

DM

**Variantes da Solução de Scheffé
para o Problema de Behrens-Fisher
Baseadas em Reamostragem**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

João Luís Nogueira de Oliveira
MESTRADO EM MATEMÁTICA



UNIVERSIDADE da MADEIRA

A Nossa Universidade

www.uma.pt

julho | 2018

**Variantes da Solução de Scheffé
para o Problema de Behrens-Fisher
Baseadas em Reamostragem**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

João Luís Nogueira de Oliveira

MESTRADO EM MATEMÁTICA

ORIENTADOR
Sívio Filipe Velosa



Variantes da Solução de Scheffé para o Problema de Behrens-Fisher Baseadas em Reamostragem

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM MATEMÁTICA

João Luís Nogueira de Oliveira

CONSTITUIÇÃO DO JÚRI DE PROVAS PÚBLICAS

Dr^a. Sandra Maria Freitas Mendonça
Dr^a. Ana Maria Cortesão Pais Figueira da Silva Abreu
Dr. Sílvio Filipe Velosa

Agradecimentos

Gostaria de agradecer a todos os que estiveram presentes tanto fisicamente como na memória durante a elaboração desta dissertação. Por todas as vezes que me encorajaram a construir o meu futuro e a chegar a este dia com frutos e resultados.

Agradeço ao meu orientador Doutor Sílvio Velosa, por todas as horas que dedicou para me ajudar a construir esta dissertação. Por todos os momentos em que me ajudou a aprender conceitos novos, pelos momentos de discussão de resultados em que valorizou o caminho seguido e também pelos conflitos de ideias que levaram ao enriquecimento do trabalho. Por nunca ter deixado de acreditar que os nossos resultados tinham valor, mesmo quando nos deparávamos com um beco sem saída.

Aos meus pais e família que sempre acreditaram e me impulsionaram para conseguir completar esta árdua etapa. Aos sacrifícios que foram feitos pela parte de todos para que eu conseguisse estudar e ter um futuro promissor. Às palavras de apoio nos momentos menos bons que me fizeram levantar a cabeça e continuar a lutar pelo sucesso.

À Afrodite Sousa e sua família, que me acompanharam desde o início, sempre valorizaram o meu trabalho e me motivaram para continuar a esforçar-me, nos muitos altos e baixos. Sem o seu apoio e insistência também não teria chegado ao fim desta caminhada.

A todos os colegas de mestrado que tive, em especial à Mariana Barros, por ter estado presente nesta etapa de ensino. Obrigado e parabéns pelo teu sucesso. Aos restantes colegas de curso, de praxe, por todos os momentos divertidos que ajudam a esquecer a pressão da aprendizagem, e que deixam laços de amizade para durar.

Aos professores que acompanharam toda a minha vida académica e que sempre se mostraram disponíveis para ajudar. Um agradecimento especial às arguentes, Doutora Ana Abreu e Doutora Sandra Mendonça, cujas correcções e sugestões contribuíram para tornar mais clara, concisa e rigorosa esta dissertação.

Um último mas distinto agradecimento ao Professor Doutor Dinis Pestana, de quem partiu o desafio que veio a dar as ideias aqui traçadas e ensaiadas.

Resumo

Num par de artigos de 1943 e 1944, Scheffé deduziu para o problema de Behrens-Fisher uma solução simples com distribuição t exacta, que mostrou ter boas propriedades. Todavia, posteriormente preteriu essa solução em favor do teste t aproximado de Welch.

Neste trabalho mostramos que a estatística de teste de Welch se pode obter por reamostragem da solução de Scheffé. Utilizamos o mesmo processo de reamostragem para obter outras variantes da estatística de Scheffé, de que fazemos uma exploração simples por simulação.

Palavras-Chave: teste t aproximado de Welch, problema de Behrens-Fisher, reamostragem, Henry Scheffé, médias potência, fórmula de Satterthwaite, graus de liberdade efectivos, homogeneidade de variâncias,

Abstract

In two papers from 1943 and 1944, Scheffé derived a simple solution to the Behrens-Fisher problem with an exact t -distribution, for which he proved some optimal properties. Later, however, he recommended against this solution, favoring Welch's approximate t test instead.

In this work we show that Welch's test statistic can be obtained by resampling Scheffé's statistic. We apply the same resampling procedure to obtain further variants of Scheffé's solution, which we explore with a brief simulation.

Keywords: Welch's approximate t , Behrens-Fisher problem, resampling, Henry Scheffé, power means, Satterhwaite's formula, effective degrees of freedom, variance homogeneity

Índice

Símbolos e nomenclatura	xiii
1 Comparação de médias: métodos paramétricos clássicos	3
1.1 Momentos de variáveis aleatórias	3
1.2 Momentos amostrais e distribuições de amostragem em populações normais	6
1.3 Distribuições gama, qui-quadrado, t e F	9
1.4 A aproximação de Satterthwaite	10
1.5 Testes de hipóteses e intervalos de confiança clássicos para médias	13
1.5.1 Inferência sobre uma média com variância conhecida	13
1.5.2 Inferência sobre uma média com variância desconhecida	15
1.5.3 Diferença entre as médias de duas populações homogêneas, estimadas a partir de amostras independentes	17
1.5.4 Diferença entre as médias de duas populações, estimadas a partir de amostras emparelhadas	18
1.6 O problema de Behrens-Fisher e a solução t aproximada de Welch	19
1.7 Comparação das estatísticas de Student e de Welch	21
2 A solução de Scheffé e variantes baseadas em reamostragem	27
2.1 A solução pouco prática de Scheffé para o problema de Behrens-Fisher	27
2.2 Reamostrar a estatística de Scheffé: alguns casos simples	30
2.3 Variantes da estatística de Scheffé com base em médias potência	34
2.4 O <i>jackknife</i>	36
2.5 Relação entre as estatísticas de Welch e de Scheffé	38
3 Breve estudo de simulação	47
3.1 Critérios, pressupostos e método	47
3.2 Implementação	50
3.2.1 Algoritmo	50
3.2.2 Ferramentas	52
3.2.3 <i>Packages</i> úteis no <i>R</i>	53

3.2.4	Passos da simulação	54
3.3	Resultados e discussão	61
	Referências	74
	Anexos	75

Símbolos e nomenclatura

símbolo	significado
va.	variável(is) aleatória(s)
\frown	com distribuição
\equiv	igual por definição; abreviatura de / abreviado para
$\delta(X)$	índice de dispersão da va. X , $\text{var}(X)/E(X)$
$N(\mu_j, \sigma_j)$	distribuição normal com valor médio μ_j e desvio padrão σ_j
Z	va. com distribuição normal padrão $N(0, 1)$
z_α	quantil superior de probabilidade α na distribuição normal padrão
χ_ν^2	distribuição qui-quadrado com ν graus de liberdade; va. genérica com distribuição χ_ν^2 ($\nu > 0$)
$\text{ga}(\alpha, \delta)$	distribuição gama com parâmetro de forma α , parâmetro de escala δ e valor médio $\beta = \alpha\delta$
$\omega = 1/\delta$	taxa da distribuição gama
W	va. genérica com distribuição gama, exacta ou aproximada
T	va. genérica com distribuição t_ν , exacta ou aproximada
$t_{(\nu, \alpha)}$	quantil superior de probabilidade α na distribuição t_ν
σ^2	$\text{var}(\bar{X} - \bar{Y})$ ou $\text{var}(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$
T_{stu}	estatística de Student para amostras independentes
S_{stu}^2	estimador de σ^2 na estatística T_{stu}
σ_0^2	variância comum de duas populações

símbolo	significado
S_0^2	estimador de σ_0^2 na estatística T_{Stu} (<i>pooled variance</i>)
T_{Welch}	estatística de Welch
S_{Welch}^2	estimador de σ^2 na estatística T_{Welch}
θ	razão entre as variâncias de duas populações, σ_X^2/σ_Y^2 ou σ_1^2/σ_2^2
c	$\sqrt{n_1/n_2}$
a	$\sqrt{(n_1 - 1)/(n_2 - 1)}$
U_i	diferenças ponderadas de Scheffé $U_i = X_i - cY_i$ ($i = 1, \dots, n_1$)
S_U^2, S_U	variância e desvio padrão amostrais de (U_1, \dots, U_{n_1})
p	número de emparelhamentos
S_j^2, S_j	$S_{U_j}^2/n_1$ e $S_{U_j}/\sqrt{n_1}$ para um dado emparelhamento ($j = 1, \dots, p$)
T_j	valores possíveis da estatística de Scheffé ($j = 1, \dots, p$)
$\bar{S}_{(m)}$	média de ordem m dos erros padrões (S_1, \dots, S_p)
$T_{(m)}$	estatística de Scheffé reamostrada associada a $\bar{S}_{(m)}$
\mathbf{Y}_j, \bar{Y}_j	subamostra de $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_{n_1}, \dots, Y_{n_2})$ com $n_1 \leq n_2$ elementos e respectiva média ($j = 1, \dots, p$)
$T_{(-)j}$	estatística de Scheffé com truncatura da amostra maior ($j = 1, \dots, p$)
$T_{(-)}, \bar{S}_{(-)}^2$	média das estatísticas $T_{(-)j}$ e estimador associado de σ^2
$\mathbf{Y}_{(-i)}$	subamostra de $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_i, \dots, Y_{n_2})$ sem a observação Y_i ($i = 1, \dots, n_2$)
$\bar{S}_{()}^2, T'_{()}$	estatística $\bar{S}_{()}^2$ com <i>jackknife</i> incompleto e estatística associada $T'_{()}$
$W_{()}, W'_{()}$	variâncias normalizadas $\bar{S}_{()}^2/\sigma^2, \bar{S}'_{()}^2/\sigma^2$
${}^{n_1}A_{n_2}$	número de arranjos (ou permutações) de n_2, n_1 a n_1

*“Mais vale uma solução aproximada do problema certo
que a solução exacta de um problema errado.”*

— J. Tukey

Capítulo 1

Comparação de médias: métodos paramétricos clássicos

1.1 Momentos de variáveis aleatórias

Neste capítulo introdutório recordamos definições e propriedades pertinentes para o trabalho que se segue e fixamos as notações e abreviaturas que utilizaremos.

Dada uma variável aleatória (va.) X absolutamente contínua com suporte S e função densidade de probabilidade f_X , e uma função mensurável $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, o valor médio, ou valor esperado, da va. $Y = g(X)$ é definido pela média ponderada

$$\mu_Y = \mathbb{E}[g(X)] = \int_S g(x) f_X(x) dx,$$

quando este integral é absolutamente convergente; caso contrário diz-se que $Y = g(X)$ não tem valor médio. Considerando a função identidade $g(X) = X$ fica o valor médio de X , $\mu_X = \mathbb{E}(X)$.

O valor médio tem propriedades lineares que decorrem imediatamente das do integral: se X_1, X_2, \dots, X_p são va. com valor médio e a_1, a_2, \dots, a_p, b constantes, então

$$\mathbb{E}(a_1 X_1 + \dots + a_p X_p + b) = a_1 \mathbb{E}(X_1) + \dots + a_p \mathbb{E}(X_p) + b. \quad (1.1)$$

Se além disso as variáveis aleatórias forem independentes então o valor médio do

seu produto factoriza-se,

$$E(X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_p) = E(X_1) \cdot E(X_2) \cdot \dots \cdot E(X_p).$$

Segundo a desigualdade de Markov ([9], p. 136), uma va. de suporte positivo com valor médio μ_X encontra-se, com grande probabilidade, numa vizinhança direita da origem; mais precisamente, $P[X \geq a\mu_X] \leq 1/a$ para qualquer a real positivo. Por exemplo, para $\mu_X = 1$ fica $P[0 \leq X < 20] \geq 95\%$.

A dispersão de uma variável aleatória em torno do seu valor médio pode ser quantificada pelo erro quadrático médio, designado variância, e definida por uma das fórmulas alternativas

$$\text{var}(X) = E(X - \mu_X)^2 = E(X^2) - \mu_X^2.$$

A variância não é alterada por translações e cresce quadraticamente com a escala, isto é para uma va. X com variância e constantes reais a e b quaisquer tem-se

$$\text{var}(aX + b) = a^2 \text{var}(X). \quad (1.2)$$

Outra medida de dispersão usual é o desvio padrão, $\sigma_X = \sqrt{\text{var}(X)}$, que além de variar linearmente com a escala, dado que $Y = aX + b \Rightarrow \sigma_Y = |a| \sigma_X$ (e portanto vir expresso nas mesmas unidades que a variável a que se refere), surge como escala de referência natural em resultados fundamentais da teoria das probabilidades como a desigualdade de Chebyshev e o Teorema Limite Central.

A variância é aditiva para parcelas independentes. Se X_1, X_2, \dots, X_p são vas. independentes com variâncias finitas $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_p^2$ e valores médios $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p$, e $\Sigma = \sum X_j$ é a sua soma, então

$$\text{var}\left(\sum_j X_j\right) = \sum_j \text{var}(X_j); \quad (1.3)$$

em termos do desvio padrão

$$\sigma_\Sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_p^2}. \quad (1.4)$$

O índice de dispersão $\delta(X) = \text{var}(X)/E(X)$ é uma medida de dispersão relativa

que verifica $\delta(aX) = a\delta(X)$ para $a \neq 0$.

O índice de dispersão de uma soma com valor médio não nulo $E(\sum) \neq 0$ e parcelas independentes pode-se escrever como a média ponderada dos índices de dispersão das parcelas

$$\delta(\sum) = \frac{\sigma_1^2 + \cdots + \sigma_p^2}{\mu_1 + \cdots + \mu_p} = \sum_{j=1}^p \varpi_j \delta_j, \quad (1.5)$$

com pesos proporcionais aos valores médios das parcelas $\varpi_j = \mu_j / \sum \mu_i$, desde que todas estas tenham variância finita.

Se nas mesmas condições, as parcelas de \sum forem dependentes, a variância da soma passa a ser dada por

$$\text{var}(X_1 + X_2) = \text{var}(X_1) + \text{var}(X_2) + 2 \text{cov}(X_1, X_2),$$

onde o termo cruzado adicional, que depende conjuntamente das duas parcelas, é a covariância,

$$\text{cov}(X_1, X_2) = E[(X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2)] = E(X_1 X_2) - \mu_1 \mu_2.$$

A covariância é limitada pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$|\text{cov}(X_1, X_2)| \leq \sigma_1 \sigma_2.$$

A independência é uma condição suficiente (mas não necessária) para a covariância ser nula. Quando a covariância não é nula diz-se que as variáveis X_1 e X_2 estão correlacionadas. Variáveis correlacionadas são, portanto, dependentes.

Mais em geral,

$$\text{var}\left(\sum_j a_j X_j\right) = \sum_j a_j^2 \text{var}(X_j) + 2 \sum_{j' < j} a_j a_{j'} \text{cov}(X_j, X_{j'}). \quad (1.6)$$

A covariância é invariante para translações e é uma forma bilinear simétrica: para a_1, a_2, b constantes reais quaisquer

$$\begin{aligned}
\text{cov}(X, a_1 Y_1 + a_2 Y_2 + b) &= \text{cov}(a_1 Y_1 + a_2 Y_2 + b, X) \\
&= \text{cov}(X, a_1 Y_1 + a_2 Y_2) \\
&= a_1 \text{cov}(X, Y_1) + a_2 \text{cov}(X, Y_2),
\end{aligned}$$

desde que as variáveis X, Y_1 e Y_2 tenham variâncias finitas.

1.2 Momentos amostrais e distribuições de amostragem em populações normais

Uma amostra aleatória de dimensão n de uma va. contínua X é uma sequência de vas. $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$, cada qual com distribuição idêntica à de X , $X_i \stackrel{d}{=} X$, mas independentes entre si. Também se diz que as vas. X_i são i.i.d. (independentes e identicamente distribuídas). Designaremos por vezes X ou a sua distribuição por variável ou população “geradoras” da amostra \mathbf{X} , e os elementos X_i da amostra aleatória por “observações” da va. X ou da amostra \mathbf{X} .

Uma estatística é uma função de uma amostra aleatória $G = g(X_1, X_2, \dots, X_n)$ que é também uma variável aleatória. Estatísticas construídas para aproximar um parâmetro constante ϑ da distribuição geradora chamam-se estimadores. Destacamos desde já três estimadores centrais neste trabalho, a média amostral

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i,$$

a variância amostral

$$S_X^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

e o desvio padrão amostral $S_X = \sqrt{S_X^2}$ e recordamos algumas das suas propriedades fundamentais.

A média e a variância amostrais podem-se calcular recursivamente. Se à amostra $\mathbf{X}_n = (X_1, \dots, X_n)$ com média \bar{X}_n e variância S_n^2 for acrescentada mais uma observação X_{n+1} , então a média \bar{X}_{n+1} e variância S_{n+1}^2 da nova amostra $\mathbf{X}_{n+1} = (X_1, \dots, X_n, X_{n+1})$ obtêm-se das primeiras pelas fórmulas (cf. eg. [9], p.

238, ex. 5.16)

$$\begin{aligned}\bar{X}_{n+1} &= \frac{n\bar{X}_n + X_{n+1}}{n+1}, \\ nS_{n+1}^2 &= (n-1)S_n^2 + \frac{n+1}{n} (X_{n+1} - \bar{X}_{n+1})^2.\end{aligned}\quad (1.7)$$

Naturalmente que a ordem por que se dispõem as observações não é aqui relevante, pois quer a média quer a variância são somas de funções das observações individuais. Estas relações de recorrência não requerem que a amostra seja aleatória nem que existam momentos populacionais.

Se a va. geradora X tem valor médio μ_X então $E(\bar{X}) = \mu_X$, e à medida que aumenta a dimensão da amostra ($n \rightarrow \infty$) a média amostral converge em probabilidade para a média populacional, $\bar{X}_n \xrightarrow{p} \mu_X$. Diz-se por isso que a média amostral \bar{X} é respectivamente, um estimador centrado e um estimador consistente do valor médio populacional μ_X . O primeiro facto decorre facilmente das propriedades lineares do operador valor médio. O segundo é uma das formulações da chamada Lei dos Grandes Números da teoria das probabilidades.

Se além de valor médio a va. geradora X tem variância finita σ_X^2 , então da propriedade aditiva da variância para parcelas independentes, referida na secção anterior, decorre que a variância da média amostral \bar{X} é

$$\text{var}(\bar{X}) = \frac{\sigma_X^2}{n} \quad \text{donde} \quad \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}.$$

Nessas condições, a variância amostral é também um estimador centrado da variância populacional, $E(S_X^2) = \sigma_X^2$. O mesmo não sucede em geral com o desvio padrão S_X — um estimador que não seja centrado diz-se enviesado —, mas ambos são ainda assim estimadores consistentes,

$$S_{X,n}^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} \sigma_X^2 \quad \text{e} \quad S_{X,n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} \sigma_X.$$

Admitindo agora que $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ é amostra aleatória de uma va. com distribuição normal de valor médio μ_X e desvio padrão σ_X , $X \sim N(\mu_X, \sigma_X)$ — diremos mais simplesmente que \mathbf{X} é uma amostra aleatória normal —, a distribuição da média e da variância amostrais fica completamente determinada:

A média de uma amostra aleatória normal é também normal,

$$\bar{X} \sim N\left(\mu_X, \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}\right) \quad \text{ou} \quad Z = \frac{\bar{X} - \mu_X}{\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1). \quad (1.8)$$

A variância de uma amostra aleatória normal é uma va. independente da média amostral com distribuição proporcional a um qui-quadrado com $n - 1$ graus de liberdade,

$$\frac{(n-1)S_X^2}{\sigma_X^2} \sim \chi_{n-1}^2 \quad \text{ou} \quad \frac{S_X^2}{\sigma_X^2} \sim \frac{\chi_{n-1}^2}{n-1} \quad \text{ou} \quad S_X^2 \sim \frac{\sigma_X^2}{n-1} \chi_{n-1}^2. \quad (1.9)$$

Observamos que a distribuição de Z não depende de quaisquer parâmetros nem da dimensão da amostra. No entanto, a sua utilidade como base de inferência sobre médias é limitada pelo facto de a sua expressão incluir o desvio padrão populacional σ_X , que costuma ser desconhecido em problemas concretos. O mais natural é este ser estimado como S_X , o que muda a distribuição da média normalizada para

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_X}{\frac{S_X}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}. \quad (1.10)$$

Foi a descoberta deste resultado e da independência entre \bar{X} e S_X^2 em populações normais que celebrou Student, ainda que não tivesse podido prová-lo com todo o rigor (o que foi feito alguns anos depois por Ronald Fisher).

Deixamos para a secção seguinte a definição geral e revisão das distribuições qui-quadrado e t de Student, mas referimos desde logo que, conforme seria de esperar do que até aqui foi dito, à medida que $n \rightarrow \infty$ dá-se a convergência em distribuição da t para a normal ([7] pp. 31, 32, [9] pp. 220, 238),

$$t_{n-1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} N(0, 1),$$

que é bastante rápida — costuma-se considerar (ao menos nos manuais de estatística) que a partir de cerca de $n \geq 30$ as duas distribuições se confundem para efeitos práticos.

1.3 Distribuições gama, qui-quadrado, t e F

Para quaisquer $\alpha, \delta > 0$ dizemos que uma v.a. positiva W segue a distribuição gama de parâmetros α e δ , abreviadamente $W \sim \text{ga}(\alpha, \delta)$ quando tem a função densidade de probabilidade

$$f_W(w) = \frac{1}{\delta^\alpha \Gamma(\alpha)} w^{\alpha-1} e^{-w/\delta}, \quad w > 0.$$

O valor δ é um parâmetro de escala tal que para qualquer constante $\lambda > 0$ se tem $W \sim \text{ga}(\alpha, \delta)$ se e só se $\lambda W \sim \text{ga}(\alpha, \lambda\delta)$. Abreviadamente,

$$\lambda \cdot \text{ga}(\alpha, \delta) = \text{ga}(\alpha, \lambda\delta). \quad (1.11)$$

A distribuição gama tem valor médio $E(W) = \alpha\delta$, que acharemos por vezes conveniente designar por β . Deste modo a sua variância é $\text{var}(W) = \beta^2/\alpha = \alpha\delta^2$, e o índice de dispersão $\text{var}(W)/E(W) = \delta = \beta/\alpha$. Uma parametrização alternativa comum da distribuição é em termos da taxa de ocorrências $\omega = 1/\delta$ num processo de Poisson homogêneo com tempos de espera descritos por esta distribuição.

O parâmetro de forma α pode-se caracterizar como o quadrado da chamada razão sinal/ruído,

$$\alpha = \frac{\mu_W^2}{\text{var}(W)} = \left(\frac{\mu_W}{\sigma_W} \right)^2 \equiv [\text{SR}(W)]^2.$$

A soma de variáveis aleatórias gama independentes com o mesmo parâmetro de escala é outra v.a. gama. Se W_1, W_2, \dots, W_k são v.a. $W_j \sim \text{ga}(\alpha_j, \delta)$ independentes, então $\sum = \sum W_j \sim \text{ga}(\sum \alpha_j, \delta)$. Dada a propriedade (1.11), uma combinação linear de vas. gama independentes $\lambda_1 W_1 + \lambda_2 W_2 + \dots + \lambda_k W_k$, com $W_j \sim \text{ga}(\alpha_j, \delta_j)$ e os $\lambda_j > 0$, é ainda outra gama $W \sim \text{ga}(\sum \alpha_j, \delta)$ quando as parcelas têm índices de dispersão idênticos

$$\frac{\text{var}(\lambda_j W_j)}{E(\lambda_j W_j)} = \lambda_j \frac{\text{var}(W_j)}{E(W_j)} = \lambda_j \delta_j = \delta. \quad (1.12)$$

A distribuição qui-quadrado com ν graus de liberdade é um caso particular da família gama; para cada $\nu > 0$ define-se por $\chi_\nu^2 = \text{ga}(\nu/2, 2)$.

Para o qui-quadrado tem-se $E(\chi_\nu^2) = \nu$, $\text{var}(\chi_\nu^2) = 2\nu$, $\delta(\chi_\nu^2) = 2$ e $\nu = 2 \times \text{SR}^2(\chi_\nu^2)$.

Toda a v.a. gama é proporcional a um qui-quadrado

$$W \sim \text{ga}(\alpha, \delta) = \frac{\delta}{2} \chi_{2\alpha}^2 = \frac{\beta}{\nu} \chi_\nu^2 \quad (1.13)$$

com $\nu = 2\alpha$.

Quando as parcelas $\chi_{\nu_j}^2$ são independentes $\chi_{\nu_1}^2 + \chi_{\nu_2}^2 + \dots + \chi_{\nu_k}^2 = \chi_{\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_k}^2$.
Chama-se t de Student com ν graus de liberdade à distribuição de um quociente

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{\chi_\nu^2}{\nu}}}$$

onde $Z \sim N(0, 1)$ e χ_ν^2 são v.a.s. independentes. Se S^2 é um estimador de variância independente de Z com distribuição dada por $\nu S^2 / \sigma^2 \sim \chi_\nu^2 \Leftrightarrow S^2 / \sigma^2 \sim \chi_\nu^2 / \nu$, então a t pode-se definir também como

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{S^2}{\sigma^2}}}. \quad (1.14)$$

Diz-se que uma variável aleatória F tem distribuição F de Fisher com (ν_1, ν_2) graus de liberdade se:

$$F = \frac{\chi_{\nu_1}^2 / \nu_1}{\chi_{\nu_2}^2 / \nu_2},$$

onde $\chi_{\nu_1}^2$ e $\chi_{\nu_2}^2$ são quis-quadrados independentes com ν_1 e ν_2 graus de liberdade, respectivamente.

1.4 A aproximação de Satterthwaite

No modelo linear geral, é frequente usarem-se estimadores de variância que são combinações lineares de v.a. gama independentes (ou de quis-quadrados

independentes, o que é o mesmo) da forma $W = \lambda_1 W_1 + \lambda_2 W_2 + \dots + \lambda_k W_k$, onde os $\lambda_j > 0$ e os W_j são estimadores de variância independentes tais que:

$$\frac{\nu_j}{\sigma_j^2} W_j \sim \chi_{\nu_j}^2 \quad \text{ou} \quad W_j \sim \frac{\sigma_j^2}{\nu_j} \chi_{\nu_j}^2. \quad (1.15)$$

onde ν_j e σ_j são constantes positivas.

Exemplos são:

1. O estimador centrado usual para a variância em amostras aleatórias normais,

$$W = S_X^2 = \frac{1}{n-1} \sum (X_i - \bar{X})^2.$$

Neste caso $k = 1$, $\nu = n - 1$, $\lambda = \frac{n-1}{\sigma^2}$.

2. O estimador combinado usual para a variância comum com base em duas amostras aleatórias independentes com variâncias populacionais homogêneas $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_0^2$ de va. normais $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1)$ e $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2)$,

$$S_0^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}.$$

Neste caso:

$$k = 2, \quad W_1 = \frac{n_1 - 1}{\sigma_0^2} S_1^2, \quad W_2 = \frac{n_2 - 1}{\sigma_0^2} S_2^2,$$

$$\nu_1 = n_1 - 1, \quad \nu_2 = n_2 - 1, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{\sigma_0^2}{n_1 + n_2 - 2}.$$

Como por hipótese as duas amostras são independentes, também o são S_1^2 e S_2^2 , e da aditividade do qui-quadrado resulta então que nos exemplos anteriores, a combinação linear $W = \sum \lambda_j W_j$ tem parcelas independentes $\lambda_j W_j$ com índices de dispersão $\delta_j = \text{var}(\lambda_j W_j)/E(\lambda_j W_j) = \lambda_j \text{var}(W_j)/E(W_j)$ idênticos, pelo que equivale a uma soma de vas. gama independentes com parâmetros de escala iguais, que é outra gama.

Porém, se numa combinação linear de va. gama independentes houver pelo menos duas parcelas com índices de dispersão diferentes $\delta_i \neq \delta_j$ então a sua

distribuição já não é uma gama e não tem forma analítica tratável conhecida ([48], p. 431, [23], p. 149).

Exemplos são:

1. O estimador combinado da variância para duas amostras aleatórias normais independentes S_0^2 no caso das variâncias populacionais não serem homogêneas, que então passa a ser da forma $W = \sum \lambda_j W_j$ com:

$$k = 2, \quad W_j = \frac{n_j - 1}{\sigma_j^2} S_j^2 \sim \chi_{n_j - 1}^2 \quad \text{e}$$

$$\nu_j = n_j - 1 \quad \text{mas} \quad \lambda_1 = \frac{\sigma_1^2}{n_1 + n_2 - 1} \neq \lambda_2 = \frac{\sigma_2^2}{n_1 + n_2 - 2}.$$

2. Para duas amostras aleatórias normais independentes, o estimador de variância complexo $S_{\text{Welch}}^2 = \frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}$ que é um estimador centrado de:

$$\sigma^2 = E(S_{\text{Welch}}^2) = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2} = \text{var}(\bar{X}_1 - \bar{X}_2).$$

A distribuição de uma combinação linear de vas. gamas independentes $W = \sum \lambda_j W_j$ ou simplesmente $W = \sum \lambda_j W_j$ pode, no entanto, ser bem aproximada por outra gama com os mesmos dois primeiros momentos. Começemos por notar que:

$$E(\lambda_j W_j) = \alpha_j (\lambda_j \delta_j) = \lambda_j \beta_j,$$

$$\text{var}(\lambda_j W_j) = \frac{(\lambda_j \alpha_j \delta_j)^2}{\alpha_j} = \lambda_j^2 \frac{\beta_j^2}{\alpha_j}.$$

Igualando então os dois primeiros momentos de ambos os membros da combinação linear tiramos:

$$\beta = E(W) = E\left(\sum_{j=1}^k \lambda_j W_j\right) = \sum_{j=1}^k \lambda_j \beta_j$$

$$\frac{\beta^2}{\alpha} = \text{var}(W) = \text{var}\left(\sum_{j=1}^k \lambda_j W_j\right) = \sum_{j=1}^k \lambda_j^2 \frac{\beta_j^2}{\alpha_j}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{\beta^2}{\sum \frac{\lambda_j^2 \beta_j^2}{\alpha_j}} = \frac{\left(\sum_{j=1}^k \lambda_j \beta_j \right)^2}{\sum_{j=1}^k \frac{(\lambda_j \beta_j)^2}{\alpha_j}} \quad (1.16)$$

A expressão é idêntica se particularizarmos para o qui-quadrado, pois então $\alpha = \nu/2 \Leftrightarrow \nu = 2\alpha$, e o factor de 2 anula-se nos dois membros da equação (1.16).

Conforme referimos no início desta secção, a situação mais comum é pretender-se aproximar a distribuição de uma combinação linear $W = \lambda_1 S_1^2 + \lambda_2 S_2^2 + \dots + \lambda_k S_k^2$ de estimadores centrados independentes de variâncias $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_k^2$, sendo então $\beta_j = E(S_j^2) = \sigma_j^2$. No caso de que vamos tratar, temos $k = 2$ e

$$W = S^2 = \frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}$$

com $(n_j - 1)S_j^2/\sigma_j^2 \sim \chi_{n_j-1}^2$ conforme (1.9), e a fórmula de Satterthwaite geral (1.16) reduz-se à expressão mais familiar para os graus de liberdade teóricos de S^2 (também chamados “graus de liberdade efectivos” na literatura mais antiga),

$$\nu = \frac{\left(\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2} \right)^2}{\frac{\sigma_1^4}{n_1^2(n_1 - 1)} + \frac{\sigma_2^4}{n_2^2(n_2 - 1)}}. \quad (1.17)$$

1.5 Testes de hipóteses e intervalos de confiança clássicos para médias

1.5.1 Inferência sobre uma média com variância conhecida

Pretendemos avaliar se um valor μ_0 é plausível para a média desconhecida μ_X de uma população (ou variável) contínua X , a partir de uma amostra de observações efectuadas nessa população. A tradução estatística deste problema é o teste às hipóteses $H_0 : \mu_X = \mu_0$ vs. $H_1 : \mu_X \neq \mu_0$.

Se $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ é uma amostra aleatória de $X \sim N(\mu_X, \sigma_X)$, com

variância populacional conhecida σ_X^2 , sabemos por (1.8) que a variável aleatória

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}}$$

tem distribuição normal padrão $N(0,1)$ sob H_0 . A decisão estatística entre as hipóteses H_0 e H_1 pode por isso ser baseada no valor observado de Z — a estatística de teste.

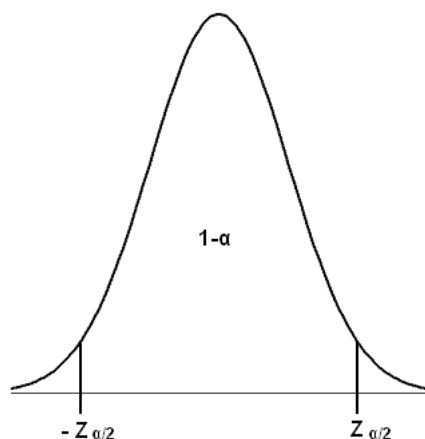


Figura 1.1: Região de aceitação (centro) e região de rejeição (caudas) num teste de hipóteses bilateral baseado numa estatística com distribuição normal padrão

Assumindo uma pequena taxa de rejeições incorretas da hipótese nula,

$$\alpha = P[\text{rejeitar } H_0 \text{ quando } H_0 \text{ é verdadeira}] \approx 0$$

— o nível de significância — adopta-se a seguinte regra de decisão: Manter a hipótese H_0 enquanto a estatística de teste Z tomar valores numa vizinhança de probabilidade $1 - \alpha$ do zero (valor que corresponde à diferença expectável entre \bar{X} e μ_0 caso $\mu_X = \mu_0$), chamada região de aceitação; e rejeitar H_0 quando Z ficar fora dessa vizinhança, numa das caudas de valores mais extremos na distribuição de Z sob H_0 , com probabilidade colectiva α de serem observados — a região de rejeição. Resumidamente

$$-z_{\alpha/2} \leq Z \leq z_{\alpha/2} \Rightarrow \text{manter } H_0$$

$$Z > z_{\alpha/2} \quad \text{ou} \quad Z < -z_{\alpha/2} \Rightarrow \text{rejeitar } H_0 \text{ em favor de } H_1$$

sendo os valores críticos que demarcam a região de rejeição neste caso $\pm z_{\alpha/2}$, onde $z_{\alpha/2}$ designa o quantil superior de probabilidade $\alpha/2$ na distribuição normal padrão.

Um problema relacionado é o de determinar uma estimativa para o valor médio de uma população μ_X na forma de intervalo. De (1.8), da definição dos quantis de $\pm z_{\alpha/2}$ e da simetria da distribuição normal padrão obtêm-se as igualdades

$$\begin{aligned} P[-z_{\alpha/2} \leq Z \leq z_{\alpha/2}] &= P\left[-z_{\alpha/2} \leq \frac{\bar{X} - \mu_X}{\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}} \leq z_{\alpha/2}\right] = \\ &= P\left[\bar{X} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} \leq \mu_X \leq \bar{X} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}\right], \end{aligned}$$

que motivam a afirmação de que

$$\left[\bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}\right] \quad \text{ou abreviadamente} \quad \bar{x} \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}},$$

corresponde a um intervalo com nível de confiança $(1 - \alpha) \times 100\%$ para μ_X .

Nos casos tratados neste trabalho há uma correspondência biunívoca entre as duas metodologias da estimação por intervalos de confiança e dos testes de hipóteses: A regra de decisão do teste bilateral equivale a manter $H_0 : \mu_X = \mu_0$ vs. $H_1 : \mu_X \neq \mu_0$ ao nível de significância α se e só se o valor médio teorizado μ_0 pertencer ao intervalo com $(1 - \alpha) \times 100\%$ de confiança para μ_X . E o intervalo de confiança para μ_X é constituído precisamente pelos valores de μ_0 para os quais não se rejeita $H_0 : \mu_X = \mu_0$ vs. $H_1 : \mu_X \neq \mu_0$ ao nível de significância α . Deste modo, embora tenhamos geralmente preferido exprimi-los da perspectiva dos testes de hipóteses, os resultados que referimos nesta dissertação aplicam-se também aos intervalos de confiança, com adaptações imediatas.

1.5.2 Inferência sobre uma média com variância desconhecida

Suponha-se agora que pretendemos fazer o teste de hipóteses $H_0 : \mu_X = \mu_0$ vs. $H_1 : \mu_X \neq \mu_0$ com base numa amostra aleatória $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ da variável $X \sim N(\mu_X, \sigma_X)$, mas que quer o valor médio μ_X quer a variância σ_X^2 populacionais

são desconhecidos.

Neste caso, de acordo com (1.10), sabemos que sob H_0

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S_X}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1},$$

e utilizamos esta variável aleatória como estatística de teste. A regra de decisão consiste em rejeitar H_0 quando o valor observado de T ultrapassa os valores críticos $\pm t_{(n-1; \alpha/2)}$, em que $t_{(n-1; \alpha/2)}$ representa o quantil superior de probabilidade $\alpha/2$ na distribuição t_{n-1} .

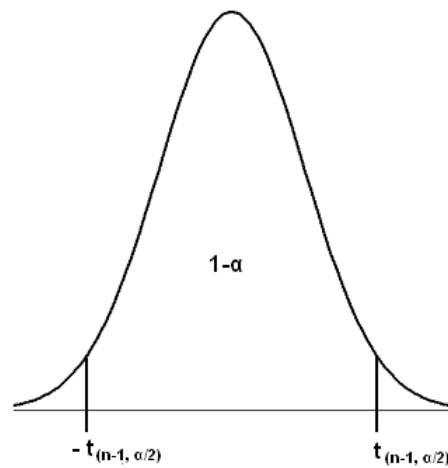


Figura 1.2: Região de aceitação (centro) e região de rejeição (caudas) num teste de hipóteses bilateral baseado numa estatística com distribuição t_{n-1} .

Analogamente ao caso de variância conhecida, podemos também obter um intervalo com $(1 - \alpha) \times 100\%$ de confiança para μ_X resolvendo

$$\begin{aligned} P \left[-t_{(n-1; \alpha/2)} \leq T \leq t_{(n-1; \alpha/2)} \right] &= P \left[-t_{(n-1; \alpha/2)} \leq \frac{\bar{X} - \mu_X}{\frac{S_X}{\sqrt{n}}} \leq t_{(n-1; \alpha/2)} \right] \\ &= P \left[\bar{X} - t_{(n-1; \alpha/2)} \frac{S_X}{\sqrt{n}} \leq \mu_X \leq \bar{X} + t_{(n-1; \alpha/2)} \frac{S_X}{\sqrt{n}} \right] = 1 - \alpha \end{aligned}$$

para encontrar a estimativa intervalar dada por

$$\bar{x} - t_{(n-1; \alpha/2)} \frac{s_X}{\sqrt{n}} \leq \mu_X \leq \bar{x} + t_{(n-1; \alpha/2)} \frac{s_X}{\sqrt{n}}$$

uma vez que também as distribuições t são simétricas em torno da origem.

1.5.3 Diferença entre as médias de duas populações homogêneas, estimadas a partir de amostras independentes

Consideremos agora o problema de comparar as médias μ_X e μ_Y de duas populações com variâncias desconhecidas, mas que se supõe serem idênticas, $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma_0^2$ — condição de homogeneidade de variâncias (ou homocedasticidade).

Admitindo que se dispõe de amostras aleatórias $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_{n_1})$ e $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2})$ de $X \sim N(\mu_X, \sigma_X)$ e $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y)$, respectivamente, independentes uma da outra, então a inferência sobre a diferença $\mu_X - \mu_Y$ entre as médias populacionais baseia-se na distribuição da diferença $\bar{X} - \bar{Y}$ entre as médias amostrais. Facilmente se vê que $E(\bar{X} - \bar{Y}) = \mu_X - \mu_Y$. Quanto à variância,

$$\sigma^2 = \text{var}(\bar{X} - \bar{Y}) = \text{var}(\bar{X}) + \text{var}(\bar{Y}) = \frac{\sigma_X^2}{n_1} + \frac{\sigma_Y^2}{n_2} \quad (1.18)$$

por (1.2) e (1.3), e visto que, como as duas amostras são por hipótese independentes, também as médias amostrais o são.

Como, porém, não se supõe que as variâncias populacionais sejam conhecidas, para resolver o problema de forma simples é necessário recorrer à condição de homogeneidade das variâncias, sob a qual se passa a ter

$$\sigma^2 = \sigma_0^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right).$$

Nessas condições, a inferência estatística sobre a diferença entre as médias populacionais $\Delta = \mu_X - \mu_Y$ pode apoiar-se na estatística de teste

$$T_{\text{Stu}} = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_{\text{Stu}}} \sim t_{n_1+n_2-2}, \quad (1.19)$$

onde

$$S_{\text{Stu}}^2 = S_0^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right).$$

estima a variância da diferença no numerador de T_{Stu} , $(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_X - \mu_Y)$, e

$$S_0^2 = \frac{(n_1 - 1)S_X^2 + (n_2 - 1)S_Y^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

é um estimador da variância comum σ_0^2 das duas populações.

Referimos desde já que — conforme será demonstrado na secção [1.7](#) — na condição de homogeneidade das variâncias S_{Stu}^2 é um estimador centrado de σ^2 com distribuição dada por

$$(n_1 + n_2 - 2) \frac{S_{\text{Stu}}^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n_1+n_2-2}^2.$$

Daqui decorre que também S_0^2 é estimador centrado de σ_0^2 , com distribuição dada por

$$(n_1 + n_2 - 2) \frac{S_0^2}{\sigma_0^2} \sim \chi_{n_1+n_2-2}^2.$$

Um intervalo de confiança para a diferença entre as médias $\Delta = \mu_X - \mu_Y$ obtém-se facilmente reescrevendo, como no caso do intervalo para uma média, a desigualdade

$$P \left[-t_{(n_1+n_2-2; \alpha/2)} \leq \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_X - \mu_Y)}{S_0 \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \leq t_{(n_1+n_2-2; \alpha/2)} \right] = 1 - \alpha,$$

para obter

$$(\bar{x} - \bar{y}) - t_{(n_1+n_2-2; \alpha/2)} s_0 \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \leq \mu_X - \mu_Y \leq (\bar{x} - \bar{y}) + t_{(n_1+n_2-2; \alpha/2)} s_0 \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}.$$

1.5.4 Diferença entre as médias de duas populações, estimadas a partir de amostras emparelhadas

Sejam $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = ((X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n))$ amostras aleatórias correlacionadas de va. X e Y com médias respectivas μ_X e μ_Y e variâncias desconhecidas

σ_X^2 e σ_Y^2 . Então a inferência sobre a diferença $\mu_X - \mu_Y = \mu_D = E(X - Y)$ pode-se basear nas diferenças $D_i = X_i - Y_i$, $i = 1, \dots, n$ (que se supõe terem distribuição normal),

$$T_D = \frac{\bar{D} - \Delta}{\frac{S_D}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}, \quad (1.20)$$

onde \bar{D} e S_D são a média e desvio padrão da amostra aleatória (D_1, D_2, \dots, D_n) . O intervalo de confiança correspondente é dado por:

$$\bar{d} - t_{(n-1; \alpha/2)} \frac{s_d}{\sqrt{n}} < \mu_D < \bar{d} + t_{(n-1; \alpha/2)} \frac{s_d}{\sqrt{n}}.$$

1.6 O problema de Behrens-Fisher e a solução t aproximada de Welch

O problema de Behrens-Fisher consiste em comparar os valores médios μ_1 e μ_2 de duas populações normais $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1)$ e $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2)$ com variância possivelmente diferente $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$, a partir de amostras aleatórias independentes com dimensões n_1 e n_2 , médias amostrais \bar{X}_1 e \bar{X}_2 , e variâncias empíricas S_1^2 e S_2^2 .

Se as variâncias populacionais forem idênticas, $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, este problema tem solução ótima (um teste de hipóteses centrado uniformemente mais potente, UMP) ([9], [55], [43]), com forma analítica simples, mas caso contrário isso já não acontece.

A inferência baseia-se na diferença entre as médias observadas, cuja variância é

$$\text{var}(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}. \quad (1.21)$$

A variância de cada população pode ser avaliada por um estimador centrado cuja distribuição é proporcional a um qui-quadrado com $\nu_i = n_i - 1$ graus de liberdade (estimador de variância simples):

$$\frac{(n_j - 1)}{\sigma_j^2} S_j^2 \sim \chi_{n_j - 1}^2, \quad \text{ou} \quad S_j^2 \sim \frac{\sigma_j^2}{n_j - 1} \chi_{n_j - 1}^2 \quad \text{com} \quad E(S_j^2) = \sigma_j^2.$$

Porém, o estimador natural da variância da diferença entre as médias das duas populações é uma combinação linear de quis-quadrados independentes (estimador de variância complexo), que conforme referimos na secção [1.4](#) no caso geral ($\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$) não tem uma distribuição com forma analítica tratável.

$$\begin{aligned} \frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2} &= \frac{\sigma_1^2}{n_1(n_1-1)} \cdot \frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{n_2(n_2-1)} \cdot \frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2} \\ &= \lambda_1 \frac{\sigma_1^2}{n_1-1} \chi_{\nu_1}^2 + \lambda_2 \frac{\sigma_2^2}{n_2-1} \chi_{\nu_2}^2 \quad \text{com} \quad \lambda_j = \frac{1}{n_j}. \end{aligned}$$

O teste t aproximado de Welch é um teste de comparação de médias utilizado em vez do teste t de Student quando queremos comparar duas amostras independentes provenientes de populações com variâncias distintas.

Sejam $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1)$ e $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2)$, $\sigma_1 \neq \sigma_2$. Seja também S_j o valor estimado de σ_j e n_j o tamanho da amostra j . Welch define a estatística t através da seguinte fórmula:

$$T_{\text{Welch}} = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}. \quad (1.22)$$

Os graus de liberdade ν associados são estimados através da fórmula de Satterthwaite empírica:

$$\tilde{\nu} \approx \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1-1} + \frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2-1}}, \quad (1.23)$$

uma aplicação da fórmula para os graus de liberdade teóricos ([1.17](#)), com a diferença de que aqui as variâncias populacionais σ_j^2 precisam de ser estimadas na prática, pelo método dos momentos, a partir das variâncias amostrais S_j^2 .

Para o caso das variâncias desconhecidas e diferentes o intervalo de confiança é escrito da seguinte maneira:

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - t_{(\tilde{\nu}; \alpha/2)} \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + t_{(\tilde{\nu}; \alpha/2)} \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}.$$

1.7 Comparação das estatísticas de Student e de Welch

Quer a estatística de Student para duas amostras independentes quer a de Welch são da forma

$$T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{S^2}} = \frac{Z}{\sqrt{W}},$$

onde, sob $H_0 : \mu_1 = \mu_2$,

$$Z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sigma} \sim N(0, 1),$$

e S^2 é um estimador de

$$\sigma^2 = \text{var}(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2},$$

independente de Z , e $W = S^2/\sigma^2$. Como a distribuição de T fica determinada pela de W ou S^2 , focamo-nos nestas variáveis.

No caso da estatística de Student, a variância da diferença entre as médias amostrais σ^2 é estimada por

$$S_{\text{Stu}}^2 = S_0^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right), \quad \text{com} \quad S_0^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}, \quad (1.24)$$

e na condição de homogeneidade das variâncias das duas variáveis geradoras, $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_0^2$, tem-se

$$E(S_{\text{Stu}}^2) = \sigma^2 \quad \text{e} \quad (n_1 + n_2 - 2) \frac{S_{\text{Stu}}^2}{\sigma^2} = (n_1 + n_2 - 2) \frac{S_0^2}{\sigma_0^2} \sim \chi_{n_1+n_2-2}^2, \quad (1.25)$$

ou seja S_{Stu}^2 é estimador centrado de σ^2 (e S_0^2 de σ_0^2) com distribuição gama proporcional a um qui-quadrado com $n_1 + n_2 - 2$ graus de liberdade.

Para a estatística de Welch, é imediato que

$$S_{\text{Welch}}^2 = \frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}, \quad (1.26)$$

é estimador centrado de σ^2 para qualquer valor de $\theta = \sigma_1^2/\sigma_2^2$ — o que, como

veremos em seguida, não sucede com S_{Stu}^2 . Welch argumentou [58] que se devia a este facto a maior robustez do teste baseado em S_{Welch}^2 e T_{Welch} perante a heterogeneidade de variâncias.

Nota 1: O estimador da variância da diferença entre as médias na estatística de Student para duas amostras independentes S_{Stu}^2 é centrado se e só se as variâncias populacionais são homogéneas ($\sigma_1 = \sigma_2$) ou as amostras são equilibradas ($n_1 = n_2$).

Demonstração:

$$E(S_{\text{Stu}}^2) = \frac{(n_1 - 1)\sigma_1^2 + (n_2 - 1)\sigma_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right) = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2} = \sigma^2,$$

equivale a

$$\frac{(n_1 - 1)\sigma_1^2 + (n_2 - 1)\sigma_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}.$$

Multiplicando ambos os membros por $1/\sigma_2^2$, o numerador e o denominador do primeiro membro por $1/(n_2 - 1)$, e o numerador e o denominador do segundo membro por n_1 , fica

$$\frac{\theta + a^2}{1 + a^2} = \frac{\theta + c^2}{1 + c^2}$$

com $\theta = \sigma_1^2/\sigma_2^2$, $c^2 = n_1/n_2$ e $a^2 = (n_1 - 1)/(n_2 - 1)$, donde resulta que

$$(\theta - 1)(c^2 - a^2) = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{c^2}{a^2} = \frac{\frac{n_1}{n_1-1}}{\frac{n_2}{n_2-1}} = \frac{1 + \frac{1}{n_1-1}}{1 + \frac{1}{n_2-1}} = 1$$

$$\Leftrightarrow \sigma_1 = \sigma_2 \quad \text{ou} \quad n_1 = n_2.$$

Nota 2: Os estimadores de variância S_{Stu}^2 e S_{Welch}^2 — e portanto as estatísticas de Student e de Welch T_{Stu} e T_{Welch} — coincidem (com probabilidade 1) apenas quando $n_1 = n_2$.

Demonstração: Procedendo como na demonstração da Nota 1, temos que

$$T_{\text{Stu}} = T_{\text{Welch}} \Leftrightarrow S_{\text{Stu}}^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right) =$$

$$= \frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2} = S_{\text{Welch}}^2,$$

donde $S_1 = S_2$ ou $n_1 = n_2$.

Como S_1 e S_2 são va. contínuas independentes, a probabilidade de serem iguais é nula, pelo que se pode concluir que, com probabilidade 1, T_{Stu} e T_{Welch} apenas coincidem quando $n_1 = n_2$.

Nota 3: A estatística T_{Welch} tem uma distribuição t de Student se e só se

$$\theta = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = \frac{n_1(n_1 - 1)}{n_2(n_2 - 1)} = c^2 a^2,$$

sendo então $T_{\text{Welch}} \sim t_{n_1+n_2-2}$. Em geral, a sua distribuição depende separadamente dos três valores (n_1, n_2, θ) .

Demonstração: Nas condições do problema, as parcelas de

$$S_{\text{Welch}}^2 = \frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}$$

são va. independentes com distribuições gama dadas, de acordo com (1.9), (1.11) e por (1.13), por

$$S_j^2 \sim \frac{\sigma_j^2}{n_j - 1} \chi_{n_j-1}^2 \Leftrightarrow \frac{S_j^2}{n_j} \sim \frac{\sigma_j^2}{n_j(n_j - 1)} \chi_{n_j-1}^2.$$

A condição necessária e suficiente para que a sua soma ainda tenha distribuição gama é então

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\sigma_1^2}{n_1(n_1 - 1)} = \frac{\sigma_2^2}{n_2(n_2 - 1)} = a_2 \\ \Leftrightarrow \frac{\sigma_1^2}{n_2} &= \frac{n_2 - 1}{n_1 - 1} \cdot \frac{\sigma_1^2}{n_1} \Leftrightarrow \theta = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = \frac{n_1(n_1 - 1)}{n_2(n_2 - 1)} = c^2 a^2 \end{aligned}$$

e nesse caso fica-se com

$$\frac{S_{\text{Welch}}^2}{\sigma^2} = \frac{\frac{\sigma_1^2}{n_1(n_1-1)} [\chi_{n_1-1}^2 + \chi_{n_2-1}^2]}{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{n_2-1}{n_1-1} \frac{\sigma_1^2}{n_1}} = \frac{\chi_{n_1+n_2-2}^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

logo $T_{\text{Welch}} \sim t_{n_1+n_2-2}$.

Caso contrário, escrevendo

$$\frac{S_{\text{Welch}}^2}{\sigma^2} = \frac{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} = \gamma \frac{\chi_{n_1-1}^2}{n_1-1} + (1-\gamma) \frac{\chi_{n_2-1}^2}{n_2-1},$$

onde

$$\gamma = \frac{\frac{\sigma_1^2}{n_1}}{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} = \frac{\theta}{\theta + c^2} \quad \text{e} \quad 1-\gamma = \frac{\frac{\sigma_2^2}{n_2}}{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} = \frac{c^2}{\theta + c^2},$$

são as proporções de variância associadas às duas médias amostrais \bar{X}_1 e \bar{X}_2 , podemos concluir que a distribuição geral de T_{Welch} é uma função $\zeta(n_1-1, n_2-1, \gamma)$, ou, de modo equivalente, função de (n_1, n_2, θ) .

Nota 4: A estatística T_{Stu} tem distribuição t de Student apenas quando $\sigma_1 = \sigma_2$, caso em que (como se sabe) $T_{\text{Stu}} \sim t_{n_1+n_2-2}$. Em geral a sua distribuição depende separadamente dos três valores (n_1, n_2, θ) .

Demonstração: Temos agora que as parcelas de

$$S_{\text{Stu}}^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2} \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)$$

são va. independentes com distribuições dadas por

$$\frac{(n_j-1)S_j^2}{n_1+n_2-2} \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right) \sim \frac{\sigma_j^2}{n_1+n_2-2} \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right) \chi_{n_j-1}^2.$$

A sua soma continua a ter distribuição gama se e só se

$$\frac{\sigma_1^2}{n_1+n_2-2} \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right) = \frac{\sigma_2^2}{n_1+n_2-2} \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right) \Leftrightarrow \sigma_1 = \sigma_2,$$

e então

$$\frac{S_{\text{Stu}}^2}{\sigma^2} = \frac{\sigma_1^2 \chi_{n_1+n_2-2}^2}{\sigma_1^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)} \cdot \frac{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}{n_1+n_2-2} = \frac{\chi_{n_1+n_2-2}^2}{n_1+n_2-2}.$$

No caso geral, podemos escrever

$$\frac{S_{\text{Stu}}^2}{\sigma^2} = \left[\gamma \frac{\chi_{n_1-1}^2}{n_1-1} q_{n_1-1, n_2-1} + (1-\gamma) \frac{\chi_{n_2-1}^2}{n_2-1} q_{n_2-1, n_1-1} \right] \cdot \frac{n_1 + n_2}{n_1 + n_2 - 2},$$

onde $q_{n,m} = n/(m+1)$, portanto a distribuição T_{Stu} é da forma $\xi(n_1-1, n_2-1, \gamma)$, ou seja função de (n_1, n_2, θ) .

Capítulo 2

A solução de Scheffé e variantes baseadas em reamostragem

2.1 A solução pouco prática de Scheffé para o problema de Behrens-Fisher

“Talvez este seja um exemplo [...] em que uma abordagem, natural face a desenvolvimentos anteriores, nos impõe uma solução assimétrica.”

Scheffé, 1944.

“Esses artigos foram escritos antes de eu ter muita experiência como consultor, e desde então nunca mais recomendei a solução na prática.”

Scheffé, 1970.

No artigo *On Solutions of the Behrens-Fisher Problem, Based on the t -Distribution* [46], Scheffé apresentou uma solução do problema de Behrens-Fisher simples, exacta e com certas propriedades optimais.

Teorema 1 (Scheffé, 1943) Sejam (X_1, \dots, X_{n_1}) e (Y_1, \dots, Y_{n_2}) , com $n_1 \leq n_2$, amostras aleatórias independentes, de vas. $X \sim N(\mu_X, \sigma_X)$ e $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y)$ respectivamente, e $\theta = \sigma_X^2/\sigma_Y^2$ qualquer. Sejam L uma forma linear e Q uma forma quadrática no vector $(X_1, \dots, X_{n_1}, Y_1, \dots, Y_{n_2})$ cujos coeficientes não dependam dos parâmetros $\mu_X, \sigma_X, \mu_Y, \sigma_Y$, tais que: (i) L e Q têm distribuições independentes,

(ii) $E(L) = \Delta$, (iii) $Q/\sigma^2 \sim \chi_\nu^2$, onde $\sigma^2 = \text{var}(L)$, de modo que

$$T = \frac{L - \Delta}{\sqrt{\frac{Q}{\nu}}} \sim t_\nu.$$

Então:

- (I) O máximo de graus de liberdade possível nestas condições, $\nu = n_1 - 1$, é alcançado por infinitas soluções, das quais uma particularmente simples é dada por $L = \bar{X} - \bar{Y}$ e $Q = \sum_i (U_i - \bar{U})^2$, ou seja

$$T = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - \Delta}{\frac{S_U}{\sqrt{n_1}}} = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - \Delta}{S} \sim t_{n_1-1}, \quad (2.1)$$

onde

$$S_U^2 = \frac{1}{n_1 - 1} \sum_{i=1}^{n_1} (U_i - \bar{U})^2 \quad (2.2)$$

é a variância dos valores $U_i = X_i - cY_i$, $i = 1, 2, \dots, n_1$, $c = \sqrt{n_1/n_2}$ e

$$S = \frac{S_U}{\sqrt{n_1}}. \quad (2.3)$$

- (II) Os intervalos de confiança para Δ da forma $(\bar{X} - \bar{Y}) \pm t_{n_1-1, \alpha/2} S_U / \sqrt{n_1}$, obtidos da solução (I), têm comprimentos médio mínimo entre os baseados nas soluções de (i) – (ii) – (iii).

Designaremos os valores U_i por “diferenças ponderadas de Scheffé”, a estatística T referida no ponto (I) do teorema por “estatística de Scheffé”, e o teste de hipóteses por ela definido por “solução de Scheffé”. Evitamos a palavra “teste” para não confundir com o método de comparações múltiplas mais bem conhecido, também devido a Scheffé.

Embora o Teorema 1 esteja expresso em termos de intervalos de confiança, traduz-se facilmente para testes de hipóteses sobre $\mu_X - \mu_Y$, com a estatística de teste T . Para simplificar a exposição consideramos geralmente $\Delta = 0$, sem perda de generalidade.

Observamos ainda que S_U^2 e S^2 são estimadores centrados, respectivamente, das variâncias $\sigma_U^2 = \text{var}(X - cY)$ e $\sigma^2 = \text{var}(\bar{X} - \bar{Y})$, visto que S_U^2 não é mais que a variância amostral da amostra aleatória $(U_1, U_2, \dots, U_{n_1})$ da va. $U = X - cY$, que sabemos ser um estimador centrado (secção 1.2), e de acordo com (1.2) e (1.3)

$$\sigma_U^2 = \text{var}(U) = \text{var}(X - cY) = \sigma_X^2 + c^2\sigma_Y^2,$$

donde decorre também, por (1.1), que

$$E(S^2) = \frac{E(S_U^2)}{n_1} = \frac{\sigma_X^2 + c^2\sigma_Y^2}{n_1} = \frac{\sigma_X^2}{n_1} + \frac{\sigma_Y^2}{n_2} = \sigma^2.$$

Este teorema e o artigo matematicamente desafiador em que apareceu parecem ter intrigado, mas também desconcertado, os leitores, pois algum tempo depois Scheffé veio esclarecer a situação num segundo artigo, *A Note on the Behrens-Fisher Problem* [48], com o seguinte resultado negativo:

Teorema 2 (Scheffé, 1944) Não existe solução do problema (i) – (ii) – (iii) para a qual T seja função simétrica de ambas as amostras, no sentido de invariante para permutações dos X_i ou dos Y_i entre si.

O numerador da estatística de Scheffé é o mesmo que nas estatísticas de Student e de Welch, a função simétrica $\bar{X} - \bar{Y} - \Delta$, mas o denominador é composto pelo desvio padrão da amostra (U_1, \dots, U_{n_1}) , que se calcula tomando apenas n_1 das n_2 observações da amostra maior e emparelhando-as com as observações da amostra menor — por ordem de registo ou aleatoriamente, nas palavras do próprio Scheffé. Deste modo, S_U e T dependem da ordem por que são dispostas as observações nas amostras. (No caso de as amostras terem dimensões iguais T é simplesmente a estatística de Student para amostras emparelhadas aplicada a um emparelhamento arbitrário das observações de X com as de Y .)

Exemplificando com as amostras (nada aleatórias) $\mathbf{X} = (1, 3)$ e $\mathbf{Y} = (2, 4, 5, 6)$, temos $\bar{X} = 2$, $\bar{Y} = 4,25$, $S_X = 1,414$ e $S_Y = 1,708$. Supondo que se pretendia testar: $H_0 : \mu_X = \mu_Y$ vs. $H_1 : \mu_X \neq \mu_Y$, ao nível de significância clemente de $\alpha = 0,20$, por as amostras serem tão pequenas, então a estatística de Student é $T_{\text{stu}} = -0,97$, o que comparado com os valores críticos $\pm t_{(4;0,10)} = \pm 1,53$ não

corresponde a uma diferença significativa.

Testando as mesmas hipóteses com a estatística de Welch, os graus de liberdade são $\nu = 1, 10$, que arredondamos conservadoramente para 1, e a estatística de teste $T_{\text{Welch}} = -1,71$ também não alcança os valores críticos $\pm t_{(1; 0,10)} = \pm 3,078$.

A estatística de Scheffé tem neste caso 1 grau de liberdade como a de Welch e idênticos valores críticos $\pm 3,078$. Emparelhando $\mathbf{X} = (1, 3)$ com $(6, 2)$ tem-se então $\mathbf{U} = (-3, 24266; 1, 58578)$, obtendo $T = (2 - 4, 25)/3,41422 \times \sqrt{2} = -0,93$, mais uma vez não significativo. Mas seria muito diferente o resultado de emparelhar $\mathbf{X} = (1, 3)$ com $(2, 5)$, achando $\mathbf{U} = (-0,41422; -0,53555)$ e $T = (2 - 4, 25)/0,08579 \times \sqrt{2} = -37,09$!

Investigadores diferentes podem assim chegar a diferentes conclusões a partir dos mesmos dados ou, pior ainda, o mesmo investigador pode ser tentado a “ir à pesca” do valor que melhor apoie as suas hipóteses iniciais. Por isso no artigo de revisão de soluções para o problema de Behrens-Fisher que publicou mais tarde, *Practical Solutions of the Behrens-Fisher Problem* [49], o próprio Scheffé desaconselhou o uso da sua solução.

2.2 Reamostrar a estatística de Scheffé: alguns casos simples

Se a arbitrariedade na forma de emparelhar as duas amostras é o ponto fraco da estatística de Scheffé, pareceu-nos que uma solução óbvia seria achar todos os emparelhamentos possíveis e considerar os vários valores obtidos T_1, T_2, \dots, T_p . Certamente inviável nos anos quarenta, quando Scheffé publicou os seus artigos, ou mesmo em 1970, esta opção tornou-se mais alcançável com o aumento da capacidade de cálculo e a vulgarização dos computadores pessoais desde então. É claro que o número de emparelhamentos crescerá rapidamente com as dimensões das amostras, mas quando se tornar incomportável calcular todos os valores possíveis da estatística restará a alternativa de basear as conclusões numa amostra aleatória grande de emparelhamentos.

Neste capítulo desenvolvemos essa ideia em várias direcções — variantes do teste original de Scheffé baseadas em calcular a estatística de teste repetidamente para um grande número de emparelhamentos, e combinar os resultados. O capítulo

3 contém uma exploração simples destas variantes por simulação, que as compara entre si e com o teste t aproximado de Welch.

Uma forma conservadora de agregar os diversos valores amostrais seria tomar sempre o menor dos T_j (ou seja a maior das variâncias $S_{U_j}^2$). A estratégia oposta, otimista, consistiria em reter o máximo dos T_j (mínimo dos $S_{U_j}^2$). Um meio termo menos drástico, se pudermos ter confiança nos dados, é achar alguma espécie de média.

Exemplificando com amostras pequenas e valores simples, $\mathbf{X} = (4, 3)$ e $\mathbf{Y} = (1, 2, 5)$, temos $n_1 = 2$, $n_2 = 3$, $\bar{X} = 3,5$, $\bar{Y} = 2,67$ e $c = 0,816497$. Na Tabela seguinte enumeramos os emparelhamentos possíveis destas amostras e as médias \bar{Y}_j das subamostras de \mathbf{Y} obtidas excluindo o elemento que não é emparelhado.

X	Y					
4	1	1	2	2	5	5
3	2	5	1	5	1	2
\bar{Y}_j	1,5	3	1,5	3,5	3	3,5

Tabela 2.1: Emparelhamentos possíveis de duas amostras.

Os valores correspondentes das diferenças emparelhadas $U = X - cY$, as suas variâncias e desvios padrões, e as estatísticas de Scheffé para os vários emparelhamentos são então:

j	1	2	3	4	5	6
U_{1j}	3,184	3,184	2,367	2,367	-0,082	-0,082
U_{2j}	1,367	-1,082	2,184	-1,082	2,184	1,367
S_{U_j}	1,285	3,017	0,129	2,439	1,602	1,025
$T_{(-)j}$	2,201	0,234	21,926	0	0,441	0
T_j	0,913	0,389	9,099	0,481	0,733	1,145

Tabela 2.2: Diferenças ponderadas de Scheffé e estatísticas associadas.

Uma estatística resumo possível obtém-se substituindo na expressão da estatística de Scheffé S_U pela média dos desvios padrões parciais de U nos vários emparelhamentos,

$$\bar{S}_{U(1)} = \frac{1,285 + 3,017 + \dots + 1,025}{6} = 1,5828,$$

donde resulta a estatística modificada

$$T_{(1)} = \frac{3,5 - 2,67}{1,5828} \times \sqrt{2} = 0,7.$$

Mas à partida nada nos obriga a preferir o desvio padrão à variância, e outra hipótese é fazer a média das variâncias parciais,

$$\overline{S}_{U_{(2)}}^2 = \frac{1,285^2 + 3,017^2 + \dots + 1,025^2}{6} = 3,389318,$$

e substituí-la na expressão da estatística de Scheffé,

$$T_{(2)} = \frac{3,5 - 2,67}{\sqrt{\frac{3,389318}{2}}} = 0,6.$$

E talvez a ideia mais simples seja tomar a média das próprias estatísticas de Scheffé parciais:

$$T_{(-1)} = \frac{0,913 + 0,389 + \dots + 1,145}{6} = 2,1.$$

Quanto a esta, notamos que mais em geral

$$\begin{aligned} T_{(-1)} &= \frac{1}{p} \sum_j \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\frac{S_{U_j}}{\sqrt{n_1}}} = \frac{\sqrt{n_1} (\overline{X} - \overline{Y})}{p} \sum_j \frac{1}{S_{U_j}} \\ &= \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\frac{\overline{S}_{U_{(-1)}}}{\sqrt{n_1}}} \quad \text{ou} \quad \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\overline{S}_{(-1)}}, \end{aligned}$$

onde o denominador é a média harmónica dos desvios padrões parciais, visto que

$$\frac{1}{\overline{S}_{U_{(-1)}}} = \frac{1}{p} \sum_j \frac{1}{S_{U_j}} \quad \text{e} \quad \frac{1}{\overline{S}_{(-1)}} = \frac{1}{p} \sum_j \frac{1}{S_j}.$$

De outro ponto de vista, se observarmos que o processo de cálculo da estatística de Scheffé simples consiste em: (1) achar as médias das amostras originais, (2) truncar a amostra maior retirando-lhe $n_2 - n_1$ das observações, e (3) emparelhá-la com a amostra menor e achar o desvio padrão das diferenças ponderadas assim formadas, então poderia ocorrer-nos inverter a ordem dos passos (1) e (2). Designamos por $T_{(-)j}$ as estatísticas parciais que resultam dessa transposição.

$$T_{(-)1} = \frac{3,5 - 1,5}{\frac{1,285}{\sqrt{2}}} = 2,201, \quad T_{(-)2} = \frac{3,5 - 3}{\frac{3,017}{\sqrt{2}}} = 0,234, \quad \dots$$

e a sua média aritmética por

$$T_{(-)} = \frac{1}{p} \sum_j T_{(-)j} = \frac{1}{p} \sum_j \frac{\bar{X} - \bar{Y}_j}{\frac{S_{U_j}}{\sqrt{n_1}}} = 4,1.$$

Algumas características desta última variante que destacamos:

- Quando as amostras têm dimensões iguais $n_1 = n_2$, $T_{(-)}$ e $T_{(-1)}$ coincidem.
- $T_{(-)}$ não é mais que uma média de estatísticas t de Student para amostras emparelhadas, aplicadas à amostra menor emparelhada com cada uma das truncaturas da amostra maior a n_1 elementos.
- Um aspecto inconveniente de $T_{(-)}$, se não mesmo desqualificador, é que de vez em quando tem sinal oposto ao da diferença $\bar{X} - \bar{Y}$ entre as médias das amostras completas. Apesar disso incluímo-la no nosso estudo.

Cada variante re-amostrada da estatística de Scheffé tem um estimador de variância associado. Para as que se definem como médias potências, a variância teórica das diferenças ponderadas, $\sigma_U^2 = \text{var}(X - cY)$ é estimada pela variância amostral $\bar{S}_{U_{(c)}}^2 \equiv [\bar{S}_{U_{(c)}}]$ — ou, se se preferir, a variância teórica da diferença entre as médias das amostras completas $\sigma^2 = \text{var}(\bar{X} - \bar{Y})$ é estimada por $\bar{S}_{(\cdot)}^2 \equiv [\bar{S}_{(\cdot)}] = \bar{S}_{U_{(\cdot)}}^2 / \sqrt{n_1}$. No caso de $T_{(-)}$, definimos implicitamente os estimadores $\bar{S}_{(-)}^2$ e $\bar{S}_{U_{(-)}}^2$ de σ^2 e σ_U^2 pelas relações

$$T_{(-)} = \frac{1}{p} \sum_j \frac{\bar{X} - \bar{Y}_j}{\frac{S_{U_j}}{\sqrt{n_1}}} = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\bar{S}_{(-)}^2}} \Leftrightarrow \bar{S}_{(-)}^2 \equiv \left(\frac{\bar{X} - \bar{Y}}{T_{(-)}} \right)^2 \Leftrightarrow \bar{S}_{U_{(-)}}^2 \equiv n_1 \left(\frac{\bar{X} - \bar{Y}}{T_{(-)}} \right)^2.$$

$T_{(2)}, T_{(1)}, T_{(-1)}$ e os respectivos estimadores de variância podem-se escrever como médias potência, noção que recordamos na próxima secção e nos levou a alargar o âmbito da investigação.

2.3 Variantes da estatística de Scheffé com base em médias potência

Dada uma sequência de números reais estritamente positivos s_1, s_2, \dots, s_p , a sua média potência de ordem $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ define-se como: ([37], p. 121, [30], pp. 34 - 37)

$$\bar{s}_{(m)} = \left[\frac{1}{p} \sum_{j=1}^p s_j^m \right]^{1/m}.$$

Casos notáveis são, para $m = 1$, a média aritmética simples,

$$\bar{s}_{(1)} = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p s_j = \bar{s};$$

para $m = 2$, a raiz da média dos quadrados (ou média quadrática),

$$\bar{s}_{(2)} = \sqrt{\frac{1}{p} \sum_{j=1}^p s_j^2};$$

e, para $m = -1$, a média harmónica, definida por

$$\bar{s}_{(-1)} = \left[\frac{1}{p} \sum_{j=1}^p s_j^{-1} \right]^{-1} = \frac{p}{\sum_{j=1}^p s_j^{-1}} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\bar{s}_{(-1)}} = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p \frac{1}{s_j}.$$

Para valores fixos s_1, s_2, \dots, s_p , a média potência é uma função contínua de m , e a definição inicial prolonga-se por continuidade a $m = -\infty, +\infty, 0$ considerando:

$$\begin{aligned} \bar{s}_{(-\infty)} &= \min_{j=1, \dots, p} s_j \quad (\text{o mínimo}), \\ \bar{s}_{(+\infty)} &= \max_{j=1, \dots, p} s_j \quad (\text{o máximo}), \\ \bar{s}_{(0)} &= \sqrt[p]{s_1 \times s_2 \times \dots \times s_p} \quad (\text{a média geométrica}). \end{aligned}$$

Assim generalizada, a média potência é uma função crescente de m , tendo-se para $n \neq m$, $\bar{s}_{(n)} = \bar{s}_{(m)}$ apenas quando $s_1 = s_2 = \dots = s_p$ (sequência constante)

A média potência de uma potência $s = v^{1/n}$ ($\Leftrightarrow v = s^n$), com $n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, pode

obter-se de

$$\bar{s}_{(m)} = \left(\left[\frac{1}{p} \sum_{j=1}^p v_j^{m/n} \right]^{n/m} \right)^{1/n} = [\bar{v}_{(m/n)}]^{1/n}, \quad (2.4)$$

abreviadamente $\overline{(v^{1/n})}_{(m)} = [\bar{v}_{(m/n)}]^{1/n}$. Dois casos relevantes no presente trabalho são, para $n = 2$, $\bar{s}_{(m)} = \sqrt{\bar{v}_{(m/2)}}$ donde

$$[\bar{s}_{(m)}]^2 = \bar{v}_{(m/2)} = \left[\frac{1}{p} \sum_{j=1}^p v_j^{m/2} \right]^{2/m} \quad (2.5)$$

e, para $n = -1$,

$$\frac{1}{\bar{s}_{(m)}} = \overline{\left(\frac{1}{s} \right)}_{(-m)}.$$

As estatísticas $T_{(1)}$, $T_{(2)}$ e $T_{(-1)}$ referidas na secção anterior podem-se exprimir em termos de médias potência

$$\bar{S}_{U_{(m)}} = \left(\frac{S_{U_1}^m + S_{U_2}^m + \dots + S_{U_p}^m}{p} \right)^{1/m}, \quad \bar{S}_{(m)} = \frac{\bar{S}_{U_{(m)}}}{\sqrt{n_1}}. \quad (2.6)$$

A partir destas definimos genericamente os estimadores $\bar{S}_{U_{(m)}}^2 \equiv [\bar{S}_{U_{(m)}}]^2$ e $\bar{S}_{(m)}^2 \equiv [\bar{S}_{(m)}]^2 = \bar{S}_{U_{(m)}}^2 / \sqrt{n_1}$ das variâncias populacionais $\sigma_U^2 = \text{var}(X - cY)$ e $\sigma^2 = \text{var}(\bar{X} - \bar{Y})$, respectivamente, bem como as estatísticas

$$T_{(m)} \equiv \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\frac{\bar{S}_{U_{(m)}}}{\sqrt{n_1}}} = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\bar{S}_{(m)}}. \quad (2.7)$$

Dos estimadores de variância que acabamos de definir, $\bar{S}_{U_{(2)}}^2 \equiv [\bar{S}_{U_{(2)}}]^2$ tem a clara vantagem de ser centrado,

$$E\left(\bar{S}_{U_{(2)}}^2\right) = \frac{1}{p} \sum_j E\left(S_{U_j}^2\right) = \frac{p(\sigma_X^2 + c^2\sigma_Y^2)}{p} = \sigma_U^2,$$

pelo que a estatística reamostrada $T_{(2)}$ nos pareceu desde cedo especialmente promissora.

Estas boas notícias são más para outras variantes da estatística de Scheffé, já

que a monotonia das médias potência implica que para os restantes estimadores de variância $\bar{S}_{U(m)}^2$ se terá $E(\bar{S}_{U(m)}^2) > \sigma^2$ quando $m > 2$ (podendo ser infinito) e $E(\bar{S}_{U(m)}^2) < \sigma^2$ quando $m < 2$ — neste caso a existência de $E(\bar{S}_{U(2)}^2)$ garante existência de $E(\bar{S}_{U(m)}^2)$. Disto decorre que as variâncias amostrais expressas como médias potência serão em geral estimadores enviesados. Poderá todavia ser ainda possível estimar e reduzir o seu viés recorrendo a técnicas analíticas como o método delta, ou de reamostragem como o *jackknife*, e por isso pareceu-nos ter interesse estudar a distribuição destas estatísticas.

A seguinte tabela contém a lista de médias potências que considerámos neste trabalho, e a sua expressão em termos da variância ou do desvio padrão. Indexámos estas e todas as estatísticas com elas relacionadas em termos de desvio padrão.

$\bar{S}_{(m)}$ em termos de:

m	desvios padrões S_j	variâncias $V_j = S_j^2$
-2		média harmónica
-1	média harmónica	
0	média geométrica	média geométrica
1	média aritmética	
2	média quadrática	média aritmética
4		média quadrática

Tabela 2.3: Médias potência $\bar{S}_{(m)}$ estudadas

2.4 O *jackknife*

Sugerido em 1949 por M.H. Quenouille [39], o *jackknife* foi desenvolvido como método de corrigir o viés de um estimador. É um método semelhante ao *bootstrap* que utiliza re-amostragem sem reposição ao invés de com reposição. Em muitas situações não é prático ou é até mesmo impossível calcular bons estimadores, ou encontrar o erro padrão dos ditos estimadores. Pode ser o caso de não haver suporte teórico acerca do estimador, ou o caso de tentar estimar a variância de uma função complicada que torna a utilização do método mais comum de resolução, o método delta, impossível. Nestas situações o método *jackknife* é usado para derivar uma estimativa do viés e do erro padrão.

O *jackknife* simples resulta de um processo com dois passos:

1. Dado o vector de dados original $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_i, \dots, X_n)$ e um estimador $\hat{\vartheta} = \hat{\vartheta}(X_1, \dots, X_n)$ do parâmetro ϑ , exclui-se uma observação de cada vez, obtendo n amostras *jackknife* $\mathbf{X}_{(-i)} = (X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n)$ distintas. Avalia-se o estimador para cada uma destas, $\hat{\vartheta}_{(-i)} = \hat{\vartheta}(\mathbf{X}_{(-i)})$ e toma-se a média,

$$\bar{\vartheta}' = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{\vartheta}_{(-i)}. \quad (2.8)$$

2. Relacionando analiticamente os vieses de $\hat{\vartheta}$ e $\bar{\vartheta}'$, obtém-se o estimador *jackknife* com correção ao viés,

$$\vartheta^J = n\hat{\vartheta} - (n-1)\bar{\vartheta}',$$

que numa grande classe de problemas tem efectivamente viés inferior ao do estimador original. O erro padrão do estimador *jackknife* é dado por

$$s(\vartheta^J) = \left[\frac{n-1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\hat{\vartheta}_{(-i)} - \bar{\vartheta}' \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (2.9)$$

As variantes reamostradas da estatística de Scheffé que descrevemos nas secções anteriores têm afinidades óbvias com o *jackknife*. O parâmetro a estimar é uma das variâncias populacionais σ_U^2 ou σ^2 , e o estimador possivelmente enviesado é a correspondente variância amostral (que definimos na secção anterior). Uma diferença é que o cálculo destas implica excluir $n_2 - n_1$ observações em vez de uma só, e apenas na amostra maior. (Quando as amostras têm dimensões iguais não há exclusão, mas apenas um emparelhamento aleatório, ou permutação das observações.)

O *jackknife* “múltiplo”— em que se exclui mais de um valor da amostra em cada reamostragem — não é inédito; vários autores o referem, acrescentando que por exemplo se porta melhor que o *jackknife* simples (apagar só uma observação de cada vez) no problema da estimação de uma mediana, embora à custa de maior esforço de cálculo. Infelizmente tivemos dificuldade em encontrar literatura sobre o assunto em tempo útil, pelo que o pusemos de parte.

Mas o *jackknife* simples poderá ser eficaz por si só em reduzir o viés da estatística de Scheffé reamostrada, combinando dois tipos de reamostragem: (1)

primeiro excluir um valor de cada vez da amostra maior, (2) depois calcular a estatística de Scheffé reamostrada, que estima a variância excluindo outros $n_2 - n_1 - 1$ valores e fazendo a média das variâncias parciais; (3) no final aplicar a fórmula do estimador *jackknife* às n_2 estimativas obtidas. (Este processo só tem sentido para $n_2 > n_1$). Não chegámos a estudar por completo esta alternativa, mas apresentamos resultados de um procedimento simplificado que no passo (3) calcula simplesmente a média aritmética das n_2 estimativas. Chamamos-lhe “*jackknife* incompleto”, e designamos por $T'_{(1)}, T'_{(2)}, \dots, T'_{(-)}$ e $S'^2_{(1)}, S'^2_{(2)}, \dots, S'^2_{(-)}$ as estatísticas finais obtidas acrescentando este segundo nível de reamostragem às variantes da solução de Scheffé definidas anteriormente.

2.5 Relação entre as estatísticas de Welch e de Scheffé

Proposição 1: Suponha-se que a solução de Scheffé para o problema de Behrens-Fisher (cf. pag. 27) é modificada substituindo no denominador a variância amostral S_U^2 das diferenças ponderadas num emparelhamento arbitrário pela média aritmética das variâncias das diferenças ponderadas para todos os p emparelhamentos possíveis das duas amostras,

$$\bar{S}_U^2 = \frac{S_{U_1}^2 + S_{U_2}^2 + \dots + S_{U_p}^2}{p}.$$

Então o resultado

$$T_{(2)} = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{\bar{S}_U^2}{n_1}}},$$

é a estatística t de Welch (1.22).

Demonstração: A demonstração será dividida em partes, identificadas por algarismos romanos. Embora se exemplifique com amostras de pequena dimensão em alguns pontos, para facilitar a exposição, o argumento é geral.

(I - Decomposição da variância) Emparelhados n_1 elementos quaisquer da

amostra maior completa $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_{n_1}, \dots, Y_{n_2})$ com os elementos da amostra menor $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_{n_1})$, designe-se por $\mathbf{Y}_j = (Y_{1j}, Y_{2j}, \dots, Y_{n_1j})$ a subamostra de \mathbf{Y} assim selecionada e por $\mathbf{U}_j = (U_{1j}, U_{2j}, \dots, U_{n_1j})$ as respectivas diferenças ponderadas de Scheffé, $U_{ij} = X_i - cY_{ij}$, onde $c = \sqrt{n_1/n_2}$, $i = 1, \dots, n_1$ e $j = 1, \dots, p$.

A média de cada amostra de diferenças ponderadas \mathbf{U}_j decompõe-se em

$$\bar{U}_j = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} U_{ij} = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} X_i - \frac{c}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} Y_{ij} = \bar{X} - c\bar{Y}_j.$$

As respectivas somas de quadrados dos desvios, adicionados para todas as possíveis amostras \mathbf{U}_j , decompõem-se portanto alternativamente em

$$\sum_j \sum_i (U_{ij} - \bar{U}_j)^2 = (n_1 - 1) \sum_j S_{U_j}^2 = (n_1 - 1)p\bar{S}_U^2 \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \sum_j \sum_i (U_{ij} - \bar{U}_j)^2 &= \sum_j \sum_i [(X_i - \bar{X}) - c(Y_{ij} - \bar{Y}_j)]^2 \\ &= \sum_j \sum_i (X_i - \bar{X})^2 + c^2 \sum_j \sum_i (Y_{ij} - \bar{Y}_j)^2 - 2c \sum_j \sum_i (X_i - \bar{X})(Y_{ij} - \bar{Y}_j) \\ &= p(n_1 - 1)S_X^2 + c^2 \sum_j (n_1 - 1)S_{Y_j}^2 - 2c \sum_j \sum_i (X_i - \bar{X})(Y_{ij} - \bar{Y}_j), \end{aligned} \quad (2.11)$$

logo, igualando (2.10) e (2.11),

$$\bar{S}_U^2 = S_X^2 + \frac{c^2}{p} \sum_i S_{Y_j}^2 - \frac{2c}{p(n_1 - 1)} \sum_j \sum_i (X_i - \bar{X})(Y_{ij} - \bar{Y}_j). \quad (2.12)$$

Mostramos na continuação que a média das variâncias parciais

$$\bar{S}_Y^2 \equiv \frac{S_{Y_1}^2 + S_{Y_2}^2 + \dots + S_{Y_p}^2}{p}. \quad (2.13)$$

é idêntica à variância S_Y^2 da amostra completa e que a média de produtos cruzados

$$S_{XY} \equiv \frac{1}{p(n_1 - 1)} \sum_j \sum_i (X_i - \bar{X}) (Y_{ij} - \bar{Y}_j) \quad (2.14)$$

se anula, donde resulta que $\bar{S}_U^2 = S_X^2 + c^2 S_Y^2$ e

$$\frac{\bar{S}_U^2}{n_1} = \frac{S_X^2 + c^2 S_Y^2}{n_1} = \frac{S_X^2}{n_1} + \frac{S_Y^2}{n_2},$$

ficando provada a proposição.

(II - Emparelhamentos) Para contabilizar os emparelhamentos de \mathbf{X} com \mathbf{Y} , considerámos o par de matrizes

$$\left[\mathbf{X} \mid \mathbf{A} \right] = \left[\begin{array}{c|cccc} X_1 & Y_{11} & Y_{12} & \cdots & Y_{1p} \\ X_2 & Y_{21} & Y_{22} & \cdots & Y_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{n_1} & Y_{n_11} & Y_{n_12} & \cdots & Y_{n_1p} \end{array} \right] \quad (2.15)$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \quad \uparrow$
 variância
 das colunas = $S_X^2 \quad S_{Y_1}^2 \quad S_{Y_2}^2 \quad \cdots \quad S_{Y_p}^2$

Na matriz \mathbf{A} , de $n_1 \times p$, cada coluna representa uma das subamostras de \mathbf{Y} que se obtém de emparelhar n_1 das suas observações com as de \mathbf{X} , e descartar as $n_2 - n_1$ observações que sobram.

A ordem dos elementos de \mathbf{X} pode ser fixada sem perda de generalidade, como decorre de as estatísticas em análise serem médias. Permutar \mathbf{X} equivale a trocar linhas na matriz \mathbf{A} , ou seja parcelas nas somas \bar{S}_Y^2 e S_{XY} , o que não afecta o resultado.

Os emparelhamentos possíveis das duas amostras identificam-se com os arranjos (ou permutações) das n_2 observações da amostra maior em sequências de n_1 , cujo

número como se sabe é dado por

$${}^{n_2}A_{n_1} = \frac{n_2!}{(n_2 - n_1)!} \equiv p. \quad (2.16)$$

Outro modo de fazer a contagem seria considerar fixa a ordem dos elementos de \mathbf{Y} nas suas subamostras (por exemplo dispondo-os sempre por ordem crescente), e deixar variar a ordem dos elementos de \mathbf{X} . Desta perspectiva, o número de emparelhamentos obtém-se como

$$\begin{aligned} p &= (\text{n}^\circ \text{ permutações de } \mathbf{X}) \times \left(\begin{array}{l} \text{n}^\circ \text{ combinações de } \mathbf{Y} \\ \text{em subconjuntos de } n_1 \end{array} \right) \\ &= n_1! \binom{n_2}{n_1} = \frac{n_2!}{(n_2 - n_1)!}. \end{aligned}$$

Apesar da redundância, achámos preferível considerar a ordem das observações na amostra maior, conforme esquematizámos primeiro, quer ao desenvolver a presente demonstração, quer ainda nas simulações que relatamos no capítulo 3.

(III - Média das médias) Representamos por Y_k uma observação genérica da amostra original $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_k, \dots, Y_{n_2})$, cuja média e variância se escrevem portanto como

$$\bar{Y} = \frac{1}{n_2} \sum_{k=1}^{n_2} Y_k \quad \text{e} \quad S_Y^2 = \frac{1}{n_2 - 1} \sum_{k=1}^{n_2} (Y_k - \bar{Y})^2. \quad (2.17)$$

A soma das médias de todas as subamostras (colunas da matriz \mathbf{A}) é

$$\sum_{j=1}^p \bar{Y}_j = \sum_{j=1}^p \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} Y_{ij} = \frac{1}{n_1} \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^{n_1} Y_{ij}.$$

O somatório duplo à direita percorre todas as entradas da matriz dos arranjos (2.15), na qual as n_2 observações da amostra maior completa estão emparelhadas precisamente uma vez com cada elemento da amostra \mathbf{X} e com cada arranjo das restantes $n_2 - 1$ observações de \mathbf{Y} em seqüências de $n_1 - 1$. As observações originais Y_k ocorrem assim num total de

$$n_1 \times {}^{n_2-1}A_{n_1-1} = \frac{n_1(n_2-1)!}{(n_2-n_1)!} = \frac{n_1 p}{n_2},$$

parcelas cada, e portanto

$$\sum_{j=1}^p \bar{Y}_j = \frac{p}{n_2} \sum_{k=1}^{n_2} Y_k = p\bar{Y} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p \bar{Y}_j = \bar{Y}. \quad (2.18)$$

Por outras palavras, a média das médias de coluna \bar{Y}_j na matriz dos arranjos é igual à média da amostra completa \bar{Y} .

(IV - Somas dos produtos cruzados) Fazendo as somas por linha e depois somando para todas as linhas (2.14), temos:

$$\sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \bar{X}) (Y_{ij} - \bar{Y}_j) = \sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \bar{X}) \sum_{j=1}^p (Y_{ij} - \bar{Y}_j).$$

Em cada linha da matriz dos arranjos (2.15 A), os elementos Y_k da amostra original ocorrem cada qual o mesmo número de vezes, p/n_2 , pelo que

$$\underbrace{\sum_{j=1}^p Y_{ij}}_{\text{soma de todos os elementos da linha}} = \underbrace{\frac{p}{n_2}}_{\text{n}^\circ \text{ de repeti\c{c}oes}} \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{n_2} Y_k}_{\text{soma dos elementos distintos}} = p\bar{Y}.$$

Disto e de (2.18) vem então que

$$\sum_{j=1}^p (Y_{ij} - \bar{Y}_j) = \sum_{j=1}^p Y_{ij} - p\bar{Y} = p\bar{Y} - p\bar{Y} = 0, \quad (2.19)$$

(os desvios das subamostras permutadas anulam-se linha a linha).

(V - Média das variâncias) A igualdade

$$\frac{1}{p} \sum_{j=1}^p S_{Y_j}^2 = S_Y^2 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^p S_{Y_j}^2 = pS_Y^2, \quad (2.20)$$

pode-se estabelecer por indução em n_1 . Para $n_1 = 2$ e por exemplo $n_2 = 3$ a matriz dos arranjos de \mathbf{Y} é

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 & Y_1 & Y_3 & Y_2 & Y_3 \\ Y_2 & Y_1 & Y_3 & Y_1 & Y_3 & Y_2 \end{bmatrix},$$

com médias de coluna

$$\frac{Y_1 + Y_2}{2}, \quad \frac{Y_2 + Y_1}{2}, \quad \frac{Y_1 + Y_3}{2}, \quad \frac{Y_3 + Y_1}{2}, \dots, \frac{Y_3 + Y_2}{2}$$

Qualquer que seja n_2 , esta matriz tem um número par $p = {}^{n_2}A_2 = n_2(n_2 - 1)$ de colunas que se agrupam em pares de permutações inversas $(Y_k, Y_{k'})$ e $(Y_{k'}, Y_k)$, cada um dos quais contribui para a soma dos quadrados dos desvios com as parcelas

$$\begin{aligned} & \left[\left(Y_k - \frac{Y_k + Y_{k'}}{2} \right)^2 + \left(Y_{k'} - \frac{Y_k + Y_{k'}}{2} \right)^2 \right] \times 2 = \\ & = \frac{(Y_k - Y_{k'})^2}{2} + \frac{(Y_{k'} - Y_k)^2}{2} = (Y_k - Y_{k'})^2. \end{aligned}$$

Fazendo a soma para todos os pares obtém-se uma conhecida expressão para a variância amostral ([9], pp. 237-238 ex. 5.9),

$$\sum_{k' < k} (Y_k - Y_{k'})^2 = n_2(n_2 - 1)S_Y^2, \quad (2.21)$$

donde resulta (2.20).

Considerando agora $n_1 \geq 2$, escrevamos $S_{j',n_1}^2 \equiv S_{Y_{j'},n_1}^2 (j' = 1, \dots, p_{n_1})$ para as variâncias dos p_{n_1} arranjos de \mathbf{Y} em seqüências de n_1 e $S_{j,n_1+1}^2 \equiv S_{Y_j,n_1}^2 (j = 1, \dots, p_{n_1+1})$ para as variâncias dos p_{n_1+1} arranjos da mesma amostra em seqüências de $n_1 + 1$. Supondo que para certo $n_1 = 2, \dots, n_2 - 1$ vale a igualdade

$$\sum_{j'=1}^{p_{n_1}} S_{j',n_1}^2 = p_{n_1} S_Y^2, \quad (2.22)$$

mostremos que então também para o inteiro seguinte se tem

$$\sum_{j=1}^{p_{n_1+1}} S_{j,n_1+1}^2 = p_{n_1+1} S_Y^2. \quad (2.23)$$

Começamos por notar que, conforme já foi visto na parte (II) desta demonstração, $p_{n_1} = p = n_2!/(n_2 - n_1)!$, logo

$$p_{n_1+1} = \frac{n_2!}{(n_2 - n_1 - 1)!} = (n_2 - n_1)p.$$

De facto, os arranjos em seqüências de $n_1 + 1$ obtêm-se acrescentando a cada arranjo em seqüências de n_1 uma das $n_2 - n_1$ observações da amostra maior que ainda não estavam incluídas nesse arranjo. Exemplificando para $n_1 = 2$ e $n_2 = 4$, temos $p = {}^4A_2 = 12$, $(n_2 - n_1)p = 2 \times 12$, e as matrizes de arranjos em causa são da forma

$${}^4\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 & Y_1 & Y_3 & Y_1 & Y_4 & Y_2 & Y_3 & Y_2 & Y_4 & Y_3 & Y_4 \\ Y_2 & Y_1 & Y_3 & Y_1 & Y_4 & Y_1 & Y_3 & Y_2 & Y_4 & Y_2 & Y_4 & Y_3 \end{bmatrix},$$

e

$${}^4\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} Y_1 & Y_1 & Y_2 & Y_2 & Y_1 & Y_1 & \cdots & Y_4 & Y_4 & Y_3 & Y_3 & Y_4 & Y_4 \\ Y_2 & Y_2 & Y_1 & Y_1 & Y_3 & Y_3 & \cdots & Y_2 & Y_2 & Y_4 & Y_4 & Y_3 & Y_3 \\ Y_3 & Y_4 & Y_3 & Y_4 & Y_2 & Y_4 & \cdots & Y_1 & Y_3 & Y_1 & Y_2 & Y_1 & Y_2 \end{bmatrix}.$$

Aplicando a fórmula recursiva para a variância amostral (1.7) em cada coluna de ${}^{n_2}\mathbf{A}_{n_1+1}$ e depois somando para todas as colunas vem então

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{p_{n_1+1}} \sum_{i=1}^{n_1+1} (Y_{ij} - \bar{Y}_{j,n_1+1})^2 = \sum_{j=1}^{p_{n_1+1}} n_1 S_{j,n_1+1}^2 \\ & = (n_1 - 1) \sum_{j=1}^{p_{n_1+1}} S_{j,n_1}^2 + \frac{n_1 + 1}{n_1} \sum_{j=1}^{p_{n_1+1}} (Y_{n_1+1,j} - \bar{Y}_{j,n_1+1})^2. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Ora, somar S_{j,n_1}^2 para todas as colunas de ${}^{n_2}\mathbf{A}_{n_1+1}$ corresponde a somar as variâncias das colunas de ${}^{n_2}\mathbf{A}_{n_1}$ tantas vezes quantos os novos elementos de \mathbf{Y} combinados com estas colunas em ${}^{n_2}\mathbf{A}_{n_1+1}$, ou seja $n_2 - n_1$. Apelando depois à hipótese de indução (2.22), vem sucessivamente

$$(n_1 - 1) \sum_{j=1}^{p_{n_1+1}} S_{j,n_1}^2 = (n_1 - 1)(n_2 - n_1) \sum_{j'=1}^{p_{n_1+1}} S_{j',n_1}^2 = (n_1 - 1)(n_2 - n_1)p S_Y^2.$$

Quanto à parcela mais à direita em (2.24), observe-se que é a soma dos desvios quadráticos numa linha apenas da matriz de arranjos ${}^{n_2}\mathbf{A}_{n_1+1}$. Atendendo à simetria do problema — cada linha é uma permutação das demais — esta soma é idêntica para todas as $n_1 + 1$ linhas, pelo que

$$\sum_j (Y_{n_1+1,j} - \bar{Y}_{j,n_1+1})^2 = \frac{1}{n_1 + 1} \sum_j n_1 S_{j,n_1+1}^2.$$

Substituindo e resolvendo (2.24) fica

$$\sum_{j=1}^{p_{n_1+1}} n_1 S_{j,n_1+1}^2 = (n_1 - 1)(n_2 - n_1)p S_Y^2 + \sum_{j=1}^{p_{n_1+1}} S_{j,n_1+1}^2$$

e por fim

$$\sum_{j=1}^{p_{n_1+1}} S_{j,n_1+1}^2 = (n_2 - n_1)p S_Y^2 = p_{n_1+1} S_Y^2, \quad \text{c.q.d.}$$

(III* - V*) A demonstração pode ser abreviada se entendermos a estatística de Scheffé modificada como resultado de uma amostragem em duas fases. Obtidas as amostras originais $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_{n_1})$ e $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_{n_2})$, com $n_1 \leq n_2$, os arranjos da maior $\mathbf{Y}_j = (Y_{1j}, \dots, Y_{n_1j})$ correspondem às amostras de dimensão n_1 que se podem extrair, num plano de amostragem aleatória simples (sem reposição), da população finita \mathbf{Y} . Com esta interpretação, as médias \bar{Y}_j e variâncias $S_{Y_j}^2$ dos arranjos não são mais que as realizações possíveis dos estimadores usuais da média \bar{Y} e da variância S_Y^2 da mesma população. As identidades (III) e (V) expressam então simplesmente o facto conhecido (veja-se por exemplo [4], pp. 24-28, ou [11], pp. 20-27) de que esses estimadores são centrados no sentido da amostragem em populações finitas,

$$E(\bar{Y}) = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p \bar{Y}_j = \bar{Y} \quad \text{e} \quad E(\bar{S}^2) = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p S_{Y_j}^2 = S_Y^2.$$

Capítulo 3

Breve estudo de simulação

3.1 Critérios, pressupostos e método

O risco de dar ao investigador a tentação de viciar a análise dos dados não foi o único motivo que levou o próprio Scheffé, na sua revisão posterior de soluções para o problema de Behrens-Fisher, a intitular o intervalo de confiança que tinha descoberto décadas antes de “*an impractical solution*”. Refere também que este tem baixa probabilidade de cobertura, comparado com alternativas igualmente simples e menos problemáticas, incluído a solução de Welch. ([49], pp. 1502, 1503). A crítica transmite-se naturalmente ao teste de hipóteses baseado na estatística de Scheffé, dada a dualidade entre intervalos de confiança e testes de hipóteses.

No entanto, a identidade que provámos no final do capítulo anterior entre a variante $T_{(2)}$ do teste de Scheffé reamostrado e o teste de Welch — uma solução habitualmente considerada muito boa, e recomendada pelo próprio Scheffé ([49], p. 1505) — faz crer que a reamostragem pode melhorar consideravelmente o desempenho de um estimador, nas condições certas, e investigar as demais variantes reamostradas da solução de Scheffé. Dada a não linearidade das médias potência $\bar{S}_{(m)}^2$ como funções das variâncias individuais $S_{U_j}^2$, o seu estudo apenas nos pareceu acessível por simulação. Apresentamos resultados de uma exploração computacional simples. Nesta primeira secção explicamos as ideias que pautaram o nosso plano de simulação e os critérios de avaliação dos resultados que adoptámos. A próxima secção explica como foi feita a implementação, e a seguinte apresenta os resultados e algumas conclusões provisórias.

A qualidade de um teste de hipóteses avalia-se pela sua função potência (ou sensibilidade), $P(\text{rejeitar } H_0)$, que deve ser elevada sob H_1 , enquanto sob H_0 deve tomar um valor pequeno $\alpha = P(\text{rejeitar } H_0; H_0) \approx 0$ (o nível de significância). Nos testes sobre médias, a potência é uma função da diferença real entre as médias $\Delta = \mu_X - \mu_Y$, e de outros parâmetros eventualmente desconhecidos da distribuição geradora — como são no problema de Behrens-Fisher as variâncias populacionais σ_X^2 e σ_Y^2 .

No caso de serem homogêneas as variâncias populacionais ($\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$), a distribuição da estatística de Student para amostras independentes está estudada: é uma t sob H_0 , $T_{\text{Stu}} \sim t_{n_1+n_2-2}$, e sob H_1 é uma t não central ([28] p. 346, [22] vol. II p. 508).

$$T_{\text{Stu}} \sim t' \left(n_1 + n_2 - 2, \frac{\mu_X - \mu_Y}{\sigma} \right).$$

Daí decorre que a potência do teste t é uma função crescente quer de $|\mu_X - \mu_Y|/\sigma$ — a magnitude relativa da diferença entre as médias — quer dos graus de liberdade — que se podem interpretar como a quantidade de informação extraída das amostras ([12] pp. 116-117). Note-se que em condições idênticas se $\nu_2 > \nu_1$ então $P[t_{\nu_2} \geq T] < P[t_{\nu_1} \geq T]$, ou seja com mais graus de liberdade é mais fácil rejeitar H_0 . Deste modo, os graus de liberdade são um indicador parcial da potência de um teste t . Considerações análogas se podem fazer a respeito da distribuição da estatística t aproximada de Welch.

Achámos conveniente estudar as variâncias normalizadas

$$W_{(m)} = \bar{S}_{(m)}^2 / \sigma^2 \quad \text{e} \quad W_{(-)} = \bar{S}_{(-)}^2 / \sigma^2. \quad (3.1)$$

Assim, $E(W_0) = 1$ quando \bar{S}_0^2 é estimador centrado, e o viés relativo de \bar{S}_0^2 é

$$\beta = E(W_0) = E(\bar{S}_0^2) / \sigma^2.$$

Suponha-se que as variâncias reamostradas $\bar{S}_{(m)}^2$ e $\bar{S}_{(-)}^2$ são aproximáveis por va. gama — sabemos que esta aproximação é válida para S_{Welch}^2 , e a distribuição exacta de S_{Stu}^2 quando $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$. Então,

$$W_0 \approx \text{ga}(\alpha, \delta) = \frac{\beta}{\nu} \chi_\nu^2 \Leftrightarrow \bar{S}_0^2 \approx \text{ga}(\alpha, \delta\sigma^2) = \frac{\beta\sigma^2}{\nu} \chi_\nu^2$$

e nesse sentido \overline{S}_0^2 e W_0 têm os mesmos graus de liberdade efectivos $\nu = 2\alpha$.

Para n_1 e n_2 fixos, os graus de liberdade teóricos aumentam quando θ^{-1} varia de 0 a 1. De facto, a fórmula de Satterthwaite (1.17) pode-se reescrever

$$\nu(\theta; n_1, n_2) = \frac{(\theta + c^2)^2}{\frac{\theta^2}{n_1 - 1} + \frac{c^4}{n_2 - 1}},$$

que é uma função diferenciável para $\theta \in]0, +\infty[$, e cuja primeira derivada

$$\frac{d\nu}{d\theta}(\theta; n_1, n_2) = \frac{2(\theta + c^2)c^2}{\left(\frac{\theta^2}{n_1 - 1} + \frac{c^4}{n_2 - 1}\right)^2} \cdot \left(\frac{c^2}{n_2 - 1} - \frac{\theta}{n_1 - 1}\right)$$

é $= 0$, > 0 , ou < 0 consoante $\theta = c^2a^2$, $0 < \theta < c^2a^2$, ou $\theta > c^2a^2$.

Se $\theta \rightarrow +\infty$ ($\theta^{-1} \rightarrow 0$), $\nu \rightarrow n_1 - 1$, e se $\theta \rightarrow 0$ ($\theta^{-1} \rightarrow +\infty$) $\nu \rightarrow n_2 - 1$. Como função de θ^{-1} , os graus de liberdade crescem portanto do mínimo de $n_1 - 1$, quando $\theta^{-1} \rightarrow 0$, até um máximo de $(n_2 - 1)(a^2 + 1)^2/(a^2 + 1)$, quando $\theta^{-1} = 1/(a^2c^2)$, e decrescem novamente para o mínimo de $n_2 - 1$ quando $\theta^{-1} \rightarrow +\infty$. Mas uma vez que temos considerado $n_1 \leq n_2$, o que implica $c^2, a^2 \geq 1$ e $1/(a^2c^2) \geq 1$, o máximo absoluto não chega a ser alcançado para $\theta^{-1} \in]0, 1]$, excepto se $n_1 = n_2$. É digno de nota que este máximo corresponde precisamente ao valor de θ^{-1} para o qual a distribuição T_{Welch} é uma $t_{n_1+n_2-2}$ (Nota 3 da secção 1.7).

Particularizando agora para $n_1 = n_2 = n$ observamos que então $c^2 = a^2 = 1$ e o valor máximo de graus de liberdade é $\nu = 2(n - 1)$, alcançado quando $\theta^{-1} = \theta = 1$. Além disso, os graus de liberdade são neste caso uma função linear de $n - 1$,

$$\nu = (n - 1) \left(1 + \frac{2\theta}{1 + \theta^2}\right).$$

A Tabela 3.16, na última página dos Anexos, apresenta os valores de graus de liberdade efectivos (1.17) numa grelha de valores tal que $n_2 \geq n_1 \geq 2$ e $\theta^{-1} = 0(0, 1)1$. As linhas da tabela correspondem precisamente aos valores de (n_1, n_2) que incluimos nas simulações, escolhidos por uma combinação dos seguintes critérios:

- i $n_1 + n_2 - 2 \leq 30$, restrição motivada pela afirmação, frequente na literatura estatística, de que a partir de $\nu \geq 30$ a t de Student é bem aproximada

pela distribuição normal. Considerando que os graus de liberdade *mínimos* da fórmula de Satterthwaite são $n_1 - 1$, juntámos também os casos $n_1 = n_2 = 21$ (5) 31.

- ii Reter linhas com graus de liberdade médios espaçados aproximadamente de 3 em 3 valores. Mais exactamente, para cada par (n_1, n_2) baseámo-nos na média, na mediana e na média harmónica dos graus de liberdade para $\theta^{-1}=0,1(0,1)1$.
- iii Incluir os menores valores de (n_1, n_2) .

O limite inferior de $\theta^{-1} = 0,1$ inspira-se na regra prática, sugerida por alguns autores, [10] de não pôr em dúvida a homogeneidade de variância senão quando o maior dos desvios padrões amostrais excede o triplo do menor, que traduzida para variância sugere uma razão mínima admissível de 1 : 9, ou aproximadamente 0,1. Conforme se observa na tabela, os graus de liberdade teóricos ν aumentam de forma mais rápida quando $\theta^{-1} \approx 0$, e mais lenta quando $\theta^{-1} \approx 1$. Por isso pareceu-nos suficiente tomar $\theta^{-1} = 0,1, 0,2, 0,3, 0,5, 0,7, 1$.

3.2 Implementação

3.2.1 Algoritmo

As considerações anteriores motivaram o seguinte plano de simulação:

1. Dados inteiros $n_1 \leq n_2$, $\theta, \sigma_X > 0$ reais positivos e μ_X, Δ reais quaisquer, gerar duas amostras aleatórias independentes $(X_1^{(k)}, \dots, X_{n_1}^{(k)})$ e $(Y_1^{(k)}, \dots, Y_{n_2}^{(k)})$, com $X_i^{(k)} \sim N(\mu_X, \sigma_X)$, $Y_i^{(k)} \sim N(\mu_Y, \sigma_Y)$, $\mu_Y = \mu_X + \Delta$ e $\sigma_X^2/\sigma_Y^2 = \theta$ ($\sigma_Y = \sigma_X/\sqrt{\theta}$), e guardar as médias amostrais $\bar{X}^{(k)}$ e $\bar{Y}^{(k)}$.

(Atendendo à invariância de Z para translações considerámos $\mu_X = 0$, e atendendo à invariância de $W_{(m)}$ com a escala considerámos $\sigma_X = 1$. Como apenas nos propusemos estudar o tamanho dos testes, e não a sua potência, fizemos sempre $\Delta = 0$.)

2. Obter a matriz dos arranjos $[Y_{ij}^{(k)}]$, cujas colunas $Y_j^{(k)}$ são cada uma um arranjo distinto da amostra original $\mathbf{Y}^{(k)}$ em sequências de n_1 . Quando

possível enumerar todos os $p = {}^{n_2}A_{n_1}$ arranjos. Quando o tempo de simulação tornar incomportável a enumeração total dos arranjos, compor a matriz com um número elevado $p < {}^{n_2}A_{n_1}$ de arranjos aleatórios distintos de $\mathbf{Y}^{(k)}$.

3. Guardar o vector das diferenças $\left[\bar{X}^{(k)} - \bar{Y}_j^{(k)} \right]$, onde $\bar{Y}_j^{(k)}$ são as médias de coluna da matriz dos arranjos $\left[Y_{ij}^{(k)} \right]$.
4. Calcular a matriz das diferenças ponderadas $\left[U_{ij}^{(k)} \right]$, onde

$$U_{ij}^{(k)} = X_i^{(k)} - cY_{ij}^{(k)}, \quad c = \sqrt{n_1/n_2}, \quad i = 1, \dots, n_1, \quad j = 1, \dots, p$$

e guardar os vectores das variâncias de coluna $\left[S_{U_j}^{2(k)} \right]$ e dos desvios padrões por coluna $\left[S_{U_j}^{(k)} \right]$ desta matriz, e as estatísticas emparelhadas parciais $T_{(-)j}^{(k)} = \left(\bar{X}^{(k)} - \bar{Y}_j^{(k)} \right) / S_{U_j}^{(k)} \sqrt{n_1}$.

5. Calcular as variâncias normalizadas:

$$W_{(m)}^{(k)} = \frac{1}{n_1 \sigma^2} \left(\frac{1}{p} \sum_{j=1}^p \left[S_{U_j}^{(k)} \right]^m \right)^{2/m}, \quad m = -2, -1, 1$$

$$W_{(m)}^{(k)} = \frac{1}{n_1 \sigma^2} \left(\frac{1}{p} \sum_{j=1}^p \left[S_{U_j}^{2(k)} \right]^{m/2} \right)^{2/m}, \quad m = 2, 4$$

$$W_0^{(k)} = \frac{1}{n_1 \sigma^2} \left(\prod_{j=1}^p S_{U_j}^{(k)} \right)^{2/p}, \quad m = 0$$

$$T_{(-)}^{(k)} = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p T_{(-)j}^{(k)} \quad \text{e} \quad W_{(-)}^{(k)} = \frac{1}{\sigma^2} \left(\frac{\bar{X}^{(k)} - \bar{Y}^{(k)}}{T_{(-)}^{(k)}} \right)^2,$$

com $\sigma^2 = \sigma_X^2/n_1 + \sigma_Y^2/n_2$.

6. Quando $n_2 > n_1$, retirar à amostra maior $\mathbf{Y}^{(k)} = \left(Y_1^{(k)}, \dots, Y_{n_2}^{(k)} \right)$ um dos elementos de cada vez, achar as n_2 amostras truncadas resultantes $\mathbf{Y}_{(-i)}^{(k)}$, calcular as respectivas variâncias $W_{(m)(i)}^{(k)}$ e $W_{(-)(i)}^{(k)}$, e guardar as médias

aritméticas destas,

$$W_{(m)}^{(k)} = \frac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} W_{(m)(-i)}^{(k)} \quad \text{e} \quad W_{(-)}^{(k)} = \frac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} W_{(-)(-i)}^{(k)}.$$

7. Repetir o procedimento (1) – (6) um número elevado de vezes r ($k = 1, \dots, r$), guardar os vectores de resultados $\left(W_{(m)}^{(k)}\right)_{k=1}^r$, $\left(W_{(-)}^{(k)}\right)_{k=1}^r$, $\left(W_{(m)}^{\prime(k)}\right)_{k=1}^r$ e $\left(W_{(m)}^{\prime(k)}\right)_{k=1}^r$, $m = \pm 1, \pm 2, 0, 4$ e para cada um destes 14 vectores:

- i Obter uma representação gráfica,
- ii Estimar os parâmetros $\hat{\alpha}$ e $\hat{\omega} = 1/\hat{\delta}$ de uma distribuição gama, por máxima verosimilhança, e os seus erros padrões $s(\hat{\alpha})$ e $s(1/\hat{\delta})$, e a partir destes, calcular a estimativa dos graus de liberdade $\hat{\nu} = 2\hat{\alpha}$ e o erro padrão $s(\hat{\nu}) = 2s(\hat{\alpha})$.

3.2.2 Ferramentas

Numa fase exploratória, visualizámos o processo de reamostragem e os valores de algumas das estatísticas $T_{(m)}, T_{(-)}, W_{(m)}$ e $W_{(-)}$ no *Excel*, gerando amostras pseudoaleatórias com a função *RAND()* e o algoritmo de Box-Muller ([37], pp. 899-901). Para amostras pequenas, com ${}^{n_2}A_{n_1} \leq 24$ ($2 \leq n_1 \leq n_2 \leq 4$ ou $n_1 = 2$ e $n_2 = 5$), as estatísticas foram calculadas a partir de todos os emparelhamentos possíveis das amostras. Para amostras maiores, $2 \leq n_1 \leq n_2 \leq 30$, gerámos $r = 100$ pares de amostras normais independentes distintas e $p = 200$ emparelhamentos aleatórios por par. Mesmo com um número tão limitado de termos, era notório que o *Excel* se aproximava do limite da sua capacidade de cálculo, exceptuando para os valores mais modestos de n_1 e n_2 neste intervalo.

Recorremos então ao *R*, um software rápido, gratuito, com inúmeros *packages* disponíveis online que incrementam as funções base, e de interface simples e intuitiva. O *R* permite em poucos comandos reproduzir todos os passos que o *Excel* demoraria mais tempo e mais comandos para reproduzir, ao mesmo tempo que omite passos intermédios. O poder de cálculo superior deste software permite realizar as simulações mais demoradas em pouco tempo, no nosso caso calcular e e com maior fiabilidade numérica. É também fácil guardar resultados e exportá-los

para o *Excel*, onde a sua organização e análise é mais fácil e imediata. Contudo os gráficos base do *R* são simples e pouco personalizáveis sem o uso de *packages* especializados; estes fornecem uma personalização enorme, apesar de não serem muito intuitivos à primeira vista. Outra desvantagem está no facto de não ser possível actualizar as simulações de forma dinâmica. Sempre que pretendemos novos resultados, é necessário correr todo o código novamente.

3.2.3 *Packages* úteis no *R*

De modo a melhorar e adicionar novos recursos ao *R* (versão 3.3.3 de 06-03-2017) podemos recorrer a *packages* feitos por outros utilizadores. Existem hoje muitos, acompanhados de documentação de apoio. Durante a elaboração desta dissertação foram testados vários *packages* para tentar atingir os nossos objectivos, uns com mais sucesso do que outros. Tendo em conta que o nosso problema requer o uso de permutações, reamostragem, simulação, recorreremos a *packages* que consigam automatizar o máximo de passos possíveis, restando apenas o trabalho de análise.

Assim, para complementar o poder estatístico do *R*, recorreremos aos seguintes *packages* que permitiram agilizar certos passos no processo da simulação.

rmngb (v.0.6-1) - inclui o comando *ColVars* que calcula a variância de colunas de matrizes.

psych (v.1.6.9) - inclui os comandos *geometric.mean*, *harmonic.mean*, entre outros.

gtools (v.3.5.0) - inclui as funções *permutations* e *combinations* que criam as matrizes das respectivas permutações ou combinações, com as quais podemos trabalhar e utilizar em cálculos. *Packages* semelhantes apenas dão o número total de permutações ou combinações, nunca chegam a calcular efectivamente quais são. Um *package* muito importante para a nossa simulação.

goftest (v.1.1.1) - inclui comando *fitdist* que fornece estimativas dos parâmetros de diversas distribuições, e os respectivos erros padrões.

fitdistrplus (v.1.0-9) - fornece estatísticas de ajustamento mais variadas, como por exemplo a estatística de Anderson-Darling.

Sim.DiffProc (v.3.7) - permite o uso do comando `gofstat(fitdist())` que obtém estimadores de máxima verosimilhança, e do método dos momentos. Este *package* requer o *package* `fitdistrplus`, pois actua sobre o principal comando que utilizámos deste *package*.

Referimos também os seguintes *packages* que apesar não serem utilizados directamente na nossa simulação, tiveram impacto na nossa investigação.

xlsx (v.0.5.7) - exporta dados e matrizes do *R* para uma folha de *Excel*.

seewave (v.2.0.5) - adiciona funções de análise, manipulação, e edição. Apesar de não utilizarmos nenhuma função que *opackage* disponibiliza, testamos algumas delas que ajudam a retirar informação de matrizes, como a função `rms` que calcula directamente a média quadrática. Podíamos ter utilizado esta função ao calcular $W_{(4)}$, mas é fácil de replicar a operação com comandos mais básicos.

bootstrap (v.2015.2) - permite realizar *bootstrap* e *jackknife* com algumas estatísticas simples como a média.

plyr (v.1.8.4) - O *package* que foi depois substituído pelo *package* `gtools`. Este *package* apenas nos conseguia indicar o número de arranjos ou combinações possíveis.

rGammaGamma (v.1.0.12) - Permite obter estimador de máxima verosimilhança e o estimador do método dos momentos da distribuição gama, através dos comandos `gammaMLE` e `gammaMME` respectivamente.

3.2.4 Passos da simulação

A simulação pode ser demorada, mesmo no *R*, porque o número de emparelhamentos cresce rapidamente com as dimensões das amostras. Foi necessário fazer ajustamentos de modo a encurtar o tempo de execuções e conseguir resultados para todos os casos que pretendíamos simular. Utilizámos por isso três processos de simulação alternativos, conforme os valores de n_1 e n_2 . À medida que aumenta o tempo de simulação, começamos por reduzir o número de

réplicas realizadas, e depois limitamos o número de emparelhamentos percorridos. A escolha entre os processos foi determinada por tentativa e erro com algumas experiências, por forma a equilibrar o tempo de cálculo com os erros padrões que se obtinham para as estimativas.

1. **Processo I e Processo II** - Consideram todos os ${}^{n_2}A_{n_1}$ emparelhamentos, diferindo apenas no número de réplicas. O Processo I é utilizado quando o número de emparelhamentos é pequeno o suficiente para manter as simulações céleres, e faz 10.000 réplicas. O Processo II substitui o Processo I quando o número de emparelhamentos se aproxima de 100.000, podendo aplicar-se um pouco antes.
2. **Processo III** - Baseia-se em 20.000 réplicas, e amostras de 75.000 emparelhamentos (podendo repetir-se alguns). Utiliza-se quando ${}^{n_2}A_{n_1}$ se aproxima de 10^6 . Esta combinação de arranjos e réplicas foi a encontrada que equilibra tempo de simulação e erro padrão dos resultados.
3. **Jackknife incompleto** - Para aplicá-lo fazemos uma pequena alteração no código de modo a eliminar uma observação da amostra maior antes selecionar os arranjos para aplicar um dos Processos I, II ou III (conforme o número de emparelhamentos). Geram-se as matrizes de permutações possíveis retirando previamente um elemento de cada vez.

A primeira coisa a fazer no *R* é descarregar e carregar os *packages* que iremos utilizar na nossa simulação, por exemplo

```
install.packages('rmngb')
library(rmngb)
```

Explicamos o processo de simulação para o “**Processo I**”; os dos restantes processos apenas variam em alguns passos, que indicamos mais adiante. Em primeiro lugar há que definir os parâmetros das variáveis a gerar (média e variância), as dimensões das amostras e o número de réplicas, e calcular algumas constantes auxiliares. Por exemplo, para $n_1 = 2, n_2 = 2, \mu_X = \mu_Y = 0, \sigma_X = \sigma_Y = 1$ e $r = 10.000$ réplicas,

```

n1 <- 2 ; n2 <- 2 ; mu1 <- 0; mu2 <- mu1; sig1 <- 1; sig2 <-1
Sigma2 <- (sig1^2/n1) + (sig2^2/n2)
c <- sqrt (n1/n2)
cons <- (1 / Sigma2 )
r <-10.000
p<-(factorial(n2) / (factorial(n2-n1)))
p2 <- factorial (n2)

```

Com os parâmetros escolhidos podemos começar a nossa simulação. O comando *replicate* itera as operações entre (). Esta é a base da nossa simulação; *replicate(r, Wk)* repete *r* vezes o argumento *Wk*, que pode ser um comando simples, ou no nosso caso, uma série de comandos. Os resultados da iteração são guardados numa matriz — ou mais precisamente num *dataframe* — a que chamamos *W*.

```
W <- replicate (r, Wk <- { })
```

O primeiro passo da simulação é gerar um par de amostras normais, com os parâmetros já escolhidos, e calcular a sua média amostral através do comando *mean*. Depois de obtidas as *p* permutações, há que criar uma matriz para dispor os dados e calcular a média de cada coluna.

```

X <- rnorm (n1 ,mu1 , sig1 ); mX <- mean(X)
Y <- rnorm (n2 ,mu2 , sig2 ); mY <- mean(Y); vY <- var(Y)
A <- matrix(permutations (n2 ,n1 ,Y) , n1 ,p ,byrow=T);
mA <- colMeans(A)

```

A função *matrix(a, b, c, byrow =)* funciona com três principais argumentos. O argumento *a* é um *dataframe* que contém os elementos a distribuir pelas células da matriz; o argumento *b* indica o número de linhas da matriz; o argumento *c* indica o número de colunas da matriz; o argumento *byrow* define como são dispostos os valores pela matriz: *byrow = T (TRUE)* significa que a matriz é preenchida por linha. O comando *permutations(d, e, f)* gera a uma matriz com todos os arranjos (permutações) possíveis de um vector, dispostos por linha; os argumentos *d* e *e* não são nada mais que os índices dos arranjos dA_e , e *f* indica o vector de valores a permutar. Segue-se um pequeno exemplo

```

> x
[1] 4 5
> y
[1] 1 2 3
> permutations (3,2,y)
      [,1] [,2]
[1,]    1    2
[2,]    1    3
[3,]    2    1
[4,]    2    3
[5,]    3    1
[6,]    3    2
> matrix(permutations (3,2,y), 2, 6,byrow=T)
      [,1] [,2] [,3] [,4] [,5] [,6]
[1,]    1    1    2    2    3    3
[2,]    2    3    1    3    1    2
> |

```

Em seguida, calculamos os valores de U e calculamos a respectiva variância e desvio padrão. O R efectua os cálculos das subtrações entrada a entrada, logo não há problemas em indicar a operação da maneira mais simples. Calculamos depois a variância e desvio padrão de cada coluna.

```

U <- X - c * A
vU <- colVars (U)
sU <- sqrt (vU)

```

E com estes valores calculamos

```

W- <- cons* ( 1/p* ( (mX-mY) / (mean( (mX-mA)/(sU) ) ) ) )^2 )
W-2 <- cons* ((1/p * sum(sU^(-2)))^(1/-2))^2 /n1
W-1 <- cons* harmonic.mean(sU) ^2 /n1
W0 <- cons* geometric.mean(sU)^2) / n1
W1 <- cons* mean(sU)^2 /n1
W2 <- cons* mean(vU) /n1
W4 <- cons* mean(vU^2)^(1/2) /n1

```

e guardamos estes resultados num vector Wk , que contém os valores das estatísticas W_0 para uma dada iteração.

```

Wk <- c (W-,W-2,W-1,W0,W1,W2,W4)

```

O comando *replicate* (ver início desta secção) distribui então os sucessivos resultados Wk das r iterações pelas linhas de W . Cada uma destas é formada

pelas valores provenientes de gerar um novo par de amostras aleatórias, achar os arranjos da amostra maior truncada e calcular vectores U_j e as estatísticas \bar{S}_0^2 e W_0 .

Neste momento o objecto W é considerado um *dataframe* pelo R , logo há que convertê-lo numa matriz, para poder operar com os valores de cada coluna em separado. Os comandos que se seguem tratam de organizar as matrizes de resultados, nomeando e separando por coluna as estatísticas obtidas. É necessário que no comando *matrix()* esteja especificado o número de colunas (7, pois temos sete estatísticas simuladas) e de linhas (r , o número de réplicas). Atribuímos com o comando *colnames* o nome de cada estatística a cada coluna e com o comando *rownames* numeramos as linhas da matriz de 1 a r .

```
W <- matrix (W, ncol=7,nrow=r ,byrow=T)
colnames (W)<- c ("W(-)", "W(-2)", "W(-1)", "W(0)", "W(1)", "W(2)", "W(4)")
rownames (W)<- seq (1:r)
```

Por fim para cada um dos W_0 estimam-se os parâmetros de uma gama pelo método de máxima verosimilhança, utilizando a função do *package fitdistrplus*, *fitdist(a,b,c)*. O argumento a representa o vector numérico dos dados; o argumento b identifica a distribuição, entre aspas, que pretendemos ajustar; e o argumento c o método de estimação, “*mle*” (*maximum likelihood estimation*) no nosso caso. Na linguagem do R os elementos de uma matriz designam-se por $[i, j]$ onde i é o número da linha e j o número da coluna. Se algum dos argumentos for omitido, o R considera todas as linhas ou colunas, consoante o argumento que foi deixado vazio; por outras palavras, $[i,]$ designa a linha i da matriz e $[, j]$ designa a coluna j .

```
fitdist ( W[,1] , "gamma" , method =c ("mle"))
fitdist ( W[,2] , "gamma" , method =c ("mle"))
fitdist ( W[,3] , "gamma" , method =c ("mle"))
fitdist ( W[,4] , "gamma" , method =c ("mle"))
fitdist ( W[,5] , "gamma" , method =c ("mle"))
fitdist ( W[,6] , "gamma" , method =c ("mle"))
fitdist ( W[,7] , "gamma" , method =c ("mle"))
```

Um exemplo dos resultados obtidos seria

```

> fitdlist( W[,1], "gamma" , method =c("mle"))
Fitting of the distribution ' gamma ' by maximum likelihood
Parameters:
      estimate Std. Error
shape 0.4794354 0.00557545
rate  0.4732465 0.00877503
> |

```

A função `fitdlist()` apresenta os parâmetros da gama como *shape* (α) e *rate* ($\omega = 1/\delta$), e os respectivos erros padrões estimados, a partir dos quais se calculam a estimativa dos graus de liberdade $\hat{\nu}$ e o seu erro padrão $s(\hat{\nu})$. Este valores foram depois copiados manualmente para folhas de *Excel*.

A versão “**Processo II**” da simulação resume-se a escolher 5.000 réplicas em vez de 10.000,

```
r <- 5000
```

Para proceder ao “**Processo III**” são necessárias alterações em alguns passos. Geramos os parâmetros como no “**Processo I**”, mas desta vez escolhendo $r = 20.000$ réplicas. Temos que adaptar o comando de modo a que a matriz de permutações da amostra maior escolha permutações aleatoriamente:

```

X <- rnorm(n1, mu1, sig1); mX <- mean(X)
Y <- rnorm(n2, mu2, sig2); mY <- mean(Y); vx2 <- var(Y)
A <- matrix( replicate(75000, sample(Y, n1, replace=FALSE)),
n1, 75000, byrow=F);
mA <- colMeans(A)

```

O comando que usámos para este fim, `sample(a, b, replace =)`, funciona com dois principais argumentos. O argumento a é o vector de onde vamos retirar uma amostra; o argumento b indica o número de elementos dessa amostra; o argumento `replace =` indica se queremos uma amostragem com ou sem reposição, no nosso caso sem reposição, portanto `FALSE`. A amostragem é escolhida aleatoriamente; se repetirmos o comando em geral obtemos subamostras diferentes. Contudo é possível a mesma subamostra repetir-se na matriz completa, como podemos verificar no exemplo que se segue. Ao reamostrar um vector $X = (1, 2, 3, 4, 5)$, retirando dois elementos, e repetindo a reamostragem 10 vezes, podemos observar que a mesma sequência de observações se repetiu.

```

> X2 <-matrix(replicate(10,sample(x2,n1,replace=FALSE)),n1,10,byrow=F)
> X2
  [,1] [,2] [,3] [,4] [,5] [,6] [,7] [,8] [,9] [,10]
[1,]  2  2  2  5  4  1  5  3  2  1
[2,]  4  5  3  3  2  5  2  4  5  5
[3,]  1  1  5  2  5  4  4  2  4  4
> X2 <-matrix(replicate(10,sample(x2,n1,replace=FALSE)),n1,10,byrow=F)
> X2
  [,1] [,2] [,3] [,4] [,5] [,6] [,7] [,8] [,9] [,10]
[1,]  4  3  2  4  3  5  2  4  5  5
[2,]  1  4  3  2  2  3  5  5  3  3
[3,]  3  5  4  5  1  4  1  3  4  2

```

O “*jackknife incompleto*” requer as suas próprias adaptações. Este método segue os mesmos passos que as simulações sem *jackknife*, e as mesmas alterações entre passos, no que toca à alteração do r . A diferença ocorre quando estamos a construir a matriz dos arranjos da amostra maior, visto que antes de construir os arranjos temos que retirar um elemento, aleatoriamente, obter os arranjos possíveis sem esse elemento, e repetir o processo retirando um elemento de cada vez.

```

A_1 <- matrix ( permutations (n2,n1, combinations(n2,
n2-1,Y)) ,n1, p2,byrow=T);
mX2_1 <- colMeans(X2_1)

```

Desta vez o argumento c do comando $permutation(a,b,c)$ não é um vector de valores, mas sim uma matriz. O argumento c , $combinations(d,e,f)$ gera a matriz das combinações e recebe três outros argumentos: d e e são os índices das combinações ${}^d C_e$; e f é o vector dos valores que vamos combinar, para o “**Processo I e II**”. Para o “**Processo III**” apenas o argumento do $sample$ é trocado pelo $combinations$.

Se quisermos exportar os valores simulados dos W 's do R para o *Excel*, utilizando o *package xlsx*, para melhor análise dos mesmos no *Excel*, é necessário aplicar uma série de comandos. Visto que este *package* funciona com base *Java*, assegurar que este software está instalado é um passo a verificar antes de tentar fazer qualquer exportação de dados. Em seguida, é necessário indicar ao R o endereço de localização do programa no nosso computador. Com esta operação concluída podemos então exportar dados do R .

```

Sys.setenv(JAVA_HOME="C:\\Programas\\Java\\jre1.8.0_171\\")
setwd("C:/Users/Utilizador/Desktop")
write.xlsx2(Z, "teste.xlsx")

```

O comando `Sys.setenv(JAVA_HOME =)` utiliza-se para indicar ao *R* o caminho de instalação do *JAVA*. O comando `setwd()` recebe o caminho para a pasta onde queremos guardar o nosso ficheiro, que no exemplo dado é o ambiente de trabalho do utilizador. O último comando `write.xlsx2(a,"b.xlsx")` recebe dois argumentos. O argumento *a* indica o vector ou matriz ou dataframe que queremos exportar; o argumento *b* indica o nome do ficheiro que será criado, ou actualizado, para receber os dados do argumento *a*. O comando `write.xlsx2` reconhece mais argumentos opcionais que ajudam a uma exportação mais específica, como o nome da folha onde os dados serão colocados.

3.3 Resultados e discussão

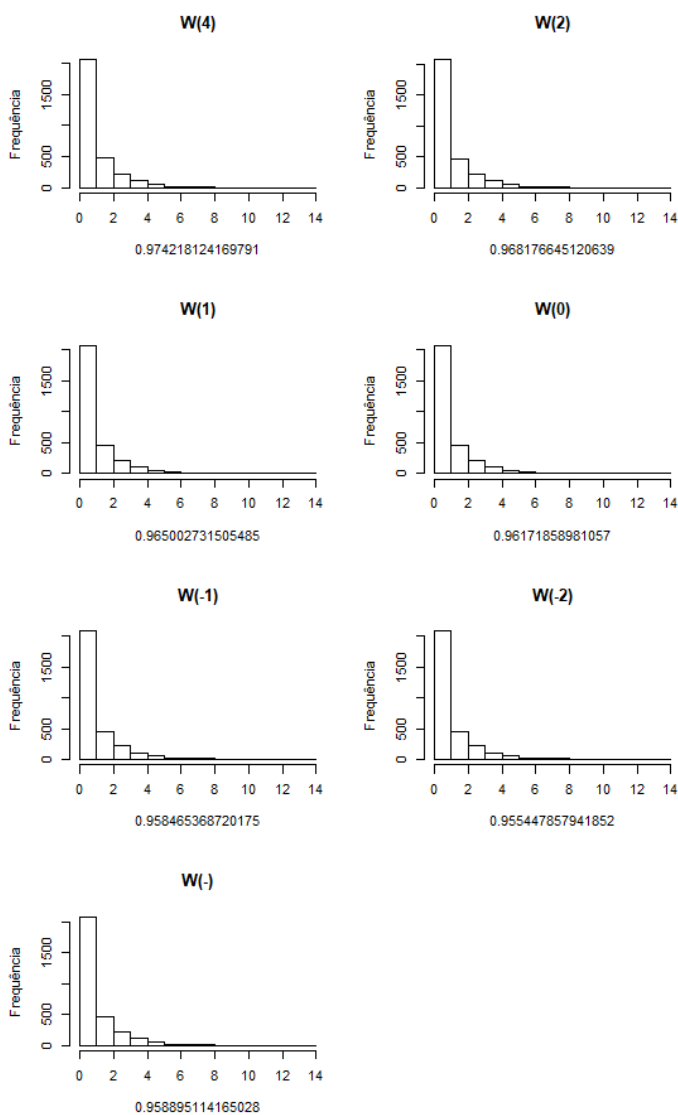
Apresentamos os resultados das simulações — graus de liberdade e erros padrões — nas Tabelas 3.2 – 3.15. Os erros padrões são semelhantes para todas as estatísticas. Apenas se nota uma diferença entre os valores máximos do erro padrão das estatísticas simples $T_{(m)}$, $T_{(-)}$ e os erros padrões máximos das estatísticas com *jackknife* incompleto $T'_{(m)}$ e $T'_{(-)}$ nos processos II e III. Isso parece-nos explicar-se pelo maior número de casos simulados para as primeiras, combinado com a menor exaustividade dos métodos II e III.

Para ambas as estatísticas $T_{(2)}$ e $T'_{(2)}$ obteve-se uma boa aproximação entre as estimativas dos graus de liberdade e os graus de liberdade teóricos. Designamos as estimativas obtidas na simulação por “graus de liberdade simulados”, para indicar que foram obtidos como estimativas de máxima verosimilhança para uma distribuição gama, e não pela fórmula de Satterthwaite empírica (1.23), e mantemos para estas duas estatísticas as notações $T_{(2)}$ e $T'_{(2)}$ a fim de evidenciar que foram calculadas pelo mesmo processo de reamostragem que as restantes — e não por simples aplicação da fórmula da estatística de Welch (1.22). A intenção foi que os resultados fossem comparáveis com os das restantes estatísticas do ponto de vista da precisão numérica.

Destacam-se pela negativa os resultados para as estatísticas $T_{(-1)}$ e $T'_{(-1)}$, sistematicamente inferiores aos de $T_{(2)}$ e $T'_{(2)}$ e da maioria das outras estatísticas por uma larga margem. Melhoram um pouco apenas nos casos em que $n_1 = n_2$, mas então $T_{(-1)} = T_{(-)}$.

Nas primeiras páginas dos Anexos incluímos histogramas dos valores *W* obtidos

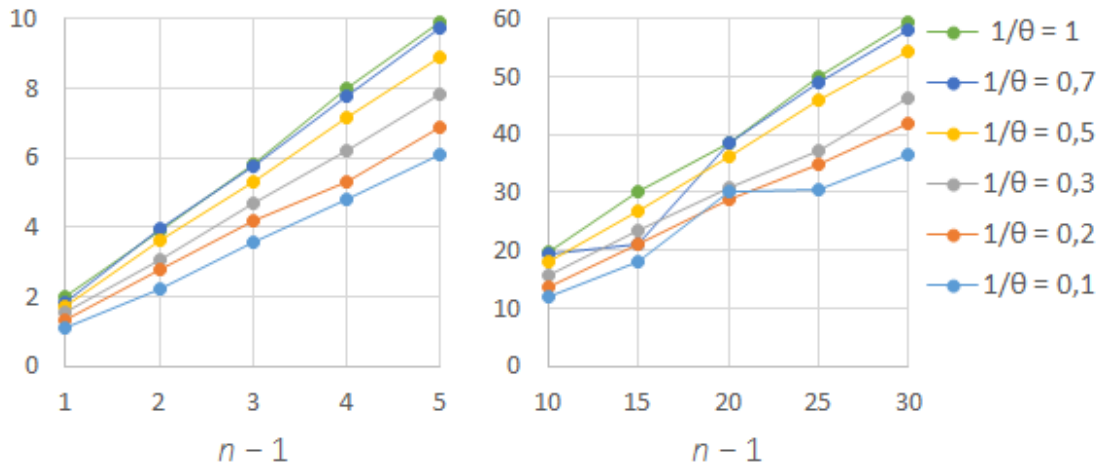
nas simulações para algumas combinações (n_1, n_2, θ^{-1}) , dos quais reproduzimos alguns na página seguinte (Figuras 3.5–3.9). Embora limitados — não resultaram da simulação principal, e na sua maioria foram feitos com um número bastante menor de réplicas —, são sugestivos.



Histogramas das variâncias normalizadas $W_{(m)}$ e $W_{(-)}$ para $n_1 = 13$, $n_2 = 16$, $\mu_1 = \mu_2 = 0$ e $\theta = 1$, com base em $p = 75.000$ emparelhamentos e $r = 3.000$ réplicas. O valor sob o eixo horizontal é a média aritmética para todas as r réplicas.

Uma comparação mais completa e precisa das estatísticas, para o caso de amostras equilibradas, encontra-se nos gráficos das Figuras 3.10 – 3.15, feitos com os resultados das simulações principais apresentados nas tabelas, dos quais aqui apresentamos os referentes a $T_{(2)}$, a estatística de Welch. As estimativas de ν para $T_{(2)}$ aproximam-se bem dos valores teóricos, e são mais uma vez as maiores, embora os resultados de $T_{(4)}, T_{(1)}$ e $T_{(0)}$ se lhes aproximem.

Em todos estes gráficos nota-se também um crescimento da variabilidade com n , ao ponto de terem sido necessárias escalas distintas para apresentar os resultados para $2 \leq n \leq 6$ e para $11 \leq n \leq 31$. Parece-nos provável que este aumento da variância das estimativas se explique, novamente, pela necessidade que tivemos de reduzir o número de réplicas feitas e de emparelhamentos percorridos à medida que aumentava n .



Graus de liberdade simulados de $T_{(2)}$ como função de n para amostras da mesma dimensão.

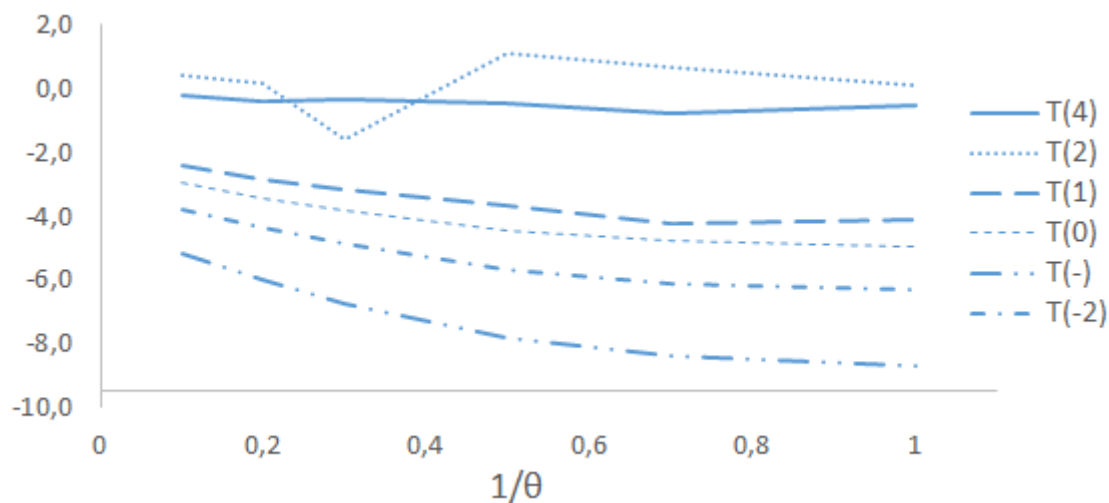


Figura 3.1: Diferença entre os graus de liberdade simulados das estatísticas $T_{(m)}$ e $T_{(-)}$ e os graus de liberdade teóricos de T_{Welch} , para $n_1 = n_2 = 26$

Enquanto em geral os graus de liberdade de $T_{(2)}$ são próximos dos teóricos, para a maioria das outras estatísticas estes tendem a ficar aquém dos teóricos, com uma diferença — que designaremos por “viés” — que tende a aumentar à medida que θ^{-1} se aproxima de 1.

Os gráficos das Figuras 3.1–3.3 e (nos Anexos) 3.16–3.25 permitem comparar mais directamente as características das variantes das estatísticas de Scheffé em estudo. Excluimos destes $T_{(-1)}$ e $T_{(-1)}$ por os seus resultados serem muito inferiores aos das restantes.

Nota-se bem nestes gráficos que a variância dos graus de liberdade estimados a partir dos valores simulados das estatísticas aumenta com θ^{-1} no intervalo]0 1].

Os valores estimados para ν para as estatísticas $T_{(4)}$, $T_{(1)}$ e $T_{(0)}$ são com frequência próximos dos de $T_{(2)}$, ainda que inferiores. Pelo contrário, $T_{(-2)}$ e $T_{(-)}$ tendem a ter graus de liberdade estimados pouco competitivos (em especial a segunda).

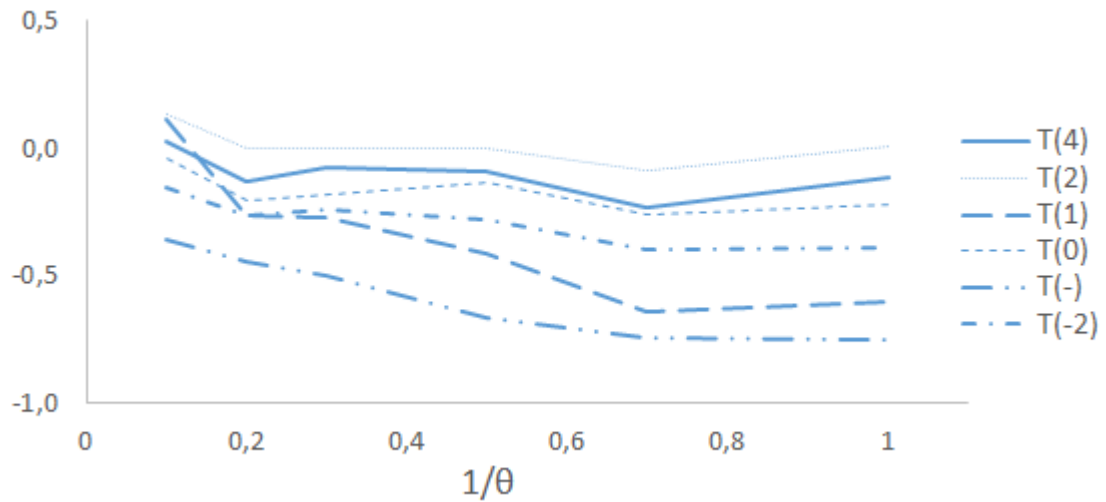


Figura 3.2: Diferença entre os graus de liberdade simulados das estatísticas $T_{(m)}$ e $T_{(-)}$ e os graus de liberdade teóricos de T_{Welch} , para $n_1 = 4, n_2 = 13$

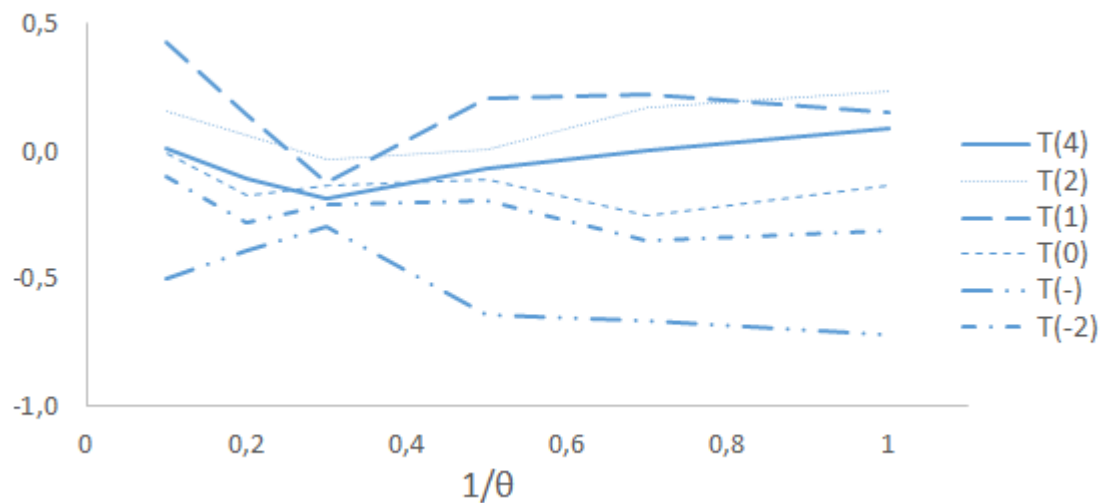


Figura 3.3: Diferença entre os graus de liberdade simulados das estatísticas $T'_{(m)}$ e $T'_{(-)}$ e os graus de liberdade teóricos de T_{Welch} , para $n_1 =, n_2 = 13$

Enquanto os graus de liberdade de $T_{(0)}$ tendem a ter um viés negativo, a variância desta estatística parece geralmente moderada. Em contrapartida, as estatísticas $T_{(4)}$ e $T_{(1)}$ conseguem por vezes superar mesmo $T_{(2)}$ em graus de liberdade, mas com frequência à custa de maior variância.

Outra comparação que se pode fazer a partir deste conjunto de gráficos é entre as estatísticas T e T' , infelizmente menos abonatória: o *jackknife* incompleto pouco contribui para reduzir o viés, e parece fazer aumentar quase sempre a variância. Porém não consideramos esses casos passíveis de conclusão positiva sobre o efeito do *jackknife* incompleto. A Tabela 3.1 tem uma síntese das nossas observações a respeito do efeito do *jackknife* incompleto nestas situações. O viés de $T_{(1)}$ parece melhorar por vezes quando n_1 é pequeno, e o de $T_{(-2)}$ para n_1 elevado.

	viés	variância
$T_{(2)}$	=	=
$T_{(4)}$	≥	≥
$T_{(1)}$	≤	≤
$T_{(0)}$	=	=
$T_{(-)}$	=	≥
$T_{(-2)}$	≤	?

Tabela 3.1: Quadro resumo do efeito do *jackknife* incompleto: “=” fica igual; “≥” piora; “≤” melhora; “?” inconclusivo.

Podem-se apontar várias limitações à exploração que fizemos:

- *Qualidade do ajustamento*: Supusemos que a distribuição das variâncias \bar{S}_0^2 podia ser bem aproximada por uma gama, sem avaliar o ajustamento. Não encontramos implementados computacionalmente testes de ajustamento adequados para a gama quando ambos os parâmetros são estimados.

- *Viés das variâncias*: As médias potência \bar{S}_0^2 apenas são estimadores centrados de

$\sigma^2 = \text{var}(\bar{X} - \bar{Y})$ no caso de $m = 2$. Para $m > 2$ é de esperar um viés positivo e para $m < 2$ um viés negativo. Também no caso de $\bar{S}_{(-)}^2$ as simulações apontam para a existência de um viés importante. Não procurámos corrigir este viés.

- *Jackknife incompleto*: O *jackknife* propriamente dito inclui uma correção ao viés

$$S_0^{J2} = n_2 \bar{S}_0^2 - (n_2 - 1) \bar{S}'_0^2$$

que não chegámos a implementar por falta de tempo.

- *Viés de $\hat{\nu}$* : Os graus de liberdade foram estimados por máxima verosimilhança

com a função *fitdist* do *package goftest* do *R*. Embora melhor que outros métodos, a máxima verossimilhança pode ser instável quando ν é pequeno, e tende a ter viés positivo ([22], que recomendam $\nu \geq 5$).

- *Tempo de simulação*: Para os valores maiores de n_1 e n_2 a simulação é demorada. Note-se que fizemos uma simulação distinta para cada combinação (n_1, n_2, θ) . Uma programação mais eficiente poderá reduzir a duração das simulações.

Bibliografia

- [1] ABRAMOWITZ, M., AND STEGUN, I. A. *Handbook of mathematical functions: with formulas, graphs, and mathematical tables*. Courier Corporation, 1964.
- [2] ASPIN, A. A. An examination and further development of a formula arising in the problem of comparing two mean values. *Biometrika* 35, 1/2 (1948), 88–96.
- [3] ASPIN, A. A., AND WELCH, B. Tables for use in comparisons whose accuracy involves two variances, separately estimated. *Biometrika* 36, 3/4 (1949), 290–296.
- [4] BARNETT, V. *Sample Survey: Principles and Methods*. Hodder Arnold Publication. Edward Arnold, 1991.
- [5] BARTLETT, M. The effect of non-normality on the t distribution. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* (1935), vol. 31, Cambridge University Press, pp. 223–231.
- [6] BARTLETT, M. The information available in small samples. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* (1936), vol. 32, Cambridge University Press, pp. 560–566.
- [7] BRILHANTE, M., PESTANA, D., ROCHA, J., VELOSA, S., AND ROCHA, L. *Inferência Estatística sobre a Localização Usando a Escala*. Sociedade Portuguesa de Estatística, Ponta Delgada, 2011.
- [8] BRILHANTE, M. F., GOMES, M. I., AND PESTANA, D. A simple generalisation of the Hill estimator. *Computational Statistics & Data Analysis* 57, 1 (2013), 518–535.

-
- [9] CASELLA, G., AND BERGER, R. L. *Statistical inference*. Duxbury Pacific Grove, CA, 2002.
- [10] COBB, G. W. *Design and analysis of experiments*. Springer-Verlag, New York, 1998.
- [11] COCHRAN, W. G. *Sampling techniques*. John Wiley & Sons, 2007.
- [12] COELHO, J. P., CUNHA, L., AND MARTINS, I. L. *Inferência estatística, com utilização do SPSS e G*Power*. Edições Sílabo, 2008.
- [13] DAVENPORT, J., AND WEBSTER, J. The Behrens-Fisher problem, an old solution revisited. *Metrika* 22, 1 (1975), 47–54.
- [14] DELIGNETTE-MULLER, M. L., AND DUTANG, C. fitdistrplus: An R package for fitting distributions. *Journal of Statistical Software* 64, 4 (2015), 1–34.
- [15] DRAGULESCU, A. A. xlsx: Read, write, format excel 2007 and excel 97/2000/xp/2003 files. R package version 0.5.7.
- [16] DUNNETT, C. W. Pairwise multiple comparisons in the unequal variance case. *Journal of the American Statistical Association* 75, 372 (1980), 796–800.
- [17] FAIRFIELD SMITH, H. The problem of comparing the result of two experiments with unequal errors. *Journal Council for Scientific and Industrial Research* (1936), 211–212.
- [18] FARAWAY, J., MARSAGLIA, G., MARSAGLIA, J., AND BADDELEY, A. *goftest: Classical Goodness-of-Fit Tests for Univariate Distributions*, 2017. R package version 1.1-1.
- [19] GAYLOR, D., AND HOPPER, F. Estimating the degrees of freedom for linear combinations of mean squares by Satterthwaite’s formula. *Technometrics* 11, 4 (1969), 691–706.
- [20] GUIDOUM, A. C., AND BOUKHETALA, K. Sim.diffproc: Simulation of diffusion processes. R package version 3.7.

-
- [21] HOGG, R. V., AND TANIS, E. A. *Probability and statistical inference*. Macmillan New York, 1977.
- [22] JOHNSON, N. L., KOTZ, S., AND BALAKRISHNAN, N. *Continuous Univariate Distributions*. Wiley New York, 1997.
- [23] KENDALL, M. G., AND STUART, A. *The advanced theory of statistics, II: Inference and Relationship*. Griffin, 1961.
- [24] KLUGMAN, S. A., PANJER, H. H., AND WILLMOT, G. E. *Loss models: from data to decisions*. John Wiley & Sons, 2012.
- [25] KOPKA, H., AND DALY, P. W. *A guide to LATEX*. Addison-Wesley Harlow, UK, 1999.
- [26] LEE, A. F., AND GURLAND, J. Size and power of tests for equality of means of two normal populations with unequal variances. *Journal of the American Statistical Association* 70, 352 (1975), 933–941.
- [27] LEHMANN, E. L. “Student” and small-sample theory. In *Selected works of EL Lehmann*. Springer, 2012, pp. 1001–1008.
- [28] LINDGREN, B. *Statistical theory*. Routledge, 2017.
- [29] MCINTOSH, A. The jackknife estimation method. *arXiv preprint arXiv:1606.00497* (2016).
- [30] MELLO, F. G. *Probabilidades e estatística: Conceitos e métodos fundamentais*, vol. I. Lisboa: Escolar Editora, 2000.
- [31] MONTGOMERY, D. C. *Design and analysis of experiments*. John Wiley & Sons, 2017.
- [32] MOORE, D. S., CRAIG, B. A., AND MCCABE, G. P. *Introduction to the Practice of Statistics*. WH Freeman, 2003.
- [33] MOSER, B. K., STEVENS, G. R., AND WATTS, C. L. The two-sample t test versus Satterthwaite’s approximate F test. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 11 (1989), 3963–3975.

-
- [34] MOSTELLER, F., AND ROURKE, R. *Estatísticas Firmes*. Lisboa: Edições Salamandra, 1993.
- [35] ORIGINAL, S., FROM STATLIB, AND BY ROB TIBSHIRANI. R PORT BY FRIEDRICH LEISCH. bootstrap: Functions for the Book 'An Introduction to the Bootstrap' . R package version 2015.2.
- [36] PESTANA, D., AND VELOSA, S. Modificação do teste de Scheffé para comparação de valores médios de gaussianas com variâncias distintas. *Novos Rumos em Estatística - Actas do IX Congresso anual da Sociedade Portuguesa de Estatística* (2002), 427–438.
- [37] PESTANA, D., AND VELOSA, S. *Introdução à probabilidade e à estatística*, vol. I. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2010.
- [38] PIERUCCI, A. F. rmngb: Miscellaneous collection of functions for medical data analysis. R package version 0.6-1.
- [39] QUENOUILLE, M. H., ET AL. Problems in plane sampling. *The Annals of Mathematical Statistics* 20, 3 (1949), 355–375.
- [40] R DEVELOPMENT CORE TEAM. *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, 2008. ISBN 3-900051-07-0.
- [41] RAO, P. V. *Statistical research methods in the life sciences*. Duxbury Press, 1998.
- [42] REVELLE, W. psych: Procedures for psychological, psychometric, and personality research. R package version 1.6.9.
- [43] ROHATGI, V. K. *Statistical inference*. Courier Corporation, 2003.
- [44] SATTERTHWAITE, F. E. Synthesis of variance. *Psychometrika* 6, 5 (1941), 309–316.
- [45] SATTERTHWAITE, F. E. An approximate distribution of estimates of variance components. *Biometrics Bulletin* 2, 6 (1946), 110–114.

-
- [46] SCHEFFÉ, H. On solutions of the Behrens-Fisher problem, based on the t -distribution. *The Annals of Mathematical Statistics* 14, 1 (1943), 35–44.
- [47] SCHEFFÉ, H. *The analysis of variance*. John Wiley and Sons Inc, 1959.
- [48] SCHEFFÉ, H. A note on the Behrens-Fisher problem. *The Annals of Mathematical Statistics* 15, 4 (1944), 430–432.
- [49] SCHEFFÉ, H. Practical solutions of the Behrens-Fisher problem. *Journal of the American Statistical Association* 65, 332 (1970), 1501–1508.
- [50] STUDENT. The probable error of a mean. *Biometrika* (1908), 1–25.
- [51] SUEUR, J., AUBIN, T., AND SIMONIS, C. Seewave: a free modular tool for sound analysis and synthesis. *Bioacoustics* 18 (2008), 213–226.
- [52] TRICHE, JR., T. rgammagamma: Gamma convolutions for methylation array background correction. R package version 1.0.12.
- [53] VELOSA, S. *O Problema de Behrens-Fisher*. Livraria Escolar Editora Lisboa, 2003.
- [54] VENABLES, W. N., AND SMITH, D. M. The R development core team. *An Introduction to R. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria* (2006).
- [55] WACKERLY, D., MENDENHALL, W., AND SCHEAFFER, R. *Mathematical statistics with applications*. 2007.
- [56] WARNES, G. R., BOLKER, B., AND LUMLEY, T. gtools: Various r programming tools. R package version 3.5.0.
- [57] WELCH, B. The specification of rules for rejecting too variable a product, with particular reference to an electric lamp problem. *Supplement to the Journal of the Royal Statistical Society* 3, 1 (1936), 29–48.
- [58] WELCH, B. The significance of the difference between two means when the population variances are unequal. *Biometrika* 29, 3/4 (1938), 350–362.

-
- [59] WELCH, B. The generalization of "Student"'s problem when several different population variances are involved. *Biometrika* 34, 1/2 (1947), 28–35.
- [60] WELCH, B. Further note on Mrs. Aspin's tables and on certain approximations to the tabled function. *Biometrika* 36, 3/4 (1949), 293–296.
- [61] WELCH, B. Note on some criticisms made by Sir Ronald Fisher. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)* 18 (1956), 297–302.
- [62] WICKHAM, H. The split-apply-combine strategy for data analysis. *Journal of Statistical Software* 40, 1 (2011), 1–29.

Anexos

```
#####
#Packages
#####

library(rmngb)
library(psych)
library(bootstrap)
library(plyr)
Sys.setenv(JAVA_HOME="C:\\Programas\\Java\\jre1.8.0_171\\")
library("xlsx")
library(gtools)
library(seewave)
library(fitdistrplus)
library(goftest)
library(Sim.DiffProc)
library(rGammaGamma)

#####
#Parametros
#####

n1 <- 2 ; n2 <- 6; mu1 <- 0; mu2 <- mu1; sig1 <- 10; sig2 <-1
Sigma2 <- (sig1^2/n1) + (sig2^2/n2) # (sig1/sig2)
c <- sqrt (n1/n2)
cons <- (Nu / Sigma2 / b)

r<-3000
p<-(factorial(n2) / (factorial(n2-n1)))
p2 <- factorial (n2)

#####
#Calculo dos W
#####

W <- replicate (r ,

Wk <- {

X <- rnorm(n1,mu1,sig1); mX <- mean(X)
Y <- rnorm(n2,mu2,sig2); mY <- mean(Y); vY <- var(Y)
A <- matrix(permutations (n2,n1,Y), n1,p,byrow=T); mA <- colMeans(A)
#A <- matrix(replicate(75000,sample(Y,n1,replace=FALSE)),n1,75000,byrow=F);
mA <- colMeans(A)
#A <- matrix ( permutations (n2,n2-1, combinations(n2,n2-1,Y)) ,
n2-1, p2,byrow=T); mA <- colMeans(A)
```

```

U <- X - c * A
vU <- colVars (U)
sU <- sqrt (vU)

W_ <- cons* (((mX-mY)/ (mean((mX-mA)/sU))))^2 /n1
W_2 <- cons* harmonic.mean(vU)/ n1
W_1 <- cons* harmonic.mean(sU) ^2/n1
W0 <- cons* geometric.mean(sU)^2/ n1
W1 <- cons* mean(sU)^2/n1
W2 <- cons* mean(vU)/n1
W4 <- cons* mean(vU^2)^(1/2)/n1

Wk <- c(W_,W_2,W_1,W0,W1,W2,W4
})

W <- matrix (W, ncol=7,nrow=r,byrow=T)
colnames(W)<- c("W(-)", "W(-2)", "W(-1)", "W(0)", "W(1)", "W(2)", "W(4)")
rownames(W)<- seq(1:r)

fitdist( W[,1], "gamma" , method =c("mle"))
fitdist( W[,2], "gamma" , method =c("mle"))
fitdist( W[,3], "gamma" , method =c("mle"))
fitdist( W[,4], "gamma" , method =c("mle"))
fitdist( W[,5], "gamma" , method =c("mle"))
fitdist( W[,6], "gamma" , method =c("mle"))
fitdist( W[,7], "gamma" , method =c("mle"))

```

Listing 3.1: *Script* utilizado no *R* para fazer as simulações, exemplificado para o processo III com $n_1 = 2$, $n_2 = 6$, $\mu_X = \mu_Y = 0$, $\sigma_X = 10$, $\sigma_Y = 1$ e $r = 3.000$.

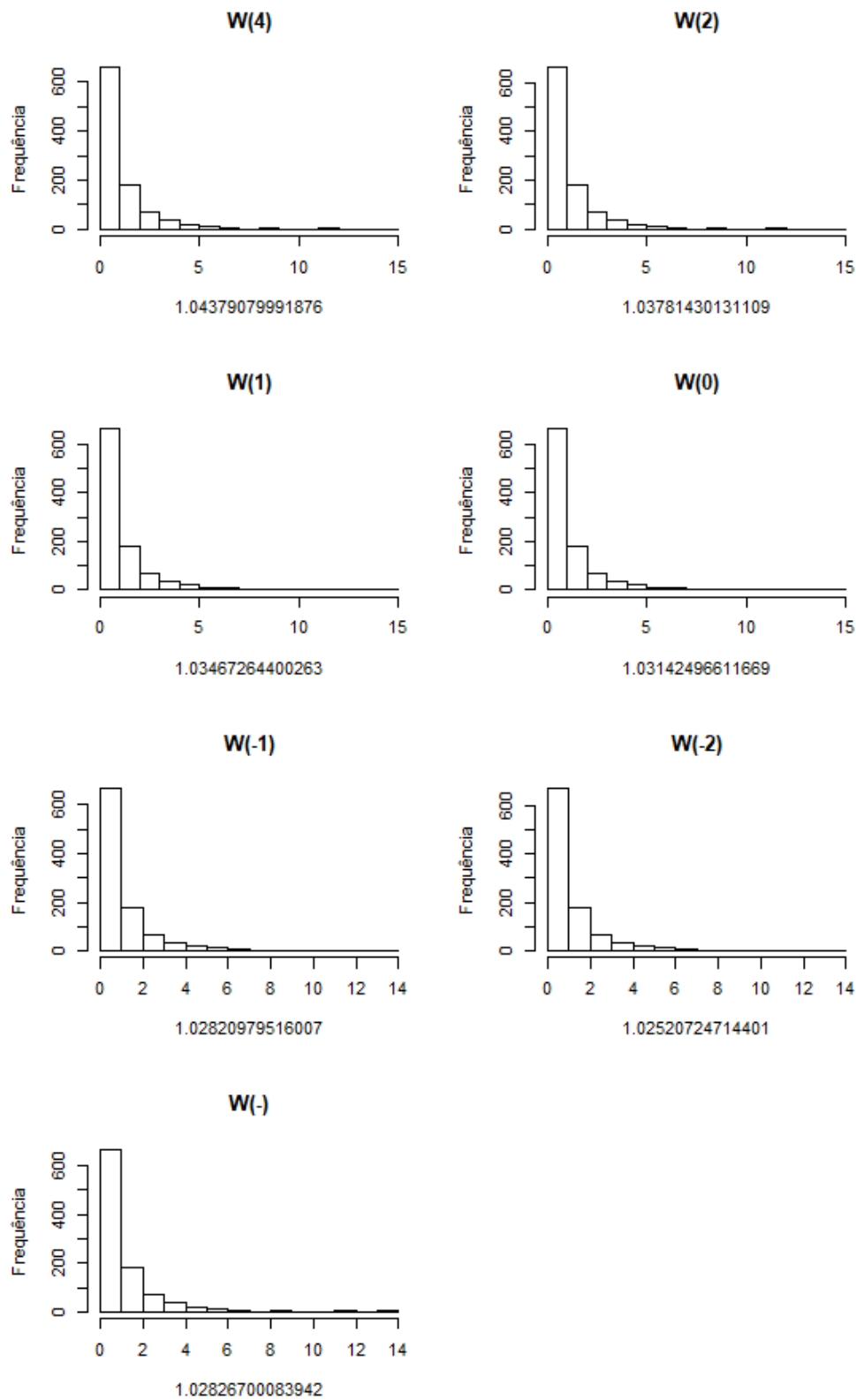


Figura 3.4: Histogramas das variâncias normalizadas $W_{(m)}$ e $W_{(-)}$ para $n_1 = 4$, $n_2 = 13$, $\mu_1 = \mu_2 = 0$ e $\theta = 0,5$, com base em todos os p emparelhamentos possíveis e $r = 1.000$ réplicas. O valor sob o eixo horizontal é a média aritmética para todas as r réplicas.

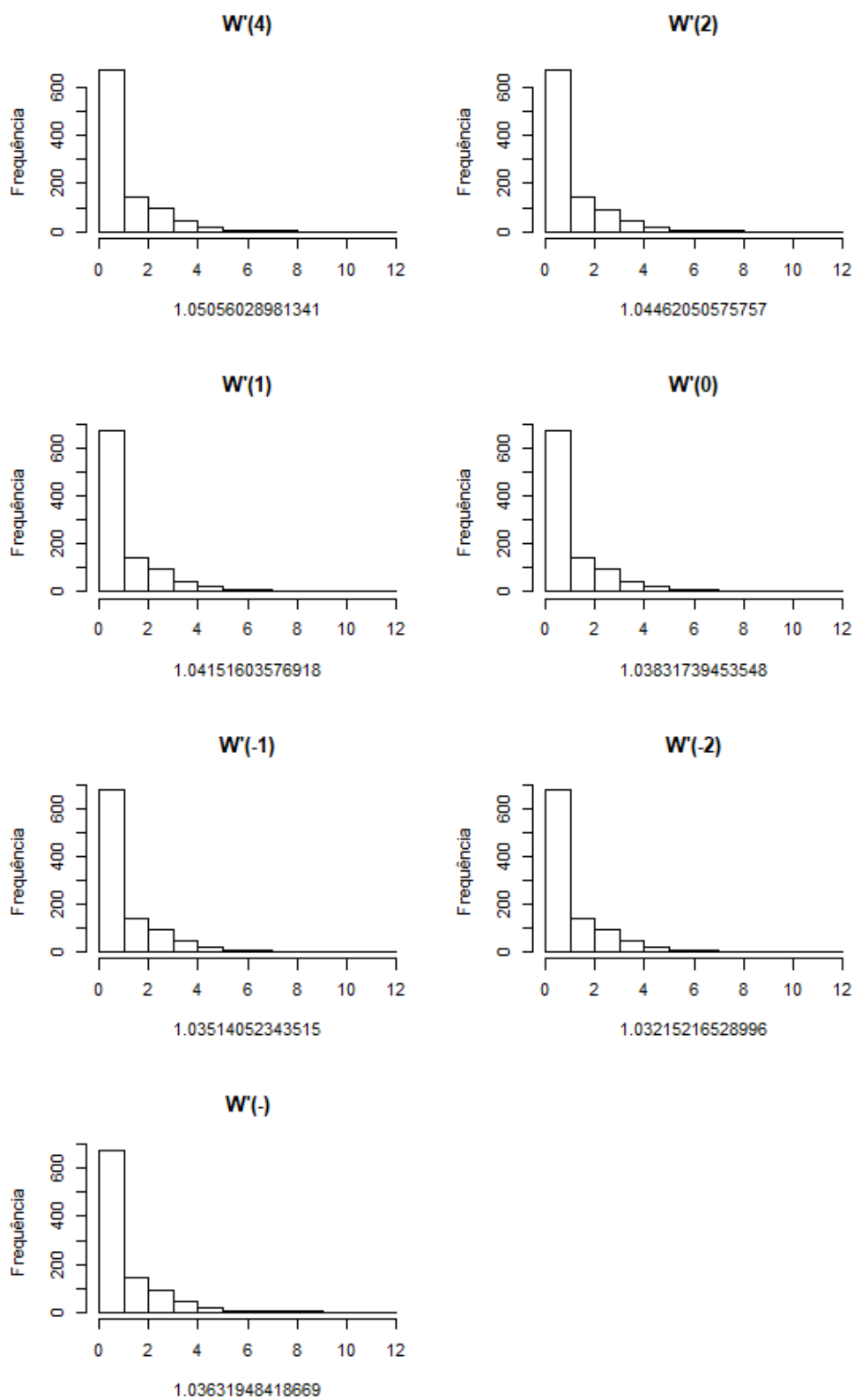


Figura 3.5: Histogramas das variâncias normalizadas $W'_{(m)}$ e $W'_{(-)}$ para $n_1 = 4$, $n_2 = 13$, $\mu_1 = \mu_2 = 0$ e $\theta = 0,5$, com base em todos os p emparelhamentos possíveis e $r = 1.000$ réplicas. O valor sob o eixo horizontal é a média aritmética para todas as r réplicas.

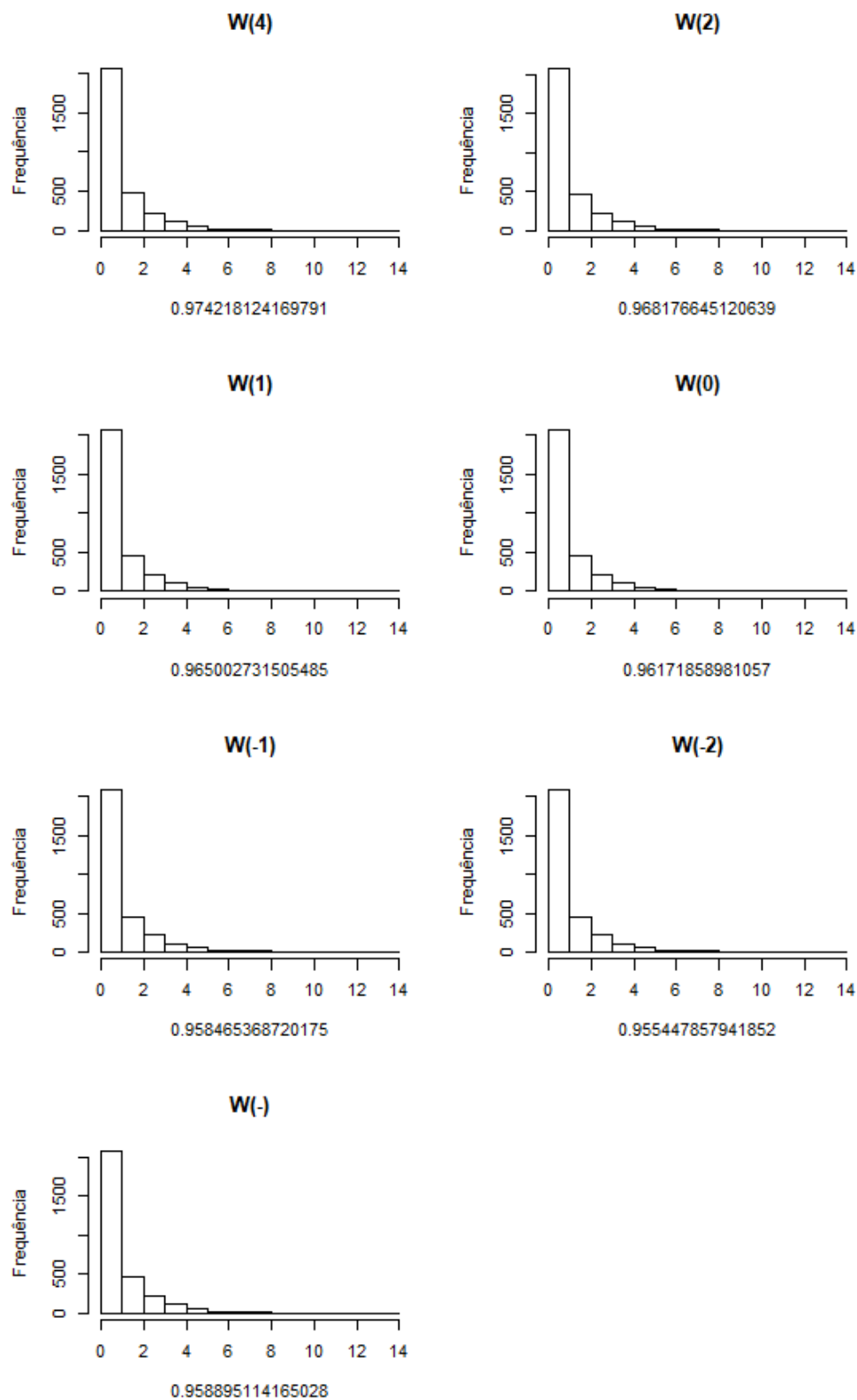


Figura 3.6: Histogramas das variâncias normalizadas $W_{(m)}$ e $W_{(-)}$ para $n_1 = 13$, $n_2 = 16$, $\mu_1 = \mu_2 = 0$ e $\theta = 1$, com base em $p = 75.000$ emparelhamentos e $r = 3.000$ réplicas. O valor sob o eixo horizontal é a média aritmética para todas as r réplicas.

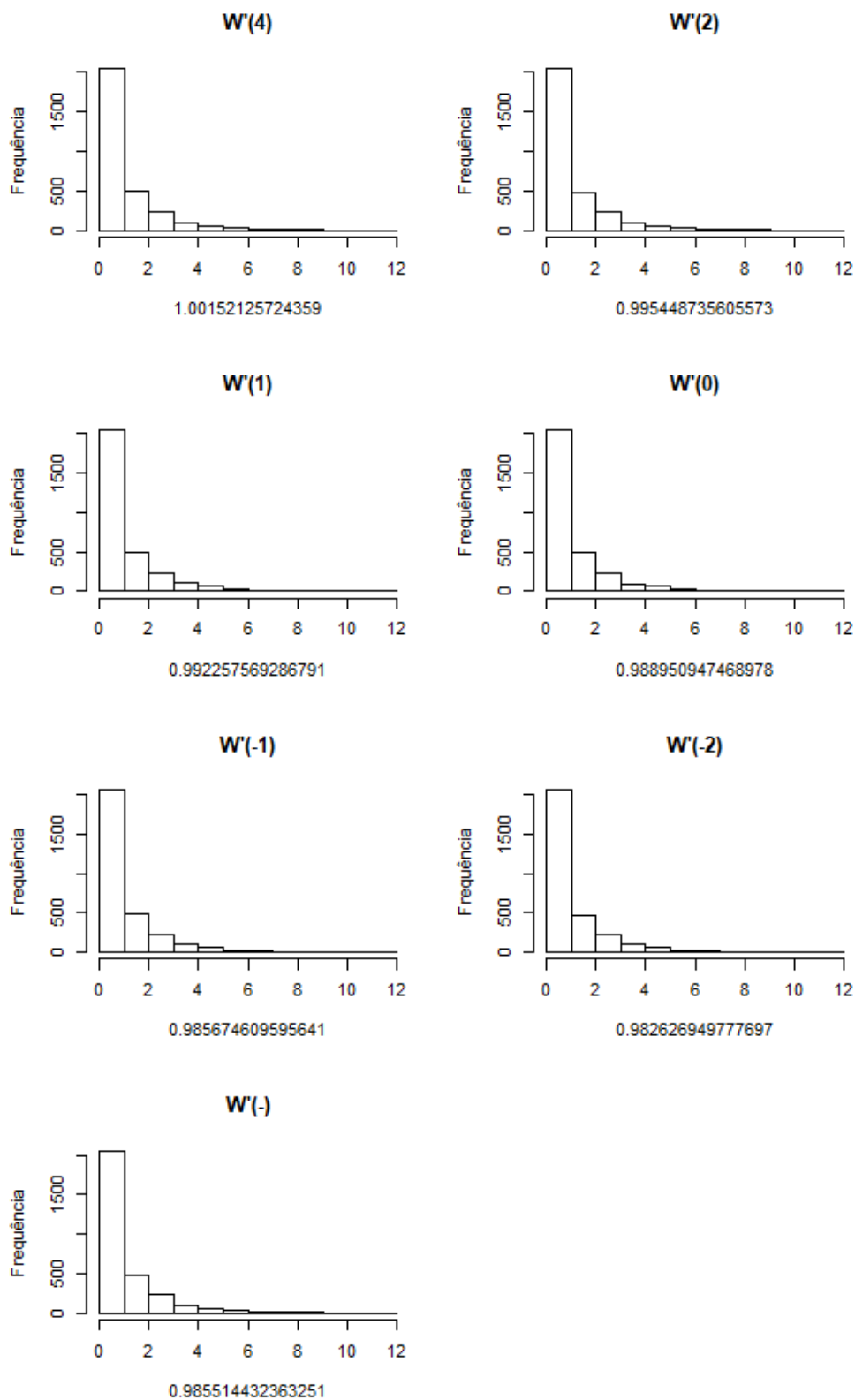


Figura 3.7: Histogramas das variâncias normalizadas $W'_{(m)}$ e $W'_{(-)}$ para $n_1 = 13$, $n_2 = 16$, $\mu_1 = \mu_2 = 0$ e $\theta = 1$, com base em $p = 75.000$ emparelhamentos e $r = 3.000$ réplicas. O valor sob o eixo horizontal é a média aritmética para todas as r réplicas.

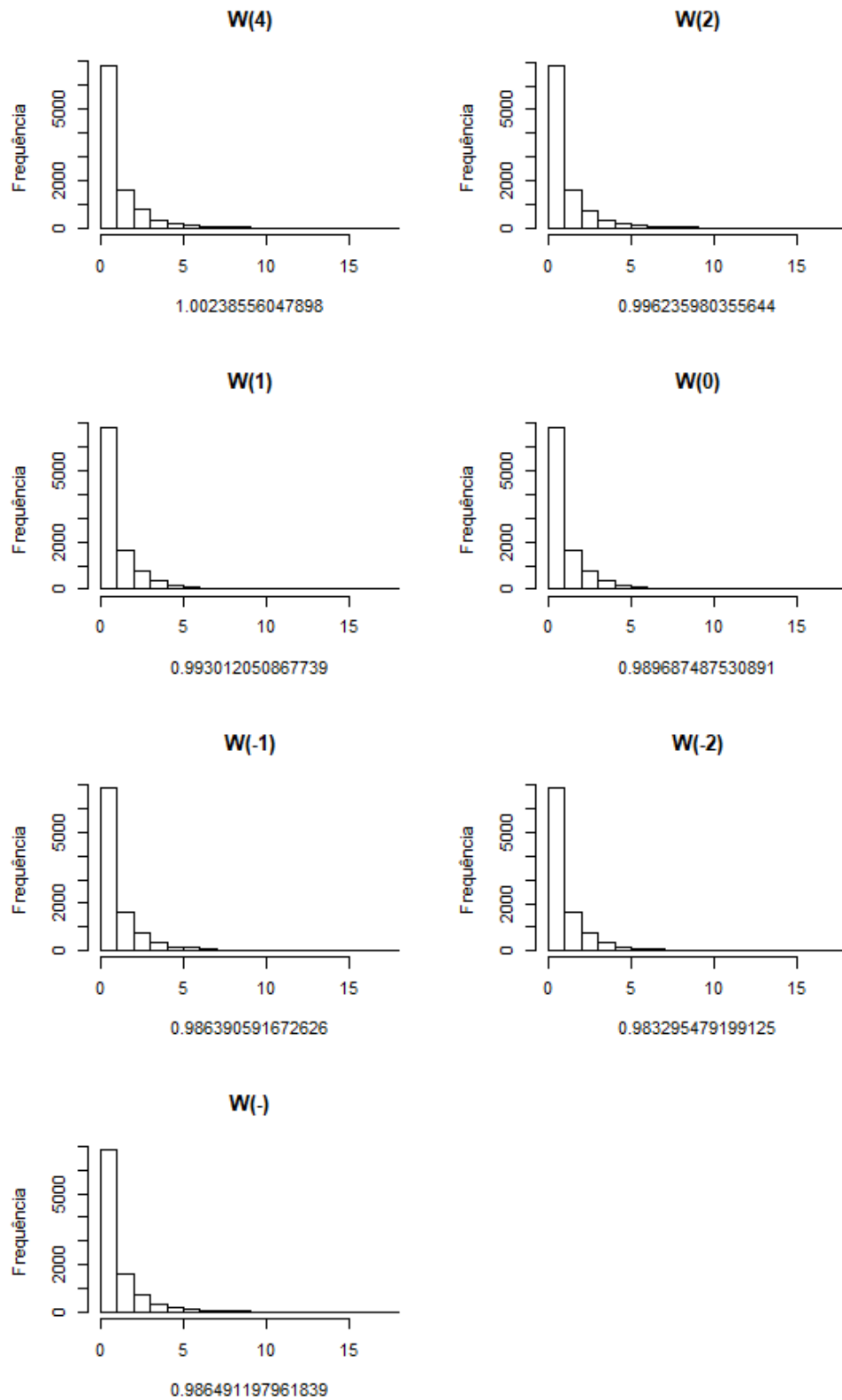


Figura 3.8: Histogramas das variâncias normalizadas $W_{(m)}$ e $W_{(-)}$ para $n_1 = 2$, $n_2 = 16$, $\mu_1 = \mu_2 = 0$ e $\theta = 0,1$, com base em todos os p emparelhamentos possíveis e $r = 10.000$ réplicas. O valor sob o eixo horizontal é a média aritmética para todas as r réplicas.

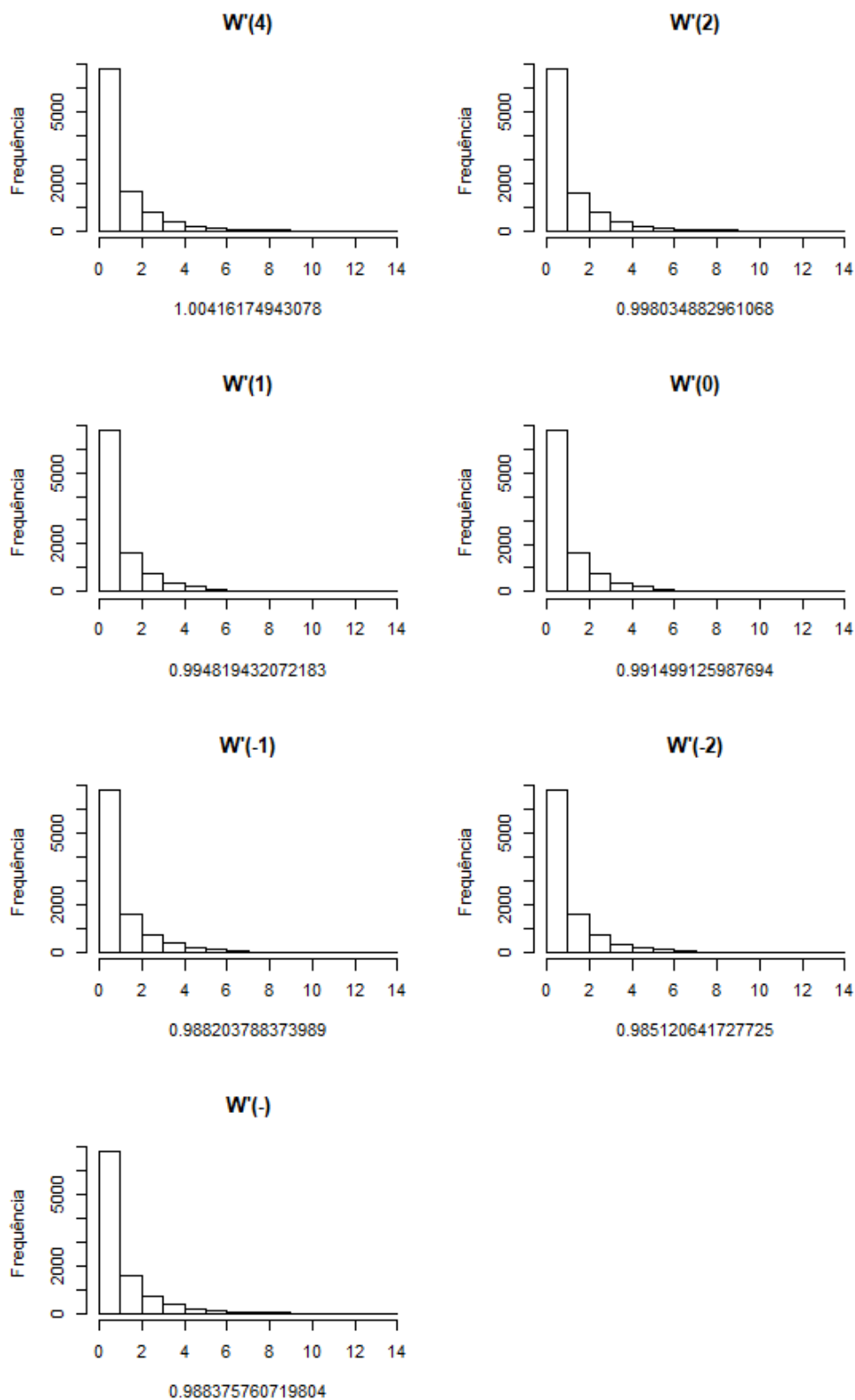


Figura 3.9: Histogramas das variâncias normalizadas $W'_{(m)}$ e $W'_{(-)}$ para $n_1 = 2$, $n_2 = 16$, $\mu_1 = \mu_2 = 0$ e $\theta = 0,1$, com base em todos os p emparelhamentos possíveis e $r = 10.000$ réplicas. O valor sob o eixo horizontal é a média aritmética para todas as r réplicas.

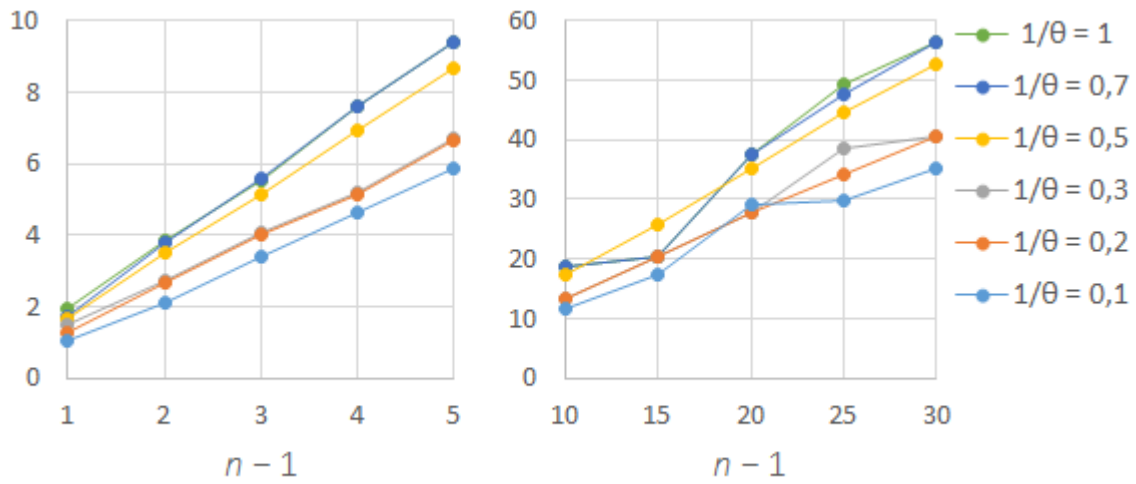


Figura 3.10: Graus de liberdade simulados de $T_{(4)}$ como função de n , para amostras da mesma dimensão.

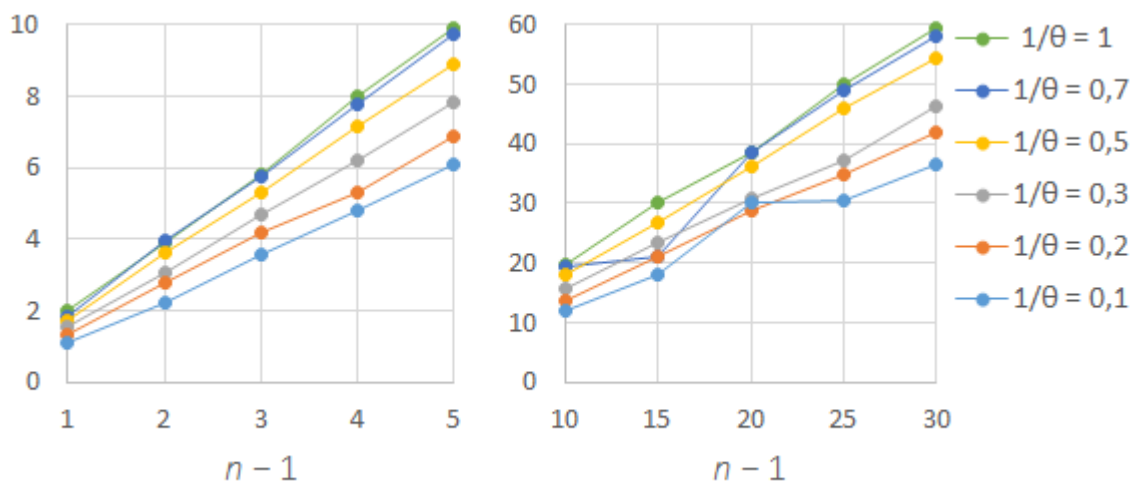


Figura 3.11: Graus de liberdade simulados de $T_{(2)}$ como função de n para amostras da mesma dimensão.

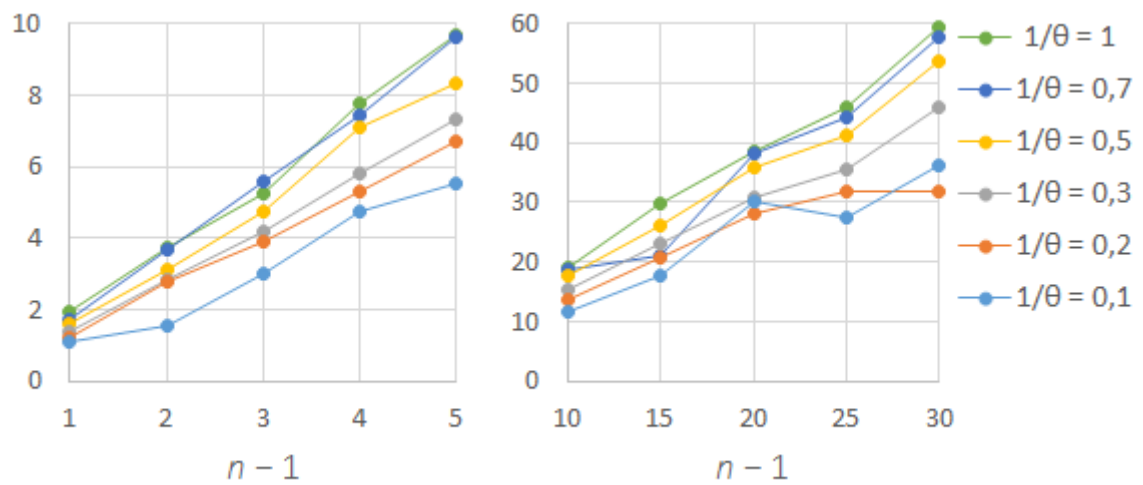


Figura 3.12: Graus de liberdade simulados de $T_{(1)}$ como função de n , para amostras da mesma dimensão.

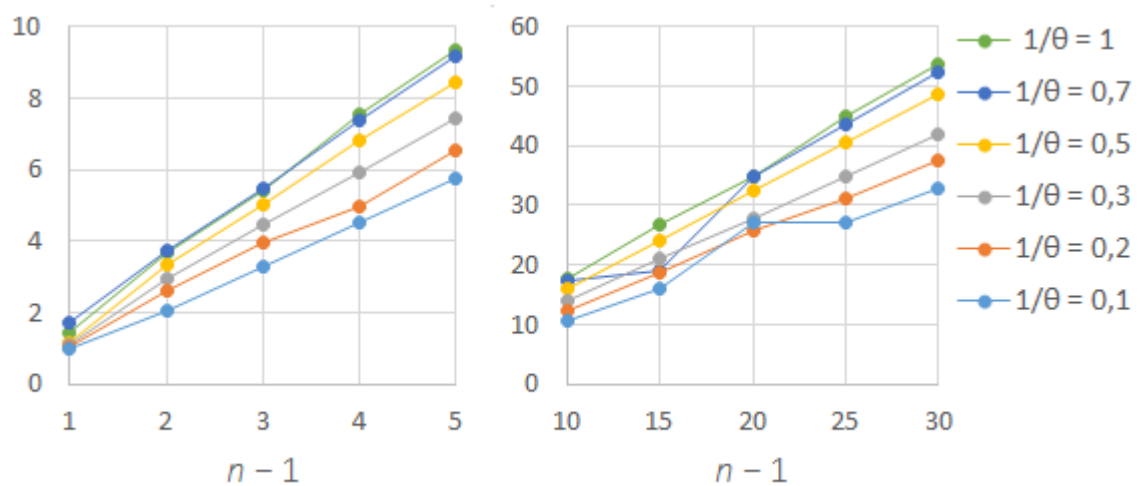


Figura 3.13: Graus de liberdade simulados de $T_{(0)}$ como função de n , para amostras da mesma dimensão.

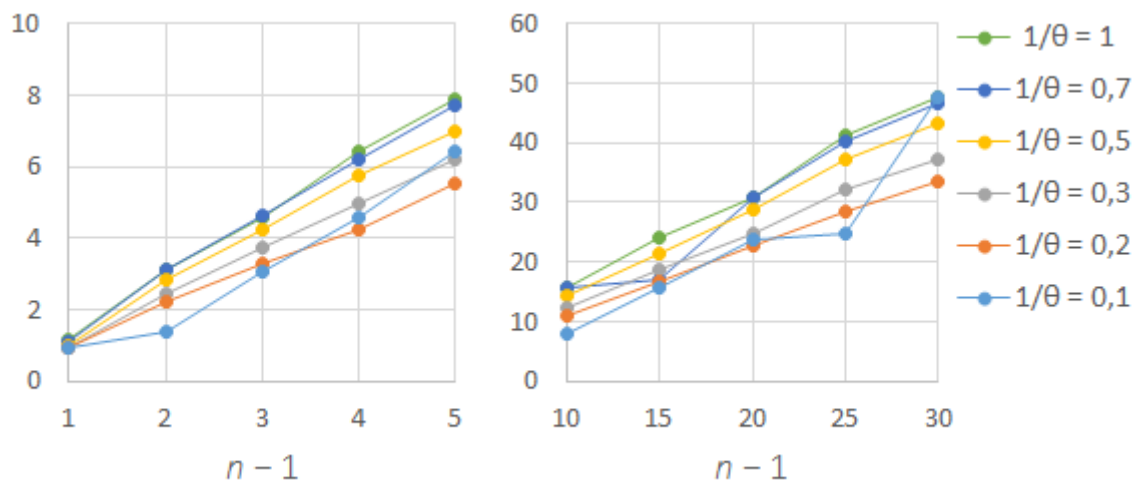


Figura 3.14: Graus de liberdade simulados de $T_{(-1)} = T_{(-)}$ como função de n , para amostras da mesma dimensão.

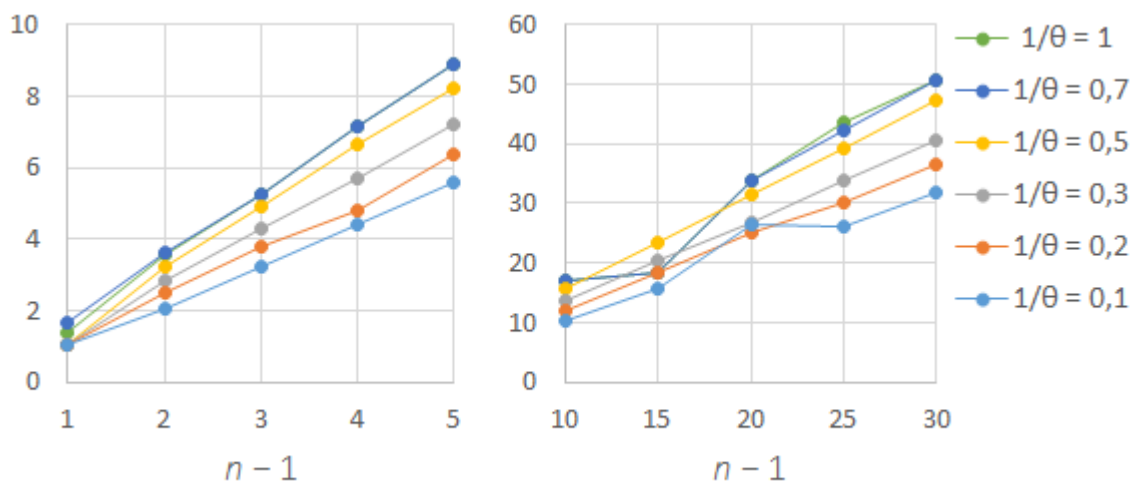


Figura 3.15: Graus de liberdade simulados de $T_{(-2)}$ como função de n , para amostras da mesma dimensão.

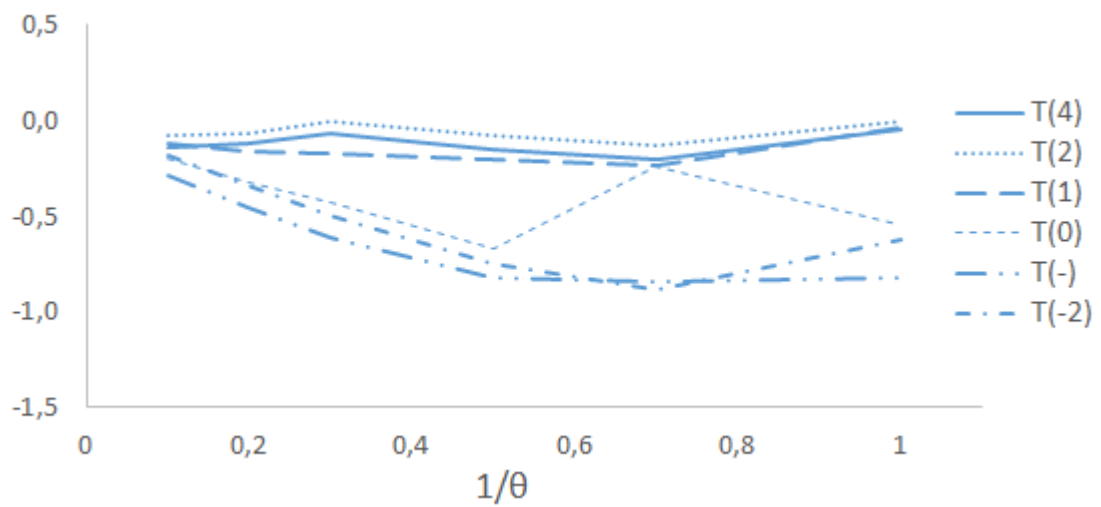


Figura 3.16: Diferença entre os graus de liberdade simulados das estatísticas $T_{(m)}$ e $T_{(-)}$ e os graus de liberdade teóricos de T_{Welch} , para $n_1 = n_2 = 2$

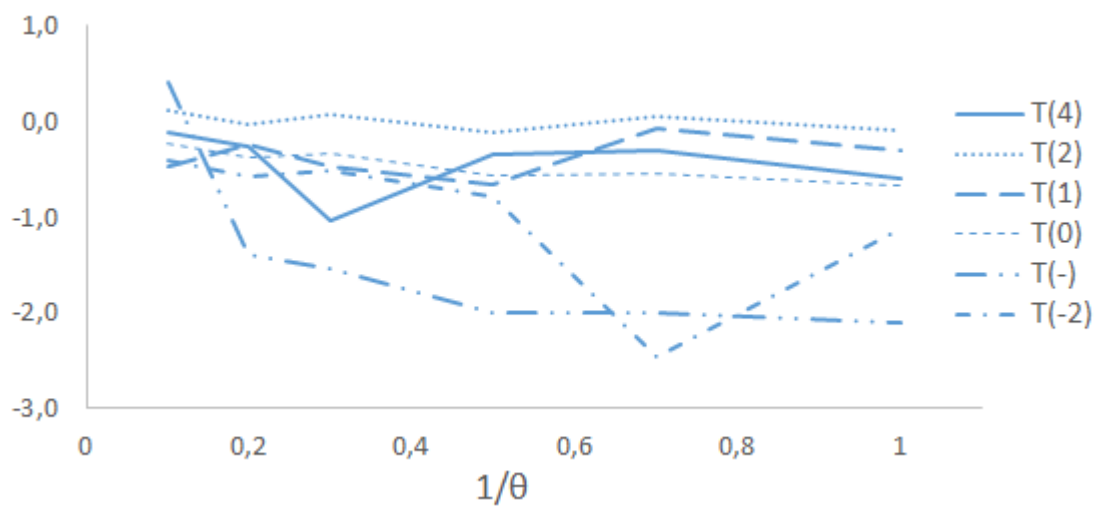


Figura 3.17: Diferença entre os graus de liberdade simulados das estatísticas $T_{(m)}$ e $T_{(-)}$ e os graus de liberdade teóricos de T_{Welch} , para $n_1 = n_2 = 6$

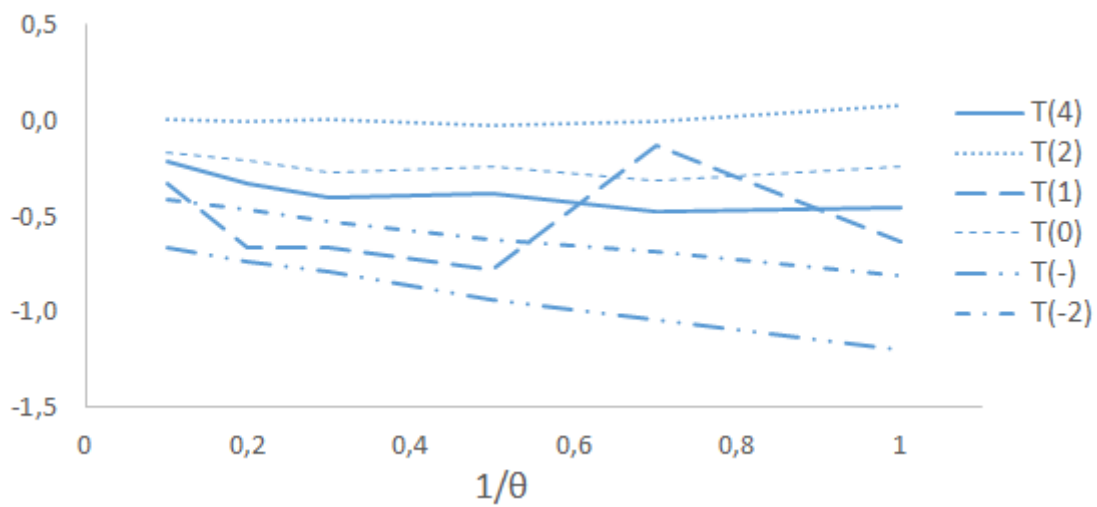


Figura 3.18: Diferença entre os graus de liberdade simulados das estatísticas $T_{(m)}$ e $T_{(-)}$ e os graus de liberdade teóricos de T_{Welch} , para $n_1 = 4, n_2 = 8$

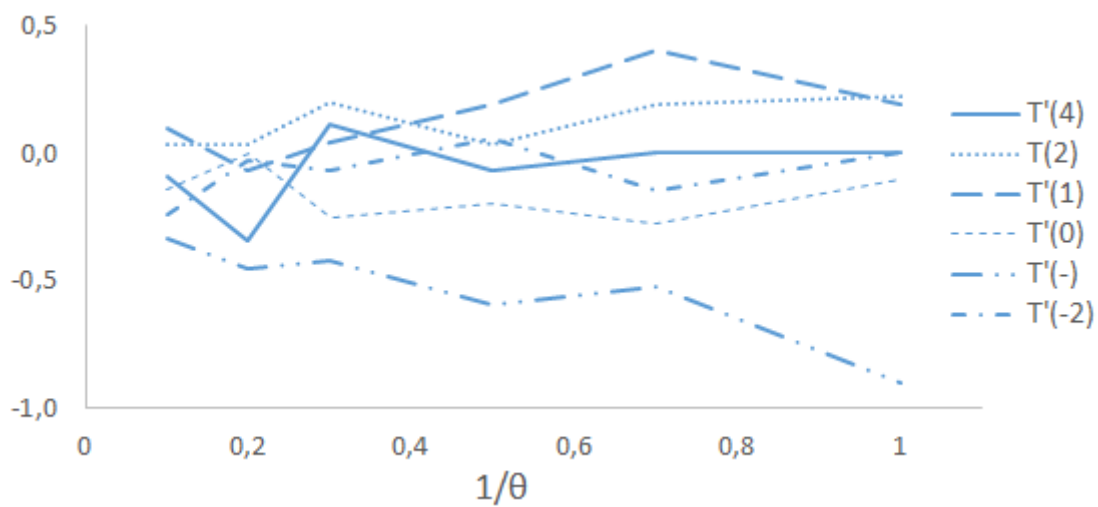


Figura 3.19: Diferença entre os graus de liberdade simulados das estatísticas $T'_{(m)}$ e $T'_{(-)}$ e os graus de liberdade teóricos de T_{Welch} , para $n_1 = 4, n_2 = 8$

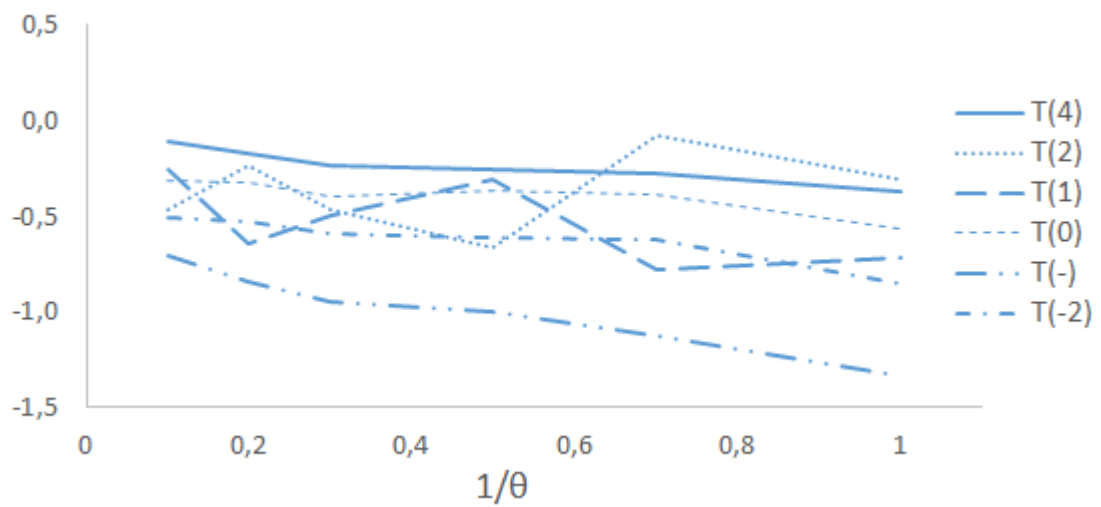


Figura 3.20: Diferença entre os graus de liberdade simulados das estatísticas $T_{(m)}$ e $T_{(-)}$ e os graus de liberdade teóricos de T_{Welch} , para $n_1 = 6, n_2 = 16$

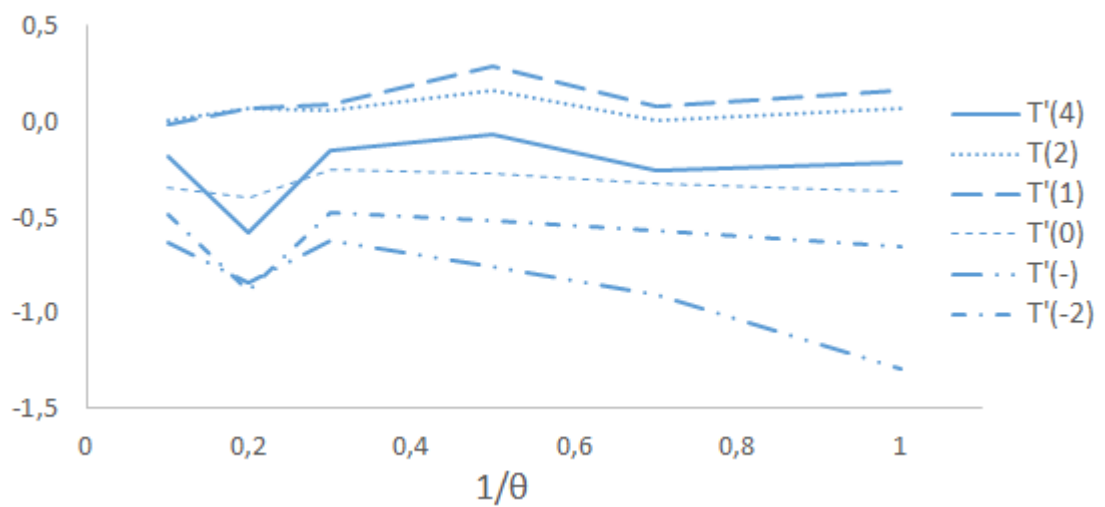


Figura 3.21: Diferença entre os graus de liberdade simulados das estatísticas $T'_{(m)}$ e $T'_{(-)}$ e os graus de liberdade teóricos de T_{Welch} , para $n_1 = 6, n_2 = 16$

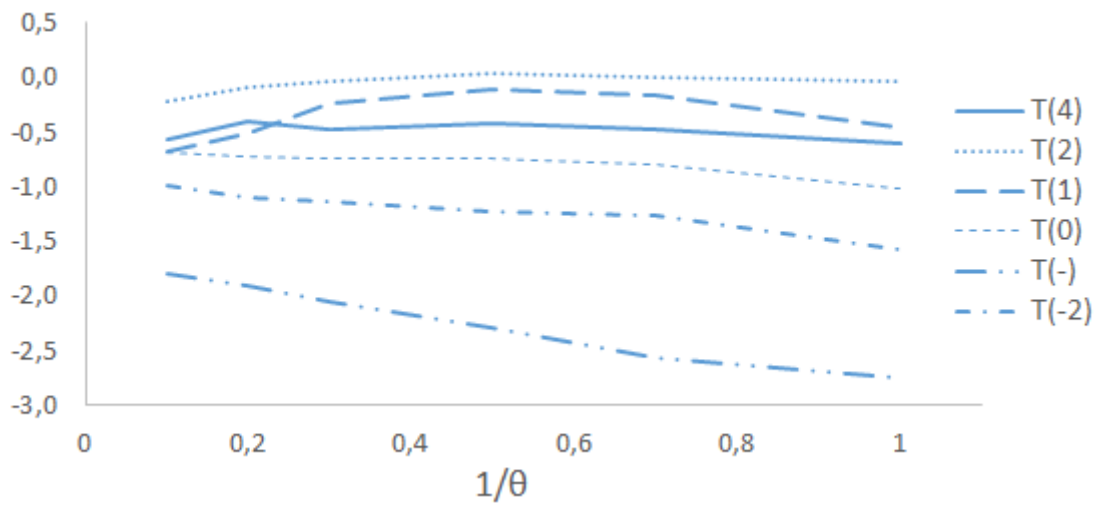


Figura 3.22: Diferença entre os graus de liberdade simulados das estatísticas $T_{(m)}$ e $T_{(-)}$ e os graus de liberdade teóricos de T_{Welch} , para $n_1 = 10, n_2 = 11$

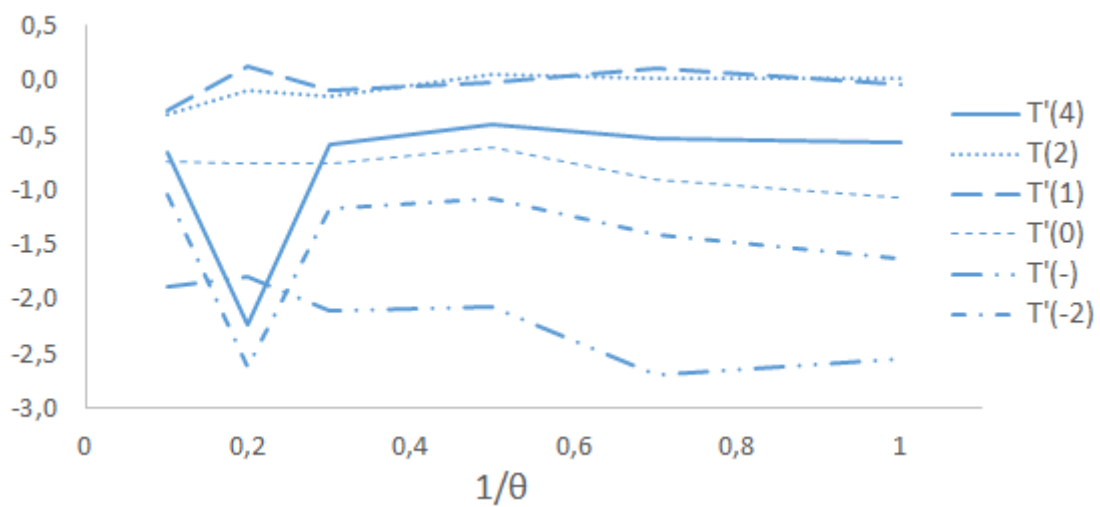


Figura 3.23: Diferença entre os graus de liberdade simulados das estatísticas $T'_{(m)}$ e $T'_{(-)}$ e os graus de liberdade teóricos de T_{Welch} , para $n_1 = 10, n_2 = 11$

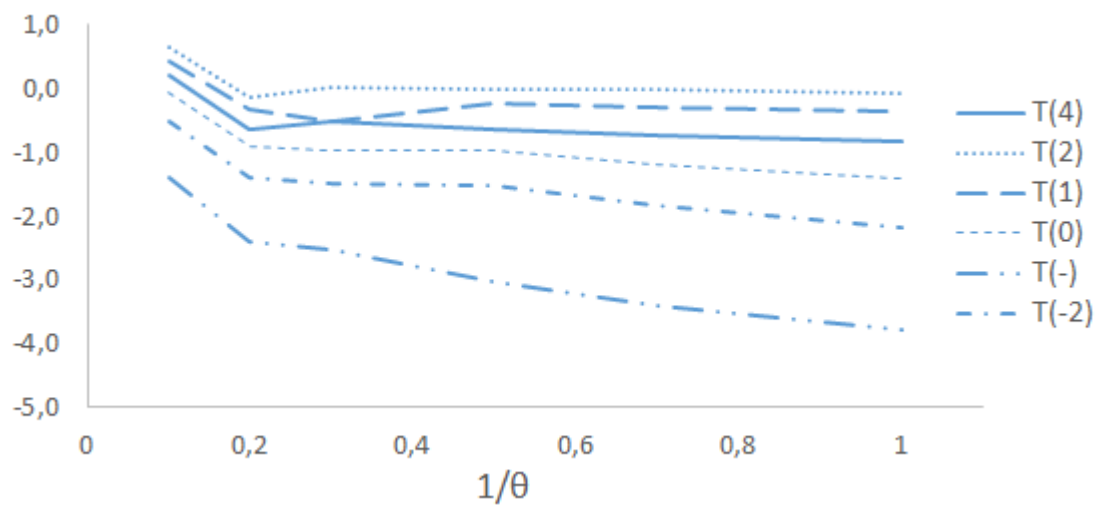


Figura 3.24: Diferença entre os graus de liberdade simulados das estatísticas $T_{(m)}$ e $T_{(-)}$ e os graus de liberdade teóricos de T_{Welch} , para $n_1 = 13, n_2 = 16$

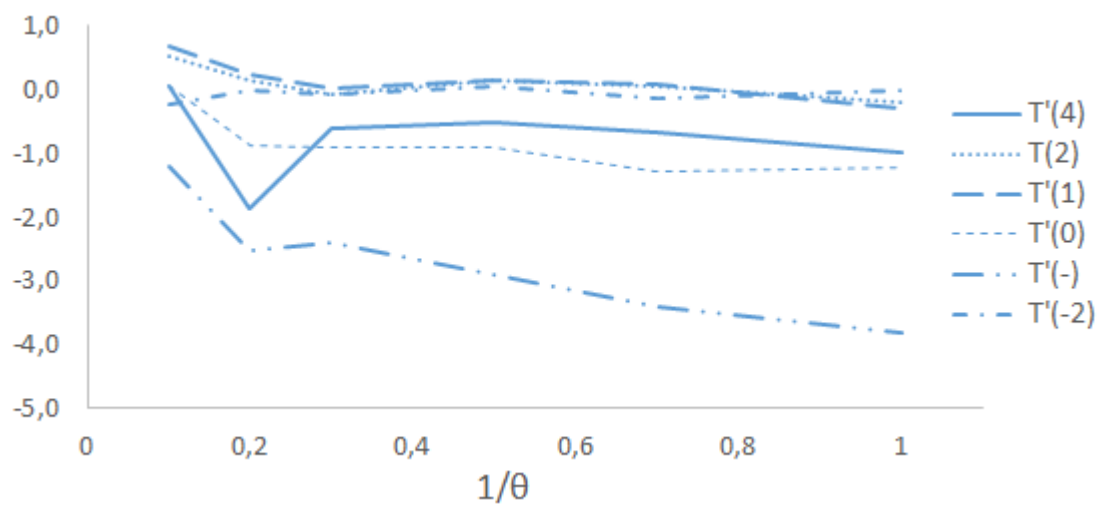


Figura 3.25: Diferença entre os graus de liberdade simulados das estatísticas $T'_{(m)}$ e $T'_{(-)}$ e os graus de liberdade teóricos de T_{Welch} , para $n_1 = 13, n_2 = 16$

n_1	n_2	limite ^(a) inferior	1/ θ							limite ^(b) superior	processo
			0,1	0,2	0,3	0,5	0,7	1			
2	2	1,2	1,01 ± 0,01	1,04 ± 0,01	1,05 ± 0,01	1,05 ± 0,01	1,05 ± 0,01	1,05 ± 0,01	1,38 ± 0,02	2,0	I
2	3	1,1	1,03 ± 0,02	1,16 ± 0,05	1,30 ± 0,02	1,52 ± 0,01	1,76 ± 0,01	2,08 ± 0,02	2,3	I	
2	4	1,1	0,94 ± 0,02	1,06 ± 0,03	1,20 ± 0,02	1,45 ± 0,03	1,55 ± 0,02	1,90 ± 0,01	2,1	I	
2	16	1,0	0,92 ± 0,01	0,93 ± 0,05	1,06 ± 0,01	0,91 ± 0,04	0,91 ± 0,04	1,09 ± 0,02	1,3	I	
3	3	2,4	2,04 ± 0,02	2,51 ± 0,01	2,85 ± 0,01	3,21 ± 0,02	2,85 ± 0,01	3,56 ± 0,02	4,0	I	
3	16	2,1	1,83 ± 0,05	2,05 ± 0,01	1,96 ± 0,03	2,12 ± 0,01	2,26 ± 0,01	2,62 ± 0,03	2,8	I	
4	4	3,6	3,20 ± 0,02	3,79 ± 0,03	4,31 ± 0,02	4,92 ± 0,01	4,31 ± 0,02	5,25 ± 0,03	6,0	I	
4	6	3,4	3,11 ± 0,02	3,48 ± 0,01	3,86 ± 0,03	4,50 ± 0,03	5,21 ± 0,02	6,13 ± 0,02	6,6	I	
4	8	3,3	3,09 ± 0,03	3,28 ± 0,03	3,53 ± 0,01	4,18 ± 0,02	4,72 ± 0,01	5,64 ± 0,03	6,1	I	
4	13	3,2	3,03 ± 0,40	3,11 ± 0,52	3,33 ± 0,38	3,69 ± 0,37	3,98 ± 0,41	4,62 ± 0,42	5,0	II	
5	5	4,8	4,42 ± 0,01	4,80 ± 0,04	5,68 ± 0,02	6,66 ± 0,01	5,68 ± 0,02	7,16 ± 0,04	8,0	I	
6	6	6,0	5,58 ± 0,02	6,34 ± 0,05	7,23 ± 0,02	8,21 ± 0,01	7,23 ± 0,02	8,87 ± 0,01	10,0	I	
6	10	5,6	5,08 ± 0,42	5,65 ± 0,50	6,31 ± 0,41	7,53 ± 0,36	8,52 ± 0,43	9,83 ± 0,37	10,7	II	
6	16	5,4	4,87 ± 1,02	5,24 ± 1,12	5,57 ± 1,14	6,36 ± 1,05	7,17 ± 1,02	8,18 ± 1,12	9,0	III	
7	10	6,8	6,28 ± 0,50	7,04 ± 0,43	7,79 ± 0,42	9,17 ± 0,49	10,56 ± 0,38	12,05 ± 0,48	13,1	II	
8	14	7,8	7,25 ± 1,13	7,95 ± 1,11	8,66 ± 1,16	10,00 ± 1,11	11,74 ± 1,03	13,57 ± 1,11	14,7	III	
9	10	9,4	8,86 ± 1,11	10,06 ± 1,11	11,23 ± 1,15	13,08 ± 1,13	14,55 ± 1,07	15,49 ± 1,13	16,8	III	
9	14	9,0	8,24 ± 1,16	9,254 ± 1,16	10,09 ± 1,14	12,20 ± 1,11	13,80 ± 1,10	15,93 ± 1,06	17,2	III	
10	11	10,6	9,64 ± 1,06	11,11 ± 1,08	12,53 ± 1,05	14,82 ± 0,99	16,40 ± 1,11	17,24 ± 1,1	18,8	III	
11	11	12,0	10,35 ± 0,66	12,00 ± 0,67	13,57 ± 0,67	15,64 ± 0,71	13,57 ± 0,67	16,98 ± 0,59	20,0	II	
11	14	11,6	10,66 ± 1,08	12,18 ± 1,06	13,56 ± 1,10	16,02 ± 1,02	18,01 ± 1,12	19,84 ± 1,16	21,6	III	
12	14	12,9	11,82 ± 1,12	13,58 ± 1,12	15,11 ± 1,17	17,95 ± 1,11	19,78 ± 1,02	21,66 ± 1,14	23,4	III	
13	16	14,0	13,43 ± 1,11	14,50 ± 1,13	16,22 ± 1,16	19,44 ± 1,09	21,63 ± 1,20	23,62 ± 1,18	25,8	III	
14	16	15,3	14,20 ± 1,10	16,07 ± 1,21	17,98 ± 1,24	21,13 ± 1,11	23,53 ± 1,07	25,28 ± 1,19	27,5	III	
15	16	16,6	14,92 ± 1,25	17,55 ± 1,16	19,81 ± 1,20	23,19 ± 1,10	25,14 ± 1,17	26,66 ± 1,16	28,9	III	
16	16	18,0	15,55 ± 1,12	18,28 ± 1,09	20,32 ± 1,13	23,25 ± 1,04	20,32 ± 1,13	18,36 ± 1,21	30,0	III	
21	21	24,0	26,36 ± 1,24	24,95 ± 1,20	26,86 ± 1,20	31,56 ± 1,17	26,86 ± 1,20	33,72 ± 1,11	40,0	III	
26	26	30,0	26,16 ± 1,20	30,27 ± 1,16	33,87 ± 1,16	39,33 ± 1,14	42,37 ± 1,15	43,68 ± 1,19	50,0	III	
31	31	35,9	31,70 ± 1,32	36,46 ± 1,28	40,59 ± 1,30	47,32 ± 1,35	40,59 ± 1,30	50,69 ± 1,29	60,0	III	

Tabela 3.2: Graus de liberdade simulados de $T_{(-2)}$ (estimativa ± erro padrão)

(a) $T_{\text{Weibch}, \theta = 0, 1}$; (b) $T_{\text{Weibch}, \theta = 1}$; (I) $r=10.000$ réplicas, todos os pares $(0, 01 \leq s(\hat{\nu}) \leq 0, 05)$;

(II) $r=5000$ réplicas, todos os pares $(0, 35 \leq s(\hat{\nu}) \leq 0, 52)$; (III) $r=20000$ réplicas, $p=75000$ pares $(1, 00 \leq s(\hat{\nu}) \leq 1, 25)$.

n_1	n_2	limite ^(a) inferior	$1/\theta = \sigma_2^2/\sigma_1^2$							limite ^(b) superior	processo
			0,1	0,2	0,3	0,5	0,7	1			
2	3	1,1	1,17 ± 0,02	1,28 ± 0,03	1,34 ± 0,03	1,40 ± 0,02	1,75 ± 0,04	2,10 ± 0,02	2,3	I	
2	4	1,1	0,83 ± 0,01	0,86 ± 0,03	1,29 ± 0,01	1,34 ± 0,03	1,77 ± 0,02	2,04 ± 0,02	2,1	I	
2	16	1,0	0,80 ± 0,02	0,81 ± 0,05	1,05 ± 0,01	1,06 ± 0,01	1,24 ± 0,02	1,12 ± 0,02	1,3	I	
3	16	2,1	1,74 ± 0,02	1,78 ± 0,01	1,98 ± 0,04	2,02 ± 0,04	2,23 ± 0,01	2,81 ± 0,04	2,8	I	
4	6	3,4	3,25 ± 0,03	3,24 ± 0,01	3,81 ± 0,04	4,73 ± 0,03	5,23 ± 0,02	6,17 ± 0,04	6,6	I	
4	8	3,3	3,01 ± 0,03	3,06 ± 0,04	3,58 ± -0,01	4,28 ± -0,01	4,73 ± 0,02	5,79 ± 0,03	6,1	I	
4	13	3,2	3,09 ± 0,41	3,10 ± 0,52	3,36 ± 0,38	3,78 ± 0,38	4,03 ± 0,40	4,70 ± 0,42	5,0	II	
6	10	5,6	4,98 ± 0,39	4,97 ± 0,52	6,32 ± 0,41	7,68 ± 0,42	8,53 ± 0,44	9,93 ± 0,39	10,7	II	
6	16	5,4	4,89 ± 1,11	4,88 ± 1,11	5,69 ± 1,14	6,45 ± 1,15	7,22 ± 1,03	8,38 ± 1,12	9,0	III	
7	10	6,8	6,31 ± 0,50	6,28 ± 0,43	7,84 ± 0,42	9,22 ± 0,44	10,56 ± 0,39	12,02 ± 0,48	13,1	II	
8	14	7,8	7,32 ± 1,12	7,30 ± 1,13	8,70 ± 1,17	10,20 ± 1,17	11,81 ± 1,02	13,63 ± 1,11	14,7	III	
9	10	9,4	8,88 ± 1,13	8,92 ± 1,12	11,30 ± 1,14	13,18 ± 1,14	14,34 ± 1,09	15,52 ± 1,14	16,8	III	
9	14	9,0	8,33 ± 1,09	8,34 ± 1,14	10,05 ± 1,16	12,32 ± 1,15	13,86 ± 1,10	15,92 ± 1,09	17,2	III	
10	11	10,6	9,58 ± 1,10	9,59 ± 1,09	12,50 ± 1,06	14,97 ± 1,05	16,25 ± 1,12	17,18 ± 1,11	18,8	III	
11	14	11,6	10,74 ± 1,15	10,74 ± 1,06	13,57 ± 1,11	16,00 ± 1,10	18,25 ± 1,15	19,77 ± 1,17	21,6	III	
12	14	12,9	11,83 ± 1,15	11,83 ± 1,11	15,14 ± 1,16	17,96 ± 1,18	19,83 ± 1,01	21,85 ± 1,16	23,4	III	
13	16	14,0	13,60 ± 1,19	13,62 ± 1,11	16,35 ± 1,14	19,43 ± 1,15	21,51 ± 1,21	23,85 ± 1,19	25,8	III	
14	16	15,3	14,24 ± 1,18	14,20 ± 1,20	17,74 ± 1,25	21,12 ± 1,25	23,55 ± 1,06	25,40 ± 1,18	27,5	III	
15	16	16,6	15,11 ± 1,15	15,12 ± 1,16	19,86 ± 1,20	23,18 ± 1,22	25,41 ± 1,15	26,52 ± 1,16	28,9	III	

Tabela 3.3: Graus de liberdade simulados de $T'_{(-2)}$ (estimativa ± erro padrão)

(a) $T_{\text{Welch}}, \theta = 0, 1$; (b) $T_{\text{Welch}}, \theta = 1$; (I) $r=10.000$ réplicas, todos os pares $(0, 01 \leq s(\hat{\nu}) \leq 0, 05)$;
 (II) $r=5.000$ réplicas, todos os pares $(0, 35 \leq s(\hat{\nu}) \leq 0, 52)$; (III) $r=20.000$ réplicas, $p=75.000$ pares $(1, 00 \leq s(\hat{\nu}) \leq 1, 34)$.

n_1	n_2	limite ^(a) inferior	$1/\theta = \sigma_2^2/\sigma_1^2$							limite ^(b) superior	processo
			0,1	0,2	0,3	0,5	0,7	1			
2	2	1,2	0,91 ± 0,01	0,93 ± 0,01	0,94 ± 0,01	0,98 ± 0,01	1,10 ± 0,01	1,18 ± 0,01	2,0	I	
2	3	1,1	0,93 ± 0,02	0,94 ± 0,02	1,12 ± 0,04	1,28 ± 0,03	1,49 ± 0,01	1,81 ± 0,03	2,3	I	
2	4	1,1	0,88 ± 0,01	0,88 ± 0,01	1,04 ± 0,02	1,22 ± 0,04	1,43 ± 0,01	1,66 ± 0,03	2,1	I	
2	16	1,0	0,84 ± 0,03	0,84 ± 0,02	0,88 ± 0,01	0,80 ± 0,01	0,96 ± 0,04	1,00 ± 0,01	1,3	I	
3	3	2,4	1,40 ± 0,04	2,21 ± 0,03	2,46 ± 0,03	2,86 ± 0,01	3,12 ± 0,02	3,09 ± 0,03	4,0	I	
3	16	2,1	1,62 ± 0,02	1,72 ± 0,01	1,72 ± 0,02	1,76 ± 0,01	1,98 ± 0,04	2,19 ± 0,04	2,8	I	
4	4	3,6	3,06 ± 0,01	3,28 ± 0,04	3,72 ± 0,04	4,23 ± 0,03	4,60 ± 0,01	4,56 ± 0,03	6,0	I	
4	6	3,4	2,60 ± 0,03	3,04 ± 0,04	3,25 ± 0,01	3,94 ± 0,04	4,57 ± 0,05	5,33 ± 0,04	6,6	I	
4	8	3,3	2,64 ± 0,04	2,88 ± 0,03	3,14 ± 0,03	3,63 ± 0,04	4,15 ± 0,05	4,90 ± 0,03	6,1	I	
4	13	3,2	2,63 ± 0,41	2,70 ± 0,54	2,84 ± 0,41	3,07 ± 0,34	3,36 ± 0,41	3,96 ± 0,37	5,0	II	
5	5	4,8	4,58 ± 0,01	4,25 ± 0,03	4,94 ± 0,03	5,74 ± 0,02	6,22 ± 0,01	6,40 ± 0,03	8,0	I	
6	6	6,0	6,40 ± 0,01	5,52 ± 0,05	6,22 ± 0,04	7,00 ± 0,03	7,69 ± 0,01	7,90 ± 0,03	10,0	I	
6	10	5,6	4,42 ± 0,41	4,97 ± 0,50	5,43 ± 0,44	6,46 ± 0,38	7,38 ± 0,43	8,39 ± 0,40	10,7	II	
6	16	5,4	4,33 ± 1,01	4,59 ± 1,11	4,85 ± 1,14	5,56 ± 1,04	6,23 ± 1,00	7,15 ± 1,12	9,0	III	
7	10	6,8	5,40 ± 0,52	6,10 ± 0,39	6,76 ± 0,41	7,92 ± 0,50	9,18 ± 0,41	10,42 ± 0,49	13,1	II	
8	14	7,8	6,28 ± 1,11	6,89 ± 1,09	7,56 ± 1,12	8,72 ± 1,10	10,11 ± 1,05	11,76 ± 1,10	14,7	III	
9	10	9,4	7,68 ± 1,13	8,70 ± 1,09	9,75 ± 1,15	11,31 ± 1,10	12,47 ± 1,06	13,48 ± 1,13	16,8	III	
9	14	9,0	7,24 ± 1,17	8,04 ± 1,12	8,79 ± 1,14	10,46 ± 1,11	11,98 ± 1,09	13,77 ± 1,06	17,2	III	
10	11	10,6	8,25 ± 1,06	9,63 ± 1,08	10,83 ± 1,07	12,87 ± 1,03	14,07 ± 1,12	15,01 ± 1,08	18,8	III	
11	11	12,0	7,82 ± 0,65	11,00 ± 0,64	12,40 ± 0,66	14,35 ± 0,72	15,53 ± 0,63	15,69 ± 0,61	20,0	II	
11	14	11,6	9,21 ± 1,10	10,52 ± 1,06	11,78 ± 1,08	13,78 ± 1,05	15,59 ± 1,10	17,25 ± 1,11	21,6	III	
12	14	12,9	10,29 ± 1,11	11,71 ± 1,16	13,16 ± 1,15	15,56 ± 1,13	17,18 ± 1,04	18,74 ± 1,15	23,4	III	
13	16	14,0	11,68 ± 1,09	12,56 ± 1,14	14,18 ± 1,18	16,74 ± 1,11	18,76 ± 1,22	20,53 ± 1,17	25,8	III	
14	16	15,3	12,32 ± 1,11	13,92 ± 1,20	15,64 ± 1,23	18,43 ± 1,11	20,35 ± 1,06	21,97 ± 1,18	27,5	III	
15	16	16,6	12,99 ± 1,21	15,29 ± 1,17	17,10 ± 1,25	20,02 ± 1,12	21,78 ± 1,15	23,11 ± 1,13	28,9	III	
16	16	18,0	15,76 ± 1,11	16,72 ± 1,08	18,64 ± 1,14	21,31 ± 1,02	16,86 ± 1,09	24,00 ± 1,20	30,0	III	
21	21	24,0	23,91 ± 1,23	22,90 ± 1,20	24,69 ± 1,19	28,96 ± 1,16	30,88 ± 1,12	30,96 ± 1,10	40,0	III	
26	26	30,0	24,76 ± 1,15	28,61 ± 1,17	32,04 ± 1,11	37,20 ± 1,14	40,08 ± 1,09	41,33 ± 1,11	50,0	III	
31	31	35,9	47,60 ± 1,31	33,41 ± 1,25	37,16 ± 1,32	43,38 ± 1,32	46,48 ± 1,33	47,60 ± 1,32	60,0	III	

Tabela 3.4: Graus de liberdade simulados de $T_{(-1)}$ (estimativa ± erro padrão)

(a) $T_{\text{Welch}}, \theta = 0, 1$; (b) $T_{\text{Welch}}, \theta = 1$; (I) $r=10.000$ réplicas, todos os pares $(0, 01 \leq s(\hat{\nu}) \leq 0, 05)$;
 (II) $r=5.000$ réplicas, todos os pares $(0, 34 \leq s(\hat{\nu}) \leq 0, 72)$; (III) $r=20.000$ réplicas, $p=75.000$ pares $(1, 00 \leq s(\hat{\nu}) \leq 1, 33)$.

		$1/\theta = \sigma_2^2/\sigma_1^2$								limite ^(b) superior	processo
n_1	n_2	limite ^(a) inferior	0,1	0,2	0,3	0,5	0,7	1			
2	3	1,1	1,16 ± 0,02	1,00 ± 0,03	1,00 ± 0,05	1,29 ± 0,04	1,66 ± 0,02	1,71 ± 0,04	2,3	I	
2	4	1,1	0,98 ± 0,01	0,82 ± 0,01	1,14 ± 0,03	1,35 ± 0,05	1,50 ± 0,01	1,70 ± 0,04	2,1	I	
2	16	1,0	0,85 ± 0,04	1,06 ± 0,02	1,01 ± 0,01	0,84 ± 0,01	1,16 ± 0,04	1,03 ± 0,01	1,3	I	
3	16	2,1	1,69 ± 0,02	1,94 ± 0,01	1,90 ± 0,03	1,80 ± 0,01	2,03 ± 0,04	2,20 ± 0,05	2,8	I	
4	6	3,4	2,67 ± 0,04	2,99 ± 0,05	3,34 ± 0,01	3,97 ± 0,05	4,67 ± 0,05	5,46 ± 0,04	6,6	I	
4	8	3,3	2,73 ± 0,05	2,89 ± 0,03	3,22 ± 0,04	3,68 ± 0,04	4,32 ± 0,06	4,85 ± 0,04	6,1	I	
4	13	3,2	2,47 ± 0,42	2,74 ± 0,55	3,06 ± 0,41	3,09 ± 0,34	3,44 ± 0,41	4,01 ± 0,38	5,0	II	
6	10	5,6	4,52 ± 0,42	4,97 ± 0,51	5,43 ± 0,44	6,34 ± 0,38	7,43 ± 0,44	8,63 ± 0,40	10,7	II	
6	16	5,4	4,41 ± 1,02	4,60 ± 1,11	5,12 ± 1,15	5,76 ± 1,04	6,37 ± 1,00	7,18 ± 1,13	9,0	III	
7	10	6,8	5,49 ± 0,53	6,15 ± 0,39	6,80 ± 0,42	8,02 ± 0,51	9,19 ± 0,41	10,66 ± 0,50	13,1	II	
8	14	7,8	6,29 ± 1,11	7,10 ± 1,09	7,64 ± 1,13	8,67 ± 1,11	10,18 ± 1,05	11,85 ± 1,11	14,7	III	
9	10	9,4	7,61 ± 1,14	8,76 ± 1,10	9,81 ± 1,16	11,35 ± 1,10	12,58 ± 1,06	13,54 ± 1,13	16,8	III	
9	14	9,0	7,30 ± 1,18	8,14 ± 1,12	8,86 ± 1,15	10,35 ± 1,12	11,81 ± 1,09	13,81 ± 1,06	17,2	III	
10	11	10,6	8,16 ± 1,06	9,70 ± 1,08	10,80 ± 1,08	13,01 ± 1,04	13,95 ± 1,12	15,20 ± 1,09	18,8	III	
11	14	11,6	9,23 ± 1,10	10,48 ± 1,06	11,97 ± 1,08	13,79 ± 1,05	15,52 ± 1,11	17,29 ± 1,11	21,6	III	
12	14	12,9	10,38 ± 1,12	11,75 ± 1,17	13,42 ± 1,16	15,78 ± 1,14	17,12 ± 1,05	18,75 ± 1,16	23,4	III	
13	16	14,0	11,87 ± 1,10	12,47 ± 1,15	14,27 ± 1,18	16,82 ± 1,11	18,69 ± 1,22	20,35 ± 1,18	25,8	III	
14	16	15,3	12,33 ± 1,12	14,01 ± 1,21	15,84 ± 1,24	18,48 ± 1,12	20,28 ± 1,06	22,03 ± 1,18	27,5	III	

Tabela 3.5: Graus de liberdade simulados de $T'_{(-1)}$ (estimativa ± erro padrão)

(a) $T_{\text{Welch}}, \theta = 0, 1$; (b) $T_{\text{Welch}}, \theta = 1$; (I) $r=10.000$ réplicas, todos os pares $(0, 01 \leq s(\hat{\nu}) \leq 0, 06)$;

(II) $r=5.000$ réplicas, todos os pares $(0, 34 \leq s(\hat{\nu}) \leq 0, 55)$; (III) $r=20.000$ réplicas, $p=75.000$ pares $(1, 00 \leq s(\hat{\nu}) \leq 1, 26)$.

n_1	n_2	limite ^(a) inferior	$1/\theta = \sigma_2^2/\sigma_1^2$							limite ^(b) superior	processo
			0,1	0,2	0,3	0,5	0,7	1			
2	2	1,2	0,91 ± 0,01	0,93 ± 0,01	0,94 ± 0,01	0,98 ± 0,01	1,10 ± 0,01	1,18 ± 0,01	2,0	I	
2	3	1,1	1,06 ± 0,02	1,06 ± 0,03	1,23 ± 0,05	1,43 ± 0,02	1,60 ± 0,01	1,99 ± 0,04	2,3	I	
2	4	1,1	1,01 ± 0,01	0,97 ± 0,01	1,12 ± 0,03	1,31 ± 0,03	1,55 ± 0,01	1,79 ± 0,02	2,1	I	
2	16	1,0	0,93 ± 0,03	0,91 ± 0,02	1,00 ± 0,01	0,90 ± 0,01	1,03 ± 0,04	1,12 ± 0,01	1,3	I	
3	3	2,4	1,40 ± 0,04	2,21 ± 0,03	2,46 ± 0,03	2,86 ± 0,01	3,12 ± 0,02	3,09 ± 0,03	4,0	I	
3	16	2,1	1,75 ± 0,03	1,86 ± 0,01	1,89 ± 0,02	1,93 ± 0,01	2,12 ± 0,03	2,41 ± 0,04	2,8	I	
4	4	3,6	3,06 ± 0,01	3,28 ± 0,04	3,72 ± 0,02	4,23 ± 0,03	4,60 ± 0,01	4,56 ± 0,03	6,0	I	
4	6	3,4	2,83 ± 0,03	3,27 ± 0,05	3,54 ± 0,02	4,26 ± 0,05	4,93 ± 0,04	5,76 ± 0,05	6,6	I	
4	8	3,3	2,89 ± 0,05	3,15 ± 0,03	3,40 ± 0,02	3,94 ± 0,05	4,51 ± 0,05	5,29 ± 0,03	6,1	I	
4	13	3,2	2,83 ± 0,42	2,93 ± 0,55	3,07 ± 0,41	3,31 ± 0,35	3,64 ± 0,41	4,26 ± 0,36	5,0	II	
5	5	4,8	4,58 ± 0,01	4,25 ± 0,03	4,94 ± 0,03	5,74 ± 0,02	6,22 ± 0,01	6,40 ± 0,03	8,0	I	
6	6	6,0	6,40 ± 0,01	5,52 ± 0,05	6,22 ± 0,04	7,00 ± 0,03	7,69 ± 0,01	7,90 ± 0,03	10,0	I	
6	10	5,6	4,79 ± 0,41	5,35 ± 0,49	5,81 ± 0,44	6,97 ± 0,38	7,93 ± 0,42	9,01 ± 0,41	10,7	II	
6	16	5,4	4,67 ± 1,02	4,92 ± 1,12	5,21 ± 1,14	5,97 ± 1,05	6,67 ± 1,00	7,70 ± 1,11	9,0	III	
7	10	6,8	5,84 ± 0,51	6,60 ± 0,39	7,27 ± 0,42	8,52 ± 0,50	9,87 ± 0,42	11,10 ± 0,49	13,1	II	
8	14	7,8	6,76 ± 1,10	7,41 ± 1,09	8,12 ± 1,11	9,35 ± 1,10	10,80 ± 1,05	12,61 ± 1,09	14,7	III	
9	10	9,4	8,22 ± 1,13	9,32 ± 1,10	10,50 ± 1,14	12,10 ± 1,11	13,35 ± 1,07	14,47 ± 1,12	16,8	III	
9	14	9,0	7,79 ± 1,18	8,64 ± 1,13	9,46 ± 1,13	11,24 ± 1,12	12,85 ± 1,09	14,76 ± 1,07	17,2	III	
10	11	10,6	8,83 ± 1,05	10,30 ± 1,07	11,61 ± 1,07	13,77 ± 1,03	15,09 ± 1,11	16,06 ± 1,07	18,8	III	
11	11	12,0	7,82 ± 0,65	11,01 ± 0,64	12,47 ± 0,66	14,35 ± 0,72	15,53 ± 0,63	15,69 ± 0,61	20,0	II	
11	14	11,6	9,90 ± 1,11	11,28 ± 1,06	12,60 ± 1,09	14,80 ± 1,06	16,69 ± 1,10	18,50 ± 1,10	21,6	III	
12	14	12,9	11,00 ± 1,11	12,55 ± 1,17	14,11 ± 1,14	16,70 ± 1,13	18,39 ± 1,05	20,08 ± 1,14	23,4	III	
13	16	14,0	12,36 ± 1,10	13,49 ± 1,15	15,19 ± 1,17	17,92 ± 1,12	20,07 ± 1,21	22,02 ± 1,18	25,8	III	
14	16	15,3	13,21 ± 1,12	14,90 ± 1,19	16,76 ± 1,22	19,74 ± 1,10	21,80 ± 1,05	23,57 ± 1,18	27,5	III	
15	16	16,6	13,90 ± 1,20	16,40 ± 1,17	18,30 ± 1,25	21,47 ± 1,11	23,33 ± 1,14	24,78 ± 1,12	28,9	III	
16	16	18,0	15,76 ± 1,11	16,72 ± 1,08	18,64 ± 1,14	21,31 ± 1,02	16,86 ± 1,09	24,00 ± 1,20	30,0	III	
21	21	24,0	23,91 ± 1,23	22,90 ± 1,20	24,69 ± 1,19	28,96 ± 1,16	30,88 ± 1,12	30,96 ± 1,10	40,0	III	
26	26	30,0	25,38 ± 1,11	29,33 ± 1,09	32,84 ± 1,18	38,13 ± 1,16	41,09 ± 1,14	42,37 ± 1,16	50,0	III	
31	31	35,9	47,60 ± 1,31	33,41 ± 1,25	37,16 ± 1,32	43,38 ± 1,32	46,48 ± 1,33	47,60 ± 1,32	60,0	III	

Tabela 3.6: Graus de liberdade simulados de $T_{(-)}$ (estimativa ± erro padrão)

(a) $T_{\text{Welch}, \theta = 0, 1}$; (b) $T_{\text{Welch}, \theta = 1}$; (I) $r=10.000$ réplicas, todos os pares $(0, 01 \leq s(\hat{\nu}) \leq 0, 05)$;
 (II) $r=5.000$ réplicas, todos os pares $(0, 35 \leq s(\hat{\nu}) \leq 0, 72)$; (III) $r=20.000$ réplicas, $p=75.000$ pares $(1, 00 \leq s(\hat{\nu}) \leq 1, 33)$.

n_1	n_2	limite ^(a) inferior	$1/\theta = \sigma_2^2/\sigma_1^2$							limite ^(b) superior	processo
			0,1	0,2	0,3	0,5	0,7	1			
2	3	1,1	1,27 ± 0,03	1,09 ± 0,04	1,08 ± 0,06	1,44 ± 0,03	1,81 ± 0,03	1,83 ± 0,05	2,3	I	
2	4	1,1	1,11 ± 0,01	0,94 ± 0,02	1,25 ± 0,03	1,46 ± 0,05	1,66 ± 0,01	1,87 ± 0,03	2,1	I	
2	16	1,0	0,91 ± 0,03	1,17 ± 0,01	1,09 ± 0,01	0,92 ± 0,02	1,26 ± 0,03	1,17 ± 0,01	1,3	I	
3	16	2,1	1,87 ± 0,01	2,14 ± 0,02	2,08 ± 0,02	1,99 ± 0,01	2,22 ± 0,03	2,39 ± 0,06	2,8	I	
4	6	3,4	2,88 ± 0,05	3,21 ± 0,04	3,63 ± 0,01	4,29 ± 0,04	5,02 ± 0,05	5,91 ± 0,03	6,6	I	
4	8	3,3	2,97 ± 0,05	3,16 ± 0,02	3,51 ± 0,05	3,97 ± 0,05	4,67 ± 0,06	5,20 ± 0,03	6,1	I	
4	13	3,2	2,69 ± 0,42	2,99 ± 0,54	3,28 ± 0,42	3,33 ± 0,34	3,72 ± 0,40	4,29 ± 0,37	5,0	II	
6	10	5,6	4,86 ± 0,43	5,35 ± 0,50	5,82 ± 0,43	6,81 ± 0,37	7,98 ± 0,45	9,27 ± 0,40	10,7	II	
6	16	5,4	4,75 ± 1,02	4,92 ± 1,11	5,54 ± 1,16	6,21 ± 1,04	6,88 ± 0,99	7,74 ± 1,12	9,0	III	
7	10	6,8	5,93 ± 0,53	6,58 ± 0,40	7,33 ± 0,41	8,59 ± 0,51	9,90 ± 0,41	11,45 ± 0,50	13,1	II	
8	14	7,8	6,78 ± 1,11	7,66 ± 1,08	8,18 ± 1,13	9,31 ± 1,12	10,93 ± 1,04	12,72 ± 1,10	14,7	III	
9	10	9,4	8,17 ± 1,14	9,44 ± 1,11	10,54 ± 1,15	12,17 ± 1,11	13,47 ± 1,07	14,49 ± 1,12	16,8	III	
9	14	9,0	7,81 ± 1,19	8,77 ± 1,12	9,488 ± 1,14	11,12 ± 1,11	12,66 ± 1,10	14,81 ± 1,07	17,2	III	
10	11	10,6	8,74 ± 1,06	10,41 ± 1,07	11,56 ± 1,07	13,98 ± 1,03	14,96 ± 1,13	16,26 ± 1,10	18,8	III	
11	14	11,6	9,90 ± 1,09	11,23 ± 1,06	12,86 ± 1,09	14,77 ± 1,04	16,66 ± 1,10	18,50 ± 1,12	21,6	III	
12	14	12,9	11,11 ± 1,12	12,57 ± 1,18	14,37 ± 1,17	16,89 ± 1,13	18,31 ± 1,05	20,09 ± 1,15	23,4	III	
13	16	14,0	12,75 ± 1,11	13,36 ± 1,15	15,33 ± 1,17	18,05 ± 1,10	20,05 ± 1,23	21,98 ± 1,17	25,8	III	
14	16	15,3	13,24 ± 1,13	15,02 ± 1,22	16,97 ± 1,23	19,81 ± 1,11	21,70 ± 1,07	23,60 ± 1,17	27,5	III	

Tabela 3.7: Graus de liberdade simulados de $T'_{(-)}$ (estimativa ± erro padrão)

(a) $T_{\text{Welch}}, \theta = 0, 1$; (b) $T_{\text{Welch}}, \theta = 1$; (I) $r=10.000$ réplicas, todos os pares ($0, 01 \leq s(\hat{\nu}) \leq 0, 06$);
 (II) $r=5.000$ réplicas, todos os pares ($0, 34 \leq s(\hat{\nu}) \leq 0, 54$); (III) $r=20.000$ réplicas, $p=75.000$ pares ($0, 99 \leq s(\hat{\nu}) \leq 1, 27$).

n_1	n_2	limite ^(a) inferior	$1/\theta = \sigma_2^2/\sigma_1^2$							limite ^(b) superior	processo
			0,1	0,2	0,3	0,5	0,7	1			
2	2	1,2	1,00 ± 0,01	1,06 ± 0,01	1,12 ± 0,01	1,13 ± 0,01	1,70 ± 0,03	1,46 ± 0,01	2,0	I	
2	3	1,1	1,05 ± 0,03	1,20 ± 0,04	1,33 ± 0,03	1,52 ± 0,01	1,80 ± 0,02	2,15 ± 0,01	2,3	I	
2	4	1,1	0,99 ± 0,01	1,12 ± 0,03	1,28 ± 0,01	1,47 ± 0,04	1,62 ± 0,02	1,97 ± 0,01	2,1	I	
2	16	1,0	0,92 ± 0,02	0,99 ± 0,04	1,13 ± 0,01	0,99 ± 0,04	1,17 ± 0,02	1,20 ± 0,01	1,3	I	
3	3	2,4	2,07 ± 0,03	2,63 ± 0,01	2,92 ± 0,02	3,34 ± 0,02	3,71 ± 0,04	3,66 ± 0,03	4,0	I	
3	16	2,1	1,92 ± 0,05	2,12 ± 0,03	2,44 ± 0,02	2,19 ± 0,01	2,33 ± 0,01	2,73 ± 0,02	2,8	I	
4	4	3,6	3,31 ± 0,02	3,94 ± 0,01	4,03 ± 0,03	5,05 ± 0,02	5,46 ± 0,01	5,42 ± 0,02	6,0	I	
4	6	3,4	3,20 ± 0,03	3,63 ± 0,01	3,99 ± 0,03	4,65 ± 0,03	5,38 ± 0,02	6,27 ± 0,03	6,6	I	
4	8	3,3	3,14 ± 0,04	3,40 ± 0,03	3,66 ± 0,01	4,32 ± 0,02	4,88 ± 0,01	5,86 ± 0,03	6,1	I	
4	13	3,2	3,15 ± 0,40	3,17 ± 0,53	3,39 ± 0,39	3,84 ± 0,36	4,12 ± 0,40	4,79 ± 0,41	5,0	II	
5	5	4,8	4,52 ± 0,02	4,99 ± 0,03	5,89 ± 0,03	6,82 ± 0,01	7,39 ± 0,03	7,52 ± 0,04	8,0	I	
6	6	6,0	5,75 ± 0,03	6,55 ± 0,04	7,42 ± 0,03	8,43 ± 0,02	9,15 ± 0,01	9,33 ± 0,02	10,0	I	
6	10	5,6	5,25 ± 0,41	5,82 ± 0,51	6,51 ± 0,41	7,72 ± 0,37	8,76 ± 0,44	10,10 ± 0,38	10,7	II	
6	16	5,4	5,06 ± 1,01	5,44 ± 1,11	5,76 ± 1,13	6,60 ± 1,05	7,40 ± 1,01	8,46 ± 1,11	9,0	III	
7	10	6,8	6,46 ± 0,51	7,29 ± 0,42	8,02 ± 0,43	9,50 ± 0,49	10,85 ± 0,39	12,39 ± 0,49	13,1	II	
8	14	7,8	7,49 ± 1,12	8,18 ± 1,12	8,93 ± 1,15	10,35 ± 1,11	12,14 ± 1,02	14,04 ± 1,10	14,7	III	
9	10	9,4	9,11 ± 1,12	10,33 ± 1,12	11,61 ± 1,14	13,53 ± 1,12	14,96 ± 1,08	16,01 ± 1,12	16,8	III	
9	14	9,0	8,52 ± 1,16	9,57 ± 1,15	10,45 ± 1,14	12,59 ± 1,10	14,25 ± 1,09	16,39 ± 1,07	17,2	III	
10	11	10,6	9,95 ± 1,06	11,49 ± 1,07	12,93 ± 1,04	15,32 ± 0,99	16,86 ± 1,12	17,80 ± 1,09	18,8	III	
11	11	12,0	10,70 ± 0,66	12,39 ± 0,66	14,03 ± 0,67	16,09 ± 0,72	17,47 ± 0,66	17,73 ± 0,60	20,0	II	
11	14	11,6	10,96 ± 1,09	12,53 ± 1,07	13,99 ± 1,09	16,49 ± 1,03	18,56 ± 1,13	20,49 ± 1,15	21,6	III	
12	14	12,9	12,22 ± 1,11	14,02 ± 1,12	15,59 ± 1,16	18,49 ± 1,12	20,42 ± 1,01	22,33 ± 1,15	23,4	III	
13	16	14,0	13,89 ± 1,11	14,96 ± 1,12	16,75 ± 1,15	20,00 ± 1,10	22,28 ± 1,21	24,38 ± 1,18	25,8	III	
14	16	15,3	14,63 ± 1,11	16,61 ± 1,20	18,49 ± 1,25	21,80 ± 1,11	24,31 ± 1,06	26,09 ± 1,18	27,5	III	
15	16	16,6	15,43 ± 1,25	18,09 ± 1,17	20,39 ± 1,21	23,88 ± 1,11	25,95 ± 1,16	27,51 ± 1,16	28,9	III	
16	16	18,0	16,08 ± 1,11	18,81 ± 1,10	20,97 ± 1,13	23,97 ± 1,05	18,96 ± 1,12	26,90 ± 1,21	30,0	III	
21	21	24,0	27,18 ± 1,24	25,75 ± 1,19	27,74 ± 1,19	32,49 ± 1,18	34,77 ± 1,12	34,75 ± 1,10	40,0	III	
26	26	30,0	26,99 ± 1,20	31,19 ± 1,17	34,93 ± 1,15	40,55 ± 1,14	43,69 ± 1,15	45,05 ± 1,19	50,0	III	
31	31	35,9	32,69 ± 1,32	37,60 ± 1,27	41,80 ± 1,31	48,79 ± 1,34	52,22 ± 1,21	53,55 ± 1,30	60,0	III	

Tabela 3.8: Graus de liberdade simulados de $T_{(0)}$ (estimativa ± erro padrão)

(a) $T_{\text{Welch}, \theta = 0, 1}$; (b) $T_{\text{Welch}, \theta = 1}$; (I) $r=10.000$ réplicas, todos os pares ($0, 01 \leq s(\hat{\nu}) \leq 0, 05$);
 (II) $r=5.000$ réplicas, todos os pares ($0, 36 \leq s(\hat{\nu}) \leq 0, 72$); (III) $r=20.000$ réplicas, $p=75.000$ pares ($0, 99 \leq s(\hat{\nu}) \leq 1, 34$).

		$1/\theta = \sigma_2^2/\sigma_1^2$										limite ^(b) superior	processo
n_1	n_2	limite ^(a) inferior	0,1	0,2	0,3	0,5	0,7	1					
2	3	1,1	1,25 ± 0,03	1,27 ± 0,04	1,41 ± 0,03	1,43 ± 0,01	1,83 ± 0,03	2,17 ± 0,01			2,3	I	
2	4	1,1	0,89 ± 0,01	1,21 ± 0,04	1,30 ± 0,02	1,42 ± 0,04	1,78 ± 0,03	2,11 ± 0,01			2,1	I	
2	16	1,0	0,87 ± 0,02	0,95 ± 0,04	1,13 ± 0,01	1,14 ± 0,04	1,27 ± 0,03	1,16 ± 0,01			1,3	I	
3	16	2,1	1,79 ± 0,06	2,21 ± 0,04	2,06 ± 0,04	2,10 ± 0,01	2,28 ± 0,02	2,90 ± 0,03			2,8	I	
4	6	3,4	3,37 ± 0,04	3,67 ± 0,01	3,94 ± 0,04	4,82 ± 0,03	5,43 ± 0,02	6,38 ± 0,03			6,6	I	
4	8	3,3	3,16 ± 0,05	3,61 ± 0,03	3,68 ± 0,01	4,37 ± 0,02	4,92 ± 0,01	5,99 ± 0,03			6,1	I	
4	13	3,2	3,18 ± 0,41	3,20 ± 0,53	3,44 ± 0,39	3,86 ± 0,36	4,13 ± 0,41	4,88 ± 0,42			5,0	II	
6	10	5,6	5,17 ± 0,42	5,87 ± 0,51	6,56 ± 0,41	7,92 ± 0,37	8,77 ± 0,45	10,20 ± 0,39			10,7	II	
6	16	5,4	5,03 ± 1,01	5,37 ± 1,11	5,91 ± 1,14	6,70 ± 1,05	7,47 ± 1,02	8,66 ± 1,12			9,0	III	
7	10	6,8	6,51 ± 0,52	7,35 ± 0,42	8,06 ± 0,43	9,54 ± 0,49	10,89 ± 0,39	12,39 ± 0,49			13,1	II	
8	14	7,8	7,54 ± 1,12	8,19 ± 1,13	9,01 ± 1,16	10,52 ± 1,11	12,15 ± 1,03	14,08 ± 1,11			14,7	III	
9	10	9,4	9,20 ± 1,13	10,26 ± 1,12	11,64 ± 1,15	13,56 ± 1,12	14,82 ± 1,09	16,01 ± 1,13			16,8	III	
9	14	9,0	8,59 ± 1,16	9,65 ± 1,15	10,41 ± 1,15	12,71 ± 1,10	14,34 ± 1,09	16,44 ± 1,08			17,2	III	
10	11	10,6	9,89 ± 1,06	11,45 ± 1,08	12,90 ± 1,05	15,45 ± 0,99	16,75 ± 1,13	17,73 ± 1,10			18,8	III	
11	14	11,6	11,03 ± 1,09	12,55 ± 1,07	13,99 ± 1,10	16,53 ± 1,03	18,83 ± 1,14	20,39 ± 1,16			21,6	III	
12	14	12,9	12,17 ± 1,11	14,08 ± 1,12	15,60 ± 1,17	18,54 ± 1,12	20,45 ± 1,01	22,57 ± 1,16			23,4	III	
13	16	14,0	14,03 ± 1,11	14,99 ± 1,12	16,81 ± 1,15	20,06 ± 1,10	22,19 ± 1,21	24,59 ± 1,18			25,8	III	
14	16	15,3	14,65 ± 1,11	16,69 ± 1,20	18,34 ± 1,25	21,80 ± 1,11	24,31 ± 1,06	26,15 ± 1,19			27,5	III	

Tabela 3.9: Graus de liberdade simulados de $T'_{(0)}$ (estimativa ± erro padrão)

(a) $T_{\text{Welch}}, \theta = 0, 1$; (b) $T_{\text{Welch}}, \theta = 1$; (I) $r=10.000$ réplicas, todos os pares ($0, 01 \leq s(\hat{\nu}) \leq 0, 06$);
 (II) $r=5.000$ réplicas, todos os pares ($0, 36 \leq s(\hat{\nu}) \leq 0, 53$); (III) $r=20.000$ réplicas, $p=75.000$ pares ($0, 99 \leq s(\hat{\nu}) \leq 1, 25$).

n_1	n_2	limite ^(a) inferior	$1/\theta = \sigma_1^2/\sigma_2^2$							limite ^(b) superior	processo
			0,1	0,2	0,3	0,5	0,7	1			
2	2	1,2	1,08 ± 0,01	1,22 ± 0,01	1,38 ± 0,01	1,60 ± 0,02	1,70 ± 0,01	1,96 ± 0,01	2,0	I	
2	3	1,1	0,95 ± 0,02	0,53 ± 0,03	0,68 ± 0,03	1,03 ± 0,01	1,43 ± 0,02	2,20 ± 0,02	2,3	I	
2	4	1,1	0,56 ± 0,01	1,15 ± 0,02	1,13 ± 0,02	1,25 ± 0,04	1,23 ± 0,01	1,54 ± 0,03	2,1	I	
2	16	1,0	0,53 ± 0,03	0,49 ± 0,03	0,67 ± 0,03	0,68 ± 0,03	0,69 ± 0,03	0,73 ± 0,01	1,3	I	
3	3	2,4	1,53 ± 0,03	2,76 ± 0,01	2,81 ± 0,01	3,09 ± 0,03	3,65 ± 0,03	3,74 ± 0,03	4,0	I	
3	16	2,1	1,78 ± 0,04	1,88 ± 0,02	1,46 ± 0,02	1,70 ± 0,01	1,95 ± 0,02	2,65 ± 0,02	2,8	I	
4	4	3,6	3,01 ± 0,03	3,90 ± 0,03	4,16 ± 0,02	4,76 ± 0,01	5,60 ± 0,02	5,22 ± 0,03	6,0	I	
4	6	3,4	3,10 ± 0,03	3,53 ± 0,03	3,96 ± 0,02	4,60 ± 0,03	4,96 ± 0,05	5,90 ± 0,04	6,6	I	
4	8	3,3	2,97 ± 0,02	2,95 ± 0,02	3,26 ± 0,02	3,79 ± 0,02	5,06 ± 0,03	5,46 ± 0,03	6,1	I	
4	13	3,2	3,30 ± 0,42	3,11 ± 0,53	3,30 ± 0,42	3,56 ± 0,37	3,74 ± 0,41	4,41 ± 0,40	5,0	II	
5	5	4,8	4,74 ± 0,02	5,29 ± 0,03	5,78 ± 0,02	7,11 ± 0,02	7,41 ± 0,03	7,74 ± 0,03	8,0	I	
6	6	6,0	5,52 ± 0,03	6,69 ± 0,03	7,29 ± 0,03	8,34 ± 0,02	9,62 ± 0,02	9,69 ± 0,01	10,0	I	
6	10	5,6	5,09 ± 0,41	5,46 ± 0,51	6,50 ± 0,42	8,08 ± 0,40	8,58 ± 0,44	9,85 ± 0,38	10,7	II	
6	16	5,4	5,12 ± 1,03	5,12 ± 1,10	5,66 ± 1,12	6,66 ± 1,06	7,01 ± 1,02	8,31 ± 1,12	9,0	III	
7	10	6,8	6,60 ± 0,51	6,99 ± 0,41	8,12 ± 0,43	9,45 ± 0,52	10,93 ± 0,42	12,63 ± 0,51	13,1	II	
8	14	7,8	7,42 ± 1,12	8,60 ± 1,11	9,20 ± 1,13	10,18 ± 1,12	12,15 ± 1,04	14,35 ± 1,12	14,7	III	
9	10	9,4	8,93 ± 1,14	10,12 ± 1,12	11,80 ± 1,15	14,12 ± 1,10	15,46 ± 1,07	16,24 ± 1,12	16,8	III	
9	14	9,0	8,60 ± 1,16	9,71 ± 1,14	10,88 ± 1,16	12,94 ± 1,10	14,33 ± 1,09	16,48 ± 1,08	17,2	III	
10	11	10,6	9,95 ± 1,09	11,70 ± 1,07	13,42 ± 1,07	15,94 ± 1,02	17,50 ± 1,11	18,36 ± 1,09	18,8	III	
11	11	12,0	11,73 ± 0,66	13,74 ± 0,66	15,24 ± 0,64	17,76 ± 0,72	18,82 ± 0,66	19,14 ± 0,61	20,0	II	
11	14	11,6	10,88 ± 1,09	12,85 ± 1,08	14,48 ± 1,07	17,09 ± 1,05	19,26 ± 1,11	21,51 ± 1,13	21,6	III	
12	14	12,9	12,43 ± 1,11	14,16 ± 1,15	16,03 ± 1,15	18,78 ± 1,15	21,44 ± 1,03	23,08 ± 1,15	23,4	III	
13	16	14,0	14,39 ± 1,11	15,56 ± 1,13	17,21 ± 1,17	20,74 ± 1,13	23,16 ± 1,22	25,44 ± 1,17	25,8	III	
14	16	15,3	15,04 ± 1,11	16,63 ± 1,20	19,15 ± 1,24	22,98 ± 1,14	25,36 ± 1,08	27,03 ± 1,16	27,5	III	
15	16	16,6	15,70 ± 1,23	18,89 ± 1,15	21,01 ± 1,23	24,59 ± 1,11	27,05 ± 1,15	28,43 ± 1,16	28,9	III	
16	16	18,0	17,67 ± 1,11	20,58 ± 1,11	22,97 ± 0,66	26,11 ± 1,04	20,97 ± 1,12	29,91 ± 1,21	30,0	III	
21	21	24,0	30,07 ± 1,24	28,16 ± 1,18	30,87 ± 1,13	35,77 ± 1,19	38,38 ± 1,12	38,61 ± 1,10	40,0	III	
26	26	30,0	27,51 ± 1,12	31,79 ± 1,18	35,59 ± 1,14	41,31 ± 1,16	44,25 ± 1,11	45,90 ± 1,10	50,0	III	
31	31	35,9	36,37 ± 1,31	11,76 ± 1,28	45,91 ± 1,20	53,79 ± 1,34	57,89 ± 1,33	59,38 ± 1,31	60,0	III	

Tabela 3.10: Graus de liberdade simulados de $T_{(1)}$ (estimativa ± erro padrão)

(a) $T_{\text{Welch}}, \theta = 0, 1$; (b) $T_{\text{Welch}}, \theta = 1$; (I) $r=10.000$ réplicas, todos os pares $(0, 01 \leq s(\hat{\nu}) \leq 0, 05)$;
 (II) $r=5.000$ réplicas, todos os pares $(0, 37 \leq s(\hat{\nu}) \leq 0, 75)$; (III) $r=20.000$ réplicas, $p=75.000$ pares $(0, 66 \leq s(\hat{\nu}) \leq 1, 34)$.

		$1/\theta = \sigma_2^2/\sigma_1^2$										limite ^(b) superior	processo
n_1	n_2	limite ^(a) inferior	0,1	0,2	0,3	0,5	0,7	1					
2	3	1,1	1,30 ± 0,02	1,25 ± 0,04	1,27 ± 0,04	2,00 ± 0,02	2,09 ± 0,02	2,36 ± 0,03			2,3	I	
2	4	1,1	0,89 ± 0,02	1,10 ± 0,03	1,34 ± 0,03	1,98 ± 0,03	2,17 ± 0,02	2,22 ± 0,02			2,1	I	
2	16	1,0	1,23 ± 0,02	1,40 ± 0,05	1,27 ± 0,03	1,27 ± 0,03	1,35 ± 0,04	1,18 ± 0,01			1,3	I	
3	16	2,1	2,20 ± 0,05	2,02 ± 0,02	2,08 ± 0,02	2,42 ± 0,02	2,70 ± 0,03	2,80 ± 0,03			2,8	I	
4	6	3,4	3,32 ± 0,03	4,21 ± 0,03	4,18 ± 0,02	5,06 ± 0,04	5,83 ± 0,05	6,88 ± 0,06			6,6	I	
4	8	3,3	3,40 ± 0,04	3,55 ± 0,04	3,97 ± 0,02	4,76 ± 0,03	5,60 ± 0,04	6,29 ± 0,03			6,1	I	
4	13	3,2	3,61 ± 0,42	3,52 ± 0,55	3,45 ± 0,42	4,18 ± 0,37	4,60 ± 0,42	5,16 ± 0,40			5,0	II	
6	10	5,6	5,56 ± 0,41	6,65 ± 0,51	6,72 ± 0,43	8,22 ± 0,41	9,18 ± 0,44	10,90 ± 0,40			10,7	II	
6	16	5,4	5,36 ± 1,04	5,83 ± 1,10	6,25 ± 1,14	7,26 ± 1,08	7,87 ± 1,01	9,19 ± 1,12			9,0	III	
7	10	6,8	6,99 ± 0,52	7,82 ± 0,41	8,59 ± 0,43	10,07 ± 0,52	11,44 ± 0,43	13,13 ± 0,51			13,1	II	
8	14	7,8	8,01 ± 1,14	8,76 ± 1,11	9,40 ± 1,15	11,06 ± 1,13	12,41 ± 1,05	14,97 ± 1,13			14,7	III	
9	10	9,4	9,56 ± 1,13	11,05 ± 1,12	12,24 ± 1,15	14,60 ± 1,11	15,85 ± 1,07	16,92 ± 1,14			16,8	III	
9	14	9,0	9,15 ± 1,16	10,05 ± 1,14	11,12 ± 1,17	13,23 ± 1,11	15,06 ± 1,09	17,27 ± 1,09			17,2	III	
10	11	10,6	10,36 ± 1,08	12,33 ± 1,07	13,57 ± 1,08	16,04 ± 1,02	17,77 ± 1,12	18,77 ± 1,10			18,8	III	
11	14	11,6	11,71 ± 1,10	13,51 ± 1,08	14,96 ± 1,08	17,38 ± 1,07	19,37 ± 1,11	21,65 ± 1,13			21,6	III	
12	14	12,9	12,97 ± 1,11	14,87 ± 1,15	16,28 ± 1,17	19,68 ± 1,14	21,28 ± 1,03	23,68 ± 1,14			23,4	III	
13	16	14,0	14,64 ± 1,11	16,13 ± 1,13	17,73 ± 1,17	21,11 ± 1,12	23,55 ± 1,22	25,49 ± 1,17			25,8	III	
14	16	15,3	15,33 ± 1,12	17,58 ± 1,21	19,60 ± 1,24	23,15 ± 1,14	25,37 ± 1,08	27,74 ± 1,18			27,5	III	

Tabela 3.11: Graus de liberdade simulados de $T'_{(1)}$ (estimativa ± erro padrão)

(a) $T_{\text{Welch}}, \theta = 0, 1$; (b) $T_{\text{Welch}}, \theta = 1$; (I) $r=10.000$ réplicas, todos os pares $(0, 01 \leq s(\hat{\nu}) \leq 0, 06)$;
 (II) $r=5.000$ réplicas, todos os pares $(0, 37 \leq s(\hat{\nu}) \leq 0, 55)$; (III) $r=20.000$ réplicas, $p=75.000$ pares $(1, 01 \leq s(\hat{\nu}) \leq 1, 24)$.

n_1	n_2	limite ^(a) inferior	1/ θ							limite ^(b) superior	processo
			0,1	0,2	0,3	0,5	0,7	1			
2	2	1,2	1,01 ± 0,01	1,04 ± 0,01	1,05 ± 0,01	1,05 ± 0,01	1,05 ± 0,01	1,05 ± 0,01	1,38 ± 0,02	2,0	I
2	3	1,1	1,03 ± 0,02	1,16 ± 0,05	1,30 ± 0,02	1,52 ± 0,01	1,76 ± 0,01	2,08 ± 0,02	2,3	I	
2	4	1,1	0,94 ± 0,02	1,06 ± 0,03	1,20 ± 0,02	1,45 ± 0,03	1,55 ± 0,02	1,90 ± 0,01	2,1	I	
2	16	1,0	0,92 ± 0,01	0,93 ± 0,05	1,06 ± 0,01	0,91 ± 0,04	1,09 ± 0,02	1,13 ± 0,02	1,3	I	
3	3	2,4	2,04 ± 0,02	2,51 ± 0,01	2,85 ± 0,01	3,21 ± 0,02	2,85 ± 0,01	3,56 ± 0,02	4,0	I	
3	16	2,1	1,83 ± 0,05	2,05 ± 0,01	1,96 ± 0,03	2,12 ± 0,01	2,26 ± 0,01	2,62 ± 0,03	2,8	I	
4	4	3,6	3,20 ± 0,02	3,79 ± 0,03	4,31 ± 0,02	4,92 ± 0,01	4,31 ± 0,02	5,25 ± 0,03	6,0	I	
4	6	3,4	3,11 ± 0,02	3,48 ± 0,01	3,86 ± 0,03	4,50 ± 0,03	5,21 ± 0,02	6,13 ± 0,02	6,6	I	
4	8	3,3	3,09 ± 0,03	3,28 ± 0,03	3,53 ± 0,01	4,18 ± 0,02	4,72 ± 0,01	5,64 ± 0,03	6,1	I	
4	13	3,2	3,03 ± 0,40	3,11 ± 0,52	3,33 ± 0,38	3,69 ± 0,37	3,98 ± 0,41	4,62 ± 0,42	5,0	II	
5	5	4,8	4,42 ± 0,01	4,80 ± 0,04	5,68 ± 0,02	6,66 ± 0,01	5,68 ± 0,02	7,16 ± 0,04	8,0	I	
6	6	6,0	5,58 ± 0,02	6,34 ± 0,05	7,23 ± 0,02	8,21 ± 0,01	7,23 ± 0,02	8,87 ± 0,01	10,0	I	
6	10	5,6	5,08 ± 0,42	5,65 ± 0,50	6,31 ± 0,41	7,53 ± 0,36	8,52 ± 0,43	9,83 ± 0,37	10,7	II	
6	16	5,4	4,87 ± 1,02	5,24 ± 1,12	5,57 ± 1,14	6,36 ± 1,05	7,17 ± 1,02	8,18 ± 1,12	9,0	III	
7	10	6,8	6,28 ± 0,50	7,04 ± 0,43	7,79 ± 0,42	9,17 ± 0,49	10,56 ± 0,38	12,05 ± 0,48	13,1	II	
8	14	7,8	7,25 ± 1,13	7,95 ± 1,11	8,66 ± 1,16	10,00 ± 1,11	11,74 ± 1,03	13,57 ± 1,11	14,7	III	
9	10	9,4	8,86 ± 1,11	10,06 ± 1,11	11,23 ± 1,15	13,08 ± 1,13	14,55 ± 1,07	15,49 ± 1,13	16,8	III	
9	14	9,0	8,24 ± 1,16	9,254 ± 1,16	10,09 ± 1,14	12,20 ± 1,11	13,80 ± 1,10	15,93 ± 1,06	17,2	III	
10	11	10,6	9,64 ± 1,06	11,11 ± 1,08	12,53 ± 1,05	14,82 ± 0,99	16,40 ± 1,11	17,24 ± 1,10	18,8	III	
11	11	12,0	10,35 ± 0,66	12,00 ± 0,67	13,57 ± 0,67	15,64 ± 0,71	13,57 ± 0,67	16,98 ± 0,59	20,0	II	
11	14	11,6	10,66 ± 1,08	12,18 ± 1,06	13,56 ± 1,10	16,02 ± 1,02	18,01 ± 1,12	19,84 ± 1,16	21,6	III	
12	14	12,9	11,82 ± 1,12	13,58 ± 1,12	15,11 ± 1,17	17,95 ± 1,11	19,78 ± 1,02	21,66 ± 1,14	23,4	III	
13	16	14,0	13,43 ± 1,11	14,50 ± 1,13	16,22 ± 1,16	19,44 ± 1,09	21,63 ± 1,20	23,62 ± 1,18	25,8	III	
14	16	15,3	14,20 ± 1,10	16,07 ± 1,21	17,98 ± 1,24	21,13 ± 1,11	23,53 ± 1,07	25,28 ± 1,19	27,5	III	
15	16	16,6	14,92 ± 1,25	17,55 ± 1,16	19,81 ± 1,20	23,19 ± 1,10	25,14 ± 1,17	26,66 ± 1,16	28,9	III	
16	16	18,0	15,55 ± 1,12	18,28 ± 1,09	20,32 ± 1,13	23,25 ± 1,04	20,32 ± 1,13	18,36 ± 1,21	30,0	III	
21	21	24,0	26,36 ± 1,24	24,95 ± 1,20	26,86 ± 1,20	31,56 ± 1,17	26,86 ± 1,20	33,72 ± 1,11	40,0	III	
26	26	30,0	26,16 ± 1,20	30,27 ± 1,16	33,87 ± 1,16	39,33 ± 1,14	42,37 ± 1,15	43,68 ± 1,19	50,0	III	
31	31	35,9	31,70 ± 1,32	36,46 ± 1,28	40,59 ± 1,30	47,32 ± 1,35	40,59 ± 1,30	50,69 ± 1,29	60,0	III	

Tabela 3.12: Graus de liberdade simulados de $T_{(4)}$ (estimativa ± erro padrão)

(a) $T_{\text{Weibch}}, \theta = 0, 1$; (b) $T_{\text{Weibch}}, \theta = 1$; (I) $r=10.000$ réplicas, todos os pares $(0, 01 \leq s(\hat{\nu}) \leq 0, 04)$;
 (II) $r=5.000$ réplicas, todos os pares $(0, 35 \leq s(\hat{\nu}) \leq 0, 70)$; (III) $r=20.000$ réplicas, $p=75.000$ pares $(1, 00 \leq s(\hat{\nu}) \leq 1, 33)$.

		$1/\theta = \sigma_2^2/\sigma_1^2$										limite ^(b) superior	processo
n_1	n_2	limite ^(a) inferior	0,1	0,2	0,3	0,5	0,7	1					
2	3	1,1	1,21 ± 0,03	1,30 ± 0,02	1,20 ± 0,03	1,77 ± 0,03	1,78 ± 0,01	2,16 ± 0,03			2,3	I	
2	4	1,1	0,98 ± 0,01	1,02 ± 0,01	1,19 ± 0,01	1,72 ± 0,03	1,98 ± 0,01	2,02 ± 0,01			2,1	I	
2	16	1,0	1,08 ± 0,01	1,11 ± 0,03	1,16 ± 0,03	1,14 ± 0,03	1,24 ± 0,04	1,14 ± 0,01			1,3	I	
3	16	2,1	2,09 ± 0,04	2,11 ± 0,01	2,16 ± 0,01	2,28 ± 0,03	2,44 ± 0,03	2,72 ± 0,02			2,8	I	
4	6	3,4	3,27 ± 0,02	3,22 ± 0,03	4,01 ± 0,03	4,90 ± 0,04	5,57 ± 0,06	6,62 ± 0,05			6,6	I	
4	8	3,3	3,21 ± 0,03	3,27 ± 0,02	4,04 ± 0,01	4,50 ± 0,02	5,20 ± 0,03	6,10 ± 0,03			6,1	I	
4	13	3,2	3,20 ± 0,42	3,27 ± 0,53	3,39 ± 0,41	3,90 ± 0,35	4,38 ± 0,42	5,10 ± 0,39			5,0	II	
6	10	5,6	5,38 ± 0,40	5,34 ± 0,52	6,52 ± 0,43	7,87 ± 0,41	8,96 ± 0,44	10,3 ± 0,38			10,7	II	
6	16	5,4	5,20 ± 1,03	5,19 ± 1,11	6,01 ± 1,14	6,90 ± 1,07	7,53 ± 1,01	8,82 ± 1,12			9,0	III	
7	10	6,8	6,66 ± 0,50	6,65 ± 0,39	8,26 ± 0,43	9,70 ± 0,51	11,07 ± 0,43	12,78 ± 0,52			13,1	II	
8	14	7,8	7,72 ± 1,12	7,68 ± 1,11	9,13 ± 1,13	10,72 ± 1,12	12,15 ± 1,03	14,45 ± 1,11			14,7	III	
9	10	9,4	9,42 ± 1,12	9,34 ± 1,12	11,87 ± 1,14	13,98 ± 1,11	15,28 ± 1,07	16,39 ± 1,13			16,8	III	
9	14	9,0	8,64 ± 1,17	8,72 ± 1,13	10,77 ± 1,15	12,62 ± 1,10	14,49 ± 1,09	16,70 ± 1,08			17,2	III	
10	11	10,6	9,98 ± 1,08	9,98 ± 1,07	13,07 ± 1,08	15,65 ± 1,00	17,13 ± 1,12	18,25 ± 1,09			18,8	III	
11	14	11,6	11,39 ± 1,09	11,38 ± 1,07	14,47 ± 1,08	16,83 ± 1,06	18,76 ± 1,12	21,09 ± 1,12			21,6	III	
12	14	12,9	12,54 ± 1,12	12,59 ± 1,13	15,89 ± 1,17	18,91 ± 1,14	20,74 ± 1,03	22,85 ± 1,15			23,4	III	
13	16	14,0	13,99 ± 1,11	14,02 ± 1,13	17,10 ± 1,17	20,45 ± 1,12	22,78 ± 1,22	24,80 ± 1,17			25,8	III	
14	16	15,3	14,81 ± 1,13	14,86 ± 1,19	19,05 ± 1,23	22,36 ± 1,13	24,74 ± 1,08	26,73 ± 1,17			27,5	III	
15	16	16,6	16,00 ± 1,23	16,08 ± 1,14	20,86 ± 1,25	24,61 ± 1,09	26,47 ± 1,16	27,94 ± 1,15			28,9	III	

Tabela 3.13: Graus de liberdade simulados de $T'_{(4)}$ (estimativa ± erro padrão)

(a) $T_{\text{Welch}}, \theta = 0, 1$; (b) $T_{\text{Welch}}, \theta = 1$; (I) $r=10.000$ réplicas, todos os pares $(0, 01 \leq s(\hat{\nu}) \leq 0, 06)$;
 (II) $r=5.000$ réplicas, todos os pares $(0, 35 \leq s(\hat{\nu}) \leq 0, 53)$; (III) $r=20.000$ réplicas, $p=75.000$ pares $(1, 00 \leq s(\hat{\nu}) \leq 1, 25)$.

		$1/\theta = \sigma_2^2/\sigma_1^2$										limite ^(b) superior	processo
n_1	n_2	limite ^(a) inferior	0,1	0,2	0,3	0,5	0,7	1					
2	2	1,2	1,12 ± 0,01	1,32 ± 0,01	1,54 ± 0,02	1,72 ± 0,02	1,81 ± 0,02	1,99 ± 0,01			2,0	I	
2	3	1,1	1,21 ± 0,01	1,27 ± 0,02	1,41 ± 0,02	1,61 ± 0,01	1,93 ± 0,01	2,27 ± 0,01			2,3	I	
2	4	1,1	1,11 ± 0,01	1,21 ± 0,01	1,31 ± 0,02	1,53 ± 0,03	1,79 ± 0,01	2,07 ± 0,02			2,1	I	
2	16	1,0	1,05 ± 0,02	1,05 ± 0,03	1,13 ± 0,02	1,04 ± 0,02	1,24 ± 0,03	1,26 ± 0,01			1,3	I	
3	3	2,4	2,21 ± 0,02	2,77 ± 0,01	3,08 ± 0,01	3,62 ± 0,02	3,94 ± 0,03	3,90 ± 0,02			4,0	I	
3	16	2,1	2,12 ± 0,03	2,15 ± 0,01	2,22 ± 0,01	2,51 ± 0,01	2,55 ± 0,02	2,78 ± 0,02			2,8	I	
4	4	3,6	3,55 ± 0,02	4,18 ± 0,02	4,68 ± 0,01	5,33 ± 0,01	5,76 ± 0,01	5,80 ± 0,02			6,0	I	
4	6	3,4	3,34 ± 0,03	3,81 ± 0,02	4,12 ± 0,01	4,98 ± 0,02	5,74 ± 0,04	6,66 ± 0,04			6,6	I	
4	8	3,3	3,31 ± 0,02	3,61 ± 0,02	3,93 ± 0,02	4,54 ± 0,02	5,19 ± 0,03	6,17 ± 0,03			6,1	I	
4	13	3,2	3,32 ± 0,41	3,38 ± 0,53	3,57 ± 0,41	3,97 ± 0,36	4,29 ± 0,41	5,02 ± 0,39			5,0	II	
5	5	4,8	4,80 ± 0,02	5,32 ± 0,02	6,21 ± 0,02	7,18 ± 0,01	7,78 ± 0,02	8,00 ± 0,03			8,0	I	
6	6	6,0	6,10 ± 0,02	6,90 ± 0,03	7,82 ± 0,03	8,88 ± 0,01	9,74 ± 0,01	9,90 ± 0,01			10,0	I	
6	10	5,6	5,53 ± 0,41	6,22 ± 0,51	6,79 ± 0,42	8,13 ± 0,39	9,22 ± 0,43	10,50 ± 0,38			10,7	II	
6	16	5,4	5,42 ± 1,03	5,77 ± 1,10	6,07 ± 1,12	6,96 ± 1,06	7,79 ± 1,01	8,93 ± 1,11			9,0	III	
7	10	6,8	6,81 ± 0,50	7,70 ± 0,40	8,45 ± 0,43	10,01 ± 0,51	11,48 ± 0,41	13,06 ± 0,50			13,1	II	
8	14	7,8	7,91 ± 1,12	8,62 ± 1,10	9,45 ± 1,13	10,98 ± 1,12	12,68 ± 1,04	14,70 ± 1,11			14,7	III	
9	10	9,4	9,60 ± 1,13	10,88 ± 1,11	12,20 ± 1,14	14,25 ± 1,10	15,71 ± 1,06	16,85 ± 1,12			16,8	III	
9	14	9,0	9,05 ± 1,15	10,12 ± 1,14	11,07 ± 1,16	13,16 ± 1,10	15,02 ± 1,08	17,21 ± 1,07			17,2	III	
10	11	10,6	10,41 ± 1,08	12,12 ± 1,06	13,62 ± 1,06	16,10 ± 1,01	17,66 ± 1,10	18,77 ± 1,08			18,8	III	
11	11	12,0	11,90 ± 0,65	13,77 ± 0,66	15,61 ± 0,66	17,94 ± 0,71	19,42 ± 0,65	19,70 ± 0,60			20,0	II	
11	14	11,6	11,52 ± 1,09	13,16 ± 1,07	14,72 ± 1,07	17,30 ± 1,05	19,48 ± 1,11	21,57 ± 1,13			21,6	III	
12	14	12,9	12,87 ± 1,10	14,76 ± 1,14	16,46 ± 1,15	19,46 ± 1,14	21,54 ± 1,14	23,43 ± 1,14			23,4	III	
13	16	14,0	14,60 ± 1,11	15,75 ± 1,13	17,73 ± 1,16	20,96 ± 1,12	23,46 ± 1,21	25,71 ± 1,17			25,8	III	
14	16	15,3	15,40 ± 1,11	17,42 ± 1,20	19,55 ± 1,23	23,04 ± 1,13	25,53 ± 1,07	27,47 ± 1,16			27,5	III	
15	16	16,6	16,30 ± 1,23	19,12 ± 1,15	21,38 ± 1,23	25,13 ± 1,10	27,32 ± 1,15	28,96 ± 1,15			28,9	III	
16	16	18,0	17,92 ± 1,11	20,91 ± 1,10	23,30 ± 1,12	26,64 ± 1,04	21,08 ± 1,11	30,00 ± 1,20			30,0	III	
21	21	24,0	30,20 ± 1,23	28,65 ± 1,18	30,89 ± 1,19	36,21 ± 1,18	38,64 ± 1,12	38,70 ± 1,10			40,0	III	
26	26	30,0	30,38 ± 1,11	34,80 ± 1,13	37,16 ± 1,19	46,10 ± 1,15	49,14 ± 1,13	50,12 ± 1,14			50,0	III	
31	31	35,9	36,40 ± 1,31	41,78 ± 1,27	46,45 ± 1,30	54,31 ± 1,33	58,11 ± 1,32	59,50 ± 1,30			60,0	III	

Tabela 3.14: Graus de liberdade simulados de $T_{(2)}$ (estimativa ± erro padrão)

(a) $T_{\text{Welch}, \theta = 0, 1}$; (b) $T_{\text{Welch}, \theta = 1}$; (I) $r=10.000$ réplicas, todos os pares ($0, 01 \leq s(\hat{\nu}) \leq 0, 04$);
 (II) $r=5.000$ réplicas, todos os pares ($0, 36 \leq s(\hat{\nu}) \leq 0, 71$); (III) $r=20.000$ réplicas, $p=75.000$ pares ($1, 01 \leq s(\hat{\nu}) \leq 1, 33$).

		$1/\theta = \sigma_2^2/\sigma_1^2$										limite ^(b) superior	processo
n_1	n_2	limite ^(a) inferior	0,1	0,2	0,3	0,5	0,7	1					
2	3	1,1	1,26 ± 0,02	1,30 ± 0,03	1,27 ± 0,03	1,83 ± 0,02	1,84 ± 0,01	2,28 ± 0,02			2,3	I	
2	4	1,1	1,00 ± 0,02	1,23 ± 0,02	1,19 ± 0,02	1,82 ± 0,03	2,03 ± 0,02	2,07 ± 0,02			2,1	I	
2	16	1,0	1,11 ± 0,02	1,18 ± 0,04	1,22 ± 0,03	1,21 ± 0,02	1,33 ± 0,03	1,16 ± 0,01			1,3	I	
3	16	2,1	2,20 ± 0,04	2,17 ± 0,02	2,23 ± 0,02	2,40 ± 0,02	2,57 ± 0,02	2,84 ± 0,02			2,8	I	
4	6	3,4	3,36 ± 0,03	3,93 ± 0,03	4,15 ± 0,02	5,05 ± 0,03	5,76 ± 0,05	6,85 ± 0,05			6,6	I	
4	8	3,3	3,34 ± 0,03	3,65 ± 0,03	4,13 ± 0,02	4,60 ± 0,03	5,39 ± 0,03	6,32 ± 0,03			6,1	I	
4	13	3,2	3,34 ± 0,41	3,44 ± 0,54	3,54 ± 0,41	3,98 ± 0,36	4,55 ± 0,41	5,25 ± 0,40			5,0	II	
6	10	5,6	5,53 ± 0,41	6,42 ± 0,51	6,73 ± 0,42	8,13 ± 0,40	9,24 ± 0,44	10,67 ± 0,39			10,7	II	
6	16	5,4	5,38 ± 1,03	5,83 ± 1,10	6,22 ± 1,13	7,13 ± 1,07	7,80 ± 1,01	9,10 ± 1,12			9,0	III	
7	10	6,8	6,85 ± 0,51	7,79 ± 0,40	8,53 ± 0,43	10,04 ± 0,51	11,46 ± 0,42	13,22 ± 0,51			13,1	II	
8	14	7,8	7,94 ± 1,13	8,67 ± 1,10	9,40 ± 1,14	11,03 ± 1,13	12,52 ± 1,04	14,89 ± 1,12			14,7	III	
9	10	9,4	9,68 ± 1,13	11,01 ± 1,12	12,22 ± 1,15	14,43 ± 1,10	15,78 ± 1,07	16,90 ± 1,13			16,8	III	
9	14	9,0	8,95 ± 1,16	10,13 ± 1,14	11,06 ± 1,16	13,06 ± 1,10	14,95 ± 1,09	17,23 ± 1,08			17,2	III	
10	11	10,6	10,32 ± 1,08	12,11 ± 1,07	13,52 ± 1,07	16,11 ± 1,01	17,68 ± 1,11	18,83 ± 1,09			18,8	III	
11	14	11,6	11,70 ± 1,10	13,45 ± 1,08	14,93 ± 1,07	17,36 ± 1,06	19,39 ± 1,11	21,74 ± 1,13			21,6	III	
12	14	12,9	12,98 ± 1,11	14,83 ± 1,14	16,42 ± 1,16	19,52 ± 1,14	21,39 ± 1,02	23,58 ± 1,14			23,4	III	
13	16	14,0	14,46 ± 1,11	16,03 ± 1,13	17,64 ± 1,17	21,10 ± 1,12	23,50 ± 1,22	25,61 ± 1,17			25,8	III	
14	16	15,3	15,30 ± 1,12	17,44 ± 1,20	19,68 ± 1,23	23,07 ± 1,13	25,54 ± 1,08	27,57 ± 1,17			27,5	III	

Tabela 3.15: Graus de liberdade simulados de $T'_{(2)}$ (estimativa ± erro padrão)

(a) $T_{\text{Welch}}, \theta = 0, 1$; (b) $T_{\text{Welch}}, \theta = 1$; (I) $r=10.000$ réplicas, todos os pares $(0, 01 \leq s(\hat{\nu}) \leq 0, 05)$;
 (II) $r=5.000$ réplicas, todos os pares $(0, 36 \leq s(\hat{\nu}) \leq 0, 54)$; (III) $r=20.000$ réplicas, $p=75.000$ pares $(1, 01 \leq s(\hat{\nu}) \leq 1, 24)$.

n_1	n_2	$\rightarrow 0^a$	$1/\theta = \sigma_2^2/\sigma_1^2$																Student ^b	média ^c	pares
			0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1									
2	2	1	1,2	1,4	1,6	1,7	1,8	1,9	1,9	2,0	2,0	2,0	2,0	2,0	2,0	2,0	2	1,74	2		
2	3	1	1,1	1,3	1,4	1,5	1,7	1,8	1,9	2,1	2,2	2,3	2,3	2,3	2,3	2,3	3	1,73	6		
2	4	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,8	1,9	2,0	2,1	2,1	2,1	2,1	2,1	4	1,59	12		
2	16	1	1,0	1,1	1,1	1,1	1,1	1,2	1,2	1,2	1,2	1,3	1,3	1,3	1,3	16	1,14	240			
3	3	2	2,4	2,8	3,1	3,4	3,6	3,8	3,9	4,0	4,0	4,0	4,0	4,0	4,0	4	3,48	6			
3	16	2	2,1	2,2	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,6	2,7	2,8	2,8	2,8	2,8	17	2,43	3360			
4	4	3	3,6	4,2	4,7	5,1	5,4	5,6	5,8	5,9	6,0	6,0	6,0	6,0	6,0	6	5,22	24			
4	6	3	3,4	3,8	4,2	4,6	5,0	5,4	5,7	6,0	6,3	6,6	6,6	6,6	6,6	8	5,10	360			
4	8	3	3,3	3,6	3,9	4,2	4,6	4,9	5,2	5,5	5,8	6,1	6,1	6,1	6,1	10	4,71	1680			
4	13	3	3,2	3,4	3,6	3,8	4,0	4,2	4,4	4,6	4,8	5,0	5,0	5,0	5,0	15	4,08	17160			
5	5	4	4,8	5,5	6,2	6,8	7,2	7,5	7,8	7,9	8,0	8,0	8,0	8,0	8,0	8	6,97	120			
6	6	5	6,0	6,9	7,8	8,4	9,0	9,4	9,7	9,9	10,0	10,0	10,0	10,0	10,0	10	8,71	720			
6	10	5	5,6	6,2	6,8	7,4	8,0	8,6	9,2	9,7	10,2	10,7	10,7	10,7	14	8,26	151200				
6	16	5	5,4	5,8	6,2	6,6	7,0	7,4	7,8	8,2	8,6	9,0	9,0	9,0	20	7,19	5765760				
7	10	6	6,8	7,7	8,5	9,3	10,1	10,8	11,5	12,1	12,6	13,1	12,6	12,6	13,1	15	10,26	604800			
8	14	7	7,8	8,6	9,5	10,3	11,1	11,9	12,6	13,4	14,1	14,7	14,7	14,7	20	11,39	121080960				
9	10	8	9,4	10,8	12,1	13,3	14,3	15,1	15,7	16,2	16,6	16,8	16,8	16,8	17	14,02	3628800				
9	14	8	9,0	10,1	11,1	12,1	13,1	14,1	15,0	15,8	16,5	17,2	17,2	17,2	21	13,41	726485760				
10	11	9	10,6	12,2	13,7	15,0	16,1	17,0	17,7	18,2	18,6	18,8	18,8	18,8	20	15,77	39916800				
11	11	10	12,0	13,8	15,5	16,9	18,0	18,8	19,4	19,8	19,9	20,0	20,0	20,0	20	17,41	39916800				
11	14	10	11,6	13,1	14,6	16,1	17,3	18,5	19,5	20,3	21,0	21,6	21,6	21,6	23	17,37	$1,45 \times 10^{10}$				
12	14	11	12,9	14,7	16,5	18,0	19,4	20,6	21,6	22,4	23,0	23,4	23,4	23,4	24	19,25	$4,36 \times 10^{10}$				
13	16	12	14,0	15,9	17,7	19,4	21,0	22,3	23,5	24,4	25,2	25,8	25,8	25,8	27	20,91	$3,49 \times 10^{12}$				
14	16	13	15,3	17,5	19,6	21,4	23,0	24,4	25,5	26,4	27,0	27,5	27,5	27,5	28	22,75	$1,05 \times 10^{13}$				
15	16	14	16,6	19,1	21,4	23,4	25,1	26,4	27,4	28,1	28,6	28,9	28,9	28,9	29	24,49	$2,09 \times 10^{13}$				
16	16	15	18,0	20,8	23,3	25,3	27,0	28,2	29,1	29,6	29,9	30,0	30,0	30,0	30	26,12	$2,09 \times 10^{13}$				
21	21	20	24,0	27,7	31,0	33,8	36,0	37,6	38,8	39,5	39,9	40,0	40,0	40,0	40	34,83	$5,11 \times 10^{19}$				
26	26	25	30,0	34,6	38,8	42,2	45,0	47,1	48,5	49,4	49,9	50,0	50,0	50,0	50	43,54	$4,03 \times 10^{26}$				
31	31	30	35,9	41,5	46,5	50,7	54,0	56,5	58,2	59,3	59,8	60,0	60,0	60,0	60	52,24	$8,22 \times 10^{33}$				

Tabela 3.16: Graus de liberdade teóricos de T_{Weich} (fórmula de Satterthwaite)(a) $n_1 - 1$; (b) $n_1 + n_2 - 2$; (c) sem considerar $\theta \rightarrow 0$;a mediana fica sempre entre os valores para $\theta = 0,5$ e $\theta = 0,6$

A Nossa Universidade

Colégio dos Jesuítas
Rua dos Ferreiros - 9000-082, Funchal

Tel: +351 291 209400
Fax: +351 291 209410
Email: gabinetedareitoria@uma.pt