

DM

# A Dinâmica do Modelo Populacional de Ricker

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Jorge Tomé de Andrade Alves**

MESTRADO EM MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E APLICAÇÕES



UNIVERSIDADE da MADEIRA

*A Nossa Universidade*

[www.uma.pt](http://www.uma.pt)

junho | 2023

# **A Dinâmica do Modelo Populacional de Ricker**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Jorge Tomé de Andrade Alves**

MESTRADO EM MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E APLICAÇÕES

ORIENTAÇÃO

Rafael Domingos Garanito Luís

## **A dinâmica do modelo populacional de Ricker**



## Resumo

O modelo de Ricker é um dos vários modelos utilizados em ecologia para descrever a dinâmica populacional que depende da densidade ao longo do tempo, observada em intervalos de tempo discreto. Este modelo é adequado para estudar espécies onde as estimativas anuais (ou geracionais) de abundância são caracterizadas adequadamente como dinâmica populacional e para transições entre estágios da história de vida, tais como produção de descendentes ou sobrevivência de um estágio para o próximo. A última aplicação é comum na ciência da pesca, onde o modelo de Ricker é frequentemente usado para relacionar a produção de recrutas (peixes jovens que sobrevivem para se juntar à população) a fatores na densidade observada, tais como abundância, biomassa total ou potencial total de desova de peixes adultos, como parte de um modelo populacional abrangente.

O objetivo deste trabalho é aplicar alguns resultados da teoria de estabilidade de sistemas dinâmicos discretos ao Modelo de Ricker. Em particular, estudamos a dinâmica populacional em ambos os casos, no modelo autônomo e no modelo não autônomo.

## Palavras-Chave

Modelo de Ricker; Equações de diferenças; Sistema dinâmico discreto; Pontos fixos; Periodicidade; Estabilidade.



## **Abstract**

The Ricker model is one of several models used in ecology to describe population dynamics that depend on density over time, observed at discrete intervals. This model is suitable for studying species where annual (or generational) estimates of abundance are adequately characterized as population dynamics, and for transitions between life history stages, such as offspring production or survival from one stage to the next. The latter application is common in fisheries science, where the Ricker model is frequently used to relate the production of recruits (young fish that survive to join the population) to factors in observed density, such as abundance, total biomass, or total potential spawning of adult fish, as part of a comprehensive population model.

The objective of this work is to apply some results from the theory of stability of discrete dynamic systems in the Ricker model. In particular, we study population dynamics in both autonomous and non-autonomous cases.

### **Key words**

Ricker model; Difference equations; Discrete dynamical system; Fixed points; Periodicity; Stability.



## Agradecimentos

A Deus Pai Todo-Poderoso, meu criador que esteve desde o momento do meu nascimento, cuidando de mim, me protegendo e me dando boa sorte no momento certo, para continuar com sua santa bênção.

Aos meus pais Jorge Manuel De Andrade Jardim e Maria José Alves Da Silva de Andrade e ao meu irmão Fabio José De Andrade Alves, por me darem todo o seu amor, apoio e compreensão ao longo da minha vida e incentivo constante para continuar o meu mestrado em matemática, estatística e aplicações.

À minha avó materna Maria Félix Alves, ao meu tio Agostinho Alves Da Silva e ao meu padrinho José Tomé Alves Silva que sempre confiaram em mim.

Ao Professor Rafael Domingos Garanito Luís, meu orientador, por toda a orientação e apoio incondicional imprescindíveis na realização deste trabalho.

À Dra. Luciana Maria Jardim Ferreira por ser meu apoio incondicional, minha psicoterapeuta, amiga, confidente e orientadora que todos os dias me ajudou a focar nos estudos, incentivou e fez tudo humanamente possível para me orientar no mestrado e em parte da minha vida.

Aos meus colegas de mestrado pela ajuda e camaradagem ao longo destes 3 anos.

Aos meus professores, que também foram fundamentais no meu percurso acadêmico e formação profissional.



## Índice

Introdução .....	1
1 Análise do Modelo de Ricker para uma espécie .....	5
1.1 Modelo de Ricker autônomo.....	5
1.2 Modelo de Ricker Periódico .....	20
2 Análise do Modelo de Ricker para duas espécies .....	27
2.1 O modelo de competição Ricker .....	27
2.1.1 Estabilidade dos pontos de extinção e exclusão .....	29
2.1.2 Estabilidade do ponto fixo de coexistência: O caso $ab < 1$ .....	36
2.2 Os coletores estáveis e instáveis.....	41
2.2.1 Caso (i): $ab > 1$ .....	41
2.2.2 Caso (ii): $ab < 1$ .....	45
2.2.3 O ponto fixo de exclusão .....	46
2.3 Cenários de bifurcação .....	47
2.4 Modelo de competição de Ricker periódico .....	52
2.4.1 Existência de uma possível solução.....	52
2.4.2 A dinâmica do ciclo.....	61
2.4.3 Estabilidade.....	64
2.4.4 Um cenário de bifurcação a partir de simulações computacionais .....	67
2.4.5 Atenuância e ressonância .....	77
3 Conclusão.....	81
4 Bibliografia .....	83
Apêndice A: Variedades invariantes.....	89



## Lista de Figuras

Figura 1.1: Gráfico de $g_x = xe^{1,5-x} - 1,5$ . O zero de $g_x$ à esquerda de $1,5$ é um eventual ponto fixo do modelo de Ricker (1.2) já que $f(0,625) = 1,5$ . .....	7
Figura 1.2: Quando $0 < p \leq 2$ , o ponto fixo $x^* = p$ do modelo de Ricker (1.2) é assintoticamente localmente estável. Fonte: Imagem retirada da referência [65]. .....	11
Figura 1.3: Quando $p > 2$ , o ponto fixo $x^* = p$ do modelo de Ricker (1.2) é instável. Fonte: Imagem retirada da referência [65]. .....	12
Figura 1.4: Gráfico do 2-ciclo e eventual 2-ciclo. ....	14
Figura 1.5: Duplicação de período: O aparecimento de ciclos assintoticamente estáveis de período 2, 4, 8, 16, .... Fonte: Imagem retirada da referência [21]. .....	15
Figura 1.6: A aparência do período 3. Fonte: Imagem tomada da referência [21]. .....	16
Figura 1.7: O aparecimento de períodos ímpares e o caos “máximo” em $p = 4$ . Fonte: Imagem tomada da referência [21]. .....	18
Figura 1.8: Gráfico dos diferentes modelos de Ricker com o ponto fixo. ....	22
Figura 1.9: Região $S$ de estabilidade global, no espaço dos parâmetros $r_0$ o $r_1$ , para o ..... modelo de Ricker (8) de período 2. Fonte: Imagem tomada da referência [7]. .....	24 24
Figura 1.10: O mapa $\Phi_2$ possui mais de um ponto fixo na região $R_2$ entre as duas curvas, incluindo-as, mas excluindo o vértice (2, 2). Fonte: Imagem tomada da referência [7]. .....	25
Figura 1.11: Região $R$ onde o mapa $\Phi_2$ possui um ponto fixo globalmente estável. As linhas sólidas azuis correspondem às curvas onde o equilíbrio se torna instável, e estão incluídas na região de estabilidade global. As linhas azuis tracejadas correspondem às curvas onde um novo ponto aparece, e eles não estão incluídos na região de estabilidade global, com a única exceção do ponto (2, 2). Fonte: Imagem tomada da referência [7]. .....	26
Figura 2.1: A estabilidade do ponto fixo de exclusão e a validade do princípio de exclusão da concorrência. (i) Se $0 < K \leq 2$ e $L < bK$ , então $K, 0$ é localmente assintoticamente estável e espécie $e$ se extingue. (ii) Se $0 < L \leq 2$ e $L > \frac{K}{a}$ , então $0, L$ é localmente assintoticamente estável e a espécie $x$ é extinta. Fonte: Imagem tomada da referência [34]. .....	31
Figura 2.2: Isoclínicas - (a) O ponto fixo de coexistência da equação (2.2) existe se $bK < L < \frac{K}{a}$ e $ab < 1$ . (b) Só existe o ponto fixo de coexistência da equação (2.2) se $\frac{K}{a} < L < bK$ e $ab > 1$ , neste cenário, este equilíbrio é uma sela. Fonte: Imagem tomada da referência [34]. .....	31
Figura 2.3: As regiões de estabilidade no espaço dos parâmetros da solução do modelo de competição de Ricker (2.2) quando $a > 0$ e $b > 0$ tal que $ab < 1$ . Onde, os valores dos parâmetros de competição são $a = b = 0,5$ . Fonte: Imagem tomada da referência [34]. .....	32
Figura 2.4: Parte dos valores da derivada Schwarziana do novo mapa central para o ponto de coexistência fixa. Nesta simulação, usamos valores da capacidade de carga $K$ no intervalo (0, 3] e os parâmetros de competição estão no intervalo (0, 2] tal que $ab < 1$ . Fonte: Imagem tomada da referência [34]. .....	40

Figura 2.5: A região de sela  $Z$ , no espaço de parâmetros  $K$  e  $L$ , quando  $a = 2$  e  $b = 1,5$ . Fonte: Imagem tomada da referência [34]. ..... 44

Figura 2.6: A região de sela  $Z$ , no espaço paramétrico  $K$  e  $L$ , quando  $a = b = 0,5$ . Fonte: Imagem tomada da referência [34]. ..... 46

Figura 2.7: A presença de bifurcação subcrítica no modelo autônomo de competição do tipo Ricker (1.6). Fonte: Imagem tomada da referência [34]. ..... 51

Figura 2.8: Quatro cenários diferentes no qual um modelo de competição de Ricker  $F_i$  tem um valor máximo nos eixos. Os valores dos parâmetros de competição são fixos como que  $ab < 1$ , nestas curvas  $a = b = 12$ . Fonte: Imagem tomada da referência [33]. ..... 53

Figura 2.9: A posição das isoclínicas e dos conjuntos  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  e  $\Gamma_4$ , no primeiro quadrante, para cada um das quatro situações em que o mapa  $F_i$  tem o valor máximo nos eixos. I -  $e^{K_i-1} < \frac{L_i}{b_i}$  e  $e^{L_i-1} < \frac{K_i}{a_i}$ ; II -  $e^{K_i-1} > \frac{L_i}{b_i}$  e  $e^{L_i-1} > \frac{K_i}{a_i}$ ; III -  $e^{K_i-1} > \frac{L_i}{b_i}$  e  $e^{L_i-1} < \frac{K_i}{a_i}$ ; e IV -  $e^{K_i-1} < \frac{L_i}{b_i}$  e  $e^{L_i-1} > \frac{K_i}{a_i}$ . Fonte: Imagem tomada da referência [33]. ..... 55

Figura 2.10: Os conjuntos e as isoclínicas quando o máximo do mapa  $F_i$  é menor que um. Fonte: Imagem tomada da referência [33]. ..... 58

Figura 2.11: O progresso da derivada Schwarziana do mapa Ricker bi-periódico unidimensional  $\Phi_2$  em  $(x_0)$  quando os parâmetros  $\lambda_0$  e  $\lambda_1$  estão nas curvas de bifurcação de duplicação do período. Fonte: Imagem tomada da referência [33] ..... 70

Figura 2.12: O cenário de bifurcação no espaço dos parâmetros do mapa  $\Phi_2 = R_1 \circ R_0$ . Fonte: Imagem tomada da referência [33]. ..... 72

Figura 2.13: O cenário de bifurcação da equação de competição Ricker 2-periódica no espaço dos parâmetros  $(K_0, K_1)$  quando a capacidade de carga  $L$  e os parâmetros de competição  $a$  e  $b$  são fixos. Fonte: Imagem tomada da referência [33]. ..... 74

Figura 2.14: O cenário de bifurcação da equação (2.33) no espaço de parâmetros  $K_0, L_0$  quando  $K_1 = \frac{1}{2}$ ,  $L_1 = \frac{1}{10}$ , e  $a = b = \frac{1}{2}$ . Fonte: Imagem tomada da referência [33]. ..... 75

Figura 2.15: Alguns exemplos do cenário de bifurcação da equação (2.33) no espaço de parâmetros  $K_0, L_0$ . Fonte: Imagem tomada da referência [33]. ..... 77

## Lista de tabelas

Tabela 1.1: Valores de $x_n$ e $f^n(x_0)$ .	8
Tabela 1.2: Valores de $n$ e $p_n$ (onde ocorrem as bifurcações)	16



## Introdução

Um modelo populacional é um tipo de modelo matemático aplicado ao estudo da dinâmica populacional. Os modelos possibilitam uma melhor compreensão de como funcionam as interações e processos complexos. A modelação de interações dinâmicas na natureza pode facultar uma maneira tratável de perceber como os números mudam ao longo do tempo ou em relação uns aos outros. Muitos padrões podem ser observados usando a modelação populacional como ferramenta [67].

A modelação populacional refere-se a mudanças em parâmetros como a dimensão da população e distribuição etária dentro de uma população. Isso pode ser devido a interações com o meio ambiente, indivíduos da sua própria espécie ou outras espécies. Os modelos populacionais são usados para compreender a dinâmica das invasões biológicas e para a conservação ambiental, também são usados para compreender a propagação de parasitas, vírus e doenças [68].

Outra forma pela qual os modelos populacionais são úteis é quando as espécies ficam ameaçadas. Os modelos populacionais podem procurar espécies frágeis e trabalhar para retardar o seu declínio.

O modelo Ricker, em homenagem a Bill Ricker<sup>1</sup>, importante promotor da ciência da pesca, é um modelo clássico de dinâmica populacional discreta, que fornece o número esperado  $x_{n+1}$  (ou densidade) de indivíduos na geração  $n + 1$  em função do número de indivíduos na geração anterior. Este modelo é definido pela equação

$$x_{n+1} = x_n e^{p-x_n},$$

onde  $x_n \geq 0$  representa a densidade da população no período de tempo  $n$  e o parâmetro  $p$  representa a capacidade de suporte (ou de carga) da população.

Desde a implementação do Modelo de Ricker houve inúmeras descobertas, principalmente nas ciências que se dedicam ao estudo da pesca, mas também nas ciências biológicas para estudar a dinâmica de como uma população reagirá a qualquer efeito no seu ecossistema.

---

<sup>1</sup> William Edwin Ricker, (11 de agosto de 1908 - 8 de setembro de 2001) foi um importante dinamizador da ciência pesqueira. Foi conhecido pelo modelo de Ricker, que desenvolveu nos seus estudos de stock e recrutamento na pesca. Também teve projeção internacional como entomologista e editor científico. Publicou 296 artigos e livros, 238 traduções e 148 manuscritos científicos ou literários. A publicação de 1958, "Manual de computação para estatísticas biológicas de populações de peixes" e atualizações posteriores foram livros padrão sobre o assunto por décadas.

## Modelo de Ricker Autônomo e Periódico

O modelo de Ricker é um dos vários modelos simples para descrever a dinâmica populacional dependente da densidade, para uma única espécie em termos de mudanças na abundância observadas em intervalos discretos. É adequado para estudos de espécies para as quais estimativas anuais (ou geracionais) de abundância caracterizam adequadamente a dinâmica das populações e como o modelo para transições entre etapas da história de vida, como a produção de descendentes ou sobrevivência de uma etapa para a próxima. Isto é uma prática comum na ciência da pesca, onde o modelo de Ricker é frequentemente usado para relacionar a produção de recrutas (peixes jovens que sobrevivem para se juntar à população) a algum índice da densidade geracional, como abundância, biomassa total, ou potencial total de desova de peixes adultos, como parte de um modelo populacional abrangente [62].

Para populações muito pequenas, as taxas de reprodução e sobrevivência dos indivíduos aumentam com a densidade populacional. Isso contrasta com populações maiores, onde uma maior densidade populacional retarda a taxa de crescimento de população devido à competição.

Existem dois tipos de modelo de Ricker:

- (i) O modelo autônomo onde a dinâmica do sistema é dada pela mesma função ao longo do tempo. Este tipo de sistemas prevê a evolução sem considerar mudanças ao longo do tempo. Por outras palavras, a equação que gera o sistema tem parâmetros constantes.
- (ii) O modelo não autônomo, isto é, equações de diferenças cujo lado direito depende explicitamente da mudança ao longo do tempo. Em concreto, as sequências de parâmetros constantes são substituídas por sequências de parâmetros dependentes do tempo. Consequentemente, influências sazonais, efeitos externos e outros mecanismos são permitidos nos modelos não-autónomos. Serão porventura os que melhor descrevem a evolução populacional.

No primeiro capítulo, estudamos o modelo de Ricker autônomo e o modelo de Ricker periódico de apenas uma espécie. Começamos pela apresentação de definições importantes nesta área tais como o ponto fixo, a estabilidade, entre outros. O modelo apresenta estabilidade, “dinâmica complexa”, perdendo estabilidade e originando bifurcações e duplicações de período. No modelo de Ricker autônomo, quando o parâmetro  $p$  é maior que 0 e menor ou igual a 2, tende a ser assintoticamente estável e quando o parâmetro  $p$  é maior que 2 é instável. No modelo periódico temos estabilidade quando os parâmetros  $p_n$  são maiores que 0 e menores ou iguais a

2. Também podemos ter estabilidade quando alguns dos parâmetros  $p_n$  são superiores a 2. No entanto, se todos os parâmetros foram superiores a 2, então o sistema é instável.

No segundo capítulo, estuda-se o modelo de Ricker autônomo e periódico para duas espécies. Damos uma análise completa da estabilidade local e bifurcação e determinamos as variedades centrais, bem como variedades estáveis e instáveis. O modelo autônomo de competição de Ricker exhibe bifurcação subcrítica, bolhas e bifurcação de período duplo. Exibimos a região no espaço de parâmetros onde se aplica o princípio de exclusão da concorrência. O modelo clássico de competição Ricker para duas espécies é dado por

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n e^{K-x_n-ay_n} \\ y_{n+1} = y_n e^{L-y_n-bx_n} \end{cases},$$

onde,  $x_n$  e  $y_n$  representam a densidade populacional no período de tempo  $n$ , os parâmetros  $K$  e  $L$  são assumidos como números reais positivos e representam as capacidades de carga da população. No sistema anterior existem 4 pontos fixos: a origem  $O$ , 2 pontos fixos nos eixos  $E_1 = (K, 0)$ , e  $E_2 = (0, L)$  e um ponto fixo  $E^* = \left(\frac{K-aL}{1-ab}, \frac{L-bK}{1-ab}\right)$  no interior do primeiro quadrante.

A origem  $O = (0,0)$  é um ponto fixo instável. Isto significa que as populações não se extinguem simultaneamente.

Se  $(K, L)$  pertence a região  $R_1$  (ver **Figura 2.3**), então  $E_1$  é localmente assintoticamente estável, ou seja,  $x_n$  tende para  $K$  e  $y_n$  tende para 0 quando  $n$  tende para  $\infty$ . Isto significa que a população  $x$  sobrevive e a população  $y$  extingue-se ao longo do tempo.

Se  $(K, L)$  pertence a região  $Q_1$ , então  $E_2$  é localmente assintoticamente estável, ou seja,  $x_n$  tende para 0 e  $y_n$  tende para  $L$  quando  $n$  tende para  $\infty$ . Isto significa que a população  $y$  sobrevive e a população  $x$  extingue-se ao longo do tempo.

Este fenómeno é conhecido como princípio de exclusão, em que uma população sobrevive e a outra extingue-se. Portanto, a competição leva que uma população extinga a outra.

Se  $(K, L)$  pertence a região  $S_1$ , então  $E^*$  é localmente assintoticamente estável, ou seja,  $x_n$  tende para  $\frac{K-aL}{1-ab}$  e  $y_n$  tende para  $\frac{L-bK}{1-ab}$  quando  $n$  tende para  $\infty$ . Isto significa que ambas as populações  $x$  e  $y$  sobrevivem. Este ponto fixo é conhecido como ponto fixo de coexistência já que ambas as populações coexistem.

Se  $(K, L)$  cruza o segmento  $k_1$ , então  $(K, L)$  passa da região  $R_1$  para a região  $R_2$ . O ponto fixo  $E_1$ , perde a estabilidade e nasce em  $R_2$  um 2-ciclo da forma  $\{(\bar{x}_0, 0), (\bar{x}_1, 0)\}$  que é localmente assintoticamente estável. Isto significa que a população  $y$  entra em extinção ao passo que a população  $x$  sobrevive, mas com densidades populacionais alternadas por 2 períodos.

Se  $(K, L)$  cruza do segmento  $l_1$ , então  $(K, L)$  passa da região  $Q_1$  para a região  $Q_2$ . O ponto fixo  $E_2$ , perde a estabilidade e nasce em  $Q_2$  um 2-ciclo da forma  $\{(0, \bar{y}_0), (0, \bar{y}_1)\}$  que é localmente assintoticamente estável. Isto significa que a população  $x$  entra em extinção ao passo que a população  $y$  sobrevive, mas com densidades populacionais alternadas por 2 períodos.

Se  $(K, L)$  cruza do segmento  $\delta_1$ , então  $(K, L)$  passa da região  $S_1$  para a região  $S_2$ . O ponto fixo de coexistência  $E^*$ , perde a estabilidade e nasce em  $S_2$  um 2-ciclo de coexistência da forma  $\{(\bar{x}_0, \bar{y}_0), (\bar{x}_1, \bar{y}_1)\}$  que é localmente assintoticamente estável. Isto significa que ambas as populações  $x$  e  $y$  sobrevivem, mas com densidades populacionais alternadas por 2 períodos.

## 1 Análise do Modelo de Ricker para uma espécie

Neste primeiro capítulo, apresenta-se o estudo qualitativo da equação de diferenças regida pelo modelo de Ricker. De entre outros conceitos, estuda-se a estabilidade de pontos fixos e pontos periódicos, apresenta-se diagramas de teia de aranha e de bifurcação, tanto no caso autónomo como no caso periódico.

### 1.1 Modelo de Ricker autónomo

As equações de diferenças encarregam-se de mostrar a evolução de um fenómeno ao longo de um determinado período de tempo. Por exemplo, se assumimos que uma certa população tem evolução discreta, a expressão  $x_{n+1}$  corresponde ao tamanho da geração, no período  $n + 1$ , obtido em função do tamanho da população no período  $n$ . Esta relação pode ser representada na forma.

$$x_{n+1} = f(x_n). \quad (1.1)$$

A equação (1.1) é um exemplo de uma equação de diferença de primeira ordem, ou sistema dinâmico discreto.

Sendo assim, podemos dizer que um sistema dinâmico discreto (ou equação de diferenças) é um sistema em que o seu estado evolui (muda), em certos instantes de tempo específicos  $\{n_0, n_1, n_2, \dots\}$ .

Assim, o estado de um sistema discreto de uma dimensão pode ser determinado completamente por  $x_n$ , o valor da variável de estado nos instantes  $\{n_0, n_1, n_2, \dots\}$ . O valor da variável de estado nos instantes de tempo mencionados é uma sequência  $x_0, x_1, x_2, \dots$ , e o intervalo do tempo, entre diferentes pares de instantes consecutivos  $x_n$  e  $x_{n+1}$  tem de ser igual.

Sendo assim, a evolução de um sistema discreto de primeira ordem, é obtida aplicando sucessivamente a função  $f$  ao estado inicial  $x_0$ , isto é,

$$x_0, f(x_0), f(f(x_0)), f(f(f(x_0))), \dots$$

Ou, de uma forma mais simples,

$$x_0, f(x_0), f^2(x_0), f^3(x_0), \dots, f^n(x_0).$$

## Modelo de Ricker Autônomo e Periódico

Esta sequência de estados dá-nos as iteradas de  $x_0$  por  $f$ . Generalizando  $f^n(x_0)$ , é a  $n$ -ésima iterada de  $x_0$  por  $f$ .

O modelo de Ricker é um modelo aplicado à pesca. Este modelo integra os fatores ambientais para a limitação do crescimento populacional, prevendo uma recuperação reduzida ao longo do tempo, isto é, o número de descendentes em  $x_{n+1}$  será inferior ou superior ao número de adultos em  $x_n$ .

Este modelo é definido pela equação

$$x_{n+1} = x_n e^{p-x_n}, \quad (1.2)$$

onde  $x_n \geq 0$ , representa a densidade da população no período de tempo,  $n$  e  $p$  representa a capacidade de suporte (ou de carga) da população (“Carrying Capacity” na literatura internacional [1]).

O crescimento na maioria das populações é limitado por fatores tais como variações do meio ambiente, mudanças na taxa de sobrevivência ou na taxa de reprodução, aparecimento de doenças, interações competitivas, relações de predador-presa, etc. Estes fatores influenciam as populações em relação ao seu tamanho e são referidos como dependentes da densidade. Temos dependência da densidade quando a nossa equação de diferenças é não linear. O tamanho em que uma população vai tender a retornar em resposta a estes fatores, é conhecido como capacidade de suporte (capacidade de carga ou “carrying capacity”).

**Definição 1.1** (Ponto fixo ou ponto de Equilíbrio de  $f$ ): Um ponto  $x^*$  pertencente ao domínio de  $f$  é ponto fixo de  $f$  se  $f(x^*) = x^*$ .

**Observação 1.1:** Um ponto fixo é um ponto  $x^*$ , onde o estado do sistema vai ficar constante ou invariante ao longo do tempo, isto é, sucessivas aplicações da função  $f$  não modificam o valor inicial, uma vez que  $f(x^*) = x^*$ .

**Observação 1.2:** Se num sistema de coordenadas, os valores de  $x_n$  são colocados no eixo das abcissas e os de  $x_{n+1}$  no eixo das ordenadas, e representamos graficamente a equação  $x_{n+1} = f(x_n)$ , um ponto fixo da função  $f$  será um ponto onde  $x_{n+1} = f(x_n)$ , interseção da bissetriz dos quadrantes ímpares ( $y = x$ ).

Dada a equação de diferenças que representa o modelo de Ricker, temos que  $f(x) = x e^{p-x}$ .

Assim, os pontos fixos do modelo de Ricker são  $x^* = 0$  ou  $x^* = p$ .

É possível que numa equação de diferenças uma solução não seja um ponto de equilíbrio, mas pode chegar a sê-lo após um número finito de iteradas. Ou seja, um estado de não equilíbrio pode chegar a ser um estado de equilíbrio num tempo finito. Isto leva-nos à seguinte definição:

**Definição 1.2** (Eventual Ponto Fixo): Um ponto  $x$  pertencente ao domínio de  $f$ , é um eventual ponto fixo da função  $f$  se existe um inteiro positivo  $k$  e um ponto fixo  $x^*$  de  $f$  tal que,  $f^k(x) = x^*$  mas  $f^{k-1}(x) \neq x^*$ .

Já sabemos que  $x^* = 0$  ou  $x^* = p$ , são os pontos fixos do modelo de Ricker (1.2). Para procurarmos um eventual ponto fixo, basta procurar um número  $x$  tal que  $f(x)$  seja igual ao ponto fixo  $p$ , com  $x \neq p$ . Assumindo que  $p$  é um número qualquer por exemplo 1,5, resulta que

$$f(x) = 1,5 \Leftrightarrow xe^{1,5-x} = 1,5,$$

ou equivalentemente

$$xe^{1,5-x} - 1,5 = 0.$$

Por ser uma equação transcendente sem solução analítica, temos que resolver numericamente. Na **Figura 1.1** podemos observar que um eventual ponto fixo do Modelo de Ricker (1.2) é 0,625.

Nota: Como a única solução real não negativa da equação  $xe^{-x} = 0$  é  $x = 0$ , então não existem eventuais pontos fixos de zero no modelo de Ricker (1.2).



**Figura 1.1:** Gráfico de  $g(x) = xe^{1,5-x} - 1,5$ . O zero de  $g(x)$  à esquerda de 1,5 é um eventual ponto fixo do modelo de Ricker (1.2) já que  $f(0,625) = 1,5$ .

Um dos principais objetivos da teoria dos sistemas dinâmicos discretos, é o estudo do comportamento das órbitas perto de pontos fixos, ou seja, o comportamento de soluções de equações às diferenças quando os pontos iniciais estão próximos dos pontos de equilíbrio. Portanto, é necessária uma definição básica neste contexto.

**Definição 1.3** (Estabilidade Local): Seja  $f$  uma função tal que  $f: I \rightarrow I$ , onde  $I$  é um intervalo de números reais, e  $x^*$  um ponto fixo de  $f$ . Dizemos que  $x^*$  é:

- 1) Localmente estável se para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$ , tal que para todo  $x_0 \in I$  com  $|x_0 - x^*| < \delta$  temos  $|f^n(x_0) - x^*| < \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}$ . Caso contrário,  $x^*$  diz-se é instável;
- 2) Atractor se existe  $\eta > 0$  tal que  $|x_0 - x^*| < \eta$ , implica  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x_0) = x^*$ ;
- 3) Localmente assintoticamente estável se for simultaneamente estável e atrator. Caso em 2)  $\eta = \infty$ , então  $x^*$  é globalmente assintoticamente estável.

Por exemplo, para aplicar a **Definição 1.3** no modelo de Ricker (1.2) assumimos os mesmos dados do exemplo anterior, ou seja  $p = 1,5$  e  $x_0 = 0,5$ . Ao fazer os cálculos correspondentes obtemos que o  $\delta$ , tem que ser maior que o valor absoluto da diferença entre  $p$  e  $x_0$ , neste caso assumimos 1, 1 e que o  $\varepsilon$  é maior que  $|f^n(x_0) - x^*|$  assumimos 0, 4. Os valores obtidos aparecem na **Tabela 1.1**. Verificamos que efetivamente que se cumpre a condição de estabilidade local:

**Tabela 1.1: Valores de  $x_n$  e  $f^n(x_0)$ .**

$n$	$x_n$	$f^n(x_0)$	$ x_n - x^* $	$ f^n(x_0) - x^* $
0	0, 5	1, 3591	1, 0	0, 1409
1	1, 3591	1, 5647	0, 1409	0, 0647
2	1, 5647	1, 4667	0, 0647	0, 0333
3	1, 4667	1, 5164	0, 0333	0, 0164
4	1, 5164	1, 4917	0, 0164	0, 0083
5	1, 4917	1, 5041	0, 0083	0, 0041
6	1, 5041	1, 4979	0, 0041	0, 0021
7	1, 4979	1, 501	0, 0021	0, 001
8	1, 501	1, 4995	0, 001	0, 0005
9	1, 4995	1, 5003	0, 0005	0, 0003
10	1, 5003	1, 4999	0, 0003	0, 0001

Para nos ajudar a compreender o comportamento de uma solução na vizinhança dos pontos de equilíbrio de uma equação, podemos utilizar o gráfico em forma de “teia de aranha”, também conhecido como diagrama de degraus ou (diagrama de Cobweb na literatura internacional). O diagrama de Cobweb é uma ferramenta importante no estudo da estabilidade das equações, pois permite-nos visualizar órbitas e detetar a dinâmica na vizinhança dos pontos fixos. Assim, num gráfico de teia de aranha, é possível inferir o status a longo prazo de uma condição inicial sob a aplicação repetida de uma função.

Este consiste no seguinte: dada a equação  $x_{n+1} = f(x_n)$ , representa-se o gráfico de  $f$  no plano  $(x_n, x_{n+1})$ . Toma-se um valor inicial  $x_0$  no eixo das abcissas. Traça-se uma linha vertical a partir de  $x_0$  até se encontrar o gráfico de  $f$  e lê-se esse valor no eixo das ordenadas. Marca-se o valor de  $f(x_0)$  encontrado no eixo das abcissas,  $x_1 = f(x_0)$  para o qual se determina, novamente, o valor de  $f$  e assim sucessivamente. Gráficamente, este ciclo pode ser feito traçando uma linha horizontal desde o ponto do gráfico  $(x_0, f(x_0))$ , até a função identidade  $f(x) = x$  (a bissetriz do primeiro quadrante) e daí novamente uma linha vertical até ao gráfico de  $f$ . Continuando este processo pode-se determinar a órbita de  $x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^n(x_0), \dots$  como se pode observar na **Figura 1.2**.

Se  $x_0$  for um ponto inicial suficientemente próximo de um ponto de equilíbrio  $x^*$ , então a órbita de  $x_0$  dá uma indicação clara da estabilidade de  $x^*$ , pois indica como evolui  $x_0$  quando há um pequeno desvio de  $x^*$ .

O processo de estudar a estabilidade a partir da **Definição 1.4** não é prático. Além disso, o diagrama em teia de aranha não nos permite conclusões analíticas. O seguinte teorema dá-nos uma indicação clara da estabilidade local de um ponto fixo.

**Teorema 1.1** (Estabilidade local, [51]) Seja  $x^*$  um ponto de equilíbrio da equação  $x_{n+1} = f(x_n)$  e  $f$  continuamente diferenciável em  $x^*$ . Se:

1. Se  $|f'(x^*)| < 1$ , então  $x^*$  é assintoticamente estável.
2. Se  $|f'(x^*)| > 1$ , então  $x^*$  é instável.
3. Se  $f'(x^*) = 1$ , existem quatro casos distintos:
  - (a) Se  $f''(x^*) > 0$ ,  $x^*$  é instável, mas semi-estável à esquerda;
  - (b) Se  $f''(x^*) < 0$ ,  $x^*$  é instável, mas semi-estável à direita;
  - (c) Se  $f''(x^*) = 0$ , existem dois casos a considerar:

i. Se  $f'''(x^*) > 0$ ,  $x^*$  é instável;

ii. Se  $f'''(x^*) < 0$ ,  $x^*$  é localmente assintoticamente estável.

4. Se  $f'(x^*) = -1$ , então existem dois casos:

(a)  $x^*$  é localmente assintoticamente estável, se  $-2f'''(x^*) - 3[f''(x^*)]^2 < 0$ .

(b)  $x^*$  é instável se  $-2f'''(x^*) - 3[f''(x^*)]^2 > 0$ .

Vamos estudar a estabilidade dos dois pontos fixos do modelo de Ricker em separado. Para isso calculamos a primeira derivada da função  $f$  em cada ponto fixo.

Uma vez que  $f'(x) = e^{p-x}(1-x)$ , temos que para  $x^* = 0$ ,  $|f'(0)| = |e^p| > 1$ , para todo  $p > 0$ . Assim,  $x^* = 0$  é um ponto fixo instável pelo **Teorema 1.1**.

Para  $x^* = p$ ,  $p > 0$  temos que  $|f'(p)| = |1-p|$ . Neste caso, surgem 3 situações:

- 1) Se  $|1-p| > 1$ , o que acontece quando  $p > 2$ ,  $x^* = p$  é um ponto fixo instável (ver **Figura 1.3**).
- 2) Se  $|1-p| < 1$  o que acontece quando  $0 < p < 2$ ,  $x^* = p$  é um ponto fixo assintoticamente estável (ver **Figura 1.2**).
- 3) Se  $|1-p| = 1$  o que acontece quando  $p = 2$ , temos  $f'(2) = -1$ . É necessário utilizar o ponto 4 no **Teorema 1.1**.

Assim, como  $f''(x) = (-2+x)e^{p-x}$ , temos  $f''(2) = 0$ . De  $f'''(x) = (3-x)e^{p-x}$ , vem  $f'''(2) = 1$ .

Portanto

$$-2f'''(2) - 3[f''(x^*)]^2 = -2 < 0.$$

Logo  $x^* = p$  é um ponto fixo assintoticamente estável.

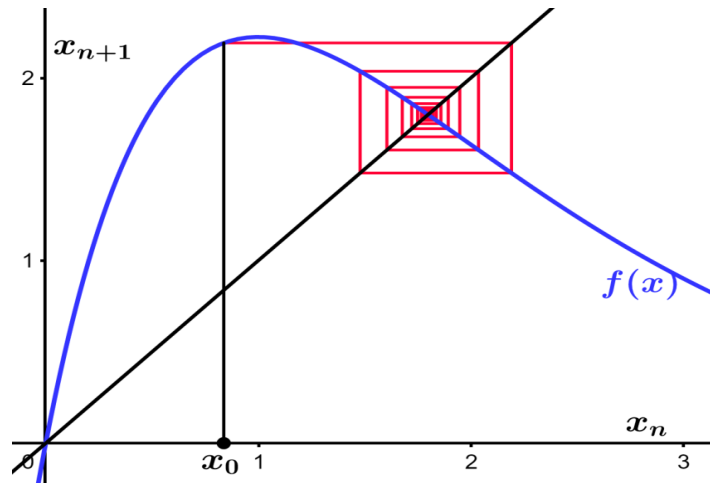


Figura 1.2: Quando  $0 < p \leq 2$ , o ponto fixo  $x^* = p$  do modelo de Ricker (1.2) é assintoticamente localmente estável. Fonte: Imagem retirada da referência [65].

O anterior resultado apenas dá-nos uma indicação clara da dinâmica local. Relativamente a dinâmica global teremos de utilizar outras ferramentas. É o que faremos em seguida.

**Teorema 1.2** (W. A. Coppel, [2]): Seja  $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$  e  $f: I \rightarrow I$  uma função contínua, se a equação  $f(f(x)) = x$  não tiver raízes à exceção das raízes possíveis de  $f(x) = x$  é garantido que todas as órbitas convergem para um ponto fixo.

**Nota:** O Teorema 1.2 não é suficiente para garantir a estabilidade global de um ponto fixo. No entanto, se o ponto fixo for único, então ele é garantidamente globalmente estável.

Vamos estudar a estabilidade global dos pontos fixos do modelo de Ricker. Para isso, devemos calcular as raízes da equação  $f(f(x)) = x$  e ver que esta equação não tem raízes, à exceção das raízes de  $f(x) = x$ , quando  $0 < p \leq 2$ .

$$\begin{aligned} f(f(x)) = x &\Leftrightarrow f(xe^{p-x}) = x \Leftrightarrow xe^{p-x} e^{p-xe^{p-x}} = x \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee e^{p-x} e^{p-xe^{p-x}} - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee e^{2p-x(1+e^{p-x})} = 1 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee 2p - x(1 + e^{p-x}) = 0. \end{aligned}$$

Seja  $g(x) = 2p - x - xe^{p-x}$ . Vamos verificar que se  $0 < p \leq 2$ , então  $x = p$  é a única solução de  $g(x)$ . De facto, sob esta condição no parâmetro  $p$ ,  $g$  é estritamente decrescente e, portanto, só tem um único zero.

Seja  $h(x) = g'(x) = -1 + e^{p-x}(x-1)$ . Tem-se que  $h'(x) = (2-x)e^{p-x}$  e, portanto,  $h$  tem um único ponto crítico em  $x = 2$  (solução da equação  $h'(x) = 0$ ). Note-se que  $h'(x) > 0$  para  $x < 2$  e  $h'(x) < 0$  para  $x > 2$ . Como  $h''(x) = (x-3)e^{p-x}$ , observando a concavidade de  $h$ , constata-se que  $h''(2) < 0$ . Assim,  $x = 2$  é um máximo absoluto de  $h$ . Como  $h(2) = e^{p-2} - 1$ , temos  $h(2) \leq 0$  sempre que  $0 < p \leq 2$ .

Isto estabelece que  $h(x) = g'(x) < 0$  (só se tem  $h(x) = 0$  quando  $x = 2$  e  $p = 2$ ). Assim, a função  $g(x)$  é estritamente decrescente sempre que  $0 < p \leq 2$ .

Concluimos que,  $f(f(x)) = x$  não tem raízes a exceção das raízes  $x = 0$  e  $x = p$  quando  $0 < p \leq 2$ . Assim todas as órbitas no modelo (1.2) convergem para um ponto fixo de  $f$  (**Teorema 1.2**). Isto significa que, toda a órbita que comece em  $x_0 > 0$  converge para  $x^* = p$  quando  $0 < p \leq 2$  uma vez que  $x^* = 0$  é instável (nenhuma órbita na sua vizinhança converge por 0).

Se continuarmos a aumentar o valor do parâmetro  $p$  para além de 2, irão ocorrer duplicações de período, levando a uma dinâmica aperiódica, intitulada caos (ilustrado na **Figura 1.3**). Assim é necessário introduzir as seguintes definições:

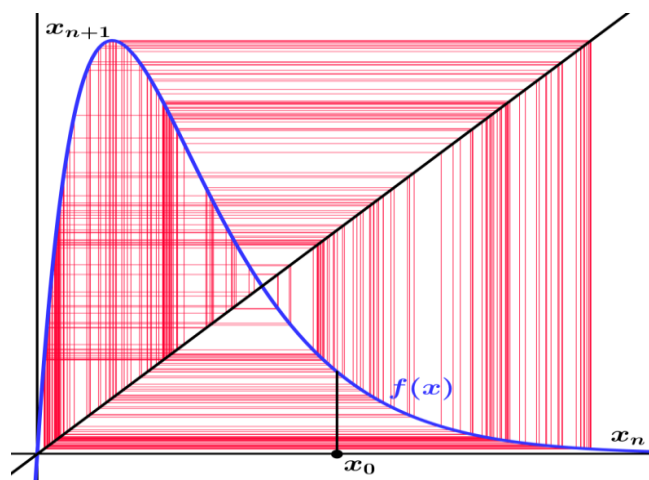


Figura 1.3: Quando  $p > 2$ , o ponto fixo  $x^* = p$  do modelo de Ricker (1.2) é instável. Fonte: Imagem retirada da referência [65].

**Definição 1.4** (Ponto periódico e ponto eventualmente periódico): Seja  $b$  um ponto pertencente ao domínio da função  $f(x)$ . Dizemos que:

a)  $b$  é um ponto periódico de período  $k$  da equação  $x_{n+1} = f(x_n)$  se dado um inteiro positivo  $k > 1$ , temos que  $f^k(b) = b$ . Ou seja,  $b$  é um ponto  $k$ -periódico se é um ponto fixo da função  $f^k$ . A órbita periódica do ponto  $b$ ,  $O^+(b) = \{b, f(b), f^2(b), \dots, f^{k-1}(b)\}$ , chamamos  $k$ -ciclo.

b)  $b$  é um ponto eventualmente  $k$ -periódico se, dado um inteiro positivo  $m$ , temos que  $f^m(b)$  é um ponto  $k$ -periódico, isto é, se  $f^{k+m}(b) = f^m(b)$ .

Notemos que se  $k = 1$  em b), então  $f(f^m(b)) = f^m(b)$  e, portanto,  $b$  é um eventual ponto fixo. Já se  $m = 0$ , então  $b$  é  $k$ -periódico,  $f^k(b) = b$ .

Em termos gráficos, um ponto do  $k$ -ciclo é a abscissa do ponto onde o gráfico de  $f^k$  e a bissetriz dos quadrantes ímpares se intersectam.

Por exemplo, vamos calcular os pontos periódicos de (1.2) quando  $p = 2, 2$ . Temos que

$$\begin{aligned} f(x) &= xe^{2,2-x}, \\ f^2(x) &= f(f(x)) = xe^{2,2-x}e^{2,2-xe^{2,2-x}}, \\ g(x) &= f^2(x) - x = xe^{2,2-x}e^{2,2-xe^{2,2-x}} - x. \end{aligned}$$

Como podemos visualizar no gráfico da **Figura 1.4**, um valor aproximado para o zero de  $g$ , é  $\bar{x}_0 \approx 1,09278$ . Assim,

$$\begin{aligned} f(1,09278) &= 1,09278e^{2,2-1,09278} \approx 3,30745. \\ f(3,30745) &= 3,30745e^{2,2-3,30745} \approx 1,09278. \end{aligned}$$

Assim,  $C_2 = \{1,09278; 3,30745\}$  é um 2-ciclo de (1.2).

Seguidamente, vamos determinar um eventual 2-ciclo de  $C_2$ . Para tal temos que igualar  $g(x)$  ao valor  $\bar{x}_0$ , ou seja, a 1,09278.

$$g(x) = 1,09278 \Leftrightarrow xe^{2,2-x}e^{2,2-xe^{2,2-x}} - 1,09278 = 0 \Leftrightarrow h(x) = 0.$$

Visualizando na **Figura 1.4** pode-se observar que o valor  $b \cong 0,01566$  e substituindo em  $g$  obtemos 0,13913. Assim:

$$f^2(0,01566) = 0,01566e^{2,2-0,01566}e^{2,2-0,01566e^{2,2-0,01566}} = 1,0926.$$

Portanto,  $\{0,01566; 1,0926\}$  é um eventual ciclo de  $C_2$ .

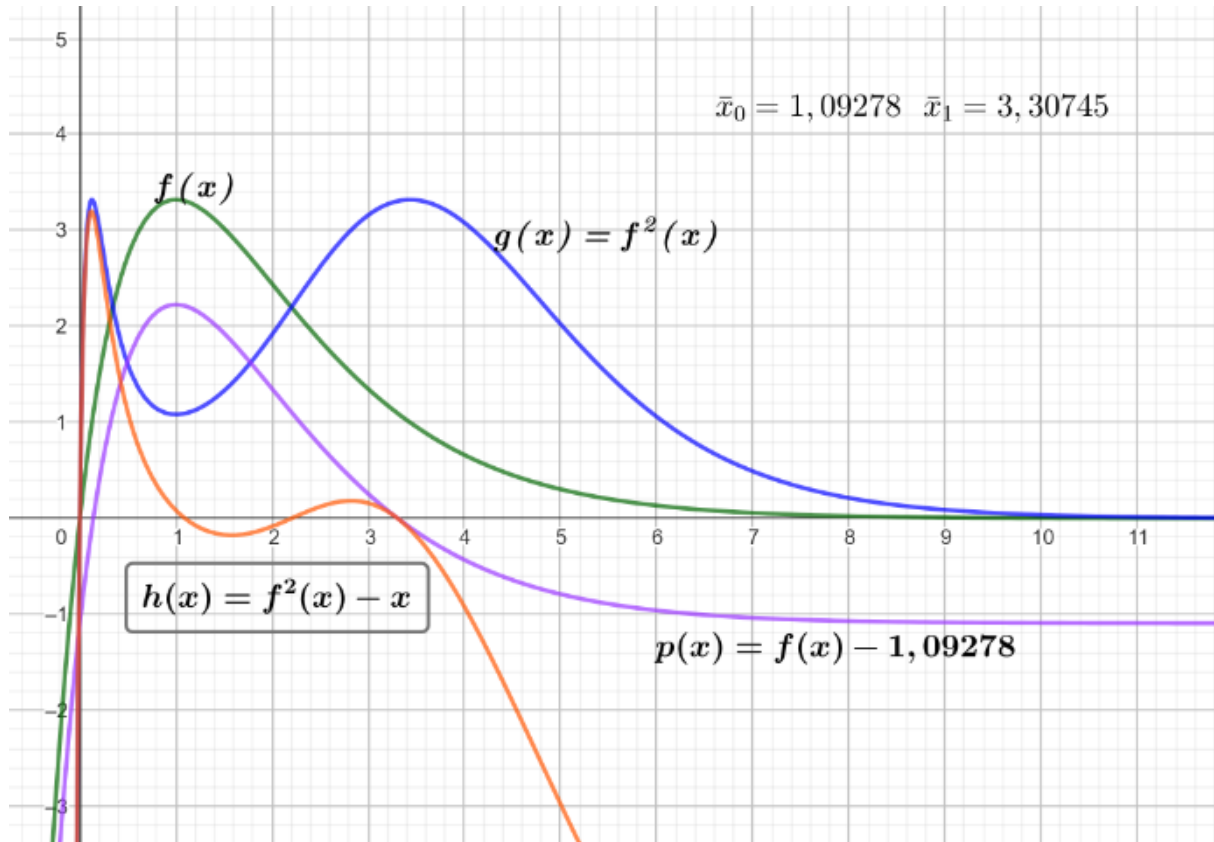


Figura 1.4: Gráfico do 2-ciclo e eventual 2-ciclo.

**Definição 1.5** (Estabilidade de um ponto  $k$ -ciclo): Seja  $b$  um ponto  $k$ -periódico de  $f$ . Dizemos que  $b$  é:

1. Estável, se for ponto fixo estável de  $f^k$ ;
2. Assintoticamente Estável, se for ponto fixo assintoticamente estável de  $f^k$ ;
3. Instável, se for ponto fixo instável de  $f^k$ .

**Observação 1.3:** Se  $x_0 = b$ , então a estabilidade do ponto  $b$  determina a estabilidade de todos os pontos do  $k$ -ciclo,

$$\{x_0 = b, x_1 = f(b), x_2 = f^2(b), \dots, x_{k-1} = f^{k-1}(b)\}. \quad (1.3)$$

Assim, para estudar a estabilidade de um ponto  $k$ -periódico da equação  $x_{n+1} = f(x_n)$  basta estudarmos a estabilidade do ponto de equilíbrio da equação  $x_{n+1} = g(x_n)$  e aplicar o **Teorema 1.1** à função  $g = f^k$ .

Por exemplo, para se determinar a estabilidade do 2-ciclo determinado anteriormente para  $p = 2, 2$ , procedemos como se segue. Temos que:

$$g(x) = f^2(x) = xe^{2,2-x}e^{2,2-xe^{2,2-x}}.$$

Observamos que os pontos fixos de  $g$  são 1, 0930 e 3, 30745. Derivamos  $g$ :

$$g'(x) = -(x - 1) \times (e^x - xe^{2,2}) \times e^{-xe^{2,2-x}-2x+4,4}.$$

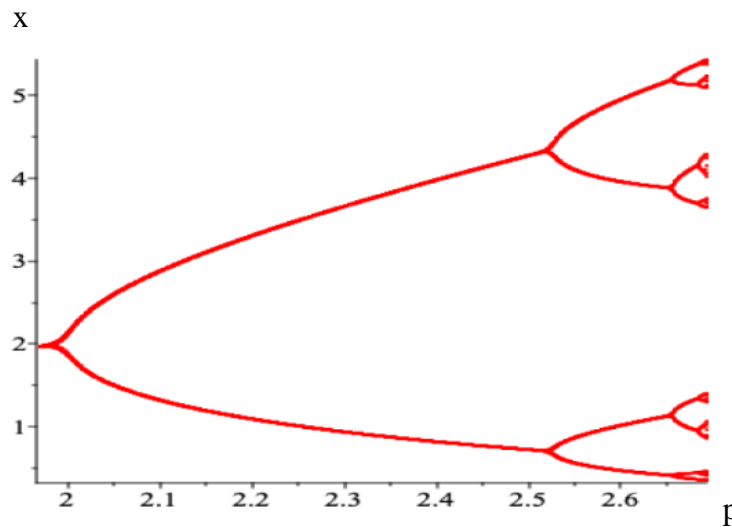
Assim:

$$\begin{aligned} |g'(1,0930)| &= |(1,0930 - 1) \times (e^{1,0930} - 1,0930e^{2,2}) \times e^{-1,0930e^{2,2-1,0930}-2(1,0930)+4,4}| \\ &\approx 0,214597 < 1. \end{aligned}$$

Assim, o 2-ciclo é assintoticamente estável. Ou, alternadamente

$$\begin{aligned} |g'(3,30745)| &= |(3,30745 - 1) \times (e^{3,30745} - 3,30745e^{2,2}) \times e^{-3,30745e^{2,2-3,30745}-2(3,30745)+4,4}| \\ &\approx 0,21423 < 1. \end{aligned}$$

Como os valores absolutos são menores que 1, isso indica que ambos os pontos fixos de  $g$  são assintoticamente estáveis, portanto o 2-ciclo de  $C_2$  é assintoticamente estável.



**Figura 1.5: Duplicação de período: O aparecimento de ciclos assintoticamente estáveis de período 2, 4, 8, 16, ....**  
 Fonte: Imagem retirada da referência [21].

Sabemos que o modelo Ricker (1.2) tem um ponto fixo localmente assintoticamente estável sempre que  $0 < p \leq 2$ . Assim que  $p$  aumenta além de 2, o ponto fixo positivo perde a sua estabilidade e nasce um 2-ciclo (bifurcação de duplicação de período em  $p = 2$ ). Este novo 2-ciclo é localmente assintoticamente estável quando  $2 < p < 2,52646$ , e instável quando  $p > 2,52646$ . À medida que  $p$  aumenta além de  $p = 2,52646 \dots$ , o 2-ciclo perde sua estabilidade e nasce um novo  $2^2$ -ciclo (bifurcação de duplicação de período em  $p = 2,52646 \dots$ ). Este 4-ciclo é

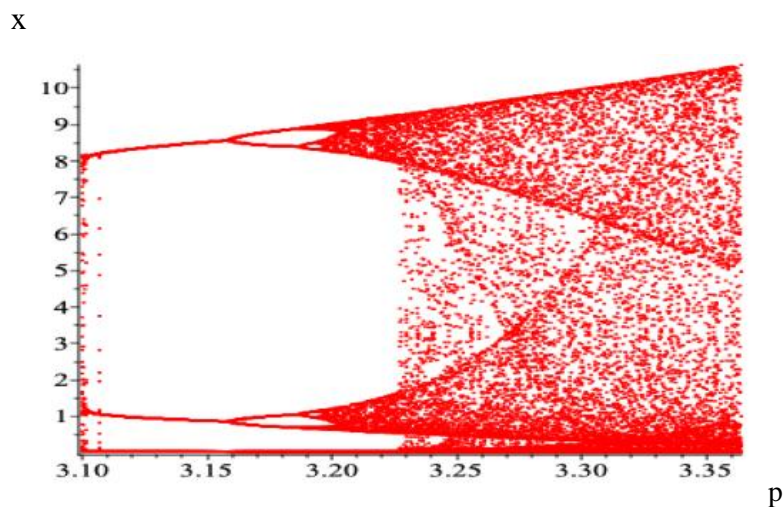
localmente assintoticamente estável quando  $2,52646 < p < 2,65635$  ... e instável quando  $p > 2,65635$  .... Para calcular as soluções da equação do 2<sup>o</sup>-ciclo,  $\{\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3\}$ , podemos usar um software para resolver a equação  $f^4(x) = x$ . Este processo de bifurcações de duplicação de período continua indefinidamente e produz uma sequência de valores de  $p$ ,  $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ , onde  $p_1 = 2$ ,  $p_2 = 2,52646$ ,  $p_3 = 2,65635$ ,  $p_4 = 2,6846$ ,  $p_5 = 2,6907$ , etc. (São os valores de  $p$  onde ocorrem as bifurcações). A **Tabela 1.2** ilustra alguns padrões notáveis.

**Tabela 1.2:** Valores de  $n$  e  $p_n$  (onde ocorrem as bifurcações)

$n$	$p_n$	$p_n - p_{n-1}$	$\frac{p_n - p_{n-1}}{p_{n+1} - p_n}$
1	2	-	-
2	2,52646	0,52646	-
3	2,65635	0,12989	4,05312
4	2,6846	0,02825	4,59787
5	2,6907	0,0061	4,63114
6	2,6920	0,0013	4,69230
7	2,692228	0,0003	4,67625
⋮	⋮	⋮	⋮

Da **Tabela 1.2** fazemos as seguintes observações que podem ser visualizadas numericamente.

1. A sequência  $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$  parece convergir para  $p_{\infty} \approx 2,692$ .
2. O tamanho da janela ( $p_n - p_{n-1}$ ) entre os valores sucessivos de  $p_{n-1}$  e  $p_n$  fica cada vez menor, e eventualmente aproxima-se de zero quando  $n \rightarrow \infty$ .



**Figura 1.6:** A aparência do período 3. Fonte: Imagem tomada da referência [21].

3. Quando  $n \rightarrow \infty$ , a razão de tamanhos de janela sucessivos,

$$\frac{p_n - p_{n-1}}{p_{n+1} - p_n},$$

aproxima-se de uma constante  $\delta \approx 4,669201609$ , conhecida na literatura como número de Feigenbaum, em homenagem ao seu descobridor Mitchell Feigenbaum [3]. Na verdade,

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n - p_{n-1}}{p_{n+1} - p_n} \approx 4,669201609,$$

Feigenbaum descobriu que o número  $\delta$  é universal e não depende da família de funções em discussão, sendo que o mesmo sucede para uma grande classe de funções unimodais (de apenas uma concavidade), como é no caso do modelo de Ricker.

A equação de Feigenbaum, pode ser usada para gerar a sequência  $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$  com boa precisão. Para ilustrar isso, fazemos  $\delta = \frac{p_n - p_{n-1}}{p_{n+1} - p_n}$  e resolvemos para  $p_{n+1}$ . Então,

$$p_{n+1} = p_n + \frac{p_n - p_{n-1}}{\delta}. \quad (1.4)$$

Por exemplo, dado  $p_1 = 2$  e  $p_2 = 2,52646$  (da **Tabela 1.1**), então da equação anterior *com*  $\delta \approx 4,6692$ , obtemos  $p_3 \approx 2,6392$ , que é uma boa aproximação do valor de  $p_3$  na **Tabela 1.1**. A melhor maneira de visualizar a discussão acima é com um diagrama de bifurcação:

1. Para uma escolha inicial do parâmetro  $p = p_0 \in ]0, 2]$ , escolhe-se uma condição inicial  $x_0 = 1$  no intervalo  $(0, \infty)$  e calcula-se  $f^t(x_0)$ . Por exemplo, tome-se  $t = 1000$  e determine-se a órbita de  $x_0$ .

$$x_0, f(x_0), f^2(x_0) \dots, f^{800}(x_0), f^{801}(x_0), \dots, f^{1000}(x_0).$$

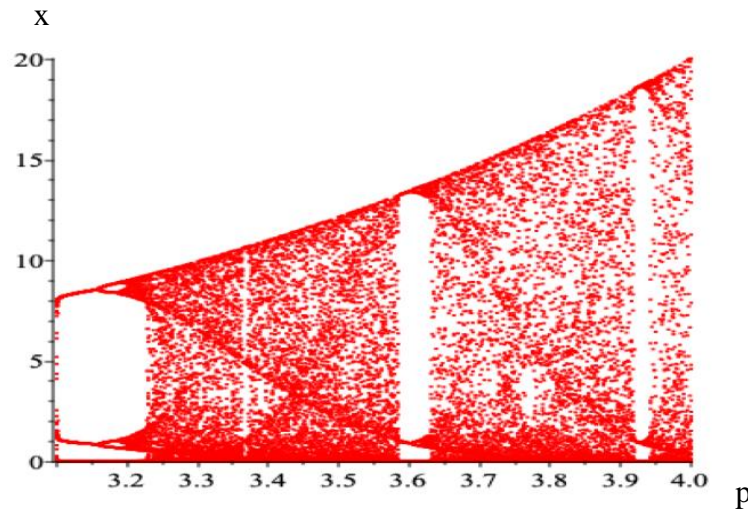


Figura 1.7: O aparecimento de períodos ímpares e o caos “máximo” em  $p = 4$ . Fonte: Imagem tomada da referência [21].

2. Descarta-se as primeiras 800 iterações,

$$x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots e f^{800}(x_0),$$

e mostra-se o resto das iterações

$$f^{801}(x_0), \dots e f^{1000}(x_0),$$

no diagrama de bifurcação. Assim, apenas conjuntos assintoticamente estáveis serão vistos no diagrama de bifurcação.

3. As etapas 1. e 2. são feitas repetidamente para valores crescentes de  $p \in [p_0, 4]$  com incrementos de 0,1.

4. (a) No diagrama de bifurcação, vemos que para  $p = p_0 \in (0, 2]$ , a órbita da condição inicial  $x_0 = 1$  converge para  $x^* = p$ . Por exemplo, se  $p = 0,5$ , o ponto  $(p, x^*) = (0,5; 0,5)$  aparece no diagrama. Da mesma forma, quando  $p = 0,51$ , o ponto  $(p, x^*) = (0,51; 0,51)$  aparece no diagrama, etc. Em  $p = 2$ , o ponto  $(p, x) = (2, 2)$  aparece no diagrama. Para valores de  $p$  além de  $p_1 = 2$ ,  $x^* = p$  perde sua estabilidade, desaparece do diagrama de bifurcação e um 2-ciclo, denotado por  $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2\}$ , nasce ( $x^* = p$  sofre bifurcação de duplicação de período em  $p = p_1$ ).

(b) Para valores de  $p \in (p_1, p_2]$ , a órbita de  $x_0 = 1$ , converge para o 2-ciclo. Assim, a cada  $p \in (p_1, p_2]$  correspondem dois pontos,  $\bar{x}_1$  e  $\bar{x}_2$ . Para valores de  $p$  além de  $p_2$ , o 2-ciclo perde a sua estabilidade, desaparece do diagrama de bifurcação e um 4-ciclo, denotado por  $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4\}$  nasce ( $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2\}$  sofre bifurcação de duplicação de período em  $p = p_2$ ). As bifurcações de duplicação de período continuam até  $p = p_\infty$ .

Agora, voltamos nossa atenção para os valores dos parâmetros  $p > p_\infty$ . A situação neste regime de parâmetros é muito mais complicada do que a região de bifurcações de duplicação de período,  $0 < p < p_\infty$  (onde apenas ciclos estáveis aparecem no diagrama de bifurcação). A melhor maneira de explicar a dinâmica da órbita de  $x_0$  é começar de  $p = 4$  e andar para trás até  $p_\infty$ . Em  $p = 4$ , vemos apenas uma banda cobrindo todo o  $]0, 20 [$  (veja a **Figura 1.7**). Essa banda estreita-se lentamente à medida que  $p$  diminui. A partir do diagrama de bifurcação (**Figura 1.5**), observamos que a maior janela ocorre para valores de  $p$  entre  $3,1 \dots$  e  $3,364 \dots$ . Essa janela é chamada de janela de período 3. Um 3-ciclo assintoticamente estável aparece primeiro em  $p \approx 3,1 \dots$  após o qual as bifurcações de duplicação de período dominam. Este 3-ciclo perde sua estabilidade e dá origem a um 6-ciclo assintoticamente estável. As bifurcações de duplicação de período continuam até  $p \approx 3,2 \dots$  (correspondente a  $p_\infty$  na primeira parte do diagrama de bifurcação) após, entramos numa região de dinâmica mais complicada. Janelas de todos os períodos ímpares aparecem entre  $p_\infty$  e  $p = 4$  (veja a **Figura 1.5**).

Vimos que o modelo de Ricker com  $f(x) = xe^{p-x}$ , apresenta um 3-ciclo quando  $p \approx 3.1 \dots$ . Em 1975, Li e Yorke [5] provaram um resultado matemático abstrato que afirma que se uma função contínua gera um 3-ciclo, então também gera  $k$ -ciclos periódicos, onde  $k$  é qualquer inteiro positivo. O resultado significativo de Li e Yorke pode ser visto como um caso especial de um teorema geral de A. N. Sharkovsky [4].

No seu notável resultado, Sharkovsky [4] usou uma nova ordenação dos inteiros positivos. Como se indica abaixo;

$$\begin{aligned}
 & 3 \triangleright 5 \triangleright 7 \triangleright 9 \triangleright \dots \triangleright (2n + 1) \times 2^0 \triangleright \dots \\
 & 3 \times 2 \triangleright 5 \times 2 \triangleright 7 \times 2 \triangleright 9 \times 2 \triangleright \dots \triangleright (2n + 1) \times 2^1 \triangleright \dots \\
 & 3 \times 2^n \triangleright 5 \times 2^n \triangleright 7 \times 2^n \triangleright 9 \times 2^n \triangleright \dots \triangleright (2n + 1) \times 2^n \triangleright \dots \\
 & \dots \triangleright 2^n \triangleright 2^{n-1} \triangleright \dots \triangleright 2^3 \triangleright 2^2 \triangleright 2^1 \triangleright 2^0.
 \end{aligned}$$

Então, o Teorema de Sharkovsky [4] é o seguinte.

**Teorema 1.3** (Sharkovsky, [4]) Seja  $F : I \rightarrow I$  uma aplicação contínua que tem uma órbita periódica de período  $k$ . Então, para qualquer inteiro positivo  $l$  que é precedido por  $k$  na ordem de Sharkovsky  $k \triangleright l$ , existe uma órbita periódica de período  $l$ .

O Teorema de Sharkovsky implica que se um modelo tem um ciclo de período 2, então ele tem um ponto fixo. Se não tem um ciclo de período 4 então não tem um ciclo de período 8, etc. Um modelo com um ciclo de período 3 tem ciclos de todos os períodos. Por exemplo,  $f(x) = xe^{p-x}$  tem um 3-ciclo quando  $p \approx 3.1 \dots$ . Consequentemente, tem  $p$ -ciclos de todos os períodos (infinitamente muitos pontos periódicos).

## 1.2 Modelo de Ricker Periódico

Vamos agora considerar a equação de diferenças

$$x_{n+1} = x_n e^{r_n - x_n}, \quad (1.5)$$

onde  $x_n$  representa a densidade populacional, e  $r_n > 0$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , é a sequência de capacidade de suporte individual.

Seja  $f_n(x) = x_n e^{r_n - x}$ , para que o modelo seja periódico temos que exigir que este apresente uma periodicidade  $p$ , e por isso temos que assumir que  $f_{n+p} = f_n$  para todo  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Isto é, a sequência de parâmetros satisfaz  $r_n = r_{n \bmod p}$ , para todo  $n$ . Mais especificamente temos:

$$\begin{aligned} f_0 &= f_p = f_{2p} = \dots \quad (r_0 = r_p = r_{2p} = \dots) \\ f_1 &= f_{1+p} = f_{1+2p} = \dots \quad (r_1 = r_{1+p} = r_{1+2p} = \dots) \\ f_2 &= f_{2+p} = f_{2+2p} = \dots \quad (r_2 = r_{2+p} = r_{2+2p} = \dots) \\ &\vdots \\ f_{p-1} &= f_{2p-1} = f_{3p-1} = \dots \quad (r_{p-1} = r_{2p-1} = \dots). \end{aligned}$$

Por exemplo, considerando  $p = 2$ ,  $r_0 = 1$ ,  $r_1 = 1, 2$  e  $x_0 = 0, 5$ , a dinâmica da equação (1.5) é dada por:

$$\begin{aligned}
 x_0 &= 0,5 \\
 x_1 &= x_0 e^{r_0 - x_0} = 0,5 e^{1-0,5} = 0,8244 \\
 x_2 &= x_1 e^{r_1 - x_1} = 0,8244 e^{1,2-0,8244} = 1,2002 \\
 x_3 &= x_2 e^{r_0 - x_2} = 0,9827 e^{1-1,2002} = 0,98244 \\
 x_4 &= x_3 e^{r_1 - x_3} = 0,99985 e^{1,2-0,98244} = 1,2212 \\
 x_5 &= x_4 e^{r_0 - x_4} = 1,2214 e^{1-1,2212} = 0,9788 \\
 x_6 &= x_5 e^{r_1 - x_5} = 0,9788 e^{1,2-0,9788} = 1,2211 \\
 x_7 &= x_6 e^{r_0 - x_6} = 1,2211 e^{1-1,2211} = 0,9788 \\
 x_8 &= x_7 e^{r_1 - x_7} = 0,9788 e^{1,2-0,9788} = 1,2211 \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

Um ciclo periódico é um conjunto que retoma seu valor quando a variável, sofre um acréscimo igual a um múltiplo qualquer de uma quantidade fixa chamada "período". O modelo periódico (1.5) caracteriza-se por ser uma sequência de composição de funções.

Define-se o operador de composição  $\Phi_p(x) = f_{p-1} \circ f_{p-2} \circ \dots \circ f_1 \circ f_0(x)$ , como gerador da dinâmica do modelo. Note-se que  $\Phi_p(x) = f_{p-1}(\Phi_{p-1}(x))$  e  $\Phi_0(x) = x$  por convenção. Seja  $\{\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{p-1}\}$   $p$ -ciclo de (1.5), i.e.,  $\bar{x}_0$  é um ponto fixo de  $\Phi_p(x)$ .

Pela regra da cadeia sabe-se que  $\Phi'_p(\bar{x}_0) = f'_{p-1}(\bar{x}_{p-1}) \dots f'_{p-2}(\bar{x}_{p-2}) \dots f'_1(\bar{x}_1) f'_0(\bar{x}_0)$ .

De  $f_i(x) = 0$ , resulta que  $\Phi_p(0) = 0$ . Assim, a origem é um ponto fixo instável no modelo de Ricker (1.5) dado que:

$$|\Phi'_p(0)| = |(1-0)e^{r_0-0} \times (1-0)e^{r_1-0} \times \dots \times (1-0)e^{r_{p-1}-0}| > 1,$$

uma vez que  $f'_i(x) = (1-x)e^{r_i-\bar{x}_i}$ .

Vamos provar que a condição de estabilidade da órbita periódica  $\{\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{p-1}\}$  no modelo periódico de Ricker é dada por  $\prod_{i=0}^{p-1} |1 - \bar{x}_i| < 1$ .

Queremos determinar uma condição tal que

$$\left| \left( \Phi_p(\bar{x}_0) \right)' \right| < 1,$$

isto é,

$$\left| (1 - \bar{x}_0)e^{r_0 - \bar{x}_0} (1 - \bar{x}_1)e^{r_1 - \bar{x}_1} \dots (1 - \bar{x}_{p-1})e^{r_{p-1} - \bar{x}_{p-1}} \right| < 1. \quad (1.6)$$

## Modelo de Ricker Aut3nomo e Peri3dico

Pelo facto de  $\{\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{p-1}\}$  ser um p-ciclo vem  $\bar{x}_0 = \Phi_p(\bar{x}_0)$ , ou seja,

$$\begin{aligned} \bar{x}_0 &= \bar{x}_{p-1} e^{r_{p-1} - \bar{x}_{p-1}} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \bar{x}_0 &= \bar{x}_{p-2} e^{r_{p-2} - \bar{x}_{p-2}} e^{r_{p-1} - \bar{x}_{p-1}} \Leftrightarrow \\ \dots \Leftrightarrow \bar{x}_0 &= \bar{x}_0 e^{\sum_{i=0}^{p-1} r_i - \sum_{i=0}^{p-1} \bar{x}_i} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 1 &= e^{\sum_{i=0}^{p-1} r_i - \sum_{i=0}^{p-1} \bar{x}_i} \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{p-1} r_i = \sum_{i=0}^{p-1} \bar{x}_i \end{aligned}$$

Simplificando (1.6) resulta,

$$\left| (1 - \bar{x}_0)(1 - \bar{x}_1) \dots (1 - \bar{x}_{p-1}) e^{\sum_{i=0}^{p-1} r_i - \sum_{i=0}^{p-1} \bar{x}_i} \right| < 1.$$

Sendo assim, a condi3ao de estabilidade local e  $\prod_{i=0}^{p-1} |1 - \bar{x}_i| < 1$ .

Por exemplo, para calcular os pontos fixos do modelo de Ricker (1.6) quando  $r_0 = 1$  e  $r_1 = 1, 2$  vem:

$$\begin{aligned} f_0(x) &= x e^{1-x}, \\ f_1(x) &= x e^{1,2-x}, \\ f_1(f_0(x)) &= \Phi_2(x) = x e^{1-x} e^{1,2-x e^{1-x}} = x e^{2,2-x(1+e^{1-x})}. \end{aligned}$$

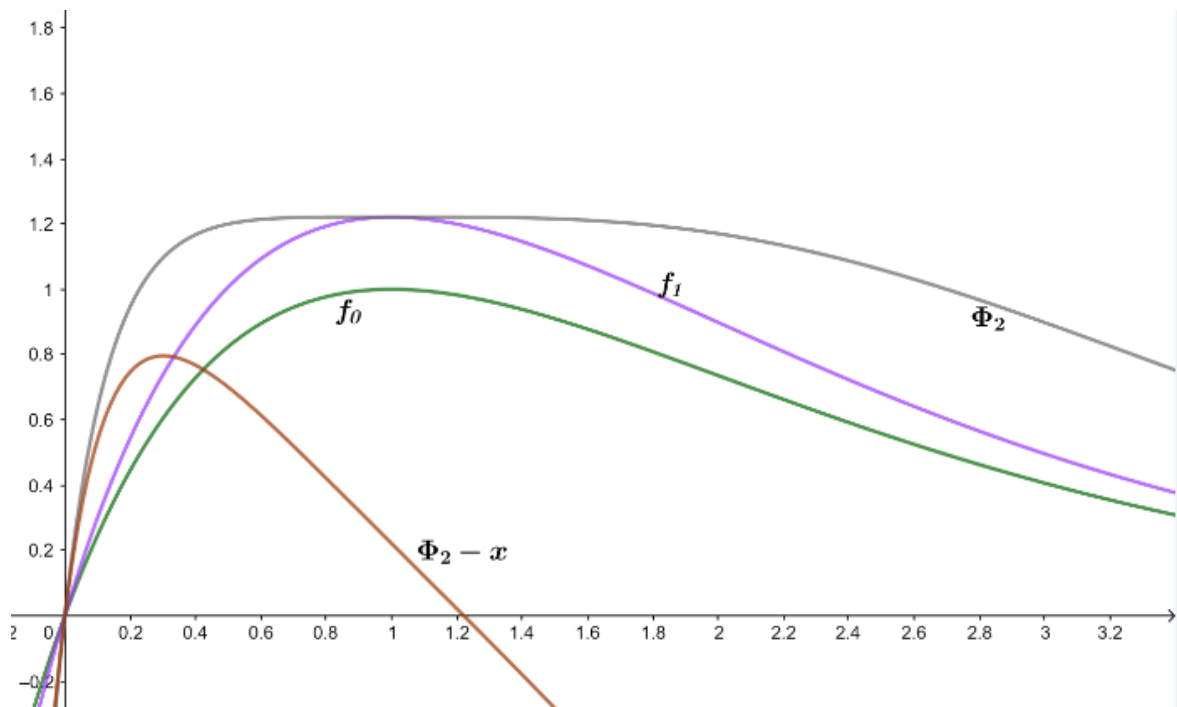


Figura 1.8: Grafico dos diferentes modelos de Ricker com o ponto fixo.

De acordo com a observação do gráfico na **Figura 1.8**, o nosso ponto é  $\bar{x}_0 \approx 1,221$ . Então,

$$\bar{x}_1 = f_0(1,221) = xe^{1-1,221} = 0,978. \text{ E, portanto, o } 2\text{-ciclo é } \{1,221; 0,978\}.$$

$$\begin{aligned} \Phi_2'(x) &= e^{2,2-x(1+e^{1-x})} + x(2,2 - x(1 + e^{1-x}))' \cdot e^{2,2-x(1+e^{1-x})} \\ &= [1 + x\{-(1 + e^{1-x}) - x(-e^{1-x})\}]e^{2,2-x(1+e^{1-x})} \\ &= [1 - x(1 + (1 - x)e^{1-x})]e^{2,2-x(1+e^{1-x})}. \\ |\Phi_2'(1,221)| &= 0,021106 < 1. \\ |\Phi_2'(0,978)| &= 0,000306 < 1. \end{aligned}$$

Ambos os valores absolutos são menores que 1, pelo que o ponto fixo é assintoticamente estável. Vamos estudar agora a estabilidade global. Robert Sacker [6] estabeleceu que se nós assumimos que  $r_n \in ]0,2[$ , então, o Modelo de Ricker (1.5) tem uma solução globalmente assintoticamente estável. Primeiro estabelecemos um intervalo  $I = [a, b]$ ,  $a > 0$ , que é invariante sob a aplicação do operador de composição  $\Phi_p$  e no qual todos os pontos de  $\mathbb{R}^+$  são mapeados num número finito de aplicações de  $\Phi_p$ . Claramente,  $b = \exp(\max r_i - 1)$  e  $a = \min\{\min r_i; b \exp(\max r_i - b)\}$  é suficiente já que  $\Phi_p(a) \geq a$  e  $\Phi_p(b) \leq b$ .

Esta condição nos parâmetros pode ser ampliada no espaço de parâmetros como se pode observar na **Figura 1.9** na região  $S$ . Eduardo Liz [7], demonstrou esta observação para  $p = 2$ , utilizando o **Teorema 1.4**.

**Teorema 1.4** (El-Morshedy e López,[66]): Seja  $a \geq 0, b > a$  e  $g: ]a, b[ \rightarrow [a, b]$  uma função contínua com um único ponto fixo  $x^*$  tal que  $(g(x) - x)(x - x^*) < 0$  para todo  $x \neq x^*$ . Assume-se que existem pontos  $a \leq c < x < d \leq b$  tal que a restrição de  $g$  para  $]c, d[$  tem no máximo um ponto de viragem e sempre que fizer sentido,  $g(x) \leq g(c)$  para todo o  $x \leq c$  e  $g(x) \geq g(d)$  para todo o  $x \geq d$ . Se  $g$  decresce no ponto  $x^*$ , tal que  $Sg(x) < 0$  para todo o  $x \in ]c, d[$  salvo no maior ponto crítico de  $g$  é  $-1 < g'(x^*) < 0$ , onde  $Sg(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left[ \frac{f''(x)}{f'(x)} \right]^2$ . Então, o ponto fixo  $x^*$  é globalmente estável.

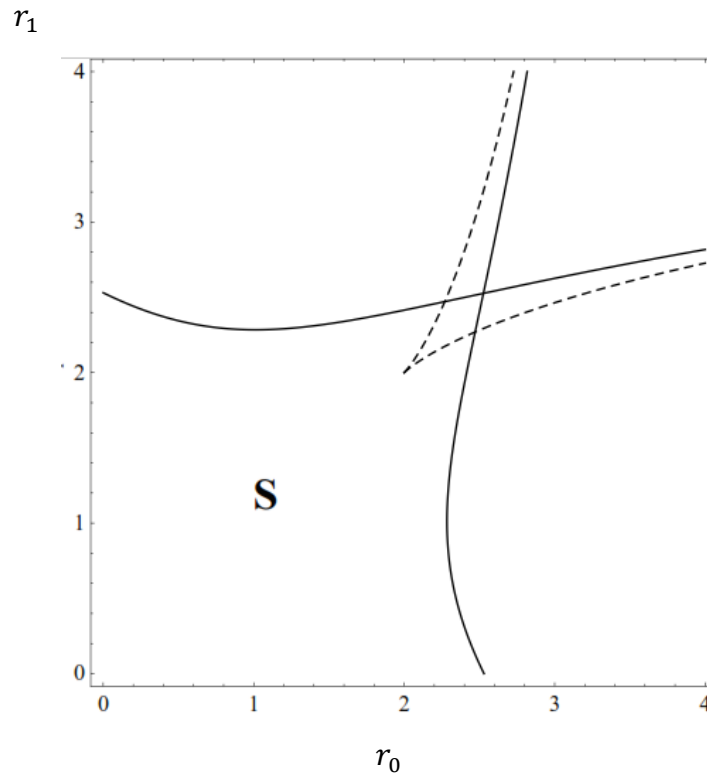


Figura 1.9: Região  $S$  de estabilidade global, no espaço dos parâmetros  $r_0$  o  $r_1$ , para o modelo de Ricker (1.6) de período 2. Fonte: Imagem tomada da referência [7].

### Região de estabilidade global para o mapa de Ricker de período 2

O Teorema de estabilidade global permite dar uma região precisa para a estabilidade global no caso  $p = 2$ . Primeiro, estabelecemos que  $\Phi_2 = f_1 \circ f_0$ , tem exatamente um ponto fixo.

**Proposição 1.1** [Liz, 7]. A função  $\Phi_2$ , tem mais de um ponto fixo se e, somente se  $r > 4$  e:

$$N_2(1 + e^{r_1 - N_2}) \leq r \leq N_1(1 + e^{r_0 - N_1}), \quad (1.7)$$

onde,

$$N_1 = \frac{r - \sqrt{r^2 - 4r}}{2}, \quad N_2 = \frac{r + \sqrt{r^2 - 4r}}{2} \text{ e } r = r_0 + r_1.$$

A condição de estabilidade divide o conjunto de parâmetros admissíveis  $\{(r_0, r_1): r_0 > 0, r_1 > 0\}$  em duas regiões conectadas abertas  $R_1$  e  $R_2$ , representadas na **Figura 1.10**. O conjunto

$R_2 \cup \{(2, 2)\}$  é a região onde "LAS  $\Rightarrow$  GAS" é válida, ou seja, contém os pares de parâmetros  $(r_0, r_1)$ , para os quais a estabilidade assintótica local do ponto de equilíbrio implica a sua estabilidade global.

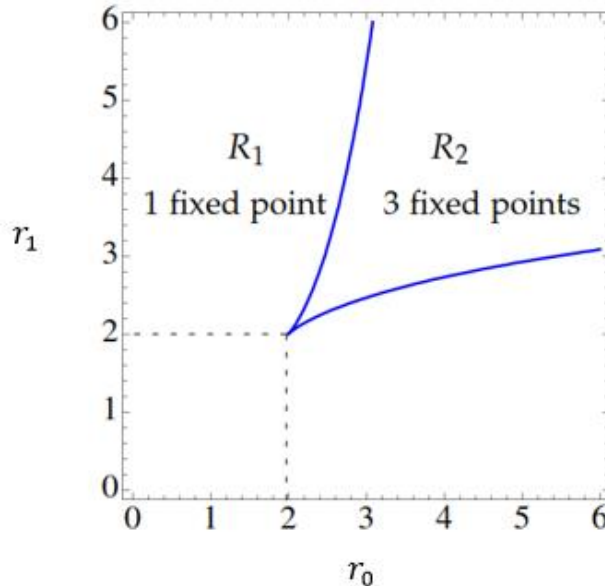


Figura 1.10: O mapa  $\Phi_2$  possui mais de um ponto fixo na região  $R_2$  entre as duas curvas, incluindo-as, mas excluindo o vértice  $(2, 2)$ . Fonte: Imagem tomada da referência [7].

Se a curva similar for mostrada de forma numérica (mas sem uma expressão analítica), os pontos coincidem com as curvas de bifurcação, isto só ocorre na equação de Ricker de período 2, ou seja, quando as condições  $\Phi_2'(x) = x$  mantem-se ao mesmo tempo.

Em seguida, para encontrar a região  $R \subset R_1$  onde a equação de Ricker de período 2 tem uma solução global estável de período 2, temos que determinar as curvas onde o equilíbrio se torna instável. Essas curvas definem uma bifurcação de duplicação do período e são caracterizadas pelas equações  $\Phi_2(x) = -1$  e  $\Phi_2(x) = x$ .

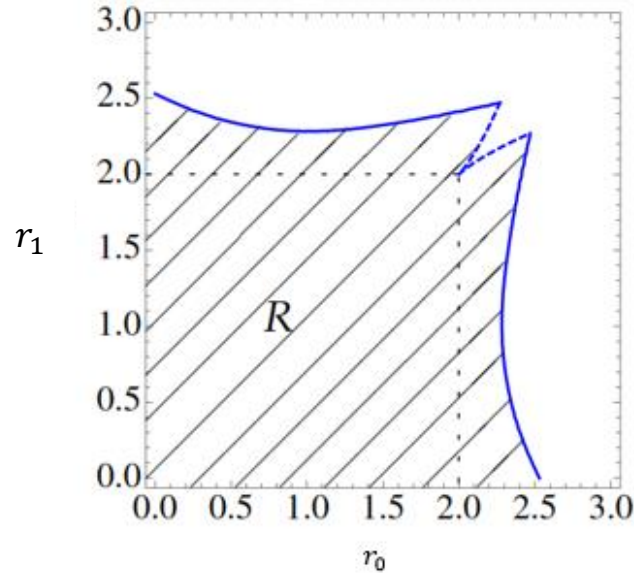
Um ponto fixo  $K$  de  $\Phi_2$  satisfaz  $\Phi_2(K) = -1$  se, e, somente se, uma das seguintes condições se mantêm:

$$r = u_1 (1 + e^{r_0 - u_1}), \quad r = u_2 (1 + e^{r_0 - u_2}), \quad (1.8)$$

onde,

$$u_1 = \frac{r - \sqrt{r^2 - 4(r - 2)}}{2}, \quad u_2 = \frac{r + \sqrt{r^2 - 4(r - 2)}}{2}, \quad r = r_0 + r_1.$$

Estas condições permite-nos representar a região exata no espaço dos parâmetros correspondentes a um 2-ciclo globalmente estável do mapa de Ricker de período 2 (**Figura 1.11**).



**Figura 1.11:** Região R onde o mapa  $\Phi_2$  possui um ponto fixo globalmente estável. As linhas sólidas azuis correspondem às curvas onde o equilíbrio se torna instável, e estão incluídas na região de estabilidade global. As linhas azuis tracejadas correspondem às curvas onde um novo ponto aparece, e eles não estão incluídos na região de estabilidade global, com a única exceção do ponto (2, 2). Fonte: Imagem tomada da referência [7].

Ressaltamos que a estabilidade assintótica local de um ponto fixo de  $\Phi_2$  não é suficiente para a sua estabilidade global. De facto, na **Figura 1.10** da região  $R_2$ , existem três pontos de equilíbrio, dois deles podem ser localmente assintoticamente estáveis ao mesmo tempo, mas é claro que não podem ser globalmente estáveis. Para  $r_0 = 0$ ,  $\Phi_2$  tem um ponto de equilíbrio globalmente estável  $K_1(0) \approx 1,918$ .

O ramo de pontos fixos  $K_1(r_0)$ , começando em  $K_1(0)$ , dá soluções globalmente estáveis de período 2, até que dois novos pontos fixos  $K_2(r_0)$ ,  $K_3(r_0)$ , de  $F_2$  apareçam em  $r_1 \approx 2.136$ .  $K_2(r_0)$  é instável, e  $K_3(r_0)$  é assintoticamente estável, até se tornar instável em  $r_1 \approx 2,457$ . Os pontos fixos  $K_1(r_0)$  e  $K_2(r_0)$ , desaparecem em  $r_1 \approx 2,32$ .

## 2 Análise do Modelo de Ricker para duas espécies

Um dos modelos de competição mais populares foi proposto por Lotka [11, p. 122] e Volterra [44] na década de 1920. Embora muitos considerem o modelo de utilidade prática limitada em muitos organismos complexos, é geralmente aceite entre os investigadores que o modelo deu o impulso para ecologia teórica.

Existem dois métodos de desenvolvimento de modelos discretos. O primeiro método é baseado numa discretização de equações diferenciais, usando um esquema numérico clássico, ou um método não padronizado como o esquema de Mickens [13]. No último método, é possível derivar modelos discretos do zero usando as propriedades biológicas subjacentes laços de espécies.

O modelo de Leslie-Gower [14], pode ser considerado como o análogo discreto do Modelo Lotka-Volterra. Uma variação deste modelo também foi obtida por Liu e Elaydi [15] via esquema de discretização não padrão de Micken. Há que ressaltar que num artigo recente, Hone *et al.* [16] utilizaram um modelo do tipo Ricker no estudo de um sistema predador-presa. Neste capítulo, adotamos a última abordagem e focamos em uma competição autónoma do tipo modelo de Ricker.

Na **Secção 2.1**, daremos atenção ao estudo da estabilidade dos pontos fixos de exclusão e do ponto fixo de coexistência do modelo de competição autónoma do tipo Ricker [34].

Na **Secção 2.2**, aprofundaremos as propriedades das variedades estáveis e instáveis dos pontos fixos deste modelo.

Na **Secção 2.3**, é apresentado um cenário de bifurcação no qual desenvolvemos um diagrama de bifurcação no espaço de parâmetros, como esta também no [34].

Na **Secção 2.4**, é apresentado o Modelo de competição de Ricker periódico, a sua dinâmica, estabilidade e estuda-se fenómenos de atenuância e ressonância, que podem ocorrer na ecologia.

### 2.1 O modelo de competição Ricker

O modelo clássico de competição Ricker para duas espécies é dado por:

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n e^{K-c_{11}u_n-c_{12}v_n} \\ v_{n+1} = v_n e^{L-c_{21}u_n-c_{22}v_n} \end{cases}, \quad (2.1)$$

onde  $u_n$  e  $v_n$  representam a densidade populacional no período de tempo  $n$  das espécies  $u$  e  $v$  respectivamente os parâmetros  $K$  e  $L$  são assumidos como números reais positivos e representam as capacidades de carga das populações,  $c_{ij} > 0$ ;  $1 \leq i, j \leq 2$  representamos parâmetros de competição entre espécies, mais precisamente  $c_{ii}$  é o parâmetro de competição entre membros da mesma espécie e  $c_{ij}$ ,  $i \neq j$  os parâmetros de competição entre membros de espécies distintas.

Através da mudança de variável  $c_{11}u_n = x_n$  e  $c_{22}v_n = y_n$ , o sistema (2.1) é equivalente a

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n e^{K-x_n-ay_n} \\ y_{n+1} = y_n e^{L-y_n-bx_n} \end{cases}, \quad (2.2)$$

onde,  $a = \frac{c_{12}}{c_{22}}$  e  $b = \frac{c_{21}}{c_{11}}$ . A equação (2.2) pode ser representada pelo mapa:

$$F(x, y) = ( x e^{K-x-ay}, y e^{L-y-bx} ).$$

A equação (2.2) tem um ponto fixo de extinção  $(0, 0)$ , dois pontos fixos de exclusão nos eixos  $(K, 0)$  e  $(0, L)$ , e um possível quarto ponto fixo de coexistência positivo  $(x^*, y^*)$ .

Vamos escrever a aplicação  $F = (f, g)$ . As isoclínicas de  $F$  são definidas por  $f(x, y) = x$  e  $g(x, y) = y$ . Estas são as linhas  $ay + x = K$  denotada por  $s_1$  e  $y + bx = L$  denotada por  $s_2$  (**Figura 2.1 (a) e (b)**). Além disso, a aplicação  $F$  toma um ponto  $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$  acima (abaixo) de  $s_1$  até um ponto com menor (maior) coordenada  $x$ . Da mesma forma, a aplicar  $F$  toma um ponto  $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$  acima (abaixo)  $s_2$  a um ponto com uma menor (maior) coordenada  $y$ .

Observe que na isóclina 1, a população  $x$  não tem crescimento, ou seja,  $x_{n+1} = x_n$  e na isóclina 2 a população  $y$  não tem crescimento, ou seja,  $y_{n+1} = y_n$ . Se as duas isóclinas  $s_1$  e  $s_2$  se cruzam no primeiro quadrante, teremos o ponto fixo positivo (de coexistência):

$$(x^*, y^*) = \left( \frac{K - aL}{1 - ab}, \frac{L - bK}{1 - ab} \right).$$

Há dois casos a serem considerados aqui: (i)  $ab < 1$  e (ii)  $ab > 1$  (**Figura 2.3 (a) e (b)**). O caso  $ab = 1$  será descartado, pois neste caso as duas isóclinas são paralelas e nenhum ponto fixo de coexistência está presente.

### 2.1.1 Estabilidade dos pontos de extinção e exclusão

A **Definição 1.3** (estabilidade local) pode agora ser estendida para modelos bidimensionais (ou superiores), usando uma norma apropriada. Como seguirá as mesmas diretrizes, vamos omiti-lo aqui. A estabilidade local de um ponto fixo  $(x^*, y^*)$  da equação:

$$(x_{n+1}, y_{n+1}) = F(x_n, y_n), \quad F = (f, g) \tag{2.3}$$

é garantido quando todos os valores próprios do jacobiano,  $JF(x^*, y^*)$  avaliados no ponto fixo  $(x^*, y^*)$ , têm magnitude menor que um. Esta é precisamente a conclusão do seguinte resultado:

**Teorema 2.1** (Elaydi, [21]). Seja  $F : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma aplicação de classe  $C^1$ , onde  $D$  é um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^2$ ,  $(x^*, y^*)$  um ponto fixo de  $F$ , e  $JF = JF(x^*, y^*)$  a matriz jacobiana de  $F$  avaliada no ponto fixo  $(x^*, y^*)$  e seja  $\rho(JF)$  o raio espectral da matriz  $JF$ .

Então as seguintes afirmações são verdadeiras:

- (1) Se  $\rho(JF) < 1$ , então  $(x^*, y^*)$  é localmente assintoticamente estável.
- (2) Se  $\rho(JF) > 1$ , então  $(x^*, y^*)$  é instável.
- (3) Se  $\rho(JF) = 1$ , então  $(x^*, y^*)$  pode ser ou não ser estável.

As condições necessárias e suficientes podem ser determinadas usando o traço,  $tr$ , e o determinante,  $det$ , de  $JF$  como é resumido no seguinte resultado:

**Teorema 2.2** (Elaydi [21]). Seja  $(x^*, y^*)$  um ponto fixo do mapa  $F = (f, g)$  e  $JF = JF(x^*, y^*)$  a matriz jacobiana calculada no ponto fixo  $(x^*, y^*)$ . Então,  $\rho(JF) < 1$  se e somente se:

$$|tr(JF(x^*, y^*))| - 1 < det(JF(x^*, y^*)) < 1 \quad (2.4)$$

Onde,  $\rho(JF)$  é o raio espectral da matriz  $JF$ .

**Observação 2.1.** Observe que o **Teorema 2.2**, afirma que o ponto fixo  $(x^*, y^*)$  é localmente assintoticamente estável, se as condições (2.4) forem verificadas.

O caso do ponto fixo não hiperbólico é mais complicado. Existem vários cenários de acordo com os valores próprios que são 1 ou  $-1$ . Quando um dos valores próprios está no círculo unitário e o outro valor próprio está dentro do círculo unitário, é comum usar a teoria da variedade central [41, 43, 51] para determinar a estabilidade do ponto fixo, uma vez que a dinâmica no coletor central determina a dinâmica do sistema original. Como o mapa na variedade central, neste caso, é um mapa unidimensional, pode-se então usar os resultados apresentados no **Capítulo 1** e concluir a estabilidade do ponto fixo não hiperbólico. Neste ponto referimos os exemplos pedagógicos presentes no livro de Elaydi [9, páginas 244–248] e no livro de Zhang [45, páginas 286–288].

O Jacobiano da equação (2.2) é dado por:

$$JF(x, y) = \begin{bmatrix} (1-x)e^{K-x-ay} & -axe^{K-x-ay} \\ -bye^{L-y-bx} & (1-y)e^{L-y-bx} \end{bmatrix}.$$

Assim os jacobinos avaliados nos pontos fixos são,

$$J_0 = JF(0,0) = \begin{bmatrix} e^K & 0 \\ 0 & e^L \end{bmatrix}.$$

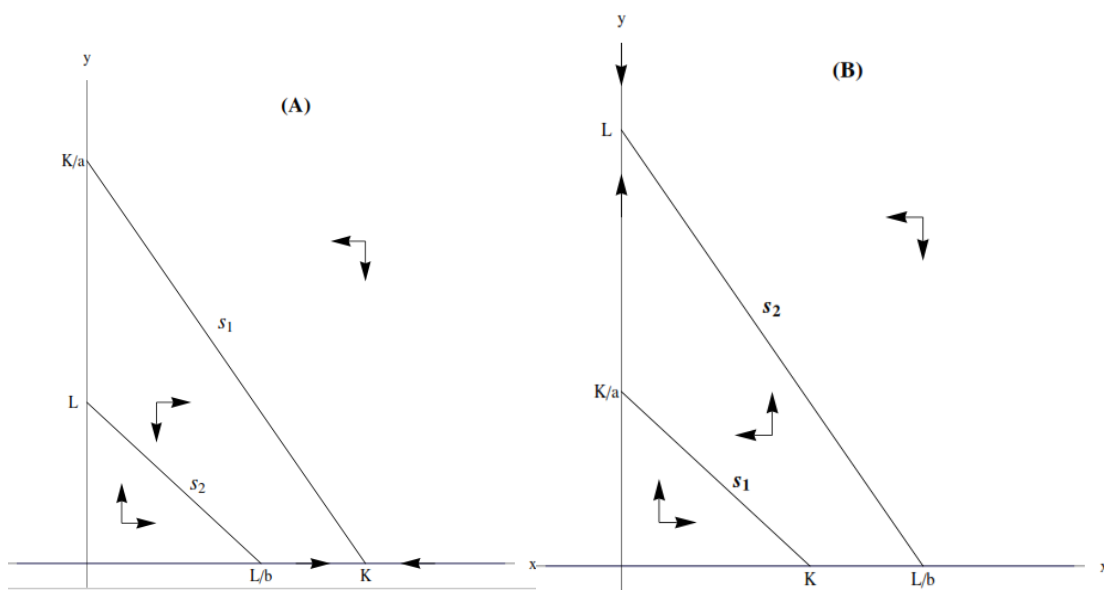


Figura 2.1: A estabilidade do ponto fixo de exclusão e a validade do princípio de exclusão da concorrência.  
 (i) Se  $0 < K \leq 2$  e  $L < bK$ , então  $(K, 0)$  é localmente assintoticamente estável e espécie  $y$  se extingue.  
 (ii) Se  $0 < L \leq 2$  e  $L > \frac{K}{a}$ , então  $(0, L)$  é localmente assintoticamente estável e a espécie  $x$  é extinta.  
 Fonte: Imagem tomada da referência [34].

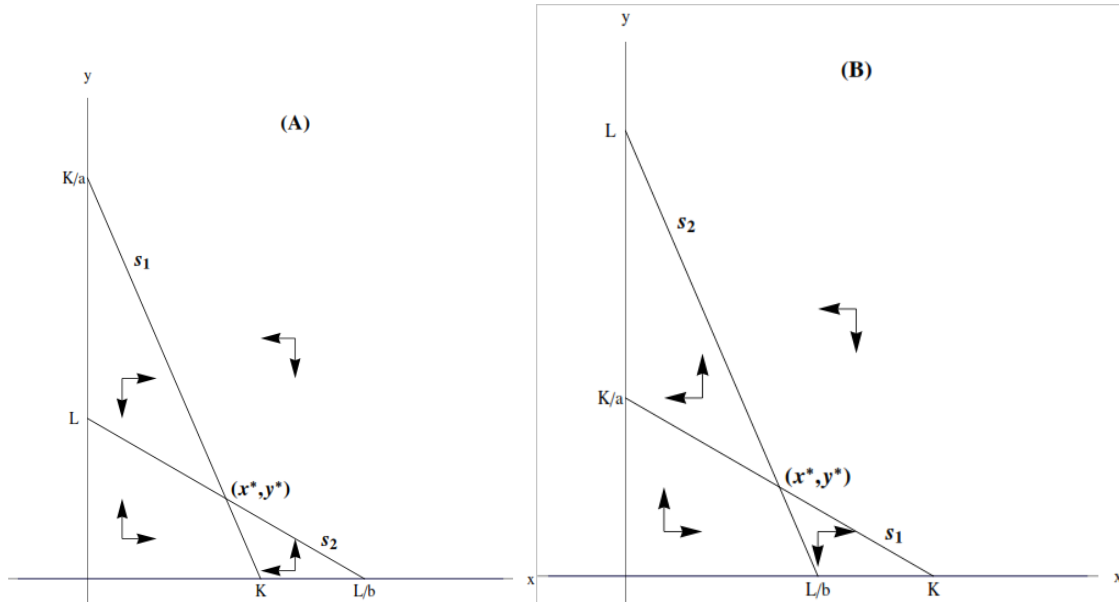


Figura 2.2: Isoclínicas - (a) O ponto fixo de coexistência da equação (2.2) existe se  $bK < L < \frac{K}{a}$  e  $ab < 1$ . (b) Só existe o ponto fixo de coexistência da equação (2.2) se  $\frac{K}{a} < L < bK$  e  $ab > 1$ , neste cenário, este equilíbrio é uma sela. Fonte: Imagem tomada da referência [34].

$$J_k = JF(K, 0) = \begin{bmatrix} 1 - K & -aK \\ 0 & e^{L-bK} \end{bmatrix}, \tag{2.5}$$

$$J_L = JF(0, L) = \begin{bmatrix} e^{K-aL} & 0 \\ -bL & 1 - L \end{bmatrix}$$

e

$$J^* = JF(x^*, y^*) = \begin{bmatrix} 1 - x^* & -ax^* \\ -by^* & 1 - y^* \end{bmatrix}.$$

Nesta subsecção estudamos a estabilidade local dos pontos fixos triviais de  $F, \{(0, 0), (K, 0), (0, L)\}$ , através da análise de valores próprios de  $J$ . Os valores próprios de  $J_0$  são  $e^K$  e  $e^L$ . Como  $K, L > 0$  resulta  $e^K > 1$  e  $e^L > 1$ . Assim  $(0, 0)$  é um ponto fixo instável para todo  $K, L > 0$ . Os valores próprios de  $J_K$  são  $1 - K$  e  $L - bK$ . Assim  $\rho(J_K) < 1$  se e, somente, se  $0 < K < 2$  e  $L < bK$ . Portanto  $(K, 0)$  é localmente assintoticamente estável se  $0 < K < 2$  e  $L < bK$ . No espaço dos parâmetros, notamos essa região por  $R_1$  (Figura 2.3).

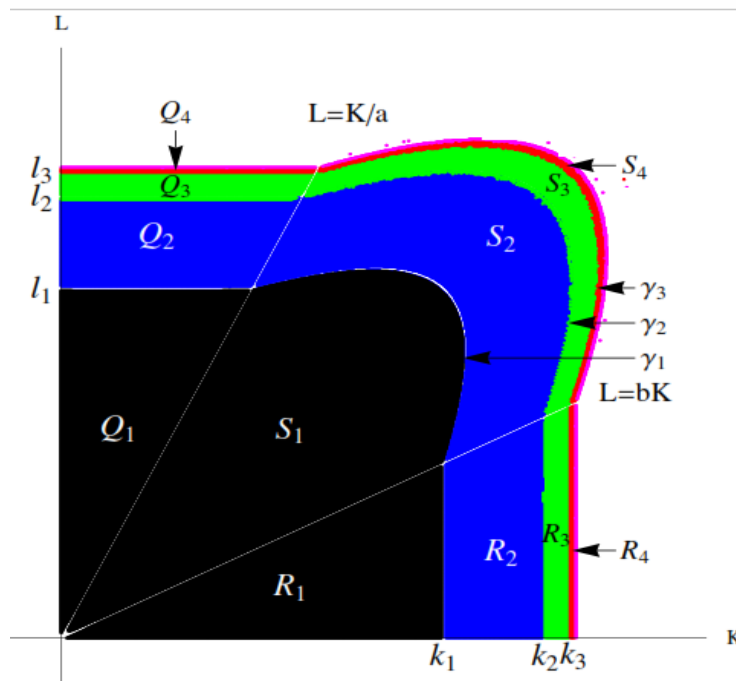


Figura 2.3: As regiões de estabilidade no espaço dos parâmetros da solução do modelo de competição de Ricker (2.2) quando  $a > 0$  e  $b > 0$  tal que  $ab < 1$ , onde, os valores dos parâmetros de competição são  $a = b = 0,5$ . Fonte: Imagem tomada da referência [34].

Assim, a região  $R_1$  pode ser definida como:

$$R_1 = \{ (K, L) \in \mathbb{R}^2 : 0 < K \leq 2 \wedge L < bK \}.$$

Note que da desigualdade  $K > \frac{L}{b}$ , obtemos  $\frac{K}{a} > \frac{L}{ab}$  e conseqüentemente,  $L < \frac{L}{ab} < \frac{K}{a}$ . Na **Figura 2.1 (a)**, representamos a orientação das isóclinas no espaço das fases.

De forma análoga,  $(0, L)$  é localmente assintoticamente estável se  $0 < L < 2$  e  $L > \frac{K}{a}$ . A região de estabilidade de  $(0, L)$  no espaço dos parâmetros  $K$  e  $L$  é denotado por  $Q_1$  (**Figura 2.3**) e é dado por:

$$Q_1 = \left\{ (K, L) \in \mathbb{R}^2 : 0 < L \leq 2 \wedge L > \frac{K}{a} \right\}.$$

Note que da desigualdade  $\frac{K}{a} < L$  segue que  $K < \frac{K}{ab} < \frac{L}{b}$ . Na **Figura 2.2 (b)**, mostramos a orientação das isóclinas no espaço das fases.

Estudamos agora a estabilidade do ponto fixo  $(K, 0)$  quando  $|\rho(J_K)| = 1$ . Isso ocorre em dois casos, o primeiro é quando  $K = 2$  e  $L < bK$ , em que os valores próprios são  $\lambda_1 = -1$  e  $\lambda_2 < 1$  e quando  $0 < K < 2$  e  $L = bK$ , em que  $|\lambda_1| < 1$  e  $\lambda_2 = 1$ . (O caso quando  $K = 2$  e  $L = bK$  em que  $\lambda_1 = -1$  e  $\lambda_2 = 1$ , não serão investigados neste trabalho devido à falta das técnicas necessárias na literatura).

Fazendo as mudanças da variável  $u = x - K$  e  $v = y$  na equação (2.2), deslocamos o ponto fixo  $(K, 0)$  para  $(0, 0)$ . Então, o novo sistema é dado por:

$$\begin{cases} u_{n+1} = (u_n + K) e^{(-u_n - av_n)} \\ v_{n+1} = v_n e^{L - v_n - b(u_n + K)} \end{cases}. \quad (2.6)$$

Consideremos agora o primeiro caso, ou seja,  $K = 2$  e  $L < bK$ . O jacobiano em  $(0, 0)$  agora é dado por:

$$\tilde{J}_0 = \tilde{JF}(K, 0) = \begin{bmatrix} -1 & -2a \\ 0 & e^{L-2b} \end{bmatrix}.$$

Assim, utilizando as técnicas presente no **Apêndice**, pode-se escrever a equação (2.6) como:

$$\begin{bmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2a \\ 0 & e^{L-2b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{f}(u_n, v_n) \\ \tilde{g}(u_n, v_n) \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

onde,

$$\tilde{f}(u, v) = (u + 2)e^{-u-av} - 2 + u + 2av$$

e

$$\tilde{g}(u, v) = ve^{L-v-b(u+2)} + e^{L-2b} v.$$

Seja  $v = h(u)$  com  $h(u) = \alpha u^2 + \beta u^3 + O(|u^4|)$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . A aplicação  $h$  deve satisfazer a equação na variedade central:

$$h(-u - 2ah(u) + \tilde{f}(u, h(u)) + e^{L-2b} h(u) - \tilde{g}(u, h(u))) = 0.$$

Utilizando o desenvolvimento de Taylor para duas variáveis [63], esta equação é equivalente a:

$$(\alpha - e^{L-2b}\alpha)u^2 + (be^{L-2b}\alpha + 4a\alpha^2 - \beta - e^{L-2b}\beta)u^3 + O[u]^4 = 0.$$

Daqui decorre que  $\alpha - e^{L-2b}\alpha = 0$  e  $be^{L-2b}\alpha + 4a\alpha^2 - \beta - e^{L-2b}\beta = 0$ , cuja única solução é  $\alpha = 0$  e  $\beta = 0$ . Portanto  $h(u) = 0$ . Conseqüentemente, na variedade central  $v = 0$ , e o novo mapa  $\hat{f}$  é dado por:

$$\hat{f}(u) = -u - 2ah(u) + \tilde{f}(u, h(u)) = -2 + e^{-u}(2 + u).$$

A derivada Schwarziana desta aplicação em  $u = 0$  é  $-1$ . Portanto, o ponto fixo de exclusão  $(2, 0)$  é assintoticamente estável pelo **Teorema 1.1**.

Consideramos agora o segundo caso, ou seja,  $0 < K < 2$  e  $L = bK$ . Depois de substituir o novo Jacobiano em  $(0, 0)$ , a equação (2.2) pode ser escrita como:

$$\begin{bmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2a \\ 0 & e^{L-2b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{f}(u_n, v_n) \\ \tilde{g}(u_n, v_n) \end{bmatrix}, \quad (2.8)$$

onde,

$$\tilde{f}(u, v) = (u + K)e^{-u-av} - (1 - K)u + (av - 1)K,$$

e

$$\tilde{g}(u, v) = ve^{-v-bu} - v.$$

Neste caso, a variedade central é dada por:

$$\begin{aligned} h(v) = -av - \frac{(1-ab)av^2}{K} \\ + \left( \frac{a(-1+ab)(4+a(2+b(-6+K)) - K)}{2K^2} \right) v^3. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Assim, o novo mapa na variedade central é

$$\hat{f}(v) = ve^{-v-bh(v)}. \quad (2.10)$$

Daqui decorre que  $\left(\hat{f}(v)\right)'_{v=0} = 1$  e  $\left(\hat{f}(v)\right)''_{v=0} = 2(-1+ab)$ . Assim, o ponto fixo de exclusão na variedade central  $u = h(v)$  é instável. Mais precisamente, é um ponto de estabilidade local dos pontos fixos triviais do seguinte modo.

**Teorema 2.3** (Luís *et al*, [34]) Para a equação autónoma de Ricker (2.2), as seguintes afirmações são verdadeiras:

- (1) O ponto fixo  $(0, 0)$  é instável;
- (2) O ponto fixo  $(K, 0)$  é assintoticamente estável se  $0 < K \leq 2$  e  $L < bK$ ;
- (3) O ponto fixo  $(0, L)$  é assintoticamente estável se  $0 < L \leq 2$  e  $L > \frac{K}{a}$ .

### 2.1.2 Estabilidade do ponto fixo de coexistência: O caso $ab < 1$

Lembre-se de que  $(x^*, y^*) = \left(\frac{K - aL}{1 - ab}, \frac{L - bK}{1 - ab}\right)$  é um ponto fixo de coexistência quando:

$$bK < L < \frac{K}{a} \text{ e } ab < 1. \quad (2.11)$$

Nesta situação, os segmentos de reta  $s_1$  e  $s_2$  cruzam-se conforme apresentado na **Figura 2.1 (a)**. A fim, de encontrar a região de estabilidade de  $(x^*, y^*)$ , precisamos encontrar a região onde,

$$|tr(J^*)| - 1 < \det(J^*) < 1.$$

(Para mais detalhes sobre este resultado, ver ([61]). Isto é equivalente a:

$$\det(J^*) < 1 \wedge \det(J^*) > tr(J^*) - 1 \wedge \det(J^*) > -tr(J^*) - 1.$$

Se pelo menos uma destas desigualdades for revertida, então  $(x^*, y^*)$  é instável.

Agora temos que:

$$\det(J^*) = \frac{ab - 1 + (1 - a)L + (1 - b)K - (aL - K)(bK - L)}{ab - 1}$$

e

$$tr(J^*) = \frac{2(ab - 1) + (1 - a)L + (1 - b)K}{ab - 1}.$$

Consequentemente,  $\det(J^*) < 1$  se:

$$(aL - K)(bK - L) < (1 - a)L + (1 - b)K, \quad (2.12)$$

$\det(J^*) > tr(J^*) - 1$  se

$$(aL - K)(bK - L) > 0. \quad (2.13)$$

Finalmente,  $\det (J^*) > -tr (J^*) - 1$  se:

$$(aL - K)(bK - L) > 4(ab - 1) + 2(1 - a)L + 2(1 - b)K. \quad (2.14)$$

Observe que a desigualdade (2.14) é satisfeita automaticamente pela equação (2.12). Assim,  $(x^*, y^*)$  é localmente assintoticamente estável se para qualquer valor fixo  $a > 0$  e  $b > 0$  com  $ab < 1$ , as seguintes desigualdades são satisfeitas:

$$\begin{aligned} (aL - K)(bK - L) &< (1 - a)L + (1 - b)K \\ (aL - K)(bK - L) &> 4(ab - 1) + 2(1 - a)L + 2(1 - b)K. \end{aligned} \quad (2.15)$$

A solução destas duas condições leva ao interior da região identificada pela letra  $S_1$  na **Figura 2.3** no espaço de parâmetros  $(K, L)$ . A região  $S_1$  é delimitada pelas linhas  $L = \frac{K}{a}$  e  $L = bK$  e a curva  $\gamma_1$  (pontos nesta curva podem ser incluídos conforme é mostrado abaixo).

Em seguida, mostraremos que quando  $K$  e  $L$  estão em  $\gamma_1$  o ponto fixo de coexistência é assintoticamente estável. Isso acontece quando  $|\rho(J^*)| = 1$ , ou seja,  $\lambda_1 = -1$  e  $\lambda_2 < 1$ . Observe que na curva  $\gamma_1$  temos:

$$\begin{aligned} L = \frac{2(a - 1) + (1 + ab)K}{2a} \pm \\ \frac{\sqrt{2(a - 1) + ((1 + ab)K)^2 + 4a(4(1 - ab) + 2(b - 1)K - bK^2)}}{2a}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Fazendo a mudança de variável  $u_n = x_n - x^*$  e  $v_n = y_n - y^*$  na equação (2.2), deslocamos o ponto fixo positivo  $(x^*, y^*)$  para a origem. A equação (2.2) agora é equivalente a:

$$\begin{bmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{f}(u_n, v_n) \\ \tilde{g}(u_n, v_n) \end{bmatrix}, \quad (2.17)$$

Onde,

$$\tilde{f}(u, v) = (u + x^*)e^{K - (u + x^*) - a(v + y^*)} - x^* - J_{11}u - J_{12}v$$

e

$$\tilde{g}(u, v) = (v + y^*)e^{L - (v + y^*) - b(u + x^*)} - y^* - J_{21}u - J_{22}v.$$

O jacobiano em  $(0, 0)$  é dado por:

$$\begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1+k-a(-b+L)}{-1+ab} & \frac{-a(-K+aL)}{-1+ab} \\ -\frac{b(bK-L)}{-1+ab} & \frac{-a+ab-bK+L}{-1+ab} \end{bmatrix}.$$

Agora, precisamos diagonalizar essa matriz. Podemos escrever a matriz diagonal como:

$$\begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{S}_{11} & \tilde{S}_{12} \\ \tilde{S}_{21} & \tilde{S}_{22} \end{bmatrix},$$

onde,

$$S_{11} = \frac{-(1+b)K + (1+a)L + \nabla}{2b(bK - L)}, \quad S_{12} = \frac{-(1+b)K + (1+a)L - \nabla}{2b(bK - L)},$$

$$\lambda_1 = \frac{2(ab - 1) + (1 - b)K + (1 - a)L - \nabla}{2(ab - 1)},$$

$$\lambda_2 = \frac{2(ab - 1) + (1 - b)K + (1 - a)L + \nabla}{2(ab - 1)},$$

$$\tilde{S}_{11} = \frac{b(bK - L)}{\nabla}, \quad \tilde{S}_{12} = \frac{(1 + b)K - (1 + a)L + \nabla}{2\nabla},$$

$$\tilde{S}_{21} = \frac{b(-bK + L)}{\nabla}, \quad \tilde{S}_{22} = \frac{-(1 + b)K + (1 + a)L + \nabla}{2\nabla}$$

com

$$\nabla = \sqrt{\frac{(1 + 2b + (1 - 4a)b^2)K^2 + 2(a(b - 1) - b - 1 + 2a^2b^2)}{KL + (1 + 2a + a^2(1 - 4b))L^2}}.$$

Usando novamente uma nova mudança de variáveis  $u = S_{11}z + S_{12}w$  e  $v = z + w$ , temos o seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} z_{n+1} \\ w_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_n \\ w_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{f}(z_n, w_n) \\ \tilde{g}(z_n, w_n) \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

onde,

$$\begin{bmatrix} \tilde{f}(z_n, w_n) \\ \tilde{g}(z_n, w_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{S}_{11} & \tilde{S}_{12} \\ \tilde{S}_{21} & \tilde{S}_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{f}(u_n, v_n) \\ \tilde{g}(u_n, v_n) \end{bmatrix}.$$

Seja  $z = h(w)$ , onde  $h(w) = \alpha w^2 + \beta w^3 + O(w^4)$ . A função  $h$  deve satisfazer a seguinte equação na variedade central:

$$h(\lambda_2 w + \tilde{g}(h(w), w)) - \lambda_1 h(w) - \tilde{f}(h(w), w) = 0. \quad (2.19)$$

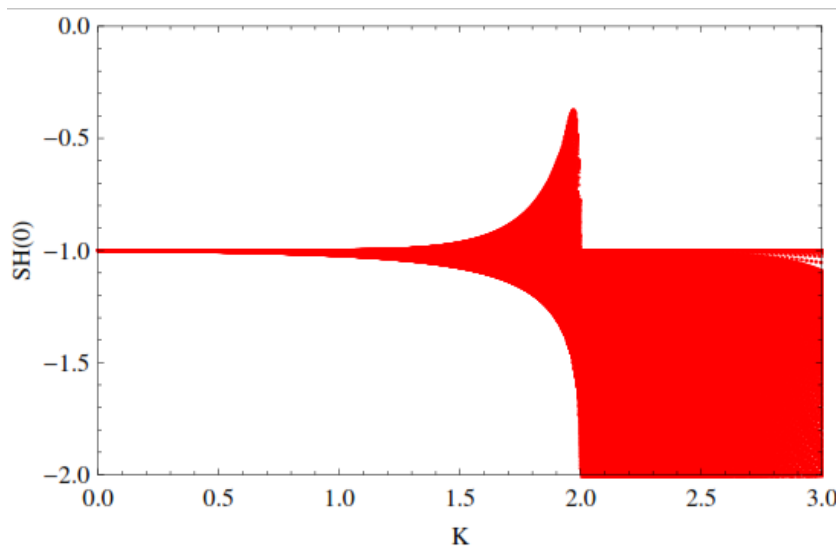
Depois de simplificar essa equação, escrevemos a expansão de Taylor e encontramos os valores das constantes  $\alpha$  e  $\beta$ . Como os cálculos aqui são longos, não podemos encontrar analiticamente os valores exatos de  $\alpha$  e  $\beta$ . No entanto, podemos encontrá-lo numericamente. Observe que o valor máximo de a capacidade de carga  $K$  é dada pelo maior valor no ramo esquerdo da hipérbole, a saber:

$$K_{max} = \frac{2(1 + a - a\sqrt{b})}{1 - ab}.$$

Observe que dependente da escolha de  $a$  e  $b$ ,  $K_{max}$  pode ser um número muito grande, ou seja quando  $ab \approx 1$ . Reduzimos a nossa análise, quando os parâmetros de competição pertencem ao intervalo  $(0, 2)$ . Escolhendo aleatoriamente os valores de  $a$  e  $b$  no intervalo  $(0, 2]$  tal que  $ab < 1$  e usando o valor de  $L$  dado na equação (2.16), veríamos a capacidade de carga  $K$  no intervalo  $(0, 3]$  e encontramos numericamente os valores de  $\alpha$  e  $\beta$ . Depois de fazermos isso, calculamos o valor da derivada Schwarziana do mapa:

$$H(w) = -w + \tilde{g}(h(w), w).$$

As simulações realizadas, concluem que a derivada de Schwarz  $SH(0) < 0$ , como é mostrada na **Figura 2.4**. Observe que essas simulações podem ser feitas para valores muito maiores de  $a$  e  $b$ . Por cálculos numéricos, pode-se visualizar que na curva  $\gamma_1$  o ponto fixo de coexistência da equação (2.16) deve ser assintoticamente estável. Observações semelhantes podem ser feitas se considerarmos a variedade central  $w = h(z)$ .



**Figura 2.4:** Parte dos valores da derivada Schwarziana do novo mapa central para o ponto de coexistência fixa. Nesta simulação, usamos valores da capacidade de carga  $K$  no intervalo  $(0, 3]$  e os parâmetros de competição estão no intervalo  $(0, 2]$  tal que  $ab < 1$ . Fonte: Imagem tomada da referência [34].

Agora resumimos estas conclusões no seguinte teorema.

**Teorema 2.4** (Luís, *et al*, [34]) Suponha que  $ab < 1$  e seja  $\hat{S} = \text{Int}(S_1) \cup \gamma_1$ , onde  $\text{Int}(S_1)$  denota o interior de  $S_1$ . Então, o ponto fixo de coexistência,

$$(x^*, y^*) = \left( \frac{aL - K}{ab - 1}, \frac{bK - L}{ab - 1} \right),$$

da equação de Ricker (2.2) é assintoticamente estável se:

$$\begin{aligned} 4(ab - 1) + 2(1 - a)L + 2(1 - b)K &\leq (aL - K)(bK - L) \\ &< (1 - a)L + (1 - b)K. \end{aligned}$$

Equivalentemente, o ponto fixo de coexistência é assintoticamente estável se  $(K, L) \in \hat{S}$ .

## 2.2 Os coletores estáveis e instáveis

Nesta seção, estudamos (através de cálculos numéricos) um cenário célebre na teoria clássica de competição, o caso de exclusão de sela (ou equivalentemente, uma variedade estável e instável). Um mapa bidimensional geral tem uma variedade estável e uma instável quando as seguintes condições, no plano Traço-Determinante, são satisfeitas:

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} \det(J^*) < \operatorname{tr}(J^*) - 1 \\ \det(J^*) > -\operatorname{tr}(J^*) - 1 \end{array} \right\} \vee \left\{ \begin{array}{l} \det(J^*) > \operatorname{tr}(J^*) - 1 \\ \det(J^*) < -\operatorname{tr}(J^*) - 1 \end{array} \right\} \\ & \left\{ \begin{array}{l} \det(J^*) < \frac{(\operatorname{tr}(J^*))^2}{4} \\ \det(J^*) > 1 \\ \det(J^*) > -\operatorname{tr}(J^*) - 1 \end{array} \right\} \vee \left\{ \begin{array}{l} \det(J^*) < \frac{(\operatorname{tr}(J^*))^2}{4} \\ \det(J^*) > \operatorname{tr}(J^*) - 1 \\ \det(J^*) > 1 \end{array} \right\}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Para mais detalhes sobre essas condições, veja [61]. Assim, temos dois cenários a considerar: (i)  $ab > 1$  em que o vencedor depende das condições iniciais e (ii)  $ab < 1$ , onde temos a presença de ambos os ciclos localmente assintoticamente estáveis e pontos fixos instáveis.

### 2.2.1 Caso (i): $ab > 1$ .

No modelo (2.2), o cenário de sela ocorre quando se tem um ponto de equilíbrio de coexistência tal que:

$$aL > K \text{ e } bK > L. \quad (2.21)$$

Daqui decorre que:

$$ab > 1. \quad (2.22)$$

Agora determinamos no espaço de parâmetros, a região onde a relação (2.14) é satisfeita. Os cálculos diretos mostram que  $\det(J^*) > \operatorname{tr}(J^*) - 1$  é equivalente a:

$$(aL - K)(bK - L) < 0,$$

o que é impossível pela equação (2.15). Portanto, existem dois sistemas na equação (2.20) que levam a uma região vazia. Analogamente,  $\det(J^*) < \text{tr}(J^*) - 1$  é a região no plano  $(K, L)$  entre as duas linhas  $L = \frac{K}{a}$  e  $L = bK$ , ou seja, suposição (2.15). Observe que pela equação (2.16), tem-se  $b > 1/a$ , e conseqüentemente  $bK > \frac{K}{a}$ .

A desigualdade  $\det(J^*) < \text{tr}(J^*) - 1$  leva a:

$$2(1-a)L + 2(1-b)K - (aL - K)(bK - L) + 4(ab - 1) > 0.$$

Observe que pela equação (2.11), a equação do segundo grau:

$$2(1-a)L + 2(1-b)K - (aL - K)(bK - L) + 4(ab - 1) = 0, \quad (2.23)$$

representa uma hipérbole no plano  $(K, L)$ . Daí o sistema:

$$\det(J^*) < \text{tr}(J^*) - 1 \quad \text{e} \quad \det(J^*) > -\text{tr}(J^*) - 1, \quad (2.24)$$

é satisfeito sempre que  $K$  e  $L$  estão entre as linhas  $L = \frac{K}{a}$  e  $L = bK$  e o ramo direito da hipérbole (2.17). A relação  $\det(J^*) > 1$  é equivalente a:

$$(1-a)L + (1-b)K - (aL - K)(bK - L) > 0.$$

Esta é a região no primeiro quadrante fora do ramo direito da hipérbole:

$$(1-a)L + (1-b)K - (aL - K)(bK - L) = 0, \quad (2.25)$$

que passa pela origem.

A desigualdade  $\det(J^*) < \frac{(\text{tr}(J^*))^2}{4}$  leva à seguinte relação:

$$\begin{aligned} (4a^2b - ((a+1)^2)L^2 + 2(1+a+b-ab-2(ab)^2)KL \\ + (4ab^2 - (b+1)^2)K^2 < 0. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Observe que a equação do segundo grau:

$$\begin{aligned} (4a^2b - ((a+1)^2)L^2 + 2(1+a+b-ab-2(ab)^2)KL \\ + (4ab^2 - (b+1)^2)K^2 = 0, \end{aligned}$$

representa uma cônica, no plano  $(K, L)$ , conhecido como um par de linhas imaginárias que se cruzam num ponto real (ver por exemplo [22]), desde que a condição de teste seja:

$$\left| \begin{pmatrix} 4ab^2 - (b+1)^2 & 1+a+b-ab-2(ab)^2 \\ 1+a+b-ab-2(ab)^2 & 4a^2b - (a+1)^2 \end{pmatrix} \right| = 0.$$

Como,

$$\begin{aligned} & \left| \begin{pmatrix} 4ab^2 - (b+1)^2 & 1+a+b-ab-2(ab)^2 \\ 1+a+b-ab-2(ab)^2 & 4a^2b - (a+1)^2 \end{pmatrix} \right| \\ & = -4ab(-1+ab)^3 < 0. \end{aligned}$$

Este ponto é precisamente a origem porque as equações dessas duas linhas que são  $L = m \pm K$ , onde:

$$m_{\pm} = \frac{1+a+b-ab-2a^2b^2 \pm 2\sqrt{ab(-1+ab)^3}}{((1+a)^2 - 4a^2b)}.$$

Assim, o sistema:

$$\begin{cases} \det(J^*) < \frac{(tr(J^*))^2}{4} \\ \det(J^*) > 1 \\ \det(J^*) > -tr(J^*) - 1 \end{cases}, \quad (2.27)$$

representa a região no plano  $(K, L)$  fora de ambas as hipérbolas (2.17) e (2.19) e entre duas linhas  $L = m \pm K$ .

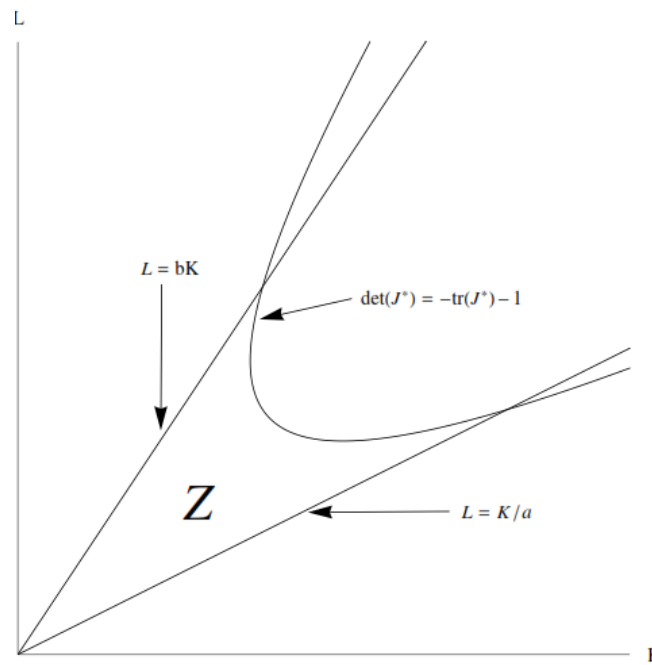


Figura 2.5: A região de sela  $Z$ , no espaço de parâmetros  $K$  e  $L$ , quando  $a = 2$  e  $b = 1,5$ . Fonte: Imagem tomada da referência [34].

Cálculos numéricos mostram que quando  $a > 1$  e  $b > 1$  (o que implica  $ab > 1$ ) tem-se:

$$m_+ > b > \frac{1}{a} > m_-.$$

Assim, assumindo esta restrição nos parâmetros de competição e sob a hipótese (2.15), o sistema (2.21) tem uma solução vazia. Consequentemente, se  $a > 1$  e  $b > 1$  a relação (2.14) é equivalente ao sistema (2.24). Portanto, a região é delimitada pelas duas linhas  $L = \frac{K}{a}$  e  $L = bK$  e o ramo direito de hipérbole (2.17). Na **Figura 2.5**, está representado no espaço de parâmetros  $(K, L)$  esta região quando  $a = 2$  e  $b = 1,5$ .

Observe que se assumirmos que  $a < 1$  ou  $b < 1$  tal que  $ab > 1$ , então a região de sela é mais envolvida, ou seja, contém a solução de ambos os sistemas (2.24) e (2.27). Agora, vamos considerar que  $a > 1$  e  $b > 1$  tais que  $(K, L) \in S$ . Seguindo as mesmas técnicas da **Secção (2.1.2)** encontramos que, localmente, a variedade estável do ponto fixo de coexistência é dada por:

$$W^s = \{ (z, w) \in \mathbb{R}^2 : w = \alpha_1 z^2 + \beta_1 z^3, \alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R} \}$$

e a variedade instável é:

$$W^u = \{ (z, w) \in \mathbb{R}^2 : z = \beta_2 w^2, \beta_2 \in \mathbb{R} \}.$$

Devido ao grande tamanho dos valores  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$  e  $\beta_2$ , podem ser determinadas e enviadas a um software destas constantes, a sua representação omite-se aqui. Nas coordenadas originais, os valores de  $z$  e  $w$  são dados por:

$$z = \frac{S_{22}(x - x^*) - S_{12}(e - e^*)}{S_{11}S_{22} - S_{21}S_{12}} \text{ e } w = \frac{S_{11}(e - e^*) - S_{21}(x - x^*)}{S_{11}S_{22} - S_{21}S_{12}},$$

onde  $S_{ij}$  são as entradas da matriz  $S$  determinadas na seção anterior.

### 2.2.2 Caso (ii): $ab < 1$

Pela equação (2.11), segue que  $\det(J^*) < \text{tr}(J^*) - 1$  é impossível. Assim, o primeiro sistema na equação (2.20) leva a uma região vazia. Na subseção anterior, determinamos a desigualdade:

$$\det(J^*) < \frac{(\text{tr}(J^*))^2}{4},$$

o que leva à relação (2.26). Afirmamos que quando  $ab < 1$ , o primeiro membro da equação (2.26) é negativo. Para mostrar isso, vamos supor temporariamente que  $L = mK$  para algum  $m > 0$ . Portanto a relação (2.20) é equivalente a  $K^2 u(m) < 0$ , onde:

$$u(m) = (4a^2b - (a+1)^2)m^2 + 2(1+a+b-ab-2(ab)^2)m + 4ab^2 - (b+1)^2.$$

Resolvendo a equação  $u(m) = 0$  temos:

$$m = \frac{(1+a+b-ab-2(ab)^2) \pm 2\sqrt{ab(1-ab)^3}i}{(1+a)^2 + 4a^2b}, \quad i^2 = -1.$$

Agora mostramos que o coeficiente de  $m^2$  é um número negativo. Assim que:

$$4a^2b - (a+1)^2 = 4aab - (a+1)^2 < 4a - (a+1)^2 = -(a-1)^2 < 0,$$

(uma vez que  $ab < 1$ ). Portanto, a função  $u$  é uma parábola, côncava para baixo, sem zeros reais. Consequentemente, a relação (2.26) é satisfeita.

Dado que  $\det(J^*) > \text{tr}(J^*) - 1$  é verificado automaticamente e pelo fato de que  $\det(J^*) < \frac{(\text{tr}(J^*))^2}{4}$  é sempre verdadeira, segue que o sistema:

$$\begin{cases} \det(J^*) < \frac{(\text{tr}(J^*))^2}{4} \\ \det(J^*) > 1 \\ \det(J^*) > -\text{tr}(J^*) - 1. \end{cases},$$

leva à mesma região no espaço de parâmetros, portanto a relação (2.20) leva a:

$$\begin{cases} \det(J^*) > \text{tr}(J^*) - 1 \\ \det(J^*) < -\text{tr}(J^*) - 1 \end{cases} \vee \begin{cases} \det(J^*) > -\text{tr}(J^*) - 1 \\ \det(J^*) > 1 \end{cases}.$$

Isso leva à região  $Z$  identificada na **Figura 2.6**. Observe que  $Z = \cup_{i \geq 2} S_i$  (na próxima seção vamos dar mais detalhes sobre as regiões  $S_i, i \geq 2$ ) Antes de terminarmos esta subseção, observamos que a determinação da sela e da instabilidade nos *mainfolds* seguem as orientações acima.

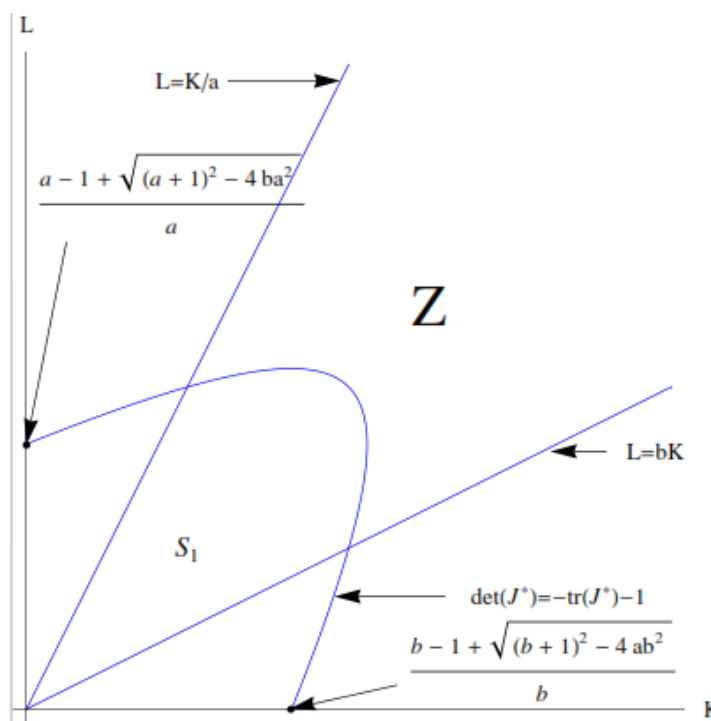


Figura 2.6: A região de sela  $Z$ , no espaço paramétrico  $K$  e  $L$ , quando  $a = b = 0,5$ . Fonte: Imagem tomada da referência [34].

### 2.2.3 O ponto fixo de exclusão

Agora, determinamos a região, no espaço de parâmetros, onde o ponto fixo de exclusão  $(K, 0)$  da equação (2.2) tem variedades estáveis e instáveis. Este conjunto é dado por:

$$Z_K = \{ (K, L) \in \mathbb{R}^2 : K > 2 \wedge L < bK \}.$$

Seja  $(K, L) \in Z_K$ . Então técnicas semelhantes, como antes nos levam a encontrar localmente a variedade estável:

$$W_K^s = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0 \},$$

e a variedade instável:

$$W_K^u = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = K \}.$$

do ponto fixo de exclusão  $(K, 0)$ .

Da mesma forma, no conjunto:

$$Z_L = \left\{ (K, L) \in \mathbb{R}_+^2 : L > 2 \wedge L > \frac{K}{a} \right\},$$

o ponto fixo de exclusão  $(0, L)$  tem a variedade estável (localmente):

$$W_L^s = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0 \},$$

e a variedade instável (localmente):

$$W_L^u = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = L \}.$$

### 2.3 Cenários de bifurcação

Na ausência da espécie “y” a dinâmica da espécie “x” é regida pela equação de Ricker unidimensional:

$$x_{n+1} = x_n e^{K - x_n}, n \in \mathbb{Z}^+. \quad (2.28)$$

Já vimos que no capítulo 1 a equação (2.28) tem um ponto fixo globalmente assintoticamente estável quando  $0 < K \leq 2$ . Em  $K = k_1 = 2$ , ocorre bifurcações de duplicação de período. No ponto de bifurcação  $k_1 = 2$ , um ciclo assintoticamente estável de período 2  $\{\bar{x}_0, \bar{x}_1\}$  é produzido. Os dois pontos  $\bar{x}_0, \bar{x}_1$  satisfazem as equações  $\bar{x}_1 = \bar{x}_0 e^{K - \bar{x}_0}$  e  $\bar{x}_0 = \bar{x}_1 e^{K - \bar{x}_1}$ . Pelo princípio de linearização, a estabilidade deste ciclo de período 2 pode ser vista a partir do produto das derivadas do mapa (2.28) avaliado em  $\bar{x}_0$  e  $\bar{x}_1$ . Este produto é inferior a 1 em valor absoluto, ou seja  $\sum_{i=0}^1 |1 - \bar{x}_i| < 1$  se  $k_1 < K < k_2$ , onde  $k_2 \approx 2,5265$ . Em  $K = k_2$ , acontece uma nova bifurcação de duplicação de período. Então existe  $k_3$  maior que, mas próximo de  $k_2$ , tal que um novo ciclo 4-

periódico é assintoticamente estável se  $k_2 < K < k_3$ . Este cenário de duplicação de período continua. Portanto, existem dois pontos de bifurcação  $k_j$  e  $k_{j+1}$  para um inteiro específico  $j$  tal que o  $r$ -ciclo periódico  $\{\bar{x}_0, \dots, \bar{x}_{r-1}\}$ , onde  $r = 2^j$ , satisfaz a relação:

$$\sum_{i=0}^{r-1} |1 - \bar{x}_i| < 1. \quad (2.29)$$

O ciclo  $r$ -periódico  $\{\bar{x}_0, \dots, \bar{x}_{r-1}\}$  da equação (2.28) produz um ciclo de exclusão  $r$ -periódico da forma:

$$C_r^x = \{(\bar{x}_0, 0), (\bar{x}_1, 0), \dots, (\bar{x}_{r-1}, 0)\}. \quad (2.30)$$

no modelo de Ricker da competição (2.2).

O Jacobiano de  $C_r^x$  calculado ao longo da órbita periódica, é dado pela seguinte matriz:

$$\sum_{r-1}^0 JF(\bar{x}_1, 0) = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{r-1} |1 - \bar{x}_i| & J_{12} \\ 0 & e^{rL - b \sum_{i=0}^{r-1} \bar{x}_i} \end{pmatrix}.$$

Os valores próprios são  $\lambda_1 = \sum_{i=0}^{r-1} |1 - \bar{x}_i|$  e  $\lambda_2 = e^{rL - b \sum_{i=0}^{r-1} \bar{x}_i} = e^{r(L - bK)}$ . Usando a hipótese  $L < bK$  então  $|\lambda_2| = \lambda_2 < 1$  e da relação (2.29) segue  $|\lambda_1| < 1$ . Assim  $C_r^x$  é assintoticamente estável. Observe que se  $L = 0$  se tem  $\lambda_2 < 1$ . Isso implica que a sequência de parâmetros  $\{k_j\}$  segue o caso unidimensional, ou seja,  $k_1 = 2$ ,  $k_2 \approx 2,52647$ ,  $k_3 \approx 2,6562$ , etc. Agora, resumimos a discussão acima.

**Teorema 2.5** (Luís [34]) Seja  $0 < L < bK$ . Então o ciclo  $C_r^x$ , definido na relação (2.30), é assintoticamente estável.

Em [21, pág. 241] o autor apresenta um estudo completo dos principais tipos de bifurcações, para sistemas de duas dimensões. Quando o jacobiano tem um valor próprio igual a um, pode ocorrer uma bifurcação, a bifurcação de forquilha ou uma bifurcação

transcrítica. No plano Traço-Determinante (TD), isso equivale a dizer que cruzamos a linha  $\det(J^*) = \text{tr}(J^*) - 1$  na região de estabilidade. A bifurcação de duplicação de período ocorre quando o jacobiano tem um valor próprio igual a  $-1$ . No plano TD, isso ocorre quando cruzamos a linha  $\det(J^*) = -\text{tr}(J^*) - 1$  da região de estabilidade. Quando o jacobiano tem um par de valores próprios conjugados complexos de módulo 1, temos a bifurcação de Neimark-Sacker. Isso acontece no plano TD quando  $\det(J^*) = 1$  e  $-2 < \text{tr}(J^*) < 2$ . Para detalhes sobre bifurcação na dimensão superior, veja, por exemplo [23, p.357]. Agora, estamos em condições de fornecer uma explicação mais profunda da **Figura 2.3**. Observe que o ponto fixo de coexistência  $(x^*, y^*)$  é assintoticamente estável se  $(K, L) \in \hat{S}$ . Quando  $L = bK$ , o Jacobiano da equação (2.2) tem um valor próprio igual a 1. Para o mapa  $\hat{f}$  definido na equação (2.2) tem-se:

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial x}(0) = 1, \frac{\partial \hat{f}}{\partial K}(0) = 0 \text{ e } \frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial x^2}(0) \neq 0.$$

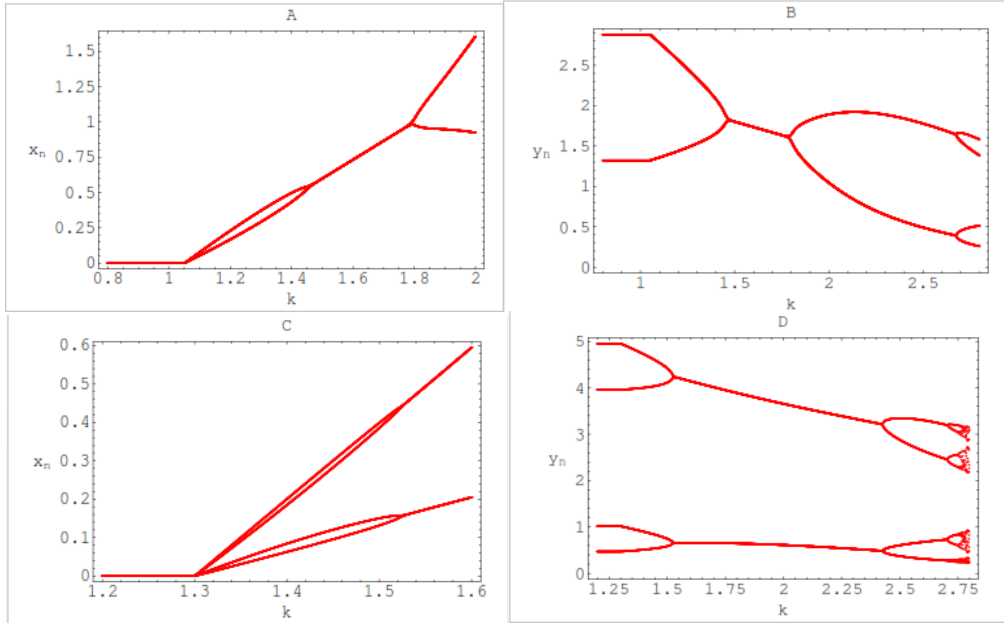
Portanto, ocorre uma bifurcação transcrítica quando  $L = bK$ , o ponto fixo de coexistência  $(x^*, y^*)$  bifurca e origina o ponto fixo de exclusão  $(K, 0)$  no eixo  $x$ . Quando  $(K, L)$  cruza a linha  $L = bK$  para região  $R_1$ , o ponto de equilíbrio  $(x^*, y^*)$  bifurca-se transcriticamente com o ponto de equilíbrio de exclusão  $(K, 0)$ , enquanto  $(x^*, y^*)$  se move do primeiro quadrante para o quarto (ou segundo) quadrante, onde se torna ecologicamente irrelevante. Da mesma forma, se  $L = \frac{K}{a}$ , o ponto fixo de coexistência sofre uma bifurcação transcrítica. A equação (2.2) tem uma bifurcação de duplicação de período quando temos igualdade na relação (2.14). Este é representado pela curva  $\gamma_1$  na **Figura 2.3**. Consequentemente, à medida que  $K$  e  $L$  passam pela curva  $\gamma_1$  o ponto fixo de coexistência sofre uma bifurcação de duplicação de período num ciclo de coexistência 2-periódico. Assim, na região  $S_2$ , a equação (2.2) tem um ponto fixo instável e um 2-ciclo de coexistência assintoticamente estável.

Quando  $K$  e  $L$  passam a linha  $L = bK$  da região  $S_2$  para a região  $R_2$ , o 2-ciclo de coexistência se bifurca (transcrítico). Os cálculos mostram que este novo ciclo é um 2-ciclo de exclusão no eixo  $x$ . Se, no entanto, movermos  $K$  e  $L$  de  $R_2$  para  $S_2$ , o processo é inverso, o 2-ciclo de exclusão bifurca a um 2-ciclo de coexistência. O ciclo sofre uma bifurcação transcrítica e um ciclo de coexistência nasce. Outra duplicação de período aparece no ponto

fixo de exclusão se os parâmetros  $K$  e  $L$  se movem de região  $R_1$  para a região  $R_2$ . Assim, se os parâmetros  $K$  e  $L$  estão na região  $R_2$ , a equação (2.2) possui um ciclo 2-periódico de exclusão assintoticamente estável no eixo  $x$ . Análise semelhante pode ser feita se os parâmetros estiverem na região  $Q_2$ .

O 2-ciclo de coexistência sofre uma bifurcação de duplicação de período quando os parâmetros passam a curva  $\gamma_2$ . Assim, na região  $S_3$ , este 2-ciclo de coexistência torna-se instável e nasce um 4-ciclo de coexistência assintoticamente estável. Este novo ciclo sofre uma bifurcação transcritical para um 4-ciclo de 4 períodos de exclusão assintoticamente estável no eixo  $x$  sempre que os parâmetros se movem da região  $S_3$  para a região  $R_3$ . Também temos uma bifurcação de duplicação de período na exclusão 2-periódica ciclo se alterarmos os parâmetros da região  $R_2$ , para a região  $R_3$ . Assim na região  $R_3$ , a equação (2.2) tem um ciclo 4-periódico de exclusão assintoticamente estável. O mesmo acontece no eixo  $y$  se os parâmetros mudam da região  $S_3$  para a região  $Q_3$ . Esta rota de bifurcação de duplicação de período para o caos é um recordatório da dinâmica exibida pelo mapa Ricker unidimensional. Um cenário diferente aparece se a relação entre  $L$  e  $K$  obedecer à regra  $L = \alpha_1 K + \alpha_2$ ,  $\alpha_2 > 0$  e  $-\varepsilon < \alpha_1 < \varepsilon$ , para um pequeno  $\varepsilon > 0$ . Chamamos este cenário de 'cenário bolha'. Isso ocorre se um ponto passa da zona  $S_{i+1}$  para a região de estabilidade  $S_i$  e entra novamente na região de estabilidade  $S_{i+1}$ , neste cenário, se desenharmos o diagrama de bifurcação no plano  $(K, x)$  encontramos bolhas. Na **Figura 2.7**, apresentamos dois cenários. Nos casos A e B, variamos  $K$  e fixamos  $L = 2,1$ , e fazemos  $a = b = 0,5$ . Isso resulta na presença de uma bolha no gráfico A. Esse fenômeno acontece porque para valores de  $K \leq 1,05$ , a equação (2.2) tem uma atração de ciclos 2-periódicos no eixo  $y$  (veja o gráfico B). Assim,  $x_n = 0$  e  $y_n$  oscila entre 1,32152 e 2,87848 quando  $n$  vai para o infinito. Em  $K \approx 1,05$ , o ciclo de exclusão no eixo  $y$  bifurca (transcritical) e o ponto fixo 0 se bifurca (duplicação de período). Isso implica que nasce o 2-ciclo de coexistência no eixo  $x$ . Aqui vemos a bolha no gráfico A e um ciclo 2-periódico no gráfico B. Para valores  $1,45 \leq K \leq 1,78$ , a equação (2.2) tem um ponto fixo de coexistência. Esta observação implica que em  $K \approx 1,45$ , o ciclo 2-periódico, por sua vez, sofrerá uma bifurcação e retornar a um equilíbrio estável 2. Em  $K \approx 1,78$  uma nova bifurcação de duplicação de período ocorre, e então o ponto fixo de coexistência

bifurca num 2-ciclo de coexistência. Este é claramente mostrado no gráfico A e no gráfico B. Nos casos C e D, fixamos  $L = 2,6$ .



**Figura 2.7:** A presença de bifurcação subcrítica no modelo autônomo de competição do tipo Ricker (1.6).  
**Fonte:** Imagem tomada da referência [34].

Para valores de  $K \approx 1,3$ , a equação tem um 4-ciclo de exclusão no eixo  $y$ . À medida que  $K$  aumenta, entramos na zona onde temos um ciclo 4-periódico de coexistência. Aqui vemos duas bolhas no gráfico C e uma coexistência ciclo 4-periódico na parcela D. Ambos os casos levam a um ciclo 2-periódico.

A bifurcação Neimark–Sacker começa quando  $\det(JF(x^*, y^*)) = 1$  e  $-2 < \text{tr}(JF(x^*, y^*)) < 2$ , ou seja, quando:

$$(1 - a)L + (1 - b)K = (aL - K)(bK - L), \quad (2.31)$$

e

$$0 < (1 - a)L + (1 - b)K < 4(1 - ab). \quad (2.32)$$

As desigualdades (2.32) são satisfeitas sempre que  $K$  e  $L$  pertencem à região delimitada pelos eixos positivos e a reta  $(1 - a)L = -(1 - b)K + 4(1 - ab)$ . Cálculos diretos mostram que esta linha não interceta a hipérbole (2.31). Por outro lado, os vértices

$(0,0)$  e  $(2(1+a)/(1-ab), 2(1+b)/(1-ab))$  da hipérbole (2.31) estão fora deste triângulo. Daí a equação (2.2) não tem bifurcação Neimark-Sacker.

## 2.4 Modelo de competição de Ricker periódico

Vamos fazer agora o estudo do modelo de Ricker periódico para duas espécies. (Para um estudo mais pormenorizado, pode ser consultado em [33]).

### 2.4.1 Existência de uma possível solução

Nesta subseção provamos a existência de uma solução da equação de diferença periódica não autônoma:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n e^{K_n - x_n - a_n y_n} \\ y_n e^{L_n - y_n - b x_n} \end{pmatrix}, n \in \mathbb{Z}^+, \quad (2.33)$$

onde  $K_n > 0$  e  $L_n > 0$ , são as capacidades de suporte das espécies  $x$  e  $y$ , respectivamente e  $a > 0$  e  $b > 0$  são os parâmetros de competição das espécies  $y$  e  $x$ , respetivamente. A análise aqui será no caso em que  $ab < 1$ , em que o sistema (2.33) tem um possível ciclo de coexistência estável. O cenário de sela, ou seja, o caso em que  $ab > 1$  será omitido.

Vamos escrever  $F_n(x, y) = (f_n(x, y), g_n(x, y))$ ,

Onde,

$$f_n(x, y) = x e^{K_n - x - ay} \text{ e } g_n(x, y) = y e^{L_n - y - bx}.$$

A equação (2.33) é  $p$ -periódica sempre que  $F_n = F_{n \bmod p}, \forall n \in \mathbb{Z}^+$ , com  $p$  o período mínimo. Este cenário ocorre quando pelo menos duas das sequências de parâmetros sejam periódicas, ou seja  $K_n = K_{n \bmod p}$  e  $L_n = L_{n \bmod p}$ .

Para provar a existência de soluções periódicas da equação (2.33) quando os parâmetros são  $p$ -periódicos. Vamos utilizar o teorema do ponto fixo de Brouwer, apresentado abaixo.

**Teorema 2.6** (Teorema do ponto fixo de Brouwer, [24]) Toda aplicação contínua de um subconjunto compacto convexo  $A$ , de um espaço euclidiano para si mesmo tem um ponto fixo.

**Observação 2.2** Para espaços dimensionais infinitos, o **Teorema 2.6** é conhecido como teorema do ponto fixo de Schauder.

**Teorema 2.7** (Luís, [33]) Seja  $(K_n, L_n) \in \hat{S}_{1,n} = \text{int}(S_{1,n}) \cup \gamma_{1,n}$  tal que  $K_n = K_{n \bmod p}$ ,  $L_n = L_{n \bmod p}$  e  $ab < 1$ , para todo  $n \in \mathbb{Z}^+$ . Então a equação de competição de Ricker p-periódica (2.33) tem um ciclo p-periódico na região  $[0, e^{K_{\max} - 1}] \times [0, e^{L_{\max} - 1}]$ , onde  $K_{\max} = \max\{K_n\}$  e  $L_{\max} = \max\{L_n\}$ .

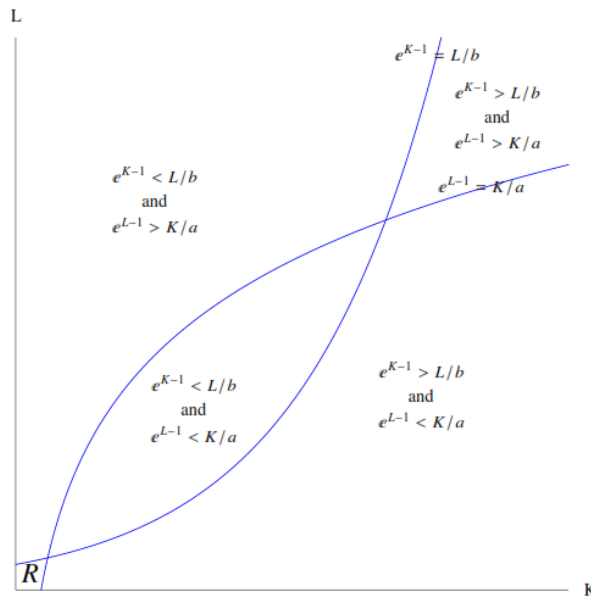
**Prova.** Considere a aplicação  $F_n(x, y) = (f_n(x, y), g_n(x, y))$ . Então sob a hipótese do teorema tem-se  $F_{n+p} = F_n$ , para todo  $n \in \mathbb{Z}^+$ . Observe que as aplicações  $f_n(x, y)$  e  $g_n(x, y)$  atingem seus máximos em  $(1, 0)$  e  $(0, 1)$ , respectivamente. Além disso, o máximo de  $f_n$  é  $e^{K_n - 1}$  e o máximo de  $g_n$  é  $e^{L_n - 1}$ .

Seja  $K_{\max} = \max\{K_n\}$  e  $L_{\max} = \max\{L_n\}$  e defina o conjunto A como:

$$A = [0, e^{K_{\max} - 1}] \times [0, e^{L_{\max} - 1}].$$

Então, A é compacto e convexo. Além disso, A é invariante sob o mapa  $\Phi_P$ , ou seja,

$$\Phi_P(A) = F_{p-1} \circ \dots \circ F_1 \circ F_0(A) \subset A$$



**Figura 2.8:** Quatro cenários diferentes no qual um modelo de competição de Ricker  $F_i$  tem um valor máximo nos eixos. Os valores dos parâmetros de competição são fixos como que  $ab < 1$ , nestas curvas  $a = b = \frac{1}{2}$ . Fonte: Imagem tomada da referência [33].

Portanto, pelo **Teorema 2.6**, o operador de composição  $\Phi_p$  tem um ponto fixo  $(x^*, y^*)$  em  $A$ , que é um ponto  $p$ -periódico do modelo Ricker periódico (2.27).

O teorema acima parece ser bom, mas encontramos algumas dificuldades. Essa observação é baseada no fato de que o conjunto  $A$  contém o ponto fixo trivial (a origem), os ciclos de exclusão (um em cada eixo) e um possível ciclo positivo (ciclo de coexistência). Assim, temos quatro candidatas para o ponto fixo do operador de composição  $\Phi_p$  na região compacta e convexa  $A$ .

As questões que vamos abordar são: é possível evitar o ponto fixo trivial e os ciclos de exclusão? De forma equivalente, podemos encontrar uma região onde  $\Phi_p$  tenha um ciclo de coexistência, no interior do 1º quadrante?

Para responder a estas perguntas é necessário encontrar um menor compacto, convexo e invariante tal que os pontos numa vizinhança conveniente dos eixos são excluídos. Para encontrar um subconjunto  $A$  convexo, compacto e invariante de um espaço euclidiano, vamos usar o espaço normal em teoria, ou seja, a ideia de que cada par de conjuntos fechados disjuntos pode ser separado por conjuntos abertos, no sentido de que eles têm vizinhanças abertas disjuntas [25, página 132].

Seja  $F_i(x, y) = (f_i(x, y), g_i(x, y))$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$  uma das sequências de mapas. Então nós temos quatro cenários diferentes para os quais o mapa  $F_i$  tem o valor máximo nos eixos como é mostrado na **Figura 2.9**.

$$1. e^{K_i-1} < \frac{L_i}{b} \text{ e } e^{L_i-1} < \frac{K_i}{a};$$

$$2. e^{K_i-1} > \frac{L_i}{b} \text{ e } e^{L_i-1} > \frac{K_i}{a};$$

$$3. e^{K_i-1} > \frac{L_i}{b} \text{ e } e^{L_i-1} < \frac{K_i}{a};$$

$$4. e^{K_i-1} < \frac{L_i}{b} \text{ e } e^{L_i-1} > \frac{K_i}{a}.$$

Observe que a pequena região  $R$ , próxima à origem, faz parte da região definida pelo item 2.

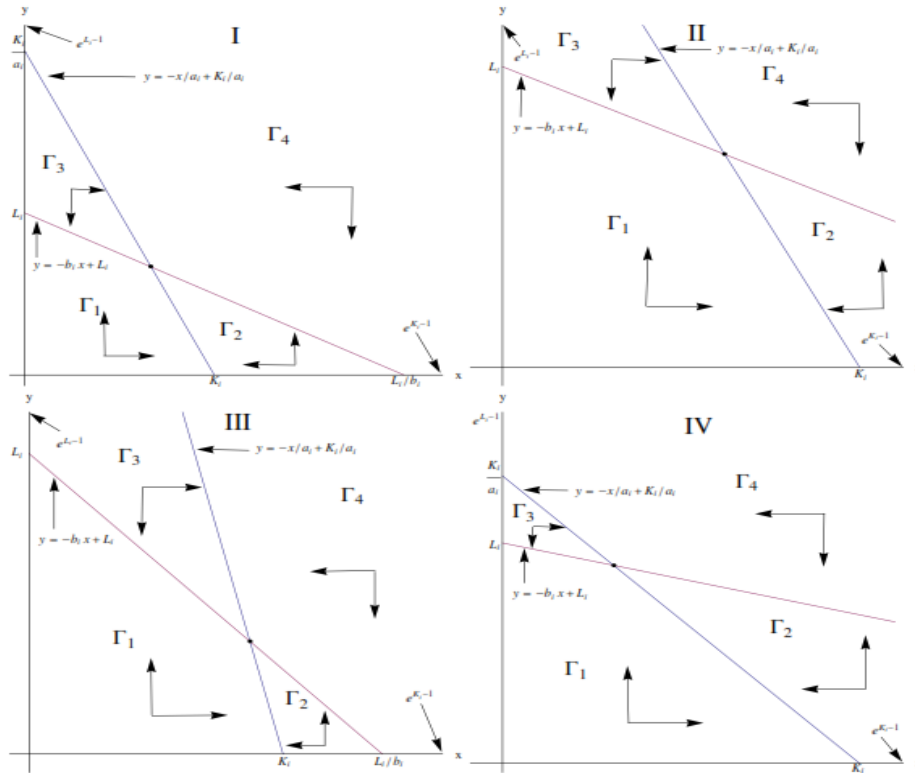


Figura 2.9: A posição das isoclínicas e dos conjuntos  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  e  $\Gamma_4$ , no primeiro quadrante, para cada uma das quatro situações em que o mapa  $F_i$  tem o valor máximo nos eixos. I -  $e^{K_i-1} < \frac{L_i}{b_i}$  e  $e^{L_i-1} < \frac{K_i}{a_i}$ ; II -  $e^{K_i-1} > \frac{L_i}{b_i}$  e  $e^{L_i-1} > \frac{K_i}{a_i}$ ; III -  $e^{K_i-1} > \frac{L_i}{b_i}$  e  $e^{L_i-1} < \frac{K_i}{a_i}$ ; e IV -  $e^{K_i-1} < \frac{L_i}{b_i}$  e  $e^{L_i-1} > \frac{K_i}{a_i}$ . Fonte: Imagem tomada da referência [33].

As isóclinas de cada mapa  $F_i$  são dadas pelas equações:

$$y = -\frac{x}{a} + \frac{K_i}{a} \text{ e } y = -bx + L_i.$$

Observe que a interseção dessas duas linhas dá o ponto fixo positivo  $(x_i^*, y_i^*)$ , onde,

$$x_i^* = \frac{K_i - aL_i}{1 - ab} \text{ e } y_i^* = \frac{L_i - bK_i}{1 - ab}.$$

Agora, para cada um dos cenários precedentes, defina os conjuntos  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  e  $\Gamma_4$  (ver **Figura 2.9**).

Agora dividimos a nossa investigação por casos:

**Caso 1:** Vamos primeiro focar nossa atenção quando  $e^{K_i-1} < \frac{L_i}{b}$  e  $e^{L_i-1} < \frac{K_i}{a}$ . Então nós temos três situações:

(i) Considere os conjuntos  $\Gamma_4$  e os eixos. Observe que se  $(x, y)$  pertence a  $\Gamma_4$ , então  $f_i(x, y) < x$  e  $g_i(x, y) < y$ . Deixar,

$$\delta_{i,1} = \min \{d(f_i(x, y), y - \text{eixo}), d(g_i(x, y), x - \text{eixo}) : (x, y) \in \Gamma_4\}.$$

(ii) Considere  $\Gamma_2$  e o eixo  $y$ . Se  $(x, y) \in \Gamma_2$  então  $f_i(x, y) < x$ . Defina o número,

$$\delta_{i,2} = d((f_i(x, y), y - \text{eixo})) \text{ tal que } (x, y) \in \Gamma_2.$$

(iii) Considere  $\Gamma_3$  e o eixo  $x$ . Se  $(x, y) \in \Gamma_3$  então  $g_i(x, y) < y$ . Defina o número,

$$\delta_{i,3} = d((g_i(x, y), \text{eixo} - y)) \text{ tal que } (x, y) \in \Gamma_3.$$

Finalmente, seja  $\delta_i = \min\{\delta_{i,1}, \delta_{i,2}, \delta_{i,3}\}$  e defina o conjunto  $A_{i,1}$  como,

$$A_{i,1} = \{(x, y) \in \mathbb{R}_2^+ : (0 \leq x \leq e^{K_i-1} \wedge 0 \leq y < \delta_i) \vee (0 \leq y \leq e^{L_i-1} \wedge 0 \leq x < \delta_i)\}.$$

Considere o conjunto:

$$A_i = [0, e^{K_i-1}] \times [0, e^{L_i-1}] \setminus A_{i,1}.$$

Então  $A_i$  é compacto e convexo, além disso,  $F_i(A_i) \subset A_i$ .

Para a equação periódica (2.33), gerada pela aplicação  $\Phi_p$ , consideramos os valores  $\delta = \min\{\delta_i\}$ ,  $K_{max} = \max\{K_i\}$ ,  $L_{max} = \max\{L_i\}$  e os conjuntos:

$$B_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}_2^+ : (0 \leq x \leq e^{K_{max}-1} \wedge 0 \leq y < \delta) \vee (0 \leq y \leq e^{L_{max}-1} \wedge 0 \leq x < \delta)\}$$

e

$$B = [0, e^{K_{max}-1}] \times [0, e^{L_{max}-1}] \setminus B_1.$$

(2.34)

Consequentemente,  $B$  é compacto, convexo e invariante sob a ação do operador de composição  $\Phi_p$ . Assim, pelo teorema do ponto fixo de Brouwer, o mapa  $\Phi_p$  tem um ponto fixo positivo  $(x^*, y^*)$  em  $B$ , que é um ciclo de coexistência  $p$ -periódico do modelo periódico de Ricker (2.33), também mostrado em [34].

Agora resumimos essas ideias no seguinte teorema.

**Teorema 2.8** (Luís, [33]) Seja  $K_n > 0, L_n > 0, a > 0$  e  $b > 0$  tal que  $K_n = K_n \bmod p, L_n = L_n \bmod p$ , e  $ab < 1$ , para todo  $n \in \mathbb{Z}^+$ . Suponha que para cada mapa individual  $F_i$  um tem  $e^{K_i-1} < \frac{L_i}{b_i}$  e  $e^{L_i-1} < \frac{K_i}{a_i}, i = 0, 1, 2, \dots$ . Então, a equação de Ricker  $p$ -periódica não autônoma (2.33) tem um ciclo  $p$ -periódico de coexistência no conjunto convexo e compacto  $B$ , onde  $B$  é o conjunto definido em (2.34).

**Caso 2A:** Agora vamos focar nossa atenção no caso em que  $e^{K_i-1} > \frac{L_i}{b_i}, e^{L_i-1} > \frac{K_i}{a_i}, K_i \leq 1$  e  $L_i \leq 1$ . (Em geral, essa restrição nas capacidades de carga leva à região R na **Figura 2.09**.) Segue-se que:

$$0 < K_i < \frac{L_i}{b_i} < e^{K_i-1} \leq 1 \text{ e } 0 < L_i < \frac{K_i}{a_i} < e^{L_i-1} \leq 1.$$

A aplicação  $f_i(x, y)$  atinge seu máximo em  $(1, 0)$ . Observamos que  $f_i(x, y)$  é crescente se  $0 < x < 1$  (quando fixamos  $y$ ). Portanto,  $f_i(x, y)$  terá um valor máximo sempre que  $x$  for um ponto final direito de um intervalo limitado por 1. Observe que  $f_i(K_i, y) = K_i e^{-a_i y} < K_i$ .

Seja  $x_{m,i} \in (0, K_i)$ , como  $x_{m,i} < K_i$  e  $f_i$  é crescente segue que  $f_i(x_{m,i}, y) < f_i(K_i, y) < K_i$ . Por outro lado, se  $x_{M,i} \in (K_i, \frac{L_i}{b_i})$  segue que  $f_i(x_{M,i}, y) = x_{M,i} e^{K_i - x_{M,i}} e^{-a_i y} < x_{M,i}$  porque  $K_i < x_{M,i}$ .

Da mesma forma, pode-se mostrar que  $g_i(x, L_i) < L_i, g_i(x, y_{m,i}) < L_i$  para qualquer  $y_{m,i} \in (0, L_i)$ , e  $g_i(x, y_{M,i}) < y_{M,i}$  para qualquer  $y_{M,i} \in (L_i, K_i/a_i)$ . Conseqüentemente, o conjunto  $[0, x_{M,i}] \times [0, y_{M,i}]$  é invariável formiga sob o mapa  $F_i$ .

Agora, na região  $[0, x_{M,i}] \times [0, y_{M,i}]$  construímos os conjuntos  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  e  $\Gamma_4$ , como é mostrado na **Figura 2.10**. A dinâmica nesta nova região é semelhante ao caso 1. Ou seja, seguimos mesmas técnicas do **Teorema 2.8** e mostramos que existem números  $\delta, x_M = \max\{x_{M,i}\}$ , e  $y_M = \max\{y_{M,i}\}$ , e os conjuntos:

$$\begin{aligned}
 B_1 = \{ & (x, y) \in \mathbb{R}_2^+ : (0 \leq x \leq x_M \wedge 0 \leq y < \delta) \vee \\
 & (0 \leq y \leq y_M \wedge 0 \leq x < \delta) \} \\
 & \text{e} \\
 B = & [0, x_M] \times [0, y_M] B_1,
 \end{aligned}
 \tag{2.35}$$

tal que,  $B$  é invariante sob a ação do operador de composição  $\Phi_p$ .

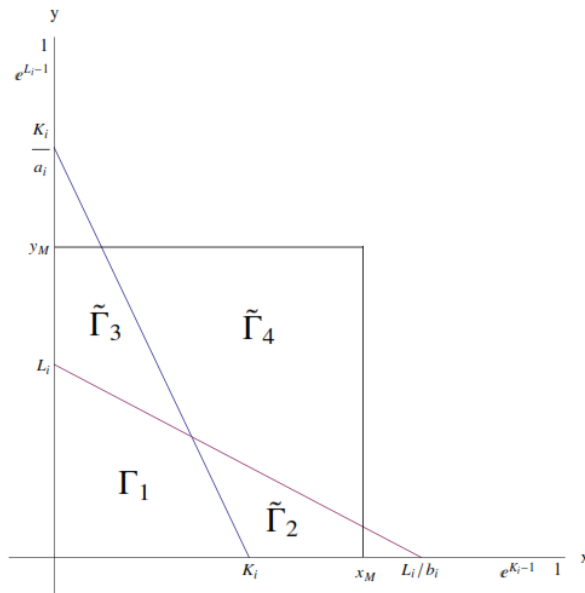


Figura 2.10: Os conjuntos e as isoclínicas quando o máximo do mapa  $F_i$  é menor que um. Fonte: Imagem tomada da referência [33].

**Caso 3A:** Outro caso segue quando  $e^{K_i-1} > \frac{L_i}{b_i}, e^{L_i-1} < \frac{K_i}{a_i}, e K \leq 1$ . Neste caso consideramos técnicas mistas como antes. Mais precisamente, no componente  $y$  seguimos a técnica apresentada no caso 1 desde  $[e^{L_i-1}] < \frac{K_i}{a_i}$ , e na componente  $x$  seguimos a técnica presente no caso 2A desde  $[1 \geq e^{K_i-1}] > \frac{L_i}{b_i}$ . Doravante, na região  $[0, x_M] \times [0, e^{L_i-1}]$  aplicamos uma técnica semelhante à do **Teorema 2.8** e encontramos os conjuntos:

$$\begin{aligned}
 B_1 = \{ & (x, y) \in \mathbb{R}_2^+ : (0 \leq x \leq x_M \wedge 0 \leq y < \delta) \vee \\
 & (0 \leq y \leq e^{L_{max}-1} \wedge 0 \leq x < \delta) \}.
 \end{aligned}$$

E,

$$B = [0, x_M] \times [0, e^{L_{max}-1}] \setminus B_1.$$

**Caso 4A:** Similarmente ao caso 3A pode-se encontrar os conjuntos  $B_1$  e  $B$  quando  $e^{K_i-1} < \frac{L_i}{b_i}, e^{L_i-1} > \frac{K_i}{a_i}$ , e  $L \leq 1$ .

**Caso 3B:** Agora consideramos o caso quando  $e^{K_i-1} > \frac{L_i}{b_i}, e^{L_i-1} < \frac{K_i}{a_i}$ , e  $K > 1$ . Defina  $\Gamma_4 = \Gamma_{4:1} \cup \Gamma_{4:2}$  onde:

$$\Gamma_{4:2} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : \frac{L_i}{b_i} \leq x \leq e^{K_i-1} \wedge 0 < y < e^{L_i-1} \right\}.$$

Seja  $(x, y) \in \Gamma_{4:2}$ . Como  $\frac{L_i}{b_i} > 1$ , para qualquer  $x$  no intervalo  $\left[\frac{L_i}{b_i}, e^{K_i-1}\right]$  a aplicação  $f_i(x, y)$  é decrescente (quando fixamos  $y$ ). Assim, a seguinte relação produz:

$$f_i(x, y) < f_i\left(\frac{L_i}{b_i}, y\right) = \frac{L_i}{b_i} e^{K_i - \frac{L_i}{b_i}} e^{-a_i y} < \frac{L_i}{b_i} e^{K_i - \frac{L_i}{b_i}}.$$

Mas,  $\frac{L_i}{b_i} e^{K_i - \frac{L_i}{b_i}} < \frac{L_i}{b_i}$  porque  $K_i < \frac{L_i}{b_i}$ . Consequentemente,

$$f_i(\Gamma_{4:2}) \subset \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_{4:1}.$$

Na região  $\left[0, \frac{L_i}{b_i}\right) \times [0, e^{L_i-1}]$  argumentamos como antes, ou seja, aplicamos novamente uma técnica semelhante do **Teorema 2.8** e encontre os conjuntos:

$$B_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : (0 \leq x \leq L/b \wedge 0 \leq y < \delta) \vee (0 \leq y \leq e^{L_{max}-1} \wedge 0 \leq x < \delta)\}$$

e

$$B = \left[0, \frac{L}{b}\right] \times [0, e^{L_{max}-1}] \setminus B_1,$$

Onde,  $\frac{L}{b} = \max\left\{\frac{L_i}{b_i}\right\}$ .

**Caso 4B:** Quando  $e^{K_i-1} < \frac{L_i}{b_i}, e^{L_i-1} > \frac{K_i}{a_i}$  e  $L > 1$  definimos o conjunto  $\Gamma_4 = \Gamma_{4:1} \cup \Gamma_{4:2}$ , onde,

$$\Gamma_{4:2} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}_2^+ : \frac{K_i}{a_i} \leq y \leq e^{L_i-1} \wedge 0 < x < e^{K_i-1} \right\}$$

e mostre que  $g_i(\Gamma_{4:2}) \subset \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_{4:1}$ . Daqui em diante, na região  $[0, e^{K_i-1}] \times \left[0, \frac{K_i}{a_i}\right)$  temos de argumentar como antes e encontrar os conjuntos:

$$B_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}_2^+ : (0 \leq x \leq e^{K_{max}-1} \wedge 0 \leq y < \delta) \vee (0 \leq y \leq K/a \wedge 0 \leq x < \delta)\}$$

e

$$B = [0, e^{K_{max}-1}] \times \left[0, \frac{K}{a}\right] B_1,$$

Onde,  $\frac{K}{a} = \max \frac{K_i}{a_i}$ .

**Caso 2B:** Outro caso acontece quando  $e^{K_i-1} > \frac{L_i}{b_i}, e^{L_i-1} > \frac{K_i}{a_i}, K > 1$  e  $L > 1$ . Neste caso definimos o conjunto  $\Gamma_4$  como:

$$\Gamma_4 = \Gamma_{4:1} \cup \Gamma_{4:2} \cup \Gamma_{4:3} \cup \Gamma_{4:4},$$

Onde,

$$\Gamma_{4:2} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}_2^+ : 0 < x < \frac{L_i}{b_i} \wedge \frac{K_i}{a_i} < y < e^{L_i-1} \right\},$$

$$\Gamma_{4:3} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}_2^+ : \frac{L_i}{b_i} \leq x < e^{K_i-1} \wedge 0 < y < \frac{K_i}{a_i} \right\}$$

e

$$\Gamma_{4:4} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}_2^+ : \frac{L_i}{b_i} \leq x < e^{K_i-1} \wedge \frac{K_i}{a_i} \leq y < e^{L_i-1} \right\}.$$

Seguindo as mesmas ideias de antes, pode-se mostrar que:

$$f_i(\Gamma_{4:3}) \subset \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_{4:1},$$

$$g_i(\Gamma_{4:2}) \subset \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_{4:1},$$

$$f_i(\Gamma_{4:4}) \subset \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_{4:1},$$

e

$$f_i(\Gamma_{4:4}) \subset \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_{4:1}.$$

Assim, consideramos o conjunto  $\left[0, \frac{L_i}{b_i}\right) \times \left[0, \frac{K_i}{a_i}\right)$  e, argumentando como antes, encontramos:

$$B_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2: (0 \leq x \leq L/b \wedge 0 \leq y < \delta) \vee (0 \leq y \leq K/a \wedge 0 \leq x < \delta)\}$$

e

$$B = \left[0, \frac{L}{b}\right] \times \left[0, \frac{K}{a}\right] B_1,$$

Onde,  $\frac{K}{a} = \max K_i$  e  $\frac{L}{b} = \max \left\{ \frac{L_i}{b_i} \right\}$ .

**Casos 2C e 2D:** Restam dois casos. O primeiro é  $e^{K_i-1} > \frac{L_i}{b_i}, e^{L_i-1} > \frac{K_i}{a_i}, K \leq 1$  e  $L > 1$  e o segundo  $e^{K_i-1} > \frac{L_i}{b_i}, e^{L_i-1} > \frac{K_i}{a_i}, K > 1$  e  $L \leq 1$ . Em ambos os casos aplicamos a técnica precedente em cada componente e encontre o conjunto invariante  $B$ .

Por fim, resumimos essas ideias no resultado a seguir.

**Teorema 2.9** (Luís, [33]) Seja  $(K_n, L_n) \in \hat{S}_{1,n} = \text{int}(S_{1,n}) \cup \gamma_{1,n}$  tal que  $K_n = K_{n \bmod p}$ ,  $L_n = L_{n \bmod p}$ , e  $ab < 1$ , para todo  $n \in \mathbb{Z}^+$ . Então a equação  $p$ -periódica de Ricker (2.33) tem um ciclo de coexistência  $p$ -periódico (solução positiva) na região convexa  $B$ .

### 2.4.2 A dinâmica do ciclo

Nesta seção apresentamos algumas propriedades do ciclo  $p$ -ciclo do modelo (2.33) quando os parâmetros de competição  $a$  e  $b$  são fixos, ou seja, quando os mapas individuais  $F_i$  determinados pelo vetor de parâmetros  $(K, L)$  [34].

Seja  $C_p = \{(\bar{x}_0, \bar{y}_0), (\bar{x}_1, \bar{y}_1), \dots, (\bar{x}_{p-1}, \bar{y}_{p-1})\}$  um  $p$ -ciclo periódico da equação (2.33). Então temos:

$$\Phi_p(\bar{x}_0, \bar{y}_0) = (\bar{x}_0, \bar{y}_0),$$

Ou, equivalente,

$$(\bar{x}_0, \bar{y}_0) = (\bar{x}_0 e^{\sum_{i=0}^{p-1} K_i - \sum_{i=0}^{p-1} \bar{x}_i - a \sum_{i=0}^{p-1} \bar{y}_i}, \bar{y}_0 e^{\sum_{i=0}^{p-1} L_i - \sum_{i=0}^{p-1} \bar{y}_i - b \sum_{i=0}^{p-1} \bar{x}_i}),$$

Isso é equivalente a:

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{p-1} \bar{x}_i + a \sum_{i=0}^{p-1} \bar{y}_i = \sum_{i=0}^{p-1} K_i \\ b \sum_{i=0}^{p-1} \bar{x}_i + \sum_{i=0}^{p-1} \bar{y}_i = \sum_{i=0}^{p-1} L_i \end{cases}, \quad (2.36)$$

resolvendo o sistema (2.36) resulta:

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{p-1} \bar{x}_i = \frac{1}{1-ab} \left( \sum_{i=0}^{p-1} K_i - a \sum_{i=0}^{p-1} L_i \right) \\ \sum_{i=0}^{p-1} \bar{y}_i = \frac{1}{1-ab} \left( \sum_{i=0}^{p-1} L_i - b \sum_{i=0}^{p-1} K_i \right) \end{cases}, \quad (2.37)$$

dividindo ambos os lados de cada equação por  $p$  tem-se o seguinte:

$$\begin{cases} av(\bar{x}) = \frac{1}{1-ab} (av(K) - aav(L)) \\ av(\bar{y}) = \frac{1}{1-ab} (av(L) - b av(K)) \end{cases}, \quad (2.38)$$

Onde,  $av$  representa a média da sequência de pontos. Assim,  $av(x)$  e  $av(y)$  pertencem ao primeiro quadrante sempre que:

$$av(K) > a av(L) \text{ e } av(L) > b av(K).$$

Considere agora um mapa individual  $F_i(x, y) = (x e^{K_i - x - ay}, y e^{L_i - y - bx}), 0 \leq i \leq p - 1$ .

- A equação de diferença gerada pelo mapa  $F_i(x, y)$  tem uma solução de coexistência (ponto fixo ou ciclo), no primeiro quadrante, sempre que:

$$bK_i < L_i < \frac{K_i}{a}, 0 \leq i \leq p - 1 \quad (2.39)$$

e  $ab < 1$ . Observe que se tomarmos a soma na relação dada em (2.39) resulta

$$b av(K) < av(L) < \frac{av(K)}{a}, \quad (2.40)$$

que é a condição necessária para ter um ciclo de coexistência de  $\Phi_p$  no primeiro quadrante.

- A equação de diferença gerada pelo mapa  $F_i(x, y)$  tem uma solução de exclusão no eixo  $x$  (ponto fixo ou ciclo) sempre que  $0 < L_i < bK_i$ ,  $0 \leq i \leq p - 1$  e  $ab < 1$ . Somando essas relações temos  $0 < av(L) < b av(K)$ . Neste caso  $\Phi_p$  tem um ciclo de exclusão no eixo  $x$ .

- Da mesma forma, se  $0 < \frac{K_i}{a} < L_i$ ,  $0 \leq i \leq p - 1$  então  $F_i$  tem uma solução de exclusão no eixo  $y$  (ponto fixo ou ciclo). Fazendo a soma temos  $0 < \frac{av(K)}{a} < av(L)$  e consequentemente,  $\Phi_p$  tem um ciclo de exclusão no eixo  $y$ .

Agora, suponha que a relação (2.40) é satisfeita e  $ab < 1$ . Nessas condições, todos os membros da órbita periódica pertencem ao primeiro quadrante como podemos ver a seguir.

A relação  $\Phi_p(\bar{x}_0, \bar{y}_0) = (\bar{x}_0, \bar{y}_0)$  é equivalente a  $F_{p-1}(\bar{x}_{p-1}, \bar{y}_{p-1}) = (\bar{x}_0, \bar{y}_0)$ , ou seja,

$$\bar{x}_{p-1} e^{K_{p-1} - \bar{x}_{p-1} - a\bar{y}_{p-1}} = \bar{x}_0 \text{ e } \bar{y}_{p-1} e^{L_{p-1} - \bar{y}_{p-1} - b\bar{x}_{p-1}} = \bar{y}_0.$$

Adicionando  $\bar{x}_{p-1}$  em ambos os lados da primeira equação e  $\bar{y}_{p-1}$  em ambos os lados da segunda equação obtemos:

$$\bar{x}_{p-1} (1 + e^{u_{p-1}}) = \bar{x}_{p-1} + \bar{x}_0 \text{ e } \bar{y}_{p-1} (1 + e^{v_{p-1}}) = \bar{y}_{p-1} + \bar{y}_0,$$

onde  $u_{p-1} = K_{p-1} - \bar{x}_{p-1} - a\bar{y}_{p-1}$  e  $v_{p-1} = L_{p-1} - \bar{y}_{p-1} - b\bar{x}_{p-1}$ .

Da mesma forma, temos:

$$\bar{x}_{p-2}(1 + e^{u_{p-2}}(1 + e^{u_{p-1}})) = \bar{x}_{p-1} + \bar{x}_{p-2} + \bar{x}_0$$

e

$$\bar{y}_{p-2}(1 + e^{v_{p-2}}(1 + e^{v_{p-1}})) = \bar{y}_{p-1} + \bar{y}_{p-2} + \bar{y}_0,$$

onde  $u_{p-2} = K_{p-2} - xp - 2 - a\bar{y}_{p-2}$  e  $v_{p-2} = L_{p-2} - \bar{y}_{p-2} - b\bar{x}_{p-2}$ .

Generalizando esse processo nós temos:

$$\bar{x}_1(1 + e^{u_1}(\dots(1 + e^{u_{p-1}})\dots)) = \sum_{i=0}^{p-1} \bar{x}_i$$

e

$$\bar{y}_1(1 + e^{v_1}(\dots(1 + e^{v_{p-1}})\dots)) = \sum_{i=0}^{p-1} \bar{y}_i.$$

Segue que  $\bar{x}_i$  e  $\bar{y}_i$  são números positivos, pois  $\sum_{i=0}^{p-1} \bar{x}_i$  e  $\sum_{i=0}^{r-1} \bar{y}_i$ . Consequentemente, da dinâmica do sistema  $\bar{x}_i > 0$  e  $\bar{y}_i > 0, \forall i \in \{0, \dots, r-1\}$ .

### 2.4.3 Estabilidade

Nesta seção estudamos a estabilidade das soluções da equação (2.33) sob certas restrições dos parâmetros. Antes de fazer isso, damos algumas notas sobre o jacobiano do operador de composição  $\Phi_p$ . De um modo geral, a matriz Jacobiana do operador de composição  $\Phi_p$  é o produto das matrizes jacobianas dos mapas individuais  $F_i, i = 0, 1, 2, \dots$

Observe que se  $A_1, A_2, \dots, A_n$  são matrizes de tipo  $q \times q$ , então  $A_1, A_2 \dots A_n$  e as permutações cíclicas  $A_{j+1} \dots A_n A_1 \dots A_j$  possuem o mesmo conjunto de valores próprios [25], onde  $1 \leq j \leq n$ . Assim, cada uma das matrizes dos produtos Jacobianos permutados tem o mesmo conjunto de valores próprios. Consequentemente, se  $Cp = \{(\bar{x}_0, \bar{y}_0), (\bar{x}_1, \bar{y}_1), \dots, (\bar{x}_{p-1}, \bar{y}_{p-1})\}$  é um ciclo  $p$ -periódico da equação (2.33), então a ordem dos produtos em  $\sum_{i=p-1}^0 JF_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$  é irrelevante para o raio espectral, onde  $JF_i$  é o jacobiano do mapa  $F_i$  e é dado por:

$$JF_i(x_i, y_i) = \begin{bmatrix} (1-x)e^{K_i-x-a_i y} & -a_i x e^{K_i-x-a_i y} \\ -b_i y e^{L_i-y-b_i x} & (1-y)e^{L_i-y-b_i x} \end{bmatrix}.$$

### Ciclos triviais e de exclusão

Agora vamos estudar a estabilidade dos ciclos triviais e de exclusão da equação (2.33). É fácil para ver que  $(0,0)$  é um ponto fixo da equação (2.33) uma vez que é um ponto fixo de cada mapa individual  $F_i, i = 0, 1, 2, \dots$ . O Jacobiano em  $(0,0)$  é dado por:

$$J_0 = \sum_{i=p-1}^0 JF_i(0,0) = \sum_{i=p-1}^0 \begin{bmatrix} e^{K_i} & 0 \\ 0 & e^{L_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\sum_{i=0}^{p-1} K_i} & 0 \\ 0 & e^{\sum_{i=0}^{p-1} L_i} \end{bmatrix}.$$

Os valores próprios de  $J_0$  são  $e^{\sum_{i=0}^{p-1} K_i}$  e  $e^{\sum_{i=0}^{p-1} L_i}$ . Como  $\sum_{i=0}^{p-1} K_i > 0$  e  $\sum_{i=0}^{p-1} L_i > 0$ , segue que  $(0,0)$  é sempre instável para todo  $K_i > 0$  e  $L_i > 0, i = 0, 1, 2, \dots$

Assumindo a ausência da espécie “y” a dinâmica da espécie “x” é regida pela equação não-autônoma de Ricker unidimensional:

$$x_{n+1} = x_n e^{K_n - x_n}, n \in \mathbb{Z}^+, \quad (2.41)$$

Onde,  $K_n = K_{n \bmod p}$ . Na **Secção 1.2** provou-se que a equação (2.41) tem um ciclo  $p$ -periódico global assintoticamente estável  $\{\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{p-1}\}$  sempre que  $0 < K_i < 2, i = 0, 1, 2 \dots$

Em outra forma,

$$\prod_{i=0}^{p-1} |1 - \bar{x}_i| < 1, \quad (2.42)$$

Com,

$$\sum_{i=0}^{p-1} K_i = \sum_{i=0}^{p-1} \bar{x}_i. \quad (2.43)$$

O ciclo  $p$ -periódico  $\{\bar{x}_0, \dots, \bar{x}_{p-1}\}$  de (2.41) produz um ciclo de exclusão  $p$ -periódico no sistema (2.33) da forma:

$$C_p^x = \{(\bar{x}_0, 0), (\bar{x}_1, 0), \dots, (\bar{x}_{p-1}, 0)\}, \quad (2.44)$$

do modelo de competição de Ricker (2.33). Observe que, no espaço de parâmetros, o mapa  $F_i(x, y), 0 \leq i \leq p - 1$  tem um ponto fixo em exclusão no eixo  $x$  sempre que as capacidades de carga estão na região:

$$R = \{(K_i, L_i) \in \mathbb{R}_2^+ : 0 < L_i < bK_i \wedge K_i < 2\}, \quad (2.45)$$

tal que  $ab < 1, i = 0, 1, 2, \dots$

Daqui em diante, assumimos que, para cada mapa  $F_i$  o vetor parâmetro  $(K_i, L_i) \in R$ , o que implica que  $0 < av(L) < bav(K)$ . O Jacobiano de  $\Phi_p$ , avaliado ao longo do ciclo periódico  $C_p^x$ , é dado pela seguinte matriz triangular:

$$J_{C_p^x} = \sum_{i=p-1}^0 JF_i(\bar{x}_i, 0) = \sum_{i=p-1}^0 \begin{bmatrix} e^{\sum_{i=0}^{p-1} K_i - \sum_{i=0}^{p-1} \bar{x}_i} \prod_{i=0}^{p-1} |1 - \bar{x}_i| & J_{12} \\ 0 & e^{\sum_{i=0}^{p-1} L_i - \sum_{i=0}^{p-1} b_i \bar{x}_i} \end{bmatrix}.$$

Os valores próprios de  $J_{C_p^x}$  são  $\lambda_1 = \prod_{i=0}^{p-1} |1 - \bar{x}_i|$  e  $\lambda_2 = e^{\sum_{i=0}^{p-1} L_i - \sum_{i=0}^{p-1} b_i K_i}$ . Claramente,  $0 < \lambda_2 < 1$ , uma vez que  $\sum_{i=0}^{p-1} L_i < \sum_{i=0}^{p-1} K_i$ . Por (2.42) segue que  $|\lambda_1| < 1$ . Consequentemente,  $C_p^x$  é assintoticamente estável. Resumimos agora esta conclusão no seguinte resultado.

**Teorema 2.10** [Luís, 33] Seja  $K_n = K_{n \bmod p}, L_n = L_{n \bmod p}, \forall n \in \mathbb{Z}^+$  tal que  $(K_i, L_i) \in R, 0 \leq i \leq p - 1$  e  $ab < 1, 0 \leq i \leq p - 1$ . Então  $C_p^x$  definido em (2.44) é um  $p$ -ciclo de exclusão assintoticamente estável da equação (2.33).

Usando os mesmos raciocínios obtemos:

**Teorema 2.11** [Luís, 33] Seja  $K_n = K_{n \bmod p}, L_n = L_{n \bmod p}, \forall n \in \mathbb{Z}^+$  tal que  $(K_i, L_i) \in Q_i, 0 \leq i \leq p - 1$ , onde

$$Q_i = \left\{ (K_i, L_i) \in \mathbb{R}_2^+ : 0 < \frac{K_i}{a_i} < L_i \wedge K_i > 0 \right\},$$

e  $ab < 1$ . Então, a equação (2.33) tem um  $p$ -ciclo de exclusão assintoticamente estável no eixo  $y$ .

### Ciclo de coexistência

Para cada  $i = 0, 1, 2, \dots$  suponha que a sequência de parâmetros de competição satisfaça a relação  $a_i b_i < 1$ . Reescreva a região de estabilidade  $\hat{S}_i$  de cada mapa individual  $F_i$  como  $a_i = a$  e  $b_i = b$  tal que  $ab < 1$

$$\hat{S}_i = \text{Int}(S_{1,i}) \cup \gamma_{1,i},$$

Onde,  $\text{Int}(S_{1,i})$  denota o interior da região de estabilidade  $S_{1,i}$  de cada mapa individual. Ou equivalentemente:

$$\begin{aligned} \hat{S}_i = \{ & (K_i, L_i) \in \mathbb{R}_2^+ : 4(ab - 1) + 2(1 - a)L_i + 2(1 - b)K_i \leq (aL_i - K_i)(bK_i - L_i) \\ & < (1 - a)L_i + (1 - b)K_i. \} \end{aligned}$$

Agora defina o conjunto:

$$\Lambda_i = \{ (K_i, L_i) \in \hat{S}_i : K_i \leq 1 \wedge L_i \leq 1 \}.$$

Em [20] Smith provou que o mapa  $F_i$ , gera um sistema dinâmico monótono discreto se as capacidades de carga estão em  $\Lambda_i$ . Além disso,  $F_i$  tem um ponto fixo globalmente assintoticamente estável. Seja  $(K_i, L_i) \in \Lambda_i, i = 0, 1, 2, \dots, p - 1$ . Como a composição de mapas monótonos é monótona segue que o operador de composição  $\Phi_p$  é monótono. Além disso, no compacto e convexo conjunto  $B$  definido na subseção anterior, o mapa  $\Phi$  tem um ponto global assintoticamente estável no ponto fixo de coexistência que é um ciclo de coexistência  $p$ -periódico globalmente assintoticamente estável do mapa (2.33).

Agora, resumimos as observações acima.

**Teorema 2.12** (Luís, [33]) Seja  $(K_i, L_i) \in \Lambda_i, i = 0, 1, 2, \dots, p - 1$  e assume a periodicidade da sequência de parâmetros. Então, a equação de diferença não-autônoma  $p$ -periódica (2.33) tem um  $p$ -ciclo de coexistência globalmente assintoticamente estável no conjunto convexo e compacto  $B$ .

#### 2.4.4 Um cenário de bifurcação a partir de simulações computacionais

Como observado anteriormente, na ausência da espécie “ $y$ ” a dinâmica da espécie “ $x$ ” é governada por a equação de Ricker unidimensional não autônoma:

$$x_{n+1} = x_n e^{\lambda_n - x_n}, n \in \mathbb{Z}^+, \quad (2.46)$$

Onde,  $\lambda_n = \lambda_{n \bmod p}$ . Escreva a equação (2.46) como  $x_{n+1} = R_n(x_n)$  onde  $R_n(x) = x e^{\lambda_n - x}$ . No **Capítulo 1.2** vimos que a equação (2.46) tem um ciclo  $p$ -periódico globalmente assintoticamente estável:

$$\{\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{p-1}\},$$

sempre que  $0 < \lambda_i < 2, i = 0, 1, 2, \dots$ . Com condição de estabilidade,

$$\prod_{i=0}^{p-1} |1 - \bar{x}_i| < 1.$$

No entanto, o autor não estudou a existência de bifurcação de  $C_p$ . Em outras palavras o que acontece quando:

$$\prod_{i=0}^{p-1} (1 - \bar{x}_i) = 1 \text{ ou } \prod_{i=0}^{p-1} (1 - \bar{x}_i) = -1.$$

Como cada mapa  $R_n = R_{n \bmod p}, n \in \mathbb{Z}^+$  é injetivo em relação ao parâmetro  $\lambda_n = \lambda_{n \bmod p} > 0$ , segue que os únicos ciclos possíveis para a equação (2.46) são ciclos com período mínimo  $r, r = pt, t = 1, 2, \dots$

Seja  $C_p = \{\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{p-1}\}$ , seja um ciclo  $p$ -periódico não trivial da equação  $p$ -periódica (2.46), ou seja, um ponto fixo do mapa  $\Phi_p(x)$ . (A existência é assegurada pelo ponto fixo do teorema de Brouwer). Assim, temos  $\bar{x}_0 = \Phi_p(\bar{x}_0)$ . Simplificando esta equação obtém-se:

$$\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_{p-1} - \bar{x}_0 - \bar{x}_1 - \dots - \bar{x}_{p-2} = \bar{x}_{p-1}, \quad (2.47)$$

ou equivalente,

$$\bar{x}_{p-1} = \lambda_{p-1} + \sum_{i=0}^{p-2} (\lambda_i - \Phi_i(\bar{x}_0)). \quad (2.48)$$

Uma bifurcação de duplicação de período ocorre quando:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Phi_p(t)) \Big|_{t=\bar{x}_0} = -1.$$

Isso leva à equação  $\prod_{i=0}^{p-1} (1 - \bar{x}_1) = 1$ , ou equivalente:

$$\left( 1 - \lambda_{p-1} + \sum_{i=0}^{p-2} (\lambda_i - \Phi_i(\bar{x}_0)) \right) \prod_{i=0}^{p-2} (1 - \Phi_i(\bar{x}_0)) = -1. \quad (2.49)$$

Em geral, não é possível encontrar analiticamente (exceto quando  $p = 2$ ) as soluções da equação (2.49). No entanto, pode-se ver que todas as soluções da equação (2.49) são da forma:

$$\bar{x}_0 = \psi(\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1}),$$

onde  $\psi$  é uma função tal que  $\psi : \mathbb{R}_p \rightarrow \mathbb{R}$ . Chamamos essas soluções de duplicação de período como soluções de bifurcação. Seja  $\psi = \psi(\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1})$  tal que  $\psi(\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1}) \in \mathbb{R}^+$ . Substituindo  $\psi$  na equação (2.48) temos a equação:

$$\sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i = \sum_{i=0}^{p-1} \Phi_i(\psi). \quad (2.50)$$

Pode-se encontrar implicitamente, no espaço de parâmetros, todas as soluções da equação (2.50). Este processo irá dar-nos uma superfície de bifurcação no espaço de parâmetros  $(K_0, \dots, K_{p-1})$ . Observe que o outro caso de bifurcação  $\left( \frac{\partial}{\partial t} (\Phi_p(t)) \Big|_{t=\bar{x}_0} = -1 \right)$  pode ser investigado de maneira semelhante em (Ver [64]).

A derivada ao longo do 2-ciclo  $C_2$  é dada por:

$$\Phi'_2(\bar{x}_0) = (1 - \bar{x}_1)(1 - \bar{x}_0) = (1 - \lambda_0 - \lambda_1 + \bar{x}_0)(1 - \bar{x}_0).$$

Portanto,  $C_2$  é assintoticamente estável se:

$$|(1 - \lambda_0 - \lambda_1 + \bar{x}_0)(1 - \bar{x}_0)| < 1.$$

Essas duas desigualdades são equivalentes ao seguinte sistema de desigualdades:

$$\begin{cases} \bar{x}_0^2 - (\lambda_0 + \lambda_1)\bar{x}_0 + \lambda_0 + \lambda_1 > 0 \\ \bar{x}_0^2 - (\lambda_0 + \lambda_1)\bar{x}_0 + \lambda_0 + \lambda_1 - 2 < 0 \end{cases} \quad (2.51)$$

A solução do sistema dado em (2.51) é dada pelos seguintes casos:

1.  $\lambda_0 + \lambda_1 > 4$ . Sob essa suposição, segue-se que  $0 < \bar{x}_-^{pd} < \bar{x}_-^{sn} < \bar{x}_+^{sn} < \bar{x}_+^{pd}$ .

Observe que  $\bar{x}_-^{pd} > 0$  se  $\lambda_0 + \lambda_1 > 2$ . Assim, o sistema (2.51) pode ser resolvido sempre que:

$$\bar{x}_0 \in ]\bar{x}_-^{pd}, \bar{x}_-^{sn} [ \cup ]\bar{x}_+^{sn}, \bar{x}_+^{pd} [.$$

Como  $\bar{x}_1 = \lambda_0 + \lambda_1 - \bar{x}_0$  segue que,

$$\bar{x}_1 \in ]\lambda_0 + \lambda_1 - \bar{x}_+^{pd}, \lambda_0 + \lambda_1 - \bar{x}_+^{sn} + [ \cup ]\lambda_0 + \lambda_1 - \bar{x}_-^{sn}, \lambda_0 + \lambda_1 - \bar{x}_-^{pd} [.$$

Podemos mostrar com cálculos diretos que  $\bar{x}_-^{pd} = \lambda_0 + \lambda_1 - \bar{x}_+^{pd}$ ,  $\bar{x}_-^{sn} = \lambda_0 + \lambda_1 - \bar{x}_+^{sn}$ ,  $\bar{x}_+^{sn} = \lambda_0 + \lambda_1 - \bar{x}_-^{sn}$ , e  $\bar{x}_+^{pd} = \lambda_0 + \lambda_1 - \bar{x}_-^{pd}$ .

Portanto,  $C_2$  é assintoticamente estável se  $\bar{x}_0, \bar{x}_1 \in ]\bar{x}_-^{pd}, \bar{x}_-^{sn} [ \cup ]\bar{x}_+^{sn}, \bar{x}_+^{pd} [$ .

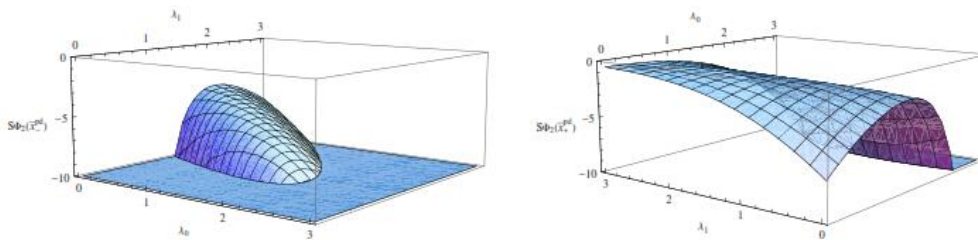


Figura 2.11: O progresso da derivada Schwarziana do mapa Ricker bi-periódico unidimensional  $\Phi_2$  em  $(\bar{x}_0)$  quando os parâmetros  $\lambda_0$  e  $\lambda_1$  estão nas curvas de bifurcação de duplicação do período. Fonte: Imagem tomada da referência [33].

2.  $\lambda_0 + \lambda_1 = 4$ . Segue que  $\bar{x}_-^{sn} = \bar{x}_+^{sn} = 2$ . Portanto,  $C_2$  é assintoticamente estável se

$$\bar{x}_0, \bar{x}_1 \in ]2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2} [.$$

3.  $\lambda_0 + \lambda_1 = 4$ . Segue que  $\bar{x}_-^{sn}$  e  $\bar{x}_+^{sn}$  são números complexos e a desigualdade,

$$\bar{x}_0^2 - (\lambda_0 + \lambda_1)\bar{x}_0 + \lambda_0 + \lambda_1 > 0$$

é verificada. Agora subdividimos este caso dependendo do  $\bar{x}_-^{pd}$  ser maior, igual ou menor que 0.

(a) Se  $2 < \lambda_0 + \lambda_1 < 4$ , então  $C_2$  é assintoticamente estável sempre que  $\bar{x}_0, \bar{x}_1 \in ]\bar{x}_-^{pd}, \bar{x}_+^{pd}[$ .

(b) Se  $\lambda_0 + \lambda_1 = 2$ , então  $C_2$  é assintoticamente estável sempre que  $\bar{x}_0, \bar{x}_1 \in ]0, 2[$ .

(c) Se  $0 < \lambda_0 + \lambda_1 < 2$  segue que  $\bar{x}_-^{pd} < 0$  e  $0 < \bar{x}_+^{pd} < 2$ . Portanto,  $C_2$  é assintoticamente estável se  $\bar{x}_0, \bar{x}_1 \in ]\bar{x}_+^{pd}$ .

Estudamos agora a estabilidade de  $C_2$  quando os parâmetros estão nas curvas onde ocorrem as bifurcações, ou seja, se  $\bar{x}_0$  e  $\bar{x}_1$  são os pontos finais dos intervalos mostrados anteriormente.

Uma análise preliminar do espaço de parâmetros mostra que para as curvas de bifurcação de período duplo, os valores dos parâmetros são inferiores a 3. Portanto, é suficiente para estudar os valores de  $S\Phi_2(\bar{x}_+^{pd})$  e  $S\Phi_2(\bar{x}_-^{pd})$  na região  $D = ]0, 3[ \times ]0, 3[$ . Como os cálculos analíticos são muito complicados, usamos simulações numéricas. Descobrimos que o máximo de  $S\Phi_2(\bar{x}_-^{pd})$  em  $D$  é  $\approx -3,95264$  e o máximo de  $S\Phi_2(\bar{x}_+^{pd})$  em  $D$  é  $\approx -0,537015$ . Na **Figura 2.12** são apresentados os valores da derivada Schwarziana em  $D$  em ambas as situações. Daí, por o 2-ciclo  $C_2$  é assintoticamente estável quando os parâmetros  $\lambda_0$  e  $\lambda_1$  estão nas curvas de bifurcação de duplicação de período.

Estudamos agora a estabilidade de  $C_2$  quando os parâmetros estão nas curvas de bifurcação sela-nó. A bifurcação sela-nó existe se  $\lambda_0 + \lambda_1 \geq 4$ . Das soluções implícitas pode-se ver que  $\lambda_0 + \lambda_1 = 4$  se  $\lambda_0 = \lambda_1 = 2$ .

Neste cenário  $\bar{x}_-^{sn} = \bar{x}_+^{sn} = 2$ ,  $\Phi_2''(2) = 0$  e  $\Phi_2'''(2) = -2 < 0$ . Portanto,  $C_2$  é assintoticamente estável. Agora considere que  $\lambda_0 + \lambda_1 > 4$  tal que  $\lambda_0 > 2$  e  $\lambda_1 > 2$ . Como mostrado no **Figura 2.11**  $\Phi_2''(\bar{x}_-^{sn}) > 0$  e  $\Phi_2''(\bar{x}_+^{sn}) < 0$  para todos  $\lambda_0$  e  $\lambda_1 \in (2, 3) \times (2, 3)$ . Daí  $\Phi_2''(\bar{x}_0) > 0$ . Consequentemente, o ciclo periódico  $C_2$  é instável quando  $\lambda_0$  e  $\lambda_1$  estão nas curvas de bifurcação sela-nó.

Agora resumimos essas ideias no seguinte resultado.

**Proposição 2.3** Seja  $p = 2$  o período da equação (2.34) e  $C_2 = \{\bar{x}_0, \bar{x}_1\}$  um 2-Ciclo não trivial periódico da equação 2-periódica (2.46). Então:

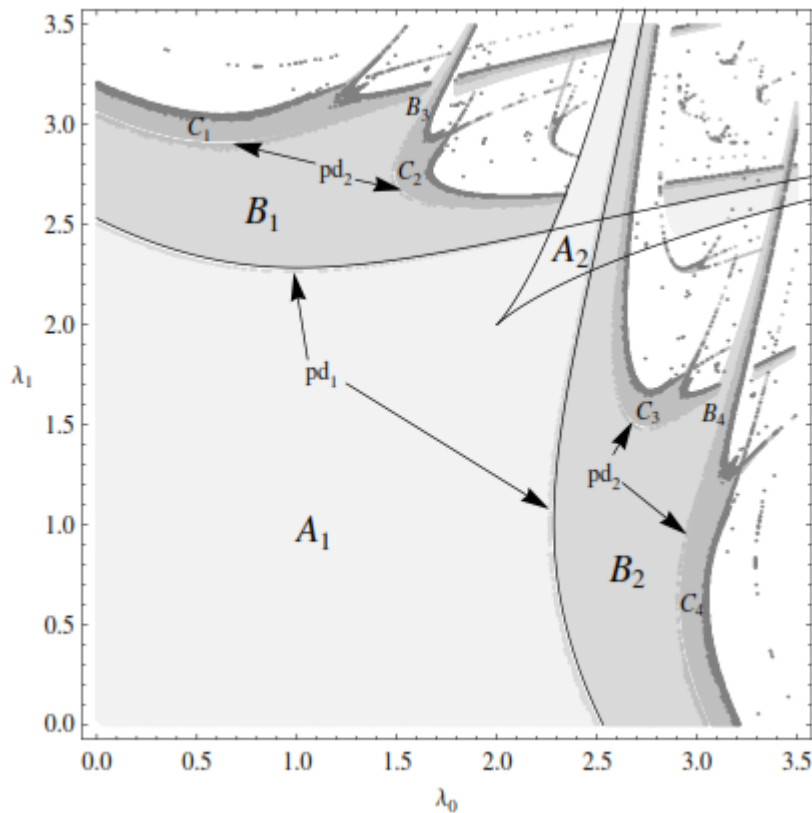


Figura 2.12: O cenário de bifurcação no espaço dos parâmetros do mapa  $\Phi_2 = R_1 \circ R_0$ . Fonte: Imagem tomada da referência [33].

1. Se  $\lambda_0 + \lambda_1 > 4$  então  $C_2$  é assintoticamente estável sempre que:

$$\bar{x}_0, \bar{x}_1 \in [x_-^{pd}, \bar{x}^{-sn} \cup \bar{x}_+^{sn}, x_+^{pd}].$$

2. Se  $\lambda_0 + \lambda_1 = 4$  então  $C_2$  é assintoticamente estável sempre que  $\bar{x}_0, \bar{x}_1 \in [2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}]$ .

3. Se  $2 < \lambda_0 + \lambda_1 < 4$  então  $C_2$  é assintoticamente estável sempre que  $\bar{x}_0, \bar{x}_1 \in [\bar{x}_-^{pd}, \bar{x}_+^{pd}]$ .

4. Se  $0 < \lambda_0 + \lambda_1 \leq 2$  então  $C_2$  é assintoticamente estável sempre que  $\bar{x}_0, \bar{x}_1 \in (0, \bar{x}_+^{pd})$ .

Na **Figura 2.12** é apresentado o cenário de bifurcação de  $C_2$  no espaço de parâmetros  $\{\lambda_0 \text{ e } \lambda_1\}$ . Como já mencionado anteriormente na região  $A_1$ , a equação (2.46) tem um 2-ciclo assintoticamente estável, as curvas de bifurcação de duplicação de período são representadas por  $pd_1$ . Portanto, à medida que  $\lambda_0$  e  $\lambda_1$  passam essas duas curvas sofre uma bifurcação de duplicação de período. O 2-ciclo torna-se instável e nasce um novo 4-ciclo assintoticamente estável. Este novo 4-ciclo é assintoticamente estável sempre que os parâmetros estiverem na região  $B_1 \cup B_2$ . Este 4-ciclo perde estabilidade sempre que os parâmetros passam pelas curvas  $pd_2$ . Nestas curvas sofre uma bifurcação de duplicação de período. Consequentemente, o 4-ciclo torna-se instável e um novo 8-ciclo assintoticamente estável é criado. A região de estabilidade do 8-ciclo é dada por  $\cup_{i=1}^4 C_i$ . Novamente, este ciclo perde estabilidade sempre que os parâmetros passam pelas curvas  $pd_3$  em que ocorre uma bifurcação de duplicação de período. Este cenário de duplicação de período continua até o caos.

Se os parâmetros estiverem na região  $A_2$ , então a equação (2.46) tem três ciclos 2-periódicos. Dois deles são assintoticamente estáveis e o terceiro é instável. Quando os parâmetros  $\lambda_0$  e  $\lambda_1$  saem desta região, entramos em uma zona onde a equação (2.46) tem coexistência de múltiplos atratores.

Na região  $B_3 \cup B_4$ , a equação (2.46) tem dois 4-ciclos assintoticamente estáveis e um 4-ciclo instável. Quando os parâmetros saem desta região entramos novamente em uma região onde se tem uma coexistência de múltiplos atratores.

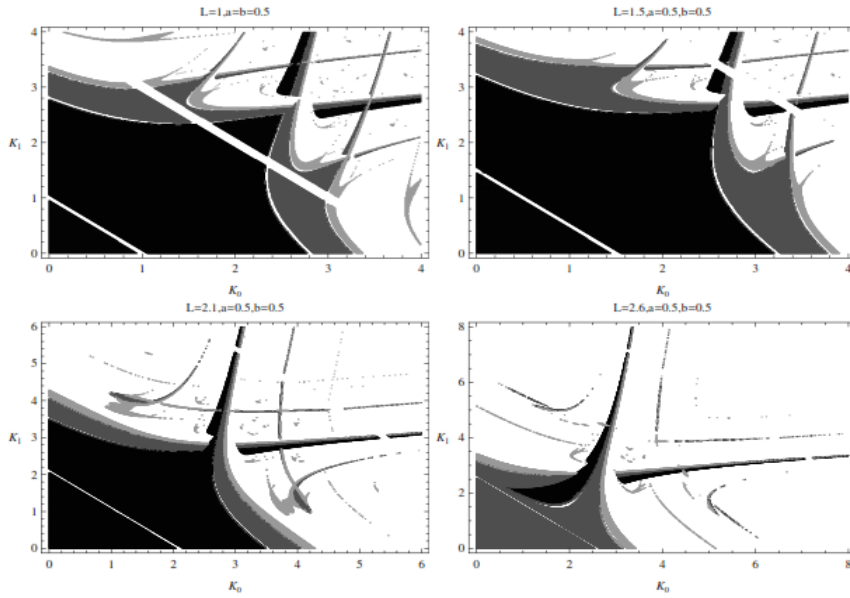


Figura 2.13: O cenário de bifurcação da equação de competição Ricker 2-periódica no espaço dos parâmetros  $(K_0, K_1)$  quando a capacidade de carga  $L$  e os parâmetros de competição  $a$  e  $b$  são fixos. Fonte: Imagem tomada da referência [33].

Discutimos agora um cenário de bifurcação, via manipulações computacionais, quando a equação (2.33) é 2-periódica. Como primeiro cenário, supomos que  $K_n = K_{n \bmod 2}$ ,  $L_n = L$ ,  $a_n = a$  e  $b_n = b, \forall n \in \mathbb{Z}^+$  isso leva a uma equação 2-periódica. Seja  $C_2 = \{(\bar{x}_0, \bar{y}_0), (\bar{x}_1, \bar{y}_1)\}$  uma solução 2-periódica da equação (2.33), ou seja,  $\Phi_2(\bar{x}_0, \bar{y}_0) = (\bar{x}_0, \bar{y}_0)$ . Usando simulações de computador, encontramos no espaço de parâmetros  $(K_0, K_1)$  a região onde  $C_2$  é assintoticamente estável (ver **Figura 2.13**, cor preta).

Pela relação (2.40)  $C_2$  é um ciclo de coexistência sempre que  $b av(K) < av(L) < \frac{av(K)}{a}$ , ou seja,  $b(K_0 + K_1) < 2L < \frac{K_0 + K_1}{2}$ . Defina os conjuntos:

$$Q = \{(K_0, K_1) \in \mathbb{R}_2^+ : K_1 < -K_0 + 2aL\},$$

$$R = \left\{ (K_0, K_1) \in \mathbb{R}_2^+ : K_1 > -K_0 + \frac{2L}{b} \right\},$$

$$S = \left\{ (K_0, K_1) \in \mathbb{R}_2^+ : -K_0 + 2aL < K_1 < -K_0 + \frac{2L}{b} \right\}.$$

Se  $(K_0, K_1) \in Q$ , então temos uma solução estável no eixo  $y$ , se  $(K_0, K_1) \in R$ , então temos soluções estáveis no eixo  $x$  e finalmente, se  $(K_0, K_1) \in S$ , então  $C_2$  é um ciclo de

coexistência estável. Cruzando as linhas  $K_1 = -K_0 + 2aL$  e  $K_1 = -K_0 + \frac{2aL}{b}$ , o sistema sofre um nó sela como bifurcação. O ciclo de exclusão torna-se instável e um novo ciclo de coexistência assintoticamente estável nasce [64].

Uma bifurcação de duplicação de período ocorre sempre que os parâmetros  $K_0$  e  $K_1$  se movem da região preta para a região cinza-escura. Assim, o 2-ciclo  $K_0$  torna-se instável e nasce um novo 4-ciclo assintoticamente estável. Novamente, ocorre uma nova bifurcação de duplicação de período quando os parâmetros mudam da região cinza-escura para a região cinza-clara.

Agora voltamos a nossa atenção para o espaço de parâmetros  $(K_0, L_0)$  quando os parâmetros  $K_0, L_0, a$

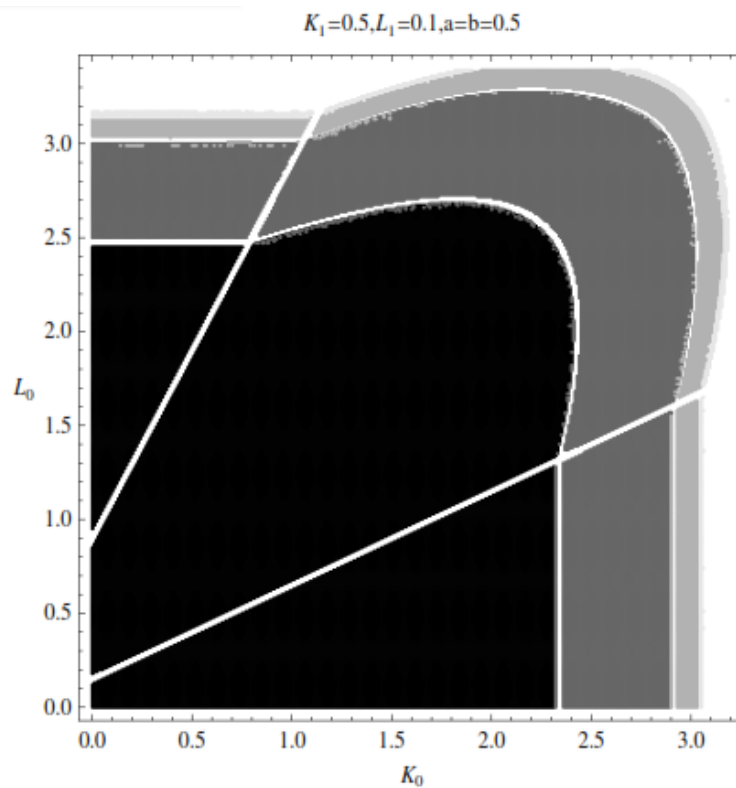


Figura 2.14: O cenário de bifurcação da equação (2.33) no espaço de parâmetros  $(K_0, L_0)$  quando  $K_1 = \frac{1}{2}$ ,  $L_1 = \frac{1}{10}$  e  $a = b = \frac{1}{2}$ . Fonte: Imagem tomada da referência [33].

e  $b$  são fixos. Primeiro suponha que  $K_1 = \frac{1}{2}$ ,  $L_1 = \frac{1}{10}$  e  $a = b = \frac{1}{2}$ .

Defina os conjuntos:

$$Q = \{(K_0, L_0) \in \mathbb{R}_2^+ : L_0 > 2K_0 + 0,9\},$$

$$R = \{(K_0, L_0) \in \mathbb{R}_2^+ : L_0 < 0,5K_0 + 0,15\},$$

$$S = \{(K_0, L_0) \in \mathbb{R}_2^+ : 0,5K_0 + 0,15 < L_0 < 2K_0 + 0,9\}.$$

Na **Figura 2.14** é apresentada a dinâmica do 2-ciclo. Na região  $Q$ , a equação (2.33) tem um ciclo de exclusão no eixo  $y$ . Se  $(K_0, L_0) \in S$  então a equação (2.33) tem um ciclo de coexistência no interior do primeiro quadrante. Finalmente, se os parâmetros  $K_0$  e  $L_0$  estão na região  $R$ , a equação (2.33) tem um ciclo de exclusão no eixo  $x$ . A região preta é a região onde se tem um 2-ciclo assintoticamente estável. A equação (2.33) sofre uma bifurcação de duplicação de período quando os parâmetros  $K_0$ , e  $L_0$  se movem da região preta para a região cinza. Daí, na região cinza da equação (2.33) tem um 4-ciclo assintoticamente estável. Novamente, uma duplicação de período, a bifurcação ocorre quando os parâmetros se movem da região cinza para a região cinza-clara. Este cenário de bifurcação continua. Na **Figura 2.15** apresentamos outros exemplos da dinâmica da equação (2.33). Observe que um pode definir os conjuntos  $Q, P$  e  $S$  como segue:

$$Q = \left\{ (K_0, L_0) \in \mathbb{R}_2^+ : L_0 > \frac{K_0}{a} + \left( \frac{K_1}{a} - L_1 \right) \right\},$$

$$R = \{(K_0, L_0) \in \mathbb{R}_2^+ : L_0 < bK_0 + (bK_1 - L_1)\},$$

$$S = \left\{ (K_0, L_0) \in \mathbb{R}_2^+ : bK_0 + (bK_1 - L_1) < L_0 < \frac{K_0}{a} + \left( \frac{K_1}{a} - L_1 \right) \right\}.$$

A dinâmica do ciclo é semelhante ao exemplo anterior.

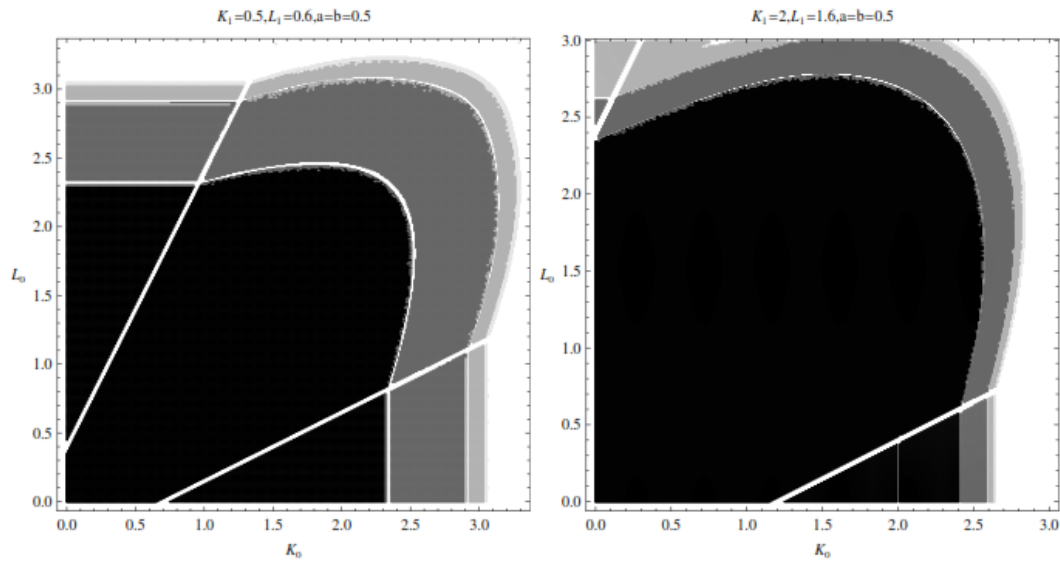


Figura 2.15: Alguns exemplos do cenário de bifurcação da equação (2.33) no espaço de parâmetros  $(K_0, L_0)$ .  
 Fonte: Imagem tomada da referência [33].

### 2.4.5 Atenuância e ressonância

Nesta seção estendemos as noções de atenuância e ressonância para sistemas bidimensionais.

(Para mais detalhes sobre este conceito em modelos não autônomos unidimensionais, consulte [6,26,27,28,29,30,31,32]).

Seja  $F_i: \mathbb{R}_2^+ \rightarrow \mathbb{R}_2^+$  uma família de mapas tal que,

$$F_i(x, y) = (f_i(x, y), g_i(x, y)), i \in \mathbb{Z}_0^+.$$

Agora fazemos as seguintes suposições:

1. O ponto  $(K_i, 0)$  é um ponto fixo do mapa  $F_i$  no eixo  $x$ . Na dinâmica populacional este ponto fixo é conhecido como um equilíbrio de exclusão e  $K_i$  a capacidade de carga do mapa  $f_i$ ,
2. O ponto  $(0, L_i)$  é um equilíbrio de exclusão do mapa no eixo  $y$ . Na dinâmica populacional este ponto fixo é também conhecido como um equilíbrio de exclusão e  $L_i$  é a capacidade de carga do mapa  $g_i$ ,
3. O ponto  $(x_i^*, y_i^*)$  é o ponto fixo positivo do mapa  $F_i(x, y)$ . Na dinâmica populacional esse ponto fixo é conhecido como ponto de equilíbrio de coexistência.

Seja  $C_r = \{(\bar{x}_0, \bar{y}_0), (\bar{x}_1, \bar{y}_1), \dots, (\bar{x}_{r-1}, \bar{y}_{r-1})\}$  ser um ciclo  $r$ -periódico assintoticamente estável da equação de diferença não-autônoma  $p$ -periódica:

$$(x_{n+1}, y_{n+1}) = F_n(x_n, y_n), \quad (2.52)$$

onde  $F_n = F_{n \bmod p}, \forall n \in \mathbb{Z}^+$ . Na dinâmica populacional, o  $C_r$  é conhecido como um ciclo de coexistência.

Seja,

$$av(\bar{x}) = \frac{1}{r} \sum_{i=0}^{r-1} \bar{x}_i, av(\bar{y}) = \frac{1}{r} \sum_{i=0}^{r-1} \bar{y}_i, av(x^*) = \frac{1}{p} \sum_{i=0}^{p-1} x_i^*, e av(y^*) = \frac{1}{p} \sum_{i=0}^{p-1} y_i^*.$$

**Definição 2.1** A equação (2.52) é

1. Atenuante - Atenuante em relação a  $C_r$  se  $av(\bar{x}) < av(x^*)$  e  $av(\bar{y}) < av(y^*)$ ,
2. Atenuante - Ressonante em relação ao  $C_r$  se  $av(\bar{x}) < av(x^*)$  e  $av(\bar{y}) > av(y^*)$ ,
3. Ressonante - Atenuante em relação a  $C_r$  se  $av(\bar{x}) > av(x^*)$  e  $av(\bar{y}) < av(y^*)$ ,
4. Ressonante - Ressonante em relação ao  $C_r$  se  $av(\bar{x}) > av(x^*)$  e  $av(\bar{y}) > av(y^*)$ .

Se isso for verdade para todas as órbitas periódicas atrativas, então removemos a frase “relativa ao  $C_r$ ”.

Agora, suponha que a equação (2.33) é  $p$ -periódica tal que os parâmetros de competição  $a$  e  $b$  são fixos. O ponto fixo de coexistência para cada mapa individual  $F_i, 0 \leq i \leq p - 1$

é dado por  $x_i^* = \frac{aL_i - K_i}{ab - 1}$  e  $y_i^* = \frac{bK_i - L_i}{ab - 1}$ . Então,

$$av(x^*) = \frac{1}{p} \sum_{i=0}^{p-1} x_i^* = \frac{1}{p(ab - 1)} \frac{1}{p} \sum_{i=0}^{p-1} (aL_i - K_i) = \frac{1}{ab - 1} (a av(L) - av(K)).$$

Usando a relação (2.38) segue  $av(x^*) = av(\bar{x})$ . Da mesma forma, tem-se  $av(y^*) = av(\bar{y})$ . Por isso nem atenuância nem ressonância prevalecem. Observe que um resultado semelhante para o mapa de Ricker unidimensional que foi obtido em [6].

Para finalizar, estudamos as propriedades de um ciclo periódico as capacidades de carga são periódicas e os parâmetros de competição não são fixos. Agora vamos estudar a

atenuação e ressonância para as outras situações em que a equação (2.33) tem uma órbita periódica. Quando  $p > 2$  a dinâmica da equação envolve cálculos enormes. Então focamos nossa atenção na atenuação e ressonância quando  $p = 2$ .

Sejam  $K_n, L_n$  e  $a_n$  seqüências 2-periódicas tais que  $(K_n, L_n) \in S_{1,n}, \forall n \in \mathbb{Z}^+$  e suponha que o parâmetro  $b$  é fixo. Isso produz um ciclo de coexistência assintoticamente estável de período 2 na equação (2.33). Seja  $C_2 = \{(\bar{x}_0, \bar{y}_0), (\bar{x}_1, \bar{y}_1)\}$  este ciclo periódico. Após cálculos pode-se mostrar que,

$$\bar{x}_0 + \bar{x}_1 = K_0 + K_1 - a_0\bar{y}_0 - a_1\bar{y}_1 \text{ e } \bar{y}_0 + \bar{y}_1 = L_0 + L_1 - b(\bar{x}_0 + \bar{x}_1) \quad (2.53)$$

Substituindo o valor de  $\bar{y}_0$  na primeira equação de (2.53) resulta:

$$K_0 + K_1 - a_0(L_0 + L_1) + (a_0 - a_1)\bar{y}_1 = (1 - ba_0)(\bar{x}_0 + \bar{x}_1),$$

ou equivalente,

$$x_0^* + x_1^* + \frac{K_1 - a_0L_1}{1 - ba_0} - \frac{K_1 - a_1L_1}{1 - ba_1} + \frac{a_0 - a_1}{1 - ba_0}\bar{y}_1 = \bar{x}_0 + \bar{x}_1, \quad (2.54)$$

Onde,  $x_i^* = \frac{K_i - a_iL_i}{1 - ba_i}, i = 0, 1$ . Da mesma forma, obtém-se:

$$x_0^* + x_1^* + \frac{K_0 - a_1L_0}{1 - ba_1} - \frac{K_0 - a_0L_0}{1 - ba_0} + \frac{a_1 - a_0}{1 - ba_1}\bar{y}_0 = \bar{x}_0 + \bar{x}_1. \quad (2.55)$$

Adicionando as equações (2.54) e (2.55) obtemos:

$$av(x^*) + \epsilon_x = av(\bar{x}), \quad (2.56)$$

onde  $av(x^*) = \frac{x_0^* + x_1^*}{2}$ ,  $av(\bar{x}) = \frac{\bar{x}_0 + \bar{x}_1}{2}$ , e

$$\epsilon_x = \frac{K_1 - K_0 + a_0(L_0 - L_1) + (a_0 - a_1)\bar{y}_1}{4(1 - ba_0)} + \frac{K_0 - K_1 + a_1(L_1 - L_0) + (a_1 - a_0)\bar{y}_0}{4(1 - ba_1)}.$$

Usando cálculos semelhantes, podemos mostrar que:

$$av(y^*) + \epsilon_y = av(\bar{y}), \quad (2.57)$$

onde  $av(y^*) = \frac{y_0^* + y_1^*}{2}$ ,  $y_i^* = \frac{L_i - bK_i}{1 - ba_i}$ ,  $i = 0, 1$ ,  $av(\bar{y}) = \frac{\bar{y}_0 + \bar{y}_1}{2}$ , e

$$\epsilon_y = \frac{L_0 - bK_0 - (1 - ba_0)\bar{y}_0}{2(1 - ba_1)} + \frac{L_1 - bK_1 - (1 - ba_1)\bar{y}_1}{2(1 - ba_0)}.$$

Portanto, pode-se concluir o seguinte [33]:

- se  $\epsilon_x = \epsilon_y = 0$ , então não é atenuante nem ressonante;
- se  $\epsilon_x > 0$  e  $\epsilon_y > 0$ , então a equação (2.33) é ressonante - ressonância relativa a  $C_2$ ;
- se  $\epsilon_x > 0$  e  $\epsilon_y < 0$ , então a equação (2.33) é ressonante - atenuante em relação a  $C_2$ ;
- se  $\epsilon_x < 0$  e  $\epsilon_y > 0$ , então a equação (2.33) é atenuante - ressonante relativa a  $C_2$ ;
- se  $\epsilon_x < 0$  e  $\epsilon_y < 0$ , então a equação (2.33) é atenuante - atenuante relativa a  $C_2$ .

Antes do final desta subseção, notamos que conclusões semelhantes podem ser tiradas em outras situações para as quais a equação (2.33) tem um ciclo 2-periódico assintoticamente estável. Por exemplo, fixando  $a$  e variando  $b$  ou fixando as capacidades de carga e variando os parâmetros de competição, etc.

Assim, no caso da periodicidade dos parâmetros de competição, atenuância e ressonância estão presentes na solução periódica da equação não autônoma dada em (2.33).

### **3 Conclusão**

Esta dissertação teve como propósito não só apresentar e alargar o conhecimento acerca do Modelo de Ricker autônomo e periódico para uma e duas espécies, mas, também, evidenciar as suas aplicações nos âmbitos matemático, biológico e populacional. Neste sentido, procurámos providenciar exemplos ilustrativos do Modelo de Ricker e demonstrar a sua estabilidade em uma e duas espécies, utilizando a teoria apresentada na literatura relevante como suporte para a nossa investigação. Todo o conjunto de informações apresentado neste trabalho fornece uma base sólida e sustentável para o desenvolvimento futuro do conhecimento nesta área.

Estes conteúdos desempenham um papel crucial, não apenas no campo da biologia, mas também noutros contextos em que o Modelo de Ricker é necessário. Além disso, os objetivos desta dissertação não se limitam a enriquecer o nosso entendimento sobre um tema em constante evolução, mas também visam tornar o conhecimento acessível e sintetizado, facilitando o seu uso em contextos de ensino e como referência para pesquisas futuras.



## 4 Bibliografia

- [1] “Biology Dictionary”, [Online]. <https://biologydictionary.net/carrying-capacity/> [Acedido em 10/10/2021].
- [2] W. A. Coppel, *The solution of equations by iteration*, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, pp. 41-43, (1955).
- [3] M. Feigenbaum, *Quantitative universality for a class of nonlinear transformations*, J. Stat. Phys. 19, pp. 25-52, (1978).
- [4] A. N. Sharkovsky, *Co-existence of cycles of a continuous mapping of a line into itself*, Ukrainian Math. Z. 16, pp. 61-71, (1964).
- [5] T. Y. Li and J. A. Yorke, *Period three implies chaos*, Amer. Math. Month, 82, pp. 985-992 (1975).
- [6] R. Sacker, *A note on a periodic Ricker map*, Journal of Difference Equations and Applications, vol. 13 n. °1, pp. 89-92, (2007).
- [7] Eduardo Liz, *On the global stability of periodic Ricker maps*, Departamento de Matemática Aplicada II, Universidad de Vigo, 36310 Vigo, Spain, (2016).
- [8] M. Hassell, *Density dependence in single species populations*, J. Anim. Ecol. 45 pp. 283–296, (1975).
- [9] J. Maynard-Smith and M. Slatkin, *The stability of predator-prey systems*, Ecology 54, pp. 384–391, (1973).
- [10] A. Brannstrom and D. Sumpter, *The role of competition and clustering in population dynamics*, Proc. R. Soc. B 272, pp. 2065–2072, (2005).
- [11] A. Lotka, *Elements of Physical Biology*, Williams & Wiliams, Baltimore, MD, (1925).
- [12] P. Lindstrom, *Discrete Models and Fisher’s Maximum Principle in Ecology*, in Proceedings of the Fourth International Conference on Dynamical Systems and Difference Equations, pp. 571–579, (2002).
- [13] R. Mickens, *Discretizations of nonlinear differential equations using explicit nonstandard methods*, J. Comput. Appl.Math, 110, pp. 181–185, (1999).

- [14] P. Leslie and J. Gower, *The properties of a stochastic model for two competing species*, *Biometrika* 45, pp. 316–330, (1958).
- [15] P. Liu and S. Elaydi, *Discrete competitive and cooperative models of Lotka-Volterra type*, *J. Comput. Anal. Appl.* 3(1), pp. 53–73, (2001).
- [16] A. Hone, M. Irle, and G. Thurura, *On the Neimark–Sacker bifurcation in a discrete predator-prey system*, *J. Biol. Dyn.* 4 (6), pp. 594–606, (2010).
- [17] S. Wiggins, *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, Springer, New York, (2003).
- [18] N. Karydas and J. Schinas, *The center manifold theorem for a discrete system*, *Appl. Anal.* 44, pp. 267–284, (1992).
- [19] J. Marsden and M. McCracken, *The Hopf Bifurcation and its Application*, Springer, New York, (1976).
- [20] H. L. Smith, *Planar competitive and cooperative difference equations*, *J. Difference Equ. Appl.* 3(5–6), pp. 335–357, (1998).
- [21] S. Elaydi, *Discrete Chaos: With Applications in Science and Engineering*, 2nd ed., Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, FL, (2008).
- [22] W.H. Beyer, *CRC Standard Mathematical Tables*, 28th ed., CRC Press, Boca Raton, FL, pp. 200–201, (1987).
- [23] V. Volterra, *Variations and fluctuations of the number of individuals in animal species living together in animal ecology*, *Animal Ecology*, R.N. Chapman, ed., McGraw-Hill, New York, pp. 409–448, (1931).
- [24] J. Munkres, *Topology*, Prentice Hall, second edition, (1975).
- [25] K. Allgood, T. Sauer, and J. Yorke, *Chaos: An introduction to dynamical systems*, Springer, New York, (1996).
- [26] J. Cushing and S. Henson, *A periodically forced Beverton-Holt equation*. *Journal of Difference Equation and Applications*, 8: pp.1119–1120, (2002).
- [27] S. Elaydi and R. Sacker, *Global stability of periodic orbits of nonautonomous difference equations and populations biology*, *J. Differential Equations*, 208: pp.258–273, (2005).

- [28] S. Elaydi and R. Sacker, *Nonautonomous Beverton-Holt equations and the Cushing-Henson conjectures*, Journal of Difference Equations and Applications, 11(4-5): pp.337–346, (2005).
- [29] S. Elaydi and R. Sacker, *Periodic difference equations, population biology and the Cushing-Henson conjectures*, Mathematical Biosciences, 201: pp.195–207, (2006).
- [30] V. Kocic, *A note on the nonautonomous Beverton-Holt model*, Journal of Difference Equation and Applications, 11(4-5): pp.415–422, (2005).
- [31] R. Kon, *A note on attenuant cycles of population models with periodic carrying capacity*, Journal of Difference Equation and Applications, 10(8): pp.791–793, (2004).
- [32] S. Stevic, *A short proof of the Cushing-Henson conjecture*. In Discrete Dynamics in Nature and Society, Hindawi Publishing Corporation, (2006).
- [33] R. Luís, *Nonautonomous periodic difference equations with applications in Population Dynamics and Economics*, LAP LAMBERT Academic Publishing, (2017).
- [34] R. Luís, S. Elaydi and H. Oliveira, *Stability of a Ricker-type competition model and the competitive exclusion principle*, Journal of Biological Dynamics, Vol. 5, No. 6, pp. 636-660, (2011).
- [35] M. Guzowska, R. Luís and S. Elaydi, *Bifurcation and Invariant Manifolds of the Logistic Competition Model*, Journal of Difference Equations and Applications, Vol. 17, No. 12, pp. 1851-1872, (2011).
- [36] G. Osipenko, *Center manifolds*, Encyclopedia of Complexity and Systems Science, pp. 936–951, (2009).
- [37] A. M. Lyapunov, *The general problem of the stability of motion* (in Russian) [Phd. Dissertation], University of Kharkov (1892), (English translation version: (1) *Stability of Motion* (Academic Press, New York, 1966). (2) *The General Problem of the Stability of Motion* (Taylor and Francis, London, 1992)).
- [38] V. A. Pliss, *A reduction principle in the theory of stability of motion*, Izvestiya Akademii Nauk USSR. Seriya Matematicheskaya, vol. 28, pp. 1297–1324, (1964).

- [39] A. Kelley, *The stable, center-stable, center, center-unstable, un-stable manifolds*, Journal of Differential Equations, vol. 3, pp. 546–570, (1967).
- [40] G. Iooss, *Bifurcation of maps and applications*, vol. 36 of North-Holland Mathematics Studies, North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, (1979).
- [41] J. Carr, *Applications of Centre Manifold Theory*, Springer, New York, NY, USA, (1981).
- [42] J. Guckenheimer and P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcation of Vector Fields*, Springer, New York, NY, USA, (1983).
- [43] Y. A. Kuznetsov, *Elements of Applied Bifurcation Theory*, vol. 112 of Applied Mathematical Sciences, Springer, New York, NY, USA, 3rd edition, (2004).
- [44] S. Wiggins, *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems*, vol. 2, Springer-Verlag, New York, (2003).
- [45] W. Zhang, *One-dimensional dynamical economic systems, in Discrete Dynamical Systems*, Bifurcations and Chaos in Economics, vol. 204 of Mathematics in Science and Engineering, pp. 79–134, Elsevier, (2006).
- [46] J. Dektsevic, M. R. Kulenovic, and E. Pilav, *Asymptotic approximation of a stable and unstable manifolds of a two-dimensional quadratic map*, Journal of Computational Analysis and Applications, vol. 21, no. 1, pp. 35–51, (2016).
- [47] N. Karydas and J. Schinas, *The center manifold theorem for a discrete system*, Applicable Analysis. An International Journal, vol. 44, no. 3-4, pp. 267–284, (1992).
- [48] M. R. Kulenovic and O. Merino, *Invariant manifolds for competitive discrete systems in the plane*, International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering, vol. 20, no. 8, pp. 2471–2486, (2010).
- [49] N. Psarros, G. Papaschinopoulos, and C. J. Schinas, *Semistability of two systems of difference equations using centre manifold theory*, Mathematical Methods in the Applied Sciences, vol. 39, no. 18, pp. 5216–5222, (2016).

- [50] B. P. Brooks, *Linear stability conditions for a first-order three-dimensional discrete dynamic*, Applied Mathematics Letters, Na International Journal of Rapid Publication, vol. 17, no. 4, pp. 463–466, (2004).
- [51] S. Elaydi, *An Introduction to Difference Equations*, Springer, New York, NY, USA, 3rd edition, (2005).
- [52] E. Ricker, *Handbook of Computation for Biological Statistics of Fish Populations*, Bulletin 119 of the Fisheries Resource, (1958).
- [53] J. M. Cushing, *An Introduction to Structured Population Dynamics*, vol. 71, The Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, Pa, USA, (1998).
- [54] A. N. Sharkovsky, *Coexistence of cycles of a continuous map of the line into itself*, Ukrainian Mathematical Journal, vol. 16, pp. 61–71, (1964) (Russian).
- [55] A. N. Sharkovsky, *Coexistence of cycles of a continuous map of the line into itself (translation to English by J. Tolosa)*, International Journal of Bifurcation and Chaos, vol. 5, no. 5, pp.1263–1273, (1995).
- [56] E. C. Balreira, S. Elaydi, and R. Luís, *Local stability implies global stability for the planar Ricker competition model*, Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series B. A Journal Bridging Mathematics and Sciences, vol. 19, no. 2, pp. 323–351, (2014).
- [57] H. Whitney, *On singularities of mappings of euclidean spaces. Mappings of the plane into the plane*, Annals of Mathematics, vol. 62, no. 3, pp. 374–410, (1955).
- [58] A. Barugola, C. Mira, L. Gardini, and J. Cathala, *Chaotic Dynamics in Two-Dimensional Noninvertible Maps*, *Nonlinear Sciences Series A*, World Scientific, Singapore, (1996).
- [59] B. Ryals and R. J. Sacker, *Global stability in the 2D Ricker equation*, Journal of Difference Equations and Applications, vol. 21, no. 11, pp. 1068–1081, (2015).
- [60] S. Elaydi and R. Luís, *Open problems in some competition models*, Journal of Difference Equations and Applications, vol.17, no. 12, pp. 1873–1877, (2011).
- [61] R. Luís, *Linear Stability Conditions for First Order n-dimensional Mapping*, Qualitative Theory of Dynamical Systems, 20 (1), (2021).

- [62] Eric P. Bjorkstedt, *Encyclopedia of Theoretical Ecology*, University of California Press, 632, (2012).
- [63] “Wikipedia”, [Online]. [https://pt.wikipedia.org/wiki/Série de Taylor](https://pt.wikipedia.org/wiki/Série_de_Taylor). [Acedido em 08/05/2023].
- [64] S. Elaydi, R. Luís and H. Oliveira, *Local bifurcation in one-dimensional nonautonomous periodic difference equations*, International Journal of Bifurcation and Chaos, Volume 23, No. 3 (2013).
- [65] P. Nóbrega, *Modelos Matemáticos Discretos Aplicados à Dinâmica de Populações*, Universidade da Madeira, Funchal, (2020).
- [66] H. A. El-Morshedy e V. J. López, *Global attractors for difference equations dominated by one-dimensional maps*, Journal of Difference Equations and Applications, Vol. 14, No. 4, pp. 391-410, (2008).
- [67] D. Worster, *Nature's Economy*. Cambridge University Press. pp. 398–401, (2008).
- [68] M. Uyenoyama e Rama Singh, editors, *The Evolution of Population Biology*, Cambridge University Press. pp. 1–19, (2004).

## Apêndice A: Variedades invariantes

Transitaremos para uma exposição sucinta e concisa acerca das variedades invariáveis num mapa linear. Para uma investigação mais profunda, pode ser consultado em [34]

Seja  $F: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  por [34] uma aplicação tal que  $F(0) = 0$ . Então, pode-se escrever  $F$  como uma perturbação de um mapa linear  $L$  na forma,

$$F(X) = L(X) + R(X), \quad (\text{A.1})$$

onde,  $L$  é uma matriz do tipo  $k \times k$  definida por  $L = D(F(0))$ ,  $R(0) = 0$  e  $DR(0) = 0$ , e  $D$  denota a matriz Jacobiana. Agora, vamos introduzir subespaços especiais de  $\mathbb{R}^k$ , chamadas variedades invariantes [17, pág. 14], que tem um papel central no nosso estudo de estabilidade e bifurcação. Uma variedade invariante é uma variedade mergulhada no seu espaço de fase, com a propriedade de ser invariante sob o sistema dinâmico gerado por  $F$ . Um subespaço  $M$  de  $\mathbb{R}^k$  é uma variedade invariante se sempre que  $X \in M$ , então  $F^n(X) \in M$ , para todo  $n \in \mathbb{Z}^+$ . Para o mapa linear  $L$ , pode-se dividir o seu espectro  $\sigma(L)$  em três conjuntos  $\sigma^s, \sigma^u, e \sigma^c$ , para os quais  $\lambda \in \sigma^s$  se  $|\lambda| < 1$ ,  $\lambda \in \sigma^u$  se  $|\lambda| > 1$ , e  $\lambda \in \sigma^c$  se  $|\lambda| = 1$ .

Correspondendo a esses conjuntos, temos três variedades invariantes (subespaços lineares)  $E^s, E^u, e E^c$  que são os subespaços próprios generalizados correspondentes a  $\sigma^s, \sigma^u, e \sigma^c$ , respectivamente. Note-se que alguns desses subespaços podem ser triviais. A questão principal aqui é como estender essa teoria linear para mapas não lineares. Correspondendo os subespaços lineares  $E^s, E^u, e E^c$ , teremos as variedades invariantes, a variedade estável  $W^s$ , a variedade instável  $W^u$ , e a variedade central  $W^c$ . A teoria da variedade central [40,41,51] é interessante apenas se  $W^u = \{0\}$ , pois neste caso, a dinâmica na variedade central  $W^c$  determina a dinâmica do sistema. O outro aspeto interessante é quando  $W^c = \{0\}$  e temos uma sela. Sejam  $E^s \subset \mathbb{R}^s, E^u \subset \mathbb{R}^u, e E^c \subset \mathbb{R}^t$ , com  $s + u + t = k$ . Então, pode-se definir formalmente variedades invariantes acima mencionadas como se segue:

$$W^s(0) = \{X \in \mathbb{R}^k \mid F^n(X) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty\},$$

e,

$$W^u(0) = \left\{ X \in \mathbb{R}^k \mid \exists \{q_n\}_{n=0}^{\infty} = 0, q_0 = X, eF(q_{k+1}) = q_k, q_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty \right\}.$$

O próximo resultado resume a teoria básica das variedades invariantes.

**Teorema A.1** (Teorema da variedade invariante [18,19]) Suponha que  $F \in C^2$ . Então existe uma variedade estável  $W^s$  e uma variedade  $W^u$  instável, tangentes a  $E^s$  e  $E^u$ , respectivamente, em  $X = 0$  e uma variedade central  $W^c$  tangente a  $E^c$  em  $X = 0$ . Além disso,  $W^c$ ,  $W^s$  e  $W^u$  são todas variedades invariantes.