

A Nossa
Universidade

Colégio dos Jesuítas
Rua dos Ferreiros - 9000-082, Funchal

Tel: +351 291 209400
Fax: +351 291 209410
Email: gabinete@uma.pt

DM

A classe de distribuições de Panjer e a
modelação do risco coletivo

Duarte Nuno da Silva Sousa



A classe de distribuições de Panjer e a modelação do risco coletivo

DISSERTAÇÃO DE Mestrado

Duarte Nuno da Silva Sousa

Mestrado em Matemática


UNIVERSIDADE da MADEIRA
A Nossa Universidade
www.uma.pt

julho | 2016

DM

Nome do Projecto/Título/Dissertação de Mestrado ou Tese de Doutoramento | Nome do Autor

UMA

DIMENSÕES: 45 X 29,7 cm

PAPEL: COUCHÊ MATE 350 GRAMAS

IMPRESSÃO: 4 CORES (CMYK)

ACABAMENTO: LAMINAÇÃO MATE

NOTA*

Caso a lombada tenha um tamanho inferior a 2 cm de largura, o logótipo institucional da UMA terá de rodar 90°, para que não perca a sua legibilidade/identidade.

Caso a lombada tenha menos de 1,5 cm até 0,7 cm de largura o layout da mesma passa a ser aquele que consta no lado direito da folha.



A classe de distribuições de Panjer e a modelação do risco coletivo

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Duarte Nuno da Silva Sousa

MESTRADO EM MATEMÁTICA

ORIENTADOR

Sandra Maria Freitas Mendonça

Júri:

Doutora Ana Maria Cortesão Pais Figueira da Silva Abreu

– Professora Auxiliar da Universidade da Madeira

Doutor Sílvio Filipe Velosa

– Professor Auxiliar da Universidade da Madeira

Doutora Sandra Maria Freitas Mendonça

– Professora Auxiliar da Universidade da Madeira

Agradecimentos

A elaboração e conclusão desta dissertação não seria possível sem a colaboração das pessoas com quem compartilho o meu dia a dia. E, por essa razão, quero aproveitar este espaço para agradecer a todas as pessoas que, direta e indiretamente, contribuíram para a chegada a bom porto desta etapa da minha vida.

Em primeiro lugar, e como não poderia deixar de ser, quero agradecer à minha orientadora, a Professora Dr.^a Sandra Maria Freitas Mendonça. É impossível expressar em palavras a dedicação, a paixão e a paciência que depositou em mim e nesta dissertação. Inúmeras foram as horas que despendeu a transmitir-me conhecimentos, a aconselhar-me e a motivar-me de modo a não baixar os braços. Esteve sempre disposta a ajudar, a abdicar do seu tempo e acreditou sempre no sucesso desta empreitada, até nos momentos em que eu próprio duvidava. Por estas e por muitas outras razões estou-lhe eternamente grato.

À minha família e, em especial, aos meus pais estou-lhes muito agradecido pelos sacrifícios e privações que suportaram ao longo destes anos para que eu pudesse continuar a estudar. Os sacrifícios diários, os conselhos e as palavras de motivação deram-me força para acabar esta dissertação e de certa forma, provar que os seus esforços não foram em vão. Por isso, agradeço-lhes muito.

Aos meus queridos amigos e colegas estou-lhes também muito grato. Ao António Gomes: pelos momentos joviais que passamos quer nas aulas quer nas atividades extracurriculares, pela sua pronta disposição para ajudar e pela sua amizade. Ao Ivo Ferreira: pela sua disponibilidade para me ajudar e para me esclarecer dúvidas, pela sua amizade e pela sua postura séria e empenhada que sempre adotou em qualquer situação, servindo como um modelo a seguir e fazendo de mim uma pessoa melhor. Ao Vítor Jesus: pela sua postura tranquila (às vezes, em demasia) em momentos de pressão, servindo-me de inspiração, pela sua disponibilidade para me auxiliar e pela sua amizade. Aos restantes colegas de curso: pelos momentos passados, pelos conhecimentos e experiências que me transmitiram e pela amizade.

Agradeço também às minhas amigas de longa data Deise Faria, Estefânia Ribeiro, Jenny Gonçalves e Liliana Faria, que embora não sendo da mesma área e não partilhando momentos diários comigo, demonstraram sempre pronta disponibilidade para me apoiar, aconselhar e ajudar em qualquer assunto ou situação.

Quero agradecer a todos os professores que participaram na minha vida acadêmica pelo saber que me transmitiram. Agradeço também aos meus colegas de licenciatura, alguns deles marcando-me profundamente e fazendo de mim uma pessoa melhor.

Aos restantes familiares e amigos agradeço-lhes também pelos conselhos transmitidos, pelos momentos vivenciados e por fazerem parte da minha vida.

A todos, um muito obrigado.

Resumo

O principal objetivo desta dissertação é analisar a classe de distribuições de Panjer, algumas das suas extensões e a utilização destas na modelação do risco coletivo.

Inicialmente, são referidos alguns momentos históricos importantes no estudo da família de distribuições de Panjer e no desenvolvimento do modelo do risco coletivo. Apresentamos também alguns artigos publicados nos últimos vinte anos sobre estas temáticas.

Depois, são apresentados os conceitos e instrumentos fundamentais na construção das extensões da família de Panjer e na construção recursiva das distribuições do modelo do risco coletivo. Tais conceitos e instrumentos incluem a função geradora de probabilidades, a transformada de Laplace, a mistura e modificação de distribuições de probabilidade.

Seguidamente, são caracterizadas as distribuições discretas pertencentes à classe de Panjer, distribuições essas denominadas de distribuições de contagem básicas, definidas a recursão de Panjer e duas suas extensões e apresentadas as distribuições pertencentes a cada uma delas.

Finalmente, é apresentado o modelo do risco coletivo, designadamente o modelo composto das indemnizações agregadas, cujas distribuições, neste caso, são construídas através do método recursivo. São também expostos dois métodos de construção de distribuições aritméticas. A dissertação termina com a dedução de alguns modelos particulares para o risco coletivo, obtidos com o auxílio dos programas informáticos *Mathematica* e *R*.

Palavras-Chave: Família de Panjer, Risco coletivo, Método recursivo.

Abstract

The main objective of this dissertation is to analyse the Panjer's class of distributions, some of its extensions and their use in the modelling of collective risk.

Initially, some important historical events in the study of the Panjer's family of distributions and in the development of the collective risk model are referred. Some articles published in the last twenty years about these subjects are also presented.

Then, the fundamental concepts and tools in the construction of the Panjer's family extensions and in the recursive construction of the distributions of the collective risk model are presented. Such concepts and tools include the probability generating function, the Laplace transform and the mixture and modification of probability distributions.

Next, the discrete distributions that belong to the Panjer's class of distributions, which are referred as basic counting distributions, are characterised, the Panjer's recursion and two of its extensions are defined and the distributions belonging to each one of them are presented.

Finally, the collective risk model is presented, namely the aggregate loss model, whose distributions, in this case, are constructed using the recursive method. Two methods for constructing arithmetic distributions are also described. The dissertation ends with the deduction of some particular models for the collective risk, obtained with the help of the programs Mathematica and R.

Keywords: Panjer's family, Collective risk, Recursive method.

Índice

Lista de Figuras	xi
Lista de Tabelas	xv
Notação	xvii
1 Introdução	1
2 Sobre transformadas e modificações de variáveis aleatórias	5
2.1 A função geradora de probabilidades	6
2.2 A transformada de Laplace	8
2.3 Modificação em zero	11
3 Distribuições de contagem básicas	17
3.1 A distribuição binomial	17
3.2 A distribuição de Poisson	20
3.3 A distribuição binomial negativa	22
4 A classe de distribuições de Panjer e suas extensões	27
4.1 A classe de distribuições de Panjer ou $(a, b, 0)$	27
4.2 A classe de distribuições $(a, b, 1)$	31
4.3 A classe de distribuições (a, b, m) , $m \in \mathbb{N}$	37
4.4 Outras extensões	45
5 A modelação do risco coletivo	49
5.1 O modelo composto das indemnizações agregadas	50
5.2 Método recursivo na construção da distribuição das indemnizações agregadas	53
5.2.1 Quando o valor da indemnização é uma variável aleatória discreta	54
5.2.2 Quando o valor da indemnização é uma variável aleatória absolutamente contínua	63
5.2.3 Generalização a distribuições para além da classe (a, b, m) , $m \in \mathbb{N}$	70

5.3	Construção de distribuições aritméticas	71
5.3.1	Método de arredondamento	71
5.3.2	Método de emparelhamento local de momentos	71
6	O modelo do risco coletivo nos programas <i>Mathematica</i> e <i>R</i>	79
6.1	Exemplo 1	80
6.2	Exemplo 2	84
6.3	Exemplo 3	88
7	Considerações finais	93
	Bibliografia	95
	Índice Remissivo	100

Lista de Figuras

3.1	Exemplo de uma f.m.p. de uma v.a. N com distribuição $Binomial(m, p)$ (neste caso, $m = 10$ e $p = 0.5$).	18
3.2	Exemplo de uma f.m.p. de uma v.a. N com distribuição de $Poisson(\lambda)$ (neste caso, $\lambda = 10$).	21
3.3	Exemplo de uma f.m.p. de uma v.a. N com distribuição $BinomialNegativa(r, p)$ (neste caso, $r = 10$ e $p = 0.5$).	23
4.1	Exemplo de uma f.m.p. de uma v.a. X com distribuição $BNTG(r, p)$ (neste caso, $r = -0.2$ e $p = 0.3$).	32
4.2	Varição de $\delta(X)$ em função do valor de p , quando $X \sim BNTG(1, p)$	34
4.3	Exemplo de uma f.m.p. de uma v.a. X com distribuição $Log(p)$ (neste caso, $p = 0.2$).	35
4.4	Varição de $\delta(X)$ em função do valor de p , quando $X \sim Log(p)$	36
4.5	Exemplo de uma f.m.p. de uma v.a. X com distribuição $BNE(l, r, p)$ (neste caso, $l = 5$, $r = -4.01$ e $p = 0.1$).	38
4.6	Varição de $E(X)$ em função do valor de p , quando $X \sim BNE(l, -l + 0.5, p)$, para $l = 1$ e $l = 11$	40
4.7	Varição de $Var(X)$ em função do valor de p , quando $X \sim BNE(l, -l + 0.5, p)$, para $l = 1$ e $l = 11$	41
4.8	Varição de $\delta(X)$ em função do valor de p , quando $X \sim BNE(l, -l + 0.5, p)$, para $l = 1$ e $l = 11$	41
4.9	Exemplo de uma f.m.p. de uma v.a. X com distribuição $LogE(l, p)$ (neste caso, $l = 4$ e $p = 0.01$).	42
4.10	Varição de $E(X)$ em função do valor de p , quando $X \sim LogE(l, p)$, para $l = 2$ e $l = 12$	44
4.11	Varição de $Var(X)$ em função do valor de p , quando $X \sim LogE(l, p)$, para $l = 2$ e $l = 12$	44
4.12	Varição de $\delta(X)$ em função do valor de p , quando $X \sim LogE(l, p)$, para $l = 2$ e $l = 12$	44
4.13	Representação da classe de distribuições (a, b, j) , j natural, no plano (a, b) (considerando os parâmetros utilizados nas Tabelas 4.1, 4.2 e 4.3).	46

5.1	Representação da f.d.p. de uma v.a. $X \sim Exponencial(1)$ e da f.m.p. da sua discretização pelo método do arredondamento com $h = 1$	72
5.2	Representação da f.d.p. de uma v.a. $X \sim Exponencial(1)$ e da f.m.p. da sua discretização pelo método do emparelhamento local de momentos com $h = 1$	78
6.1	Comandos no programa <i>Mathematica</i> que definem a f.m.p. e a f.g.p. da v.a. $N \sim Poisson(la)$	80
6.2	Comandos no programa <i>Mathematica</i> que geram a f.m.p. de X	81
6.3	Comandos no programa <i>Mathematica</i> que definem a f.m.p. do modelo do risco coletivo, S , quando $N \sim Poisson(10)$	81
6.4	Representação da f.m.p. do modelo do risco coletivo, S , quando $N \sim Poisson(10)$ e comandos que estão na sua origem no programa <i>Mathematica</i>	82
6.5	Probabilidades, $\Pr(S = k)$, e probabilidades acumuladas, $\Pr(S \leq k)$, do modelo do risco coletivo, S , quando $N \sim Poisson(10)$ e $k = 0, 1, \dots, 27$	82
6.6	Comandos no programa <i>R</i> que permitem a criação do modelo do risco coletivo, S , quando $N \sim Poisson(10)$	83
6.7	Valores de $\Pr(S \leq k)$, com $k = 0, 1, \dots, 27$, quando $N \sim Poisson(10)$	83
6.8	Representação da função de distribuição do modelo do risco coletivo, S , quando $N \sim Poisson(10)$ e comandos que estão na sua origem no programa <i>R</i>	84
6.9	Comandos no programa <i>Mathematica</i> que definem a f.m.p. e a f.g.p. da v.a. $N \sim Log(p)$	85
6.10	Comandos no programa <i>Mathematica</i> que definem a f.m.p. do modelo do risco coletivo, S , quando $N \sim Log(0.2)$	85
6.11	Representação da f.m.p. do modelo do risco coletivo, S , quando $N \sim Log(0.2)$ e comandos que estão na sua origem no programa <i>Mathematica</i>	86
6.12	Probabilidades, $\Pr(S = k)$, e probabilidades acumuladas, $\Pr(S \leq k)$, do modelo do risco coletivo, S , quando $N \sim Log(0.2)$ e $k = 0, 1, \dots, 15$	86
6.13	Comandos no programa <i>R</i> que permitem a criação do modelo do risco coletivo, S , quando $N \sim Log(0.2)$	87
6.14	Erro da função <i>aggregateDist</i> e apresentação da solução para esse mesmo erro.	87
6.15	Valores de $\Pr(S \leq k)$, com $k = 0, 1, \dots, 15$, quando $N \sim Log(0.2)$	87
6.16	Representação da função de distribuição do modelo do risco coletivo, S , quando $N \sim Log(0.2)$ e comandos que estão na sua origem no programa <i>R</i>	88

6.17	Comandos no programa <i>Mathematica</i> que definem a f.m.p. e a f.g.p. da v.a. $N \sim \text{Binomial}(m, p)$	88
6.18	Comandos no programa <i>Mathematica</i> que geram a f.m.p. de X	89
6.19	Comandos no programa <i>Mathematica</i> que definem a f.m.p. do modelo do risco coletivo, S , quando $N \sim \text{Binomial}(10, 0.5)$	89
6.20	Representação da f.m.p. do modelo do risco coletivo, S , quando $N \sim \text{Binomial}(10, 0.5)$ e comandos que estão na sua origem no programa <i>Mathematica</i>	90
6.21	Probabilidades, $\Pr(S = k)$, e probabilidades acumuladas, $\Pr(S \leq k)$, do modelo do risco coletivo, S , quando $N \sim \text{Binomial}(10, 0.5)$ e $k = 0, 1, \dots, 17$	90
6.22	Comandos no programa <i>R</i> que permitem a criação do modelo do risco coletivo, S , quando $N \sim \text{Binomial}(10, 0.5)$	91
6.23	Valores de $\Pr(S \leq k)$, com $k = 0, 1, \dots, 17$, quando $N \sim \text{Binomial}(10, 0.5)$	91
6.24	Representação da função de distribuição do modelo do risco coletivo, S , quando $N \sim \text{Binomial}(10, 0.5)$ e comandos que estão na sua origem no programa <i>R</i>	92

Lista de Tabelas

4.1	Membros da classe de Panjer ou $(a, b, 0)$	29
4.2	Membros da classe $(a, b, 1)$	37
4.3	Membros da classe (a, b, m) não pertencentes a $(a, b, 0)$ ($m \geq l \geq 1$).	45

Notação

$\binom{a}{b}$	$\frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(b+1)\Gamma(a-b+1)}, a \geq b \geq 0.$
BNE(l, r, p)	Distribuição binomial negativa estendida com parâmetros $l \in \mathbb{N}_1, r \in (-l, -l + 1)$ e $p \in (0, 1)$.
BNTG(r, p)	Distribuição binomial negativa truncada generalizada com parâmetros $r > -1, r \neq 0$ e $p \in (0, 1)$.
$Dist1 \equiv Dist2$	As distribuições $Dist1$ e $Dist2$ são iguais.
$\delta(N)$	Índice de dispersão de uma variável aleatória N .
$E[f(N)] = E_N[f(N)]$	Valor esperado da variável aleatória $f(N)$, sendo N uma variável aleatória.
f.d.p.	Função(ões) densidade de probabilidade.
f.g.p.	Função(ões) geradora(s) de probabilidades.
f.m.p.	Função(ões) massa de probabilidade.
F_X	Função de distribuição de probabilidade da variável aleatória X .
f_X	Função densidade de probabilidade da variável aleatória X .
Γ	Função gama.
i.i.d.	Independentes e identicamente distribuídas.
L_X	Transformada de Laplace da função densidade de probabilidade f_X , sendo X uma variável aleatória absolutamente contínua, não negativa.
Log(p)	Distribuição logarítmica com parâmetro $p \in (0, 1)$.

$\text{LogE}(l, p)$	Distribuição logarítmica estendida com parâmetros $l = 1, 2, 3, \dots$ e $p \in (0, 1)$.
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$	Conjunto dos números naturais.
$\mathbb{N}_1 = \{1, 2, 3, \dots\}$	Conjunto dos números naturais positivos.
P_N	Função geradora de probabilidades da variável aleatória N .
$\text{Pr}(A)$	Probabilidade do acontecimento A .
\mathbb{R}	Conjunto dos números reais.
S_n	$\sum_{i=1}^n X_i$, sendo X_1, \dots, X_n variáveis aleatórias.
$\sup A$	Supremo do conjunto A .
S_X	Suporte da variável aleatória X .
T.P.T.	Teorema da Probabilidade Total.
v.a.	Variável aleatória (“v.a.’s” no plural).
$\text{Var}(N)$	Variância da variável aleatória N .
$[x]$	Parte inteira de x .
$X \sim \text{Dist}(\text{parâm})$	X tem distribuição “Dist” com parâmetros “parâm”.
X^M	Variável aleatória que resulta da modificação no ponto 0 de uma variável aleatória discreta X .
X^T	Variável aleatória que resulta da truncatura ao conjunto \mathbb{N}_1 de uma variável aleatória discreta X .
$X \stackrel{d}{=} Y$	X e Y têm a mesma distribuição de probabilidades.
$\underline{\underline{\#}}$	Igualdade justificada pela expressão definida em $\underline{\underline{\#}}$.

Capítulo 1

Introdução

O risco de ocorrência de um acontecimento aleatório e mensurável monetariamente é uma preocupação constante das seguradoras (ou companhias de seguros). Tal ocorrência é impossível de prever, contudo esta afeta, e muito, a forma de operar das seguradoras, nomeadamente na quantidade e valor de indemnizações a pagar. Por tal facto, aquando da conceção dos contratos de seguros entre a seguradora e os segurados, estas têm de incluir no contrato uma compensação financeira (prémio de seguro) que as motive a continuar a operar e não abrir falência. Ao mesmo tempo, o dito contrato tem de ser competitivo a nível de preços e condições oferecidas, de modo a atrair o maior número de segurados. Perante tais variáveis, torna-se num desafio alcançar um contrato que satisfaça todas as partes do acordo. Modelos matemáticos têm sido construídos e estudados com a finalidade de tratar o risco. No entanto, a introdução de modelos matemáticos não implica que os resultados obtidos pelos modelos coincidam com os verificados na realidade (dificilmente coincidem), uma vez que as seguradoras operam em ambientes dinâmicos, complexos, incontroláveis e imprevisíveis. Porém, o surgimento de tais modelos sobre o risco têm contribuído para um conhecimento mais detalhado da área atuarial e dos seguros (*cf.*, *e.g.*, [2]).

A modelação do risco coletivo é um dos temas principais desta dissertação. A sua introdução deu-se em 1903 por Lundberg (*cf.* [39] e [1]) na sua tese de doutoramento (*cf.* [37]). Harald Cramér publicou uma revisão do trabalho de Lundberg em 1926 (*cf.*, [7] e [39]) e em 1930 introduziu novos desenvolvimentos sobre esta temática (*cf.* [8] e [4]). De acordo com Blom, antigo aluno de Cramér (*cf.* [4]), três dos trabalhos mais importantes de Cramér na área do risco coletivo foram publicados em 1930 (*cf.* [8]), 1954 (*cf.* [9]) e 1955 (*cf.* [10]).

O modelo do risco coletivo tem fomentado estudos e descobertas de resultados relevantes para além da própria área. Um exemplo em concreto é a recursão de Panjer, introduzida na década de 80 do século passado, sendo esta também um dos principais focos desta dissertação. O modelo de Panjer é uma família de distribuições discretas que é definida recursivamente e que apareceu pela primeira vez em 1981 (*cf.* [41]). Esta família foi, posteriormente, generalizada por vários autores como Sundt e Jewell (*cf.* [53]), Panjer e Willmot (*cf.* [44]), Schröter (*cf.* [49]), Sundt (*cf.* [51]), Hesselager (*cf.* [32]), Hess *et al.* (*cf.* [31]) e Pestana e Velosa (*cf.* [47]).

Sundt, em 2002 (*cf.* [52]), num artigo de revisão incontornável, enumera os métodos recursivos presentes na literatura para uma avaliação exata e aproximada de distribuições de indemnizações agregadas univariadas e multivariadas. Nas distribuições de indemnizações agregadas univariadas, Sundt considera distribuições que têm como suporte o conjunto dos números inteiros não-negativos e considera também distribuições que permitem indemnizações de valor negativo. Além de apresentar as recursões com mais renome como a de Panjer e suas generalizações, Sundt apresenta também recursões para modelos individuais, considerando métodos exatos e métodos baseados em aproximações (fornecendo também fórmulas que definem as barreiras de erro dessas aproximações). O autor aborda ainda a estabilidade, a sobrestimação e a subestimação dos resultados numéricos. A parte final do seu trabalho é dedicada às distribuições de indemnizações agregadas multivariadas.

No século XXI, foram desenvolvidas ramificações e aplicações do modelo do risco coletivo e da recursão de Panjer (*cf., e.g.,* [54] e [48]). Seguidamente são apresentados alguns trabalhos recentes nestas áreas.

Um nome recorrente aquando da pesquisa de trabalhos sobre o modelo do risco coletivo realizados neste século, utilizando a teoria bayesiana, é o de Agustín Hernández-Bastida. Este investigador e os seus colaboradores são coautores de, pelo menos, sete artigos sobre aplicações do modelo do risco coletivo entre os anos de 2002 e 2012. Nestes trabalhos, os autores particularizam de várias formas as distribuições do número de indemnizações a pagar e o valor destas e, por vezes, assumem que os parâmetros das referidas distribuições têm determinadas distribuições probabilísticas, podendo assim determinar as distribuições, ou barreiras de variação para estas, dos riscos coletivos associados (*cf.* [22], [30], [27], [28], [38], [26] e [29]).

Existem, obviamente, outros autores que realizam o mesmo tipo de investigação atrás referido. Por exemplo, Gómez-Déniz e Calderín-Ojeda (*cf.* [23]) deduzem a distribuição do modelo do risco coletivo quando o valor das indemnizações tem uma distribuição de Erlang e as indemnizações ocorridas possuem uma distribuição de Lindley discreta generalizada.

Note-se que o modelo do risco coletivo pode ser usado em outras áreas, como, por exemplo, no estudo do crescimento de populações (*cf., e.g.* Brillhante *et al.* [5]) e no estudo da distribuição do máximo aleatório de variáveis aleatórias, onde o número de variáveis aleatórias tem uma distribuição da família de Panjer (*cf., e.g.,* Mendonça *et al.* [40]).

A determinação da distribuição exata do risco coletivo não é sempre possível, dada a sua complexidade, sendo, por vezes, necessário recorrer a métodos numéricos. Este tema não será abordado nesta dissertação, mas vale a pena referi-lo pelo seu crescimento recente que se traduz, em parte, no número de artigos encontrados sobre o mesmo. Começamos por referir o trabalho de 2010 de Shevchenko [50], que inclui uma revisão e comparação de vários métodos numéricos que são usados para o cálculo das distribuições do risco coletivo.

No que concerne à recursão de Panjer, autores como Hipp (*cf.* [33]), Embrechts e Frei (*cf.* [14]), Guegan e Hassani (*cf.* [25]), Gerhold *et al.* (*cf.* [21]) e Xie *et al.* (*cf.* [55]), por exemplo, publicaram trabalhos envolvendo também a aplicação de métodos numéricos à determinação da distribuição do risco coletivo. Segue-se uma descrição breve de cada um dos trabalhos referidos.

Hipp (*cf.* [33]), no seu trabalho de 2006, desenvolve um algoritmo capaz de simplificar a recursão de Panjer quando as distribuições do valor das indemnizações pagas são do tipo fase, *i.e.*, distribuições que têm uma função geradora de probabilidades racional (*cf., e.g.,* [11], p. 510). Este algoritmo pode ser aplicado a distribuições discretas, contínuas ou mistas.

Embrechts e Frei (*cf.* [14]) comparam duas técnicas para o estudo do modelo do risco coletivo: a recursão de Panjer e a transformada de Fourier rápida (em inglês, *Fast Fourier Transform*). Estes autores apresentam estes dois métodos recursivos, apontando os pontos fortes de cada um, finalizando com exemplos com o objetivo de comparar a eficácia de cada um deles.

Guegan e Hassani (*cf.* [25]) constroem em 2009 um algoritmo híbrido que inclui o algoritmo de recursão de Panjer, de forma a obter tempos de simulação mais reduzidos quando comparados com outros métodos de simulação.

Um ano depois, Gerhold *et al.* (*cf.* [21]) desenvolvem uma generalização da recursão de Panjer capaz de ultrapassar as instabilidades numéricas da recursão de Panjer original e que pode ser aplicada a alguns casos particulares do modelo do risco coletivo.

Finalmente, Xie *et al.* (*cf.* [55]), em 2012, utilizam uma aproximação de Bernstein quando a função de distribuição do valor das indemnizações X é contínua, conseguindo assim simplificar os algoritmos numéricos, obter equações recursivas aproximadas e determinar o erro teórico da aproximação.

Nesta dissertação são analisadas a classe de distribuições de Panjer, as extensões da mesma, obtidas por meio da modificação das probabilidades dos valores iniciais do suporte das distribuições de Panjer, e a modelação do risco coletivo. Esta dissertação está dividida em sete capítulos, sendo o presente o primeiro deles.

No capítulo seguinte são referidos os conceitos e instrumentos fundamentais na construção das extensões da família de Panjer e na demonstração dos resultados do quinto capítulo, como a função geradora de probabilidades, a transformada de Laplace, a mistura e modificação de distribuições.

No terceiro capítulo são apresentadas as distribuições discretas pertencentes à classe de Panjer, que denominamos por distribuições de contagem básicas.

Seguidamente, no quarto capítulo, são definidas a recursão de Panjer e duas suas extensões e apresentadas as distribuições pertencentes a cada uma delas.

O quinto capítulo trata do modelo do risco coletivo, designadamente o modelo composto das indemnizações agregadas. As distribuições das indemnizações agregadas são aqui construídas através do método recursivo. São também apresentados dois métodos de construção de distribuições aritméticas.

No sexto capítulo serão colocados em prática alguns resultados deduzidos nos capítulos anteriores, com o auxílio dos programas informáticos *Mathematica* e *R*.

E, finalmente, no último capítulo são apresentadas algumas considerações finais.

Capítulo 2

Sobre transformadas e modificações de variáveis aleatórias

As variáveis aleatórias (v.a.'s) que surgem ao longo desta dissertação são, essencialmente, de dois tipos: de contagem (discretas, tomando valores inteiros não negativos) e absolutamente contínuas não negativas.

Quando X é uma v.a. de contagem, a função massa de probabilidade (f.m.p.) p_k identifica a probabilidade de k ($k \in \mathbb{N}$) acontecimentos ocorrerem. Se X for a v.a. que representa o número de tais acontecimentos, temos então

$$X = \begin{cases} k, & k = 0, 1, \dots, \\ p_k = \Pr(X = k) \end{cases} \quad (2.1)$$

e, para $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, temos

$$\Pr(X \in [a, b]) = \sum_{k: k \in [a, b] \cap \mathbb{N}} p_k.$$

Quando X é uma v.a. absolutamente contínua com função densidade de probabilidade (f.d.p.) de X , f_X , a probabilidade anterior é determinada através do integral de f_X no intervalo $[a, b]$, *i.e.*,

$$\Pr(X \in [a, b]) = \int_a^b f_X(x) dx,$$

onde f_X é a f.d.p. de X .

Recordamos o conceito de suporte de uma v.a. que utilizaremos em breve:

Definição 2.1 *O suporte de uma v.a. X discreta é o conjunto*

$$S_X = \{x_k, k \in \mathbb{N} : p_k = \Pr(X = x_k) > 0\}, \quad (2.2)$$

se X tiver f.m.p. definida por

$$X = \begin{cases} x_k, & k = 0, 1, \dots, \\ p_k = \Pr(X = x_k) & \end{cases} ;$$

ou,

$$S_X = \{x \in \mathbb{R} : f_X(x) > 0\}, \quad (2.3)$$

se X for uma v.a. absolutamente contínua com f.d.p. f_X .

Na secção seguinte apresentamos a função geradora de probabilidades, cujas propriedades nos permitem estudar com mais facilidade as v.a.'s discretas, tema abordado no capítulo seguinte, e na secção subsequente será apresentada a transformada de Laplace que será usada para estudar as v.a.'s absolutamente contínuas. Este capítulo termina com uma secção dedicada à modificação de v.a.'s de contagem no ponto inicial do seu suporte.

2.1 A função geradora de probabilidades

A função geradora de probabilidades (f.g.p.) P de uma v.a. X é dada por

$$P(z) = P_X(z) = E(z^X), \quad (2.4)$$

nos pontos z em que existe o valor esperado $E(z^X)$.

Quando uma v.a. N é discreta com f.m.p. definida por (2.1), a sua f.g.p. é

$$P(z) = P_N(z) = E(z^N) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k z^k. \quad (2.5)$$

Neste caso podemos tomar z tal que $|z| < 1$, já que, se assim for,

$$E(z^N) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} p_k |z|^k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} p_k = 1.$$

A f.g.p. pode ser usada para gerar os momentos da v.a. N . Em particular, não é difícil mostrar que

$$P'(1) = E(N) \quad (2.6)$$

e que

$$P''(1) = E[N(N-1)], \quad (2.7)$$

de onde resulta

$$\begin{aligned} \text{Var}(N) &= E[N(N-1)] + E(N) - E^2(N) \\ &= P''(1) + P'(1) - [P'(1)]^2. \end{aligned} \quad (2.8)$$

A determinação destes dois momentos permite-nos calcular o índice de dispersão da variável aleatória N que é dado por (*cf.*, *e.g.*, [34], p. 163)

$$\delta(N) = \frac{\text{Var}(N)}{E(N)}. \quad (2.9)$$

A f.g.p. deve o seu nome ao facto de permitir a determinação das probabilidades que definem a distribuição da v.a. discreta em causa. De facto, para $z \in (-1, 1)$ e $m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} P^{(m)}(z) &= \frac{d^m}{dz^m} E(z^N) \stackrel{(2.5)}{=} \frac{d^m}{dz^m} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} p_k z^k \right) \\ &= \sum_{k=m}^{+\infty} \frac{d^m}{dz^m} (p_k z^k) = \sum_{k=m}^{+\infty} k(k-1)\dots(k-m+1) z^{k-m} p_k \\ &= \sum_{k=m}^{+\infty} \frac{k!}{(k-m)!} z^{k-m} p_k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k+m)!}{k!} z^k p_{k+m} \end{aligned}$$

e

$$P^{(m)}(0) = m! p_m,$$

ou seja,

$$p_m = \frac{P^{(m)}(0)}{m!}, \text{ para } m \in \mathbb{N}. \quad (2.10)$$

Este resultado permite-nos provar o seguinte teorema de unicidade:

Teorema 2.2 *A f.g.p. caracteriza as v.a.'s discretas, de tal modo que, se N e M são v.a.'s discretas,*

$$P_N = P_M \Leftrightarrow N \stackrel{d}{=} M.$$

Demonstração: De facto, da igualdade (2.10), temos

$$N = \left\{ \begin{array}{l} k, \quad k = 0, 1, \dots, \\ p_k = \Pr(N = k) = \frac{P_N^{(k)}(0)}{k!} \end{array} \right\}, \quad M = \left\{ \begin{array}{l} k, \quad k = 0, 1, \dots, \\ p_k^* = \Pr(M = k) = \frac{P_M^{(k)}(0)}{k!} \end{array} \right\}$$

e, portanto, como $P_N = P_M, \Pr(N = k) = \Pr(M = k)$, para $k = 0, 1, \dots$, *i.e.*, as v.a.'s discretas N e M têm a mesma distribuição (a implicação contrária não necessita de demonstração). ■

Quando duas variáveis são independentes, o valor esperado do produto dessas variáveis é igual ao produto dos valores esperados dessas mesmas variáveis (*cf.* demonstração, *e.g.*, em [46]). Este resultado e o Teorema 2.2 permitem a utilização das f.g.p. na identificação das v.a.'s que resultam da soma de v.a.'s independentes:

Teorema 2.3 *Sejam N e M v.a.'s independentes. Então,*

$$P_{N+M} = P_N P_M.$$

Demonstração: Dado que N e M são v.a.'s independentes entre si, $P = z^N$ e $Q = z^M$ são também v.a.'s independentes. Logo, aplicando as regras do valor esperado no que concerne ao produto de variáveis independentes, temos que

$$P_{N+M}(z) = E(z^{N+M}) = E(z^N z^M) = P_N(z) P_M(z),$$

para $z \in (-1, 1)$. Demonstra-se, assim, que a f.g.p. da soma de duas v.a.'s independentes é o produto das f.g.p. individuais das referidas v.a.'s. ■

2.2 A transformada de Laplace

A f.g.p. apresentada na secção anterior é usada normalmente quando a v.a. X é discreta. Quando a v.a. X é absolutamente contínua, as probabilidades do tipo $\Pr(X = x)$, com $x \in \mathbb{R}$, são nulas e a f.g.p. perde uma das suas mais importantes características. Neste caso usamos outras transformadas como a função característica ou transformada de Fourier, $E(e^{izX})$, a função geradora de momentos, $E(e^{zX})$, ou no caso da v.a. X ter suporte $S_X \subseteq \mathbb{R}_0^+$, a transformada de Laplace, $E(e^{-zX})$, que passamos a definir (*cf.*, *e.g.*, [45], pp. 32 a 34).

Definição 2.4 *Seja f_X a f.d.p. de uma v.a. X absolutamente contínua não negativa. A transformada de Laplace de f_X é dada por*

$$L_X(z) = L(f_X)(z) = E(e^{-zX}) = \int_0^{+\infty} e^{-zx} f_X(x) dx, \quad (2.11)$$

para os pontos z tais que $E(e^{-zX}) < +\infty$ ¹.

Observação 2.5 A transformada de Laplace pode ser aplicada a funções que não são f.d.p.. Mostra-se que o integral $L(f)(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zx} f(x) dx$ existe desde que f seja uma função contínua (por partes) e existam $a_1, b > 0$ e $a_2 \in \mathbb{R}$ tais que $|f(x)| < a_1 e^{a_2 x}$, para todo o $x > b$ (cf., e.g., [45], p. 9).

A transformada de Laplace, L_X , pode ser relacionada com a f.g.p., P_X . Recordando de (2.4) que

$$P_X(z) = E(z^X),$$

a transformada de Laplace pode ser escrita da seguinte forma

$$L_X(z) = E(e^{-zX}) = P_X(e^{-z}). \quad (2.12)$$

Tal como acontece com a f.g.p., a transformada de Laplace identifica a distribuição de probabilidade da v.a. em causa.

Das várias propriedades que a transformada de Laplace possui (cf., e.g., [45], pp. 10 e 11), são apresentadas seguidamente apenas as necessárias em demonstrações posteriores. Consideremos X e Y v.a.'s não negativas com f.d.p. f_X e f_Y , respetivamente, e com valores esperados finitos, para as quais é possível determinar $L(f_X)$ e $L(f_Y)$. Então:

i. Propriedade 1 (derivada da transformada de Laplace):

$$[L(f_X)]'(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zx} [-xf_X(x)] dx, \quad (2.13)$$

ou seja, $[L(f_X)]'(z) = L(g)(z)$, com $g(x) = -xf_X(x)$.

Demonstração: Sejam $x, z > 0$. Como

$$\left| \frac{\partial}{\partial z} (e^{-zx}) \right| = |-xe^{-zx}| = xe^{-zx} \leq x$$

e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x) dx < +\infty,$$

¹O domínio de L_X pode ser estendido aos números complexos z , cuja parte real é positiva, mas tal extensão não será necessária nesta dissertação.

podemos afirmar que

$$\frac{d}{dz} \left[\int_0^{+\infty} e^{-zx} f_X(x) dx \right] = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial z} e^{-zx} f_X(x) dx$$

(cf., e.g., [6], p. 119). Assim, temos

$$\begin{aligned} [L(f_X)]'(z) &= \frac{d}{dz} \left[\int_0^{+\infty} e^{-zx} f_X(x) dx \right] \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{d}{dz} e^{-zx} f_X(x) dx \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-zx} [-x f_X(x)] dx \\ &= L(g)(z), \text{ com } g(x) = -x f_X(x). \end{aligned}$$

■

ii. Propriedade 2 (transformada de Laplace da soma de v.a.'s independentes):

$$L_{X+Y}(z) = L_X(z) L_Y(z), \quad (2.14)$$

sendo X e Y v.a.'s independentes.

Demonstração: Esta propriedade resulta de imediato do Teorema 2.3 e de (2.12). De facto,

$$\begin{aligned} L_{X+Y}(z) &\stackrel{(2.12)}{=} P_{X+Y}(e^{-z}) \\ &\stackrel{(\text{Teorema 2.3})}{=} P_X(e^{-z}) P_Y(e^{-z}) \\ &\stackrel{(2.12)}{=} L_X(z) L_Y(z). \end{aligned}$$

■

No caso em que as v.a.'s X e Y são absolutamente contínuas, a propriedade anterior pode ser escrita na seguinte forma:

iii. Propriedade 3 (produto das transformadas de Laplace de duas funções densidade). Sejam f_X e f_Y as f.d.p. de duas v.a.'s X e Y . Assim,

$$L(f_X) L(f_Y)(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zx} \left[\int_0^x f_X(y) f_Y(x-y) dy \right] dx, \quad (2.15)$$

ou seja, $L(f_X) L(f_Y)(z) = L(f)(z)$, com $f(x) = \int_0^x f_X(y) f_Y(x-y) dy$.

Demonstração: Tomando duas v.a.'s absolutamente contínuas e independentes, X e Y , não negativas, com f.d.p. f_X e f_Y , respetivamente, mostra-se que, (cf., e.g., [46], p. 780),

$$f_{X+Y}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(y) f_Y(x-y) dy. \quad (2.16)$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} L(f_X)(z) L(f_Y)(z) &\stackrel{(2.14)}{=} \int_0^{+\infty} e^{-zx} f_{X+Y}(x) dx \\ &\stackrel{(2.16)}{=} \int_0^{+\infty} e^{-zx} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(y) f_Y(x-y) dy \right] dx. \end{aligned}$$

Como $f_X(y) f_Y(x-y) > 0$ só se $0 \leq y \leq x$, temos

$$\begin{aligned} L(f_X)(z) L(f_Y)(z) &= \int_0^{+\infty} e^{-zx} \left[\int_0^x f_X(y) f_Y(x-y) dy \right] dx \\ &= L(f)(z), \text{ com } f(x) = \int_0^x f_X(y) f_Y(x-y) dy. \end{aligned}$$

■

Juntando (2.13) e (2.15) vem

$$L(f_X)(z) [L(f_Y)]'(z) \stackrel{(2.15)}{=} L(f)(z), \quad (2.17)$$

com $f(x) = \int_0^x f_X(y) g(x-y) dy$ e $g(x) = -x f_Y(x)$, i.e.,

$$f(x) = \int_0^x f_X(y) [-(x-y) f_Y(x-y)] dy.$$

2.3 Modificação em zero

De modo a ser possível introduzir determinados resultados relacionados com a modificação em zero das distribuições da família de Panjer, é necessário, primeiro, abordar a mistura e modificação de distribuições.

Mistura de distribuições

Definição 2.6 *Sejam F_X e F_Y duas funções de distribuição e $\alpha \in [0, 1]$. A função*

$$F(x) = \alpha F_X(x) + (1 - \alpha)F_Y(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

é ainda uma função de distribuição que designamos por “mistura das distribuições F_X e F_Y ”.

Observação 2.7 *Se $\alpha = 0$, $F = F_Y$ e se $\alpha = 1$, $F = F_X$.*

Exemplo 2.8 *(Mistura de uma v.a. de contagem com uma v.a. degenerada)*

Sejam F_X uma distribuição de uma v.a. de contagem e F_Y a distribuição da v.a. degenerada em zero, i.e.,

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ 1, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}.$$

Consideremos W a v.a. com função de distribuição resultante da mistura das distribuições F_X e F_Y . Temos, para $\alpha \in [0, 1]$ e $x \in \mathbb{R}$,

$$F_W(x) = \alpha F_X(x) + (1 - \alpha)F_Y(x) = \begin{cases} \alpha F_X(x), & \text{se } x < 0 \\ \alpha F_X(x) + (1 - \alpha), & \text{se } x \geq 0 \end{cases}.$$

A f.m.p. de W é dada por:

$$\begin{aligned} \Pr(W = k) &= F_W(k) - F_W(k^-) \\ &= \alpha F_X(k) + (1 - \alpha)F_Y(k) - \alpha F_X(k^-) - (1 - \alpha)F_Y(k^-) \\ &= \alpha \Pr(X = k) + (1 - \alpha) \Pr(Y = k) \\ &= \begin{cases} \alpha \Pr(X = 0) + (1 - \alpha), & k = 0 \\ \alpha \Pr(X = k), & k \neq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \alpha p_0 + (1 - \alpha), & k = 0 \\ \alpha p_k, & k \neq 0 \end{cases}, \text{ onde } p_k = \Pr(X = k). \end{aligned}$$

A f.g.p. de Y é $P_Y(z) = E(z^Y) = z^0 \Pr(Y = 0) = 1$ e a f.g.p. de W é dada

por:

$$\begin{aligned}
P_W(z) &= E(z^W) = \sum_{k=0}^{+\infty} z^k \Pr(W = k) = \alpha p_0 + (1 - \alpha) + \sum_{k=1}^{+\infty} z^k \alpha p_k \\
&= \alpha p_0 + (1 - \alpha) + \alpha \left(\sum_{k=0}^{+\infty} z^k p_k - p_0 \right) \\
&= \alpha p_0 + (1 - \alpha) + \alpha E(z^X) - \alpha p_0 \\
&= (1 - \alpha) + \alpha E(z^X) = 1 + \alpha [P_X(z) - 1] \\
&= P_Y(z) + \alpha [P_X(z) - P_Y(z)] \\
&= \alpha P_X(z) + (1 - \alpha) P_Y(z),
\end{aligned}$$

i.e., tal como a função de distribuição de W é uma combinação linear convexa de F_X e F_Y , a f.g.p. de W , P_W , é uma combinação linear convexa de P_X e P_Y .

Modificação de uma distribuição discreta

Começamos por definir uma modificação especial, a truncatura. Antes de definir a truncatura de uma distribuição discreta, importa relembrar o conceito de suporte (cf. (2.2)) dado que a truncatura de uma v.a. X é realizada em relação a um determinado suporte. Assim, para uma v.a. X discreta

$$X = \begin{cases} x_k, & k \in \mathbb{N} \\ \Pr(X = x_k) \end{cases}$$

definimos o seu suporte como sendo

$$S_X = \{x_k, k \in \mathbb{N} : p_k = \Pr(X = x_k) > 0\}.$$

Com o conceito de suporte, torna-se possível enunciar a definição de truncatura de uma distribuição discreta que é a seguinte:

Definição 2.9 Dada uma v.a. X discreta com suporte S e f.m.p. $p_k = \Pr(X = x_k)$, com $x_k \in S$ e $k \in \mathbb{N}$, dizemos que X' resulta da truncatura da v.a. X ao suporte S' , $S' \subset S$, se a f.m.p. de X' for dada por

$$p'_k = \Pr(X' = k) = \begin{cases} \frac{p_k}{\Pr(X \in S')}, & \text{se } x_k \in S' \\ 0, & \text{se } x_k \in S \setminus S'. \end{cases}$$

Exemplo 2.10 (Truncatura ao conjunto \mathbb{N}_1)

Seja X uma v.a. discreta com suporte \mathbb{N} e $p_k = \Pr(X = k)$, $k \in \mathbb{N}$. A truncatura de X ao conjunto $S' = \mathbb{N}_1$ tem f.m.p. definida por

$$p'_k = \Pr(X' = k) = \begin{cases} \frac{p_k}{1-p_0}, & \text{se } k \in \mathbb{N}_1 \\ 0, & \text{se } k = 0. \end{cases} \quad (2.18)$$

A f.g.p. desta v.a. é

$$\begin{aligned} P_{X'}(z) &= E(z^{X'}) = \sum_{k=0}^{+\infty} z^k \Pr(X' = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} z^k \frac{p_k}{1-p_0} \\ &= \frac{1}{1-p_0} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} z^k p_k - p_0 \right) = \frac{1}{1-p_0} [P_X(z) - p_0] \\ &= \frac{P_X(z) - p_0}{1-p_0}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

A v.a. que resulta da truncatura de uma v.a. X a \mathbb{N}_1 será denotada por X^T .

Consideremos novamente uma v.a. X discreta com suporte \mathbb{N} . Vamos agora considerar, ao invés de reduzir a probabilidade do ponto inicial do suporte a zero, a situação em que se modifica o seu valor para um outro valor positivo:

Definição 2.11 Consideremos X uma v.a. discreta com f.m.p. $p_k = \Pr(X = k)$, $k \in \mathbb{N}$, e $c \in \left(0, \frac{1}{1-p_0}\right]$. Chamamos variável modificada em zero à v.a. X^M que se obtém de X alterando os valores das probabilidades da seguinte forma (cf., e.g., [42]):

$$p_k^M = \Pr(X^M = k) = \begin{cases} dp_0, & k = 0 \text{ e } 0 \leq d < \frac{1}{p_0} \\ cp_k, & k = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (2.20)$$

Como $\sum_{k=0}^{+\infty} p_k^M = 1$ e

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{+\infty} p_k^M &= dp_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} cp_k = dp_0 + c \left(\sum_{k=0}^{+\infty} p_k - p_0 \right) \\ &= dp_0 + c(1 - p_0), \end{aligned}$$

resulta que

$$dp_0 + c(1 - p_0) = 1,$$

i.e.,

$$d = \frac{1 - c(1 - p_0)}{p_0} \left(\Leftrightarrow c = \frac{1 - dp_0}{1 - p_0} \right).$$

Assim, a expressão (2.20) pode ser reescrita na seguinte forma,

$$\begin{aligned} p_k^M &= \begin{cases} \frac{1-c(1-p_0)}{p_0}p_0, & k = 0 \\ cp_k, & k = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 - c(1 - p_0), & k = 0 \\ cp_k, & k = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \end{aligned} \quad (2.21)$$

A f.g.p. de X^M é

$$\begin{aligned} P_{X^M}(z) &= E(z^{X^M}) = \sum_{k=0}^{+\infty} z^k p_k^M = dp_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} z^k cp_k \\ &= 1 - c(1 - p_0) + c \left(\sum_{k=0}^{+\infty} z^k p_k - p_0 \right) \\ &= 1 - c(1 - p_0) + c[P_X(z) - p_0] \\ &= 1 - c + cp_0 + cP_X(z) - cp_0 \\ &= 1 - c + cP_X(z) \\ &= (1 - c)P_Y(z) + cP_X(z), \end{aligned} \quad (2.22)$$

com $Y \sim \text{Degenerada}(0)$, *i.e.*, para $c \in (0, 1]$, a distribuição de X^M pode ser escrita como uma mistura da distribuição de X com a distribuição de uma v.a. Y degenerada em zero.²

Por outro lado,

$$\begin{aligned} P_{X^M}(z) &= 1 - c + cP_X(z) \\ &= 1 - c + c \left[\frac{P_X(z) - p_0}{1 - p_0} (1 - p_0) + p_0 \right] \\ &= 1 - c + c[P_{X^T}(z)(1 - p_0) + p_0] \\ &= 1 - c + cp_0 + c(1 - p_0)P_{X^T}(z) \\ &= [1 - c(1 - p_0)]P_Y(z) + c(1 - p_0)P_{X^T}(z) \end{aligned}$$

com $Y \sim \text{Degenerada}(0)$, *i.e.*, a distribuição de X^M pode ser escrita como a mistura da distribuição degenerada em zero e de X^T .

²Para $c \in \left(1, \frac{1}{1-p_0}\right]$, a expressão (2.22) não define uma mistura de acordo com a Definição 2.6 simplesmente pelo facto de $c, 1 - c \notin [0, 1]$.

Note-se que quando em (2.20) tomamos $d = 0$, ou, o que é o mesmo, quando em (2.21) tomamos $c = \frac{1}{1-p_0}$, obtemos a f.m.p. de uma v.a. truncada em zero.

A modificação de uma v.a. X discreta num conjunto mais alargado de valores é feita de forma semelhante.

Apesar de a truncatura ser um caso particular da modificação, a truncatura conduz a uma alteração do suporte da v.a. em causa, pelo que, ao longo desta dissertação, optou-se por distinguir as v.a.'s truncadas das v.a.'s modificadas.

Capítulo 3

Distribuições de contagem básicas

Definida a f.g.p., estamos em condições de apresentar as distribuições discretas que formam a família de Panjer, família cujo estudo será abordado no capítulo seguinte. As distribuições que fazem parte da família de Panjer, que denominamos por distribuições de contagem básicas, são a distribuição binomial, a distribuição de Poisson, a distribuição binomial negativa e, como caso particular desta última, a distribuição geométrica. Estas distribuições, e muitas outras distribuições discretas, são estudadas com detalhe por Johnson *et al.* (*cf.* [34]).

3.1 A distribuição binomial

A distribuição binomial é uma distribuição de contagem muito utilizada. Esta possui algumas propriedades distintas das de Poisson e da binomial negativa que apresentaremos nas secções seguintes e que a tornam particularmente útil. Em particular, a sua variância é menor do que a sua média, tornando-a útil para modelação de conjuntos de dados em que a variância da amostra observada é menor do que a média amostral. Esta propriedade contrasta esta distribuição com a distribuição binomial negativa, onde a variância excede a média, e também com a distribuição de Poisson, onde a variância é igual à média.

A distribuição binomial é a distribuição de uma v.a. que conta o número de sucessos em m experiências de Bernoulli, *i.e.*, experiências independentes, cujos resultados podem ser traduzidos em “sucesso” ou “insucesso” e que têm igual probabilidade de “sucesso”. De modo a descobrir a expressão da f.m.p. da distribuição binomial, consideremos m experiências realizadas. A probabilidade de ocorrerem k sucessos (S_1, S_2, \dots, S_k) imediatamente antes de $m - k$ insucessos

$(I_{k+1}, \dots, I_{m-1}, I_m)$ é

$$\begin{aligned} P(S_1 S_2 \dots S_k I_{k+1} \dots I_{m-1} I_m) &= pp \dots p (1-p) \dots (1-p) (1-p) \\ &= p^k (1-p)^{m-k}. \end{aligned}$$

Considerando que existem $\binom{m}{k}$ sequências possíveis de apresentar as m experiências, das quais k são sucessos e $m-k$ são insucessos, a f.m.p. para a distribuição binomial com parâmetros $m = 1, 2, \dots$ e $p \in (0, 1)$ é dada por

$$p_k = \Pr(N = k) = \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k}, \quad k = 0, 1, \dots, m. \quad (3.1)$$

Na Figura 3.1 encontra-se representada a f.m.p. de $X \sim \text{Binomial}(10, 0.5)$.

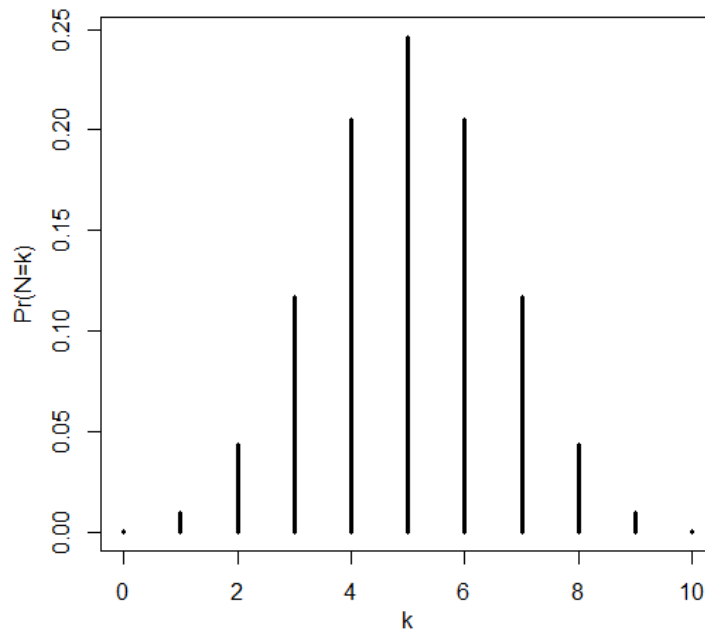


Figura 3.1: Exemplo de uma f.m.p. de uma v.a. N com distribuição $\text{Binomial}(m, p)$ (neste caso, $m = 10$ e $p = 0.5$).

Esta distribuição tem probabilidades positivas nos números naturais apenas até a um valor inteiro positivo m , inclusive, sendo assim vantajosa em situações onde se acredita que não é razoável atribuir probabilidades positivas além de um determinado valor.

A f.g.p. para a distribuição binomial é dada por

$$\begin{aligned} P_N(z) &= E(z^N) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k z^k \\ &= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k} z^k \\ &= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (pz)^k (1-p)^{m-k}. \end{aligned}$$

De $(p+q)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} p^{m-k} q^k$ resulta

$$P_N(z) = (1-p+pz)^m. \quad (3.2)$$

O valor esperado e a variância de N podem ser obtidos a partir da f.g.p. definida em (3.2) da seguinte forma

$$\begin{aligned} E(N) &= P'_N(1) = mp, \\ E[N(N-1)] &= P''_N(1) = mp^2(m-1) \end{aligned}$$

e, conseqüentemente,

$$\begin{aligned} Var(N) &= E[N(N-1)] + E(N) - [E(N)]^2 \\ &= mp^2(m-1) + mp - (mp)^2 \\ &= mp(1-p). \end{aligned}$$

O índice de dispersão, $\delta(N)$, quando N tem uma distribuição Binomial(m, p), é dado por

$$\delta(N) \stackrel{(2.9)}{=} \frac{Var(N)}{E(N)} = \frac{mp(1-p)}{mp} = 1-p < 1.$$

Uma outra propriedade que faz da distribuição binomial uma distribuição de trato fácil é o facto da soma de duas variáveis independentes com distribuição binomial, com parâmetro p comum, ser ainda uma variável com distribuição binomial.

Teorema 3.1 *Sejam $N \sim Binomial(n, p)$ e $M \sim Binomial(m, p)$, sendo N e M independentes, com $m, n \in \mathbb{N}_1$ e $p \in (0, 1)$. Então $N+M \sim Binomial(n+m, p)$.*

Demonstração: Consideremos $N \sim Binomial(n, p)$ e $M \sim Binomial(m, p)$, independentes, com $m, n \in \mathbb{N}_1$ e $p \in (0, 1)$. Tendo em conta (3.2), temos que $P_N(z) = (1 - p + pz)^n$ e $P_M(z) = (1 - p + pz)^m$. Portanto, e fazendo uso do Teorema 2.3, vem que

$$P_{N+M}(z) = P_N(z)P_M(z) = (1 - p + pz)^n (1 - p + pz)^m = (1 - p + pz)^{n+m},$$

que é a f.g.p. de uma v.a. com distribuição $Binomial(n + m, p)$. ■

3.2 A distribuição de Poisson

A distribuição de Poisson é uma distribuição de contagem, *i.e.*, possui probabilidades positivas apenas em números naturais, e depende de um parâmetro, habitualmente denotado por λ , positivo. A distribuição de $Poisson(\lambda)$ pode ser definida como a distribuição limite de uma sucessão de v.a.'s $X_n \sim Binomial(n, p_n)$, tal que $\lim_{n \rightarrow +\infty} np_n = \lambda > 0$ (*cf.* teorema e demonstração, *e.g.*, [46], p. 385 e [17], pp. 280 e 281).

Definição 3.2 A f.m.p. de uma v.a. N com distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda > 0$ é dada por

$$p_k = \Pr(N = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}, k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.3)$$

Na Figura 3.2 encontra-se representada a f.m.p. de $X \sim Poisson(10)$.

A f.g.p. para a distribuição de Poisson é dada por

$$P_N(z) = E(z^N) = \sum_{k=0}^{+\infty} z^k \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(z\lambda)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{z\lambda} = e^{\lambda(z-1)},$$

i.e.,

$$P_N(z) = e^{\lambda(z-1)}. \quad (3.4)$$

Como referido anteriormente, o valor esperado e a variância de N podem ser determinados a partir da f.g.p.. No presente caso:

$$\begin{aligned} E(N) &= P'_N(1) = \lambda, \\ E[N(N-1)] &= P''_N(1) = \lambda^2 \end{aligned}$$

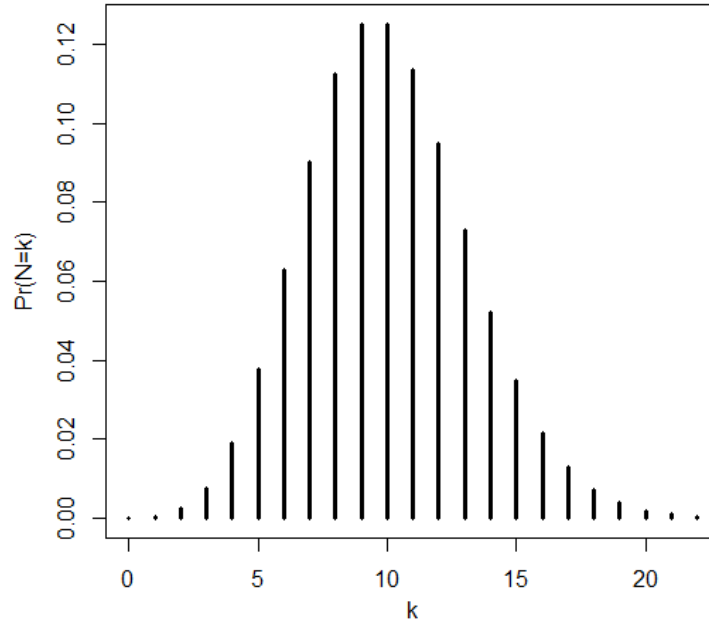


Figura 3.2: Exemplo de uma f.m.p. de uma v.a. N com distribuição de $Poisson(\lambda)$ (neste caso, $\lambda = 10$).

e, conseqüentemente,

$$\begin{aligned} Var(N) &= E[N(N-1)] + E(N) - [E(N)]^2 \\ &= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 \\ &= \lambda. \end{aligned}$$

O índice de dispersão, $\delta(N)$, quando N tem uma distribuição de $Poisson(\lambda)$, é dado por

$$\delta(N) \stackrel{(2.9)}{=} \frac{Var(N)}{E(N)} = \frac{\lambda}{\lambda} = 1.$$

À semelhança do Teorema 2.3 temos o Teorema que se segue:

Teorema 3.3 *Sejam N e M variáveis de Poisson independentes com parâmetros λ e μ , respectivamente ($\lambda, \mu > 0$). Então, $N + M$ tem uma distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda + \mu$.*

Demonstração: Pelo Teorema 2.3 sabemos que a f.g.p. da soma de v.a.'s independentes é o produto das f.g.p. individuais. Assim, se N e M são v.a.'s com

distribuição de Poisson com parâmetros λ e μ , respetivamente, então a f.g.p. da soma $N + M$ é dada por

$$\begin{aligned} P_{N+M}(z) &= P_N(z) P_M(z) \stackrel{(3.4)}{=} e^{\lambda(z-1)} e^{\mu(z-1)} \\ &= e^{(\lambda+\mu)(z-1)}. \end{aligned}$$

Pelo Teorema 2.2, sabemos que a f.g.p. caracteriza a v.a. e sendo a f.g.p. obtida a de uma v.a. de Poisson com parâmetro $\lambda + \mu$, concluímos que $N + M$ tem uma distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda + \mu$. ■

3.3 A distribuição binomial negativa

A distribuição binomial negativa pode ser caracterizada como o número de experiências de Bernoulli necessárias até atingir um determinado número de sucessos (*cf.* definição, *e.g.*, [46], p. 369).

A distribuição binomial negativa, na sua versão transladada para zero, pode ser usada como um modelo alternativo ao modelo de Poisson, pois tal como a distribuição de Poisson, esta tem probabilidades positivas nos números naturais. Dado que tem dois parâmetros, possui uma maior flexibilidade na sua forma comparativamente com a de Poisson.

A f.m.p. de uma v.a. M com distribuição binomial negativa transladada para zero com parâmetros $r = 1, 2, \dots$ e $p \in (0, 1)$ é dada tradicionalmente por

$$\Pr(M = k) = \binom{k+r-1}{r-1} p^r (1-p)^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Considerando que $\binom{k+r-1}{r-1} = \frac{\Gamma(k+r)}{\Gamma(r)k!}$, onde Γ representa a função *Gama*, o domínio de variação do parâmetro r pode ser estendido a \mathbb{R}^+ . Assim, consideraremos a seguinte definição na presente dissertação:

Definição 3.4 *Dizemos que N tem distribuição binomial negativa com parâmetros $r > 0$ e $p \in (0, 1)$ se*

$$p_k = \Pr(N = k) = \frac{\Gamma(k+r)}{\Gamma(r)k!} p^r (1-p)^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.5)$$

Na Figura 3.3 encontra-se representada a f.m.p. de $X \sim \text{BinomialNegativa}(10, 0.5)$.

Passamos, a partir deste ponto, a considerar a generalização da notação $\binom{a}{b}$ para valores $a \geq b \geq 0$, não inteiros, considerando $\binom{a}{b} = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(b+1)\Gamma(a-b+1)}$.

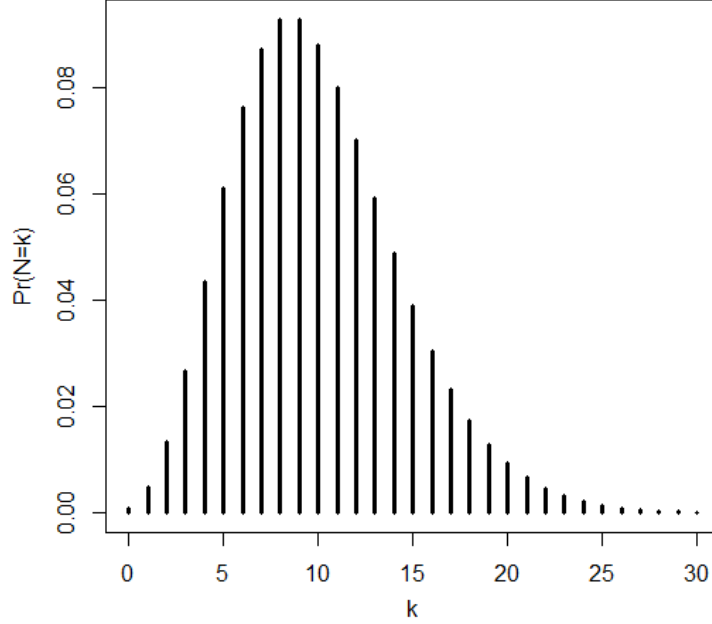


Figura 3.3: Exemplo de uma f.m.p. de uma v.a. N com distribuição *Binomial Negativa* (r, p) (neste caso, $r = 10$ e $p = 0.5$).

Observação 3.5 Quando associamos a distribuição binomial negativa à contagem de experiências de Bernoulli até atingir um determinado número de sucessos r , a f.m.p. considerada é a da variável $N + r$:

$$\Pr(N + r = k) = \Pr(N = k - r) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}, \quad k = r, r+1, r+2, \dots$$

A f.g.p. da distribuição binomial negativa é

$$\begin{aligned} P_N(z) &= E(z^N) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k z^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(k+r)}{\Gamma(r) k!} p^r (1-p)^k z^k \\ &= p^r \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(k+r)}{\Gamma(r) k!} [(1-p)z]^k \\ &= p^r \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(k+r)}{\Gamma(r) k!} \{1 - [1 - (1-p)z]\}^k. \end{aligned}$$

Como $\sum_{k=0}^{+\infty} p_k = 1$, vem

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(k+r)}{\Gamma(r) k!} p^r (1-p)^k = 1 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(k+r)}{\Gamma(r) k!} (1-p)^k = \frac{1}{p^r},$$

de onde resulta

$$P_N(z) = p^r \frac{1}{(1 - (1-p)z)^r} = \left[\frac{p}{1 - (1-p)z} \right]^r. \quad (3.6)$$

O valor esperado e a variância de N podem ser determinados a partir da f.g.p. apresentada (3.6) da seguinte maneira

$$\begin{aligned} E(N) &= P'_N(1) = r \frac{1-p}{p}, \\ E[N(N-1)] &= P''_N(1) = \frac{(1-p)^2}{p^2} (r^2 + r) \end{aligned} \quad (3.7)$$

e, conseqüentemente,

$$\begin{aligned} Var(N) &= E[N(N-1)] + E(N) - [E(N)]^2 \\ &= \frac{(1-p)^2}{p^2} (r^2 + r) + r \frac{1-p}{p} - \left(r \frac{1-p}{p} \right)^2 \\ &= \frac{r(1-p)}{p^2}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

O índice de dispersão, $\delta(N)$, quando N tem uma distribuição BinomialNegativa(r, p), é dado por

$$\delta(N) \stackrel{(2.9)}{=} \frac{Var(N)}{E(N)} = \frac{\frac{r(1-p)}{p^2}}{\frac{r(1-p)}{p}} = \frac{1}{p} > 1.$$

Uma vez que $\frac{1}{p} > 1$, a variância da distribuição binomial negativa excede o valor esperado. Assim, para um conjunto particular de dados, caso a variância observada seja superior ao valor esperado observado, a distribuição binomial negativa poderá ser um candidato mais adequado do que a distribuição de Poisson como modelo a ser ajustado.

Vimos anteriormente que a família de v.a.'s independentes com distribuição de Poisson é fechada para somas e o mesmo acontece com a família de v.a.'s independentes com distribuição Binomial Negativa, com parâmetro p comum.

Teorema 3.6 *Sejam $N \sim BinomialNegativa(s, p)$ e $M \sim BinomialNegativa(t, p)$, sendo N e M independentes, com $s, t > 0$ e $p \in (0, 1)$. Então $N + M \sim BinomialNegativa(s + t, p)$.*

Demonstração: Tendo em conta (3.6), temos que $P_N(z) = \left[\frac{p}{1-(1-p)z} \right]^s$ e $P_M(z) = \left[\frac{p}{1-(1-p)z} \right]^t$. Portanto, e fazendo uso do Teorema 2.3, vem que

$$\begin{aligned} P_{N+M}(z) &= P_N(z) P_M(z) \\ &= \left[\frac{p}{1-(1-p)z} \right]^s \left[\frac{p}{1-(1-p)z} \right]^t \\ &= \left[\frac{p}{1-(1-p)z} \right]^{s+t}, \end{aligned}$$

que é a f.g.p. de uma v.a. com distribuição *BinomialNegativa*($s+t, p$). ■

A distribuição binomial negativa pode ser obtida como uma generalização da distribuição de Poisson. De facto, se $X_\lambda \sim \text{Poisson}(\lambda)$ e se λ for uma observação de uma v.a. $\Lambda \sim \text{Gama}(\alpha, \delta)$, então $X_\Lambda \sim \text{BinomialNegativa}(\alpha, \frac{1}{1+\delta})$ (cf., e.g., [46], p. 967).

A distribuição geométrica é o caso especial da distribuição *BinomialNegativa*(r, p) quando $r = 1$.

A f.m.p. de uma v.a. N com distribuição geométrica de parâmetro $p \in (0, 1)$ é então dada por

$$p_k = \Pr(N = k) = p(1-p)^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.9)$$

A f.g.p. da distribuição geométrica obtém-se de (3.6) substituindo r por 1, i.e.,

$$P_N(z) = p \frac{1}{[1-(1-p)z]} = \frac{p}{1-(1-p)z}. \quad (3.10)$$

O valor esperado e a variância de N podem ser obtidos a partir de (3.7) e (3.8). Assim,

$$E(N) = \frac{1-p}{p},$$

e

$$\text{Var}(N) = \frac{(1-p)}{p^2}.$$

Capítulo 4

A classe de distribuições de Panjer e suas extensões

Neste capítulo será abordada com detalhe a classe de Panjer e as suas diversas modificações obtidas através da truncatura ou modificação da parte inferior do suporte das distribuições da classe. Na seção final apresentamos de forma breve duas outras possíveis extensões da classe de Panjer. Começemos por apresentar a classe de Panjer.

4.1 A classe de distribuições de Panjer ou $(a, b, 0)$

Definição 4.1 *Seja N uma v.a. discreta com f.m.p. $p_k = \Pr(N = k)$, $k \in \mathbb{N}$. Os membros da família de Panjer, também conhecida como a classe de distribuições $(a, b, 0)$, sendo a e b constantes, respeitam a seguinte igualdade recursiva*

$$p_k = p_{k-1} \left(a + \frac{b}{k} \right), \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (4.1)$$

i.e.,

$$\frac{p_k}{p_{k-1}} = a + \frac{b}{k}, \quad (4.2)$$

quando $p_{k-1} \neq 0$ e $k = 1, 2, 3, \dots$. Consideramos aqui $0 < p_0 < 1$, como é habitual, para excluir soluções degeneradas.

A igualdade apresentada em (4.2) determina o peso relativo de probabilidades consecutivas na distribuição de contagem.

A classe $(a, b, 0)$ é uma classe de distribuições que depende de dois parâmetros, a e b . Esta classe inclui as distribuições Binomial, Poisson e Binomial Negativa (cf., e.g., [35] e [41]). De facto, se:

i) $N \sim \text{Binomial}(m, p)$, $(m \in \mathbb{N}_1, p \in (0, 1))$, para $k = 1, 2, \dots, m$,

$$\begin{aligned} \frac{p_k}{p_{k-1}} &= \frac{\binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k}}{\binom{m}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{m-(k-1)}} \\ &= \frac{p}{1-p} \times \frac{m!}{k!(m-k)!} \times \frac{(k-1)!(m-k+1)!}{m!} \\ &= \frac{p(m-k+1)}{(1-p)k} = \frac{p(-k)}{(1-p)k} + \frac{p(m+1)}{(1-p)k} \\ &= \frac{p}{p-1} + \frac{p(m+1)}{(1-p)k} \\ &= a + \frac{b}{k}, \end{aligned}$$

$$\text{com } a = \frac{p}{p-1} \text{ e } b = \frac{p(m+1)}{1-p}.$$

ii) $N \sim \text{Poisson}(\lambda)$, $(\lambda > 0)$, para $k = 1, 2, 3, \dots$,

$$\begin{aligned} \frac{p_k}{p_{k-1}} &= \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \times \frac{(k-1)!}{e^{-\lambda} \lambda^{k-1}} = \frac{\lambda(k-1)!}{k(k-1)!} = \frac{\lambda}{k} \\ &= a + \frac{b}{k}, \end{aligned}$$

$$\text{com } a = 0 \text{ e } b = \lambda.$$

iii) $N \sim \text{BinomialNegativa}(r, p)$, $(r > 0, p \in (0, 1))$, para $k = 1, 2, 3, \dots$,

$$\begin{aligned} \frac{p_k}{p_{k-1}} &= \frac{\frac{\Gamma(k+r)}{\Gamma(r)k!} p^r (1-p)^k}{\frac{\Gamma(k+r-1)}{\Gamma(r)(k-1)!} p^r (1-p)^{k-1}} \\ &= \frac{(k+r-1)\Gamma(k+r-1)}{k(k-1)!} \frac{(k-1)!}{\Gamma(k+r-1)} (1-p) \\ &= \frac{(1-p)(k+r-1)}{k} = \frac{(1-p)k + (1-p)r - (1-p)}{k} \\ &= (1-p) + \frac{(1-p)(r-1)}{k} \\ &= a + \frac{b}{k}, \end{aligned}$$

$$\text{com } a = 1-p \text{ e } b = (1-p)(r-1).$$

Tabela 4.1: Membros da classe de Panjer ou $(a, b, 0)$.

Distribuição	a	b	p_0
Binomial(m, p)	$\frac{p}{p-1}$	$\frac{p(m+1)}{1-p}$	$(1-p)^m$
Poisson(λ)	0	λ	$e^{-\lambda}$
Binomial negativa(r, p)	$1-p$	$(1-p)(r-1)$	p^r

Sundt e Jewell mostraram em 1981 (*cf.* [53]) que as distribuições apresentadas na Tabela 4.1 são as únicas que respeitam a igualdade recursiva definida em (4.2). A Tabela 4.1 apresenta as distribuições da classe $(a, b, 0)$. Como habitualmente, consideramos $\lambda, r > 0, 0 < p < 1$ e $m \in \mathbb{N}_1$.

Numa palestra apresentada em junho de 2009 em Helsínquia, no colóquio *ASTIN 2009*¹, intitulada “An all-in-one formula for the Poisson, Binomial, and Negative Binomial distribution”, Michael Fackler sugere a unificação das expressões das distribuições da classe de Panjer, através de uma reparametrização que inclui nas expressões das f.m.p. o valor esperado.

No caso da f.m.p. da distribuição de $N_1 \sim \text{Poisson}(\lambda)$ ($\lambda > 0$), quase nada é necessário fazer, já que a parametrização habitual inclui o valor esperado (λ) como parâmetro:

$$\begin{aligned} \Pr(N_1 = k) &= \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{\lambda}{\alpha}\right)^{-\alpha} \frac{\lambda^k}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\alpha + i}{\alpha + \lambda} \right], k = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (4.3)$$

No caso da f.m.p. de uma v.a. $N_2 \sim \text{Binomial}(m, p)$ ($m \in \mathbb{N}_1, p \in (0, 1)$), considerando que $\lambda = E(N_2) = mp$, se tomarmos $p = \frac{\lambda}{m}$ obtemos, para $k = 0, \dots, m$,

$$\begin{aligned} \Pr(N_2 = k) &= \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k} = \binom{m}{k} \left(\frac{\lambda}{m}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{m}\right)^{m-k} \\ &= \frac{m!}{(m-k)! k!} \left(1 - \frac{\lambda}{m}\right)^m \frac{1}{(m-\lambda)^k}. \end{aligned}$$

De

$$\frac{m!}{(m-k)!} = m(m-1)(m-2)\dots(m-k+1) = \prod_{i=0}^{k-1} (m-i)$$

¹Cf. https://www.actuaries.org/ASTIN/Colloquia/Helsinki/Papers_EN.cfm (consultado a 28/06/2016) e [16].

vem

$$\Pr(N_2 = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \left(1 - \frac{\lambda}{m}\right)^m \prod_{i=0}^{k-1} \frac{m-i}{m-\lambda},$$

e, se tomarmos $\alpha = -m$, obtemos

$$\Pr(N_2 = k) = \left(1 + \frac{\lambda}{\alpha}\right)^{-\alpha} \frac{\lambda^k}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\alpha+i}{\alpha+\lambda}. \quad (4.4)$$

Finalmente, no caso da f.m.p. de uma v.a. $N_3 \sim \text{BinomialNegativa}(r, p)$ ($r > 0, p \in (0, 1)$), considerando que $\lambda = E(N) = r \frac{1-p}{p}$, vem

$$\lambda p = r - rp \Leftrightarrow p = \frac{r}{r + \lambda},$$

e, conseqüentemente, para $k = 0, 1, \dots$,

$$\begin{aligned} \Pr(N_3 = k) &= \binom{k+r-1}{r-1} p^r (1-p)^k = \binom{k+r-1}{r-1} \left(\frac{r}{r+\lambda}\right)^r \left(\frac{\lambda}{r+\lambda}\right)^k \\ &= \frac{\Gamma(k+r)}{\Gamma(r)} \frac{\lambda^k}{k!} \left(\frac{r}{r+\lambda}\right)^r \left(\frac{1}{r+\lambda}\right)^k \\ &= \left(1 + \frac{\lambda}{r}\right)^{-r} \frac{\lambda^k}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{r+i}{r+\lambda}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Comparando as expressões (4.3), (4.4) e (4.5), verificamos que se N é uma v.a. com distribuição da classe de Panjer com valor esperado λ ($\lambda > 0$), então

$$\Pr(N = k) = \left(1 + \frac{\lambda}{\alpha}\right)^{-\alpha} \frac{\lambda^k}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\alpha+i}{\alpha+\lambda}, \quad (4.6)$$

onde α é o parâmetro que identifica a v.a. em causa: se $\alpha \in \{-\infty, +\infty\}$, $N \sim \text{Poisson}(\lambda)$ (obtendo-se a expressão da respetiva f.m.p. como um limite), se $\alpha > 0$, $N \sim \text{BinomialNegativa}(r, \frac{\alpha}{\alpha+\lambda})$ e se $\alpha \in (-\infty, -\lambda) \cap \mathbb{Z}$, $N \sim \text{Binomial}(-\alpha, \frac{\lambda}{-\alpha})$. Nos dois primeiros casos, a expressão (4.6) está definida para $k \in \mathbb{N}$ e no último caso para $k \in \mathbb{N} \cap [0, -\alpha]$.

A unificação das f.m.p. das distribuições da classe de Panjer traduz-se, como não podia deixar de ser, na unificação da expressão da f.g.p.:

$$P_N(z) = E(z^N) = \left[1 - \frac{\lambda}{\alpha}(z-1)\right]^{-\alpha}$$

(cf. expressões (3.2), (3.4) e (3.6)).

4.2 A classe de distribuições $(a, b, 1)$

Por vezes, a classe de distribuições $(a, b, 0)$ não proporciona uma análise correta das características de algumas bases de dados encontradas na prática. Uma das razões prende-se com o facto das distribuições da classe $(a, b, 0)$ não serem capazes de replicar o formato dessa base de dados, em particular na parte esquerda da distribuição.

Nesta secção, será abordada uma família de distribuições que ultrapassa o problema da falta de ajustamento na parte mais à esquerda da distribuição, mais concretamente em zero.

Definição 4.2 *Seja p_k , $k \in \mathbb{N}$, a f.m.p. de uma v.a. discreta não degenerada N . Dizemos que N é um membro da classe de distribuições $(a, b, 1)$, sendo a e b constantes, se a sua f.m.p. respeitar a seguinte igualdade recursiva*

$$p_k = p_{k-1} \left(a + \frac{b}{k} \right), \quad k = 2, 3, \dots \quad (4.7)$$

i.e.,

$$\frac{p_k}{p_{k-1}} = a + \frac{b}{k}, \quad (4.8)$$

sempre que $p_{k-1} \neq 0$ e $k = 2, 3, \dots$

As definições da classe de distribuições $(a, b, 1)$ e da classe de distribuições $(a, b, 0)$ diferem apenas no conjunto das probabilidades envolvidas na relação recursiva: na segunda estão envolvidas todas as probabilidades p_0, p_1, \dots , enquanto que na primeira estão envolvidas as probabilidades p_1, p_2, \dots .

Os membros da classe $(a, b, 0)$ são, obviamente, membros da classe $(a, b, 1)$. Além destes, não é difícil constatar que a distribuição que resulta de modificar no ponto inicial, $k = 0$, uma distribuição da classe $(a, b, 0)$, X com f.m.p. p_k , $k \in \mathbb{N}$, é também membro da classe $(a, b, 1)$. Mais concretamente, recorde-se, que se X tem distribuição pertencente à classe $(a, b, 0)$, com f.m.p. $p_k = \Pr(X = k)$, $k \in \mathbb{N}$, então a distribuição de X^M tem f.m.p. dada por, para $c \in \left(0, \frac{1}{1-p_0}\right]$,

$$p_k^M = \Pr(X^M = k) = \begin{cases} 1 - c(1 - p_0), & k = 0 \\ cp_k, & k = 1, 2, 3, \dots, \end{cases} \quad (4.9)$$

sendo trivialmente um membro da classe $(a, b, 1)$ (*cf.*, *e.g.*, [42]).

Note-se que quando em (4.9) tomamos $c = \frac{1}{1-p_0}$, obtemos as distribuições de $(a, b, 0)$ truncadas ao suporte \mathbb{N}_1 . Naturalmente, estas distribuições são também membros da classe $(a, b, 1)$.

Além dos membros referidos no parágrafo anterior, são membros da classe $(a, b, 1)$ a distribuição binomial negativa truncada generalizada e a distribuição logarítmica, que passamos a definir, e, naturalmente, as que resultam da modificação destas em zero.

Definição 4.3 A distribuição binomial negativa truncada generalizada (*BNTG*)², com parâmetros r ($r > -1, r \neq 0$) e p ($p \in (0, 1)$), tem f.m.p. dada por, para $k = 1, 2, \dots$,

$$p_k = \frac{-r\Gamma(k+r)(1-p)^k}{k!\Gamma(r+1)(1-p^{-r})}. \quad (4.10)$$

Na Figura 4.1 encontra-se representada a f.m.p. de $X \sim BNTG(-0.2, 0.3)$.

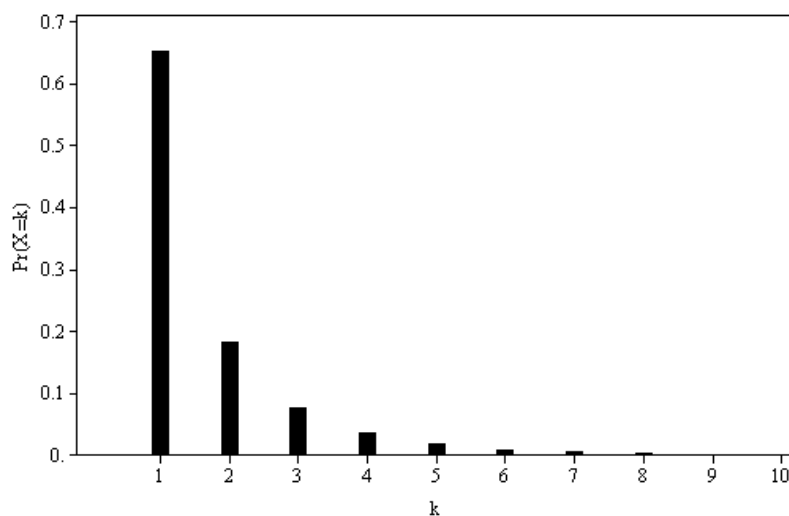


Figura 4.1: Exemplo de uma f.m.p. de uma v.a. X com distribuição $BNTG(r, p)$ (neste caso, $r = -0.2$ e $p = 0.3$).

De facto, se considerarmos $X \sim BinomialNegativa(r, p)$, com $r > 0$ e $p \in (0, 1)$, a sua f.m.p. é dada por (cf. (3.5))

$$\Pr(X = k) = \frac{\Gamma(k+r)}{\Gamma(r)k!} p^r (1-p)^k, k = 0, 1, 2, \dots,$$

²Introduzida por Engen em 1974 (cf. [15] e [54]).

e a f.m.p. da sua truncatura em zero, *i.e.*, ao conjunto \mathbb{N}_1 , é dada por

$$\begin{aligned} \Pr(X^T = k) &= \frac{\frac{\Gamma(k+r)}{\Gamma(r)k!} p^r (1-p)^k}{1-p^r} \\ &= \frac{-r\Gamma(k+r) p^r (1-p)^k}{-r\Gamma(r) k! (1-p^r)} \\ &= \frac{-r\Gamma(k+r) (1-p)^k}{k!\Gamma(r+1) 1-p^{-r}}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

com $k = 1, 2, \dots$, $r > 0$ e $p \in (0, 1)$ (denotaremos esta distribuição por *Binomial Negativa* $T(r, p)$). Note-se que quando $r \in (-1, 0)$, a expressão (4.11) ainda define uma probabilidade. Neste caso, ($r > -1, r \neq 0$), denotaremos a distribuição pela sigla *BNTG* (de “Binomial Negativa Truncada Generalizada”).

Para verificar que a distribuição $BNTG(r, p)$ é um membro de $(a, b, 1)$ basta notar que, para $k = 2, 3, 4, \dots$,

$$\begin{aligned} \frac{p_k}{p_{k-1}} &= \frac{-r\Gamma(k+r) (1-p)^k}{k!\Gamma(r+1) 1-p^{-r}} \times \frac{(k-1)!\Gamma(r+1) 1-p^{-r}}{-r\Gamma(k-1+r) (1-p)^{k-1}} \\ &= \frac{\Gamma(k-1+r+1) (1-p)^k}{k!\Gamma(k-1+r) (1-p)^{k-1}} (k-1)! \\ &= \frac{(k-1+r) \Gamma(k-1+r)}{k \Gamma(k-1+r)} (1-p) \\ &= \frac{(k+r-1)}{k} (1-p) = (1-p) + \frac{(r-1)(1-p)}{k} \\ &= a + \frac{b}{k}, \text{ com } a = 1-p \text{ e } b = (r-1)(1-p). \end{aligned}$$

A f.g.p. de $X \sim BNTG(r, p)$ é

$$\begin{aligned} P_X(z) &= E(z^X) = \sum_{k=0}^{+\infty} z^k p_k = \sum_{k=1}^{+\infty} z^k \frac{-r\Gamma(k+r) (1-p)^k}{k!\Gamma(r+1) 1-p^{-r}} \\ &= \frac{-1}{1-p^{-r}} \sum_{k=1}^{+\infty} [z(1-p)]^k \frac{r\Gamma(k+r)}{k!r\Gamma(r)} \\ &= \frac{-1}{1-p^{-r}} \left[\sum_{k=0}^{+\infty} [z(1-p)]^k \frac{\Gamma(k+r)}{k!\Gamma(r)} - 1 \right] \\ &\stackrel{(cf., e.g., [24])}{=} \frac{-1}{1-p^{-r}} \left[\frac{1}{[1-(1-p)z]^r} - 1 \right] \\ &= \frac{1 - [1-(1-p)z]^{-r}}{1-p^{-r}}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

com $r > -1$, $r \neq 0$, $p \in (0, 1)$ e $|z| < \frac{1}{p}$.

O valor esperado e a variância de X podem ser obtidos a partir da f.g.p. definida em (4.12) da seguinte forma

$$\begin{aligned} E(X) &= P'_X(1) = \frac{r(1-p)}{p(1-p^r)} \\ E[X(X-1)] &= P''_X(1) = r(r+1) \frac{(1-p)^2}{p^2(1-p^r)} \end{aligned}$$

e, conseqüentemente,

$$\begin{aligned} Var(X) &= E[X(X-1)] + E(X) - [E(X)]^2 \\ &= r(r+1) \frac{(1-p)^2}{p^2(1-p^r)} + \frac{r(1-p)}{p(1-p^r)} - \left[\frac{r(1-p)}{p(1-p^r)} \right]^2 \\ &= \frac{r(p-1)}{p^2(p^r-1)^2} [p^r(r+1) - p^{r+1}r - 1]. \end{aligned}$$

Na Figura 4.2 observamos que o índice de dispersão, quando $X \sim BNTG(1, p)$, dependendo do valor de $p \in (0, 1)$, pode tomar valores inferiores a 1 (se $p > 0.5$), valores superiores a 1 (se $p < 0.5$) ou ser igual a 1 (se $p = 0.5$), *i.e.*, se $p > 0.5$, $Var(X) < E(X)$, se $p < 0.5$, $Var(X) > E(X)$ e se $p = 0.5$, $Var(X) = E(X)$.

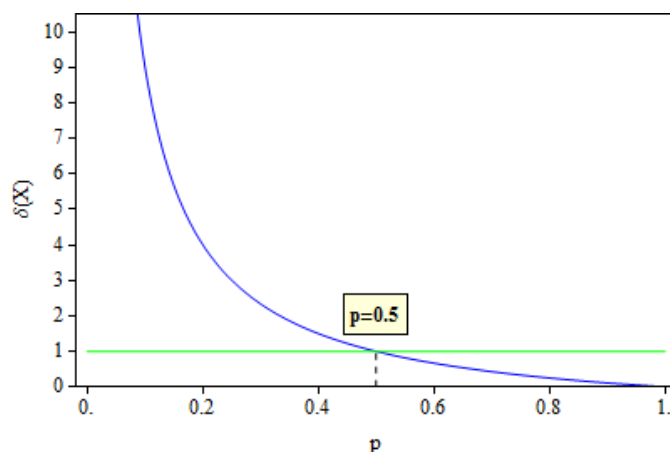


Figura 4.2: Variação de $\delta(X)$ em função do valor de p , quando $X \sim BNTG(1, p)$.

A distribuição logarítmica (*Log*) resulta de se considerar o limite $r \rightarrow 0$ na f.m.p. de uma v.a. com distribuição $BNTG(r, p)$ (*cf.* (4.10)). Assim,

Definição 4.4 Dizemos que uma v.a. X tem distribuição logarítmica (Log) de parâmetro p se tiver f.m.p. dada por

$$p_k = -\frac{(1-p)^k}{k \log(p)}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad e \quad p \in (0, 1). \quad (4.13)$$

Na Figura 4.3 encontra-se representada a f.m.p. de $X \sim Log(0.2)$.

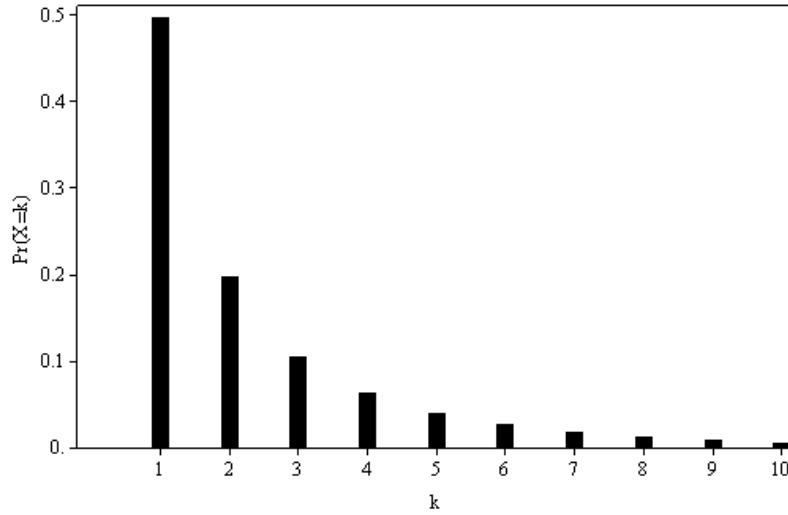


Figura 4.3: Exemplo de uma f.m.p. de uma v.a. X com distribuição $Log(p)$ (neste caso, $p = 0.2$).

Para verificar que a distribuição $Log(p)$ é um membro da classe $(a, b, 1)$ basta notar que, para $k = 2, 3, 4, \dots$,

$$\begin{aligned} \frac{p_k}{p_{k-1}} &= -\frac{(1-p)^k}{k \log(p)} \times \left[-\frac{(k-1) \log(p)}{(1-p)^{k-1}} \right] = \\ &= \frac{(1-p)(k-1)}{k} = 1 - p + \frac{-(1-p)}{k} \\ &= a + \frac{b}{k}, \quad \text{com } a = 1 - p \text{ e } b = p - 1. \end{aligned}$$

A f.g.p. de $X \sim Log(p)$ é

$$\begin{aligned} P_X(z) &= E(z^X) = \sum_{k=0}^{+\infty} z^k p_k = \sum_{k=1}^{+\infty} z^k \left(-\frac{(1-p)^k}{k \log(p)} \right) \\ &= \frac{-1}{\log(p)} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{[z(1-p)]^k}{k} = \frac{-1}{\log(p)} \{-\log[-(1-p)z + 1]\} \\ &= \frac{\log[-(1-p)z + 1]}{\log(p)}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

com $p \in (0, 1)$ e $|z| < \frac{1}{1-p}$.

O valor esperado e a variância de X podem ser obtidos a partir da f.g.p. definida em (4.14) da seguinte forma

$$\begin{aligned} E(X) &= P'_X(1) = -\frac{1-p}{p \log p}, \\ E[X(X-1)] &= P''_X(1) = -\frac{(1-p)^2}{p^2 \log p} \end{aligned}$$

e, conseqüentemente,

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= E[X(X-1)] + E(X) - [E(X)]^2 \\ &= -\frac{(1-p)^2}{p^2 \log p} - \frac{1-p}{p \log p} - \left(-\frac{1-p}{p \log p}\right)^2 \\ &= -\frac{1-p}{p^2} \frac{1-p + \log p}{\log^2 p}. \end{aligned}$$

Na Figura 4.4 observamos que o índice de dispersão, quando $X \sim \text{Log}(p)$, dependendo do valor de $p \in (0, 1)$, pode tomar valores inferiores a 1 (se $p > \frac{1}{e}$), valores superiores a 1 (se $p < \frac{1}{e}$) ou ser igual a 1 (se $p = \frac{1}{e}$), *i.e.*, se $p > \frac{1}{e}$, $\text{Var}(X) < E(X)$, se $p < \frac{1}{e}$, $\text{Var}(X) > E(X)$ e se $p = \frac{1}{e}$, $\text{Var}(X) = E(X)$.

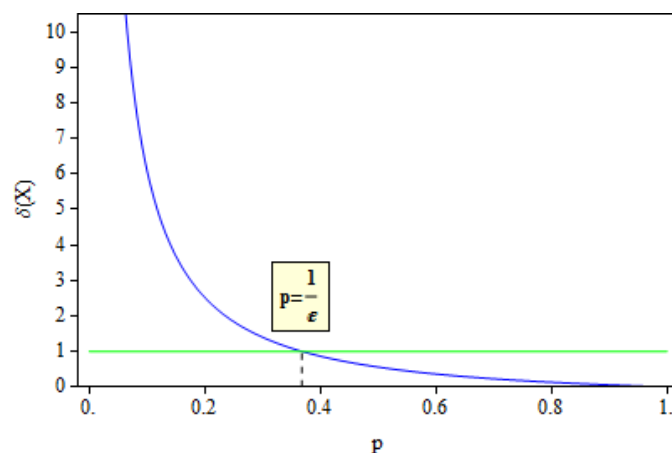


Figura 4.4: Variação de $\delta(X)$ em função do valor de p , quando $X \sim \text{Log}(p)$.

Willmot demonstrou em 1988 (*cf.* [54]) que as distribuições referidas nesta subsecção são as únicas que fazem parte da classe de distribuições $(a, b, 1)$.

A Tabela 4.2 apresenta as distribuições da classe $(a, b, 1)$. Como habitualmente, consideramos $\lambda > 0$, $0 < p < 1$, $m \in \mathbb{N}_1$ e $r > -1$, $r \neq 0$. Recorde-se que

$BNTG(r, p) \equiv BinomialNegativaT(r, p)$ quando $r > 0$ e se $X \sim BNTG(1, p)$, então $X = Y + 1$, com $Y \sim Geométrica(p)$.

Tabela 4.2: Membros da classe $(a, b, 1)$.

Distribuição	a	b	p_0
Binomial(m, p)			$(1 - p)^m$
BinomialM(m, p) ¹	$\frac{p}{p-1}$	$\frac{p(m+1)}{1-p}$	$\in (0, 1)$
BinomialT(m, p) ²			0
Poisson(λ)			$e^{-\lambda}$
PoissonM(λ) ¹	0	λ	$\in (0, 1)$
PoissonT(λ) ²			0
Binomial Negativa(r, p)			p^r
BNTGM(r, p) ¹	$1 - p$	$(1 - p)(r - 1)$	$\in (0, 1)$
BNTG(r, p)			0
Log(p)			0
LogM(p) ¹	$1 - p$	$p - 1$	$\in (0, 1)$

¹M=Modificada em zero.

²T=Truncada em zero.

4.3 A classe de distribuições (a, b, m) , $m \in \mathbb{N}$

As classes de distribuições $(a, b, 0)$ e $(a, b, 1)$ podem ser incluídas numa família mais geral que será designada por classe (a, b, m) , $m \in \mathbb{N}$. Dados $a, b \in \mathbb{R}$ e $m \in \mathbb{N}$, dizemos que a distribuição de uma v.a. não degenerada X faz parte da classe de distribuições (a, b, m) se, para todos os valores inteiros $k \geq m + 1$,

$$p_k = p_{k-1} \left(a + \frac{b}{k} \right) \quad (4.15)$$

onde $p_k = \Pr(X = k)$.

Hess *et al.* [31] exploraram o caso particular das distribuições de v.a.'s X desta classe tais que $\Pr(X = k) = 0$ se $k \leq m$. Neste caso, Hess *et al.* mostraram que os membros da classe (a, b, m) , $m \geq 2$, resultam da truncatura ao conjunto $\{m + 1, m + 2, \dots\}$ das distribuições de $(a, b, 1)$, da distribuição Binomial

Negativa Estendida e da distribuição Logarítmica Estendida, sendo estas duas últimas generalizações das distribuições *BNTG* e *Log*, respetivamente. Seguidamente, definimos as distribuições *BNE* e *LogE*, estudamos as suas propriedades e apresentamos alguns exemplos.

Definição 4.5 Dizemos que X tem distribuição binomial negativa estendida (*BNE*), com parâmetros $l \in \mathbb{N}_1$, $r \in (-l, -l + 1)$ e $p \in (0, 1)$, se

$$\Pr(X = k) = \frac{\binom{r+k-1}{k} (1-p)^k}{p^{-r} - \sum_{j=0}^{l-1} \binom{r+j-1}{j} (1-p)^j}, \quad k = l, l+1, \dots, \quad (4.16)$$

com $\Pr(X = k) = 0$ se $k = 0, \dots, l-1$.

Observação 4.6 Quando $l = 1$, a distribuição *BNE* $(1, r, p)$ coincide com a distribuição *BNTG* (r, p) , i.e., $BNE(1, r, p) \equiv BNTG(r, p)$ quando $-1 < r < 0$ e $p \in (0, 1)$.

Na Figura 4.5 encontra-se representada a f.m.p. de $X \sim BNE(5, -4.01, 0.1)$.

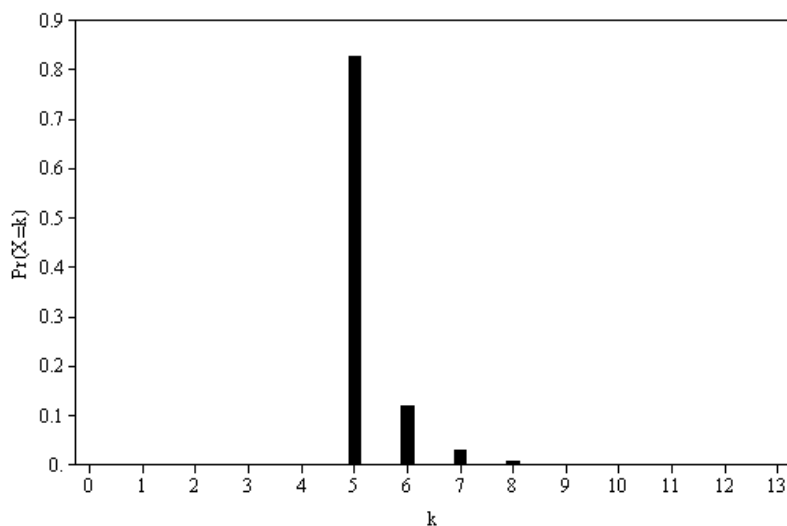


Figura 4.5: Exemplo de uma f.m.p. de uma v.a. X com distribuição *BNE* (l, r, p) (neste caso, $l = 5$, $r = -4.01$ e $p = 0.1$).

Para verificar que a distribuição $BNE(l, r, p)$ é um membro de (a, b, m) , com

$m \geq l$, basta notar que, para $k \geq m + 1$, inteiro,

$$\begin{aligned}
\frac{p_k}{p_{k-1}} &= \frac{\binom{r+k-1}{k} (1-p)^k}{p^{-r} - \sum_{j=0}^{l-1} \binom{r+j-1}{j} (1-p)^j} \times \frac{p^{-r} - \sum_{j=0}^{l-1} \binom{r+j-1}{j} (1-p)^j}{\binom{r+k-2}{k-1} (1-p)^{k-1}} \\
&= \frac{\frac{\Gamma(r+k)}{k(k-1)!\Gamma(r)}}{\frac{\Gamma(r+k-1)}{(k-1)!\Gamma(r)}} \times (1-p) = \frac{(r+k-1)\Gamma(r+k-1)}{k\Gamma(r+k-1)} \times (1-p) \\
&= \frac{r+k-1}{k} \times (1-p) = 1-p + \frac{(r-1)(1-p)}{k} \\
&= a + \frac{b}{k},
\end{aligned}$$

com $a = 1-p$ e $b = (r-1)(1-p)$.

Por comodidade de escrita, consideremos $D_{r,l,p} = \left[p^{-r} - \sum_{j=0}^{l-1} \binom{r+j-1}{j} (1-p)^j \right]^{-1}$.

A f.g.p. de $X \sim BNE(l, r, p)$ é

$$\begin{aligned}
P_X(z) &= E(z^X) = \sum_{k=0}^{+\infty} z^k p_k = \sum_{k=l}^{+\infty} z^k \frac{\binom{r+k-1}{k} (1-p)^k}{p^{-r} - \sum_{j=0}^{l-1} \binom{r+j-1}{j} (1-p)^j} \\
&= D_{r,l,p} \sum_{k=l}^{+\infty} [z(1-p)]^k \binom{r+k-1}{k} \\
&= D_{r,l,p} \left([1-z(1-p)]^{-r} - \sum_{k=0}^{l-1} [z(1-p)]^k \binom{r+k-1}{k} \right) \\
&= \frac{D_{r,l,p}}{D_{r,l,1-z(1-p)}}, \quad 0 < z < \frac{1}{1-p}, \tag{4.17}
\end{aligned}$$

pois, de (4.16) sabemos que $\sum_{k=l}^{+\infty} \frac{\binom{r+k-1}{k} (1-p)^k}{p^{-r} - \sum_{j=0}^{l-1} \binom{r+j-1}{j} (1-p)^j} = 1$, se $l \in \mathbb{N}_1$, $r \in (-l, -l+1)$

e $p \in (0, 1)$.

O valor esperado e a variância de X podem ser obtidos a partir da f.g.p.

definida em (4.17) da seguinte forma

$$\begin{aligned}
 E(X) &= P'_X(1) = -D_{r,l,p} \left(\frac{-r + rp}{p^{r+1}} + \sum_{k=0}^{l-1} k \binom{k+r-1}{k} (1-p)^k \right) \\
 E[X(X-1)] &= P''_X(1) = \frac{1}{p^{r+2}} D_{r,l,p} \left(r - p^{r+2} \sum_{k=0}^{l-1} k(k-1) \binom{k+r-1}{k} \times \right. \\
 &\quad \left. \times (1-p)^k + pr(-2r+p+pr-2) + r^2 \right)
 \end{aligned}$$

e, conseqüentemente,

$$\begin{aligned}
 Var(X) &= E[X(X-1)] + E(X) - [E(X)]^2 \\
 &= \frac{1}{p^{r+2}} D_{r,l,p} \left(r - p^{r+2} \sum_{k=0}^{l-1} k(k-1) \binom{k+r-1}{k} (1-p)^k + \right. \\
 &\quad \left. + pr(-2r+p+pr-2) + r^2 \right) - \\
 &\quad - D_{r,l,p} \left(\frac{-r + rp}{p^{r+1}} + \sum_{k=0}^{l-1} k \binom{k+r-1}{k} (1-p)^k \right) - \\
 &\quad - \left[-D_{r,l,p} \left(\frac{-r + rp}{p^{r+1}} + \sum_{k=0}^{l-1} k \binom{k+r-1}{k} (1-p)^k \right) \right]^2.
 \end{aligned}$$

As Figuras 4.6 e 4.7 mostram, respectivamente, a variação de $E(X)$ e a variação de $Var(X)$, quando $X \sim BNE(l, -l + 0.5, p)$ em função de $p \in (0, 1)$, para $l = 1$ e $l = 11$.

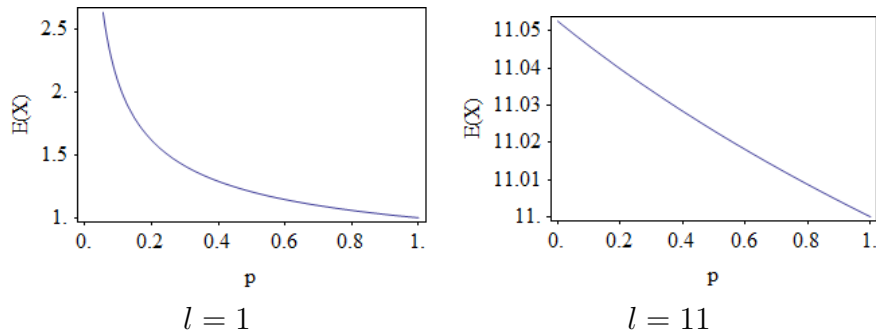


Figura 4.6: Variação de $E(X)$ em função do valor de p , quando $X \sim BNE(l, -l + 0.5, p)$, para $l = 1$ e $l = 11$.

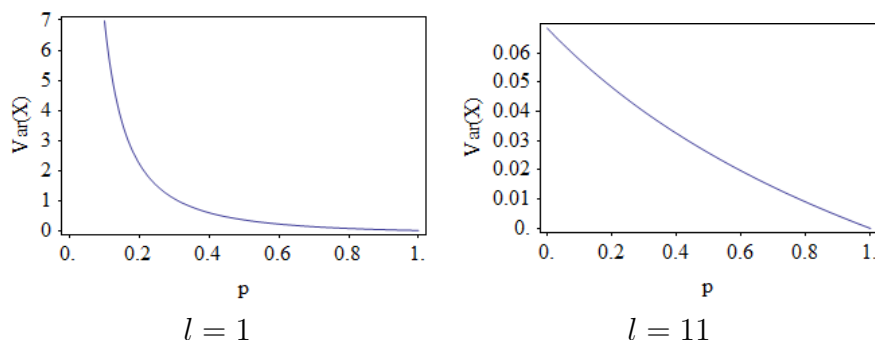


Figura 4.7: Variação de $Var(X)$ em função do valor de p , quando $X \sim BNE(l, -l + 0.5, p)$, para $l = 1$ e $l = 11$.

Finalmente, a Figura 4.8 mostra o índice de dispersão $\delta(X)$, quando $X \sim BNE(l, -l + 0.5, p)$, em função de $p \in (0, 1)$, para $l = 1$ e $l = 11$. Note-se que a família $BNE(l, r, p)$ inclui uma distribuição ($BNE(1, r, p) \equiv BNTG(r, p)$, quando $-1 < r < 0$) que possui variância e valor esperado que, dependendo do valor de p , podem ter um quociente superior, igual ou inferior a 1 e distribuições, por exemplo, $BNE(11, -10.5, p)$, onde este quociente é sempre inferior a 1.

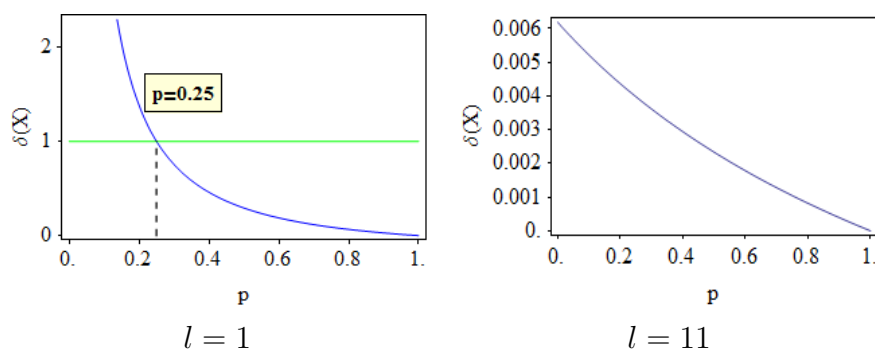


Figura 4.8: Variação de $\delta(X)$ em função do valor de p , quando $X \sim BNE(l, -l + 0.5, p)$, para $l = 1$ e $l = 11$.

Definição 4.7 Dizemos que X tem distribuição Logarítmica Estendida (LogE), com parâmetros $l = 1, 2, 3, \dots$ e $p \in (0, 1)$, se

$$\Pr(X = k) = \frac{\binom{k}{l}^{-1} (1-p)^k}{\sum_{j=l}^{+\infty} \binom{j}{l}^{-1} (1-p)^j}, \quad k \geq l, \text{ inteiro}, \quad (4.18)$$

e $\Pr(X = k) = 0$, se $k = 0, \dots, l - 1$.

Observação 4.8 Ao contrário de Hess (cf. [31]), que considera para o parâmetro l um inteiro maior do que 1, é incluído aqui o caso $l = 1$, já que, neste caso, a expressão (4.18) continua bem definida e coincide com a f.m.p. de uma distribuição logarítmica, i.e., $\text{LogE}(1, p) \equiv \text{Log}(p)$, fazendo da distribuição LogE um caso particular da distribuição LogE .

Na Figura 4.9 encontra-se representada a f.m.p. de $X \sim \text{LogE}(4, 0.01)$.

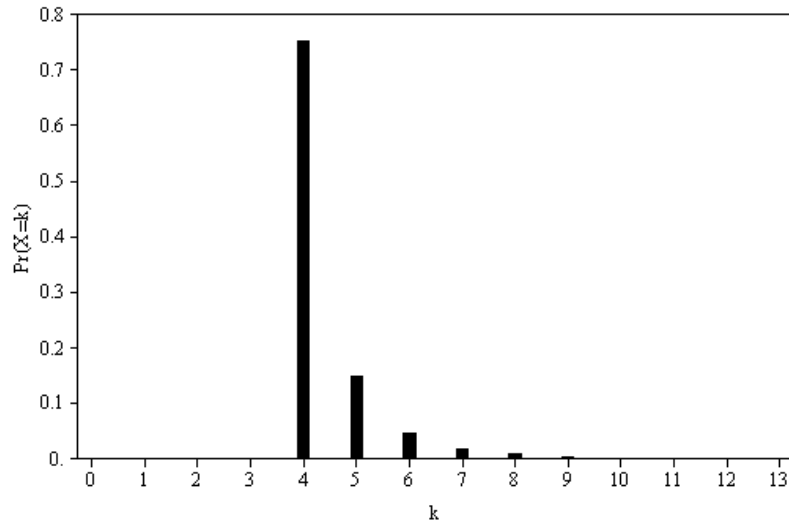


Figura 4.9: Exemplo de uma f.m.p. de uma v.a. X com distribuição $\text{LogE}(l, p)$ (neste caso, $l = 4$ e $p = 0.01$).

Para verificar que a distribuição $\text{LogE}(l, p)$ é um membro de (a, b, m) , com $m \geq l$, basta notar que, para $k \geq m + 1$, inteiro,

$$\begin{aligned}
 \frac{p_k}{p_{k-1}} &= \frac{\binom{k}{l}^{-1} (1-p)^k}{\sum_{j=l}^{+\infty} \binom{j}{l}^{-1} (1-p)^j} \times \frac{\sum_{j=l}^{+\infty} \binom{j}{l}^{-1} (1-p)^j}{\binom{k-1}{l}^{-1} (1-p)^{k-1}} \\
 &= \frac{\frac{(k-1)!}{l!(k-l-1)!}}{\frac{k!}{l!(k-l)!}} \times (1-p) = \frac{\frac{(k-1)!}{(k-l-1)!}}{\frac{k(k-1)!}{(k-l)(k-l-1)!}} \times (1-p) \\
 &= \frac{(k-l)}{k} \times (1-p) = 1 - p - \frac{l(1-p)}{k} \\
 &= a + \frac{b}{k},
 \end{aligned}$$

com $a = 1 - p$ e $b = l(p - 1)$.

A f.g.p. de $X \sim \text{LogE}(l, p)$ é

$$\begin{aligned} P_X(z) &= E(z^X) = \sum_{k=0}^{+\infty} z^k p_k = \sum_{k=l}^{+\infty} z^k \frac{\binom{k}{l}^{-1} (1-p)^k}{\sum_{j=l}^{+\infty} \binom{j}{l}^{-1} (1-p)^j} \\ &= \left[\sum_{j=l}^{+\infty} \binom{j}{l}^{-1} (1-p)^j \right]^{-1} \sum_{k=l}^{+\infty} [z(1-p)]^k \binom{k}{l}^{-1} \end{aligned} \quad (4.19)$$

com $l = 2, 3, \dots$ e $p \in (0, 1)$.

O valor esperado e a variância de X podem ser obtidos a partir da f.g.p. definida em (4.19) da seguinte forma

$$\begin{aligned} E(X) &= P'_X(1) = \left[\sum_{j=l}^{+\infty} \frac{1}{\binom{j}{l}} (1-p)^j \right]^{-1} \sum_{k=l}^{+\infty} \frac{k}{\binom{k}{l}} (1-p)^k \\ E[X(X-1)] &= P''_X(1) = \left[\sum_{j=l}^{+\infty} \frac{1}{\binom{j}{l}} (1-p)^j \right]^{-1} \sum_{k=l}^{+\infty} \frac{k(k-1)}{\binom{k}{l}} (1-p)^k \end{aligned}$$

e, conseqüentemente,

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= E[X(X-1)] + E(X) - [E(X)]^2 \\ &= \left[\sum_{j=l}^{+\infty} \frac{1}{\binom{j}{l}} (1-p)^j \right]^{-1} \sum_{k=l}^{+\infty} \frac{k^2}{\binom{k}{l}} (1-p)^k - \\ &\quad - \left[\sum_{j=l}^{+\infty} \frac{1}{\binom{j}{l}} (1-p)^j \right]^{-2} \left(\sum_{k=l}^{+\infty} \frac{k}{\binom{k}{l}} (1-p)^k \right)^2. \end{aligned}$$

As Figuras 4.10 e 4.11 mostram, respectivamente, a variação de $E(X)$ e a variação de $\text{Var}(X)$, quando $X \sim \text{LogE}(l, p)$ em função de $p \in (0, 1)$, para $l = 2$ e $l = 12$.

Finalmente, a Figura 4.12 mostra o índice de dispersão $\delta(X)$, quando $X \sim \text{LogE}(l, p)$, em função de $p \in (0, 1)$, para, novamente, $l = 2$ e $l = 12$. A família $\text{LogE}(l, p)$ inclui duas distribuições ($\text{LogE}(1, p) \equiv \text{Log}(p)$ e $\text{LogE}(2, p)$) que possuem variâncias e valores esperados que, dependendo do valor de p , têm um quociente superior, igual ou inferior a 1 e distribuições, por exemplo, $\text{Log}(12, p)$, em que este quociente é sempre inferior a 1.

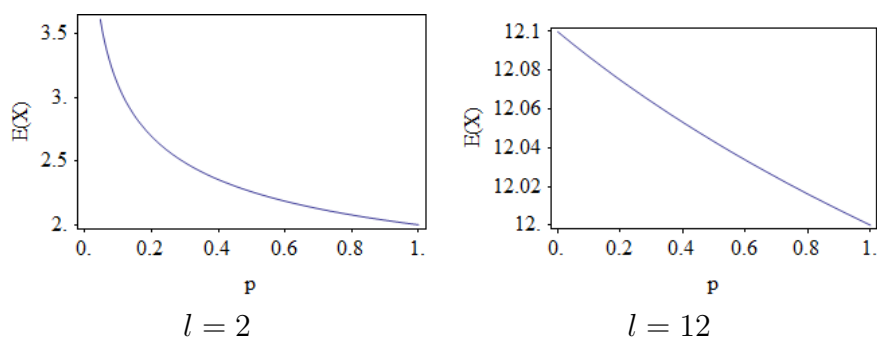


Figura 4.10: Variação de $E(X)$ em função do valor de p , quando $X \sim \text{LogE}(l, p)$, para $l = 2$ e $l = 12$.

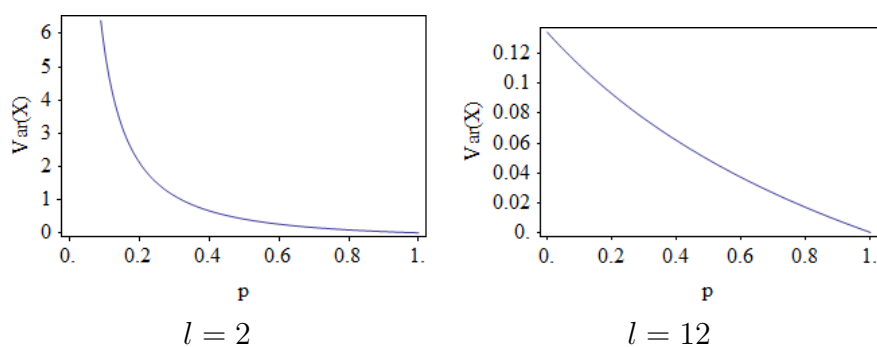


Figura 4.11: Variação de $\text{Var}(X)$ em função do valor de p , quando $X \sim \text{LogE}(l, p)$, para $l = 2$ e $l = 12$.

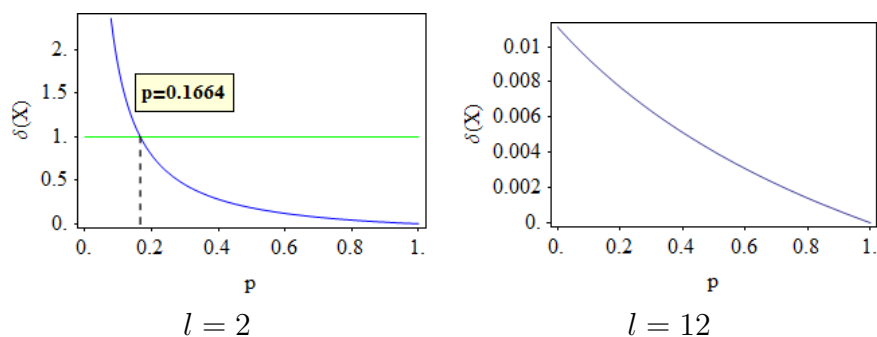


Figura 4.12: Variação de $\delta(X)$ em função do valor de p , quando $X \sim \text{LogE}(l, p)$, para $l = 2$ e $l = 12$.

A classe de distribuições (a, b, m) , $m \in \mathbb{N}_1$, engloba, naturalmente, todas as distribuições apresentadas nas Tabelas 4.1 e 4.2, as distribuições Binomial Negativa Estendida e Logarítmica Estendida e a truncatura e modificação destas duas últimas, que apresentamos na Tabela 4.3. Como habitualmente, consideramos $l \in \mathbb{N}_1$, $r \in (-l, -l + 1)$ e $p \in (0, 1)$.

Tabela 4.3: Membros da classe (a, b, m) não pertencentes a $(a, b, 0)$ ($m \geq l \geq 1$).

Distribuição	a	b	p_0, p_1, \dots, p_{m-1}
BNE(l, r, p)			$k = 0, \dots, l - 1, p_k = 0$ $k = l, \dots, m - 1, cf. (4.16)$
BNE ¹ (l, r, p)	$1 - p$	$(r - 1)(1 - p)$	<i>Livres</i> ³
BNET ² (l, r, p)			0
LogE(l, p)			$k = 0, \dots, l - 1, p_k = 0$ $k = l, \dots, m - 1, cf. (4.18)$
LogEM ¹ (l, p)	$1 - p$	$-l(1 - p)$	<i>Livres</i> ³
LogET ² (l, p)			0

¹M=Modificada em $\{0, 1, \dots, m - 1\}$.

²T=Truncada em $\{l, l + 1, \dots, m - 1\}$.

³ $0 < \sum_{k=0}^{m-1} p_k < 1$.

As distribuições da classe (a, b, m) , $m \in \mathbb{N}$, são representadas na Figura 4.13 em função dos valores de a e b , tendo-se destacado os casos particulares das distribuições binomial negativa e geométrica. Observa-se que, com a exceção da distribuição *Binomial* (m, p), o parâmetro a é um valor do intervalo $[0, 1)$.

4.4 Outras extensões

Além das extensões da recursão de Panjer apresentadas nas secções anteriores, existem outras três extensões que merecem ser mencionadas e apresentadas pelo detalhe com que foram tratadas pelos seus autores.

Panjer e Willmot em 1982 (*cf.* [44]) consideraram a classe das distribuições

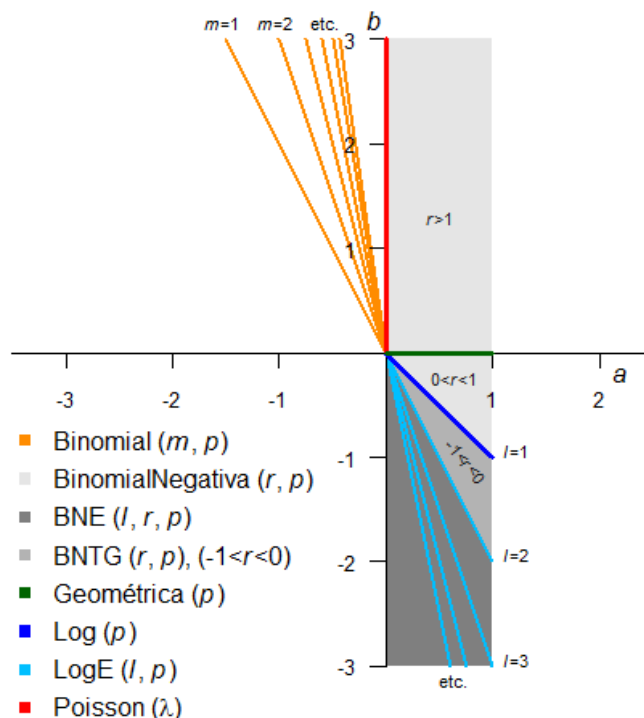


Figura 4.13: Representação da classe de distribuições (a, b, j) , j natural, no plano (a, b) (considerando os parâmetros utilizados nas Tabelas 4.1, 4.2 e 4.3).

com probabilidades consecutivas que podem ser escritas como o quociente de dois polinômios:

$$p_k = \frac{\sum_{i=0}^n a_i k^i}{\sum_{i=0}^n b_i k^i} p_{k-1}, \quad (4.20)$$

com $k = 1, 2, \dots$. Quando $n = 1$, $a_0 = b$, $a_1 = a$, $b_0 = 0$ e $b_1 = 1$, a expressão dada em (4.20) define a família de Panjer (cf. (4.1)).

Schröter em 1990 (cf. [49]) definiu uma família através da seguinte recursão de segunda ordem para a f.m.p.

$$p_k = \left(a + \frac{b}{k} \right) p_{k-1} + \frac{c}{k} p_{k-2}, \quad (4.21)$$

com $k = 1, 2, \dots$ e $p_{k-1} = 0$ para algumas constantes $a < 1$, b e c . Note-se que quando $c = 0$ em (4.21), obtemos a recursão dada em (4.1).

Sundt em 1992 (cf. [51]) estudou uma extensão da família de distribuições

de Panjer cujas f.m.p. satisfazem a seguinte recursão

$$p_k = \sum_{i=1}^n \left(a_i + \frac{b_i}{k} \right) p_{k-i}, \quad (4.22)$$

com $k = 1, 2, \dots$ e $p_k = 0$ se $k < 0$, que é também uma extensão da família de distribuições definida por Schröter (*cf.* [49]). Note-se que quando $n = 1$, a expressão dada em (4.22) define a família de Panjer (*cf.* (4.1)) e que quando $n = 2$ e $a_2 = 0$, a expressão dada por (4.22) reduz-se à expressão (4.21).

Capítulo 5

A modelação do risco coletivo

Uma empresa de seguros ou seguradora exerce uma atividade económica que lida com o risco, *i.e.*, a “incerteza associada a um acontecimento futuro, seja quanto à sua realização, ao momento em que ocorre e aos danos dele decorrentes” (*cf.* [3]).

Assim, ao celebrar contratos de seguro, uma seguradora tem a necessidade de combinar os riscos individuais de cada contrato de seguro num risco agregado que deve tornar viável a sua própria existência, e é com base neste risco coletivo que a seguradora define os valores dos prémios dos seguros e das indemnizações que devem ser atrativos do ponto de vista dos seus clientes.

Neste capítulo é apresentado um modelo para os pagamentos associados a um sistema de seguros que designamos por modelo do risco coletivo (*cf.* Klugman *et al.* [35]). Este modelo assenta em v.a.'s que contabilizam o número de indemnizações e o montante a pagar por cada indemnização.

O modelo do risco coletivo define as perdas agregadas ocorridas num período como uma soma, S , das N indemnizações ocorridas nesse período, *i.e.*,

Definição 5.1 *Sejam N o número de indemnizações ocorridas num dado período e X_i , $i = 1, \dots, N$, o valor da i -ésima indemnização, tais que*

1. *Condicional a $N = n$, X_1, X_2, \dots, X_n são v.a.'s independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.);*
2. *A distribuição de N é independente da distribuição de X_1, X_2, \dots*

O modelo do risco coletivo S é dado por

$$S = X_1 + \dots + X_N = \sum_{i=1}^N X_i, \quad (5.1)$$

Quando $N = 0$, assume-se que $S = 0$.

Sendo N independente das variáveis X_1, X_2, \dots , a distribuição do modelo S , também designado por modelo composto das indemnizações agregadas, definido em (5.1), pode ser determinada a partir das distribuições de N e das variáveis X_1, X_2, \dots . Por comodidade, consideraremos nas próximas secções uma v.a. X tal que $X \stackrel{d}{=} X_i, \forall i \in \mathbb{N}_1$.

5.1 O modelo composto das indemnizações agregadas

Partindo do pressuposto de que as distribuições de N e de X são conhecidas, o foco principal reside sobre a distribuição de S .

A v.a. S (cf. (5.1)) tem função de distribuição, para $x \geq 0$, dada por, considerando o Teorema da Probabilidade Total (T.P.T.),

$$\begin{aligned}
 F_S(x) &= \Pr(S \leq x) = \Pr\left(\sum_{i=1}^N X_i \leq x\right) \\
 &\stackrel{\text{T.P.T.}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \Pr\left(\sum_{i=1}^N X_i \leq x | N = n\right) \Pr(N = n) \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \Pr\left(\sum_{i=1}^n X_i \leq x\right) p_n \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} F_X^{*n}(x) p_n, \tag{5.2}
 \end{aligned}$$

sendo $F_X^{*n}(x) = \Pr\left(\sum_{i=1}^n X_i \leq x\right)$ a função de distribuição de $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ e $p_n = \Pr(N = n)$. Para $x < 0$, $F_S(x) = 0$.

Na expressão (5.2), F_X^{*n} representa a n -ésima convolução da função de distribuição de X consigo própria (cf., e.g., [18]). Esta pode ser obtida de forma recursiva considerando que

$$F_X^{*(0)}(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ 1 & x \geq 0, \end{cases} \tag{5.3}$$

que é a função de distribuição de uma v.a. degenerada em zero e, no caso de X ter f.d.p. f_X , com suporte em \mathbb{R}_0^+ ,

$$F_X^{*n}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_X^{*(n-1)}(x-y) f_X(y) dy, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.4)$$

A expressão (5.4), para $n = 1$, é

$$\begin{aligned} F_X^{*(1)}(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} F_X^{*(0)}(x-y) f_X(y) dy \stackrel{(5.3)}{=} \int_{y>x} 0 \times f_X(y) dy + \int_{y\leq x} 1 \times f_X(y) dy \\ &= \int_x^{+\infty} 0 \times dy + \int_{-\infty}^x f_X(y) dy = F_X(x) \end{aligned}$$

e a f.d.p. de $S_1 = X_1$ é $f_X^{*(1)} = f_X$.

A f.d.p. da v.a. $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ é

$$f_X^{*n}(x) = \int_0^x f_X^{*(n-1)}(x-y) f_X(y) dy, \quad n = 2, 3, \dots,$$

e, conseqüentemente, a f.d.p. da v.a. S é

$$f_S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} p_n f_X^{*n}(x).$$

Se X for uma v.a. discreta com probabilidades não nulas nos números inteiros não negativos, então

$$\begin{aligned} F_X^{*n}(x) &= \Pr(S_n \leq x) = \sum_{i=0}^{[x]} F_X^{*(n-1)}(x-i) \Pr(X=i) \\ &= \sum_{i=0}^{[x]} \Pr(S_{n-1} \leq x-i) \Pr(X=i), \end{aligned} \quad (5.5)$$

com $x \geq 0$, $n = 1, 2, \dots$ e $[x]$ denotando a parte inteira de x .

Recorrendo novamente ao T.P.T., deduzimos que a f.m.p. de S_n é, para $k \in \mathbb{N}$,

$$\Pr(S_n = k) = \sum_{i=0}^k \Pr(S_{n-1} = k-i) \Pr(X=i).$$

A f.g.p. da distribuição de S é dada por

$$\begin{aligned}
P_S(z) &= E(z^S) = E\left(z^{\sum_{i=1}^N X_i}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} E\left(z^{\sum_{i=1}^N X_i} \middle| N = n\right) \Pr(N = n) \\
&= E(z^0) \Pr(N = 0) + \sum_{n=1}^{+\infty} E\left(\prod_{j=1}^n z^{X_j}\right) \Pr(N = n) \\
&= \Pr(N = 0) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\prod_{j=1}^n E(z^{X_j}) \right] \Pr(N = n) \\
&= \Pr(N = 0) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\prod_{j=1}^n P_{X_j}(z) \right] \Pr(N = n) \\
&= \Pr(N = 0) + \sum_{n=1}^{+\infty} P_X^n(z) \Pr(N = n) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} P_X^n(z) \Pr(N = n) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} P_X^n(z) p_n \\
&= E_N [P_X^N(z)],
\end{aligned} \tag{5.6}$$

de onde se conclui que

$$P_S(z) = P_N [P_X(z)]. \tag{5.7}$$

Da expressão (5.6) obtida para a f.g.p. de S , é possível deduzir que

$$P'_S(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n P_X^{n-1}(z) P'_X(z) p_n = P'_N(P_X(z)) P'_X(z), \tag{5.8}$$

donde também resulta que

$$E(S) \stackrel{(2.6)}{=} P'_S(1) = P'_N(P_X(1)) P'_X(1) = P'_N(1) P'_X(1) = E(N) E(X),$$

observando-se assim que o valor esperado para o total das indemnizações, S , é dado pelo produto do valor esperado de indemnizações, $E(N)$, pelo valor esperado da indemnização, $E(X)$. Vamos agora determinar a variância de S recordando que

$$\text{Var}(S) \stackrel{(2.8)}{=} P''_S(1) + P'_S(1) - [P'_S(1)]^2.$$

Como

$$\begin{aligned}
P_S''(1) &= \frac{d}{dz} P_S'(z)|_{z=1} \\
&= \frac{d}{dz} \left(P_N' [P_X(z)] P_X'(z) \right) \Big|_{z=1} \\
&= \left(P_N'' [P_X(z)] P_X'(z) P_X'(z) + P_N' [P_X(z)] P_X''(z) \right) \Big|_{z=1} \\
&= P_N'' [P_X(1)] [P_X'(1)]^2 + P_N' [P_X(1)] P_X''(1) \\
&= P_N''(1) [P_X'(1)]^2 + P_N'(1) P_X''(1) \\
&\stackrel{(2.6)}{=} E [N(N-1)] E^2(X) + E(N) E [X(X-1)] \\
&\stackrel{(2.7)}{=} E(N^2) E^2(X) - E(N) E^2(X) + E(N) E(X^2) - \\
&\quad - E(N) E(X),
\end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned}
Var(S) &= E(N^2) E^2(X) - E(N) E^2(X) + E(N) E(X^2) - E(N) E(X) + \\
&\quad + E(N) E(X) - [E(N) E(X)]^2 \\
&= E(N^2) E^2(X) - E^2(N) E^2(X) + E(N) E(X^2) - E(N) E^2(X) \\
&= E^2(X) [E(N^2) - E^2(N)] + E(N) [E(X^2) - E^2(X)] \\
&= E^2(X) Var(N) + E(N) Var(X),
\end{aligned}$$

observando-se assim que a variância de S depende das variâncias de N e de X , ponderadas por funções que dependem do valor esperado das variáveis N e X .

5.2 Método recursivo na construção da distribuição das indemnizações agregadas

Encontrar a abordagem ideal capaz de determinar a função de distribuição das indemnizações agregadas, S , definida em (5.2), não é um procedimento simples e imediato. Klugman *et al.* (cf. [35]) referem três abordagens possíveis para esta questão: a utilização de uma distribuição aproximada, o cálculo direto e o método recursivo, tendo apresentado as vantagens e desvantagens de cada abordagem, e evidenciando o método recursivo uma vez que este reduz o número de cálculos necessários para a determinação da distribuição das indemnizações agregadas, sendo por isso mais célere no processo de determinação da distribuição

e, conseqüentemente, poupando tempo de cálculo. A principal desvantagem que esta abordagem apresenta é a sua limitação em termos de distribuições que utiliza. Nas secções seguintes será apresentado o método recursivo para o caso das classes apresentadas no capítulo anterior, exceto as apresentadas na última secção do mesmo.

5.2.1 Quando o valor da indemnização é uma variável aleatória discreta

Consideremos o modelo do risco coletivo (5.1):

$$S = \sum_{i=1}^N X_i,$$

onde, recorde-se, $X_i \stackrel{d}{=} X$, $\forall i \in \mathbb{N}_1$, e N, X_1, X_2, \dots são v.a.'s independentes.

Teorema 5.2 *Suponhamos que X é uma v.a. discreta com suporte S_X e seja $\omega = \sup S_X$. Se a distribuição de N for um membro da classe $(a, b, 0)$, temos*

$$\Pr(S = k) = \frac{\sum_{i=1}^{\min(k, \omega)} \left(a + \frac{bi}{k}\right) \Pr(X = i) \Pr(S = k - i)}{1 - a \Pr(X = 0)}, \quad (5.9)$$

com $\Pr(S = 0) = P_N[\Pr(X = 0)]$ e $k \in \mathbb{N}_1$.

Demonstração: Consideremos uma v.a. N cuja distribuição pertence à classe $(a, b, 0)$. Da expressão definida em (4.2) sabemos que, tomando $p_n = \Pr(N = n)$,

$$\frac{p_n}{p_{n-1}} = a + \frac{b}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

logo

$$\begin{aligned} np_n &= np_{n-1} \left(a + \frac{b}{n}\right) \\ &= anp_{n-1} - ap_{n-1} + ap_{n-1} + bp_{n-1} \\ &= a(n-1)p_{n-1} + (a+b)p_{n-1}. \end{aligned}$$

Multiplicando ambos os lados da igualdade anterior por $P_X^{n-1}(z) P'_X(z)$ e somando todos os termos, obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} n p_n P_X^{n-1}(z) P'_X(z) &= a \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1) p_{n-1} P_X^{n-1}(z) P'_X(z) + \\ &+ (a+b) \sum_{n=1}^{+\infty} p_{n-1} P_X^{n-1}(z) P'_X(z) \\ &= a \sum_{n=0}^{+\infty} n p_n P_X^n(z) P'_X(z) + \\ &+ (a+b) \sum_{n=0}^{+\infty} p_n P_X^n(z) P'_X(z), \end{aligned}$$

logo, tendo em conta (5.6) e (5.8),

$$P'_S(z) = a P'_S(z) P_X(z) + (a+b) P_S(z) P'_X(z). \quad (5.10)$$

Cada membro da equação (5.10) pode ser expandido em potências de z . De

$$P_S(z) = E(z^S) = \sum_{k=0}^{+\infty} z^k \Pr(S = k)$$

resulta que

$$P'_S(z) = E(Sz^{S-1}) = \sum_{k=1}^{+\infty} k z^{k-1} \Pr(S = k). \quad (5.11)$$

Assim, relativamente às parcelas do lado direito de (5.10) temos

(i.)

$$\begin{aligned} P'_S(z) P_X(z) &= \sum_{i=1}^{+\infty} i z^{i-1} \Pr(S = i) \times E(z^X) \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} i z^{i-1} \Pr(S = i) \times \sum_{j=0}^{+\infty} z^j \Pr(X = j). \end{aligned}$$

Multiplicando as séries $\sum_{i=1}^{+\infty} i z^{i-1} \Pr(S = i) = \sum_{i=0}^{+\infty} z^i (i+1) \Pr(S = i+1)$ e

$\sum_{j=0}^{+\infty} z^j \Pr(X = j)$ vem que

$$\begin{aligned}
P'_S(z) P_X(z) &= \sum_{k=0}^{+\infty} z^k \sum_{i=0}^k (k - i + 1) \Pr(X = i) \Pr(S = k - i + 1) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} z^{k-1} \sum_{i=0}^{k-1} (k - 1 - i + 1) \Pr(X = i) \Pr(S = k - 1 - i + 1) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} z^{k-1} \sum_{i=0}^k (k - i) \Pr(X = i) \Pr(S = k - i). \tag{5.12}
\end{aligned}$$

(ii.)

$$\begin{aligned}
P_S(z) P'_X(z) &= \sum_{k=0}^{+\infty} z^k \Pr(S = k) \frac{d}{dz} \sum_{i=0}^{+\infty} z^i \Pr(X = i) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} z^k \Pr(S = k) \sum_{i=1}^{+\infty} i z^{i-1} \Pr(X = i) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} z^k \Pr(S = k) \sum_{i=0}^{+\infty} z^i (i + 1) \Pr(X = i + 1)
\end{aligned}$$

Determinando o produto das duas séries temos

$$\begin{aligned}
P_S(z) P'_X(z) &= \sum_{j=0}^{+\infty} z^j \sum_{i=0}^j (i + 1) \Pr(S = j - i) \Pr(X = i + 1) \\
&= \sum_{j=1}^{+\infty} z^{j-1} \sum_{i=0}^{j-1} (i + 1) \Pr(S = j - 1 - i) \Pr(X = i + 1) \\
&= \sum_{j=1}^{+\infty} z^{j-1} \sum_{i=0}^j i \Pr(S = j - i) \Pr(X = i). \tag{5.13}
\end{aligned}$$

Igualando os coeficientes de z^{k-1} das expressões obtidas, para $k = 1, 2, \dots$,

temos, considerando as igualdades (5.10) – (5.13),

$$\begin{aligned}
k \Pr(S = k) &= a \sum_{i=0}^k (k-i) \Pr(X = i) \Pr(S = k-i) + \\
&\quad + (a+b) \sum_{i=0}^k i \Pr(S = k-i) \Pr(X = i) \\
&= \sum_{i=0}^k (ak - ai + ai + bi) \Pr(X = i) \Pr(S = k-i) \\
&= \sum_{i=0}^k (ak + bi) \Pr(X = i) \Pr(S = k-i) \\
&= ak \Pr(X = 0) \Pr(S = k) + \\
&\quad + \sum_{i=1}^k (ak + bi) \Pr(X = i) \Pr(S = k-i),
\end{aligned}$$

e, conseqüentemente,

$$\begin{aligned}
\Pr(S = k) &= \frac{1}{k - ak \Pr(X = 0)} \sum_{i=1}^k (ak + bi) \Pr(X = i) \Pr(S = k-i) \\
&= \frac{\sum_{i=1}^k \left(a + \frac{bi}{k}\right) \Pr(X = i) \Pr(S = k-i)}{1 - a \Pr(X = 0)}.
\end{aligned}$$

Como $\Pr(X = k) = 0$ se $k > \omega$, temos que

$$\Pr(S = k) = \frac{\sum_{i=1}^{\min(k, \omega)} \left(a + \frac{bi}{k}\right) \Pr(X = i) \Pr(S = k-i)}{1 - a \Pr(X = 0)}, \text{ com } k \in \mathbb{N}.$$

Relativamente ao ponto inicial temos

$$P(S = 0) \stackrel{(2.10)}{=} P_S(0) \stackrel{(5.7)}{=} P_N[P_X(0)] = P_N[\Pr(X = 0)]. \quad (5.14)$$

■

A título de exemplo, supondo que $\Pr(X = 0) = 0$,

1. se $N \sim \text{Binomial}(m, p)$, $m \in \mathbb{N}_1$ e $p \in (0, 1)$, vem que $a = \frac{p}{p-1}$ e $b = \frac{p(m+1)}{1-p}$ (cf. Tabela 4.1), portanto

$$\Pr(S = k) \stackrel{(5.9)}{=} \frac{p}{(p-1)k} \sum_{i=1}^{\min(k, \omega)} [k - (m+1)i] \Pr(X = i) \Pr(S = k-i), \quad (5.15)$$

para $k = 1, 2, \dots$ e $\Pr(S = 0) \stackrel{((3.2), (5.14))}{=} (1-p)^m$.

2. se $N \sim \text{Poisson}(\lambda)$, $\lambda > 0$, vem que $a = 0$ e $b = \lambda$ (cf. Tabela 4.1), portanto

$$\Pr(S = k) \stackrel{(5.9)}{=} \frac{\lambda}{k} \sum_{i=1}^{\min(k, \omega)} i \Pr(X = i) \Pr(S = k - i), \quad (5.16)$$

para $k = 1, 2, \dots$ e $\Pr(S = 0) \stackrel{((3.4), (5.14))}{=} e^{-\lambda}$.

3. se $N \sim \text{BinomialNegativa}(r, p)$, $r > 0$ e $p \in \mathbb{N}$, vem que $a = 1 - p$ e $b = (1 - p)(r - 1)$ (cf. Tabela 4.1), portanto

$$\Pr(S = k) \stackrel{(5.9)}{=} \frac{(1 - p)}{k} \sum_{i=1}^k [k + (r - 1)i] \Pr(X = i) \Pr(S = k - i), \quad (5.17)$$

para $k = 1, 2, \dots$ e $\Pr(S = 0) \stackrel{((3.6), (5.14))}{=} p^r$.

4. se $N \sim \text{Geométrica}(p)$, $p \in (0, 1)$, vem que $a = 1 - p$ e $b = 0$ (cf. na Tabela 4.1 os parâmetros da distribuição $\text{BinomialNegativa}(1, p)$), portanto

$$\Pr(S = k) \stackrel{(5.9)}{=} (1 - p) \sum_{i=1}^k \Pr(X = i) \Pr(S = k - i), \quad (5.18)$$

para $k = 1, 2, \dots$ e $\Pr(S = 0) \stackrel{((3.10), (5.14))}{=} p$.

Teorema 5.3 *Suponhamos que X é uma v.a. discreta com suporte S_X e seja $\omega = \sup S_X$. Se a distribuição de N for um membro da classe $(a, b, 1)$, temos*

$$\Pr(S = k) = \frac{\sum_{i=1}^{\min(k, \omega)} (a + \frac{bi}{k}) \Pr(X = i) \Pr(S = k - i)}{1 - a \Pr(X = 0)} + \frac{\Pr(X = k) [p_1 - (a + b)p_0]}{1 - a \Pr(X = 0)} \quad (5.19)$$

com $\Pr(S = 0) = P_N[\Pr(X = 0)]$, $p_0 = \Pr(N = 0)$, $p_1 = \Pr(N = 1)$ e $k \in \mathbb{N}_1$.

Demonstração: Sendo esta demonstração análoga à demonstração do Teorema 5.2, serão omitidos alguns dos passos intermédios.

Consideremos uma v.a. N com distribuição pertencente à classe $(a, b, 1)$. De $\frac{p_n}{p_{n-1}} = a + \frac{b}{n}$, para $n = 2, 3, \dots$ e tomando $p_n = \Pr(N = n)$, temos

$$\begin{aligned} & \sum_{n=2}^{+\infty} n p_n P_X^{n-1}(z) P'_X(z) = a \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1) p_{n-1} P_X^{n-1}(z) P'_X(z) + \\ & + (a+b) \sum_{n=2}^{+\infty} p_{n-1} P_X^{n-1}(z) P'_X(z) \\ \Leftrightarrow & \sum_{n=1}^{+\infty} n p_n P_X^{n-1}(z) P'_X(z) - p_1 P'_X(z) = a \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1) p_{n-1} P_X^{n-1}(z) P'_X(z) + \\ & + (a+b) \sum_{n=1}^{+\infty} p_{n-1} P_X^{n-1}(z) P'_X(z) - (a+b) p_0 P'_X(z). \end{aligned}$$

Tendo em conta a expressão dada em (5.10), a igualdade anterior reduz-se a

$$\begin{aligned} & P'_S(z) - p_1 P'_X(z) = a P'_S(z) P_X(z) + (a+b) P_S(z) P'_X(z) - \\ & - (a+b) p_0 P'_X(z) \\ \Leftrightarrow & P'_S(z) = a P'_S(z) P_X(z) + (a+b) P_S(z) P'_X(z) + [p_1 - (a+b) p_0] P'_X(z), \end{aligned}$$

que difere da expressão (5.10) apenas por juntar ao segundo membro da igualdade o termo $[p_1 - (a+b) p_0] P'_X(z)$.

Das expressões (5.12), (5.13) e de

$$P'_X(z) = E(X z^{X-1}) = \sum_{k=1}^{+\infty} k z^{k-1} \Pr(X = k),$$

resulta

$$[p_1 - (a+b) p_0] P'_X(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} k z^{k-1} \Pr(X = k) [p_1 - (a+b) p_0].$$

Igualando os coeficientes de z^{k-1} das expressões obtidas, para $k = 1, 2, \dots$, obtemos

$$\begin{aligned} k \Pr(S = k) &= ak \Pr(X = 0) \Pr(S = k) + \sum_{i=1}^k (ak + bi) \Pr(X = i) \times \\ &\times \Pr(S = k - i) + k \Pr(X = k) [p_1 - (a+b) p_0], \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\Pr(S = k) = \frac{\sum_{i=1}^k \left(a + \frac{bi}{k}\right) \Pr(X = i) \Pr(S = k - i)}{1 - a \Pr(X = 0)} + \frac{\Pr(X = k) [p_1 - (a + b) p_0]}{1 - a \Pr(X = 0)}$$

Como $\Pr(X = k) = 0$ se $k > \omega$, temos

$$\Pr(S = k) = \frac{\sum_{i=1}^{\min(k, \omega)} \left(a + \frac{bi}{k}\right) \Pr(X = i) \Pr(S = k - i)}{1 - a \Pr(X = 0)} + \frac{\Pr(X = k) [p_1 - (a + b) p_0]}{1 - a \Pr(X = 0)}, \text{ para } k \in \mathbb{N}.$$

Relativamente ao ponto inicial temos

$$P(S = 0) \stackrel{(2.10)}{=} P_S(0) \stackrel{(5.7)}{=} P_N[P_X(0)] = P_N[\Pr(X = 0)].$$

■

Os Teoremas 5.2 e 5.3 generalizam-se para a classe (a, b, m) , $m \in \mathbb{N}$, da seguinte forma:

Teorema 5.4 *Suponhamos que X é uma v.a. discreta com suporte $S_X \subseteq \mathbb{N}$ e seja $\omega = \sup S_X$. Se a distribuição de N for um membro da classe (a, b, m) , $m \in \mathbb{N}$, temos*

$$\Pr(S = k) = \frac{\sum_{i=1}^{\min(k, \omega)} \left(a + \frac{bi}{k}\right) \Pr(X = i) \Pr(S = k - i)}{1 - a \Pr(X = 0)} + \frac{\sum_{n=1}^m [p_n - \left(a + \frac{b}{n}\right) p_{n-1}] \Pr(S_n = k)}{1 - a \Pr(X = 0)}, \quad (5.20)$$

com $\Pr(S = 0) = P_N[\Pr(X = 0)]$, $p_j = \Pr(N = j)$, $j = 0, 1, \dots$ e $k \in \mathbb{N}_1$.

Demonstração: Alguns dos passos da demonstração serão omitidos dado que são semelhantes aos das demonstrações dos Teoremas 5.2 e 5.3.

Consideremos N uma v.a. com distribuição pertencente à classe (a, b, m) , para algum $m \in \mathbb{N}$. De $\frac{p_n}{p_{n-1}} = a + \frac{b}{n}$, para $n = m + 1, m + 2, \dots$ e tomando

$p_n = \Pr(N = n)$, temos

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=m+1}^{+\infty} n p_n P_X^{n-1}(z) P'_X(z) = a \sum_{n=m+1}^{+\infty} (n-1) p_{n-1} P_X^{n-1}(z) P'_X(z) + \\
& + (a+b) \sum_{n=m+1}^{+\infty} p_{n-1} P_X^{n-1}(z) P'_X(z) \\
\Leftrightarrow & \sum_{n=1}^{+\infty} n p_n P_X^{n-1}(z) P'_X(z) - \sum_{n=1}^m n p_n P_X^{n-1}(z) P'_X(z) = a \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1) p_{n-1} \times \\
& \times P_X^{n-1}(z) P'_X(z) - a \sum_{n=1}^m (n-1) p_{n-1} P_X^{n-1}(z) P'_X(z) + (a+b) \sum_{n=1}^{+\infty} p_{n-1} \times \\
& \times P_X^{n-1}(z) P'_X(z) - (a+b) \sum_{n=1}^m p_{n-1} P_X^{n-1}(z) P'_X(z).
\end{aligned}$$

Tendo em conta a expressão dada em (5.10) com as devidas adaptações a esta demonstração, a igualdade anterior reduz-se a

$$\begin{aligned}
P'_S(z) &= a P'_S(z) P_X(z) + (a+b) P_S(z) P'_X(z) + \\
& + \sum_{n=1}^m [n p_n - a(n-1) p_{n-1} - (a+b) p_{n-1}] P_X^{n-1}(z) P'_X(z). \\
\Leftrightarrow & P'_S(z) = a P'_S(z) P_X(z) + (a+b) P_S(z) P'_X(z) + \\
& + \sum_{n=1}^m \left[p_n - \left(a + \frac{b}{n} \right) p_{n-1} \right] n P_X^{n-1}(z) P'_X(z). \\
\Leftrightarrow & P'_S(z) = a P'_S(z) P_X(z) + (a+b) P_S(z) P'_X(z) + \\
& + \sum_{n=1}^m \left[p_n - \left(a + \frac{b}{n} \right) p_{n-1} \right] \frac{d}{dz} [P_X^n(z)]. \tag{5.21}
\end{aligned}$$

Como

$$P_X^n(z) = P_{X_1+\dots+X_n}(z),$$

com X, X_1, \dots, X_n i.i.d. e $X_i \stackrel{d}{=} X, \forall i \in \mathbb{N}_1$, resulta que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz} [P_X^n(z)] &= \frac{d}{dz} \left[\sum_{k=0}^{+\infty} z^k \Pr \left(\sum_{i=1}^n X_i = k \right) \right] \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} k z^{k-1} \Pr(S_n = k).
\end{aligned}$$

Os desenvolvimentos em série de Taylor de P'_S , $P'_S P_X$ e $P_S P'_X$ são dados pelas expressões (5.11), (5.12) e (5.13), respetivamente. Igualando os coeficientes de

z^{k-1} , para $k = 1, 2, \dots$, vem que

$$\begin{aligned}
k \Pr(S = k) &= a \sum_{i=0}^k (k-i) \Pr(X = i) \Pr(S = k-i) + \\
&\quad + (a+b) \sum_{i=0}^k i \Pr(S = k-i) \Pr(X = i) + \\
&\quad + \sum_{n=1}^m \left[p_n - \left(a + \frac{b}{n} \right) p_{n-1} \right] k \Pr(S_n = k) \\
&= ak \Pr(X = 0) \Pr(S = k) + \\
&\quad + \sum_{i=1}^k \left(a + \frac{bi}{k} \right) k \Pr(X = i) \Pr(S = k-i) + \\
&\quad + \sum_{n=1}^m \left[p_n - \left(a + \frac{b}{n} \right) p_{n-1} \right] k \Pr(S_n = k),
\end{aligned}$$

e, conseqüentemente,

$$\begin{aligned}
\Pr(S = k) &= \frac{\sum_{i=1}^k \left(a + \frac{bi}{k} \right) \Pr(X = i) \Pr(S = k-i)}{1 - a \Pr(X = 0)} + \\
&\quad + \frac{\sum_{n=1}^m \left[p_n - \left(a + \frac{b}{n} \right) p_{n-1} \right] \Pr(S_n = k)}{1 - a \Pr(X = 0)}.
\end{aligned}$$

Finalmente, de $\Pr(X = i) = 0$, se $i > \omega$, resulta, como pretendido

$$\begin{aligned}
\Pr(S = k) &= \frac{\sum_{i=1}^{\min(k, \omega)} \left(a + \frac{bi}{k} \right) \Pr(X = i) \Pr(S = k-i)}{1 - a \Pr(X = 0)} + \\
&\quad + \frac{\sum_{n=1}^m \left[p_n - \left(a + \frac{b}{n} \right) p_{n-1} \right] \Pr(S_n = k)}{1 - a \Pr(X = 0)}.
\end{aligned}$$

■

Se no teorema anterior, a v.a. X for tal que $\Pr(X = 0) = 0$, resulta que $\Pr(S = 0) = \Pr\left(\sum_{i=1}^N X_i = 0\right) = \Pr(N = 0)$.

5.2.2 Quando o valor da indemnização é uma variável aleatória absolutamente contínua

Consideremos o modelo do risco coletivo (5.1),

$$S = \sum_{i=1}^N X_i,$$

recordando que $X_i \stackrel{d}{=} X$, $\forall i \in \mathbb{N}$, e N, X_1, X_2, \dots são v.a.'s independentes.

Teorema 5.5 *Suponhamos que X é uma v.a. absolutamente contínua com suporte $S_X \subseteq \mathbb{R}^+$ e f.d.p. f_X . Se a distribuição de N for um membro da classe $(a, b, 1)$, temos*

$$f_{S|S>0}(x) = p_1 f_X(x) + \int_0^x \left(a + \frac{by}{x}\right) f_X(y) f_{S|S>0}(x-y) dy, \quad (5.22)$$

com $p_1 = \Pr(N = 1)$ e $x > 0$.

Demonstração: A demonstração deste Teorema segue os mesmos passos que a demonstração do Teorema 5.3, sendo aqui a f.g.p. substituída pela transformada de Laplace e, por tal facto, omitimos alguns passos intermédios, tal como aconteceu na demonstração do Teorema 5.4.

Como N é um membro da classe $(a, b, 1)$, sabemos que, tomando $p_n = \Pr(N = n)$,

$$np_n = a(n-1)p_{n-1} + (a+b)p_{n-1}, \quad n = 2, 3, \dots$$

Multiplicando por $L_X^{n-1}(z) L'_X(z)$ e somando, temos:

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{+\infty} np_n L_X^{n-1}(z) L'_X(z) &= a \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1) p_{n-1} L_X^{n-1}(z) L'_X(z) + \\ &+ (a+b) \sum_{n=2}^{+\infty} p_{n-1} L_X^{n-1}(z) L'_X(z) \\ \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} np_n L_X^{n-1}(z) L'_X(z) - p_1 L'_X(z) &= a \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1) p_{n-1} L_X^{n-1}(z) L'_X(z) + \\ &+ (a+b) \sum_{n=1}^{+\infty} p_{n-1} L_X^{n-1}(z) L'_X(z) - (a+b) p_0 L'_X(z). \end{aligned} \quad (5.23)$$

Mas,

$$\begin{aligned} L_S(z) &\stackrel{(2.12)}{=} P_S(e^{-z}) \\ &\stackrel{(5.6)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} P_S^n(e^{-z}) p_n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} L_X^n(z) p_n, \end{aligned}$$

e

$$L'_S(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n L_X^{n-1}(z) L'_X(z) p_n. \quad (5.24)$$

De (5.23) e (5.24) resulta que

$$\begin{aligned} L'_S(z) &= a \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1) p_{n-1} L_X^{n-1}(z) L'_X(z) + (a+b) L'_X(z) \sum_{n=0}^{+\infty} p_n L_X^n(z) + \\ &\quad + [p_1 - (a+b)p_0] L'_X(z) \\ \Leftrightarrow L'_S(z) &= a \sum_{n=1}^{+\infty} n p_n L_X^n(z) L'_X(z) + (a+b) L'_X(z) L_S(z) + \\ &\quad + [p_1 - (a+b)p_0] L'_X(z) \\ \Leftrightarrow L'_S(z) &= a L_X(z) L'_S(z) + (a+b) L'_X(z) L_S(z) + \\ &\quad + [p_1 - (a+b)p_0] L'_X(z). \end{aligned} \quad (5.25)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} L_S(z) &= E(e^{-zS}) = E\left(e^{-z\sum_{i=1}^N X_i}\right) \\ &= E(1) \Pr(N=0) + \sum_{n=1}^{+\infty} E\left(e^{-z\sum_{i=1}^n X_i}\right) \Pr(N=n) \\ &= p_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \prod_{i=1}^n E\left(e^{-zX_i}\right) p_n = p_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} L_X^n(z) p_n \\ &= p_0 + L_{S|S>0}(z), \end{aligned}$$

o que implica que

$$L_S(z) = p_0 + L_{S|S>0}(z) \quad (5.26)$$

e

$$L'_S(z) = L'_{S|S>0}(z). \quad (5.27)$$

Utilizando (5.26) e (5.27) em (5.25) vem

$$\begin{aligned} L'_{S|S>0}(z) &= aL_X(z) L'_{S|S>0}(z) + (a+b) L'_X(z) [p_0 + L_{S|S>0}(z)] + \\ &\quad + [p_1 - (a+b)p_0] L'_X(z) \\ &= aL_X(z) L'_{S|S>0}(z) + (a+b) L'_X(z) L_{S|S>0}(z) + \\ &\quad + p_1 L'_X(z). \end{aligned} \quad (5.28)$$

Relembrando as propriedades da transformada de Laplace apresentadas em (2.13) a (2.15) e a propriedade que resulta da junção destas (*cf.* (2.17)), sabemos que

$$[L(f_X)]'(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zx} [-xf_X(x)] dx \quad (5.29)$$

e que

$$L(f_X) L'(f_Y)(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zx} \left[\int_0^x f_X(y) [-(x-y) f_Y(x-y)] dy \right] dx. \quad (5.30)$$

De (5.29) resulta que

$$L'_{S|S>0}(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zx} [-xf_{S|S>0}(x)] dx \quad (5.31)$$

e

$$L'_X(z) = L(f)(z), \text{ com } f(x) = -xf_X(x). \quad (5.32)$$

De (5.30) resulta que

$$L_X(z) L'_{S|S>0}(z) = L(g)(z), \quad (5.33)$$

onde $g(x) = \int_0^x f_X(y) [-(x-y)] f_{S|S>0}(x-y) dy$, e

$$L'_X(z) L_{S|S>0}(z) = L(h)(z), \quad (5.34)$$

onde $h(x) = \int_0^x f_{S|S>0}(y) [-(x-y)] f_X(x-y) dy$.

Finalmente, invertendo (5.28), obtém-se

$$\begin{aligned} -xf_{S|S>0}(x) &= a \int_0^x f_X(y) [-(x-y)] f_{S|S>0}(x-y) dy + \\ &\quad + (a+b) \int_0^x f_{S|S>0}(y) [-(x-y)] f_X(x-y) dy + \\ &\quad + p_1 [-xf_X(x)]. \end{aligned}$$

Considerando, no segundo integral, a mudança de variável $u = x - y$ (o que implica que $y = x - u$ e $du = -dy$) temos

$$\begin{aligned} x f_{S|S>0}(x) &= a \int_0^x f_X(y) (x - y) f_{S|S>0}(x - y) dy + \\ &+ (a + b) \int_x^0 f_{S|S>0}(x - u) u f_X(u) (-du) + \\ &+ p_1 x f_X(x). \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} x f_{S|S>0}(x) &= a \int_0^x f_X(y) (x - y) f_{S|S>0}(x - y) dy + \\ &+ (a + b) \int_0^x f_{S|S>0}(x - y) y f_X(y) dy + \\ &+ p_1 x f_X(x). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} f_{S|S>0}(x) &= p_1 f_X(x) + \int_0^x \frac{a(x - y) + (a + b)y}{x} f_X(y) f_{S|S>0}(x - y) dy \\ &= p_1 f_X(x) + \int_0^x \left(a + \frac{by}{x} \right) f_X(y) f_{S|S>0}(x - y) dy, \end{aligned}$$

como se pretendia demonstrar. ■

Observação 5.6 *Obviamente, como $(a, b, 0) \subseteq (a, b, 1)$, o teorema anterior é válido também quando $N \in (a, b, 0)$.*

O Teorema 5.5 generaliza-se para a classe (a, b, m) , $m \in \mathbb{N}$, da seguinte forma:

Teorema 5.7 *Suponhamos que X é uma v.a. absolutamente contínua com suporte $S_X \subseteq \mathbb{R}^+$ e f.d.p. f_X . Se a distribuição de N for um membro da classe (a, b, m) , $m \in \mathbb{N}$, temos*

$$\begin{aligned} f_{S|S>0}(x) &= p_1 f_X(x) + \sum_{n=2}^m \left[p_n - \left(a + \frac{b}{n} \right) p_{n-1} \right] f_{S_n}(x) + \\ &+ \int_0^x \left(a + \frac{by}{x} \right) f_X(y) f_{S|S>0}(x - y) dy, \end{aligned} \quad (5.35)$$

com $p_n = \Pr(N = n)$, $x > 0$ e $\sum_{n=2}^m [p_n - (a + \frac{b}{n}) p_{n-1}] f_{S_n}(x) = 0$ se $m < 2$.

Demonstração: A demonstração deste Teorema segue os mesmos passos que a demonstração do Teorema 5.5 e, por tal facto, omitimos alguns passos intermédios, tal como aconteceu nas demonstrações dos Teoremas 5.3, 5.4 e 5.5.

De $\frac{p_n}{p_{n-1}} = a + \frac{b}{n}$, para $n = m + 1, m + 2, \dots$ e tomando $p_n = \Pr(N = n)$, temos

$$\begin{aligned} & \sum_{n=m+1}^{+\infty} n p_n L_X^{n-1}(z) L'_X(z) = a \sum_{n=m+1}^{+\infty} (n-1) p_{n-1} L_X^{n-1}(z) L'_X(z) + \\ & + (a+b) \sum_{n=m+1}^{+\infty} p_{n-1} L_X^{n-1}(z) L'_X(z) \\ \Leftrightarrow & \sum_{n=1}^{+\infty} n p_n L_X^{n-1}(z) L'_X(z) - \sum_{n=1}^m n p_n L_X^{n-1}(z) L'_X(z) = a \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1) p_{n-1} \times \\ & \times L_X^{n-1}(z) L'_X(z) - a \sum_{n=1}^m (n-1) p_{n-1} L_X^{n-1}(z) L'_X(z) + (a+b) \sum_{n=1}^{+\infty} p_{n-1} \times \\ & \times L_X^{n-1}(z) L'_X(z) - (a+b) \sum_{n=1}^m p_{n-1} L_X^{n-1}(z) L'_X(z). \end{aligned}$$

Tendo em consideração a expressão dada em (5.25), adaptando-a a esta demonstração, a igualdade anterior reduz-se a

$$\begin{aligned} L'_S(z) &= a L'_S(z) L_X(z) + (a+b) L_S(z) L'_X(z) + \\ & + \sum_{n=1}^m [n p_n - a(n-1) p_{n-1} - (a+b) p_{n-1}] L_X^{n-1}(z) L'_X(z). \\ \Leftrightarrow L'_S(z) &= a L'_S(z) L_X(z) + (a+b) L_S(z) L'_X(z) + \\ & + \sum_{n=1}^m \left[p_n - \left(a + \frac{b}{n} \right) p_{n-1} \right] \frac{d}{dz} [L_X^n(z)]. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Atendendo a que

$$L_X^n(z) = L_{X_1+\dots+X_n}(z),$$

com $X_1 \stackrel{d}{=} \dots \stackrel{d}{=} X_n \stackrel{d}{=} X$, independentes, temos

$$L_X^n(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt} f_{S_n}(t) dt,$$

(com $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$), o que implica que, aplicando a propriedade de Laplace definida na expressão (2.13),

$$\frac{d}{dz} [L_X^n(z)] = L(h)(z),$$

onde $h(x) = -xf_{S_n}(x)$.

Das expressões dadas em (5.26) e (5.27), sabemos que

$$L_{S|S>0}(z) = L_S(z) - p_0 \quad (5.37)$$

e

$$L'_S(z) = L'_{S|S>0}(z). \quad (5.38)$$

Substituindo (5.37) e (5.38) em (5.36) resulta

$$\begin{aligned} L'_{S|S>0}(z) &= aL_X(z) L'_{S|S>0}(z) + (a+b) L'_X(z) [p_0 + L_{S|S>0}(z)] + \\ &\quad + \sum_{n=1}^m \left[p_n - \left(a + \frac{b}{n} \right) p_{n-1} \right] L(h)(z) \\ &= aL_X(z) L'_{S|S>0}(z) + (a+b) L'_X(z) L_{S|S>0}(z) + \\ &\quad + (a+b) L'_X(z) p_0 + \sum_{n=1}^m \left[p_n - \left(a + \frac{b}{n} \right) p_{n-1} \right] L(h)(z). \end{aligned} \quad (5.39)$$

Tendo em consideração as propriedades da transformada de Laplace apresentadas em (2.13) – (2.15), a propriedade que resulta da junção destas (*cf.* (2.17)) e as expressões (5.31) – (5.34), podemos inverter (5.39), obtendo

$$\begin{aligned} -xf_{S|S>0}(x) &= a \int_0^x f_X(y) [-(x-y)] f_{S|S>0}(x-y) dy + \\ &\quad + (a+b) \int_0^x f_{S|S>0}(y) [-(x-y)] f_X(x-y) dy + \\ &\quad + (a+b) p_0 [-xf_X(x)] + \sum_{n=1}^m \left[p_n - \left(a + \frac{b}{n} \right) p_{n-1} \right] (-xf_{S_n}(x)). \end{aligned}$$

Aplicando uma mudança de variável no segundo integral ($u = x - y$), temos

$$\begin{aligned} xf_{S|S>0}(x) &= a \int_0^x f_X(y) (x-y) f_{S|S>0}(x-y) dy + \\ &\quad + (a+b) \int_x^0 f_{S|S>0}(x-u) u f_X(u) (-du) + \\ &\quad + (a+b) p_0 x f_X(x) + \sum_{n=1}^m \left[p_n - \left(a + \frac{b}{n} \right) p_{n-1} \right] x f_{S_n}(x). \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} x f_{S|S>0}(x) &= a \int_0^x f_X(y) (x-y) f_{S|S>0}(x-y) dy + \\ &+ (a+b) \int_0^x f_{S|S>0}(x-y) y f_X(y) dy + \\ &+ (a+b) p_0 x f_X(x) + \sum_{n=1}^m \left[p_n - \left(a + \frac{b}{n} \right) p_{n-1} \right] x f_{S_n}(x). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} f_{S|S>0}(x) &= (a+b) p_0 f_X(x) + \sum_{n=1}^m \left[p_n - \left(a + \frac{b}{n} \right) p_{n-1} \right] f_{S_n}(x) + \\ &+ \int_0^x \frac{a(x-y) + (a+b)y}{x} f_X(y) f_{S|S>0}(x-y) dy \\ &= (a+b) p_0 f_X(x) + [p_1 - (a+b) p_0] f_{S_1}(x) + \\ &+ \sum_{n=2}^m \left[p_n - \left(a + \frac{b}{n} \right) p_{n-1} \right] f_{S_n}(x) + \\ &+ \int_0^x \left(a + \frac{by}{x} \right) f_X(y) f_{S|S>0}(x-y) dy \\ &\stackrel{f_{S_1}(x)=f_X(x)}{=} p_1 f_X(x) + \sum_{n=2}^m \left[p_n - \left(a + \frac{b}{n} \right) p_{n-1} \right] f_{S_n}(x) + \\ &+ \int_0^x \left(a + \frac{by}{x} \right) f_X(y) f_{S|S>0}(x-y) dy, \end{aligned}$$

como se pretendia demonstrar. ■

No caso em que a v.a. X tem distribuição discreta, o modelo do risco coletivo (cf. (5.1)) pode ser facilmente deduzido de forma recursiva usando as expressões (5.9), (5.19) e (5.20) deduzidas nos Teoremas 5.2, 5.3 e 5.4, e que correspondem aos casos em que o número de parcelas do modelo tem uma distribuição da classe $(a, b, 0)$, $(a, b, 1)$ ou, mais geralmente, (a, b, m) , $m \in \mathbb{N}$, respetivamente. Quando a v.a. X tem uma distribuição absolutamente contínua, tal já não acontece dada a complexidade das expressões encontradas para a f.d.p. de S (cf. (5.22) e (5.35)), nos casos em que o número de parcelas do modelo do risco coletivo tem uma distribuição da classe $(a, b, 1)$ ou, mais geralmente, (a, b, m) , com $m \in \mathbb{N}$. Por tal facto, apresentaremos nas subsecções 5.3.1 e 5.3.2 dois métodos de discretização.

5.2.3 Generalização a distribuições para além da classe (a, b, m) , $m \in \mathbb{N}$

Consideremos novamente o modelo do risco coletivo (5.1) $S = \sum_{i=1}^N X_i$, onde, recorde-se, $X_i \stackrel{d}{=} X$, $\forall i \in \mathbb{N}$, e N, X_1, X_2, \dots são v.a.'s independentes.

É possível estender o método recursivo, usado na determinação da f.m.p. de S , a v.a.'s N cujas distribuições não pertencem à classe (a, b, m) , $m \in \mathbb{N}$, considerando que o número de indemnizações a pagar, N , é ele próprio resultado de uma soma aleatória de v.a.'s com distribuição comum pertencente à classe (a, b, m) , tendo o número de parcelas também uma distribuição pertencente a uma classe (a, b, m^*) ($m, m^* \in \mathbb{N}$).

Consideremos então $N^{(1)}$ e $N^{(2)}$ v.a.'s com distribuições membros da classe (a, b, m) e (a, b, m^*) , com parâmetros $a^{(1)}, b^{(1)}$ e $a^{(2)}, b^{(2)}$, respetivamente, e $\{N_i^{(2)}\}_{i \in \mathbb{N}_1}$ uma sucessão de v.a.'s i.i.d., independentes de $N^{(1)}$, com distribuição comum igual à distribuição de $N^{(2)}$. Se usarmos como variável de contagem do número de indemnizações a v.a. $N = \sum_{i=1}^{N^{(1)}} N_i^{(2)}$ temos

$$P_N = P_1 \circ P_2$$

e

$$P_S(z) = P_N[P_X(z)]$$

de onde resulta

$$P_S(z) = P_1\{P_2[P_X(z)]\}.$$

Ora, $P_2[P_X(z)]$ é a f.g.p. de $S_2 = \sum_{i=1}^{N^{(2)}} X_i$ e a f.m.p. de S_2 é dada por (5.20) com $a = a^{(2)}$, $b = b^{(2)}$ e $N = N^{(2)}$.

Aplicando novamente o Teorema 5.4, tomando $X \stackrel{d}{=} S_2$, $a = a^{(1)}$, $b = b^{(1)}$, $N = N^{(1)}$, obtemos finalmente a f.m.p. de $S = \sum_{i=1}^N X_i$.

É possível também encontrar fórmulas recursivas para a distribuição do risco coletivo para algumas situações particulares das extensões definidas na secção 4.4. Tais fórmulas podem ser encontradas, *e.g.*, em [44], [49], [51] e [32].

5.3 Construção de distribuições aritméticas

Como referimos acima, o cálculo das probabilidades associadas a S (cf. (5.1)) quando X é uma v.a. absolutamente contínua é complexo. Uma aproximação possível é a substituição da v.a. X por uma v.a. discreta que lhe seja próxima. A discretização da distribuição de X leva à criação de uma v.a. discreta com suporte contido no conjunto \mathbb{N} . Por tal facto, designaremos tal distribuição como “distribuição aritmética”. Aquando da discretização de uma distribuição contínua, importa manter o maior número de propriedades da distribuição contínua original. Klugman *et al.* (cf. [35]) apresentam dois métodos para a discretização de uma distribuição contínua, mista ou discreta não-aritmética: o método de arredondamento e o método de emparelhamento local de momentos.

5.3.1 Método de arredondamento

Sejam X uma v.a. não negativa, com função de distribuição F_X , $h > 0$ e $j \in \mathbb{N}$. No método de arredondamento, as probabilidades da variável discretizada, X_d , resultam da concentração em cada ponto positivo j da probabilidade de X estar no intervalo centrado em jh e de amplitude h . Simbolicamente, a f.m.p. de X_d é definida por

$$\Pr(X_d = j) = \begin{cases} F_X\left(\frac{h}{2}\right), & j = 0 \\ F_X\left(jh + \frac{h}{2}\right) - F_X\left(jh - \frac{h}{2}\right), & j \in \mathbb{N}_1 \end{cases} \quad (5.40)$$

Exemplo 5.8 Consideremos $X \sim \text{Exponencial}(\lambda)$, ($\lambda > 0$), e $h > 0$. Temos

$$\Pr(X_d = j) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda \frac{h}{2}}, & j = 0 \\ e^{-\lambda(jh - \frac{h}{2})} (1 - e^{-\lambda h}), & j \in \mathbb{N}_1 \end{cases} \quad (5.41)$$

Na Figura 5.1 apresentamos os gráficos de X e de X_d quando $\lambda = h = 1$.

5.3.2 Método de emparelhamento local de momentos

Neste método, a distribuição aritmética é construída de forma a que os seus primeiros $p \in \mathbb{N}_1$ momentos coincidam com os primeiros p momentos da distribuição original. Seja X_d a v.a. que resulta da discretização de X , variável que supomos ser não negativa ($\Pr(X \geq 0) = 1$), e consideremos a seguinte sucessão crescente de números reais não negativos

$$x_0, x_0 + h, x_0 + 2h, \dots, x_0 + ph, x_1 + h, x_1 + 2h, \dots, x_1 + ph, \dots, x_k + jh, \dots, \quad (5.42)$$

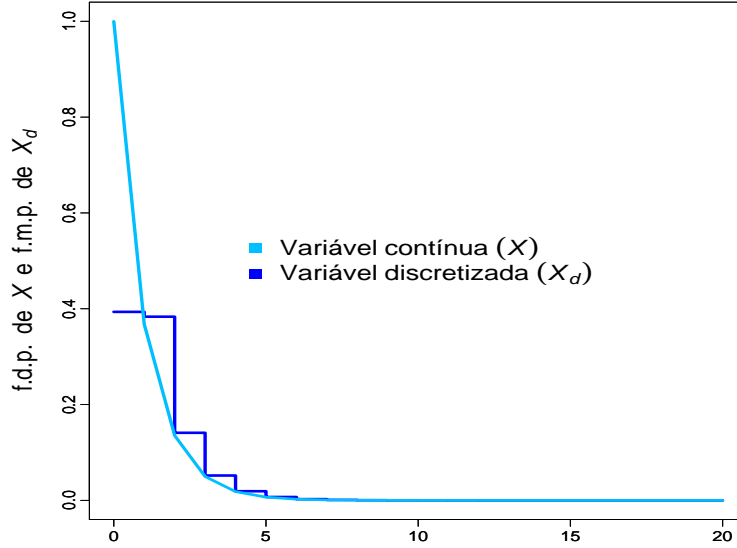


Figura 5.1: Representação da f.d.p. de uma v.a. $X \sim \text{Exponencial}(1)$ e da f.m.p. da sua discretização pelo método do arredondamento com $h = 1$.

considerando $x_k = x_{k-1} + ph$, $j \in \{1, \dots, p\}$, $h > 0$ e $k \in \mathbb{N}$. A cada ponto $x_k + jh$, $j \in \{0, \dots, p\}$, associemos o valor

$$\begin{cases} m_j^k, & \text{se } j \neq p \\ m_p^k + m_0^{k+1}, & \text{se } j = p \end{cases},$$

de tal forma que

$$\sum_{j=0}^p (x_k + jh)^r m_j^k = \int_{x_k}^{x_k+ph} x^r f_X(x) dx, \quad (5.43)$$

com $r = 0, 1, 2, \dots, p$ e $k = 0, 1, \dots$

Quando $x_0 = 0$ e $h = 1$, a distribuição discretizada tem as seguintes probabilidades:

$$\begin{aligned} \Pr(X_d = 0) &= m_0^0, \Pr(X_d = 1) = m_1^0, \Pr(X_d = 2) = m_2^0, \dots, \\ \Pr(X_d = p) &= m_p^0 + m_0^1, \Pr(X_d = p + 1) = m_1^1, \Pr(X_d = p + 2) = m_2^1, \dots, \end{aligned} \quad (5.44)$$

Somando as expressões dadas por (5.43), para $k = 0, 1, \dots$, com $x_0 = 0$, verifica-se que os primeiros p momentos são preservados e que a soma das probabilidades é 1. A solução do sistema de equações dado em (5.43) é apresentada no teorema seguinte:

Teorema 5.9 *A solução de (5.43) é dada por*

$$m_j^k = \int_{x_k}^{x_k+ph} \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^p \frac{x - x_k - ih}{(j - i)h} f_X(x) dx, \quad j = 0, 1, \dots, p. \quad (5.45)$$

Demonstração: A fórmula de Lagrange (cf. [35] e [20]) para o ajustamento de um polinómio f de ordem n nos pontos $(y_0, f(y_0)), \dots, (y_n, f(y_n))$ é

$$f(x) = \sum_{j=0}^n f(y_j) \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n \frac{x - y_i}{y_j - y_i}.$$

Aplicando esta fórmula ao polinómio $f(x) = x^r$ de forma a que este passe pelos pontos $x_k, x_k + h, \dots, x_k + ph$ e respetivas imagens, temos

$$x^r = \sum_{j=0}^p (x_k + jh)^r \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^p \frac{x - x_k - ih}{(j - i)h}, \quad r = 0, 1, \dots, p.$$

Integrando no intervalo $[x_k, x_k + ph)$ temos

$$\int_{x_k}^{x_k+ph} x^r f_X(x) dx = \sum_{j=0}^p (x_k + jh)^r m_j^k,$$

onde m_j^k é dado por (5.45). ■

Panjer e Lutek [43] fizeram algumas experiências e concluíram que o emparelhamento de mais do que um momento, além de ser mais custoso, a nível computacional, pode levar ao aparecimento de probabilidades negativas, pelo que restringimos o nosso estudo ao emparelhamento apenas do primeiro momento.

Seguidamente, concretizamos as expressões no caso em que igualamos o primeiro momento da distribuição discretizada ao primeiro momento de X . Começamos por mostrar um resultado auxiliar:

Lema 5.10 *Se X é uma v.a. absolutamente contínua não negativa, com f.d.p. f_X e $h > 0$, então*

$$\int_0^h x f_X(x) dx = E[\min(X, h)] - [1 - F_X(h)]h. \quad (5.46)$$

Demonstração: Seja $h > 0$. De

$$Y = \min(X, h) = \begin{cases} X, & X < h \\ h, & X \geq h \end{cases}$$

temos

$$\begin{aligned} \Pr(Y \leq y) &\stackrel{T.P.T.}{=} \Pr(Y \leq y|X < h) \Pr(X < h) + \Pr(Y \leq y|X \geq h) \Pr(X \geq h) \\ &= \Pr(X \leq y|X < h) F_X(h) + \Pr(h \leq y|X \geq h) [1 - F_X(h)] \end{aligned} \quad (5.47)$$

Quando $h \leq y$, de (5.47), tem-se que

$$\begin{aligned} \Pr(Y \leq y) &= 1 \times F_X(h) + 1 \times [1 - F_X(h)] \\ &= 1. \end{aligned}$$

Quando $h > y$, de (5.47), obtém-se que

$$\begin{aligned} \Pr(Y \leq y) &= \frac{\Pr(X \leq y \wedge X < h)}{\Pr(X < h)} F_X(h) + 0 \\ &= \frac{\Pr(X \leq y)}{\Pr(X < h)} \times \Pr(X < h) \\ &= \Pr(X \leq y) = F_X(y). \end{aligned}$$

Resumindo,

$$F_Y(y) = \Pr(Y \leq y) = \begin{cases} 1, & \text{se } y \geq h \\ F_X(y), & \text{se } y < h \end{cases}.$$

A função F_Y é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{h\}$ ¹. No ponto h , a função tem um salto de amplitude $a = 1 - F_X(h)$. Consequentemente, é possível escrever Y da seguinte forma

$$Y = F_X(h) X_1 + [1 - F_X(h)] X_2,$$

onde X_1 é uma v.a. absolutamente contínua com f.d.p.

$$f_{X_1}(x) = \begin{cases} \frac{f_X(x)}{F_X(h)}, & \text{se } x \in (0, h) \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases},$$

¹Se $\sup S_X \leq h$, então F_Y é contínua também no ponto h .

e $X_2 = h$. O valor esperado de $Y = \min(X, h)$ é

$$\begin{aligned}
 E(Y) &= E\left(F_X(h) X_1 + [1 - F_X(h)] X_2\right) \\
 &= F_X(h) E(X_1) + [1 - F_X(h)] E(X_2) \\
 &= F_X(h) \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X_1}(x) dx + [1 - F_X(h)] h \\
 &= F_X(h) \int_0^h x \frac{f_X(x)}{F_X(h)} dx + [1 - F_X(h)] h \\
 &= \int_0^h x f_X(x) dx + [1 - F_X(h)] h
 \end{aligned}$$

e, conseqüentemente,

$$\int_0^h x f_X(x) dx = E[\min(X, h)] - [1 - F_X(h)] h, \quad \forall h > 0.$$

■

Quando $p = 1$, o suporte da v.a. discretizada X_d fica reduzido à sucessão $x_k = kh$, $k \in \mathbb{N}$, com probabilidades respectivas, considerando (5.44)

$$m_0^0, m_1^0 + m_0^1, m_1^1 + m_0^2, m_1^2 + m_0^3, \dots$$

Tomando $j = 0$ e $k = 0$, obtemos

$$\begin{aligned}
 \Pr(X_d = 0) &\stackrel{(5.45)}{=} m_0^0 = \int_0^h \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq 0}}^1 \frac{x - x_0 - h}{(0 - 1)h} f_X(x) dx \\
 &= \int_0^h \frac{x - h}{-h} f_X(x) dx = \int_0^h \frac{h - x}{h} f_X(x) dx \\
 &= \int_0^h f_X(x) dx - \frac{1}{h} \int_0^h x f_X(x) dx \\
 &\stackrel{(5.46)}{=} F_X(h) - \left[E\left(\frac{\min(X, h)}{h}\right) - [1 - F_X(h)] \right] \\
 &= 1 - E\left(\frac{\min(X, h)}{h}\right). \tag{5.48}
 \end{aligned}$$

Quando $k \geq 1$, obtemos

1. Se $j = 0$,

$$\begin{aligned}
m_0^k &\stackrel{(5.45)}{=} \int_{kh}^{(k+1)h} \frac{x - kh - h}{-h} f_X(x) dx \\
&= -\frac{1}{h} \int_{kh}^{(k+1)h} x f_X(x) dx + (k+1) \int_{kh}^{(k+1)h} f_X(x) dx \\
&= -\frac{1}{h} \left(\int_0^{(k+1)h} x f_X(x) dx - \int_0^{kh} x f_X(x) dx \right) + \\
&\quad + (k+1) \{F_X[(k+1)h] - F_X(kh)\} \\
&\stackrel{(5.46)}{=} -\frac{1}{h} E\{\min[X, (k+1)h]\} + (k+1) \{1 - F_X[(k+1)h]\} + \\
&\quad + \frac{1}{h} E[\min(X, kh)] - k[1 - F_X(kh)] + \\
&\quad + (k+1) \{F_X[(k+1)h] - F_X(kh)\} \\
&= \frac{1}{h} E[\min(X, kh)] - \frac{1}{h} E\{\min[X, (k+1)h]\} + 1 - F_X(kh).
\end{aligned} \tag{5.49}$$

2. Se $j = 1$,

$$\begin{aligned}
m_1^k &\stackrel{(5.45)}{=} \int_{kh}^{(k+1)h} \frac{x - kh}{h} f_X(x) dx \\
&= \frac{1}{h} \int_{kh}^{(k+1)h} x f_X(x) dx - k \int_{kh}^{(k+1)h} f_X(x) dx \\
&= \frac{1}{h} \left(\int_0^{(k+1)h} x f_X(x) dx - \int_0^{kh} x f_X(x) dx \right) - \\
&\quad - k [F_X((k+1)h) - F_X(kh)] \\
&\stackrel{(5.46)}{=} \frac{1}{h} E[\min(X, (k+1)h)] - (k+1) [1 - F_X((k+1)h)] - \\
&\quad - \frac{1}{h} E[\min(X, kh)] + k [1 - F_X(kh)] - \\
&\quad - k [F_X((k+1)h) - F_X(kh)] \\
&= \frac{1}{h} E[\min(X, (k+1)h)] - \frac{1}{h} E[\min(X, kh)] - 1 + \\
&\quad + F_X((k+1)h).
\end{aligned} \tag{5.50}$$

Somando m_1^{k-1} e m_0^k , para $k = 1, 2, \dots$, temos que (cf. (5.49) e (5.50))

$$\begin{aligned}
 \Pr(X_d = k) &= m_1^{k-1} + m_0^k \\
 &= \frac{1}{h} E[\min(X, kh)] - \frac{1}{h} E\{\min[X, (k-1)h]\} - 1 + F_X(kh) + \\
 &\quad + \frac{1}{h} E[\min(X, kh)] - \frac{1}{h} E\{\min[X, (k+1)h]\} + 1 - F_X(kh) \\
 &= \frac{1}{h} \left(2E[\min(X, kh)] - E\{\min[X, (k-1)h]\} - \right. \\
 &\quad \left. - E\{\min[X, (k+1)h]\} \right).
 \end{aligned} \tag{5.51}$$

Exemplo 5.11 Consideremos $X \sim \text{Exponencial}(\lambda)$, ($\lambda > 0$), e $h > 0$. Temos

$$\begin{aligned}
 E[\min(X, h)] &\stackrel{(5.46)}{=} \int_0^h x f_X(x) dx + [1 - F_X(h)] h \\
 &= \int_0^h x \lambda e^{-\lambda x} dx + [1 - (1 - e^{-\lambda h})] h \\
 &= \frac{1 - e^{-\lambda h} (1 + \lambda h)}{\lambda} + e^{-\lambda h} h \\
 &= \frac{1 - e^{-\lambda h} - e^{-\lambda h} (\lambda h) + e^{-\lambda h} (\lambda h)}{\lambda} \\
 &= \frac{1 - e^{-\lambda h}}{\lambda}.
 \end{aligned} \tag{5.52}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 \Pr(X_d = 0) &\stackrel{(5.48)}{=} 1 - E\left(\frac{\min(X, h)}{h}\right) \\
 &\stackrel{(5.52)}{=} 1 - \frac{1}{h} \left(\frac{1 - e^{-\lambda h}}{\lambda}\right) \\
 &= \frac{\lambda h + e^{-\lambda h} - 1}{\lambda h}
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\Pr(X_d = k) &\stackrel{(5.51)}{=} \frac{1}{h} \left(2E[\min(X, kh)] - E\{\min[X, (k-1)h]\} - \right. \\
&\quad \left. - E\{\min[X, (k+1)h]\} \right) \\
&\stackrel{(5.52)}{=} \frac{1}{h} \left[2 \left(\frac{1 - e^{-\lambda kh}}{\lambda} \right) - \left(\frac{1 - e^{-\lambda(k-1)h}}{\lambda} \right) - \left(\frac{1 - e^{-\lambda(k+1)h}}{\lambda} \right) \right] \\
&= \frac{1}{\lambda h} \left[-2e^{-\lambda kh} + e^{-\lambda(k-1)h} + e^{-\lambda(k+1)h} \right] \\
&= \frac{e^{-\lambda(k+1)h} (-1 + e^{\lambda h})^2}{\lambda h}.
\end{aligned}$$

Na Figura 5.2 apresentamos os gráficos de X e de X_d quando $\lambda = h = 1$.

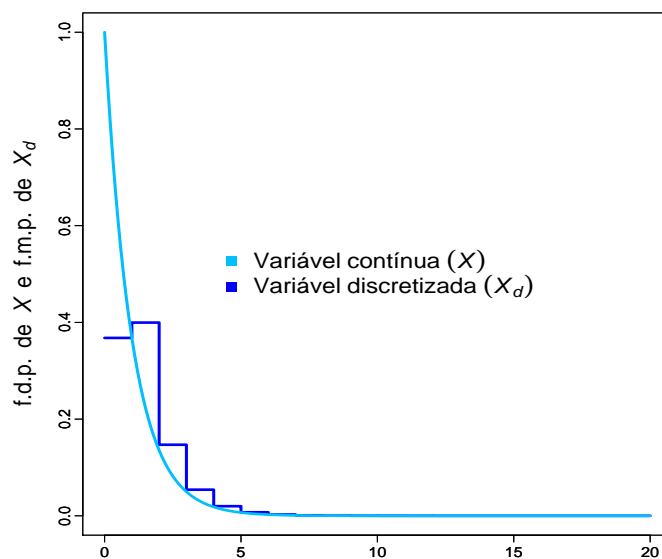


Figura 5.2: Representação da f.d.p. de uma v.a. $X \sim Exponencial(1)$ e da f.m.p. da sua discretização pelo método do emparelhamento local de momentos com $h = 1$.

Capítulo 6

O modelo do risco coletivo nos programas *Mathematica* e *R*

Neste capítulo serão colocados em prática alguns conceitos definidos e resultados demonstrados no capítulo anterior no que concerne à modelação do risco coletivo. Para a implementação das fórmulas e consequente resolução dos exemplos seguintes serão utilizados dois programas: o programa *Mathematica* e o programa *R*.

A escolha dos programas acima referidos prende-se com o fácil manuseamento dos mesmos e com algumas características que estes possuem. No caso do programa *Mathematica*, este inclui já uma biblioteca onde podem ser encontradas muitas funções estatísticas pré-definidas (além de ser de livre acesso para os alunos da Universidade da Madeira). No caso do programa *R*, que é de utilização gratuita, foram já desenvolvidas bibliotecas específicas para a área do atuariado e, em particular, para a área da modelação do risco coletivo, nomeadamente, a biblioteca *actuar* (cf. [13]), que utilizaremos na secção seguinte. A utilização destes dois programas permite-nos comparar os resultados fornecidos no programa *Mathematica* obtidos através de fórmulas e funções criadas de raiz com os resultados dados pela biblioteca *actuar* do programa *R*.

No programa *Mathematica* serão criadas as funções necessárias para a resolução dos exemplos, tendo em conta os pressupostos teóricos dados no capítulo anterior.

Já no programa *R*, será utilizada exclusivamente a biblioteca *actuar* para a apresentação dos exemplos. Este implementa alguns conceitos importantes anteriormente referidos, nomeadamente o cálculo das indemnizações agregadas,

a construção de distribuições aritméticas, entre outros conceitos não abordados nesta dissertação. Uma das críticas a apontar a esta biblioteca aquando do cálculo das indemnizações agregadas é o número limitado de distribuições disponíveis na modelação do número de indemnizações ocorridas nesse período, N , sendo possível apenas considerar as distribuições binomial, de Poisson, binomial negativa (e o caso particular da geométrica) e logarítmica.

A modelação dos valores das indemnizações pagas, X , será feita tendo em conta a base de dados *AutoClaims* que faz parte da biblioteca *insuranceData* do programa *R* (cf. [12]). A base de dados *AutoClaims* inclui o número e o valor das indemnizações pagas por uma seguradora do centro-oeste dos Estados Unidos da América, durante um ano, a segurados com veículos ligeiros de passageiros tendo em conta o estado de origem, o género, a idade, e a classe de risco do segurado (que depende da idade, do sexo e do estado civil do mesmo e do uso do veículo) (cf. [19], p. 16). Esta base de dados será utilizada nos exemplos das secções 6.1 e 6.2 como modelo para a distribuição de X . Na secção 6.3, exemplificaremos a utilização da biblioteca *actuar* na discretização de v.a.'s usando como distribuição de X a resultante da discretização de uma v.a. exponencial.

6.1 Exemplo 1

Começamos por tomar como modelo para o número de indemnizações a distribuição de *Poisson*(10), que é um membro da classe $(a, b, 0)$.

No programa *Mathematica* tal atribuição foi feita de acordo com os comandos apresentados na Figura 6.1. A f.m.p. da distribuição de *Poisson*(la) é dada no programa *Mathematica* por $PDF[PoissonDistribution[la], k]$ (neste caso, $la = 10$), com $k = 0, 1, 2, \dots$, tendo sido inserida como uma função que depende de la e de k . A f.g.p. da distribuição de Poisson foi introduzida no programa *Mathematica* como função que depende de la e de z , $|z| < 1$, de acordo com a expressão obtida em (3.4).

```
in[1]:= pk := Function[{la, k}, PDF[PoissonDistribution[la], k]];
fgp := Function[{la, z}, Exp[la * (z - 1)]];

```

Figura 6.1: Comandos no programa *Mathematica* que definem a f.m.p. e a f.g.p. da v.a. $N \sim \text{Poisson}(la)$.

Tal como referido anteriormente, a modelação dos valores das indemnizações pagas, *i.e.*, da v.a. X , será feita tendo em conta a base de dados *AutoClaims*. A amostra constante no ficheiro *AutoClaims.xlsx* tem dimensão 6773 e varia entre os valores 0 e 60000 (dólares), tendo sido agrupada em 12 classes, onde cada classe tem uma amplitude de 5000 dólares. O vetor $X0$ (*cf.* Figura 6.2) regista as probabilidades associadas a cada uma dessas classes, sendo a f.m.p. de X definida pela função “ X ”, que depende de k (*cf.* Figura 6.2).

```
In[3]:= X0 := { $\frac{6262}{6773}$ ,  $\frac{385}{6773}$ ,  $\frac{87}{6773}$ ,  $\frac{21}{6773}$ ,  $\frac{11}{6773}$ ,  $\frac{4}{6773}$ ,  $\frac{1}{6773}$ , 0, 0, 0, 0,  $\frac{2}{6773}$ };
X = Function[k, If[And[k > 0, k < 13], X0[[k]], 0]];
```

Figura 6.2: Comandos no programa *Mathematica* que geram a f.m.p. de X .

Finalmente, tendo a distribuição de N e de X , é possível definir a distribuição do modelo coletivo, S . No programa *Mathematica*, a distribuição de S é obtida pelos comandos presentes na Figura 6.3, tendo sido definida a distribuição do modelo do risco coletivo, S , como uma função que depende de k , com $la = 10$ (*cf.* (5.9)). Atendendo à recursividade existente no cálculo dos valores $\Pr(S = k)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) optou-se por usar na definição de S o comando que cria funções que “recordam” todos os valores previamente calculados ($S[x_]$). Os valores de a e de b presentes na expressão (5.9) foram diretamente substituídos na expressão de acordo com a Tabela 4.1, *i.e.*, $a = 0$ e $b = la$.

```
In[5]:= la = 10; S[k_] := S[k] = Sum[((1a * i) / k) * X[i] * S[k - i], {i, 1, Min[k, 12]}];
S[0] = fgp[1a, X[0]];
```

Figura 6.3: Comandos no programa *Mathematica* que definem a f.m.p. do modelo do risco coletivo, S , quando $N \sim \text{Poisson}(10)$.

A representação gráfica da f.m.p. do modelo do risco coletivo quando $N \sim \text{Poisson}(10)$, $\Pr(S = k)$, para $k = 0, 1, \dots, 27$, e os comandos do programa *Mathematica* que lhe deram origem são apresentados na Figura 6.4.

Para complementar a informação dada pela Figura 6.4, apresentamos na Figura 6.5 os comandos do programa *Mathematica* que originaram as probabilidades, $\Pr(S = k)$, e as probabilidades acumuladas, $\Pr(S \leq k)$, do modelo do risco coletivo, S , quando $N \sim \text{Poisson}(10)$ e $k = 0, 1, \dots, 27$.

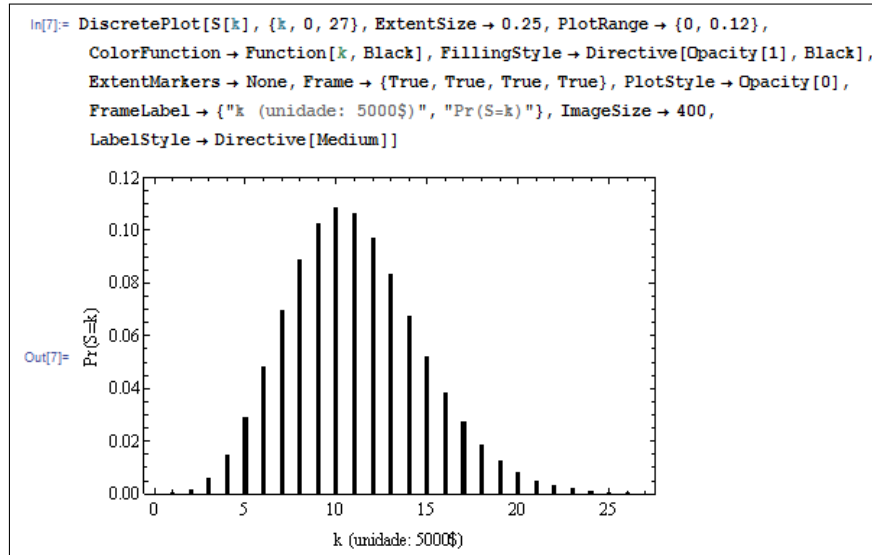


Figura 6.4: Representação da f.m.p. do modelo do risco coletivo, S , quando $N \sim \text{Poisson}(10)$ e comandos que estão na sua origem no programa *Mathematica*.

```

In[8]:= Prob = Table[N[S[k]], {k, 0, 27}]
Out[8]:= {0.0000453999, 0.000419747, 0.0019662, 0.00622441, 0.0149877, 0.0292918, 0.0484225,
0.0696736, 0.0891182, 0.10299, 0.108934, 0.106577, 0.0973016, 0.0835185, 0.0678345,
0.0524311, 0.0387646, 0.0275498, 0.0189138, 0.012609, 0.0082093, 0.00525218,
0.00332316, 0.00209182, 0.00131612, 0.000829867, 0.000524556, 0.000331798}

In[9]:= ProbAcum = Table[N[Sum[Prob[[k]], {k, 1, i + 1}]], {i, 0, 27}]
Out[9]:= {0.0000453999, 0.000465147, 0.00243134, 0.00865576, 0.0236434, 0.0529352,
0.101358, 0.171031, 0.26015, 0.363139, 0.472073, 0.578649, 0.675951,
0.75947, 0.827304, 0.879735, 0.9185, 0.94605, 0.964963, 0.977573, 0.985782,
0.991034, 0.994357, 0.996449, 0.997765, 0.998595, 0.99912, 0.999451}

```

Figura 6.5: Probabilidades, $\Pr(S = k)$, e probabilidades acumuladas, $\Pr(S \leq k)$, do modelo do risco coletivo, S , quando $N \sim \text{Poisson}(10)$ e $k = 0, 1, \dots, 27$.

Das Figuras 6.4 e 6.5, conclui-se, por exemplo, que o valor que a seguradora paga anualmente está entre 45000 e 50000 dólares com uma probabilidade de 0.11, aproximadamente, e que em mais de 90% dos casos, a seguradora paga um total de indemnizações inferior ou igual a 80000 dólares.

No programa *R*, a primeira coisa a fazer é criar um vetor (neste caso, designado por f_x) com as probabilidades de os valores das indemnizações pertencerem a cada uma das 12 classes anteriormente referidas. Atendendo ao facto do pro-

grama *R* associar ao vetor fx das probabilidades uma v.a. discreta X com um suporte que tem como ponto inicial $X = 0$, foi necessário antepor o valor zero ao vetor $(1, 2, \dots, 12)$. Seguidamente, é necessário chamar a biblioteca *actuar* para o ambiente de trabalho do programa *R* com o comando “*require(actuar)*”. Finalmente, utilizamos a função *aggregateDist* da biblioteca *actuar* para definir a distribuição do modelo do risco coletivo, a qual será designada de F_s . Todos os comandos são apresentados na Figura 6.6.

```
fx<-c(0,6262/6773, 385/6773, 87/6773, 21/6773, 11/6773, 4/6773, 1/6773,
0, 0, 0, 0, 2/6773)

Fs <- aggregateDist(method="recursive", model.freq = "poisson",
model.sev = fx, lambda = 10, x.scale = 1)
```

Figura 6.6: Comandos no programa *R* que permitem a criação do modelo do risco coletivo, S , quando $N \sim Poisson(10)$.

Na função *aggregateDist* existem vários parâmetros cujo preenchimento é obrigatório. Assim, em *method* temos de colocar *recursive* dado que estamos a considerar o método recursivo; em *model.freq* colocamos a distribuição de N que, neste caso, é *Poisson*; em *modelo.sev* colocamos a distribuição de X que é representada pelo vetor fx que contém as probabilidades de os valores das indemnizações pertencerem a cada classe; em *lambda*, usamos o valor 10 que tem sido utilizado nos exemplos desta dissertação, *i.e.*, a distribuição de N é *Poisson(10)*; e, finalmente, em *x.scale* colocamos a unidade monetária que será 1, correspondendo cada unidade a 5000 dólares.

A Figura 6.7 apresenta as probabilidades acumuladas do modelo do risco coletivo, S , e a Figura 6.8 contém os comandos que permitem obter o gráfico da função de distribuição de S , e a representação da referida função de distribuição.

```
k<-c(0:27)
table(round(Fs(k), digits = 6))

4.5e-05  0.000465  0.002431  0.008656  0.023643  0.052935  0.101358  0.171031
0.26015  0.363139  0.472073  0.578649  0.675951  0.75947  0.827304  0.879735
0.9185   0.94605   0.964963  0.977573  0.985782  0.991034  0.994357  0.996449
0.997765 0.998595 0.99912  0.999451
```

Figura 6.7: Valores de $\Pr(S \leq k)$, com $k = 0, 1, \dots, 27$, quando $N \sim Poisson(10)$.

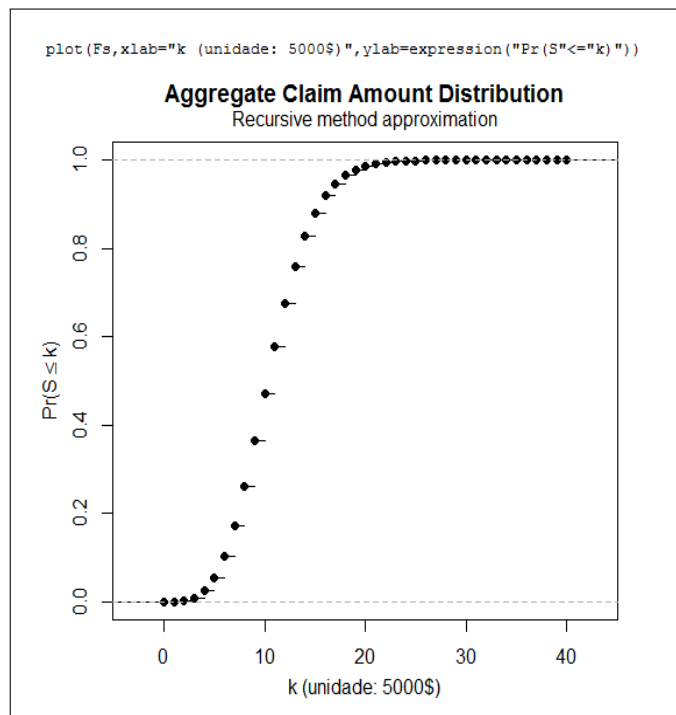


Figura 6.8: Representação da função de distribuição do modelo do risco coletivo, S , quando $N \sim \text{Poisson}(10)$ e comandos que estão na sua origem no programa *R*.

Utilizando a distribuição de Poisson(10) como modelo para o número de indenizações e tendo o modelo do valor das indenizações sido construído a partir dos valores da base de dados *AutoClaims*, verificamos que os resultados obtidos, quer no programa *Mathematica*, quer no programa *R*, coincidem (*cf.*, *e.g.*, Figuras 6.5 e 6.7).

6.2 Exemplo 2

Neste exemplo serão tidos em conta alguns procedimentos e justificações já apresentados no exemplo anterior, pelo que serão agora omitidos. Novamente, começamos por definir o modelo para o número de indenizações. Neste exemplo, consideramos a distribuição $\text{Log}(0.2)$, que é um membro da classe $(a, b, 1)$.

No programa *Mathematica*, a f.m.p. da distribuição $\text{Log}(p)$, definida na expressão (4.13), é dada por $\text{PDF}[\text{LogSeriesDistribution}[1-p],k]$ (neste caso, $p = 0.2$), com $k = 0, 1, 2, \dots$, sendo, portanto, apresentada como uma função que

depende de p e de k . A f.g.p. da distribuição *Log* foi definida no programa *Mathematica* como uma função que depende de p e de z , $|z| < 1$, tendo em conta a expressão (4.14). A Figura 6.9 mostra os comandos necessários para criar as funções da f.m.p. e da f.g.p. da distribuição *Log* (p) no programa *Mathematica*.

```
In[1]:= pk := Function[{p, k}, PDF[LogSeriesDistribution[1 - p], k]];
fgp := Function[{p, z}, (Log[-(1 - p) * z + 1]) / (Log[p])];
```

Figura 6.9: Comandos no programa *Mathematica* que definem a f.m.p. e a f.g.p. da v.a. $N \frown \text{Log}(p)$.

Tal como no exemplo anterior, a modelação da v.a. X será feita tendo em conta a base de dados *AutoClaims* (cf. Figura 6.2).

Com as distribuições de N e de X , pode-se, por fim, definir a distribuição do modelo do risco coletivo, S . No programa *Mathematica*, a f.m.p. de S é dada pelos comandos apresentados na Figura 6.10, sendo a mesma definida como uma função dependente de k , com $p = 0.2$ (cf. (5.19)). Aqui também foram substituídos diretamente os valores de a e de b presentes na expressão (5.19) por $1 - p$ e $-(1 - p)$, respetivamente (cf. Tabela 4.2).

```
In[5]:= p = 0.2; S[k_] := S[k] = Sum[ ((1 - p) - ((1 - p) * i) / k) * X[i] * S[k - i],
{i, 1, Min[k, 12]}] + X[k] * (pk[p, 1]);
S[0] = fgp[p, X[0]];
```

Figura 6.10: Comandos no programa *Mathematica* que definem a f.m.p. do modelo do risco coletivo, S , quando $N \frown \text{Log}(0.2)$.

A representação gráfica da f.m.p. de S quando $N \frown \text{Log}(0.2)$, $\Pr(S = k)$, para $k = 0, 1, \dots, 15$, e os comandos do programa *Mathematica* que permitem a sua execução são mostrados na Figura 6.11.

Tal como no exemplo anterior, apresentamos as probabilidades, $\Pr(S = k)$, e as probabilidades acumuladas, $\Pr(S \leq k)$, do modelo do risco coletivo, S , quando $N \frown \text{Log}(0.2)$ e $k = 0, 1, \dots, 15$ e os comandos que as geraram (cf. Figura 6.12).

A análise das Figuras 6.11 e 6.12 permite-nos concluir, por exemplo, que o valor pago anualmente pela seguradora é inferior ou igual a 5000 dólares com uma probabilidade de 0.45, aproximadamente, e que, na grande maioria dos casos

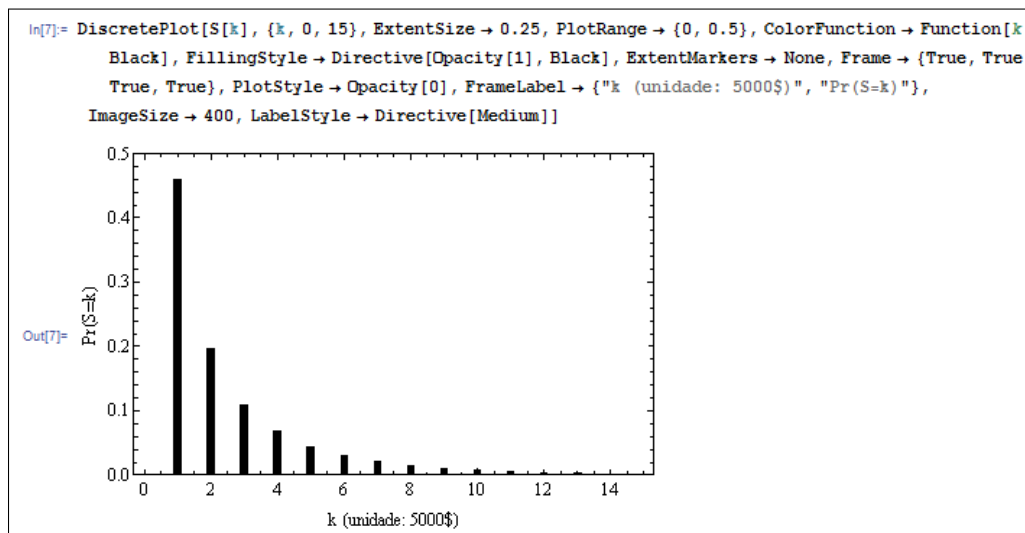


Figura 6.11: Representação da f.m.p. do modelo do risco coletivo, S , quando $N \sim \text{Log}(0.2)$ e comandos que estão na sua origem no programa *Mathematica*.

```

In[8]:= Prob = Table[N[S[k]], {k, 0, 15}]
Out[8]:= {0., 0.459566, 0.198212, 0.111089, 0.068853, 0.0456224, 0.0313353, 0.0220482, 0.0158008,
0.0115082, 0.00848742, 0.006323, 0.00489663, 0.00370161, 0.00282113, 0.00216202}

In[9]:= ProbAcum = Table[N[Sum[Prob[[k]], {k, 1, i + 1}]], {i, 0, 15}]
Out[9]:= {0., 0.459566, 0.657778, 0.768867, 0.83772, 0.883342, 0.914677, 0.936726,
0.952526, 0.964035, 0.972522, 0.978845, 0.983742, 0.987443, 0.990264, 0.992427}

```

Figura 6.12: Probabilidades, $\Pr(S = k)$, e probabilidades acumuladas, $\Pr(S \leq k)$, do modelo do risco coletivo, S , quando $N \sim \text{Log}(0.2)$ e $k = 0, 1, \dots, 15$.

(99%, aproximadamente), a seguradora paga um total de indenizações inferior ou igual a 70000 dólares.

No programa *R* criamos o vetor fx , chamamos a biblioteca *actuar* para o ambiente de trabalho do mesmo e definimos a distribuição do modelo do risco coletivo, S , através da função *aggregateDist*, a qual nomeamos de F_s (cf. Figura 6.13). As diferenças existentes na função *aggregateDist* comparativamente com o exemplo anterior é que agora em *model.freq* temos “*logarithmic*”; em vez de $\lambda = 10$, temos $\text{prob} = 0.2$; e uma vez que *model.freq* = “*logarithmic*”, é necessário acrescentar um novo parâmetro, p_0 , que é o valor arbitrário de $\Pr(N = 0)$ (neste caso, $p_0 = 0$, pois $\Pr(N = 0) = 0$, quando $N \sim \text{Log}(p)$). A atribuição de um valor positivo a p_0 resultaria numa distribuição logarítmica modificada em

zero (*cf.*, *e.g.*, (2.21)). Os restantes parâmetros mantêm-se inalterados, quando comparados com o exemplo anterior.

```
fx<-c(0,6262/6773, 385/6773, 87/6773, 21/6773, 11/6773, 4/6773, 1/6773,
0, 0, 0, 0, 2/6773)

Fs <- aggregateDist(method="recursive", model.freq = "logarithmic",
model.sev = fx, prob=0.2, p0=0, x.scale = 1)
```

Figura 6.13: Comandos no programa *R* que permitem a criação do modelo do risco coletivo, S , quando $N \sim \text{Log}(0.2)$.

Ao executar no programa *R* os comandos presentes na Figura 6.13, surge o erro apresentado na Figura 6.14, impossibilitando, assim, o cálculo do modelo do risco coletivo, S no programa em causa. Uma solução para ultrapassar este erro na função *aggregateDist* é atribuir ao valor $p0$ um valor muito próximo de 0, por exemplo, $p0 = 10^{-100}$ (*cf.* Figura 6.14).

```
Error in panjer(fx = model.sev, dist = dist, p0 = p0, x.scale = x.scale, :
  Pr[S = 0] is numerically equal to 0; impossible to start the recursion

Fs <- aggregateDist(method="recursive", model.freq = "logarithmic",
model.sev = fx, prob=0.2, p0=10^(-100), x.scale = 1)
```

Figura 6.14: Erro da função *aggregateDist* e apresentação da solução para esse mesmo erro.

Na Figura 6.15 estão representadas as probabilidades acumuladas do modelo do risco coletivo, S , e na Figura 6.16 apresentamos os comandos do programa *R* e a representação gráfica da função de distribuição de S resultante.

```
k<-c(0:15)
table(round(Fs(k),digits = 6))

0 0.459566 0.657778 0.768867 0.83772 0.883342 0.914677 0.936726
0.952526 0.964035 0.972522 0.978845 0.983742 0.987443 0.990264 0.992427
```

Figura 6.15: Valores de $\Pr(S \leq k)$, com $k = 0, 1, \dots, 15$, quando $N \sim \text{Log}(0.2)$.

Tal como no exemplo anterior, verificamos que os resultados obtidos, quer no programa *Mathematica*, quer no programa *R*, coincidem, quando a distribuição de N é $\text{Log}(0.2)$ e se considera como modelo para o valor das indemnizações o referido no Exemplo 6.1 (*cf.*, *e.g.*, Figuras 6.12 e 6.15).

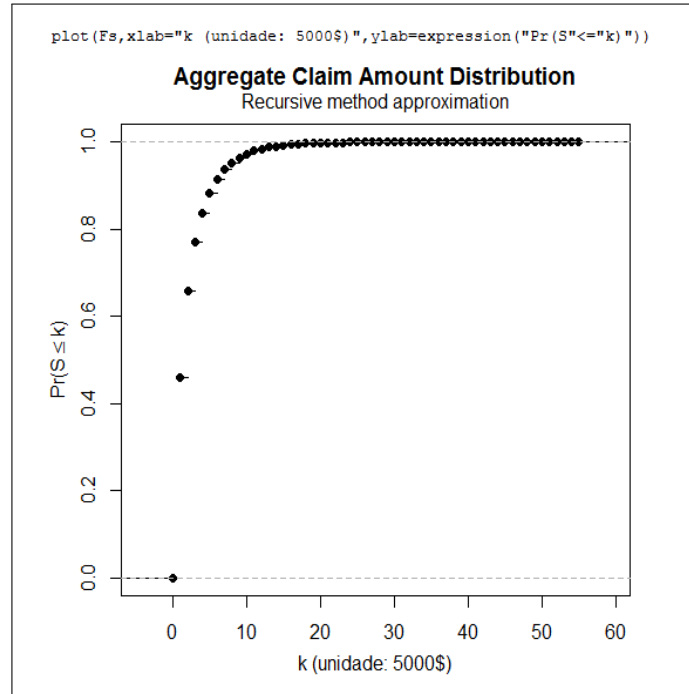


Figura 6.16: Representação da função de distribuição do modelo do risco coletivo, S , quando $N \sim \text{Log}(0.2)$ e comandos que estão na sua origem no programa *R*.

6.3 Exemplo 3

Neste último exemplo, utilizamos como modelo para a distribuição de N a distribuição *Binomial* $(10, 0.5)$, que é um membro da classe $(a, b, 0)$. No programa *Mathematica*, a f.m.p. da distribuição *Binomial* (m, p) é dada por $\text{PDF}[\text{BinomialDistribution}[m, p], k]$ (neste caso, $m = 10$ e $p = 0.5$), com $k = 0, 1, 2, \dots$, tendo sido inserida como uma função que depende de m , p e k (cf. Figura 6.17). Já a f.g.p. da distribuição *Binomial* foi implementada no programa *Mathematica* também como uma função dependente de m , p e z , $|z| < 1$, tendo em conta a expressão definida em (3.2) (cf. Figura 6.17).

```
In[1]:= pk := Function[{m, p, k}, PDF[BinomialDistribution[m, p], k]];
      fgp := Function[{m, p, z}, (1 - p + p * z) ^ m];
```

Figura 6.17: Comandos no programa *Mathematica* que definem a f.m.p. e a f.g.p. da v.a. $N \sim \text{Binomial}(m, p)$.

Tal como anunciado previamente, a modelação da v.a. X será realizada através da distribuição resultante da discretização da distribuição *Exponencial*(1). Para obter a distribuição da v.a. X , primeiro é necessário definir a função de distribuição cumulativa da distribuição *Exponencial* que no programa *Mathematica* é dada por $CDF[ExponentialDistribution[la],k]$ (neste caso, $la = 1$), com $k = 0, 1, 2, \dots$. Definimos então a função de distribuição cumulativa da *Exponencial* como uma função que depende de la e de k e que designamos por $pX0$ (cf. Figura 6.18). Para discretizar a distribuição *Exponencial* é utilizado o método do arredondamento *i.e.*, a expressão (5.40). Consequentemente, a v.a. X é definida no programa *Mathematica* como uma função que depende de la , h e j , com $j \in \mathbb{N}$, tendo em conta a expressão dada em (5.41) (cf. Figura 6.18).

```
In[3]:= pX0 := Function[{la, k}, CDF[ExponentialDistribution[la], k]];
X = Function[{la, h, j}, If[j == 0, pX0[la, h/2], pX0[la, j*h +
(h/2)] - pX0[la, j*h - (h/2)]]];
```

Figura 6.18: Comandos no programa *Mathematica* que geram a f.m.p. de X .

Em linha com os exemplos anteriores, após a determinação das distribuições de N e de X , determina-se a distribuição do modelo coletivo S . No programa *Mathematica*, a distribuição de S foi definida como uma função que depende de k , com $m = 10$, $p = 0.5$ e $h = la = 1$ (cf. (5.9)), tendo os valores de a e de b sido substituídos na função por $\frac{p}{p-1}$ e $\frac{p(m+1)}{1-p}$, respetivamente (cf. Figura 6.19 e Tabela 4.1).

```
In[5]:= m = 10; p = 0.5; h = 1; la = 1;
S[k_] := S[k] = (Sum[{(p/(p-1)) + ((p*(m+1))/(1-p))*i}/k] *
X[la, h, i] * S[k-i], {i, 1, k}]) / (1 - (p/(p-1)) * X[la, h, 0]);
S[0] = fgp[m, p, X[la, h, 0]];
```

Figura 6.19: Comandos no programa *Mathematica* que definem a f.m.p. do modelo do risco coletivo, S , quando $N \sim Binomial(10, 0.5)$.

A representação gráfica da f.m.p. de S quando $N \sim Binomial(10, 0.5)$, $\Pr(S = k)$, para $k = 0, 1, \dots, 17$, e os comandos do programa *Mathematica* que lhe deram origem são apresentados na Figura 6.20.

Apresentamos também os comandos do programa *Mathematica* que originaram as probabilidades, $\Pr(S = k)$, e as probabilidades acumuladas, $\Pr(S \leq k)$,

do modelo do risco coletivo, S , quando $N \sim \text{Binomial}(10, 0.5)$ e $k = 0, 1, \dots, 17$, e as respectivas probabilidades geradas (cf. Figura 6.21).

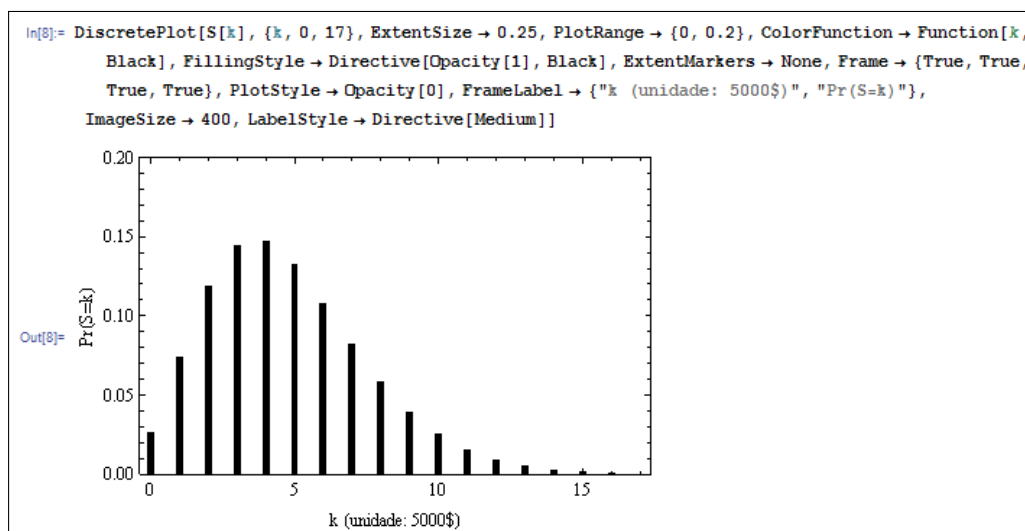


Figura 6.20: Representação da f.m.p. do modelo do risco coletivo, S , quando $N \sim \text{Binomial}(10, 0.5)$ e comandos que estão na sua origem no programa *Mathematica*.

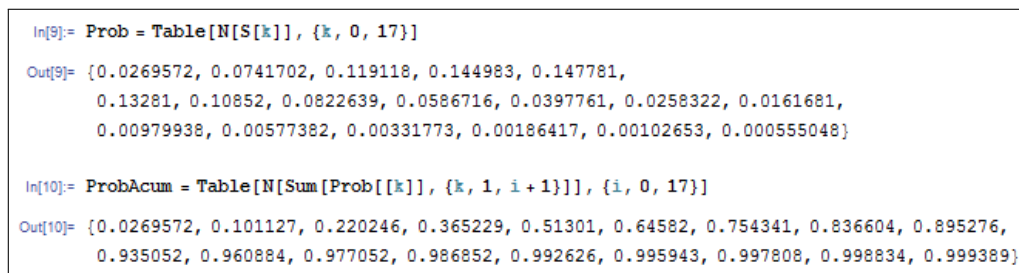


Figura 6.21: Probabilidades, $\Pr(S = k)$, e probabilidades acumuladas, $\Pr(S \leq k)$, do modelo do risco coletivo, S , quando $N \sim \text{Binomial}(10, 0.5)$ e $k = 0, 1, \dots, 17$.

Das Figuras 6.20 e 6.21, conclui-se, por exemplo, que a probabilidade de a seguradora pagar anualmente um valor entre 15000 e 20000 dólares é, aproximadamente, 0.15 e que, em mais de 95% dos casos, o valor total de indenizações pago pela seguradora é inferior ou igual a 50000 dólares.

No programa *R*, inicialmente é preciso chamar a biblioteca *actuar* para o ambiente de trabalho. A distribuição da v.a. X , que, recordando, é a v.a. resultante da discretização da distribuição *Exponencial* (1), é definida pela função

discretize que está contida na biblioteca *actuar*, à qual se deu o nome de *fx*. A função *discretize* impõe que definamos a função de distribuição cumulativa da distribuição *Exponencial*(1) (neste caso, $pexp(x, 1)$); os limites inferiores e superiores de k ($from=0$ e $to=17$, respetivamente); o valor de h ($step=1$) e o método de discretização, que é o método de arredondamento, estabelecido *a priori* ($method="rounding"$) (cf. Figura 6.22).

```
fx<-discretize(pexp(x,1), from=0, to=17, step=1, method="rounding")

Fs <- aggregateDist(method="recursive", model.freq = "binomial",
model.sev = fx, prob=0.5, size=10, x.scale = 1)
```

Figura 6.22: Comandos no programa *R* que permitem a criação do modelo do risco coletivo, S , quando $N \sim Binomial(10, 0.5)$.

Para a implementação da distribuição do modelo do risco coletivo, S , usamos a função *aggregateDist*, a qual designamos de F_s . Comparando com os exemplos anteriores, as novidades na função *aggregateDist* são o comando $model.freq="binomial"$ (uma vez que a v.a. N é uma *Binomial*(10, 0.5)) e as atribuições $prob=0.5$ (valor de p) e $size=10$ (valor de m) (cf. Figura 6.22).

Por fim, a Figura 6.23 mostra as probabilidades acumuladas de S , obtidas no programa *R* e a Figura 6.24 apresenta os comandos através dos quais se obtém a representação gráfica da f.m.p. de S e a respetiva representação gráfica.

Em linha com os exemplos anteriores, utilizando como modelo para o número de indemnizações a distribuição *Binomial*(10, 0.5) e como modelo para o valor das indemnizações a distribuição *Exponencial*(1) discretizada pelo método do arredondamento, verifica-se que os resultados obtidos nos dois programas (*Mathematica* e *R*) são iguais (cf., e.g., Figuras 6.21 e 6.23).

```
k<-c(0:17)
table(round(Fs(k), digits = 6))

0.026957 0.101127 0.220246 0.365229 0.51301 0.64582
0.754341 0.836604 0.895276 0.935052 0.960884 0.977052
0.986852 0.992626 0.995943 0.997808 0.998834 0.999389
```

Figura 6.23: Valores de $\Pr(S \leq k)$, com $k = 0, 1, \dots, 17$, quando $N \sim Binomial(10, 0.5)$.

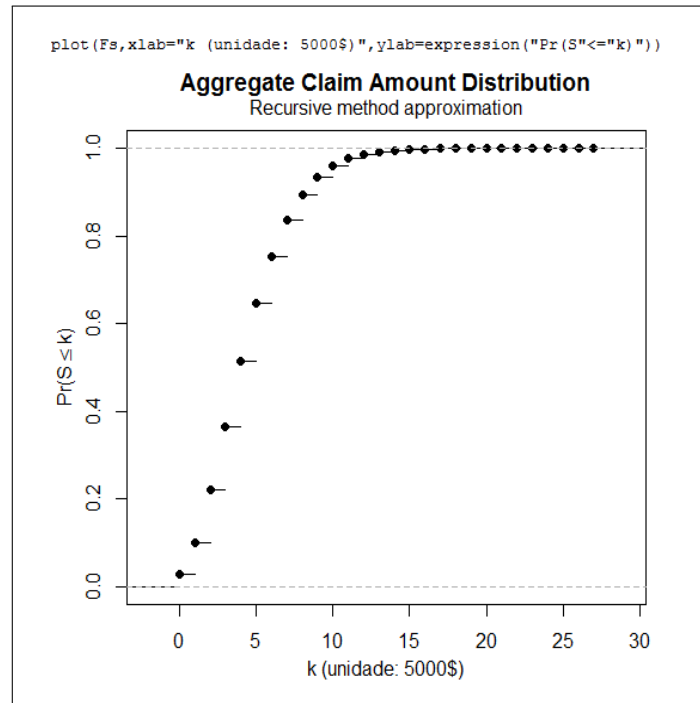


Figura 6.24: Representação da função de distribuição do modelo do risco coletivo, S , quando $N \sim Binomial(10, 0.5)$ e comandos que estão na sua origem no programa *R*.

Capítulo 7

Considerações finais

A elaboração desta dissertação teve como principal objetivo rever a temática da modelação do risco coletivo e, em especial, a recursão de Panjer e a sua utilização na construção do modelo do risco coletivo. Desde a sua introdução em 1981 que a recursão de Panjer tem motivado estudos e sofrido modificações no que concerne ao seu campo de ação. Têm surgido extensões à classe originalmente apresentada por Panjer em 1981 como a classe $(a, b, 1)$, a classe (a, b, m) , $m \in \mathbb{N}$, e as extensões de Schröter (*cf.* [49]) e de Sundt (*cf.* [51]), sendo que estas permitiram a introdução de novos membros (distribuições) à família de Panjer.

Na modelação do risco coletivo, S , foi adotado o modelo clássico de assumir que este resulta da soma de um número aleatório N de indemnizações, sendo o valor de cada indemnização dado por uma variável aleatória X_i ($i = 1, \dots, N$), variáveis estas que são idênticas e independentes entre si, sendo também independentes de N . O método recursivo foi adotado para a construção da distribuição de S , tendo sido escrutinado segundo os vários casos de X ser uma variável aleatória discreta ou absolutamente contínua e em que N é uma distribuição da classe $(a, b, 0)$, $(a, b, 1)$ ou, mais geralmente, (a, b, m) , $m \in \mathbb{N}$. Foram também apresentadas duas formas de discretizar uma distribuição caso a distribuição de X não seja uma distribuição de contagem.

A soma de variáveis aleatórias i.i.d. não é um objeto de fácil estudo, apesar de nas áreas da probabilidade e da estatística existirem grandes resultados sobre o comportamento limite deste tipo de somas, como o teorema limite central e a lei dos grandes números. A soma aleatória de variáveis aleatórias i.i.d. é-o ainda menos, e Panjer conseguiu de facto ultrapassar grande parte da dificuldade, de uma forma engenhosa. Naturalmente, teve de assumir alguns custos, como o

facto de ter de limitar a distribuição de N a uma família de distribuições e de a distribuição do risco coletivo, S , ser definida recursivamente. Felizmente, esses custos têm sido gradualmente minimizados com a construção de extensões da família de Panjer, que conduzem ainda a uma expressão recursiva de S , e com o desenvolvimento dos métodos numéricos.

Finalmente, no sexto capítulo foram colocados em prática os pressupostos enunciados e provados nos capítulos antecedentes. Após algumas pesquisas, averiguou-se que a biblioteca *actuar* do programa R permite colocar em prática a grande maioria dos resultados desta dissertação. O programa *Mathematica* foi também utilizado, tendo-se construído neste as funções necessárias. Ao comparar os resultados obtidos pelo programa *Mathematica* com os resultados facultados pela biblioteca *actuar* do programa R , verificámos, como seria de esperar, a coincidência entre a grande maioria dos resultados obtidos quer num programa quer noutra. A biblioteca *actuar* em relação ao programa *Mathematica* tem a vantagem de ter já o modelo recursivo pré-definido, tendo a desvantagem de ser muito limitado no que se refere às distribuições passíveis de ser atribuídas ao número de indemnizações, *i.e.*, à variável aleatória N .

Com a realização desta dissertação esperamos, além de informar e aprofundar conhecimentos sobre o modelo do risco coletivo e da recursão de Panjer, ter conseguido construir uma obra que sirva de farol e incentivo para futuros trabalhos nestas áreas.

Bibliografia

- [1] Albrecher, H. and Thonhauser, S. (2009). Optimality Results for Dividend Problems in Insurance. *RACSAM - Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales. Serie A. Matematicas*, **103**, 295-320.
- [2] Alves, M. I. F. (1997). *Introdução à Teoria do Risco. Working Paper n° 62*, Coleção RUN/NIMS. Acedido em 28 de junho de 2016, em: <https://run.unl.pt/handle/10362/7660>.
- [3] Autoridade de Supervisão de Seguros e Fundos de Pensões. Glosário de Seguros. Acedido em 23 de fevereiro de 2016, em: <http://www.asf.com.pt/ISP/gloss%C3%A1rio>.
- [4] Blom, G. (1987). Harald Cramér 1893-1985. *The Annals of Statistics*, **15**, 1335-1350.
- [5] Brilhante, M. F., Gomes, M. I. and Pestana, D. D. (2013). Panjer Randomized Fibonacci Model and Dynamic Instabilities in Population Growth Models. *Chaotic Modeling and Simulation (CMSIM)*, **4**, 495-509.
- [6] Burrill, C. W. (1972). *Measure, Integration, and Probability*. 1st ed., McGraw-Hill Inc., New York.
- [7] Cramér, H. (1926). Litteraturanmälningar. *Scandinavian Actuarial Journal*, **1926**, 223-251.
- [8] Cramér, H. (1930). On the Mathematical Theory of Risk. *Försäkringsaktiebolaget Skandia 1855-1930*. Part 2, 7-84, Stockholm.
- [9] Cramér, H. (1954). On Some Questions Connected with Mathematical Risk. *University of California Publications in Statistics*, **2**, 99-123, University of California Press.
- [10] Cramér, H. (1955). Collective Risk Theory. *The Jubilee Volume of Skandia Insurance Company*, 1-92, Stockholm.

-
- [11] Cruz, M. G., Peters, G. W. and Shevchenko, P. V. (2015). *Fundamental Aspects of Operational Risk and Insurance Analytics: A Handbook of Operational Risk*. 1st ed., John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey.
- [12] Dominiak, A. W. and Trzesiok, M. (2014). insuranceData: A Collection of Insurance Datasets Useful in Risk Classification in Non-life Insurance. Acedido em 23 de maio de 2016, em: <https://cran.r-project.org/web/packages/insuranceData/index.html>.
- [13] Dutang, C., Goulet, V. and Pigeon, M. (2008). actuar: An R Package for Actuarial Science. *Journal of Statistical Software*, **25**, 1-37.
- [14] Embrechts, P. and Frei, M. (2009). Panjer Recursion Versus FFT for Compound Distributions. *Mathematical Methods of Operations Research*, **69**, 497-508.
- [15] Engen, S. (1974). On Species Frequency Models. *Biometrika*, **61**, 263-270.
- [16] Fackler, M. (2009). *Panjer Class United – One Formula for the Poisson, Binomial, and Negative Binomial Distribution*. ASTIN 2009, 39th International ASTIN Colloquium, Accepted paper, Helsínquia, Finlândia. Acedido em 28 de junho de 2016, em: https://www.actuaries.org/ASTIN/Colloquia/Helsinki/Papers_EN.cfm.
- [17] Feller, W. (1968). *An Introduction to Probability Theory and Its Applications* (Vol. 1). 3rd ed., John Wiley & Sons, Inc., New York.
- [18] Feller, W. (1971). *An Introduction to Probability Theory and Its Applications* (Vol. 2). 2nd ed., John Wiley & Sons, Inc., New York.
- [19] Frees, W. E. (2009). *Regression Modeling with Actuarial and Financial Applications*. 1st ed., Cambridge University Press, New York.
- [20] Gerald, C. F. and Wheatley, P. O. (1994). *Applied Numerical Analysis*. 5th ed., Addison-Wesley Publishing Company, Inc..
- [21] Gerhold, S., Schmock, U. and Warnung, R. (2010). A Generalization of Panjer's Recursion and Numerically Stable Risk Aggregation. *Finance and Stochastics*, **14**, 81-128.
- [22] Gómez-Déniz, E., Hernández-Bastida, A. and Vázquez-Polo, F. J. (2002). Bounds for Ratios of Posterior Expectations: Applications in the Collective Risk Model. *Scandinavian Actuarial Journal*, **1**, 37-44.
- [23] Gómez-Déniz, E. and Calderín-Ojeda, E. (2013). The Compound DGL/Erlang Distribution in the Collective Risk Model. *Revista de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa*, **16**, 121-142.

- [24] Gradshteyn, I. S. and Ryzhik, I. M. (2014). *Table of Integrals, Series, and Products* (D. Zwillinger, editor). 8th ed., Elsevier Inc. (Obra original em russo publicada em 1963).
- [25] Guegan, D. and Hassani, B. (2009). A Modified Panjer Algorithm for Operational Risk Capital Calculations. *Journal of Operational Risk*, **4**, 53-72.
- [26] Hernández-Bastida, A. and Fernández-Sánchez, M. P. (2012). A Sarmanov Family with Beta and Gamma Marginal Distributions: an Application to the Bayes Premium in a Collective Risk Model. *Statistical Methods & Applications*, **21**, 391-409.
- [27] Hernández-Bastida, A., Fernández-Sánchez, M. P. and Gómez-Déniz, E. (2011). Collective Risk Model: Poisson–Lindley and Exponential Distributions for Bayes Premium and Operational Risk. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **81**, 759-778.
- [28] Hernández-Bastida, A., Fernández-Sánchez, M. P. and Gómez-Déniz, E. (2011). A Desirable Aspect in the Variance Premium in a Collective Risk Model. *Estudios de Economía Aplicada*, **29**, 1-18.
- [29] Hernández-Bastida, A., Fernández-Sánchez, M. P., Martel, M. and Vázquez-Polo, F. J. (2013). An Application of the Morgenstern Family with Standard Two-sided Power and Gamma Marginal Distributions to the Bayes Premium in the Collective Risk Model. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, **29**, 468-478.
- [30] Hernández-Bastida, A., Gómez-Déniz, E. and Pérez-Sánchez, J. M. (2009). Bayesian Robustness of the Compound Poisson Distribution under Bidi-dimensional Prior: an Application to the Collective Risk Model. *Journal of Applied Statistics*, **36**, 853-869.
- [31] Hess, K. T., Liewald, A. and Schmidt, K. D. (2002). An Extension of Panjer's Recursion. *ASTIN Bulletin*, **32**, 283-297.
- [32] Hesselager, O. (1994). A Recursive Procedure for Calculation of Some Compound Distributions. *ASTIN Bulletin*, **24**, 19-32.
- [33] Hipp, C. (2006). Speedy Convolution Algorithms and Panjer Recursions for Phase-type Distributions. *Insurance: Mathematics and Economics*, **38**, 176–188.
- [34] Johnson, N. L., Kemp, A. W. and Kotz, S. (2005). *Univariate Discrete Distributions*. 3rd ed., John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey.

- [35] Klugman, S. A., Panjer, H. H. and Willmot, G. E. (2012). *Loss models: From Data to Decisions*. 4th ed., John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey.
- [36] Lamport, L. (1994). *LaTeX: A Document Preparation System*. 2nd ed., Addison-Wesley Publishing Company, Inc..
- [37] Lundberg, F. (1903). Approximerad Framställning av Sannolikhetsfunktionen, Återförsäkring af kollektivrisker, Akademisk afhandling, Uppsala.
- [38] Martel-Escobar, M., Hernández-Bastida, A. and Vázquez-Polo, F. J. (2012). On the Independence Between Risk Profiles in the Compound Collective Risk Actuarial Model. *Mathematics and Computers in Simulation*, **82**, 1419–1431.
- [39] Martin-Löf, A. (1995). Harald Cramér and Insurance Mathematics. *Applied Stochastic Models Data Analysis*, **11**, 271–276.
- [40] Mendonça, S. M. F., Pestana, D. D. and Gomes, M. I. (2015). Randomly Stopped k th Order Statistics. In C. P. Kitsos, T. A. Oliveira, A. Rigas & S. Gulati (Eds), *Theory and Practice of Risk Assessment* (pp. 249-266). Springer.
- [41] Panjer, H. H. (1981). Recursive Evaluation of a Family of Compound Distributions. *ASTIN Bulletin*, **12**, 22-26.
- [42] Panjer, H. H. (2006). *Operational Risk: Modeling Analytics*. 1st ed., John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey.
- [43] Panjer, H. H. and Lutek, B. W. (1983). Practical Aspects of Stop-Loss Calculations. *Insurance: Mathematics and Economics*, **2**, 159- 177.
- [44] Panjer, H. H. and Willmot, G. E. (1982). Recursions for Compound Distributions. *ASTIN Bulletin*, **13**, 1-11.
- [45] Panjer, H. H. and Willmot, G. E. (1992). *Insurance Risk Models*. 1st ed., Society of Actuaries, Schaumburg, Illinois.
- [46] Pestana, D. D. e Velosa, S. F. (2010). *Introdução à Probabilidade e à Estatística*. 4ª edição, Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa.
- [47] Pestana, D. D. e Velosa, S. F. (2004). Extensions of Katz-Panjer Families of Discrete Distributions. *REVSTAT - Statistical Journal*, **2**, 145-162.
- [48] Rolski, T., Schmidli, H., Schmidt, V. and Teugels, J. (1999). *Stochastic Processes for Insurance and Finance*. 1st ed., John Wiley & Sons, Inc., New York.

-
- [49] Schröter, K. J. (1990). On a Family of Counting Distributions and Recursions for Related Compound Distributions. *Scandinavian Actuarial Journal*, **1990**, 161-175.
- [50] Shevchenko, P. V. (2010). Calculation of Aggregate Loss Distributions. *Journal of Operational Risk*, **5**, 3-40.
- [51] Sundt, B. (1992). On Some Extensions of Panjer's Class of Counting Distributions. *ASTIN Bulletin*, **22**, 61-80.
- [52] Sundt, B. (2002). Recursive Evaluation of Aggregate Claims Distributions. *Insurance: Mathematics and Economics*, **30**, 297-322.
- [53] Sundt, B. and Jewell, W. S. (1981). Further Results on Recursive Evaluation of Compound Distributions. *ASTIN Bulletin*, **12**, 27-39.
- [54] Willmot, G. E. (1988). Sundt and Jewell's Family of Discrete Distributions. *ASTIN Bulletin*, **18**, 17-29.
- [55] Xie, S., Yang, J. and Zhou, S. (2012). Numerical Algorithms for Panjer Recursion by Applying Bernstein Approximation. *Frontiers of Mathematics in China*, **8**, 1197-1226.

Índice Remissivo

- Bernoulli, provas de, [17](#), [22](#), [23](#)
- classes de distribuições
 - classe $(a, b, 1)$, [31](#)
 - classe (a, b, m) , [37](#)
 - classe de Panjer ou $(a, b, 0)$, [27](#)
- discretização
 - método de arredondamento, [71](#)
 - método de emparelhamento local de momentos, [71](#)
- distribuições discretas
 - binomial, [17](#)
 - binomial negativa, [22](#)
 - BNE, [38](#)
 - BNTG, [32](#)
 - geométrica, [25](#)
 - Log, [34](#)
 - LogE, [41](#)
 - Poisson, [20](#)
- família de Panjer, [27](#)
- função densidade de probabilidade, [5](#)
- função gama, [22](#)
- função geradora de momentos, [8](#)
- função geradora de probabilidades, [6](#)
 - binomial, [19](#)
 - binomial negativa, [24](#)
 - BNE, [39](#)
 - BNTG, [33](#)
 - geométrica, [25](#)
 - Log, [35](#)
 - LogE, [43](#)
 - modificada, [15](#)
 - Poisson, [20](#)
- função massa de probabilidade
 - binomial, [18](#)
 - binomial negativa, [22](#)
 - BNE, [38](#)
 - BNTG, [32](#)
 - geométrica, [25](#)
 - Log, [35](#)
 - LogE, [41](#)
 - modificada, [15](#)
 - Poisson, [20](#)
 - truncada, [13](#)
 - truncada em zero, [14](#)
- mistura de distribuições, [12](#)
- modelo do risco coletivo, [49](#)
- risco, [49](#)
- suporte de uma variável aleatória, [5](#)
- teorema da probabilidade total, [50](#)
- teorema da unicidade, [7](#)
- transformada de Laplace, [8](#)
- truncatura de uma distribuição discreta, [13](#)
- valor esperado, [6](#)
 - binomial, [19](#)
 - binomial negativa, [24](#)
 - BNE, [40](#)
 - BNTG, [34](#)
 - geométrica, [25](#)
 - Log, [36](#)
 - LogE, [43](#)

- Poisson, [20](#)
- variável aleatória
 - absolutamente contínua, [5](#)
 - degenerada, [12](#), [51](#)
 - discreta, [5](#)
- variância, [7](#)
 - binomial, [19](#)
 - binomial negativa, [24](#)
 - BNE, [40](#)
 - BNTG, [34](#)
 - geométrica, [25](#)
 - Log, [36](#)
 - LogE, [43](#)
 - Poisson, [21](#)