos estudado todas as 16 distribuições possíveis relativamente aos canis b, g, d e e com apenas 3 estruturas em vez das 16, não foi por coincidência. Implicitamente fixámos b, g, d, e e do seguinte modo:

1º-considerámos todas as decomposições de x $(x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = x)$ e para cada x_i, com $i \in \{1,2,3,4\}$ fixos, definiu-se g, b, d, e e do seguinte modo:

$$\begin{cases} g = max\{x_1, x_2, x_3, x_4\} \\ b = x - g \\ d = \begin{cases} g, & se \quad \exists_{i,j}: i \neq j \wedge x_i = x_j = g \\ max(\{x_1, x_2, x_3, x_4\} \setminus \{g\}), & caso\ contrário \end{cases} \\ e = x - d \end{cases} \tag{8}$$

2º-considerámos a Observação 1.16 no sentido em que:

Se $g = d$ e $g \neq b$ ou se, $d = e = \frac{x}{2}$ e $g \neq b$ existem no total quatro casos com o mesmo valor de possibilidades;

Se $g \neq d, g \neq b, d \neq e$, existem oito casos com o mesmo valor de possibilidades;

Se $g = b = d = e = \frac{x}{2}$, temos um único caso.

Assim ficam representadas todas as distribuições pelos canis b, g, d e e. Estrategicamente, sem perda de generalidade recorremos ao canil f para determinar os casos possíveis para cada distribuição de b, g, d e e fixa.

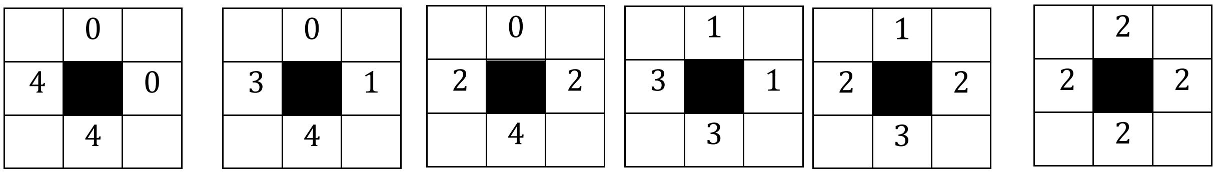
- $\boldsymbol{n = 24}$

Considerando este caso temos, por intermédio da Proposição 1.1.1,
$b + g = d + e = 4$.
Os diversos casos encontram-se descritos na Tabela 12,

b	g	d	e
4	0	4	0
4	0	0	4
0	**4**	**4**	**0**
0	4	0	4
4	0	3	1
4	0	1	3
0	**4**	**3**	**1**
0	4	1	3
3	1	4	0
3	1	0	4
1	3	4	0
1	3	0	4
4	0	2	2
0	**4**	**2**	**2**
2	2	4	0
2	2	0	4
3	1	3	1
3	1	1	3
1	**3**	**3**	**1**
1	3	1	3
3	1	2	2
1	**3**	**2**	**2**
2	2	3	1
2	2	1	3
2	**2**	**2**	**2**

Tabela 12

Então basta considerarmos os casos a azul, que correspondem, respectivamente, às estruturas,



I II III IV V VI

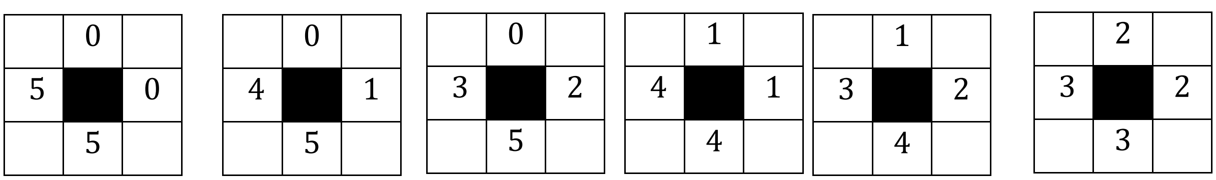
Relativamente às três primeiras, o canil f pode arrumar 0, 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 cães, nas estruturas IV e V o mesmo canil pode arrumar deste 0 até 7, já na última o número varia entre 0 e 8.

Donde concluímos que para 24 cães existem **185** formas distintas de arrumá-los.

- $\boldsymbol{n = 25}$

Para este valor de cães precisamos admitir as decomposições do número 5.

Tendo em conta o que já foi efectuado para os casos anteriores basta considerarmos as seguintes estruturas:



I II III IV V VI

Relativamente às três primeiras, o canil f pode arrumar 0, 1, 2, 3, 4, ou 5 cães. Já nas estruturas IV e V pode levar até 6 cães enquanto a última arruma até 7 cães.

Então para um total de 25 cães existem **236** distribuições possíveis.

- $\boldsymbol{n = 26}$

Atendendo às decomposições, em números inteiros não negativos do número 6, somos conduzidos aos seguintes esquemas, representativos das várias situações.

	0	
6		0
	6	

I

	0	
5		1
	6	

II

	0	
4		2
	6	

III

	0	
3		3
	6	

IV

	1	
5		1
	5	

V

	1	
4		2
	5	

VI

	1	
3		3
	5	

VII

	2	
4		2
	4	

VIII

	2	
3		3
	4	

IX

	3	
3		3
	3	

X

Nos casos I, II, III e IV o canil f pode levar no máximo 4 cães, já nas estruturas V, VI e VII levar no máximo 5 cães, nas estruturas VIII e IX o canil f pode levar até 6 cães e por fim na estrutura X o mesmo canil leva no máximo 7 cães.

Assim, recorrendo à Observação 1.1.6, quando temos 26 cães existem **280** possibilidades de distribui-los pelos canis.

- $\boldsymbol{n = 27}$

Para este número de cães facilmente verificamos a importância das decomposições do número 7, pelo que é suficiente analisarmos as estruturas,

	0	
7		0
	7	

I

	0	
6		1
	7	

II

	0	
5		2
	7	

III

	0	
4		3
	7	

IV

	1	
6		1
	6	

V

	1	
5		2
	6	

VI

	1	
4		3
	6	

VII

	2	
5		2
	5	

VIII

	2	
4		3
	5	

IX

	3	
4		3
	4	

X

Relativamente a I, II, III e IV o canil f pode arrumar 0, 1, 2 ou 3 cães. Já em V, VI e VII f pode levar até 4 cães, nas estruturas VIII e IX leva até 5 enquanto na última arruma até 6 cães.

Assim para um total de 27 cães existem **312** distribuições possíveis.

- $\boldsymbol{n = 28}$

Neste caso as estruturas base são:

	0	
8		0
	8	

I

	0	
7		1
	8	

II

	0	
6		2
	8	

III

	0	
5		3
	8	

IV

	0	
4		4
	8	

V

	1	
7		1
	7	

VI

	1	
6		2
	7	

VII

	1	
5		3
	7	

VIII

	1	
4		4
	7	

IX

	2	
6		2
	6	

X

	2	
5		3
	6	

XI

	2	
4		4
	6	

XII

	3	
5		3
	5	

XIII

	3	
4		4
	5	

XIV

	4	
4		4
	4	

XV

Nos casos I, II, III, IV e V o canil f pode levar no máximo 2 cães, já nas estruturas VI, VII, VIII e IX leva no máximo 3 cães, nas estruturas X, XI e XII o canil f pode levar até 4 cães, enquanto em XIII e XIV o canil f atinge o seu máximo quando ocupado por 5 cães e por fim na estrutura X o mesmo canil leva no máximo 6 cães.

Logo quando temos 28 cães existem **327** possibilidades de arrumá-los.

- $\boldsymbol{n = 29}$

Neste caso extraímos as seguintes estruturas:

	0	
9		0
	9	

I

	0	
8		1
	9	

II

	0	
7		2
	9	

III

	0	
6		3
	9	

IV

	0	
5		4
	9	

V

	1	
8		1
	8	

VI

	1	
7		2
	8	

VII

	1	
6		3
	8	

VIII

	1	
5		4
	8	

IX

	2	
7		2
	7	

X

	2	
6		3
	7	

XI

	2	
5		4
	7	

XII

	3	
6		3
	6	

XIII

	3	
5		4
	6	

XIV

	4	
5		4
	5	

XV

Relativamente às cinco primeiras, o canil f pode estar vazio ou ter apenas um ocupante, enquanto nas quatro estruturas que se seguem o mesmo canil pode ter até 2 cães. Já nas estruturas X, XI e XII o mesmo canil leva no máximo 3 cães. Em relação às estruturas XIII e XIV pode ter até 4 cães e por fim na última estrutura f leva no máximo 5. Consequentemente, para um total de 29 cães existe um total de **320** formas distintas de arrumá-los nos canis.

- $\boldsymbol{n = 30}$

Nesta situação obtemos as estruturas:

	0	
10		0
	10	

I

	0	
9		1
	10	

II

	0	
8		2
	10	

III

	0	
7		3
	10	

IV

	0	
6		4
	10	

V

	0	
5		5
	10	

VI

	1	
9		1
	9	

VII

	1	
8		2
	9	

VIII

	1	
7		3
	9	

IX

	1	
6		4
	9	

X

	1	
5		5
	9	

XI

	2	
8		2
	8	

XII

	2	
7		3
	8	

XIII

	2	
6		4
	8	

XIV

	2	
5		5
	8	

XV

	3	
7		3
	7	

XVI

	3	
6		4
	7	

XVII

	3	
5		5
	7	

XVIII

	4	
6		4
	6	

XIX

	4	
5		5
	6	

XX

	5	
5		5
	5	

XXI

Relativamente às seis primeiras estruturas é visível que a última linha já soma 10, o que quer dizer que para estas estruturas os canis f e h têm de ter, cada um deles, zero cães, isto é, têm de obrigatoriamente estar vazios, consequentemente para cada uma destas estruturas existe apenas uma possibilidade.

Em VII, VIII, IX, X e XI, o canil f ou está vazio ou tem apenas um cão, já nas quatro estruturas que se seguem o canil mencionado leva no máximo 2 cães, nas estruturas XVI, XVII e XVIII o mesmo canil leva até 3 cães, em XIX e XX leva até 4 cães, e finalmente na última estrutura o canil suporta no máximo 5 cães.

Juntando todas as possibilidades concluímos que para um total de 30 cães existem **286** formas distintas de arrumá-los nos canis.

- $n = 31$

Quando o número de cães totaliza este valor obtemos:

	1	
10		1
	10	

I

	1	
9		2
	10	

II

	1	
8		3
	10	

III

	1	
7		4
	10	

IV

	1	
6		5
	10	

V

	2	
9		2
	9	

VI

	2	
8		3
	9	

VII

	2	
7		4
	9	

VIII

	2	
6		5
	9	

IX

	3	
8		3
	8	

X

	3	
7		4
	8	

XI

	3	
6		5
	8	

XII

	4	
7		4
	7	

XIII

	4	
6		5
	7	

XIV

	5	
6		5
	6	

XV

Relativamente às cinco primeiras estruturas é visível que a última linha já soma 10, o que quer dizer que para estas estruturas os canis f e h têm de obrigatoriamente estar vazios, consequentemente para cada uma destas estruturas existe apenas uma possibilidade. Em VI, VII, VIII e IX o canil f ou está vazio ou tem um cão, já nas três estruturas que se seguem o canil mencionado leva no máximo 2 cães, nas estruturas XIII e XIV leva até 3 cães e, finalmente, na última estrutura o canil suporta, no máximo, 4 cães.

Totalizando **220** formas distintas de arrumar 31 cães nos canis.

- $n = 32$

Temos as seguintes estruturas:

	2	
10		2
	10	

I

	2	
9		3
	10	

II

	2	
8		4
	10	

III

	2	
7		5
	10	

IV

	2	
6		6
	10	

V

	3	
9		3
	9	

VI

	3	
8		4
	9	

VII

	3	
7		5
	9	

VIII

	3	
6		6
	9	

IX

	4	
8		4
	8	

X

	4	
7		5
	8	

XI

	4	
6		6
	8	

XII

	5	
7		5
	7	

XIII

	5	
6		6
	7	

XIV

	6	
6		6
	6	

XV

De modo análogo aos casos anteriores observamos que para as cinco primeiras estruturas temos 1 caso possível, para as estruturas VI, VII, VIII e IX existem 2 possibilidades, para as três estruturas que se seguem existem 3 possibilidades. Relativamente às estruturas XIII e XIX existem 4 casos possíveis e por fim a última estrutura tem 5 possibilidades. Consequentemente existem **165** possibilidades distintas de repartir os cães pelos canis.

- $n = 33$

Para este valor obtemos,

	3	
10		3
	10	

I

	3	
9		4
	10	

II

	3	
8		5
	10	

III

	3	
7		6
	10	

IV

	4	
9		4
	9	

V

	4	
8		5
	9	

VI

	4	
7	■	6
	9	

VII

	5	
8	■	5
	8	

VIII

	5	
7	■	6
	8	

IX

	6	
7	■	6
	7	

X

É possível observarmos que para as quatro primeiras estruturas temos 1 caso possível, para as três estruturas seguintes existem 2 possibilidades, para as duas estruturas que se seguem existem 3 possibilidades e por fim a última estrutura tem 4 possibilidades. Consequentemente, para um total de 33 cães existem **120** distintas distribuições possíveis.

- $\boldsymbol{n = 34}$

Extraímos as seguintes estruturas,

	4	
10	■	4
	10	

I

	4	
9	■	5
	10	

II

	4	
8	■	6
	10	

III

	4	
7	■	7
	10	

IV

	5	
9	■	5
	9	

V

	5	
8	■	6
	9	

VI

	5	
7	■	7
	9	

VII

	6	
8	■	6
	8	

VIII

	6	
7	■	7
	8	

IX

	7	
7	■	7
	7	

X

É possível observarmos que, para as quatro primeiras estruturas temos 1único caso possível, para as três seguintes existem 2 possibilidades, para VIII e IX existem 3 possibilidades e por fim a última admite 4 possibilidades. Assim concluímos que para um global de 34 cães, existem no total **84** formas distintas de arrumá-los.

- $\boldsymbol{n = 35}$

Para este total de cães as estruturas de base a considerar são:

	5	
10		5
	10	

I

	5	
9		6
	10	

II

	5	
8		7
	10	

III

	6	
9		6
	9	

IV

	6	
8		7
	9	

V

	7	
8		7
	8	

VI

Relativamente às três primeiras, é visível que existe apenas uma hipótese, $f = 0$, enquanto em IV e em V já existem 2 casos possíveis. Quanto à última estrutura existem 3 possibilidades. Então para distribuir um total de 35 cães, nas condições iniciais, contamos com **56** formas distintas.

- $\boldsymbol{n = 36}$

Se no total existir este valor da cães as estruturas resumem-se a

	5	
10		5
	10	

I

	5	
9		6
	10	

II

	5	
8		7
	10	

III

	6	
9		6
	9	

IV

	6	
8		7
	9	

V

	7	
8		7
	8	

VI

Relativamente às três primeiras, é visível que existe apenas uma hipótese, em IV e V já existem 2 casos possíveis e quanto à última estrutura existem 3 possibilidades. Então para distribuirmos um total de 36 cães contamos com **35** formas distintas.

Quando o número de cães é $\boldsymbol{37}$, seguindo raciocínio análogo aos anteriores, obtemos um total de **20** possibilidades. Bem como um total de **10**, **4 e 1** possibilidades quando o número é, respectivamente, $\boldsymbol{38}$, $\boldsymbol{39}$ e $\boldsymbol{40}$.

A tabela que se segue descreve o número de distribuições possíveis, discriminadamente, para cada número total de cães.

Obviamente que estas distribuições, pela forma como foram determinadas, obedecem sempre às condições iniciais: cada linha e cada coluna exterior soma 10, o canil central nunca é utilizado, podendo ainda existir outros canis vazios.

$n \equiv$" Número total de cães”	$F(n)$ (*)
20	11
21	40
22	82
23	132
24	185
25	236
26	280
27	312
28	327
29	320
30	286
31	220
32	165
33	120
34	84
35	56
36	35
37	20
38	10
39	4
40	1
(*) $F(n)$ $\equiv$ *"Número de formas possíveis de arrumar n cães nos canis, de modo a que cada linha e cada coluna exterior do quadrado some 10 e onde o canil central nunca é utilizado, podendo ainda existir outros canis vazios"*	

Tabela 13-resultados do enigma do monge (caso clássico)

Uma vez que verificámos que $F(n)$ tem significado para qualquer número n inteiro, desde que,

$$20 \leq n \leq 40$$

Concluímos,

$$\sum_{n=20}^{40} F(n) = 2926 \tag{9}$$

de onde resulta a seguinte:

Proposição1.1.7 *O número de distribuições dos cães, quando a soma das linhas exteriores do quadrado é 10 e quando o canil central não é utilizado, podendo existir mais canis vazios é 2926.*

Relativamente a este enigma, em [Dud08], Dudeney refere que o número de cães varia entre 20 e 40, e aponta 2926 como sendo a solução do enigma, mas não menciona a estratégia que utilizou na contagem do número de casos.

O nosso interesse neste problema não se resume apenas à contagem, pretendemos também encontrar uma expressão que descreva todos os valores descritos na Tabela 12.

Com esse objectivo, podemos para $30 \leq n \leq 40$ definir uma variável w onde:

$$w \in \mathbb{N}: w = 40 - n \tag{10}$$

Sabemos pela forma como obtivemos os resultados $F(n)$, que os mesmos podem ser decompostos do seguinte modo

n	x	w	$F(n)$	Decomposição de $F(n)$
20	0	s/s(*)	11	11×1
21	1	s/s	40	10×4
22	2	s/s	82	$9 \times 8 + 10 \times 1$
23	3	s/s	132	$8 \times 12 + 9 \times 4$
24	4	s/s	185	$7 \times 16 + 8 \times 8 + 9 \times 1$
25	5	s/s	236	$6 \times 20 + 7 \times 12 + 8 \times 4$
26	6	s/s	280	$5 \times 24 + 6 \times 16 + 7 \times 8 + 8 \times 1$
27	7	s/s	312	$4 \times 28 + 5 \times 20 + 6 \times 12 + 7 \times 4$
28	8	s/s	327	$3 \times 32 + 4 \times 24 + 5 \times 16 + 6 \times 8 + 7 \times 1$
29	9	s/s	320	$2 \times 36 + 3 \times 28 + 4 \times 20 + 5 \times 12 + 6 \times 4$
30	10	10	286	$1 \times 40 + 2 \times 32 + 3 \times 24 + 4 \times 16 + 5 \times 8 + 6 \times 1$
31	11	9	220	$1 \times 36 + 2 \times 28 + 3 \times 20 + 4 \times 12 + 5 \times 4$
32	12	8	165	$1 \times 32 + 2 \times 24 + 3 \times 16 + 4 \times 8 + 5 \times 1$
33	13	7	120	$1 \times 28 + 2 \times 20 + 3 \times 12 + 4 \times 4$
34	14	6	84	$1 \times 24 + 2 \times 16 + 3 \times 8 + 4 \times 1$
35	15	5	56	$1 \times 20 + 2 \times 12 + 3 \times 4$
36	16	4	35	$1 \times 16 + 2 \times 8 + 3 \times 1$
37	17	3	20	$1 \times 12 + 2 \times 4$
38	18	2	10	$1 \times 8 + 2 \times 1$
39	19	1	4	1×4
40	20	0	1	1×1

(*) *s/s – sem significado*

Tabela 14

Na tabela anterior existem valores sem significado para a variável w, pois esta só está definida para $30 \leq n \leq 40$.

Sejam a_k e b_k , variáveis definidas do seguinte modo:

$$a_k = 11 - k,$$

$$b_k = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 4k, & k \neq 0 \end{cases} \qquad com\ 0 \leq k \leq 10 \qquad (11)$$

Tendo em vista a obtenção de expressões gerais, geradoras dos valores que determinámos torna-se conveniente a divisão do estudo em vários casos.

Comecemos por considerar

- $\boldsymbol{20 \leq n} < 30$, **com $\boldsymbol{n}$ par**

Podemos então escrever as respectivas soluções do seguinte modo:

- $n = 20 \Longrightarrow x = 0 \ \wedge \ F(20) = 11 \times 1$

$$= a_0 b_0$$

$$= \sum_{\substack{k=0 \\ k\ par}}^{0} a_{\frac{0+k}{2}} b_k$$

- $n = 22 \Longrightarrow x = 2 \ \wedge \ F(22) = 9 \times 8 + 10 \times 1$

$$= a_2 b_2 + a_1 b_0$$

$$= \sum_{\substack{k=0 \\ k\ par}}^{2} a_{\frac{2+k}{2}} b_k$$

- $n = 24 \Longrightarrow x = 4 \ \wedge \ F(24) = 7 \times 16 + 8 \times 8 + 9 \times 1$

$$= a_4 b_4 + a_3 b_2 + a_2 b_0$$

$$= \sum_{\substack{k=0 \\ k\ par}}^{4} a_{\frac{4+k}{2}} b_k$$

➢ $n = 26 \Longrightarrow x = 6 \ \wedge F(26) = 5 \times 24 + 6 \times 16 + 7 \times 8 + 8 \times 1$

$$= a_6 b_6 + a_5 b_4 + a_4 b_2 + a_3 b_0$$

$$= \sum_{\substack{k=0 \\ k\ par}}^{6} a_{\frac{6+k}{2}} b_k$$

➢ $n = 28 \Longrightarrow x = 8 \ \wedge F(28) = 3 \times 32 + 4 \times 24 + 5 \times 16 + 6 \times 8 + 7 \times 1$

$$= a_8 b_8 + a_7 b_6 + a_6 b_4 + a_5 b_2 + a_4 b_0$$

$$= \sum_{\substack{k=0 \\ k\ par}}^{8} a_{\frac{8+k}{2}} b_k$$

$\therefore$ Assim para $20 \leq n < 30$, com n par temos:

$$F(n) = \sum_{\substack{k=0 \\ k\ par}}^{x} a_{\frac{x+k}{2}} b_k.$$

Mas de $x = n - 20$, resulta:

$$\boxed{F(n) = \sum_{\substack{k=0 \\ k\ par}}^{n-20} a_{\frac{n+k}{2}-10} b_k\,, \qquad \text{se } 20 \leq n < 30 \text{ com } n \text{ par}} \tag{12}$$

Consideremos agora

- $\mathbf{20 \leq n < 30}$**, com $\boldsymbol{n}$ é ímpar**

Então temos,

➢ $n = 21 \Longrightarrow x = 1 \ \wedge \ F(21) = 10 \times 4$

$$= a_1 b_1$$

$$= \sum_{\substack{k=1 \\ k\ ímpar}}^{1} a_{\frac{1+k}{2}} b_k$$

- $n = 23 \Longrightarrow x = 3 \ \wedge \ F(23) = 8 \times 12 + 9 \times 4$

$$= a_3 b_3 + a_2 b_1$$

$$= \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ ímpar}}}^{3} a_{\frac{3+k}{2}} b_k$$

- $n = 25 \Longrightarrow x = 5 \ \wedge \ F(25) = 6 \times 20 + 7 \times 12 + 8 \times 4$

$$= a_5 b_5 + a_4 b_3 + a_3 b_1$$

$$= \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ ímpar}}}^{3} a_{\frac{5+k}{2}} b_k$$

- $n = 27 \Longrightarrow x = 7 \ \wedge F(27) = 4 \times 28 + 5 \times 20 + 6 \times 12 + 7 \times 4$

$$= a_7 b_7 + a_6 b_5 + a_5 b_3 + a_4 b_1$$

$$= \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ ímpar}}}^{7} a_{\frac{7+k}{2}} b_k$$

- $n = 29 \Longrightarrow x = 9 \ \wedge F(29) = 2 \times 36 + 3 \times 28 + 4 \times 20 + 5 \times 12 + 5 \times 4$

$$= a_9 b_9 + a_8 b_7 + a_7 b_5 + a_6 b_3 + a_5 b_1$$

$$= \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ ímpar}}}^{9} a_{\frac{9+k}{2}} b_k$$

Concluindo, quando $20 \leq n < 30$, com n ímpar temos,

$$F(n) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ ímpar}}}^{x} a_{\frac{x+k}{2}} b_k,$$

e como $x = n - 20$, vem:

$$\boxed{F(n) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ ímpar}}}^{n-20} a_{\frac{n+k}{2}-10} b_k\,, \qquad \text{se } 20 \leq n \leq 30 \text{ com } n \text{ ímpar}} \tag{13}$$

Reunindo (12) e (13) podemos enunciar o:

Lema 1.1.8 *Consideremos que as linhas e colunas exteriores da estrutura de canis somem 10 cães e que o canil central não tem qualquer cão. O número de distribuições de* n *cães nestas condições,* $F(n)$*, quando* $20 \leq n < 30$*, é dado por,*

$$F(n) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\substack{k=0 \\ k \ par}}^{n-20} a_{\frac{n+k}{2}-10} b_k \,, & \text{se } n \text{ par} \\ \displaystyle\sum_{\substack{k=1 \\ k \ ímpar}}^{n-20} a_{\frac{n+k}{2}-10} b_k \,, & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases}$$

Analisemos agora os casos associados a $30 \leq n \leq 40$. À semelhança dos casos já abordados, vamos numa primeira instancia tratar dos casos em que n é par e em seguida os restantes, portanto, quando n é ímpar.

- $\boldsymbol{30 \leq n \leq 40}$ **, com** $\boldsymbol{n}$ **é par**

➢ $n = 30 \Longrightarrow w = 10 \ \wedge \ F(30) = 1 \times 40 + 2 \times 32 + 3 \times 24 + 4 \times 16 + 5 \times 8 + 6 \times 1$

$$= a_{10}b_{10} + a_9b_8 + a_8b_6 + a_7b_4 + a_6b_2 + a_5b_0$$

$$= \sum_{\substack{k=0 \\ k \ par}}^{10} a_{10-\frac{10-k}{2}} b_k$$

➢ $n = 32 \Longrightarrow w = 8 \ \wedge \ F(32) = 1 \times 32 + 2 \times 24 + 3 \times 16 + 4 \times 8 + 5 \times 1$

$$= a_{10}b_8 + a_9b_6 + a_8b_4 + a_7b_2 + a_6b_0$$

$$= \sum_{\substack{k=0 \\ k \ par}}^{8} a_{10-\frac{8-k}{2}} b_k$$

➢ $n = 34 \Longrightarrow w = 6 \ \wedge \ F(34) = 1 \times 24 + 2 \times 16 + 3 \times 8 + 4 \times 1$

$$= a_{10}b_6 + a_9b_4 + a_8b_2 + a_7b_0$$

$$= \sum_{\substack{k=0 \\ k \ par}}^{6} a_{10-\frac{6-k}{2}} b_k$$

- $n = 36 \Longrightarrow w = 4 \ \wedge F(36) = 1 \times 16 + 2 \times 8 + 3 \times 1$

$$= a_{10} b_4 + a_9 b_2 + a_8 b_0$$

$$= \sum_{\substack{k=0 \\ k\ par}}^{4} a_{10-\frac{4-k}{2}} b_k$$

- $n = 38 \Longrightarrow w = 2 \ \wedge F(38) = 1 \times 8 + 2 \times 1$

$$= a_{10} b_2 + a_9 b_0$$

$$= \sum_{\substack{k=0 \\ k\ par}}^{2} a_{10-\frac{2-k}{2}} b_k$$

- $n = 40 \Longrightarrow w = 0 \ \wedge F(40) = 1 \times 1$

$$= a_{10} b_0$$

$$= \sum_{\substack{k=0 \\ k\ par}}^{0} a_{10-\frac{0-k}{2}} b_k$$

∴Resumindo para $30 \leq n \leq 40$, com n par temos,

$$F(n) = \sum_{\substack{k=0 \\ k\text{ é } par}}^{w} a_{\left(10-\frac{w-k}{2}\right)} b_k.$$

De $w = 40 - n$, obtemos,

$$\boxed{F(n) = \sum_{\substack{k=0 \\ k\ par}}^{40-n} a_{\left(\frac{n+k}{2}-10\right)} b_k\,, \qquad \text{se } 30 \leq n \leq 40, \text{com } n \text{ par.}} \quad (14)$$

- $\mathbf{30 \leq n \leq 40}$ **, com** $\boldsymbol{n}$ **é ímpar**

Neste caso temos as seguintes soluções,

- $n = 31 \Longrightarrow w = 9 \ \wedge \ F(31) = 1 \times 36 + 2 \times 28 + 3 \times 20 + 4 \times 12 + 5 \times 4$

$$= a_{10}b_9 + a_9b_7 + a_8b_5 + a_7b_3 + a_6b_1$$

$$= \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ ímpar}}}^{9} a_{10-\frac{9-k}{2}} b_k$$

- $n = 33 \Longrightarrow w = 7 \ \wedge \ F(33) = 1 \times 28 + 2 \times 20 + 3 \times 12 + 4 \times 4$

$$= a_{10}b_7 + a_9b_5 + a_8b_3 + a_7b_1$$

$$= \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ ímpar}}}^{7} a_{10-\frac{7-k}{2}} b_k$$

- $n = 35 \Longrightarrow w = 5 \ \wedge \ F(35) = 1 \times 20 + 2 \times 12 + 3 \times 4$

$$= a_{10}b_5 + a_9b_3 + a_8b_1$$

$$= \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ ímpar}}}^{5} a_{10-\frac{5-k}{2}} b_k$$

- $n = 37 \Longrightarrow w = 3 \ \wedge F(37) = 1 \times 12 + 2 \times 4$

$$= a_{10}b_3 + a_9b_1$$

$$= \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impar}}}^{3} a_{10-\frac{3-k}{2}} b_k$$

- $n = 39 \Longrightarrow w = 1 \ \wedge F(39) = 1 \times 4$

$$= a_{10}b_1$$

$$= \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impar}}}^{1} a_{10-\frac{1-k}{2}} b_k$$

$\therefore$ Então, para $30 \leq n \leq 40$, com n ímpar temos,

$$F(n) = \sum_{\substack{k=0 \\ k\ ímpar}}^{w} a_{\left(10-\frac{w-k}{2}\right)} b_k$$

e $w = 40 - n$, conduz-nos a:

$$\boxed{F(n) = \sum_{\substack{k=1 \\ k\ ímpar}}^{40-n} a_{\left(\frac{n+k}{2}-10\right)} b_k\,, \qquad \text{se } 30 \leq n \leq 40 \text{ com } n \text{ ímpar}} \tag{15}$$

De (14) e (15) resulta:

Lema 1.1.9 - *Consideremos que as linhas e colunas exteriores da estrutura de canis somem 10 cães e que o canil central não tem qualquer cão. O número de distribuições de* n *cães nestas condições,* $F(n)$*, quando* $30 \leq n \leq 40$*, é dado por,*

$$F(n) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\substack{k=0 \\ k\ par}}^{40-n} a_{\left(\frac{n+k}{2}-10\right)} b_k\,, & \text{se } n \text{ par} \\ \displaystyle\sum_{\substack{k=1 \\ k\ ímpar}}^{40-n} a_{\left(\frac{n+k}{2}-10\right)} b_k\,, & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases}$$

Reunindo os dois lemas podemos, finalmente, enunciar a,

Proposição 1.1.9 *Consideremos que as linhas e colunas exteriores da estrutura de canis somem 10 cães e que o canil central não tem qualquer cão. O número de distribuições $F(n)$, para n cães, é dado por,*

$$F(n) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\substack{k=0 \\ k \ par}}^{n-20} a_{\left(\frac{n+k}{2}-10\right)} b_k \,, & \text{se } 20 \leq n < 30 \text{ com } n \text{ par} \\ \displaystyle\sum_{\substack{k=1 \\ k \ ímpar}}^{n-20} a_{\left(\frac{n+k}{2}-10\right)} b_k \,, & \text{se } 20 \leq n < 30 \text{ com } n \text{ ímpar} \\ \displaystyle\sum_{\substack{k=0 \\ k \ par}}^{40-n} a_{\left(\frac{n+k}{2}-10\right)} b_k \,, & \text{se } 30 \leq n \leq 40 \text{ com } n \text{ par} \\ \displaystyle\sum_{\substack{k=1 \\ k \ ímpar}}^{40-n} a_{\left(\frac{n+k}{2}-10\right)} b_k \,, & \text{se } 30 \leq n \leq 40 \text{ com } n \text{ ímpar} \end{cases}$$

Onde as variáveis a_k e b_k estão definidas do seguinte modo:

$$a_k = 11 - k,$$

$$b_k = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 4k, & k \neq 0 \end{cases} \qquad com\ 0 \leq k \leq 10\,.$$

1.2- Quando apenas o canil central fica vazio

Ao abordarmos o enigma do monge, é pertinente questionarmo-nos quais seriam as consequências nos resultados atingidos na secção anterior se apenas o canil central não fosse utilizado, permanecendo inalteradas as restantes condições. Assim, nesta secção vamos estudar o problema, em que tendo a mesma estrutura de canis, portanto um quadrado subdividido em três linhas e três colunas onde cada pequeno quadrado constitui um canil, ambicionamos contabilizar de quantas formas podemos distribuir os cães pelos mesmos, de modo que:

-o canil central nunca é utilizado, mas os restantes têm de albergar pelo menos um cão;

-cada linha e coluna tem de totalizar 10 cães.

Como já referimos, a estrutura de canis, é exactamente a mesma:

a	**b**	**c**
d		**e**
f	**g**	**h**

De modo análogo ao que foi efectuado na secção anterior concluímos a veracidade da Proposição 1.1.1.

No entanto, pelo facto de estarmos a introduzir mais uma exigência relativamente aos canis, é natural que o conjunto de soluções seja mais restrito. Vejamos então de que modo esta restrição influencia o conjunto de soluções para n:

Para o caso clássico, tínhamos

$$a, b, c, d, e, f, g, h \in \mathbb{N}: 0 \leq a, b, c, d, e, f, g \leq 10$$

mas como estamos a exigir que cada um dos canis seja ocupado, vem:

$$a, b, c, d, e, f, g, h \in \mathbb{N}: 1 \leq a, b, c, d, e, f, g \leq 8$$

Observemos que se um dos canis tivesse mais de 8 cães, implicaria que pelo menos um canil da mesma linha e/ou coluna de canis teria de estar vazio.

Como

$$x = b + g = d + e;\ b, g, d, e \in \mathbb{N}: 1 \leq a, b, c, d, e, f, g \leq 8\ , \qquad (16)$$

concluímos,

$$x \in \mathbb{N}: 2 \leq x \leq 16 \qquad (17)$$

e como

$$n\ =\ 20\ +\ x,\ \ x \in \mathbb{N}: 2 \leq x \leq 16 \qquad (18)$$

obtemos

$$n \in \mathbb{N}: 22 \leq n \leq 36\ , \qquad (19)$$

donde resulta a proposição:

Proposição 1.2.1 – *Quando a soma dos canis exteriores é 10, em cada linha e em cada coluna, e apenas o canil central se encontra vazio, o número total de cães varia entre 22 e 36.*

As Observações 1.1.5 e 1.1.6 feitas no caso clássico continuam a ser válidas neste contexto, pelo que iremos explorar este problema de forma análoga. Além disso todas as soluções do nosso novo enigma são soluções do enigma clássico mas o recíproco não é verdade pois, ao exigirmos que cada canil tenha pelo menos um cão estamos a restringir o nosso conjunto de soluções.

- $\boldsymbol{n\ =\ 22}$

Analisando esta situação, verificamos que existe apenas uma decomposição aceitável do número 2, pois todas as restantes admitem canis vazios.

Consideremos a respectiva estrutura:

	1	
1		1
	1	

Assim o canil f pode ter 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ou 8 cães e como a Observação 1.1.6 também é válida para este caso, concluimos que para um total de 22 cães existem **8** formas distintas de distribui-los pelos canis.

Notamos que para esta mesma estrutura no enigma clássico, existiam 10 formas distintas.

Constatamos que podemos fazer uso da técnica de contagem já efectuada no caso clássico, bastando estudar algumas das estruturas já abordadas no mesmo, ou seja, aquelas que não admitem canis vazios.

- $\boldsymbol{n = 23}$

Para este valor, basta considerarmos apenas a estrutura abaixo, pois as restantes, como pudemos observar no caso clássico, contêm canis vazios.

	1	
2		1
	2	

Relativamente ao canil f, podemos ter 1, 2, 3, 4, 5, 6 ou 7 cães. Notemos que o canil referenciado não pode receber 8 cães, pois isso implicaria que o canil h ficaria vazio, o que iria contrariar as condições do nosso enigma. Então, respeitando as simetrias da nossa estrutura, para um total de 23 cães existem **28** distribuições possíveis.

Antes de prosseguirmos o estudo dos restantes casos notamos que, independentemente do número total de cães, temos

$$2 \leq f + g \leq 9, \tag{20}$$

pois

$$1 \leq h \leq 8 \text{ e } f + g + h = 10$$

ou seja

$$f + g = 10 - h.$$

Prossigamos a nossa análise, passando para o caso seguinte:

- $n = 24$

Nesta situação basta-nos ponderar as seguintes estruturas

	1	
3		1
	3	

	1	
2		2
	3	

	2	
2		2
	2	

Relativamente às duas primeiras, o canil f pode conter de 1 até 6 cães enquanto que na terceira o mesmo canil pode conter até 7 cães. Juntando as várias possibilidades totalizamos **55** formas distintas de distribuir os 24 cães de acordo com o nosso problema.

- $n = 25$

Neste caso somos conduzidos a,

	1	
4		1
	4	

	1	
3		2
	4	

	2	
3		2
	3	

Observamos que nas duas primeiras, o canil f pode conter de 1 até 5, enquanto que, na terceira o mesmo canil pode conter até 6 cães.

Deste modo concluímos que para um total de 25 cães existem **84** formas diferentes de arrumá-los nos canis.

- $n = 26$

Nestas circunstâncias, os esquemas base são

	1	
5		1
	5	

I

	1	
4		2
	5	

II

	1	
3		3
	5	

III

	2	
4		2
	4	

IV

	2	
3		3
	4	

V

	3	
3		3
	3	

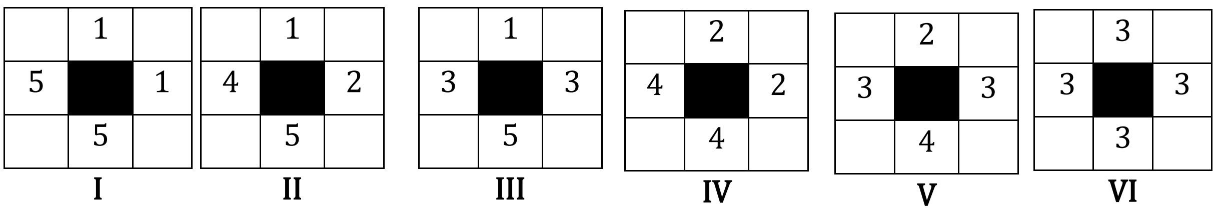
VI

Relativamente às três primeiras estruturas existem 4 possibilidades, em IV e V existem 5 possibilidades e na última existem 6 hipóteses.

Então, para um total de 26 cães existem **110** formas distintas de colocá-los nos canis.

- $\boldsymbol{n = 27}$

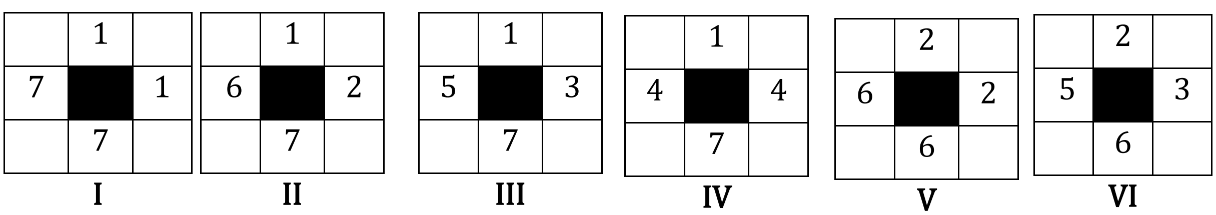
Para este total e atendendo a,

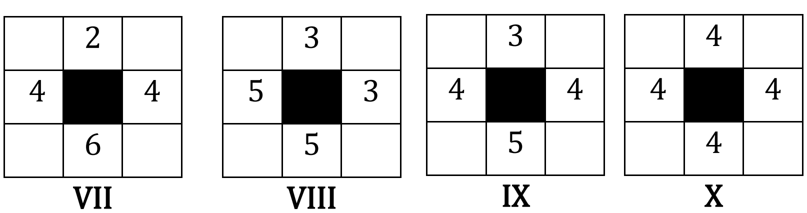


verificamos que nas três primeiras situações existem 3 possibilidades, em IV e V existem 4 possibilidades e na última existem 5. Deste modo, contabilizamos **128** formas distintas de dispor os 27 cães.

- $\boldsymbol{n = 28}$

Nesta situação importa considerar,





Nas quatro primeiras estruturas o canil f pode ser ocupado por 1 ou 2 cães, em V, VI, e VII, o mesmo canil pode ter de 1 até 3, em VIII, IX e X de 1 até 4 e na última estrutura pode ter de 1 até 5 cães.

Consequentemente o número de situações distintas para este número de cães é de **133.**

- $\boldsymbol{n\ =\ 29}$

Somos conduzidos a,

	1	
8		1
	8	

I

	1	
7		2
	8	

II

	1	
6		3
	8	

III

	1	
5		4
	8	

IV

	2	
7		2
	7	

V

	2	
6		3
	7	

VI

	2	
5		4
	7	

VII

	3	
6		3
	6	

VIII

	3	
5		4
	6	

IX

	4	
5		4
	5	

X

Observamos que nas quatro primeiras estruturas o canil f só pode levar 1 cão, em V, VI, e VII, o mesmo canil pode ser ocupado por 1 ou 2, em VIII e IX pode ter de 1 até 3 e na última estrutura pode ter de 1 até 4 cães.

Deste modo, para um total de 29 cães contabilizamos **120** formas distintas de reparti-los pelos canis.

- $\boldsymbol{n\ =\ 30}$

Neste caso, basta considerarmos,

	2	
8		2
	8	

I

	2	
7		3
	8	

II

	2	
6		4
	8	

III

	2	
5		5
	8	

IV

	3	
7		3
	7	

V

	3	
6		4
	7	

VI

	3	
5		5
	7	

VII

	4	
6		4
	6	

VIII

	4	
5		5
	6	

IX

	5	
5		5
	5	

X

De modo análogo aos casos anteriores concluímos que o número de formas de distribuir os cães pelos canis é **84**.

- $n = 31$

Assim, somos levados a,

	3	
8		3
	8	

I

	3	
7		4
	8	

II

	3	
6		5
	8	

III

	4	
7		4
	7	

IV

	4	
6		5
	7	

V

	5	
6		5
	6	

VI

pelo que temos **56** formas distintas de arrumar os cães.

- $n = 32$

Atendendo a,

	4	
8		4
	8	

I

	4	
7		5
	8	

II

	4	
6		6
	8	

III

	5	
7		5
	7	

IV

	5	
6		6
	7	

V

	6	
6		6
	6	

VI

concluímos a existência de **35** possibilidades.

- $n = 33$

Basta considerarmos as figuras,

	4	
7		5
	8	

II

	4	
6		6
	8	

III

	5	
7		5
	7	

IV

para deduzirmos **20** situações distintas.

De modo análogo aos anteriores casos, quando temos um total de **34**, **35** e **36** cães, obtemos respectivamente **10**, **4** e **1** formas distintas de distribui-los pelos canis.

A tabela seguinte resume o estudo dos vários casos:

$n \equiv$ "Número total de cães"	$\tilde{F}(n)$ (*)
22	8
23	28
24	55
25	84
26	110
27	128
28	133
29	120
30	84
31	56
32	35
33	20
34	10
35	4
36	1
(*) $\tilde{F}(n) \equiv$"*Número de formas possíveis de arrumar n cães nos canis, de modo a que cada linha e cada coluna exteriores some 10 , onde o canil central é o único que nunca é ocupado*"	

Tabela 15-resultados do enigma do monge (sem canis exteriores vazios)

Comparando estes resultados com os obtidos no caso clássico, ou seja, comparando a Tabela 15 com a Tabela 13, podemos observar que o nosso conjunto de soluções reduziu significativamente. A tabela que se segue, Tabela 16, ilustra a discrepância existente entre estes dois conjuntos de resultados.

$n \equiv$ " Número total de cães "	$F(n)$ [(i)]	$\tilde{F}(n)$ [(ii)]
20	11	s/s [(iii)]
21	40	s/s
22	82	8
23	132	28
24	185	55
25	236	84
26	280	110
27	312	128
28	327	133
29	320	120
30	286	84
31	220	56
32	165	35
33	120	20
34	84	10
35	56	4
36	35	1
37	20	s/s
38	10	s/s
39	4	s/s
40	1	s/s

[(i)] $F(n)$ $\equiv$ *"Número de formas possíveis de arrumar n cães nos canis, de modo a que cada linha e cada coluna exteriores do quadrado some 10 e onde o canil central nunca é utilizado, podendo ainda existir outros canis vazios"*

[(ii)] $\tilde{F}(n)$ $\equiv$ *"Número de formas possíveis de arrumar n cães nos canis, de modo a que cada linha e cada coluna exteriores some 10 , onde o canil central é o único que nonca é ocupado"*

[(ii)] *s/s – sem significado*

Tabela 16

De modo análogo ao que foi efectuado para o caso clássico podemos decompor $\tilde{F}(n)$ e considerar a variável w tal como foi definida anteriormente, ou seja, como definida em (10).

Temos então os seguintes resultados,

n	x	w	$\tilde{F}(n)$	Decomposição de $\tilde{F}(n)$
22	2	s/s (*)	8	8×1
23	3	s/s	28	7×4
24	4	s/s	55	$6 \times 8 + 7 \times 1$
25	5	s/s	84	$5 \times 12 + 6 \times 4$
26	6	s/s	110	$4 \times 16 + 5 \times 8 + 6 \times 1$
27	7	s/s	128	$3 \times 20 + 4 \times 12 + 5 \times 4$
28	8	s/s	133	$2 \times 24 + 3 \times 16 + 4 \times 8 + 5 \times 1$
29	9	s/s	120	$1 \times 28 + 2 \times 20 + 3 \times 12 + 4 \times 4$
30	10	10	84	$1 \times 24 + 2 \times 16 + 3 \times 8 + 4 \times 1$
31	11	9	56	$1 \times 20 + 2 \times 12 + 3 \times 4$
32	12	8	35	$1 \times 16 + 2 \times 8 + 3 \times 1$
33	13	7	20	$1 \times 12 + 2 \times 4$
34	14	6	10	$1 \times 8 + 2 \times 1$
35	15	5	4	1×4
36	16	4	1	1×1
(*) *s/s – sem significado*				

Tabela 17

Objectivando a obtenção de expressões gerais, geradoras dos valores que determinámos, vamos considerar a_k e b_k nas condições de (11) e reescrever os resultados obtidos de forma análoga ao caso clássico.

À semelhança da secção anterior vamos repartir as soluções em quatro casos:

- $22 \leq n < 30$, com n par;
- $22 \leq n < 30$, com n ímpar;
- $30 \leq n \leq 36$, com n par;
- $30 \leq n \leq 36$, com n par.

Consideremos então, em primeiro lugar,

- $\boldsymbol{22 \leq n < 30}$, **com $\boldsymbol{n}$ par**

nestas condições temos os seguintes resultados:

- $n = 22 \Longrightarrow x = 2 \ \wedge \ \tilde{F}(22) = 8 \times 1$

$$= a_3 b_0$$

$$= \sum_{\substack{k=0 \\ k\ par}}^{2-2} a_{2+\frac{2+k}{2}} b_k$$

- $n = 24 \Longrightarrow x = 4 \ \wedge \ \tilde{F}(24) = 6 \times 8 + 7 \times 1$

$$= a_5 b_2 + a_4 b_0$$

$$= \sum_{\substack{k=0 \\ k\ par}}^{4-2} a_{2+\frac{4+k}{2}} b_k$$

- $n = 26 \Longrightarrow x = 6 \ \wedge \tilde{F}(26) = 4 \times 16 + 5 \times 8 + 6 \times 1$

$$= a_7 b_4 + a_6 b_2 + a_5 b_0$$

$$= \sum_{\substack{k=0 \\ k\ par}}^{6-2} a_{2+\frac{6+k}{2}} b_k$$

- $n = 28 \Longrightarrow x = 8 \ \wedge \tilde{F}(28) = 2 \times 24 + 3 \times 16 + 4 \times 8 + 5 \times 1$

$$= a_9 b_6 + a_5 b_4 + a_4 b_2 + a_2 b_0$$

$$= \sum_{\substack{k=0 \\ k\ par}}^{8-2} a_{2+\frac{8+k}{2}} b_k$$

$\therefore$ Para $22 \leq n < 30$, com n par temos,

$$\tilde{F}(n) = \sum_{\substack{k=0 \\ k\ par}}^{x-2} a_{2+\frac{x+k}{2}} b_k$$

Mas de $x = n - 20$, resulta,

$$\boxed{\tilde{F}(n) = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ é } par}}^{n-22} a_{\frac{n+k}{2}-8} b_k \,, \qquad \text{se } 22 \leq n \leq 30 \text{ com } n \text{ par}} \tag{21}$$

Quando,

- $\mathbf{22 \leq n < 30}$**, com $\boldsymbol{n}$ ímpar**

extraímos as soluções que se seguem,

- $n = 23 \Longrightarrow x = 3 \;\wedge\; \tilde{F}(23) = 7 \times 4$

$$= a_4 b_1$$

$$= \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ ímpar}}}^{3-2} a_{2+\frac{3+k}{2}} b_k$$

- $n = 25 \Longrightarrow x = 5 \;\wedge\; \tilde{F}(25) = 5 \times 12 + 6 \times 4$

$$= a_6 b_3 + a_5 b_1$$

$$= \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ ímpar}}}^{5-2} a_{2+\frac{5+k}{2}} b_k$$

- $n = 27 \Longrightarrow x = 7 \;\wedge \tilde{F}(27) = 3 \times 20 + 4 \times 12 + 5 \times 4$

$$= a_8 b_5 + a_7 b_3 + a_6 b_1$$

$$= \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ ímpar}}}^{7-2} a_{2+\frac{7+k}{2}} b_k$$

- $n = 29 \Longrightarrow x = 9 \ \wedge \tilde{F}(29) = 1 \times 28 + 2 \times 20 + 3 \times 12 + 4 \times 4$

$$= a_{10}b_7 + a_9b_5 + a_8b_3 + a_7b_1$$

$$= \sum_{\substack{k=1 \\ k\ \acute{\imath}mpar}}^{9-2} a_{2+\frac{9+k}{2}} b_k$$

$\therefore$ Assim, quando $22 \leq n < 30$, e n é ímpar temos,

$$\tilde{F}(n) = \sum_{\substack{k=1 \\ k\ \acute{\imath}mpar}}^{x-2} a_{\left(2+\frac{x+k}{2}\right)} b_k$$

e de $x = n - 20$, concluímos,

$$\boxed{\tilde{F}(n) = \sum_{\substack{k=1 \\ k\ \acute{\imath}mpar}}^{n-22} a_{\frac{n+k}{2}-8} b_k\ , \qquad \text{se } 22 \leq n < 30 \text{ e } n \text{ é ímpar}} \tag{22}$$

Juntando (21) e (22) concluímos o,

Lema1.2.2 *O número de distribuições, $\tilde{F}(n)$, de n cães, com $22 \leq n < 30$, onde cada linha e coluna exteriores da estrutura some 10, e onde o canil central é o único que não alberga cães, é dado por :*

$$\tilde{F}(n) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\substack{k=0 \\ k\ \ par}}^{n-22} a_{\left(\frac{n+k}{2}-8\right)} b_k\ , & \text{se } n \text{ par} \\ \displaystyle\sum_{\substack{k=1 \\ k\ \ \acute{\imath}mpar}}^{n-22} a_{\left(\frac{n+k}{2}-8\right)} b_k\ , & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases}$$

Quando

- $\mathbf{30 \leq n \leq 36}$**, com** $\boldsymbol{n}$ **par**

temos,

- $n = 30 \Longrightarrow w = 10 \ \wedge \ \tilde{F}(30) = 1 \times 24 + 2 \times 16 + 3 \times 8 + 4 \times 1$

$$= a_{10}b_6 + a_9b_4 + a_8b_2 + a_7b_0$$

$$= \sum_{\substack{k=0 \\ k\ par}}^{10-4} a_{12-\frac{10-k}{2}} b_k$$

- $n = 32 \Longrightarrow w = 8 \ \wedge \ \tilde{F}(32) = 1 \times 16 + 2 \times 8 + 3 \times 1$

$$= a_{10}b_4 + a_9b_2 + a_8b_0$$

$$= \sum_{\substack{k=0 \\ k\ par}}^{8-4} a_{12-\frac{8-k}{2}} b_k$$

- $n = 34 \Longrightarrow w = 6 \ \wedge \ \tilde{F}(34) = 1 \times 8 + 2 \times 1$

$$= a_{10}b_6 + a_9b_4 + a_8b_2 + a_7b_0$$

$$= \sum_{\substack{k=0 \\ k\ par}}^{6-4} a_{12-\frac{6-k}{2}} b_k$$

- $n = 36 \Longrightarrow w = 4 \ \wedge \tilde{F}(36) = 1 \times 1$

$$= a_{10}b_0$$

$$= \sum_{\substack{k=0 \\ k\ par}}^{4-4} a_{12-\frac{4-k}{2}} b_k$$

Assim, para $30 \leq n \leq 36$, com n par, podemos escrever

$$\tilde{F}(n) = \sum_{\substack{k=0 \\ k\ par}}^{w-4} a_{\left(12-\frac{w-k}{2}\right)} b_k$$

e do facto de $w = 40 - n$, resulta,

$$\boxed{\tilde{F}(n) = \sum_{\substack{k=0 \\ k\ par}}^{36-n} a_{\left(\frac{n+k}{2}-8\right)} b_k\,, \qquad \text{se } 30 \leq n \leq 36 \text{ e } n \text{ é par}} \tag{23}$$

Resta-nos analisar

- **$30 \leq n \leq 36$, com n ímpar**

Para este conjunto extraímos as soluções que se seguem.

➢ $n = 31 \Longrightarrow w = 9 \ \wedge\ \tilde{F}(31) = 1 \times 20 + 2 \times 12 + 3 \times 4$

$$= a_{10}b_5 + a_9b_3 + a_8b_1$$

$$= \sum_{\substack{k=1 \\ k\ ímpar}}^{9-4} a_{12-\frac{9-k}{2}} b_k$$

➢ $n = 33 \Longrightarrow w = 7 \ \wedge\ \tilde{F}(33) = 1 \times 12 + 2 \times 4$

$$= a_{10}b_3 + a_9b_1$$

$$= \sum_{\substack{k=1 \\ k\ ímpar}}^{7-4} a_{12-\frac{7-k}{2}} b_k$$

➢ $n = 35 \Longrightarrow w = 5 \ \wedge\ \tilde{F}(35) = 1 \times 4$

$$= a_{10}b_1$$

$$= \sum_{\substack{k=1 \\ k\ ímpar}}^{5-4} a_{12-\frac{5-k}{2}} b_k$$

Vemos que $30 \leq n \leq 36$, com n ímpar vem,

$$\tilde{F}(n) = \sum_{\substack{k=0 \\ k\ ímpar}}^{w-4} a_{\left(12-\frac{w-k}{2}\right)} b_k$$

Ora, atendendo a que $w = 40 - n$, deduzimos

$$\boxed{\tilde{F}(n) = \sum_{\substack{k=1 \\ k\ ímpar}}^{36-n} a_{\left(\frac{n+k}{2}-8\right)} b_k\,, \qquad se\ 30 \leq n \leq 36 \text{ e } n \text{ é } ímpar} \quad (24)$$

De (23) e de (24) resulta então o

Lema 1.2.3 *O número de distribuições,* $\tilde{F}(n)$, *de* n *cães, com* $30 \leq n \leq 36$, *onde cada linha e coluna exteriores da estrutura de canis some 10 e onde o canil central é o único que não alberga cães, é dado por :*

$$\tilde{F}(n) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\substack{k=0 \\ k\ par}}^{36-n} a_{\left(\frac{n+k}{2}-8\right)} b_k\,, & \text{se } n \text{ par} \\ \displaystyle\sum_{\substack{k=1 \\ k\ ímpar}}^{36-n} a_{\left(\frac{n+k}{2}-8\right)} b_k\,, & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases}$$

Dos lemas estabelecidos é imediato a seguinte,

Proposição 1.2.4 *O número de formas distintas, de distribuir n cães apenas nos canis exteriores, não deixando nenhum deles vazio, de modo a que cada linha e cada coluna exteriores de canis some 10, $\tilde{F}(n)$, é dado por:*

$$\tilde{F}(n) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\substack{k=0 \\ k \ par}}^{n-22} a_{\left(\frac{n+k}{2}-8\right)} b_k \,, & \text{se } 22 \leq n < 30 \text{ e } n \text{ par} \\ \displaystyle\sum_{\substack{k=1 \\ k \ ímpar}}^{n-22} a_{\left(\frac{n+k}{2}-8\right)} b_k \,, & \text{se } 22 \leq n < 30 \text{ e } n \text{ ímpar} \\ \displaystyle\sum_{\substack{k=0 \\ k \ par}}^{36-n} a_{\left(\frac{n+k}{2}-8\right)} b_k \,, & \text{se } 30 \leq n \leq 36 \text{ e } n \text{ par} \\ \displaystyle\sum_{\substack{k=1 \\ k \ ímpar}}^{36-n} a_{\left(\frac{n+k}{2}-8\right)} b_k \,, & \text{se } 30 \leq n \leq 36 \text{ e } n \text{ ímpar} \end{cases}$$

Onde as variáveis a_k e b_k estão definidas do seguinte modo:

$$a_k = 11 - k,$$

$$b_k = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 4k, & k \neq 0 \end{cases} \qquad com\ 0 \leq k \leq 10\,.$$

Resultando um total de 876 distribuições.

1.3- Com possível utilização do canil central

Nos dois problemas tratados o canil central nunca foi usado. Nesta secção pretendemos não só analisar um problema análogo, permitindo a utilização do canil central como também procurar compreender de que modo a respectiva condição impõe restrições ao enigma.

No novo problema vamos exigir que as somas das linhas e colunas totalize 10, incluindo a linha e a coluna internas.

Assim nesta secção vamos tentar contabilizar todas as distribuições possíveis numa matriz 3x3 de entradas naturais, onde são exigidas as seguintes condições:

- todas as linhas têm de somar 10;
- todas as colunas têm de somar 10;
- podem existir uma, ou mais, entradas nulas.

Passamos então a ter a seguinte estrutura,

a	b	c
d	z	e
f	g	h

onde cada uma das letras representa o número de cães no respectivo canil e onde a única diferença desta estrutura para as anteriores é a existência de z. Observemos que o facto de anteriormente afirmarmos que a matriz tinha entradas naturais, resulta do facto das respectivas entradas representarem um número de cães.

Pretendemos determinar de quantas formas distintas podemos distribuir os cães, de modo a que cada linha e cada coluna some 10, ou seja:

$$\begin{cases} a+b+c=10 \\ d+z+e=10 \\ f+g+h=10 \\ a+d+f=10 \\ b+z+g=10 \\ c+e+h=10 \end{cases} \tag{25}$$

Antes de mais interessa-nos saber para que valores o problema faz sentido. Analogamente aos casos anteriores vamos considerar que n representa o número total de cães.
Ou seja,

$$n = a + b + c + d + z + e + f + g + h$$

Podemos então, facilmente, determinar n,

$$\begin{cases} n = a + b + c + d + z + e + f + g + h \\ a + b + c = 10 \\ d + z + e = 10 \\ f + g + h = 10 \end{cases} \Longrightarrow n = 30$$

Torna-se então evidente o seguinte,

Lema1.3.1 *Uma vez admitida a utilização do canil central, de modo que cada linha e cada coluna da estrutura some 10 é imediato que o número total de cães a distribuir tem de ser 30, ou seja,* $n = 30$.

Sabemos que cada canil pode ter no mínimo 0 cães e no máximo 10. Então fixemos sucessivamente Z com estes valores:

- $\boldsymbol{z = 0}$

a	**b**	**c**
d	**0**	**e**
f	**g**	**h**

Extraímos, de (25), o sistema:

$$\begin{cases} b + g = 10 \\ d + e = 10 \end{cases}$$

Poderíamos averiguar que valores b, g, d e e poderiam assumir de modo a satisfazerem estas condições e consequentemente contabilizar todas as possibilidades para $z = 0$. No entanto esse processo já foi efectuado no caso clássico quando considerámos, um total de 30 cães:

$$\boldsymbol{n} = \mathbf{30} \Longrightarrow x = 10 = b + g = d + e$$

Consequentemente, pelo que descreve a tabela 13, $F(30) = 280$. Assim, quando $z = 0$ existem **286** formas de distribuir os cães.

- $\boldsymbol{z = 1}$

a	b	c
d	1	e
f	g	h

Neste caso temos as relações

$$\begin{cases} b + g = 9 \\ d + e = 9 \end{cases},$$

que equivalem ao processo de contagem efectuado no caso clássico quando considerámos um total de 29 cães

$$\boldsymbol{n} = \mathbf{29} \Longrightarrow x = 9 = b + g = d + e$$

Assim, quando $z = 1$ existem 320 formas de distribuir os cães, pois $F(29) = 320$.

Poderíamos continuar este processo de contagem fixando sucessivamente z até este atingir o seu máximo ($z = 10$), mas neste momento já é possível determinarmos a nossa solução. Com efeito, consideremos G como sendo o número de distribuições de cães de modo a que cada linha e cada coluna da estrutura some 10. Podemos, deste modo escrever,

$$G = \sum_{z=0}^{10} F\big(20 + (10 - z)\big)$$

$$= \sum_{z=0}^{10} F(30 - z)$$

$$= \sum_{n=20}^{30} F(n)$$

$$= 2211$$

Assim, podemos enunciar a,

Proposição 1.3.2 *Supondo que* G *representa o número de distribuições, de modo a que cada linha e cada coluna da estrutura de canis some 10 cães, admitindo a possibilidade de ocupação de cães no canil central podendo ainda existir canis vazios, então*

$$G = \sum_{n=20}^{30} F(n) = 2211$$

Em conclusão, constatamos que quando admitimos a possibilidade de utilização do canil central e exigimos que a soma de cada uma das linhas e colunas seja 10, a respectiva solução (número de distribuições) não só é mais restrita do que a inicial como pode ser obtida por intermédio do caso clássico.

1.4- Com ocupação de todos os canis

Nesta secção vamos dedicar a nossa atenção ao caso em que é exigida a ocupação em cada um dos canis.

Assim vamos analisar e contabilizar o número de distribuições quando exigimos que todos os canis contenham cães e onde a soma de cada linha e cada coluna de canis seja 10.

Este problema é muito semelhante ao anterior, pelo que, atendendo à Proposição 1.3.2, a nossa intuição conduz-nos ao valor

$$\sum_{n=22}^{29} \tilde{F}(n) = 666$$

Vejamos se de facto esta é a nossa solução.

Estamos considerando uma estrutura em tudo semelhante à anterior:

a	b	c
d	z	e
f	g	h

e como as condições,

$$\begin{cases} a+b+c=10 \\ d+z+e=10 \\ f+g+h=10 \\ a+d+f=10 \\ b+z+g=10 \\ c+e+h=10 \end{cases}$$

continuam válidas neste contexto, o número total de cães continua a ser 30, tendo em conta o Lema 1.3.1.

Como cada linha tem de somar 10 e cada soma é constituída por três parcelas de inteiros positivos então cada canil contém no mínimo 1 cão e no máximo 8, em particular o canil referente a z. Assim vamos iniciar a contagem atribuindo a z , de forma sucessiva, todos os valores que este pode assumir.

- $z = 1$

a	b	c
d	1	e
f	g	h

Então temos,

$$\begin{cases} b + g = 9 \\ d + e = 9 \end{cases}$$

Poderíamos verificar que valores b, g, d, e podem tomar para satisfazer estas condições e consequentemente contabilizar todas as possibilidades para $z = 1$ fixo. No entanto esse processo já foi efectuado na Secção 1.2, quando considerámos, o total de 29 cães:

$$\boldsymbol{n} = \mathbf{29} \Longrightarrow x = 9 = b + g = d + e$$

Consequentemente, quando $z = 1$, existem 120 formas de distribuir os cães pelos canis, pois $\tilde{F}(29) = 120$.

- $z = 2$

a	b	c
d	2	e
f	g	h

Resulta,

$$\begin{cases} b + g = 8 \\ d + e = 8 \end{cases}$$

que é equivalente, ao processo de contagem efectuado na Secção 1.2 quando considerámos o total de 28 cães:

$$\boldsymbol{n} = \mathbf{28} \Longrightarrow x = 8 = b + g = d + e$$

Logo, quando $z = 2$, existem 133 formas de distribuir os cães, pois $\tilde{F}(28) = 133$.

Poderíamos continuar este processo de contagem fixando z até este atingir o seu máximo ($z = 8$), mas é possível determinar a nossa solução, por dedução. Com este propósito, designemos por $\widetilde{G}$, o número de distribuições de cães de modo que cada linha e cada coluna some 10 e onde cada canil, incluindo o central, tem de albergar pelo menos um cão. Então,

$$\tilde{G} = \sum_{z=1}^{8} \tilde{F}\big(20 + (10 - z)\big)$$

$$= \sum_{z=1}^{8} \tilde{F}(30 - z)$$

$$= \sum_{n=22}^{29} \tilde{F}(n)$$

$$= 666 \tag{26}$$

Assim, como caso particular da proposição anterior temos o seguinte

Corolário 1.4.1 *Supondo que $\tilde{G}$ representa o número de distribuições de cães, de modo a que cada linha e cada coluna da respectiva estrutura some 10, onde é ainda exigida a ocupação de todos os canis, temos,*

$$\tilde{G} = \sum_{n=22}^{29} \tilde{F}(n) = 666$$

Capítulo 2

Generalização do Enigma do monge

No capítulo anterior, analisámos um problema proposto por Henry Dudeney, onde o objectivo era desvendar o número de distribuições de cães possíveis em relação a uma estrutura de canis. A referida estrutura tinha uma forma semelhante a uma matriz 3x3 e era ainda exigido que o canil central nunca fosse utilizado, e a soma das linhas e colunas exteriores fosse 10. Esse estudo foi efectuado em 1.1, mas foram analisadas, nas restantes secções pequenas variações do problema. Contudo, em todas as variantes, a soma 10 esteve sempre associada aos problemas. Surge, no entanto, a questão:

" E se ao referido problema estivesse associada uma outra soma? "

Neste capítulo pretendemos estudar um problema idêntico, mas agora de uma forma geral assumindo uma soma S arbitrária e estabelecer um método geral para contabilizarmos os respectivos casos.

O enigma do monge, à semelhança de outros problemas publicados por Dudeney, é um desafio matemático destinado ao leitor comum. Deste modo o autor coloca um problema matemático, de modo a que uma qualquer pessoa mesmo que não possua grandes conhecimentos matemáticos seja capaz de compreender e com um pouco de astúcia seja mesmo capaz de alcançar a respectiva solução. No entanto, matematicamente, o enigma do monge consiste em desafiar o leitor a determinar quantas matrizes 3x3 existem, com entrada central nula tais que a soma na primeira e na última linhas da matriz, bem como na primeira e na última colunas seja 10, podendo existir uma ou mais entradas nulas, para além da central. Anteriormente a linguagem empregue foi a mesma que o autor utilizou, no entanto, sem retirar qualquer protagonismo ao autor, iremos agora adoptar uma linguagem mais matemática na generalização do problema. Deste modo o termo “cães” será substituído por “entradas” ou “elementos” e o termo “estrutura de canis” será denominado simplesmente por “matriz”.

Neste capítulo iremos abordar os problemas já estudados no capítulo anterior, com a diferença de que agora a soma não será necessariamente 10. Vamos portanto, na primeira secção, à semelhança de 1.1, determinar o número de matrizes 3x3, com entrada central nula tais que a primeira e a última linhas da matriz, bem como a primeira e a última colunas somem o mesmo resultado, podendo existir outras entradas nulas.

A secção seguinte difere da primeira pelo facto de, na segunda, ser exigido que a entrada central seja a única entrada nula.

Já na terceira secção a entrada central pode deixar de ser nula e a linha e coluna que a incluem passam a ter a mesma soma que as restantes.

Na quarta secção todas as entradas são diferentes de zero e as somas de cada linha e cada coluna têm de, novamente, representar o mesmo valor.

Estes quatro primeiros problemas constituem, respectivamente, generalizações das Secções 1.1, 1.2, 1.3 e 1.4. No entanto vamos ainda adicionar uma nova variante do problema inicial, contabilizando as matrizes cuja soma das duas diagonais seja igual à soma das linhas e das colunas da matriz. Teremos duas secções para esta variante, onde na primeira será admitida a possibilidade de existirem entradas nulas e na segunda não.

Relativamente às duas últimas secções, verificaremos porque razão não encontrámos nenhuma matriz, no capítulo anterior, tal que a soma das duas diagonais resultasse no mesmo valor que a soma das linhas e das colunas.

2.1- Entrada Central Nula e Admissão de mais Entradas Nulas

Nesta secção vamos estudar o, já conhecido, enigma clássico do monge associado a uma soma S, não necessariamente igual a 10.

O nosso objectivo é portanto determinar quantas matrizes 3x3 de entradas naturais existem, tais que a entrada central é nula, podendo existir mais entradas nulas; a soma das entradas da primeira linha, é igual à da última linha, bem como igual às da primeira e terceira colunas, ou seja cada uma destas somas representa o mesmo valor fixo, digamos S.

Queremos saber quantas matrizes da forma,

a	b	c
d	0	e
f	g	h

existem, de modo que as condições

$$\begin{cases} a+b+c=S \\ f+g+h=S \\ a+d+f=S \\ c+e+h=S \end{cases} \quad \text{com } a,b,c,d,e,f,g,h \in \mathbb{N} \tag{27}$$

sejam verificadas.

Destas condições é evidente que,

$$S \in \mathbb{N} \tag{28}$$

e

$$a,b,c,d,e,f,g,h \in \mathbb{N}: 0 \leq a,b,c,d,e,f,g,h \leq S \tag{29}$$

Consideremos n, em analogia com o enigma clássico, como sendo a soma de todos os elementos, ou seja:

$$n = a+b+c+d+e+f+g+h \tag{30}$$

Antes de mais vamos procurar saber para que valores de n faz sentido o nosso problema. Recorrendo a (27) e (30) temos,

$$\begin{cases} n = a + b + c + d + e + f + g + h \\ \qquad a + b + c = S \\ \qquad f + g + h = S \end{cases} \Longrightarrow n = 2S + d + e$$

$$\begin{cases} n = a + b + c + d + e + f + g + h \\ \qquad a + d + f = S \\ \qquad c + e + h = S \end{cases} \Longrightarrow n = 2S + b + g$$

donde extraímos

$$d + e = b + g = x \tag{31}$$

Resultado este, já verificado anteriormente no caso clássico.
(veja-se Proposição 1.1.1)

E como $b, g, d, e \in \mathbb{N}: 0 \leq b, g, d, e \leq S$ vem,

$$b + g, d + e \in \mathbb{N}: 0 \leq b + g = d + e \leq 2S$$

Logo,

$$n = 2S + x, \qquad x \in \mathbb{N}: 0 \leq x \leq 2S \; onde \; x = d + e = b + g \tag{32}$$

$$\text{Isto é } \; n \in \mathbb{N} \wedge 2S \leq n \leq 4S \tag{33}$$

Por outras palavras, para que o problema faça sentido é necessário que a soma de todos os elementos da nossa matriz seja no mínimo $2S$ e no máximo 4S.

Podemos deste modo enunciar, a

Proposição 2.1.1 - *A soma de todas as entradas de uma matriz 3×3 de naturais é um número natural compreendido entre **2S** e **4S**, quando **S** representa simultaneamente as somas das entradas, da primeira e da última linhas e da primeira e da última colunas.*

Notemos que no caso clássico esta proposição foi verificada:

$$S = 10 \implies 2S = 20 \leq n \leq 40 = 4S$$

Vamos então dar início à contagem das respectivas matrizes. Faremos a análise consoante $2S \leq n < 3S$ ou $3S \leq n \leq 4S$ e em cada caso distinguiremos as situações de n ser par ou ímpar. Começaremos por calcular o número de distintas matrizes que existem quando $2S \leq n < 3S$.

- $\boldsymbol{2S \leq n < 3S \ \wedge \ n}$ **par**

Atendendo a (32) concluímos,

$$n = 2S + x, x \in \mathbb{N}: x \text{ é } par \ \wedge \ 0 \leq x < S$$

Como $x = b + g = d + e$ podemos agrupar as distribuições de acordo com a tabela:

b	g	d	e
x	0	x	0
x	0	$x-1$	1
x	0	$x-2$	2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x	0	$\frac{x}{2}$	$\frac{x}{2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x	0	0	x
$x-1$	1	x	0
$x-1$	1	$x-1$	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$x-1$	1	$\frac{x}{2}$	$\frac{x}{2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$x-1$	1	0	x
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\frac{x}{2}$	$\frac{x}{2}$	$\frac{x}{2}$	$\frac{x}{2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
0	x	0	x

$x + 1$ *possibilidades quando* $b = x \wedge g = 0$

$x + 1$ *possibilidades quando* $b = x - 1 \wedge g = 1$

etc.

Tabela 18

No entanto a matriz é exactamente a mesma estrutura abordada no caso clássico, o que quer dizer que as observações efectuadas, em relação às estruturas, nesse caso continuam a ser válidas, em particular a Observação 1.1.6. Então na tabela de possibilidades existem permutações que correspondem a simetrias da matriz denominadas anteriormente como rotações e transições.

Deste modo, em analogia com o caso clássico consideraremos para cada x_1, x_2, x_3, x_4 fixos tais que

$$x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = x$$

b, g, d e e definidos do seguinte modo,

$$\begin{cases} g = max\{x_1, x_2, x_3, x_4\} \\ b = x - g \\ d = \begin{cases} g, & se\ \exists_{i,j} : i \neq j \wedge x_i = x_j = g \\ max(\{x_1, x_2, x_3, x_4\} \setminus \{g\}), & caso\ contrário \end{cases} \\ e = x - d \end{cases} \tag{34}$$

Na sequência vamos averiguar o que acontece nos vários casos em que $g + b = x$.

Começamos pela situação $\boldsymbol{g = x}$ (obviamente $b = 0$). Observemos que na decomposição de x, pela Observação 1.1.6, o conhecimento do valor de g é determinante na contagem dos casos.

	0	
$\boldsymbol{x}$		**0**
	$\boldsymbol{x}$	

$4\ casos, pela\ Observação\ 1.1.6$

	$\mathbf{0}$	
$\boldsymbol{x-1}$		$\mathbf{1}$
	$\boldsymbol{x}$	

$\vdots$

	$\mathbf{0}$	
$\boldsymbol{\frac{x+2}{2}}$		$\boldsymbol{\frac{x-2}{2}}$
	$\boldsymbol{x}$	

$$8\,\frac{x-2}{2}\ casos, pela\ Observação\ 1.1.6$$

	$\mathbf{0}$	
$\boldsymbol{\frac{x}{2}}$		$\boldsymbol{\frac{x}{2}}$
	$\boldsymbol{x}$	

$$4\ casos, pela\ Observação\ 1.1.6$$

E como a Observação 1.1.4 também é válida neste contexto, com a diferença de que no caso clássico a soma das linhas do quadrado teria de dar 10 e neste caso tem de dar S, podemos ver quantas possibilidades existem para estes $8 + 8\,\frac{x-2}{2}$ casos. Sabendo que f e h podem tomar os valores,

f	h
0	$S-x$
1	$S-x-1$
$\vdots$	$\vdots$
$S-x$	0

Tabela 19

concluímos que existem $\boldsymbol{S-x+1}$ possibilidades, para cada uma das estruturas totalizando assim $\boldsymbol{(S-x+1)(8+8\,\frac{x-2}{2})}$ casos possíveis quando pelo menos uma das entradas b, g, d ou e é nula.

Ao longo do desenvolvimento do trabalho, uma vez que uma das nossas preocupações é a construção de fórmulas gerais, iremos adoptar muitas vezes expressões que admitem representações mais simples. No entanto não as simplificaremos pelo facto de serem mais ilustrativas do ponto de vista da contagem.

Por outro lado a Tabela 19, bem como outras que iremos abordar, representam a decomposição de x. Obviamente poderíamos considerar, por exemplo, apenas a coluna respeitante aos valores de f pois o valor de h pode ser obtido por meio da igualdade $h = x - f$. No entanto, a presença de ambas as variáveis facilita a nossa contagem, no sentido em que temos a certeza que não admitimos valores incongruentes em nenhuma das variáveis.

Retomando a nossa contagem, suponhamos agora $\boldsymbol{g = x - 1}$. Obtemos,

	$\mathbf{1}$	
$\boldsymbol{x-1}$	■	$\mathbf{1}$
	$\boldsymbol{x-1}$	

$4\ casos, pela\ Observação 1.1.6$

	$\mathbf{1}$	
$\boldsymbol{x-2}$	■	$\mathbf{2}$
	$\boldsymbol{x-1}$	

⋮

	$\mathbf{1}$	
$\boldsymbol{\frac{x+2}{2}}$	■	$\boldsymbol{\frac{x-2}{2}}$
	$\boldsymbol{x-1}$	

$8\left(\frac{x-4}{2}\right)\ casos, pela\ Observação 1.1.6$

	$\mathbf{1}$	
$\boldsymbol{\frac{x}{2}}$	■	$\boldsymbol{\frac{x}{2}}$
	$\boldsymbol{x-1}$	

$4\ casos, pela\ Observação 1.1.6$

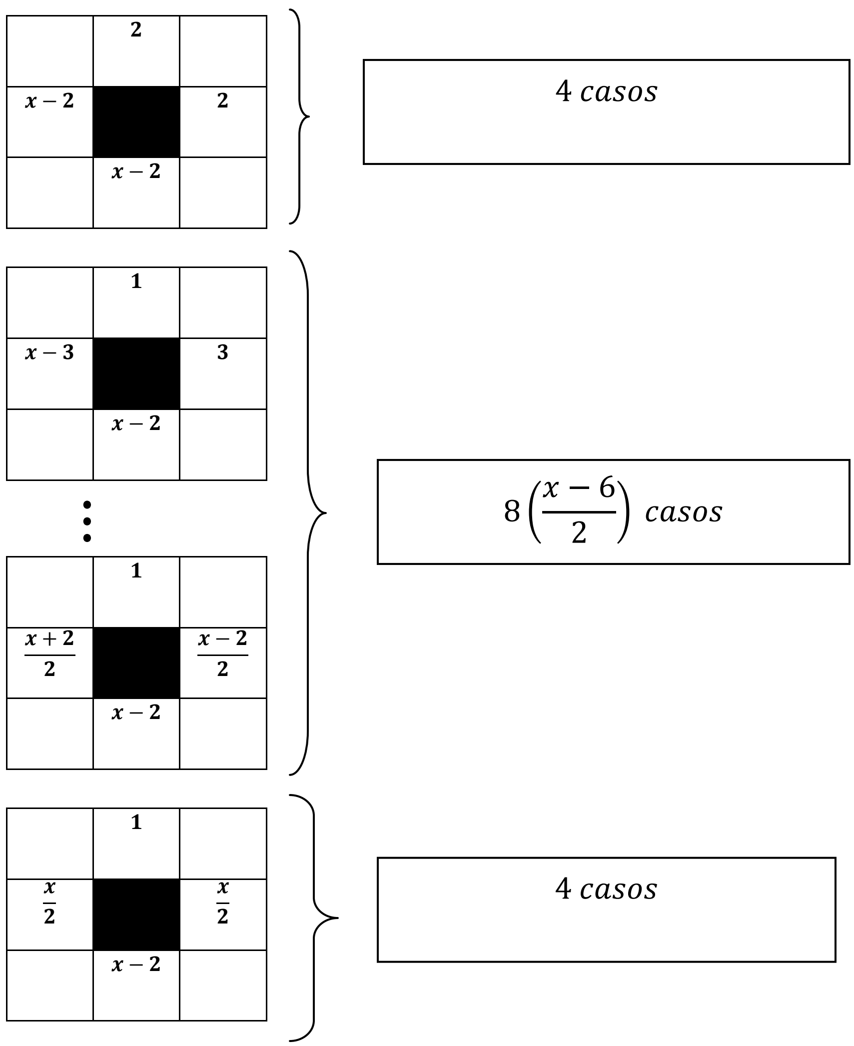
Analogamente ao caso anterior, precisamos determinar quantas possibilidades existem para estes $8 + 8\,\frac{x-4}{2}$ casos. Sabendo que f e h podem tomar os valores,

f	h
0	$S - x + 1$
1	$S - x$
$\vdots$	$\vdots$
$S - x + 1$	0

Tabela 20

concluímos que existem $S - x + 2$ possibilidades, pelo que o número total de casos possíveis é $(\boldsymbol{S - x + 2})(\boldsymbol{8 + 8\ \frac{x-4}{2}})$.

Para $\boldsymbol{g = x - 2}$, sempre com recurso à Observação1.1.6, temos,



Então para estes $8 + 8\ \frac{x-6}{2}$ casos, existem $S - x + 3$ possibilidades, pois f e h podem assumir os valores constantes na tabela,

f	h
0	$S - x + 2$
1	$S - x$
$\vdots$	$\vdots$
$S - x + 2$	0

Tabela 21

totalizando assim $(\boldsymbol{S}-\boldsymbol{x}+\mathbf{3})(\mathbf{8}+\mathbf{8}\,\frac{\boldsymbol{x}-\mathbf{6}}{\mathbf{2}})$ possibilidades.

Se continuarmos progressivamente a fixar g deste modo, chegamos a $\boldsymbol{g}=\frac{\boldsymbol{x}+\mathbf{6}}{\mathbf{2}}$, como ilustra a Tabela 22,

x
$x-1$
$x-2$
$\vdots$
$\frac{x}{2}+3=\frac{x+6}{2}$
$\frac{x}{2}+2=\frac{x+4}{2}$
$\frac{x}{2}+1=\frac{x+2}{2}$
$\frac{x}{2}$

Tabela 22

e para este valor fixo de g temos as seguintes situações,

	$\frac{x-6}{2}$	
$\frac{x+6}{2}$		$\frac{x-6}{2}$
	$\frac{x+6}{2}$	

$4\ casos$

	$\frac{x-6}{2}$	
$\frac{x+4}{2}$		$\frac{x-4}{2}$
	$\frac{x+6}{2}$	

	$\frac{x-6}{2}$	
$\frac{\boldsymbol{x}+\mathbf{2}}{\mathbf{2}}$		$\frac{\boldsymbol{x}-\mathbf{2}}{\mathbf{2}}$
	$\frac{x+6}{2}$	

$8\times 2\ casos$

	$\frac{x-6}{2}$	
$\boldsymbol{\frac{x}{2}}$		$\boldsymbol{\frac{x}{2}}$
	$\frac{x+6}{2}$	

$4\ casos$

Vemos que para estes $8 + 8 \times 2$ casos, existem $S - \frac{x+4}{2}$ possibilidades, pois f e h podem tomar os valores:

f	h
0	$S - \frac{x+6}{2}$
1	$S - \frac{x+8}{2}$
$\vdots$	$\vdots$
$S - \frac{x+6}{2}$	0

Tabela 23

Deste modo constatamos um total de $(\mathbf{8} + \mathbf{8} \times \mathbf{2})(\boldsymbol{S} - \boldsymbol{\frac{x+4}{2}})$ matrizes, nas condições requeridas.

Considerando, agora, $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{\frac{x+4}{2}}$ obtemos as figuras,

	$\frac{x-4}{2}$	
$\frac{x+4}{2}$		$\frac{x-4}{2}$
	$\frac{x+4}{2}$	

$4\ casos$

	$\frac{x-4}{2}$	
$\frac{x+2}{2}$		$\frac{x-2}{2}$
	$\frac{x+4}{2}$	

$8 \times 1\ casos$

	$\frac{x-4}{2}$	
$\boldsymbol{\frac{x}{2}}$		$\boldsymbol{\frac{x}{2}}$
	$\frac{x+4}{2}$	

$4\ casos$

donde concluímos que para estes $8 + 8 \times 1$ casos, existem $S - \frac{x+2}{2}$ possibilidades, pois f e h podem tomar os valores,

f	h
0	$S - \dfrac{x+4}{2}$
1	$S - \dfrac{x+6}{2}$
$\vdots$	$\vdots$
$S - \dfrac{x+4}{2}$	0

Tabela 24

resultando a existência de $\left(\boldsymbol{S - \frac{x+2}{2}}\right)(\mathbf{8 + 8})$ matrizes distintas.

Quando $\boldsymbol{g = \frac{x+2}{2}}$, contamos os 8 casos,

	$\frac{x-2}{2}$	
$\frac{x+2}{2}$	■	$\frac{x-2}{2}$
	$\frac{x+2}{2}$	

$4\ casos$

	$\frac{x-2}{2}$	
$\boldsymbol{\frac{x}{2}}$	■	$\boldsymbol{\frac{x}{2}}$
	$\frac{x+2}{2}$	

$4\ casos$

e como para cada um deles, existem $S - \frac{x}{2}$ possibilidades, ilustradas na Tabela 25,

f	h
0	$S - \dfrac{x+2}{2}$
1	$S - \dfrac{x+4}{2}$
$\vdots$	$\vdots$
$S - \dfrac{x+2}{2}$	0

Tabela 25

deduzimos que existem no total $\mathbf{8}\left(\boldsymbol{S}-\frac{\boldsymbol{x}}{\mathbf{2}}\right)$ possibilidades.

Finalmente quando $\boldsymbol{g}=\boldsymbol{b}=\frac{\boldsymbol{x}}{\mathbf{2}}$ temos um único caso,

	$\frac{x}{2}$	
$\frac{x}{2}$		$\frac{x}{2}$
	$\frac{x}{2}$	

para o qual existem $\boldsymbol{S}-\frac{\boldsymbol{x}-\mathbf{2}}{\mathbf{2}}$ possibilidades, pois f e g podem assumir os valores da tabela:

f	h
0	$S-\dfrac{x}{2}$
1	$S-\dfrac{x+2}{2}$
$\vdots$	$\vdots$
$S-\dfrac{x}{2}$	0

Tabela 26

Resumindo, quando temos $2S \leq n < 3S$, com n par, o número de matrizes 3x3, com entrada central nula, tais que as somas das entradas das linhas e das colunas das extremidades é S, é dado por:

$$(S-x+1)\left(8+8\,\frac{x-2}{2}\right)+(S-x+2)\left(8+8\,\frac{x-4}{2}\right)+$$
$$(S-x+3)\left(8+8\,\frac{x-6}{2}\right)+(S-x+4)\left(8+8\,\frac{x-8}{2}\right)+\cdots+$$
$$\left(S-\frac{x+4}{2}\right)(8+8\times 2)+\left(S-\frac{x+2}{2}\right)(8+8\times 1)+$$
$$\left(S-\frac{x}{2}\right)8+\left(S-\frac{x-2}{2}\right)1$$

$$=(S-x+1)4x+(S-x+2)4(x-2)+(S-x+3)4(x-4)+$$
$$+(S-x+4)4(x-6)+\cdots+\left(S-\frac{x+4}{2}\right)\times 4\times 6+\left(S-\frac{x+2}{2}\right)\times 4\times 4+$$
$$+\left(S-\frac{x}{2}\right)\times 4\times 2+\left(S-\frac{x-2}{2}\right)\times 1 \qquad (35)$$

À semelhança do que foi realizado no enigma do monge, vamos considerar as variáveis a_k e b_k definidas do seguinte modo:

$$a_k = S + 1 - k,$$

$$b_k = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 4k, & k \neq 0 \end{cases} \qquad com\ 0 \leq k \leq S \tag{36}$$

Recorrendo às variáveis a_k e b_k, verificamos que (35) é equivalente a

$$a_x b_x + a_{x-1} b_{x-2} + a_{x-2} b_{x-4} + a_{x-3} b_{x-6} + \cdots + a_{\left(\frac{x+6}{2}\right)} b_6 + a_{\left(\frac{x+4}{2}\right)} b_4 + a_{\left(\frac{x+2}{2}\right)} b_2 + a_{\left(\frac{x}{2}\right)} b_0$$

e que pode ainda ser representado por,

$$\sum_{\substack{k=0 \\ k\ par}}^{x} a_{\frac{x+k}{2}} b_k \,.$$

Mas, atendendo a que $n = 2S + x$, ou seja, $x = n - 2S$, (35) pode ainda assumir a forma,

$$\sum_{\substack{k=0 \\ k\ par}}^{n-2S} a_{\left(\frac{n+k}{2} - S\right)} b_k. \tag{37}$$

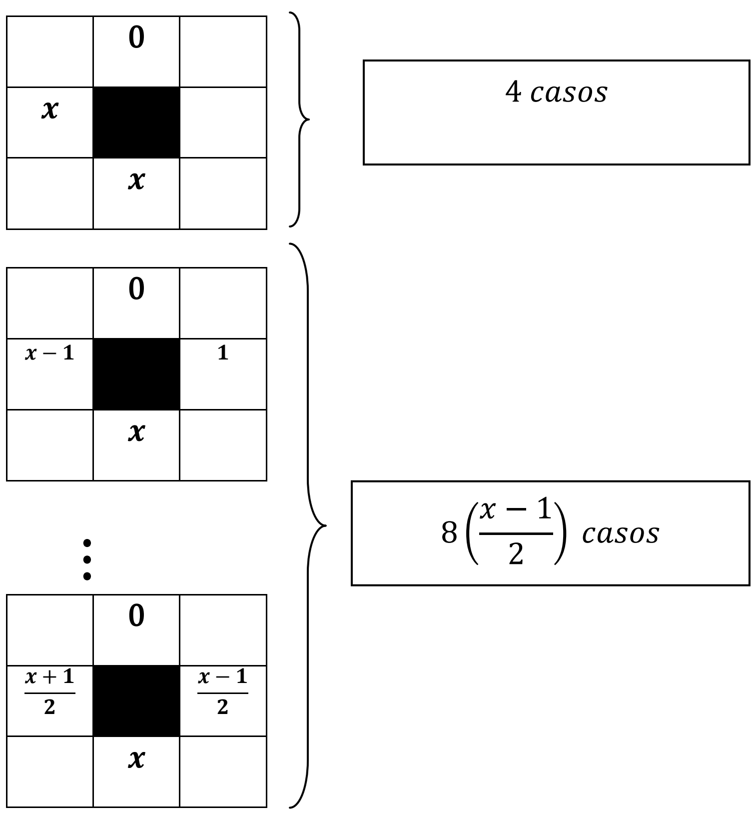
- $\boldsymbol{2S \leq n < 3S \ \wedge\ n}$ **ímpar**

Seguindo o mesmo procedimento, efectuaremos a contagem das matrizes fixando g com os valores compreendidos entre x e $\frac{x+1}{2}$ como ilustra a Tabela 27 e uma vez mais b é obtida pela decomposição da soma $b + g = x$.

g	b
x	0
$x-1$	1
$x-2$	2
$x-3$	3
$\vdots$	$\vdots$
$\frac{x+5}{2}$	$\frac{x-5}{2}$
$\frac{x+3}{2}$	$\frac{x-3}{2}$
$\frac{x+1}{2}$	$\frac{x-1}{2}$

Tabela 27

Deste modo iniciamos a contagem assumindo $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{x}$,



Como, em qualquer um destes $4 + 8\,\frac{x-1}{2}$ casos, f e h só podem assumir os valores descritos pela Tabela 28,

f	h
0	$S-x$
1	$S-x-1$
$\vdots$	$\vdots$
$S-x$	0

Tabela 28

concluímos que existem $(\boldsymbol{S-x+1})(\boldsymbol{4+8\,\frac{x-1}{2}})$ matrizes.

Analisando o caso $\boldsymbol{g=x-1}$, obtemos:

	$\mathbf{1}$	
$\boldsymbol{x-1}$		$\mathbf{1}$
	$\boldsymbol{x-1}$	

$4\ casos$

	$\mathbf{1}$	
$\boldsymbol{x-2}$		$\mathbf{2}$
	$\boldsymbol{x-1}$	

$\vdots$

	$\mathbf{1}$	
$\boldsymbol{\frac{x+1}{2}}$		$\boldsymbol{\frac{x-1}{2}}$
	$\boldsymbol{x-1}$	

$8\left(\frac{x-3}{2}\right)\ casos$

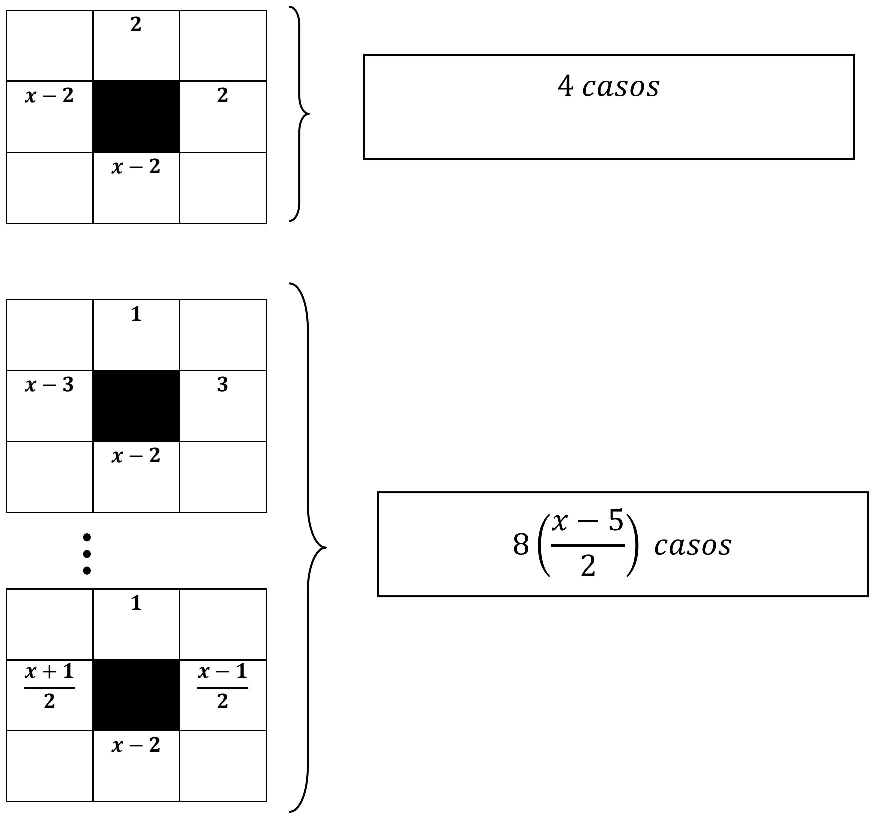
e como f e h podem tomar os valores:

f	h
0	$S-x+1$
1	$S-x$
$\vdots$	$\vdots$
$S-x+1$	0

Tabela 29

resulta que existem $S - x + 2$ possibilidades, para estes $4 + 8 \times \left(\frac{x-3}{2}\right)$ casos, de onde deduzimos a existência de $(\boldsymbol{S - x + 2})(\boldsymbol{4 + 8\ \frac{x-3}{2}})$ matrizes.

Quando $\boldsymbol{g = x - 2}$, obtemos,



e, recorrendo à Tabela 30,

f	h
0	$S - x + 2$
1	$S - x$
$\vdots$	$\vdots$
$S - x + 2$	0

Tabela 30

contamos $(\boldsymbol{S - x + 3})(\boldsymbol{4 + 8\ \frac{x-5}{2}})$ casos possíveis.

Se continuarmos a fixar g deste modo, chegamos a $\boldsymbol{g = \frac{x+7}{2}}$. Para este caso obtemos as estruturas,

	$\frac{x-7}{2}$	
$\frac{x+7}{2}$		$\frac{x-7}{2}$
	$\frac{x+7}{2}$	

$4\ casos$

	$\frac{x-7}{2}$	
$\frac{x+5}{2}$		$\frac{x-5}{2}$
	$\frac{x+7}{2}$	

	$\frac{x-7}{2}$	
$\frac{x+3}{2}$		$\frac{x-3}{2}$
	$\frac{x+7}{2}$	

	$\frac{x-7}{2}$	
$\boldsymbol{\frac{x+1}{2}}$		$\boldsymbol{\frac{x-1}{2}}$
	$\frac{x+7}{2}$	

$8 \times 3\ casos$

A tabela

f	h
0	$S - \frac{x+7}{2}$
1	$S - \frac{x+9}{2}$
$\vdots$	$\vdots$
$S - \frac{x+7}{2}$	0

Tabela 31

concentra as possibilidades de f e h, logo concluímos que existem $\boldsymbol{\left(S - \frac{x+5}{2}\right)(4 + 8 \times 3)}$ possibilidades.

Supondo que $\boldsymbol{g} = \frac{\boldsymbol{x+5}}{\boldsymbol{2}}$, chegamos a

	$\frac{x-5}{2}$	
$\frac{x+5}{2}$		$\frac{x-5}{2}$
	$\frac{x+5}{2}$	

$4 \; casos$

	$\frac{x-5}{2}$	
$\frac{x+3}{2}$		$\frac{x-3}{2}$
	$\frac{x+5}{2}$	

	$\frac{x-5}{2}$	
$\boldsymbol{\frac{x+1}{2}}$		$\boldsymbol{\frac{x-1}{2}}$
	$\frac{x+5}{2}$	

$8 \times 2 \; casos$

e vemos que para estas $4 + 8 \times 2$ estruturas, existem $S - \frac{x+3}{2}$ possibilidades,

f	h
0	$S - \frac{x+5}{2}$
1	$S - \frac{x+7}{2}$
$\vdots$	$\vdots$
$S - \frac{x+5}{2}$	0

Tabela 32

de onde concluímos que lhe estão associadas $\left(\boldsymbol{S} - \frac{\boldsymbol{x+3}}{\boldsymbol{2}}\right)(\boldsymbol{4} + \boldsymbol{8} \times \boldsymbol{2})$ novas matrizes.

Quando $\boldsymbol{g} = \frac{\boldsymbol{x+3}}{\boldsymbol{2}}$ (portanto, $b = \frac{x-3}{2}$) temos,

	$\frac{x-3}{2}$	
$\frac{x+3}{2}$		$\frac{x-3}{2}$
	$\frac{x+3}{2}$	

$4\ casos$

	$\frac{x-3}{2}$	
$\frac{x+1}{2}$		$\frac{x-1}{2}$
	$\frac{x+3}{2}$	

$8 \times 1\ casos$

Assim, para estes $4 + 8 \times 1$ casos, existem $S - \frac{x+1}{2}$ possibilidades, tendo em atenção os valores para f e h da tabela,

f	h
0	$S - \dfrac{x+3}{2}$
1	$S - \dfrac{x+5}{2}$
$\vdots$	$\vdots$
$S - \dfrac{x+3}{2}$	0

Tabela 33

resultando um total de $\left(S - \frac{x+1}{2}\right)(4+8)$ casos possíveis.

Finalizando, quando $\boldsymbol{g} = \frac{\boldsymbol{x+1}}{\boldsymbol{2}}$, obtemos a estrutura

	$\frac{x-1}{2}$	
$\frac{x+1}{2}$		$\frac{x-1}{2}$
	$\frac{x+1}{2}$	

que concentra 4 casos cada um com $S - \frac{x-1}{2}$ possibilidades, descritas na tabela,

f	h
0	$S-\frac{x+2}{2}$
1	$S-\frac{x+4}{2}$
$\vdots$	$\vdots$
$S-\frac{x+2}{2}$	0

Tabela 34

Em consequência, contamos nesta última análise $\boldsymbol{(S-\frac{x-1}{2})4}$ casos possíveis.

Resumindo, e considerando (36), quando temos $2S \leq n < 3S$, com n ímpar, o número de matrizes, nas condições requeridas, é dado por,

$$
\begin{aligned}
&(S-x+1)\left(4+8\frac{x-1}{2}\right)+(S-x+2)\left(4+8\frac{x-3}{2}\right)+\\
&(S-x+3)\left(4+8\frac{x-5}{2}\right)+(S-x+4)\left(4+8\frac{x-7}{2}\right)+\cdots+\\
&\left(S-\frac{x+5}{2}\right)(4+8\times 3)+\left(S-\frac{x+3}{2}\right)(4+8\times 2)+\\
&\left(S-\frac{x+1}{2}\right)(4+8\times 1)+\left(S-\frac{x-1}{2}\right)4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&=(S-x+1)4x+(S-x+2)4(x-2)+(S-x+3)4(x-4)+\\
&\quad(S-x+4)4(x-6)+\cdots+\left(S-\frac{x+5}{2}\right)\times 4\times 7+\\
&\quad\left(S-\frac{x+3}{2}\right)\times 4\times 5+\left(S-\frac{x+1}{2}\right)\times 4\times 3+\left(S-\frac{x-1}{2}\right)4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&=a_x b_x + a_{x-1}b_{x-2}+a_{x-2}b_{x-4}+a_{x-3}b_{x-6}+\cdots+a_{\left(\frac{x+7}{2}\right)}b_7+a_{\left(\frac{x+5}{2}\right)}b_5+a_{\left(\frac{x+3}{2}\right)}b_3\\
&\quad+a_{\left(\frac{x+1}{2}\right)}b_1
\end{aligned}
$$

$$
=\sum_{\substack{k=1\\ k\ \text{ímpar}}}^{x} a_{\frac{x+k}{2}}b_k
$$

Mas como $n = 2S + x$, ou seja, $x = n - 2S$, o número de matrizes, onde $2S \leq n < 3S$, com n ímpar, pode ser representado por,

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k\ ímpar}}^{n-2S} a_{\left(\frac{n+k}{2}-S\right)} b_k, \tag{38}$$

De (37) e (38) resulta o,

Lema 2.1.2 *O número de matrizes 3*x*3 de entradas naturais,* $F_S(n)$, *com entrada central nula, onde a soma de cada linha e cada coluna externas é um natural fixo* S, *é dado por:*

$$F_S(n) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\substack{k=0 \\ k\ par}}^{n-2S} a_{\left(\frac{n+k}{2}-S\right)} b_k, & \text{se } n \text{ par} \\ \displaystyle\sum_{\substack{k=1 \\ k\ ímpar}}^{n-2S} a_{\left(\frac{n+k}{2}-S\right)} b_k, & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases}$$

onde n *é a soma de todas as entradas da matriz e* $2S \leq n < 3S$.

Antes de darmos continuidade à nossa contagem, é de referir que o método de contagem para os casos $3S \leq n \leq 4S$ não pode ser o mesmo efectuado para os casos já contabilizados.

Notemos que quando $3S \leq n \leq 4S$ não podemos indiscriminadamente considerar, por exemplo, $g = x$, pois recorrendo a $n = 2S + x$ teríamos

$$S \leq x = g \leq 2S,$$

ou seja, não temos qualquer garantia de que $0 \leq g \leq S$, condição exigida inicialmente por (29).

Deste modo é necessário garantirmos que as decomposições $g + b = d + e$ a considerar são apenas as que estão nas condições do problema. Passamos assim a definir a variável w que auxiliar-nos-á na contagem. Consideremos,

$$w = 4S - n = 4S - (2S + x). \tag{39}$$

Uma vez conhecidos S e n determinamos x a partir da relação $n = 2S + x$ e como $3S \leq n \leq 4S$, resulta que $S \leq x \leq 2S$ e consequentemente temos,

$$0 \leq w \leq S. \tag{40}$$

Retomemos a respectiva contagem,

- $\boldsymbol{3S \leq n \leq 4S \wedge n}$ **par**

Analogamente aos casos anteriores comecemos por fixar o elemento g, atribuindo-lhe todos os valores que pode assumir, começando pelo maior e terminando no menor. Já o elemento b é determinado a partir da decomposição de x na forma,

$$b + g = 2S - w \tag{41}$$

relação definida por intermédio de (39) e de (31).

Nas condições $3S \leq n \leq 4S$, cada elemento da matriz, em particular o elemento g, pode ser no máximo S.

Deste modo comecemos por considerar $\boldsymbol{g = S}$. Pela decomposição (41) resulta $b = S - w$, de onde obtemos as estruturas,

$$\left.\begin{array}{|c|c|c|}\hline & \boldsymbol{S-w} & \\ \hline \boldsymbol{S} & \blacksquare & \boldsymbol{S-w} \\ \hline & \boldsymbol{S} & \\ \hline \end{array}\right\} \quad \boxed{4\ casos}$$

$$\left.\begin{array}{c}\begin{array}{|c|c|c|}\hline & \boldsymbol{S-w} & \\ \hline \boldsymbol{S-1} & \blacksquare & \boldsymbol{S-w+1} \\ \hline & \boldsymbol{S} & \\ \hline \end{array} \\ \vdots \\ \begin{array}{|c|c|c|}\hline & \boldsymbol{S-w} & \\ \hline \boldsymbol{S-\frac{w-2}{2}} & \blacksquare & \boldsymbol{S-\frac{w+2}{2}} \\ \hline & \boldsymbol{S} & \\ \hline \end{array}\end{array}\right\} \quad \boxed{8\left(\frac{w-2}{2}\right)\ casos}$$

	$\boldsymbol{S-w}$	
$\boldsymbol{s-\frac{w}{2}}$		$\boldsymbol{S-\frac{w}{2}}$
	$\boldsymbol{S}$	

$4\ casos$

cuja contagem se recorreu à Proposição 1.1.6. Para cada um destes $\mathbf{8}+\mathbf{8}\frac{\boldsymbol{w}-\mathbf{2}}{\mathbf{2}}$ casos existe apenas uma distribuição possível, pois de $f+g+h=S$ e $g=S$, resulta $f=h=0$.

Quando $g=\boldsymbol{S}-\mathbf{1}$ obtemos,

	$\boldsymbol{S-w+1}$	
$\boldsymbol{S-1}$		$\boldsymbol{S-w+1}$
	$\boldsymbol{S-1}$	

$4\ casos$

	$\boldsymbol{S-w+1}$	
$\boldsymbol{S-2}$		$\boldsymbol{S-w+2}$
	$\boldsymbol{S-1}$	

⋮

	$\boldsymbol{S-w+1}$	
$\boldsymbol{s-\frac{w-2}{2}}$		$\boldsymbol{s-\frac{w+2}{2}}$
	$\boldsymbol{S-1}$	

$8\left(\frac{w-4}{2}\right)\ casos$

	$\boldsymbol{S-w+1}$	
$\boldsymbol{s-\frac{w}{2}}$		$\boldsymbol{s-\frac{w}{2}}$
	$\boldsymbol{S-1}$	

$4\ casos$

e como a Tabela 35 demonstra,

f	h
0	1
1	0

Tabela 35

existem 2 possibilidades para cada caso, de onde resultam $\mathbf{2(8+8\,\frac{w-4}{2})}$ matrizes.

Considerando $\boldsymbol{g = S - 2}$, temos,

	$S-w+2$	
$S-2$		$S-w+2$
	$S-2$	

$4\ casos$

	$S-w+2$	
$S-3$		$S-w+3$
	$S-2$	

⋮

	$S-w+2$	
$S-\frac{w-2}{2}$		$S-\frac{w+2}{2}$
	$S-2$	

$8\left(\frac{w-6}{2}\right)\ casos$

	$S-w+2$	
$S-\frac{w}{2}$		$S-\frac{w}{2}$
	$S-2$	

$4\ casos$

que ilustram $8 + 8\,\frac{w-6}{2}$ casos e como para cada existem 3 possibilidades, verificadas na tabela,

f	h
0	2
1	1
2	0

Tabela 36

contabilizamos um total de $\mathbf{3(8+8\,\frac{w-6}{2})}$ casos.

Se continuarmos a fixar sucessivamente g, chegamos a $\boldsymbol{g = S - \frac{w-6}{2}}$, resultando as seguintes estruturas

	$s-\frac{w+6}{2}$	
$s-\frac{w-6}{2}$		$s-\frac{w+6}{2}$
	$s-\frac{w-6}{2}$	

$\boxed{4\ casos}$

	$s-\frac{w+6}{2}$	
$s-\frac{w-4}{2}$		$s-\frac{w+4}{2}$
	$s-\frac{w-6}{2}$	

	$s-\frac{w+6}{2}$	
$s-\frac{w-2}{2}$		$s-\frac{w+2}{2}$
	$s-\frac{w-6}{2}$	

$\boxed{8 \times 2\ casos}$

	$s-\frac{w+6}{2}$	
$s-\frac{w}{2}$		$s-\frac{w}{2}$
	$s-\frac{w-6}{2}$	

$\boxed{4\ casos}$

e como para cada uma delas, existem $\frac{w-4}{2}$ possibilidades, pois f e h podem tomar os valores,

f	h
0	$\frac{w+6}{2}$
1	$\frac{w+8}{2}$
$\vdots$	$\vdots$
$\frac{w+6}{2}$	0

Tabela 37

concluímos que existem $\left(\frac{\boldsymbol{w-4}}{\boldsymbol{2}}\right)(\boldsymbol{8}+\boldsymbol{8}\times\boldsymbol{2})$ casos.

Quando $\boldsymbol{g}=\boldsymbol{S}-\frac{\boldsymbol{w-4}}{\boldsymbol{2}}$ somos conduzidos a

	$s-\frac{w+4}{2}$	
$s-\frac{w-4}{2}$		$s-\frac{w+4}{2}$
	$s-\frac{w-4}{2}$	

$4\ casos$

	$s-\frac{w+4}{2}$	
$s-\frac{w-2}{2}$		$s-\frac{w+2}{2}$
	$s-\frac{w-4}{2}$	

$8\ casos$

	$s-\frac{w+4}{2}$	
$s-\frac{w}{2}$		$s-\frac{w}{2}$
	$s-\frac{w-4}{2}$	

$4\ casos$

Considerando todas as possibilidades para f e h, inscritas em,

f	h
0	$\frac{w-4}{2}$
1	$\frac{w-6}{2}$
$\vdots$	$\vdots$
$\frac{w-4}{2}$	0

Tabela 38

verificamos que existem no total $\left(\frac{\boldsymbol{w-2}}{\boldsymbol{2}}\right)(\mathbf{8}+\mathbf{8})$ casos.

Ao assumirmos $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{S} - \frac{\boldsymbol{w-2}}{\boldsymbol{2}}$, obtemos,

	$s-\frac{w+2}{2}$	
$s-\frac{w-2}{2}$		$s-\frac{w+2}{2}$
	$s-\frac{w-2}{2}$	

$4\ casos$

	$s-\frac{w+2}{2}$	
$s-\frac{w}{2}$		$s-\frac{w}{2}$
	$s-\frac{w-2}{2}$	

$4\ casos$

e de acordo com as potencialidades da tabela

f	h
0	$\frac{w-2}{2}$
1	$\frac{w-4}{2}$
$\vdots$	$\vdots$
$\frac{w-2}{2}$	0

Tabela 39

contabilizamos $\frac{\boldsymbol{w}}{\boldsymbol{2}}\ \mathbf{8}$ casos.

Finalmente quando $\boldsymbol{g = s - \frac{w}{2}}$ verificamos que $g = b$ e basta apenas considerarmos a distribuição

	$s-\frac{w}{2}$	
$s-\frac{w}{2}$	■	$s-\frac{w}{2}$
	$s-\frac{w}{2}$	

Como esta distribuição não admite simetrias, basta atendermos à Tabela 40

f	h
0	$\frac{w}{2}$
1	$\frac{w-2}{2}$
$\vdots$	$\vdots$
$\frac{w}{2}$	0

Tabela 40

para apurarmos que existem $\frac{w+2}{2}$ matrizes.

Resumindo, quando temos $3S \leq n \leq 4S$, com n par, o número de matrizes 3x3, com entrada central nula, tais que as somas das entradas das linhas e das colunas das extremidades é S, é dado por,

$$1\left(8+8\frac{w-2}{2}\right)+2\left(8+8\frac{w-4}{2}\right)+\ 3\left(8+8\frac{w-6}{2}\right)+$$
$$4(8+8\frac{w-8}{2})+\cdots+\left(\frac{w-4}{2}\right)(8+8\times 2)+\left(\frac{w-2}{2}\right)(8+8\times 1)+$$
$$\left(\frac{w}{2}\right)8+\left(\frac{w+2}{2}\right)1$$

$$=1(4w)+2\times 4(w-2)+3\times 4(w-4)+4\times 4(w-6)+\cdots+$$
$$+\left(\frac{w-4}{2}\right)(4\times 6)+\left(\frac{w-2}{2}\right)(4\times 4)+\left(\frac{w}{2}\right)(4\times 2)+\left(\frac{w+2}{2}\right)1=$$

$$=a_S b_w+a_{S-1}b_{w-2}+a_{S-2}b_{w-4}+a_{S-3}b_{w-6}+\cdots+$$
$$a_{S-\left(\frac{w-6}{2}\right)}b_6+a_{S-\left(\frac{w-4}{2}\right)}b_4+a_{S-\left(\frac{w-2}{2}\right)}b_2+a_{S-\left(\frac{w}{2}\right)}b_0$$

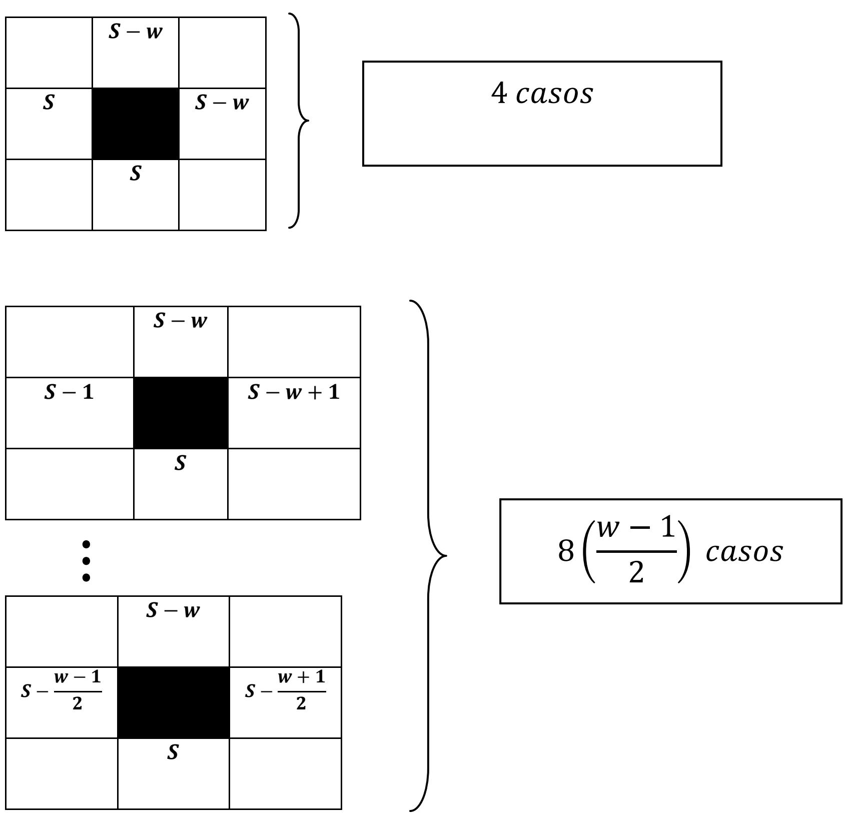
$$= \sum_{\substack{k=0 \\ k\ par}}^{w} a_{S-\frac{w-k}{2}} b_k$$

Mas como $w = 4S - n$, o número de matrizes, nas condições requeridas, para $3S \leq n \leq 4S$ com n par, pode ser representado por:

$$\sum_{\substack{k=0 \\ k\ par}}^{4S-n} a_{\left(\frac{n+k}{2}-S\right)} b_k, \tag{42}$$

- $\boldsymbol{3S \leq n \leq 4S \ \wedge \ n}$ **ímpar**

Seguindo o mesmo procedimento somos conduzidos à primeira situação onde $g = S$. Analisando as várias decomposições de $2S - w$, obtemos,



Para estes $\boldsymbol{4+8\frac{w-1}{2}}$ casos existe apenas uma distribuição viável, pois de

$f+g+h=S$ e $g=S$, resulta $f=h=0$.

Quando $\boldsymbol{g=S-1}$, resultam as estruturas

	$S-w+1$	
$S-1$		$S-w+1$
	$S-1$	

$4\ casos$

	$S-w+1$	
$S-2$		$S-w+2$
	$S-1$	

⋮

	$S-w+1$	
$S-\frac{w-1}{2}$		$S-\frac{w+1}{2}$
	$S-1$	

$8\left(\frac{w-3}{2}\right)\ casos$

e uma vez consideradas as possibilidades de f e de h

f	h
0	1
1	0

Tabela 41

torna-se evidente que existem no total $\mathbf{2(4+8\frac{w-3}{2})}$ matrizes.

Admitindo $\boldsymbol{g = S - 2}$, obtemos

	$S-w+2$	
$S-2$		$S-w+2$
	$S-2$	

$4\ casos$

	$S-w+2$	
$S-3$		$S-w+3$
	$S-2$	

$\vdots$

	$S-w+2$	
$S-\frac{w-1}{2}$		$S-\frac{w+1}{2}$
	$S-2$	

$8\left(\frac{w-5}{2}\right)\ casos$

e como é possível visualizar na Tabela 42 existem 3 possibilidades para cada caso,

f	h
0	2
1	1
2	0

Tabela 42

pelo que no total, temos $\boldsymbol{3(4 + 8\frac{w-5}{2})}$ situações possíveis.

Se continuarmos a fixar g e b chegamos a $\boldsymbol{g = S - \frac{w-7}{2}}$ e como consequência vem,

	$S-\frac{w+7}{2}$	
$S-\frac{w-7}{2}$		$S-\frac{w+7}{2}$
	$S-\frac{w-7}{2}$	

$4\ casos$

	$S-\frac{w+7}{2}$	
$S-\frac{w-5}{2}$		$S-\frac{w+5}{2}$
	$S-\frac{w-7}{2}$	

	$S-\frac{w+7}{2}$	
$S-\frac{w-3}{2}$		$S-\frac{w+3}{2}$
	$S-\frac{w-7}{2}$	

	$S-\frac{w+7}{2}$	
$S-\frac{w-1}{2}$		$S-\frac{w+1}{2}$
	$S-\frac{w-7}{2}$	

$8 \times 3\ casos$

Como f e h podem assumir os valores da Tabela 43,

f	h
0	$\frac{w-7}{2}$
1	$\frac{w-9}{2}$
$\vdots$	$\vdots$
$\frac{w-7}{2}$	0

Tabela 43

chegamos a um total de $\left(\frac{w-5}{2}\right)(\mathbf{4}+\mathbf{8}\times\mathbf{3})$ matrizes.

Quando, $g = S - \frac{w-5}{2}$ obtemos,

	$S-\frac{w+5}{2}$	
$S-\frac{w-5}{2}$		$S-\frac{w+5}{2}$
	$S-\frac{w-5}{2}$	

$4\ casos$

	$s-\frac{w+5}{2}$	
$s-\frac{w-3}{2}$		$s-\frac{w+3}{2}$
	$s-\frac{w-5}{2}$	

	$s-\frac{w+5}{2}$	
$s-\frac{w-1}{2}$		$s-\frac{w+1}{2}$
	$s-\frac{w-5}{2}$	

$8 \times 2\ casos$

e como para cada um deles existem $\frac{w-3}{2}$ possibilidades,

f	h
0	$\frac{w-5}{2}$
1	$\frac{w-6}{2}$
$\vdots$	$\vdots$
$\frac{w-4}{2}$	0

Tabela 44

contamos, no total, $\left(\frac{\boldsymbol{w-3}}{\boldsymbol{2}}\right)(\boldsymbol{4}+\boldsymbol{8}\times\boldsymbol{2})$ casos.

Ao assumirmos $\boldsymbol{g}=\boldsymbol{S}-\frac{\boldsymbol{w-3}}{\boldsymbol{2}}$, basta considerarmos estes $4+8$ casos

	$s-\frac{w+3}{2}$	
$s-\frac{w-3}{2}$		$s-\frac{w+3}{2}$
	$s-\frac{w-3}{2}$	

$4\ casos$

	$s-\frac{w+3}{2}$	
$s-\frac{w-1}{2}$		$s-\frac{w+1}{2}$
	$s-\frac{w-3}{2}$	

$8\ casos$

e atendendo a que f e h podem assumir os valores,

f	h
0	$\frac{w-3}{2}$
1	$\frac{w-5}{2}$
$\vdots$	$\vdots$
$\frac{w-3}{2}$	0

Tabela 45

juntamos mais $\left(\frac{\boldsymbol{w-3}}{\mathbf{2}}\right)(\mathbf{4}+\mathbf{8})$ matrizes.

Analisemos, por fim, a situação $\boldsymbol{g}=\boldsymbol{S}-\frac{\boldsymbol{w-1}}{\mathbf{2}}$. Somos conduzidos à única estrutura,

	$s-\frac{w+1}{2}$	
$s-\frac{w-1}{2}$		$s-\frac{w}{2}+1$
	$s-\frac{w-1}{2}$	

que engloba 4 casos, uma vez mais pela Observação 1.1.6 . Tendo em conta a tabela,

f	h
0	$\frac{w-1}{2}$
1	$\frac{w-3}{2}$
$\vdots$	$\vdots$
$\frac{w-1}{2}$	0

Tabela 46

vemos que existem $\frac{\boldsymbol{w+1}}{\mathbf{2}}\mathbf{4}$ possibilidades.

Resumindo, quando temos $3S \leq n \leq 4S$, com n ímpar, o número de matrizes, nas condições já referidas, é dado por:

$$1\left(4+8\frac{w-1}{2}\right)+2\left(4+8\frac{w-3}{2}\right)+3\left(4+8\frac{w-5}{2}\right)+4\left(4+8\frac{w-7}{2}\right)+\cdots+$$
$$+\left(\frac{w-3}{2}\right)(4+8\times 3)+\left(\frac{w-2}{2}\right)(4+8\times 2)+\left(\frac{w-1}{2}\right)(4+8)+\left(\frac{w+1}{2}\right)4$$

$$=1(4w)+2\times 4(w-2)+3\times 4(w-4)+4\times 4(w-6)+\cdots+$$
$$+\left(\frac{w-5}{2}\right)(4\times 7)+\left(\frac{w-3}{2}\right)(4\times 5)+\left(\frac{w-1}{2}\right)(4\times 3)+\left(\frac{w+1}{2}\right)4$$

$$=a_S b_w + a_{S-1}b_{w-2}+a_{S-2}b_{w-4}+a_{S-3}b_{w-6}+\cdots+a_{S-\left(\frac{w-7}{2}\right)}b_7+$$
$$+a_{S-\left(\frac{w-5}{2}\right)}b_5+a_{S-\left(\frac{w-3}{2}\right)}b_3+a_{S-\left(\frac{w-1}{2}\right)}b_1$$

$$=\sum_{\substack{k=1\\ k\ \text{ímpar}}}^{w} a_{S-\frac{w-k}{2}}b_k$$

De $w=4S-n$, o número de matrizes, para $3S \leq n \leq 4S$ com n ímpar, pode ser representado por:

$$\sum_{\substack{k=1\\ k\ \text{ímpar}}}^{4S-n} a_{\left(\frac{n+k}{2}-S\right)}b_k \tag{43}$$

De (42) e (43) resulta o,

Lema 2.1.3 *O número de matrizes* $3\text{x}3$ *de entradas naturais,* $F_S(n)$, *com entrada central nula, onde a soma de cada linha e cada coluna externas é um natural fixo* S, *é dado por:*

$$F_S(n) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\substack{k=0 \\ k\ par}}^{4S-n} a_{\left(\frac{n+k}{2}-S\right)} b_k, & \text{se } n \text{ par} \\ \displaystyle\sum_{\substack{k=1 \\ k\ ímpar}}^{4S-n} a_{\left(\frac{n+k}{2}-S\right)} b_k, & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases}$$

onde n *é a soma de todas as entradas da matriz e* $3S \leq n \leq 4S$.

Estamos agora em condições de estabelecer a,

Proposição 2.1.4 *Considerando as matrizes 3×3, de entradas naturais, de entrada central nula e onde a soma de cada linha e cada coluna exteriores é um natural fixo, digamos* S, *resulta que o número natural* n, *que representa a soma de todas as entradas, verifica a condição,*

$$2S \leq n \leq 4S$$

e o número de matrizes, $F_S(n)$, *nestas condições é dado por,*

$$F_S(n) = \begin{cases} (i) = \displaystyle\sum_{\substack{k=0 \\ k\ \ par}}^{n-2S} a_{\left(\frac{n+k}{2}-S\right)} b_k \text{ , se } 2S \leq n < 3S \text{ e } n \text{ par} \\ (ii) = \displaystyle\sum_{\substack{k=1 \\ k\ \ ímpar}}^{n-2S} a_{\left(\frac{n+k}{2}-S\right)} b_k \text{ , se } 2S \leq n < 3S \text{ e } n \text{ ímpar} \\ (iii) = \displaystyle\sum_{\substack{k=0 \\ k\ \ par}}^{4S-n} a_{\left(\frac{n+k}{2}-S\right)} b_k \text{ , se } 3S \leq n \leq 4S \text{ e } n \text{ par} \\ (iv) = \displaystyle\sum_{\substack{k=1 \\ k\ \ ímpar}}^{4S-n} a_{\left(\frac{n+k}{2}-S\right)} b_k \text{ , se } 3S \leq n \leq 4S \text{ e } n \text{ ímpar} \end{cases}$$

onde as variáveis a_k *e* b_k *definidas do seguinte modo:*

$$a_k = S + 1 - k,$$

$$b_k = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 4k, & k \neq 0 \end{cases} \qquad com\ 0 \leq k \leq S$$

$F_S(n)$ pode ainda ser representado na forma polinomial,

$$F_S(n) =$$

$$= \begin{cases} -\frac{5}{6}n^3 + (6S-1)n^2 + \left(-14S^2 + 6S + \frac{5}{6}\right)n + \frac{32}{3}S^3 - 8S^2 - \frac{2}{3}S + 1, 2S \leq n < 3S \\ -\frac{n^3}{6} + (2S+1)n^2 + \left(-8S^2 - 8S - \frac{11}{6}\right)n + \frac{32}{3}S^3 + 16S^2 + \frac{22}{3}S + 1, 3S \leq n \leq 4S \end{cases}$$

e o número total de matrizes nessas condições é dado por:

$$\sum_{n=2S}^{4S} F_S\,(n) = \frac{S^4 + 6S^3 + 14S^2 + 15S + 6}{6}$$

Prova:

Sabemos que,

1[1]) $\sum_{\substack{k=0 \\ k\ par}}^{m} k = \frac{m(m+2)}{4}, com\ m\ par;$

2[2]) $\sum_{\substack{k=1 \\ k\ ímpar}}^{m} k = \frac{(m+1)^2}{4}, com\ m\ ímpar;$

[1] Prova em Anexo
[2] Prova em Anexo

$$3^3)\ \sum_{\substack{k=0 \\ k\ par}}^{m} k^2 = \frac{m(m+1)(m+2)}{6}, com\ m\ par;$$

$$4^4)\ \sum_{\substack{k=1 \\ k\ ímpar}}^{m} k^2 = \frac{m(m+1)(m+2)}{6}, com\ m\ ímpar;$$

$$5) \sum_{k=0}^{m} k = \frac{m(m+1)}{2}\ ;$$

$$6) \sum_{k=0}^{m} k^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}\ ;$$

$$7) \sum_{k=0}^{m} k^3 = \frac{m^2(m+1)^2}{6}\ ;$$

De acordo com o Lema 2.1.2 quando n é par e $2S \leq n < 3S$ temos,

$$(i) = \sum_{\substack{k=0 \\ k\ \ par}}^{n-2S} a_{\left(\frac{n+k}{2}-S\right)} b_k = a_{\left(\frac{n}{2}-S\right)} b_0 + \sum_{\substack{k=2 \\ k\ \ par}}^{n-2S} a_{\left(\frac{n+k}{2}-S\right)} b_k$$

$$= 2S + 1 - \frac{n}{2} + \sum_{\substack{k=2 \\ k\ \ par}}^{n-2S} (2S + 1 - \frac{n+k}{2}) 4k$$

$$= 2S + 1 - \frac{n}{2} + (8S + 4 - 2n) \sum_{\substack{k=2 \\ k\ \ par}}^{n-2S} k - 2 \sum_{\substack{k=2 \\ k\ \ par}}^{n-2S} k^2$$

$$= 2S + 1 - \frac{n}{2} + (8S + 4 - 2n) \frac{(2 + n - 2S)(n - 2S)}{4}$$

$$-2 \frac{(n - 2S)(n - 2S + 1)(n - 2S + 2)}{6}$$

[3] Prova em Anexo
[4] Prova em Anexo

$$= -\frac{5}{6}n^3 + (6S-1)n^2 + \left(-14S^2 + 6S + \frac{5}{6}\right)n$$

$$+\frac{32}{3}S^3 - 8S^2 - \frac{2}{3}S + 1$$

Ainda pelo Lema 2.1.2 e de $2S \leq n < 3S$ com n ímpar resulta,

$$(ii) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \ \text{ímpar}}}^{n-2S} a_{\left(\frac{n+k}{2}-S\right)} b_k = \sum_{\substack{k=1 \\ k \ \text{ímpar}}}^{n-2S} (2S + 1 - \frac{n+k}{2})4k$$

$$= (8S + 4 - 2n) \sum_{\substack{k=1 \\ k \ \text{ímpar}}}^{n-2S} k - 2 \sum_{\substack{k=1 \\ k \ \text{ímpar}}}^{n-2S} k^2$$

$$= (8S + 4 - 2n)\frac{(n-2S+1)^2}{4}$$

$$-2\frac{(n-2S)(n-2S+1)(n-2S+2)}{6}$$

$$= -\frac{5}{6}n^3 + (6S-1)n^2 + \left(-14S^2 + 6S + \frac{5}{6}\right)n$$

$$+\frac{32}{3}S^3 - 8S^2 - \frac{2}{3}S + 1$$

Recorrendo ao Lema 2.1.3 e à condição $3S \leq n \leq 4S$ com n par, vem

$$(iii) = \sum_{\substack{k=0 \\ k \ par}}^{4S-n} a_{\left(\frac{n+k}{2}-S\right)} b_k = a_{\left(\frac{n}{2}-S\right)} b_0 + \sum_{\substack{k=2 \\ k \ par}}^{4S-n} a_{\left(\frac{n+k}{2}-S\right)} b_k$$

$$= 2S + 1 - \frac{n}{2} + \sum_{\substack{k=2 \\ k\ \ par}}^{4S-n} (2S + 1 - \frac{n+k}{2})4k$$

$$= 2S + 1 - \frac{n}{2} + (8S + 4 - 2n) \sum_{\substack{k=2 \\ k\ \ par}}^{4S-n} k - 2 \sum_{\substack{k=2 \\ k\ \ par}}^{4S-n} k^2$$

$$= 2S + 1 - \frac{n}{2} + (8S + 4 - 2n) \frac{(4S-n)(4S-n+2)}{4}$$

$$-2\frac{(4S-n)(4S-n+1)(4S-n+2)}{6}$$

$$= -\frac{n^3}{6} + (2S+1)n^2 + \left(-8S^2 - 8S - \frac{11}{6}\right)n$$

$$+\frac{32}{3}S^3 + 16S^2 + \frac{22}{3}S + 1$$

Novamente o Lema 2.1.3 mas com $3S \leq n \leq 4S$, com n ímpar, conduz-nos a

$$(iv) = \sum_{\substack{k=1 \\ k\ ímpar}}^{4S-n} a_{\left(\frac{n+k}{2}-S\right)} b_k = \sum_{\substack{k=1 \\ k\ \ ímpar}}^{4S-n} (2S + 1 - \frac{n+k}{2})4k$$

$$= (8S + 4 - 2n) \sum_{\substack{k=1 \\ k\ \ ímpar}}^{4S-n} k - 2 \sum_{\substack{k=1 \\ k\ ím\ par}}^{4S-n} k^2$$

$$= (8S + 4 - 2n) \frac{(4S-n+1)^2}{4}$$

$$-2\frac{(4S-n)(4S-n+1)(4S-n+2)}{6}$$

$$= -\frac{n^3}{6} + (2S+1)n^2 + \left(-8S^2 - 8S - \frac{11}{6}\right)n$$

$$+\frac{32}{3}S^3 + 16S^2 + \frac{22}{3}S + 1$$

Pretendemos calcular

$$\sum_{n=2S}^{4S} F_S\,(n)$$

Ou seja:

$$\sum_{n=2S}^{4S} F_S\,(n) = \sum_{\substack{n=2S\\ n\ par}}^{3S-1} (i) + \sum_{\substack{n=2S+1\\ n\ ímpar}}^{3S-1} (ii) + \sum_{\substack{n=3S\\ n\ par}}^{4S} (iii) + \sum_{\substack{n=3S\\ n\ ímpar}}^{4S-1} (iv).$$

Como, para $2S \leq n < 3S$, temos,

$$(i) = \sum_{\substack{k=0\\ k\ \ par}}^{n-2S} a_{\left(\frac{n+k}{2}-S\right)} b_k = F_S(n) = \sum_{\substack{k=1\\ k\ \ ímpar}}^{n-2S} a_{\left(\frac{n+k}{2}-S\right)} b_k = (ii)$$

$$= -\frac{5}{6}n^3 + (6S-1)n^2 + \left(-14S^2 + 6S + \frac{5}{6}\right)n + \frac{32}{3}S^3 - 8S^2 - \frac{2}{3}S + 1$$

e para $3S \leq n \leq 4S$ resulta,

$$(iii) = \sum_{\substack{k=0\\ k\ par}}^{4S-n} a_{\left(\frac{n+k}{2}-S\right)} b_k = F_S(n) = \sum_{\substack{k=1\\ k\ ímpar}}^{4S-n} a_{\left(\frac{n+k}{2}-S\right)} b_k = (iv)$$

$$= -\frac{n^3}{6} + (2S+1)n^2 + \left(-8S^2 - 8S - \frac{11}{6}\right)n + \frac{32}{3}S^3 + 16S^2 + \frac{22}{3}S + 1$$

concluímos assim a igualdade,

$$\sum_{n=2S}^{4S} F_S\,(n) =$$

$$= \sum_{n=2S}^{3S-1} \left(-\frac{5}{6}n^3 + (6S-1)n^2 + \left(-14S^2 + 6S + \frac{5}{6}\right)n + \frac{32}{3}S^3 - 8S^2 - \frac{2}{3}S + 1\right)$$

$$+ \sum_{n=3S}^{4S} \left(-\frac{n^3}{6} + (2S+1)n^2 + \left(-8S^2 - 8S - \frac{11}{6}\right)n + \frac{32}{3}S^3 + 16S^2 + \frac{22}{3}S + 1\right)$$

$$= -\frac{5}{6}\sum_{n=0}^{S-1}(n+2S)^3 + (6S-1)\sum_{n=0}^{S-1}(n+2S)^2 + \left(-14S^2 + 6S + \frac{5}{6}\right)\sum_{n=0}^{S-1}(n+2S) +$$
$$+\left(\frac{32}{3}S^3 - 8S^2 - \frac{2}{3}S + 1\right)S - \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{S}(n+3S)^3 + (2S+1)\sum_{n=0}^{S}(n+3S)^2 +$$
$$+\left(-8S^2 - 8S - \frac{11}{6}\right)\sum_{n=0}^{S}(n+3S) + \left(\frac{32}{3}S^3 + 16S^2 + \frac{22}{3}S + 1\right)(S+1) =$$

$$= -\frac{5}{6}\sum_{n=0}^{S-1}n^3 + (S-1)\sum_{n=0}^{S-1}n^2 + \left(2S + \frac{5}{6}\right)\sum_{n=0}^{S-1}n + (S+1)S - \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{S}n^3$$
$$+\left(\frac{1}{2}S + 1\right)\sum_{n=0}^{S}n^2 + \left(-\frac{1}{2}S^2 - 2S - \frac{11}{6}\right)\sum_{n=0}^{S}n + \left(\frac{1}{6}S^3 + S^2 + \frac{11}{6}S + 1\right)(S+1)$$

$$= \frac{S^4 + 6S^3 + 14S^2 + 15S + 6}{6},$$

tal como pretendíamos.

Notemos que no caso clássico, Secção 1.1, tínhamos $S = 10$ e que para este valor é imediato,

$$F_S(n) = F_{10}(n) \equiv F(n)$$

e que a igualdade,

$$\sum_{n=20}^{40} F(n) = 2926 = \sum_{n=2\times10=20}^{4\times10=40} F_{10}\,(n) = \frac{10^4 + 6(10)^3 + 14(10)^2 + 15(10) + 6}{6}$$

é também verificada, o que comprova que a Proposição 1.1.9, descrita no caso clássico é um caso particular da proposição anterior.

É de realçar que, em relação a esta generalização do enigma do monge, o próprio Dudeney apresentou uma solução, na respectiva obra, [Dud08], que corresponderia a,

$$\frac{S^4 + 6S^3 + 14S^2 + 15S + 1}{6}$$

No entanto esta expressão não está correcta pois gera valores decimais. Deste modo, acreditamos tratar-se de um defeito de edição, onde deveria constar

$$\frac{S^4 + 6S^3 + 14S^2 + 15S}{6} + 1$$

em vez da equação publicada, coincidindo assim com a nossa solução.

2.2- Só a Entrada Central é Nula

De modo análogo ao realizado no Capítulo 1, esta secção será dedicada a um problema associado ao anterior, onde: a entrada central é a única entrada nula. Vamos portanto, generalizar a secção 1.2 para uma soma S.

Continuamos a considerar uma estrutura semelhante à do caso anterior, com o seguinte aspecto:

a	b	c
d	0	e
f	g	h

As condições (27) continuam a ser válidas, no entanto é exigido que as entradas a, b, c, d, e, f, g, h sejam todas não nulas,

$$a, b, c, d, e, f, g, h \neq 0 \tag{44}$$

e deste modo as entradas têm de respeitar a condição:

$$a, b, c, d, e, f, g, h \in \mathbb{N}: 1 \leq a, b, c, d, e, f, g, h \leq S-2 \tag{45}$$

Por (45), sabemos que $S-2$ tem de ser positivo, logo este problema só tem significado quando,

$$S \in \mathbb{N}: S \geq \ 2 \tag{46}$$

Pretendemos, deste modo, determinar quantas matrizes 3x3 existem, tais que:

- o elemento central é zero;
- as restantes entradas são não nulas;
- (27) tem de ser respeitado.

Assim verifiquemos, para que valores de n faz sentido o nosso problema. Como $n = a + b + c + d + e + f + g + h$, atendendo às condições (27) resulta que, à semelhança da secção anterior, (31) continua a se verificar, ou seja,

$$d + e = b + g = x$$

continua a ser válida nesta secção.

No entanto como $b, g, d, e \in \mathbb{N}: 1 \leq b, g, d, e \leq S - 2$ vem que

$$b + g, d + e \in \mathbb{N}: 2 \leq b + g = d + e \leq 2S - 4 \qquad (47)$$

Logo:

$$n = 2S + x, \qquad x \in \mathbb{N}: 2 \leq x \leq 2S - 4 \; onde \; x = d + e = b + g \qquad (48)$$

isto é,

$$n \in \mathbb{N}: 2S + 2 \leq n \leq 4S - 4, \qquad (49)$$

para S fixo.

Assim, estamos em condições de enunciar a,

Proposição 2.2.1 *Seja* n *a soma de todas as entradas de uma matriz 3×3, de entrada central nula, e restantes entradas naturais não nulas, onde a soma das entradas da primeira linha é igual à da última que por sua vez também é igual à da primeira e à da última colunas. Assim resulta,*

$$n = 2S + x, \qquad x \in \mathbb{N} : 2 \leq x \leq 2S - 4$$

ou, equivalentemente

$$n \in \mathbb{N} : 2S + 2 \leq n \leq 4S - 4$$

onde S *representa simultaneamente a soma das entradas da primeira linha, da primeira coluna, da última linha e da última coluna.*

Para que o problema tenha significado vemos que a soma de todas as entradas, tem de ser no mínimo $2S + 2$ e no máximo $4S - 4$, pelo que, obviamente, depende do número S que se fixa. Verificamos ainda que, para cada S fixo, as possibilidades de n, neste problema, serão mais reduzidas que no problema proposto na secção anterior.

Notemos que, a Secção 1.2 é um caso particular do nosso problema, pois,

$$S = 10 \implies 2S + 2 = 22 \leq n \leq 36 = 4S - 4.$$

Em analogia ao que foi efectuado na secção anterior, determinaremos o número de matrizes nas condições já enunciadas, estudando separadamente os quatro casos:

- $2S + 2 \leq n < 3S$, com n par;
- $2S + 2 \leq n < 3S$, com n ímpar;
- $3S \leq n \leq 4S - 4$, com n par;
- $3S \leq n \leq 4S - 4$, com n ímpar;

Seguindo esta mesma ordem, temos em primeiro lugar o seguinte caso,

- $\boldsymbol{2S + 2 \leq n < 3S \wedge n}$ **par**

Na secção anterior, quando considerámos $2S \leq n < 3S \ \wedge \ n\ par$, relativamente às entradas b, g, d e e, obtivemos,

g	b	d	e
x	0	x	0
x	0	$x-1$	1
x	0	$x-2$	2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x	0	$\frac{x}{2}$	$\frac{x}{2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x	0	0	x
$x-1$	1	x	0
$x-1$	1	$x-1$	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$x-1$	1	$\frac{x}{2}$	$\frac{x}{2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$x-1$	1	0	x
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\frac{x}{2}$	$\frac{x}{2}$	x	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\frac{x}{2}$	$\frac{x}{2}$	$\frac{x}{2}$	$\frac{x}{2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\frac{x}{2}$	$\frac{x}{2}$	0	x
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
0	x	0	x

Tabela 47

É de certo modo visível, que as soluções do novo problema são exactamente as soluções do anterior que não violam as novas condições, isto é, são as soluções da Tabela 47 que verificam (45).

Então as entradas b, g, d, e podem tomar os seguintes valores:

g	b	d	e
$x-1$	1	$x-1$	1
$x-1$	1	$x-2$	2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$x-1$	1	$\frac{x}{2}$	$\frac{x}{2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$x-1$	1	1	$x-1$
$x-2$	2	$x-1$	1
$x-2$	2	$x-2$	2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$x-2$	2	$\frac{x}{2}$	$\frac{x}{2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$x-2$	2	$x-1$	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\frac{x}{2}$	$\frac{x}{2}$	$x-1$	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\frac{x}{2}$	$\frac{x}{2}$	$\frac{x}{2}$	$\frac{x}{2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\frac{x}{2}$	$\frac{x}{2}$	1	$x-1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1	$x-1$	1	$x-1$

Tabela 48

Para além de garantirmos que cada uma das entradas já consideradas seja diferente de zero, como ilustra a Tabela 46 temos de garantir ainda que as restantes $(a, c, f$ e $h)$ sejam também elas diferentes de zero, pelo que teremos mesmo de voltar a repetir a contagem das matrizes quando fixamos as entradas intermédias.

Vamos, então adoptar o mesmo método de contagem da secção anterior e portanto voltar a considerar (34), para facilitar a nossa tarefa.

Analisemos sucessivamente os vários casos, começando por considerar $\boldsymbol{g = x - 1}$. Com esta condição somos conduzidos às estruturas que se seguem e o recurso à Observação 1.1.6 permite-nos, uma vez mais, efectuar o levantamento dos casos.

	$\mathbf{1}$	
$\boldsymbol{x-1}$		$\mathbf{1}$
	$\boldsymbol{x-1}$	

$4\ casos$

	$\mathbf{1}$	
$\boldsymbol{x-2}$		$\mathbf{2}$
	$\boldsymbol{x-1}$	

$\vdots$

	$\mathbf{1}$	
$\boldsymbol{\frac{x+2}{2}}$		$\boldsymbol{\frac{x-2}{2}}$
	$\boldsymbol{x}$	

$8\left(\frac{x-4}{2}\right)\ casos$

	$\mathbf{1}$	
$\boldsymbol{\frac{x}{2}}$		$\boldsymbol{\frac{x}{2}}$
	$\boldsymbol{x-1}$	

$4\ casos$

Como f e h podem tomar os valores,

f	h
1	$S-x$
2	$S-x+1$
$\vdots$	$\vdots$
$S-x$	1

Tabela 49

sabemos que existem $S - x$ possibilidades para cada um dos casos. Ou seja, existem $\boldsymbol{(S-x)(8+8\frac{x-4}{2})}$ matrizes quando

$$g = x - 1 \lor b = x - 1 \lor d = x - 1 \lor e = x - 1.$$

Quando $\boldsymbol{g = x - 2}$ obtemos,

	$\mathbf{2}$	
$\boldsymbol{x-2}$		$\mathbf{2}$
	$\boldsymbol{x-2}$	

$4\ casos$

	$\mathbf{2}$	
$\boldsymbol{x-3}$		$\mathbf{3}$
	$\boldsymbol{x-2}$	

$$8\left(\frac{x-6}{2}\right)\ casos$$

⋮

	$\mathbf{2}$	
$\boldsymbol{\frac{x+2}{2}}$		$\boldsymbol{\frac{x-2}{2}}$
	$\boldsymbol{x-2}$	

	$\mathbf{2}$	
$\boldsymbol{\frac{x}{2}}$		$\boldsymbol{\frac{x}{2}}$
	$\boldsymbol{x-2}$	

$4\ casos$

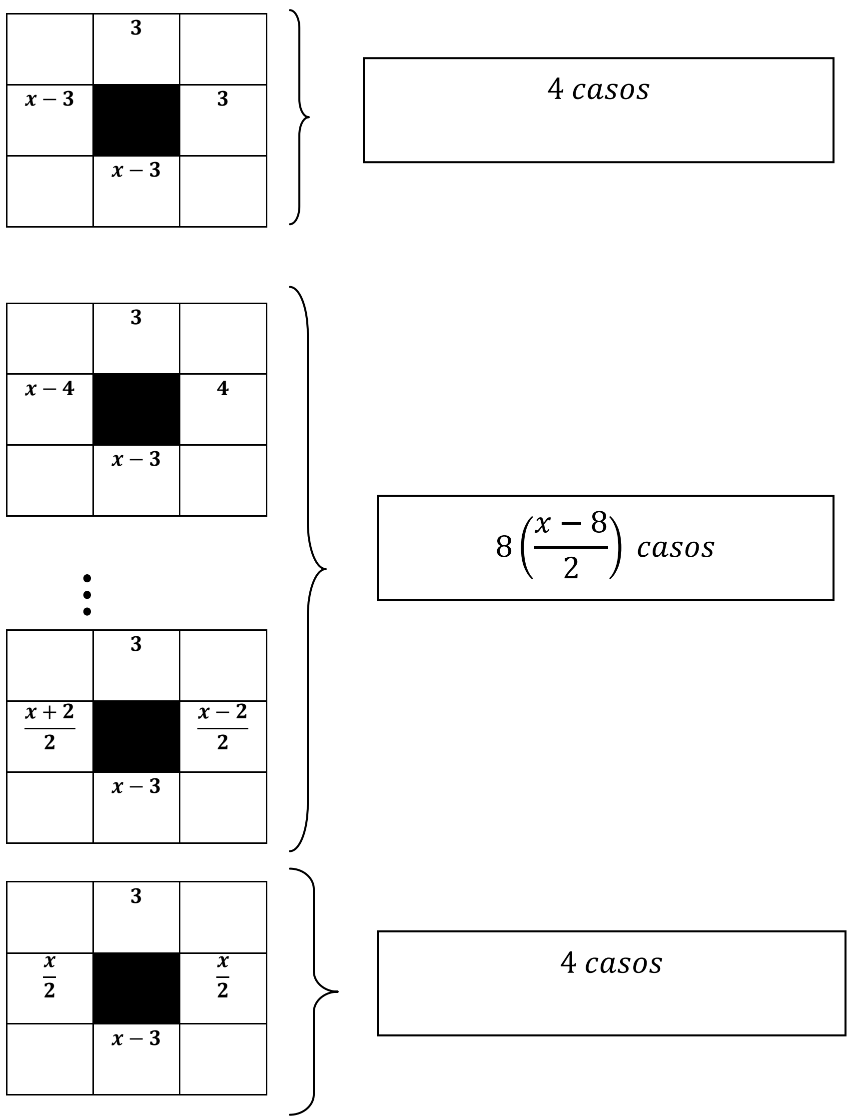
$8 + 8\,\frac{x-6}{2}$ estruturas e, como podemos observar na tabela 48,

f	h
1	$S-x+1$
2	$S-x$
$\vdots$	$\vdots$
$S-x+1$	1

Tabela 50

existem $S-x+1$ possibilidades para cada caso, de onde concluímos que existem $\boldsymbol{(S-x+1)\left(8+8\,\frac{x-6}{2}\right)}$ possibilidades.

Ao assumirmos $\boldsymbol{g = x-3}$ deduzimos



e com a ajuda da tabela,

f	h
1	$S-x+2$
2	$S-x$
$\vdots$	$\vdots$
$S-x+2$	1

Tabela 51

contamos $(\boldsymbol{S}-\boldsymbol{x}+\mathbf{2})\left(\mathbf{8}+\mathbf{8}\,\frac{\boldsymbol{x}-\mathbf{8}}{\mathbf{2}}\right)$ matrizes.

Se continuarmos a fixar sucessivamente g deste modo, chegamos a $\boldsymbol{g}=\frac{\boldsymbol{x}+\mathbf{6}}{\mathbf{2}}$, obtendo assim,

$$\left.\begin{array}{|c|c|c|}\hline & \frac{x-6}{2} & \\ \hline \frac{x+6}{2} & \blacksquare & \frac{x-6}{2} \\ \hline & \frac{x+6}{2} & \\ \hline\end{array}\right\} \quad \boxed{4\ casos}$$

$$\left.\begin{array}{c}\begin{array}{|c|c|c|}\hline & \frac{x-6}{2} & \\ \hline \frac{x+4}{2} & \blacksquare & \frac{x-4}{2} \\ \hline & \frac{x+6}{2} & \\ \hline\end{array} \\ \\ \begin{array}{|c|c|c|}\hline & \frac{x-6}{2} & \\ \hline \frac{\boldsymbol{x}+\mathbf{2}}{\mathbf{2}} & \blacksquare & \frac{\boldsymbol{x}-\mathbf{2}}{\mathbf{2}} \\ \hline & \frac{x+6}{2} & \\ \hline\end{array}\end{array}\right\} \quad \boxed{8\times 2\ casos}$$

$$\left.\begin{array}{|c|c|c|}\hline & \frac{x-6}{2} & \\ \hline \frac{\boldsymbol{x}}{\mathbf{2}} & \blacksquare & \frac{\boldsymbol{x}}{\mathbf{2}} \\ \hline & \frac{x+6}{2} & \\ \hline\end{array}\right\} \quad \boxed{4\ casos}$$

$\left(\boldsymbol{S}-\frac{\boldsymbol{x}+\mathbf{8}}{\mathbf{2}}\right)(\mathbf{8}+\mathbf{8}\times\mathbf{2})$ casos possíveis, como demonstra a Tabela 52.

f	h
1	$S-\dfrac{x+8}{2}$
2	$S-\dfrac{x+10}{2}$
$\vdots$	$\vdots$
$S-\dfrac{x+8}{2}$	1

Tabela 52

Quando $\boldsymbol{g}=\frac{\boldsymbol{x+4}}{\boldsymbol{2}}$, vem

	$\frac{x-4}{2}$	
$\frac{x+4}{2}$		$\frac{x-4}{2}$
	$\frac{x+4}{2}$	

$\boxed{4\ casos}$

	$\frac{x-4}{2}$	
$\frac{x+2}{2}$		$\frac{x-2}{2}$
	$\frac{x+4}{2}$	

$\boxed{8\times 1\ casos}$

	$\frac{x-4}{2}$	
$\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{2}}$		$\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{2}}$
	$\frac{x+4}{2}$	

$\boxed{4\ casos}$

Assim, de acordo com a tabela

f	h
1	$S-\frac{x+6}{2}$
2	$S-\frac{x+8}{2}$
$\vdots$	$\vdots$
$S-\frac{x+6}{2}$	1

Tabela 53

temos mais $\left(\boldsymbol{S-\frac{x+6}{2}}\right)(\mathbf{8+8})$ matrizes.

Para $\boldsymbol{g=\frac{x+2}{2}}$ obtemos

	$\frac{x-2}{2}$	
$\frac{x+2}{2}$		$\frac{x-2}{2}$
	$\frac{x+2}{2}$	

$4\ casos$

	$\frac{x-2}{2}$	
$\boldsymbol{\frac{x}{2}}$		$\boldsymbol{\frac{x}{2}}$
	$\frac{x+2}{2}$	

$4\ casos$

com $S-\frac{x+4}{2}$ possibilidades cada um, pois em cada caso f e h podem assumir os valores,

f	h
1	$S-\dfrac{x+4}{2}$
2	$S-\dfrac{x+6}{2}$
$\vdots$	$\vdots$
$S-\dfrac{x+4}{2}$	1

Tabela 54

logo obtemos outros $\left(\boldsymbol{S}-\frac{\boldsymbol{x+4}}{\mathbf{2}}\right)$ **8** casos possíveis.

Por fim, quando $\boldsymbol{g}=\boldsymbol{b}=\frac{\boldsymbol{x}}{\mathbf{2}}$, atendendo à Observação 1.1.6 temos um único tipo de esquema

	$\frac{x}{2}$	
$\frac{x}{2}$		$\frac{x}{2}$
	$\frac{x}{2}$	

e considerando a tabela

f	h
1	$S-\dfrac{x+2}{2}$
2	$S-\dfrac{x+4}{2}$
$\vdots$	$\vdots$
$S-\dfrac{x+2}{2}$	0

Tabela 55

resultam $\left(S-\frac{x+2}{2}\right)$ matrizes.

Em conclusão, quando temos $2S+2 \leq n < 3S$, com n par, o número de matrizes 3x3, tais que a soma de cada linha e cada coluna externas dê S e cujas entradas sejam não nulas excepção feita ao elemento central que é obrigatoriamente zero, é dado por:

$$(S-x)\left(8+8\frac{x-4}{2}\right)+(S-x+1)\left(8+8\frac{x-6}{2}\right)+(S-x+2)\left(8+8\frac{x-8}{2}\right)+$$
$$(S-x+3)\left(8+8\frac{x-10}{2}\right)+\cdots+\left(S-\frac{x+8}{2}\right)(8+8\times 2)+\left(S-\frac{x+6}{2}\right)(8+8)+$$
$$\left(S-\frac{x+4}{2}\right)8+\left(S-\frac{x+2}{2}\right)$$

$$=(S-x)4(x-2)+(S-x+1)4(x-4)+(S-x+2)4(x-6)+$$
$$(S-x+3)4(x-8)+\cdots+\left(S-\frac{x+8}{2}\right)4\times 6+\left(S-\frac{x+6}{2}\right)4\times 4+$$
$$\left(S-\frac{x+4}{2}\right)4\times 2+\left(S-\frac{x+2}{2}\right)$$

$$=a_{x+1}b_{x-2}+a_x b_{x-4}+a_{x-1}b_{x-6}+a_{x-2}b_{x-8}+\cdots+a_{\left(\frac{x+10}{2}\right)}b_{6+}$$
$$a_{\left(\frac{x+8}{2}\right)}b_4+a_{\left(\frac{x+6}{2}\right)}b_2+a_{\left(\frac{x+4}{2}\right)}b_0$$

$$=\sum_{\substack{k=0\\ k\ par}}^{x-2} a_{\frac{x+k+4}{2}}b_k$$

Mas como

$$n=2S+x,$$

ou seja,

$$x=n-2S,$$

o número de matrizes, quando $2S+2 \leq n < 3S$ com n par, pode ser representado por,

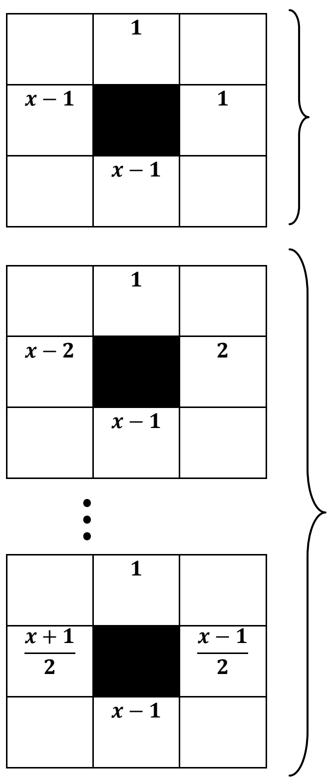
$$\sum_{\substack{k=0\\ k\ par}}^{n-2(S+1)} a_{\left(\frac{n+k}{2}-S+2\right)}b_k \qquad (50)$$

com a_k, b_k definidas em (36)

Consideremos agora

- $\boldsymbol{2S+2 \leq n < 3S \ \wedge \ n}$ **ímpar**

Iremos seguir o raciocínio já adoptado. Assim, para $\boldsymbol{g = x - 1}$ obtemos as estruturas,



$\boxed{4\ casos}$

$\boxed{8\left(\frac{x-3}{2}\right)\ casos}$

Sabendo que f e h podem tomar os valores,

f	h
1	$S - x$
2	$S - x - 1$
$\vdots$	$\vdots$
$S - x$	1

Tabela 56

concluímos que existem $S - x$ possibilidades, para cada um destes $4 + 8\frac{x-3}{2}$ casos, ou seja, temos um total de $(\boldsymbol{S - x})(\boldsymbol{4 + 8\frac{x-3}{2}})$ casos.

Quando $\boldsymbol{g = x - 2}$, resulta

	2	
$x-2$	■	2
	$x-2$	

$$\boxed{4\ casos}$$

	2	
$x-3$	■	3
	$x-2$	

$\vdots$

	2	
$\frac{x+1}{2}$	■	$\frac{x-1}{2}$
	$x-2$	

$$\boxed{8\left(\frac{x-5}{2}\right)\ casos}$$

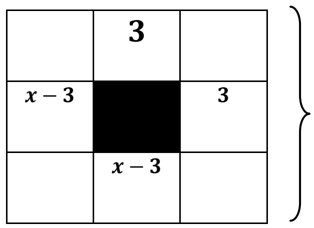
e como f e h podem assumir os valores apresentados na Tabela 57,

f	h
1	$S-x+1$
2	$S-x$
$\vdots$	$\vdots$
$S-x+1$	1

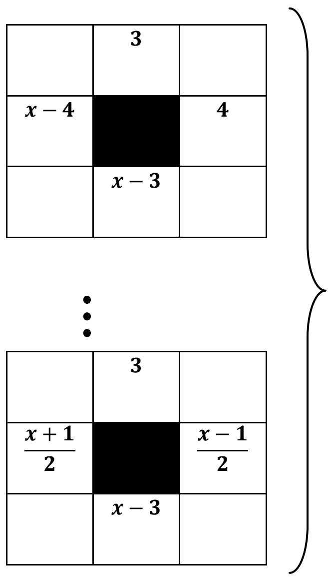
Tabela 57

obtemos $(S-x+1)\left(4+8\frac{x-5}{2}\right)$ novas matrizes.

Assumindo $\boldsymbol{g = x - 3}$, chegamos a



$$\boxed{4\ casos}$$



$$\boxed{8\left(\frac{x-7}{2}\right)\ casos}$$

e com a ajuda da tabela

f	h
1	$S-x+2$
2	$S-x$
$\vdots$	$\vdots$
$S-x+2$	1

Tabela 58

obtemos $(S - x + 2)\ \left(4 + 8\frac{x-7}{2}\right)$ novos casos possíveis.

Continuando a fixar g por este processo, chegamos a $\boldsymbol{g = \frac{x+7}{2}}$. Neste tipo de situação deduzimos as estruturas

	$\frac{x-7}{2}$	
$\frac{x+7}{2}$		$\frac{x-7}{2}$
	$\frac{x+7}{2}$	

$4\ casos$

	$\frac{x-7}{2}$	
$\frac{x+5}{2}$		$\frac{x-5}{2}$
	$\frac{x+7}{2}$	

	$\frac{x-7}{2}$	
$\frac{x+3}{2}$		$\frac{x-3}{2}$
	$\frac{x+7}{2}$	

	$\frac{x-7}{2}$	
$\boldsymbol{\frac{x+1}{2}}$		$\boldsymbol{\frac{x-1}{2}}$
	$\frac{x+7}{2}$	

$8 \times 3\ casos$

Ora, para cada caso existem $S - \frac{x+9}{2}$ possibilidades, como são ilustradas de seguida,

f	h
1	$S - \dfrac{x+9}{2}$
2	$S - \dfrac{x+11}{2}$
$\vdots$	$\vdots$
$S - \dfrac{x+9}{2}$	1

Tabela 59

totalizando $\boldsymbol{\left(S - \frac{x+9}{2}\right)(4 + 8 \times 3)}$ casos.

Para $\boldsymbol{g} = \frac{\boldsymbol{x+5}}{\boldsymbol{2}}$, obtemos

	$\frac{x-5}{2}$	
$\frac{x+5}{2}$		$\frac{x-5}{2}$
	$\frac{x+5}{2}$	

$4\ casos$

	$\frac{x-5}{2}$	
$\frac{x+3}{2}$		$\frac{x-3}{2}$
	$\frac{x+5}{2}$	

	$\frac{x-5}{2}$	
$\frac{\boldsymbol{x+1}}{\boldsymbol{2}}$		$\frac{\boldsymbol{x-1}}{\boldsymbol{2}}$
	$\frac{x+5}{2}$	

$8 \times 2\ casos$

Agora a tabela que concentra os valores possíveis para f e h toma a forma

f	h
1	$S - \frac{x+7}{2}$
2	$S - \frac{x+9}{2}$
$\vdots$	$\vdots$
$S - \frac{x+7}{2}$	1

Tabela 60

e permite contar um total de $\left(\boldsymbol{S} - \frac{\boldsymbol{x+7}}{\boldsymbol{2}}\right)(\boldsymbol{4} + \boldsymbol{8} \times \boldsymbol{2})$ matrizes.

Quando $\boldsymbol{g} = \frac{\boldsymbol{x+3}}{\boldsymbol{2}}$, temos:

	$\frac{x-3}{2}$	
$\frac{x+3}{2}$		$\frac{x-3}{2}$
	$\frac{x+3}{2}$	

$4\ casos$

	$\frac{x-3}{2}$	
$\frac{x+1}{2}$		$\frac{x-1}{2}$
	$\frac{x+3}{2}$	

$8\ casos$

f	h
1	$S - \frac{x+5}{2}$
2	$S - \frac{x+7}{2}$
$\vdots$	$\vdots$
$S - \frac{x+5}{2}$	1

Tabela 61

Totalizamos $\left(\boldsymbol{S} - \frac{\boldsymbol{x+5}}{\boldsymbol{2}}\right)(\boldsymbol{4} + \boldsymbol{8})$ casos.

A situação $\boldsymbol{g} = \frac{\boldsymbol{x+1}}{\boldsymbol{2}}$ reduz-se a

	$\frac{x-1}{2}$	
$\frac{x+1}{2}$		$\frac{x-1}{2}$
	$\frac{x+1}{2}$	

que como sabemos, pela Observação 1.1.6, reúne 4 casos. Para cada caso, existem $S - \frac{x+3}{2}$ possibilidades, reunidas na tabela:

f	h
1	$S-\frac{x+3}{2}$
2	$S-\frac{x+6}{2}$
$\vdots$	$\vdots$
$S-\frac{x+3}{2}$	1

Tabela 62

Sintetizando, quando temos $2S+2 \leq n < 3S$, com n ímpar, o número de matrizes 3x3, tais que a soma de cada linha e cada coluna externas dê S e cujas entradas sejam não nulas excepção feita ao elemento central que é obrigatoriamente zero, é dado por:

$$(S-x)\left(4+8\frac{x-3}{2}\right)+(S-x+1)\left(4+8\frac{x-5}{2}\right)+(S-x+2)\left(4+8\frac{x-7}{2}\right)+$$
$$(S-x+3)\left(8+8\frac{x-9}{2}\right)+\cdots+\left(S-\frac{x+9}{2}\right)(8+8\times 4)+\left(S-\frac{x+7}{2}\right)(4+8\times 3)+$$
$$\left(S-\frac{x+5}{2}\right)\times[4+8\times 1]+\left(S-\frac{x+3}{2}\right)\times 4$$

$$=(S-x)4(x-2)+(S-x+1)4(x-4)+(S-x+2)4(x-6)+$$
$$(S-x+3)4(x-8)+\cdots+\left(S-\frac{x+9}{2}\right)4\times 7+\left(S-\frac{x+7}{2}\right)4\times 5+$$
$$\left(S-\frac{x+5}{2}\right)4\times 3+\left(S-\frac{x+3}{2}\right)4$$

$$=\ a_{x+1}b_{x-2}+a_x b_{x-4}+a_{x-1}b_{x-6}+a_{x-2}b_{x-8}+\cdots+a_{\left(\frac{x+11}{2}\right)}b_7+$$
$$a_{\left(\frac{x+9}{2}\right)}b_5+a_{\left(\frac{x+7}{2}\right)}b_3+a_{\left(\frac{x+5}{2}\right)}b_1$$

$$=\sum_{\substack{k=1\\ k\ ímpar}}^{x-2} a_{\frac{x+k+4}{2}}b_k$$

Mas como

$$x=n-2S,$$

o número de matrizes nas condições do nosso problema, onde $2S+2 \leq n < 3S$ com n ímpar é dado por,

$$\sum_{\substack{k=0 \\ k\ \text{ímpar}}}^{n-2(S+1)} a_{\left(\frac{n+k}{2}-S+2\right)} b_k, \tag{51}$$

onde a_k e b_k respeitam a definição (36).

Juntando (50) e (51) resulta o seguinte,

Lema 2.2.2 *O número $\widetilde{F_S}(n)$, de matrizes de entradas naturais do tipo 3x3, onde apenas a entrada central é nula e a soma de cada linha e cada coluna externas é sempre igual a S, é dado por:*

$$\widetilde{F_S}(n) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\substack{k=0 \\ k\ par}}^{n-2(S+1)} a_{\left(\frac{n+k}{2}-S+2\right)} b_k, & \text{se } n \text{ par} \\ \displaystyle\sum_{\substack{k=1 \\ k\ \text{ímpar}}}^{n-2(S+1)} a_{\left(\frac{n+k}{2}-S+2\right)} b_k, & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases}$$

onde n é a soma de todas as entradas de cada matriz e $2S + 2 \leq n \leq 3S$.

Quando $3S \leq n \leq 4S - 4$, o problema de contagem é exactamente o mesmo referido na secção anterior quando considerámos $3S \leq n \leq 4S$. Deste modo, o processo de contagem será exactamente o mesmo pelo que teremos de recorrer à variável w definida em (39).

Contudo, e uma vez que estamos a considerar $3S \leq n \leq 4S - 4$, resulta

$$S \leq x \leq 2S - 4 \tag{52}$$

e consequentemente

$$4 \leq w \leq S \tag{53}$$

Excepção feita às relações (52) e (53) o processo de contagem a adoptar é exactamente o realizado na secção anterior para $3S \leq n \leq 4S$. Deste modo, para o intervalo em questão, vamos iniciar a nossa contagem considerando apenas os casos em que n é par e posteriormente os casos em que n é ímpar.

- $\boldsymbol{3S \leq n \leq 4S-4} \ \wedge\ \boldsymbol{n}$ **par**

Começamos por assumir $\boldsymbol{g = S-2}$, de onde resultam as estruturas,

	$S-w+2$	
$S-2$		$S-w+2$
	$S-2$	

$4\ casos$

	$S-w+2$	
$S-3$		$S-w+3$
	$S-2$	

$\vdots$

	$S-w+2$	
$S-\frac{w-2}{2}$		$S-\frac{w+2}{2}$
	$S-2$	

$8\left(\frac{w-6}{2}\right)\ casos$

	$S-w+2$	
$S-\frac{w}{2}$		$S-\frac{w}{2}$
	$S-2$	

$4\ casos$

Para cada um destes $\boldsymbol{8+8\frac{w-6}{2}}$ casos, contados com a ajuda da Observação 1.1.6 existe apenas uma distribuição possível, pois de $f+g+h=S$, e $g=S-2$, resulta $f=h=1$.

Quando $\boldsymbol{g = S - 3}$, obtemos

	$S-w+3$	
$S-3$		$S-w+3$
	$S-3$	

$4\ casos$

	$S-w+3$	
$S-4$		$S-w+4$
	$S-3$	

$\vdots$

	$S-w+3$	
$S-\frac{w-2}{2}$		$S-\frac{w+2}{2}$
	$S-3$	

$8\left(\frac{w-8}{2}\right)\ casos$

	$S-w+3$	
$s-\frac{w}{2}$		$s-\frac{w}{2}$
	$x-3$	

$4\ casos$

Usando a mesma estratégia de contagem, construímos a tabela

f	h
1	2
2	1

Tabela 63

que reúne 2 possibilidades para cada caso, o que perfaz o total de $\boldsymbol{2\left(8+8\frac{w-8}{2}\right)}$ matrizes.

O caso $\boldsymbol{g = S - 4}$, pode ser analisado usando

	$S-w+4$	
$S-4$		$S-w+4$
	$S-4$	

$4 \; casos$

	$S-w+4$	
$S-5$		$S-w+5$
	$S-4$	

⋮

	$S-w+4$	
$S-\frac{w-2}{2}$		$S-\frac{w+2}{2}$
	$S-4$	

$8\left(\frac{w-10}{2}\right) \; casos$

	$S-w+4$	
$S-\frac{w}{2}$		$S-\frac{w}{2}$
	$S-4$	

$4 \; casos,$

Ora, f e h podem tomar os valores

f	h
1	3
2	2
3	1

Tabela 64

pelo que contabilizamos um total de $\boldsymbol{3\left(8 + 8\frac{w-10}{2}\right)}$casos.

Continuando a considerar as decomposições possíveis de $x = 2S - w$ e fixando g, chegamos a $\boldsymbol{g = S - \frac{w-6}{2}}$, de onde se constroem os esquemas

	$S - \frac{w+6}{2}$	
$S - \frac{w-6}{2}$		$S - \frac{w+6}{2}$
	$S - \frac{w-6}{2}$	

$4\ casos$

	$S - \frac{w+6}{2}$	
$S - \frac{w-4}{2}$		$S - \frac{w+4}{2}$
	$S - \frac{w-6}{2}$	

	$S - \frac{w+6}{2}$	
$S - \frac{w-2}{2}$		$S - \frac{w+2}{2}$
	$S - \frac{w-6}{2}$	

$8 \times 2\ casos$

	$S - \frac{w+6}{2}$	
$S - \frac{w}{2}$		$S - \frac{w}{2}$
	$S - \frac{w-6}{2}$	

$4\ casos$

Adoptando o mesmo raciocínio, verificamos que f e h podem tomar os seguintes valores

f	h
1	$\frac{w+8}{2}$
2	$\frac{w+10}{2}$
$\vdots$	$\vdots$
$\frac{w+8}{2}$	1

Tabela 65

de onde deduzimos $\boldsymbol{\left(\frac{w-8}{2}\right)(8 + 8 \times 2)}$ matrizes.

Para $\boldsymbol{g = S - \frac{w-4}{2}}$, obtemos

	$s - \frac{w+4}{2}$	
$s - \frac{w-4}{2}$		$s - \frac{w+4}{2}$
	$s - \frac{w-4}{2}$	

$4\ casos$

	$s - \frac{w+4}{2}$	
$s - \frac{w-2}{2}$		$s - \frac{w+2}{2}$
	$s - \frac{w-4}{2}$	

$8\ casos$

	$s - \frac{w+4}{2}$	
$s - \frac{w}{2}$		$s - \frac{w}{2}$
	$s - \frac{w-4}{2}$	

$4\ casos$

e como cada caso concentra $\frac{w-6}{2}$ possibilidades, como se verifica pela tabela,

f	h
1	$\frac{w-6}{2}$
2	$\frac{w-8}{2}$
$\vdots$	$\vdots$
$\frac{w-6}{2}$	1

Tabela 66

concluímos o valor global $\left(\frac{\boldsymbol{w-6}}{\boldsymbol{2}}\right)(\boldsymbol{8+8})$.

Para $\boldsymbol{g = S - \frac{w-2}{2}}$, vem

	$s-\frac{w+2}{2}$	
$s-\frac{w-2}{2}$		$s-\frac{w+2}{2}$
	$s-\frac{w-2}{2}$	

$4\ casos$

	$s-\frac{w+2}{2}$	
$s-\frac{w}{2}$		$s-\frac{w}{2}$
	$s-\frac{w-2}{2}$	

$4\ casos$

Agora, existem $\frac{w-4}{2}$ possibilidades para cada caso, como é ilustrado na tabela

f	h
1	$\frac{w-4}{2}$
2	$\frac{w-6}{2}$
$\vdots$	$\vdots$
$\frac{w-4}{2}$	1

Tabela 67

totalizando $\boldsymbol{\frac{w-4}{2}}$ **8** casos.

E finalmente temos a situação em que $\boldsymbol{g = b = s - \frac{w}{2}}$

	$s-\frac{w}{2}$	
$s-\frac{w}{2}$		$s-\frac{w}{2}$
	$s-\frac{w}{2}$	

que diz respeito a um único caso (veja-se Observação 1.1.6) e atendendo à Tabela 68 deduzimos $\frac{w-2}{2}$ matrizes.

f	h
1	$\frac{w-2}{2}$
2	$\frac{w-4}{2}$
$\vdots$	$\vdots$
$\frac{w-2}{2}$	1

Tabela 68

Em conclusão, quando temos $3S \leq n \leq 4S - 4$, com n par, o número de matrizes 3x3, tais que a soma de cada uma das linhas e colunas das extremidades dê S e cujas entradas sejam não nulas excepção feita ao elemento central que é obrigatoriamente zero, é dado por:

$$\left(8+8\frac{w-6}{2}\right)+2\left(8+8\frac{w-8}{2}\right)+3\left(8+8\frac{w-10}{2}\right)+4\left(8+8\frac{w-12}{2}\right)+\cdots$$
$$\ldots+\frac{w-8}{2}(8+8\times 2)+\frac{w-6}{2}(8+8)+\left(\frac{w-4}{2}\right)8+\left(\frac{w-2}{2}\right)$$

$$= 4(w-4)+2\times 4(w-6)+3\times 4(w-8)+4\times 4(w-10)+\cdots$$
$$\cdots+\frac{w-8}{2}4\times 6+\frac{w-6}{2}4\times 4+\frac{w-4}{2}4\times 2+\frac{w-2}{2}$$

$$= a_S b_{w-4} + a_{S-1} b_{w-6} + a_{S-2} b_{w-8} + a_{S-3} b_{w-10} + \cdots + a_{S-\left(\frac{w-10}{2}\right)} b_6$$
$$+a_{S-\left(\frac{w-8}{2}\right)} b_4 + a_{S-\left(\frac{w-6}{2}\right)} b_2 + a_{S-\left(\frac{w-4}{2}\right)} b_0$$

$$= \sum_{\substack{k=0 \\ k\ par}}^{w-4} a_{S-\frac{w-k-4}{2}} b_k$$

Atendendo a que,

$$w = 4S - n,$$

o número de matrizes, para $3S \leq n \leq 4S - 4$ com n par assume a forma,

$$\sum_{\substack{k=0 \\ k\ par}}^{4S-(n+4)} a_{\left(\frac{n+k}{2}-S+2\right)} b_k \tag{54}$$

com a_k e b_k nas condições da definição (36).

Consideremos agora

- $\boldsymbol{3S \leq n \leq 4S-4\ \wedge\ n}$ **ímpar**

Iremos seguir a mesma estratégia para a compilação dos sucessivos casos.

Para $\boldsymbol{g = S-2}$, temos

	$\boldsymbol{S-w+2}$	
$\boldsymbol{S-2}$		$\boldsymbol{S-w}$
	$\boldsymbol{S-2}$	

$4\ casos$

	$\boldsymbol{S-w+2}$	
$\boldsymbol{S-3}$		$\boldsymbol{S-w+3}$
	$\boldsymbol{S-2}$	

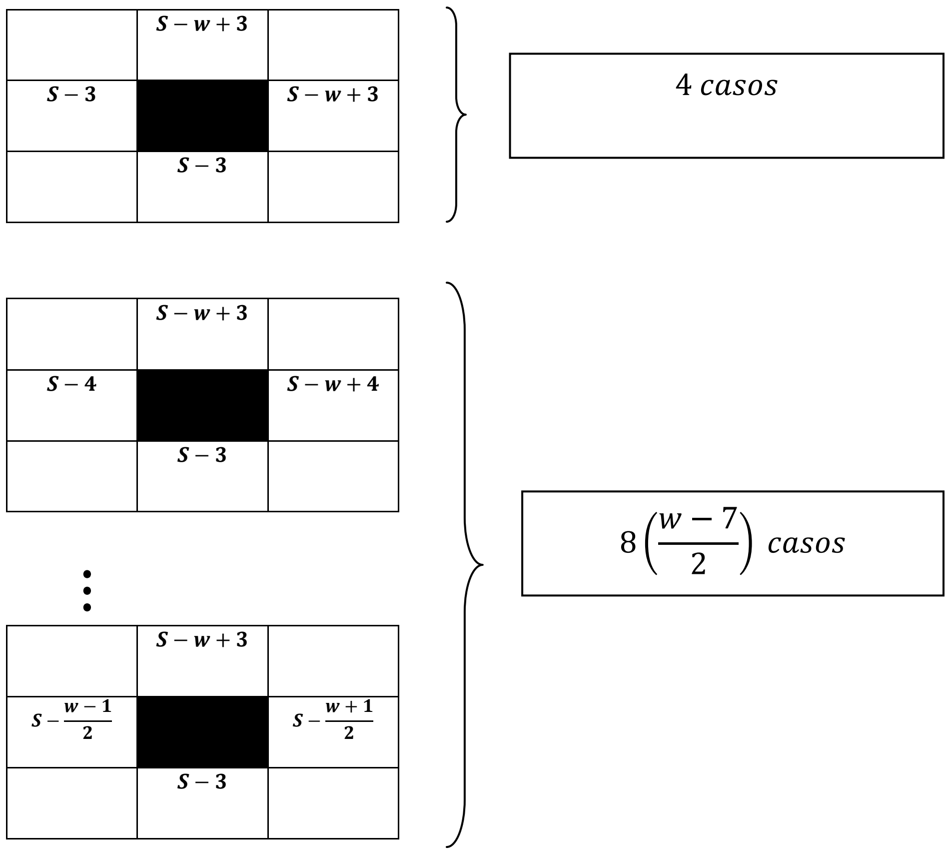
⋮

	$\boldsymbol{S-w+2}$	
$\boldsymbol{S-\frac{w-1}{2}}$		$\boldsymbol{S-\frac{w+1}{2}}$
	$\boldsymbol{S-2}$	

$8\left(\frac{w-5}{2}\right)\ casos$

e como em todos os casos apenas a distribuição $f = h = 1$ é possível, já que $f + g + h = S$ e $g = S-2$, contam-se apenas $\boldsymbol{4 + 8\frac{w-5}{2}}$ casos.

Quando $\boldsymbol{g = S - 3}$, vem



donde, seguindo o mesmo raciocínio e como f e h podem tomar os valores,

f	h
1	2
2	1

Tabela 69

concluímos que existem 2 possibilidades para cada caso. Consequentemente temos mais $\boldsymbol{2\left(4 + 8\frac{w-7}{2}\right)}$ matrizes a adicionar à nossa contagem.

Já quando $\boldsymbol{g = S - 4}$, obtemos:

	$S-w+4$	
$S-4$		$S-w+4$
	$S-4$	

$4\ casos$

	$S-w+4$	
$S-5$		$S-w+5$
	$S-4$	

$\vdots$

	$S-w+4$	
$S-\frac{w-1}{2}$		$S-\frac{w+1}{2}$
	$S-4$	

$8\left(\frac{w-9}{2}\right)\ casos$

e seguindo a mesma estratégia, podemos construir a tabela de valores possíveis para f e h,

f	h
1	3
2	2
3	1

Tabela 70

que mostra-nos 3 possibilidades para cada caso, permitindo-nos contar com um total de $\boldsymbol{3\left(4+8\frac{w-9}{2}\right)}$ matrizes.

Se continuarmos a fixar g deste modo, chegamos a $\boldsymbol{g = S - \frac{w-7}{2}}$ e às estruturas

	$S - \frac{w+7}{2}$	
$S - \frac{w-7}{2}$		$S - \frac{w+7}{2}$
	$S - \frac{w-7}{2}$	

$4\ casos$

	$S - \frac{w+7}{2}$	
$S - \frac{w-5}{2}$		$S - \frac{w+5}{2}$
	$S - \frac{w-7}{2}$	

	$S - \frac{w+7}{2}$	
$S - \frac{w-3}{2}$		$S - \frac{w+3}{2}$
	$S - \frac{w-7}{2}$	

	$S - \frac{w+7}{2}$	
$S - \frac{w-1}{2}$		$S - \frac{w+1}{2}$
	$S - \frac{w-7}{2}$	

$8 \times 3\ casos$

Agora as possibilidades de f e h são,

f	h
1	$\frac{w-9}{2}$
2	$\frac{w-11}{2}$
$\vdots$	$\vdots$
$\frac{w-9}{2}$	1

Tabela 71

permitindo determinar um total de $\frac{\boldsymbol{w-9}}{\boldsymbol{2}}(\boldsymbol{4+8\times 3})$ casos.

Quando $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{S} - \frac{\boldsymbol{w-5}}{\boldsymbol{2}}$, construímos

	$s-\frac{w+5}{2}$	
$s-\frac{w-5}{2}$		$s-\frac{w+5}{2}$
	$s-\frac{w-5}{2}$	

$4\ casos$

	$s-\frac{w+5}{2}$	
$s-\frac{w-3}{2}$		$s-\frac{w+3}{2}$
	$s-\frac{w-5}{2}$	

	$s-\frac{w+5}{2}$	
$s-\frac{w-1}{2}$		$s-\frac{w+1}{2}$
	$s-\frac{w-5}{2}$	

$8 \times 2\ casos$

e

f	h
1	$\frac{w-7}{2}$
2	$\frac{w-9}{2}$
$\vdots$	$\vdots$
$\frac{w-7}{2}$	1

Tabela 72

que conduzem a $\frac{\boldsymbol{w-7}}{\boldsymbol{2}}(\boldsymbol{4}+\boldsymbol{8}\times\boldsymbol{2})$ novas matrizes.

A situação em que $\boldsymbol{g = S - \frac{w-3}{2}}$, leva-nos aos esquemas

	$s - \frac{w+3}{2}$	
$s - \frac{w-3}{2}$		$s - \frac{w+3}{2}$
	$s - \frac{w-3}{2}$	

$4\ casos$

	$s - \frac{w+3}{2}$	
$s - \frac{w-1}{2}$		$s - \frac{w+1}{2}$
	$s - \frac{w-3}{2}$	

$8\ casos$

A tabela de possibilidades para f é agora

f	h
1	$\frac{w-5}{2}$
2	$\frac{w-7}{2}$
$\vdots$	$\vdots$
$\frac{w-5}{2}$	1

Tabela 73

e consequentemente, o número de casos associados a esta situação é $\boldsymbol{\frac{w-5}{2}(4+8)}$.

Por fim, quando $\boldsymbol{g = s - \frac{w-1}{2}}$, o esquema

	$s - \frac{w+1}{2}$	
$s - \frac{w-1}{2}$		$s - \frac{w}{2} + 1$
	$s - \frac{w-1}{2}$	

representa 4 casos, e de acordo com a tabela

f	h
1	$\frac{w-3}{2}$
2	$\frac{w-5}{2}$
$\vdots$	$\vdots$
$\frac{w-3}{2}$	1

Tabela 74

obtemos $\left(\frac{\boldsymbol{w-3}}{\boldsymbol{2}}\right)\boldsymbol{4}$ novas matrizes.

Na secção anterior foi referido que as tabelas que representam as possibilidades de f e de h poderiam ser simplificadas bastando representar apenas uma delas e a outra variável seria de imediato determinada pela decomposição de x, mas que no entanto iríamos representar ambas as variáveis para reduzir a probabilidade de cometermos erros na contagem. Se na secção anterior poderiam existir dúvidas quanto à forma de introduzir esse tipo de erro, nesta esse facto é mais evidente, ora, por exemplo, se na Tabela 74 representássemos apenas a variável f poderíamos ser tentados a colocar $\frac{\boldsymbol{w-1}}{\boldsymbol{2}}$, que corresponderia a afirmar que $h = 0$, o que seria absurdo pois neste problema a única entrada nula é a central.

Retomando a nossa contagem e em sequência do processo já realizado, quando temos $3S \leq n \leq 4S$, com n ímpar, o número de matrizes nas condições já enunciadas é dado por:

$$\left(4+8\frac{w-5}{2}\right)+2\left(4+8\frac{w-7}{2}\right)+3\left(4+8\frac{w-9}{2}\right)+4\left(4+8\frac{w-11}{2}\right)+\cdots$$
$$\ldots+\frac{w-9}{2}(4+8\times 3)+\frac{w-7}{2}(4+8\times 2)+\frac{w-5}{2}(4+8)+\frac{w-3}{2}4$$

$$=4(w-4)+2\times 4(w-6)+3\times 4(w-8)+4\times 4(w-10)+\cdots$$
$$\ldots+\frac{w-9}{2}4\times 7+\frac{w-7}{2}4\times 5+\frac{w-5}{2}4\times 3+\frac{w-3}{2}4$$

$$=a_S b_{w-4}+a_{S-1}b_{w-6}+a_{S-2}b_{w-8}+a_{S-3}b_{w-10}+\cdots+a_{S-\left(\frac{w-11}{2}\right)}b_7$$
$$+a_{S-\left(\frac{w-9}{2}\right)}b_5+a_{S-\left(\frac{w-7}{2}\right)}b_3+a_{S-\left(\frac{w-5}{2}\right)}b_1$$

$$= \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ ímpar}}}^{w-4} a_{S-\frac{w-k-4}{2}} b_k$$

Usando a igualdade

$$w = 4S - n,$$

o número de matrizes 3x3, tais que a soma de cada uma das linhas e colunas das extremidades dê S e cujas entradas são naturais não nulos excepção feita ao elemento central que é obrigatoriamente zero, para $3S \leq n \leq 4S - 4$, com n ímpar, é dado por:

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ ímpar}}}^{4S-(n+4)} a_{\left(\frac{n+k}{2}-S+2\right)} b_k, \tag{55}$$

onde a_k e b_k estão nas condições da definição (36).

Dos resultados (54) e (55) resulta o seguinte,

Lema 2.2.3 *O número $\widetilde{F_S}(n)$, de matrizes de entradas naturais do tipo 3x3, onde apenas a entrada central é nula e a soma de cada linha e cada coluna externa é exactamente a mesma, digamos S, é dado por:*

$$F_S(n) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ par}}}^{4S-(n+4)} a_{\left(\frac{n+k}{2}-S+2\right)} b_k, & \text{se } n \text{ ímpar} \\ \displaystyle\sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ ímpar}}}^{4S-(n+4)} a_{\left(\frac{n+k}{2}-S+2\right)} b_k, & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases}$$

onde n é a soma de todas as entradas de cada matriz e $3S \leq n \leq 4S - 4$.

Directamente dos lemas anteriores, temos a seguinte:

Proposição 2.2.4 *Considerando as matrizes 3×3, onde a única entrada nula é a central e onde a soma de cada linha e cada coluna exteriores é um natural fixo, digamos S, resulta que o número natural n, que representa a soma de todas as entradas, verifica a condição,*

$$2S + 2 \leq n \leq 4S - 4$$

e o número de matrizes, $\widetilde{F}_S(n)$, nestas condições é dado por:

$$\widetilde{F}_S(n) = \begin{cases} (i) = \displaystyle\sum_{\substack{k=0 \\ k \ par}}^{n-2(S+1)} a_{\left(\frac{n+k}{2}-S+2\right)} b_k\,, & \text{se } 2S+2 \leq n < 3S \text{ e } n \text{ par} \\ (ii) = \displaystyle\sum_{\substack{k=1 \\ k \ \acute{\imath}mpar}}^{n-2(S+1)} a_{\left(\frac{n+k}{2}-S+2\right)} b_k\,, & \text{se } 2S+2 \leq n < 3S \text{ e } n \text{ ímpar} \\ (iii) = \displaystyle\sum_{\substack{k=0 \\ k \ par}}^{4S-(n+4)} a_{\left(\frac{n+k}{2}-S+2\right)} b_k\,, & \text{se } 3S \leq n \leq 4S-4 \text{ e } n \text{ par} \\ (iv) = \displaystyle\sum_{\substack{k=1 \\ k \ \acute{\imath}mpar}}^{4S-(n+4)} a_{\left(\frac{n+k}{2}-S+2\right)} b_k\,, & \text{se } 3S \leq n \leq 4S-4 \text{ e } n \text{ ímpar} \end{cases}$$

onde as variáveis a_k e b_k definidas do seguinte modo:

$$a_k = S + 1 - k,$$

$$b_k = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 4k, & k \neq 0 \end{cases} \qquad \text{com } 0 \leq k \leq S$$

Além disso,

$$\widetilde{F}_S(n) =$$

$$= \begin{cases} -\frac{5}{6}n^3 + (6S+1)n^2 + \left(-14S^2 - 6S + \frac{5}{6}\right)n + \frac{32}{3}S^3 + 8S^2 - \frac{2}{3}S - 1, & 2S+2 \leq n < 3S \\ -\frac{n^3}{6} + (2S-1)n^2 + \left(-8S^2 + 8S - \frac{11}{6}\right)n + \frac{32}{3}S^3 - 16S^2 + \frac{22}{3}S - 1, & 3S \leq n \leq 4S-4 \end{cases}$$

e o número total de matrizes para cada S fixo é dado por:

$$\sum_{n=2S}^{4S} \widetilde{F_S}\,(n) = \frac{S^4 - 6S^3 + 14S^2 - 15S + 6}{6}$$

Prova:

Sabemos que,

$$1)\ \sum_{\substack{k=0 \\ k\ par}}^{m} k = \frac{m(m+2)}{4}, com\ m\ par;$$

$$2)\ \sum_{\substack{k=1 \\ k\ ímpar}}^{m} k = \frac{(m+1)^2}{4}, com\ m\ ímpar;$$

$$3)\ \sum_{\substack{k=0 \\ k\ par}}^{m} k^2 = \frac{m(m+1)(m+2)}{6}, com\ m\ par;$$

$$4)\ \sum_{\substack{k=1 \\ k\ ímpar}}^{m} k^2 = \frac{m(m+1)(m+2)}{6}, com\ m\ ímpar;$$

$$5)\ \sum_{k=0}^{m} k = \frac{m(m+1)}{2}\ ;$$

$$6)\ \sum_{k=0}^{m} k^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}\ ;$$

$$7)\ \sum_{k=0}^{m} k^3 = \frac{m^2(m+1)^2}{6}\ ;$$

De acordo com o Lema 2.2.2 quando n é par e $2S + 2 \leq n < 3S$ temos,

$$(i) = \sum_{\substack{k=0\\ k\ \ par}}^{n-2S-2} a_{\left(\frac{n+k}{2}-S+2\right)} b_k = a_{\left(\frac{n}{2}-S+2\right)} b_0 + \sum_{\substack{k=2\\ k\ \ par}}^{n-2S-2} a_{\left(\frac{n+k}{2}-S+2\right)} b_k$$

$$= 2S - 1 - \frac{n}{2} + \sum_{\substack{k=2\\ k\ \ par}}^{n-2S-2} (2S - 1 - \frac{n+k}{2})4k$$

$$= 2S - 1 - \frac{n}{2} + (8S - 4 - 2n) \sum_{\substack{k=2\\ k\ \ par}}^{n-2S-2} k - 2 \sum_{\substack{k=2\\ k\ \ par}}^{n-2S-2} k^2$$

$$= 2S - 1 - \frac{n}{2} + (8S - 4 - 2n) \frac{(n-2S)(n-2S-2)}{4}$$

$$-2\frac{(n-2S-2)(n-2S-1)(n-2S)}{6}$$

$$= -\frac{5}{6}n^3 + (6S+1)n^2 + \left(-14S^2 - 6S + \frac{5}{6}\right)n + \frac{32}{3}S^3$$

$$+8S^2 - \frac{2}{3}S - 1$$

Ainda pelo Lema 2.2.2, mas para $2S + 2 \leq n < 3S$, com n ímpar, resulta

$$(ii) = \sum_{\substack{k=1\\ k\ \ ímpar}}^{n-2S-2} a_{\left(\frac{n+k}{2}-S+2\right)} b_k = \sum_{\substack{k=1\\ k\ \ ímpar}}^{n-2S-2} (2S - 1 - \frac{n+k}{2})4k$$

$$= (8S - 4 - 2n) \sum_{\substack{k=1\\ k\ \ ímpar}}^{n-2S+2} k - 2 \sum_{\substack{k=1\\ k\ \ ímpar}}^{n-2S+2} k^2$$

$$= (8S + 4 - 2n) \frac{(n-2S-1)^2}{4}$$

$$-2\frac{(n-2S-2)(n-2S-1)(n-2S)}{6}$$

$$= -\frac{5}{6}n^3 + (6S+1)n^2 + \left(-14S^2 - 6S + \frac{5}{6}\right)n + \frac{32}{3}S^3$$

$$+8S^2 - \frac{2}{3}S - 1$$

Já com recurso ao Lema 2.2.3, quando $3S \leq n \leq 4S-4$, com n par, resulta,

$$(iii) = \sum_{\substack{k=0 \\ k\ par}}^{4S-n-4} a_{\left(\frac{n+k}{2}-S+2\right)} b_k = a_{\left(\frac{n}{2}-S+2\right)} b_0 + \sum_{\substack{k=2 \\ k\ par}}^{4S-n-4} a_{\left(\frac{n+k}{2}-S+2\right)} b_k$$

$$= 2S - 1 - \frac{n}{2} + \sum_{\substack{k=2 \\ k\ par}}^{4S-n-4} (2S - 1 - \frac{n+k}{2})4k$$

$$= 2S - 1 - \frac{n}{2} + (8S - 4 - 2n) \sum_{\substack{k=2 \\ k\ par}}^{4S-n-4} k - 2 \sum_{\substack{k=2 \\ k\ par}}^{4S-n-4} k^2$$

$$= 2S - 1 - \frac{n}{2} + (8S - 4 - 2n)\frac{(4S-n-2)(4S-n-4)}{4}$$

$$-2\frac{(4S-n-4)(4S-n-3)(4S-n-2)}{6}$$

$$= -\frac{n^3}{6} + (2S-1)n^2 + \left(-8S^2 + 8S - \frac{11}{6}\right)n + \frac{32}{3}S^3 - 16S^2$$

$$+\frac{22}{3}S - 1$$

Considerando ainda o Lema 2.2.3, agora para $3S \leq n \leq 4S-4$, com n ímpar, obtemos,

$$(iv) = \sum_{\substack{k=1\\ k \text{ ímpar}}}^{4S-n-4} a_{\left(\frac{n+k}{2}-S+2\right)} b_k = \sum_{\substack{k=1\\ k \text{ ímpar}}}^{4S-n-4} (2S-1-\frac{n+k}{2})4k$$

$$= (8S-4-2n) \sum_{\substack{k=1\\ k \text{ ímpar}}}^{4S-n-4} k - 2 \sum_{\substack{k=1\\ k \text{ ímpar}}}^{4S-n-4} k^2$$

$$= (8S-4-2n) \frac{(4S-n-3)^2}{4}$$

$$-2 \frac{(4S-n-4)(4S-n-3)(4S-n-2)}{6}$$

$$= -\frac{n^3}{6} + (2S-1)n^2 + \left(-8S^2 + 8S - \frac{11}{6}\right) n + \frac{32}{3} S^3 - 16S^2$$

$$+ \frac{22}{3} S - 1$$

Pretendemos calcular

$$\sum_{n=2S+2}^{4S-4} \tilde{F}_S\,(n)$$

ou seja,

$$\sum_{n=2S+2}^{4S-4} \tilde{F}_S\,(n) = \sum_{\substack{n=2S+2\\ n \text{ par}}}^{3S-1} (i) + \sum_{\substack{n=2S+3\\ n \text{ ímpar}}}^{3S-1} (ii) + \sum_{\substack{n=3S\\ n \text{ par}}}^{4S-4} (iii) + \sum_{\substack{n=3S\\ n \text{ ímpar}}}^{4S-4} (iv)$$

Mas já verificámos que

$$(i) = \sum_{\substack{k=0\\ k \text{ par}}}^{n-2S-2} a_{\left(\frac{n+k}{2}-S+2\right)} b_k = \sum_{\substack{k=1\\ k \text{ ímpar}}}^{n-2S-2} a_{\left(\frac{n+k}{2}-S+2\right)} b_k = (ii)$$

$$= -\frac{5}{6}n^3 + (6S+1)n^2 + \left(-14S^2 - 6S + \frac{5}{6}\right)n + \frac{32}{3}S^3 + 8S^2 - \frac{2}{3}S - 1$$

e que,

$$(iii) = \sum_{\substack{k=0 \\ k\ par}}^{4S-n-4} a_{\left(\frac{n+k}{2}-S+2\right)} b_k = \sum_{\substack{k=1 \\ k\ ímpar}}^{4S-n-4} a_{\left(\frac{n+k}{2}-S+2\right)} b_k = (iv)$$

$$= -\frac{n^3}{6} + (2S-1)n^2 + \left(-8S^2 + 8S - \frac{11}{6}\right)n + \frac{32}{3}S^3 - 16S^2 + \frac{22}{3}S - 1$$

pelo que resulta a seguinte igualdade,

$$\sum_{n=2S+2}^{4S-4} \tilde{F}_S(n) =$$

$$= \sum_{n=2S+2}^{3S-1} (-\frac{5}{6}n^3 + (6S+1)n^2 + \left(-14S^2 - 6S + \frac{5}{6}\right)n + \frac{32}{3}S^3 + 8S^2 - \frac{2}{3}S - 1)$$

$$+ \sum_{n=3S}^{4S-4} (-\frac{n^3}{6} + (2S-1)n^2 + \left(-8S^2 + 8S - \frac{11}{6}\right)n + \frac{32}{3}S^3 - 16S^2 + \frac{22}{3}S - 1)$$

$$= -\frac{5}{6}\sum_{n=0}^{S-3}(n+2S+2)^3 + (6S-1)\sum_{n=0}^{S-3}(n+2S+2)^2$$

$$+ \left(-14S^2 - 6S + \frac{5}{6}\right)\sum_{n=0}^{S-3}(n+2S+2) + \left(\frac{32}{3}S^3 + 8S^2 - \frac{2}{3}S - 1\right)(S-2)$$

$$-\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{S-4}(n+3S)^3 + (2S-1)\sum_{n=0}^{S-4}(n+3S)^2 + \left(-8S^2 + 8S - \frac{11}{6}\right)\sum_{n=0}^{S-4}(n+3S)$$

$$+ \left(\frac{32}{3}S^3 - 16S^2 + \frac{22}{3}S - 1\right)(S-3)$$

$$= -\frac{5}{6}\sum_{n=0}^{S-3} n^3 + (S-4)\sum_{n=0}^{S-3} n^2 + \left(2S - \frac{31}{6}\right)\sum_{n=0}^{S-3} n + (S-1)(S-2) - \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{S-4} n^3$$

$$+ \left(\frac{1}{2}S - 1\right)\sum_{n=0}^{S-4} n^2 + \left(-\frac{1}{2}S^2 + 2S - \frac{11}{6}\right)\sum_{n=0}^{S} n + \left(\frac{1}{6}S^3 - S^2 + \frac{11}{6}S - 1\right)(S-3)$$

$$= \frac{S^4 - 6S^3 + 14S^2 - 15S + 6}{6},$$

tal como pretendíamos.

Notemos que o caso do enigma do monge, quando assumimos que o canil central não era ocupado e os restantes tinham de abrigar pelo menos um cão é um caso particular deste problema, bastando considerar $S = 10$. Verificamos as seguintes igualdades:

$$\widetilde{F_S}(n) = \widetilde{F_{10}}(n) \equiv \tilde{F}(n), \forall n \in \mathbb{N}: 2S + 2 = 22 \leq n \leq 36 = 4S - 4$$

$$\sum_{n=22}^{36} \tilde{F}(n) = 876 = \sum_{n=2\times10+2=20}^{4\times10-4=40} \tilde{F}_{10}\,(n) = \frac{10^4 - 6(10)^3 + 14(10)^2 - 15(10) + 6}{6},$$

igualdades já estabelecidas anteriormente na Proposição 1.2.4.

2.3- Quando podem existir uma ou mais Entradas Nulas

Nesta secção pretendemos generalizar a Secção 1.3. Vamos portanto estabelecer quantas matrizes 3x3 existem, tais que todas as suas entradas são naturais e a soma de cada linha e de cada coluna dê S.

Analogamente ao que foi realizado no caso clássico, consideremos a seguinte matriz,

a	b	c
d	z	e
f	g	h

onde cada uma das entradas representa um número natural.

Pretendemos assim determinar quantas matrizes desta natureza existem, tais que cada linha e cada coluna de entradas some S, ou seja

$$\begin{cases} a+b+c=S \\ d+z+e=S \\ f+g+h=S \\ a+d+f=S \\ b+z+g=S \\ c+e+h=S \end{cases},$$

podendo existir entradas de valor nulo. Temos,

$$n = a+b+c+d+z+e+f+g+h \tag{56}$$

Supondo que S está fixo, podemos determinar para que valores de n, o problema tem solução,

$$\begin{cases} n = a+b+c+d+z+e+f+g+h \\ a+b+c=S \\ d+z+e=S \\ f+g+h=S \end{cases} \Longrightarrow n = 3S \tag{57}$$

Deste modo resulta a seguinte,

Observação 2.3.1 *Em todas as matrizes de entradas naturais do tipo 3×3 onde a soma das entradas de cada linha e de cada coluna resulte num natural fixo, digamos* S, *a soma de todas as suas entradas,* n, *é* $3S$.

Sabemos que cada entrada pode ser no mínimo 0, por ser uma matriz de naturais, e no máximo S, por S ser simultaneamente a soma de cada linha e de cada coluna.

Observemos que o valor da entrada z condiciona as possibilidades das restantes entradas, em particular de g, e como na secção 2.1 temos todas as possibilidades de g estudadas torna-se útil este tipo de manipulação.

Assim comecemos por considerar,

- $\boldsymbol{z = 0}$

Quando fixamos a entrada central deste modo vem

a	b	c
d	0	e
f	g	h

e como

$$\begin{cases} b + g = S \\ d + e = S \end{cases}$$

analisando os valores que b, g, d e e podem tomar, contabilizamos todas as possibilidades para $z = 0$.

Este processo é equivalente à contagem dos casos possíveis, efectuada na secção 2.1, quando tínhamos $x = S$, ou seja, esta contagem corresponde exactamente a $F_S(3S)$.

Para

- $\boldsymbol{z = 1}$

as matrizes assumem a forma,

a	b	c
d	1	e
f	g	h

E, nesta situação deduz-se as relações,

$$\begin{cases} b + g = S - 1 \\ d + e = S - 1 \end{cases}$$

que equivalem, ao processo de contagem em 2.1 quando considerámos $n = 3S - 1$

$$n = 3S - 1 \Rightarrow x = S - 1 = b + g = d + e$$

Consequentemente quando $z = 1$ o número de matrizes é dado por $F_S(3S - 1)$.

Como já verificámos, z pode ser no mínimo 0 e no máximo S e deste modo, se representarmos G_S como sendo o número de matrizes de entradas naturais do tipo 3x3 onde as somas das entradas de cada linha e de cada coluna dê S, basta considerarmos a relação

$$z + x = S$$

e obtemos,

$$G_s = \sum_{z=0}^{S} F_S\big(2S + (S - z)\big)$$

$$= \sum_{z=0}^{S} F_S(3S - z)$$

$$= \sum_{n=2S}^{3S} F_S(n) \;, \qquad (58)$$

de onde resulta a seguinte,

Proposição 2.3.2 *Se G_s representar o número de matrizes 3×3 com entradas naturais onde cada linha e cada coluna soma S, então é verificada a seguinte igualdade:*

$$G_s = \sum_{n=2S}^{3S} F_S(n) = \frac{S^4 + 6S^3 + 15S^2 + 18S + 8}{8}$$

Prova:

Da Proposição 2.1.4 sabemos que,

$F_S(n) =$

$$= \begin{cases} -\frac{5}{6}n^3 + (6S-1)n^2 + \left(-14S^2 + 6S + \frac{5}{6}\right)n + \frac{32}{3}S^3 - 8S^2 - \frac{2}{3}S + 1, 2S \leq n < 3S \\ -\frac{n^3}{6} + (2S+1)n^2 + \left(-8S^2 - 8S - \frac{11}{6}\right)n + \frac{32}{3}S^3 + 16S^2 + \frac{22}{3}S + 1, 3S \leq n \leq 4S \end{cases}$$

Então,

$$G_s = \sum_{n=2S}^{3S} F_S(n)$$

$$= \sum_{n=2S}^{3S-1} \left[-\frac{5}{6}n^3 + (6S-1)n^2 + \left(-14S^2 + 6S + \frac{5}{6}\right)n + \frac{32}{3}S^3 - 8S^2 - \frac{2}{3}S + 1\right]$$

$$+ \sum_{n=3S}^{3S} \left[-\frac{n^3}{6} + (2S+1)n^2 + \left(-8S^2 - 8S - \frac{11}{6}\right)n + \frac{32}{3}S^3 + 16S^2 + \frac{22}{3}S + 1\right]$$

$$= -\frac{5}{6}\sum_{n=0}^{S-1}(n+2S)^3 + (6S-1)\sum_{n=0}^{S-1}(n+2S)^2 + \left(-14S^2 + 6S + \frac{5}{6}\right)\sum_{n=0}^{S-1}(n+2S)$$

$$+ \left(\frac{32}{3}S^3 - 8S^2 - \frac{2}{3}S + 1\right)S - \frac{(3S)^3}{6} + (2S+1)(3S)^2 + \left(-8S^2 - 8S - \frac{11}{6}\right)3S$$

$$+\frac{32}{3}S^3 + 16S^2 + \frac{22}{3}S + 1$$

$$= \frac{S^4 + 6S^3 + 15S^2 + 18S + 8}{8}$$

E obtemos assim, o resultado pretendido.

Observemos que, a Secção 1.3 é o caso particular desta quando $S = 10$. Comprovamos facilmente que,

$$G = 2211 = G_{10} = \sum_{n=2\times 10=20}^{3\times 10=30} F_{10}(n) = \frac{10^4 + 6(10)^3 + 15(10)^2 + 18(10) + 8}{8}.$$

2.4- Sem Entradas Nulas

Agora, pretendemos determinar o número de matrizes do tipo 3x3, tais que todas as suas entradas são naturais não nulos e a soma de cada linha e de cada coluna é S.

Estamos perante um problema muito semelhante ao anterior, em que a única alteração é o facto de não poderem existir entradas nulas. Deste modo, é evidente que a matriz também toma a seguinte forma,

a	b	c
d	z	e
f	g	h

e continuam a ser válidas as condições,

$$\begin{cases} a+b+c=S \\ d+z+e=S \\ f+g+h=S \\ a+d+f=S \\ b+z+g=S \\ c+e+h=S \end{cases}$$

pelo que concluímos que (56) e (57) continuam a ser verificadas, ou seja, a Proposição 2.3.1 continua a ser válida, neste problema.

Como cada linha tem de somar S e cada soma é constituída por três parcelas de inteiros positivos então cada entrada pode ser no mínimo 1 e no máximo $S-2$.

Analisemos, em primeiro lugar o caso em que

- $\boldsymbol{z=1}$,

Neste caso as matrizes a contabilizar assumem a forma,

a	b	c
d	1	e
f	g	h

e constatamos que,

$$\begin{cases} b + g = S - 1 \\ d + e = S - 1 \end{cases}$$

Quando $z = 1$, o número de matrizes com entradas não nulas é dado por:

$$\tilde{F}_S(2S + x) = \tilde{F}_S(3S - 1) \qquad (pois\ x = S - 1)$$

Na situação em que

- $\boldsymbol{z = 2}$,

temos,

a	b	c
d	2	e
f	g	h

e por

$$\begin{cases} b + g = S - 2 \\ d + e = S - 2 \end{cases}$$

verificamos que existem $\tilde{F}_S(3S - 2)$ matrizes distintas para $z = 2$.

De modo análogo ao que foi efectuado na secção anterior, se considerarmos $\tilde{G}_S$ como sendo o número de matrizes de entradas naturais não nulas do tipo 3x3 onde as somas das entradas de cada linha e de cada coluna dê S, basta considerarmos as relações

$$1 \leq z \leq S-2$$

e

$$z + x = S$$

para obtermos,

$$\begin{aligned}\tilde{G}_S &= \sum_{z=1}^{S-2} \tilde{F}\big(2S + (S-z)\big)\\ &= \sum_{z=1}^{S-2} \tilde{F}(3S-z)\\ &= \sum_{n=S+2}^{3S-1} \tilde{F}(n) \qquad (59)\end{aligned}$$

É válida então, a seguinte,

Proposição 2.4.1 *Se G_s representar o número de matrizes 3×3 com entradas naturais não nulas onde cada linha e cada coluna soma S, então é verificada a seguinte igualdade:*

$$\tilde{G}_s = \sum_{n=2S+2}^{3S-1} \tilde{F}_S(n) = \frac{S^4 - 6S^3 + 15S^2 - 18S + 8}{8}.$$

Prova:

Sabemos, pela Proposição 2.2.4, que,

$\tilde{F}_S(n) =$

$$= \begin{cases} -\frac{5}{6}n^3 + (6S+1)n^2 + \left(-14S^2 - 6S + \frac{5}{6}\right)n + \frac{32}{3}S^3 + 8S^2 - \frac{2}{3}S - 1, 2S+2 \leq n < 3S \\ -\frac{n^3}{6} + (2S-1)n^2 + \left(-8S^2 + 8S - \frac{11}{6}\right)n + \frac{32}{3}S^3 - 16S^2 + \frac{22}{3}S + 1, 3S \leq n \leq 4S-4 \end{cases}$$

logo temos,

$$\tilde{G}_s = \sum_{n=2S+2}^{3S-1} \tilde{F}_S(n)$$

$$= \sum_{n=2S+2}^{3S-1} \left[-\frac{5}{6}n^3 + (6S+1)n^2 + \left(-14S^2 - 6S + \frac{5}{6}\right)n + \frac{32}{3}S^3 + 8S^2 - \frac{2}{3}S - 1\right]$$

$$= -\frac{5}{6}\sum_{n=0}^{S-3} n^3 + (S-4)\sum_{n=0}^{S-3} n^2 + \left(2S - \frac{31}{6}\right)\sum_{n=0}^{S-3} n + (S-1)(S-2)$$

$$= \frac{S^4 - 6S^3 + 15S^2 - 18S + 8}{8}.$$

Observemos que os resultados da Secção 1.4, obtêm-se da Proposição anterior pondo $S = 10$. Com efeito,

$$\tilde{G} = 666 = \tilde{G}_s = \sum_{n=2\times 10+2=22}^{3\times 10-1=29} \tilde{F}_{10}(n) = \frac{10^4 - 6(10)^3 + 15(10)^2 - 18(10) + 8}{8}$$

2.5 - Com exigências às Diagonais, podendo existir Entradas Nulas

Nesta Secção também iremos proceder à contagem de matrizes do tipo 3x3, cujas entradas são números naturais. No entanto vamos estender as exigências das somas às diagonais, pelo que vamos impor que cada uma das linhas, colunas e diagonais tenham uma soma em comum, digamos S.

Perante este novo problema, podemos voltar a considerar a matriz genérica,

a	b	c
d	z	e
f	g	h

mas onde agora são exigidas as condições,

$$\begin{cases} a+b+c=S \\ f+g+h=S \\ a+d+f=S \\ c+e+h=S \\ b+z+g=S \\ d+z+e=S \\ a+z+h=S \\ c+z+f=S \end{cases} \tag{60}$$

Observemos que $n = 3S$, pois mantêm-se as condições da Secção 2.3, o que torna válidas as observações já realizadas nessa secção, em particular a Proposição 2.3.1.

Vejamos que implicações trazem as novas condições,

$$
\begin{cases}
a+b+c=S\\
f+g+h=S\\
a+d+f=S\\
c+e+h=S\\
b+z+g=S\\
d+z+e=S\\
a+z+h=S\\
c+z+f=S
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases}
a+b+c=S\\
f+g+h=S\\
a+d+f=S\\
c+e+h=S\\
b+g=S-z\\
d+e=S-z\\
a=S-z-h\\
c=S-z-f
\end{cases}
$$

Sabemos que

$$n = a + b + c + d + z + e + f + g + h = 3S\,,$$

então,

$$a + b + c + d + z + e + f + g + h = 3S$$

$$\xRightarrow[a=S-z-h]{} \qquad b + c + d + e + f + g = 2S$$

$$\xRightarrow[c=S-z-f]{} \qquad b - z + d + e + g = S$$

$$\xRightarrow[b+g=S-z=d+e]{} \qquad S = 3z \tag{61}$$

Notemos que se $S = 0$, analogamente $z = 0$, teríamos a matriz nula, que não tem qualquer interesse prático.

Como z, à semelhança das restantes entradas, é natural, é evidente que este problema só faz sentido quando S é múltiplo de três.

Consequentemente, no enigma clássico, $S = 10$, nunca poderíamos exigir que as diagonais somassem 10.

Proposição 2.5.1 *Ao considerarmos uma matriz de entradas naturais do tipo 3×3, onde a soma de cada linha, de cada coluna e de cada diagonal é a mesma, digamos S, então:*

$$
\begin{aligned}
S &= 3z\\
n &= 3S = 9z
\end{aligned}
$$

onde n é a soma de todas as entradas da matriz e z corresponde à entrada central.

Atendendo, à Proposição 2.5.1 resulta o seguinte,

Corolário 2.5.2 *Ao considerarmos uma matriz de entradas naturais do tipo 3×3 onde a soma de cada linha, de cada coluna e de cada diagonal é exactamente a mesma, resulta que,*

-a soma de todas as entrada, n, é um múltiplo de 9
-a soma de cada linha, coluna e diagonal, S, é um múltiplo de 3.

Deste modo a matriz inicial, tal como foi enunciada, corresponde a

a	b	c
d	$\frac{S}{3}$	e
f	g	h

e as condições (60) são equivalentes a

$$\begin{cases} a+b+c=S \\ f+g+h=S \\ a+d+f=S \\ c+e+h=S \\ b+g=\frac{2}{3}S \\ d+e=\frac{2}{3}S \\ a+h=\frac{2}{3}S \\ c+f=\frac{2}{3}S \end{cases} \tag{62}$$

que, de $S=\frac{n}{3}$, ainda equivalem a

$$\begin{cases} a+b+c=\dfrac{n}{3} \\ f+g+h=\dfrac{n}{3} \\ a+d+f=\dfrac{n}{3} \\ c+e+h=\dfrac{n}{3} \\ b+g=\dfrac{2}{9}n \\ d+e=\dfrac{2}{9}n \\ a+h=\dfrac{2}{9}n \\ c+f=\dfrac{2}{9}n \end{cases} \tag{63}$$

ou ainda, por $S=3z$, a

$$\begin{cases} a+b+c=3z \\ f+g+h=3z \\ a+d+f=3z \\ c+e+h=3z \\ b+g=2z \\ d+e=2z \\ a+h=2z \\ c+f=2z \end{cases} \tag{64}$$

É, de certo modo, evidente que o processo de contagem a adoptar, terá de envolver as diagonais, pois são estas que distinguem este problema dos que foram estudados até o momento.

Deste modo, o processo de contagem terá de recorrer às entradas das diagonais e não à custa da linha e coluna intermédias como foi feito até o momento, ou seja, teremos que encontrar um novo processo de contagem de modo a garantir que todas as exigências do problema sejam devidamente respeitadas.

Vejamos então como as observações que se seguem são determinantes na escolha do método a seguir.

Observação 2.5.3 *Uma vez que a entrada central, z, para cada soma S fixa, é conhecida, se fixarmos as entradas a, c, f e h, as restantes são automaticamente determinadas por (62), através das relações,*

$$\begin{cases} b = S - a - c \\ d = S - a - f \\ e = S - c - h \\ g = S - h - f \end{cases}$$

Observação 2.5.4 *As entradas a, c, f e h, podem ser no mínimo 0 e no máximo o dobro da entrada z, pois, recorrendo a (64) temos,*

$$\begin{cases} a + h = 2z \\ c + f = 2z \end{cases}$$

Observação 2.5.5 *Uma vez fixo S, z é determinado de imediato e os valores que as restantes entradas podem assumir, em particular a, ficam reduzidos a,*

$$a = 2z - k \vee a = k, k \in \mathbb{N}: 0 \leq k \leq z \tag{65}$$

Consequentemente, podemos deduzir:

Proposição 2.5.6 *Uma vez fixas as entradas de uma diagonal da matriz, as entradas da outra diagonal, são condicionadas pelos valores fixos na primeira, em particular quando fixamos a. Quando fixamos a, obtemos h e em consequência, para cada k natural fixo, com $0 \leq k \leq z$, c e a verificam,*

$$\begin{cases} c \in \mathbb{N} : z - k \leq c \leq z + k \\ f \in \mathbb{N}: z - k \leq f \leq z + k \end{cases} \; onde \; c + f = 2z$$

Prova:

Quando fixamos a, obtemos h, através da relação $a + h = 2z$. Queremos verificar que de facto as entradas c e f ficam condicionadas por a e h tal como foi enunciado. Ora, da Observação 2.5.5 sabemos que,

$$a = 2z - k \vee a = k, k \in \mathbb{N}: 0 \leq k \leq z$$

Observemos antes de mais que supor $c > z + k$ é equivalente a supor que $f < z - k$ e que $f > z + k \Leftrightarrow c < z - k$ bastando atender à relação $c + f = 2z$. Deste modo verificar,

$$(a = 2z - k \vee a = k) \Longrightarrow (c \in \mathbb{N} : z - k \leq c \leq z + k), \qquad k \in \mathbb{N}: 0 \leq k \leq z$$

é suficiente para demonstrarmos a proposição.

Consideremos em primeiro lugar o caso $\boldsymbol{a = 2z - k, k} \in \mathbb{N}\boldsymbol{: 0 \leq k \leq z}$ para k fixo.

Suponhamos com vista a um absurdo que $c > z + k$. Então,

$$\exists j \in \mathbb{N}_1 : c = z + k + j$$

e de

$$a + b + c = 3z \Longrightarrow b = 3z - (a + c) = -j,$$

temos, $b < 0$ o que é absurdo pois $b \in \mathbb{N}$.

Já verificámos que $c \leq z + k$ e $z - k \leq f$, faltando $f \leq z + k$ e $z - k \leq c$. No entanto este segundo caso é análogo ao já realizado, bastando considerar f em vez de c e atender a

$$a + d + f = 3z,$$

para concluir

$$a = 2z - k \Longrightarrow c \in \mathbb{N} : z - k \leq c \leq z + k.$$

Consideremos então o caso $\boldsymbol{a = k, k} \in \mathbb{N}\boldsymbol{: 0 \leq k \leq z}$ para k fixo. Notemos que neste caso temos

$$h = 2z - a = 2z - k,$$

logo procedendo para h de modo análogo ao que foi efectuado para a concluimos

$$a = k \Longrightarrow c \in \mathbb{N} : z - k \leq c \leq z + k$$

estabelecendo assim a relação,

$$(a = 2z - k \vee a = k) \Longrightarrow \begin{cases} c \in \mathbb{N} : z - k \leq c \leq z + k \\ \qquad\qquad z \\ f \in \mathbb{N}: z - k \leq f \leq z + k \end{cases} \qquad k \in \mathbb{N}: 0 \leq k \leq z$$

relação esta, que pretendíamos demonstrar.

Podemos agora, recorrendo à proposição anterior, proceder à contagem das respectivas matrizes.

Para executarmos a respectiva contagem vamos em primeiro lugar atribuir sucessivamente à entrada a todos os valores que esta pode assumir.

No entanto vamos considerar a, do seguinte modo

$$a = 2z - k, k \in \mathbb{N}: 0 \leq k \leq 2z \tag{66}$$

que logicamente é equivalente a (65), mas para nós é mais intuitiva.

Para cada a fixo podemos determinar de imediato a entrada h e recorrendo à proposição anterior podemos determinar todas as hipóteses para as entradas da outra diagonal. E determinar todas as possibilidades para as duas diagonais é suficiente para contabilizar todas as matrizes nas condições (60), basta atendermos à Observação 2.5.3.

Uma vez que já definimos o método a adoptar, iniciemos a nossa contagem considerando em primeiro lugar

- $\boldsymbol{a = 2z}$,

obtendo assim uma única matriz:

$\boldsymbol{2z}$		$\boldsymbol{z}$
	$\boldsymbol{z}$	
$\boldsymbol{z}$		$\mathbf{0}$

- $a = 2z - 1$

Neste caso, resultam as matrizes,

$2z-1$		$z+1$
	z	
$z-1$		1

$2z-1$		z
	z	
z		1

$2z-1$		$z-1$
	z	
$z+1$		1

temos portanto 3 possibilidades.

- $a = 2z - 2$

Para este caso temos

$2z-2$		$z+2$
	z	
$z-2$		2

$2z-2$		$z+1$
	z	
$z-1$		2

$2z-2$		z
	z	
z		2

$2z-2$		$z-1$
	z	
$z+1$		2

$2z-2$		$z-2$
	z	
$z+2$		2

5 situações possíveis.

Deste modo podemos continuar a atribuir sucessivamente valores a a, atingindo assim a situação,

- $\boldsymbol{a = z + 1}$

$z+1$		$2z-1$
	z	
1		$z-1$

$z+1$		$2z-2$
	z	
2		$z-1$

$\vdots$

$z+1$		1
	z	
$2z-1$		$z-1$

$$2z-1$$

E como é ilustrado constatamos que existem $2z - 1$ para este valor de a.

Em seguida surge o caso,

- $\boldsymbol{a = z}$

Agora obtemos $2z + 1$ novas matrizes, ilustradas em seguida.

z		$2z$
	z	
0		z

$\vdots$

z		0
	z	
$2z$		z

$$2z + 1$$

.

Ora, quando

- $\boldsymbol{a = z - 1}$

$z-1$		$2z-1$
	z	
1		$z-1$

$\vdots$

$z-1$		1
	z	
$2z-1$		$z-1$

$$2z - 1$$

existem $2z - 1$ possibilidades

Se continuarmos progressivamente a atribuir valores à entrada a, chegamos ao caso,

- $\boldsymbol{a = 2}$,

para o qual, obtemos as seguintes matrizes,

2		$z+2$
	z	
$z-2$		$2z-2$

2		$z+1$
	z	
$z-1$		$2z-2$

2		z
	z	
z		$2z-2$

2		$z-1$
	z	
$z+1$		$2z-2$

2		$z-2$
	z	
$z+2$		$2z-2$

portanto 5 novas situações.

Para

- $\boldsymbol{a = 1}$

obtemos 3 matrizes,

1		$z+1$
	z	
$z-1$		$2z-1$

1		z
	z	
z		$2z-1$

1		$z-1$
	z	
$z+1$		$2z-1$

Por fim quando

- $\boldsymbol{a = 0}$

obtemos apenas a matriz,

$\mathbf{0}$		$\boldsymbol{z}$
	$\boldsymbol{z}$	
$\boldsymbol{z}$		$\mathbf{2}\boldsymbol{z}$

Podemos então, enunciar a seguinte:

Proposição 2.5.7 *Se H_s for o número de matrizes de entradas naturais do tipo 3×3, onde a soma de cada linha, coluna e diagonal é S, então:*

$$H_s = \frac{2S^2 + 6S + 9}{9}$$

Prova:

Atendendo aos resultados obtidos pela contagem temos,

$$H_s = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2z - 1) + (2z + 1) + 2z - 1) + \cdots + 5 + 3 + 1 =$$
$$= (2z + 1) + 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \text{ ímpar}}}^{2S-1} j$$

Mas $z = \frac{S}{3}$, logo,

$$H_s = \left(\frac{2}{3}S + 1\right) + 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \text{ ímpar}}}^{\frac{2}{3}S-1} j$$

Observemos que $\frac{2}{3}S - 1$ é um número ímpar, pois S é múltiplo de três. Assim podemos recorrer à relação

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ ímpar}}}^{m} k = \frac{(m+1)^2}{4}, \text{com } m \text{ ímpar}$$

e obter

$$H_s = \left(\frac{2}{3}S + 1\right) + 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \text{ ímpar}}}^{\frac{2}{3}S-1} j$$

$$= \left(\frac{2}{3}S + 1\right) + 2\frac{(\frac{2}{3}S)^2}{4}$$

$$= \frac{2S^2 + 6S + 9}{9}$$

tal como pretendíamos.

2.6- Com exigências às Diagonais e Sem Entradas Nulas

Pretendemos agora estudar o problema abordado na secção anterior, mas sem admitir entradas nulas. Vamos portanto analisar e contabilizar as matrizes 3x3 de entradas naturais não nulas, cujas somas das linhas, colunas e diagonais sejam S.

Como as condições (60) continuam válidas, a Proposição 2.5.1 continua a ser verificada, logo temos,

$$n = 3S \ \wedge S = 3z$$

Relativamente à contagem propriamente dita, é de referir que para contabilizarmos as matrizes nas condições já mencionadas não necessitamos de estabelecer uma nova estratégia. Se atendermos ao facto de que a observação 2.5.3 continua a ser válida para este problema, e ao facto de todas as matrizes deste problema serem, exactamente, as matrizes nas condições do anterior que não possuem entradas nulas, torna-se evidente que basta retirarmos à contagem anterior as matrizes que admitem entradas nulas.

Deste modo é para já visível que contrariamente ao que já foi realizado na anterior contagem iniciamos a contagem em $a = 2z - 1$e terminamos em $a = 1$, pois se considerássemos $a = 2z$ e $a = 0$ estaríamos a considerar matrizes com entradas nulas.

Assim, para

- $\boldsymbol{a = 2z - 1}$,

temos apenas a matriz,

$\boldsymbol{2z-1}$	$\boldsymbol{1}$	$\boldsymbol{z}$
$\boldsymbol{1}$	$\boldsymbol{z}$	$\boldsymbol{2z-1}$
$\boldsymbol{z}$	$\boldsymbol{2z-1}$	$\boldsymbol{1}$

pois se perscrutarmos a secção anterior verificamos que as restantes matrizes admitem entradas nulas.

Em seguida temos

- $\boldsymbol{a = 2z - 2}$,

$2z-2$	1	$z+1$
3	z	$2z-3$
$z-1$	$2z-1$	2

$2z-2$	2	z
2	z	$2z-2$
z	$2z-2$	2

$2z-2$	3	$z-1$
1	z	$2z-1$
$z+1$	$2z-3$	2

que reúne três possibilidades.

Para

- $\boldsymbol{a = 2z - 3}$,

$2z-3$	1	$z+2$
5	z	$2z-5$
$z-2$	$2z-1$	3

$2z-3$	2	$z+1$
4	z	$2z-4$
$z-1$	$2z-2$	3

$2z-3$	3	z
3	z	$2z-3$
z	$2z-3$	3

$2z-3$	4	$z-1$
2	z	$2z-2$
$z+1$	$2z-4$	3

$2z-3$	5	$z-2$
1	z	$2z-1$
$z+2$	$2z-5$	3

temos 5 casos reunidos.

Deste modo podemos continuar a percorrer sucessivamente os valores atribuídos anteriormente a a, contabilizando apenas as matrizes de interesse, ou seja aquelas que não têm entradas nulas. Quando atingimos a situação

- $\boldsymbol{a = z + 1}$,

obtemos as matrizes,

$$
\left.
\begin{array}{c}
\begin{array}{|c|c|c|}
\hline
z+1 & 1 & 2z-2 \\
\hline
2z-3 & z & 3 \\
\hline
2 & 2z-1 & z-1 \\
\hline
\end{array}
\\[2ex]
\begin{array}{|c|c|c|}
\hline
z+1 & 2 & 2z-3 \\
\hline
2z-4 & z & 4 \\
\hline
3 & 2z-2 & z-1 \\
\hline
\end{array}
\\[2ex]
\vdots
\\[2ex]
\begin{array}{|c|c|c|}
\hline
z+1 & 2z-4 & 3 \\
\hline
2 & z & 2z-2 \\
\hline
2z-3 & 4 & z-1 \\
\hline
\end{array}
\\[2ex]
\begin{array}{|c|c|c|}
\hline
z+1 & 2z-3 & 2 \\
\hline
1 & z & 2z-1 \\
\hline
2z-2 & 3 & z-1 \\
\hline
\end{array}
\end{array}
\right\} \; 2z-3
$$

de onde deduzimos que neste caso existem $2z-3$ matrizes.

Em seguida, quando

- $\boldsymbol{a = z}$,

z	1	$2z-1$
$2z-1$	z	1
1	$2z-1$	z

$\vdots$

z	$2z-1$	1
1	z	$2z-1$
$2z-1$	1	z

$$2z-1$$

obtemos $2z-1$ novas matrizes.

Ora, quando

- $\boldsymbol{a = z - 1}$

$z-1$	3	$2z-2$
$2z-1$	z	1
2	$2z-3$	$z+1$

$\vdots$

$z-1$	$2z-1$	2
3	z	$2z-3$
$2z-2$	1	$z+1$

$$2z-3$$

existem $2z-3$ possibilidades admissíveis.

Avançando um pouco mais na nossa contagem, chegamos ao caso

- $a = 3$,

responsável pelas matrizes,

3	$2z-5$	$z+2$
$2z-1$	z	1
$z-2$	5	$2z-3$

3	$2z-4$	$z+1$
$2z-2$	z	2
$z-1$	4	$2z-3$

3	$2z-3$	z
$2z-3$	z	3
z	3	$2z-3$

3	$2z-2$	$z-1$
$2z-4$	z	4
$z+1$	2	$2z-3$

3	$2z-1$	$z-2$
$2z-5$	z	5
$z+2$	1	$2z-3$

portanto outras 5 a juntar à contagem.

Para

- $a = 2$,

obtemos 3 matrizes,

2	$2z-3$	$z+1$
$2z-1$	z	1
$z-1$	3	$2z-2$

2	$2z-2$	z
$2z-2$	z	2
z	2	$2z-2$

2	$2z-1$	$z-1$
$2z-3$	z	3
$z+1$	1	$2z-2$

Por fim, quando

- $\boldsymbol{a = 1}$

obtemos apenas a matriz

$\mathbf{1}$	$\mathbf{2z-1}$	$\boldsymbol{z}$
$\mathbf{2z-1}$	$\boldsymbol{z}$	$\mathbf{1}$
$\boldsymbol{z}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{2z-1}$

Uma vez que já atribuímos todos os valores viáveis para a entrada a e para cada um desses casos contabilizámos quantas matrizes distintas existem em concordância com o problema, podemos enunciar a seguinte:

Proposição 2.6.1 *Se* $\widetilde{H}_s$ *for o número de matrizes do tipo 3×3 com entradas naturais, onde cada uma das suas linhas, colunas e diagonais some* S*, então,*

$$\widetilde{H}_s = \frac{2S^2 - 6S + 9}{9}.$$

Prova:

Atendendo aos resultados obtidos na contagem temos que:

$$\begin{aligned}\widetilde{H}_s &= 1 + 3 + 5 + \cdots + (2z-3) + (2z-1) + (2z-3) + \cdots + 5 + 3 + 1 \\ &= (2z-1) + 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \text{ ímpar}}}^{2S-3} j\end{aligned}$$

De $z = \frac{S}{3}$, vem:

$$\widetilde{H}_s = \left(\frac{2}{3}S - 1\right) + 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \text{ ímpar}}}^{\frac{2}{3}S-3} j$$

Observemos que $\frac{2}{3}S - 1$ é um número ímpar, pois S é múltiplo de três. Por

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k\ \text{ímpar}}}^{m} k = \frac{(m+1)^2}{4}, \text{com } m \text{ ímpar}$$

obtemos:

$$\widetilde{H}_s = \left(\frac{2}{3}S - 1\right) + 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j\ \text{ímpar}}}^{\frac{2}{3}S-3} j$$

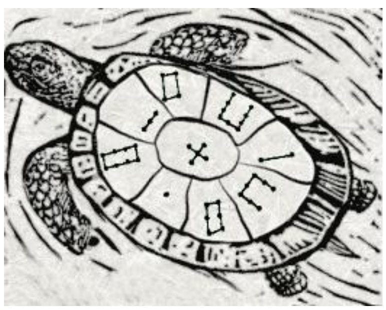
$$= \left(\frac{2}{3}S - 1\right) + 2\,\frac{(\frac{2}{3}S - 2)^2}{4}$$

$$= \frac{2S^2 - 6S + 9}{9}$$

Capítulo 3

Quadrados Mágicos

A história mais antiga dos quadrados mágicos permanece uma incógnita nos dias correntes. De facto a primeira referência indiscutível, é a lenda "Pergaminho do Rio Lo", protagonizada por Yu. Segundo [Smi53], [Boy89], [Ball60] e [Mart06], em 2200 A.C., o imperador-engenheiro Yu, foi o pioneiro na descoberta de quadrados mágicos. Reza a lenda que houve uma enorme inundação e o grande rei Yu tentou canalizar a água para o mar, quando emergiu uma tartaruga, em cujo dorso estava o símbolo que hoje é conhecido pelo nome de *Lo Shu,* uma estrutura puramente imagética que posteriormente foi substituída por algarismos.



4	9	2
3	5	7
8	1	6

Yu ficou intrigado pelo facto de cada linha, cada coluna e cada diagonal quando somadas totalizar 15. No entanto o que tornou esta lenda um marco histórico na China antiga foi o facto do calendário Chinês ser constituído por 24 ciclos, onde cada um deles possui 15 dias. Por esta particularidade *Lo Shu*, que mais tarde seria denominado por quadrado mágico, foi utilizado para monitorizar o rio de modo a evitar novas enchentes. Contudo a lenda não é elucidativa no sentido em que não especifica de que modo o quadrado mágico contribuiu para o efeito.

Segundo [Pick02], a Índia a par da China também foi uma das primeiras nações a dedicar-se a este estudo, mas a maior parte dos autores acredita que os quadrados mágicos expandiram-se da China para a India e [Smi53] afirma mesmo que nunca foi efectuado um estudo sério sobre a história dos quadrados mágicos na Índia. No entanto é de referir que relativamente às obras consultadas [Pick02] é a mais recente.

No século VII, segundo [Pick02], os quadrados mágicos eram conhecidos pelos Árabes. Como estes invadiram o Noroeste da Índia existe a suspeita que estes tenham apenas adoptado os conhecimentos sobre quadrados mágicos conhecidos pelos indianos. [Pick02] refere mesmo que os Árabes acreditavam que os quadrados mágicos possuíam grandes poderes referentes a todos os aspectos da vida.

Não se sabe ao certo como os conhecimentos sobre quadrados mágicos se expandiram, no entanto nos dias correntes servem de amuletos, na Índia e em muitos outros locais do sudeste da Ásia.

A introdução do tema na Europa, segundo [Ball60] e [Boy89] é atribuída ao escritor Manuel Moschopoulos, que no século XV os citou na sua obra intitulada "*Tratado de Quadrados Mágicos* ". No entanto, durante todo este século, foi um tema que não suscitou grande interesse matemático, pois surgia sempre associado a crenças míticas de âmbito religioso e astrológico. Por outro lado os astrólogos e os alquimistas ficaram fascinados pelos quadrados mágicos e segundo [Ball60], o próprio Cornelio Agrippa determinou sete quadrados mágicos e relacionou-os com os astros.

Os quadrados mágicos foram uma atracção alegórica, de modo que a primeira notícia da impressão de um quadrado mágico, como descreve [Smi53] e [Boy89] surge em 1500, pelo pintor e gravador alemão do Renascimento Albrecht Dürer, na sua gravura intitulada *Melancolia* onde apresentou o seguinte quadrado mágico.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Durante o século XVII a teoria matemática da construção dos quadrados mágicos foi estudada seriamente, pelos Franceses Simon de La Loubère, Claude Mézirac, Philippe de La Hire entre outros. De acordo com [Pick02] estes matemáticos foram decerto os primeiros a abordar o tema de forma séria sem qualquer associação mítica, motivando outros matemáticos a debruçarem-se sobre o tema.

Geralmente, um quadrado mágico caracteriza-se como sendo uma matriz quadrada de entradas naturais, não nulas, onde a soma de cada uma das linhas, cada uma das colunas e cada diagonal é exactamente a mesma. Além disso as entradas têm de ser todas distintas umas das outras. Ao quadrado mágico cujo número de linhas (e obviamente de colunas) é m e cujas somas são S denominamos quadrado mágico de ordem m e soma S.

Apesar desta ser a definição mais comum, é um assunto discutível. Manuel Moschopoulos, no " *Tratado de Quadrados Mágicos* ", definiu quadrado mágico como sendo uma tabela de números dispostos na forma de um quadrado, de tal modo que a soma dos elementos de uma linha, coluna ou diagonal seja uma constante, onde estes números devem ser inteiros e consecutivos, começados por 1. No entanto muitos matemáticos consideram esta definição demasiado rígida, pois engloba apenas os quadrados mágicos mais antigos excluindo a grande maioria.

Actualmente, existem quadrados mágicos imaginários, existem quadrados onde as diagonais não têm a mesma soma do que as linhas e as colunas, enfim existem quadrados que nem obedecem à definição mais comum, muito menos à definição restrita de Moschopoulos.

Na sequência do estudo que já elaboramos, para nós, um quadrado mágico será uma matriz de ordem 3 com entradas naturais, todas distintas, onde cada linha, coluna e diagonais tenham uma soma em comum. Para além de exigirmos que as entradas da matriz sejam todas distintas entre si vamos adoptar uma definição de quadrado mágico um pouco mais restrita e vamos exigir ainda que as entradas sejam naturais consecutivos. Naturalmente quando nos referimos aos naturais, à semelhança dos capítulos anteriores estamos a considerar o elemento zero como sendo um natural.

Neste capítulo, contrariamente aos anteriores, não iremos contabilizar o número de matrizes que se encontram em condições de se afirmarem quadrados mágicos, mas sim construir quadrados mágicos recorrendo ao estudo já efectuado. É de certo modo visível que o que distingue os quadrados mágicos das matrizes abordadas nas duas últimas secções do capítulo anterior, é o facto das entradas de um quadrado mágico serem naturais consecutivos. Deste modo é evidente que um quadrado mágico é um caso particular das matrizes abordadas nas Secções 5 e 6 do Capítulo 2, o que quer dizer que parte do estudo já elaborado, por exemplo a Proposição 2.5.1 terá utilidade nesta nova abordagem. Notemos ainda que a construção destas matrizes não é algo de novo. Como já foi referido o protagonismo recai no imperador-engenheiro Yu. Contudo o nosso interesse é relacionar os diferentes temas, e portanto ver de que modo um enigma de Henry Dudeney, classificado pelo mesmo como sendo um problema de combinatória é comparável ou pelo menos associável à construção de quadrados mágicos.

Contudo, vamos subdividir este capítulo em duas secções, na primeira vamos elaborar a nossa abordagem considerando entradas nulas e na segunda vamos excluir essa possibilidade.

3.1-Admitindo uma Entrada Nula

No capítulo anterior estudámos e contabilizámos determinadas matrizes, em particular matrizes quadradas de ordem 3 cujas somas das linhas, das colunas e das diagonais são iguais a S. Notemos que para uma matriz nestas condições ser considerada um quadrado mágico basta que as suas entradas sejam números naturais consecutivos e consequentemente distintas entre si. Deste modo, é natural, que o estudo já efectuado auxilie na construção de um quadrado mágico. Assim, nesta secção, pretendemos construir quadrados mágicos. O objectivo primordial não é contabilizá-los, contrariamente ao que foi efectuado para as matrizes, nos capítulos anteriores, embora essa tarefa também seja feita.

Consideremos então a seguinte estrutura,

a	b	c
d	z	e
f	g	h

onde a soma das entradas das respectivas linhas, colunas e diagonais é exactamente a mesma.

Como esta estrutura é idêntica à utilizada na Secção 2.5 e ainda estamos a analisar a situação em que a soma das respectivas linhas, colunas e diagonais é igual, consideremos,

$$S \equiv \text{"}soma\ das\ linhas, colunas\ e\ diagonais\text{"}$$

$$n = a + b + c + d + z + e + f + g + h \equiv \text{"}soma\ das\ entradas\ da\ matriz\text{"}$$

Assim as relações

$$S = \frac{n}{3}, \qquad z = \frac{S}{3}$$

também se verificam, basta atendermos à Proposição 2.5.1.

Suponhamos que os algarismos

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8

são as entradas de uma matriz. Notemos que estes valores minimizam n, pois não podemos atribuir entradas naturais inferiores a estas, sem que haja repetições.

De imediato podemos calcular n para estas entradas,

$$n = \sum_{k=0}^{8} k = 36 \tag{67}$$

e este resultado significa que, para ser possível construir um quadrado mágico de ordem 3, a soma de todas as entradas tem de resultar no mínimo 36.

Queremos que a respectiva matriz seja um quadrado mágico, já sabemos as suas entradas e assegurámos que de facto são todas distintas, falta descobrirmos que posições estas podem assumir, na respectiva matriz. Da Proposição 2.5.1 sabemos de imediato o valor da entrada intermédia, bem como a soma,

$$S = \frac{n}{3} = \frac{36}{3} = 12 \quad \wedge \quad Z = \frac{S}{3} = \frac{12}{3} = 4$$

Podemos deste modo enunciar a

Proposição 3.1.1 *Em qualquer quadrado mágico de ordem 3, a sua soma das linhas, colunas e diagonais, S, é um múltiplo de 3, no mínimo 12, e a entrada central é um terço da respectiva soma.*

Sabemos que para as entradas

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8

o elemento central tem de ser 4, portanto o quadrado em questão terá o seguinte aspecto

a	b	c
d	4	e
f	g	h

Não sabemos, a localização das restantes entradas, pelo que vamos, por tentativa e erro, tentar encontrar as respectivas localizações. Vamos supor que o elemento **8** fica numa das esquinas, por exemplo $f = 8$. Nesta situação temos,

	4	
8		

$$\xRightarrow[c+z+f=12]{S=12}$$

		0
	4	
8		

Mas como ambas as diagonais, à semelhança de cada linha e cada coluna, têm de totalizar 12, resulta,

$$a + d = g + h = S - 8 = 4$$

Ora, tal não é possível pois as entradas têm de ser todas distintas, de onde se conclui que nem f, nem outra qualquer esquina pode ser 8, analogamente também não pode ser 0.

Como os valores 0 e 8 terão de ser empregues, resta-nos analisar as situações,

$$b = 8 \dot{\vee}\, d = 8 \dot{\vee}\, e = 8 \dot{\vee}\, g = 8$$

que correspondem, respectivamente às estruturas

	8	
	4	
	0	

8	4	0

0	4	8

	0	
	4	
	8	

Além disso sabemos que cada linha e cada coluna têm de somar 12, e na linha/coluna onde tem o elemento 8 os restantes elementos têm de somar 4. E considerados os elementos do quadrado só é possível para 3 e 1. Temos então os seguintes casos:

1	8	3
6	4	2
5	0	7

Quadrado 1.1

3	8	1
2	4	6
7	0	5

Quadrado 1.2

1	6	5
8	4	0
3	2	7

Quadrado 1.3

3	2	7
8	4	0
1	6	5

Quadrado 1.4

5	6	1
0	4	8
7	2	3

Quadrado 1.5

7	2	3
0	4	8
5	6	1

Quadrado 1.6

5	0	7
6	4	2
1	8	3

Quadrado 1.7

7	0	5
2	4	6
3	8	1

Quadrado 1.8

Notemos que se considerarmos, por exemplo, o quadrado mágico 1.1, os quadrados 1.4, 1.5 e 1.8 correspondem às respectivas rotações e os restantes quadrados às transições. Deste modo podemos considerar apenas o quadrado 1.1 pois já sabemos que as suas simetrias, isto é, as rotações e transições, também são quadrados mágicos. Assim ao determinarmos um quadrado mágico, determinamos automaticamente mais outros sete casos.

Consideremos então o quadrado mágico 1.1, observemos que podemos, em relação a este quadrado, bem como outro qualquer, adicionar um natural k a cada uma das suas entradas obtendo deste modo um novo quadrado.

$1+k$	$8+k$	$3+k$
$6+k$	$4+k$	$2+k$
$5+k$	k	$7+k$

Novo Quadrado mágico

Constatamos que

$$\begin{cases} a+b+c=12+3k \\ d+z+e=12+3k \\ f+g+h=12+3k \\ a+d+f=12+3k \\ b+z+g=12+3k \\ c+e+h=12+3k \\ a+z+h=12+3k \\ c+z+f=12+3k \end{cases}$$

e todas as entradas são distintas entre si, ilustrando assim que, a nova matriz é de facto um quadrado mágico, de soma $12+3k$. Se atendermos ao facto de a nova entrada z ser definida por,

$$z=4+k=\frac{S}{3}$$

podemos enunciar a seguinte,

Proposição3.1.2 *Se considerarmos S, um múltipo de 3 superior a 9, então é sempre possível construir um quadrado mágico de ordem 3 e soma S, basta que a matriz tenha a seguinte forma*:

$z-3$	$z+4$	$z-1$
$z+2$	z	$z-2$
$z+1$	$z-4$	$z+3$

onde $z=\frac{S}{3}$. E efectuando todas as simetrias da matriz obtemos outros quadrados mágicos possíveis.

Inicialmente assumimos que, para uma matriz ser considerada um quadrado mágico, todas as suas entradas teriam de ser naturais consecutivos. Vejamos se a proposição anterior generaliza todos os quadrados mágicos de ordem 3. Já sabemos que, independentemente da soma S a entrada central será sempre $\frac{S}{3}$. De (64) e por ser exigido que as entradas sejam naturais consecutivos, sabemos que as entradas de um quadrado mágico de ordem 3 são,

$$\begin{cases} z=\frac{S}{3} \\ a,b,c,d,e,f,g,h \ \in\{z-4,z-3,z-2,z-1,z+1,z+2,z+3,z+4\} \end{cases} \tag{68}$$

Mas para estas entradas sabemos, pela Proposição anterior, que as matrizes,

$z-3$	$z+4$	$z-1$
$z+2$	z	$z-2$
$z+1$	$z-4$	$z+3$

$z-1$	$z-2$	$z+3$
$z+4$	z	$z-4$
$z-3$	$z+2$	$z+1$

$z+3$	$z-4$	$z+1$
$z-2$	z	$z+2$
$z-1$	$z+4$	$z-3$

$z+1$	$z+2$	$z-3$
$z-4$	z	$z+4$
$z+3$	$z-2$	$z-1$

$z-1$	$z+4$	$z-3$
$z-2$	z	$z+2$
$z+3$	$z-4$	$z+1$

$z-3$	$z+2$	$z+1$
$z+4$	z	$z-4$
$z-1$	$z-2$	$z+3$

$z+1$	$z-4$	$z+3$
$z+2$	z	$z-2$
$z-3$	$z+4$	$z-1$

$z+3$	$z-2$	$z-1$
$z-4$	z	$z+4$
$z+1$	$z+2$	$z-3$

são de facto quadrados mágicos. Podemos ainda verificar que são os únicos quadrados mágicos, pois não é possível construir nenhum quadrado mágico com uma das formas

$z+2$		
	z	
		$z-2$

$z-2$		
	z	
		$z+2$

$z+4$		
	z	
		$z-4$

$z-4$		
	z	
		$z+4$

excluindo assim, a hipótese de existirem outros quadrados mágicos, distintos dos enunciados pela Proposição 3.1.2. Assim podemos enunciar o seguinte,

Corolário 3.1.2 *Se considerarmos S, um múltipo de 3 superior a 9, então existem no total 8 quadrados mágicos de ordem 3 e soma S.*

3.2-Sem Entradas Nulas

Nesta secção iremos construir quadrados mágicos, tal como na secção anterior, mas com a particularidade da matriz não ter entradas nulas. Ora, se observarmos o método anterior, as matrizes da forma

$z-3$	$z+4$	$z-1$
$z+2$	z	$z-2$
$z+1$	$z-4$	$z+3$

só admitem entradas nulas quando $z = 4$, pois $z = \frac{S}{3}$ e S é um múltiplo de 3 superior a 9. Assim para construir um quadrado mágico sem entradas nulas basta que $z \neq 4$, ou seja, $S \neq 12$, de onde podemos concluir,

Proposição3.1.2 *Se considerarmos S, um múltiplo de 3 superior a 12, então é sempre possível construir um quadrado mágico de ordem 3 e soma S, sem admitir entradas nulas, bastando que a respectiva matriz assuma a forma,*

$z-3$	$z+4$	$z-1$
$z+2$	z	$z-2$
$z+1$	$z-4$	$z+3$

onde $k = \frac{S}{3}$. E as 7 simetrias da respectiva matriz correspondem aos restantes quadrados mágicos de ordem 3 e soma S.

Conclusão

Ao concluirmos o nosso estudo verificámos que o enigma do monge exigiu uma análise meticulosa, no sentido em que para abordá-lo foram efectuadas inúmeras observações para evitar erros de contagem e simultaneamente estas observações foram determinantes na escolha da estratégia de contagem adoptada, quer no caso particular, quer no geral.

Relembrando, o nosso objectivo no primeiro capítulo foi contabilizar o número de formas possíveis de distribuir cães numa estrutura de canis representável por uma matriz quadrada de ordem 3, de modo que cada linha e cada coluna exteriores somasse 10. Na primeira secção foi abordado o caso clássico, onde o canil central não era utilizado podendo existir ainda outros canis sem ocupação e verificámos que esta modalidade do problema admite 2926 distribuições possíveis. Na secção seguinte o canil central continuou sem ser utilizado mas, neste caso, foi o único sem ocupação. Nestas condições apurámos 2211 distribuições distintas. Já na terceira secção, o canil central pôde ser utilizado para albergar cães e puderam existir canis vazios. Nesta abordagem a linha e a coluna centrais também somavam 10 e para esta situação contabilizámos 876 casos. Por fim na quarta e última secção do mesmo capítulo abordámos o caso em que todos os canis albergavam cães e todas as linhas e colunas da matriz somavam 10. Neste caso concluímos que existiam 666 possibilidades. Relativamente a estes resultados o facto mais curioso foi termos iniciado a nossa análise do caso mais geral até o caso mais específico, o que de certa forma era esperado, pois partimos do caso clássico e fomos impondo restrições de modo sucessivo. Assim constatamos que o caso clássico acolhe todas as distribuições abordadas na Secção 1.2. Por outro lado, a Secção 1.3 apesar de ter distribuições distintas do caso clássico (basta o canil central não estar vazio) conseguimos contabilizar todas as suas distribuições recorrendo apenas ao caso clássico, não sendo necessária uma contagem extensiva. De modo semelhante, a contagem das distribuições da Secção 1.4 foi efectuada por intermédio da Secção 1.3.

As quatro primeiras secções do Capítulo 2 são generalizações das quatro secções do Capítulo 1. Portanto, apesar da linguagem empregue no segundo Capítulo ser mais específica que a anterior, os respectivos problemas foram exactamente os abordados no Capítulo 1 mas nesta instância para uma soma qualquer não necessariamente 10. Ora, nestas quatro Secções voltámos a verificar a mesma relação observada nas soluções anteriores, ou seja, todas as distribuições da Secção 2.2 são distribuições da Secção 2.1, a contagem das distribuições da Secção 2.3 foi efectuada por intermédio da Secção 2.1 e de modo análogo, as distribuições da Secção 2.4 foram contabilizadas recorrendo à Secção 2.2. Constatámos ainda que na terceira e na quarta secções não necessitámos efectuar toda a contagem, pois a análise efectuada em ambos os casos permitiu deduzir os respectivos valores directamente a partir dos resultados obtidos nas secções 1 e 2, como ilustram as Proposições 2.3.1 e 2.4.1. Ainda neste capítulo foram elaboradas mais duas secções onde foram envolvidas as duas diagonais e portanto analisámos o caso em que, para além de ser exigido que cada linha e cada coluna tivesse a mesma soma, era exigido que a soma de cada uma das diagonais fosse também a mesma. A diferença entre a quinta e a sexta secção diz respeito à possibilidade de existirem, ou não, canis vazios, À semelhança dos casos anteriores primeiro abordámos o caso onde admitimos a existência de canis vazios e só depois o caso oposto. Relativamente a estas duas últimas secções foi necessário elaborar uma nova estratégia para a respectiva contagem, e verificámos ainda que nem sempre faz sentido considerar estes dois últimos casos, em particular quando a soma a considerar é 10, razão pela qual o Capítulo 1 é constituído por apenas 4 secções. Pelo que verificámos na Proposição 2.5.1 só faz sentido considerar as diagonais quando a soma considerada é um múltiplo de 3.

Uma vez finalizados estes dois capítulos foi efectuada uma pesquisa com o objectivo de tentar identificar outras abordagens ao tema, ou resultados relacionados. Nesta pesquisa chegamos aos quadrados mágicos de ordem 3 e observámos que a estrutura de canis do nosso problema era muito semelhante a um quadrado mágico. Então efectuámos uma nova abordagem a uma questão que já é estudada há mais de 3000 anos. Obviamente, o nosso objectivo nunca foi encontrar um novo quadrado mágico, pois todos os quadrados que abordámos já foram descobertos anteriormente, mas sim relacioná-lo com o enigma abordado. Assim constatámos que qualquer quadrado mágico de ordem 3 verifica a Proposição 2.5.1. Esta foi provavelmente a constatação mais imprescindível na construção de um quadrado mágico de ordem 3, pois exclui de imediato a possibilidade de construir um quadrado onde a respectiva soma é um número não múltiplo de 3 e além disso declara que o elemento central será sempre um terço da soma. Neste capítulo conseguimos, única e exclusivamente à custa dos resultados anteriores, encontrar uma forma generalista de escrever um quadrado mágico desde que a soma a considerar seja, naturalmente, um múltiplo de três, superior a 9, quando admitimos o elemento nulo e superior a 12 quando não admitimos essa possibilidade, resultados estes descritos nas Proposições 3.1.2 e 3.2.1, respectivamente.

Propostas de desenvolvimento futuro

Como já referimos um dos factores mais intrigantes do enigma do monge é a sua espontaneidade em ser reformulado, ou seja, para cada questão que abordámos surgiu uma outra questão e cada uma dessas questões proporcionou-nos um novo problema. Concluindo este projecto é inevitável alguma frustração, pois embora todos os objectivos traçados inicialmente tenham sido alcançados surgiram novas questões, questões sobre as quais nos propomos futuramente debruçar.

Por exemplo, quando abordámos os quadrados mágicos considerámos que só poderiam ser considerados quadrados mágicos as matrizes cujas entradas eram naturais consecutivos e onde as somas das linhas, colunas e diagonais, quando somadas, resultavam exactamente o mesmo valor. Nestas condições estudámos a forma dos quadrados e ainda deduzimos que para cada soma fixa existiam exactamente 8 quadrados mágicos. É evidente que esta definição de quadrado mágico é muito restrita, deste modo é pertinente questionarmos que resultados obteríamos se tivéssemos adoptado uma definição menos exigente. (Por exemplo, se apenas exigíssemos que as entradas fossem naturais distintos, não necessariamente consecutivos).

Outra questão pertinente é o facto da estrutura de canis ser semelhante a uma matriz 3x3. Porque não 5x5? Ou 7x7? Ou seja, pretendemos futuramente generalizar o enigma do monge para os casos em que a respectiva estrutura de canis não é necessariamente uma matriz 3x3, mas sim de $n \times n$ onde $n = 3 + 2m, com\ m \in \mathbb{N}$ fixo. Portanto generalizar o problema para as matrizes que contêm uma entrada central.

Apesar de permanecerem algumas questões em aberto, temos a percepção de que toda a análise efectuada necessitou de alguns cuidados específicos e o aprimoramento de muito raciocínio lógico. Ora, os quadrados mágicos são muitas vezes utilizados como meios de intervenção pedagógica para desenvolver estas capacidades humanas, de uma forma muito especial nas crianças, através de actividades lúdicas, pois estas associam a actividade a um mero meio de diversão/entretenimento, sem sentirem o peso dos conceitos que estão a adquirir e a desenvolver. Assim, é de certo modo evidente que todo o estudo que elaborámos será de certo modo possível modelar às capacidades intelectuais de uma criança, em particular poderá ser uma ferramenta que permita à criança explorar diferentes estratégias para efectuar adições e subtracções bem como compreender a relação entre estas duas operações. Naturalmente este meio de mediação pedagógica não tem necessariamente de ser dirigido a crianças. Por exemplo na educação sénior poderá revelar-se um forte instrumento de intervenção. O que deverá ser fundamental é a forma como o tema é abordado pois, quer a linguagem, quer as exigências de uma actividade desta natureza deverão ser apropriadas à idade e aos conhecimentos do respectivo interveniente. Deste modo a actividade deverá, por um lado, possuir algum grau de dificuldade de forma a estimular a sua execução e, por outro, essa dificuldade não deverá ser extrema para evitar o efeito recíproco. Esta proposta é sem sombra de dúvida a mais motivante em termos de futuro, pois no nosso entender seria o complemento de todo o trabalho já efectuado e de certo modo a forma de dar utilidade prática a um projecto que à partida não foi executado nessa perspectiva.

Bibliografia

[Dud08]-----------Dudeney, Henry (2008); *Os enigmas de Caterbury*; R.B.A. Coleccionables, S.A.;

[Smith53]---------Smith, D.E. (1953); *History of Mathematics,* volume II *Special topics of elementary Mathematics*; Dover Publications, inc. New Yotk;

[Boy89]-----------Boyer, Carl B. (1989); *A History of Mathematics,* second edition; Jonhn Wiley & Sons;

[Brag15]----------Bragdon, Claud (1915); *Projective Ornament*; Dover Publications;

[Ball60]-----------Ball, w. w. Rouse (1960); *A short account of the history of mathematics;* Dover Publications;

[Mart06]----------Martzloff (2006), Jean-Claude*; A History of Chinese Mathematics;* Springer Editions;

[Pick02]----------Pickover, Cliffor A. (2002); *The Zem of Magic Squares, Circles, and Stars*; Princetom University Press;

[Leu05]----------Leung, Frederick; Graf, Klaus-D.; Lopez-Real, Francis J. (2005); Mathematics education in different cultural traditions: a comparative study of East Asia and East Asia and West; Springer Science & Busness Media, Inc.; Pg 102;

[Ame]------------American Education Publishing; *The Complete Boock of Brain teasers;* Phyllis Sibbing B.S. Editions, Pg 17, 103;

[Hors03]--------Horstmann, Cay (2003); *Conceitos de Computação com essencial de Java*; 3ª edição; Artmed Editora S.A.; Pg 514;

[Poo04]---------Poole, David (2004); *Álgebra Linear*; Thomson Learning Ltda; Pg 385-386;

[Gard84]--------Gardner, Martin (1984*); Festival Magico – Matematico*; Alianza Editorial, Madrid.

Anexo:
-Prova de alguns resultados

Prova das seguintes igualdades:

$$1)\ \sum_{\substack{k=0 \\ k\ par}}^{m} k = \frac{m(m+2)}{4}, \text{com } m \text{ par;}$$

$$2)\ \sum_{\substack{k=1 \\ k\ ímpar}}^{m} k = \frac{(m+1)^2}{4}, \text{com } m \text{ ímpar;}$$

$$3)\ \sum_{\substack{k=0 \\ k\ par}}^{m} k^2 = \frac{m(m+1)(m+2)}{6}, \text{com } m \text{ par;}$$

$$4)\ \sum_{\substack{k=1 \\ k\ ímpar}}^{m} k^2 = \frac{m(m+1)(m+2)}{6}, \text{com } m \text{ ímpar;}$$

Antes de mais observemos que os dois primeiros somatórios representam uma progressão aritmética de razão 2. Então basta sabermos quantas parcelas tem cada um dos casos para verificarmos a veracidade destas igualdades. Pois sabemos que se $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for uma progressão aritmética de razão 2 então a soma S_n dos primeiros $n+1$ termos é dada por:

$$S_n = \frac{\alpha_0 + \alpha_n}{2}.2$$

onde α_0 e α_n representam respectivamente o primeiro e o último termos da soma.

Comecemos por considerar,

$$\sum_{\substack{k=0 \\ k\ par}}^{m} k, \text{com } m \text{ par}$$

Ora para m par, temos,

$$\sum_{\substack{k=0 \\ k\ par}}^{m} k \ = 2 + 4 + \cdots + (m-2) + m$$

$$= \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{\frac{m}{2}-2} + \alpha_{\frac{m}{2}},$$

com $\alpha_n = 2n$, de onde deduzimos que o somatório tem $\frac{m}{2}$ termos, bem como $\alpha_1 = 2 \wedge \alpha_{\frac{m}{2}} = m$, pelo que,

$$\sum_{\substack{k=0 \\ k\ par}}^{m} k = \frac{m(m+2)}{4}, \text{sempre que } m \text{ é par.}$$

c.q.d

Analogamente, se considerarmos m ímpar basta atendermos a

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k\ ímpar}}^{m} k = 1 + 3 + 5 + \cdots + (m-2) + m$$

$$= \alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_{\frac{m-2}{2}} + \alpha_{\frac{m-1}{2}}$$

com $\alpha_n = 1 + 2n$. Assim, facilmente resulta,

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k\ ímpar}}^{m} k = \frac{(m+1)^2}{4}, com\ m\ ímpar$$

c.q.d

Passemos à prova da igualdade 3). É sobejamente conhecida a igualdade:

$$(*) \quad \sum_{k=0}^{m} k^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} \;;$$

Supondo que m é par, objectivando calcular

$$\sum_{\substack{k=0 \\ k\ par}}^{m} k^2$$

Consideremos então,

$$\sum_{\substack{k=0 \\ k\ par}}^{m} k^2 = S$$

Temos :

$$S = 2^2 + 4^2 + 6^2 + \cdots + (m-4)^2 + (m-2)^2 + m^2$$

$$= 4\left[1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + \left(\frac{m-4}{2}\right)^2 + \left(\frac{m-2}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{2}\right)^2\right]$$

da igualdade $(*)$ resulta:

$$S = 4\,\frac{\frac{m}{2}\left(\frac{m}{2}+1\right)(m+1)}{6} = \frac{m(m+1)(m+2)}{6}$$

ou seja,

$$\sum_{\substack{k=0 \\ k\ par}}^{m} k^2 = \frac{m(m+1)(m+2)}{6}, \text{sempre que } m \text{ é par}$$

c.q.d.

Pretendendo estabelecer a quarta igualdade, assumamos que m é ímpar e consideremos o somatório

$$\sum_{k=1}^{m} k^2$$

Para este resultado, como estamos a admitir m é ímpar podemos separar os casos pares dos ímpares, obtendo:

$$\sum_{k=1}^{m} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + (m-4)^2 + (m-3)^2 + (m-2)^2 + (m-1)^2 + m^2$$

$$= [1^2 + 3^2 + \cdots + (m-4)^2 + (m-2)^2 + m^2] + [2^2 + 4^2 + \cdots + (m-3)^2 + (m-1)^2]$$

Mas, como

$$\sum_{k=0}^{m} k^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$$

e

$$\sum_{\substack{k=2 \\ k\ par}}^{m-1} k^2 = \frac{(m-1)m(m+1)}{6}, \text{com } (m-1) \text{ par}$$

Deduzimos,

$$\frac{m(m+1)(2m+1)}{6} = \sum_{\substack{k=1 \\ k\ ímpar}}^{m} k^2 + \frac{(m-1)m(m+1)}{6}$$

de onde resulta a igualdade:

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k\ ímpar}}^{m} k^2 = \frac{m(m+1)(m+2)}{6}, \text{sempre que } m \text{ é ímpar}$$

c.q.d.